

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ



FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE DE DOCTORAT
en Informatique

Modélisation de surfaces épaisses et fermées : application au cas des organes pelviens

présentée par :

Thierry BAY

en vue d'obtenir le grade de docteur de l'Université Aix-Marseille



soutenue le 26 novembre 2012 devant le jury composé de :

Stefanie HAHMANN	Professeur, Rapporteur
Marc NEVEU	Professeur, Rapporteur
Gudrun ALBRECHT	Professeur, Examineur
Laurent LUCAS	Professeur, Examineur
Marc DANIEL	Professeur, Directeur de thèse
Romain RAFFIN	Maître de Conférences, Co-Directeur de thèse
Marc-Emmanuel BELLEMARE	Maître de Conférences, Co-Directeur de thèse

N° attribué par la bibliothèque

À ma femme

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser toute ma gratitude à tous ceux qui ont rendu ce travail possible et qui m'ont aidé pendant ces trois ans. J'en profite pour remercier tout particulièrement :

- Mon directeur de thèse Marc Daniel qui m'a soutenu et guidé pendant ces trois années.
- Mes co-directeurs de thèse Romain Raffin, qui a toujours été présent dans les moments où j'avais besoin de lui, ainsi que Marc-Emmanuel Bellemare qui m'a apporté ses conseils au cours de nos réunions de projet.
- Les membres extérieurs de mon jury, Marc Neveu et Stefanie Hahmann pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, Laurent Lucas et Gudrun Albrecht pour avoir accepté de juger mon travail.
- Le personnel de l'IUT pour leur accueil et leur bonne humeur, qui ont su égayer les midis au coin de la table.
- Les membres du Club Cuisine, grâce à qui j'ai récupéré des recettes bien appétissantes et qui ont su me donner l'énergie de tenir jusqu'au dîner à chaque fois.
- Mon camarade de thèse Axel, avec qui j'ai partagé le bureau C19 pendant ces trois années, qui savait remonter le moral des troupes dans les moments de doute en parlant de son Kite-surf et de son addiction aux produits Apple.
- Et bien sûr ma femme Hélène, qui m'a suivi dans le sud et a supporté mes sautes d'humeur dans des moments qui se sont parfois révélés peu joviaux.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	3
Table des figures	7
Liste des tableaux	11
Introduction générale	12
1. Contexte médical et cadre scientifique de l'étude	14
1.1 Introduction	15
1.2 Application dans un contexte industriel	15
1.3 Application dans un contexte médical	16
1.3.1 Génération des simulateurs	16
1.3.2 Modélisations géométrico-physiques des simulateurs actuels	17
1.3.3 Troubles de la statique pelvienne et projet MoDyPe	20
1.4 Synthèse	25
2. Stratégies d'ajustement surfacique	27
2.1 Introduction	28
2.2 Présentation du problème général	28
2.3 Différentes classifications de modèles	31
2.3.1 Classification par représentation	31
2.3.2 Classification par modèles d'ajustement	32
2.4 Modèles d'ajustement de paramètres	33
2.4.1 Reconstruction par fonction de distance signée	33
2.4.2 Reconstruction par fonction de distance non signée	34
2.4.3 Reconstruction par opérateur de projection <i>Moving Least Squares</i> . .	35
2.4.4 Reconstruction par fonctions de base radiales	36
2.4.5 Reconstruction par champ d'indicatrice	37
2.5 Modèles déformables	38
2.5.1 Reconstruction par level-sets	38
2.5.2 Reconstruction par superellipsoïdes	40
2.5.3 Reconstruction par propagation de front à connectivité constante . .	41
2.5.4 Reconstruction par fonctions polynomiales par morceaux	43
2.6 Synthèse	52

3. Construction d'une nouvelle méthode d'ajustement	53
3.1 Introduction	54
3.2 Construction d'une surface paramétrique d'approximation	55
3.2.1 Formulation du problème	55
3.2.2 Surfaces périodiques de genre 0	57
3.2.3 Conclusions	65
3.3 Initialisation itérative par un axe médian non-linéaire	65
3.3.1 Formulation du problème	66
3.3.2 Calcul de l'axe non-linéaire	67
3.3.3 Positionnement du réseau de contrôle de la surface initiale	75
3.3.4 Implémentation et résultats	80
3.3.5 Conclusions	85
3.4 Ajustement de la nouvelle surface aux données	86
3.4.1 Formulation du problème	86
3.4.2 Fonctionnelle d'énergie bidirectionnelle	86
3.4.3 Régularisation de l'énergie	88
3.4.4 Réduction de la fonctionnelle	92
3.4.5 Étude de la convergence de l'ajustement de la surface	94
3.4.6 Implémentation et résultats	94
3.4.7 Conclusions	104
3.5 Synthèse	105
4. Techniques actuelles d'offset de surface	106
4.1 Introduction	107
4.2 Présentation du problème général	107
4.2.1 Nature de la <i>surface-offset</i> dans notre étude	108
4.2.2 Géométrie différentielle et singularités des <i>offsets</i>	109
4.3 Classification des approches	110
4.4 Méthodes actuelles de constructions d'offsets	111
4.4.1 Les approches volumétriques	111
4.4.2 Approches à base de surfaces	114
4.5 Synthèse	119
5. Nouvelles constructions de surfaces-offsets	120
5.1 Introduction et explication des contraintes	121
5.2 Approche par offset paramétrique	123
5.2.1 Formulation générale de la méthode	123
5.2.2 Création du maillage d'hexaèdres	123
5.2.3 Implémentation et résultats	125
5.2.4 Conclusions de l'approche paramétrique	129

5.3	Approche de type masses-ressorts	129
5.3.1	Différentiation des modèles existants	130
5.3.2	Formulation générale de la méthode	130
5.3.3	Paramétrage du système	133
5.3.4	Correction des auto-intersections locales	135
5.3.5	Implémentation et résultats	136
5.3.6	Conclusions sur la construction par le système masses-ressorts	140
5.4	Approche par croissance d'axe médian non-linéaire	141
5.4.1	Formulation générale de la méthode	141
5.4.2	Implémentation et résultats	143
5.4.3	Conclusions de l'approche basée sur l'axe médian	149
5.5	Synthèse	150
6.	Expérimentations	151
6.1	Introduction	152
6.2	Premier exemple : l'omotondo	152
6.2.1	Résultats de la procédure d'ajustement	152
6.2.2	Résultats de la procédure d'offset	153
6.3	Deuxième exemple : le glaive	155
6.3.1	Résultats de la procédure d'ajustement	155
6.3.2	Résultats de la procédure d'offset	155
6.4	Troisième exemple : le buste	157
6.4.1	Résultats de la procédure d'ajustement	157
6.4.2	Résultats de la procédure d'offset	158
6.5	Synthèse	159
7.	Conclusion générale	160
	Synthèse générale	160
	Perspectives	162
Annexes		167
A	Détails de la physiopathologie pelvienne de la femme	167
A.1	Les parois osseuses de la cavité pelvienne	167
A.2	Les sustentateurs	167
A.3	Les organes pelviens	169
B	Détails de notions mathématiques	171
B.1	Continuités paramétrique et géométrique	171
B.2	Calcul pratique des courbures principales d'une surface paramétrique	172
B.3	Maillage et propriétés	173
C	Algorithmes	175
C.1	Amincissement homotopique	175

Table des matières

C.2	Somme de Minkowski	175
D	Preuves de théorèmes	176
D.1	Preuve liée au théorème 3.3.1	176
D.2	Preuve liée au théorème 3.4.1	177
Glossaire médical		180
Bibliographie		183

TABLE DES FIGURES

Chapitre 1

1.1	Les trois niveaux de complexité de modélisation	16
1.2	Modèles géométrico-physiques de simulateurs	19
1.3	Étapes du processus de rétro-action	22
1.4	La région pelvienne du corps féminin	24

Chapitre 2

2.1	Classement des maillages 3D d'après leurs caractéristiques	30
2.2	Classification de représentations géométriques de surfaces 3D	33
2.3	Illustration de la reconstruction de Poisson 2D	38
2.4	Famille de superellipsoïdes	41
2.5	Exemples de 2-maillages simplexes de genre différent	43
2.6	Exemple d'une B-spline ouverte avec son réseau de contrôle	44
2.7	Problème d'ajustement pour une surface B-spline ouverte	47
2.8	Problème d'ajustement pour une surface B-spline fermée	48
2.9	Projection orthogonale sur une surface B-spline ouverte	50

Chapitre 3

3.1	Étapes de la modélisation géométrique	54
3.2	Raccord C^2 entre deux courbes B-splines	56
3.3	Construction de deux surfaces B-splines	57
3.4	Séquence nodale η périodique dans l'intervalle $[0, 1]$	58
3.5	Construction de trois courbes B-splines	58
3.6	Fermeture dans les directions paramétriques	59
3.7	Partie d'un tore avec ses deux cercles de construction	60
3.8	Contraction du réseau de contrôle	60
3.9	Exemple de fermeture d'un réseau dans la direction u	61
3.10	Exemple d'une construction de $\mathcal{I}'$	62
3.11	Exemple de jonction d'isocourbes pour une continuité C^1	63
3.12	Exemple de jonction d'icobourbes pour une continuité C^2 avec $l = 4$	63
3.13	Séquence nodale ζ dans l'intervalle $[0, 1]$	64
3.14	Calcul du premier descripteur : l'axe curviligne	66

TABLE DES FIGURES

3.15	Positionnement du second descripteur : le polyèdre de contrôle	67
3.16	Exemple de recherche de l'axe $[A_1A_2]$ dans un cas 2D	69
3.17	Projections différentes de données sur une courbe	70
3.18	Recherche de distances minimales entre les ensembles D et E	70
3.19	Répartition uniforme des pôles sur la courbe C initiale	71
3.20	Déplacement des pôles internes	72
3.21	Détermination des points A_1 et A_2	74
3.22	Deux calculs consécutifs de l'axe non-linéaire appliqués à un utérus	74
3.23	Étape 1 : création du polyèdre de contrôle initial de S	76
3.24	Étape 2 : positionnement et orientation des plans de contrôle	77
3.25	Étape 3 : modification de l'orientation aux extrémités	77
3.26	Étape 4 : correction des correspondances entre deux isocourbes successives .	78
3.27	Calcul d'une isocourbe avec adaptation du rayon	79
3.28	Algorithme global de la procédure d'initialisation	81
3.29	Influence de la densité des données avec la première sous-fonctionnelle . . .	82
3.30	Ajustement de la courbe avec la seconde sous-fonctionnelle	82
3.31	Action combinée des deux sous-fonctionnelles	82
3.32	Initialisation pour la reconstruction d'une vessie avec l'ACP	83
3.33	Initialisation pour la reconstruction d'une vessie avec l'axe non-linéaire . . .	83
3.34	Initialisation pour la reconstruction d'un utérus	84
3.35	Exemple de connexions entre la discrétisation d'une surface et des données .	87
3.36	Algorithme de la procédure de régularisation	92
3.37	Algorithme global de la procédure d'ajustement de la surface	95
3.38	Ajustement avec la sous-fonctionnelle s'exerçant de D vers E	96
3.39	Ajustement avec la sous-fonctionnelle s'exerçant de E vers D	97
3.40	Ajustements avec la fonctionnelle totale	97
3.41	Nuages de points utilisés	98
3.42	Reconstruction d'un utérus sur 10 itérations, initialisée par une ACP	99
3.43	Reconstruction d'un utérus sur 10 itérations, avec l'axe non-linéaire	99
3.44	Reconstructions différentes du rectum selon les fonctionnelles	101
3.45	Surfaces finales et réseaux de contrôle	102
3.46	Le couple utérus/vagin et le lissage de surface.	102
3.47	Évolution des erreurs de l'ajustement des surfaces au cours du temps	103
4.1	Auto-intersections illustrées pour une courbe	109
4.2	Processus global pour un <i>offset</i> interne et externe (de gauche à droite) : modèle géométrique M ; plongement dans une grille uniforme et étiquetage des cellules dans une bande étroite ; calcul des intersections entre la <i>surface-</i> <i>offset</i> et les arêtes de la grille ; extraction du <i>maillage-offset</i>	113

4.3	Architecture multiniveaux par subdivisions de P (de gauche à droite) : niveaux de hiérarchie de l'ensemble original P et P_δ ; reconstructions de S et S_δ en servant des résultats du niveau précédent ; sections des fonctions implicites, représentant en trait noir les contours des deux surfaces	115
4.4	Exemple de forme avec des auto-intersections locales, et calcul des zéros dans l'espace paramétrique de la <i>surface-offset</i>	118
4.5	Exemple de courbe iso-paramétrique C d'une surface : chaque ligne relie deux points antipodaux de la courbe	118
5.1	Régularisation de la forme des quadrangles dans le cas des courbes	121
5.2	Adaptation aux extrémités dans la construction de la couche interne	122
5.3	Méthodes de constructions d' <i>offsets</i> de ce chapitre	122
5.4	Exemple de construction d'un maillage d'hexaèdres, avec $M_1 = 8$	124
5.5	Algorithme global de la procédure d' <i>offset</i> paramétrique	125
5.6	<i>Offset-interne</i> d'une sphère de rayon 100 unités	126
5.7	Erreurs maximales et quadratiques moyennes par couche	126
5.8	Erreurs maximales et moyennes par couche pour l' <i>offset-interne</i> d'un superellipsoïde « carambole »	127
5.9	Repliements de la <i>surface-offset</i> dans les zones de courbure plus élevée.	127
5.10	<i>Offset-interne</i> d'une paroi vésicale d'épaisseur 3.5 mm	128
5.11	<i>Offset-interne</i> d'une paroi rectale d'épaisseur 5.5 mm	128
5.12	Partie de la configuration du système	131
5.13	Treillis du système en chaque particule $E_{q,r}^{int}$	132
5.14	Relation entre quadrangles croisés et angles orientés	135
5.15	Opérations pendant la phase de correction	136
5.16	Algorithme global de la procédure d' <i>offset</i> par l'approche masses-ressorts	137
5.17	Création de l' <i>offset-interne</i> d'une carambole par deux approches	138
5.18	Création de l' <i>offset-interne</i> d'une toupie par deux approches	138
5.19	Création d'une paroi rectale avec 5 couches par l'approche paramétrique.	139
5.20	Création d'une paroi rectale avec 5 couches par l'approche masses-ressorts	139
5.21	Schématisation 2D de l'approche par l'axe médian	141
5.22	De gauche à droite : séquence ordonnée, et cas non-ordonnée avec correction	142
5.23	Placement du maillage interne et repositionnement des extrémités	143
5.24	Algorithme global de la procédure d' <i>offset</i> basée sur l'axe non-linéaire	144
5.25	Constructions de l' <i>offset-interne</i> de la vessie	145
5.26	Constructions de l' <i>offset-interne</i> du rectum	146
5.27	Surface ajustée du rectum (génératrice) : mise en évidence (en noir) de la forme creusée à une extrémité, éloignée de la réalité anatomique suite aux erreurs de saisie	146
5.28	Évolution de l'épaisseur de vessie par rapport au temps de simulation	147
5.29	Comparaison de proximités entre le maillage interne et externe	148

TABLE DES FIGURES

5.30	Exemples de différentes valeurs de d^*	148
5.31	Construction de la paroi interne de l'ensemble utérus/vagin	149
6.1	Données de l'omotondo et résultats de l'ajustement bidirectionnel	153
6.2	<i>Offsets-internes</i> de l'omotondo	154
6.3	Données du glaive et résultats de l'ajustement bidirectionnel	155
6.4	<i>Offsets-internes</i> de l'épée	156
6.5	Données du buste et résultats de l'ajustement bidirectionnel	157
6.6	<i>Offsets-internes</i> du buste	158
7.1	Schématisation d'un foie présentant une tumeur à retirer	163
7.2	Extension de l'initialisation par l'axe médian pour positionner une surface paramétrique initiale de forme plus complexe	164
7.3	Fusion de deux formes	164
7.4	Description multirésolution, allant des basses-fréquences aux hautes-fréquences	165
7.5	Vue antérieure du bassin (cf. [Drake et al., 2004])	168
7.6	Muscles du plancher pelvien (cf. [Drake et al., 2004])	168
7.7	Organes pelviens dans la loge osseuse (basé sur [Drake et al., 2004])	168
7.8	Continuités C^1 et G^1	171
7.9	Plans perpendiculaires à $\mathcal{P}_T$ pour chaque courbure principale	172
7.10	Conformité d'un maillage	173
7.11	Structure d'un maillage	173
7.12	Nœuds d'un maillage structuré et leur valence associée	174

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Dualité des 1-,2-maillages simplexes	42
3.1	Comparatif entre l'ACP et l'axe médian non-linéaire pour la vessie	84
3.2	Comparatif entre l'ACP et l'axe médian non-linéaire pour la vessie	85
3.3	Résultats numériques de l'ajustement des surfaces pelviennes	100
3.4	Étape de projection orthogonale après la procédure d'ajustement	101
5.1	Épaisseurs des organes et proportion par rapport aux autres dimensions . .	127
5.2	Valeurs initiales des paramètres	134
5.3	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 15 mm d'une carambole .	137
5.4	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 35 mm d'une toupie . . .	138
5.5	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 5.5 mm d'un rectum . . .	139
5.6	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 35 mm d'une toupie . . .	144
5.7	Statistiques (en mm) de la création de l' <i>offset</i> de la vessie	145
5.8	Statistiques (en mm) de la création de l' <i>offset</i> du rectum	146
5.9	Statistiques (en mm) de la création de l' <i>offset</i> de l'utérus/vagin	148
6.1	Résultats de l'ajustement de la surface (30 itérations)	152
6.2	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 15.4 mm de l'omotondo .	153
6.3	Résultats de l'ajustement de la surface (30 itérations)	155
6.4	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 0.3 mm de l'épée	156
6.5	Résultat de l'ajustement de la surface (30 itérations)	157
6.6	Statistiques (en mm) de la création d'un <i>offset</i> de 4.3 mm du buste	158
7.1	Caractéristiques anatomiques de la vessie	169
7.2	Caractéristiques anatomiques de l'utérus (corps et col)	169
7.3	Caractéristiques anatomiques du vagin	169
7.4	Caractéristiques anatomiques du rectum (segments pelvien et périanal) . . .	170

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'étude présentée dans ce mémoire de thèse propose d'apporter un soutien à la décision des techniques opératoires utilisées pour la région pelvienne du corps féminin. Suite à une modification dans leur configuration spatiale, la fonction des organes de l'abdomen peut être altérée, et nuire à la qualité de vie des patientes.

Chaque système organique est unique, qu'il s'agisse de la forme des organes, de leur taille, de la relation reliant leur fonction à leur emplacement, ou des soins à leur apporter pour restaurer l'équilibre pelvien. L'objectif est alors de comprendre et reproduire le comportement patiente-spécifique des organes soumis à une contrainte de poussée abdominale.

La modélisation de la problématique se traduit par la décomposition suivante en tâches élémentaires : acquérir les contours externes des organes par une segmentation de l'IRM des patientes, calculer les maillages à l'issue de la modélisation géométrique, appliquer les lois de comportement pour simuler leurs déplacements, et vérifier la conformité des résultats en les comparant aux IRM dynamiques des patientes.

Avec l'avancée des techniques mini-invasives, de nombreux simulateurs voient le jour. Les médecins comptent sur le support de la virtualisation pour gagner en précision et améliorer le geste chirurgical, tout particulièrement en mode pré-opératoire. Rapidité et efficacité du résultat sont en effet les caractéristiques qu'une opération chirurgicale doit posséder.

Cependant, la précision des calculs d'un simulateur ne garantit pas l'efficacité du résultat dans la réalité. Plusieurs approches ont été proposées pour lever ce verrou scientifique, mais d'une part elles sous-estiment les étapes élémentaires en fusionnant modélisation géométrique et mécanique, et d'autre part elles ne reposent pas sur une vérité-terrain pour vérifier la pertinence de leurs simulations.

Une attention particulière s'est alors posée dans notre modélisation pour tenir compte du rapprochement avec la réalité physiologique. Cette proximité s'exprime notamment par la prise en compte de l'épaisseur non-négligeable des membranes et d'une vérité-terrain propre à chaque patiente. Afin d'apporter un éclaircissement sur les verrous liés spécifiquement à la modélisation géométrique, ce manuscrit porte ainsi sur la création de maillages décrivant les surfaces épaisses des organes pelviens. Les données d'entrée sont des points épars.

Ce mémoire se compose de six parties. Le premier chapitre présente la notion de surfaces épaisses dans les problématiques industrielles passées et la manière dont elle pourrait s'intégrer dans le domaine médical. Pour ce faire, un tour d'horizon des simulateurs chirurgicaux alliant modélisations géométrique et physique est effectué. Le besoin d'assistance au geste chirurgical pour la région pelvienne - contexte de notre étude - est mis en évidence et traité dans le cadre du projet MoDyPe dans lequel s'inscrit cette thèse. L'importance de l'étape de modélisation géométrique est définie au travers d'une procédure en deux étapes : la construction de la surface des organes, et l'ajout d'une épaisseur pour créer un contour épais.

Le deuxième chapitre présente une étude bibliographique des méthodes d'ajustement de surfaces à partir de nuages de points épars. Les représentations implicite, discrète, et paramétrique sont détaillées et illustrées par différents exemples de techniques. Les avantages et inconvénients sont formulés au regard des besoins de la problématique.

Le troisième chapitre regroupe les informations concernant la méthode d'ajustement créée, basée sur la représentation paramétrique. La surface générée pour représenter les corps fermés et « lisses » des organes est tout d'abord présentée. Afin de faciliter la construction du contour des formes, une initialisation spécifique basée sur un axe médian non-linéaire est proposée. Il sert de guide à la disposition d'une surface initiale au plus près du jeu de données. Finalement, l'ajustement surfacique est détaillé, basé sur un schéma de relaxation de type moindres carrés. Il définit une fonctionnelle d'énergie bidirectionnelle, prenant en considération la distribution du nuage de points et la forme de l'approximant.

Une fois la surface paramétrique approchant les données reconstruite, le quatrième chapitre propose un second état de l'art, cette fois basé sur les techniques d'ajout d'épaisseur aux surfaces. Les approches offsets permettent de satisfaire ce besoin, portant une attention particulière au problème de repliements de la surface sur elle-même quand la *distance-offset* est trop grande par rapport aux rayons de courbure.

Nous présentons ensuite la procédure *offset* développée au chapitre cinq pour les organes pelviens. Alors que les approches classiques reposent sur des modèles paramétriques ou discrets qui peuvent ne pas tenir compte de certaines auto-intersections, nous définissons une méthode plus adaptée à notre cas d'étude, garantissant la construction de maillages sans erreur sous certaines conditions.

À but essentiellement applicatif, le chapitre suivant illustre la validité de la méthode pour des objets extérieurs au domaine médical.

Finalement, une conclusion générale de mes travaux de thèse ainsi que des perspectives visant à améliorer et étendre les idées développées sont données en dernière partie.

CHAPITRE

1

CONTEXTE MÉDICAL ET CADRE SCIENTIFIQUE DE L'ÉTUDE

Sommaire

1.1	Introduction	15
1.2	Application dans un contexte industriel	15
1.3	Application dans un contexte médical	16
1.3.1	Génération des simulateurs	16
1.3.2	Modélisations géométrico-physiques des simulateurs actuels	17
1.3.3	Troubles de la statique pelvienne et projet MoDyPe	20
1.4	Synthèse	25

1.1 Introduction

Depuis plusieurs décennies, la notion d'épaisseur a été intégrée aux modèles géométriques dans de nombreux processus industriels. Parmi ces environnements d'application, les techniques de contrôle de fraisage ont été particulièrement développées, abordant l'association entre les notions de trajectoires, d'épaisseurs et d'intersections de chemins pour concevoir des objets manufacturés et parfois composites (cf. par exemple les travaux de [Marciniak, 1991]).

L'avancée des technologies a favorisé le développement de partenariats inter-disciplinaires, répondant de ce fait à d'autres besoins, comme l'ajout d'épaisseurs à des surfaces qui nous intéresse principalement dans le cadre d'une application médicale. Ce chapitre a ainsi pour objectif d'introduire la problématique traitée dans ce mémoire, à savoir la ***modélisation des organes permettant de caractériser les troubles de la statique pelvienne de la femme***, qui s'intégrera dans le processus de construction d'un simulateur chirurgical.

Après une brève description des cas d'application dans le domaine industriel, le contexte médical est développé. Une description des simulateurs existants d'aide aux diagnostics est tout d'abord proposée, différenciant les modèles en termes de complexité et de réalisme. Les caractéristiques des tissus mous sont ensuite mises en évidence à travers la présentation de techniques actuelles de déformations des supports géométriques. Finalement, nous nous centrons sur l'environnement spécifique à notre cas d'étude, à savoir la région de l'abdomen. Nous y définissons les caractéristiques et hypothèses anatomiques nécessaires à l'élaboration des modèles géométriques spécifiques aux organes pelviens.

1.2 Application dans un contexte industriel

Les applications industrielles considérant l'épaisseur de forme ou de trajectoire sont nombreuses. En robotique, la construction de trajectoires doit prendre en considération les obstacles sur son chemin ([Lozano-Pérez and Wesley, 1979]). Ainsi, l'intégration d'une épaisseur à davantage le rôle d'intervalle de sécurité permettant de considérer la taille de l'objet à déplacer pour ne pas entrer en collision avec le milieu extérieur. Dans cette optique, d'autres travaux ont été entrepris pour la représentation de pinceaux ([Kim et al., 1993]) et la génération de chemins d'outils ([Rohmfeld, 1998, Lartigue et al., 2001, Kim and Yang, 2005]).

Ce principe est également applicable pour les surfaces. Nous pouvons citer notamment les travaux de localisation de surfaces par régions de tolérance ([Patrikalakis and Bardis, 1991]), la reconnaissance de caractéristiques par la construction de squelettes et d'axes médians des modèles géométriques ([Wolter, 1992]), la conception de panneaux comme le mélaminé composite ([Kumar et al., 2002]), ou encore le prototypage rapide ([Park, 2005]).

La notion d'épaisseur s'utilise ainsi dans tous les domaines requérant un contrôle de

trajectoire sur une surface, la création de surfaces multi-couches ou de formes creuses. Nous allons voir dans les parties suivantes comment elle est employée en environnement médical.

1.3 Application dans un contexte médical

Afin d'appuyer les décisions des praticiens et d'aider à leur formation, la médecine peut recourir aux domaines de la robotique et de la virtualisation d'environnements vivants. Toutefois, le modèle unique et globalisé - de la cellule à l'activité macroscopique - du corps humain n'existe pas. Un simulateur convient pour une configuration anatomique précise, dont la qualité dépend de la fidélité dans la reproduction de la physiologie.

1.3.1 Génération des simulateurs

Les travaux de [Satava, 1996] proposent une classification des simulateurs chirurgicaux en trois catégories de complexité pour illustrer le vivant (cf. figure 1.1).

1.3.1.1 Simulateurs de première génération

La première génération est basée sur l'information anatomique, obtainable par l'imagerie médicale (scanner, IRM, tomographie acoustique, ...). De nombreux simulateurs existent sur le marché - pour l'endoscopie notamment - mais offrent peu d'interactions avec les organes modélisés. Ils sont davantage utilisés en tant qu'examen complémentaire pour aider au diagnostic. Nous pouvons citer le système *CathSim* créé par [Ursino et al., 1999], un simulateur médical à bas coût intégrant un retour d'effort et une simulation graphique 3D. Il a pour rôle principal la formation du corps infirmier sur les injections par intraveineuse et les insertions de cathéter, bien que le réalisme haptique reste limité. [Liu et al., 2001] ont créé un outil pour le lavage péritonéal basé sur le même matériel.

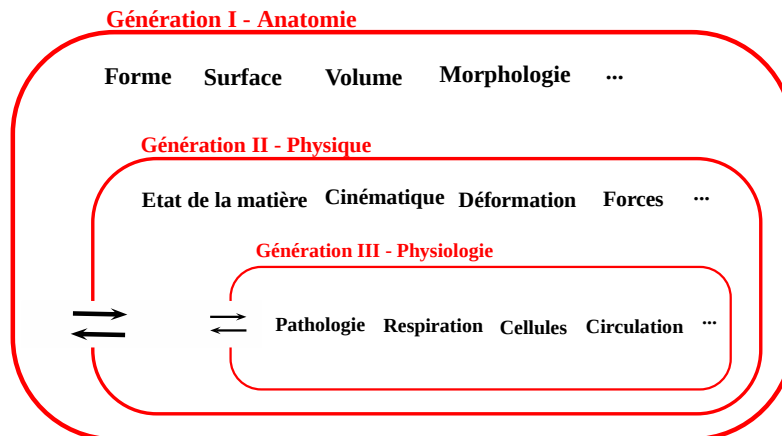


Figure 1.1. Les trois niveaux de complexité de modélisation.

1.3.1.2 Simulateurs de deuxième génération

Les simulateurs de seconde génération décrivent en plus les propriétés physiques du corps humain. La modélisation des propriétés mécaniques des tissus mous permet d'effectuer des opérations de découpe et de suture. Différents simulateurs de cette génération ont été également développés spécifiquement pour des parties précises du corps humain. Les travaux de [Sierra et al., 2006] se concentrent sur la construction d'un simulateur de précision pour les procédures d'hystéroscopie. L'utérus et la cavité interne doivent donc être reconstruits. Différemment, [Schwartz et al., 2005] s'intègre dans la planification opératoire pour détruire les cellules cancéreuses du foie. La difficulté réside ici dans l'impossibilité de déterminer les propriétés physiques des tissus vivants, bien différents de leurs valeurs *ex vivo*.

1.3.1.3 Simulateurs de troisième génération

La troisième génération est bien plus complexe, puisque des descriptions anatomique, physique et physiologique du corps sont intégrées. Peu de simulateurs existent, suite à la difficulté d'associer les facteurs physique et physiologique (circulation sanguine, respiration, fonctionnement des cellules). Une modification au niveau microscopique (une pathologie) va influencer au niveau macroscopique (changement dans la structure des membranes). Des travaux ont été notamment entrepris par [Sermesant et al., 2004].

Quel que soit le simulateur, la déformation des structures élastiques repose sur la nature des lois de comportement des organes appliquées sur le modèle géométrico-physique, servant de support aux calculs. Pour ceci, deux critères essentiels sont à prendre en considération : le ***réalisme de la modélisation***, dépendant des données en entrée et des caractéristiques propres au modèle, et un faible ***temps d'exécution*** pour aboutir à une interaction temps-réel. Ce choix dépend de l'objectif, à savoir si la simulation est à utiliser pour de la planification opératoire ou de la formation. Un simulateur intégrant parfaitement ces deux critères est inexistant pour l'instant. Cependant, alors que le facteur de temps sera toujours améliorable grâce aux progrès technologiques liés au support matériel des simulations, la question de la modélisation mathématique du problème reste ouverte. Le paragraphe 1.3.2 décrit différents modèles intégrés dans les simulateurs actuels, choisis d'après leurs objectifs propres.

1.3.2 Modélisations géométrico-physiques des simulateurs actuels

Les travaux de [Nealen et al., 2006] présentent un état de l'art sur ces surfaces déformables. Durant les deux dernières décennies, le nombre de modèles s'est beaucoup accru. Les approches sont classées en deux catégories : celles répondant aux principes de la mécanique continue et celles qui n'y répondent pas.

1.3.2.1 Modèles reposant sur la mécanique continue

La mécanique continue retranscrit les déformations biomécaniques par des équations à dérivées partielles. Nous décomptons dans cette catégorie quatre familles principales.

Les éléments finis consistent en une décomposition de l'objet déformable en volumes simpliciaux (tétraèdres ou hexaèdres) avant d'appliquer les lois de comportement. L'avantage de cette modélisation est sa précision numérique, et son lien direct avec les équations de la mécanique. On peut citer par exemple les travaux de [Tillier et al., 2003] sur la chirurgie laparoscopique du foie avec une loi de comportement hyper-élastique. En contrepartie, les temps de calcul sont importants. Le comportement temps-réel peut être approché par les méthodes d'analyse numérique, comme présenté dans les travaux de [Berkley et al., 2004] et de [García et al., 2008].

Similairement, [Wang et al., 2006] et [Wang et al., 2007] se consacrent aux tissus mous, mais cette fois-ci pour de la neurochirurgie. Les calculs sont restreints sur la surface grâce **aux éléments frontières**. Aucune ressource n'est utilisée dans le volume, ce qui permet des calculs temps-réel.

Différemment, [Hauser et al., 2003] utilisent la **décomposition modale** pour réduire les modèles de calculs. Le comportement mécanique doit répondre à un système d'équations non-linéaires. L'utilisation des modes vibratoires de l'objet permet d'aboutir à un système linéaire plus simple, dans lequel les modes n'interagissent pas entre eux. Le système découplé donne cependant le même résultat que le système original.

Finalement, [Müller et al., 2004] mettent en avant les **modèles sans maillage à base de points**, dont la particularité, comme son nom l'indique, est de ne pas faire intervenir de notion de connectivité. Calculs et rendu sont dissociés, par le découplage entre le modèle de déformation à base de points (les *phyxels*, ou « physical volume elements ») et la représentation de la surface (les *surfels*, ou « surface elements »).

1.3.2.2 Modèles ne reposant pas sur la mécanique continue

A contrario, certaines approches ne reposent pas sur la mécanique continue. Nous décomptons dans cette catégorie deux familles principales, qui mettent en avant le caractère temps-réel de la simulation.

D'une part, **les modèles masses-ressorts** sont des systèmes de particules d'implémentation facile, avec un treillis pour leur configuration, un ensemble de forces pour l'énergie de déformation et un schéma de résolution pour rétablir le système à l'équilibre. Mais ces approches sont dites *empiriques*, car de nombreux paramètres sont à déterminer, et ne sont liés qu'indirectement à la physique de l'objet. Longueurs des ressorts, constantes de raideur, masses, coefficients d'amortissement sont autant de paramètres à estimer. Des modèles plus généraux ont été conçus pour améliorer la précision de la simulation, comme les travaux de [Picinbono et al., 2002] qui définissent une approche à raideur variable. Parmi les travaux récents, nous pouvons citer par exemple les travaux de [Patete et al., 2012] sur la reconstruction mammaire 3D, qui ont construit un modèle complet, allant de l'acquisition des données à la validation des résultats.

Finalement, nous incluons dans ce groupe **les modèles sans maillage** à correspondance de formes. Les travaux de [Müller et al., 2005] présentent un système basé sur un schéma

géométrique, non lié à des paramètres physiques. Il s'agit d'un système de particules avec gestion des collisions, sans connectivité, ni interaction entre les particules. La restauration de la forme de l'objet est assurée par le calcul de transformations (translation et rotation). Cependant, ce type d'approche intègre difficilement dans les déformations.

1.3.2.3 Modèles singuliers

Séparément des autres groupes, nous allons présenter certaines approches singulières. La première concerne **les méthodes hybrides**, comme celle de [Zhu and Gu, 2012] pour le rein et le foie. Un modèle par éléments frontières est utilisé pour calculer les déformations, couplé à un système de masses-ressorts pour modéliser les comportements dynamiques. L'interaction avec ces méthodes rend très utiles les simulateurs de formation qui l'utilisent.

Finalement, [Zhong et al., 2012] adoptent un point de vue différent en considérant la déformation au **niveau physico-chimique**. Le comportement des tissus mous est caractérisé par la concentration des substances dans les membranes. Lorsqu'elles sont soumises à des contraintes, ces concentrations varient, et un processus de réaction-diffusion se met en place pour restaurer l'équilibre du système. Le modèle reste cependant limité aux surfaces.

Généralement, les approches choisissent entre la précision de la mécanique continue et les méthodes de temps-réel. La complexité réside toutefois dans les spécificités de chaque objet, d'où la quantité importante de modèles présents dans la littérature (cf. schéma 1.2).

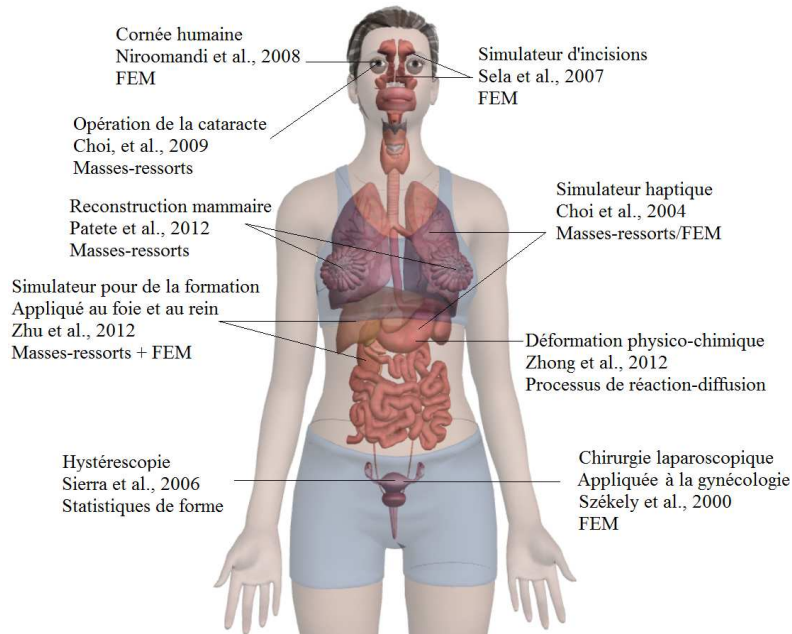


Figure 1.2. Modèles géométrico-physiques de simulateurs (image basée sur [Zygote Body, 2011]) : [Choi et al., 2009], [Székely et al., 2000], [Sierra et al., 2006], [Zhong et al., 2012], [Zhu and Gu, 2012], [Patete et al., 2012], [Choi et al., 2004], [Niroomandi et al., 2008], [Sela et al., 2007].

Néanmoins, il faut noter que le modèle géométrique est la plupart du temps sous-estimé en étant directement couplé au moteur de simulation physique. Peu de simulateurs s'affairent à intégrer les caractéristiques significatives des organes. Dans le cadre de la chirurgie pelvienne, **le projet MoDyPe** au contraire les prend en compte (cf. paragraphe 1.3.3), en considérant notamment la nature fermée, creuse et à membrane épaisse des organes.

Après une présentation des troubles liés à la statique pelvienne, les tâches élémentaires du projet sont décrites, permettant d'une part de positionner la modélisation géométrique dans ce cas applicatif et d'autre part de définir la stratégie adoptée pour y parvenir.

1.3.3 Troubles de la statique pelvienne et projet MoDyPe

1.3.3.1 Origine des troubles

Le plancher pelvien et les structures musculaires qui le composent doivent assurer la continence urinaire, génitale et rectale tout en autorisant les opérations de miction, de défécation, de coït et de parturition. Cependant le système pelvien repose sur un équilibre sensible entre **positionnement** et **fonctionnalités** des organes. Une perturbation de cet équilibre peut conduire à des modifications dans leur configuration spatiale, à partir de laquelle la qualité de vie des patientes est dégradée.

Les troubles de la statique pelvipérinéale résultent de l'altération des structures de soutien des organes, créant un déséquilibre entre les forces de **poussée abdominale** et de **retenue** du plancher pelvien (constituées par le système d'amarrage des viscères et du plancher pelvien composé d'éléments fibro-musculaires innervés). Grossesse, accouchement, vieillissement, carence hormonale, activités physiques, chirurgie périnéale ou pelvienne sont autant de causes qui peuvent fragiliser la statique pelvienne. Comme [Villet, 2003] le décrit, la transmission de ces forces au niveau périnéal dépend de la taille, de la forme et de la disposition des organes pelviens qui décrivent une série d'angulations servant d'amortisseurs aux à-coups de pression.

1.3.3.2 Nature des troubles et interventions médicales

L'intervention initiale du corps médical consiste à procéder à l'évaluation de la patiente, identifiant de ce fait les éventuels facteurs de risque. L'objectif est de prévenir un trouble du plancher pelvien, voire de le prendre en charge au début de son développement. Dans les cas de troubles légers (légère descente d'organes suite à un accouchement), la rééducation du périnée (exercices renforçant les muscles du plancher pelvien) peut réduire le risque futur de souffrir d'incontinence urinaire ou d'une descente du plancher pelvien. *A contrario*, les cas plus graves (incontinences et ptôses) requièrent une correction chirurgicale. L'opération consiste à remonter l'organe prolapsé dans une position idéale pour ensuite le fixer par une consolidation avec du matériel local ou du tissu autologue, hétérologue, ou synthétique.

Les travaux de [Villet, 2002] mettent en évidence la complexité du problème. D'une part, traiter le cas de troubles multi-élémentaires (prolapsus vaginal et incontinence fécale

par exemple) ne consiste pas à employer les solutions unitaires. En outre, une chirurgie extensive peut causer davantage d'inconvénients par la fibrose qu'elle entraîne, et être à l'origine d'un périnée figé, non fonctionnel, responsable d'incontinence, de dyspareunie ou de dyschésie. Les gestes élémentaires utilisés doivent être compatibles. D'autre part, la correction est réalisée par des praticiens issus de spécialités différentes (digestive, urologique, et gynécologique), induisant des pratiques qui restent mal évaluées. Le choix de la voie et de la technique chirurgicale dépendent des symptômes de la patiente, des anomalies anatomiques identifiées par les examens cliniques et les résultats de l'imagerie médicale, mais également de la spécialité du chirurgien, voire de ses habitudes.

La configuration pelvienne est différente d'une patiente à l'autre, et si pour une patiente une configuration donnée restaure le fonctionnement de ses systèmes urinaire, gynécologique et digestif, les mêmes résultats ne sont pas garantis avec une autre malade. La relation entre l'anatomie et la fonction n'est pas univoque.

Aujourd'hui, la technologie a fait suffisamment de progrès dans le domaine de la virtualisation d'environnement chirurgical pour apporter une aide aux médecins. Mais l'écriture du cahier des charges de cette tâche nécessite une extraction des propriétés des organes, éléments principaux de la simulation. À cet effet, le projet MoDyPe, présenté au paragraphe 1.3.3.3, a été mis en place pour répondre à ces besoins.

1.3.3.3 Positionnement du problème et projet MoDyPe

Les troubles de la statique pelvienne constituent un problème important de la santé publique par la fréquence (probablement sous-estimée par la réticence des patients pour évoquer leurs troubles jugés dégradants) et le handicap qu'ils engendrent. *A contrario*, leur physiopathologie reste mal connue. Bien que de nombreuses interventions de correction chirurgicale ont été développées pour restaurer l'équilibre pelvien, aucune estimation du résultat fonctionnel de l'intervention n'est apportée par les outils actuels.

Le projet MoDyPe (sous la référence ANR-09-SYSC-008) est initié en janvier 2010, et réunit trois centres hospitalo-universitaires (notamment le CHU La Timone) et trois laboratoires scientifiques (LSIS¹, LMEE² et IBISC³). Il a pour objectif d'apporter une aide à la décision **pré-opératoire** en évaluant le geste chirurgical appliqué sur la patiente. Il ne s'agit pas dans un premier temps de produire un système temps-réel, mais de permettre au chirurgien de simuler les modifications envisagées sur **un modèle spécifique de la patiente**. Au moyen de la modélisation informatique, la construction des organes en 3D et la reproduction de leur comportement sous contraintes de poussée abdominale définit l'environnement pelvien virtuel. Les déformations sont comparées en sortie à une vérité-terrain (l'IRM dynamique des patientes) pour valider la pertinence des résultats.

1. <http://www.lsis.org/>

2. <http://lmee.univ-evry.fr/>

3. <http://challenges-w.lami.univ-evry.fr/>

Alors que les centres hospitaliers ont pour rôle de fournir l'expertise nécessaire à la mise en œuvre d'un projet portant essentiellement sur l'amélioration de la thérapeutique, les équipes scientifiques ont pour rôle principal de lever les verrous scientifiques et technologiques majeurs dans leurs domaines respectifs, que sont d'une part l'imagerie médicale et la modélisation géométrique, et d'autre part la modélisation physique et la simulation.

1.3.3.4 De l'IRM à la simulation

Le processus global du projet est séparable en quatre « tâches » (cf. [Bay et al., 2011]), de sigles WP1⁴ à WP4. Il s'agit de la « Segmentation » (WP1), la « Modélisation Géométrique » (WP2), la « Modélisation Physique » (WP3) et la « Caractérisation et Recalage » (WP4). Les équipes interagissent entre elles au travers d'interfaces spécifiques (cf. figure 1.3).

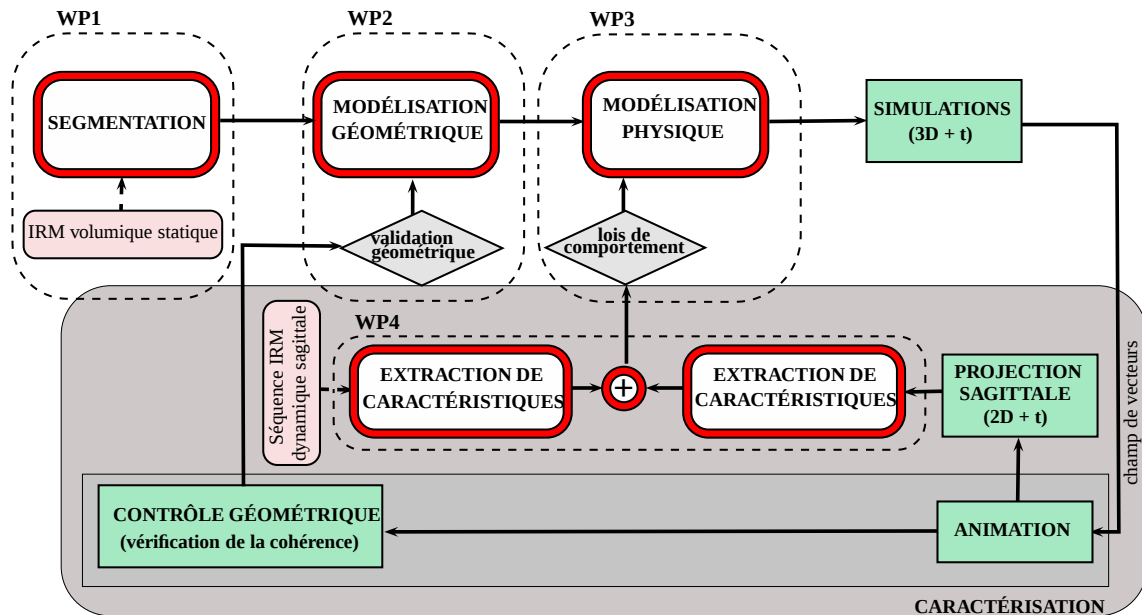


Figure 1.3. Étapes du processus de rétro-action.

La tâche WP1 : la Segmentation est effectuée par le LSIS*. À partir de l'IRM statique d'une patiente (dont la précision est de l'ordre du millimètre), le module de « Segmentation » génère un ensemble de points 3D en utilisant le logiciel OpenSource ITK-SNAP (cf. les travaux de [Yushkevich et al., 2006] pour davantage de détails sur son utilisation). Ces points appartiennent à la surface des organes d'intérêts, qui sera qualifiée de *surface externe* par opposition à la paroi de la cavité interne. Cette étape est directement liée à la « Modélisation Géométrique » puisqu'elle lui fournit les points en entrée.

La tâche WP2 : la Modélisation Géométrique est effectuée par le LSIS. Le second module construit le support géométrique des organes d'intérêt. En premier lieu, la surface

4. WP signifie « Work Package »

*, cf. annexe

externe est créée puis sert de base à la génération d'une membrane épaisse pour chaque corps mou. L'ensemble est discrétisé pour fournir un maillage 3D en sortie.

La tâche WP3 : la Modélisation Physique est effectuée par le laboratoire IBISC*. Le troisième module reprend le maillage des organes, qui sert de support pour reproduire les mouvements des organes sous contraintes de poussée abdominale. Les lois de comportement sont déterminées par étude des propriétés mécaniques de la zone pelvienne. Une séquence d'images est produite par projection des sorties des simulations dans le plan sagittal.

La tâche WP4 : l'étape de Caractérisation/Recalage est effectuée par le LSIS. La séquence d'images est analysée et comparée à la vérité-terrain - l'IRM dynamique d'une poussée abdominale - par le module de « Caractérisation et Recalage » pour valider le réalisme des déformations. L'évaluation qualitative et quantitative des résultats obtenus est formalisée en collaboration avec les experts cliniciens. La détermination de critères explicites a pour objectif de mesurer la pertinence des mouvements propres des organes.

Bien que chaque module soit indépendant, réussir à unir l'ensemble de ces disciplines nécessite de considérer le système dans son ensemble. De ce fait, un retour en arrière doit être possible dans le processus, prenant en compte les remarques des modules connexes à une étape. Il s'agit de la **boucle de rétro-action**. Elle s'active si la « Caractérisation » n'est pas satisfaite de la consistance des résultats (présence d'éléments dégénérés). Deux retours sont alors possibles : l'un vers la Modélisation Géométrique pour améliorer la précision dans les zones problématiques, et le second vers la Modélisation Physique en cas de manque de réalisme dans les mouvements des organes. Cette boucle est répétée par la tâche WP4 jusqu'à obtenir des résultats cohérents avec la réalité.

La tâche WP2, correspondant à la modélisation géométrique, nous intéresse plus particulièrement dans ce mémoire. Le paragraphe 1.3.3.5 caractérise pour cela l'environnement pelvien par une description des formes à modéliser, visant à concevoir un support géométrique aussi fidèle que possible à la réalité et en adéquation avec les acquisitions en entrée.

1.3.3.5 Point-clé de cette étude : la Modélisation Géométrique

La présentation de l'horizon biologique du plancher pelvien féminin permet de délimiter la zone précise d'étude et de définir la stratégie globale pour la modélisation.

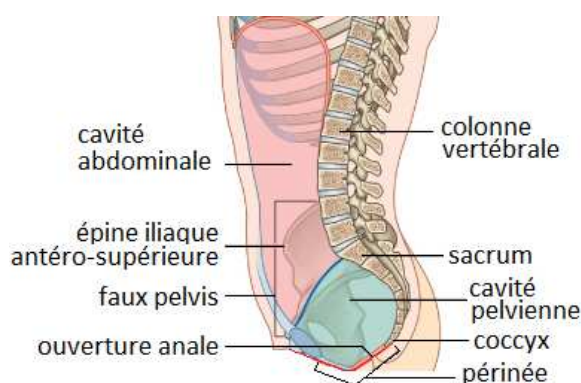
Les éléments anatomiques à modéliser sont localisés dans la cavité pelvienne (cf. figure 1.4(a)). Cette région est située dans la loge osseuse du bassin et soutenue par un système musculaire et ligamentaire. Illustrée par la figure 1.4(b), elle contient des éléments des systèmes urinaire (*vessie*), gastro-intestinal (*rectum*) et gynécologique (*vagin* et *utérus*).

La vessie est positionnée dans la partie supérieure de la zone pelvienne, soutenue par le

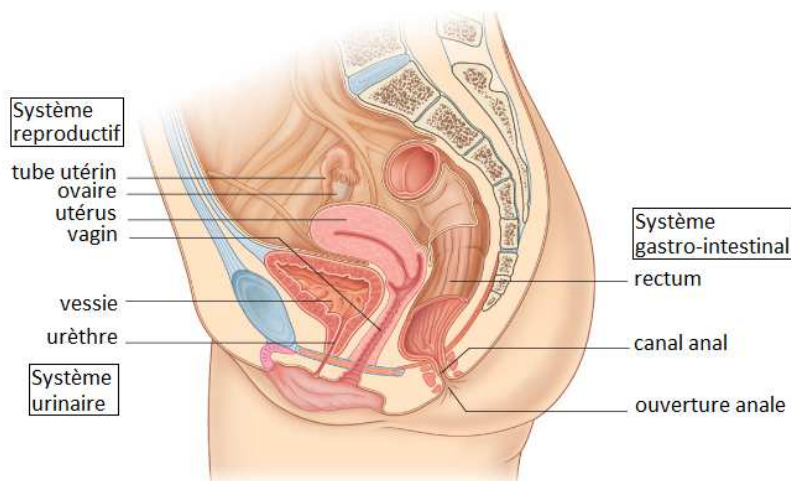
*, cf. annexe

pelvis et le plancher pelvien. Pour les femmes, l'urètre passe à travers le plancher vers le périnée, et conduit directement à l'extérieur du corps. Le rectum - positionné dans la partie inférieure de l'abdomen - se termine par le canal anal. Il pénètre le plancher vers le périnée. Le canal anal est incliné en arrière sur le rectum. Cette flexion est maintenue par les muscles du plancher pelvien et relaxée pendant la défécation. Le vagin pénètre le plancher pelvien et se connecte à l'utérus dans la cavité pelvienne. L'utérus est positionné entre le rectum et la vessie.

Selon l'âge, l'heure de la journée, l'état de santé, le nombre d'enfants, les dimensions des organes varient en taille et en épaisseur (cf. les annexes pour de plus amples informations).



(a) La zone pelvienne



(b) Les organes de la cavité pelvienne

Figure 1.4. La région pelvienne du corps féminin (images basées sur [Drake et al., 2004]).

Les hypothèses anatomiques formulées ci-dessous et validées par l'expert médical simplifient l'environnement d'intérêt, tout en autorisant suffisamment de degrés de liberté pour être fidèle à la physiologie féminine. L'encadré 1.3.1 fournit un ensemble de suppositions du système bio-mécanique global à la cavité pelvienne. Elles correspondent principalement aux conditions aux limites pour fixer spatialement les organes.

Hypothèse 1.3.1 (*Système bio-mécanique pelvien*)

1. Les os sont identifiables sur les IRM, et différenciables les uns des autres ;
2. Les muscles sont situés aux mêmes emplacements sur les os ;
3. Les organes sont attachés aux mêmes emplacements sur les os ;
4. D'un individu à l'autre, seules diffèrent les dimensions et la forme des os, des muscles et des organes.

L'encadré 1.3.2 se rapporte quant à lui à la nature des organes. Il s'agit des points les plus importants pour notre étude, puisqu'ils sont directement transposables à des critères de modélisation propres aux tissus mous et introduisent les contraintes du modèle à respecter quelle que soit la qualité des acquisitions en entrée.

Hypothèse 1.3.2 (*Système organique pelvien*)

1. La surface de la membrane extérieure de chaque organe pelvien est lisse ;
2. L'épaisseur de cette membrane n'est pas négligeable devant les autres dimensions ;
3. Un organe présente une cavité interne ;
4. Les entrées et sorties tubulaires des organes ne sont pas nécessaires pour caractériser le comportement des organes.

La caractérisation des propriétés est la première étape dans la conception d'un simulateur. Elle permet de mettre en place une **stratégie appropriée** pour la conception des organes à membrane épaisse. À partir d'un nuage de points décrivant le contour externe des organes, le maillage volumique sera construit avec une cavité interne en deux étapes indépendantes. En premier lieu nous construirons **la surface externe** des organes, dont l'étude se retrouvera à travers les chapitres 2 et 3. Puis nous ajouterons **l'épaisseur des surfaces externes**, dont l'étude sera décrite à travers les chapitres 4 et 5.

1.4 Synthèse

La génération d'épaisseurs, pour une courbe ou une surface, est un concept étudié depuis plusieurs décennies dans l'industrie. Son utilisation dans des domaines comme le milieu médical n'a pu être jugée intéressante qu'à partir du moment où la question du réalisme des simulateurs chirurgicaux s'est posée. La construction d'une assistance à la chirurgie est une opération complexe. Plusieurs disciplines sans point commun au départ sont combinées afin que chaque aspect de l'environnement de modélisation soit pris en considération.

Dans le cadre du projet MoDyPe, l'objectif a été de concevoir un simulateur de deuxième génération, permettant d'estimer l'impact du geste chirurgical pour la correction des troubles de la statique pelvienne. L'une des limitations d'un tel système est son paramétrage, qui n'est possible qu'au travers des connaissances physiologiques à notre disposition, mais difficiles à obtenir *in vivo*. La reproduction du comportement des organes à partir de cadavres ne suffit pas pour maîtriser la structure déformable des tissus vivants.

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit au niveau de la **modélisation géométrique**, permettant d'apporter des informations significatives pour caractériser la forme des organes sans pour autant parler explicitement de paramètres rhéologiques. Véritable support à l'établissement des lois de comportement, la construction du maillage de ces organes est considérée comme une tâche à part entière afin de permettre à la modélisation physique de créer un comportement d'organes pelviens avec une mécanique des corps fidèle à la réalité. Pour y parvenir, le processus est par conséquent séparé en deux phases distinctes, à savoir la création des contours externes des organes, et l'ajout d'une épaisseur.

Afin d'atteindre cet objectif, l'étude bibliographique du chapitre 2 nous permet dans un premier temps de justifier le choix du modèle quant à la construction de la surface externe des membranes.

STRATÉGIES D'AJUSTEMENT SURFACIQUE

Sommaire

2.1	Introduction	28
2.2	Présentation du problème général	28
2.3	Différentes classifications de modèles	31
2.3.1	Classification par représentation	31
2.3.2	Classification par modèles d'ajustement	32
2.4	Modèles d'ajustement de paramètres	33
2.4.1	Reconstruction par fonction de distance signée	33
2.4.2	Reconstruction par fonction de distance non signée	34
2.4.3	Reconstruction par opérateur de projection <i>Moving Least Squares</i>	35
2.4.4	Reconstruction par fonctions de base radiales	36
2.4.5	Reconstruction par champ d'indicatrice	37
2.5	Modèles déformables	38
2.5.1	Reconstruction par level-sets	38
2.5.2	Reconstruction par superellipsoïdes	40
2.5.3	Reconstruction par propagation de front à connectivité constante	41
2.5.4	Reconstruction par fonctions polynomiales par morceaux	43
2.6	Synthèse	52

2.1 Introduction

La reconstruction de formes à partir d'un **nuage de points** de $\mathbb{R}^3$ correspond à la création d'un **modèle** permettant de se représenter les contours d'un objet afin de pouvoir **le manipuler et/ou le visualiser**. L'ensemble de ces points est ainsi assimilé à un échantillon de la surface à reconstruire.

Ce chapitre apporte une étude bibliographique sur la représentation géométrique des surfaces de modèles 3D. La question est complexe, car malgré l'amélioration de la technologie d'acquisition ces dernières années, les techniques ne sont pas parfaites d'un point de vue qualitatif (approximations, bruits, valeurs aberrantes) et quantitatif (densité inhomogène des nuages, présentant des zones de sous-échantillonnage et/ou de sur-échantillonnage). Les données en sortie doivent donc être manipulées avec prudence.

Les modélisations actuelles reposent sur un équilibre entre les hypothèses liées à la qualité des données, les connaissances disponibles (normales aux points, précision de l'acquisition, ...), et les propriétés à satisfaire (continuité, facilité de manipulation, complexité de formulation) afin de choisir la reconstruction adéquate.

Ce chapitre se consacre à la génération de la surface (référéncée plus tard dans ce manuscrit sous le nom de « surface externe ») à partir de nuages de points décrivant le contour externe des formes.

2.2 Présentation du problème général

La modélisation d'une surface à partir d'un nuage de points 3D est un problème mal posé, i.e. qu'il n'y a pas *a priori* de solution unique pour un jeu de données. Il est toutefois possible de guider le choix de la procédure de reconstruction à suivre en explicitant les propriétés géométriques et/ou topologiques que la surface doit vérifier. Pour cette raison, il est difficile de proposer une classification des techniques de reconstruction, chacune étant propre à un problème spécifique. Industrie automobile, aéronautique, sciences médicales, biologiques et géologiques font partie des nombreux domaines d'applications utilisant les maillages, et se différencient par leurs besoins propres. Ces contraintes proviennent de **la nature de l'objet** à modéliser et de **la qualité de l'acquisition** (généralement effectuée par des scanners 3D ou des IRM). Elles conduisent à des maillages de forme et de topologie variées (cf. figure 2.1). La nature de notre maillage est également choisie en fonction de nos besoins :

1. les organes pelviens n'ont pas de cloisons internes comme le cœur. Les surfaces sont considérées comme une 2-variété plongée dans un espace euclidien de dimension 3 ;
2. les organes sont « lisses » dans la réalité. Un contrôle sur la régularité de la surface est donc nécessaire ;

3. la représentation et la structure de données sont à choisir de sorte que des déformations ou d'autres opérations dynamiques soient applicables sur le maillage. Notre maillage volumique étant le support des lois de comportement des organes, la modification de la densité d'éléments sur la surface doit être par exemple possible ;
4. le maillage volumique doit être constitué d'hexaèdres, imposant la présence de quadrangles sur la surface (contrainte de l'étape de Modélisation Physique) ;
5. les entrées sont potentiellement *bruitées*.

Deux orientations se distinguent pour reconstruire la surface : l'approche **combinatoire**, et l'approche par **ajustement de modèle**. La première repose sur la détermination de relations d'adjacence entre les points de l'échantillon, et regroupe donc des méthodes se basant essentiellement sur la géométrie algorithmique. La seconde repose sur l'approximation du nuage par un modèle - continu ou discret - impliquant une paramétrisation des données.

L'approche combinatoire regroupe différentes méthodes basées sur la triangulation de Delaunay, telle que l'algorithme du *Cocone* de [Amenta et al., 2000], celui du *Powercrust* de [Amenta et al., 2001], ou la méthode *Wrap* de [Edelsbrunner, 2003]. Elles ont cependant été mises de côté au profit de techniques « plus souples » pour deux raisons. La présence d'amas aberrants dans nos nuages de points a été constatée, ce qui n'est pas géré par ce type de méthodes puisque les erreurs sont indissociables des points réels du contour. En outre, le contrôle sur la surface est très limité. Un rapport statuant sur les algorithmes combinatoires est disponible dans les travaux de [Cazals and Giesen, 2004]. Nous nous consacrons ainsi uniquement aux méthodes par ajustement, dans lesquelles l'écart entre un modèle mathématique et les données est quantifié et minimisé.

La modélisation se transforme en un **problème d'optimisation**. Si tous les échantillons appartiennent à la surface, on parle d'interpolation, sinon d'approximation. La contrainte d'interpolation est forte, et peut de ce fait provoquer des ondulations et autres artéfacts sur la surface, voire être inutilisable en cas de nombre de points trop important. Nous allons principalement considérer le cas général d'un **ajustement par approximation**, présenté par l'équation 2.1. Soit $\{D_i\}_{i=0}^n$ l'ensemble de $n + 1$ points à approcher et positionnés dans $\mathbb{R}^3$. Pour l'ajustement surfacique, nous introduisons le vecteur d'état $X = \{X_1, X_2, \dots, X_p\}$, un p -uplet de paramètres de forme qui caractérise la surface S . La différenciation dans les représentations de S se situe au niveau de la taille et de la nature de ce vecteur d'état, dépendant des contraintes géométriques imposées par la modélisation. L'objectif consiste à déterminer X en assimilant l'ensemble D à un échantillon de S dans $\mathbb{R}^3$ à une approximation près. L'écart entre D et S est traduit par la notion d'énergie portée par une fonctionnelle f et correspondant à l'heuristique globale du système, dont les paramètres peuvent avoir une influence locale ou globale :

$$X = \min_{\tilde{X}} f(\tilde{X}, D) . \quad (2.1)$$

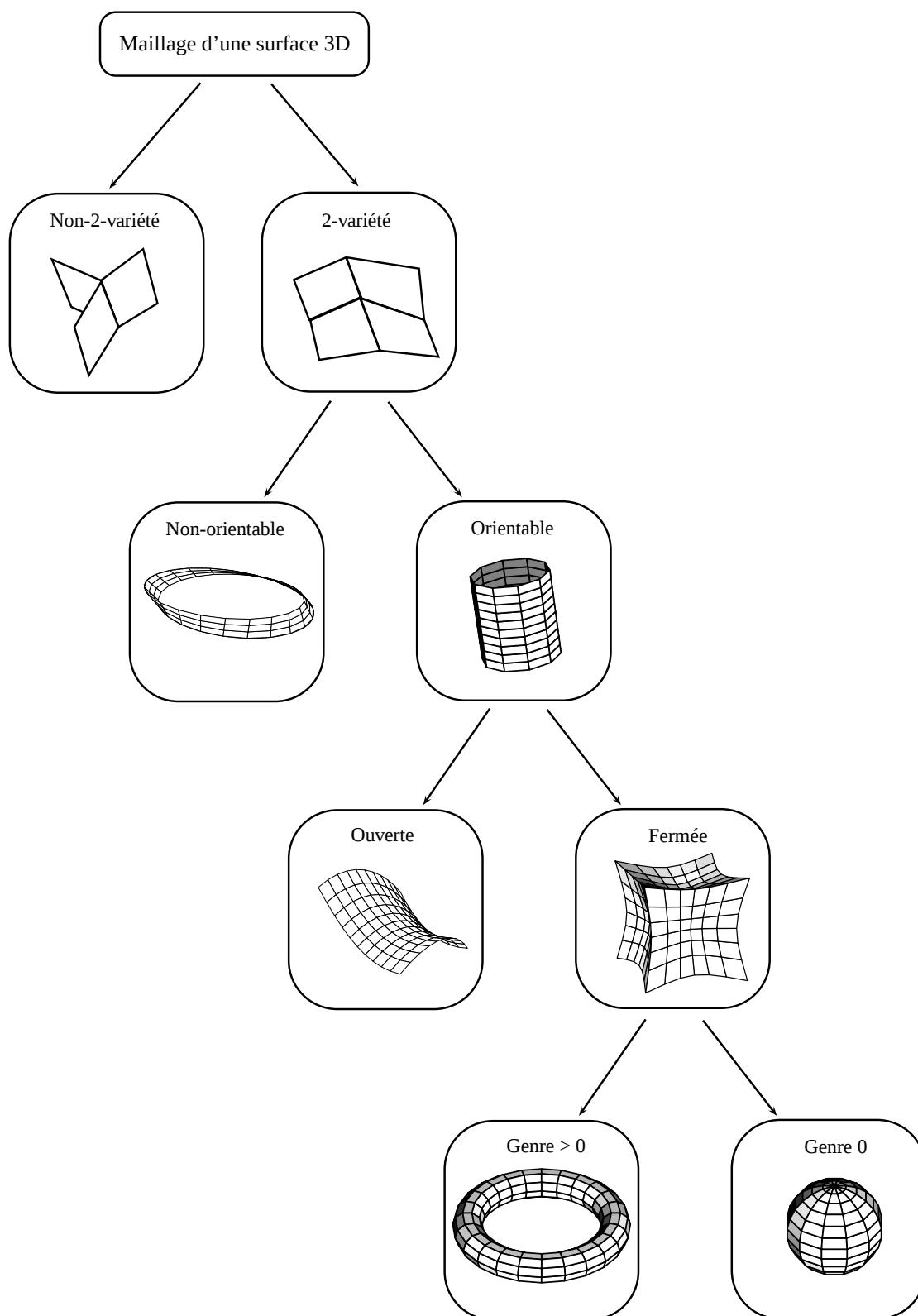


Figure 2.1. Classement des maillages 3D d'après leurs caractéristiques.

Afin de choisir la formulation de la surface la plus appropriée, la partie 2.3 propose une classification des méthodes pour isoler leurs spécificités.

2.3 Différentes classifications de modèles

Deux classifications différentes des modèles de reconstruction sont présentées ci-dessous. La première distingue les approches selon la représentation des surfaces, tandis que la seconde se base sur les propriétés des méthodes.

2.3.1 Classification par représentation

Un modèle de reconstruction appartient à la représentation paramétrique, implicite, ou discrète, selon que la surface à obtenir est définie explicitement, ou indirectement en considérant une distance entre la surface approchante et le contour réel inconnu. Cette partie introduit brièvement ces représentations. L'ensemble des techniques évoquées sont développées plus loin à partir du paragraphe 2.4.

2.3.1.1 La représentation discrète

Les méthodes associées à cette représentation reposent sur un nombre fini de points pour caractériser la surface. Les approches combinatoires basées sur les triangulations de Delaunay et diagrammes de Voronoï appartiennent à cette catégorie. Nous pouvons également distinguer les approches sans maillage correspondant aux travaux de [Jaillet et al., 1998] sur les systèmes de particules. Nous ne considérerons pas ce type de méthodes puisqu'elles ne permettent pas de respecter les contraintes du problème.

Les modèles à base de maillage n'impliquant pas de méthode combinatoire construisent généralement la surface par propagation de front, et se différencient par le complexe simplicial du maillage (cf. les travaux de [Delingette, 2006]), et la combinaison des énergies utilisées pour guider la forme (cf. les travaux de [Sharf et al., 2006]).

2.3.1.2 La représentation paramétrique

La représentation paramétrique appartient au domaine continu. Ces surfaces sont fonctions soit de coordonnées cartésiennes, soit de coordonnées paramétriques sur la variété. Les travaux de [de Boor, 1978] restent une référence pour les fonctions polynomiales par morceaux (surfaces de Bézier, B-spline). Les travaux de [Piegl and Tiller, 1997] intègrent plus tard les NURBS dans cette famille. Ces approches permettent de contrôler la continuité et la discrétisation de la forme. *A contrario*, elles sont plus contraignantes, car plus strictes en termes de formalisation par rapport aux méthodes discrètes. Elles apportent néanmoins de grands avantages, notamment sur les questions de contrôle direct et de régularisation de la surface.

Deux orientations sont distinguables pour obtenir le contour des solides : celles construisant la surface par modèle continu déformable, et celles plus récentes qui déterminent indirectement la forme continue par conversion d'un maillage quadrangulaire ou triangulaire de l'objet (cf. les travaux de [Wang et al., 2012]).

2.3.1.3 La représentation implicite

Cette représentation continue localise implicitement des points sur la surface, correspondant aux zéros d'une fonction à valeurs réelles. Deux familles de méthodes se distinguent.

La première reconstruit les surfaces par un ensemble d'approximants locaux. Par exemple, une combinaison de fonctions de base lisses peut définir une fonction scalaire de sorte que tous les points des données soient proches de la surface à reconstruire (cf. les travaux de [Turk and O'Brien, 1999]). Les approches locales diffèrent par la nature de la décomposition des données en régions, sur lesquelles une solution est calculée : le choix de la fonction implicite pour extraire le contour de l'objet, et celui de la fonction de mélange entre les solutions locales. Les méthodes de base radiale à support compact ou de partitionnement de l'unité appartiennent à cette famille (cf. les travaux de [Ohtake et al., 2003] ou de [Tobor et al., 2004]). La construction est globale et dépend de la résolution d'un grand système linéaire. Ces méthodes présentent souvent un coût plus important en termes de temps de calcul que celles des représentations explicites pour des jeux de données importants.

Différemment, les approches globales utilisent les données pour définir une fonction de distance signée (travaux de [Hoppe et al., 1992]) sur des grilles rectangulaires qui découpent le volume contenant les entrées du modèle. L'isocontour de valeur zéro de la fonction signée est la surface implicite. La construction de la fonction de distance nécessite une approche discrète et a besoin d'une estimation des plans localement tangents ou des normales pour l'orientation. Les travaux de [Hornung and Kobbelt, 2006] reposent au contraire sur des fonctions de distance non signée. Dans la plupart des approches, une distinction est faite entre l'intérieur et l'extérieur, que nous pouvons retrouver dans les méthodes basées sur les surfaces algébriques, ou la reconstruction de Poisson de [Kazhdan et al., 2006].

Contrairement à cette classification, celle présentée à la partie 2.3.2 nous semble plus intéressante, car elle repose davantage sur les caractéristiques des modélisations que sur la formulation de la surface.

2.3.2 Classification par modèles d'ajustement

Deux familles principales de modèles d'ajustement non-combinatoires se distinguent, et sont résumées par la figure 2.2. *Les modèles d'ajustement de paramètres*, présentés dans la partie 2.4, recherchent directement le contour des objets. *A contrario*, la partie 2.5 introduit *les modèles déformables* pour lesquels les contours du volume sont obtenus par déformation itérative d'un germe initial.

Chaque méthode nécessite plus ou moins de connaissances *a priori* sur les données en entrée, tout en présentant une sensibilité propre au bruit et à l'égard de l'initialisation. Notre classification, qui s'inscrit dans la continuité des états de l'art de [Montagnat et al., 2001] et [Allègre, 2006], présente pour chaque méthode de reconstruction la formulation spécifique de la surface et une procédure d'ajustement qui l'utilise.

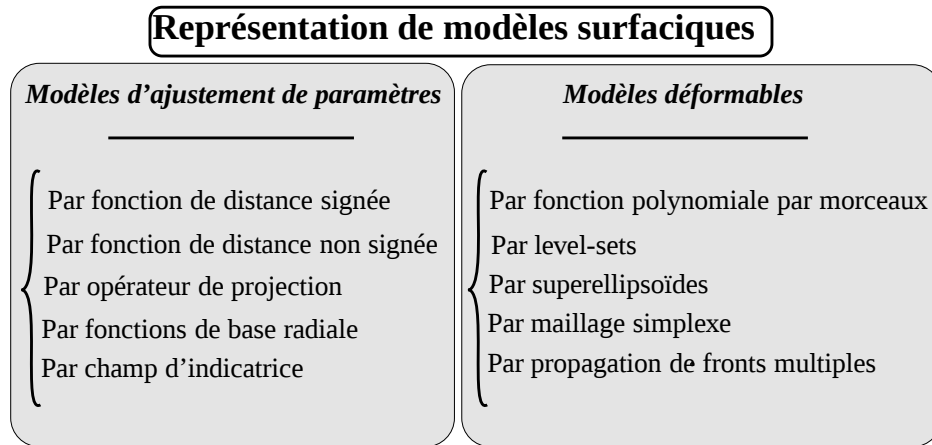


Figure 2.2. Classification de représentations géométriques de surfaces 3D.

2.4 Modèles d'ajustement de paramètres

Les méthodes évoquées dans cette partie utilisent la représentation implicite, et déterminent donc les zéros d'une fonction continue décrivant le contour de l'objet à reconstruire. La fonction peut être globale, ou issue d'une combinaison de fonctions d'influence locale. Le calcul des paramètres composant ces fonctions permet d'en déduire la surface finale.

2.4.1 Reconstruction par fonction de distance signée

Les travaux de [Hoppe et al., 1992] proposent d'estimer une *fonction de distance signée* f entre un point p de $\mathbb{R}^3$ et la surface. L'ensemble des zéros de cette fonction $f(p) = 0$ est notre surface finale. La surface n'est pas connue, mais est définie par un ensemble de plans tangents orientés, chacun associé à un point de l'échantillon. Chaque plan tangent est une approximation linéaire locale aux moindres carrés du point et d'une partie de son voisinage. La direction du vecteur normal au plan est donnée par la direction de variance minimale de la position des points au sein du voisinage.

La distance d'un point de l'échantillon à la surface est représentée par sa distance (en termes de distance euclidienne) à sa projection sur le plan tangent associé. Le signe de cette fonction de distance dépend de quel côté de la surface - et donc du plan tangent - le point

se trouve.

La stratégie adoptée consiste à propager *l'orientation des normales le long d'un arbre recouvrant minimum*. Cependant, l'extraction de l'isosurface à partir de la fonction de distance est ensuite entreprise avec un algorithme adapté des *Marching-Cubes* (cf. travaux de [Lorensen and Cline, 1987]), conduisant à une perte en précision. En outre, les surfaces reconstruites sont de continuité C^0 *, ce qui est insuffisant pour des formes ne présentant pas d'arêtes vives. Finalement, des précautions sont à prendre sur le choix de la taille du voisinage, car une valeur trop petite apportera du bruit dans la surface, tandis qu'une valeur trop grande augmentera la variance minimale pour chaque plan tangent et prendra donc moins en compte les courbures* de la surface.

2.4.2 Reconstruction par fonction de distance non signée

La méthode de Hoppe et al. estime des normales approximatives en chaque point. *A contrario*, les travaux de [Hornung and Kobbelt, 2006] proposent une méthode volumétrique sans information d'orientation pour des nuages de points épars. Ils s'affranchissent des problèmes de bruit topologique, présent dans les fonctions de distance signée, où la surface résultante n'est pas garantie d'être de genre minimal.

Chaque point p de l'échantillon est initialement placé dans une grille 3D. L'idée consiste à associer *une valeur de confiance à chaque voxel de la grille*, assimilable à la *pseudo-distance* du voxel vers le point de l'échantillon le plus proche. Comme aucune orientation n'est fournie, le bruit et les échantillonnages non-uniformes n'influencent pas la qualité de la reconstruction.

La confiance associée aux voxels contenant les points de l'échantillon est initialisée à 0, et à 1 pour les autres. Une pondération basée sur un filtre moyenneur est ensuite appliquée à chaque voxel. Cette opération de diffusion volumétrique permet de construire le champ de distances dans un voisinage tubulaire autour de l'échantillon de points. Une structure de graphe est ensuite construite à partir de ce voisinage. Chaque nœud du graphe est associé à une face d'un voxel, et chaque arête (pondérée) connecte deux faces voisines du voxel. Un sous-graphe octaédrique dont les sommets sont les centres des faces du voxel est formé. Le poids d'une arête dépend de la valeur du potentiel de confiance traversé. Un sous-ensemble minimal de voxels représentant une surface fermée avec une confiance maximale est extrait par *calcul d'une coupe minimale du graphe*. Finalement, la dernière étape est l'extraction de la surface en un maillage triangulaire.

Pour obtenir des maillages d'éléments différents, une étape de conversion est cependant nécessaire. Cependant, comme toute approche volumétrique, la résolution finale dépend de la précision de la grille et des voxels ce qui peut être rapidement limitant. D'autre part, il est difficile de contrôler la continuité de la surface obtenue avec ce type d'approches.

*, cf. annexe

2.4.3 Reconstruction par opérateur de projection *Moving Least Squares*

L'approche du « Moving Least Squares » (ou MLS) fait référence aux moindres carrés, mais dans le sens où les points sont mis à contribution à des emplacements variés leur faisant exercer une influence au travers de pondérations différentes. Les travaux de [Nealen, 2004] compare la formulation des moindres carrés et du MLS. Soient Π_m^3 l'espace polynomial de degré maximal m dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et $\{p_i\}_{i=0}^n$ les $(n+1)$ points du nuage épars de $\mathbb{R}^3$. Au sens des moindres carrés, l'objectif consiste à déterminer une fonction f de Π_m^3 **définie globalement** qui approche un ensemble de $(n+1)$ valeurs scalaires $\{f_i\}_{i=0}^n$. Le problème de minimisation revient à :

$$\min_{f \in \Pi_m^3} \sum_i \|f(p_i) - f_i\|^2 \quad (2.2)$$

Différemment, au sens du MLS, une fonction de pondération θ non-négative **définie localement** f :

$$\min_{f \in \Pi_m^3} \sum_i \theta(\|p - p_i\|) \|f(p_i) - f_i\|^2, \quad (2.3)$$

avec p un « point test » (qui n'appartient pas nécessairement au nuage de points à approcher), et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Les fonctions θ sont nombreuses (gaussienne, quadratique inverse, ...), mais vérifient toutes la même propriété d'approximation locale : $\theta(x)$ tend vers 0 pour x tend vers l'infini, et vice-versa. On peut d'ailleurs remarquer que lorsque θ tend vers l'infini, les données sont interpolées.

Dans les travaux de [Alexa et al., 2001] et de [Levin, 2003], le modèle - basé sur la représentation implicite - construit la surface par un opérateur de projection. Le principe se résume par la projection de points sur une approximation polynomiale locale de la surface dans un voisinage donné de points tests. Il se décompose en deux étapes majeures.

La première étape, pour une approximation locale, consiste en la détermination d'un hyperplan de référence tangent à la surface, et nécessite la résolution itérative d'un problème de minimisation non linéaire. Lorsque le point test p est choisi suffisamment proche de la surface, le système à résoudre devient linéaire.

La seconde étape repose sur l'utilisation du domaine de référence en p dans son voisinage, pour calculer une approximation polynomiale locale de la surface. Cette approximation correspond à la projection des points de l'échantillonnage dans le système de coordonnées local induit par l'hyperplan, et consiste à résoudre un problème de moindres carrés où les coefficients du polynôme sont déterminés en résolvant un système linéaire d'équations.

Généralement, la surface finale est C^∞ . Toutefois, le système souffre de problèmes de robustesse au bruit. Des travaux ont été entrepris pour améliorer l'approche (cf. les travaux de [Xie et al., 2003]), et apporter des garanties sur la qualité de la méthode (cf. les travaux de [Dey and 0002, 2005]).

2.4.4 Reconstruction par fonctions de base radiales

Les fonctions de base radiale (Radial Basis Functions, ou RBF) sont présentées dans les travaux de [Turk and O'Brien, 1999]. Soit $\{p_i\}_{i=0}^n$ l'ensemble des $(n+1)$ points du nuage éparé de $\mathbb{R}^3$, auxquels sont associées des valeurs scalaires $\{h_i\}_{i=0}^n$. L'objectif est de trouver une **fonction interpolante** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(p_i) \approx h_i$. Cette fonction se définit à partir d'une fonction de base $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, pouvant être à support local ou global, telle que :

$$f(p) = \sum_{i=0}^n w_i \Phi(\|p - p_i\|), \quad (2.4)$$

dont les poids $\{w_i\}_{i=0}^n$ pondèrent la somme des fonctions de base. Ces poids s'obtiennent en résolvant un **système linéaire d'équations**. Chaque fonction Φ est une RBF. Toute fonction Φ satisfaisant la propriété $\Phi(\cdot) = \Phi(\|\cdot\|)$ est une fonction radiale, et dépend seulement de la distance (souvent euclidienne) entre un point p et un centre c , soit $\Phi(p, c) = \Phi(\|p - c\|)$ (un parallèle peut être fait avec les fonctions de pondération θ de l'approche par MLS au paragraphe 2.4.3). Des fonctions gaussienne, multiquadrique inverse, de plaque mince sont couramment utilisées.

Remarque 2.4.1

La fonction f de l'équation 2.4 devient approximante en modifiant la formulation par une combinaison d'un terme d'accroches aux données avec une énergie de régularisation, contrôlant le lissage de la solution.

L'ensemble des zéros de f définit une surface implicite interpolant les centres. La contrainte en tout point est $f(p_i) = 0$ (le même principe étant applicable pour une isovaleur différente de 0). Nous constatons que nous avons autant de centres que de points du nuage.

Cependant, dans la pratique cette formulation peut présenter des problèmes de stabilité. Afin de garantir l'unicité de la solution, une seconde base est introduite. L'équation 2.4 est alors modifiée en intégrant une fonction polynomiale $h(x)$ telle que :

$$f(p) = \sum_{i=0}^n w_i \Phi(\|p - p_i\|) + h(x) \quad (2.5)$$

Soient $\{c_j\}_{j=0}^M$ les coefficients de h . Puisque $(m+1)$ inconnues supplémentaires sont à déterminer, $(m+1)$ contraintes au système sont à définir :

$$\sum_{i=0}^n w_i c_1 = \dots = \sum_{i=0}^n w_i c_j = \dots = \sum_{i=0}^n w_i c_m. \quad (2.6)$$

La solution triviale est évidemment d'avoir une valeur nulle pour toutes les inconnues. Pour les éviter, des contraintes supplémentaires sont ajoutées. Un point-offset p'_i est créé le long de la normale au point p_i , et ainsi $f(p'_i) \neq 0$. Ce procédé, jugé inadapté pour de grands

jeux de données, est revisité par [Wu et al., 2005] en positionnant *judicieusement* un unique point-offset par région. Cependant, les RBF ayant un support global, le système d'équation résultant de 2.5 peut rapidement être de grande dimension pour des données très denses. Plusieurs solutions ont été développées pour résoudre ces problèmes :

- [Carr et al., 2001] réduit le **nombre de centres** (pour l'instant égal au nombre de points de l'échantillon) par sélection itérative d'un sous-ensemble de centres qui s'adapte localement aux erreurs de reconstruction. En outre, une évaluation rapide des RBF (Fast Multipole Method) est appliquée en évaluant approximativement les fonctions de base « éloignées » des centres ;
- [Ohtake et al., 2003] définit un **support compact** aux RBF, dans lequel le système linéaire à résoudre pour trouver les poids w_i devient creux. Le choix des rayons de support reste difficile dans le cas d'échantillons non-uniformes ;
- le modèle RBF peut être couplé à un **partitionnement de l'unité**. Les travaux de [Tobor et al., 2004] et plus tard ceux de [Ohtake et al., 2006] proposent une subdivision hiérarchique du domaine d'intérêt en régions superposées de dimension inférieure avec un arbre binaire, dans lesquelles une solution locale est calculée en chaque nœud. La combinaison du résultat de chaque région fournit la solution globale ;
- les travaux de [Duplex, 2011] proposent une solution pour des systèmes de grande taille en reprenant le concept des RBF à support compact, mais en couplant cette fois-ci le processus à une simplification des données par partitionnement.

Malgré les techniques de réduction de centres et l'usage de méthodes numériques accélérées, les performances de cette approche reste dépendante du nombre de nœuds à interpoler, du choix des centres et de la taille du voisinage, avec des temps de calcul élevés. Le problème reste entier encore aujourd'hui.

2.4.5 Reconstruction par champ d'indicatrice

La reconstruction de [Kazhdan et al., 2006] formalise le calcul du contour d'un solide M sous forme d'un **problème de Poisson**. La méthode est appliquée pour un ensemble de données épars, éventuellement bruité, pour lequel les **normales sont fournies**. Le principe consiste à créer une **fonction indicatrice** X_M dissociant l'intérieur et l'extérieur de la forme (cf. figure 2.3). Le problème revient à déterminer X_M et son champ de gradient $\vec{V}$ tels que :

$$\vec{V} = \nabla X_M. \quad (2.7)$$

Le processus est décomposé en quatre étapes majeures :

1. pour déterminer X_M , [Kazhdan et al., 2006] ont établi la relation entre le gradient de l'indicatrice couplé à un filtre de lissage et l'intégrale du champ de normales de la surface (dans laquelle le filtre intervient également) ;
2. l'intégrale de la surface est maintenant évaluée : son calcul est approché en partitionnant le domaine par un octree, se ramenant à une somme discrète sur les normales

dans chaque région d'intérêt. Sa valeur nous donne $\vec{V}$;

3. à partir de l'équation 2.7, le problème est ramené à une équation de Poisson :

$$\Delta X_M = \nabla \vec{V}. \quad (2.8)$$

La fonction X_M est déterminée à l'issue de cette étape ;

4. il reste à extraire le contour à partir de la fonction indicatrice. Une isovaleur est choisie en moyennant les évaluations de la fonction X_M en chaque point des données, et un maillage triangulaire est obtenu en sortie.

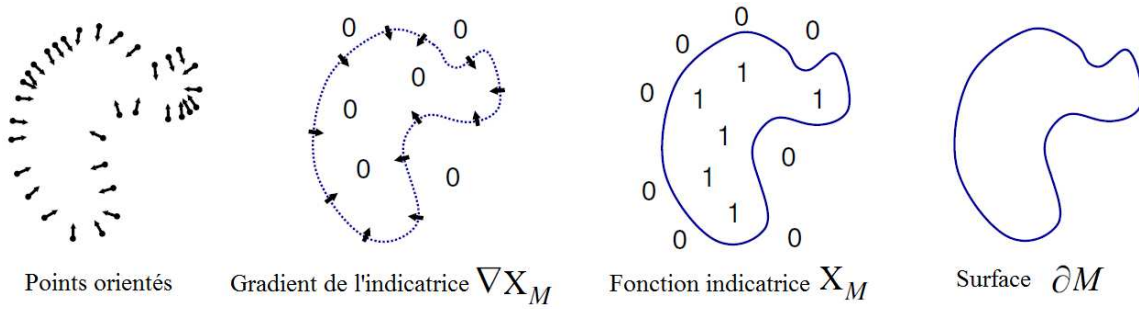


Figure 2.3. Illustration intuitive de la reconstruction de Poisson en 2D (extraite des travaux de [Kazhdan et al., 2006]).

L'avantage de cette méthode est son adaptation aussi bien à un échantillonnage uniforme et non-uniforme, tout en remplissant les trous dans les zones moins denses en données. Ce point fort en fait également sa limitation, dans le sens où l'algorithme a tendance à connecter deux zones proches mais séparées dans la réalité. Ces travaux ont été repris par [Bolitho et al., 2009] pour paralléliser les algorithmes de calculs.

2.5 Modèles déformables

Ces méthodes correspondent à la seconde famille des modèles d'ajustement. Ces approches déforment une surface initiale afin d'approcher l'échantillon de points. Les déformations proviennent de la minimisation d'une fonctionnelle d'énergie caractérisant l'écart entre les données et la surface approximante.

2.5.1 Reconstruction par level-sets

L'approche par *level-sets* repose sur la propagation spatiale d'un front au cours du temps, présentée notamment dans les travaux de [Zhao et al., 2001] et de [Whitaker et al., 2001]. **Les courbes de niveau** font référence à la notion d'isocontour. À partir d'une surface

évoluant dans $\mathbb{R}^3$, le travail est transposé dans une dimension supérieure sur un volume dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$. On introduit alors la fonction *level-set* Φ évoluant au cours du temps t et d'isovaleur k :

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ \Phi(p, t) = k, \end{cases} \quad (2.9)$$

La fonction Φ vérifie les propriétés suivantes :

- $\Phi(p, t) > k$ si le point p est à l'extérieur de la forme ;
- $\Phi(p, t) < k$ si le point p est à l'intérieur de la forme ;
- $\Phi(p, t) = k$ si le point p est sur l'isocontour.

La surface S est composée de l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui compose la $k^{\text{ème}}$ isosurface de Φ . [Whitaker et al., 2001] mettent en évidence que l'approche permettant le plus de liberté définit la fonction Φ comme une fonction volumique dynamique $\Phi(p, t)$, et rend l'isovaleur k indépendante du temps. La surface S est obtenue par résolution d'une équation aux dérivées partielles guidant l'évolution vers les frontières de l'objet, à partir d'une isovaleur ayant généralement pour valeur 0. La formulation d'une surface S dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$S(p, t) = \{p / \Phi(p, t) = 0\} \quad (2.10)$$

Le processus de résolution modélise l'évolution de S au cours du temps. Il est séparé en deux étapes : *l'initialisation* et *l'évolution de la surface déformable*.

À l'initialisation, une grille rectangulaire englobe les données. Cette grille est découpée en voxels qui sont à l'extérieur ou à l'intérieur de la forme. Les voxels choisis pour englober les données servent de point de départ pour l'évolution de la surface.

La déformation se fait par descente de gradient, et dépend de la nature de la fonction scalaire Φ . Cette dernière comprend habituellement un terme d'accroche aux données et un terme de lissage. De nombreux autres termes existent et conduisent à des comportements différents (attraction par gradient, lissage par courbure moyenne, ...). Ils peuvent se combiner linéairement dans l'équation du *level-set*. Le terme général se définit par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t} &= -\nabla \Phi(p, t) \cdot \frac{dp}{dt} \\ &= \|\nabla \Phi(p, t)\| f(p, \Phi, D_\Phi, D_\Phi^2, \dots), \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec $f(\cdot)$ la fonction de vitesse d'évolution au point p . Elle peut consister en un ensemble d'heuristiques locales et globales basées sur les dérivées D_Φ^i d'ordre i de la forme pour contrôler la déformation.

Cette formulation implicite présente plusieurs avantages, notamment en termes de changement de topologie et de capacité de segmentation. En contrepartie, l'implémentation du processus est coûteuse en termes de temps de calcul, bien que de nombreuses recherches se soient penchées sur la question (cf. les travaux de [Zhao et al., 2001] avec l'introduction

d'une labellisation des cellules de la grille, ou l'accélération avec le GPU de l'algorithme de [Lefohn et al., 2003]). En outre, il n'y a pas d'interaction directe avec la surface, et la méthode est très sensible à la qualité des données en entrée.

2.5.2 Reconstruction par superellipsoïdes

Ces surfaces font partie des superquadriques (cf. les travaux de [Faux and Pratt, 1979] pour plus de détails). Leur représentation la plus simple consiste à les exprimer dans leur forme paramétrique, fournie par l'équation 2.12. Leur avantage est de permettre le calcul de la normale exacte en chaque point.

$$\begin{cases} x(u, v) = a_1 \cos^{n_1}(u) \cos^{n_2}(v) \\ y(u, v) = a_2 \cos^{n_1}(u) \sin^{n_2}(v) \\ z(u, v) = a_3 \sin(u) \end{cases} \quad (2.12)$$

avec $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $v \in [-\pi, \pi]$, a_1 , a_2 et a_3 les facteurs d'échelle respectifs des axes x , y et z , n_1 et n_2 les courbures positives latitudinale et longitudinale de la forme. Comme le montre la figure 2.4, les formes décrites par cette formulation sont nombreuses¹ (une sphère avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 1$, ou un cube avec $n_1 = 0$ et $n_2 = 0$).

Les travaux de [Chevalier et al., 2005] représentent les nuages épars par une union de superellipsoïdes. Deux méthodes y sont proposées.

La première approche est basée sur la **croissance de régions**. L'initialisation est faite par un ensemble de superellipsoïdes positionnés dans des zones réduites du nuage 3D. Des étapes de croissance et d'élimination de région se succèdent alors : chaque superellipsoïde tente d'accaparer les points du voisinage (croissance basée sur une régression non-linéaire de type Levenberg-Marquardt), et les germes décrivant une même partie de l'objet sont supprimés. Cette méthode a pour inconvénient de ne pas apporter de garantie sur la représentation de chaque partie de l'objet 3D par un superellipsoïde.

Une autre approche par **découpage-fusion** est proposée pour y remédier. Elle consiste en la succession d'une étape de découpage et d'une autre de fusion : les données sont récursivement scindées en plusieurs parties (découpe arbitraire jusqu'à obtenir une zone qu'un seul superellipsoïde suffit à approcher), puis des régions voisines sont regroupées.

La méthode permet d'obtenir finalement un ensemble de superellipsoïdes structuré par un graphe d'adjacence.

Cependant, obtenir une représentation précise de certaines formes avec un nombre minimal d'objets est difficile. En effet, des parties de données peuvent ne pas être prises en compte dans la modélisation. En outre, certaines configurations déclenchent des opérations de fusion inutiles, ajoutant de l'information erronée. Ce type de méthode est pour le moment exploitable pour un usage de visualisation en basse-résolution, mais inadapté à une reconstruction contrainte.

1. La figure 2.4 est issue du site <http://paulbourke.net/geometry/superellipse/>

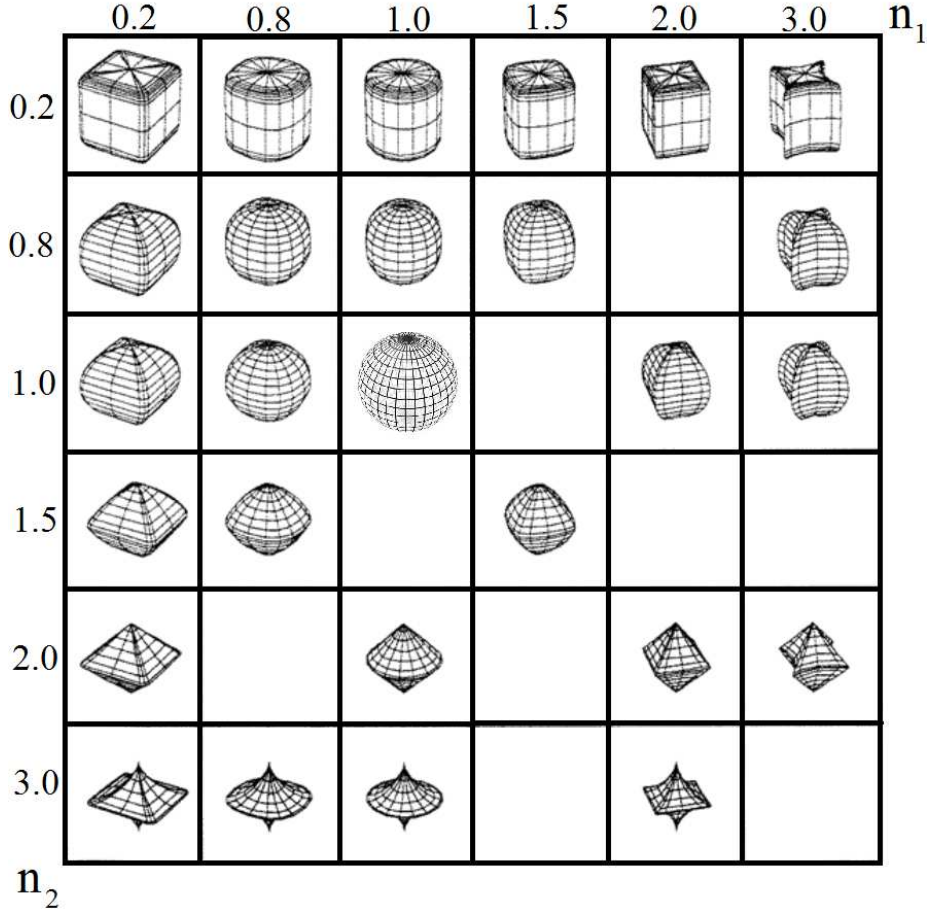


Figure 2.4. Famille de superellipsoïdes.

2.5.3 Reconstruction par propagation de front à connectivité constante

Parmi les méthodes de propagation de front, *les maillages simplexes* sont illustrés dans cette partie pour deux raisons. La première raison est liée à leurs topologies non-conventionnelles. Toute la géométrie, les opérations de maillage et les ajustements aux données reposent sur la simple notion de *connectivité constante* entre les points du maillage. La seconde raison est qu'il s'agit d'une méthode robuste, sans avoir besoin de mélanger les propriétés de différentes représentations comme pour les méthodes hybrides. En effet, les travaux de [Sharf et al., 2006] permettent par exemple de reconstruire une large gamme de formes complexes, mais reposent sur de nombreuses approches (multi-résolution, approche par projection, moindres-carrés, RBF).

Le maillage simplexe est une technique initiée par [Delingette, 2006]. Méthode très robuste, elle est utilisée dans différents domaines, tels que la segmentation d'images, la reconstruction de surfaces et la comparaison inter-modèles. Nous pouvons citer à titre d'exemples les travaux de [Heimann and Delingette, 2011] et [Subsol et al., 2010].

Un k -maillage simplexe de $\mathbb{R}^n$ est un maillage dont chaque sommet possède exactement $(k+1)$ voisins. Soit $\{p_i\}_{i=0}^d$ l'ensemble des nœuds du maillage. Un voisinage est défini pour chaque p_i par un $(k+1)$ -uplet $(p_1(i), \dots, p_{k+1}(i))$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **unicité** : un nœud ne peut être son propre voisin et avoir deux fois le même nœud comme voisin ;
- **arête** : il ne peut y avoir qu'une seule arête entre deux nœuds ;
- **face** (pour les 2-simplexes) : ensemble de nœuds vérifiant les propriétés de fermeture (les sommets d'une face sont reliés entre eux par une succession fermée d'arêtes jointives), d'unicité (aucune arête ne partage une face en deux) et d'orientation (tous les sommets d'une face sont orientés de manière cohérente).

Un 2-maillage simplexe est un maillage discret régulier topologiquement dual d'une triangulation (cf. le tableau 2.1). Il n'existe pas d'homéomorphisme transformant les coordonnées d'un maillage simplexe en celles de son dual.

TABLE 2.1. Dualité des 1-,2-maillages simplexes.

1-maillage simplexe		2-maillage simplexe	
<i>Primal</i>	<i>Dual</i>	<i>Primal</i>	<i>Dual</i>
Sommet	Arête	Sommet	Face
Arête	Sommet	Arête	Arête
		Triangle	Sommet

Concernant les déformations du maillage simplexe, le modèle discret est régi par la mécanique newtonienne du mouvement. Chaque sommet p_i est associé à un poids fixe. L'évolution des maillages simplexes se définit d'après les forces locales s'appliquant sur le modèle. Dans sa thèse, [Montagnat, 1999] nous donne l'équation 2.13 qu'il faut appliquer en chaque p_i :

$$p_i^{t+\Delta t} = p_i^t + (1 - \gamma)(p_i^t - p_i^{t-\Delta t}) + \alpha(i)f_{int}(p_i^t) + \beta(i)f_{ext}(p_i^t), \quad (2.13)$$

avec γ la viscosité du milieu, f_{int} et f_{ext} les forces intérieures et extérieures appliquées au modèle, $\alpha(i)$ et $\beta(i)$ les poids des forces internes et externes en p_i et Δt le pas de temps.

Le système est conditionnellement stable. Les forces internes stabilisent le modèle en contrôlant la position des sommets par une composante tangentielle sur la surface et la régularité par une composante normale. Les forces externes déplacent les sommets vers les données. Elles s'expriment comme un champ de vecteurs de déplacement, en termes de fonctions de distance le long de la normale en chaque p_i . Le comportement des points sous déformation est régi par des métriques contrôlant l'espacement relatif entre p_i et ses voisins, et des angles définissant le niveau de continuité géométrique du modèle. Le maillage initial est placé selon le centroïde du nuage de points, et sa forme correspond à une sphère unité.

Des opérations de déplacement de points et de raffinement se succèdent alors sur chaque face du maillage jusqu'à atteindre la précision voulue.

Ce type de modèle peut représenter des surfaces de n'importe quelle topologie (cf. figure 2.5), et sa manipulation est plus simple que les triangulations puisque chaque sommet a une connectivité constante. Cependant, seuls des triangles peuvent être obtenus en sortie, nécessitant un algorithme de conversion si des hexaèdres sont requis. En outre, bien que la manipulation du modèle soit directe, la localisation d'un point sur la surface est difficile puisqu'aucune paramétrisation n'est définie. Dans la même idée, il existe également des méthodes à fronts multiples (cf. les travaux de [Sharf et al., 2006]), mais présentant les mêmes désavantages.

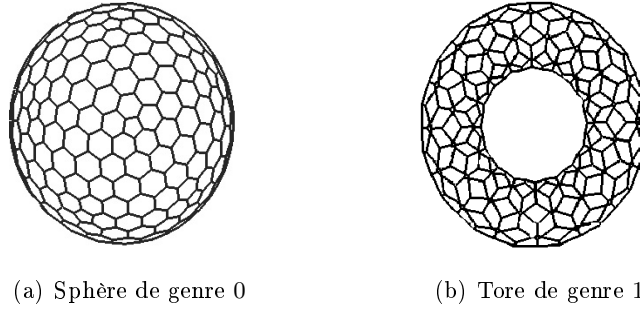


Figure 2.5. Exemples de 2-maillages simplex de genre différent (extraits des travaux de [Delingette, 2006]).

2.5.4 Reconstruction par fonctions polynomiales par morceaux

Les surfaces à pôles reposent sur une formulation paramétrique. Ces pôles sont des points de $\mathbb{R}^3$, qui forment ensemble un polytope servant de descripteur de contrôle à une surface ouverte ou fermée. La particularité de ce modèle est d'intégrer la notion de *paramétrisation*, permettant de parcourir la surface dans deux directions paramétriques (définies par les paramètres de forme). Trois structures à pôles utilisées de nos jours sont détaillées par la suite : les surfaces B-spline, NURBS et T-spline.

2.5.4.1 Présentation des surfaces à pôles

Les surfaces à pôles, présentées par exemple dans les travaux de [Piegl and Tiller, 1997], sont formulées sous forme de produit tensoriel selon deux directions paramétriques u et v :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \Phi_i(u) \Psi_j(v) P_{i,j} \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d] , \quad (2.14)$$

avec $\{P_{i,j}\}_{i=0,j=0}^{m,n}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ définissant le polyèdre de contrôle (cf. figure 2.6), et $[a, b] \times [c, d]$ le domaine paramétrique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les fonctions de base $\{\Phi_i\}$ et $\{\Psi_j\}$ sont choisies positives et de sorte qu'elles forment une partition de l'unité.

Tout point $S(u, v)$, situé à l'intérieur de l'enveloppe convexe des points de contrôle, est le barycentre des pôles $P_{i,j}$ affectés des masses $\Phi_i(u)\Psi_j(v)$.

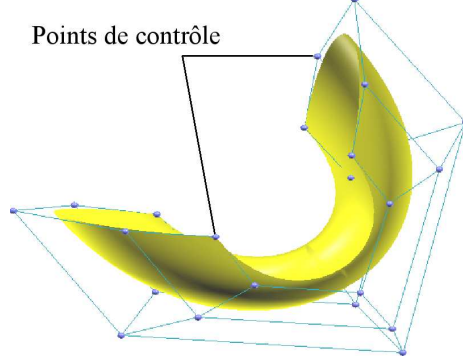


Figure 2.6. Exemple d'une B-spline ouverte avec son réseau de contrôle (obtenue à partir de [Design Mentor, 2003]).

Une surface B-spline repose sur des fonctions polynomiales par morceaux (cf. les travaux de [Daniel, 1989], [Piegl and Tiller, 1997], [Sederberg, 2011] pour plus de détails sur les courbes et surfaces B-splines), dont l'expression en tout point (u, v) s'écrit par :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) P_{i,j}, \quad (2.15)$$

avec k et l les ordres respectifs dans les directions u et v tels que $k \leq (m+1)$ et $l \leq (n+1)$. On utilise généralement l'intervalle paramétrique $[0, 1] \times [0, 1]$ pour la définition de la surface, aisément modifiable selon les besoins. Le nombre de points de contrôle est indépendant des ordres. Les termes $N_{i,k}$ et $N_{j,l}$ sont les fonctions de base, dont la particularité est d'avoir un support local gouverné par des séquences nodales ordonnées $\{\eta_i\}_{i=0}^{m+k}$ et $\{\zeta_j\}_{j=0}^{n+l}$ telles que :

$$\begin{cases} \eta_0 \leq \eta_1 \leq \dots \leq \eta_{m+k-1} \leq \eta_{m+k} \\ \zeta_0 \leq \zeta_1 \leq \dots \leq \zeta_{n+l-1} \leq \zeta_{n+l} \end{cases} \quad (2.16)$$

À partir de la séquence des $\{\eta_i\}$, le système récursif de l'équation 2.17 permet de construire l'ensemble des $\{N_{i,k}\}$:

$$\begin{cases} N_{i,1}(u) &= 1 \text{ si } u \in [\eta_i, \eta_{i+1}[, 0 \text{ sinon} \\ N_{i,s}(u) &= \frac{u-\eta_i}{\eta_{i+s-1}-\eta_i} N_{i,s-1}(u) + \frac{\eta_{i+s}-u}{\eta_{i+s}-\eta_{i+1}} N_{i+1,s-1}(u) \text{ avec } s = \{2, \dots, k\} \end{cases} \quad (2.17)$$

La convention $\frac{0}{0} = 0$ est adoptée. Un point de contrôle $P_{i,j}$ n'influence que les carreaux de la surface pour lesquels le produit $N_{i,k}(u)N_{j,l}(v)$ n'est pas nul, ce qui correspond à l'intervalle paramétrique $[\eta_i, \eta_{i+k}[\times [\zeta_j, \zeta_{j+l}[$. La formulation de l'équation 2.15 peut se réécrire en tenant compte du support local de chaque pôle :

$$S(u, v) = \sum_{q=i-k+1}^i \sum_{r=j-l+1}^j N_{q,k}(u) N_{r,l}(v) P_{q,r} \quad (u, v) \in [\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\zeta_j, \zeta_{j+1}] \quad (2.18)$$

Remarque 2.5.1

Si les séquences nodales sont modifiées de sorte que chaque pôle agisse globalement sur la surface, nous obtenons des surfaces de Bézier (présentées dans les livres de [Bézier, 1986] et [Piegl and Tiller, 1997]). Elles présentent cependant des limitations rendant le polyèdre de contrôle dépendant des ordres, ce qui d'un côté complexifie la gestion de formes complexes, mais d'un autre améliore grandement la qualité esthétique des surfaces.

La continuité d'une surface est liée à la répétition des valeurs nodales dans les séquences. Au départ, chaque séquence possède des nœuds à valeur unique. La surface est de continuité C^{k-1} si les ordres dans chaque direction sont identiques. Or, r répétitions d'un nœud dans une séquence conduisent à une surface C^{k-r} dans la direction paramétrique associée.

Pour une courbe, une multiplicité égale à l'ordre aux deux nœuds extrêmes oblige la courbe à passer par les premier et dernier pôles de son polygone de contrôle. Pour une surface ouverte, la multiplicité pour les deux vecteurs nodaux conduit à une interpolation des quatre « coins » $P_{0,0}$, $P_{m,0}$, $P_{0,n}$, $P_{m,n}$.

Présentée par [Piegl and Tiller, 1997] et [Sederberg, 2011], **une surface NURBS** (pour *Non Uniform Rational B-Spline*) est l'extension rationnelle d'une surface B-spline (son équivalent existe pour les surfaces de Bézier). Plus spécifiquement, une NURBS est la projection conique de centre O d'un espace $\mathbb{R}^4$ de points de coordonnées (x, y, z) pondérés par un poids w sur l'hyperplan $w = 1$. Elle permet de représenter de manière exacte une sphère, ce qui est impossible à obtenir avec une B-spline. Le descripteur de contrôle étant un complexe barycentrique, l'augmentation du poids associé à un pôle accentuera son influence sur la surface. L'évaluation en tout point (u, v) est définie par l'équation suivante :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) w_{i,j}} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] , \quad (2.19)$$

avec $\{w_{i,j}\}$ l'ensemble de poids associés aux points de contrôle $\{P_{i,j}\}$. Ces poids augmentent le contrôle en chaque point $P_{i,j}$. De même que pour les surfaces B-splines, considérer le support local des points de contrôle modifie la formulation de la surface :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{q=i-k+1}^i \sum_{r=j-l+1}^j N_{q,k}(u) N_{r,l}(v) w_{q,r} P_{q,r}}{\sum_{q=i-k+1}^i \sum_{r=j-l+1}^j N_{q,k}(u) N_{r,l}(v) w_{q,r}} \quad (u, v) \in [\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\zeta_j, \zeta_{j+1}] \quad (2.20)$$

Une surface T-spline peut être considérée comme une extension des NURBS, sans intégrer de paramètre de forme supplémentaire (cf. les notes de cours de [Sederberg, 2011]). Le principe repose sur la définition d'une surface continue dont le polytope de contrôle

ne respecte pas forcément une topologie quadrangulaire. L'intérêt se trouve au niveau du raffinement local, qui pour l'instant dispose obligatoirement les points de contrôle topologiquement dans une grille rectangulaire. De nombreux pôles sont donc superflus et n'apportent aucune information géométrique, en plus de créer diverses nuisances telles qu'une quantité plus importante de données ou des oscillations. Avec ce modèle, des suppressions partielles de lignes sont possibles. La particularité visuelle dans les grilles de contrôle des T-splines - les T-maillages - est l'apparition de « faces » appelées T-jonctions. Les nœuds associés à ces jonctions ont une valence de 2 dans une direction et de 1 dans l'autre.

Les travaux de [Wang et al., 2011] présentent en détails la formulation d'une T-spline, d'équation presque similaire à celle d'une NURBS. La différence réside dans l'utilisation du support nodal des fonctions de base. Leur équation est comme suit :

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m N_i(u)N_i(v)w_iP_i}{\sum_{i=0}^m N_i(u)N_i(v)w_i} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] , \quad (2.21)$$

avec $\{P_i\}_{i=0}^m$ les $(m+1)$ points de contrôle, w_i le poids associé à chaque P_i , $N_i(u)$ et $N_i(v)$ les fonctions de base B-spline définies avec un ordre 4 par les séquences nodales locales $\eta_i = [\eta_{i0}, \eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3}, \eta_{i4}]$ et $\zeta_i = [\zeta_{i0}, \zeta_{i1}, \zeta_{i2}, \zeta_{i3}, \zeta_{i4}]$ associées à chaque P_i . On peut noter la différence par rapport aux NURBS quant à l'absence de vecteurs nodaux globaux η et ζ pour la surface, et la perte de la notation de topologie quadrangulaire du réseau de pôles $\{P_i\}$ (que l'on retrouve dans l'équation 2.19). À chaque arête du T-maillage est ajouté un **intervalle nodal** (distance entre deux nœuds adjacents d'un vecteur nodal). Les valeurs des séquences η_i et ζ_i sont définies telles que les sommes des intervalles de chaque côté d'une face soient identiques.

Chaque surface paramétrique comporte un avantage significatif. À partir des surfaces B-splines, il est possible de définir une localisation précise des points, utile pour les opérations de raffinement, de décimation et de déformation. À partir des NURBS, l'ajout de la pondération aux points de contrôle permet d'augmenter le contrôle sur la surface. Les T-splines vont plus loin en transformant les vecteurs de nœuds en séquences nodales locales assignées à chaque point de contrôle, permettant ainsi de se débarrasser de la contrainte de topologie quadrangulaire et d'améliorer de ce fait la qualité de la surface. Cependant, l'ajout de contraintes augmente la complexité de leur formulation et donc de leur utilisation dans les procédures de reconstructions paramétriques. Les paragraphes suivants présentent les méthodes d'ajustement qui leur correspondent.

2.5.4.2 Ajustement de surfaces à pôles

L'ajustement de la surface paramétrique approximante (appelée *approximant* par la suite) sur le nuage de points fait intervenir des inconnues de *construction* et d'*ajustement*.

Les inconnues de construction font référence aux paramètres présents dans la formulation de la surface (*points de contrôle*, *séquences nodales*, *poids*). Les inconnues d'ajustement concernent la localisation paramétrique de chaque point du nuage sur l'approximant, résumant la *phase de paramétrisation* des données que nous verrons plus loin.

Soit $\{D_s\}_{s=0}^M$ l'ensemble des données à approcher, $\mathcal{U} = \{u_s\}_{s=0}^M$ et $\mathcal{V} = \{v_s\}_{s=0}^M$ les vecteurs stockant les valeurs de paramétrisation des données sur la surface. Elles sont ramenées dans l'intervalle $[0, 1] \times [0, 1]$. L'expression la plus commune pour quantifier l'écart entre l'approximant paramétrique S et le nuage de points D repose sur une formulation au sens des moindres carrés avec la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. La minimisation d'une fonction d'énergie f générale s'écrit comme suit :

$$f(\mathcal{U}, \mathcal{V}, P, w, \eta, \zeta) = \sum_{s=0}^M \|D_s - S(u_s, v_s)\|_2^2 \quad (2.22)$$

Les figures 2.7(a) à 2.8(b) illustrent la relation entre un point des données et un approximant ouvert puis fermé. La différence notable se retrouve dans le domaine paramétrique qui se referme sur lui-même dans l'une des directions pour la fermeture des formes.

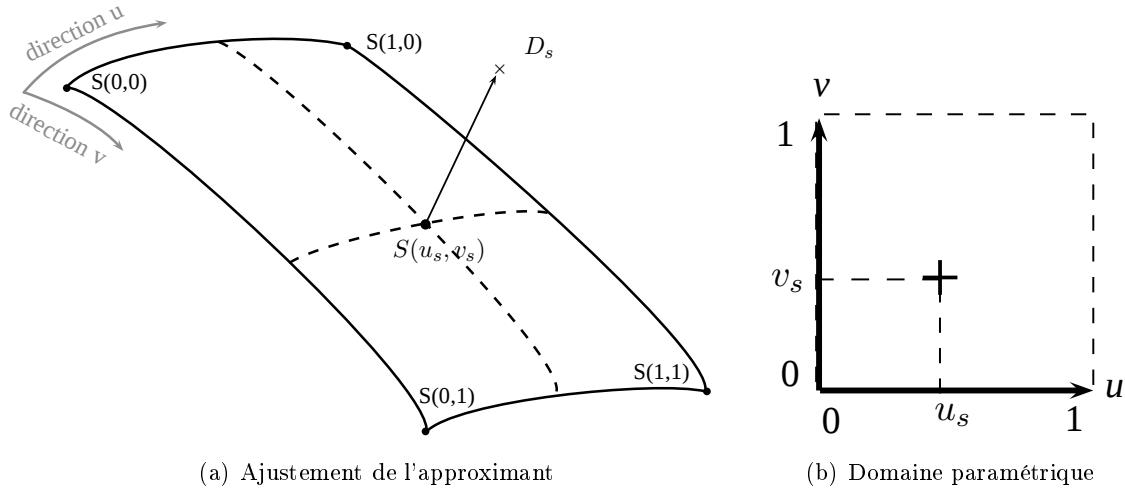


Figure 2.7. Problème d'ajustement pour une surface B-spline ouverte.

Les degrés de liberté sont finalement les points de contrôle P , leurs poids w , les deux séquences nodales η et ζ et les deux séquences de paramétrisation $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Les méthodes de minimisation se différencient par la prise en compte de certaines inconnues tout en fixant les autres, impliquant des surfaces B-splines ou NURBS.

2.5.4.3 Ajustement basé sur les pôles

Ce paragraphe concerne les nuages de points dont les données sont disposées dans une topologie quadrangulaire. La surface n'est décrite ici qu'au travers du réseau de contrôle, tous les poids sont donc fixés à 1.

Un problème majeur avec cette approche concerne le choix de la *paramétrisation* et des *séquences nodales* à prédéfinir avant de calculer les points de contrôle. Il est mis

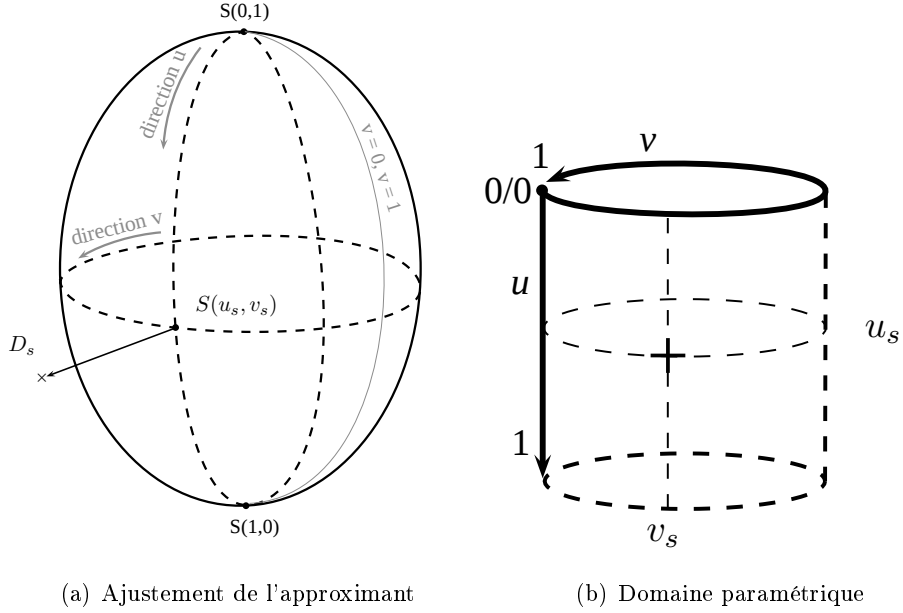


Figure 2.8. Problème d'ajustement pour une surface B-spline fermée.

en évidence en transformant la minimisation de l'équation 2.22 en un système d'équations linéaires à résoudre :

$$BP = D, \quad (2.23)$$

avec P les positions des pôles à calculer, B la matrice des fonctions de base, et D les données.

Les travaux de [de Boor, 1978] font référence à l'unicité de la solution si et seulement si la matrice B est de rang plein (condition de Schoenberg-Whitney, cf. les travaux de [Schoenberg and Whitney, 1949]). En effet, si les données ne sont pas bien réparties, il se pourrait qu'aucun paramètre ne soit compris entre deux nœuds de la séquence, impliquant une colonne de 0 dans la matrice du système. Le choix de la paramétrisation et des séquences nodales est donc primordial.

Les travaux de [de Boor, 1978] et [Daniel, 1989] discutent d'un ensemble de méthodes pour les établir, chacune spécifique à une géométrie de nuages de points :

- la *paramétrisation uniforme* définit un pas constant entre les paramètres : la méthode est peu efficace, car elle ignore la géométrie décrite par les données ;
- la *paramétrisation par la moyenne* de [de Boor, 1978] : le paramètre η_i par exemple est obtenu par la moyenne des valeurs nodales u_{i+1} à u_{i+k-1} . Elle suppose cependant que le vecteur de nœuds soit fixé ;
- la *paramétrisation par longueurs des cordes* se base sur la distance entre deux points successifs de l'échantillon (cf. les travaux de [Rogers and Satterfield, 1982]) : cette méthode est efficace et donc privilégiée dans le choix des paramétrisations ;
- la *paramétrisation par longueurs des arcs* se base sur le calcul de l'arc entre deux points consécutifs à partir d'une première interpolation (cf. les travaux de [Bézier, 1986]) :

elle apporte peu d'améliorations par rapport aux longueurs des cordes ;

- la *paramétrisation centripète* détermine un pas minimisant l'accélération centripète (cf. les travaux de [Lee, 1989]) : elle présente de meilleurs résultats que les longueurs de cordes pour décrire des arêtes vives ;
- la *paramétrisation de [Foley and Nielson, 1989]* considère les distances et les différences d'angles entre les données : elle tient compte des arêtes et des coins en ralentissant la distribution des paramètres. Elle fonctionne moins bien pour les approximations que pour les interpolations.

Les séquences nodales $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ peut être aussi établies de plusieurs manières :

- une répartition uniforme des nœuds fixe un écartement constant ;
- dans les travaux de [de Boor, 1978], une répartition moyenne des paramètres est effectuée pour les interpolations : le nœud u_{i+k} est obtenu par la moyenne sur les paramètres η_{i+1} à η_{i+k-1} . Dans ses travaux, [Daniel, 1989] a étendu cette méthode pour les approximations avec une résolution au sens des moindres carrés. Un gain significatif est obtenu sur le conditionnement de la matrice du système créé.

Pour interpoler les extrémités de la courbe/surface, une multiplicité des nœuds aux extrémités égale à l'ordre est appliquée.

Comme précisé par [Farin, 2001], il n'existe pas de réponse universelle pour déterminer la paramétrisation et des séquences nodales. Les conclusions de [Piegl and Tiller, 1997] et de [Daniel, 1989] font toutefois état qu'un choix judicieux est une paramétrisation par les longueurs des cordes et une répartition moyenne pour les séquences nodales. Cependant, il faut noter que seule une garantie sur l'inversibilité *théorique* de la matrice du système à résoudre est apportée. Dans la pratique, il faut mettre en évidence les problèmes numériques liés au *conditionnement* de la matrice. Du fait qu'il puisse être relié à l'ordre de la surface paramétrique, le cas est ainsi d'autant plus délicat avec une surface de Bézier pour laquelle le nombre de pôles (et donc le nombre de colonnes de la matrice) est égal à l'ordre. Il faut pouvoir trouver un juste milieu entre l'ordre, le nombre de pôles, et la tension de la surface.

2.5.4.4 Ajustement considérant la paramétrisation

Dans l'idéal, la réduction de la fonction $f(\mathcal{U}, \mathcal{V}, P)$ repose sur une détermination optimale des vecteurs de paramétrisation $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Le calcul de leurs valeurs « exactes » étant trop coûteux, plusieurs études ont été menées en vue de les approcher. Elles peuvent se classer en deux catégories majeures.

Les approches itératives alternées sont basées sur le principe de relaxation. Elles consistent en l'alternance d'une étape de reparamétrisation et d'une étape de réduction de la fonctionnelle par rapport aux points de contrôle. Dans la littérature, les techniques diffèrent principalement par la méthode de reparamétrisation, tandis qu'une minimisation aux moindres carrés linéaire est souvent utilisée pour réduire f par rapport aux pôles.

Le cas général que l'on rencontre pour la paramétrisation consiste à projeter orthogonalement les données sur les plans tangents de la surface. Soient S une surface B-spline, D_s un point des données, $T_u(u_s, v_s)$ et $T_v(u_s, v_s)$ les deux dérivées partielles au point $S(u_s, v_s)$. Déterminer le couple (u_s, v_s) consiste à résoudre le système non-linéaire suivant, illustrée par la figure 2.9 :

$$\begin{cases} (D_s - S(u_s, v_s)) \bullet T_u(u_s, v_s) = 0 \\ (D_s - S(u_s, v_s)) \bullet T_v(u_s, v_s) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

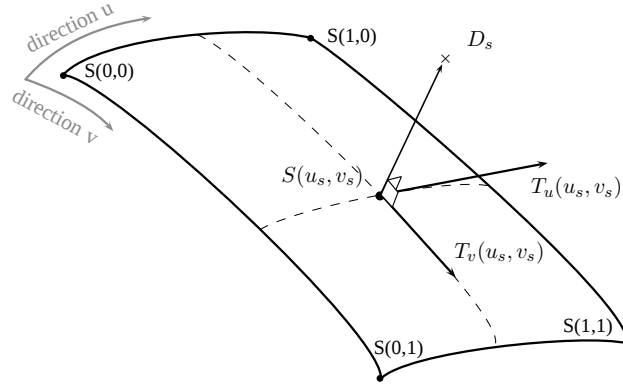


Figure 2.9. Projection orthogonale sur une surface B-spline ouverte.

Dans cette optique, nous pouvons citer les travaux récents de [Chambelland, 2006]. À partir de données possédant une topologie quadrangulaire, l'auteur propose une méthode d'ajustement basée sur une minimisation alternée entre une paramétrisation par projection orthogonale et une réduction de la fonctionnelle par descente de gradient.

Différemment, les méthodes comme celle de [Hoschek, 1988] se basent sur une correction de type Newton-Raphson pour résoudre le système 2.24. [Saux and Daniel, 2003] proposent de résoudre précisément le problème de reparamétrisation par la technique d'optimisation des gradients conjugués de Fletcher-Reeves.

Bien que l'étape de paramétrisation a un impact notable dans la précision des processus d'ajustement, elle exerce également une influence non-négligeable sur la vitesse et la régularité de la convergence.

Les approches itératives globales considèrent simultanément les inconnues $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et P . La technique de résolution repose souvent sur la méthode de minimisation aux moindres carrés non-linéaire de Levenberg-Marquardt. [Speer et al., 1998] ont initié ce type d'approches pour les courbes B-splines, et ont constaté de meilleurs résultats que [Hoschek, 1988] en termes de temps de calcul et de précision d'approximation. Une jacobienne doit toutefois être manipulée pendant le processus, de dimension $d(N+1)((N+1) + d(m+1))$ (avec d la dimension de l'espace dans lequel on se situe, $(m+1)$ le nombre de points de contrôle et $(N+1)$ le nombre de point des données).

Une troisième famille pourrait regrouper des approches plus singulières, comme l'approche de [Alhanaty and Bercovier, 2001]. Les inconnues des problèmes de reconstruction sont séparées en utilisant la théorie du contrôle optimal. Plusieurs notions sont alors introduites, telles que les variables d'état x , les variables de contrôle u , l'équation d'état $A(x, u) = 0$ et la fonction de coût à minimiser $J(x, u)$. L'idée est de trouver un nouveau contrôle $\bar{u}$ tel que pour tout état $\bar{x}$ qui vérifie $A(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, la fonction de coût soit minimal :

$$J(\bar{x}, \bar{u}) = \min_{(x, u)} \{J(x, u) : A(x, u) = 0\} \quad (2.25)$$

La formulation est transposée pour les courbes B-splines, où les points de contrôle sont les variables d'état, et les paramètres les variables de contrôle. La résolution de J est basée sur une descente de gradient à pas optimal, consistant à déterminer les nouvelles valeurs de paramètres.

Contrairement aux modèles précédents, des alternatives ne faisant pas intervenir les pôles mais d'autres inconnues de la description de la surface d'ajustement existent.

2.5.4.5 Ajustement sans les pôles

Différemment, la méthode de [Goldenthal and Bercovier, 2004] fixe tout d'abord les points de contrôle à l'initialisation. Elle propose une minimisation alternée de la fonctionnelle par rapport aux valeurs de la paramétrisation et aux séquences nodales. Le système est restreint aux courbes, bien que la modélisation soit *a priori* transposable aux surfaces.

Cependant, la méthode implique plusieurs contraintes à respecter comme la condition de Schoenberg-Whitney, ce qui aura forcément un impact notable sur les temps de calcul. En outre, l'optimisation est moins facile à visualiser et à interpréter géométriquement avec ce type de variables qu'avec des pôles.

Un ajustement à partir d'une surface B-spline consiste à modifier la paramétrisation et le réseau de contrôle. En utilisant des NURBS, les poids sont maintenant considérés pour l'ajustement.

2.5.4.6 Ajustement de surfaces NURBS en considérant les poids

Les travaux de [Randrianarivony and Brunnet, 2002] définissent une minimisation pour les NURBS par rapport aux poids, à la séquence nodale et aux points de contrôle, alors que les paramètres sont fixés. Plus récemment, [Chambelland and Daniel, 2006] fixent les séquences nodales mais considère à la place les paramètres.

Bien que ces méthodes soient robustes en 2D, il faut rester prudent lors de la transposition aux surfaces suite à la nature fortement non-linéaire de la fonctionnelle à optimiser. [Chambelland, 2006] a proposé une minimisation alternée pour les surfaces NURBS, mais le gain de précision se trouve être insignifiant alors que les temps de calcul sont bien supérieurs.

2.6 Synthèse

L'étude bibliographique dans cette partie nous a permis d'obtenir une vue d'ensemble des approches possibles pour reconstruire notre surface. Quelle que soit la méthode, de nombreux paramètres de forme entrent en jeu, ce qui nécessite de fixer nos choix dès le départ d'après nos contraintes : obtenir une forme fermée, « lisse », et contrôlable géométriquement en tout point de $\mathbb{R}^3$, mais surtout pouvoir se déplacer sur la surface pour faciliter la manipulation de sa géométrie, voire de sa topologie.

Au travers de la littérature, nous avons pu constater que la représentation implicite propose de nombreuses approches pour construire une fonction scalaire évaluant la distance entre la surface et les données. La prise en compte de la topologie est un atout important, mais pas indispensable dans notre cas d'étude. En outre, la détermination indirecte de la surface ne facilite pas l'emploi d'opérations de modification de maillages. Un changement même local nécessiterait par exemple une ré-estimation des paramètres pondérant les fonctions de base lisses des approches radiales.

La représentation discrète définit quant à elle des méthodes robustes que nous retrouvons dans les travaux de [Heimann and Delingette, 2011] et de [Sharf et al., 2006]. Mais la localisation sur ces maillages reste problématique pour leur manipulation. En outre, les opérations de raffinement local pour l'ajout de détails seraient limitées à une interpolation linéaire sur les éléments simpliciaux du maillage.

Différemment, la représentation paramétrique permet de définir une direction de parcours sur les surfaces. La continuité et la discrétisation de la forme obtenue sont contrôlables. Cette approche impose cependant diverses opérations à ne pas négliger pour aboutir à une reconstruction de surface de qualité (contraintes de fermeture, paramétrisation des données, ...). Les fonctionnelles peuvent en outre intégrer de nombreux paramètres de forme, mais des précautions sont à prendre pour éviter les pièges des minima locaux.

Finalement, par rapport aux corps de genre 0 que nous avons à reconstruire, conserver une approche paramétrique pour la suite est plus judicieux pour satisfaire l'ensemble de nos contraintes géométriques. Nous présentons au chapitre suivant une nouvelle méthode de reconstruction en nous basant sur les travaux de [Chambelland, 2006], à savoir une approche paramétrique basée sur les moindres carrés. En outre, nous insistons sur le fait que le temps de calcul n'est pas un facteur intégré par la suite comme contrainte dans la construction du modèle géométrique. Bien qu'il faille obtenir des résultats en un temps « raisonnable », l'objectif n'est pas de fournir un système temps-réel.

CONSTRUCTION D'UNE NOUVELLE MÉTHODE D'AJUSTEMENT

Sommaire

3.1	Introduction	54
3.2	Construction d'une surface paramétrique d'approximation . .	55
3.2.1	Formulation du problème	55
3.2.2	Surfaces périodiques de genre 0	57
3.2.3	Conclusions	65
3.3	Initialisation itérative par un axe médian non-linéaire	65
3.3.1	Formulation du problème	66
3.3.2	Calcul de l'axe non-linéaire	67
3.3.3	Positionnement du réseau de contrôle de la surface initiale	75
3.3.4	Implémentation et résultats	80
3.3.5	Conclusions	85
3.4	Ajustement de la nouvelle surface aux données	86
3.4.1	Formulation du problème	86
3.4.2	Fonctionnelle d'énergie bidirectionnelle	86
3.4.3	Régularisation de l'énergie	88
3.4.4	Réduction de la fonctionnelle	92
3.4.5	Étude de la convergence de l'ajustement de la surface	94
3.4.6	Implémentation et résultats	94
3.4.7	Conclusions	104
3.5	Synthèse	105

3.1 Introduction

L'étude présentée au chapitre précédent nous a permis d'effectuer un tour d'horizon des techniques actuelles de reconstruction d'une surface. Nous avons vu que la nature des données issues de l'étape d'acquisition a motivé le choix d'une approche reposant sur un modèle déformable. En partant d'un nuage de points sans information *a priori*, la méthodologie générale de construction doit répondre à 3 règles pour servir de support aux déformations mécaniques :

1. créer une paramétrisation pour les problèmes de localisation, de déplacement, de connectivités et de changement de densité de la discrétisation de la surface ;
2. identifier les topologies, détecter les composants non-connexes ;
3. être robuste au bruit et parties manquantes dans les données.

Cependant, puisque les organes à construire sont de genre 0, les méthodes à topologie adaptative sont mises de côté au profit de la paramétrisation. Puisqu'ils sont également considérés en tant que corps « lisses » - i.e. qu'ils ne présentent visuellement ni singularité, ni arête vive - une continuité au moins C^1 devra être garantie en tout point de la surface.

Ce chapitre présente finalement la procédure de construction de la surface du modèle géométrique, par une caractérisation de l'écart aux données au sens des moindres carrés régularisée. Nous répondrons aux trois questions suivantes par la suite : « Comment définir la forme paramétrique pour qu'elle soit fermée et au moins C^1 ? », « Quelle énergie choisir pour quantifier l'écart aux données ? », « Quelle méthode de réduction utiliser pour approcher le contour des organes ? ».

Afin de faciliter la compréhension de la procédure globale présentée dans ce mémoire, le schéma 3.1 sera repris à la fin de chaque étape-clé en révélant l'opération suivante à effectuer. Comme illustré par l'extrémité gauche de la figure, nous partons du nuage de point décrivant le contour des organes.

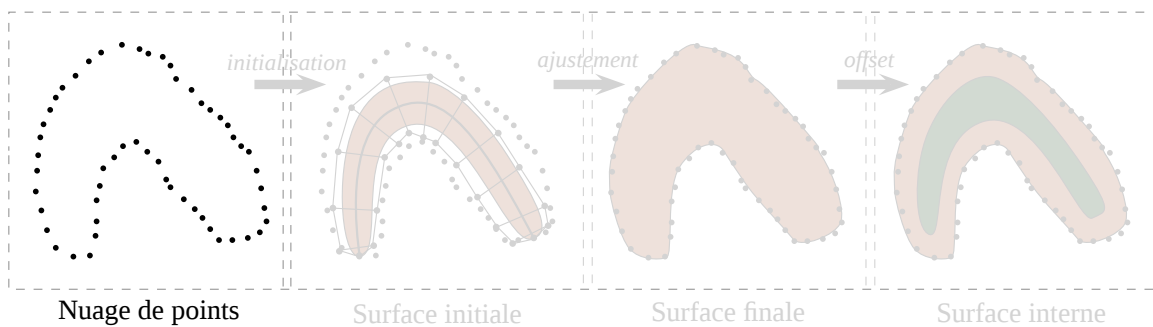


Figure 3.1. Étapes de la modélisation géométrique.

3.2 Construction d'une surface paramétrique d'approximation

Le processus global de reconstruction nécessite d'une part d'associer les besoins aux propriétés de la surface initiale, et d'autre part de les conserver pendant l'opération d'ajustement. Après une formulation du problème dans lequel nous rappelons les inconnues à déterminer pour construire une surface paramétrique, nous manipulons ces différents paramètres de forme pour comprendre leur comportement. La prise en compte des contraintes définit ensuite la forme *fermée au moins* C^1 . Nous reprenons dans ce but la notion de *périodicité* des surfaces paramétriques.

3.2.1 Formulation du problème

La forme paramétrique est basée sur une surface B-spline. Nous rappelons que les NURBS ne sont pas considérées, afin de ne pas avoir à approcher une solution dans un espace à forte présence de minima locaux. Nous rappelons la formulation non-rationnelle de la surface S :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) P_{i,j} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] , \quad (3.1)$$

avec k et l les ordres respectifs dans les directions u et v , $\{P_{i,j}\}$ les points de contrôle, et $\{N_{i,k}\}$ et $\{N_{j,l}\}$ les fonctions de base établies à partir des deux séquences nodales η et ζ .

Toutefois, nous retrouvons généralement ces surfaces dans des configurations de forme ouverte avec une interpolation des 4 « coins » de la grille de points de contrôle. Une surface complexe est alors reconstruite par un ensemble de carreaux (cf. [Chambelland, 2006]) liés entre eux par des conditions assurant la continuité globale.

Cependant, la construction d'une surface fermée au moins C^1 -continue peut être obtenue en imposant des contraintes sur le *réseau de contrôle* et les *vecteurs nodaux*. Avant de les définir, les paragraphes 3.2.1.1 et 3.2.1.2 présentent brièvement comment les pôles et les séquences nodales influencent les formes paramétriques et les raccords entre elles.

3.2.1.1 Manipulation du réseau de contrôle

Afin de visualiser plus facilement la condition de raccord de classe C^r , considérons l'union de deux courbes de Bézier avec l'opérateur de différence Δ . Soient $\{Q_i\}_{i=0}^n$ et $\{\hat{Q}_j\}_{j=0}^n$ leurs pôles respectifs. Les notations utilisées sont celles de la figure 3.2.1.1. La formalisation correspondante s'écrit :

$$\Delta^j Q_{n-j} = \Delta^j \hat{Q}_0, \quad j = 0 \dots r \quad (3.2)$$

Nous obtenons alors comme continuité paramétrique :

- un raccordement C^0 pour $Q_3 = \hat{Q}_0$;
- un raccordement C^1 pour $Q_3 - Q_2 = \hat{Q}_1 - \hat{Q}_0$;
- un raccordement C^2 pour $Q_3 - 2Q_2 + Q_1 = \hat{Q}_2 - 2\hat{Q}_1 + \hat{Q}_0$.

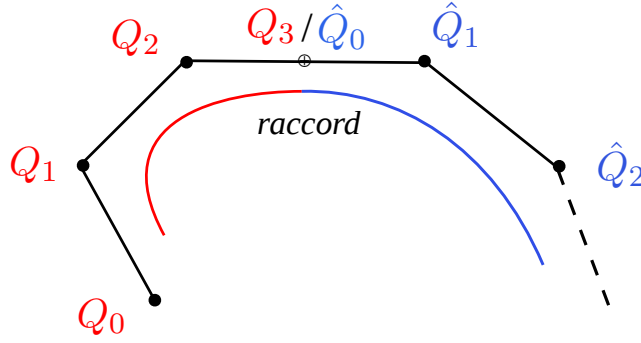


Figure 3.2. Raccord C^2 entre deux courbes B-splines.

Contrairement aux formes de Bézier pour lesquelles la condition sur les pôles est suffisante, des modifications sont à apporter aux vecteurs nodaux pour les formes B-splines. Elles varient selon qu'il s'agisse d'une simple fermeture C^0 , d'une continuité précise à atteindre au point de raccord entre deux extrémités, ou d'une reparamétrisation pour la fusion de deux morceaux de courbes ou surfaces (cf. les travaux de [Tai et al., 2003]).

En considérant la surface de la formulation 3.1, la fermeture du réseau $\{P_{i,j}\}$ dans une direction paramétrique revient par exemple à définir l'opérateur comme suit sur chaque isocourbe $\{P_{i,\cdot}\}$:

$$\begin{cases} \Delta P_{i,\cdot} = P_{i+1,\cdot} - P_{i,\cdot}, & \Delta^0 = I \\ \Delta^j P_{i,\cdot} = \Delta^{j-1} P_{i+1,\cdot} - \Delta^{j-1} P_{i,\cdot} \end{cases} \quad (3.3)$$

avec I l'opérateur identité.

3.2.1.2 Manipulation des séquences nodales

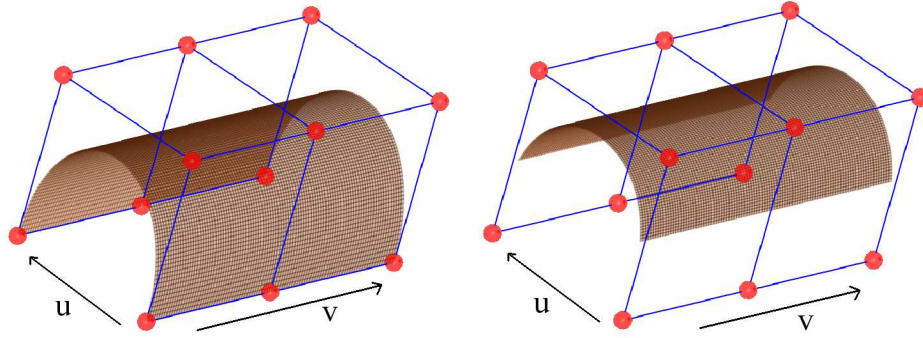
Le choix des séquences nodales est important puisqu'il influe également sur la forme de la surface. Les figures 3.3(a) et 3.3(b) illustrent ce propos, en représentant deux B-splines d'ordre $k = 4$ et $l = 3$ dans les directions respectives u et v , et de même réseau de contrôle P de dimension 4×3 . Seules les séquences nodales sont différentes. Soient η la séquence de taille $4 + k = 8$ dans la direction u et ζ de taille $3 + l = 6$ dans la direction v .

En définissant une multiplicité égale à l'ordre de part et d'autre des vecteurs définis à l'équation 3.4, l'interpolation de la surface aux 4 pôles extrêmes est forcée (cf. figure 3.3(a)).

$$\begin{cases} \eta = [\underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_{k \text{ éléments}} \ \underbrace{1 \ 1 \ 1 \ 1}_{k \text{ éléments}}] \\ \zeta = [\underbrace{0 \ 0 \ 0}_{l \text{ éléments}} \ \underbrace{1 \ 1 \ 1}_{l \text{ éléments}}] \end{cases} \quad (3.4)$$

A *contrario*, la figure 3.3(b) avec les séquences de l'équation 3.5 présente le résultat sans cette multiplicité.

$$\begin{cases} \eta = [\underbrace{-0.75 \ -0.5 \ -0.25 \ 0}_{k \text{ éléments}} \ \underbrace{1 \ 1.25 \ 1.5 \ 1.75}_{k \text{ éléments}}] \\ \zeta = [\underbrace{0 \ 0 \ 0}_{l \text{ éléments}} \ \underbrace{1 \ 1 \ 1}_{l \text{ éléments}}] \end{cases} \quad (3.5)$$


 (a) Séquences nodales avec multiplicité en u (b) Séquence nodale sans multiplicité en u
Figure 3.3. Construction de deux surfaces B-splines.

3.2.2 Surfaces périodiques de genre 0

Afin d'obtenir des surfaces fermées d'une continuité suffisante, la notion de *périodicité* est introduite. Elle assure la continuité des tangentes et des courbures sur l'intégralité du domaine paramétrique.

3.2.2.1 La périodicité par l'exemple

Ce paragraphe présente la périodicité appliquée à une courbe. L'idée est transposée aux surfaces au paragraphe suivant. L'objectif est de définir une courbe fermée d'ordre k et C^{k-2} -continue. Considérons tout d'abord la courbe B-spline C ouverte de paramètre t , évoluant dans $\mathbb{R}^3$:

$$C(t) = \sum_{i=0}^m N_{i,k}(t) Q_i \quad t \in [0, 1] , \quad (3.6)$$

avec $\{Q_i\}_{i=0}^m$ les $(m+1)$ points de contrôle **distincts** et $\{N_{i,k}\}_{i=0}^m$ les fonctions de base. La courbe C est C^{k-2} par construction.

Intuitivement, sa fermeture consisterait à ajouter un point de contrôle tel que $Q_{m+1} = Q_0$. Cependant, pour conserver la continuité au raccord, nous ne pouvons pas simplement avoir une multiplicité égale à l'ordre de part et d'autre du vecteur nodal, ce qui obligerait les extrémités de C à être en Q_0 .

Pour y remédier, la courbe est alors rendue périodique en **faisant coïncider les $(k-1)$ premiers pôles et intervalles paramétriques aux $(k-1)$ derniers**, vérifiant de ce fait l'égalité $C(0) = C(1)$ (cf. les travaux de [Jaillet et al., 1997]). La courbe devient :

$$C(t) = \sum_{i=0}^{m+k-1} N_{i[m+1],k}(t) Q_{i[m+1]} \quad t \in [0, 1] , \quad (3.7)$$

avec $[\cdot]$ l'opérateur modulo. La séquence nodale η est définie de telle sorte que :

$$\eta = \underbrace{[\eta_0 \quad \dots \quad \eta_{k-2}]}_{(k-1) \text{ éléments}} \underbrace{[\eta_{k-1} \quad \dots \quad \eta_{m+k}]}_{(m+2) \text{ éléments}} \underbrace{[\eta_{m+k+1} \quad \dots \quad \eta_{m+2k-1}]}_{(k-1) \text{ éléments}} \quad (3.8)$$

Nous posons $\eta_{k-1} = 0$ et $\eta_{m+k} = 1$. Puis, pour $i = \{0, \dots, k-2\}$, nous avons :

$$\begin{cases} \eta_{k-2-i} = \eta_{k-1-i} - (\eta_{m+k-i} - \eta_{m+k-i-1}) \\ \eta_{m+k+i+1} = \eta_{m+k+i} + (\eta_{k+i} - \eta_{k+i-1}) \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous pouvons vérifier l'égalité entre la cardinalité de la séquence η qui est de $(m+2k)$ et la somme de l'ordre k et de la taille de polygone de contrôle $(m+1) + (k-1)$, soit $(m+2k)$. La périodicité est illustrée par la figure 3.4, dans laquelle un même code couleur est appliqué pour mettre en évidence les intervalles paramétriques identiques.

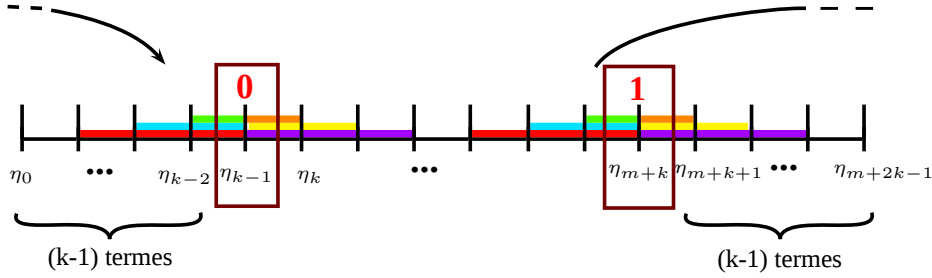


Figure 3.4. Séquence nodale η périodique dans l'intervalle $[0, 1]$.

Remarque 3.2.1

À l'initialisation, le vecteur η peut être facilement construit avec une répartition uniforme des nœuds. Cependant, en cas d'insertion nodale proche de η_{k-1} et η_{m+k} , l'égalité entre les premiers et derniers intervalles paramétriques peut ne plus être vérifiée. La formulation 3.9 permet de mettre à jour les intervalles d'une extrémité à l'autre.

Les courbes de la figure 3.5 sont d'ordre 3. La courbe de la figure 3.5(a) est ouverte et est construite avec la séquence nodale $\eta = [0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 1 \ 1 \ 1]$. La multiplicité de part et d'autre de η fait passer la courbe par les pôles extrêmes Q_0 et Q_3 . La courbe de la figure 3.5(b) est fermée en ajoutant le point de contrôle Q_4 , avec $\eta = [0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ 1]$. Une B-spline périodique est construite à la figure 3.5(c), avec un vecteur nodal uniforme $\eta = [-0.5 \ -0.25 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1.25 \ 1.5]$ et 2 points de contrôle supplémentaires. On constate que la courbe ne passe plus par les pôles.

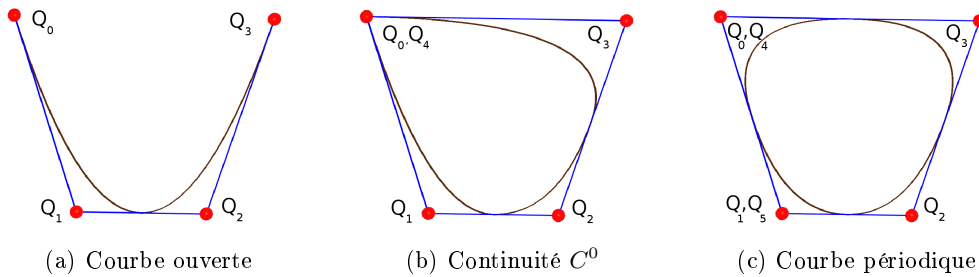


Figure 3.5. Construction de trois courbes B-splines.

Bien que la transposition de la périodicité semble directe pour les surfaces, considérer deux directions paramétriques nécessite des précautions.

3.2.2.2 Surface torique et dégénérescence

Une surface B-spline évolue selon deux directions paramétriques. Cependant, si elle est transformée de sorte qu'elle soit périodique dans chaque direction, une surface torique est créée (cf. figures 3.6(a) à 3.6(d)). Soit S une surface B-spline bipériodique dans $\mathbb{R}^3$ de paramètres u et v et d'ordres k et l , définie par :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{m+k-1} \sum_{j=0}^{n+l-1} P_{i[m+1], j[n+1]} N_{i[m+1], k}(u) N_{j[n+1], l}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (3.10)$$

avec $[\cdot]$ l'opérateur modulo, $\{P_{ij}\}_{i,j=0,0}^{m,n}$ les $(m+1) \times (n+1)$ points de contrôle distincts, $\{N_{i,k}(u)\}_{i=0}^m$ et $\{N_{j,l}(v)\}_{j=0}^n$ les fonctions de base.

Similairement au paragraphe précédent, les séquences η et ζ sont construites à partir de la formulation 3.8. La surface vérifie ainsi, pour tout (u, v) dans $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\begin{cases} S(u, 0) = S(u, 1) & \forall u \in [0, 1] \\ S(0, v) = S(1, v) & \forall v \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.11)$$

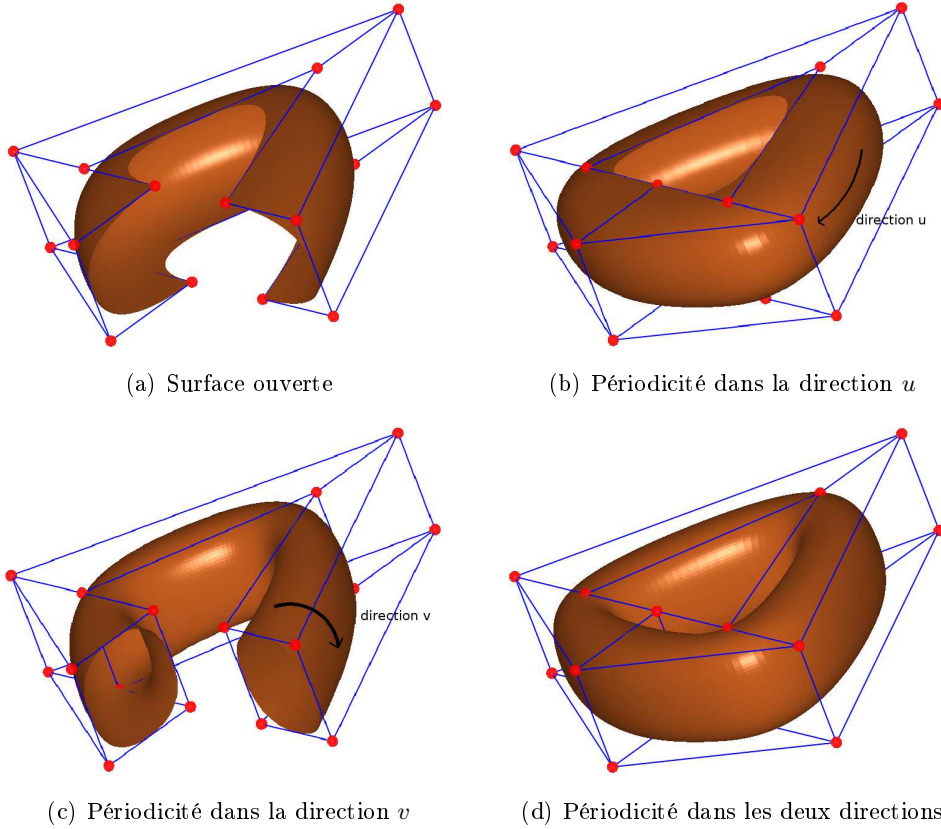


Figure 3.6. Fermeture dans les directions paramétriques.

Cette surface bipériodique est toutefois de genre 1, alors que nous voulons un genre 0. Présenté différemment, un tore peut se définir par une surface de révolution en effectuant la révolution d'un cercle $\mathcal{C}_1$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ autour d'un axe Δ (cf. figure 3.7). La trajectoire circulaire de $\mathcal{C}_1$ représente un second cercle noté $\mathcal{C}_2$.

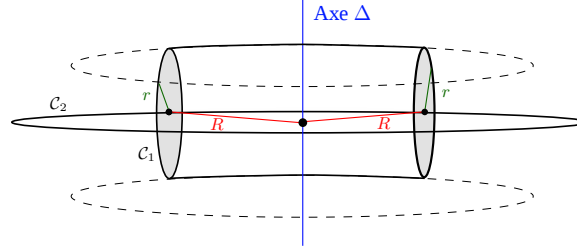


Figure 3.7. Partie d'un tore avec ses deux cercles de construction.

Considérons deux paramètres r et R , les rayons respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Dans le cas d'un tore « classique » (en forme de beignet), $R > r$ (cf. figure 3.8(a)). Lorsque $R = r$, le tore est **à collier nul** (cf. figure 3.8(b)). Finalement nous avons un cas particulier quand $R = 0$, puisque la surface devient homéomorphe à une sphère (cf. figure 3.8(c)).

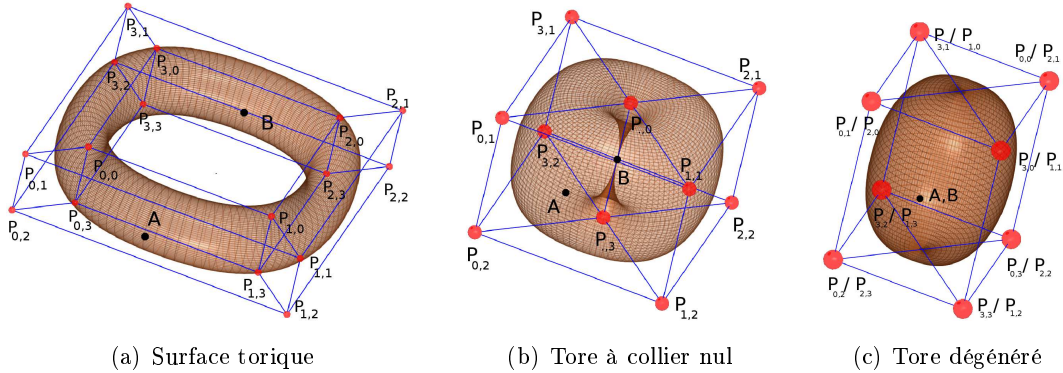


Figure 3.8. Contraction du réseau de contrôle.

Cependant, la figure 3.8(c) ne peut pas être utilisée comme une forme de genre 0. De la figure 3.8(a) à 3.8(c), le même réseau de contrôle est utilisé, mais la réduction du rayon R de $\mathcal{C}_2$ finit par créer un polytope avec des doublons de points de contrôle. Suite à la dégénérescence, la surface torique doit être vue comme une somme de deux couches : l'une correspond à la partie extérieure du tore, et l'autre à la partie intérieure. Cette superposition a pour conséquence que la surface est parcourue deux fois sur le domaine paramétrique, car à chaque évaluation de la surface il existe deux couples paramétriques permettant d'y accéder : les points A et B, au départ de part et d'autre du tore sur la figure 3.8(a), finissent de ce fait par être confondus.

Le paragraphe suivant propose une adaptation de la structure du tore pour construire la surface initiale et éviter les pôles-doubles. En reprenant le principe de la figure 3.6(b), un demi-tore de rayon $R = 0$ est construit.

3.2.2.3 Demi-tore dégénéré

Nous allons maintenant travailler de façon différente dans chaque direction paramétrique. La surface à obtenir étant de forme ellipsoïdale et par analogie avec un globe terrestre, **la direction** u dont il sera question est la **direction des « parallèles »** de la forme. Similairement, **la direction** v est la **direction des « méridiens »**. En outre, comme toute forme paramétrique homéomorphe à une sphère générée à partir d'un seul carreau, il faudra tenir compte de la présence de **deux singularités** de part et d'autre des méridiens (cette approche est à différencier des travaux de [Shi et al., 2011], qui décomposent la surface en carreaux de Coons nécessitant de contraindre la continuité sur chaque frontière séparément).

La surface est tout d'abord construite à partir **d'un demi-tore**, consistant à appliquer la périodicité dans la direction u uniquement :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{m+k-1} \sum_{j=0}^n P_{i[m+1],j} N_{i[m+1],k}(u) N_{j,l}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (3.12)$$

Pour ne pas obtenir de surface torique, le réseau dans la direction v et la séquence nodale ζ associée sont soumis à des contraintes de construction. Nous décrivons ci-dessous la procédure au travers d'un exemple.

Construction du réseau de contrôle

Les contraintes à apporter au réseau de contrôle $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{m,n}$ doivent garantir un contrôle sur la continuité de la surface. Comme introduit précédemment, le travail dans la direction u consiste à refermer la surface en tenant compte de la superposition des pôles. Une forme cylindrique est ainsi obtenue à partir d'un réseau ouvert (cf. figure 3.9(a)). Pour obtenir un genre 0, nous ne pouvons cependant pas simplement regrouper l'ensemble des pôles des iso-courbes aux extrémités du cylindre (cf. figure 3.9(b)), ce qui ne permettrait pas d'atteindre une continuité supérieure à C^0 . Nous proposons de ce fait la construction suivante.

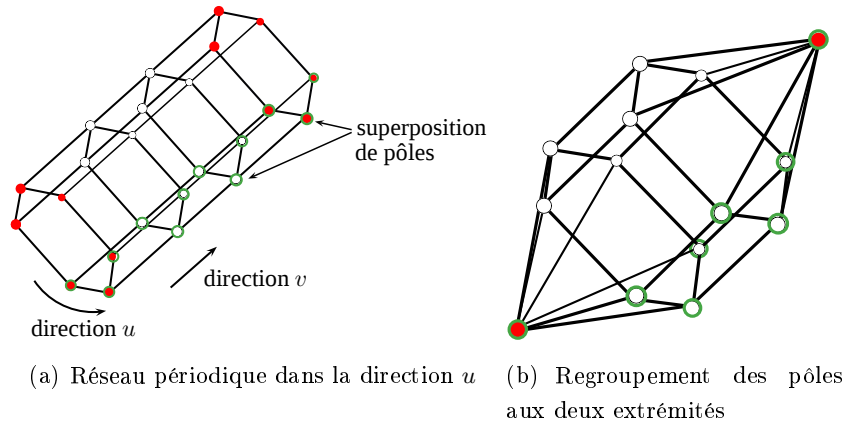


Figure 3.9. Exemple de fermeture d'un réseau dans la direction u , avec $k = 4$. Les pôles aux extrémités sont en rouge, et les superpositions pour la périodicité sont en vert.

Nous partons d'une polyligne planaire $\mathcal{I}$ de points de contrôle, en forme de demi-ellipse, centrée en $(0, 0, 0)$, avec deux points extrêmes $p_1(0, 1, 0)$ et $p_2(0, -1, 0)$ (cf. figure 3.10(a)). Elle correspond à l'ensemble $\{P_{0,\cdot}\}$ dans le réseau de la surface. Nous choisissons ensuite d'appliquer une rotation autour de (Oy) par pas angulaire constant $\beta = \frac{2\pi}{m+1}$, créant ainsi les m isocourbes de contrôle suivantes $\{P_{i,\cdot}\}_{i=1}^m$.

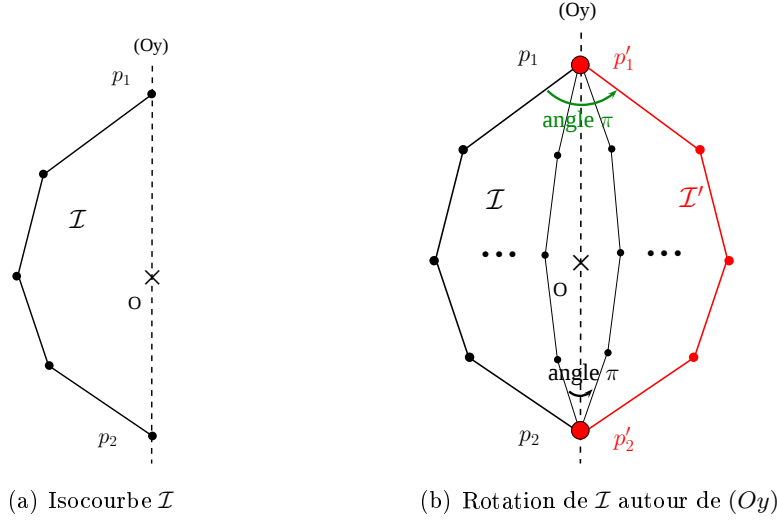


Figure 3.10. Exemple d'une construction de $\mathcal{I}'$ par la rotation d'angle π et d'extrémités $p'_1 = p_1$ et $p'_2 = p_2$.

Une contrainte sur la valeur de m peut alors être mise en évidence. En effet, pour des raisons liées à la direction v (que nous verrons juste après), à chaque isocourbe $\mathcal{I}$ doit correspondre une isocourbe-image $\mathcal{I}'$ d'extrémités identiques par une rotation d'angle π (cf. figure 3.10(b)). Au départ, les isocourbes symétriques $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ sont donc définies dans le même plan. De ce fait, à chaque multiple p du pas angulaire β entre deux isocourbes correspond un multiple $q\beta + \pi$. Ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 p\beta &= q\beta + \pi, \quad p, q \in \mathbb{N} \implies (p - q)\beta = \pi, \quad \text{on pose } p' = p - q. \\
 &\implies p'\beta = \pi, \quad \text{or } \beta = \frac{2\pi}{m+1}. \\
 &\implies p' = \frac{m+1}{2} \\
 &\implies (m+1) = 2p'
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Par conséquent, le nombre de points de contrôle distincts dans la direction u doit **être pair**.

Il reste à définir les contraintes dans la direction v que nous avons évoquées. Différentes orientations peuvent être prises selon nos objectifs. L'une des solutions est de considérer le cas illustré par la figure 3.11. Dans cet exemple, chaque isocourbe et son image par la rotation d'angle π se rejoignent de nouveau en p_1/p'_1 et p_2/p'_2 . En alignant chaque point de jonction avec les premiers voisins, une continuité C^1 peut être atteinte. Cependant, cette

méthode aura tendance à aplatir l'extrémité de la surface, ce qui sera inadapté si des fortes courbures sont requises aux extrémités.

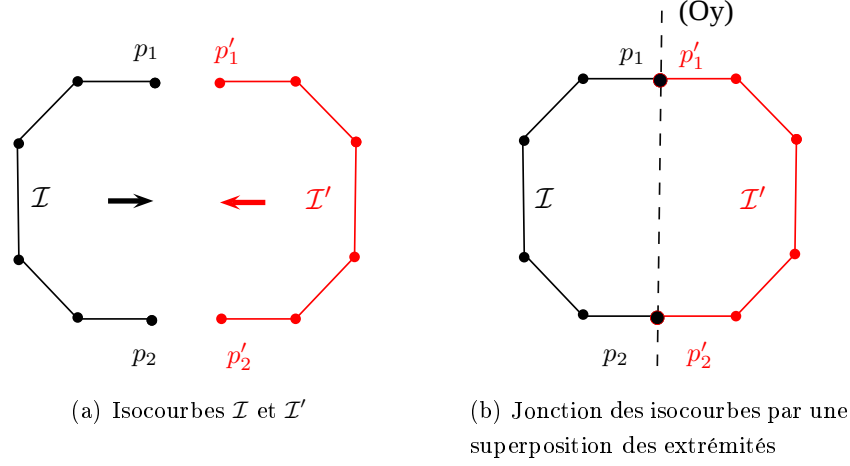


Figure 3.11. Exemple de jonction d'isocourbes pour une continuité C^1 .

De ce fait, une seconde solution serait de reprendre le principe de la périodicité, en superposant plus d'un point de contrôle à chaque jonction. En partant de l'isocourbe $\mathcal{I}$, des points de contrôle supplémentaires sont ainsi ajoutés de part et d'autre en vue d'être superposés à ceux de son image $\mathcal{I}'$. En posant par exemple $l = 4$, une superposition de 3 points de contrôle est effectuée pour avoir une continuité C^2 (cf. figure 3.12(a)). Dans le cas général, $\frac{l-2}{2}$ pôles sont ajoutés à chaque extrémité de $\mathcal{I}$ pour un raccord C^{l-2} , nécessitant de ce fait un **ordre l pair**. Après rotation autour de l'axe (Oy) , deux « chapeaux » - correspondants à l'ensemble des arêtes de contrôle superposées - sont obtenus (cf. figure 3.12(b)).

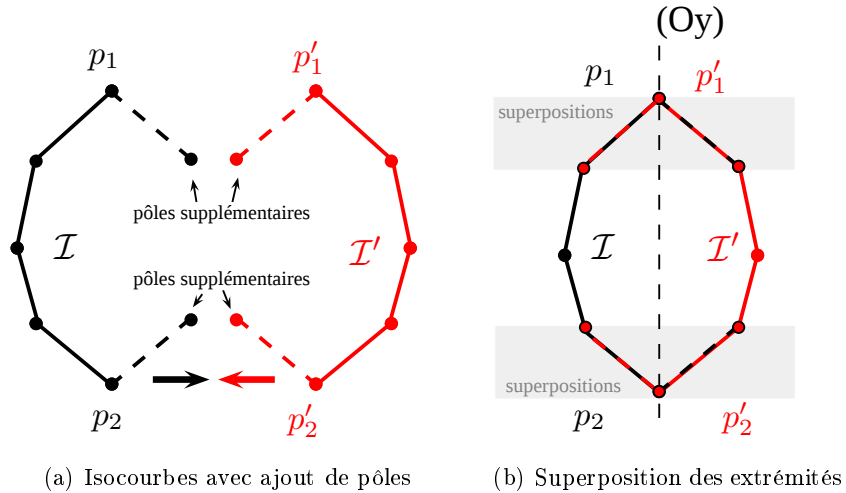


Figure 3.12. Exemple de jonction d'icobourbes pour une continuité C^2 avec $l = 4$.

Un autre avantage est que la continuité est facilement contrôlable en modifiant ces « chapeaux ».

Finalement, la formulation de la surface devient :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{m+k-1} \sum_{j=0}^{n+l-2} P_{i[m+1],j} N_{i[m+1],k}(u) N_{j,l}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (3.14)$$

avec $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{m+k-1, n+l-2}$ le nouveau réseau de contrôle, et l et $(m+1)$ pairs.

Construction des vecteurs nodaux

La séquence η est construite à partir de la formulation 3.8, mais pour ζ l'opération est différente. Dans la configuration de la figure 3.11, il suffit de définir ζ avec une multiplicité égale à l'ordre aux extrémités du vecteur nodal. Ainsi, pour tout u , $S(u, 0)$ retourne l'un des deux sommets de l'ellipsoïde et $S(u, 1)$ le second. La configuration des superpositions de la figure 3.12 nécessite toutefois une autre approche.

Suite à la symétrie axiale, un effet isotropique est retranscrit sur ζ . Nous posons $\zeta_{l-1} = 0$ et $\zeta_{n+l-1} = 1$, puis nous avons pour $i = \{0, \dots, l-2\}$:

$$\begin{cases} \zeta_{l-2-i} = \zeta_{l-2-i+1} - (\zeta_{l+i} - \zeta_{l+i-1}) \\ \zeta_{n+l+i} = \zeta_{n+l+i-1} + (\zeta_{n+l-1-i} - \zeta_{n+l-i-2}) \end{cases} \quad (3.15)$$

La figure 3.13 illustre la séquence ζ , et en particulier le fait que les intervalles paramétriques soient identiques de part et d'autre de 0 et de 1. Les intervalles de même longueur sont représentés par un code couleur similaire.

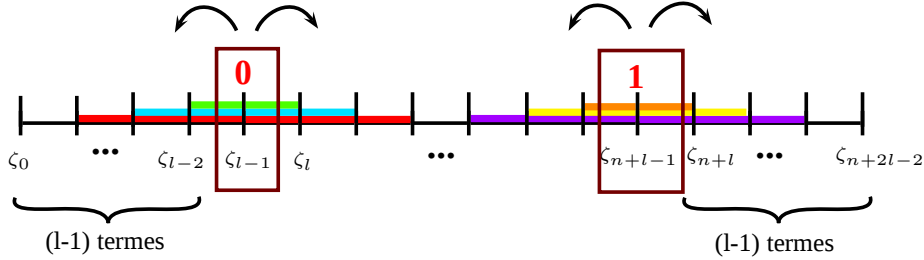


Figure 3.13. Séquence nodale ζ dans l'intervalle $[0, 1]$.

Remarque 3.2.2

La propriété de fermeture d'une surface bipériodique de la formulation 3.11 n'est vérifiée que dans une direction pour obtenir une surface de genre 0, et non une surface torique. Nous avons :

$$\begin{cases} S(0, v) = S(1, v), \forall v \in [0, 1] \\ S(u, 0) \neq S(u, 1), \forall u \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.16)$$

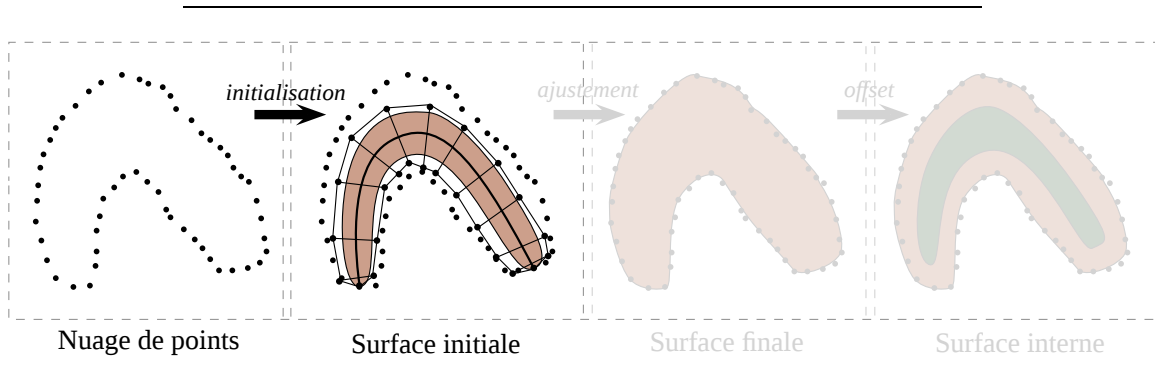
3.2.3 Conclusions

En travaillant indépendamment dans chaque direction paramétrique, nous avons pu construire une forme homéomorphe à une sphère en adaptant l'idée d'un demi-tore dégénéré. Pour cela, des contraintes ont dû être apportées sur le réseau de contrôle et les séquences nodales.

Dans la direction u , la surface est rendue périodique en imposant le fait que les $(k - 1)$ premiers et derniers pôles et intervalles paramétriques soient identiques. Une continuité C^{k-2} est alors garantie.

Dans la direction v , des contraintes sont imposées au niveau des singularités de la forme ellipsoïdale en construction, impliquant un ordre l pair. En outre, la symétrie autour de l'axe de rotation pour la construction du réseau a nécessité d'une part une séquence nodale ζ isotrope aux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$, et d'autre part un nombre pair de pôles distincts dans la direction u . En posant $l = 4$, nous nous assurons une continuité C^2 .

Nous obtenons finalement une surface de genre 0 et de continuité au moins C^1 . Cette surface est utilisée tout d'abord à **l'étape d'initialisation**, décrite au paragraphe 3.3, qui facilite le processus de reconstruction du contour en positionnant la forme paramétrique initiale fidèlement par rapport aux données.



3.3 Initialisation itérative par un axe médian non-linéaire

Toute méthode d'ajustement basée sur un modèle déformable est sensible à l'initialisation, et d'autant plus que la formulation de la surface impose de contraintes. L'idée dans la procédure suivante vise à placer fidèlement la surface initiale par rapport aux données.

Suite aux échanges avec l'expert médical du projet MoDyPe, nous avons tout d'abord pensé à l'emploi d'un modèle générique afin de définir une forme générale pour chaque organe. Chaque corps humain possède les mêmes organes, aux mêmes emplacements. Cependant, leurs formes se sont révélées très variées. En outre, bien que toutes les patientes

adoptent une position identique pendant l'IRM, les nombreux facteurs en jeu conduisent à de grandes différences entre deux jeux de données : torsions des organes, pathologie de la patiente, qualité de l'acquisition (suite au matériel, présence de selles dans le rectum, ...). Une initialisation patiente-spécifique est donc essentielle.

Puisque des « organes de référence » ne sont pas utilisables, il faut s'appuyer sur des *descripteurs géométriques* (des attributs permettant de caractériser leur forme) qui leur sont propres pour créer une surface initiale. Ils peuvent être simples comme des axes linéaires, ou plus complexes, comme des courbes et des polyèdres.

De ce fait, l'objectif sera de calculer comme premier descripteur *un axe non-linéaire* à l'intérieur du nuage de points, guidant le positionnement du second descripteur, à savoir le *polyèdre de contrôle* de la surface paramétrique initiale.

3.3.1 Formulation du problème

Nous proposons tout d'abord de déterminer *l'axe principal non-linéaire*, permettant de suivre plus fidèlement le contour externe de l'organe pendant la procédure d'initialisation (cf. [Bay et al., 2012a]). Il s'apparente à l'axe médian de la forme décrite par la distribution du nuage, dans le sens où il représente l'inertie globale des données. La difficulté vient du fait que l'échantillon décrit une variété de dimension 2, tandis que l'axe principal est une variété de dimension 1. Pour résoudre ce problème, nous décomposons la question en trois étapes majeures (cf. figure 3.14) :

1. positionnement initial de l'axe ;
2. définition de la fonctionnelle d'énergie quantifiant l'écart entre les deux variétés ;
3. réduction de la fonctionnelle d'erreurs ;

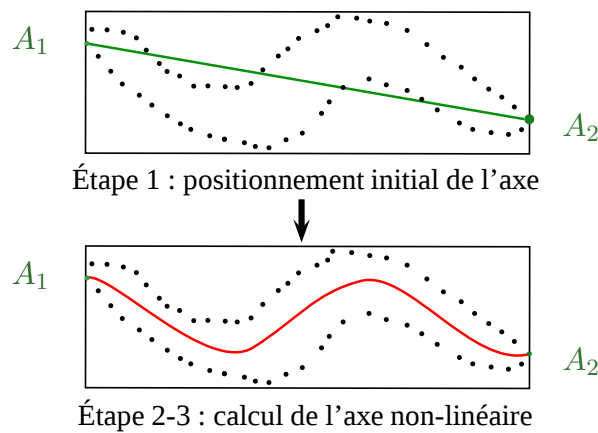


Figure 3.14. Calcul du premier descripteur : l'axe curviligne.

Finalement, le réseau de contrôle de la surface est disposé par « plans » le long du nuage, en tenant compte de la distance aux données. En effet, on appellera par abus de langage le

$k^{\text{ème}}$ « plan » du réseau $\{P_{i,j}\}$ l'ensemble $\{P_{.,k}\}$. Le processus consiste en cinq étapes (cf. figure 3.15) :

1. création du polyèdre de contrôle initial le long de l'axe (Oy) ;
2. placement et orientation des plans du réseau orthogonalement à l'axe non-linéaire ;
3. orientation des plans aux extrémités pour s'ajuster plus précisément aux données ;
4. correction des torsions et des problèmes de parcours sur le polyèdre de contrôle ;
5. utilisation de l'inertie radiale selon l'axe curviligne pour repositionner indépendamment les pôles de chaque plan.

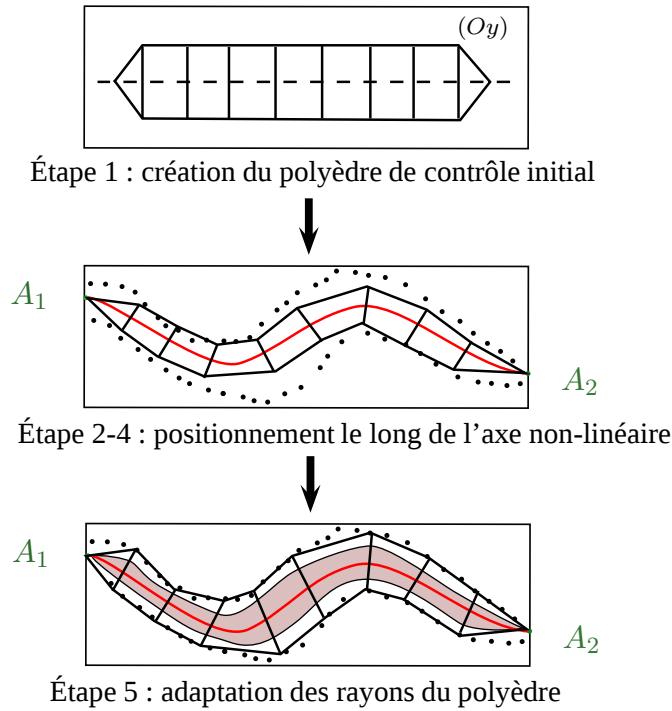


Figure 3.15. Positionnement du second descripteur : le polyèdre de contrôle.

Chacune des étapes est détaillée par la suite.

3.3.2 Calcul de l'axe non-linéaire

3.3.2.1 Motivations derrière la notion d'axe médian

La surface d'approximation évoluant dans deux directions paramétriques, nous allons considérer l'une d'entre elles pour disposer la surface selon le **diamètre généralisé** de la forme. Pour le définir, la notion **d'axe médian** peut être utilisée, faisant référence au processus de squelettisation introduit par [Blum, 1967]. Le squelette correspond en effet au lieu des centres des boules de rayon maximal entièrement contenues dans l'objet 3D. Les algorithmes dans la littérature sont séparables en deux groupes, à savoir les approches discrète (e.g. les travaux de [Bertrand, 1995], [Kimmel et al., 1995], [Remy and Thiel, 2000])

et [Bouix and Siddiqi, 2000]), et continue (e.g. les travaux de [Attali, 1995]). Cependant, deux raisons nous font adopter une autre orientation.

La première est que toute méthode de calcul d'axe médian conduira à un squelette 3D constitué de surfaces gauches et de branches inutiles dans notre cas d'étude, alors que seule la **direction principale** reflétant le contour de l'organe est nécessaire. Afin de ne pas avoir à utiliser une heuristique d'érosion pour les supprimer comme dans les algorithmes d'amincissement homotopique*, nous construirons directement cette direction de parcours à partir d'une approche continue. Nous nous basons de ce fait sur la forme générale et patiente-spécifique de leur contour, considérée **allongée** avec **deux « extrémités »**.

La deuxième raison - qui sera abordée au paragraphe 3.4 - est que la méthodologie mise en place dans cette partie pour **les courbes** est facilement transposable **aux surfaces**.

Les paragraphes 3.3.2.2 à 3.3.2.4 présentent la méthodologie suivie.

3.3.2.2 Première étape : le positionnement initial

Avant de placer une courbe à l'intérieur d'un ensemble de $\mathbb{R}^3$, il est nécessaire de fixer ses deux extrémités (notées A_1 et A_2 par la suite). Le calcul de leur position est basé sur l'ACP. Comme le décrit [Jolliffe, 2002], cette méthode descriptive multidimensionnelle est généralement employée pour projeter l'inertie d'un nuage de points sur trois axes principaux. L'utilisation de la première composante principale (composante correspondant à la plus grande proportion de variance expliquée de l'inertie du nuage) comme direction de parcours n'a cependant de sens que si l'organe a une forme allongée.

Soit $\{D_{i,j}\}_{i,j=0}^{p,q}$ un ensemble de p variables aléatoires à partir d'un échantillon connu de q réalisations de ces variables. Chaque point est une réalisation qui appartient à $\mathbb{R}^3$ où les coordonnées correspondent aux variables aléatoires, soit $p = 3$. Nous allons calculer la matrice de covariance C de ces variables aléatoires, à partir de laquelle nous extrairons les valeurs propres et vecteurs propres qui nous donneront les directions principales.

Soient $(\bar{D}_1, \bar{D}_2, \bar{D}_3)$ le centre de gravité de nos données, et M la matrice centrée des variables telle que :

$$M = \begin{pmatrix} D_{1,1} - \bar{D}_1 & \cdots & D_{1,q} - \bar{D}_1 \\ D_{2,1} - \bar{D}_2 & \cdots & D_{2,q} - \bar{D}_2 \\ D_{3,1} - \bar{D}_3 & \cdots & D_{3,q} - \bar{D}_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

La matrice n'est pas réduite afin de maximiser l'influence des variables aléatoires dans l'ACP. La matrice de covariance C de taille 3×3 est obtenue par $C = M^T M$. La dernière étape calcule finalement les valeurs et vecteurs propres de C .

La première direction principale correspond au vecteur propre de plus grande valeur propre. Les trois axes sont utilisés pour construire la boîte englobante orientée (OBB) du nuage.

Un exemple 2D est illustré par la figure 3.16, sur laquelle le segment $[S_1 S_2]$ associé à la première composante est créé, issu de l'intersection de la première composante et des

*. cf. annexe

faces (ou segments en 2D) orthogonales de l'OBB. Or, comme rien ne contraint S_1 et S_2 à appartenir au nuage, les points A_1 et A_2 sont choisis comme extrémités de l'axe parmi les données de sorte qu'ils appartiennent aux faces respectives qui contiennent S_1 et S_2 et que les distances $\|A_1 S_1\|$ et $\|A_2 S_2\|$ soient minimales.

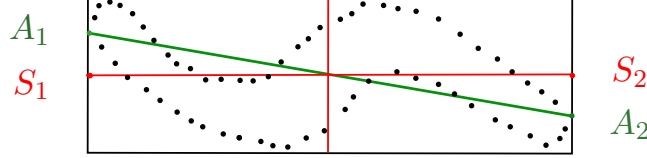


Figure 3.16. Exemple de recherche de l'axe $[A_1 A_2]$ dans un cas 2D.

Le travail consiste maintenant à transmettre l'inertie du nuage au corps de la courbe entre A_1 et A_2 .

3.3.2.3 Deuxième étape : la fonctionnelle d'énergie bidirectionnelle

Soit $\{D_s\}_{s=0}^N$ l'ensemble des $(N + 1)$ points du contour à reconstruire. Ce paragraphe établit la fonctionnelle d'énergie f quantifiant l'écart entre les données et l'axe non-linéaire. Pour le représenter, une courbe de Bézier C d'ordre $(m + 1)$ et de paramètre t a été choisie afin de limiter les oscillations qu'un support local pourrait créer :

$$C(t) = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t) Q_i \quad t \in [0, 1] , \quad (3.18)$$

avec $\{Q_i\}_{i=0}^m$ l'ensemble des points de contrôle, et $\{B_{i,m}\}_{i=0}^m(u)$ les polynômes de Bernstein de degré m . Les fonctions de Bernstein sont définies par :

$$B_{i,m}(t) = \binom{m}{i} t^i (1-t)^{m-i} \quad t \in [0, 1] , \quad (3.19)$$

avec $\binom{m}{i}$ les coefficients binomiaux.

Pour caractériser l'erreur de placement de la courbe, il est nécessaire de localiser chaque point de $\{D_s\}_{s=0}^N$ par rapport à C , en associant avec cohérence les données à la courbe par la paramétrisation. Les travaux de [Hoschek, 1988] et [Chambelland and Daniel, 2006] calculent par exemple le paramètre t_s associé à la donnée D_s par projection orthogonale sur la tangente $T(t_s) = \frac{dC}{dt}(t_s)$ à la courbe (cf. figure 3.17(a)) en résolvant le système non-linéaire :

$$(D_s - C(t_s)) \cdot T(t_s) = 0 \quad (3.20)$$

Cependant, les points erronés et la nature non-structurée et complexe des données conduit parfois à des projections-doubles (cf. figure 3.17(b)). Le problème est ici évité en n'utilisant pas une projection du premier ordre¹, l'objectif étant uniquement de déterminer l'allure de la courbe à l'intérieur du nuage de points.

1. Impliquant un développement de Taylor du premier ordre

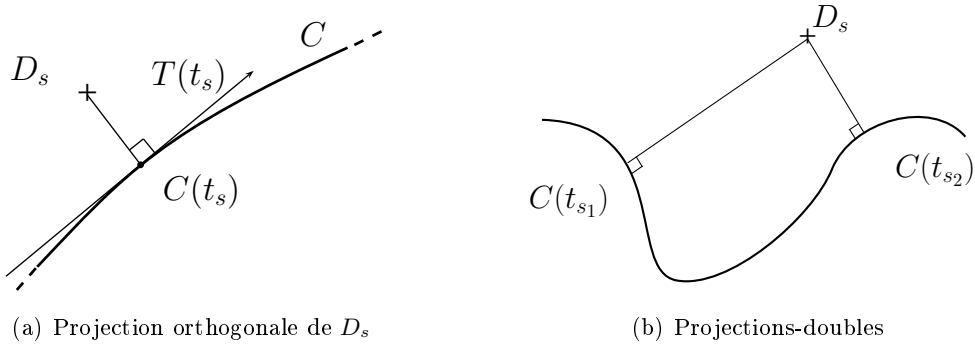


Figure 3.17. Projections différentes de données sur une courbe.

Soient E l'ensemble des $(M+1)$ points issus de la discrétisation uniforme de la courbe, et $\mathcal{T}$ l'ensemble des $(N+1)$ valeurs de la paramétrisation des données. La valeur de $(M+1)$ est déterminée à partir de la précision des voxels desquels les données sont extraites. Leur taille étant de l'ordre du millimètre (cf. chapitre 1), la cardinalité de E est égale à la longueur de la courbe en millimètres (obtenue par une méthode de type Simpson). Les valeurs de $\mathcal{T}$ sont choisies uniquement parmi les paramètres utilisés pour la discrétisation de la courbe.

Afin de mesurer l'écart entre la courbe et le nuage en entrée, nous introduisons deux **graphes de correspondances**. Le premier graphe, de dimension $(N+1)$, contient les paramètres de $\mathcal{T}$ et permet d'associer à chaque donnée le plus proche point de E (cf. figure 3.18(a)). Le second graphe, noté $\mathcal{G}$ et de dimension $(M+1)$, contient les points de l'échantillonnage E et permet d'associer à chaque évaluation de la courbe la donnée la plus proche (cf. figure 3.18(b)). La distance euclidienne est utilisée.

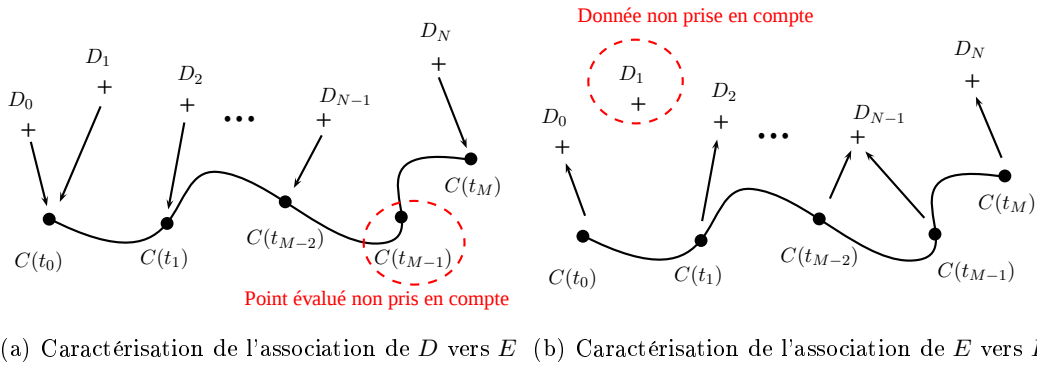


Figure 3.18. Recherche de distances minimales entre les ensembles D et E (dans le plan).

La fonctionnelle d'énergie f se formalise par la combinaison de deux sous-fonctions, chacune utilisant l'un des graphes de correspondances :

$$f(Q, \mathcal{T}, \mathcal{G}) = \underset{D \rightarrow E}{f}(Q, \mathcal{T}) + \underset{E \rightarrow D}{f}(Q, \mathcal{G}), \quad (3.21)$$

avec $\underset{D \rightarrow E}{f}$ la fonction reflétant la dissimilarité de D par rapport à l'échantillonnage E de C , et $\underset{E \rightarrow D}{f}$ la fonction caractérisant la dissimilarité de E par rapport à D . La fonction $\underset{D \rightarrow E}{f}$

s'écrit comme suit :

$$f_{D \rightarrow E}(Q, \mathcal{T}) = \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|D_s - C(t_{D_s})\|^2 = \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|E_s\|_{D \rightarrow E}^2 \quad (3.22)$$

avec : $\|D_s - C(t_{D_s})\|^2 = \min_j \|D_s - C(t_j)\|^2$. Nous retrouvons effectivement la recherche du paramètre le plus adapté en termes de distance euclidienne minimale pour chaque point des données. De la même manière, la fonction $f_{E \rightarrow D}$ s'écrit :

$$f_{E \rightarrow D}(Q, \mathcal{G}) = \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \|C(t_r) - D_{t_r}\|^2 = \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \|E_r\|_{E \rightarrow D}^2 \quad (3.23)$$

avec : $\|C(t_r) - D_{t_r}\|^2 = \min_l \|C(t_r) - D_l\|^2$. L'utilisation de la fonction $f_{D \rightarrow E}$ seule correspond à une formulation basée sur les moindres carrés. La courbe serait cependant ajustée aux données, alors que nous cherchons à la faire passer à l'intérieur du nuage.

L'étape suivante consiste à réduire prioritairement la valeur de la fonction d'énergie.

3.3.2.4 Troisième étape : la réduction de la fonctionnelle

La réduction de f repose sur l'alternance d'une étape de paramétrisation, et d'une étape de déplacement des points de contrôle Q . L'intérêt est de découpler le processus d'ajustement en deux sous-problèmes. Au départ, les points de contrôle sont répartis uniformément le long de la courbe encore linéaire (cf. figure 3.19). Nous rappelons par ailleurs que les pôles aux extrémités sont fixés en A_1 et A_2 . Les autres pôles sont appelés « internes ».

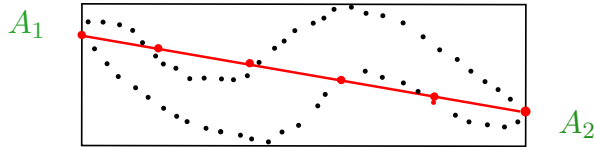


Figure 3.19. Répartition uniforme des pôles sur la courbe C initiale.

La première étape met à jour la paramétrisation avec $\mathcal{T}$ et le graphe $\mathcal{G}$ sans modifier les points de contrôle. La fonction f peut alors être déterminée.

La seconde étape au contraire fixe les graphes de correspondances et s'intéresse aux points de contrôle internes de la courbe. Le principe repose sur la différentiabilité de la fonctionnelle f par rapport aux pôles. Une descente de gradient à pas optimal est alors appliquée en deux étapes : la direction de descente est déterminée, suivi du calcul du pas de descente le long de cette direction. Nous insistons sur le fait qu'il s'agit d'une réduction de fonctionnelle et non d'une minimisation puisque l'approche est itérative et s'arrêtera selon des critères d'arrêt définis plus loin.

La direction opposée de son gradient par rapport aux pôles est la direction de décroissance maximale (cf. les travaux de [Wang, 2008] pour plus de détails). Le gradient ∇^Q est

formé par la somme des gradients des sous-fonctionnelles $f_{D \rightarrow E}$ et $f_{E \rightarrow D}$:

$$\nabla^Q = \nabla_{D \rightarrow E}^Q + \nabla_{E \rightarrow D}^Q \quad (3.24)$$

Les gradients $\nabla_{D \rightarrow E}^Q$ et $\nabla_{E \rightarrow D}^Q$ sont tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{D \rightarrow E}^Q = \begin{pmatrix} \nabla_{D \rightarrow E}^Q \\ \vdots \\ \nabla_{D \rightarrow E}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N B_{0,m}(t_{D_s}) E_{s_{D \rightarrow E}} \\ \vdots \\ -\frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N B_{m,m}(t_{D_s}) E_{s_{D \rightarrow E}} \end{pmatrix} \\ \nabla_{E \rightarrow D}^Q = \begin{pmatrix} \nabla_{E \rightarrow D}^Q \\ \vdots \\ \nabla_{E \rightarrow D}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{M+1} \sum_{r=0}^M B_{0,m}(t_r) E_{r_{E \rightarrow D}} \\ \vdots \\ -\frac{2}{M+1} \sum_{r=0}^M B_{m,m}(t_r) E_{r_{E \rightarrow D}} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Les points de contrôle susceptibles de se déplacer sont les pôles qui ne sont pas des extrémités de la courbe, soit l'ensemble $\{Q_i\}_{i=1}^{m-1}$ (cf. figure 3.20).

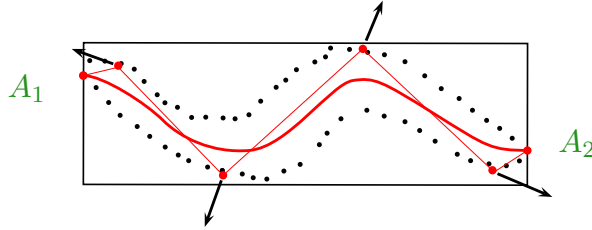


Figure 3.20. Déplacement des pôles internes.

Les termes ∇_0^Q et ∇_m^Q sont nuls. Nous appliquons un correctif itératif pour les autres. Soient Q_c les points $\{Q_i\}_{i=1}^{m-1}$ à l'itération c , et Q_{c+1} les points à l'itération $(c+1)$ tels que $Q_{c+1} = Q_c - \alpha \nabla^Q f(Q_c, \mathcal{T}, \mathcal{G})$. Les termes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{G}$ seront omis par la suite dans la fonctionnelle pour alléger l'écriture.

Les modèles d'ordre 2 comme la méthode de descente à pas optimal permettent d'obtenir plus d'informations sur les variations de la fonction f , car ils requièrent la connaissance du Hessien. Soit $dQ_c = -\alpha \nabla^Q f(Q_c)$ la correction apportée entre les deux ensembles de pôles à chaque itération. D'après le développement de Taylor du second ordre, on a :

$$\begin{aligned} f(Q_c + dQ_c) &= f(Q_c) + \nabla^Q f(Q_c) dQ_c + \frac{1}{2} H^P f(Q_c) dQ_c^2 + o(dQ_c^2) \\ \Rightarrow \nabla^Q f(Q_c + dQ_c) &= \nabla^Q f(Q_c) + H^Q f(Q_c) dQ_c + o(dQ_c) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La valeur stationnaire α doit annuler toutes les composantes du gradient, soit :

$$\begin{aligned}
 \nabla^Q f(Q_c + dQ_c) &= 0 \\
 \Rightarrow (\nabla^Q f(Q_c))^T \bullet \nabla^Q f(Q_c) - \alpha (\nabla^Q f(Q_c))^T \bullet (H^Q f(Q_c) \nabla^Q f(Q_c)) &= 0 \\
 \Rightarrow \alpha &= \frac{\|\nabla^Q f(Q_c)\|^2}{(\nabla^Q f(Q_c))^T \bullet (H^Q f(Q_c) \nabla^Q f(Q_c))}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Toutefois, nous pouvons annuler toutes les composantes du gradient sans utiliser explicitement la matrice Hessienne, comme établi dans le théorème 3.3.1².

Théorème 3.3.1

La fonctionnelle $f(Q - \alpha \nabla^Q, \mathcal{T}, \mathcal{G})$ atteint son minimum en α_{max} dans la direction de descente $-\nabla^Q$ si et seulement si :

$$\alpha_{max} = \frac{\frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \left(h_r \cdot \frac{E_r}{E \rightarrow D} \right) - \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left(g_s \cdot \frac{E_s}{D \rightarrow E} \right)}{\frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \|h_r\|^2 + \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|g_s\|^2}$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{E_r}{E \rightarrow D} = C(t_r) - D_{t_r} \text{ et } \frac{E_s}{D \rightarrow E} = D_s - C(t_{D_s}) \\ h_r = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \text{ et } g_s = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q \end{cases}$$

L'ajustement se résume donc par l'alternance d'une étape de mise à jour des graphes de correspondances pour construire la fonctionnelle f , et d'une étape de déplacement des points de contrôle de la courbe par descente de gradient à pas optimal.

Toutefois, la méthode dépend dès le départ de la position des extrémités A_1 et A_2 . Bien que l'utilisation d'une heuristique statistique comme l'ACP a permis de caractériser la forme linéaire, un affinage complémentaire - présenté au paragraphe suivant - peut être entrepris afin de tirer parti de l'axe curviligne nouvellement créé.

3.3.2.5 Affinage complémentaire : relocalisation des extrémités

Dans la pratique, le calcul de l'axe non-linéaire est calculé deux fois successivement avant de positionner le réseau de contrôle, permettant une meilleure estimation visuelle des extrémités A_1 et A_2 . En effet, ces points sont déterminés en sélectionnant les points les plus éloignés et appartenant aux faces opposées de l'OBB.

Ceci doit s'interpréter comme la « propagation » d'un « plan » orthogonal à l'axe non-linéaire à chaque extrémité. Ces plans sont établis à partir de leur normale, qui sont les tangentes à la courbe. Au départ, l'axe est linéaire, et les plans sont donc par construction

2. La preuve est fournie en annexe.

des faces de l'OBB. Les points extrémaux appartiennent donc déjà aux plans, mais une forte approximation est faite sur le profil de l'organe (cf. figure 3.21).

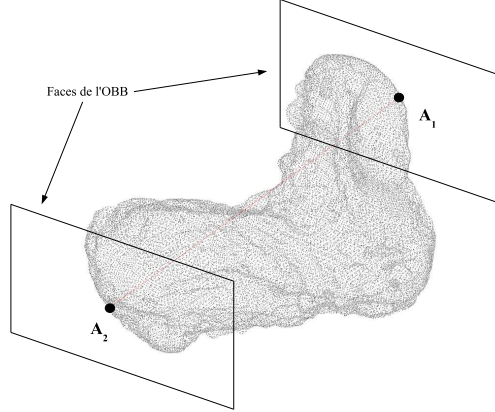
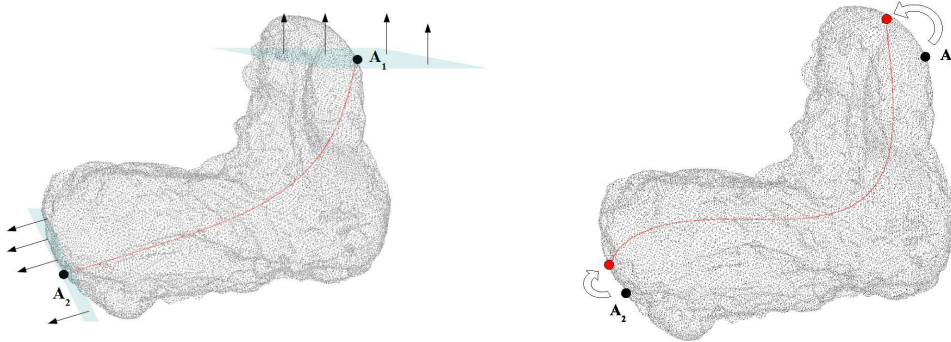


Figure 3.21. Détermination des points A_1 et A_2

Après une première passe, le profil est réajusté avec l'axe médian non-linéaire. Deux nouveaux plans sont utilisés, basés cette fois-ci sur une estimation plus fidèle de la forme, et donc des tangentes (cf. figure 3.22(a)). Le dernier point rencontré par chaque plan le long de la tangente près de l'extrémité de la courbe est conservé. L'axe non-linéaire est alors recalculé (cf. figure 3.22(b)).



(a) Estimation des nouvelles extrémités

(b) Calcul de la courbe avec les nouveaux points

Figure 3.22. Deux calculs consécutifs de l'axe non-linéaire appliqués à un utérus.

Maintenant que l'axe curviligne est déterminé, il nous reste à vérifier si la procédure est convergente.

3.3.2.6 Étude de la convergence du calcul de l'axe médian

L'étude de la convergence d'une méthode itérative revient à analyser la convergence de la suite des valeurs itérées construite par l'algorithme de résolution. Puisque le calcul d'un axe

curviligne consiste en l'alternance de deux étapes, nous allons étudier la convergence après la paramétrisation, puis après la descente de gradient. Considérons un état fixe du modèle. Soient $\mathcal{T}_c$ la paramétrisation des données, $\mathcal{G}_c$ le graphe de correspondances de l'échantillonnage aux données, Q_c les points de contrôle, et f_c la valeur de la fonctionnelle à l'itération c . Soit D_s un point des données, et t_c le paramètre associé dans $\mathcal{T}_c$.

La première étape considère les vecteurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{G}$. Le problème formalisé pour $\mathcal{T}$ s'écrit :

$$\mathcal{T}_{c+1} \neq \mathcal{T}_c \iff \exists p \in \{0, \dots, N\} / \|D_s - C(t_p)\|^2 < \|D_s - C(t_c)\|^2, \quad (3.28)$$

ce qui est impossible par construction. Le vecteur n'est modifié que si la distance calculée est strictement plus petite qu'à l'itération précédente. De même, soit $C(t_r)$ un point de la courbe et D_c la donnée associée à l'itération c . Le problème formalisé pour $\mathcal{G}$ s'écrit :

$$\mathcal{G}_{c+1} \neq \mathcal{G}_c \iff \exists q \in \{0, \dots, M\} / \|C(t_r) - D_q\|^2 < \|C(t_r) - D_c\|^2, \quad (3.29)$$

ce qui est également impossible pour la même raison. Nous obtenons :

$$f(Q_c, \mathcal{T}_{c+1}, \mathcal{G}_{c+1}) \leq f(Q_c, \mathcal{T}_c, \mathcal{G}_c)$$

La seconde étape considère les pôles. La réduction de la fonctionnelle par la descente de gradient à pas optimal nous assure d'atteindre un minimum. Par conséquent, nous avons :

$$f(Q_{c+1}, \mathcal{T}_{c+1}, \mathcal{G}_{c+1}) < f(Q_c, \mathcal{T}_{c+1}, \mathcal{G}_{c+1})$$

Finalement, nous obtenons par transitivité :

$$f(Q_{c+1}, \mathcal{T}_{c+1}, \mathcal{G}_{c+1}) < f(Q_c, \mathcal{T}_{c+1}, \mathcal{G}_{c+1}) \leq f(Q_c, \mathcal{T}_c, \mathcal{G}_c)$$

L'alternance des deux étapes nous garantit une décroissance stricte de l'erreur entre deux itérations. L'ensemble des valeurs $\{f_c\}_{c \in \mathbb{N}}$ décrit une suite strictement décroissante. Puisque la fonctionnelle est composée de sommes de carrés, nous pouvons affirmer que $f \geq 0$. La suite est donc strictement décroissante et minorée, la méthode est donc convergente.

La dernière étape de l'initialisation positionne finalement le polyèdre de contrôle avec la procédure détaillée au paragraphe 3.3.3.

3.3.3 Positionnement du réseau de contrôle de la surface initiale

Une fois calculé, l'axe curviligne C n'est plus modifié. Il sert de support à la disposition des plans de contrôle selon les étapes suivantes.

3.3.3.1 Première étape : la construction du polyèdre initial

La première étape, illustrée par la figure 3.3.3.1, correspond à la création d'une surface B-spline initiale S , centrée en $(0, 0, 0)$ et disposée le long de l'axe (Oy) dans un système de coordonnées cartésiennes (par convention dans un souci d'homogénéité avec la partie 3.2.2). Soient k et l les ordres et $\{P_{i,j}\}$ le réseau de contrôle de S . Nous introduisons en outre p_1 et p_2 , les deux pôles du réseau $\{P_{i,j}\}$ sur l'axe (Oy) tels que $p_1 = A_1$ et $p_2 = A_2$.

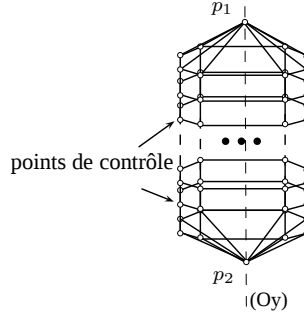


Figure 3.23. Étape 1 : création du polyèdre de contrôle initial de S .

3.3.3.2 Deuxième étape : le placement des plans le long de l'axe curviligne

La deuxième étape positionne le réseau de contrôle le long de la courbe C . Pour ce faire, les plans évoluant dans la direction (Oy) sont placés indépendamment les uns des autres en considérant à chaque fois que leur centre de gravité appartient à C . Soient $\{P_{.,j}\}$ l'ensemble des pôles du $j^{\text{ème}}$ plan, et c_j son centre de gravité.

À partir de l'isocourbe de la figure 3.10 décrivant un « méridien » du réseau, le positionnement des plans s'effectue comme suit. Au départ, les centres $\{c_j\}$ sont tous alignés sur (Oy) , séparés les uns des autres par un pas constant. Une fois la courbe calculée, leurs nouvelles positions sur C doivent répondre au même critère, i.e. de telle sorte que l'abscisse curviligne entre deux centres voisins soit identique. Chaque centre c_j est associé à un paramètre t_j correspondant à sa localisation paramétrique sur C , permettant d'orienter **orthogonalement** le plan $\{P_{.,j}\}$ par rapport à la tangente $T(t_j) = \frac{dC}{dt}(t_j)$ (cf. figure 3.24(a)).

Toutefois, compte-tenu de la forme retenue à la figure 3.11, chaque ajout d'un pôle à une extrémité implique une superposition supplémentaire de plans. Pour répondre à la contrainte de continuité dans notre cas d'utilisation, nous nous limitons à l'ajout d'un seul point de contrôle de part et d'autre de chaque méridien. Ainsi, les premiers et derniers plans se dupliquent. La figure 3.24(b) permet d'illustrer ce propos, en mettant en évidence le fait que les centres c_0 et c_2 puis c_n et c_{n-2} soient confondus.

3.3.3.3 Troisième étape : la modification locale des extrémités

La troisième étape répond à un cas particulier, puisqu'il améliore l'orientation des plans non-dégénérés constituant les « chapeaux » du réseau de contrôle. Dans notre cas, il s'agit des ensembles $\{P_{.,0}\}$ et $\{P_{.,n}\}$, ainsi que des plans qui leurs sont superposés. Ces chapeaux étant déjà sous contraintes de superpositions par construction, nous facilitons l'étape d'ajustement aux données à suivre en les orientant au mieux par régression linéaire multiple.

Pour l'extrémité p_1 , cette modification consiste à déterminer le plan $\mathcal{P}$ issu de la régression linéaire multiple des données comprises dans la sphère $\mathcal{S}p$ de centre p_1 et de rayon égal à la distance entre p_1 et c_0 . Il ne reste qu'à réorienter les plans $\{P_{.,0}\}$ et $\{P_{.,2}\}$ en calculant l'angle entre la tangente $T(t_0)$ et la normale $n_{\mathcal{P}}$ à $\mathcal{P}$. Les figures 3.25(a) et 3.25(b) illustrent

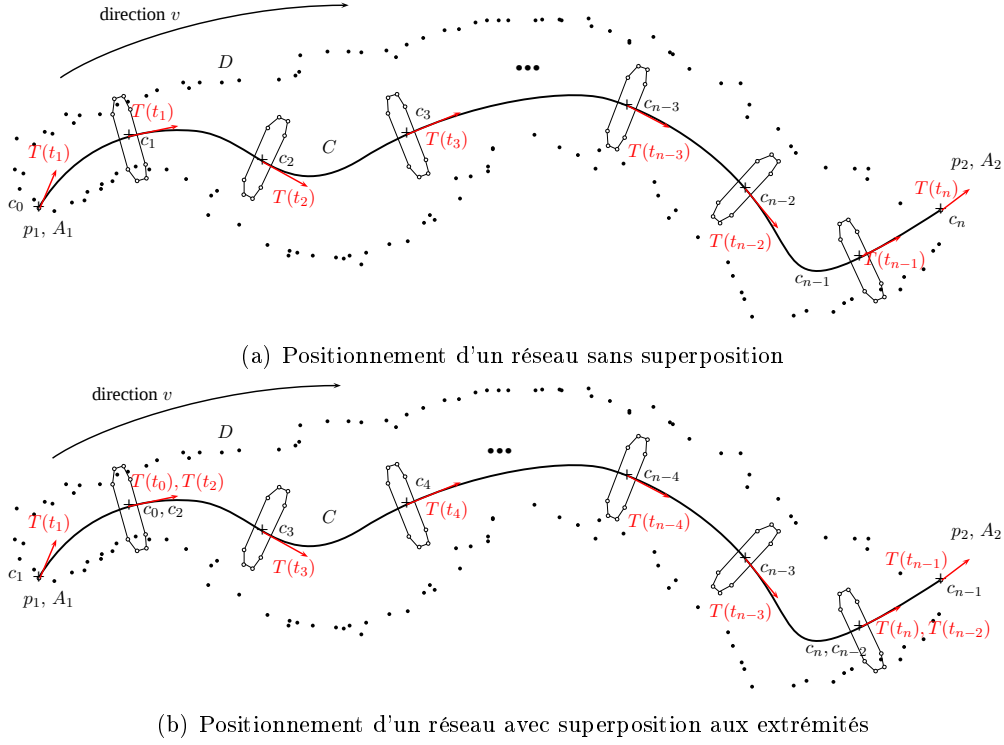


Figure 3.24. Étape 2 : positionnement et orientation des plans de contrôle, avec $l = 4$.

la différence d'orientation des isocourbes de contrôle avec et sans la régression multiple.

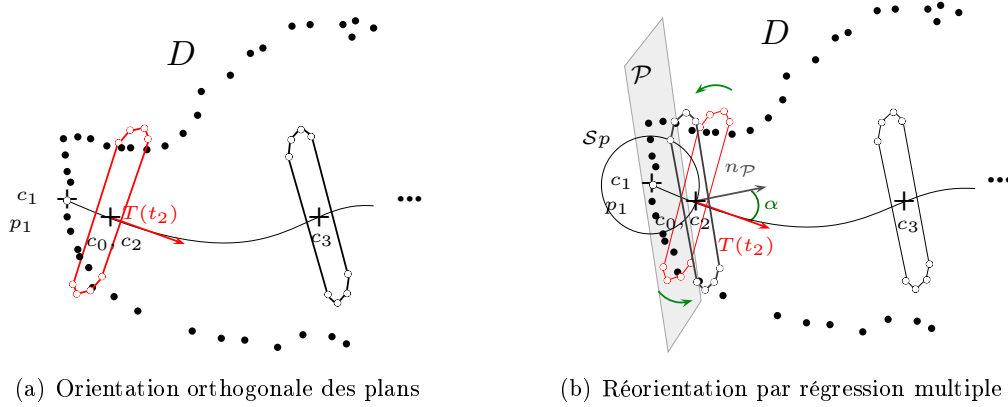


Figure 3.25. Étape 3 : modification de l'orientation aux extrémités, avec $l = 4$.

3.3.3.4 Quatrième étape : la correction des torsions

La quatrième étape corrige les torsions éventuelles dans les liaisons entre deux plans de contrôle successifs, générés par les différences d'orientation. Soient $\{P_{.,j}\}_{j=0}^m$ et $\{P_{.,j+1}\}_{j=0}^m$ ces deux plans. Deux problèmes sont mis en évidence : une **mauvaise correspondance des pôles** entre les plans et un **sens de parcours différent** d'un plan à l'autre.

Pour améliorer la correspondance, les pôles de $\{P_{.,j+1}\}$ peuvent être décalés afin de

garantir la plus courte distance euclidienne entre $P_{0,j}$ et $P_{0,j+1}$ (choix des éléments en $i = 0$ arbitraire). On commence par déterminer l'indice i^* permettant de déterminer le plus proche point de $\{P_{0,j}\}$ appartenant à $\{P_{.,j+1}\}$:

$$\|P_{0,j}P_{i^*,j+1}\| = \min_s \|P_{0,j}P_{s,j+1}\| \quad (3.30)$$

Ensuite, les pôles de $\{P_{.,j+1}\}$ sont décalés, créant un nouveau plan $\{P_{i,j+1}^*\}_{i=0}^m$ de sorte que $P_{i^*,j+1} = P_{0,j+1}^*$. Le passage de la figure 3.26(a) à 3.26(b) illustre cette modification.

Enfin, le sens de parcours est vérifié par le calcul de deux sommes. La première correspond à l'ensemble des distances $\|P_{i,j}P_{i,j+1}^*\|$ pour i allant de 0 à m . Similairement, la seconde somme correspond au parcours de $\{P_{i,j+1}^*\}_{i=0}^m$ dans l'autre sens, soit en partant de $P_{0,j+1}^*$, puis en allant de m à 1. La somme la plus élevée correspond au mauvais sens de parcours. Si l'ensemble $\{P_{.,j+1}^*\}$ crée les torsions, la séquence doit alors être inversée. Le passage de la figure 3.26(b) à 3.26(c) illustre cette modification.

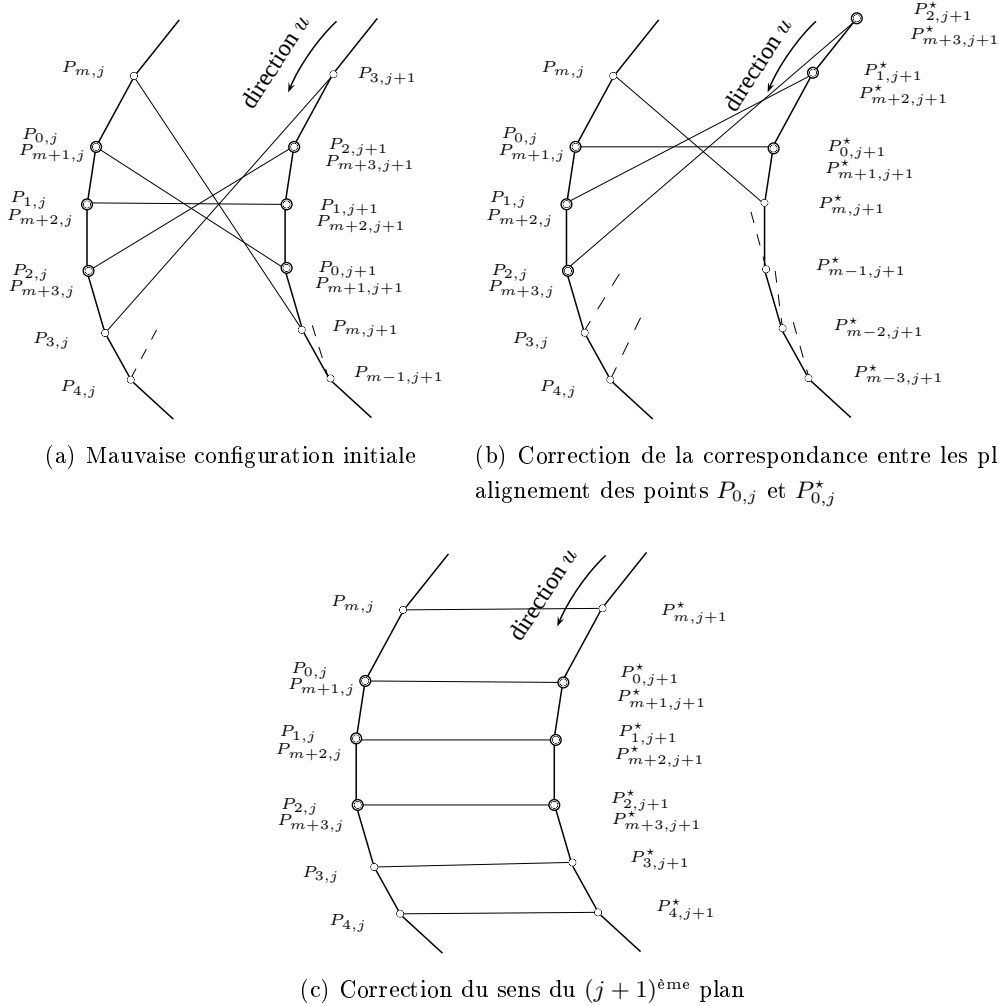


Figure 3.26. Étape 4 : correction des correspondances entre deux isocourbes successives avec $k = 4$, représentées parallèles pour la compréhension (peu fréquent dans la réalité).

Remarque 3.3.1

Il serait intéressant de tester que les plans de contrôle ne se croisent pas, ce qui n'a pas pu être effectué au regard des temps de développement. Toutefois, compte-tenu de la méthode d'ajustement que nous verrons à la partie 3.4, cela ne pose pas de problème de reconstruction.

3.3.3.5 Dernière étape : le positionnement individuel des pôles

La cinquième étape, illustrée par la figure 3.27, détermine la distance adéquate entre le centre c_j de chaque plan de contrôle et les pôles $\{P_{i,j}\}_{i=0}^m$ qui le constituent. Plutôt que de prendre une valeur constante fixée par l'utilisateur (cf. figure 3.27(a)), une distance propre à chaque point de contrôle est calculée.

Pour cela, les données situées dans le cône de sommet c_j et de demi-angle au sommet ε sont extraites, puis projetées sur la droite $(c_j P_{i,j})$. Le minimum des distances entre $P_{i,j}$ et les projections servira au positionnement du point de contrôle (cf. figure 3.27(b)). Soient $\{D_s\}_{s=0}^N$ l'ensemble des données, et H_s la projection orthogonale de D_s sur $\overrightarrow{c_j P_{i,j}}$. La nouvelle position du pôle $P_{i,j}$ est ainsi obtenue par :

$$P_{i,j} + L_{i,j} \frac{\overrightarrow{c_j P_{i,j}}}{\|\overrightarrow{c_j P_{i,j}}\|}, \quad (3.31)$$

avec $L_{i,j} = \left\{ \|P_{i,j} H_s\| \quad t.q. \quad P_{i,j} H_s = \min_r \left(\|P_{i,j} H_r\|, \arccos \left(\frac{\overrightarrow{c_j P_{i,j}} \cdot \overrightarrow{c_j D_s}}{\|\overrightarrow{c_j P_{i,j}}\| \|\overrightarrow{c_j D_s}\|} \right) < \varepsilon \right) \right\}$.

La valeur du paramètre $\varepsilon > 0$, fixée au préalable, permet d'éviter les données trop éloignées de la direction $\overrightarrow{c_j P_{i,j}}$.

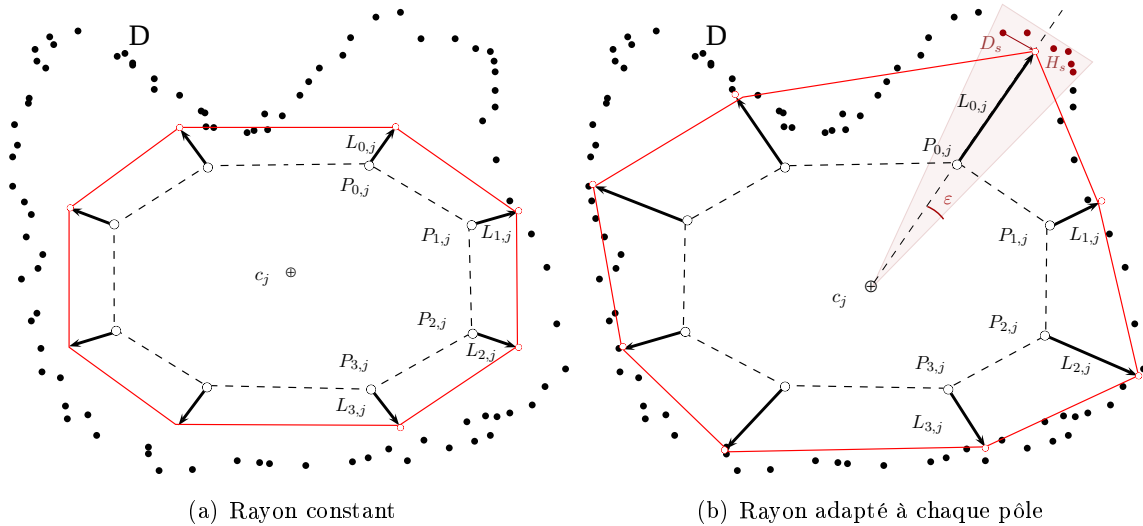


Figure 3.27. À partir de la $j^{\text{ème}}$ isocourbe (trait pointillé), calcul d'une isocourbe avec adaptation du rayon (trait plein).

À l'issue de ces cinq étapes, le réseau de contrôle est positionné le long de l'axe médian

non-linéaire, sans torsion du réseau, en se rapprochant autant que possible des données par un positionnement indépendant des pôles.

La procédure d'initialisation étant terminée, la partie 3.3.4 illustre maintenant les résultats de son application donnant lieu à l'axe curviligne et à la surface initiale.

3.3.4 Implémentation et résultats

Après la présentation des critères d'arrêt utilisés lors de l'implémentation, les résultats qualitatifs sur la construction de l'axe non-linéaire et de la surface B-spline seront mis en évidence. Ils ont été produits à partir d'un ordinateur portable de type Intel Core I7 M620 2.67GHz avec 4Go de mémoire RAM.

3.3.4.1 Critères d'arrêt

La solution exacte dans le cadre de ces problèmes mal posés ne sera jamais atteinte (à cause de la précision numérique, minima locaux, ...) hormis dans les cas triviaux. Le rapprochement vers une solution « optimale » est contrôlé par le biais de critères d'arrêt, ayant pour rôle de garantir l'interruption de la procédure en cas de problème de divergence numérique ou d'évolution trop lente.

La nature itérative conduit tout d'abord à limiter la procédure à un nombre maximal d'itérations It_{max} . En outre, les erreurs mesurant la distance aux données pour caractériser la précision de la méthode n'interviennent pas, puisque l'objectif n'est pas d'ajuster la courbe sur les points du nuage.

Par contre, la stagnation de l'évolution de la solution est mesurable par la différence de l'erreur quadratique moyenne entre deux itérations successives. Soient $f_c(Q, \mathcal{T}, \mathcal{G})$ et $f_{c+1}(Q, \mathcal{T}, \mathcal{G})$ les valeurs de la fonctionnelle aux itérations c et $(c + 1)$. L'évolution de la solution est considérée stagnante si le test suivant est vérifié :

$$f_c(Q, \mathcal{T}, \mathcal{G}) - f_{c+1}(Q, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \leq \varepsilon_{stag}, \quad (3.32)$$

avec $\varepsilon_{stag} > 0$ le seuil de stagnation fixé au préalable. Plus le rapport tend vers 1, plus l'évolution est lente.

Enfin, pour des raisons de stabilité numérique, un critère d'arrêt sur la norme du gradient est également à considérer. Au théorème 3.3.1, nous pouvons remarquer que la valeur du pas de descente est indéterminée pour une annulation du gradient, i.e. si et seulement si toutes les composantes du gradient s'annulent. On pose alors le critère suivant :

$$\|\nabla^Q\| = \sqrt{\sum_{i=0}^m \|\nabla_i^Q\|^2} \leq \varepsilon_{\nabla}, \quad (3.33)$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne L^2 et ε_{∇} le seuil fixé pour la norme du gradient.

L'ensemble des critères précédents est finalement intégré dans l'algorithme global de l'initialisation itérative, représenté par la figure 3.28.

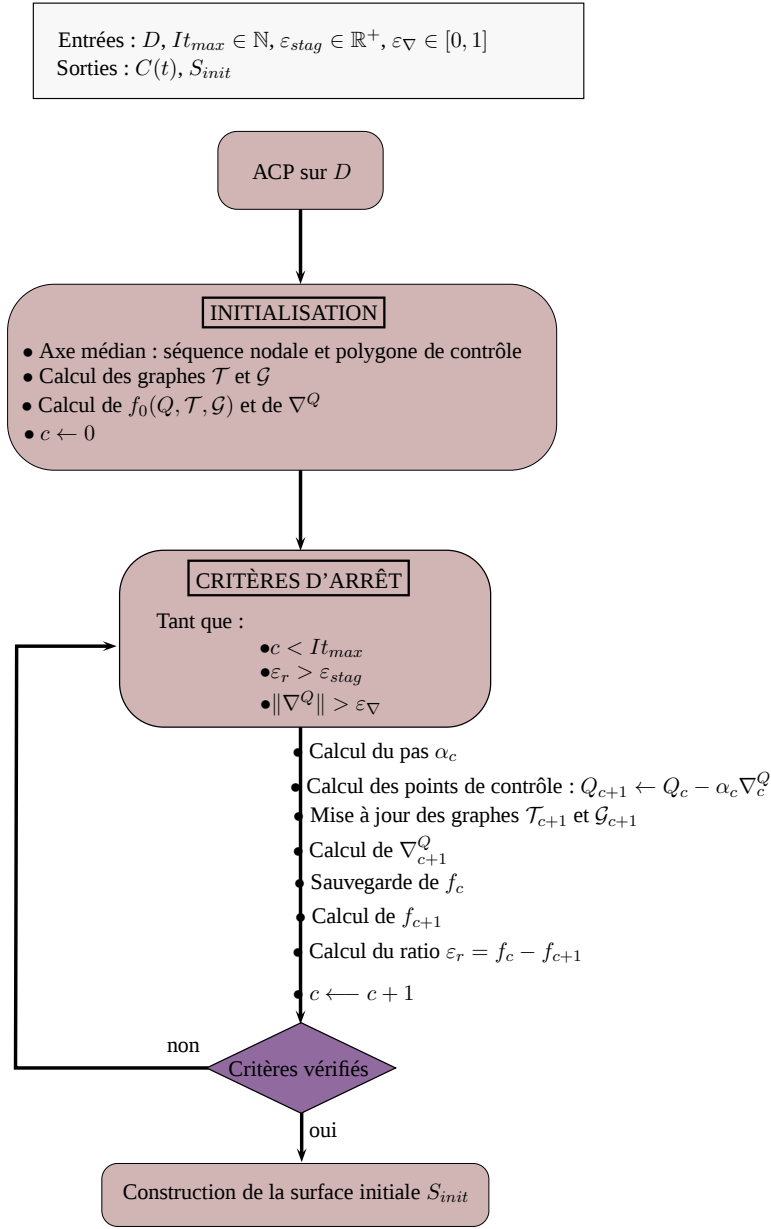


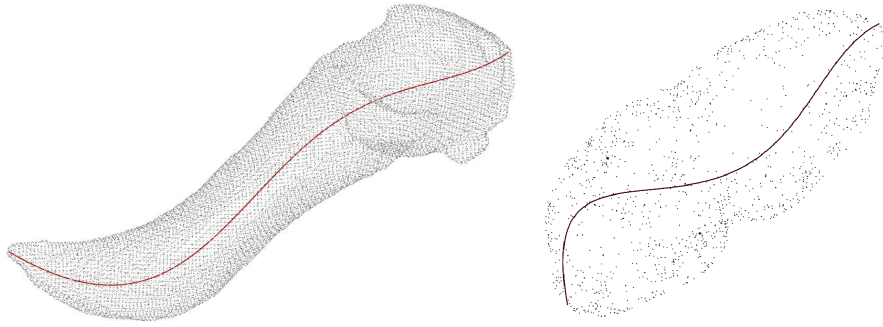
Figure 3.28. Algorithme global de la procédure d'initialisation.

3.3.4.2 Étude qualitative des sous-fonctionnelles

La fonctionnelle f est la composition de la sous-fonctionnelle $f_{D \rightarrow E}$ caractérisant les connexions des données à la discrétisation de la courbe médiane et de la sous-fonctionnelle $f_{E \rightarrow D}$ caractérisant les connexions de la discrétisation de la courbe aux données.

Le premier constat que nous pouvons faire à partir des figures 3.29 est l'importance de la densité des nuages de points. L'utilisation de la fonctionnelle $f_{D \rightarrow E}$ a pour objectif de disposer la courbe au centre des données. Lorsque les données sont denses, la courbe suit effectivement le profil général de l'organe (cf. figure 3.29(a)). Pour des données bien moins

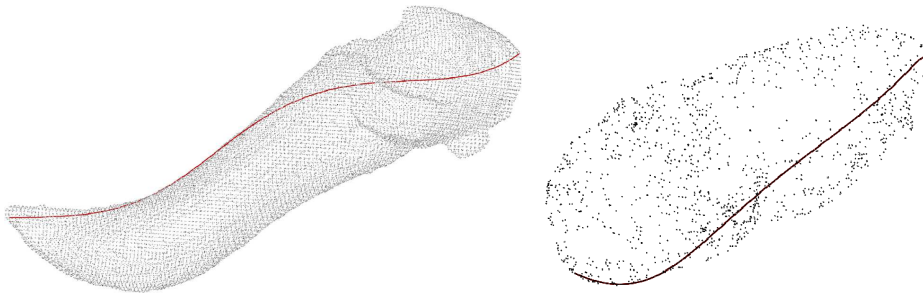
denses, les inflexions de la courbe sont marquées plus que nécessaires (cf. figure 3.29(b)).



(a) Ajustement avec un ensemble de 22K points (b) Ajustement avec 1200 points

Figure 3.29. Influence de la densité des données avec la première sous-fonctionnelle.

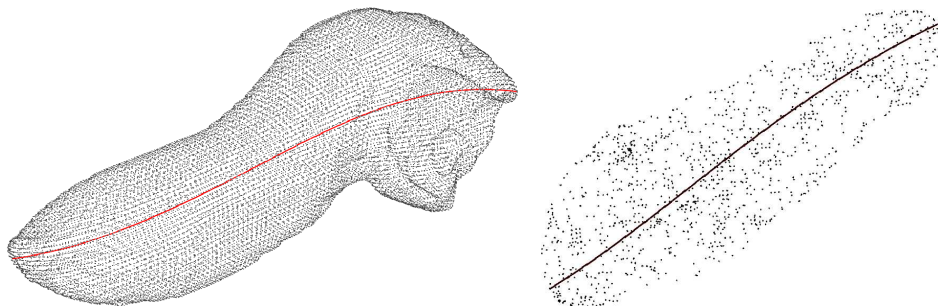
Cette sensibilité est compensée par la seconde fonctionnelle $f_{E \rightarrow D}$. Utilisée seule, elle caractérise l'ajustement de la courbe sur l'ensemble de points (cf. figures 3.30(a) et 3.30(b)).



(a) Ajustement avec un ensemble de 22K points (b) Ajustement avec 1200 points

Figure 3.30. Ajustement de la courbe avec la seconde sous-fonctionnelle.

Utilisée avec $f_{D \rightarrow E}$, elle régularise la fonctionnelle, permettant de rester à l'intérieur bien que les ensembles de points ne soient pas denses (cf. figure 3.31(b)).



(a) Ajustement avec un ensemble de 22K points (b) Ajustement avec 1200 points

Figure 3.31. Action combinée des deux sous-fonctionnelles.

3.3.4.3 Influence de l'axe curviligne sur le positionnement de la surface initiale

Une comparaison qualitative et quantitative est faite entre l'algorithme itératif par l'axe non-linéaire et l'ACP. Les données utilisées décrivent une vessie de 44K points, et un couple utérus/vagin de 47K points.

Pour la vessie, l'ACP place la surface initiale à cheval entre l'extérieur et l'intérieur des données (cf. figure 3.32(b)), tandis que l'initialisation itérative tient davantage compte de la forme et positionne la vessie initiale à l'intérieur (cf. figure 3.33(a)). Les cartes de distances des figures 3.32(b) et 3.33(b) illustrent l'écart aux données. La couleur rouge indique les zones où l'approximant est à l'extérieur du nuage de points, en bleu les zones à l'intérieur, et en vert les zones à proximité des données. Nous voyons très nettement une plus grande portion de zones vertes avec l'initialisation itérative.

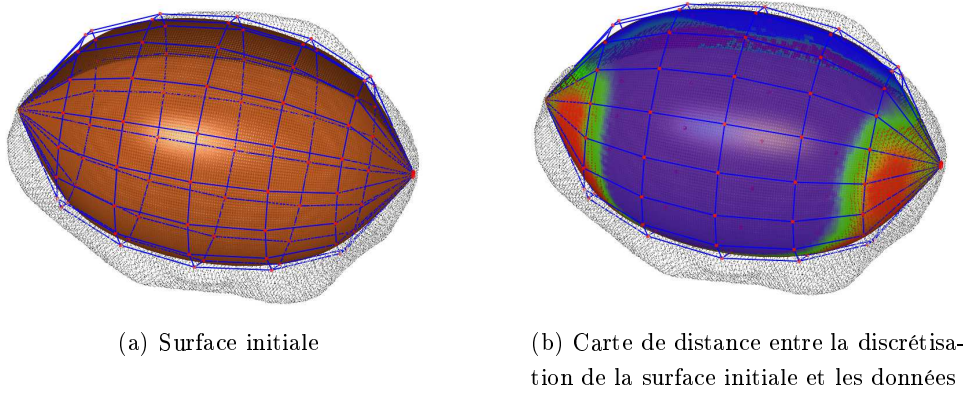


Figure 3.32. Initialisation pour la reconstruction d'une vessie avec l'ACP.

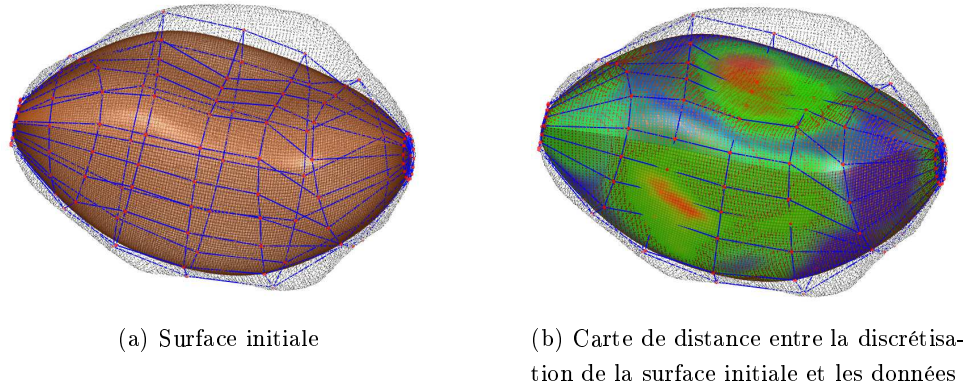


Figure 3.33. Initialisation pour la reconstruction d'une vessie avec l'axe non-linéaire.

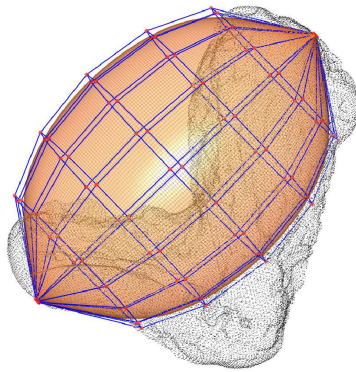
Le tableau 3.1 nous permet de confirmer quantitativement une plus grande proximité de la surface par rapport aux données avec l'initialisation itérative. Les métriques employées sont les erreurs quadratiques moyennes pour chaque sous-fonctionnelle ($EQM_{D \rightarrow E}$ et $EQM_{E \rightarrow D}$, en mm) et l'erreur maximale (E_{max} , en mm). Les résultats sont donnés pour une passe du calcul de l'axe curviligne (*Axe Curv.* $\times 1$) et pour deux passes (*Axe Curv.* $\times 2$).

TABLE 3.1. Comparatif entre l'ACP et l'axe médian non-linéaire pour la vessie.

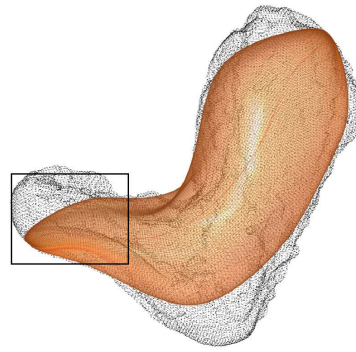
	ACP	Axe Curv. $\times 1$	Axe Curv. $\times 2$
$EQM_{D \rightarrow E}$	9.96	4.43	4.02
$EQM_{E \rightarrow D}$	7.23	2.72	2.45
E_{max}	18.98	14.8	13.5

Bien que les résultats ne permettent pas de constater une nette amélioration visuelle dans le cas de la vessie, les erreurs sont toutefois inférieures avec deux passes de l'algorithme qu'avec l'ACP ou avec une seule passe.

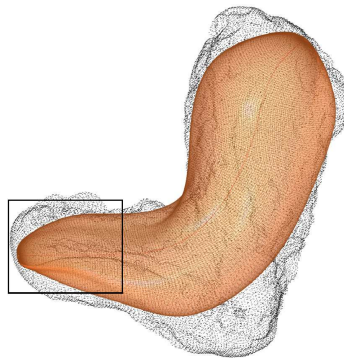
Pour l'utérus, les figures 3.34(a) à 3.34(c) illustrent davantage la différence entre l'initialisation itérative et l'ACP. La zone encadrée des figures 3.34(b) et 3.34(c) montre le changement d'extrémités avec les deux passes de l'algorithme.



(a) Surface initiale avec l'ACP



(b) Surface initiale avec une passe de l'initialisation itérative



(c) Surface initiale avec deux passes de l'initialisation itérative

Figure 3.34. Initialisation pour la reconstruction d'un utérus.

Le tableau 3.2 nous permet d'aboutir aux mêmes conclusions que pour la vessie.

TABLE 3.2. Comparatif entre l'ACP et l'axe médian non-linéaire pour l'utérus.

	ACP	Axe Curv. $\times 1$	Axe Curv. $\times 2$
$EQM_{D \rightarrow E}$	10.14	6.7	6.08
$EQM_{E \rightarrow D}$	9.16	3.54	2.81
E_{max}	32.95	16	15

3.3.5 Conclusions

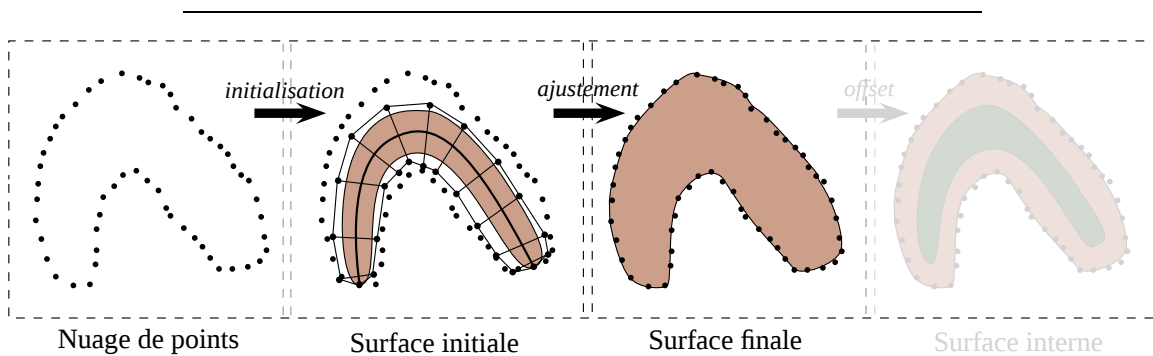
La procédure d'initialisation a pour objectif de disposer la surface initiale au plus près des données. Le principe repose sur la construction d'une courbe décrivant le profil général des données afin de servir de support au positionnement du réseau de contrôle de la surface paramétrique initiale de genre 0 (cf. partie 3.2).

L'opération peut cependant être délicate. Basée sur la réduction d'une énergie bidirectionnelle entre les données et la courbe, aucune garantie géométrique n'est apportée pour quantifier le fait que l'axe curviligne passe effectivement « au milieu » des données.

La méthode possède toutefois plusieurs atouts. Tout d'abord, elle prend en compte une plus grande proportion de l'inertie des données que l'ACP. Cet apport devrait être visible lors de l'ajustement de surface. En outre, comparée aux méthodes classiques de calcul d'axe médian, l'approche itérative ne requiert pas de technique d'érosion pour se débarrasser de branches superflues puisque seule une trajectoire principale est calculée, ce qui diminue le nombre de calculs sont nécessaires.

Pour le moment, l'initialisation est limitée à une « direction » pour caractériser le profil de la forme. En guise de perspective, il serait intéressant de généraliser le processus en créant un ensemble de courbes interconnectées qui atteindraient des zones de données moins caractéristiques.

L'étape suivant l'initialisation est l'ajustement de la surface. Nous allons voir au paragraphe 3.4 que la méthode décrite précédemment peut s'adapter pour des variétés de dimension supérieure.



3.4 Ajustement de la nouvelle surface aux données

Jusqu'à présent, nous avons proposé une surface paramétrique respectant nos contraintes anatomiques, et une initialisation itérative pour la positionner d'après le nuage épars en entrée. L'étape suivante consiste à décrire la méthodologie développée pour l'ajuster aux données et ainsi réussir à construire le contour extérieur des organes.

Après une formulation du problème, la fonctionnelle d'énergie caractérisant l'écart aux données est formalisée, puis réduite.

3.4.1 Formulation du problème

Nous avons vu au chapitre 2 qu'un compromis intéressant pour l'ajustement d'une surface B-spline est de considérer son **réseau de contrôle** et la **paramétrisation** des données. Par ailleurs, les résultats obtenus au chapitre précédent ont montré l'efficacité de **l'énergie bidirectionnelle** pour contrôler le positionnement de la courbe paramétrique avec les graphes de correspondances (cf. paragraphe 3.3.2.3).

À partir de cela, nous définissons le problème général suivant, dont l'objectif est de déterminer les vecteurs de paramétrisation $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$, un graphe de correspondances $\mathcal{G}$ pour les données, et le réseau de contrôle P de la surface B-spline, soit :

$$(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{G}, P) = \min_{\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P}} f(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{P}, D), \quad (3.34)$$

avec f la fonction d'énergie bidirectionnelle, et D les données.

Le processus d'ajustement doit conserver la fermeture et la C^1 -continuité, en créant un contour au plus près des données. *A contrario*, aucune précaution n'est prise quant à la qualité de la surface. Une énergie supplémentaire est nécessaire pour éviter la génération de repliements locaux, d'autant plus que l'existence de bruit et de valeurs erronées est avérée.

La variation de la surface est ainsi à quantifier et à minimiser. Le paragraphe 3.4.2 présente tout d'abord la caractérisation de **l'écart aux données**, suivi au paragraphe 3.4.3 de **la régularisation** de la forme paramétrique à partir des dérivées partielles de la surface.

3.4.2 Fonctionnelle d'énergie bidirectionnelle

Cette partie présente la fonctionnelle d'énergie f quantifiant l'écart entre les données $D = \{D_s\}_{s=0}^N$ et la surface approchante S .

À la différence d'une courbe s'ajustant sur des données décrivant un solide, la paramétrisation de points par projection orthogonale sur le plan tangent de la surface est possible (cf. figure 2.9 du chapitre 2). Cependant, pour des raisons de coût de calculs et de fausses projections sur des surfaces fermées (voir plus loin dans la partie 3.4.6 à la présentation des résultats), le système non-linéaire du paragraphe 2.5.4.4 permettant d'obtenir les paramètres

n'est pas utilisé. Des graphes de correspondances entre les données et la discrétisation de la surface sont de nouveau établis pour avoir la fonctionnelle d'énergie, en transposant la méthode décrite avec l'axe curviligne pour les surfaces.

Chaque vecteur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ stocke un paramètre du couple (u_s, v_s) associé à chaque donnée D_s . Soit $\{S(u_q, v_r)\}_{q,r=0}^{M_1, M_2}$ l'ensemble E de points de l'échantillonnage de la surface construit à partir d'une carte paramétrique uniforme telle que :

$$\begin{cases} u_q = \frac{q}{M_1}, \text{ pour } q \in \{0, \dots, M_1\} \\ v_r = \frac{r}{M_2}, \text{ pour } r \in \{0, \dots, M_2\} \end{cases} \quad (3.35)$$

Puisque nous travaillons sur une surface bidirectionnelle, trois graphes de correspondances sont établis (cf. figure 3.35) :

- les graphes pour $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ associent chaque donnée D_s aux paramètres u_q et v_r relatifs à l'évaluation la plus proche sur la surface. Cette correspondance est notée E_s et vérifie :

$$\left\| E_{s, D \rightarrow E} \right\| = \|D_s - S(u_{D_s}, v_{D_s})\| = \min_{q,r} \|D_s - S(u_q, v_r)\|$$

- de même, le graphe $\mathcal{G}$ associe chaque évaluation $S(u_q, v_r)$ au point de D le plus proche. Cette correspondance est notée $E_{q,r}$ et vérifie :

$$\left\| E_{q,r, E \rightarrow D} \right\| = \|S(u_q, v_r) - D_{(u_q, v_r)}\| = \min_l \|S(u_q, v_r) - D_l\|$$

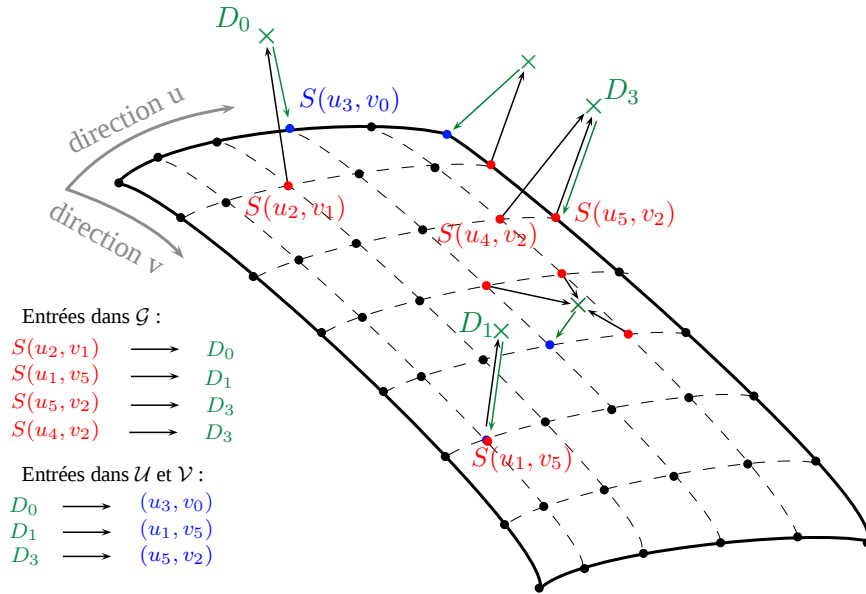


Figure 3.35. Exemple de connexions entre la discrétisation d'une surface ouverte et un ensemble D de données.

D'après le même principe que la procédure d'initialisation, le terme d'accroche aux données est constitué de deux « sous-fonctions » dont la formulation est la suivante :

$$f(P, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{G}) = f_{D \rightarrow E}(P, \mathcal{U}, \mathcal{V}) + f_{E \rightarrow D}(P, \mathcal{G}), \quad (3.36)$$

avec :

$$\begin{cases} f_{D \rightarrow E}(P, \mathcal{U}, \mathcal{V}) = \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|D_s - S(u_{D_s}, v_{D_s})\|^2 \\ f_{E \rightarrow D}(P, \mathcal{G}) = \frac{1}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \|S(u_q, v_r) - D_{(u_q, v_r)}\|^2 \end{cases} \quad (3.37)$$

De même que pour les courbes, le choix de la cardinalité M_1 et M_2 de E est complexe. Les valeurs sont calculées de telle sorte que $(M_1+1)(M_2+1) \approx (N+1)$. Pour fixer les valeurs M_1 et M_2 , la décision se base sur la supposition d'une distribution « quasi-uniforme » du nuage de points en entrée, i.e. de sorte qu'il n'y ait pas de zone présentant des manques importants de données. On impose de ce fait $(M_1+1) = (M_2+1) = E(\sqrt{N+1})$, avec $E(\cdot)$ l'opérateur donnant la partie entière.

L'établissement des graphes permet de finaliser la construction de la fonctionnelle. Comme introduit dans la formulation du problème au paragraphe 3.4.1, la partie 3.4.3 introduit maintenant la notion de régularisation.

3.4.3 Régularisation de l'énergie

La régularisation d'une énergie consiste à minimiser la variation de courbure d'une surface S . Les techniques diffèrent par le choix de la fonctionnelle quantifiant l'énergie intrinsèque de déformation dont l'approche la plus courante considère la surface en tant que plaque mince, et l'algorithme appliqué pour sa minimisation.

3.4.3.1 Généralisation de l'énergie de plaque mince

L'expression exacte de l'énergie de déformation, détaillée dans les travaux de thèse de [Bousquet, 1997], est formulée par la fonctionnelle f_{tps} suivante :

$$f_{tps} = \int_{(S)} \mu(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + 2(1-\nu) \kappa_1 \kappa_2 dA, \quad (3.38)$$

avec κ_1 et κ_2 les courbures principales* de S , dA l'élément d'aire de la surface, μ et ν les constantes liées à la résistance du matériau. À partir d'une surface paramétrée $S(u, v)$, il est possible d'écrire :

$$dA = \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right\| du dv \quad (3.39)$$

*, cf. annexe

La forme non-linéaire de l'équation 3.38 est complexe à résoudre et coûteuse en temps de calcul. Des approximations sont donc effectuées en considérant de petites déformations, retranscrites sur les valeurs des constantes, les dérivées partielles de la surface et donc de surcroît sur les courbures moyenne et gaussienne H et K :

$$\begin{cases} \mu = \nu = 1 \\ H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} \right) \\ K = \kappa_1 \kappa_2 \approx \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} - \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} \right\|^2 \\ dA = dudv \quad (\text{simplification de la formule 3.39}) \end{cases} \quad (3.40)$$

De ce fait, en se plaçant sur le domaine paramétrique $[0, 1] \times [0, 1]$, la formulation de la fonctionnelle f_{tps} devient :

$$\begin{aligned} f_{tps} &\approx \int_{(S)} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dA \\ &\approx \int_0^1 \int_0^1 (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) dudv \\ &\approx \int_0^1 \int_0^1 (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2\kappa_1 \kappa_2 dudv \\ &\approx \int_0^1 \int_0^1 (4H^2 - 2K) dudv \\ &\approx \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial S^2}{\partial^2 u} + \frac{\partial S^2}{\partial^2 v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial S^2}{\partial^2 u} \cdot \frac{\partial S^2}{\partial^2 v} - \left\| \frac{\partial S^2}{\partial u \partial v} \right\|^2 \right) dudv \\ &\approx \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial S^2}{\partial^2 u} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial S^2}{\partial u \partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial S^2}{\partial^2 v} \right)^2 dudv \end{aligned} \quad (3.41)$$

D'autres fonctionnelles ont été proposées dans la littérature. [Hagen et al., 1993] présentent par exemple une énergie reposant sur les dérivées partielles d'ordre 3, et [Greiner, 1994] introduit un opérateur faisant intervenir le gradient du laplacien. Bien que ces fonctionnelles aient été développées pour gagner en précision suite à l'approximation des petites déformations, la plus grande complexité de leur forme nous fait préférer l'utilisation de l'énergie f_{tps} .

Dans la littérature, nous pouvons distinguer deux orientations différentes, à savoir l'optimisation globale et locale. **Les approches globales** ne reposent pas sur le gradient, mais garantissent un minimum global en autorisant de légères remontées dans l'énergie de déformation. Nous pouvons citer les méthodes du recuit simulé ([Aart and Laarhoven, 1987]), de recherche tabou ([Friden et al., 1990]) et des algorithmes génétiques ([Michalewicz, 1996]). Ils comportent néanmoins de nombreux inconvénients, tels que la difficulté du choix des paramètres et les temps de calcul très élevés. Par exemple, l'analogie entre le recuit simulé

et une technique d'optimisation pour les surfaces à pôles dépend du choix du nombre maximal de paliers de température sans amélioration, des directions des perturbations des pôles, de la proportion de pôles à perturber par rapport au nombre total de pôles libres (points de contrôle qui ne sont pas situés au bord), et de la longueur des déplacements. Une mauvaise configuration ne conduira pas à des résultats pertinents.

Puisque nous cherchons à corriger les défauts sur la surface et non à atteindre un minimum global, **les approches locales** sont plus appropriées. Elles rassemblent les techniques par descente de gradient. Dans la catégorie des méthodes automatiques (sans action humaine), [Bousquet, 1997] met en évidence l'algorithme de [Hadenfeld, 1995], avantageux en termes de pertinence des résultats et de temps de calcul avec l'environnement interactif des systèmes CAO. Il est basé sur la création d'une carte de priorité stockant les améliorations apportées par le déplacement de chaque pôle dans la direction du gradient ∇f_{tps} , et appliquant les modifications au pôle qui apporte la meilleure réduction d'énergie.

La méthode de Hadenfeld est appliquée aux surfaces ouvertes et n'est pas liée à un critère géométrique pour justifier son utilisation. Le paragraphe 3.4.3.2 en propose une adaptation.

3.4.3.2 Une adaptation de la régularisation locale de Hadenfeld

Nous rappelons tout d'abord le principe de la régularisation de Hadenfeld. Soit S une surface B-spline ouverte d'ordres k et l et de réseau de contrôle $\{P_{i,j}\}_{i,j=0}^{m,n}$, telle que :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (3.42)$$

L'énergie de déformation est quantifiée par l'équation 3.41. Pour chaque pôle $P_{r,s}$, une nouvelle localisation $\tilde{P}_{r,s}$ minimisant f_{tps} peut être calculée par résolution de l'équation :

$$\frac{\partial f_{tps}(\tilde{P}_{r,s})}{\partial \tilde{P}_{r,s}} = 0 \quad (3.43)$$

La surface, notée $\tilde{S}$, devient :

$$\tilde{S}(u, v) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j) \neq (r,s)}}^m \sum_{j=0}^n P_{i,j} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) + \tilde{P}_{r,s} N_{r,k}(u) N_{s,l}(v) \quad (3.44)$$

Pour définir les points de contrôle à déplacer, une carte de priorités est établie par une heuristique quantifiant la modification de la surface avant et après le déplacement d'un pôle. L'algorithme correspond à :

1. déterminer le point de contrôle associé à la plus grande priorité ;
2. appliquer à la surface la nouvelle localisation du point de contrôle ;
3. recommencer à l'étape 1 si l'un des critères d'arrêt n'est pas vérifié : nombre maximal $Itreg_{max}$ d'application de la régularisation par pôle atteint, et valeur de la priorité inférieure à un seuil ε_p fixé.

La nouvelle position d'un point de contrôle $\tilde{P}_{r,s}$ est décidée par la combinaison affine d'un sous-ensemble $\{P_{i,j}\}$ du réseau :

$$\tilde{P}_{r,s} = \sum_i \sum_{\substack{j \\ (i,j) \neq (r,s)}} \gamma_{i,j} P_{i,j} \quad (3.45)$$

À chaque pôle $P_{i,j}$ est associé un *coefficient de pondération* $\gamma_{i,j}$ calculé par *intégrations de produits de fonctions de base B-spline* (cf. les travaux de [Hadenfeld, 1995] pour les détails).

La méthode de Hadenfeld est conçue pour des surfaces à carreaux, où seuls les pôles internes (ne modifiant pas les courbes-frontières des carreaux, et donc pas la continuité pour les raccords) sont susceptibles de subir des modifications. De ce fait, les séquences nodales dont les valeurs définissent les domaines d'intégration ont une multiplicité aux extrémités.

Nous définissons par la suite une adaptation de l'algorithme, qui s'articule autour des trois éléments suivants : la **périodicité** de la surface est prise en compte, l'algorithme s'applique selon la **géométrie locale de la forme**, la **régularisation est contrôlée** afin de ne pas influencer sur la procédure d'ajustement.

Tout d'abord, nous rappelons que la surface est périodique dans la direction des « parallèles » de la forme. L'utilisation d'intervalles et non de valeurs nodales dans les méthodes de quadrature pour calculer les coefficients $\gamma_{i,j}$ permet d'être facilement adaptée aux surfaces de genre 0.

Ensuite, si l'un des critères ci-dessous est vérifié, l'algorithme ne s'applique pas en $P_{r,s}$:

1. le nombre $it_{r,s}$ de fois (non consécutives) où la régularisation s'applique en $P_{r,s}$ excède le seuil $Itreg_{max}$;
2. il existe au moins un couple (u, v) dans le domaine paramétrique relatif à la portion de surface contrôlée par $P_{r,s}$ qui vérifie la relation suivante :

$$\max \left(\frac{1}{\kappa_1(u, v)}, \frac{1}{\kappa_2(u, v)} \right) < \delta_\kappa \quad (u, v) \in [\eta_r, \eta_{r+k}[\times [\zeta_s, \zeta_{s+l}[, \quad (3.46)$$

avec $[\eta_r, \eta_{r+k}[\times [\zeta_s, \zeta_{s+l}[$ le support local du pôle $P_{r,s}$, κ_1 et κ_2 les courbures principales en (u, v) et δ_κ un seuil fixé. Autrement dit, il ne faut pas qu'en tout point de la zone de la surface influencée par le pôle, le maximum des rayons principaux de courbure soit plus petit qu'un rayon minimal fixé. Le schéma 3.36 illustre la procédure avec un unique point $M = S(\frac{\eta_r + \eta_{r+k}}{2}, \frac{\zeta_s + \zeta_{s+l}}{2})$.

Finalement, afin de se rapprocher des données nonobstant la régularisation, le pôle $\tilde{P}_{r,s}$ est modifié de sorte qu'un facteur de pondération diminuant l'influence de l'énergie de tension au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente soit intégré. Ceci permet d'une part de ne pas trop ralentir l'accroche aux données, et d'autre part d'homogénéiser les déplacements de l'ensemble des points de contrôle, en privilégiant ceux qui n'ont pas encore été sollicités.

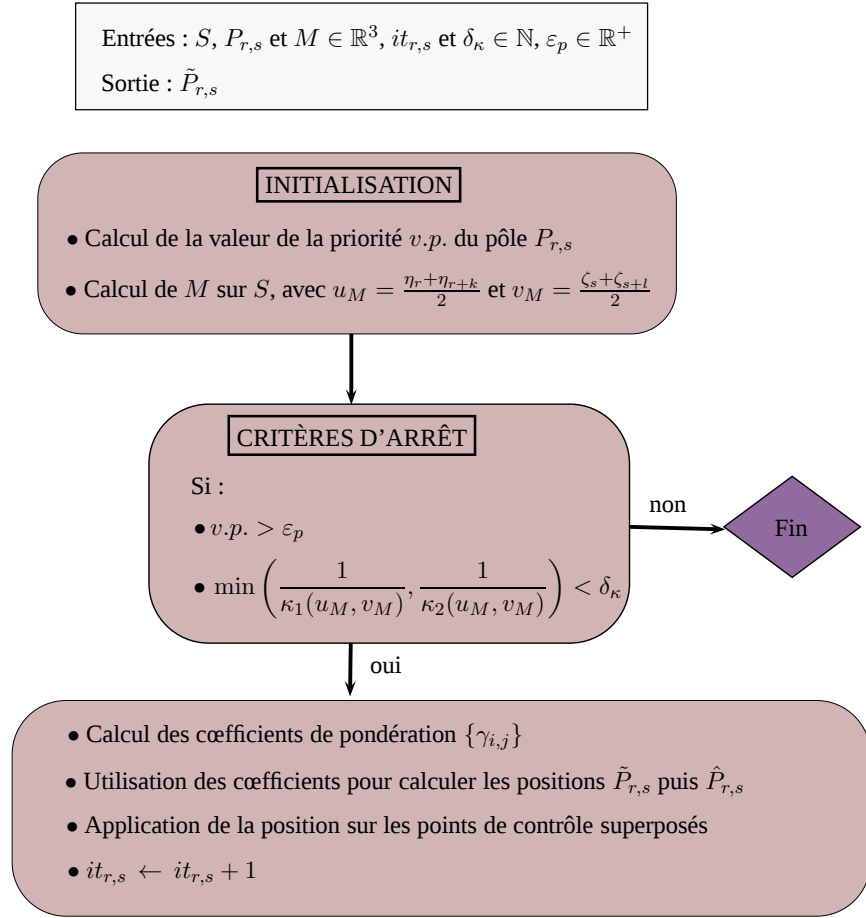


Figure 3.36. Algorithme de la procédure de régularisation.

La régularisation contrôle la qualité de la surface. Couplée à la fonctionnelle de la partie 3.4.2, ces deux notions sont à combiner dans l'algorithme global d'ajustement aux données. Le processus est décrit au paragraphe 3.4.4.

3.4.4 Réduction de la fonctionnelle

La réduction de la fonctionnelle 3.36 est très similaire à la méthode décrite pour les courbes au paragraphe 3.3.2.4. Elle repose également sur l'alternance d'une étape de paramétrisation, et d'une étape de déplacement des points de contrôle.

La première étape fixe les points de contrôle et met à jour les graphes de correspondances pour calculer la fonctionnelle f .

La seconde étape fixe les trois graphes de correspondances et applique une descente de gradient à pas optimal par rapport aux points de contrôle. Le gradient ∇^P est - comme pour les courbes - formé par la somme des gradients $\nabla_{D \rightarrow E}^P$ et $\nabla_{E \rightarrow D}^P$, définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{D \rightarrow E}^P = \begin{pmatrix} \nabla_{D \rightarrow E}^{P,0} \\ \vdots \\ \nabla_{D \rightarrow E}^{P,m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N N_{0,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{0,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \frac{E_s}{D \rightarrow E} \\ \vdots \\ -\frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N N_{m,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{n,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \frac{E_s}{D \rightarrow E} \end{pmatrix} \\ \nabla_{E \rightarrow D}^P = \begin{pmatrix} \nabla_{E \rightarrow D}^{P,0} \\ \vdots \\ \nabla_{E \rightarrow D}^{P,m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} N_{0,k}(u_q, v_r) N_{0,l}(u_q, v_r) \frac{E_{q,r}}{E \rightarrow D} \\ \vdots \\ -\frac{2}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} N_{m,k}(u_q, v_r) N_{n,l}(u_q, v_r) \frac{E_{q,r}}{E \rightarrow D} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Soient P_c les pôles $\{P_{i,j}\}_{i,j=0,0}^{m,n}$ à l'itération c , et P_{c+1} les points à l'itération $(c+1)$ tels que $P_{c+1} = P_c - \alpha \nabla^P f(P_c, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{G})$. La valeur stationnaire α annulant toutes les composantes du gradient est donnée par le théorème 3.4.1³.

Théorème 3.4.1

La fonctionnelle $f(P - \alpha \nabla^P, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{G})$ atteint son minimum en α_{max} dans la direction de descente $-\nabla^P$ si et seulement si :

$$\alpha_{max} = \frac{\frac{1}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \left(h_{q,r} \cdot \frac{E_{q,r}}{E \rightarrow D} \right) - \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left(g_s \cdot \frac{E_s}{D \rightarrow E} \right)}{\frac{1}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \|h_{q,r}\|^2 + \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|g_s\|^2}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E_{q,r}}{E \rightarrow D} = S(u_q, v_r) - D(u_q, v_r) \\ \frac{E_s}{D \rightarrow E} = D_s - S(u_{D_s}, v_{D_s}) \\ h_{q,r} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \\ g_s = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \end{array} \right.$$

3. La preuve est fournie en annexe.

3.4.5 Étude de la convergence de l'ajustement de la surface

La convergence de la procédure d'ajustement est vérifiable de la même manière qu'au paragraphe 3.3.2.6 pour l'axe non-linéaire. D'une itération à l'autre, les graphes de correspondances et le réseau de contrôle sont modifiés si la valeur de la fonctionnelle est réduite.

La partie 3.4.6 illustre maintenant les résultats de son application.

3.4.6 Implémentation et résultats

Après la présentation des critères d'arrêt utilisés lors de l'implémentation, l'application de la procédure d'ajustement sera mise en évidence par son application sur des formes génériques comme les superellipsoïdes et sur les organes pelviens. Les résultats ont été produits à partir d'un ordinateur portable de type Intel Core I7 M620 2.67GHz avec 4Go de mémoire RAM.

Les deux fonctionnelles d'énergie quantifiant les erreurs d'ajustement sont $f_{D \rightarrow E}(P, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $f_{E \rightarrow D}(P, \mathcal{G})$. L'analyse de leurs influences individuelles et combinées permet d'estimer leur impact pendant le processus de reconstruction. Des surfaces paramétriques d'ordres 4×4 sont utilisées par la suite, permettant de restreindre la contrainte de continuité.

3.4.6.1 Critères d'arrêt

L'ensemble des critères définis du paragraphe 3.3.4.1 est repris :

- le nombre maximal d'itérations It_{max} ;
- le seuil ε_{stag} évitant la stagnation de la solution de l'itération c à $(c + 1)$, tel que :

$$f_c(\mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{G}) - f_{c+1}(\mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{G}) \leq \varepsilon_{stag} \quad \text{avec } \varepsilon_{stag} \in [0, 1] \quad (3.48)$$

- la valeur minimale de la norme du gradient ε_{∇} .

En outre, deux heuristiques supplémentaires sont utilisées. La première prend en compte l'erreur maximale E_{max} de la fonctionnelle f , définie par :

$$\max \left\{ \max_{0 \leq s \leq N} \left(E_s \right)_{D \rightarrow E}, \max_{0 \leq q, r \leq M_1, M_2} \left(E_{q, r} \right)_{E \rightarrow D} \right\} \quad (3.49)$$

La seconde regroupe les erreurs quadratiques moyennes $EQM_{D \rightarrow E}$ et $EQM_{E \rightarrow D}$ de chaque sous-fonctionnelle, calculées par :

$$\begin{cases} EQM_{D \rightarrow E} = \sqrt{f_{D \rightarrow E}(P, \mathcal{U}, \mathcal{V})} \\ EQM_{E \rightarrow D} = \sqrt{f_{E \rightarrow D}(P, \mathcal{G})} \end{cases} \quad (3.50)$$

À partir de ces heuristiques, les deux critères d'arrêt suivants sont ajoutés. Soit δ_{acq} la précision de l'acquisition des données (de l'ordre du millimètre dans notre cas). L'algorithme

s'arrête donc également si $E_{max} \leq \delta_{acq}$ ou si $\underset{D \rightarrow E}{EQM} \leq \delta_{acq}$ et $\underset{E \rightarrow D}{EQM} \leq \delta_{acq}$. Rendre obligatoire les deux conditions serait trop contraignant, puisque la condition sur l'erreur maximale implique celle sur les erreurs quadratiques moyennes. Dans les cas où il sera possible de savoir que la condition sur E_{max} ne sera pas atteinte (cf. le paragraphe 3.4.6.3 sur la présentation des données pelviennes), le critère sur les erreurs quadratiques moyennes sera privilégié.

L'ensemble des critères précédents est finalement intégré dans l'algorithme global de l'ajustement itératif, représenté par la figure 3.37.

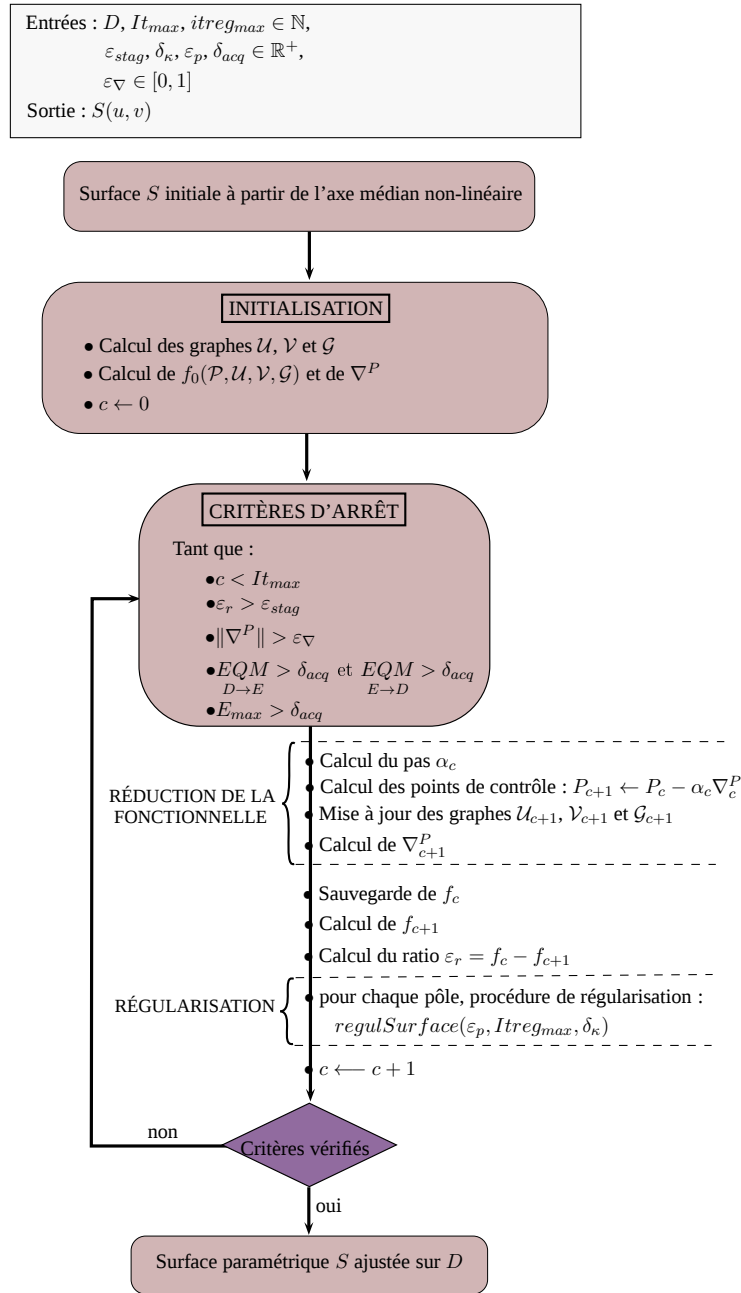


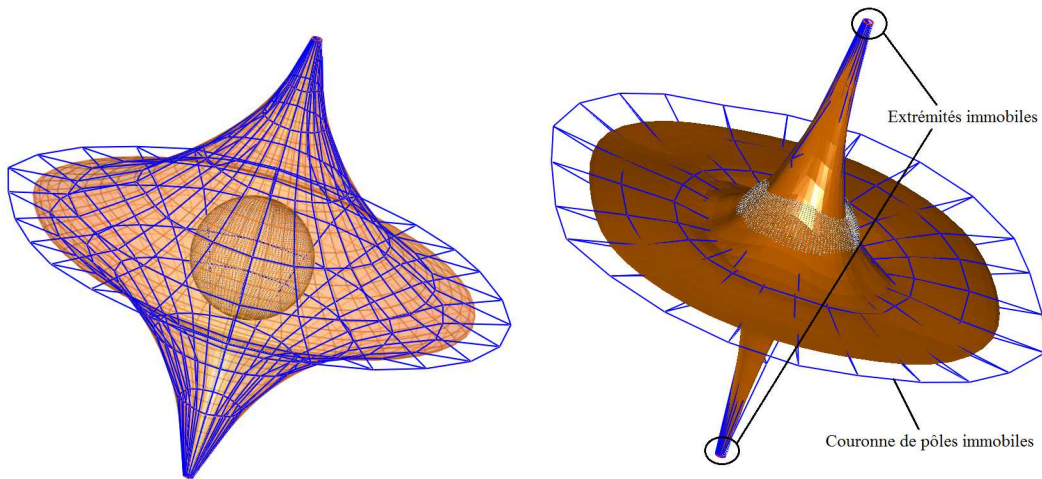
Figure 3.37. Algorithme global de la procédure d'ajustement de la surface.

Tout d'abord, la méthode est appliquée sur des formes génériques pour étudier qualitativement les reconstructions. Ensuite, après une présentation des données pelviennes acquises pour le projet, l'étude se consacre aux organes.

3.4.6.2 Étude qualitative des termes d'énergie appliqués aux superellipsoïdes

Nous travaillons par la suite avec des superellipsoïdes en forme de sphère et de toupie (cf. partie 2.5.2 du chapitre 2).

La figure 3.38(a) illustre tout d'abord l'ajustement des données d'une sphère avec la fonctionnelle $f_{D \rightarrow E}$, qui considère l'écart entre chaque point des données et les plus proches points de l'échantillonnage. Le nuage est **contenu** dans la surface initiale décrivant une toupie. Le résultat à la figure 3.38(b) montre clairement que les pôles sur la bordure et aux pointes de la toupie ne sont pas déplacés : les échantillons relatifs à ces pôles ne sont pas considérés comme points caractéristiques par les données dans les graphes de correspondances.



(a) Les données de la sphère contenues dans l'approximant en forme de toupie

(b) Pôles immobiles sur la bordure

Figure 3.38. Ajustement avec la sous-fonctionnelle s'exerçant de D vers E .

A contrario, la figure 3.39(a) représente l'influence de la seconde fonctionnelle $f_{E \rightarrow D}$, qui considère l'écart entre chaque point de l'échantillonnage et les plus proches points des données. Cette fois-ci, les données d'une toupie **contiennent** presque intégralement une surface initiale décrivant une sphère. La figure 3.39(b) présente les zones aux extrémités qui n'ont pas pu être atteintes pendant le processus itératif. Aucune de ces données n'est considérée comme point caractéristique d'un échantillon de la surface paramétrique.

Finalement, à partir de la fonctionnelle totale, des reconstructions correctes de la toupie et de la sphère sont obtenues (cf. figures 3.40(a) et 3.40(b)). Les parties de l'échantillonnage et des données les plus éloignées sont prises en compte.

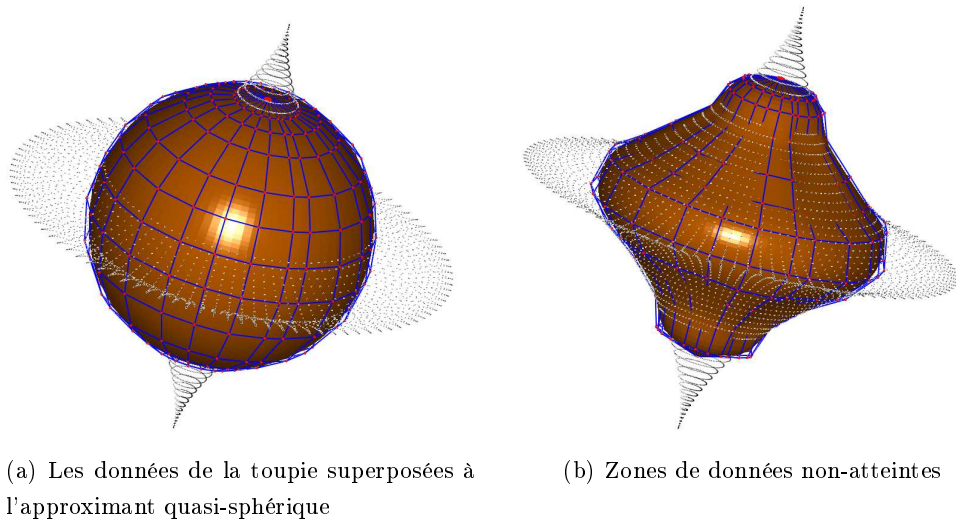


Figure 3.39. Ajustement avec la sous-fonctionnelle s'exerçant de E vers D .

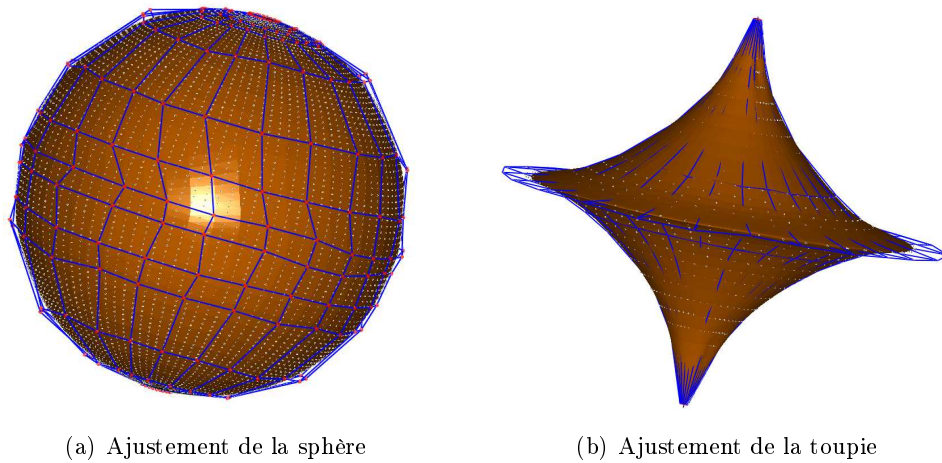


Figure 3.40. Ajustements avec la fonctionnelle totale.

3.4.6.3 Présentation des données pelviennes

Pour la construction d'organes de la région pelvienne à partir d'ensembles de points épars, les données de trois patientes sont disponibles. Cependant, mis à part les jeux de données d'une patiente spécifique (une vessie de 44K points, un rectum de 22K points, et un utérus de 47K points), les autres fichiers ont un nombre de points allant de 100 à 2000. Les analyses sont donc essentiellement effectuées sur les nuages plus denses.

Une inspection qualitative des nuages a permis de conclure que la vessie à la figure 3.41(a) ne montre pas de problème lié à l'acquisition. Le rectum de la figure 3.41(b), quant à lui, ne décrit pas l'intégralité de l'organe. La présence de selles à l'intérieur pendant l'acquisition est sans doute responsable de l'information manquante. Finalement, l'utérus et le vagin à la figure 3.41(c) n'ont pas pu être séparés pendant l'acquisition dû au manque de précision de l'IRM. Cela présentera également un problème lors de la création des épaisseurs, nous

y reviendrons au chapitre 4. L'existence de nombreux nodules à l'intérieur, conséquence de l'étape de Segmentation, est également à noter.

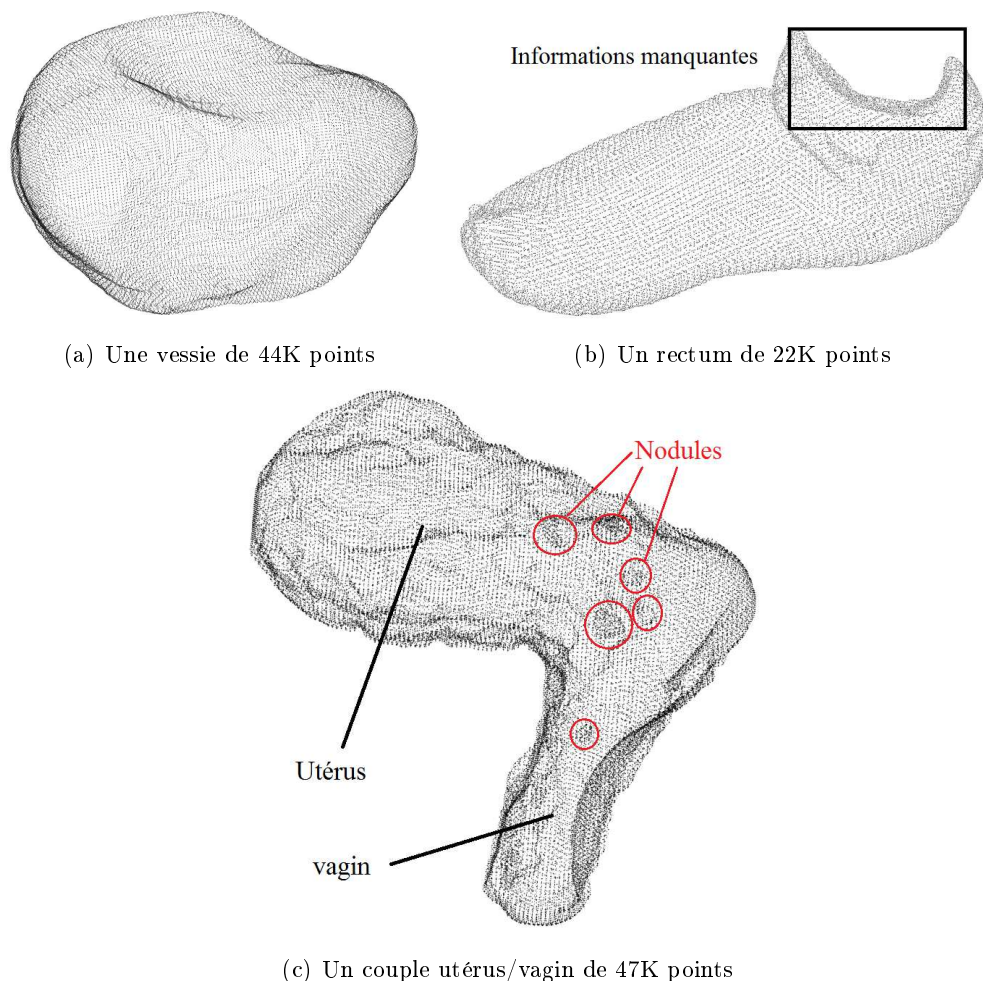


Figure 3.41. Nuages de points utilisés.

3.4.6.4 L'influence de l'initialisation

Le nuage de points de l'utérus nous permet de mettre en évidence le gain qualitatif de l'initialisation itérative sur l'ACP pour la construction de la surface. La méthode d'ajustement n'applique pas de régularisation.

La figure 3.42(a) présente tout d'abord l'application d'une ACP sur les données, et la surface initiale résultante. Après la reconstruction de la surface à la figure 3.42(b), des chevauchements sont créés. Ce problème provient de la nature de la fonctionnelle qui n'a pas de contrainte sur sa tension de l'approximant.

A contrario, avec l'initialisation itérative de la figure 3.43(a), on peut constater une disparition des repliements de la surface (cf. figure 3.43(b)). La procédure d'ajustement s'est en effet exécutée avec une initialisation plus proche du jeu de données en entrée, ce qui a impact non-négligeable sur la qualité du résultat.

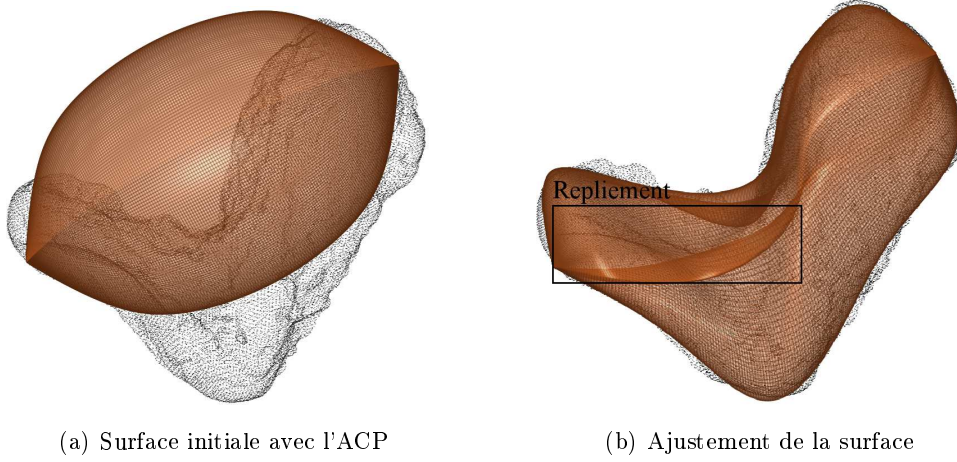


Figure 3.42. Reconstruction d'un utérus sur 10 itérations, initialisée par une ACP.

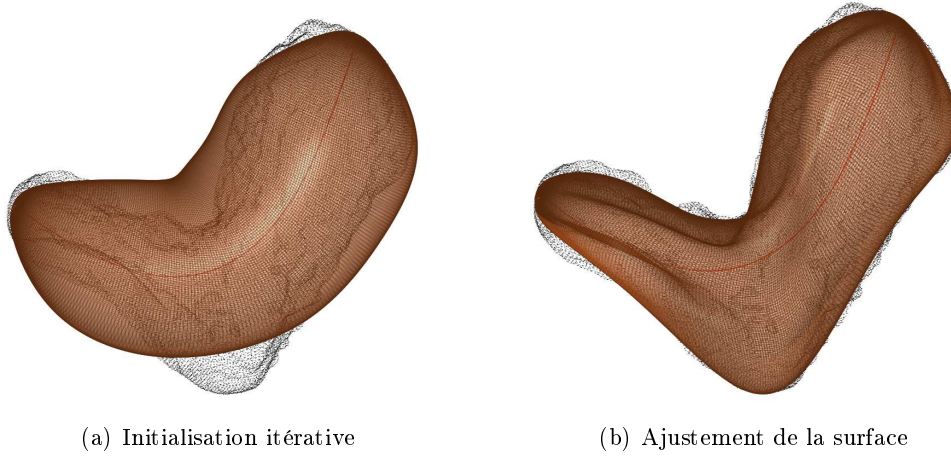


Figure 3.43. Reconstruction d'un utérus sur 10 itérations, avec l'axe médian non-linéaire.

3.4.6.5 Étude qualitative et quantitative des termes d'énergie appliqués aux organes pelviens

L'écart aux données est quantifié par l'erreur quadratique moyenne et l'erreur maximale. Les tableaux 3.3(a), 3.3(b) et 3.3(c) retranscrivent leurs valeurs pour chaque sous-fonctionnelle et pour la fonctionnelle globale. La présence du signe « / » dans les tableaux correspond à la non-utilisation d'un terme d'énergie pendant la procédure d'ajustement.

Nous pouvons tout d'abord remarquer que l'erreur quadratique moyenne atteint le seuil de la précision pour chaque reconstruction. Ensuite, l'utilisation de la fonctionnelle $f_{E \rightarrow D}$ se justifie d'un point de vue qualitatif. Les différentes reconstructions suivantes d'un rectum illustrent nos propos. Dans le cas où seule la fonctionnelle $f_{D \rightarrow E}$ est employée, des « pincements » sont visibles sur la surface (cf. figure 3.44(a)). Ils sont issus de la non-sollicitation de points de contrôle, ayant ces zones comme support. *A contrario*, en considérant uniquement la fonctionnelle $f_{E \rightarrow D}$, l'intégralité de la surface est sollicitée mais une partie des données

TABLE 3.3. Résultats numériques de l'ajustement des surfaces pelviennes (30 itérations).

(a) Résultats pour la vessie

	E_{max} (mm)	$EQM_{D \rightarrow E}$ (mm)	$EQM_{E \rightarrow D}$ (mm)	Temps (s)
Initialisation	13.5	4.02	2.47	3
$f_{D \rightarrow E}$	2.12	0.7	/	75
$f_{E \rightarrow D}$	2.53	/	0.59	74
f totale	1.37	0.42	0.35	177

(b) Résultats pour le rectum

	E_{max} (mm)	$EQM_{D \rightarrow E}$ (mm)	$EQM_{E \rightarrow D}$ (mm)	Temps (s)
Initialisation	11.8	2.86	2.04	1
$f_{D \rightarrow E}$	4.19	0.70	/	36
$f_{E \rightarrow D}$	5.53	/	0.67	36
f totale	1.27	0.41	0.37	80

(c) Résultats pour le couple utérus/vagin

	E_{max} (mm)	$EQM_{D \rightarrow E}$ (mm)	$EQM_{E \rightarrow D}$ (mm)	Temps (s)
Initialisation	15	6.08	2.81	3
$f_{D \rightarrow E}$	8.04	1.37	/	92
$f_{E \rightarrow D}$	6.46	/	1.05	98
f totale	4.88	0.8	0.53	196

n'est pas approchée (cf. figure 3.44(b)). La figure 3.44(c) présente finalement la combinaison des deux qui évite le problème.

Cependant, l'application de la procédure d'ajustement ne conduit pas à une erreur maximale inférieure à la précision de 1 mm de l'acquisition (cf. partie 1.3.3.4 du chapitre 1). Ceci provient directement de la paramétrisation par les graphes de correspondances, qui ne donne pas un aperçu représentatif de la distance entre la surface et les données en cas de proximité trop forte : le nuage et la discrétisation de la surface ne sont pas superposables. Cependant, du fait de cette proximité, les inconvénients de la projection orthogonale évoqués au paragraphe 3.3.2.4 sont désormais évités. Une itération supplémentaire de projection orthogonale des données sur les plans tangents de la surface est alors appliquée. Le tableau 3.4 présente les résultats des erreurs à l'issue de cette étape.

Pour la vessie et le rectum, la procédure est arrêtée dès que l'erreur maximale passe sous le seuil du millimètre. Pour le couple utérus/vagin, la présence des nodules à l'intérieur (cf. figure 3.41(c)) fausse les résultats numériques, mais la surface ne présente pas de repliement et respecte les contraintes en entrée.

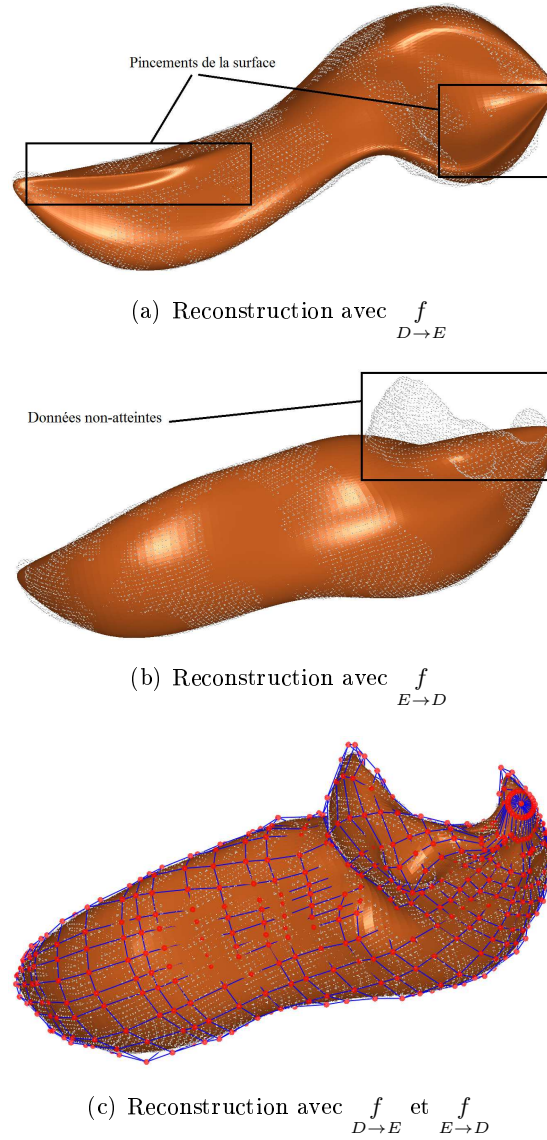


Figure 3.44. Reconstructions différentes du rectum selon les fonctionnelles.

TABLE 3.4. Étape de projection orthogonale après la procédure d'ajustement (1 itération).

	E_{max} (mm)	$EQM_{D \rightarrow E}$ (mm)	Temps (s)
Vessie	0.942	0.158	37
Rectum	0.988	0.153	49
Utérus/vagin	3.26	1.02	108

En outre, nous pouvons noter des temps de calcul bien plus élevés avec la projection orthogonale. Dans le cas de la vessie par exemple, le temps moyen d'une itération avec les graphes de correspondances est de 2 secondes, contre 37 secondes avec la projection sur les

plans tangents de la surface. Ces temps restent cependant acceptables dans le cadre de ce projet. En effet, bien que l'objectif ne soit pas de définir un système temps-réel, il ne faut pas non plus limiter son utilisation.

Les figures 3.45(a) et 3.45(b) illustrent les constructions de la vessie et de l'utérus.

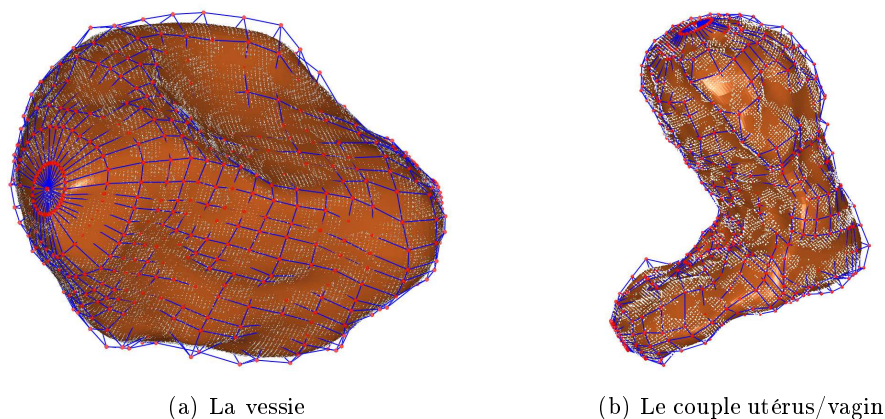


Figure 3.45. Surfaces finales d'organes pelviens construites avec la fonction bidirectionnelle.

3.4.6.6 Validation des résultats

L'expert médical donne son avis sur la pertinence des constructions. La figure 3.46(a) présente à cet effet des courbures trop importantes. L'utérus étant un organe lisse, la surface reconstruite est lissée après le processus d'ajustement avec un algorithme de type Hadenfeld jusqu'à atteindre un aspect visuel satisfaisant (cf. figure 3.46(b)). Compte-tenu de la réalité clinique, bien que nous soyons plus éloignés des données, les résultats sont plus pertinents d'un point de vue médical.

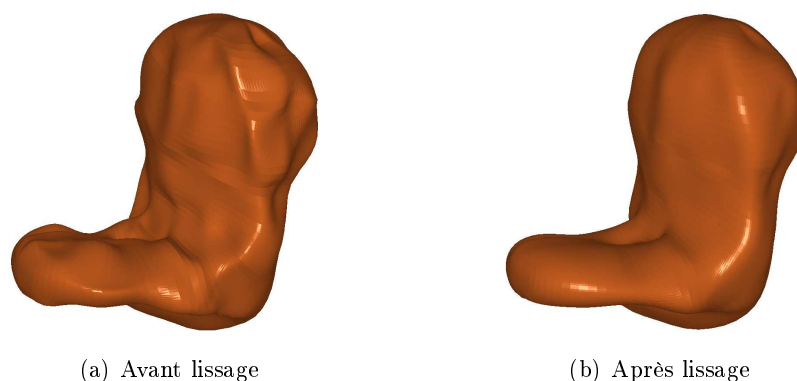
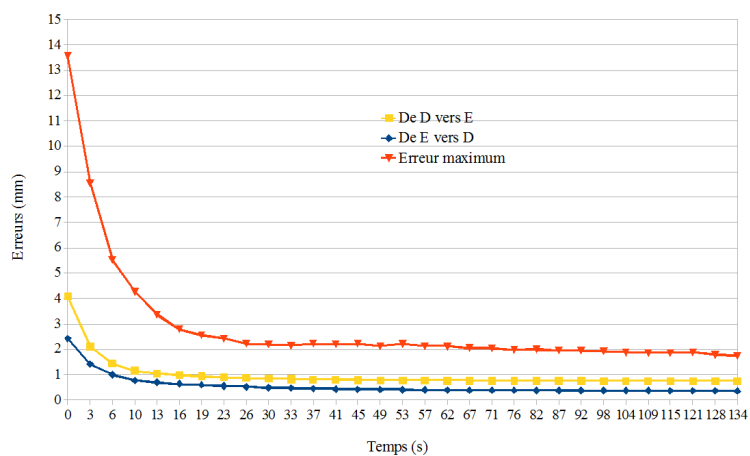


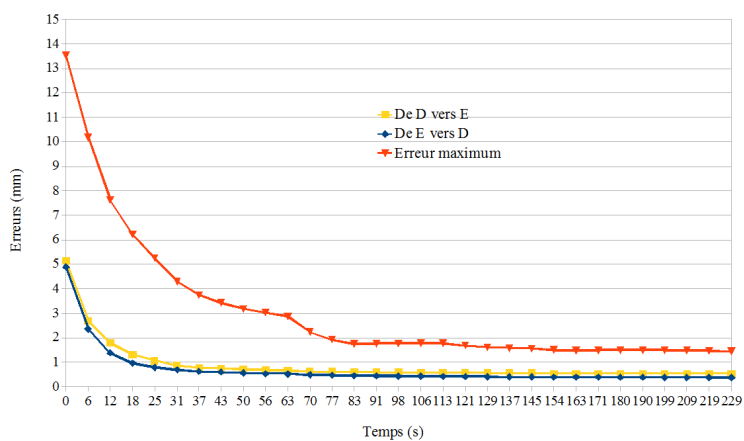
Figure 3.46. Le couple utérus/vagin et le lissage de surface.

3.4.6.7 Évolution des erreurs au cours du temps de la procédure d'ajustement

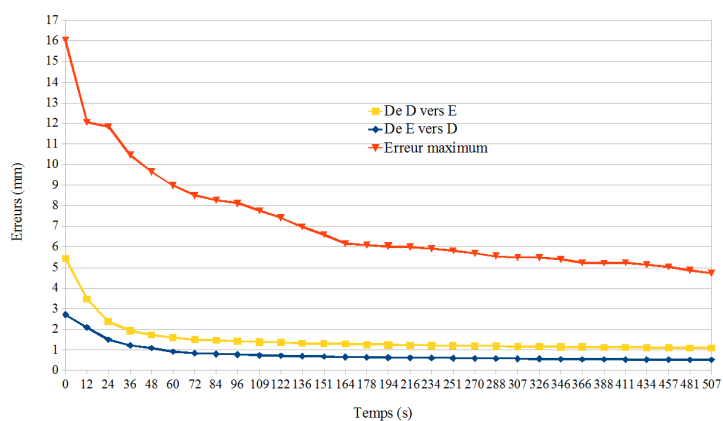
Dans les figures 3.47(a) à 3.47(c), l'évolution de l'erreur quadratique moyenne et de l'erreur maximum est représentée en fonction du temps. Nous pouvons vérifier dans chaque cas de figure une diminution stricte des erreurs au cours du temps.



(a) Évolution pour la vessie



(b) Évolution pour le rectum



(c) Évolution pour le couple utérus/vagin

Figure 3.47. Évolution des erreurs quadratiques moyennes et maximum de l'ajustement des surfaces pelviennes au cours du temps.

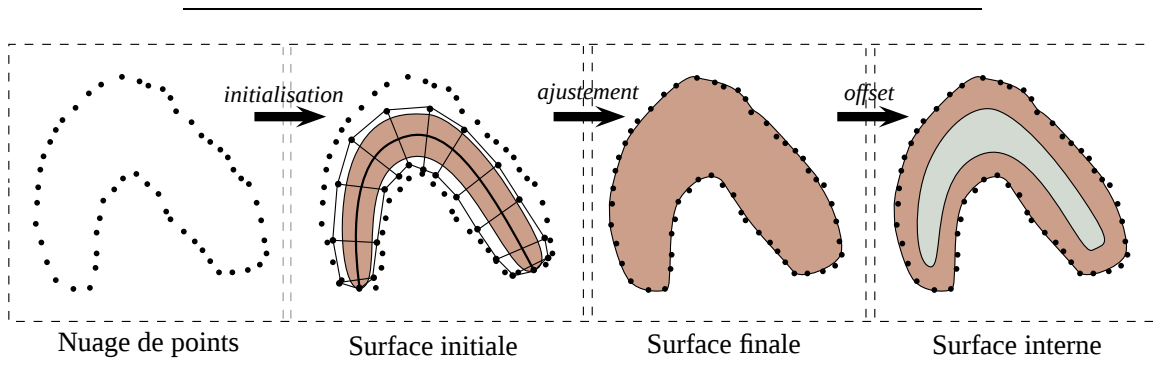
3.4.7 Conclusions

La procédure d'ajustement est décomposée en deux parties : un ajustement paramétrique pour réduire l'écart aux données, et une régularisation du potentiel d'énergie de la surface pour gérer sa tension.

L'idée développée pour l'axe médian non-linéaire de la partie 3.3 est transposée pour les surfaces. Une fonctionnelle bidirectionnelle est développée, afin de prendre en compte l'ensemble du nuage de points et l'intégralité de la surface approximante par son échantillonnage. Une descente de gradient est également utilisée pour réduire cette erreur. Cependant cette réduction peut conduire à des artéfacts qui doivent être corrigés en contrôlant la « qualité » de la surface. Cette notion subjective est difficile à évaluer, et est spécifique à chaque problème. Nous avons de ce fait défini une régularisation de la surface reposant sur sa forme géométrique locale à partir des rayons principaux de courbure. En outre, l'ajout de la fonctionnelle $f_{E \rightarrow D}$ permet d'améliorer l'ajustement, en considérant l'intégralité de l'approximant paramétrique. Finalement, l'énergie quantifiant par différentes approches l'écart entre les données et la surface permet de reconstruire les formes de genre 0 qui ont pu être guidées par l'initialisation suivant le profil curviligne général des organes.

Les perspectives de cette méthode consiste à revenir sur les heuristiques utilisées pour la régularisation. Plusieurs paramètres sont déterminés de manière empirique. Une étude plus approfondie de la liaison entre la nature géométrique de la surfaces et son énergie de déformation mettrait en évidence un comportement de ces paramètres, permettant de les déterminer de manière adaptative pendant le processus de résolution.

Comme définie au chapitre 1, la tâche de la Modélisation Géométrique nécessite d'ajouter une épaisseur aux contours des organes pour se rapprocher de la réalité physiologique à l'issue de l'ajustement de la surface. Cette étape est développée au chapitre 4.



3.5 Synthèse

L'objectif de ce chapitre consistait à fournir l'ensemble des éléments pour construire la surface des organes pelviens à partir de nuages de points épars. Contrairement aux méthodes présentes dans la littérature, nous avons proposé une approche permettant à la fois de considérer les contraintes requérant un *contrôle de la surface* avec la formulation paramétrique, et d'obtenir les résultats escomptés. La méthode s'est en effet révélée efficace pour la reconstruction de formes génériques telles que les superellipsoïdes, tout en évitant les problèmes qu'aurait engendré la projection orthogonale dans la procédure itérative.

Cette partie a été décomposée en 3 phases distinctes. Tout d'abord, la partie 3.2 a défini la nature de la surface paramétrique utilisée. Pour répondre aux contraintes de continuité, nous avons dû développer une formulation B-spline de genre 0 en traitant d'une part le réseau de contrôle, et d'autre par les séquences nodales dans chaque direction paramétrique. Dans la direction des « parallèles », l'établissement du réseau et du vecteur de nœuds a reposé sur la notion de périodicité. Dans la direction des « méridiens », le travail fut différent puisque deux fermetures ont été définies pour chaque isocourbe. En choisissant les ordres 4×4 , une surface au moins C^1 -continue a été obtenue.

Ensuite, la partie 3.3 a détaillé la procédure d'initialisation de la surface sur les données, en disposant plus fidèlement l'approximant par rapport au nuage de points. Notre approche consiste en la création d'un axe médian non-linéaire, décrivant le profil général de l'organe à travers une variété de dimension 1. L'étape a consisté à disposer le réseau de contrôle initial - en forme de cylindre généralisé - par isocourbe le long de la courbe. L'utilisation de cette méthode s'est révélée significative pour la reconstruction des contours 3D.

Finalement, la partie 3.4 a présenté l'ajustement de la surface en partant de l'approximant initialisé. Couplée à un terme de régularisation, nous avons défini une énergie bidirectionnelle pour quantifier l'écart aux données, caractérisant à la fois l'écart de chaque point par rapport à l'approximant et celui de la discrétisation de la surface par rapport aux données. Finalement, les surfaces pelviennes ont été obtenues par un processus de réduction itérative, composé par l'alternance d'une étape de paramétrisation par recherche de plus proche élément entre l'échantillonnage de la surface et le nuage de points et d'une descente de gradient à pas optimal. Lorsque cela était possible, la précision de l'étape d'acquisition a été atteinte à l'issue de la procédure. Dans les autres cas de figure, l'approche a permis d'obtenir des résultats validés par l'expertise médicale du projet malgré la présence importante de bruit. L'intérêt de notre méthode est de satisfaire les contraintes en entrée, tout en conservant les avantages des surfaces paramétriques en termes de précision de la localisation et de continuité.

Maintenant que les surfaces pelviennes sont construites, la dernière tâche, développée aux chapitres 4 et 5, consiste à ajouter une épaisseur aux contours des organes (définis comme les « surfaces externes » par la suite) pour se rapprocher de la réalité physiologique. Le réalisme des simulations est en effet le point-clé de l'étape de Modélisation Physique.

Sommaire

4.1	Introduction	107
4.2	Présentation du problème général	107
4.2.1	Nature de la <i>surface-offset</i> dans notre étude	108
4.2.2	Géométrie différentielle et singularités des <i>offsets</i>	109
4.3	Classification des approches	110
4.4	Méthodes actuelles de constructions d'offsets	111
4.4.1	Les approches volumétriques	111
4.4.2	Approches à base de surfaces	114
4.5	Synthèse	119

4.1 Introduction

Précédemment, nous avons vu que la formulation paramétrique de genre 0 a permis d'ajuster les ensembles de points décrivant le contour fermé des organes. D'après les suppositions du système pelvien exprimées au chapitre 1, nous allons dorénavant nous intéresser à ***l'épaisseur des membranes*** afin d'intégrer leur valeur ***significative*** dans notre modèle.

Dans cette optique, définir l'organe entier en tant que maillage volumique est mis de côté pour que la différence de densité entre l'intérieur des formes et les parois soit prise en compte. De ce fait, le choix entrepris consiste à considérer une paroi comme la zone bornée par une « surface externe » (la *génératrice*, issue de l'ajustement aux données), et une « surface interne » à déterminer. Le calcul de cette surface interne doit être guidé par la génératrice. Afin d'y parvenir, le domaine de la géométrie met à notre disposition des outils mathématiques, notamment à travers la notion de ***surface-offset***. Ces deux surfaces - la génératrice et *l'offset* - sont alors pour le moment considérées « parallèles » entre elles, éloignées l'une de l'autre en tout point d'une distance égale à une valeur d'épaisseur (la *distance-offset*) dans la direction de la normale.

De nombreuses applications industrielles utilisent la notion d'*offset*. Nous pouvons notamment la retrouver dans les domaines suivants : le calcul d'espaces d'accès en robotique ([Lozano-Pérez and Wesley, 1979]), la localisation de surfaces par définition de régions de tolérance ([Patrikalakis and Bardis, 1991]), la reconnaissance de caractéristiques par la construction de squelettes et d'axes médians des modèles géométriques ([Wolter, 1992]), la représentation de pinceaux ([Kim et al., 1993]), la conception de panneaux comme le mélaminé composite ([Kumar et al., 2002]), la génération de chemins d'outils ([Rohmfeld, 1998, Lartigue et al., 2001, Kim and Yang, 2005]), le prototypage rapide ([Park, 2005]), i.e. pour des domaines requérant le contrôle d'une trajectoire sur une surface, la création de surface multi-couches ou de formes creuses. Chaque approche est associée à la satisfaction des contraintes propres à la modélisation. L'application dans un contexte médical nécessite de la même manière une adaptation spécifique dépendant des connaissances disponibles sur l'environnement à modéliser.

Après la présentation du problème global et de sa formalisation, une classification des méthodes actuelles de construction de *surfaces-offsets* est proposée. Elles sont ensuite développées au regard de notre cas d'utilisation.

4.2 Présentation du problème général

Pour se rapprocher de la réalité physiologique, un maillage volumique de la membrane épaisse des organes - et non des organes eux-mêmes - est créé. Le problème consiste donc en deux étapes : construire la *surface-offset* et créer le maillage hexaédrique. L'étude bib-

liographique ici se consacre à la construction de la *surface-offset*, tandis que la création du maillage sera discutée au chapitre suivant. Cette partie met tout d'abord en évidence les contraintes à respecter pour notre étude, et les conditions de leurs dégénérescences.

4.2.1 Nature de la *surface-offset* dans notre étude

Nous commençons par fournir la définition 4.2.1 décrivant la *surface-offset* que nous allons considérer. Pour soulager les notations, les flèches des vecteurs normaux seront omises par la suite.

Définition 4.2.1

L'offset interne/externe S_o d'une surface S est l'enveloppe tracée par les vecteurs normaux de S orientés vers l'intérieur/l'extérieur et de norme égale à la distance-offset. Selon l'environnement d'intérêt, la valeur de cette distance-offset est constante ou fonction de la localisation sur la surface. On parle alors d'offset généralisé.

Ainsi, à partir de la génératrice S obtenue au chapitre 3, l'écriture de la *surface-offset* S_o est formalisée avec la représentation paramétrique par :

$$S_o(u, v) = S(u, v) + f(u, v) n(u, v), \quad (4.1)$$

avec $n(u, v) = \frac{S_u \times S_v}{\|S_u \times S_v\|}$ la normale unitaire en (u, v) , S_u et S_v les dérivées premières, f la fonction retournant la *distance-offset* dépendante de la localisation paramétrique. Un parallèle peut être fait avec les travaux de [Hagen et al., 1993], dans lesquels f est fonction des courbures principales pour analyser la qualité de la surface (notamment pour la visualisation des discontinuités).

Cependant, pour avoir une *distance-offset* variable avec l'équation 4.1, il est nécessaire de posséder une carte d'épaisseur, qui n'est pas disponible dans nos acquisitions. En effet les IRM permettent uniquement d'accéder aux données de la surface externe de l'organe, sans pouvoir obtenir d'informations précises sur leur intérieur. De ce fait, les deux choix suivants sont effectués. D'une part, une épaisseur de valeur constante est considérée, i.e. $f(u, v) = d$, calculée par la ***moyenne de chiffres issus de la littérature***. D'autre part, ***seuls des offsets-internes*** sont à construire dans notre cas d'utilisation.

Avec $d > 0$ et $n(u, v)$ orientée vers l'extérieur, l'expression de l'*offset-intene* S_o devient :

$$S_o(u, v) = S(u, v) - d n(u, v) \quad (4.2)$$

L'état de l'art proposé par [Maekawa, 1999] met en évidence les principales interrogations relatives aux *offsets*. Plusieurs d'entre elles sont cependant laissées de côté, afin de traiter plus particulièrement les questions qui nous intéresseront par la suite, à savoir :

- comment ***approcher les surfaces-offsets*** ?
- comment ***définir/améliorer la qualité d'une surface-offset*** ?

En effet, l'un des problèmes encore ouvert avec la construction des *offsets* concerne la gestion de leurs auto-intersections, des repliements de la surface créés en cas de *distance-offset* trop importante. Avant de poursuivre notre étude bibliographique, une présentation de ces dégénérescences est effectuée au paragraphe suivant.

4.2.2 Géométrie différentielle et singularités des *offsets*

Les différentes formulations établis par [Farouki, 1986] et [Patrikalakis, 2002] associent la géométrie différentielle de la *surface-offset* et de sa génératrice, et plus particulièrement les normales des surfaces et leur lien avec les dégénérescences et la valeur des épaisseurs.

4.2.2.1 Relations à travers les normales

Soient $n(u, v)$ et $n_o(u, v)$ les normales unitaires respectives en (u, v) de S et S_o . La relation suivante (issue de [Patrikalakis, 2002]) les associe :

$$n_o(u, v) = \rho n(u, v), \quad (4.3)$$

où :

$$\rho = \frac{(1 + d\kappa_{max})(1 + d\kappa_{min})}{|(1 + d\kappa_{max})(1 + d\kappa_{min})|} \pm 1, \quad (4.4)$$

avec κ_{min} et κ_{max} les courbures principales, et $d > 0$ la *distance-offset*. Les vecteurs n et n_o sont de ce fait colinéaires, tout en pouvant être dirigés dans des directions opposées lorsqu'une opération d'*offset* est effectuée dans les régions concaves de la génératrice.

Par ailleurs, il est important de noter que la formulation 4.4 n'est définie que si $\kappa_{min}(u, v)$ et $\kappa_{max}(u, v)$ sont différents de $-\frac{1}{d}$. La normale indéterminée en ces points représente une singularité particulière de la surface. Le paragraphe suivant présente les cas plus généraux dans lesquels cette dégénérescence s'inscrit.

4.2.2.2 Singularités des *offsets*

La notion d'auto-intersection d'une surface peut se dissocier en deux parties. Tout d'abord, **une auto-intersection locale** est créée lorsque la valeur absolue de la *distance-offset* est supérieure au rayon de courbure minimal (cf. figure 4.1(a)). Différemment, **une auto-intersection globale** se produit lorsque deux zones de la surface qui ne sont pas supposées être en contact se chevauchent (cf. figure 4.1(b)).

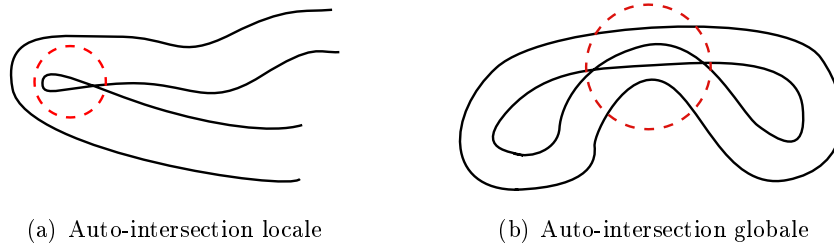


Figure 4.1. Auto-intersections illustrées pour une courbe.

Plus généralement, une *surface-offset* paramétrique présente une auto-intersection si et seulement si il existe deux paires distinctes de paramètres (u, v) et (s, t) appartenant au domaine paramétrique de S telles que :

$$S(u, v) + d n(u, v) = S(s, t) + d n(s, t) \quad (4.5)$$

Abordée dans de nombreux travaux, cette problématique de gestion des singularités peut se répartir en trois catégories :

- traitement des auto-intersections locales (cf. les travaux de [Sun et al., 2004]) ;
- traitement simultanément des auto-intersections locales et globales sur la surface (cf. les travaux de [Kumar et al., 2002], [Seong et al., 2006], [Pekerman et al., 2008], [Liu and Wang, 2009], [Liu and Wang, 2011]) ;
- calcul de la valeur maximale de la *distance-offset* garantissant l'absence d'artéfacts (cf. les travaux de [Maekawa et al., 1998], [Wallner et al., 2001]). Cependant, puisque les modèles géométriques dans notre problématique doit intégrer des **épaisseurs non-négligeables**, déterminer la valeur de la distance maximale est insuffisant. Cette option ne sera donc pas prise en compte par la suite.

Après une classification des approches actuelles au paragraphe suivant, les méthodes de constructions d'offsets seront décrites au paragraphe 4.4.

4.3 Classification des approches

Comme pour l'ajustement de surfaces, les techniques de construction d'*offsets* sont nombreuses, variant par la nature de l'entrée et les contraintes posées sur la sortie.

D'une part, les éléments sur lesquels l'opérateur *offset* sont appliqués sont très différents selon les approches : maillages polygonaux, nuage de points, voire surfaces continues. D'autre part, chaque procédure se consacre à la vérification de propriétés spécifiques à l'environnement de modélisation (auto-intersections, temps de calcul, complexité, précision). Ces résultats ne peuvent pas être atteints avec un algorithme déplaçant simplement les points du maillage le long des normales (cf. les travaux de [Qu and Stucker, 2003]). Ces méthodes ont toutefois des points communs, qui nous permettent de proposer la répartition suivante.

Une classification en deux familles est effectuée. Tout d'abord, nous introduirons dans les paragraphes suivants les **approches volumétriques**, englobant l'environnement de la surface avec l'*offset* dans une grille. À partir de cela, différentes orientations sont possibles pour construire l'offset : calcul de **sommes de Minkowski** (cf. les travaux de [Varadhan and Manocha, 2004]), méthodes **à bases de points** (cf. [Chen et al., 2005]), ou détermination de **champs de distances** (cf. par exemple [Pavic and Kobbelt, 2008], ou [Liu and Wang, 2011]). Finalement, les méthodes **à base de surfaces** seront présentées,

opérant avec différentes représentations (cf. notamment [Kulczycka and Nachman, 2002] ou [Liu and Wang, 2009]).

Il faut noter que cette répartition est un exemple et n'est pas unique, puisque les approches sont souvent hybrides, combinant parfois plusieurs représentations (paramétrique, implicite), ou des éléments de dimension différente (point, surface, voxels, ...).

4.4 Méthodes actuelles de constructions d'offsets

L'état de l'art proposé ci-dessous n'a pas pour objectif de présenter une succession exhaustive de méthodes, mais de cerner les principales familles traitant de la création de maillages ou de surfaces *offsets*, avec l'objectif de construire un support à des lois de comportement.

4.4.1 Les approches volumétriques

Dans cette partie, la géométrie en entrée est plongée dans une grille de voxels, permettant de localiser et d'interagir avec l'*offset* souvent formulé implicitement.

4.4.1.1 Méthode par approximation de la somme de Minkowski

Cet *opérateur-offset* est un cas particulier de la somme de Minkowski*, s'appliquant entre un *maillage initial* à traiter et une *sphère*. Une approximation de cette somme, qui peut être une opération très coûteuse en temps de calcul et place mémoire, est proposée dans les travaux de [Varadhan and Manocha, 2004] pour des solides polyédriques. Le principe général consiste à :

1. décomposer le polyèdre sur lequel appliquer l'*offset* en éléments convexes ;
2. calculer les sommes de Minkowski des éléments convexes avec le second polyèdre ;
3. calculer l'union des sommes.

Cette dernière étape est la plus consommatrice, puisque pour des objets complexes le nombre d'éléments convexes est souvent important. Le modèle en sortie peut en outre être sujet à des problèmes de dégénérescences. De ce fait, Varadhan et al. ont préconisé la solution suivante (qui peut se retrouver d'ailleurs dans des travaux de [Pavic and Kobbelt, 2008]) :

1. utilisation d'une grille de voxels adaptative, permettant d'établir un champ de distances signées entre chaque cellule de la grille et le contour du modèle ;
2. application d'opérations de type min/max sur le champ de distances pour déterminer les voxels à ne pas prendre en compte pour construire le *modèle-offset* ;

*, cf. annexe

3. adaptation de la méthode du *Marching-Cubes* de [Lorensen and Cline, 1987] avec une isovaleur égale à la *distance-offset* pour extraire l'isosurface, conduisant à l'approximation des sommes de Minkowski.

Cette méthode présente cependant de nombreuses limitations, comme un problème dans la gestion des auto-intersections pour les objets complexes de forme libre. De plus, le nombre de triangles créé par l'algorithme des *Marching-Cubes* peut être très important.

Différemment, d'autres techniques modifient les maillages polygonaux en entrée afin de construire l'offset à partir d'ensemble de points.

4.4.1.2 Méthodes à base de points

Plusieurs approches intègrent les points de la *surface-offset* dans leur processus. Les travaux de [Chen et al., 2005] centrent leur méthode sur la génération de cet ensemble, à partir duquel sont sélectionnés les éléments qui ne créeront pas de dégénérescences.

Son principe, appliqué aux maillages triangulaires, se décompose en trois étapes. À partir de chaque face, arête, sommet, deux ensembles de points sont tout d'abord calculés :

- une liste correspondant à un échantillonnage du maillage ;
- une liste correspondant aux points « candidats » du *maillage-offset* (déplacement des échantillons le long des normales).

Ce second ensemble est ensuite épuré. Pour cela, le modèle en entrée est englobée dans une grille uniforme. Chaque voxel de la grille est étiqueté selon qu'il se trouve à l'intérieur, à l'extérieur, ou sur la frontière de la *géométrie-offset*. Finalement, la *surface-offset* est obtenue en appliquant une méthode de « contouring dual » (cf. les travaux de [Ju et al., 2002]) sur les points encore présents dans la liste de candidats.

Néanmoins, la complexité calculatoire et en espace mémoire est cubique, fonction de la résolution des voxels. Les approches suivantes proposent des adaptations pour éliminer une grande partie des voxels à analyser.

4.4.1.3 Méthodes par calcul de champs de distance

Le calcul d'un champ de distances est proposé dans les travaux de [Breen et al., 1998], à partir d'un maillage polygonal. Deux ensembles sont tout d'abord déterminés :

- le premier correspond aux nœuds d'une grille englobant le maillage en entrée, restreinte à une bande étroite ;
- le second est « l'ensemble zéro », constitué de points appartenant au maillage.

Le plus proche point de l'ensemble zéro est associée à chaque point de la bande. Un champ de distances est ensuite créé par propagation de la plus courte distance avec un algorithme de type *Fast Marching* (cf. les travaux de [Sethian, 1999], et de [Baerentzen, 2001]). L'*offset* est finalement obtenu à partir de l'algorithme du *Marching-Cubes*. [Liu and Wang, 2011] font toutefois état que le *Fast Marching* ne permet pas d'obtenir de résultats précis. Diverses améliorations ont été apportées par la suite, notamment en termes de calcul des distances,

de temps de calcul et de détection des détails.

Les travaux de [Liu and Wang, 2011] portent l'accent sur ces trois points, à travers un processus en trois étapes (cf. figure 4.2) :

1. calcul d'une bande étroite de voxels autour de *l'offset* (inconnu pour le moment) ;
2. calcul des intersections entre la bande et la *surface-offset* implicite ;
3. extraction du *maillage-offset*.

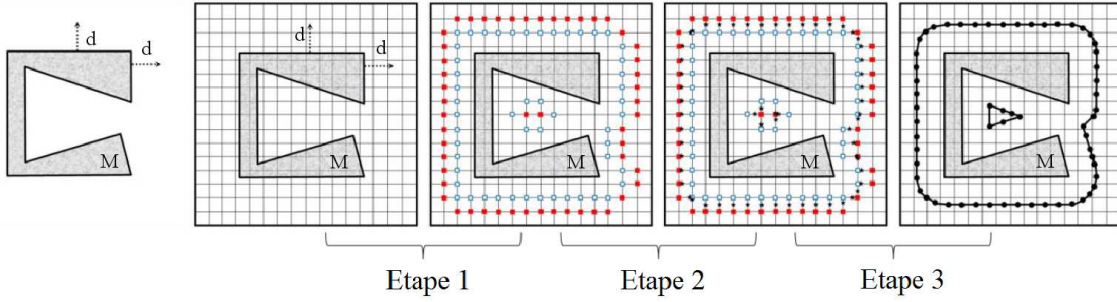


Figure 4.2. Processus global pour un *offset* interne et externe (de gauche à droite) : modèle géométrique M ; plongement dans une grille uniforme et étiquetage des cellules dans une bande étroite ; calcul des intersections entre la *surface-offset* et les arêtes de la grille ; extraction du *maillage-offset* (schéma issu de [Liu and Wang, 2011]).

Le premier point consiste cette fois-ci à établir le champ de distance restreint à une bande étroite autour de *l'offset*, inconnu au départ. Cette bande est déterminée à l'aide de quatre filtres, dont deux d'entre eux (importants pour la compréhension) sont présentés par la suite. Soient M le modèle initial et ∂M son contour. Le premier filtre relie la *surface-offset* et ∂M . En effet, un nœud de la grille est dit **adjacent à *l'offset*** de distance d et qualifié de « valide » si la condition suivante est satisfaite :

$$|dis(p, \partial M) - d| \leq l, \quad (4.6)$$

avec $dis(.,.)$ l'opérateur retournant la distance signée entre deux entités et l la largeur fixée d'une « boîte » de la grille (regroupant plusieurs cellules). Des distances précises sont uniquement calculées à proximité de *l'offset* pour diminuer les temps de calcul. L'utilisation d'une structure d'arbre *Octree* permet en outre de restreindre la taille de la bande, en retirant les nœuds invalides par subdivision du domaine. Par une combinaison de quatre filtres, une bande étroite englobant la *surface-offset* d'équation $f(p) = dis(p, \partial M) = d$ est finalement construite.

Le second point détermine les intersections entre la bande et la forme implicite de *l'offset*. Les distances signées sont évaluées aux nœuds valides. Soient p_1 et p_2 deux nœuds formant une arête. Elle est intersectée si la condition $f(p_1) \cdot f(p_2) < 0$ est satisfaite. Mais le calcul exact de l'intersection étant non-linéaire, Liu et al. proposent une méthode hybride

combinant la recherche dichotomique de l'intersection (habituellement utilisée, mais lent) et le calcul analytique de la solution quand c'est possible.

Finalement, le dernier point consiste à appliquer un algorithme de *contouring dual* pour extraire le *maillage-offset*, au moyen d'une analyse des concavités de la forme géométrique. Contrairement à l'utilisation d'un *Marching-Cubes*, les détails sont préservés.

L'algorithme est robuste et efficace, avec une grande précision même en cas de *distance-offset* élevée. Néanmoins, comme toute approche volumétrique et malgré l'utilisation d'un *Octree*, la résolution dépend essentiellement de la taille de la grille initiale. Différemment, les approches définies au paragraphe suivant ne considèrent plus de grille volumétrique.

4.4.2 Approches à base de surfaces

Dans cette partie, deux constructions différentes de *surfaces-offsets* sont présentées. La première repose sur la représentation implicite avec les fonctions de base radiale, et la seconde utilise la représentation paramétrique.

4.4.2.1 Offset implicite à partir de points orientés

Dans leurs travaux, [Liu and Wang, 2009] proposent une approche permettant de reconstruire *simultanément* la surface approchant un nuage de points orientés et son *offset* à une distance δ . Afin de traiter le cas de données éparses, de la présence de trous et d'une forte valeur δ , une surface implicite de type RBF à support compact est utilisée (cf. [Ohtake et al., 2005]).

Bien qu'étant intéressante, cette approche est décrite dans ce paragraphe à but essentiellement informatif. En effet, les contraintes de notre problématique nous ont fait opter pour une surface avec paramétrisation, que nous avons obtenue à ce niveau de la modélisation géométrique. Le calcul de la *surface-offset* reste possible en considérant la discrétisation de la surface, permettant en même temps de récupérer les normales des points. Toutefois, nous retrouverions les conséquences liées à la création d'une surface par une approche implicite. Aucune comparaison ne sera donc faite avec nos approches développées au chapitre 5.

La procédure de Liu et al. se décompose en deux étapes. Soient $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ les points en entrée, correspondants aux échantillons de la surface S , S_δ la *surface-offset*, et P_δ un ensemble d'échantillons de S_δ .

La première étape consiste à déterminer l'ensemble P_δ . Les points de P sont déplacés le long de la normale qui leur est associé sur une distance δ . Les *points-offsets* « invalides », i.e. localisés dans la sphère placée en chaque point P et de rayon δ , sont alors retirés. Les éléments restants constituent l'ensemble $P_\delta = \{p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_{n+m}\}$.

La seconde étape calcule le champ scalaire 3D défini par la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(p_i) = 0, & i = 1, \dots, n \\ f(p_i) = \delta \neq 0, & i = n + 1, \dots, n + m \end{cases} \quad (4.7)$$

Un système linéaire d'équations est obtenu pendant la résolution. Par ailleurs, afin de corriger des problèmes dû au caractère non-monotone de f autour de δ , une approche multi-niveaux est utilisée, établissant une structure hiérarchique à partir d'un ensemble grossier de points récursivement subdivisé jusqu'à atteindre la précision des entrées (cf. schéma 4.3).

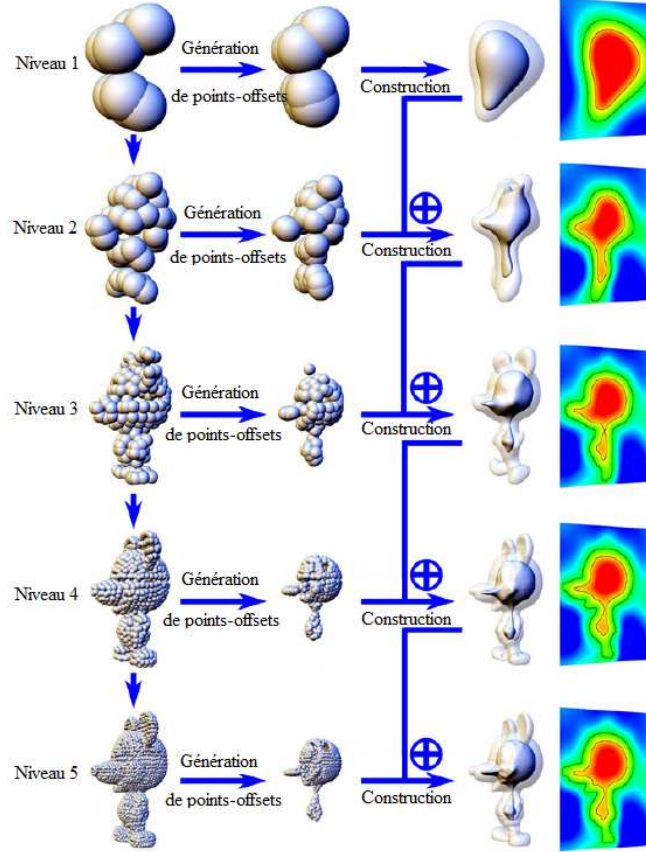


Figure 4.3. Architecture multiniveaux par subdivisions de P (de gauche à droite) : niveaux de hiérarchie de l'ensemble original P et P_δ ; reconstructions de S et S_δ en se servant des résultats du niveau précédent ; sections des fonctions implicites, représentant en trait noir les contours des deux surfaces (schéma issu de [Liu and Wang, 2009]).

L'augmentation des supports des bases radiales résoudrait le problème, mais la fonction RBF serait globale, ralentissant considérablement la procédure de reconstruction. L'approche hiérarchique permet au contraire d'interpoler l'ensemble de points au niveau k , en déplaçant la fonction d'interpolation utilisée au niveau $(k - 1)$.

La méthode est stable, robuste au bruit et aux trous dans les données. Des artéfacts peuvent être cependant générés dans les zones où des *points-offsets* provenant des détails de la surface ne sont pas considérés quand la *distance-offset* est trop importante, ce qui est le cas pour certains de nos organes tels que l'utérus. En outre, les *points-offsets* sont directement dépendants des données en entrée. Si elles présentent des valeurs aberrantes, les erreurs seront de ce fait reproduites et transférées à l'*offset* de la surface.

4.4.2.2 Offsets paramétriques

La formulation 4.2 de la *surface-offset* paramétrique est plus complexe à manipuler que celle d'une B-spline, qu'elle soit fermée ou ouverte. Par ailleurs, *l'offset* d'une NURBS n'est pas une NURBS, sauf dans le cas des surfaces pythagoriques introduites dans les travaux de [Farouki and Sakkalis, 1990] et [Pottmann, 1995].

La présence du dénominateur de la normale conduit à privilégier une « évaluation » de *l'offset*, autrement dit une approximation par une formulation de type B-spline, permettant ainsi de la contrôler plus facilement. En outre, la continuité associée par construction aux *surfaces-offsets* dépend de l'approche choisie pour la générer. Cette problématique est indépendante de la question des dégénérescences dans les zones de fortes courbures, dans lesquelles les auto-intersections décelées requièrent un traitement *a posteriori*.

La génération des *surfaces-offsets* - Contrairement aux approches précédentes, il n'est plus question de construire *l'offset* d'un maillage, se limitant à une continuité C^0 , mais de travailler sur une *surface-offset* paramétrique permettant d'atteindre une continuité supérieure. À cet effet, [Kulczycka and Nachman, 2002] présentent différentes techniques de construction d'*offsets*, réparties en deux familles : les approches accédant au maximum une continuité C^1 , et celles accédant à une continuité C^2 . Pour comparer les méthodes, une surface B-spline ouverte est utilisée.

Les approches accédant au maximum à ***une continuité C^1*** ont pour point commun une décomposition de la surface B-spline en carreaux de Bézier, calculant ensuite *l'offset* de chacun d'entre eux. Nous pouvons citer les travaux de [Farouki, 1986], de [Hoschek et al., 1989], et l'approche locale par moindres carrés.

Comme la plupart des approches paramétriques, Farouki cherche une surface approchant un ensemble de *points-offsets*. Ils sont obtenus à partir de l'échantillonnage de la surface initiale, en déplaçant chaque évaluation le long de sa normale (calculée précisément grâce à la géométrie différentielle de la représentation paramétrique) sur la *distance-offset* voulue. Sur les *points-offsets* de chaque carreau, une surface bicubique est ajustée. L'interpolation hermitienne utilisée permet de passer par les quatre coins des sous-domaines et de respecter les tangentes aux extrémités.

Différemment, Hoschek commence par calculer les quatre courbes de la *surface-offset*. Les points de contrôle « internes » (qui ne sont pas situés sur une frontière) sont de nouveau déterminés par interpolation hermitienne. Comme pour l'approche précédente, un ordre 2 entre les carreaux peut être obtenu à condition d'utiliser une surface biquintique.

L'approche locale des moindres carrés est appliquée sur chaque carreau, et permet de la même manière d'intégrer les conditions de continuité C^1 au système linéaire à résoudre. Cependant, [Kulczycka and Nachman, 2002] a pu vérifier que *l'offset* résultante n'est généralement que C^0 .

Une autre catégorie de méthodes préserve *une continuité C^2* . Nous pouvons citer les travaux de [Tiller and Hanson, 1984], et l'approche globale par moindres carrés.

Tiller et al. ont défini une méthode géométrique, en construisant un *offset* à partir du réseau de contrôle de la surface génératrice, et non de la surface elle-même. Pour chaque pôle, une direction et une longueur de déplacement sont déterminées. La direction est tout d'abord calculée de sorte qu'elle soit assimilée à la « normale du 1-voisinage » de chaque point de contrôle. La longueur est ensuite estimée en fonction des angles formées par la direction de déplacement et son 1-voisinage.

Finalement, l'approche globale des moindres carrés est C^2 sur l'intérieur, et consiste simplement à appliquer la méthode sur l'intégralité du *nuage-offset*. Des contraintes supplémentaires sont à apporter aux extrémités pour garantir une continuité C^0 ou C^1 aux frontières.

Les conclusions de cette étude ont mis en évidence l'efficacité des méthodes géométriques dans le cas où la surface génératrice n'est composée que de points elliptiques, ce qui est rarement le cas. D'un point de vue numérique, les méthodes les plus adaptées se révèlent être les méthodes par approximation, de type *moindres carrés*.

Ces approches ne traitent pas du problème des auto-intersections. Par la nature continue et explicite de la surface, cette gestion est plus complexe que pour d'autres représentations. Une approche volumétrique n'est donc pas envisagée, ce qui n'aurait de sens qu'à la condition de travailler sur une discrétisation de la surface.

La gestion des auto-intersections - Introduites à la partie 4.2.2, les méthodes développées dans la littérature se consacrent soit aux dégénérescences locales uniquement, soit aux dégénérescences locales et globales simultanément. Les corrections potentielles peuvent s'appliquer sur la surface-même, sur une modification des paramètres de formes (les pôles), ou au travers d'une restriction paramétrique.

Dans les travaux de [Sun et al., 2004], une gestion des dégénérescences locales est proposée. Un *repositionnement des points de contrôle* itératif est effectué pour diminuer la courbure dans les zones sujettes aux intersections locales. Après un échantillonnage basé sur la dérivée seconde, la courbure est calculée en chaque point afin de tester la présence d'intersections, et d'identifier les points de contrôle exerçant une influence dans cette zone. La méthode s'est révélée plus efficace si l'intersection locale est faite dans les directions paramétriques u et v , ce qui n'est pas toujours le cas. Cette méthode ne peut pas servir aux intersections globales. Les travaux suivants gèrent simultanément les auto-intersections locales et globales.

La méthode de [Kumar et al., 2002] nécessite un nuage ordonné. Avant d'être interpolé, *les échantillons sont reliés en une seule polyligne* pour vérifier la présence d'inter-

sections. Le travail est entrepris pour chaque ligne et chaque colonne. Puisque les points créant des intersections sont supprimés, il faut en ajouter dans les zones nettoyées jusqu'à satisfaire le nombre de points initial, impliquant une densité importante dans les zones à forte courbure (difficulté au niveau de l'interpolation et temps de calcul important).

Différemment, [Seong et al., 2006] se basent sur une carte de distance entre la surface initiale et la *surface-offset*. Une **fonction quadrivariée** (basée sur la somme des deux espaces bivariés individuels) est formée. La **projection des zéros** de cette fonction sur l'espace paramétrique de l'*offset* permet de déterminer les zones d'intersection avec la *surface-offset* (cf. figure 4.4). Cependant, pour des raisons de stabilité numérique, un paramètre $\rho > 0$

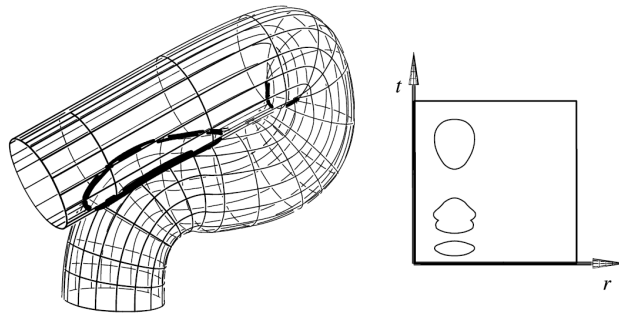


Figure 4.4. Exemple de forme avec des auto-intersections locales, et calcul des zéros dans l'espace paramétrique (r, t) de la *surface-offset* (figure issue de [Seong et al., 2006]).

doit être ajouté à la fonction quadrivariée. Ce paramètre est délicat à manipuler, car plus sa valeur est grande, plus le calcul des zéros de la fonction est robuste, ce qui donnera lieu à un résultat de meilleure qualité. *A contrario*, ρ représente la distance-limite au-delà de laquelle toutes les auto-intersections sont détectées sur la *surface-offset*. Par conséquent, les petites auto-intersections à une distance inférieure à ρ ne sont pas décelées.

Plus récemment, [Pekerman et al., 2008] présente une méthode de résolution d'intersections en déterminant **les points antipodaux des boucles** dans les surfaces, i.e. des points appartenant à la surface, partageant la même normale mais de direction opposée (cf. figure 4.5). Pour diminuer les intersections, une fonction d'erreurs caractérisant la distance entre ces points est réduite en intégrant une contrainte de retournement entre eux.

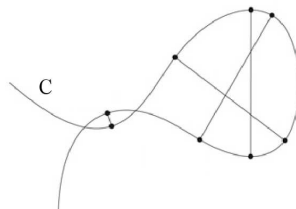


Figure 4.5. Exemple de courbe iso-paramétrique C d'une surface : chaque ligne relie deux points antipodaux de la courbe (figure issue de [Pekerman et al., 2008]).

L'utilisation de ces méthodes identifie la plupart des boucles. Cependant, les procédures sont bien souvent consommatrices en temps de calcul et les petites auto-intersections peuvent être négligées, ce qui peut poser de gros problèmes suivant les applications.

4.5 Synthèse

L'étude bibliographique dans cette partie nous a permis d'effectuer un tour d'horizon des méthodes de construction de *surfaces-offsets*. Nous avons pu voir qu'un *offset* peut être établi à partir d'un nuage de points, d'un maillage triangulaire, ou d'une surface continue. Les approches volumétriques sont souvent utilisées, malgré le défaut d'être limitées par la résolution de la grille. Avec la représentation paramétrique, le travail est plus complexe pour la gestion des auto-intersections, puisqu'il ne s'agit plus de gérer un nombre fini d'intersections entre arêtes et cellules.

La définition d'une surface parallèle est simple en théorie, mais dans la pratique de nombreuses précautions sont à prendre pour garantir sa qualité quelle que soit la *distance-offset*. Dans notre problématique, la méthode adoptée doit permettre la satisfaction des contraintes en sortie, qui sont d'obtenir après discrétisation un maillage conforme et constitué uniquement d'hexaèdres.

Par ailleurs, une limitation des *modèles-offsets* n'a pas encore été évoquée, et concerne directement le réalisme de la modélisation. Le travail a reposé jusqu'à présent sur la création d'une membrane épaisse à épaisseur constante. Cependant, pour des organes possédant au moins une ouverture comme l'utérus et le rectum, les modèles géométriques doivent intégrer la possibilité d'obtenir une épaisseur plus faible aux extrémités, qui ne peut être de même valeur que sur le reste de la membrane puisqu'elles sont à proximité des orifices. Les approches actuelles ne tiennent pas compte de ce facteur. Toutefois, faute d'une carte d'épaisseur à notre disposition pour les organes, la question reste en suspend. Différentes approches seront ainsi testées par la suite, exploitant les propriétés des représentations discrète et paramétrique.

Sommaire

5.1	Introduction et explication des contraintes	121
5.2	Approche par offset paramétrique	123
5.2.1	Formulation générale de la méthode	123
5.2.2	Création du maillage d'hexaèdres	123
5.2.3	Implémentation et résultats	125
5.2.4	Conclusions de l'approche paramétrique	129
5.3	Approche de type masses-ressorts	129
5.3.1	Différentiation des modèles existants	130
5.3.2	Formulation générale de la méthode	130
5.3.3	Paramétrage du système	133
5.3.4	Correction des auto-intersections locales	135
5.3.5	Implémentation et résultats	136
5.3.6	Conclusions sur la construction par le système masses-ressorts . . .	140
5.4	Approche par croissance d'axe médian non-linéaire	141
5.4.1	Formulation générale de la méthode	141
5.4.2	Implémentation et résultats	143
5.4.3	Conclusions de l'approche basée sur l'axe médian	149
5.5	Synthèse	150

5.1 Introduction et explication des contraintes

L'étude présentée au chapitre précédent nous a permis de présenter les techniques actuelles pour construire des *modèles-offsets*. Nous avons eu l'occasion de constater que chaque méthode présente ses propres limitations : temps de calcul important, problèmes de résolution de la grille volumétrique, auto-intersections non-décélées, ... Nous devons donc choisir l'approche à adopter à l'égard de nos contraintes spécifiques, à savoir :

1. créer un maillage d'hexaèdres à partir de la génératrice et de *l'offset-interne* ;
2. pouvoir définir plusieurs couches dans l'épaisseur ;
3. gérer les auto-intersections ;
4. se rapprocher de « notre vision de la réalité physiologique » détaillée par la suite.

Chacune de ces contraintes est maintenant explicitée.

Le premier point est facile à comprendre, et provient essentiellement d'une sollicitation de l'étape de modélisation physique du projet. À partir d'une surface paramétrique, une discrétisation en quadrangles n'est pas compliquée à obtenir.

Le deuxième point consiste à contrôler la quantité d'éléments du maillage. En effet, les calculs par éléments finis seront d'autant plus précis que les hexaèdres formant le support des simulations n'ont pas de forme trop allongée (cf. figures 5.1(a) et 5.1(b)). Par ailleurs, l'interaction avec la structure du réseau hexaédrique permettra de gérer la façon dont les forces s'appliquant au maillage se diffuseront après un impact.

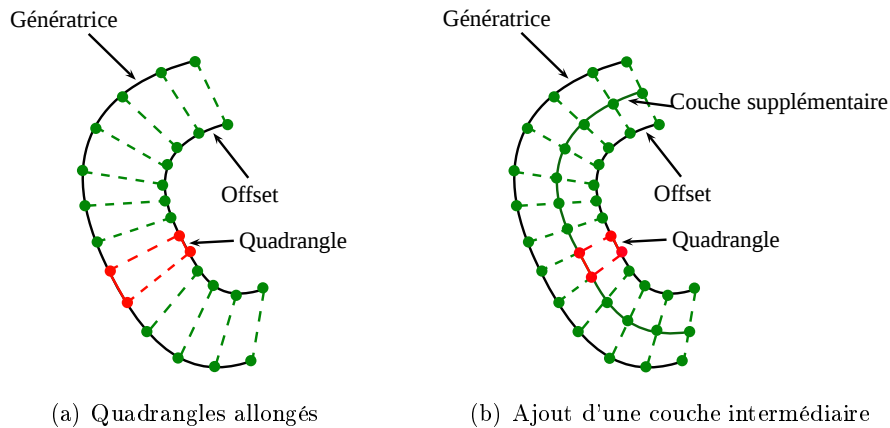


Figure 5.1. Régularisation de la forme des quadrangles dans le cas des courbes.

Le troisième point est également explicite, et cherche uniquement à éviter les dégénérescences dans le maillage pour assurer la cohérence des résultats.

Finalement, le dernier point est le plus difficile à analyser. Bien qu'il s'agisse de la contrainte nécessitant le plus de connaissances, paradoxalement très peu d'informations sont disponibles. Jusqu'à présent, le fait de ne pas respecter une épaisseur constante ne pouvait avoir que deux origines :

1. l'épaisseur réelle est connue tout autour de la surface des organes au moyen d'une carte de distance par exemple : cette information est cependant indisponible ;
2. la présence d'auto-intersections nécessite une modification de la *surface-offset*.

À la fin du chapitre sur l'ajustement des surfaces, nous avons évoqué une troisième possibilité. Bien que l'épaisseur ne soit pas connue, il devrait être possible dans certains cas de détecter les extrémités des organes, comme ceux du rectum. Une adaptation de la *distance-offset* permettrait d'avoir une paroi plus fine à proximité des orifices (cf. figures 5.2(a) et 5.2(b)), puisque les valeurs théoriques moyennes des épaisseurs concernent principalement les « corps » des organes. La réalité mathématique derrière la formulation d'un *offset* est à dissocier de celle des tissus musculaires composant les parois organiques, notamment dans les zones en compression.

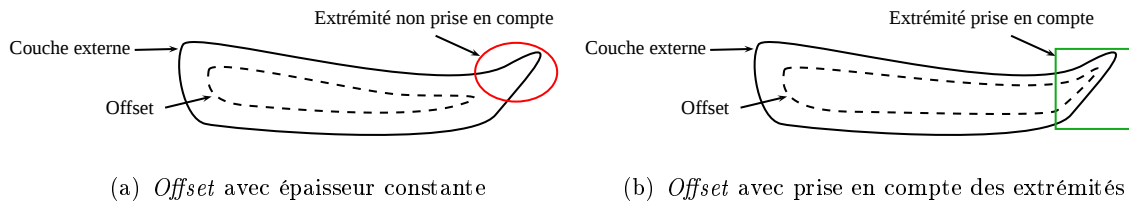


Figure 5.2. Adaptation aux extrémités dans la construction de la couche interne.

Trois méthodes sont présentées par la suite (cf. figure 5.3), décrites tout d'abord individuellement, puis confrontées ensemble à travers les résultats de différentes simulations pour analyser leurs avantages et inconvénients mutuels. La première, consistant en une **approche paramétrique « classique »**, permettra de visualiser les problèmes d'auto-intersections. La deuxième, reposant sur un **modèle élastique** de la simulation physique, mettra en évidence la gestion de ces dégénérescences. Enfin, la dernière méthode utilisera le **profil général de l'organe** afin de respecter la réalité physiologique que nous avons décrite ci-dessus. L'axe non-linéaire sera de nouveau employé comme descripteur géométrique pour représenter la *surface-offset*.

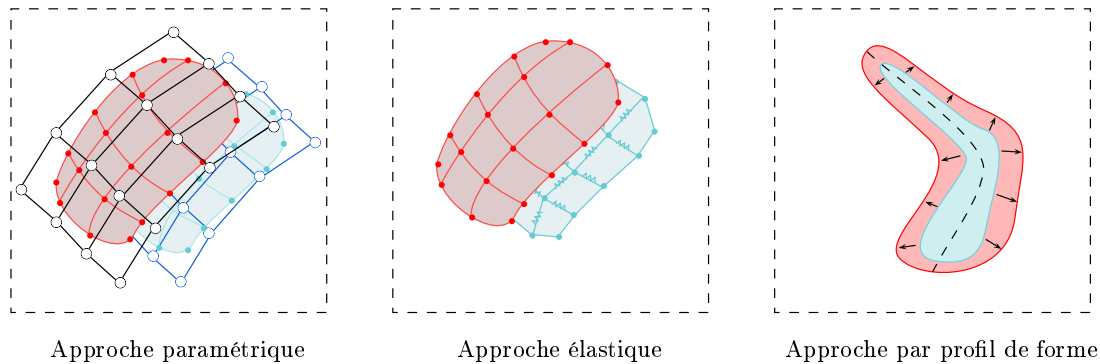


Figure 5.3. Méthodes de constructions d'*offsets* de ce chapitre.

5.2 Approche par offset paramétrique

5.2.1 Formulation générale de la méthode

L'objectif de cette partie est de visualiser le problème d'auto-intersections dans notre cas d'utilisation. Une surface paramétrique S est obtenue à l'issue de l'application de l'ajustement défini au chapitre 3. Soit d la *distance-offset* choisie négative pour construire un *offset-interne* S_o . Le principe repose sur les quatre étapes suivantes :

1. discrétiser la surface paramétrique S à partir d'une carte paramétrique uniforme, créant l'ensemble $E = \{S(u_q, v_r)\}_{q,r=0}^{M_1, M_2}$;
2. calculer la normale $n(u_q, v_r)$ en chaque point évalué $E_{q,r}$ et créer un *nuage-offset* E^o en déplaçant les échantillons le long de leur normale associée sur la distance d ;
3. approcher le *nuage-offset* par une surface S_o de genre 0 avec la fonction bidirectionnelle du chapitre 3 ;
4. construire un maillage structuré et conforme d'hexaèdres à partir de la discrétisation des enveloppes créées par S et S_o .

Cette dernière étape n'ayant pas été encore introduite, la conception du maillage est décrite au paragraphe suivant.

5.2.2 Création du maillage d'hexaèdres

Comme introduit à l'introduction, la qualité des tests effectués sur le maillage lors de l'application des lois de comportement est en partie liée à la régularisation des formes des hexaèdres. Pour un organe comme la vessie, l'épaisseur peut atteindre 10% de sa taille [Schuenke et al., 2010]. Il est alors évident que plusieurs couches intermédiaires dans le maillage de la membrane seront nécessaires (d'autant plus si la discrétisation est dense).

Si $(N_{lay} + 1)$ est le nombre total de couches (générant N_{lay} couches d'hexaèdres), l'ajout de N_{lay} couches supplémentaires peut être assimilé à considérer l'ensemble $\{S_o^l\}_{l=0}^{N_{lay}}$ de surfaces, telles que :

$$S_o^l(u, v) = S(u, v) + l \frac{d}{N_{lay}} n(u, v) \quad \forall l \in \{0, \dots, N_{lay}\}, \quad (5.1)$$

avec $S_o^0 = S$ et $S_o^{N_{lay}} = S_o$. Dans la pratique, au lieu de considérer autant de surfaces paramétriques, une fonction de répartition linéaire va disposer les éléments intermédiaires entre S et S_o dans l'épaisseur. L'emploi d'une distribution de nature différente est possible (par exemple, progression géométrique vers la surface-externe), mais devra être justifié par un gain de précision significatif pour les calculs par éléments finis.

Toutefois, puisque deux singularités sont présentes dans les surfaces paramétriques utilisées, l'obtention d'hexaèdres par leur discrétisation conduit à la création de prismes aux

extrémités. Soit $\{\mathcal{M}_{q,r}^l\}_{l,q,r=0}^{N_{lay},M_1,M_2}$ l'hypermatrice (notée $\mathcal{M}$) stockant l'ensemble des points de la discrétisation du volume. Le terme général s'écrit :

$$\mathcal{M}_{q,r}^l = S(u_q, v_r) + l \frac{d}{N_{lay}} n(u_q, v_r) \quad (5.2)$$

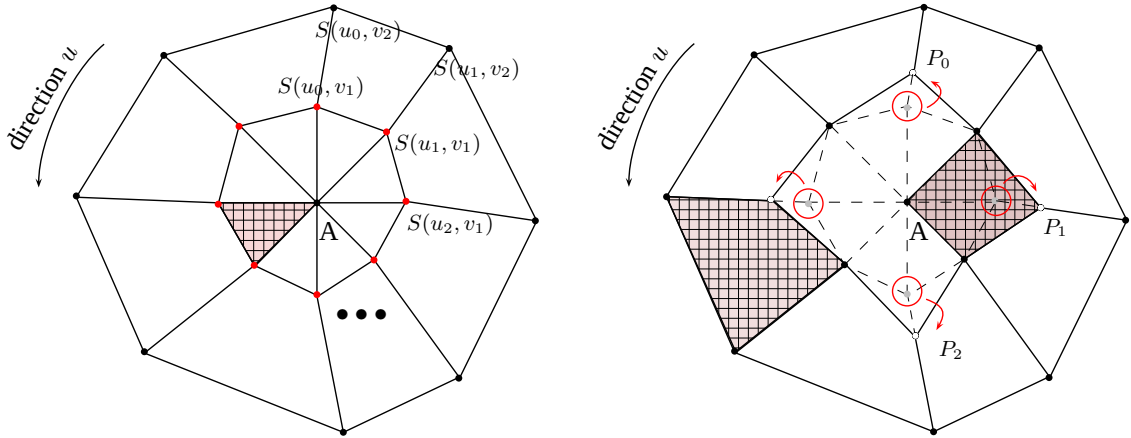
À partir de l'hypermatrice $\mathcal{M}$, on peut établir $N_{lay} M_1 M_2$ hexaèdres, dont $2M_1$ hexaèdres sont dégénérés en prismes aux extrémités (cf. figure 5.4(a)). Afin de garantir uniquement la présence d'hexaèdres non-dégénérés (requis en sortie), la procédure suivante est appliquée en trois étapes, aux singularités $A = S(0,0)$ et $B = S(0,1)$, et nécessite une valeur M_1 paire. Pour l'extrémité A , ceci conduit à :

1. récupérer les $2M_1$ premiers éléments (hexaèdres et prismes), l'objectif étant de modifier l'ensemble $\{S(u_q, v_1)\}_{q=0}^{M_1}$;
2. calculer la séquence $\{P_i\}_{i=0}^{M_1/2-1}$ de $\frac{M_1}{2}$ points intermédiaires entre A et $\{S(u_q, v_2)\}_{q=0}^{M_1}$, tel que :

$$P_i = \text{proj} \left(\frac{A + S \left(u_{2i}, \frac{1}{2M_2} \right)}{2}, S \right) \quad \forall i \in \left\{ 0, \dots, \frac{M_1}{2} \right\}, \quad (5.3)$$

avec $\text{proj}(p, S)$ l'opérateur de projection orthogonale de p sur S ;

3. intégrer les $\frac{M_1}{2}$ nouveaux hexaèdres créés dans un vecteur stockant la discrétisation de l'enveloppe de S et S_o à la place des M_1 premiers prismes.



(a) Dégénérescence du quadrangle quadrillé : les points rouges sont à modifier

(b) Modifications du maillage pour le rendre homogène

Figure 5.4. Construction du maillage d'hexaèdres.

Le même procédé est appliqué près de B . Ainsi, le maillage résultant est conforme (aucun sommet n'est sur une arête ou une face), structuré (chaque point du maillage n'a que 4 voisins), et homogène (constitué uniquement d'hexaèdres). La procédure étant terminée, la partie 5.2.3 illustre maintenant les résultats de son application.

5.2.3 Implémentation et résultats

Après la présentation des critères d'arrêt utilisés lors de l'implémentation, les conséquences de l'application de la méthode seront mises en évidence par son application sur des superellipsoïdes et des organes pelviens. Les résultats ont été produits à partir d'un ordinateur portable de type Intel Core I7 M620 2.67GHz avec 4Go de mémoire RAM.

5.2.3.1 Critères d'arrêt

La procédure s'arrête simplement lorsque le nombre de couches à construire est atteint, comme illustré dans l'algorithme global avec le schéma 5.5. Les tâches principales sont la création des $(N_{lay} + 1)$ épaisseurs et du maillage d'hexaèdres.

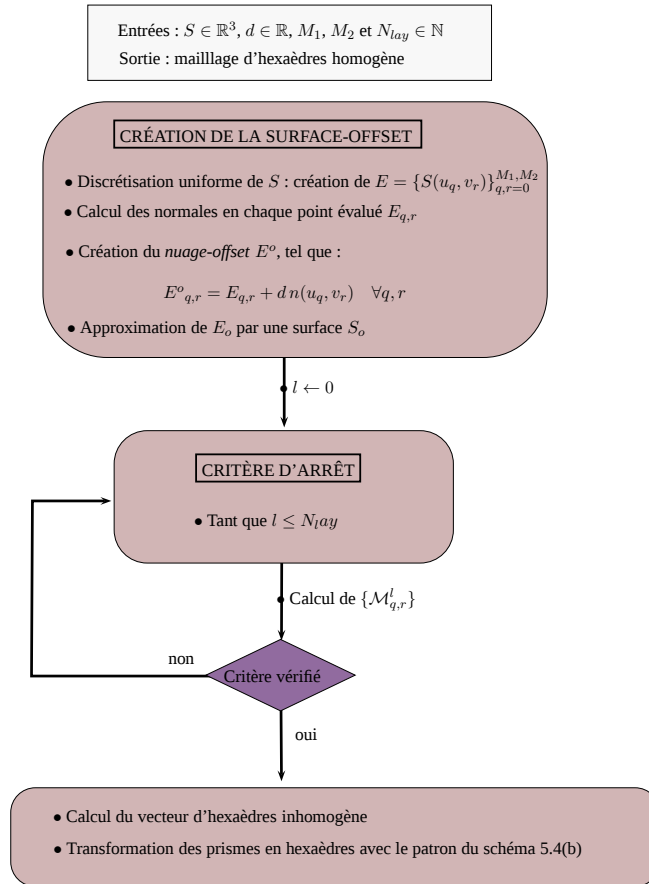


Figure 5.5. Algorithme global de la procédure d'offset paramétrique.

5.2.3.2 Application de l'offset paramétrique pour les superellipsoïdes

L'offset d'une sphère est tout d'abord calculé. Puisque la forme 5.6(a) présente peu d'irrégularités (une sphère ne peut être représentée de manière exacte avec une B-spline), il n'est pas étonnant que les figures 5.6(b) et 5.6(c) ne montre pas de problème dans l'épaisseur, à moins de prendre une épaisseur avoisinant le rayon de la sphère.

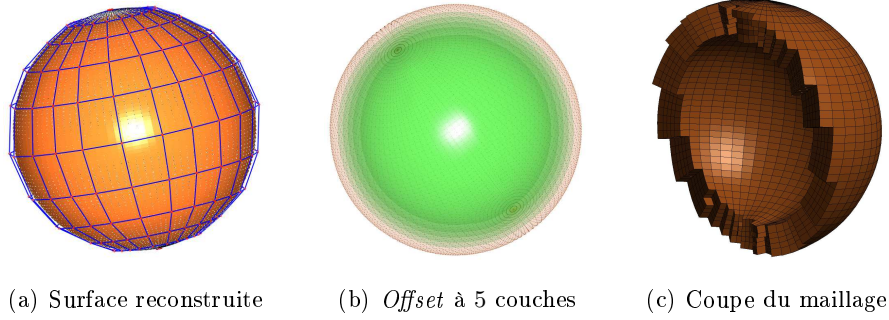


Figure 5.6. *Offset-interne* d'un superellipsoïde « sphère » de rayon 100 unités, avec une épaisseur de 20 unités et une limitation de la procédure d'ajustement à 10 itérations.

L'histogramme de la figure 5.7 fait référence à la construction de la figure 5.6. Il présente les distances d'erreurs (erreurs quadratiques moyennes et erreur maximale) de la fonctionnelle d'ajustement en pourcentage de la taille de la sphère. Ces dernières sont associées avec la *distance-offset* que chaque couche doit atteindre. Plus l'erreur maximale est proche de « l'épaisseur-objectif », plus la présence d'auto-intersections est à suspecter. Nous pouvons par ailleurs remarquer que la distribution des épaisseurs n'est pas uniforme, ce qui n'influe en rien les conclusions apportées.

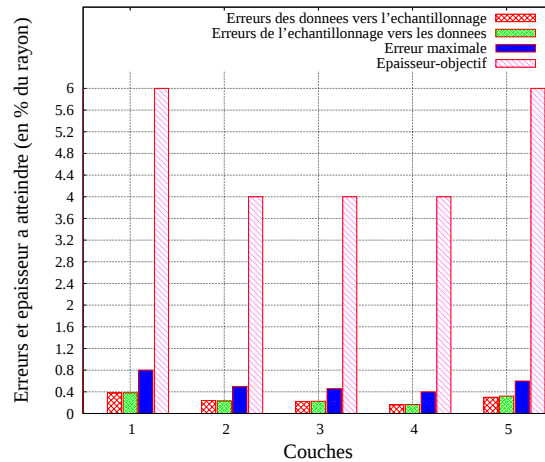


Figure 5.7. Erreurs maximales et quadratiques moyennes par couche

Dans un second exemple, une carambole est reconstruite. L'histogramme de la figure 5.8 permet de mettre en évidence des problèmes pendant la construction, en comparant les valeurs de l'erreur maximale par rapport à celles de l'épaisseur-objectif.

La figure 5.9(a) met clairement en cause la nature du *nuage-offset*. Un nombre important de normales (de norme égale à l'épaisseur totale) sur lesquelles se déplaceront les points de la discrétisation de l'approximant pour construire le *nuage-offset* sortent de la surface, générant de ce fait de nombreuses auto-intersections locales (cf. figure 5.9(b)). Sans une méthode appropriée, il ne sera pas possible de reconstruire des formes avec des fortes courbures.

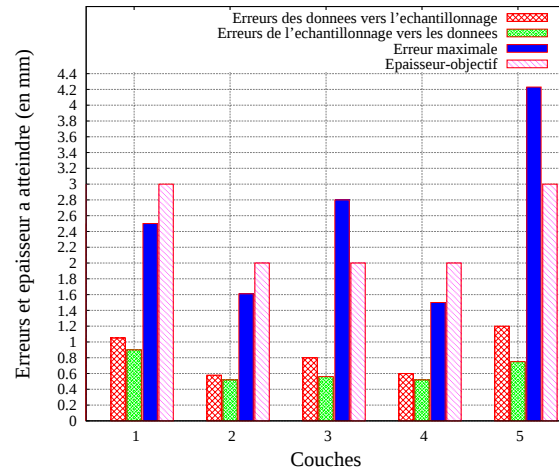
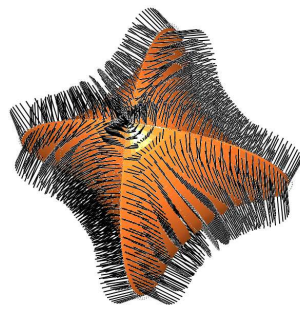
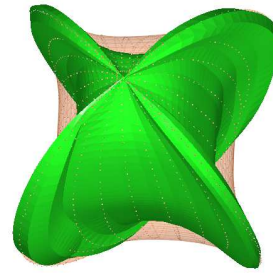


Figure 5.8. Erreurs maximales et moyennes par couche pour *l'offset-interne* d'un superellipsoïde « carambole » de 100 unités de hauteur.



(a) Normales de la surface



(b) *Offset-interne* superposé à la surface transparente

Figure 5.9. Repléments de la *surface-offset* dans les zones de courbure plus élevée.

5.2.3.3 Étude qualitative de la construction d'offsets pour les organes pelviens

La méthode est maintenant appliquée sur deux organes d'intérêt. Le tableau 5.1 reporte les valeurs des épaisseurs considérées pour les organes (cf. le livre de [Schuenke et al., 2010]). Ces valeurs varient beaucoup d'une femme à l'autre. Les épaisseurs choisies sont la moyenne

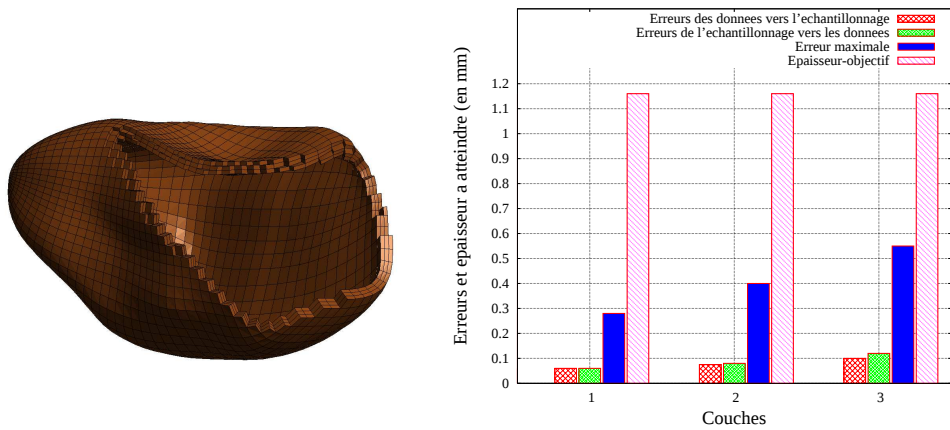
TABLE 5.1. Épaisseurs (en mm) des organes pelviens et proportion des valeurs (en %) par rapport aux autres dimensions.

	Vessie	Rectum	Utérus	Vagin
min	2 / 2.9%	5 / 16.1%	20 / 30%	3 / 12%
max	5.5 / 7.5%	6 / 18.8%	30 / 44.7%	4 / 15%

des valeurs min et max pour chaque organe : 3.5 mm pour la vessie, 5.5 mm pour le rectum

et 25 mm pour l'utérus. Nous rappelons que le vagin n'est pas considéré à part entière, car sa segmentation n'a pu être séparée de celle de l'utérus. Les résultats mis en évidence par la suite proviennent de la vessie et du rectum.

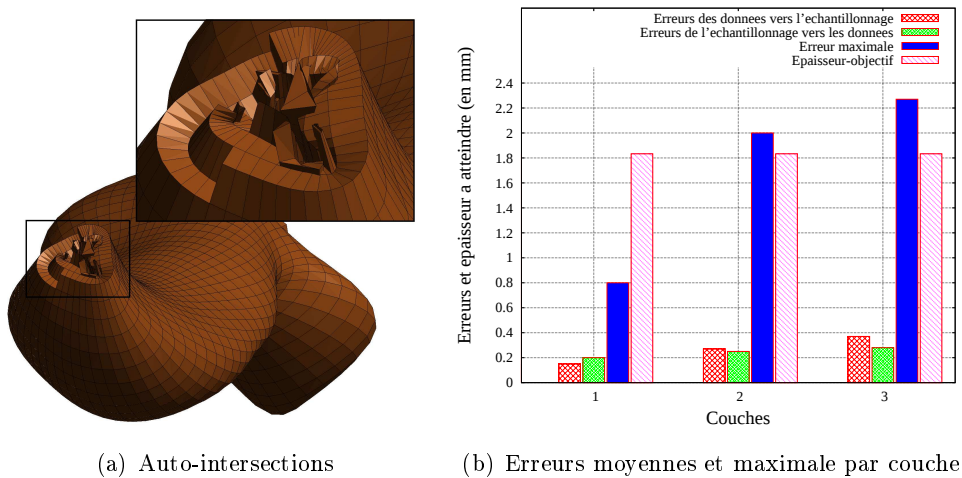
Concernant la vessie, illustrée par la figure 5.10(a), la forme simple de l'organe induit une construction de l'*offset* sans problème. L'épaisseur n'est en outre pas suffisante pour créer des auto-intersections globales. L'historgramme 5.10(b) indique que l'erreur maximale à chaque nouvelle création de couche reste inférieure à la distance-offset à atteindre.



(a) Maillage hexaédrique avec 3 couches (b) Erreurs moyennes et maximale par couche

Figure 5.10. *Offset-interne* d'une paroi vésicale d'épaisseur 3.5 mm.

Les résultats sont cependant différents pour le rectum, avec une épaisseur de 5.5 mm. Avec la figure 5.11(a), nous pouvons constater la présence des auto-intersections locales à l'extrémité du rectum dues aux fortes courbures. L'historgramme de la figure 5.11(b) retranscrit le problème au niveau de l'erreur maximale.



(a) Auto-intersections (b) Erreurs moyennes et maximale par couche

Figure 5.11. *Offset-interne* d'une paroi rectale d'épaisseur 5.5 mm.

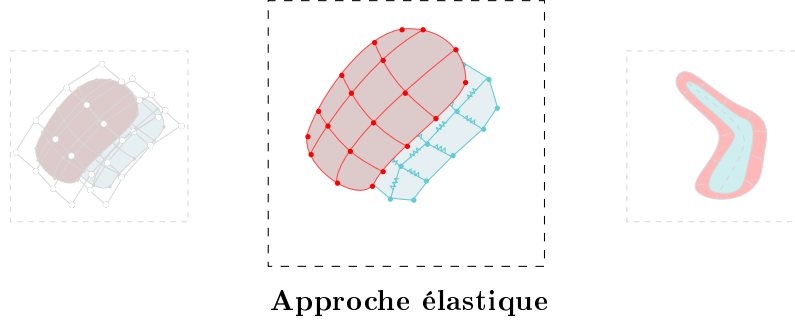
5.2.4 Conclusions de l'approche paramétrique

La construction de l'*offset* a reposé sur l'approximation du *nuage-offset* par une méthode moyennante paramétrique. La gestion des auto-intersections n'est pas effectuée pour visualiser le problème des dégénérescences avec les valeurs élevées des *distances-offsets* à considérer. En effet, pour les organes ne présentant pas une forme complexe comme la vessie, l'ajout de l'épaisseur ne crée pas de chevauchement. Cependant, le problème devient facilement observable avec le rectum dont les courbures sur la surface sont plus importantes, requérant un traitement approprié.

Plusieurs orientations seraient possibles pour rechercher une solution à ce problème :

1. effectuer un *travail a posteriori* sur la *surface-offset*, avec un changement de représentation par exemple (cf. les approches mentionnées au paragraphe 4.4 du chapitre 4) ;
2. adopter une *approche itérative* pour éliminer les singularités au fur et à mesure de la construction de la *surface-offset*.

Puisqu'il faut fournir un maillage hexaédrique en sortie, travailler dans le domaine discret semble judicieux. Nous mettrons en place un système de contraintes géométriques afin de déterminer les auto-intersections, qui constitue une limitation de la représentation paramétrique. Dans cette optique, la section 5.3 s'inspire du domaine de la mécanique en apportant un contrôle de la qualité du maillage avec des forces élastiques.



5.3 Approche de type masses-ressorts

L'approche choisie dans cette partie travaille directement sur le maillage pour créer un *offset* discret. Puisqu'aucune connaissance précise n'est disponible pour analyser l'épaisseur des organes - sauf en quelques points - nous nous sommes orientés vers un *système masses-ressorts* pour construire la surface-interne. Notre objectif ici n'étant pas d'effectuer de la déformation, nous différencions notre modèle des approches mécaniques classiques.

5.3.1 Différentiation des modèles existants

Dans le cas général d'un modèle masses-ressorts, un ensemble de $(n + 1)$ particules $\{P_i\}_{i=0}^n$ compose le système. Chacune possède une masse m_i , une position dans l'espace 3D p_i , une vitesse $\dot{p}_i$ et une accélération $\ddot{p}_i$ à un temps donné t . Le système est gouverné par la seconde loi de Newton : $F_i = m_i \ddot{p}_i$, avec F_i la somme de l'ensemble des forces exercées au point P_i . Les forces se différencient en deux catégories majeures :

- **les forces internes** assurant le respect des contraintes et la stabilité du système ;
- **les forces externes** gérant la gravitation, l'amortissement et la réponse à la collision.

Les systèmes masses-ressorts ont été appliqués dans de nombreux domaines de la modélisation et de l'animation, comme la modification de la géométrie des réseaux (cf. les travaux de [Terzopoulos and Waters, 1990] sur la modélisation faciale), ou la conservation de forme (cf. les travaux de [Vassilev and Spanlang, 2002] sur la préservation de volume d'ellipsoïdes déformables). Bien que les treillis des modèles soient souvent semblables, les approches se distinguent par les forces mises en jeu et la résolution des équations de la dynamique newtonienne (schémas explicites, implicites, ordres d'intégration).

La dualité entre précision et stabilité est toujours présente, nécessitant d'étudier l'espace de stabilité des systèmes (cf. les travaux de [Shinya, 2005]). Les schémas implicites requièrent plus de calculs, puisque l'intégration en temps nécessite la résolution d'un système d'équations (parfois non-linéaires) à chaque pas. Ils apportent cependant davantage de stabilité à la simulation (cf. l'étude menée par [Volino and Magnenat-Thalmann, 2001] pour l'animation de tissus). Plusieurs améliorations ont été apportées notamment pour diminuer les temps de calcul, en définissant par exemple une approximation des vitesses du voisinage pour l'intégration (cf. les travaux de [Mesit et al., 2007]), ou un schéma de prédiction-correction estimant les positions suivantes (cf. [Desbrun et al., 1999]). Cependant, les schémas implicites ne garantissent pas forcément la précision des calculs contrairement aux schémas explicites, à condition d'avoir un pas de temps suffisamment petit (cf. [Volino and Magnenat-Thalmann, 2001]).

Notre cas de figure est atypique, dans le sens où notre modèle n'a pas pour objectif de restaurer le système de formes à l'état d'équilibre, mais de **conserver la déformation**. Le paragraphe 5.3.2 présente en détails la nature de la méthode développée.

5.3.2 Formulation générale de la méthode

La conception d'un système masses-ressorts nécessite de répondre à 4 questions : « Quel treillis utiliser ? », « Quelles contraintes de conservation (distance, aire, volume) et énergies considérer ? », « Quel schéma d'intégration employer ? », « Comment détecter et supprimer les intersections entre les mailles ? ». Un paragraphe se consacre ci-dessous à chacune de ces interrogations.

5.3.2.1 Choix des particules et des connectivités

Soient S la surface paramétrique en entrée, et $E^{ext} = \{S(u_q, v_r)\}_{q,r=0}^{M_1, M_2}$ l'ensemble des $(M_1+1) \times (M_2+1)$ points issus de sa discrétisation uniforme. Cet échantillonnage correspond à la partie externe du contour épais. Les particules, qui ont pour objectif de construire la couche interne, constitueront l'ensemble $E^{int} = \{E_{q,r}^{int}\}_{q,r=0}^{M_1, M_2}$ de même cardinalité que E^{ext} . Chaque $E_{q,r}^{int}$ est un triplet $(p_{q,r}, \dot{p}_{q,r}, \ddot{p}_{q,r})$, où $p_{q,r}$ est sa position, $\dot{p}_{q,r}$ est sa vitesse et $\ddot{p}_{q,r}$ est son accélération. Le système est construit comme suit.

Nous adoptons dès le départ une structure d'hexaèdres formant un contour fermé. De ce fait, chaque hexaèdre est constitué d'une face du maillage formé par les points de E^{ext} et d'une face du maillage formé par ceux de E^{int} . Ne connaissant évidemment pas la localisation des éléments de E^{int} , la structure hexaédrique est dégénérée de sorte que toutes les arêtes reliant E^{int} et E^{ext} soient de longueur nulle (cf. figures 5.12(a) et 5.12(b)).

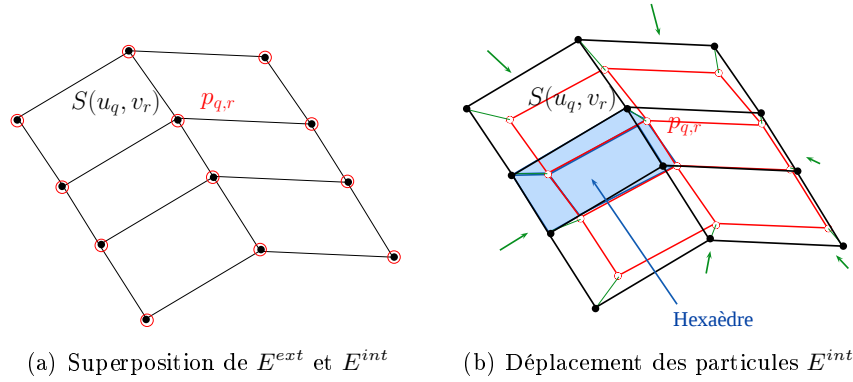


Figure 5.12. Partie de la configuration du système.

Les connectivités du maillage et du réseau masses-ressorts sont différentes. Dans les paragraphes suivants, nous verrons que des liaisons supplémentaires définiront le treillis du système, mais n'ont aucun intérêt pour la représentation de l'*offset*.

5.3.2.2 Contraintes à préserver et énergies

Définition d'un système sans masse - Bien qu'il s'agisse d'un système masses-ressorts aucune masse n'est considérée par la suite, mais elles sont fixées à une valeur de 1 pour travailler avec la mécanique newtonienne. Puisque nous n'effectuons pas de simulation physique, le système ne doit pas intégrer la force de gravité.

Force externe issue de la définition de l'*offset* - Elle est appliquée à chaque particule $E_{q,r}^{int}$. Un couple paramétrique (u_q, v_r) est associé à chaque point. La force externe est basée sur la formulation des approches *offsets*, en étant orientée dans les mêmes direction et sens que la normale en chaque point de l'échantillonnage :

$$F_{ext}(p_{q,r}) = -\gamma \left(\frac{\partial S(u_q, v_r)}{\partial u} \times \frac{\partial S(u_q, v_r)}{\partial v} \right), \quad (5.4)$$

avec $\gamma > 0$ un coefficient de pondération.

Force interne et préservation des distances - Parmi les différents treillis existants dans la littérature, le modèle de [Provot, 1996] est fréquemment utilisé pour la déformation de vêtements. Il est constitué par *des ressorts d'étirement* connectant les éléments du voisinage quadrangulaire, *des ressorts de cisaillement* liant chaque particule à son voisinage diagonal, et *des ressorts de flexion* contrôlant la résistance à la courbure.

Pour contrôler le positionnement d'un point d'après son voisinage direct, nous utiliserons de même quatre **ressorts d'étirement** (cf. figure 5.13(a)). La loi de Hooke, utilisée pour l'élasticité des ressorts et la préservation des distances (cf. équation 5.5), permet un retour des ressorts à leur position de repos en l'absence de forces externes.

$$F_{stretch}(E_{q,r}^{int}) = \sum_{k,l} k_{qr,kl} ((p_{k,l} - p_{q,r}) - L_{qr,kl}^0) \frac{p_{k,l} - p_{q,r}}{\|p_{k,l} - p_{q,r}\|}, \quad (5.5)$$

où $k_{qr,kl}$ est la raideur du ressort entre $E_{q,r}^{int}$ et $E_{k,l}^{int}$ si elles sont voisines, et $L_{qr,kl}^0$ est sa longueur au repos.

En outre, le réseau E^{int} pouvant néanmoins être sujet à un **glissement** à l'intérieur de l'enveloppe de E^{ext} , un autre ressort est considéré. Une « force de liaison » F_{link} est créée pour imposer la connexion entre E^{int} et E^{ext} . Les points $E_{q,r}^{int}$ et $S(u_q, v_r)$ sont liés :

$$F_{link}(E_{q,r}^{int}) = \hat{k}_{q,r} (\|S(u_q, v_r) - p_{q,r}\| - \hat{L}_{q,r}^0) \frac{S(u_q, v_r) - p_{q,r}}{\|S(u_q, v_r) - p_{q,r}\|}, \quad (5.6)$$

où $\hat{k}_{q,r}$ est la raideur du ressort entre $p_{q,r}$ et $S(u_q, v_r)$, et $\hat{L}_{q,r}^0$ est sa longueur au repos.

Finalement, afin de garantir que la *distance-offset* soit respectée malgré le glissement, un dernier ressort est ajouté **dynamiquement** pendant la procédure de construction, générant la force F_{ortho} (cf. figure 5.13(b)). Une projection orthogonale $p_{q,r}^\perp$ de $E_{q,r}^{int}$ sur la surface S est effectuée :

$$F_{ortho}(E_{q,r}^{int}) = \tilde{k}_{q,r} (\|p_{q,r}^\perp - p_{q,r}\| - \tilde{L}_{q,r}^0) \frac{p_{q,r}^\perp - p_{q,r}}{\|p_{q,r}^\perp - p_{q,r}\|}, \quad (5.7)$$

où $\tilde{k}_{q,r}$ est la raideur du ressort entre $p_{q,r}$ et $p_{q,r}^\perp$, et $\tilde{L}_{q,r}^0$ est sa longueur au repos.

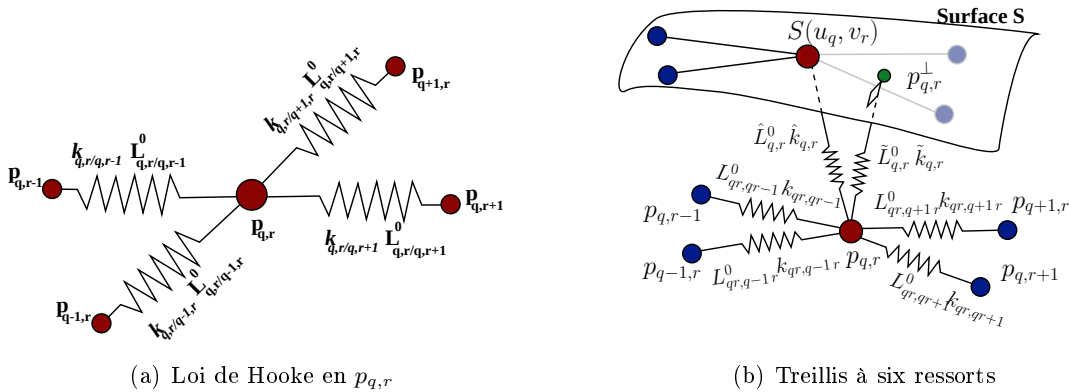


Figure 5.13. Treillis du système en chaque particule $E_{q,r}^{int}$.

L'action conjuguée des deux ressorts supplémentaires doit permettre d'éviter une dégénérescence du système interne par les ressorts d'étirement, tout en cherchant à conserver la direction de la normale à la surface. La force interne F_{int} se formule finalement par :

$$F_{int}(E_{q,r}^{int}) = F_{stretch}(E_{q,r}^{int}) + F_{link}(E_{q,r}^{int}) + F_{ortho}(E_{q,r}^{int}) \quad (5.8)$$

D'autres grandeurs sont souvent préservées dans les systèmes masses-ressorts, telles que l'aire ou le volume. Nous ne voulons pas que le système revienne au repos, ce qui conduirait au maillage dégénéré initial. Ces deux contraintes ne sont donc pas utilisées.

Force d'amortissement - Une force d'amortissement de Kelvin-Voigt est ajoutée pour stabiliser le système, appliquée dans la direction opposée à la vitesse :

$$F_{damp}(E_{q,r}^{int}) = -\eta \dot{p}_{q,r} \quad (5.9)$$

où η est le coefficient d'amortissement et $\dot{p}_{q,r}$ la vitesse de la particule $E_{q,r}^{int}$.

5.3.2.3 Le schéma d'intégration

La force totale du système appliquée sur en $E_{q,r}^{int}$ à un instant t est finalement :

$$F_{tot}(E_{q,r}^{int}, t) = F_{int}(E_{q,r}^{int}, t) + F_{damp}(E_{q,r}^{int}, t) + F_{ext}(E_{q,r}^{int}, t) \quad (5.10)$$

La méthode choisie pour résoudre la seconde loi de Newton est le schéma explicite de Euler. Ce type de schéma n'est stable qu'à la condition d'utiliser un pas de temps suffisamment petit, ce qui est déjà le cas pour la gestion des intersections. La mise à jour de la position $p_{q,r}$ au temps $t + \Delta t$ s'obtient de la manière suivante :

$$\begin{cases} \ddot{p}_{q,r}(t + \Delta t) = F_{tot}(E_{q,r}^{int}, t) \\ \dot{p}_{q,r}(t + \Delta t) = \dot{p}_{q,r}(t) + \Delta t \ddot{p}_{q,r}(t + \Delta t) \\ p_{q,r}(t + \Delta t) = p_{q,r}(t) + \Delta t \dot{p}_{q,r}(t + \Delta t) \end{cases} \quad (5.11)$$

La valeur de Δt ne doit pas excéder la période naturelle du système (cf. [Provot, 1996]). Une réduction de ce pas est nécessaire en cas d'augmentation des constantes de raideur.

La définition des énergies du système et le schéma d'intégration calculant les positions des particules conditionnent le comportement du réseau (cf. [Bay et al., 2012c]), sous réserve d'un paramétrage adapté. Le paragraphe suivant détaille comment la quantité relativement importante de ces valeurs inconnues est prise en compte pour la construction d'*offset*.

5.3.3 Paramétrage du système

Les forces introduites au paragraphe 5.3.2.1 requièrent un fort paramétrage du système. Au total, nous avons $(M_1 M_2 + 2(M_1 + 1)(M_2 + 1) + 3)$ paramètres :

- un paramètre γ pour la force externe (sous hypothèse d'isotropie) ;

- un paramètre η pour l'amortissement (sous hypothèse d'isotropie) ;
- un pas de temps Δt ;
- $M_1 M_2$ ressorts d'étirement, $2(M_1 + 1)(M_2 + 1)$ ressorts de liaison et orthogonaux (sans les redondances).

Déterminer les valeurs optimales de chaque paramètre consommerait trop de temps de calcul, sans être numériquement justifiable. Cependant, une analyse du rôle de chaque ressort permet de diminuer ce nombre. Les paramètres γ , η et Δt étant difficilement associables à des quantités physiques, le choix de leur valeur restera empirique.

En émettant l'hypothèse d'un effet isotropique pour la tension en chaque particule $E_{q,r}^{int}$, les paramètres $k_{qr,kl}$ de l'équation 5.5 sont réduits à une seule inconnue k_{qr} . Ces valeurs évoluent pendant les simulations pour éviter les auto-intersections (cf. paragraphe 5.3.4). Similairement, les longueurs au repos $L_{qr,kl}^0$ sont remplacées par L_{qr}^0 . Leurs valeurs sont les longueurs des ressorts à l'issue d'une augmentation graduelle de la force de tension jusqu'à ce que l'OBB du maillage interne atteigne 10 % de son volume initial (seuil fixé).

Concernant les forces de connexion et orthogonale, la longueur au repos des ressorts est la *distance-offset* d , soit $\hat{L}_{q,r}^0 = d$ et $\tilde{L}_{q,r}^0 = d$. En considérant une fois encore l'hypothèse d'isotropie, nous fixons $\hat{k}_{q,r} = \tilde{k}_{q,r} = K$, avec K le coefficient de raideur unique connectant les maillages interne et externe. Il est déterminé de sorte à avoir un modèle stable en fixant γ et η à 1. La valeur elle-même est moins importante que l'ordre de grandeur.

En outre, puisque notre priorité n'est pas de créer un système temps-réel, prendre un pas de temps très petit n'est pas un problème.

Finalement, de l'ensemble des $(M_1 M_2 + 2(M_1 + 1)(M_2 + 1) + 3)$ inconnues, il reste γ , η et K à déterminer empiriquement. Leurs valeurs initiales sont référencées dans le tableau 5.2.

TABLE 5.2. Valeurs initiales des paramètres.

Paramètre	Valeur
Pas de temps Δt	0.001 (s)
Pondération γ	1
Pondération η	1
Longueur au repos L_{ij}^0	0.01 (mm)
Longueur au repos $\hat{L}_{i,j}^0$	d (mm)
Longueur au repos $\tilde{L}_{i,j}^0$	d (mm)
Coefficient de tension k_{ij}	10^2
Raideur orthogonale $\hat{k}_{i,j}$	10^2
Raideur de connexion $\tilde{k}_{i,j}$	10^2

Comme introduit dans ce paragraphe, la valeur de certains coefficients est modifiée en cas d'auto-intersections dans le réseau. Le paragraphe 5.3.4 détaille le principe de cette gestion.

5.3.4 Correction des auto-intersections locales

Trois types différents de collision peuvent cohabiter. Les *auto-intersections locales* (en cas de courbure trop importante), les *auto-intersections globales* (en cas d'épaisseur trop grande ou de manque de contrôle des forces du système), et les *intersections entre organes* (en cas d'erreurs de la discrétisation). Cette dernière sera traitée par l'étape de modélisation physique avec l'application de pénalités sur les maillages en contact.

Deux orientations majeures peuvent être mises en évidence dans la littérature pour le traitement des collisions entre objets non-convexes : la subdivision hiérarchique de modèles pour les objets fixes, et la cohérence temporelle pour les objets déformables. La première utilise les volumes englobants (OBB, AABB, ...) et les structures en arbre pour tester les contacts (cf. les travaux de [Van Den Bergen, 1997, Ramirez et al., 2006]), mais est inadaptée pour les objets déformables. La seconde considère la cohérence temporelle en utilisant les résultats aux pas de temps précédents pour accélérer les calculs. Une approche plus efficace en termes de temps de calcul est proposée par [Guy and Debunne, 2004], dans laquelle des régions de collision potentielle sont déterminées et mises à jour avec une méthode aléatoire de Monte-Carlo (cf. les travaux de [Teschner et al., 2004] pour plus de détails).

Au contraire de ces approches, les propriétés du modèle élastique sont exploitées dans notre cas, à savoir un *contrôle des repliements* par une adaptation des *paramètres de tension*. Nous sommes ainsi limités aux auto-intersections locales. Par la suite, un quadrangle du maillage interne est considéré comme présentant une auto-intersection s'il est croisé (cf. figures 5.14(a) et 5.14(b)). La solution suivante consiste en deux phases : détecter les quadrangles présentant une dégénérescence et corriger l'erreur.

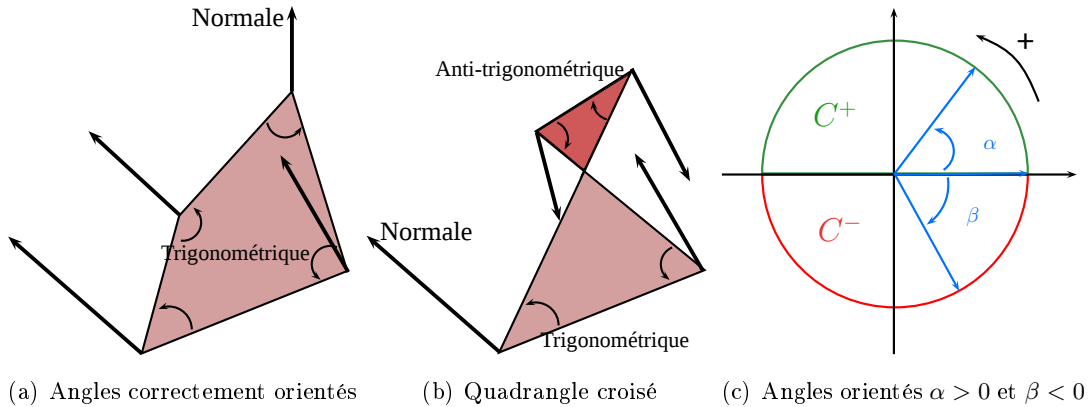


Figure 5.14. Relation entre quadrangles croisés et angles orientés.

La phase de détection repose sur les angles orientés. Soient $E_{q,r}^{int}$ la particule en laquelle l'angle orienté est calculée, $\overrightarrow{(E_{q,r}^{int} E_{q+1,r}^{int}, E_{q,r}^{int} E_{q,r+1}^{int})}$ l'angle orienté. Si la mesure principale de l'angle est située sur le demi-cercle supérieure du cercle trigonométrique (cf. figure 5.14(c)), l'angle orienté est positif, sinon il est négatif et correspond à une auto-intersection.

La phase de correction s'applique si un quadrangle est détecté croisé en $E_{q,r}^{int}$. La tâche consiste à augmenter localement la tension du maillage interne avec le coefficient de raideur k_{qr} . Des précautions sont à prendre pour ne pas définir de raideur trop élevée par rapport au voisinage. Les valeurs maximales des constantes de raideur sont définies en prétraitement, et correspondent à celles permettant d'atteindre un volume de l'OBB du maillage interne de l'ordre de 10% de son volume initial (seuil fixé). L'évolution de la raideur est linéaire (cf. figure 5.15(a)) jusqu'à atteindre le palier maximal.

Puisqu'une auto-intersection peut ne pas être provoquée uniquement par une seule particule mal positionnée, la tension acquise en $E_{q,r}^{int}$ est étalée sur son 2-voisinage (cf. figure 5.15(b)), avec une décroissance géométrique g^e (avec g la proportion entre les valeurs de raideur, et e la profondeur du voisinage pour la particule considérée).

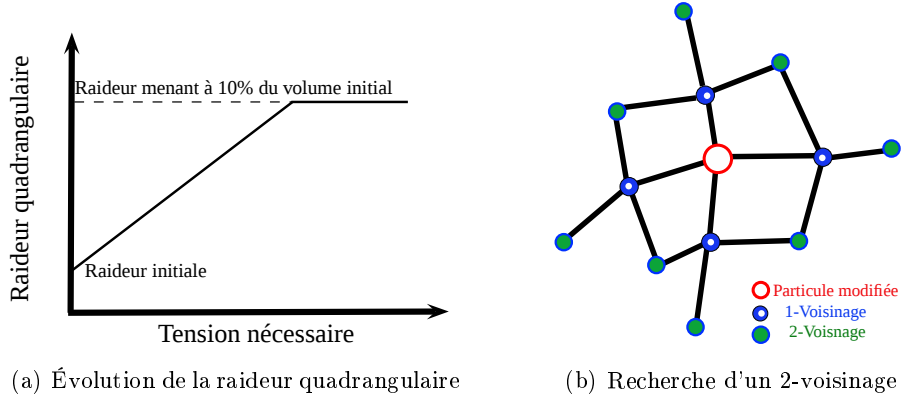


Figure 5.15. Opérations pendant la phase de correction.

La procédure étant terminée, la partie 5.3.5 illustre les résultats de son application.

5.3.5 Implémentation et résultats

Après la présentation des critères d'arrêt utilisés lors de l'implémentation, l'application de la méthode concernera les mêmes formes que pour *l'offset* paramétrique.

5.3.5.1 Critères d'arrêt

La procédure, illustrée par la figure 5.16, s'arrête lorsque le nombre de couches à construire est atteint, ou en cas de stagnation du système, formulée telle que :

$$\max_{q,r} \|\dot{p}_{q,r}\| \Delta t \leq \varepsilon_{stag}, \quad (5.12)$$

avec ε_{stag} le seuil de stagnation fixé au préalable.

5.3.5.2 Étude qualitative et quantitative pour les superellipsoïdes

Ce paragraphe compare la construction *d'offsets* obtenus avec l'approche paramétrique et élastique. Une toupie et une carambole, superellipsoïdes à arêtes vives, sont utilisées par la suite. Puisque la vadilité d'une approche *offset* dépend de l'absence d'auto-intersections mais

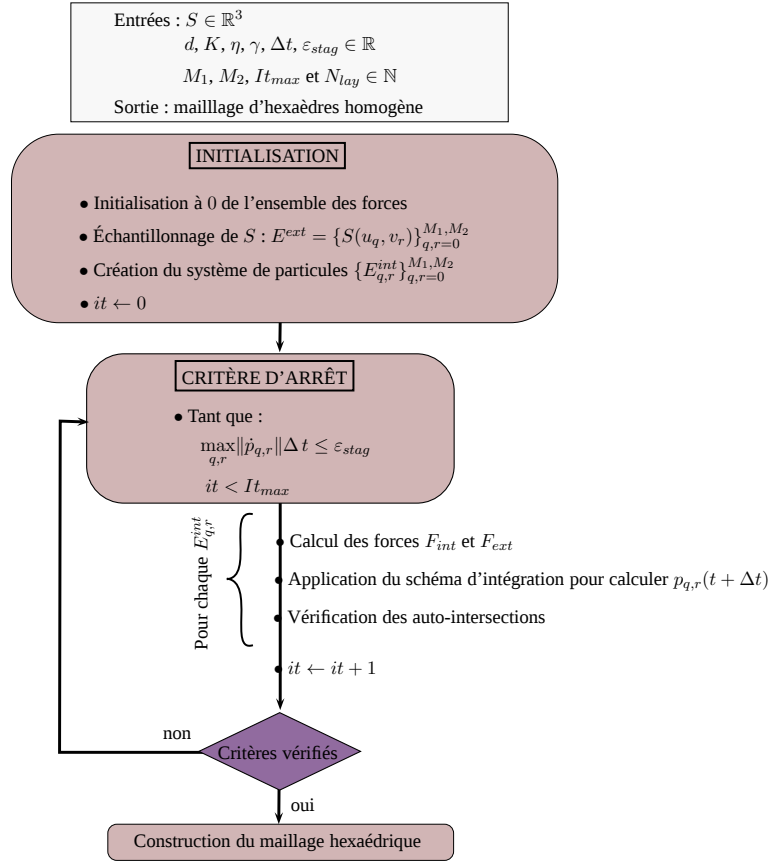


Figure 5.16. Algorithme global de la procédure *d'offset* par l'approche masses-ressorts.

également de la précision de la distance entre le contour interne et externe, les statistiques descriptives suivantes seront utilisées pour décrire les résultats :

- la distance minimale, maximale et moyenne entre le maillage interne et la génératrice ;
- l'écart-type entre ces mesures ;
- la proportion des éléments situés à plus de 90% et 100% de la *distance-offset*.

Le tableau 5.3 fait tout d'abord référence à une carambole (de 200 mm de hauteur). Nous pouvons constater immédiatement les conséquences numériques de la présence d'auto-intersections avec la B-spline. Au contraire, l'approche par ressorts a permis de se débarrasser des dégénérescences, en atteignant au moins une distance égale à l'épaisseur de 15 mm prévue pour la carambole en tout point. La valeur maximale de 20.4 provient de l'augmentation de la tension du maillage pour éviter les chevauchements locaux.

TABLE 5.3. Statistiques (en mm) de la création d'un *offset* de 15 mm d'une carambole.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
B-spline	0.006	18.0	10.8	22.2	38.4	18.3	oui	13
Ressorts	15.0	20.4	15.6	0.7	100	100	non	8

Les figures 5.17(a) et 5.17(b) illustrent les résultats avec chaque approche. Bien que la B-spline présente un chevauchement important au niveau des arêtes vives, les forces élastiques remédient au problème, créant une surface quasiment plane dans ces zones.

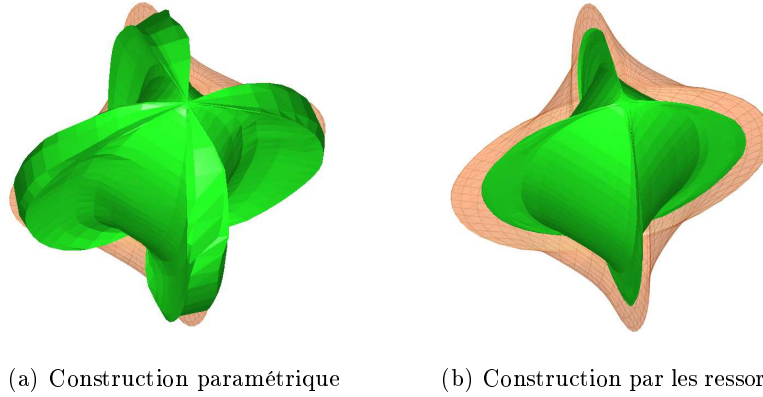


Figure 5.17. Création de l'*offset-interne* d'une carambole par deux approches.

Nous pouvons retrouver les mêmes conclusions avec une toupie (de 400 mm de hauteur). De nouveau, la méthode masses-ressorts ne présente pas de chevauchements. Avec une épaisseur de 35 mm, les intersections se trouvent cette fois-ci aux pointes. Une proportion de 5% environ n'a cependant pas été atteint, sans doute dû à la contraction dans ces zones.

TABLE 5.4. Statistiques (en mm) de la création d'un *offset* de 35 mm d'une toupie.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
B-spline	0.044	44.7	19.7	10.6	20.4	10	oui	15
Ressorts	34.2	43.9	36.5	4.2	100	95	non	9

La figure 5.18(b) montre clairement la disparition des chevauchements aux extrémités que nous pouvons retrouver à la figure 5.18(a) avec la B-spline.

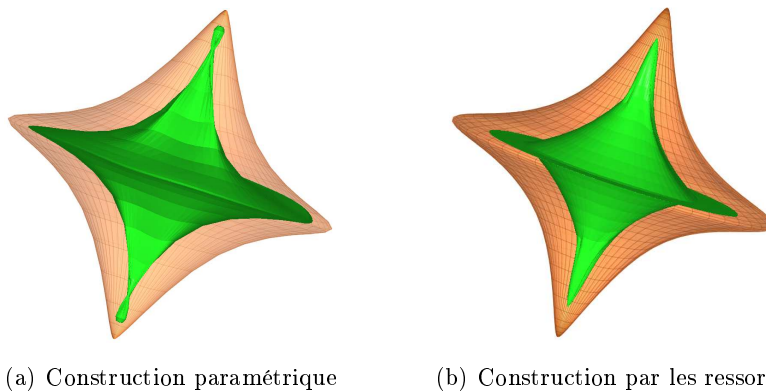


Figure 5.18. Création de l'*offset-interne* d'une toupie par deux approches.

5.3.5.3 Étude qualitative et quantitative pour les organes pelviens

La méthode est appliquée sur le rectum, avec une valeur d'épaisseur de la membrane de 5.5 mm. Le tableau 5.5 compare numériquement les approches paramétrique et élastique.

TABLE 5.5. Statistiques (en mm) de la création d'un *offset* de 5.5 mm d'un rectum.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
B-spline	0.78	6.43	4.12	1.54	46.8	26.3	oui	15
Ressorts	2.1	7.4	5.7	1.4	70	66	non	13

Nous pouvons de nouveau remarquer que l'approche par masses-ressorts gère mieux les changements de courbure, puisqu'aucune auto-intersection n'est constatée. Les valeurs inférieures à 5.5 mm sont présentes aux extrémités plus étroites de l'organe.

Les figures 5.20(a) et 5.20(b) illustrent le maillage résultant sans chevauchement aux extrémités, comparées aux résultats des figures 5.19(a) et 5.19(b) avec la B-spline.

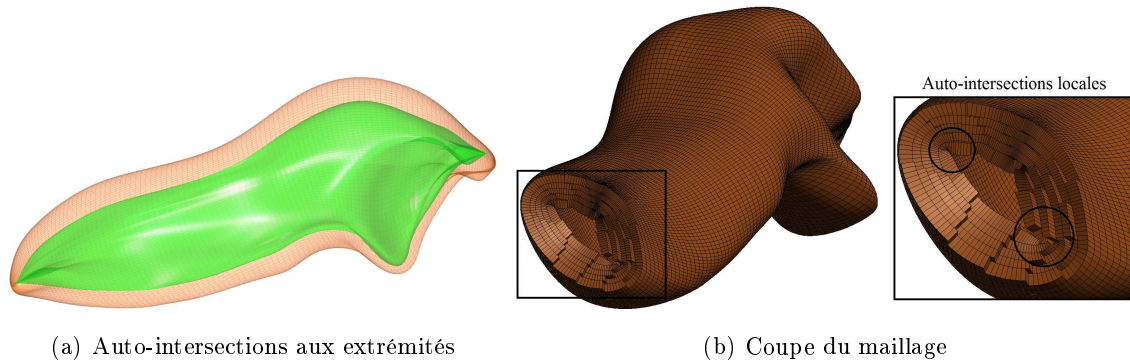


Figure 5.19. Création d'une paroi rectale avec 5 couches par l'approche paramétrique.

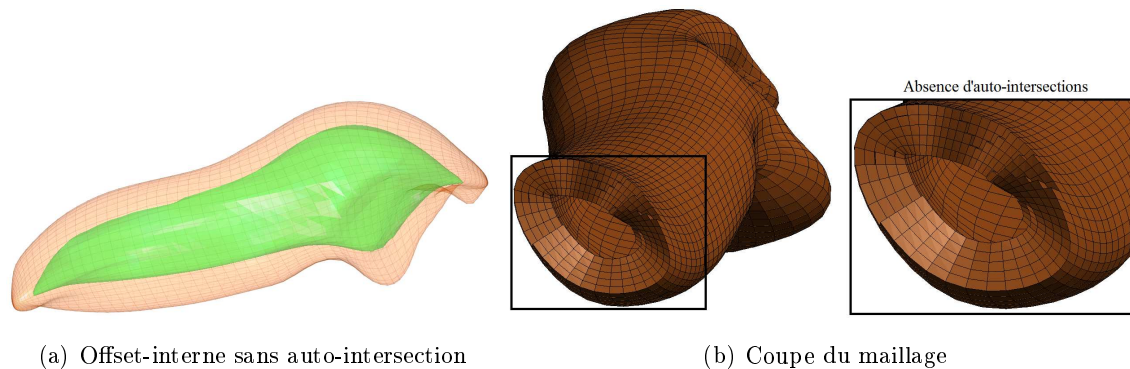


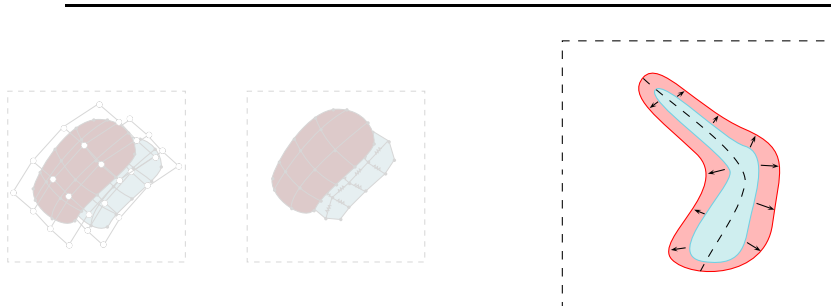
Figure 5.20. Création d'une paroi rectale avec 5 couches par l'approche masses-ressorts.

5.3.6 Conclusions sur la construction par le système masses-ressorts

La construction de l'*offset* a reposé sur une approche discrète gouvernée par un système masses-ressorts. Une gestion de la tension entre les particules du maillage interne a été entreprise pour éliminer les auto-intersections locales avec les épaisseurs considérées. La méthode présente des intérêts par sa facilité d'implémentation qui permet d'obtenir rapidement des résultats proches de ceux attendus. Les propriétés de la forme paramétrique sont en outre utilisées, servant entre autres à la localisation précise de points projetés sur la surface.

Cependant, le paramétrage empirique des forces est important et inévitable. Un contrôle du processus serait encore nécessaire pour arriver à l'épaisseur exacte recherchée pour des formes présentant des changements importants de courbure. Les auto-intersections globales ne sont par ailleurs pas traitées, ce qui pourrait être accompli par un processus de pénalité en cas de trop grande proximité entre deux particules non-voisines. En outre, dans le cadre de la création de l'ensemble utérus/vagin, aucun paramètre de raideur n'a pu être déterminé sans conduire à une instabilité du système, conséquence de l'épaisseur trop différente entre les deux organes (cf. tableau 5.1). La gestion de la tension par les ressorts est à sa limite, il nous faut donc trouver une autre approche permettant de traiter ce cas de figure.

L'idée de la technique décrite à la partie suivante propose une solution à ce problème. Par ailleurs, si la surface présente au départ des irrégularités de forme comme le montrent nos cas d'étude (un rectum n'a pas de fortes zones de concavités dans la réalité), elles seront transmises directement vers l'intérieur. Nous allons de ce fait nous inscrire dans une perspective inverse, à savoir estimer directement le positionnement de la cavité interne sans partir du maillage ou de la surface externe. Le profil général de l'organe, représenté par son diamètre généralisé obtenu à l'étape d'ajustement de la surface, servira de base pour la création de l'*offset-interne*.



Approche par profil de forme

5.4 Approche par croissance d'axe médian non-linéaire

La représentation discrète est une nouvelle fois utilisée dans cette partie. Nous proposons ci-dessous de ne pas nous baser directement sur la surface paramétrique pour construire l'*offset-interne*, contrairement aux méthodes habituelles qui **transfèrent ainsi les erreurs de l'étape d'acquisition des données** (cf. [Bay et al., 2012b]).

5.4.1 Formulation générale de la méthode

Pour les organes tels que l'utérus, la cavité interne est si mince que les parois opposées semblent accolées. Parvenir à cette extrémité en partant du contour externe de la surface est une opération complexe. Elle nécessite un système de gestion de contraintes suffisamment robuste pour pallier de plus en plus de dégénérescences sur le maillage interne au fur et à mesure que l'épaisseur considérée est grande.

La méthode suivante contourne cependant cette difficulté, en définissant la croissance d'un cylindre généralisé vers le maillage externe (issu de la discrétisation de la surface ajustée aux données), initialisé à partir de l'axe médian non-linéaire de la forme 3D que nous avons décrit au chapitre 3 (cf. figure 5.21). Son principe repose sur une succession de trois étapes :

1. *construction de l'axe médian curviligne* initialisant le processus ;
2. *positionnement du maillage initial* le long de ce profil ;
3. *évolution du système* vers le maillage externe pour construire la cavité interne.

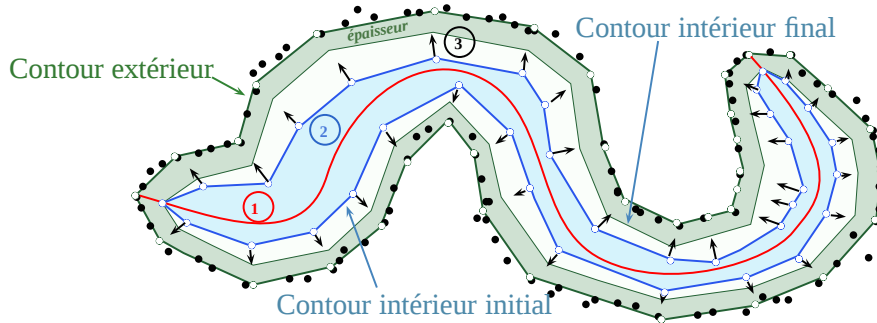


Figure 5.21. Schématisation 2D de l'approche par l'axe médian.

Nous ne reviendrons pas sur le premier point, déjà abordé pendant la phase d'initialisation de la procédure d'ajustement de la surface S (cf. partie 3.3 du chapitre 3). Nous introduisons les notations nécessaires pour la suite.

On notera C la courbe de Bézier assimilée à l'axe médian des données D , et d'extrémités A et B . Nous rappelons que l'axe (AB) correspond à la direction principale du contour de la forme (issue de l'ACP). Soit $\{M_{i,j}^0\}_{i,j=0}^{M_1,M_2}$ le maillage externe correspondant à l'échantillonnage uniforme de $(M_1 + 1)(M_2 + 1)$ points de S . La direction paramétrique u évolue

toujours selon les « parallèles » de la forme fermée (parcours de M_0 en lignes), et la direction paramétrique v selon les « méridiens » (parcours de M_0 en colonnes).

5.4.1.1 Positionnement du maillage initial

Le positionnement du maillage initial présente de nouveau de fortes similarités avec l'étape d'initialisation. Dans la même idée, chaque ensemble $\{M_{i,j}^1\}_{i=0}^{M_1}$ décrit un plan, positionné à équidistance de ses voisins et orthogonalement à la tangente à la courbe. La distance entre leur centre de gravité et chaque point $M_{i,j}^1$ est fixée à 1 mm (seuil choisi comme valeur minimale de la cavité interne des organes pour éviter un accolement des parois opposées).

Afin de pouvoir donner un effet pincé à la membrane aux extrémités, il est nécessaire d'éviter que les maillages M^0 et M^1 soient en contact en A et B . Les deux ensembles $\{M_{i,0}^1\}_{i=0}^{M_1}$ et $\{M_{i,M_2}^1\}_{i=0}^{M_1}$ (dégénérés en un point comme $\{M_{i,0}^0\}_{i=0}^{M_1}$ et $\{M_{i,M_2}^0\}_{i=0}^{M_1}$) doivent être repositionnés. Soit d^* la valeur de leur déplacement sur C . Afin de pouvoir raccourcir au besoin la distance aux extrémités A et B , la valeur de d^* est choisie dans l'intervalle $]0, d[$, avec d la *distance-offset*.

Toutefois, des précautions sont à prendre, puisque la séquence des paramètres associés aux centres de gravité des ensembles $\{M_{i,j}^1\}_{j=0}^{M_2}$ peut ne plus être ordonnée avec ces déplacements. Soit t_0 le paramètre correspondant au centre de gravité de $\{M_{i,0}^1\}_{i=0}^{M_1}$. Une correction est à appliquer si le paramètre immédiatement supérieur à t_0 n'est plus t_1 , ce qui revient à déterminer l'indice ind tel que :

$$t_{ind} = \left\{ t_k \quad t.q. \quad |t_0 - t_k| = \min_l (|t_0 - t_l|), t_0 < t_k, 0 < k \leq M_2 \right\} \quad (5.13)$$

Les paramètres avant t_0 sont alors remplacés à égale distance entre t_0 et t_{ind} (cf. figure 5.22).

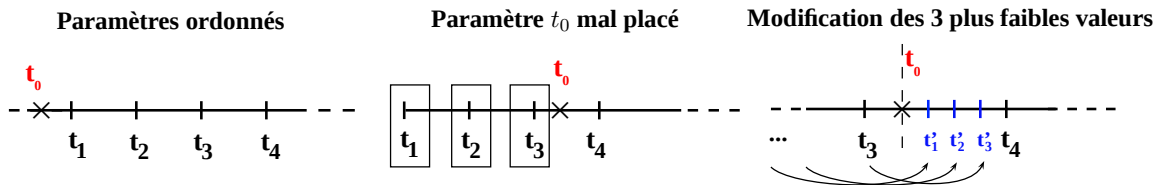


Figure 5.22. De gauche à droite : séquence ordonnée, et cas non-ordonnée avec correction.

Enfin, une réorientation des points $\{M_{i,j}^1\}$ de chaque cercle est effectuée pour éviter un croisement des liaisons entre M_0 et M_1 . Pour le $j^{\text{ème}}$ cercle, les points $\{M_{i,j}^1\}_{i=0}^{M_1}$ sont répartis uniformément. Le cercle est ensuite orienté afin d'avoir la plus courte distance Euclidienne entre $M_{0,j}^0$ et $M_{0,j}^1$. Chaque point $M_{i,j}^1$, avec $i \geq 1$, est repositionné tel que la longueur $\|M_{i,j}^1 M_{i+1,j}^1\|$ soit proportionnelle à $\|M_{i,j}^0 M_{i+1,j}^0\|$, par rapport à la longueur totale de $\{M_{i,j}^0\}_{j=0}^{M_2}$ (somme des longueurs de chaque segment de $\{M_{i,j}^0\}_{j=0}^{M_2}$). La figure 5.23 illustre le résultat.

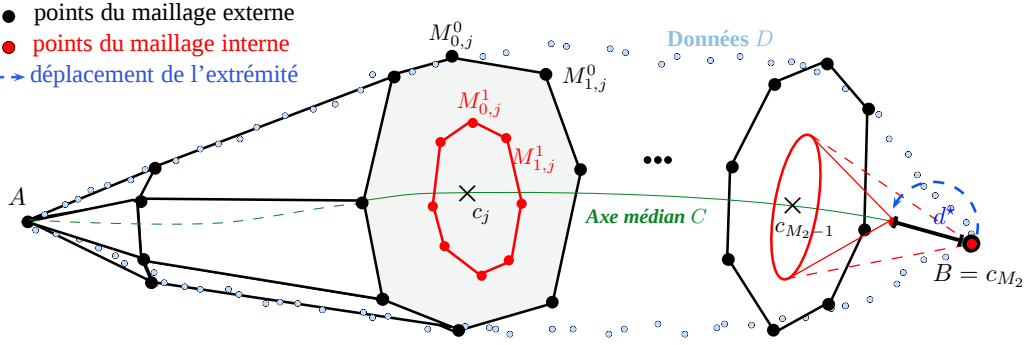


Figure 5.23. Placement du maillage interne et repositionnement des extrémités, avec c_{M_2-1} le centre de gravité de $\{M_{:,M_2-1}^1\}$ et c_{M_2} le centre de gravité de $\{M_{:,M_2}^1\}$.

5.4.1.2 Évolution du maillage et prise en compte des auto-intersections

La dernière étape consiste finalement à l'évolution du maillage interne vers l'extérieur. Le système n'autorise le déplacement d'un point $M_{i,j}^1$ qu'à la condition que chacune des contraintes suivantes soit respectée.

1. absence d'auto-intersections locales : les quadrangles associés à $M_{i,j}^1$ ne sont pas croisés (cf. paragraphe 5.3.4) ;
2. absence d'auto-intersections globales : le segment $[M_{i,j}^0 M_{i,j}^1]$ ne traverse aucun quadrangle de M^0 ou M^1 ;
3. test de distance : la distance de $M_{i,j}^1$ à son projeté orthogonal sur S est inférieure à la *distance-offset* d .

Soit $\Delta x > 0$ le pas de déplacement. La position au temps $t + \Delta t$ de $M_{i,j}^1(t)$ est calculée par :

$$M_{i,j}^1(t + \Delta t) = M_{i,j}^1(t) + \Delta x \frac{\overrightarrow{M_{i,j}^1(t) M_{i,j}^0(t)}}{\|M_{i,j}^1(t) M_{i,j}^0(t)\|} \quad (5.14)$$

La procédure étant terminée, la partie 5.4.2 illustre maintenant les résultats de son application.

5.4.2 Implémentation et résultats

Après la présentation des critères d'arrêt utilisés lors de l'implémentation, les conséquences de l'application de la méthode seront mises en évidence par son application sur des superellipsoïdes et des organes pelviens.

5.4.2.1 Critères d'arrêt

De même que pour l'approche par les masses-ressorts, le processus basé sur l'axe médian (illustré par le schéma 5.24) s'arrête dès que le nombre maximal d'itérations It_{max} est atteint ou en cas de stagnation de l'évolution du système, formulée par :

$$\|M_{i,j}^1(t + \Delta t) M_{i,j}^0\| > d \quad \forall i \in \{0, \dots, M_1\}, j \in \{0, \dots, M_2\} \quad (5.15)$$

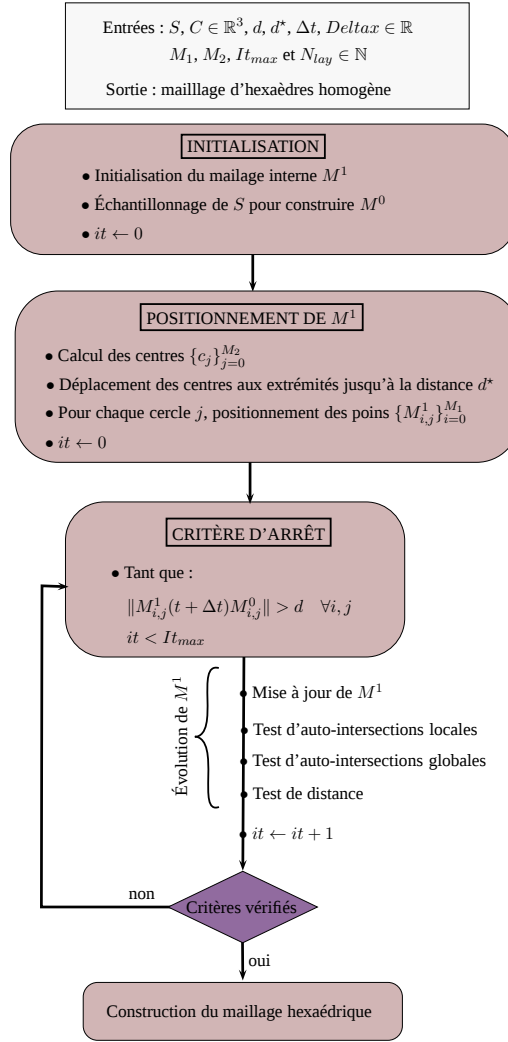


Figure 5.24. Algorithme global de la procédure d'offset basée sur l'axe médian non-linéaire.

5.4.2.2 Étude pour les superellipsoïdes

La finalité de cette méthode n'est pas de positionner l'offset-interne à une distance au moins égale à l'épaisseur d en tout point, mais de contrôler l'écart entre les contours externe et interne aux « extrémités » de l'organe avec le paramètre d^* . En appliquant ce principe à la construction de l'offset d'une toupie avec $d^* = d$, le tableau 5.6 compare les résultats numériques obtenus avec la méthode basée sur l'axe curviligne à ceux issus de l'approche par masses-ressorts de [Bay et al., 2012c].

TABLE 5.6. Statistiques (en mm) de la création d'un offset de 35 mm d'une toupie.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
Ressorts	34.2	43.9	36.5	4.2	100	95	non	9
Axe curv.	21	39	34	6.6	72	51	non	11

La conséquence est évidemment que bien moins d'éléments sont situés à la distance minimum de 15 mm. Cependant, nous pouvons désormais obtenir un maillage en définissant des « fixations » du contour interne pour construire un *offset* d'épaisseurs très variables.

5.4.2.3 Étude qualitative et quantitative pour les organes pelviens

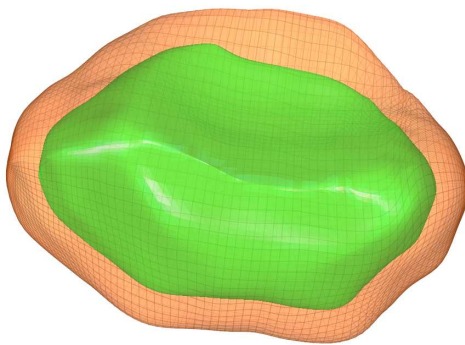
La méthode est appliquée sur la vessie, le rectum et l'ensemble utérus/vagin, avec des épaisseurs respectives de 5.5, 5.5 et 20 mm d'épaisseur (la vessie ne présentant pas de problème pour 3.5 mm, nous testerons l'algorithme jusqu'à la valeur correspondant à l'épaisseur maximale répertoriée au tableau 5.1).

Étude quantitative - Ce paragraphe compare l'approche élastique et celle basée sur l'axe médian pour la vessie et le rectum.

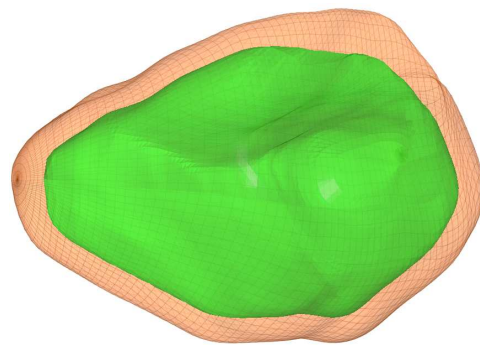
Le tableau 5.7 résume les statistiques des distances entre les contours interne et externe pour la vessie. La dernière ligne (« Axe (sans) »), correspondant à l'application de la méthode par l'axe curviligne sans intégrer les points aux extrémités qui n'évoluent pas après le départ, présente les meilleurs résultats. Les figures 5.25(a) et 5.25(b) illustrant les approches ne montrent pas de différence particulière. Le passage à l'épaisseur de 5.5 mm ne pose aucun problème.

TABLE 5.7. Statistiques (en mm) de la création de l'*offset* de la vessie.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
Ressorts	5.27	8.54	7.08	0.4	100	99.6	non	8
Axe curv.	4.5	5.6	5.44	0.3	91	79	non	10
Axe (sans)	5.3	5.6	5.5	0.2	100	100	non	10



(a) Approche élastique



(b) Approche par axe médian

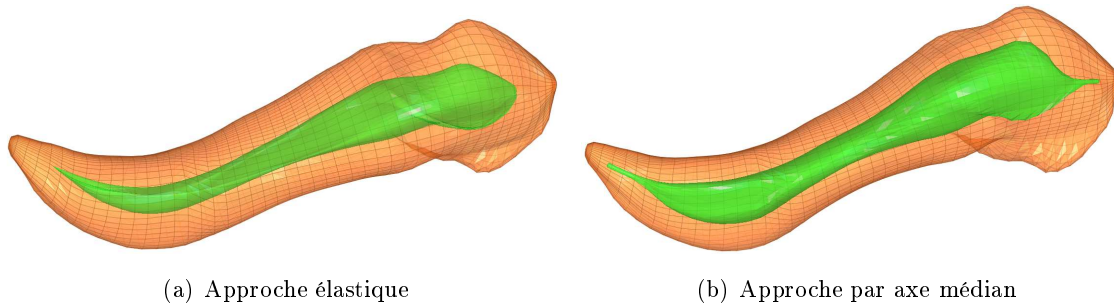
Figure 5.25. Constructions de l'*offset-interne* de la vessie.

Le même travail est effectué pour le rectum, avec le tableau 5.8. Le système de ressorts se débarrasse effectivement des auto-intersections, mais reste proche du contour externe dans les zones qui ont été sujettes aux dégénérescences avec un minimum de 2.07 mm.

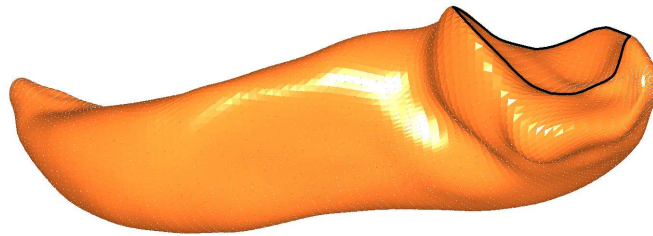
TABLE 5.8. Statistiques (en mm) de la création de l'*offset* du rectum.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
Ressorts	2.1	7.4	5.7	1.45	70	66	non	24
Axe curv.	2.49	5.6	4.96	1	71	66	non	13
Axe (sans)	5.4	5.6	5.5	0.08	100	100	non	13

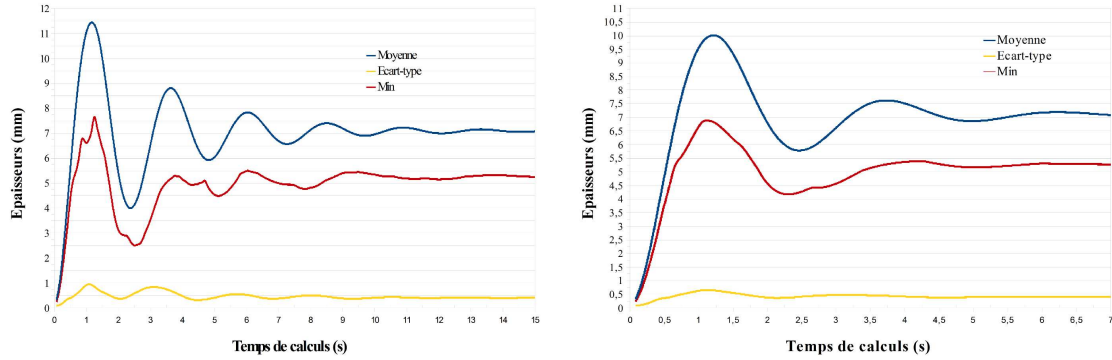
Contrairement à l'exemple précédent, la figure 5.26(b) met en évidence la prolongation du maillage interne aux extrémités, comparé à la figure 5.26(a) où la forme interne est davantage contractée à l'intérieur.

**Figure 5.26.** Constructions de l'*offset-interne* du rectum.

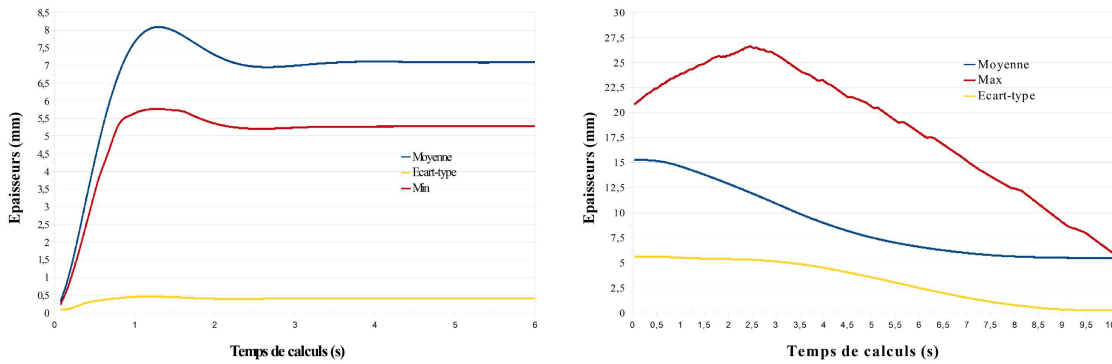
La figure 5.26(b) représente le découplage entre la surface externe ajustée aux données et la cavité interne. En effet, la cavité de la forme reconstruite satisfait la réalité physiologique que nous avons imposée. Les organes doivent être parcourus d'un bout à l'autre, et bien qu'il soit difficile d'estimer à quel emplacement les sphincters se situent (les muscles circulaires assurant la fermeture des conduits aux extrémités), ils ne devraient pas être localisés autant vers l'intérieur du rectum comme l'approche par masses-ressorts le suggère. Le résultat de la figure 5.26(a) est plus fortement conditionné par la forme de la surface (cf. figure 5.27) que l'approche par axe médian. Nous mettons ainsi en évidence l'impact des erreurs produites par l'acquisition des données sur la création de l'*offset-interne*.

**Figure 5.27.** Surface ajustée du rectum (génératrice) : mise en évidence (en noir) de la forme creusée à une extrémité, éloignée de la réalité anatomique suite aux erreurs de saisie.

Stabilité de l'évolution - Les différences en termes de robustesse et de stabilité entre les méthodes par masses-ressorts et par axe médian sont mises en évidence avec la vessie. Les histogrammes 5.28(a) à 5.28(d) illustrent l'évolution temporelle des épaisseurs.



(a) Ressorts : évolution vers l'intérieur, avec $\gamma = 0.5$ (b) Ressorts : évolution vers l'intérieur, avec $\gamma = 1$



(c) Ressorts : évolution vers l'intérieur, avec $\gamma = 2$ (d) Par l'axe médian : croissance vers l'extérieur

Figure 5.28. Évolution de l'épaisseur de vessie par rapport au temps de simulation.

Le système masses-ressorts, difficile à contrôler, conduit seulement à une épaisseur de 7 mm, contrairement à notre approche par l'axe médian pour laquelle l'objectif de 5.5 mm a été atteint (cf. figure 5.28(d)). En outre, selon le paramétrage initial (valeur du coefficient γ notamment) et la gestion des auto-intersections, de fortes oscillations sont générées (cf. figures 5.28(a) à 5.28(c)).

Proximité du contour externe - D'un point de vue qualitatif, le rectum présente un orifice à chaque extrémité de sa paroi. Avec l'approche basée sur l'axe médian, nous pouvons facilement diminuer localement sa distance au contour externe (cf. figure 5.29(b)), plus conforme à la réalité physiologique. Une telle modification avec les masses-ressorts serait difficile à appliquer sans perturber l'énergie élastique du système à proximité des extrémités.

Les figures 5.30(a) et 5.30(b) montrent qu'il est tout à fait possible de supprimer complètement la distance ou de l'augmenter si besoin est.

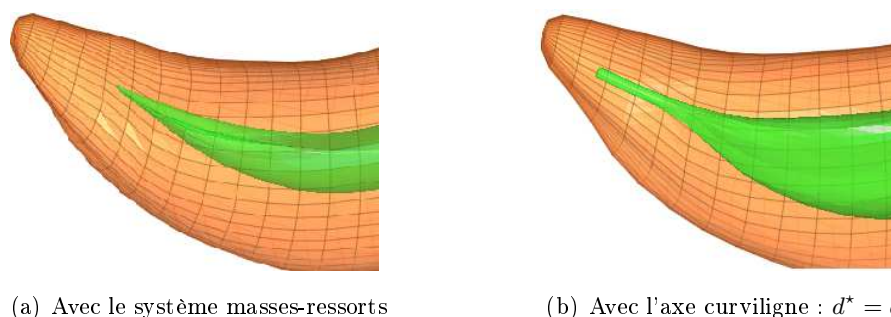


Figure 5.29. Comparaison de la proximité entre le maillage interne et externe aux extrémités de la paroi rectale.

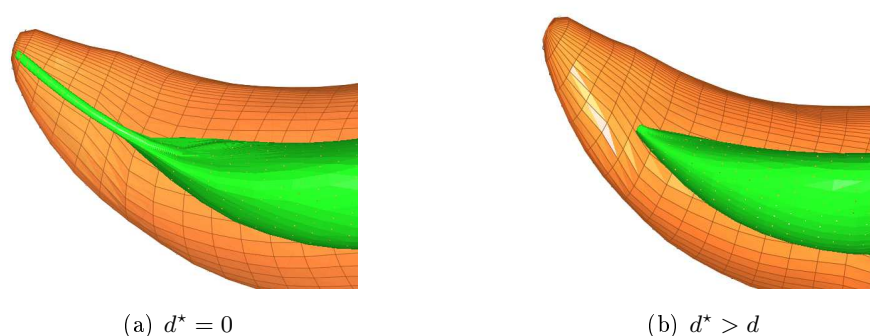


Figure 5.30. Exemples de différentes valeurs de d^* .

Plusieurs épaisseurs - Le dernier point concerne la construction du contour interne de l'ensemble utérus/vagin. L'épaisseur considérée est celle de l'utérus, qui est grande au regard des autres dimensions de l'organe. Le tableau 5.9 renseigne les valeurs statistiques relatives au processus. Le premier constat que nous pouvons faire concerne les distances minimales au contour externe. La valeur de 16.5 mm reste très importante avec le système de ressorts. *A contrario*, la seconde méthode présente un résultat de 3.4 mm. Ce dernier provient de l'arrêt de la procédure dans les zones plus étroites relatives au vagin, permettant pour le couple utérus/vagin d'avoir un respect de la *distance-offset* pour le vagin, et une adaptation pour l'utérus plus réaliste qu'avec une épaisseur globale faible. Le processus est donc plus stable comparé aux deux méthodes précédentes.

TABLE 5.9. Statistiques (en mm) de la création de l'*offset* de l'utérus/vagin.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
Ressorts	16.5	26.8	20.7	1.8	93	73	oui	59
Axe curv.	3.4	19.4	18.8	5.3	72	58	non	12

Concernant la proportion des distances par rapport à l'épaisseur théorique, les résultats sont faussés pour le système de ressorts puisque des auto-intersections sont détectées et n'ont

pu être résorbées à cause de la valeur trop élevée de la *distance-offset* (cf. figure 5.31(a)). Cependant, l'approche par l'axe médian, la valeur de 58% semble cohérente avec la proportion que l'utérus occupe dans l'ensemble des deux organes. La figure 5.31(b) présente finalement la paroi interne sans auto-intersection.

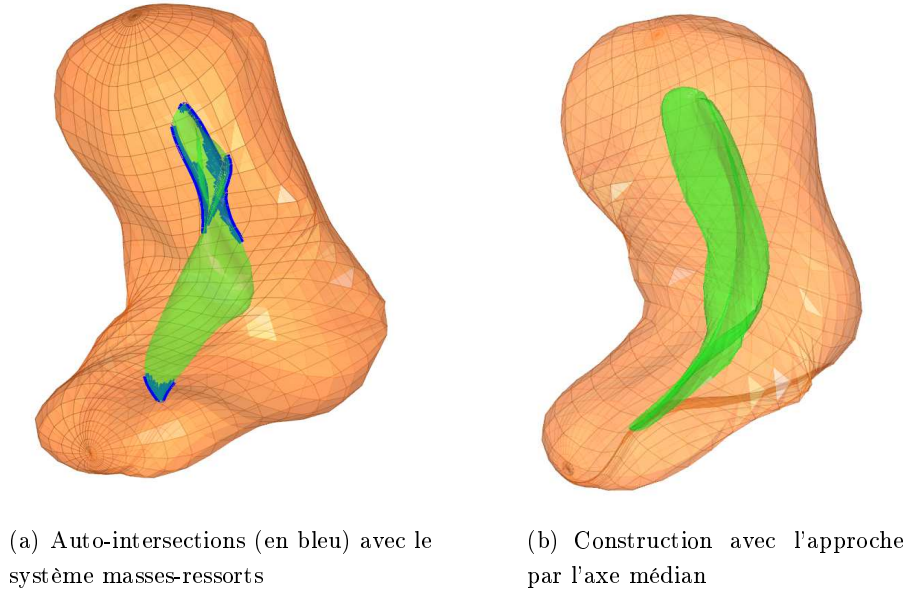


Figure 5.31. Construction de la paroi interne de l'ensemble utérus/vagin.

5.4.3 Conclusions de l'approche basée sur l'axe médian

A contrario des approches « classiques », la construction de l'*offset-interne* n'est pas basée sur une connaissance *a priori* du contour. L'idée a consisté à estimer dès le départ la cavité interne. Partant de l'axe médian non-linéaire pour son positionnement, un cylindre généralisé a été dilaté vers l'extérieur jusqu'à atteindre le volume adéquat. L'approche présente plusieurs avantages :

- définies au départ, les connectivités d'un maillage conforme d'hexaèdres sont conservées tout au long du processus, permettant de fournir directement le maillage résultant sans traitement *a posteriori* ;
- les auto-intersections locale et globale sont gérées pendant le processus de construction en évitant les configurations qui les généreraient ;
- bien que les erreurs causées par l'ajustement aux données se retranscrivent dans le maillage externe, elles ne sont pas prises en compte directement dans le maillage interne puisque nous partons de l'axe non-linéaire. Les erreurs des données gênent toutefois le processus en ne permettant pas de reproduire un organe fidèle à la réalité anatomique comme nous avons pu le voir avec les zones fortement concaves du rectum.

Il faut cependant préciser que cette approche reste limitée aux cas de figure présentant un « profil principal net », i.e. pour lesquels la forme a une direction de parcours principale.

Finalement, la construction de cavités internes pour des ensembles comme l'association utérus/vagin, très différents en termes d'épaisseur, a été réalisée. La connaissance d'une carte d'épaisseur, non disponible à ce jour, permettra de suivre plus précisément la réalité physiologique.

5.5 Synthèse

L'objectif de ce chapitre consistait à fournir différents outils pour la construction d'*offsets-internes*. La littérature permet de mettre en évidence deux approches souvent utilisées : la représentation implicite et les techniques volumétriques. Nous avons voulu définir une méthode permettant à la fois de conserver un contrôle direct sur la reconstruction, et de gérer la résolution du maillage résultant sans découpage du volume englobant notre forme 3D. Pour apporter une solution au problème, trois méthodes ont été présentées.

Tout d'abord, la partie 5.2 s'est basée sur l'approche paramétrique. La méthode avait pour objectif de mettre en évidence les problèmes d'auto-intersections avec les épaisseurs réelles. Bien que de nombreux travaux proposent des heuristiques pour détecter les dégénérescences, certaines peuvent ne pas être décelées. De ce fait, puisque notre objectif est de fournir un maillage en sortie, nous nous sommes tournés vers la représentation discrète et des traitements géométriques.

La partie 5.3 présente une approche orientée vers la mécanique en introduisant des forces élastiques entre les points des maillages. La méthode a permis d'avoir un contrôle direct sur les énergies et la possibilité de tester directement l'absence de chevauchements dans le maillage par l'augmentation locale de la tension. Toutefois, comme toute approche basée sur les ressorts, la dimension empirique a été très importante et difficile à maîtriser pour obtenir des résultats précis. En outre, pour de fortes épaisseurs, la modification des constantes de raideur n'est plus suffisante.

Finalement, la partie 5.4 a adopté une orientation inverse des approches actuelles, avec la construction d'un *offset-interne* à partir d'un axe médian non-linéaire continu décrivant le parcours général de la forme 3D. L'approche a permis de gérer les auto-intersections locale et globale (arrêt du processus en cas de détection) et de créer la cavité interne sur tout l'intérieur, permettant d'utiliser des jeux de données à épaisseur variable. En outre, le transfert d'erreurs issues de l'ajustement de la surface aux données bruitées a été évité. Concernant la précision physiologique de la cavité, il est difficile de se prononcer puisque le manque de connaissances sur l'intérieur ne permet pas de valider les résultats. Toutefois, au regard des contraintes du problème fixées au départ, un **maillage d'hexaèdres conforme, non-mixte et sans chevauchement** peut être effectivement fourni à la modélisation physique pour les simulations par éléments finis.

Sommaire

6.1	Introduction	152
6.2	Premier exemple : l'omotondo	152
6.2.1	Résultats de la procédure d'ajustement	152
6.2.2	Résultats de la procédure d'offset	153
6.3	Deuxième exemple : le glaive	155
6.3.1	Résultats de la procédure d'ajustement	155
6.3.2	Résultats de la procédure d'offset	155
6.4	Troisième exemple : le buste	157
6.4.1	Résultats de la procédure d'ajustement	157
6.4.2	Résultats de la procédure d'offset	158
6.5	Synthèse	159

6.1 Introduction

Afin de montrer que les approches vues dans les chapitres 3 et 5 sont adaptables à d'autres jeux de données sortant du contexte médical, elles sont appliquées à travers trois exemples génériques provenant de la CAO, à savoir un omotondo, un glaive et un buste. Pour chaque nuage de points en entrée, la procédure d'initialisation, d'ajustement, et de construction de *l'offset-interne* sera entrepris.

6.2 Premier exemple : l'omotondo

Les données sont de l'ordre de 66K points, et décrivent un individu assis en tailleur et se tenant la tête dans ses mains. La forme à reconstruire est fermée, quasiment sphérique et présentant localement de fortes concavités. Sa boîte orientée est de dimension $174 \times 165 \times 154$ mm.

6.2.1 Résultats de la procédure d'ajustement

Le tableau 6.1 présente les résultats de l'ajustement de la surface paramétrique d'ordres 4×4 . La paramétrisation 0 fait référence aux graphes de connexion par plus proches voisins, à opposer à la paramétrisation 1 qui concerne la projection orthogonale. La notation « 0 + 1 » fait référence à l'application d'une projection orthogonale après la paramétrisation 0. La présence du signe « / » dans les tableaux correspond à la non-utilisation d'un terme d'énergie pendant la procédure d'ajustement.

TABLE 6.1. Résultats de l'ajustement de la surface (30 itérations).

	Param.	E_{max} (mm)	$E_{D \rightarrow E}$ (mm)	$E_{E \rightarrow D}$ (mm)	Temps (s)
Initialisation	0	11.4	3.38	2.73	2
$f_{D \rightarrow E}$	0	10.1	2.22	/	15
$f_{E \rightarrow D}$	0	8.97	/	1.73	16
f totale	0	4.94	1.74	0.7	40
f totale	0 + 1	3.6	1.6	/	64

Les concavités et les arêtes vives conduisent à l'obtention d'une erreur maximum de 3.6 mm après 30 itérations. À partir des données décrites par la figure 6.1(a), l'initialisation itérative positionne au départ la surface selon l'axe médian non-linéaire (cf. figure 6.1(b)). La surface résultante de l'ajustement bidirectionnelle est illustrée par la figure 6.1(c).

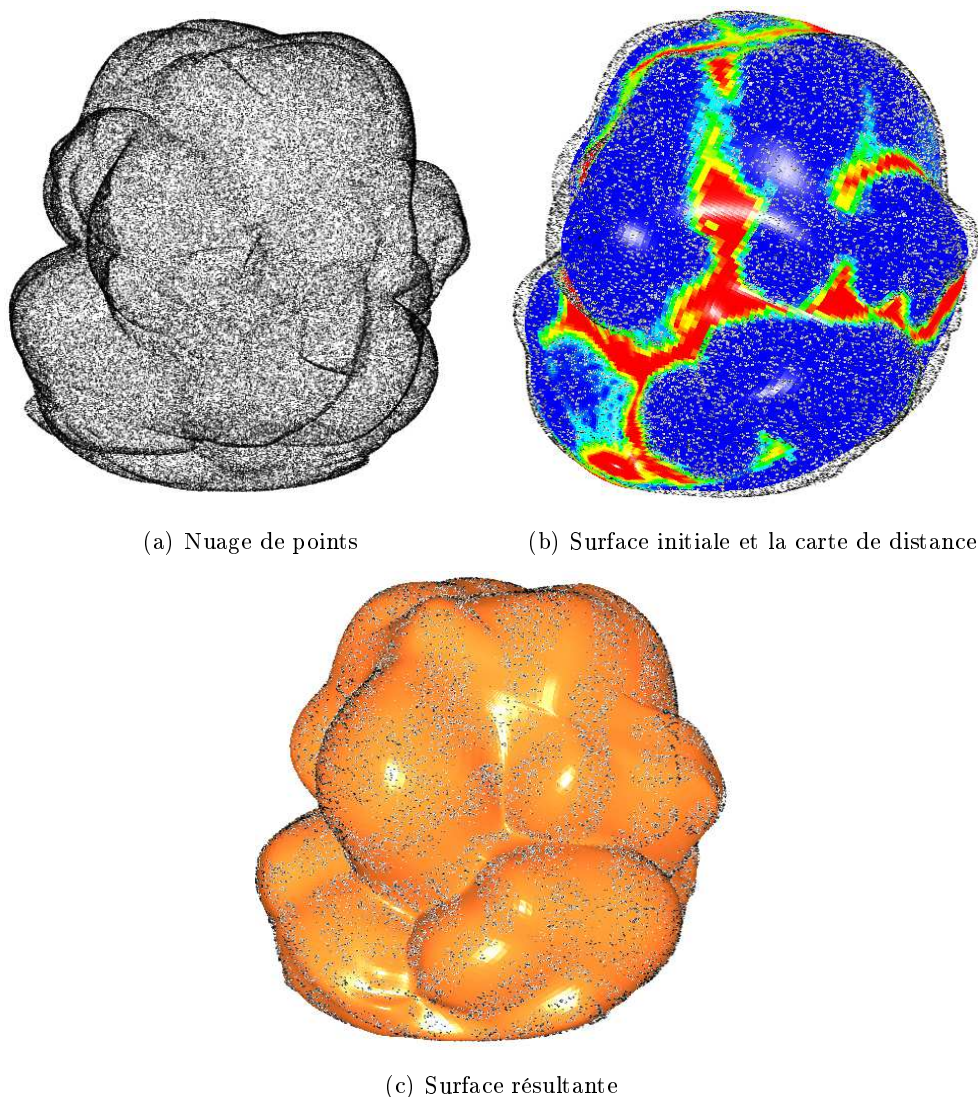


Figure 6.1. Données de l'omontondo et résultats de l'ajustement bidirectionnel.

6.2.2 Résultats de la procédure d'offset

Le tableau 6.2 résume les statistiques sur les épaisseurs après création d'un *offset* de 15.4 mm avec les trois approches de ce chapitre. Un maillage de taille 81×81 est utilisé. Les figures 6.2(a) à 6.2(c) illustrent les résultats relatifs à chaque approche.

TABLE 6.2. Statistiques (en mm) de la création d'un *offset* de 15.4 mm de l'omotondo.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
B-spline	0.02	27	14.8	5.68	78	36	oui	24
Ressorts	12.3	30	20	1.2	100	99.6	non	32
Axe curv.	15.41	15.6	15.5	0.3	100	100	non	46

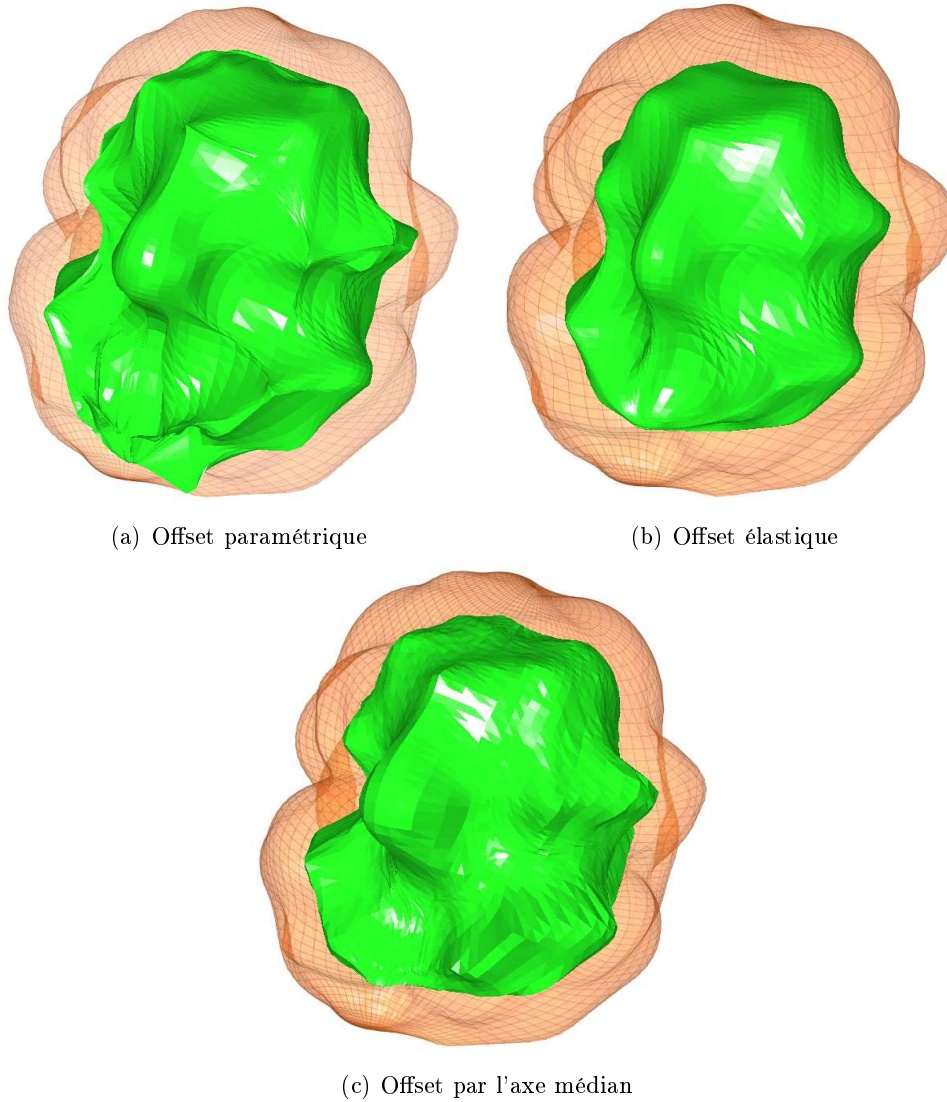


Figure 6.2. Exemple de reconstruction *d'offsets-internes* de l'omotondo.

L'approche moyennante par la fonctionnelle bidirectionnelle est la seule présentant des auto-intersections. Pour le système masses-ressorts, l'augmentation de la raideur locale conduit néanmoins à une épaisseur moyenne de l'ordre de 20 mm. Pour revenir à 15.4 mm, la pondération de la force externe devrait être augmentée. *A contrario*, la méthode basée sur l'axe curviligne a 100 % d'éléments ayant atteint la *distance-offset*, avec une épaisseur moyenne de 15.5 mm.

La précision de cette dernière méthode dépend de la valeur du pas de déplacement introduit dans la formule 5.14 de la partie 5.4. En outre, une attention particulière doit être portée pour les formes quasiment sphériques, car en cas de mauvais positionnement de l'axe médian non-linéaire (au sens où les extrémités seraient placées dans des zones isolées, entourées de zones concaves), le maillage interne n'évoluerait pas correctement.

6.3 Deuxième exemple : le glaive

Les données sont de l'ordre de 18K points, et décrivent une épée courte. La forme est longiligne, avec des arêtes vives. Sa boîte orientée est de petite taille, avec pour dimensions $15.5 \times 2.1 \times 5.5$ mm.

6.3.1 Résultats de la procédure d'ajustement

Le tableau 6.3 présente les résultats de l'ajustement de la surface paramétrique d'ordres 4×4 . À partir des données décrites par la figure 6.3(a), la surface paramétrique de la figure 6.3(c) est obtenue.

TABLE 6.3. Résultats de l'ajustement de la surface (30 itérations).

	Param.	E_{max} (mm)	$E_{D \rightarrow E}$ (mm)	$E_{E \rightarrow D}$ (mm)	Temps (s)
Initialisation	0	0.83	0.14	0.08	1
$f_{D \rightarrow E}$	0	0.21	0.03	/	4
$f_{E \rightarrow D}$	0	0.27	/	0.1	4
f totale	0	0.2	0.08	0.04	20
f totale	0 + 1	0.1	0.03	/	8

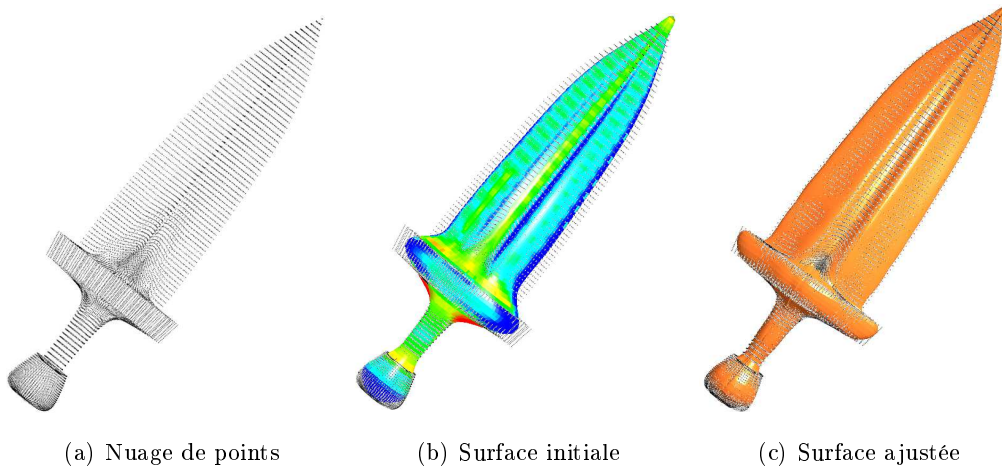


Figure 6.3. Données du glaive et résultats de l'ajustement bidirectionnel.

6.3.2 Résultats de la procédure d'offset

La discrétisation sert de base pour la construction des *offsets-internes* avec une épaisseur de 0.3 mm. Le tableau 6.4 résume les statistiques de leurs générations.

TABLE 6.4. Statistiques (en mm) de la création d'un *offset* de 0.3 mm de l'épée.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
B-spline	0.01	0.4	0.2	0.09	89	33	oui	9
Ressorts	0.05	2.6	0.3	0.44	79	68	oui	21
Axe curv.	0.047	0.31	0.44	0.09	91	87	non	12

Un maillage de taille 81×81 est utilisé. Les figures 6.4(a) à 6.4(c) illustrent les résultats relatifs à chaque approche.

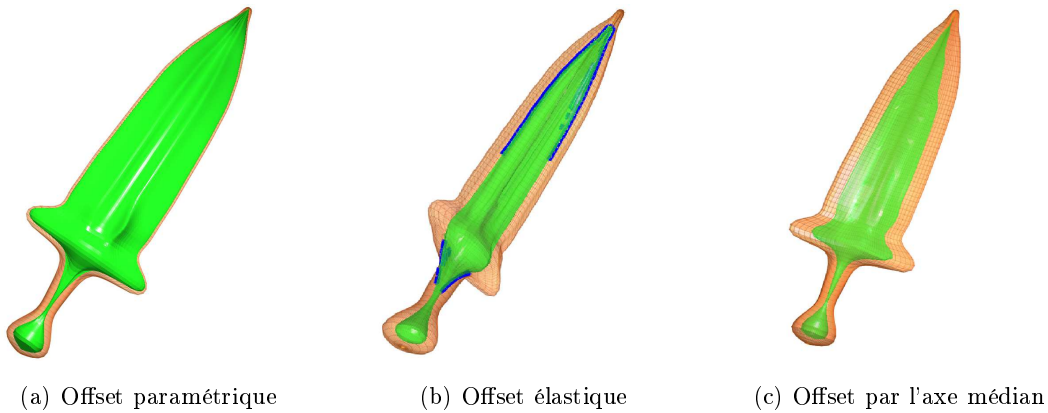


Figure 6.4. Exemple de reconstruction *d'offsets-internes* de l'épée.

Les courbures sont plus importantes que pour l'omotondo. L'approche moyennante par la fonctionnelle bidirectionnelle présente des zones d'auto-intersections aux extrémités de la forme (cf. figure 6.4(a)). L'application de la gestion locale du système de ressorts ne permet pas de corriger le problème (cf. auto-intersections en bleu à la figure 6.4(b)), et met en évidence deux cas de figure :

1. **à la pointe** : l'augmentation des constantes de raideur n'a pas pu corriger le problème sans entraîner d'instabilité du système ;
 2. **au niveau de la garde** : une sortie du maillage interne de la surface paramétrique est constatée, due à la raideur plus élevée et aux faibles longueurs au repos des ressorts.
- Afin de pallier le problème, une solution s'appliquerait selon la configuration du système :
1. **zones convexes** (situation traitée) : contraction du maillage interne avec faibles longueurs et fortes raideurs des ressorts ;
 2. **zones concaves** : augmentation des longueurs au repos et diminution des raideurs des ressorts.

Toutefois, la forme allongée de l'épée en fait un candidat idéal pour appliquer l'approche par l'axe médian curviligne (cf. figure 6.4(c)). Le maillage final ne présente pas d'auto-intersection, et génère par construction *l'offset* jusqu'à la pointe de l'épée à une distance

précise des extrémités du contour externe. En outre, la proportion de distances non-atteintes de 13 % provient de la poignée trop fine.

6.4 Troisième exemple : le buste

Les données sont de l'ordre de 40K et décrivent un buste de femme. La forme à reconstruire est longiligne, et sa boîte orientée est de dimension $226 \times 87 \times 121$ mm.

6.4.1 Résultats de la procédure d'ajustement

Le tableau 6.5 présente les résultats de l'ajustement de la surface d'ordres 4×4 .

TABLE 6.5. Résultat de l'ajustement de la surface (30 itérations).

	Param.	E_{max} (mm)	$E_{D \rightarrow E}$ (mm)	$E_{E \rightarrow D}$ (mm)	Temps (s)
Initialisation	0	15.9	3.08	1.72	1
$f_{D \rightarrow E}$	0	5.88	0.95	/	28
$f_{E \rightarrow D}$	0	4.25	/	0.74	29
f totale	0	2	0.7	0.6	89
f totale	0 + 1	0.8	0.3	/	64

À partir des données décrites par la figure 6.5(a), la surface de la figure 6.5(c) est obtenue.

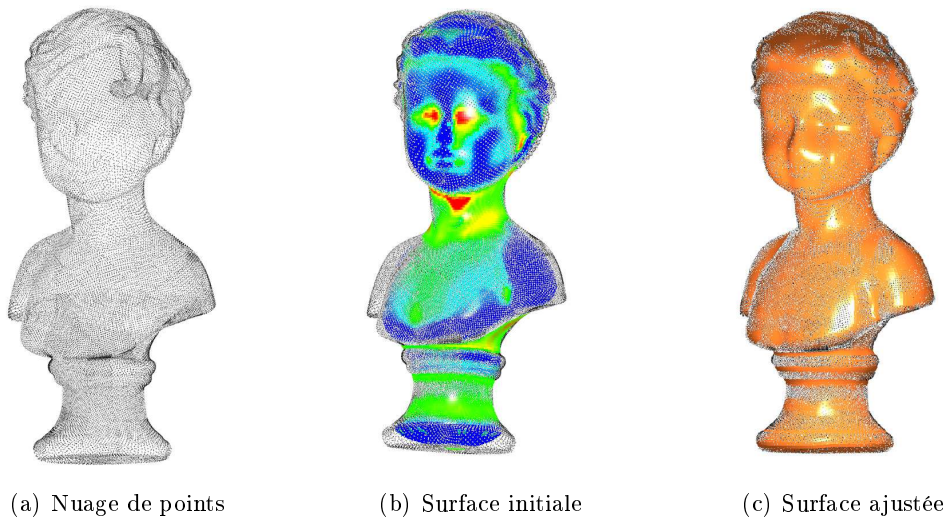


Figure 6.5. Données du buste et résultats de l'ajustement bidirectionnel

6.4.2 Résultats de la procédure d'offset

La discrétisation sert de base pour la construction des *offsets-internes* avec une épaisseur de 4.3 mm. Le tableau 6.6 résume les statistiques de leurs générations, à partir d'un maillage de taille 81×81 .

TABLE 6.6. Statistiques (en mm) de la création d'un *offset* de 4.3 mm du buste.

	Min.	Max.	Moy.	E.Type	$\geq 90\%$	$\geq 100\%$	Auto-int.	Temps (s)
B-spline	0.8	5.3	4.1	0.7	89	33	oui	13
Ressorts	3.9	6.96	4.5	0.7	99	94	non	22
Axe curv.	3.65	4.38	4.2	0.31	100	99.8	non	23

L'approche moyennante par la fonctionnelle bidirectionnelle présente des auto-intersections et des zones de proximité importante entre les contours interne et externe (cf. figure 6.6(a)). Le système masses-ressorts parvient à les éviter, avec une valeur moyenne de 4.5 mm proche de l'épaisseur recherchée (cf. figure 6.6(b)). La dernière méthode, illustrée par la figure 6.6(c), ne présente pas non plus de problème particulier.

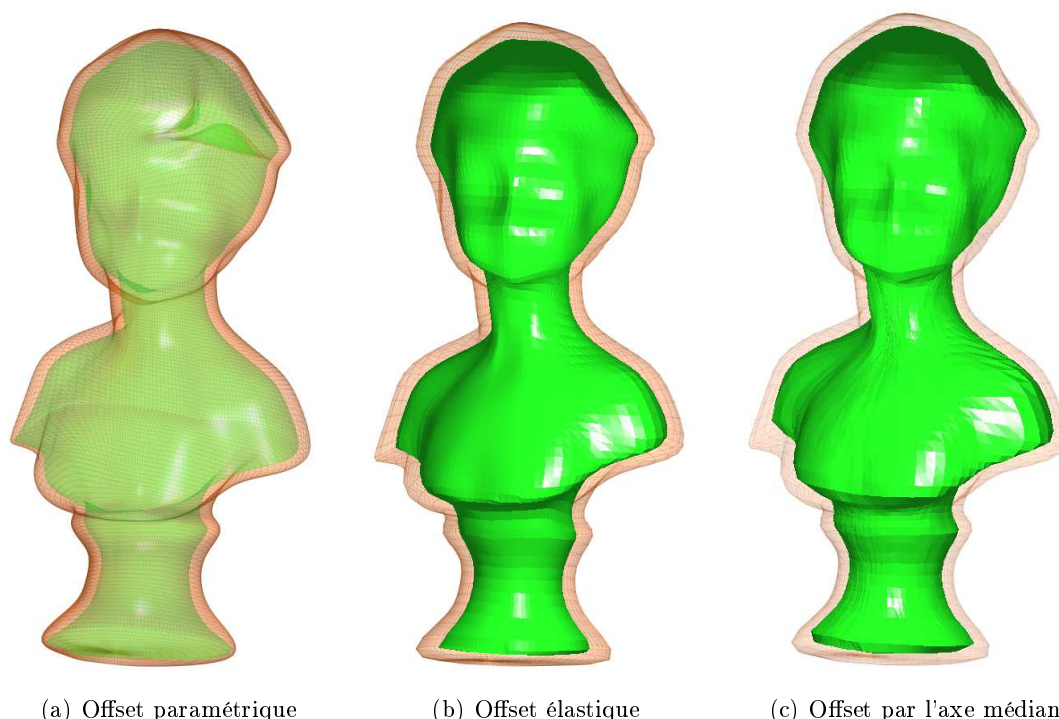


Figure 6.6. Exemple de reconstruction *d'offsets-internes* du buste.

6.5 Synthèse

Afin de montrer que notre approche ne s'applique pas qu'à des organes, nous avons testé notre méthode avec des objets de taille et de forme différentes qui ont servi de tests pour valider les conditions d'utilisation des approches développées.

À moins de construire *l'offset* d'une forme présentant des courbures importantes, l'approche élastique a montré des résultats intéressants. Cependant, elle nécessite des adaptations selon les propriétés locales du maillage ou de la surface pour gagner en efficacité : modifications en cas de changement de courbure, et changements dynamiques des pondérations des forces. *A contrario*, lorsque les formes ont une forme générale plus allongée, l'approche par axe médian s'impose.

Toutefois, il faut garder à l'esprit que le choix de la méthode dépend également de la valeur de la *distance-offset*. Plus elle est élevée, plus l'utilisation à partir de l'axe médian semble indiquée. Par contre, plus elle est faible, plus la croissance à partir de l'axe médian requerra un coût important en termes de calcul.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Synthèse générale

Ce mémoire de thèse est composé de six chapitres. Chacun d'entre eux a été écrit en vue d'apporter un éclaircissement sur la problématique de la construction de la membrane épaisse des organes pelviens de la femme.

Le premier chapitre nous a permis d'identifier le contexte médical dans lequel s'inscrit ces travaux. Nous nous sommes positionnés au sein du projet MoDyPe, créé en vue de construire un *simulateur de deuxième génération*. Son objectif est de fournir une aide à la décision au chirurgien pour évaluer son geste en mode pré-opératoire. Le projet est un processus en quatre étapes : l'acquisition des données à partir d'IRM statiques, la modélisation géométrique pour la création de maillages, la modélisation physique pour la simulation de leurs comportements, et la caractérisation pour valider les résultats avec une vérité-terrain.

Notre travail s'inscrit au niveau de la *conception du modèle géométrique* des principaux organes des systèmes digestif (le rectum), urologique (la vessie), et gynécologique (le vagin et l'utérus), de sorte qu'ils soient proches de la réalité physiologique. L'analyse anatomique a permis d'extraire les contraintes nécessaires pour paramétrer le système, à savoir concevoir les organes en tant que *formes creuses, épaisses, et « lisses »*.

Le deuxième chapitre s'est consacré à une étude bibliographique pour acquérir une vue d'ensemble des différentes techniques actuelles de reconstruction de surfaces à partir de nuages de points épars (contraintes en entrée de l'étape d'acquisition des données). Les représentations implicite, paramétrique et discrète ont été étudiées.

Afin de choisir une approche adaptée, nous avons fixé les contraintes suivantes : pouvoir nous localiser facilement sur la surface (définir une paramétrisation), avoir une interaction directe avec la surface, et obtenir au moins une continuité C^1 . Bien que chaque méthode présente de nombreux avantages, une approche à partir d'une *surface périodique de type B-spline* a semblé la plus appropriée.

En utilisant les conclusions de l'étude bibliographique, le troisième chapitre a proposé une méthode d'ajustement surfacique adaptée à nos besoins. La procédure consiste en trois

phases distinctes. Tout d'abord, une surface paramétrique de continuité C^2 et de genre 0 a été mise en place. Ensuite, une procédure d'initialisation a été définie pour disposer la surface sur les données en définissant le profil général du nuage de points sous la forme d'une courbe, assimilée à un *axe médian non-linéaire*. Finalement, *l'énergie bidirectionnelle* a permis de tenir compte simultanément de la surface approchante et de la distribution spatiale des données. La réduction utilisée est basée sur une descente de gradient à pas optimal, couplée à une régularisation de la surface. Les résultats à l'issue de cette étape ont permis de vérifier la validité de l'approche.

La surface paramétrique ajustée sur les données représente le contour externe de la membrane épaisse. Le quatrième chapitre signale la transition vers la deuxième partie des travaux, à savoir *l'ajout de l'épaisseur* pour la création du contour interne. L'étude bibliographique a dissocié les principales méthodes de construction de surfaces parallèles au résultat de l'ajustement, aussi appelées *surfaces-offsets*. Les deux orientations mises en évidence consistent à travailler avec des surfaces implicites et des champs de distance basés sur une grille volumétrique, ou d'utiliser une méthode paramétrique.

Ces approches présentent toutefois des limitations. La première concerne les problèmes de précision des calculs, notamment au niveau de la résolution de la grille, de la procédure d'extraction de l'isosurface, ou dans certains cas du besoin de grandes épaisseurs. La seconde fait référence aux problèmes de gestion de petites auto-intersections. En outre, l'ensemble des méthodes précédentes partent du contour externe pour concevoir l'*offset-interne*. De ce fait, si la surface ou le maillage du contour externe présente au départ des erreurs, elles seront transférées directement à l'*offset-interne*.

Le cinquième chapitre a décrit trois méthodes de construction d'*offset-interne*. L'approche paramétrique a eu pour vocation de présenter le problème des auto-intersections dans le cadre de notre étude, mettant en évidence la difficulté de travailler avec une épaisseur moyenne sur la surface et non-spécifique à la patiente.

Une seconde approche a été basée sur la mécanique avec un système masses-ressorts. Bien que présentant des résultats intéressants, la gestion des paramètres, du choix des énergies et des connectivités est trop empirique pour atteindre la précision recherchée.

La dernière approche a construit l'*offset-interne* à partir d'un cylindre généralisé à l'intérieur du nuage décrivant le profil général des formes 3D. Une cavité interne est de ce fait positionnée pour évoluer vers l'extérieur. Avec cette approche, l'*offset* de l'ensemble utérus/vagin a pu être reconstruit.

Finalement, le dernier chapitre a expérimenté les méthodes d'ajustement et de construction d'*offsets* sur différentes formes issues de la CAO, permettant ainsi de valider l'adaptation des procédures dans un contexte extérieur au domaine médical.

En résumé, nous avons ainsi pu créer un maillage hexaédrique pour chacun de nos objets fournis en entrée, remplissant l'objectif de la tâche WP2 du projet MoDyPe. À partir de données ne présentant pas une proportion trop importante de valeurs erronées, les approches proposées ont permis d'atteindre une précision inférieure à l'erreur de saisie, en intégrant les connaissances disponibles dans la littérature sur les épaisseurs des organes. Par ailleurs, sans avoir besoin de gérer la contrainte du temps-réel, le processus global s'est avéré ne pas durer plus d'une dizaine de minutes pour l'ensemble des reconstructions. En outre, aucune procédure d'optimisation n'a été utilisée (algorithmes de parallélisation par exemple), laissant encore de nombreuses possibilités d'amélioration. Les résultats, validés par l'expertise médicale, peuvent ainsi être exploités par les mécaniciens de la tâche WP3 pour la modélisation du comportement sous contraintes de poussée abdominale des organes.

Perspectives

Les perspectives détaillées ci-dessous sont réparties en trois groupes. Le premier d'entre eux décrit une extension directe des méthodes développées dans le cadre de ce doctorat, en vue d'analyser à courts et moyens termes certains points laissés pour le moment en suspend. Le second propose une application des approches définies pour la reconstruction 3D des organes pelviens à d'autres problématiques médicales. Finalement, s'inscrivant à plus longs termes, le dernier propose de répondre à des questions encore ouvertes de la modélisation géométrique en utilisant comme travail de base les idées mises en évidence dans ce mémoire.

Extension des approches développées

Certains développements mineurs peuvent être entrepris. Au niveau de la méthode d'ajustement, la paramétrisation par plus proche voisin a prouvé son efficacité lorsque la surface approchante est loin du nuage de points. Par contre, le choix des valeurs de la discrétisation M_1 et M_2 reste empirique. Bien qu'à travers les simulations nous avons pu valider le fait qu'une cardinalité du même ordre de grandeur conduit à de meilleurs résultats, une analyse de sensibilité sur ces paramètres permettrait d'analyser quantitativement leur impact. En outre, des cartes paramétriques non-uniformes pourront être étudiées, s'avérant toutefois plus complexe dans le cas des surfaces.

La descente de gradient à pas optimal a été efficace pour la réduction de la fonctionnelle, et pourrait être rapidement comparée à une technique de gradient conjugué pour discuter de la vitesse de la convergence. En outre, bien que la contrainte du projet consiste à définir un simulateur en mode pré-opératoire, l'amélioration du temps de calcul par une parallélisation des algorithmes serait appréciable pour rendre le système davantage interactif.

Concernant les méthodes développées pour la construction de *surfaces-offsets*, elles re-

posent essentiellement sur des approches géométriques. Différemment, il serait intéressant de développer un algorithme convergent avec une fonctionnelle d'énergie, régularisée par exemple par des multiplicateurs de Lagrange pour caractériser les auto-intersections.

Par rapport à la procédure globale du projet MoDyPe, la boucle de rétro-action n'a pas pu être vérifiée. Bien que des premiers maillages aient été envoyés à la Modélisation Physique, les délais n'ont pas permis d'avoir de retours complets de résultats. Après le retour des déformations des maillages par la modélisation physique, la confrontation des résultats avec l'étape de caractérisation permettra de valider la modélisation géométrique.

Finalement, l'absence de carte d'épaisseur pour la modélisation géométrique a nécessité des suppositions sur la nature de la cavité interne des organes qui peuvent être incorrectes physiologiquement. Réussir à acquérir ses connaissances au niveau de l'acquisition des données permettra d'améliorer la réalité physiologique retranscrite dans les maillages des membranes épaisses.

Application à d'autres problématiques médicales

La méthode proposée est conçue pour la reconstruction 3D de nuages épars. Les caractéristiques de l'approche permettraient toutefois de répondre à d'autres objectifs.

L'un d'entre eux pourrait concerner la détection de tumeurs sur des organes. Les tumeurs ont en effet des causes variées et peuvent survenir à tout âge. Plus tôt elles sont diagnostiquées, meilleures sont les chances de guérison. L'utilisation de systèmes non-invasifs de destruction nécessite de délimiter précisément la tumeur du reste de l'organe. De ce fait, considérer les caractéristiques de changements de courbure sur la surface d'un organe doit permettre d'extraire un chemin fermé représentant « l'excroissance tumorale » (cf. figures 7.1(a) et 7.1(b)). L'utilisation d'une surface de type B-spline permet d'une part d'accéder à une géométrie différentielle précise pour calculer ces caractéristiques, et d'autre part de calculer le chemin par restriction du domaine paramétrique.

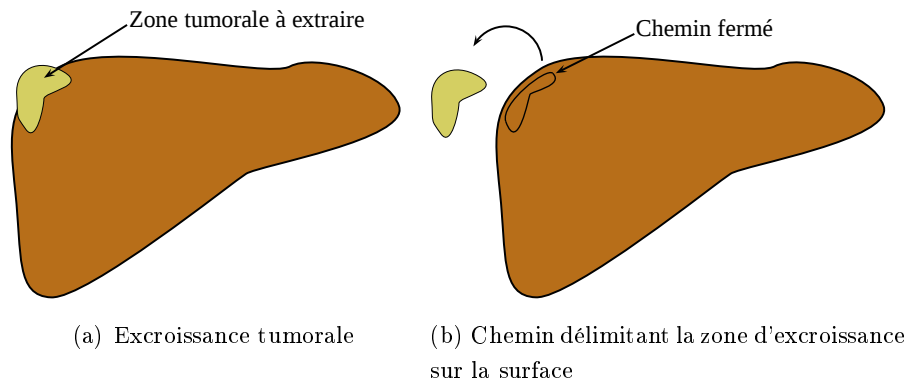


Figure 7.1. Schématisation d'un foie présentant une tumeur à retirer.

Réponse à des verrous de la modélisation géométrique

Dans un contexte plus général, l'approche décrite pour l'initialisation par axe curviligne pourrait être adaptée d'une part pour des formes plus complexes, et d'autre part pour la fusion de formes fermées. L'intérêt de continuer à utiliser la courbe paramétrique comme guide pour la surface initiale permet de disposer une surface paramétrique rapidement à proximité des données.

Pour l'instant, la limitation de l'initialisation réside dans la caractérisation d'une « direction » pour le profil de la forme décrite par les données (cf. figure 7.2(a)). Étendre le processus avec un ensemble de courbes interconnectées permettrait d'atteindre des zones du nuage moins caractéristiques (cf. figure 7.2(b)), à condition de pouvoir différencier les zones fortement bruitées ou possédant de nombreuses valeurs erronées des zones pertinentes.

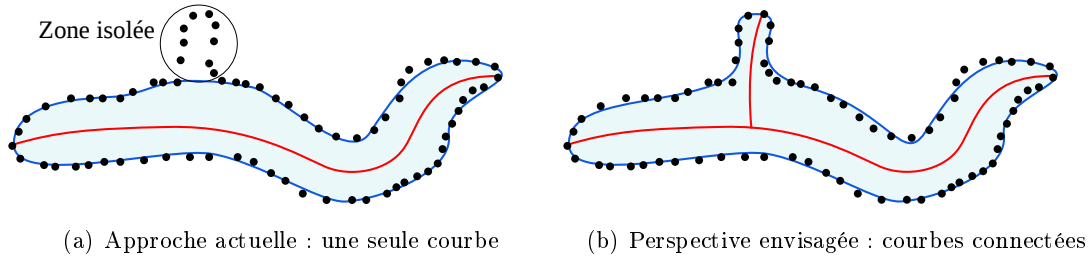


Figure 7.2. Extension de l'initialisation par l'axe médian pour positionner une surface paramétrique initiale de forme plus complexe.

Différemment, il serait intéressant de définir le raccord entre surfaces B-splines à partir des axes curvilignes. La jonction entre deux surfaces fermées peut être délicate, nécessitant une restriction des domaines paramétriques (cf. les travaux de [La Greca, 2005]). Le raccord pourrait être effectué par le calcul de l'axe curviligne dans chaque forme, suivi de leur liaison et de la reconstruction de la surface paramétrique en tenant compte de l'ensemble de courbes interconnectées (cf. figure 7.3). Dans le cadre médical, ce genre d'opération serait par exemple utile pour l'intégration des uretères dans le modèle géométrique vésical.

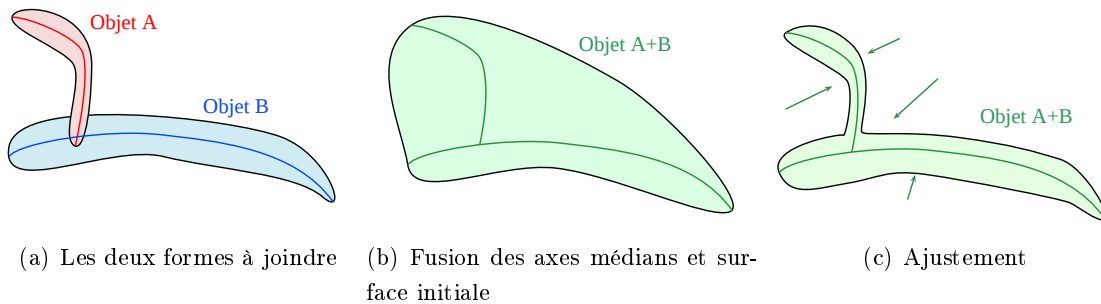


Figure 7.3. Fusion de deux formes.

Enfin, une autre approche serait de définir une procédure de connexion itérative de courbes pour de la description multirésolution de formes, toujours de genre 0. Les zones

isolées (représentées par la figure 7.2(a)) seraient traitées au fur et à mesure par un critère de pertinence (l'abscisse curviligne des courbes paramétriques, l'éloignement de « l'axe majeur », ...). De ce fait, une hiérarchie des axes non-linéaires serait établie, permettant de représenter l'ensemble des zones sous forme d'un arbre, et donc de visualiser uniquement les basses-fréquences si besoin est. Les figures 7.4(a) à 7.4(c) représentent le principe simplifié pour des formes présentant de nombreux embranchements (végétation, système sanguin, réseau fluvial, réseau routier, ...).

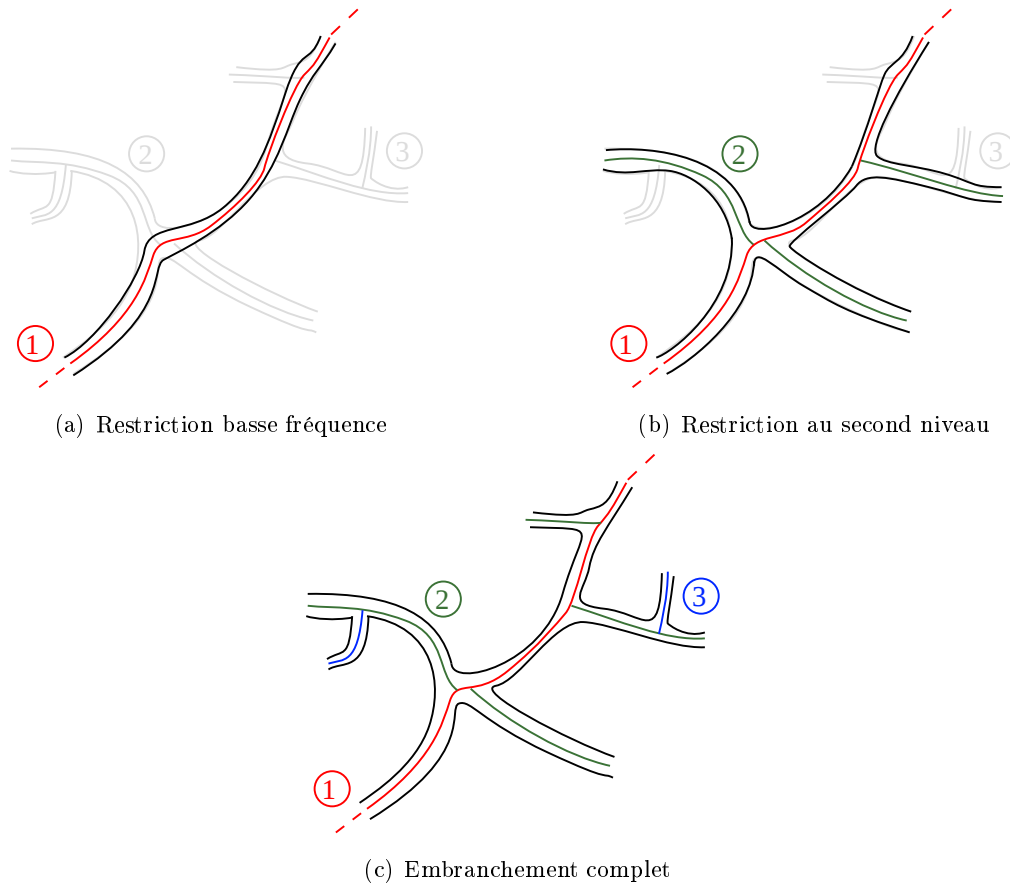


Figure 7.4. Description multirésolution, allant des basses-fréquences (1) aux hautes-fréquences (3).

Dans la thématique *offset* de notre travail, une généralisation peut être faite sur la construction des surfaces. Il est possible de faire l'analogie de notre méthode avec des techniques de déformations par champ de vecteurs (dans notre cas, orientés selon les normales et de norme unique). En poussant plus loin le raisonnement, nous pourrions donner en entrée de notre procédure un champ de vecteurs quelconque (en termes d'orientation des normales et de normes) issu du flot optique de la saisie IRM dynamique. Notre modèle pourrait donc également servir à déformer la surface externe de l'organe, de manière paramétrique, et profiter de la description continue pour des calculs d'aire, de volume, ou d'opérateurs différentiels.

À travers notre description de surfaces fermées paramétriques, l'ensemble de ces perspectives permettrait ainsi de décrire un ensemble plus vastes d'objets, en intégrant le souci d'interaction. En effet, plus la forme et le contrôle à obtenir sur un objet est complexe, plus sa modélisation nécessite de contraintes. Chaque méthodologie est donc restreinte à la satisfaction d'une liste limitée d'objectifs. Par la mise en place de la surface B-spline de genre 0 dans le cadre de la reconstruction de formes, nous proposons une procédure apportant : un contrôle au moyen de sa paramétrisation (qui n'est donc pas déterminée a posteriori, mais conservée tout au long de la modélisation), un contrôle sur la continuité de la surface, et une mise à disposition d'une géométrie différentielle ne reposant pas sur une approximation de son comportement par une estimation des tangentes et des courbures d'un maillage (utile notamment pour le calcul de trajectoires sur une surface). La manipulation des caractères d'inertie (axe principal, surface minimale résultant de procédures itératives d'ajustement), permettent de tirer parti des caractéristiques principales de formes fermées, facilitant d'une part leur construction et leur manipulation, et d'autre part leur utilisation à d'autres fins comme la génération de *surfaces-offsets*.

ANNEXES

A Détails de la physiopathologie pelvienne de la femme

Une présentation de l’horizon biologique du plancher pelvien féminin est détaillée ci-dessous, délimitant la zone d’étude de la modélisation dans le cadre du projet MoDyPe.

A.1 Les parois osseuses de la cavité pelvienne

Elles assurent la jonction entre la colonne vertébrale et les membres inférieurs. Elles sont constituées principalement de deux os coxaux latéraux, du sacrum et du coccyx (cf. figure 7.5) :

1. *L’os coxal* est une structure complexe, paire, formée par trois os distincts avant l’adolescence et qui se soude par la suite : il est constitué de l’os iliaque, de l’ischion et du pubis. Les deux os coxaux symétriques se rejoignent à l’avant au niveau des pubis par la symphyse pubienne (tissus fibro-cartilagineux). Il s’articule avec le sacrum et la symphyse ;
2. *Le sacrum* est constitué des cinq vertèbres sacrées soudées ensemble en forme pyramidale dont le sommet situé vers le bas s’articule avec le coccyx ; il est situé entre les deux os iliaques, et sa base se nomme le *promontoire sacré* ;
3. *Le coccyx*, reliquat d’un appendice caudal, est l’os situé à l’extrémité de la colonne vertébrale, et résulte de la soudure de quatre à six vertèbres atrophiées. Sa face antérieure donne attache aux muscles ischio-coccygien, releveur de l’anus.

A.2 Les sustentateurs

Ils maintiennent l’équilibre dans la cavité pelvienne, correspondant à l’action conjuguée d’un ensemble de muscles et de ligaments. Une dizaine de muscles répartis sur différents plans (profond, moyen, superficiel) retiennent les organes au-dessus du plancher pelvien. Le plus important d’entre eux est le muscle élévateur de l’anus (cf. la figure 7.6), aussi appelé *support actif*. Il est recouvert d’un tissu conjonctif - l’aponévrose pelvienne, aussi appelé *support passif* - dont le rôle consiste à protéger les organes qu’il entoure.

Chaque organe est en outre fixé par un système ligamentaire (condensations fibro-cellulaires). L’utérus par exemple est rattaché au bassin par trois paires de ligaments (larges,

ronds, utéro-sacrés), tandis que la vessie n'est associée qu'à deux paires (pubo-vésicaux). La figure 7.7 présente les organes pelviens dans la loge osseuse avec des ligaments.

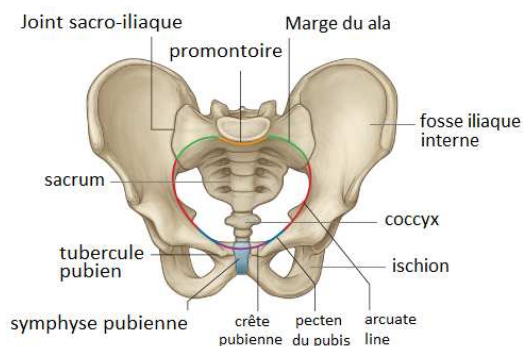


Figure 7.5. Vue antérieure du bassin (cf. [Drake et al., 2004]).

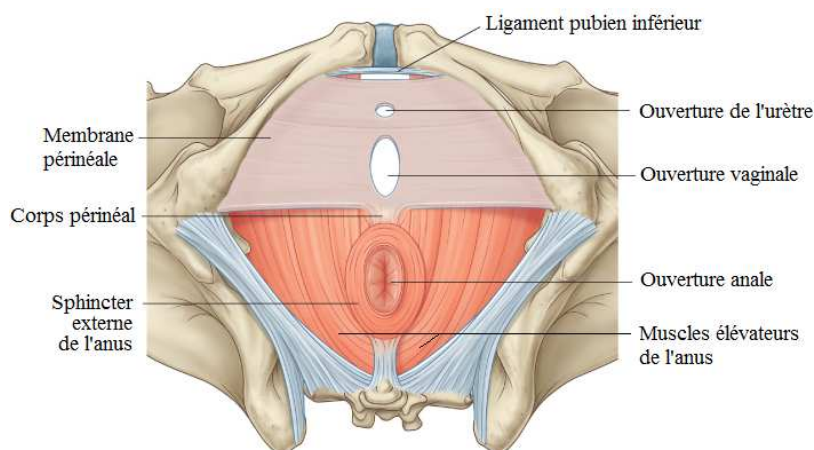


Figure 7.6. Muscles du plancher pelvien (cf. [Drake et al., 2004]).

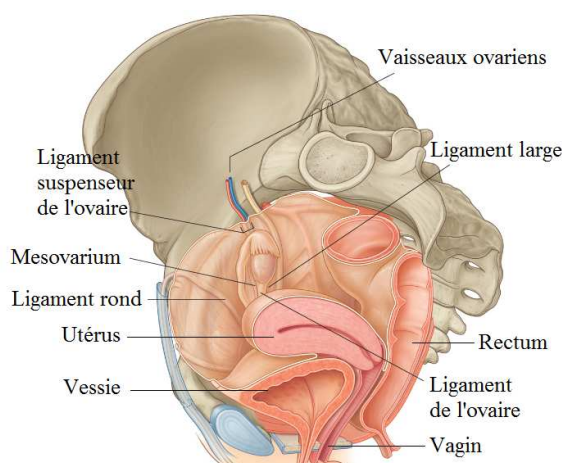


Figure 7.7. Organes pelviens dans la loge osseuse (basé sur [Drake et al., 2004]).

A.3 Les organes pelviens

Les tableaux 7.1 à 7.3 résument les principales informations permettant de positionner les organes et de comprendre leurs rapports avec le reste du système. Une dimension moyenne des organes est apportée à titre indicatif (longueur L , largeur l et épaisseur e), ce qui est difficile considérant la forte variabilité inter-individus. Nous nous sommes appuyés sur différentes sources comme [Kamina and Martinet, 2007] ou [Schuenke et al., 2010].

TABLE 7.1. Caractéristiques anatomiques de la vessie.

Forme	<i>Vide</i>	Aplatie d'avant en arrière
	<i>Pleine</i>	Soulèvement paroi postérieure, forme ovoïdale
Dimensions ($L \times l \times e$)	6 cm $\times$ 5 cm $\times$ 0.3 cm	
Paroi	<i>Interne</i>	3 orifices : 2 uretères, 1 urètre
	<i>Externe</i>	Répond au corps de l'utérus et repose sur le vagin Partie inférieure en contact avec le releveur de l'anus
Soutien	Liaisons ligamentaires avec le pubis et la symphyse pubienne	

TABLE 7.2. Caractéristiques anatomiques de l'utérus (corps et col).

Forme	<i>Nullipare</i>	Cône tronqué de forme concave	
	<i>Multipare</i>	Cône tronqué de forme convexe	
Dimensions ($L \times l \times e$)	<i>Nullipare</i>	Corps	3 cm $\times$ 4 cm $\times$ 2 cm
		Col	2 cm $\times$ 2.5 cm $\times$ -
	<i>Multipare</i>	Corps	5.25 cm $\times$ 5 cm $\times$ 3 cm
		Col	2.25 cm $\times$ 3 cm $\times$ -
Consistance	Lisse, dur au toucher		
Paroi	<i>Interne</i>	Parois antérieure et postérieure accolées	
	<i>Externe</i>	Corps	Entre la vessie et le côlon
		Col	Lié au vagin
Soutien	<i>Par le bassin</i>	Trois paires de ligaments	
	<i>Par le périnée</i>	Repose dessus par le vagin	

TABLE 7.3. Caractéristiques anatomiques du vagin.

Forme	Conduit quasi-rectiligne aplatie d'avant en arrière		
Dimensions ($L \times l \times e$)	7 cm $\times$ 3 cm $\times$ 3.5 cm		
Paroi	<i>Interne</i>	Parois antérieure et postérieure accolée, plis	
	<i>Externe</i>	S'insère dans col utérin, en arrière de la vessie	

TABLE 7.4. Caractéristiques anatomiques du rectum (segments pelvien et périanal).

Forme	Allongé et coudé, au bout du tube digestif	
Dimensions (L×l×e)	<i>Segment pelvien</i>	11 cm × 3 cm × 0.5 cm
	<i>Segment périanal</i>	2.5 cm × 2.3 cm × 0.1 cm
Paroi	<i>Interne</i>	Parois très extensibles Replis muqueux relatifs à la distension
	<i>Externe</i>	Surface parcourue de stries longitudinales Accolé à l'utérus et uni au plancher pelvien

B Détails de notions mathématiques

B.1 Continuités paramétrique et géométrique

La notion de continuité est liée au critère subjectif de « lissage ». Les continuités paramétrique et géométrique seront illustrées dans ce paragraphe.

Continuité paramétrique

Soient C_1 et C_2 deux courbes de paramètres respectifs u et v appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Elles sont raccordées en R , tel que $C_1(1) = C_2(0) = R$. Les paramétrisations associées à ces courbes permettent de définir une continuité d'ordre k (notée C^k) si les k dérivées sont égales au point de jonction. On obtient par exemple :

- une continuité C^0 en fixant : $C_1(1) = C_2(0)$;
- une continuité C^1 en fixant : $C_1(1) = C_2(0)$ et $C_1^{(1)}(1) = C_2^{(1)}(0)$;
- une continuité C^2 en fixant : $C_1(1) = C_2(0)$, $C_1^{(1)}(1) = C_2^{(1)}(0)$ et $C_1^{(2)}(1) = C_2^{(2)}(0)$.

Continuité géométrique

Cependant, dans certains cas ces critères ne sont ni nécessaires, ni suffisants pour caractériser le lissage d'une courbe, à moins qu'il existe une paramétrisation équivalente de C_1 créant $\tilde{C}_1$, telle que $\tilde{C}_1$ et C_2 soient de continuité C^k en R . Les courbes C_1 et C_2 sont alors dites de continuité géométrique G^k en R . Dans la pratique, ceci correspond à vérifier les relations suivantes, avec $\alpha \in \mathbb{R}^{+\star}$:

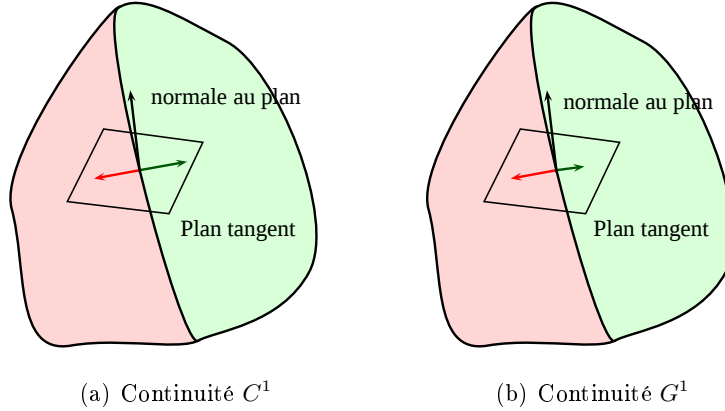


Figure 7.8. Différence entre les continuités C^1 et G^1 , présentant les mêmes directions mais avec des normes différentes.

- une continuité G^0 en fixant : $C_1(1) = C_2(0)$;
- une continuité G^1 en fixant : $C_1(1) = C_2(0)$ et $C_1^{(1)}(1) = \alpha C_2^{(1)}(0)$;
- une continuité G^2 en fixant : $C_1(1) = C_2(0)$, $C_1^{(1)}(1) = \alpha C_2^{(1)}(0)$ et $C_1^{(2)}(1) = \alpha C_2^{(2)}(0)$.

Pour les surfaces, le principe se définit dans les deux directions paramétriques. Par exemple, deux surfaces sont raccordées par une continuité G^1 si leurs plans tangents sont confondus (cf. figures 7.8(a) et 7.8(b)).

B.2 Calcul pratique des courbures principales d'une surface paramétrique

Soit S une surface de paramètres $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ au moins C^2 et évoluant dans $\mathbb{R}^3$. En tout point régulier M de S , l'existence d'un plan tangent $\mathcal{P}_T$ est garantie. Perpendiculairement à $\mathcal{P}_T$, un plan $\mathcal{P}_P$ est considéré. L'intersection de $\mathcal{P}_P$ et S crée une courbe, à laquelle est associée une valeur de courbure. La rotation de $\mathcal{P}_P$ permet de déterminer les courbures maximale et minimale, notées respectivement k_1 et k_2 . Les plans associés sont perpendiculaires entre eux, et leur intersection avec $\mathcal{P}_T$ définit les directions principales d_1 et d_2 (cf. figure 7.9).

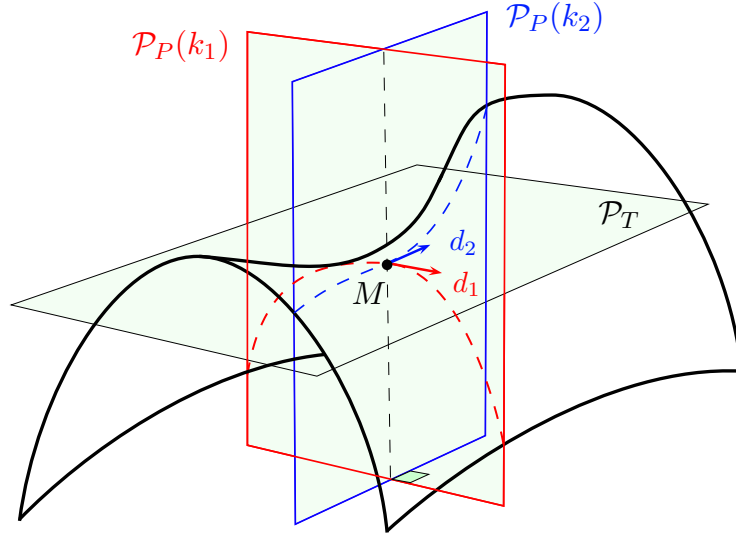


Figure 7.9. Plans perpendiculaires à $\mathcal{P}_T$ pour chaque courbure principale.

Les courbures principales correspondent aux valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten. Leur calcul en tout couple (u, v) commence par l'introduction des notations suivantes :

$$\begin{cases} E = \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \right\|^2, & F = \frac{\partial S}{\partial u} \frac{\partial S}{\partial v}, & G = \left\| \frac{\partial S}{\partial v} \right\|^2 \\ L = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} n(u, v), & M = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} n(u, v), & N = \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} n(u, v), \end{cases} \quad (7.1)$$

avec $n(u, v)$ la normale en $S(u, v)$, et $\frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial u}$. Les deux courbures principales sont racines du polynôme caractéristique suivant :

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + GL - 2FM)k + (LN - M^2) = 0, \quad (7.2)$$

avec $EG - F^2 > 0$. Les mesures généralement utilisées sont les courbures gaussienne K et moyenne H , définies par :

$$\begin{cases} K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \end{cases} \quad (7.3)$$

Le signe des courbures principales s'interprète d'un point de vue géométrique : un point elliptique correspond à $k_1 k_2 > 0$, un point hyperbolique à $k_1 k_2 < 0$, et un point parabolique à $k_1 k_2 = 0$.

B.3 Maillage et propriétés

Maillage conforme et non-conforme

Un maillage conforme est un maillage dans lequel les éléments sont alignés sans nœud pendant sur les arêtes (cf. figures 7.10(b) et 7.10(a)).

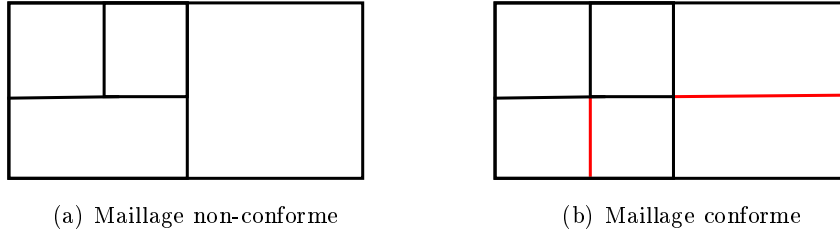


Figure 7.10. Conformité d'un maillage.

Maillage structuré et non-structuré

Un maillage dit structuré présente uniquement des éléments de type quadrangle/hexaèdre, repérés par une paire/un triplet d'indices.

A contrario, un maillage non-structuré est composé d'éléments de type triangle/tétraèdre ou quadrangle/hexaèdre, mais avec une topologie arbitraire. Le nombre de voisins de chaque maille est ainsi variable.

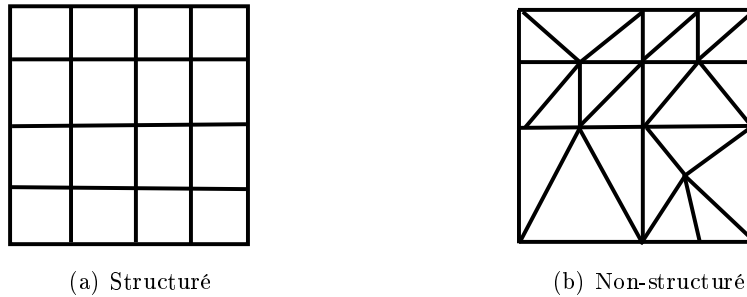
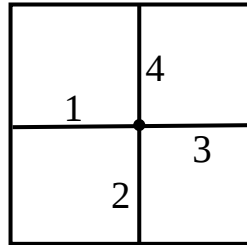


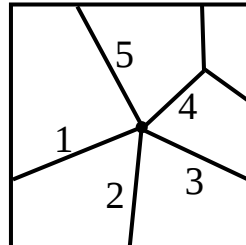
Figure 7.11. Structure d'un maillage.

Points ordinaires et extra-ordinaires

Pour un maillage non-structuré, un point est dit extra-ordinaire si sa valence (le nombre d'arêtes connectées à ce nœud) est différente de six. Pour un maillage structuré, la valence de ces points est différente de quatre (cf. figures 7.12(a) et 7.12(b)).



(a) Point ordinaire



(b) Point extra-ordinaire

Figure 7.12. Nœuds d'un maillage structuré et leur valence associée.

C Algorithmes

C.1 Amincissement homotopique

L'amincissement homotopique d'un objet 3D consiste à supprimer par itérations l'ensemble des bords d'un solide pour aboutir au squelette (cf. les travaux de [Bertrand, 1995]). La transformation doit être inversible et ne pas changer la topologie de la forme.

La technique consiste à éliminer les « points simples » (correspondant aux points qui, par leur suppression, ne modifie pas la topologie de la forme) qui ne sont pas des « points terminaux » (points permettant de conserver des informations jugées caractéristiques de la forme de l'objet).

L'algorithme est défini sur des grilles cubiques avec une six-connectivité. Les méthodes se différencient par les opérateurs de caractérisation des points simples non-terminaux.

C.2 Somme de Minkowski

Cette opération correspond à la combinaison de deux ensembles de points, polygones, ou polytopes, il s'applique donc dans toutes les dimensions. Les domaines d'applications sont nombreux (CAD, planification de trajectoire en robotique, morphologie mathématique, ...).

Soient P et Q deux ensembles de points de $\mathbb{R}^3$. La somme de Minkowski de ces deux ensembles est notée :

$$P \oplus Q = \{p + q | p \in P, q \in Q\} \quad (7.4)$$

Les propriétés de cette somme sont :

- $P \oplus \{o\} = P$, avec o l'origine ;
- l'associativité : $(P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$;
- la distributivité : $P \oplus (Q \cup R) = P \oplus Q \cup P \oplus R$;
- la commutativité : $P \oplus Q = Q \oplus P$;
- la conservation de la convexité : la somme de Minkowski d'un ensemble d'éléments convexes et un ensemble convexe.

Il existe de nombreuses variantes pour ce calcul. Nous pouvons citer par exemple les méthodes par décomposition : décomposition de P et Q en sous-polytopes convexes (cf. le paragraphe 4.4.1.1 du chapitre 4), somme de chaque sous-élément convexe de P avec chaque sous-élément convexe de Q , puis union des résultats élémentaires (cf. les travaux de [Varadhan and Manocha, 2004] et [Pavic and Kobbelt, 2008]). Une autre approche, davantage privilégiée en termes de coût de calculs, est basée sur la convolution (cf. les travaux de [Sampoli, 2005] et [Wein, 2006]).

Le calcul d'offsets avec la somme de Minkowski consiste à prendre comme ensemble Q un disque si le travail est en 2D, ou une sphère en 3D.

D Preuves de théorèmes

D.1 Preuve liée au théorème 3.3.1

Ce paragraphe présente la preuve du théorème 3.3.1 sur le calcul du pas de descente optimal concernant le positionnement de l'axe non-linéaire « au centre » d'un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ (cf. partie 3.3 du chapitre 3).

L'écriture de la fonctionnelle est allégée en omettant la paramétrisation $\mathcal{T}$ et le graphe $\mathcal{G}$. Nous partons de $f(Q - \alpha \nabla^Q)$, en utilisant la formulation 3.25 pour les gradients.

$$\begin{aligned}
f(Q - \alpha \nabla^Q) &= \underbrace{f_{E \rightarrow D}(Q - \alpha \nabla^Q)}_{(1)} + \underbrace{f_{D \rightarrow E}(Q - \alpha \nabla^Q)}_{(2)} \\
(1) &= \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r)(Q_i - \alpha \nabla_i^Q) - D_{t_r} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \left\| \underbrace{\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r)Q_i - D_{t_r}}_{\substack{E_r \\ E \rightarrow D}} - \alpha \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \right\|^2 \\
&= f_{E \rightarrow D}(Q) + \frac{\alpha^2}{M+1} \sum_{r=0}^M \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \right\|^2 - \frac{2\alpha}{M+1} \sum_{r=0}^M \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \bullet \underbrace{E_r}_{E \rightarrow D} \\
(2) &= \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| D_s - \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s})(Q_i - \alpha \nabla_i^Q) \right\|^2 \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \underbrace{D_s - \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s})Q_i}_{\substack{E_s \\ D \rightarrow E}} + \alpha \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q \right\|^2 \\
&= f_{D \rightarrow E}(Q) + \frac{\alpha^2}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_s) \nabla_i^Q \right\|^2 + \frac{2\alpha}{N+1} \sum_{s=0}^N \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q \bullet \underbrace{E_s}_{D \rightarrow E}
\end{aligned}$$

En combinant (1) et (2) puis en dérivant par α , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha}(Q - \alpha \nabla^Q) &= \frac{2\alpha}{M+1} \sum_{r=0}^M \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \right\|^2 - \frac{2}{M+1} \sum_{r=0}^M \left(\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \right) \bullet \underbrace{E_r}_{E \rightarrow D} \\
&\quad + \frac{2\alpha}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_s) \nabla_i^Q \right\|^2 + \frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N \left(\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q \right) \bullet \underbrace{E_s}_{D \rightarrow E}
\end{aligned}$$

L'annulation de la dérivée nous donne finalement :

$$\alpha = \frac{\frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \left(\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \right) \bullet_{E \rightarrow D} E_r - \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left(\sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q \right) \bullet_{D \rightarrow E} E_s}{\frac{1}{M+1} \sum_{r=0}^M \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \right\|^2 + \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q \right\|^2}$$

En posant :

$$\begin{cases} h_r = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_r) \nabla_i^Q \\ g_s = \sum_{i=0}^m B_{i,m}(t_{D_s}) \nabla_i^Q, \end{cases}$$

on retrouve bien la valeur du pas optimal introduit au théorème 3.3.1. Toutefois, l'annulation du gradient garantit qu'un extremum est déterminé, mais pas forcément un minimum. Cependant, un minimum est tout de même atteint puisque la dérivée seconde par rapport à α est positive si toutes les composantes du gradient ne sont pas nulles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(Q) = \frac{2}{M+1} \sum_{r=0}^M \|h_r\|^2 + \frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N \|g_s\|^2 > 0$$

CQFD

D.2 Preuve liée au théorème 3.4.1

L'écriture de la fonctionnelle est allégée en omettant les paramétrisations $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ et le graphe $\mathcal{G}$. On notera $m' = m + k - 1$ et $n' = n + l - 2$ les dimensions du réseau de contrôle de S . Nous partons de $f(P - \alpha \nabla^P)$, en utilisant la formulation 3.47 pour les gradients.

$$\begin{aligned} f(P - \alpha \nabla^P) &= \underbrace{f}_{E \rightarrow D}(P - \alpha \nabla^P) + \underbrace{f}_{D \rightarrow E}(P - \alpha \nabla^P) \\ (1) &= \frac{1}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \left\| \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) (P_{i,j} - \alpha \nabla_{i,j}^P) - D_{(u_q, v_r)} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \left\| \underbrace{S(u_q, v_r) - D_{(u_q, v_r)}}_{\substack{E_{q,r} \\ E \rightarrow D}} - \alpha \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \right\|^2 \\ &= \underbrace{f}_{E \rightarrow D}(P) + \frac{\alpha^2}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \left\| \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \right\|^2 \\ &\quad - \frac{2\alpha}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \bullet_{E \rightarrow D} E_{q,r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) &= \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|D_s - \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) (P_{i,j} - \alpha \nabla_{i,j}^P)\|^2 \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \underbrace{D_s - S(u_{D_s}, v_{D_s})}_{\substack{E_s \\ D \rightarrow E}} + \alpha \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \right\|^2 \\
&= \underset{D \rightarrow E}{f}(P) + \frac{\alpha^2}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \right\|^2 \\
&\quad + \frac{2\alpha}{N+1} \sum_{s=0}^N \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \bullet \underset{D \rightarrow E}{E_s}
\end{aligned}$$

En combinant (1) et (2) puis en dérivant par α , on aboutit finalement à :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \alpha}(P - \alpha \nabla^P) &= \frac{2\alpha}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \left\| \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \right\|^2 \\
&\quad - \frac{2}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \left\| \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \right\| \bullet \underset{E \rightarrow D}{E_{q,r}} \\
&\quad + \frac{2\alpha}{N+1} \sum_{s=0}^N \left\| \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \right\|^2 \\
&\quad + \frac{2}{N+1} \sum_{s=0}^N \left(\sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \right) \bullet \underset{D \rightarrow E}{E_s}
\end{aligned}$$

L'annulation de la dérivée nous donne finalement :

$$\alpha = \frac{\frac{1}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} h_{q,r} \bullet \underset{E \rightarrow D}{E_{q,r}} - \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N g_s \bullet \underset{D \rightarrow E}{E_s}}{\frac{1}{(M_1+1)(M_2+1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \|h_{q,r}\|^2 + \frac{1}{N+1} \sum_{s=0}^N \|g_s\|^2},$$

avec :

$$\begin{cases} h_{q,r} = \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_q, v_r) N_{j,l}(u_q, v_r) \nabla_{i,j}^P \\ g_s = \sum_{i=0}^{m'} \sum_{j=0}^{n'} N_{i,k}(u_{D_s}, v_{D_s}) N_{j,l}(u_{D_s}, v_{D_s}) \nabla_{i,j}^P \end{cases}$$

On retrouve bien la valeur du pas optimal introduit au théorème 3.4.1. En outre, afin de vérifier que nous atteignons bien un minimum et non un maximum, on peut facilement vérifier que la dérivée seconde par rapport à α est bien positive si toutes les composantes

du gradient ne sont pas nulles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(P) = \frac{2}{(M_1 + 1)(M_2 + 1)} \sum_{q=0}^{M_1} \sum_{r=0}^{M_2} \|h_{q,r}\|^2 + \frac{2}{N + 1} \sum_{s=0}^N \|g_s\|^2 > 0$$

CQFD

GLOSSAIRE MÉDICAL

Autologue Se dit d'un tissu ou de cellules provenant de son propre organisme. 20, 179

Cathéter Dispositif médical consistant en un tube, de largeur et de souplesse variables, fabriqué en différentes matières selon les modèles ou les usages. Il est inséré dans le corps humain pour permettre le drainage ou l'infusion de liquides, ou encore un accès pour d'autres dispositifs médicaux. 16, 179

Dyschésie Rétention des selles par altération des réflexes de l'exonération normale. 21, 179

Dyspareunie Douleur de nature et d'intensité variables ressentie chez la femme lors des rapports sexuels. 21, 179

Endoscopie Exploration visuelle d'une cavité par l'intermédiaire d'un tube optique, permettant d'effectuer des interventions chirurgicales. 16, 179

Fascia Tissu conjonctif recouvrant les organes uro-génitaux. 179

Fibrose Destruction substantielle des tissus ou inflammation à un endroit où les tissus ne se régénèrent pas. 21, 179

Hystéroscopie Procédure de diagnostic médical en vue d'explorer l'intérieur de la cavité utérine. 17, 179

Hétérologue Se dit d'un tissu ou de cellules provenant d'un organisme différent du sien. 20, 179

Intraveineuse Se dit de l'injection d'un liquide dans une veine en général à l'aide d'une seringue et d'une aiguille. Elle est notamment utilisée lorsque l'effet de la substance administrée doit être rapide. 16, 179

Lavage péritonéal Examen médical visant à déceler la présence microscopique de sang, de bile, de selles ou de fibres végétales dans la cavité péritonéale. 16, 179

Miction Action désignant l'élimination d'urine par la vidange de la vessie. 20, 179

Multipare Se dit d'une femme qui a accouché plusieurs fois ; par opposition à primipare, nullipare. 169, 179

Nullipare Se dit d'une femme qui n'a jamais accouché. 169, 179

Parturition L'action de mettre bas chez les mammifères. 20, 179

Ptôse Dégradation de l'appareil de suspension ou défaut des éléments de soutien de l'organe. 20, 179

BIBLIOGRAPHIE

- [Aart and Laarhoven, 1987] Aart, E. and Laarhoven, V. P. (1987). *Simulated Annealing : a Review of Theory and Applications*. Kluwer Academic.
- [Alexa et al., 2001] Alexa, M., Behr, J., Cohen-Or, D., Fleishman, S., Levin, D., and Silva, C. T. (2001). Point set surfaces : a survey. In Ertl, T., Joy, K. I., and Varshney, A., editors, *Proceedings of the conference on Visualization '01*, pages 21–28. IEEE Computer Society.
- [Alhanaty and Bercovier, 2001] Alhanaty, M. and Bercovier, M. (2001). Curve and surface fitting and design by optimal control methods. In *Computer-Aided Design*, volume 33, pages 167 – 182.
- [Allègre, 2006] Allègre, R. (2006). *Contributions à l'introduction de flexibilité dans la reconstruction et l'édition de modèles 3D*. PhD thesis, Université Claude Bernard Lyon 1.
- [Amenta et al., 2000] Amenta, N., Choi, S., Dey, T. K., and Leekha, N. (2000). A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction. In *Proceedings of the 16th annual symposium on Computational Geometry*, SCG '00, pages 213–222, New York, NY, USA. ACM.
- [Amenta et al., 2001] Amenta, N., Choi, S., and Kolluri, R. K. (2001). The power crust, unions of balls, and the medial axis transform. In *Computational Geometry*, volume 19, pages 127–153.
- [Attali, 1995] Attali, D. (1995). *Squelettes et graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- [Baerentzen, 2001] Baerentzen, J. (2001). On the Implementation of Fast Marching Methods for 3D Lattices. Technical report, Technical University of Denmark.
- [Bay et al., 2011] Bay, T., Chambelland, J.-C., Raffin, R., Daniel, M., and Bellemare, M.-E. (2011). Geometric modeling of pelvic organs. In IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, editor, *33rd Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 4329–4332, Boston, USA.
- [Bay et al., 2012a] Bay, T., Chen, Z.-W., Raffin, R., Daniel, M., Joli, P., Feng, Z.-Q., and Bellemare, M.-E. (2012a). Geometric modeling of pelvic organs with thickness. In Baskurt, A. M. and Sitnik, R., editors, *Three-Dimensional Image Processing (3DIP) and Applications II*, volume 8290, pages 82900I–1–82900I–14, Burlingame, USA.

- [Bay et al., 2012b] Bay, T., Raffin, R., and Daniel, M. (2012b). Discrete geometric modeling of thick pelvic organs with a medial axis. In Springer, editor, *International Conference on Computer Vision and Graphics*, volume 7594 of *ICCVG 2012, Lecture Notes in Computer Science*, pages 14–21, Warsaw, Poland.
- [Bay et al., 2012c] Bay, T., Raffin, R., and Daniel, M. (2012c). Geometric modeling of pelvic organs with a discrete offset approach. In *20th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision*, WSCG'2012, pages 27–30, Plzen, Czech Republic.
- [Berkley et al., 2004] Berkley, J., Turkiyyah, G., Berg, D., Ganter, M., and Weghorst, S. (2004). Real-time finite element modeling for surgery simulation : An application to virtual suturing. In *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, volume 10, pages 314–325.
- [Bertrand, 1995] Bertrand, G. (1995). A parallel thinning algorithm for medial surfaces. In *Pattern Recognition Letters*, volume 16, pages 979 – 986.
- [Bézier, 1986] Bézier, P. (1986). *Mathématiques et CAO 4 : Courbes et Surfaces*. Hermès.
- [Blum, 1967] Blum, H. (1967). A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape. In Wathen-Dunn, W., editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380, Cambridge. MIT Press.
- [Bolitho et al., 2009] Bolitho, M., Kazhdan, M. M., Burns, R. C., and Hoppe, H. (2009). Parallel poisson surface reconstruction. In Bebis, G., Boyle, R. D., Parvin, B., Koracin, D., Kuno, Y., Wang, J., Pajarola, R., Lindstrom, P., Hinkenjann, A., Encarnação, M. L., Silva, C. T., and Coming, D. S., editors, *International Symposium on Visual Computing*, volume 5875 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 678–689. Springer.
- [Bouix and Siddiqi, 2000] Bouix, S. and Siddiqi, K. (2000). Divergence-based medial surfaces. In *Proceedings of the 6th European Conference on Computer Vision-Part I, ECCV '00*, pages 603–618, London, UK, UK. Springer-Verlag.
- [Bousquet, 1997] Bousquet, J. (1997). *Détection et élimination d'irrégularités sur les surfaces manipulées en CAO*. PhD thesis, Université de Nantes.
- [Breen et al., 1998] Breen, D. E., Mauch, S., and Whitaker, R. T. (1998). 3d scan conversion of csg models into distance volumes. In *Symposium on Volume Visualization*, ACM SIGGRAPH, pages 7–14.
- [Carr et al., 2001] Carr, J. C., Beatson, R. K., Cherrie, J. B., Mitchell, T. J., Fright, W. R., Mac Callum, B. C., and Evans, T. R. (2001). Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions. In *SIGGRAPH '01 : Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 67–76, New York, NY, USA. ACM.
- [Cazals and Giesen, 2004] Cazals, F. and Giesen, J. (2004). Delaunay triangulation based surface reconstruction : ideas and algorithms. Technical Report RR-5393, INRIA.

- [Chambelland, 2006] Chambelland, J.-C. (2006). *Reconstruction de surfaces à pôles pour la conversion et la simplification de modèles B-Rep*. PhD thesis, Université de la Méditerranée.
- [Chambelland and Daniel, 2006] Chambelland, J.-C. and Daniel, M. (2006). An iterative method for rational pole curve fitting. In *WSCG 2006 conference proceedings*, pages 39–46, Plzen, République Tchèque.
- [Chen et al., 2005] Chen, Y., Wang, H., Rosen, D. W., and Rossignac, J. (2005). Filleting and rounding using a point-based method. In *ASME Conference Proceedings*, volume 2005, pages 533–542. ASME.
- [Chevalier et al., 2005] Chevalier, L., Jaillet, F., and Baskurt, A. (2005). Segmentation et modélisation 3D par un ensemble de superellipsoïdes. Technical Report RR-LIRIS-2005-012, LIRIS UMR 5205 CNRS/INSA de Lyon/Université Claude Bernard Lyon 1/Université Lumière Lyon 2/École Centrale de Lyon.
- [Choi et al., 2009] Choi, K.-S., Soo, S., and Chung, F.-L. (2009). A virtual training simulator for learning cataract surgery with phacoemulsification. In *Computers in Biology and Medicine*, volume 39, pages 1020 – 1031.
- [Choi et al., 2004] Choi, K.-S., Sun, H., and Heng, P.-A. (2004). An efficient and scalable deformable model for virtual reality-based medical applications. In *Artificial Intelligence in Medicine*, volume 32, pages 51–69.
- [Daniel, 1989] Daniel, M. (1989). *Modélisation de courbes et surfaces par des B-splines. Application à la conception et à la visualisation de formes*. PhD thesis, Université de Nantes, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique.
- [de Boor, 1978] de Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag.
- [Delingette, 2006] Delingette, H. (2006). *Modélisation de structures déformables*. Habilitation à diriger des recherches, Université Nice Sophia-Antipolis.
- [Desbrun et al., 1999] Desbrun, M., Schröder, P., and Barr, A. (1999). Interactive animation of structured deformable objects. In *Graphics Interface*, pages 1–8. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [Design Mentor, 2003] Design Mentor (2003). <http://www.cs.mtu.edu/~shene/NSF-2/DM2-BETA/>.
- [Dey and 0002, 2005] Dey, T. K. and 0002, J. S. (2005). An adaptive MLS surface for reconstruction with guarantees. In Desbrun, M. and Pottmann, H., editors, *Symposium on Geometry Processing*, volume 255 of *ACM International Conference Proceeding Series*, pages 43–52. Eurographics Association.
- [Drake et al., 2004] Drake, R., Vogl, A. W., Mitchell, A. W. M., and Mitchell, A. (2004). *Gray’s Anatomy for Students : with StudentConsult Access*. Churchill Livingstone.
- [Duplex, 2011] Duplex, B. (2011). *Transfert de déformations géométriques lors des couplages de codes de calcul*. PhD thesis, Université de Aix-Marseille.

- [Edelsbrunner, 2003] Edelsbrunner, H. (2003). *Discrete and Computational Geometry - The Goodman-Pollack Festschrift*, chapter Surface reconstruction by wrapping finite sets in space, pages 379–404. Springer-Verlag.
- [Farin, 2001] Farin, G. (2001). *Curves and Surfaces for CAGD : A Practical Guide*. The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling. Elsevier Science.
- [Farouki, 1986] Farouki, R. (1986). The approximation of non-degenerate offset surfaces. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 3, pages 15 – 43.
- [Farouki and Sakkalis, 1990] Farouki, R. and Sakkalis, T. (1990). Pythagorean hodographs. In *IBM Journal of Research and Development*, volume 34, pages 736–752.
- [Faux and Pratt, 1979] Faux, I. D. and Pratt, M. J. (1979). Computational Geometry for Design and Manufacture. In Wiley & Sons, editor, *IEEE Computer Graphics and Applications*. Ellis-Horwood.
- [Foley and Nielson, 1989] Foley, T. A. and Nielson, G. M. (1989). Knot selection for parametric spline interpolation. In Lyche, T. and Schumaker, L. L., editors, *Mathematical methods in Computer Aided Geometric Design*, chapter Knot selection for parametric spline interpolation, pages 261–272. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA.
- [Friden et al., 1990] Friden, C., Hertz, A., and de Werra, D. (1990). Tabaris : An exact algorithm based on tabu search for finding a maximum independent set in a graph. In *Computers & Operations Research*, volume 17, pages 437–445.
- [García et al., 2008] García, M., Robles, O. D., Pastor, L., and Rodríguez, A. (2008). MSRS : a fast linear solver for the real-time simulation of deformable objects. In *Computers & Graphics*, volume 32, pages 293–306.
- [Goldenthal and Bercovier, 2004] Goldenthal, R. and Bercovier, M. (2004). Spline curve approximation and design by optimal control over the knots. In *Computing - Geometric modelling dagstuhl 2002*, volume 72, pages 53–64, New York, NY, USA. Springer-Verlag New York, Inc.
- [Greiner, 1994] Greiner, G. (1994). Variational Design and Fairing of Spline Surfaces. In *Computer Graphics Forum*, volume 13, pages 143–154.
- [Guy and Debunne, 2004] Guy, S. and Debunne, G. (2004). Monte-Carlo collision detection. Rapport de recherche RR-5136, INRIA.
- [Hadenfeld, 1995] Hadenfeld, J. (1995). Local energy fairing of b-spline surfaces. In Dæhlen, M., Lyche, T., and Schumaker, L., editors, *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 203–212. Vanderbilt University Press.
- [Hagen et al., 1993] Hagen, H., Hahmann, S., and Bonneau, G.-P. (1993). Variational Surface Design and Surface Interrogation. In *Computer Graphics Forum*, volume 12, pages 447–459.

- [Hauser et al., 2003] Hauser, K. K., Shen, C., and O'Brien, J. F. (2003). Interactive deformation using modal analysis with constraints. In *Graphics Interface*, pages 247–256.
- [Heimann and Delingette, 2011] Heimann, T. and Delingette, H. (2011). Model-based segmentation. In Deserno, T. M., editor, *Biomedical Image Processing*. Springer.
- [Hoppe et al., 1992] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. A., and Stuetzle, W. (1992). Surface reconstruction from unorganized points. In Thomas, J. J., editor, *Computer Graphics (Siggraph'92 proceedings)*, pages 71–78. ACM.
- [Hornung and Kobbelt, 2006] Hornung, A. and Kobbelt, L. (2006). Robust reconstruction of watertight 3D models from non-uniformly sampled point clouds without normal information. In Sheffer, A. and Polthier, K., editors, *Symposium on geometry processing*, volume 256 of *ACM International Conference Proceeding Series*, pages 41–50. Eurographics Association.
- [Hoschek, 1988] Hoschek, J. (1988). Intrinsic parametrization for approximation. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 5, pages 27–31. Elsevier Science Publishers B. V.
- [Hoschek et al., 1989] Hoschek, J., Schneider, F.-J., and Wassum, P. (1989). Optimal approximate conversion of spline surfaces. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 6, pages 293–306. Elsevier Science Publishers B. V.
- [Jaillet et al., 1997] Jaillet, F., Shariat, B., and Vandorpe, D. (1997). Periodic b-spline surface skinning of anatomic shapes. In *9th Canadian Conference on Computational Geometry*, pages 119–210.
- [Jaillet et al., 1998] Jaillet, F., Shariat, B., and Vandorpe, D. (1998). Deformable object reconstruction with particle systems. In *Computers & Graphics*, volume 22, pages 189 – 194.
- [Jolliffe, 2002] Jolliffe, I. T. (2002). *Principal Component Analysis*. Springer, second edition.
- [Ju et al., 2002] Ju, T., Losasso, F., Schaefer, S., and Warren, J. D. (2002). Dual contouring of hermite data. In *ACM Transactions on Graphics*, volume 21, pages 339–346.
- [Kamina and Martinet, 2007] Kamina, P. and Martinet, C. (2007). *Anatomie clinique : thorax, abdomen*. Anatomie clinique. Maloine.
- [Kazhdan et al., 2006] Kazhdan, M., Bolitho, M., and Hoppe, H. (2006). Poisson surface reconstruction. In *Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing*, SGP '06, pages 61–70, Aire-la-Ville, Switzerland. Eurographics Association.
- [Kim et al., 1993] Kim, M.-S., Park, E.-J., and Lim, S.-B. (1993). Approximation of variable-radius offset curves and its application to Bézier brush-stroke design. In *Computer-Aided Design*, volume 25, pages 684 – 698.
- [Kim and Yang, 2005] Kim, S.-J. and Yang, M.-Y. (2005). Triangular mesh offset for generalized cutter. In *Computer-Aided Design*, volume 37, pages 999–1014.

- [Kimmel et al., 1995] Kimmel, R., Shaked, D., Kiryati, N., and Bruckstein, A. M. (1995). Skeletonization via distance maps and level sets. In *Computer Vision and Image Understanding*, volume 62, pages 382 – 391.
- [Kulczycka and Nachman, 2002] Kulczycka, M. A. and Nachman, L. J. (2002). Qualitative and quantitative comparisons of B-spline offset surface approximation methods. In *Computer-Aided Design*, volume 34, pages 19–26. Elsevier Science Publishers B. V.
- [Kumar et al., 2002] Kumar, G. V. V. R., Shastry, K. G., and Prakash, B. G. (2002). Computing non-self-intersecting offsets of nurbs surfaces. In *Computer-Aided Design*, volume 34, pages 209–228.
- [La Greca, 2005] La Greca, R. (2005). *Approche déclarative de la modélisation de surfaces*. PhD thesis, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II.
- [Lartigue et al., 2001] Lartigue, C., Thiebaut, F., and Maekawa, T. (2001). Cnc tool path in terms of b-spline curves. In *Computer-Aided Design*, volume 33, pages 307 – 319.
- [Lee, 1989] Lee, E. (1989). Choosing nodes in parametric curve interpolation. In *Computer-Aided Design*, volume 21, pages 363 – 370.
- [Lefohn et al., 2003] Lefohn, A. E., Kniss, J. M., Hansen, C. D., and Whitaker, R. T. (2003). Interactive deformation and visualization of level-set surfaces using graphics hardware. In Turk, G., van Wijk, J. J., and II, R. J. M., editors, *IEEE Visualization*, pages 75–82. IEEE Computer Society.
- [Levin, 2003] Levin, D. (2003). *Geometric Modeling for Scientific Visualization*, chapter Mesh-independent surface interpolation, pages 37–49. Springer-Verlag.
- [Liu et al., 2001] Liu, A., Kaufmann, C., and Ritchie, T. (2001). A computer-based simulator for diagnostic peritoneal lavage. In Westwood, J., Hoffman, H., Robb, R., and Stredney, D., editors, *Studies in Health Technology and Informatics*, volume 81, pages 279–285, Bethesda, USA. IOS Press and Ohmsha.
- [Liu and Wang, 2009] Liu, S. and Wang, C. C. L. (2009). Duplex fitting of zero-level and offset surfaces. In *Computer-Aided Design*, volume 41, pages 268–281.
- [Liu and Wang, 2011] Liu, S. and Wang, C. C. L. (2011). Fast intersection-free offset surface generation from freeform models with triangular meshes. In *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, volume 8, pages 347–360.
- [Lorensen and Cline, 1987] Lorensen, W. E. and Cline, H. E. (1987). Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. In Stone, M. C., editor, *SIGGRAPH '87 : Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 163–169. ACM.
- [Lozano-Pérez and Wesley, 1979] Lozano-Pérez, T. and Wesley, M. A. (1979). An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. In *Communications of the ACM*, volume 22, pages 560–570.

- [Maekawa, 1999] Maekawa, T. (1999). An overview of offset curves and surfaces. In *Computer-Aided Design*, volume 31, pages 165–173.
- [Maekawa et al., 1998] Maekawa, T., Patrikalakis, N. M., Sakkalis, T., and Yu, G. (1998). Analysis and applications of pipe surfaces. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 15, pages 437–458.
- [Marciniak, 1991] Marciniak, K. (1991). *Geometric modelling for numerically controlled machining*. Oxford science publications. Oxford University Press.
- [Mesit et al., 2007] Mesit, J., Guha, R. K., and Chaudhry, S. (2007). 3D Soft Body Simulation Using Mass-spring System with Internal Pressure Force and Simplified Implicit Integration. In *Journal of Computers*, volume 2, pages 34–43.
- [Michalewicz, 1996] Michalewicz, Z. (1996). *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 3rd edition.
- [Montagnat, 1999] Montagnat, J. (1999). *Modèles déformables pour la segmentation et la modélisation d’images médicales 3D et 4D*. PhD thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis - INRIA.
- [Montagnat et al., 2001] Montagnat, J., Delingette, H., and Ayache, N. (2001). A review of deformable surfaces : topology, geometry and deformation. In *Image and Vision Computing*, volume 19, pages 1023 – 1040.
- [Müller et al., 2004] Müller, M., Keiser, R., Nealen, A., Pauly, M., Gross, M., and Alexa, M. (2004). Point based animation of elastic, plastic and melting objects. In *Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, SCA ’04, pages 141–151, Aire-la-Ville, Switzerland. Eurographics Association.
- [Müller et al., 2005] Müller, M., Heidelberger, B., Teschner, M., and Gross, M. H. (2005). Meshless deformations based on shape matching. In *ACM Transactions on Graphics*, volume 24, pages 471–478.
- [Nealen, 2004] Nealen, A. (2004). An as-short-as-possible introduction to the least squares, weighted least squares and moving least squares methods for scattered data approximation and interpolation. Technical report, TU Darmstadt.
- [Nealen et al., 2006] Nealen, A., Müller, M., Keiser, R., Boxerman, E., and Carlson, M. (2006). Physically based deformable models in computer graphics. In *Computer Graphics Forum*, volume 25, pages 809–836.
- [Niroomandi et al., 2008] Niroomandi, S., Alfaro, I., Cueto, E., and Chinesta, F. (2008). Real-time deformable models of non-linear tissues by model reduction techniques. In *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, volume 91, pages 223–231.
- [Ohtake et al., 2003] Ohtake, Y., Belyaev, A., and Seidel, H.-P. (2003). A multi-scale approach to 3D scattered data interpolation with compactly supported basis functions. In *SMI ’03 : Proceedings of the Shape Modeling International 2003*, pages 153–161, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.

- [Ohtake et al., 2005] Ohtake, Y., Belyaev, A., and Seidel, H.-P. (2005). 3d scattered data interpolation and approximation with multilevel compactly supported rbfs. In *Graphical Models*, volume 67, pages 150 – 165.
- [Ohtake et al., 2006] Ohtake, Y., Belyaev, A., and Seidel, H.-P. (2006). Sparse surface reconstruction with adaptive partition of unity and radial basis functions. In *Graphical Models*, volume 68, pages 15–24.
- [Park, 2005] Park, S. C. (2005). Hollowing objects with uniform wall thickness. In *Computer-Aided Design*, volume 37, pages 451 – 460.
- [Patete et al., 2012] Patete, P., Iacono, M. I., Spadea, M. F., Trecate, G., Vergnaghi, D., Mainardi, L. T., and Baroni, G. (2012). A multi-tissue mass-spring model for computer assisted breast surgery. In *Medical Engineering & Physics*. In press.
- [Patrikalakis, 2002] Patrikalakis, N. M. (2002). *Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing*. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA.
- [Patrikalakis and Bardis, 1991] Patrikalakis, N. M. and Bardis, L. (1991). Localization of rational b-spline surfaces. In *Engineering with Computers*, volume 7, pages 237–252. Springer London. 10.1007/BF01206365.
- [Pavic and Kobbelt, 2008] Pavic, D. and Kobbelt, L. (2008). High-resolution volumetric computation of offset surfaces with feature preservation. In *Computer Graphics Forum*, volume 27, pages 165–174.
- [Pekerman et al., 2008] Pekerman, D., Elber, G., and Kim, M.-S. (2008). Self-intersection detection and elimination in freeform curves and surfaces. In *Computer-Aided Design*, volume 40, pages 150–159.
- [Picinbono et al., 2002] Picinbono, G., Lombardo, J.-C., Delingette, H., and Ayache, N. (2002). Improving realism of a surgery simulator : linear anisotropic elasticity, complex interactions and force extrapolation. In *Journal of Visualization and Computer Animation*, volume 13, pages 147–167.
- [Piegl and Tiller, 1997] Piegl, L. and Tiller, W. (1997). *The NURBS book (2nd ed.)*. Springer-Verlag New York, Inc.
- [Pottmann, 1995] Pottmann, H. (1995). Rational curves and surfaces with rational offsets. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 12, pages 175–192.
- [Provot, 1996] Provot, X. (1996). Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behavior. In *Graphics Interface*, pages 147–154.
- [Qu and Stucker, 2003] Qu, X. and Stucker, B. (2003). *Rapid Prototyping Journal*, volume 9, chapter A 3D surface offset method for STL-format models, pages 133–141. Harry Colson.
- [Ramirez et al., 2006] Ramirez, F., Day, A., and Laycock, S. (2006). Collision detection for deformable objects using octrees. In *EG UK Theory and Practice of Computer Graphics*, pages 115–122.

- [Randrianarivony and Brunnet, 2002] Randrianarivony, M. and Brunnet, G. (2002). Approximation by NURBS curves with free knots. In *Vision, Modeling and Visualization*, pages 195–201.
- [Remy and Thiel, 2000] Remy, E. and Thiel, E. (2000). Computing 3d medial axis for chamfer distances. In Borgefors, G., Nyström, I., and di Baja, G. S., editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1953 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 418–430. Springer.
- [Rogers and Satterfield, 1982] Rogers, D. and Satterfield, S. (1982). Dynamic B-splines surfaces. In *Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design IV*, pages 189–196.
- [Rohmfeld, 1998] Rohmfeld, R. (1998). Igb-offset for plane curves—loop removal by scanning of interval sequences. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 15, pages 339 – 375.
- [Sampoli, 2005] Sampoli, M. L. (2005). Computing the convolution and the Minkowski sum of surfaces. In *Proceedings of the 21st spring conference on Computer graphics*, SCCG '05, pages 111–117, New York, NY, USA. ACM.
- [Satava, 1996] Satava, R. (1996). Medical virtual reality : the current status of the future. In Sieburg, H., Weghorst, S., and Morgan, K., editors, *Medecine Meets Virtual Reality : Health Care in the Information Age*, volume 29, pages 100–106. IOS Press and Ohmsha.
- [Saux and Daniel, 2003] Saux, E. and Daniel, M. (2003). An improved Hoschek intrinsic parametrization. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 20, pages 513–521.
- [Schoenberg and Whitney, 1949] Schoenberg, I. J. and Whitney, A. (1949). On Pólya frequency functions III. In *Transactions of the American Mathematical Society*, volume 74, pages 246–259.
- [Schuenke et al., 2010] Schuenke, M., Schulte, E., Schumacher, U., Ross, L., Lamperti, E., Voll, M., and Wesker, K. (2010). *Neck and Internal Organs (THIEME Atlas of Anatomy)*, volume 20, chapter 2, page 237. Thieme.
- [Schwartz et al., 2005] Schwartz, J.-M., Denninger, M., Rancourt, D., Moisan, C., and Laurendeau, D. (2005). Modelling liver tissue properties using a non-linear visco-elastic model for surgery simulation. In *Medical Image Analysis*, volume 9, pages 103–112.
- [Sederberg, 2011] Sederberg, T. W. (2011). *Computer Aided Geometric Design - Course Notes*. Self-published.
- [Sela et al., 2007] Sela, G., Subag, J., Lindblad, A., Albocher, D., Schein, S., and Elber, G. (2007). Real-time haptic incision simulation using FEM-based discontinuous free-form deformation. In *Computer-Aided Design*, volume 39, pages 685–693.
- [Seong et al., 2006] Seong, J.-K., Elber, G., and Kim, M.-S. (2006). Trimming local and global self-intersections in offset curves/surfaces using distance maps. In *Computer-Aided Design*, volume 38, pages 183–193.

- [Sermesant et al., 2004] Sermesant, M., Rhode, K., Anjorin, A., Hegde, S., Sanchez-Ortiz, G., Rueckert, D., Lambiase, P., Bucknall, C., Hill, D., and Razavi, R. (2004). Simulation of the electromechanical activity of the heart using xmr interventional imaging. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'04)*, volume 3217 of *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, pages 786–794. Springer.
- [Sethian, 1999] Sethian, J. (1999). *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Number 3. Cambridge University Press.
- [Sharf et al., 2006] Sharf, A., Lewiner, T., Shamir, A., Kobbelt, L., and Cohen-Or, D. (2006). Competing fronts for coarse-to-fine surface reconstruction. In *Eurographics 2006 (Computer Graphics Forum)*, volume 25, pages 389–398, Vienna. Eurographics.
- [Shi et al., 2011] Shi, K.-L., Zhang, S., Zhang, H., Yong, J.-H., Sun, J.-G., and Paul, J.-C. (2011). G2 B-spline interpolation to a closed mesh. In *Computer-Aided Design*, volume 43, pages 145–160, Newton, MA, USA. Butterworth-Heinemann.
- [Shinya, 2005] Shinya, M. (2005). Theories for mass-spring simulation in computer graphics : Stability, costs and improvements. In *IEICE - Transactions on Information and Systems*, volume E88-D, pages 767–774. Oxford University Press.
- [Sierra et al., 2006] Sierra, R., Zsemlye, G., Székely, G., and Bajka, M. (2006). Generation of variable anatomical models for surgical training simulators. In *Medical Image Analysis*, volume 10, pages 275–285.
- [Speer et al., 1998] Speer, T., Kuppe, M., and Hoschek, J. (1998). Global reparametrization for curve approximation. In *Computer Aided Geometric Design*, volume 15, pages 869–877.
- [Subsol et al., 2010] Subsol, G., Gesquière, G., Braga, J., and Thackeray, J. (2010). 3D automatic methods to segment "virtual" endocasts : state of the art and future directions. In *79th Annual Meeting of the American Association of Physical Anthropologists, Albuquerque, (U.S.A.), Abstract published in American Journal of Physical Anthropology*, volume 141 of *S50*, page 226.
- [Sun et al., 2004] Sun, Y., Nee, A., and Lee, K. (2004). Modifying free-formed nurbs curves and surfaces for offsetting without local self-intersection. In *Computer-Aided Design*, volume 36, pages 1161 – 1169.
- [Székely et al., 2000] Székely, G., Brechbühler, C., Hutter, R., Rhomberg, A., Ironmonger, N., and Schmid, P. (2000). Modelling of soft tissue deformation for laparoscopic surgery simulation. In *Medical Image Analysis*, volume 4, pages 57–66.
- [Tai et al., 2003] Tai, C.-L., Hu, S.-M., and Huang, Q.-X. (2003). Approximate merging of b-spline curves via knot adjustment and constrained optimization. In *Computer-Aided Design*, volume 35, pages 893–899.

- [Terzopoulos and Waters, 1990] Terzopoulos, D. and Waters, K. (1990). Physically-based facial modelling, analysis, and animation. In *The Journal of Visualization and Computer Animation*, volume 1, pages 73–80. John Wiley & Sons, Ltd.
- [Teschner et al., 2004] Teschner, M., Kimmerle, S., Zachmann, G., Heidelberger, B., Raghupathi, L., Fuhrmann, A., Cani, M.-P., Faure, F., Magnetat-Thalmann, N., and Strasser, W. (2004). Collision detection for deformable objects. In *Eurographics State-of-the-Art Report (EG-STAR)*, pages 119–139.
- [Tiller and Hanson, 1984] Tiller, W. and Hanson, E. (1984). Offsets of two-dimensional profiles. In *IEEE - Computer Graphics and Applications*, volume 4, pages 36–46, Los Alamitos, CA, USA. IEEE Computer Society.
- [Tillier et al., 2003] Tillier, Y., Paccini, A., Durand-Reville, M., Bay, F., and Chenot, J.-L. (2003). Three-dimensional finite element modelling for soft tissues surgery. In *International Congress Series*, volume 1256, pages 349 – 355.
- [Tobor et al., 2004] Tobor, I., Reuter, P., and Schlick, C. (2004). Multi-scale reconstruction of implicit surfaces with attributes from large unorganized point sets. In *SMI '04 : Proceedings of the Shape Modeling International 2004*, pages 19–30. IEEE Computer Society.
- [Turk and O'Brien, 1999] Turk, G. and O'Brien, J. (1999). Variational implicit surfaces. Technical report, Graphics, Visualization, and Useability Center, Georgia Institute of Technology.
- [Ursino et al., 1999] Ursino, M., Tasto, L., Nguyen, H., and Cunningham, R. and Merrill, G. (1999). CathSim : an intravascular catheterization simulator on a PC. In Westwood, J., Hoffman, H., Robb, R., and Stredney, D., editors, *Medicine Meets Virtual Reality : The Convergence of Physical and Informational Technologies : Options for a New Era in Healthcare*, volume 62, pages 360–366, Amsterdam. IOS Press and Ohmsha.
- [Van Den Bergen, 1997] Van Den Bergen, G. (1997). Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees. In *Journal of Graphics Tools*, volume 2, pages 1–13. A. K. Peters, Ltd.
- [Varadhan and Manocha, 2004] Varadhan, G. and Manocha, D. (2004). Accurate minkowski sum approximation of polyhedral models. In *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, pages 392–401. IEEE Computer Society.
- [Vassilev and Spanlang, 2002] Vassilev, T. and Spanlang, B. (2002). A mass-spring model for real time deformable solids. In *Proceedings of the East-West Vision*, pages 149–154.
- [Villet, 2002] Villet, R. (2002). Prise en charge chirurgicale uniciste des troubles de la statique pelvienne. In *Acta Endoscopica*, volume 32, pages 311–320. Endoscopica, Nancy, France.
- [Villet, 2003] Villet, R. (2003). Prise en charge globale des troubles de la statique pelvienne. vers une nouvelle entité : la pelvipérinéologie. In *E-mémoires de l'Académie Nationale de Chirurgie*, volume 2, pages 53–58.

- [Volino and Magnenat-Thalmann, 2001] Volino, P. and Magnenat-Thalmann, N. (2001). Comparing efficiency of integration methods for cloth simulation. In *Computer Graphics International Proceedings*, pages 265–274. IEEE Computer Society.
- [Wallner et al., 2001] Wallner, J., Sakkalis, T., Maekawa, T., Pottmann, H., and Yu, G. (2001). Self-Intersections of Offset Curves and Surfaces. In *International Journal of Shape Modeling*, volume 7, pages 1–21.
- [Wang et al., 2006] Wang, P., Becker, A., Jones, I., Glover, A., Benford, S., Greenhalgh, C., and Vloeberghs, M. (2006). A virtual reality surgery simulation of cutting and retraction in neurosurgery with force-feedback. In *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, volume 84, pages 11 – 18.
- [Wang et al., 2007] Wang, P., Becker, A., Jones, I., Glover, A., Benford, S., Greenhalgh, C., and Vloeberghs, M. (2007). Virtual reality simulation of surgery with haptic feedback based on the boundary element method. In *Computers & Structures*, volume 85, pages 331 – 339.
- [Wang et al., 2011] Wang, W., Zhang, Y., Scott, M. A., and Hughes, T. J. (2011). Converting an unstructured quadrilateral mesh to a standard T-spline surface. In *Computational Mechanics*, volume 48, pages 477–498, Secaucus, NJ, USA. Springer-Verlag New York, Inc.
- [Wang et al., 2012] Wang, W., Zhang, Y., Xu, G., and Hughes, T. (2012). Converting an unstructured quadrilateral/hexahedral mesh to a rational T-spline. In *Computational Mechanics*, volume 50, pages 1–20. Springer.
- [Wang, 2008] Wang, X. (2008). Method of steepest descent and its applications. In *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, volume 12, pages 24–26.
- [Wein, 2006] Wein, R. (2006). Exact and efficient construction of planar minkowski sums using the convolution method. In Azar, Y. and Erlebach, T., editors, *ESA*, volume 4168 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 829–840. Springer.
- [Whitaker et al., 2001] Whitaker, R., Breen, D., Museth, K., and Soni, N. (2001). Segmentation of biological volume datasets using a level-set framework. In Mueller, K. and Kaufman, A., editors, *In Proceedings of the International Workshop on Volume Graphics 2001*, pages 249–263. Springer.
- [Wolter, 1992] Wolter, F.-E. (1992). Cut locus and medial axis in global shape interrogation and representation. In *MIT Design Laboratory Memorandum 92-2 and MIT Sea Grant Report*.
- [Wu et al., 2005] Wu, X., Yu, M., and Xia, W. Q. (2005). Implicit fitting and smoothing using radial basis functions with partition of unity. In *Proceedings of the 9th International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics*, CAD-CG '05, pages 139–148, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.

- [Xie et al., 2003] Xie, H., Wang, J., Hua, J., Qin, H., and Kaufman, A. E. (2003). Piece-wise C1 continuous surface reconstruction of noisy point cloud via local implicit quadric regression. In Turk, G., van Wijk, J. J., and II, R. J. M., editors, *Proceedings of the conference on Visualization '03*, pages 91–98. IEEE Computer Society.
- [Yushkevich et al., 2006] Yushkevich, P., Piven, J., Hazlett, H., Smith, R. G., Ho, S., Gee, J., and Gerig, G. (2006). User-guided 3D active contour segmentation of anatomical structures : Significantly improved efficiency and reliability. In *NeuroImage*, volume 31, pages 1116 – 1128, San Diego, CA, USA. Academic Press Inc Elsevier Science.
- [Zhao et al., 2001] Zhao, H.-K., Oshery, S., and Fedkiwz, R. (2001). Fast surface reconstruction using the level set method. In *Proceedings of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods*.
- [Zhong et al., 2012] Zhong, Y., Shirinzadeh, B., Smith, J., and Gu, C. (2012). Soft tissue deformation with reaction-diffusion process for surgery simulation. In *Journal of Visual Languages & Computing*, volume 23, pages 1–12.
- [Zhu and Gu, 2012] Zhu, B. and Gu, L. (2012). A hybrid deformable model for real-time surgical simulation. In *Computerized Medical Imaging and Graphics*, volume 36, pages 356 – 365.
- [Zygote Body, 2011] Zygote Body (2011). <http://zygotebody.com>.