AIX-MARSEILLE UNIVERSITE

École Doctorale: Cognition Langage Éducation (ED356)

Équipe d'Accueil: UMR P3 Apprentissage, Didactique, Éducation, Formation

THESE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

EN SCIENCES DE L'EDUCATION - DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

par Romain MARIO

CONVERSION ET INFLUENCE DES ASSUJETTISSEMENTS AU MILIEU SCOLAIRE DANS L'ETUDE AUTONOME DES MATHEMATIQUES: COMMENT LES TRES BONS ELEVES DE LYCEE ETUDIENT LES MATHEMATIQUES APRES LA CLASSE

Observation anthropologique et suivi biographique de quelques cas exemplaires

Soutenue le 29/05/2012 *Devant un jury composé de:*

Maggy SCHNEIDER, professeur à l'université de Liège,	*rapporteur*
Gérard SENSEVY, professeur à l'université de Bretagne Ouest,	*rapporteur*
Alain MERCIER, professeur à l'IFE, ENS-Lyon,	*directeur*
Yves CHEVALLARD, professeur à l'université Aix-Marseille,	*président*
Alain BRONNER, professeur à l'IUFM, Montpellier,	*examinateur*
Yves MATHERON, professeur à l'IFE, ENS-Lyon,	*examinateur*
Francia LEUTENEGGER, professeur à l'université de Genève	*examinateur*

À la mémoire de ma grand-mère

La personne qui m’a tant marqué
et de qui j’ai tant appris

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes sans lesquelles cette recherche n'aurait jamais pu aboutir.

Ma plus vive reconnaissance va d'abord à Alain MERCIER. En acceptant d'encadrer ma recherche de Master II puis cette thèse, et en me soutenant tout au long de ces années, il a énormément contribué à l'aboutissement de ce projet, et joué un rôle extraordinaire dans ma formation. A sa manière, il m'a permis de devenir aujourd'hui chercheur. Je le remercie car il m'a beaucoup marqué avec sa passion pour la didactique des mathématiques et pour la recherche. Chacune de nos rencontres a été pour moi l'occasion de découvrir de nouvelles idées, d'apprendre de nouvelles choses. Je lui suis énormément reconnaissant pour m'avoir donné le goût de la recherche et de la rigueur, pour ses encouragements, son soutien sincère, ses conseils dont j'avais fort besoin tout au long de cette aventure et dans les moments difficiles, ceci toujours avec compréhension et pertinence, dans une relation d'amitié.

Toute ma gratitude va également à Mme Maggy SCHNEIDER et à M. Gérard SENSEVY qui ont voulu rapporter cette thèse, en sacrifiant très généreusement du temps à leur tâche. Je les remercie pour leurs remarques claires et constructives.

Je remercie vivement Mme Francia LEUTENEGGER, M. Yves MATHERON, M. Yves CHEVALLARD, M. Alain BRONNER pour leur participation au jury, en apportant divers regards à mon travail.

Je remercie tous les élèves et leurs parents qui ont contribué à la réalisation de ce projet, pour leur collaboration sympathique et pour m'avoir fait confiance en m'accueillant chaleureusement dans leurs maisons pendant plusieurs mois.

J'adresse ma sincère reconnaissance aux membres de l'équipe UMR ADEF qui ont généreusement mis à ma disposition tous les moyens nécessaires pour mes recherches. Je remercie également les chercheurs de cette équipe pour leurs soutiens et leurs conseils, les thésards de l'équipe pour les moments de rencontre scientifique et amicale, enfin A. ROMBI pour sa gentillesse et son efficacité.

Un grand merci également à tous ceux qui de près ou de loin m'ont toujours soutenu

Je souhaite enfin exprimer ma plus profonde gratitude et mes remerciements à ma famille :

A mère qui m'a tout donné,

A mes frères et sœurs qui, au-delà de la distance m'ont toujours soutenu,

A ma belle-famille dont le soutien ne m'a jamais manqué,

Enfin, à ma petite famille, mon épouse, nos enfants. Je les remercie du fond du cœur pour tout ce qu'ils représentent pour moi, mais aussi pour leur présence, leur compréhension et leur soutien indéfectible.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE

Bien que l'enseignement soit toujours considéré comme une tâche éminemment coopérative entre les acteurs de l'institution scolaire, il semble qu'une grande partie des apprentissages relève depuis toujours et plus que jamais de la sphère individuelle et privée des élèves, qui doivent explorer, enquêter, mener une étude autonome, pour apprendre et donc pour s'enseigner. C'est ainsi qu'une grande partie des travaux d'enquête et d'étude des élèves se trouve à l'origine de phénomènes didactiques dont la noosphère, attribue diverses fonctions, rappelle avec insistance la place et l'importance dans la réussite des apprentissages. Cependant, en l'état actuel de la recherche en didactique des mathématiques ou en science de l'éducation, on connaît très peu de choses sur le fonctionnement et la gestion de l'étude dans les sphères privées; peu de choses sur comment les bons élèves de l'institution scolaire enquêtent, explorent, apprennent, c'est-à-dire étudient de façon autonome les mathématiques dans leur sphère privée pour compléter les séances d'apprentissages de la scène publique. L'absence d'éléments fiables sur ces questions fait problème. Quelques travaux ont posé la question au détour de problématiques assez larges - le rôle du professeur dans le processus des apprentissages, les échecs scolaires, la méthode de travail, le poids des conditions matérielle, familiales et sociales dans les échecs scolaires- et souvent sans prendre en compte la spécificité disciplinaire et épistémologique. Cela apporte très peu d'éléments de réponses à la connaissance de l'étude qui conduit à la réussite des apprentissages. Les travaux des élèves sont des phénomènes didactiques. Cependant, force est de constater que ni les instances officielles, ni l'école ne semblent disposer d'éléments d'appréciation sur leur fonctionnement et leur gestion par les élèves dans leur sphère privée. Quant à la didactique, elle a consacrée la plus grande partie de son temps et de son énergie à l'identification, la modélisation et l'interprétation des phénomènes liés à la scène officielle des apprentissages. La didactique semble de ce fait avoir peu analysé le travail d'enquête et d'exploration – facteur déterminant de réussite - que mènent les élèves particuliers dans leur sphère privée, or cela permet de comprendre les implicites des différentes séquences de cours, mais aussi de compléter les apprentissages des scènes officielles, et de poser les questions qui accompagnent l'enquête et dont la majorité ont été pourtant énoncée par A. Mercier[1]

Partant donc de l'hypothèse que le travail d'enquête et d'exploration que conduisent les élèves particuliers pose des problèmes spécifiquement didactiques et du constat que la question d'établir un diagnostic sur son fonctionnement et sa gestion par les élèves s'avère problématique, nous nous sommes engagé dans une recherche sur la nature précise de cette enquête, sur ses enjeux, et les conditions de sa manifestation et sa fonction de régulations des apprentissages Nous abordons ces interrogations avec l'intention de dégager des éléments de diagnostic adéquats sur l'enquête mathématique individuelle privée des élèves particuliers que

[1] Thèse Alain Mercier, 1992

sont les *très bons élèves*. De telles visées ont des corollaires importants, tant sur le plan théorique que sur le plan expérimental.

Sachant que l'objectif de tout acte d'apprentissage est l'acquisition par l'élève d'une connaissance spécifique dont il fera usage dans l'action, nous utilisons le terme « étude autonome »[2] pour spécifier le travail d'enquête et d'exploration que mène l'élève dans sa sphère privée, relativement aux objets de savoirs. Il va de soi dans cette recherche que le travail privée ne désigne pas une autodidaxie mais un mode nécessaire du fonctionnement didactique où une grande partie de l'activité n'est plus sous le regard de l'enseignant, mais est déterminée par les possibles et préalables indications de l'institution scolaire face à l'élève. Ce que l'institution organise du couple (savoir- élève) et qu'on nomme « étude » suppose l'irruption possible d'une enquête conduite par l'élève. Ce travail d'exploration et d'enquête s'inscrit dans la réalité du temps d'apprentissage, sans frontière, impliquant de fait ce que nous appellerons une transhumance didactique, qui consiste, intègre, d'aller chercher là où c'est possible les informations sur les savoirs, les connaissances et les outils qui permettent d'organiser, ou de réorganiser un répertoire de moyens d'agir en fonction des tâches, cela demande une enquête mathématique.(*séances de cours en classe, utilisations de livres autre que ceux indiqués par l'institution scolaire, recherche sur internet, aide d'un membre de la famille ou d'un ami*)

Pour pouvoir analyser et interpréter le fonctionnement et la gestion du travail d'enquête et d'exploration mathématique que mènent les élèves particuliers, il faut mener l'observation biographique d'élèves, c'est-à-dire, observé en temps réel des élèves particuliers en train d'étudier des objets mathématiques. C'est ainsi que AC001, V001, F001, L001 et RC001 qui sont des élèves particuliers, nous ont donné accès à la connaissance de l'élève comme « enquêteur en mathématiques ». Ce sont tous des élèves en classes de terminale scientifique « S » de cinq différents lycées de la région PACA, qui nous ont donné accès à leur sphère privée, à leur travail individuel d'enquête et d'exploration mathématique tel qu'il s'organise autour des grands chapitres de la classe de terminale scientifique

En anthropologue, nous sommes entré chez ces élèves avec l'accord de leur famille en transformant ce collectif en « informateurs sur les pratiques étranges que leurs membres développent », en nous laissant interroger par la surprise que leurs comportements produit chez nous, en les questionnant sur les motifs de ces comportements et leurs effets attendus. Nous espérons ainsi atteindre non seulement les techniques d'étude que les très bons élèves ont développées, mais aussi en saisir le sens pour eux, ainsi que l'écologie sociale et cognitive Nous décrivons précisément les modes de notre observation au chapitre 4.

Cette recherche est présentée en deux grandes parties divisées en plusieurs chapitres. La première partie de cette recherche de thèse s'attache à délimiter et à clarifier notre problématique. Pour ce faire, elle propose une analyse de l'institution d'enquête et de l'enquête elle-même, un état des lieux de différents travaux existant en didactique et science de l'éducation et plus particulièrement les travaux ayant une approche anthropologique comme modèle explicite et regarde l'étude comme une enquête et exploration d'un savoir. Les interrogations soulevées et les notions convoquées conduisent à une définition de la notion d'étude et sur la nécessité de l'articuler à la dimension épistémique des savoirs et objets de savoirs préalablement rencontrés dans l'institution scolaire par des sujets particuliers, comme

[2] Repris à Erdogan 2006

l'ont montré nos recherches antérieures[3] Nous introduisons trois notions importantes, celle de *répertoire épistémologique* d'une personne en situation, celle *d'épisode de la biographie didactique*[4] d'un élève, et celle *de transhumance didactique*, notions à partir desquelles nous pouvons définir notre problématique et formuler nos hypothèses de recherche.

Le *répertoire* relatif à une tâche mathématique se rapporte à la manifestation de phénomènes indexés relatifs à des objets de savoir et aux pratiques dans lesquelles ils sont pris. Ils sont observés ici comme rapports de sujets à des objets, que ces sujets étudient. Le répertoire épistémologique d'un élève est porteur des éléments pérennes du contrat didactique, il fonde les régulations entre les acteurs, et les pratiques de l'étude. Un bon élève, comme ceux que nous observons, gère son répertoire personnel en situant ses objets dans les cadres sociaux que l'institution scolaire a définis ou que l'élève a construits pour lui-même Le répertoire désigne la structure organisée des objets mathématiques et des relations entre ces objets pour un élève. Lorsque l'on s'occupe simultanément de l'élève et des mathématiques qu'il étudie, des conditions et des contraintes qui s'imposent à lui à travers ses enquêtes mathématiques, cette notion permet de penser l'ensemble des savoirs et savoir-faire à l'œuvre dans l'action didactique.

Pour étudier simultanément l'élève particulier et les mathématiques que ce dernier étudie, il faut l'observer dans sa sphère privée, pour avoir accès à sa connaissance mathématique, à son rapport au savoir mathématique, et indirectement à l'institution scolaire. Nous désignons dans cette recherche de thèse, l'élève particulier comme sujet de la relation didactique, ce qui est la conséquence de sa présence dans l'institution scolaire. Nous étudions l'action pour comprendre le fonctionnement et la gestion de l'enquête mathématique dans les différents et donc sa biographie didactique, constituée de ses rencontres avec les objets de savoir en termes d'épisodes didactique effectifs. Le qualificatif didactique dans le cas de la biographie d'élève particulier vient du fait que sa biographie est la suite des incidents constitutifs de son histoire d'élève. C'est pour de telles acceptions que nous introduisons la méthode *des épisodes biographique*s. C'est une méthode utilisant à la fois une approche de type ethnographique, de type anthropologique, et de type clinique pour l'observation des phénomènes d'enquête et d'exploration privée mathématique des élèves particuliers. Cette démarche se développe ici en trois phases : l'installation des conditions d'une observation socio-ethnologique ; l'observation d'un échantillon correspondant à une approche clinique de l'ordinaire didactique (dans les moments d'études d'objets mathématiques des élèves particuliers) constituant le dispositif de recherche ; et des entretiens complémentaires sur le fonctionnement des institutions d'étude autonomes des élèves particuliers de notre dispositif de recherche.

La deuxième partie de cette recherche de thèse met en évidence des *répertoires épistémologiques* et des *épisodes biographiques*, et l'analyse l'écologie de l'étude autonome des grands chapitres de la classe de terminale scientifique S par les élèves que nous avons choisi de suivre. Les résultats nous permettent de comprendre les réussites que ces élèves particuliers obtiennent. Cette deuxième partie nous conduit à repenser la notion de répertoire, en dégageant ses caractéristiques particulières relatives à l'étude autonome. Nous analysons ensuite le rapport au phénomène d'enquête et d'exploration privée des élèves particuliers, et les moyens qu'ils semblent avoir à leur disposition lorsqu'ils étudient les mathématiques. Nous analysons tout ceci à travers des situations réelles d'étude autonome, notamment celle des séances d'observations

[3] Master II, Romain MARIO 2005.
[4] Thèse A. Mercier 1992

biographiques des élèves de notre dispositif de recherche, les réussites, les épisodes didactiques réellement rencontrés par les élèves particuliers et leur prise en charge des implicites de la scène officielle, tout en mettant à l'épreuve un système d'interprétation de leur action didactique.

Cette recherche met en évidence des caractéristiques ignorées liées du curriculum, de son organisation et sa gestion lors de l'enquête mathématique que mènent les élèves particuliers dans leur sphère privée pour compléter, enrichir les apprentissages de la scène officielle, et conduisent à comprendre les nombreuses implicites mathématiques laissées à la charge de tout élève.

PREMIERE PARTIE :

CADRE DE LA RECHERCHE

Chapitre 1 :

LE CONSTAT : VERS UNE PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

1. *INTRODUCTION*
2. *LE PROBLEME DE L'ANALYSE DE L'ETUDE AUTONOME MATHEMATIQUE*
3. *LES INSTITUTIONS D'ETUDES AUTONOMES*
4. *L'ETUDE AUTONOME DANS QUELQUES TRAVAUX EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES*
5. *UNE APPROCHE DE REPERTOIRE LORS DE L'ETUDE*
6. *LE TEMPS DIDACTIQUE ET LE TEMPS DE L'ETUDE MATHEMATIQUE*
7. *LE ROLE DE L'ETUDE AUTONOME DIDACTIQUE DES ELEVES*
8. *UNE ANALYSE DIDACTIQUE DE L'ETUDE AUTONOME DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES*
9. *VERS UNE PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE POUR COMPRENDRE L'ETUDE MATHEMATIQUE AUTONOME ET SON FONCTIONNEMENT.*
10. *CONCLUSION*

1.1 INTRODUCTION

Nous présentons dans ce chapitre, premièrement le problème de l'analyse de l'étude autonome mathématique, l'institution de l'étude, les limites que certains travaux en didactique ont rencontrées, dans l'analyse de *l'étude* que les élèves conduisent de manière *autonome*, considérée du point de vue de sa *dynamique*. Puis à partir d'une enquête bibliographique sur les recherches existantes en didactique des mathématiques, nous présentons un état des lieux des travaux sur le thème de *l'étude* .En dernier lieu, nous justifions la nécessité de situer notre recherche sur *la dynamique de l'étude autonome, considérée comme une enquête,* dans une approche didactique intéressée aux *bons élèves* de l'institution dans leur action privée et non plus seulement à l'institution scolaire et surtout à la relation enseignant- enseigné en situation d'enseignement/apprentissage dans les temps officiels l'institution scolaire et de leur action publique.

1.2 LE PROBLEME DE L'ANALYSE DE L'ETUDE AUTONOME MATHEMATIQUE

Notre travail de recherche porte sur l'observation des « bons élèves » des classes de terminale scientifique « S » à l'extérieur des classes de mathématiques , tout en considérant que cette étude revêtirait d'autres formes dans les classes mathématiques elles-mêmes. En nous intéressant à l'étude de ce que nous appelons « des objets de savoirs mathématiques», nous supposons que l'étude mathématique autonome est non seulement en continuité et en complément de la classe de mathématique, mais aussi un retour sur des apprentissages ayant eu lieu pas dans cette classe. Elle est donc variable selon les élèves, parce qu'elle suppose pour les élèves qui s'y adonnent, le respect de contrats didactiques relatifs aux objets mathématiques rencontrés lors de l'action didactique en classe.

1.3 LES INSTITUTIONS D'ETUDES AUTONOMES

1.3.1 Un exemple d'institution : institution d'étude d'AC001

Episode : *Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte*

Ce jour, AC001 est entrain de résoudre un exercice donné par son professeur, sur les similitudes indirectes de rapport $\neq 1$. AC001 a déjà rencontré cet objet mathématique lors d'une séance de cours. Selon AC001, c'est un exercice donné par son professeur suite à quelques séances sur le sujet. AC001 nous a proposé de suivre ses recherches de solution. Proposition que nous avons acceptée : nous avons donc enregistré son action à l'aide d'une caméra vidéo portable, et transcrit l'enregistrement réalisé chez elle, dans sa chambre, celle de ses parents, au bureau où elle étudie d'ordinaire.

Enoncé :

Le plan est muni d'un repère ortho normal direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ *avec pour unité graphique 1 cm.*

1- *On note* A, B, C *les points d'affixes respectives* $2i$, $-1+4i$ *et* $5+2i$. *On considère la translation* t *de vecteur* $\overrightarrow{BC}$ *, la symétrie* s *d'axe* (AB) *et la transformation* $f = t \circ s$.

   On note A' *et* B' *les images respectives de* A *et* B *par* f *. Calculer les affixes de* A' *et* B' *et faire la figure.*

2- *A point* M *d'affixe* z *, on associe* M *' son image par* f *et* z *' son affixe. Démontrer que* f *est un antidéplacement et que* $z' = \dfrac{-3-4i}{5}(\bar{z}) + \dfrac{38-6i}{5}$

3- *Déterminer l'ensemble des points invariants par* f . f *est-elle une symétrie ?*

4- *On appelle* D *le point d'affixe* $3+6i$, Δ *la médiatrice de* $[BD]$ *et* s' *la symétrie d'axe* Δ .

   a) *Déterminer une équation cartésienne de* Δ

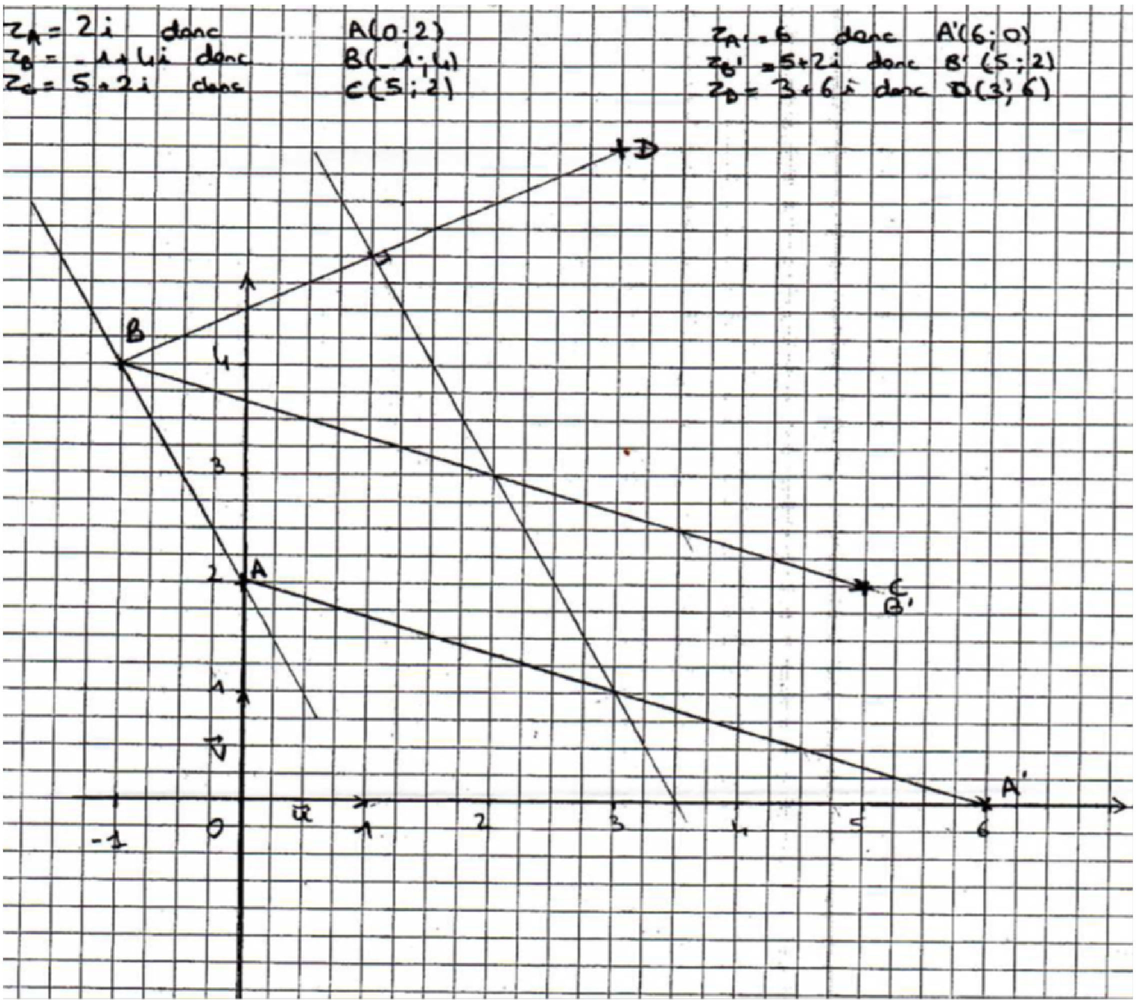
   b) *Déterminer l'écriture complexe de* s'

   c) *Démontrer que* $t \circ s'$ *est la translation, notée* t *', de vecteur* $\overrightarrow{DC}$ *. En déduire que* $f = t' \circ s'$

Proposition de solutions d'AC001 : verbatim

Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte

AC001/lit/l'exercice/entièrement///Soit/un/repère/orthonormé $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$*///Question/n°1 ////* $z_A = 2i$ *//* $z_B = -1+4i$ *//* $z_C = 5+2i$ *///On considère la translation* t *de vecteur* $\overrightarrow{BC}$ */* s *la symétrie d'axe* (AB) *et la transformation* $f = tos$ *///* A' *et* B' *sont les images respectives de* A *et de* B *par* f *///* $s(A) = A$ *et* $tos(A) = t(A) = A' \Rightarrow f(A)$ *//* $s(B) = B$ *et* $tos(B) = t(B) = B' \Rightarrow f(B)$ *///L'image de* A *par la translation* $t_{\overrightarrow{BC}}$ *est telle//que///* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'}$ *donc* $z_{\overrightarrow{BC}} = z_{\overrightarrow{AA'}}$ *///* $z_c - z_B = z_{A'} - z_A$ *//donc* $z_c - z_B + z_A = z_{A'}$ *///* $z_{A'} = 5+2i+1-4i+2i$ *//* $Z_{A'} = 6$ *//donc le point* $A'(6;0)$ *//L'image de* B *par la translation* $t_{\overrightarrow{BC}}$ *est le point* C *//Donc* $tos(B) = f(B) = C$ *//donc* $z_{B'} = 5+2i$ *//donc le point* $B'(5;2)$ *///Représentation graphique///*



AC001 hésite, cherche quelques minutes, appelle R qui lui donne une indication : //// « *on peut utiliser les antidéplacements avec la formule* $z' = a\bar{z} + b$ / » ////. AC001 continue la résolution de l'exercice après avoir demandé de l'aide à R.

Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte de rapport

AC001 résout la question 2 grâce à la formule de R///

Ah bon//// Tu as trouvé cette formule où ?/// [R] répond sur internet///[AC001]Je vais regarder/// [AC001]Mais ce n'est pas dans ma leçon///Pourquoi le prof n'a pas donné cette formule sur les antidéplacements///[R]//Je ne savais aussi et je viens de trouver ça sur internet///[AC001]Bon d'accord///Je vais l'utiliser ta formule/// Silence///AC001 reprend la résolution de la question 2///

Si f est un déplacement/// Alors $t^{-1}of$ *le serait aussi comme composée de deux*

déplacements///Or $s = t^{-1} of$ *et* s *est un antidéplacement//Donc* f *est un antidéplacement///Son écriture complexe est alors de la forme* $z' = a\bar{z} + b$ *///On sait que* $f(A) = A' \Leftrightarrow 6 = a(-2i) + b$ *et* $f(B) = B' \Leftrightarrow 5 + 2i = a(-1-4i) + b$ *///On peut poser le système d'équation* $\begin{cases} 6 = a(-2i) + b \\ 5 + 2i = a(-1-4i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -a(-2i) - b \\ 5 + 2i = a(-1-4i) + b \end{cases}$ *//en additionnant les deux équations on a///* $-1 + 2i = a(2i) + a(-1-4i)$ */Ce qui donne* $-1 + 2i = a(2i - 1 - 4i) \Leftrightarrow -1 + 2i = a(-1-2i)$ *///Donc le réel* $a = \dfrac{-1+2i}{-1-2i}$ *///Avec l'expression conjuguée du dénominateur on a ///* $a = \dfrac{(-1+2i)(+2i-1)}{5} \Leftrightarrow a = \dfrac{-3-4i}{5}$ *///Donc* $a = \dfrac{-3}{5} - \dfrac{4i}{5}$ */// On aura le réel* $b = 6 - a(-2i)$ *//Ce qui donne* $b = 6 - \dfrac{(-3-4i)(-2i)}{5} \Leftrightarrow b = \dfrac{30 - (-3-4i)(-2i)}{5}$ *///* $b = \dfrac{38-6i}{5} \Leftrightarrow b = \dfrac{38}{5} - \dfrac{6i}{5}$ *///*
Sachant que $z' = a\bar{z} + b$ *//Alors son écriture complexe est* $z' = \dfrac{-3-4i}{5}\bar{z} + \dfrac{38-6i}{5}$ *///*

AC001 Question n°3 *Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte*

Question n°3///Soit z *l'affixe du point* M *//On pose* $z = x + iy$ *avec* $(x; y) \in IR^2$ *///Les points invariants par la transformation* f *sont tels que* $f(M) = M$ *///Or*
$z = \left(\dfrac{-3}{5} - \dfrac{4i}{5}\right)\bar{z} + \dfrac{38-6i}{5}$ *///Avec* $z = x + iy$ *ona///* $x + iy = \left(\dfrac{-3-4i}{5}\right)(x - yi) + \dfrac{38-6i}{5}$
$\Leftrightarrow 5x + 5iy = (-3-4i)(x - iy) + 38 - 6i$ *///Ce/qui/donne/*
$5x + 5iy = (-3x - 4y + 38) + (-4x + 3y - 6)i$ *///Par identification on a///* $\begin{cases} 5x = -3x - 4y + 38 \\ 5y = -4x + 3y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 38 - 4y \\ 2y = -4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 19 - 2y \\ y = -2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{19}{2} - 2x \\ y = -2x - 3 \end{cases}$ *////Ce qui est absurde//D'où* f *n'admet pas de points invariants///* f *n'est donc pas une symétrie//car si c'était une symétrie axiale les points situés sur l'axe seraient invariants///Ou si c'était une symétrie centrale le centre serait un point fixe//*

Question n°4 *Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte*

Question 4a/// $z_D = 3+6i$ *///Soit I le milieu de* $[BD]$ *//Donc* $z_I = \frac{z_B - z_D}{2} = 1+5i$ *///* Δ *est la médiatrice de* $[BD]$ *et s'//est la symétrie d'axe* Δ *///Le segment* $[BD]$ *a pour affixe* $3+6i-(-1+4i) = 4+2i$ *//Donc* Δ *a pour équation* $4x+2y+c=0$ *avec* $c \in IR$ *et* $I \in \Delta$ *//Donc en remplaçant* x, y *par les coordonnées du point I dans l'équation de* Δ *on a//* $4\times1+2\times5+c=0 \Leftrightarrow c=-14$ *//D'où l'équation de* Δ *est//* $4x+2y-14=0$ *///*

Question 4b *Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte*

Question 4b)///Alors///L'écriture de s'//est de la forme $z' = a\bar{z}+b$ *avec le réel* $a \in C*$ *et* $b \in C$ *//Le point//* $J \in \Delta$ *et coupe la droite* (BB') *///Donc* $J(2;3)$ *///Or d'après la définition de la transformation s'// s'(I) = I et s'(J) =J/// Remplaçons les coordonnées des points I et J ///On a donc le système* $\begin{cases} 2+3i = a(2-3i)+b \\ 1+5i = a(1-5i)+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-3i = -2a+3ai-b \\ 1+5i = a-5ai+b \end{cases} \Leftrightarrow$ *par addition des deux équations du système d'avoir* $-1+2i = -a-2ai \Leftrightarrow -1+2i = a(-1-2i) \Leftrightarrow a = \frac{-1+2i}{-1-2i}$ *//En utilisant l'expression conjuguée du dénominateur on a///* $a = \frac{(-1+2i)(-1+2i)}{5} \Leftrightarrow a = \frac{-3-4i}{5}$ *///En remplaçant//* $a\,\frac{-3-4i}{5}$ *dans l'une//des équations formant le système on a* $b = (1+5i)-(\frac{-3-4i}{5})(1-5i) \Leftrightarrow b = \frac{5(1+5i)-(-3-4i)(1-5i)}{5} \Leftrightarrow b = \frac{28+14i}{5}$ *////*

/////L'écriture complexe de s' donne donc $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{28+14i}{5}$ *///*

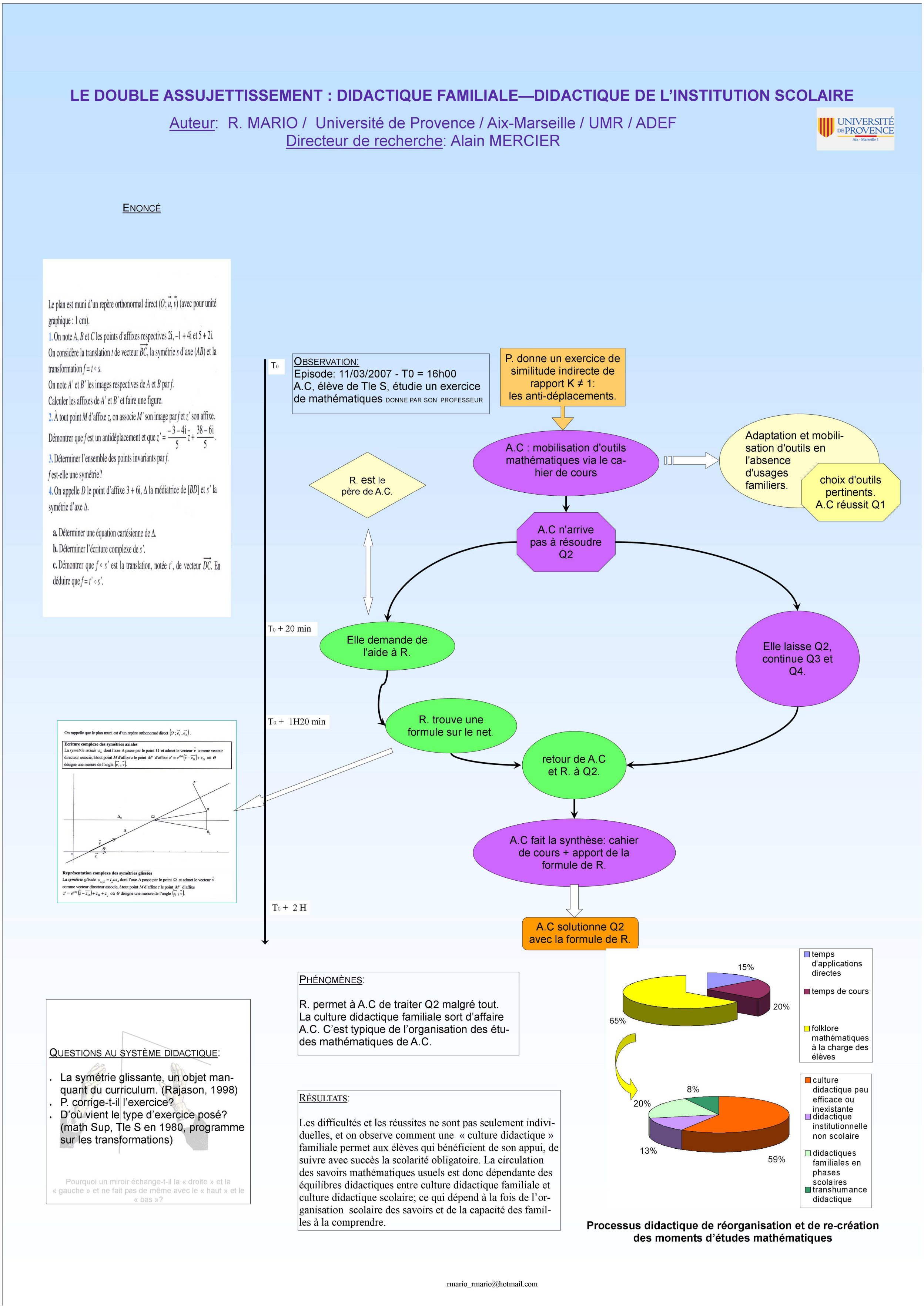
Question 4c *Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte*

Question 4c)///Soit $z \in C$ *//Alors///On peut dire que d'après les données que*
$fos'(z) = f[s'(z)] = \frac{-3-4i}{5}\left[\overline{\frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{28+14i}{5}}\right] + \frac{38-6i}{5}$ *////Ce qui donne//* $fos'(z) = \frac{(-3-4i)(-3+4i)}{25}\times z + \frac{(-3-4i)(28-14i)}{25} + \frac{38-6i}{5}$ */// Après*

simplification on $fos'(z) = z + 2 - 4i$ *///D'où* $z_{\overrightarrow{DC}} = 2 - 4i$ *///En conclusion//je peux dire que///* fos' *est la translation* t' *de vecteur* $\overrightarrow{DC}$ *////De plus//* $t.'os' = fos'os' = f$ *////*

A la question 2 de cet exercice, AC001 rencontre une difficulté et n'arrive pas à résoudre cette question2, tout simplement parce qu'il semble exister dans son cahier de cours niveau un objet manquant : l'écriture complexe des antidéplacements[5] Des recherches sur internet et dans les livres ont permis de trouver cet objet manquant que AC001 va ensuite utiliser pour résoudre la tâche 2 de l'exercice. R001 permet ainsi à AC001 par la formule sur internet de traiter Q2 malgré tout. La culture didactique familiale sort d'affaire en partie AC001.Cette forme de recherche, d'exploration et d'enquête est typique de l'organisation et du fonctionnement de l'institution d'étude autonome mathématique de AC001. Il apparaît aussi qu'AC001 ne se contente pas simplement des propriétés sur les antidéplacements. AC001 met en œuvre diverses dispositions et mobilise des connaissances pour résoudre les tâches relatives aux similitudes indirectes de rapport différent de 1. Des techniques sont utilisées par AC001, elles mobilisent des connaissances déclaratives et opérationnelles qui permettent la résolution des tâches. Cet épisode montre non seulement la culture mathématique scolaire, la culture mathématique personnelle d'AC001 et de R001 mais surtout la manière dont la dimension épistémologique des objets de savoirs mathématiques est prise en compte par AC001 dans son cadre d'action privée. Cet épisode montre également que le terme générique antidéplacement[6] associé aux isométries inverse reste encore un objet manquant en classe de terminale scientifique « S »[nous reviendrons sur cet épisode au chapitre 7].C'est donc la manière d'apprendre et de travailler les mathématiques dans leur globalité épistémologique que nous allons considérer. Nous décrivons le problème dans l'affiche ci-contre

[5] Ecriture complexe des antidéplacements trouvée sur internet par AC001 et son père R
[6] Landy Rajoson 1988


LE DOUBLE ASSUJETTISSEMENT : DIDACTIQUE FAMILIALE—DIDACTIQUE DE L'INSTITUTION SCOLAIRE
Auteur: R. MARIO / Université de Provence / Aix-Marseille / UMR / ADEF
Directeur de recherche: Alain MERCIER
UNIVERSITÉ DE PROVENCE
ENONCÉ
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (avec pour unité graphique : 1 cm).
1. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, $-1+4i$ et $5+2i$.
On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie s d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ s$.
On note A' et B' les images respectives de A et B par f.
Calculer les affixes de A' et B' et faire une figure.
2. À tout point M d'affixe z, on associe M' son image par f et z' son affixe.
Démontrer que f est un antidéplacement et que $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
f est-elle une symétrie ?
4. On appelle D le point d'affixe $3+6i$, Δ la médiatrice de $[BD]$ et s' la symétrie d'axe Δ.
a. Déterminer une équation cartésienne de Δ.
b. Déterminer l'écriture complexe de s'.
c. Démontrer que $f \circ s'$ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $f = t' \circ s'$.
T_0
OBSERVATION:
Episode: 11/03/2007 - T0 = 16h00
A.C, élève de Tle S, étudie un exercice de mathématiques DONNE PAR SON PROFESSEUR
P. donne un exercice de similitude indirecte de rapport K ≠ 1: les anti-déplacements.
A.C : mobilisation d'outils mathématiques via le cahier de cours
Adaptation et mobilisation d'outils en l'absence d'usages familiers.
choix d'outils pertinents. A.C réussit Q1
R. est le père de A.C.
A.C n'arrive pas à résoudre Q2
T_0 + 20 min
Elle demande de l'aide à R.
Elle laisse Q2, continue Q3 et Q4.
T_0 + 1H20 min
R. trouve une formule sur le net.
retour de A.C et R. à Q2.
A.C fait la synthèse: cahier de cours + apport de la formule de R.
T_0 + 2 H
A.C solutionne Q2 avec la formule de R.
PHÉNOMÈNES:
R. permet à A.C de traiter Q2 malgré tout.
La culture didactique familiale sort d'affaire A.C. C'est typique de l'organisation des études des mathématiques de A.C.
QUESTIONS AU SYSTÈME DIDACTIQUE:
La symétrie glissante, un objet manquant du curriculum. (Rajason, 1998)
P. corrige-t-il l'exercice?
D'où vient le type d'exercice posé? (math Sup, Tle S en 1980, programme sur les transformations)
Pourquoi un miroir échange-t-il la « droite » et la « gauche » et ne fait pas de même avec le « haut » et le « bas »?
RÉSULTATS:
Les difficultés et les réussites ne sont pas seulement individuelles, en effet on observe comment une « culture didactique » familiale permet aux élèves qui bénéficient de son appui, de suivre avec succès la scolarité obligatoire. La circulation des savoirs mathématiques usuels est donc dépendante des équilibres didactiques entre culture didactique familiale et culture didactique scolaire; ce qui dépend à la fois de l'organisation scolaire des savoirs et de la capacité des familles à la comprendre.
15%
20%
65%
temps d'applications directes
temps de cours
folklore mathématiques à la charge des élèves
8%
20%
13%
59%
culture didactique peu efficace ou inexistante
didactique institutionnelle non scolaire
didactiques familiales en phases scolaires
transhumance didactique
Processus didactique de réorganisation et de re-création des moments d'études mathématiques
rmario_rmario@hotmail.com

1.3.2 L'approche psychologique

Dans cette recherche, nous nous sommes intéressés à l'étude autonome de ce que nous appelons *des objets de savoir* et nos interrogations de recherche sont très éloignées des questions que se posaient Ebbinghaus lorsqu'il suppose l'apprentissage comme une accumulation d'informations en un lieu ou un temps donné, et qu'il faudra savoir restituer telle qu'elle était. L'approche psychologique, en appréhendant de façon antagoniste l'étude de la notion d'intelligence[7], a non seulement limité le champ d'analyse des phénomènes de l'étude en oubliant sa dimension épistémologique mais surtout en considérant qu'elle est inhérente à l'individu. Dans ce travail nous considérons les savoirs comme des objets sociaux, du fait de leur mobilité et de leur développement. La capacité à emmagasiner puis restituer les informations ne peut être étudiée sans prendre en compte le développement et l'adaptation évolutive des différentes connaissances dans un ensemble de situations, ainsi que les diverses institutions à l'intérieur desquelles l'élève se livre à l'étude. Nous devons construire des corrélations entre le social et l'individuel.

Dans ses travaux de recherches Alain Mercier explique

> « Les élèves peuvent apprendre] d'autant plus rapidement qu'ils font confiance à la situation parce qu'ils savent, d'expérience, le bénéfice que leur procureront les savoirs nouveaux : le succès des situations didactiques tient pour une part essentielle au contrat didactique, qui permet aux élèves d'interpréter l'intentionnalité dont les situations sont porteuses pour identifier les mathématiques qui leur sont enseignées »[8]

Ainsi les interprétations des expériences de laboratoires bien que relatives à la reconnaissance et à l'utilisation d'objets de savoir, semblent ne pas rendre compte des apprentissages mathématiques avancés, parce que ses apprentissages se réalisent dans des situations didactiques qui, ne sont pas à portée d'observation dans les classes de l'institution scolaire. Ils dépendent des situations didactiques dans lesquelles des sujets étudiant les mathématiques sont observés, ce qui implique un contrat didactique liant les institutions d'étude des objets de savoir et les élèves. C'est alors un postulat de la psychologie sociale qui stipule que : *« on ne peut pas séparer les connaissances du contrat …../….* »[9] que notre recherche va suivre.

1.3.3 L'approche sociologique

Ayant pour objet d'étude, les relations individu- société, l'objectif de la sociologie a été de trouver des relations entre phénomènes sociaux, la compréhension du fonctionnement et de l'organisation des institutions. Elle s'intéresse aux individus en tant que socialisés, appartenant à des groupes sociaux en relation entre eux. Elle a pour champ d'étude l'analyse des manières de

[7] Tiberghien, 1994
[8] Mercier 1996
[9] Maria –Luisa Schubauer-Leoni

faire et vivre, de penser, la constitution et la diffusion des connaissances, des savoirs, les comportements et actions humaine dans une vision de totalité ou d'interdépendance. Nous appréhendons l'institution d'étude autonome comme une relation d'interdépendance entre l'élève et l'institution scolaire..

1.3.4 L'approche ethnologique et anthropologique

Nous pensons notre approche des phénomènes de l'institution *étude autonome* dans le cadre de l'ethnologie et de l'anthropologie, parce que l'ethnologie étudie divers groupes humains dans leur milieu physique, dans leur comportement passé ou actuel, en se basant sur des observations dont l'homme et son environnement restent le centre :

> « Science des groupements humains, de leur culture et de leur histoire, indépendamment du degré de développement de ces groupes »[10]

Cette approche permet l'étude de divers groupes humains, leurs caractères anthropologiques et sociaux avec un champ d'analyse qui comprend la structure sociale, les règles de comportements, la circulation des biens et des savoirs, l'utilisation des connaissances et des techniques. Cette approche nous permet dans cette recherche, de se poser les questions suivantes: ***à quoi servent les institutions, et dans la diversité des cultures, quels sont les invariants et les différences dans l'organisation des sociétés humaines***.

1.3.5 Synthèse des approches

Du point de vue de l'approche ethnologique et anthropologique, nous pouvons articuler les approches psychologique et sociologique en identifiant en la posture suivante :

> Alors que le psychologue et le sociologue s'attachent l'un à élucider la nature et le comportement des individus, l'autre ceux des groupes et sociétés, l'anthropologue travaille essentiellement à l'articulation de ces deux approches. Guetteur embusqué au point de passage entre l'individu et le groupe, il s'efforce de comprendre à partir de données empiriques comment des individus parviennent à partager des pratiques, des représentations, des croyances, des souvenirs, en un mot du **sens**, produisant ainsi, dans la société considérée, ce que l'on appelle de la **culture**[11].

C'est ainsi que dans cette recherche, nous attribuons le terme d'institution aux groupes sociaux comme l'entend Douglas :

> « […] l'on entendra institution au sens de groupement social légitimé (nous soulignons). L'institution en question peut être une famille, un jeu ou une cérémonie ; l'autorité

[10] Kroeber1948 cité par Passeron, 1991
[11] Candau 1998 p.3

> légitimant peut venir d'une personne, par exemple un père, un docteur, un juge, un arbitre ou un maître d'hôtel, ou bien de façon plus diffuse, se baser sur un consensus ou sur un principe fondateur général. Ce qu'on exclut ici sous le nom d'institution, ce sont des arrangements pratiques purement utilitaires ou provisoires et reconnus comme tels »[12]

En suivant l'analyse d'A. Mercier[13], on peut distinguer différentes institutions au sein desquelles on peut apprendre différents types de savoir et de connaissances. Dans son analyse de la différenciation des institutions, Mercier stipule qu'il existe des institutions qui portent de façon explicite une intentionnalité d'apprendre et d'autres institutions reconnues et constituées dans l'intention de s'enseigner pour apprendre.

Les élèves, leurs institutions d'études autonomes de même que les systèmes éducatifs et culturels dont ils sont membres composent des groupements sociaux légitimés. Dans ces groupements sociaux légitimés que représente l'institution d'étude autonome à l'extérieur des salles de classes de l'institution scolaire, un parent ou un membre leur famille, un manuel mathématique, un site internet, un média[14] ou l'élève lui-même (sujet par ailleurs de l'institution scolaire) peut être considéré comme autorité légitimant des séances d'études. C'est pour de telles raisons que nous avons choisi dans ce travail recherche d'observer des institutions d'études autonomes des élèves en réussite mathématiques, institutions dans lesquelles nous considérons que les apprentissages par l'étude sont réflexifs des séances d'enseignements des classes mathématiques (antérieure ou actuelle de l'élève) de l'institution scolaire ou non, parce que les identifications et les manipulations ou les transformations, résultats des apprentissages peuvent relever des processus institutionnel autre que le scolaire. Nous évitons ainsi la question de savoir comment tel plus que tel autre s'autorise à légitimer une institution d'étude autonome pour son profit personnel.

1.4 *L'ETUDE AUTONOME DANS QUELQUES TRAVAUX EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES*

Des travaux en didactique des mathématiques ou en sciences de l'éducation, des recherches relatives à l'étude des mathématiques ont abordé le terme de l'étude sous diverses formes. Cependant, il n'y a aucun travail actuel de recherche en didactique qui porte sur le sujet proprement dit. Bien entendu, certains thèmes qui pourraient être associés à l'étude autonome ont été analysés. Parmi ses travaux, on peut citer les thèmes associés aux travaux des années 80, 90 suivants : la dialectique entre l'ancien et le nouveau de Yves Chevallard[15], la dialectique outil-objet de Douady[16], la production du temps didactique de Chevallard et Mercier[17], la décomposition d'une notion mathématique de Coquin[18], la classification d'objectifs de Gras[19], et puis les travaux des années 2000 associés aux thèmes de l'étude autonome : le diagnostic de

[12] Douglas 1999 p. 66
[13] Mercier 1992
[14] Au sens de Chévallard. Milieu -Média
[15] Chevallard
[16] Douady 1986
[17] Chevallard et Mercier 1987
[18] Coquin 1982
[19] Gras 1979

l'aide à l'étude en mathématique d'Erdogan[20], de même que les travaux de Genestoux[21] et de Félix[22]. Signalons que les deux recherches de Florence Genestoux et de Christine Félix posent toutes les deux la question de l'étude et de l'aide à l'étude. Les travaux de recherches de Florence Genestoux ont porté sur l'accompagnement familial des apprentissages scolaires mathématiques et l'organisation non discriminante de ses conditions. Elle a analysée ce problème dans le cadre de la théorie des situations didactiques et propose des pistes pour une ingénierie autour de la notion *d'assortiments didactiques*[23]. Dans ses travaux de recherches, Christine Félix s'intéresse aux gestes d'étude des élèves dans le cadre des devoirs à la maison, à la fois en mathématiques et en histoire. C'est ainsi que dans une perspective comparatiste, elle s'est demandé si les gestes d'étude dépendent des positions de réussite des élèves au collège et au lycée voire dans le supérieur, et si les gestes d'étude dépendent aussi du contenu. Par contre dans sa recherche, Christine Félix n'étudie pas les spécificités des savoirs, ses analyses portent uniquement sur l'identification des gestes d'étude propres à des catégories d'apprenants et laissent de côté la nature des objets de savoirs pour lesquels les apprenants sont invités à accomplir certains gestes, gestes dont les natures ne sont pas non plus précisées. Cependant, il convient de souligner que les résultats et conclusions de la recherche menée sur l'étude des apprenants dans leur espace privé autre que la scène publique attire toute notre attention car ils nous apportent des indices et des éléments d'informations importants sur les conditions et les facteurs déterminants de l'étude. Lorsqu'elle est conduite dans ces conditions, nous l'appellerons *étude autonome*, afin de signifier clairement que c'est alors à l'élève lui-même de définir les normes de son activité.

Dans une approche anthropologique, les travaux de recherche de thèse d'Yves Matheron[24] abordent le thème de l'étude sous une forme de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée à travers quelques cas. Nous y reviendrons. Signalons aussi les travaux de Corine Castela[25] qui propose un modèle pour interpréter les facteurs déterminants de la réussite des élèves dans la position de *chercheur trouveur des solutions de problèmes mathématiques*. Dans ses travaux, Castela s'est intéressée en effet au travail qui demeure à la charge des élèves dans des situations d'étude mathématique autonomes et s'est attachée à identifier, à l'aide de la notion *d'organisation mathématique*, les savoirs et connaissances mathématiques dont la disponibilité en temps réel chez l'élève constitue un facteur différenciateur de réussite mathématique. Abdelkader Erdogan (2006) dans ses travaux sur le diagnostic des besoins en mathématiques qui se manifestent lorsque que le professeur est une aide à l'étude, montre comment l'étude est liée au contrat didactique de la classe de mathématiques, et dépend ainsi des *gestes d'étude* attendus par l'institution scolaire. Les gestes d'études relèvent d'une définition très générale. Erdogan identifie ainsi une dimension épistémique de l'étude, dont il observe les variations selon les enjeux que se donnent les acteurs. Enfin les travaux de recherche de thèse d'Araya-Chacon[26] en suivant les traces de Matheron, abordent le thème par la question associée de la mémoire, dans sa fonction d'activation par le professeur de savoir antérieur et sa gestion dans l'enseignement ordinaire mathématique ; enfin

[20] Abdulkadir Erdogan2006
[21] F. Genestoux 2000
[22] Christine Félix2002
[23] Florence Genestoux 2000, p 425
[24] Y. Matheron2003
[25] Corine Castela 2000, 2005
[26] Araya Cachon 2008

les travaux de Christian Silvy[27] dans la lignée des travaux de Duchet et Erdogan, proposent enfin la prise en compte du substrat présent dans les activités mathématiques.

Les questions que posent Matheron[28], Castela[29] et Erdogan[30] Araya-Chacon et Silvy, nous semblent assez proches de nos interrogations puisque c'est toujours la dimension épistémique du travail des élèves qui est l'enjeu de la recherche. En raison de la différence de problématique, de méthodologie et de cadre théorique, cette dimension épistémique de l'étude autonome est moins développée dans les travaux de Genestoux[31] et reste implicite dans ceux de Félix[32]. Cependant, les travaux de ces cinq chercheurs ne s'appuient pas sur l'observation directe du travail des élèves dans les moments d'étude hors classe. Car il ne s'agit pas pour eux d'explorer l'univers de l'étude autonome, mais d'étudier le travail de l'apprenant dans le cadre de l'école, au sens strict avec l'aide du professeur ou en considérant que c'est au professeur d'organiser l'étude. Ainsi, malgré la publication (Chevallard, 1988) d'une étude sur l'approche personnelle vs institutionnelle des phénomènes de la difficulté scolaire[33], l'approche anthropologique et didactique de l'étude autonome s'est principalement développée dans une dimension institutionnelle, et a cherchée surtout à rendre compte du fonctionnement de l'étude sous la responsabilité du professeur, de l'institution scolaire, et identifie le régime didactique du savoir au sein de cette institution. De ce fait, l'approche anthropologique utilisée dans les recherches précitées ne nous renseigne pas suffisamment sur la rencontre des sujets de l'institution en position d'élève devant étudier les objets de savoir mathématiques, et sur les conditions et les contraintes de cette rencontre dans leur institution d'étude autonome.

C'est donc le travail de Mercier qui nous semble être le premier à aborder cette question et à proposer une approche pour analyser le travail mathématique de l'élève en ouvrant une une observation de la dimension« *biographique de l'étude des tâches mathématiques par l'élève* »[34]. Ce faisant Mercier introduit la notion « *d'épisode biographique de l'étude* », qui lui a servi à explorer l'approche épistémique de l'étude des tâches mathématiques à la charge de l'élève en situation d'étude autonome, en indiquant la nécessité d'une dimension didactique pour tout acte d'apprentissage mathématique. C'est ainsi que Mercier montre qu'il n'y a pas d'apprentissage s'il n'y a pas de rencontre de la nécessité d'apprendre, autrement dit, qu'il n'y a pas de connaissances et encore moins de savoirs s'il n'y a pas de dimension adidactique, qui crée l'ignorance comme injonction d'apprendre. L'étude de cette dimension épistémique apparaît d'autant plus importante que les travaux de Mercier[35] montrent comment le savoir mathématique est défini par un ensemble de rapports bien plus large et conséquent que les rapports aux objets de savoir qui sont officiellement reconnus comme objets mathématiques dans les instances de production du savoir, parce que les savoirs y ont été mathématisés[36].

[27] Christian Silvy 2009
[28] Yves Matheron 2003
[29] Corinne Castela 2000-2005
[30] Abdulfadir Erdogan 2006
[31] Florence Genestoux 2000
[32] Christine Félix
[33] Chevallard, 1988
[34] Mercier 1992
[35] Alain Mercier1992
[36] Certains de ces objets sont identifiés sous les noms de proto-mathématiques ou para-mathématiques par Chevallard en 1985. Ils constituent des actions ou gestes mathématiques qui ne peuvent pas être enseignés explicitement, mais qui pourtant doivent être appris. Seul le manque de ces gestes peut être montré, en devenant ignorance institutionnelle.

Les travaux de Mercier[37], constituent donc pour nous une référence importante dont nous allons nous servir tout au long de ce travail de recherche. Le mouvement enclenché par Mercier a connu une suite très intéressante à travers un ouvrage sur l'étude et l'autonomie[38] de Gérard Sensevy, ouvrage dans lequel Sensevy s'est intéressé aux jeunes élèves étudiant dans le temps de la classe et donc à la possibilité de l'organisation de leur étude autonome par le professeur, comme l'un des moments-clés de son enseignement. Cependant le travail de Sensevy porte sur l'enseignement élémentaire, où par principe le temps de l'étude devrait être limité au seul temps scolaire et les chercheurs ne posent pas la question de l'étude autonome proprement dite. Pour sa part, Araya a montrée qu'il est possible aux professeurs de collèges d'organiser l'étude dans le temps des séances d'enseignement en classe :

> « Le professeur doit gérer la réactivation de le mémoire de la classe relativement aux objets et les rapports aux objets pour l'enseignement »[39].

Contrairement au travail de Sensevy qui portait sur l'enseignement élémentaire et à la recherche d'Araya, notre de recherche explore cette conséquence implicite des travaux précédents : les élèves, de par leur étude autonome, deviennent les producteurs du savoir collectivement partagé et par là même les dépositaires du savoir transmis et qu'ils gardent en mémoire. Nous entendons par mémoire toutes les formes de souvenirs de notions et d'activités ayant eu lieu dans la classe, qu'il s'agisse de stockage (la mémoire) de données mathématiques, de connaissances qui donnent le pouvoir d'agir, de transformer des questions, de produire des liens d'un chapitre à l'autre, non seulement dans un même niveau scolaire mais aussi des liens d'un niveau mathématique n au niveau $n+1$. Et c'est justement cette mémoire efficace pour l'action, que nous appelons le répertoire. Nous espérons retrouver cet objet imaginé par Guy Brousseau[40] comme un phénomène générique de l'étude autonome, reprise par Mercier[41] pour prouver l'ensemble des objets mobilisés dans la recherche d'une réponse à une question problématique.

1.5 UNE APPROCHE DE REPERTOIRE LORS DE L'ETUDE

1.5.1 Centeno et Brousseau

Dans tout ce qui suit, nous entendons par mémoire, sa forme efficace que nous appelons répertoire

Le travail de Centeno[42] consistait à étudier en quoi l'enseignant est dépositaire de la mémoire du système institutionnel. Nous postulons, que lorsque l'on considérant l'étude

[37] Alain Mercier1992, p 340
[38] Gérard Sensey (1998
[39] Araya 2008
[40] G. Brousseau 2003
[41] A. Mercier 2008
[42] Centeno&Bouseau 1991

autonome, comme un moment qui permet à l'élève de revisiter l'ensemble des notions mathématiques rencontrées, comme un moment d'exploration et d'appropriation des objets et objets de savoir rencontrés dans une institution, nous pouvons alors affirmer que l'élève est aussi dépositaire des gestes d'étude de l' institution. Nous appelons aussi mémoire, l'ensemble organisé de gestes d'études dans sa dimension épistémologique. Lorsque l'on considère qu'un *très bon élève,* peut, de par ses études autonomes, fonctionner comme un enseignant ayant de *l'expérience,* nous pouvons alors lui attribuer les deux formes de mémoire que possède l'enseignant selon Centeno.

La première forme serait celle qui amène un *très bon élève* de l'institution, lorsque cela est nécessaire pour l'étude, à modifier ses décisions eu égard à ses vécus mathématiques.

La deuxième forme de mémoire serait alors caractérisée par la mémoire institutionnel.

Quant à Brousseau, le répertoire de l'étude est un sous-système régulateur comparable à un automate à pile de mémoire. Ainsi, il existerait différents types de répertoires[43] identifiables a priori dans le cadre d'une relation didactique qui vont se différencier suivant la variabilité du sujet qui les possède tel que : *l'élève, le savoir ou le système didactique*, de même que les différentes fonctions qu'ils assument comme : *l'emmagasinement et la récupération de l'information, des transformations spécifiques et non spécifiques, des organisations de savoirs, les liens de filiations entre les connaissances et les objets de savoirs*.

Lorsque l'on identifie le *très bon élève* à un *maître*, on pourrait aussi dire qu'il existe deux catégories d'élèves selon qu'ils utilisent ou non leur commun vécu des classes de l'institution scolaire. Ainsi, nous pensons que l'on a *l'élève disposant de répertoire adéquat,* devenant de fait son propre maître en période d'étude autonome. Il représente *le sujet* bien assujettie à l'institution, qui non seulement comprend les implicites des différentes séances de cours mais surtout, arrive à faire la nuance de liens de filiations entre les objets mathématiques d'un chapitre à l'autre, et d'une classe à l'autre, en usage pour débloquer une situation didactique en étude autonome. Par contre, *l'élève ne disposant pas de répertoire adéquat* se contenterait quel que soit la situation ou le milieu, d'apprendre les formules du cours ou de reprendre les seuls exercices produits et étudiés en classe avec son professeur. C'est pour de telle raison que nous postulons que l'un des enseignements est la conversion et la réorganisation par l'élève des épisodes didactiques ayant eu lieu sen classe, en s'appuyant sur un répertoire épistémologique plus dense que celui relatif aux objets de savoir lors de l'étude en classe avec le professeur. Par conséquent, ce que nous appelons avec Brousseau répertoire et dont dispose un élève lors d'une étude mathématique jouerait un rôle important dans la manière dont il effectue et réussit ses apprentissages.

De par les observations de leurs travaux de recherche Centeno et Brousseau remarquent que, dans les conditions identiques d'apprentissage apparaît de grands écarts entre les élèves. De ce constat, ils conclure que l'utilisation par l'élève de mémoire adéquate relative à une tâche, dépendrait au moins de trois facteurs tels que : ***la méthode utilisée, l'épistémologie spontanée de l'élève, sa personnalité et sa responsabilité envers l'institution scolaire***[44] Par ailleurs ils remarquent que le fait que l'élève utilise son passé d'élève n'assure pas toujours une

[43] G.Brousseau
[44] A travers le contrat didactique.

amélioration de l'apprentissage. Ainsi, certaines des interventions pertinentes qui s'appuient sur le passé deviennent positives tandis que d'autres sont plutôt négatives. Le *replacement*, intervention d'une activité qui rappelle une situation vécue dans le passé, réactive en même temps chez l'élève la simple idée que les rapports attendus sont semblables aux anciens et l'élève n'apprend rien de neuf. En revanche, l'utilisation de la *mémoire officielle* des élèves ou des classes va permettre à un élève en étude autonome de se servir des connaissances et des savoirs exigés […]. Et c'est cette mémoire officielle des classes de l'institution que nous appelons dans cette recherche de thèse le **répertoire épistémologique ou institutionnel**.

Cependant, force est de constater que dans les interrogations non analysés des travaux de recherche de Centeno, apparait l'absence d'une définition précise du terme « *la mémoire du système ou mémoire officielle* » de même que la description de sa conversion en une pratique d'étude selon les assujettissements externe de l'élève. Bien que dans les analyses de Centeno,, priorité était donné à la mémoire épistémique du maître ; nous pensons que les élèves et en particuliers les *très bons élèves* gèrent aussi une certaine mémoire épistémologique institutionnelle et personnelle selon un mouvement d'exploration et d'enquête qui leur est propre. C'est justement cette gestion, dans les moments d'étude autonome, que nous cherchons à observer pour en rendre compte. **Et voici ce que dit Brousseau du répertoire, plusieurs années plus tard :**

> « Un sujet acquiert ses connaissances dans la rencontre d'un petit nombre de situations reconnues ou signalées comme similaires, au cours desquelles il corrige et diminue le caractère incertain. Par une sorte d'inférence statistique, il construit ainsi un répertoire qui lui permet d'identifier des objets, des propriétés et des circonstances. Que ce répertoire lui vienne du plus profond […], qu'il lui vienne de la transmission, intentionnelle ou non d'une culture ou qu'il lui vienne des acquisitions spontanées, des ajustements sont nécessaires. L'exercice d'un répertoire pour reconnaitre des objets exige des ajustements réciproques. L'origine de l'incertitude de la reconnaissance d'un objet est ainsi double : d'une part le répertoire quoique bien fixé ne désigner qu'une catégorie mais pas un objet unique ; d'autre part le répertoire peut être composé de catégorie floues assemblées par des connecteurs multimodaux[45]

1.5.2 Perrin-Glorian

Lorsque que nous considérons le répertoire sous sa forme de mémoire qui permet de se souvenir de, se rappeler de vécus mathématiques ayant eu lieu dans différentes situations au sein d'une institution didactique donnée ; nous nous rapprochons en partie de cette dimension de la mémoire dans les travaux de Perrin-Glorian pour l'étude, par son concept de *« situation de rappel'* » analysée et exposée dans sa thèse de recherche[46]. Nous retrouvons dans les exposés de l'auteur la dimension mnésique relative à ce qui est mobilisé par les élèves en étude autonome pour articuler les gestes de mise en place d'une technique que les « *situations de rappel* » ré actionnent. Les acceptions des *« situations de rappel* » sont comme l'auteur l'expose, des situations de revisite, de rappel par l'élève de ce qui a été fait.

[45] G. Brouseeau , cours de la XIIème écoles d'été corps 2003.
[46] Marie-Jeanne Perrin-Glorian 1992

> […] il s'agit plutôt pour les élèves de se rappeler une ou plusieurs situations déjà traitées dans des séances précédentes sur un thème, avec un peu de recul donc, de faire un retour sur ces séances, une anamnèse en quelque sorte, pour reprendre le terme que Y. Chevallard (1988) utilise[…] Les élèves qui ne se sont pas construits de représentation mentale au cours de l'action trouvent là une nouvelle occasion et une raison de le faire puisqu'ils vont devoir parler de ce qui s'est passé et le décrire sans pouvoir agir à nouveau » (p. 395)

En présence de telles situations, la dynamique du système didactique favorise un travail de reconstruction dans lequel, les souvenirs en tant que passés mathématiques dont a besoin les élèves, sont volontairement rappelés ou non. Ce processus amène à une délimitation du milieu, voir même une création de milieu à travers la représentation des situations d'action que l'élève a déjà rencontré. Par ailleurs, il existe des situations de rappel qui caractérisent aussi des temps de dévolution et d'institutionnalisation, parce que la reconstruction du vécu mathématique implique des sélection de ce que l'élève veut en faire advenir comme composant d'un répertoire dans une période d'étude autonome. Les explications de Perrin-Glorian, semblent aussi indiquer l'existence d'un jeu de rôle entre les institutions :

> Le dispositif exige en effet,[…] « de se replacer au point de vue du groupe – classe » tel qu'il a pu exister à un instant de la situation rappelée ; ce qui implique qu'un individu n'occupe plus nécessairement le rôle qui était alors le sien dans la situation […], puisque l'avancée du temps a modifié l'institution[47].

Cet apport intègre une perspective qui accord un rôle central aux institutions et aux positions qu'occupent ses membres. Les positions est le *point de vue* d'un membre à une date t dans l'institution, elles sont indispensables pour se rappeler du passé mathématique.

Les analyses et les interprétations des situations de rappel constituent une contribution à notre acception du répertoire en didactique. Cependant, bien qu'étant souvent fugaces parce que relatifs à un contexte social contingent, impliquant de faite, sa difficile reproductibilité, en plus de sa place au sein d'un cadre théorique -la théorie des situations didactiques- déjà existant, il nous semble nécessaire de les envisager au sein d'une problématique nouvelle : *dans leur fonction de constitution du répertoire didactique*.Pour cela nous les référerons plus particulièrement aux gestes d'apprentissage de l'élève.

1.6 LE TEMPS DIDACTIQUE ET LE TEMPS DE L'ETUDE MATHEMATIQUE :

Sensevy

Dans ses travaux, Sensevy[48] a mis en place une ingénierie prototypique : le Journal des Fractions fondé sur l'analyse des contraintes temporelles qui pèsent sur l'apprentissage et qui interdisent à l'élève de devenir un « *expert* ». Considéré à la fois comme un dispositif phénoménotechnique et un dispositif d'apprentissage. L'ingénierie était mise en place pour étudier les conditions temporelles qui peuvent amener les élèves à construire une activité d'étude

[47] Matheron, 2000, pp. 134 – 135
[48] Sensevy 1994-1996

mathématique réflexive dans un travail de type épistémologique. L'autonomie cognitive de l'élève semble être inextricablement liée à l'étude qui se fait dans et par l'institution didactique, laquelle serait un instrument de l'être humain qui apprend les mathématiques. Partant d'une acception de l'institution, l'interprétation de ses observations conduite sur deux ans à révéler que: la transformation des comportements ne peut s'obtenir que par un travail d'institution de longue durée, et l'existence d'une chronogenéité qui caractérise la production d'élève et qui possède la propriété de faire avancer le temps didactique.

Les interprétations issues des observations du dispositif «*le journal des fractions* » ont permis à Sensevy de construire les concepts de « *geste d'indication* » et « *d'emblèmatisatio*n»

Les « gestes d'indication » sont les gestes,

> « …par lesquels, un élève évoque les situations, en général adidactiques, où les connaissances […] se sont construites, et par lesquels il permet, à travers cette évocation, la réactivation de ces connaissances[49].

Même si les actions d'indication appartiennent en principe au rôle du professeur dans l'enseignement élémentaire dans les « situations de réactivation des mémoires », ils sont aussi des faits d'élèves (nous considérons en situation l'étude mathématique autonome. Or, justement, le dispositif du Journal laisse aux élèves une marge de manœuvre plus large pour travailler conjointement mémoire et celle de la classe à travers la sélection puis la publication de leurs travaux. En ce qui concerne « l'emblématisation », Sensevy, précis que c'est un processus par lequel une production d'élève peut trouver une place dans la mémoire didactique de classe, et qu'« emblématiser une production » consiste à « institutionnaliser sa production comme emblème, c'est-à-dire à la constituer comme élément de l'étude pour l'institution »[50] .

L'un des apports dans les travaux de Sensevy tient dans l'émergence de certaines actions telles que l'action *d'indication* et *d'emblématisassion*s par les élèves. Ces actions témoignent de la modification du rôle des élèves, puisque la gestion de la mémoire mathématique ou référence mathématique relatif à une ou plusieurs séances de cours mathématique dans une classe de l'institution scolaire est aussi à la charge des élèves. Au titre de compléments théoriques pour son travail de thèse, Sensevy interprète certains de ses résultats dans le paradigme Vygotskien. Il rappelle que, d'après le psychologue soviétique, ce n'est pas « *la modification structurelle d'une fonction psychique* » qui caractérise de manière spécifique le développement, mais plutôt les changements du type d'interrelation existants entre celle-ci et les autres fonctions. Dans le cas de la mémoire mathématique, « ce qui change, ce sont les relations inter fonctionnelles qui relient la mémoire aux autres fonctions »[51]. C'est ainsi qu'il transpose cette affirmation au milieu didactique en expliquant que :

> « Cette conception de la liaison mémoire-cognition permet d'interpréter, au moins en partie, le cas des élèves qui échouent, lors de problèmes, parce qu'ils appliquent les "mauvaises règles", en fait celles dont ils se souviennent, celles qu'ils ont *actuellement* […], comme le décrit Perrin-Glorian (1993) : « la difficulté à changer de point de vue se manifeste par exemple lors d'un changement d'activité : des élèves restent sur une

[49] Sensevy1996 p 12
[50] Sensevy, 1994, p.12
[51] Vygotsky, 1978 cité par Sensevy, 1994, p. 204

consigne précédente ou continuent à utiliser les procédures qui convenaient pour l'activité précédente »[52]

Les changements des relations entre mémoire mathématique et les autres fonctions psychiques deviennent ainsi, d'après Sensevy, une priorité dans l'apprentissage par l'étude Dans ce sens, les « gestes d'indication » et les faits « emblématiques », pourront figurer comme des « nœuds de relations logiques qui constitueront des actes engrammes ». Dans cette même optique, l'auteur clôt son interprétation en formulant l'hypothèse que les élèves qui ont déjà commencé à établir les liens entre mémoire et cognition décrits par Vygotsky,« réussiront mieux parce qu'ils intérioriseront plus facilement la mémoire du système, parce qu'ils constitueront un « emblème des instruments sémiotiques qui leur permettront de penser »[53]. Nous prenons en compte les contributions de Sensevy pour notre question de recherche, malgré le fait qu'elle pose des questions qui n'ont pas été l'objet de ses travaux. Il nous reste alors à observer et analyser le fonctionnement d'un dispositif comme celui du *Journal des Fractions* dans des situations de tâches mathématiques en étude autonome, ainsi qu'à repérer d'autres gestes accomplis par les élèves lors d'un apprentissage par l'étude autonome hors classe.

1.7 LE ROLE DE L'ETUDE AUTONOME DIDACTIQUE DES ELEVES

Fluckiger & Alain Mercier

En interrogeant la théorie des situations didactiques[54] et la théorie des champs conceptuels[55], Annick Fluckiger & Alain Mercier analysent les caractéristiques de la gestion d'un apprentissage suivant une ingénierie didactique sur la division euclidienne. Cette ingénierie visait à favoriser selon nous, l'existence d'un répertoire épistémologique mathématique collectif du système didactique à laquelle les élèves font appel de leur propre initiative. Ils soulignent les multifonctions qu'un geste d'apprentissage de *feed-back* peut conduire, comme : *« servir à produire une contradiction interne au corps des connaissances de l'élève* »[56], comme ce qui l'amène à faire appel à ses répertoires épistémologiques mathématiques. Les gestes de feed-back peuvent aussi amener à produire *« un objet à propos duquel l'élève aura à engager des pratiques apparemment semblables à celles dont il se souvient* »[57].Fluckiger et Mercier ont centrés leurs analyses sur la notion de *schème*, notamment sur les *invariants opératoires* et les *théorèmes en acte*, et ce, à partir d'une entrée sur l'analyse du système élève en étude mathématique. Bien que des travaux de recherches qui mettent l'accent sur l'une des dimensions de la relation didactique à partir d'une approche psychologique-didactique, pourraient nous apporter des éléments explicatifs sur le fonctionnement du système étude mathématique autonome des très *bons élèves*; et plus particulièrement, en ce qui concerne le répertoire épistémologique d'une tâche mathématique en étude autonome ; certaines contraintes qui portent sur des assujettissements propres aux différentes institutions, et qui ne constituent pas un

[52] Vygotsky, 1978 cité par Sensevy, 1994, p. 204
[53] Vygotsky, 1978 cités par Sensevy1994 p205
[54] *Théorie des situations didactiques (G. Brousseau)*
[55] Fluckiger & Mercier (2002) théorie des champs conceptuels
[56] Fluckiger & Mercier 2002 p29
[57] Fluckiger & Mercier 2002 p30

« *focus* » pour l'approche de la théorie des champs conceptuels, pourraient avoir un rôle central pour expliquer le choix de certains gestes d'étude ou en général pour aborder une analyse épistémique du fonctionnement de l'étude mathématique autonome des *très bons élèves* : par exemple, les assujettissements relevant d'un modèle épistémologique dominant, spécifique à la manière de concevoir l'activité mathématique dans l'institution considérée.

1.8 UNE ANALYSE DIDACTIQUE DE L'ETUDE AUTONOME DANS L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Matheron

Dans ses travaux de recherches, Matheron[58] a proposé une modélisation pour l'étude autonome didactique. C'est une modélisation qui fait apparaitre la trace de trois dimensions du rapport à un objet de savoir mathématique à partir desquelles, depuis la théorie anthropologique de la didactique, on appréhende la notion de connaissance de l'objet de savoir : Ainsi, une pratique[59] en général, et une pratique mathématique en particulier, supposent un dispositif formé de moyens matériels et de techniques mis à disposition par une institution pour y accomplir une tâche. C'est aussi un dispositif qui doit être activé par des actions d'études appropriées, une activation et une réorganisation de la mémoire qui demande des moyens personnels de l'élève lorsque ce dernier étudie de façon autonome une tâche mathématique. Voyons donc quelques exemples issus de nos propres observations:

Enoncé *Episode RC001 Réf : S-5/11052008/Géométrie dans l'espace*

Soit les points A, B, et C de coordonnées cylindriques $A(2;10°;5)$, $B(1;40°;3)$, $C(4;20°;2)$.

1- *Déterminer les coordonnées cartésiennes des trois points.*
2- *Déterminer une mesure de l'angle* ABC

Verbatim proposé par RC001
Question 1//// Soit les points A, B, et C de coordonnées cylindriques $A(2;10°;5)$ *//* $B(1;40°;3)$ *//* $C(4;20°;2)$ *// Déterminer les coordonnées cartésiennes des trois points//Alors///[silence]///On sait dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct* $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *les coordonnées cylindriques d'un point s'obtiennent par association des coordonnées polaires dans le plan muni du repère orthonormal* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *et de la côte* z *du*

[58] Matheron 2000, 2001 ; Matheron et Salin 2002
[59] Y. Matheron 2000,2001

point M *///Les coordonnées cartésiennes du point* A *s'obtiennent par application de la propriété ///* $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ *////Avec cette formule on a les coordonnées des trois points*

$A\begin{pmatrix} 2\cos 10 \\ 2\sin 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ *//* $B\begin{pmatrix} \cos 40 \\ \sin 40 \\ 3 \end{pmatrix}$ *///* $C\begin{pmatrix} 4\cos 20 \\ 4\sin 20 \\ 2 \end{pmatrix}$ *///[RC001 prend sa calculatrice pour effectuer les opérations]//On a//* $A\begin{pmatrix} 1{,}97 \\ 0{,}347 \\ 5 \end{pmatrix}$ *//* $B\begin{pmatrix} 0{,}766 \\ 0{,}643 \\ 3 \end{pmatrix}$ *//* $C\begin{pmatrix} 3{,}759 \\ 1{,}368 \\ 2 \end{pmatrix}$ *////*

Episode RC001 Réf : S-5/11052008/Géométrie dans l'espace

Solution proposée par RC001

Dispositif 1:Le produit scalaire

Question 2/// 2- Déterminer une mesure de l'angle ABC *////[silence]//Pour déterminer une mesure de l'angle* ABC *//***Je peux utiliser le produit scalaire des vecteurs** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ *///[silence]///Je dois d'abord déterminer les coordonnées puis les normes des deux vecteurs///On a alors*

// $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1{,}97-0{,}766 \\ 0{,}347-0{,}643 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1{,}204 \\ -0{,}296 \\ 2 \end{pmatrix}$ *//* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3{,}759-0{,}766 \\ 1{,}368-0{,}643 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2{,}993 \\ 0{,}725 \\ -1 \end{pmatrix}$ *///Je détermine d'abord la norme de ces deux vecteurs//Ce qui donne //////*

$AB = \sqrt{1{,}204^2 + (-0{,}296)^2 + 2^2} \approx 2{,}353$ $BC = \sqrt{2{,}993^2 + 0{,}725^2 + (-1)^2} \approx 3{,}238$ *///On sait le produit scalaire de ces deux vecteurs donne///* $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times CosABC$ *///L'expression analytique du produit scalaire donne///* $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = (x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})$ *///Ce qui implique que* $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times CosABC = (x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})$ *//Donc//*

$CosABC = \dfrac{(x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\|}$ *//D'où*

$ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{(x_{BA}\times x_{BC})+(y_{BA}\times y_{BC})+(z_{BA}\times z_{BC})}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}\right]$ ////

$\Rightarrow ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{(1,204\times 2,993)+(-0,296\times 0,725)+(2\times(-1))}{2,353\times 3,238}\right]\approx 79,496°$ *//La mesure de l'angle ABC est de* $79,496°$ *////*

<u>Dispositif 2</u> : utilisation du théorème d'Al-Kashi

*Pour déterminer la mesure de l'angle ABC//Je peux aussi utiliser **le théorème d'Al-Kashi encore appelée la relation de Pythagore généralisée ou relation aux cosinus**//D'après Al-Kashi dans un triangle quelconque comme c'est le cas ici*

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BC\times BA\times CosABC$ */////Je détermine d'abord les coordonnées du vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *puis la distance AC ///On a//* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3,759-1,97\\1,368-0,347\\2-5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1,789\\1,021\\-3\end{pmatrix}$ *//La norme du vecteur AC est//* $AC = \sqrt{1,789^2+1,021^2+(-3)^2}\approx 3,639$ *///On sait que* $BA = 2,353$ *et* $BC = 3,238$ *///On a alors*

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA\times BC.CosABC$ /// $ABC = Cos^{-1}\left(\dfrac{CA^2-(BA^2+BC^2)}{-2BA\times BC}\right.$ *///Donc l'angle ABC est//donc///est///* $ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{13,242-5,536-10,484}{-2\times(3,238\times 2,353)}\right]$ // $ABC = Cos^{-1}(0,1822)$ //

///[prend sa calculatrice]///Donc l'angle ABC est // $ABC\approx 79,496°$

Cet épisode -là résolution de laquestion2- montre que selon le dispositif mis en œuvre par l'élève RC001, diverses connaissances sont mobilisées pour déterminer la mesure de l'angle ABC. Lorsque RC001 utilise le dispositif du produit scalaire -*Question 2/// 2- Déterminer une mesure de l'angle ABC ////[silence]//Pour déterminer une mesure de l'angle ABC //**Je peux utiliser le produit scalaire des vecteurs**////* -pour déterminer la mesure de l'angle ABC, il utilise des techniques qui mobilisent des propriétés du produit scalaire-expression analytique –expression géométrique- pour exprimer en fonction des longueurs des côtés du triangle ABC le cosinus de l'angle ABC. Dans cet épisode on peut observer des transformations d'objets et surtout l'articulation par des actions personnelles de RC001 de techniques pour travailler avec le produit scalaire Les actions personnelles de RC001 qui articulent des techniques pour la détermination de la mesure d'un angle par le dispositif du produit scalaire ou le dispositif tu théorème d'Al-Kashi, montrent l'existence de culture mathématique pour déterminer la mesure d'angle dans un triangle quelconque. Nous pouvons donc dire que RC001 possède un certain nombre de répertoire de savoir relatif à la détermination de la mesure d'un angle.

Un autre épisode didactique *Episode RCA001:Réf: S-1/19012008/Equation différentielle* pour illustrer l'activation et la réorganisation de répertoire épistémologique.

Enoncé :

Soit l'équation différentielle $(E): y'+3y = x^2$

1-) Déterminer la solution générale f_1 *de l'équation différentielle sans second membre.*

2-) Soit g *, la fonction numérique définie sur IR par* $g(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ *.Déterminer l'expression* $g'(x)$ *la dérivée de la fonction* g

3-) En déduire une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y'+3y = x^2$ *, à l'aide de la méthode de variation de la constante.*

4-) En déduire la solution générale de l'équation différentielle initiale.

Verbatim de RC001
RC001 lit l'énoncé entièrement/// *La question 1//Discours////Résolution d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre de la forme* $y'+ay=0$ *// Cette équation différentielle est donc du premier ordre et homogène///La solution générale est alors//Rédaction//* $f_1(x)=ke^{-3x}$ *avec* k *une constante arbitraire///Discours///Bon//la première question est facile car c'est le cours//La formule générale////* *///En suite//La question 2///Discours///La dérivée de la fonction* g */// La fonction est une composée de fonction toutes deux dérivable sur IR/ Donc le produit est dérivable//* $g(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ *//* *Rédaction//Je pose g est égale à* uv *//donc* $(uv)'=u'v+v'u$ */// * $g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)e^{3x}+3\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ *//Ce qui donne//* $g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)e^{3x}+\left(\frac{3}{3}x^2-\frac{6}{9}x+\frac{6}{27}\right)e^{3x}=$ $g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)e^{3x}+\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)e^{3x}$ *//*

$g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+x^2\right)e^{3x}$ // $g'(x)=(x^2)e^{3x}$ ///

///Question 3/// Discours//A l'aide de la méthode de la variation de la constante///[silence]///On sait que $f_1(x)=ke^{-3x}$ ///Bon///[Silence]///On considère que la fonction particulière est de la forme $f_2(x)=k(x)e^{-3x}$ ///Je peux donc considérer que la constante k est une fonction de x ///[Silence]///Calcul de la dérivée de $f_2(x)=k(x)e^{-3x}$ ///Ce qui donne///Rédaction///La fonction $f_2(x)=k(x)e^{-3x}$ est sous la forme uv //Donc $f_2'(x)=k'(x)e^{-3x}-3k(x)e^{-3x}$ //Discours//En remplaçant $f_2(x)=k(x)e^{-3x}$ et $f_2'(x)=k'(x)e^{-3x}-3k(x)e^{-3x}$ dans l'équation $(E): y'+3y=x^2$ avec respectivement $y=f_2(x)$ et $y'=f'_2(x)$ ///On obtient/// $k'(x)e^{-3x}-3k(x)e^{-3x}+3k(x)e^{-3x}=x^2$ ///Par simplification on a/// $k'(x)e^{-3x}=x^2$ /// Ce qui donne/// $\frac{k'(x)e^{-3x}}{e^{-3x}}=\frac{x^2}{e^{-3x}}$ //Par simplification de e^{-3x} dans le premier membre on a/// $k'(x)=\frac{x^2}{e^{-3x}}=x^2e^{3x}$ //Donc on a /// $k'(x)=x^2e^{3x}$ //La dérivée $k'(x)=x^2e^{3x}$ ///[Discours]///On peut alors déterminer par intégration la fonction numérique $k(x)$ ///[Silence]///Discours///Nous savons déjà avec la question n °2 que la dérivée de la fonction $g(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ est $g'(x)=(x^2)e^{3x}$ ///Rédaction///Donc on a/// $k(x)=g(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ ///Ce qui nous permet d'avoir la fonction//// $f_2(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}\times e^{-3x}$ //ce qui donne $f_2(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}$ ////

Question n°4////En déduire la solution générale de l'équation différentielle initiale///L'équation initiale est// $(E): y'+3y=x^2$ /// De tout ce qui précède on peut alors en déduire la solution générale de l'équation différentielle $(E): y'+3y=x^2$ qui est// $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ //D'où la solution générale est $f(x)=ke^{-3x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}$ ///Voilà///

Enoncé *Episode didactique d'AC001 Réf :S-1/20012007/Equation différentielle*

On sait que la fonction $f(x)=e^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation différentielle $y'=\frac{1}{5}y$.

Démontrer alors que l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des *fonctions définies sur IR, de la forme* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k un nombre réel quelconque.*

Un lycéen, pour réaliser la tâche, peut en principe mobiliser plusieurs dispositifs, ainsi avons-nous à disposition, parmi d'autres et à titre d'exemples, les dispositifs suivants :

Dispositif 1 : *Episode AC001 Réf :S-1/20012007/Equation différentielle*

Verbatim d'AC001
Si la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *alors* $f(x)e^{\frac{-x}{5}} = k$. *La fonction ainsi définie par* $h(x) = f(x)e^{\frac{-x}{5}}$ *est une constante. Donc la fonction dérivée* $h'(x) = 0$. *Soit* f *une solution quelconque de l'équation* différentielle. *Montrons que la* h *définie par* $h(x) = f(x)e^{\frac{-x}{5}}$ *est une fonction constante. Comme* h *est le produit de deux fonctions dérivables sur IR, elle est donc dérivable sur IR et pour tout réel* x, *on a* $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{\frac{-x}{5}} f(x) + e^{\frac{-x}{5}} f'(x) \Leftrightarrow h'(x) = e^{\frac{-x}{5}}(f'(x) - \frac{1}{5}f(x)$.*Or* f *est solution de* $f'(x) = \frac{1}{5}f(x)$. *Donc* $\Leftrightarrow h'(x) = e^{\frac{-x}{5}}(f'(x) - \frac{1}{5}f(x) = 0$ *D'où* h *est une fonction constante, ce qui implique qu'il existe un réel k tel que* $\forall x \in$ *IR on a* $h(x) = k$, *donc* $h(x) = f(x)e^{\frac{-x}{5}}$ *est une constante.* *Réciproquement : on vérifie sans peine que, quel que soit le réel k , la fonction* f *définie sur IR par* $h(x) = f(x)e^{\frac{-x}{5}}$ *vérifie l'équation différentielle*

Ce dispositif par analyse/synthèse n'est nullement indiqué dans les livres actuels pour la classe de terminale scientifique. L'analyse de la question qui est ici proposée revêt pourtant un caractère heuristique qui nous paraît fondamental.

Dispositif 2 : méthode de la variation de la constante dite méthode de Laplace [60]

[60] Laplace 1749-1827

Episode AC001 Réf :S-1/20012007/Equation différentielle

Verbatim d'AC001
De façon évidente la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation. Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre solution on peut utiliser la méthode de la variation de la constance qui consiste (du fait que $e^{\frac{x}{5}} \neq 0$), à chercher la solution de (E) sous la forme générale $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ avec k une fonction dérivable. La fonction y est solution de l'équation (E) si , et seulement si $k'(x)e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{5}k(x)e^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}k(x)e^{\frac{x}{5}} = 0 \Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{x}{5}} = 0$ //La fonction $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ est par conséquent une fonction constante, donc $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ sont les solutions de l'équation (E)

<u>Dispositif 3:</u> *Episode AC001 Réf :S-1/2001/2007/Equation différentielle*

Verbatim d'AC001
y//est//une//solution//de l'équation (E) $\forall x \in I, y'(x) - \frac{1}{5}y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I; e^{\frac{-x}{5}} y'(x) - \frac{1}{5}y(x) = 0$ .Soit $g : .I \to IR..telle..que..g(x) = e^{\frac{-x}{5}} y(x)$. On a (y est solution de E sur I) $\Leftrightarrow$ ($\forall x \in I..g'(x) = 0$ Or I est un intervalle ; donc (y est une solution de E sur I) $\Leftrightarrow \exists k \in IR / \forall x \in I, g(x) = k \Leftrightarrow \exists k \in IR / \forall x \in I, y(x) = ke^{\frac{-x}{5}}$

Il apparaît au terme de cette enquête rapide, que selon les dispositifs mis en œuvre, différentes connaissances seront mobilisées par un élève pour travailler avec des équations différentielles : des *techniques*, qui mobilisent des *règles*, pour réécrire l'expression, et finalement, on peut observer des *gestes personnels* qui articulent des techniques appartenant sans doute à la culture mathématique scolaire, pour travailler avec des équations différentielles. Nous postulons que l'élève doit posséder de répertoire épistémologique de gestes personnels. Nous interprétons ainsi, son savoir technique comme effet de son appartenance à une culture. Nous pensons ce répertoire en tant qu'un constitué de connaissances donnant le pouvoir d'agir, permettant à cet élève de reproduire, à un moment approprié, une pratique précédemment apprise. Nous l'appelons le répertoire de l'élève. Pour nous, c'est une forme mémoire éfficace qui résulte de l'incorporation de gestes ou portés par une communauté qui a les propriétés d'une institution et qui signifient, pour, dans cette institution au moins, une appartenance efficace.

L'adhésion à la communauté instituée est donc signifiée par des gestes ou des savoir-faire Pour nous, le savoir mathématique est le résultat de choix antérieurs discutés et autour desquels s'est formé un consensus dans la communauté mathématique. Il conserve alors la trace des rapports institutionnels qui ont marqué la communauté en laquelle il est mobilisé. Pour cette raison, nous pouvons parler de la mémoire du savoir :

> « L'accomplissement d'un geste mathématique [……] actualise alors le souvenir du choix du type d'action [….] donc de l'acte [……….] volontaire et soumis à des […] raisons [……] dont le savoir est porteur[61].

Dans une communauté scolaire ou sociale, l'élève a appris des organisations d'actions mathématiques, pour résoudre une équation différentielle du premier degré $y' = ay$, comme pour calculer $\int_0^1 e^x dx$. Ces organisations sont ce que nous appelons avec Matheron une mémoire externe, dépositaire du savoir pratique. Sa nature externe la rend accessible et partageable, elle peut être observée comme propriété personnelle mais elle appartient à tout *bon sujet* institutionnel. Les éléments publics de cette mémoire sont consignés dans des œuvres mathématiques : manuels et livres scolaires, etc. En mathématiques c'est d'abord un construit du travail collectif, un objet transe-institutionnel, reconnu par la *communauté mathématique*. Pour les pratiques d'apprentissage scolaire, nous dirons comme Matheron qu'il s'agit d'une mémoire *officielle*.

En ce point, on peut décrire le répertoire de l'étude mathématique autonome comme: composé autour d'une mémoire officielle, relative aux savoirs mathématiques et à leurs pratiques et dont des éléments ont été enseignés dans une institution didactique. Ces éléments font partie d'un ensemble d'objets externe à l'élève à partir duquel sont reconstruits, lorsque c'est nécessaire à la pratique, des actions ou des gestes de son étude mathématique autonome. Les pratiques et les gestes de l'étude autonome sont donc des résultats de l'incorporation de la mémoire officielle, permettant à l'élève d'articuler les moyens matériels mis à sa disposition, ou les moyens qu'il s'est mis à sa propre disposition, et les techniques qui lui permettront de reproduire la pratique attendue. Cette mémoire officielle, est soumise en classe à un procès d'objectivation[62]. Certains de ses éléments doivent en effet *être donnés à voir* par l'intermédiaire d'une *production*. Ainsi, on nomme ces objets publics de la classe le *mémoire ostensive*:

> *« La Mémoire ostensive,* […] est délibérément donné à voir, de manière revendiquée, par des moyens appropriés, à ses propres sujets ou à d'autres personnes par une institution ou un individu, quelle que soit sa position dans l'institution. Bien qu'il obéisse, suivant la position occupée par la personne, à certaines règles institutionnelles […], cet ostensif peut être réalisé […] dans le cadre de divers registres perceptifs : gestuels, discursif-langagier, graphiques, scripturaux […] Il s'appuie sur des événements relatifs au savoir enseigné qui ont été publiquement, et intentionnellement pour une grande partie d'entre eux, donnés à

[61] Matheron 2005 p 84

[62] Il s'agit de montrer les éléments de mémoire pratique comme étant partagés ou reconnus par les membres – du moins une partie – d'une institution.

voir (ou à entendre, etc.), ainsi que sur certains événements que l'on ne montre plus »[63].

C'est dans le souci d'homogénéiser les connaissances pour standardiser les pratiques, qu'apparaît relancée la reconstruction de la mémoire mathématique de l'étude relatif à des niveaux classes $n-1$ dans une classe de niveau n, dans les moments d'étude relatifs aux objets de savoir sensibles dans la classe n. Cette reconstruction se fait par l'intermédiaire du travail des pratiques, ce sont alors des objets ostensifs qui permettent l'évocation publique des éléments de mémoire et vont conduire à ce que, dans une institution où une action collective se partage, apparaisse, autour de ces ostensifs et appelé par eux, du savoir. Ce qui est conforme à ce qu'en dit l'anthropologue Mary Douglas[64] sur la manière dont « *les institutions pensent* ».

De tout ce qui précède, nous considérons deux idées pour notre recherche.

Premièrement: un cadre théorique qui intègre des perspectives anthropologiques, ethnologiques et sociologiques et qui rend compte des propriétés des pratiques institutionnelles :

1) la reconnaissance d'ostensifs qui outillent les pratiques d'étude et qui sont institués[65], ils deviennent des emblèmes du savoir officiellement partagé ;

2) les assujettissements aux institutions de certains éléments officiels des pratiques personnelles, puisque les institutions influent sur le répertoire épistémologique de leurs membres. Notre question tient alors à l'identification de la place que la dynamique institutionnelle (didactique) donne aux rôles que ses sujets (apprenants) y jouent (dans le cadre de l'étude mathématique autonome que leur position institutionnelle demande).

Deuxièmement: la modélisation de phénomènes liés par la notion de répertoire.Ce répertoire sera sans doute largement convoqué dans l'étude mathématique autonome. Nous pensons qu'il est construit à partir d'une 'référence commune' entre élèves et le maître (institution). C'est ainsi que nous avons observé comment les élèves activent les outils nécessaires pour accomplir une technique qu'ils peuvent imaginer.

Les observations relatives aux séances d'études mathématiques autonomes des élèves qui ont participé à cette recherche de thèse en des lieux privés, arrière-plan de l'institution scolaire, conduiront sans doute à l'identification des non ostensifs qui accompagnent le travail de la technique. Et effectivement, force a été de constater que ce fut le cas. Nous avons donc dû imaginer une méthodologie permettant l'identification de certaines traces, relatives à une dimension du répertoire de l'étude : les non-ostensifs associés aux outils, et qui sont mobilisés en même temps que les gestes techniques. Ainsi nous aurons à analyser, parmi d'autres, l'une des tâches didactiques assignées aux élèves dans leurs études mathématiques autonomes : la gestion autonome des objets antérieurement appris. Nous avons en effet à comprendre la construction par les élèves d'une situation pour l'étude autonome, dans le cadre général du fonctionnement d'un système didactique.

[63] Matheron, 2001, p. 236 – 237
[64] Mary Douglas
[65] Bosch & Chevallard, 1999

Nous pourrions aborder ces questions dans l'idée d'une dialectique ancien-nouveau[66] qui permet à l'élève « d'anticiper » et de prendre des décisions adéquates et justes. En effet, Joshua & Dupin[67], considèrent que l'élève et le maître évoluent dans des registres épistémologiques différents ; celui des organisations et de l'exposition du savoir est sous la responsabilité du maitre, et celui de sa mobilisation efficace est sous la responsabilité de l'élève. Dans l'étude autonome mathématique, l'élève est le maître, car il maîtrise le savoir ancien, donc il est seul capable de les réorganiser. Mercier[68] note alors que le temps didactique s'avère être progressif et cumulatif, tandis que le temps de l'élève n'est pas identique à celui que génère la dialectique ancien-nouveau. Il souligne la nécessité de prendre en compte au moins deux niveaux du rapport de l'élève au savoir :

> « Le premier est un rapport au savoir informel et personnel, qui se développe lorsque l'élève résout des problèmes. Le second est un rapport public et formel qui est établi dans et par les interactions sociales élève – maître. Lorsque ce second rapport émerge, il permet à l'élève de vérifier si sa connaissance est suffisamment solide pour être nommée, démontrée et donc partagée avec d'autres […] Le processus d'apprentissage est donc un progrès produit par une dynamique entre privé et public : le sujet entre dans un rapport avec la matière de l'apprentissage à travers son rapport au savoir privé et personnel. Cependant, pour pouvoir progresser, il doit rendre public ce rapport initial, et le mettre à l'épreuve dans un groupe. De cette relation sociale, un rapport au savoir plus formel émerge, même s'il n'est pas encore institutionnalisé comme tel. […] »[69] .

Nous nous proposons de suivre cette piste. Dans tout ce qui précède, nous avons présenté un itinéraire des principaux travaux relatifs aux périodes d'étude mathématique autonome au sein d'une institution donnée. Notre but a été de positionner ce travail de thèse par rapport aux autres travaux qui tous portent sur des thèmes associés, et d'exposer les travaux qui contribuent à la thèse. Dans ce qui suit, nous apportons des justifications de notre choix d'une voie didactique, comme l'approche la plus convenable pour l'analyse de l'étude par des élèves qui réussissent les mathématiques. Ayant défini quelque peu notre position, nous tentons donc de nous situer maintenant dans un paysage plus vaste

1.9 VERS UNE PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE POUR COMPRENDRE L'ETUDE MATHEMATIQUE AUTONOME ET SON FONCTIONNEMENT

1.9.1 Qu'est-ce que nous entendons par l'étude ?

Après avoir donné l'acception étymologique du mot « étude » et ses différentes significations selon le Petit Robert[70], Erdogan[71] réinvestit une pensée de Gaston Bachelard

[66] Mercier &Chevallard1987
[67] S. Joshua &Dupin1993
[68] A. Mercier 2005
[69] Version anglaise: traduction de l'auteur. Mercier & al 2005, page 142
[70] Dictionnaire de la langue française édition 2000
[71] A. Erdogan 2006

empruntée à Goethe, pour proposer une modélisation de l'étude. On y trouve la trace de trois dimensions du rapport à l'étude.

Une première dimension de l'étude est celle de « l'action attendue d'une personne en position d'étudiant », montrant sur quoi l'intention d'apprendre devrait se centrer. L'auteur explique que si pour un élève, en tant que sujet intéressé au savoir, le but de toute activité mathématique est d'apprendre quelque chose de l'ordre du savoir, comprendre est l'action qui se trouve à l'origine de toute nouvelle tentative d'apprendre.

> « Quand l'enfant commence à comprendre qu'un point invisible doit précéder le point visible, que le plus court chemin d'un point à un autre est conçu comme une droite avant même qu'on la trace sur un papier, il en éprouve un certain orgueil, une certaine satisfaction. Cet orgueil correspond précisément à la promotion intellectuelle qui fait passer l'enfant de l'empirisme au rationalisme. Ainsi, au lieu de constater, l'enfant s'aperçoit qu'il comprend. Il vit une mutation philosophique[72]

Une deuxième dimension est que *« l'étude se réfère à la réflexion, à l'effort de penser, et est coûteuse du fait qu'elle est à l'opposé d'une simple pratique et d'une simple routine.* » Ainsi, l'étude est l'effet de la suspension de l'action, elle est l'activité que l'on conduit sur le temps de loisir, un loisir sérieux qui conduit soit, à revenir sur les conditions de l'action pour juger de son efficacité et de sa réussite, soit à anticiper l'action en recherchant par avance à identifier les conditions de la réussite.

Et la troisième dimension est que l'étude amène à une attitude d'identification des causes et de recherche d'explication comme cela a été le cas des Grecs, contrairement aux Babyloniens :

> « Ce qui marque justement l'originalité des Grecs réside en ceci : on passe de la connaissance des faits à la recherche des causes, de la maîtrise de certains savoirs à la démonstration rigoureuse de leur validité. Et cela s'observe dans tous les domaines du savoir : l'astronomie, les mathématiques, la médecine, l'histoire et bien sûr la philosophie. Hérodote, le premier historien, ne se contente pas de raconter les guerres entre Grecs et Barbares, il en recherche les raisons : […] Hippocrate de Cos, celui que l'on considère comme le père de la médecine occidentale, ne se contente pas d'établir des listes des maladies, d'en répertorier les symptômes, il propose pour une première fois une étiologie (Recherche des causes) de la maladie. En mathématiques, la recherche des causes prend la forme de la démonstration ; Alors que les Babyloniens connaissaient les propriétés des angles, des cercles, […] les grecs, eux, veulent prouver. Toute l'entreprise des éléments d'Euclide se distingue de la simple collection des découvertes géométriques (des babyloniens) en ce que son auteur veut démontrer chacune des propositions[73].

Eu égard à ces trois dimensions, l'étude apparaît comme l'emblème des comportements didactiques, dans la mesure où elle détermine une approche de la nécessité et de l'efficacité des apprentissages visés par une tâche donnée. C'est plus présent si possible en mathématiques dont le nom est dérivé du grec *mathema*, ce qui s'enseigne. Ainsi, l'étude est l'activité de celui qui, à loisir, cherche à savoir, et sa définition ne détermine pas ce qu'est le travail de qui enseigne, et

[72] G. Bachellard 1949 page 13
[73] Revue Sciences humaines hors-série de la période décembre 2000/janvier-février2001, extrait de l'article « y-a-t-il eu un miracle grec?»

donc, cherche à en devenir le promoteur.

1.9.2 Le concept d'autonomie

Ce concept d'origine grecque désigne la capacité de se gouverner par ses propres lois, il est souvent au centre des discussions dans la noosphère : l'autonomie est souvent donnée comme la valeur suprême du savoir, puisqu'elle signe la capacité à déterminer les conditions de l'action et les normes de son évaluation. Malgré le fait que la plupart des activités dans des classes de l'institution scolaire soient imbibés de la réalisation de tâches coopératives à propos desquelles élèves et professeur accomplissent certains gestes d'étude selon leur position institutionnelle respective, il n'en demeure pas moins qu'il existe des phases d'apprentissage hors classe où l'élève est amené à opérer en autonomie didactique.

En empruntant à Kenneth Joseph Arrow, le concept de l'apprentissage par la pratique selon lequel:«l'efficacité des facteurs de productions dépend de l'apprentissage par la pratique[….]». Concept que reprend Paul Michael Römer en stipulant que « le processus de production est cumulatif ». Nous pensons que l'efficacité des facteurs de productions mathématiques, de réussites scolaires dépend, plus particulièrement en mathématique, de l'apprentissage par la pratique que représente l'étude autonome, et que l'apprentissage mathématique devient de plus en plus efficace, le processus de réussite des apprentissages mathématiques est cumulatif par la pratique personnelle de l'élève. Pour Kenneth Joseph Arrow

> « L'efficacité des facteurs de productionde la réussite[74], dépend de l'apprentissage par la pratique » [75] donc par l'étude autonome, ainsi l'apprentissage « mathématique » devient de plus en plus efficace au fur et à mesure qu'elle est mise en pratique

Pour Georges Le Meur[76], le concept d'autonomie ne décrit pas une forme d'auto-apprentissage, d'auto-instruction, d'autodidaxie. C'est un mode de formation, que l'on peut normée la *« néo autodidaxie »*. Cette néo-autodidaxie, a contrario des modèles traditionnels, favorise davantage l'autonomisation des élèves qui veulent se former et non être seulement formés. C'est elle qui conserve à l'élève des contrôles sur toutes les phases de son apprentissage :

> - Le contrôle pédagogique, car les ressources existent et peuvent être disponibles- Le contrôle psychologique, car la chrono-genèse scolaire et les évolutions culturelles l'y ont préparé- Le contrôle social du fait que son habitus clarifié le conduit à connaître l'espace des possibles éducatifs.

On le comprend, le concept d'autonomie appartient fortement au discours pédagogique et il porte une exigence essentielle de tout acte éducatif. Mais selon les auteurs qui s'en saisissent, il permet de penser la fin du processus, ou il conduit à en redéfinir complètement les conditions

[74] Plus particulièrement en mathématiques
[75] K.J. Arrow théorie des croissances endogènes
[76] Le Meur G. néoautodidaxie et formation, lyon chronique social : les presses de l'université Laval, 1998 , p216

institutionnelles. Nous l'intégrons en didactique sous la forme faible adjectivale de l'étude autonome, pour dire que dans les moments de l'étude, les élèves sont bien soumis aux normes scolaires mais qu'ils ont aussi à s'en tenir à une « bonne distance » parce que ces moments leur appartiennent en propre et qu'ils ont à y former leur expérience d'un domaine de réalité et des savoirs sociaux afférents (pratiques et discursifs).

L'autonomie didactique sera donc pour nous la possibilité (personnelle et institutionnelle) qu'a un individu à prendre la responsabilité et le contrôle de ses propres apprentissages, sachant que dans le cas des élèves, le contenu officiel de ces apprentissages est, a minima, désigné par un professeur. Si donc l'autonomie est un moment où l'apprenant « *est seul à la barre et ne doit compter que sur ses propres forces dans son topos variant* » d'une institution à l'autre[77], on doit considérer pourtant que les élèves apprennent d'abord en tant qu'ils sont élèves c'est-à-dire, assujettis à une institution didactique qui organise la matière de leur étude dans le cadre temporel des systèmes didactiques. C'est une organisation de longue haleine, qui donne du temps : la durée légale d'un système didactique est en effet d'une année pleine à l'école (30 à 40 semaines) et a tout récemment été réduite à un semestre, à l'université, mais les cycles d'étude sont le plus souvent de deux ou trois ans, sachant que l'emprise hebdomadaire de la présentation scolaire d'une matière d'étude varie entre une et douze heures.

1.9.3 La notion « d'étude mathématique autonome »

Eu égard à l'éclairage que nous venons de mener en ce qui concerne la notion « d'étude » et celle de « l'autonomie », il apparaît que l'étude autonome désigne le travail qui incombe à l'élève et qui lui permet de progresser dans la construction des apprentissages initié ou effectué dans l'institution scolaire. L'étude autonome est fonction du topo de l'élève. Elle semble indispensable car seul, l'enseignement ne peut garantir les apprentissages nécessaires à la réussite : de l'enseignant à l'apprenant il y a un « gap », que justement l'étude et en particulier l'étude autonome, désigne. Ses fonctionnements désignent le besoin d'apprendre créé *par les injonctions didactiques*[78] et les manières d'y faire face. Comme nous l'avons donc noté, le processus d'étude autonome est fondamental dans toute activité cognitive orientée. En particulier, ce processus prend une place privilégiée dans les institutions où l'apprenant prend en charge la responsabilité d'articuler et de réguler, au fil de plusieurs mois voire plusieurs années, des répertoires mathématiques désignées par la noosphère. Nous considérons que l'étude autonome mathématique est un moment d'apprentissage au cours duquel l'élève est à la fois acteur, producteur et régulateur des apprentissages par la mise en œuvre de répertoires.

Selon les instructions officielles, l'élève doit s'engager dans l'étude des tâches mathématiques. Cet investissement suppose l'élaboration d'un projet, c'est-à-dire la recherche d'une maîtrise effective des répertoires mathématiques construits en classe ou non. Une telle reconstruction implique pour l'élève, la mobilisation, de manière privée et/ou publique, des

[77] Chevallard 2002a, p 16

[78] « Les fictions institutionnelles du temps didactique sont porteuses d'injonctions didactiques bien précises, qui renvoient à l'action personnelle de l'élève ce que l'enseignement ne peut prendre en charge » Alain Mercier 2001 page 33

objets mathématiques des classes antérieures[79]. Dans ce sens, et comme une toute première justification de l'importance du sujet de cette recherche, la gestion de l'étude, considérée comme une tâche didactique à la charge de l'apprenant, s'avère donc incontournable.

Comme nous l'avons mentionné, certaines approches (la psychologie et la sociologie) qui se sont intéressées à l'étude autonome n'envisagent pas des phénomènes didactiques propres aux pratiques de l'élève; par exemple on n'y considère pas l'existence d'un contrat régulateur du système didactique et des rapports au savoir en jeu, c'est-à-dire ***le contrat didactique***. Ces approches ne considèrent pas non plus, pour l'étude autonome, ***la nature du savoir étudié*** dans la sphère privée, ***sa dimension épistémique*** et dans certains cas, les conditions et contraintes propres aux ***institutions didactiques*** de l'arrière-plan de la classe sont aussi ignorées ; par exemple, les contraintes temporelles de l'apprentissage.

Dans le champ de la didactique des mathématiques, nous rencontrons une double préoccupation fondatrice de cette science. Il s'agit de l'observation et de l'analyse des sphères privées entourant le système éducatif, afin d'évaluer puis de concevoir des dispositifs facilitant l'étude[80]. Nous considérons qu'une analyse du fonctionnement de l'étude autonome pour l'apprentissage des mathématiques au lycée relève d'une double préoccupation :

> D'une part, c'est de façon incontournable à partir de l'observation et l'analyse des interactions entre les élèves et les pratiques mathématiques, qu'il est possible d'identifier des conditions et des contraintes relatives à l'évocation de connaissances préalables.
>
> D'autre part, ces analyses concernant le fonctionnement et la gestion de l'étude autonome par des répertoires cherchent à concevoir des améliorations dans une des dimensions de la mise en œuvre de dispositifs facilitant l'étude.

Il nous semble donc nécessaire de conjecturer que l'étude autonome est constitutive de toute relation didactique et que les phénomènes de mise en œuvre de répertoires y sont centraux, mais aussi que l'écologie spécifique du savoir à explorer peut être pensée efficacement par la théorie des situations didactiques, en termes de milieu[81]. Cette interrogation sur les outils et les modèles adéquats pouvant permettre une certaine analyse du fonctionnement de l'étude autonome des élèves en réussites mathématiques constitue l'objet principal de notre recherche, ce qui nous conduit à nous baser sur ces outils théoriques déjà disponibles pour la construction d'un modèle spécifique à notre projet.

Pour mieux orienter notre recherche et entreprendre une étude du répertoire en didactique**,** nous allons dans le chapitre 2 explorer la perspective anthropologique du didactique ; parce que les phénomènes qui nous occupent sont avant tout relatifs à des savoirs qui se manifestent à travers des pratiques. Cette perspective anthropologique pourrait assurer, au moins au niveau théorique et comme point de départ, une délimitation de la recherche parce qu'elle place, au premier plan, trois aspects fondamentaux que nous engagerons l'analyse de:

L'identification d'une dialectique entre objets ostensifs et non-ostensifs[82], objets définis

[79] Fluckiger et Mercier, 2002
[80] Matheron, 2002
[81] G. Brousseau 1986
[82] Bosch, 1994a

par les institutions didactiques et qui outillent les pratiques qu'on y accomplit.

Comment des rapports entre sujets et institutions et des assujettissements réciproques, organisent le répertoire d'étude. Quelles sont les fonctions que la dynamique institutionnelle donne à ses sujets.

1.10 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré qu’en Didactique des Mathématiques les recherches relatives à l’étude mathématique autonome en thème de répertoire ou thème associé avaient été très peu nombreuses, même si elles sont utiles à notre projet. Dans cette exploration, notre objectif a été de situer l’étude autonome en termes d’utilisation et de reconstructions de répertoires mathématiques et la question de son existence dans un cadre précis. Nous avons relevé principalement deux tendances de travaux abordant le sujet. Le premier travail l’aborde depuis une perspective systémique, tandis que le deuxième prend une voie anthropologique. Remarquons que, même si certaines recherches peuvent nous fournir des références sur la manière dont l’élève gère l’étude mathématique au niveau de l’enseignement secondaire, aucune d’elles ne prend comme objet de recherche le fonctionnement et la gestion du répertoire épistémologique mathématique dans le temps de l’étude autonome que les élèves conduisent en dehors de la classe.

Comme les phénomènes qui nous occupent sont relatifs à un savoir, et que leur expression relève des « pratiques » concernant ce savoir, nous plaçons notre travail sur le fonctionnement de l’étude autonome au sein d’une anthropologie des savoirs avec une dimension épistémologique Nous tentons ainsi d’apporter une nouvelle ouverture à l’étude du cognitif telle qu’on peut la développer dans une théorie anthropologique didactique.

Dans le chapitre suivant, nous détaillons le premier cadre théorique de cette recherche. Nous présentons plus précisément les outils dont nous aurons besoin pour la suite de notre travail : nous le ferons en construisant la problématique de recherche, la démarche méthodologique, les moyens des analyses et de la discussion des résultats.

Chapitre 2 :

UNE APPROCHE DU CADRE THEORIQUE MOBILISE

L'anthropologie des savoirs

Outils théoriques et méthodologiques en Didactique des Mathématiques

2.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, après avoir indiqué l'intérêt d'une approche didactique pour aborder l'analyse de travail mathématique d'enquête et d'exploration hors école des élèves à travers l'utilisation et la construction de répertoires épistémologiques mathématiques , nous détaillons le cadre de l'inscription théorique de notre recherche : la Théorie Anthropologique du Didactique.

Dans une première partie, nous abordons les principaux outils de la théorie : la transposition didactique des savoirs, les notions fondamentales à la base de la modélisation du cognitif, le modèle général de l'activité humaine que la théorie anthropologique didactique met à disposition, l'organisation de l'étude proposée pour la reconstruction des organisations mathématiques en étude autonome, le modèle de l'espace des organisations didactiques possibles, et le système de contraintes et conditions qui influencent le « processus d'apprentissage mathématique ».

Dans une seconde partie, nous décrivons deux notions fondamentales dans la didactique française dès ses origines : celle de *contrat didactique* et celle de *milieu*, qui seront elles aussi nécessaires pour l'établissement de la problématique et les analyses des résultats. Ces notions n'ont pas pour origine la TAD, mais elles font partie intégrante de cette construction.

Dans l'exposé nous signalons l'intérêt particulier des outils de la TAD pour un examen du fonctionnement et de la gestion du répertoire épistémologique mathématique dans sa dimension institutionnelle, et l'observation de celui qui est construit et mobilisé par un élève observé dans le cadre de son étude autonome.

2.2 L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Nous situons notre thèse de recherche dans une approche sociale, portée par l'anthropologie. En effet, nous cherchons à comprendre, à partir de données empiriques, comment les élèves parviennent à réussir en mathématiques, grâce à leur étude autonome mathématiques. Notre recherche analyse ainsi une dimension cognitive en mathématiques, d'un point de vue que nous qualifions *de l''anthropologie du didactique*

Dans les développements les plus récents[83] , la modélisation anthropologique du didactique ou TAD initiée par Chevallard[84] s'inscrit dans un ensemble de recherches mondiales qu'on a pu nommer *programme épistémologique* et dont la principale caractéristique tient en ce qu'il se donne de l'activité mathématique comme premier objet. La notion de *transposition didactique* est le germe de la TAD. Cette notion fait son entrée en 1980. Avec celle-ci, Chevallard affirme que le savoir *à enseigner/ à apprendre* ne peut pas se laisser décrire comme une simple sélection

[83] Bosch 2000
[84] Chevallard 1992, 1999, 2002 ; Chevallard, Bosch et Gascón, 1997

d'objets mathématiques, une partie des savoirs issus d'une communauté « savante »[85]. Il affirme et montre qu'au découpage est associée une nouvelle construction qui change le sens, et la forme des objets, les rendant impropres à la pratique initiale qui les faisait vivre. Ainsi, il explique que déjà, un mathématicien ne communique pas ses résultats sous la forme où il les a trouvés. Il les décontextualise et les dépersonnalise, afin de leur donner, pour être communicables, une forme aussi générale que possible. En revanche, pour étudier il est nécessaire de faire le travail inverse une re-contextualisation, produisant des situations qui vont donner un sens (nouveau) aux connaissances[86].

> « Tout projet social d'enseignement et d'apprentissage se constitue dialectiquement avec l'identification et la désignation de contenus de savoirs comme contenus à enseigner. […] Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le « travail » qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé transposition didactique[87].

D'après Bosch et Gascón (2006), une des principales contributions de la *théorie de la transposition didactique* dans les progrès de la didactique des mathématiques comme champ de recherche, a été l'élargissement de l'unité empirique d'analyse. Dans ce sens, cette théorie a mis en évidence que,

> […] it is not possible to interpret school mathematics properly without taking into account the phenomena related to the school reconstruction of mathematics, whose origin has to be found in the institutions that produce mathematical knowledge[88].

Différents types de savoirs peuvent être distingués : le *savoir savant*, terme utilisé d'une manière qu'on peut voir ironique, pour caractériser le savoir qui « garantit et légitime le processus d'enseignement/ apprentissage »[89] ; le *savoir à enseigner* qui est désigné par les instructions officielles issues des décisions prises par la noosphère, le *savoir enseigné*, tel qu'il est présenté par les professeurs dans les classes et le *savoir appris*, au terme de l'étude que font les élèves. Le processus de transposition didactique souligne donc la relativité institutionnelle des savoirs. Les assujettissements institutionnels dont témoigne la transposition des savoirs nous semblent pouvoir rendre compte de l'intervention des institutions. Ils sont susceptibles d'influencer l'organisation et le fonctionnement du processus d'étude. Ces assujettissements sont, par exemple, observables dans l'utilisation d'un manuel scolaire spécifique à chaque classe, pour l'étude d'une organisation mathématique.

Chevallard[90] prend comme référence Michel Verret[91] pour énoncer les conditions nécessaires des savoirs apprenables :

---

[85] Joshua et Dupin, 1993
[86] Briand & Chevalier, 1995
[87] Chevallard, 1991 p39
[88] Bosch et Gascón, 2006 p55
[89] Bosch et Gascón citent Kang et Kilpatrick (1992) pour illustrer la notion de *savoir savant* : « A scholarly body of knowledge is nothing other than knowledge used both to produce new knowledge and to organize the knowledge newly produced into a coherent theoretical assemblage » (p. 56)
[90] Y. Chevallard, 1991
[91] Michel Verret, 1975

> « *la désyncrétisation du savoir, la dépersonnalisation du savoir, la programmabilité de l'acquisition du savoir, la publicité du savoir, le contrôle social des apprentissages* »[92].

Dans la transposition didactique, ces conditions sont satisfaites à travers le processus nommé *mise en texte d'un savoir*. La mise en texte nomme le processus de production d'une *programmabilité de l'acquisition du savoir*, car le texte émerge comme norme de la progression dans la connaissance, que ce soit par avance ou après coup, rien n'y change. Pour Chevallard et Mercier[93], la progression est marquée par :

> « *l'introduction successive de différents objets d'apprentissage, dont les programmes officiels fournissent la liste* »[94].

Chaque objet introduit produit ainsi l'obsolescence interne de l'objet précédent. Le *nouvel* objet de savoir rend possible la rénovation de l'étude et c'est ainsi que s'institue la structure du *temps didactique*. L'institution *classe de mathématique à un instant t donné du cycle scolaire* reprogramme chaque renouvellement et évite ainsi l'obsolescence, en donnant à chaque fois la naissance à un nouvel élément du temps : c'est ce processus qu'on appelle la *chrono-genèse*. Car, comme les auteurs l'indiquent, le temps est défini par un processus régulier, continu, homogène, mais il ne peut être pour cela considéré comme universel. Ainsi, le temps des horloges est d'abord celui de la mécanique, puis celui des phénomènes physiques.

> « Tout temps, y compris le temps des horloges, n'est jamais que le temps d'une espèce particulière de phénomènes, dont il naît ou dont on le fait naître […] Tout système, en effet, engendre une temporalité spécifique, qui donne sens aux événements constitutifs de son histoire[95].

Dans ce sens, et pour l'analyse du fonctionnement didactique de l'étude, nous repérons aussi le temps scolaire, celui de l'institution: *c'est le temps marqueur des événements pédagogiques ou sociaux dans l'établissement scolaire*. Et le temps de l'élève ou temps de l'apprentissage, *associé à l'organisation personnelle des savoirs chez l'élève*. Une telle structuration des temps propres aux institutions pourrait aussi jouer un rôle central lors du repérage temporel des événements du passé. La transposition didactique souligne aussi la différence des places entre le maître et l'élève par rapport au savoir en construction, ce que Chevallard nomme : le *topo genèse du savoir*. Cette distinction se reconnaît au moins à travers deux formes :

- *l'élève, par nature, se définit ainsi par un manque de savoir (en attente de l'apprentissage), ce qui le met toujours en retard par rapport au temps didactique*.

- *l'élève remarquable qui nous intéresse, à la différence de l'élève en difficulté, est capable de maîtriser le passé didactique, ce qui le rend capable d'anticipation*.

Mais seul le maître peut maîtriser le futur, lui seul décide de ce que l'élève peut apprendre. Ainsi, en revenant aux pluralités des temps, on distingue le temps de l'enseignement, où

[92] Chevallard, op. cit. p. 58
[93] Chevallard et Mercier1987
[94] Alain Mercier 1987 p 3
[95] Chevallard et Mercier, 1987, pp. 7 – 8

l'anticipation est essentielle et le temps de l'apprentissage ou temps des élèves, où un certain type de rétroactions est en travail. De façon simultanée, le mouvement didactique tend en outre à produire deux registres distincts d'actes épistémologiques : deux *manières* de savoir. Ainsi,

> « Lorsque la transposition didactique opère sur les objets à enseigner selon la différenciation empiriste du « donné » et de la « théorie », l'élève va se retrouver du côté de l'empirique, de la « constatation », de la « vérification », de l' « application », etc. Au maître sera réservée la théorie. Il y a donc ce que le maître doit enseigner et la manière dont il doit l'enseigner, et il y a ce que l'élève doit savoir, et comment il doit le savoir »[96]

La dichotomie des places et son accomplissement didactique, impliquent aussi une dichotomisation des rapports à l'objet de savoir : une place pour le maître et l'autre pour l'élève. Cette réalité produit des « transactions » entre le rapport officiel, qui ne tient pas compte de la topogenèse, et le rapport de l'élève, qui doit être idoine au rapport officiel. Dans la théorisation de 1999 sur *L'analyse des pratiques d'apprentissage en théorie anthropologique du didactique*, une fois introduite la notion de *« praxéologie »* et en particulier celle de « *tâche »* – nous préciserons ces deux notions plus loin – Chevallard précise cette distinction des places occupées par l'enseignant et l'enseigné – nous dirions aussi des places offertes par l'institution qu'est la classe. Comme cet auteur l'explique, dans un certain nombre de contextes, les « *tâches* » didactiques sont coopératives :

> « elles doivent être accomplies *de concert* par *plusieurs* personnes $x_1, \ldots, x_n$, les *acteurs* de la tâche »[97].

Chacun de ces acteurs effectue donc certains *gestes*, dont «l'*ensemble constitue alors son rôle dans l'accomplissement de la tâche coopérative*». Ces gestes sont différenciés selon les acteurs et coordonnés entre eux par la manière de réaliser la *tâche* (disonsτ) prévue par l'institution. L'ensemble de ces gestes, qui déterminent le rôle des x_i lorsque la *tâche* est accomplie selon τ, nomme le *topos* de x_i dans la tâche. Plus précisément, il ajoute :

« Le grec *topos* signifie « lieu » : le *topos* de x_i, c'est le « lieu de x_i », sa « place », l'endroit où, psychologiquement, x_i éprouve la sensation de jouer, dans l'accomplissement de *t* [la tâche], « un rôle bien à lui ». Dans le cas d'une classe, on parlera ainsi du *topo* de l'élève et du *topo* du professeur. Ainsi, lorsqu'une classe de mathématiques « fait un exercice », ce qui est une tâche éminemment coopérative, la sous-tâche consistant à fournir l'énoncé de l'exercice revient, généralement, à l'institution : elle appartient à son *topo*. La tâche consistant à produire – par exemple un écrit – une solution de l'exercice, relève quant elle, du *topo* de l'élève, tandis que la tâche consistant, ensuite, à fournir un corrigé ressort, à nouveau, du *topo* du représentant de l'institution. Si, au cours de la résolution de l'exercice, un élève se pose une question ou pose une question, il effectue ainsi ce qui est vu ordinairement comme une simple action, appelant une action homologue de la part d'un expert – geste qui peut consister, quelquefois, à refuser de répondre.»[98]

L'analyse des types de positions offertes par l'institution et de leurs rôles vis-à-vis de

---

[96] Chevallard 1991,p75.
[97] Chevallard, 1999, p. 247
[98] Chevallard, 1999, p. 247

l'évocation des connaissances anciennes nécessaires pour l'étude d'un nouveau savoir, nous semble constituer un des paramètres à considérer lors d'une analyse sur le fonctionnement de l'étude mathématique autonome. Car, comme nous l'avons vu, les rôles attendus des acteurs conditionnent jusqu'à un certain degré, les gestes que l'acteur doit accomplir. Notamment, il s'agit pour ce qui nous intéresse ici des gestes de réactivation d'objets, de transformations et des rapports à ces objets.

2.3 NOTIONS FONDAMENTALES

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), à la base de la modélisation du cognitif, se trouvent quatre notions fondamentales : celles d'objet, de rapport, de personne et d'institution. Dans ce qui suit, nous reprenons certains éléments de la présentation de ces notions qui ont été exposées par Chevallard dans son article approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques[99]. Ces notions constituent les outils de base pour situer notre problématique de recherche.

Toute entité, qu'elle soit matérielle ou immatérielle, qui existe pour au moins un individu est considérée en TAD comme étant un objet. Comme la calculatrice, un graphique, le concept d'intégrale, le symbole $\sqrt{\ }$, la sensation de réussite, etc. Le rapport personnel d'un individu à un objet O, est le système noté $R(X,O)$, de toutes les interactions que cet individu peut avoir avec l'objet : *le penser, le toucher, le calculer, en parler, en manger, etc*. Dans cette signification, la notion de rapport n'est pas considérée dans son acception intellectualiste, remarque Chevallard : on a un rapport à des objets de toute sorte. La personne X est le couple formé par un individu et l'ensemble des rapports personnels aux objets de l'univers qu'il a formés à un moment donné de son histoire d'individu. Dans ce sens, on dit que ce qui change ce sont les rapports que les individus entretiennent aux objets, et que l'individu demeure invariant.

En articulant les trois notions que nous avons introduites, Chevallard définit *connaître un objet o*, comme *avoir un rapport à o*. Ainsi, la personne X connaît *o* s'il existe $R(X,o)$. L'*univers cognitif* de X, est représenté par l'ensemble $U(x) = \{ (o, R(X, o)) / R(X, o) \neq \varnothing\}$. Cette modélisation du cognitif en termes d'« *objets* » et de « *rapports* » à ces objets a un caractère large. Ce caractère favorise l'appréciation de ce qui est en jeu lors de l'étude et permet de dépasser les frontières de certaines approches : les rapports aux contextes, aux situations, aux assujettissements, etc. Chevallard présente alors la notion d'*institution* de la manière suivante :

Une institution *I* est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des *« micro-institutions »*), mais qui permet – et impose – à ses *sujets*, c'est-à-dire aux personnes *x* qui viennent y occuper les différentes *positions p* offertes dans *I*, la mise en jeu de *manières de faire et de penser propres* [100].

Selon Chevallard, le sens de la notion « *institution* » n'est pas celui bureaucratique dans lequel on l'entend souvent (l'armée, l'Eglise,), mais est plutôt proche de celui que lui a donné

[99] Chevallard 2003
[100] Chevallard 2003 p82

Douglas[101]. Ainsi, nous dirons que notre monde est composé de plusieurs institutions dont chacune admet un environnement qui est un univers culturel, et en même temps :

> « *toute institution peut fonctionner comme univers culturel pour d'autres institutions* »[102].

Ainsi, l'arrière-plan de la classe où a lieu l'étude mathématique automone est une institution qui de surcroit est un univers culturel didactique. De tels univers sont formés par plusieurs éléments référant à des pratiques, et ne sont pas toujours limités aux objets et institutions partagés par une société en particulier. En guise d'exemple, on pourrait penser à l'institution du «*football*», dont l'univers peut être intégré par les joueurs amateurs, professionnels, des arbitres, des clubs de supporteurs, les espaces destinés à jouer, les règles du jeu, les chansons des supporteurs, les grandes ligues comme la « *la league des champions européens, la coupe d'Afrique des nations, la copa América…* », leurs joueurs les plus connus, etc.

Pour toute institution *I*, il existe ce que Chevallard (1992) appelle un *temps institutionnel* t_I, notion qui est une extension de la notion de temps didactique déjà présenté dans la transposition didactique. L'ensemble des objets institutionnels[103] dépend donc de ce temps institutionnel, de la manière dont il enregistre certains changements au sein de *I* :

A chaque « *instant* » t, de nouveaux objets institutionnels apparaissent, tandis que d'autres disparaissent (pour n'être plus, par exemple, qu'institutionnellement visibles depuis *I*). Il en va de même des rapports institutionnels, $R_I(O,t)$. D'une manière générale, toutes les notions relatives à *I* dépendent de t_I[104].

Cette dynamique des *objets* et *rapports*, qui est réactualisée en étude autonome, dirigée par les assujettissements institutionnels, prend un caractère important lorsqu'il s'agit de la dimension cognitive des sujets de l'institution. Notamment, en ce qui concerne les *objets* et les *rapport*s. Toujours selon Chevallard (1992) lorsqu'une personne devient un « *sujet d'une institution I* » elle devient «*assujettie*» à cette institution *I*. Ainsi, au sein de toute institution, il existe plusieurs positions *p* légitimées. Pour chacune de ces positions, il existe le *« rapport à l'objet O » qui devrait être idéalement, celui des sujets de I en position p »*, ce rapport est nommé le *rapport institutionnel* et noté par $R_I(p, o)$. Autrement dit, il s'agit de « *ce qui se fait dans » l'institution I, avec l'objet de savoir o, lorsque la personne occupe la position p »*[105] . Un « *bon sujet* » de *I* en position *p* par rapport un objet *O*, est la personne placée dans cette position dont le rapport à *O* est conforme au rapport institutionnel établi dans *I*. En d'autres termes, si $R(X, o) \cong R_I(p,o)$[106]. Il y a ainsi une dialectique des rapports institutionnels et des rapports personnels : les premiers fournissent les conditions et les contraintes sous lesquelles se créent et

[101] Douglas 1999
[102] Chevallard, 1986, p. 97
[103] « A chaque institution *I* est associé un ensemble d'objets, O_I, dit ensemble des objets *institutionnels* (pour *I*), qui est l'ensemble des objets *O* que connaît *I*, c'est-à-dire pour lesquels existe un rapport institutionnel $R_I(O)$. Un objet *O* est institutionnel pour *I*, autrement dit existe pour *I*, si *I* a défini un rapport (institutionnel) à *O* » Chevallard, 1992, p. 88
[104] Chevallard (1992) p89
[105] Chevallard, 1989
[106] Dans une institution donnée, le rapport personnel a deux composantes : une publique et une autre privée. Le verdict de conformité de $R(X, o)$ à $R_I(p, o)$ est fondé sur la composante publique, celle qui se donne à voir dans *I*, c'est-à-dire la composante ostensive.

évoluent les seconds, et en retour les seconds, lorsqu'ils sont idoines aux premiers, viennent les soutenir[107]. En tout cas, l'auteur remarque que R_I (*p*, *o*) n'est le rapport personnel d'aucune personne. Autrement dit : conformité n'est pas identité. La théorisation, telle qu'elle est exposée en 1989, mentionne un troisième terme dont l'existence apparaît déjà dans *L'esquisse d'une théorie formelle du didactique* donnée en 1986 : le *rapport officiel*. Il s'agit du rapport que l'institution donne à voir de l'objet *O* depuis la position *p*, lorsque l'objet est, enjeu didactique. A terme, la nécessité de sortir de la relation didactique pousse le rapport officiel à évoluer vers le rapport institutionnel.

A ce stade de la recherche, nous pouvons dire que le répertoire de l'étude autonome relative à une tâche mathématique se rapproche du site mathématique local[108]. Le répertoire serait alors constitué de réseaux de concepts des R_I établis en *I*. Le problème sera alors pour nous de les identifier et d'en décrire l'écologie, c'est-à-dire de repérer dans le temps d'une institution d'étude donnée des élèves particuliers, les dialectiques effectives, et de nommer leurs conditions d'existence.

L'intention didactique – consubstantielle des sociétés humaines[109] et associée à tout ce qui est relatif à l'étude d'un savoir – est cristallisée, dans les univers culturels contemporains, en des institutions auxquelles est attribuée une mission d'apprentissage/enseignement. De telles institutions assument la responsabilité de faire apprendre par les élèves certaines œuvres, ou certains éléments de ces œuvres, jugées indispensables par la société et la noosphère. On nomme ainsi l'interface entre les institutions porteuses d'une mission sociale et la société qui les missionne. Les membres de cette interface portent, dans les deux sens, les injonctions réciproques et expriment en retour les contraintes fonctionnelles. Ainsi, les professeurs n'ont en principe pas affaire directement avec le public (mais seulement avec tel parent d'un élève) et les politiques n'ont en principe pas affaire directement avec les professeurs (mais seulement avec tel inspecteur pédagogique ou représentant syndical). En conséquence, un mandat didactique est porteur d'intentions sociales, à propos d'un univers culturel, mandat qui se transmet aux acteurs des institutions[110] et qu'on interprète en termes d'assujettissements. Ainsi, dans ses institutions, afin de respecter le contrat qui leur est assigné, sont réalisées diverses pratiques : apprendre ses leçons, faire des exercices, etc. Dans ce travail, nous nous intéressons essentiellement à celles pour lesquelles les objets et rapports aux objets du savoir, déjà connus des élèves en réussites mathématiques, sont réactivés et transformés pendant des moments d'étude autonome.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons le modèle mis à disposition par la TAD pour analyser les activités humaines, en particulier les activités apprentissages relatives à l'étude des mathématiques.

[107] Chevallard, 1989
[108] Christian Silvy2009
[109] « L'idée du didactique, l'idée d'étude, c'est-à-dire, fondamentalement, l'idée de faire quelque chose afin d'apprendre quelque chose (« savoir ») ou d'apprendre à *faire* quelque chose (« savoir-faire »), paraît en fait consubstantielle aux sociétés humaines » (Chevallard, 1999, p. 240)
[110] Chevallard 1988

2.4 PRAXEOLOGIES : MODELE DES ACTIVITES HUMAINES

Le modèle général d'une activité humaine, en particulier celui de l'étude en mathématiques, repose sur trois postulats fondamentaux concernant les pratiques régulièrement accomplies. Le premier postulat, énoncé par Bosch et Chevallard (1999), affirme que,

2.4.1 Première affirmation :

« Toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches relativement bien circonscrites, qui se découpent dans le flux de la pratique »[111].Ainsi, une *tâche* (*t*) réfère à une action qui s'applique à un objet (o) relativement précis (Chevallard, 1999). Nous exemplifions cette affirmation au travers des exercices suivants

Exercice 1

Déterminer géométriquement et représenter l'ensemble des

points M d'affixe z vérifiant la relation $|z+2| = |z-4i|$ *dans C*

Exercice 2

Calculer la dérivée de la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x$,

Exercice

On pose $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ *et, pour n entier naturel non nul,* $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

Calculer I_0

Montrer, pour tout entier n élément de IN, que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

En déduire les valeurs de $I_{1,} I_2, I_3$ *, puis celle de* $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x dx$

L'action est habituellement exprimée par un verbe qui définit, à lui seul, ce que l'on nomme un genre de tâches : ici successivement, déterminer, représenter, calculer, calculer, montrer, en déduire. Quand les tâches précisent l'objet sur lequel s'effectuera l'action mais ne le particularisent pas, elles sont considérées comme des types de tâches (T). Ainsi, un type de tâches constitue donc un ensemble de tâches « de la même famille ». Par exemple, déterminer la

[111] Bosch et Chevallard 1999, p84

dérivée d'une fonction exponentielle, déterminer l'intégrale d'un produit de fonction, représenter géométriquement un nombre complexe, estimer l'aire d'un terrain, construire un patron, etc. Remarquons que le découpage des tâches pour analyser une pratique est relatif à l'institution où se déroule la pratique, ou aux institutions d'où on l'observe.

2.4.2 Deuxième affirmation :

« L'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique »[112]

Les techniques (τ) réfèrent, quant à elles, aux manières d'accomplir une tâche. Par exemple pour déterminer la mesure d'un angle dans un triangle quelconque

Enoncé

Soit les points A, B, et C de coordonnées cylindriques $A(2;10°;5)$, $B(1;40°;3)$, $C(4;20°;2)$.

1. *Déterminer les coordonnées cartésiennes des trois points.*
2. *Déterminer une mesure de l'angle* ABC

Nous présentons le verbatim de RC001 pour la résolution de la question 2

Verbatim deRC001
Dispositif 1:Le produit scalaire   *On a// A* $\begin{pmatrix}1{,}97\\0{,}347\\5\end{pmatrix}$ *// B* $\begin{pmatrix}0{,}766\\0{,}643\\3\end{pmatrix}$ *// C* $\begin{pmatrix}3{,}759\\1{,}368\\2\end{pmatrix}$ *////*   *Question 2/// 2- Déterminer une mesure de l'angle* ABC *////[silence]//Pour déterminer une mesure de l'angle* ABC *//**Je peux utiliser le produit scalaire des vecteurs*** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ *///[silence]///Je dois d'abord déterminer les coordonnées puis les normes des deux vecteurs///On a alors*   *//* $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1{,}97-0{,}766\\0{,}347-0{,}643\\5-2\end{pmatrix}=\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1{,}204\\-0{,}296\\2\end{pmatrix}$ *//* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3{,}759-0{,}766\\1{,}368-0{,}643\\2-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2{,}993\\0{,}725\\-1\end{pmatrix}$ *///Je détermine d'abord la norme de ces deux vecteurs//Ce qui donne //////*

[112] Bosch et Chevallard 1999, p84

$AB = \sqrt{1{,}204^2 + (-0{,}296)^2 + 2^2} \approx 2{,}353$ $BC = \sqrt{2{,}993^2 + 0{,}725^2 + (-1)^2} \approx 3{,}238$ *///On sait le produit scalaire de ces deux vecteurs donne///* $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times CosABC$ *///L'expression analytique du produit scalaire donne///* $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = (x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})$*///Ce qui implique que* $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times CosABC = (x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})$*//Donc//*

$CosABC = \dfrac{(x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\|}$*//D'où*

$ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{(x_{BA} \times x_{BC}) + (y_{BA} \times y_{BC}) + (z_{BA} \times z_{BC})}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\|}\right]$*////*

$\Rightarrow ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{(1{,}204 \times 2{,}993) + (-0{,}296 \times 0{,}725) + (2 \times (-1))}{2{,}353 \times 3{,}238}\right] \approx 79{,}496°$ *//La mesure de l'angle ABC est de* $79{,}496°$ *////*

<u>Dispositif 2</u> *: utilisation du théorème d'Al-Kashi*

Pour déterminer la mesure de l'angle ABC//Je peux aussi utiliser ***le théorème d'Al-Kashi encore appelée la relation de Pythagore généralisée ou relation aux cosinus****//D'après Al-Kashi dans un triangle quelconque comme c'est le cas ici*

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BC \times BA \times CosABC$ */////Je détermine d'abord les coordonnées du vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *puis la distance AC ///On a//* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3{,}759 - 1{,}97 \\ 1{,}368 - 0{,}347 \\ 2 - 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1{,}789 \\ 1{,}021 \\ -3 \end{pmatrix}$ *//La norme du vecteur AC est//* $AC = \sqrt{1{,}789^2 + 1{,}021^2 + (-3)^2} \approx 3{,}639$ *///On sait que* $BA = 2{,}353$ *et* $BC = 3{,}238$ *///On a alors*

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC.CosABC$ *///* $ABC = Cos^{-1}(\dfrac{CA^2 - (BA^2 + BC^2)}{-2BA \times BC}$ *///Donc l'angle ABC est//donc///est///* $ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{13{,}242 - 5{,}536 - 10{,}484}{-2 \times (3{,}238 \times 2{,}353)}\right]$ *//* $ABC = Cos^{-1}(0{,}1822)$ *//*

///[prend sa calculatrice]///Donc l'angle ABC est // $ABC \approx 79{,}496°$

L'analyse a priori des techniques possibles pour une tâche particulière n'est nullement indiquée dans la majorité des ouvrages au programme en classe de terminale scientifique. Cette analyse revêt pourtant un caractère heuristique qui nous paraît fondamental. c'est l'enjeu de la détermination du site d'une question, proposée par Erdogan pour analyser la possibilité de l'étude autonome ou la réalisation d'une tâche par des élèves, comme moyen de comprendre les difficultés que peut rencontrer une institution pour diriger l'étude de ses membres ou la difficulté que peut rencontrer un élève dans ses moments d'étude autonome..

Nous en donnons ici un exemple issu de nos observations :

<u>Exercice :</u>

On sait que la fonction $f(x)=e^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation différentielle* $y'=\frac{1}{5}y$ *.*

Démontrer alors que l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des fonctions définies sur IR, de la forme $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k un nombre réel quelconque.*

Disposition 1 : analyse des propriétés d'une réponse / synthèse de la solution

Verbatim d'AC001
(Analyse selon nous) ///Si/la/fonction $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ alors $f(x).e^{\frac{-x}{5}}=k$ ////La/fonction//ainsi/définie/par ////// $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ est une constante////Donc la fonction dérivée $h'(x)=0$ ///// (Synthèse selon nous) ////Soit f une solution quelconque de l'équation (E)////Montrons que la h définie par $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ est une fonction constante/////Comme $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ est le produit de deux fonctions dérivables sur IR///// elle est donc dérivable sur IR et pour tout réel x /////on a $h'(x)=\frac{-1}{5}e^{\frac{-x}{5}}.f(x)+e^{\frac{-x}{5}}.f'(x)$ ///Or f est solution de $f'(x)=\frac{1}{5}f(x)$ /////////Donc $h'(x)=\frac{-1}{5}e^{\frac{-x}{5}}.f(x)+e^{\frac{-x}{5}}.f'(x)$ = 0//////D'où $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ est une fonction constante////ce qui implique qu'il existe un réel k tel que $\forall x\in IR$ $h(x)=k$ /////On a donc $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ /////// ///Réciproquement////on vérifie sans peine que//////quel que soit le réel k/// la fonction f définie sur IR par $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ vérifie l'équation $y'=\frac{1}{5}y$ /////

Technique 2 : méthode de la variation de la constante dite méthode de Laplace (1749-1827)

Verbatim d'AC001
/////De façon évidente la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions /////on peut utiliser la méthode de la variation de la constance qui consiste du fait que* $e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ *//////à chercher la solution de* (E) *sous la forme générale* $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k une fonction dérivable/////// La fonction y est solution de//l'équation*(E)*/si,/et/seulement/si/elle///vérifie/l'équation///On/a///* $k'(x).e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{5}k(x)e^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}k(x)e^{\frac{x}{5}} \Rightarrow k'(x)e^{\frac{x}{5}} = 0$ *///La fonction* $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *est par conséquent une fonction constante//// donc* $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *sont les solutions de l'équation*(E)*//////*

Technique 3 : identification immédiate du type de réponse demandé, dans un répertoire

Verbatim d'AC001
y///est//une//solution//de////l'équation $(E) \Leftrightarrow \forall x \in I, y'(x) - \frac{1}{5}y(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I, e^{\frac{-x}{5}}.y'(x) - \frac{1}{5}y(x) = 0$ *////Soit* $g : I \to IR.telle.que..g(x) = e^{\frac{-x}{5}}.y(x)$ *///////On a (y est solution de E sur I)///* $\Leftrightarrow (\forall x \in I..g'(x) = 0$ *///////Or I est un intervalle ; donc //y est une solution de E sur I/* $\Leftrightarrow \exists..k \in IR/..\forall x \in I..g(x) = k$ $\Leftrightarrow \exists..k \in IR../..\forall x \in I,.y(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *////////*

Ainsi, la première technique est le produit d'une technologie générique, elle est donc d'une grande généricité mais de fait elle ne peut conduire à la réponse que pour les questions viabilisées par l'institution. La deuxième technique est spécifique au problème posé, la technologie peut alors demeurer implicite, ce qui suppose que le type de tâche correspondant soit connu et que le problème posé relève bien de ce type. La troisième mobilise sans médiation un algorithme de calcul appartenant au répertoire de l'élève, elle apparaît comme un « *faire* » dont la technologie est silencieuse.

Le bloc *pratico-technique [T/τ]*, est ainsi identifié à ce que l'on nomme couramment un *savoir-faire*, à référer à la pratique ou à la *praxis* de l'activité. En général, dans la vie institutionnelle, n'est considérée comme valide qu'une seule manière d'accomplir un type de tâches, ou du moins, seulement un petit nombre de techniques sont reconnues valides. Dans ce sens, il s'agit d'une gestion restrictive du répertoire épistémologique d'une tâche, car les techniques non reconnues devraient forcément être inactivées. Mais dans les institutions didactiques et souvent, à l'insu de la plupart des élèves (que l'on qualifie alors de « scolaires »), la plupart du temps les techniques dites *supérieures* seront davantage reconnues et demandées dans *I*, car leur champ d'effectivité est plus vaste. La difficulté pour l'élève vient alors de ce que leur mobilisation nécessite un répertoire de savoir-faire important et une vaste culture y afférente pour en reconnaître les conditions d'usage, comme le montre un regard même rapide sur la première technique.

Enfin Bosch et Chevallard[113] énoncent un troisième postulat. Il concerne les conditions et les contraintes qui permettent la production et l'utilisation des techniques et les types de tâches auxquelles elles sont relatives.

2.4.3 Troisième affirmation :

> « Pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu compréhensible, lisible et justifiée »[114]

Ainsi, il existe toujours une technologie (θ) relative à la technique ou du moins un « *embryon* » de technologie qui correspond à un discours rationnel assurant que la technique permet bien de réaliser un type de tâches *T*. Le style de rationalité du discours technologique est relatif à l'institution dans laquelle ce dernier se produit. Chevallard le souligne en disant que *« en nombre de cas, même, certains éléments technologiques sont intégrés dans la technique* » :

Ainsi en va-t-il traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même *petit discours* a une double fonction, technique et technologique, en ce qu'il permet tout à la fois de *trouver* le résultat demandé (fonction technique) et de *justifier* que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on énonce que :

> « Si 8 sucettes coûtent 10F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 fois plus, soit 3 fois 10F »[115]

En outre, il existe des techniques qui deviennent « auto technologiques », car elles sont les seules reconnues par l'institution. Par conséquent, le discours rationnel construit relève de la logique suivante : *cette manière d'accomplir la tâche n'exige pas de justification parce qu'elle est la bonne manière de faire dans I.*

Deux autres fonctions du discours technologique sont commentées par l'auteur : une fonction explicative et une autre, productrice. La première expose pourquoi la technique « *donne*

[113] Bosch et Chevallard 1999
[114] Bosch et Chevallard (1999 p 86
[115] Y. Chevallard, 1999, p. 226

bien ce qui est attendu » ; tandis que la seconde se réfère aux discours rationnels justificateurs et explicatifs, qui n'ont pas été exploités comme tels ; c'est ce que Chevallard souligne comme relevant d'un phénomène de *sous-exploitation*. Nous pensons donc que la constitution d'une technologie implique un travail relatif au répertoire considéré comme faisant partie du « *site mathématique locale de la tâche* », car les justifications qui seront établies mobilisent des connaissances passées ou présentes qui s'articuleront pour valider une technique.

Le troisième postulat mentionné ci-dessus implique aussi, d'après Bosch et Chevallard, l'existence d'un discours justificateur, explicatif et producteur des technologies, c'est-à-dire, une technologie de la technique. Ce nouveau discours est connu sous le nom de *théorie* (Θ). Ces deux éléments, *technologie* et *théorie*, forment conjointement un bloc qualifié de *technologico-théorique* [θ, Θ]. Il définit le *logos* pour la *praxis* ; *praxis* et *logos* constituent le *«savoir»*. L'articulation de la *praxis* et du *logos* donne une forme à ce que Chevallard nomme une *organisation praxéologique*, ou seulement une *praxéologie* ou une *organisation*, [T, τ, θ, Θ]. Lorsque l'organisation est relative à un type de tâches mathématiques, on la nomme une *organisation mathématique* (OM). Comme le montre le site local[116] d'une tâche, les éléments technologiques et théoriques du logos ne sont pas tous des objets à proprement parler mathématiques, et si l'on veut alors saisir ce qu'une organisation mathématique contient, il faut bien considérer que ce sont aussi des objets non mathématiques, qui servent à la pratique relative à une tâche identifiée comme mathématique, c'est pourquoi on nomme mathématique l'organisation en question, que nous appellerons d'un terme anthropologique bien connu : le *répertoire* des pratiques nécessaires à la réalisation d'un type de tâches mathématiques

2.5 COMPLEXES DE PRAXEOLOGIES

Les praxéologies peuvent se regrouper en organisations de plus haut niveau, selon l'élément autour duquel d'autres composantes de l'organisation varient. Autour d'un seul type de tâches, on trouve les organisations dites *ponctuelles*, qui sont notées [T, τ, θ, Θ]. Comme l'explique Chevallard (1999), on ne rencontre que rarement des praxéologies ponctuelles,

> *« Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de plusieurs technologies θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches* T_{ij} »[117]

Les organisations ponctuelles qui se regroupent autour d'une technologique déterminée sont nommées *praxéologies locales*, [T_i, τ_i, θ, Θ]. Les praxéologies locales relatives à une même théorie, [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ], sont connues comme des *praxéologies régionales*. Finalement, on nomme *organisations globales*, notées [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{jk}, Θ_k], « le complexe praxéologique obtenu dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k ». La modélisation présentée ici permet de décrire le degré de « *complétude* » d'une Organisation Mathématique[118] par rapport aux types de tâches étudiées et à la portée des éléments technologiques en jeu. Une telle description permet en principe de

[116] Silvy et Delcroix
[117] Chevallard (1999),p229
[118] Fonseca, 2004

définir des pratiques possibles en étude.

2.6 LES OSTENSIFS ET LES NON-OSTENSIFS

Bosch et Chevallard[119] ont identifié les éléments constitutifs : « *une technique, une technologie, ou une théorie* », en s'interrogeant sur la *« nature* » des objets mathématiques et leur « *fonction* » dans l'activité mathématique. Il semblerait en effet que les organisations mathématiques soient faites **d'objets *ostensifs*** et **d'objets *non ostensifs***.

Nous parlerons d'**objet ostensif** – du latin *ostendere,* « *montrer, présenter avec insistance »* – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible.

Les **objets non ostensifs** sont alors tous ces « *obje*ts » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés[120]

Dans ces conditions il nous apparaît que l'étude mathématique autonome, dans ses manifestations et son fonctionnement, est relative à la manipulation et à la construction des objets mathématiques : ostensifs et non-ostensifs associés. Les objets ostensifs peuvent ainsi être perçus à travers plusieurs registres matériels *:* l'oralité, la trace, la gestualité,……etc. Par contre, les objets non ostensifs sont associés aux notions : idées, pensées, croyances…. etc. Ces objets coexistent dans les institutions mathématiques, ce sont *des objets institutionnels* qui ne dépendent pas de l'activité d'un individu dans une relation dialectique. Bosch et Chevallard expliquent que les non ostensifs *émergent* de la manipulation d'ostensifs, parce que les ostensifs sont *invoqués* à partir des non-ostensifs. Ainsi, une manipulation d'ostensifs est toujours orientée et contrôlée par les non ostensifs associés aux ostensifs présents. Nous considèrerons alors que la gestion de l'étude mathématique autonome devra avoir a pour méthode ou pour processus, la mise en œuvre de cette dialectique ostensif et non-ostensif. Ce que nous allons analyser dans cette recherche serait donc la manière dont un élève se sert de ces objets et en quoi sont-ils spécifiés. Or, comme nous l'avons remarqué, une telle dialectique prend place au sein d'une ou plusieurs institutions, et en conséquence, elle sera liée aux conditions qui s'y rencontrent.

> «Les conditions d'existence et d'évolution d'une activité mathématique concrète […] sont fortement déterminées par le système d'instruments sémiotiques dont on dispose et par les lois qui règlent l'usage de ces instruments dans une institution donnée »[121].

Bosch met en avant le caractère « *instrumental* » des objets ostensifs. Ce positionnement constitue une des spécificités de l'approche anthropologique en ce qui concerne les « *objets* » *sémiotique*s. Ainsi, les objets ostensifs sont non seulement des « signes » qui évoquent une

[119] Bosch &Chevallard (1999)
[120] Bosch & Chevallard 1999 p 90
[121] Bosch, 1994b, p.305

certaine notion, mais aussi des *instruments* qui permettent l'accomplissement d'une tâche- (d'autres diraient des « symboles »). Ces deux dimensions des ostensifs peuvent être décrites en termes de valence sémiotique et valence instrumentale. Pour Bosch et Chevallard[122], c'est la nature ostensive de ces objets qui leur donne une potentille instrumentalité. Ainsi :

> *Dans l'usage algébrique ordinaire, la notation* $\sqrt{\ }$ *d'une part, et la notation à l'aide de l'exposant fractionnaire* $\frac{1}{2}$ *d'autre part, ont un rendement voisin lorsqu'on les utilise pour effectuer le travail suivant :* $\sqrt{2\times3}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ *, ou* $(2\times3)^{1/2} = 2^{1/2}\times3^{1/2}$*. En revanche, pour calculer la dérivée de la fonction* $\sqrt{\ }$ *la seconde notation se révèle instrumentalement supérieure en ce qu'elle permet d'effectuer un travail qu'on ne peut formellement reproduire à l'aide de la première :* $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *(p. 107)*

La valence sémiotique fait allusion ainsi au potentiel d'un ostensif pour évoquer un certain non ostensif. C'est-à-dire que l'ostensif fonctionne comme *signe* ou *signifiant*[123] pour d'autres objets. En faisant une brève analyse de l'exemple précédent, la notation $\sqrt{\ }$ pourrait évoquer *un nombre irrationnel, une opération ou une fonction*. Plus généralement, les auteurs remarquent qu'au sein des pratiques institutionnelles, les ostensifs « *ont le pouvoir d'évoquer des complexes d'objets ostensifs et non ostensifs avec lesquels ils entrent en interrelation* ». Par ailleurs, la même notation permet (ou ne permet pas) un certain nombre de calculs. En d'autres termes, les objets ostensifs peuvent mobiliser des ensembles de praxéologies, dans une institution. C'est à partir de la double valence des ostensifs que nous rendrons compte de certains gestes d'étude mathématique des élèves, visant la délimitation d'un milieu pour l'apprentissage.

2.7 LES ORGANISATIONS DIDACTIQUES

La notion de praxéologie, nous permet de reformuler la tâche que la société et l'Ecole assignent aux élèves en mathématiques : faire reconstruire, apprendre, s'enseigner, un système d'organisations mathématiques plus ou moins articulées entre elles en fonction du programme officiel qui est d'actualité dans la classe et des programmes déjà considérés étudiés dans les classes antérieures. Les formes possibles pour accomplir cette tâche, c'est-à-dire, pour organiser le processus de l'étude[124] dans une institution donnée, sont désignées sous le terme « d'*organisations didactiques* » C'est pour de acceptions que dans notre recherche *la gestion let le fonctionnement de l'étude mathématique autonome* est donc vue comme une « tâche didactique » nécessaire pour la réussite des apprentissages visés par l'institution scolaire.

[122] Bosch e& Chevallard1999
[123] La notion de « signe » renvoie à l'idée d'un concept, c'est-à-dire à l'idée d'« une unité conventionnelle du sens », et celle de « signifiant » peut être interprétée comme la partie matérielle ou physique du signe. Voir, http://www.pomme.ualberta.ca/ling/semio.htm
[124] D'après la TAD, la notion d'« étude » est considérée (Espinoza et Azcárate, 2000, p. 357)

2.7.1 Les Moments de l'étude

Chevallard[125] explique que, quel que soit le cheminement de l'étude, apparaissent nécessairement certains genres de situations. Ces genres de situations, Chevallard les appellent : *moments de l'étude* ou *moments didactiques*. Bien entendu *moment* n'est pas synonyme du temps horaire ou chronologique, il revêt plutôt le sens de la présence d'un aspect du processus d'étude. Ce faisant, les moments de l'étude ne sont pas vécus en « *une seule fois* », mais peuvent se présenter en différentes instances du cheminement et même parfois, simultanément.

Ainsi Chevallard propose six moments d'études que nous pouvons résumer comme ceci :

Moment 1 : *La première rencontre.*

La première rencontre peut trouver place dans deux genre de situations : l'une appelée « *problématique culturelle-mimétique* » et une deuxième situation identifiée par un système de « *situations fondamentales* »[126]. Dans le meilleur des cas, pour les situations de l'ordre culturel-mimétique, cette rencontre conduit à chercher et à expliciter les raisons d'être des objets trouvés lors des situations rencontrées par les élèves, en signalant *pour quelle raison l'objet a été élaboré*, ou au moins pourquoi il continue de vivre dans la culture. En revanche, les situations fondamentales font naître l'objet devant l'élève comme étant « *ce qui permet de construire une réponse aux questions posées* ». Mais il y a aussi des situations de rencontre qui sont des mixtes de références culturelles partielles et de situations s'apparentant à des situations fondamentales.

Moment 2: *L'exploration du type de tâches T_i et l'élaboration d'une technique τ_i.*

On peut trouver deux pôles dialectiques conjoints que définit l'élève lors du moment d'élaboration d'une technique : C'est d'un côté l'idée de l'élève « *héros triomphant sans coup férir* » de toute difficulté possible (fonction centrale qui est dévolue aux problèmes), C 'est de l'autre côté l'idée d'une réalité indispensable de l'élève « *artisan laborieux* » qui, au travers de son maître ou d'une institution construit les techniques (alors, l'étude d'un problème est un moyen pour constituer une technique de résolution).

Moment 3: *Constitution de l'environnement technologico-théorique [θ, Θ] relatif à T_i.*

Ce troisième moment est en interaction étroite avec chacun des autres moments. En fait, dès la première rencontre avec le type de tâches T_i, il y a un rapport avec un environnement

[125] Chevallard 1999

[126] « La situation fondamentale est une situation adidactique caractéristique d'un savoir ou d'une connaissance » (Perrin-Glorian, 1999, p. 286). Une situation est adidactique quand disparaît d'elle l'intention d'enseigner, mais qu'elle reste toujours spécifique du savoir (Brousseau, 1998).

technologico-théorique antérieurement élaboré. La dialectique ostensif/non-ostensif en participe, puisque les non-ostensifs sont justement des objets technologiques accompagnant les techniques de mise en œuvre des ostensifs.

Moment 4 : *Travail de la technique.*

Ce moment constitue le travail de manière ***qualitative*** et ***quantitative*** de types de tâches mathématiques pour lesquels on perfectionne la maîtrise des techniques qui lui sont associées. De cette manière l'élève se perfectionne en améliorant et en rendant plus efficace et plus fiable son rapport aux techniques, en explorant leur portée. Ce travail demande généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là.

Moment 5 : *L'institutionnalisation*

C'est le moment où l'élève est éclairé sur ce qu'il doit savoir de l'organisation mathématique construite. L'institutionnalisation sépare, par un mouvement qui engage l'avenir, le « *mathématiquement nécessaire* », qui sera conservé et le *« mathématiquement contingent* », qui bientôt sera oublié. De cette façon, *une praxéologie mathématique* fait son entrée dans la culture de l'institution qui héberge sa genèse. C'est aussi ce moment qui relance *l'étude* en mettant en évidence certains types de problèmes qui n'ont pas été travaillés avant ou pas assez en profondeur.

Moment 6: *L'évaluation*.

Ce moment s'articule au moment de l'institutionnalisation et il est supporté par la nécessité d'évaluer l'adéquation du rapport personnel élaboré par chaque élève avec le rapport institutionnel défini dans l'étape précédente. Derrière l'évaluation classique des rapports personnels se profilent aussi l'évaluation de la norme elle-même ; *on juge de sa puissance, sa maniabilité, sa maîtrise et sa portée.*

Identifier ces dimensions du processus d'étude facilite le repérage des activités privilégiées par le système didactique, et nous renseigne sur les attentes qui pèsent sur les sujets apprenants des institutions. Par exemple, si le moment de la constitution d'un bloc technologico-théorique est presque absent, les responsabilités de justifier l'entrée dans l'institution du savoir en jeu seront difficilement à la charge de l'élève ! Dans ce cas, nous doutons de la mise en œuvre d'un fonctionnement intentionnel de l'étude mathématique ou plutôt, nous considèrerons que si de l'intention se manifeste, ce sera alors le témoignage d'une forte autonomie de l'élève. Quant à Bosch et Gascón[127] ils désignent la modélisation d'une organisation didactique en termes de moments de l'étude comme un premier outil d'analyse de presque tous les types « *d'organisations didactiques* ». Cependant, ils remarquent que la structuration d'une OD en moments ne suffit pas à la description,[…] car l'explicitation des différents moments de l'étude

[127] Bosch et Gascón 2002

va partir, avant tout, de ce donné qu'est l'OM à mettre en place, qu'il va falloir être capable d'analyser en éléments ni « *trop gros* » ni « *trop fins* » pour ne pas tuer sa « *structure vitale* », tout en montrant comment se réalise ou pourrait se réaliser sa « *recomposition* ». En d'autres termes, la description que nous pourrons fournir des OD relatives à une OM donnée va être fortement déterminée par la manière dont nous allons décrire cette OM. Inversement […] la description des OD nous apportera des lumières sur cette OM[128].

Eu égard à cette dialectique entre OM et OD, Bosch et Gascón ont étudié l'influence des modèles épistémologiques mathématiques sur les pratiques d'apprentissages, en élaborant un modèle de l'espace des organisations didactiques institutionnelles.

2.7.2 Les organisations didactiques institutionnelles

Comme toute pratique régulièrement accomplie, l'organisation du processus d'apprentissage/enseignement que constitue *l'étude* peut être décrite[129] par une modélisation en termes de système de tâches et de techniques que l'élève a à sa disposition ou qu'il adapte ou élabore, de même que des systèmes d'argumentations justificatives et interprétatives des techniques. Comme les organisations mathématiques, les organisations didactiques sont dépendantes des institutions en lesquelles a lieu l'apprentissage, institutions qui à la fois sont contraintes et conditionnées par d'autres institutions scolaires, scientifiques et culturelles. Selon Bosch et Gascón, les *organisations didactiques institutionnelles* sont déterminées par :

> […] les systèmes de types de tâches, de techniques, de technologies et de théories qui existent dans l'institution considérée et qui permettent aux sujets de l'institution de mettre en place, en les activant, des organisations mathématiques déterminées sous des conditions particulières données[130]
>
> Les auteurs ajoutent que : « nous continuerons alors à avoir à faire à des praxéologies « empiriques » et « spontanées » (au sens précédemment décrit), mais ce ne seront plus les praxéologies d'une personne, mais celles « disponibles » dans l'institution[131]

Ainsi, en considérant l'ensemble des organisations mathématiques possibles à étudier dans une institution donnée *I*, ces auteurs montrent comment les différentes façons de concevoir dans l'institution *I* « *ce que sont les mathématiques* » peuvent être en correspondance avec certains « *types* » « *d'organisations didactiques* ». L'organisation didactique institutionnelle serait alors un espace à trois dimensions où chaque point de l'espace modélise une organisation didactique *idéale possible* :

- le moment *technologico-théorique* (θ/Θ) .

[128] Lorsque nous suivons Bosch et Gascón2002 p32
[129] selon Bosch et Gascón (2002)
[130] Bosch et Gascón2002 p 26
[131] Bosch et Gascón2002 p 26

- le moment du *travail de la technique* (T/τ).
- le moment *exploratoire*.

Pour chacun de ces axes les auteurs identifient des organisations didactiques telles que :

- les organisations *théoricistes* (liées à θ/Θ) :

Elles mettent l'accent sur les connaissances achevées et cristallisées en « théories »[132] Comme l'auteur le relève, le théoriciste identifie « *enseigner et apprendre les mathématiques* » avec *« enseigner et apprendre des théories* ».

- Les organisations *technicistes* (T/τ) :

Elles mettent l'accent sur le plus rudimentaire du *moment du travail de la technique*. Ces organisations relèguent à un rôle assez secondaire des problèmes pour lesquels on doit élaborer la séquence de techniques adéquates, construire une stratégie, afin de les résoudre.

- les organisations *modernistes* :

L'activité mathématique a pour objet l'exploration de problèmes « *non banals* ». Ces organisations identifient *apprendre les mathématiques* avec *apprendre ou étudier l'activité exploratoire de problèmes*. Ainsi, le processus d'apprentissage est pour elles un processus de découverte inductive et autonome. Pour de telles organisations, la notion de problème « *non banal* » est proche de celle de « *problème de type olympiade* ». Comme le précise l'auteur[133] c'est pour cela que l'isolement et le dé contextualisation des problèmes y sont accentués. Enfin, les OD modernistes simulent la non-existence de manières de faire systématiques qui puissent être enseignées dans l'institution scolaire.

Suite à cette première liste, Bosch et Gascón, établissent un deuxième niveau des organisations dites « idéales »[134] :

- Les organisations didactiques *classiques* (articulant les θ/Θ et *T*/τ)

Elles sont caractérisées par une certaine trivialité de l'activité de résolution de problèmes. Elles s'appuient dans le « *programme épistémologique* » sur ce qu'ils qualifient de « *euclidéanisme* ». Elles prévalent le principe que « l'activité mathématique se construit à partir des définitions, axiomes et principaux théorèmes, le reste découlant « *facilement* » de ceux-ci »[135]

- Les organisations didactiques *empiristes* (intégrant les *T*/τ et Ex)

Elles sont caractérisées par le rôle prépondérant qu'elles attribuent à l'activité de résolution de problèmes comme moteur de l'étude. Elles se distinguent aussi par le fait qu'elles considèrent

[132] Gascón, 2003
[133] Gascón, 2003
[134] Bosch et Gascón 2002, Gascón, 2003
[135] Bosch et Gascón, 2002, p. 33

l'apprentissage des mathématiques comme un processus inductif fondé sur l'imitation et la pratique. Elles sont bâties sur les modèles épistémologiques « *quasi-empiriques* ». Elles se particularisent sous l'adjectif « *procedumentalisme* » dont les formes d'organisation de l'étude ont pour principal objectif la maîtrise de systèmes structurés, de techniques, au sens de non-algorithmiques. Ils précisent que ces organisations didactiques *empiristes* peuvent venir en appui à la dé-trivialité de la connaissance mathématique, c'est-à-dire du technicisme, car elles permettent un développement du travail de la technique au-delà des techniques les plus simples.

- Les organisations didactiques *constructivistes* (combinant les θ/Θ)

Elles intègrent les moments de constitution d'un bloc technologico-théorique (θ/Θ) et celui de l'exploration du type de tâches. Elles sont caractérisées par le fait de considérer que

> « *l'apprentissage est un processus actif de construction [des connaissances] à partir d'acquis antérieurs et sous des contraintes déterminées* »[136].

Par conséquent, l'activité de résolution de problèmes est privilégiée et placée dans une activité plus large de construction de connaissances. Elles sont fondées sur des modèles épistémologiques « *constructivistes* ». L'incidence de ce modèle dans les modèles d'apprentissage détermine deux organisations institutionnelles : les organisations constructivistes psychologiques et les organisations constructivistes mathématiques ou modélisationnistes.

Remarquons que chacun des axes qui définissent les organisations modernistes, théoricistes et technicistes peut être considéré comme un cas extrême[137] d'organisations didactiques empiristes, classiques ou constructivistes.

Gascón[138] se réfère à ce qu'Arsac qualifie de « *situation-problème* »[139], pour signifier le rôle que joue l'activité de résolution des problèmes dans le constructivisme psychologique. *« L'apprentissage des mathématiques* » par l'étude au sein des organisations didactiques modélisationnistes, est interprété comme

> *«un processus de construction de connaissances mathématiques -relatifs à un système mathématique ou extra-mathématique- qui s'accomplit en utilisant un modèle mathématique d'un tel système »*[140].

Il apparaît alors que l'activité de résolution de problèmes que constitue l'étude est considérée à l'intérieur d'une activité plus large de modélisation mathématique. L'objectif de la résolution de problèmes s'identifie de ce fait à l'obtention de connaissances sur le système modélisé. Bosch et Gascón affirment aussi que, chaque modèle d'*organisation didactique institutionnelle* (ODI) conditionne, jusqu'à un certain degré, « *la manière d'organiser et de gérer le processus d'apprentissage* » des mathématiques. Ainsi, les organisations didactiques idéales dominantes auraient une incidence sur la gestion par les élèves de ce nous appelons dans

[136] Bosch et Gascón, 2002, p. 33
[137] Gascón 2003
[138] Gascón 2001
[139] Arsac 1988
[140] Gascón, 2003, p. 9

cette recherche le répertoire didactique et épistémologique de l'étude. Dans ce sens, le modèle de l'espace des organisations didactiques possibles devrait être un outil pour caractériser une partie du fonctionnement de leurs conditions d'existence.

Bref, il reste à observer comment un modèle d'ODI observé dans un système d'apprentissage autonome repéré, peut conditionner effectivement la gestion d'un répertoire, et c'est tout l'enjeu de notre travail. Car la description des formes-type de la vie ne donne pas les principes génériques de leur apparition ou les variables communes de leur régulation.

2.7.3 Les niveaux de codéterminations didactiques

Au moment de l'étude d'un savoir enseigné, ce qui peut advenir est déterminé par des conditions et des contraintes comme les connaissances des enseignants et des élèves, les matériaux utilisés, la distribution du temps, etc.[141] mais ne s'y réduisent pas. Les développements récents de la théorie anthropologique[142] fournissent, sous la dénomination de niveaux de codétermination didactique, une modélisation englobant ces conditions et des contraintes selon lesquelles se déterminent conjointement les organisations mathématiques et didactiques. Neuf niveaux en interaction mutuelle, allant des niveaux les plus génériques (niveaux indexés par Chevallard comme -3, -2, -1, 0) vers les plus spécifiques (niveaux 1, 2, 3, 4 5), peuvent être identifiés :

$$\begin{array}{|l|}\hline
\Downarrow 3-\textit{Civilisation}\Uparrow \\
\Downarrow 2-\textit{Société}.......\Uparrow \\
\Downarrow 1-\textit{Ecole}.........\Uparrow \\
\textit{Niveau}..0...\textit{Pédagogie} \\
\Downarrow 1-\textit{Discipline}....\Uparrow \\
\Downarrow 2-\textit{Domaine}.....\Uparrow \\
\Downarrow 3-\textit{Secteur}.......\Uparrow \\
\Downarrow 4-\textit{Thème}........\Uparrow \\
\Downarrow 5-\textit{Sujet}...........\Uparrow \\
\hline\end{array}$$

Echelle des niveaux de codéterminations didactique

[141] Bosch et Gascón, 2006
[142] Y. Chevallard, 2002, 2004, 2005

$2-).Domaine \Rightarrow Organisation.Mathématique.Global$
$3-).Secteur \Rightarrow Organisation.Mathématique.Régionale$
$4-).Thème \Rightarrow Organisation.Mathématique.Local$
$5-).Sujet \Rightarrow Organisation.Mathématique.Ponctuel$

Correspondance entre organisation mathématique et niveaux de Codéterminations didactique

Chevallard[143] remarque que, dans l'opération de détermination des organisations mathématiques qu'ils tenteront de mettre en place dans les classes, les enseignants tendent à ne se repérer que sur les niveaux de plus grande spécificité, sujets et thèmes. Une telle atomisation de la matière à étudier, contraste avec l'objectif que poursuit en principe l'étude, au collège et au lycée : *enseigner et apprendre « les mathématiques », ou du moins « la géométrie », « l'algèbre »*, etc. Il pose alors l'hypothèse que l'absence de motivation des types de tâches étudiés pourrait être associée à ce que ces questions appartiennent aux niveaux supérieurs de codétermination des organisations mathématiques – secteurs et domaines-. Si c'est le cas, alors nous verrons comment, pour donner du sens aux objets qu'ils étudient de manière autonome et orienter leur étude, les *très bons élèves* arrivent à imaginer par eux-mêmes ce que, de tels niveaux peuvent être. L'échelle présentée peut en effet être vue comme une structuration des « *lieux* » où les élèves vont rencontrer ces *organisations mathématiques*. Dans ce sens, l'échelle est un outil utile à l'identification des gestes d'études qui consistent à évoquer des connaissances anciennes et à la structuration du passé didactique d'une classe donnée.

Dans ce paragraphe, nous avons présenté la Théorie Anthropologique du Didactique, en nous centrant sur les outils d'analyse des pratiques d'étude que nous emploierons. Dans ce qui suit, nous exposons deux notions fondamentales pour l'étude didactique des pratiques d'élèves : *la notion de contrat didactique et celle de milieu*. Elles appartiennent elles aussi à la TAD, mais y ont été importées et sont de fait des concepts plus larges.

2.8 LA NOTION DE CONTRAT DIDACTIQUE

Le paradigme de la « *didactique des mathématiques* » initié par Guy Brousseau et dont on repère le germe à la fin des années soixante, suppose deux ruptures par rapport au paradigme « *classique* »[144] :

[143] Y. Chevallard 2002, p43
[144] Le paradigme qu'on appelle classique peut être décrit selon Bosch et Chevallard (1999) de la manière suivante: «[il] étudiait les problèmes de transmission et d'acquisition de *notions mathématiques supposées données*, c'est-à-dire transparentes, non thématisées par le chercheur. En outre, même les travaux qui, d'une manière ou d'une autre, problématisaient les notions mathématiques à étudier, ne soumettaient pas les modèles adoptés à la mise à l'épreuve caractéristique de travail scientifique. Ou bien la question du savoir mathématique était tenue pour non problématique, ou bien la réponse apportée était prise comme inquestionnable » (p. 80)

> […] une première rupture en posant les mathématiques comme l'essence des phénomènes didactiques. La volonté d'élaborer une science de ces phénomènes constitue alors la seconde rupture, qui conduit à expliciter les modèles utilisés pour les soumettre à l'épreuve des faits, c'est-à-dire aux lois d'une véritable « épistémologie expérimentale »[145].

Le chercheur modélise alors les interactions de l'élève avec les problèmes que l'institution lui pose comme des « *jeux* » dans un milieu -qui peut être matériel ou constitué d'un micro monde et des règles d'action qui y prévalent- qui résiste objectivement –(donc en principe, indépendamment des attentes du professeur)… ». Ce jeu a un enjeu, l'apprentissage, par l'élève, des propriétés d'un monde. Telle est en principe, l'attente de l'institution, qui organise le jeu et en régule le déroulement. De ce fait, le jeu fait partie, d'une situation plus vaste qui est la « *situation didactique* »[146].

Suivant toujours Brousseau :

> «dans toutes les situations didactiques, l'institution tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse »

Or, le seul moyen de « faire » des mathématiques c'est de résoudre des problèmes spécifiques, en se posant de nouvelles questions. Une telle proposition implique que le maître ou l'institution ne doit donc pas communiquer une connaissance, mais plutôt favoriser « *la dévolution*[147] *d'un bon problème* ». Ainsi il explique qu'au sein de ces interactions se noue une relation qui détermine – *explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement* – ce que chaque partenaire, l'institution (enseignant) et le sujet (l'enseigné), a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce qui nous intéresse ici est le *contrat didactique*[148], c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du « contenu » *: « la connaissance mathématique visée »*[149].

Une telle définition implique que le contrat didactique est spécifique des connaissances en jeu et par conséquent, qu'il est nécessairement périssable. Relevons deux points par rapport au rôle du *contrat didactique* dans la gestion et le fonctionnement de l'étude autonome.

Premièrement : l'étude *mathématique autonome didactique* considérée comme l'indexation d'objets et de rapports à ces objets dans le temps, est nécessairement un construit institutionnel : elle est toujours en partie « *sous contrat* ». La construction d'un *contrat-type* pour

---

[145] Bosch et Chevallard, 1999, p. 80
[146] Brousseau, 1986, p. 50
[147] Brousseau donne la définition suivante : « la dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'un situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert » (Matheron, 2000, p. 110). Dans un travail sur *l'action didactique du professeur* (Sensevy et al, 2000), il est proposé une généralisation à toute situation d'enseignement de la notion de dévolution : « *Dévoluer* : de manière quasi simultanée à la définition et la régulation, le professeur doit faire en sorte que les élèves prennent la responsabilité de « jouer le jeu », de s'engager dans l'activité proposée […] La dévolution n'est pas simplement – ni dans tous les cas – une condition d'entrée dans la tâche […] elle constitue en fait un processus qui accompagne, avec plus ou moins d'intensité, l'ensemble du travail didactique » (pp. 270 – 271)
[148] Référons à une autre description du contrat didactique proposé aussi par Brousseau (1988) : « nécessité d'une résolution temporelle, et afin de permettre l'avancement de la relation [didactique], nécessité d'un blocage temporaire de certaines conditions de la situation par des conventions provisoires, implicites ou explicites. Ces conditions deviennent l'objet et l'enjeu de la relation didactique. La forme générale de ces conventions est le contrat didactique » (p. 322)
[149] G. Brousseau, 1998, p 61

l'étude d'une discipline, produit des « *éléments pérennes du contrat* » qui évoluent lentement.

Deuxièmement : c'est à cause de la nature périssable *du contrat didactique* que nous allons rencontrer certains phénomènes d'oublis et de rappels institutionnels dans une classe mathématique. Pour préciser le type d'assujettissements qui peuvent être attendus selon les connaissances mobilisées dans l'institution d'étude autonome, nous spécifions dans le paragraphe qui suit, la classification, que présente l'auteur, des *responsabilités* sur lesquelles portent les *contrats*.

2.8.1 Types de contrats

Lors de la VIIIème Ecole d'été en 1995, Brousseau a présenté dans son cours 2 : *Les stratégies de l'enseignant et les phénomènes typiques de l'activité didactique*, une typologie des contrats possibles. Il considère d'abord que l'enseignant se caractérise par les assujettissements qu'il accepte et par ceux qu'il impose. Ces assujettissements se déterminent d'une part, par la répartition des responsabilités entre l'enseignant et un milieu antagoniste qui comprend l'enseigné, et d'autre part par les moyens de régulation réciproques qui conditionneront l'évolution du système. Ces considérations, d'après Brousseau, permettent de caractériser les *régulations didactiques* selon *« la répartition des responsabilités entre le système qui diffuse une connaissance et celui qui la reçoit et l'apprend »*. Ainsi, ces responsabilités définissent ce qu'il appelle le « *contrat* », dont la clause première (implicite comme toutes les autres) indique « *le droit* » que reçoit l'enseignant *« de modifier intentionnellement le système de décision de son interlocuteur* », concernant d'abord l'émission des connaissances – leur communication, leur validité, leur nouveauté, leur valeur, leur intérêt ou leur statut culturel – et les conditions dans lesquelles elles pourront *se manifester, être reçues, apprises, reproduites, etc*.[150] La typologie exposée par Brousseau examine tous les assujettissements qui, pour l'auteur, sont liés à la communication ; même ceux qui sont non didactiques. Nous citons dans la suite, quelques extraits de Brousseau (1996) qui permettent de détailler des contrats qui portent un certain degré d'intention didactique.

Contrats fortement didactiques portant sur un savoir 'nouveau'

Nous allons examiner différentes stratégies définies par le renvoi de la responsabilité principale à tel ou tel des éléments de la situation didactique, et par les hypothèses épistémologiques qui sont associées à ces contrats.

2.8.1.1 Le contrat de reproduction formelle (C1)

L'institution s'engage à faire effectuer, par l'élève et par un moyen quelconque, une tâche qui est reconnue par la culture comme la marque de l'acquisition d'un savoir […] La traduction des ordres de l'institution en actes n'exige pas le passage par la connaissance visée. […] L'élève s'engage à effectuer la tâche définie à la condition qu'elle soit complètement réductible à la

[150] Brousseau, 1996, p. 17

mémoire qu'il possède […] Il sait donc faire, par principe, et il n'y a rien à apprendre.

2.8.1.2 Le contrat de conditionnement (C2)

La production d'une tâche n'est pas souvent une garantie que l'élève puisse la reproduire en toute circonstance, l'institution est conduite à chercher des conditions qui fonctionneront comme des causes d'apprentissage, indépendamment des savoirs du sujet et de ceux qu'on veut lui enseigner. […] Le professeur prend à sa charge l'organisation d'une répartition 'raisonnée' d'exercices 'raisonnablement' répétitifs, et légèrement informatifs et gère le débit en fonction du rendement de son procédé qui est globalement assez faible […] Le rôle de l'élève est de se prêter à la répétition […]

2.8.1.3 La maïeutique socratique (C3)

Ce type de contrats que présente Brousseau est d'un intérêt particulier pour notre propos, car il relève explicitement de la mobilisation du passé didactique des élèves, qui est celui des Contrats basés sur la transformation des savoirs anciens. A la différence des deux contrats présentés plus haut, dans lesquels, en termes piagétiens, le système didactique acceptait la réalité des apprentissages par assimilation, dans ces contrats selon l'auteur, il accepte cette réalité par accommodation. C'est-à-dire, que le système reconnaît *« l'existence d'obstacles et la nécessité de connaissances provisoires, 'transposées' et révisables dans le processus d'enseignement »*[151]. Comme Brousseau le remarque, la reprise d'un savoir ancien sollicite une nouvelle répartition des responsabilités entre l'institution et l'élève. Citons quelques extraits de la séance concernant ces contrats :

2.8.1.4 Les contrats de reprise des savoirs anciens.

La révélation : Le savoir ancien n'est évoqué […] que pour servir de décor […] au savoir nouveau et finalement être péjoré ou rejeté.

Le rappel : […] le savoir rappelé est supposé être 'identique' au savoir convoqué. Les faits principaux et les actions passées sont évoqués, formulés, reconstruits, rationalisés et justifiés après coup dans une situation didactique particulière qui est un des instruments principaux de l'institutionnalisation […] ces situations permettent à l'élève de formuler ses observations et ses souvenirs de façon incomplète et allusive puisque leur passé commun met l'élève en situation de les comprendre […]

La reprise : La forme ancienne est dans ce cas ouvertement mise en cause, dans sa forme, elle fait l'objet d'une formulation, ou d'une traduction, ou dans sa constitution même, elle est alors l'objet au moins d'un commentaire, souvent d'une explication, d'une remise en cause, d'une critique ou même d'un rejet[152].

Les contrats que décrit Brousseau peuvent être vus comme des stratégies didactiques

[151] Brousseau, 1996, p. 27
[152] G. Brousseau 1996 , pp27-28

auxquelles les élèves font appel pour réguler la relation didactique, de manière consciente ou non. A la fin de son cours, une ultime stratégie est exposée :

2.8.2 L'ostension :

L'institution a de façon *implicite* ou non montrée un *obje*t, ou une *propriété*, l'élève accepte de le ''*voir*'' comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances[153].

Sur l'ostension, Salin[154] précise que le terme *« d'introduction ostensive* » a été utilisé par Ratsimba-Rajohn en 1977, afin de caractériser les pratiques relatives à la communication de connaissances en mathématiques, dans lesquelles l'institution fournie « *tous les éléments et relations constitutifs de la notion visée* »[155]. Cette définition, continue l'auteur, est très large et englobant par rapport aux types de « *présentations* » qu'on pourrait y inclure. Le contrat d'apprentissage/ d'enseignement, lors des pratiques ostensives, pourrait être précisé selon que les responsabilités de l'institution et les élèves :

- sont à la charge du professeur, dans les limites que lui laissent les contraintes institutionnelles et écologiques, le découpage du savoir enseigné, son « façonnage » en vue de sa présentation aux élèves, puis l'élaboration d'une suite d'exercices et de problèmes dans lesquels ceux-ci auront à reconnaître et à utiliser les savoirs enseignés.

- sont à la charge des élèves : l'écoute « *active* » du professeur et l'engagement dans la résolution et la correction des exercices[156].

D'après Salin, l'ostension peut aussi se présenter dans sa variante « déguisée ». Une telle présentation a été mise en évidence lors de l'observation de classes qui porte sur les « *activités préparatoires* » dans les manuels. Ces activités présupposent un caractère adidactique, qui n'est pas forcément présent dans la quasi-totalité des cas. Ainsi, la forme moderne du contrat d'ostension est énoncée par l'auteur de la manière suivante : *au lieu de montrer à l'élève ce qui est à voir, l'institution le dissimule derrière une fiction : c'est à l'élève de* **découvri**r *par lui-même les objets spatiaux soumis à son observation ou à son action.* Comme le savoir à découvrir est un savoir très élaboré, l'élève est obligé de ''**manipule**r'' *le milieu matériel pour rendre la lecture de ses propriétés la plus simple possible ; il est obligé d'effecteur un tri* parmi les réponses pour valoriser celles qui conduisent assez vite au savoir visé[157]. De cette manière, à l'intérieur de ce contrat, *l'élève cherche à s'appuyer sur l'observation dite « active » de ce qui se passe en manipulant le milieu, pour s'amener à y découvrir le savoir visé.*

Dans les études menées par Brousseau, la notion de **contrat didactique** est en étroite relation avec celle de **milieu**. Néanmoins, à la fin des années quatre-vingt, l'auteur remarque

[153] G. Brousseau 1996, p 46
[154] Salin 1999,2002
[155] Salin 2002, p 71
[156] Salin, 2002, p. 71
[157] Salin 2002 , p 74

l'absence dans les textes de présentation de la relation didactique de la notion de *« milieu »* – contrairement à la vaste utilisation de la notion du contrat didactique. D'après l'auteur, une telle constatation pouvait être expliquée par plusieurs raisons ; parmi elles par exemple, l'absence de reprises des modélisations en termes de jeux. Néanmoins, et c'est justement l'objectif de son article, il met en évidence que « **le milieu** » qu'il soit physique, social, culturel ou autre joue un rôle dans l'emploi et l'appropriation des connaissances par l'élève, qu'on le sollicite ou non dans la relation didactique. Dans le paragraphe suivant, nous abordons quelques éléments autour de cette notion de « **milieu ».**

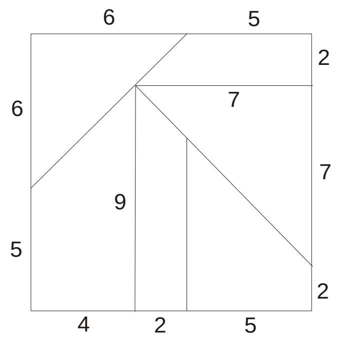
2.9 LA NOTION DE MILIEU

Une nouvelle fondamentale dans la Didactique des Mathématiques : « **le milieu** ». Contrairement au milieu présenté dans la théorie piagétienne, dans lequel l'enfant s'adapte pour apprendre, le « **milieu** » pour G. Brousseau[158] doit être chargé d'intentions didactiques pour être capable *« d'induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière ».* Ainsi, dans sa modélisation systémique des connaissances et savoirs, Brousseau affirme que

> « Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, l'apprenant doit adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminés alternativement par le joueur et par un système antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système, nous l'avons déjà signalé, est pour l'observateur une modélisation de l'environnement et de ses réponses pertinentes pour l'apprentissage en cours en étude […] C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler *milieu »*[159].

Illustrons son propos par le cas d'une séquence d'enseignement des applications linéaires proposée aux élèves à l'école Michelet[160]. Un puzzle (voir figure ci-dessous) est présenté à la classe, l'objectif est de fabriquer des puzzles semblables, plus grands que le modèle, en respectant la règle suivante : « le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur la reproduction ». La plupart des élèves peuvent penser qu'il faut ajouter 3 centimètres à toutes les dimensions. Ce faisant, les morceaux agrandis ne se raccordent pas. C'est donc cet état du système antagoniste (les rétroactions du puzzle) qui devrait amener des changements chez les élèves, qui vont commencer par des changements dans le jeu lui-même. Par exemple, les élèves s'adonnent à la recherche de l'image de 8 : « $4 \rightarrow 7$ alors $8 \rightarrow 14$ » et « il faudrait l'image de 1 ». Ces réponses montrent la modification d'état du jeu des joueurs, en passant d'une réponse intuitive ou donnée au hasard –« ajouter 3 » – à une possible anticipation de la solution.

[158] G. Brousseau 1986
[159] G. Brousseau 1988 pp320-321
[160] En 1972 se crée l'« école pour l'observation des enfants qui apprennent les mathématiques. Cette école, « Jules Michelet » de Talence, deviendra progressivement une Ecole pour l'Observation de l'Enseignement des Mathématiques, COREM (Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques) » (Brousseau, 1998, p. 21)



« Puzzle » d'une ingénierie didactique

De cette manière le système antagoniste apparaît comme dénué d'intention, non finalisé, mais, par les rétroactions renvoyées au sujet actif qui opère sur lui, il est cependant capable de provoquer des modifications des actions immédiates ou à venir du sujet, et ce faisant, de lui permettre d'apprendre une connaissance nouvelle[161].En conclusion, et suivant Perrin-Glorian[162], « le milieu »[163] nous pouvons dire que le milieu est la cause des adaptations de l'élève sujet d'une institution, et que les rapports de l'élève à la situation adidactique seront réglés par le *« contrat didactique »*.

Par ailleurs, au sein de l'anthropologie cognitive chevallardienne[164], la notion de « **milieu** » est reprise en termes de « *rapports institutionnels* » et de « *contrats institutionnels* », en définissant donc un **milieu** de nature institutionnelle : On désigne par CI(T), que l'on nomme « *contrat institutionnel relatif à I au temps t* », l'ensemble des couples (O, RI (O, t)), où O est un élément de OI(t) [165]. On nomme alors milieu institutionnel relatif à I au temps t, et on note MI(t), le sous-ensemble de CI(t) formé des couples (O, RI(O, t)) « *stables* » au temps t[166].

La notion de « *stabilité* » des éléments pérennes du contrat est notamment prise au sens institutionnel. En d'autres termes, pour les sujets de l'institution I les couples (O, RI(O, t)) qui intègrent le milieu seront stables s'ils apparaissent comme « *allant de soi, transparents, non problématiques* ». Or, comme l'indique l'auteur, le fonctionnement du système didactique implique des changements dans le « **milieu** », et par conséquent, des « *déstabilisations* » provisoires seront nécessaires. Ainsi, certains des éléments du « **milieu** » vont être déstabilisés et

[161] Matheron, 2000, p. 107
[162] Perrin-Glorian 1999 p. 285
[163] G. Brousseau p. 285
[164] Chevallard, 1992
[165] D'après Chevallard (1992), comme nous l'avons vu plus haut, « à chaque institution *I* est associé un ensemble d'objets, O_I, dit ensemble des objets *institutionnels* (pour *I*), qui est l'ensemble des objets O que connaît *I*, c'est-à-dire pour lesquels existe un rapport institutionnel $R_I(O)$ [ ] L'ensemble O_I dépend de t = t_I, et il serait donc plus exact de le noter $O_I(t)$(p. 88)
[166] Y. Chevallard 1992 p89

cesseront momentanément d'appartenir au milieu, avant de s'y re-stabiliser ensuite, dans une organisation économiquement et écologiquement différente[167]. Une telle dynamique de « stabilisation – déstabilisation » des objets, donne au milieu une double dimension. D'une part, le milieu apparaît subjectivement comme un donné, ses éléments semblent doués « d'une objectivité échappant au contrôle et à l'intentionnalité de l'institution », ils sont « stables ». D'autre part, le milieu est continuellement construit, c'est le processus de « mésogénèse », du fait que, justement le fonctionnement de la relation didactique l'oblige à évoluer[168].

C'est dans ce renouvellement continu des milieux, régulé par le contrat didactique, que la gestion de l'étude autonome trouve son importance majeure : l'institution est obligée d'aménager un milieu qui est à la base du fonctionnement de tout système didactique, mais l'institution ou le professeur est contraint de ne pas dire directement les choses aux élèves, car justement d'après le contrat, l'interaction didactique suppose que ceux-ci fassent leur ce qu'ils ont à étudier. La tâche didactique de gérer l'étude en autonomie constituerait donc une nécessité que l'on va retrouver en filigrane dans ce renouvellement continu des milieux. Dans le cadre d'un contrat d'ostension ou d'ostension déguisée nous verrons comment les *bons élèves* et eux seuls arrivent à définir des *milieux évolutifs efficaces*, pour leurs apprentissages personnels. Sinon, cela doit être l'effet de l'impulsion de l'institution scolaire- professeur-, dans le cadre d'un contrat didactique définissant les rapports adidactiques des élèves avec un milieu.

Quant à Mercier & Co[169] , ils considèrent le milieu comme le « *système de contraintes et de ressources, aussi bien matérielles que symboliques, dans lequel évoluent les sujets* ». C'est-à-dire que le milieu n'est pas nécessairement le « *milieu d'une situation adidactique* ». Il nous semble possible d'interpréter d'une autre manière la notion de milieu donnée par Mercier & Co, en utilisant la définition du milieu en termes chevallardienne, d'ensemble de couples (O, RI(O, t)) « *stables* » au temps t. D'une part, parce qu'il nous semble, qu'un système de contraintes et de ressources dans lequel évoluent l'élève, délimite ou rend possible la stabilisation de certains objets ostensifs et non-ostensifs en plus de certains rapports à ces objets ; d'autre part, parce que la reconnaissance d'objets dans une institution d'apprentissage en tant que « *objets stables* » rend possible l'installation de contraintes et conditions, voire des changements de celles qui étaient établies et qui intègrent un quelconque système d'apprentissage dans lequel évoluent l'élève.

Dans les recherches de Mercier & Co, les milieux sont présentés aussi comme des moyens de régulation de la relation didactique. Les auteurs décrivent au moins trois dynamiques de milieux à l'intérieur desquelles l'action est étudiée.

Une première dynamique tient à *la dévolution d'un rapport adéquat au milieu* puisque certaines potentialités du milieu sont investies par les élèves, sous le contrôle du contrat didactique

> […] La dévolution apparaît alors comme un processus complexe qui ne se réduit pas à l'engagement d'un sujet dans une tâche prescrite […] elle suppose un engagement de l'institution dans le travail du savoir, notamment dans une analyse préalable qui permettra à

[167] Y. Chevallard 1992 p 95

[168] Nous renvoyons aux analyses de Perrin-Glorian (1999) pour approfondir sur l'articulation du concept du milieu dans différents cadres théoriques.

[169] Mercier & Co 2007 p. 226

> l'élève de préciser les enjeux de la situation et, en particulier, *un certain vocabulaire* et/ou un système stable *de notations.*

<u>Une deuxième dynamique</u> tient au fait que le milieu est un objet de régulation, notamment par certains *processus d'expansion ou de réduction de ce même milieu*

> […]. L'expansion du milieu est double : soit l'institution étude apporte des informations ou des énoncés contradictoires […] soit des éléments problématiques qui pourraient orienter le travail de l'élève vers une dialectique de formulation et validation […] Par opposition, certains milieux sont tellement « extensifs » que l'élève va procéder à des réductions qui lui permettent de préciser l'enjeu de savoir par élimination des propositions ou des interprétations apportées par ses soins.

<u>Une troisième dynamique</u> tient aux différentes manières dont *le partage topogénétique* et les différentes postures des élèves peuvent *influencer le jeu ou être influencés par le jeu avec le milieu*

> […]. Le sujet apprenant peut à certains moments faire partie intégrante du milieu et à d'autres moments être à l'extérieur du milieu en créant une distance qui lui permet de mieux réguler la suite de son propre travail en étude autonome.

Les actions des élèves au sein des dynamiques mentionnées qui concernent les phénomènes de dévolution, de délimitation des milieux et de partage topo génétique, peuvent être interprétées en termes de gestes accomplis par l'élève pour gérer son propre répertoire didactique mathématique. Nous reviendrons sur ce point lors du chapitre concernant la problématique de recherche, principalement celui des analyses des résultats.

2.10 CONCLUSION

L'objectif de cette exploration théorique était de situer l'étude et la question de son fonctionnement didactique dans un cadre précis, en identifiant les objets et les notions pouvant orienter notre recherche de thèse. Ainsi à travers l'exploration de la théorie anthropologique du didactique, nous avons abordé les notions fondamentales à la base de la modélisation du cognitif en identifiant les objets, le rapport, la personne et l'institution, le modèle de l'activité de l'étude en mathématiques en termes de praxéologies mathématiques et didactiques, de même que le système des conditions et des contraintes selon lesquelles se déterminent les praxéologies reconstruites. Nous avons essayé de montrer que le travail à la charge de l'élève est caractérisé par sa position dans la relation didactique. Nous avons considéré ce travail à la fois comme une œuvre propre de l'élève et comme une activité majoritairement influencée par les choix opérés en diverses institutions. La pertinence de la notion de contrat pour analyser l'écologie de l'étude en classe est établie, mais nous nous sommes interrogés pour savoir à quel degré le contrat didactique peut désigner à l'élève les objets de son étude autonome ou même les objets de sa propre œuvre mathématique ? Par conséquent, il nous faut maintenant construire des systèmes d'observations et d'interprétations de l'étude mathématique des élèves qui réussissent les mathématiques.

Nous allons utiliser le modèle du cognitif exposé dans les chapitres précédent sous sa dénomination usuelle de TAD, pour nous référer aux phénomènes qui nous occupent : ceux relatifs à la réussite mathématiques des élèves via l'étude autonome. C'est ainsi, qu'une fois notre référent conceptuel décrit et définis, les notions théoriques de description et d'analyse qui va outiller notre recherche, nous aborderons le travail de délimitation de notre objet d'analyse. Puis, nous exposerons l'étude exploratoire que nous avons menée dans différentes sphères privée d'élèves en étude autonome. Afin de construire des bases de départ pour observer comment de *bons élèves* en mathématiques prennent en compte dans la plupart des moments d'étude et de manière implicite, nous aurons aussi à imaginer un moyen d'analyser la dimension épistémique des tâches mathématiques demandées de façon implicite par l'institution scolaire.

Chapitre 3 :

PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

3.1 GENESE D'UNE PROBLEMATIQUE

Qu'entend-t-on par apprentissages mathématiques autonome ? Nous interrogerons successivement les professeurs, les élèves, les parents, puis nous comparerons leur connaissance pratique de ces questions à ce qui en est dit dans un rapport auprès du haut conseil de l'évaluation de l'école, commandé à un sociologue de l'éducation.

3.1.1 La position des acteurs

Dans les différentes salles des professeurs, lors des réunions bilans parents-professeurs, lors des conseils de professeurs, lors des réunions pédagogiques, le *travail personnel* de l'élève est souvent évoqué spontanément par les professeurs, parents et élèves que nous avons rencontrés. A la lecture aussi de certains bulletins d'élèves, l'implication ou le potentiel dans le travail personnel est évoqué pour être jugé suffisant ou insuffisant, sérieux, régulier ou peu approfondi. Ce travail sert d'indicateur pour qualifier voire justifier les rendements d'apprentissages et les performances scolaires des sujets-élèves des institutions scolaires. Chevallard (1988) interprète cela par le fait que, le professeur ayant fait sa part du travail didactique, la notion de « *travail personnel de l'élève* » désigne la part de l'élève dans le travail conjoint. Et l'efficacité du travail professoral étant garantie par la réussite de certains élèves, les difficultés de certains autres élèves sont tout naturellement rapportées à la part de leur travail personnel, que ceux-là n'auraient pas accompli. Pour autant, chacun sait bien que les professeurs n'ont en rien accès au travail personnel des élèves, tout au moins ils n'ont ni les moyens d'en évaluer la quantité ni la qualité, ni les moyens d'évaluer les effets des aides extérieures que peuvent trouver les élèves.

3.1.2 Les professeurs

Voici quelques propos recueillis auprès de plusieurs enseignants à la sortie d'une réunion pédagogique d'élaboration du projet d'établissement, répondant à la question :

« Qu'entendez-vous par travail personnel des élèves ? »

«//Le travail personnel […]///c'est un investissement///de sa personne/// il faut apprendre//mais aussi comprendre et approfondir […]/// mais cela est à voir aussi avec l'autonomie […]/car c'est un travail sur soi//// C'est faire évoluer// finalement, c'est un double travail///Pour l'élève : c'est savoir se débrouiller seul////c'est-à-dire suivre les consignes écrites sans l'intervention//ou le moins possible d'une autre personne//// par exemple//// eh bien////pendant une heure de cours l'élève doit pouvoir travailler seul ou parfois à deux mais sans nécessairement mon intervention/////» (Mme T, professeur d'histoire 2nd GT, 1ère & Tle S)

Pour ce professeur, le travail personnel se fait en classe, et il porte non pas sur le savoir mais sur la personne de l'élève, qui doit entreprendre une action autonome.

> *« Le travail personnel/////c'est ce que fait le bon élève[...]///Poser des questions quand on n'a pas compris[…] pour les contrôles c'est refaire les exercices non compris et surtout c'est être capable de faire l'analyse de ce qu'on sait et de ce que l'on ne sait pas[…]////c'est faire des efforts de rechercher[…]/// de travailler[…]/de poser des questions////»(Mme L, professeur de mathématique en seconde GT)*

Pour celui-ci, cela consiste à solliciter l'intervention experte à bon escient, comme accompagnement de l'étude personnelle.

> *«///C'est un passage conscient qui coordonne différentes compétences comme lire un texte[…] trier les informations////Organiser un raisonnement[…]/// trier une idée synthétique//qui permettent une production personnelle//soit en traces écrites ou autres////explications orales par exemple//que l'élève se serait réapproprié et reformulé avec les outils qu'on lui a donnés//on lui donne des ingrédients[…]// on lui donne du savoir- faire théorique et il doit composer la recherche de solution ///» (Mr. G. professeur de SVT)*

Celui-ci décrit ce travail comme mobilisation d'un ensemble de compétences à réorganiser les connaissances produites pour soi à partir de celles qui lui ont été proposées.

> *«///C'est nécessaire une démarche de recherche personnelle//qui peut être indépendante de ce qu'on attend scolairement et dans laquelle intervient une notion de plaisir et de gratuité[…]par exemple[...]///lire un livre qui n'est pas nécessairement conseillé par le prof[…]///aller au cinéma »(Mlle A T. professeur de philosophie terminale S)*

Le plaisir de savoir au-delà de la demande officielle scolaire caractérise, pour ce professeur, la démarche personnelle.

> *«/////enfin[...]//le travail à la maison//// c'est important à ce niveau en terminale scientifique///car les élèves ont du temps[…]///le temps de gérer et de rédiger donc c'est////ou tout cela devrait être d'une grande qualité[…]les courbes et autres représentations sont plus soignées et précises[…]//mais cette meilleure qualité est aussi en terme de raisonnement logique[…]////c'est ce qu'on attend d'eux////» (Mr C.M professeur de mathématiques terminale S)*

> *« Ils ont le temps////[   ]///et c'est important à ce niveau avec le bac à la fin de l'année////cela permet à certains de rompre avec le par cœur/////De toute façon ils n'ont plus besoin de fiche à ce niveau[…..]///// on attend d'eux qu'ils comprennent et qu'ils s'appliquent//// L'élève dont j'ai parlé la fois précédente[…] elle a tout compris//// on voit dans ses interventions en classe////et surtout sur ses copies d'évaluation///qu'elle est sérieuse et travaille à la maison[] elle a les meilleures notes de la classe et pas uniquement en maths//»(F.J professeur de mathématiques en terminale S)*

Pour ces deux professeurs, le temps de la compréhension est caractéristique de la position des élèves que la notion d'autonomie évoque.

> *« Tout le monde sait qu'il faut travailler individuellement///les notions étudiées en classe avec le professeur[…]/// et mais chercher à dépasser le maître///la réussite scolaire passe par là/// en plus au lycée avec le bac/////c'est pas le professeur qui va composer à la place de l'élève le jour du bac////[....] c'est l'élève[…]//// et il sera seul candidat devant le sujet de mathématiques[…] il doit*

se préparer seul avant les hostilités de juin////»(J.P G, professeur de mathématiques, terminale S)

Les enjeux du travail personnel de l'élève sont décrits comme préparation à l'action individuelle lors d'une évaluation comme le Baccalauréat ; d'autres caractérisent le travail de l'élève par cette action, qui le conduit au-delà de ce que le professeur demande. Le tableau qui est ainsi décrit collectivement est cohérent : chacun en donne des éléments dans sa langue personnelle, mais tous donnent l'impression de savoir ce dont il s'agit : on attend de l'élève qu'il manifeste son intérêt pour le savoir en étudiant jusqu'au-delà du point où l'enseignement a conduit son cours et les exercices d'applications, ce qui suppose qu'il organise l'étude sous sa responsabilité propre, guidé éventuellement pas le plaisir de savoir. Ce point de vue est éminemment Cartésien : le projet de Descartes décrit à la fois la forme scolaire moderne (Chevallard et Mercier, 1988) et le mouvement autodidactique que l'auteur des *Regulae ad directionem ingenii* conduit pour lui-même[170] et Gaston Bachelard résume ce mouvement par cette acception:

> « l'élève qui étudie *repasse son cours*, c'est-à-dire qu'il le réécrit à sa manière, pour le mettre à sa main »[171].

3.1.3 Les élèves

L'extrait que nous exposons ci-dessous reflète ce que nous avons reçu comme réponses lors d'interviews réalisées auprès de 170 lycéens (dans le cadre de notre DEA recherche en 2005) de différentes classes et en position d'excellences scolaires. Il s'agit ici d'un condensé. A la question :«Pouvez-vous nous parler de l'organisation et du fonctionnement de votre travail personnel en mathématique hors école ?» voici quelques réponses :

> ***Pierre*** : *« ///// je cherche les solutions d'un exercice tout seul//// je fais le travail seul […]Avec le cours//// En regardant les exercices du cours/////Des fois j'arrive, des fois non [ ] parce que les exercices changent/////»*

Pour Pierre, chaque exercice est différent et l'ensemble ne relève pas d'un type de tâches. Son cours ne lui permet donc pas d'identifier une technique, dont il étudierait ensuite les variations.

> ***Claude*** : *« je fais les devoirs donnés par le prof car c'est imposé/////Je travaille avant le devoir surveillé comme une préparation car j'ai le temps […]///// et il y a aussi les autres matières////»*

Claude s'acquitte de ses obligations scolaires comme d'une tâche sans enjeu didactique et ne trouve là rien à apprendre, seulement de quoi faire. De ce fait, il y a beaucoup trop à faire : chaque tâche ouvre un monde nouveau à explorer.

> ***Nathalie*** : *«//// je fais des fiches//// j'apprends les formules////Je refais les exercices du cours////des fois ça marche et j'ai de bonnes notes/////des fois ça ne marche pas et je ne comprends*

[170] Mercier 1988
[171] Gaston Bachellard

pas toujours pourquoi////[ ] je connais pourtant toutes les formules //////».

Nathalie apprend les formules et tente d'identifier leurs emplois. Elle le dit, disposer d'un ensemble d'outils ne suffit pas toujours à disposer d'une technique, mais elle n'a pas identifié cet enjeu, au moyen des deux techniques d'étude tout à fait élémentaires dont elle dispose. Cela montre l'insuffisance des descriptions « méthodologiques » de l'activité attendue des élèves quand elles ne prennent pas en charge le contenu de l'étude.

> ***Grégoire*** : *«//// je travaille seul mes exercices et ceux du prof[….]////Lorsque je bloque je demande mon grand frère qui est en classe de prépa///// Il est très fort////Il m'explique des fois mieux l'exercice que l'explication du professeur [ ]//// »*

Grégoire a deux cordes à son arc d'élève : d'abord, des exercices autres que ceux du professeur ; ensuite, une aide extérieure d'un niveau plus élevé. Il est donc ouvert à un au-delà de la classe et de ce qui y est explicitement désigné.

> ***Sandrine*** : *«////je travaille seule comme je peux////souvent//// je ne sais pas ce qu'il faut faire pour trouver la réponse/////»*

Sandrine n'a pas de technique d'étude, et dans la mesure où elle « cherche la réponse » elle ne sait même pas où elle pourrait trouver de l'aide.

Deux remarques peuvent être faites à partir des réponses des enseignants, lorsqu'on les confronte à celles des élèves. D'une part, ils reconnaissent le nécessaire investissement et l'engagement personnel de l'élève dans l'étude autonome, gage de réussite des apprentissages effectués dans les classes de l'institution scolaire : c'est ce que l'on nomme « le travail personnel ». D'autre part ils ne disent rien de ce que l'élève a à faire, de ce qu'il doit faire et de comment il doit le faire, eu égard aux savoirs mathématiques mis en jeu en classe.

Symétriquement pour de nombreux élèves on observe une confusion entre devoir de maison et travail personnel. Le premier revêt d'un caractère obligatoire et le deuxième d'une dimension personnelle soumise à leur propre appréciation. Il ressort de ces déclarations une évidente difficulté d'identification du travail personnel dans sa dimension épistémique, cependant, on trouve des élèves bien plus avertis que ne le sont leurs professeurs : heureusement pour eux !

3.1.4 Les parents:

Nous définirons leur position par les propos de Madame PD :

> Madame PD employée de banque, maman de Léa (élève en classe de première) à la journée portes ouvertes du lycée, avril 2007.
>
> « Qu'entendez-vous par travail personnel de l'élève ? »
>
> *« Le travail personnel///// C'est ce qu'ils font à la maison///C'est normal que ma fille reprenne ses cours et qu'elle fasse ses devoirs de maison […]////Je fais aussi des choses pour mon travail//// je lis des livres pour me cultiver […]////Je fais des choses à la maison sur l'ordinateur*

[…] (Léa répond à sa maman que son travail à la maison c'est en mathématiques et non sur l'ordinateur) ////c'est que[….] ce n'est pas pareil l'ordinateur[…]///mais il faut étudier à la maison […]/// de toute façon ce que tu fais en classe n'est pas suffisant […]/// sinon je te paierais pas des cours de soutien en plus […]// quand j'étais à l'école […]/// en plus c'était le système d'internat […]////j'allais à l'étude tous les soirs après les cours […]////tout le monde faisait comme ça[…]/// ce n'est pas nouveau de faire un travail personnel en plus[…]//// ton frère il a fait pareil[….]//// il continue encore plus aujourd'hui en classe préparatoire[...] tes profs[…] ils parlent du travail personnel[…]/// ils savent que c'est par là la réussite[…]. et c'était pareil pour ton père et moi à la maison///»

Clairement : le travail personnel est ce qui revient à sa fille, cette charge de travail est nécessaire à la réussite, tous ceux qui ont pu réussir les études scolaires comme, elle, les professeurs, son fils étudiant en classe de prépa et d'autres, ont eu recours au travail personnel. Mais on remarquera aussi comment le fait que Léa ne soit pas de la première génération à réussir à (et par) l'école permet que sa famille dispose de la mémoire d'autres temps, lorsque l'étude était une activité organisée sur longues durées, lorsque les professeurs n'en avaient pas réduit l'espace à la salle de classe et le temps au temps de l'enseignement : les professeurs, membres actuels de l'institution, ne tiennent pas ce discours ou alors, c'est seulement dans la sphère privée en s'adressant à leurs enfants. Quand ils parlent du travail personnel, ils parlent aujourd'hui de quelque chose qui a été rejeté bien au-delà de leur horizon professionnel, dans le monde des choses privées.

3.1.5 La position du rapport auprès du haut conseil de l'évaluation de l'école

Extrait du rapport : travail des élèves pour l'école en dehors de l'école[172]. Son intérêt est tel, que nous le citerons longuement et que nous le commenterons avec attention. Il est l'œuvre de chercheurs en sociologie de l'éducation.

> « La demande du Haut Conseil à l'évaluation de l'école est de réaliser un rapport de synthèse sur les connaissances disponibles relatives au "*travail des élèves pour l'école en dehors de l'école*". Même s'il ne s'agit pas de conduire de nouvelles investigations sur le terrain et de produire de nouveaux résultats de recherche, on est amené d'emblée à se questionner. Sous cette expression, que peut-on entendre ?
>
> « S'il est une leçon que tous les élèves, bons ou mauvais, appliqués ou négligents, apprennent très tôt en entrant à l'école, c'est bien celle-ci : *quand l'école est finie, on n'en a pas fini avec l'école.* De l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire et à l'enseignement supérieur, les élèves passent un certain temps, en dehors de leurs heures de cours, à travailler pour l'école, au sens de réaliser un travail explicitement lié aux apprentissages scolaires »…

L'étude est ici définie comme un travail, ce qui signe une approche sociologique où l'enjeu du dit travail ne sera pas abordé. Ce n'est pas la position des didacticiens, qui affirment que dans certains cas, on ne peut comprendre les comportements humains que très partiellement si l'on ne veut pas prendre en compte l'enjeu de leur action. Quelle serait une analyse sociologique du

[172] Haut Conseil à l'évaluation de l'école communiqué/ rapport Mai 2005

groupe des individus présents sur la pelouse d'un match de rugby qui ne tiendrait pas compte du fait qu'il s'agit pour chacun des deux groupes de 15, de porter un ballon puis de le mettre à terre dans l'embut adverse et symétriquement, de défendre son propre embut, suivant des règles que font appliquer des arbitres ?. Mais les auteurs entrent en matière avec leur objet :

> […] On peut, dans ce travail des élèves pour l'école, faire la distinction suivante : …
>
> - *Le travail explicitement demandé par l'école. Il s'agit là des "leçons" et des "devoirs" donnés par les enseignants*. L'objectif affiché de ces tâches est de permettre tout un travail d'appropriation des notions apprises en classe, que ce soit par la familiarisation, la manipulation, l'exercice, la mémorisation. *Il peut être intéressant de se demander en quoi elles atteignent ces objectifs, de vérifier si faire ses devoirs et apprendre ses leçons régulièrement permet de devenir un "bon élève", ou si, à l'inverse, c'est plutôt parce que l'on est déjà, à plusieurs égards, un "bon élève", qu'on s'adonne avec constance à ce que l'école demande une fois qu'on l'a quittée.* L'intérêt est également ailleurs : donner aux élèves des devoirs à faire et des leçons à apprendre ce n'est pas seulement prolonger leur temps d'apprentissage. Au-delà de la visée "technique" d'apprentissage, on pourrait sans peine relever d'autres fonctions assignées, explicitement ou implicitement, à ces obligations imposées par les maîtres : enjeu de "fixation" des élèves dans le scolaire, enjeu d'image des enseignants, enjeu dans le va et vient entre école et familles, etc.
>
> - *Un travail "en plus", délibérément choisi par les élèves, ou par leurs parents, en lien direct avec les exigences scolaires. Il s'agit, à travers ce travail, de se préparer à mieux affronter les épreuves scolaires, celles d'apprentissages nouveaux ou jugés complexes, celles des examens, des concours ou des "devoirs sur table". On songe ici d'emblée aux "cours particuliers" ou aux devoirs de vacances, mais on verra qu'il existe d'autres choses.* Quels sont, au-delà de <u>leur commune présence dans une demande institutionnelle</u>, les points communs entre ces différents travaux pour l'école ? De quelle unité peut-on gratifier cette expression "travail pour l'école en dehors de l'école" ? La question se pose en effet, parce que sont ici en jeu des logiques à première vue amplement distinctes.
>
> - Les "devoirs à la maison" sont une pratique déjà ancienne et massive, qui dans bien des systèmes scolaires fait appel au travail effectué à l'école au cours des heures de classe ; *les devoirs concernent tous les élèves, ils ne sont pas facultatifs une fois qu'ils ont été prescrits*.
>
> –Les "cours particuliers ou "l'accompagnement scolaire", *ou encore très généralement les devoirs de vacances, procèdent d'un libre choix des seuls élèves ou* parents intéressés *par les apports possibles de ces adjuvants, de ces "plus*" ; concernant les cours particuliers, il ne s'agit pas d'une pratique récente, on en trouve des traces à la périphérie des établissements scolaires dès le XIX° siècle. Mais, depuis deux décennies, ce recours s'est élargi.

Les logiques d'action des acteurs sont bien décrites dans leur dimension sociale mais pas dans leur dimension cognitive. Notre objet de recherches est justement complémentaire et nous pouvons mesurer ce qu'il en est en comparant le discours de la mère d'élève que nous avons prise comme représentative de l'ensemble des parents avec ce qu'est ici la notion de « *réussite* ».

Pour prendre place hors de l'école, ces deux types de mobilisation des élèves ne relèvent cependant pas, d'emblée, d'une analyse identique. C'est donc ailleurs qu'il faut chercher une raison de les traiter ensemble. Deux voies s'offrent à nous, qui ne sont pas exclusives l'une de l'autre.

> La première voie est d'unifier l'objet sous la bannière, axiologique autant que pratique, de la *"responsabilité"*. Celle-ci, dans l'affaire, serait engagée pour des acteurs distincts. Quels sont ces acteurs ? *D'un côté, l'institution scolaire*, et plus exactement des responsables institutionnels

> commanditaires de ce rapport. *Dans cette perspective, tout ce qui est fait par les élèves en dehors de l'école renvoie - ou devrait renvoyer - à ce qui se fait à l'intérieur de ses murs, se pose la question de la pertinence de ce travail des élèves en termes d'apprentissage, et celle des inégalités éventuelles qu'il introduit entre eux. Le travail en dehors de l'école est alors pris sinon comme miroir, du moins comme éclairage de ce qui se passe dans l'école, ou devrait, ou pourrait s'y passer. D'un autre côté, les familles, au-delà de leur évidente diversité sociale et culturelle.* Ce qui, dans cette seconde perspective, fait l'unité de tout le travail que les élèves accomplissent pour l'école en dehors de l'école, c'est que, quels qu'en soient les formes et les prescripteurs –devoirs demandés par les enseignants, leçons particulières ou soutien scolaire sollicités par les parents – on est là devant des objets qui matérialisent une responsabilité éducative majeure aujourd'hui reconnue aux parents, celle de la réussite scolaire, qui, plus semble-t-il que toute autre dimension de l'éducation qu'ils donnent à leurs enfants, engage de fait leur image en tant que "bons parents".

Le travail sociologique de Michel Verret (1978) semble ignorer des auteurs. Il opposait l'organisation bureaucratique des études en philosophie, à l'université, avec la position aristocratique nécessaire à la réussite. Ainsi, explique Verret, les notions philosophiques sont présentées une après l'autre sans que l'on puisse ainsi atteindre les questions vives posées par tel philosophe, tandis que l'étude efficace suppose la production d'un espace personnel pour rencontrer les philosophes précédents et produire pour soi des éléments de réponse qui résistent à la controverse. La construction de cet espace personnel fort est d'autant plus indispensable que le système scolaire en appelle à l'autonomie des élèves tout en bureaucratisant l'accès à la matière de l'étude dans des dispositifs qui la fractionnent à l'infini. La question ne serait donc pas pour Verret dans le transfert de la responsabilité de la réussite, mais elle serait plutôt dans l'écart entre les enjeux officiellement proclamés d'un système scolaire bureaucratique et ce que las acteurs de ce système demandent en fait, l'autonomie d'élèves considérés comme producteurs d'eux-mêmes, même si c'est sous la responsabilité de leurs parents, et évalués selon leur position plus ou moins aristocratique c'est-à-dire, sur d'autres éléments que leur mérite, font leur distinction.

L'aveu parental selon lequel tel ou tel des enfants "n'aime pas l'école" n'est plus énoncé comme un constat, déploré ou fataliste ; il est vécu comme un drame lourd, d'autres drames à venir. Contrairement à une idée largement répandue dans les salles de professeurs, il n'y a pas démission parentale, les parents n'ont jamais été aussi concernés par la scolarité de leurs enfants qu'ils le sont aujourd'hui ; de moins en moins de choses peuvent, à leurs yeux, compenser les déboires que ceux-ci y rencontrent : on ne s'en console plus en constatant qu'une adolescente fera "*une bonne ménagère*" ou que le fils cadet "*s'intéresse bien à la mécanique*". D'où un intérêt des parents pour ce qui peut, à leurs yeux, favoriser un bon parcours scolaire. Les stratégies qu'ils mettent en œuvre dans cette perspective en sont un signe, qu'elles portent sur le choix de l'établissement scolaire[173], sur les décisions et le contrôle de l'orientation, sur le choix des langues étrangères, … ou le recours à des appuis pour le travail scolaire. La scolarisation est passée de plus en plus dans l'emprise de la famille; si les classes favorisées ont, depuis des lustres, mis en place les moyens de leur reproduction sociale[174], les classes moyennes ont eu tendance, depuis vingt ou trente ans, à prendre plus directement en mains le sort scolaire de leurs enfants, à laisser moins de pouvoir à l'institution scolaire ; les classes populaires en demeurent plus dépendantes, mais on note là aussi une volonté plus grande de contrôle familial sur les parcours.

Seulement, le discours tenu par l'institution scolaire depuis la massification de l'accès aux

[173] Van Zanten, 2001 ; Langouet et Léger, 1991
[174] Pinçon et Pinçon-Charlot, 1989 ; Bourdieu et Saint-Martin, 1978

études secondaires et supérieures ne dit rien de ces phénomènes, au point que la volonté de s'assujettir aux demandes et normes scolaires détourne élèves et parents qui ne sont pas au fait des chemins de la réussite. Nous avons rencontré des élèves qui, plutôt que de « bien écouter le professeur » et de « bien faire leurs devoirs » en utilisant les leçons qu'ils ont apprises, vont voir ce qu'il se passe chez leurs condisciples mieux outillés et profitent de leur culture aristocratique de l'étude en partageant avec les enfants nantis les moyens de construire cette culture dont ces élèves disposent à domicile (frères et sœurs plus avancés, parents, professeurs, ouvrages, mais aussi emploi du temps ou calme, etc.).

> *L'autre voie est de considérer que les transformations structurelles du rapport entre l'école et la société ont modifié le sens du travail des élèves en dehors de l'école.* Celui-ci a changé d'enjeu, à proportion du changement des enjeux scolaires, et il se pourrait bien que les distinctions rappelées plus haut soient progressivement frappées d'obsolescence ; *on peut faire l'hypothèse que la place actuelle de l'école unifie en quelque sorte cet objet apparemment disparate, et qu'entre l' "obligatoire" et le "facultatif" l'unité se fasse avec l'idée selon laquelle tout cela tend à devenir "l'indispensable".* Chacun connaît les transformations structurelles en question : massification de l'accès à l'école dans un temps historique où l'accès aux postes de travail et aux positions sociales qui leur sont associées est de plus en plus conditionné par la possession de diplômes ; à la sélection à l'entrée se substitue de plus en plus une compétition au sein du parcours scolaire[175], l'école est ainsi devenue progressivement mais sûrement l'instance hégémonique de socialisation de l'enfance et de l'adolescence, au sens où il n'est plus question d'ignorer ses exigences et de se soustraire à ses verdicts ; en conséquence, c'est l'école qui détermine l'identité sociale de chacun et de chacune, celle-ci n'est plus seulement héritée comme elle l'était autrefois ; et, autre corollaire, le verdict scolaire adressé à l'enfant est souvent entendu (voire prononcé) comme un verdict asséné à l'éducation parentale. Si le parcours scolaire est devenu plus compétitif qu'il ne l'était naguère, et si, en conséquence, tous les élèves sont objectivement "pris" dans cette compétition, ils n'y sont pas pour autant tous "pris" subjectivement. Les familles, y compris dans les milieux populaires, sont conscientes des enjeux scolaires en termes d'insertion sociale et professionnelle ; mais la conscience de la compétition, des moments où elle se joue, la connaissance de la manière d'y jouer et les ressources pour y participer activement sont, on le sait, inégalement partagées. […].

Ainsi, le discours de l'institution bureaucratique réussit à masquer le phénomène que Verret avait mis au jour, aux yeux des acteurs eux-mêmes (professeurs, parents, élèves), en donnant à penser que la responsabilité des rapports à l'école leur appartient et qu'ils n'auraient qu'à s'y conformer, alors que les manières distinguées sont formées ailleurs et font les différences. Mais on le voit ici plus nettement encore : la position sociologique, qui conduit à analyser les rapports sociaux comme compétition, conduit les auteurs du rapport à oublier de décrire l'objet de la compétition et la manière dont s'acquiert la valeur scolaire. Car les auteurs appellent « travail » l'activité demandée par l'école, tandis que le terme même de skholè signifie « loisir ». Non pas sans doute le loisir du paresseux, mais le loisir sérieux de qui peut suspendre son action, pour en étudier les conditions générales de réussite. Le mot nous vient alors immédiatement : le supposé travail demandé aux élèves, pour qu'ils apprennent de ce qu'ils sont enseignés, c'est l'étude. Et c'est l'étude que nous allons tenter de décrire et de comprendre.

> Le travail réalisé pour l'école en dehors de l'école aurait donc changé de statut. *S'il faut de plus en plus autre chose que l'école pour réussir à l'école - ne serait-ce que parce que ce verbe signifie bien davantage qu'auparavant – cette "autre chose que l'école" devient essentielle et englobe tout le travail académique qui s'accomplit hors de ses murs. Celui-ci est de plus en plus l'affaire, au sens de la préoccupation, des parents et élèves » …….Au final, le travail pour l'école en dehors*

[175] Dubet, 1992 ; Glasman et Collonges, 1994

> *de l'école est un objet plus unifié qu'il n'y paraissait de prime abord*.[…]
>
> S'il est organisé selon un découpage thématique qui semble faire éclater l'objet en ses diverses composantes (*les devoirs à la maison, les cours particuliers, le "coaching scolaire", l'accompagnement scolaire, les devoirs de vacances, les jeux éducatifs), c'est pour pouvoir aller aussi loin que possible dans l'examen de ces différents aspects du travail accompli pour l'école*. Et pour mettre en évidence les usages spécifiques, et socialement différenciés, de telle ou telle forme de travail hors de l'école. La conclusion tentera de ressaisir l'ensemble »

A la lecture de cet extrait du rapport, on remarque que l'étude autonome par les élèves, sujets de l'institution scolaire, est sue de tout le monde, et plus encore, que cette étude est reconnue par tous comme indispensable pour une certaine réussite. Dans cet extrait du rapport, D. Glasman fait la distinction entre les tâches explicitement prescrites par l'école et directement liées aux apprentissages réalisés en classe, et les tâches choisies volontairement par certains élèves. Mais le terme n'est pas prononcé, car avec lui fait aussitôt irruption la question de l'objet de l'étude, et nous voilà dans le champ de la didactique. L'auteur propose une hypothèse :

> « Il peut être intéressant de se demander en quoi elles atteignent ces objectifs, de vérifier si faire ses devoirs et apprendre ses leçons régulièrement permet de devenir un "bon élève", ou si, à l'inverse, c'est plutôt parce que l'on est déjà, à plusieurs égards, un "bon élève", qu'on s'adonne avec constance à ce que l'école demande une fois qu'on l'a quittée, qu'on est à la maison »[176].

Cette hypothèse approche de la position tenue dans cette recherche, bien que l'auteur fasse seulement une analyse déclarative des tâches liées à l'activité scolaire que les élèves ont à faire en dehors des heures de cours, sans arriver à les nommer. Evaluer l'efficacité de ces tâches au regard des résultats et des progrès scolaires en mettant implicitement l'accent sur leur dimension épistémique reconnue des *bons élèves*, et ce dans le but de comprendre le fonctionnement du travail à la charge des sujets de l'institution scolaire, tel est notre enjeu.

3.1.6 La position des travaux en didactique :

La didactique a paradoxalement consacré la plus grande partie de son temps et de son énergie d'un côté à étudier les échecs, et de l'autre à identifier et modéliser des phénomènes liés à la scène officielle des apprentissages (l'institution scolaire : les enseignants, les fonctionnements de transmissions des savoirs dans les classes et la posture de ses sujets). Elle semble ainsi avoir peu exploré le travail autonome des élèves, et les questions qui l'accompagnent (quels sont les gestes d'étude attendus de la part des élèves ? quel est le rôle de l'étude dans le processus didactique ? comment peut-on définir la notion d'étude autonome ? Surtout, à quelles conditions l'efficacité de l'étude peut-elle être garantie ?). Des questions dont la plupart sont pourtant soulevées depuis 20 ans[177] et qui forment le cœur d'un problème purement didactique. Pourtant depuis des décennies, il est accepté de tous que le travail hors classe pour la classe est indispensable à la réussite scolaire. Sans doute parce que, comme l'étude est nécessaire à la

[176] D. Glasman
[177] Alain Mercier 1992 observations d'épisodes biographiques didactiques de l'étude

réussite des apprentissages scolaires, les didacticiens ont pensé d'abord à rendre les professeurs capables de l'organiser dans le temps même de la classe, pour que tous y aient accès.

Etant donné le caractère éminemment problématique de l'étude, nos analyses prendront en charge deux de ses dimensions majeures.

- Une première dimension liée au contrat didactique, aux gestes d'étude attendus par l'institution.

- Une deuxième dimension épistémologique relative aux objets mathématiques des situations d'étude autonome que notre recherche se propose de prendre en compte.

Pour nous en fait, ces deux dimensions ne peuvent être séparées ou étudiées séparément, parce que la connaissance est toujours située et donc, prise dans un réseau de relations interpersonnelles et conceptuelles que justement on décrit comme un contrat. Nous allons dans le paragraphe suivant préciser l'hypothèse qui se dégage alors de cette analyse.

3.2 PROBLEMATIQUE ET CADRE GENERAL DE LA RECHERCHE.

3.2.1 Problématique de recherche

Nous partons d'un constat élémentaire sur la réalité du travail d'enquête hors école pour l'école, qui est pour nous l'étude : il s'agit pour les élèves d'explorer le contenu cognitif d'un certain nombre d'objets mathématiques à apprendre, désignée publiquement par des instructions officielles. Les critères de l'évaluation sont déclarés et c'est en cela que le système a un fonctionnement bureaucratique : l'enjeu est d'atteindre des objectifs qui sont proposés, dont la réalisation se fait par comparaison à des types d'actions normées. Mais pour accomplir des « apprentissages mathématiques », l'élève a besoin de posséder un certain répertoire heuristique relatif à des tâches spécifiées, consistant en notions et manières de faire que l'institution bureaucratique a, en principe, présentées préalablement au contenu actuel à apprendre et que ces tâches désignent.

Comment peut-on penser, c'est-à-dire modéliser, la réalisation de l'intention didactique ?

Depuis le début de la didactique, cette réalisation a été modélisée à travers l'analyse de la formation et de la gestion des *systèmes didactiques.* Pour que ces systèmes fonctionnent, Chevallard souligne que :

> « il faut qu'à chaque instant […] il existe un ensemble d'objets institutionnels qui, pour les sujets du système didactique, aillent de soi »[178].

[178] Chevallard 1992 p. 94

En d'autres termes, il est nécessaire qu'un *milieu* existe. Ainsi l'élève doit avoir à l'esprit les savoirs et des savoir-faire anciens qu'il aura à mobiliser, et les *garder présents*. Ces « savoirs et savoir-faire » sont donc un « ensemble de souvenirs de notions jugées communes à un nombre suffisant d'élèves ». Cela définit une « référence commune » officielle pour les sujets de l'institution scolaire. Nous postulons donc que l'établissement de telle référence constitue une nécessité pour l'étude, par le simple fait que tous les sujets de l'institution scolaire la partagent, ce qui implique que l'étude peut s'engager d'une manière autonome, et « l'intention d'apprendre rencontre l'intention de s'enseigner »[179].

Mais le contenu de cette référence ne peut pas dit tout, car les mots et le temps y manquent, comme nous le verrons que , seuls les *meilleurs élèves* arrivent à le construire, et ils le font en s'appuyant sur des éléments que l'institution bureaucratique ignore bien qu'elle soit sensible à la distinction qu'ils apportent à des élèves qu'elle qualifie de *brillants*

Une des spécificités des éléments de la « référence commune » est la stabilité sous laquelle ses éléments apparaissent pour les sujets de l'institution scolaire. Ainsi, en suivant Chevallard , nous pouvons définir le *milieu institutionnel* dont le *milieu pour l'apprentissage* fait partie :

> « On nomme milieu institutionnel relatif à I au temps t, et on note MI(t), l'ensemble des couples (O, RI(O, t)) « stables » au temps t. Les éléments (O, RI(O, t)) qui constituent le milieu – les éléments « stables » – sont ceux qui subjectivement, c'est-à-dire pour les sujets de l'institution I, apparaissent comme allant de soi, transparents, non problématiques.[180]

Pour nous, le milieu institutionnel est composé d'objets mathématiques appartenant par principe au passé didactique des élèves, «il n'est pas effectif » [181] et par principe, il exige pour chaque tâche en étude, la mobilisation de répertoire que les sujets-élèves ont à construire par eux-mêmes pour eux même et le plus souvent, à l'insu de l'institution scolaire qui n'en a pas identifié les éléments. Nous pouvons alors expliciter les fonctions du milieu à partir de l'analyse sur le terme « d'arrière-fond »[182] comme:

- *ce qui permettrait de formuler des raisons*
- *ce qui permettrait de formuler des explications si l'on nous met au défi de les nommer*
- *ce qui permettrait de trouver du sens aux choses, aux actions, et servir de base à une formulation nouvelle.*

Selon Taylor ces fonctions s'identifient ainsi :

> « La compréhension s'opère toujours par rapport à un arrière-fond fait de ce que l'on tient pour acquis, de ce sur quoi l'on s'appuie ni plus ni moins. […]. L'arrière-fond incorpore véritablement une compréhension ; il consiste en une appréhension des choses qui, quoique implicite, peut nous permettre de formuler des raisons et des explications si on nous met au défi d'en donner. […] Voir que notre intelligence réside avant tout dans nos pratiques, c'est attribuer un rôle

[179] Mercier, 1992.
[180] Y. Chevallard, 1992
[181] Mercier (1992)
[182] Etablir par Taylor, 1995

> incontournable à l'arrière-fond. […] La compréhension d'arrière-fond … est dans une large mesure incorporée. Ceci aide à expliquer la combinaison de traits qu'elle présente : c'est une forme de compréhension, permettant de trouver du sens aux choses et aux actions, mais en même temps entièrement informulée, tandis que, troisième point, elle peut servir de base à une formulation nouvelle. »[183]
>
> « Cette « base à une formulation nouvelle » est bien la dimension indispensable à la compréhension d'une nouvelle pratique mathématique, que l'institution veut faire étudier, et qui va incorporer des objets de savoirs nouveaux, à côté d'anciens qui constituent « l'arrière-fond ». En retour, cet « arrière-fond » va fabriquer « le sens » de ces nouveaux objets, en servant de base à laquelle se référer pour évaluer ce qu'ils apportent de nouveau dans de nouvelles pratiques »[184]

Nous pensons donc que, l'une des raisons pour laquelle l'élève doit gérer le répertoire d'une tâche donnée, en corrélation avec l'écologie de la classe, réside dans la nécessité d'aménager l'« *arrière-fond* » que constitue la référence commune des savoirs anciens. Ce sont les savoirs anciens qui fabriquent le sens de nouveaux savoirs mathématiques. Nous pouvons donc dire que le fonctionnement ou la gestion des systèmes didactiques a besoin d'un ensemble d'objets et de rapports aux objets qui soit stable pour les sujets de *I* à un instant *t* et constituant « des éléments pérennes du contrat didactique »[185]. Cependant, cet ensemble n'est pas statique , il change au fur et à mesure que les systèmes didactiques évoluent. Selon l'instant *t* où il se trouve, pour pouvoir mener à bien son projet d'apprentissage par l'étude, l'élève se doit de gérer la réactivation et la transformation de certains savoirs mathématiques de même que le contrat qui leur est relatif et qui change ; mais il doit aussi « *masquer* » l'existence d'autres savoirs dans le but d'articuler, de confronter les objets de savoirs déjà connus aux savoirs nouveaux pour l'étude en cours. Ce qui correspond à la notion chevallardienne de milieu[186], dont on comprend alors la propriété :

> « le milieu est régi par le contrat didactique ».
>
> « Certains des éléments du milieu vont être déstabilisés et cesseront momentanément d'appartenir au milieu, avant de s'y ré-stabiliser ensuite, dans une organisation économiquement et écologiquement différente »[187].

Il s'agit alors d'une dynamique des milieux de référence, qui sont en constant mouvement : un processus de « méso-genèse ». Autrement dit, certains des éléments de l'univers cognitif[188] de l'institution classes de mathématique se stabilisent pour contribuer à définir une référence commune à partir de laquelle les nouveaux savoirs pourront être construits ou étudiés. A un temps donnée t, cette dynamique rend présents pour l'élève des éléments qui sont, pour un temps, statiques. L'étude et sa gestion supposent que, pour parvenir à l'élaboration partagée de connaissances mathématiques, l'élève soit, apte à adapter son univers cognitif au moment de l'étude d'une tâche:

- *Il s'agit ainsi, tout au long du processus de l'étude, de réactiver les objets nécessaires de l'univers cognitif et de désactiver les objets inutiles, pour la constitution des milieux.*

[183] Taylor C. (1995), pp.554-572
[184] Matheron, 2000, p.109
[185] Mercier 1992
[186] Selon Matheron, 2000
[187] Chevallard, 1992, p. 95
[188] On appelle *univers cognitif* de *x* l'ensemble $U(x) = \{ (o, R(X, o)) / R(X, o) \neq \varnothing \}$.

- *Il s'agit aussi simultanément de réactiver des rapports aux objets mathématiques qui ne seront pas forcément stabilisés lors de l'étude.*

Ces objets mathématiques peuvent être simplement convoqués pour appuyer le projet d'apprentissage par l'étude et ne devront pas être gardés présents à l'esprit plus longtemps que la durée d'une séance. Nous postulons donc que l'élève en étude autonome mathématique se réfère de manière très souple, aux objets qui font partie du milieu de référence de la tâche en étude, c'est aussi la dynamique écologique des objets du milieu de référence que nous appelons le répertoire. Nous formulons donc une première question à laquelle nous essaierons de répondre par la suite :

Que fait l'élève pour réactiver, transformer les objets mathématiques et les rapports aux objets de l'univers cognitif de classes mathématique ? Comment l'élève gère-t-il le répertoire d'une tâche mathématique en étude autonome et sur quels indices s'appuie-t-il ?

Dans notre étude, nous aurons à comprendre ce qu'est l'autonomie des élèves, car elle s'exerce aux marges de l'institution didactique et en accord implicite avec elle. Mercier (1992) l'a suggéré en utilisant les idées de « position aristocratique dans une institution bureaucratique » et de « distinction », sans travailler plus avant ces idées. Car en effet, la constitution de milieux a lieu au sein d'institutions caractérisées en théorie anthropologique didactique de la manière suivante :

Une institution *I* est un dispositif social « *total* », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet – et impose – à ses sujets […], la mise en jeu de manières de faire et de penser propres.

Pour Chavallard , les « manières de faire et de penser » sont imposées aux sujets et aux constructions institutionnelles. Nous postulons que la constitution répertoire épistémologique d'une tâche mathématique est régulée par l'institution. Alors, se pose la question de savoir :

Comment l'institution didactique organise –t-elle ou non le répertoire d'une tâche, pour ses sujets ?

Nous trouvons des éléments de réponse à cette question dans l'étude anthropologique de Douglas[189] « Comment les institutions pensent ? ». Douglas énonce et discute deux principes dont les institutions se servent pour réguler la mémoire de leurs membres : Le *principe d'identification* et le *principe de cohérence*.

Le principe d'identification est souligné comme tel

> « Si les individus construisent collectivement les institutions et les classifications qui leur sont associées, celles-ci leur donnent donc en retour des principes d'identification qui vont leur permettre de se penser et de penser le monde »[190]

Cela définit une institution comme un dispositif social « total », en d'autres termes *un groupement social légitimé*. En retour de la reconnaissance de légitimité venue des membres de l'institution, celle-ci leur fournit des « principes d'identification » : des points de référence qui

[189] Douglas1999
[190] Douglas 1999, p55

permettent par exemple à l'élève qui s'assujettit à l'institution scolaire d'identifier et de classer certains objets mathématiques.

Ainsi, dans les références d'une élève participant aux recueils empirique de cette recherche, se trouvent un exercice relatif à la technique du module et d'argument d'un nombre complexe avec une interprétation des résultats obtenus (*Réf : F001-S3/23032008 : page186*). Cet exercice est considéré par l'élève F001 comme le moyen d'effectuer des apprentissages en vue d'une autoévaluation. La nécessité de vérifier qu'elle a tout compris a produit un « principe d'identification », donné par l'institution classe à laquelle F001 s'assujettie, pour « se penser et penser le monde » des nombres complexes , à travers l'objet didactique étude autonome .C'est donc grâce à l'étude autonome que F001 s'identifie comme ayant tout compris non pas seulement pour un éventuel examen, mais aussi pour sa propre compréhension du monde des nombres complexes et pour d'autres apprentissages à venir dans son cursus scolaire voir universitaire. Les *principes d'identification* fournis par l'école sont ainsi déterminés par les manières de faire qu'elle impose pour qu'elles deviennent des manières de penser.

Douglas caractérise en outre la mémoire d'objets pour penser par le *principe de cohérence institutionnelle* :

> « Les institutions dirigent de façon systématique la mémoire individuel et canalisent nos perceptions vers des formes compatibles avec le type de relations qu'elles autorisent »[191] (p. 84)

Il précise par ailleurs que les institutions créent des *« zones d'ombre »* qui ne sont ni observées ni questionnées par leurs sujets. Elles sont le négatif des « zones de lumière » qui exposent des détails faciles à distinguer, et sont donc reconnus par les sujets de l'institution. Ces éléments sont compatibles avec les « manières de faire et de penser » du moment. Ainsi, le *principe de cohérence institutionnelle* établit que « les pratiques non conformes à la raison d'être de l'institution sont rejetées ». Dans le cas des institutions didactiques que nous avons observé, nous avons essayé de comprendre en plus, la dynamique institutionnelle qui fait bouger les lignes de l'ombre et de la lumière. Douglas ajoute que :

> « Toute institution se met […] à organiser la mémoire de ses membres ; elle les force à oublier des expériences incompatibles avec l'image vertueuse qu'elle donne d'elle-même, et elle leur rappelle des événements qui soutiennent une vision du monde complémentaire de la sienne »[192]

Nous pouvons alors penser et dire que dans les institutions didactiques scolaires, le répertoire d'une tâche mathématique à l'étude est organisé par les assujettissements que l'institution impose. Alors comment les décrire ? L'analyse du processus de transposition didactique d'un savoir peut rendre compte de certains assujettissements extérieurs provenant des instructions officielles, du savoir savant, de manuels utilisés, de recherches personnelles etc.. Nous postulons que certains des assujettissements internes relèvent de l'analyse des contrats didactiques et des rapports que les élèves établissent aux objets des milieux, relèvent de la gestion que l'élève fait des répertoires d'une tâche mathématique. Cela nous conduit à une

[191] Douglas 1999 p84
[192] Douglas 1999 p128

question supplémentaire

Quelles sont les caractéristiques de vie institutionnelle qui ont des effets sur la gestion de l'étude autonome d'une tâche mathématique ?

En ce point de notre exposé, nous pouvons trouver des éléments de réponses aux questions posées à partir du concept de *cadres sociaux du souvenir* analysés par M. Halbwachs[193]. C'est précisément la recherche des éléments qui, dans plusieurs contextes sociaux permettent une certaine reconstruction qui l'ont amené à l'élaboration des « *Cadres sociaux du souvenir* ». A sa suite Leroi-Gourhan évoque la notion de « *mémoire sociale* » [194]mobilisée pour l'exécution d'une tâche. Selon Halbwachs, le souvenir serait un fait et un processus collectif, considéré comme stockage des faits d'expériences, des connaissances, qui interviennent lors de l'évocation des événements vécus. Ainsi il existe des points de référence, *les cadres*, qui sont de nature sociale et forment un système global d'identification du vécu, permettant la remémoration individuelle et collective[195] :

> « Les cadres sociaux sont des systèmes de logique, de sens, de chronologie, de topographie qui anticipent le souvenir, créent pour lui « un système général du passé » rappelant le rôle et la place du souvenir particulier »[196]

Ils sont, eux-mêmes faits de souvenirs « stables et dominants », ainsi que des chaînes d'idées et de jugements qui organisent le sens d'un vécu lié à un groupe social.

Nous remarquons que les éléments présentés par Halbwachs pour définir les cadres sont assez englobant, de telle sorte que cela donne à la notion de « cadre » un sens assez large de sorte que, presque tout peut être élément d'un *cadre social*, puisque c'est la fonction systémique dans laquelle un objet est pris, qui en fait un élément d'un cadre social. : Ils servent à l'identification du passé en anticipant le souvenir. Voici quelques exemples donnés par l'auteur pour illustrer le fonctionnement des cadres. Les cadres peuvent être de nature générale, comme le langage, le temps social et l'espace collectif, et d'autres de nature spécifique, comme la famille, la religion, les classes sociales, les musiciens, les géomètres, etc. Le premier cadre auquel Halbwachs fait allusion est celui du langage. Il le présente à partir de ses analyses de récits de rêves :

> « Sans doute, il doit y avoir un grand nombre de notions communes au rêve et à la veille. S'il n'existait aucune communication entre ces deux mondes, si l'esprit ne disposait pas des mêmes instruments pour comprendre ce qu'il aperçoit dans l'un et dans l'autre […] il ne donnerait pas aux objets, aux personnes et aux situations à peu près les mêmes noms, il ne leur prêterait pas le même sens que lorsqu'il les rencontre pendant la veille, et il ne serait pas en mesure de raconter ses songes [197]

Selon Halbwachs, les mots ou plutôt le langage, supposent non pas un homme, mais un groupe d'hommes associés. Derrière la suite des mots articulés, explique-t-il, existe une suite d'actes de compréhension qui s'est construite. C'est avant tout, grâce au sens commun des mots que nous arrivons à nous faire comprendre ; c'est-à-dire à penser comme un autre et à vérifier

[193] M. Halbwachs (1925 & 1994)
[194] Leroi-Gourhan
[195] Huici, 2000
[196] Halbwachs, 1994, p. 325
[197] Halbwachs, 1994, p. 40)

qu'il pense comme soi, parce que nous nommons pareillement notre rapport conjoint à une même chose. Il expose les cadres temporels, type de cadre général composés de faits socialement significatifs considérés comme associés au temps. C'est le cas des faits ou des évènements. qui fonctionnent comme des points de référence auxquels on peut s'adresser pour reconstruire le passé. Un troisième type de cadres correspondant aux cadres spatiaux de la « mémoire collective »[198]. Ils sont formés à partir des lieux, par exemple le laboratoire, salle des cours en biologie ou en chimie, TD ou TP de mathématique dans une classe pourrait être décrite dans sa typicité de lieu scolaire. Nous devons considérer aussi les cadres sociaux souvenir qui sont spécifiques de ce que nous observons. Pour ce faire, nous postulons que le concept de souvenir est une des partitions de ce que nous appelons dans cette recherche le répertoire

Signalons que les premières études d'Halbwachs ont porté sur des groupes sociaux dont la plupart des hommes font partie : la famille, la religion et les classes sociales. Dans chacun d'eux, il a identifié des événements, des personnages, des objets, des relations, […..] qui servent de points de référence pour les membres de ces groupes afin qu'ils se souviennent. Nous avons trouvé des traces de ce comportement dans la biographie des élèves de notre échantillon de recherche, par exemple dans les épisodes de l'élève F001 (Réf *: S5/14052008/Probabilités/Loi continue/loi exponentielle pages 173- 180*) qui cherche souvent à se rappeler les références théoriques et liens de filiations entre les objets qui se trouve dans son cahier ou son livre de classe que nous considérons comme donnés existants dans le groupe social que représente l'institution scolaire ,dont F001 est un membre.

Nous pouvons donc suivre ici Halbwachs, dont l'une des thèses principales a consisté à énoncer que nous ne pouvons actualiser ou réactiver un souvenir qu'en nous replaçant « du point de vue d'un ou plusieurs » groupe social auxquels nous avons appartenu, ainsi que « dans un ou plusieurs courants de pensée ». Cependant, transposer les thèses d'Halbwachs[199] au fonctionnement et à la gestion de l'étude mathématique autonome pose quelques problèmes, qu'il nous faut maintenant aborder. Nous considérons pour cela que «l'institution scolaire » n'est pas seulement une réunion d'élèves, de professeurs et autres personnes. Ce qui constitue l'institution est essentiellement « un intérêt, un ordre d'idées et des préoccupations […] un courant de pensée »[200]. En ce qui nous concerne, les élèves de la classe de terminale que nous avons observé sont régis, par des règles institutionnelles qui leur permettent ou leur imposent des formes de penser et de faire. En d'autres termes, nous allons considérer que même si elles sont fortement dépendantes du système didactique qui en est l'origine et le but, les institutions de l'étude autonome se constituent, elles aussi, d'un ordre d'idées, d'intérêts et de préoccupations parce qu'elles sont pour la continuité de l'institution scolaire. Nous allons donc nous interroger sur les cadres sociaux du souvenir, de la mémoire collective, de la mémoire sociale qui rendent possible et efficace l'étude des très bons élèves. Nous postulons que lorsque le souvenir, la mémoire sociale ou collective sont écologiquement dynamique et efficace, ils sont des partitions de ce que nous appelons le répertoire. Ce qui nous conduit à une troisième forme, problématisée, de notre question initiale :

Quelles sont les cadres généraux et spécifiques des pratiques d'étude autonome qui

[198] Le concept de « *la mémoire collective* » permet de définir le processus social de reconstruction du passé vécu et expérimenté par un groupe, une communauté ou une société déterminés (Aguilar, 2002).
[199] Halbwachs
[200] Huici, 2002, p. 22

permettent la production d'un répertoire personnel et ainsi, conduisent les élèves qui en bénéficient à la réussite ?

Mais avant d'aller plus loin, rappelons que nous avons déjà utilisé l'expression de « répertoire » dans des expressions variées comme « répertoire d'une tâche mathématique » : « répertoire », « répertoire personnel ». Il en est de même pour ce qui concerne les termes de « gestion », et de « gestes », centraux pour notre recherche. Dans le paragraphe suivant, nous précisons ces notions.

Pour nous, le répertoire pour l'étude d'une question de mathématiques se compose d'expériences vécues et perçues par des individus dans des institutions, expériences qui sont donc relatives à des pratiques ayant fait sens dans des classes de mathématiques. Ces expériences[201] sont mises en présence d'un individu ou d'une institution ce qui apparaît comme des faits à comprendre et des manières d'agir efficaces. Il s'agit donc, pour nous, de nous engager dans une analyse raisonnée de tels faits d'expérience devenus pour des élèves des lieux organisés dans un répertoire de manière de voir et d'agir pour les questions à venir. Pour ce qui nous occupe, les expériences considérées sont relatives aux différentes classes de mathématiques qui ont produit le parcours biographique des élèves que nous suivons. En particulier, elles sont relatives aux anciennes pratiques des mathématiques et de leur étude, des pratiques à la fois mathématiques et didactiques. De cette manière, en suivant « les choses du passé », il est possible d'envisager une « phénoménologie éclatée du souvenir»[202]. Lors du rappel de tel objet ou évènement de nature mathématique, se pose la question de quelle manière et pour quel sujet le rappel est-il obtenu ? Nous postulons donc, qu'au cœur de l'acte de constitution de souvenir, la question du quoi ? Du comment ? De qui ? Suppose la mobilisation d'un répertoire adéquat.

3.2.2 Sur la notion de « gestion »

Chevallard précise le sens à donner au mot « geste », à partir de la modélisation anthropologique qu'il a donné lors de la VIII^e^ Ecole d'été en 1995. Dans l'« esquisse d'un modèle didactique » sur « la fonction d'étude », l'auteur pointe l'existence de diverses institutions qui intègrent un *système de formation scolaire* nommé génériquement l'*Ecole*. Chacune de ces institutions détermine un ensemble $P(I)$ de *positions institutionnelles* existant dans I, des positions «d'élève » et des positions « professeur ». Étant donnée une institution I, un objet o y existant et une position p dans I, on dit que x est un « bon sujet » de I en p si $R(x, o) \cong R_I(p, o)$. Or, pour pouvoir porter un jugement sur la conformité entre « rapport personnel » et « rapport institutionnel », de tels rapports doivent être observables. Les rapports institutionnels sont visibles par des *dispositifs* relativement stables qui sont institués, et qui orientent l'action des sujets institutionnels. Pour décrire la manière dont les rapports personnels « se donnent à voir » on considère que « la position p est caractérisée par un ensemble de *gestes* », que le sujet x en p, « doit accomplir dans le cadre d'un certain nombre de dispositifs ». Comme l'explique

[201] Précisons que l'on entend ici par « expériences » la confrontation de la réalité avec ce qui permet d'en avoir la sensation et la perception.
[202] Ricoeur

Chevallard[203], le terme de *geste* est pris au sens large, Le latin *gestus* signifie, au sens figuré, « prendre sur soi, se charger volontairement de », et donc « exécuter, faire ». C'est en ce sens large, et non dans le sens restreint plus courant (« mouvement du corps »), que le mot est pris ici : on doit le rapprocher du verbe *gérer* et de la substantive *gestion,* de même origine.

Il y a donc une grande variété de *gestes* d'élève : apprendre ses leçons, évaluer ses connaissances à travers différents exercices mathématiques, participé à la correction des devoirs proposés en classe, sélectionner de son propre chef un exercice dans un quelconque livre de mathématique pour une autoévaluation, etc. Le verbe *gérer* fait alors référence à l'action stratégique de mobilisation de ces actions et la substantive *gestion* est à interpréter dans le sens de la mise en œuvre de telles actions par le sujet d'une institution, il prend ici un sens stratégique lorsque l'on pense que l'étude autonome suppose non seulement la mobilisation des actions prévues ou non dans un dispositif, mais aussi la production et la validation de dispositifs personnels. Chevallard précise le système d'identification de la position institutionnelle d'une personne avec les *systèmes de connaissances et de savoirs pertinents* « qui permettent de structurer les dispositifs et d'informer les gestes ». Avec cet auteur, nous considérons « gestion » au sens large du terme:

> « La gestion est l'accomplissement, dans le cadre d'un certain nombre de dispositifs, des gestes qui dépendent d'un système de connaissances et de savoirs pertinents dans une institution »[204]

Autrement dit, la gestion se réfère au fait de *faire quelque chose pour atteindre quelque chose*. Cette dernière, certes, est associée à ce qu'on gère : une situation, un orchestre, un environnement informatique, une séance Nous appelons cette gestion *le répertoire didactique pour l'étude des mathématiques*.

Le répertoire que nous étudions est pour nous *un phénomène didactique* car nous pouvons maintenant le rendre « perceptible ». Au moins partiellement, puisque nous n'observerons pas l'intégralité des situations possibles de son activation. Il s'agit en effet d'observer en anthropologue une part du répertoire « délibérément donnée à voir à l'observateur »[205] , de manière revendiquée, par les sujets d'une institution qui auront accepté d'être nos informateurs de par leur position dans cette institution. Ainsi, ce qui nous occupe est défini comme *la gestion du répertoire didactique en des lieux d'étude hors classe*. Cette gestion est observée comme accomplissement de gestes d'étude, par un élève qui les démontre comme éléments d'une stratégie d'action qu'il gère à l'aide de connaissances qu'il peut déclarer sans autre délimitation a priori. Etant donné que ces gestes sont relatifs à l'étude, nous les appelons ***gestes du répertoire épistémologique de cet élève***. A ce stade de notre travail, les termes génériques pour les décrire peuvent être, par exemple : démontrer, déterminer, calculer, conjecturer, montrer, analyser, expliquer, interpréter, utiliser, tracer, etc. Ce sont des verbes d'action très universels en mathématiques et nous devrons les spécifier, mais nous aurons aussi sans doute à nommer des actions plus explicitement didactiques : rappeler, définir, nommer, désigner, signer, noter, etc.

[203] Chevallard, 1996, p. 84
[204] Y. Chevallard
[205] Selon les méthodes de recherche en anthropologie

3.2.3 Questions de recherche

A ce stade de notre exposé, il semble important de faire encore une mise au point. Nous partons de la nécessité de références communes aux membres d'une institution mathématique. Cette référence commune qui est composée par des éléments de l'univers cognitif de la classe, inclut le milieu institutionnel nécessaire pour le fonctionnement de tout système didactique. Ainsi, il s'agit pour les élèves de gérer la constitution de cette référence et de ce milieu. Mais il s'agit aussi de gérer des objets de l'univers cognitif qui seront réactivés de manière occasionnelle – intentionnellement ou pas – et non dans le but de les « garder présents à l'esprit » ; ils ne seront donc pas stabilisés. A travers ces deux fonctions, nous retrouvons le répertoire que l'élève doit gérer lorsqu'il effectue un travail d'enquête et d'exploration que représentent ses moments d'études autonomes.

Remarquons aussi que, comme un système didactique est supposé organiser en amont, pour les élèves, le cadre institutionnel des objets mathématiques dont ils auront l'usage, nous visons une meilleure compréhension du fonctionnement des institutions didactiques en analysant les gestes qu'accomplit l'élève pour mobiliser et contrôler le répertoire dont il a besoin. Car, pour gérer le répertoire des types de tâches dont il étudie les techniques, l'élève doit mobiliser des éléments des cadres institutionnels de ce répertoire, qui servent de points de référence pour provoquer la technique pouvant conduire à la solution adaptée. Nous supposerons encore que les gestes qui ont été accomplis publiquement par le professeur sont porteurs de certains de ces éléments, et qu'ils bornent une zone de l'univers cognitif qui peut devenir ou être le milieu institutionnel de l'étude, afin que l'élève x_i, interagisse avec les objets ainsi mis en évidence pour celui qui est bien assujetti à l'institution scolaire.

Notre visée suppose la prise en compte simultanée de plusieurs entrées, du rapport d'élève aux objets mathématiques, au fonctionnement des institutions et des réseaux de savoirs. Les analyses menées jusqu'ici pour situer le fonctionnement et la gestion de l'étude mathématique dans un cadre didactique, montrent que notre recherche est dans une zone de contact fonctionnelle entre plusieurs théories : didactiques, anthropologiques, psychologiques. Une zone, dans laquelle les théories s'enchevêtrent se complète et s'éclaircissent les unes des autres. Ainsi, la TAD nous propose un modèle explicite permettant de présenter la notion d'étude et d'en discuter relativement à une tâche mathématique. La théorie des situations didactiques (TSD)[206] a défini la notion de contrat, et a identifié les phénomènes paradoxaux inhérents à toute relation didactique, elle nous donnait déjà avec la définition de milieu d'une situation les premiers outils pour présenter de manière pertinente la question de la mise à disposition des savoirs dans l'institution scolaire, pour l'étude. De tout ce qui précède, il apparaît que cette recherche ne peut pas se limiter à l'une ou l'autre de ces théories.

Mais quoi qu'il en soit, notre conception du fonctionnement et de la gestion de l'étude chez les élèves particuliers se caractérise par la dimension épistémologique des objets mathématiques que les bons élèves étudient. Cette conception implique la mise en place d'un système d'analyse et d'interprétation de cette dimension épistémologique, qui va nous conduire à définir ce que nous appellerons alors le répertoire heuristique d'une tâche mathématique.

[206] G. Brousseau

Étudier le savoir c'est, aussi bien pour Bachelard que pour Descartes, « se l'explorer à soi-même », « repasser son cours », et c'est « le projet de s'enseigner soi-même, tel qu'il peut se former après qu'un premier enseignement ait présenté les objets sur lesquels l'effort didactique doit se porter »[207] Le savoir à l'étude ne devient donc connaissance de l'élève que si l'élève le construit ou le reconstruit pour lui-même. Cependant, la reconstruction d'un savoir par l'élève nécessite la connaissance de la structure et du fonctionnement du savoir en question : le répertoire a donc pour nous une fonction heuristique[208].

En outre, pour être viable un élément du savoir donné doit pouvoir apparaître comme faisant partie d'un ensemble structuré : « L'activité mathématique tend à organiser ses outils, et bientôt les problèmes qu'ils permettent d'attaquer, en des ensembles, qui sont les théories »[209] Ainsi l'enjeu de l'étude chez les bons élèves n'est pas la production de réponses à une tâche problématique donnée, mais la construction d'un rapport aux moyens qui permettent la production de réponses adéquates à une tâche du même type. A cet effet, il apparait que la réussite de l'étude d'un objet vient avec la considération des réseaux de pratiques en lien avec celui-ci. Cet ensemble de réseaux se rapproche du site mathématique tel que défini par Abdulkadir Erdogan[210], complété par Christian Silvy[211] sous le terme de site local mathématique La notion de répertoire est liée à la notion de site mathématique

La construction du site mathématique comme répertoire de l'étude d'une tâche constitue donc un guide pour la recherche, une carte des positions possibles, un référentiel pour comprendre l'étude autonome. Même si l'entrée dans l'étude d'un objet mathématique diffère d'un élève à l'autre et relativement à la construction de ses propres rapports aux objets du site, sa connaissance à priori nous conduira à identifier les conditions sous lesquelles se présentent les objets et les pratiques qui les mobilisent, dans les moments d'apprentissage qui font le quotidien des systèmes didactiques relatifs aux mathématiques et que nous identifions par leur fonction d'épisodes didactiques. Tout ceci nous permet de proposer d'entrer en matière par l'étude des répertoires pour l'observation des épisodes de la biographie didactique des bons élèves. Nous situons donc les effets biographiques d'un épisode didactique grâce à l'analyse du site local mathématique ; du type de tâches qui a donné lieu à cet épisode.

En rapport avec à la notion de site le répertoire peut se comprendre comme suit :

[207] A.Mercier
[208] Du grec heuriskêin (trouver, qui facilite la recherche de solution, qui a une utilité dans la recherche de solution), l'heuristique a pour objet de dégager des règles pour la recherche de solution, ce qui est au cœur de nos questions. L'heuristique étudie les méthodes de résolution de problèmes mathématiques et les opérations mentales qui y sont utiles.
[209] L. Rajoson, 1988
[210] Pierre Duchet et Abdulkadir Erdogan
[211] Christian Silvy

Le site local mathématique est un outil d'analyse des éléments estimés pertinents pour l'étude d'une tâche mathématique. Il modélise ces éléments en un écosystème organisé d'êtres mathématiques (objets symboliques et concepts) et non mathématiques ou non encore mathématisés (choses) qui constituent le substrat nourricier des questions et des idées permettant la mise en œuvre des êtres mathématiques de traitement de la tâche demandée et des tâches du même type. L'élève qui dispose de ces objets, concepts et choses en un répertoire personnel peut réactiver les savoirs mathématiques et sa connaissance du monde pour agir, identifier ses ignorances en posant le problème venu de la tâche à accomplir, et engager l'étude de la question c'est-à-dire enquêter sur les savoirs pertinents pour ce problème afin de compléter son répertoire.

3.2.4 Définition du répertoire

Comme l'a indiqué C. Silvy dans sa classification de niveau de concepts[212],

Nous postulons que le répertoire peut s'articule autour d'un écosystème d'objets et de concepts mathématiques qui est nourri par un substrat souvent invisible Les objets mathématiques centraux de la question mathématique étudiée sont des ostensifs (outils symboliques et pratiques de ces outils) et des non-ostensifs ou concepts, organisés en degrés théoriques. Les concepts de degré 1 sont les manières de faire qui permettent d'utiliser les objets comme des outils, (ce sont des techniques au sens de Chevallardien). Les concepts de degré 2 permettent de justifier les techniques[213] (ce sont des éléments technologiques au sens Chevallardien). On trouve à ce niveau des théorèmes justifiant les techniques. Les concepts de niveau 3 permettent de justifier les organisations de théorèmes. Ils demeurent largement implicites au lycée et jusqu'au début des études universitaires : on dit qu'ils sont au-delà de l'horizon institutionnel. L'auteur ajoute que « depuis la crise des fondements et le travail de Bourbaki,[214] il est vain de croire qu'une production mathématique n'a pas de présuppositions » Et Ferdinand Gonseth[215], rappelle pour sa part que : « Dans toute construction abstraite, il y a un résidu intuitif qu'il est impossible d'éliminer ». Un problème mathématique comporte toujours des implicites qui peuvent être d'ordre mathématique, ou non, para mathématiques (comme la notion de variable) proto mathématiques (comme la notion d'égalité ou celle d'entier naturel, à l'école) ou simplement des objets préconstruits (comme la notion de problème).

Il nous semble maintenant pertinent de trouver des éléments de réponses aux trois questions suivantes : *Que fait l'élève pour réactiver les objets et les rapports aux objets de l'univers cognitif de la classe? En d'autres termes, comment l'élève gère-t-il ses répertoires au cours de son étude des mathématiques ?Quels sont les objets et les fonctions des cadres institutionnels qui permettent l'activation du répertoire des élèves dans une institution dont l'enjeu est l'étude des mathématiques ?Quelles sont les caractéristiques de « l'étude hors classe » qui ont des effets dans la gestion par l'élève de son répertoire et son usage didactique ?*

[212] C. Silvy
[213] Y. Chevallard)
[214] Bourbaki
[215] F. Gonseth (1926

3.3 CONCLUSION

Le **répertoire** d'une tâche mathématique se rapporterait à la manifestation de phénomènes indexés sur le temps relatif de **l'étude**, ces phénomènes sont relatifs à des **objets** de savoir et aux **pratiques** dans lesquelles ils sont pris. Ils sont donc observés ici comme **rapports** de sujets à des objets, que ces sujets étudient. Le répertoire d'une tâche mathématique pour un élève est aussi un construit institutionnel, il apparaît aux acteurs comme porteur des éléments **pérennes** du **contrat** didactique, il fonde les **régulations** entre les acteurs, dans les pratiques de l'étude. Un bon élève, comme ceux que nous observons, **gère** explicitement son répertoire personnel en situant ses objets dans les **cadres sociaux** que l'institution scolaire a défini ou que l'élève a construit pour lui-même.

Chapitre 4 :

METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

4.1 DEMARCHE METHODOLOGIQUE

Il s'agit d'une étude utilisant à la fois une approche de type ethnographique et de type clinique pour l'observation des phénomènes relevant des « bons » élèves. La démarche méthodologique s'est développée en trois étapes. La première étape a porté sur l'installation des conditions d'une observation socio-ethnographique : observation naturaliste, longue sur près de deux années scolaires et non participante, dans les lieux d'étude autonome de cinq élèves d'une classe de terminale scientifique. La deuxième étape a porté sur des observations de l'échantillon relatif à l'étude des chapitres sur les fonctions logarithmes népériens, les fonctions exponentielles, les nombres complexes, les fonctions primitives, les intégrales, les lois continues : elle correspond à une approche clinique de l'ordinaire du didactique dans les moments d'études d'objets mathématiques par les éléments de l'échantillon. En outre, lors de cette étape, nous avons fait construire des épisodes biographiques par les élèves, épisodes dont l'analyse visait à préciser les informations relevées dans chacune des observations. Dans un dernier temps, des compléments sur le fonctionnement de l'étude autonome ont constitué notre centre d'intérêt principal. Nous y avons employé la construction d'épisodes biographiques comme outil de recueil de données.

4.2 INSTALLATION DES CONDITIONS DE LA RECHERCHE

En cohérence avec l'approche anthropologique, la première étape de cette enquête a été de viser l'installation des conditions d'un processus ethnographique de recueil de données. Les informateurs ou sources potentielles de données ont été les élèves et leurs interactions à propos du savoir.

Une étude inspirée d'une approche ethnographique

L'ethnographie peut être considérée comme un produit et renvoie alors à la « description ou reconstruction analytique des scènes et des groupes culturels intacts »[216]. Elle peut être considérée comme un processus et fait alors allusion à « l'étude descriptive et analytique […] des mœurs, des coutumes de populations déterminées », ce qui nécessite certaines stratégies de recherche particulières[217], comme l'immersion à long terme sur le terrain où se produisent les phénomènes à étudier.[218]

L'ethnographie est pour nous une « manière d'étudier », qui « prétend construire des descriptions de phénomènes globaux dans leurs divers contextes et déterminer, à partir de ceux-ci, les réseaux complexes de causes et conséquences qui affectent le comportement et les croyances en rapport à ces phénomènes »[219]. Dans la recherche éducative, ce processus est

[216] Goetz et Le Compte, 1988, p. 28
[217] Goetz et Le Compte, 1988
[218] Goetz et Le Compte, 1988
[219] Goetz et Le Compte, 1988 p29

considéré au sens large comme: devant reconstruire les caractéristiques du phénomène étudié[220]. Étant donné qu'une de nos questions de recherche concerne la détermination des cadres institutionnels de l'étude des objets mathématiques, il nous a semblé qu'une approche ethnographique est convenable pour encadrer notre travail de terrain. Cette approche aura pour objet le repérage de phénomènes d'étude autonome et la réalité didactique observée sera analysée à l'aide des outils à notre disposition. Nous rechercherons une description des phénomènes en termes de contrats que « l'institution scolaire fixe à ses sujets », si on nous permet cette personnalisation de l'institution, alors que ce n'est jamais qu'une catégorie d'analyse. Ces contrats didactiques constituent donc « des manières de faire et de penser permises à soi, ou attendues de l'autre »,.En observant les répertoires des élèves dans leur dimension épistémologique et heuristique, nous observons indirectement les rapports à l'institution *classe de mathématiques* que les élèves ont.

4.3 LE CONTEXTE EXPERIMENTAL DE LA RECHERCHE

Sur le plan expérimental, la problématique adoptée fait d'abord intervenir deux facteurs de variation qu'il nous faut choisir de manière à disposer d'observables exemplaires :

-Une institution d'observation adéquate.

-Des corpus d'études suffisamment stables, comportant des enjeux de scolarité importants.

Considérant ces deux facteurs, nous avons fait le choix de mener l'analyse au niveau des élèves de la classe de terminale scientifique, en étude autonome hors école, Notre premier travail laisse apparaître que le travail d'étude autonome est sans doute spécifié par les élèves qui sont dans la dynamique de réussite, mais aussi qu'à ce niveau d'études tout au moins, il est demandé explicitement par l'institution scolaire elle-même. Nous aurons donc à comprendre comment cette demande s'exprime et comment certains élèves seulement la satisfont. Pour le second facteur, eu égard aux enjeux pour les études ultérieures du contenu mathématique au programme du Lycée, et à la variété des domaines abordés, nous avons choisi d'orienter nos analyses sur des exercices touchant la plupart des grands chapitres du programme de la classe de terminale scientifique.

A cet effet la méthodologie choisie doit, permettre de rendre compte des manifestations de l'étude, dans leur diversité. Cette observation implique pour l'analyse didactique, la prise en compte du contenu mathématique dans les travaux qui se réalisent dans les épisodes d'étude, pour l'école, par des élèves. Nous pensons ainsi que l'analyse menée au niveau des très bons élèves de l'échantillon relativement aux grands chapitres du programme officiel d'actualité, doit nous permettre de comprendre le fonctionnement de l'étude autonome hors classe exigée par l'institution, de même que les paramètres de réussite mathématiques dans l'institution et les conditions réelles de sa réalisation. De ce fait, notre observation est biographique et elle vise la compréhension du fonctionnement de l'institution scolaire.

[220] Goetz et LeCompte, op. cit

4.4 POURQUOI UNE METHODE BIOGRAPHIQUE

Nous comptons réaliser l'observation de la biographie didactique de certains élèves[221]. Parmi les méthodes de recherches utilisées en sciences de l'éducation et particulièrement en sciences didactiques des mathématiques, il nous semble possible de sortir des sentiers battus et de faire des choix qui soient non seulement innovants, mais surtout efficaces en termes d'enquêtes, d'observations, de résultats et de perspectives d'actions réelles. Bien qu'elle soit issue de l'histoire et de la sociologie, la méthode des épisodes biographiques en didactiques permet de répondre de façon adéquate à des exigences scientifiques de rigueur, et d'approfondissement d'une connaissance des institutions qui n'oublie pas qu'une institution est le produit de l'action continue de ses sujets, faute de quoi elle meurt rapidement : notre génération a vu disparaître, sans autre forme de procès ou presque, des organisations sociales de grande ampleur qui s'étaient pensées installées pour produire un avenir nouveau. L'utilisation de la méthode biographique demeure encore peu connue en sciences de l'éducation et en didactiques des mathématiques bien que Mercier[222] ait soulevé il y a 20 ans la question de l'approche d'épisodes biographiques des élèves d'un système didactique relatif aux mathématiques, pour mieux appréhender les conditions institutionnelles et personnelles des réussites ou des échecs des élèves. Pourtant, la didactique des mathématiques consacre la plus grande partie de son temps et de son énergie à l'identification, à la modélisation des phénomènes liés à la scène officielle des apprentissages/enseignements, et semble peu explorer les manifestations et le fonctionnement réel du travail d'étude mathématique des sujets de l'institution scolaire, encore moins les questions qui accompagnent l'étude des objets mathématiques, par les élèves.

Née de la sociologie, utilisée en ethnologie, cette méthode correspond aux exigences de notre problématique de recherche qui cherche à mieux cerner le fonctionnement didactique de l'étude mathématique autonome hors classe. C'est ainsi que nous avons eu l'idée d'explorer *comment des élèves qui réussissent en mathématiques construisent des épisodes de leur biographie didactique en mathématiques*. Ainsi à partir de cette exploration, nous espérons être en mesure d'apporter une contribution méthodologique aux sciences de l'éducation et à la didactique des mathématiques. C'est pourquoi il nous semble intéressant et opportun d'exposer un peu plus longuement la méthode, ses théories, ses amenant ou assignant, et l'orientation ethnosociologique didactique retenue ; puis dans un deuxième temps, nous présenterons les principes de mise en œuvre pratique, et dans un troisième temps les différentes orientations d'analyse des épisodes biographiques didactiques.

[221] A. Mercier 1992
[222] Alain. Mercier

4.5 LA METHODE DES EPISODES BIOGRAPHIQUES

4.5.1 Théories de la méthode

Dans le domaine des sciences de l'éducation comme dans toutes les sciences y compris en didactique des mathématiques, la stratégie d'accès au réel répond par principe aux exigences mêmes de la problématique de recherche définie par le chercheur. Le choix de notre stratégie d'accès au réel a pour enjeu la définition d'un mode d'analyse des situations d'apprentissage par l'étude autonome. Sur la base d'un cadre conceptuel déclaré, nous voulons réussir à appréhender, à analyser et à comprendre le réel à partir d'une position consciente du chercheur sur le terrain. La méthode biographique telle que nous allons la décrire doit nous le permettre. Cette méthode ethnologique doit permettre de cerner aux mieux et de comprendre le vécu mathématique du travail personnel. Nous avons donc demandé à des élèves d'étudier, de travailler sur des problèmes mathématiques, de résoudre des exercices mathématiques, devant nous, et nous avons observé leur action en temps réel ; Cela nous permet de construire ainsi des épisodes de leur biographie didactique à partir et autour de l'organisation de leur travail, de la gestion de leurs connaissances et du fonctionnement de leur étude personnelle des mathématiques. Les épisodes biographiques que nous décrivons nous sont donc explicitement donnés à voir par les élèves de notre échantillon, qui sont nos informateurs sur la question de l'étude. Ils sont de ce fait particulièrement riches et approfondis, et les données sont significatives et explicites. A travers les épisodes de la biographie didactique de ces élèves, nous avons pu aussi recueillir des éléments de réponse que nous n'aurions pas obtenus à travers une approche par entretiens semi-directifs sur le fonctionnement de l'étude mathématique autonome hors école relative à un objet mathématique donné par l'école à un l'élève. En effet, un entretien conduit à la construction d'un récit, auquel manquent les descriptions techniques, faute du vocabulaire de l'action, qui en général manque à ceux qui font. Nous le savons au moins depuis que Diderot et d'Alembert ont dû, pour rédiger les articles de l'Encyclopédie, aller eux-mêmes observer comment faisaient les artisans. Lorsque qu'elle s'est intéressée aux élèves, la didactique des mathématiques s'est jusqu'ici centrée avant tout, sur des entretiens directifs ou semi directifs auprès d'élèves en échec scolaire. Pourtant on y trouve un courant d'approches qualitatives, qui porte sur l'observation clinique de séances de cours de mathématiques en classe[223]. Cela garantit sans doute le fait que la didactique s'intéresse aux systèmes didactique considérés comme des institutions, mais limite singulièrement les voies d'accès aux observables.

Issue de la tradition de l'école de Chicago[224] et utilisée plus couramment en ethnosociologie, l'approche biographique serait d'après Wacheux, l'exemple d'un transfert de technologie possible entre sociologie et sciences d'action. C'est pour de telles raisons que des projets de recherche en sciences de l'éducation ou en sciences didactiques des mathématiques sont à même d'utiliser cette approche. Nous ne la prendrons pas telle quelle, parce qu'il nous faut la spécifier à notre objet.

[223] rapport enseignant/élève-savoir enseigné
[224] l'école de Chicago développée dans les années 1920

4.5.2 Définition de la méthode

Dans ce domaine, la biographie constitue une démarche spécifique, dont l'objectif est de découvrir et d'apporter un sens à des évènements collectifs et particuliers, achevés ou vécus par des acteurs et sujets sociaux. Bertaux[225] considère ainsi « qu'il y a épisode biographique dès lors qu'un sujet expose de façon scripturale ou explicative son expérience vécue ou non » […] « L'épisode biographique résulte d'une forme particulière d'entretien, au cours duquel un chercheur […] demande à une personne ci-après dénommée « sujet », de relater à travers une situation tout ou une partie de son expérience vécue ou non ». Quant à Wacheux[226], il définit pour sa part la méthode biographique comme l'analyse d'un épisode construit relativement à un objet par un acteur sur les évènements qu'il a vécus. L'observation est donc provoquée par le chercheur ; l'acteur, sujet d'une institution ou ensemble d'institutions, reste libre de la formulation des faits et des interprétations qu'il en donne. Si nous suivions l'acception de Wacheux, l'élève, sujet de l'institution « *classe de mathématique* » et de l'institution *« étude autonome hors classe* », construirait à notre demande des « épisodes biographiques mathématiques », par ses analyses et interprétations de « *tâches mathématiques* » en situations d'études réelles à travers des évènements ou notions mathématiques qu'il a vécu ou étudié en classe de mathématiques. L'idée est alors que le sens des pratiques passées est ce qu'il s'agit de construire, et que la recherche doit d'abord accéder à ce sens. Une position qui s'affirme proche est courante en éducation et par exemple au congrès de l'AREF 2010 plusieurs symposiums portaient sur ce qu'elle apporte, notamment comme premier temps dans la formation des adultes. Il s'agit là d'accéder au sens biographique de l'entrée dans un processus de formation qui est donc processus de transformation des sujets, par un intervenant à visée formative.

Aucune de ces deux positions n'est notre choix puisque, contrairement à ces auteurs, nous voulons une approche de la biographie des personnes qui ne soit pas la reconstruction par l'acteur du passé vécu, et nous n'avons pas l'intention d'intervenir sur la formation des élèves. Notre approche d'épisodes de la biographie des élèves est résolument modeste, puisque nous la limiterons à leur biographie didactique, c'est-à-dire aux apprentissages, et que nous n'observerons que quelques épisodes de cette biographie didactique sans prétendre la reconstruire dans sa signification pour la personne observée. Nous conduisons donc l'observation, par le chercheur, d'indices d'épisodes biographiques didactiques pour le sujet didactique observé, et nous en réalisons l'interprétation dans un cadre théorique fort, la TAD. Notre observation est directe, et nous l'avons pour cela qualifiée d'ethnologique. Notre intervention est à visée phénoménotechnique et pour cela nous l'avons qualifiée de clinique. Nous cherchons à construire des épisodes biographiques parce que l'enjeu des institutions didactiques est d'obtenir l'évolution de l'univers cognitif des sujets qui leur sont confiés en position d'élève : ces épisodes sont donc des objets pertinents pour comprendre le fonctionnement didactique des institutions didactiques.

[225] Bertux,1999 p-6
[226] Wacheux, 1996

4.5.3 Positionnement: objet et processus de mise en œuvre de la méthode des épisodes biographiques didactiques

4.5.3.1 La perspective ethnosociologique

L'approfondissement de la *méthode des épisodes biographiques* dans le champ sociologique a donné et donne toujours lieu à des débats. La diversité des positions sur la nature d'un épisode biographique, sur sa structure, sur les techniques propres à sa réalisation, sur son exploitation et sa communication, découle de choix théoriques et épistémologiques fondamentaux comme l'expliquent Heinritz & Rammstedt[227], Mercier[228] et Schwartz[229]. Il nous apparaît qu'un choix est à effectuer entre les « réalistes » et les « antiréalistes ». Les réalistes considèrent que l'épisode biographique constitue une description approchée, par le sujet, de l'histoire que ce sujet a réellement (objectivement et subjectivement) vécue. Tandis que les « antiréalistes » considèrent pour leur part que la relation entre épisode et biographie reste incertaine, et même que l'appellation de *vécue* ne fait pas sens. A contrario des deux courants, notre postulons que les épisodes biographiques sont des construits de l'observation directe de l'action des sujets que nous faisons, en ethnologues de terrain.

C'est de cette manière que Bertaux, initiateur de la méthode des épisodes biographiques, a conduit ses différents travaux de recherche empirique. La perspective, qu'il a souvent qualifié « d'ethnosociologie » désigne une recherche de type empirique basée sur l'enquête auprès des acteurs, qui prend ses sources dans une certaine tradition ethnographique puisque l'observation est réalisée par l'intermédiaire d'un informateur. Ainsi donc, si les recherches monographiques et sociographiques réalisées par l'ethnologue comportent de nombreux intérêts, elles travaillent sur la description que réalise un sujet pour en analyser la culture. Nous ne suivons pas cette approche et tentons d'identifier directement dans l'institution observée (*le travail personnel des élèves en réussite mathématique*) les traces des logiques d'action et des processus qui seraient susceptibles de se retrouver dans plusieurs contextes similaires parce que nous les construisons comme révélateurs d'épisodes de la biographie des sujets institutionnels et que pour nous, ces épisodes sont le produit de l'assujettissement de ces sujets à une institution[230].

Cette approche n'a donc pas pour objet de saisir de l'intérieur les systèmes de valeur ou les schèmes de représentation d'un élève ou d'un groupe d'élèves, mais celui de l'institution scolaire à travers ses sujets qui conduisent une étude, en mathématiques. Elle a pour but d'étudier un fragment de la réalité sociale- scolaire- historique (*objet social que représente l'étude hors classe des élèves en réussite mathématique*). Le recours aux épisodes biographiques permet ainsi d'introduire une dimension diachronique et autorise la mise en lumière 1) de logiques d'action dans leur développement biographique, ainsi que 2) des configurations de rapports socio-institutionnels dans leur évolution historique. Ainsi, nous ne suivons pas Bertaux sur la manière dont il identifie des épisodes biographiques, mais pour autant nous ne nous retrouvons pas dans une position réaliste puisque nous considérons que les épisodes existent pour l'observateur qui les construit et rendent compte de la transformation objective des sujets de ces épisodes,

[227] Heinritz & Rammstedt,1991
[228]A Mercier, 1992
[229] Schwartz, 1993
[230] Bertaux, 1997

transformation que nous observons. Pour les sujets de nos observations ces épisodes pourraient être reconnus comme des « moments d'apprentissage » qu'ils peuvent ou non avoir provoqués volontairement et dont ils peuvent ou non avoir une conscience précise : cela n'est pas notre question.

4.5.3.2 Objet d'étude de la méthode des épisodes biographiques

Trois principales catégories d'objets appréhendables à travers la méthode des épisodes biographiques ont été identifiées par Bertaux[231]: les mondes institutionnels, les catégories de situations et les trajectoires scolaires, institutionnelles ou sociales. Nous pouvons les reprendre partiellement à notre compte parce que nous produisons des interprétations, dans un texte qui décrit un monde qui est pris comme le réel de notre description. Nous réinterprétons donc ici ces catégories dans la logique qui est la nôtre.

Un *monde institutionnel*, dans le cas de notre recherche, est le monde de l'école au sens large, il se bâtit autour de types d'activités spécifiques. Généralement, il est centré autour d'une activité scolaire (*leçon, activité, exercices, devoir de maison, etc*.) et d'une discipline étudiée (*sciences mathématiques, arithmétiques, physique et chimie, sciences de la matière, SVT, histoire & géographie, etc*.). L'hypothèse déterminante de la perspective ethnosociologique repose sur le fait que les logiques qui règlent un monde institutionnel sont également à l'œuvre dans tous les microcosmes qui le composent, nous la ferons nôtre. Cette hypothèse a inspiré de nombreuses enquêtes de l'école de Chicago[232] des interactionnistes symboliques[233] de la sociologie du travail et de la sociologie des organisations. Ainsi nous considérons par principe que, en observant de façon approfondie un seul ou quelques-uns de ses microcosmes (dans le cas de notre thèse, l'étude que conduisent chez eux les élèves qui réussissent les mathématiques), nous devrions être en mesure de saisir certaines des logiques institutionnelles du monde scolaire.

Les *catégories de situations* regroupent par exemple les élèves en difficultés scolaires, pour des raisons de méthodes de travail, de conditions matérielles, familiales et sociales, qui ont une expression dans le cadre scolaire. Ces situations spécifiques ne génèrent pas nécessairement la formation d'un monde social à l'intérieur de l'institution scolaire, mais c'est la situation dans ce monde qui est commune. Elle contraint les possibles imaginés par les acteurs et se caractérise par des logiques d'action spécifiques. Pour déterminer des catégories de situations, il apparaît que la méthode des épisodes biographiques est pertinente et efficace,

Les *trajectoires* scolaires, institutionnelles ou sociales étudiées par la méthode des épisodes biographiques doivent s'appliquer à des objets scolaires appréhendés dans leurs dimensions temporelles. A cet effet, il semble que l'utilisation de la méthode des épisodes biographiques peut nous conduire à une enquête sur le passé qui reconstruirait des trajectoires non seulement pour les sujets institutionnels, mais aussi bien pour des savoirs. Nous pourrions ainsi dépasser leur étude écologique pour aller vers l'identification de certains de leurs processus de construction institutionnelle.

[231] Bertaux 1980,1997
[232] l'école de Chicago
[233] Becker Goffman

4.5.3.3 Le processus d'enquête par épisode biographique.

L'enquête sur les épisodes de la biographie didactique d'élèves a pour objet de rendre compte d'un fragment de la réalité socio-historique, *l'étude*, là où nous pourrons en rencontrer des réalisations, sachant que notre connaissance des phénomènes de l'étude comporte une part importante de stéréotypes, de préjugés et de représentations collectives de sens commun et une petite part d'observation, d'expérience et de construction théorique. L'enquête doit dégager des éléments de connaissances critiques, basés sur l'observation en temps réel des pratiques de l'étude mathématique, sur le lieu où elles sont conduites. Il s'agit de comprendre ce qu'est une *« étude mathématique qui occasionne la réussite »* et d'élaborer un modèle de son fonctionnement et de sa gestion. Le chercheur que nous sommes, conscient de sa relative ignorance, s'est donc adressé sur le terrain à des élèves, sujets de l'institution scolaire, dans le microcosme des temps et des lieux où ils et elles réalisent l'étude mathématique. Nous les avons sollicités à nous montrer leurs interprétations de divers exercices mathématiques, que nous avions collectés pour qu'ils couvrent pratiquement tout le programme de la classe de terminale scientifique S. Nous leur avons demandé de nous laisser observer ce qui se passe dans les moments où ils étudient les tâches mathématiques correspondantes et en ce sens, notre méthode est aussi clinique[234]

La méthode des épisodes biographiques telle que nous la définissons implique donc l'analyse et la compréhension des situations, à partir de l'observation directe des pratiques d'étude réelle des élèves. Nous considérons que l'élève appartient à un seul système didactique mais se déplace dans plusieurs champs sociaux potentiellement porteurs d'intentions didactiques et que son parcours mathématique ne se réduit pas à son lien avec l'institution scolaire. Nous ne recherchons pas à reconstruire le passé et suivons Peneff [235] qui souligne que l'objectif est le recueil d'informations sur l'environnement institutionnel immédiat, mais aussi l'obtention de documentation et l'accès à des données jusque-là négligées.

4.6 LA METHODE DES EPISODES BIOGRAPHIQUES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Porteuses des intentions sélectives du système actuel d'enseignement, les mathématiques interviennent ou sont réputées intervenir massivement dans les réussites scolaires ; leur puissante désidérabilité sociale est à l'origine de nombreux types de médiation. Ces constats généraux sont fréquemment pris en considération dans l'interprétation des différentes situations de réussites ou d'échecs scolaires ; cependant les problématiques de recherche choisies pour appréhender les fonctionnements et dysfonctionnements de l'apprentissage à travers l'étude, ne prennent pas en compte les contenus mathématiques, même si leurs résultats serviront probablement de référence aux futures actions régulatrices. C'est de cette manière que les institutions d'appui développent, à propos des réussites ou des difficultés en mathématiques, des cultures singulières, dans lesquelles, les savoirs mathématiques interviennent relativement peu. De ce fait, la culture courante est de peu de secours pour assister les élèves en cas de besoin. Nous prenons le parti

[234] F.Leutengger 2000
[235] Peneff 1990

inverse de choisir un angle d'approche des questions d'étude d'objets mathématiques qui fasse apparaître de manière significative le rôle et l'importance des connaissances déclaratives et opérationnelles mises en jeu, nous prenons aussi en charge le fait que l'institution scolaire ne se réduit pas aux leçons dispensées en classe et le fait que les connaissances personnelles des élèves sont massivement sollicitées dans l'école.

D'après une définition de la théorie des situations[236], toute interaction présente une composante didactique, dès lors que se manifeste une intention de manipuler et de modifier les connaissances de l'un des inter actants. Ainsi lorsqu'un élève révise, apprend des formules mathématiques, traite un exercice, discute de ses réussites, de ses stratégies, de ses méthodes de résolutions, de ses techniques de résolutions ou de ses erreurs sur un « savoir mathématique particulier », nous pourrons reconnaître l'épisode comme biographique s'il fait mémoire pour l'élève, et comme didactique si cette mémoire est relative au rapport de cet élève aux mathématiques.

4.6.1 L'échantillonnage

Afin de découvrir ce qu'il y a de générique dans les épisodes particuliers que nous observons, nous avons cherché à disposer d'une série d'épisodes de la biographie didactique d'élèves, de façon à rendre possible les interprétations et les comparaisons, ce qui implique à la fois similitude et différence. C'est ainsi que nous avons voulu construire un échantillon respectant la variété des élèves. Le questionnement quant à la taille et à la structure de l'échantillon s'avérait comme un point stratégique. Cependant, en lien avec la problématique, la population analysée et diverses contraintes telles que le temps, la disponibilité des élèves et de leur famille, les résultats mathématiques obtenus en classe par les élèves, nous avons dû composer, Nous avons été amenés à définir comme population cible, des élèves de la classe de terminale scientifique de cinq établissements scolaires de la région de Salon de Provence, Aix-en-Provence, Avignon, qui réussissent en mathématiques. A partir de cette population cible, nous avons défini un échantillon en cherchant la plus grande variété a priori. Pour des questions, centrales, de coût en temps de la recherche, nous nous sommes fixés comme objectif un échantillon de cinq élèves répartis assez équitablement selon leurs origines sociales et leurs résultats scolaires. Nous avons donc suivi un principe d'échantillonnage par choix raisonné[237]. Cette méthode fondée sur le jugement s'éloigne des méthodes probabilistes, dont l'objectif est d'éliminer toute part de subjectivité. Il apparaît que pour des échantillons réduits, la méthode par choix raisonné donne d'aussi bons résultats, parce que le recours au jugement dans la procédure de sélection est source de biais mais que dans un échantillon aléatoire de taille réduite, la variabilité très élevée occasionne des biais tout aussi importants[238].

[236] Théorie des situations G. Brousseau
[237] Thétart & al, 1999
[238] Kalton, 1983

4.6.2 Le recueil des épisodes biographiques didactiques: l'observation

Etant donné l'importance de la phase de recueil d'informations dans notre méthode, nous pensons qu'il est utile de rappeler quelques-uns de ses aspects avant de relater nos propres observations. Sur le terrain la méthode se traduit principalement par des observations directes et particulières relatives à l'exercice qui consiste à traiter et résoudre les problèmes mathématiques. Les observations libres, lorsque l'élève choisit librement les thèmes et les objets mathématiques qu'il souhaite aborder ou traiter dans un épisode biographique, produisent rarement une bonne matière de travail empirique. C'est ainsi que la séance d'observation directe devra être orientée en fonction de l'objet de la recherche[239]. Les objectifs de l'observation devront être largement fixés avant le recueil des épisodes afin de contrôler l'influence sur la recherche de la subjectivité de l'observateur comme des élèves de l'échantillon[240] et de rendre le matériel exploitable. Pour la mise en place de la méthode des épisodes biographiques dans le cadre de cette recherche, nous avons respecté ces deux impératifs essentiels.

Notre préparation s'est faite autour de deux axes. Le premier a consisté, à l'instar de ce que conseille Bertaux [241] à tenir en permanence un journal numérique de terrain où nous avons noté nos démarches, nos rencontres, nos remarques et nos réflexions. Ce journal s'est enrichi tout au long de la recherche. Nous avons également constitué un guide d'observation qui n'est en aucun cas un questionnaire mais plutôt une liste d'exercices couvrant une bonne partie du programme de la classe de terminale S. Ce guide a été évolutif.

4.6.3 Le déroulement de l'observation directe

Le recueil d'information sur le fonctionnement de l'étude d'une tâche relative à un objet mathématique par l'élève s'est déroulé dans une interaction entre l'élève et nous, le chercheur. La phase de prise de contact en relation de face à face nous a semblé déterminante pour la suite du déroulement des rencontres. Comme nous avons choisi l'enregistrement dans le but d'obtenir des données naturalistes, précises et exploitables, lors de la première rencontre avec chacun des cinq élèves composant l'échantillon, et aussi dans le souci de faciliter cette phase de contact qui peut s'avérer délicate dans le cadre de recueils d'épisodes biographiques, nous avons utilisé un formulaire de présentation et de consentement. Ce document mentionne la nature de la recherche, ses problématiques, les conditions de non-utilisation publique des recueils de données de l'expérience autre que le cadre de la recherche. Ce document stipule aussi les conditions de participation des élèves à la recherche, tout en demandant aux élèves participant et leurs familles d'accepter de participer à plusieurs séances d'observation filmées de leur temps d'étude autonome en mathématiques. Les modalités de l'enregistrement telles que la possibilité de demander l'arrêt du caméscope, et les conditions d'utilisation des images sont précisées. Ce document[242] est signé conjointement par nous le chercheur, les élèves et leurs familles

[239] Mucchielli, 1991
[240] Wacheux 1996
[241] Bertaux 1997
[242] Le contrat chercheur-familles- élèves participants au dispositif d'observation

respectives ; et chacune des parties en garde un exemplaire qui fait foi.

L'observation est celle de l'étude en temps réel avec des traces écrites d'une tâche relative à un ou plusieurs objets mathématiques. Un élève de l'échantillon résout une tâche mathématique, et tout en écrivant, il peut ou non parler de ce qu'il fait. La méthode des épisodes biographiques n'implique pas de montage et d'utilisation d'un questionnaire ; elle vise avant tout à laisser se développer un discours narratif, explicatif et scriptural relatif à une tâche mathématique à l'étude. Un moment d'étude au cours duquel le chercheur que nous sommes s'est contenté de ne pas intervenir quelle que soit la situation. En cas de blocage ou d'arrêt de l'élève dans ses expressions verbales ou scripturales relatives à la recherche de solution de l'exercice en cours, nous n'avons à aucun moment tenté de relancer l'élève, car l'objectif était de le laisser se conduire comme dans ses habitudes d'étude autonome de tâches mathématiques.

4.6.4 Une démarche longitudinale

Le déroulement de la phase de terrain de cette recherche a été circonscrit dans le temps, et en deux parties. Elle a duré environ 2 années scolaires. Nous avons décidé de suivre sur cette période les cinq élèves de notre échantillon, afin de mieux connaître leurs vécus d'études autonomes des mathématiques, d'identifier les logiques d'actions mises en œuvre et surtout d'apprécier leur évolution et leur sentiment relatif à l'organisation du temps de travail qui était la leur.

La démarche a été complétée par le suivi des résultats mathématiques de l'échantillon au baccalauréat (session juin 2008)[243] afin de vérifier le degré de corrélation et la pertinence de leur travail mathématique hors école sur leur réussite aux différents exercices du sujet officiel de mathématiques à la première session du BAC 2008. Cette démarche longitudinale nous a semblé essentielle pour garantir la validité des données.

Nous avons réalisé six séances d'observation avec chacun des élèves de l'échantillon tout en respectant une certaine temporalité. Ces séances d'observation ont permis d'enrichir considérablement la recherche plutôt que la connaissance de l'épisode biographique d'un élève, aussi riche soit-elle, à un instant t de son existence. Ces observations programmées ont été complétées par des échanges informels avec chacun des élèves de l'échantillon, en totale collaboration avec les parents et en fonction des progressions pédagogiques dans les différentes classes des lycées et de la disponibilité des élèves. Les observations ont eu lieu dans les différentes maisons familiales des élèves de l'échantillon, soit dans une chambre, soit dans le séjour soit dans un coin du garage de la maison aménagé en bureau.

[243] Document qui nous a permis de vérifier simplement les résultats obtenus au bac session 2008, par les élèves de notre échantillon de recherche, d'une question à l'autre dans un même exercice. Nous analyserons ces documents dans nos futures recherches lorsque nous aurons les accords officiels

4.6.5 Installation des conditions

En concordance avec une approche anthropologique, la première phase de cette recherche était l'installation des conditions d'un processus de collections de données. Les sources potentielles en ont été les élèves et leurs interactions avec des objets du savoir mathématique. Nous avons donc engagé un processus qui renvoie à « l'étude descriptive et analytique […] des coutumes, des mœurs de populations déterminées » qui vise la reconstruction des caractéristiques du phénomène examiné[244] : l'existence, l'identification, ou la construction du répertoire épistémologique. Nous recherchons une description et une analyse des phénomènes en termes de contrats implicites que l'institution fixe à ses sujets élèves, de manières de penser, de savoirs faire, d'apprendre, qui forment le rapport des élèves à l'institution « étude autonome de tâches mathématiques ». Comme indiqué précédemment A. Mercier[245] souligne que :

> « Les épisodes didactiques pertinents doivent nous être montrés par des élèves pour qui ils font sens en produisant des fragments de leur biographies didactique, le point d'observation ne peut se situer dans la classe de mathématique proprement dite. La mise en place d'un lieu institutionnel où les élèves pourraient apporter des questions ou des réponses venues de leurs rencontres avec l'ignorance institutionnelle et gérer ainsi positivement certains temps de leur biographie est alors nécessaire à la constitution d'un point d'observation des épisodes biographiques tels qu'ils existent pour des élèves, en classe ou à partir du travail scolaire. Mais un tel lieu doit avoir vis-à-vis de l'établissement d'accueil de l'élève participant une autonomie de décision qui nécessite qu'il se présente nettement comme un lieu de recherche, et que l'usage que pourront en faire les élèves soit compris comme le résultat d'un échange de service entre l'institution d'apprentissage qu'est l'étude autonome mathématique et une institution de recherche»[246]

Nous avons par conséquent, ayant l'accord des élèves et de leurs familles, proposé une coopération sur l'année scolaire, par lequel le chercheur s'engage à aider gratuitement l'élève lorsque l'observation ferait apparaître une difficulté non surmontée en échange de la mise en place du dispositif d'accès au domaine privé des élèves de l'échantillon.

4.7 DESCRIPTION DE LA DEMARCHE

4.7.1 Premières mise en place: année scolaire 2006-2007

Au début de l'année scolaire 2006-2007 et plus précisément en octobre 2006, nous avons contacté cinq professeurs de mathématiques et de physique - qui nous avaient aidés dans le passé à constituer le dispositif de recherche empirique de notre Master recherche II-de différentes classes de terminales scientifiques S dans quatre lycées de la région PACA. Nous leur avons demandé de nous mettre en contact avec leurs meilleurs élèves en mathématiques de même

[244] Goetz &Lecompte, op.cit
[245] A. Mercier1992
[246] A. Mercier 1992

qu'avec leurs familles respectives pour la mise en place d'un dispositif de recherche *: faire des observations pendant plusieurs mois des pratiques d'étude autonome de tâches mathématiques des élèves, dans leurs sphères privées*. Ces observations sont enregistrées sur support vidéo, les séances d'observations sont planifiées en fonction de l'évolution de la progression pédagogique de chaque classe. Un mois plus tard, une seule élève nommée AC001 et sa famille prend contact avec nous pour non seulement parler mais aussi avoir des éclaircissements sur le dispositif de recherche.

Le premier rendez-vous a lieu directement dans la famille de AC001, le dimanche 18 octobre 2006 à 15h40. En présence de tous les membres de la famille nous avons présenté la recherche de thèse dont l'objectif est d'analyser et d'interpréter le fonctionnement et la gestion des tâches mathématiques pour décrire le répertoire des élèves. Nous avons présenté le dispositif avec le document officiel[247] qui stipule les conditions et les engagements du chercheur, du laboratoire de recherche UMR-ADEF[248] en ce qui concerne l'utilisation des enregistrements. Nous avons eu deux autres rencontres, le 24 Novembre et le 15 décembre 2006, pour discuter de la mise en place du dispositif :

C'est nous le chercheur qui fournit les exercices sur lesquels l'élève devra travailler, mais éventuellement les séances peuvent porter sur les exercices de maison donnés par le professeur de mathématiques de la classe d'AC001,

Les séances ont lieu le week-end, en semaine [mercredi] ou sur les vacances scolaires afin de permettre à l'élève de mieux gérer ses semaines de cours et ses devoirs dans l'établissement scolaire, le chercheur que nous sommes est un simple observateur qui n'intervient pas dans le processus de rédaction d'un exercice.

Ces deux dernières rencontres nous ont permis d'établir un climat de confiance et de respect. Un peu plus tard, nous avons reçu l'accord de la famille et de l'élève pour débuter les séances. Avec AC001, nous avons pu avoir sept séances couvrant la période de Janvier –Avril 2007.

Année scolaire 2007-2008		**Institution d'étude Autonome : AC001**	
Mois	**Semaines**	**Objets mathématiques en étude autonome**	**Références/Séances d'observations**
Janvier	*15-21*	*Fonctions exponentielles/équations différentielle /logarithme népérien*	*Réf :AC001/S1/20012007* *Réf :AC001/S-2/22012007*

[247] Attestation de recherche du laboratoire UMR-ADEF& directeur de recherche
[248] UMR-ADEF

			Réf:AC001/S-3/2501200f
Février	*19-27*	*Nombres complexe*	*Réf:AC001/S-4/26022007*
Mars	*7-14*	*Similitude du plan : symétrie glissante similitude indirecte de rapport 1*	*Réf : AC001/S-5/11032007*
Avril	*10-15*	*Probabilité : loi continue*	*Réf : AC001/S-6/19042007*
Mai	*2-11*	*Géométrie dans l'espace /Similitude indirecte*	*Réf : AC001/S-7/09052007*

Tableau récapitulatif des séances d'observations biographiques avec AC001

4.7.2 Deuxième mise en place: année scolaire 2007-2008

N'ayant pas eu plus d'un élève la première année, nous avons décidé de reconduire l'expérience sur l'année scolaire 2007-2008. Cette fois-ci, nous avons demandé aux cinq professeurs de bien vouloir nous accorder quelques minutes de leurs heures de cours (fin de séance) dans leur classe de terminale scientifique S pour présenter nous même, le dispositif aux bons élèves (ayant un bon niveau selon leur professeur).

Chère collègues cher collègues

Comme l'année dernière, je viens par le présent courrier vous demander à nouveau de bien vouloir me permettre d'entrer en contact avec vos meilleurs élèves en mathématiques afin que je puisse les solliciter pour participer à un dispositif de recherche de thèse. Je souhaite venir en tant que chercheur observateur rencontrer vos élèves, leur présenter le dispositif de recherche et aussi pouvoir répondre de vive voix à leurs interrogations. La prise de contact avec les futurs acteurs dans de tel cas de recherche est primordiale, c'est pour cette raison que je souhaite mettre à leur disposition quelques informations sur le travail de recherche que je mène. Ci- joint mes coordonnées.

Je vous remercie de l'attention que vous ne cessez de m'accorder, et je reste à votre disposition pour d'éventuelles précisions et organisations. (dates, créneaux horaires)

Romain MARIO

Document : demande de présentation du dispositif de recherche aux professeurs

4.7.3 Présentation du dispositif aux élèves

Nous sommes allés les 5-6-7 novembre 2007 dans chaque établissement présenter le dispositif de la recherche face aux seuls bons élèves (ayant les meilleures notes en mathématiques, les enseignants ne sont pas invités) et demander à ces élèves de nous accepter dans leurs maisons afin d'y mener nos observations. Nous avons expliqué aux élèves l'objet de recherche comme étant une analyse et une interprétation épistémologique du fonctionnement de leurs travaux mathématiques hors école qui conduisent à leur réussite en mathématiques. Nous avons précisé qu'il s'agit d'accepter de faire des exercices que le chercheur propose en fonction de la progression pédagogique des classes dans lesquelles évolue chaque élève. Nous avons précisé aussi que les observations se dérouleraient chez eux durant leur temps normal d'étude personnelle. Nous avons souligné que la recherche n'avait pas du tout l'objectif de les juger, mais simplement de voir comment ils travaillent les mathématiques en étude autonome, à travers des exercices que le chercheur propose. Nous avons souligné que les séances d'observation seront des moments de résolution d'exercices filmées sur un support numérique ; nous avons aussi précisé le fait que les participants à une recherche conservent toujours leur anonymat dans les transcriptions, et que les périodes d'observation seront définies ensemble de sorte que notre présence dans leur sphère privée ne perturberait pas leur quotidien.

A la fin de la présentation, une moyenne de trois élèves sur 5 ou 6 selon le lycée avait accepté volontairement (*sous réserve de l'accord des parents*) de participer au dispositif et se réjouissait de pouvoir collaborer à une recherche portant sur leurs œuvres mathématiques. Aux élèves qui ont accepté de participer au dispositif, nous avons demandé d'en parler à leurs parents de retour dans leur famille tout en leur laissant nos coordonnées avec le document officiel (directeur de recherche & laboratoire).De façon spontanée certains élèves nous ont laissé les *coordonnées de leurs parents*, d'autres ont voulu en parler d'abord.

> Je suis professeur de mathématiques et j'entreprends une recherche universitaire en didactique des mathématiques sur le sujet : « Approches biographiques du système d'étude autonome : comment les bons élèves étudient les mathématiques ». J'étudierai en particulier les rapports aux objets mathématiques de bons élèves de la classe de terminale S, pour visualiser les histoires mathématiques qui se construisent en articulant les biographies particulières. Je viens vous demander de bien vouloir participer à la mise en place d'un dispositif de recherche en didactique des mathématiques. Dans le cadre de ma recherche de thèse, j'ai besoin d'observer des élèves qui réussissent en mathématiques dans leur travail d'étude autonome autour des grands chapitres de la classe de terminale scientifique S. Ce besoin d'observations des pratiques d'études mathématiques nous oblige à constituer un dispositif empirique de recherche, parce que tout simplement, pour étudier l'élève, il faut observer des élèves en travaux d'études mathématiques autonomes et non uniquement le professeur en

train d'enseigner les objets mathématiques dans une salle de classe. Ainsi les élèves qui accepteront de participer à ce dispositif de recherche nous donneront l'accès à la connaissance des bons élèves et donc aussi à la connaissance de l'institution classe de mathématique, à la connaissance du rapport des élèves particuliers aux savoirs mathématiques. Pour ce faire, je ne viendrai pas dans les salles de classe, mais je souhaite ardemment venir dans vos maisons au titre de chercheur, vous observer en train d'étudier en temps réels des exercices de mathématiques que je vous proposerai ou ceux donnés par votre professeur de mathématiques. Ainsi j'étudierai vos traces écrites de l'activité mathématique privée et les témoignages qu'ils m'en rapporteront sur le fonctionnement des institutions privées et publiques.

Les observations seront filmées afin de nous permettre d'avoir des données utilisables uniquement pour la transcription et d'avoir aussi accès à des données pas souvent visible au premier abord. Les observations enregistrées sur support vidéo ou audio ne seront jamais présentées ou utilisées publiquement à quelques fins que se soient.

Nous proposons de suivre et d'aider mathématiquement en retour les élèves qui accepteront de participer à votre dispositif de recherche et ceci le plus longtemps possible. Nous voulons que votre adhésion soit volontaire. Je viendrai chez vous, vous observer sur vos temps d'étude avec des dates et des horaires que nous allons ensemble définir au préalable pour ne pas trop empiéter sur les temps d'étude et de recherche. L'élève est libre de demander l'arrêt des observations à tout moment s'il ne se sent plus capable de vivre l'expérience d'observation filmée d'une durée de 1heure à 1heure 30minutes.

J'observerai parallèlement d'autres élèves issus de quelques lycées de la région PACA en temps d'étude autonome mathématiques dans leurs maisons suivant les mêmes principes et conditions.

Si cela vous intéresse de participer à ce dispositif de recherche, je vous charge de bien vouloir en parler premièrement à vos parents et s'ils sont d'accord ou s'ils ont des questions ou veulent avoir des détails sur le projet je me tiens à leur entière disposition pour de plus amples détails, explications et conditions de mise en place du dispositif. Ci-joint mon adresse et mes coordonnées téléphoniques.

Romain MARIO

Document : présentation du dispositif de recherche aux élèves

4.7.4 Présentation du dispositif aux parents d'élèves

A la date du 13 décembre 2007, nous avons eu le retour de huit parents d'élèves qui avaient accepté que leurs enfants participent à un tel projet de recherche. Ils ont demandé à nous rencontrer pour discuter de notre demande. Ainsi, pendant la période du 17 décembre 2007 au 9 février 2008 nous avons rencontré chacune des huit familles pour présenter le dispositif de recherche et négocier les conditions de sa mise en place et puis de signer le contrat

Les entretiens avec les familles ont été réalisés chez elles, dans les séjours des différentes maisons et souvent en présence de tous les membres de la famille. Les parents avaient posé des questions générales sur la recherche, sur ses objectifs. Ils ont tous trouvé intéressante une telle recherche, et certains parents, qu'ils aient fait ou non de longues études, disaient qu'ils auraient aimé quand ils étaient encore élèves ou étudiants, lire des documents sur la méthode de travail de certains d'entre eux, ayant faits des études plus ou moins longues qui réussissent surtout en mathématiques. Au cours de cette période de présentation du dispositif de la recherche aux familles, trois familles nous ont fait savoir qu'elles trouvaient très intéressante la recherche, qu'elles auraient aimé participer, mais ne se sentaient pas à l'aise à l'idée que leurs enfants se fassent filmer.

Au terme de la période de présentation et d'explication du dispositif de recherche dans chaque famille, sept élèves et leurs familles nous ont confirmé leur total accord pour participer au dispositif de cette recherche.

Université de Provence / INRP / IUFM d'Aix-Marseille
UMR ADEF
Apprentissage, **D**idactique, **E**valuation, **F**ormation

Alain MERCIER
professeur des universités
à l'Institut National de Recherche Pédagogique
alain.mercier@inrp.fr

Marseille, le 2 février 2007

Madame, monsieur

Monsieur Romain Mario est inscrit sous ma direction en doctorat de Sciences de l'éducation, mention didactique des mathématiques, à Aix-Marseille Université.
Dans le cadre de ses travaux d'observation de la manière dont les élèves s'organisent pour étudier, il se rend à la fois dans les familles et sur le terrain des établissements. Il enregistre les entretiens à l'usage exclusif de recherche, ce qui signifie que les images personnelles ne sont jamais montrées mais aident à l'interprétation des discours transcrits sur lesquels ses analyses s'appuient. Pour toutes précisions, il vous rendra compte directement de ses méthodes de prise de données.

Je demeure à votre disposition et je vous prie d'agréer mes meilleures salutations.

UNIVERSITE DE PROVENCE
UMR - ADEF
Apprentissage, Didactique, Evaluation, Formation
60 rue Joliot-Curie - 13453 MARSEILLE Cedex 13
IUFM - INRP

…CIER

Institut National de la Recherche Pédagogique, équipe de Marseille
UNIMECA, pôle technologique de Château Gombert
60 rue Joliot Curie, F.13013 Marseille
tél : 04 91 11 38 91 et 38 17 ; secrétariat 38 78 ; fax : 04 91 11 38 19

Contrat de mise en place du dispositif de recherche

Les observations seront filmées afin de nous permettre d'avoir des données utilisables uniquement pour la transcription et d'avoir aussi accès à des données pas souvent visibles au premier abord. Les observations enregistrées sur support vidéo ou audio ne seront jamais présentées ou utilisées publiquement à quelques fins que se soient.

Nous proposons de suivre et d'aider mathématiquement en retour les élèves qui accepteront de participer à notre dispositif de recherche et ceci le plus longtemps possible tant que le besoin se fera sentir. L'élève et sa famille reconnaissent que leur adhésion à ce dispositif de recherche est volontaire. Et qu'ils acceptent que le chercheur vienne dans leur maison, observer leur enfant sur ses temps d'études avec des dates et des horaires préalablement définis ensemble, avec nous le chercheur observateur, pour ne pas trop empiéter sur les temps d'étude et de recherche. L'élève est libre de demander l'arrêt des observations à tout moment s'il ne se sent plus capable de vivre l'expérience d'observation filmée d'une durée de 1heure à 1heure 30 minutes. Par ailleurs, le chercheur observateur accepte de respecter l'intimité de chaque famille et le droit à la vie privée de chaque membre de la famille. Le chercheur observateur accepte et engage sa responsabilité, que toute personne, membre de la famille a, sur son image et sur l'utilisation qui en est faite, un droit exclusif et s'oppose à sa diffusion publique sans son autorisation et que toute publication publique ultérieure de l'image d'un membre de la famille de l'élève ou du lieu de résidence de la famille sans une autorisation de la part de l'intéressé ou de son représentant légal entraînera des poursuites judiciaires.

En foi de quoi a été établi le présent contrat pour faire valoir ce que de droit

Le chercheur observateur　　　　L'élève.　　　　Le représentant légal

Fait à ………………….

Le …………………………..2008

Le contrat chercheur-familles- élèves participants au dispositif d'observation

4.7.5 Le choix de l'échantillon

Vu le coût et le temps que le dispositif demande, nous avons d'abord consulté les différents bulletins scolaires[249] des élèves qui avaient accepté avec l'accord de leurs parents. Ensuite, nous avons discuté avec les professeurs les 12-13-14 février 2008. Suite à l'analyse des bulletins, des discussions avec les différents professeurs des lycées dans lesquels sont scolarisés les élèves

[249] Des années antérieures et des premiers semestres de l'année scolaire 2007-2008

participants, nous avons choisi un élève par établissement en fonction des informations communiquées par les professeurs, relativement à la qualité des rendus mathématiques (Devoirs de maison, intervention, participation en séances de cours, évaluations normatives), et à la position scolaire des élèves, en mathématiques.

C'est ainsi que nous avons constitué un échantillon de quatre élèves. Echantillon que nous avons observé de Janvier à Mai 2008 en ce qui concerne le travail mathématique en étude autonome. En Juillet 2008, nous avons observé les résultats mathématiques de ces élèves (*question par question*, *exercice par exercice*) au bac session de juin 2008, dans le but de comparer les résultats mathématiques de l'échantillon aux résultats de la population des candidats de la session 2008 des quatre classes de terminales scientifiques S des quatre établissements auxquels appartiennent les élèves de notre échantillon.

Année/scolaire 2007-2008		**Institution d'étude Autonome : V001**	
Mois	**Semaine**	**Objets mathématiques en étude autonome**	**Références**
Janvier	*8-13*	*Fonctions exponentielles logarithmes népériens-Dérivation*	*Réf : V001- S-1/13012008*
Février	*19-24*	*Suites& Intégrales*	*Réf : V001-S-2/24022008*
Mars	*23-28*	*Nombres Complexes*	*Réf : V001-S-3/28032008*
Avril	*20-26*	*Probabilités : loi continue*	*Réf : V001-S4/26042008*
Mai	*12-18*	*Géométrie dans l'espace :*	*Réf : V001-S-5/18052008*

Tableau récapitulatif des séances d'observations biographiques avec V001

Année scolaire 2007-2008		**Institution d'étude Autonome : F001**	
Mois	**Semaines**	**Objets mathématiques en étude autonome**	**Références exercices**
Janvier	*14-16*	*Fonctions exponentielles/logarithmes népériens*	*Réf:F001-S1/16012008*
Février	*19-23*	*Intégrales-Dérivation*	*Réf:F001-S2/23022008*
Mars	*19-23*	*Nombres Complexes*	*Réf : F001-S3/23032008*
Avril	*21-27*	*Barycentre- Equations paramétriques*	*Réf : F001-S4/27042008*

Mai	*12-14*	*Probabilités : lois continues*	*Réf : F00-S5/14052008*

Tableau récapitulatif des séances d'observations biographiques avec F001

Année/scolaire 2007-2008		**Institution d'étude Autonome : L001**	
Mois	**Semaines**	**Objets mathématiques en études autonomes**	**Références exercices**
Janvier	*14-20*	*Fonctions exponentielles/logarithmes népériens-Dérivation*	*Réf :L001-S1/20012008/Expo-Ln*
Février	*11-17*	*Suites-Intégrales*	*Réf : L001-S2/17022008*
Mars	*17-22*	*Nombres Complexes*	*Réf : L001-S3/22032008*
Avril	*17-21*	*Probabilités : lois continues*	*Réf : L001-S-4/21042008*
Mai	*11-17*	*Equations paramétriques*	*Réf : L001-S-5/17052008*

Tableau récapitulatif des séances d'observations biographiques avec L001

Année/scolaire 2007-2008		**Institution d'étude Autonome : RCA001**	
Mois	**Semaine**	**Objets mathématiques en étude autonome**	**Références exercices**
Janvier	*14-19*	*Fonctions exponentielles & logarithmes népériens-Dérivation*	*Réf:RCA001-S1/19012008*
Février	*10-16*	*Suites-Intégrales*	*Réf : RCA001S2/16022008*
Mars	*23-29*	*Nombres Complexes*	*Réf : RCA001-S3/29032008*
Avril	*14-20*	*Probabilités : lois continues*	*Réf : RCA001-S4/20042008*
Mai	*5-11*	*Géométrie dans l'espace/Congruence du produit*	*Réf : RCA001-S5/11052008/*

Tableau récapitulatif des séances d'observations biographiques avec RCA001

4.8 OBSERVATION CLINIQUE

Cette deuxième phase correspond au travail d'observation de la biographique didactique des élèves de l'échantillon pendant sept mois, durée de l'étude des principaux chapitres de la classe de terminale scientifique. Nous avons mené à la fois des entretiens individuels avec les enseignants et les parents pour avoir une idée de la vie scolaire des participants constituant l'échantillon. Nous avons demandé aux élèves de l'échantillon (individuellement et alternativement puisqu'ils sont distants en moyenne de 20km l'un de l'autre) de résoudre en temps réel des problèmes mathématiques (situations d'évaluations formative) sans aucune intervention d'une tierce personne (même pas du chercheur). En Didactique des Mathématiques, à partir du travail de F. Leutenegger[250], nous disposons d'une référence forte pour la « clinique » en didactique. Une des références que l'auteur présente pour cette approche indique que :

> « Par analogie avec la clinique médicale en ses débuts, une clinique pour la didactique se doit de construire ses phénomènes à partir de signes pour l'observateur, eux-mêmes renvoyant à des «symptômes scolaires », si l'on peut dire, qui ne peut parler d'eux-mêmes »[251].

Nous donnons aux observations conduites un caractère clinique aussi dans ce sens-là : c'est à partir du repérage de signes pour l'observateur, signes que lui-même doit classifier et mettre en rapport avec ses références, qu'il se donne les moyens pour la construction de phénomènes. Dans cette recherche, nous possédions déjà, au moment de débuter les observations, des « *signes* » sur le fonctionnement et la gestion de l'étude autonome. Cependant certains d'entre eux, jusqu'à un certain point, sont ambigus ou imprécis. En conséquence, même s'ils font partie de nos points de départ, il nous a fallu recourir à l'observation pour les préciser, ou établir d'autres « *signes* », afin de construire les phénomènes relatifs à la gestion de l'étude autonome.

Dans les paragraphes précédents, nous avons justifié en quoi notre recherche peut être considérée comme d'inspiration ethnographique. En effet, les recherches utilisant cette orientation « ont recours à l'observation participante et non participante pour obtenir des données empiriques de première main des phénomènes tel qu'ils se présentent dans les scénarios »[252] Cette recherche de thèse a exigée ainsi des observations de terrain qui nécessitent l'immersion à long terme et de manière continue du chercheur dans le hors classe, afin de partager « le mode de vie » de l'institution étude hors classe pour la classe. Les observations sont donc empiriques, naturalistes et peuvent fournir « des données phénoménologiques qui représentent la conception du monde mathématique des participants »[253].

Les observations empiriques réalisées pour cette recherche de thèse peuvent, jusqu'à un certain point, être qualifiées de non participantes, par le fait que le chercheur ne répondait pas aux questions des élèves durant le moment destiné à la recherche de solutions des exercices proposés. Aussi, durant ces moments, il ne posait pas non plus de questions aux élèves et ne donnait des explications sur quoique ce soit relatif à la tâche mathématique à l'étude. Cependant, nous avons pu en certaines occasions intervenir en demandant aux élèves de chercher à résoudre des

[250] F. Leutenegger, 2000, p. 227
[251] F. Leutenegger, 2000
[252] Goetz et LeCompte, p. 29
[253] op. cit, Goetz et LeCompte, p. 29

exercices et nous n'avons donc pas suivi les prescriptions ethno-méthodologiques.

4.9 COMPLEMENT : SUR LE FONCTIONNEMENT DE L'INSTITUTION D'ETUDE OBSERVEE

4.9.1 Objectif du complément

Afin d'adapter la méthodologie aux conditions et besoins de la recherche, nous avons élaboré cette esquisse de complément méthodologique au fur et à mesure que celle-ci progressait. C'est-à-dire, nous nous sommes basé sur la variété des épisodes biographiques didactiques construits par les participants du dispositif expérimental pour déterminer s'il fallait recueillir davantage de données, lesquelles et de quelle manière. Ainsi, à la fin des séances d'observations, nous avons repéré le besoin de compléter les informations sur le fonctionnement des institutions d'étude autonome observées. Nous devions valider certaines inférences à partir d'entretiens sur « les manières de faire et de penser » propres à chaque élève. Nous cherchons ainsi des traces référant à leurs assujettissements, dans les différentes positions institutionnelles qu'ils occupent[254]. A cette fin, nous avons élaboré un entretien structuré individuel avec les participants et certains parents. L'entretien avec les élèves a été structuré en trois groupes de questions qui cherchaient à renseigner sur trois thèmes :

1-Les grandes lignes des organisations didactiques mises en œuvre par l'élève,

2-Les obligations relatives à l'étude mathématique que l'élève considère avoir

3-Les « méthodes habituelles d'apprentissage par l'étude autonome » dans les institutions mathématiques dont il a fait partie lors des années précédentes.

Un questionnaire a par ailleurs été proposé, la réponse étant demandée dans un laps de temps d'une semaine. Nous avons pris comme référence principale pour élaborer le questionnaire, entièrement conçu avec des questions ouvertes, la description des organisations didactiques idéales présentées par Bosch et Gascón. Ceci, en formulant l'hypothèse proposée par Gascón (2001) sur « l'incidence du modèle épistémologique des mathématiques dans les pratiques… » . Nous avons donc cherché à proposer des questions dont les réponses mettent en évidence des traces indicatives de certaines de ces organisations didactiques idéales. Ce type de données intègre notre travail dans la partie « sur le fonctionnement de l'institution étude hors classe », car nous pourrions en retirer des éléments explicatifs sur les organisations didactiques mises en œuvre. Remarquons alors que même si les outils ont été construits afin de recueillir des données concernant des questions particulières, lors des analyses, nous avons trouvé des éléments qui contribuaient à répondre à d'autres questions sous- jacentes.

[254] Instituions scolaires –institution hors classe

Ces outils méthodologiques ont été utilisés afin de produire des données à partir desquelles construire des éléments de réponses aux trois questions qui nous occupent: *Quelles actions mène l'élève pour réactiver les objets et les rapports aux objets de l'univers cognitif de la des classes mathématiques? En d'autres termes, comment l'élève gère-t-il les répertoires heuristiques mathématiques didactiques de ses différentes classes de mathématiques ? Quelles sont la « nature » et la « structure » des « cadres institutionnels du répertoire heuristique et didactique » qui sont liés aux pratiques d'étude des mathématiques dans l'institution, et qui permettent la réactivation des connaissances agissantes, par des élèves ? Quelles sont les caractéristiques de la vie institutionnelle « l'étude autonome» qui ont des effets dans la gestion par l'élève du cadre institutionnel de l'intuition classe ?*

Les données recueillies ont été analysées par la confrontation avec les éléments théoriques qui orientent notre étude et d'autres, subjectifs. Cette confrontation implique des processus de perception, de comparaison, d'organisation, donc de détermination de liens, de spéculation et de synthèse. Notamment, il s'agit d'accomplir un processus de théorisation, c'est-à-dire de découverte ou manipulation de catégories abstraites et de leurs mises en relation[255]

4.9.2 Les élèves de l'échantillon

Pour chacun des cinq élèves de terminale scientifique des cinq différents lycées nous avons observé cinq séances. Nous présentons dans ce paragraphe quelques données relevant de chacun d'eux, et qui concernent :l'âge, la situation familiale, l'aide personnelle en mathématiques dont ils bénéficient, les livres de référence dont ils disposent, ainsi que des appréciations générales sur leur travail par leur professeur de mathématiques et leurs parents. A la fin de chaque présentation, nous donnons aussi leurs réponses à deux questions : « Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ? Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire, en classe de terminale scientifique S ? »

4.9.2.1 L'élève AC001, élève de la classe de terminale scientifique du lycée SC

« AC001 » est une élève de 15 ans & 3mois qui n'a jamais doublée une classe dans sa scolarité. Elle est la benjamine d'une famille de quatre enfants (deux grandes sœurs dans les études supérieurs et un grand frère en cycle bac pro), de parents respectivement professeurs de physique-chimie et SVT dans le secondaire (père agrégé de physique & chimie, mère titulaire d'un master II de biologie), elle a toujours réussi en mathématiques car elle *étudie* beaucoup les mathématiques et a toujours travaillé un grand nombre d'exercices de mathématiques donnés par son professeur de mathématique ou non à faire. Par ailleurs elle utilise plusieurs livres de mathématiques, demande de l'aide à son père, va sur internet voir les sites qui proposent des exercices de maths et même celui de son prof de maths, et n'a jamais fait de fiche de formules mathématiques pour apprendre. Nous dirons qu'il s'agit d'une bonne élève : elle est très impliquée et participe aux séances en classe, mais seulement à la demande de l'enseignant,

[255] Goetz et LeCompte, 1988

anticipe des résultats, finit les travaux à temps, fait les devoirs et obtient de très bonne notes entre 16 et 20 sur 20 aux évaluations[256]. Elle prend très rarement des cours particuliers.

Voici ses réponses aux deux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ?

« Les maths sont un outil important ///on en a besoin dans la plupart des carrières///Moi// je serai en classe préparatoire l'année prochaine//donc je travaille beaucoup les mathématique//. En classe//d'habitude// disons que le cours est clair// il y a souvent les formules importantes// quelques exercices d'applications pas souvent compliqués non plus// Les travaux de recherches en classe dans les différentes leçons déjà étudiées ne donnent pas souvent l'ampleur et la portée des objets mathématiques en étude avec tous les sous-entendus de notions ou autres objets qui se cachent derrière la notion en cours d'apprentissage en classe///Je travaille à la maison les exercices pour apprendre et pour comprendre sur les façons de faire./////»

Pourquoi croyez-vous que l'étude autonome hors classe est obligatoire en terminale scientifique S ?

«///J'ai compris qu'il existe des liens entre les notions d'une leçon à l'autre,///je fais beaucoup d'exercices pour connaître les liens implicites relatifs aux objets mathématiques////Je sais comment cela fonctionne// derrière chaque consigne////il y a des consignes non-dits qui impliquent des façons de faire////des transformations qui nécessitent d'autres objets mathématiques ainsi de suite////C'est une sorte de chaîne la question mathématique///une fois les maillons rassemblés/////je construis la chaîne réponse de la question ///Je fais beaucoup d'exercices pour rencontrer plusieurs systèmes//// Sur internet ou dans mes autres livres je trouve d'autres formules////regardé////j'ai trouvé ça dans un des livres////[257]

4.9.2.2 L'élève V001, élève de la classe de terminale scientifique du lycée C

« V001 » a 16 ans. C'est une élève qui n'a jamais doublé une classe dans sa scolarité. Elle est l'ainée d'une famille de trois enfants, (une petite sœur en classe de seconde GT, un petit frère en classe 4ème classique) de père cadre commercial et de mère au foyer. « Elle « étudie » beaucoup les mathématiques à la maison, utilise plusieurs livres de mathématiques en plus de celui utilisé dans sa classe. Elle surf sur internet pour « *compléter et enrichir* » ses connaissances des cours de maths donnés par son professeur de mathématique ». Elle fait des exercices en plus de ceux que donne son prof de maths, prend un cours particulier lorsqu'elle n'arrive pas seule à comprendre une notion, ne fait jamais de fiches de formules mathématiques pour étudier. Répond aux questions de l'enseignant lorsqu'elle est sollicitée ou non. Elle demande souvent à son professeur de réexpliquer ce qu'elle « n'a pas très bien compris pendant les séances de cours ». Elle obtient souvent de bonnes notes aux évaluations, entre 15 et 18, voire 20[258]

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique autonome ? Et pourquoi est- t- elle importante?

[256] Sources : les bulletins scolaires & commentaire des enseignants et parents
[257] Relation entre objets mathématiques trouvée dans un livre personnel (voir doc annexe)
[258] Sources: les bulletins scolaires et résultats obtenus au Baccalauréat session 2008

«///Les mathématiques sont importantes///je travaille beaucoup d'exercices////c'est le seul moyen pour moi d'apprendre et surtout de comprendre le fonctionnement des notions étudiées en classe avec mon professeur////Le cours en classe est clair/// précis et concis///mais c'est un résumé///Il y a beaucoup de sous-entendus de notions/////c'est une sorte de maillon de chaines qui ne dit pas son nom/////je fais des recherches sur internet et dans d'autres livres de mathématiques en plus de celui de la classe »

Pourquoi croyez-vous que l'étude autonome est obligatoire pour un élève de la classe de terminale scientifique S ?

«////En étude autonome par des exercices, j'apprends comment construire des liens mathématiques/////Je suis contente de mon travail car j'ai des bonnes notes///c'est aussi parce que je vais faire une prépa et après une école d'ingénieur////j'utilise beaucoup de livre et je découvre dans mes livres des présentations de notions et des démonstrations qui sont plus riches que celle dans que celle exposées dans les séances de cours en classe//A titre d'exemple je vous montre ce j'ai trouvé dans un livre sur les fonctions de répartition et de densité avec lesquelles j'ai compris les lois de probabilités sur les variables continues////[259]

4.9.2.3 L'élève F001, élève de la classe de terminale scientifique du lycée VL

« F001 » est une élève de 16 ans révolus qui étudie beaucoup les mathématiques à la maison avec des exercices donnés en classe par son professeur et d'autres recherchés de sa propre initiative dans ses livres de maths. Fille ainée d'une famille de père cadre et de mère ouvrière dans le BTP (niveau d'étude BEP pour la mère au foyer) de quatre enfants (un jeune frère en classe de seconde GT, deux aînés), elle fait beaucoup de recherches mathématiques hors classe dans ses livres et sur internet, réalise ses devoirs de maison donnés par son professeur en plus d'autres exercices pris dans ses livres de maths. Elle ne fait jamais des fiches de formules, elle apprend en faisant les exercices. Ne pouvant pas compter sur ses parents et son entourage en cas de besoin, elle prend un cours particulier lorsque le besoin se fait sentir, avec l'aide financière des parents Elle pose des questions, participe en classe lorsqu'elle est sollicitée par son enseignant ou un autre élève ; elle a de bonnes notes entre 14 et 17 voire 20 sur 20 aux évaluations[260].

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ?

«////Je travaille beaucoup à la maison non seulement pour avoir de bonnes notes mais avant tout pour comprendre////En classe////le cours est bon///mais c'est un condensé de notions et de formules importantes////Tout n'est pas dit dans les leçons///Je travaille à la maison pour trouver les liens///les transformations nécessaires/////»

Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire et constitue un gage de réussite pour un élève de la classe de terminale scientifique S ?

[259] Copie de la recherche de V001 dans un livre personnel.
[260] Sources: les bulletins scolaires

«////Les formules du cahier////tout le monde les connaît///mais les utiliser pour répondre aux questions c'est ce que je fais en étude autonome///J'apprends à les tisser avec d'autres formules qui ne sont pas dans la leçon///J'apprends beaucoup de choses en faisant les exercices dans mes livres/// j'ai de vieux livres de mathématiques dans lesquels il y a plus d'information sur les notions étudiées en classe aujourd'hui///j'aime bien regarder dans les vieux livres///attendez//je vous montre quelque chose sur les»

4.9.2.4 L'élève LEL001, élève de la classe de terminale scientifique du lycée J.C

« L001 » a 17ans ; de parents restaurateurs, elle est la deuxième fille d'une famille de quatre enfants (niveau d'étude des parents « collège »). Elle utilise des manuels du niveau Terminale scientifique, au programme ou non, pour étudier ce qui a été enseigné ou sera enseigné dans la classe par son professeur. Elle fait beaucoup d'exercices de mathématique à la maison : les devoirs de « *recherche à la maison donnés par son prof* » et les exercices qu'elle choisit dans ses livres, étudie les exercices au fur et à mesure de l'évolution d'un chapitre en cours d'apprentissage dans la classe sans attendre les exercices que pourrait donner son professeur, ne fait jamais de fiche de formules mathématiques pour apprendre. Elle prend un cours particulier en cas de nécessité absolue parce que n'ayant personne dans son entourage pouvant lui donner des explications sur un objet mathématique. Sérieuse, impliquée, elle a de bonne notes : 15-18 voire 20 sur 20[261].

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ?

«///Mon cahier de cours est une sorte de résumé donné par mon professeur de mathématiques///Je sais qu'il utilise plusieurs livres//donc je fais pareil///de toute façon il y a des choses///des façons de faire qui ne sont pas dans les cours et qu'il faut connaître si je veux réussir les évaluations///Je travaille beaucoup à la maison pour cela////»

Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire, en classe de terminale scientifique S

«///Maintenant, je sais comment tout cela fonctionne///pour répondre à une question donnée en mathématique///il faut d'abord répondre à d'autres questions qui se cachent derrière celle de l'exercice en trouvant les liants///les relations qui ne sont pas visibles mais présentes////Je fonctionne comme ça depuis toujours////disons plus approfondi depuis la classe de seconde générale et technique///et j'ai toujours de bons résultats donc je continue pareil////»

4.9.2.5 L'élève RCA001, élève de la classe de terminale scientifique du lycée F.M

« RC001 » est un élève de 16 ans, fils aîné d'une famille d'agriculteurs. Il aime étudier les qcm pour apprendre. Il travaille beaucoup d'exercices dans ses livres en plus des devoirs de maison donnés par son professeur de mathématiques, ne fait jamais de fiche de formules

[261] Sources: les bulletins scolaires

mathématiques pour apprendre. Il pose des questions de compréhension et d'application pendant les séances de cours à son professeur, fait des recherches dans ses livres et sur internet pour enrichir ses connaissances. Il participe lorsque le prof le sollicite. Elève impliqué, il a de bonnes notes : 14 à 18, voire 20 sur 20[262]

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors-classe ?

«///En classe///on jette les bases////les formules importantes et nécessaires mais pas toutes car il y a des non-dits///des implicites//// »

Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire, en classe de terminale scientifique S

«////En étude hors classe autonome////je travaille pour l'acquisition et la maîtrise des nuances et des corrélations entre les notions étudiées et les objets mathématiques////J'apprends beaucoup de choses qui ne sont pas exposées dans les cours en classe////…..//// …///// »

Nous avons donc présenté quelques traces des rapports aux mathématiques et à l'étude autonome mathématique hors classe que les participants de l'échantillon déclarent. Ils reconnaissent « la valeur » des mathématiques dans la société ; mais cette valeur se rapporte soit au rôle des mathématiques apprises pour la réussite les évaluations dans l'institution scolaire (secondaire et universitaire), soit à un emploi qu'ils n'ignorent pas et qu'ils trouveront après les études dans les grandes écoles universitaires ou dans la réalisation de pratiques professionnelles.

La plupart des réponses sont très précises, et on retrouve des termes proches d'un élève à l'autre. Ainsi, tous disent que la séance de cours mathématique en classe du professeur ne donne que les points de repère et qu'il laisse implicites la plupart des questions permettant de réaliser les activités attendues « *tout n'est pas dit dans les leçons* »[263]. La plupart décrivent les mathématiques à apprendre comme organisées en « une chaîne » dont certains maillons seulement sont donnés, ou « des éléments à tisser ensemble » : nous disons, en didactique, que le savoir enseigné est organisé *comme un texte*. L'un des élèves dit qu'il cherche à connaître ce texte avant que le professeur n'ait enseigné, un autre qu'il étudie à partir de plusieurs ouvrages, comme son professeur.

Ces élèves montrent une connaissance didactique profonde, relative à la fois au temps didactique officiel et à la nécessité de construire personnellement et pour soi-même un *texte du savoir* articulé aux points d'appui du cours. Ils savent aussi que l'attaque d'une question problématique suppose la résolution de questions préalables, ce qui est pour eux une évolution des éléments pérennes du contrat didactique : jusqu'ici sans doute, une question ne demandait pas la construction d'une réponse complexe. On remarque enfin que l'étude autonome mérite son nom, puisque les élèves cherchent à se confronter à d'autres normes que celles de leur professeur, à la fois en allant chercher d'autres exercices, en les cherchant dans d'autres ouvrages, et en étudiant d'autres organisations du texte à partir d'une enquête large, pour laquelle le net est

262 Sources: les bulletins scolaires
263 Entretien AC001/ V001/ F001/RCA001

mobilisé : bref, si le professeur désigne la matière de l'étude, c'est leur initiative qui la rend consistante.

4.10 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons précisé la théorie de la méthode et la démarche méthodologique mise en œuvre pour le recueil de données à partir desquelles nous avons construit des éléments de réponses à nos questions de recherche. Il était question d'une recherche utilisant à la fois une approche ethnographique et de type clinique pour l'observation des phénomènes de l'étude autonome mathématique des élèves qui réussissent les mathématiques.

Trois phases ont été mises en place. La première concerne la présentation de la méthode, l'installation des conditions de la recherche. La deuxième phase correspond principalement à l'observation clinique menée dans l'institution « étude hors classe » des cinq participants de l'échantillon. La troisième phase est relative à la mise en place d'outils pour recueillir des éléments complémentaires sur le fonctionnement des différentes institutions d'études hors classe, la description de certaines caractéristiques des participants à l'étude.

Dans les quatre chapitres que nous venons de présenter, dans la première partie de ce travail de recherche, nous avons décrit les principaux aspects qui définissent le « cadre de la recherche »: l'état des lieux où nous indiquons les études antérieures sur le thème « étude hors classe » en Didactique des Mathématiques, le cadre théorique adopté pour modéliser une partie de la réalité didactique, ainsi que les outils théoriques de description et d'analyse de données, la problématique qui nous occupe portant sur le fonctionnement et la gestion de l'étude autonome mathématique par l'élève dans la sphère privée et enfin, la démarche méthodologique conçue pour tenter de donner des éléments de réponses à nos questions de recherche.

Dans la deuxième partie de cette thèse, intitulée « présentation et discussion des résultats », nous exposons et discutons les données et les éléments de réponse construits, à partir desquels nous avons élaboré une typologie du fonctionnement et des gestes de l'étude mathématique hors classe impliquant les «réussites mathématiques » accomplies par les « bons élèves », ainsi que le modèle du micro-cadre institutionnel de l'étude mathématique dont les éléments sont sollicités lors de l'accomplissement des actions d'étude. Nous abordons aussi les effets sur la gestion de l'étude mathématique didactique qui relèvent de la vie institutionnelle dans chacune des cinq institutions d'étude autonome de notre échantillon expérimental d'observation.

DEUXIEME PARTIE :

PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS

Chapitre 5 :

ANALYSES DU FONCTIONNEMENT ET DE LA GESTION DU REPERTOIRE EPISTEMOLOGIQUE :

Le cas des très bons élèves

5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous décrivons tout d'abord des passages considérés comme gestion didactique et heuristique des savoirs mathématiques lors de l'étude autonome dans les institutions observées. Dans un deuxième temps, nous montrons un exemple (un pour chaque élève de l'échantillon) du type d'analyses menées pour repérer les gestes accomplis par les enseignants. L'objectif est de montrer le type d'analyses menées pour étudier les mathématiques par les « bons élèves », ainsi que de tirer des éléments de réponses de nos questions de recherche :

> *Comment fait l'élève pour réactiver les objets et les rapports aux objets de l'univers cognitif de la classe ? Comment gère-t-il le répertoire épistémologique et heuristique de la classe ? Quelles sont la nature et la structure des « cadres institutionnels du répertoire » liés aux pratiques d'étude des mathématiques qui permettent la réussite des bons élèves ?*

Mais nous allons d'abord reprendre le travail antérieur de Matheron[264] pour montrer comment nous tentons, avec la notion de répertoire, d'aller plus loin sur la question de la construction personnelle de la capacité d'agir qui est le résultat de l'étude, tandis que lui suit le chemin inverse en montrant comment le professeur utilise la mémoire ostensive pour instituer une mémoire collective. Nous allons donc reprendre au plus près ce qu'il construit sous le terme de mémoire dans ses dimensions collective institutionnelle, et inscrite dans le savoir, externe donc, pour montrer comment nous pensons pouvoir rendre compte à la fois de la mobilisation d'une mémoire pratique en référence à des savoirs et de la reconstruction à laquelle conduit parfois l'étude : ce que l'on appelle l'apprentissage.

5.2 LE CONTENU DU REPERTOIRE : DES HEURISTIQUES

Comme l'auteur dont nous suivons le raisonnement nous partirons de sa citation de Halbwachs :

> « Cette logique mathématique si rigoureuse, cette "chaîne de raisons" que nous n'avons qu'à suivre, comme si, les principes posés, tout s'ensuivait en vertu de règles qui semblent précéder les premiers efforts de réflexions des hommes et semblent s'être imposées à eux du dehors […] »[265] .

Matheron note alors que « il nous a semblé qu'on est en droit de s'interroger sur cette « chaîne de raisons » qui semble aller de soi, s'imposer aux hommes par une sorte de logique externe, relevant quasiment de la transcendance ». Et il montre comment la deuxième partie de la phrase d'Halbwachs répond à la question : ces raisons externes « reposent cependant sur des conventions sur lesquelles les membres d'un groupe se sont mis d'accord. » Voyons donc, longuement cité, comment Matheron développe ce sujet, dans une étude historique au chapitre 2

[264] Mathéron 2002
[265] Halbwachs

de son mémoire doctoral :

> Ainsi, l'histoire des mathématiques abonde de ces types de « conventions sur lesquelles les membres d'une institution se sont mis d'accord ». Mais ce phénomène « d'accord » entre les membres d'une institution n'a souvent pu être réalisé que par l'intermédiaire d'un processus continué à l'échelle historique, et donc très long à l'échelle d'une vie humaine, alors que les « membres de l'institution » n'avaient plus qu'une existence virtuelle à travers les œuvres qu'ils avaient laissées, et que leurs continuateurs avaient critiquées, retravaillées, dépassées. C'est sans doute pour cela qu'il apparaît finalement comme impersonnel et même transcendant. A cet égard, l'exemple du développement du calcul infinitésimal est tout à fait éclairant : Raymond (1976) souligne à propos du nouveau symbolisme introduit par Leibniz, à qui l'on doit par exemple les écritures dy, $\int$, et donc $\int dy = y$ que:
>
> « […] ce n'est pas un trait spécial du génie de Leibniz ; il suppose l'universalisation des échanges sociaux portée au second niveau d'un langage universel et sans ambiguïté et d'une systématisation des moyens de correspondance ; il est à la fois la cause et l'effet de la concentration des divers résultats scientifiques et de l'apparition des premiers ouvrages pédagogiques (ainsi du traité du marquis de L'Hospital, L'analyse des infiniment petits, conçu comme complément d'une œuvre à paraître de Leibniz sur le calcul intégral, relu par Leibniz lui-même, et influent sur un long terme). »[266]
>
> En effet, ce symbolisme permet à Leibniz de donner en 1684 la définition de la différentielle grâce à la sous-tangente qu'il emprunte au Traité des sinus du quart de cercle de Pascal, dont il dira avoir tiré son inspiration. Pascal est mort depuis 1662, mais au cours d'une mission diplomatique à Paris en 1672, Leibniz y a rencontré Huygens qui l'a initié, entre autres, à l'œuvre de Pascal. Leibniz identifie en 1684 le rapport $\frac{dy}{dx}$ à $\frac{y}{sous-\tan gente}$. Un siècle plus tard, en 1897, Lagrange publie un ouvrage intitulé « *Théorie des fonctions analytiques* » contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissant, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies, dans lequel il rejette notamment la méthode des infiniment petits de Leibniz. Le projet de Lagrange, rendu public dès 1772, est de substituer l'emploi des fonctions dérivées à celui des différentielles[267]. Ainsi, dans les Leçons sur le calcul des fonctions de 1808, figure le remplacement explicite et revendiqué par Lagrange de la notation différentielle $\frac{dy}{dx}$ par la notation de la dérivée $f'(x)$:« Quoique les fonctions dérivées doivent leur origine au développement de la fonction primitive, lorsqu'on augmente la variable d'une quantité quelconque i, on voit qu'elles sont indépendantes de cette même quantité, qui ne sert, pour ainsi dire, que comme un outil pour former ces fonctions. Ainsi, dès qu'on aura trouvé, par la considération du premier terme du développement, des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, on pourra faire abstraction de

[266] Raymond 1976, p77

[267] Ce projet est aussi, comme le note Friedelmeyer (1989) celui d'un contemporain de Lagrange, Arbogast, qui dès 1789, soit huit ans avant la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange, envoie à l'Académie de sciences de Paris, un « Mémoire sur de nouveaux principes de calcul différentiel et intégral indépendants de la théorie des infiniments petits et des limites », dont Lagrange et Legendre seront chargés de faire un rapport. Lagrange lui rend hommage, page 5 de la *Théorie des fonctions analytiques* : « Depuis, Arbogast a présenté à l'académie des sciences un beau mémoire où la même idée est exposée avec des développements et des applications qui lui appartiennent. Cet ouvrage ne doit rien laisser à désirer sur l'objet dont il s'agit ; mais l'auteur n'ayant pas encore jugé à propos de le faire paraître

> tout développement, et regarder la dérivation des fonctions comme une nouvelle opération d'algèbre plus générale et d'une beaucoup plus grande étendue que l'élévation aux puissances. Ceux qui savent le calcul différentiel n'auront pas de peine à se convaincre que les fonctions dérivées $f'(x), f''(x)$ etc., y', y'', etc., reviennent aux quantités qu'on désigne dans ce calcul par $\frac{d.fx}{dx}, \frac{d^2 fx}{dx^2}$, etc., $\frac{dy}{dx'}, \frac{d^2 y}{dx^2}$, etc. et ainsi des autres expressions semblables. »[268]

Et il conclut que le savoir est le lieu et la forme de la mémoire externe instituée, tout au moins dans le cas des mathématiques :

> « L'accord » dont parlait Halbwachs n'est donc, bien sûr, pas le fruit d'une sorte de pacte volontaire passé explicitement entre « membres d'un groupe ». Il résulte, en revanche, d'un long processus historique qui a fixé, à l'issue de confrontations, de débats, de dépassements théoriques, des notations symboliques et des règles pour leur bonne utilisation, et dont nous ne sommes, en définitive, que les héritiers, à travers l'enseignement des mathématiques que nous avons reçu.

Il faut alors souligner un point qui nous paraît très important pour la direction que nous donnons à cette recherche

> La « chaîne de raisons »[269], peut alors, en ce point, s'éclairer de la « chaîne d'actes » volontaires, conscients et revendiqués en études autonomes, qui substituent certaines « chaînes d'actions » par d'autres. Ce sont, pour les mathématiques en apprentissages, des chaînes d'actes qui commandent aux chaînes d'actions, qui commandent enfin les gestes d'étude de tâches mathématiques. Ainsi en est-il, dans la « chaîne d'actes » qui ponctuent le développement du calcul infinitésimal au cours du XVIIIe siècle, ou de l'acte de substitution, par Lagrange, de la « chaîne d'actions » propre au calcul de la différentielle par celle qui est spécifique du calcul de la dérivée.

C'est dans ce sens, et sans doute dans ce sens seulement, que l'on peut parler des répertoires de pratiques déposées dans le savoir mathématique, et que Matheron désigne comme « mémoire pratique ». L'accomplissement d'un geste mathématique , par exemple, en dérivant un monôme x^n, qui conduit à placer le n comme coefficient du monôme de degré n-1 obtenu $\left[(x^n)' = nx^{n-1}\right]$, actualise alors le répertoire heuristique mathématique du choix du type d'action (*dériver*), donc de l'acte (identifier la dérivée au coefficient du terme du premier ordre dans le développement en série de Taylor de la fonction) volontaire et soumis à des (bonnes) raisons (d'ordre mathématique), dont le savoir est porteur. Poser de cette manière la définition du répertoire nous semble compatible avec la définition de la mémoire que donne, en anthropologie, Leroi-Gourhan (1964) et que cite Matheron :

> « Mémoire est entendue, dans cet ouvrage, dans un sens très élargi. C'est non pas une propriété de l'intelligence mais, quel qu'il soit, le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes. On peut à ce titre parler d'un "mémoire spécifique" pour définir la fixation des comportements des espèces animales, d'une mémoire "ethnique" qui assure la reproduction des comportements dans les sociétés humaines et, au même titre, d'une mémoire "artificielle", électronique dans sa forme la plus récente, qui assure, sans recours

[268] Pour une analyse historique de l'évolution du calcul infinitésimal, on peut se reporter par exemple à Houzel, Ovaert, Raymond, Sansuc (1976), et pour son histoire à Dahan-Dalmedico, Peiffer (1986).
[268] Halbwachs
[269] Halbwachs

> à l'instinct ou à la réflexion, la reproduction d'actes mécaniques enchaînés. »[270]
>
> Quel est le support sur lequel s'inscrivent les chaînes d'actes, ou plutôt d'actions, en mathématiques ? Il est toujours constitué d'un dispositif, d'un objet pour recevoir et conserver une trace, du sable des Grecs à l'écran de l'ordinateur en passant par le tableau ou la feuille de papier, et d'un objet pour tracer. Mais une fois le dispositif constitué, tout reste à faire ! Autrement dit, certains gestes d'étude, visibles et « extériorisables », donc soumis à contrôle social, vont être requis pour l'utilisation convenable de l'outil ainsi constitué, l'ensemble permettant d'accomplir ce qui pourra être identifié par une personne extérieure comme étant une activité mathématique. Or : « La synergie opératoire de l'outil et du geste suppose l'existence d'une mémoire dans laquelle s'inscrit le programme du comportement. »[271].

Matheron, qui fait ici référence à Leroi-Gourhan, note encore que « Cette extériorité ouvre alors la voie à 'l'expansion de la mémoire', qui va de la transmission orale des programmes mathématiques jusqu'au répertoire électronique, en passant par la transmission écrite. » C'est ce phénomène : « Tout reste à faire » note Matheron, dont nous cherchons à rendre compte. Nous identifions donc *un répertoire de gestes ou d'actions*, dont on a vu qu'ils peuvent être inscrits sur un support interne ou externe, mais qui sont *constitutifs de la pensée tout autant que de l'action observable*. Le répertoire est donc pour nous ici un dispositif organisateur de gestes pratiques ou d'actions mathématiques lors de l'étude d'une tâche relative à un objet mathématique. Le terme de répertoire est donc à prendre non pas dans son sens premier de classe d'outils mais dans le sens élargi de potentiel d'activation des outils d'une classe, et donc pour nous le répertoire de l'élève relatif à une question résulte, comme le dit Leroi-Gourhan, de « l'intériorisation de chaînes opératoires portées par la collectivité. Considérés comme pouvoir d'action, ainsi, les savoirs sont alors organisés en ce que nous nommons *un répertoire*. « Extérieur à l'élève, institutionnel donc relevant d'une « collectivité culturelle », déposé dans des ouvrages ou des pratiques, il est constitué d'outils et de règles opératoires permettant d'engager les gestes ou des actions d'étude » : ce que note Matheron à propos du savoir nous le déplaçons donc pour penser la fonction du savoir institué, pour les sujets de l'institution, en affirmant que son existence pour une personne suppose sa constitution en **répertoire de pratiques**.

On rejoint en ce point le sens à donner à ce que Leroi-Gourhan nomme la « trinité »[272] pour définir un savoir, métonymie commode pour pouvoir en parler puisque qu'il est constitué du triplet (domaine de réalité, pratique, savoir) et nous jouerons de sa proximité avec le quadruplet praxéologique (tâche, technique, technologie, théorie) Chevallardien. Dans un domaine de réalité à l'intérieur d'une institution, comme les mathématiques en terminale scientifique S, la pratique qui s'y déploie est outillée par les gestes permis par le savoir qui les commande et qui régule le répertoire de ces gestes, tant pour régler leur activation, que pour le (re)construire en y intégrant ces gestes. Les trois termes du triplet interagissent l'un sur l'autre et le savoir mathématique peut être tout à la fois vu comme répertoire extérieur, issu de choix sociaux antérieurs, qui commande les gestes d'études accomplis dans l'institution, que comme répertoire construit à partir d'une pratique dans une institution telle que l'institution d'étude mathématique hors classe : l'un appartient au monde des théories, l'autre au monde technologique. Ainsi le schéma qui vient d'être décrit peut tout aussi bien s'appliquer aux pratiques de l'étude qu'au savoir mathématique,

[270] Leroi-Gourhan
[271] Leroi-Gourhan (1964)
[272] Chevallard (1994a

que nous ne savons pas différencier parce que jamais les unes ne sont observables en dehors de la présence de l'autre.

On comprend ici que le sens de l'action n'appartient pas seulement à qui la conduit et que toujours, il vient de l'institution c'est-à-dire du regard des autres sujets qui savent. Ainsi l'action ne fait jamais sens pour un seul et elle doit toujours être considérée comme adressée à un autre, qui en partage l'interprétation. Les gestes de « bonnes manipulations » des outils, qui semblent donner du sens à l'activité mathématique sont donc décrits ici en cohérence avec les approches anthropologiques des techniques humaines relatives à la matière et à ses transformations, et pour nous en effet, comme l'a déjà vu Matheron, la distance n'est pas si grande.

> Il s'agit, certes, d'une activité didactique, mais la prise en compte de cette seule donnée ne suffit pas : il est nécessaire de pousser plus loin l'analyse pour saisir l'activité dans laquelle les sujets sont engagés, et ceci afin de pouvoir rendre compte de son intelligibilité. La théorie anthropologique du didactique (TAD) s'emploie à décrire les moyens, les outils, grâce auxquels s'accomplit le travail mathématique, tant au cours de l'étude que hors étude, tant pour les élèves (en train d'apprendre) que pour « l'homme », au sens générique du terme, engagé dans une activité mathématique. Car, si les élèves étudient et si le professeur enseigne ou dirige leur étude, il est nécessaire de ne pas perdre de vue qu'il s'agit de l'étude d'un savoir spécifique. Les mathématiques figurent parmi les savoirs hautement techniques. Les outils grâce auxquels s'accomplissent les activités mathématiques, outils que les élèves ont par ailleurs à étudier, afin d'apprendre à les utiliser correctement, sont donc, eux aussi, spécifiques. Pour ce qui concerne les mathématiques, et dans la modélisation que nous utilisons, les objets engagés pour la réalisation d'une activité se différencient en objets ostensifs et objets non-ostensifs, selon une description que nous avons présentée plus haut. Nous allons montrer sur un exemple comment nous nous servons de ces notions.

Et Matheron reprend ici un exemple proposé par Chevallard, afin de montrer la fonction mémorielle des ostensifs :

> Pour pouvoir dire que, pour résoudre l'inéquation $2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$ « on prend le logarithme des deux nombres », il convient que le non-ostensif qu'est le concept de logarithme existe, mais on ne peut le dire que parce que l'ostensif (langagier) « logarithme » est disponible. Pour réaliser l'action correspondante, en outre, il faudra disposer d'ostensifs scripturaux adéquats, qui permettront par exemple d'écrire : $2^{2x^2} \leq 2^{x+1} \Leftrightarrow \ln(2)^{2x^2} \leq \ln(2)^{x+1}$
>
> et de le démontrer en mobilisant ensemble ostensifs scripturaux et non-ostensifs conceptuels : *comme la fonction logarithme* (ostensif langagier appelant un non-ostensif qui ouvre un champ sémantique) (ostensif langagier spécifiant le précédent) *est strictement croissante* (ostensif langagier appelant un non-ostensif dans le champ sémantique précédemment ouvert) *sur]0 ;+∞[, donc cela implique que* (l'expression permet de changer de registre en passant aux ostensifs associés et aux calculs qu'ils permettent) *$2x^2\ln 2 \leq (x+1)\ln 2$ donne par simplification* (ostensif langagier appelant une règle de manipulation) *de ln2 (car ln2 >0) dans les deux membres de l'inégalité* (énoncé spécifié de la règle) *on a : $2x^2 \leq x+1$* $\Leftrightarrow 2x^2 - (x+1) \leq 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 \leq 0$.
>
> Transformations conformes de l'expression ostensive, on reconnaît maintenant une inéquation du second degré, c'est-à-dire qu'il est possible de mobiliser un répertoire de pratiques), etc. On arrive à écrire que les solutions de l'inéquation $2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$ sont donc les

nombres de l'intervalle $\left\{\frac{-1}{2};1\right\}$.

5.3 CE QU'UN OSTENSIF APPELLE AU SOUVENIR

Mais d'autres non-ostensifs et ostensifs auraient pu être mobilisés, pour les mêmes objets de départ. Cela aurait supposé une autre *interprétation de l'énoncé*, qui propose une inégalité entre deux expressions. Si l'on pense non pas à mobiliser le non ostensif logarithme pour traiter des exposants, selon la méthode générique enseignée en classe, mais à interpréter les deux écritures comme dénotant des fonctions exponentielles de base 2, alors, en remarquant que la fonction $u > 2^u$ est strictement croissante sur IR l'inéquation donnée $2^{2x^2} \leq 2^{x+1}$ est équivalente à $2x^2 \leq x+1$, etc.

Ainsi, un ostensif appelle ce que Matheron[273] nomme un ***praxème*** c'est-à-dire *un geste ou une action technique élémentaire doté de sens*, et que l'on peut décrire. Par exemple, « transformer une inégalité entre deux expressions polynomiales de degré inférieur à 2 en comparaison d'un trinôme à 0 », ce qui relève d'une technique connue, ou encore « transformer une inégalité entre deux expressions fonctionnelles semblables en inégalité entre leurs arguments », à l'aide d'un théorème sur la croissance de la fonction impliquée. Ce sont ces types d'objets (de taille variable) associant des dispositifs sémiotiques manipulables ou ostensifs et des manières d'interpréter ce que leurs états dénotent, qu'il appelle praxèmes.

L'exemple évoqué relève, en Terminale, d'un répertoire dont le point d'entrée est dans ce cas -« la technique de résolution des inéquations de la forme $2x \leq c$ à l'aide de la fonction logarithme »-la mise en œuvre ici sous une forme particulière dans la première manière de procéder et « la découverte d'un cas où la technique n'est pas la plus efficace » et que révèle la deuxième stratégie. Ce cas vient, chez les meilleurs élèves, enrichir leur répertoire. Cela peut étonner, car d'ordinaire la fonction exponentielle est enseignée d'abord, de même, ce qui apparaît comme « un cas où la technique n'est pas la meilleure manière de traiter la question » a conduit à redécouvrir des savoirs et des pratiques oubliées : « la fonction exponentielle réalise une bijection de R dans R+* elle est croissante et l'inégalité donnée équivaut donc à celle des exposants. » C'est une découverte au moment où le devant de la scène est occupé par la question de l'usage de la fonction logarithme dans la résolution des inéquations comportant une exponentielle, et cette découverte montre le phénomène d'oubli institutionnel, qui s'interprète quotidiennement comme « faute d'inattention » mais relève d'un phénomène bien plus systématique d'oubli dont l'observation anthropologique rend compte.

On notera donc que la mise en œuvre d'une technique se décrit bien à partir d'un domaine de réalité, d'une ou plusieurs pratiques et d'un ou plusieurs savoirs comme « synergie opératoire d'un outil et d'un geste ». Ainsi, toute pratique technique active un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront *manipulés* dans une pratique), les autres non ostensifs (ils seront *évoqués* comme des savoirs). C'est par ce moyen théorique que nous sommes proches des anthropologues

[273] Mathéron 200

des techniques matérielles, lorsque nous décrivons les techniques mathématiques. Chevallard (1994b) précise cette double spécificité des outils du travail mathématique que possèdent aussi les outils du travail sur la matière :

> « Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence instrumentale, d'une part, une valence sémiotique, d'autre part, ces deux valences apparaissant, au sein d'une technique donnée, associées comme le recto et le verso d'une feuille.
>
> 1-) Dire qu'un ostensif a une valence instrumentale signifie qu'il permet d'agir, de travailler. […] Le discours, ici, n'a pas simplement une fonction de communication : il est un outil qui permet un travail. Il en va de même avec les autres registres ostensifs (matériel, gestuel, graphique, scriptural).
>
> 2-) Dire qu'un ostensif a une valence sémiotique signifie qu'il permet de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail fait, le travail en train de se faire, et d'envisager le travail à faire - et cela aussi bien pour le sujet que pour l'observateur. »[274] .

Ostensifs et non-ostensifs apparaissent conjointement dans le travail (mathématique ou matériel) qui se fait, la différence tient surtout à l'enjeu de l'activité qui selon le cas vise des non-ostensifs immatériels, et dans l'autre des objets inscrits dans le monde matériel :

> « Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité, c'est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel non-ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu'induite ou supposée à partir des manipulations d'ostensifs institutionnellement associés. »[275] .

Mais même s'il parle d'activité, Chevallard raisonne en termes d'objets quand nous cherchons à comprendre la mobilisation par un sujet, de ce que l'on pourrait appeler l'ostension que l'ostensif réalise. Ainsi on peut poser, au-delà du seul cas des objets mathématiques et de l'apprentissage de leurs usages, la question de la conservation et de l'oubli des souvenirs pratiques au sein des institutions, en général. Quelques exemples nous ont été fournis par les recherches en anthropologie, qu'elles concernent les mathématiques ou d'autres domaines, et permettent de dévoiler le cœur du mécanisme institutionnel de la formation des répertoires qui, au-delà de la spécificité des institutions, leur est commun : ils font à la fois la mémoire et l'oubli**.**

Nous pensons donc que l'étude de la transposition didactique aboutit ainsi à l'étude de la gestion de son répertoire, par tel élève, et nous pouvons en tirer en retour des éléments relatifs aux assujettissements relevant des institutions scolaires. Pour nous, le contenu du répertoire, est donc l'ensemble des pratiques mobilisables pour résoudre des tâches soit, des heuristiques qui peuvent ou non être reconnues comme heuristiques mathématiques parce qu'elles pourraient en principe être très génériques, ou n'être pas mathématisées au niveau institutionnel considéré. Elles sont incorporées et constituent les éléments du travail mathématique : elles correspondent donc à ce que Matheron décrit comme des *praxèmes* ou *des organisations de praxèmes***.** Pour répondre à la question :

---

[274] Y. Chevallard 1994p 71
[275] Bosch et Chevallard (1999), op.cit. p 92.

Quels assujettissements extérieurs à la classe, relatifs au savoir et conduisant à la détermination de la vie institutionnelle, ont des effets dans la gestion du répertoire d'une tâche, par un élève ?

Nous avons constaté qu'en général, le fonctionnement et la gestion de l'étude semblent être en rapport avec un répertoire heuristique donné, un ensemble structuré de praxèmes dont nous avons observé quelques conditions de leur mobilisation ou de leur oubli, dans des travaux antérieurs que nous avons revisités. **Le répertoire est alors une organisation globale de praxèmes** Dans ce qui suit, exposons les analyses des séances observées, à partir de transcriptions d'études autonomes relatives aux mêmes aux savoirs mathématiques, pour différents élèves de notre échantillon, et nous tenterons d'étudier ainsi les manières du travail de leurs répertoires.

5.4 CRITERES DE SELECTION DES EPISODES DIDACTIQUES

Notre objectif est de ponctuer les épisodes où les interventions de l'élève mobilisent des objets nouveaux ou des rapports innovants à ces objets. De telles mobilisations peuvent avoir des fins diverses : la correction d'une erreur, la constitution d'une technologie, la mise en évidence d'une proposition fausse, l'élaboration d'une technique, etc. En d'autres termes, nous dirions qu'il s'agit de gestes d'étude qui contribuent à « l'évolution » puis à « la stabilisation » d'un répertoire : aménagement d'un milieu pour la correction, constitution d'une technologie, etc. Nous interprétons donc comme didactiques des épisodes d'étude où nous pouvons observer des actions sur le répertoire d'un sujet et non pas seulement sa mobilisation par le sujet. Lorsque nous pouvons attester d'un changement actuel, nous disons avec Mercier (1992) que l'épisode est constitutif de la biographie didactique de ce sujet, puisqu'il témoigne d'un apprentissage.

- ***Fonctions du répertoire: les reformulations au sein de la théorie anthropologique didactique***

L'analyse du régime didactique des savoirs fait apparaître une distinction mouvante entre objets implicites et explicites, moments silencieux et moments d'énonciation, travail d'un écrit par écrit et travail immédiat inscrit dans un geste. Des mouvements entre objets préconstruits et objets construits comme des notions mathématiques, enseignés ou non enseignés. Par exemple l'objet « tableau de variation » ne se situe pas dans les mêmes zones que l'objet « fonction » objet de savoir[276] pouvant être mis à l'étude dans un cadre théorique tandis que le tableau de variation est une notion-outil, qui sert à l'étude d'une fonction[277].

Chevallard a introduit, avec la notion de transposition didactique, les termes d'objet protomathématique et d'objet paramathématique pour rendre compte de ces objets qui sont pris dans la pratique mais qui ne sont pas considérés comme mathématiques et parfois ne sont pas même nommés. On sait par exemple que les notions paramathématiques ne sont pas objets d'un enseignement explicite, alors qu'elles doivent être connues pour permettre l'apprentissage des

[276] A. Mercier 2002
[277] Y. Chevallard, 1985 ; A. Mercier, 200

notions mathématiques : « Les notions paramathématiques sont des notions-outils de l'activité mathématiques ; elles ne sont pas « normalement » des objets d'étude pour le mathématicien. »[278]. Les notions protomathématiques quant à elles, sont situées dans une strate plus profonde, elles se construisent en acte, ce sont des « compétences ou capacités »[279] qui ne vivent que dans la pratique. Elles sont attendues et mobilisées implicitement par le contrat didactique ; ainsi, elles vont de soi et appartiennent au milieu des actions d'études mathématiques des élèves[280] : tout se passe *« comme s'il n'y avait là rien à savoir (et rien à enseigner sinon à apprendre) mais seulement à faire ce qu'il faut »*[281]. Pour Perrenoud, qui pourtant ne pense pas dans le cadre de la transposition didactique, ces objets pris dans les pratiques mais inconnus de la description des savoirs sont à la base de compétences et sont définis par « tout ce qui "va sans dire" ». Cette notion de compétence issue de notions protomathématiques est reprise[282] par F. Caron et S. de Cotret pour élargir le type d'utilisation du savoir notamment dans l'évaluation : « Par exemple, à modéliser, formuler des conjectures, prouver, qui font partie de l'activité mathématique sans être spécifiques à un savoir donné ». Nous remarquons enfin qu'elles sont premières et ainsi « fondent l'existence même de la discipline, ce que Develay appelle la " matrice disciplinaire "»[283].

La mise en relation de Chevallard, Mercier (1987) et de Mercier, Schubauer-Leoni, Donck & Amigues (2005) montre clairement que le temps, composante principale d'organisation de l'apprentissage//l'enseignement, est le résultat de l'organisation des objets de savoir en un texte ordonné en chapitres. Le temps force ainsi le professeur à s'intéresser dans son enseignement à la surface des choses et l'élève doit comprendre par contrat didactique le reste implicite de l'apprentissage//l'enseignement: organisation et notions paramathématiques, protomathématiques et mathématiques. Mais pour que les élèves apprennent, il est nécessaire que le professeur « indique la direction » de ces implicites[284].

Nous postulons que les épisodes de transformation et de stabilisation des répertoires heuristiques qui entrent en jeu vont se différencier selon leurs fonctions, dans la progression de l'étude. Nous reprenons de Sensevy et al[285] plusieurs fonctions possibles : l'emmagasinement et la récupération de l'information, les transformations et l'organisation des connaissances et des savoirs, qui rythment la production du temps en marquant le progrès dans le savoir.

Ces phénomènes sont décrits[286] comme la « mise en texte du savoir », qui structure un enseignement en donnant les conditions d'existence publique d'un discours sur le savoir, et commande le processus de transposition didactique. Dans la pratique d'apprentissage, le texte du savoir possède une certaine « épaisseur » et le professeur n'en donne que la surface. On entend par là que pour le professeur tout est présent et rien n'est mineur, mais que du point de vue de l'élève tout ce qui est présent et fait le sens du texte ne peut se voir ensemble, parce que le sens du texte n'est pas tout naturellement transparent. On entend donc que l'organisation et l'existence des différentes notions, mathématiques, paramathématiques, protomathématiques est assurée par

[278] Y. Chevallard (1985 p 50
[279] A. Mercier 2002
[280] G. Brousseau1999
[281] D'après P. Delbos & G. Jorion1984 in A. Mercier 2002
[282] F. Caron et S. de Cotret (2007)
[283] P. Perrenoud, 2001
[284] A. Erdogan, 2006
[285] Sensevy &al 2002
[286] Y. Chevallard 1985, 1991

la mise en jeu du texte, dans l'enseignement puis et surtout dans l'étude personnelle. Cette « épaisseur » du texte peut aussi être rapprochée de celle du plan d'un architecte dont l'interprétation dépend du métier du professionnel. Par exemple le plombier aura sa propre lecture, différente du maçon. Ainsi dans le cas du texte du savoir, la lecture propre à chaque catégorie d'acteurs élèves, étudiants, professeurs, génère des constructions différentes.

Les connaissances étant à leur principe syncrétiques et personnelles, leur transformation en savoir partagé et public puis la « mise en texte du savoir » relèvent de processus[287] qui réalisent diverses contraintes : dépersonnalisation, désyncrétisation permettant la communication, repersonnalisation et resyncrétisation effets de l'apprentissage. La désyncrétisation et la resyncrétisation sont donc essentielles dans notre étude. Le syncrétisme du savoir « perception globale et confuse, dont les éléments homogènes ne sont pas distingués en tant que tels » doit être évacué par l'« apprêt didactique » en *éléments* « virtuellement » constituant les parties d'un texte, explique Chevallard. Ainsi la désyncrétisation du savoir est supposée permettre aux élèves de (re)connaître le savoir, pièce après pièce. Le problème vient de ce que, par sa maitrise d'un savoir apprêté comme en un texte, l'élève est supposé retrouver « l'épaisseur du texte »[288]. Ainsi ceux qui comprennent la nécessité de ce travail apprennent. Cependant la conscience de ces processus n'apparaît pratiquement jamais et les « prérequis » sont formulés en termes d'éléments de connaissances situés comme antérieurs aux notions présentées »[289].

Les analyses que nous conduisons visent donc à montrer que la diversité des objets présents dans l'épaisseur d'un texte mathématique pose la question de la structure du savoir obtenue par sa mise en texte à usage d'apprentissage/enseignement. Elles conduisent à la question : « Peut-on reconstituer a priori une structure efficace, sachant qu'elle ne sera pas identique à la structure initiale savante qui permettait de résoudre des questions jusque-là hors d'atteinte ? » Pour une telle reconstruction nous enquêtons sur l'organisation du discours, mis en relation avec l'organisation du paysage mathématique : « un savoir scientifique quel qu'il soit, fonctionne sur une strate profonde de préconstruit»[290] par laquelle est indiquée un type d'objets participant à l'épaisseur du texte : *les objets « paramathématiques » et « protomathématiques*. »[291] . Ces types d'objets sont-ils seuls impliqués, comment le sont-ils ? La manière dont les élèves les mobiliseront nous montrera sans doute quelque chose de ce qu'il en est. Landy Rajosson a exploré ces phénomènes dans le cadre d'une métaphore écologique. Elle observe en effet que les morceaux de savoir sont assez gros et liés entre eux en « un tout structuré ». Certains objets nouveaux peuvent rentrer et y vivre d'autres non, et l'auteur examine alors les conditions de la vie des savoirs et montre qu'en leur absence, des savoirs disparaissent : les conditions identifiées sont aussi des contraintes. La recherche d'un tout structuré localement indépendant du reste des savoirs mathématiques est un mouvement essentiel de l'étude, qui procède de la compréhension du monde que permet une institution en donnant à ses sujets les outils pour penser et ce mouvement conduit à:

« … l'organisation de résultats variés en un système déductifs d'axiomes, de concepts majeurs et de théorèmes » et à « … un niveau local, où on admet (par justification visuelle) un

[287] M. Verret, 1978
[288] L. S. Schulman 1986, traduction G. Sensyvy et C. Amade-Escot, 2007
[289] Y. Chevallard, 1992
[290] Y.Chevallard, 1985
[291] Y.Chevallard1985

nombre limité de résultats et définitions à partir desquels on peut effectuer une organisation locale »

La structure du tout structuré est donc pensée par Rajoson comme organisation déductive fermée. Nous rapprocherons ces résultats du travail de thèse d'Emmanuelle Rouy (2007) sur la manière et les conditions dans lesquelles les professeurs font appel à ce qu'ils appellent la rigueur. Rouy reprend la définition du formalisme de Rouche : « la méthode consiste à « larguer les fonds pour ne conserver que la pure forme »[292]. Elle considère que le formalisme est donc « une méthode pour se prémunir contre tout recours à l'intuition dans les preuves ». Ainsi la systématisation de la construction de l'édifice mathématique et la recherche d'une cohérence globale permettraient une « économie de pensée qui consistera à n'étudier qu'une fois dans un cadre abstrait un lot de propriétés que l'on pourra ensuite appliquer telles quelles dans chaque théorie »[293]. Enfin le formalisme permet d'ordonner la matière mathématique dans sa globalité : « Par reconnaissance de structures communes à des domaines parfois éloignés se tissent des liens entre les théories du types « liens de parenté de filiation » contribuant à en faire voir l'architecture d'ensemble »[294]. Dans un tel cadre, les techniques utilisées ont un motif : « La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise…»[295] De plus, le langage formel utilisé et les raisonnements associés doivent « se conformer à un rituel en usage »[296] en effectuant :« l'usage policé des signes désignant les objets mathématiques et les raisonnements qu'on peut faire sur ceux-ci »[297] car l'impossibilité de « fermer le texte » montrée Ferdinand Gonseth (1926) en citant la numérotation des axiomes de IN par Péano fait que l'appel à la rigueur n'a plus, en fin de compte, d'autre justification que l'appel au bon usage. La demande de rigueur est donc la tentative d'obtenir des textes d'un savoir fermé, et provient de la volonté de contrôler les processus de compréhension.

C'est ainsi que nous proposons de nous centrer sur les deux fonctions primordiales du répertoire : la fonction de *réactivation* (qui assure l'activation d'un élément de l'univers cognitif d'un sujet x relatif aux objets du savoir mathématique) et la fonction de *changement* (qui assure les transformations, les réorganisations de l'univers cognitif de x relatif aux savoirs mathématiques)[298]. Nous pensons que ces fonctions rendent compte de l'effet des questions que l'étude conduit tout élève à se poser à lui-même et qui conduisent au travail formel et à la production de tout structurés.

5.5 ANALYSES DE QUELQUES EPISODES DIDACTIQUES ET DE L'APPRENTISSAGE DE F001

Nous donnons ici quelques épisodes de l'étude autonome en mathématiques, et les premiers

[292] E N.Rouche, 95
[293] E N.Rouche, 95.
[294] E. Rouy, 2007
[295] B. Beauzamy, 2001
[296] Noirfalise et al, 1996
[297] Noirfalise et al, 1996
[298] Nous ne rejetons pas l'hypothèse, sûrement vraie, que l'activation d'un élément de l'univers cognitif peut impliquer une confirmation, transformation ou réorganisation de cet univers, et inversement que les changements dans l'univers sont dus à l'activation de ces éléments.

éléments de leur analyse. Nos observations biographiques visent d'abord à la production d'épisodes de l'étude que nous appelons pour didactiques parce qu'on peut y voir non seulement la mobilisation de savoirs mais aussi des gestes d'enseignement des élèves, relatifs à eux-mêmes. Elles visent ensuite à la définition de ce qu'est la biographie de ces élèves relativement aux mathématiques c'est-à-dire d'abord à la construction d'épisodes de leur biographie didactique fondés sur les épisodes didactiques qu'ils rencontrent ou produisent. Nous pensons par principe de ces très bons élèves ne laissent pas passer les occasions d'apprendre c'est-à-dire qu'ils nous donnerons accès à la dialectique activation/changement de leur univers cognitif, en même temps qu'ils nous permettront de mesurer l'ampleur de cet univers. Nos observations concerneront donc six épisodes didactiques jouant sur l'ensemble des grandes divisions du programme de Terminale et des élèves observés : *AC001* sur les équations différentielles*, V001, F001, L001 et RC001*sur les probabilités et sur les nombres complexes, les suites numériques, les intégrales, *V001, AC001, RC001, L001, F001* sur les fonctions exponentielles et logarithme népérien. Nous mettrons à l'épreuve l'idée que ces épisodes didactiques sont constitutifs de la biographie de ces élèves, dans leur rapport à ces objets mathématiques particuliers sinon aux mathématiques en général.

5.5.1 Épisodes didactiques impliquant AC001

Nous présentons l'analyse de la première séance d'observation biographique sur les équations différentielles dans l'institution d'étude autonome de l'élève « AC001 », le premier que nous avons suivi. Il s'agit de la 2ème séance (*Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle)* et l'exercice demandé ne fait pas partie de ceux que AC001 étudie d'elle-même, mais c'est un de ceux que nous lui avons proposés. Nous l'avions choisi pour ses implicites de résolutions et surtout l'utilisation de la méthode des variations pour la résolution des équations différentielles, mais aussi parce que, à ce moment de nos observations, AC001 a déjà étudiée cette partie du programme de la classe de terminale scientifique S et que nous voulions voir comment AC001 mobilisait des connaissances anciennes sur les *équations différentielles du premier ordre*. En effet, la place des équations différentielles dans l'organisation des savoirs du programme proposée par le professeur est dans le chapitre sur les fonctions exponentielles, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Ce chapitre a été très tôt étudié en classe car il fonde le travail en mathématiques comme en physique, pour la classe de Terminale S. L'étude des fonctions exponentielles fournit un premier rapport à la notion d'équation différentielle et montre pour la première fois aux élèves comment faire *l'étude d'une fonction dont on ne connaît pas une formule explicite*. La méthode d'Euler introduite en classe de Première fait apparaître une suite géométrique et son évocation porte l'idée que l'exponentielle est l'analogue continu de la suite géométrique, analogie que confirme l'équation fonctionnelle puisque cette équation énonce le fait que *la variation de ladite fonction répond à la même formule que la fonction,* comme c'est le cas des suites géométriques. L'exponentielle occupe donc une place centrale, à la fois parce qu'elle renouvelle le non-ostensif « fonction » en le rapprochant de celui de « suite », parce qu'elle fait expérimenter le fait qu'une fonction peut être solution d'une équation, et parce qu'elle est l'occasion de rencontrer des techniques d'étude nouvelles pour ces objets renouvelés.

Nous avons donc découpé, dans le continuum de la transcription, l'épisode dont nous allons voir d'abord la valeur didactique. Nous donnons d'abord l'énoncé de l'exercice et la transcription complète de l'épisode.

5.5.1.1 AC001 face à une équation différentielle du premier ordre

<u>Exercice 1</u>: *Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle*

Soit l'équation différentielle $(E): y' = \frac{1}{5}y$

1-) On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation (E). Démontrez que l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions définies sur IR, de la forme :* $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *avec* k *un nombre réel quelconque*

2-) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $(E): y' = \frac{1}{5}y$

prenant la valeur -4 en 0

Nous pouvons immédiatement engager les techniques d'analyse dont nous disposons avec les travaux antérieurs, afin de voir ce qu'elles montrent et ce que nous apportera l'observation de AC001. Si nous tentons a priori de définir le site mathématique local de la question[299], nous en donnons une solution « institutionnellement normale » et nous trouvons à minima pour la résolution de l'exercice des concepts et des objets requis qui sont :

- des objets protomathématiques (ils ne sont pas nommés ou identifiés) : paramètres, ensembles ;

- des objets paramathématiques (ils n'ont pas reçu de définition) : l'égalité et l'identité, la quantification dans la définition des identités et des équations, antécédent et image dans une relation ;

Ces types d'objets appartiennent au substrat du site.

- des objets mathématiques (ils ont été les objets d'une présentation) : équation différentielle, identité, équivalence, dérivabilité, fonction, fonction constante, ensemble de solutions paramétré, condition initiale, valeur d'une fonction en un point ;

- des techniques génériques (elles ont été travaillées explicitement) : travail algébrique sur les formules, calcul des dérivées, résolution des équations, méthode de la variation de la constante ;

- des théorèmes génériques et spécifiques (ils ont été enseignés) : « un produit de fonctions dérivables est dérivable » et la formule associée, « si a est un réel et (α,β) *un couple de nombres réels, l'équation différentielle (E) : y'=ay admet une unique solution f vérifiant la condition initiale* $f(\alpha)=\beta$ *» ;*

[299] Christian Silvy

Ces types d'objets appartiennent aux deux niveaux centraux du site : objets, techniques et outils.

- des organisations de notions et de théorèmes (elles sont souvent au-delà de l'horizon institutionnel, mais peuvent avoir été enseignées) : les propriétés algébriques de la fonction exponentielle, l'espace vectoriel de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle, la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée, etc.

Ces types d'objets appartiennent aux niveaux théoriques du site local de la question.

Nous pourrions alors demander si ces objets appartiennent bien à l'institution observée. Si nous entendons par là une classe de Terminale Scientifique telle que les programmes la définissent ou telle classe en particulier, la réponse peut varier en partie, et les travaux de Erdogan ont montré comment cela dépend des exigences du professeur et de la manière dont il organise l'étude autonome qu'il leur demande de conduire. Ainsi, le site mathématique institutionnel du travail algébrique et de l'étude des fonctions est bien plus vaste dans une Seconde ordinaire d'un lycée de centre-ville parisien que dans les mêmes classes d'un bon lycée de banlieue recevant des élèves de ZEP et dont le professeur est expérimenté. Mais nous nous intéressons ici aux élèves qui, quoi qu'il en soit, réussissent très bien pour l'ensemble des exigences requises par les évaluations externes (*ici, le baccalauréat, où nous attendons qu'ils aient une note supérieure à 16)*[300]

C'est pourquoi nous allons, comme notre travail théorique nous a conduits à l'envisager, produire non pas le site comme ensemble d'objets institutionnels mais le répertoire comme ensemble de pratiques instituées par un sujet institutionnel dans le temps de l'étude autonome qu'il conduit pour lui-même mais en relation avec l'institution didactique qui lui a indiqué la matière à étudier. Nous partons donc, dans cette enquête, sur la base de ce que l'élève observée nous montre.

5.5.1.2 AC001 s'attaque à l'exercice proposé par l'observateur

Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle

AC001 relit l'énoncé à voix haute, nous transcrivons sans autre formalisme ses énonciations, puisque nous n'avons pas pour enjeu une analyse linguistique de ses productions langagières. Cependant, nous indiquons formellement la dimension orale en ne donnant pas de ponctuation mais en marquant par des // les pauses. Nous écrivons les formules et expressions qu'elle lit ou écrit, en utilisant le symbolisme mathématique, puisque c'est pour nous un système d'ostensifs sur lequel s'appuie le travail mathématique effectif et que ces ostensifs appellent des pratiques, soit comme souvenirs épisodiques (*des praxèmes*) soit comme objets institués (des savoirs). Voici donc d'abord le verbatim, que nous analyserons ensuite.

[300] Voir doc relevé des résultats obtenu au BAC

Verbatim d'AC001 *Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle*
soit l'équation différentielle $(E): y'=\frac{1}{5}y$ *// on sait que la fonction* $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation (E) /// question un / démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation* $(E): y'=\frac{1}{5}y$ *est l'ensemble des fonctions définies sur IR / de la forme //* $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k un nombre réel quelconque /// l'équation différentielle* $(E): y'=\frac{1}{5}y$ *a pour solution* $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *//// si la fonction* $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *alors on a /* $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}}=\frac{e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}}k$ */ en simplifiant le deuxième membre par* $e^{\frac{x}{5}}$ *on a* $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}}=k$ */*$\Leftrightarrow k=f(x)e^{\frac{-x}{5}}$ *//// la fonction ainsi définie par* $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ *est une constante // donc la fonction dérivée* $h'(x)=0$ *////// on peut aussi répondre à la question de cette manière // soit* f *une solution quelconque de l'équation* (E) *montrons que la* h *définie par* $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ *est une fonction constante /// étant donné que* h *est le produit de deux fonctions dérivables sur IR / elle est donc dérivable sur IR et pour tout réel* x *on a //* $h'(x)=\frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{x}}f(x)+e^{\frac{-x}{5}}f'(x)$ *ce qui implique par factorisation que :* $h'(x)=e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f.(x)+.f.'(x)\right)$ *//// sachant que la fonction* f *est solution de* $f'(x)=\frac{1}{5}f(x)$ */ donc* $h'(x)=\frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{x}}f(x)+e^{\frac{-x}{5}}f'(x)=$ $h'(x)=e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f.(x)+.f.'(x)\right)$ */// 0 // d'où* h *est une fonction constante / ce qui implique qu'il existe un réel k tel que* $\forall x \in IR$ *h(x)=k // on a donc* $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *//// Réciproquement : on vérifie sans peine que, quel que soit le réel k, la fonction* f *définie sur IR par* $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *vérifie l'équation* (E) */////// autre méthode / la fonction* $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation / ainsi pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions je peux utiliser la technique de la variation d'une constante /// étant donné que* $e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ */ je cherche*

la solution de l'équation différentielle (E) *sous la forme générale* $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k une fonction numérique dérivable //// c'est-à-dire* $k(x)$ *// la fonction* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation (E) si / et seulement si elle vérifie l'équation/// On a donc///* $k'(x)e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} = 0 \Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{x}{5}} = 0$ *// on a donc la fonction* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *est par conséquent une fonction constante / donc* $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *sont les solutions de l'équation (E) /////*

question 2 *//// démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) : y'=* $y' = \frac{1}{5}y$ *prenant la valeur-4 en 0///// je sais que // si a est un réel et (α,β) un couple de nombres réels l'équation différentielle (E) : y'=ay admet une unique solution f vérifiant la condition initiale f(α) = β // on sait que l'équation (E) : y'=1/5 y a pour solution la fonction* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k∈,IR //// f(α)=β est équivalent à* $ke^{\frac{\alpha}{5}} = \beta$ *, donc* $k = e^{\frac{-\alpha}{5}}(\beta)$ *//// ainsi pour tout couple (α ;β) le réel k existe et est unique / on a alors* $k = e^{\frac{0}{5}}(-4) \Leftrightarrow k = -4$ *l'unique fonction solution de l'équation différentielle prenant la valeur -4 en 0 est* $f(x) = -4e^{\frac{x}{5}}$ */////*

5.5.1.3 L'activation d'un répertoire

Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle

Nous suivons donc la transcription au plus près, en la découpant chaque fois que cela est utile à l'identification des éléments du répertoire et du travail d'activation/transformation que l'étude demande à l'élève. A notre charge de démontrer que nous avons ainsi une technique d'analyse de l'action qui a quelque pertinence.

AC001 lit l'énoncé. On remarquera qu'elle répète la définition entière de l'équation différentielle chaque fois qu'il est écrit son nom (E). C'est sans doute une technique mémorielle personnelle pour « souligner les mots importants », comme le demandent les « méthodologies » données aux élèves faibles.

« soit l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{1}{5}y$ *// on sait que la fonction* $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ *est*

solution de l'équation $(E): y'=\frac{1}{5}y$ *. ///Question 1 / démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation* $(E): y'=\frac{1}{5}y$ *est l'ensemble des fonctions définies sur IR / de la forme //* $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ *avec k un nombre réel quelconque // »*

AC001 fait une pause rapide et comme non va le lire ci-dessous, elle reprend le problème dans un procédé connu en géométrie comme « l'analyse du problème », premier temps du mouvement « analyse-synthèse » où la synthèse donne une rédaction de la solution.

Le jeu *analyse/synthèse* que joue de fait AC001 n'est pas souvent indiqué dans les ouvrages de la classe de Terminale Scientifique. Pourtant l'analyse du problème qu'AC001 engage revêt ici un caractère heuristique qui nous paraît fondamental. Nous envisageons donc que ce jeu soit, pour l'élève, un effet de son expérience, un savoir en acte. En deuxième visite de la question, AC001 utilisera la technique de « la variation de la constante » qui a un caractère plus mécanique et que l'analyse a donc conduit cette élève à activer, parce qu'elle figurait dans son répertoire heuristique sans y être immédiatement rendue disponible pour AC001 par le système d'ostensifs que l'énoncé présente.

L'élève prend donc le problème à partir de sa solution, donnée : ce qui a sans doute pour elle produit un indice.

« / l'équation différentielle $(E): y'=\frac{1}{5}y$ *a pour solution* $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *///*

/ si la fonction $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ *alors on///a/* $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}}=\frac{e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}}\times k$ *//// en simplifiant le deuxième membre par* $e^{\frac{x}{5}}$ *on///a* $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}}=k$ *ce qui implique de* $f(x)=ke^{\frac{-x}{5}}$

Sans donc évoquer la *variation de la constante,* AC001 isole k, qui est de fait une grandeur inconnue, dans la formule proposée. Elle utilise ainsi un procédé de raisonnement pratique dont elle a peut-être gardé le souvenir. Elle avance prudemment et par exemple, elle transforme l'expression de la solution donnée par l'énoncé sans utiliser immédiatement l'exposant négatif. Mais elle se laisse guider par son répertoire de pratiques ou praxèmes, tel qu'il est appelé par les ostensifs et les non ostensifs qui lui ont été proposés. Elle va pouvoir énoncer la clé du raisonnement : *une constante est une fonction constante* et sa dérivée est donc nulle.

« // la fonction ainsi définie par $h(x)=f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ *est une constante // donc la fonction dérivée* $h'(x)=0$ *//////»*

Apparemment, l'élève a terminé sa visite des objets et pratiques mobilisables pour l'attaque du problème et elle va en effet engager la synthèse. Mais elle considère que c'est *une autre manière* de formuler une réponse et on peut en conclure que « l'analyse-synthèse » n'est pas une technique enseignée.

> *« / on peut aussi répondre à la question de cette manière // soit f une solution quelconque de l'équation (E), montrons que la* h *définie par* $h(x) = f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ *est une fonction constante /// étant donné que* h *est le produit de deux fonctions dérivables sur IR / elle est donc dérivable sur IR et pour tout réel* x *on a ///*
>
> $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{x}} f(x) + e^{\frac{-x}{5}} f'(x)$. $\Leftrightarrow$ *par factorisation*
>
> *que/////* $h'(x) = e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-1}{5} f.(x) + .f.'(x)\right)$ *//// sachant que la fonction f est solution de*
>
> */* $f'(x) = \frac{1}{5} f(x)$ *donc* $h'(x) = \frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{x}} f(x) + e^{\frac{-x}{5}} f'(x) =$
>
> $h'(x) = e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-1}{5} f.(x) + .f.'(x)\right)$ */// 0 // d'où* h *est une fonction constante / ce qui implique qu'il existe un réel k tel que* $\forall x \in$ *IR h(x)=k // on a donc* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *///»*

Non seulement pour cette élève, la technique analyse/synthèse n'a pas de nom, mais le mouvement de pensée comprend nécessairement les deux temps, ce que AC001 ne semble pas savoir. Elle mobilise donc ici ce qu'on appelle « un savoir d'expérience ».

Nous y voyons un élément important de son répertoire heuristique, aux fonctions à la fois épistémologiques et didactiques : elle sait explorer l'écosystème d'une question pour en déduire une stratégie d'attaque. On sait la lenteur de la formation des savoirs d'expérience (ce que les psychologues du travail nomment « développement ») puisqu'ils ne sont pas l'effet d'une intention externe conduisant à une évaluation sous contrat (définissant une norme de comportement), et on peut en déduire la grande quantité de *travail personnel sans guidage enseignant* qui se trouve là derrière

AC001 tire bénéfice de son exploration en reprenant sans plus d'hésitation l'expression fonctionnelle de k utilisant l'exposant négatif. On remarque comment par ailleurs AC001 ralentit le temps et vérifie les manipulations formelles en produisant une grande redondance d'écriture, puisqu'elle aurait pu conclure sans répéter l'expression de h'(x). Le raisonnement qu'elle conduit est donc pour elle délicat, et en effet ce n'est pas tous les jours qu'un élève manipule une expression comportant des fonctions inconnues. Ce n'est pas le calcul de dérivée qui lui pose problème, mais l'intervention de l'équation vérifiée par f dans le travail sur h : une opération bien plus rare, puisque l'inconnue de cette équation est une fonction.

> *« Réciproquement : on vérifie sans peine que / quel que soit le réel k / la fonction f définie sur IR par* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *vérifie l'équation* (E)*»*

Cela dit, AC001 n'oublie pas la réciproque et l'expédie en professeur ou en lectrice d'ouvrages mathématiques : « *On vérifie sans peine que…* », dit-elle sans hésiter. L'épisode didactique se termine normalement en ce point, où le problème est résolu. Nous avons donc ici un épisode didactique, qui conduit l'élève à mobiliser des savoirs et des connaissances dans un type de travail qu'elle ne maîtrise pas complètement, même si elle le conduit avec sûreté. Un tel épisode peut être produit par un professeur explorant, avec une classe ou un groupe d'élèves, un type de tâches que l'on pourrait appeler « résolution des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, sans second membre ». Mais ici le professeur est absent et l'élève ne se réfère pas explicitement à ce type de tâches.

5.5.1.4 AC001 ne s'arrête pas à la fin de l'exercice mais change de position et apprend

Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle

Le plus intéressant pour nous se situe donc ici : en effet, AC001 ne s'arrête pas. C'est que de fait, elle doit considérer qu'elle n'a encore pas appris grande chose en résolvant l'exercice puisque la méthode à laquelle elle a abouti n'est pas standard. Elle va donc tenter de reprendre la question en mobilisant cette fois une méthode générique pour un type de tâche. Comme si elle se disait : « il doit bien y avoir quelque chose à apprendre, là. » C'est un geste d'étude essentiel, que de mettre une autre méthode, la plus classique, à l'épreuve, puisqu'il conduit à faire ce que le professeur aurait fait : identifier le type de tâche dont la question relève. On remarque alors que le « on » est remplacé ici par un « je » qui montre l'investissement fort et le changement de position de l'élève devenant son propre professeur.

« /// autre méthode / la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation / »

Cela est un des résultats possibles des calculs réalisés lors de l'étude précédente, et AC001 n'y revient pas inutilement. Elle s'appuie maintenant sur lui pour identifier le type de tâche comme on le fait d'ordinaire : par la technique que l'on mobilise. Et cette fois, la technique va être nommée parce que la question a été reformulée de manière plus conventionnelle : montrer quel est l'ensemble des solutions de (E) est devenu montré qu'il n'y a pas d'autres solutions que les solutions connues. Le fait que l'élève soit ici en train d'apprendre quelque chose dont elle n'a pas la maîtrise peut être appuyé encore sur un indice : elle fait une erreur de quantification puisque $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ n'est pas une fonction mais définit une fonction pour chaque valeur de k : il aurait donc fallu dire « <u>toute</u> fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) » au lieu de « <u>la</u> fonction… ». Or, c'est la première fois dans cet exercice qu'AC001 fait une telle erreur de quantification.

«////ainsi pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions je peux utiliser la technique de la variation d'une constante /// étant donné que $e^{\frac{x}{5}} \neq 0$ / je cherche la solution de

l'équation différentielle (E) sous la forme générale $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k une fonction numérique dérivable //// c'est-à- dire k(x) // la fonction* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *est solution de l'équation* (E) *si / et seulement si elle vérifie l'équation//on a donc*

$$k'(x)e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}} = 0 \Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{x}{5}} = 0$$

<u>la fonction</u> $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *<u>est par conséquent une fonction constante</u> / donc* $y : x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ *sont les solutions de l'équation(E) »*

C'est de fait par ce genre de raisonnement qu'elle avait commencé, mais la méthode et son nom n'ont pas été appelés immédiatement en mémoire par le système d'ostensifs donné par l'énoncé : le répertoire immédiat ne la comprenait pas. On voit donc ici comment son travail d'étude conduit AC001 à intégrer un type de tâches nouveau dans le domaine d'extension de la technique de variation de la constante c'est-à-dire, comment elle étudie pour renouveler son répertoire. Cela suppose une maîtrise forte de la technique étudiée (la variation de la constante), et on le voit, une mobilisation immédiate des résultats obtenus dans le cours du travail antérieur, comme le calcul de la dérivée de h(x) ou le fait que les fonctions d'une certaine classe sont solutions de l'équation différentielle donnée. On remarquera que la conclusion soulignée montre encore « une distraction » et donc une charge cognitive importante : c'est h(x) et non pas f(x), qui est une fonction constante : AC001 est bien dans la réalisation d'un travail qui n'est pas routinier.

Nous avons donc identifié ici un épisode de la biographie didactique d'AC001, puisqu'elle a rencontré un problème nécessitant d'apprendre quelque chose de nouveau, ce qu'elle a fait en effet sans hésitation.

5.5.1.5 La fin de l'exercice

Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle

AC001 ne s'arrête pas pour autant et enchaîne aussitôt avec la question suivante : indice pour nous que ce qui vient de se passer est, pour elle, normal et n'entraîne aucune lassitude.

////question 2 //démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{5}y$ *prenant la valeur -4 en 0 //// je sais que/// si a est un réel et (α,β) un couple de nombres réels /// l'équation différentielle* $(E) : y.' = ay$ *admet une unique solution f vérifiant la condition initiale f (α)=β. //// on sait que l'équation* $(E) : y' = \frac{1}{5}y$ *a pour solution la fonction* $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ *avec k∈IR, f (α)=β/// est équivalent à* $ke^{\frac{\alpha}{5}} = \beta$ *, donc* $k = e^{\frac{-\alpha}{5}}(\beta)$ *. Ainsi pour tout couple (α ; β) le réel k existe et est unique.*

On a alors : $k = e^{\frac{-(0)}{5}}.(-4) \Leftrightarrow k = -4$ *l'unique fonction solution de l'équation différentielle* $(E): y' = \frac{1}{5}y$ *prenant la valeur -4 en 0 est* $f(x) = -4e^{\frac{x}{5}}$. »

Une fois les éléments du répertoire des équations différentielles mobilisés, plus de difficultés pour cette élève, tout vient au bon moment. Mais notre observation a montré que la donnée en cours d'une résolution institutionnellement normale (méthode de variation de la constante) et des objets ostensifs et non-ostensifs de divers niveaux mobilisés par cette résolution (voir le site de l'exercice) ne donne pas à un sujet institutionnel la mobilisation immédiate de la technique adéquate.

L'exploration qui nous conduit à identifier le répertoire de ce sujet s'avère donc indispensable à la compréhension de ce qu'est l'étude, car même s'il s'agit d'un « bon sujet » de ladite institution son rapport aux objets institutionnels n'est pas ce que la TAD identifie comme le rapport institutionnel. Le site aussi est insuffisant ; il donne les objets et les techniques instituées requis et indispensables, il permet d'ouvrir l'espace des possibles d'une question, mais si ces objets sont nécessaires à une résolution adéquate, la liste organisée de ces objets et techniques n'est pas suffisante à l'interprétation des actions observables, encore moins permet-elle d'anticiper les actions observées. L'espace des rapports institutionnels n'est donc que la norme que les bons sujets visent, mais la manière d'atteindre la norme n'est pas décrite tant que l'on n'observe pas les rapports personnels de tels et tels élèves et leur évolution : ce que nous avons identifié comme leur répertoire.

Nous allons tester cette position sur les autres observations, sachant que, pour nous, le cas présenté est bien plus qu'un exemple, il est exemplaire[301] autrement dit, ce cas doit fonder un paradigme. On peut considérer avec Aristote que dans la mesure où ils sont utilisés comme arguments rhétoriques tous les exemples fonctionnent comme des inductions ; l'exemple est une preuve fondée sur un raisonnement inductif : « Il ressort clairement des Topiques (car il a été précédemment parlé du syllogisme et de l'induction) que s'appuyer sur plusieurs cas semblables pour montrer qu'il en est de même dans le cas présent est < ce que l'on a nommé > là une induction, ici un exemple » (Aristote, Rhét. I, 1356 a 12 sq.) On peut relever alors l'importance de l'analogie puisque c'est dans l'analogie que l'exemple comme cas singulier devient modèle (qu'il se «paradigmatise») et c'est grâce à une similitude encore que le paradigme pourra être considéré comme applicable à une situation présente. C'est ce que nous mettons à l'épreuve.

5.5.1.6 Un autre exemple d'équation différentielle résolue par AC001

L'exercice est standard, mais nous avons ici affaire à une équation avec second membre. Il est rencontré par AC001 .Après le précédent et le répertoire relatif à l'équation différentielle, il est mobilisé un autre jour.

Exercice 2 : *Réf:AC001/S-3/25012007/Equation-Différentielle*

1-)Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x}$ *est solution de l'équation*

[301] Gaelle Jeanmart http://popups.ulg.ac.be/dissensus/document.php?id=1100 - tocfrom2

différentielle $(E): y.'-3y = e^{2x}$

2-) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'-3y = 0$

3-) Démontrer qu'une fonction f *est solution de* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *si et seulement si* $f - g$ *est solution de l'équation différentielle* $(E'): y'-3y = 0$.

4-) Résoudre l'équation différentielle $(E): y.'-3y = e^{2x}$

5-) Déterminer la fonction h *solution de l'équation* $(E): y.'-3y = e^{2x}$, *telle que* $h(0) = 0$

Verbatim d'AC001 *Réf:AC001/S-3/25012007/Equation-Différentielle*
question 1 */ vérifier que la fonction g définie par //* $g(x) = -e^{2x}$ *est solution de l'équation différentielle* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *// il s'agit d'une équation différentielle /* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *// si* $g(x) = -e^{2x}$ *est une solution // si et seulement si elle vérifie cette équation différentielle //// la fonction* g *est une fonction exponentielle, donc elle est dérivable sur IR // tel que pour tout* $x \in IR$ *la fonction dérivée* $g.'(x) = -2e^{2x}$ */ par conséquent* $g'(x) - 3g(x) = -2e^{2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x}$ */ donc ce qui signifie que la fonction* g *est une solution de l'équation* (E) *//*   *///**question 2** /// résoudre l'équation différentielle* $(E'): y'-3y = 0$ */ on sait que l'équation différentielle* $y' = ay$ *admet la comme solutions les fonctions* $y: x \mapsto ke^{ax}$ *avec* $k \in IR$ */ donc les solutions de l'équation* $(E'): y'-3y = 0$ */ sont les fonctions* $x \mapsto ke^{3x}$ *avec* $k \in IR$ *//*   *////**question 3**///démontrer qu'une fonction* f *est solution de* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *si et seulement si* $f - g$ *est solution de l'équation différentielle* $(E'): y'-3y = 0$ *// de la même façon* $f - g$ *est une solution de l'équation différentielle si elle vérifie* $(E'): y'-3y = 0$ */// la fonction* f *est une fonction dérivable sur IR, implique* $f - g$ *est dérivable sur IR //// alors //* $f - g$ *est une solution de l'équation* $(E'): y'-3y = 0$ *signifie que* $(f - g).'-3(f - g) = 0$ */ ce qui implique* $f.'-g.'-3f + 3g = 0$ *//* $\Leftrightarrow$ $f.'-3f = g.'-3g$ *// sachant que* $g(x) = -e^{2x}$ *est une solution de* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *[question1] / on a* $f.'-3f = g.'-3g \Leftrightarrow f.'-3f = e^{2x}$ *// donc la fonction* f *est une solution de*

l'équation (E) */////*

*///**question 4** / résoudre l'équation différentielle* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *// on sait que* $f - g$ *est solution de* $(E'): y'-3y = 0$ *// donc* $f - g = ke^{3x}$ *//*
$g(x) = -e^{2x}$ *est une solution de* (E) */ f est aussi une solution de* (E) */// donc* $/\forall x \in IR, f(x) - g(x) = ke^{3x} \Rightarrow f(x) = g(x) + ke^{3x} \Rightarrow f(x) = e^{2x} + ke^{3x}$

par factorisation on a: $f(x) = e^{2x}(1 + ke^{x})$ *avec* $k \in IR$ *///*

*/////**question 5** // déterminer la fonction* h *solution de l'équation* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *// telle que* $h(0) = 0$ */// on sait que : « Si a est un réel et* $(\alpha;\beta)$ *un couple de nombres réels, l'équation différentielle* $y' = ay$ *admet une unique solution* h *vérifiant la condition initiale* $h(\alpha) = \beta$ *» //*
donc $h(x) = e^{2x}(1 + ke^{x}) \Rightarrow h(0) = e^{0}(1 + k)$

//// d'où $(1 + k) = 0 \Leftrightarrow k = -1$ */// la fonction* $h(x) = e^{2x}(1 - e^{x})$

5.5.1.7 Le répertoire heuristique et sa mobilisation

Réf:AC001/S-3/25012007/Equation-Différentielle

Nous tentons maintenant de déterminer directement les éléments du répertoire heuristique de l'élève, en allant si possible au-delà de la définition du site de la question. Pour cela nous reprenons le verbatim de l'épisode et nous marquons en grisé las énoncés qui relèvent de la fonction de changement : AC001 y « fixe » les éléments de du répertoire mathématique qu'elle considère comme connus à la lecture des questions. Nous devrons ensuite interpréter le contenu des énoncés restant, dont nous pensons a priori qu'ils nomment des objets qui ne seront pas actifs, c'est-à-dire qu'ils n'appelleront pas des praxèmes devant changer et qu'ils relèvent donc de la fonction d'activation, qui en régime normal est transparente à l'action.

Dans la résolution de la question 1, AC001 nomme ainsi l'objet de l'exercice *« il s'agit d'une équation différentielle »* traduit la question en raisonnement *« … si et seulement si elle vérifie cette équation différentielle »* puis attaque la question posée, *« g est une exponentielle donc elle est dérivable* :

> *AC001 : « si* $g(x) = -e^{2x}$ *est une solution si et seulement si elle vérifie cette équation différentielle // la fonction* g *est une fonction exponentielle / donc elle est dérivable sur IR tel que pour tout x∈ IR, la fonction dérivée* $g(x) = -e^{2x}$ *»*

AC001 explicite les objets [équation différentielle, solution] concepts [exponentielle] et les techniques [calcul de la dérivée] en même temps que le type de raisonnement pouvant lui permettre de répondre à la question posée [vérifier que g est solution]. Ensuite seulement elle effectue les gestes nécessaires [remplace la fonction g et sa dérivée g.' dans l'équation $(E): y.'-3y = e^{2x}$], et conduit les calculs attendus [*par conséquent,* $g'(x) - 3g(x) = -2e^{2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x}$ *]*. Cependant, nous remarquons qu'elle annonce une équivalence (*si et seulement si*) et ne donne qu'une implication (par conséquent). Ainsi, elle montre une certaine hésitation sur ce point, identifié comme délicat jusqu'à l'université selon Deloustal-Jorrand (2004). Ainsi conclut-elle la question par un énoncé où elle expose une interprétation de son calcul, mais elle commence cet énoncé par un *« donc* » qui n'a pas de signification logique : AC001 ne parle pas « *comme un livre* ».La question 2 se résout d'un coup, par appel au résultat de cours, générique (*le coefficient a*), et son actualisation avec *le coefficient 3*. La rhétorique de mobilisation d'un résultat est maîtrisée.

On dispose à présent de deux éléments, qui ne sont pas nommés, ce qui montre que cette technique n'est pas objet d'enseignement : « Une solution particulière de l'équation complète. » et « Une solution générale de l'équation sans second membre. ». Ainsi, les termes de « solution générale », « solution particulière », « équation sans second membre », « équation complète » ne sont pas souvent institutionnellement présents. ***La question 3*** vise donc la recherche d'une solution générale de l'équation avec second membre, et l'exercice permet de rencontrer ce problème sans enseignement explicite de la technique. Dans sa résolution de la question 3, qui est donc : « *Démontrer qu'une fonction* f *est solution de* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *si et seulement si* $f - g$ *est solution de l'équation différentielle* $(E'): y'-3y = 0$ *»*, AC001 poursuit explicitement la mobilisation du répertoire précédent en commençant par l'énoncé *« de la même façon »*

> *«de la même façon f-g est une solution de l'équation différentielle si elle vérifie* $(E'): y'-3y = 0$
>
> *La fonction f est une fonction dérivable sur IR, implique f-g est dérivable sur IR*
>
> *Alors, f-g est une solution de l'équation (E') signifie que (f-g)'-3(f-g)=0,*
>
> *Ce qui implique que* $f.'-g'-3(f-g) = 0 \Rightarrow f.'-3f = g'-3g$
>
> *Sachant que* $g(x) = -e^{2x}$ *est une solution de* $(E): y.'-3y = e^{2x}$ *[question1], on a*
>
> $f.'-3f = g.'-3g \Rightarrow f.'-3f = e^{2x}$ */////Donc la fonction f est une solution de l'équation (E) »*

Le discours et les techniques de résolution sont les mêmes. AC001 utilise l'analogie avec la question n°1 qui vient d'être traitée, en considérant la somme de deux fonctions ($f - g$) comme définissant une troisième fonction qu'elle n'a pas besoin de nommer. En revanche, selon le procédé vu plus haut à propos de la technique syllogistique majeure/mineure consistant à donner l'énoncé générique avant de donner son actualisation, elle traduit avec soin ce que cela *signifie*, de manière à ce que l'analogie guide au plus près la résolution de la question posée. Le reste des formes rhétoriques est respecté, ainsi elle conduit le travail avec la forme « *sachant que […] on a* ».et le « *donc »* final donne en conclusion l'interprétation de la forme obtenue.

Nous relevons l'usage du théorème admis *[« une fonction est solution d'une équation si elle vérifie l'équation donnée »]* pour la résolution des équations différentielles du premier ordre à coefficients constants, comme point d'appui qui permet à AC001 d'activer les concepts et les techniques de résolution de cette équation différentielle puisque c'est à partir de là que AC001 détermine la fonction dérivée ($f - g$)'.

5.5.1.8 Une élève chronogène

Nous remarquons surtout que AC001 utilise immédiatement la réponse qu'elle a obtenue à la ***question 1*** : $g'x) = -3g(x) = -2e^{2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x}$, ce qui est un indice remarquable de sa position institutionnelle dans le système didactique qu'est sa classe de Terminale. En effet, son travail a produit pour elle *un résultat,* et tout résultat figure immédiatement dans le répertoire. Soit localement comme ici, soit de manière plus longue s'il apparaît important, mais rien n'en est décidé a priori. Nous dirons qu'AC001 est « une élève chronogène », parce que son étude fait progresser son univers cognitif, tandis que beaucoup d'élèves considèrent que seul le professeur est chronogène, et que seuls les éléments qu'il note explicitement font progresser le savoir. C'est en ce sens que AC001 conduit une étude que nous qualifions d'autonome, tandis que les élèves non chronogènes sont sur-assujettis à l'institution en attendant tout du professeur. L'analyse présentée ci-dessus cherche à interpréter « l'apprentissage par l'étude autonome » d'AC001 pour ce deuxième épisode didactique, afin de mieux comprendre les gestes d'étude qui montrent ce que l'on peut appeler *l'intention didactique relative à elle-même* de cette élève. Rappelons que les gestes d'étude autonome que nous regardons à travers les épisodes didactiques produisent un milieu favorable à l'apprentissage, par la réactivation des heuristiques mathématiques, des rapports aux connaissances déclaratives et opérationnelles que AC001 considère pertinentes de mobiliser et de garder à l'esprit pour étudier le thème « équation différentielle de premier ordre à coefficient constant » qui n'a pourtant pas été nommé, à ce stade de l'observation.

Substrat/ implicites	**Objets**	**Outils et Techniques**	**Concepts 1**	**Concepts 2**
Quantification Inconnue Egalité Identité Second membre d'une ED	Equation différentielle Fonction exponentielle Dérivabilité Equivalence Variable fonctionnelle	Calcul de dérivées Caractérisation des fonctions par leur dérivée Propriétés fonctionnelles de l'exponentielle Symétrie de l'égalité Substitution d'une variable	Solution d'équation Espace vectoriel de fonctions Solution particulière et générale d'une Equation Différentielle	Equation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants Conditions initiales

Site mathématique de l'exercice

Le tableau décrit le contenu mobilisé par l'action autonome dans cet épisode didactique. Les objets relevés dans l'analyse et relatifs au répertoire heuristique utilisé par AC001 constituent le site mathématique local pour la question telle que la traite AC001, ce qui répond à la question :

« sur quoi AC001 s'appuie-t-elle pour réactiver les éléments pertinents de son répertoire ? » Ces objets sont donc présentés ci-dessus, sachant que les concepts de niveau 1 et 2 sont présents « en acte » plus que de manière explicite. L'absence de mouvement dans l'ensemble de ces objets nous conduit à dire que cet épisode didactique n'a pas montré un épisode biographique associé pour AC001, bien que sans doute on puisse affirmer que l'élève a augmenté son expérience des équations différentielles. En effet, on remarque aussi (et c'est un des mérites du site présenté ci-dessus que de le mettre en évidence) que la solution obtenue $f(x) = e^{2x} + ke^{3x}$ est « *la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre* », mais faute de professeur (ou d'ouvrage de niveau universitaire) pour énoncer cela, l'élève qui gagne en expérience n'apprendra pas immédiatement cette propriété générale. Ainsi, nous observons l'absence d'un épisode de la biographie didactique de l'élève, si ce qui suit est conforme à ce que nous avons vu c'est-à-dire si le découpage du verbatim est convenable. On peut s'en persuader en allant voir la transcription complète, en annexe.

5.5.2 Épisodes didactiques impliquant une deuxième élève : V001

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue

Nous conservons le style d'exposition utilisé pour les épisodes biographiques précédents : nous discutons les extraits de l'épisode et soulignons en gris les discours de V001 qui, d'après nous concernent la question « quel répertoire heuristique est réactivé par V001 ? Cependant, nous allons tenter cette fois de donner l'intégralité de la transcription de afin le cas échéant, de montrer comment on observe un épisode biographique. A cet effet, nous proposons une présentation en colonnes comprenant l'écoulement du temps d'horloge, la numérotation des énoncés d'appui du découpage, les énoncés eux-mêmes, les temps de silence (nous notons cependant les pauses par le / usuel, les écrits, et les éléments du site mathématique local mobilisés. L'ensemble devrait nous permettre de suivre l'activation des gestes du répertoire et l'évolution éventuelle de sa constitution.

5.5.2.1 Lois de probabilités continues

Nous suivons cette fois un exercice de probabilités, dont l'énoncé est un peu formel et ressemble à l'introduction d'une ROC. Nous avons choisi cette série d'exercices parce que les objets de savoirs touchent plusieurs chapitres la classe de terminale et ce jour-là c'est la 4ème séance d'observation de V001 (*Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue)*. Dans la transcription particulière de V001, nous remarquons immédiatement les bornes « alors » et « donc », qui nous donnent un indice de découpage en unités d'action de V001 et donc un découpage en sous épisodes élémentaires pour ce que l'on pourrait considérer comme des sous tâches pour V001 (et pour cet élève seulement car le découpage dépend du registre de pratiques mobilisable par l'élève).

Enfin, nous remarquons deux fois un raisonnement (surligné en gris, énoncés 4 et 10) démontrant s'il était besoin ce que nous disions à propos du contrat didactique :

« la connaissance du contrat est constitutive des connaissances disciplinaires mobilisées dans une tâche »[302]

C'est une règle qui n'est pas spécifique des institutions didactiques qui doit être considérée comme valable quelle que soit l'institution.

Exercice : *Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue*

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, démontrer que :

$$P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = P([a;s])$$

5.5.2.2 Verbatim de la proposition de corrigé : 15h17

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue

Discours		Réflexion	Rédaction	Objets/Concepts ou techniques utilisés
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	*Alors///alors [silence]/////* *alors / démontrer que la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ; + ∞ [est bien égale à la probabilité de l'intervalle [a ; s]//alors////humm /////(silence)* *alors, on sait que c'est une probabilité conditionnelle, donc je peux que euh (silence)* *la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ;+∝[est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] inter l'intervalle [a ; + ∞ [le tout divisé par la probabilité de l'intervalle [a ; + ∞ [/ donc qui est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sur la probabilité de l'intervalle [a ; +∝[/ alors [silence, observe l'opération] //////donc le tout est euh / étant égal à l'intégrale de / allant de a à a+s / on déjà étudié les intégrales et les fonctions expo mais (silence)/////donc, on a tout*	15s … … … … … …. 5s … … …. 20s … … … …. 10s … … … … …. 10s … … … ….	$P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) =$ $\frac{P([a,a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)}$ $= \frac{P[a;a+s]}{P[a;+\infty[}$ $= \frac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}.dt}{e^{-\lambda a}}$ (*) $\frac{-e^{-\lambda(a+s)}+e^{\lambda a}}{e^{\lambda a}}$	**Ensemble des nombres réels./Intervalles /Probabilité.* **Probabilité Conditionnelle. Variable Aléatoire Continue.* **Densité de probabilité.* *Intersection d'intervalles* **Loi exponentielle./* *Etude fonctionnelle de primitive.* **Composée d'intégrales* **Etude*

[302] Schubauer-Leoni

11 12 13 14 15	*ceci (*) qui est égal à ah j'ai oublié le signe « - » ici au dénominateur* //<u>donc</u> je corrige (silence)//ce qui est égal à (le tout que divise) en simplifiant les expos (-λs) ce qui est égale à / (silence)///<u>eh</u> <u>donc</u> c'est égal à la probabilité de l'intervalle [a ; s] (silence)////<u>donc</u> la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ; +∝[est bien égale à la probabilité de l'intervalle [a ; s] (silence)////voilà//////*	19s … …. 10s … …. 15s … …5 s	$= \dfrac{e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda a}}$ $=1-e^{-\lambda s}$ $= P[a;s]$	*fonctionnelle d'intégrale.* **Propriétés fonctionnelles de l'exponentielle.* **Composée d'exponentielles* **Somme des probabilités définies sur un univers : 1*

5.5.2.3 Le répertoire heuristique et sa mobilisation

Comme nous l'avons observé pour les épisodes didactiques relatifs à AC001, l'élève V001 active rapidement un répertoire efficace de pratiques, qui définissent son rapport aux objets du site des « lois de probabilités continue ». Nous remarquons que les énoncés que nous avons numérotés (et qui correspondent au découpage produit à partir des bornes langagières) lui permettent de mobiliser et de canaliser les concepts pouvant permettre atteindre le but assigné par l'énoncé. Ainsi, les énoncés 1 et 2 correspondent à la recherche de la dénotation de la donnée symbolique qu'est l'énoncé : il s'agit de probabilités, et « sachant que » indique une probabilité conditionnelle.

1 *alors alors* (silence 15s)

2 *alors, démontrer que la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ; +∝[est bien égale à la probabilité de l'intervalle [a ; s]*

La lecture à voix haute de l'énoncé ainsi interprété correspond à une stratégie de second recours puisqu'il faut 15s à V001 pour s'y décider. Mais cela permet à V001 d'énoncer ce que la notation dénote, il s'agit de *probabilités* et on a à traiter un énoncé devenu générique une fois réduit à sa formulation explicite : « P(A) sachant B est bien égale à P(C) ». A ce niveau de généricité, l'appel en mémoire à la notion de *probabilité conditionnelle* est immédiat (5 s de silence) pour V001. Ainsi, les intervalles sont passés au deuxième plan de l'attention.

3 *alors / humm [silence]*

4 *alors / on sait que c'est une probabilité conditionnelle, donc je peux que euh*

Pour la « probabilité conditionnelle » il existe un théorème énoncé à la ligne 6 après un silence. C'est apparemment le seul théorème utilisable dans la situation créée par l'énoncé, ce qui suffit à l'élève pour s'engager dans une stratégie ainsi déterminée. Elle fait confiance au contrat didactique (et à sa connaissance des théorèmes disponibles), mais de fait elle n'agit pas autrement que l'élève de CE1 qui répond « j'ai 14 ans » à la question « tu as huit billes dans ta poche droite et six billes dans ta poche gauche, quel âge as-tu ? »:lui aussi « ne peut que… faire une addition ». Bien que cela ait fait scandale auprès des biens pensants qui ne voulaient pas que l'on voie ce phénomène: «on apprend dans un cadre institué et on sait selon les manières de l'institution qui a permis l'apprentissage », déclaré comme phénomène social et effet d'institution par Emile Durkheim[303] : « ...l'éducation en usage dans une société déterminée et considérée à un moment déterminé de son évolution, est un ensemble de pratiques, de manières de faire, de coutumes qui constituent des faits parfaitement définis et qui ont la même réalité que les autres faits sociaux.../... Il est vain de croire que nous élevons nos enfants comme nous voulons. Nous sommes forcés de suivre les règles qui règnent dans le milieu social où nous vivons... » et cela va en effet contre certaines conceptions psychologiques empiristes qui imaginent chaque humain comme penseur individuel, et la pensée comme la traduction quasi immédiate de l'action personnelle.

5 [silence]

6 la probabilité de l'intervalle [a ; a + s] sachant l'intervalle [a ; +∞[////est égale à / la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] inter l'intervalle [a ; +∞[le tout divisé par la probabilité de l'intervalle [a ; +∞[.

Ce premier point d'appui permet à V001 de travailler la notation en calculant l'intersection des deux intervalles. Ce genre de « simplification ne lui échappe pas.

7 donc qui est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sur la probabilité de l'intervalle [a ; +∞ [

$$\underset{[a;+\infty[}{P}[a;a+s] = \frac{P([a;a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)} = \frac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)}$$

Par un jeu réglé ostensifs/non-ostensifs que l'on décrit plus précisément comme 1) le travail des notations appelé par les notions et 2) l'usage des théorèmes associés comme jeux de langage aux énoncés que produit la lecture des notations, V001 mobilise un répertoire relatif aux lois de probabilités continues qui comprend des ressources nombreuses. En effet, le jeu sur les intervalles que permettait la notation P(I) ne peut plus se développer et l'élève doit donc changer de registre à la fois du point de vue des notations et des notions associées, ce qui va être fait rapidement, et on peut dire, anticipé dans ses conséquences avant même d'être mis en œuvre. Notre interprétation des silences de l'élève engagés par « alors » et de leur rupture déclarée par « donc » est en effet celle d'un travail tactique sous contrat : V001 avance parfois en mobilisant des routines de calcul, mais le plus souvent elle développe une tactique correspondant à ce que Matheron nomme « un praxème » ; son action sur les ostensifs comme les jeux de langage qu'elle propose à l'observateur ont un sens pour elle, sous le contrôle d'anticipations que nous considérons comme recherche de mouvements tactiques. Ce que la suite nous montre encore :

8 <u>alors</u> [Silence, observe l'opération]

9 <u>donc</u> le tout est euh / étant égal à l'intégrale de / allant de a à a+s

10 <u>mais</u> [silence] <u>donc</u> / on a tout ceci (*) qui est égal à ///

Considérant la probabilité comme une mesure V001 mobilise les objets de savoirs auxquels

[303] Durkheim, article Pédagogie in F. Buisson (ed) *Dictionnaire de l'Education* .

fait appel la notation des probabilités et ici, on peut dire qu'elle entre en matière avec la question spécifique relative à la loi exponentielle, qu'apparemment elle connaît. Ce qui nous intéressera plus particulièrement est le fait que l'ostensif langagier générique « loi exponentielle » n'est même pas mobilisé, la « variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ » vient avec sa notation spécifique comme intégrale, et l'élève peut simplement justifier d'un mot ce qu'elle écrit directement *« sachant que……»*, utilisant elle aussi une forme langagière spécifique des textes mathématiques présentant une propriété mineure comme garantie d'un calcul rapidement conduit (ne comprenant pas toutes les étapes qui sont ainsi considérées comme « triviales »).

Pourtant, elle a besoin d'une justification pour son temps de réflexion important : on a bien étudié les intégrales et les exponentielles, *mais*. Mais sans doute, jamais les deux n'ont été au travail ensemble, comme ici : la complexité du travail demandé est maximale et nous sommes aux limites de ce qui, sous contrat, peut être demandé à une élève de Terminale.

$$\frac{P[a;a+s]}{P[a;+\infty[} = \frac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}.dt}{1-P[X \leq a]} .,.sachant..que..P[a;+\infty[= 1-P[X \leq a]$$

V001 utilise donc les concepts de primitive, d'intégrale et de densité de probabilité que dénote la notation intégrale de la loi exponentielle. Elle hésite, comme le montre le fait qu'elle ne suit pas au dénominateur la stratégie pour le numérateur, l'écriture intégrale qui donnerait pourtant une plus grande homogénéité. Produire le saut dans un registre nouveau que nous avons décrit ci-dessus est donc bien une décision stratégique difficile pour V001, car elle est appuyée sur des choix tactiques nets mais sans doute n'appartient-elle pas encore à son répertoire.

10   mais [silence] donc / on a tout ceci (*) qui est égal à ///

L'élève reprend son travail et progresse rapidement : Pas besoin de notation intégrale pour le dénominateur et dans la logique de cette décision, écriture de l'intégrale définie comme différence des valeurs de la fonction primitive. Une incertitude sur le « signe – » se manifeste, au dénominateur mais aussi au numérateur, elle ne met pas en cause le travail, qui se poursuit sur d'autres éléments ostensifs plus importants et signifiants. On peut rapprocher cette incertitude de ce que nous avons vu plus haut à propos du signe de λ, que l'élève supposait négatif en raison sans doute du signe « - » qui le précédait. C'est la trace d'une difficulté ancienne et connue chez les meilleurs avec les relatifs, qui conduit à interpréter toutes les écritures précédées d'un « - » comme dénotant des quantités négatives. C'est une difficulté liée à l'entrée dans le travail algébrique sur des expressions formelles et non plus sur des expressions numériques : l'hésitation didactique moderne qui conduit à déconnecter les relatifs du travail algébrique pour en faire une catégorie numérique en est apparemment la cause, comme le montrent les travaux sur cette question.

11   ah / j'ai oublié le signe - ici au dénominateur / donc je corrige //*

12   ce qui est égal à (le tout que divise)

$$\frac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)}=\frac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}dt}{e^{-\lambda a}}=\frac{e^{-\lambda(a+s)}+e^{\lambda a}}{e^{-\lambda a}}$$

A partir de ce point, un changement de registre ostensif simple permet à V001 d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle et la simplification par factorisation, c'est-à-dire de mobiliser un registre qui pour elle est élémentaire.

13 en simplifiant les expos (-λs) ce qui donne/// $\frac{e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda a}}=1-e^{-\lambda s}$

Dans les termes de la TAD, nous dirions que V001 utilise son rapport aux éléments du bloc technologico-théorique, les objets de savoir convoqués par les ostensifs : P[…] etc.. Nous avons décrit la manière dont ce rapport produit des décisions, parce que l'élève mobilise des savoirs tactiques et organise (en anticipant sur ce qu'ils produisent) une pensée de type stratégique. Les ostensifs langagiers appellent donc à une organisation de la pensée dans un mouvement dialectique : « savoirs transmis $\Leftrightarrow$ savoir extérieur / savoirs intérieur $\Leftrightarrow$ savoir agissant ». Cela dit, si nous avons ici un épisode didactique nettement dessiné, nous ne pouvons pas attester d'un épisode de la biographie didactique de V001, car nous ne pouvons attester d'un apprentissage mais seulement d'une expertise. Seules des observations ultérieures nous permettrons peut-être de décider si quelque chose d'une pensée stratégique s'est développé pour V001, à l'occasion de ce travail.

La réponse fournie enfin traduit le résultat du calcul en termes de probabilités, puisque c'est le monde de la question posée initialement. On remarque alors que le théorème mobilisé dans l'énoncé 10 trouve finalement son utilité (énoncé 14) et que V001 semble l'avoir remarqué puisqu'elle commence cette fois par une exclamation « eh donc ». Nous ne nous attendions pas à moins d'une élève reconnue pour sa réussite. Et c'est peut-être là aussi pour elle l'occasion d'un apprentissage, à vérifier plus tard.

5.5.3 Autres Épisodes didactiques impliquant V001

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Nous allons confirmer ce que nous avons observé chez cette élève, dans le cadre de son rapport aux exercices sur les lois de probabilité continues, en l'observant cette fois sur un exercice moins formel (le précédent ressemblait plutôt à une question de Restitution Organisée de Connaissances) correspondant à ce qui est ordinairement attendu dans une question d'examen où la « modélisation » est centrale. Cet exercice vient immédiatement à la suite du précédent et correspond donc en principe à un approfondissement des questions ouvertes.

Exercice2 *Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/ loi exponentielle*

On étudie la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant sa première panne.

On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur $[0 ; +\infty]$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0 ; t[$, notée $p[0 ; t[$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

*Cette loi est une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.**

1-a) Calculer $p[t ; +\infty [$, pour tout $t \geq 0$.

1-b) Déterminer le réel t pour lequel $p[0 ; t [=p[t ; +\infty[$.

2-) D'après une étude statistique, la probabilité pour que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est de 0,18. Déterminer le paramètre λ.

3-)Sachant que l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, calculer la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante

4-) Maintenant, on suppose que $\lambda = 0,2$

5-a) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-4} près, que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années.

5-b) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années. Calculer la probabilité que X soit égale à 4

5.5.3.1 Verbatim du travail de V001Réf :V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/ loi exponentielle

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 28 29 30 31	*bon / bon [silence]* *bien / on étudie la durée de vie / exprimée en années d'un appareil ménager avant sa première panne [silence]* *donc on modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement / définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *// ainsi / la probabilité d'un intervalle [0 ; t [/ notée p[0 ; t [/ est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t / cette loi est une loi exponentielle de paramètre λ avec λ inférieur à 0 // mais non / quand même // λ est supérieur à 0.* *[silence]* ***question 1 petit a** // il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre euh // de paramètre λ // donc on a dit juste avant pour tout réel t / pour tout t* ≥ 0 *// donc on aura, la probabilité p de l'intervalle [0 ; t[qui sera égale à l'intégrale allant de 0 à t de //*$\lambda e^{-\lambda x}$ *dx [silence] ///ce qui égal à [silence]///alors / comme la probabilité de l'intervalle [0 ; +∞] / mais non c'était un intervalle semi ouvert // donc la probabilité de [0 ; +∞[est égale à 1 ; on aura pour tout x / mais non pour tout t ≥0 // humm / hum [silence] ///la probabilité de l'intervalle [t ; +∞[est égale à 1 moins la probabilité de l'intervalle [0 ; t[// ce qui donne // et voilà.* *question 1 petit b // déterminer le réel t pour lequel la probabilité de l'intervalle [0 ; t[est égale à // la probabilité de l'intervalle [0 ; t[est égale à la probabilité de l'intervalle [t ; +∞[// donc // alors // euh // de ce qui précède, cela fait (toutou ou) // ce qui implique que [silence///ce qui donne //donc t est égal à voilà [silence]ensuite*	20s 10s 5s 5s 10s 5s 3s	$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}.dx$ $= \left[-e^{-\lambda x}\right]$ $=1-e^{-\lambda t}$ $P[0;+\infty[=1$ $P[t;+\infty[=1-P[0;t[$ $= 1-(1- e^{-\lambda t})$ $= e^{-\lambda t}$ p[0 ; t [= p$[t;+\infty[$. $1-e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}$ $e^{-\lambda t}=\frac{1}{2}$ $\lambda t=\ln(2)$ $t=\frac{\ln 2}{\lambda}$	*Lecture silencieuse complète de l'énoncé* **Nombres réels* *Modélisation Durée de vie sans vieillissement* *Variable Aléatoire Continue* *Intervalle/Loi exponentielle et son paramètre* *Densité* *de probabilité* *La somme des* *probabilités* *définies sur un univers* $\sum_{i=1}^{i=n} P(X=x_i)=1$ *Changements du système d'ostensifs, des probabilités sur un intervalle à la loi fonctionnelle, allers retours.* *Réciproque entre la fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien* *Equivalence ln /expo*

32	***<u>Deuxièmement</u>*** *<u>bon</u> / d'après une étude statistique / la probabilité pour que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est de 0,18 / déterminer le paramètre λ // <u>donc</u>, <u>euh</u> // <u>donc</u> on peut dire que la probabilité que l'appareil tombe en panne la fin [silence]*		$P([0;1[) = 0{,}18$ $P[0;1[= 1 - e^{-\lambda t}$	**Changement de registre ostensif et mobilisation tactique du répertoire nouveau*
33	*hum humm la fin de première année égale à 0,18 // <u>donc</u> la probabilité de l'intervalle [0 ; 1[est égale à 0,18 // cela nous donne hum humm [silence]*		$1 - e^{-\lambda t} = 0{,}18$ $e^{-\lambda t} = 1 - 0{,}18$	
34	*ce qui nous donne [silence]*		$\lambda = \ln(0{,}82)$	
35	*ce qui donne (Prend sa calculatrice) <u>donc</u> c'est environ [silence]*		$\lambda \approx 0{,}198$	
36	*donc à 10^{-4} près // voilà.*			

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

	<u>Troisièmement</u>///			
	sachant que l'appareil n'a connu aucune			
37	*panne au cours des deux premières années*	5s		
	après sa mise en service / calculer la			
38	*probabilité qu'il ne connaisse aucune panne*	3s		
39	*l'année suivante // <u>alors</u> / <u>euh</u> / <u>euh</u>*		$P_{[2;+\infty[}([3;+\infty[) = P([1;+\infty[)$	
40	*[silence]*	3s		
	<u>donc</u> la probabilité que l'appareil (silence)		$P_{[2;+\infty[}([3;+\infty[) = P([1;+\infty[)$	
41	*ne subisse aucune [ ] panne l'année*			
	suivante (silence)		$P([1;+\infty[) = e^{-\lambda}$	
42	*et sachant qu'il n'a connue aucune panne*	10s	$P([1;+\infty[) = 0{,}82$	
43	*les deux années précédentes est la*	5s	$P_{[2;+\infty[}([3;+\infty[) =$	
44	*probabilité conditionnelle de l'intervalle [3 ;*			**Probabilité*
45	*+∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[// comme*			*Conditionnel*
46	*la loi de probabilité est une loi de durée de*		$\dfrac{P([2;+\infty[\cap [3;+\infty[)}{P([2;+\infty[)}$	
47	*vie sans vieillissement, alors on aura la*			
48	*probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sachant*			
	l'intervalle [2 ; +∞[ce qui donne [silence]	5s	$= \dfrac{P([3;+\infty[)}{P([2;+\infty[)}$	
49	*on obtient [silence]*			
	prend sa calculatrice / on obtient			
	<u>pour la même question</u> si j'utilise la loi de			
	probabilité conditionnelle, je noterai que la		$\dfrac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-\lambda}$	
	probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sachant			
	l'intervalle [2 ; +∞[est égale à la			
	probabilité // de l'intervalle [3 ; +∞[inter			
	l'intervalle [2 ; +∞[, le tout sur la			
	probabilité de l'intervalle [2 ; +∞[// <u>donc</u>			
	ce qui donne la probabilité de l'intervalle			

	[3 ; +∞[sur la probabilité de l'intervalle [2 ; +∞[// ce qui nous donnera [silence] et qui donne enfin // on connaît déjà λ = 1,98 // voilà			

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

50 51 52 53 54 55 56 57	*on passe à la question suivante quatrièmement.* *maintenant on suppose que λ= 0,2 / donc supposons que λ= 0,2* ***question 4 petit a*** *calculer la probabilité arrondie à 10^{-4} près, que l'appareil n'ait // mais non // n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années [silence]* *alors // la probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années est la suivante // donc on prend 1 moins la probabilité de l'intervalle [0; 3] // ce qui donne ///[silence]* *donc on prend avec [euh],* *le paramètre λ= 0,2 on obtient [silence]/////prend sa calculatrice* *ce qui est à 10^{-4} près / voilà.*	10s 5s 5s	$1\text{-}P[0;3]$ $1\text{-}P[0;3]= P[3;+\infty[$ $P([3;+\infty[= e^{-0,2(3)})$ $= e^{-0,6}$ $= e^{-0,6}$ =0,5488	

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

58 59 60 61	***ensuite petit b // alors*** */ dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps / on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années (souffle) // sachant que la probabilité d'une réussite est d'euuh // 0,5488 // hum humm // et la probabilité d'un échec est de un moins celle de la réussite / donc, c'est bien le schéma de Bernoulli // donc la probabilité (hum) d'avoir exactement quatre appareils qui n'ont jamais eu de panne durant ses premières années est la combinaison de quatre dans dix multipliée par la probabilité d'une réussite à la puissance quatre multipliée encore par la probabilité d'un échec à la puissance six*		1-0,548 $\binom{10}{4}.(0,5488)^4.(1-0,5488)^6$	*Dénombrement* **Schéma de Bernoulli* **Loi binomiale*

5.5.3.2 Le répertoire et sa mobilisation

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Contrairement à ce qu'on pourrait penser, le répertoire n'est pas automatiquement mobilisé par conservation du cas précédent, parce qu'ici il s'agit d'un problème dit « de modélisation » et que la manipulation d'un modèle n'est pas équivalente à celle d'une forme. En effet, le sens du travail est ici donné par son interprétation dans le système modélisé et non plus par la dimension technologique ou théorique associée à la forme. En quelque sorte, la dialectique ostensif/non-ostensif ne fonctionne plus sur la même opposition et c'est le système qui, ici, pourrait-on dire, donne la dimension technologique permettant le contrôle de l'action. On le voit au premier énoncé de V001, qui reprend la question à sa source (durée de vie d'un appareil) et à sa traduction dans ce que Andrée Tiberghien[304] nomme « le monde du modèle ». C'est celui d'une loi de probabilité pour la question sous l'hypothèse « sans vieillissement » qui correspond à un taux de panne constant, et la manière d'interpréter le modèle $P([0;t])$ est donnée explicitement « probabilité que l'appareil tombe en panne avant l'instant t ». La loi est alors donnée, c'est « une loi exponentielle de paramètre λ ». L'élève répète à voix haute tous ces éléments, montrant ainsi qu'elle prend le temps d'identifier les éléments pertinents pour les mouvements tactiques qu'elle va imaginer (les non-ostensifs associés aux ostensifs que l'énoncé propose, et qui on le comprend, ne vont pas de soi sinon du point de vue de l'institution, qui n'est à ce stade celui de personne).

> *///on étudie la durée de vie / exprimée en année d'un appareil ménager avant sa première panne // <u>donc</u> on modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement / définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *// ainsi / la probabilité d'un intervalle [0 ; t [/ notée p[0 ; t [/ est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t // cette loi est une loi exponentielle de paramètre λ avec λ inférieur à 0 // mais non / quand même λ est supérieur à 0 //*

Ce texte constitue donc un contrat relatif à l'exercice et au travail qui sera demandé, la force de V001 est dans le fait d'avoir intégré cela dans sa recherche d'une stratégie d'attaque pour le problème. En effet, le partage topogénétique qui est proposé laisse seulement à l'élève le travail dans le modèle et son interprétation finale, comme la suite va le montrer : la constitution d'un modèle pertinent pour le problème et de l'hypothèse fondamentale selon laquelle on suppose un vieillissement nul pour avoir une loi simple est pris en charge par l'auteur de l'énoncé. C'est pourtant quelque chose que le travail sur les équations différentielles observé plus haut pour un autre élève mais toujours la classe de Terminale aurait pu intégrer dans ce qui serait devenu « un grand problème » dont le programme d'études de Terminale aurait donné une solution. De ce fait, le type de travail ressemble plus à ce qui se fait dans un enseignement ordinaire de physique que dans un enseignement de mathématiques appliquées assumant de montrer le travail de recherche d'un modèle efficace.

> *///il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre euh…... de paramètre λ // <u>donc</u> on a dit juste avant pour tout réel t, pour tout t* ≥ 0 *// <u>donc</u> on aura, la probabilité p de l'intervalle[0 ; t[qui sera égale à l'intégrale allant de 0 à t de* $\lambda e^{-\lambda x}$ *.dx ce qui égal à :*

[304] André Tiberghien

$$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} = \left[-\lambda e^{x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

Et voilà le répertoire en état de marche. Manipuler une loi exponentielle de paramètre connu, l'élève sait faire, c'est attesté dans son répertoire dès l'exercice précédent. Le raisonnement se déroule alors de manière parfaitement contrôlée, commençant comme il se doit par « alors » et enchaînant les « donc »:

> *alors / comme la probabilité de l'intervalle [0 ; +∞] / mais non c'était un intervalle semi ouvert / donc la probabilité de [0 ; +∞ [est égal à 1 // on aura pour tout x / mais non pour tout t≥0 //* $P([0;+\infty[\Rightarrow P([t;+\infty[) = 1 - P([0;+t[))$

Le jeu des intervalles suppose la mise en relation des deux éléments produits, mais c'est une opération sous contrat et V001 ne s'y trompe pas :

> *Humm//// humm [Silence]*
>
> *la probabilité de l'intervalle [t ; + ∞ [est égale à 1 moins la probabilité de l'intervalle [0 ; t [// ce qui donne* $P[t;+\infty[= 1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$

Le discours de V001 active et utilise des ostensifs langagiers, qui sont ceux du modèle des lois de probabilité continues et de leur technologie. On peut remarquer que V001 utilise la probabilité comme une mesure et non une fonction. Mais maintenant que le modèle est supposé en place, l'auteur de l'énoncé demande de le mettre en œuvre. Cela va demander l'intervention de la notion de probabilité conditionnelle, qui est discrètement appelée par la forme langagière « Sachant que… calculer la probabilité pour que… » qui renverse l'ordre usuel de lecture des questions sur ce sujet : « déterminer la probabilité de B sachant A »

> *« sachant que l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service / calculer la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante // alors / euh / euh [silence]*
>
> *donc la probabilité que l'appareil [silence]////*
>
> *////ne subisse aucune panne l'année suivante [silence]////et sachant qu'il n'a connu aucune panne les deux années précédentes est la probabilité conditionnelle de l'intervalle [3 ; +∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[///comme la loi de probabilité est une loi de durée de vie sans vieillissement // alors on aura la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[.*

On l'observe nettement, V001 prend du temps afin de « renverser l'ordre des termes dans l'énoncé de la question, ce qui lui permet de mobiliser le répertoire des probabilités conditionnelles. Le jeu n'est plus vraiment ici une dialectique entre ostensifs et non-ostensifs, mais la production d'un jeu de langage permettant de mobiliser les praxèmes d'un répertoire heuristique. La complexité du travail de reformulation ne peut être niée par une description trop rapide, et les mathématiciens aguerris dans un jeu système/modèle bien réglé peuvent dire qu'il suffit de « mettre le problème en équation » puis de « résoudre l'équation », cela ne tient pas devant l'observation d'un élève reconnu excellent, alors que la plus difficile partie du travail de modélisation a été prise en charge par l'énoncé et que l'élève travaille en étant étroitement guidé par le contrat didactique.

> *////ce qui donne [silence]//*
>
> *////on obtient [silence]//*
>
> //(Prend sa calculatrice)// *on obtient//*

Il s'agit enfin de produire une valeur numérique, et pour cela de considérer l'expression obtenue du point de vue que naguère on appelait « les lignes » en trigonométrie et qui est celui des grandeurs. Alors, « on prend le logarithme de l'expression » pour « faire descendre l'exposant » et le calculer. Sans ce vocabulaire pour désigner les éléments du répertoire à mobiliser maintenant, la chose est plus délicate qu'il n'y paraît et demande une décision de changement de registre non-ostensif pour le même registre ostensif. Cela prend quelques secondes.

5.5.3.3 Une attitude autodidactique systématique

C'est donc ici que l'on observe un épisode de la biographie didactique de V001, et il est clairement à l'initiative de l'élève qui cherche en effet à définir une voie d'attaque stratégique quand, comme nous l'avions remarqué, elle n'avait jusqu'ici montré que des décisions tactiques effets d'un assujettissement efficace au contrat didactique. Il faut donc considérer que l'élève a éprouvé les quelques incertitudes qu'elle a surmontées et dont nous avons noté les indices, et qu'elle en a pris conscience. Elle prend donc appui sur le travail délicat permettant de mobiliser la notion de probabilité conditionnelle afin de mettre à l'épreuve l'usage direct du répertoire correspondant comme moyen stratégique de traitement des tâches d'un type qu'elle pourra maintenant explorer, puisque le type d'une tâche n'est jamais donné avant que l'étude ne soit engagée. C'est ici un épisode de la biographie didactique de l'élève que nous pouvons attester.

> *//pour la même question si j'utilise la loi de probabilité conditionnelle / je noterai que la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[est égale à la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[inter l'intervalle [2 ; +∞[/// le tout sur la probabilité de l'intervalle [2 ; +∞[//// donc ce qui donne la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sur la probabilité de l'intervalle [2 ; +∞[//// ce qui nous donnera (silence)*
>
> *et qui donne enfin / on connaît déjà λ = 1,98 // voilà///*

Les discours (ostensifs langagiers, discursifs et scripturaux) de V001 possèdent le pouvoir de réaliser le travail mathématique dans lequel ils sont engagés, d'en contrôler la pertinence et d'anticiper sa poursuite grâce à des articulations de non ostensifs associés, le tout, dans une dualité de valence instrumentale et sémiotique particulièrement complexe. V001 utilise ainsi, comme le contrat didactique sur l'exercice l'y engage dans cette première partie du travail, le formalisme du modèle pour se prémunir contre le recours à l'intuition. Ce formalisme mobilise des théorèmes, des règles d'inférence travaille des formules non pas ici afin de produire des énoncés dans le monde du modèle, mais pour aboutir à un résultat dans le monde des choses.

Le formalisme ici est une systématisation de la construction de l'édifice mathématique « loi exponentielle » avec la recherche d'une cohérence globale afin d'atteindre les objectifs de la tâche mathématique en étude. V001 ordonne la matière mathématique dans sa globalité par sa reconnaissance de structures communes à des domaines parfois éloignés et entre lesquels se tissent des théorèmes du type « liens de filiation » contribuant de faite à en faire l'architecture d'un ensemble structuré de sens et de logique digitale et analogique. L'élève emploie un discours mathématique rigoureux qui se mesure à une certaines simplicité langagière. Mais nous tenons l'hypothèse que ces discours ne sont pas seulement adressés à l'observateur. Leur fonction ne nous paraît pas seulement de lui donner une information sur ses pensées. Nous espérons l'avoir montré précisément, ces énoncés sont nécessaires ; la vérification des hypothèses et de techniques utilisées est mentionnée, comme outil de mobilisation et de contrôle des connaissances du domaine d'application des concepts et techniques que l'élève utilise.

Les phases de raisonnement déductif sont présentées et justifiées dans le respect des normes et des usages mathématiques. Ainsi, le langage formel de V001 et les raisonnements associés se conforment aux rituels communs. Nous observons même un usage policé des signes désignant les objets mathématiques et les raisonnements que l'on peut faire sur ceux-ci. Dans la première résolution de la tâche interprétée comme relative à une probabilité conditionnelle, V001 utilise une forme de systématisation dont le but est de tendre vers un tout cohérent, à partir d'axiomes et propriétés mathématiques admis, ce qu'il se passe en effet dans la reprise de la résolution. Il apparaît alors que la formalisation constitue pour V001, la recherche d'une certaine systématisation globalement cohérente. La rigueur de l'élève et sa la rédaction précise lui permet le contrôle de la cohérence mathématique.

5.5.3.4 Le site mathématique local de la question

Les discours relevés dans l'analyse suivie permettent de décrire les pratiques de pensée et d'écriture qui constituent le répertoire des pratiques mobilisées pour la question. Ils sont relatifs « aux objets qu'utilise V001 lorsqu'elle mobilise son répertoire heuristique. » et ils permettent de dire « sur quoi s'appuie-t-elle pour réactiver un répertoire ? » si l'on considère avec nous que ces objets sont des ostensifs et définissent donc des praxèmes. Les objets identifiés sont donc présentés comme une partie du site de la question, et appartiennent soit au niveau des objets soit à l'un des niveaux connexes, le substrat des objets para- proto- mathématiques ou appartenant au monde des choses, et le niveau des techniques et des concepts premiers qui constitue le monde du modèle. Le site comprend aussi des objets de plus haut niveau théorique, qui définissent le champ mathématique dont l'étude est ainsi entreprise et permettent d'en mesurer l'étendue.

Substrat/ implicites	Les objets mathématiques	Techniques de résolution concept 1	Concept 2	Concept 3
Durée de vie *Appareil ménagé* *Durée de vie sans vieillissement* *Probabilité*	*Ensemble des nombres réels* *Intervalles* *Intégrales* *Probabilité Conditionnelle* *Variable Aléatoire Continue* *Loi exponentielle* *Densité de probabilité*	*La somme des probabilités définies sur un univers.* *Intersection d'intervalles.* *Etude fonctionnelle de la primitive.* *Etude fonctionnelle d'intégrale.* *Propriétés fonctionnelles de la fonction exponentielle.* *Composé de fonction exponentielle.* *Composé d'intégrale*	*Propriétés dans IR* *Primitives* *Intégrales* *Fonctions exponentielles et logarithme népérien* *Réciproque exponentielle & logarithme népérien* *Probabilité Conditionnelle sur les Variables Aléatoire Continues*	*Espace Vectoriel normé* *Théorie des ensembles* *Corps des nombres* *Espace de Banach / Espace de Hilbert* *Opérateurs Linéaires/ Opérateurs Normaux* *Principe de borne uniforme* *Théorème Spectral* *Théorème de Hahn-banach* *Analyse Fonctionnelle* *Transformations de Fourier*

Répertoires épistémologique et heuristiques des tâches1-2-3-4a de V001

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue

5.5.4 Episodes didactiques impliquant F001: probabilités & modélisations

Réf : F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Nous conservons le style d'exposition utilisé pour les épisodes didactiques précédents : nous discutons les extraits de l'épisode et soulignons les discours de F001. Ce troisième élève observé le 14 Mai 2008 et nous le suivons lui aussi sur le travail relatif aux lois de probabilité continues, parce que nous trouvons là un grand nombre des outils et concepts étudiés en Terminale et surtout de voir comment un autre élève mobiliserait les outils et concepts relatifs aux lois de probabilité continues.

Exercice : *Réf : F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des accidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètre que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un accident. On admet que D suit une loi exponentielle de *paramètre* $\lambda = \frac{1}{82}$ *, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.*

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$P(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82} e^{\frac{-1}{82}} dx........pour...A \in [0;+\infty[$$

Les résultats numériques seront arrondis au millième.

1- Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit : a) comprise entre 50 et 100km ; b) supérieure à 300km

2- Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètre ?

3- Calculer $I(A) = \int_0^A \frac{1}{82} x e^{\frac{-1}{82}} dx.....où..A.. \in IR_+$

4- Calculer la limite de $I(A).....lorsque...A...tend..vers..+\infty$*. Que représente cette limite ?*

5- L'entreprise possède N_o *autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre* $\lambda = \frac{1}{82}$ *; d étant un réel positif, on note* X_d *la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.*

5.1- Montrer que X_d *suit une loi binomiale de paramètre* N_0 *et* $e^{-\lambda d}$ *.*

5.2- Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

5.5.4.1 Verbatim du travail de la question 1- Le premier épisode

Début du travail : 13h

Verbatim du travail de la question 1par F001 *Réf : F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

1 2 3	*////c'est un exo de probabilité avec la loi exponentielle////alors [silence]* *(l'observateur : lis tout l'exercice)* *////alors // question n°1 / on demande de calculer / hum // premièrement / calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit (Silence)* *a) comprise entre 50 et 100km / alors // humm // d'abord, on commence par la*	*La probabilité que la distance D soit comprise entre 50 et 100km.* *C'est-à-dire que /////* $D \in [50;100]$ $p(50 \leq D \leq 100)$	*Ensemble des réels* **Intervalles* **Intégrales* **Probabilité Conditionnelle*

4	*question a // donc /////[silence]* *cela donne alors ///////[silence]/////*	*Qui est égale* à : $\int_{50}^{100}\frac{1}{82}e^{\frac{-x}{82}}dx$	**Variable Aléatoire Continue* **Loi exponentielle* **Densité de probabilité* **La somme des probabilités définies sur un univers* **Intersection d'intervalles.* **Etude fonctionnelle de la primitive.* **Etude fonctionnelle d'intégrale.* **Propriétés fonctionnelles de la fonction exponentielle.* **Composée de fonctions exponentielles.* **Composée d'intégrales*
		$=\left[-e^{\frac{-x}{82}}\right]_{50}^{100}$	
	hum // primitive //	$=e^{\frac{-100}{82}}-\left(-e^{\frac{-50}{82}}\right)$	
5	*donc ////avec la calculatrice on a le résultat arrondi//// au millième///*	$\approx 0,24$	
		C'est la probabilité $p(D \geq 300)$	
6	*b/////***c***alculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 300km*	$P(D \geq 300) = 1 - P(D \leq 300)$	
	// alors///// [silence//	$=1-\int_{0}^{300}\frac{1}{82}e^{\frac{-x}{82}}dx$	
	////donc// [silence]//		
	//qui est égale à [silence]	$1-\left[-e^{\frac{-x}{82}}\right]_{0}^{300}$	
7	*/////ce qui donne [silence]*		
		$=e^{\frac{-300}{82}}$	
	/////donc ce qui donne avec la calculatrice///	$=0,026$	

Premier épisode (première question de l'exercice) *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

F001 identifie immédiatement « un type d'exercice » très générique, mais semble peu bavard et donc mauvais informateur. C'est pourquoi sans doute, l'observateur l'engage à « lire l'énoncé » pour avoir d'autres commentaires. On remarque alors que si l'élève parle peu, il écrit beaucoup et rédige un texte explicatif de son calcul : cela est rare en algèbre, comme l'avait remarqué en son temps Mercier[305]. Pour la question a), la traduction en calcul d'une intégrale est immédiate et le calcul posé est effectué sans autre forme de procès. Le registre mobilisé est de fait contractuel : l'énoncé donne tous les éléments nécessaires à son identification. La question b) suppose une traduction en mesure sur l'intervalle complémentaire qui est à peine plus délicate.

[305] Mercier 1992

5.5.4.2 Verbatim du travail de la question2 –Le deuxième épisode

Verbatim du travail de la question2 par F001 *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

8 9 10 11	*////ensuite la **question 2** // deuxièmement / sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident///// quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres///// [silence]///* */////alors / hum [silence] (relit la question)////* *////donc on va chercher à calculer la probabilité conditionnelle////* $P_{D\geq 350}(D \geq 375)$ *////* *////donc [silence]////* */////ce qui donne//// [silence]////* *//////donc [silence]/////*	D'après les propriétés de la loi de durée de vie sans vieillissement, on sait que la probabilité $P_{D\geq 350}(D \geq 375) =$ $P(D \geq 25)$ $P(D \geq 25) = 1 - \int_0^{25} \frac{1}{82} e^{\frac{-t}{82}} dt$ $= 1 - \left[-e^{\frac{-t}{82}} \right]_0^{25}$ $= e^{\frac{-25}{82}}$ $\approx$	*Probabilité Conditionnelle Variable Aléatoire Continue Loi exponentielle Densité de probabilité La somme des probabilités définies sur un univers : Etude fonctionnelle de la primitive. Etude fonctionnelle d'intégrale. Propriétés fonctionnelles de la fonction exponentielle.*

Deuxième épisode (deuxième question de l'exercice) *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

La question mérite réflexion, mais une fois que l'idée de probabilité conditionnelle a été identifiée, le travail avance tout seul. Une seule difficulté demeure en effet, l'identification de l'intervalle d'intégration, dont la détermination est quasi automatique car elle appartient au répertoire correspondant. Ainsi, ces deux épisodes ne montrent pas de progression biographique et, pour cet élève, pas non plus de demande didactique qui aurait été insatisfaite, sauf à comparer ce travail avec ce qui s'est passé pour V001, qui confrontée au même type de question a repris sa rédaction pour mieux installer le répertoire spécifique des probabilités conditionnelles dans ce type de cas. On en conclut que le contrat de l'exercice est moins exigeant (pour F001) que V001 ne l'est pour elle-même, et que de même, F001 n'est pas une élève cherchant à se libérer des limites que donne l'étude sous contrat d'une question, et se satisfait de ce que cela permet d'apprendre.

5.5.4.3 Verbatim du travail de la question3 –Troisième épisode

Verbatim du travail de la question3 par F001 *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25	*////on passe à la question 3 //* *<u>troisièmement</u> / calculer* $I(A)=\int_0^A \frac{1}{82} x e^{\frac{-1}{82}} dx.....où..A..\in IR_+$ *<u>bon</u> / il s'agit utilisation d'une intégration par parties // la fonction a intégrer est un produit de deux fonctions / un monôme et l'autre exponentielle // <u>donc</u> / posons I = [0 ; A] / rappelons que f dérivable (respectivement continue) sur I si f est dérivable (respectivement continue) sur]0, A [// f est dérivable (respectivement continue) à droite en 0 et à gauche en A // <u>par ailleurs</u> / si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors uv est dérivable sur I et* $(uv)'=u'v+uv'$ *//* $\forall x\in I.(uv)'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$*par transposition on obtient//////* $u'(x)v(x)=(uv)'(x)-u(x)v'(x)$ *<u>de plus</u> // si u et v sont dérivables sur I // elles sont donc continues sur I / ainsi u / v / u' et v' sont continues sur I <u>donc</u> u'v // uv' et par conséquent (uv)' sont continues sur I // ces trois fonctions possèdent <u>donc</u> des primitives sur I /// on peut <u>donc</u> intégrer l'égalité/////* $u'(x)v(x)=(uv)'(x)-u(x)v'(x)$ $\forall x\in[0;A]$	*On peut donc intégrer l'égalité* $u'(x)v(x)=(uv)'(x)-u(x)v'(x)$ $\forall x\in[0;A]$ *a* $\int_0^A u.'(x).v(x)dx=\int_0^A[(uv)'(x)-u(x).v.'(x)]dx$ *En utilisant la linéarité de l'intégrale on a* $\int_0^A u.'(x)v(x)dx=\int_0^A(uv)'dx-\int_0^A u(x).v.'(x)dx$ *Or une primitive de (uv)' = [uv] donc on a*	*Intégration par parties* **Intervalles* **Intersection d'intervalles* *Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle* **Dérivabilité et dérivée d'un produit* **Continuité des fonctions dérivables* **Existence d'une primitive pour une fonction* **Intégration d'une égalité* **Linéarité de l'intégrale.*

26		$\int_0^A u.'(x).v(x)dx = [uv]_0^A - \int_0^A u(x).v.'(x)dx$ *On pose :* $u'(x) = \frac{1}{82}e^{\frac{-x}{82}}$	
27		*Alors sa primitive est* $u(x) = -e^{\frac{-x}{82}}$	
28		*v(x)=x alors sa dérivée v'(x)=1* *Les fonctions* $u,..u',..v,..et..v'$ *sont continues sur [0 ; A]*	**Cqlcul numérique d'une intégrale définie*
29	*de plus* *Ce conduit à*	$I(A) = [uv]_0^A - \int_0^A v'u$ $I(A) = \left[-xe^{\frac{-x}{82}}\right]_0^A - \int_0^A -e^{\frac{-x}{82}}dx$	
30	*donc*	$I(A) = \left[-xe^{\frac{-x}{82}}\right]_0^A + \int_0^A e^{\frac{-x}{82}}dx$ $I(A) = -Ae^{\frac{-A}{82}} + \left[-82e^{\frac{-x}{82}}\right]_0^A$ $I(A) = -Ae^{\frac{-A}{82}} - 82e^{\frac{-A}{82}} + 82$	

Troisième épisode (troisième question de l'exercice) *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

La position est plus précise encore ici et l'on voit très nettement comment cette élève convoque un répertoire de moyens, en deux temps : d'abord par l'identification d'un élément du texte du savoir mathématique officiel (ici : *intégration par parties*) qui fonctionne comme ostensif et par la restitution des éléments génériques de ce texte (des théorèmes comme ici sur la continuité des fonctions dérivables sur un intervalle) qui donnent des décisions tactiques (produit d'un monôme et d'une exponentielle ; dérivabilité d'une fonction sur un intervalle ; dérivée d'un produit, etc.)

Le texte de référence qui constitue le savoir, pour F001, est donc organisé comme un ensemble de théorèmes reliés de diverses manières et que nous qualifierons de « *tout* *structuré* »[306] pour indiquer que cette organisation est semblable à celle d'un écosystème, où la chaine des raisons d'être logiques et celle des usages tiennent ici lieu de *chaine trophique* mieux connue comme chaine alimentaire. Qui mange produit de l'alimentation pour être mangé, ici qui permet de penser des questions produit des outils pour les résoudre et peut vivre dans le système. Ainsi, cet élève « parle (et agit) comme un livre (bien écrit, pour justifier, construire puis présenter in situ les techniques de résolution d'un grand type de problèmes) ».

Il nous reste à observer comment le répertoire de F001, ainsi organisé en *tout structuré*[307], a acquis une telle structure. Nous développerons l'hypothèse que c'est dans la dialectique entre la restitution orale du texte structurant les théorèmes, et leur mise en œuvre pratique, à l'écrit, que se produit un mouvement d'organisation et de réorganisation. Mais il nous semble que sans doute, l'élève laisse des traces de ce mouvement, que dorénavant ces traces seront pour nous interprétables et feront signe

5.5.4.4 Verbatim du travail de la question4 –Quatrième épisode

Verbatim du travail de la question4 par F001 *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

26 27	*////**la question 4** // quatrièmement **c**alculer la limite de I(A) // lorsque // A // tend vers / +∞ // que représente cette limite / nous allons déterminer la limite de I(A) // alors qu'est ce je connais//////[silence]///*	*D'après la leçon sur les exponentielles, on sait que////* $\lim\limits_{X\to-\infty}(e^{X})=0$ *On pose* $X=\frac{-A}{82}$	** Limites* **Exponentielles*
28	*///oui ////[silence]//*	$\lim\limits_{A\to+\infty}(\frac{-A}{82})=-\infty$	
29	*///alors////* *////donc////*	$\lim\limits_{A\to+\infty}e^{\frac{-A}{82}}=0$	**Composition de fonctions*
30 31 32 33	 *////alors par composition on a////* *///donc ////* *///donc par addition des différentes limites on a/////*	*et* $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{-A}{82}e^{\frac{-A}{82}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(Xe^{X}\right)=0$ $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-Ae^{\frac{-A}{82}}\right)=0$ *On a:* $\lim\limits_{A\to+\infty}[I(A)]=82$	**Addition de limites*

Quatrième épisode (quatrième question de l'exercice) *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

Le style de l'élève se confirme ici, avec en particulier la trace du point d'appui que

[306] Landy Rajasson 1989
[307] Rajasson 1989

constitue, dans son cas, le contrat didactique et le texte officiel du savoir (dont nous n'avons pas besoin d'attester de la rédaction en quelque lieu : il existe et fonctionne comme texte pour au moins une personne, le sujet institutionnel F001, dont le répertoire semble constitué ou reconstitué à partir des en-têtes de chapitres et de paragraphes d'un cours. Il faudrait alors entendre que F001 s'engage progressivement à démontrer, pour l'observateur, comment les outils techniques de Terminale sont construits à partir d'un corps de connaissances théoriques qui les fondent. Ce n'est pas tout à fait un processus de démonstration au sens mathématique de preuve de validité, mais plutôt une démonstration de la manière dont les outils et leurs pratiques sont fondées en théorie sur des connaissances qui sont d'ordre mathématique.

5.5.4.5 Verbatim du travail de la question5 –Cinquième épisode

Verbatim du travail de la question5 par F001 *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

34 35	*/////on passe maintenant à la question 5 / <u>cinquièmement</u> // l'entreprise possède N_0 autocars / les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle/////de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$ // d étant un réel*		
36 37	*positif / on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres [silence]*	*///L'expérience aléatoire revient à répéter de façon indépendante N_0 fois l'expérience à deux issues possibles ////soit « il y a incident avant le kilomètre d » ou soit « il n'y a pas d'incident avant le kilomètre d »////////*	**Expérience aléatoire (issues compte etc.)*
38 39		*Ainsi X_d ///// qui compte le nombre d'incidents avant le kilomètre d, suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $P(D \geq d)$/////*	**Loi de probabilité modèle d'une expérience aléatoire.*
40 41	***a)**//// montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètre N_0 et $e^{-\lambda d}$ /////[silence]////*	*//////On calcule $P(D \geq d)$*	
42	*/////alors // humm mm [silence] on sait que [silence]//////*	$P(D \geq d) = 1 - p(D \leq d) = 1 - \int_0^d \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx$	
43	*////donc [silence]////*	$= 1 - \left[-e^{\frac{-x}{82}} \right]_0^d = e^{\frac{-d}{82}} = e^{-\lambda d}$	**Probabilité de l'événement contraire*
44	*on calcule la probabilité p [silence] donc [silence]*		
45		*// X_d suit une loi binomiale de*	**Propriétés fonctionnelles de la fonction*

46 46 47	*////la dernière question // <u>cinquièmement</u> b)/////donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres // on sait que X_d suit une loi binomiale [silence]/////* *////donc [silence]////* *////donc [silence]/////*	*paramètre N_0 et $p(D \geq d) = e^{-\lambda d}$* */////D'après la leçon sur la loi binomiale, le nombre moyen d'autocars n'ayant pas subi aucun accident après avoir parcouru d kilomètres correspond à l'espérance mathématique de X_d Or X_d /////qui compte le nombre d'incidents avant le kilomètre d/////suit une loi binomiale de paramètres//// N_0 et $e^{-\lambda d}$ //////* *//////Don//// le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun accident après avoir parcouru d kilomètre est* $E(X_d) = N_0.e^{-\lambda d}$	*exponentielle.* **Composée d'exponentielles.* **Loi binomiale et espérance mathématique*

5.5.4.6 Cinquième épisode (cinquième question de l'exercice)

F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Notre lecture suivie du corpus donne ici la confirmation des interprétations précédentes, puisque l'élève réécrit tout le cours afin de traiter de la question 5. Ainsi, pour lui, les techniques sont des produits de la mobilisation de la théorie constituante d'un discours technologique selon le procédé connu en géométrie mais si rare en algèbre de l'écriture des mineures des syllogismes comme forme située des théorèmes permettant la formation des conclusions. Ainsi l'énoncé 44, écrit, fait référence à la leçon pour introduire l'espérance mathématique de la loi (dans le cas des autocars) puis l'énoncé 45 introduit le fait que la dite loi (relative aux incidents) soit binomiale et donne les paramètres et l'énoncé 46 conclut par un « donc » qui a bien le sens ordinaire en mathématiques d'annonce de la conclusion, qui donne ainsi les résultats du modèle dans le monde du système étudié.

5.5.4.7 Reprise de l'analyse du troisième épisode : le travail de l'intégration par parties

F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Nous avons choisi, on le comprend après que nous ayons identifié dans cet épisode la manière de travailler de F001, d'analyser cette tâche. Elle fait intervenir l'intégration par parties, qui est le prototype de notion mathématique vivant dans le cycle terminal et dans le premier cycle du supérieur. Dans ces deux cycles d'enseignement, son habitat se situe dans *l'analyse réelle* dans la partie *calcul intégral*. Dans le supérieur, sa niche est occupée par la formule de Taylor avec reste intégral et par le calcul d'intégrale. Mais, ultérieurement, l'intégration par parties peut être généralisée sur des espaces de Banach E, F et G au cas d'applications bilinéaires continues de E dans G, en particulier aux fonctions de la variable complexe. Elle se généralise à des espaces plus pauvres : les distributions. Sa niche dans l'écosystème du secondaire reste le calcul d'intégrale, pour laquelle elle reste incontournable. Par ailleurs, comme procédé algébrique formel elle est particulièrement intéressante, parce qu'elle constitue un exemple fort du procédé de « complexification ostensive » que nous avons vu étudier en didactique par les élèves de Chevallard et qui constitue une des origines de la notion d'ostensif. Tonnelle (1986 ?) a montré que ce procédé permettais de rendre compte de la factorisation des expressions remarquables, et que de rares élèves y accédaient ; Mercier (1992) a montré qu'il était la clé de la factorisation du second degré pour les élèves de Première S et signait ainsi l'expertise algébrique de cette classe ; Mercier (1992) ainsi que Chevallard et Bosch (1998) ont montré que le travail de ce qui s'appellera « les quantités conjuguées » dans le monde des complexes commençait avec les racines carrées et relevait de cette propriété algébrique fondamentale.

Au-delà d'une présentation du répertoire heuristique mobilisé par F001 pour cette tâche et d'une discussion sur les techniques révélées par ce répertoire, notre analyse, centrée sur le discours de F001, vise vérifier que la rigueur dans son approche de l'objet intégration par parties correspond à celle pouvant être attendue par l'institution dans la résolution d'une telle tâche dans cet exercice. La réponse à cette question nous permettra en effet de confirmer ou d'infirmer notre première hypothèse sur la manière dont l'élève construit son répertoire heuristique comme mobilisation du répertoire institutionnel, mathématique, dont le site de la question donne un état des objets qui y figurent.

Dans les précédents programmes (1994 &1997) l'utilisation de l'intégration par parties doit être convoquée par une indication ainsi:« Dans les cas du calcul intégral toute intégration par parties doit faire l'objet d'une indication »[308] Ainsi sa place fonctionnelle était une application directe. Dans cette tâche, ligne 13 *F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle*

Calculer $I(A)=\int_0^A \frac{1}{82}xe^{\frac{-1}{82}}dx.....où..A..\in IR_+$ la présence d'une indication concernant l'usage de l'intégration par parties comme technique de résolution n'est pas imposée. F001 a compris, par l'analyse de la situation, que cette technique est utile pour établir la solution. Cette tâche rappelle explicitement un des membres de la formule, le résolveur dispose ainsi d'un « « os de Cuvier » qui lui permet facilement de reconstituer la formule. Mais elle comporte aussi un très gros défaut : *confondre le but, le calcul effectif d'intégrale au moyen, calculer une intégrale sous différentes formes*. En effet l'intégration par partie ne permet pas de calculer $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$, mais seulement d'exprimer cette intégrale sous une autre forme, où elle sera plus facile à calculer. L'analyse réalisée par F001 sur cette tâche nous montre la finesse de son discours. Car l'élève convoque des habiletés mathématiques qui ne sont pas présentes dans la notation initiale. Elle réécrit l'intégration $\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ en utilisant la dérivation d'un produit :

> *posons I = [0 ; A] / rappelons que f dérivable (respectivement continue) sur I si f est dérivable (respectivement continue) sur]0 ; A [// f est dérivable (respectivement*

[308] Bulletin officiel n°4, 12 juin 1997, p44.

continue) à droite en 0 et à gauche en A //

Ces précautions ne sont pas, telles quelles, entièrement justifiées : elles montrent surtout l'exigence de rigueur de l'élève, qui cherche le contrôle de type mathématique maximal de ce qu'elle va dire et pour cela accepte quelques hésitations.

<u>par ailleurs</u> / si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$ *//* $\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

par transposition on obtient $u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$ *<u>de plus</u> // si u et v sont dérivables sur I // elles sont donc continues sur I / ainsi u / v / u' et v' sont continues sur I*

On voit ici où l'exigence de l'élève la conduit : en effet, si une fonction dérivable est continue, sa dérivée ne l'est pas nécessairement : la continuité de u' et de v' est donc une hypothèse de travail, que nous pourrions exprimer en disant que nous travaillons dans un espace de fonctions deux fois dérivables C1. Mais ceci, qui est pertinent au niveau universitaire, n'est pas de propos en Terminale. L'élève « fait avec » ces conditions institutionnelles et l'horizon théorique que l'institution définit, tout en démontrant une exigence de type mathématique, « la rigueur des énoncés ». Nous retrouvons cela dans le discours des élèves-professeurs et, de fait, dans le discours de tous ceux qui sont en position d'étude d'un savoir dont ils n'ont pas la maîtrise théorique : seuls sans doute, les chercheurs capables de définir leurs conditions institutionnelles d'exercice peuvent-ils y échapper.

<u>donc</u> u'v // uv' et par conséquent (uv)' sont continues sur I // ces trois fonctions possèdent <u>donc</u> des primitives sur I /// on peut <u>donc</u> intégrer l'égalité
$u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)\ \forall x \in [0; A]$ *//////*

Ici en revanche, le raisonnement tient, sous l'hypothèse que les théorèmes adéquats figurent bien dans le panier des connaissances institutionnelles de l'élève.

On a alors : $\int_0^A u.'(x).v(x)dx = \int_0^A [(uv)'(x) - u(x).v.'(x)]dx$

En utilisant la linéarité de l'intégrale on a $\int_0^A u.'(x)v(x)dx = \int_0^A (uv)'dx - \int_0^A u(x).v.'(x)dx$

Or une primitive de $(uv)' = [uv]$ *donc on a* $\int_0^A u.'(x).v(x)dx = [uv]_0^A - \int_0^A u(x).v.'(x)dx$

5.5.4.8 La trace d'un épisode ancien de la biographie didactique de l'élève dans le répertoire de F001

La stratégie de réponse est donc fondée sur l'utilisation d'une transposition sur une égalité entre fonctions, chose vue dans un texte mathématique sinon en cours à cette occasion sans doute.

L'élève travaille donc comme pour une « Restitution Organisée de Connaissances ». On remarque cependant que le terme de *transposition*[309] montre la construction, par cette élève, d'un terme manquant dans l'institution (puisqu'il n'y a pas de théorie des opérations algébriques formelles, comme de nombreux travaux sur la question l'ont démontré), d'une « fracture » pour définir cette opération, complémentaire avec *al muquabala* (la réduction des termes semblables) de l'opération *d'al-jabar* d'Al-Khwarizmi[310] :

> «l'opération al-jabar (qui veut dire/complément ou remplissage), consiste à se débarrasser des termes à soustraire, dans un membre, par addition de deux termes égaux »[311]

Au sens commun « c'est faire passer un terme précédé d'un signe – dans l'autre membre pour qu'il ne résulte que des termes précédés d'un signe + » Exemple *: (uv)'(x)==u'(x)v(x)+u(x)v'(x)* est transformé, par Al-jabar, en $u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$. L'équivalence des égalités ainsi obtenues est du domaine des choses protomathématiques, car cette opération ne reçoit jamais son nom ; dans l'institution on dit : « on change un terme de membre » ce qui est un simple fait, pas une technique. Sans doute, pourtant, la transposition a-t-elle été montrée aux élèves, dans une des classes de Collège, et peut-être le professeur a-t-il fait l'effort de démontrer le procédé à l'aide de la propriété numérique « *On ne change pas une égalité en ajoutant ou soustrayant une même quantité aux deux membres d'une égalité* » et peut-être, selon la classe et l'établissement, un professeur a-t-il dit explicitement que cela valait pour les « *écritures littérales, puisque les lettres représentent des nombres* *.*» Mais cela ne fait technique que pour de très rares élèves et pour les autres il n'y a là que l'une des manières légitimes de faire avec les lettres. Nous trouvons donc, dans l'usage de transposition par F001, la trace d'un épisode de sa biographie didactique dont nous ne savons pas les conditions d'apparition mais seulement les effets. Cette trace témoigne d'une forte posture didactique ancienne de l'élève (plus de trois ans sans doute), qui a gardé en mémoire le nom d'une propriété, faisant théorème dans sa reconstruction personnelle d'un texte de mathématiques et lui permettant de produire lorsque c'est nécessaire des gestes ou actions techniques efficaces : *un excellent élève ne se construit pas en un jour et sa construction suppose un type d'échafaudage dont nous voyons ici encore le type générique*.

5.5.4.9 La trace d'un épisode récent de la biographie didactique de l'élève, dans le répertoire de F001

Une des techniques principales convoquées par F001 dans cette tâche vient d'un théorème qui lui non plus n'appartient pas à l'Organisation Mathématique de la Terminale Scientifique : « Toute fonction continue sur un segment admet une primitive. » Il n'est donc en principe pas disponible à F001. Son préalable, l'intégrabilité des fonctions continues, appartient à l'écosystème de l'enseignement supérieur. Pour ce dernier résultat, une des méthodes possibles est d'utiliser le théorème de Heine qui stipule que « f est uniformément continue sur I, puisque I

[309] XMLittré v1.3, http://francois.gannaz.free.fr/Littre/xmlittre.php?requete=t2678

[310] Al-jabr signifie réduction, au sens de « réduction d'une fracture » [vu in http://fr.wikipedia.org/wiki/Abr%C3%A9g%C3%A9_du_calcul_par_la_restauration_et_la_comparaison Robert de Chester (1997): Algèbre d'Al-Khwarizmi. Traductions et commentaires (depuis le latin) de Jean-Pierre Levet.] Ainsi ce que nous nommons « transposition » serait originellement pensé comme une « restauration », qui permet en effet un travail autrement impossible

[311] A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer 1986

est compact. » Ce qui permet, par exemple, de prouver que les fonctions en escalier sont denses dans les fonctions continues sur I.

Ainsi, F001 a évoqué une des techniques possibles pour prouver l'existence de primitives de fonctions continues en approchant ces fonctions par des fonctions en escalier, *[en réponse au questionnement de l'observateur, à la fin de cette séance*]. Mais force est de constater que la solution proposée reste hors d'atteinte de beaucoup d'élèves de TS et que le théorème en question est institutionnellement manquant : l'élève a donc produit ce « résultat probable » à son initiative, devant la nécessité de rédaction du texte du savoir organisé en développement consistant qu'elle s'est donné comme technique didactique. Un des intérêts du site de la question correspondante est alors de vérifier la cohérence du discours de F001 en particulier ici, l'organisation et la rigueur dans la rédaction. Nous notons donc en grisé les différents objets mobilisés par le répertoire, seul l'ordre peut pour partie être changé.

Les points relevés dans l'analyse et relatifs à « quels répertoires heuristique mathématiques a utilisé F001 ? » et sur « sur quoi s'appuie-t-elle pour réactiver de tels répertoire ? », sont donc résumés dans le tableau suivant, qui présente les objets (institutionnels ou non, construits ou préconstruits, mathématiques ou para et protomathématiques) mobilisés par le répertoire heuristique de l'élève. Nous y avons donc bien sûr indiqué aussi les objets présents mais inconnus dans la classe de Terminale et donc, institutionnellement manquants.

Substrat/ implicites	Les objets mathématiques	Technique de résolution concept 1	Concept 2	Concept 3
Equivalence Quantificateur Formules Dérivée/Continuité à gauche et à droite. Calculer Égalité Transposition d'une égalité fonctionnelle	Intervalle Produit de fonctions dérivables Dérivation Fonctions dérivables Formules de dérivée d'un produit Dérivée Continue Intégrale	Opération sur les fonctions continues Toute fonction continue admet une primitive Intégration d'une égalité Linéarité de l'intégrale	Algèbre des fonctions de classe C^1 Espace vectoriel des fonctions intégrables Fonctions continues sur I $F : t \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est de classe C^1 sur I $\forall x \in I$ alors $F'(x) = f(x)$ Forme linéaire $f : t$	L'ensemble IR Analyse réelle Intégrales de Riemann Classe de fonctions intégrables

Objets du répertoire heuristique et mathématique de la tâche

Sa connaissance du répertoire relatif à la tâche concernée, et peut-être aussi la nécessité d'informer l'observateur[312], semblent conduire F001 à se réinterroger sur les articulations mathématiques de son objet, l'intégration par parties. Ce qui a nécessité de la part de F001 ce que nous appellerons une révision de son cours sur la question et la conduit à vérifier *sa connaissance précise de chaque assertion, connaissance comprenant notamment sa justification par un théorème*. Cette reconstruction du répertoire permet à F001, dans sa rédaction, de resituer la propriété dans son écosystème mathématique : ce que le site indique. Dans ce cas encore, le site peut donc permettre de s'interroger et de reconstituer les chaînons manquants d'un « ouvrage de référence » et les objets que le répertoire devrait pouvoir mobiliser, et de préparer ou de susciter les questionnements de l'étudiant, terme qui nous paraît tout adapté pour nommer l'élève qui étudie. En conséquence cette analyse montre que la rédaction de la preuve d'une formule classique cache souvent des subtilités que notre observation permet de désigner.

5.5.5 Épisodes didactiques impliquant F001: module et argument d'un quotient de deux nombres complexes

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

La position autodidactique que nous montre cette élève est trop originale (bien que décrite par Descartes dans les *Regulae ad Directionem Ingenii*, comme le remarque Bachelard[313] en nommant « repasser son cours » cette manière d'étudier et comme l'a montré Mercier[314] pour que nous ne cherchions pas à voir si il en va de même pour elle dans d'autres domaines des mathématiques de Terminale. Nous proposons donc d'étudier maintenant un exercice relatif aux nombres complexes.

Exercice 2 : *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ *, on note A le point d'affixe 4 puis M et N les points d'affixes respectifs* $w = 3 + i\sqrt{3}.........\overline{w} = 3 - i\sqrt{3}$

[312] Nous n'oublions pas que notre posture d'anthropologue nous a conduit à être présent, outillé d'une caméra vidéo, dans le lieu privé de l'élève qu'est son bureau, ordinairement situé dans sa propre chambre et que nous y filmons une activité devenue presque complètement privée dans la culture didactique de notre système d'enseignement, l'étude. Nous le faisons à notre demande, et pour être acceptés nous avons fait valoir que c'était là le seul moyen d'acquérir des connaissances sur l'étude personnelle autonome et que ces élèves seraient donc nos informateurs sur cette question. Nous avons garanti que les images enregistrées demeureraient absolument privées et ne seraient jamais objet de communication ce qui nous interdit d'en montrer même quelques plans, mais il faut savoir encore que nous filmons la chose la plus privée de l'étude: les brouillons de travail, et que pour pouvoir relire ce qui a été écrit nous le faisons par-dessus l'épaule des élèves. Il n'est donc pas possible de séparer ce que nous observons des conditions de l'observation, et il est toujours bon de rappeler. Que toute production d'observables est l'effet d'un “instrument”, ici une caméra, une disposition des acteurs, dans l'espace, et la demande d'accompagner l'accès aux écrits d'énoncés informatifs sur les objets manipulés et les décisions d'agir. C'est sans doute aussi l'un des motifs que F001 a trouvés pour rédiger si complètement ses réponses, même si nous avons identifié là une de ses dispositions personnelles.

[313] G. Bachelard

[314] A ; Mercier Article dans la revue de didactique de l'IREM de Strasbourg.

1- Calculer le module et un argument de w. *En déduire le module et un argument de* $\overline{w}$.

On considère le nombre complexe $w-4$. *Ecrire ce nombre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.*

Soi z *et* z' *deux nombres complexes non nuls, après avoir montré que* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$e *à 2kπ près avec k entier relatif, calculer le module et un argument du nombre complexe* $\frac{w}{w-4}$. *En déduire le module et un argument de* $\frac{\overline{w}}{\overline{w-4}}$.

En interprétant géométriquement les résultats de la question précédente, démontré que les points O, A, M et N sont sur un même cercle dont on précisera les caractéristiques.

5.5.5.1 Verbatim du travail de la question1 –Première épisode

Verbatim du travail de la question1 *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

1	<u>*bon*</u> *[silence]*		*Nombre complexe Module et Argument Opérations sur les nombres complexes Lien entre le nombre son module et son complexe conjugué Argument du complexe conjugué*
2	*nombres complexes //*		
3	*L'observateur : « lis l'énoncé*		
4	*entièrement »*		
	<u>*bon*</u> *// question n° 1 // premièrement*		
5	*(murmure) calculer le module et un argument de* w *// en déduire le module et un argument de* $\overline{w}$ *//* <u>*alors*</u> *[silence]*	$\lvert w\rvert=\lvert\ 3+i\sqrt{3}\ \rvert=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$	
6	<u>*donc*</u> *on a [silence]*	*Par suite*	
7	*ce qui donne [silence]*		
8	*module et argument du nombre complexe w // on sait qu'un nombre*	$w=3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$	
9	*complexe et son conjugué ont le même module // en plus//////l'argument du nombre complexe*	$D'où\ \{\lvert w\rvert=2\sqrt{3}...et....\arg(w)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$	
10	*conjugué* $\overline{w}=-\arg(w)$ *[silence]*	$Comme\ \lvert w\rvert=\lvert\overline{w}\rvert...et...\arg(\overline{w})=-\arg(w)[2\pi]$ $Alors\ ..on..a.:..\lvert\overline{w}\rvert=2\sqrt{3}..et...\arg(\overline{w})=-\frac{\pi}{6}[2\pi]$	

Première épisode (première question de l'exercice) *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

« Nombres Complexes » semble suffire à l'élève pour cerner le type de tâches et son répertoire. Comme nous l'avons remarqué, elle ne donne plus d'information orale qu'à la demande expresse de l'observateur et les systèmes sémiotiques sur lesquels elle s'appuie sont écrits. D'ordinaire, les observations du travail à proprement parler algébrique confirment ce que Mercier avait montré en son temps : c'est un travail silencieux car la dimension technologique y est absente, et pourrait-on dire censurée. Si l'on trouve bien le calcul silencieux du module de w, et si l'on remarque l'aisance de l'élève dans le travail sur la racine carrée de « 9+3 », ce n'est pas tout à fait le cas pour l'opposé : en effet il n'y a pas de calcul à faire mais une règle à utiliser, et cette règle est énoncée en accompagnement de l'action : elle a donc une fonction technologique. La mobilisation du répertoire et la demande de l'observateur nous permettent de voir combien tout le travail de F001 est mobilisation technique sous le contrôle d'une technologie.

5.5.5.2 Verbatim du travail de la question2 –Deuxième épisode

Verbatim du travail de la question2 *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

11	*on passe à la question n°2 / alors // qu'est ce qu'on demande de trouver / question 2///on considère le nombre complexe* $w-4$ */// // écrire ce nombre sous forme algébrique//// puis sous*		**Nombre complexe, Module et Argument *Forme trigonométrique et algébrique*
12	*forme trigonométrique // bon/////[silence]*	*On va faire* $w-4=3+i\sqrt{3}.-4$ *ce...qui..nous..donne*	
18	*ce qui donne ///donc la forme algébrique de* $w-4..est..-1+i\sqrt{3}$	$w-4=-1+i\sqrt{3}$ $\lvert w-4\rvert=\lvert -1+i\sqrt{3}\rvert=2$	**Règles de simplification sur l'égalité ou translation d'une identité*
19	*/////or le module de* $w-4$ *est donc [silence]//////*	$-1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	
20	*///donc la forme trigonométrique de* $w-4$ *est [silence]*	$2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$	*Substitution Commutativité de de l'addition*
21	*c'est bon/////*		

Deuxième épisode(deuxième question de l'exercice) *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

Ici, comme nous avions remarqué que c'est l'ordinaire du travail algébrique, l'écriture devient muette, le « *on va faire* » initial est en effet un simple commentaire indiquant que l'élève a au moins mobilisé des pratiques tactiques qui feront stratégie grâce à l'usage des ostensifs « *forme algébrique* » « *module* » et « *forme trigonométrique* », suffisants à orienter l'action. Nous sommes donc dans une phase entièrement routinière, et l'épisode n'a pas de dimension didactique, encore moins biographique : l'élève exécute *« une tâche non problématique »*.

5.5.5.3 Verbatim du travail de la question3 –troisième épisode

Verbatim du travail de la question3 *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

22	*on passe maintenant à la question 3 //* *<u>on nous demande de faire</u>*		
23	*<u>quoi</u> [silence]* *d'abord la question/////montrer que*	*Les deux nombres complexes étant différents de zéro donc*	
24 25	$\arg(\frac{z}{z.'}) = \arg(z) - \arg(z.')$	$\arg(\frac{z}{z'}) + \arg(z.') = \arg(z)[2\pi]$	
25	*L'élève regarde l'expression [silence] par analogie de la propriété algébrique du logarithme népérien qui*	*On peut écrire que*	
27	*stipule que* $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ *//*	$\arg(\frac{z}{z'}) + \arg(z.') = \arg(\frac{z}{z.'} \times z.')[2\pi]$	
28	*on peut écrire que //////* */////on peut écrire que/////* *//////on sait aussi que//////* *//////en changeant de membre à un terme /////on a/////*	*On sait que* $\frac{z}{z.'} \times z.' = z$ *Donc on a changement de membre* $\arg(\frac{z}{z.'}) = \arg(z) - \arg(z.')$	
29	*////ce qui donne enfin la propriété///////* *[silence]/////*		*Nombre complexe, Module, Argument* *Opération sur les nombres complexes (module)*
30	*/////calculons le module et un argument du nombre complexe* $\frac{w}{w-4}$ *// et*		
31	*déduisons en le module et un argument de* $\frac{\bar{w}}{\bar{w}-4}$ *[silence] l'élève consulte son ouvrage de classe//////*	*D'après les propriétés sur les modules et les arguments de nombres complexes, on sait que///////* $\left\|\frac{z}{z'}\right\| = \frac{\|z\|}{\|z'\|}..avec.z' \neq 0$	
32	*// <u>alors</u> / hummmm // / module d'un quotient de nombre complexe, argument d'un quotient/////[silence]/////* *<u>////bon</u>//////on sait que (relit les résultats antérieurs)////*	$et.\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$	*Lien entre le nombre son module et son conjugué* *Argument du complexe conjugué*
33	$\|w\| = \| 3 + i\sqrt{3} \| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ $\|w-4\| = \|-1 + i\sqrt{3}\| = 2$	*On obtient*	
35		$\left\|\frac{w}{w-4}\right\| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2$ *et*	*Règles de simplification* *Equivalence*
36	*<u>/////alors</u> on a le module de* $\frac{w}{w-4}$ *//*		
37	*en plus* $\arg(w) = \frac{\pi}{6}.,\arg(w-4) = \frac{2\pi}{3}$ */ on a donc [silence]*	$\arg\left(\frac{w}{w-4}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$	*Egalité ou translation d'une identité*
38	*alors // on sait*	*Comme* $\frac{\bar{w}}{\bar{w}-4} = \overline{\left(\frac{w}{w-4}\right)}$	
39	*que* $\|\bar{w}\| = 2\sqrt{3}..\|\bar{w}-4\| = \|\overline{w-4}\| = 2$	$\left\|\frac{\bar{w}}{\bar{w}-4}\right\| = \sqrt{3}.et.\arg\left(\frac{\bar{w}}{\bar{w}-4}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$	*Existence de l'inverse*
40	$\arg(\bar{w}) = -\arg(w)[2\pi]$ $\arg(\bar{w}-4) = \arg(\overline{w-4}) = \frac{2\pi}{3}$ *donc*		
41	*c'est bon.*		

Troisième épisode (troisième question de l'exercice) *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

Nous avons bien sûr un geste remarquable de F001, qui consulte son ouvrage scolaire afin de se rappeler « les propriétés sur les modules et les arguments des nombres complexes ». Cela nous permet de confirmer ce que nous écrivions sur le travail algébrique, car voilà que ces propriétés n'ont pas de nom et elles ne sont même pas identifiables par un énoncé qui ferait, pour elles, ostensif rappelant un praxème. Or, voilà que justement ces propriétés-là font défaut à l'élève : cela confirme aussi notre interprétation de sa manière de savoir en référence au texte de la théorie, puisque l'absence du texte théorique déstabilise sa certitude de savoir, valable ailleurs. Nous analysons donc la tâche 3, et pour en définir le répertoire mathématique, nous effectuons d'abord son un défrichage historique, en nous basant essentiellement sur les travaux de Jean Dhombres[315].

5.5.5.4 Déchiffrage historique de la difficulté observée

En 1535, un concours eut lieu entre Fior et Tartaglia pour résoudre les équations du troisième degré. Tartaglia fut déclaré vainqueur. Il confia sa solution à Cardano sous la condition de ne pas la publier. Toutefois, ce dernier la donna dans son *Ars Magna*. Or, à l'époque, l'ouvrage de référence reste *les Éléments* avec le traitement géométrique des grandeurs. Les négatifs n'existent pas encore en tant que nombres. Dans les équations, on évacue les solutions négatives au profit des solutions positives. Cependant, pour résoudre une équation du troisième degré possédant une racine positive, on introduit des types nouveaux de « nombres imaginaires ». Ils apparaissent et disparaissent au gré des auteurs et de leur manière de comprendre le problème qu'ils posent. En 1830, Évariste Galois affirme :

> « Il faut regarder les racines de cette congruence comme des espèces de symboles imaginaires, puisqu'elles ne satisfont pas aux questions des nombres entiers, symboles dont l'emploi dans le calcul sera souvent aussi utile que celui de l'imaginaire dans l'analyse ordinaire. » [316]

En 1806, Jean Robert Argand donne du théorème fondamental de l'algèbre une preuve basée sur la nouvelle représentation des nombres complexes, dans son livre : Essai sur la manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Mais ce livre sombre vite dans l'oubli (Il n'en existe aucun exemplaire aujourd'hui.) Durant l'année 1811, Joseph Pierre Gergonne, enseignant à Montpellier, expose dans ses cours de l'École Normale les travaux d'Argand :

> « Il y eut un débat sur *l'interprétation géométrique des symboles imaginaires* et une discussion sur l'existence des objets mathématiques »[317]

J.P. Gergonne permet la diffusion des travaux d'Argand dans les mathématiques professionnelles enseignées, malgré l'opposition marquée de la « noosphère » de l'époque :

> « "Je persiste à croire qu'il est très difficile de ramener la démonstration de ce principe à des notions purement élémentaires " expliquait Bret, professeur à la faculté des sciences

[315] Jean Dhombres 2004.
[316] .J. Dhombres, 2004
[317] J. Dhombres, 2004.

de l'académie de Grenoble, six ans après la parution du livre d'Argand »[318].

Nous ne pouvons que remarquer que la question impose déjà une certaine « gène » comme le remarque J. Dhombres, qui note :

> « Aussi, à la fin de son Essai qui porte à la fois sur l'addition des « *grandeurs dirigées* » et sur la multiplication des nombres complexes, Argand indiquait-il que la représentation des nombres complexes ne leur donnaient pas *un degré suffisant d'évidence*; les constructions ne pouvaient en être admises que « *comme des hypothèses* »que leurs conséquences ou des raisonnements plus rigoureux pourront faire admettre ou rejeter »[319]

Ainsi, les nombres complexes ne deviennent pas complètement des objets géométriques, et sans doute leurs multiples notations possibles (dite algébrique ou trigonométrique, mais qui peut aussi être exponentielle depuis Euler ou matricielle) n'aident pas à les y stabiliser. Ce nouvel état d'objet construit à partir de la géométrie, donc de nombre, fut accepté par la noosphère lorsque Cauchy l'incorpora à son architecture théorique. Cette incorporation permettra aux complexes de devenir le champ d'étude des « analystes » de l'époque :

> «C'est que je développe une thèse historique : le champ complexe a fixé la pratique de l'analyse, et l'analyse réelle vint donc en second. »[320]

Ainsi, les nombres complexes sont nés au XVI ° siècle pour trouver les racines réelles d'une équation du troisième degré à coefficients réels. Pendant près de trois siècles, ils furent appelés et perçus comme *« imaginaires »*. La géométrie leur donna une représentation qui leur permit de passer du stade de nombre impossible à celui d'objets reliés aux mathématiques (Argand). Ce sont les succès de l'analyse complexe (fonctions holomorphes) qui ont largement contribués à « affirmer» leur statut de nombre. Leur écosystème, c'est donc d'abord l'algèbre, qui s'avère insuffisant à les nourrir, puis la géométrie, qui les fait regarder comme des objets doués d'existence, et finalement l'analyse, dont ils nourrissent des développements : en écologie mathématique « pour vivre, il faut être mangé » disait L.Rajasson dans son travail doctoral. A la richesse de l'histoire des nombres complexes, partis de l'algèbre (résolution d'équation) puis ayant finalement envahi la géométrie et l'analyse, correspond une richesse de l'histoire de leur enseignement, car dans ce monde aussi les objets doivent trouver leurs conditions de vie. La compréhension de ces richesses va donc permettre d'appréhender ces conditions et de situer le répertoire mathématique de cette tâche.

5.5.5.5 Déchiffrage de la difficulté dans le monde de l'enseignement secondaire

Les élèves rencontrent avec les complexes, le premier ensemble de nombres ne possédant pas la propriété d'être totalement ordonné[321]. Cet obstacle est important mais n'est pas enseigné. Il reste donc transparent, mais il est présent et peut avoir des effets. Nous sommes ainsi, avec le corps des complexes tel qu'il est présenté, à la frontière entre l'objet « système de nombres »[322]

---

[318] J. Dhombres, 2004
[319] J. Dhombres, 2004
[320] J. Dhombres, 2004
[321] Le corps C ne peut être muni d'un prolongement de celui de IR
[322] Y. Chevallard : le passage des mathématiques à l'algèbre p 50

qui se trouve dépassé et le modèle « corps algébriquement clos » permettant de résoudre toutes équations de degré n, qui n'est pas présenté. Cela va conduire à une grande instabilité de leur introduction en Terminales, instabilité qui nous désigne une difficulté que les décisions successives ne résolvent pas.

Par exemple, les complexes sont introduits dans le programme de géométrie de terminale C de juin 1966 dans le paragraphe III parlant des transformations ponctuelles sous la rubrique : similitudes :

> « relation avec la transformation définie dans le plan complexe par $z' = az + b$ »[323] et le cours de géométrie[324] démontre que :« l'ensemble des similitudes directes (composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation, et des translations) constitue le groupe des similitudes ».

Ce groupe est la base d'une des constructions des complexes dans les classes de mathématique supérieures. Dans son livre, Gouyon définit les nombres complexes ainsi que le produit de deux nombres complexes :

> «Dans le plan xOy où OU est choisi sur Ox ,…, Nous appellerons nombre complexe un mode de détermination, à partir de OU par similitude directe de point double O, de rapport $r = OM$, d'angle $\theta = (0x; OM)$, : nous dirons que le couple $(r;\theta)$ qui détermine OM, est un nombre complexe z appelé mesure complexe de OM (ou d'un vecteur égal) ou affixe de M […..] r et θ (qui sont les coordonnées polaires de M , soumises à la restriction $r > 0$ sont les modules et argument de z. On écrit $r = |z|$, $\theta = \arg(z)$, ce que nous résumerons par $z = (r;\theta)$ […].Multiplication et division -Les nombres z et z' définissent des similitudes directes de centre O de rapports r et r', d'angles θ et θ')- le produit est toujours, comme pour les nombres réels, le nombre qui définit la similitude produit. Le rapport et l'angle de cette similitude sont respectivement $r\ r'$ et $\theta + \theta$' on a donc la règle $(r;\theta).(r';\theta') = (rr';\theta + \theta')$»[325]

Dans cette approche, les propriétés classiques du quotient et du produit de deux nombres complexes sont obtenues directement par application de la règle de calcul de la similitude composée. Ainsi l'ensemble des nombres complexes muni de la loi multiplicative est un groupe abélien, par conséquent le quotient de deux nombres complexes existe avec la relation $\frac{r';\theta'}{r;\theta} = \frac{r'}{r};\theta' - \theta$ Le chemin qui conduit à l'habitat de la tâche dont nous étudions la difficulté part donc ici de l'introduction des complexes à partir des transformations, et croise les structures algébriques dans sa mise en forme mathématique. Par ailleurs, nous remarquons que la définition d'une similitude évolue. La définition pour le plan devient :

> « le produit d'une homothétie positive par un déplacement » [326]

Remarquons que cette définition était déjà adoptée auparavant dans l'espace. De nos jours l'introduction des complexes part des coordonnées polaires en classe de première scientifique

[323] vu dans G Cagnac et L Thiberge 1967
[324] vu dans V. Lespinard et R. Pernet, 1965,p313
[325] R.Gouyon 1961
[326] Lespinard 1965 p 320

vers la forme algébrique en terminale S, mais le chemin emprunté n'a pas le même fondement qu'en 1962 où l'outil était le « groupe de transformation » alors qu'aujourd'hui, on assume le passage du statut de notation astucieuse à celui de nombre jusqu'à la construction du sens d'un type d'objet nouveau, appelé nombre complexe.

Une autre approche, avec un point de vue didactique, est proposée par M. Schneider qui cherche ainsi à traiter un certain nombre des obstacles à leur compréhension, en particulier le fait que même les meilleurs élèves, qui traitent sans autre difficulté des exercices algébriques ou des usages géométriques de ces nombres, n'affirment pas être persuadés de l'existence de *i*. L'auteur propose donc entre autres de considérer les nombres complexes comme des couples de nombres qui

> « […] servent à coder des similitudes du plan dont l'origine est un point fixe… »[327]

Elle propose ainsi de les traiter comme des codes, ce que sont tous les nombres, et des codes composés de deux nombres connus, ce qu'étaient déjà les rationnels, afin de s'appuyer sur ces connaissances antérieures plutôt que d'attaquer de front tout ce que les élèves pensent et savent sur les nombres. En particulier, cela devrait, selon elle, aider les élèves à disposer, pour interpréter de ce qu'ils font, d'un système langagier et de métaphores qui formeront un écosystème scolaire pour ces « nombres » Elle retrouve ainsi un des points d'appui de la proposition de Lespinard et Pernet, sans avoir besoin de la notion (aujourd'hui hors de propos) de groupe de transformations.

> « La multiplication des couples découle alors de la composée de deux similitudes »[328]

Cependant, le jeu entre le code (module, argument) qui convient aux similitudes, et le code (partie réelle, partie imaginaire) qui convient au travail algébrique demeure difficile.

5.5.5.6 Organisation mathématique de la tâche

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

L'organisation mathématique de la tache dépend essentiellement de la fonction exponentielle qui comme l'affirme W. Rudin

> « C'est sans aucun doute la fonction la plus importante en mathématiques».

Celle-ci est définie par la formule $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n.!}$ »[329]

Cette série est absolument convergente et uniformément convergente pour tout ensemble bornée du plan, ce qui sert à démontrer la continuité de cette fonction. Une conséquence de l'absolue convergente de cette série est : pour tout nombre complexe $z..et..z.'$ on

[327] M. Schneider 2008
[328] M. Schneider 2008
[329] W. Rudin 1974

a : $\exp(z)\times\exp(z')=\exp(z+z')$. Ce résultat donne en corollaire l'objectif de la tâche. L'habitat de ce non-ostensif efficace est caché à ce niveau, la tâche permet ainsi d'appréhender une technique de l'apprentissage naturalisée par la notation $e^{z}=\cos z+\sin z$ (sachant que $e^{i\theta}$ est due à Euler)

5.5.5.7 Analyse biographique de l'épisode

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

La lecture attentive de l'énoncé par F001 lui a permis de déterminer les objets particuliers. Ainsi dans ses prérequis, les objets module et argument d'un nombre complexe, l'équivalence, les réels positifs, la forme trigonométrique des nombres complexes sont présents. Les objets ou choses sont les quantificateurs, les réels et la trigonométrie. Par ailleurs, F001 utilise dans sa solution la propriété *: le produit de deux réels positifs est positif. Plus précisément, R+ muni de la loi* $\times$*est un monoïde*. F001 aussi utiliser les opérations et leurs propriétés. Enfin, la notion de classe d'équivalence est prégnante dès le prérequis avec l'égalité modulo2π

Les deux branches du prérequis referment la tâche: la forme trigonométrique d'un nombre complexe et les formules d'addition. Donnant les techniques principales, ce prérequis impose la forme trigonométrique (implicite), petite partie de la richesse du déchiffrage historique.

F001 a utilisé la méthode qui consiste à procéder par équivalence pour conclure en utilisant deux des composantes du prérequis (module et argument). La « ruse» utilisée en référence relativement à l'analyse réelle autour du couple exponentielle/logarithme népérien est la définition du quotient de deux nombres complexes. F001 a utilisée ainsi l'ostensif : *forme trigonométrique* avec une stratégie qui consiste à découper le raisonnement en deux étapes. Chaque étape est justifiée par une des composantes du prérequis. Le discours de F001, montre une connaissance du répertoire de la tâche, impliquant le choix de la méthode la plus adaptée sans oublier la subtilité qui donne sens à la tâche. Le discours de la ligne 24 à 31, préside à activer et utiliser *les ostensifs langagiers, scripturaux*. Ainsi, avec *le jeu de langage/ jeu symbolique, le jeu notation/ notion, le jeu de signifiant/signifié*, F001 a énoncé ce que la notation des prérequis $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}..avec z'\neq 0.et.\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')[2\pi]$ dénotent. Une fois l'objet mathématique identifié, de par le jeu de langage, F001 a activé tous les objets implicites pouvant permettre la résolution de la tâche : *énoncé et utilisation de théorèmes avec des transpositions et des transformations spécifiques et non spécifiques impliquant un dépouillement de l'épaisseur de la tâche.* Il apparaît que F001 a utilisée des répertoires de différentes connaissances basées sur des «***ruses*** » qui sont des utilisations des définitions, des propriétés voir d'autres concepts par transpositions ou transformations. C'est ainsi que la connaissance du répertoire heuristique mathématique de la tâche, utilisé par F001, est restreinte à la présentation actuelle du corps des nombres complexes, mais donne cependant la vision d'une partie de la richesse dévoilé par le déchiffrage historique

Substrat/ implicite mathématiques	Les objets mathématiques	Technique de résolution concept 1	Concept 2	Concept 3
Quantificateur Equivalence Angles Egalités modulo 2 π Stratégie Egalité Transposition d'une égalité fonctionnelle ou transposition d'une égalité	Plan complexe Repère orthonormal direct N C Opérations dans C Opération dans IR Argument d'un produit, d'un quotient de deux nombre Complexes Angle de vecteur Identité Egalité à 2 π près	Règles de calcul dans C Translation d'une identité Module Complexe conjugué Forme Trigonométrique, exponentielle Représentation géométrique Produit de deux nombres Complexes Classes d'équivalence	Corps C Groupe (IR+) La symétrie de l'égalité La substitution Espace vectoriel Equivalence Quantificateur Jeu modèle-système Morphisme	Théorie des corps Analyse complexe

Répertoires heuristiques mathématique de la tâche *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

Verbatim du travail de la question 4 *Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe*

31	*On passe à la question 4*		
32	*Bon !!! Une interprétation géométrique !!!!*		
33	***4-*** *En///interprétant géométriquement les résultats de la question précédente, démontré que les points O, A, M et N sont sur un même cercle dont précisera les caractéristiques.*		*Nombre complexe* *Module* *Argument* *Lien entre le nombre son module et son complexe conjugué* *Argument du complexe conjugué* *Angles de vecteurs*
34	*Alors !!!!*	*Comme..* $\arg\left(\frac{w}{w-4}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$	
35	*On sait que* *Donc*	On en déduit que $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$	
36			
37	*Donc*	Donc le point M d'affixe $3+i\sqrt{3}$ appartient au cercle de diamètre $[OA]$	

38	*En plus*	Comme $\arg\left(\dfrac{\overline{w}}{\overline{w}-4}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, on en déduit que : $\left(\overline{AN},\overline{ON}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$	
39	*Donc*	Donc le point $N.d'affice...\overline{w}=3-i\sqrt{3}$ appartient au cercle de diamètre $[AO]$. D'où les points O, A, M, N sont sur le cercle de diamètre $[AO]$.	

5.5.6 *Épisode didactique impliquant L001: géométrie dans l'espace-équation paramétrique :*

<u>Exercice</u> : *Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;I;J;K)$

Partie A

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Soit P *le plan d'équation* $ax+by+cz+d=0$

On considère le point I de coordonnées $(x_I;y_I;z_I)$ *et le vecteur de coordonnées* $\vec{n}(a;b;c)$

1- *Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P Déterminer en fonction de* $a;b;c;x_I;y_I;z_I$, *un système d'équation paramétrique de la droite Δ.*

2- *On note* H *le point d'intersection de la droite Δ et du plan* P

a) *Justifier l'existence d'un réel* k *tel que* $\overrightarrow{IH}=k\vec{n}$

b) *Déterminer l'expression de* k *en fonction de* $a;b;c;x_I;y_I;z_I$

c) *En déduire que :* $IH=\dfrac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Partie B

On considère les points :

$A(3;0;1);..B(0;-1;2),...C(1;-1;0)..et..D(1;1;-2)$

1- *Montrer que les vecteurs* $\overrightarrow{AC}....et....\overrightarrow{BC}$ *sont orthogonaux.*
En déduire la nature du triangle ABC.
Calculer l'aire du triangle ABC.

2- a) *Vérifier que le vecteur* $\vec{n}(2;.-5;.1)$ *est un vecteur normal au plan ABC*

a) *En déduire une équation du plan (ABC)*

3 a) Déterminer la distance du point D au plan ABC

3 b) Déterminer le volume du tétraèdre ABC

5.5.6.1 Verbatim du travail de l'exercice

Verbatim du travail des questions 1-2a-2b

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

1	*////L'espace est muni d'un repère orthonormal* $(O;I;J;K)$*////*		*Nombres réels* *Point* *Droite* *Plan* *Espace* *Repère Orthonormal* *Coordonnées* *Vecteurs* *Equation du plan* *Equation paramétrique d'une droite* *Distance* *Propriété du produit scalaire* *Norme* *Vecteurs* *Colinéaires* *Vecteur normal, directeur*
2	*L001Lit l'énoncé////*		
3	*////Observe quelques secondes////*		
4	*/////Il s'agit de déterminer la distance d'un point à un plan/////*		
5	*/////Soit* Δ *la droite passant par* I *et orthogonale au plan* P */////Déterminer, en fonction de* $a;b;c;x_I;y_I;z_I$ *et un système d'équation paramétrique de la droite* Δ*////*		
6	*/////On sait d'après le cours que le vecteur* $\vec{n}(a;b;c)$ *est un vecteur normal à l'équation paramétrique* P *et aussi un vecteur directeur de la droite*Δ*////On sait qu'une équation paramétrique est de la forme///* $P : ax+by+cz+d=0$ */////Le point I appartient à la droite* Δ *ayant* $\vec{n}(a;b;c)$ *comme vecteur directeur/////* *////Donc une équation////*		
7		*Donc une équation paramétrique de* Δ *est alors de la forme/////* $\begin{cases} x = x_I + at \\ y = y_I + bt ... avec..t \in IR \\ z = z_I + ct \end{cases}$	
	2a) ///Justifier l'existence d'un réel k *tel que* $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *////*		
8	*/// H est un point de* Δ*, donc le vecteur* $\overrightarrow{IH}$ *est orthogonal au plan* P *////////* *///Donc les vecteurs* $\overrightarrow{IH}$ *et* $\vec{n}$ *son colinéaires/////*		
9	*////Ainsi par définition du colinéarité////*		
10	*a/////Déterminer l'expression de* k *en fonction de* $a,b,c,d,\ x_I;y_I;z_I$		
11	*//////Etant donné que* $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *et* $\overrightarrow{IH}$ *et* $\vec{n}$ *sont de coordonnées respectives///////*	*//////Il existe un réel* k *tel que* $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *//////*	

12			*Nombres réels* *Point*
13	*//////On a //////*	$\begin{pmatrix} x_H - x_I \\ y_H - y_I \\ z_H - z_I \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix}$	*Droite* *Plan*
14	*D'où/////*	$\begin{pmatrix} x_H - x_I = ka \\ y_H - y_I = kb \\ z_H - z_I = kc \end{pmatrix}$	*Espace* *Repère Orthonormal*
15 16	*//////Or H est un point du plan P ////ce qui implique que ses coordonnées vérifient l'équation du plan//////*	*//////////*	*Coordonnées*
17	*//////On a alors /////*		*Vecteurs*
18	*///////////Avec un développement et un regroupement des termes en k ////////* *On a//////*	$\begin{cases} x_H = x_I + ka \\ y_H = y_I + kb \\ z_H = z_I + kc \end{cases}$	*Equation du plan*
19 20	*/////On sait d'après que* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ *Donc*	$a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0$	*Equation paramétrique d'une droite*
21			*Distance*
22		$ax_I + by_I + cz_I + k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$	*Propriété du produit scalaire*
23 24	*a/////En déduire que////////////* $IH = \frac{\lvert ax_I + by_I + cz_I + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$		
25		*On a :* $k = \frac{ax_I + by_I + cz_I}{a^2 + b^2 + c^2}$	*Norme*
26	*Observe le résultat de la question 2b* *Alors /////* *De tout ce qui précède///////*		*Vecteurs* *Colinéaires*
27	*On a////* *Or* *Donc///////*	*/////Etant donné que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ ////* $\lVert\overrightarrow{IH}\rVert = \lVert\overrightarrow{kn}\rVert$ $\lVert\overrightarrow{kn}\rVert = \lvert k\rvert \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ *et/////* $\lVert\overrightarrow{IH}\rVert = IH$	*Vecteur normal, directeur*
28	*D'où//////*	$IH = \lvert k\rvert \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $IH = \lvert -\frac{ax_I + by_I + cz_I}{a^2 + b^2 + c^2} \rvert \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$	
29		$IH = \frac{\lvert ax_I + by_I + cz_I + d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	
30			

Verbatim du travail de la question 1partie B

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

29	*Dans un repère orthonormal* $(O;.\vec{i},.\vec{j},.\vec{k})$ *, on considère les points :*		*Nombres réels* *Point*
30	$A(3;0;1);.B(0;-1;2),..C(1;-1;0).et.D(1;1;-2)$ ***1-*** *Montrer que les vecteurs* $\overrightarrow{AC}....et....\overrightarrow{BC}$ *sont orthogonaux.* *En déduire la nature du triangle ABC.* *Calculer l'aire du triangle ABC.*		*Droite* *Plan* *Espace*
31	*Alors !!!!*	*On détermine les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AC}..et..\overrightarrow{BC}$	*Repère Orthonormal*
32	*Donc*	*On a :* $\overrightarrow{AC}(-2;.-1;.-1)$ *et* $\overrightarrow{BC}(1;.0;.-2)$ */////*	*Coordonnées* *Vecteurs*
33	*Donc*	*En utilisant le produit scalaire ; on a ////* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} =$ $(-2)(1)+(-1)(0)+(-1)(-2)=0$ *Ce qui signifie par conséquent que les vecteurs///* $\overrightarrow{AC}..et..\overrightarrow{BC}$ */////sont orthogonaux./////*	*Equation du plan* *Equation paramétrique d'une droite* *Distance*
34	*Donc*	*////le triangle ABC est par conséquent rectangle en C////* *////L'aire du triangle ABC est alors* $\frac{AC.BC}{2}$ *Or* $AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ $BC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$	*Propriété du produit scalaire* *Norme* *Vecteurs Colinéaires* *Vecteur normal, directeur*
35	*Donc*	*L'aire du triangle ABC est/////* $\frac{1}{2}\sqrt{30}$ */////*	

Verbatim du travail de la question 2a) partie B

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

36	*Question 2-a/////* ***2-a****/////Vérifier que le vecteur* $\vec{n}(2;.-5;.1)$ *est un vecteur normal au plan ABC//////*	$\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ *////on/sait/que/////* $\overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$*et* $\vec{n}(2;-5;1)$*////*	*Nombres réels* *Point* *Droite* *Plan* *Espace* *Repère*
37 38	*Alors///////*	*On a///////*	*Orthonormal* *Coordonnées*

39 40 41 42	*////On utilise le produit scalaire////* *Donc* *Donc///* *De plus////* *Donc/////*	$\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ $= (-2)(2) + (-1)(-5) + (-1)(1) = 0$ *Le produit scalaire est nul donc les deux vecteurs* $\overrightarrow{AC}..et..\vec{n}$ *sont orthogonaux/////* $\overrightarrow{BC}.\vec{n} = 1(2) + 0(-5) + (-2)(1) = 0$ */////* *Donc les vecteurs* $\overrightarrow{BC}..et..\vec{n}$ *sont orthogonaux////* *Par///conséquent////le vecteur* $\vec{n}(2;-5;1)$ *est un vecteur normal au plan (ABC)//////*	*Vecteurs* *Equation du plan* *Equation paramétrique d'une droite* *Distance* *Propriété du produit scalaire* *Norme* *Vecteurs Colinéaires* *Vecteur*

Verbatim du travail de la question 2b) partie B

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

43 43 44 45 46 47 48	*Question 2-b* ***2-b)****//En déduire une équation du plan (ABC)///* *///Alors//// hummm/////* *///Equation du plan (ABC)/////* *///Alors///* *///Donc/////* *///Donc////*	 *On sait que ////* $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (-2)(2) + (-1)(-5) + (-1)(1) = 0$ *Pour tout point M du plan (ABC) de coordonnées* $M(x; y; z)$ *//on a le//vecteur///* $\overrightarrow{AM}(x-3; y-0; z-1)$ *Le produit scalaire ///* $\overrightarrow{AM}.\vec{n} =$ $2(x-5) - 5(y-0) + 1(z-1) = 0$ $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 2(x-3) - 5(y-0) + 1(z-1) = 0$ *Ce qui donne :* $2x - 5y + z - 7 = 0$ *//////* *Par conséquent/// l'équation du plan//(ABC)/est///////* $2x - 5y + z - 7 = 0$ *//////*	*Nombres réels* *Point* *Droite* *Plan* *Espace* *Repère Orthonormal* *Coordonnées* *Vecteurs* *Equation du plan* *Equation paramétrique d'une droite* *Distance* *Propriété du produit scalaire* *Norme* *Vecteurs Colinéaires* *Vecteur normal, directeur*

Verbatim du travail de la question 3a) partie B

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

49	***3-a)****//Déterminer la distance du point D au plan ABC/////* *///Alors///*		*Nombres réels* *Point* *Droite* *Coordonnées* *Vecteurs* *Equation du plan* *Equation paramétrique d'une droite* *Distance* *Propriété du produit scalaire*
50	*///Distance d'un point à un plan//*		
51	*//Donc//*	*La distance du point D au plan (ABC)//est /////* $\left\|\frac{2(1)-5(1)-2-7}{\sqrt{4+25+1}}\right\| = \left\|\frac{-12}{\sqrt{30}}\right\| = \frac{2\sqrt{30}}{5}$	

Verbatim du travail de la question 3b) partie B

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

52	***3-b****///Déterminer/le/volume/du tétraèdre ABCD////*	*On /sait que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de l'aire du triangle de base par la hauteur du tétraèdre//////*	*Nombres réels* *Point* *Droite* *Plan* *Espace//Repère Orthonormal* *Coordonnées* *Distance* *Propriété//du produit scalaire* *Norme//Vecteurs*
53	*Alors////////*		
54	*////Humm////*		
55	*///En plus/////*	*/////On sait que le triangle de base est ABC///de plus la hauteur est ici////////la distance du point D au plan (ABC) qui est égale à///* $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ *Le volume du tétraèdre ABCD est//////*	
56	*/////Donc/////*	$(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})\sqrt{30}\,(\frac{2\sqrt{30}}{5}) = 2$	

5.5.6.2 Episodes didactiques : Partie A –ligne 1à 30

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

Dans l'usage, le système d'équation paramétrique d'une droite se nomme équation paramétrique d'une droite. Deux preuves du résultat de cette tâche existent en classe de terminale, l'une s'appuyant sur le produit scalaire, l'autre sur les équations paramétriques. L001, de par son discours dispose de plusieurs indices tel que la définition du point H, pour reconnaître que le point H est le projeté orthogonal de I sur le plan P, induction implicite qui provient certainement de la place qu'occupe la projection orthogonale dans les programmes. La rigueur de son discours langagier semble présider qu'il a compris qu'en choisissant de définir la distance de I à P comme IH, L001 sait que c'est la plus petite distance du point I au plan P. L001 a probablement rencontré la notion de représentation paramétrique d'une droite en classe, mais L001 a compris que la représentation paramétrique 'une droite est liée à la détermination de la distance d'un point I à un plan P (ligne 2 à 5). Dans la rédaction de la tâche, L001 a utilisé les propriétés du produit scalaire et du vecteur normal à un plan. La projection reste une application affine de l'espace tandis que le produit scalaire demeure une forme de bilinéarité symétrique définie positive dans un espace vectoriel réel. Les indices tels que le code de la notation d'un vecteur normal et la stratégie liée à de telle tâche ont permis à L001 d'appréhender la solution . Le discours de L001 préside qu'elle a une connaissance du répertoire heuristique mathématique relative à la tâche (partie A) que représente le tableau suivant :

Substrat/ implicite mathématiques	**objets mathématiques**	**Technique/concept 1**	**Concept 2**
Projection Orthogonale Démonstration Code: notation Stratégies	IR Point Droite Espace Repère orthonormal Vecteur Coordonnées Equation du plan Equation paramétrique/de droite Distance	(IR,+,$\times$) corps Propriétés du produit scalaire (analytique, projection orthogonale, bilinéarité) Norme Vecteur colinéaire Vecteur directeur Vecteur normal	(E, +,) espace vectoriel euclidien ($\mathcal{E}$, +,) espace affine euclidien Application affine Forme bilinéaire.

Répertoire épistémologique mathématique de la tâche

L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

L001a fatalement rencontrée la notion de représentation paramétrique d'une droite, mais force est de constater que L001 la relier à l'objectif de la tâche qui est de déterminer la distance d'un point à un plan. Bien qu'ayant les connaissances des éléments des strates du répertoire heuristique mathématique qui sont rencontrés souvent séparément dans deux chapitres distincts ; L001 revisite par l'analyse de cette tâche, ces éléments du paysage mathématique par un chemin organisationnelle (le formalisme et la rigueur d'un discours mathématique relatif à la tâche en étude) qui lui est connu.

5.5.7 Episode didactique impliquant RC001///Arithmétique: congruence d'un produit

Exercice : *Réf : RCA001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit*

Partie A

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a *et* b *on dit que* a *est congru à* b *modulo 7, et on écrit* $a \equiv b$ *[7] lorsqu'il existe un entier relatif* k *tel que* $a = b + 7k$

Soient a, b, c, d *des entiers relatifs.*

Démontrer que : si $a \equiv b$ *[7] et* $c \equiv d$ *[7] alors* $ac \equiv bd$ *[7]*

En déduire que : si pour a *et* b *entiers relatifs différents de zéro, si* $a \equiv b$ *[7], alors pour tout entier naturel* n*,* $a^n \equiv b^n$ *[7]*

Partie B : application

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x *tel que :*

1 $x^2 \equiv 3$ *[6].*

3 $(5x+2)(x+2) \equiv 2$ *[6].*

3 $15x^4 + 12x^2 + 87 \equiv 0$ *[6].*

5.5.7.1 Verbatim du travail de la partie A de l'exercice-

Verbatim du travail de la partie A de l'exercice

Réf : RCA001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit

	Partie A////		
1	*RCA001 Lit l'énoncé/////*		
2	*Je///peux///utiliser les propriétés de compatibilité de la congruence avec l'addition et l'utilisation de règles de calcul dans un anneau////*		
3	*////Alors/////*		*Rappel*
4	*//Soient* a, b, c, d *des entiers relatifs////*		*Transformations*
5	*///Démontrer que///si* $a \equiv b$ *[7] et*		*Entiers relatifs*
6	$c \equiv d$ *[7] alors* $ac \equiv bd$ *[7]//////*		*Congruence* *Egalité*
7	*On sait que pour deux nombre* a *et* b *on dit que* a *est congru à* b *modulo 7/////et on écrit* $a \equiv b$ *[7] lorsqu'il existe un entier relatif* k *tel que* $a = b + 7k$ *////*	*Si* $a = b + 7k$ *de même* $c - d = 7k.'$ $ac - bd = ac - ad + ad - bd$ $ac - bd = a(c-d) + d(a-b)$	*Somme* *Produit* *Puissance* *Identité* *Remarquable* *Anneau*
8			*(Z,+,×)*
9		$ac - bd = 7(k.'a + kd)$	*Multiple*

	Ainsi////		*Corps (IR, +,×)*
10	*Or////*	$k.'a+kd$ *est un entier relatif* $ac \equiv bd$ *[7]*	
11	*Donc////* *Or////* *///Donc////*		
12	*En déduire que //// si pour* a *et* b *entiers relatifs différents de zéro//si* $a \equiv b$ *[7], alors pour tout entier*		*Rappel* *Transformations* *Entiers relatifs* *Congruence*
13	*naturel* $n / a^n \equiv b^n$ *[7]*		*Egalité* *Somme*
14	*////Humm/////* *On peut utiliser l'identité remarquable*	$a-b=7k$	*Produit* *Puissance* *Identité*
15	$a^n - b^n$*/////*	$a^n - b^n =$	*Remarquable*
16	*Alors Comme* $a \equiv b$ *[7] signifie qu'il existe un entier relatif* k *tel que* $a = b + 7k$ *//////*	$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+b^{n-1})$ $=7k(a^{n-1}+a^{n-2}b+..+b^{n-1}=7k.'$ $=k(a^{n-1}+a^{n-2}b+..+b^{n-1}=k.'$	*Anneau (Z, +,×)* *Multiple* *Corps (IR,+,*
17	*Implique que///*		
18			
19	*En utilisant l'identité remarquable* *on a ///////*		
20	*En simplifiant les deux membres par 7* *On a////Donc /////*	$a^n \equiv b^n$ *[7]*	

5.5.7.2 *Episodes didactiques de la Partie A –ligne 1à 20*

Réf : RCA001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit

RC001 utilise des transformations et son discours préside que les propriétés algébriques liées aux congruences sont en fait liées à la structure algébrique d'anneau, plus précisément en ce qui concerne cette tâche, à celle d'anneau quotient $\left(\frac{z}{7z}\right)$ ce qui suppose que les connaissances théoriques qui fondent l'action mathématique est parfois au-delà de l'horizon institutionnel[330]. RC001 a fait le choix d'utiliser les indications du prérequis libellé ***« rappel*** » et les bons usages implicites appelés par les formes des questions et les notations. RC001 a compris que les objets présents dans la question sont utiles et dispose des outils pour trouver les solutions attendues. Le discours langagier et scriptural de RC001 dénote une connaissance du paysage de la tâche et donc son répertoire heuristique mathématique. RC001 utilise la métaphore et le formalisme mathématique pour répondre à cette tâche.

[330] C. Castella &A. Mercier : savoir fondamental et savoir opératoire.

Substrat/ implicite mathématiques	Les objets mathématiques	Technique de résolution concept 1	Concept 2	Concept 3
Quantificateurs Rappel Stratégies Transformation Hypothèse/ conclusion Transformation d'écriture/par ajout/retrait: méthode/des différences	Entiers relatifs Congruence Egalité Somme Produit Puissance	Anneau (Z,+,$\times$) Identité Binôme de Newton Identité Multiple	Anneau ($\frac{z}{7z}$,+,$\times$) Corps (IR,+,$\times$)	Axiome de Péano Anneau ($\frac{z}{7z}$,+,$\times$) Corps (IR,+,$\times$)

Répertoire heuristique mathématique de la tâche

Réf : RCA001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit

5.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, notre objectif était la délimitation de corpus relatifs à la gestion au fonctionnement de l'étude dans les institutions mathématiques hors classe du Secondaire. A cette fin, nous avons indiqué l'ensemble des passages retenus des corpus et les raisons de cette démarche.

Au sein de la théorie anthropologique didactique, nous énonçons deux fonctions de la « gestion et du fonctionnement de l'étude hors classe : une première fonction dite d'« activation ou d'actualisation», et une seconde fonction dite de « changements, de transformations, d'organisations, réorganisations, de formalisation etc. Les analyses que nous avons réalisées concernaient, principalement, les gestes accomplis relevant des deux fonctions.

Dans les épisodes biographiques didactiques sélectionnés nous avons privilégié l'observation du « discours » de l'élève : ce qu'il dit, ce qu'il ne dit pas, ce qu'il écrit, ce qu'il n'écrit pas, ce qu'il fait, ce qu'il sous-entend. En dirigeant notre lentille d'analyse sur ce discours, nous nous interrogeons sur ce que l'élève fait, sur ce qu'il écrit, sur ce qu'il dit pour activer ou faire réactualiser un objet de l'univers cognitif des micros institutions classes de l'institution scolaire. Dans « ce qu'il fait », nous étudions les « objets » sur lesquels il s'appuie pour indiquer un « chemin » vers la connaissance attendue.

Ce faisant, nous avons repéré des objets de savoirs, et des rapports aux objets de savoirs, à partir desquels l'élève soutient la réactualisation des objets de savoirs en jeu dans l'analyse d'une tâche locale. Ils semblent être de « nature » différente : objets ostensifs propres aux organisations mathématiques mobilisées, objets non-ostensifs associés aussi à ces organisations mathématiques, marqueurs du temps, accomplissement de techniques, parmi d'autres. Nous avons aussi repéré que la connaissance du répertoire heuristique mathématique relatif à une tâche locale s'avère être un outil efficace par la mise en relation qu'il opère entre les différents éléments tels que le substrat, objets, techniques, technologie de l'énoncé en les hiérarchisant. Cette caractérisation de l'écosystème de la tâche permet à l'élève qui l'appréhende de reconnaître la propre réorganisation de ses connaissances privées, demandées par la tâche en étude autonome. Nous avons aussi repéré que la connaissance du substrat par l'élève dégage certains implicites propres à un texte mathématique et montre les habiletés requises pour la résolution d'une tâche, les implicites servent à susciter l'amorce de solution, les prérequis déclenchent le travail de l'élève comme un os de cuvier, le répertoire heuristique relatif à une tâche mathématique permet de généraliser l'étude d'une tâche par la connaissance de son écosystème, le répertoire heuristique relatif à une tâche fait ressortir les trous de rationalité du programme de terminale scientifique permettant ainsi de s'interroger sur la cohérence des programmes. Cette pluralité d'appuis demande un travail de synthèse que nous allons exposer dans le chapitre suivant

Les gestes et les fonctionnements d'études que nous allons présenter dans ce qui suit, sont issus des analyses de l'ensemble des épisodes biographiques didactiques. Nous avons élaboré la classification des gestes mathématiques en prenant, comme « critère de regroupement », la « nature » des objets qu'ils sollicitent pour soutenir l'étude autonome hors classe des élèves. Compte tenu de l'importante taille du corpus, nous ne présentons que certains extraits des transcriptions en appui des gestes d'études que nous identifions. Nous renvoyons aux transcriptions annexées à ce travail pour des précisions sur l'analyse des épisodes biographiques didactique d'étude autonome hors classe observée.

Chapitre 6 :

LES PHASES D'ACTIONS D'ETUDE ET LA PRODUCTION DES REPERTOIRES EPISTEMOLOGIQUE ET HEURISTIQUE

6.1 INTRODUCTION

Dans un premier temps, nous présentons des phases d'actions d'étude mathématique relatives au répertoire épistémologique et heuristique de l'objet mathématique à l'étude et qui peuvent être interprétés comme des *actions* ou *gestes d'étude* que les élèves de notre échantillon accomplissent. Les phases d'action d'étude qui sont produites par l'élève en situation réelle d'étude mathématique, nous semblent relever de deux fonctions :

- ✓ la première est l'activation du savoir ou des connaissances mathématiques, qui définissent un univers cognitif,
- ✓ la deuxième est la transformation, la réorganisation et la structuration de l'univers cognitif[331].

Ce sont ces deux grandes fonctions de gestion des répertoires épistémologique et heuristique mathématique qui nous intéressent[332]. Rappelons que les actions humaines ont été décrites par Galpérine[333] sous la catégorie personnelle de « base d'orientation de l'action » et que les actions qu'il envisage ont toujours une dimension que nous comprenons comme didactique.

Dans un deuxième temps, nous explorerons le cadre institutionnel des répertoires épistémologique et heuristique que nous avons élaboré[334], et nous illustrons la pertinence de sa description à travers quelques exemples biographiques.

Enfin, dans un troisième temps, nous reviendrons sur quelques épisodes de la biographie didactique des élèves de notre échantillon, pour en effectuer une nouvelle analyse en recourant aux actions ou gestes que nous aurons définis. Nous interpréterons ainsi la manière dont l'élève gère (organise dirige et oriente) ses répertoires épistémologique et heuristique pour produire la solution d'une tâche mathématique, en étude autonome.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, la notion de gestion est prise au sens de la mise en œuvre d'actions qui caractérise une certaine position institutionnelle, occupée par un élève dans un temps d'étude autonome en mathématiques. Pour ce qui nous concerne, nous regardons les actions mathématiques que l'élève conduit, lorsqu'il étudie une tâche mathématique pour définir et cadrer le lieu cognitif en lequel il doit se positionner mentalement afin d'y repérer des éléments d'appui pouvant lui permettre de répondre de façon adéquate au type de tâche mathématique qu'il s'est donné.

Le non différenciation entre les registres, du point de vue de la « valeur » et de la « fonction »[335] dans la réalisation d'une pratique au sein d'une institution, constitue une des

[331]Landy Rajason 1988
[332] Rappelons que le répertoire épistémologique est relatif au savoir et qu'il est donc institutionnel, tandis que le répertoire heuristique appartient en propre à chaque sujet de l'institution.
[333] Galpérine
[334] Suivant Araya 2008, qui parle bien sûr de cadre institutionnel de la mémoire et de gestes d'étude. Nous rendrons compte dans ce chapitre de ce que nous devons à cet auteur et de la manière dont nous avons fait évoluer ses apports pour rendre compte de nos propres observations..
[335]Bosch, 2000e l

spécificités des instruments ostensifs proposés au sein de la théorie anthropologique du didactique. Eu égard à cette indifférenciation, lorsque nous considérons la *gestion de l'étude autonome en mathématiques* comme une action régulièrement accomplie, il nous semble utile de ne pas privilégier par principe un registre que pourrait utiliser l'élève pour accomplir une telle gestion. En d'autres termes, les manières de gérer le répertoire épistémologique ou heuristique d'un objet mathématique peuvent mobiliser des ostensifs scripturaux, langagiers, graphiques, gestuels, etc. et nous identifions ces manières comme des « gestes d'étude » réalisés par l'élève, quand Araya (2008) les observait chez les professeurs comme des aides à l'étude données aux élèves : des « gestes d'enseignement ».

En suivant cet auteur, nous indiquons aussi le caractère institutionnel des objets sur lesquels portent ces actions : ils intègrent les techniques, les technologies et les théories, tous les éléments du modèle (la praxéologie) qui donne en TAD la description d'une activité[336]. De ce fait, les actions d'étude que nous avons repérés sont sans doute des construits institutionnels pour lesquels nous devons signaler deux caractéristiques. D'une part, nous considérons par principe qu'ils sont contraints par la dynamique institutionnelle : les thèmes à étudier, le temps à investir, le niveau des élèves, les évaluations nationales, etc. D'autre part, ils sont observés à partir des épisodes de la biographie didactique des élèves et des analyses de ces épisodes biographiques.

Nous sommes donc guidés par une théorie, porteuse d'une manière de voir la réalité apprenante, et dans laquelle nous situons la recherche. De ce fait, nous l'observerons par la suite en revenant sur les épisodes de la biographie didactique d'élèves analysés. Quel que soit l'élève les actions d'études semblent être propres, avec des différences plus ou moins prononcées, aux institutions d'étude et nous avons donc finalement suivi complètement la position théorique de la théorie anthropologique du didactique (TAD), qui considère que les actions observées sont des *gestes* à la fois institutionnels et instituants. Nous faisons ainsi un pas important qui nous conduit d'une position initiale plutôt psychologique (considérant chaque élève comme un isolat) à une position institutionnelle relevant donc de la TAD.

Cette position nous conduit à attribuer à l'élève des gestes instituants forts. Nous complétons ainsi l'idée exprimée par Mercier (1998), que *les élèves participent à l'enseignement* en montrant que ce n'est pas seulement en classe, comme aide au professeur, mais aussi *en dehors du temps scolaire et à l'intention d'eux-mêmes*, en continuité avec l'orientation institutionnelle qui s'analyse comme un système didactique. Le travail d'Araya (2008) portait sur l'observation de professeurs dans leur classe, et visait à déterminer les gestes auxquels a recours le professeur pour la réactivation d'objets et de rapports aux objets. Cependant, nous avions d'abord suivi le modèle de Galpérine « *la base d'orientation de l'action* (pour nous, mathématique) », avant de nous rendre compte de la dimension institutionnelle de l'action d'étude et de nous rallier à la position de la TAD sur cette question. De ce fait, nous parlerons comme Araya de gestes, et non pas d'action, comme le psychologue soviétique. Cela nous permettra de faire, le cas échéant, référence au fait que *des gestes sont des actions qui ont un sens pour autrui*, et que ce sons donc des éléments d'une action conjointe au sens de la théorie de l'action conjointe en didactique (G. Sensevy et A. Mercier 2007).

[336] « [T]toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de *praxéologie* » (Chevallard, 1999, p. 223).

Signalons que dans l'univers des divers types d'action d'aide à l'étude que nous avons repris d'Araya, les actions d'étude menées par les élèves nous semblent ne pas constituer des partitions. Nous avons ainsi observé des traces d'intersections non vides entre plusieurs types de gestes, ainsi que des éléments d'interactions et de réciprocité. C'est-à-dire que certains actes des élèves pourraient s'interpréter de plusieurs manières. Nous pensons qu'il y a là une question de découpage du temps réalisé par l'observation et que d'autres temporalités observées auraient pu donner d'autres interprétations, mais nous n'avons pas eu la possibilité de mettre cette question à l'étude dans le cadre de ce travail et nous avons choisi de n'explorer que ce que produit l'identification d'épisodes de la biographie didactique des élèves, hors classe.

6.2 LES GESTES D'ETUDE RELEVANT DE LA FONCTION DE REACTIVATION

Dans ce qui suit, nous présentons et redéfinissons les gestes d'études relevant de la première fonction dévolue à l'étude autonome d'une tâche mathématique que nous avons repérés, même si l'on sait bien qu'ils n'apparaissent pas tels quels, mais qu'ils procèdent d'une réorganisation, d'une réécriture qui dans le cas particulier de l'étude autonome mathématique est en grande partie pilotée par l'élève. Nous travaillons à partir d'extraits commentés des épisodes biographiques didactiques de notre échantillon de recherche.

Nous considérons que ce sont des gestes relatifs à un répertoire mathématique et donc, des propriétés institutionnelles. Nous avons en effet relevé, dans les épisodes biographiques des élèves de notre échantillon de recherche des points communs entre la base d'orientation de l'action de Galpérine et la classification d'Araya, qui nous permettent de reprendre comme typologie des gestes accomplis en étude mathématique autonome la typologie des gestes d'enseignement proposée par ce dernier auteur. Enfin, soulignons que nous n'avons pas choisi de classer les gestes selon leur fonction dans un ordre donné, car la plupart d'entre eux pourraient remplir différentes fonctions dans le projet d'apprentissage de l'élève.

6.2.1 Une première tentative d'interprétation

Nous présentons un extrait d'épisode didactique de RC001 pour illustrer quelques gestes relatifs à la base d'orientation de l'action lors de l'étude d'une tâche mathématique, en montrant que ces gestes sont de fait ceux que Araya a observés chez les professeurs aidant leurs élèves à étudier en leur désignant les éléments sur lesquels centrer l'attention ou les ostensifs pouvant activer leur mémoire pratique ou la mémoire du savoir.

Exercice : *Réf : RC001/S-5/20042008/Lois de probabilités*

Soit X *une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre* λ.

On rappelle que $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda . t} dt.$

La courbe donnée sur le graphique ci-dessous représente la fonction de densité associée.
Partie : A

1- *Interpréter sur le graphique la probabilité* $P(X \leq 1)$.
2- *Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre* λ
3- *On pose* $\lambda = 1{,}5$
1- *Calculer* $P(X \leq 1)$. *En donner une valeur exacte puis une valeur approchée à* 10^{-3} *près par excès.*
2- *Calculer* $P(X \geq 2)$
3- *Déduire des calculs précédents l'égalité suivante :* $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173$ *à* 10^{-3} *près*
4- *Calculer* $F(x) = \int_0^x 1{,}5 te^{-1{,}5t} dt$ *. Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$*. Interpréter le résultat*

Partie : B
Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixième de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ *=1,5. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.*

1- *On prélève au hasard un cylindre dans la production.*
2- *Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à* 10^{-3} *près*
3- *Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification?*
2- *On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindre suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.*
a) *Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés?*
b) *Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé?*

6.2.2 Les gestes d'étude à fonction « Technologique» (EtTh)

C'est la production d'une technique efficace à partir du répertoire d'outils appelé par un élément technologique. Pour Araya, cet élément appartient donc à la mémoire du savoir, dans la classe.

6.2.2.1 Un premier extrait d'épisode didactique

RC001**Verbatim de RC001** *Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentielle*

Verbatim de RC001 *Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePbQ1b*

Partie B : ////question 1b// on veut la probabilité // Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification.//Le sachant implique une probabilité conditionnelle// la probabilité qu'un cylindre qui a été accepté ait subi une rectification// Nous avons considéré les évènements// «A » le cylindre est accepté et « R »l'évènement le cylindre est refusé///donc//Nous notons cette probabilité conditionnelle $P_A(R)$ *///Or d'après la propriété de probabilité conditionnelle///cette notation nous donne* $P_A(R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(A)}$ * *//Nous venons de déterminer* $P(A)=1-0{,}2e^{-1{,}5}-0{,}8e^{-3}$ *////* $P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap\overline{R})$ *//* $P(A\cap R)=P(A)-P(A\cap\overline{R})$ *///avec* $P(A\cap\overline{R})=P(X\le 1)=e^{-1{,}5}+1$ *//ce qui permet d'avoir* $P_A(R)=\dfrac{0{,}8(e^{-1{,}5}-e^{-3})}{1-0{,}2e^{-1{,}5}-0{,}8e^{-3}}$ *////RC001 prend sa calculatrice ///ce qui donne une valeur approchée à* 10^{-3} *près de 0,151.*

Le commentaire de la question posée par RC001, nous citons

> ////question 1b// on veut la probabilité // Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ///Le sachant implique une probabilité conditionnelle// la probabilité qu'un cylindre qui a été accepté ait subi une rectification

Sachant qu'il est accepté est relatif dans le discours de RC001 à un cylindre usiné et implique une probabilité conditionnelle, donc un élément technologique. Ainsi, un «geste d'étude à fonction technologique» (EtTh) est relatif, comme son nom l'indique, à l'évocation par l'élève d'un élément technologico-théorique d'une organisation praxéologique connue de l'élève. La réactivation de cet élément lui servira de point de référence sur lequel s'appuyer. Par exemple, parler de probabilité conditionnelle sur les variables aléatoires continues en tant qu'élément technologique permet à cette élève d'évoquer les répertoires épistémologiques et heuristiques liés à ses conditions d'utilisation, aux conséquences induites, aux types de raisonnements qu'elle engage, au moment du temps didactique où il a été rencontré, comme la suite le montre.

Il s'agit pour RC001 *Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePbQ1b*, de faire des commentaires ou de se poser des questions qui évoquent un élément de son répertoire mathématique. La réactivation de cet élément est vue comme la réactivation d'un *point de référence* /// $P_A(R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(A)}$ /// que peut utiliser l'élève. Cet élément $P_A(R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(A)}$, l'élève va en effet le mettre au travail en faisant les transformations nécessaires [*Nous venons de déterminer* $P(A)=1-0{,}2e^{-1{,}5}-0{,}8e^{-3}$ *////* $P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap\overline{R})$ *//* $P(A\cap R)=P(A)-P(A\cap\overline{R})$ *///avec* $P(A\cap\overline{R})=P(X\le 1)=e^{-1{,}5}+1$ *//ce qui permet d'avoir* $P_A(R)=\dfrac{0{,}8(e^{-1{,}5}-e^{-3})}{1-0{,}2e^{-1{,}5}-0{,}8e^{-3}}$ *//*]

Il mobilise le répertoire épistémologique et heuristique que l'institution estime nécessaire à l'exécution de la tâche à l'étude. Signalons qu'un « élément technologique » d'une organisation mathématique pourrait être un objet dont la nature est variée, car son rôle explicatif, justificatif, et productif, est défini au sein des pratiques accomplies dans l'institution. En d'autres termes, c'est un objet institutionnel.

Le discours de RC001 [*on veut la probabilité // Sachant qu'il est accepté ……. Or d'après la propriété de probabilité conditionnelle///cette notation nous donne* $P_A(R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)}$ *]* fait aussi appel à une théorie, celle des probabilités conditionnelles, qui implique une technologie [$P(A) = P(A \cap R) + P(A \cap \overline{R})$ *//* $P(A \cap R) = P(A) - P(A \cap \overline{R})$ *///avec* $P(A \cap \overline{R}) = P(X \leq 1) = e^{-1,5} + 1$ *]*

6.2.2.2 Un deuxième extrait d'épisode didactique

Nous présentons un autre extrait d'épisode didactique pour illustrer l'action technologique *Réf: V001/S-4/26042008Loicontinue/loi exponentielle*

Alors/// Alors// silence

Alors// démontrer que la probabilité de l'intervalle $[a; a+s]$ *sachant* l'intervalle* $[a;+\infty[$ *[est bien égale à la probabilité de l'intervalle* $[a;s]$ *//Alors// humm///silence//Alors/// on sait que c'est une probabilité conditionnelle, donc je peux que euh///*

Dans cet épisode *le terme «sachant»** est ici relatif à un intervalle I pris dans une expression P_I. Le fait de savoir qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle constitue pour V001 aussi un *point de référence* sur lequel s'appuyer et évoque le répertoire épistémologique et heuristique mathématique lié à sa condition d'utilisation dans le cas de variables aléatoires continues. Pour V001, variable continue ne change pas la théorie des probabilités conditionnelles ou plutôt, intervalle est égal à un évènement, donc elle peut passer d'une variable discrète à une variable continue en utilisant les propriétés des probabilités conditionnelles. On voit que les gestes technologiques commandent à ce que Chevallard a appelé des « extensions praxémiques », qui conduisent des élèves, ici sous leur propre direction et non pas sous la direction d'un professeur, à faire confiance au travail normé d'une forme pour en étendre le sens dans des cas d'usage proches, sous le contrôle d'une référence théorique explicite qui fonde la similitude des conditions et des usages. Que de tels gestes puissent être le fait d'élèves en autonomie est tout à fait remarquable.

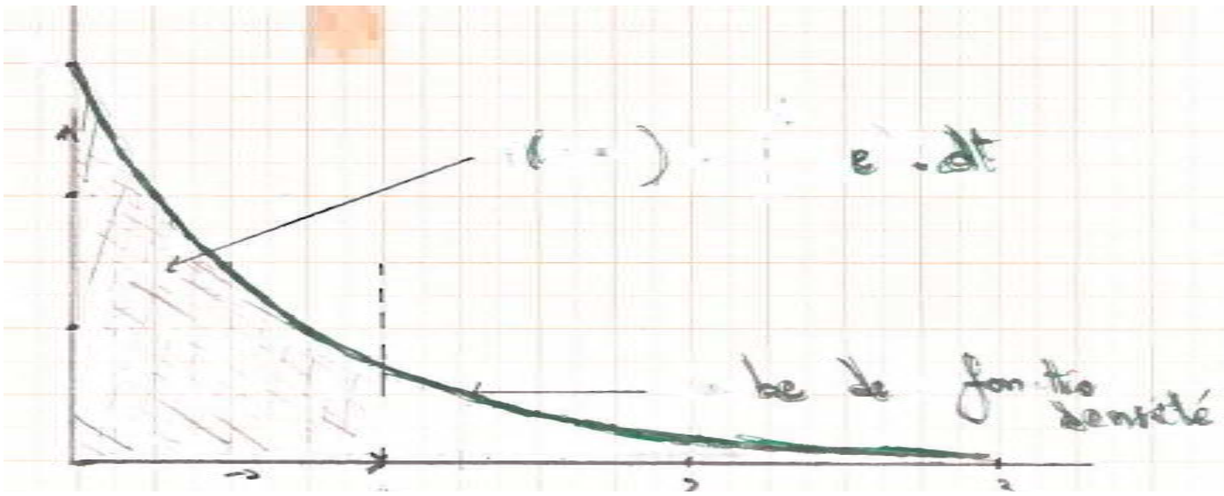
6.2.3 Les gestes d'étude à fonction « technique » (EtTc)

Un geste d'étude à fonction « technique » (Tc) porte sur des éléments d'un savoir-faire connu de l'élève. Nous considérons ici qu'il est relatif à l'activation de son répertoire heuristique, par l'élève lui-même, et non pas comme Araya à l'activation de la mémoire pratique des élèves, par le professeur. Par exemple, l'intersection de deux intervalles $[a; a+s] \cap [a,+\infty[$ nécessite de faire apparaître les éléments qui appartiennent aux deux intervalles. Il s'agit de mobiliser une technique de telle sorte qu'au fur et à mesure de son usage, l'élève se rappelle (à travers les questions posées par la tâche et grâce aux objets qui outillent l'action) des éléments d'un savoir-faire qu'il connaît. Ainsi, interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$ nécessite de faire apparaître les éléments d'un savoir relatif à la probabilité des lois continues qui font appel à leur tour aux intégrales d'une fonction exponentielle.

Nous présentons un extrait de cette façon de faire (*Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePbQ1b.* Extrait dans lequel RC001 traduit qu'une propriété sur la loi exponentielle par la probabilité conditionnelle d'un intervalle d'amplitude s ne dépend pas de la valeur de la borne inférieure.

Verbatim de RC001 *Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePbQ1b*

Soit X *une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre* λ *//// On rappelle que* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda . t} dt.$ */// La courbe donnée sur le graphique ci-dessous représente la fonction de répartition associée /// question 1 /// interpréter sur le graphique la probabilité* $P(X \leq 1).$ *///// On sait que dans l'énoncé* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda . t} dt.$ *// Donc //* $P(X \leq 1)$ */// représente une forme de calcul d'intégrale bornée de 0 à 1 //// Or l'intégrale // est une aire d'un domaine délimité /// silence // Donc //* $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda . t} dt$ *// L'interprétation géométrique est que ///* $P(X \leq 1)$ *représente graphiquement du domaine délimité par l'axe des abscisses // la courbe représentative de la fonction densité et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$



//////Courbe de la fonction de densité ///la partie hachurée représente $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda . t} dt$ */////*

Dans le verbatim ci-dessus, RC001 considère la fonction $\lambda e^{-\lambda t}$ comme la fonction densité de probabilité dont la courbe est donnée sur le graphique (énoncé). En observant la courbe, RC001 sait que la fonction densité $\lambda e^{-\lambda t}$ est une fonction positive car elle garde le même signe (+) sur $[0;+\infty[$ et donc par restriction sur $[0,1]$.De plus, la notation $\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt$ dénote que l'expression est un nombre et que ce nombre $\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt$ garde une interprétation en terme d'aire, car l'intégrale d'une fonction donnée est une mesure d'aire. Sachant que $\int_0^1 \varphi(t) dt$ avec $\varphi(t)$ une fonction strictement positive est égale à $F(1)-F(0)$ où $\varphi(t)$ est la dérivée de $F(t)$ sur $[0,1]$($F(t)$ est ici la primitive de la fonction densité de probabilité $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$). Il apparaît alors pour RC001 que : $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt$ est l'expression analytique de l'aire limitée par la courbe représentative de la fonction densité $\lambda e^{-\lambda t}$, l'axe des abscisses, et les droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Un objet manquant en terminale scientifique : la fonction de répartition

Nous partons de deux exemples pour expliciter cet objet qui était encore au programme dans les classes de terminales scientifiques CDE[337] avant les différentes réformes des maths, permettait de connaître la façon dont une variable aléatoire (discrète ou continue) est répartir dans les intervalles [a, b],($b \geq a \geq 0$) ce qui justifie la terminologie utilisée.

[Exemple 1 : Considérons le jeu de dé. On sait que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. L'application X de Ω dans IR définie par :

$X(1) = 1;\ X(2) = X(4) = X(6) = 2\ ;\ \ X(3) = X(5) = 4$ est une variable aléatoire. On a l'univers image, l'ensemble des valeurs des éléments de Ω par X tel que $X(\Omega) = \{1,2,4\}$

L'univers Ω' étant probabilisé, la probabilité pour que l'image $X(a_i)$ d'un élément a_i de Ω prenne la valeur 2 est $\frac{1}{2}$ et nous pouvons écrire $P'(X = 2) = \frac{1}{2}, de...même..P'(X = 1) = \frac{1}{6}$. Plus généralement nous noterons $(X = a)$ l'ensemble des éléments de Ω' d'image a. De même, a étant donné, désignons par $(X < a)$ l'ensemble des éléments de Ω'strictement majorés par a. Ainsi, $(X < 3) = \{1,2\}$, et on aura $P'(X < 3) = P'(X = 1) + P'(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. On constate ensuite que, à tout réel x, l'application P' fait correspondre un nombre réel appartenant à $[0,1]$: $P'(X = x)$. Cette application $x \rightarrow P'(X = x)$ s'appelle distribution correspondant à la variable X. Dans le cas de cet exemple, s nous désignons cette fonction par f :

[337] Programme de mathématique des années 70-80-90

$f(x) = P'(X = x)$. Ainsi, $f(x) = 0$, si $x \notin \{1,2,4\}$, $f(1) = \frac{1}{6}$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(4) = \frac{1}{3}$.]

On constante que à tout réel x, l'application P' fait correspondre un nombre réel $\in [0,1]$: $P'(X < x)$. Cette application $F : x \to P'(X < x) = F(x)$ s'appelle la fonction de répartition correspondant à la variable aléatoire X .

On peut alors dire que :

La distribution associée à une variable aléatoire X, appliquant (Ω, P) dans IR est une application de IR dans IR telle que $x \to f(x) = P'(X = x)$. f s'appelle aussi la loi de probabilité.

La fonction de répartition F associée à une variable aléatoire X appliquant (Ω, P) dans IR est une application de IR dans IR telle que $x \to F(x) = P'(X < x)$. Si F est une fonction continue et dérivable, sa dérivée $F' = \varphi$ s'appelle la densité de probabilité]

[exemple2 : Supposons : $F(x) = \frac{x^2}{40} .. si .. 0 \le x \le 4$, $F(x) = -\frac{x^2}{60} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} .. si .. 4 < x \le 10$ .On constate que $F(0) = 0, F(10) = -\frac{100}{60} + \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = 1$. Les dérivées sont respectivement, dans chaque intervalle : $0 \le x \le 4, F.'(x) = \frac{x}{20}$ (fonction positive). La densité de probabilité $\varphi(x) = F.'(x)$]

La variable aléatoire est discrète lorsqu'elle ne prend pas toute valeur d'un segment $[a,b]$(exemple 1), alors que dans l'exemple 2 elle est continue. Dans ce dernier cas, la fonction de répartition est en principe représentée par une intégrale : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 1$ .Et on suppose que cette intégrale à un sens. Si la densité de probabilité est $\varphi(x)$ lorsque la variable aléatoire : X est telle que $X(\Omega) = [a,b] \in [a,b]$ et si $\varphi(x) = 0$, $\forall x \notin [a,b]$.

On a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)dt + \int_{a}^{x} \varphi(t)dt. \, (b \ge a \ge 0)$

Or $\int_{-\infty}^{a} \varphi(t)dt = 0$, donc $F(x) = \int_{a}^{x} \varphi(t)dt$. On a donc : $\Pr ob\{X < x\} = \int_{a}^{x} \varphi(t)dt$. Ainsi, dans le cas d'une loi de probabilité continue, la fonction φ définie par $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ densité de probabilité, est la dérivée de la fonction F et F appelée fonction de répartition, définit la probabilité avec $P(X \le t) = F(t)$. Or, $F(x) = \int_{a}^{x} \varphi(t)dt$, le nombre $\int_{0}^{1} \varphi(t)dt$ représente l'aire du domaine limité par la courbe de la fonction dérivée $\varphi(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. Ainsi la fonction de répartition permet de connaître la répartition d'une variable aléatoire continue sur un intervalle borné comme une mesure d'aire. Sa connaissance permet à un élève[338] de mieux appréhender la densité de probabilité et la loi exponentielle, d'autant que cet objet réapparait dans les programmes mathématiques des classes post baccalauréats. Le pourquoi d'une telle organisation des programmes n'est pas l'objet de notre recherche.

Un autre extrait de cette façon de faire *Réf: V001/S-4/26042008Loi continue/loi exponentielle*

Extrait dans lequel V001 traduit une propriété sur la loi exponentielle par la probabilité conditionnelle d'un intervalle de largeur s ne dépend pas de la valeur de borne inférieure

la probabilité de l'intervalle [a ; a + s] sachant l'intervalle [a ; +∞ [////est égale à/// $P_{[a;+\infty[}[a;a+s]$ *la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] inter l'intervalle [a ; +∞[////le tout divisé par la probabilité de l'intervalle [a ; +∞[.* $\dfrac{P([a;a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)}$ *//////donc qui est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s]////sur/la/probabilité de l'intervalle [a ; +∞ [* $P_{[a;+\infty[}[a;a+s]=\dfrac{P([a;a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)}=\dfrac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)}$ *//////alors////Silence////Observe l'opération////Donc le tout euh/////étant égal à l'intégrale de /////allant de* a *à* $a+s$ *///sur l'intégrale allant de* a *à* $+\infty$ *///* $\dfrac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}dt}{\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt}$

Dans ce second extrait ci-dessus ; V001 a d'abord cherché à transformer la notation $\dfrac{P([a,a+s]\cap[a,+\infty[)}{P([a,+\infty[)}$. Sachant qu'on peut déterminer l'intersection de deux ensembles, V001 détermine d'abord l'intersection de deux intervalles. $[a,a+s]\cap[a,+\infty[=[a,a+s]$ parce que cet intervalle est inclut dans $[a,+\infty[$.Ce qui lui a permis de trouver que $\dfrac{P([a,a+s]\cap[a,+\infty[)}{P([a,+\infty[)}=\dfrac{P([a,a+s])}{P([a,+\infty[)}$. Par ailleurs, la notation $P([a,a+s]$ dénote l'expression analytique $\Pr ob\{a\le X\le a+s\}=F(a+s)-F(a)=\int_a^{a+s}\varphi(t)dt$ avec $\varphi(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ et que $P([a,+\infty[)$ dénote l'expression $\Pr ob\{a\le X\le +\infty\}=F(+\infty)-F(a)=\int_a^{+\infty}\varphi(t)dt$, avec $\varphi(t)=\lambda e^{-\lambda t}$. Une fois de

[338] Comme c'est le cas de l'élève V001 (entretien chapitre 7)

telles actions effectuées, V001 conclut que $\dfrac{P([a,a+s]\cap[a,+\infty[)}{P([a,+\infty[)} = \dfrac{P([a,a+s])}{P([a,+\infty[)} = \dfrac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}dt}{\int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt}$

6.2.4 Les gestes d'étude à fonction de replacement institutionnel (Re_I)

Un geste à fonction de « replacement » (Re_I) consiste selon Araya à produire ou indiquer des traces scripturales, faire des commentaires et/ou poser des questions porteuses d'éléments qui servent de balises pour un « chemin » permettant de se replacer aux points de vue –manière de faire ou de penser– prévalant dans certaines des différentes positions qui existaient dans une institution dont on faisait, ou on fait, partie. Il existe de nombreuses techniques professorales pour accomplir ces gestes :

> « L'explicitation du sens d'un mot ou la verbalisation d'une technique, le recours à un «ostensif de guidage » en tant que mot, expression, signe, écriture, symbole, etc., qui permet de se replacer au sein d'un niveau de codétermination didactique. »[339]- « le replacement épistémologique ou changement de cadre »[340]

Nous exemplifions le replacement institutionnel par un extrait d'épisode didactique de V001 où elle nous montre une telle action, appliquée à elle-même ce qui suppose une vision stratégique permettant d'imaginer un « chemin » et de le baliser, dans un domaine que l'on étudie.. *Réf: V001/S-4/26042008Loi continue/loi exponentielle*

V001 transforme l'écriture $\dfrac{P[a;a+s]}{P[a;+\infty[} =$

En utilisant les intégrales $P[a;a+s] = \int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}dt$ et $P[a;+\infty[= \int_a^{+\infty}\lambda e^{-\lambda .t}dt = 1-\Pr ob(X<a)$

conditions d'utilisation de la loi de durée de vie sans vieillissement, et les conséquences induites aux types de raisonnements qu'il engage

l'écriture $\dfrac{P[a;a+s]}{P[a;+\infty[} =$ donne $\dfrac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}.dt}{e^{-\lambda a}}$ /// en faisant retour à la définition des probabilités continues en jeu ici. Cette action est donc contractuelle.

[339] Araya2008
[340] Changement de cadre

Ensuite l'élève transforme l'écriture $\dfrac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t} .dt}{e^{-\lambda a}}$. Sachant que $\Pr ob\{a \leq X \leq a+s\} = F(a+s) - F(a) = \int_a^{a+s} \varphi(t)dt$ avec $\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ et $F(t) = -e^{-\lambda t}$, $\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t} dt = F(a+s) - F(a) = -e^{-\lambda(a+s)} + e^{-\lambda a}$ et $\Pr ob\{a \leq X < +\infty\} = \int_a^{+\infty} \varphi(t)dt = \Pr ob(X > a) = 1 - \Pr ob(X \leq a) = e^{-\lambda a}$. L'élève transforme l'écriture $\dfrac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t} .dt}{e^{-\lambda a}}$ en $\dfrac{-e^{-\lambda(a+s)} + e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda a}}$ qui est une écriture que V001 peut simplifier en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle. Cela n'est pas immédiat dans le contrat, mais peut être évoqué par la forme du dénominateur, qui engage à se placer dans le cadre d'un traitement algébrique de l'expression. Le replacement correspond donc ici à un double changement de cadre, des probabilités au calcul intégral et du calcul intégral au calcul algébrique sur les exponentielles.

Nous exemplifions les actions de replacement épistémologique par cet extrait d'épisode didactique *V001-S4/28032008/nombres complexes/exo1/Q1c*

Verbatim de V001 *V001-S4/28032008/nombres complexes/exo1/Q1c*

Exercice *: Dans chacun des cas suivants, déterminer géométriquement et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant les relations données* :

1c $\left|\bar{z} - 3 + 2i\right| = \left|z - 4i\right|$

1d $2\left|z + 2\right| = \left|\left(1 + i\sqrt{3}\right)z + 4\sqrt{3} - 4i\right|$

1c) V001 observe l'écriture de l'égalité/// $\left|\bar{z} - 3 + 2i\right| = \left|z - 4i\right|$ *///C'est équivalent à///silence ///mais non//On modifie d'abord l'écriture de* $\left|\bar{z} - 3 + 2i\right|$ *en utilisant le faite que le module de z barre est égal à celui de z //puis rédige que//* $\left|\bar{z}\right| = \left|z\right|$ *donc//* $\left|\bar{z} - 3 + 2i\right| = \left|\overline{z - 3 - 2i}\right|$ *//ce qui donne* $\left|z - 3 - 2i\right|$ *// voila (V011 souffle/ahan//donc l'équation deviendra)* $\left|z - 3 - 2i\right| = \left|z - 4i\right|$ *//donc ce qui est équivalent à la distance* $DM = BM$ *//Alors* $\left|z - 3 - 2i\right| = \left|z - 4i\right| \Leftrightarrow DM = BM$ *//Alors l'ensemble* E_3 *des points M est la médiatrice du segment[BD]*

V001de par son observation en cherchant les équivalences, fait recours à un ostensif de guidage : *le module de z barre est égal à celui de z //puis rédige que//* $|\bar{z}| = |z|$ qui est une propriété de son cahier de cours sur les modules d'un nombre complexe. Ceci lui permet de replacer l'écriture initiale au sein d'un niveau de codétermination didactique plus élevé et de produire l'épisode biographique durant lequel il met en place un remplacement d'écriture qui va l'aider à réussir la tâche

Verbatim de V001 *V001-S4/28032008/nombres complexes/exo1/Q1c*

1d)//Ona// $2\|z+2\| = \left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)z + 4\sqrt{3} - 4i\right\|$ *//Alors//petit//humm//humm//Alors//observe l'écriture//Silence// On modifie l'écriture du deuxième membre de l'égalité* $\left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)z + 4\sqrt{3} - 4i\right\|$ *//Ce qui donne// puis rédige//* $\left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)z + 4\sqrt{3} - 4i\right\|$ *//mais non j'écris la même chose//puis reprend//ce qui donne* $\left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)z + 4\sqrt{3} - 4i\right\| = \left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(z + \frac{4\sqrt{3}-4i}{1+i\sqrt{3}}\right)\right\|$ *// Qui est égale à* $\left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)\right\| \times \left\|z - \frac{4i\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}\right\|$ *//ce qui donne* $\left\|\left(1+i\sqrt{3}\right)\right\| \times \|z-4i\|$ *///Silence//ce qui finalement2*$\|z-4i\|$ *//Bon//l'équivalence devient alors/* $2\times\|z-4i\| = 2\times\|z+2\|$ *//soit alors module de*$(z+2)$*égal au module de*$(z-4i)$*/// Ce qui équivaut à la distance* AM *est égale à la distance* BM *//Donc l'ensemble* E_4 *des points M est la médiatrice du segment AB///*

Dans cet extrait V001 transforme en effectuant une factorisation de facteur $\left(1+i\sqrt{3}\right)$, ce facteur $\left(1+i\sqrt{3}\right)$ lui a permis par diverses simplification d'obtenir une écriture de module connu, qu'il remplace dans le second membre de l'égalité pour obtenir $|z-4i| = |z+2|$; ce qu'il exprime comme l'égalité entre deux segments.

6.2.5 Les gestes d'étude à fonction de replacement chronologique (Ach)

Les actions chronologiques (ACh) recourent à l'utilisation des marqueurs du temps naturel et notamment scolaire. Elles sont considérées par l'élève qui accomplit l'action, comme favorisant le répertoire heuristique mathématique. L'exemple prototypique est constitué de phrases de V001 du type (« on a déjà étudié les intégrales et les fonctions expo»)

Un extrait de l'épisode biographique *Réf: V001/S-4/26042008Loicontinue/loi exponentielle*

On déjà étudié les intégrales et les fonctions expo donc $\frac{P[a;a+s]}{P[a;+\infty[} = \frac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}$ Donne sachant qu'on a vu que $\int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda . t} dt = e^{-\lambda a}$ donc on a///// L'élève remplace ici $P[a;+\infty[= \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda . t} dt$ par $\int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda . t} dt = e^{-\lambda a}$ combine à la fois un geste de replacement

(« on a déjà étudié les intégrales et les fonctions expo») est un geste chronologique : « Une méthode de calculs des intégrales d'une fonction exponentielle étudiée dans un autre chapitre de l'année scolaire» préside le discours de V001 dans une action de remplacement chronologique.

Nous présentons un autre extrait d'épisode didactique d'une autre élève (*Réf : AC001/S-2/22012007/fonction composée expo & polynôme /PA-Q1)*

Verbatim d'AC001 *Réf: AC001/S-2/22012007/Ln & Expo*

Lit tout l'énoncé   *Bon//bon// bonbon//Je vois que la fonction a étudiée est un produit de deux fonctions //une fonction carrée et une fonction exponentielle///Il y a une suite numérique avec les intégrales//donc les primitives//et inégalités sur les intégrales//Soit* f *la fonction définie sur IR par ///* $f(x) = x^2 e^{1-x}$ *///On désigne par C sa courbe représentative dans un repère ortho normal* $(O, \vec{I}, \vec{J})$ *d'unité 2cm//AC001 rédige//Soit* f *la fonction définie sur IR par* $f(x) = x^2 e^{1-x}$ */// QuestionA-1//Déterminer les limites suivantes//* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *//quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe représentative de la fonction* f *?// Discours de AC001///Pour la limite :* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *///La fonction carrée donnera* $+\infty$ *et la fonction exponentielle donnera 0///le produit est une indétermination///Donc je dois transformer l'expression de la fonction* f *//Ce qui donne//AC001 rédige//* $\lim_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$ *// Supposons que (1-x)= X /On sait que //* $\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ *Donc* $\lim_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty$ *//La fonction* f *est un produit de deux fonctions// D'autre part* $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ *//Nous pouvons alors conclure que :* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *///la limite à moins infini///Alors///Je transforme l'expression de la fonction// AC001 rédige ///* $\forall x \in IR$, $f(x) = x^2 e^{1-x}$ *//* $f(x) = x^2 . \frac{e^1}{e^x} = e . \frac{x^2}{e^x} = \frac{e}{\frac{e^x}{x^2}}$ *///* $f(x) = x^2 e^{1-x} = \frac{e}{\frac{e^x}{x^2}}$ *// Par croissance comparée//On*

sait que// que : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$ *//Donc* $\forall x \in IR$ *//* $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{\frac{e^x}{x^2}}\right)=0$ *///Comme conséquence géométrique//La droite d'équation* $y=0$ *est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction* f *au voisinage de* $+\infty$

Les marqueurs sont considérés par AC001 comme le facilitant du répertoire adéquat. AC001, combine ici à la fois les actions de remplacement et chronologique. Une telle conjugaison simultanée de deux gestes, comme il en va en didactique de l'engagement de l'élève dans plusieurs types de situations, ou plusieurs moments de l'étude, est un signe de la complexité du réel anthropologique qui ne se laisse pas réduire à une logique de partitionnement.

6.2.6 Un phénomène didactique : les gestes déstabilisateurs (Ds)

« Les élèves anticipent leur action de calcul mathématique car nul n'engage un calcul sans une idée du résultat »[341] .Ce qui leur permet d'avoir une visée stratégique pour piloter une série d'actions tactiques. Un élève produit un geste « déstabilisateur » (Ds) lorsque l'élève interroge à nouveau frais les rapports qu'il a antérieurement établis à certains objets de savoir et à travers des demandes mettant en doute certaines ses affirmations, ou encore en recourant à l'usage de contre-exemples Ainsi les gestes déstabilisateurs provoquent des répertoires connus, des réorganisations, des changements de l'univers cognitif. La déstabilisation provoquée, qui passe par la contradiction ou la nécessité d'une justification, nécessite de la part de l'élève qui la vit, la convocation de répertoires heuristiques antérieurs stables permettant de créer un milieu qui peut être adidactique, renvoyant des rétroactions permettant de changer de point de vue, ou qui peut se constituer en média milieu[342] fournissant des outils pour la justification de l'affirmation en cours d'exécution.

Nous exemplifions ce phénomène par un extrait d'épisode didactique où V001 se demande si elle est certaine de sa production mathématique: *Réf: V001/S-4/26042008Loi continue/loi exponentielle*

[341] Alain Mercier &Corine Castella « comment les élèves apprennent des méthodes »Petit x 1993
[342]Au sens deYves chevallard

Mais//silence/// donc, on a tout ceci (*) qui est égal à $\dfrac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}.dt}{e^{\lambda a}}$

Ah //J'ai oublié le signe - ici au dénominateur* //// donc je corrige//

$\dfrac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}.dt}{e^{-\lambda a}}$.

///Ce qui est égal à ///le tout que divise $\dfrac{-e^{-\lambda(a+s)}+e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda a}} = \dfrac{e^{-\lambda a}\left(-e^{-\lambda s}+1\right)}{e^{-\lambda a}}$ ///

Dans cet épisode didactique la question est de savoir pourquoi et comment l'élève s'aperçoit que le signe (–) manque dans cette expression $\dfrac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t} dt}{e^{-\lambda a}}$. C'est tout simplement, parce qu'elle anticipe le terme ($e^{-\lambda a}$) qui va venir en facteur au numérateur $\dfrac{-e^{-\lambda(a+s)}+e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda a}} = \dfrac{e^{-\lambda a}\left(-e^{-\lambda s}+1\right)}{e^{-\lambda a}}$ pour permettre sa simplification avec celui du dénominateur.

6.2.7 Un effet de l'orientation stratégique de l'action : la prise d'indices

Ce sont des indices qui outillent une analyse stratégique qu'on peut appeler technologique et parfois théorique. Les actions « prise d'indices » (Pr) sont accomplies par l'élève lors de la mise en œuvre d'une technique, de la réalisation d'une tâche en étude, etc. Elles sont de nature topo génétique dans la mesure où l'élève se soulage en partie d'un travail qui aurait pu lui être entièrement dévolu en utilisant des données de références ou des axiomes mathématique. A partir de l'ostension de certains indices pris dans la tâche à réaliser, les actions de prise d'indices concernent le rappel de la technique, ou de certains de ses pas ; de ce fait, elles restreignent ou guident les connaissances de l'élève. C'est le cas par exemple dans cet épisode didactique suivant relatif à la congruence d'un produit (*Réf : RC001/S-5/ 11052008 2008/Arithmétique /Congruence d'unproduitQ1*

<u>Rappel</u>

Pour deux entiers relatifs a et b on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit

$a \equiv b$ [7] lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$

Soient a, b, c, d des entiers relatifs. Démontrer que : si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7] alors $ac \equiv bd$ [7]

Ce faisant, la tâche guide l'élève vers l'accomplissement de la technique qui consiste à faire le choix d'utiliser les indications du pré requis libellé **« rappel »** et les bons usages implicites appelés par les formes des questions et les notations. RC001 a compris que les objets présents dans la question sont utiles et dispose ainsi des outils pour trouver les solutions attendues. A l'issue de ce travail, certains éléments de la rédaction construite portent la trace des ostensifs qui ont servi d'indices de répertoires heuristiques

Un autre exemple extrait de l'épisode didactique d'AC001Réf :AC001/S-2/22012007/fonction composée expo & polynôme /PA-Q2-3)

Verbatim d'AC001

////Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2e^{1-x}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère ortho normal $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ d'unité 2cm *1- Montrer que f est dérivable sur IR. Déterminer la fonction dérivée f ' de f //* *2- Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa représentation graphique* ***Verbatim proposée par AC001****//* *Question A-2///Montrer que f est dérivable sur IR. Déterminer la fonction dérivée f ' de f ///////* *Nous avons un produit de deux fonctions ///Alors//// Discours de AC001///On sait que la fonction affine $1-x$ est dérivable sur IR et la fonction exponentielle aussi, donc la fonction composée e^{1-x} est aussi dérivable sur IR ///De même la fonction carrée est dérivable sur IR. Ainsi, le produit x^2e^{1-x} est dérivable sur IR. Donc la fonction f est dérivable sur IR/// Calculons la dérivée f '////Dérivée d'un produit de fonction////Rédaction de AC01// $f(x) = x^2e^{1-x}$ ///On a : $f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x}$ /// En factorisant par x //On a// $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ ///* *Question A-3//Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa représentation graphique/// On sait que la fonction exponentielle est toujours positive// $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ //Discours de AC001/// Ce produit est le trinôme $-x^2+2$, il est donc du signe du facteur a dans l'expression ax^2+bx+c à l'extérieur des racines évidentes//Rédaction de AC001// $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ Donc $e^{1-x}>0$ $\forall x \in IR$* *La dérivée f ' est alors du signe du produit $x(2-x)$. $-x^2+2$ = 0 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ ////// l'extérieur des racines évidentes $x_1 = 0, x_2 = 2$ et du signe contraire de a à l'intérieur des deux racines évidentes $x_1 = 0, x_2 = 2$ On sait que $a = -1$///Donc $\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[,\ f'(x) < 0$* *$\forall x \in]0;2[,\ f'(x) > 0$ // $\forall x \in \{0;2\},\ f'(x) = 0$ //Ce qui implique que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]\cup]2;+\infty[$ et strictement croissante sur $[0;2]$//Discours de AC001/// Le tableau des variations de la fonction f ////*

x	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
f '	- 0 + 0 -
f	$+\infty$ $4e^{-1}$ 0 0

Dans ces deux épisodes AC001 utilise de techniques voir des propriétés connues comme guides On sait que la fonction affine $1-x$ est dérivable sur IR et la fonction exponentielle aussi, donc la fonction composée e^{1-x} est aussi dérivable sur IR ///De même la fonction carrée est dérivable sur IR. Ainsi, le produit x^2e^{1-x} est dérivable sur IR. Donc la fonction f est dérivable sur IR Ensuite AC001 utilise la dérivée d'un produit de fonction $(uv)' = u'.v + v'.u$ pour trouver la fonction dérivée $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ demandée par la tâche1.Pour la tâche 2,AC001 utilise « Ce produit est le trinôme $-x^2+2$, il est donc du signe du facteur a dans l'expression ax^2+bx+c à l'extérieur des racines évidentes//Rédaction de AC001// $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ Donc e^{1-x} >0 $\forall x \in IR$

La dérivée f ' est alors du signe du produit $x(2-x)$. $-x^2+2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ ////// l'extérieur des racines évidentes $x_1 = 0, x_2 = 2$ et du signe contraire de a à l'intérieur des deux racines évidentes $x_1 = 0, x_2 = 2$ On sait que $a = -1$ » comme guide vers l'accomplissement de la technique consistant à étudier le signe de la dérivée qui, ici est un produit de deux faction dont l'un est trinôme et l'autre une fonction exponentielle qui est toujours positive $\forall x \in IR$. Ce faisant, AC001, considère ainsi que le signe de la dérivée dépend uniquement du signe du trinôme $-x^2+2$ et donc permet d'établir les variations de la fonction à partir de la connaissance du signe du trinôme. Cette action facilite le la mise en place de répertoire pratique Chez AC001, des diverses phases par lesquelles, l'élève doit passer. A la fin de cette réalisation, les éléments de réponses portent la marque des ostensifs qui ont servi d'indices de répertoire : le signe du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ connaissant les racines évidentes, pour déduire les variations d'un produit $(ax^2+bx+c)e^{U(x)}$ avec $U(x)$ une fonction affine dans ce cas de situation mathématique.

6.2.8 Les actions de fixation (fx)

Une action de « fixation » (Fx) consiste à fixer un rapport ancien à un objet mathématique afin de le rendre présent en tant que point d'appui incontestable à l'aide duquel des connaissances nouvelles pourront émerger. La réalisation d'un tel geste contribue à la construction d'un milieu pour l'étude. Ce rapport peut être le rapport à un savoir mathématique qui doit être présent, ou le rapport à une croyance que l'on a déclaré fausse et qui fixe « une fois pour toutes » que cette croyance devra être collectivement oublié même si, de manière privée, chacun est libre de continuer d'y adhérer « *à ses risques et périls* »…

Nous exemplifions ces formes d'actions par un extrait d'épisode didactique *Réf: V001/S-4/26042008Loicontinue/loi exponentielle*

Par exemple, dans le passage suivant, l'élève fixe le fait que $\frac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)}$ se traduit par $P([a;a+s]) = \int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}dt$ et $P([a;+\infty[) = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda a}$ ce qui conduit à $\frac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}dt}{e^{-\lambda a}}$

L'enjeu d'une partie de l'épisode observé, est la démonstration de ce résultat qui n'a été que constaté, lors d'un épisode précédent, où l'élève a construit la démonstration adéquate

$$P_{[a;+\infty[}[a;a+s] = \frac{P([a;a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)} = \frac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)} = \frac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}dt}{\int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt} = \frac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}dt}{1-P(X\le a)}$$ *sachant que*

$$P([a;+\infty[) = 1-P(X\le a) = e^{-\lambda a}$$

Ici *le sachant que* est aussi fixateur

Nous présentons un deuxième extrait d'épisode didactique pour exemplifier les actions de fixation *(Réf : L001/S-2/17022008/fonction exponentielle –Suite-Intégrale*)

Verbatim de L001

Question 1 ////On considère le nombre $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *///Démontrer que* $1+a+a^2+a^3+a^4=0$

Solution proposée par L001///Discours de L001// On sait que $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *//Donc en remplaçant par a //Rédaction de L001/// On a :* $1+a+a^2+a^3+a^4 = 1+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ *//On sait que///Tout nombre ayant la puissance 0 est égal à 1///Donc* $\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0 = 1$*////Ce qui permet de noter que* $1+a+a^2+a^3+a^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ *////Humm mm////On peut donc dire que////*$1+a+a^2+a^3+a^4$ *t une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison* $q = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *et de premier terme égal 1///Silence///Cette somme est égale*

à/// $\dfrac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)} = \dfrac{1-\left(e^{i2\pi}\right)}{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)} = \dfrac{1-\left(e^{i\pi}\right)^2}{1-\left(e^{i\pi}\right)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1-1}{1-\left(e^{i\pi}\right)^{\frac{2}{5}}} = 0$ *////Donc////D'où*
$1+a+a^2+a^3+a^4=0$ *///Voilà/////*

Dans cet extrait, L001utilise la fixation de l'énoncé en remplaçant le réel a par $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *t*out en considérant que $\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0=1$ Le fait que L001 doit réactiver la propriété $\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0=1$ légitimé dans l'institution, ce qui lui permet de tenter de démontrer la tâche en étude. Cette stratégie de remplacement conduit L001 à noter que

$$1+a+a^2+a^3+a^4 = 1+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$$

$$1+a+a^2+a^3+a^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$$

Deux rapports ont été fixés dans cet extrait de l'épisode didactique de L001.le fait que L001 sait que $\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0=1$ en plus de savoir que d'une égalité ne pouvant être établie par un calcul algébrique peut dans certains cas être établir à partir de l'analyse :$1+a+a^2+a^3+a^4$ *t une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison* $q=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *et de premier terme égal 1///Silence///Cette somme est égale*. Les deux rapports ont constitués L001, des points d'appuis incontestables pour la réalisation de la tâche. Par ailleurs $1+a+a^2+a^3+a^4=a^0+a^1+a^2+a^3+a^4=\dfrac{1-a^5}{1-a}$. Ceci est nul si et seulement si $a^5=1$.Comme $a=e^{i\frac{2\pi}{5}}$, alors $a^5=e^{5i\frac{2\pi}{5}}=e^{i\pi}=1$. Cette transformation fixation ne vient pas comme cela, parce qu'on ne peut anticiper l'intervention de l'objet « monstrueux » $e^{i\frac{2\pi}{5}}$ dans la formule $\dfrac{1-a^5}{1-a}$ et qu'on va donc l'incarcérer dans la somme $1+a+a^2+a^3+a^4$ $=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$

Pour s'apercevoir que la somme ainsi écrite tombe sous la formule. L'élève fait preuve ici d'une anticipation, d'orientation stratégique et donc un effet inverse en utilisant

$= \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0 + e^{\frac{i2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ *comme la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison* $q = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

6.2.9 Les gestes d'étude à fonction de « déclenchement » produits par l'appui sur un ostensif (Od)

Les gestes « ostensif déclencheur » (Od)[343] s'appuient sur un ostensif à forte valence sémiotique. Ainsi, l'ostensif constitué par la forme trigonométrique ou la forme exponentielle d'un nombre complexe appelle-t-il le répertoire heuristique mathématique du module et d'un argument du nombre complexe ; l'ostensif constitué par la loi continue ou la loi de durée de vie sans vieillissement appelle-t-il le répertoire épistémologique et heuristique de la probabilité conditionnelle, de l'intégrale, des théories des ensembles, des primitives, des propriétés algébriques et fonctionnelles des fonctions exponentielles afin de susciter chez l'élève la réactivation de notions ayant des liens de filiations légitimés par la communauté des mathématiques et présents cognitivement dans de telle situation didactique et qui peuvent permettre d'aboutir au but de la tâche en étude.

6.2.10 Conclusion

Les gestes qui viennent d'être décrits ont des fonctions diverses, mais tous ou presque consistent à ouvrir l'espace cognitif initial pour produire un milieu plus ouvert permettant de développer une activité mathématique autrement impossible. Ils ont donc une fonction méso génétique, dans la mesure où leur accomplissement vise à la création d'un milieu pour conduire une tâche. Mais quand ils sont produits par les élèves que nous observons, ils correspondent à bien plus car ces élèves poursuivent le travail en étudiant l'organisation efficace d'actions qu'ils ont inventée et en faire une technique pour les tâches du même type : ils cherchent donc toujours la généricité d'une manière de faire nouvelle en changeant de niveau de codétermination. Leur travail a donc une dimension topogénétique forte, de même qu'une dimension chronogénétique puisque leur travail (leur étude) fait avancer le temps didactique, comme les gestes fixateurs indiquant, d'un point de vue institutionnel, le rapport désormais attendu.

[343] Ces ostensifs, et notamment l'effet qu'ils produisent de par leur interaction avec le contexte institutionnel, ont aussi été appelés « ostensifs détonateurs » dans Araya & Matheron (2007), parce que les rendre présents dans une situation donnée permet d'évoquer, quasiment à coup sûr, le souvenir recherché. Ils résonnent ainsi comme une détonation

6.3 *INTERPRETATION ECOLOGIQUE DES GESTES ET ACTIONS IDENTIFIES PRECEDEMMENT : LE TRAVAIL DU REPERTOIRE DANS L'ECOLOGIE DES SAVOIRS.*

Dans ce qui suit, nous empruntons à Landy Rajason ses analyses écologiques des contraintes et des conditions dans l'étude des phénomènes de transpositions didactiques pour redéfinir tout en exemplifiant les gestes d'études relevant de la deuxième fonction dévolue à l'étude autonome d'une tâche mathématique que nous avons repérés. Cette deuxième fonction relative à l'évolution de l'univers cognitif, est spécifique aux nécessaires transformations à la réorganisation d'un ensemble de notions, à la structuration mathématiques, parce que des savoirs contribuent à le modifier en fonction des objets et du niveau scolaire. Nous ne classifions pas ses gestes d'études, car seule la situation mathématique en étude détermine leur mouvement. Ils sont identifiés sous les noms de : gestes d'habitation, geste de la niche, gestes d'analyse écologique, gestes de principe d'exclusion, geste de niveau trophique, gestes de formalisation et gestes de rigueur mathématique

6.3.1 *Une production technique rendue possible par le déplacement dans l'habitat d'un outil*

L'«habitat » (H) constitue en quelque sorte l'adresse de l'objet mathématique, les différents lieux de résidence de l'être mathématique. C'est la place de l'être mathématique dans l'association mathématique. Il répond à la question « où se situe l'être mathématique dans une institution donnée »

Nous exemplifions l'habitat par un extrait d'épisode didactique *RéfV001/S-4/ 26042008/Probabilité sur les lois continues /loi exponentielle*

Verbatim de V001

Démontrer que $P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = P([0;s])$

Solution proposée par V001//Discours de V001///Alors//[silence]//Alors/démontrer que la probabilité de l'intervalle $[a;a+s]$ *sachant l'intervalle* $[a;+\infty[$ *est égale à la probabilité de l'intervalle* $[a;s]$ *//Alors/humm//[Silence]//Alors/On sait que c'est une probabilité conditionnelle//donc je peux//Euh///[Silence]//la probabilité de l'intervalle* $[a;a+s]$ *sachant l'intervalle* $[a;+\infty[$ *est égale à ///la probabilité de l'intervalle* $[a;a+s]$ *intersection l'intervalle* $[a;+\infty[$ *le tout divisé par la probabilité de l'intervalle* $[a;+\infty[$ *///rédige//* $P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = \dfrac{P([a;a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)} = \dfrac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)}$

Dans cet épisode, V001 décrypte le premier membre de la notation en la substituant au concept de probabilité conditionnelle sur les variables continues. L'adresse est ainsi trouvée, V001 pourra appliquer les conditions et les contraintes d'existence du concept.de probabilité conditionnelle aux variables continues.

6.3.2 *La mobilisation technique et l'effet de la redéfinition des conditions de fonctionnement de l'objet : la « niche »*

La niche est la place fonctionnelle qu'occupe dans un habitat donné, l'être mathématique étudié. C'est en quelque sorte la profession qu'il y exerce. Elle répond à la question « A quoi sert l'être mathématique étudié ».

Nous présentons un extrait d'épisode didactique Réf : *L001/S-4/ 2104 2008Probabilité sur les lois continues /loi exponentielle)*

Verbatim de L001

L001/S-4/ 2104 2008Probabilité sur les lois continues /loi exponentielle)

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ *.On rappelle que* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.   1- *Interpréter graphiquement la probabilité* $P(X \leq 1)$.   2- *On suppose que* $\lambda = 2{,}5$ *.Calculer cette probabilité* $P(X \leq 1)$ *Solution proposée par L001///question1///On a//* $P(X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1)$ *///et la probabilité sur un intervalle est l'intégrale de la densité de probabilité sur cet intervalle///Donc* $P(X \leq 1)$ *est///en unités d'aires//l'aire sous la courbe représentative//Silence//de la densité de probabilité entre les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$ *////*   *//question2///Comme* $\lambda = 2{,}5$ *///* $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-2{,}5t}\,dt = \left[-e^{-2{,}5t}\right]_0^1 = -e^{-2{,}5} - (-1) = 1 - e^{-2{,}5}$ *////prend//sa//calculatrice//soit* $P(X \leq 1) \approx 0{,}92$ *///*

Dans cet extrait, Le discours de L001 préside l'identification la fonctionnalité graphique et algébrique de la notation de $P(X \leq 1)$ *On a//* $P(X \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1)$ *///et la probabilité sur un intervalle est l'intégrale de la densité de probabilité sur cet intervalle///Donc* $P(X \leq 1)$ *est///en unités d'aires//l'aire sous la courbe représentative//Silence//de la densité de probabilité entre les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$ *//////question2///Comme* $\lambda = 2{,}5$ *///* $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-2{,}5t}\,dt$

$= \left[-e^{-2,5t}\right]_0^1 = -e^{-2,5} - (-1) = 1 - e^{-2,5}$ *////prend//sa//calculatrice//soit* $P(X \leq 1) \approx 0,92$ *///*

Ici la niche est convoquée sous forme $\int_0^1 \lambda e^{-2,5t}\,dt$ *, qui est 'aire du domaine délimité par les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$

6.3.3 Le changement d'écosystème

Les gestes du principe d'analyse écologique (Pae) : Si un être mathématique occupe plusieurs niches, on convient de distinguer autant d'êtres mathématiques écologiquement différents qu'il y a de niches différents

Nous exemplifions par cet extrait d'épisode didactique *Réf : V001/S-4/2604 2008/Probabilité sur les lois continues //exo1/Q1)*

Verbatim de V001

$P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = \dfrac{P([a;a+s]\cap[a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)} = \dfrac{P([a;a+s])}{P([a;+\infty[)}$ *//Alors[silence]/[observation de l'écriture]//ce qui donne//Donc intégrale allant de* a *à* $a+s$ *///* $\dfrac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}\,dt}{e^{-\lambda a}}$

Le discours et la rédaction de V001 dénotent ce que la notation implique, les être mathématiques qui habitent ces niches

6.3.4 Le changement de niveau trophique

L'écosystème et le niveau trophique (ENT) : C'est un système d'êtres et de relation entre les êtres mathématiques, chaîne trophique ou réseaux trophiques. L'étymologie du mot « trophique » rappelle que les niveaux trophiques sont classés à partir d'une caractérisation qui prend sa racine dans la nourriture : « qui se nourrit de qui ? ». Ainsi, en analogie avec la chaîne alimentaire, les différents niveaux caractérisent la position au sein de l'écosystème : l'être de niveau n est un outil pour l'être de niveau n+1. Les chaînes trophiques sont donc les « chaînes d'outils, s'impliquant mutuellement ». Cette approche enrichit la théorie anthropologique de la didactique d’une approche écologique.

Nous présentons cet extrait d’épisode didactique qui montre les changements de niveau trophique dans la production de l’élève *(Réf RC001/S-4/20042008/Lois de probabilitésPbQ4)*

Verbatim de RC001

Calculer $F(x)=\int_0^x 1{,}5e^{-1{,}5t}dt$ *Déterminer* $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. *Interpréter le résultat///*
Solution proposée par RC001/// $F(x)=\int_0^x 1{,}5e^{-1{,}5t}dt$ *///* $F(x)$ *est l’intégrale de deux fonction///pour calculer* $F(x)$ *////j’effectue une intégration par partie en posant pour tout réel* t *///* $U(t)=t$ *et* $V(t)=-e^{-1{,}5t}$ *///Les fonctions* $U.et.V$ *sont dérivables et admettent des fonctions dérivées continues sur IR avec pour tout réel* t *///* $U'(t)=1$ *et* $V'(t)=1{,}5e^{-1{,}5t}$ *///On a alors///* $F(x)=\int_0^x 1{,}5e^{-1{,}5t}dt=[U(t)\times V(t)]_0^x-\int_0^x U'(t)\times V(t)dt$ *//Ce qui donne//* $F(x)=[-te^{-1{,}5t}]_0^x-\int_0^x(-e^{-1{,}5t})dt$ *///puis//* $F(x)=-xe^{-1{,}5s}-\left[\frac{1}{1{,}5}e^{-1{,}5t}\right]_0^x$ *///et enfin* $F(x)=-xe^{-1{,}5x}-\frac{1}{1{,}5}e^{-1{,}5x}+\frac{1}{1{,}5}$ *///Calcul de limite///On a d’une part* $\lim_{t\to-\infty}(e^t)=0$ *//donc* $\lim_{x\to+\infty}(e^{-1{,}5x})=0$ *///et d’autre part///* $\lim_{t\to-\infty}(te^{-t})=0$ *///donc* $\lim_{x\to+\infty}(xe^{-1{,}5x})=0$ *///Finalement* $\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{1{,}5}$ *////Cette limite représente l’espérance mathématique de la variable aléatoire X ///sa valeur est* $\frac{2}{3}$ *//conforme au résultat du cours* $E(X)=\frac{1}{\lambda}$ *////*

6.3.5 La «métaphore »

Les questions d’écologie comprennent aussi les formes de vie pour les jeux de langage et les systèmes de notations et les jeux dans les écosystèmes correspondants ; mais ici ils sont connaissances et non savoirs institués. Ils sont déplacements ou changement de cadre langagier.

La métaphore est un outil puissant d’analyse. Elle permet de comprendre le syncrétisme, élément essentiel dans l’écologie du savoir. Les morceaux de savoir sont assez gros et liés entre eux « le tout structuré ». Certains objets peuvent rentrer et y vivre d’autres non. En effet dans cette optique le premier mouvement de la transposition didactique permet composer une théorie construite, organisée, en un paysage du savoir structuré. Le deuxième mouvement est la description du paysage selon la vision obtenue à partir d'un chemin personnel de l'élève. Le troisième mouvement est la vision de l'élève du paysage obtenu à partir du chemin personnel d'élèves.

6.3.6 La systématisation

La systématisation dans le cas de l'étude d'une tâche mathématique, est la recherche d'un tout structuré localement indépendant du reste des mathématiques dans une acceptation au niveau global :

> « L'organisation de résultats variés en un système déductifs d'axiomes, de concepts majeurs et de théorèmes »[344] et à« un niveau local, où on admet (par justification visuelle) un nombre limité de résultats et définitions à partir desquels on peut effectuer une organisation locale»[345]
>
> « the organization of various results into a deductive system of axioms, major concepts and theorems »[346]

Dans son travail de thèse effectué sur le formalisme et la rigueur, E. Rouy (2007) reprend la méthode axée sur le formalisme qui stipule que: la « méthode consiste à :

> « larguer les fonds pour ne conserver que la pure forme »[347].

Elle permet d'appréhender que « la vérification d'une tâche mathématique en étude est indépendante des images qu'on lui associe ».Ce sont des organisations de relations de logiques

6.3.7 Production de systèmes symboliques

Le formalisme est « une méthode pour se prémunir contre tout recours à l'intuition dans les preuves ». Le formalisme vise, parfois, à la construction d'un système formel bâti sur des axiomes à l'aide de règles d'inférence et des règles d'écritures des formules en vue d'une théorie. « Le formalisme consiste à développer pour une théorie, donc pour un outil, un cadre le plus conceptuel, le plus dépouillé possible»[348].

Précisons le concept en prenant la référence de la réforme des mathématiques modernes. Le formalisme a consisté « à bâtir, à partir des structures des plus pauvres, des plus générales, les éléments les plus riches avec le souci d'utiliser au mieux la richesse des isomorphismes entre les structures ». Ainsi pour nous le formalisme est une systématisation de la construction de l'édifice

344 De Villiers, 1990, p.18 ; trad. R. Cabassut
345 R. Cabassut, 2005
346 De Villiers1990
347 E N.Rouche, 95
348B. Beauzamy 2001

mathématique avec la recherche d'une cohérence globale afin d'obtenir, une « économie de pensée qui consistera à ne étudier qu'une fois dans un cadre abstrait un lot de propriétés que l'on pourra ensuite appliquer telles quelles dans chaque théorie »[349].. En mettant l'accent sur les structures, se dégage une nouvelle fonction du formalisme, qui permet « les transferts d'intuition »[350]. Enfin le formalisme permet d'ordonner la matière mathématique dans sa globalité :« Par reconnaissance de structures communes à des domaines parfois éloignés se tissent des liens entre les théories du types « liens de parenté de filiation »contribuant à en faire voir l'architecture d'ensemble »[351].

6.3.8 Travail des liens entre jeux de langage et jeux symboliques

La rigueur d'un discours mathématique peut se mesurer par deux critères. Le premier critère est une certaine « simplicité ». Le discours n'a pas de phrases en trop « pas de complication inutile »[352] que l'on peut enlever : toutes les phrases sont nécessaires au discours. Le discours n'a pas aussi besoin d'être complété. Il est suffisant. La vérification des hypothèses, des techniques utilisées doit être mentionnée: « La rigueur signifie : connaître le domaine d'application des outils que l'on utilise…»[353]. Tous les pas du raisonnement déductif sont présents et justifiés, mais dans le cadre du deuxième critère. Le deuxième critère est le respect des normes et des usages. Le langage formel utilisé et les raisonnements associés doivent « se conformer à un rituel en usage »[354]en effectuant:« l'usage policé des signes désignant les objets mathématiques et les raisonnements qu'on peut faire sur ceux-ci »[355].

Ce souci d'« adéquation entre le signifié et le signifiant »[356] permet une gestion fine de l'exactitude entre la technique et le discours associé. Ainsi dans ce travail, la systématisation est la volonté de tendre vers un tout cohérent, à partir d'« axiomes admis » ; la formalisation constitue de ce fait, la recherche d'une systématisation globalement cohérente. La rigueur quant à elle, est la rédaction précise dans les usages et le contrôle de la cohérence du discours pris au sens de Descartes au niveau de l'institution visée ; mais la rigueur reste la règle du jeu consistant à une tentative d'obtenir des textes d'un savoir fermé, rigoureux malgré l'impossibilité de fermer le texte[357]

Nous exemplifions ce travail de liens par cet extrait d'épisode didactique qui montre comment sont utilisés de manière combinatoire le formalisme, la rigueur mathématique la métaphore et la systématisation

[349]E N.Rouche, 95
[350] N.Rouche, 95
[351]E. Rouy, 2007
[352]L. Schwartz, 1986
[353] B. Beauzamy, 2001
[354] Noirfalise et al, 1996
[355] Noirfalise et al, 1996
[356]E. Rouy, 2007
[357]Comme F. Gonseth (1926) en citant la numérotation des axiomes de N Péano.

(Réf L001/S-2/17022008/Intégrale-Suite-Exponentielle)

Enoncé

Dans cet exercice, « n » est un entier naturel non nul

On considère la suite (U_n) *définie par :* $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1- *a) Soit* φ *la fonction définie sur* $[0;2]$ *par* $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Etudier les variations de φ *sur* $[0;2]$. *En déduire que, pour tout réel t dans* $[0;2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0;2]$, *on a :* $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

c) Par intégration en déduire que : $\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

d) On rappelle que $\lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right)$

Montrer que, si (U_n) *possède une limite* L *, alors* $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2- *a) Vérifier que, pour tout t dans* $[0;2]$, *on a :* $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} . dt$

b) Montrer que pour tout $t \in [0;2]$, *on a* $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. *En déduire que* $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$

c) Montrer que (U_n) *est convergente et déterminer sa limite* L .

Verbatim de L001/*Réf L001/S-2/17022008/Intégrale-Suite-Exponentielle*

Sous épisode1a *Question n°1/////Discours de L001////On considère la suite* (U_n) *définie par///* $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$ *///**1-a)** Soit* φ *la fonction définie sur* $[0;2]$*par* $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ *//Etudier les variations de* φ *sur* $[0;2]$. *En déduire que, pour tout réel t dans* $[0;2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$ *////Alors ////Soit la suite* (U_n) *définie pour* n *entier naturel non nul par :* $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} . e^{\frac{t}{n}} dt$ *////Etude//de//variation de la fonction* $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ *//sur//*$[0;2]$*////C'est une fonction rationnelle*

$\frac{f}{g}$..*de..dérivée* $\frac{f'g-g'f}{g^2}$ *///Rédaction////* $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$ *est une fonction rationnelle de la forme//Donc* $\varphi'(t)=\frac{2(t+2)-2t-3}{(t+2)^2}=\frac{1}{(t+2)^2}$ $\varphi'(t)=\frac{1}{(t+2)^2}$ *////est donc une dérivée toujours///Discours de L001// Le numérateur de la dérivée est positif de même que le dénominateur///donc*

une dérivée toujours positive sur $[0;2]$, *nous en déduisons que* φ *est strictement croissante sur* $[0;2]$*/////*

Donc : si $0 \le t \le 2$ *on a* $\varphi(0)\le\varphi(t)\le\varphi(2)$ *///Discours de L001/// Ensuite, déterminons les limites aux bornes de l'intervalle* $[0;2]$*////Rédaction//* $\lim\limits_{h\to 0}(\frac{2t+3}{t+2})=\frac{3}{2}$ *et* $\lim\limits_{h\to 2}(\frac{2t+3}{t+2})=\frac{7}{4}$ */// Donc, pour tout* $.t\in[0;2]...\frac{3}{2}\le\varphi(t)\le\frac{7}{4}$ *////*

Sous épisode1b

Question n°1-b)///Montrer que, pour tout réel t dans $[0;2]$, *on a :* $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$ *//Discours deL001//Alors ///Je peux utiliser l'égalité précédente en le multipliant par* $e^{\frac{t}{n}}$ *car* $n\in IN...et..t\in[O;2]$*///En plus quel que soit* X, e^X *est strictement positif et l'inégalité ne change pas de signe///Rédaction///Donc//*

$n\in IN...et..t\in[O;2]$*//Nous savons que// pour tout réel* $t,..e^{\frac{t}{n}}$ *>0// il s'ensuit que pour tout réel* t *de* $[0;2]$

$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$ *////*

Sous épisode1c

Question n°1-c)//Par intégration en déduire que /// $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}}-1)\le U_n\le\frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$ *//Discours//Alors/// Humm//// Je pars de l'expression démontrée précédemment//[Silence]///Nous allons faire l'intégration de l'inégalité :* $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\le\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\le\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$ *///Donc//[Silence avec observation de l'inégalité]//Donc//Rédaction//*

Par intégration, nous pouvons écrire que// $\int_0^2\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}dt\le\int_0^2\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}dt\le\int_0^2\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}dt$ *//ce qui donne///* $\frac{3}{2}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt\le U_n\le\frac{7}{4}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt$ *///Discours //On sait que la primitive de* $e^{\frac{t}{n}}$ *est* $ne^{\frac{t}{n}}$ *//donc//Rédaction///Or* $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt=\left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2$ *//Soit* $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt=ne^{\frac{t}{n}}-n$ *//Par conséquent on a* $\frac{3}{2}(ne^{\frac{t}{n}}-n)\le U_n\le\frac{7}{4}(ne^{\frac{t}{n}}-n)$ *///Discours L001/// En factorisant par n, on a//Rédaction///* $\frac{3}{2}n(e^{\frac{t}{n}}-1)\le U_n\le\frac{7}{4}n(e^{\frac{t}{n}}-1)$ *///Donc par intégration on a bien* $\frac{3}{2}n(e^{\frac{t}{n}}-1)\le U_n\le\frac{7}{4}n(e^{\frac{t}{n}}-1)$ *///*

Sous épisode 1d

Question n°1-d)//On rappelle que $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$ *///Montrer que//si* (U_n) *possède une limite* L *///alors* $3\le L\le\frac{7}{2}$ *//Discours de L001/// Alors//// Oh ///Oh///* $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$ *////est une limite remarquable que l'on peut noter sous la forme///Rédaction de L001///* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$ *//Discours de L001/// On peut aussi en déduire par changement de variable que///Rédaction de L001///* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right)=1$ */////en posant* $x=\frac{2}{n}$ *avec* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)=0$ *//Discours de L001// En rendant au même dénominateur l'expression cela permet d'avoir//rédaction de L001///* $\lim_{n\to+\infty}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=2$ *//Donc* $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=3$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=\frac{7}{2}$ *///D'où* $\frac{3}{2}n(e^{\frac{t}{n}}-1)\le U_n\le\frac{7}{4}n(e^{\frac{t}{n}}-1)$ *///ce qui implique que///* $3\le L\le\frac{7}{2}$ *//discours de L001///Si* (U_n) *possède une limite* L *////alors est comprise entre/////* $3\le L\le\frac{7}{2}$ *////*

Sous épisode2a

*Question n°2//**2-a)**//Discours de L001///Vérifier que///pour tout t dans* $[0;2]$, *on a :* $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$ *///En déduire l'intégrale* $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt$ *////Discours ////[Alors////On nous demande de démontrer que* $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$ *]///Je pars de* $2-\frac{1}{t+2}$ *////je développe en le rendant au même dénominateur//Rédaction de L001//Donc Pour tout t de* $[0;2]$, $2-\frac{1}{t+2}=\frac{2(t+2)-1}{t+2}$ *//Soit* $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$ *///[Discours de L001///*

Pour calculer l'intégrale $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt$ *//j'utilise l'expression déjà démontrée]////Rédaction// Donc on a///*

$I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt=\int_0^2(2-\frac{1}{t+2})dt$ *//Il s'ensuit qu'une primitive de* $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$ *sur* $[0;2]$ *est la fonction* ϕ *définie par* $\phi(t)=2t-\ln(t+2)$ *//car* $t+2>0$*///[discours de L001/// Par conséquent l'intégrale est//]//Rédaction de L001///* $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt\Rightarrow I=[2t-\ln(t+2)]_0^2$ *///Soit* $I=4-\ln 4+\ln 2$ *///Or* $\ln 4=2\ln 2$ *///Donc* $I=4-\ln 2$ *////*

Sous épisode2b

Question n°2-b///[Discours de L001///2-b) Montrer que, pour tout $t\in[0;2]$, *on a* $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}$ *////En* *déduire que* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}} I$ *]///[//Alors//Silence///Humm mm////Encadrement d'exponentielle///Nous savons que la fonction exponentielle est une fonction croissante sur IR///Donc///On sait que]Rédaction de L001/// Pour tout* $t \in [0;2]$ $1 \le e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{2}{n}}$ *///D'après la question 1-a)pour tout* $t \in [0;2]$ $\varphi(t)$ *>0////[Discours de L001/// En multipliant la démonstration précédente par* $\varphi(t)$ *///on a]///Rédaction//*$1\varphi(t) \le \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \le \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}$ *///[Discours deL001//En intégrant chaque membre de l'inégalité précédente on a]///Rédaction///*

$\int_0^2 1\varphi(t)dt \le \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{t}{n}}dt \le \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}dt$ *///Ce qui donne* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}}\int_0^2 \varphi(t)dt$ *///D'où* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}} I$ *///En conclusion on a////*$1 \le e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{2}{n}}$ *et* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}} I$ *///*

Sous épisode2c

2-c) Montrer que (U_n) *est convergente et déterminer sa limite* L *///[Discours de L001///Alors//On sait que la limite de expo(x) lorsque x tend vers zéro est égale à 1//Donc]//Rédaction///0n sait que* $\lim_{x\to 0}(e^x) = 1$*// changement de variable/// on pose* $x = \frac{2}{n}$ *//Donc//*$\lim_{n\to 0}\left(\frac{2}{n}\right) = 0$ *///On a//* $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{2}{n}}\right) = 1$*///En conclusion/ La suite* (U_n) *est convergente de limite* $L = 4 - \ln 2$ *///*

Dans cet extrait, l'élève mène un raisonnement clair et simple suivant un ordre chronologique, qu'il conduit avec un raisonnement justifié. Avec sa lecture de l'énoncé, L001 énonce ce que les notations dénotent en considérant les ostensifs et non ostensifs langagiers et scripturaux. L001 a recourt à une systématisation et à une production de systèmes symboliques pour l'étude des variations d'une fonction rationnelle lorsqu'elle

C'est une fonction rationnelle $\frac{f}{g}$*..de..dérivée* $\frac{f'g - g'f}{g^2}$ *///Rédaction////*$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ *est une fonction rationnelle de la forme//Donc* $\varphi'(t) = \frac{2(t+2) - 2t - 3}{(t+2)^2} = \frac{1}{(t+2)^2}$ $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+2)^2}$ *////est*

*donc une dérivée toujours///Discours de L001// Le numérateur de la dérivée est positif de même que le dénominateur///donc [*Utilisation d'un ostensif langagier pour trouver le signe de la dérivée]

une dérivée toujours positive sur $[0;2]$*, nous en déduisons que* φ *est strictement croissante sur* $[0;2]$*////*

Ensuite, ayant une idée précise du comportement de la fonction sur $[0;2]$ *est strictement croissante sur* $[0;2]$*////*

L001 utilise la croissance de la fonction sur [0;2] pour théoriser que quelque soir le réel t, $\varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(2)$, ce qui le conduit par transformation d'écriture avec les limites de trouver que $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \geq \frac{7}{4}$ quel que soit t élément de [0 ;2]. Une fois la structure de l'exercice comprise L001 utilise ses connaissances-propriété d'AL-jabar- sur les inégalités avec un changement de cadre par le terme $e^{\frac{t}{n}}$ >0 pour tout $n \in IN$ et pour tout $t \in [0;2]$ pour trouver que $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \geq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$

6.4 CADRE INSTITUTIONNEL DU REPERTOIRE DIDACTIQUE

Nous considérons ici le *répertoire didactique* comme l'indexation sur le temps des types de rapports aux objets mathématiques portés par l'institution « étude autonome hors classe ». Il est pour nous un système de repérage des gestes didactiques relatifs aux objets de savoirs outillant les tâches rencontrées dans les classes mathématiques dont un élève a été ou demeure encore un des membres. Il vise à penser l'univers didactique proche ou lointain de l'élève, antérieur et présent, relatif aux objets mathématiques et à leur étude, supposé commun et connu des sujets de l'institution même s'il n'est observable dans son entier développement que chez les très bons élèves comme ceux que nous avons suivis. Un élève tel que nous le pensons ici doit en effet pouvoir convoquer, transformer et manipuler les connaissances adéquates à une tâche mathématique et pour cela, avoir pour lui-même une action instituante en organisant l'étude de ce que le professeur lui a désigné comme œuvre à étudier et en enquêtant le plus largement possible sur cette matière.

Les points d'ancrage identifiés nous ont conduits à l'élaboration d'un modèle à trois dimensions qui, organise les objets de référence didactique des institutions auxquelles un sujet apprenant a été un des membres

La première dimension est relative au temps institutionnel et au temps didactique ; on y indexe les objets et rapports aux objets connus de l'élève. Le temps scolaire se réfère au temps de l'institution[358]; c'est un temps marqueur des événements pédagogiques et sociaux qui est, d'une manière ou d'une autre, associé à l'activité didactique des élèves. Nous le considérons comme du micro-cadre du répertoire, ainsi, il intègre des marqueurs tels que les années scolaires, les trimestres, l'Ecole primaire, etc., et aussi des expressions du type « *le jour de telle activité d'étude autonome* », *« la recherche de telle formule sur internet* », etc. Nous incluons aussi dans cette dimension, les personnages du temps scolaire qui ont eu des rapports avec l'activité d'étude. Par exemple, *« les parents qui viennent en aides », «le professeur du cours de soutien», etc.*

Le temps didactique est relatif à la mise en texte du savoir qui engendre un temps de l'apprentissage[359]; c'est-à-dire un temps qui permet la venue de nouveaux savoirs dans

[358] Y.Chevallard et A. Mercier, 1987
[359] Chevallard, 1991

l'institution d'étude. Dans ce sens, il est structuré par les événements qui assurent son arrivée. En le considérons tant que dimension du répertoire, il intègre des moments au cours desquels le milieu a été modifié ; ce qui implique des changements de contrat. Par exemple, passer de l'étude de la technique de « étudier le signe d'une expression algébrique » à celle du « sens de variation ».

Ainsi, parmi les appuis des répertoires heuristiques mathématiques, ceux mobilisés par les gestes chronologiques sont-ils les plus visibles parmi ceux relatifs à cette dimension. Pourtant, remarquons qu'en général, le replacement à un certain point de vue d'une institution à laquelle on a appartenue est structuré dans le temps. De même que les objets et les rapports que les gestes cherchent à mobiliser.

La deuxième dimension du modèle du micro-cadre du répertoire didactique, sur laquelle se trouvent les points d'appui pour la construction du répertoire heuristique, est déterminée par les positions offertes à l'élève, sujet des institutions auxquelles il a été ou demeure un membre, et à partir desquelles se sont constitués les rapports aux objets de savoir mathématiques. Cette deuxième dimension est donc relative au topo.

Quand il s'agit d'une institution à laquelle l'élève ne fait plus partie, l'éloignement par rapport aux assujettissements imposés par l'institution, et qui ont été vécus par l'élève, rend possible le replacement dans des positions qui n'étaient pas celles occupées auparavant. La volonté d'occuper une certaine place implique un certain replacement du point de vue de l'institution classe depuis une certaine position ; condition relative aux situations de souvenir au sens que nous considérons ici indispensable pour se rappeler.

Force est de constater que ce replacement dans d'autres positions, disponibles ou non dans l'institution actuelle, est régulé par le classe scolaire dont l'élève fait partie à l'instant t. Il existerait ainsi une *activité rationnelle* qui prend son point de départ dans les conditions où se trouve actuellement la société c'est-à-dire dans le présent. Ce que nous appelons répertoire heuristique mathématique ne fonctionnerait que sous le contrôle de cette raison. Les rôles et la place que l'élève occupe dans les institutions actuelles, au sein desquelles il prend contact avec une organisation mathématique, sont alors considérés comme porteurs des conditions d'organisations didactiques dans l'institution didactique. Ainsi, l'élève ne peut se référer à l'histoire des objets mathématiques des classes antérieures que sous le contrôle de cette raison, qui est présente dans la classe de l'année scolaire en cours. Nous pensons que c'est ainsi que l'institution, d'étude et d'apprentissage, dispositif social, met en jeu des manières de faire et de penser propres et l'organisation du répertoire heuristique didactique de ses membres.

Force est de constater que jusqu'à un certain point, tous les gestes d'études analysés dans cette recherche se réfèrent à un replacement du point de vue ou de pensée d'une communauté mathématique. Plus précisément, les différents types de gestes d'études de replacement, qu'ils soient chronologiques, techniques ou technologiques..., mettent davantage en évidence cette nécessité d'adopter une position relevant des moments d'étude ou d'apprentissage dans les institutions d'études

La troisième dimension du micro-cadre de ce que nous nommons répertoire heuristique didactique est déterminée par le complexité d'objets et de rapports aux objets qui, institutionnellement, sont supposés connus ou établis par les élèves de notre échantillon de recherche et donc par un élève de la classe de terminale scientifique. En d'autres termes, c'est un sous-ensemble implicite de l'univers cognitif de l'institution scolaire. De tels objets et rapports aux objets peuvent être structurés en plusieurs niveaux de codétermination didactique, qui servent à délimiter le « milieu média »[360] , avec lequel, nous pensons que l'élève doit interagir pour reconstruire le répertoire heuristique mathématique relatif à une tâche mathématiques. De cette manière, les niveaux qui modélisent des conditions et des contraintes à partir desquelles se déterminent conjointement les organisations mathématiques et les organisations didactiques, sont aussi vus comme relevant d'une structuration de l'histoire didactique institutionnelle à laquelle l'élève a appartenu à une période donnée ou appartient encore. Cette troisième dimension est donc relative aux niveaux de codétermination didactique.

Sachant que les objets ostensifs (objets mathématiques qui se manipulent) et les non-ostensifs (objet mathématique qui s'évoquent) outillent les organisations mathématiques cristallisées dans chacun des niveaux de codétermination didactique, c'est donc à travers la dialectique existant entre ostensifs et non-ostensifs que l'élève sujet d'une institution donnée construit ou à accès aux organisations mathématiques qui s'y trouvent ou ont été étudiées. Dans ce sens, ostensifs et non-ostensifs sont les premiers points de référence pour la réactualisation et la transformation adéquate des connaissances. En particulier les types de gestes qui activent des ostensifs de « guidage », des ostensifs détonateurs, les gestes chronologiques qui mobilisent des marqueurs du temps, des gestes technologiques et notamment les gestes de replacement, les gestes de niche, les gestes de l'habitat qui permettent de connaître les adresses et les fonctionnalités, les gestes du principe d'analyse écologique, les gestes du principe d'exclusion, les gestes d'écosystème et du niveau trophique, les gestes de la double contrainte trophique, les gestes de la métaphore, et notamment les gestes de replacement, de la métaphore ,du formalise et de la rigueur du discours mathématique mettent davantage en évidence pour nous cette dimension du micro-cadre de répertoire heuristique mathématique

Nous venons de présenter ci-dessus le modèle du système de référence de l'histoire didactique des élèves participants de notre échantillon de recherche relativement l'accomplissement des tâches à leur charge. Nous avons aussi repéré des gestes qui sont interprétés comme des techniques didactiques pour la réalisation d'une tâche mathématique.

6.5 CONCLUSION

Après avoir montré au chapitre 5 des exemples d'analyses d' épisodes biographiques didactiques et les résultats relatifs aux objets sur lesquels l'élève en réussite mathématique appuie les fonctions1 et les fonctions 2 lors de l'accomplissement d'une tâche mathématique, nous avons dans ce sixième chapitre exposé dans un premier temps une synthèse de ces résultats avec les exemples de chacun des *gestes d'étude* accomplis par les élèves de notre dispositif de recherche, en montrant comment les gestes d'enseignement (d'indication ou, d'aide à l'étude) que réalisent les professeurs selon Araya sont aussi le fait des très bons élèves envers eux-mêmes

[360] Au sens chevallardien

Les gestes d'étude que nous avons ici identifiés assurent des fonctions de réactivations et surtout des fonctions de changement et de transformation. Ils servent de support à l'actualisation et à la construction des répertoires épistémologique et heuristique dont dispose l'élève. Leurs fonctions spécifiques sont déterminées dans l'avancée du projet d'apprentissage de chaque élève : préciser le nom d'un objet ou d'un être mathématique, et pour mettre en œuvre une technique, identifier et énoncer un résultat, reprendre l'organisation dans laquelle il est initialement pris afin de connaître ses lieux de résidence dans le réseau mathématique (son habitat), connaître ses places fonctionnelles (sa niche), connaître donc son écosystème et ses chaînes trophiques.

Les points d'appui identifiés lors de l'accomplissement des gestes d'études des élèves observés sont principalement relatifs aux éléments technologiques d'organisations mathématiques connues de l'élève, aux marqueurs de temps, aux positions occupées par l'élève dans les institutions dont il faisait ou fait partie et aux encodages institutionnels d'ostensifs qui outillent les pratiques mathématiques.

Ainsi, à partir de l'analyse des gestes, nous avons identifié un cadre institutionnel de répertoire épistémologique, qui est l'élément visé par le travail des élèves développant leur répertoire heuristique : ce cadre fonctionne comme système de référence pour orienter l'histoire mathématique de ces élèves, au sein de l'institution, lors de la construction d'un répertoire heuristique fort. Et nous avons vu comment ce cadre est interprété au sens large par les très bons élèves, qui se situent dans un temps ouvert très largement sur l'avenir de leurs études mathématiques (ils jouent sur les niveaux de détermination des objets qu'ils étudient) comme sur son passé (les faits biographiques antérieurs, reconstruits en « mémoire du savoir » comme l'a théorisé Matheron (2000) et que nous pensons comme répertoire épistémologique) mais aussi dans un espace ouvert sur d'autres organisations de la transposition (ils jouent alors sur l'enquête dans des ouvrages anciens tenus de l'histoire familiale, personnelle ou dans les sites internet auxquels ils arrivent à accéder).

Les gestes d'étude sont donc structurés en trois dimensions, qui englobent les différents points d'appui dont l'institution d'étude hors classe dispose pour la réactivation de connaissances nécessaires lors de l'étude d'une tâche mathématique : *les marqueurs du temps, les marqueurs de la position et du rôle de l'élève dans les institutions fréquentées et les marqueurs des sous-ensembles de l'univers cognitif, qui est structuré en plusieurs niveaux de siginification*. Nous reconnaissons dans ces trois dimensions, les fonctions constitutives (chrono, topo et méso genèse), des systèmes didactiques et de manière cohérente avec notre abord écologique des répertoires épistémologiques et heuristiques nous avons reconnu, dans cette structuration, la position première des gestes mésogénétiques.

Nous formulons l'hypothèse que certains des gestes repérés dans les analyses d'épisodes biographiques didactiques des élèves de notre échantillon sont propres aux activités humaine, relatives à l'apprentissage. L'accomplissement des gestes de métaphore, de formalisme, de rigueur d'un discours mathématique de techniques, technologiques, de fixation, déstabilisateurs et topo génétiques, pourrait être plus sensible aux contraintes et conditions des institutions d'études.

Un des objectifs de notre recherche est de déterminer les caractéristiques de la vie institutionnelle de l'étude autonome hors classe qui ont des effets sur la gestion du répertoire épistémologique et heuristique. A cette fin, nous avons analysé le fonctionnement de l'institution

« étude autonome hors classe » à partir de l'analyse de différentes sources d'information : les transcriptions des observations et des entretiens. Nous présentons les résultats de cette analyse dans le chapitre suivant, en exposant les effets que les contraintes et les conditions institutionnelles ont sur la gestion des répertoires épistémologique et heuristique.

Chapitre 7 :

SUR LE FONCTIONNEMENT DES INSTITUTIONS D'ETUDES AUTONOMES

Effets dans la gestion du répertoire épistémologique et heuristique

7.1 INTRODUCTION

Notre objectif ici, est d'identifier des caractéristiques écolo-institutionnelle de « l'étude hors classe » des élèves constituants notre dispositif de recherche, qui pourraient avoir des effets dans la gestion du répertoire épistémologique. Ainsi, nous exposons dans un premier les résultats issus de l'entretien individuel des participants, de même que les interprétations que nous en avons faites en termes de dimensions ou d'approche d'organisation de l'étude et de contrats didactiques instaurés dans chacune des institutions d'études autonomes observées. Ensuite, nous exposons les effets des organisations didactiques institutionnelles en termes d'éléments d'organisations didactiques. Enfin, nous discutons des possibles effets, des caractéristiques écolo- institutionnels sur la gestion du répertoire épistémologique relatif à une tâche mathématique en étude. L'objectif ici est aussi d'essayer de trouver des éléments de réponse aux caractéristiques du fonctionnement de l'institution d'étude autonome, qui ont des conséquences dans la gestion par l'élève du répertoire épistémologique adéquat de la tâche mathématique en étude autonome.

Nous rapprochons dans cette thèse le fonctionnement des institutions d'études autonomes observées, aux manières de penser et de faire le travail mathématique[361] des participants de notre dispositif de recherche. Pour décrire un tel fonctionnement des institutions d'études autonomes observées, nous avons sollicité des instruments d'analyses: l'organisation effective de l'étude appuyée sur les dimensions pointées de différentes phases didactique[362], la catégorisation des types de contrats didactiques mis en jeu, et enfin, le modèle de l'espace des organisations didactiques.

Dans les paragraphes qui suivent, nous exposons les résultats des analyses qui visent ces trois aspects. Les sources qui ont permis de constituer le corpus d'analyse sont les entretiens individuels avec les élèves et quelques parents, les questionnaires adressés à certains parents[363], les épisodes biographiques didactiques, les notes obtenues par les élèves aux différentes évaluations et à l'examen du baccalauréat session de juin 2008 .Nous avons considéré pour cette recherche que, l'analyse du fonctionnement des institutions d'études autonomes est nécessaire pour identifier les assujettissements institutionnels qui influent sur les constitutions et la gestion du répertoire didactique mathématique. Nous analysons ici, certains effets de la vie institutionnelle sur l'étude de quelques objets abordés dans les institutions d'étude autonome observées, effets dont les traces sont importantes et entremêlées dans les épisodes biographiques.

[361] Activité de résolution de problème mathématique au sens de Kuhn.
[362] D'après les entretiens relatifs à l'organisation de l'étude dans les institutions d'études autonome des élèves de notre dispositif de recherche. (Voir annexe).
[363] Certains parents n'étant pas disponible, nous avons eu recours à des questionnaires pour compléter le dispositif de recueil de données

7.2 ORGANISATION DE L'ETUDE

De nos observations biographiques, nous avons identifié à quelques différences près, que dans les institutions d'étude autonome des élèves constituants notre dispositif de recherche, l'organisation de l'étude d'une tâche mathématique s'opère en quatre phases didactiques complémentaires.

Un extrait des entretiens individuels

AC001///mon organisation de travail mathématique//Commence par tout ce qui se passe en classe lors des séances de cours///En classe j'écoute les explications orales et écrites du professeur////J'aime les séances de cours structurées et surtout lorsqu'il fait des démonstrations des propriétés ou formules du cours///D'habitude//Je comprends//Sinon je pose des questions//Lorsque je n'ai pas des réponses satisfaisantes je les cherchent ailleurs dans d'autres livres, sur Internet ou avec « Raim » dans le but d'approfondir et de consolider mes connaissances//Je travail les notions étudiées en classes de manière plus profonde///

V0011//Mon organisation de travail mathématique//D'abord//Je commence par ma position en classe//C'est-à-dire que je me place le plus près possible du tableau et donc du bureau du professeur //afin d'être éloigner des diverses sources de bruit et déconcentration que peut causer certains élèves en séances de cours///[….]//J'écoute //Je suis les explications orale et écrites//Lorsque le professeur propose des démonstrations ou fait des exercices d'applications//Je suis son explication […] //Je pose des questions//Je recopie rarement les corrigés des exercices effectué par le professeur en classe//Je cherche simplement à comprendre les notions étudiées en séances de cours en classe//Bon//je recopie mais pas toujours//[…] Des fois les explications sont légères//Dans de tel cas je complète avec mes recherches personnelles dans les livres///Je ne cherche pas à être en avance sur la progression du professeur mais simplement à approfondir tout ce qui a été étudié en classe///

F001//Mon travail commence par les leçons en classes///[….]Je cherche à comprendre ce que fais le professeur//Comprendre la place des propriété et formules lorsque le professeur explique par des exercices///[…]//Je pose des questions de compréhension et d'application pour comprendre les relations entre les propriétés, théorèmes////Je cherche en classe à structurer la leçon///

L001/// A la maison je n'ai personne qui puisse m'aider//Donc je suis obligé de commencer mon travail d'étude mathématique par la classe//C'est en classe que le professeur introduit les notions que je dois étudier///Vous voyez mes parents n'ont pas faits des études[….]//J'écoute le professeur dans ses explications et applications//Je pose des questions pour comprendre/des fois simplement pour m'assurer de la bonne compréhension ou application de notions étudiées/// Je participe en classe//Lorsque j'ai la chance d'avoir un bon professeur cela m'aide beaucoup//Sinon je prends des quelques cours de soutien pour comprendre uniquement ce manque d'explication ou d'application du professeur// Les démonstrations en classes m'aident aussi beaucoup car je vois les liens que je pourrai construire lorsque j'étudie seule les exercices///

RC001//J'essaie déjà en classe de comprendre les leçon c'est-à-dire les notions en étude//Je sais qu'il existe des liens entre tous les mathématiques étudiées avant dans l'année ou durant les années scolaires précédentes[….]//// Je cherche en classe pendant les séances de cours de situer les nouvelles notions étudiées par rapport aux autres existant////Je ne cherche pas connaître par cœur les formules et les propriétés mais à les comprendre//Comment les notions étudiées vivent entre elles///

A la lumière de ces propos tenus [/////////] lors des entretiens individuels, il apparaît que la première phase est celle de la rencontre des nouveaux savoirs (ostensifs et non ostensifs) en séance de cours mathématiques que le professeur de mathématiques énonce soit oralement ou au tableau dans des explications ou dans les mises en place de processus de compréhension. C'est aussi la phase qui concerne la manière par laquelle le professeur amène l'élève à explorer le savoir en jeu, si l'on peut dire, un objet de savoir nouveau et donc de nouvel type de tâches, en mettant en œuvre une certaine façon de la réaliser. Comme le souligne les élèves de notre dispositif de notre recherche :c'est que nous explique[*L001/// A la maison je n'ai personne qui puisse m'aider//Donc je suis obligé de commencer mon travail d'étude mathématique par la classe//C'est en classe que le professeur introduit les notions que je dois étudier///Vous voyez mes parents n'ont pas faits des études[….]//J'écoute le professeur dans ses explications et applications//Je pose des questions pour comprendre/des fois simplement pour m'assurer de la bonne compréhension ou application de notions étudiées/// Je participe en classe//Lorsque j'ai la chance d'avoir un bon professeur cela m'aide beaucoup//Les démonstrations en classes m'aident aussi beaucoup car je vois les liens que je pourrai construire lorsque j'étudie seule les exercices*,] Cette première phase de l'organisations d'étude autonome a lieu dans les séances de cours de mathématiques dans chaque classe des établissements scolaires. C'est une phase au cours de laquelle l'élève adopte une position d'écoute et d'analyse, cherchant à comprendre la cohérence du nouveau savoir par rapport à ce qui lui était déjà connu,c'est également une phase de rencontre au cours de laquelle l'élève commence à établir les références directes au discours explicatif ou justificatif de la technique relative à un type de tâche, tâche elle-même relative au nouvel objet de savoir mathématique en étude dans sa classe C'est qu'expliquent ces extraits[*F001//Mon travail commence par les leçons en classes///[….]Je cherche à comprendre ce que fais le professeur//Comprendre la place des propriété et formules lorsque le professeur explique par des exercices///[…]//Je pose des questions de compréhension et d'application pour comprendre les relations entre les propriétés, théorèmes////Je cherche en classe à structurer la leçon///*].C'est la période où l'élève commence à constituer les intentions évidentes qui corroborent un environnement technologique théorique de la nature mathématique grâce à la présentation et aux explications de son professeur [*RC001//J'essaie déjà en classe de comprendre les leçon c'est-à-dire les notions en étude//Je sais qu'il existe des liens entre tous les mathématiques étudiées avant dans l'année ou durant les années scolaires précédentes[….]//// Je cherche en classe pendant les séances de cours de situer les nouvelles notions étudiées par rapport aux autres existant////*]. Par ailleurs lorsque les demandes de compléments d'explications pour la compréhension ne conduisent pas à expliciter les raisons d'être des objets enseignés par le professeur, alors l'élève prend à sa charge le manque d'explications par ses recherches dans son organisation d'étude autonome, c'est que nous explique AC001[*AC001///mon organisation de travail mathématique//Commence par tout ce qui se passe en classe lors des séances de cours///En classe j'écoute les explications orales et écrites du professeur////J'aime les séances de cours structurées et surtout lorsqu'il fait des démonstrations des propriétés ou formules du cours///D'habitude//Je comprends//Sinon je pose des questions//Lorsque je n'ai pas des réponses satisfaisantes je les cherchent ailleurs dans d'autres livres, sur Internet ou à « Raim » dans le but d'approfondir et de consolider mes connaissances//Je travaille les notions étudiées en classes peut être de manière plus profonde*] .V001 nous explique :[*Je cherche simplement à comprendre les notions étudiées en séances de cours en classe//Bon//je recopie mais pas toujours//[…] Des fois les explications sont légères//Dans de tel cas je complète avec mes recherches personnelles dans les livres///Je ne cherche pas à être en avance sur la progression du professeur mais simplement à approfondir tout ce qui a été étudié en classe///*

La première phase de l'organisation de l'étude autonome que nous avons identifié, est celle de la rencontre du savoir ou de l'objet mathématique dans lors des séances de cours mathématique dans les salles de classes de l'institution scolaire. Les moments d'études dans cette première phase de rencontre sont des moments de rencontre et d'exploration avec le type de tâches (*T*), l'exploration de *T* et l'élaboration d'une certaine technique relative au savoir nouveau. Il apparaît ainsi que la constitution de l'environnement technologico-théorique et l'institutionnalisation du savoir sont confondues dans cette phase.

Les trois autres phases de l'organisation de l'étude que nous avons identifiée sont constituées de trois processus simultanés. Elles correspondent aux moments de l'étude d'une tâche mathématique dans les institutions d'études autonomes de notre dispositif de recherche.

Voici un extrait Un extrait d'épisode pour illustrer les trois processus simultanés *Réf : RC001/S-1/19012008 2008*/ fonctions exponentielles- puissances/suite géométrique

Verbatim de RC001 *Réf : RC001/S-1/19012008 2008/ fonctions exponentielles-puissances/suite géométrique*

Exercice.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ .Montrer que pour tout réel x , $f(x)=\dfrac{1-e^{6x}}{1+e^{x}}$

Solution proposée par RC00

Bon/// [Discours de RC001] la fonction f *est définie sur IR par* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *///Donc// [silence]* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *signifie la somme des termes* $(-1)^k e^{kx}$ *avec* k *allant de 0 à 5/// Il s'agit donc des termes consécutifs d'une suite numérique///[Silence]///supposons la suite* $u_k=(-1)^k e^{kx}=(-e^x)^k=1(-e^x)^k$ *///Donc* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *est la somme de six termes consécutifs de la suite géométrique de raison* $q=(-e^x)$ *et de premier terme* $u_0=1$*///Donc* u_0q^k *//En utilisant* $S_k=u_0\times\dfrac{1-q^k}{1-q}$ *///Ona //* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}=\dfrac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)}$ *//Donc* $f(x)=\dfrac{1-e^{6x}}{1+e^{x}}$

En premier lieu des trois processus simultanés, il y a la deuxième phase de l'organisation de l'étude qui correspond à **l'acquisition et l'analyse de l'information** relative à un type de tâche en étude.RC001 dans cet épisode, à la lecture de l'énoncé acquiert et analyse l'information Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ tout en énonçant ce que la notation $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ dénote. Dans cette tâche, cela *signifie la somme des termes* $(-1)^k e^{kx}$ *avec* k *allant de 0 à 5*. Dans certains cas l'information peut aller à l'encontre de l'ancien savoir ou objet de savoir [ici les suites numériques] ou permet une remise en ordre de ce que RC001a su au préalable, implicitement ou explicitement. C'est une phase d'affinage de connaissances prévisibles. Elle implique chez RC001 des actions d'analyses de systématisation et surtout de métaphore qui stimulent son langage et sa façon de penser la discipline dans sa globalité de liens de filiation.

La troisième phase de l'apprentissage est ce que nous appelons les **transformations spécifiques et non spécifiques.** Une fois l'information $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ décryptée, RC001 a eu recourt à des connaissances déclaratives et opérationnelles pour rendre malléable la notation $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$. Ce faisant, il *suppose la suite* $u_k = (-1)^k e^{kx} = (-e^x)^k = 1(-e^x)^k$ *et donc de considérer* $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *comme la somme de six termes consécutifs de la suite géométrique de raison* $q = (-e^x)$ *et de premier terme* $u_0 = 1$ .En utilisant la propriété caractéristique des suites géométriques $u_k = u_0 \times q^k$ et la somme des termes consécutifs $S_k = u_0 \times \dfrac{1-q^k}{1-q}$ avec $q \neq 1$, RC001 rend algébrique la fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ qui devient // $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx} = \dfrac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)}$.C'est ainsi que cette troisième phase de l'organisation de l'étude est **un processus de manipulation de la connaissance**, pour la rendre adaptée à de nouvelles tâches. RC001 dévoile et analyse l'information pour l'ordonner afin de permettre l'extrapolation, l'interpolation ou sa conversion en une autre forme plus malléable eu égard aux techniques du répertoire didactique mathématique adéquat. **La transformation** inclut les manières dont RC001 traite l'information dans le but d'atteindre l'objectif visé le type de tâche donnée.

La quatrième et dernière phase de l'apprentissage est l'**autoévaluation** ; à savoir, vérifier si la manière dont il a manipulé ou a transformé l'information, le conduit au but visé par la tâche et donc en adéquation au répertoire de la tâche :

[*On a //* $f(x) = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx} = \dfrac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)}$ *//Donc* $f(x) = \dfrac{1-e^{6x}}{1+e^x}$]

Les trois processus simultanés des trois dernières phases de l'organisation mathématique de l'étude, concernent des actions d'étude de formalisme, de systématisation, de métaphore, d'un discours de rigueur mathématique, et des actions techniques. Ce sont des processus simultanés d'apprentissage de structuration qui consiste à situer les êtres mathématiques dans l'écosystème mathématique, à connaître les fonctionnalités et les liens de filiation qui existent entre les objets mathématiques étudiés en classes ou non. Pour RC001 comme pour autres les élèves de notre échantillon de recherche, la maîtrise des actions devra être atteinte par la recherche d'exercices relatifs aux objets de savoirs mathématiques étudiés, exercices dans lesquels les consignes des types de tâches sont continuellement différentes. Ceci, afin de permettre la rencontre et la connaissance des gestes d'étude. C'est une analyse presque quotidienne à travers divers supports didactiques (les exercices donnés par le professeur, les exercices de leurs nombreux livres de mathématiques, les recherches sur des sites Internet, un cours particulier auprès d'un autre enseignant de mathématiques en cas de rencontre de grosses difficultés.) Ce sont des recherches plus poussées que le niveau d'exigence de la classe, ce sont des exercices dont le niveau dépasse celui des exercices donnés en classe, ainsi que celui des évaluations. Autrement dit, le travail des problèmes mathématiques s'explique par le fait qu'ils aspirent à poursuivre leurs études supérieures dans une des grandes écoles préparatoires où le niveau d'exigence en mathématique est très élevé.

Les différentes phases de l'institution d'étude autonome des élèves de notre dispositif de recherche, concourent vers le même objectif qui est de comprendre les mathématiques dans leur globalité. Sachant que le temps imparti pour les applications en classe est souvent trop court pour pouvoir étudier correctement un type de tâche mathématique, ils conçoivent qu'ils leur faut absolument travailler plus que ce qui se passe pendant les séances de cours mathématiques en classes pour comprendre les implicites mathématiques que le contrat didactique de la classe, laisse à leur charge. C'est ainsi que le travail hors classe leur permet de compléter l'apprentissage commencé dans les salles de classes et d'étudier les mathématiques autrement qu'on le fait dans les salles de classes chaque semaine. Les épisodes biographiques sont des séquences d'apprentissage soutenu dans le temps, qui dépendent de ce que l'élève s'attend à retirer de son effort, c'est-à-dire un gain extérieur comme par exemple la réussite aux examens, ou bien, avoir une meilleure compréhension des objets mathématiques. AC001, RC001, comme l'ensemble des élèves de notre dispositif de recherche, ont la certitude d'avoir la bonne manière d'étudier les mathématiques puisque cette organisation de l'étude fonctionne, avec non seulement l'obtention de meilleures notes, mais aussi et surtout la possibilité de disposer d'une connaissance de la structure mathématique et des liens de filiations entre les êtres mathématiques. Il apparaît que l'organisation de l'étude tende à structurer et rendre cohérente les objets mathématiques étudiés en classe. La cohérence et la structure mathématique qu'impliquent les quatre phases de l'organisation de l'étude nous semblent être les implicites mathématiques laissées à la charge des élèves par le contrat didactique des classes de l'institution scolaire. En identifiant des phases d'organisation de l'étude, nous avons aussi repérés et mis en exergue des moments didactiques.

7.3 CONTRATS DIDACTIQUES

Dès lors que le projet didactique d'apprendre est fixé, l'institution d'étude doit compléter le contrat didactique des différentes classes mathématiques de l'institution scolaire par des implicites que cette dernière laisse à la charge de ses sujets élèves sans pour autant leur dire quoi faire et comment s'y prendre pour répondre à la double question : comment apprendre ?

Comment s'enseigner ?[364]Nous considérons que les contrats didactiques déterminent ce que chaque élève de l'institution d'étude autonome hors classe a la responsabilité de gérer par rapport aux connaissances mathématiques en étude et dont il sera d'une manière ou d'une autre responsable devant l'institution scolaire à un moment de son histoire. Les contrats didactiques sont donc, forcément, spécifiques des connaissances mises en jeu lors de l'étude autonome d'un type de tâches mathématique. Ce qui expliquerait leur nature nécessairement périssable dans le temps.

En croissant les analyses des épisodes, les entretiens individuels réalisés-[confère extrait entretiens individuel]- des élèves de notre dispositif de recherche, il apparaît que ces derniers réfutent l'approche de l'étude d'une tâche comme un contrat d'ostension qui stipule que :

> « Institution scolaire […] montre un objet ou une propriété, l'élève accepte de le voir comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances »[365]

Lorsque RC001 et L001 nous expliquent respectivement le fonctionnement de la première phase de leur organisation de l'étude[RC001//J'essaie déjà en classe de comprendre les leçon c'est-à-dire les notions en étude//Je sais qu'il existe des liens entre tous les mathématiques étudiées avant dans l'année ou durant les années scolaires précédentes[….]//// Je cherche en classe pendant les séances de cours de situer les nouvelles notions étudiées par rapport aux autres existant////Je ne cherche pas connaître par cœur les formules et les propriétés mais à les comprendre//Comment les notions étudiées vivent entre elles/] ;[L001/// A la maison je n'ai personne qui puisse m'aider//Donc je suis obligé de commencer mon travail d'étude mathématique par la classe//C'est en classe que le professeur introduit les notions que je dois étudier///Vous voyez mes parents n'ont pas faits des études[….]//J'écoute le professeur dans ses explications et applications//Je pose des questions pour comprendre/des fois simplement pour m'assurer de la bonne compréhension ou application de notions étudiées/// Je participe en classe//Lorsque j'ai la chance d'avoir un bon professeur cela m'aide beaucoup//Sinon je prends des quelques cours de soutien pour comprendre uniquement ce manque d'explication ou d'application du professeur// Les démonstrations en classes m'aident aussi beaucoup car je vois les liens que je pourrai construire lorsque j'étudie seule les exercices///]_Ces discours notifient que la responsabilité du savoir n'est plus exclusivement à la charge du professeur et qu'ils refusent de s'engager à faire de la pure reproduction de ce qui a été fait dans les classes bien que le contrat d'ostension soit basé davantage sur le fait que « le système didactique accepte la réalité des apprentissages par l'assimilation »[366]. En d'autres termes, les éventuels obstacles ou la nécessité de disposer de connaissances provisoires ne sont pas pris en compte dans de tel contrat parce que l'organisation de l'étude ne pourrait pas dans de tels cas, permettre un travail personnel de recherche d'enquête et surtout d'exploration mathématique auquel s'attellent les élèves du dispositif de recherche de thèse, car le rôle de tel contrat d'ostension se limite à n'être que des reconnaissances de ce qui a été fait en classe dans l'institution scolaire. Soulignons aussi que le contrat d'ostension permet le plus souvent aux professeurs de prétendre communiquer une connaissance. Pour les élèves de notre échantillon de recherche, les contrats d'ostension semblent rendre légitime une certaine gestion du répertoire mathématique des classes de l'institution

[364] Chevallard, 1988, p. 13
[365] Brousseau, p 46
[366] Brousseau, p 46

scolaire.

Une des missions didactiques principales de l'étude est la contrainte par le contrat didactique ; cette contrainte conduit V001 et AC001 à chercher et à trouver des réponses avec leurs propres ressources ou celles de la situation mathématiques relative à un répertoire épistémologique adéquat. C'est la signification même que les élèves de notre échantillon de recherche ont compris et que le contrat d'ostension tend à exclure de l'interaction avec un milieu média[367] effectif pour l'étude mathématique.

Dans les trois dernières phases de processus simultanés de l'étude, apparaît aussi le refus d'un deuxième type de contrat : *le contrat de conditionnement*, qui consiste à ne s'engager qu'à accomplir des tâches, à la seule condition qu'elles soient réductibles aux répertoires didactiques des séances d'étude ou d'application directe en classe. La reproduction d'une tâche étudiée en classe ne garantit pas l'apprentissage, car l'élève qui reproduit un exercice déjà étudié en classe ne peut pas le faire en toutes circonstances. La transformation des savoirs anciens et nouveaux induite par l'analyse des informations caractérise le contrat didactique lors de la troisième phase de l'organisation de l'étude dans les institutions autonomes observées. Ainsi, pour *RC001* Les faits principaux et les actions passées sont évoqués[*la fonction f est définie sur IR par* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *///Donc// [silence]* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *signifie la somme des termes* $(-1)^k e^{kx}$ *avec k allant de 0 à 5/// Il s'agit donc des termes consécutifs d'une suite numérique///[Silence]//*,] formulés, reconstruits, rationalisés et justifiés après coup dans le travail mathématique ou la situation didactique particulière-[supposons *la suite* $u_k=(-1)^k e^{kx}=(-e^x)^k=1(-e^x)^k$ *///Donc* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}$ *est la somme de six termes consécutifs de la suite géométrique de raison* $q=(-e^x)$ *et de premier terme* $u_0=1$ *///Donc* $u_0 q^k$ *//En utilisant* $S_k=u_0\times\frac{1-q^k}{1-q}$ *///*]-. Et l'explicitation des faits connus de tous est théoriquement placée sous le contrôle de son répertoire épistémologique lorsqu'il dit qu'-[*En utilisant* $S_k=u_0\times\frac{1-q^k}{1-q}$ *On a //* $f(x)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k e^{kx}=\frac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)}$ *//Donc* $f(x)=\frac{1-e^{6x}}{1+e^x}$]-mais il est clair qu'il ne peut formuler et rendre public, uniquement, ce que le répertoire épistémologique adéquat de cette tâche lui autorise de faire.

L'une des responsabilités de RC001 lors de cette séance a été de baliser le lieu cognitif [les objets et les rapports à ces objets] supposé connu des élèves à partir du répertoire épistémologique adéquat, dans le but de stabiliser des objets et des rapports à ses objets que RC001 a jugé nécessaires pour la compréhension du travail théorique mathématique- ici l'activité de résolution, aspects réels de la pratique mathématique. Une telle fonctionnalité diminuerait l'incertitude et l'ignorance de l'élève sur ce que l'institution scolaire attend de lui. Ainsi, apparaît la responsabilité de l'élève à baliser le lieu cognitif supposé connu de tous les acteurs de l'institution scolaire à partir du répertoire didactique construit dans les séances de cours.

[367] Selon la conception de Y. Chevallard

A la différence des élèves en difficultés mathématiques, ceux de notre dispositif de recherche apprennent à étudier, à enquêter, à explorer afin de connaître le fonctionnement des structures mathématiques. Ils savent ce qu'attend d'eux un type de tâche mathématique donnée. Ils analysent le type de tâche et articulent les objets et notions mathématiques qu'ils considèrent pertinents à l'activité de résolution de la tâche, ce processus implique pour eux l'acquisition de nouvelles responsabilités comme : d'être porteur du savoir enseigné , la verbalisation des actions d'étude pour accomplir la tâche , l'explication et la justification de réponses, ce qui modifie leur topos d'élève en leur attribuant un rôle plus engageant lors des phases de gestion du répertoire épistémologique adéquat de la tâche en étude.

Lors des trois processus simultanés identifiés dans l'organisation de l'étude, les questions d'écologie comprennent aussi les formes de vie pour les jeux de langage et de systèmes de notations, le déplacement ou le changement de cadre langagier, des organisations de relations logiques, la production de systèmes symboliques et le travail de liens entre jeux de langage et jeux symboliques.

Dans les lignes suivantes, nous revenons sur les épisodes biographiques des élèves de notre dispositif de recherche. Les épisodes biographiques représentent pour nous un outil pertinent pouvant nous permettre d'identifier des traces de modèles d'apprentissages. Les analyses et les interprétations des épisodes biographiques nous ont permis d'identifier des traces de modèles d'apprentissages dominants dans les institutions d'études hors classe observées.

7.4 ORGANISATIONS DIDACTIQUES INSTITUTIONNELLES

Le système de référence qui permet de repérer chacune des organisations didactique possibles par rapport à certaines propriétés de l'activité de résolution de problème mathématique est représenté ici comme des modèles d'apprentissage dans l'espace des organisations didactiques possibles. Ainsi, pour réaliser le travail mathématique, les élèves de notre dispositif de recherche ont mis en œuvre, d'une séance à l'autre, un grand nombre de technique didactique, qui leur sont accessibles et qu'il réélaborent ou adapte à leur manière. Il semble que le choix d'une technique ou d'une autre ne s'est pas fait de façon arbitraire, les choix d'un élève à l'autre sont liés, d'une manière plus ou moins explicite selon le cas, à des systèmes d'argumentations justificatives et interprétatives de ces techniques. Les arguments utilisés font référence aux bénéfices supposés de l'utilisation d'une certaine technique, à sa pertinence et à son adéquation aux conditions particulières de la tâche mathématique en étude ou du travail mathématique. Les choix nous semblent aussi dépendre de l'institution où a lieu l'apprentissage, de la formation de l'élève, de ses connaissances, en gros de ses assujettissements à différentes institutions scolaires ou culturelles. Nous avons été donc en présences à tout moment de répertoires institutionnalisées qu'on peut scinder en un bloc pratique et en un discours théorique qui justifie, interprète, guide et modifie les pratiques. Les répertoires sont ainsi, formés d'un système plus ou moins structuré d'objets, de techniques liés aux objets et qui permettent de réaliser les possibles tâches liées à ces objets et aussi du bloc technologico-théorique. De tels répertoires ou pratiques possèdent au moins une caractéristique importante : celle des pratiques de l'élève, parce qu'elle recouvre des manières de faire et de penser dont l'élève est le principal protagoniste, bien entendu que cela ne signifie pas qu'il agisse de manière autonome. Cette personnalisation de la pratique fait que les éléments accidentels, les manques et les contradictions apparentes que contient tout répertoire empirique est davantage susceptible d'être observés comme des idiosyncrasies de l'élève. C'est ainsi que le répertoire de l'élève déterminé dépend de ses assujettissements aux diverses institutions qu'ils auraient parcourues, ce qui confèrerait sans doute une individualité ou une unité particulière. C'est cette pratique spontanée de l'élève que nous avons considéré comme le répertoire didactique.

De la pratique de l'élève en étude autonome mathématique au répertoire didactique institutionnel, il existe différentes manières d'appréhender les pratiques didactiques de l'élève en vue de modéliser et d'en extraire des traces de répertoire didactique institutionnel dans le but d'apporter des outils ou des instruments à la gestion et au développement de l'étude autonome. Il se peut que les traces ainsi construits traitent d'aspects de la pratique de l'élève et qu'ils apparaissent alors difficilement identifiables par les élèves eux-mêmes. Ce à quoi recourt, ou peut recourir un élève particulier dans une situation d'apprentissage autonome n'est ni une création absolue ni une construction personnelle absolue, mais en réalité un amalgame d'emprunts institutionnelle divers, qui appartiennent souvent à des strates historiques différentes, et qui s'appuient sur des dispositifs et des structures variés dont les fonctions sont parfois méconnues et ne cessent de changer au cours du temps. Ce faisant, pour réussir une activité de résolution de problèmes mathématiques, l'élève articule à travers un bricolage de notions existant plus ou moins bien géré, un ensemble pléthorique d'objets mathématique où un important choix a d'ores et déjà été fait. Cet univers didactique est aussi peuplé de discours explicatifs et justificatifs des pratiques mises en jeu. C'est ainsi que les différentes composantes de la pratique didactique de l'élève dans les institutions d'étude autonome qui déterminent l'écologie didactique de l'institution scolaire. Nous avons donc décidé de décrire ce didactique institutionnel qui nous éclaire sur ce que font les élèves du dispositif de recherche, pour réaliser et réussir les types de tâches mathématique qui leur sont présentés. Pour ce faire, nous avons considéré qu'il faut dépasser les pratiques spontanées des élèves en considérant les pratiques ou les répertoires didactiques dominants dans les institutions d'études autonomes observées, c'est à dire les systèmes de théories, de techniques, de technologies qui existent dans les institutions d'études autonomes et qui permettent à l'élève de l'institution considéré de réussir un type de tâche mathématique, en activant des répertoires didactiques heuristiques déterminés sous des conditions particulières données.

Nous avons de fait, considéré que les pratiques empiriques et spontanées ne sont plus celles d'un élève considérée comme personne mais celles disponible dans les institutions d'étude. Nous postulons ainsi que le modèle de répertoires didactiques pour l'analyse empirique de la pratique spontanée de l'élève est pertinent. Pour ce faire nous considérons que l'écologie des répertoires institutionnels, nous amènerait à dépasser les limitations des approches cognitives pour nous situer dans une approche « systémique globale de la didactique »[368].

Nous avons alors, considéré que, la théorie des situations didactiques, la théories des champs conceptuels, la dialectique outil- objet et la théorie anthropologique de la didactique doivent être observées comme des théories épistémologiques en ce sens qu'elles proposent des modèles de ce qu'est l'activité mathématique, de ce que sont les connaissances mathématiques

[368] Michel Artigue 1998, p 243

dont on a besoin lorsqu'on fait des mathématiques. Nous avons tenté de montrer que l'approche épistémologique en didactique des mathématiques constitue la modélisation des pratiques didactiques institutionnelles et, donc, l'analyse des pratiques mathématiques de l'élève. Ainsi tout modèle épistémologique des mathématiques serait alors en réalité, le germe d'un modèle épistémologique et didactique.

L'organisation didactique de l'étude autonome dépend fortement selon du répertoire mathématique que l'organisation didactique corrobore. Pour de telle raison, l'espace des répertoires didactiques, est ici un système de référence qui permet d'identifier chacun des répertoires didactiques observés. En d'autres termes, en considérant l'ensemble des répertoires mathématiques en étude dans une institution donnée *I*, les différentes façons de concevoir dans *I* ce que sont les mathématiques peuvent être en correspondance avec certains types de répertoires didactique. Ces types sont ainsi interprétés en termes de « *théories épistémologiques générales* »[369]. Nous avons observé que certains éléments des répertoires didactiques dominants dans l'institution d'étude autonome d'un élève pourraient avoir des effets sur la gestion de son répertoire didactique. Ainsi, pour l'ensemble des élèves de notre dispositif de recherche, nous exposons dans le paragraphe qui suit, quelques épisodes biographiques et nous discutons leur interprétation en termes d'organisation didactiques dans les institutions observées.

7.5 REPERTOIRES DOMINANTS DANS LES INSTITUTIONS D'ETUDES DES ELEVES OBSERVES

Dans les épisodes biographiques didactiques des élèves constituant notre dispositif de recherche, nous avons identifié des traces de trois « *modèles épistémologiques généraux* »[370] tel que l'euclidéanisme, le quasi-empirisme[371] et le constructivisme épistémologique, de même que des combinaisons de ces modèles épistémologiques généraux. Rappelons que pour l'«euclidéanisme », toute connaissance mathématique peut être déduite à partir d'un ensemble fini de propositions considérées comme banalement vraies (*les axiomes*).Ce caractère est transmis aux théorèmes par des canaux déductifs de transmission de preuves. Nous rapprochons les manières de travailler les mathématiques par l'élève F001, *Réf : F001-S5-14052008/probabilités/loi continue/loi exponentielle : 3ème épisode page 175, 4ème épisode page 178, 5ème épisode page 179 RéfF001/S-3/23032008/ Nombre Complexe 3ème épisode page 187 ;* sa façon d'analyser et d'interpréter les tâches mathématiques en études dans ces épisodes aux organisations didactiques classique que représente l'euclidéanisme. Car ici ; l'activité mathématique serait presque déterminé par le bloc technologico-théorique, d'où découleraient technique et situation en tant que simples application des définitions et axiomes et théorèmes. D'après l'espace des organisations didactiques possibles, ce programme épistémologique correspond principalement à deux types de systèmes didactiques idéals: **le théoricisme et le technicisme**. Il s'agit dans de tels systèmes, de considérer les mathématiques comme des connaissances achevées et cristallisées en théories. Ainsi F001 dans ces quatre épisodes n'a cessé de combiner des moments technologico-théorique et le travail de la technique qui se caractérise

[369] Gascón 2001
[370] M.Bosch &J.Gascon2001
[371] Lakatos 1978

par une certaine trivialité de l'activité de résolution de problème mathématiques.

Le constructivisme épistémologique prend en charge, simultanément, les moments techno logico-théorique et l'exploration. Il se caractérise par la contextualisation de l'activité de résolution d'une tâche, que l'élève, doit situer dans une activité plus large de construction de connaissances tout en considérant que l'apprentissage est un processus actif de construction à partir d'acquis antérieurs qui sont encore, sous des contraintes déterminées. Nous identifions ce modèle comme dominant dans les épisodes didactiques de V001 :*RéfV001/S-4/26042008/ Exo1/ Lois de probabilités continue, RéfV001/S-4/26042008/Lois de probabilités continues*) : pages 16-171; AC001 (:*RéfAC001/S-2/20012007/Exo1/Equations différentielle pages 147-151 ; RéfAC001/S-3/25012007Equations différentielles pages152-156 ;Réf : RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités page 225 ; L001(L001/S-2/17022008/Fonction exponentielle-suite Intégrale //exo1/Q1)page 225.*

Nous avons aussi identifié des traces d'organisation empiriste, organisation qui prétende intégrer les moments exploratoire, le travail de la technique, qui se caractérise par le rôle prépondérant qu'elle attribue à l'activité de résolution de tâche mathématiques comme moteur du processus didactique, avec la considération de l'apprentissage de mathématiques comme un processus inductif fondé sur l'imitation et la pratique. Nous retrouvons ce modèle d'organisation empiristes institutionnelle dans les épisodes de L001 *Réf L001/S-2/17022008/Intégrale Suite Exponentielle Q1-2-3-4) pages 225-227* Réf : AC001/S-4/26022007/*complexe /PB-Q4.*

Dans les épisodes biographiques didactiques des élèves de notre échantillon de recherche, nous ne trouvons pas de traces permettant d'affirmer que la théorie est uniquement et exclusivement présente, bien qu'elle joue un tel rôle central dans les épisodes observés de F001 et plus moins importante ailleurs. Donc, il ne semble pas y avoir réduction de l'activité mathématique aux théories dans tous les épisodes. Cependant, il y a une des dimensions de ce modèle, conséquence du programme épistémologique qui le soutient, et qui est fréquemment indéniable **: c'est pour la justification des théories mathématiques**. L'identification de cette tendance justificative dans les épisodes biographiques didactiques de l'ensemble des élèves de notre l'échantillon de recherche peut être comprise comme la justification de ce qu'ils ont appris, et confirme les efforts qu'ils font pour montrer dans diverses étapes de résolution de problèmes mathématiques, les justifications mathématiques de ce qu'ils apprennent aussi dans les classes de l'institution scolaire ou ailleurs.

Cependant, nous pouvons distinguer une autre forme de répertoire didactique sous une forme comme organisation institutionnel comme espace dominant dans les institutions d'études observées. Cependant, d'après l'analyse des données empiriques, il nous semble que nous ne pouvons pas potentiellement rapprocher le modèle de répertoire, comme le plus ou moins dominant qu'est le théoricisme dans les épisodes de F001 pour les autres membres du dispositif d'observation entant qu'une unique organisation du modèle théoriciste. Force a été de constater que chaque élève est assez complexe et échappe à toute classification. Nous avons par ailleurs identifié de nombreuses traces, relevant d'un autre modèle de répertoire didactique institutionnelle: la recherche « **d'heuristiques stables et déclarées**». Il s'agit ici, des pratiques d'étude dont l'objectif est la maîtrise de systèmes structurés de techniques heuristiques. Dans les épisodes biographiques didactiques il est plus ou moins facile de reconnaître le travail des types de problèmes qui demandent une solution non algorithmique; nous avons repérés des types de tâches qui privilégient d'autres applications des techniques, outre les rudimentaires. L'ensemble des épisodes biographiques didactiques des élèves de notre dispositif de recherche nous semble aussi rapprocher certaines caractéristiques de répertoires didactiques institutionnels que nous appelons : **le répertoire heuristique stable et déclaré**. Un tel répertoire est favorisé par la délimitation des champs de problèmes – ou d'exercices traités par les élèves du dispositif avec des problèmes authentiques dans une contextualisation plus ou moins loin des modèles technicistes. Force a été aussi de constater que les répertoires utilisés sont fonctions des problèmes mathématiques en études ou de la combinaison de répertoires.

7.6 LA TRANSHUMANCE DIDACTIQUE

Nous revenons dans ce paragraphe sur les institutions d'études observées afin de mettre en évidence le phénomène de transhumance didactique qu'opèrent les élèves particuliers de notre échantillon de recherche Pour ce faire nous présentons quelques transcriptions de verbatim enregistrés chez les élèves observés avec une caméra vidéo portable sur leur fonctionnement ordinaire, des moments d'études, de recherches et d'enquêtes mathématiques sans oublier de nous spécifier pourquoi un tel fonctionnement

Réf d'AC001/S-E/09052007/Entretien complémentaire

« Les maths sont un outil important ///on en a besoin dans la plupart des carrières///Moi// je serai en classe préparatoire l'année prochaine//donc je travaille beaucoup les mathématique//. En classe//d'habitude// disons que le cours est clair// il y a souvent les formules importantes// quelques exercices d'applications pas souvent compliqués non plus// Les travaux de recherches en classe dans les différentes leçons déjà étudiées ne donnent pas souvent l'ampleur et la portée des objets mathématiques en étude avec tous les sous-entendus de notions ou autres objets qui se cachent derrière la notion en cours d'apprentissage en classe///Je travaille à la maison les exercices pour apprendre et pour comprendre les façons de faire./////»

«///J'ai compris qu'il existe des liens entre les notions d'une leçon à l'autre,///je fais beaucoup d'exercices pour connaître les liens implicites relatifs aux objets mathématiques////Je sais comment cela fonctionne// derrière chaque consigne////il y a des consignes non-dits qui impliquent des façons de faire////des transformations qui nécessitent d'autres objets mathématiques ainsi de suite////C'est une sorte de chaîne la question mathématique///une fois les maillons rassemblés/////je construis la chaîne réponse de la question ///Je fais beaucoup d'exercices pour rencontrer plusieurs systèmes//// Sur internet ou dans mes autres livres/// je trouve aussi d'autres formules////regardez////j'ai trouvé ça dans un des livres///[372]////Voici ce que j'ai trouvé dans un autre livre sur les similitudes /// c'est plus riche et plus explicatif que tout ce qui se trouve dans mon cahier de cours/// C'est en faisant des recherches sur internet et dans des livres de mathématiques qui ne sont pas des livres que le professeur nous conseil que je découvre d'autres informations sur les notions étudiées en classe /// Il y a beaucoup de notions mathématiques qui ne sont pas détaillées dans les cours en classe/////Avec mon travail de recherche personnelle// je fais beaucoup de choses/////// Sur interne il y a des choses qui ne sont pas mon ni cahier ni dans mon livre de classe comme

[372] Relation entre objets mathématiques trouvée dans un livre personnel (voir doc annexe

l'antidéplacement [373]///regardez ce que j'ai trouvé sur internet dans mes autres livres je trouve d'autres formules////regardé////j'ai trouvé ça dans un des livres/////Voici ce que j'ai trouvé dans un autre livre de classe de terminale sur les similitudes[374]

• **Composée de similitudes et inverse d'une similitude**

Propriétés :

– Si s et s' sont deux similitudes de rapport respectivement k et k', alors la composée $s \circ s'$ est une similitude de rapport $k \times k'$.

☞ **Attention : $s' \circ s$ n'est pas forcément égal à $s \circ s'$.**

– La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

• **Similitudes et points fixes**

Théorème : Soit s une similitude du plan.

Si A, B, C sont trois points non alignés du plan tels que $s(A) = A$, $s(B) = B$ et $s(C) = C$, alors s est l'identité du plan.

Si A et B sont deux points distincts du plan tels que $s(A) = A$, $s(B) = B$, alors s est l'identité du plan ou la symétrie d'axe (AB).

• **Triangles semblables**

Définition : Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On dit qu'ils sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

Théorème : Une similitude conserve les angles géométriques.

Corollaire : L'image par une similitude d'un triangle ABC est un triangle $A'B'C'$ semblable au triangle ABC.

II SIMILITUDES DIRECTES

1. Généralités

• **Définition :** On dit qu'une similitude est directe si elle conserve les angles orientés.

Exemples :

– Les rotations, les translations, les homothéties sont des similitudes directes, mais les symétries axiales ne sont pas des similitudes directes.

– Dans le plan complexe, les transformations de la forme $z \mapsto a \cdot z + b$ sont des similitudes directes mais pas les transformations de la forme $z \mapsto a \cdot \bar{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

• **Théorème :** Soit $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct.

Une transformation s est une similitude directe si, et seulement si, son expression complexe dans ce repère est de la forme $z \mapsto a \cdot z + b$ ($a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

• **Propriété 1 :** Soit s une similitude directe. Pour tous points A, A', B, B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, on a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{s(A)s(B)}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{s(A')s(B')})$.

[373] Données trouvées sur internet

[374] Définition et Proppriétés de la symétrie glissante

• **Définition :** Soit s une similitude directe. On appelle angle de s, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{s(A)s(B)})$ où A et B sont deux points quelconques distincts.

• **Propriété 2 :** La composée de deux similitudes directes de rapports k, k' et d'angles θ, θ' est une similitude directe de rapport $k \times k'$ et d'angle $\theta + \theta'$.

• **Propriété 3 :** Pour tous points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

2. Forme réduite d'une similitude directe

• **Théorème :** Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors :

– ou bien s est une translation ($k = 1$ et $\theta = 0$ [modulo 2π]) ;

– ou bien s possède un unique point fixe Ω et est la composée de l'homothétie h de centre Ω de rapport k et de la rotation r de centre Ω et d'angle θ telle que : $r \circ h = h \circ r = s$.

☞ **Remarque : dans le cas où s possède un point fixe Ω, alors l'écriture complexe de s dans un repère orthonormé direct est de la forme : $z \mapsto a \cdot (z - \omega) + \omega$ où ω est l'affixe de Ω.**

• **Application :** Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés et une isométrie est une similitude de rapport 1, donc, d'après le théorème précédent, tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.

III SIMILITUDES INDIRECTES (OU NON DIRECTES)

• **Définitions**

Une **similitude indirecte** est une similitude qui ne conserve pas les angles orientés.

Un **antidéplacement** est une isométrie qui ne conserve pas les angles orientés.

• **Forme géométrique d'une similitude indirecte**

Théorème : Soit s une similitude indirecte, alors $s = s' \circ \sigma$ où s' est une similitude directe et σ une symétrie axiale.

• **Forme complexe d'une similitude indirecte**

Théorème : Toute transformation s est une similitude indirecte, si son écriture complexe est dans un repère orthonormé direct de la forme $z \mapsto a \cdot \bar{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

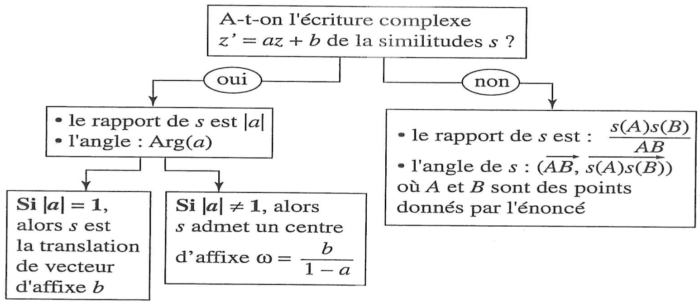
GÉOMÉTRIE ET SIMILITUDES

• **Propriétés :** Soit s une similitude de rapport k et A, B deux points distincts du plan d'images respectives A', B' par s.
– L'image par s de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
– L'image par s du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
– L'image par s du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre $s(O)$ et de rayon $|k| \times R$.

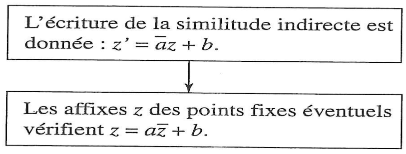
• **Propriétés :** Une similitude conserve le barycentre, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et quatre points sur un cercle ont pour image quatre points sur le cercle image.

PLAN D'ÉTUDE D'UNE SIMILITUDE

1.



2.



Données tournées dans un livre de Maths spé, édition Nathan 2004

///j'ai aussi trouvé ça sur internet avec mon père///

FORUM : SIMILITUDES : PROPRIÉTÉS DES ANTIDÉPLACEMENTS (OU SYMÉTRIE GLISSÉE), MATHS SPÉ

Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Maths spé *posté le 05/05/2005 à 15:54*

posté par : heretics (invité)

T^{ale}

Bonjour à tous !

Alors voilà un exo sur les antidéplacements, ou symétrie glissée, c'est une transformation qui est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation.

Etant donné un droite D de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle symétrie glissée d'axe D et de vecteur $\vec{u}$ la transformation:
$\sigma = T_{\vec{u}} \circ s_D$

1. Montrer que σ est un antidéplacement et que:
$\sigma = s_D \circ T_{\vec{u}}$

Voilà alors dès le début je suis bloqué. Je ne sais pas comment démontrer celà... ???

2. Soit M un point d'image M' par σ. Montrer que I milieu de [MM'] $\in$ D , et que M $\in$ D ssi $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Là je suppose qu'il faut utiliser la décomposition...

3. σ a-t-elle des points fixes ?

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, non mais comment le démontrer...

Ensuite il y a d'autres propriétés à démontrer mais je pense que çà ira...

Voilà qi quelqu'un peut m'éclairer sur un ou plusieurs points, ça serait sympathique !

Merci !

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 16:26*

posté par :
muriel (Correcteur)

bonjour ,
as-tu fait un dessin en prenant un point M quelconque du plan en traçant le symétrique M1 de M par rapport à D, puis le translaté M' de M1 de vecteur $\vec{u}$
ensuite,
le translaté M2 de M de vecteur $\vec{u}$ et le symétrique M" de M2 par rapport à D

tu peux remarquer que MM1M'M2 est un parallélogramme ($\overrightarrow{M1M'} = \overrightarrow{MM2}$), ayant un angle droit en ($\overrightarrow{MM2};\overrightarrow{MM1}$), donc c'est un rectangle qui a un axe de symétrie D
ainsi M"=M'
on vient de montrer que Toσ=σoT

pour la suite, je te laisse faire

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 16:27*

posté par :
muriel (Correcteur)

oups à la fin il faut lire:
on vient de montrer que T o s= s o T
désolée

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 20:02*

posté par : heretics (invité)

ok ok merci j'ai compris !

En gros pour le reste il faut procéder de la même manière (géométrique)

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 20:14*

posté par :
muriel (Correcteur)

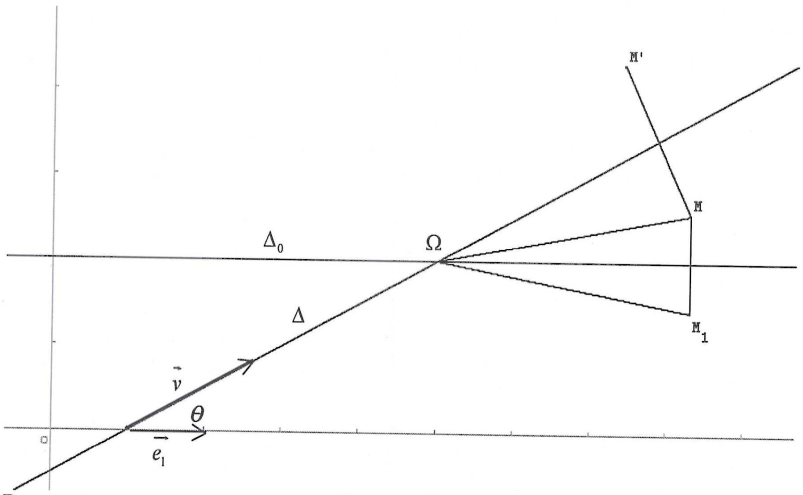
Écriture complexe des antidéplacements

FICHE 6

On rappelle que le plan muni est d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\right)$.

Ecriture complexe des symétries axiales

La *symétrie axiale* s_Δ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2\theta}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega$ où θ désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{e_1}\,;\vec{v}\right)$.



Preuve

Soit Δ_0 la droite contenant Ω et parallèle à l'axe des abscisses et soit s la symétrie d'axe Δ_0.

L'isométrie $s_\Delta o s$ est la rotation $r_{\Omega\,;\,2\theta}$ de centre Ω et d'angle 2θ.

Puisque $r_{\Omega\,;\,2\theta} = s_\Delta o s$, on a : $s_\Delta = (s_\Delta o s) o s = r_{\Omega\,;\,2\theta} o s$.

Déterminons d'abord l'écriture complexe de s. Si M est un point d'affixe z, appelons M_1 son image par s et z_1 son affixe.

Supposons $z \neq z_\Omega$ et calculons $\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}}$.

$\Omega M = \Omega M_1$ donc $\left|\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}}\right| = \dfrac{|z_1 - z_\Omega|}{\left|\overline{z - z_\Omega}\right|} = \dfrac{|z_1 - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = \dfrac{\Omega M_1}{\Omega M} = 1$.

$\arg\left(\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) - \arg\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) - \arg\left(\overline{z - z_\Omega}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) + \arg(z - z_\Omega)$

$= \left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M_1}\right) + \left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right) = 0$ puisque $\left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = -\left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right)$

.

On a donc : $\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\bar{z} - \overline{z_\Omega}} = 1$ et $z_1 - z_\Omega = \bar{z} - \overline{z_\Omega}$, égalité valable même si $z = z_\Omega$.

Il reste à composer s avec $r_{\Omega\,;\,2\theta}$ pour trouver $s_\Delta = r_{\Omega\,;\,2\theta} o s$.

$s : M \mapsto M_1 \quad r_{\Omega\,;\,2\theta} : M_1 \mapsto M' \quad : \quad z' - z_\Omega = e^{2i\theta}(z_1 - z_\Omega) = e^{2i\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega})$, d'où le résultat.

Représentation complexe des symétries glissées

La *symétrie glissée* $s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega + z_{\vec{u}}$ où θ désigne une mesure de l'angle $(\vec{e_1}\,;\,\vec{v})$.

Pour résumer, on voit que les symétries axiales et les symétries glissées du plan ont une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$.

Dans la cas de la symétrie axiale: $a = e^{i2\theta}$ et $b = -e^{i2\theta}\overline{z_\Omega} + z_\Omega$.

Dans la cas de la symétrie glissée : $a = e^{i2\theta}$ et $b = -e^{i2\theta}\overline{z_\Omega} + z_\Omega + z_{\vec{u}}$.

Réciproquement, si une transformation du plan a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$, on peut montrer qu'il s'agit d'une symétrie axiale ou une symétrie glissée .

Dans le cas où la transformation admet un point fixe Ω la preuve est facile. En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = a\bar{z} + b \\ z_\Omega = a\overline{z_\Omega} + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_\Omega = a(\bar{z} - \overline{z_\Omega})$. En écrivant a sous la forme $e^{i2\theta}$, on voit que $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega$: c'est bien l'écriture d'une symétrie axiale.

Comment reconnaître une symétrie axiale et une symétrie glissée

Soit une transformation f d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$.

Si f est une symétrie axiale, pour tout point M, le milieu de $[Mf(M)]$ doit être fixe, en particulier le milieu de $[Of(O)]$ doit être fixe. Réciproquement si le milieu de $[Of(O)]$ est fixe alors f est une symétrie axiale puisqu'une symétrie glissée n'a aucun point fixe.

$f(O)$ a pour affixe b et le milieu de $[Of(O)]$ a pour affixe $\dfrac{b}{2}$.

f est une symétrie axiale si et seulement si : $\dfrac{b}{2} = a\overline{\left(\dfrac{b}{2}\right)} + b$, condition qui s'écrit aussi :

$$\boxed{a\bar{b} + b = 0}.$$

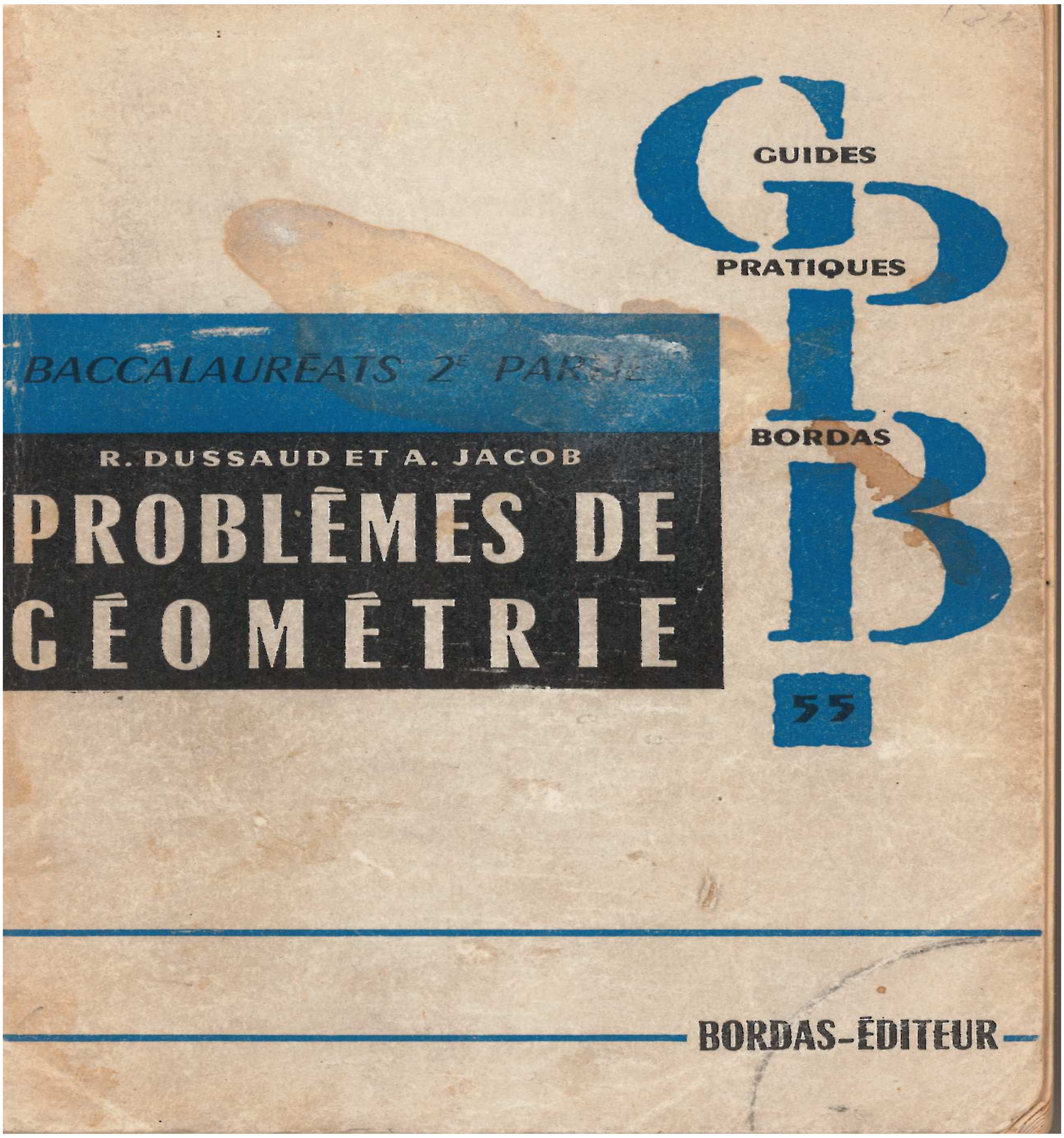
On peut également retrouver cette condition en considérant que, si f est une symétrie axiale, $fof = id$ tandis que si f est une symétrie glissée $f = s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$, on aura $fof = t_{2\vec{u}}$.

Cette deuxième méthode permet de plus de déterminer le vecteur $\vec{u}$ à partir de l'écriture complexe d'une symétrie glissée.

/

/////Voici ce que j'ai trouvé dans un autre livre sur les similitudes /// c'est plus riche et

plus explicatif que tout ce qui se trouve dans mon cahier de cours[375]*///D'ailleurs le mot antidéplacement n'apparaît nul part dans mon cahier/// et aussi dans le livre qu'on utilise en classe de même que d'autres livres/// la formule qu'il faut utilisée est mentionnée sans pour autant nommé l'objet antidéplacement ou symétrie glissante/// C'est très dur de travailler avec le cours ou un livre lorsque les choses ne sont pas nommés//// Regardé ce que j'ai trouvé dans d'autres livres//Ce sont de très vieux livres que mon père a fait sortir de la cave et qui appartiennent///*



Collection des guides pratiques sous la direction de H. BORDAS, agrégé de l'université

R. Dussaud	**A. JACOB**
Agrégé de l'université.	Agrégé de l'université
Professeur au lycée Cl. Bernard	Professeur au lycée Champollion

Bordas 1960 N° d'édition 154601504

[375] Cahier de cours de AC001 sur les similitudes (voir doc annexes)

///Voici ce que j'ai trouvé à la page 39-40///

SYMÉTRIES

Symétrie par rapport à un plan (P) donné.
Transformation ponctuelle qui a un point M donné fait correspondre un point M' tel que (P) soit le plan médiateur de MM'; M décrivant la figure (F), M' décrit la figure (F') et les figures (F) et (F') sont dites symétriques par rapport au plan (P). C'est une transformation réciproque (fig. 122).

Symétrie par rapport à un point O donné.
Transformation ponctuelle qui, à un point M, fait correspondre un point M' tel que MM' admette O pour milieu. Transformation réciproque M décrivant la figure (F), M' décrit la figure (F'). (F) et (F') sont dites symétriques par rapport à O (fig. 123).

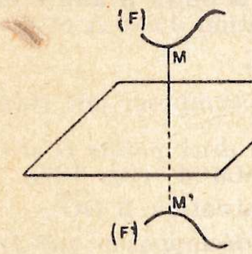


Fig. 122

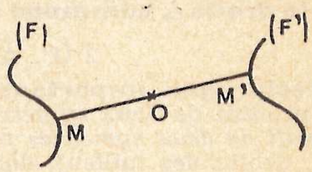
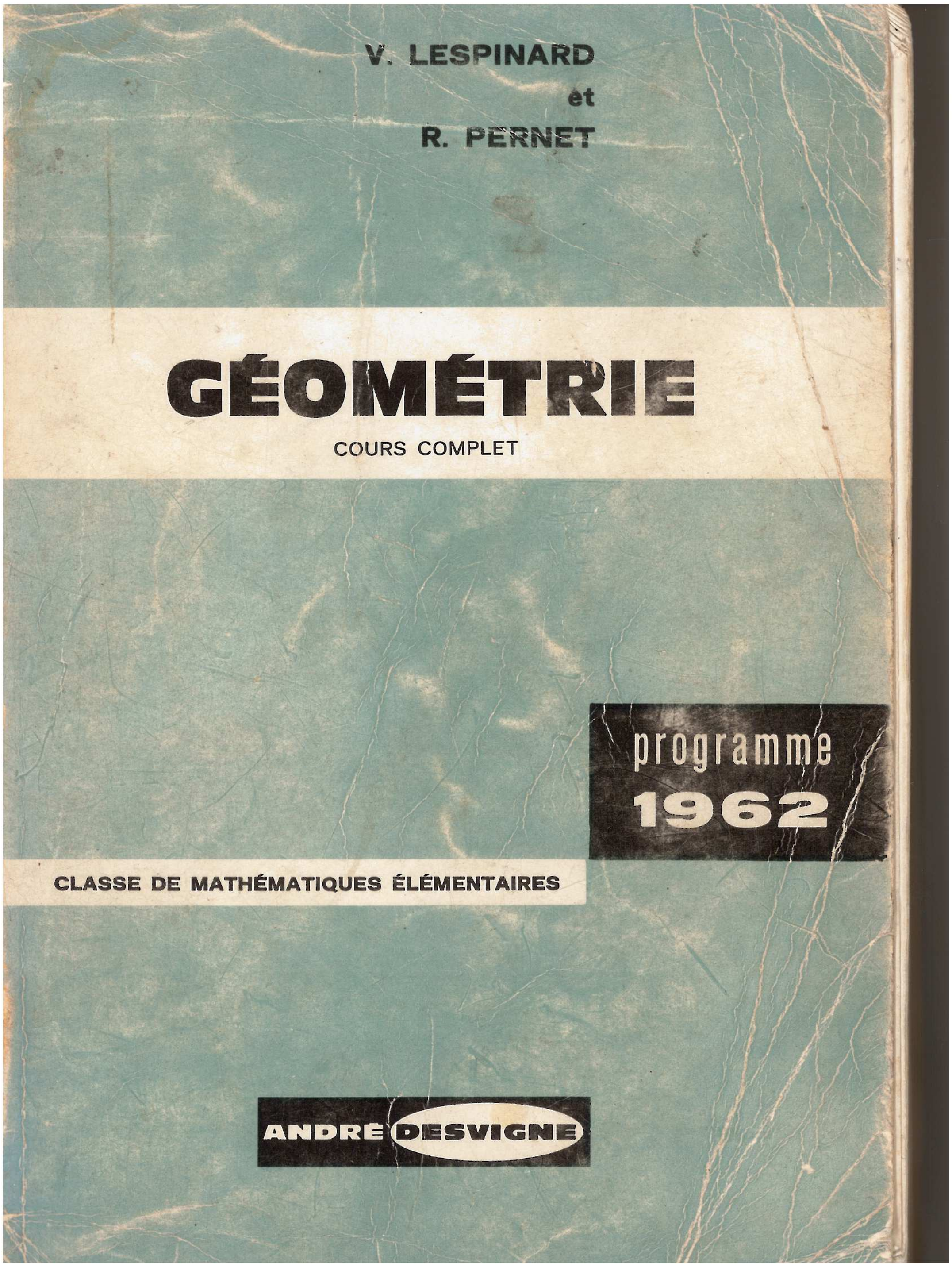


Fig. 123

Symétrie par rapport à une droite déjà étudiée, car c'est un déplacement.
On démontre : que la symétrie par rapport au plan (P) n'est pas un déplacement ; que la symétrie par rapport au point O n'est pas un déplacement.
On est amené à définir ainsi les antidéplacements (ou véritables symétries).
La figure (F') déduite de (F) par un antidéplacement de l'espace ne peut pas coïncider avec (F) [on entend ici qu'il s'agit de la figure F la plus générale].
La figure (F') déduite de (F) par un antidéplacement en géométrie plane est une figure inversement égale à (F).
On peut résumer ces propositions dans le tableau suivant :

	Géométrie plane.	Géométrie dans l'espace.
TRANSLATION ROTATION	Déplacements.	Déplacements.
RETOURNEMENT	Antidéplacement : (F) et (F') inversement égales.	
VISSAGE	→	Déplacement.
Symétrie-point.	Déplacement.	Antidéplacement.
Symétrie-plan.	→	Antidéplacement.

///voici ce que j'ai trouvé dans le deuxième livre ////



V.LESPINARD
Professeur agrégé
Au lycée du Parc de Lyon

R. PERNET
Professeur agrégé
Docteur ès sciences

///Voici ce que j'ai trouvé dans ce deuxième livre de la page 231////

DEPLACEMENTS - GÉNÉRALITÉS - TRANSLATIONS 231

242. ISOMÉTRIE.

DÉFINITION : On dit que deux figures sont isométriques lorsqu'elles sont homologues dans une transformation ponctuelle, la distance de deux points quelconques de l'une étant égale à la distance des points correspondants de l'autre.

La relation d'isométrie est **réflexive, symétrique** et **transitive. C'est une relation d'équivalence.**

243. ANTIDÉPLACEMENTS.

DÉFINITION : On appelle antidéplacement une transformation ponctuelle qui fait correspondre à une figure (F) quelconque une figure isométrique non égale à (F).

EXEMPLE. — Etant donné une figure (F) **d'un plan** (Π), choisissons deux points A et B et construisons deux autres points A′ et B′ de (Π) tels que $A'B' = AB$.

Soit M un point quelconque de (F). On peut construire $M' \in (\Pi)$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})$, $AM = AM'$. La figure (F′) est, par définition directement égale à (F). Elle s'en déduit par un déplacement.

Construisons M'_1 tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'_1}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, $AM = AM'$. La figure (F'_1) ainsi déterminée se déduit de (F) par un **antidéplacement plan.**

244. REMARQUES.

1°) Etant donné deux figures planes (F) et (F′) isométrique, soient (A, A′), (B, B′) deux couples de points homologues donnés, $M \in (F)$ et $M' \in (F')$ un couple quelconque de points homologues. Il n'y a que deux hypothèses possibles :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

(F′) se déduit de (F) par un déplacement.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

(F′) se déduit de (F) par un antidéplacement.

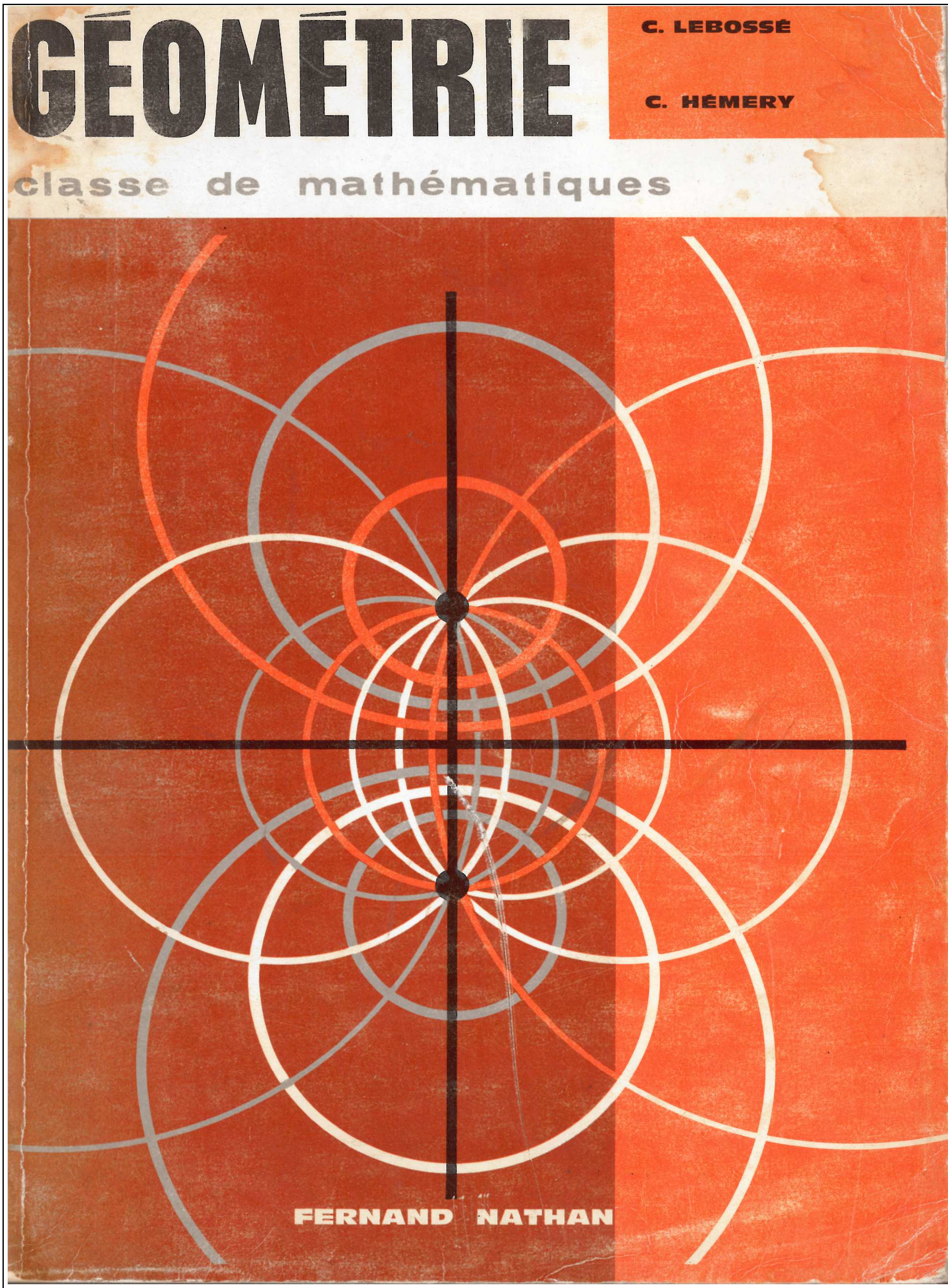
2°) Dans l'espace il n'y a qu'un seul type de figures égales, alors que dans le plan on a défini les figures directement et inversement égales.

II. — TRANSLATION

245. DÉFINITION.

Etant donné (fig. 228) un vecteur $\overrightarrow{V}$ appelé **« vecteur directeur », on appelle translation la transformation ponctuelle qui à un point M**

//// il y a la définition de l'antidéplacement dans ce vieux livre///Alors que dans mon livre nulle ///part rien n'est dit sur les antidéplacements [ ]//alors qu'il y a la formule ///////C'est encore plus riche dans ce dernier livre///



C. LEBOSSE

Agrégé de mathématique

Professeur au lycée Claude-Bernard

C. HEMERY

Agrégé de mathématiques

Professeur au lycée Lavoisier

FERNAND NATHAN

EDITION

12e leçon

SYMÉTRIE AXIALE DANS LE PLAN

304. Figures inversement égales dans le plan. — Deux figures superposables F et F′ d'un plan P sont dites *inversement égales* si, pour amener la figure F sur la figure F′, il faut d'abord retourner le plan P sur lui-même. Dans deux figures inversement égales F et F′, deux segments homologues sont égaux tandis que deux angles orientés homologues sont opposés.

— La correspondance entre deux figures F et F′ inversement égales du plan est appelée *antidéplacement* et peut être définie de la façon suivante :

Considérons dans le plan deux segments égaux AB et A′B′ et un point quelconque M (fig. 309). Construisons le point M′ tel que :

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) \quad \text{et} \quad A'M' = AM.$$

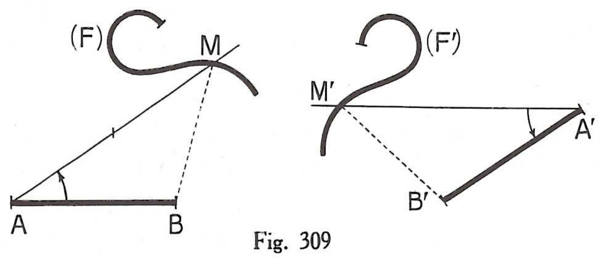


Fig. 309

Le triangle A′B′M′ est inversement égal au triangle ABM. Lorsque le point M décrit une figure F, son homologue M′ décrit une figure F′ inversement égale à F et dans laquelle A′ et B′ sont les homologues de A et de B.

En effet si on retourne le plan P sur lui-même, on peut amener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en coïncidence avec $\overrightarrow{A'B'}$. Tout point M de F coïncide alors avec son homologue M′ de la figure F′. Notons que :

1° Un antidéplacement est déterminé quand on connaît un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son transformé $\overrightarrow{A'B'}$ de même module;

2° Deux figures F_1 et F_2, inversement égales à la figure F, sont directement égales. Le produit de deux antidéplacements plans est donc un déplacement plan.

Page 207

309. Théorème. — ***Deux figures inversement égales d'un même plan se correspondent dans le produit commutatif d'une symétrie d'axe Δ par une translation parallèle à Δ.***

Soient A et B deux points d'une figure F, A′ et B′ leurs homologues dans la figure F′ inversement égale à F (fig. 314). Par le milieu I de AA′, menons l'axe Δ défini par : $(\overrightarrow{AB}, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, \overrightarrow{A'B'})$. La symétrie d'axe Δ transforme F en une figure F_1 inversement égale à F, donc directement égale à F′. Elle transforme en particulier $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{AB}, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, \overrightarrow{A_1B_1}) \\ A_1B_1 = AB = A'B'\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A'B'}.$$

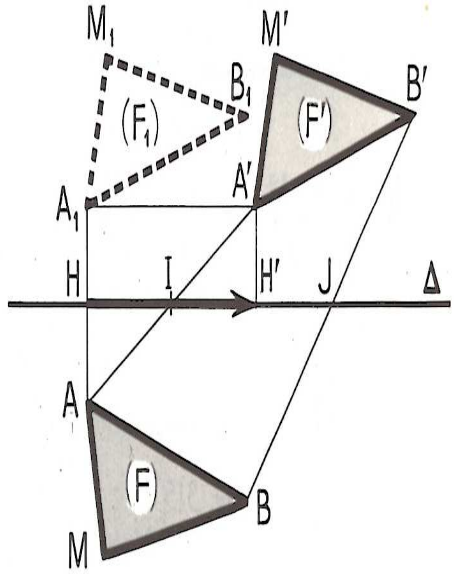


Fig. 314

Il en résulte que F′ est la transformée de F_1 dans la translation $\overrightarrow{A_1A'}$ (n° 290) dont le support est parallèle à Δ puisque Δ passe par les milieux H et I de AA_1 et de AA′. Le produit de la symétrie Δ par la translation $\overrightarrow{A_1A'}$ est d'ailleurs commutatif. Notons que :

La droite Δ est la seule droite invariante dans la transformation. Elle contient le milieu de tout vecteur MM′ joignant deux points homologues et la projection de ce vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sur Δ est constante et égale au vecteur de la translation. La droite Δ se nomme axe de l'antidéplacement.

Page 209

318. Produit d'une symétrie axiale $S(\Delta)$ et d'une translation $(\vec{T})$. — 1° Soit A un point de l'axe Δ et A' son transformé dans $(\vec{T})$ (fig. 321). Désignons par Δ_1 la parallèle à Δ menée par le milieu I de AA', par A_1 la projection de A' sur Δ et par A_2 le symétrique de A par rapport à Δ_1. Posons $\overrightarrow{AA_1} = \vec{T}_1$, $\overrightarrow{AA_2} = \vec{T}_2$. On voit que $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ et que :

$$(\vec{T}) \circ S(\Delta) = (\vec{T}_1) \circ (\vec{T}_2) \circ S(\Delta).$$

Or : $(\vec{T}_2) = S(\Delta_1) \circ S(\Delta)$ donc :

$$(\vec{T}) \circ S(\Delta) = (\vec{T}_1) \circ S(\Delta_1) \circ S(\Delta) \circ S(\Delta).$$

Soit : $(\vec{T}) \circ S(\Delta) = (\vec{T}_1) \circ S(\Delta_1) = S(\Delta_1) \circ (\vec{T}_1)$

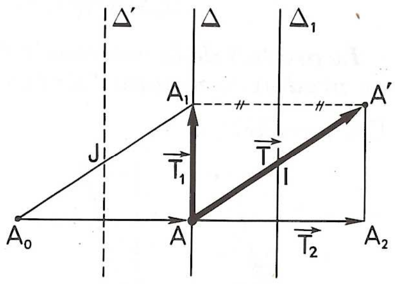


Fig. 321

***Le produit de la symétrie** $S(\Delta)$ **et de la translation** $(\vec{T})$ **est équivalent au produit commutatif de la symétrie** $S(\Delta_1)$ **et de la translation** $(\vec{T}_1)$ **parallèle à** Δ.*

On retrouve la forme réduite d'un antidéplacement (n° 309). L'axe Δ_1 passe par le milieu I du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ joignant le point A à son transformé A' et le vecteur $\vec{T}_1$ de la translation n'est autre que la projection de $\overrightarrow{AA'}$ sur cet axe Δ_1.

2° En désignant par Δ' la droite symétrique de Δ_1 par rapport à Δ et passant par le milieu J de $\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{T}$, on voit de même (fig. 321) que :

$$S(\Delta) \circ (\vec{T}) = S(\Delta) \circ (\vec{T}_2) \circ (\vec{T}_1) \quad \text{et} \quad (\vec{T}_2) = S(\Delta) \circ S(\Delta') \quad \text{donc :}$$

$$S(\Delta) \circ (\vec{T}) = S(\Delta) \circ S(\Delta) \circ S(\Delta') \circ (\vec{T}_1) = S(\Delta') \circ (\vec{T}_1) = (\vec{T}_1) \circ S(\Delta')$$

***Le produit de la translation** $(\vec{T})$ **et de la symétrie** $S(\Delta)$ **est équivalent au produit commutatif de la symétrie** $S(\Delta')$ **et de la translation** $(\vec{T}_1)$ **parallèle à** Δ'.*

Comme ci-dessus l'axe Δ' passe par le milieu J du vecteur $\overrightarrow{A_0A_1}$ joignant le point A_0 à son transformé A_1 et le vecteur $\vec{T}_1$ de la translation est la projection de $\vec{T}$ sur Δ'.

Le vecteur $\overrightarrow{JI}$ étant égal à $\vec{T}_2$ on voit que le produit $S(\Delta) \circ (\vec{T})$ n'est commutatif que pour $\vec{T}_2 = \vec{0}$ c'est-à-dire si $\vec{T}$ est parallèle à Δ.

Page 213

///Vous voyez///Là, les choses sont claires////Tout est bien expliqué avec des mots et des constructions////

***<u>Observateur</u>** : Pourquoi vous êtes allez regarder dans ces livres ?*

///Parce que je veux savoir et je veux comprendre ce que représente l'antidéplacement///Je connais la formule qu'il faut utiliser qui est dans mon cahier de cours et le livre de classe et je ne savais pas que cela s'appelle antidéplacement ou symétrie glissante///Surtout en géométrie on peut faire des constructions ///Donc je suis allé regarder ///Ce sont des livres de géométrie////Je savais que dans les anciens livres il y a des choses///C'est en faisant des recherches de cette manière sur internet et dans des livres de mathématiques qui ne sont pas des livres que le professeur nous conseil de regarder que je découvre d'autres informations sur les notions étudiées en classe ///Je

*connais maintenant ce que cela veut dire et ce que représente un antidéplacement ou symétrie glissante/// J’ai même expliqué cela à ma copine et à d’autre élèves de ma classe /// Vous savez///certains élèves ont demandé au professeur pourquoi on a pas la définition de l’antidéplacement/// il leur nous a expliqué que c’est une composée de symétrie d’axe et de translation///C’est vrai///mais je sais maintenant que c’est plus que cela[regardez à la page 39 //[Réf : page 258 de cette recherche]Il y a beaucoup de notions mathématiques qui ne sont pas détaillées ou bien présentées dans les cours en classe/////Avec mon travail de recherche personnelle// je fais beaucoup de choses // j’ étudie d’exercices ///// Sur internet il y a de*s choses *qui ne sont pas dans mon ni cahier ni dans mon livre de classe comme l’antidéplacement*[376]///

Un objet introuvable dans le cahier et le livre de classe d’AC001 : l’antidéplacement ou symétrie glissante.

Nous revenons maintenant sur la difficulté rencontrée par AC001 dans l’épisode biographique *Réf/S-5/11032007/similitude indirecte* 1 *page 12 & Réf /S-Complément /09052007/ similitude indirecte* $\neq 1$, pour répondre à la question quelle est la place de l’antidéplacement dans l’enseignement mathématiques en classe de terminale scientifique spé maths ?

Dans les documents présentés ci-dessus, il apparaît que dès lors que l’on procède à une exploration descriptive des isométries planes comme le montre les recherches d’AC01 dans anciens livres, il est peu probable que l’antidéplacement échappe à l’investigation. Par contre lorsque nous avons exploré le livre de mathématiques utilisé en classe et le cahier de cours de cette élève, le terme antidéplacement est totalement absent même si son écriture complexe est présente sans être aussi nommée comme l’expression de l’antidéplacement dans le corps des nombres complexes. A titre d’exemple, nous examinons brièvement le livre de la classe de terminale scientifique « S » d’AC001, c’est un manuel largement diffusé, celui de la collection *Math' x* (les éditions Didier, Paris 2006). Le chapitre 4 du livre est consacré aux similitudes dans le plan. Nous présentons ici quelques pages du livre à titre illustratif pour un brève analyse

[376] Données trouvées sur internet

COURS

1. Généralités

Dans tout ce qui suit, le plan est orienté et lorsqu'il s'agit du plan complexe, il est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. Notion de transformation

Une **transformation** est par définition une **bijection T** du plan dans lui-même.
Cela signifie :
1. qu'à tout point M est associé un unique point $T(M)$;
2. que pour tout point N il existe un **unique** point M tel que $T(M) = N$.

Exemples :
Une symétrie axiale, une symétrie centrale, une rotation, une homothétie sont des transformations.
Conséquence immédiate :
Par une transformation, deux points distincts ont des images distinctes.

2. Similitude plane

Définition 1 → **Une transformation *f* du plan est une similitude si et seulement si quels que soient les points M, N, P, Q avec $M \neq N$ et $P \neq Q$ d'images respectives M′, N′, P′, Q′ par *f* :**

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{M'N'}{P'Q'}.$$

Cela signifie qu'une **similitude** du plan est une **transformation** qui **conserve les rapports des distances**.

Propriété 1 et définition 2 → **Soit *f* une transformation du plan.**
- ***f* est une similitude si et seulement si il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points M et N d'images respectives M′ et N′ par *f* :**

$$M'N' = kMN.$$

- **Le réel k par lequel une similitude *f* multiplie les distances est appelé le rapport de la similitude *f*.**

Vocabulaire
On dit que *f* multiplie les distances par *k*.

Exemples :
- Les translations, les symétries axiales, les rotations, l'application identité sont des similitudes de rapport 1 car elles conservent les longueurs.
Une similitude de rapport 1 est appelée **isométrie**.
- Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Propriété 2 → **Toute similitude envoie tout triangle sur un triangle semblable et elle conserve les angles géométriques.**

Remarque
Toute transformation qui envoie tout triangle sur un triangle semblable ou qui conserve les angles est une similitude (voir problème n° **76**).

COURS

3. Composition

Théorème 1 → Composée de deux similitudes

- **La composée $\sigma_2 \circ \sigma_1$ de deux similitudes σ_1 et σ_2 de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport k_1k_2.**
- **La bijection réciproque f^{-1} d'une similitude f de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.**

Remarque

La composition de deux similitudes n'est pas commutative :

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 \neq \sigma_1 \circ \sigma_2 .$$

Exemple :

La composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

4. Dans le plan complexe

Propriété 3 → Exemples de similitudes

Dans le plan complexe, toute application qui a pour écriture complexe :

$$z' = az + b \text{ ou } z' = a\bar{z} + b, \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

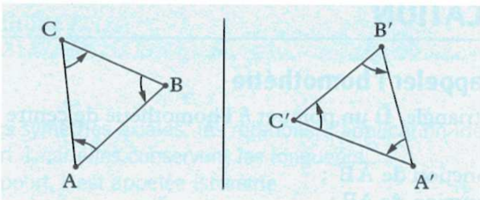
est une similitude de rapport $|a|$.

Cas particuliers :

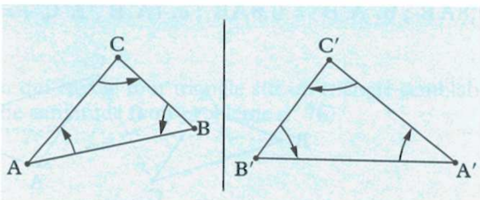
- $z' = z + b$ est une écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe b.
- $z' = e^{i\theta}z$ est une écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ.
- $z' = \lambda z$, λ réel non nul, est une écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport λ.
- $z' = \bar{z}$ est une écriture complexe de la symétrie d'axe (Ox).

Remarques

- Par une translation, une rotation, une homothétie, les angles orientés sont conservés. Un triangle et son image ont des angles orientés correspondants égaux : on dit qu'ils sont **directement semblables**.



- Par une symétrie axiale, les angles orientés sont transformés en leurs opposés. Un triangle et son image sont dits **indirectement semblables**.



104 ➥ **chapitre 4** Similitudes

COURS

2. Similitudes directes

A ■ Définition et écriture complexe

Définition 3 → **Une similitude directe est une similitude qui conserve les angles orientés.**

Exemples :
Les translations, les homothéties, les rotations sont des similitudes directes.

Propriété 4 → Propriété complexe d'une similitude directe

Soit σ une similitude directe du plan complexe ;
p, q, r les affixes respectives de trois points P, Q, R avec $p \neq q$ et $p \neq r$;
p', q', r' les affixes respectives des images de P, Q, R par σ alors :

$$\frac{r'-p'}{q'-p'} = \frac{r-p}{q-p}.$$

Théorème 2 → Écriture complexe d'une similitude directe

Les similitudes directes du plan complexe sont les transformations de la forme :

$$z \mapsto az+b, \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

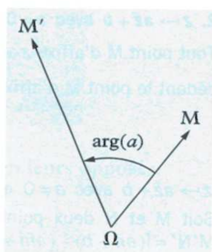
B ■ Description géométrique

Théorème 3 → **Soit σ la similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$).**
- **Si $a = 1$, σ est la translation de vecteur d'affixe b.**
- **Si $a \neq 1$, σ admet un unique point invariant Ω.**

De plus, $\sigma = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$, et r la rotation de centre Ω et d'angle $\arg(a)$.
On a $h \circ r = r \circ h$.

Si M′ est l'image de M par la similitude σ d'écriture complexe $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$), on a alors la figure ci-contre et :
- $\Omega M' = |a| \cdot \Omega M$;
- $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \arg(a) (2\pi)$.

Ω est appelé le **centre** de la similitude σ.



106 ➥ **chapitre 4** Similitudes

COURS

C ■ Propriétés des similitudes directes

1. Angle d'une similitude directe

Propriété 5 →

Soit σ une similitude directe, A et B deux points distincts d'images A′ et B′ par σ.
L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ne dépend pas de A et B.
On l'appelle angle de la similitude.

Remarque
Si $z' = az + b$ est une écriture complexe de σ, l'angle de σ est $\arg(a)$.

2. Donnée d'une similitude par deux points et leurs images

Théorème 4 →
Similitudes directes et couples de points

Soit A, B, A′, B′ quatre points du plan tels que A ≠ B et A′ ≠ B′. Alors il existe une unique similitude directe telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

Exemple :
Soit $A(1)$, $B(2i)$, $A'(1+i)$, $B'(-3-i)$.
Déterminons l'expression complexe de la similitude σ transformant A en A′ et B en B′.
On sait que σ a pour expression complexe $z' = az + b$, $a \neq 0$.

Par suite, on a $\begin{cases} 1+i = a \cdot 1 + b \\ -3 - i = a(2i) + b \end{cases}$

Par différence $a(1-2i) = 4 + 2i$ d'où $a = \dfrac{4+2i}{1-2i} = 2i$, puis $b = 1 + i - a = 1 - i$.

Donc σ a pour expression complexe $z' = 2iz + 1 - i$.

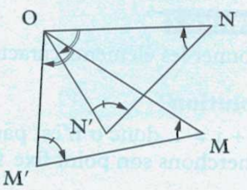
3. Similitude directe et triangle

Propriété 6 →
Image

• Une similitude directe transforme un triangle en un triangle directement semblable.
• Soit ABC et A′B′C′ deux triangles directement semblables avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$, alors il existe une unique similitude directe σ telle que $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$, $\sigma(C) = C'$.

Propriété 7 →
Une propriété du centre

Soit O le centre d'une similitude directe σ.
Soit M et N deux points quelconques du plan tels que O, M, N ne soient pas alignés.
Soit M′ et N′ les images respectives de M et N par σ.
Alors les triangles OMM′ et ONN′ sont directement semblables.



108 ➥ chapitre 4 Similitudes

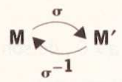
COURS

4. Composée de deux similitudes directes

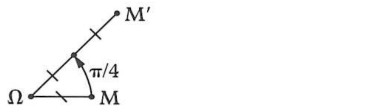
Propriété 8 →
Composition de similitudes

- **La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.**
Si σ_1 est la similitude directe d'angle θ_1 et de rapport k_1, et σ_2 celle d'angle θ_2 et de rapport k_2, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ a pour angle $\theta_1 + \theta_2$ et pour rapport $k_1 k_2$.
- **La bijection réciproque d'une similitude directe d'angle θ et de rapport k est une similitude directe d'angle $-\theta$ et de rapport $\frac{1}{k}$.**

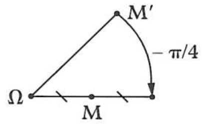
Notation
σ^{-1} désigne la réciproque de σ.



Exemple :



$\Omega M' = 2\Omega M$, $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
$M' = \sigma(M)$



$\Omega M = \frac{1}{2}\,\Omega M'$, $(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$
$M = \sigma^{-1}(M')$

5. Déplacements

Définition 4 →
Un déplacement est une similitude directe de rapport 1, c'est-à-dire une isométrie qui conserve les angles orientés.

Propriété 9 →
Nature d'un déplacement

Tout déplacement est une translation ou une rotation.

Exemple :
Si r et r' sont les rotations de centres Ω, Ω' et d'angles θ et θ', $r \circ r'$ est une similitude directe. Son rapport est le produit des rapports donc 1. Son angle est $\theta + \theta'\ (2\pi)$.
Ainsi si $\theta + \theta' = 0\ (2\pi)$, $r \circ r'$ est une translation et si $\theta + \theta' \neq 0\ (2\pi)$, $r \circ r'$ est une rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Propriété 10 →
Tout déplacement d admet une écriture complexe $z \mapsto az + b$ avec $|a| = 1$.
- **Si $a = 1$, d est une translation.**
- **Si $a \neq 1$, d est une rotation d'angle $\arg(a)$.**

Exemple :
1. $z' = z + 1 - 2i$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1\,;\,-2)$.
2. $z' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) z - i$ est la rotation d'angle $\arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}\,(2\pi)$ et de centre Ω d'affixe $\frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{1}{2}i$.

110 ➥ **chapitre 4** Similitudes

COURS

3. Étude générale des similitudes

A ▪ Similitudes et points fixes

Théorème 5 → Points fixes

- **Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'identité.**
- **Une similitude qui admet deux points fixes distincts A et B est l'application identité ou la symétrie axiale d'axe (AB).**

B ▪ Similitudes non directes

Propriété 11 → **Toute similitude non directe f peut s'écrire sous la forme $\sigma \circ s$ où σ est une similitude directe et s une symétrie axiale.**
Elle transforme tout angle orienté en son opposé.
On dit qu'elle est indirecte.

Remarque : toute similitude du plan est soit directe soit indirecte.

Théorème 6 → Écriture complexe d'une similitude indirecte

Toute similitude indirecte du plan complexe a pour écriture complexe :

$$z = a\bar{z} + b \text{ où } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}.$$

Corollaire → **Soit θ un réel. La similitude d'écriture complexe $z' = e^{i\theta}\bar{z}$ est une symétrie axiale d'axe passant par O origine du repère.**

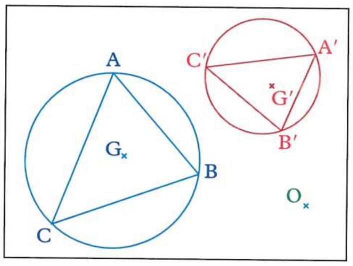
Exemple :
$z' = i\bar{z}$ est une expression complexe de la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

C ▪ Effet des similitudes sur certaines configurations

Propriété 12 → **Toute similitude f :**

- **conserve l'orthogonalité ;**
- **conserve le parallélisme ;**
- **conserve le barycentre (en particulier le milieu) ;**
- **transforme une droite en une droite ;**
- **transforme un segment de droite en un segment de droite ;**
- **transforme un cercle de centre O et de rayon R en un cercle de centre O′ = f(O) et de rayon kR où k est le rapport de f.**

Exemple :
Effet de la similitude directe f de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 0,7 sur la figure bleue.
G est le centre de gravité du triangle ABC et G′ le centre de gravité de A′B′C′ est l'image de G par f car f conserve le barycentre.



112 – chapitre 4 Similitudes

Lorsque l'on regarde les pages ci-dessus du livre (comme d'autres livres) au programme et les cahiers de cours de AC001 (et ceux des autres élèves de la classe de terminale scientifique « S ») sur les isométries ; les analyses mathématiques qui s'y développent reconnaissent plus précisément trois types d'isométrie. La rotation et la translation pour les isométries directes et, pour les isométries indirectes, la symétrie axiale est bien précisée. Cependant il faut ajouter un quatrième type, plus implicite, pour lequel le lexique mathématique courant utilisé dans les livres et les salles de classes n'offre pas d'appellation bien définie à contrario des auteurs anglophone qui, eux nomment ce quatrième type d'isomérie « **glide reflection** », « l'antidéplacement ». Pour s'en tenir à ce livre, s'agissant des isométries directes, des précisions sont bien notées dans le corps des théorèmes, par exemple, dans quel cas la transformation, représente une translation ou rotation. Par contre dans le cas des isométries indirectes, non seulement la distinction entre symétrie axiale et antidéplacement fait simplement l'objet de note sommaire : Théorème : « toute similitude indirecte du plan complexe a pour écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in C*$ et $b \in C$ » .Propriété : « *Toute similitude indirecte* f *peut s'écrire sous la forme* $\sigma \circ S$ *où* σ *est une similitude directe et* s *une symétrie axiale. Elle transforme tout angle orienté en son opposé* ». Nous retrouvons les mêmes théorème et propriétés présentés dans le cahier de CA001. Le statut sommaire sans nommer de façon générique le quatrième type isométrie est significatif de la minoration de l'antidéplacement au sein du corpus enseigné.

Le contraste n'est pas moins fort lorsqu'on se tourne vers les isométries. L'étude mathématique en reconnaît quatre types : la rotation et la transformation pour les isométries directes et, pour les isométries indirectes, la symétrie axiale est bien connue, tandis qu'un quatrième type pour lequel le lexique mathématique dans l'institution scolaire (salle de classes, livres aux programme dans les classes de terminales S) n'offre pas d'appellation bien définie à ce qui est communément appelé « glide reflection »dans le monde anglophone et antidéplacement dans le monde francophone. Tandis que l'enseignement dans plusieurs pays anglophone tend plus fréquemment à utiliser le terme antidéplacement, le système l'enseignement et les livres est encore sont encore fermés à l'utilisation du thème antidéplacement dans les classes de l'institution scolaire en maintenant la récurrente image de : translation, rotation, et symétrie

> . « Ainsi le thème antidéplacement est un objet mathématique aveugle, associé à un certain flou dans le traitement didactique qu'il reçoit ; »[377]

Nous revenons maintenant sur la difficulté rencontrée par AC001 dans l'épisode biographique Réf/S-5/11032007/similitude indirecte de rapport 1 page 12 & Réf /S-Complément /09052007/ similitude indirecte de rapport $\neq 1$, pour répondre à la question quelle est la place de l'antidéplacement dans l'enseignement mathématiques en classe de terminale scientifique spé maths ?

On peut se poser la question de comment fonctionne cet objet ? Et quelles sont les conséquences de l'économie didactique de cette architecture mathématique inattendue pour les élèves ?

La brève analyse du livre de classe d'AC001, montre la carence du lexique pour nommer les isométries négatives bien que son expression analytique soit présente dans le livre et son

[377] Landy Rajoson 1988

cahier de cours. Le terme générique d'antidéplacement n'est nullement utilisé, ni associé à sa formule dans le corps des nombres complexes. Nous pensons que c'est l'absence d'un mot pour désigner l'objet mathématique, qui peut expliquer la difficulté qu'a rencontré d'AC001 dans la recherche de solution de la **question 2** *Réf/S-4/11032007/similitude indirecte* $\neq 1$ *page 12* .AC001 ne connaissait par le mot générique relatif à l'objet pour travailler la question 2.C'est une fois une ébauche de la définition trouvée par son père qu'elle a compris qu'un formule existe à la fois dans cour et son livre, mais ne dit pas son nom.

> « *///mais ce n'est pas dans mon cours ni dans le livre ce que représente un antidéplacement….//// mais le professeur n'a jamais parlé de ça….////* » .

Nous postulons que de telle situation va avoir des effets didactiques déterminés sur le travail des élèves. Alors que l'exercice est proposé son professeur à tous les élèves de sa classe, à ce niveau, à propos des transformations du plan, et dont la tâche consiste à identifier la nature d'une transformation dont ils n'ont aucun mot le désignant dans leur livre et leur cahier de cours, sauf l'expression analytique qui ne dit pas non plus qu'elle est l'expression de l'antidéplacement dans le corps des nombres complexes. Ainsi, l'absence de dénomination, c'est- à-dire l'absence de reconnaissance culturelle dans la culture mathématique empêche de réussir ce type de tâche à propos des antidéplacements. Plus exactement l'élève se trouve, du point de vue écologique, devant une tâche qu'il n'a que de faibles chances de réussir s'il ne comble pas le trou[378]

Ainsi, dès lors que le terme générique associé à la question 2 se trouve, écologiquement interdit, l'un des problèmes fondamentaux de l'économie didactique resurgit : ainsi, la question est de savoir que pourra faire un élève à propos de cet objet mathématique qui a été signalé par son expression analytique, mais non étiquetés ?

Une première réponse pour l'élève consisterait de laisser cet objet inerte, étant donné qu'il est implicitement présent dans le cours et le livre par son expression analytique, et absent par son terme générique. Une autre réponse consisterait comme l'a fait A001, par ses recherches personnelle à les activés dans le cadre d'un exercice, à aller enquêter là où l'objet vit (à chercher sa niche), et à l'étudier malgré l'absence de mot pour désigner l'objet mathématique « antidéplacement » (qui permet de trouver des habitats) en tirant profit de ses recherches sur internet-forums et dans de vieux livres. Définir la niche de la symétrie glissante c'es la comprendre comme le produit d'une symétrie et d'une translation, et décomposer la transformation par la méthode de la géométrie descriptives ou d'autre, en lien avec le cours. Mais pour cela il faut se situer au niveau d'études où ce sont les antidéplacements qui sont l'objet d'une enquête systémique, tandis que dans la classe et selon les programmes actuels ces objets ne sont caractérisés que comme des « *non- déplacements* » L'enquête dans les ouvrages d'enseignement que nous avons conduite parallèlement à AC001 montre que ce travail, qui existait en Terminale C en 1962, est aujourd'hui au programme en Mathématiques Spéciale, mais on n'y étudie que la formule d'une isométrie indirecte sans décomposition systématique donnant lieu à sa classification et terme générique

Nous donnons ici un deuxième exemple d'une autre élève qui nous montre comment elle

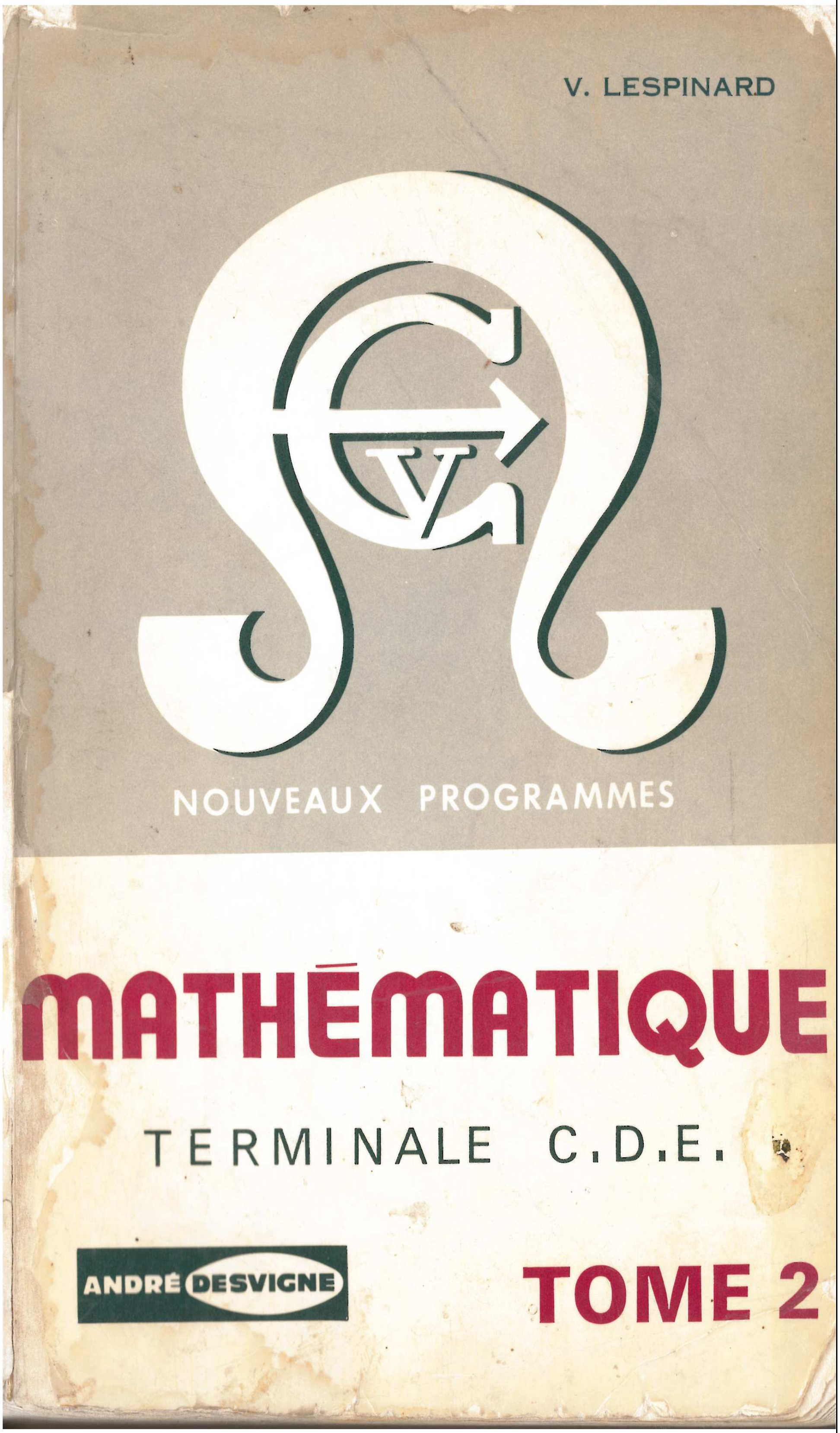
[378] N.Rouy

effectue des recherches en plus du cours pour enrichir son répertoire.

Réf V001/S-E/02052008/Entretient complémentaire relatif à l'exercice

> *«///Les mathématiques sont importantes///je travaille beaucoup d'exercices////c'est le seul moyen pour moi d'apprendre et surtout de comprendre le fonctionnement des notions étudiées en classe avec mon professeur////Le cours en classe est clair/// précis et concis///mais c'est un résumé///Il y a beaucoup de sous-entendus de notions/////c'est une sorte de maillon de chaines qui ne dit pas son nom/////je fais des recherches sur internet et dans d'autres livres de mathématiques en plus de celui de la classe »///Regardez///j'ai trouvé ceci dans un livre de mathématique terminale C///V.LESPINARD collection ANDRE DESVIGNE//TOME 2/// que mon père a utilisé lorsqu'il était en classe de terminale ///*[379]«////

[379] Voir documents annexe



En étude autonome par des exercices, j'apprends comment construire des liens mathématiques/////Je suis contente de mon travail car j'ai des bonnes notes///c'est aussi parce que je vais faire une prépa et après une école d'ingénieur////j'utilise beaucoup de *livre et je découvre dans mes livres des présentations de notions et des démonstrations qui sont plus riches que celle dans que celle exposées dans les séances de cours en classe//A titre d'exemple je vous montre ce j'ai trouvé dans un livre sur les fonctions de répartition et de densité avec lesquelles j'ai compris les lois de probabilités sur les variables continues////380*

Réf F001/S-E/02052008/Entretien complémentaire

«*////Je travaille beaucoup à la maison non seulement pour avoir de bonnes notes mais avant tout pour comprendre////En classe////le cours est bon///mais c'est un condensé de notions et de formules importantes////Tout n'est pas dit dans les leçons///Je travaille à la maison pour trouver les liens///les transformations nécessaires/////*»

«////Les formules du cahier////tout le monde les connaît///mais les utiliser pour répondre aux questions c'est ce que je fais en étude autonome///J'apprends à les tisser avec d'autres formules qui ne sont pas dans la leçon///J'apprends beaucoup de choses en faisant les exercices dans mes livres/// j'ai de vieux livres de mathématiques dans lesquels il y a plus d'information sur les notions étudiées en classe aujourd'hui///j'aime bien regarder dans les vieux livres///attendez//je vous montre quelque chose sur les primitives et les intégrales, et aussi les probabilités////[381]

De tout ce qui précède, il apparaît pour les élèves que nous avons observé, que l'institution scolaire se joue un double jeu lors des séances d'apprentissages mathématiques, d'une part l'institution enseigne les savoirs théoriques du programme officiel et d'autre part, elle organise plus ou moins l'étude d'un certain nombre d'organisations mathématiques qu'elle n'explicite pas toujours ou pas souvent comme enjeux de l'apprentissage. Ainsi, chacun des exercices qu'elle propose à l'ensemble des élèves d'une classe participe à cette double finalité: à l'avant-scène, sous les feux de l'institutionnalisation, l'étude du savoir théorique ; au deuxième plan, un peu dans l'ombre parce que non mise en exergue par le même niveau d'institutionnalisation, l'étude et la construction de plusieurs répertoires mathématiques sont plus que jamais sous la responsabilité de l'élève que seuls les élèves particuliers arrivent à conjuguer contrairement aux élèves en difficultés. Il apparaît aussi qu'à la différence des élèves en difficultés, ceux de notre échantillon de recherche ne peuvent être trompés par la différence d'éclairage dans les salles de cours, en ignorant la deuxième finalité. Mais les considérations développées par les élèves de notre échantillon de recherche introduisent une deuxième source de difficulté qu'ils essayent de par l'étude autonome de combler ; à savoir l'inachèvement de l'étude de certains objets mathématiques débutés en classe avec les professeurs, donc, l'inaboutissement de la construction de certains répertoires mathématiques dans les classes officielles. Relativement aux répertoires mathématiques, l'institution scolaire ne joue pas toujours franc jeu didactique, elle n'assume souvent que très partiellement l'organisation des apprentissages remédiant aux ignorances qu'elle a introduite dans les situations didactiques[382]. Animé du projet de réaliser les apprentissages relatifs aux objets de mathématiques nécessaires à sa réussite dans l'institution d'enseignement mathématiques ; l'élève AC001 comme les autres élèves observés savent que ses apprentissages dépendent de son propre engagement dans l'étude et que la réussite, nécessite sa double posture

[380] Copie de la recherche de V001 dans un livre personnel.
[381] Voir annexe documents
[382] Ce que C . Félix S. Joshua nomme le milieu à « trous » 2002

d'apprenant et d'étudiant[383] autonome. Ceci ne signifie pas que la relation avec l'institution scolaire disparaît, mais qu'elle appartient dorénavant aux milieux des situations dans lesquelles élèves et enseignants ne coopèrent plus. A ce niveau de l'apprentissage, l'élève particulier prolonge l'étude des répertoires mathématiques contrôlés par le savoir théorique sensible, répertoire que son professeur de mathématique a introduit dans des situations didactiques sans pouvoir en développer suffisamment l'étude, et dont, l'élaboration de la technique, l'institutionnalisation de la technique sont largement sous sa responsabilité. Mais à la question où situer les actions et les gestes que l'élève particulier réalise en propre parfois en classe ou en étude autonome, pour que les séances de cours -études organisées par le professeur se convertissent en apprentissage ? La conception qui consiste à considérer uniquement la forte dimension mentale et cognitive met en avant le fait que l'école n'intervient pas dans la formation de ces gestes. Prendre cette position, c'est vider la situation didactique de tout ce qui n'est pas interactions entre professeur et élève, de réduire énormément les responsabilités incombant à l'élève.

Notre recherche de thèse cherche un modèle susceptible de rendre compte de fonctionnements, des façons d'étudier des élèves particuliers dans les classes de terminale scientifiques, elle nous conduit à attribuer à l'élève des formes de travail dont on sait qu'elles feraient déjà défaut à de nombreux élèves (en échec). Pour de telles raisons, nous considérons que les séances de cours- études organisées et dirigées par le professeur dans les salles de classes de l'institution scolaire constituent des enveloppes mise à disposition de l'élève pour l'étude, et que l'élève doit les ouvrir pour en étudier le contenu. A ce niveau de la recherche, nous proposons d'introduire une posture de l'élève dans la situation de référence: **la transhumance didactique**. Ainsi, à l'image de la transhumance saisonnière qui consiste à se déplacer d'un point à un autre pour trouver la verdure nécessaire à la vie, nous appelons **transhumance didactique**, la dynamique, le mouvement didactique d'un élève qui se placer dans le milieu adéquat, pour trouver la référence adéquate pour l'étude d'une tâche mathématique, sans accepter les limitations et les frontières. La transhumance permet aux élèves d'assurer l'écologie des répertoires didactiques dont ils sont outillés et cela montre pourquoi les répertoires restent des objets sensibles alors que les rapports aux savoirs théoriques qui les justifient ont cessé d'évoluer. **La transhumance didactique serait alors la nécessaire prolongation des situations d'enseignements/ d'apprentissages mathématiques ayant eu lieu ou non dans les salles de cours de l'institution scolaire**

Nous donnons ici un aperçu extrêmement réduit de la réflexion présentée dans cette partie. Dans ce paragraphe, nous nous appuyons sur certains outils d'analyse d'exercices pour distinguer les différents niveaux d'intervention d'un répertoire mathématique dans les problèmes mathématiques en études. Ces niveaux sont obtenus par le croisement de trois critères : l'identification du type de tâches t est-elle à la charge de l'élève ? La tâche s'insère –t-elle dans un contexte contenant des objets de savoir nouveaux autres que ceux qui relèvent de savoir que l'élève doit manipuler lorsqu'il met en œuvre la technique ? L'élève dispose –t-elle de plusieurs répertoires relatifs à t parmi lesquels il a la responsabilité de choisir la technique efficace ?

Il nous semble que le savoir théorique inclut dans le savoir est un objet sensible, de ce fait,

[383] Les recherchent de l'équipe Escol-Paris 8 ont montré que les élèves n'adoptaient pas nécessairement cette double posture en venant à l'école(cf travaux d'E Bautier, S. Bonnéry, B. Charlot & J.Y . Rochex

les élèves sont rarement confrontés à des problèmes qui sollicitent les répertoires mathématiques du thème régi par le savoir dans des conditions conduisant à une réponse positive pour l'une ou l'autre de trois précédentes questions. Cependant, l'avancée du temps didactique, avec son lot d'objets de savoirs théoriques et de répertoires nouveaux, favoriserait l'intervention des répertoires plus anciens à des niveaux plus complexes : lors de la mise en œuvre d'une nouvelle technique, une tâche relevant de T apparaîtra comme sous tâche non explicite dans l'énoncé du problème mathématique ; pour certains types T, l'enrichissement des savoirs mettra à disposition des élèves des techniques plus nombreuses *Réf:AC001/S-2/20012007/Equation-Différentielle EpisodeRC001Réf :S-5/11-05-2008/Géométrie dans l'espace, F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle* [384]. Nous faisons l'hypothèse que ce développement des formes d'utilisations des répertoires mathématiques provoque un double processus : l'évolution – complétion, la structuration de l'ensemble qu'elles forment d'une part, l'élaboration d'une structure regroupant les répertoires mathématiques relatifs à T serait un élément facilitateur dans le cas de problèmes mathématiques au sein desquels la responsabilité de choisir la technique efficace incombe aux élèves.

De tout ce qui précède nous retiendrons que les répertoires mathématiques restent des objets sensibles beaucoup plus longtemps que les savoirs théoriques qui fondent leur technique. Les répertoires mathématiques peuvent donc être des objets d'apprentissage alors que ses savoirs relèvent du milieu institutionnel. La nécessité et l'occasion de réaliser les apprentissages seraient donc crées par les tâches en études relativement à d'autres enjeux didactiques- *Réf : F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle* , *Réf:AC001/S-1/20012007/Equation-Différentielle* , *Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/ loi exponentielle* .Ainsi non seulement les tâches participent du double jeu : l'étude des savoirs théoriques qui définissent le présent didactique d'une part, l'étude plus ou moins développée des répertoires associés d'autre part, mais surtout le fait que les répertoires s'inscrivent également dans un prolongement de l'étude d'objets mathématiques passés. Cette dimension complexifie le travail de l'élève apprenant étudiant dans une posture d'élève agissant. Dans cette troisième posture, son travail vise à pallier des ignorances dont l'institution classe n'a pas pris en charge la mise en évidence. L'élève agissant fait évoluer son rapport à certains objets sans que l'institution scolaire lui ait fait sentir que cette évolution était utile et fortiori sans qu'elle en ait précisée le contenu. Cette évolution de son rapport marque une différence entre la situation d'apprentissage et celle de référence, du fait qu'il se donne ses objets d'étude, qui sont par définition des objets non sensibles dans la situation didactique, essentiellement des répertoires didactiques anciens, que l'élève rencontre dans des conditions nouvelles au cours du processus d'étude des objets sensibles prolongé par l'élève apprenant. Ainsi, les situations didactiques et d'apprentissage participent à celle de référence comme milieu de l'étude pour l'élève agissant ; mais ce milieu intègre aussi des situations didactiques antérieures ayant eu pour enjeux didactiques les répertoires mathématiques anciens étudiés dans la situation de référence. Peuvent aussi s'y incorporer d'autres rencontres plus isolées dans des problèmes mettant en jeu de répertoires mathématiques. Se constitue ainsi un milieu rapprochant des éléments dispersés dans le temps et dans la structure théorique des séances de cours

L'élève agissant définit ses objets d'étude, il contribue grandement à la construction du milieu sur lequel il appuie son travail d'enquête mathématique. Ces deux dimensions qui caractérisent cette position de l'élève agissant-étudiant du simple apprenant permettent de cerner en quoi l'autonomie nécessaire à l'étudiant dans la situation de référence est plus développée que

[384] *Episode RC001 Réf : S-5/ 11-05-2008/Géométrie dans l'espace*

celle qui convient à un élève apprenant.

7.7 CONCLUSION

D'après les analyses présentées ci-dessus, quatre éléments nous semblent être des facteurs d'effets distinctifs pour la gestion d'un type de répertoire dans les institutions d'études autonome

Tout d'abord, à partir des actions accomplies par les élèves de notre échantillon de recherche, nous formulons l'hypothèse que le savoir en jeu dans un type de tâche détermine à un certain degré, les manières, les mises en place par l'élève d'organisation didactique institutionnelle pour gérer un type de répertoire didactique. En d'autres termes, c'est la nature des objets de l'étude qui impose, en quelque sorte, l'accomplissement d'un type d'action. Tel est le cas pour la probabilité conditionnelle avec les lois de probabilité continue, plus précisément la loi de durée de vie sans vieillissement où il fallait faire usage du travail du répertoire dans l'écologie des savoirs.

Le répertoire de l'étude proposée par les élèves du dispositif de recherche nous semble être aussi à l'origine de l'accomplissement de certains gestes d'études plus que d'autres. Le choix fait *a priori* par l'observateur, sur les objets et les rapports aux objets pour la construction d'un répertoire mathématique, conditionne aussi les actions d'un type de répertoire épistémologique. En outre, soulignons que le fait de favoriser et de disposer de tels moments d'étude autonome, lieu d'apprentissage pour s'enseigner à la compréhension de la structure des mathématiques, se répercute aussi sur le type d'action du répertoire didactique accompli par l'élève. Ainsi, par exemple, dans les séquences analysées, c'est le cas de certains gestes techniques ou de replacement dans le discours et écrits des institutions d'étude observées. Ce dernier constat nous conduit à remarquer le rôle joué par les organisations didactiques institutionnelles dominantes dans ces institutions. C'est ainsi que les modèles épistémologiques dominant dans la construction du savoir mathématique dans les institutions d'études observées ont des incidences, sur la manière d'organiser et de gérer le processus d'apprentissage[385]. Comme nous l'avons indiqué dans la problématique une tâche didactique qui intègre un tel processus est celle qui relève de la gestion du répertoire. Nous avons montré l'incidence que les éléments du modèle épistémologique plus ou moins dominant, ont sur la gestion d'un type de répertoire didactique, en observant les points de référence que les élèves utilisent pour appuyer les réactivations, les changements, les transformations spécifiques ou non spécifique de connaissances.

Le quatrième facteur qui nous semble provoquer des effets distinctifs dans la gestion du répertoire didactique adéquat dans les institutions d'études hors classe, qui a notamment de rapport avec les autres aspects indiqués ci-dessus, est ***le contrat didactique*** qui évolue selon la progression d'analyse d'un type de tâche en étude. En d'autres termes, les rôles des sujets de l'institution sont déterminés par ce que chacun d'eux a la responsabilité de gérer devant l'autre de façon légitime, se sont ses responsabilités qui rendent obligatoire, la réalisation de certaines actions ou gestes d'études. De même, le contrat régule les phases d'analyses d'un type de tâche

[385] D'après A. Mercier 1992

en privilégiant la gestion du répertoire épistémologique vers la construction d'un milieu- média pour l'apprentissage.

Enfin, il s'est avéré que certaines actions du répertoire épistémologique sont accomplies pour des raisons qui relèvent de la nature spontanée et empirique des organisations didactiques mises en place dans les institutions d'études autonomes. Nous avons remarqué que la praxéologie didactique de l'élève dépend aussi de ses assujettissements aux diverses institutions qu'il aurait parcourues, elle dépende aussi d'autres assujettissements externes qui s'imposent à l'étude autonome que les très bons élèves : c'est la transhumance didactique, considérée comme le processus d'enquête pouvant permettre de combler les trous laissés par l'institution scolaire. C'est à l'analyse de ces dernières contraintes et conditions que nous avons consacré notre recherche.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Les très bons élèves ont appris à trouver les savoirs dont ils ont besoin, parce qu'ils savent que ces savoirs ne sont pas dans le cours du professeur bien que ce cours les leur désigne. Comment savent-ils qu'on peut regarder au-delà ? Depuis quand savent-ils qu'ailleurs l'herbe est plus nourrissante ? D'où savent-ils aller ailleurs chercher ce dont ils ont besoin, pour le prendre ? Les possibles sont multiples, et l'on pense d'ordinaire qu'ils relèvent de la contingence. Les travaux sociologiques ont montré que cette contingence était socialement distribuée de manière inégale, ce qui ne donne pas accès aux mécanismes de ses effets différentiels. L'enquête que nous avons conduite nous a montré que quelques principes permettent de mieux comprendre quelque chose de cette *terra incognita*, c'est là que nous semble être son mérite.

D'abord, nous devons en tirer cette leçon : la démocratisation de l'accès à l'école a suivi de près la prise du pouvoir par les professeurs, qui avaient occupé de leurs discours, leçons et interventions tous les temps et les lieux scolaires. Ce faisant ils ont d'abord donné à croire que le tout de l'étude consistait dans l'étude de la leçon professorale , puis que cette étude se mesurait à la résolution des problèmes, enfin que l'apprentissage de cette résolution supposait l'exercice sur des questions élémentaires prises dans la liste de questions définie par le professeur, les réponses étant corrigées par lui-même. Il ne restait plus au professeur contemporain qu'à faire étudier les exercices en groupe et à les corriger au fur et à mesure, durant le temps scolaire, ce qui est le cas dans tous les dispositifs de travaux dirigés et d'aide. Les études et les répétiteurs, qui occupaient naguère près des trois quarts du temps passé à étudier la leçon professée comme résolution générique d'un grand problème et qui définissaient les exercices associés et l'exploration des cas particuliers du type, ont disparu d'autant plus aisément que les internats ont été fermés et que l'organisation de l'emploi du temps des élèves est revenue à la famille, le temps d'étude venant ainsi à la charge exclusive et personnelle des élèves et de leurs parents. L'étude est devenue « autonome ».

Or, notre enquête anthropologique nous a fait rencontrer des questions qui sont intimement liées à ces phénomènes sociaux très généraux ; et c'est pour rendre compte de ce que nos informateurs nous ont montré que nous avons inventé deux termes qu'il est temps de situer pour leur apport à la compréhension de ce que nous appelons l'étude et l'enquête : la transhumance et le répertoire, qui sont les clés de la construction des heuristiques que nous avons observés.

La transhumance, comme déplacement de l'enquête dans l'espace et dans le temps.

Le répertoire, comme reprise, réorganisation et incorporation de la mémoire pratique.

Ces termes sont donc à ajouter au lexique de l'écologie des savoirs telle que l'ont pensé à son origine Chevallard et Rajoson. La transhumance nomme le déplacement nécessaire des questions à étudier, dans l'espace et le temps, elle consiste à chercher les habitats possibles de ces questions afin d'en identifier la niche écologique. Le répertoire nomme le corps des techniques que cette niche fait vivre et qui pourra être construit par l'élève venu les étudier dans l'habitat correspondant. C'est grâce à la connaissance conjointe du répertoire et de la niche qui en constitue les conditions de vie, que l'élève peut développer des heuristiques efficaces et se montrer « très bon élève ». Nous retrouvons dans cette lecture de la transhumance l'interprétation de notre propre parcours biographique, élève d'une lointaine province venu étudier à la capitale et s'assujettissant à cet effet aux étudiants expérimentés pour profiter de leur accès au savoir ; mais nous y retrouvons aussi bien par exemple une interprétation du parcours de AC001, qui bénéficie de la présence de R et de son rapport aux mathématiques, de sa bibliothèque personnelle d'élève et d'étudiant ; ou du parcours de RC001, qui vient étudier chez son camarade de classe plus favorisé afin de bénéficier de son environnement, au bénéfice des deux élèves qui ainsi peuvent étudier en groupe.

Cependant, on l'aura remarqué et c'est une évolution importante de la manière de traiter l'écologie des savoirs inaugurée par Rajoson, les deux termes ne s'appliquent pas aux savoirs indépendamment du sujet impliqué, mais ils qualifient les postures de sujets individuels, et permettent de penser leur biographie didactique. De ce fait, les problématiques écologiques que nous ouvrons maintenant traitent des sujets dans leurs rapports aux savoirs : elles relèvent d'une écologie cognitive et humaine, qui est une anthropologie. Lorsque nous cherchons à définir le contenu des situations anthropologiques que nous observons, et qui sont des habitats pour de très bons élèves, nous avons ainsi à découper assez largement pour inclure aussi bien les conditions scolaires de l'étude que les conditions périscolaires d'organisation de ce que nous avons appelé avec Erdogan et après lui, l'étude autonome. Certes, dans le travail dont ce mémoire rend compte, nous n'avons pas intégré ce qu'il en est du travail en classe, sachant que d'une certaine manière, nos informateurs s'étaient libérés de l'assujettissement au professeur et à son cours qui caractérise les « élèves scolaires ». Mais une étude complète supposerait de prendre pour variable écologique les phénomènes que Erdogan a identifiés et qui sont relatifs à la différence de l'enseignement selon les établissements. Cet auteur a montré comment l'étude autonome trouve des conditions favorables ou défavorables dans un lycée parisien du centre et dans un établissement de proche banlieue. Dans le premier cas le professeur organise pour les élèves les occasions de leur autonomie, tandis que dans le second, il organiserait plutôt les occasions de leur bon assujettissement scolaire. Il montre alors que cet assujettissement n'est pas possible, étant donnée l'organisation curriculaire actuelle qui comporte trop de manques institutionnels pour que le professeur puisse produire, avec des élèves scolaires, un texte du savoir cohérent.

Entrer dans ce travail supposera la prise en charge d'un nouveau niveau de complexité, puisque c'est du rapport entre étude autonome et étude scolaire qu'il s'agit, et que ce rapport devrait être saisi à partir d'une position anthropologique donnant accès aux deux sujets clés de l'affaire : l'élève, le groupe des élèves d'une classe d'un côté, le professeur de l'autre, et les manières dont l'action de l'un organise et contraint l'action de l'autre, dans le système didactique dont nous avons ainsi une définition élargie et dont les travaux didactiques antérieurs ont montré comment la production d'un texte du savoir en contraint le fonctionnement. Car ce texte, qui est comme Matheron (2000) l'a théorisé la mémoire collective instituée ou mémoire du savoir, est quoi qu'il en soit la visée du système et donc l'enjeu de la relation didactique : il n'est écrit nulle part mais il fonde le répertoire des pratiques dont disposent les élèves qui ont appris (leurs heuristiques), et sa reconstruction personnelle par chaque élève dans une action commune avec le professeur (donc, par la classe) est le témoin de l'enseignement réussi comme de l'apprentissage que le professeur devrait être en droit d'attendre. L'observation de l'action des très bons élèves qui ont accepté de nous donner accès à leur pratique privée d'une étude autonome nous a montré comment il se construit et quelques-unes des règles de son développement – que nous devrions appeler son écriture - sous la forme d'un répertoire épistémologique.

Ce travail apporte aussi une réelle contribution méthodologique aux sciences de l'éducation et à la didactique des mathématiques, par la méthode de recherche que nous avons utilisée :

La méthode des épisodes biographiques

Nous avons, tout au long de ce travail, évité le débat entre la position institutionnelle en anthropologie, représentée par Yves Chevallard et la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) d'un côté, Gérard Sensevy et la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (TACD) qui toutes deux pensent à leur manière la dimension collective de la transmission des savoirs et leur vie sociale. Car nous avons joué du fait que la TAD avait laissé ouverte (sans l'explorer très systématiquement) la dimension individuelle des rapports aux objets institutionnels pour nous situer dans cet espace, à la suite d'Alain Mercier et de ses travaux doctoraux. Mais comme on le voit, la question revient aujourd'hui à l'occasion de cette conclusion : quelles sont la place et le poids du professeur dans le processus de l'étude autonome, qui implique en premier lieu l'élève ? Ou plus précisément : notre point de vue d'anthropologue de l'étude, qui a choisi pour informateurs de très bons élèves, nous a-t-il conduit à développer une vision partielle et partiale des phénomènes de l'étude ? Nous avons commencé dans cette conclusion à poser la question ; nous aurons à y répondre, si notre volonté de devenir chercheur réussit à rencontrer les occasions sociales nécessaires à son succès.

***B**IBLIOGRAPHIE*

ANTIBI A. & BROUSSEAU G. (2002). « *Vers l'ingénierie de la dé-transposition* ». Les Dossiers des Sciences de l'Education, N° 8, p. 45 – 57. Presses universitaires du Mirail (Toulouse)

ARSAC G. (1992), L'évolution d'une théorie en didactique : l'exemple de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*° 12 (1) ,pp7-32

ARTIGUE M.(1993), Enseignement de l'analyse et fonction de références. *Repère*s, n°11, pp115-139

ARTIGUE M. (1996), Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In Belhoste B. Gispert H. and Hulin.(éd) les sciences au lycée. *Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* .Paris : Vuibert & INRP.

ARTIGUE M. (2000), L'entrée dans les champs de l'analyse : reformes curriculaires, recherche didactiques, ou en est-on ? In Assude Teresa and Grugeon Brigitte (éd). *Actes du séminaire national de didactique des mathématique*s. Paris :IREM de l'université Paris -7

ARAYA A. (2008), Gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire en France et en Costa- Rica, thèse du troisième cycle, Université de Toulouse.

ARAYA, A. et MATHERON, Y. (2005). La problématique de la mémoire: propositions et exemples pour son abord anthropologique en didactique des mathématiques. *Actes du 1^er^ Congrès International de la Théorie Anthropologique du Didactique*.

ASSUDE T. (2003). Étude du curriculum mathématique entre changements et résistances.
Liens entre écologie et économie didactique. Synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches en Sciences de l'Éducation, Université de Provence, Marseille, France

ASSUDE, T., MERCIER, A. et SENSEVY, G. (2007**)**. L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherche en didactique des mathématiques*, 27 (2), 221 – 252.

BACHELARD G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris VRIN 1975.

BACHELARD G. (1951). Conférence au Palais de la Découverte, *L'actualité de l'histoire des sciences.*

BACHELARD G. (1949), Le rationalisme appliqué ; Paris : 1986.

BARRERE, A. (1997), les lycéens au travail, Paris : PUF.

BERTEAUX, D. (1976).Histoires de vie-ou récits de pratiques ? Méthodologie de l'approche biographique en sociologie. Rapport au CORDES

BERTEAU, D. L'approche biographique, sa validité méthodologique, ses potentialités. Cahiers internationaux de sociologie

BERTEAUX, D. (1997) Les récits de vie. Paris : Nathan

BOSCH, M. & CHEVALLARD Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. Recherche en didactique des mathématiques, n° 19 (1) pp77-124

BOSCH, M. (1994a). *La dimension ostensive l'activité mathématique. Le cas de la proportionnalité*, Thèse de doctorat, Universit2 Autonome de Barcelone (non publié).

BOSCH, M. (1994b). Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité. In Artigue, M., Gras R., Laborde, C. et Tavignot, P. (Eds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble : La pensée sauvage, pp. 305 – 312.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en didactique des mathématiques*. 19 (1), pp. 77 – 124.

BOSCH, M. et GASCON, J. (2002). Organiser l'étude. 2. Théories et empiries. In Dorier J.-L. et al (eds.). *Actes de la 11e Ecole d'Eté de didactiques des mathématiques* – Corps 21-30 Août 2001 (pp. 23 – 40). Grenoble : La pensée sauvage.

BRIAND J. & CHEVALIER M.C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Paris : Hatier.

BROUSSEAU,G. (1983), Obstacles épistémologiques en mathématique. Recherche en didactique des mathématiques n°4 (2) pp33-115.

BROUSSEAU, G (1996). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2), 33 – 115.

BROUSSEAU, G (1988). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, 9 (3), 309 – 336.

BROUSSEAU, G. (1996). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, in Noirfalise, R & Perrin-Glorian, M-J. (Eds) *Actes de la VIIIe Ecole et université d'été de didactique des mathématiques*. IREM de Clermont-Ferrand, 3 – 46.

BROUSSEAU, G. (1998**)**. *Théorie des situations didactique*, Paris : La pensée sauvage.

CABASSUT Richard (2005). *Démonstration, raisonnement et validation dans l'enseignement secondaire des mathématiques en France et en Allemagne. U*niversité Paris 7, thèse.-295/376-

CAGNAC G et THIBERGE L (1967). *Géométrie classes terminales C et T* Masson, Paris.

CASTELLA C. et MERCIER A. (1995). *Peut-on enseigner des méthodes ? Comment les élèves apprennent-ils des méthodes ?* Petit x n° 41, IREM de Grenoble.

CASTELA C. (1995). *Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures.* Volume 15/1, p 7-45. La Pensée Sauvage Grenoble.

CASTELA, C. (2005). *Travail de la question des enjeux ignorés d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique*. *Curriculum et chronogenèse praxique*. Primero Congreso internacional sobre la teoría antropológica de lo didáctico, 27-30 Octobre 2005
(Baeza España).

CATELA, C. Qu'apprennent en mathématiques les très bons élèves de la filière scientifique et comment ? Une étude de cas. Rapport de recherche.

CASTELA, C. (2008). *Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes.* Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la *XIII*e école d'été de didactique de mathématiques, p. 89-114, (Eds Rouchier, Bloch). La Pensée Sauvage, Grenoble.

CENTENO, J. (1991**)**. La mémoire dans le contrat didactique. *Actes de la VI Ecole d'été de didactique des mathématiques*, 28- Août- 6 Septembre 1991, Plestin les Grèves.

CENTENO, J. (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant.* Thèse posthume inachevée. LADIST, Bordeaux

CHEVALLARD, Y. (1986). Esquisse d'une théorie formelle du didactique, in C. Laborde (éd), *Actes du Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, pp. 97 – 106.

CHEVALLARD, Y. (1988**)**. L'univers didactique et ses objets : fonctionnement et dysfonctionnements. *Interactions didactiques, 9 (Médiation et remédiation didactiques)*, Universités de Genève et de Neuchâtel, pp. 9 – 36.

CHEVALLARD, Y. (1989**)**. Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, in *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 1988-1989*, Université Joseph Fourier, 211 – 235.

CHEVALLARD Y. (1990). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège*. Troisième partie. Petit x n° 30. IREM de Grenoble.-296/376-

CHEVALLARD, Y. (1991; 1e éd., 1985). *La transposition Didactique*, Paris : La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 (1), 73 – 112. La Pensée sauvage, Grenoble

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), 221 – 266.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude, cours 3 – Ecologie & Régulation, en *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble, 41 – 56

CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. In Maury, S. et Caillot, M., *Rapport au savoir et didactiques*. Paris : FABERT, pp. 81-104.

CHEVALLARD Y. (1994) *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis (Turin, 3 février 1994) pour l'année 1993-1994, p.190-200. Disponible à l'adresse suivante :
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf

CHEVALLAR, Y. et MERCIER, A. (1987**)**. *Sur la formation historique du temps didactique*. Publication n°8 de l'IREM d'Aix-Marseille, Marseille Didactique des Mathématiques, Dorier, J.-L. Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (éditeurs). La Pensée Sauvage. Grenoble.

CHEVALLARD Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*,
Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique: L. Ruiz-

Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas.

Aportacionesde la Teoría Antropológica de la Didáctico, Universidad de Jaén, 2007, pp. 705-746. Disponible à l'adresse suivante http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134

CHEVALLARD Y. & BOSCH M., (2001)., Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I: Une Atlantide oubliée, *Petit x,* n°55, p. 5-32, IREM de Grenoble.

CHEVALLARD Y. & BOSCH M., (2002)., Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations, *Petit x* n°59, p. 43-76, IREM de Grenoble

CHEVALLARD Y. (2009) , La notion de PER, Conférence donnée à l'IUFM de Toulouse .

DHOMBRES J. (2004). *Tours de main et méthodes. Un cheminement historique sur la valeur épistémologique de la concision en mathématiques.* In La place des mathématiques vivantes dans l'éducation du secondaire. Brochure APMEP, N°168, Université d'été St Flour

DOUADY. R. (1986). *Jeux de cadres et dialectique outil - objet.* Recherche en Didactique
des Mathématiques, N°7/2. La pensée sauvage, Grenoble.

DOUGLAS, M. (1999). *Comment pensent les institutions*. Paris : La découverte.

DUCHET P. & ERDOGAN A. (2005). *Pupil's autonomous studying: From an epistemologicalanalysis towards the construction of a diagnosis.* In Proceedings of the 4th Congress ofthe European Society for Research in Mathematics Education (Ed. Bosch), p. 663-674. Publicationélectronique 2006.

ERDOGAN A. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques.* Thèse, université
de Paris 7.

ERDOGAN, A. & MERCIER, A. Un regard sur le travail des élèves. Annales de didactique et de sciences cognitives.

FELIX, C. (2002), Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire. Thèse du troisième cycle, Université d'Aix- Marseille I

FLUCKIGER, A. & MERCIER, A. (2002**)**. Le rôle d'une mémoire didactique des élèves, sa gestion par le professeur. *Revue Française de Pédagogie,* 141, 27 – 35

FONSECA, C. (2004). *Discontinuité mathématique*. Thèse de doctorat, Université de Vigo : Publications du Departament de Mathématique appliquée I.
FOSTER, J. & JELICIC, M. (1999).Mémoire*: Système, Processus, et Fonction?* New York: Oxford.

GENESTOUX, F.(2002), Les assortiments didactiques, In J-L. DORIER, M. Artaud, M. Artigue (ed) Actes de la 11e Ecole d'été de didactique des mathématiques (pp. 177-186). Grenoble. La pensée Sauvage.

GASCON J. (1993). *Développement de la connaissance mathématique et de l'analyse didactique*, Recherches en didactique des mathématiques. Vol. 13/ 3, p. 295-332. La Pensée Sauvage, Grenoble

GALPERINE (1966) La base d'orientation de l'action.

GASCON, J. (2001**)**. Incide de modele épisthemologique dans les mathématiques comme la pratique décente, (*RELIME*), 4 (2), 129 – 159.

GASCON, J. (2003**)**. Les espaces de l'organisation didactique posible dans les institutions. Communication présentée dans IX JAEM. Tenerife et Gran Canaria, 2 – 5 julio.

GOETZ, J.P. & LECOMPTE, MD. (1988). Ethnographique et Culture dans l'investigation

GOUYON R. (1961). *Précis de mathématiques supérieures programmes A1 et A2* , Vuibert, Paris.

GONSETH F. (1926). *Les fondements des mathématiques, de la Géométrie d'Euclide à la Relativité générale et de l'Intuitionnisme*, Librairie Albert Blanchard, Paris.

GLASMAN D. (2004). Rapport établi à la demande du Haut conseil de l'évaluation de l'école, *Le travail des élèves pour l'école en dehors de l'école*, N° 15. Disponible à l'adresse suivante : http://cisad.adc.education.fr/hcee/documents/rapport_Glasman_Besson.pdf *ducativa.* Madrid : Ediciones Morata.

HALBWACHS, M (1994, 1er Ed. 1925). *Les cadres sociaux de la mémoire*. Paris : PUF.

HEINRITZ, C. & RAMMSTEDT, A. (1991).L'approche ethnographique, Paris : Nathan.

HUICI, V. (2002). *La mémoire collective et le temps par Maurice Halbwachs*. En http://www.uned.es/ca-bergara/ppropias/vhuici/mc.htm .

JOSHUA S. & DUPIN J.J. (1993**).** *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Paris : Presses Universitaires de France.

KALTON, G. (1983**),** Introduction to Survey Samplling. Newbury Park,CA:Sage

KAUFMANN, J.C**.** (1996), La description ethnographique, Paris : Nathan.

LECLERC- OLIVIER, M. (1997). Le dire de l'évènement (biographique). Villeneuve d'Ascq : Presses universitaires de Septentrion.

LEGRAND, M**.** (1993). L'approche biographique : théorie, clinique. Paris

LEGRAND M. (2006). *Le principe du "débat scientifique" dans nos classes et nos amphis, pourquoi et comment ?* Disponible à l'adresse suivante :*http://www-irem.ujf-grenoble.fr/irem/Debat_scientifique/debat_s_principes.pdf*

LEROI-GOURHAN, A. (1964**).** *Le geste et la parole II. La mémoire et les rythmes*. Paris : Alain Michel.

LESPINARD & R. PERNET (1965). *Géométrie cours complet*, A. DESVIGNE, Terminale C.

LEUTENEGGER, F. (2000**).** Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 20 (2), 209 – 250

NOIRFALISE R., CHAZAL J. & VOLDOIRE C. (1996). *Rigueur au lycée?* Bulletin de L'IREM de Clermont Ferrand, n°53.MA L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States (Studies in Mathematical Thinking and Learning.).* Mahwah,NJ :Lawrence Erlbaum Associates

MARGOLINAS C., MERCIER A. & DE COTRET S. R.(2006). *Les développements curriculaires dans l'enseignement obligatoire,* Actes des journées mathématiques INRP
Lyon. Disponible à l'adresse suivante :
http://educmath.inrp.fr/Educmath/partenariat/math_inrp/jmj06/Actes.pdf

MAUSS M. (1950). *Sociologie et anthropologie.* Quadrige/Presse Universitaires de France,

Paris. (Septième édition : 1997)
.
MATHERON, Y. (2000). *Etude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au Collège et au Lycée. Quelques exemples*. Thèse de doctorat, UFR de psychologie et sciences de l'éducation, Université d'Aix - Marseille I.

MATHERON, Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherche en didactique des mathématiques.* 21 (3), pp. 207 – 246.

MATHERON, Y. et SALIN, M-H. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante, *Revue Française de Pédagogie*, 141, 57 – 66

MATHERON Y. (2000)., *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée quelques exemples*. Thèse, université de Provence

MERCIER A. (1992)., *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse du troisième cycle, Université de Bordeaux I.

MERCIER A. (1995)., *La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement*. Recherches en didactique des mathématiques, n° 15 (1), pp. 97-142.

MERCIER, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I

MERCIER, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations a-didactiques, in Margolinas (Cor.) *Les débats de didactique des mathématiques, Actes du séminaire national 1993-1994*. Grenoble : La Pensée sauvage.

MERCIER, A. (1996**)**. *Comment appréhender le cognitif, depuis la position de la didactique des mathématiques ?*, communication au symposium REF, Université de Montréal

MERCIER A (1999). *Sur l'espace-temps didactique Etudes du didactique, en sciences de l'éducation,* Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, Université de Provence.

MERCIER A. (2001)., *Descartes : le temps de la construction du savoir.* L'Ouvert, n°103.
p.14-24. IREM de Strasbourg.-300/376-

MERCIER A. (2002)., *La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques*. Note de synthèse. Revue Française de Pédagogie.

MERCIER A. (2003)., *Evaluer et comprendre les effets des pratiques pédagogiques. Conférence au PIREF*. Disponible à l'adresse suivante :
http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/Piref_Mercier.pdf

MERCIER A. BUTY C., (2003)., *Evaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences.* Revue Française de Pédagogie, n°148, p. 47-59.

MUCCHELLII, A. (1991), Les méthodes qualitatives. Paris :PUF.

PAILLE, P. &MUCCHELLI ; A. (2003) . L'analyse qualitative en science humaines et sociales ; Paris : Armand Colin

PASSERON, **J-C.** **(**1991**)**. *Le raisonnement sociologique, l'espace non-poppérien du raisonnement naturel*. Paris : Nathan.

PENEFF,J. (1990). La méthode biographique. Paris : Armand Colin.

PINEAU, G. & LEGRAND, J-L.(1993). Les histoires de vie. Paris :PUF

PERRENOUD P. (1986). *Vers une lecture sociologique de la transposition didactique* Faculté de psychologie et de sciences de l'éducation et Service de la recherche sociologique Genève.

PERRENOUD P. (2001). *Former à l'action, est-ce possible ?* Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation Université de Genève. Disponible à l'adresse suivante : http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2001/2001_19.html

PERRIN D. (2005,1). *Mathématiques d'Ecole : nombres, mesures et géométrie*, Cassini,2005-301/376-

PERRIN D. (2005,2). Aires, intégrales et primitives dans les programmes de lycée, intervention du 2 avril 2005 devant la commission Inter-IREM second cycle. Disponible à l'adresse suivante : http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/secondcycle/Actes de la Commission Inter IREM Second Cycle.htm, nouvelle version :
http://www.math.upsud.fr/~perrin/Conferences/Bordeaux06-1.pdf).

PERRIN D. (2006). *Aires et volumes : découpage et recollement.* Conférence du 12mai 2006 pour les IPR, disponible à l'adresse suivante : http://euler.acversailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf .

RAJOSON, L. (1988). *L'analyse écologique des conditions et des contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas.* Thèse de Doctorat, Université-Aix-Marseille II

ROUY E. (2007). *Formation initiale des professeurs de l'enseignement secondaire supérieur et changements de rationalité mathématique entre institution secondaire et institution universitaire. Le cas éclairant du thème des dérivées*. Dissertation en vue d'obtenir le grade de Docteur en Sciences. Université de Liège Académie Universitaire Wallonie Europe

SALIN, M-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique. In Lemoyne, G. et Conne, F. (Dir) *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Les presses de l'Université de Montréal : 327 – 352.

SALIN, M-H. (2002). Les pratiques ostensives dans l'enseignement des mathématiques comme objet d'analyse du travail du professeur. In Venturini, P., Amade-Escot, C. et Terrisse, A. (Cor.) *Etudes de pratiques effectives : l'approche des didactiques*. La pensée sauvage, 71 – 81

SALIN M.H. (2002). *Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations*. Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, la Pensée Sauvage, Grenoble.302/376-

SCHEINEIDER, M. & MERCIER, A. (2005). Situation ? La circulation d'une notion trop commune, entre théorie didactique et idéologies pour l'enseignement. In *Actes du Colloque Didactiques : quelles références épistémologiques ?*. Bordeaux (à apparaître

SCHNEIDER M. (2003) , Echecs 'électifs' en mathématiques : un regard inspiré de la didactique . *Mathématique et Pédagogie* n° 140

SCHNEIDER M. (2008) *Traité de didactique des mathématiques*, Université de Liège, Liège

SENSEVY, G. (1994). *Institutions didactiques, régulation, autonomie. Une étude des fractions au cours moyen*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille I.

SENSEVY, G. (1996). *Le temps didactique et la durée de l'élève*. Etude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions, *Recherches en Didactique des Mathématique*, 16 (1), 7 – 46.

SENSEVY G. (1998), *Institution didactique : étude et autonomie à l'école élémentaire*, Paris PUF

SCHWARTZ, O. (1993). L'empirisme irréductible,[Postface à l'édition française de Anderson, N.] Le Hobo, Paris : Nathan

TAYLOR, C (1995) : *Suivre une règle*, *in* Critique n° 579/580, Éditions de minuit, Paris, pp. 554-572

TIBERGHIENi (1994). Psychologie de la mémoire humaine, *Sciences humaines*, 43, 25 – 28.

VERGNAUD G. (1987), Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant, In Jean PIAGET, Pierre MOUNOUD et Jean Paul BRONCKART (éd), *Psychologie*, Encyclopédie de la Pléiade, Paris, Gallimard pp 821-844

VERRET M. (1978) *« le temps des études »*, thèse, université de Lille III, librairie honoré/champion,

VYGOTSKI V., (1934) *Pensée et langage*, (traduction de F Sèves, la dispute, édité en 1997)

ANNEXES

Description des exercices proposés aux élèves du dispositif de recherche.

ANALYSE

Pour l'essentiel, les exercices proposés portent sur le calcul de limites, de dérivées, de primitives d'une fonction ; sur l'utilisation des fonctions logarithme népérien et exponentielles, des fonctions puissances ; sur le calcul intégral et son interprétation graphique en terme d'aire ; sur les suites ; sur les équations différentielles.

GEOMETRIE

Une part importante des exercices proposés est consacrée aux nombres complexes et à leurs interprétations géométriques. Des compléments sont apportés en géométrie dans l'espace avec les équations cartésiennes de plans, les représentations paramétriques de droites et le produit scalaire.

PROBABILITES

Les exercices proposés abordent la notion de conditionnement d'un évènement et de l'indépendance de deux évènements. Certains des exercices demandent de savoir exploiter la formule des probabilités totales. Plusieurs de probabilités sont présentées: loi de Bernoulli, loi binomiale, loi exponentielle, loi de durée de vie sans vieillissement

ARITHMETIQUE.

Les exercices proposés abordent les notions de divisibilité, de congruence.

SIMILITUDES INDIRECTES

Les exercices proposés abordent la notion de similitude indirecte sous leur aspect géométriques et surtout leur interprétation dans le plan complexe.

ANNEXE I : *AC001*

« AC001 » est une élève de 15 ans & 3 mois qui n'a jamais doublé une classe dans sa scolarité. Elle est la benjamine d'une famille de quatre enfants (deux grandes sœurs dans les études supérieurs et un grand frère en cycle bac pro), de parents respectivement professeurs de physique-chimie et professeur de SVT dans le secondaire (père agrégé de physique & chimie, mère titulaire d'un master II de biologie). Elle a toujours réussi en mathématiques car elle *étudie* beaucoup les mathématiques et a toujours travaillé un grand nombre d'exercices de mathématiques donnés par son professeur de mathématique ou non à faire. Par ailleurs elle utilise plusieurs livres de mathématiques, demande de l'aide à son père, va sur internet voir les sites qui proposent des exercices de maths et même celui de son prof de maths, et n'a jamais fait de fiche de formules mathématiques pour apprendre. Nous dirons qu'il s'agit d'une bonne élève : elle est très impliquée et participe aux séances en classe, mais seulement à la demande de l'enseignant, anticipe des résultats, finit les travaux à temps, fait les devoirs et obtient de très bonnes notes, entre 16 et 20 sur 20 aux évaluations[386]. Elle prend très rarement des cours particuliers. Nous présentons ici les séances d'observations d'AC001 soumise à la résolution d'exercices de mathématiques proposés par l'observateur ou par son professeur.

1/ Les séances d'observations d'AC001

A/ Exercice donné par le professeur d'AC001 comme Devoir de maison

(Extrait d'épisode utilisé p.13 à 18)

Enoncé :

Le plan est muni d'un repère ortho normal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ avec pour unité graphique 1 cm.

5- On note A,B,C les points d'affixes respectives $2i$, $-1+4i$ et $5+2i$. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie s d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ s$.

On note A' et B' les images respectives de A et B par f. Calculer les affixes de A' et B' et faire la figure.

6- A point M d'affixe z, on associe M ' son image par f et z ' son affixe. Démontrer que f est un antidéplacement et que $z' = \dfrac{-3-4i}{5}(\bar{z}) + \dfrac{38-6i}{5}$

7- Déterminer l'ensemble des points invariants par f . f est-elle une symétrie ?

[386] Sources : les bulletins scolaires & commentaire des enseignants et parents

8- On appelle D le point d'affixe $3+6i$, Δ la médiatrice de $[BD]$ et s' la symétrie d'axe Δ.

d) Déterminer une équation cartésienne de Δ

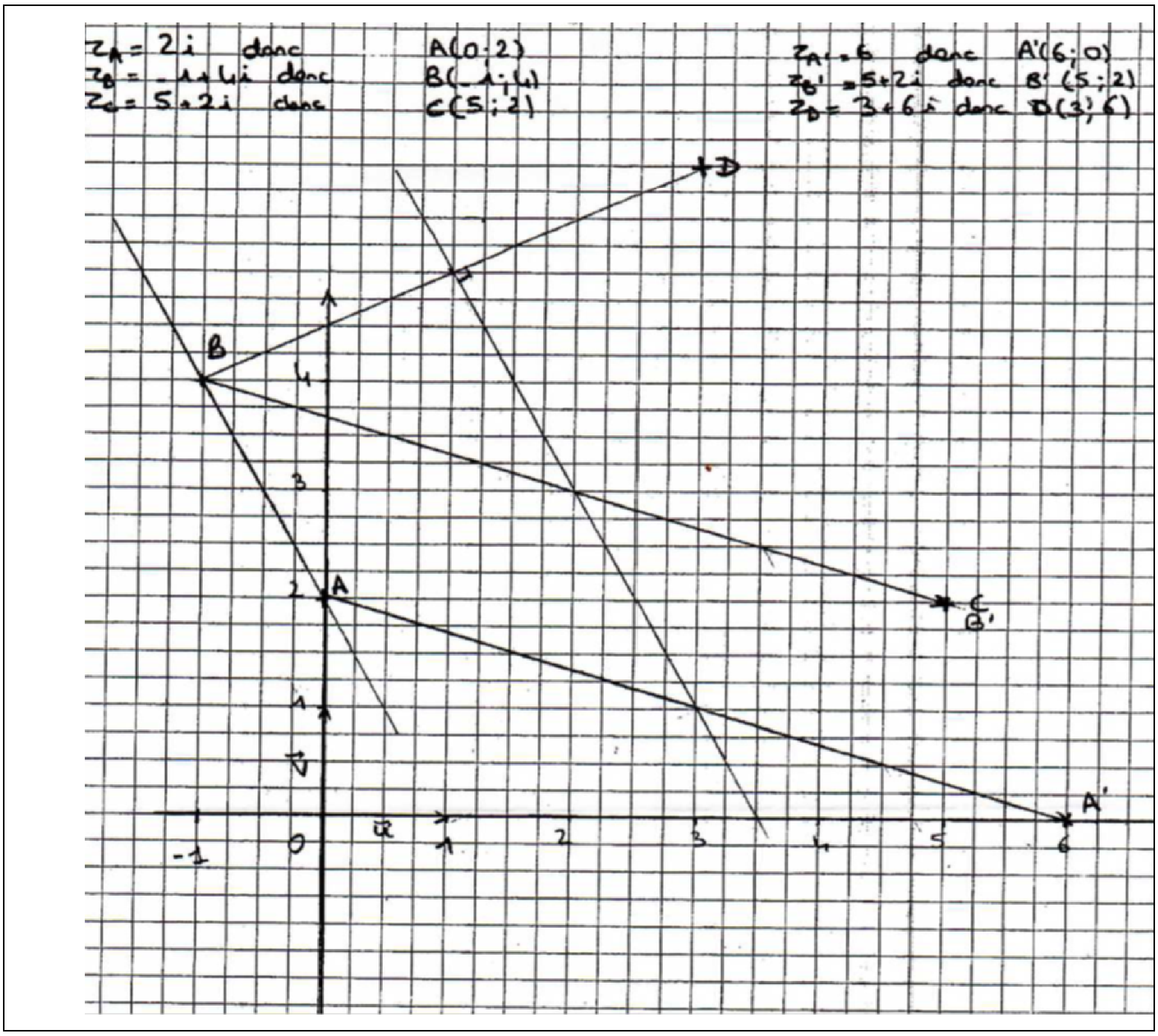
e) Déterminer l'écriture complexe de s'

f) Démontrer que $f \circ s'$' est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $f = t' \circ s'$

Verbatim de V001 pour la question n°1

Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte

> AC001/lit/l'exercice/entièrement///Soit/un/repère/orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$///Question/n°1 //// $z_A = 2i$ // $z_B = -1+4i$ // $z_C = 5+2i$ ///On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$ / s la symétrie d'axe (AB) et la transformation $f = tos$ /// A' et B' sont les images respectives de A et de B par f /// $s(A) = A$ et $tos(A) = t(A) = A' \Rightarrow f(A)$ // $s(B) = B$ et $tos(B) = t(B) = B' \Rightarrow f(B)$ ///L'image de A par la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$ est telle//que/// $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'}$ donc $z_{\overrightarrow{BC}} = z_{\overrightarrow{AA'}}$ /// $z_c - z_B = z_{A'} - z_A$ //donc $z_c - z_B + z_A = z_{A'}$ /// $z_{A'} = 5+2i+1-4i+2i$ // $Z_{A'} = 6$ //donc le point $A'(6;0)$ //L'image de B par la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$ est le point C //Donc $tos(B) = f(B) = C$ //donc $z_{B'} = 5+2i$ //donc le point $B'(5;2)$ ///Représentation graphique///



Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte

AC001 résout la question 2 grâce à la formule de R///

Ah bon//// Tu as trouvé cette formule où ?/// [R] répond sur internet///[AC001]Je vais regarder/// [AC001]Mais ce n'est pas dans ma leçon///Pourquoi le prof n'a pas donné cette formule sur les antidéplacements///[R]//Je ne savais aussi et je viens de trouver ça sur internet///[AC001]Bon d'accord///Je vais l'utiliser ta formule/// Silence///AC001 reprend la résolution de la question 2///

Si f est un déplacement/// Alors $t^{-1}of$ le serait aussi comme composée de deux déplacements///Or $s = t^{-1}of$ et s est un antidéplacement//Donc f est un antidéplacement///Son écriture complexe est alors de la forme $z' = a\bar{z} + b$ ///On sait que $f(A) = A' \Leftrightarrow 6 = a(-2i) + b$ et $f(B) = B' \Leftrightarrow 5 + 2i = a(-1-4i) + b$ ///On peut poser le système d'équation $\begin{cases} 6 = a(-2i) + b \\ 5 + 2i = a(-1-4i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -a(-2i) - b \\ 5 + 2i = a(-1-4i) + b \end{cases}$ //en additionnant les deux équations on a/// $-1 + 2i = a(2i) + a(-1-4i)$ /Ce qui donne $-1+2i = a(2i-1-4i) \Leftrightarrow -1+2i = a(-1-2i)$ ///Donc le réel $a = \dfrac{-1+2i}{-1-2i}$ ///Avec l'expression conjuguée du dénominateur on a /// $a = \dfrac{(-1+2i)(+2i-1)}{5} \Leftrightarrow a = \dfrac{-3-4i}{5}$ ///Donc $a = \dfrac{-3}{5} - \dfrac{4i}{5}$ /// On aura le réel $b = 6 - a(-2i)$ //Ce qui donne $b = 6 - \dfrac{(-3-4i)(-2i)}{5} \Leftrightarrow b = \dfrac{30-(-3-4i)(-2i)}{5}$ /// $b = \dfrac{38-6i}{5} \Leftrightarrow b = \dfrac{38}{5} - \dfrac{6i}{5}$ /// Sachant que $z' = a\bar{z} + b$ //Alors son écriture complexe est $z' = \dfrac{-3-4i}{5}\bar{z} + \dfrac{38-6i}{5}$ ///

AC001 Question n°3 Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte

Question n°3///Soit z l'affixe du point M //On pose $z = x + iy$ avec $(x; y) \in IR^2$ ///Les points invariants par la transformation f sont tels que $f(M) = M$ ///Or $z = \left(\dfrac{-3}{5} - \dfrac{4i}{5}\right)\bar{z} + \dfrac{38-6i}{5}$ ///Avec $z = x + iy$ ona/// $x + iy = \left(\dfrac{-3-4i}{5}\right)(x - yi) + \dfrac{38-6i}{5}$ $\Leftrightarrow 5x + 5iy = (-3-4i)(x-iy) + 38 - 6i$ ///Ce/qui/donne/ $5x + 5iy = (-3x - 4y + 38) + (-4x + 3y - 6)i$ ///Par identification on a/// $\begin{cases} 5x = -3x - 4y + 38 \\ 5y = -4x + 3y - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 38 - 4y \\ 2y = -4x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 19 - 2y \\ y = -2x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{19}{2} - 2x \\ y = -2x - 3 \end{cases}$ ////Ce qui est absurde//D'où f n'admet pas de points invariants/// f n'est donc pas une symétrie//car si c'était une symétrie axiale les points situés sur l'axe seraient invariants///Ou si c'était une symétrie centrale le centre serait un point fixe//

Question n°4 Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte de rapport

Question 4a/// $z_D = 3 + 6i$ ///Soit I le milieu de $[BD]$//Donc $z_I = \dfrac{z_B - z_D}{2} = 1 + 5i$ /// Δ est la médiatrice de $[BD]$ et s'//est la symétrie d'axe Δ ///Le segment $[BD]$ a pour affixe $3 + 6i - (-1 + 4i) = 4 + 2i$ //Donc Δ a pour équation $4x + 2y + c = 0$ avec $c \in IR$ et $I \in \Delta$ //Donc en remplaçant x, y par les coordonnées du point I dans l'équation de Δ on a// $4 \times 1 + 2 \times 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = -14$ //D'où l'équation de Δ est// $4x + 2y - 14 = 0$ ///

Question 4b Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte

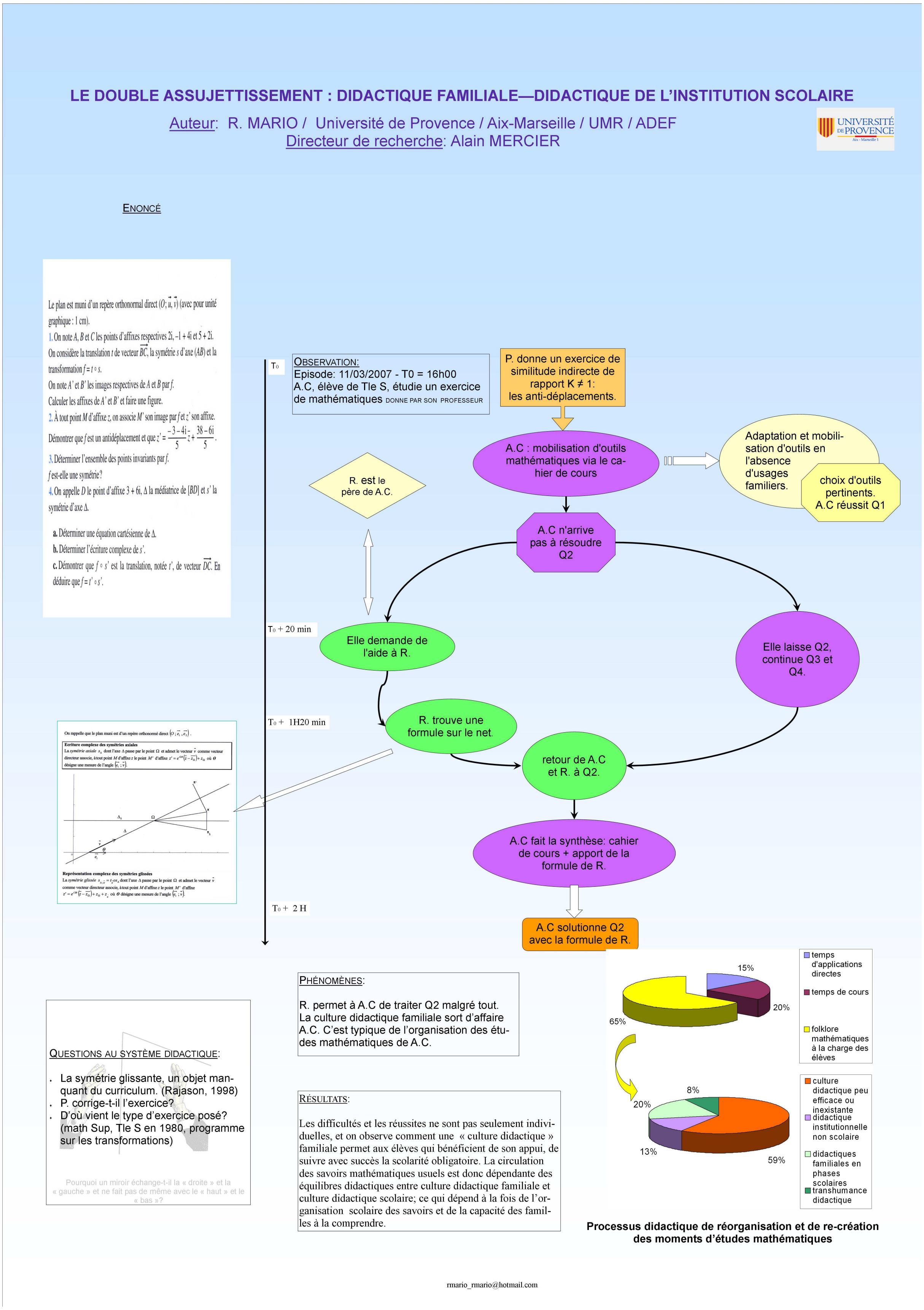
Question 4b)///Alors///L'écriture de s'//est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ avec le réel $a \in C*$

et $b \in C$ //Le point// $J \in \Delta$ et coupe la droite (BB')///Donc $J(2;3)$///Or d'après la définition de la transformation s'// s'(I) = I et s'(J) =J/// Remplaçons les coordonnées des points I et J ///On a donc le système $\begin{cases} 2+3i = a(2-3i)+b \\ 1+5i = a(1-5i)+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2-3i = -2a+3ai-b \\ 1+5i = a-5ai+b \end{cases} \Leftrightarrow$ par addition des deux équations du système d'avoir $-1+2i = -a-2ai \Leftrightarrow -1+2i = a(-1-2i) \Leftrightarrow a = \frac{-1+2i}{-1-2i}$ //En utilisant l'expression conjuguée du dénominateur on a/// $a = \frac{(-1+2i)(-1+2i)}{5} \Leftrightarrow a = \frac{-3-4i}{5}$ ///En remplaçant// $a\,\frac{-3-4i}{5}$ dans l'une//des équations formant le système on a $b = (1+5i) - (\frac{-3-4i}{5})(1-5i) \Leftrightarrow b = \frac{5(1+5i)-(-3-4i)(1-5i)}{5} \Leftrightarrow b = \frac{28+14i}{5}$ ////

/////L'écriture complexe de s' donne donc $z' = \frac{-3-4i}{5}\overline{z} + \frac{28+14i}{5}$ ///

Question 4c Réf : AC001/S-4/11032007/Similitude indirecte de rapport

Question 4c)///Soit $z \in C$ //Alors///On peut dire que d'après les données que $fos'(z) = f[s'(z)] = \frac{-3-4i}{5}\left[\overline{\frac{-3-4i}{5}\overline{z} + \frac{28+14i}{5}}\right] + \frac{38-6i}{5}$ ////Ce qui donne// $fos'(z) = \frac{(-3-4i)(-3+4i)}{25} \times z + \frac{(-3-4i)(28-14i)}{25} + \frac{38-6i}{5}$ /// Après simplification on $fos'(z) = z + 2 - 4i$ ///D'où $z_{\overline{DC}} = 2-4i$ ///En conclusion//je peux dire que/// fos' est la translation t' de vecteur $\overrightarrow{DC}$ ////De plus// $t.'os' = fos'os' = f$ ////


LE DOUBLE ASSUJETTISSEMENT : DIDACTIQUE FAMILIALE—DIDACTIQUE DE L'INSTITUTION SCOLAIRE
Auteur: R. MARIO / Université de Provence / Aix-Marseille / UMR / ADEF
Directeur de recherche: Alain MERCIER
UNIVERSITÉ DE PROVENCE
ENONCÉ
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (avec pour unité graphique : 1 cm).
1. On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, $-1+4i$ et $5+2i$.
On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie s d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ s$.
On note A' et B' les images respectives de A et B par f.
Calculer les affixes de A' et B' et faire une figure.
2. À tout point M d'affixe z, on associe M' son image par f et z' son affixe.
Démontrer que f est un antidéplacement et que $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$.
3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
f est-elle une symétrie ?
4. On appelle D le point d'affixe $3+6i$, Δ la médiatrice de $[BD]$ et s' la symétrie d'axe Δ.
a. Déterminer une équation cartésienne de Δ.
b. Déterminer l'écriture complexe de s'.
c. Démontrer que $f \circ s'$ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$. En déduire que $f = t' \circ s'$.
T0
OBSERVATION:
Episode: 11/03/2007 - T0 = 16h00
A.C, élève de Tle S, étudie un exercice de mathématiques DONNÉ PAR SON PROFESSEUR
P. donne un exercice de similitude indirecte de rapport K ≠ 1: les anti-déplacements.
A.C : mobilisation d'outils mathématiques via le cahier de cours
Adaptation et mobilisation d'outils en l'absence d'usages familiers.
choix d'outils pertinents. A.C réussit Q1
R. est le père de A.C.
A.C n'arrive pas à résoudre Q2
T0 + 20 min
Elle demande de l'aide à R.
Elle laisse Q2, continue Q3 et Q4.
T0 + 1H20 min
R. trouve une formule sur le net.
retour de A.C et R. à Q2.
A.C fait la synthèse: cahier de cours + apport de la formule de R.
T0 + 2 H
A.C solutionne Q2 avec la formule de R.
QUESTIONS AU SYSTÈME DIDACTIQUE:
La symétrie glissante, un objet manquant du curriculum. (Rajason, 1998)
P. corrige-t-il l'exercice?
D'où vient le type d'exercice posé? (math Sup, Tle S en 1980, programme sur les transformations)
Pourquoi un miroir échange-t-il la « droite » et la « gauche » et ne fait pas de même avec le « haut » et le « bas »?
PHÉNOMÈNES:
R. permet à A.C de traiter Q2 malgré tout. La culture didactique familiale sort d'affaire A.C. C'est typique de l'organisation des études des mathématiques de A.C.
RÉSULTATS:
Les difficultés et les réussites ne sont pas seulement individuelles, et on observe comment une « culture didactique » familiale permet aux élèves qui bénéficient de son appui, de suivre avec succès la scolarité obligatoire. La circulation des savoirs mathématiques usuels est donc dépendante des équilibres didactiques entre culture didactique familiale et culture didactique scolaire; ce qui dépend à la fois de l'organisation scolaire des savoirs et de la capacité des familles à la comprendre.
15%
20%
65%
temps d'applications directes
temps de cours
folklore mathématiques à la charge des élèves
8%
20%
13%
59%
culture didactique peu efficace ou inexistante
didactique institutionnelle non scolaire
didactiques familiales en phases scolaires
transhumance didactique
Processus didactique de réorganisation et de re-création des moments d'études mathématiques
rmario_rmario@hotmail.com

B/ Episode didactique d'AC001 Réf : S-1/20/01/2007/Equation différentielle

(Extrait d'épisode utilisé page : 34-36/57-58)

L'énoncé est extrait d'un sujet de prépa@bac collection HATIER 2000

Exercice 1: Réf:AC001/S-2/20/01/2007/Equation-Différentielle

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{1}{5} y$

1-) On sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E). Démontrez que l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions définies sur IR, de la forme : $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ avec k un nombre réel quelconque

2-) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{1}{5} y$ prenant la valeur -4 en 0

(Extrait utilisé page 35-36/149-154)

Verbatim d'AC001 pour répondre à la question

Episode AC001 Réf :S-1/20/01/2007/Equation différentielle

/////Soit l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{1}{5} y$ // on sait que la fonction $x \mapsto e^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) /// question un / démontrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(E) : y' = \frac{1}{5} y$ est l'ensemble des fonctions définies sur IR / de la forme // $x \mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ avec k un nombre réel quelconque /// l'équation différentielle $(E) : y' = \frac{1}{5} y$ a pour solution $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ //// si la fonction $f(x) = ke^{\frac{x}{5}}$ alors on a / $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}} = \frac{e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}} k$ / en simplifiant le deuxième membre par $e^{\frac{x}{5}}$ on a $\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{5}}} = k$ / $\Leftrightarrow k = f(x)e^{\frac{-x}{5}}$ //// la fonction ainsi définie par $h(x) = f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ est une constante // donc la fonction dérivée $h'(x) = 0$ ////// on peut aussi répondre à la question de cette manière // soit f une solution quelconque de l'équation (E) montrons que la h définie par $h(x) = f(x).e^{\frac{-x}{5}}$ est une fonction constante /// étant donné que h est le produit de deux fonctions dérivables sur

IR / elle est donc dérivable sur IR et pour tout réel x on a // $h'(x)=\frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{x}}f(x)+e^{\frac{-x}{5}}f'(x)$ ce qui implique par factorisation que : $h'(x)=e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f.(x)+.f.'(x)\right)$ //// sachant que la fonction f est solution de $f'(x)=\frac{1}{5}f(x)$ / donc $h'(x)=\frac{-1}{5}e^{-\frac{x}{x}}f(x)+e^{\frac{-x}{5}}f'(x)=$ $h'(x)=e^{\frac{-x}{5}}\left(\frac{-1}{5}f.(x)+.f.'(x)\right)$ /// 0 // d'où h est une fonction constante / ce qui implique qu'il existe un réel k tel que $\forall x\in IR$ h(x)=k // on a donc $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ //// Réciproquement : on vérifie sans peine que, quel que soit le réel k, la fonction f définie sur IR par $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ vérifie l'équation (E) /////// autre méthode / la fonction $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation / ainsi pour montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions je peux utiliser la technique de la variation d'une constante /// étant donné que $e^{\frac{x}{5}}\neq 0$ / je cherche la solution de l'équation différentielle (E) sous la forme générale $y:x\mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ avec k une fonction numérique dérivable //// c'est-à-dire $k(x)$ // la fonction $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ est solution de l'équation (E) si / et seulement si elle vérifie l'équation/// On a donc/// $k'(x)e^{\frac{x}{5}}+\frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}}-\frac{1}{5}ke^{\frac{x}{5}}=0\Leftrightarrow k'(x)e^{\frac{x}{5}}=0$ // on a donc la fonction $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ est par conséquent une fonction constante / donc $y:x\mapsto ke^{\frac{x}{5}}$ sont les solutions de l'équation (E) ///// question 2 //// démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) : y'= $y'=\frac{1}{5}y$ prenant la valeur-4 en 0///// je sais que // si a est un réel et (α,β) un couple de nombres réels l'équation différentielle (E) : y'=ay admet une unique solution f vérifiant la condition initiale f(α) = β // on sait que l'équation (E) : y'=1/5 y a pour solution la fonction $f(x)=ke^{\frac{x}{5}}$ avec k∈ ,IR //// f(α)=β est équivalent à $ke^{\frac{\alpha}{5}}=\beta$, donc $k=e^{\frac{-\alpha}{5}}(\beta)$ //// ainsi pour tout couple (α ;β) le réel k existe et est unique / on a alors $k=e^{\frac{0}{5}}(-4)\Leftrightarrow k=-4$ l'unique fonction solution de l'équation différentielle prenant la valeur -4 en 0 est $f(x)=-4e^{\frac{x}{5}}$ /////

L'énoncé est extrait de : les interrogations au lycée, collection Nathan 2006

<u>Exercice 2 :</u> Réf:AC001/S-3/25012007/Equation-Différentielle

1-)Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $(E): y.'-3y = e^{2x}$

2-) Résoudre l'équation différentielle $(E'): y'-3y = 0$

3-) Démontrer qu'une fonction f est solution de $(E): y.'-3y = e^{2x}$ si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'-3y = 0$.

4-) Résoudre l'équation différentielle $(E): y.'-3y = e^{2x}$

5-) Déterminer la fonction h solution de l'équation $(E): y.'-3y = e^{2x}$, telle que $h(0) = 0$

Extrait utilisé pages 156-159

Verbatim d'AC001 pour répondre à la question n°1 ; 2 ; 3 ;4 ;5

Episode AC001 Réf : S-1/25/01/2007/Equation différentielle

/////question 1 / vérifier que la fonction g définie par // $g(x) = -e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $(E): y.'-3y = e^{2x}$ // il s'agit d'une équation différentielle / $(E): y.'-3y = e^{2x}$ // si $g(x) = -e^{2x}$ est une solution // si et seulement si elle vérifie ///cette équation différentielle //// la fonction g est une fonction exponentielle, donc elle //est dérivable sur IR // tel que pour tout $x \in IR$ la fonction dérivée $g.'(x) = -2e^{2x}$ / ////par conséquent $g'(x) - 3g(x) = -2e^{2x} - 3(-e^{2x}) = e^{2x}$ / donc ce qui signifie que la ////fonction g est une solution de l'équation (E) //

///question 2 /// résoudre l'équation différentielle $(E'): y'-3y = 0$ / on sait que /////l'équation différentielle $y' = ay$ admet la comme solutions les fonctions ////// $y : x \mapsto ke^{ax}$ avec $k \in IR$ / donc les solutions de l'équation $(E'): y'-3y = 0$ / sont //////les fonctions $x \mapsto ke^{3x}$ avec $k \in IR$ //

////question 3///démontrer qu'une fonction f est solution de $(E): y.'-3y = e^{2x}$ si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle $(E'): y'-3y = 0$ // de la même façon $f - g$ est une solution de l'équation différentielle si elle vérifie $(E'): y'-3y = 0$ /// la fonction f est une fonction dérivable sur IR, implique $f - g$ est dérivable sur IR //// alors // $f - g$ est une solution de l'équation $(E'): y'-3y = 0$ signifie que $(f - g).'-3(f - g) = 0$ / ce qui implique /////// $f.'-g.'-3f + 3g = 0$ // $\Leftrightarrow$ $f.'-3f = g.'-3g$ // sachant que $g(x) = -e^{2x}$ est une solution de $(E): y.'-3y = e^{2x}$ [question1] / on a $f.'-3f = g.'-3g \Leftrightarrow f.'-3f = e^{2x}$ // donc la fonction f est une solution de l'équation (E) /////

//////question 4 / résoudre l'équation différentielle $(E): y.'-3y = e^{2x}$ // on sait que ////// $f-g$ est solution de $(E'): y'-3y=0$ // donc $f-g=ke^{3x}$ // $g(x)=-e^{2x}$ est une /////////solution de (E) / f est aussi une solution de (E) /// donc /////// $\forall x \in IR, f(x)-g(x)=ke^{3x} \Rightarrow f(x)=g(x)+ke^{3x} \Rightarrow f(x)=e^{2x}+ke^{3x}$ /////////

/////par factorisation on a: $f(x)=e^{2x}\left(1+ke^{x}\right)$ avec $k \in IR$ ///

/////question 5 // déterminer la fonction h solution de l'équation $(E): y.'-3y=e^{2x}$ // //////telle que $h(0)=0$ /// on sait que : « Si a est un réel et $(\alpha;\beta)$ un couple de /////nombres réels, l'équation différentielle $y'=ay$ admet une unique solution //// h vérifiant la condition initiale $h(\alpha)=\beta$ » // //////donc $h(x)=e^{2x}\left(1+ke^{x}\right) \Rightarrow h(0)=e^{0}\left(1+k\right)$ //// d'où $\left(1+k\right)=0 \Leftrightarrow k=-1$ /// la fonction $h(x)=e^{2x}\left(1-e^{x}\right)$

C/ Séance sur les fonctions ln & expo/Suite & Intégrales Réf : AC001/S-2/22012007

L'énoncé est extrait du sujet de baccalauréat France métropolitaine session de juin2006

Nous avons choisi cet énoncé parce qu'il fait appel à plusieurs notions mathématiques dépendantes, complémentaires et corrélées de cinq chapitre de la partie analyse du programme de terminale scientifique S telles que :

- Convergence
- Asymptote verticale ou horizontale
- Limite à l'infinie
- Dérivées usuelles
- Sens de variation
- Fonction exponentielle
- Primitives usuelles
- Intégration par parties
- Aire d'un domaine plan

Enoncé.

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x^2 e^{1-x}$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère ortho normal $\left(O, \vec{I}, \vec{J}\right)$ d'unité 2cm.

1- Déterminer les limites suivantes: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe représentative de la fonction f ?

2- Montrer que f est dérivable sur IR. Déterminer la fonction dérivée f ' de f.

3- Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa représentation graphique.

Partie B

Soit n un entier naturel de IN^*.

On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}.dx$

1- Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n

2- Calculer I_1 puis I_2.

3- Donner une interprétation graphique du nombre I_2 qu'il faudra faire apparaître sur la courbe représentative de la fonction f

4- Démontrer que pour tout nombre réel $\forall \quad x \in [0;1]$ et $\forall \quad n \neq 0$, on a l'égalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.

5- En déduire un encadrement de I_n puis de $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Partie A Réf :AC001/ S-2/22012007/

/// Lit tout l'énoncé////Bon///bon//bonbon///la fonction a étudiée est un produit de deux fonctions//// une fonction carrée et une fonction exponentielle///Il y a une suite numérique avec les intégrales [donc les primitives] et inégalités sur les intégrales//Soit f la fonction définie sur IR par/// $f(x) = x^2 e^{1-x}$.///On désigne par C sa courbe

représentative dans un repère ortho normal $(O,\vec{I},\vec{J})$ d'unité 2cm////QuestionA-1 Déterminer les limites suivantes/// $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$/////quelle conséquence graphique peut-on en tirer pour la courbe représentative de la fonction f ///// Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2e^{1-x}$.///// Pour la limite : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$////La fonction carrée donnera $+\infty$ et la fonction exponentielle donnera 0// le produit est une indétermination///Donc je dois transformer l'expression de la fonction f /// Ce qui donne/// $\lim_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty$ ///Supposons que (1-x)= X ///On sait que : $\lim_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ //Donc $\lim_{x\to-\infty} e^{1-x}=+\infty$/////La fonction f est un produit de deux fonctions.////D'autre part $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ ////Nous pouvons alors conclure que : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$////Ensuite calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$/////Alors/// $\forall x\in IR$, $f(x)=x^2e^{1-x}$.//// $f(x)=x^2.\frac{e^1}{e^x}=e.\frac{x^2}{e^x}=\frac{e}{\frac{e^x}{x^2}}$ ////On a // $f(x)=x^2e^{1-x}=\frac{e}{\frac{e^x}{x^2}}$ /// Par croissance comparée ///on sait que //// $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)=+\infty$ Donc $\forall x\in IR$//// $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e}{\frac{e^x}{x^2}}\right)=0$/////Donc/// $\lim_{x\to+\infty} f(x)$=0////Comme conséquence géométrique //// La droite d'équation $y=0$ est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$/////

(Extrait d'épisode utilisé page 220-221)

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Partie A Réf :AC001/ S-2/22012007

////// Question A-2///Montrer que f est dérivable sur IR. Déterminer la fonction dérivée f ' de f /////// Nous avons un produit de deux fonctions ///Alors//// Discours de AC001///On sait que la fonction affine $1-x$ est dérivable sur IR et la fonction exponentielle aussi, donc la fonction composée e^{1-x} est aussi dérivable sur IR ///De même la fonction carrée est dérivable sur IR. Ainsi, le produit x^2e^{1-x} est dérivable sur IR. Donc la fonction f est dérivable sur IR/// Calculons la dérivée f '////Dérivée d'un produit de fonction////Rédaction de AC01// $f(x)=x^2e^{1-x}$ ///On a : $f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}$ /// En factorisant par x //On a// $f'(x)=x(2-x)e^{1-x}$ ///

(Extrait d'épisode utilisé page 220-221)

Verbatim de AC001 pour la question n°3 Partie A Réf :AC001/ S-2/22012007

// Question A-3//Dresser le tableau de variation de la fonction f et tracer sa représentation graphique/// On sait que la fonction exponentielle est toujours positive// $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ //Discours de AC001/// Ce produit est le trinôme $-x^2+2$, il est donc du signe du facteur a dans l'expression ax^2+bx+c à l'extérieur des racines évidentes//Rédaction de AC001// $f'(x) = x(2-x)e^{1-x}$ Donc $e^{1-x}>0$ $\forall x \in$ *IR*

La dérivée f *' est alors du signe du produit* $x(2-x)$. $-x^2+2 =$ *0* $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ *//////* *l'extérieur des racines évidentes* $x_1 = 0, x_2 = 2$ *et du signe contraire de* a *à l'intérieur des deux racines évidentes* $x_1 = 0, x_2 = 2$ *On sait que* $a = -1$ *///Donc* $\forall x \in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[,\ f'(x) < 0$

$\forall x \in]0;2[,\ f'(x) > 0$ *//* $\forall x \in \{0;2\},\ f'(x) = 0$ *//Ce qui implique que la fonction* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty;0]\cup]2;+\infty[$ *et strictement croissante sur* $[0;2]$ *//Discours de AC001/// Le tableau des variations de la fonction* f *////*

	$-\infty$ 0 2 $+\infty$
,	- 0 + 0 -
	$+\infty$ $4e^{-1}$ 0 0

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Partie B Réf :AC001/ S-2/22012007

//// Question B-1///Partie B//Soit n un entier naturel de IN^* ////On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}.dx$ ////Question B-1////Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n //Il s'agit d'intégrale et suites////ce qui implique en amont les primitives////

$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}.dx$ est l'intégrale de deux fonctions l'un polynôme et l'autre////// exponentielle///donc je dois procéder à une intégration par partie en considérant////// l'exponentielle comme fonction dérivée et le polynôme comme fonction primitive///// Alors on a ////$\forall n \in IN^*$ ///On pose//// $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}.dx$ /////Au rang $n+1$ ////On aura//// $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}.dx$ /////Donc///// $\forall n \in IN$ $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x}.dx$ ////Par une intégration par parties///// $\forall x \in [0;1]$ ////On pose//// $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$

////Les fonctions u // u' /// v /// v' sont toutes continues $\forall x \in [0;1]$ ////Donc ////// $I_{n+1} = [u(x).v(x)] - \int_0^1 u'(x).v(x)dx = [-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}dx$ ///On a/////

$[-x^{n+1}e^{1-x}]_0^1 = -1$ /////////Donc///// $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Partie B Réf : AC001/S-2/22012007

/////QuestionB-2/////Calculer I_1 puis I_2 ///On remplace n par 1////On a/// $I_1 = \int_0^1 x\ e^{1-x}.dx$

/////Par une intégration par parties comme dans la question précédente/////

On a $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases}$ ///// $\forall x \in [0;1]$ on a $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}$ //// Les fonctions u // u' /// v /// v' sont toutes continues $\forall x \in [0;1]$ ///Donc $I_1 = [-xe^{1-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}dx$ ///Ce qui donne/////

///// $I_1 = -1 + [-e^{1-x}]_0^1$ ///// $I_1 = -1 - 1 + e$ //// $I_1 = e - 2$ ////Alors on a/// $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$//

////Alors////Pour calculer I_2//// je peux utiliser la relation $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$de la question B 1////Ce qui donne/// $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$//// $I_2 = 2I_1 - 1$//// $I_2 = 2(e-2) - 1$///

// $I_2 = 2e - 5$////

Verbatim de AC001 pour la question n°3 Partie B Réf :AC001/ S-2/22012007

/// Question B-3/////Donner une interprétation graphique du nombre I_2 qu'il faudra faire apparaître sur la courbe représentative de la fonction f///On sait que $f(x) = x^2 e^{1-x}.$///////Le I_2 avec l'expression $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}.dx$//// On a //// $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}.dx$.////Avec $n = 2$///cela donne $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x}.dx$////On a//// $I_2 = \int_0^1 f(x).dx$////[c'est bon]/////////Quel est le signe de la fonction f////On sait que///// D'après le tableau de variation le minimum de f est 0////donc la fonction f est positive sur IR et par restriction positive sur [0 ; 1]///// Comme interprétation géométrique//// Je peux dire que I_2 l'aire exprimée en unités d'aire///du domaine plan délimité par la courbe représentative de la fonction f////les droites d'équations $y = 0$/// $x = 0$ et $x = 1$/////

Verbatim de AC001 pour la question n°4 Partie B Réf : AC001/S-2/22012007

/////// Question B-4//////Démontrer que pour tout nombre réel $\forall\ x \in [0;1]$et $\forall$ $n \neq 0$/on a l'égalité suivante///// $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.////Bon/// C'est un encadrement, donc je pars de l'intervalle $x \in [0;1]$// $\forall\ x \in [0;1] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$/// $-1 \leq -x \leq 0$ //Donc// $-1+1 \leq 1-x \leq 1$

//// $0 \leq 1-x \leq 1$////La fonction exponentielle est strictement croissante $x \in [0;1]$//Donc//

/// $e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$///ce qui donne/// $1 \leq e^{1-x} \leq e$//// $\forall\ x \in [0;1]$ et $\forall n \in IN^*$ $x^n \geq 0$//Donc on a/// $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$/////

Verbatim de AC001 pour la question n°5 Partie B Réf : AC001/S-2/22012007

///// Question B-5/////En déduire un encadrement de I_n puis de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ ////J'utilise le résultat précédent ////Ce qui donne/

///$\int_0^1 x^n.dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \le \int_0^1 x^n e.dx$ ////$\int_0^1 x^n.dx \le \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \le e\int_0^1 x^n.dx$ ///[silence]///primitive///$[\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_0^1 \le I_n \le e[\frac{1}{n+1}x^{n+1}]_0^1$ ///// On a ////$\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ ///// Maintenant pour la limite////j'utilise le résultat précédent $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{e}{n+1}$ /////On sait que//////

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{n+1}\right) = 0$ ///Donc par encadrement//j'en déduis que// $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ //

D/ Séance d'observation sur les nombres complexes Réf : AC001/S-4/26022007

Enoncé extrait du baccalauréat France métropolitaine/Session de juin 2006

Nous avons choisi cet exercice à cause des notions en jeu tels que Module et argument, les applications géométriques. Nous voulions aussi voir l'utilisation par AC001 de la relation $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$ dans le cas particulier où $z' = \frac{1}{z}$, puis l'utilisation de cette même propriété en considérant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.[*Partie A/ question 1*]En outre la résolution de l'équation $z' = z$ [*Partie B question 2*] ; la traduction de l'appartenance du point M à la droite (UV) en terme de relation d'angles entre $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{VM}$.[*Partie C question 1] (c'est nous qui avons présenté l'énoncé sous cette forme Partie A /Partie B/Partie C*

<u>Enoncé</u>

On considère le plan complexe IP rapporté à un repère ortho normal $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.Dans tout ce qui suit le plan $IP\setminus\{O\}$ signifie que le plan IP est privé de l'origine du repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Partie A

* Si z, z' sont deux nombres complexes différents de zéro, alors $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k un entier relatif

* $\forall$ $\overline{w}$ un vecteur non nul d'affixe z on a : $\arg(z) = (\vec{u};\vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec k un entier relatif

1-soit z et z' des nombres complexes non nuls, démontrer que :

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k un entier relatif

2- Démontrer que si les ponts A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, on a :

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec k un entier relatif

Partie B

On considère l'application f de $IP\setminus\{O\}$ dans $IP\setminus\{O\}$ qui, au point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{z}$. On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i.

1-Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul, on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près, avec k un entier relatif.

En déduire que, pour tout point M de $IP\setminus\{O\}$ les points M et $M' = f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

2- Déterminer l'ensemble des points M de $IP\setminus\{O\}$ tel que $f(M) = M$

3- M est un point du plan IP distinct de O, U, V ; on admet que M' est aussi distinct de O, U, V.

Etablir l'égalité : $\frac{z'-1}{z'-i} = \frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right) = \overline{-i\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$.

En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$

Partie C

Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $z \neq i$ et soit M le point d'affixe z.

1- Démontrer que le point M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\frac{z-1}{z-i}$ est un nombre complexe non nul réel.

2- Déterminer l'image par l'application f de la droite (UV) privée de U et de V.

Nous avons choisi cet exercice à cause des notions en jeu tels que Module et argument, les applications géométriques. Nous voulions aussi voir l'utilisation par AC001 de la relation $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$ dans le cas particulier où $z' = \frac{1}{z}$, puis l'utilisation de cette même propriété en considérant que $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$.En outre la résolution de l'équation $z' = z$; la traduction de l'appartenance du point M à la droite (UV) en terme de relation d'angles entre $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{VM}$.

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Partie A Réf: AC001/S-4/26022007

AC001 lit tout l'énoncé

///// Alors////Partie A///Si z, z' sont deux nombres complexes différents de zéro////alors//

// $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près//avec k un entier relatif/// $\forall$ $\bar{w}$ un vecteur non nul d'affixe z on a/// $\arg(z) = (\vec{u};\vec{w})$ à $2k\pi$ près//avec k un entier relatif//Question A-1

//soit z et z' des nombres complexes non nuls///démontrer que//

/// $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près///avec k un entier relatif///Soit z un nombre complexe non nul////Nous pouvons écrire que////En utilisant par translation la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ /////Nous pouvons écrire que//// $\frac{z}{z} = z \times \frac{1}{z} = 1$ ///

//// $\arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)[2\pi]$ //// Ce qui donne///// $\arg(1) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right)[2\pi]$. ///

// D'autre part $\arg(1) = (\vec{u};\vec{u})[2\pi]$ //ce qui implique que $\arg(1) = 0[2\pi]$ ///On a/

// $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 0[2\pi]$ //// $\Rightarrow \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$ //// Maintenant pour tout nombre complexe z non nul// z, z' sont deux nombres complexes différents de zéro/// Nous pouvons alors écrire que/// $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right)[2\pi]$ /// $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)[2\pi]$ ///

//// $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) + \arg(1) - \arg(z')[2\pi]$ ///Sachant que $\arg(1) = 0[2\pi]$ ///On a/////

//// $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$ //// Et la démonstration est faite////

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Partie A Réf: AC001/S-4/26022007

//// Question A-2///Démontrer que si les ponts A//B//C//sont trois points du plan//deux à deux distincts/// d'affixes respectives $a // b // c$ /// on a/// $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ à $2k\pi$ près/ avec k un entier relatif///Il s'agit d'une application géométrique des nombres complexes// ///Alors///Les points sont deux à deux distincts///J'utilise alors la démonstration précédente// On aura/// $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \arg(c-a) - \arg(b-a)[2\pi]$//////

//// $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$//// $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) + \left(\vec{u};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$/////

///// $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$/////Voilà////

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Partie B Réf: AC001/S-4/26022007

//// Partie B/////On considère l'application f de $IP\setminus\{O\}$ dans $IP\setminus\{O\}$qui// au point M du plan d'affixe z /// on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1}{z}$////On appelle U et V les points du plan d'affixes respectives 1 et i ////Question B-1///Démontrer que pour tout

nombre complexe z non nul/// on a $\arg(z') = \arg(z)$ à $2k\pi$ près/// avec k un entier relatif///En déduire que///pour tout point M de $IP\setminus\{O\}$les points M et $M' = f(M)$

appartiennent à une même demi-droite d'origine O////Alors////////On sait que pour tout nombre complexe z non nul on a//// $\arg(z') = \arg(\frac{1}{z})[2\pi]$//// $\arg(z') = -\arg(\bar{z})[2\pi]$///Soit pour tout z non nul///on a/// $-\arg(\bar{z}) = \arg(z)[2\pi]$////Donc///// $\arg(z') = \arg(z)[2\pi]$/////La déduction//// On en déduit que, pour tout point M distinct de l'origine O d'image M' par l'application f ///// on a///// $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$//// $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right) - \left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right) = 0[2\pi]$///

///// $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right) = 0[2\pi]$///En conséquence les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires et de même sens////Donc les points M et M' appartiennent à une même demi-droite d'origine O/////Voilà////

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Partie B Réf: AC001/S-4/26022007

////Question B-2/////Déterminer l'ensemble des points M de $IP\setminus\{O\}$ tel que $f(M)=M$ ////

////Bon///// On sait que M est un point distinct de l'origine O et d'affixe z non nul///Donc/// $f(M)=M \Leftrightarrow z=\frac{1}{\bar{z}}$ avec $z\neq 0$///En rendant au même dénominateur on a//// $\frac{z\bar{z}-1}{\bar{z}}=0$ avec $z\neq 0$//// $z\bar{z}-1=0$/////D'autre part on sait que $z\bar{z}=|z|^2$ ////Donc $z\bar{z}-1=0 \Leftrightarrow |z|^2=1$ avec $z\neq 0$///La distance/// $|z|^2=1 \Leftrightarrow OM=1$///Comme interprétation géométrique///Nous pouvons donc conclure que l'ensemble des points invariants par l'application $f(M)=M$ est le cercle de centre O et de rayon 1//////

Verbatim de AC001 pour la question n°3 Partie B Réf: AC001/S-4/26022007

///Question B-3/// M est un point du plan IP distinct de O,U,V ; on admet que M' est aussi distinct de O,U,V ///Etablir l'égalité : $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\left(\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+i}\right)=\overline{-i\left(\frac{z-1}{z-i}\right)}$. ///////

/////En déduire une relation entre $\arg\left(\frac{z'-1}{z'-i}\right)$ et $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)$/////[silence]////Alors/// M est un point du plan IP d'affixe z non nul///On admet que M' d'affixe z' par l'application f est distincte de O,U,V /////Par transformation////On a////// $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{\frac{1}{\bar{z}}-1}{\frac{1}{\bar{z}}-i}$ ////// En rendant au même dénominateur le deuxième membre///On a/// $\Rightarrow \frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1-\bar{z}}{\bar{z}}\times\frac{\bar{z}}{1-i\bar{z}}$ /// On a :

$\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1-\bar{z}}{1-i\bar{z}}$//// $i(-i)=1$ donc $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\times\frac{1-\bar{z}}{-i-\bar{z}}$ En simplifiant par $\bar{z}$ ///Alors///Je peux factoriser par $\frac{1}{i}$/// $\frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\times\frac{1-\bar{z}}{-(\bar{z}+i)}$ ///$\Rightarrow \frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\times-\frac{1-\bar{z}}{(\bar{z}+i)}$ //$\Rightarrow \frac{z'-1}{z'-i}=\frac{1}{i}\times\frac{\bar{z}-1}{(\bar{z}+i)}$ ////

///On sait donc que /// Donc/// $\dfrac{z'-1}{z'-i}=-i\times\dfrac{\overline{z-1}}{\overline{\overline{z-i}}}$ // $\dfrac{z'-1}{z'-i}=-i\times\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}$ //Il s'ensuit qu'on a////

///Par conséquent///// $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)=\arg\left(-i\times\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}\right)[2\pi]$ ///// On sait que/////////// $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ ////// Donc //// $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)=\arg(-i)+\arg\left(\overline{\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)}\right)[2\pi]$ /////Ce qui permet d'avoir//// $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right)=-\dfrac{\pi}{2}-\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)[2\pi]$ ///Voilà/////

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Partie C Réf: AC001/S-4/26022007

////Partie C//Soit z un nombre complexe tel que $z\neq 1$ et $z\neq i$ et soit M le point d'affixe z .Question C-1////Démontrer que le point M est sur la droite (UV) privée de U et de V si et seulement si $\dfrac{z-1}{z-i}$ est un nombre complexe non nul réel///Bon////[silence]///Soit z un nombre complexe tel que $z\neq 1$ et $z\neq i$ et soit M le point d'affixe z ////Le point M appartient à la droite/// Ce qui signifie que///// $M\in(UV)$ privée des points U et V à condition que les vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{VM}$ soient colinéaires avec M distinct de U et V /////

C'est-à-dire que si et seulement si//// $\left(\overrightarrow{VM};\overrightarrow{UM}\right)=0[2\pi]$ avec $M\neq U, M\neq V$ ////Autrement dit//////

///// $\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)=0[2\pi]$ avec $z\neq 1$ et $z\neq i$ //////Un argument nul est la conséquence d'un nombre complexe ayant sa partie imaginaire nulle///// Donc il s'agit d'un réel/// $\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)\in IR^*$ avec $z\neq 1$ et $z\neq i$ ////Voilà///

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Partie C Réf: AC001/S-4/26022007

//// Partie C////Question 2/////Déterminer l'image par l'application f de la droite/////////// // (UV) privée de U et de V ////////Alors/////On sait que le point M appartient à la droite//// $M\in(UV)$ privée des points U et V si et seulement si $\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) \in IR^*$ avec $z \neq 1$et $z \neq i$ /////////$\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0[\pi]$//////De plus///// On peut écrire aussi que /////$-\arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0[2\pi]$////$-\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$//// si et seulement si//// En utilisant la réponse $\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \arg\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right)[2\pi]$////$\arg\left(\dfrac{z'-1}{z'-i}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$//////

////// Comme interprétation géométrique///nous pouvons dire que//// L'image de la droite (UV)privée des points$U$ et$V$ est l'ensemble des points$M$ ' distincts de U et$V$ tels que : $\left(\overrightarrow{UM'};\overrightarrow{VM'}\right) = \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$/////Autrement dit//////c'est le demi-cercle de diamètre $[UV]$ tel que/////$\left(\overrightarrow{UM'};\overrightarrow{VM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$/////////

E/ Séance d'observation sur les lois de probabilités/Réf : AC001/S-6/19042007

Exercice extrait du sujet de baccalauréat Liban session juin 2006.

Sujet commun à tous les candidats.(Exercice n°4)

<u>Enoncé</u> :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda..avec..\kappa > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}.dx$

1- Déterminer le paramètre λ arrondi à 10^{-2} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3

Pour la suite de l'exercice, on prendra λ =0,2

2- A quel instant$t$, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est- elle de 0,5 ?

3- Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$

4- Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est à

10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

5- On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Réf: AC001/S-6/19042007

////La durée de vie d'un robot////exprimée en années jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda..avec..\kappa > 0$ ///Ainsi///la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $P(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}.dx$ ///Question 1///On sait que la probabilité qu'un robot tombe en panne avant un instant t est donnée dans l'énoncé par ///// $P(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}.dx$ ////On sait que //// $P(X \le t) + P(X > t) = 1$ ////Donc //// $P(X > t) = 1 - P(X \le t)$////On a $P(X > 6) = 0,3$ ///Donc//// $P(X > 6) = 1 - P(X \le 6) = O,3$ ///Ce qui donne///

//// $P(X \le 6) = -O,3 + 1 = 0,7$ ///On sait que $P(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}.dx$ ///Donc // $P(X \le 6) = \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,7$ ////Ce qui donne////[avec la primitive]///// $\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^6 = 0,7$ ////

///On a alors/// $-e^{-6\lambda} + 1 = 0,7 \Rightarrow e^{-6\lambda} = 0,3$ ////En utilisant les propriétés de ln et de expo on a /////// $\ln\left(e^{-6\lambda}\right) = \ln(0,3) \Rightarrow -6\lambda = \ln(0,3)$////Donc/// $\lambda = \frac{-\ln(0,3)}{6}$ ///[prend sa calculatrice]////Ce qui donne// $\lambda = 0,20$ /////

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Réf: AC001/S-6/19042007

///Question 2/// Pour la suite de l'exercice, on prendra λ=0,2////A quel instant t, à un mois près////la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est- elle de 0,5 ////Cela veut dire que $P(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}.dx$ =0,5////On prend λ=0,2///Donc on a /// $P(X \le t) = \int_0^t 0,2e^{-0,2x}.dx = 0,5$ ////Ce qui donne avec la primitive //// $\left[-e^{-0,2x}\right]_0^t = 0,5$ //

//Donc// $-e^{-0,2t} + 1 = 0,5 \Rightarrow e^{-0,2t} = 0,5$ ////[avec la réciproque entre ln et expo]//On a///// $\ln\left(e^{-0,2t}\right) = \ln(0,5) \Rightarrow -0,2t = \ln(0,5)$/////Donc//// $t = \frac{-1}{0,2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$////[prend//sa calculatrice] ////Ce qui donne///// $t = 3,47$ ///[silence]///Donc/// On peut dire que c'est au bout de 42 mois que la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est égale à 0,5//////

Verbatim de AC001 pour la question n°3 Réf : AC001/S-6/19042007

////Question 3/// Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$////Alors ////la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours de deux premières années signifie que $P(X > 2)$////On sait que /// $P(X > 2) + P(X \leq 2) = 1$//Donc/// $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$/// $P(X > 2) = 1 - \left[-e^{-0,2x}\right]_0^2$// ///Ce qui donne///// $P(X > 2) = 1 - (-e^{-0,4} + 1) = 1 + e^{-0,4} - 1 = e^{0,4}$////D'où// $P(X > 2) = e^{-0,4}$////

Verbatim de AC001 pour la question n°4 Réf : AC001/S-6/19042007

///Question 4//// Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années////quelle est à 10^{-2} près//// la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans//////La probabilité qu'un robot soit encore en état de marche au bout de six ans sachant qu'il n'a pas eu de panne au cours des deux premières années est une probabilité conditionnée $\frac{P(X > 6)}{P(X > 2)}$//// $\frac{P(X > 6)}{P(X > 2)} = \frac{e^{-0,2(6)}}{e^{-0,2(2)}} = \frac{e^{-1,2}}{e^{-0,4}} = e^{-1,2+0,4} = e^{-0,8}$/////Donc la probabilité qu'un robot soit encore en état de marche au bout de six ans sachant qu'il n'a pas eu de panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,8}$//////

Verbatim de AC001 pour la question n°4 Réf : AC001/S-6/19042007

////Question 5//// On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante//////Déterminer la probabilité que, dans ce lot/// il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années///On sait que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des premières années est $P(X > 2) = e^{-0,4}$///Si nous considérons que c'est la probabilité du succès ///On a la probabilité de l'échec $q = 1 - e^{-0,4}$/////Les 10 robots fonctionnent de façon indépendante//// C'est une épreuve à deux issues ////Donc c'est une loi binomiale ///Donc ////On a

/// $P(X = k) = \binom{n}{k} \times \left(e^{-0,4}\right)^k \times \left(1 - e^{-0,4}\right)^{n-k}$ /////avec k=0////On a//// $\binom{n}{0} \times \left(e^{-0,4}\right)^0 \times \left(1 - e^{-0,4}\right)^{10-0} = \left(1 - e^{-0,4}\right)^{10}$ ////Donc ///La probabilité qu'il n'y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années serait égale à $1 - \left(1 - e^{-0,4}\right)^{10}$ ////[prend sa calculatrice]/////Ce qui donne ////$1 - \left(1 - e^{-0,4}\right)^{10} \approx 0,999985$ ///////

F/ Séance supplémentaire sur l'observation des similitudes directes et indirectes.

Réf : S-7/09052007. Exercice extrait du sujet de baccalauréat session de juin 2006/Guadeloupe/Guyane/Martinique

Enoncé :

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrées $OABC$ et $OCDE$ tel que

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$.

1- Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant le point A en I et le point D en E

2- Déterminer le rapport de cette similitude s

3- On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$. Donner, sans justifier, l'image du point B par la transformation s.

4- Déterminer et placer l'image du point C par la transformation s.

5- Soit Ω le centre de la similitude s

a- Montrer que Ω appartient à la fois au cercle de diamètre $[AI]$ et au cercle de diamètre $[DE]$

b- Montrer que Ω ne peut être le point H.

c- Construire le point Ω.

6- On considère le repère ortho normal direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$.

a- Déterminer l'écriture complexe de la similitude s

b- En déduire l'affixe du centre Ω de s

Verbatim de AC001 pour la question n°2 Réf : AC001/S-7/09052007

//// Partie A////Première question///1-Justifier l'existence d'une similitude directe transformant le point//// en et le point en////On sait d'après l'énoncé que les points sont deux à deux distincts////D'après la définition d'une similitude///je peux dire que//// $A \neq D$ et $I \neq E$ ////Donc//// il existe une similitude directe s qui transforme le point A en I et le point D en E ////

Verbatim de AC001 pour la question n°1 Réf : AC001/S-7/09052007

//// Question 2////Déterminer le rapport de cette similitude s ////Bon////Le rapport de Similitude////On sait que les carrées $OABC$ et $OCDE$ sont tels que /////

$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE}\right)=\frac{\pi}{2}$ //// Alors les carrés $OABC$ et $OCDE$ sont isométriques///Ce qui implique d'après la figure que/// $IE = JA$ et $IE = JD$ ///De plus $IE = JD$ //Or le point J est aussi le milieu de la diagonale $[DA]$ ////On a $2IE = AD$ /// Ainsi////A partie de là/ le rapport de la similitude s est donné par la relation//// Le rapport de la similitude s est $k=\frac{IE}{AD}$ /////Sachant que //// $2IE = AD$ ////on a//// $k=\frac{1}{2}$ /////

Verbatim de AC001 pour la question n°3Réf : AC001/S-7/09052007

////La question 3////On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$ ///Donner///sans justifier////l'image du point B par la transformation s ////Alors////D'après la figure on a////

/// $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ID}\right)=\frac{\pi}{2}$ ///De plus/// $ID=\frac{1}{2}AB$ ////Donc///L'image du point A par la transformation s est le point I ////L'image du point B par la transformation s est le point D ///

Verbatim de AC001 pour la question n°4 Réf : AC001/S-7/09052007

////Question 4/// Déterminer et placer l'image du point C par la transformation s ////

D'après la figure //// Le point C est le milieu du segment $[BD]$///l'image de B par la transformation s est D /////l'image de D par la transformation s est le point E ////Sachant que les similitudes conservent les milieux/////le point C a pour image le milieu K du segment $[DE]$ /////

Verbatim de AC001 pour la question n°5a Réf : AC001/S-7/09052007

///Question 5a/// Soit Ω le centre de la similitude s /////Montrer que Ω appartient à la fois au cercle de diamètre $[AI]$ et au cercle de diamètre $[DE]$//// Alors////On a//// $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}\right) = \frac{\pi}{2}$ /// Donc les triangles ΩAI et ΩDE sont rectangles en Ω /////[$\left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega E}\right) = \frac{\pi}{2}$ silence]////et le point Ω appartient aux cercles de diamètres $[AI]$ et $[DE]$////

Verbatim de AC001 pour la question n°5b et 5c Réf : AC001/S-7/09052007

//question 5b/// Montrer que Ω ne peut être le point H /// On sait que l'image de /// On a $S(A) = I..;.S(D) = E$ ///Ce qui implique donc que $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{IE}\right) = \frac{\pi}{2}$ ////Ainsi//On a/// On a

$\left(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HI}\right) = \frac{\pi}{2}..et..\left(\overrightarrow{HD}, \overrightarrow{HE}\right) = \frac{\pi}{2}$ ////Mais// $HD = \frac{1}{2}HE$ parce que les triangles DHE et IDE sont semblables///Donc le point H n'est pas le centre de la transformation s /////

//Question 5c///Construire le point Ω ////Le centre Ω est donc l'autre point d'intersection des cercles de diamètres $[AI]$ et $[DE]$/////

Verbatim de AC001 pour la question n°6a Réf : AC001/S-7/09052007

///// Question 6a///On considère le repère ortho normal direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$///Déterminer l'écriture complexe de la similitude s /// Alors///En utilisant la figure//// Dans le repère ortho normal direct $\left(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$////les points A,I,D,E ont pour affixes respectives $Z_A = 1$ // $Z_I = i - \frac{1}{2}$ /// $Z_D = i - 1$ et $Z_E = -1$ ////Alors/// L'écriture complexe de la transformation///[silence]///La transformation s est de la forme/// $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}z + b$ parce que le rapport de la transformation est $\frac{1}{2}$ et son angle est $\frac{\pi}{2}$ en plus du faite que $s(A) = I$ ///Donc////Donc///On détermine la valeur de b en utilisant $s(A) = I$

//// $Z_I = \frac{1}{2}iZ_A + b$ ////[silence]////On a alors/// On /// $b = i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ///Donc//En

Remplaçant b ///On a //L'écriture complexe de la transformation s $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ////

Verbatim de AC001 pour la question n°6b Réf : AC001/S-7/09052007

///Question 6b/// En déduire l'affixe du centre Ω de s ///Alors//// Ω est le deuxième point d'intersection des deux cercles de diamètres respectifs $[AI]$ et $[DE]$////Donc/// Le centre Ω de s est un point invariant/// et son affixe ω est défini par la relation $\omega = \frac{1}{2}i\omega - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ///Donc/// $\omega - \frac{1}{2}i\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ///[silence]////En factorisant le premier membre de l'égalité par ω //Ce qui donne///On a/// $\omega(1 - \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ // on a/// $\omega = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}{1 - \frac{1}{2}i}$ ///On a $\omega = \frac{-1+i}{2-i}$ //// En utilisant l'expression conjuguée on a /// On a : $\omega = \frac{(-1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$ // $\omega = \frac{(-1+i)(2+i)}{5}$ //// [silence]///Donc ///on a/// $\omega = -\frac{3}{5} + \frac{i}{5}$ ///Alors/// L'affixe de Ω est $-\frac{3}{5} + \frac{i}{5}$ /////

2/ Séance d'entretien complémentaire d'AC001 sur son organisation et son fonctionnement de travail en étude autonome

Voici ses réponses aux deux questions complémentaires/ AC001/S-Entretien /09052007

Conformément aux clauses du contrat l'élève peut demander au tout moment l'arrête de l'enregistrement en bande film de la séance. Au cours de cet entretien complémentaire AC001 nous a demandée à certains moment d'arrêter de la filmée, ce que nous avons fait. Nous avons alors pris des notes lorsque c'était le cas.

Ob : Quelle est votre organisation de travail ?

AC001///mon organisation de travail mathématique//Commence par tout ce qui se passe en classe lors des séances de cours///En classe j'écoute les explications orales et écrites du professeur////J'aime les séances de cours structurées et surtout lorsqu'il fait des démonstrations des propriétés ou formules du cours///D'habitude//Je comprends//Sinon je pose des questions//Lorsque je n'ai pas des réponses satisfaisantes je les cherchent ailleurs dans d'autres livres, sur Internet ou avec « Raim, son père» dans le but d'approfondir et de consolider mes connaissances//Je travaille les notions étudiées en classes de manière plus profonde

Ob : Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ?

« Les maths sont un outil important ///on en a besoin dans la plupart des carrières///Moi// je serai en classe préparatoire l'année prochaine//donc je travaille beaucoup les mathématique//. En classe//d'habitude// disons que le cours est clair// il y a souvent les formules importantes// quelques exercices d'applications pas souvent compliqués non plus// Les travaux de recherches en classe dans les différentes leçons déjà étudiées ne donnent pas souvent l'ampleur et la portée des objets mathématiques en étude avec tous les sous-entendus de notions ou autres objets qui se cachent derrière la notion en cours d'apprentissage en classe///Je travaille à la maison les exercices pour apprendre et pour comprendre sur les façons de faire./////»

Ob : Pourquoi croyez-vous que l'étude autonome hors classe est obligatoire en terminale scientifique S ?

« Les maths sont un outil important ///on en a besoin dans la plupart des carrières///Moi// je serai en classe préparatoire l'année prochaine//donc je travaille beaucoup les mathématique//. En classe//d'habitude// disons que le cours est clair// il y a souvent les formules importantes// quelques exercices d'applications pas souvent compliqués non plus// Les travaux de recherches en classe dans les différentes leçons déjà étudiées ne donnent pas souvent l'ampleur et la portée des objets mathématiques en étude avec tous les sous-entendus de notions ou autres objets qui se cachent derrière la notion en cours d'apprentissage en classe///Je travaille à la maison les exercices pour apprendre et pour comprendre les façons de faire./////»

«///J'ai compris qu'il existe des liens entre les notions d'une leçon à l'autre,///je fais beaucoup d'exercices pour connaître les liens implicites relatifs aux objets mathématiques////Je sais comment cela fonctionne// derrière chaque consigne////il y a des consignes non-dits qui impliquent des façons de faire////des transformations qui nécessitent d'autres objets mathématiques ainsi de suite////C'est une sorte de chaîne la question mathématique///une fois les maillons rassemblés/////je construis la chaîne réponse de la question ///Je fais beaucoup d'exercices pour rencontrer plusieurs systèmes//// Sur internet ou dans mes autres livres/// je trouve aussi d'autres formules////regardé////j'ai trouvé ça dans un des livres//////Voici ce que j'ai trouvé dans un autre livre sur les similitudes /// c'est plus riche et plus explicatif que tout ce qui se trouve dans mon cahier de cours/// C'est en faisant des recherches sur internet et dans des livres de mathématiques qui ne sont pas des livres que le professeur nous conseil que je découvre d'autres informations sur les notions étudiées en classe /// Il y a beaucoup de notions mathématiques qui ne sont pas détaillées dans les cours en classe/////Avec mon travail de recherche personnelle// je fais beaucoup de choses/////// Sur interne il y a des choses qui ne sont pas mon ni cahier ni dans mon livre de classe comme l'antidéplacement [387]///regardé ce que j'ai trouvé sur internet dans mes autres livres je trouve d'autres formules////regardé////j'ai trouvé ça dans un des livres/////Voici ce que j'ai trouvé dans un autre livre de classe de terminale sur les similitudes

[387] Données trouvées sur internet

• **Composée de similitudes et inverse d'une similitude**

Propriétés :

– Si s et s' sont deux similitudes de rapport respectivement k et k', alors la composée $s \circ s'$ est une similitude de rapport $k \times k'$.

☞ **Attention : $s' \circ s$ n'est pas forcément égal à $s \circ s'$.**

– La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.

• **Similitudes et points fixes**

Théorème : Soit s une similitude du plan.

Si A, B, C sont trois points non alignés du plan tels que $s(A) = A$, $s(B) = B$ et $s(C) = C$, alors s est l'identité du plan.

Si A et B sont deux points distincts du plan tels que $s(A) = A$, $s(B) = B$, alors s est l'identité du plan ou la symétrie d'axe (AB).

• **Triangles semblables**

Définition : Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On dit qu'ils sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

Théorème : Une similitude conserve les angles géométriques.

Corollaire : L'image par une similitude d'un triangle ABC est un triangle $A'B'C'$ semblable au triangle ABC.

II SIMILITUDES DIRECTES

1. Généralités

• **Définition :** On dit qu'une similitude est directe si elle conserve les angles orientés.

Exemples :

– Les rotations, les translations, les homothéties sont des similitudes directes, mais les symétries axiales ne sont pas des similitudes directes.

– Dans le plan complexe, les transformations de la forme $z \mapsto a \cdot z + b$ sont des similitudes directes mais pas les transformations de la forme $z \mapsto a \cdot \bar{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

• **Théorème :** Soit $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé direct.

Une transformation s est une similitude directe si, et seulement si, son expression complexe dans ce repère est de la forme $z \mapsto a \cdot z + b$ ($a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

• **Propriété 1 :** Soit s une similitude directe. Pour tous points A, A', B, B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, on a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{s(A)s(B)}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{s(A')s(B')})$.

• **Définition :** Soit s une similitude directe. On appelle angle de s, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{s(A)s(B)})$ où A et B sont deux points quelconques distincts.

• **Propriété 2 :** La composée de deux similitudes directes de rapports k, k' et d'angles θ, θ' est une similitude directe de rapport $k \times k'$ et d'angle $\theta + \theta'$.

• **Propriété 3 :** Pour tous points A, B, A', B' tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

2. Forme réduite d'une similitude directe

• **Théorème :** Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors :

– ou bien s est une translation ($k = 1$ et $\theta = 0$ [modulo 2π]) ;

– ou bien s possède un unique point fixe Ω et est la composée de l'homothétie h de centre Ω de rapport k et de la rotation r de centre Ω et d'angle θ telle que : $r \circ h = h \circ r = s$.

Remarque : dans le cas où s possède un point fixe Ω, alors l'écriture complexe de s dans un repère orthonormé direct est de la forme : $z \mapsto a \cdot (z - \omega) + \omega$ où ω est l'affixe de Ω.

• **Application :** Un **déplacement** est une isométrie qui conserve les angles orientés et une isométrie est une similitude de rapport 1, donc, d'après le théorème précédent, tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.

III SIMILITUDES INDIRECTES (OU NON DIRECTES)

• **Définitions**

Une **similitude indirecte** est une similitude qui ne conserve pas les angles orientés.

Un **antidéplacement** est une isométrie qui ne conserve pas les angles orientés.

• **Forme géométrique d'une similitude indirecte**

Théorème : Soit s une similitude indirecte, alors $s = s' \circ \sigma$ où s' est une similitude directe et σ une symétrie axiale.

• **Forme complexe d'une similitude indirecte**

Théorème : Toute transformation s est une similitude indirecte, si son écriture complexe est dans un repère orthonormé direct de la forme $z \mapsto a \cdot \bar{z} + b$ ($a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$).

GÉOMÉTRIE ET SIMILITUDES

• **Propriétés :** Soit s une similitude de rapport k et A, B deux points distincts du plan d'images respectives A', B' par s.
– L'image par s de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
– L'image par s du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
– L'image par s du cercle de centre O et de rayon R est le cercle de centre $s(O)$ et de rayon $|k| \times R$.

• **Propriétés :** Une similitude conserve le barycentre, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité et quatre points sur un cercle ont pour image quatre points sur le cercle image.

PLAN D'ÉTUDE D'UNE SIMILITUDE

1. Similitude directe

A-t-on l'écriture complexe $z' = az + b$ de la similitudes s ?

oui

• le rapport de s est $|a|$
• l'angle : $\mathrm{Arg}(a)$

Si $|a| = 1$, alors s est la translation de vecteur d'affixe b

Si $|a| \neq 1$, alors s admet un centre d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$

non

• le rapport de s est : $\dfrac{s(A)s(B)}{AB}$
• l'angle de s : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{s(A)s(B)})$
où A et B sont des points donnés par l'énoncé

2. Similitude indirecte

L'écriture de la similitude indirecte est donnée : $z' = \overline{a}z + b$.

Les affixes z des points fixes éventuels vérifient $z = a\overline{z} + b$.

Données tournées dans un livre de Maths spé, édition Nathan 2004

///j'ai aussi trouvé ça sur internet avec mon père///

Forum : similitudes : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Maths spé

Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Maths spé *posté le 05/05/2005 à 15:54*
posté par : heretics (invité)
Bonjour à tous !

Alors voilà un exo sur les antidéplacements, ou symétrie glissée, c'est une transformation qui est la composée d'une symétrie axiale et d'une translation.

Etant donné un droite D de vecteur directeur $\vec{u}$.
On appelle symétrie glissée d'axe D et de vecteur $\vec{u}$ la transformation:
$\sigma = T_{\vec{u}} \circ s_D$

1. Montrer que σ est un antidéplacement et que:
$\sigma = s_D \circ T_{\vec{u}}$

Voilà alors dès le début je suis bloqué. Je ne sais pas comment démontrer celà...

2. Soit M un point d'image M' par σ. Montrer que I milieu de [MM'] $\in$ D , et que M $\in$ D ssi $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Là je suppose qu'il faut utiliser la décomposition...

3. σ a-t-elle des points fixes ?

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, non mais comment le démontrer...

Ensuite il y a d'autres propriétés à démontrer mais je pense que çà ira...

Voilà qi quelqu'un peut m'éclairer sur un ou plusieurs points, ça serait sympathique !

Merci !

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 16:26*
posté par :
muriel (Correcteur)
bonjour ,
as-tu fait un dessin en prenant un point M quelconque du plan en traçant le symétrique M1 de M par rapport à D, puis le translaté M' de M1 de vecteur $\vec{u}$
ensuite,
le translaté M2 de M de vecteur $\vec{u}$ et le symétrique M" de M2 par rapport à D

tu peux remarquer que MM1M'M2 est un parallélogramme ($\overrightarrow{M1M'} = \overrightarrow{MM2}$), ayant un angle droit en ($\overrightarrow{MM2};\overrightarrow{MM1}$), donc c'est un rectangle qui a un axe de symétrie D
ainsi M"=M'
on vient de montrer que T$\circ\sigma$=$\sigma\circ$T

pour la suite, je te laisse faire

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 16:27*
posté par :
muriel (Correcteur)
oups à la fin il faut lire:
on vient de montrer que T o s= s o T
désolée

re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 20:02*
posté par : heretics (invité)
ok ok merci j'ai compris !

En gros pour le reste il faut procéder de la même manière (géométrique)

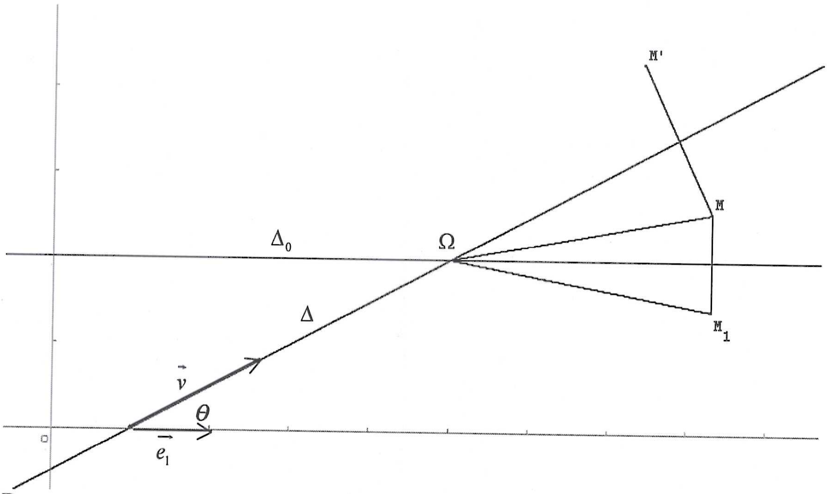
re : Propriétés des antidéplacements (ou symétrie glissée), Math *posté le 05/05/2005 à 20:14*
posté par :
muriel (Correcteur)

Écriture complexe des antidéplacements

FICHE 6

On rappelle que le plan muni est d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{e_1}\,,\vec{e_2}\right)$.

Ecriture complexe des symétries axiales
La *symétrie axiale* s_Δ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2\theta}\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) + z_\Omega$ où θ désigne une mesure de l'angle $\left(\vec{e_1}\,;\vec{v}\right)$.



Preuve
Soit Δ_0 la droite contenant Ω et parallèle à l'axe des abscisses et soit s la symétrie d'axe Δ_0.
L'isométrie $s_\Delta o s$ est la rotation $r_{\Omega\,;\,2\theta}$ de centre Ω et d'angle 2θ.
Puisque $r_{\Omega\,;\,2\theta} = s_\Delta o s$, on a : $s_\Delta = (s_\Delta o s) o s = r_{\Omega\,;\,2\theta} o s$.
Déterminons d'abord l'écriture complexe de s. Si M est un point d'affixe z, appelons M_1 son image par s et z_1 son affixe.

Supposons $z \neq z_\Omega$ et calculons $\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}}$.

$$\Omega M = \Omega M_1 \text{ donc } \left|\frac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}}\right| = \frac{|z_1 - z_\Omega|}{\left|\overline{z - z_\Omega}\right|} = \frac{|z_1 - z_\Omega|}{|z - z_\Omega|} = \frac{\Omega M_1}{\Omega M} = 1.$$

$$\arg\left(\frac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z} - \overline{z_\Omega}}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) - \arg\left(\overline{z} - \overline{z_\Omega}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) - \arg\left(\overline{z - z_\Omega}\right) = \arg(z_1 - z_\Omega) + \arg(z - z_\Omega)$$

$$= \left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M_1}\right) + \left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right) = 0 \quad \text{puisque} \quad \left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = -\left(\vec{e_1}\,;\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

.

On a donc : $\dfrac{z_1 - z_\Omega}{\overline{z - z_\Omega}} = 1$ et $z_1 - z_\Omega = \bar{z} - \overline{z_\Omega}$, égalité valable même si $z = z_\Omega$.

Il reste à composer s avec $r_{\Omega\,;\,2\theta}$ pour trouver $s_\Delta = r_{\Omega\,;\,2\theta} os$.

$s : M \mapsto M_1 \quad r_{\Omega\,;\,2\theta} : M_1 \mapsto M' \qquad : \quad z' - z_\Omega = e^{2i\theta}(z_1 - z_\Omega) = e^{2i\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega})$, d'où le résultat.

Représentation complexe des symétries glissées

La *symétrie glissée* $s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$ dont l'axe Δ passe par le point Ω et admet le vecteur $\vec{v}$ comme vecteur directeur associe, à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega + z_{\vec{u}}$ où θ désigne une mesure de l'angle $(\vec{e_1}\,;\,\vec{v})$.

Pour résumer, on voit que les symétries axiales et les symétries glissées du plan ont une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$.

Dans la cas de la symétrie axiale: $a = e^{i2\theta}$ et $b = -e^{i2\theta}\overline{z_\Omega} + z_\Omega$.

Dans la cas de la symétrie glissée : $a = e^{i2\theta}$ et $b = -e^{i2\theta}\overline{z_\Omega} + z_\Omega + z_{\vec{u}}$.

Réciproquement, si une transformation du plan a une écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$, on peut montrer qu'il s'agit d'une symétrie axiale ou une symétrie glissée .

Dans le cas où la transformation admet un point fixe Ω la preuve est facile. En soustrayant membre à membre les égalités $\begin{cases} z' = a\bar{z} + b \\ z_\Omega = a\overline{z_\Omega} + b \end{cases}$ on obtient $z' - z_\Omega = a(\bar{z} - \overline{z_\Omega})$. En écrivant a sous la forme $e^{i2\theta}$, on voit que $z' = e^{i2\theta}(\bar{z} - \overline{z_\Omega}) + z_\Omega$: c'est bien l'écriture d'une symétrie axiale.

Comment reconnaître une symétrie axiale et une symétrie glissée

Soit une transformation f d'écriture complexe $z' = a\bar{z} + b$, a et b étant des complexes avec $|a| = 1$.

Si f est une symétrie axiale, pour tout point M, le milieu de $[Mf(M)]$ doit être fixe, en particulier le milieu de $[Of(O)]$ doit être fixe. Réciproquement si le milieu de $[Of(O)]$ est fixe alors f est une symétrie axiale puisqu'une symétrie glissée n'a aucun point fixe.

$f(O)$ a pour affixe b et le milieu de $[Of(O)]$ a pour affixe $\dfrac{b}{2}$.

f est une symétrie axiale si et seulement si : $\dfrac{b}{2} = a\overline{\left(\dfrac{b}{2}\right)} + b$, condition qui s'écrit aussi :

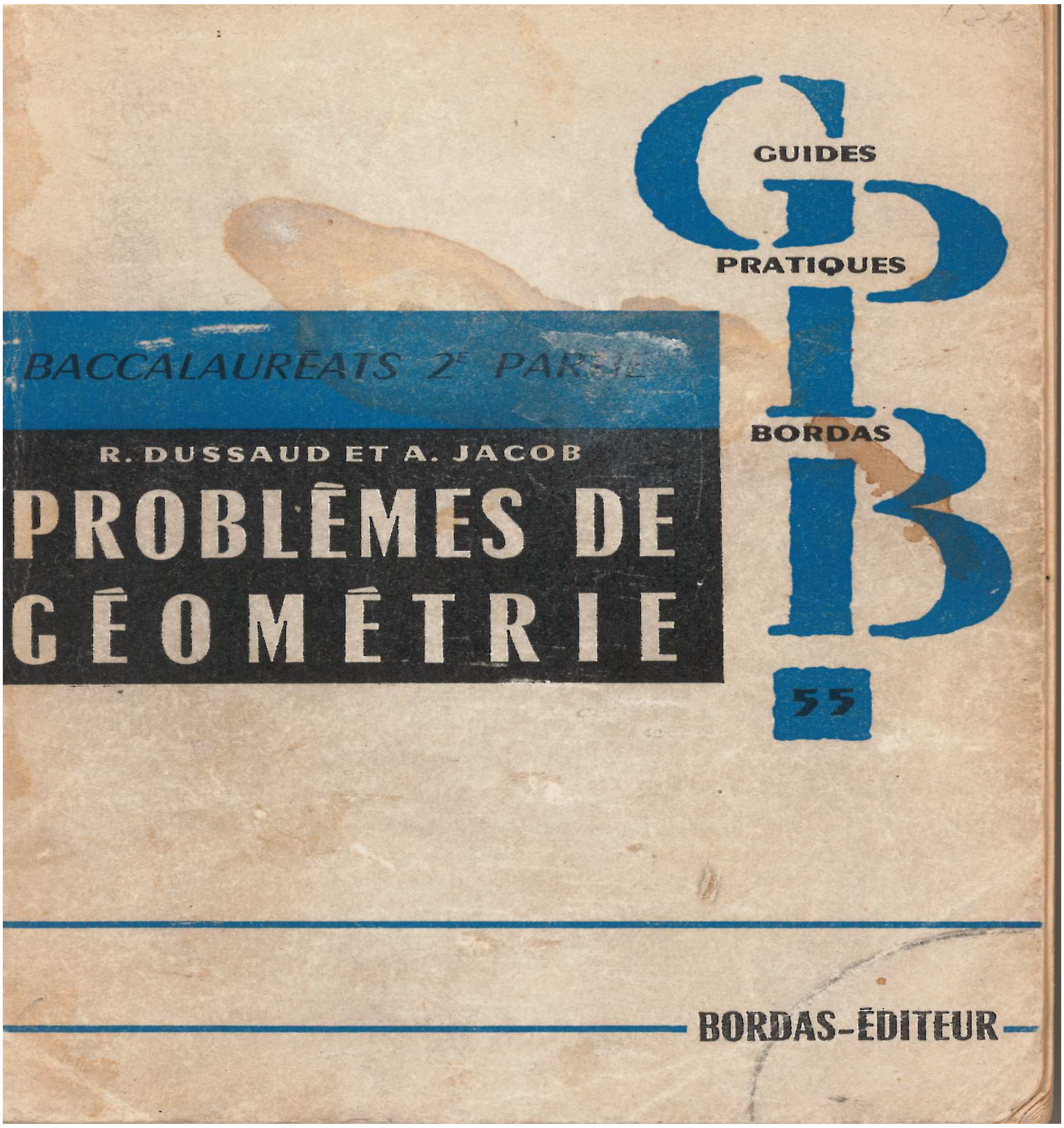
$\boxed{a\bar{b} + b = 0}$.

On peut également retrouver cette condition en considérant que, si f est une symétrie axiale, $fof = id$ tandis que si f est une symétrie glissée $f = s_{\Delta\,;\,\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$, on aura $fof = t_{2\vec{u}}$.

Cette deuxième méthode permet de plus de déterminer le vecteur $\vec{u}$ à partir de l'écriture complexe d'une symétrie glissée.

/

/////Voici ce que j'ai trouvé dans un autre livre sur les similitudes /// c'est plus riche et plus explicatif que tout ce qui se trouve dans mon cahier de cours//D'ailleurs le mot antidéplacement n'apparaît nul part dans mon cahier/// et aussi dans le livre qu'on utilise en classe de même que d'autres livres/// la formule qu'il faut utilisée est mentionnée sans pour autant nommé l'objet antidéplacement ou symétrie glissante/// C'est très dur de travailler avec le cours ou un livre lorsque les choses ne sont pas nommés//« ///mais ce n'est pas dans mon cours ni dans le livre ce que représente un antidéplacement….// mais le professeur n'a jamais parlé de ça….//// » .// Regardé ce que j'ai trouvé dans d'autres livres//Ce sont de très vieux livres que mon père a fait sortir de la cave et qui lui appartiennent///



Collection des guides pratiques sous la direction de H. BORDAS, agrégé de l'université

R. Dussaud	A. JACOB
Agrégé de l'université.	Agrégé de l'université
Professeur au lycée Cl. Bernard	Professeur au lycée Champollion

Bordas 1960 N° d'édition 154601504

///Voici ce que j'ai trouvé à la page 39-40///

SYMÉTRIES

Symétrie par rapport à un plan (P) donné.
Transformation ponctuelle qui à un point M donné fait correspondre un point M′ tel que (P) soit le plan médiateur de MM′ ; M décrivant la figure (F), M′ décrit la figure (F′) et les figures (F) et (F′) sont dites symétriques par rapport au plan (P). C'est une transformation réciproque (fig. 122).

Symétrie par rapport à un point O donné.
Transformation ponctuelle qui, à un point M, fait correspondre un point M′ tel que MM′ admette O pour milieu. Transformation réciproque M décrivant la figure (F), M′ décrit la figure (F′) . (F) et (F′) sont dites symétriques par rapport à O (fig. 123).

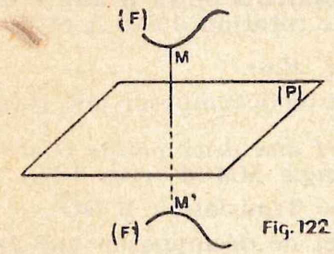


Fig. 122

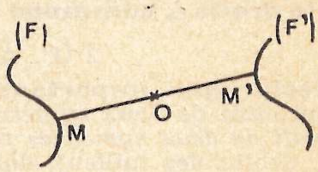
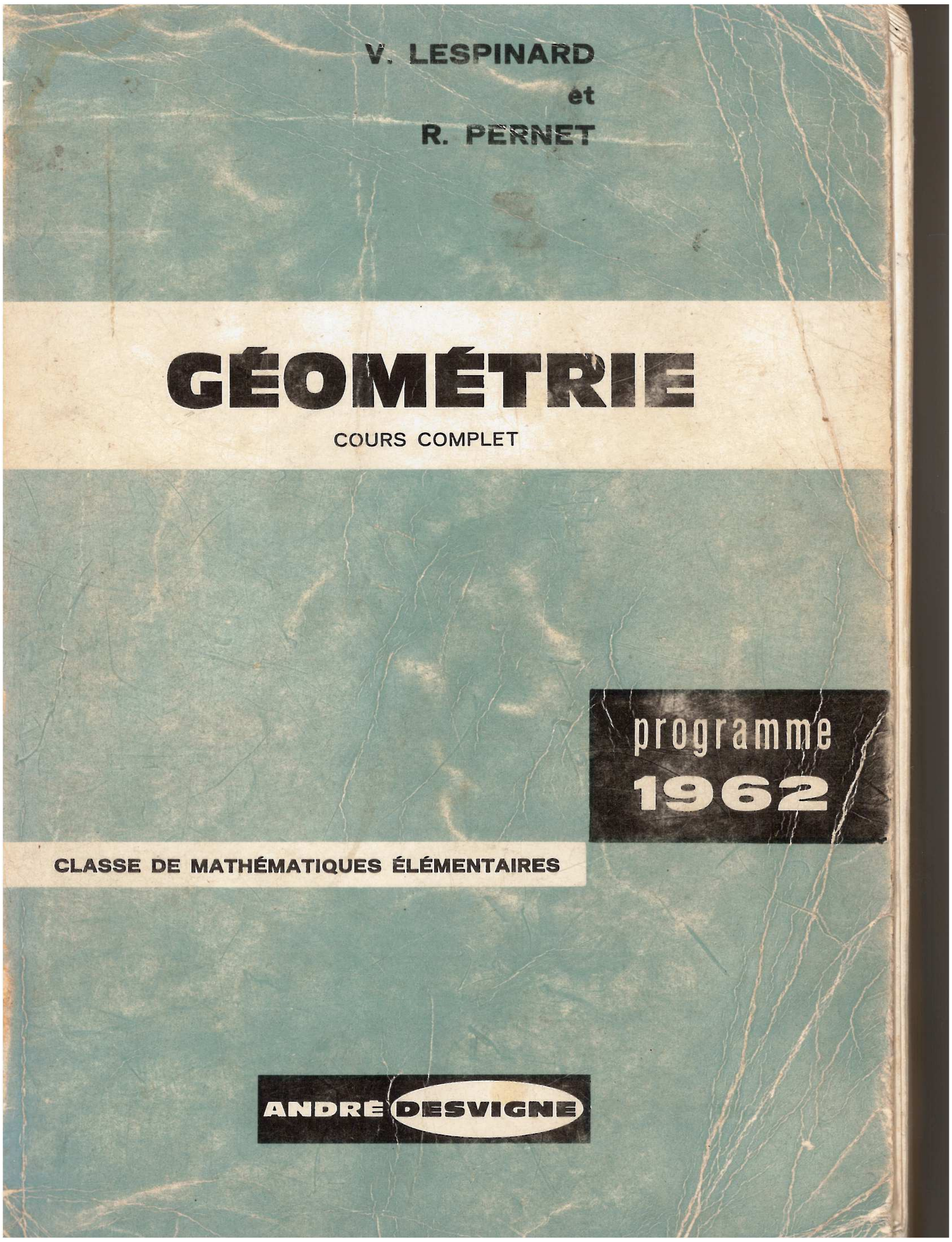


Fig. 123

Symétrie par rapport à une droite déjà étudiée, car c'est un déplacement.
On démontre : que la symétrie par rapport au plan (P) n'est pas un déplacement ; que la symétrie par rapport au point O n'est pas un déplacement.
On est amené à définir ainsi les antidéplacements (ou véritables symétries).
La figure (F′) déduite de (F) par un antidéplacement de l'espace ne peut pas coïncider avec (F) [on entend ici qu'il s'agit de la figure F la plus générale].
La figure (F′) déduite de (F) par un antidéplacement en géométrie plane est une figure inversement égale à (F).
On peut résumer ces propositions dans le tableau suivant :

	Géométrie plane.	Géométrie dans l'espace.
TRANSLATION ROTATION	Déplacements.	Déplacements.
RETOURNEMENT	Antidéplacement : (F) et (F′) inversement égales.	
VISSAGE	→	Déplacement.
Symétrie-point.	Déplacement.	Antidéplacement.
Symétrie-plan.	→	Antidéplacement.

///voici ce que j'ai trouvé dans le deuxième livre ////



V.LESPINARD	R. PERNET
Professeur agrégé	Professeur agrégé
Au lycée du Parc de Lyon	Docteur ès sciences

///Voici ce que j'ai trouvé dans ce deuxième livre de la page 231////

DEPLACEMENTS - GÉNÉRALITÉS - TRANSLATIONS 231

242. ISOMÉTRIE.

DÉFINITION : On dit que deux figures sont isométriques lorsqu'elles sont homologues dans une transformation ponctuelle, la distance de deux points quelconques de l'une étant égale à la distance des points correspondants de l'autre.

La relation d'isométrie est **réflexive, symétrique** et **transitive. C'est une relation d'équivalence.**

243. ANTIDÉPLACEMENTS.

DÉFINITION : On appelle antidéplacement une transformation ponctuelle qui fait correspondre à une figure (F) quelconque une figure isométrique non égale à (F).

EXEMPLE. — Etant donné une figure (F) **d'un plan** (Π), choisissons deux points A et B et construisons deux autres points A′ et B′ de (Π) tels que $A'B' = AB$.

Soit M un point quelconque de (F). On peut construire $M' \in (\Pi)$ tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'})$, $AM = AM'$. La figure (F′) est, par définition directement égale à (F). Elle s'en déduit par un déplacement.

Construisons M'_1 tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM'_1}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$, $AM = AM'$. La figure (F'_1) ainsi déterminée se déduit de (F) par un **antidéplacement plan.**

244. REMARQUES.

1°) Etant donné deux figures planes (F) et (F′) isométrique, soient (A, A′), (B, B′) deux couples de points homologues donnés, $M \in (F)$ et $M' \in (F')$ un couple quelconque de points homologues. Il n'y a que deux hypothèses possibles :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

(F′) se déduit de (F) par un déplacement.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

(F′) se déduit de (F) par un antidéplacement.

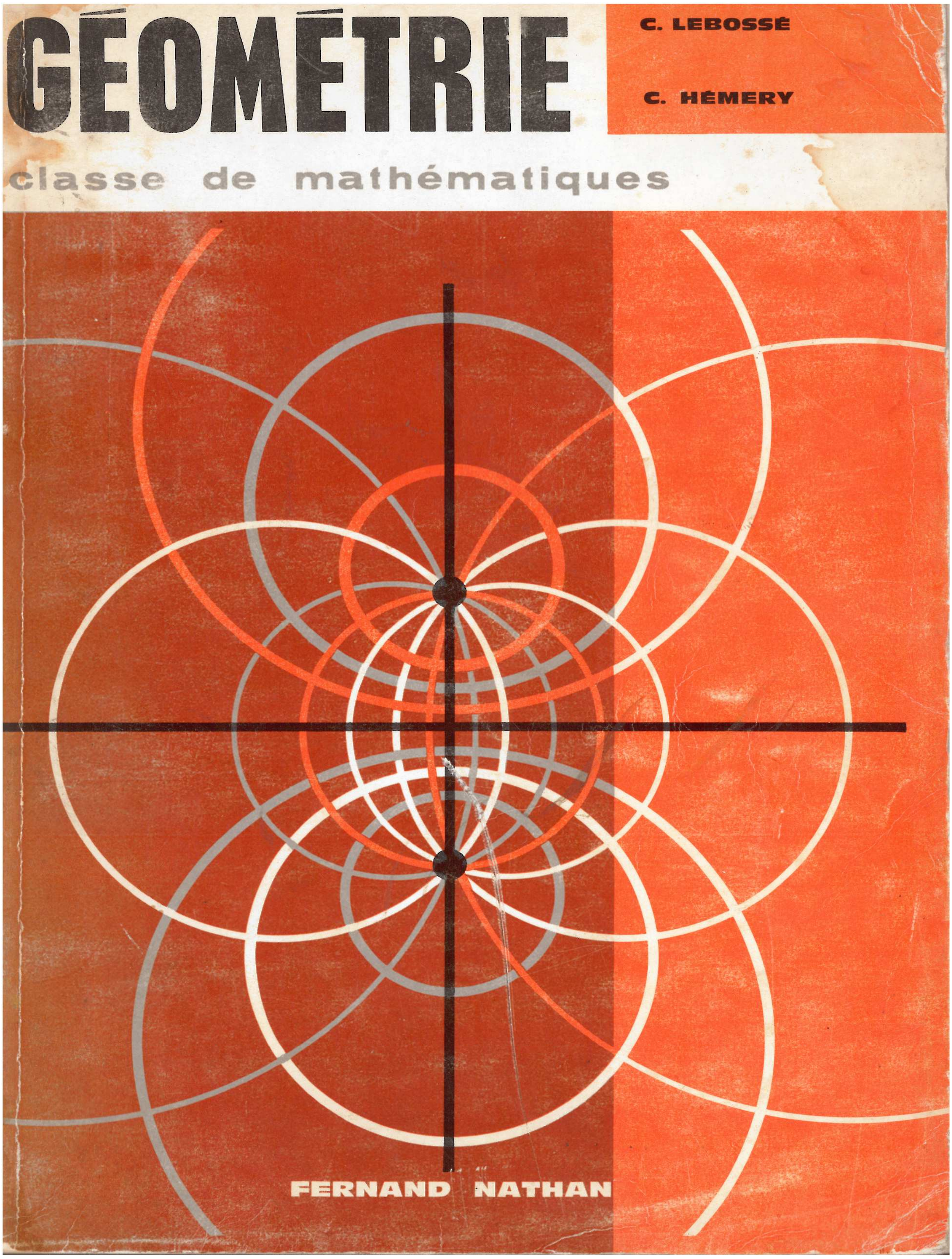
2°) Dans l'espace il n'y a qu'un seul type de figures égales, alors que dans le plan on a défini les figures directement et inversement égales.

II. — TRANSLATION

245. DÉFINITION.

Etant donné (fig. 228) un vecteur $\overrightarrow{V}$ appelé **« vecteur directeur », on appelle translation la transformation ponctuelle qui à un point M**

//// il y a la définition de l'antidéplacement dans ce vieux livre///Alors que dans mon livre nulle part rien n'est dit sur les antidéplacements [ ]//alors qu'il y a la formule ///////C'est encore plus riche dans ce dernier livre///



C. LEBOSSE

Agrégé de mathématiques

Professeur au lycée Claude-Bernard

C. HEMERY

Agrégé de mathématiques

Professeur au lycée Lavoisier

SYMÉTRIE AXIALE DANS LE PLAN

304. Figures inversement égales dans le plan. — Deux figures superposables F et F′ d'un plan P sont dites *inversement égales* si, pour amener la figure F sur la figure F′, il faut d'abord retourner le plan P sur lui-même. Dans deux figures inversement égales F et F′, deux segments homologues sont égaux tandis que deux angles orientés homologues sont opposés.

— La correspondance entre deux figures F et F′ inversement égales du plan est appelée *antidéplacement* et peut être définie de la façon suivante :

Considérons dans le plan deux segments égaux AB et A′B′ et un point quelconque M (fig. 309). Construisons le point M′ tel que :

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) \quad \text{et} \quad A'M' = AM.$$

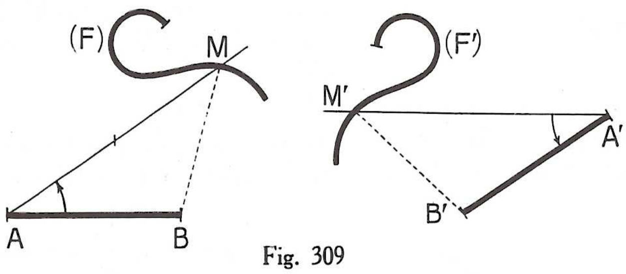


Fig. 309

Le triangle A′B′M′ est inversement égal au triangle ABM. Lorsque le point M décrit une figure F, son homologue M′ décrit une figure F′ inversement égale à F et dans laquelle A′ et B′ sont les homologues de A et de B.

En effet si on retourne le plan P sur lui-même, on peut amener le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en coïncidence avec $\overrightarrow{A'B'}$. Tout point M de F coïncide alors avec son homologue M′ de la figure F′. Notons que :

1° Un antidéplacement est déterminé quand on connaît un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et son transformé $\overrightarrow{A'B'}$ de même module;

2° Deux figures F_1 et F_2, inversement égales à la figure F, sont directement égales. Le produit de deux antidéplacements plans est donc un déplacement plan.

Page 207

309. Théorème. — ***Deux figures inversement égales d'un même plan se correspondent dans le produit commutatif d'une symétrie d'axe Δ par une translation parallèle à Δ.***

Soient A et B deux points d'une figure F, A′ et B′ leurs homologues dans la figure F′ inversement égale à F (fig. 314). Par le milieu I de AA′, menons l'axe Δ défini par : $(\overrightarrow{AB}, \vec{\Delta}) = (\vec{\Delta}, \overrightarrow{A'B'})$. La symétrie d'axe Δ transforme F en une figure F_1 inversement égale à F, donc directement égale à F′. Elle transforme en particulier $\overrightarrow{AB}$ en un vecteur $\overrightarrow{A_1B_1}$ tel que :

$$\left.\begin{array}{l}\left(\overrightarrow{AB}, \vec{\Delta}\right) = \left(\vec{\Delta}, \overrightarrow{A_1B_1}\right)\\ A_1B_1 = AB = A'B'\end{array}\right\} \Longrightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A'B'}.$$

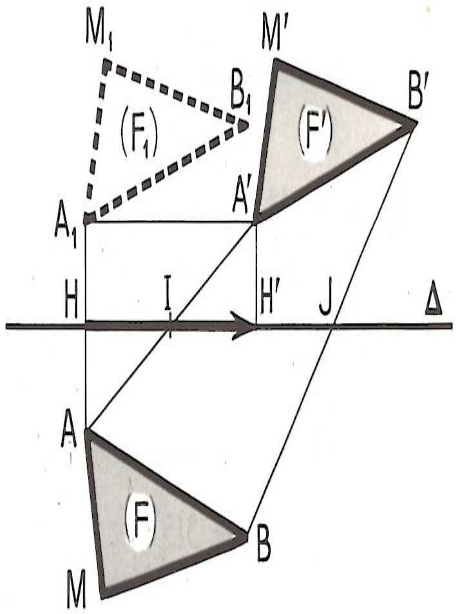


Fig. 314

Il en résulte que F′ est la transformée de F_1 dans la translation $\overrightarrow{A_1A'}$ (n° 290) dont le support est parallèle à Δ puisque Δ passe par les milieux H et I de AA_1 et de AA′. Le produit de la symétrie Δ par la translation $\overrightarrow{A_1A'}$ est d'ailleurs commutatif. Notons que :

La droite Δ est la seule droite invariante dans la transformation. Elle contient le milieu de tout vecteur MM′ joignant deux points homologues et la projection de ce vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sur Δ est constante et égale au vecteur de la translation. La droite Δ se nomme axe de l'antidéplacement.

Page 209

318. Produit d'une symétrie axiale $S(\Delta)$ et d'une translation $(\vec{T})$. — 1° Soit A un point de l'axe Δ et A' son transformé dans $(\vec{T})$ (fig. 321). Désignons par Δ_1 la parallèle à Δ menée par le milieu I de AA', par A_1 la projection de A' sur Δ et par A_2 le symétrique de A par rapport à Δ_1. Posons $\overrightarrow{AA_1} = \vec{T}_1$, $\overrightarrow{AA_2} = \vec{T}_2$. On voit que $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ et que :

$$(\vec{T}) \circ S(\Delta) = (\vec{T}_1) \circ (\vec{T}_2) \circ S(\Delta).$$

Or : $(\vec{T}_2) = S(\Delta_1) \circ S(\Delta)$ donc :

$$(\vec{T}) \circ S(\Delta) = (\vec{T}_1) \circ S(\Delta_1) \circ S(\Delta) \circ S(\Delta).$$

Soit : $(\vec{T}) \circ S(\Delta) = (\vec{T}_1) \circ S(\Delta_1) = S(\Delta_1) \circ (\vec{T}_1)$

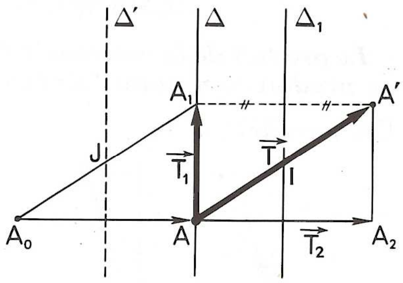


Fig. 321

Le produit de la symétrie $S(\Delta)$ ***et de la translation*** $(\vec{T})$ ***est équivalent au produit commutatif de la symétrie*** $S(\Delta_1)$ ***et de la translation*** $(\vec{T}_1)$ ***parallèle à*** Δ.

On retrouve la forme réduite d'un antidéplacement (n° 309). L'axe Δ_1 passe par le milieu I du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ joignant le point A à son transformé A' et le vecteur $\vec{T}_1$ de la translation n'est autre que la projection de $\overrightarrow{AA'}$ sur cet axe Δ_1.

2° En désignant par Δ' la droite symétrique de Δ_1 par rapport à Δ et passant par le milieu J de $\overrightarrow{A_0A_1} = \vec{T}$, on voit de même (fig. 321) que :

$$S(\Delta) \circ (\vec{T}) = S(\Delta) \circ (\vec{T}_2) \circ (\vec{T}_1) \quad \text{et} \quad (\vec{T}_2) = S(\Delta) \circ S(\Delta') \quad \text{donc :}$$

$$S(\Delta) \circ (\vec{T}) = S(\Delta) \circ S(\Delta) \circ S(\Delta') \circ (\vec{T}_1) = S(\Delta') \circ (\vec{T}_1) = (\vec{T}_1) \circ S(\Delta')$$

Le produit de la translation $(\vec{T})$ ***et de la symétrie*** $S(\Delta)$ ***est équivalent au produit commutatif de la symétrie*** $S(\Delta')$ ***et de la translation*** $(\vec{T}_1)$ ***parallèle à*** Δ'.

Comme ci-dessus l'axe Δ' passe par le milieu J du vecteur $\overrightarrow{A_0A_1}$ joignant le point A_0 à son transformé A_1 et le vecteur $\vec{T}_1$ de la translation est la projection de $\vec{T}$ sur Δ'.

Le vecteur $\overrightarrow{JI}$ étant égal à $\vec{T}_2$ on voit que le produit $S(\Delta) \circ (\vec{T})$ n'est commutatif que pour $\vec{T}_2 = \vec{0}$ c'est-à-dire si $\vec{T}$ est parallèle à Δ.

Page 213

///Vous voyez///Là, les choses sont claires////Tout est bien expliqué avec des mots et des constructions////

Observateur : Pourquoi êtes-vous allés regarder dans ces livres ?

///Parce que je veux savoir et je veux comprendre ce que représente l'antidéplacement///Je connais la formule qu'il faut utiliser qui est dans mon cahier de cours et le livre de classe et je ne savais pas que cela s'appelle antidéplacement ou symétrie glissante///Surtout en géométrie on peut faire des constructions ///Donc je suis allé regarder ///Ce sont des livres de géométrie////Je

savais que dans les anciens livres il y a des choses///C’est en faisant des recherches de cette manière sur internet et dans des livres de mathématiques qui ne sont pas des livres que le professeur nous conseil de regarder que je découvre d’autres informations sur les notions étudiées en classe ///Je connais maintenant ce que veut dire et représente un antidéplacement ou symétrie glissante/// J’ai même expliqué cela à ma copine et à d’autre élèves de ma classe /// Vous savez///certains élèves ont demandé au professeur pourquoi on a pas la définition de l’antidéplacement/// il leur nous a expliqué que c’est une composée de symétrie d’axe et de translation///C’est vrai///mais je sais maintenant que c’est plus que cela[regardé à la page 39 //[Réf : page 258 de cette recherche]Il y a beaucoup de notions mathématiques qui ne sont pas détaillées ou bien présentées dans les cours en classe/////Avec mon travail de recherche personnelle// je fais beaucoup de choses // je étudie d’exercices ///// Sur internet il y a des choses qui ne sont pas dans mon ni cahier ni dans mon livre de classe comme l’antidéplacement[388]///

Nous avons demandé à AC001 de regarder son cahier de cours. Nous avons pris des copies de son cours que nous exposons ici:

[388] Données trouvées sur internet

Similitudes

I Généralités

1) Similitude du plan

Définition : Une similitude du plan est 1 transforma° f du plan qui conserve les rapports des distances

a) Si M, N, P, Q st des pts quelconques du plan tq $M \neq N$, d'images respectives par f M', N', P', Q', on a : $\frac{PQ}{MN} = \frac{P'Q'}{M'N'}$

Rem : $M \neq N$ de $M' \neq N'$ car f est 1 transformation

$\times k$

PQ	$P'Q'$
MN	$M'N'$

b) il est équivalent de dire que f multiplie toutes les distances par 1 nb réel k strictement positif.

c) k s'appelle le rapport de la similitude.

d) Si $k = 1$, f s'appelle une isométrie car elle conserve les distances.

Mq $k = \frac{A'B'}{AB} \Leftrightarrow \exists k \times$ les distances

Démo : $\Rightarrow$

b) Soient A, B 2 pts distincts. A', B' leurs images par f.

Notons $k = \frac{A'B'}{AB}$

Quelque soient M, N avec $M \neq N$ on a :

$$\frac{AB}{MN} = \frac{A'B'}{M'N'} \quad \text{donc} \quad \frac{M'N'}{MN} = \frac{A'B'}{AB} = k \quad \text{donc} \quad M'N' = kMN$$

donc f multiplie les distances par k.

$\Leftarrow$ $\exists k > 0$ tq $M'N' = kMN$ qq soient M et N

$$P'Q' = kPQ$$

$$\text{donc} \quad \frac{P'Q'}{M'N'} = \frac{kPQ}{kMN} = \frac{PQ}{MN}$$

$ma + p = ma + c - ma$

$ma + p = c$

De m̂, on vérifie que $mb + p = d$

Rem : Soit A, B, C 3 pts distincts

$A \neq B$ et $B \neq C$

Il existe 1 unique similitude directe s qui transforme A en B et B en C.

$s(A) = B$ $\quad s(B) = C$

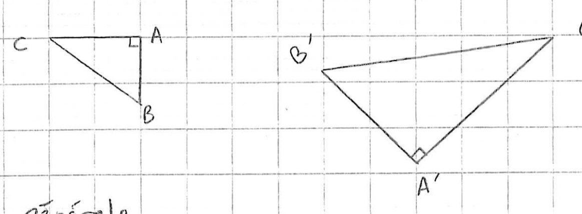
Propriétés :

Soit A, B, C 3 pts distincts

a) $\exists$ 1 unique similitude directe s de centre A qui transforme B en C.

En effet $A \neq B$ et $A \neq C$ donc $\exists$ 1 similitude directe unique tq $s(A) = A$ et $s(B) = C$

b) L'image d'1 triangle / 1 similitude directe est 1 triangle directement semblable.



$(\vec{AB}; \vec{AC}) = (\vec{A'B'}; \vec{A'C'})$

...

III Etude générale

1) Similitude et points fixes

Propriétés :

a) Une similitude qui admet 3 pts fixes A, B et C non alignés est l'identité du plan Id_P

b) Une similitude qui admet 2 pts fixes A et B est soit l'identité du plan soit la sym. axiale d'axe (AB)

II Similitudes directes

1) Définition

1 similitude directe est 1 similitude qui conserve les angles orientés de vecteurs

a) C'est à dire pr tous pts M, N, P, Q ac $M \neq N$ et $P \neq Q$ d'images M', N', P' et Q'

$(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{M'N'} ; \overrightarrow{P'Q'}) \quad [2\pi]$

b. Cela revient à dire que l'angle $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'})$ est constant, = à 1 réel θ $([2\pi])$. θ est appelé l'angle de la similitude directe.

Démo : b) Soient A et B 2 pts distincts, et A' et B' leurs image

on a : $(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{M'N'} ; \overrightarrow{A'B'}) \quad [2\pi]$

$\iff (\overrightarrow{MN} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{M'N'} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{A'B'}) \quad [2\pi]$

$\iff (\overrightarrow{MN} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{A'B'}) \quad [2\pi]$

$\iff (\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \theta \quad [2\pi]$

2) Composée de 2 similitudes directes

Propriété

La composée de 2 similitudes directes d'angles respectifs θ et θ' est 1 similitude directe dont l'angle est $\theta + \theta'$ (rapport : $k \times k'$)

La réciproque d'1 similitude directe f d'angle θ est 1 similitude directe d'angle $(-\theta)$.

[illegible] par

[illegible] g qui à M' et N'

associe [illegible]

$(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) = \theta \ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{M'N'} ; \overrightarrow{AB}) = \theta' \ [2\pi]$

$(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) + (\overrightarrow{M'N'} ; \overrightarrow{AB}) = \theta + \theta' \ [2\pi]$

$(\overrightarrow{MN} ; \vec{u}) + \cancel{(\vec{u} ; \overrightarrow{M'N'}) + (\overrightarrow{M'N'} ; \vec{u})} + (\vec{u} ; \overrightarrow{AB}) = \theta + \theta' \ [2\pi]$

$(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{AB}) = \theta + \theta' \quad [2\pi]$ → composée $g \circ f$

• Soit M et N 2 pts distincts et M' et N' leurs images par f.

M et N st donc les images de M' et N' par f^{-1}

$(\overrightarrow{MN} ; \overrightarrow{M'N'}) = \theta \ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{MN} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{M'N'}) = \theta \ [2\pi]$

d'où $(\overrightarrow{M'N'} ; \vec{u}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{MN}) = -\theta \ [2\pi]$

$(\overrightarrow{M'N'} ; \overrightarrow{MN}) = -\theta \ [2\pi]$

3) Caractérisation complexe d'1 similitude directe

Théorème : f est 1 similitude directe du plan ssi elle a 1 écriture complexe de la forme $z' = az+b$ $a\in\mathbb{C}^*$ $b\in\mathbb{C}$

Démo :

$\Leftarrow$ Soit f 1 transforma° dont l'écriture complexe est :
$z' = az+b$ $a\in\mathbb{C}^*$ $b\in\mathbb{C}$

Soit $M(m)$ $N(n)$ 2 pts, et $M'(m')$ et $N'(n')$ leurs images par f.
On doit mq $\frac{M'N'}{MN}$ est cst, et que $(\vec{MN};\vec{M'N'})$ est cst.

Regardons : $\frac{n'-m'}{n-m} = \frac{an+b-am-b}{n-m}$

$= \frac{a(n-m)}{n-m} = a$ $a\in\mathbb{C}^*$ $b\in\mathbb{C}$

donc $\frac{M'N'}{MN} = \frac{|n'-m'|}{|n-m|} = \left|\frac{n'-m'}{n-m}\right| = |a|$

et $(\vec{MN},\vec{M'N'}) = \arg\left(\frac{n'-m'}{n-m}\right) = \arg a$

donc f est 1 similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

$\Rightarrow$ Soit f 1 similitude directe d'angle θ et de rapport k
Soit $M(m)$ et $M'(m')$ son image par f.
Appelons b l'affixe de O' image de $O(0)$ par f.
Alors $\frac{z'-b}{z-0}$ $\left|\frac{z'-b}{z}\right| = \frac{O'M'}{OM} = k$

$\arg\frac{z'-b}{z} = (\vec{OM};\vec{O'M'}) = \theta$

donc $\frac{z'-b}{z} = ke^{i\theta}$ dc $\boxed{z' = ke^{i\theta}z+b}$
$z' = az+b$ avec $a = ke^{i\theta}$

$k\neq 0$ dc $a\neq 0$.

Rem : Si f a 1 écriture complexe de la forme $z' = az+b$ $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ alors f est 1 similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

<u>Théorème</u> : Soit f 1 similitude directe d'écriture complex $z' = az+b$ avec $a \neq 0$ Posons $a = ke^{i\theta}$ $k > 0$

- Si $a = 1$ alors $f : z' = z+b$ f est 1 translation
- Si $a \neq 1$ alors f admet 1 unique pt fixe (= pt invarian $\Omega(\omega)$ tq $\omega = \dfrac{b}{1-a}$ Ω étant le centre de la similitude

et l'écriture complexe de f est : $z' - \omega = a(z - \omega)$

f est la composée de l'homotétie h de centre Ω et de rapport k, et de la rota° de centre Ω et d'angle θ

De plus $f = r \circ h = h \circ r$ (r et h commutent)

(voir <u>Démo</u> ds l'exo)

<u>Rem</u> : En général, 1 homotétie et 1 rota° de centres distincts ne commutent pas.

<u>Classement des similitudes avec k et θ</u> $k > 0$ Posons $a = ke^{i\theta}$

Soit f 1 similitude de rapport k et d'angle θ.

<u>a.</u> Si $k = 1$ f est 1 isométrie. On dit aussi 1 déplacement

- Si $k = 1$ et $\theta = 0\,[2\pi]$ alors $a = 1$ et f est 1 translation
- Si $k = 1$ et $\theta \neq 0\,[2\pi]$ alors $f : (z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$

<u>b.</u> Si $k \neq 1$

- Si $k \neq 1$ et $\theta = 0\,[2\pi]$ alors $z' - \omega = k(z - \omega)$ dc f est 1 homotétie
- Si $k \neq 1$ alors $f = h \circ r = r \circ h$ avec $h = Hom(\Omega ; k)$ et $r = Rot(\Omega ; \theta)$

<u>Exo</u> : Soient A, B 2 pts. $r = Rot(A ; \frac{\pi}{2})$ $h = Hom(A ; -2)$

$h' = Hom(B ; \frac{1}{2})$ $t = t_{\vec{AC}}$ S_A : sym. centrale de centre A.

Nature et éléments caractéristiques

(a) $h \circ r$

(b) $r \circ h^{-1} \circ r$

Ⓒ $r^{-1} \circ t \circ r$

Ⓓ $h \circ t^{-1} \circ h'$ Ⓔ $S_A \circ h$

Ce sont ttes des similitudes directes

Ⓐ $h \circ r$

Son rapport est le produit des rapports $|-2| \times 1 = 2$

⚠ h est 1 similitude directe de rapport $|-2| = 2$

Son angle est la somme des angles

⚠ h est 1 similitude directe d'angle π car son rapport est<0 :

$\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$a = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc $a \neq 1$ admet 1 unique pt fixe : son centre. Or $h \circ r(A) = A$ dc le centre est A.

Ⓑ $r \circ h^{-1} \circ r$

$\begin{cases} k = 1 \times \left|-\frac{1}{2}\right| \times 1 = \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 0\ [2\pi] \end{cases}$ homotétie de rapport $\frac{1}{2}$.

centre A

Ⓒ $r^{-1} \circ t \circ r$

$\begin{cases} k = \frac{1}{1} \times 1 \times 1 = 1 \\ \theta = -\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$ C'est 1 translation

Ⓓ

$\begin{cases} k = |-2| \times 1 \times \frac{1}{2} = 1 \\ \theta = \pi + 0 + 0 = \pi \end{cases}$ Rotation d'angle π. centre ?

C'est 1 symétrie centrale ou homotétie de rapport (-1).

Ⓔ S_A est 1 sym centrale de centre A correpond à $r_2 = Rot(A ; \pi)$

$S_A \circ h$ $\begin{cases} k = 1 \times |-2| = 2 \\ \theta = \pi + \pi = 0\ [2\pi] \end{cases}$ C'est 1 homotétie de rapport 2.

<u>Démo</u> : <u>a)</u> f et g étant des transformations, $g \circ f$ est 1 transform.

Soit M, N 2 pts distincts

$M \xmapsto{f} M_1 \xmapsto{g} M'$

$N \xmapsto{f} N_1 \xmapsto{g} N'$ On a $M_1N_1 = k\, MN$

$M'N' = k'\, M_1N_1$

dc $M'N' = (k' \times k)\, MN$

$g \circ f$ multiplie dc les distances par kk' dc c'est 1 similitude de rapport kk'.

<u>b)</u> $M \xmapsto{f} M'$

$N \xmapsto{f} N'$ On a $M'N' = k\, MN$

$M = f^{-1}(M')$ $MN = \dfrac{1}{k}\, M'N'$

$N = f^{-1}(N')$ (M et N 2pts du plan distincts)

donc f^{-1} est 1 similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.

<u>Rem</u>: ds la suite, le plan complexe est muni d'1 repère orthonorm $(O; \vec{u}, \vec{v})$

<u>Ex</u>: Soit $A(1)$

Donner les écritures complexes de:

$r = \text{rot}(A; \frac{\pi}{2})$ $h = \text{hom}(A; 2)$ S = sym axiale d'axe (Ox)

puis $r \circ z$ et $h \circ S$

Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$

• $(z' - z_A) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ soit $r : (z' - 1) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 1)$

$z' = iz - i + 1$

• $(z' - z_A) = 2(z - z_A)$ $z' - 1 = 2(z - 1)$ $z' = 2z - 1$

• $z' = \bar{z}$

$h \circ r$: $M(z) \xmapsto{r} M_1(z_1) \xmapsto{h} M'(z')$

$z_1 = iz - i + 1$

$z' = 2z_1 - 1 = 2(iz - i + 1) - 1$

donc $h \circ r$: $z' = 2iz - 2i + 1$

hos : $M(z) \xmapsto{s} M_1(z_1) \xmapsto{h} M'(z')$

$z_1 = \bar{z}$

$z' = 2z_1 - 1$

hos : $z' = 2\bar{z} - 1$

hor : $z' = 2iz - 2i + 1$

hos : $z' = 2\bar{z} - 1$

<u>Rem</u> : On montrera d'1 manière + générale que les transforma° d'écritures complexes : $z' = az + b$

ou $z' = a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

sont des similitudes et réciproquet qu'1 similitude a 1 écriture de cette forme.

<u>3) Conservation des angles géométriques</u>

Soient A, B, C 3 pts non alignés et A', B', C' leurs images / 1 similitude f.

<u>Propriété</u> : <u>a)</u> A'B'C' est 1 triangle càd que A', B' et C' ne st pas alignés.

<u>b)</u> Les triangles ABC et A'B'C' st semblables dc les angles géométriques st conservés $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ etc.

<u>Démo</u> : <u>lemme</u> : pour ∀ pt M, A et B · $AM + MB \geqslant AB$

· $M \in [AB] \Leftrightarrow AM + MB = AB$

<u>a)</u> ABC est 1 Δ donc : $AB + AC > BC$

donc $kAB + kAC > kBC$ si k est le rapport de f

$A'B' + A'C' > B'C'$ donc A'B'C' est 1 Δ

<u>b)</u> $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$ donc les triangles ABC et A'B'C' st semblables dc ils ont les m̂ angles correspondants.

4.

Ex : Soit f : $z' = az + b$ Notons $a = ke^{i\theta}$ $k>0$

a) Mq si $a \neq 1$, alors f admet 1 unique pt fixe $\Omega(\omega)$

b) Mq $z' - \omega = a(z - \omega)$

c) Mq $f = h \circ r$ et $f = r \circ h$

avec $r = rot(\Omega ; \theta)$

$h = hom(\Omega ; k)$

a) $a \neq 1$.

Soit $\Omega(\omega)$ tq $\omega = a\omega + b$ $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$

on a dc $\omega - a\omega = b$

$\omega(1-a) = b$

Pour diviser par $1-a$, il faut que $a \neq 1$:

$\omega = \frac{b}{1-a}$ $\Rightarrow$ ω est unique

f admet 1 unique pt fixe $\Omega(\omega)$ tq $\omega = \frac{b}{1-a}$

b) $z' = az + b$

$\omega = a\omega + b$ $a \in \mathbb{C} - \{0 ; 1\}$. $b \in \mathbb{C}$

$(z' - \omega) = az - a\omega + b - b$

$(z' - \omega) = a(z - \omega)$

il faut d'abord exprimer séparé^t k et r

c) Soit r la rota° de centre Ω et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$

r : $z_1' - \omega = e^{i\theta}(z_1 - \omega)$ $z_1' = e^{i\theta}(z_1 - \omega) + \omega$

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k h : $(z' - \omega) = k(z - \omega)$

• $h \circ r$: $z' - \omega = k(z_1' - \omega)$

$z' - \omega = k\left[(e^{i\theta} z_1 - e^{i\theta}\omega) + \omega\right] - k\omega$

$z' - \omega = ke^{i\theta} z_1 - ke^{i\theta}\omega + k\omega - k\omega$

$z' - \omega = ke^{i\theta}(z_1 - \omega)$ or $a = ke^{i\theta}$

$z' - \omega = a(z_1 - \omega)$

or cette écriture est l'écriture complexe de f de $f = h \circ r$

- $z_1' - \omega = k(z_1 - \omega)$ $\qquad$ $z_1' = k(z_1 - \omega) + \omega$

$r\circ h$: $z' - \omega = e^{i\theta}(z_1' - \omega)$

$z' - \omega = e^{i\theta}\left[(kz_1 - k\omega) + \omega\right] - e^{i\theta}\omega$

$z' - \omega = ke^{i\theta} z_1 - ke^{i\theta}\omega + e^{i\theta}\omega - e^{i\theta}\omega$

$z' - \omega = ke^{i\theta}(z_1 - \omega)$

$\underline{z' - \omega = a(z_1 - \omega)}$ or cette écriture est l'écriture complexe de f de $f = r\circ h$

7

Démo : a) Soit s 1 similitude tq s(A) = A
s(B) = B
s(C) = C   A, B, C non alignés

Soit $M \in \mathcal{P}$ et $M' = s(M)$
le rapport de s est $\frac{AB}{AB} = 1$
dc $AM' = AM$
$BM' = BM$
$CM' = CM$ dc A, B, C appartiennent si $M \neq M'$ à la médiatrice de $[MM']$.
c'est impossible car ils ne st pas alignés.
donc $M = M'$ donc s est l'identité du plan. $s = Id_{\mathcal{P}}$

b) Soit s 1 similitude tq s(A) = A   s(B) = B   et $A \neq B$.
s est encore 1 isométrie car son rapport est $k = \frac{AB}{AB} = 1$

Supposons qu'il $\exists$ $C \notin (AB)$ tq $C' \neq C$ avec $C' = s(C)$
on a $AC = AC'$ dc A $\in$ à la médiatrice de $[CC']$
Soit σ la sym d'axe (AB)
$\sigma(A) = A$ $\sigma(B) = B$ $\sigma(C') = C$
$\sigma \circ s\ (A) = A$
$\sigma \circ s\ (B) = B$
$\sigma \circ s\ (C) = \sigma(C') = C$ dc $\sigma \circ s$ est 1 similitude qui a 3 pts fixes non alignés dc c'est $Id_{\mathcal{P}}$.

$\sigma \circ s = Id_{\mathcal{P}}$
Dc $\underbrace{\sigma^{-1} \circ \sigma}_{Id_{\mathcal{P}}} \circ s = \sigma^{-1}$ or $\sigma^{-1} = \sigma$
dc $s = \sigma$
donc s est la symétrie d'axe (AB).

Sinon, si $C \notin (AB)$ et $C' = s(C)$ avec $C' = C$ dc s a 3 pts fixes
donc $s = Id_{\mathcal{P}}$

2) Similitude indirecte

Théorème: Toute similitude non-directe f peut s'écrire sous la forme $\sigma \circ s$ où σ est 1 sim. directe et s est 1 sym. axiale.

Rem: Une sim. non-directe est 1 sim. qui transforme au ⊖ 1 angle orienté en son opposé.

Démo: Soit f 1 sim. non-directe et A, B 2 pts distincts du plan d'images A' et B' / f. $f(A) = A'$ $f(B) = B'$
$A \neq B$ dc $A' \neq B'$ car f est 1 transforma° dc $\exists$ 1 unique sim. directe σ tq $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$
Considérons $\sigma^{-1} \circ f$: $\sigma^{-1} \circ f(A) = \sigma^{-1}(A') = A$
$\sigma^{-1} \circ f(B) = \sigma^{-1}(B') = B$
$\sigma^{-1} \circ f$ est dc 1 similitude qui admet 2 pts fixes A et B distincts.
Donc $\sigma^{-1} \circ f$ est soit l'$Id_{\mathcal{P}}$ soit la sym. d'axe (AB)
or $\sigma^{-1} \circ f$ est 1 similitude non-directe car au ⊖ 1 angle orienté est transformé en son opposé / f et dc aussi / $\sigma^{-1} \circ f$ (car σ^{-1} conserve les angles orientés) dc
$\sigma^{-1} \circ f \neq Id_{\mathcal{P}}$ car $Id_{\mathcal{P}}$ est directe.
donc $\sigma^{-1} \circ f = s$ avec s sym axiale d'axe (AB).
donc $\underbrace{\sigma \circ \sigma^{-1}}_{Id} \circ f = \sigma \circ s$ càd $\sigma \circ s = f$ → f s'écrit ē la compo. d'1 sim directe et d'1 sym axiale

Rem: on a choisit 2 pts A et B, et on peut ainsi choisir l'axe de la sym. arbitrairement

Propriété: a. Toute similitude non-directe est 1 sim. indirecte
b. Toute similitude est soit directe, soit indirecte.

Démo: a) Soit f non directe
f s'écrit $f = \sigma \circ s$ avec σ sim. directe et s sym. axiale
Or s transforme les angles orientés en leurs opposés
dc f est aussi indirecte.

Théorème: Écriture complexe d'1 similitude indirecte.

a. Ds le plan complexe muni d'1 repère orthonor. $(O;\vec{u};\vec{v})$, une sim. indirecte a une écriture complexe de la forme:

$$z' = a\bar{z}+b \qquad a\in\mathbb{C}^* \quad b\in\mathbb{C}$$

b. Réciproquement, tte transforma° ayant 1 écriture complexe de la forme $z' = a\bar{z}+b$ est 1 sim. indirecte $a\in\mathbb{C}^*$ $b\in\mathbb{C}$.

Démo: **a)** Soit f indirecte et $O(0)$, $A(1)$

D'après le théorème précédent et sa remarque judicieuse,

f s'écrit $f=\sigma\circ s_{(OA)}$ $\quad\sigma$ sim. directe

Dc $\exists\, a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ tq σ a pr écriture complexe

$$z' = az+b$$

or $s_{(OA)}: z'=\bar{z}$ donc $f=\sigma\circ s$ a pr écriture : $z'=a\bar{z}+b$

$a\in\mathbb{C}^*$ $b\in\mathbb{C}$

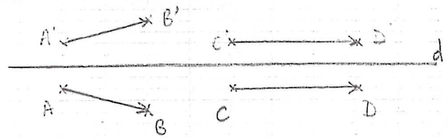
b) Réciproqt, si $f: z'=a\bar{z}+b$

Notons $s: z'=\bar{z}$ $\quad s$ est la sym. d'axe (Ox)

$\sigma: z'=az+b$ $\quad a\in\mathbb{C}^*$ $\quad b\in\mathbb{C}$ $\quad\sigma$ est 1 sim. directe

et $f=\sigma\circ s$ donc f est 1 sim. indirecte.

⚠ **Remarque:** On ne peut pas parler d'angle d'1 similitude indirecte



$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) \neq (\overrightarrow{CD};\overrightarrow{C'D'})$

Rapport d'1 similitude indirecte

Si f a une écriture complexe de la forme $z'=a\bar{z}+b$ alors le rapport de f est $|a|$

Démo: Si $\sigma: z'=az+b$ $\quad s: z'=\bar{z}$ $\quad$ alors $f=\sigma\circ s$

or s a pour rapport 1 et σ a pr rap. $|a|$, donc f a pr rap. $|a|$.

Nous proposons ici un type de résolution de la question 2 de l'exercice proposé par le prof d'AC001 avec le contenu de son cours

On a la distance $AB = |z_B - z_A| = |-1+2i| = \sqrt{1+5} = \sqrt{5}$, et la distance $A'C = |z_c - z_A| = |-1+2i| = \sqrt{1+5} = \sqrt{5}$.On peut établir le rapport $k = \frac{A'C}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$. On peut alors conclure que f est une isométrie. Or f est une similitude indirecte car c'est la composée d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et de la symétrie s d'axe (AB).

Autrement :

Tout point $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par la transformation f . $M \xrightarrow{s} M_1 \xrightarrow{t} M'$. La symétrie d'axe (AB) admet les points $A..et..B$ comme des points invariants, et son écriture complexe est de la forme $z' = m\bar{z} + p..$,avec $m \in C*$ et $p \in C$ car c'est une similitude indirecte (elle inverse les angles orientés). Avec la formule des similitudes indirectes de rapport 1, on peut déterminer les coefficients $m..et..p$ qui sont des réels fixes.

On a $\begin{cases} z_A = m\overline{z_A} + p \\ z_{\mathbf{B}} = m\overline{z_B} + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = z_A - m\overline{z}_A \\ p = z_B - m\overline{z_B} \end{cases}$; ce qui implique que $z_A - m\overline{z_A} = z_B - m\overline{z_B}$.

Donc $m\overline{z_A} - m\overline{z_B} = z_A - z_B$ .On a $m = \frac{z_A - z_B}{\overline{z_A} - \overline{z_B}} = \frac{2i+1-4i}{-2i-(-1-4i)} = \frac{1-2i}{1+2i}$

$m = \frac{1-2i}{1+2i}$ en utilisant l'expression conjuguée du dénominateur on a $m = \frac{1-2i}{1+2i} = \frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+4)} = \frac{1-4i-4}{5} = \frac{-3-4i}{5}$

Donc $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + p$, or $p = z_A - m\overline{z_A}$, donc $p = 2i - \left(\frac{-3-4i}{5}\right) \times (-2i)$

$p = 2i + \left(\frac{+3+4i}{5}\right) \times (-2i) = \frac{10i - 6i + 8}{5} = \frac{4i+8}{5}$. D'autre part $z' = z_1 + p'$ (translation $\overrightarrow{BC}$)

$z_C = z_B + p'$ car $S(B) = B$ et $t(B) = C$, donc $z_C - z_B = p' = 5 - 2i + 1 - 4i = 6 - 2i$

Ainsi $f : z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{4i+8}{5} + 6 - 2i$ d'où

$$f : z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{4i+8}{5} + \frac{30-10i}{5}$$

$f : z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$. La transformation f est alors la composée d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et d'une symétrie s d'axe (AB), d'autre part le rapport de la transformation f est

$k = \left|\frac{-3}{5} - \frac{4}{5}i\right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$. Donc la transformation f est une isométrie. Ainsi f est une similitude indirecte de rapport 1

Avec son cahier de cours AC001 peut travailler de cette façon la question 2/ et son travail s'arrêterait à ce niveau parce que ce n'est pas spécifié dans son cours que la similitude indirecte de rapport 1 est un antidéplacement, elle ne peut pas savoir qu'il aurait fallu utiliser la formule $z' = a\bar{z} + b$ qui est bien présente dans le livre et son cahier de cours. C'est pour de telles raisons que nous postulons donc que la connaissance du mot générique « antidéplacement », qui veut dire la même chose « que toute similitude indirecte de rapport 1 » lui aurait permis de réussir toute seule cette question. Mais si la question était formulée comme suit: Démontrer que la transformation f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = 1$ et que $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$; nous pensons aussi que AC001 aurait réagi autrement car les données pouvant lui permettre de répondre à la question sont dans son cahier cours.

3/ Les bulletins scolaires d'AC001

Nous présentons ici les bulletins scolaires d'AC001 de la classe de 2^{nd} Générale jusque en classe de terminale et son relevé de note au baccalauréat session de juin 2001 et enfin ses relevés de note en classes préparatoires et à l'école d'ingénieur de mines de Sainte Etienne.

RELEVE DE NOTES DU BREVET

INSPECTION ACADEMIQUE DES BOUCHES DU RHONE
SESSION Juin 2004

RELEVE DE NOTES

DIPLOME NATIONAL DU BREVET

AC001

Né(e)
A MONTPELLIER (034)

5 RUE

Numéro Inscription

13090 AIX-EN-PROVENCE

Etablissement CLG JAS DE BOUFFAN, AIX EN PROVENCE (0130007M)
Série COLLEGE

381

EPREUVES	POINTS
EPREUVES EVALUEES PAR EXAMEN (EP.OBLIGAT.)	
FRANCAIS	28.0 / 40
DICTEE-QUESTIONS	(19.0 / 25)
REDACTION	(9.0 / 15)
MATHEMATIQUES	39.0 / 40
HISTOIRE-GEOGRAPHIE-ED.CIVIQUE	30.0 / 40
TOTAL	97.0 / 120
MOYENNE / 20	16.16
EPREUVES EVALUEES PAR CONTROL.EN FORMATION	
FRANCAIS	17.0 / 20
MATHEMATIQUES	18.0 / 20
LANGUE VIVANTE 1: ALLEMAND	16.0 / 20
SC. DE LA VIE ET DE LA TERRE	17.0 / 20
PHYSIQUE-CHIMIE	16.0 / 20
EDUCATION PHYSIQUE ET SPORTIVE	13.0 / 20
ARTS PLASTIQUES	15.0 / 20
EDUCATION MUSICALE	18.0 / 20
TECHNOLOGIE	16.0 / 20
LANGUE VIVANTE 2: ANGLAIS	19.0 / 20
OPTION FACULTATIVE: LATIN	9.0
TOTAL	174.0 / 200
MOYENNE / 20	17.40
TOTAL GENERAL	271.0 / 320
MOYENNE GENERALE / 20	16.93
DECISION DU JURY: ADMIS	

BULLETIN - Trimestre 1
Année 2004 / 2005
2nde 16 (effectif : 35)

Lycée PAUL CEZANNE
19 Avenue Fontenaille
13625 AIX EN PCE CEDEX 1
Tél : 0442171400
Mail : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Web : www.lycezanne13.org

AC 001
Né le :
Options : ALL1 , AGL2 , ISING, ALL9

Disciplines	Moyennes EL	CL	-	+	Appréciations
ALLEMAND 1 M. SIGRIST	15,5	12,7	5,5	18	Très bon trimestre ,participation active à l'oral
ANGLAIS 2	13	11,3	6,8	14,7	Elève vive et très volontaire. Du bon travail à l'écrit et à l'oral. Charlotte doit continuer dans ce sens.
ARABE 3					
ARTS PLA FAC					
CAV FACULTATIF					
EPS	NN				Des difficultés, mais un travail sérieux et appliqué.
FRANÇAIS	14	10,8	6	15,5	Elève très sérieuse.Trimestre tout à fait honorable. Continuez à progresser encore !
GREC					
HISTOIRE GÉOGR.	11	10,8	6,5	15	Une bonne progression. Bon trimestre.
ISING	17	15,2	9	18	Très bon trimestre.
ITALIEN 2					
MATHEMATIQUES	12,5	9,8	4	18	Résultats satisfaisants.Elève sérieuse et appliquée.
PHYSIQUE CHIMIE	13	11,3	5,5	16,4	Un peu irrégulière, mais en étant toujours au dessus de la moyenne. L'ensemble est toutefois plus que satisfaisant. Devrait confirmer au deuxième trimestre.
SCIENCES DE LA&.	15,5	12,5	6	18	C'est bien, élève motivée.
SES					
Vie scolaire **CPE**	Absences : 0 (1/2 J) Retards : 1				

Appréciation du chef d'établissement

Bon trimestre.Continuez ainsi.

LYCÉE Paul-CÉZANNE
Av. J. et M. Fontenaille
13625 AIX-en-PROVENCE Cedex 1

BULLETIN - Trimestre 2
Année 2004 / 2005
2nde 16 (effectif : 35)

Lycée PAUL CEZANNE
19 Avenue Fontenaille
13625 AIX EN PCE CEDEX 1
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Site : www.lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le :
Redoublant : N
Options : ALL1 , AGL2 , ISING, ALL9

Disciplines	Moyennes				Appréciations
	El.	Cl.	-	+	
ALLEMAND EURO	16	13,3	7,5	18	Très bon trimestre , travail sérieux
ANGLAIS 2	13,5	10,1	6	14	Du bon travail. Par contre, il ne faut pas hésiter à prendre plus régulièrement la parole en cours.
EPS	9,5	11,6	7	17,5	Note en BB= 9.5 Appréciation en danse = Travail correct, et participation intéressante, il faut faire plus d'effort pour être en liaison avec le thème chorégraphique.
FRANÇAIS	14	10,6	6	14	Excellents résultats, très bonne élève qui ^participe aussi à l'oral.
HISTOIRE GÉOGRAPHIE.	12	10,8	6	19	Les résultats sont satisfaisants mais Anne-Charlotte à de nouveau tendance à se disperser en cours.
ISING	17,5	14,9	10	19	Travail très sérieux.Très bon trimestre.
MATHEMATIQUES	15,5	10,6	1,5	18,5	Bon trimestre.Travail sérieux et régulier.
PHYSIQUE CHIMIE	14,5	13,1	5,8	18,6	Très bon trimestre. Elève sérieuse et motivée. Continuez
SCIENCES DE LA VIE ET DE .	14,5	11,5	3,5	17	C'est bien.
VIE SCOLAIRE CPE	Absences : 4 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0				

Appréciation générale

Bon travail.Félicitations du Conseil de Classe.

BULLETIN - Trimestre 3
Année 2004 / 2005
2nde 16 (effectif : 35)

Lycée PAUL CEZANNE
19 Avenue Fontenaille
13625 AIX EN PCE CEDEX 1
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Site : www.lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le :
Redoublant : N
Options : ALL1 , AGL2 , ISING, ALL9

Disciplines	Moyennes				Appréciations
	El.	Cl.	-	+	
ALLEMAND EURO	17	13,1	6	18,5	Excellente élève aussi bien à l'écrit qu'à l'oral
ANGLAIS 2	15	11,9	7	16,5	Anne-Charlotte s'est très bien investie en cours ce trimestre et a fait preuve d'intelligence et de spontanéité, ce qui a porté ses fruits. Bravo!
EPS	12,5	15,2	11,5	20	Elève sérieuse, travail intéressant.
FRANÇAIS	13	11,6	8	15	Travail et résultats toujours satisfaisants. BOn niveau de fin de seconde.
HISTOIRE GÉOGRAPHIE.	14	11,3	7	17	Bon trimestre
ISING	NN				Pas dévaluation chiffrée, ce trimestre, pour cause de mini-projet.Travail très sérieux.Très bonne participation.
MATHEMATIQUES	15	9,8	1,5	19,5	Très bon trimestre .
PHYSIQUE CHIMIE	18,2	11,6	3	18,2	Meilleure moyenne de la classe ce trimestre. Excellents résultats. N'a cessé de progresser tout au long de l'année pour en arriver là. Et c'est mérité. Elève sérieuse, intéressée et motivée. Félicitations.
SCIENCES DE LA VIE ET DE .	13	12,2	3,5	19	C'est un ensemble tout à fait satisfaisant sur l'année.
VIE SCOLAIRE CPE	Absences : 0 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 1				

Appréciation générale

Admise en 1ère S Euro. Félicitations du Conseil de Classe.

LYCEE Paul-CEZANNE
Av. J. et M. Fontenaille
13625 AIX-en-PROVENCE Cedex 1

BULLETIN - Trimestre 2
Année 2005 / 2006
1ère S11 (effectif : 36)

Lycée Paul Cézanne
Av. J et M FONTENAILLE
13100 Aix en Provence
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Site : lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le :
Redoublant : N
Options : ALL1 , AGL2 , ALL9
Etab. préc. : 0130002G

	Disciplines	Moyennes El.	Cl.	-	+	Appréciation
DISCIPLINES SCIENTIFIQUES	**MATHEMATIQUES**	15,5	9,1	1	16	très bon trimestre.Travail très sérieux.
	PHYSIQUE CHIMIE	16,5	9,3	3,5	16,5	Très bon trimestre.
	SCIENCES DE LA VIE ET DE .	14,5	10,8	4,5	15,5	Résultats satisfaisants. Elève sérieuse.
DISCIPLINES LITTÉRAIRES	**FRANÇAIS**	12	10,6	5	16	Toujours beaucoup de sérieux et d'intérêt pour la matière . Ensemble convenable .
	HIST GÉO EURO	16	12,1	7	16	Très bonne élève. Continue!
	ECJS	13,5	10,6	6,5	16,5	Elève très sérieuse et appliquée. Des résultats réguliers, c'est un très bon trimestre !
LV1	**ALLEMAND EURO**	17	13,9	10,5	17	Ensemble très satisfaisant. Excellente participation.
LV2	**ANGLAIS 2**	16,6	11,9	6,1	18,7	Elève motivée. Très bon trimestre.
EPS	**EPS**	13	13,3	5,5	19,5	Toujours un travail sérieux, poursuivez vos efforts.
RAPPORT DE STAGE 2NDE	**RAPPORT DE STAGE**					
Vie Scolaire CPE		Absences : 2 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0				

Appréciation générale

Très bon ensemble. Félicitations du conseil de classe.

Le Chef d'Etablissemen

LYCÉE PAUL CÉZANNE
Av. J. et M. Fontenaille
13625 AIX-en-PROVENCE Cedex

BULLETIN - Trimestre 3
Année 2005 / 2006
1ère S11 (effectif : 36)

Lycée Paul Cézanne
Av. J et M FONTENAILLE
13100 Aix en Provence
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Site : lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le :
Redoublant : N
Options : ALL1 , AGL2 , ALL9
Etab. préc. : 0130002G

	Disciplines	Moyennes				Appréciation
		El.	Cl.	-	+	
DISCIPLINES SCIENTIFIQUES	MATHEMATIQUES	13,5	8,7	3,5	18,5	Très bon trimestre.Travail très sérieux
		15,5	9,1	1	16	
		17,5	8,7	2	19,7	
	PHYSIQUE CHIMIE	13,2	9,6	3,5	17,2	Très bon travail.
		16,5	9,3	3,5	16,5	
		15,2	11,9	6,4	19,8	
	SCIENCES DE LA VIE ET DE .	13	11,1	7	16,5	Bons résultats. Elève sérieuse.
		14,5	10,8	4,5	15,5	
		15,5	9,9	3,5	17	
DISCIPLINES LITTÉRAIRES	FRANÇAIS	14,5	10,4	6	16	Du dynamime à l'oral, de la réflexion à l'écrit . Une très bonne année scolaire !
		12	10,6	5	16	
		15,5	10,3	4	16,5	
	HIST GÉO EURO	18,1	12,6	8,4	18,1	Excellente participation à l'oral. L'écrit a été un peu moins bien que d'habitude.
		16	12,1	7	16	
		15	12,2	5	15,5	
	ECJS					Excellent trimestre !! Comme durant toute l'année scolaire, Anne-Charlotte a montré sa pertinence de réflexion et de grandes capacités de travail. C'est un bilan extrêmement satisfaisant ! Félicitations !!
		13,5	10,6	6,5	16,5	
		15	9,1	1	15,5	
LV1	ALLEMAND EURO	15	13,5	10,5	16	Excellent travail tout au long de l'année.
		17	13,9	10,5	17	
		18	13,9	10,5	18	
LV2	ANGLAIS 2	16	12,2	9,2	17,7	Très bon niveau linguistique. Bonne participation en cours.
		16,6	11,9	6,1	18,7	
		16,4	11,8	7	18,8	
EPS	EPS	13,5	13,1	7	18	Des difficultés mais élève sérieuse.
		13	13,3	5,5	19,5	
		7	10,2	6,5	14,5	
Vie Scolaire CPE		Absences : 2 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0				Dont 2 absences avec Certificat Médical.

Appréciation générale

Bon ensemble. Admise en T scientifique EURO. Félicitations du Conseil de classe.

Le Chef d'Etablissement

LYCEE Paul-CEZANNE
Av. J. et M. Fontenaille
13625 AIX-en-PROVENCE Cedex 1

BULLETIN - Trimestre
Année 2005 / 2006
1ère S11 (effectif : 36)

Lycée Paul Cézanne
Av. J et M FONTENAILLE
13100 Aix en Provence
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Site : lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le
Redoublant : N
Options : ALL1 , AGL2 , ALL9

	Disciplines	Moyennes El.	Cl.	-	+	Appréciation
DISCIPLINES SCIENTIFIQUES	**MATHEMATIQUES**	13,5	8,7	3,5	18,5	Bon trimestre.Travail très sérieux.
	PHYSIQUE CHIMIE	13,2	9,6	3,5	17,2	Bon trimestre, travail sérieux.
	SCIENCES DE LA VIE ET DE . (pp)	13	11,1	7	16,5	Résultats staisfaisants. Des progrès sont encore possibles.
DISCIPLINES LITTÉRAIRES	**FRANÇAIS**	14,5	10,4	6	16	Elève très sérieuse et très active en classe . Un bon trimestre .
	HISTOIRE GÉOGRAPHIE.	13,5	10,1	5,5	14,5	Excellente élève, tout à fait pertinente, à l'écrit comme à l'oral. Un trimestre très satisfaisant.
	HIST GÉO EURO	18,1	12,6	8,4	18,1	Très bonne élève qui comprend vite et participe très activement à l'oral. Bravo!
LV1	**ALLEMAND EURO**	15	13,5	10,5	16	Excellent travail. Très bonne participation . Continuez ainsi !
LV2	**ANGLAIS 2**	16	12,2	9,2	17,7	Travail sérieux et régulier. Bon niveau.
EPS	**EPS**	13,5	13,1	7	18	Elève volontaire,très investie dans la construction de son travail, c'est bien continuez.
RAPPORT DE STAGE 2NDE	**RAPPORT DE STAGE**	NN				Rapport de stage : Très bon rapport à la présentation sopignée et détaillée, surtout la dernière partie concernant l'opinion personnelle du stagiaire.
Vie Scolaire CPE		Absences : 0 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 1				

Appréciation générale

Elève très sérieuse. Très bon ensemble. Félicitations du Conseil de classe.

Le Chef d'Etablissemen

LYCEE Paul CEZANNE
Av. J. et M. Fontenaille
13625 AIX-en-PROVENCE Cedex 1

BULLETIN - trimestre 1
Année 2006-2007
TleS 9 (effectif : 35)

Lycée Paul Cézanne
19 AV. J et M FONTENAILLE
BP 10005
13181 AIX-EN-PROVENCE cdx5
Tél : 04 42 17 14 00
Site : lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le . ..
Redoublant : N
Options : ALL1, AGL2, MATHS, ALL9
Etab. préc. : 0130002G

	Disciplines	Moyennes				Appréciation
		El.	Cl.	-	+	
DISCIPLINES SCIENTIFIQUES	MATHÉMATIQUES	15,5	9,3	3	18,5	Très bon trimestre.
	PHYSIQUE CHIMIE	15,5	11,4	3	17,5	DSn°1 : 11 DS2 : 16 DS3 : 18,5 TP : 17,5, Très bon trimestre. Sérieuse e appliquée.
	SCIENCES DE LA VIE ET DE .	10,8	10,8	5	18,6	Passable, sérieuse devrait progresser
DISCIPLINES LITTÉRAIRES	PHILOSOPHIE	13,5	10,1	0	15	des efforts , continuez!
	HISTOIRE GÉOGRAPHIE.	15,3	12,6	8	16	Très bon ensemble. Anne-Charlotte fait montre d'une envie de comprendr très stimulante.
	HIST GÉO EURO	16	14,3	9	17	Bon travail et bonne attitude en classe.
LV1	ALLEMAND EURO	17,1	14,4	10,7	17,4	élève très sérieuse,régulière,volontaire: un fort bon timestre: continuez d cette voie!(Oral :A)
LV2	ANGLAIS 2	12,5	12,7	10,5	15,5	Des progrès
EPS	EPS	NN				Un engagement dans le travail exemplaire.Anne Charlotte a tout mis en oeuvre pour progresser.Le niveau atteint est fort satisfaisant.
SPÉCIALITÉ	MATHS SPÉCIALITÉ	15,5	11,6	6	19,5	Très bon trimestre.
Vie Scolaire CPE		Absences : 1 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 1				

Appréciation générale

Très bon trimestre, autant à l'écrit qu'à l'oral. Elève très agréable. Félicitations.

Le Chef d'Etablisser

BULLETIN - trimestre 2
Année 2006-2007
TleS 9 (effectif : 35)

Lycée Paul Cézanne
19 AV. J et M FONTENAILLE
BP 10005
13181 AIX-EN-PROVENCE cdx5
Tél : 04 42 17 14 00
Site : lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le :
Redoublant : N
Options : ALL1, AGL2, MATHS, ALL9
Etab. préc. : 0130002G

	Disciplines	Moyennes				Appréciation
		El.	Cl.	-	+	
DISCIPLINES SCIENTIFIQUES	MATHÉMATIQUES	15,5	9,3	3	18,5	Très bon trimestre. Elève vive et intéressée ,qui participe activement et agréablement au déroulement du cours.
		17	10	3	18	
	PHYSIOUF CHIMIE E	15,5	11,4	3	17,5	DS4 : 17,5 DS5 : 13,5 DS6 : 16,5 TP : 19, Très bon trimestre. Très sérieuse.
		16,5	11,2	2	17,5	
	SCIENCES DE LA VIE ET DE .	11	10,8	5	18,6	Très bon trimestre
		18	12,8	5,5	18	
DISCIPLINES LITTÉRAIRES	PHILOSOPHIE	13,5	10,1	0	15	oral:18 un petit fléchissement qui devrait pouvoir se corriger!
		9,3	9,7	2,7	14,3	
	HISTOIRE GÉOGRAPHIE.	15,3	12,6	8	16	Bon ensemble. Anne-Charlotte a envie de réussir et ça se voit! Continue comme ça.
		14,3	11,8	7,5	15,6	
	HIST GÉO EURO	16	14,3	9	17	Très bon trimestre.
		16	13,4	9,3	16	
LV1	ALLEMAND EURO	17,1	14,4	10,7	17,4	Excellente élève,àl'écrit,comme à l'Oral .Motivée et très intéressée par l'Allemand .(Oral : B+)
		17,5	15	7,6	18	
LV2	ANGLAIS 2	12,5	12,7	10,5	15,5	Bien
		14,5	14	12	17	
EPS	EPS	NN				c'est encore une participation active et soutenue qui permet un niveau satisfaisant dans l'activité pratiquée.
		NN				
SPÉCIALITÉ	MATHS SPÉCIALITÉ	15,5	11,6	6	19,5	Très bon trimestre.
		17,5	10,6	2,5	17,5	
Vie Scolaire CPE		Absences : 6 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0				

Appréciation générale

Excellent trimestre. Félicitations du Conseil de Classe.

Le Chef d'Etablissement

LYCÉE P. CÉZANNE Le Proviseur Adjoint Aix-en-Provence

BULLETIN - trimestre 3
Année 2006-2007
TleS 9 (effectif : 35)

Lycée Paul Cézanne
19 AV. J et M FONTENAILLE
BP 10005
13181 AIX-EN-PROVENCE cdx5
Tél : 04 42 17 14 00
Site : lycezanne13.org

AC 001
Né(e) le .
Redoublant : N
Options : ALL1, AGL2, MATHS, ALL9
Etab. préc. : 0130002G

	Disciplines	Moyennes El.	Moyennes Cl.	Moyennes -	Moyennes +	Appréciation
DISCIPLINES SCIENTIFIQUES	MATHÉMATIQUES	15,5	9,3	3	18,5	Excellent trimestre. Elève dynamique et agéable.
		17	10	3	18	
		18	10	1,5	18,5	
	PHYSIQUE CHIMIE	15,5	11,4	3	17,5	DS7 : 19,5 BBlanc : 17, Excellente année - Très sérieuse.
		16,5	11,2	2	17,5	
		18	11	1,5	18	
	SCIENCES DE LA VIE ET DE .	11	10,8	5	18,6	passable malgré la baisse
		18	12,8	5,5	18	
		10,5	9	2	15	
DISCIPLINES LITTÉRAIRES	PHILOSOPHIE	13,5	10,1	0	15	oral:14 En nets progrès, le niveau est bon!
		9,3	9,7	2,7	14,3	
		13,5	10,1	5,2	14	
	HISTOIRE GÉOGRAPHIE.	15,3	12,6	8	16	Très bon ensemble.
		14,3	11,8	7,5	15,6	
		14,8	11,4	2,7	18	
	HIST GÉO EURO	16	14,3	9	17	C'est très bien.
		16	13,5	9,3	16	
		15	11,8	8	15	
LV1	ALLEMAND EURO	17,1	14,4	10,7	17,4	excellente année .toujours sérieuse et motivée .
		17,5	15	7,6	18	
		16,6	13,9	6,4	17,5	
LV2	ANGLAIS 2	12,5	12,7	10,5	15,5	Très bien
		14,5	14	12	17	
		16	13,5	8	18	
EPS	EPS	NN				Le niveau atteint dans l'activité pratiquée est moyen.Participation sérieuse cependant.
		NN				
		NN				
SPÉCIALITÉ	MATHS SPÉCIALITÉ	15,5	11,6	6	19,5	Excellent trimestre.
		17,5	10,6	2,5	17,5	
		18,5	10,3	4,5	18,5	
Vie Scolaire CPE		Absences : 0 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 2				

Appréciation générale

Travail et résultats sont de qualité.

Le Chef d'Etablissement

Le Proviseur Adjoint

Aix-en-Provence

RELEVE DE NOTES AU BAC

Académie : AIX-MARSEILLE

BACCALAUREAT GENERAL

SESSION : Juin 2007 SERIE: S
SPECIALITE : SCIENCES DE LA VIE ET DE LA TE
Ens.specia. MATHEMATIQUES

Nom de naissance
Nom d'usage :
Prénom :
Né(e) le
à MONTPELLIER (034)
Pays :
N° national (INE)
Etablissement LY CEZANNE
AIX EN PROVENCE
NO MATRICULE URY : 609
CENTRE : LY VAUVENARGUES

RELEVE DE NOTES

AC 001

13090 AIX-EN-PROVENCE

INSCRIPTION

EPREUVES 1er GROUPE NOTE /20	OBTENUE EN	ACA	COEF	POINTS	DISCIPLINES	2e GROUPE NOTE /20	COEF	1er GROUPE + 2e GROUPE POINTS 1er Groupe	POINTS 2e Groupe	POINTS RETENUS
16	2006	02	2	32	FRANCAIS ECR.		2*			
15	2006	02	2	30	FRANCAIS ORAL		2			
19			9	171	MATHEMATIQUES		9*			
17			6	102	PHYS-CHIMIE		6*			
17			6	102	SC. VIE TERRE		6*			
15			3	45	HIST.GEOG.		3*			
17			3	51	L.V.E. 1 ALLEMAND		3*			
17			2	34	L.V.E. 2 ANGLAIS		2*			
14			3	42	PHILOSOPHIE		3*			
14			2	28	ED.PHYS.SPORT APTE-CCF		2			
18	2006	02		16	TRAV PERS ENC					
17				14	EPR.FACULTAT. EV.SP SEC E/O					
17	POUR INFO		**	**	EVALUAT.SPEC.					
16	POUR INFO		(4)	**	EVA.SPEC.LANG ALLEMAND					
17	POUR INFO		(1)	**	EVA.SCOLARITE					
TOTAL			38	667		TOTAL	38	TOTAL		
MOYENNE SUR 20				17.55		MOYENNE SUR 20				

BAREME

TOTAL 1er groupe	304	380	456	532	608
TOTAL 2e groupe	304	380			
MOYENNE	8/20	10/20	12/20	14/20	16/20

Le chef de centre ou le président du jury
(cachet ou signature)

LYCEE POLYVALENT
VAUVENARGUES
AIX-EN-PROVENCE

ACADÉMIE D'AIX-MARSEILLE

RELEVE DE NOTES EN CLASSES PREPARATOIRE

BULLETIN - trimestre 1
Année 2007-2008
PCSI 2 (effectif : 44)

AC 001
Né(e) le :
Redoublant : N
Etab. préc. : 0130002G

LYCEE PAUL CEZANNE
19 Av J et M Fontenaille
BP 10005
13181 Aix en Provence Cedex 5
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002G@ac-aix-marseille.fr
Site : www.lycezanne13.org

AC 001
13090 AIX EN PROVENCE

Disciplines	Moyennes						Appréciation
	Coef	El.	Cl.	Rg.	-	+	
PHYSIQUE	8	**13,5**	11	8	5,6	16,2	Bon trimestre. Travail très sérieux. Continue ainsi. Oral: 15.6: très bien
CHIMIE	4	**11,3**	12,1	28	5,9	18,2	DS1 : 11,2 DS2 : 12 DS3 : 10,6 TP : 14C'est un trimestre convenable. Anne Charlotte doit poursuivre ses efforts au second trimestre.
MATHEMATIQUES	8	**11,1**	10,3	13	6,8	17	DS2 : 11,2 DS1 : 8,5 DS3 : 11,2 interros : 14,8Ensemble honorable, et qui devrait progresser compte-tenu du sérieux manifesté.
FRANCAIS PHILOSOPHIE	4	**12,7**	10	8	5,9	15,3	Un travail solide et régulier . Bons résultats .
SCIENCES INDUSTRIELLES	2	**14,1**	10,5	2	5,7	14,2	Très bon travail, très bons résultats à l'écrit comme à l'oral. Attitude très positive en travaux pratiques.
ALLEMAND LV1	2	**10,8**	9,6	2	5,7	12,2	C'est un bon début. Poursuivez vos efforts
ANGLAIS LV2	0	**14,0**	11,2	2	8	14,7	Résultats satisfaisants.
Moyenne générale		**12,2**	10,7				
VIE SCOLAIRE CPE	Absences : 1 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0						

Appréciation générale

Ensemble assez satisfaisant. Continuez ainsi. Option Chimie.

Le chef d'établissement

BULLETIN - trimestre 2
Année 2007-2008
PCSI 2 (effectif : 44)

AC.001.

Né(e) le :
Redoublant : N
Etab. préc. : 0130002G

LYCEE PAUL CEZANNE
19 Av J et M Fontenaille
BP 10005
13181 Aix en Provence Cedex 5
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002G@ac-aix-marseille.fr
Site : www.lycezanne13.org

AC 001

13090 AIX EN PROVENCE

Disciplines	Moyennes						Appréciation
	Coef	El.	Cl.	Rg.	-	+	
PHYSIQUE	8	*13,5*	*11*	*8*	*5,6*	*16,2*	Bon ensemble, le travail est toujours sérieux et approfondi.Oral : 14.6
		12,7	10,5	7	4,9	16,3	
CHIMIE	4	*11,3*	*12,2*	*28*	*5,9*	*18,2*	De nets progrès, un concours blanc réussi: Anne Charlotte a réalisé un bon second trimestre. Elle doit continuer ainsi....
		13,9	11,7	10	3,6	16,3	
MATHEMATIQUES	8	*11,1*	*10,3*	*13*	*6,8*	*17*	Une belle progression, bilan très positif.
		13,3	10,7	7	7,5	17,8	
FRANCAIS PHILOSOPHIE	4	*12,7*	*10*	*8*	*5,9*	*15,3*	Un sérieux sans faille et des qualités de réflexion . Ensemble tout à fait convenable .
		11,0	8,9	10	2,7	15,7	
ALLEMAND LV1	2	*10,8*	*9,6*	*2*	*5,7*	*12,2*	A très bien progressé. Les résultats sont tout-à-fait honorables.
		13,8	10,8	1	7,3	13,8	
ANGLAIS LV2	0	*14,0*	*11,2*	*2*	*8*	*14,7*	Elève sérieuse , résultats très convenables.
		12,5	11,9	3	8,6	15,6	
Moyenne générale		**12,9**	10,5				
VIE SCOLAIRE CPE	Absences : 4 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0						

Appréciation générale

Très bon ensemble. Elève sérieuse et motivée.

Le chef d'établissement

BULLETIN - trimestre 3
Année 2007-2008
PCSI 2 (effectif : 44)

AC . 001 . A
Né(e) le . ..
Redoublant : N
Etab. préc. : 0130002G

LYCEE PAUL CEZANNE
19 Av J et M Fontenaille
BP 10005
13181 Aix en Provence Cedex 5
Tél : 0442171400
Mél : ce.0130002G@ac-aix-marseille.fr
Site : www.lycezanne13.org

AC 001
I
13090 AIX EN PROVENCE

Disciplines	Moyennes						Appréciation
	Coef	El.	Cl.	Rg.	-	+	
PHYSIQUE	8	*13,5*	*11*	*8*	*5,6*	*16,2*	Résultats en baisse ce trimestre mais le travail est resté très sérieux et ces résultats ne reflètent pas ta compréhension en cours et en TD. Oral : 13.8
		12,7	*10,5*	*7*	*4,9*	*16,3*	
		8,6	10,4	30	6,1	17,1	
CHIMIE	4	*11,3*	*12,2*	*28*	*5,9*	*18,2*	Toujours en progrès: un fin d'année réussie!
		13,9	*11,7*	*10*	*3,6*	*16,3*	
		15,0	12,4	10	7,7	17,6	
MATHEMATIQUES N.	8	*11,1*	*10,3*	*13*	*6,8*	*17*	Un léger recul mais les résultats demeurent très satisfaisants, une année très positive.
		13,3	*10,7*	*7*	*7,5*	*17,8*	
		12,1	10,8	10	5,7	15,9	
FRANCAIS PHILOSOPHIE	4	*12,7*	*10*	*8*	*5,9*	*15,3*	Absente au devoir en 4h, Anne-Charlotte a néanmoins fourni un travail sérieux et réfléchi au long du trimestre . Une année scolaire réussie à tous points de vue .
		11,0	*8,9*	*10*	*2,7*	*15,7*	
		14,0	9,6	4	3,8	15,8	
ALLEMAND LV1	2	*10,8*	*9,6*	*2*	*5,7*	*12,2*	Travail et résultats très corrects. A bien progressé.
		13,8	*10,8*	*1*	*7,3*	*13,8*	
		13,6	11,1	1	7	13,6	
ANGLAIS LV2	0	*14,0*	*11,2*	*2*	*8*	*14,7*	Présence et travail irréguliers , vous auriez pu faire encore mieux.
		12,5	*11,9*	*3*	*8,6*	*15,6*	
		11,8	11,3	3	8,7	15	
TRAVAUX INITIAT.PERSONNEL.	0,5						
		11,0	12,6	31	6	18	
Moyenne générale		**11,9**	10,8				
VIE SCOLAIRE CPE	Absences : 1 (1/2 J) dt non justifiées : 0 (1/2 J) Retards : 0						

Appréciation générale

Un beau parcours. Une attention particulière en Physique. Admis(e) en 2ème année PC*

Le chef d'établissement

BULLETIN - SEMESTRE 1 AC 001

Année 2008/2009
PCetoile (effectif 36)

née le
doublant non
établissement précédent 0130002G

LYCEE PAUL CEZANNE

19 AV J ET M FONTENAILLE
BP 10005
13181 AIX EN PROVENCE cedex 5
Tél. : 0442171400
Fax. : 0442960766
Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr
Web : www.lycezanne13.org

AC 001

13090 AIX EN PROVENCE

disciplines	moyennes						Appréciation
	coef	élève	groupe	rang	min	max	
PHYSIQUE	8	**14,2**	10,8	3/36	5,9	14,5	Excellent ensemble, début d'année extrêmement encourageant.
MATHEMATIQUES	8	**11**	9,9	11/36	4,4	14,5	Très bon travail régulier. Continuez.
CHIMIE	4	**11**	10,2	9/36	5,7	14	Un premier trimestre très encourageant, c'est bien. Il faut continuer ainsi et la chimie contribuera à ta réussite.
FRANCAIS PHILOSOPHIE D	4	**9,4**	8,6	15/36	3,1	13,3	En progression permanente. Poursuivez, surtout. Le niveau atteint en fin de semestre est satisfaisant.
ALLEMAND LV1	2	**12,3**	11,2	2/5	8,6	14,4	De la motivation, du travail et de bons résultats. Continuez ainsi.
ANGLAIS LV2		**8,5**	9,2	2/3	8,2	10,8	Très motivée,travail sérieux, niveau satisfaisant, un accident à un DS fait baisser la moyenne (évaluée sur des épreuves de type CCP LV2)
MOYENNE GÉNÉRALE	11,8						
VIE SCOLAIRE CPE	absences : 0 (½ j) non justifiées : 0 retards : 0						

Appréciation Générale
Elève sérieuse et motivée. Ensemble satisfaisant. Continuez dans cette voie.

Le Chef d'Etablissement

BULLETIN

SEMESTRE 2

Année 2008/2009
PCetoile (effectif 36)

AC 001

née le
doublant non
établissement précédent 0130002G

LYCEE PAUL CEZANNE

19 AV J ET M FONTENAILLE
BP 10005
13181 AIX EN PROVENCE cedex 5

Tél. : 0442171400

Fax. : 0442960766

Mél : ce.0130002g@ac-aix-marseille.fr

Web : www.lycezanne13.org

AC 001

13090 AIX EN PROVENCE

disciplines	moyennes						Appréciation
	coef	élève	groupe	rang	min	max	
PHYSIQUE	8	14,2	10,8	3/36	5,9	14,5	Un DS d'optique raté, mais le reste est toujours satisfaisant, vous devez avoir confiance en vos capacités.
		12,3	**11,1**	**14/36**	**4,6**	**16,6**	
MATHEMATIQUES	8	11	9,9	11/36	4,4	14,5	C'est très bien.
		13,3	**10**	**4/36**	**4,5**	**15,9**	
CHIMIE A	4	11	10,2	9/36	5,7	14	Un accident au dernier devoir explique cette moyenne qui ne reflète ni le travail fourni ni le niveau atteint. De bonnes révisions devraient t'assurer de bonnes notes en chimie aux concours.
		8,9	**9,5**	**21/36**	**4,9**	**13,4**	
FRANCAIS PHILOSOPHIE	4	9,4	8,6	15/36	3,1	13,3	Des progrès; niveau fort convenable.
		10,3	**8,7**	**10/36**	**3,7**	**13,7**	
ALLEMAND LV1	2	12,3	12,7	2/3	11,3	14,4	Un bon niveau. Elève studieuse et volontaire.
		13,1	**13,5**	**2/3**	**12,8**	**14,7**	
ANGLAIS LV2		8,5	9,7	2/2	8,5	10,8	Niveau convenable, évaluée sur CCP LV2. Moins assidue ce trimestre mais l'ensemble reste correct !
		10	**10,8**	**2/2**	**10**	**11,6**	
MOYENNE GÉNÉRALE		11,8	10,1	6	5,2	13,2	Cette ligne concerne l'ensemble des moyennes générales des élèves de la classe
VIE SCOLAIRE CPE	absences : 0 (½ j) non justifiées : 0 retards : 0						

Appréciation Générale
Un bel ensemble malgré quelques accidents. Ne doutez pas de vous, vos révisions vont vous permettre de mettre en œuvre vos connaissances. Nous avons confiance.

Le Chef d'Etablissement

LYCÉE P. CEZANNE

Liberté · Égalité · Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

ATTESTATION DU PARCOURS DE FORMATION

EN

CLASSE PRÉPARATOIRE AUX GRANDES ÉCOLES

Le recteur de l'académie d'Aix-Marseille, Chancelier des universités
atteste que

AC 001

né(e) le à MONTPELLIER

a *accompli un parcours de formation de la filière*

CPGE1 PCSI (PHYS.CHIM.SCI.INGEN.)

Valeur du parcours en crédits du système ECTS : 60

Mention obtenue → A : Très bien

Année académique 2007 – 2008 : PCSI 2

Lycée Paul Cézanne

Aix-en-Provence

Fait à , le 08/07/2008

Pour le recteur,
le proviseur du lycée
Nicole Lafon

N Lafon

Attestation délivrée en application des dispositions de l'article 8 du décret n° 94-1015

Ecole Nationale
Supérieure des Mines
SAINT-ETIENNE

Ministère de l'Economie , de l'industrie et de l'Emploi
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

CERTIFICAT DE SCOLARITE

Le Directeur de

l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne

certifie que:

Mlle AC 001
Né **à Montpellier**

est élève de première année pour l'année scolaire 2009/2010.

Saint-Etienne, le 07 septembre 2009

MINISTÈRE DE L'ÉCONOMIE

ANNEXE II ***: V001***

« V001 » a 16 ans. C'est une élève qui n'a jamais doublé une classe dans sa scolarité. Elle est l'ainée d'une famille de trois enfants, (une petite sœur en classe de seconde GT, un petit frère en classe 4ème classique) de père cadre commercial et de mère au foyer. « Elle « étudie » beaucoup les mathématiques à la maison, utilise plusieurs livres de mathématiques en plus de celui utilisé dans sa classe. Elle « surf » sur internet pour « compléter et enrichir » ses connaissances des cours de maths donnés par son professeur de mathématique ». Elle fait des exercices en plus de ceux que donne son prof de maths, prend un cours particulier lorsqu'elle n'arrive pas seule à comprendre une notion, ne fait jamais de fiches de formules mathématiques pour étudier. Répond aux questions de l'enseignant lorsqu'elle est sollicitée ou non. Elle demande souvent à son professeur de réexpliquer ce qu'elle « n'a pas très bien compris pendant les séances de cours ». Elle obtient souvent de bonnes notes aux évaluations, entre 15 et 18, voire 20

1/ Les séances d'observations de V001

A/ Exercice n°1 extrait du livre de mathématiques Maths repères Terminales S/

Édition 2006/Hachette-Education

Exercice n°1: Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, démontrer que :

$$P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = P([a;s])$$

(Extrait d'épisode biographique utilisé pages 156-159)

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue

Verbatim de V001 Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue

///Alors///alors [silence]/////alors / démontrer que la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ; + ∞ [est bien égale à la probabilité de ///////l'intervalle////[a ; s]//alors////humm /////(silence) alors, on sait que c'est une probabilité conditionnelle////donc je peux que euh (silence) ////// la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ;+∝[est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] inter l'intervalle [a ; + ∞ [le tout divisé par la probabilité de l'intervalle [a ; + ∞ [/// donc qui est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sur la probabilité de l'intervalle [a ; +∝[/ <u>alors</u> [silence, observe l'opération] //////donc le tout est/// $P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = \dfrac{P([a,a+s] \cap [a;+\infty[)}{P([a;+\infty[)} = \dfrac{P[a;a+s]}{P[a;+\infty[}$ *///// alors [silence, observe l'opération] //////donc le tout est euh / étant égal à l'intégrale de / allant de a à a+s*

$$\frac{\int_a^{a+s} \lambda e^{-\lambda t}.dt}{e^{-\lambda a}}$$

///// on déjà étudié les intégrales et les fonctions expo mais (silence)/////donc, on a tout ceci $\dfrac{-e^{-\lambda(a+s)}+e^{\lambda a}}{e^{\lambda a}}$ *(*)/////qui est égal à ah j'ai oublié le signe « - » ici au dénominateur* //donc je corrige (silence)//ce qui est égal à (le tout que divise)* $= \dfrac{e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda a}}$ *//// en simplifiant les expos (-λs)//////ce qui est égale à / (silence)///uueh////* $= \dfrac{e^{-\lambda a}(1-e^{-\lambda s})}{e^{-\lambda a}}$ *////// en simplifiant les expos (-λs) ///// ce qui est égale à* $=1-e^{-\lambda s}$ */ (silence)// ce qui est égale à //// donc/////*$=1-e^{-\lambda s}$ *// ce qui est égal à ////*$P[a,s]$*//////donc la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ; +∝[est bien égale à la probabilité de l'intervalle [a ; s] (silence)////voilà//////*

Exercice n°2, extrait du livre de mathématiques Maths repères Terminales S/

Édition 2006/Hachette-Education

Exercice2 Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/ loi exponentielle

On étudie la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant sa première panne.

On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur [0; +∞]. Ainsi, la probabilité d'un intervalle [0; t [, notée p[0; t [, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est une loi exponentielle de paramètre λ avec λ > 0.*

1-a) Calculer p[t ; +∞ [, pour tout t ≥ 0.

1-b) Déterminer le réel t pour lequel p[0 ; t [=p[t ; +∞ [.

2-) D'après une étude statistique, la probabilité pour que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est de 0,18. Déterminer le paramètre λ.

3-)Sachant que l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, calculer la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante

4-) Maintenant, on suppose que λ = 0,2

5-a) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-4} près, que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années.

5-b) Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années. Calculer la probabilité que X soit égale à 4

Des Extraits utilisés pages 166-174

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Verbatim de V001 pour la première question1a ; 1b ; et 2

///Bon////bon [silence]////Bien ////on étudie la durée de vie////exprimée en années d'un appareil ménager avant sa première panne [silence]////Donc on modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement/////définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *// Ainsi////la probabilité d'un intervalle [0 ; t [/////notée p[0 ; t [////est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant/// t ///Cette loi est une loi exponentielle de paramètre λ avec λ inférieur à 0 // mais non / quand même // λ est supérieur à 0///[silence]///*

Question 1 petit a // il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre euh // de paramètre λ // donc on a dit juste avant pour tout réel t / pour tout t ≥ 0 // donc on aura, la probabilité p de l'intervalle [0 ; t[qui sera égale à l'intégrale allant de 0 à t de //$\lambda e^{-\lambda x}\,dx$*//////*$\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$*///Ce qui est égal à ///*$\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t$*//[silence]///* $=1-e^{-\lambda t}$*]///alors / comme la probabilité de l'intervalle [0 ; +∞] / mais non c'était un intervalle semi ouvert // donc la probabilité de [0 ; +∞[est égale à 1 /////*$P[0;+\infty[=1$*///// on aura pour tout x / mais non pour tout t ≥0 // humm / hum [silence] ///la probabilité de l'intervalle [t ; +∞[est égale à 1 moins la probabilité de l'intervalle [0 ; t[*

// $P\left[t;+\infty\right[= 1 - P\left[0;t\right[$ /////$1-\left(1-e^{-\lambda t}\right) = e^{-\lambda t}$ ////Ce qui donne/// $P\left[t;+\infty\right[= e^{-\lambda t}$ ////

///// Question 1 petit b //_déterminer le réel t pour lequel la probabilité de l'intervalle [0 ; t[est égale à // la probabilité de l'intervalle [0 ; t[est égale à la probabilité de l'intervalle [t ; +∞[// donc // alors // euh // de ce qui précède, cela fait (toutou ou)//// p[0 ; t [= p$\left[t;+\infty\right[$ .////// ce qui implique que [silence]///$1-e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$ //// ce qui donne///$1-e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$ //// $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ ////

/// $\lambda t = \ln(2)$/// donc t est égal à////$t = \frac{\ln 2}{\lambda}$///// voilà [silence]///ensuite////

////Deuxièmement////

////bon / d'après une étude statistique / la probabilité pour que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est de 0,18 / déterminer le paramètre λ // donc, euh // donc on peut dire que la probabilité que l'appareil tombe en panne la fin [silence] /////hum humm ////la fin de première année égale à 0,18 // donc la probabilité de l'intervalle [0 ; 1[est égale à 0,18 // cela nous donne hum humm [silence]//// ce qui nous donne [silence/// $P[0;1] = 0{,}8$///ce qui donne $P\left[0;1\right[= 1 - e^{-\lambda t}$ //// cela nous donne hum humm [silence]////ce qui nous donne [silence]/// ////$1-e^{-\lambda t} = 0{,}18$////ce qui donne/// $e^{-\lambda t}$= 1- 0,18//////λ = ln(0,82)//// ce qui donne (Prend sa calculatrice)///donc c'est environ [silence]////donc à 10^{-4} près // λ ≈ 0,198////Voilà///

Verbatim de V001 pour la première question3

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

////Troisièmement///

////sachant que l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service / calculer la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante // alors / euh / euh/////[silence]///donc la probabilité que l'appareil (silence) ne subisse aucune///// [ ] panne l'année suivante (silence) /et sachant qu'il n'a connue aucune panne les deux années précédentes est la probabilité conditionnelle de l'intervalle [3 ; +∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[// comme la loi de probabilité est une loi de durée de vie sans vieillissement, alors on aura la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[ce qui donne [silence]

on obtient [silence]/// $P_{[2;+\infty[}\left([3;+\infty[\right) = P\left([1;+\infty[\right)$/// $P_{[2;+\infty[}\left([3;+\infty[\right) = P\left([1;+\infty[\right)$/// $P\left([1;+\infty[\right) = e^{-\lambda}$

// on obtient [silence]////prend sa calculatrice // $P([1;+\infty[) = 0{,}82$ *///*

//// on obtient <u>pour la même question</u> si j'utilise la loi de probabilité conditionnelle//// je noterai que la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sachant l'intervalle [2 ; +∞[est égale à la probabilité // de l'intervalle [3 ; +∞[inter l'intervalle [2 ; +∞[///le tout sur la probabilité de l'intervalle [2 ; +∞[// $\dfrac{P([2;+\infty[\cap[3;+\infty[)}{P([2;+\infty[)}$ *////// <u>donc</u> ce qui donne la probabilité de l'intervalle [3 ; +∞[sur la probabilité de l'intervalle [2 ; +∞[////=* $\dfrac{P([3;+\infty[)}{P([2;+\infty[)}$ */// ce qui nous donnera [silence]///* $\dfrac{e^{-3\lambda}}{e^{-2\lambda}} = e^{-\lambda}$ */// et qui donne enfin // on connaît déjà λ = 1,98 // voilà///*

Verbatim de V001 pour la première question4a

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

////on passe à la question suivante quatrièmement.//////maintenant on suppose que

λ= 0,2 / donc supposons que λ= 0,2//

question 4 petit a///// calculer la probabilité arrondie à 10^{-4} *près, que l'appareil n'ait // mais non // n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années [silence]////alors // la probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années est la suivante // donc on prend 1 moins la probabilité de l'intervalle [0; 3] // ce qui donne //*$1-P[0;3]$*////1-* $P[0;3] =$ $P[3;+\infty[$ *///////[silence]/////<u>donc</u> on prend avec [euh]//le paramètre λ= 0,2 //on obtient ////* $P([3;+\infty[= e^{-0,2(3)})$ *////[silence]/////prend sa calculatrice ce qui est à* 10^{-4} *près///=* $e^{-0,6} = e^{-0,6}$ *=0,5488///// voilà ///*

Verbatim de V001 pour la première question4b

Réf : V001-S-4/26042008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

/// ensuite petit b // alors / dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps / on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années (souffle) // sachant que la

probabilité d'une réussite est d'euh // 0,5488 // hum humm // et la probabilité d'un échec est de un moins celle de la réussite//1-0,548//// donc///c'est bien le schéma de Bernoulli // donc la probabilité (hum) d'avoir exactement quatre appareils qui n'ont jamais eu de panne durant ses premières années est la combinaison de quatre dans dix multipliée par la probabilité d'une réussite à la puissance quatre multipliée encore par la probabilité d'un échec à la puissance six//// $\binom{10}{4}.(0{,}5488)^4.(1-0{,}5488)^6$ */////*

(Extrait d'épisode utilisé page: 54)

B/ Séance d'observation de V001 sur les nombres complexes

Séance : Réf : V001-S4/28032008/nombres complexes/exo1

Exercice extrait du livre «Maths repère Terminale S /édition 2007/ Collection Hachette - éducation

Enoncé :

Dans chacun des cas suivants, déterminer géométriquement et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant les relations données :

1- Autour des modules

a) $|z+2| = |z-4i|$;

b) $|z+1-2i| = 3$;

c) $|\bar{z}-3+2i| = |z-4i|$;

d) $2|z+2| = |(1+i\sqrt{3})z+4\sqrt{3}-4i|$.

2- Autour des arguments

a) Arg. $(z-4i)=\dfrac{\pi}{3}[\pi]$;

b) Arg. $(\bar{z}-3+2i)=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$;

c) Arg. $\left(\dfrac{z+2}{z+1-2i}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$

Extraits d'épisodes utilisés pages :54 question 1a/216-217 Questions 1c & 1d

Verbatim de V001 pour la première question1a.

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes

> *Bon//// Bon //Dans chacun des cas suivants//déterminer géométriquement et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant les relations données///Alors///*
>
> *Premièrement autour des modules///Alors// Humm//**1-a**//*$|z+2|=|z-4i|$*///[silence, se gratte la tête]///Alors* $|z+2|=|z-4i|$ *est équivalente à distance AM égale distance BM///*
>
> *[Répète AM égale à BM]//[rédaction]///*$|z+2|=|z-4i| \Leftrightarrow$ *àAM = BM //Donc l'ensemble* E_1 *des points M est la médiatrice du segment* $[AB]$*///*

Verbatim de V001 pour la question 1b

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes

> 1-*b) Donc, on a* $|z+1-2i|=3$*///ce qui est donc équivalent de////Equivalent de CM= 3///*$|z+1-2i|=3 \Leftrightarrow CM=3$*/// CM=3///donc on a/// donc l'ensemble* E_2 *des points M est le cercle de centre le point C et de rayon 3//*

Verbatim de V001 pour la question 1c

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes/exo1

//Ensuite petit 1-c///je passe à la ligne//1-c/// V001//observe l'écriture de l'égalité/////$\left|\bar{z}-3+2i\ \right|=\left|z-4i\right|$*///C'est équivalent [silence]/// mais non/// On modifie d'abord l'écriture de* $\left|\bar{z}-3+2i\ \right|$ *en utilisant le faite que module de* $\bar{z}$ *est égal au module de z///*$\left|\bar{z}\ \right|=\left|z\right|$*//*$\left|\bar{z}-3+2i\ \right|=\left|\overline{z-3+2i}\right|=\left|z-3-2i\right|$*/ce qui donne*$=\left|z-3-2i\right|$ *///voilà/// V001 souffle///ahan///donc l'équation*$\left|\bar{z}-3+2i\ \right|=\left|z-4i\right|$*//deviendra*$\left|z-3-2i\right|=\left|z-4i\right|$ *donc ce qui est équivalent à la distance DM= BM///alors////*$\left|z-3-2i\right|=\left|z-4i\right|\Leftrightarrow DM=BM$ *///Alor l'ensemble* E_3 *des points M est la médiatrice du segment* $[BD]$*/*

Verbatim deV001 pour la question 1d

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes

//Ensuite petit d///1-d//On a ///$2\left|z+2\right|=\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z+4\sqrt{3}-4i\right|$*///alors/////petit d ///hum hummm///Alors///observe l'écriture ///[silence]////j[…]///On modifie l'écriture du deuxième membre de l'égalité* $\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z+4\sqrt{3}-4i\right|$ *///ce qui*

donne//// puis rédige///$\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z+4\sqrt{3}-4i\right|$ *///mais non j'écris la même chose/ puis reprend/// ce qui donne///*$\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)z+4\sqrt{3}-4i\right|==\left|\left(1+i\sqrt{3}\ \right)\left(\ z+\frac{4\sqrt{3}-4i}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}\ \right)\ \right|$

///ce qui est égal à donne///$=\left|\left(1+i\sqrt{3}\ \right)\ \right|.\left|z-\frac{4i\left(1+i\sqrt{3}\ \right)}{\left(1+i\sqrt{3}\ \right)}\ \right|$ *//ce qui donne*$\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)\right|\times\left|z-4i\right|$ *///Silence/ ce qui finalement*$=2\left|z-4i\right|$ *///// Bon///l'équation*

devient alors//// $2|z+2| = 2|z-4i|$ *//*

Soit/// alors module (z +2) égal au module de (z-4i)//ce qui équivaut à la distance AM est égale à la distance BM//[Oh la :lala// c'est un segment///on a// $|z+2| = |z-4i|$ */]/donc l'ensemble* E_4 *des points M est la médiatrice du segment* (AB)*///des points M est la médiatrice du segment* $[AB]$*////*

Verbatim de V001 pour la question 2a

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes

///ensuite on fait maintenant autour des arguments//deuxièmement autour des arguments///2a/// Arg. $(z-4i) = \frac{\pi}{3}[\pi]$*////Alors// Alors//[silence]///ce qui équivaut à*

$(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM}\quad) = \frac{\pi}{3}[\pi\ ]$ *//// Donc// humm/// Bon//L'ensemble* E_5 *des points M est la droite* $[BM_1)$ *privée du point B ou* M_1 *qui est un point tel que* $(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM}\quad) = \frac{\pi}{3}[\pi\ ]$*///mais non/// c'est* $(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM_1}\quad) = \frac{\pi}{3}[\pi\ ]$*/////*

Verbatim de V001 pour la question 2b

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes

Ensuite petit b///2-b ///Arg. $(\bar{z}-3+2i\ ) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$*///donc [regarde l'expression] Argument de* $(\bar{z}-3+2i\ )$*///donc Arg.* $(\bar{z}-3+2i\ ) = \arg(\overline{z-3-2i})$*//car Arg.(* $\bar{z}$ *)= Arg. z/*

Donc euh humm !!!! l'argument de $(\bar{z}-3+2i\ )$*///ce qui équivaut à* $= Arg(z-3-2i)$*//Arg.* $(\bar{z}-3+2i\ ) = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$*//Arg.* $(\bar{z}-3+2i\ ) = -\frac{\pi}{4}[2\pi] \Leftrightarrow$ *///Donc[(silence]/=* $\frac{\pi}{4}[2\pi]$*// on peut donc dire que* $(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM_2}\quad) = \frac{\pi}{4}[2\pi\ ]$*//// Donc l'ensemble* E_6 *des points M est la demi-droite d'origine D privée du point D contenant le point M. Non, contenant le point* M_2 *tel que* $(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM_2}\quad) = \frac{\pi}{4}[2\pi\ ]$*///Voilà///*

Verbatim de V01 pour la question 2c

Réf : V001-S3/28032008/nombres complexes

Ensuite 2-c///Arg $\left(\dfrac{z+2}{z+1-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ *////[Silence regarde l'expression]///*

Arg $\left(\dfrac{z+2}{z+1-2i}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ *ce qui équivaut à* $\left(\overrightarrow{CM}\ ;\ \overrightarrow{AM}\right) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ *////donc l'ensemble* E_6 *des points M est le cercle de diamètre* $[AC]$ *privé des points A et AC///Voilà//*

C/ Séance d'observation sur les fonctions logarithme népérien et les fonctions exponentielles

Exercice extrait du livre prép@BAC /classe de terminale S/Edition Hatier Paris 2001

Extrait d'épisode utilisé pages:54

Exercice sur les fonctions exponentielles et logarithmes Réf : V001-S-1/13012008

Enoncé Réf : V001-S-1/13012008

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x$ et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère ortho normal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2cm.On note D la droite d'équation $y = -2x$ et D' la droite d'équation $y = -x$.

Parmi les courbes suivantes, seule une représente la courbe (C). Il s'agit dans cette première partie de démontrer que parmi les courbes trois ne peuvent pas représenter la fonction f .

On admet que les courbes données ci-après rendent compte du comportement des fonctions représentées aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$. Toutes les tangentes parallèles à l'axe des abscisses sont indiquées sur les graphiques. (Voir annexe graphique).

1- a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $-\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$. On pourra écrire

$$f(x) = e^{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^x} - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

c) Peut-on éliminer l'une des courbes ?

2- a) Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = (e^x + 1)(e^x - 2)$.

b) Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi ?

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

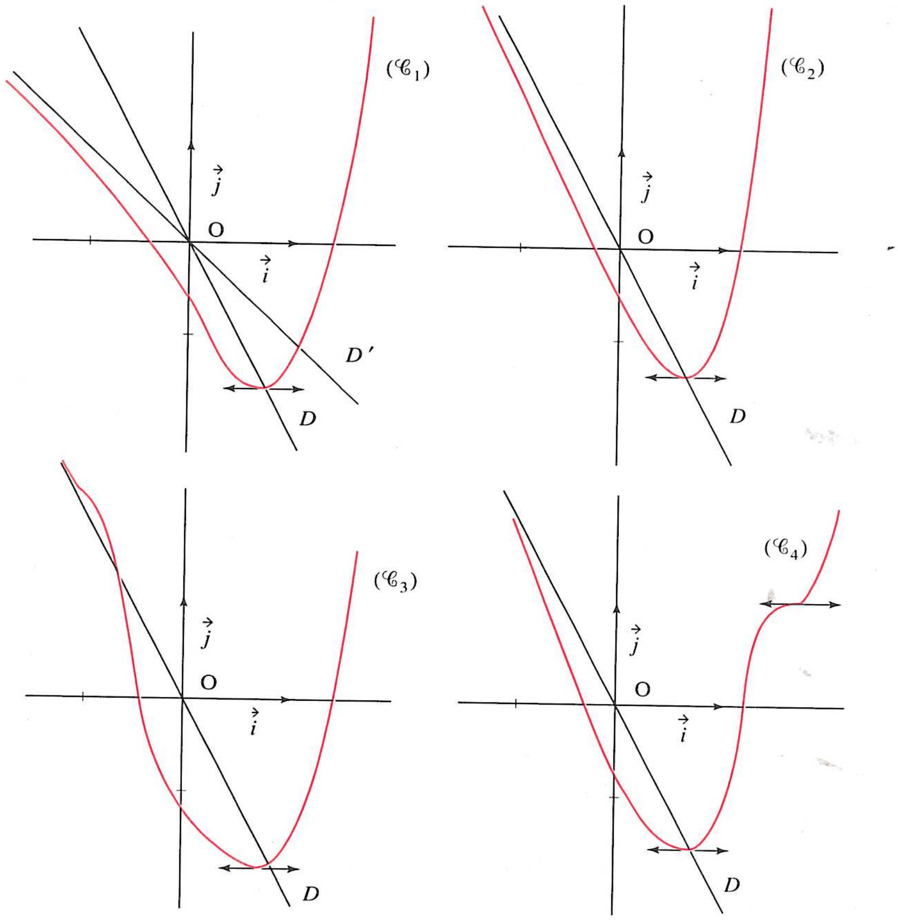
3- a) Déterminer la limite de $f(x) + 2x$ quand x tend vers $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi ?

4- a) Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite (D).

b) Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi ? Conclure.

5- Comment peut-on déterminer la distance maximale en un point I de la courbe de f et un point J de la droite (D) lorsque x appartient à l'intervalle [-1 ; 0,5]



Verbatim de V001 pour la question n°1*Réf :V001-S-1/13012008*

Alors//Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}-2x$ et (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\ \vec{j}\ )$

d'unité graphique 2cm////On note D la droite d'équation $y=-2x$ et D'la droite d'équation $y=-x$ ///Parmi les courbes suivantes, seule une représente la courbe (C)//Il s'agit dans cette première partie de démontrer que parmi les courbes trois ne peuvent pas représenter la fonction f ////On admet que les courbes données ci-après rendent compte du comportement des fonctions représentées aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$. Toutes les tangentes parallèles à l'axe des abscisses sont indiquées sur les graphiques///Alors///Alors//[silence]////Alors///première question//// 1a//Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $-\infty$// alors pour cela//je détermine la limite de expo (2x) quand x tend vers $-\infty$///ensuite la limite de expo(x) quand x tend vers-∞//et enfin la limite de (-2x) quand x tend vers $-\infty$////vers-∞, et enfin la limite de (-2x) quand x tend vers $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{2x})=0$/// $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x})=0$/// $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ //par addition $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ //// Donc la limite de la fonction f en $-\infty$ est $+\infty$////

Verbatim de V001 pour la question 1b *Réf :V001-S-1/13012008*

1b///Déterminer la limite de la fonction f *quand* x *tend vers* $+\infty$. *On pourra* $f(x)=e^{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x}-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$*///Donc on va faire [silence]/// pour tout* x *appartenant à IR//humm en regardant l'expression* $f(x)=e^{2x}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e^x}-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$*//c'est égal donc à* $f(x)$ *de l'énoncé//=*$\frac{1}{2}e^{2x}-e^x-2x$*///Alors, la limite de la fonction* f *quand* x *tend vers* $+\infty$ *donne* $\lim_{x\to+\infty}(e^{2x})=+\infty$*//* $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{e^x})=0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2x}{e^{2x}})=+\infty$*///Donc la limite de la fonction* f *quand* x *tend vers* $+\infty$ *est égale à la somme des limites que nous venons de déterminer* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ *////Voilà////*

Verbatim de V001 pour la question1c *Réf :V001-S-1/13012008*

Ensuite 1c///Peut –on éliminer l'une des courbes///Donc/// déjà non///puisque toutes les courbes satisfont les [eu euh]/////Donc non//puisque toutes les courbes satisfont les conditions fournies par les limites de la fonction f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$*///Donc je ne peux pas éliminer pour l'instant de courbe/////*

Verbatim de V001 pour la question 2a *Réf :V001-S-1/13012008*

2a///Calculer $f'(x)$ *et montrer que pour tout réel* x *on a* $f'(x)=(e^x+1)(e^x-2)$*///Alors [silence]///Alors pour tout* x *appartenant à IR///on aura//* $f'(x)=e^{2x}-e^x-2$*///en développant l'expression de l'énoncé on a///*$(e^x+1)(e^x-2)=e^{2x}-2e^x+e^x-2$*///*

Ce qui donne donc pour réels $x\in IR$ $f'(x)=(e^x+1)(e^x-2)$

Verbatim de V001 pour la question 2b *Réf :V001/-S-1/13012008*

2b///Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi///Euh//euh///[observe les graphiques et la réponse de la dérivée]///Pour tout réel x de IR expo(x) est toujours positif///Donc on peut dire que $f'(x)$ *s'annule pour la valeur de* $x = \ln 2$ *///donc//déjà solution de l'équation* $e^x - 2 = 0$ *car pour tout* x $x \in$ *IR,////*$e^x + 1 >$ *0. Donc la courbe qui ne convient pas est la courbe (*C_4*)////Car la fonction qui correspond à cette courbe s'annule pour deux valeurs de* x *comme racines évidentes////*

Verbatim de V001 pour la question 2c *Réf :V001-S-1/13012008*

2c///Dresser le tableau de variation de la fonction f *.[Chantonne]///Donc on aura ///La dérivée s'annule en*$\ln(2)$ */// donc* $f'(x)$ *est négative avant la racine évidente ///après elle est positive///Je sais que les limites de* $f(x)$ *en* $-\infty$ *est* $+\infty$ *et en* $+\infty$ *est* $+\infty$*, donc la fonction* f *est décroissante de* $-\infty$ *à* $\ln 2$ *et croissante de* $\ln 2$ *à* $+\infty$ *// et nous avons le tableau de variation correspondant////*

	$-\infty$ $\ln 2$ $+\infty$	
,	-	+
	$\searrow$	$\nearrow$

Verbatim de V001 pour la question 3a *Réf :V001-S-1/13012008*

3a///Déterminer la limite de $f(x) + 2x$ *quand x tend vers* $-\infty$*//Interpréter graphiquement ce résultat//Alors//quand x tend vers* $-\infty$ *de* $f(x) + 2x$. *tend ///* $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 2x]$*ce qui donne* $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} e^{2x} - e^x \right) = 0$ *////Car la limite de expo (2x) quand x tend vers* $-\infty$ *donne zéro et la limite de expo (x) quand x tend vers* $-\infty$ *donne aussi zéro//* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ *////Alors// Quelle interprétation/// on peut dire que/// La droite d'équation* $y = 2x$ *est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction* f *au voisinage de* $-\infty$ *////*

Verbatim de V001 pour la question 3b *Réf :V001-S-1/13012008*

Ensuite petit b/// mais non////quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi////Alors////

Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi////Puisque au voisinage de-∞////Alors////la courbe C_1 qui convient pas////On peut éliminer la courbe C_1///mais puisque la droite d'asymptote au voisinage de -∞////est une droite d'équation $y = -x$

Verbatim de V001 pour la question 4a *Réf :V001-S-1/13012008*

Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D)///Alors////On a donc pour tout x appartenant aux réels [eu hum////] par factorisation de expo (x) on a//// $f(x) - 2x = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right) \Rightarrow f(x) - 2x = e^x\left(\frac{1}{2}e^x - 1\right)$/// Donc// quand x tend vers

-∞///// $f(x) - 2x$ est négative car on sait quel que soit x // e^x est supérieur à zéro en plus $\left(\frac{1}{2}e^x - 1\right) < 0$ parce que $e^x < 1$////d'où pour tout réels x de IR $f(x) - 2x <$ 0//// Donc quelle courbe éliminer//// Mais non/////[je suis fatiguée] Hum humm///la conclusion ici est que la courbe représentant la fonction f est en dessous de l'asymptote D////Donc on peut c'est la courbe C_3 que l'on peut éliminer///

Verbatim de V001 pour la question 4b *Réf :V001-S-1/13012008*

///Ensuite petit 4b////Quelle courbe peut-on éliminer et pourquoi///Donc euh////[silence] par rapport à la question 4-a //Alors/// C'est la courbe C_3 que l'on peut éliminer///La courbe C_2 correspond aux conditions rencontrées tout au long de l'exercice////donc c'est elle la courbe de la fonction f ////

Verbatim de V001 pour la question 5 *Réf :V001-S-1/13012008*

Enfin cinquièmement///La distance maximale entre deux points////Déterminer la distance maximale entre un point M de la courbe de la fonction f et un point N de la droite D////Alors/// x appartient à l'intervalle [-1 ; 0,5] ////Donc////Pour déterminer la distance maximale entre un point M de la courbe C_2 et un point N de la droite D///[euh humm]/// Je pose la fonction $h(x) = f(x) - y = = \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x}$/// et j'étudie les variations de $h(x) = f(x) - y$ ////Je calcul la dérivée h'(x)= $e^{2x} - e^{x}$////Si x_0 est le maximum m de la fonction h alors je calcul $h(x_0)$ qui est la distance maximale entre les deux points M et N//// c'est de la cinématique je crois////

D/ Séance d'observation sur les intégrales-suites

Exercice1 extrait de 100% maths Terminale S/ Collection Hatier 2005

Extrait d'épisode utilisé page 54

Intégrale et suite numérique Réf : V001-S-2/24022008

Exercice 1

On pose $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ et, pour n entier naturel non nul, $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1- Calculer I_0

2- Montrer, pour tout entier n élément de IN, que $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3- En déduire les valeurs de $I_{1,} I_2, I_3$, puis celle de $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x.dx$

Verbatim de V001 pour la question 1 *Réf : V001-S-2/24022008*

///Première question ///On pose $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ *avec n différent de zéro////et* $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

Calculer I_0 */////Bon//// il s'agit de intégrale de la fonction exponentielle dont la primitive et la dérivée est elle-même///Donc///* $I_0 = \int_0^1 e^x dx$ *la primitive* $F(x)$ *de fonction* $f(x) = e^x$ *est* $F(x) = e^x$ *//donc* $I_0 = [e^x]_0^1$ *ce qui donne* $I_0 = e^1 - e^0$ *////on a*

$I_0 = e - 1$*////*

Verbatim de V001 pour la question 2 *Réf : V001-S-2/24022008*

//Deuxième question////Alors//// $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ *//// Montrons, pour tout entier n élément de IN//que//* $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ *///Alors// Il s'agit d'une composée d'intégrale et de suite///On sait que pour tout entier naturel non nul* $I_n = \int_0^1 x^n (e^x) dx$ *///*

///Mais $I_n = \int_0^1 x^n (e^x) dx$ *et* $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} (e^x) dx$ *constituent des intégrales d'un produit de fonction polynôme et exponentielle////Donc pour déterminer* I_{n+1} */////j'utilise une intégration par partie pour déterminer l'intégrale* $\int_a^b P(x) e^x dx$

/// Nous avons $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$ */// Intégrons par partie* I_{n+1} *en posant///* $\{V'(x) = e^x ;.et..U(x) = x^{n+1}\}$*//*$\{U'(x) = (n+1)x^n ..et..V(x) = e^x\}$ *// nous avons donc* $I_{n+1} = \int_0^1 U(x)..V'(x).dx$ *//// En utilisant la propriété de l'intégration par partie ///nous*

avons //// $I_{n+1} = [U(x).V(x)]_0^1 - \int_0^1 U'(x).V(x).dx$ *////ce qui nous donne alors* $I_{n+1} = [x^{n+1}.e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n.e^x.dx$ *///// par calcul on a* $[x^{n+1}(e^x)]_0^1 = e - (n+1)$ *///donc*

$I_{n+1} = e - (n+1)\int_0^1 x^n(e^x)dx$ *// Alors// on remarque que dans l'expression de* I_{n+1} *que nous nous venons d'avoir apparaît* $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ *///Donc en conclusion//pour tout entier naturel* n *//* $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ *////*

Verbatim de V001 pour la question 3 *Réf : V001-S-2/24022008*

Troisième question////En déduire les valeurs de $I_{1,} I_2, I_3$ */ puis celle de* $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x.dx$ *///Pour déterminer* $I_{1,} I_2, I_3$ *///j'utilise la relation* $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ *en remplaçant n par 0/ 1/2//// Ce qui donne alors* $I_1 = e - 1I_0$ *//sachant que* $I_0 = e - 1$ *//on a* $I_1 = e - (e-1) = 1$ *///de la même manière on a* $I_2 = e - 2$ *et* $I_3 = -2e + 6$ *////En déduire les valeurs de* $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x.dx$ *///Alors////la fonction polynôme* $(x^3 + 2x^2)e^x$ *par un développent donne [silence]////* $(x^3 + 2x^2)e^x = (x^3e^x + 2x^2e^x)$ *////Alors l'intégrale est ///* $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x.dx = \int_0^1 (x^3e^x + 2x^2e^x)$ *///par conséquent avec les propriétés de la linéarité de l'intégrale je peux calculer I////Donc ///* $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x.dx = \int_0^1 x^3e^x.dx + 2\int_0^1 x^2e^x.dx$ *////Par contre//// sachant que* $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ *et* $I_3 = \int x^3(e^x)dx$

Alors $2\int x^2(e^x)dx = 2I_2$ *///En conclusion* $I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2)e^x.dx$ $\Rightarrow I = I_3 + 2I_2$ *///d'où* $I = -2e + 6 + 2(e-2) \Rightarrow I = 2$

E/ Séance V001 Suites & intégrale

Exercice 2 extrait du livre prép@Bac / collection Hatier 2000

Réf : V001-S-2/24022008

Exercice 2

On note I l'intervalle [0 ; 1]

1- a) Transformer la somme $1+x+x^2+x^3$ pour tout $x \neq 1$

b) Montrer que, pour tout $x \neq 1$, on a $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

2- a) Etudier les variations de la fonction numérique f définie sur I par : $f(x) = e^{-x}$

b) Etudier les variations de la fonction numérique g définie sur par : $g(x) = -1 + x + e^{-x}$

c) Etudier les variations de la fonction numérique h définie sur I par : $h(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + e^{-x}$

d) Montrer que, pour tout $x \neq 1$, on a les inégalités : $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$

3- a) Déduire un encadrement de e^{-x^2} pour x$\in I$.

b) En déduire que, pour tout $x \leq I$, $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$

4- Montrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x}.dx \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$, et donner une valeur approchée de l'intégrale à 3.10^{-2} près.

Verbatim de V001 pour la question 1a *Réf : V001-S-2/24022008*

Alors/////[silence]///hum//hum//hum//Question 1///On note I l'intervalle [0 ; 1]

*///**1a**//Transformer la somme* $1+x+x^2+x^3$ *pour tout* $x \neq 1$*////Bon/// Je peux dire que///*$1.x^0 = 1$*//*$1.x^1 = x$*//*$1.x^2 = x^2$*///*$1.x^3 = x^3$*/// Donc si je fais la somme cela donne* $1+x+x^2+x^3$ *// C'est donc la somme de quatre termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme* 1 *et surtout de raison* $q = x$*/// ce qui donne* $V_n = V_p.(q)^{n-p}$*////*$V_p = 1$ $q = x$*///Humm //*$S_4 = 1.\dfrac{1-x^4}{1-x}$*//c'est quoi ça/// non je suis bête///* $\forall x \neq 1$ *donc c'est bon///Donc en utilisant la formule somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme* $V_p = 1$ *et de raison* $q = x$*// on a* $S_4 = 1.\dfrac{1-x^4}{1-x}$

d'où $1+x+x^2+x^3 = 1.\dfrac{1-x^4}{1-x}$

Verbatim de V001 pour la question 1b *Réf : V001-S-2/24022008*

Question b/// Montrer que, pour tout $x \neq 1$*//on a* $\dfrac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \dfrac{1}{1+x}$*//*

[silence]///Bon//En rendant au même dénominateur le second membre//

$$x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{(x^3 - x^2 + x - 1)(1+x) + 1}{1+x} =$$

$$\frac{x^3 + x^4 - x^2 - x^3 + x + x^2 - 1 - x + 1}{1+x}$$ *Ce qui donne* $$\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

Verbatim de V001 pour la question 2a *Réf : V001-S-2/24022008*

2b// *Etudier les variations de la fonction numérique* g *définie sur I par :* $g(x)=-1+x+e^{-x}$ *///Alors// La fonction* $g(x)=-1+x+e^{-x}$ *définie sur I admet pour fonction dérivée* g' *définie par* $g'(x)=1-e^{-x}$ */// Le signe de la fonction dérivée* g' $0\leq x\leq 1$*///*$-1\leq -x\leq 0$ *///*$e^{-1}\leq e^{-x}\leq 1$ *Car* e^{x} *est une fonction croissant donc* $-1\leq -e^{-x}\leq -e^{-1}$*/// en ajoutant +1 à chaque membre de l'inégalité on a* $0\leq 1-e^{-x}\leq -e^{-1}+1$*/// La fonction dérivée est alors strictement positive sur] 0 ; 1[//donc La fonction* $g(x)=-1+x+e^{-x}$ *est donc croissante///J'ai une autre méthode pour trouver le signe de la fonction dérivée* $g'(x)=1-e^{-x}$ *// pour ce faire//je trace la courbe de la dérivée et je regarde si la représentation graphique de la dérivée est dans les ordonnées positives sur l'intervalle I.*

Verbatim de V001 pour la question 2c *Réf : V001-S-2/24022008*

2-c) *Etudier les variations de la fonction numérique* h *définie sur I par :* $h(x)=-1+x-\frac{x^{2}}{2}+e^{-x}$ *///Alors//la dérivée de* h *est* $h'(x)=1-x-e^{-x}$ $\forall x\in I$ *////Alors la variation de* h *///*$h'(x)=-g(x)$ *donc* $h=-g$ *//donc* h *est strictement décroissante sur I.*

Verbatim de V001 pour la question 2d *Réf : V001-S-2/24022008*

2d///*Montrer que, pour tout* $x\neq 1$*, on a les inégalités :*$1-x\leq e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^{2}}{2}$ *///Alors [silence]//* g *étant croissante sur I [réponse 2b] j'en déduis que* $-1+x+e^{-x}\geq 0$ *////*h *étant décroissante sur I ////*$h(1)\leq h(x)\leq h(0)$ *avec* h *(0)=0///donc//// pour tout* $x\in I$*,* $h(x)\leq 0$*//Il s'ensuit que pour tout de I*$-1+x-\frac{x^{2}}{2}+e^{-x}\leq 0$ *donc* $e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^{2}}{2}$*/// Pour tout réel de I //*$g(0)\leq g(x)\leq g(1)$ *avec* $g(0)=0$ *////alors* $g(x)\geq 0$*///d'où* $-1+x+e^{-x}\geq 0$ */// En conclusion* $\forall x\in I$ *///*$1-x\leq e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^{2}}{2}$.

Verbatim de V001 pour la question 3a *Réf : V001-S-2/24022008*

***3a**///Déduire un encadrement de e^{-x^2} pour $x \in I$ ///Alors// [silence]// hum// regarde toute sa production depuis le début de l'exercice////Alors Pour tout $x \in I$, $x^2 \in I$, je peux donc appliquer le résultat précédent en remplaçant x par x^2 //// ce qui donne*

$1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$ *///*

Verbatim de V001 pour la question 3b *Réf : V001-S-2/24022008*

***3b**///En déduire que, pour tout $x \leq I$, $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$ //Pour tout $x \in I$, $(x+1) \in I$, ///alors en divisant par $(x+1)$ ///On a //*

$\frac{1-x^2}{1+x} \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1 - x^2 + \frac{x^4}{2}}{1+x}$ *///* $\frac{(1+x)(1-x)}{1+x} \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{(1+x)(1-x)}{1+x} + \frac{x^4}{2(1+x)}$

Par simplification de $x+1$ on a ///$1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$

Verbatim de V001 pour la question 4 *Réf : V001-S-2/24022008*

Quatrième question////Montrer que $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x}.dx \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$ //et donner une valeur approchée de l'intégrale à 3.10^{-2} près//Alors///bon//De l'inégalité précédente $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$ et grâce aux propriétés de l'intégration je peux écrire alors ///$\int_0^1 (1-x)dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}.dx \leq \int_0^1 \left[1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}\right] dx$

D'après la réponse de la question1 $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

On peut écrire// $\int_0^1 (1-x)dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}.dx \leq \int_0^1 \left[1 - x + \frac{1}{2}(x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}\right]dx$ *//Ce qui donne avec les primitives //*

$$\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}.dx \leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2(1+x)}\right]dx$$ */*

////// $\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}.dx \leq \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 dx$ *///*

[silence///observel'expression/// pend la calcultrice]///// ce qui donne

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx \leq \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$$

Avec une valeur approchée de l'intégrale à 3.10^{-2} *près est sensiblement égale à 0,52*

Verbatim de V001 pour la question 4c *Réf : V001-S-2/24022008*

4c///Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(I_n)$ *////Alors//on sait que* $I_n \geq 0$ *//// donc* $0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{(n+1)}$ *en plus* $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$ *//d'où* $\lim_{n\to+\infty}(I_n) =$ *0*

2/ Entretien de V001 après les séances d'observations d'études

Réf : S-5/18052008

Verbatim de V001

O////Est-ce que vous pouvez nous parler de votre organisation de travail mathématique ou le fonctionnement de vos recherches personnelles mathématiques étudiées ou non en classe////

V001////Alors au niveau de l'organisation de mon travail////

O////Oui///l'organisation de votre travail personnel en mathématiques et son fonctionnement/////Comment vous travaillez les maths////

V001 ///Alors///[Silence] humm////

////D'abord je commence par ma position en classe////c'est-à-dire que je me place devant///le plus près du bureau du prof et surtout du tableau afin d'être éloignée des diverses sources de bruit et déconcentration que peut causer certains élèves et de ne pas avoir envie de discuter avec certains voisins pendant séances de cours////En plus///le fait d'être plus près du tableau////au moins j'entends bien le prof et je peux suivre correctement////Ensuite// j'écoute bien et je suis les explications///que ce soit à l'orale ou à l'écrit/////

V001////Lorsque le prof fait ses exercices [explication orale]/// je suis son explication et j'attends la fin avant de recopier/// une fois que j'ai compris/// Et si je n'ai pas compris//// je n'hésite pas à lui poser des questions de suite/// sinon j'attends qu'il m'explique avant de recopier////Des fois l'explication est légère [je reprends à la maison]///Je recopie rarement les corrigés des exercices effectué par le professeur en classe//// en séances de cours/// je cherche simplement à comprendre les notions étudiées////Bon je recopie la leçon//mais pas toujours //Des fois les explications sont légères/// Dans de tel cas je complète avec mes recherches personnelles dans les livres////C'est la première phase de mon fonctionnement///

V001////Ensuite chez moi///je ne me limite pas dans le temps pour travailler//parce que se limiter dans le temps//des fois c'est bâcler certains points et passer à côté de nombreuses choses qui peuvent nous faire rater des devoirs ou des examens/// Ce qui fait///que je mets le temps qu'il faut pour comprendre//Je travaille un peu tous les jours// une question///un exercice ou des exercices//Surtout je ne me mets pas à travailler la veille d'un devoir///pour faire des exercices parce que cela entraîne une surcharge de travail et de stress///En plus// je risque de tout louper par manque de préparation///Donc tous les jours je travaille. D'ailleurs///

D'ailleurs///j'ai d'ailleurs de nombreux livres que j'ai achetés en début d'année par rapport au programme////Je fais en plus des exercices du prof/// des exercices dans mes livres en fonction des leçons qu'on a étudié en classe///Je regarde aussi les leçons dans d'autres livres et sur Internet aussi/// Cela m'aide beaucoup// Je ne regarde pas des livres ou des *formules///Je cherche à mieux comprendre les choses///Après tout/// le prof utilise aussi de nombreux livres de mathématiques/// Des fois les explications sont légères/// Dans de tel cas je complète avec mes recherches personnelles dans les livres////*

V001///Des fois///dans mon travail personnel/// mes parents//disons mon père surtout// lorsque cela ne le dépasse pas// m'aide beaucoup en cas de difficultés/// de grosses hein//[rire] lorsque je ne peux pas voir le prof pour m'expliquer ou lui poser des questions//

O///Et pourquoi vous ne pouvez pas aller voir le prof///

V001///Je ne peux le voir les week-ends par exemple///Des fois// quand je demande il m'explique/// Il dit que j'ai un très bon niveau///mais moi// je travaille beaucoup pour comprendre les choses/////V001//Bon//// Je ne connais pas tout///Quand je fais mes exercices à la maison// il m'arrive de rencontrer des difficultés. (Rire). Pas souvent quand même/// Mais en cas de grosse difficulté sur des choses qui dépassent le niveau de la classe et le niveau des exercices qui sont souvent donnés en classe ou dans le livre//Mes parents m'aident en me payant des cours de maths à la maison avec un autre prof qui m'explique et après je reprends avec mes livres//les anciens manuels que mon m'a donné et sur internet aussi//

V001///vous savez// Je fais/// je travaille beaucoup d'exercice///Je suis en terminale S//Les mathématiques sont importantes//donc je fais les exercices donnés par le professeur///Je fais surtout d'autres exercices en plus dans d'autres livres// sur des sites internet des professeurs de mathématiques///j'ai compris que entre les leçon il y a des relations//Je ne dis pas que mon professeur n'est pas bon//Je travaille beaucoup[silence]// C'est le seul moyen pour moi d'apprendre et surtout de comprendre le fonctionnement des notions étudiées en classe avec le professeur/// Le cours en classe est clair[rire]///précis et concis/// mais c'est un résumé///il y a des sous-entendus de notions/// c'est une sorte de maillons de chaînes qui ne dit pas son nom//// Donc///Je fais des recherches internet et dans d'autres livres de mathématiques en plus de celui de la classe///

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique autonome ? Et pourquoi est- t- elle importante?

///Les mathématiques sont importantes///je travaille beaucoup d'exercices////c'est le seul moyen pour moi d'apprendre et surtout de comprendre le fonctionnement des notions étudiées en classe avec mon professeur////Le cours en classe est clair/// précis et concis///mais c'est un résumé///Il y a beaucoup de sous-entendus de notions/////c'est une sorte de maillon de chaines qui ne dit pas son nom/////je fais des recherches sur internet et dans d'autres livres de mathématiques en plus de celui de la classe pour comprendre tout ce qui est fait en classe avec mon professeur////Surtout pour apprendre/// Cela permet d'apprendre////

Pourquoi croyez-vous que l'étude autonome est obligatoire pour un élève de la classe de terminale scientifique S ?

///En étude autonome par des exercices, j'apprends comment construire des liens mathématiques/////Je suis contente de mon travail car j'ai des bonnes notes///c'est aussi parce que je vais faire une prépa et après une école d'ingénieur////j'utilise beaucoup de livre et je découvre dans mes livres des présentations de notions et des démonstrations qui sont plus

riches que celle exposées dans les séances de cours en classe//Pour moi l'étude autonome est l'un des moyens ou le seul par lequel j'apprends vraiment les mathématiques/////Le cours avec le professeur est bien mais c'est un résumé dans le quel cohabite beaucoup de choses//// Donc pour comprendre tout cela il faut faire des exercices et des recherches///Tous les professeurs et mes parents disent qu'il faut étudier///Je pense qu'il nous demandent ce que je fais/// Tout ce que je fais, m'aide énormément et je travaille beaucoup de choses plus que ce qu'on a vu en classe. Tout cela, me permet de réussir les exercices. Je dois continuer comme ça. J'apprends beaucoup de chose////A titre d'exemple je vous montre ce j'ai trouvé dans un livre sur les fonctions de répartition et de densité avec lesquelles j'ai compris les lois de probabilités sur les variables continues////Regardé///j'ai trouvé ceci dans un livre de mathématique terminale [C///V.LESPINARD collection ANDRE DESVIGNE//TOME 2///] que mon père a utilisé lorsqu'il était en classe de terminale ///

.

Regardez///j'ai trouvé ceci dans un livre de mathématique terminale C///V.LESPINARD collection ANDRE DESVIGNE//TOME 2/// que mon père a utilisé lorsqu'il était en classe de terminale ///

s'appelle la **fonction cumulative** (ou de **répartition) correspondant à la variable aléatoire** X.

Dans l'exemple précédent on aura :

$$p'(X < x) = \begin{cases} x \leqslant 1 & 0 \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 & \frac{1}{6} \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 & \frac{1}{3} \\ 4 < x & 1 \end{cases}$$

2-05. DÉFINITIONS.

a) **La distribution** f **associée à une variable aléatoire** X**, appliquant** (Ω, p) **dans** $\mathbb{R}$ **est une application de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$ **telle que** $x \to f(x) = p'(X = x)$.
f s'appelle aussi **loi de probabilité**.

b) La **fonction de répartition** ou **fonction cumulative** F **associée à une variable aléatoire** X **appliquant** (Ω, p) **dans** $\mathbb{R}$ **est une application de** $\mathbb{R}$ **dans** $\mathbb{R}$ **telle que :**

$$x \to F(x) = p'(X < x).$$

c) **REMARQUE.** La fonction de répartition est à rapprocher de la **fréquence cumulée** en statistique.

-06. PROPRIÉTÉ.

On a :

$$(X < x) = \{\alpha, \alpha \in \Omega', \alpha < x\}.$$

De même : $(X > y) = \{\alpha, \alpha \in \Omega', \alpha > y\}$.

Or :

$$\{\alpha, \alpha \in \Omega', \alpha < x\} \cap \{\alpha, \alpha \in \Omega', \alpha > y\} = \{\alpha, \alpha \in \Omega', y < \alpha < x\}$$

donc : $(X < x) \cap (X > y) = (y < X < x)$.

-07. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION DE RÉPARTITION.

Soit F une fonction de répartition. Si x_0 et $x_0 + h$ $(h > 0)$ sont deux nombres donnés, on peut écrire :

$$(X = x_0) \subset (x_0 \leqslant X < x_0 + h).$$

p **étant la probabilité** de Ω' univers image de Ω par la variable aléatoire X, on en déduit :

$$0 \leqslant p(X = x_0) = f(x_0) \leqslant p(x_0 \leqslant X < x_0 + h).$$

Or :
$p(x_0 \leqslant X < x_0 + h) = p(X < x_0 + h) - p(X < x_0) = F(x_0 + h) - F(x_0)$

donc : $\quad 0 \leqslant f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0) \quad (1)$

donc : $\quad x_0 + h > x_0 \iff F(x_0 + h) \geqslant F(x_0)$.

Une **fonction de répartition est non décroissante.**

2-08. CAS D'UNE FONCTION DE RÉPARTITION CONTINUE.

Supposons F continue sur $\mathbb{R}$.
Soient x_0 et $x_0 + h$ ($h > 0$) deux nombres donnés. La forme (1) s'écrit :

$$0 \leqslant f(x_0) \leqslant F(x_0 + h) - F(x_0).$$

Si h tend vers 0, F étant continue : $\lim\limits_{h \to 0} F(x_0 + h) = F(x_0)$ donc :

$$f(x_0) = p(X = x_0) = 0.$$

THÉORÈME. **Si une fonction de répartition est continue la probabilité pour qu'une variable aléatoire ait pour valeur un nombre x_0 est nulle.**

09. CONSÉQUENCE.

On peut **écrire** : $\quad (X \leqslant x) = (X < x) \cup (X = x)$.

Comme : $\quad (X < x) \cap (X = x) = \varnothing$

$\quad p(X \leqslant x) = p(X < x) + p(X = x)$.

Or : $\quad p(X = x) = 0$

donc : $\quad p(X \leqslant x) = p(X < x)$.

THÉORÈME. **Si une fonction de répartition est continue :**

$$p(X \leqslant x) = p(X < x).$$

10. DENSITÉ DE PROBABILITÉ.

Si F est dérivable, sa dérivée $F' = \varphi$ s'appelle la **densité de probabilité**. Si $x \in [a, b]$, on a $F(x) = \displaystyle\int_a^x F(t)\,dt$ avec $F(b) = 1$.

EXEMPLE I. **Considérons un dé à 6 faces et supposons que la variable aléatoire X associe à chaque face le nombre correspondant. Ecrire la fonction de répartition F.**

On a :

Prob $\{X < 1\} = 0$ $\qquad$ donc $F(x) = 0$ pour $x \leqslant 1$

Prob $\{X < 2\} = \frac{1}{6}$ | car $x = 1$ | $\qquad$ donc $F(x) = \frac{1}{6}$ pour $1 < x \leqslant 2$

Prob $\{ X < 3 \} = \frac{1}{3} \mid$ car $x = 1, x = 2 \mid$ donc $F(x) = \frac{1}{3}$ pour $2 < x \leqslant 3$

Prob $\{ X < 4 \} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ donc $F(x) = \frac{1}{2}$ pour $3 < x \leqslant 4$

(car $x = 1, x = 2, x = 3$).

Prob $\{ X < 5 \} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (car $x = 1, 2, 3, 4$) donc $F(x) = \frac{2}{3}$ pour $4 < x \leqslant 5$

Prob $\{ X < 6 \} = \frac{5}{6}$ (car $x = 1, 2, 3, 4, 5$) donc $F(x) = \frac{5}{6}$ pour $5 < x \leqslant 6$

Prob $\{ X < K \} = 1$ pour $K > 6$ donc $F(x) = 1$ pour $x > 6$.

La représentation graphique de la fonction de répartition est donnée par la figure 1.

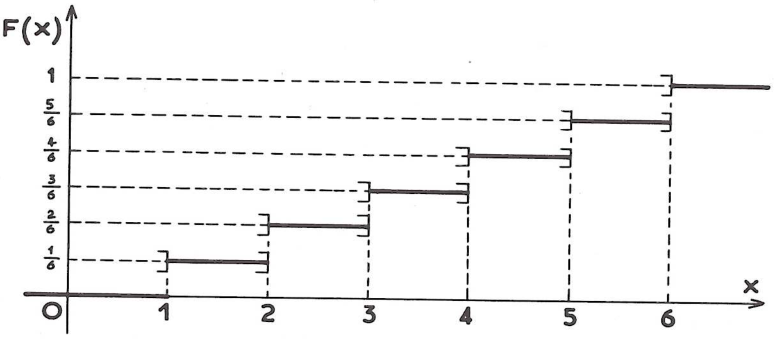


Figure 1.

2-11. EXEMPLE.

Supposons donnée la fonction de répartition :

$$F(x) = \frac{x^2}{40} \quad \text{si : } 0 \leqslant x \leqslant 4$$

$$F(x) = -\frac{x^2}{60} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \quad \text{si } 4 < x \leqslant 10 .$$

On constate que : $F(0) = 0, F(10) = -\frac{100}{60} + \frac{10}{3} - \frac{2}{3}$

$$= -\frac{5}{3} + \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = 1 .$$

Les dérivées sont respectivement, dans chaque intervalle :

$0 \leqslant x \leqslant 4,\ F'(x) = \frac{x}{20}$ positive,

$4 < x \leqslant 10,\ F'(x) = -\frac{x}{30} + \frac{1}{3}$, positive si : $-x + 10 > 0 \Leftrightarrow x < 10$.

On a le tableau :

x	0		4		10
$F(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{5}$	$\nearrow$	1
		+		+	

La densité de probabilité est $\varphi(x) = F'(x)$ soit :

$$\varphi(x) = \frac{x}{20} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 4$$

$$\varphi(x) = -\frac{x}{30} + \frac{1}{3} \text{ pour } 4 < x \leqslant 10\,.$$

Ce sont deux fonctions affines.
On peut dresser la représentation graphique (Fig. 2). Nous avons mis la représentation de $F(x)$ sous celle de $\varphi(x)$ comme nous l'avons indiqué en Statistique pour les deux courbes de fréquence et de fréquence cumulée.

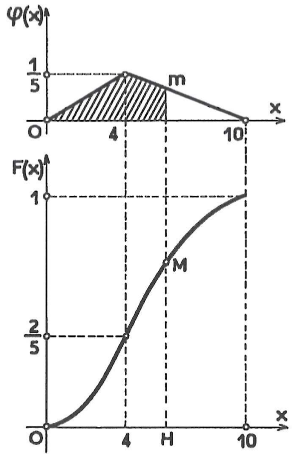


Figure 2.

2-12. AUTRE EXEMPLE.

Inversement, supposons donnée la formule donnant la densité de répartition φ :

$$\varphi(x) = \frac{x}{20} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 4$$

$$\varphi(x) = -\frac{x}{30} + \frac{1}{3} \text{ pour } 4 < x \leqslant 10\,.$$

Pour obtenir la loi de probabilité, on prend les primitives, mais en choisissant la constante pour que $F(0) = 0$ et $F(10) = 1$. Si :

$$0 \leqslant x \leqslant 4,\ F(x) = \frac{x^2}{40} + C\,.$$

On constate que $C = 0$:

$$4 < x \leqslant 10,\ F(x) = -\frac{x^2}{60} + \frac{x}{3} + K\,.$$

On constate que : $K = -\frac{2}{3}$.

-13. VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE. VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE.

DÉFINITION. Nous disons que la variable aléatoire est discrète lorsqu'elle ne prend pas toute valeur d'un segment $[a, b]$. Par exemple, dans le cas de l'exemple du § 2-10, la variable est **discrète**, alors que dans l'exemple des §§ 2-11 et 2-12 elle est **continue**.
Dans ce dernier cas, la fonction de répartition est en principe représentée par une intégrale :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

(on suppose que cette intégrale a un sens).

Si la densité de probabilité est $\varphi(x)$ lorsque la variable aléatoire : X est telle que $X(\Omega) = [a, b] \in [a, b]$ et si $\varphi(x) = 0$, $\forall x \notin [a, b]$. On a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt + \int_{a}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Or : $$\int_{-\infty}^{a} \varphi(t)\,dt = 0, \quad \text{donc} \quad F(x) = \int_{a}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

On a donc : $$\text{Prob}\{X < x\} = \int_{a}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

Si on considère la représentation graphique de f constituée par la courbe (C) (Fig. 3), $F(x)$ est l'expression de l'aire limitée par (C) Ox et les parallèles à Oy d'abscisses a et x.

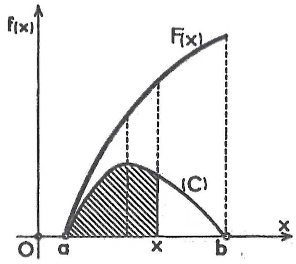


Figure 3.

On en déduit que :

$$\text{Prob}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,dt.$$

II. Couple de variables aléatoires réelles

2-14. DÉFINITION DE LA LOI DU COUPLE DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers probabilisé (Ω, p). Nous désignerons par $\Omega' = \{x_i\}$, de probabilité p'_i et $\Omega'' = \{y_j\}$, de probabilité p''_j les univers images $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
Considérons l'ensemble produit :

$$\begin{aligned}\Omega''' &= X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{(x_i, y_j)\} \\ &= (X(a_i) = x_i) \cap (Y(a_j) = y_j).\end{aligned}$$

///Dans un autre livre ///Collection fractale//Programme 2002//Bordas/V.U.E.F.-Paris 2002/ISNB :2.04.729577.7

Le cours

4 Lois continues

Soit des variables aléatoires prenant une infinité non dénombrable de valeurs réelles. Cela signifie que les valeurs de la variable ne peuvent être indexées par l'ensemble des entiers naturels. On les appelle des variables aléatoires **continues**.

1 Loi, espérance, variance et écart type

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X continue ne peut plus être définie par la probabilité d'obtenir chacune des valeurs de X, car celle-ci est nulle, mais, par la probabilité pour que X soit comprise entre deux valeurs distinctes.
On étudie uniquement les variables aléatoires continues dont la loi de probabilité P_X est déterminée par une fonction f. P_X est alors qualifiée de loi **continue**.

Définition 6

On appelle fonction **densité de probabilité** toute fonction f définie sur un intervalle $[\alpha\,;\beta]$ de $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
- f continue sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$;
- pour tout x de $[\alpha\,;\beta]$, $f(x) \geqslant 0$;
- $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = 1$ (L'aire de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = \beta$ est égale à 1).

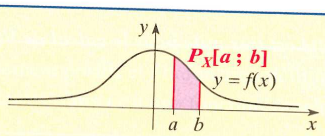
Remarque :
Lorsque f est définie sur un intervalle non borné, par exemple $[\alpha\,;+\infty[$, la condition portant sur l'aire sous la courbe de f s'écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_\alpha^x f(t)\mathrm{d}t = 1$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 3x^2$.
f est une fonction densité de probabilité sur $[0\,;1]$ car f est continue et positive sur $[0\,;1]$ et $\int_0^1 3x^2\mathrm{d}x = [x^3]_0^1 = 1$.

Définition 7

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction densité de probabilité définie sur I.
On dit que **la loi P_X de X admet f comme densité de probabilité** lorsque, pour tout intervalle $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$ inclus dans I, on a : $P_X([a\,;b]) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Le cours

Remarques :

• *On dit aussi que la variable aléatoire X suit la loi P_X de densité f.*

• *Soit $I = [\alpha ; \beta]$, alors $P_X(I) = 1$ car $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = 1$ et pour tout intervalle $[a ; b]$ inclus dans I, $0 \leqslant P_X([a ; b]) \leqslant 1$. En effet, pour tout x de I, $f(x) \geqslant 0$ et $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$.*

On retrouve des caractérisations analogues à celles des lois de probabilité discrètes.

• *Les événements à considérer pour une loi continue sont les intervalles et les réunions finies d'intervalles de I.*

• $P_X([a ; b]) = P_X([a ; b[) = P_X(]a ; b]) = P_X(]a ; b[)$.

On définit l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X de la façon suivante :

Définition 8

Soit X une variable aléatoire continue dont la loi admet une densité f définie sur un intervalle $[\alpha ; \beta]$ de $\mathbb{R}$.

$E(X) = \int_\alpha^\beta x f(x)\mathrm{d}x$, $V(X) = \int_\alpha^\beta (x - E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarque :

Lorsque f est définie sur un intervalle non borné, par exemple $[\alpha ; +\infty[$, $E(X)$ et $V(X)$ sont définies, sous réserve de l'existence des limites, par :

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^x t f(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{et } V(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^x (t - E(X))^2 f(t)\mathrm{d}t.$$

Lorsque les limites ne sont pas finies ou n'existent pas, X n'admet pas d'espérance et donc pas de variance.

Propriété 8

Soit X une variable aléatoire continue dont la loi admet une densité f définie sur un intervalle $[\alpha ; \beta]$ de $\mathbb{R}$, on a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_\alpha^\beta x^2 f(x)\mathrm{d}x - [E(X)]^2.$$

Remarque :

Cette propriété est très utile pour le calcul de V(X).

Voir demonstration dans l'exercice 61.

Le cours

2 Loi uniforme sur [0 ; 1]

La fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 1$ pour tout x de [0 ; 1] est une fonction densité de probabilité.

Définition 9

La loi de probabilité qui admet la fonction f constante égale à 1 sur [0 ; 1] comme densité de probabilité, est appelée **loi uniforme** sur [0 ; 1].

Remarque :

Soit [a ; b] un intervalle inclus dans [0 ; 1] et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0 ; 1], alors $P_X([a\,;b]) = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = b - a$.

EXEMPLE

La concentration d'une substance varie entre 0 mg/L et 1 mg/L. La machine mesurant celle-ci est déréglée et donne au hasard un nombre compris entre 0 et 1.
Les résultats affichés par la machine sont modélisés par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0 ; 1].
Ainsi, la probabilité que la machine donne un résultat compris entre 0,5 mg/L et 0,75 mg/L est : $0{,}75 - 0{,}5 = 0{,}25$.

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0 ; 1], on a :

$$E(X) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X) = \frac{1}{12}.$$

> ***Démonstration***

Par définition, on a :

- $E(X) = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$.
- $V(X) = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}[x^3]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

3 Loi exponentielle

Propriété 10

Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, alors f est une fonction densité de probabilité.

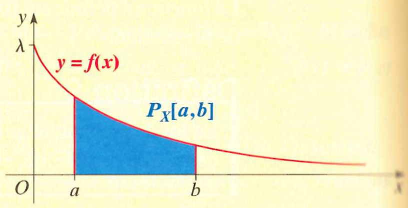
Le cours

> *Démonstration*

f est continue sur $[0\,;+\infty[$; elle est aussi positive sur $[0\,;+\infty[$ car $\lambda > 0$ et la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

Il reste à montrer que l'aire sous la courbe ci-contre est bien égale à 1, c'est-à-dire

que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$.



$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = [-\mathrm{e}^{-\lambda t}]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$.

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$. On conclut : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$.

Il est alors possible de définir la loi de probabilité de densité f.

Définition 10

Soit λ un réel strictement positif.
La loi de probabilité qui admet pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$, est appelée **loi exponentielle de paramètre** λ.

Remarque :

• *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, alors*
$P_X([a\,;b]) = \int_a^b f(t)\,dt = [-\mathrm{e}^{-\lambda t}]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.

EXEMPLE

La durée de vie exprimée en semaines d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 0,002. La probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure à 200 semaines est : $\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-0,4} = 1 - \mathrm{e}^{-0,4} \approx 0,33$.

Propriété 11

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$), alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Remarque : $E(X) = \sigma(X)$.

➠ Les calculs de $E(X)$ et $V(X)$ sont proposés à l'exercice 65.

EXEMPLE

En utilisant l'exemple précédent, il vient $E(X) = \sigma(X) = 500$.
La durée moyenne de vie d'un composant est de 500 semaines avec un écart type de 500 semaines.

Les recherches de V001 montrent la présence d'un objet manquant dans le programme des classes actuelles de terminale scientifique: La fonction de répartition**.** Objet à partir de laquelle est définie la loi de probabilité de densité puis la loi exponentielle.

ANNEXE III : F001

« F001 » est une élève de 16 ans révolus qui étudie beaucoup les mathématiques à la maison avec des exercices donnés en classe par son professeur et d'autres recherchés de sa propre initiative dans ses livres de maths. Fille ainée de quatre enfants (un jeune frère en classe de seconde GT, deux frères aînés) issue d'une famille composée d'un père cadre et d'une mère d'ouvrière dans le BTP (niveau d'étude BEP pour la mère), elle fait beaucoup de recherches mathématiques hors classe dans ses livres et sur internet, réalise ses devoirs de maison donnés par son professeur en plus d'autres exercices pris dans ses livres de maths. Elle ne fait jamais des fiches de formules, elle apprend en faisant les exercices. Ne pouvant pas compter sur ses parents et son entourage en cas de besoin, elle prend un cours particulier lorsque le besoin se fait sentir, avec l'aide financière des parents Elle pose des questions, participe en classe lorsqu'elle est sollicitée par son enseignant ou un autre élève ; elle a de bonnes notes entre 14 et 17 voire 20 sur 20 aux évaluations[389].

1/ Séances d'observations de F001

A/ Exercice extrait du livre de maths collection π xel /Edition 2006/Bordas/

Exercice : Réf : F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des accidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètre que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un accident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par : $P(D \leq A) = \int_0^A \frac{1}{82} e^{\frac{-1}{82}} dx........pour...A \in [0;+\infty[$

Les résultats numériques seront arrondis au millième.

1- Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit : a) comprise entre 50 et 100km ; b) supérieure à 300km

2- Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

389 Sources: les bulletins scolaires

3- Calculer $I(A)=\int_0^A \frac{1}{82}xe^{\frac{-1}{82}}dx.....où..A..\in IR_+$

4- Calculer la limite de $I(A).....lorsque...A...tend..vers..+\infty$. Que représente cette limite ?

5- L'entreprise possède N_o autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{82}$; d étant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

5.1- Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètre N_0 et $e^{-\lambda d}$.

5.2- Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

Des extraits d'épisodes utilisés pages 174-186

Réf : F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

Verbatim de F001 pour la question n°1

////c'est un exo de probabilité avec la loi exponentielle////alors [silence]///[observateur demande///lis tout l'exercice]/// ////alors // question n°1 / on demande de calculer / hum // premièrement / calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit (Silence)//// La probabilité que la distance D soit comprise entre 50 et 100km//// a) comprise entre 50 et 100km / alors // humm // d'abord, on commence par la question a // donc /////[silence]//// C'est-à-dire que ///// $D\in[50;100]$ $p(50\le D\le 100)$ */// cela donne alors ///////[silence]///// Qui est égale à :* $\int_{50}^{100}\frac{1}{82}e^{\frac{-x}{82}}dx$ *hum // primitive //*
/

$$// =\left[-e^{\frac{-x}{82}}\right]_{50}^{100}=e^{\frac{-100}{82}}-\left(-e^{\frac{-50}{82}}\right)$$

donc ////avec la calculatrice on a le résultat arrondi//// au millième/// ≈ 0,24

Question//b///

*b/////***c***alculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit* *supérieure à 300km // alors///// [silence]/////donc// [silence]////qui est égale à [silence]///// C'est la probabilité////* $p(D \geq 300)$ *////* $P(D \geq 300) = 1 - P(D \leq 300) = 1 - \int_0^{300} \frac{1}{82} e^{\frac{-x}{82}} dx$ *///Ce qui donne///[silence]////* $1 - \left[-e^{\frac{-x}{82}} \right]_0^{300}$ *//// ce qui donne/////* $= e^{\frac{-300}{82}}$ *//// donc ce qui donne avec la calculatrice///* $= 0{,}026$ *////*

Verbatim de F001 pour la question n°2

F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

////ensuite la question 2 // deuxièmement / sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident///// quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres///// [silence]//// /////alors / hum [silence] (relit la question)//// donc on va chercher à calculer la probabilité conditionnelle//// $P_{D \geq 350}(D \geq 375)$ *//// D'après les propriétés de la loi de durée de vie sans vieillissement, on sait que la probabilité*

$P_{D \geq 350}(D \geq 375) = P(D \geq 25)$ *//////////donc [silence]//// /////ce qui donne//// [silence]//////*

$P(D \geq 25) = 1 - \int_0^{25} \frac{1}{82} e^{\frac{-t}{82}} dt$ */////Ce qui donne ///* $1 - \left[-e^{\frac{-1}{82}t} \right]_0^{25}$ *//////donc[silence]////* $= e^{\frac{-25}{82}}$ *=/////*

Verbatim de F001 pour la question n°3

F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

////on passe à la question 3 /troisièmement / calculer $I(A) = \int_0^{A} \frac{1}{82} x e^{\frac{-1}{82}} dx.....où..A.. \in IR_+$

////bon / il s'agit utilisation d'une intégration par parties // la fonction a intégrer est un produit de deux fonctions / un monôme et l'autre exponentielle // donc / posons I

= [0 ; A] ////// rappelons que f dérivable (respectivement continue) sur I si f est dérivable////(respectivement continue) sur]0, A [// f est dérivable (respectivement continue) à droite en 0 et à gauche en A // par ailleurs / si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$ // $\forall\ x \in I.(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ //// par transposition on obtient/////// $u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$ de plus // si u et v sont dérivables sur I // elles sont donc continues sur I / ainsi u / v / u' et v' sont continues sur I donc u'v // uv' et par conséquent (uv)' sont continues sur I // ces trois fonctions possèdent donc des primitives sur I /// on peut donc intégrer l'égalité///// $u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$ $\forall x \in [0; A]$///// On peut donc intégrer l'égalité $u'(x)v(x) = (uv)'(x) - u(x)v'(x)$ $\forall x \in [0; A]$ a $\int_0^A u.'(x).v(x)dx = \int_0^A [(uv)'(x) - u(x).v.'(x)]dx$ ///

/////En utilisant la linéarité de l'intégrale on a $\int_0^A u.'(x)v(x)dx = \int_0^A (uv)'dx - \int_0^A u(x).v.'(x)dx$

////Or////r une primitive de (uv)' = [uv] donc on a $\int_0^A u.'(x).v(x)dx = [uv]_0^A - \int_0^A u(x).v.'(x)dx$

///// On pose : $u'(x) = \frac{1}{82} e^{\frac{-x}{82}}$ /////Alors sa primitive est $u(x) = -e^{\frac{-x}{82}}$

////v(x)=x alors sa dérivée v'(x)=1/////De plus //////

/////Les fonctions $u,..u',..v,..et..v'$ sont continues sur [0 ; A]// $I(A) = [uv]_0^A - \int_0^A v'u$ /////

$I(A) = \left[-xe^{\frac{-x}{82}} \right]_0^A - \int_0^A -e^{\frac{-x}{82}} dx$ ///// Ce conduit à ///// $I(A) = \left[-xe^{\frac{-x}{82}} \right]_0^A - \int_0^A -e^{\frac{-x}{82}} dx$ ////

//// $I(A) = -Ae^{\frac{-A}{82}} + \left[-82e^{\frac{-x}{82}} \right]_0^A$ ////Donc//// $I(A) = -Ae^{\frac{-A}{82}} - 82e^{\frac{-A}{82}} + 82$ /////

Verbatim de F001 pour la question n°4

F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

*////la question 4 // quatrièmement **c**alculer la limite de I(A) // lorsque // A // tend vers / +∞ // que représente cette limite / nous allons déterminer la limite de I(A) // alors qu'est ce je connais//////[silence_]////_ D'après la leçon sur les exponentielles///on sait que////* $\lim\limits_{X\to-\infty}(e^X)=0$ *///On pose* $X=\dfrac{-A}{82}$ *//////oui ////[silence]// ///alors////* $\lim\limits_{A\to+\infty}(\dfrac{-A}{82})=-\infty$ *///alors///////donc//// /alors par composition on a////*

///donc //// $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{\frac{-A}{82}}=0$ *///et //* $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\dfrac{-A}{82}e^{\frac{-A}{82}}\right)=\lim\limits_{X\to-\infty}\left(Xe^X\right)=0$ *///////donc par addition des différentes limites on a/////* $\lim\limits_{A\to+\infty}\left(-Ae^{\frac{-A}{82}}\right)=0$ *////On a ///* $\lim\limits_{A\to+\infty}[I(A)]=82$ */////*

Verbatim de F001 pour la question n°5

F001-S5/14052008/Probabilité/loi continue/loi exponentielle

/////on passe maintenant à la question 5 / cinquièmement // l'entreprise possède N_0 *autocars / les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle/////de paramètre* $\lambda=\dfrac{1}{82}$ *// d étant un réel positif / on note* X_d *la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres [silence]*

5a//// montrer que X_d *suit une loi binomiale de paramètre* N_0 *et* $e^{-\lambda d}$ */////[silence]////*

///L'expérience aléatoire revient à répéter de façon indépendante N_0 *fois l'expérience à deux issues possibles ////soit « il y a incident avant le kilomètre d » ou soit « il n'y a pas d'incident avant le kilomètre d »////////*

Ainsi X_d *///// qui compte le nombre d'incidents avant le kilomètre d, suit une loi binomiale de paramètres* N_0 *et* $P(D\geq d)$ *//////////alors // humm mm [silence]* *on sait que [silence]//////* $P(D \geq d) = 1 - p(D \leq d) = 1 - \int_0^d \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx$ *////donc [silence]//// on calcule la probabilité p [silence]////donc [silence]//////////* $1 - p(D \leq d) = 1 - \int_0^d \frac{1}{82} e^{-\frac{x}{82}} dx = 1 - \left[-e^{\frac{-x}{82}} \right]_0^d = e^{\frac{-d}{82}} = e^{-\lambda d}$ */////Donc*

// X_d *suit une loi binomiale de paramètre* N_0 *et* $p(D \geq d) = e^{-\lambda d}$ */////*

////la dernière question // cinquièmement b)/////5b///donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres // on sait que X_d *suit une loi binomiale [silence]///// ////donc [silence]//// /////D'après la leçon sur la loi binomiale, le nombre moyen d'autocars n'ayant pas subi aucun accident après avoir parcouru d kilomètres correspond à l'espérance mathématique de* X_d *Or* X_d */////qui compte le nombre d'incidents avant le kilomètre d/////suit une loi binomiale de paramètres////* N_0 *et* $e^{-\lambda d}$ *////////donc [silence]///// //////Donc//// le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun accident après avoir parcouru d kilomètre est ////* $E(X_d) = N_0 . e^{-\lambda d}$ *////*

B/ Séance d'observation sur les nombres complexes

Nombre complexe & interprétation géométrique. Des exercices qui permettent de faire le lien entre les nombres et la géométrie

Nous avons donné cet exercice parce que les différentes questions exigent de faire le lien entre les nombres complexes et la géométrie. Et, c'est cette capacité de mise en relation des liens de filiations entre la géométrie et les nombres complexes, qui nécessite, des réactivations et des transformations des connaissances sur les vecteurs, modules, arguments de nombres complexes, conditions d'existence et natures d'un triangle et d'un parallélogramme (connaissances anciennes et nouvelles)

Exercice extrait du livre de maths 100% maths classe de terminale S / Edition Hatier 2006

Exercice 1 **:** Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on note A le point d'affixe 4 puis M et N les points d'affixes respectifs $w = 3 + i\sqrt{3}$.........$\overline{w} = 3 - i\sqrt{3}$

1- Calculer le module et un argument de w. En déduire le module et un argument de $\overline{w}$.

2-On considère le nombre complexe $w-4$.

Ecrire ce nombre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

3-Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, après avoir montré que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$e à 2kπ près avec k entier relatif.

Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{w}{w-4}$.

En déduire le module et un argument de $\frac{\overline{w}}{\overline{w-4}}$.

En interprétant géométriquement les résultats de la question précédente, démontré que les points O, A, M et N sont sur un même cercle dont on précisera les caractéristiques

Extraits d'épisodes utilisés pages188-196

Verbatim de F001 pour la question n°1

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

//bon [silence]///nombres complexes //L'observateur/ « lis l'énoncé entièrement »//bon // ///question n°1 // premièrement (murmure) calculer le module et un argument de w // en déduire le module et un argument de $\overline{w}$ ////_alors [silence]////donc on a [silence]//ce qui donne [silence]////module et argument du nombre complexe w/// $|w|=|\ 3+i\sqrt{3}\ |=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}$ */// Par suite/// on sait qu'un nombre complexe et son conjugué ont le même module // en plus//////l'argument du nombre complexe conjugué* $\overline{w}=-\arg(w)$ *[silence]*

$$w = 3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)$$

$$D'où \{|w| = 2\sqrt{3}...et.... \arg(w) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$Comme\ |w| = |\overline{w}|...et... \arg(\overline{w}) = -\arg(w)[2\pi]$$

$$Alors\ ..on..a.:..|\overline{w}| = 2\sqrt{3}..et... \arg(\overline{w}) = -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

////On a donc //// $|w| = 2\sqrt{3}$ *et* $\arg(w)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$ */////* $|\overline{w}| = 2\sqrt{3}$ *et* $\arg(\overline{w})=\frac{-\pi}{6}[2\pi]$ *////*

Verbatim de F001 pour la question n°2

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

on passe à la question n°2 / alors // qu'est ce qu'on demande de trouver / question 2///on considère le nombre complexe $w-4$ /// // écrire ce nombre sous forme algébrique//// puis sous forme trigonométrique // bon/////[silence]/// On va faire/// $w-4=3+i\sqrt{3}-4$

//Ce qui donne // $w-4=-1+i\sqrt{3}$ ////donc la forme algébrique de /// $w-4..est..-1+i\sqrt{3}$ ////or le module de $w-4$ est donc [silence]///// $|w-4|=\left|-1+i\sqrt{3}\right|=2$ /// ///donc la forme trigonométrique de $w-4$ est [silence]/////

-1+ $i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ////// $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ /////C'est bon /////

Verbatim de F001 pour la question n°3

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

////On passe maintenant à la question 3 // On nous demande de faire quoi [silence]

d'abord la question/////montrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$*/////L'élève regarde l'expression [silence]/////par analogie de la propriété algébrique du logarithme népérien qui stipule que* $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$ *//// on peut écrire que ////// Les deux nombres complexes étant différents de zéro /////donc/////* $\arg(\frac{z}{z'})+\arg(z.')=\arg(z)[2\pi]$

/////on peut écrire que///// On peut écrire que//////// $\arg(\frac{z}{z'})+\arg(z.')=\arg(\frac{z}{z.'}\times z.')[2\pi]$

//////on sait aussi que////// On sait que $\frac{z}{z.'}\times z.'=z$ *///////////en changeant de membre à un terme /////on a///// Donc on a changement de membre///////ce qui donne enfin la propriété/////// [silence]////////* $\arg(\frac{z}{z.'})=\arg(z)-\arg(z.')$ */// /////calculons le module et un argument du nombre complexe* $\frac{w}{w-4}$ *// et déduisons en le module et un argument*

de $\frac{\overline{w}}{\overline{w}-4}$ *[silence] l'élève consulte son ouvrage de classe////// D'après les propriétés sur les modules et les arguments de nombres complexes, on sait que///////*

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *avec* $z \neq 0$ *et* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$*// <u>alors</u> / hummmm // / module d'un quotient de nombre complexe, argument d'un quotient/////[silence]/////*

<u>////bon</u>//////on sait que (relit les résultats antérieurs)//// $|w| = |\,3+i\sqrt{3}\,| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

///Donc ///// $|w-4| = |-1+i\sqrt{3}| = 2$ */////alors on a le module de* $\frac{w}{w-4}$ *//// On obtient*

$\left|\frac{w}{w-4}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = 2$ *//// en plus* $\arg(w) = \frac{\pi}{6}.,\arg(w-4) = \frac{2\pi}{3}$ */ on a donc [silence]////*

/// $\arg\left(\frac{w}{w-4}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{2}[2\pi]$ */// Comme* $\frac{\overline{w}}{\overline{w}-4} = \left(\overline{\frac{w}{w-4}}\right)$ */////Alors // :On sait que/// que* $|\overline{w}| = 2\sqrt{3}..|\overline{w}-4| = |\overline{w-4}| = 2$ */////et///* $\arg(\overline{w}) = -\arg(w)[2\pi]$ $\arg(\overline{w}-4) = \arg(\overline{w-4}) = \frac{2\pi}{3}$

/////Donc//// $\left|\frac{\overline{w}}{\overline{w}-4}\right| = \sqrt{3}..et..\arg\left(\frac{\overline{w}}{\overline{w}-4}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ */////*

Verbatim de F001 pour la question n°4

Réf : F001-S3/23032008/Nombre complexe

////On passe à la question 4 ////Bon///Une interprétation géométrique//// En///interprétant géométriquement les résultats de la question précédente, démontré que les points O// A// M et N sont sur un même cercle dont précisera les caractéristiques// Alors///On sait que /// $Comme..\arg\left(\frac{w}{w-4}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *////Donc //On en déduit que* $\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{OM}\right) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ *//Donc le point M d'affixe* $3+i\sqrt{3}$ *appartient au cercle de diamètre* $[OA]$ *Comme* $\arg\left(\frac{\overline{w}}{\overline{w}-4}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ *//////En plus /// on en déduit*

que : $\left(\overline{AN},\overline{ON}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$//////Donc//Donc le point $N.d'affice...\overline{w}=3-i\sqrt{3}$ appartient au cercle de diamètre $[AO]$.///D'où les points O//A// M// N sont sur le cercle de diamètre $[AO]$.//

C/ Nombre complexe & interprétation géométrique Des exercices qui permettent de faire le lien entre les nombres et la géométrie

Nous avons donné cet exercice parce que les différentes questions exigent de faire le lien entre les nombres complexes et la géométrie. Et, c'est cette capacité de mise en relation des liens de filiations entre la géométrie et les nombres complexes, qui nécessite, des réactivations et des transformations des connaissances sur les vecteurs, modules, arguments de nombres complexes, conditions d'existence et natures d'un triangle et d'un parallélogramme (connaissances anciennes et nouvelles)

Exercice extrait du livre « maths repères classe de terminale S / Edition Hatier Education 2006

Exercice 2 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthogonal direct (O ; u ; v), on considère les points A et B d'affixes respectives $a=5-i\sqrt{3}....et....b=4+2i\sqrt{3}$. On note Q le milieu de $[OB]$.

1- Déterminer l'affixe z_K du point K tel que ABQK soit un parallélogramme.

2- Démontrer que $\frac{z_K-a}{z_K}$ est un imaginaire pur.

Que peut-on en déduire pour le triangle OKA ?

Préciser la nature du quadrilatère OQKA.

3- Soit C le point d'affixe $c=\frac{2a}{3}$Calculer $\frac{z_K-b}{z_K-c}$

Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

Verbatim de F001 pour la question n°1

Alors///////la première question///////Dans le plan complexe rapporté au repère orthogonal direct (O ; u ; v)////on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 5 - i\sqrt{3}$*....et....*$b = 4 + 2i\sqrt{3}$ */////On note Q le milieu de* $[OB]$*/////*

1///Déterminer l'affixe z_K *du point K tel que ABQK soit un parallélogramme//// Alors///on détermine l'affixe* z_K *du point K/// ABQK est un parallélogramme si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$ *////L'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *est b-a///Donc// Ce qui donne* $4 + 2i\sqrt{3} - (5 - i\sqrt{3}) = -1 + 3i\sqrt{3}$ */// Q est le milieu du segment OB////Donc l'affixe du point Q est////*

$$q = \frac{0 + 4 + 2i\sqrt{3}}{2}$$
$$q = 2 + i\sqrt{3}$$

///Alors on a, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{KQ}$ *///L'affixe du vecteur* $\overrightarrow{KQ}$ *est//* $2 + i\sqrt{3} - z_K$ *// On sait que ABQK est un parallélogramme si et seulement si* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$ *///Donc //*

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KQ}$*, nous donne ///* $2 + i\sqrt{3} - z_K = -1 + 3i\sqrt{3}$ *///D'où l'affixe du point K est///* $z_K = 3 - 2i\sqrt{3}$ *///*

Verbatim de F001 pour la question n°2

///Maintenant la question 2///Démontrer que $\frac{z_K - a}{z_K}$ *est un imaginaire pur/// Que peut-on en déduire pour le triangle OKA? ///////Préciser la nature du quadrilatère OQKA//// Alors////[silence]///Il faut d'abord montrer que* $\frac{z_K - a}{z_K}$ *//////est un imaginaire pur/// Donc on a//* $\frac{z_K - a}{z_K} = \frac{3 + 2i\sqrt{3} - (5 - i\sqrt{3})}{3 - 2i\sqrt{3}}$

/// Ce qui donne /////

$$\frac{3 + 2i\sqrt{3} - (5 - i\sqrt{3})}{3 - 2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(-2-i\sqrt{3})(3+2i\sqrt{3})}{(3+2i\sqrt{3})(3-2i\sqrt{3})}$$

$$= \frac{-6-4i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}+6}{9+12}$$

$$= \frac{-i\sqrt{3}}{3}$$

////D'où $\dfrac{z_K - a}{z_K}$ *est un imaginaire pur////*

///La nature du triangle OKA////Comme $\dfrac{z_K - a}{z_K}$ *est un imaginaire pur négatif//Son module est//* $\left|\dfrac{z_k - a}{z_k}\right| = \dfrac{1}{3}$ *//L'argument est alors//// //* $\arg\left(\dfrac{z_k - a}{z_k}\right) = \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$ *///On sait que* $\left|\dfrac{z_k - a}{z_k}\right| = \dfrac{1}{3}$ *//Donc* $\dfrac{AK}{OK} = \dfrac{1}{3}$ *///De plus//////* $\arg\left(\dfrac{z_k - a}{z_k}\right) = \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$ *//donc* $\left(\overrightarrow{OK};\overrightarrow{AK}\right) = \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$ *///Le triangle OAK est rectangle en K////*

///La nature de OQAK///// Pour cela// on détermine d'abord affixes des vecteurs////

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ *////* $\overrightarrow{OQ} = 2 + i\sqrt{3}$ *////L'affixe du vecteur* $\overrightarrow{KA}$ *///*

$\overrightarrow{KA} = 5 - i\sqrt{3} - 3 + 2i\sqrt{3} = 2 + i\sqrt{3}$ *///Les deux vecteurs ont même affixe //Donc même norme///* $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{KA}$ *//Comme OAK est rectangle en K/// On a alors* $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{KQ}$ *///On peut donc en déduire que OQAK est parallélogramme rectangle///*

Verbatim de F001 pour la question n°3

///Maintenant on passe à la question 3////Soit C le point d'affixe $c = \dfrac{2a}{3}$ *Calculer* $\dfrac{z_K - b}{z_K - c}$ *////Que peut-on en déduire pour les points B, C et K////Bon///[silence]///on sait que//* $c = \dfrac{2a}{3}$ */// Donc on a///* $c = \dfrac{2a}{3} = \dfrac{2}{3}\left(5 - i\sqrt{3}\right) = \dfrac{10 - 2i\sqrt{3}}{3}$ *///Bon////on a //*

$$///\frac{z_k-b}{z_k-c}=\frac{3-2i\sqrt{3}-(4+2i\sqrt{3})}{3-2i\sqrt{3}-(\frac{10-2i\sqrt{3}}{3})}=\frac{3-2i\sqrt{3}-4-2i\sqrt{3}}{3-2i\sqrt{3}-\frac{10-2i\sqrt{3}}{3}}=3\times\frac{-1-4i\sqrt{3}}{-1-4i\sqrt{3}}///$$

$\frac{z_k-b}{z_k-c}=3$*////Comme* $\frac{z_k-b}{z_k-c}=3$*//Alors le module* $\left|\frac{z_k-b}{z_k-c}\right|=3$*//Et l'argument de* $\frac{z_k-b}{z_k-c}$ *est ////* $\arg(\frac{z_k-b}{z_k-c})=0[2\pi]$*////On peut alors en déduire*

que///Alors//Alors/// $\frac{BK}{CK}=3$ *et* $\left(\overrightarrow{CK},\overrightarrow{BK}\right)=0[2\pi]$ *////On peut en déduire que les points B, C et K sont alignés*

D/ Séance d'observation sur Intégrale Dérivation et suite

Réf : F001-S2/23022008

Exercice extrait du livre de maths Fractale/ terminale S / Bordas 2002

Exercice 1 :

Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_e^x \frac{t}{\ln t}dt$, avec $x\in\left]1;+\infty\right[$.

3- Démontrer que F est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et déterminer l'expression de $F'(x)$

4- Etudier les variations de la fonction F sur $\left]1;+\infty\right[$.

5- Soit G la fonction définie par $G(x)=\int_e^{2x}\frac{t}{\ln t}dt$ où $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$. En remarquant que, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $G(x) = F(2x)$, démontrer que G est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et déterminer l'expression de $G'(x)$.

6- Soit H la fonction définie par $H(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{\ln t}dt$ avec $x \in \left]1;+\infty\right[$.

a-) Démontrer que pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$, $H(x) = F(2x) - F(x)$.

b-) En déduire que H est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et déterminer l'expression de $H'(x)$.

c-) Etudier les variations de H $\left]1;+\infty\right[$.

Verbatim de F001 pour la question n°1 *Réf : F001-S2/23022008*

Soit F *la fonction définie par* $F(x) = \int_e^x \frac{t}{\ln t}dt$*, avec* $x \in$ *] 1 ; + ∞ [*

.

1///Démontrer que F *est dérivable sur]1 ;+ ∞ [et déterminer l'expression de* $F'(x)$ */////Alors///Soit* F *la fonction définie par* $F(x) = \int_e^x \frac{t}{\ln t}dt$ *///* $x \in$ *]1 ;+ ∞ [*

///Donc question petite 1///Alors///on nous demande de Démontrer que F *est dérivable sur] 1 ;+ ∞ [et déterminer l'expression de* $F'(x)$ *//Donc*

(t vers t)///[silence]///Hum//On sait que La fonction $t \to t$ *est continue sur* $\left]1;+\infty\right[$ */// et on sait aussi que la fonction* $t \to \ln t$ *est continue sur] 1 ;+ ∞ [. et ne s'annule pas sur] 1 ;+ ∞ [// On peut donc// On conclut que la fonction* $t \to \frac{t}{\ln t}$

est continue sur $\left]1;+\infty\right[$ *//Donc///Alors///Alors///* $e \in \left]1;+\infty\right[$ *///On sait que //[d'après le cours, parce qu'on a vu ça en classe et j'ai aussi vu cela dans mes livre avec d'autre exo]// La fonction* $x \to \int_e^x \frac{t}{\ln t}dt$ *est la primitive de la fonction* $x \to \frac{x}{\ln x}$ *qui s'annule en e //// Donc///C'est bon// On peut conclure que la fonction est dérivable sur l'intervalle* $\left]1;+\infty\right[$ *de fonction dérivée* $F'(x) = \frac{x}{\ln x}$ *///*

Verbatim de F001 pour la question n°2 *Réf : F001-S2/23022008*

Maintenant on passe à la question petit 2////Il faut étudier les variations de F *sur]1 ; + ∞[/// Etudier les variations de la fonction* F *sur]1 ; + ∞[/// Bon///Donc// je peux dire que// On sait que pour tout* $x \in \left]1;+\infty\right[$ *t//* $x > 0..et..\ln(x) > 0$ */// Donc//C'est bon///Donc on conclut que* $F'(x) > 0$ *///La fonction* F *est croissante sur]1,+ ∞[///*

Verbatim de F001 pour la question n°3 *Réf : F001-S2/23022008*

On passe maintenant à la question 3//Soit G *la fonction définie par///* $G(x) = \int_e^{2x} \frac{t}{\ln t} dt$ *où* $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *//En remarquant que//pour tout* $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *,* $G(x) = F(2x)$ *////démontrer que* G *est dérivable sur* $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *et déterminer l'expression de* $G'(x)$ *//// Alors///Alors///On sait que/// La fonction* $x \to 2x$ *est dérivable sur* $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *et a valeurs dans* $\left]1;+\infty\right[$ */// De plus//On sait que//*

La fonction F *est dérivable sur* $\left]1;+\infty\right[$ *///Donc///On peut dire que G est dérivable sur* $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *et pour tout* $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *//Donc la fonction dérivée est//* $G'(x) = 2F'(x) = 2.\frac{2x}{\ln(2x)} = \frac{4x}{\ln(2x)}$ */////*

Verbatim de F001 pour la question n°4 *Réf : F001-S2/23022008*

Ensuite, on peut passer à la question 4///

*////**4a** -Soit* H *la fonction définie par* $H(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{\ln t} dt$ *avec* $x \in \left]1;+\infty\right[$ *///Démontrer que pour tout* $x \in \left]1;+\infty\right[$ *:* $H(x) = F(2x) - F(x)$ */// Alors///Alors///On nous//demande de démontrer que :* $H(x) = F(2x) - F(x)$ */// Pour tout* $x \in \left]1;+\infty\right[$ */// Donc* $H(x) = F(2x) - F(x)$ */// ce qui donne //* $F(2x) - F(x) = \int_e^{2x} \frac{t}{\ln t} dt - \int_e^{x} \frac{t}{\ln t} dt$

Ce qui est égal à ////

$$\int_e^x \frac{t}{\ln t}dt + \int_x^{2x} \frac{t}{\ln t}dt - \int_e^x \frac{t}{\ln t}dt$$
$$= \int_x^{2x} \frac{t}{\ln t}dt$$
$$= H(x)$$

Verbatim de F001 pour la question 4b *Réf : F001-S2/23022008*

///Maintenant on passe à la question b///En déduire que H *est dérivable sur* $]1;+\infty[$ *et déterminer l'expression de* $H'(x)$ *///Euh///humm////Alors///D'après les questions n°1 et n°3 //on sait que //la fonction* $x \to F(x)$ *et la fonction* $x \to F(2x)$

Sont dérivables/// donc $H(x) = F(2x) - F(x)$ *est aussi dérivable sur* $x \in\ ]1;+\infty[$ *//Alors on a//Donc la dérivée va être égale à :* $H'(x) = \dfrac{4x}{\ln(2x)} - \dfrac{x}{\ln x}$ *///*

En rendant tout cela au même dénominateur on a /// $H'(x) = \dfrac{4x}{\ln(2x)} - \dfrac{x}{\ln x}$ *///égal à ///*

$$= \frac{x(4\ln x - \ln 2x)}{\ln(2x)\ln x}$$
$$= \frac{x(4\ln x - \ln x - \ln 2)}{\ln(2x)\ln x}$$
$$= \frac{x(3\ln x - \ln 2)}{\ln(2x)\ln x}$$

/

///La dérivée est $H'(x) = \dfrac{x(4\ln x - \ln x - \ln 2)}{\ln(2x)\ln x}$ *////On peut passer à la question 4c////*

Verbatim de F001 pour la question 4c *Réf : F001-S2/23022008*

///Etudier les variations de H $\left]1;+\infty\right[$ *////Alors//// on étudie le signe de la*

dérivée////On sait que pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$ *///la fonction* $\ln(x)$ *est strictement supérieure à 0///donc* $\ln(2x)$ *est aussi supérieure à 0 avec x supérieur à 0///*

// $\ln(2x)\ln x$ *est positif///Donc* $H'(x)$ *est du signe de* $3\ln x-\ln 2$ */////*

$$3\ln x-\ln 2\geq 0$$
$$\ln x\geq \frac{1}{3}\ln 2$$
/
$$\ln x\geq \ln\sqrt[3]{2}$$
$$donc..x\geq\sqrt[3]{2}$$

///Ce qui donne $x\geq\sqrt[3]{2}$ *////Pour tout* $x\in\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[..H'(x)\geq 0$ *///On peut donc conclure que la fonction* H *est croissante sur* $\left[\sqrt[3]{2};+\infty\right[$. *et décroissante sur* $\left]1;\sqrt[3]{2}\right]$ *///C'est fini l'exo///*

E/ Géométrie dans l'espace : Barycentre

/Réf : F001-S4/27042008

Exercice extrait dans 100% maths collection Hatier 2005

Exercice

On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés.

Pour tout réel $k\in[-1;1]$, on note G_k le barycentre des points pondérés $(A,.k^2+1),..(B,K)..et..(C,-k)$.

1a) Représenter les points A, B et C, puis le milieu I du segment $[BC]$. Construction les points G_1 et G_{-1}.

1b) Montrer que pour tout réel $k\in[-1;1]$, on a :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{AB}.$$

2a) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par : $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$

2b) En déduire l'ensemble des points G_k, lorsque k décrit l'intervalle $[-1;1]$.

3a) Déterminer l'ensemble τ des points de l'espace tels que:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

3b) Déterminer l'ensemble σ des points de l'espace tels que:

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

4 Dans l'espace muni d'un repère ortho normal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne les coordonnées des points A, B et C : $A\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}-1\\2\\5\end{vmatrix}$

4a) Calculer les coordonnées des points G_1 et G_{-1}.

4b) Montrer que l'ensemble σ et τ sont sécants.

4c) Calculer le rayon du cercle Ω, intersection des ensembles σ et τ.

Verbatim de F001 pour la question 1a *Réf : F001-S4/27042008*

///On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés///Pour tout////rée $k \in [-1;1]$ l, on note G_k le barycentre des points pondérés

/// $(A,.k^2+1),..(B,K)..et..(C,-k)$. *///1a//Représenter les points A, B et C///puis le milieu I du segment $[BC]$///Construction les points G_1 et G_{-1}////Alors///*

///Représentation des points A, B, C et I.////Construction de G_1 et G_{-1}

G_1 barycentre de//$(A,2)$, $(B,1)$ et $(C,-1)$///Donc on a/// $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{O}$ ///En fixant le point A par la relation de Chasles on a /// $AG_1 = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ /

Verbatim de F001 pour la question n° 1b *Réf : F001-S4/27042008*

///Maintenant la question 1b///Montrer que pour tout réel $k \in [-1;1]$ *///on a //////*

$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{AB}$ *////Alors///[silence]///On sait que* G_k *le barycentre des points pondérés* $(A,.k^2+1),..(B,K)..et..(C,-k).$ */////Donc///Pour tout point M de l'espace*

on a /// $(k^2+1)\overrightarrow{AG_k} = (k^2+1)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}$ *////Si on remplace le point M de l'espace par le point A// on obtient alors/* $(k^2+1)\overrightarrow{AG_k} = (k^2+1)\overrightarrow{AA} + k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$ */*

Donc/// $(k^2+1)\overrightarrow{AG_k} = k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ *///* $(k^2+1)\overrightarrow{AG_k} = k\overrightarrow{CB}$ *///////*

$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{AB}$ *////*

Verbatim de F001 pour la question n° 2a *Réf : F001-S4/27042008*

///On passe la question2a/// Etudier les variations de la fonction f *définie sur* $[-1;1]$ *par///* $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$ *///Alors//// Déterminons la fonction dérivée f '////On sait que///*

$f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$ *////C'est une fonction rationnelle de la forme* $\frac{u}{v}$ *///Donc sa fonction dérivée est de la forme* $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ *///Donc* $f'(x) = \frac{-1(x^2+1) - 2x(-x)}{(x^2+1)^2}$ *///On a*

$f'(x) = -\frac{(x^2+1) - 2x^2}{(x^2+1)^2}$ *///Donc*

$f'(x) = -\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$ *///* $f'(x) = -\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ *////Etudions maintenant le signe de la dérivée* $f'(x) = -\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ *//// On sait que le dénominateur de la dérivée* f *est positif///de plus tout* $x \in [-1;1]$ *//*$1-x^2$ *est supérieur à 0///Alors Pour tout* $x \in [-1;1]$ $f'(x) < 0$ *//Donc par conséquent// f est décroissante sur* $[-1;1]$ *///De plus* $f(-1) = \frac{1}{2}$ *et* $f(1) = \frac{-1}{2}$ */////*

Verbatim de F001 pour la question n° 2b *Réf : F001-S4/27042008*

///On passe maintenant à la question 2b///En déduire l'ensemble des points G_k, *lorsque k décrit l'intervalle* $[-1;1]$ *////Alors////Humm mm/////On sait que* $\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{AB}$ *////Donc/// Lorsque le réel* k *décrit*

l'intervalle $[-1;1]$ *//* $\frac{-k}{k^2+1} \in \left[\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right]$ *///[Silence]///Ainsi///L'ensemble des points* G_k *est le segment de longueur BC//de milieu A// situé sur la droite parallèle à (BC)/passant par le point A///Il s'agit donc du segment [* G_1 *;* G_{-1} *]///*

Verbatim de F001 pour la question n° 3a *Réf : F001-S4/27042008*

///La question 3a///Déterminer l'ensemble τ *des points de l'espace tels que /////*

$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ *////Alors///humm///[Silence]////On sait que ///Comme* G_1 *est le barycentre de* $(A,2),(B,1);(C-1)$ *, on a :*

$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|$ *////Comme* G_{-1} *est le barycentre de* $(A,2),(B,1)$ *et* $(C,-1)$ *// on a//* $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$ *///*

Donc $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$ *implique que* $\left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_{-1}}\right\|$ *//*

En conclusion on peut dire que/// L'ensemble τ *des points de l'espace est donc le plan médiateur du segment [* G_1 *;* G_{-1} *]///.*

Verbatim de F001 pour la question n°3b *Réf : F001-S4/27042008*

///La question 3b Déterminer l'ensemble σ *des points de l'espace tels que:*

$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ */////Alors//// On sait que :* $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MG_1}\right\|$ *///Ce qui implique donc que///////*

$\left\|\overrightarrow{2MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$ *//////Si on introduit le point A dans par la relation de Chasles dans les vecteurs* $\overrightarrow{MB}$ *et* $\overrightarrow{MC}$ *////On a ///* $\left\|\overrightarrow{2MG_1}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC}\right\|$ *///Ce qui donne ///* $\left\|\overrightarrow{2MG_1}\right\| = \left\|-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$ *///D'où/////* $\left\|\overrightarrow{2MG_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right\|$ *//*

Ona//// $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right\|$ *///De plus en introduisant le point I par la relation de Chasles on a//* $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA}$ *//// Et comme I est milieu du segment* $[BC]$ *///On a* $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{O}$ *////Il devient* $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{IA}$ *//// D'autre part///on sait que I milieu de* $[BC]$ *///* $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\right\|$ *//* $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{IA}\right\|$ */////* $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{IA}\right\|$ */////* *Par conséquent I milieu de* $[BC]$ *a pour coordonnées* $I(-1,2,3)$ *////d'où les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{AI}(-1,2,3)$ *et la norme du vecteur* $\left\|\overrightarrow{AI}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$ *//// Par conséquent////L'ensemble* σ *des points de l'espace est donc la sphère de centre* G_1 *et de rayon* $\sqrt{6}$ */////*

Verbatim de F001 pour la question n°4a Réf : F001-S4/27042008

Question 4a////Dans l'espace muni d'un repère ortho normal $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *on donne les coordonnées des points A, B et C///* $A\begin{vmatrix}0\\0\\2\end{vmatrix}$ *;* $B\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$ *;* $C\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$ *//////Calculer les coordonnées des points* G_1 *et* G_{-1} */////Alors//////Alors///On a// On a :*

$$G_1\begin{vmatrix}\frac{2(0)+1(-1)-(-1)}{2}\\ \frac{2(0)+(2)+(-2)}{2}\\ \frac{2(2)+1(1)-1(5)}{2}\end{vmatrix} \Rightarrow G_1\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

//Les cordonnées de G_{-1} *///*

$$G_{-1}\begin{vmatrix}\frac{2(0)+(-1)(-1)+1(-1)}{2}\\ \frac{2(0)+(-1)(2)+1(2)}{2}\\ \frac{2(2)+(-1)(1)+1(5)}{2}\end{vmatrix} \Rightarrow G_{-1}\begin{vmatrix}0\\0\\4\end{vmatrix}$$

Verbatim de F001 pour la question 4b *Réf : F001-S4/27042008*

/////4b/////Montrer que l'ensemble σ *et* τ *sont sécants///// Montrer que l'ensemble* σ *et* τ *sont sécants////////Alors////Humm mm/////Alors///// On sait que///*

L'ensemble τ *des points de l'espace est donc le plan médiateur du segment* $[G_1\ ; G_{-1}]$*//[nous avons déjà montré ça à la question 3a]///// On sait aussi que l'ensemble* σ *des points de l'espace la sphère de centre* G_1 *et de rayon* $\sqrt{6}$ *//*

/////La sphère σ *de centre* $G_1\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$ */////origine du repère a pour rayon* $\sqrt{6}$ *////Donc//Une équation de* τ *////plan médiateur du segment* $[G_1\ ; G_{-1}]$ *est alors* $z = 2$ *///// Comme* $\sqrt{6}$ *est strictement supérieur à 2/////le plan* τ *et la sphère* σ *sont sécants et l'intersection est un cercle////*

Verbatim de F001 pour la question 4c *Réf : F001-S4/27042008*

////Et la dernière question 4c////Calculer le rayon du cercle Ω *//intersection des ensembles* τ *et* σ *////Alors////Humm////humm///Alors//// On sait que////L'ensemble* σ *des points de l'espace est donc la sphère de centre* G_1 *et de rayon* $\sqrt{6}$ */////Le plan* τ *et la sphère* σ *sont sécants et l'intersection est un cercle////Donc/// Le centre de la sphère* σ *//// le centre du cercle* Ω *////et un point quelconque de ce cercle////forment un triangle rectangle/////Donc///Par conséquent///Le rayon R du cercle* Ω *est tel que////* $R^2 + 2^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2$ *////ce qui implique que///* $R^2 = 2$ *//Donc* $R = \sqrt{2}$ *///car le rayon est une longueur donc toujours positive////Voilà c'est la fin///*

2/ Entretien complémentaire

Réf S-5/14052008

///Mon travail commence par les leçons en classe///[silence]///Je cherche à comprendre ce que fais le professeur///Comprendre la place des propriétés et des formules lorsque le professeur explique par des exercices///Je pose des questions de compréhension et d'application pour comprendre les relations entres les propriétés et les théorème///// je cherche en classe [pendant les séances] à structurer la leçon//////En fait on a six heures de cours par semaine dont de temps à autre quatre heures de cours et deux heures de séances d'application////Pour moi ce n'est pas suffisant///Donc en général//Je vais voir dans les livres et sur internet pour trouver des exercices et autres techniques ///pour trouver des exercices et aussi pouvoir les faire. En fait le soir après le cours///Une fois que je rentre à la maison ////je travaille en moyenne une heure à deux////Je ne me contente pas de ce qu'on fait en classe///Je ne me contente pas des exercices fais en classe//Je cherche toujours à voir plus loin//Pour cela j'utilise des livres que mes parents avaient utilisés ou des livres qui ont été utilisés par mon frère///je vais aussi sur internet///Et ça me permet de faire différents exercices ////Comme je disais///Ce qui est fait en classe n'est pas suffisant//Donc ce faisant//ça me permet de voir chaque chose différemment et de faire différents exercices//Après c'est des automatisme e///Et je ne perds pas de temps///Je ne fais pas de fiche ///Et les fiches en maths ////ça ne sert à rien//Ce qui est important c'est de faire des exercices pour mieux comprendre les cheminements////[///]///et que cela soit plus facile lorsqu'on est devant un autre exercice ou notre copie [évaluations]////Je fais beaucoup d'exercices différents pour être prête et bien me préparer les épreuves et aussi que cela deviennent des automatisme/// Et que je n'ai pas à passer du temps fous à réfléchir devant les exercices parce que je ne comprends pas telle ou telle questions ou formules et cela me permet de réussir comme cela//// Je sais que///Tout ce qu'on nous donne en classe ce sont des bases//Donc je me sert de ses bases pour faire des exercices///Des fois/// Je ne dis pas que ne rencontre pas de difficultés des fois///Et dans ce cas soit je vais demander à une personne de ma famille de m'aider///Ou //Si vraiment j'arrive pas ///Je vais demander à un professeur [de mathématique dans son lycée] de m'aider ou de me corriger les erreurs afin de ne pas les reproduire//Ou aussi je demande à mes camarades de m'aider s'ils ont mieux compris que moi et de m'aider pour les exercices/////

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ?

«////Je travaille beaucoup à la maison non seulement pour avoir de bonnes notes mais avant tout pour comprendre////En classe////le cours est bon///mais c'est un condensé de notions et de formules importantes////Tout n'est pas dit dans les leçons///Je travaille à la maison pour trouver les liens///les transformations nécessaires/////»

Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire et constitue un gage de *réussite pour un élève de la classe de terminale scientifique S ?*

«////Les formules du cahier////tout le monde les connaît///mais les utiliser pour répondre aux questions c'est ce que je fais en étude autonome///J'apprends à les tisser avec d'autres formules qui ne sont pas dans la leçon///J'apprends beaucoup de choses en faisant les exercices dans mes livres/// j'ai de vieux livres de mathématiques dans lesquels il y a plus d'information sur les notions étudiées en classe aujourd'hui///j'aime bien regarder dans les vieux livres///attendez//je vous montre quelque chose sur les»

ANNEXE IV : L001

« L001 » a 17ans ; de parents restaurateurs, elle est la deuxième fille d'une famille de quatre enfants (niveau d'étude des parents « collège »). Elle utilise des manuels du niveau Terminale scientifique, au programme ou non, pour étudier ce qui a été enseigné ou sera enseigné dans la classe par son professeur. Elle fait beaucoup d'exercices de mathématique à la maison : les devoirs de « *recherche à la maison donnés par son prof* » et les exercices qu'elle choisit dans ses livres, étudie les exercices au fur et à mesure de l'évolution d'un chapitre en cours d'apprentissage dans la classe sans attendre les exercices que pourrait donner son professeur, ne fait jamais de fiche de formules mathématiques pour apprendre. Elle prend un cours particulier en cas de nécessité absolue parce que n'ayant personne dans son entourage pouvant lui donner des explications sur un objet mathématique. Sérieuse, impliquée, elle a de bonne notes : 15-18 voire 20 sur 20[390].

1/ Séances d'observation de L001

A/ Séance d'observation sur les nombres complexes

Exercices extrait du livre de maths 100% maths/ Collection Hatier 2005

Réf : L001/S-3/22032008

Exercice1

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(O.;.\vec{u}.;.\vec{v})$. On considère les points A, B, C et I d'affixes :

$$Z_A = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$$
$$Z_B = 1 - i$$
$$Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}$$
$$Z_I = 1$$

1- Calculer le module et un argument de $Z_A ...et... Z_B$

[390] Sources: les bulletins scolaires

2- Ecrire Z_C sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

3- En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})..et...\sin(\frac{\pi}{12})$.

4- Préciser la nature du triangle OIB, puis déterminer les images de I et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$. En déduire la nature du triangle OAC.

Verbatim de L001 pour la question n°1 Réf : L001/S-3/22032008

///Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(O.;.\vec{u}.;.\vec{v})$ *////On considère les points A, B, C et I d'affixes ///* $Z_A = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ *;* $Z_B = 1-i$ *;* $Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}$ *;* $Z_I = 1$*//Calculer le module et un argument de* $Z_A...et...Z_B$*/////On nous demande de calculer le module et un argument ///Alors/////En utilisant les propriétés de module et d'argument///on a///*

$$|Z_A| = \left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \sqrt{2} \quad /// \quad |Z_B| = |1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

////Considérons θ_A *un argument de* Z_A *////Et* θ_B *un argument de* Z_B *///*

/////On a ////

$$\begin{cases}\cos\theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta_A = \frac{1}{2}\end{cases} .... \Leftrightarrow .\theta_A = \frac{-\pi}{6} ///// \begin{cases}\cos\theta_B = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} ..... \Leftrightarrow ...\theta_B = -\frac{\pi}{4}$$

Verbatim de L001 pour la question n°2 Réf : L001/S-3/22032008

//Question 2///Ecrire Z_C *sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique////On sait que* $Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}$ *////Alors on a////En utilisant l'expression conjuguée du dénominateur on a///*

$$\frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{1-i}$$
$$= \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Donc $Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}$ *est égal à////*$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$*/////*

Verbatim de L001 pour la question n°3 Réf : L001/S-3/22032008

//Question3///En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})..et...\sin(\frac{\pi}{12})$*.////Alors////*

En utilisant $Z_C = \frac{Z_A}{Z_B}$ */////Sa forme trigonométrique////On a////*

$Arg(Z_C) = Arg\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right) = Arg(Z_A) - Arg(Z_B)$*////Donc [Silence]////* $Arg(Z_A) = \frac{-\pi}{6}$ */*

$Arg(Z_B) = \frac{-\pi}{4}$ *///Donc* $Arg(Z_C) = \frac{-\pi}{6} - \left(\frac{-\pi}{4}\right)$*///Ce qui donne ///* $Arg(Z_C) = \frac{\pi}{12}$ */*

De plus $|Z_C| = \left|\frac{Z_A}{Z_B}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$*/// La forme exponentielle* Z_C *est* $Z_C = e^{\frac{i\pi}{12}}$ *////On déduit que donc les valeurs exactes sont //////*$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$*//////*

Verbatim de L001 pour la question n°4 Réf : L001/S-3/22032008

Question 4////Préciser la nature du triangle OIB, puis déterminer les images de I et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$*.////En déduire la nature du triangle OAC////La nature du triangle OIB//// Le triangle OIB est rectangle en I//// Alors les images des points I et B par la rotation////*

////Notons I' et B' les images des points I et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$ *////Donc/* $Z_{I'} = Z_I e^{\frac{i\pi}{12}} = Z_C$ *et* $Z_{B'} = Z_B e^{\frac{i\pi}{12}} = (1-i)e^{\frac{i\pi}{12}}$ *////*

$$Z_{B'} = Z_B e^{\frac{i\pi}{12}} = (1-i)e^{\frac{i\pi}{12}} = (1-i)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} //// Z_{B'} = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = Z_A //$$

///Donc////Par cette rotation// l'image de I est le point C/// l'image de B est le point A et l'image de O est lui-même///L'image du triangle OIB///rectangle en I// est le triangle OCA///Par conséquent// le triangle OCA est rectangle en C///

Réf : L001/S-3/22032008

Exercice

On considère le nombre $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

1-) Démontrer que $1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0$

2-) Montrer que $a^3 = \overline{a^2}$, puis $a^4 = \overline{a}$

3-) En déduire que $(a + \overline{a})^2 + (a + \overline{a}) - 1 = 0$

4-) Résoudre dans IR l'équation : $4x^2 + 2x - 1 = 0$

5-) Calculer $a + \overline{a}$ et en déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Verbatim de L001 pour la question n°1 Réf : L001/S-3/22032008

Question 1 ////On considère le nombre $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *///Démontrer que* $1+a+a^2+a^3+a^4=0$

Solution proposée par L001///Discours de L001// On sait que $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *//Donc en remplaçant par a //Rédaction de L001/// On a :* $1+a+a^2+a^3+a^4 = 1+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ *//On sait que///Tout nombre ayant la puissance 0 est égal à 1///Donc* $\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0 = 1$*////Ce qui permet de noter que* $1+a+a^2+a^3+a^4 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^0+e^{\frac{i2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$ *////Humm mm////On peut donc dire que////*$1+a+a^2+a^3+a^4$*t une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison* $q = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *et de premier terme égal 1///Silence///Cette somme est égale à///*$\dfrac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)} = \dfrac{1-\left(e^{i2\pi}\right)}{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)} = \dfrac{1-\left(e^{i\pi}\right)^2}{1-\left(e^{i\pi}\right)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{1-1}{1-\left(e^{i\pi}\right)^{\frac{2}{5}}} = 0$ *////Donc////D'où* $1+a+a^2+a^3+a^4=0$ *///Voilà/////*

Verbatim de L001 pour la question n°2 Réf : L001/S-3/22032008

Question 2////On considère le nombre $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ */////Montrer que* $a^3 = \overline{a^2}$ *///puis* $a^4 = \overline{a}$ */////On sait que* $a = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ *///Donc ///*$(a)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)^3 = e^{\frac{i6\pi}{5}}$ *///*$\overline{a}^2 = \left(e^{\frac{-i\pi}{5}}\right)^2 = e^{\frac{-i4\pi}{5}}$ */////De plus//Comme* $\dfrac{6\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{4\pi}{5}$

On a///$e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$ *////*$a^4 = \overline{a}$ */// D'où* $a^3 = \overline{a^2}$ *///*$a^4 = (e^{i\frac{2\pi}{5}})^4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$ *///Nous avons* $\overline{a} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ *//// Comme* $\dfrac{8\pi}{5} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{5}$ *////On a///*$e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$ *////Et donc* $a^4 = \overline{a}$ *////*

Verbatim de L001Pour la question n°3 Réf : L001/S-3/22032008

///Question 2///En déduire que $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$ *////Humm///Bon//je développe d'abord* $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$ */// Ce qui donne//*

$$(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=a^2+\overline{a}^2+2a\overline{a}+a+\overline{a}-1=a^2+a^3+2aa^4+a+a^4-1$$

Ce qui donne *////* $a+a^2+a^3+a^4+2a^5-1=a+a^2+a^3+a^4+2-1$ *//Car* $2a^5=2\left(e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)^5=2e^{i2\pi}=2$ *////Donc* $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=a+a^2+a^3+a^4+2-1$*/*

$(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=a+a^2+a^3+a^4+1$ *////Or* $1+a+a^2+a^3+a^4=0$ *déjà vu à la question n°1 //Donc //* $(a+\overline{a})^2+(a+\overline{a})-1=0$*///*

Verbatim de L001Pour la question n°4 Réf : L001/S-3/22032008

///Question n4///Résoudre dans IR l'équation : $4x^2+2x-1=0$ *//C'est une équation du 2*[nd] *degré à une inconnue///Donc on a/// Le discriminant du trinôme* $4x^2+2x-1=0$ *////* $\Delta=b^2-4ac$ *///* $\Delta=2^2-4(4)(-1)=20$ *///Donc l'équation admet deux racines évidente réelles///*

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{8}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{8}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

///Les solutions de l'équation $4x^2+2x-1=0$ *//* $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ *///*

Verbatim de L001 pour la question n°5 Réf : L001/S-3/22032008

///Question5///Calculer $a+\overline{a}$ *et en déduire la valeur de* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *////Bon//La somme de deux conjugués/// On sait que///* $a+\overline{a}=2\operatorname{Re}(a)=2\cos(\frac{2\pi}{5})$ *////Ensuite la valeur de*

$\cos(\frac{2\pi}{5})$ *////Alors////En utilisant l'opération effectuée pour la question3//on a//*

$\left(2\cos(\frac{2\pi}{5})\right)^2 + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$ *///Ce qui implique que* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *est une solution de l'équation* $4x^2 + 2x - 1 = 0$ *///De plus // Comme* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *>0/////on en déduit que* $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ *///C'est fini////*

B/ Séance d'observation sur les probabilités

Exercice extrait du livre collection *πxel* classe de terminale S /Edition 2006 /Bordas

Réf : L001Réf/S-4/ 21042008Probabilité sur les lois continues /loi exponentielle)

Verbatim de L001 Réf : L001Réf/S-4/ 21042008

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ *.On rappelle que* $P(X \le a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

3- *Interpréter graphiquement la probabilité* $P(X \le 1)$.

4- *On suppose que* $\lambda = 2{,}5$ *.Calculer cette probabilité* $P(X \le 1)$

Solution proposée par L001///question1///On a// $P(X \le 1) = P(0 \le X \le 1)$ *///et la probabilité sur un intervalle est l'intégrale de la densité de probabilité sur cet intervalle///Donc* $P(X \le 1)$ *est///en unités d'aires//l'aire sous la courbe représentative//Silence//de la densité de probabilité entre les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$ *////*

//question2///Comme $\lambda = 2{,}5$ *///* $P(X \le 1) = \int_0^1 \lambda e^{-2{,}5t}\,dt$

$= \left[-e^{-2{,}5t}\right]_0^1 = -e^{-2{,}5} - (-1) = 1 - e^{-2{,}5}$ *//prend//sa//calculatrice//soit* $P(X \le 1) \approx 0{,}92$ *//*

C/ Séance d'observation sur les suites et intégrales

Exercice extrait du livre prép@maths Collection Hatier 2002

(Réf L001/S-2/17022008/Intégrale-Suite-Exponentielle)

Enoncé

Dans cet exercice, « n » est un entier naturel non nul

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1- a) Soit φ la fonction définie sur $[0;2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

Etudier les variations de φ sur $[0;2]$. En déduire que, pour tout réel t dans $[0;2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

b) Montrer que, pour tout réel t dans $[0;2]$, on a : $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

c) Par intégration en déduire que : $\frac{3}{2} n(e^{\frac{2}{n}} - 1) \leq U_n \leq \frac{7}{4} n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$

d) On rappelle que $\lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right)$

Montrer que, si (U_n) possède une limite L, alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

3- a) Vérifier que, pour tout t dans $[0;2]$, on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

4- En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} . dt$

b) Montrer que pour tout $t \in [0;2]$, on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$

c) Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite L.

Sous épisode1a

Question n°1/////Discours de L001////On considère la suite (U_n) *définie par///*$U_n=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}e^{\frac{t}{n}}dt$ *///**1-a)** Soit* φ *la fonction définie sur* $[0;2]$*par* $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$ *//Etudier les variations de* φ *sur*$[0;2]$. *En déduire que, pour tout réel t dans*$[0;2]$, $\frac{3}{2}\leq\varphi(t)\leq\frac{7}{4}$*////Alors ////Soit la suite* (U_n) *définie pour* n*entier naturel non nul par :* $U_n=\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}.e^{\frac{t}{n}}dt$ *////Etude//de//variation de la fonction* $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$ *//sur//*$[0;2]$*////C'est une fonction rationnelle* $\frac{f}{g}$*..de..dérivée* $\frac{f'g-g'f}{g^2}$ *///Rédaction////*$\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$ *est une fonction rationnelle de la forme//Donc* $\varphi'(t)=\frac{2(t+2)-2t-3}{(t+2)^2}=\frac{1}{(t+2)^2}$ $\varphi'(t)=\frac{1}{(t+2)^2}$ *////est donc une dérivée toujours///Discours de L001// Le numérateur de la dérivée est positif de même que le dénominateur///donc*

une dérivée toujours positive sur$[0;2]$, *nous en déduisons que* φ *est strictement croissante sur*$[0;2]$*/////*

Donc : si $0\leq t\leq 2$ *on a* $\varphi(0)\leq\varphi(t)\leq\varphi(2)$ *///Discours de L001/// Ensuite, déterminons les limites aux bornes de l'intervalle*$[0;2]$*////Rédaction//*$\lim_{h\to 0}(\frac{2t+3}{t+2})=\frac{3}{2}$*et*$\lim_{h\to 2}(\frac{2t+3}{t+2})=\frac{7}{4}$*///*
Donc, pour tout $.t\in[0;2]...\frac{3}{2}\leq\varphi(t)\leq\frac{7}{4}$*////*

Sous épisode1b

Question n°1-b)///Montrer que, pour tout réel t dans$[0;2]$, *on a :* $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\leq\varphi(t)e^{\frac{t}{n}}\leq\frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$ *//Discours deL001//Alors ///Je peux utiliser l'égalité précédente en le multipliant par* $e^{\frac{t}{n}}$ *car* $n\in IN...et..t\in[O;2]$*///En plus quel que soit* X, e^X *est strictement positif et l'inégalité ne change pas de signe///Rédaction///Donc//*

$n \in IN ...et..t \in [O;2]$//Nous savons que// pour tout réel $t,..e^{\frac{t}{n}}$ >0// il s'ensuit que pour tout réel t de $[0;2]$

$\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$ ////

Sous épisode1c

Question n°1-c)//Par intégration en déduire que /// $\frac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}}-1) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$ *//Discours//Alors/// Humm//// Je pars de l'expression démontrée précédemment//[Silence]///Nous allons faire l'intégration de l'inégalité :* $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$ *///Donc//[Silence avec observation de l'inégalité]//Donc//Rédaction// Par intégration, nous pouvons écrire que//* $\int_0^2 \frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}dt \leq \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{t}{n}}dt \leq \int_0^2 \frac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}dt$ *//ce qui donne///* $\frac{3}{2}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt \leq U_n \leq \frac{7}{4}\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt$ *///Discours //On sait que la primitive de* $e^{\frac{t}{n}}$ *est* $ne^{\frac{t}{n}}$ *//donc//Rédaction///Or* $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt = \left[ne^{\frac{t}{n}}\right]_0^2$ *//Soit* $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}}dt = ne^{\frac{t}{n}} - n$ *//Par conséquent on a* $\frac{3}{2}(ne^{\frac{t}{n}} - n) \leq U_n \leq \frac{7}{4}(ne^{\frac{t}{n}} - n)$ *///Discours L001/// En factorisant par n, on a//Rédaction///*$\frac{3}{2}n(e^{\frac{t}{n}}-1) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{t}{n}}-1)$ *///Donc par intégration on a bien* $\frac{3}{2}n(e^{\frac{t}{n}}-1) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n(e^{\frac{t}{n}}-1)$ *///*

Sous épisode 1d

Question n°1-d)//On rappelle que $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$ *///Montrer que//si* (U_n) *possède une limite* L *///alors* $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$ *//Discours de L001/// Alors//// Oh ///Oh///*$\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$ *////est une limite remarquable que l'on peut noter sous la forme///Rédaction de L001///*$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$ *//Discours de L001/// On peut aussi en déduire par changement de variable que///Rédaction de L001///* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\frac{2}{n}}\right)=1$ */////en posant* $x=\frac{2}{n}$ *avec*

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}\right)=0$ *//Discours de L001// En rendant au même dénominateur l'expression cela permet d'avoir//rédaction de L001///* $\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=2$ *//Donc* $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=3$ *et* $\lim_{n\to+\infty}\frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}}-1\right)=\frac{7}{2}$ *///D'où* $\frac{3}{2}n(e^{\frac{t}{n}}-1)\le U_n\le\frac{7}{4}n(e^{\frac{t}{n}}-1)$ *///ce qui implique que///* $3\le L\le\frac{7}{2}$ *//discours de L001///Si* (U_n) *possède une limite* L *////alors est comprise entre/////* $3\le L\le\frac{7}{2}$ *////*

Sous épisode2a

*Question n°2//**2-a)**//Discours de L001///Vérifier que///pour tout t dans* $[0;2]$*, on a :* $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$ *///En déduire l'intégrale* $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt$ *////Discours ////[Alors////On nous demande de démontrer que* $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$ *]///Je pars de* $2-\frac{1}{t+2}$ *////je développe en le rendant au même dénominateur//Rédaction de L001//Donc Pour tout t de* $[0;2]$*,* $2-\frac{1}{t+2}=\frac{2(t+2)-1}{t+2}$ *//Soit* $\frac{2t+3}{t+2}=2-\frac{1}{t+2}$ *///[Discours de L001///*

Pour calculer l'intégrale $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt$ *//j'utilise l'expression déjà démontrée]////Rédaction// Donc on a///*

$I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt=\int_0^2(2-\frac{1}{t+2})dt$ *//Il s'ensuit qu'une primitive de* $\varphi(t)=\frac{2t+3}{t+2}$ *sur* $[0;2]$ *est la fonction* ϕ *définie par* $\phi(t)=2t-\ln(t+2)$ *//car* $t+2$ *>0///[discours de L001/// Par conséquent l'intégrale est//]//Rédaction de L001///* $I=\int_0^2\frac{2t+3}{t+2}.dt\Rightarrow I=[2t-\ln(t+2)]_0^2$ *///Soit* $I=4-\ln 4+\ln 2$ *///Or* $\ln 4=2\ln 2$ *///Donc* $I=4-\ln 2$ *////*

Sous épisode2b

Question n°2-b///[Discours de L001///2-b) Montrer que, pour tout $t\in[0;2]$*, on a* $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}$ *////En déduire que* $I\le U_n\le e^{\frac{2}{n}}I$ *]///[//Alors//Silence///Humm mm////Encadrement d'exponentielle///Nous savons que la fonction exponentielle est une fonction croissante sur IR///Donc///On sait que]Rédaction de L001/// Pour tout* $t\in[0;2]$ $1\le e^{\frac{t}{n}}\le e^{\frac{2}{n}}$ *///D'après la question 1-a)pour tout* $t\in[0;2]$ $\varphi(t)$ *>0////[Discours de L001/// En multipliant la* *démonstration précédente par* $\varphi(t)$ *///on a]///Rédaction//* $1\varphi(t) \le \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \le \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}$ *///[Discours deL001//En intégrant chaque membre de l'inégalité précédente on a]///Rédaction///*

$\int_0^2 1\varphi(t)dt \le \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{t}{n}}dt \le \int_0^2 \varphi(t)e^{\frac{2}{n}}dt$ *///Ce qui donne* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}}\int_0^2 \varphi(t)dt$ *///D'où* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}} I$ *///En conclusion on a////* $1 \le e^{\frac{t}{n}} \le e^{\frac{2}{n}}$ *et* $I \le U_n \le e^{\frac{2}{n}} I$ *///*

Sous épisode2c

2-c) Montrer que (U_n) *est convergente et déterminer sa limite* L *///[Discours de L001///Alors//On sait que la limite de expo(x) lorsque x tend vers zéro est égale à 1//Donc]//Rédaction///0n sait que* $\lim_{x\to 0}(e^x) = 1$ *// changement de variable/// on pose* $x = \frac{2}{n}$ *//Donc//* $\lim_{n\to 0}\left(\frac{2}{n}\right) = 0$ *///On a//* $\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{2}{n}}\right) = 1$ *///En conclusion/ La suite* (U_n) *est convergente de limite* $L = 4 - \ln 2$ *///*

D/ Séance d'observation sur la géométrie dans l'espace

Exercice extrait du livre 100% maths / collection Hatier/ Édition 2004

Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques Réf : L001-S-5/17052008/

Exercice :

L'espace est muni d'un repère ortho normal $(O;I;J;K)$

Partie A

Soit a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c) \ne (0,0,0)$.

Soit P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

On considère le point I de coordonnées $(x_I ; y_I ; z_I)$ et le vecteur de coordonnées $\vec{n}(a;b;c)$

3- Soit Δ la droite passant par I et orthogonale au plan P Déterminer en fonction de $a;b;c;x_I;y_I;z_I$, un système d'équation paramétrique de la droite Δ.

4- On note H le point d'intersection de la droite Δ et du plan P

d) Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$

e) Déterminer l'expression de k en fonction de $a;b;c;x_I;y_I;z_I$

f) En déduire que : $IH = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Partie B

On considère les points :

$A(3;0;1);..B(0;-1;2),...C(1;-1;0)..et..D(1;1;-2)$

4- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}....et....\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

En déduire la nature du triangle ABC.

Calculer l'aire du triangle ABC.

2- a) Vérifier que le vecteur $\vec{n}(2;.-5;.1)$ est un vecteur normal au plan ABC

b) En déduire une équation du plan (ABC)

3 a) Déterminer la distance du point D au plan ABC

4 b)Déterminer le volume du tétraèdre ABC

5

Extraits des épisodes utilisés pages 197-203

Verbatim du travail des questions 1-2a-2b

Réf : L001-S-5/17052008/Géométrie dans l'espace/Equations paramétriques

////L'espace est muni d'un repère ortho normal $(O;I;J;K)$*////*

L001Lit l'énoncé//////Observe quelques secondes///////Il s'agit de déterminer la distance d'un point à un plan/////////Soit Δ *la droite passant par I et orthogonale au plan* P *//////Déterminer, en fonction de* $a;b;c;x_I;y_I;z_I$ *et un système d'équation paramétrique de la droite* Δ*///////On sait d'après le cours que le vecteur* $\vec{n}(a;b;c)$ *est un vecteur normal à* *l'équation paramétrique* P *et aussi un vecteur directeur de la droite*Δ*////On sait qu'une équation paramétrique est de la forme///* $P\ : ax+by+cz+d=0$ */////Le point I appartient à la droite* Δ *ayant* $\vec{n}(a;b;c)$*comme vecteur directeur//////Donc une équation//// Donc une équation paramétrique de* Δ *est alors de la forme//////*

$$\begin{cases} x = x_I + at \\ y = y_I + bt ...avec..t \in IR \\ z = z_I + ct \end{cases}$$

//2a///Justifier l'existence d'un réel k *tel que* $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ */////* H *est un point de* Δ*, donc le vecteur* $\overrightarrow{IH}$ *est orthogonal au plan* P *//////////Donc les vecteurs* $\overrightarrow{IH}$ *et* $\vec{n}$ *son colinéaires///////Ainsi par définition du colinéarité/////Il existe un réel* k *tel que* $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *////////////*

Question2b

2b///Déterminer l'expression de k *en fonction de* $a, b, c, d,\ x_I ; y_I ; z_I$

//////Etant donné que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *et* $\overrightarrow{IH}$ *et* $\vec{n}$ *sont de coordonnées respectives/////////////Il existe un réel* k *tel que* $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *//// /On a //////*

$$\begin{pmatrix} x_H - x_I \\ y_H - y_I \\ z_H - z_I \end{pmatrix} et \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} \text{D'où/////} \begin{pmatrix} x_H - x_I = ka \\ y_H - y_I = kb \\ z_H - z_I = kc \end{pmatrix}$$

//////Or H *est un point du plan* P *////ce qui implique que ses coordonnées vérifient l'équation du plan////////On a alors ///// On a alors ///////////Avec un développement et un regroupement des termes en* k *////////*

On a////// $\begin{cases} x_H = x_I + ka \\ y_H = y_I + kb \\ z_H = z_I + kc \end{cases}$ *//On sait d'après que* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

Donc//// $a(x_I + ka) + b(y_I + kb) + c(z_I + kc) + d = 0$ */////* $ax_I + by_I + cz_I + k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$

Question2c////

En déduire que///////// $IH = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ */////[observe le résultat de la question 2b]/////Alors///De tout ce qui précède///On a///* $k = \dfrac{ax_I + by_I + cz_I}{a^2 + b^2 + c^2}$

//On a//Or////Etant donné que $\overrightarrow{IH} = k\vec{n}$ *////* $\|\overrightarrow{IH}\| = \|\overrightarrow{kn}\|$ *////* $\|\overrightarrow{kn}\| = |k| \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

et/////Donc $\left\|\overrightarrow{IH}\right\| = IH$ ///D'où//// $IH\ = |k| \times \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$$IH\ = \left| -\frac{ax_I+by_I+cz_I}{a^2+b^2+c^2} \right| \times \sqrt{a^2+b^2+c^2} \text{ /// } IH = \frac{|ax_I+by_I+cz_I+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Partie B///Question 1///Dans un repère ortho normal $(O;.\vec{i},.\vec{j},.\vec{k})$ *///On considère les points////* $A(3;0;1);..B(0;-1;2),...C(1;-1;0)..et..D(1;1;-2)$ */////Montrer que les vecteurs* $\overrightarrow{AC}....et....\overrightarrow{BC}$ *sont orthogonaux.//////En déduire la nature du triangle ABC/////Calculer l'aire du triangle ABC///Alors/// On détermine les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AC}..et..\overrightarrow{BC}$

On a//// $\overrightarrow{AC}(-2;.-1;.-1)$ *et* $\overrightarrow{BC}(1;.0;.-2)$ */////Donc//// En utilisant le produit scalaire///on a ///*$\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{BC} = (-2)(1)+(-1)(0)+(-1)(-2)=0$ *////Ce qui signifie par conséquent que les vecteurs///* $\overrightarrow{AC}..et..\overrightarrow{BC}$ */////sont orthogonaux./////Donc/// le triangle ABC est par conséquent rectangle en C///////L'aire du triangle ABC est alors* $\frac{AC.BC}{2}$ */////Or///* $AC = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

Et $BC = \sqrt{1+5} = \sqrt{5}$ */////Donc l'aire tu triangle est /////*$\frac{1}{2}\sqrt{30}$ *//*

Question 2a//// Vérifier que le vecteur $\vec{n}(2;.-5;.1)$ *est un vecteur normal au plan ABC////// Alors//////On utilise le produit scalaire////* $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ *////on/sait/que/////* $\overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ *et*

$\vec{n}(2;-5;1)$*////On a///////Donc///* $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (-2)(2)+(-1)(-5)+(-1)(1)=0$ *////Le produit scalaire est nul donc les deux vecteurs* $\overrightarrow{AC}..et..\vec{n}$ *sont orthogonaux/////De plus///*

$\overrightarrow{BC}.\vec{n} = 1(2)+0(-5)+(-2)(1)=0$ *///// Donc les vecteurs* $\overrightarrow{BC}..et..\vec{n}$ *sont orthogonaux////Donc//*

// Par///conséquent////le vecteur $\vec{n}(2;-5;1)$ *est un vecteur normal au plan (ABC)//////*

Question 2b////

///En déduire une équation du plan (ABC)/////Alors//// humm////////Equation du plan (ABC)/////

//Alors/// On sait que //// $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = (-2)(2)+(-1)(-5)+(-1)(1)=0$ *//Donc/// Pour tout point*

M du plan (ABC) de coordonnées $M(x;y;z)$ *//on a le//vecteur///* $\overrightarrow{AM}(x-3;y-0;z-1)$

Le produit scalaire // $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{n}=2(x-5)-5(y-0)+1(z-1)=0$ *///Non //* $\overrightarrow{AM}\bullet\vec{n}=2(x-3)-5(y-0)+1(z-1)=0$ *//Donc ce qui donne///* $2x-5y+z-7=0$ *//////*

Par conséquent/// l'équation du plan//(ABC)/est////// $2x-5y+z-7=0$ *//////*

//Question 3a///

Déterminer la distance du point D au plan ABC///////Alors/// //Distance d'un point à un plan//

//Donc// La distance du point D au plan (ABC)//eest[silence]///// $\left|\frac{2(1)-5(1)-2-7}{\sqrt{4+25+1}}\right|=\left|\frac{-12}{\sqrt{30}}\right|=\frac{2\sqrt{30}}{5}$

//Question 3b///

Déterminer/le/volume/du tétraèdre ABCD////Alors///////////Humm//// On /sait que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers du produit de l'aire du triangle de base par la hauteur du tétraèdre/////////En plus//////////On sait que le triangle de base est ABC///de plus la hauteur est ici////////la distance du point D au plan (ABC) qui est égale à/// $\frac{2\sqrt{30}}{5}$ */////Donc///*

Le volume du tétraèdre ABCD est////// $(\frac{1}{3})(\frac{1}{2})\sqrt{30}\,(\frac{2\sqrt{30}}{5})=2$ *///////*

2/ Entretien complémentaire : Réf/17052008

///J'apprends mes cours après je fais des exercices dans plusieurs livres et sur internet des fois et des annales Bac//Je regarde dans le cours et dans les livres pour comprendre et après je fais des exercices jusqu' au moment où j'en ai marre //Dans le cours il n'y a pas forcement des choses pour faire des exercice car dans le cours c'est uniquement des formules et des propriétés//c'est pourquoi en faisant de exercices différents //je vois bien les méthodes et les techniques qu'il faut utiliser////Si je ne comprends pas je demande au professeur ou à d'autres élèves[qui mes amies et arrivent] //Avant je m'arrêtais lorsque que je rencontre des difficultés/// depuis la classe de seconde et de première j'arrive de mieux en mieux et cette année j'arrive encore plus//Peut-être que j'ai fait un travail sur moi-même//Chez moi personne ne peut m'aider depuis toujours///J'ai toujours travaillé toute seule ////vue que mes parents ne pouvaient pas si j'ai des difficultés le me payaient des cours de soutien/// Mais je sais que si je fais pas des exercices et des recherches dans les livres je peux pas savoir les choses qu'il faut faire //Donc je fais beaucoup d'exercices pour apprendre les choses en utilisant des livres///L'année dernière le professeur était rigoureux

sur la méthode et les technique///Donc j'ai gardé cela///Au collège des fois j'arrivais et c'était dure lorsque je voyais des camarades ayant des parents professeurs ou ingénieurs qui se faisaient aide par leur parents//Moi je ne pouvais pas//Donc j'ai appris à travailler seule//Mais mes parents ont été toujours là pour me payer des cours de soutien //Donc j'ai appris à faire des exercices et des recherches dans plusieurs livres de mathématiques/////Au lycée//C'est seulement en faisant des exercices et des recherches que j'apprends ///Vous savez///J'ai pris conscience qu'il faut absolument que j'étudie pour réussir car j'ai souffert de l'absence de mes parents restaurateurs///Ils étaient là sans être là//Donc j'ai pris la décision d'étudier pour réussir à l'école pour ne pas avoir la même vie que mes parents///Ils gagnent bien leur vie ///A mais ils ne sont jamais là////A la maison je n'ai personne qui puisse m'aider//Donc je suis obligé de commencer mon travail d'étude mathématique par la classe//C'est en classe que le professeur introduit les notions que je dois étudier///Vous voyez mes parents n'ont pas faits des études[mes parents sont restaurateur.]//J'écoute le professeur dans ses explications et applications//Je pose des questions pour comprendre/des fois simplement pour m'assurer de la bonne compréhension ou application de notions étudiées/// Je participe en classe//Lorsque j'ai la chance d'avoir un bon professeur cela m'aide beaucoup//Sinon je prends des quelques cours de soutien pour comprendre uniquement ce manque d'explication ou d'application du professeur// Les démonstrations en classes m'aident aussi beaucoup car je vois les liens que je pourrai construire lorsque j'étudie seule les exercices//

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors classe ?

«///Mon cahier de cours est une sorte de résumé donné par mon professeur de mathématiques///Je sais qu'il utilise plusieurs livres//donc je fais pareil///de toute façon il y a des choses///des façons de faire qui ne sont pas dans les cours et qu'il faut connaître si je veux réussir les évaluations///Je travaille beaucoup à la maison pour cela////»

Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire, en classe de terminale scientifique S

«///Maintenant, je sais comment tout cela fonctionne///pour répondre à une question donnée en mathématique///il faut d'abord répondre à d'autres questions qui se cachent derrière celle de l'exercice en trouvant les liants///les relations qui ne sont pas visibles mais présentes////Je fonctionne comme ça depuis toujours////disons plus approfondi depuis la classe de seconde générale et technique///et j'ai toujours de bons résultats donc je continue pareil////»

ANNEXE V : RC001

« RC001 » est un élève de 16 ans, fils ainé d'une famille d'agriculteurs. Il aime étudier les qcm pour apprendre. Il travaille beaucoup d'exercices dans ses livres en plus des devoirs de maison donnés par son professeur de mathématiques, ne fait jamais de fiche de formules mathématiques pour apprendre. Il pose des questions de compréhension et d'application pendant les séances de cours à son professeur, fait des recherches dans ses livres et sur internet pour enrichir ses connaissances. Il participe lorsque le prof le sollicite. Elève impliqué, il a de bonnes notes : 14 à 18, voire 20 sur 20[391]

1/ Séances d'observation de RC001

A/ Exercice extrait du livre de maths 100% Maths / Collection Hatier 2006

Episode RC001 Réf : S-6/ 11052008/Géométrie dans l'espace

Enoncé

Soit les points A, B, et C de coordonnées cylindriques $A(2;10°;5)$, $B(1;40°;3)$, $C(4;20°;2)$.

3- Déterminer les coordonnées cartésiennes des trois points.

4- Déterminer une mesure de l'angle ABC

Verbatim de RC001 pour la question n°1

Episode RC001 Réf : S-6/11052008/Géométrie dans l'espace

////Question 1//// Soit les points A, B, et C de coordonnées cylindriques $A(2;10°;5)$// $B(1;40°;3)$// $C(4;20°;2)$// Déterminer les coordonnées cartésiennes des trois points//Alors///[silence]///On sait dans l'espace muni d'un repère ortho normal direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les coordonnées cylindriques d'un point s'obtiennent par association des coordonnées polaires dans le plan muni du repère ortho normal $(O,\vec{i},\vec{j})$ et de la côte z du point M ///Les coordonnées cartésiennes du point A s'obtiennent par application de la

391 Sources: les bulletins scolaires

propriété /// $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ *////Avec cette formule on a les coordonnées des trois points*

$A\begin{pmatrix} 2\cos 10 \\ 2\sin 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ *//* $B\begin{pmatrix} \cos 40 \\ \sin 40 \\ 3 \end{pmatrix}$ *///* $C\begin{pmatrix} 4\cos 20 \\ 4\sin 20 \\ 2 \end{pmatrix}$ *///[RC001 prend sa calculatrice pour effectuer les opérations]//On a//* $A\begin{pmatrix} 1{,}97 \\ 0{,}347 \\ 5 \end{pmatrix}$ *//* $B\begin{pmatrix} 0{,}766 \\ 0{,}643 \\ 3 \end{pmatrix}$ *//* $C\begin{pmatrix} 3{,}759 \\ 1{,}368 \\ 2 \end{pmatrix}$ *////*

Verbatim de RC001 pour la question n°2

Episode RC001 Réf : S-6/11052008/Géométrie dans l'espace

////Question 2/// 2////Déterminer une mesure de l'angle ABC *////[silence]//Pour déterminer une mesure de l'angle* ABC *//**Je peux utiliser le produit scalaire des vecteurs*** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ *///[silence]///Je dois d'abord déterminer les coordonnées puis les normes des deux vecteurs///On a alors //* $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1{,}97-0{,}766 \\ 0{,}347-0{,}643 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 1{,}204 \\ -0{,}296 \\ 2 \end{pmatrix}$ *//* $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3{,}759-0{,}766 \\ 1{,}368-0{,}643 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2{,}993 \\ 0{,}725 \\ -1 \end{pmatrix}$ *///Je détermine d'abord la norme de ces deux vecteurs//Ce qui donne //////*

$AB = \sqrt{1{,}204^2 + (-0{,}296)^2 + 2^2} \approx 2{,}353$ $BC = \sqrt{2{,}993^2 + 0{,}725^2 + (-1)^2} \approx 3{,}238$ *///On sait le produit scalaire de ces deux vecteurs donne///* $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times CosABC$ *///L'expression analytique du produit scalaire donne///* $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = (x_{BA}\times x_{BC}) + (y_{BA}\times y_{BC}) + (z_{BA}\times z_{BC})$ *///Ce qui implique que* $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times CosABC = (x_{BA}\times x_{BC}) + (y_{BA}\times y_{BC}) + (z_{BA}\times z_{BC})$ *//Donc//*

$CosABC = \dfrac{(x_{BA}\times x_{BC}) + (y_{BA}\times y_{BC}) + (z_{BA}\times z_{BC})}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\|}$ *//D'où*

$ABC = Cos^{-1}\left[\dfrac{(x_{BA}\times x_{BC}) + (y_{BA}\times y_{BC}) + (z_{BA}\times z_{BC})}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\|}\right]$ *////*

$\Rightarrow ABC = Cos^{-1}\left[\frac{(1{,}204\times 2{,}993)+(-0{,}296\times 0{,}725)+(2\times(-1))}{2{,}353\times 3{,}238}\right] \approx 79{,}496°$ *//La mesure de l'angle ABC est de* $79{,}496°$ *////*

/////Pour déterminer la mesure de l'angle ABC//Je peux aussi utiliser ***le théorème d'Al-Kashi encore appelée la relation de Pythagore généralisée ou relation aux cosinus****//D'après Al-Kashi dans un triangle quelconque comme c'est le cas ici*

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BC\times BA\times CosABC$ */////Je détermine d'abord les coordonnées du vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *puis la distance* AC *///On a//* $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3{,}759-1{,}97\\1{,}368-0{,}347\\2-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1{,}789\\1{,}021\\-3\end{pmatrix}$ *//La norme du vecteur* AC *est//* $AC = \sqrt{1{,}789^2 + 1{,}021^2 + (-3)^2} \approx 3{,}639$ *///On sait que* $BA = 2{,}353$ *et* $BC = 3{,}238$ *///On a alors//////*

$CA^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA\times BC.CosABC$ *///* $ABC = Cos^{-1}\left(\frac{CA^2-(BA^2+BC^2)}{-2BA\times BC}\right.$ *///Donc l'angle ABC//// est//donc///est///* $ABC = Cos^{-1}\left[\frac{13{,}242-5{,}536-10{,}484}{-2\times(3{,}238\times 2{,}353)}\right]$ *//* $ABC = Cos^{-1}(0{,}1822)$ */////[prend sa calculatrice]///Donc l'angle ABC est //* $ABC \approx 79{,}496°$ *////*

B/ Séance d'observation sur les fonctions exponentielles

Exercice extrait du livre Prép@maths BAC/classe de terminale S /Collection Hatier/ Edition 2002

Episode RCA001 : Réf : S-1/19012008/Equation différentielle

Enoncé :

Soit l'équation différentielle $(E): y'+3y = x^2$

1-) Déterminer la solution générale f_1 de l'équation différentielle sans second membre.

2-) Soit g, la fonction numérique définie sur IR par $g(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x}$.Déterminer l'expression $g'(x)$ la dérivée de la fonction g

3-) En déduire une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y'+3y = x^2$, à l'aide de la méthode de variation de la constante.

4-) En déduire la solution générale de l'équation différentielle initiale.

Verbatim de RC001 pour la question n°1

Episode RCA001 : Réf : S-1/19012008/Equation différentielle

RC001 lit l'énoncé entièrement///La question 1//Discours////Résolution d'une équation différentielle du premier ordre sans second membre de la forme $y'+ay=0$// Cette équation différentielle est donc du premier ordre et homogène///La solution générale est alors//Rédaction// $f_1(x)=ke^{-3x}$ avec k une constante arbitraire///Discours///Bon//la première question est facile car c'est le cours//La formule générale////

Verbatim de RC001 pour la question n°1

Episode RCA001 : Réf : S-1/19012008/Equation différentielle

///En suite//La question 2///Discours///La dérivée de la fonction g /// La fonction est une composée de fonction toutes deux dérivable sur IR/ Donc le produit est dérivable// $g(x)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ *//*

Rédaction//Je pose g est égale à uv //donc $(uv)'=u'v+v'u$ */// $g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)e^{3x}+3\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{2}{27}\right)e^{3x}$ //Ce qui donne//* $g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)e^{3x}+\left(\frac{3}{3}x^2-\frac{6}{9}x+\frac{6}{27}\right)e^{3x}=$

$g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}\right)e^{3x}+\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)e^{3x}$ *//*

$g'(x)=\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}-\frac{2}{9}+x^2\right)e^{3x}$ *//* $g'(x)=(x^2)e^{3x}$ *///*

Verbatim de RC001 pour la question n°3

Episode RCA001 : Réf : S-1/19012008/Equation différentielle

///Question 3/// Discours//A l'aide de la méthode de la variation de la constante///[silence]///On sait que $f_1(x) = ke^{-3x}$ *///Bon///[Silence]///On considère que la fonction particulière est de la forme* $f_2(x) = k(x)e^{-3x}$ *///Je peux donc considérer que la constante* k *est une fonction de* x *///[Silence]///Calcul de la dérivée de* $f_2(x) = k(x)e^{-3x}$ *///Ce qui donne///Rédaction///La fonction* $f_2(x) = k(x)e^{-3x}$ *est sous la forme* uv *//Donc* $f_2'(x) = k'(x)e^{-3x} - 3k(x)e^{-3x}$ *//Discours//En remplaçant* $f_2(x) = k(x)e^{-3x}$ *et* $f_2'(x) = k'(x)e^{-3x} - 3k(x)e^{-3x}$ *dans l'équation* $(E): y' + 3y = x^2$ *avec respectivement* $y = f_2(x)$ *et* $y' = f'_2(x)$ *///On obtient///* $k'(x)e^{-3x} - 3k(x)e^{-3x} + 3k(x)e^{-3x} = x^2$ *///Par simplification on a///* $k'(x)e^{-3x} = x^2$ */// Ce qui donne///* $\frac{k'(x)e^{-3x}}{e^{-3x}} = \frac{x^2}{e^{-3x}}$ *//Par simplification de* e^{-3x} *dans le premier membre on a///* $k'(x) = \frac{x^2}{e^{-3x}} = x^2e^{3x}$ *//Donc on a ///* $k'(x) = x^2e^{3x}$ *//La dérivée* $k'(x) = x^2e^{3x}$ *///[Discours]///On peut alors déterminer par intégration la fonction numérique* $k(x)$ *///[Silence]///Discours///Nous savons déjà avec la question n °2 que la dérivée de la fonction* $g(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x}$ *est* $g'(x) = \left(x^2\right)e^{3x}$ *///Rédaction///Donc on a///* $k(x) = g(x) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x}$ *///Ce qui nous permet d'avoir la fonction////* $f_2(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x} \times e^{-3x}$ *//ce qui donne* $f_2(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}$ *///*

Verbatim de RC001 pour la question n°4

Episode RCA001 : Réf : S-1/19012008/Equation différentielle

////Question n°4////En déduire la solution générale de l'équation différentielle initiale///L'équation initiale est// $(E): y' + 3y = x^2$ */// De tout ce qui précède on peut alors en déduire la solution générale de l'équation différentielle* $(E): y' + 3y = x^2$ *qui est//* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ *//D'où la solution générale est* $f(x) = ke^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}$ *///Voilà///*

Exercice extrait du livre Prép@maths BAC/classe de terminale S /Collection Hatier/ Edition 2004

Exercice : Réf : RC001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit

Partie A

Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b$ [7] lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$

Soient a, b, c, d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7] alors $ac \equiv bd$ [7]

En déduire que : si pour a et b entiers relatifs différents de zéro, si $a \equiv b$ [7], alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n$ [7]

Partie B : application

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tel que :

1 $x^2 \equiv 3$ [6].

2 $(5x+2)(x+2) \equiv 2$ [6].

3 $15x^4 + 12x^2 + 87 \equiv 0$ [6].

Verbatim de RC001 pour la partie A

Réf : RC001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit

///Partie A////RCA001 Lit l'énoncé/////Je///peux///utiliser les propriétés de compatibilité de la congruence avec l'addition et l'utilisation de règles de calcul dans un anneau////////Alors/////

//Soient a, b, c, d des entiers relatifs//////Démontrer que///si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7] alors $ac \equiv bd$ [7]////// On sait que pour deux nombre a et b on dit que a est congru à b modulo 7/////et on écrit $a \equiv b$ [7] lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$ ////

Si $a = b + 7k$ *//// de même* $c - d = 7k.'$ */////Ainsi////* $ac - bd = ac - ad + ad - bd$ *///*

// $ac - bd = a(c-d) + d(a-b)$ *///* *Ainsi///* $ac - bd = a(c-d) + d(a-b)$ *//* *O/* $ac - bd = 7(k.'a + kd)$ *///* *Donc////* $ac - bd = 7(k.'a + kd)$ */////Donc////* $k.'a + kd$ *est un entier relatif///Donc///* $ac \equiv bd$ *[7]*

//// En déduire que //// si pour a et b entiers relatifs différents de zéro//si $a \equiv b$ *[7]//alors pour tout entier naturel//* n */////* $a^n \equiv b^n$ *[7]////Humm///// On peut utiliser l'identité remarquable* $a^n - b^n$ */////* *Alors Comme* $a \equiv b$ *[7] signifie qu'il existe un entier relatif* k *tel que* $a = b + 7k$ *///Implique que/// En utilisant l'identité remarquable*

On a// $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}) = 7k(a^{n-1} + a^{n-2}b + .. + b^{n-1} = 7k.'$

En simplifiant les deux membres par 7///On a////Donc /////$= k(a^{n-1} + a^{n-2}b + .. + b^{n-1} = k.'$*//////*

On a////Donc ///// $a^n \equiv b^n$ *[7]/////*

Verbatim de RC001 pour la partie B question n°1

Réf : RC001-S5/11052008/ Arithmétique/Congruence d'un produit

//// Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x *tel que///* $x^2 \equiv 3$ *[6].///[silence]///On sait que tout entier relatif* a *est congru modulo* n *à un unique entier* r *tel que* $0 \le r < n$ *////avec* n *entier naturel supérieur ou égal à* 2 *////C'est une propriété du cours qui permet de définir une partition de l'ensemble des entiers relatifs en* n *classes///chacune des classes ainsi définie contenant un unique élément de l'ensemble* $\{0;1;............;n-1\}$ *////Donc///// si j'utilise la propriété/////[silence]////Donc///Tout entier relatif est congru modulo 6 à 1, et 1 seul//Des entiers* $\{0;1;............;5\}$ */////Nous pouvons analyser tous les cas possibles des carrés modulo 6///*

$x[6]$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$x^2[6]$	*0*	*1*	*4*	*3*	*4*	*1*

////On a donc/// $x^2 \equiv 3[6]$ *à la seule condition que* $x \equiv 3[6]$ *///Ainsi ////l'ensemble demandé serait donc ///* $\{6k + 3; k \in Z\}$ *////*

Verbatim de RC001 pour la partie B question n°2

Réf : RC001-S5/11052008//Congruence d'un produit

////De tout ce qui précède ////nous analysons directement tous les cas possibles $[6]$*/////*

$x[6]$	*O*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$(5x+2.)[6]$	*2*	*1*	*0*	*5*	*4*	*3*
$(x+2.)[6]$	*2*	*3*	*4*	*5*	*0*	*1*
$(5x+2).(x+$	*4*	*3*	*0*	*1*	*0*	*3*

///Alors ////[silence]////L'ensemble cherché est alors un ensemble vide dans ce cas/////

Verbatim de RC001 pour la partie B question n°2

Réf : RC001-S5/11052008//Congruence d'un produit

////Considérons $x \in Z$ */////[silence]//*

/Nous savons que $15 \equiv 3[6]$*///*$121 \equiv 1[6]$*///*$87 \equiv 3[6]$*///// On a alors /////*$15x^4 + 121x^2 + 87 = (3x^4 + x^2 + 3)[6]$*////Nous pouvons alors analyser tous les cas possibles* $[6]$*/////*

$x[6]$	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$(x^2)[6]$	*0*	*1*	*4*	*3*	*4*	*1*
$(x^4)[6]$	*0*	*1*	*4*	*3*	*4*	*1*
$(x^4 + x^2 +$	*3*	*1*	*1*	*3*	*1*	*1*

///Alors //// on peut dire que l'ensemble des entiers relatifs x tel que $15x^4 + 12x^2 + 87 \equiv 0$ *[6] est un ensemble vide/////*

C/ Séance d’observation sur les probabilités

Exercice extrait du sujet de Bac session de juin 2006 /Guadeloupe-Guyane-Martinique

Nous avons proposé cet exercice pour voir comment l’élève va manipuler et trouver les liens de filiation entre les notions mises en jeu tel que : Probabilité conditionnelle. Lois de probabilités. Limites usuelles. Fonction exponentielle. Primitives usuelles. Intégration par parties. C’est aussi pour voir ce que cet élève connaît sur la fonction de densité et les intégrations (question n°1 partie A). Le calcul de la probabilité de l’évènement contraire associé (question n°2 partie B). Comment effectuer une intégration partie (question n°4 partie B).

Exercice : Réf : RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda.t} dt.$

La courbe donnée sur le graphique ci-dessous représente la fonction de répartition associée.

Partie : A

5- Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1).$

6- Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ

Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$

1- Calculer $P(X \leq 1).$ En donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2- Calculer $P(X \geq 2)$

3-

Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près

4- Calculer $F(x) = \int_0^x 1{,}5te^{-1{,}5t}dt$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. Interpréter le résultat

Partie : C

Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixième de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre λ =1,5. Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

2- On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a- Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près

b-Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification?

2- On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose le nombre de cylindre suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés?

b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé?

Extrait d'épisode utilisé page 214

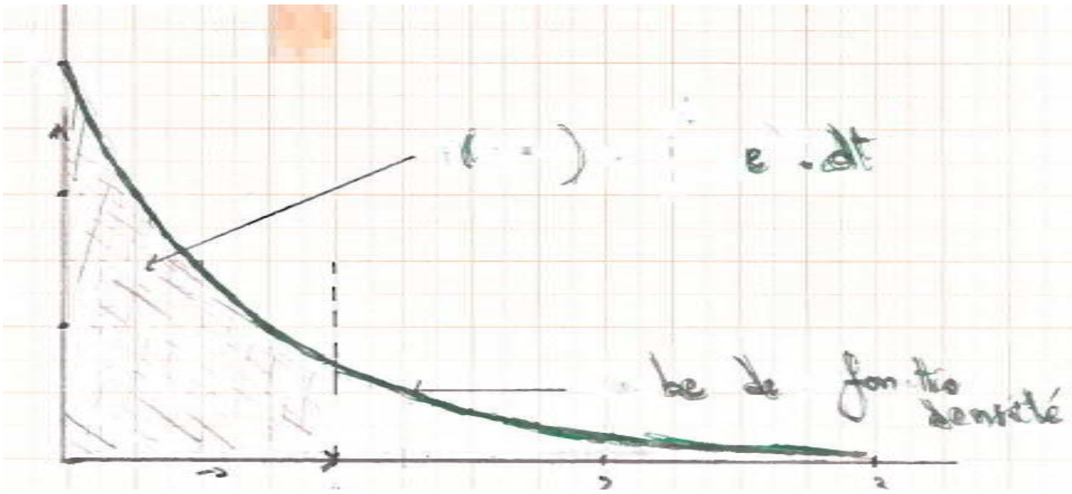
Verbatim de RC001 Réf : RC001/S-5/20042008/Lois de probabilités

Verbatim de RC001pour les questions n°1&2 Partie A

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePAQ1-2

Soit X *une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre* λ *////On rappelle que* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda.t}dt.$ *///La courbe donnée sur le graphique ci-dessous représente la fonction de répartition associée///question 1/// Interpréter sur le graphique la probabilité* $P(X \leq 1).$ *//////On sait que dans l'énoncé* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda.t}dt.$ *//*

Donc// $P(X \leq 1)$ */// représente une forme de calcul d'intégrale bornée de 0 à 1//// Or l'intégrale//est une aire d'un domaine délimité///silence//Donc//* $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda.t} dt$ *//L'interprétation géométrique est que///* $P(X \leq 1)$ *représente graphiquement du domaine délimité par l'axe des abscisses// la courbe représentative de la fonction densité et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = 1$



//////Courbe de la fonction de densité ///la partie hachurée représente $P(X \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda.t} dt$ /////

Verbatim de RC001 pour la question les questions n°1, 2,3 Partie B

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePAQ1-2

////Soit X *une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre* λ *////On rappelle que* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda.t} dt.$ *///On pose* $\lambda = 1{,}5$ *////Calculer* $P(X \leq 1).$ *En donner une valeur exacte puis une valeur approchée à* 10^{-3} *près par excès////On sait que* $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda.t} dt.$ */// $\lambda = 1{,}5$ ///On a donc////* $P(X \leq 1) = \int_0^1 1{,}5 e^{-1{,}5t} dt = \left[-e^{-1{,}5t}\right]_0^1$ */////ce.qui///donne///[silence]*

$P(X \leq 1) = -e^{-1{,}5} + 1$ */////*

Question 2///Calculer $P(X \geq 2)$ */////On sait que la somme des probabilités de deux* *évènements contraire est égale à 1//donc ///* $P(X \geq 2) + P(X < 2) = 1$ *///On a alors ///* $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$ *// Or///* $P(X < 2) = \left[-e^{-1,5t}\right]_0^2$ *////Donc ///* $P(X \geq 2)$ *//*

/ $P(X \geq 2) = 1 - 1 + e^{-3} = e^{-3}$ */////*

Question/3////Déduire des calculs précédents l'égalité suivante// $P(1 \leq X \leq 2) = 0,173$ *à* 10^{-3} *près////Ona* $P(1 \leq X \leq 2) = 1 - P(X > 2) - P(X < 1)$ *///On a alors////* $P(1 \leq X \leq 2) = e^{-1,5} - e^{-3}$ *////Alors [silence]///prend sa calculatrice////* $P(1 \leq X \leq 2) = 0,173$ *////*

Verbatim de RC001 pour la question les questions n°4 Partie B

Extrait d'épisode utilisé pages 228-229

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePbQ4

Calculer $F(x) = \int_0^x 1,5e^{-1,5t}dt$ *Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} F(x)$. *Interpréter le résultat///*

Solution proposée par RC001/// $F(x) = \int_0^x 1,5e^{-1,5t}dt$ *///* $F(x)$ *est l'intégrale de deux fonction///pour calculer* $F(x)$ *////j'effectue une intégration par partie en posant pour tout réel* t *///* $U(t) = t$ *et* $V(t) = -e^{-1,5t}$ *///Les fonctions* $U.et.V$ *sont dérivables et admettent des fonctions dérivées continues sur IR avec pour tout réel* t *///* $U'(t) = 1$ *et* $V'(t) = 1,5e^{-1,5t}$ *///On a alors///* $F(x) = \int_0^x 1,5e^{-1,5t}dt = [U(t) \times V(t)]_0^x - \int_0^x U'(t) \times V(t)dt$ *//Ce qui donne//* $F(x) = \left[-te^{-1,5t}\right]_0^x - \int_0^x \left(-e^{-1,5t}\right)dt$ *///puis//* $F(x) = -xe^{-1,5s} - \left[\frac{1}{1,5}e^{-1,5t}\right]_0^x$ *///et enfin* $F(x) = -xe^{-1,5x} - \frac{1}{1,5}e^{-1,5x} + \frac{1}{1,5}$ *///Calcul de limite///On a d'une part* $\lim_{t \to -\infty}\left(e^{t}\right) = 0$ *//donc* $\lim_{x \to +\infty}\left(e^{-1,5x}\right) = 0$ *///et d'autre part///* $\lim_{t \to -\infty}\left(te^{-t}\right) = 0$ *///donc* $\lim_{x \to +\infty}\left(xe^{-1,5x}\right) = 0$ *///Finalement* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{1,5}$ *////Cette limite représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ///sa valeur est* $\frac{2}{3}$ *//conforme au résultat du cours* $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ *////*

Verbatim de RC001 pour la question les questions n°1a Partie C

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePcQ1a

////Supposons A l'évènement « le cylindre est accepté » et R l'évènement « le cylindre est rectifié »////

On sait que/// Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas///Donc////// $P(R)=P(1\leq X\leq 2)$*/////On a //*

//la probabilité $P_R(A)=0{,}8$ *////* $P(A\cap\overline{R})=P(X\leq 1)$*///Les évènements A interB et AinterRbarre forment alors une partition de l'évènement A///Donc ///[silence]///Avec la propriété des*

probabilités totales on a /// $P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap\overline{R})$*////Donc en utilisant la propriété des probabilités conditionnelles on a ///* $P(A)=P_R(A)\times P(R)+P(A\cap\overline{R})$*//*

///Donc/// $P(A)=0{,}8\times(e^{-1,5}-e^{-3})-è^{-1,5}+1$ *////* $P(A)=1-0{,}2e^{-1,5}-0{,}8e^{-3}$ *////Alors///[sil ence]//*

/Prend sa calculatrice//// $P(A)=0{,}915$ *////*

Extrait d'épisode utilisé pages 211-212

Verbatim de RC001 pour la question les questions n°1b Partie C

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePcQ1b

////question 1b// on veut la probabilité // Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification.//Le sachant implique une probabilité conditionnelle// la probabilité qu'un cylindre qui a été accepté ait subi une rectification// Nous avons considéré les évènements// «A » le cylindre est accepté et « R »l'évènement le cylindre est refusé///donc//Nous notons cette probabilité conditionnelle $P_A(R)$ *///Or d'après la propriété de probabilité conditionnelle///cette notation nous donne* $P_A(R)=\dfrac{P(A\cap R)}{P(A)}$ * *//Nous venons de déterminer* $P(A)=1-0{,}2e^{-1,5}-0{,}8e^{-3}$ *////* $P(A)=P(A\cap R)+P(A\cap\overline{R})$ *//*
$P(A\cap R)=P(A)-P(A\cap\overline{R})$ *///avec* $P(A\cap\overline{R})=P(X\leq 1)=e^{-1,5}+1$*//ce qui permet*

d'avoir $P_A(R) = \dfrac{0,8(e^{-1,5} - e^{-3})}{1 - 0,2e^{-1,5} - 0,8e^{-3}}$ *////RC001 prend sa calculatrice ///ce qui donne une valeur approchée à* 10^{-3} *près de 0,151.//////*

Verbatim de RC001 pour la question les questions n2a Partie C

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePcQ2a

/////On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production////On suppose le nombre de cylindre suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.////Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés///c'est un tirage successif avec remise et de manière indépendante avec deux issues///le cylindre est accepté ou est refusé///supposons la variable aléatoire Y *à qui on associe le nombre de cylindre acceptés/// Cette variable aléatoire suit alors une loi binomiale de paramètres* $n = 10$ *et de probabilité succès* $p = P(A)$ *et de probabilité d'échec* $q = 1 - P(A)$*////Donc ///la probabilité pour que les dix cylindres soient acceptés est alors///* $P(Y = 10) = C_{10}^{10} \times p^{10} \times q^{10-10} = p^{10}$ *////[prend sa calculatrice]/////* $P(Y = 10) = 0,414$ */////*

Verbatim de RC001 pour la question les questions n°2b Partie C

Réf: RC001/S-4/20042008/Lois de probabilités/loi exponentiellePcQ2b

//// Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé////[silence]////Au moins un cylindre est refusé si et seulement si ils ne sont pas tous acceptés//// Alors///la probabilité que au moins un cylindre ne compte pas est l'évènement contraire de la question précédente//

// $P(\overline{Y = 10}) = 1 - P(Y = 10) = 1 - p^{10} = 1 - 0,414 = 0,586$ */////*

D/ Séance d'observation sur les fonctions exponentielles/ suite/Intégrales

Exercices extraits de prép@bac terminale S Collection Hatier 2000

Extrait d'épisode utilisé page 244

Réf : RC001/S-1/16022008 2008/ fonctions exponentielles- puissances/suite géométrique

Exercice.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k e^{kx}$.

Montrer que pour tout réel x , $f(x) = \frac{1-e^{6x}}{1+e^x}$

Verbatim de RC001

Réf : RC001/S-1/16022008/fonctions exponentielles/puissances/suite géométrique

/// Bon/// [Discours de RC001] la fonction f *est définie sur IR par* $f(x) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k e^{kx}$ *///Donc// [silence]* $f(x) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k e^{kx}$ *signifie la somme des termes* $(-1)^k e^{kx}$ *avec* k *allant de 0 à 5/// Il s'agit donc des termes consécutifs d'une suite numérique///[Silence]///supposons la suite* $u_k = (-1)^k e^{kx} = (-e^x)^k = 1(-e^x)^k$ *///Donc* $f(x) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k e^{kx}$ *est la somme de six termes consécutifs de la suite géométrique de raison* $q = (-e^x)$ *et de premier terme* $u_0 = 1$ *///Donc* $u_0 q^k$ *//En utilisant* $S_k = u_0 \times \frac{1-q^k}{1-q}$ *///Ona //* $f(x) = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k e^{kx} = \frac{1-(-e^x)^6}{1-(-e^x)}$ *//Donc* $f(x) = \frac{1-e^{6x}}{1+e^x}$ *//////*

Exercices extraits de prép@bac terminale S Collection Hatier 2000

Exercice

On pose pour tout entier naturel n non nul

$I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

$I_0 = \int_1^e x^2 dx$

1- Calculer $I_0 = \int_1^e x^2 dx$.

2- Calculer I_1

3- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$

En déduire I_2

4- a Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, I_n est positive

b Déduire que, pour tout entier naturel non nul, $I_n \leq \dfrac{e^3}{n+1}$

c Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} (I_n)$

Verbatim de RCA001 pour la question 1 *Réf : RC001/S-1/16022008 2008*

On pose pour tout entier naturel n non nul /// $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$, *où ln désigne la fonction logarithme népérien///* $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ *////question 1///Calculer* $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ *//// On pose pour tout entier naturel n non nul ///* $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ *avec ln la fonction logarithme népérien///* $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ *////* $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ *.///Alors il s'agit d'intégration////*

Donc $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ *//// la primitive de la fonction* x^2 *est la fonction* $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$

donc $I_0 = \left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_1^3$

Ce qui donne quidonne/////

$I_0 = \dfrac{1}{3}e^3 - \dfrac{1}{3} \Rightarrow I_0 = \dfrac{1}{3}(e^3 - 1)$

Verbatim de RCA001 pour la question 2 *Réf : RC001/S-1/16022008 2008*

Calculer I_1 *///Alors///hum//* $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$, *où ln désigne la fonction logarithme népérien//Alors//c'est l'intégrale d'un produit de deux fonctions//une fonction polynôme et une fonction logarithme népérien//Donc il s'agit d'une intégration par parties///* $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$ *//* $I_1 = \int_1^e x^2 (\ln) dx$, *en posant* $P'(x) = x^2, et U(x) = \ln x$ *on a ///* $P(x) = \frac{1}{3}x^3, et U'(x) = \frac{1}{x}$ *//* $I_1 = [P(x).U(x)]_1^e - \int_1^e P(x).U'(x)dx.$*///D'où*
$I_1 = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3.\frac{1}{x}dx$ *///* $I_1 = (\frac{1}{3}e^3 \ln e - \frac{1}{3}\ln 1) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$ *// ce qui donne*
$I_1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}I_0$ */////* $I_1 = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3 + \frac{1}{9}$

$$I_1 = \frac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)$$

Verbatim de RCA001 pour la question 3 *Réf : RC001/S-1/16022008 2008*

Question 3//Démontrer que pour tout entier naturel n non nul/ $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

En déduire I_2*///Alors////on sait quoi déjà// On sait que* $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$ *///Donc pour tout entier naturel n non nul* $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$ *//implique que* $I_{n+1} = \int_1^e x^2 (\ln x)^{n+1} \, dx$ */////C'est encore l'intégrale d'un produit de deux fonctions une fonction polynôme et une fonction logarithme népérien////je peux utiliser une intégration par parties///* $I_{n+1} = \int_1^e P'(x).U(x)dx$ *avec*

$$P'(x) = x^2, et U(x) = (\ln x)^{n+1}$$
$$P(x) = \frac{1}{3}x^3, U'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$$

//// on peut écrire $I_{n+1} = \left[\frac{1}{3}x^3(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

Ce qui donne $I_{n+1} = \frac{1}{3}e^3(\ln e)^{n+1} - \frac{1}{3}(\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{3}I_n$*////[silence]////* $I_{n+1} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{n+1}{3}I_n$

////en rendant au même dénominateur on a ///$3I_{n+1} = e^3 - (n+1)I_n$

////$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$///$3I_2 + 2I_1 = e^3$ ///Maintenant déduisons I_2

Alors, en utilisant le résultat précédent ////Je peux dire que /// connaissant $I_1 = \frac{1}{9}\left(2e^3+1\right)$/// $I_2 = \frac{e^3 - 2I_1}{3}, avec I_1 = \frac{1}{9}(2e^3+1)$

On a //// $I_2 = \dfrac{e^3 - \frac{2}{9}(2e^3+1)}{3}$///// ce qui donne [silence]//// $I_2 = \frac{1}{27}(5e^3 - 2)$

Verbatim de RC001 pour la question 4a *Réf : RC001/S-1/16022008 2008*

Question 4a// Démontrer que pour tout entier naturel n non nul I_n *est positive////Alors//humm[silence]//// Il s'agit d'une fonction composée une fonction carrée et une fonction logarithme népérien* ///$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$//// *on sait que la fonction ln est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$ *et ln (1)=0, donc ln(x)*≥ 0 *pour tout* $x \in [1;e]$ // *par conséquent pour tout* $n \in IN^*$ *et pour tout* $x \in [1;e]$//*nous avons* $\ln(x)^n \geq 0$/////*Puisque* $x^2 \geq 0$ *pour tout* $x \in [1;e]$////*on peut en déduire que* $x^2(\ln x)^n \geq 0$, *pour tout* $x \in [1;e]$////$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$/// *est* $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$ *donc l'intégrale d'une fonction positive sur* $[1;e]$. *Par conséquent pour tout entier naturel n non nul* $I_n \geq 0$/////

Verbatim de RC001 pour la question 4b *Réf : RC001/S-1/16022008 2008*

4b////Déduire que pour tout entier naturel non nul $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$///*Alors//humm [silence//regarde ses productions] ////On sait déjà que*

$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$ *[nous avons déjà cette relation pour la question 3] pour tout* $n \in IN^*$//// *on a* $(n+1)I_n = e^3 - 3I_{n+1}$////*Or pour tout* $n \in IN^*$ $3I_{n+1} \geq 0$///// *donc* $(n+1)I_n \leq e^3$///$I_n \leq \frac{e^3}{(n+1)}$ *pour tout entier naturel n non nul*

Verbatim de V001 pour la question 4c *Réf : RC001/S-1/16022008 2008*

4c///Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n)$ *////Alors//on sait que* $I_n \geq 0$*//// donc* $0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{(n+1)}$ *en plus* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$ *//d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n) =$ *0*

2/ Séance entretien Réf/11052008

////Je travaille avec beaucoup d'exercice///Je travaille avec mon copain Lilian///C'est avec lui que j'apprends les choses après le cours///Au début chez lui chez ///Il a beaucoup de livre ///Et son est très fort aussi////Donc je vais chez lui pour travailler///J'ai appris avec lui comment faire les mathématiques///Je continue de travailler avec lui // Chez lui il y des tonnes de livres de maths// Chez lui tout le monde a fait des études supérieurs////Maintenant je sais aussi comment faire des recherches ///il me prête encore ses livres ///

Réponses aux questions complémentaires :

Pour vous, qu'est-ce que l'étude mathématique hors-classe ?

«///En classe///on jette les bases////les formules importantes et nécessaires mais pas toutes car il y a des non-dits///des implicites//// »

Pourquoi croyez-vous que l'étude hors classe est obligatoire, en classe de terminale scientifique S

«////En étude hors classe autonome////je travaille pour l'acquisition et la maîtrise des nuances et des corrélations entre les notions étudiées et les objets mathématiques////J'apprends beaucoup de choses qui ne sont pas exposées dans les cours en classe////….//// …///// »

RESUME :

Dans cette thèse, nous nous somme intéressé aux très bons élèves et à leur façon d'étudier les mathématiques, en tenant compte du fait que tout ce qu'il y a à étudier mathématiquement n'est pas désigné par les professeurs. Partant de l'hypothèse que leur façon d'étudier leur permet de mieux réussir, nous avons suivi pendant deux années scolaires de très bons élèves de cinq établissements différents. Par une enquête anthropologique et ethnologique de terrain, nous les avons observés après les séances de cours en classe, sur leur lieu de travail (le bureau, la chambre ou un coin spécialement aménagé) ; en train de faire des exercices, des enquêtes, des recherches mathématiques ; chacun à sa manière, avec des supports didactiques de son choix. Cette forme d'observation particulière que nous appelons avec Mercier la méthode des épisodes biographiques, nous a permis de constituer des épisodes de leur biographie en mathématique, c'est-à-dire des moments où l'on peut attester qu'une question nouvelle se pose à eux, qu'ils apprennent quelque chose de nouveau en cherchant la réponse à la question donnée, et qu'ils identifient ce qu'ils ont appris en l'interrogeant depuis ce qu'ils savaient déjà. Nous montrons ainsi, comment les très bons élèves de terminales scientifiques fabriquent un répertoire de savoirs efficaces: leur répertoire épistémologique et heuristique. Pour construire ce répertoire, ils ont besoin d'aller enquêter loin de la classe, dans l'espace ou dans le temps (dans de nombreux manuels, scolaires ou non, dans des anciens livres, sur internet, quelques fois avec l'aide d'un membre de la famille ou d'un copain). C'est cette manière d'enquêter que nous appelons la transhumance didactique.

MOTS CLES: étude autonome, institution, didactique, contrat didactique, enquête, recherche, exploration, épisode biographique, méthode des épisodes biographique, anthropologique, ethnologique, clinique, répertoire, épistémologique et heuristique, fonctionnement, gestion, action, gestes, transhumance didactique.

ABSTRACTS

In this thesis, we were interested in the very good students and their way studying mathematics taking account of the fact that what there is to study mathematically is not always indicated by the professor in the courses of the various school grades. Based on the hypothesis that their way of studying enables them to succeed better in mathematics, we followed very good students from five different schools for two school years. Thus, using anthropological and ethnological field study methods, we observed the students after classroom hour, in their individual workplace settings (office, room or an especially arranged corner) doing exercises, investigations, mathematical research studies, each one in different way, with different didactic supports. This particular kind of observation, that we are calling the biographic episode method, enabled us to constitute episodes of their cognitive biography in mathematics, in other words moments of independent study where one can observe that they are faced with a news question, they learn something new by seeking the answer to a given problem, and they identify what they learned by questioning it in what they knew already. Thus we show how last year secondary school science students manufacture or build a directory of effective knowledge: the epistemological and heuristic directory. To build this directory, they need to seek learning away from the classroom, physically or temporally (using many textbooks or not, old textbooks, the Internet, or with the help of a family member or friend). It is this need for investigation which we call didactic transhumance.

KEY WORDS: Independent study, school, didactic contract, investigation, research, exploration; biographical, episode, method episode biographical, ethnological, clinical, epistemological and heuristic directory, operation, management, action, didactic transhumance.