

ACADÉMIE DE MONTPELLIER
UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
- SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC -

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal

Formation Doctorale : Systèmes Automatiques et Microélectronique

École Doctorale : Information, Structures et Systèmes

présentée et soutenue publiquement

par

Nicolas RIEHL

le 4 Mai 2011

Titre :

Modélisation et conception de robots parallèles à câbles de grande dimension

JURY :

| | | |
|---------------------|---|---------------------------|
| M. Clément GOSSELIN | Professeur, Université Laval, Québec | <i>Rapporteur</i> |
| M. Philippe WENGER | Directeur de recherche CNRS, IRCCYN, Nantes | <i>Rapporteur</i> |
| M. Nicolas ANDREFF | Professeur, Université de Besançon | <i>Examineur</i> |
| M. Cédric BARADAT | Docteur, Directeur Technique Tecnalía | <i>Examineur</i> |
| M. Marc GOUTTEFARDE | Chargé de recherche CNRS, LIRMM, Montpellier | <i>Examineur</i> |
| M. François PIERROT | Directeur de recherche CNRS, LIRMM, Montpellier | <i>Directeur de Thèse</i> |

Remerciements

Mes premiers remerciements vont naturellement à mon directeur de thèse, François Pierrot. Je lui exprime toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son équipe, m'avoir fait confiance pour la réalisation de ces travaux de thèse, et bien évidemment pour l'ensemble des bons conseils qu'il a su me prodiguer.

Je remercie également Philippe Wenger et Clément Gosselin qui me font l'honneur d'être les rapporteurs de ce manuscrit et tiens à exprimer ma reconnaissance à Nicolas Andreff qui a accepté de présider ce jury de thèse.

Je tiens ensuite à remercier mes deux encadrants Cédric Baradat et Marc Gouttefarde, mes Mentors ! Ils m'ont constamment encouragé et judicieusement invité à développer un sens critique. Cette thèse a très largement bénéficié de leur expérience et de leur attention. Je les remercie infiniment pour tout. Je n'en serais pas là sans eux et je sais pertinemment que tout ce qu'ils ont pu m'apporter me servira tout au long de ma carrière.

Je profite également de ces quelques lignes pour exprimer ma gratitude envers Sylvain Guégan lequel, alors que je suivais ses cours à l'INSA, il y a quelque temps déjà, a été le premier à me transmettre le goût, sinon le virus, de la recherche.

Ma reconnaissance va également à tout le personnel du LIRMM et plus particulièrement à l'équipe du département robotique qui m'a fourni un environnement de travail agréable et stimulant. Un remerciement particulier va à Olivier Company et Sébastien Krut qui ont toujours été présent pour apporter des réponses à mes questions et aussi pour poser des questions, souvent nombreuses, mais toujours pertinentes. Beaucoup d'autres personnes ont contribué à la réalisation de cette thèse parmi lesquelles mes « collègues » et amis de Fatronik France / Fatronik France Tecnalía / Tecnalía, qui m'ont apporté plus qu'un encadrement industriel. Ils ont contribué par leur implication dans ce projet, leur sympathie et leur soutien, à faire de ces 3 longues et dures années un excellent souvenir. Il est vrai qu'il est plus facile de le dire à ce stade de la thèse. Donc un grand merci à vous tous, Fred, Micaël, Vincent, Cédric, Jean-Baptiste, Guillaume, Marine, Valérie et à tous ceux qui y ont fait parti durant ces 4 années de la petite famille FTKFr. Merci à Agus et à tous ceux de Miramon qui ont participé de près ou de loin à ce travail.

Je n'oublie bien évidemment pas mes acolytes thésards Fatronik, Hai et Lotfi, qui m'ont accompagné dans cette aventure, et sur qui j'ai pu compter de manière indéfectible. Vous m'avez surtout bien fait marrer les fatronik Boys. Merci les gars ! Je n'oublie pas les membres de la « Bonnet Team », Vincent et Corbel, qui m'ont permis de vivre des aventures allant du palpitant à l'inintéressant et de partager des discussions philosophique rarement palpitantes mais toujours inintéressantes. Merci le gang des blousons en cuir ! Leur départ a laissé la place à la « Riehl Team » composée, dans un ordre aléatoire de Carlési (le chasseur foufou camarguais), Arnaud (le partiellement présent), Johann (le futur cable guy), auxquels s'ajoutent les Fatronik boys qui tenaient une place d'honneur. Un grand merci aux autres doctorants et jeunes docteurs, j'ai nommé : Rogerio, Mourad, Parodi, Abdelah, Alfredo, Antonio, Carla, Walid, Dudu et tous les autres que j'oublie...

Une sincère pensée à tous mes amis de collègue & Lycée ou de l'INSA, de Rennes, Paris, Montpellier, Strasbourg ou encore de Rouen. Dans le désordre : « mes 3 compères des 4 fantastiques » : Antoine, Julien et Matthieu, les rennais : Hélène, Clément, Guillaume et Florie, les Insaliens : Huyhuy, Simon, Florian, Doudou, Lolo, 20K, Arno, Popo, Olivier, J2M, Manu, Bérag', ... et les Montpelliérains : Jeannot & Mado, Elsa, Marion, Elo & Mick, et les autres qui ne rentrent pas dans ces catégories ou que j'ai malencontreusement et involontairement omis.

Je remercie grandement les membres de ma famille qui m'ont toujours aidé à prendre les bonnes décisions dans ma vie et qui m'ont soutenu dans les bons comme dans les mauvais moments. Merci notamment à Carole, Xavier et François qui ont été de très bon conseil notamment avant de me lancer dans cette thèse. Merci à ma marraine d'avoir toujours été là, y compris le jour de ma soutenance. Merci à mes grands parents lesquels, qui malgré leur absence le 4 mai avaient toutes leurs pensées dirigées vers Montpellier. Merci à Tom et Caro pour m'avoir offert une si belle filleule. Et Bien évidemment merci à mes parents qui m'ont toujours accompagné dans les moments de joie comme de doute. Merci à eux de m'avoir encouragé et supporté durant toutes ces années.

Je terminerai par le meilleur, ou la meilleure plutôt, qui malgré son implication uniquement dans la deuxième moitié de cette thèse a pris maintenant plus qu'une part complète dans ma vie. Gwénaëlle, tu as été d'un parfait soutien et d'un réconfort sans limite dans les moments les plus difficiles de ces 3 années. Merci pour tout !

Pour finir, un double espace a été ajouté dans le manuscrit pour toi Cédric, et je me suis permis de tourner une phrase à la Yoda pour toi Marc ! Bonne recherche à tous les deux !

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | i |
| Table des matières | iii |
| Table des figures | ix |
| Liste des tableaux | xv |
| 1 Introduction | 1 |
| 1.1 Présentation des robots parallèles à câbles | 1 |
| 1.1.1 Différents types de configuration | 2 |
| 1.1.2 Robots à câbles : avantages et inconvénients | 4 |
| 1.1.3 Quelques applications des robots à câbles | 7 |
| 1.2 Modèle de câble sans masse non-élastique et modélisation des robots parallèles à câbles | 8 |
| 1.2.1 Modélisation des robots parallèles à câbles et notations | 8 |
| 1.2.1.1 Problème géométrique inverse | 9 |
| 1.2.1.2 Transmission des efforts et équilibre statique de la plateforme | 9 |
| 1.2.2 Espaces de travail : différentes définitions | 10 |
| 1.2.3 Conception de robots parallèles à câbles | 11 |
| 1.3 Différentes modélisations de câble | 12 |
| 1.4 Objectifs et contributions de la thèse | 14 |
| 2 Modèles statiques de câbles pesants et/ou élastiques et conséquences sur la modélisation des robots à câbles | 17 |
| 2.1 Introduction | 18 |
| 2.1.1 Construction des câbles et comportement | 18 |
| 2.1.2 Cadre de définition des modèles de comportement de câbles | 19 |
| 2.2 Modèles élastiques de câbles | 19 |
| 2.2.1 Introduction | 19 |
| 2.2.2 Tests de traction et identifications | 20 |
| 2.2.2.1 Approximation linéaire | 20 |
| 2.2.2.2 Approximation linéaire par parties | 21 |
| 2.2.2.3 Approximation non-linéaire | 22 |
| 2.2.2.4 Problèmes d'hystérésis dans le comportement élastique des câbles | 23 |
| 2.2.2.5 Evaluation des différents modèles pour les 6 câbles testés | 25 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2.2.6 | Introduction de l'élasticité dans le problème géométrique inverse | 25 |
| 2.2.3 | Validation expérimentale du modèle élastique | 26 |
| 2.2.3.1 | Description de la méthode utilisée | 26 |
| 2.2.3.2 | Résultats | 28 |
| 2.3 | Modèle de caténaire élastique | 29 |
| 2.3.1 | Description du modèle | 29 |
| 2.3.2 | Câble pesant élastique suspendu entre 2 points | 29 |
| 2.3.3 | Transmission des efforts et problèmes géométriques | 31 |
| 2.3.3.1 | Problème géométrique inverse | 32 |
| 2.3.3.2 | Problème géométrique direct | 33 |
| 2.3.4 | Élasticité négligée | 34 |
| 2.3.5 | Prise en compte d'une élasticité non-linéaire | 34 |
| 2.4 | Influence du modèle utilisé sur le comportement des robots à câbles suspendus | 35 |
| 2.4.1 | Description des deux robots étudiés | 35 |
| 2.4.1.1 | Robot à câbles suspendu plan à 3 câbles et 3 DDL | 35 |
| 2.4.1.2 | Robot à câbles suspendu à 6 câbles et 6 DDL | 36 |
| 2.4.1.3 | Détermination des câbles utilisés | 36 |
| 2.4.2 | Méthodes de comparaison | 39 |
| 2.4.2.1 | Longueurs des câbles et tensions maximales | 39 |
| 2.4.2.2 | Positionnement de la plate-forme | 40 |
| 2.4.3 | Résultats de comparaison pour les tensions des câbles | 40 |
| 2.4.3.1 | Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL | 40 |
| 2.4.3.2 | Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL | 40 |
| 2.4.4 | Résultats de comparaison pour les longueurs des câbles | 42 |
| 2.4.4.1 | Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL | 42 |
| 2.4.4.2 | Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL | 42 |
| 2.4.5 | Résultats de comparaison pour le positionnement de l'organe terminal | 42 |
| 2.4.5.1 | Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL | 42 |
| 2.4.5.2 | Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL | 44 |
| 2.4.6 | Conclusions sur les effets des modèles de câble | 44 |
| 2.5 | Espace de travail statique d'un robot de grande dimension | 44 |
| 2.5.1 | Détermination des tensions minimales et maximales dans les câbles | 45 |
| 2.5.2 | Phénomène de câble pendant | 46 |
| 2.5.2.1 | Câbles sans masse non-élastiques | 46 |
| 2.5.2.2 | Caténaires élastiques | 46 |
| 2.5.3 | Nouvelle définition de l'espace de travail statique | 48 |
| 2.5.3.1 | Limites de tensions | 48 |
| 2.5.3.2 | Altitude minimale des câbles | 48 |
| 2.5.3.3 | Longueur maximale de câble | 48 |
| 2.5.3.4 | Nouvelle définition | 48 |
| 2.5.4 | Exemple d'illustration | 49 |
| 2.6 | Conclusions | 50 |
| 3 | Modèle simplifié de câble pesant et capacité à générer un torseur d'effort | 51 |
| 3.1 | Modèle de câble pesant simplifié | 52 |
| 3.1.1 | Nature des simplifications | 52 |
| 3.1.2 | Modèle d'un câble suspendu entre deux points | 52 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.1.3 | Transmission des efforts à la plate-forme | 54 |
| 3.1.4 | Équilibre statique de la plate-forme | 56 |
| 3.1.5 | Calcul des tensions dans les câbles | 57 |
| 3.1.6 | Problème géométrique inverse sans élasticité des câbles | 58 |
| 3.1.7 | Problème géométrique inverse avec élasticité des câbles | 58 |
| 3.2 | Comparaison du modèle simplifié de câble pesant et du modèle de caténaire élastique | 59 |
| 3.2.1 | Tensions maximales dans les câbles | 60 |
| 3.2.1.1 | Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL | 60 |
| 3.2.1.2 | Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL | 61 |
| 3.2.2 | Longueurs des câbles | 62 |
| 3.2.2.1 | Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL | 62 |
| 3.2.2.2 | Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL | 63 |
| 3.2.3 | Conclusions sur la validité du modèle simplifié de câble pesant . . . | 65 |
| 3.3 | Capacité à générer des torseurs d'effort | 65 |
| 3.3.1 | Cas d'un modèle de câble sans masse | 65 |
| 3.3.2 | Cas du modèle de câble pesant simplifié | 66 |
| 3.3.2.1 | Contrainte de travail en traction | 67 |
| 3.3.2.2 | Contrainte de tension maximale | 67 |
| 3.3.2.3 | Contrainte de tension minimale | 69 |
| 3.3.2.4 | Contraintes sur les « câbles pendants » | 70 |
| 3.3.2.5 | Contraintes sur la validité du modèle simplifié de câble pesant | 70 |
| 3.3.2.6 | Regroupement des contraintes dans un système d'inégalités | 70 |
| 3.4 | Génération du zonotope des torseurs admissibles et comparaison au modèle de câble sans masse | 71 |
| 3.4.1 | Description de la méthode d'obtention du zonotope des torseurs admissibles | 71 |
| 3.4.2 | Exemples et comparaison au modèle de câble sans masse | 73 |
| 3.5 | Conclusions | 76 |
| 4 | Détermination de la configuration optimale pour un robot suspendu à 8 cables et 6 DDL de grande dimension | 79 |
| 4.1 | Cadre de l'étude | 80 |
| 4.1.1 | Type de robots et application visée | 80 |
| 4.1.2 | Contraintes de symétrie sur les configurations étudiées | 81 |
| 4.2 | Définition de la configuration optimale | 82 |
| 4.2.1 | Torseurs d'efforts à compenser | 82 |
| 4.2.2 | Vérification de l'inclusion de l'ensemble des torseurs désirés dans l'ensemble des torseurs admissibles | 83 |
| 4.3 | Description générale de la procédure de détermination de la configuration optimale | 88 |
| 4.3.1 | Données d'entrée de la procédure | 88 |
| 4.3.2 | Les différentes étapes de la procédure | 89 |
| 4.4 | Détermination de l'ensemble des configurations à étudier | 89 |
| 4.4.1 | Points de sortie des câbles | 89 |
| 4.4.1.1 | 4 points de sortie | 91 |
| 4.4.1.2 | 6 points de sortie | 91 |

| | | |
|---|--|------------|
| 4.4.1.3 | 8 points de sortie | 92 |
| 4.4.2 | Points d’attache sur la plate-forme | 93 |
| 4.4.2.1 | Plate-forme plane à 4 points d’attache | 93 |
| 4.4.2.2 | Plate-forme plane à 5 points d’attache | 94 |
| 4.4.2.3 | Plate-forme plane à 6 points d’attache | 94 |
| 4.4.2.4 | Plate-forme spatiale à 6 points d’attache | 95 |
| 4.4.2.5 | Plate-forme plane à 7 points d’attache | 96 |
| 4.4.2.6 | Plate-forme plane à 8 points d’attache | 96 |
| 4.4.2.7 | Plate-forme spatiale à 8 points d’attache | 97 |
| 4.4.3 | Résumé des géométries | 97 |
| 4.5 | Sélection des arrangements de câbles sur critères géométriques | 98 |
| 4.5.1 | Suppression des arrangements avec des câbles confondus | 98 |
| 4.5.2 | Suppression des arrangements ne permettant pas la réalisation des contraintes de symétrie | 98 |
| 4.5.3 | Suppression des arrangements donnant des configurations identiques | 99 |
| 4.5.4 | Bilan de la phase de sélection des arrangements sur critères géomé- triques | 99 |
| 4.6 | Discrétisation des paramètres géométriques et vérification de l’équilibre sta- tique de la plate-forme et des collisions entre câbles | 100 |
| 4.6.1 | Discrétisation des paramètres géométriques | 100 |
| 4.6.2 | Description des poses testées | 100 |
| 4.6.3 | Torseurs testés | 100 |
| 4.6.4 | Vérification de l’équilibre statique de la plate-forme | 101 |
| 4.6.5 | Vérification de l’absence de collisions entre les câbles | 102 |
| 4.6.6 | Bilan de l’étape de sélection par vérification de l’équilibre statique et de l’absence de collisions | 103 |
| 4.7 | Evaluation, vérification finale et obtention de la configuration optimale . . | 104 |
| 4.7.1 | Calcul du critère d’évaluation pour les configurations restantes . . . | 104 |
| 4.7.2 | Vérification de la “continuité” de l’espace de travail | 104 |
| 4.8 | Application aux dimensions du démonstrateur du projet CoGiRo | 104 |
| 4.8.1 | Données de la procédure | 105 |
| 4.8.2 | Résultats obtenus après les vérifications des équilibres statiques et des collisions | 106 |
| 4.8.3 | Vérification des configurations optimales | 107 |
| 4.9 | Conclusions | 111 |
| Conclusion | | 113 |
| Publications | | 117 |
| Bibliographie | | 119 |
| A Description du démonstrateur ReelAx6 | | 127 |
| A.1 | Description générale | 127 |
| A.2 | Présentation des différents éléments du robot ReelAx6 | 127 |
| A.2.1 | Description de la base | 127 |
| A.2.2 | L’enrouleur | 128 |
| A.2.2.1 | Cinématique | 128 |
| A.2.2.2 | Tambour | 129 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A.2.2.3 | Moteur | 129 |
| A.2.3 | Chemin de câble de l'enrouleur au point de sortie du câble | 129 |
| A.2.3.1 | Poulie de renvoi et capteur de force | 129 |
| A.2.3.2 | Dernière poulie et point de sortie du câble | 130 |
| A.3 | ReelAx8 | 131 |
| B | Méthodes de détermination du câble adéquat pour un robot à câbles de grande dimension | 133 |
| B.1 | Méthode basée sur une boucle de détermination du câble | 133 |
| B.2 | Méthode basée sur une optimisation | 134 |
| C | Schémas des configurations obtenues pour l'exemple de la section 4.8 | 137 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Schéma des différents éléments d'un robot à câbles. | 2 |
| 1.2 | Quelques exemples de robots à câbles plans. | 3 |
| 1.3 | Deux exemples de robots à câbles spatiaux. | 4 |
| 1.4 | Un des premiers mécanismes parallèles à câbles : 6 câbles et 1 DDL [80]. | 4 |
| 1.5 | Une version du NIST Robocrane : un des premiers robots parallèles à câbles suspendus. | 5 |
| 1.6 | Le démonstrateur de l'INRIA (INRIA, Sophia-Antipolis, France) : un robot parallèle à câbles utilisé pour le secours de personne en milieu accidenté. | 6 |
| 1.7 | Deux exemples de mécanismes à câbles commerciaux utilisés pour la diffusion d'événement sportifs, ou la prise de vue au cinéma. | 7 |
| 1.8 | Deux exemples de robots à câbles utilisés pour la rééducation du membre supérieur. | 8 |
| 1.9 | Repères et notations. | 9 |
| 1.10 | Le démonstrateur FAST50 : un robot à câbles suspendu de grande dimension à 6 câbles et 6 DDL [35]. | 14 |
| 1.11 | Le démonstrateur ReelAx6 : un robot à câbles suspendu reconfigurable à 6 câbles et 6 DDL. | 15 |
| 2.1 | Schéma d'un exemple de construction de câble. | 18 |
| 2.2 | Schema de la plate-forme et notations. | 19 |
| 2.3 | Test de traction du câble en acier galvanisé 1×19 de diamètre $1mm$ (câble 2), et approximation linéaire de la loi de déformation. | 21 |
| 2.4 | Test de traction du câble en acier galvanisé 7×7 de diamètre $1,5mm$ (câble 4) et approximations de la loi de déformation. | 21 |
| 2.5 | Test de traction du câble 6×7 en acier galvanisé avec âme tissu de diamètre $2mm$ (câble 6) et approximations de la loi de déformation. | 23 |
| 2.6 | Test de traction du câble Dyneema de diamètre $1,1mm$ (câble 3) sur un cycle de charge (trait plein) et décharge (pointillé). | 24 |
| 2.7 | Tests de traction du câble Dyneema de diamètre $1,1mm$. Evolution de l'hystérésis avec le nombre de cycles effectués. | 24 |
| 2.8 | Description de la trajectoire étudiée | 27 |
| 2.9 | Schéma de la configuration étudiée et de la trajectoire testée | 27 |
| 2.10 | Photo du système de mesure tridimensionnelle Metris K600. | 27 |
| 2.11 | Positionnement des diodes sur la plate-forme. | 28 |
| 2.12 | Erreurs de suivi de trajectoire pour les deux modèles de câbles, élastique et non-élastique. | 29 |
| 2.13 | Profil du câble i dans le plan \mathcal{P}_i avec le modèle de caténaire élastique. | 30 |
| 2.14 | Relations entre la base du repère fixe global et celle du repère attaché au câble i | 32 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.15 | Schémas du robot plan à 3 câbles et 3 DDL. | 36 |
| 2.16 | Schéma du robot à 6 câbles et 6 DDL avec des câbles pesants. | 37 |
| 2.17 | Résultats de la procédure de détermination du diamètre de câble adéquat pour les deux robots utilisés en exemple et pour une orientation nulle de leur plate-forme. | 38 |
| 2.18 | Méthode de comparaison des poses atteintes pour les mêmes longueurs de câbles commandées, mais avec le modèle de câble non-élastique sans masse (Pose 1), et avec le modèle de caténaire élastique (Pose 2). | 40 |
| 2.19 | Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL, entre le modèle de caténaire élastique et le modèle de câble sans masse non-élastique. | 41 |
| 2.20 | Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour le robot à 6 câbles et 6 DDL, entre le modèle de caténaire élastique et le modèle de câble sans masse non-élastique. | 41 |
| 2.21 | Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de caténaire élastique pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL. | 42 |
| 2.22 | Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de caténaire élastique pour le robot à 6 câbles et 6 DDL. | 43 |
| 2.23 | Erreurs sur la position de la plate-forme entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de caténaire élastique pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL. | 43 |
| 2.24 | Erreurs sur la position de la plate-forme entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de câble pesant élastique pour le robot plan à 6 câbles et 6 DDL. | 44 |
| 2.25 | Profil d'un câble et évolution de sa tension. | 46 |
| 2.26 | Tensions minimales le long du segment de droite étudié pour le modèle de câble sans masse (pointillés) et le modèle de câble pesant élastique (trait plein). | 47 |
| 2.27 | Longueur et altitude minimales du câble le long du segment de droite étudié. | 48 |
| 2.28 | Ensemble des poses de l'espace de travail statique du robot plan à 3 câbles et 3 DDL pour les deux modèles de câbles et les deux définitions d'espace de travail statique. | 49 |
| 3.1 | Profil d'un câble suspendu entre deux points A et B | 53 |
| 3.2 | Profil du câble i dans le plan \mathcal{P}_i et notations associées au modèle simplifié de câble pesant non-élastique. | 54 |
| 3.3 | Valeurs du rapport de validité (3.49) du modèle à l'intérieur de l'espace de travail étudié, dans les deux cas de charge du robot plan. | 60 |
| 3.4 | Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales dans les câbles pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL dans les deux cas de charge, obtenues par comparaison du modèle simplifié de câble pesant élastique et du modèle de caténaire élastique. | 61 |
| 3.5 | Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour le robot à 6 câbles et 6 DDL dans les deux cas de charge, obtenues par comparaison du modèle simplifié de câble pesant élastique et du modèle de caténaire élastique. | 62 |
| 3.6 | Erreurs relatives maximales sur les longueurs non-déformées des câbles dans l'espace de travail du robot plan dans les deux cas de charge. | 63 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.7 | Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles pour le robot à 6 câbles et 6 DDL dans les deux cas de charge et pour deux altitudes. | 64 |
| 3.8 | Cube des tensions admissibles et son image dans l'espace des torseurs sur la plate-forme pour l'exemple de robot plan à 3 câbles et 2 DDL de la Fig. 3.8(a). | 72 |
| 3.9 | Schéma du robot plan à 4 câbles et 2 DDL et représentation du zonotope des torseurs admissibles pour la pose considérée. | 74 |
| 3.10 | Force maximale admissible, et erreur relative par rapport au modèle de câble sans masse pour le robot plan à 4 câbles et 2 DDL. | 74 |
| 3.11 | Schéma du robot plan à 3 câbles et 2 DDL et représentation du zonotope des forces admissibles pour la pose considérée. | 76 |
| 3.12 | Force maximale admissible pour le robot plan suspendu à 3 câbles et 2 DDL. | 76 |
| 3.13 | Erreurs relatives sur la force maximale admissible pour le robot plan suspendu à 3 câbles et 2 DDL. | 77 |
| 4.1 | Un exemple de robot suspendu à 6 câbles et 6 DDL. | 80 |
| 4.2 | Représentation d'un robot type Robocrane installé dans une pièce rectangulaire et son espace de travail statique à orientation constante. | 81 |
| 4.3 | Schéma de la pièce rectangulaire. | 81 |
| 4.4 | Schéma de la plate-forme mobile : position du centre de masse O_{cm} par rapport au centre géométrique de la plate-forme O_B dans le plan horizontal. | 83 |
| 4.5 | Disque de rayon r_{max} représentant l'ensemble des positions de la projection sur le plan $(O_B, \mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)$ du centre de masse de la plate-forme pour lesquelles la charge peut être équilibrée avec des tensions admissibles. | 84 |
| 4.6 | Représentation de l'ensemble des torseurs d'efforts désirés dans le repère (M_x, M_y, F_z) : un cône tronqué. | 85 |
| 4.7 | Intersections des 112 hyperplans H_j avec le plan de la base supérieure du cône tronqué des torseurs d'efforts désirés et cercle de rayon maximal des couples admissibles (pointillés). | 86 |
| 4.8 | Représentation d'une droite D_j intersection de l'hyperplan H_j avec le plan (M_x, M_y) contenant la base courante du cône tronqué, et distance de cette droite à l'origine du plan (M_x, M_y) | 87 |
| 4.9 | Description de la procédure de détermination de la configuration optimale. | 90 |
| 4.10 | Schéma des géométries possibles (gras) des points de sortie des câbles dans la pièce. | 91 |
| 4.11 | Schémas des différentes répartitions des points de sortie de câbles pour une géométrie à 4 points. | 91 |
| 4.12 | Schémas des différentes répartitions des points de sortie des câbles pour la géométrie A à 6 points. | 92 |
| 4.13 | Schémas des différentes répartitions des points de sortie de câbles pour une géométrie B à 6 points. | 92 |
| 4.14 | Schémas des 2 géométries à 8 points. | 93 |
| 4.15 | Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 4 points d'attache distincts. | 94 |
| 4.16 | Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 5 points d'attache. . | 95 |
| 4.17 | Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 6 points d'attache. . | 96 |
| 4.18 | Schéma de la plate-forme à 7 points d'attache. | 96 |
| 4.19 | Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 8 points d'attache. . | 97 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.20 | Points de l'espace de travail testés lors de l'étape de vérification de l'équilibre statique de la plate-forme et des collisions entre câbles. | 101 |
| 4.21 | Schéma du triangle considéré pour le test de collision et du profil du câble pour la tension minimale et pour une tension intermédiaire. | 103 |
| 4.22 | Schéma de la configuration 1 du Tab. 4.3. | 106 |
| 4.23 | Schéma de la configuration 9 du Tab. 4.3. | 107 |
| 4.24 | Schéma de la configuration 10 du Tab. 4.3. | 107 |
| 4.25 | Schéma de la configuration 12 du Tab. 4.3. | 108 |
| 4.26 | Espace de travail statique de la configuration 1 pour différentes pages d'orientations autour de l'axe z | 109 |
| 4.27 | Espace de travail statique de la configuration 1 pour différentes limites de tension minimale, pour des orientations dans l'intervalle $[-\pi/12; \pi/12]$ autour de z | 109 |
| | | |
| A.1 | Le démonstrateur ReelAx6, un robot parallèle à 6 câbles et 6 DDL reconfigurable. | 128 |
| A.2 | Photo de l'enrouleur. | 129 |
| A.3 | Photo du système poulie / capteur de force. | 130 |
| A.4 | Coupe de l'oeillet (point de sortie du câble). | 130 |
| A.5 | Photo de la version ReelAx8 du démonstrateur. | 131 |
| A.6 | Trois géométrie possibles des points de sortie des câbles. | 132 |
| | | |
| B.1 | Boucle de détermination des caractéristiques du câble (MGI = Modèle Géométrique Inverse. | 134 |
| | | |
| C.1 | Schéma de la configuration 1. | 137 |
| C.2 | Schéma de la configuration 2. | 137 |
| C.3 | Schéma de la configuration 3. | 138 |
| C.4 | Schéma de la configuration 4. | 138 |
| C.5 | Schéma de la configuration 5. | 138 |
| C.6 | Schéma de la configuration 6. | 139 |
| C.7 | Schéma de la configuration 7. | 139 |
| C.8 | Schéma de la configuration 8. | 139 |
| C.9 | Schéma de la configuration 9. | 140 |
| C.10 | Schema de la configuration 10. | 140 |
| C.11 | Schéma de la configuration 11. | 140 |
| C.12 | Schéma de la configuration 12. | 141 |
| C.13 | Schéma de la configuration 13. | 141 |
| C.14 | Schéma de la configuration 14. | 141 |
| C.15 | Schéma de la configuration 15. | 142 |
| C.16 | Schéma de la configuration 16. | 142 |
| C.17 | Schéma de la configuration 17. | 142 |
| C.18 | Schéma de la configuration 18. | 143 |
| C.19 | Schéma de la configuration 19. | 143 |
| C.20 | Schéma de la configuration 20. | 143 |
| C.21 | Schéma de la configuration 21. | 144 |
| C.22 | Schéma de la configuration 22. | 144 |
| C.23 | Schéma de la configuration 23. | 144 |
| C.24 | Schéma de la configuration 24. | 145 |

C.25 Schéma de la configuration 25. 145

Liste des tableaux

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Description des câbles testés. | 20 |
| 2.2 | Coefficients des polynômes d'approximation du comportement élastique du câble 6×7 en acier galvanisé avec âme tissu de diamètre 2mm. | 23 |
| 2.3 | Erreurs relatives moyennes sur la déformation ε pour les différents câbles et les différents modèles d'élasticité. | 25 |
| 2.4 | Description de la configuration étudiée du prototype ReelAx6. | 26 |
| 2.5 | Analyse des erreurs de suivi de trajectoire (en mm) | 28 |
| 2.6 | Robot à 3 câbles et 3 DDL : coordonnées des points de sortie \mathbf{a}_i des câbles et des points d'attache \mathbf{b}_i des câbles sur la plate-forme dans le repère global et le repère attaché à la plate-forme, respectivement. | 36 |
| 2.7 | Robot à 6 câbles et 6 DDL : coordonnées des points de sortie des câbles et des points d'attache des câbles sur la plate-forme dans le repère global et le repère attaché à la plate-forme, respectivement. | 37 |
| 2.8 | Caractéristiques du câble considéré pour le robot plan. | 38 |
| 2.9 | Caractéristiques du câble considéré pour le robot à 6 câbles et 6 DDL. | 39 |
| 2.10 | Description des limites utilisées dans la définition de l'espace de travail statique | 49 |
| 3.1 | Analyse des erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour les deux modèles comparés et les deux cas de charges du robot plan. | 61 |
| 3.2 | Erreurs relatives maximales sur les tensions dans les câbles pour les deux modèles considérés, dans les deux cas de charges et pour deux altitudes du robot à 6 câbles et 6 DDL. | 63 |
| 3.3 | Analyse des erreurs relatives maximales sur les longueurs non-déformées de câble pour les deux modèles de câbles comparés à celui de caténaire élastique, dans les 2 cas de charges du robot plan. | 64 |
| 3.4 | Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles pour les deux modèles de câbles comparés à celui de caténaire élastique, dans les deux cas de charges et pour deux altitudes du robot à 6 câbles et 6 DDL. | 65 |
| 3.5 | Robot plan à 4 câbles et 2 DDL : coordonnées des points de sortie de câbles exprimées dans le repère global. | 73 |
| 3.6 | Robot plan à 3 câbles et 2 ddl : coordonnées des points de sortie de câbles exprimés dans le repère global. | 75 |
| 4.1 | Nombre de géométries différentes en fonction du nombre de points de sortie et de points d'attache des câbles distincts. | 97 |
| 4.2 | Nombre d'arrangements de câbles à étudier après suppression des arrangements présentant des câbles confondus, ne permettant pas la symétrie ou résultant en des configurations identiques. | 99 |

- 4.3 Description des configurations restantes à la fin de la procédure de sélection de configurations appliquée à l'exemple du démonstrateur du projet CoGiRo.110

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Présentation des robots parallèles à câbles | 1 |
| 1.2 | Modèle de câble sans masse non-élastique et modélisation des robots parallèles à câbles | 8 |
| 1.3 | Différentes modélisations de câble | 12 |
| 1.4 | Objectifs et contributions de la thèse | 14 |

1.1 Présentation des robots parallèles à câbles

Les robots parallèles à câbles sont une variante originale des robots parallèles. Contrairement aux robots parallèles conventionnels (Delta, plate-forme de Gough Stewart ou Quattro) les chaînes cinématiques disposées en parallèles ne sont pas composées de segments rigides mais de câbles. Ces câbles parcourent, depuis l'actionneur, généralement fixe, un chemin de câbles à travers différentes poulies jusqu'à s'attacher à une plate-forme mobile. L'actionneur est généralement composé d'un tambour, fixé au rotor du moteur, sur lequel le câble s'enroule. Le tambour actionné peut toutefois être remplacé par un actionneur linéaire comme sur le prototype Marionet [83]. L'actionneur permet de contrôler la longueur de câble déroulée. Chaque câble étant ainsi actionné, il est possible de contrôler les différents degrés de liberté (DDL) de la plate-forme mobile. Les principaux éléments d'un robot à câbles sont présentés à la Fig. 1.1. Dans le cas général, on pourra considérer comme étant un robot à câbles tout mécanisme dont la plate-forme est reliée à plusieurs actionneurs au moyen exclusif de câbles. Notons qu'étant donné que les chaînes cinématiques d'un tel robot parallèle sont composées de câbles, seuls des efforts de traction peuvent être transmis à la plate-forme.

Le point de la dernière poulie par lequel passe le câble avant de s'attacher sur la plate-forme est appelé point de sortie du câble. Le point où est fixé le câble sur la plate-forme est appelé point d'attache du câble sur la plate-forme. L'ensemble des positions des points de sortie est appelé *géométrie des points de sortie des câbles*. De même, on nomme *géométrie des points d'attache des câbles sur la plate-forme* l'ensemble des positions des points d'attache des câbles. La manière dont les points de sortie et les points d'attache sont connectés par les câbles est appelé *arrangement des câbles*. Les géométries des points de sortie et des points d'attache des câbles sur la plate-forme associées à un arrangement des câbles forment une *configuration de robot parallèle à câbles*. Ces appellations sont utilisées tout au long de cette thèse.

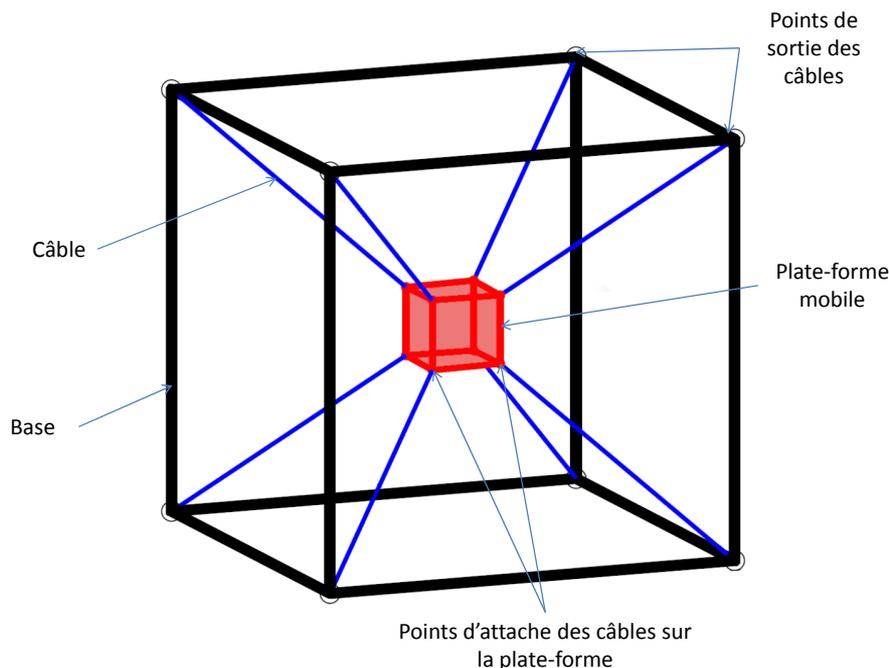


FIGURE 1.1 - Schéma des différents éléments d'un robot à câbles.

1.1.1 Différents types de configuration

En fonction de la géométrie des points de sortie des câbles, de la géométrie des points d'attache des câbles sur la plate-forme, et du nombre de câbles, on peut obtenir différentes configurations de robots. Plusieurs types de configurations de robots parallèles à m câbles et n DDL ont donc été définis :

- *Configuration sous-contrainte* : ce type de configuration correspond aux robots possédant moins de câbles que de DDL de la plate-forme ($m < n$). La Fig. 1.2(a) présente un exemple plan de ce type de robot. Dans ce cas, la plate-forme est dite sous-contrainte, et il n'est pas possible de contrôler tous ses degrés de liberté. L'exemple typique de ce type de configuration est la grue de chantier (la partie actionnée par câble) pour laquelle un seul câble est utilisé pour positionner l'organe terminal (considéré ici comme étant ponctuel). Un seul câble n'est pas suffisant pour contrôler les 3 DDL du point piloté. La position de ce point n'est donc pas parfaitement maîtrisée et des oscillations peuvent apparaître. On peut trouver dans [31, 74, 93] des travaux sur des robots parallèles à câbles en configuration sous-contrainte. Notons que dans certains travaux traitant des configurations sous-contraintes, d'autres actionneurs ont été ajoutés afin de contrôler la position des points de sortie des câbles [13, 77]. Cet ajout de chaînes cinématiques à un mécanisme à câbles sous-contraint permet de contrôler plus de DDL ou de contraindre certains DDL de la plate-forme [6].
- *Configuration suspendue* : cette catégorie de configurations regroupe des robots parallèles à câbles possédant autant ou plus de câbles (Fig. 1.2(b) et 1.3(a)) que de DDL de la plate-forme. La particularité de ces configurations réside dans les positions des points de sortie des câbles. Ils sont situés au dessus de l'espace de travail, la plate-forme étant ainsi suspendue par les m câbles. Toutefois, malgré le caractère unidirectionnel de l'actionnement par câbles, tous les DDL de la plate-forme peuvent

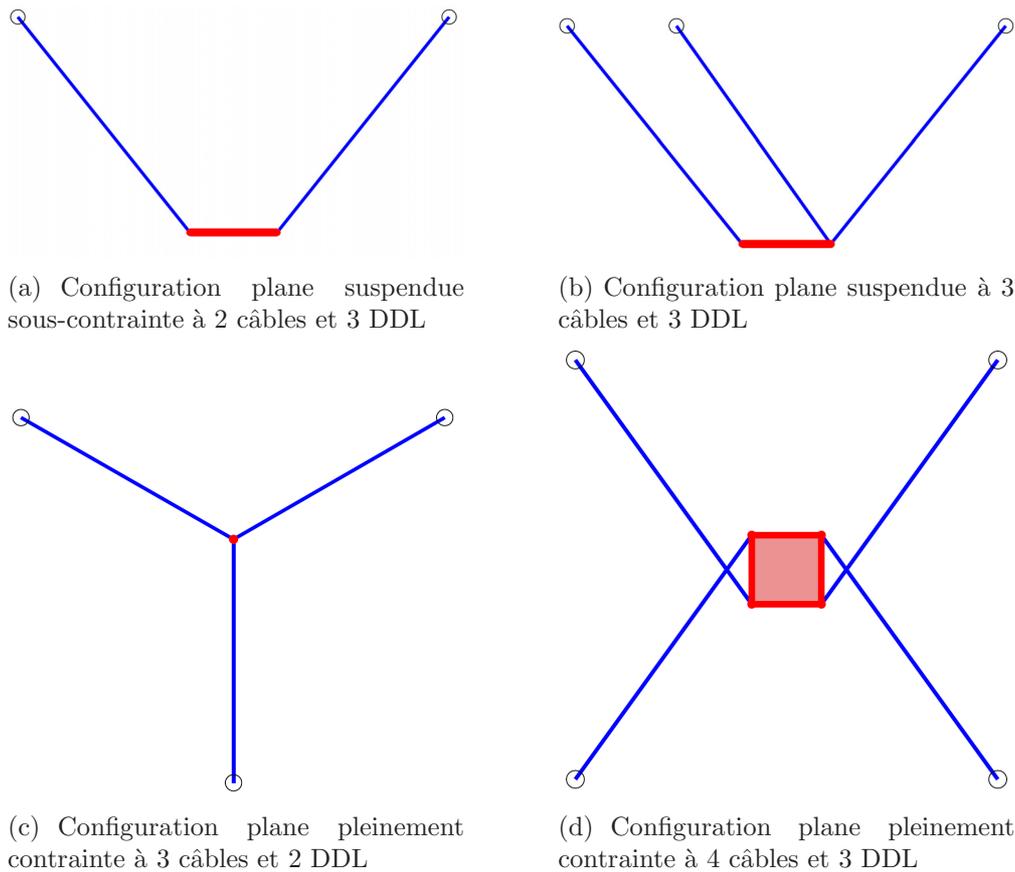


FIGURE 1.2 - Quelques exemples de robots à câbles plans.

être commandés sous certaines conditions. En effet, la gravité permet, dans certaines poses, de garder tous les câbles tendus. La gravité agit alors comme un câble vertical supplémentaire à tension constante. Ces configurations suspendues ont fait l'objet d'un des premiers mécanismes parallèles à câbles [80]. Dans ce mécanisme, les 6 câbles sont actionnés de manière couplée afin de créer un mouvement vertical de la plate-forme, les autres DDL étant passivement contraints (Fig. 1.4). L'un des premiers robots suspendus, le NIST Robocrane [3] est présenté à la Fig. 1.5. Cette configuration est similaire à celle de la Fig. 1.4 mais cette fois-ci les 6 câbles sont actionnés séparément afin de contrôler les 6 DDL. De nombreuses études ont été réalisées sur les configurations suspendues [4, 88, 92].

- *Configuration pleinement contrainte* : ces configurations possèdent plus de câbles que de DDL de la plate-forme. Du fait du caractère unidirectionnel de l'actionnement par câbles, au moins $n + 1$ câbles sont en effet nécessaires au contrôle des n DDL de la plate-forme. Si la géométrie des points de sortie et des points d'attache des câbles est correctement choisie, dans certaines poses, le robot est dans une configuration polyvalente [48]. Dans ces poses, tous les DDL de la plate-forme peuvent être contrôlés et le robot peut équilibrer n'importe quel torseur d'efforts extérieurs (en respectant toutefois une limite de tension maximale infinie). Deux exemples plans (3 câbles et 2 DDL et 4 câbles et 3 DDL) et un exemple spatial (8 câbles et 6 DDL) sont présentés sur les Fig. 1.2(c), 1.2(d) et 1.3(b), respectivement. Pour ce type de configurations, certains câbles se trouvent de part et d'autre de la plate-forme et exercent ainsi des efforts dans des directions opposées. Ceci permet de garder tous les câbles tendus en entraînant cependant la création d'efforts internes

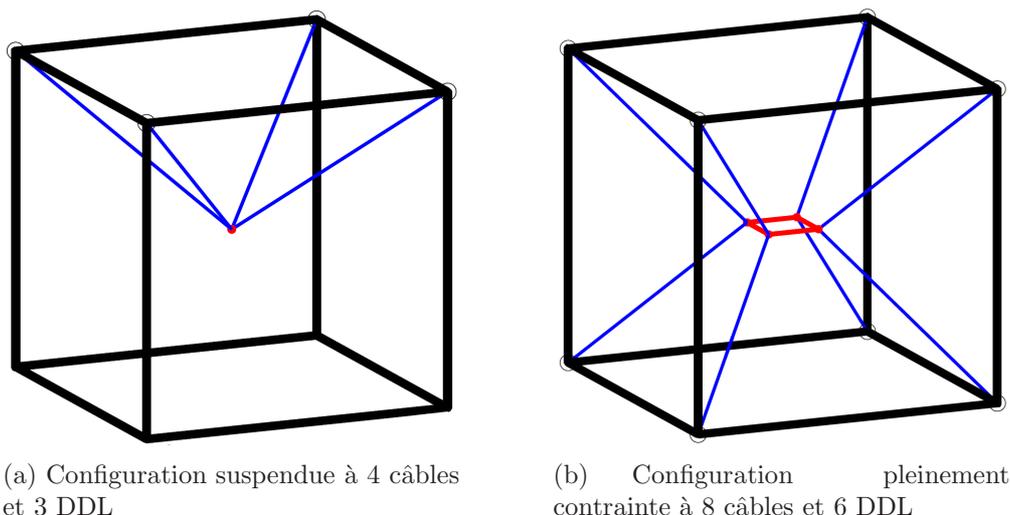


FIGURE 1.3 - Deux exemples de robots à câbles spatiaux.

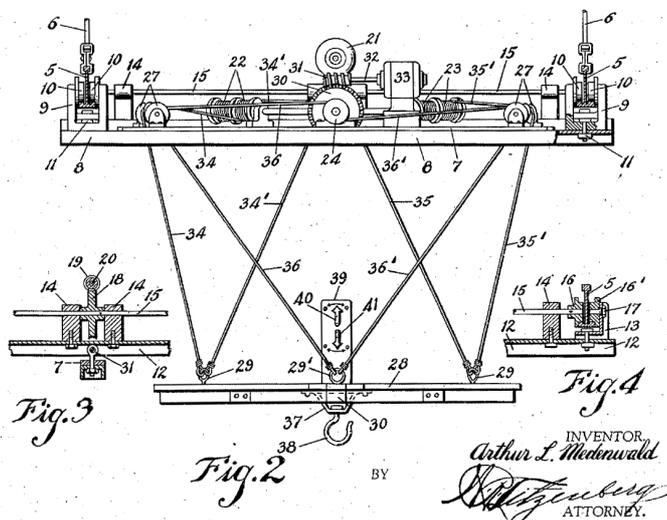


FIGURE 1.4 - Un des premiers mécanismes parallèles à câbles : 6 câbles et 1 DDL [80].

dans le mécanisme. La gestion de ces efforts internes est réalisée par une distribution adéquate des tensions dans les câbles. Cette distribution doit être contrôlée en plus de la longueur des câbles dans la commande du robot. La gestion de la distribution des tensions dans les câbles des robots pleinement contraints a été étudiée à plusieurs reprises [18, 21, 43, 76].

1.1.2 Robots à câbles : avantages et inconvénients

Les différentes configurations présentées à la section précédente procurent aux robots parallèles à câbles des caractéristiques variées. Nous détaillons ici les différents avantages et inconvénients de ces robots.

Les avantages des robots parallèles à câbles par rapport aux robots parallèles conventionnels sont nombreux. Tout d'abord, l'utilisation de câbles en lieu et place de segments rigides diminue considérablement la masse et l'inertie des parties mobiles du robot. Ceci permet de diminuer la consommation d'énergie ou d'augmenter les capacités dynamiques du robot. De plus, l'utilisation de câbles de faible section, pour des applications mettant en



FIGURE 1.5 - *Une version du NIST Robocrane : un des premiers robots parallèles à câbles suspendus.*

jeu de faibles tensions dans les câbles, est mise à profit pour des applications nécessitant de faibles perturbations visuelles [55, 58, 66]. Le fait que les robots parallèles à câbles peuvent être installés, démontés et reconfigurés facilement et rapidement [22] est une autre caractéristique avantageuse. Il est en effet relativement facile de changer les caractéristiques du robot en modifiant la géométrie des points de sortie des câbles et des points d'attache sur la plate-forme [21]. Il est par exemple possible de passer d'une configuration pleinement contrainte à une configuration suspendue.

Enfin, un des avantages majeurs des robots parallèles à câbles provient de la facilité de stockage des câbles. Le fait que les câbles peuvent être enroulés sur un tambour et stockés en grandes quantités permet l'utilisation de longueurs de câbles très importantes. L'espace de travail de ces robots peut ainsi potentiellement atteindre plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de mètres. Cette caractéristique a d'ailleurs été étudiée ou mise à profit dans des applications nécessitant de grandes dimensions [23, 19, 36, 53, 67, 86].

A ces avantages s'ajoutent forcément certains inconvénients qui proviennent principalement de l'aspect unidirectionnel de l'actionnement des câbles et de leur flexibilité. Tout d'abord, la possibilité de reconfigurer facilement les robots parallèles à câbles entraîne la nécessité de déterminer la nouvelle géométrie des points d'attache et des points de sortie. Des travaux ont mis en avant les erreurs provenant des imprécisions sur la position de ces points [87] et leurs conséquences. Les méthodes d'étalonnage des robots à câbles doivent être rapides et efficaces si le changement de configuration est fréquent. L'étalonnage a donc fait l'objet de quelques travaux [14, 22].

La résolution du problème géométrique direct des robots parallèles à câbles est aussi voire plus complexe que pour les robots parallèles conventionnels [65, 81]. En effet, ce problème peut présenter de nombreuses solutions. Ainsi, cette question a fait et fait toujours l'objet de recherches [22, 35, 54, 81, 60]. Nous avons vu que pour contrôler tous les DDL de la plate-forme, il est le plus souvent nécessaire d'utiliser plus de câbles que de DDL. La redondance d'actionnement ainsi créée nécessite l'élaboration de schémas de commande complexes permettant de gérer correctement les distributions de tensions dans les câbles et de les garder tous sous tension. Le problème de la commande des robots parallèles

1.1. Présentation des robots parallèles à câbles

à m câbles et n DDL a donc été traité dans la littérature [5, 4, 15, 25, 40, 45, 73, 89, 99]. Une commande adéquate et efficace des robots parallèles à câbles est également nécessaire afin de limiter les vibrations pouvant apparaître dans les câbles. En effet, la flexibilité des câbles peut entraîner de fortes vibrations impactant la précision de positionnement et le suivi de trajectoire. Certains travaux s'intéressent à la compensation de ces vibrations [30, 34, 61, 64].

Une autre difficulté dans l'étude des robots parallèles à câbles est la détermination de leur espace de travail. Le fait que les câbles ne peuvent que travailler en traction crée de nouvelles limites à l'espace de travail. On peut trouver plusieurs travaux dans la littérature présentant des définitions différentes de l'espace de travail [11, 18, 41, 112], et cherchant à déterminer ses frontières. Nous reviendrons sur ce point à la section 1.2.2. L'espace de travail des robots parallèles à câbles peut également présenter des poses où ont lieu des collisions entre les câbles, entre les câbles et la plate-forme ou entre les câbles et leur environnement. Cet aspect est pris en compte dans différents travaux. Par exemple, Agahi [2] s'intéresse à la planification de trajectoires d'un robot plan pour éviter les collisions entre les câbles. Merlet [82] a quant à lui étudié les conséquences des collisions câble/câble et câble/plate-forme sur l'espace de travail à orientation constante, afin de déterminer les zones où aucune collision n'apparaît. Aref [7] présente également des moyens de déterminer l'espace de travail sans collision d'un robot à câbles. Perreault [91] présente la détermination géométrique des parties de l'espace de travail à orientation constante où des collisions (câble/câble et câble plate-forme) apparaissent.

Enfin, si dans la majorité des travaux, les câbles sont assimilés à des corps sans masse et indéformables, cette hypothèse n'est pas toujours valide. L'élasticité du câble en traction comme en flexion peut avoir une influence importante sur le comportement du robot. Nous reviendrons sur ce point à la section 1.3.



FIGURE 1.6 - *Le démonstrateur de l'INRIA (INRIA, Sophia-Antipolis, France) : un robot parallèle à câbles utilisé pour le secours de personne en milieu accidenté.*

1.1.3 Quelques applications des robots à câbles

Les avantages des robots parallèles à câbles par rapport aux robots parallèles conventionnels ont amené à penser à de nouvelles applications adaptées aux propriétés particulières de ces robots. Ainsi, la faible inertie des parties mobiles a permis la réalisation de robots ultra rapides pour le déplacement d'objets [62, 76].

Certains travaux ont proposé de tirer profit des capacités des robots parallèles à câbles à évoluer dans de très grands espaces de travail pour du transport de charge dans des entrepôts [52]. Le Robocrane a été proposé pour plusieurs applications [23] allant de l'inspection et la maintenance d'avions ou de bateaux au tri et au stockage de matériaux dangereux. On peut également trouver des travaux traitant d'applications possibles dans des zones à risque ne permettant pas l'intervention de l'Homme [94, 106, 108]. Trevelyan [110] a étudié l'utilisation de robots à câbles suspendus pour la détection de mines. Des applications de secours de personnes ont également fait l'objet d'études [84, 90, 107]. Les grands espaces de travail sont aussi intéressants pour le secteur du génie civil et notamment pour la construction de bâtiments [21, 113]. En ce qui concerne les possibilités d'applications impliquant de grandes dimensions, mentionnons les nombreux travaux entrepris dans le cadre de deux projets de télescopes géants. Dans ces deux projets, un robot à câbles est utilisé afin de positionner une plate-forme focale avec précision au dessus d'une coupole réflectrice. Ce réflecteur peut atteindre plusieurs centaines de mètres de diamètre. Deux configurations de robots à câbles ont été considérées pour cette application : en mode suspendu [36, 67, 86], ou en mode suspendu inversé. Dans ce deuxième cas, les câbles sont maintenus tendus grâce à un ballon d'hélium attaché à la plate-forme [26, 25, 32].

Enfin, une autre application tirant profit de l'espace de travail important des robots parallèles à câbles consiste à déplacer une caméra fixée sur la plate-forme mobile. Cette application est probablement celle d'un mécanisme à câbles ayant, à ce jour, trouvé le plus sa place dans le marché de la robotique. Ce type de caméra, présenté à la Fig.1.7, est couramment utilisé pour la diffusion d'événements sportifs [28, 100, 101], ou pour le cinéma [102].



(a) Skycam [100]



(b) Spidercam [101]

FIGURE 1.7 - Deux exemples de mécanismes à câbles commerciaux utilisés pour la diffusion d'événement sportifs, ou la prise de vue au cinéma.

Pour des interfaces haptiques à retour d'efforts, les robots parallèles à câbles offrent de nombreux avantages par rapport aux interfaces haptiques existantes. En effet, la faible masse des parties mobiles et la complaisance des câbles permettent une utilisation plus sûre. Les robots parallèles à câbles ont donc été largement étudiés [27, 58, 66, 115], notamment dans le cadre de la réalisation du robot maître d'un système de télé-opération [63, 98]. Des simulateurs de marche [91] ou d'autres sports [62, 85, 117] utilisant les robots à câbles ont également été proposés. En outre, la complaisance des robots parallèles à câbles les rendent plus facilement acceptables par des patients. Ainsi, des applications de rééducation ont été proposées pour les segments supérieurs [97, 96] (Fig. 1.8(a)) ou inférieurs [57, 56, 105]. Ce type d'application peut également tirer profit de la discrétion des câbles afin de coupler les tâches de rééducation à un environnement de réalité virtuelle [79, 109] permettant ainsi au patient de mieux supporter la pénibilité des exercices (Fig. 1.8(b)). D'autres études ont aussi tiré partie de la discrétion des câbles afin de limiter les perturbations dans des simulations de vol d'avion en soufflerie [70, 71, 111].

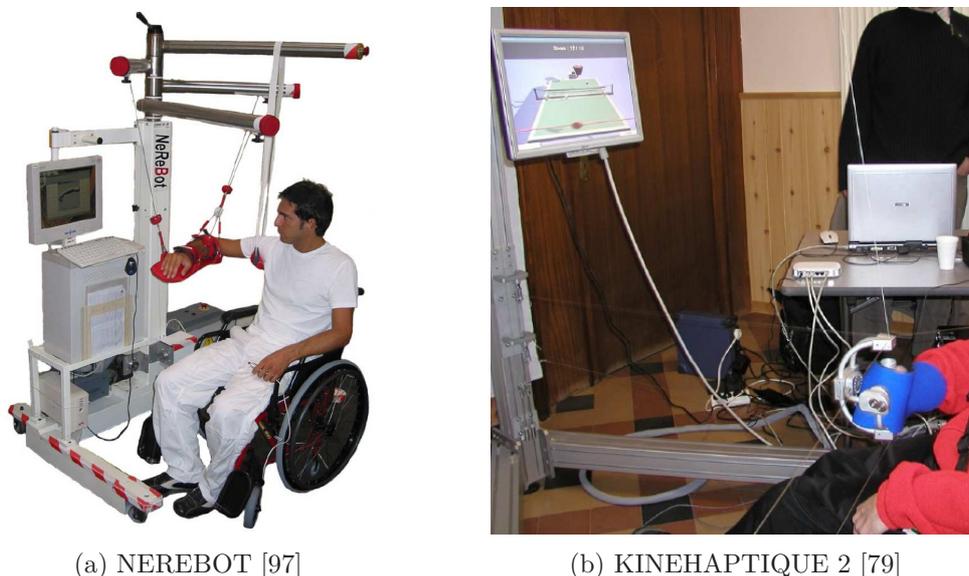


FIGURE 1.8 - Deux exemples de robots à câbles utilisés pour la rééducation du membre supérieur.

1.2 Modèle de câble sans masse non-élastique et modélisation des robots parallèles à câbles

1.2.1 Modélisation des robots parallèles à câbles et notations

Dans la majorité des travaux sur les robots parallèles à câbles, les câbles sont assimilés à des corps indéformables et sans masse, à condition qu'ils soient tendus. Sous ces hypothèses, la modélisation d'un robot parallèles à m câbles est pour certains aspects similaire à celle d'un robot parallèle conventionnel présentant m chaînes cinématiques de type \underline{UPS} , où U est une liaison cardan, S une liaison sphérique et P une liaison prismatique, cette dernière étant la seule actionnée.

Les notations suivantes sont adoptées dans cette thèse :

- m : nombre de câbles

- n : nombre de DDL de la plate-forme mobile
 - A_i : point de sortie du câble i
 - B_i : point d'attache du câble i sur la plate-forme mobile
 - O_B : point de référence de la plate-forme mobile
 - \mathcal{R}_B : repère $(O_B, \mathbf{x}_B, \mathbf{y}_B, \mathbf{z}_B)$ attaché à la plate-forme mobile
 - \mathcal{R}_A : repère $(O_A, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ fixe de référence
 - O_A : origine du repère fixe \mathcal{R}_A
 - \mathbf{a}_i : vecteur position du point A_i exprimé dans le repère \mathcal{R}_A
 - \mathbf{b}_i : vecteur position du point B_i exprimé dans le repère \mathcal{R}_B
 - \mathbf{u}_i : vecteur $\overrightarrow{B_i A_i}$ (exprimé dans \mathcal{R}_A)
 - \mathbf{d}_i : vecteur unitaire dirigé le long du câble i de B_i vers A_i (exprimé dans \mathcal{R}_A)
 - L_i : longueur du câble i ($L_i = \|\overrightarrow{A_i B_i}\|$)
 - \mathbf{x}_{PF} : vecteur position du point O_B exprimé dans le repère \mathcal{R}_A
 - \mathbf{Q} : matrice décrivant l'orientation du repère \mathcal{R}_B dans le repère \mathcal{R}_B
- Ces notations sont illustrées par la Fig. 1.9.

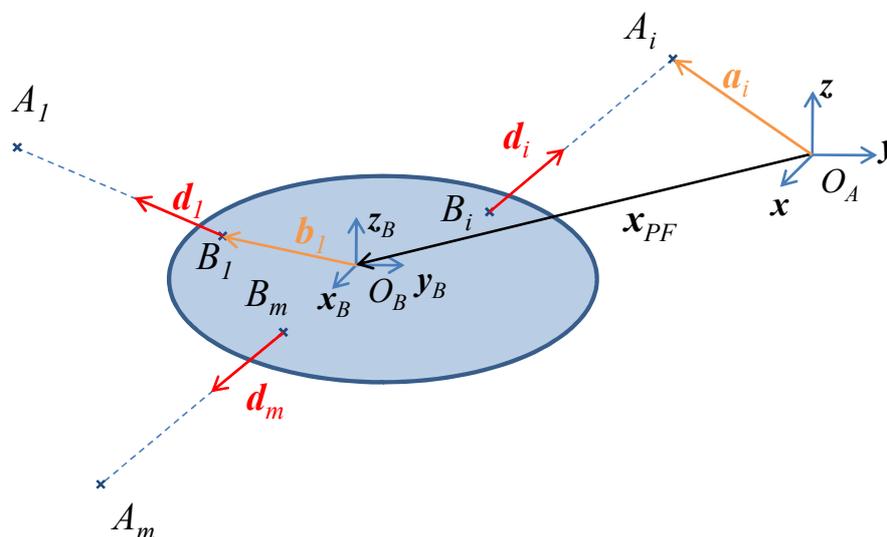


FIGURE 1.9 - Repères et notations.

1.2.1.1 Problème géométrique inverse

Le problème géométrique inverse consiste, pour une configuration du robot connue (\mathbf{a}_i et \mathbf{b}_i connus), à déterminer les longueurs des câbles L_i ($i = 1 \dots m$) connaissant la pose \mathbf{p} de la plate-forme (position \mathbf{x}_{PF} et orientation \mathbf{Q}). En considérant un modèle de câble indéformable et sans masse, il est aisé de résoudre ce problème. En effet, la longueur du câble i correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{B_i A_i}$, et peut être déterminée par l'expression :

$$L_i = \|\overrightarrow{B_i A_i}\| = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_{PF} - \mathbf{Q}\mathbf{b}_i\| \quad (1.1)$$

1.2.1.2 Transmission des efforts et équilibre statique de la plate-forme

Chaque câble tendu exerce une force sur la plate-forme au point d'attache B_i selon la direction \mathbf{d}_i . Le torseur d'effort résultant au point O_B est $\tau_i \mathbf{w}_i$ où τ_i correspond à la tension dans le câble i et où \mathbf{w}_i s'écrit :

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{Q}\mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_i \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

En considérant un torseur d'efforts extérieurs \mathbf{f}_e appliqué à la plate-forme au point O_B , l'équilibre statique de la plate-forme s'écrit :

$$\mathbf{f}_e + \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (1.3)$$

où :

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \cdots \quad \tau_m]^T$$

et :

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_m]_{n \times m}$$

où la matrice \mathbf{W} dépend de la pose \mathbf{p} du robot (notée $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{p})$).

Connaissant les tensions dans les câbles, il est possible de déterminer le torseur d'efforts extérieurs :

$$\mathbf{f}_e = -\mathbf{W}\boldsymbol{\tau} \quad (1.4)$$

Dans le cas où le robot possède autant de câbles que de DDL de la plate-forme, pour un torseur d'efforts extérieurs \mathbf{f}_e donné, on peut déterminer les tensions dans les câbles par :

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{W}^{-1}\mathbf{f}_e. \quad (1.5)$$

à condition que \mathbf{W} soit inversible, c'est-à-dire, hors singularité.

Notons que le modèle de câble utilisé ici n'est valable que quand les câbles sont tendus ($\tau_i \geq 0$). La solution $\boldsymbol{\tau}$ obtenue à l'Eq. (1.5) n'est donc valide que si toutes ses composantes sont positives.

A partir de l'Eq. (1.4), pour un intervalle de tensions admissibles pour chaque câble, la détermination de l'ensemble des torseurs \mathbf{f}_e pouvant être équilibrés a été étudiée dans [17] et [68]. L'image de l'ensemble des tensions admissibles (de dimension m) dans l'espace des torseurs de la plate-forme (de dimension n), appelé ensemble des torseurs admissibles, a été étudié dans [24]. Il est montré que cet ensemble est un polytope convexe particulier appelé zonotope. A partir des caractéristiques des zonotopes, Bouchard [24] présente une méthode générale de détermination des frontières de cet ensemble. L'ensemble des torseurs admissibles peut être comparé à l'ensemble des torseurs nécessaires à une tâche afin de vérifier la faisabilité de celle-ci. La caractérisation des facettes du zonotope des torseurs disponibles est discutée dans [50]. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3.

1.2.2 Espaces de travail : différentes définitions

Pour les robots conventionnels, parallèles ou sériels, l'espace de travail est généralement limité par les butées articulaires, les singularités et les éventuelles collisions entre les segments du robot. Pour les robots parallèles à câbles, comme nous l'avons vu à la section

1.1, les limites dues aux butées articulaires sont repoussées très largement étant donné qu'il est généralement possible de dérouler de grandes longueurs de câble. L'espace de travail des robots parallèles à câbles est ainsi principalement limité par la nécessité de garder tous les câbles tendus. Ainsi, une définition générale de l'espace de travail ω d'un robot à câbles est l'ensemble des poses de la plate-forme pour lesquelles il est possible d'équilibrer un torseur d'efforts extérieurs \mathbf{f}_e ou un ensemble $\{\mathbf{f}\}$ de torseurs tout en gardant tous les câbles tendus dans un intervalle de tensions admissibles $[\tau_{min}, \tau_{max}]$:

$$\omega = \{\mathbf{p} \mid \forall \mathbf{f}_e \in \{\mathbf{f}\} \exists \boldsymbol{\tau} \in [\boldsymbol{\tau}_{min}, \boldsymbol{\tau}_{max}], \mathbf{W}(\mathbf{p})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (1.6)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{min}$ et $\boldsymbol{\tau}_{max}$ sont des vecteurs de dimension m dont les composantes sont les tensions minimale τ_{min} et maximale τ_{max} , respectivement. Cet espace de travail, généralement appelé « wrench feasible workspace » en anglais, a été étudié à plusieurs reprises [11, 16, 20, 38, 51, 94].

Un cas particulier du « wrench feasible workspace » est l'espace de travail dit statique ω_S . Il correspond à l'ensemble des poses \mathbf{p} pour lesquelles il est possible d'équilibrer le poids de la plate-forme :

$$\omega_S = \{\mathbf{p} \mid \exists \boldsymbol{\tau} \in [\boldsymbol{\tau}_{min}, \boldsymbol{\tau}_{max}], \mathbf{W}(\mathbf{p})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_g = \mathbf{0}\} \quad (1.7)$$

avec :

$$\mathbf{f}_g = [0 \ 0 \ -m_{PF}g \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

exprimé dans \mathcal{R}_A avec $\mathbf{z}_{\mathcal{R}_A}$ vertical dirigé vers le haut, et où m_{PF} est la masse de la plate-forme et g l'accélération de la gravité.

Cet espace de travail a été étudié dans [41] et [95]. Notons que cette définition d'espace de travail est bien adaptée aux robots à câbles suspendus qui ne peuvent pas exercer d'efforts dans toutes les directions (notamment des forces vers le bas) du fait de leur configuration (voir section 1.1).

Une troisième définition d'espace de travail, appelé « espace des poses polyvalentes » dans [10] et [48], ou « Wrench Closure Workspace » en anglais [8,9,33,43,49], peut s'écrire :

$$\omega_P = \{\mathbf{p} \mid \forall \mathbf{f}_e \exists \boldsymbol{\tau} \geq \mathbf{0}, \mathbf{W}(\mathbf{p})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (1.8)$$

Cette définition décrit l'ensemble des poses pour lesquelles, n'importe quel torseur peut être équilibré avec des tensions positives (sans imposer de limite de tension maximale). Cet espace de travail dépend uniquement de la configuration du robot prise en compte dans la matrice \mathbf{W} . Étant donné sa définition, l'espace des poses polyvalentes s'applique aux robots parallèles à câbles pleinement contraints, les seuls pour lesquels il peut exister des poses polyvalentes [48].

Un autre espace de travail étudié dans [11] est « l'espace de travail dynamique ». Cet espace de travail correspond à l'ensemble des poses de la plate-forme pour lesquelles le robot est capable de générer une accélération désirée.

1.2.3 Conception de robots parallèles à câbles

Nous avons vu que l'un des avantages principaux des robots parallèles à câbles est leur capacité à pouvoir être reconfigurés relativement facilement. En effet, la structure même de ce type de robot permet, en modifiant uniquement la géométrie du robot ou

l'arrangement des câbles, de changer ses capacités dynamiques, les dimensions de son espace de travail ou encore ses capacités d'orientation. Une question fondamentale est : quelle configuration procure les meilleures caractéristiques et correspond le mieux aux besoins d'une application donnée ?

Ce problème de conception a été traité en détail pour les robots parallèles. Merlet [81] présente différentes méthodes de conception de robots parallèles. Il détaille par ailleurs dans cette même référence une étude de conception optimale d'un robot parallèle de type 6 – *UPS* en utilisant une fonction de coût basée sur les dimensions de l'espace de travail. Cette phase de conception optimale revient en général à optimiser une ou plusieurs fonctions de coût en trouvant les paramètres géométriques optimaux. Néanmoins, les méthodes basées sur des fonctions de coût ont des inconvénients. Tout d'abord, pour des raisons de temps de calcul, il faut généralement limiter le nombre de paramètres à optimiser. Il faut également choisir, dans la mesure du possible, des fonctions de coût peu gourmandes en temps de calcul. De plus, lorsque plusieurs fonctions objectifs sont utilisées simultanément, il est difficile de choisir les poids à affecter aux différents critères afin de trouver le bon compromis entre les différentes caractéristiques souhaitées (espace de travail, charge maximale, capacités dynamiques,...).

Des méthodes de conception de robots parallèles basées sur l'analyse par intervalles ont également été utilisées. Fang [39] obtient ainsi des régions dans l'espace des paramètres géométriques à l'intérieur desquelles différentes caractéristiques requises sont satisfaites. Il est ensuite possible d'appliquer une méthode de conception optimale avec fonction de coût ayant pour domaine les régions ainsi déterminées.

Plusieurs travaux ont porté sur la conception des robots parallèles à câbles afin de déterminer la géométrie optimale pour une tâche donnée. La conception optimale d'un robot à câbles plan de type suspendu à 3 DDL a été étudiée dans [41, 42] et celle d'un robot à 6 DDL dans [92]. Dans ces travaux, les fonctions de coût utilisées sont basées sur les dimensions de l'espace de travail statique et sur le conditionnement de la matrice \mathbf{W} au travers de cet espace de travail. Bosscher [19] a également travaillé sur la conception optimale des robots parallèles à câbles. Cependant, dans ces travaux, la fonction objectif concerne la capacité du robot à résister à des perturbations. Cette étude s'intéresse donc à un des problèmes principaux des robots parallèles à câbles suspendus. En effet, les configurations suspendues ne permettent pas de résister à n'importe quel torseur, notamment lorsqu'ils sont composés de forces dirigées vers le haut. Citons également une étude de conception d'un robot parallèle de grande dimension réalisée par Duan dans [36]. Il y propose une méthode de conception optimale pour déterminer la position des points d'attache des câbles sur la plate-forme avec pour objectif d'atteindre une plage d'orientations donnée.

1.3 Différentes modélisations de câble

Une caractéristique critique des robots parallèles à câbles est le caractère unidirectionnel de l'actionnement. Ainsi, les moyens à mettre en œuvre afin de garder les câbles tendus lors de la réalisation d'une tâche sont très régulièrement discutés dans la littérature. Ces études, bien qu'indispensables, se focalisent cependant sur cette problématique et utilisent des modèles de câbles basiques. Les câbles sont généralement assimilés à des corps homogènes, rigides et sans masse. Cette modélisation « simpliste » permet de considérer les câbles comme des segments de droite indéformables ayant une masse négligeable à condition qu'ils soient tendus.

L'hypothèse d'un câble indéformable ayant une masse négligeable est valide dans le cas des robots à câbles de petite dimension dont les câbles sont fins et rigides et les masses transportées faibles. Néanmoins, lorsque les charges transportées sont plus importantes, de plus grandes tensions apparaissent dans les câbles. L'hypothèse de câble indéformable peut ne plus être valable. Ainsi, certains travaux portent sur l'étude de la raideur des robots parallèles à câbles. La matrice de raideur des robots parallèles à câbles peut être assimilée à celle d'une plate-forme de Gough-Stewart. Plusieurs travaux se sont appuyés sur des méthodes bien connues pour décrire la raideur des robots à câbles [47, 72, 114]. Dans ces travaux, seule l'élasticité longitudinale est considérée. D'autres travaux ont également considéré la raideur en flexion des câbles. Lacarbonara [69] présente un modèle non-linéaire de câble afin d'évaluer l'influence de la raideur en flexion. Behzadipour [12] assimile un câble à un système de quatre ressorts lui permettant de modéliser la raideur du câble dans toutes les directions.

Outre ces travaux sur la raideur des robots parallèles à câbles, certains travaux ont pris en compte l'élasticité des câbles dans les modèles cinématiques ou dynamiques et dans la commande afin d'améliorer la précision. En effet, lorsque les tensions dans les câbles sont importantes, la déformation longitudinale du câble entraîne des erreurs sur la longueur commandée des câbles. Merlet [83] considère une élasticité linéaire (module d'Young constant) dans l'étude du robot MARIONET qui possède des actionneurs linéaires et une grande longueur morte de câble. Cette longueur morte subit la même tension que le reste du câble et présente une déformation élastique. L'auteur présente la prise en compte de cette élasticité dans la résolution des problèmes géométriques directs et inverses. Agahi [2] quant à elle étudie l'influence de l'élasticité longitudinale sur la précision d'un robot parallèle à câbles, et l'applique à la planification de trajectoire.

En outre, lorsque la charge transportée est conséquente, des câbles de diamètres importants doivent être utilisés. Dans ces conditions, et lorsque les longueurs des câbles sont importantes, il n'est plus possible de négliger la masse des câbles. La masse du câble peut alors avoir une grande influence sur son profil et sur la précision de positionnement de l'organe terminal. En effet, sous l'action de leur propre poids, les câbles fléchissent, modifiant la direction et l'amplitude des forces appliquées sur la plate-forme. Les travaux de Irvine [59] sur la modélisation des câbles pour le génie civil, ont été utilisés dans le projet de télescope géant FAST. Ainsi, Kozak a présenté dans [67] l'application du modèle statique de caténaire élastique d'un câble pesant à un robot parallèle à câbles suspendu. Ce modèle de caténaire élastique prend en compte la masse propre du câble et son élasticité longitudinale. L'auteur a ainsi pu étudier l'influence de ce modèle sur la raideur du mécanisme. Par la suite, la construction d'un prototype de petite échelle (Fig. 1.10) a permis à Zi [116] de tester une commande de ce démonstrateur prenant en compte le modèle de caténaire élastique. Cette étude se base sur la dynamique du robot à câbles, avec un modèle de câble sans masse, pour déterminer les tensions dans les câbles. Puis, sous l'hypothèse de déplacements lents de la plate-forme, les équations du comportement statique d'une caténaire élastique lui permettent de calculer les longueurs non-déformées des câbles utilisées dans la commande. Plus récemment, Du [35] a présenté une méthode de détermination de la matrice Jacobienne reliant les variations de longueurs de câbles aux variations de la pose de la plate-forme d'un robot suspendu à 6 câbles et 6 DDL. Le calcul de cette matrice Jacobienne est basée sur le modèle de caténaire élastique et sa détermination est soumise à la condition d'une très faible variation de la pose de la plate-forme permettant l'utilisation d'un modèle statique. Cette matrice Jacobienne est finalement utilisée afin de résoudre le problème géométrique direct en utilisant un algorithme de Newton-Raphson.



FIGURE 1.10 - *Le démonstrateur FAST50 : un robot à câbles suspendu de grande dimension à 6 câbles et 6 DDL [35].*

D'autres études sur les robots à câbles de grande dimension ont pris en compte la masse des câbles. Bouchard [24] propose un critère d'utilisation du modèle de caténaire élastique. Ce critère est basé sur la variation de raideur obtenue par le passage d'un modèle de câble sans masse au modèle de caténaire élastique. Dans le cadre du projet LAR de télescope géant, Fitzsimmons [44] décrit une méthode d'obtention du profil statique d'un câble discrétisé. Dans [78], une méthode itérative de « shooting » également basée sur une discrétisation du câble permet d'obtenir le profil d'un câble élastique soumis à sa masse propre et à des forces dues aux courants d'air ou marin. Cette méthode permet d'obtenir en quelques itérations le profil statique du câble. Même si les temps de calcul de cette méthode pourrait, dans certains cas, être compatible avec les contraintes du temps réel, cette approche ne permet aucune étude analytique du fait de son caractère itératif. De plus, cette méthode peut présenter des cas où l'algorithme ne converge pas (discrétisation du câble trop grossière par exemple).

Des modélisations dynamiques d'un câble ont également été proposées. Ainsi de nombreux travaux [1, 29, 46] ont modélisé le comportement dynamique d'un câble immergé dans l'eau sous les effets combinés de son poids, son élasticité, et des efforts provenant notamment des courants marins. Ces études sont principalement basées sur des simulations numériques par éléments finis sur un seul câble. Starossek [104] a étudié la dynamique d'un câble en se basant notamment sur les travaux de Irvine [59]. Il a également travaillé sur la raideur dynamique d'un câble pesant [103]. Toutefois, les travaux de thèse présentés ici se focalisent sur la statique des robots parallèles à câbles de grande dimension, et ne discutent donc pas de modélisation dynamique.

1.4 Objectifs et contributions de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un projet d'étude des robots parallèles à câbles financé par la fondation Tecnia Research & Innovation (anciennement Fatronik) en collaboration avec le Laboratoire d'Informatique, de Microélectronique et de Robotique de Montpellier (LIRMM). L'objectif de ce projet est l'application des robots parallèles à câbles sur de grands espaces de travail. Ce projet était le premier de ce type aussi bien pour le laboratoire que pour l'entreprise. La construction d'un démonstrateur de faible di-

mension, le prototype nommé ReelAx6 et présenté à la Fig. 1.11, a été réalisée afin d'avoir une première expérience sur les problèmes de conception mécanique et de modélisation de ce type de robots.



FIGURE 1.11 - *Le démonstrateur ReelAx6 : un robot à câbles suspendu reconfigurable à 6 câbles et 6 DDL.*

Le nombre important de publications présentées dans les sections précédentes de ce chapitre montre que les robots parallèles à câbles ont fait et font toujours l'objet de nombreuses études. Toutefois, malgré un nombre important d'applications potentielles des robots à câbles, peu de robots ont franchi le stade de prototype, et peu de versions commerciales existent à ce jour. L'une des caractéristiques pouvant être les plus intéressantes pour un potentiel client industriel est la capacité des robots à câbles à évoluer dans de très grands espaces de travail. Cette technologie de robots assez peu connue du monde industriel doit cependant faire ses preuves. A cette fin, la réalisation d'un démonstrateur de grande dimension est un élément crucial. Néanmoins, si les robots parallèles à câbles ont été largement étudiés pour des modèles de câbles sans masse et sans élasticité, il reste un manque conséquent en ce qui concerne les méthodes d'étude et de développement de robots à câbles pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable. Cette thèse a pour objectif d'essayer de combler une partie de ce manque.

Dans un premier temps, le chapitre 2 propose une étude pragmatique de l'élasticité longitudinale de différents câbles. Cette étude se base sur des essais de traction réalisés sur une série de câbles de différentes structures et matériaux. Il est ainsi montré que le module d'Young du matériau constituant les fibres du câble n'est pas représentatif du comportement en traction du câble. Plusieurs approximations sont donc proposées pour modéliser l'élasticité des câbles. Basé sur le modèle de caténaire élastique présenté dans [59], il est ensuite montré que l'influence de la masse propre du câble et de son élasticité longitudinale sur le comportement statique d'un robot à câble suspendu n'est

pas négligeable pour des robots de grande dimension. Enfin, les observations faites sur le comportement des câbles d'un robot suspendu à 3 câbles et 3 DDL nous permettent de montrer que les définitions existantes d'espace de travail ne sont pas adaptées aux robots pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable. Une nouvelle définition de l'espace de travail statique des robots parallèles à câbles de grande dimension est donc proposée.

Le chapitre 2 montre que les équations régissant le modèle de caténaire élastique sont fortement non-linéaires. La résolution de l'équilibre statique et celle des problèmes géométriques sont par conséquent très complexes. Dans le chapitre 3, sous l'hypothèse d'une faible déflexion du câble, des simplifications décrites dans [59] sont présentées. L'expression de l'équilibre statique de la plate-forme est alors obtenue en utilisant un modèle simplifié de câble pesant. Il est montré qu'avec ce modèle simplifié, le profil du câble peut être exprimé de manière explicite. De plus, il est possible de découpler partiellement le problème géométrique inverse. Enfin, ce modèle permet de diminuer le nombre d'inconnues du problème géométrique inverse (par rapport au modèle de caténaire élastique). Ainsi, l'expression de l'équilibre statique de la plate-forme peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire similaire au cas du modèle de câble sans masse. Une étude des erreurs associées à une telle simplification est ensuite conduite. Les résultats obtenus pour deux exemples de robots à câbles illustrent la validité du modèle simplifié. Un critère de validité de ce modèle simplifié de câble pesant est également présenté. Cette nouvelle expression d'un modèle de câble pesant nous permet également d'étudier la capacité d'un robot à générer des torseurs d'efforts. En se basant sur les travaux de Bouchard [24] et Gouttefarde [50] sur le zonotope des torseurs admissibles, la détermination des torseurs admissibles de robots dont la masse des câbles n'est pas négligeable est décrite.

Le dernier chapitre de cette thèse présente une méthode de conception de robots parallèles à 8 câbles et 6 DDL de grande dimension. A partir d'une série de géométries de points de sortie et de points d'attache des câbles sur la plate-forme, tous les arrangements possibles de câbles sont étudiés afin de balayer un grand nombre de configurations possibles. Une vérification des collisions entre câbles avec déflexion est réalisée afin de supprimer toute configuration présentant des collisions à l'intérieur d'un espace de travail prescrit. La configuration optimale est sélectionnée sur la base d'un critère reflétant la capacité à équilibrer une masse décentrée sur la plate-forme sur l'ensemble de l'espace de travail désiré. Le critère à optimiser est le décalage maximal admissible du centre de masse par rapport au centre géométrique de la plate-forme. En se basant sur la détermination du zonotope des torseurs admissibles (chapitre 3) pour un robot pour lequel la masse des câbles n'est pas négligeable, ce critère est calculé pour toutes les configurations introduites précédemment afin de déterminer la configuration optimale.

Chapitre 2

Modèles statiques de câbles pesants et/ou élastiques et conséquences sur la modélisation des robots à câbles

Sommaire

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Introduction | 18 |
| 2.2 | Modèles élastiques de câbles | 19 |
| 2.3 | Modèle de caténaire élastique | 29 |
| 2.4 | Influence du modèle utilisé sur le comportement des robots à câbles suspendus | 35 |
| 2.5 | Espace de travail statique d'un robot de grande dimension | 44 |
| 2.6 | Conclusions | 50 |

Ce chapitre présente des modèles de câbles prenant en compte leur masse et leur élasticité longitudinale. Des tests de traction réalisés sur différents types de câbles permettent de mettre en exergue le comportement élastique non-linéaire de certains câbles. Afin d'améliorer la modélisation des robots parallèles à câbles, ce chapitre présente différents modèles d'élasticité de câbles. Leur utilisation dans le cadre de la résolution du problème géométrique inverse est également brièvement discutée. Le modèle statique de caténaire élastique est ensuite présenté. Ce modèle permet de rendre compte de la déflexion du câble sous l'effet de son propre poids. Une étude basée sur différents exemples permet d'évaluer l'influence des modèles de câbles pesant et/ou élastiques sur le comportement de robots à câbles. Enfin, à partir d'un exemple de robot plan suspendu, il est montré que la définition de l'espace de travail statique couramment utilisée n'est pas adaptée aux robots parallèles à câbles de grande dimension. Une nouvelle définition est donc proposée.

2.1 Introduction

2.1.1 Construction des câbles et comportement

Contrairement aux pièces mécaniques rigides généralement utilisées dans la construction des robots, les câbles ont rarement une composition uniforme. La construction même des câbles rend difficile l'étude de leur comportement sous efforts. Leur structure hétérogène entraîne un comportement fortement non-linéaire.

De manière générale, les câbles métalliques sont constitués de fibres et de torons. Les fibres sont enroulées entre elles afin de former les torons, puis les torons sont enroulés entre eux pour former le câble. Les câbles textiles sont quant à eux généralement tressés. L'organisation des fibres et des torons (type d'enroulement, nombre de fibres et de torons) peut varier fortement d'un câble à l'autre et a une grande influence sur les caractéristiques telles que la raideur en flexion, la résistance à la rupture, ou encore l'élasticité. Par exemple, lors de l'application d'un effort de traction, un resserrement des fibres a lieu entraînant une élongation du câble. Ce mouvement des fibres à l'intérieur du câble entraîne également une torsion du câble. Dans le cas où la liaison entre le câble et la plate-forme ne possède pas un pivot passif selon l'axe du câble, des couples de torsions peuvent apparaître aux points d'attache des câbles. Certaines techniques de construction de câbles sont toutefois disponibles afin de limiter ce phénomène. Les câbles ainsi construits sont appelés câbles antigiratoires.

De surcroît, les matériaux qui composent les câbles sont très variés, allant de la fibre métallique (acier inoxydable, acier galvanisé, zinc,...) au tissu, en passant par différents types de matériaux polymères (Dyneema, Kevlar,...). Les câbles peuvent également être composés de matériaux différents, par exemple quand le coeur du câble (toron central) est d'un matériau différent de celui des torons externes. Le coeur du câble peut également être un câble de signal ou de puissance. Cette hétérogénéité va de pair avec un comportement non-linéaire du câble.

Enfin, afin de protéger le câble et/ou d'éviter des contacts entre le coeur et les torons externes, des gaines en matériau synthétique peuvent être ajoutées à l'extérieur ou à l'intérieur du câble. Un exemple typique de construction de câble est présenté à la figure 2.1.

Tous ces éléments montrent qu'une assimilation des câbles à des corps indéformables, linéaires et homogènes est probablement trop grossière pour modéliser correctement le câble lorsque celui-ci a un diamètre important.

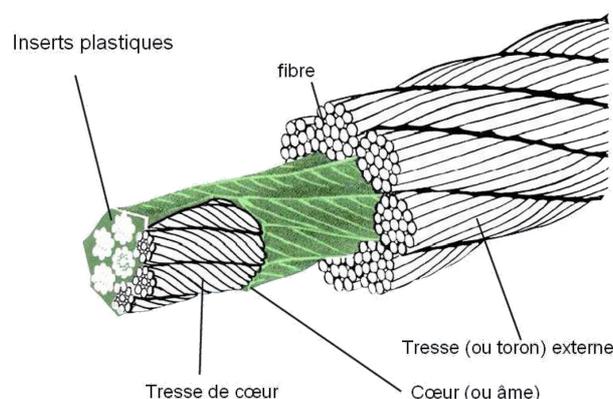


FIGURE 2.1 - Schéma d'un exemple de construction de câble.

2.1.2 Cadre de définition des modèles de comportement de câbles

Afin de définir les modèles statiques de comportement de câbles utilisés dans ce chapitre, isolons un seul câble d'un robot à câbles. Nous nous plaçons dans le plan vertical contenant le câble i pour une pose donnée de la plate-forme. Ce plan \mathcal{P}_i , présenté à la Fig. 2.2, est le plan vertical passant par les points A_i et B_i , respectivement point de sortie et point d'attache sur la plate-forme du câble i . Un repère $\mathcal{R}_i (A_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ est attaché à ce plan, tel que \mathbf{x}_i et \mathbf{z}_i soient contenus dans \mathcal{P}_i , \mathbf{z}_i étant vertical de sens opposé à la gravité. L'axe \mathbf{x}_i , orthogonal à \mathbf{z}_i est orienté de manière à ce que la coordonnée B_{i_x} du point B_i dans le repère \mathcal{R}_i soit positive.

Les différents modèles présentés dans ce chapitre permettront de rendre compte du comportement statique d'un câble i de longueur non déformée l_{0i} , fixé à son extrémité A_i et sous l'action d'une force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ appliquée à son autre extrémité B_i . Ce vecteur force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ a pour composantes τ_{li_x} et τ_{li_z} suivant les axes \mathbf{x}_i et \mathbf{z}_i du repère \mathcal{R}_i .

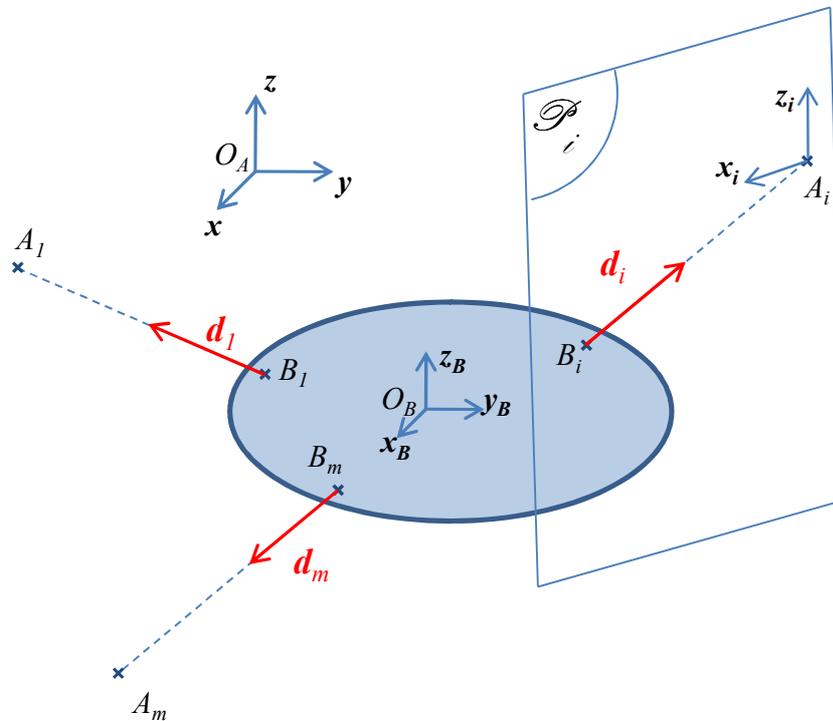


FIGURE 2.2 - *Schema de la plate-forme et notations.*

2.2 Modèles élastiques de câbles

2.2.1 Introduction

Comme toute pièce mécanique, les câbles sous une action de traction s'allongent. Pour des pièces homogènes et de forme régulière, les équations de la résistance des matériaux permettent de modéliser précisément ce comportement (dans le domaine élastique) grâce notamment au module d'Young et au coefficient de Poisson. Il est également possible pour des assemblages ou des pièces plus complexes d'utiliser des méthodes d'éléments finis. Toutefois, étant donnée la complexité de construction de beaucoup de câbles, ce type de

méthodes n'est pas adéquate dans le contexte des robots parallèles à câbles, notamment du fait des temps de calcul nécessaires. Il faut noter que dans cette partie, la masse des câbles est pour le moment négligée.

Dans la littérature, diverses approches ont été proposées pour prendre en compte l'élasticité des câbles afin d'obtenir un comportement plus réaliste des câbles d'un robot parallèle à câbles. Le plus souvent, l'élasticité des câbles est introduite dans le modèle de comportement du câble par la prise en compte d'un module d'Young constant souvent égal à celui du matériau principal constituant le câble [67, 83]. Le câble est alors assimilé à un cylindre plein constitué d'un matériau homogène. Toutefois, étant donné la construction des câbles et les phénomènes d'élongation sous l'effet du resserrage des fibres, cette hypothèse est parfois trop forte. Des tests de traction sur différents câbles de différentes constructions, matériaux et diamètres ont été réalisés afin d'avoir un aperçu du comportement élastique des câbles et de proposer des modélisations adéquates.

2.2.2 Tests de traction et identifications

Des essais de traction ont été réalisés sur 6 câbles de matériaux et constructions différents. Les descriptions de ces câbles sont présentées dans le tableau 2.1. Il faut noter que pour les types de construction, $t \times f$ signifie une structure composée de t torons de f fils. Les charges à la rupture présentées dans ce tableau sont des données fournisseur.

TABLEAU 2.1 - *Description des câbles testés.*

| | Type de construction | Diamètre | Matériau | Charge à la rupture |
|---------|----------------------------|------------|------------------|---------------------|
| Câble 1 | 1×19 | 1 mm | Acier inoxydable | 90 kg |
| Câble 2 | 1×19 | 1 mm | Acier galvanisé | 100 kg |
| Câble 3 | NC | 1,1 mm | Dyneema | 116 kg |
| Câble 4 | 7×7 | 1,5 mm | Acier galvanisé | 140 kg |
| Câble 5 | $7 \times 7 +$ gaine PVC | 1,5/2,5 mm | Acier galvanisé | 130 kg |
| Câble 6 | $6 \times 7 +$ âme textile | 2 mm | Acier galvanisé | 239 kg |

Les tests de traction ont été réalisés sur des câbles de 6m de long. Un seul échantillon de chaque câble a été testé, et plusieurs cycles de charge/décharge ont été réalisés afin d'obtenir un comportement élastique stable du câble. Nous présentons dans les parties suivantes les différentes lois de déformation obtenues à partir des comportements identifiés lors des tests de traction. Les erreurs associées à chacune de ces lois sont également présentées.

2.2.2.1 Approximation linéaire

Pour certains câbles, les tests de traction permettent de conclure qu'une approximation linéaire est assez précise compte tenu du comportement en traction du câble. C'est le cas du test de traction d'un câble en acier galvanisé de construction 1×19 et de diamètre 1mm dont la courbe contrainte/déformation est présentée à la Fig. 2.3. On constate que le comportement est quasiment linéaire, et qu'un module d'Young peut être identifié : $E = 129GPa$. Toutefois, on peut aussi remarquer que ce module d'Young diffère fortement du module d'Young de l'acier ($E = 210GPa$).

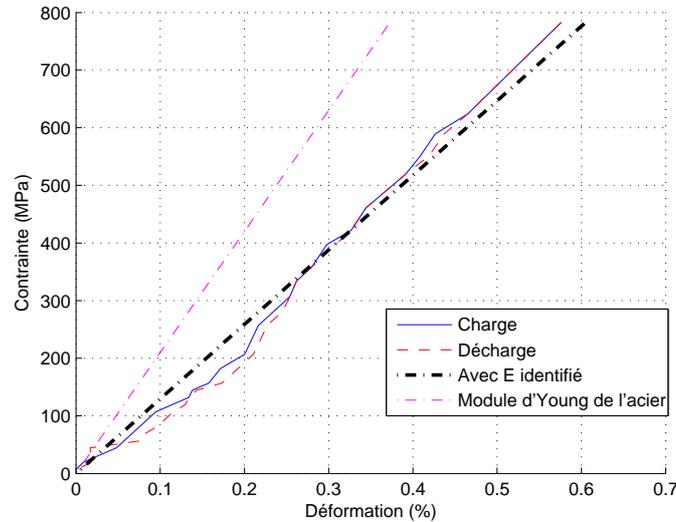
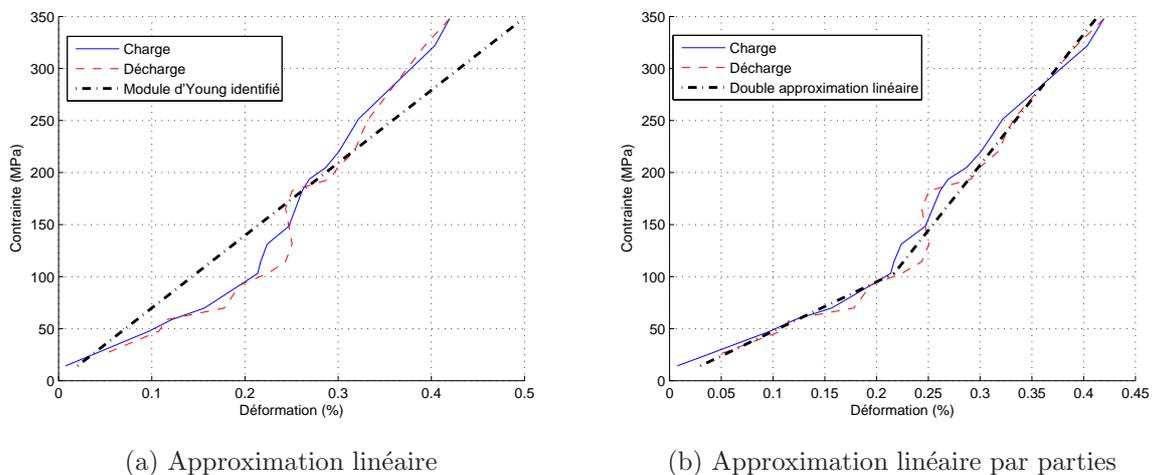


FIGURE 2.3 - Test de traction du câble en acier galvanisé 1×19 de diamètre 1mm (câble 2), et approximation linéaire de la loi de déformation.

Pour ce type de câbles, l'utilisation d'un module d'Young constant est une approximation raisonnable, mais il est cependant nécessaire de l'identifier et de ne pas utiliser celui du matériau constituant le câble.

2.2.2.2 Approximation linéaire par parties

La Fig. 2.4(a) présente les résultats du test de traction réalisé sur le câble en acier galvanisé 7×7 (câble 4). Le comportement de ce câble apparaît comme étant non-linéaire. La figure présente également la courbe correspondant au module d'Young identifié par une méthode de moindres carrés (pointillés mixtes -.-). Ce module est de 69GPa . Notons que ce module est beaucoup plus faible que le module d'Young de l'acier. De surcroît, cette approximation linéaire par un module d'Young constant ne permet pas de rendre convenablement compte du comportement réel du câble en traction.



(a) Approximation linéaire

(b) Approximation linéaire par parties

FIGURE 2.4 - Test de traction du câble en acier galvanisé 7×7 de diamètre 1,5mm (câble 4) et approximations de la loi de déformation.

A la Fig. 2.4(a), on remarque que pendant la première partie du test (pour une contrainte de 0 à $100MPa$) le module d'élasticité est plus faible : les actions de déformation des fibres et de resserrage des fibres et torons ont lieu en même temps. Le module d'Young équivalent peut être assimilé à une première constante. Le comportement du câble change pour une contrainte supérieure à $100MPa$. Jusqu'à la valeur limite du test σ_{fin} , le module d'Young de cette seconde plage de comportement peut aussi être assimilé à une constante.

Le comportement de ce câble peut donc être approximé par deux modules d'Young différents correspondant chacun à une zone de contrainte différente. La figure 2.4(b) présente les courbes correspondant à une double approximation linéaire de ce type.

On obtient ainsi un comportement élastique défini par partie, pour deux intervalles de la contrainte σ . Ainsi, si le câble travaille dans la zone $0 \leq \sigma \leq 100MPa$ il faut utiliser un module d'Young de $47,5GPa$. Dans la zone $100MPa \leq \sigma \leq \sigma_{fin}$, le comportement en traction du câble sera également linéaire et l'expression du module d'Young aura la forme suivante :

$$\sigma = E_0\varepsilon + \sigma_0 \quad (2.1)$$

où ε correspond à la déformation relative, $E_0 = 125,7GPa$ et $\sigma_0 = -169,7MPa$. Avec cette approximation linéaire par parties, l'erreur relative moyenne sur la déformation est de 4,63%, alors qu'elle était de 16,34% pour une approximation linéaire du module d'Young.

2.2.2.3 Approximation non-linéaire

Les deux approximations linéaire et linéaire par parties du comportement d'un câble sous un effort de traction présentées auparavant ne sont pas toujours suffisantes à la description du comportement élastique d'un câble. De plus, la double approximation linéaire donne un module d'Young défini par partie ne facilite pas son utilisation. On propose ici d'utiliser un autre type d'approximation.

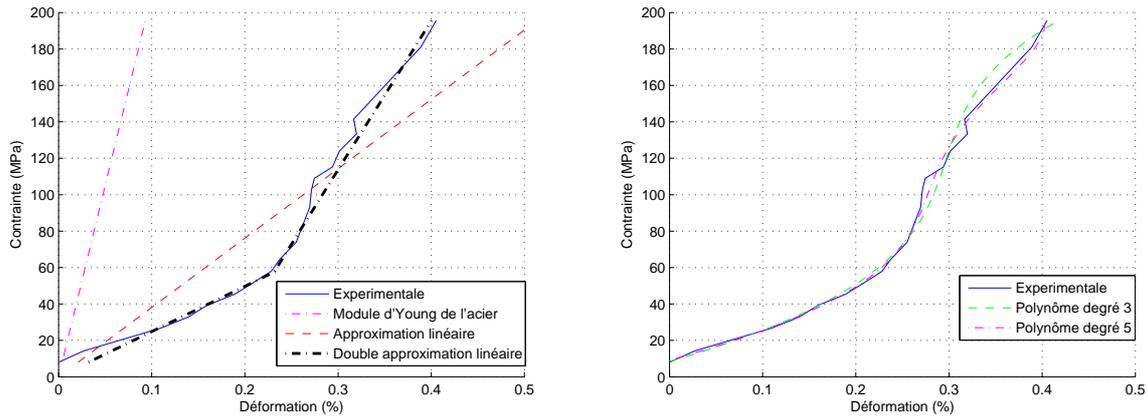
La courbe de traction du câble 6×7 en acier galvanisé avec âme tissu de diamètre $2mm$ (câble 6) présentée à la Fig. 2.5(a) montre un comportement élastique fortement non-linéaire. Une approximation linéaire par moindres carrés a été réalisée. Le module d'Young identifié est de $38,1GPa$. Toutefois, avec cette approximation l'erreur relative en terme de déformation pour une contrainte donnée est très élevée (environ 21%).

Les résultats assez peu précis des approximations linéaire (20,83%) et linéaire par parties (5,58%) ainsi que l'allure de la courbe, nous ont amené à réaliser une approximation non-linéaire pour modéliser le comportement en traction de ce câble. Étant donnée l'allure de la courbe de comportement réel du câble, nous avons réalisé une approximation polynomiale de la forme suivante :

$$\varepsilon = P(\sigma) = \sum_{i=1}^n a_i \sigma^i \quad (2.2)$$

avec $n = 3$ ou 5 . Les fonctions polynomiales obtenues par la méthode des moindres carrés sont présentées à la Fig. 2.5(b) et leurs coefficients sont regroupés dans le Tab. 2.2.

Pour le câble 6 les erreurs relatives sur la déformation associées à ces deux modèles polynomiaux sont de 3,2% et 2% respectivement.



(a) Approximations linéaire et linéaire par parties

(b) Approximations non-linéaires

FIGURE 2.5 - Test de traction du câble 6×7 en acier galvanisé avec âme tissu de diamètre 2mm (câble 6) et approximations de la loi de déformation.

TABLEAU 2.2 - Coefficients des polynômes d'approximation du comportement élastique du câble 6×7 en acier galvanisé avec âme tissu de diamètre 2mm.

| | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 |
|---------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| Degré 3 | $-6,05 \cdot 10^{-4}$ | $7,69 \cdot 10^{-5}$ | $-5,91 \cdot 10^{-7}$ | $1,65 \cdot 10^{-9}$ | 0 | 0 |
| Degré 5 | $-6,48 \cdot 10^{-4}$ | $7,52 \cdot 10^{-5}$ | $-3,22 \cdot 10^{-7}$ | $-4,29 \cdot 10^{-9}$ | $4,51 \cdot 10^{-11}$ | $-1,11 \cdot 10^{-13}$ |

2.2.2.4 Problèmes d'hystérésis dans le comportement élastique des câbles

Nous avons vu que certains câbles ont des comportements élastiques non-linéaires. Un phénomène d'hystérésis peut également exister. En général, l'hystérésis dans le comportement élastique d'un matériau est dû à un effort faisant entrer la pièce étudiée dans le domaine plastique, résultant en des déformations permanentes. En ce qui concerne les câbles, le phénomène d'hystérésis n'a pas forcément les mêmes causes.

En effet, lors des premières utilisations, le câble doit « se faire ». Lors de l'application des premiers efforts de traction sur un câble neuf, les fibres et torons se déforment et surtout se resserrent les uns sur les autres provoquant une elongation du câble. Cette elongation ne se résorbe pas intégralement lors de la décharge du câble. Celui-ci aura donc une longueur à vide (sans charge) qui sera plus grande que cette même longueur avant le cycle de charge/décharge. Ce phénomène d'hystérésis est par exemple visible sur les courbes de traction réalisées sur le câble en Dyneema (Fig. 2.6, câble 3).

On constate sur cette courbe de traction que la phase de charge est quasiment linéaire. Cependant, la phase de décharge est distincte et non-linéaire. De surcroît, le phénomène d'hysteresis est très présent dans le comportement de ce câble. En effet, sur la courbe de la Fig. 2.6, qui présente le premier test de traction d'un câble neuf, une déformation résultante de 0,4% est présente après la décharge. Bien que le câble soit pré-étiré par le constructeur, un phénomène de resserrage des fibres provoquant des déformations permanentes a lieu lors des premiers cycles. Après de nombreux cycles de charge/décharge, cette hystérésis a tendance à s'atténuer, mais reste toutefois présente, tel qu'illustré à la

2.2. Modèles élastiques de câbles

Fig. 2.7. Le module d'Young identifié par moindres carrés sur la courbe de charge linéaire, augmente au fil des cycles et tend à converger vers une valeur fixe.

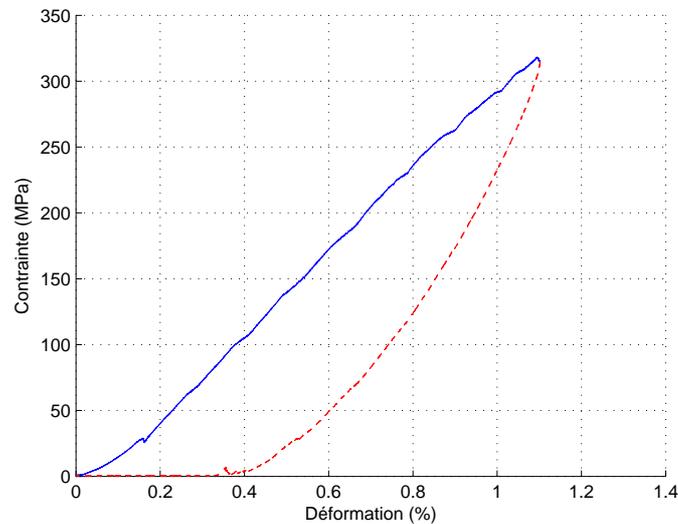


FIGURE 2.6 - Test de traction du câble Dyneema de diamètre 1,1mm (câble 3) sur un cycle de charge (trait plein) et décharge (pointillé).

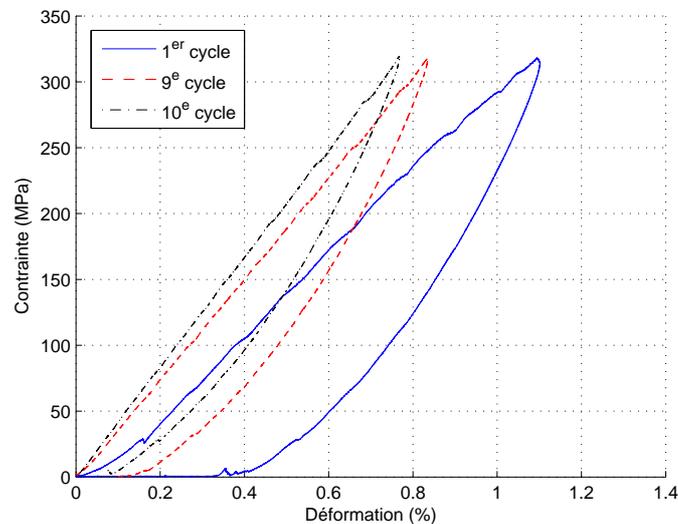


FIGURE 2.7 - Tests de traction du câble Dyneema de diamètre 1,1mm. Evolution de l'hystérésis avec le nombre de cycles effectués.

Pour ce type de câble, dans un premier temps, il est nécessaire de réaliser de nombreux cycles de charge/décharge afin de stabiliser le comportement du câble. Néanmoins, même quand le comportement du câble est stabilisé, on remarque deux comportements différents pour les phases de charges et décharges, rendant la modélisation élastique de ces câbles très difficile. Ce type de câbles n'est donc pas adapté aux robots à câbles pour lesquels les tensions apparaissant dans les câbles peuvent être importantes, les cycles de charge/décharge fréquents et où l'élasticité (non-négligeable) doit être prise en compte.

2.2.2.5 Evaluation des différents modèles pour les 6 câbles testés

Pour les différents câbles testés, nous avons calculé l'erreur relative moyenne sur la déformation relative pour les différentes approximations de la courbe de traction présentées précédemment. Les résultats sont regroupés dans le Tab. 2.3.

TABLEAU 2.3 - Erreurs relatives moyennes sur la déformation ε pour les différents câbles et les différents modèles d'élasticité.

| | E du matériau | E identifié | E par parties | Degré 3 | Degré 5 |
|---------|---------------|-------------|---------------|---------|---------|
| Câble 1 | 150,61% | 13,21 % | / | 5,67 % | 3,83 % |
| Câble 2 | 68,64 % | 8,41 % | / | 2,72 % | 2,39 % |
| Câble 3 | / | 5,84 % | / | 3,41 % | 2,46 % |
| Câble 4 | 216,29 % | 16,34 % | 4,63 % | 3,34 % | 2,08 % |
| Câble 5 | 240,16 % | 17,24 % | / | 5,09 % | 3,51 % |
| Câble 6 | 480,07 % | 20,83 % | 5,58 % | 3,19 % | 2,04 % |

On peut remarquer que l'utilisation du module d'Young E du matériau constituant le câble n'est clairement pas adaptée à la modélisation élastique des câbles. Cependant, pour certains câbles (câbles 2 et 3) l'utilisation d'un module d'Young constant identifié permet de diminuer considérablement l'erreur sur la déformation du câble. Une approximation non-linéaire paraît nécessaire pour certains câbles afin d'obtenir une erreur relative moyenne inférieure à 5%.

2.2.2.6 Introduction de l'élasticité dans le problème géométrique inverse

Pour des modèles de câbles sans masse (câbles rectilignes), l'introduction d'une approximation linéaire ou non-linéaire de l'élasticité dans l'expression du problème géométrique inverse est aisée. En effet, le calcul des longueurs totales L des câbles et de leurs tensions peuvent se faire séparément. Il suffit alors de calculer les tensions dans les câbles pour une pose donnée de la plate-forme, comme présenté dans la section 1.2.1.2, et d'en déduire l'allongement Δl de chaque câble :

$$\frac{\Delta l}{L} = \varepsilon = P(\sigma) \quad (2.3)$$

où $\sigma = \tau/A_0$, et où A_0 est la section non-déformée du câble. On peut alors calculer la longueur non-déformée l_0 du câble à partir de l'équation :

$$l_0 = L \left(1 - \frac{\Delta l}{L} \right) \quad (2.4)$$

où Δl correspond à la variation de longueur du câble ($\Delta l = L - l_0$).

2.2.3 Validation expérimentale du modèle élastique

2.2.3.1 Description de la méthode utilisée

Afin d'évaluer la pertinence de l'utilisation d'un modèle élastique, nous avons réalisé des tests de précision sur le prototype de robot à câbles *ReelAx6*. Ce prototype, conçu et fabriqué dans le cadre de cette thèse, est présenté en détail à l'annexe A. Le câble utilisé est le câble en Dyneema décrit dans le Tab. 2.1.

La courbe de comportement en traction de ce câble obtenue est présentée à la Fig. 2.7. Nous avons vu que le comportement en traction de ce câble est linéaire, même s'il présente une hystérésis. Cependant, cette hystérésis s'atténue après plusieurs cycles de charge/décharge. Nous avons donc utilisé une approximation linéaire du module d'Young basée sur la courbe de charge. Ce module d'Young identifié est de $43GPa$. Étant donnée la faible masse linéique du câble et les faibles dimensions du prototype (longueur maximale déroulée inférieure à $4,5m$), la masse du câble est négligée. Le câble est assimilé à un segment de droite.

La configuration du robot *ReelAx6* considérée ici est décrite au Tab. 2.4.

TABLEAU 2.4 - Description de la configuration étudiée du prototype *ReelAx6*.

| | \mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \mathbf{a}_3 | \mathbf{a}_4 | \mathbf{a}_5 | \mathbf{a}_6 |
|--------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $x(m)$ | 0,776 | 0,819 | 0,819 | 0,776 | -1,595 | -1,595 |
| $y(m)$ | -1,394 | -1,369 | 1,369 | 1,394 | 0,025 | -0,025 |
| $z(m)$ | 2,762 | 2,762 | 2,762 | 2,762 | 2,762 | 2,762 |
| | \mathbf{b}_1 | \mathbf{b}_2 | \mathbf{b}_3 | \mathbf{b}_4 | \mathbf{b}_5 | \mathbf{b}_6 |
| $x(m)$ | -0,0865 | 0,173 | 0,173 | -0,086 | -0,086 | -0,086 |
| $y(m)$ | -0,149 | 0 | 0 | 0,149 | 0,149 | -0,149 |
| $z(m)$ | 0,035 | 0,035 | 0,035 | 0,035 | 0,035 | 0,035 |

La trajectoire de test est une trajectoire hélicoïdale à orientation constante nulle permettant de couvrir une grande partie de l'espace de travail et une grande gamme de tensions dans les câbles. Cette trajectoire est présentée aux Fig. 2.8 et 2.9. Afin d'avoir des tensions importantes, la plate-forme a été chargée au maximum de la capacité du robot ($25kg$).

Le test de précision considéré consiste à calculer pour la trajectoire test la tension de chaque câble. A partir de ces tensions, les longueurs de consigne des câbles sont calculées le long de la trajectoire avec le modèle non-élastique et avec le modèle de câble élastique (module d'Young identifié). Pour les deux modèles de câbles précités, la trajectoire a été décrite. Afin de mesurer la position du point de référence O_B de la plate-forme à chaque instant de la trajectoire, nous avons utilisé un système optique de mesure tridimensionnel (Metris K600) présenté à la Fig. 2.10. Ce système permet de mesurer la position d'une ou plusieurs diodes dans un volume de $18m^3$ avec une précision nominale de $35\mu m$.

Ainsi, en fixant 3 diodes sur la plate-forme (Fig. 2.11), un repère fixe par rapport à la plate-forme est obtenu, et la position du point piloté de la plate-forme peut être déterminée. La mesure de trois positions connues de la plate-forme dans le repère global nous permet de reconstruire ce dernier. Il est alors possible de déterminer les transformations

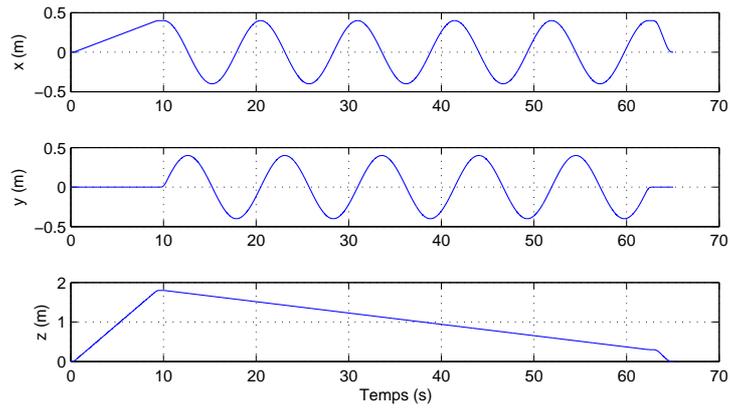


FIGURE 2.8 - Description de la trajectoire étudiée

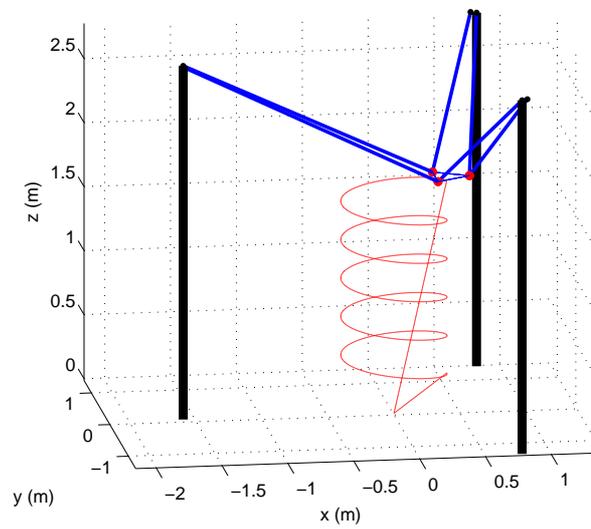


FIGURE 2.9 - Schéma de la configuration étudiée et de la trajectoire testée



FIGURE 2.10 - Photo du système de mesure tridimensionnelle Metris K600.

2.2. Modèles élastiques de câbles

homogènes permettant de passer du repère du Metris au repère global du robot. Les détails de ces transformations ne seront pas présentés ici.

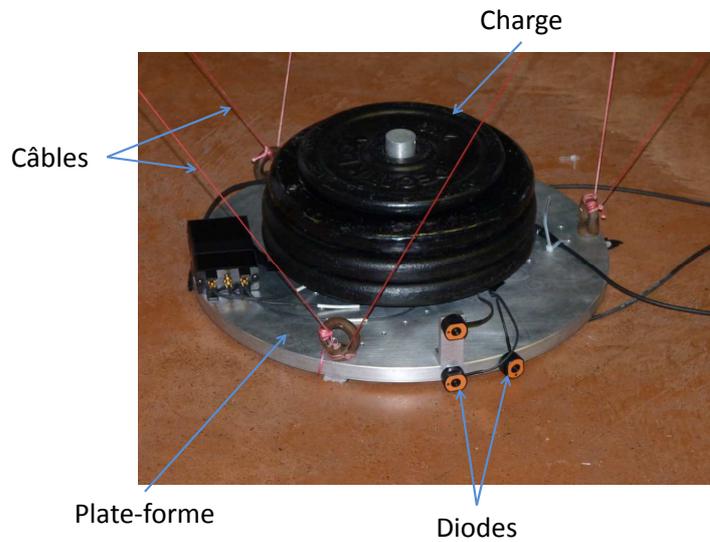


FIGURE 2.11 - *Positionnement des diodes sur la plate-forme.*

Pour les deux modèles de câble (non-élastique et élastique linéaire), les trajectoires ainsi mesurées sont comparées à la trajectoire nominale. Nous avons calculé tout au long de la trajectoire l'erreur de positionnement du point de référence de la plate-forme. Cette erreur, calculée à chaque échantillon de temps, correspond à la distance entre la position désirée du point O_B et la position mesurée de ce même point. Notons que dans cette étude seule la position du point piloté de la plate-forme est considéré, les erreurs d'orientation n'étant pas calculées.

2.2.3.2 Résultats

Les erreurs obtenues avec le modèle de câble non-élastique et avec le modèle de câble élastique, par rapport au modèle parfait issu de la CAO, sont présentées à la Fig. 2.12. L'analyse de ces erreurs est présentée au Tab. 2.5.

TABLEAU 2.5 - *Analyse des erreurs de suivi de trajectoire (en mm)*

| Modèle | Erreur moyenne | Min | Max | Écart Type | Variance |
|--------------------------|----------------|------|-------|------------|----------|
| Câble non-élastique | 12,32 | 2,31 | 28,46 | 6,16 | 37,95 |
| Câble élastique linéaire | 9,07 | 0,68 | 21,86 | 4,52 | 20,49 |

Les erreurs obtenues sont assez importantes, mais elles sont majoritairement attribuées à un étalonnage approximatif dont la géométrie des points de sorties et des points d'attache des câbles n'est pas bien connue. Toutefois, on remarque que l'utilisation d'un modèle de câble élastique permet de diminuer de près de 27% l'erreur de positionnement moyenne.

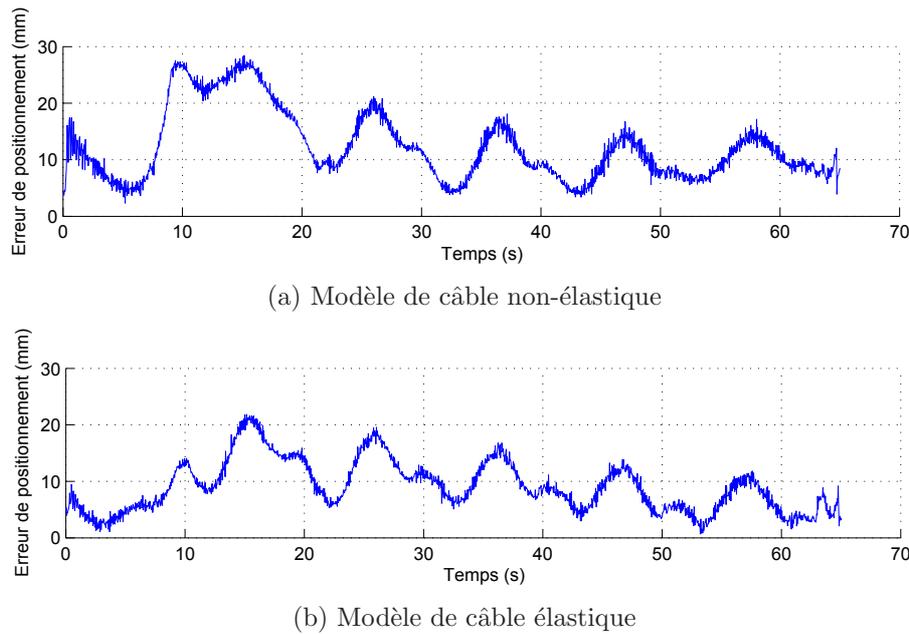


FIGURE 2.12 - Erreurs de suivi de trajectoire pour les deux modèles de câbles, élastique et non-élastique.

2.3 Modèle de caténaire élastique

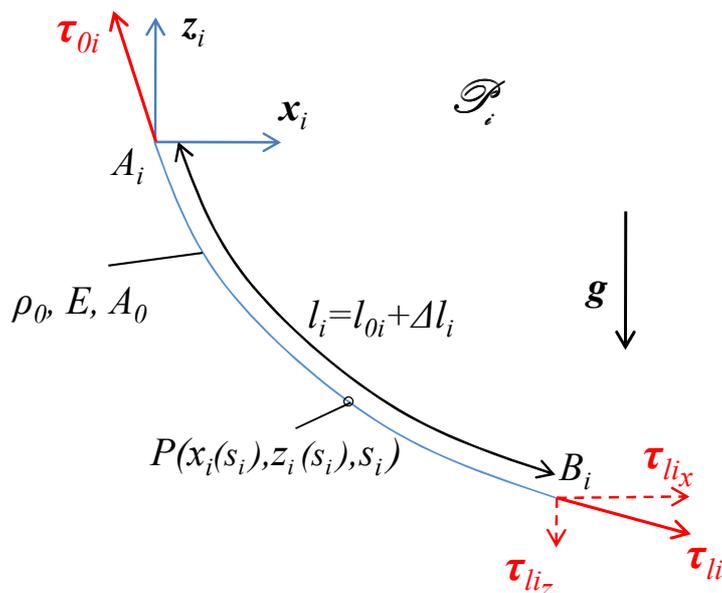
Dans les situations où le câble utilisé possède un diamètre important et les longueurs déroulées sont grandes, la masse du câble déroulé a tendance à faire dévier le câble de la droite reliant le point de sortie au point d'attache du câble sur la plate-forme : le câble s'affaisse sous l'action de son propre poids. Ce phénomène appelé déflexion du câble peut avoir des conséquences importantes du fait du changement de direction et d'amplitude de la force appliquée par le câble sur la plate-forme par comparaison au cas d'un câble supposé rectiligne. Afin de prendre en compte la déflexion d'un câble, différents modèles ont été proposés. Dans cette section, un modèle connu décrivant le profil d'un câble sous l'effet d'une force appliquée à une de ses extrémités et de son propre poids est présenté. Les conséquences de la considération de ce modèle sur la modélisation géométrique et statique d'un robot parallèle à câbles sont également discutées.

2.3.1 Description du modèle

Ce modèle de caténaire élastique a été initialement introduit pour modéliser le comportement statique de câbles dans le génie civil pour des ouvrages d'art tels que des ponts suspendus. Il prend en compte le poids propre du câble ainsi que son élasticité. L'obtention des équations d'équilibre d'un élément de câble et l'intégration de ces équations étant connues depuis longtemps et décrite dans [59], elles ne seront donc pas présentées en détail dans cette thèse.

2.3.2 Câble pesant élastique suspendu entre 2 points

A partir du modèle statique d'un câble pesant élastique i suspendu entre deux points (Fig. 2.13), présenté dans [59], Kozak [67] décrit les équations de d'équilibre statique de la partie du câble allant du point P au point B_i . Les coordonnées du point P dans le


 FIGURE 2.13 - Profil du câble i dans le plan \mathcal{P}_i avec le modèle de caténaire élastique.

repère \mathcal{R}_i sont (x_i, z_i) , et le point P du câble a pour abscisse curviligne non-déformée s_i ($0 \leq s_i \leq l_{0i}$), et pour abscisse curviligne déformée p_i ($0 \leq p_i \leq l_i$). Les équations d'équilibre sont :

$$\tau_i \frac{dx}{dp_i} = \tau_{li_x} \quad (2.5)$$

$$\tau_i \frac{dz}{dp_i} = \tau_{li_z} + \rho_0 g (s_i - l_{0i}) \quad (2.6)$$

où τ_{li_x} et τ_{li_z} sont les composantes de la force τ_{li} exercé à l'extrémité B_i du câble i . A partir de ces équations et de la contrainte géométrique suivante sur le profil du câble :

$$\left(\frac{dx}{dp_i} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dp_i} \right)^2 = 1 \quad (2.7)$$

où dx/dp_i et dz/dp_i sont respectivement les cosinus et sinus de l'angle d'inclinaison de l'élément de câble étudié, Irvine [59] obtient l'expression de la tension dans le câble en fonction de l'abscisse curviligne s_i :

$$\tau(s_i) = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + (\tau_{li_z} + \rho_0 g (s_i - l_{0i}))^2} \quad (2.8)$$

De plus, d'après la loi de Hooke appliquée à un élément de câble, la tension peut également s'écrire sous la forme :

$$\tau(s_i) = EA_0 \left(\frac{dp_i}{ds_i} - 1 \right) \quad (2.9)$$

où E et A_0 sont le module d'Young et la section non-déformée du câble étudié, respectivement.

A partir de ces expressions de la tension, Irvine [59] obtient les expressions de $x_i(s)$ et $z_i(s)$ décrivant le profil du câble. Afin d'adapter ces expressions au cadre d'étude présenté

à la section 2.1.2, le câble i de longueur non déformée l_{0i} est supposé accroché à une extrémité et soumis à une force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ à son autre extrémité. Sous l'action combinée de cette force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ et de son propre poids, le câble prend la forme d'une courbe appelée caténaire élastique telle que présentée à la Fig. 2.13 dans le plan \mathcal{P}_i . En se conformant aux notations présentées en 2.1.2, l'extrémité fixe ($s_i = 0$) du câble et l'extrémité soumise à la force d'amplitude τ_{li} ($s_i = l_{0i}$) correspondent respectivement aux points A_i et B_i . Le profil du câble est décrit par les équations suivantes :

$$x_i(s_i) = \frac{\tau_{li_x} s_i}{EA_0} + \frac{|\tau_{li_x}|}{\rho_0 g} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{li_z} + \rho_0 g (s_i - l_{0i})}{\tau_{li_x}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{li_z} - \rho_0 g l_{0i}}{\tau_{li_x}} \right) \right] \quad (2.10)$$

$$z_i(s_i) = \frac{\tau_{li_z} s_i}{EA_0} + \frac{\rho_0 g}{EA_0} \left(\frac{s_i^2}{2} - l_{0i} s_i \right) + \frac{1}{\rho_0 g} \left[\sqrt{\tau_{li_x}^2 + (\tau_{li_z} + \rho_0 g (s_i - l_{0i}))^2} - \sqrt{\tau_{li_x}^2 + (\tau_{li_z} - \rho_0 g l_{0i})^2} \right] \quad (2.11)$$

Ces équations donnent les coordonnées du point P du câble i dans le repère \mathcal{R}_i en fonction de son abscisse curviligne s_i ($0 \leq s_i \leq l_{0i}$). Aux abscisses curvilignes $s_i = 0$ et $s_i = l_{0i}$, P est confondu avec une des extrémités du câble. Il faut noter que les paramètres ρ_0 , E et A_0 sont indépendants du câble i considéré, car nous supposons que les câbles du robot sont identiques.

2.3.3 Transmission des efforts et problèmes géométriques

Nous avons décrit dans la partie précédente le modèle de caténaire élastique d'un câble permettant de rendre compte de l'influence sur son profil de la masse propre du câble ainsi que de son élasticité. Toutefois, les équations (2.10) et (2.11) décrivent uniquement le profil d'un câble attaché à une extrémité sous l'effet d'une force appliquée à son autre extrémité. Il s'agit maintenant d'appliquer ce modèle à l'étude d'un robot à câble possédant m câbles attachés à un même solide, la plate-forme mobile du robot.

Le câble i évolue dans le plan vertical \mathcal{P}_i défini à la Fig. 2.2. Le repère \mathcal{R}_i ($A_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i$) est attaché à ce plan. Ce repère partage le vecteur \mathbf{z} avec le repère global \mathcal{R}_A du robot. Ainsi, en plus de la translation de O_A à A_i , le passage du repère \mathcal{R}_A au repère \mathcal{R}_i est obtenu par une rotation d'angle γ_i autour de l'axe \mathbf{z} tel que présenté à la Fig. 2.14. γ_i correspond à l'angle entre la projection du vecteur \mathbf{u}_i sur le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) et l'axe \mathbf{x} du repère \mathcal{R}_A :

$$\gamma_i = \arctan \left(\frac{u_{iy}}{u_{ix}} \right) \quad (2.12)$$

où u_{ix} et u_{iy} sont les coordonnées suivant x et y du vecteur \mathbf{u}_i dans le repère \mathcal{R}_A . Rappelons que \mathbf{u}_i correspond au vecteur $\overrightarrow{B_i A_i}$ (section 1.2.1).

La matrice de rotation \mathbf{Q}_i correspondante a la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} c\gamma_i & -s\gamma_i & 0 \\ s\gamma_i & c\gamma_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{q}_{i1} \quad \mathbf{q}_{i2} \quad \mathbf{q}_{i3}] \quad (2.13)$$

où $c\gamma_i$ et $s\gamma_i$ représentent respectivement les cosinus et sinus de l'angle γ_i .

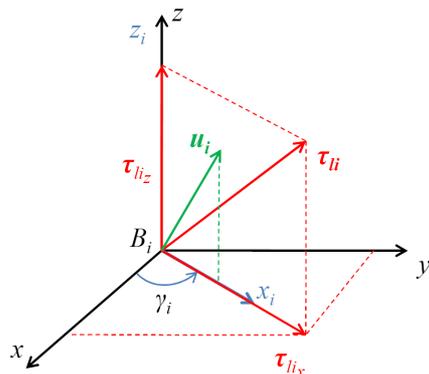


FIGURE 2.14 - Relations entre la base du repère fixe global et celle du repère attaché au câble i .

2.3.3.1 Problème géométrique inverse

Avec le modèle de caténaire élastique décrit aux équations (2.10) et (2.11), le problème géométrique inverse n'est plus aussi trivial que dans le cas où le câble est supposé sans masse. En fait, lorsqu'on utilise le modèle de caténaire élastique, les longueurs des câbles et les efforts appliqués à leurs extrémités sont liés et doivent donc être déterminés en même temps. La résolution du problème géométrique inverse revient donc à déterminer à la fois les longueurs non déformées l_{0i} des m câbles et les composantes τ_{li_x} et τ_{li_z} des forces τ_{li} appliquées aux câbles aux points B_i . Les inconnues du problème géométrique inverse pour un robot à m câbles et n DDL sont donc :

$$\left[\tau_{1_x} \quad \tau_{1_z} \quad l_{01} \quad \cdots \quad \tau_{m_x} \quad \tau_{m_z} \quad l_{0m} \right]_{1 \times 3m} \quad (2.14)$$

Les équations faisant intervenir ces inconnues sont tout d'abord les équations (2.10) et (2.11) décrivant le profil du câble i . En remplaçant dans ces équations s_i par la longueur l_{0i} du câble i , on obtient $x(l_{0i})$ et $z(l_{0i})$ qui correspondent aux coordonnées du point B_i dans le repère \mathcal{R}_i . Nous obtenons $2m$ équations non-linéaires :

$$x(l_{0i}) = \frac{\tau_{li_x} l_{0i}}{EA_0} + \frac{|\tau_{li_x}|}{\rho_0 g} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{li_z}}{\tau_{li_x}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{li_z} - \rho_0 g l_{0i}}{\tau_{li_x}} \right) \right] \quad (2.15)$$

$$z(l_{0i}) = \frac{\tau_{li_z} l_{0i}}{EA_0} - \frac{l_{0i}^2 \rho_0 g}{2EA_0} + \frac{1}{\rho_0 g} \left[\sqrt{\tau_{li_x}^2 + \tau_{li_z}^2} - \sqrt{\tau_{li_x}^2 + (\tau_{li_z} - \rho_0 g l_{0i})^2} \right] \quad (2.16)$$

Le vecteur $\overrightarrow{A_i B_i}$ exprimé dans le repère \mathcal{R}_i sera noté \mathbf{x}_i et a pour expression :

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} x(l_{0i}) \\ 0 \\ z(l_{0i}) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_i^{-1} (\mathbf{x}_{PF} + \mathbf{Q} \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \quad (2.17)$$

L'équilibre statique de la plate-forme donne n équations supplémentaires. En effet, le torseur d'efforts résultant de la force $-\tau_{li}$ exercée par le câble i sur la plate-forme a pour expression :

$$-\mathbf{w}_{fi} \begin{bmatrix} \tau_{li_x} & \tau_{li_z} \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{i_1} & \mathbf{q}_{i_3} \\ \mathbf{Q}\mathbf{b}_i \times \mathbf{q}_{i_1} & \mathbf{Q}\mathbf{b}_i \times \mathbf{q}_{i_3} \end{bmatrix}_{n \times 2} \begin{bmatrix} \tau_{li_x} \\ \tau_{li_z} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

où \mathbf{q}_{i_j} est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{Q}_i comme défini dans (2.13).

Ainsi l'équilibre statique de la plate-forme soumise à l'action de m câbles et d'un torseur d'efforts extérieur \mathbf{f}_e connu s'écrit :

$$-\mathbf{W}_f \mathbf{f} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

où :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \tau_{l1_x} & \tau_{l1_z} & \cdots & \tau_{lm_x} & \tau_{lm_z} \end{bmatrix}_{2m \times 1}^T \quad (2.20)$$

et :

$$\mathbf{W}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{f1} & \mathbf{w}_{f2} & \cdots & \mathbf{w}_{fm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Étant donné la pose de la plate-forme et le torseur \mathbf{f}_e , le problème géométrique inverse consiste donc à résoudre le système d'équations non-linéaires couplées suivant :

$$\begin{cases} -\mathbf{W}_f \mathbf{f} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{Q}_1^{-1} (\mathbf{x}_{PF} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_1 - \mathbf{a}_1) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m - \mathbf{Q}_m^{-1} (\mathbf{x}_{PF} + \mathbf{Q}\mathbf{b}_m - \mathbf{a}_m) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.21)$$

avec les inconnues de l'Eq. (2.14). Afin de résoudre ce problème nous avons utilisé dans cette thèse la fonction Matlab « fmincon ». Notons que contrairement à la résolution du problème géométrique inverse dans le cas d'un câble sans masse et sans élasticité, il peut y avoir plusieurs solutions, même lorsque le système est carré ($m = n$). Nous avons donc spécifié une fonction objectif qui minimise la somme des longueurs des câbles. De plus, seules les solutions présentant des valeurs positives des composantes τ_{li_x} de tous les câbles sont réalisables physiquement (câbles en traction). Il est également possible d'ajouter des contraintes sur les tensions maximales dans les câbles.

2.3.3.2 Problème géométrique direct

La résolution du problème géométrique direct est similaire à celle du problème géométrique inverse. En effet, les équations à disposition sont les mêmes, c'est-à-dire, celles de l'Eq. (2.19) de l'équilibre statique de la plate-forme et les Eqs. (2.15) et (2.16) décrivant les profils des câbles. Comme précédemment, la résolution du problème géométrique direct (détermination de la pose de la plate-forme) ne peut être découplée de la détermination des forces appliquées à l'extrémité de chaque câble par la plate-forme. Ainsi, le vecteur des inconnues d'un robot à m câbles et n DDL est le suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}^T & \cdots & \tau_{l1_x} & \tau_{l1_z} & \cdots & \tau_{lm_x} & \tau_{lm_z} \end{bmatrix}_{1 \times (n+2m)} \quad (2.22)$$

où \mathbf{p} est le vecteur colonne de dimension n décrivant la pose de la plate-forme (position et orientation).

Nous avons également utilisé la fonction Matlab « fmincon » afin de résoudre ce problème. Ce problème possède assurément plusieurs solutions bien que la fonction fmincon permet d'en obtenir qu'une seule.

2.3.4 Élasticité négligée

Le modèle de caténaire élastique peut également être utilisé en négligeant l'élasticité du câble. Dans les Eqs. (2.10) et (2.11), les termes où l'élasticité apparaît sont facilement identifiables. Ces termes sont ceux faisant intervenir le module d'Young E . En faisant tendre ce module d'Young vers l'infini, ces termes s'annulent. Les équations décrivant le profil d'un câble pesant non-élastique sont alors :

$$x_i(s) = \frac{|\tau_{i_x}|}{\rho_0 g} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{i_z} + \rho_0 g (s - l_{0i})}{\tau_{i_x}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{i_z} - \rho_0 g l_{0i}}{\tau_{i_x}} \right) \right] \quad (2.23)$$

$$z_i(s) = \frac{1}{\rho_0 g} \left[\sqrt{\tau_{i_x}^2 + (\tau_{i_z} + \rho_0 g (s - l_{0i}))^2} - \sqrt{\tau_{i_x}^2 + (\tau_{i_z} - \rho_0 g l_{0i})^2} \right] \quad (2.24)$$

Dans ce cas particulier, Kozak [67] a montré que la détermination des longueurs de câbles peut être partiellement découpée de celle des forces appliquées par la plate-forme sur les câbles. A partir de l'Eq. (2.23) en $s_i = l_{0i}$, on peut obtenir l'expression de l_{0i} en fonction des autres inconnues :

$$l_{0i} = \frac{-1}{\rho_0 g} \left[\tau_{i_x} \sinh \left(\sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{i_z}}{\tau_{i_x}} \right) - \frac{\rho_0 g B_{i_x}}{|\tau_{i_x}|} \right) - \tau_{i_z} \right] \quad (2.25)$$

Ainsi, en remplaçant cette expression de l_{0i} dans l'Eq. (2.24) avec $s_i = l_{0i}$, on obtient une équation pour chaque câble dans laquelle seuls les termes τ_{i_x} et τ_{i_z} interviennent. Pour résoudre le problème géométrique inverse, il s'agit tout d'abord de déterminer les forces τ_{i_x} et τ_{i_z} pour les m câbles à partir de ces équations et de celles de l'équilibre statique de la plate-forme. Une fois τ_{i_x} et τ_{i_z} déterminés, les longueurs l_{0i} sont calculées avec l'Eq. (2.25).

L'utilisation du modèle de caténaire non-élastique permet donc de découpler le calcul des efforts et des longueurs des câbles. Le découplage n'est que partiel étant donné que les longueurs ne peuvent pas être déterminées avant les forces.

2.3.5 Prise en compte d'une élasticité non-linéaire

Comme nous l'avons vu lors de l'étude des câbles à la section 2.2.2.3, l'utilisation d'un module d'Young constant pour rendre compte de l'élasticité d'un câble n'est pas forcément adéquate. Or, dans le modèle de caténaire élastique, l'élasticité du câble intervient par un module d'Young constant, et donc une élasticité linéaire.

Étant donné le couplage entre les tensions et les longueurs des câbles, il n'est pas aisé d'introduire une élasticité non-linéaire dans le problème géométrique inverse avec un câble pesant. Il faudrait effectivement remplacer dans l'Eq. (2.9) le module d'Young constant E par l'expression suivante :

$$E = \frac{\sigma_i(s_i)}{\varepsilon} = \frac{\sigma_i(s_i)}{P(\sigma_i(s_i))} \quad (2.26)$$

où $P(\sigma_i(s_i))$ est le polynôme identifié permettant de modéliser le comportement élastique non-linéaire du câble, tel que présenté à la section 2.2.2.3. Étant donné que la tension

varie le long du câble, la contrainte subit par la section du câble d'une abscisse curviligne s_i varie également. Le module d'élasticité équivalent est donc variable comme le montre l'expression de la contrainte en fonction de l'abscisse curviligne :

$$\sigma_i(s) = \frac{\tau_i(s)}{A_0} = \frac{\sqrt{\tau_{i_x}^2 + (\tau_{i_z} + \rho_0 g (s - l_{0i}))^2}}{A_0} \quad (2.27)$$

Le remplacement du module d'Young par l'expression de l'Eq. (2.26) rend l'intégration des Eq. (2.8) et (2.9) très complexe. Nous n'avons pas donc pas réussi à prendre en compte une élasticité non-linéaire dans le modèle de caténaire élastique.

2.4 Influence du modèle utilisé sur le comportement des robots à câbles suspendus

2.4.1 Description des deux robots étudiés

Afin d'évaluer l'influence du modèle de câble utilisé sur le comportement des robots à câbles, nous étudions dans cette partie deux robots de type suspendu possédant autant de câbles que de degrés de liberté ($n = m$). Nous n'étudions pas de robots possédant plus de câbles que de DDL de la plate-forme afin de s'affranchir du problème d'interprétation des résultats du au choix de la distribution des tensions dans les câbles. En effet, dans le cas des robots pleinement contraints, il existe une infinité de combinaisons de tensions permettant de réaliser l'équilibre statique de la plate-forme. Le profil d'un câble pesant étant fonction de la tension à laquelle est assujettie le câble, il existe une infinité de combinaisons de profils des m câbles.

Nous considérons un robot à câbles suspendu plan possédant 3 câbles permettant de contrôler les 3 degrés de liberté de la plate-forme, c'est-à-dire les 2 translations dans le plan et la rotation autour de l'axe normal au plan d'évolution du robot. Le deuxième robot étudié est un robot similaire au Robocrane [3] possédant 6 câbles et 6 DDL.

Les dimensions de ces robots ont été choisies assez grandes afin de mettre en exergue les effets de la masse des câbles sur l'équilibre statique. Pour chacun de ces deux robots, le câble a été choisi de façon à pouvoir supporter les tensions maximales sur l'ensemble de l'espace de travail du robot. La méthode de détermination des caractéristiques de ces câbles est détaillée à l'annexe B.

2.4.1.1 Robot à câbles suspendu plan à 3 câbles et 3 DDL

Le premier robot étudié ici évolue dans le plan (x, z) et possède 3 degrés de liberté. La plate-forme est actionnée par 3 câbles dont les points de sortie sont situés à une même altitude. La plate-forme est un segment de droite. Les coordonnées des points de sortie et des points d'attache sur la plate-forme sont données au Tab.2.6. La Fig. 2.15 présente le robot en question avec des câbles sans masse (Fig. 2.15(a)) et des câbles pesants (Fig. 2.15(b)).

La masse de la plate-forme à vide est de $30kg$ et atteint $300kg$ en pleine charge. Les études suivantes sont réalisées pour ces deux cas de charge.

L'espace de travail pour lequel est réalisée l'étude correspond à une partie de l'espace atteignable à orientation constante (horizontale). Pour le robot plan, l'espace de travail correspond au rectangle représenté à la Fig. 2.15(a)

TABLEAU 2.6 - Robot à 3 câbles et 3 DDL : coordonnées des points de sortie \mathbf{a}_i des câbles et des points d'attache \mathbf{b}_i des câbles sur la plate-forme dans le repère global et le repère attaché à la plate-forme, respectivement.

| | x (m) | z (m) | | x (m) | z (m) |
|----------------|-------|-------|----------------|-------|-------|
| \mathbf{a}_1 | 0 | 0 | \mathbf{b}_1 | -0.5 | 0 |
| \mathbf{a}_2 | 5 | 0 | \mathbf{b}_2 | 0.44 | 0 |
| \mathbf{a}_3 | 15 | 0 | \mathbf{b}_3 | 0.5 | 0 |

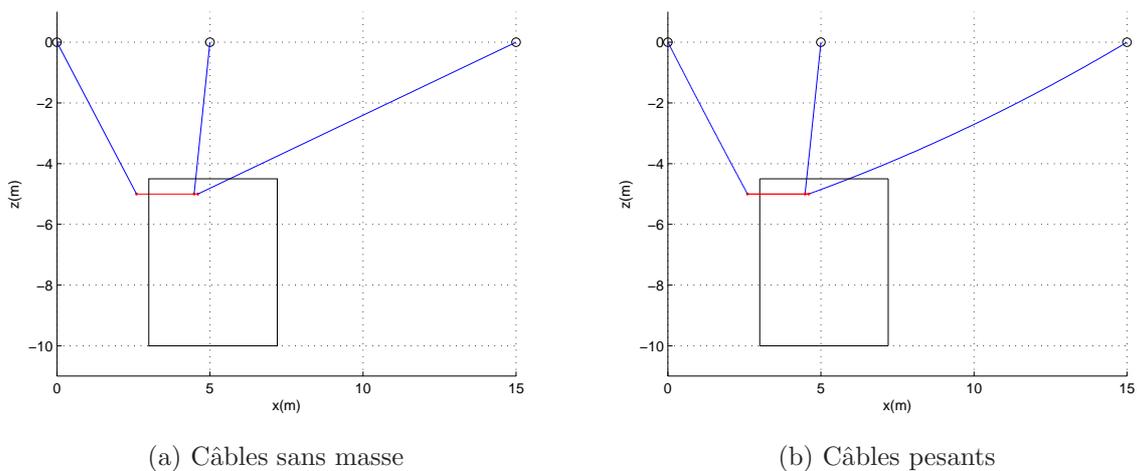


FIGURE 2.15 - Schémas du robot plan à 3 câbles et 3 DDL.

2.4.1.2 Robot à câbles suspendu à 6 câbles et 6 DDL

Le deuxième robot étudié est un robot spatial ayant 6 DDL contrôlés par 6 câbles. Comme le robot plan introduit précédemment, ce robot suspendu utilise la gravité afin de maintenir les câbles tendus. La géométrie de ce robot a été choisie similaire à celle du Robocrane du NIST [3]. Ainsi, les points de sortie des câbles forme un triangle équilatéral, 2 câbles sortant de chaque sommet du triangle. La plate-forme est également triangulaire. A orientation nulle, la plate-forme est horizontale. Les coordonnées des points de sortie et des points d'attache des câbles sur la plate-forme sont données au Tab. 2.7. La Fig. 2.16 présente un schéma du robot avec des câbles pesants.

La masse de la plate-forme à vide est de $30kg$, et atteint $500kg$ en pleine charge. Les études suivantes sont réalisées pour ces deux cas de charge.

Comme pour le robot plan, nous avons défini une zone d'étude. Étant donné la forme cylindrique de l'espace de travail statique à orientation nulle d'un robot de type Robocrane, nous avons choisi un cylindre de rayon $2,5m$ centré dans le triangle formé par les points de sortie ($x = 0, y = 0$). Les bases inférieure et supérieure sont situées respectivement à des altitudes de $0m$ et $5m$.

2.4.1.3 Détermination des câbles utilisés

Contrairement aux cas où la masse des câbles est négligée, quand celle-ci est prise en compte, la tension n'est plus constante tout au long du câble, tel que présenté à l'Eq. (2.8).

TABLEAU 2.7 - Robot à 6 câbles et 6 DDL : coordonnées des points de sortie des câbles et des points d'attache des câbles sur la plate-forme dans le repère global et le repère attaché à la plate-forme, respectivement.

| | x (m) | y (m) | z (m) | | x (m) | y (m) | z (m) |
|----------------|--------|-------|-------|----------------|--------|-------|-------|
| \mathbf{a}_1 | -6,982 | -4 | 8 | \mathbf{b}_1 | -0,693 | 0,4 | 0 |
| \mathbf{a}_2 | -6,982 | -4 | 8 | \mathbf{b}_2 | 0 | -0,8 | 0 |
| \mathbf{a}_3 | 6,982 | -4 | 8 | \mathbf{b}_3 | 0 | -0,8 | 0 |
| \mathbf{a}_4 | 6,982 | -4 | 8 | \mathbf{b}_4 | 0,693 | 0,4 | 0 |
| \mathbf{a}_5 | 0 | 8 | 8 | \mathbf{b}_5 | 0,693 | 0,4 | 0 |
| \mathbf{a}_6 | 0 | 8 | 8 | \mathbf{b}_6 | -0,693 | 0,4 | 0 |

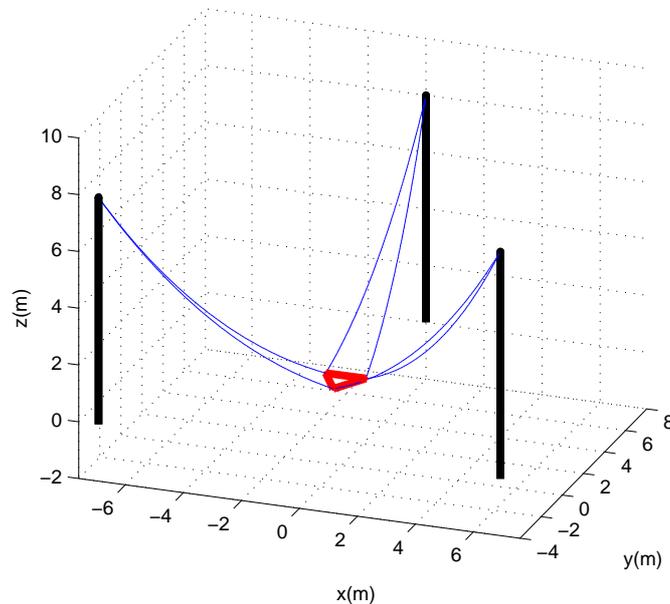


FIGURE 2.16 - Schéma du robot à 6 câbles et 6 DDL avec des câbles pesants.

Cette tension est maximale au point le plus haut du câble, car à cet endroit précis, il doit supporter la tension due à la force appliquée par la plate-forme et le propre poids de sa longueur déroulée. La considération de la masse de câble déroulé influence donc la tension maximale dans le câble, et a donc une importance dans le choix des caractéristiques du câble.

En effet, si l'on augmente la section du câble afin qu'il supporte la tension maximale, la masse linéique du câble augmente, impliquant un accroissement des tensions maximales, et ainsi de suite. Il n'est donc pas trivial de déterminer le câble adéquat pour une configuration, un espace de travail et une charge à transporter donnés.

Afin de déterminer le diamètre du câble, nous avons utilisé une méthode d'optimisation. Elle se base sur la résolution numérique de l'équilibre statique de la plate-forme. Dans le problème décrit à la section 2.3.3.1, il suffit d'ajouter la masse linéique du câble (directement dépendant du diamètre pour une masse volumique donnée) comme inconnue

2.4. Influence du modèle utilisé sur le comportement des robots à câbles suspendus

du problème et d'ajouter une inégalité par câble. Cette dernière correspond à la tension maximale calculée en fonction de la section du câble :

$$\tau_{i_{max}} \leq \frac{\sigma_{max}}{A_0} \quad (2.28)$$

Ainsi pour une configuration du robot et une pose donnée de sa plate-forme, nous déterminons le diamètre du câble permettant de supporter la tension due à la charge transportée par la plate-forme et au poids propre du câble. En appliquant cette méthode sur l'ensemble de l'espace de travail discrétisé, le plus grand diamètre obtenu permettra aux câbles de résister aux tensions apparaissant au travers de l'espace de travail. Cette méthode est décrite en détail à l'annexe B.

Appliquée aux deux robots présentés auparavant, les diamètres de câbles obtenus sont respectivement de $5,78mm$ et $9,63mm$ pour le robot plan et le robot à 6 DDL. Les résultats obtenus au travers de l'espace de travail sont présentés aux Fig. 2.17(a) et 2.17(b).

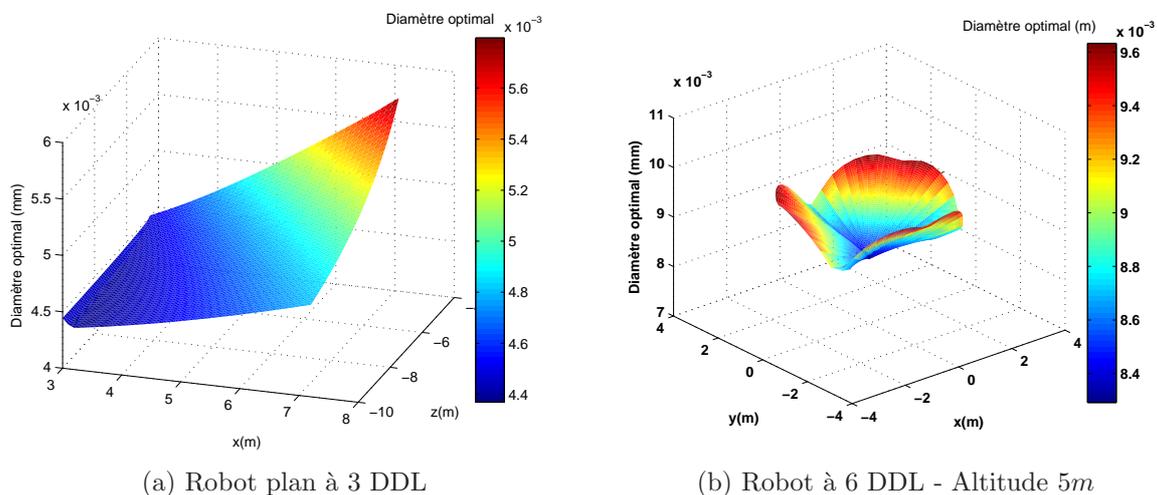


FIGURE 2.17 - Résultats de la procédure de détermination du diamètre de câble adéquat pour les deux robots utilisés en exemple et pour une orientation nulle de leur plate-forme.

Les câbles choisis pour les deux robots devant correspondre à des câbles existant chez les constructeurs, les résultats ont été arrondis aux valeurs immédiatement supérieures de diamètres disponibles. Les caractéristiques de ces câbles sont données aux Tab.2.8 et 2.9.

TABLEAU 2.8 - Caractéristiques du câble considéré pour le robot plan.

| | Description | Valeur |
|--------------|-------------------------|-------------|
| ρ_0 | Masse linéique du câble | $0,123kg/m$ |
| E | Module d'Young | $38GPa$ |
| Φ_{ext} | Diamètre extérieur | $6mm$ |

TABLEAU 2.9 - *Caractéristiques du câble considéré pour le robot à 6 câbles et 6 DDL.*

| | Description | Value |
|--------------|-------------------------|-----------|
| ρ_0 | Masse linéique du câble | 0,343kg/m |
| E | Module d'Young | 38GPa |
| Φ_{ext} | Diamètre extérieur | 10mm |

2.4.2 Méthodes de comparaison

Afin de pouvoir comparer le modèle de caténaire élastique au modèle de câble sans masse ni élasticité en termes de longueur de câble, de tension et de pose atteinte, nous avons discrétisé l'espace de travail des robots de la section 2.4.1. Notons que l'étude qui suit a été faite pour une orientation constante et nulle de la plate-forme.

2.4.2.1 Longueurs des câbles et tensions maximales

Pour chaque pose de la discrétisation, le problème géométrique inverse et l'équilibre statique de la plate-forme sont résolus pour le modèle de câble sans masse non-élastique, ainsi que pour le modèle de caténaire élastique. Il est alors possible de comparer les longueurs de câbles obtenues dans les deux cas ainsi que les tensions dans les câbles. La différence entre les deux modèles considérés est mesurée par le calcul de l'erreur relative sur le paramètre étudié. Cette erreur relative correspond à la variation du paramètre (longueur ou tension maximale) entre les deux modèles divisée par la valeur obtenue avec le modèle de câble sans masse et sans élasticité. Pour chaque câble, cette erreur est calculée et la valeur maximale obtenue pour les m câbles dans la pose étudiée est la valeur retenue.

L'erreur relative maximale $\varepsilon_{l_{max}}$ sur les longueurs des câbles pour la pose \mathbf{p} considérée s'écrit :

$$\varepsilon_{l_{max}}(\mathbf{p}) = \max_{i=1..m} \left(\frac{l_{0i} - L_i}{L_i} \right) \quad (2.29)$$

où l_{0i} est la longueur non-déformée du câble i obtenue avec le modèle de caténaire élastique et L_i la longueur du câble i obtenue avec le modèle de câble sans masse et sans élasticité.

Comme nous l'avons vu dans la description du modèle de caténaire élastique (section 2.3) et contrairement au cas où la masse est négligée, la tension n'est pas constante tout au long du câble tel que décrit à l'Eq.(2.8). D'après cette équation, la tension maximale apparaît au point le plus haut du câble, lieu où le câble doit supporter en plus de la charge transportée, la totalité de son propre poids. Pour la comparaison de modèles effectuée ici, nous utilisons la tension τ_{0i} en ce point (A_i pour les robots de type suspendu) comme tension maximale comparée à la tension obtenue pour des câbles non-pesants. L'erreur relative maximale s'écrit donc :

$$\varepsilon_{\tau_{max}}(\mathbf{p}) = \max_{i=1..m} \left(\frac{\tau_{0i} - \tau_i}{\tau_i} \right) \quad (2.30)$$

où τ_i est la tension obtenue avec le modèle de câble sans masse et sans élasticité.

2.4.2.2 Positionnement de la plate-forme

Il s'agit ici de savoir, pour des longueurs des câbles commandées, où se situe la plate-forme. A cette fin, la méthode de comparaison utilisée (Fig. 2.18) consiste, pour chaque pose de l'espace de travail discrétisé, à calculer les longueurs de câbles en considérant des câbles sans masse et non-élastiques, et ensuite à utiliser ces longueurs comme données du problème géométrique direct avec le modèle de caténaire élastique.

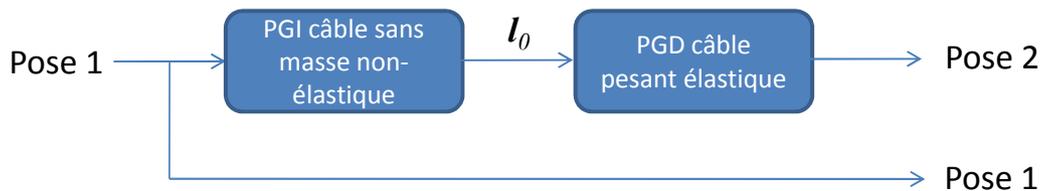


FIGURE 2.18 - Méthode de comparaison des poses atteintes pour les mêmes longueurs de câbles commandées, mais avec le modèle de câble non-élastique sans masse (Pose 1), et avec le modèle de caténaire élastique (Pose 2).

Notons que dans cette méthode de comparaison, il peut y avoir plusieurs solutions au problème géométrique direct. Nous avons décidé de considérer uniquement la solution donnée par la fonction de résolution numérique utilisée (« fmincon » dans Matlab) avec comme critère d'optimisation la minimisation de la variation de la position du point O_B (en norme) par rapport au modèle de câble sans masse et sans élasticité.

L'erreur considérée dans la section 2.4.5 correspond à la distance entre les deux positions du point référence de la plate-forme O_B obtenues pour les deux modèles de câble (pose 1 et pose 2 de la Fig. 2.18).

2.4.3 Résultats de comparaison pour les tensions des câbles

2.4.3.1 Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL

La Fig. 2.19 présente les erreurs relatives maximales obtenues. L'erreur relative maximale sur les tensions dépasse 10% pour la charge maximale considérée. Dans le cas de la plate-forme à vide (retour à vide après dépôt de la charge), la tension est fortement affectée par la prise en compte de la masse des câbles. On constate une augmentation de plus de 100% avec le modèle de câble pesant élastique. Cette erreur n'est pas admissible, notamment lorsque la commande du robot utilise une boucle en effort.

2.4.3.2 Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL

Les mêmes observations que pour le robot plan peuvent être faites dans le cas du robot à 6 câbles et 6 DDL, pour lequel les erreurs relatives maximales sur les tensions maximales atteignent 140% (Fig. 2.20(a)) aux limites de l'espace de travail. Ces erreurs ne descendent pas au dessous de 70% au centre de l'espace de travail lorsque la plate-forme est à vide. Même à une altitude élevée où les tensions sont plus importantes, et donc où la déflexion des câbles est plus faible, l'erreur reste importante (40% à la Fig. 2.20(c)).

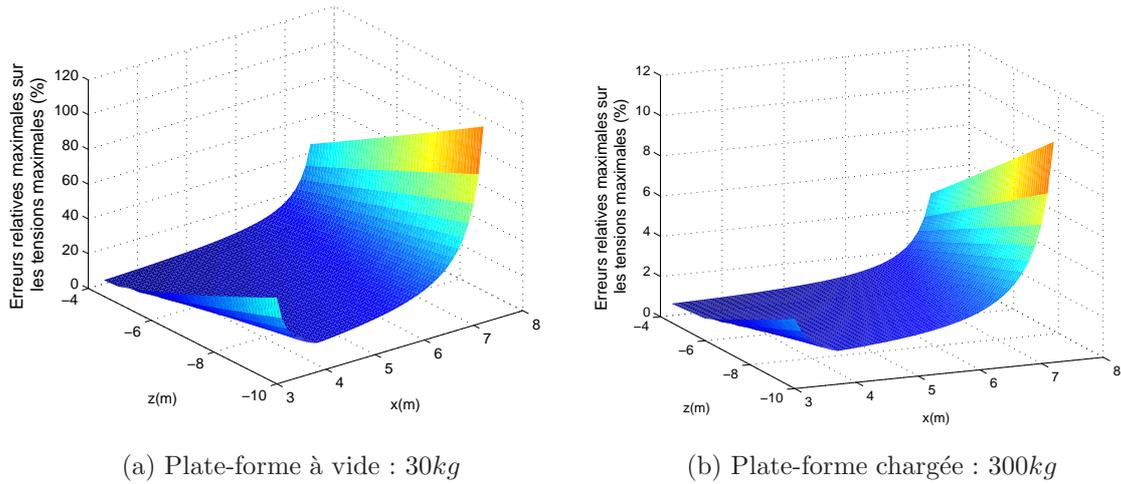


FIGURE 2.19 - Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL, entre le modèle de caténaire élastique et le modèle de câble sans masse non-élastique.

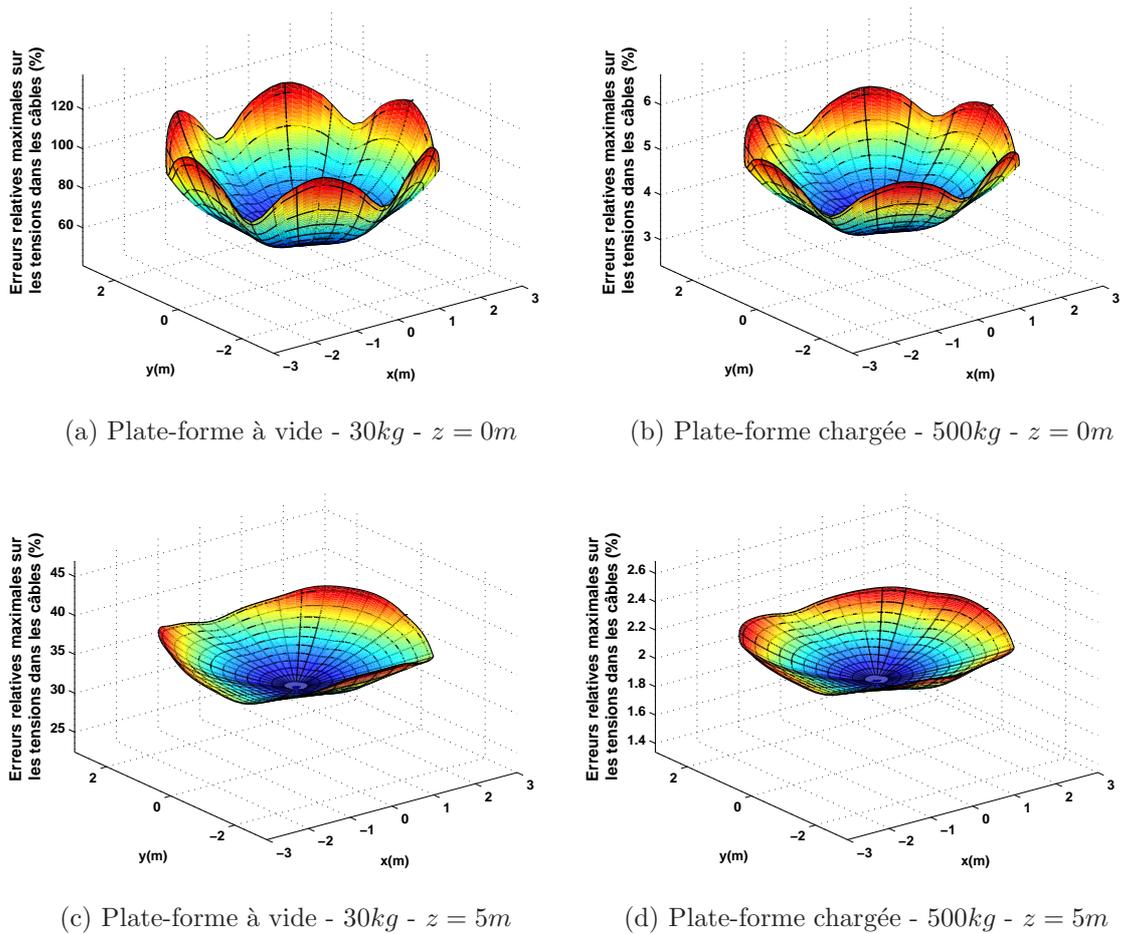


FIGURE 2.20 - Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour le robot à 6 câbles et 6 DDL, entre le modèle de caténaire élastique et le modèle de câble sans masse non-élastique.

2.4.4 Résultats de comparaison pour les longueurs des câbles

2.4.4.1 Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL

En ce qui concerne les longueurs des câbles, la Fig. 2.21 montre que l'erreur relative maximale atteint 4% dans le cas où la plate-forme est à vide. On remarque aussi que l'influence de la masse des câbles est très faible avec la charge maximale (câbles plus tendus). En effet, les erreurs calculées sont négatives. Cela signifie que la longueur du câble l_{0i} est plus faible que la longueur de la corde L_i . Cette différence négative de longueur est due à l'allongement élastique du câble. Les tensions dans les câbles sont plus importantes avec la charge maximale, et donc le profil de chaque câble est proche de celui de la corde (segment de droite $A_i B_i$).

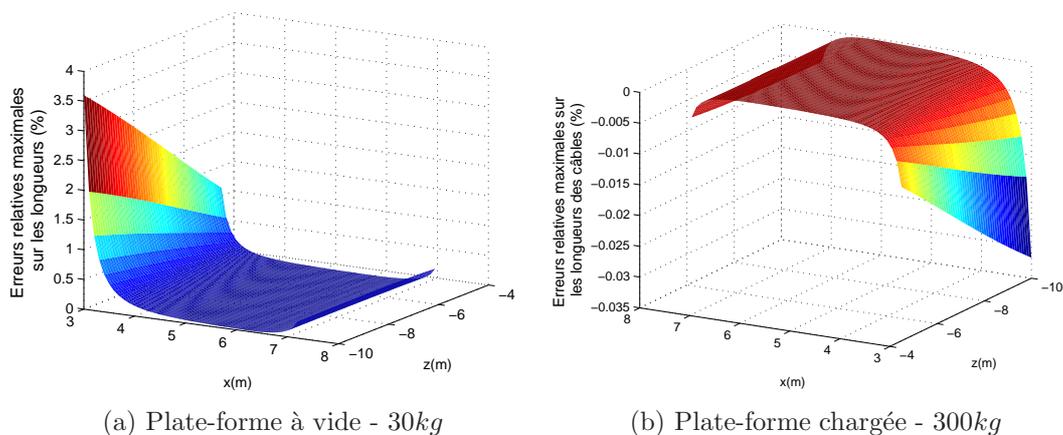


FIGURE 2.21 - Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de caténaire élastique pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL.

2.4.4.2 Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL

Pour l'exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL, les mêmes observations quant à l'effet du modèle de caténaire élastique peuvent être faites. Les erreurs maximales (6%) sont obtenues pour les tensions les plus faibles, c'est-à-dire pour la plate-forme à vide, pour une altitude faible (Fig. 2.22(a)) et aux limites de l'espace de travail. A une altitude de 5m, soit 3m sous les points de sortie des câbles, l'erreur relative maximale n'est plus que de 1,4% (Fig. 2.22(c)). En effet, les tensions sont alors plus importantes, et la déflexion du câble plus faible.

2.4.5 Résultats de comparaison pour le positionnement de l'organe terminal

2.4.5.1 Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL

Comme dans les sections 2.4.4 et 2.4.3, la pose est plus influencée par la masse des câbles lorsque la charge transportée est faible. On peut ainsi voir à la Fig. 2.23 que l'erreur de positionnement est maximale pour une charge de 30kg avec une valeur de 230mm alors qu'elle n'est que de 60mm pour la charge maximale de 500kg.

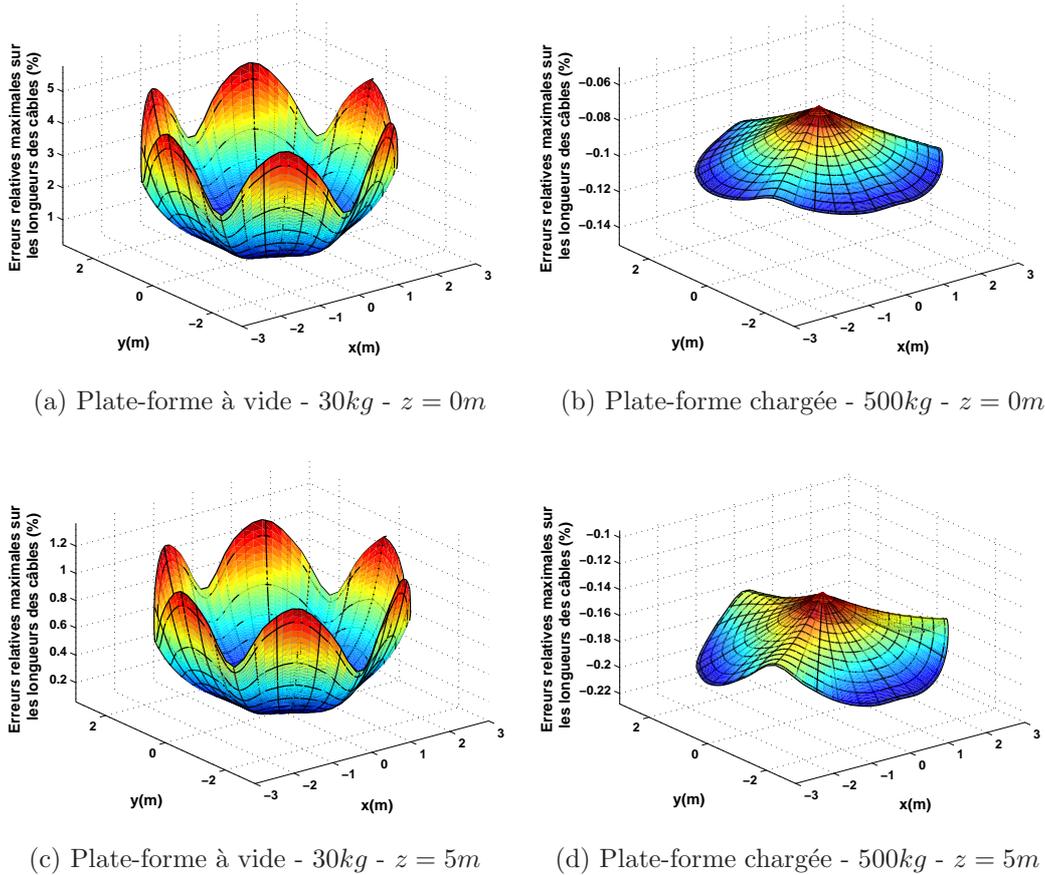


FIGURE 2.22 - Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de caténaire élastique pour le robot à 6 câbles et 6 DDL.

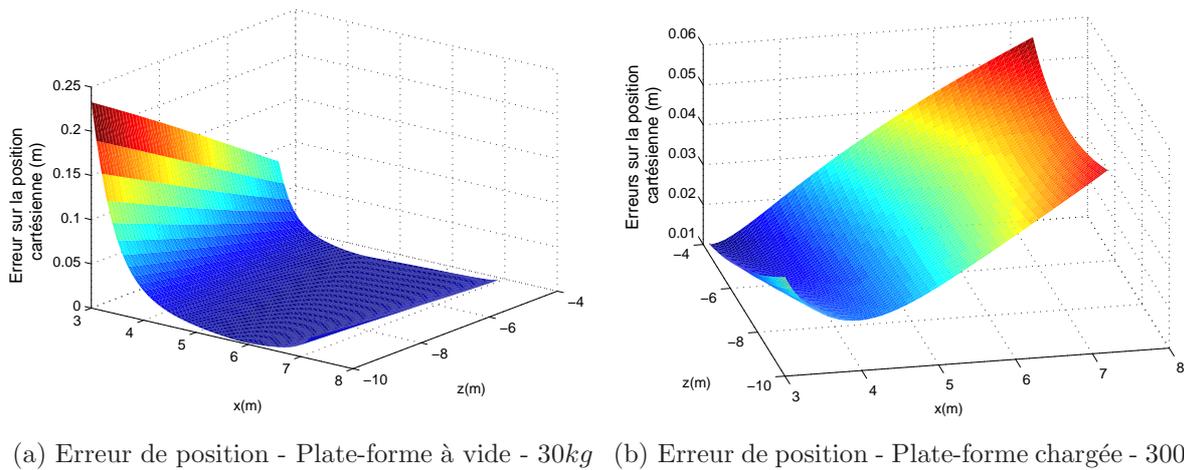
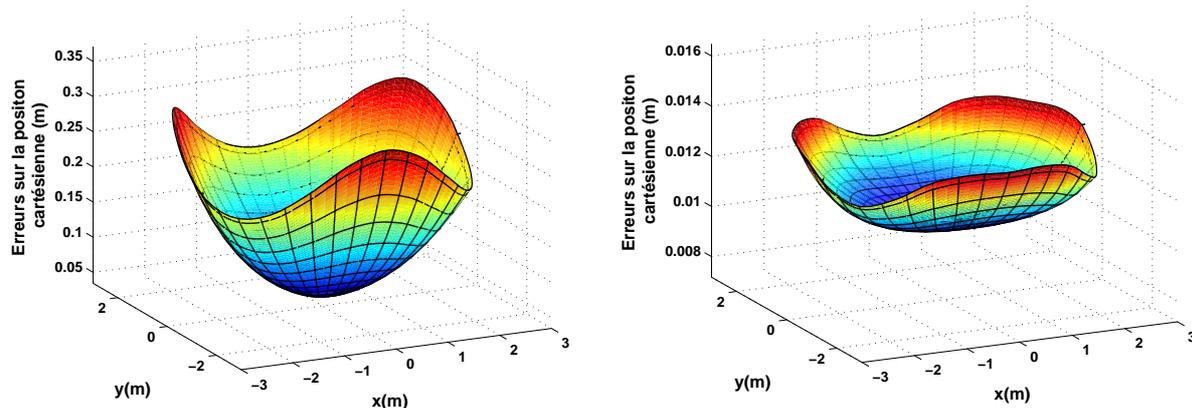


FIGURE 2.23 - Erreurs sur la position de la plate-forme entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de caténaire élastique pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL.

2.4.5.2 Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL

La même étude a été réalisée dans le cas du robot du type Robocrane à 6 câbles et 6 DDL. A la Fig. 2.24, l'erreur est plus importante lorsque les tensions dans les câbles sont les plus faibles. Pour ce robot, l'erreur maximale de positionnement du point de référence O_B de la plate-forme est supérieure à $300mm$. Dans de nombreuses applications, de telles erreurs seront probablement problématiques.



(a) Erreur de position - Plate-forme à vide - $30kg$ - $z = 0m$
 (b) Erreur de position - Plate-forme chargée - $500kg$ - $z = 0m$

FIGURE 2.24 - Erreurs sur la position de la plate-forme entre le modèle de câble sans masse non-élastique et le modèle de câble pesant élastique pour le robot plan à 6 câbles et 6 DDL.

2.4.6 Conclusions sur les effets des modèles de câble

L'étude présentée dans cette partie montre qu'il est nécessaire de prendre en compte l'élasticité des câbles lorsque les câbles se trouvent soumis à de fortes tensions. Cette situation se produit dans le cas où la plate-forme transporte la charge maximale, et sur la partie supérieure de l'espace de travail où les câbles tendent à être horizontaux. La masse des câbles, quant à elle, a une influence importante sur le comportement des robots à câbles lorsque les tensions sont faibles. De faibles tensions apparaissent dans les câbles quand la plate-forme est à vide, et aux limites de l'espace de travail. La tension dans les câbles semble être le paramètre le plus affecté par la prise en compte de la masse des câbles. Les résultats obtenus pour les deux exemples considérés ici prouvent que le modèle de câble pesant est indispensable afin d'obtenir une estimation correcte des tensions de robots parallèles à câbles de grandes dimensions. De plus, la différence de tensions résultant de la prise en compte de la masse propre des câbles a assurément un impact important sur la phase de dimensionnement des actionneurs et de la structure soutenant le robot.

2.5 Espace de travail statique d'un robot de grande dimension

L'espace de travail statique ω_S d'un robot à câbles est défini comme l'ensemble des poses \mathbf{p} de la plate-forme mobile pour lesquelles il est possible d'équilibrer le poids de

la plate-forme avec des tensions dans les câbles situées dans un intervalle de tensions admissibles $[\tau_{min}, \tau_{max}]$:

$$\omega_s = \{\mathbf{p} \mid \exists \boldsymbol{\tau} \in [\boldsymbol{\tau}_{min}, \boldsymbol{\tau}_{max}], \mathbf{W}(\mathbf{p})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (2.31)$$

Lorsqu'on considère la masse propre des câbles dans le modèle de câble utilisé, la tension le long du câble n'est pas constante. Par comparaison au cas d'un modèle de câble sans masse, il n'est donc pas aussi simple de vérifier les conditions d'inclusion d'une pose dans l'espace de travail statique.

2.5.1 Détermination des tensions minimales et maximales dans les câbles

Dans un premier temps, il est nécessaire de déterminer les tensions minimales et maximales dans chaque câble afin de pouvoir valider l'appartenance de la pose considérée à l'espace de travail statique. Il faut distinguer deux cas correspondant au signe de la composante verticale τ_{li_z} de la force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ appliquée par la plate-forme à l'extrémité B_i du câble (Fig. 2.13).

- Cas 1, $\tau_{li_z} < 0$: d'après l'Eq.(2.8), la tension maximale dans le câble correspond à l'abscisse curviligne $s_i = 0$, et est égale à la norme de la force $\boldsymbol{\tau}_{0i}$ montrée à la Fig. 2.13. Ce point de tension maximale correspond ici au point A_i . Étant donné que la composante verticale τ_{li_z} est négative, l'Eq. (2.8) implique également que le point de tension minimale correspond au point le plus bas du câble et se trouve donc confondu avec le point B_i ayant pour abscisse curviligne $s_i = l_{0i}$. La valeur de la tension minimale est donc égale à la norme de la force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ montrée à la Fig. 2.13. Un exemple d'évolution de la tension le long du câble pour $\tau_{li_z} < 0$ est présenté à la Fig. 2.25(a). Les valeurs minimale et maximale de tension sont données par les équations suivantes :

$$\tau_{imax} = \tau_{0i} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + (\tau_{li_z} - \rho_0 g l_{0i})^2} \quad (2.32)$$

$$\tau_{imin} = \tau_{li} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \tau_{li_z}^2}. \quad (2.33)$$

- Cas 2, $\tau_{li_z} > 0$: dans ce deuxième cas, le signe de τ_{li_z} (composante verticale de la force $\boldsymbol{\tau}_{li}$ appliquée par la plate-forme sur le câble au point B_i) indique que le câble exerce, sur la plate-forme au point B_i , une force dirigée vers le bas ($-\boldsymbol{\tau}_{li}$), bien que le point A_i soit situé au dessus de la plate-forme. Une illustration de ce type de profil de câble et de tension est présentée à la Fig. 2.25(b). Dans cette situation, le point de tension maximale est toujours situé au point A_i , la valeur de cette tension reste donc inchangée c'est-à-dire celle donnée à l'Eq. (2.32). Le point de tension minimale est toujours le point le plus bas du câble. Toutefois, ici, il ne coïncide plus avec le point B_i . L'abscisse curviligne du point le plus bas du câble peut être déterminée en dérivant l'expression de la tension $\tau_i(s_i)$ (Eq. (2.8)) par rapport à la variable s_i :

$$\frac{d\tau(s_i)}{ds_i} = \frac{\rho_0 g (\tau_{li_z} + \rho_0 g s_i - \rho_0 g l_{0i})}{\sqrt{\tau_{li_x}^2 + (\tau_{li_z} + \rho_0 g (s_i - l_{0i}))^2}}. \quad (2.34)$$

L'expression de s_i obtenue pour une dérivée nulle de la tension est :

$$s_i = \frac{\rho_0 g l_{0i} - \tau_{li_z}}{\rho_0 g}. \quad (2.35)$$

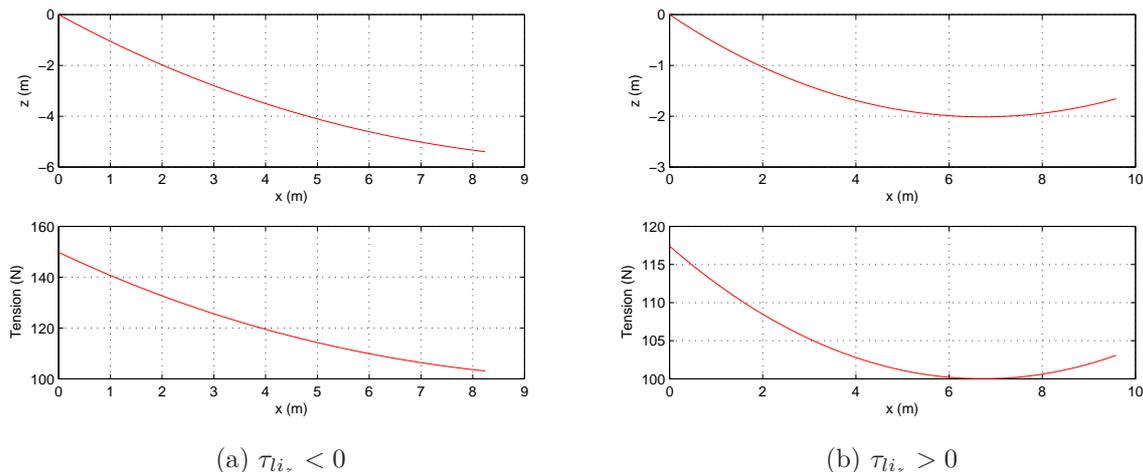


FIGURE 2.25 - Profil d'un câble et évolution de sa tension.

En ce point, la tangente au câble est horizontale, la composante verticale de la tension est nulle et la tension minimale vaut :

$$\tau_{imin} = \tau_{i_x}. \quad (2.36)$$

2.5.2 Phénomène de câble pendant

Lorsque la composante τ_{i_z} d'un câble est positive, le câble exerce une force dirigée vers le bas sur la plate-forme. Nous appellerons ces câbles « câbles pendants ». Illustrons cette situation avec l'exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL présenté à la section 2.4.1.1. Nous avons étudié le comportement de ce robot sur un segment de droite horizontale discrétisé allant de la pose $\mathbf{p}_{init} = [4, -5, 0]^T$ à la pose $\mathbf{p}_{fin} = [10, -5, 0]^T$, où $\mathbf{p} = [x, y, \phi]$, ϕ étant l'angle donnant l'orientation de la plate-forme. Le long de ce segment, tous les 10cm, les tensions et longueurs des câbles sont calculées avec le modèle de câble sans masse non-élastique, et avec le modèle de caténaire élastique. Les résultats sont présentés à la Fig. 2.26. Les trois premières courbes présentent les tensions minimales des 3 câbles pour les 2 modèles de câbles considérés, tandis que la quatrième courbe présente l'évolution de la composante verticale $\tau_{l_{2z}}$ de la force τ_{l_2} appliquée par la plate-forme sur le câble 2.

2.5.2.1 Câbles sans masse non-élastiques

La Fig. 2.26 montre que la tension du câble 2 devient négative au delà de $x = 7,5m$. Appelons la pose correspondante \mathbf{p}_{lim} . Sur le segment $[\mathbf{p}_{init}, \mathbf{p}_{lim}]$ toutes les tensions sont positives, ces poses appartiennent donc à l'espace de travail statique du robot (pour un τ_{max} suffisamment grand). Par contre, sur le segment $[\mathbf{p}_{lim}, \mathbf{p}_{fin}]$ la tension minimale du câble 2 est négative, ces poses ne font donc pas partie de l'espace de travail statique, le câble 2 devant pousser sur la plate-forme pour la maintenir en équilibre.

2.5.2.2 Caténares élastiques

La Fig. 2.26 montre que sur le segment $[\mathbf{p}_{init}, \mathbf{p}_{lim}]$, la composante $\tau_{l_{2z}}$ de la force appliquée à l'extrémité du câble 2 est négative, le câble exerce donc une force orientée

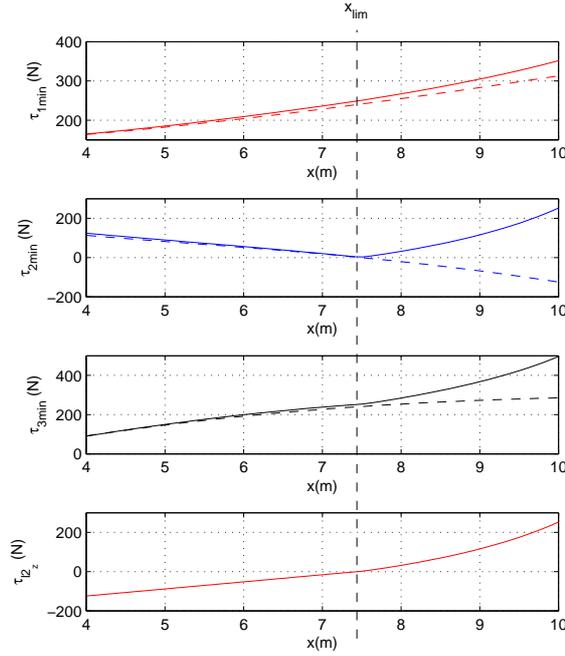


FIGURE 2.26 - Tensions minimales le long du segment de droite étudié pour le modèle de câble sans masse (pointillés) et le modèle de câble pesant élastique (trait plein).

vers le haut sur la plate-forme. Sur ce segment, les tensions minimales des câbles ne sont que légèrement supérieures à celles obtenues avec le modèle de câble sans masse.

On peut cependant remarquer qu'à partir de \mathbf{p}_{lim} , c'est-à-dire sur le segment $[\mathbf{p}_{lim}, \mathbf{p}_{fin}]$ où la tension du câble 2 devient négative pour le modèle de câble sans masse, la composante τ_{l2z} change de signe et devient positive. A partir de cette pose et tout au long du segment $[\mathbf{p}_{lim}, \mathbf{p}_{fin}]$, le câble 2 pend sous la plate-forme tel que montré à la Fig. 2.25(b). Il exerce ainsi une force dirigée vers le bas sur la plate-forme. Cette force permet de réaliser l'équilibre statique de la plate-forme dans ces poses.

Notons qu'à partir de \mathbf{p}_{lim} , les tensions minimales dans les câbles 1 et 3 augmentent rapidement. En effet, les câbles doivent supporter une charge supplémentaire due à la masse du câble 2 pendant sous la plate-forme.

Le câble 2 doit quant à lui pendre de plus en plus bas afin d'augmenter la force qu'il exerce sur la plate-forme. En effet, dans le cas des câbles pendants, la composante τ_{li_z} est uniquement due à la masse du câble pendant entre le point B_i et le point le plus bas du câble. La Fig. 2.27 montre ainsi qu'à partir de \mathbf{p}_{lim} la longueur déroulée du câble 2 augmente rapidement, et que l'altitude minimale de ce câble diminue rapidement. Cette altitude minimale peut être déterminée en remplaçant dans l'Eq. (2.11) la valeur de l'abscisse curviligne s_i par la valeur correspondant à la tension minimale de l'Eq. (2.35).

La figure 2.27 montre donc qu'afin de pouvoir réaliser l'équilibre statique de la plate-forme sur le segment $[\mathbf{p}_{lim}, \mathbf{p}_{fin}]$, le câble 2 doit exercer un effort vers le bas de plus en plus important. Il est donc nécessaire que ce câble pende de plus en plus.

Cet exemple montre que de nouvelles limites doivent être introduites dans la définition de l'espace de travail statique des robots à câbles suspendus lorsque la masse des câbles n'est pas négligeable.

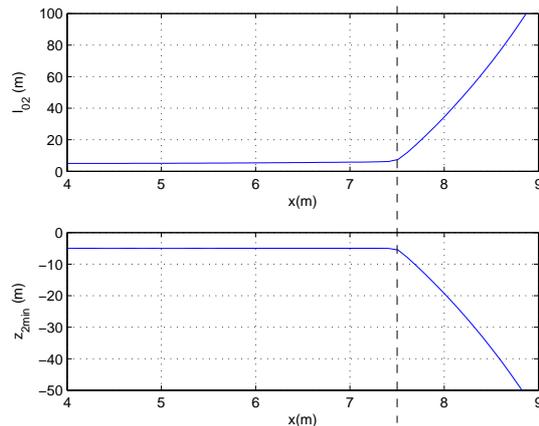


FIGURE 2.27 - Longueur et altitude minimales du câble le long du segment de droite étudié.

2.5.3 Nouvelle définition de l'espace de travail statique

2.5.3.1 Limites de tensions

La tension maximale de chaque câble, donnée par l'Eq. (2.32), doit être inférieure à la limite de tension admissible τ_{max} . De la même manière, si une tension minimale est donnée, la tension minimale de chaque câble doit lui être supérieure.

2.5.3.2 Altitude minimale des câbles

Tel qu'illustré par l'exemple précédent, dans certaines poses, un ou plusieurs câbles peuvent pendre sous la plate-forme afin de pouvoir réaliser l'équilibre statique. Il paraît donc important de fixer une limite à cette altitude minimale, afin, par exemple, d'éviter le contact avec des obstacles dans la zone de travail ou avec le sol. Cette limite z_{min} peut être de deux types :

- Absolue : une altitude minimale fixe dans le repère global.
- Relative : une altitude minimale exprimée par rapport à l'altitude de la plate-forme.

2.5.3.3 Longueur maximale de câble

Étant donné que dans certains cas un câble peut pendre fortement sous la plate-forme, entraînant le déroulement de longueurs importantes de câble, une limite de longueur déroulée maximale l_{max} doit être introduite. Cette limite correspond simplement à la longueur maximale qu'il est possible d'enrouler sur le tambour actionné.

2.5.3.4 Nouvelle définition

A partir des limites qui viennent d'être introduites, une nouvelle définition de l'espace de travail statique peut être donnée pour les robots à câbles suspendus pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable :

$$\omega_S = \{ \mathbf{p} \mid \exists \mathbf{f} \text{ t.q. } -\mathbf{W}_f \mathbf{f} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \text{ et } \forall i \in [1; m], \quad (2.37)$$

$$l_{0i} \leq l_{max}, z_{imin} \geq z_{min}, \tau_{imax} \leq \tau_{max}, \tau_{imin} \geq \tau_{min} \}$$

où m correspond au nombre de câbles, et où l'équation $-\mathbf{W}_f \mathbf{f} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}$ est donnée à la section 2.19.

2.5.4 Exemple d'illustration

Une comparaison entre les espaces de travail statiques obtenus pour les définitions des Eqs. (2.31) et (2.37) a été réalisée dans le cas du robot plan à 3 câbles et 3 DDL. Les limites utilisées correspondant à la nouvelle définition sont présentées dans le Tab.2.10. Notons que z_{min} correspond ici à une limite d'altitude absolue.

TABLEAU 2.10 - Description des limites utilisées dans la définition de l'espace de travail statique

| | min | max | Pas de la discrétisation |
|-----------------------|-----------|----------|--------------------------|
| $x(m)$ | 1 | 14 | 0.2 |
| $z(m)$ | -10 | -1 | 0.2 |
| $\theta(rad)$ | $-\pi/12$ | $\pi/12$ | $\pi/24$ |
| $\tau(N)$ | 0 | 2500 | |
| altitude minimale (m) | -10 | | |

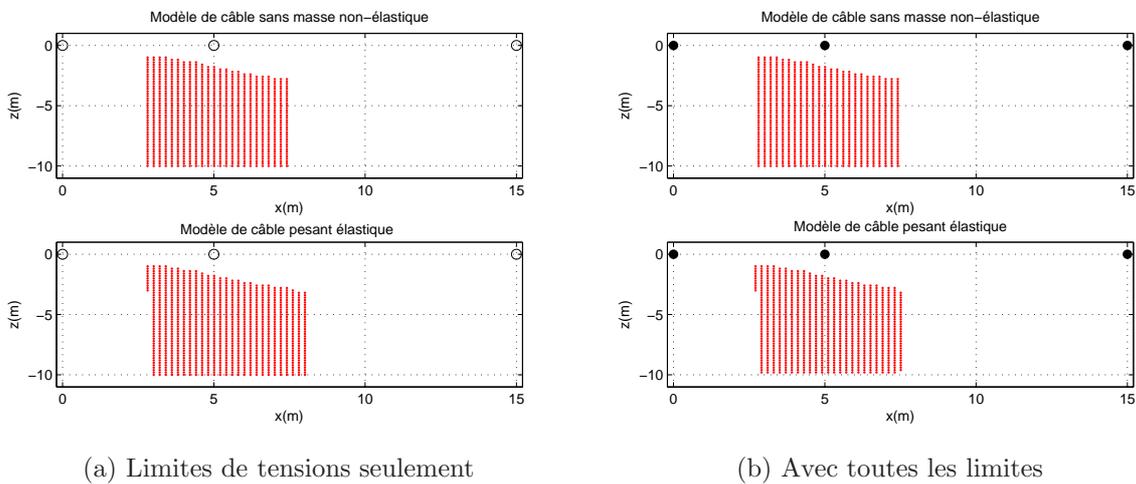


FIGURE 2.28 - Ensemble des poses de l'espace de travail statique du robot plan à 3 câbles et 3 DDL pour les deux modèles de câbles et les deux définitions d'espace de travail statique.

En accord avec la section 2.5.2, la Fig. 2.28(a) montre que lorsque la masse propre des câbles est prise en compte (Eq. (2.37)), certaines poses, inatteignables avec le modèle de câbles sans masse, se trouvent être incluses dans l'espace de travail statique. L'étendue de ces poses diminue lorsque les limites décrites au Tab. 2.10 sont prises en compte, notamment la limite d'altitude minimale.

2.6 Conclusions

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre de cette thèse, la plupart du temps, les études sur les robots parallèles à câbles sont réalisées en assimilant les câbles à des corps rigides linéaires et indéformables. Toutefois, la construction même du câble, ses dimensions et/ou les charges qu'il supporte peuvent invalider cette hypothèse. En se basant sur des tests de traction réalisés sur une série de câbles de différentes constructions et de différents matériaux, nous avons illustré qu'une modélisation élastique est souvent nécessaire. Pour certains câbles, un modèle élastique non-linéaire doit être utilisé afin de rendre correctement compte du comportement élastique. L'incorporation d'un tel modèle au problème géométrique inverse de robots parallèles à câbles a également été brièvement discutée.

Ce chapitre a également présenté le modèle de caténaire élastique, basé sur les travaux de Irvine [59] sur les câbles pour le génie civil. Ce modèle, déjà appliqué aux robots parallèles à câbles par Kozak [67], permet de prendre en compte la masse des câbles. L'utilisation de ce modèle de câble dans la résolution des problèmes géométriques a été présentée. Les problèmes géométriques nécessitent la résolution numérique d'un système d'équations non-linéaires couplées.

En s'appuyant sur deux exemples de robots à câbles suspendus, nous avons chiffré les conséquences de l'utilisation du modèle de caténaire élastique sur les longueurs des câbles et sur le positionnement de la plate-forme. Toutefois, même si les erreurs sur les longueurs des câbles et sur le positionnement de la plate-forme ne sont pas négligeables, la tension semble être la plus affectée par la prise en compte de la masse des câbles. En effet, pour les deux exemples de robot suspendus considérés, l'erreur relative maximale sur les tensions maximales dépasse 100%.

Enfin, illustrée par un exemple de robot plan à 3 câbles et 3 DDL, l'existence d'équilibre statique de la plate-forme pour lesquels un ou plusieurs câbles pendent en dessous de la plate-forme a été mis en exergue. Basé sur ces observations, de nouvelles limites ont été introduites afin de redéfinir l'espace de travail statique des robots à câbles dont la masse des câbles n'est pas négligeable.

Ces études basées sur le modèle de caténaire élastique restent toutefois limitées du fait de la complexité et de la non-linéarité des équations régissant le comportement du câble. Ce modèle impose notamment la résolution des problèmes géométriques par la résolution numérique d'un système d'équations non-linéaires couplées. Dans le chapitre suivant, nous verrons que sous certaines hypothèses, il est possible d'obtenir une expression explicite du profil du câble. Le problème géométrique inverse peut également être partiellement découplé, ce qui permet pour une pose donnée de la plate-forme de ne résoudre qu'un système linéaire d'équations.

Chapitre 3

Modèle simplifié de câble pesant et capacité à générer un torseur d'effort

Sommaire

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Modèle de câble pesant simplifié | 52 |
| 3.2 | Comparaison du modèle simplifié de câble pesant et du modèle de caténaire élastique | 59 |
| 3.3 | Capacité à générer des torseurs d'effort | 65 |
| 3.4 | Génération du zonotope des torseurs admissibles et comparaison au modèle de câble sans masse | 71 |
| 3.5 | Conclusions | 76 |

Dans ce chapitre un modèle simplifié de câble pesant élastique est présenté. Ce modèle est basé sur le modèle de caténaire élastique détaillé au chapitre précédent. En supposant que la déflexion du câble sous la corde est faible, certaines simplifications sont possibles. Le profil du câble sous l'effet de son propre poids et d'une force appliquée à une de ses extrémités peut alors être exprimé explicitement. Un découplage partiel du problème géométrique inverse est possible. Une relation linéaire entre les composantes verticale et horizontale de la force appliquée par la plate-forme au câble au point B_i peut être obtenue géométriquement. Le nombre d'inconnues de l'équilibre statique de la plate-forme d'un robot à m câbles peut alors être réduit à m . Pour un robot à m câbles et m DDL, ce système devient ainsi carré. Une évaluation de l'erreur résultant des simplifications réalisées est ensuite présentée pour deux exemples de robots à câbles. Le modèle simplifié permet également d'étudier la capacité d'un robot à résister à un torseur d'efforts exercé sur sa plate-forme. Ainsi, la description du polytope des torseurs admissibles des robots de grande dimension dont la masse des câbles n'est pas négligeable est présentée et une comparaison avec celui obtenu avec un modèle de câble sans masse est faite.

3.1 Modèle de câble pesant simplifié

3.1.1 Nature des simplifications

Dans le chapitre précédent, le modèle de caténaire élastique a été présenté. Il permet de reproduire fidèlement le comportement statique du câble sous l'effet de sa masse propre et d'une force appliquée à son extrémité libre. Ce modèle possède néanmoins l'inconvénient majeur de nécessiter une résolution numérique du problème géométrique inverse due à la non-linéarité des équations régissant le comportement des câbles. Cette résolution numérique d'un système d'équations non-linéaires couplées peut notamment poser des problèmes pour son utilisation dans une boucle de commande car elle n'est certainement pas, en l'état, compatible avec les conditions du temps réel. Il pourrait donc être intéressant, également dans une optique de résolution simplifiée des problèmes géométriques et cinématiques, de disposer d'un modèle statique simplifié de câble adapté aux robots parallèles à câbles.

Irvine [59] présente justement certaines simplifications possibles permettant de rendre l'étude du comportement statique d'un câble plus simple. En supposant que la déflexion du câble par rapport à la corde (segment de droite reliant les deux extrémités du câble) sous l'effet de son propre poids est faible en comparaison de la distance horizontale séparant les extrémités du câble, le modèle de caténaire élastique peut être simplifié.

3.1.2 Modèle d'un câble suspendu entre deux points

Dans cette section, un seul câble est étudié. Nous omettrons donc volontairement l'indice i faisant référence au câble i . En négligeant l'élasticité ($E = \infty$), Irvine [59] présente l'équation différentielle régissant le profil d'un câble :

$$\tau_x \frac{d^2 z}{dx^2} = \rho_0 g \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2} \quad (3.1)$$

En posant, tel qu'illustré à la Fig. 3.1 :

$$z = x \tan \beta_0 + h \quad (3.2)$$

l'Eq. (3.1) devient :

$$\tau_x \frac{d^2 h}{dx^2} = \rho_0 g \sqrt{1 + \left(\tan \beta_0 + \frac{dh}{dx} \right)^2} \quad (3.3)$$

En supposant que le profil du câble ne s'éloigne pas trop de la corde, le terme dh/dx est suffisamment faible pour pouvoir négliger son carré. Cette simplification ainsi que le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{B_x} \\ h' &= \frac{h \tau_x}{\rho_0 g L B_x} \\ \varepsilon &= \frac{\rho_0 g L \sin \beta_0}{\tau_x} = \frac{\rho_0 g B_x B_z}{\tau_x L} \end{aligned}$$

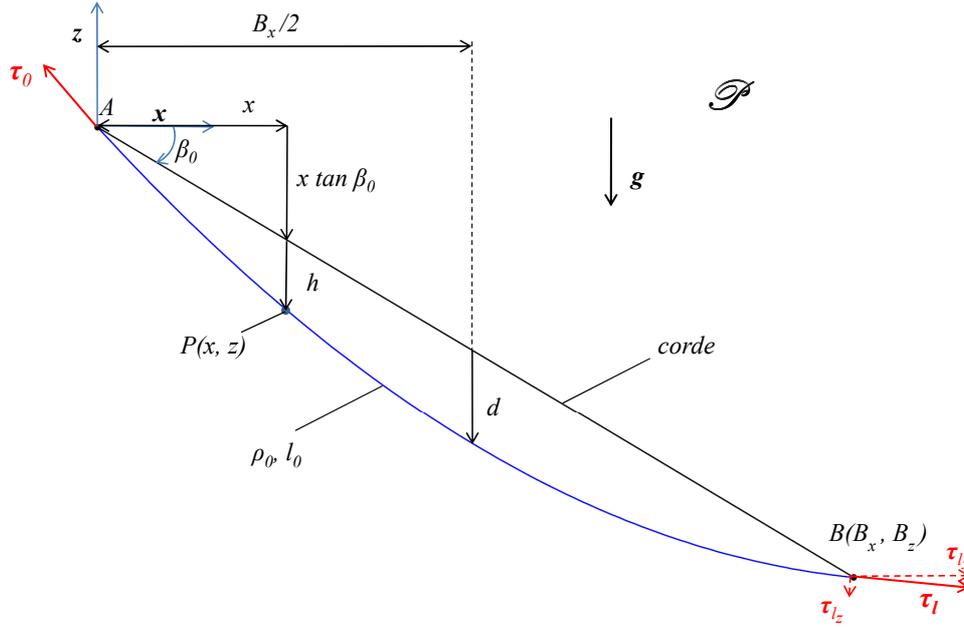


FIGURE 3.1 - Profil d'un câble suspendu entre deux points A et B.

où L est la longueur de la corde, B_x et B_z les coordonnées du point B dans le repère lié au plan \mathcal{P} du câble, permettent à Irvine [59] d'obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 h'}{dx'^2} + \varepsilon \frac{dh'}{dx'} = 1 \quad (3.4)$$

L'intégration de cette équation donne :

$$h' = \frac{x'}{2}(x' - 1) \left(1 + \frac{\varepsilon(1 - 2x')}{6} \right) \quad (3.5)$$

Sous l'hypothèse de faible déflexion du câble, le terme ε peut être négligé car $\rho_0 g L$ est faible par rapport τ_{lx} . On obtient alors une solution de la forme :

$$h = \frac{-\rho_0 g L}{2\tau_{lx} B_x} x(B_x - x) \quad (3.6)$$

soit avec les coordonnées x et z (voir Fig. 3.1) :

$$z = \frac{-\rho_0 g L}{2\tau_{lx} B_x} x(B_x - x) + x \tan \beta_0 \quad (3.7)$$

La déflexion maximale d , présentée à la Fig. 3.1, est obtenue lorsque la dérivée dh/dx s'annule :

$$\frac{dh}{dx} = 0 = \frac{-\rho_0 g L}{2\tau_{lx}} (B_x - 2x) \quad (3.8)$$

c'est-à-dire en $x = B_x/2$. L'expression de la déflexion maximale d est alors :

$$d = \frac{-\rho_0 g B_x L}{8\tau_{lx}} \quad (3.9)$$

3.1. Modèle de câble pesant simplifié

Le critère de validité d'une faible déflexion du câble, présentée par Irvine dans [59], implique le rapport de la déflexion maximale d à l'envergure B_x . Il s'écrit :

$$\frac{|d|}{B_x} \leq \frac{1}{8} \quad (3.10)$$

Il peut également être écrit en fonction de la composante horizontale τ_{lx} de la tension au point B :

$$\tau_{lx} \geq \rho_0 g L \quad (3.11)$$

Ainsi, l'hypothèse faite ici signifie que la composante horizontale de la tension dans le câble au point B doit être supérieure au poids du câble considéré comme étant droit et de longueur L (distance entre les deux points A et B). Notons que d'après [59], ce modèle est toujours valable pour un rapport de $1/5$ voire $1/4$ dans l'Eq. (3.10).

3.1.3 Transmission des efforts à la plate-forme

D'après la Fig. 3.2, une équation reliant les composantes τ_{li_x} et τ_{li_z} de la force τ_{li} appliquée à l'extrémité B_i du câble i peut être obtenue géométriquement. Les équations de la tangente au profil du câble s'écrivent, en $x = 0$:

$$z = \left(\frac{-\rho_0 g L_i}{2\tau_{li_x}} + \tan \beta_{0i} \right) x \quad (3.12)$$

et en $x = B_{ix}$:

$$z = \left(\frac{\rho_0 g L_i}{2\tau_{li_x}} + \tan \beta_{0i} \right) x - \frac{\rho_0 g L_i B_{ix}}{2\tau_{li_x}} \quad (3.13)$$

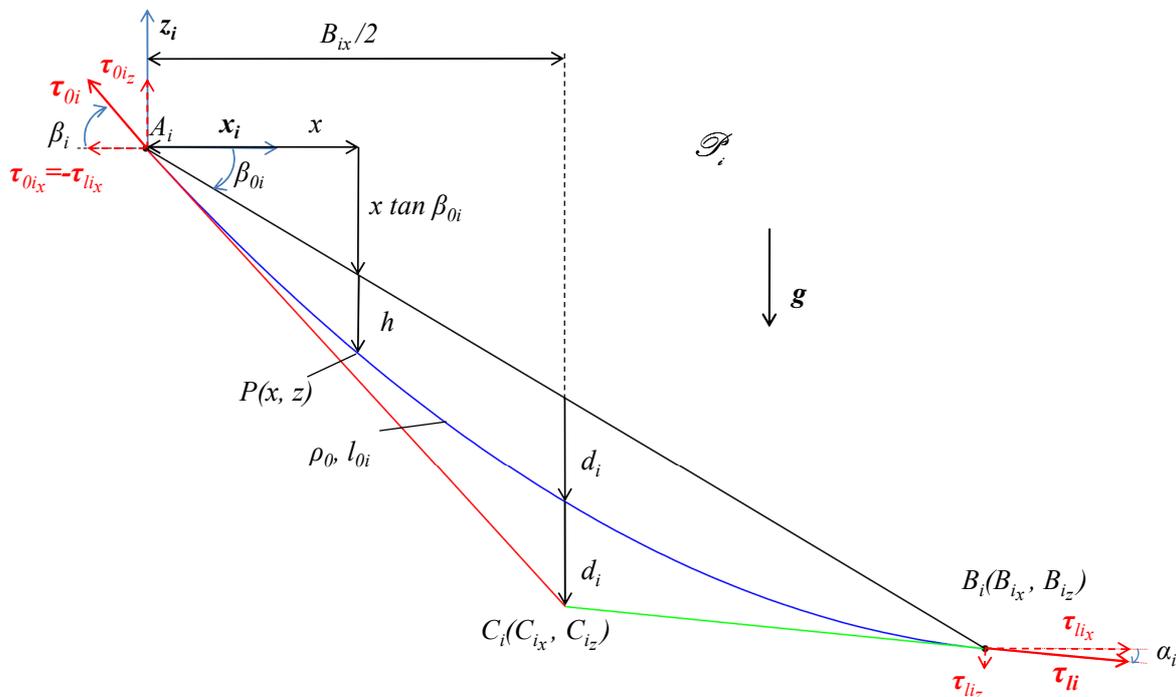


FIGURE 3.2 - Profil du câble i dans le plan \mathcal{P}_i et notations associées au modèle simplifié de câble pesant non-élastique.

Notons C_i l'intersection de ces deux tangentes. Les coordonnées de C_i sont $(B_{i_x}/2, C_{i_z})$, où C_{i_z} a pour expression :

$$C_{i_z} = \frac{-\rho_0 g B_{i_x} L_i}{4\tau_{li_x}} + \frac{B_{i_z}}{2} \quad (3.14)$$

$$\Leftrightarrow C_{i_z} = 2d_i + \frac{B_{i_z}}{2} \quad (3.15)$$

A partir de cette expression et de l'expression de la tangente au profil du câble en $x = B_{i_x}$ (Eq. (3.13)), on obtient une relation entre les composantes τ_{li_x} et τ_{li_z} de la tension du câble au point B_i :

$$\frac{\tau_{li_z}}{\tau_{li_x}} = \tan \alpha_i = \frac{B_{i_z}/2 - 2d_i}{B_{i_x}/2} = \frac{\rho_0 g L_i}{2\tau_{li_x}} + \tan \beta_{0i} \quad (3.16)$$

où α_i est l'angle entre l'horizontale et la direction de la tension τ_{li} , tel que présenté à la Fig. 3.2.

La relation entre τ_{li_z} et τ_{li_x} peut donc s'écrire sous une forme linéaire :

$$\tau_{li_z} = \frac{\rho_0 g L_i}{2} + \tau_{li_x} \tan \beta_{0i} \quad (3.17)$$

où β_{0i} correspond à la pente de la corde ($\tan^{-1}(B_{i_z}/B_{i_x})$).

La force appliquée par le câble i sur la plate-forme, exprimée dans le repère global \mathcal{R}_A , peut donc être écrite en fonction de la seule composante horizontale τ_{li_x} de la tension τ_{li} au point B_i :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = -(\mathbf{q}_i \tau_{li_x} + \mathbf{f}_i) \quad (3.18)$$

où :

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \\ \tan \beta_{0i} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

et :

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho_0 g L_i}{2} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Rappelons que γ_i est l'angle de la rotation d'axe vertical permettant de passer de \mathcal{R}_i à \mathcal{R}_A (voir Fig. 2.14). Notons également que le signe négatif dans l'Eq. (3.18) vient du fait que la tension τ_{li} correspond à la force appliquée par la plate-forme sur l'extrémité B_i du câble. F_x , F_y et F_z sont quant à elles les composantes de la force appliquée par le câble i sur la plate-forme.

Notons que le vecteur \mathbf{q}_i de l'Eq. (3.19) est le même que celui apparaissant dans l'expression de la tension τ_i en fonction de sa composante horizontale dans le cas d'un modèle de câble non pesant :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \tau_i \mathbf{d}_i \quad (3.21)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma_i \cos \beta_{0i} \\ \sin \gamma_i \cos \beta_{0i} \\ \sin \beta_{0i} \end{bmatrix} \tau_i \quad (3.22)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \gamma_i \\ \sin \gamma_i \\ \tan \beta_{0i} \end{bmatrix} \tau_{i_x} = \tau_{i_x} \mathbf{q}_i \quad (3.23)$$

$$(3.24)$$

où \mathbf{d}_i est le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{B_i A_i}}{\|\overrightarrow{B_i A_i}\|}$ exprimé dans \mathcal{R}_A .

Dans l'Eq. (3.18), on peut facilement identifier le terme ρ_0 du à la masse du câble. Il est également utile de remarquer que le vecteur \mathbf{q}_i peut s'écrire :

$$\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{d}_i}{\cos \beta_{0i}} \quad (3.25)$$

D'après l'Eq. (3.18), le torseur d'efforts appliqué par le câble i sur la plate-forme au point O_B s'écrit :

$$- (\mathbf{w}_{x_i} \tau_{i_x} + \mathbf{f}_{cab_i}) \quad (3.26)$$

où :

$$\mathbf{w}_{x_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{Q} \mathbf{b}_i \times \mathbf{q}_i \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

et :

$$\mathbf{f}_{cab_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{Q} \mathbf{b}_i \times \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.1.4 Équilibre statique de la plate-forme

A partir de l'expression du torseur d'efforts exercé par le câble i sur la plate-forme, on peut écrire l'équilibre statique de la plate-forme d'un robot à m câbles pour un torseur d'efforts extérieur \mathbf{f}_e :

$$- (\mathbf{W}_x \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{f}_{cab}) + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

où $\boldsymbol{\tau}_x$ contient les composantes horizontales τ_{i_x} des forces $\boldsymbol{\tau}_{i_i}$:

$$\boldsymbol{\tau}_x = [\tau_{1_x} \quad \tau_{2_x} \quad \cdots \quad \tau_{m_x}]^T \quad (3.30)$$

où \mathbf{W}_x s'écrit :

$$\mathbf{W}_x = [\mathbf{w}_{x_1} \quad \mathbf{w}_{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{w}_{x_m}]_{6 \times m} \quad (3.31)$$

et où :

$$\mathbf{f}_{cab} = \sum_{i=1}^m \mathbf{f}_{cab_i} \quad (3.32)$$

Dans le cas des robots possédant autant de câbles que de degrés de liberté (c'est-à-dire $m = 6$), le système présenté à l'Eq. (3.29) est carré, ce qui permet, pour un torseur d'effort extérieur \mathbf{f}_e donné et hors singularité de \mathbf{W}_x , d'obtenir une solution unique :

$$\boldsymbol{\tau}_x = \mathbf{W}_x^{-1} \mathbf{f}_{Tot} \quad (3.33)$$

où :

$$\mathbf{f}_{Tot} = \mathbf{f}_e - \mathbf{f}_{cab} \quad (3.34)$$

Dans le cas où le câble est supposé indéformable et sans masse, pour une pose donnée, si l'une des tensions est négative, l'équilibre statique de la plate-forme n'est pas réalisable avec tous les câbles tendus. Toutefois, avec le modèle de câble considéré dans ce chapitre, le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ de l'Eq. (3.29) ne contient pas directement les tensions dans les câbles τ_i , mais la composante τ_{li_x} de la force $\boldsymbol{\tau}_{li}$.

Pour que le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ donné par l'Eq. (3.33) représente une solution réalisable physiquement, il faut que ses composantes horizontales τ_{li_x} soient positives. En effet, si une de ces composantes est négative, le câble correspondant travaille en compression ce qui est incompatible avec ses capacités physiques. Ainsi, si la solution unique de l'Eq. (3.33) possède une composante négative, l'équilibre de la plate-forme n'est pas réalisable pour le torseur \mathbf{f}_e .

Dans le cas où un ou plusieurs câbles supplémentaires sont utilisés pour contrôler les 6 DDL de la plate-forme ($m > 6$), l'Eq. (3.33) n'est plus valide. En effet, le système de l'Eq. (3.29) est rectangulaire (sous déterminé) et possède une infinité de solutions. Nous étudierons la résolution d'un tel système dans la section 3.3.

3.1.5 Calcul des tensions dans les câbles

Contrairement au cas d'un modèle négligeant la masse des câbles où la tension est constante tout au long du câble, lorsque la masse est prise en compte, la tension varie entre le point de sortie A_i et le point d'attache B_i du câble sur la plate-forme. La tension maximale est située au point le plus haut du câble (voir section 2.5.1). En ce point, le câble doit supporter les efforts appliqués par la plate-forme sur le câble ainsi que le poids de sa longueur déroulée. Dans le cas du modèle de caténaire élastique, l'expression de la tension en fonction de l'abscisse curviligne s_i est présentée à l'Eq. (2.8).

Avec le modèle simplifié de câble pesant de la section 3.1, les relations géométriques utilisées précédemment pour obtenir l'équation reliant τ_{li_x} à τ_{li_z} permettent également d'obtenir les tensions dans les câbles aux points A_i et B_i . Au point B_i , l'expression de la tension est triviale et correspond à la norme du vecteur $\boldsymbol{\tau}_{li}$:

$$\tau_{li} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \tau_{li_z}^2} \quad (3.35)$$

$$\tau_{li} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \left(\tau_{li_x} \tan \beta_{0i} + \frac{\rho_0 g L_i}{2} \right)^2} \quad (3.36)$$

Au point A_i l'expression est tout aussi simple :

$$\tau_{0i} = \sqrt{\tau_{0i_x}^2 + \tau_{0i_z}^2} \quad (3.37)$$

où τ_{0i_z} est la composante verticale de la tension τ_{0i} au point A_i . τ_{0i_z} peut être déterminée géométriquement de la même manière que la composante τ_{i_z} (Eq. (3.17)) :

$$\frac{\tau_{0i_z}}{\tau_{0i_x}} = \tan \beta_i = -\frac{\rho_0 g L_i}{2\tau_{i_x}} + \tan \beta_{0i} \quad (3.38)$$

où $\tan \beta_i$ est la pente de la tangente au profil du câble au point A_i (Eq. (3.12)). Or l'équilibre statique du câble implique $\tau_{i_x} = -\tau_{0i_x}$. On obtient ainsi l'expression de τ_{0i_z} en fonction de τ_{i_x} :

$$\tau_{0i_z} = \frac{\rho_0 g L_i}{2} - \tau_{i_x} \tan \beta_{0i} \quad (3.39)$$

Notons que la composante τ_{0i_z} est de signe opposé à τ_{i_x} , tel qu'illustré à la Fig. 3.2.

3.1.6 Problème géométrique inverse sans élasticité des câbles

Résoudre le problème géométrique inverse consiste à déterminer la longueur déroulée de chacun des câbles du robot. Une fois l'équilibre statique de la plate-forme résolu et les composantes horizontales τ_{i_x} déterminées pour tous les câbles, il est possible de calculer les longueurs des câbles. Remarquons en effet que le modèle simplifié de câble pesant, présenté à la section 3.1, ne permet pas de découpler complètement le problème. Il est toujours nécessaire de calculer les forces appliquées à l'extrémité B_i de câble i afin de pouvoir déterminer la longueur du câble.

Étant donnée la description du profil du câble de l'Eq. (3.7), l'expression de sa longueur l_i peut être obtenue en intégrant un élément de longueur sur l'intervalle $[0, B_{i_x}]$ de x . D'après [59], cette intégrale peut être approximée de la façon suivante :

$$l_i = \int_0^{B_{i_x}} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (3.40)$$

$$l_i = L_i \left(1 + \frac{8d^2}{3B_{i_x}^2} - \frac{32d^4}{5B_{i_x}^4} + \dots \right) \quad (3.41)$$

$$l_i = L_i \left(1 + \frac{1}{24} \left(\frac{\rho_0 g L_i}{\tau_{i_x}} \right)^2 - \frac{1}{640} \left(\frac{\rho_0 g L_i}{\tau_{i_x}} \right)^4 + \dots \right) \quad (3.42)$$

3.1.7 Problème géométrique inverse avec élasticité des câbles

L'expression obtenue à l'Eq. (3.42) correspond à la longueur du profil du câble i . Toutefois, l'élasticité du câble n'est pas prise en compte. Nous souhaitons cependant que la prise en compte de l'élasticité ne transforme pas la résolution du problème géométrique inverse en celle d'un système d'équations couplées non-linéaires. En effet, si le fait de prendre en compte l'élasticité nous amène à résoudre un système du même type qu'avec le modèle de caténaire élastique, il nous paraît plus intéressant d'utiliser ce dernier.

Pour le modèle de câble élastique sans masse (section 2.2), l'élasticité n'est prise en compte que lors du calcul de la longueur du câble. Elle n'intervient pas dans l'équilibre statique car elle n'a aucune influence sur la direction ou la norme de la force appliquée au câble. Les conditions de validité du modèle simplifié de câble pesant, présentées à la section 3.1, stipulent que le câble est considéré proche de la corde. Nous considérons donc ici que l'élasticité ne modifie pas la résolution de l'équilibre statique de la plate-forme et de manière identique au câble élastique sans masse, nous introduisons uniquement l'élasticité dans le calcul de la longueur du câble. Nous verrons à la section 3.2.1 que cette approximation est justifiée. En effet, les erreurs sur les tensions entre le modèle de caténaire élastique et le modèle simplifié de câble pesant sont très faibles, en tout cas pour les deux exemples considérés.

Comme nous l'avons vu dans la description du modèle de caténaire élastique, la tension varie suivant l'abscisse curviligne s_i le long du câble (Eq. (2.8)). Ainsi, la longueur non-déformée l_{0i} du câble i est telle que les équations suivantes sont satisfaites :

$$l_i = l_{0i} + \Delta l_i = l_{0i} + \int_0^{l_{0i}} \frac{\tau(s_i)}{EA_0} ds_i \quad (3.43)$$

Une intégration numérique est cependant nécessaire dans l'Eq. (3.43). Dans certains cas (tension importante et faible déflexion) l'évolution de la tension le long du câble est presque linéaire. Il est toutefois nécessaire d'évaluer cette hypothèse au cas par cas.

Si on suppose l'évolution de la tension linéaire le long du câble, il est alors possible d'écrire :

$$\tau(s_i) = \frac{\tau_{li} - \tau_{0i}}{l_{0i}} s_i + \tau_{0i} \quad (3.44)$$

Cette équation nous permet d'avoir facilement l'expression de la longueur non-déformée l_{0i} du câble i :

$$l_i = l_{0i} + \int_0^{l_{0i}} \frac{\tau(s_i)}{EA_0} ds_i \quad (3.45)$$

$$l_i = l_{0i} + \frac{1}{EA_0} \int_0^{l_{0i}} \left(\frac{\tau_{li} - \tau_{0i}}{l_{0i}} s_i + \tau_{0i} \right) ds_i \quad (3.46)$$

$$l_i = l_{0i} + \frac{(\tau_{li} + \tau_{0i})l_{0i}}{2EA_0} \quad (3.47)$$

ce qui nous donne, en notant τ_{imoy} la moyenne entre τ_{li} et τ_{0i} :

$$l_{0i} = \frac{l_i}{1 + \frac{\tau_{moy}}{EA_0}} \quad (3.48)$$

3.2 Comparaison du modèle simplifié de câble pesant et du modèle de caténaire élastique

Dans le but d'évaluer la pertinence du modèle simplifié de câble pesant, nous avons réalisé une étude similaire à celle de la section 2.4. Nous avons ainsi pu chiffrer les erreurs résultant de la simplification apportée au modèle de caténaire élastique pour les deux

3.2. Comparaison du modèle simplifié de câble pesant et du modèle de caténaire élastique

exemples de robots suspendus de la section 2.4.1. La méthode utilisée ainsi que les erreurs relatives présentées dans cette section sont les mêmes que dans l'étude présentée à la section 2.4.2.

Notons que lors de l'étude, pour chaque pose de l'espace de travail discrétisé, la validité du modèle est vérifiée grâce au critère de l'Eq. (3.11). Nous avons transposé ce critère sous la forme d'un rapport :

$$\frac{\tau_{li_x}}{\rho_0 g L_i} \geq 1 \quad (3.49)$$

Pour chaque pose de l'espace de travail discrétisé, si le critère (Eq. (3.49)) est vérifié, les calculs des tensions et des longueurs des câbles sont réalisés pour le modèle de caténaire élastique présenté à la section 2.3 et pour le modèle simplifié de câble pesant présenté dans ce chapitre. Les erreurs relatives maximales entre ces deux modèles (voir section 2.4.2) sont également calculées.

3.2.1 Tensions maximales dans les câbles

Dans un premier temps, nous avons comparé les tensions maximales dans les câbles obtenues pour les deux modèles.

3.2.1.1 Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL

Tout d'abord, les valeurs du rapport de l'Eq. (3.49) sont présentées pour les deux cas de charge à la Fig. 3.3. On remarque que, notamment pour le cas de charge à $30kg$, le critère de validité n'est pas vérifié partout dans l'espace de travail étudié. En effet, dans la zone située aux abords de la ligne $x = 4,2m$, le critère chute fortement en dessous de la valeur limite 1. Cette chute est facilement explicable par la nature de la géométrie du robot étudié. En effet, pour les poses où $x = 4,2m$ le câble 2 est vertical, et dans l'Eq. (3.1) le rapport $dz/dx = \infty$. Le modèle n'est donc plus valide car il n'est pas mathématiquement défini pour ce type de configurations (singularité de formulation).

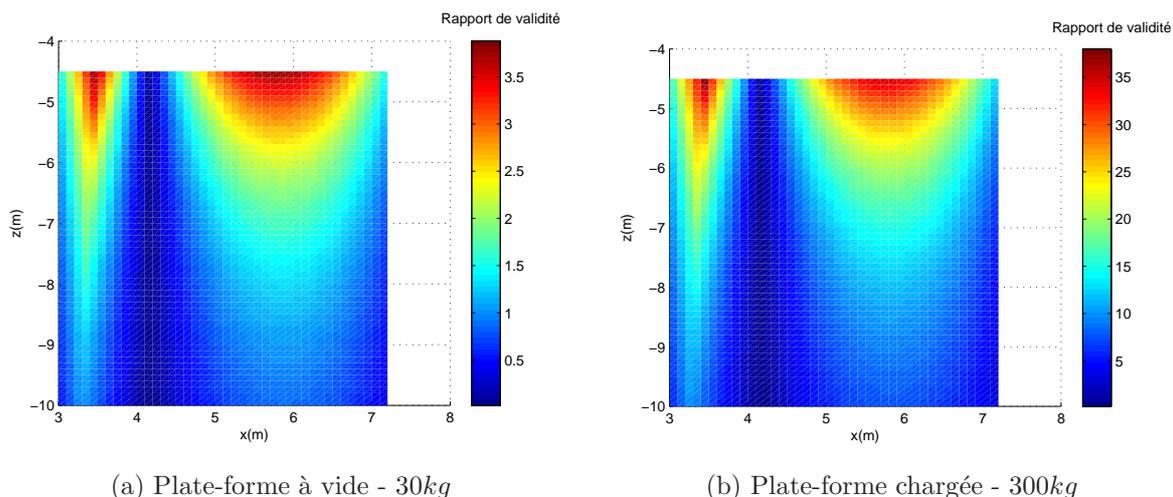


FIGURE 3.3 - Valeurs du rapport de validité (3.49) du modèle à l'intérieur de l'espace de travail étudié, dans les deux cas de charge du robot plan.

Comme on peut le voir à la Fig. 3.4 et dans le Tab. 3.1 pour l'exemple du robot plan, avec une charge de $300kg$ l'erreur relative maximale est extrêmement faible (moyenne

de 0.0046%). Pour une charge de 30kg, l'erreur relative maximale reste faible avec une moyenne de 0,22%. L'utilisation du modèle simplifié de câble pesant permet donc une diminution de 99% de l'erreur par rapport au modèle de câble sans masse non-élastique.

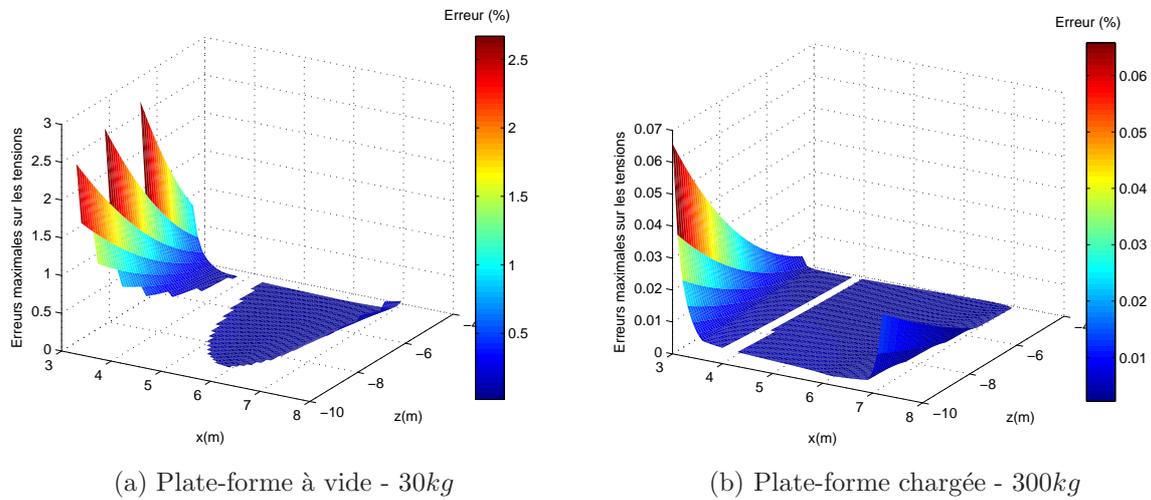


FIGURE 3.4 - Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales dans les câbles pour le robot plan à 3 câbles et 3 DDL dans les deux cas de charge, obtenues par comparaison du modèle simplifié de câble pesant élastique et du modèle de caténaire élastique.

TABLEAU 3.1 - Analyse des erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour les deux modèles comparés et les deux cas de charges du robot plan.

| | $m_{PF} = 30kg$ | | | $m_{PF} = 300kg$ | | |
|----------------------------------|-----------------|-------|---------|------------------|--------|--------|
| | Moyenne | Min | Max | Moyenne | Min | Max |
| Modèle de câble sans masse | 23,05% | 9,37% | 112,74% | 2,25% | 0,95% | 10,97% |
| Modèle simplifié de câble pesant | 0,22% | 0,02% | 2,67% | 0,005% | 0,002% | 0,07% |

3.2.1.2 Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL

Pour l'exemple du robot spatial à 6 câbles et 6 DDL les mêmes observations peuvent être faites (Fig. 3.5 et Tab. 3.2). Dans les deux cas de charge et pour les deux altitudes étudiées, l'erreur relative maximale sur les tensions maximales dépasse à peine 1%, alors qu'elle était supérieure à 110% avec le modèle de câble non-pesant. La diminution obtenue de l'erreur sur les tensions en utilisant le modèle simplifié de câble pesant est donc supérieure à 99,4%.

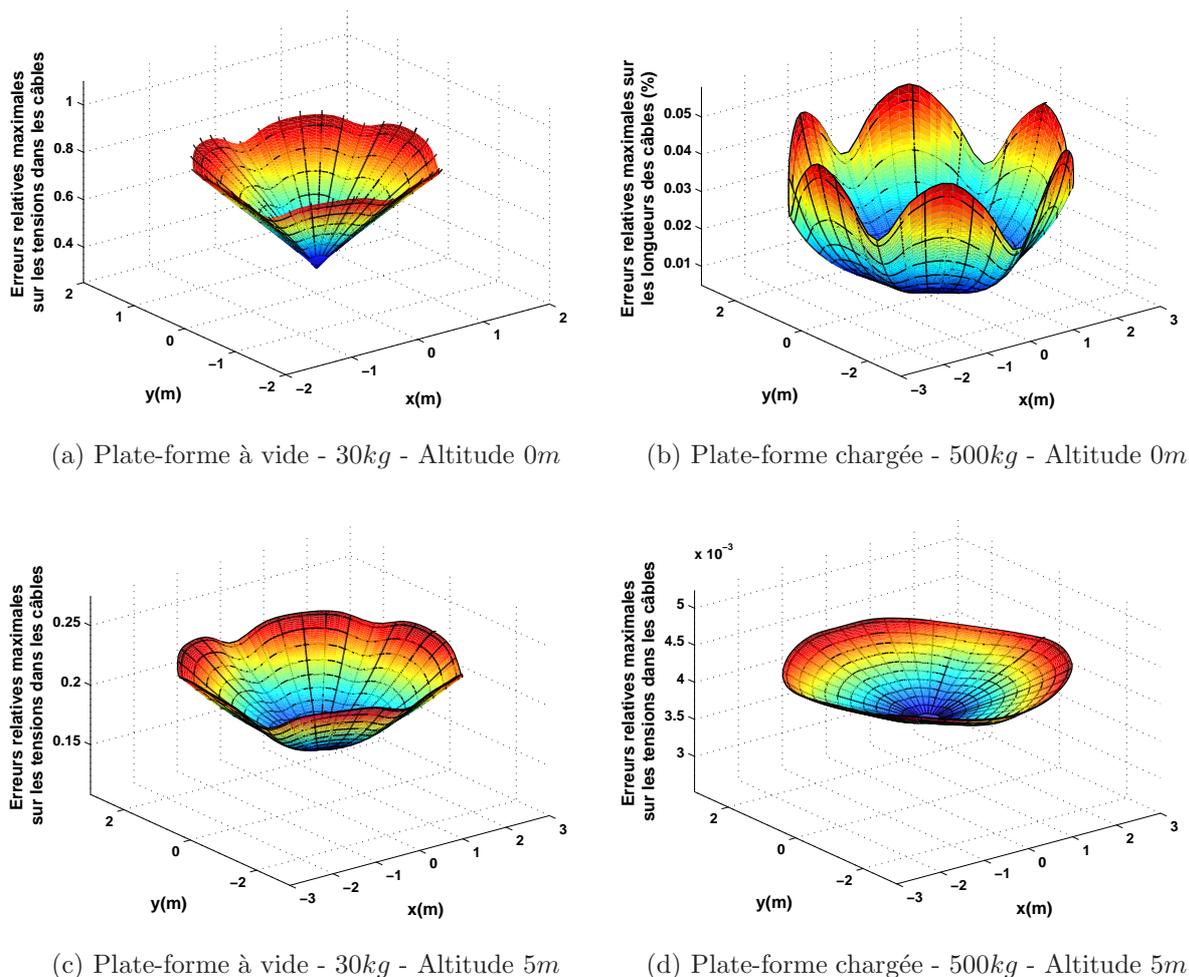


FIGURE 3.5 - Erreurs relatives maximales sur les tensions maximales pour le robot à 6 câbles et 6 DDL dans les deux cas de charge, obtenues par comparaison du modèle simplifié de câble pesant élastique et du modèle de caténaire élastique.

3.2.2 Longueurs des câbles

Une étude similaire à celle de la section 2.4.4 a été réalisée afin de quantifier l'influence des simplifications sur le calcul des longueurs non-déformées l_{0i} des câbles pour les deux exemples de robots à câbles suspendus. L'erreur relative maximale sur les longueurs telle que définie à la section 2.4.2 est utilisée afin de comparer le modèle de caténaire élastique au modèle simplifié de câble pesant élastique.

3.2.2.1 Exemple du robot plan à 3 câbles et 3 DDL

Les longueurs des câbles semblent être fortement affectées par une diminution de la valeur du rapport de validité (Eq. (3.49)). En effet, on peut remarquer à la Fig. 3.6 et dans le Tab. 3.3 que les erreurs résultant de l'utilisation du modèle simplifié de câble pesant sont plus importantes que pour le modèle de câble sans masse non-élastique, notamment pour de faibles charges transportées. Ces erreurs restent toutefois assez faibles avec une moyenne de 1,661%. A pleine charge, le modèle simplifié donne une erreur plus faible de 0,13%.

TABLEAU 3.2 - Erreurs relatives maximales sur les tensions dans les câbles pour les deux modèles considérés, dans les deux cas de charges et pour deux altitudes du robot à 6 câbles et 6 DDL.

| | Altitude $z = 5m$ | | | | | |
|----------------------------------|-------------------|----------|---------|------------------|---------|---------|
| | $m_{PF} = 30kg$ | | | $m_{PF} = 500kg$ | | |
| | Moyenne | Min | Max | Moyenne | Min | Max |
| Modèle de câble sans masse | 34,2542% | 32,0393% | 39,162% | 2,03% | 1,9117% | 2,2394% |
| Modèle simplifié de câble pesant | 0,1842% | 0,1546% | 0,229% | 0,0039% | 0,0036% | 0,0044% |

| | Altitude $z = 0m$ | | | | | |
|----------------------------------|-------------------|---------|-----------|------------------|---------|--------|
| | $m_{PF} = 30kg$ | | | $m_{PF} = 500kg$ | | |
| | Moyenne | Min | Max | Moyenne | Min | Max |
| Modèle de câble sans masse | 73,105% | 58,354% | 114,6433% | 4,0779% | 3,467% | 5,557% |
| Modèle simplifié de câble pesant | 0,6386% | 0,3567% | 1,069% | 0,0193% | 0,0063% | 0,015% |

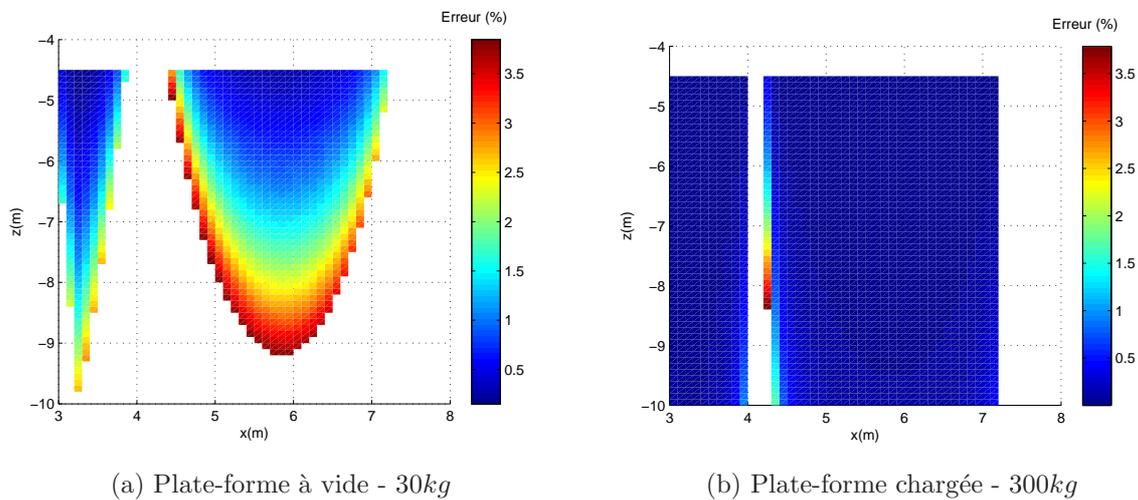


FIGURE 3.6 - Erreurs relatives maximales sur les longueurs non-déformées des câbles dans l'espace de travail du robot plan dans les deux cas de charge.

3.2.2.2 Exemple du robot à 6 câbles et 6 DDL

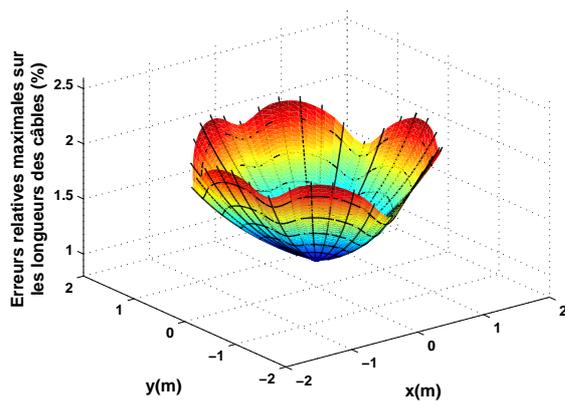
Pour cet exemple de robot suspendu, les erreurs sur les longueurs de câbles sont beaucoup moins importantes que dans le cas du robot plan. En effet, mis à part le cas le plus défavorable où l'erreur moyenne dépasse légèrement 1,5%, les autres cas présentent des erreurs relatives sur les longueurs des câbles inférieures à 0,1%. Ceci est notamment du à

3.2. Comparaison du modèle simplifié de câble pesant et du modèle de caténaire élastique

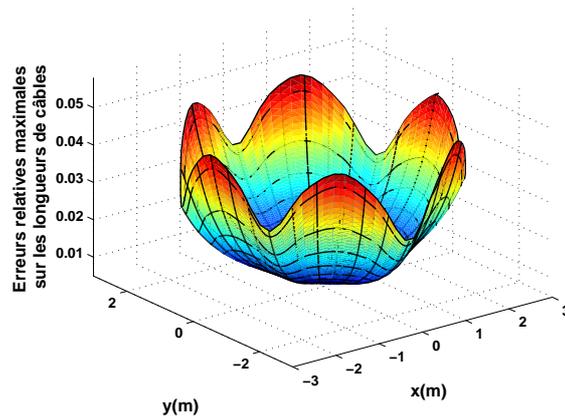
TABLEAU 3.3 - Analyse des erreurs relatives maximales sur les longueurs non-déformées de câble pour les deux modèles de câbles comparés à celui de caténaire élastique, dans les 2 cas de charges du robot plan.

| | $m_{PF} = 30kg$ | | | $m_{PF} = 300kg$ | | |
|----------------------------------|-----------------|---------|---------|------------------|---------|---------|
| | Moyenne | Min | Max | Moyenne | Min | Max |
| Modèle de câble sans masse | 0,1927% | 0,0227% | 3,5971% | 0,2803% | 0,2366% | 0,4156% |
| Modèle simplifié de câble pesant | 1,661% | 0,1510% | 3,8471% | 0,1345% | 0,0016% | 3,789% |

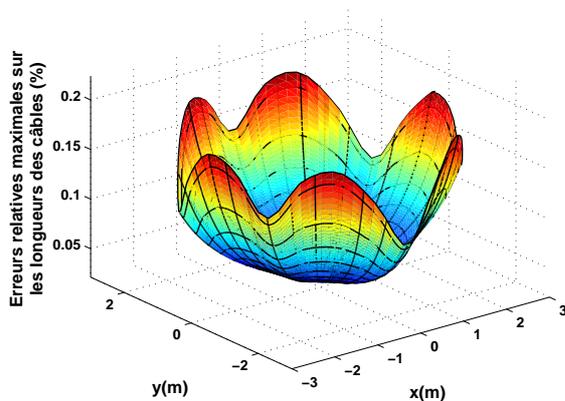
l'absence de singularité de formulation dans l'espace de travail étudié pour le robot spatial contrairement à celui du robot plan au sein duquel une zone de singularité du modèle (câble 2 vertical) apparaît, entraînant des erreurs importantes.



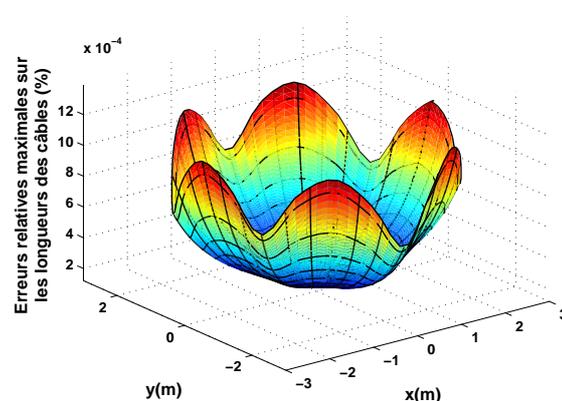
(a) Plate-forme à vide - 30kg - Altitude 0m



(b) Plate-forme chargée - 500kg - Altitude 0m



(c) Plate-forme à vide - 30kg - Altitude 5m



(d) Plate-forme chargée - 500kg - Altitude 5m

FIGURE 3.7 - Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles pour le robot à 6 câbles et 6 DDL dans les deux cas de charge et pour deux altitudes.

TABLEAU 3.4 - Erreurs relatives maximales sur les longueurs des câbles pour les deux modèles de câbles comparés à celui de caténaire élastique, dans les deux cas de charges et pour deux altitudes du robot à 6 câbles et 6 DDL.

| | Altitude $z = 5m$ | | | | | |
|----------------------------------|-------------------|---------|---------|------------------|----------|---------|
| | $m_{PF} = 30kg$ | | | $m_{PF} = 500kg$ | | |
| | Moyenne | Min | Max | Moyenne | Min | Max |
| Modèle de câble sans masse | 0,310% | 0,0832% | 1,1373% | 0,1592% | 0,1352% | 0,1916% |
| Modèle simplifié de câble pesant | 0,0676% | 0,0304% | 0,1867% | 0,00039% | 0,00017% | 0,0012% |
| | Altitude $z = 0m$ | | | | | |
| | $m_{PF} = 30kg$ | | | $m_{PF} = 500kg$ | | |
| | Moyenne | Min | Max | Moyenne | Min | Max |
| Modèle de câble sans masse | 1,2572% | 0,318% | 4,8229% | 0,0848% | 0,067% | 0,1037% |
| Modèle simplifié de câble pesant | 1,5631% | 1,03% | 2,5831% | 0,0164% | 0,007% | 0,0484% |

3.2.3 Conclusions sur la validité du modèle simplifié de câble pesant

Cette étude sur les erreurs associées à la simplification introduite dans le modèle de câble pesant montre que les hypothèses de simplification faites (voir section 3.1) sont valables dans la plus grande partie des cas étudiés ici. En effet, notamment en ce qui concerne les tensions maximales dans les câbles, l'utilisation du modèle simplifié de câble pesant permet de réduire de plus de 99% l'erreur par rapport au modèle de caténaire élastique. En ce qui concerne les longueurs, on constate que les erreurs sont plus importantes.

La validité du modèle est par contre fortement remise en cause lorsque l'un des câbles est presque vertical. En effet, cette configuration de câble rend mathématiquement invalide l'équation différentielle à la base du modèle (Eq. (3.1)). Aux abords des zones où un câble est vertical les erreurs sont plus importantes mais restent toutefois raisonnables, en tout cas pour les deux exemples considérés.

3.3 Capacité à générer des torseurs d'effort

3.3.1 Cas d'un modèle de câble sans masse

Dans le cas de l'utilisation d'un modèle de câble sans masse où le câble est assimilé à un segment de droite, la force appliquée par le câble i sur la plate-forme possède, pour une pose donnée et quelle que soit son intensité, une direction constante suivant le vecteur \mathbf{d}_i (vecteur $\overrightarrow{B_i A_i}$ normalisé, voir section 1.2.1). Dans le système d'équations correspondant à

l'équilibre statique de la plate-forme (Eq. (3.50) ci-dessous), la seule inconnue associée au câble i est la norme τ_i du vecteur $\boldsymbol{\tau}_i$:

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

Dans le cas de robots possédant plus de câbles que de degrés de liberté de la plate-forme, il existe une infinité de solutions $\boldsymbol{\tau}$ permettant de satisfaire l'Eq. (3.50). Les différentes combinaisons de τ_i peuvent être obtenues en se déplaçant dans le noyau de la matrice \mathbf{W} :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_+ + \sum_{q=1}^k \eta_q \mathbf{v}_q \quad (3.51)$$

où $\boldsymbol{\tau}_+$ représente une solution particulière de l'Eq. (3.50) obtenue par exemple par l'utilisation de la pseudo inverse de \mathbf{W} , où les \mathbf{v}_q sont des vecteurs formant une base du noyau de dimension k de la matrice \mathbf{W} , et où η_q sont des scalaires quelconques.

Toutefois, toutes les solutions données par l'Eq. (3.51) ne sont pas valables physiquement. En effet, les câbles ne pouvant pas agir en compression, tous les éléments du vecteur $\boldsymbol{\tau}$ doivent être positifs. La limite de résistance des câbles et/ou de la structure supportant le robot implique que la tension dans chacun des câbles doit être inférieure à une valeur seuil τ_{max} fixée.

Les contraintes sur les vecteurs des tensions sont donc des contraintes d'inégalités :

$$\tau_{min} \leq \tau_i \leq \tau_{max} \quad , \quad i = 1 \dots m \quad (3.52)$$

Notons que la borne inférieure des tensions τ_{min} peut être choisie strictement supérieure à 0 si on souhaite garder une tension minimale dans les câbles.

Le système d'inégalités suivant peut donc être écrit à partir des Eqs. (3.51) et (3.52) :

$$\boldsymbol{\tau}_{min} \leq \boldsymbol{\tau}_+ + \sum_{q=1}^k \eta_q \mathbf{v}_q \leq \boldsymbol{\tau}_{max} \quad (3.53)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{min}$ et $\boldsymbol{\tau}_{max}$ sont les vecteurs de dimension m dont les éléments sont respectivement τ_{min} et τ_{max} . Par la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin [37] par exemple, on peut déterminer s'il existe des scalaires η_q permettant de satisfaire l'ensemble des inégalités de l'Eq. (3.53). Dans ce cas, il existe une solution satisfaisant les contraintes de tensions et permettant de compenser le torseur d'efforts extérieur \mathbf{f}_e appliqué à la plate-forme, c'est-à-dire permettant de réaliser l'équilibre statique de la plate-forme.

3.3.2 Cas du modèle de câble pesant simplifié

Comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, le modèle simplifié de câble pesant permet de rendre compte de l'effet de la masse propre des câbles sur le comportement d'un robot à câble, à condition que son critère de validité présenté à l'Eq. (3.11) soit respecté. Il permet aussi d'écrire l'équilibre statique de la plate-forme sous la forme du système linéaire de l'Eq. (3.29) qui peut être résolu indépendamment des équations d'équilibre statique de chaque câble. Toutefois, contrairement au système obtenu dans le cas de câbles supposés sans masse (Eq. (3.50)), le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ des inconnues ne contient pas directement

les tensions τ_i des câbles, mais les composantes τ_{li_x} des forces appliquées par la plate-forme aux extrémités B_i des câbles.

Dans le cas des robots ayant plus de câbles que de DDL de la plate-forme, le système de l'Eq. (3.29) n'est pas carré et possède donc une infinité de solutions :

$$\boldsymbol{\tau}_x = \boldsymbol{\tau}_{x+} + \sum_{q=1}^k \eta_q \mathbf{v}_q \quad (3.54)$$

où $\boldsymbol{\tau}_{x+}$ représente une solution particulière qui peut être obtenue par le biais de la pseudo-inverse \mathbf{W}_x^+ et où les \mathbf{v}_q forment une base du noyau de \mathbf{W}_x de dimension k .

Il s'agit, à l'instar du modèle de câble non pesant, de vérifier s'il existe un ensemble de scalaires η_q permettant d'obtenir un vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ satisfaisant des contraintes de tension. Dans le cas du modèle de câble sans masse non-élastique, les contraintes généralement utilisées, faisant intervenir τ_{max} et τ_{min} , s'appliquent à la norme du vecteur $\boldsymbol{\tau}$. Or, avec le modèle simplifié de câble pesant, le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ des inconnues contient les composantes horizontales τ_{li_x} de la force $\boldsymbol{\tau}_{li}$. Les contraintes de limites inférieures et supérieures de tensions doivent donc être reformulées en fonction des τ_{li_x} .

3.3.2.1 Contrainte de travail en traction

La caractéristique principale des câbles est leur incapacité à travailler en compression. Ainsi, il est nécessaire d'imposer une contrainte afin d'empêcher toute nécessité de travail en compression. Il est facile d'adapter cette contrainte de fonctionnement en traction au modèle simplifié de câble pesant. En effet, une composante τ_{li_x} positive correspond à un travail en traction, alors qu'une valeur négative correspond à un travail en compression. La contrainte de tension positive s'écrit donc :

$$\tau_{li_x} \geq 0, \quad i = 1 \dots m \quad (3.55)$$

et donc d'après l'Eq. (3.54) :

$$\tau_{li_x+} + \sum_{q=1}^k \eta_q v_{qi} \geq 0, \quad i = 1 \dots m \quad (3.56)$$

3.3.2.2 Contrainte de tension maximale

Pour le modèle simplifié de câble pesant élastique, la tension varie le long du câble (Eq.(2.8)). La contrainte de tension maximale doit donc s'appliquer à la valeur maximale de la tension dans le câble. L'Eq.(2.8) implique que la tension est maximale au point le plus haut du câble, tel que discuté à la section 2.5.1. Distinguons trois cas.

- B_i plus haut que A_i ($\tan \beta_{0i} > 0$) : ce cas correspond à un point de sortie de câble situé au bas de l'espace de travail, ou tout du moins en dessous de la plate-forme pour la pose considérée. Le point le plus haut du câble, auquel la tension est la plus élevée, est le point B_i . D'après l'Eq. (3.17) la tension maximale est donc dans ce cas :

$$\tau_{imax} = \tau_{li} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \left(\tau_{li_x} \tan \beta_{0i} + \frac{\rho_0 g L_i}{2} \right)^2} \quad (3.57)$$

3.3. Capacité à générer des torseurs d'effort

- B_i plus bas que A_i ($\tan \beta_{0i} < 0$) : dans ce deuxième cas, la tension la plus importante se trouve au point A_i , et d'après l'Eq. (3.39), l'expression de la tension maximale est de la forme :

$$\tau_{imax} = \tau_{0i} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \left(-\tau_{li_x} \tan \beta_{0i} + \frac{\rho_0 g L_i}{2}\right)^2} \quad (3.58)$$

- B_i et A_i à la même altitude ($\tan \beta_{0i} = 0$) : dans ce cas les tensions en A_i et B_i sont identiques et maximales :

$$\tau_{imax} = \tau_{0i} = \tau_{li} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \left(\frac{\rho_0 g L_i}{2}\right)^2} \quad (3.59)$$

Ces trois expressions de la tension maximale peuvent s'écrire sous la forme d'une expression unifiée. Ainsi, quelle que soit l'altitude de B_i par rapport à A_i :

$$\tau_{imax} = \sqrt{\tau_{li_x}^2 + \left(\tau_{li_x} |\tan \beta_{0i}| + \frac{\rho_0 g L_i}{2}\right)^2} \quad (3.60)$$

Afin de déterminer l'expression de τ_{li} correspondant à la tension maximale admissible τ_{max} dans le câble, appelée $\tau_{li_{xmax}}$ on élève au carré cette dernière équation. On obtient une équation du second degré en $\tau_{li_{xmax}}$. Le déterminant Δ s'écrit :

$$\Delta = -\rho_0^2 g^2 L_i^2 + 4\tau_{max}^2 + 4 \tan^2 \beta_{0i} \tau_{max}^2 \quad (3.61)$$

Étant donné le critère de validité du modèle, il paraît naturel de choisir une tension maximale admissible dans les câbles τ_{max} supérieure à $\rho_0 g L_i$, quelque soit la pose considérée (dans l'espace de travail) et pour tous les câbles ($i = 1 \dots m$). Ainsi, τ_{max}^2 est supérieur à $\rho_0^2 g^2 L_i^2$ et le déterminant Δ est toujours positif. Les expressions de $\tau_{li_{xmax}}$ en fonction de τ_{max} qui en résultent ont la forme :

$$\tau_{li_{xmax}} = \frac{-\rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 + \tan^2 \beta_{0i})} \quad (3.62)$$

Sachant que $-\rho_0 g L_i < 0$, la solution suivante est toujours négative :

$$\tau_{li_{xmax}} = \frac{-\rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| - \sqrt{\Delta}}{2(1 + \tan^2 \beta_{0i})} \quad (3.63)$$

De plus, étant donné que l'on considère $\tau_{max}^2 > \rho_0^2 g^2 L_i^2$, on a également :

$$\sqrt{4\tau_{max}^2 \tan^2 \beta_{0i}} > \rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| \quad (3.64)$$

et étant donné que $-\rho_0^2 g^2 L_i^2 + 4\tau_{max}^2 > 0$, on a :

$$\sqrt{\Delta} > \rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| \quad (3.65)$$

La solution suivante de τ_{li_x} est donc positive :

$$\tau_{li_{xmax}} = \frac{-\rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| + \sqrt{\Delta}}{2(1 + \tan^2 \beta_{0i})} \quad (3.66)$$

Ainsi, l'inégalité rendant compte d'une contrainte de tension maximale admissible τ_{max} donnée s'écrit pour le câble i :

$$\tau_{i_{x+}} + \sum_{q=1}^k \eta_q v_{qi} \leq \frac{-\rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| + \sqrt{\Delta}}{2(1 + \tan^2 \beta_{0i})} \quad (3.67)$$

3.3.2.3 Contrainte de tension minimale

Comme nous l'avons vu à la section 2.5.1, la tension minimale se trouve au point le plus bas du câble. L'expression d'une contrainte de tension minimale peut être déterminée de la même manière que celle de tension maximale. En effet, quelle que soit l'altitude du point B_i par rapport au point A_i la tension minimale dans le câble i s'exprime par :

$$\tau_{imin} = \sqrt{\tau_{i_{x+}}^2 + \left(-\tau_{i_{x+}} |\tan \beta_{0i}| + \frac{\rho_0 g L_i}{2} \right)^2} \quad (3.68)$$

Le déterminant Δ de l'équation du second degré obtenue en élevant au carré l'Eq. (3.68) n'est cette fois-ci pas toujours positif :

$$\Delta = -\rho_0^2 g^2 L_i^2 + 4\tau_{min}^2 + 4 \tan^2 \beta_{0i} \tau_{min}^2 \quad (3.69)$$

Il est positif si la tension minimale admissible τ_{min} choisie est telle que :

$$\tau_{min}^2 \geq \frac{\rho_0^2 g^2 L_i^2}{4(1 + \tan^2 \beta_{0i})} \quad (3.70)$$

$$\iff \tau_{min} \geq \frac{\rho_0 g L_i \cos \beta_{0i}}{2} \quad (3.71)$$

$$\iff \tau_{min} \geq \frac{\rho_0 g B_{i_x}}{2} \quad (3.72)$$

Si cette condition est remplie pour le câble i , la contrainte de tension minimale doit être prise en compte pour le câble en question. Son expression est alors :

$$\tau_{i_{x+}} + \sum_{q=1}^k \eta_q v_{qi} \geq \frac{\rho_0 g L_i |\tan \beta_{0i}| + \sqrt{-\rho_0^2 g^2 L_i^2 + 4\tau_{min}^2 + 4 \tan^2 \beta_{0i} \tau_{min}^2}}{2(1 + \tan^2 \beta_{0i})} \quad (3.73)$$

Si par contre la condition de l'Eq. (3.72) n'est pas respectée, cela signifie que pour la pose considérée, la tension minimale dans le câble i ne peut jamais atteindre la valeur τ_{min} . La tension minimale dans le câble sera toujours supérieure à τ_{min} . La contrainte de tension minimale n'est dans ce cas pas utile.

Cependant, si le câble est dans une situation de « câble pendant » (voir section 2.5.2), la tension minimale du câble i est égale à $\tau_{i_{x+}}$ (voir section 2.5.1). D'après la Fig. 3.2, le câble est pendant quand τ_{i_z} et τ_{0_z} sont toutes les deux positives. D'après les Eqs. (3.17) et (3.39) cette situation se produit si :

$$\tau_{i_{x+}} \leq \frac{\rho_0 g L_i}{2 \tan \beta_{0i}}, \quad (\tan \beta_{0i} \neq 0) \quad (3.74)$$

Dans ce cas, la contrainte sur la tension minimale s'écrit :

$$\tau_{i_x+} + \sum_{q=1}^k \eta_q v_{qi} \geq \tau_{min} \quad (3.75)$$

3.3.2.4 Contraintes sur les « câbles pendants »

Comme nous l'avons vu dans la section 2.5.2, sous l'effet de sa propre masse, un câble peut passer sous le point d'attache B_i de la plate-forme (dans le cas des robots suspendus) produisant ainsi un effort orienté vers le bas sur celle-ci. Dans certaines applications, ce type de situation peut être préjudiciable à la réalisation d'une tâche ou tout simplement au bon fonctionnement du robot. D'après la section 3.3.2.3 (Eq. (3.74)), afin d'éviter que le câble i soit « pendant », il faut que :

$$\tau_{i_x+} + \sum_{q=1}^k \eta_q v_{qi} \geq \left| \frac{\rho_0 g L_i}{2 \tan \beta_{0i}} \right| \text{ et } \tan \beta_{0i} \neq 0. \quad (3.76)$$

3.3.2.5 Contraintes sur la validité du modèle simplifié de câble pesant

Le modèle considéré dans ce chapitre est basé sur certaines simplifications permettant d'approximer le comportement réel du câble. Il est valide à condition que l'équation suivante soit vérifiée (voir section 3.1.2) :

$$\tau_{i_x} \geq \rho_0 g L_i \quad (3.77)$$

En remplaçant τ_{i_x} par l'expression représentant l'ensemble des solutions au problème de l'équilibre statique de la plate-forme, on obtient la contrainte suivante :

$$\tau_{i_x+} + \sum_{q=1}^k \eta_q v_{qi} \geq \rho_0 g L_i \quad (3.78)$$

Notons que même si cette contrainte n'est pas vérifiée, le robot peut être capable d'équilibrer le torseur d'efforts extérieur \mathbf{f}_e considéré. Il peut cependant être nécessaire d'utiliser le modèle de caténaire élastique présenté à la section 2.3 afin de vérifier l'équilibre statique.

3.3.2.6 Regroupement des contraintes dans un système d'inégalités

Les contraintes présentées dans cette partie sont linéaires en les scalaires η_q de l'Eq.(3.54) et peuvent donc s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\eta} \leq \mathbf{c} \quad (3.79)$$

où $\boldsymbol{\eta}$ est le vecteur de dimension k composé des η_q . Chaque ligne de ce système d'inégalités correspond à l'une des contraintes présentées aux sections 3.3.2.1 à 3.3.2.5. Par exemple, pour la contrainte de validité du modèle (section 3.3.2.5), la ligne correspondante du système (3.79) s'écrit pour le câble i :

$$\left[v_{1i} \quad \cdots \quad v_{ki} \right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_k \end{bmatrix} \geq \rho_0 g L_i - \tau_{i_x+} \quad (3.80)$$

Comme dans le cas d'un modèle de câble sans masse, on peut utiliser la méthode d'élimination de Fourier-Motzkin afin de vérifier s'il existe un vecteur $\boldsymbol{\eta}$ vérifiant l'Eq. (3.79). Si tel est le cas, le torseur d'efforts extérieur \boldsymbol{f}_e peut être équilibré en respectant les contraintes considérées.

3.4 Génération du zonotope des torseurs admissibles et comparaison au modèle de câble sans masse

Le modèle simplifié de câble pesant permet d'écrire l'équilibre statique sous la forme du système linéaire de l'Eq. (3.29). Cette nouvelle formulation simplifie l'étude des robots à câbles de grande dimension pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable.

Nous pouvons ainsi caractériser, pour une pose donnée d'un robot à câbles, l'ensemble des torseurs admissibles. En effet, étant données des limites minimales et maximales des tensions dans les câbles, il est possible de déterminer les frontières du polytope représentant l'ensemble des torseurs admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des torseurs pouvant être appliqués sur la plate-forme par les câbles tout en gardant des tensions admissibles. A cette fin, la méthode présentée ici se base sur les travaux de [24] et [50].

Dans un premier temps nous présenterons une méthode permettant de déterminer les frontières de l'ensemble des torseurs admissibles (section 3.4.1). Dans un second temps (section 3.4.2), deux exemples de robots à câbles, un suspendu et l'autre pleinement contraint, sont considérés afin de réaliser une comparaison des résultats obtenus avec d'une part le modèle de câble sans masse non-élastique et d'autre part le modèle simplifié de câble pesant.

3.4.1 Description de la méthode d'obtention du zonotope des torseurs admissibles

Pour une pose donnée de la plate-forme, on appelle *l'ensemble des torseurs admissibles* l'ensemble des torseurs pouvant être équilibrés par les câbles avec des limites de tensions admissibles.

Lorsqu'un modèle de câble non-élastique et sans masse est considéré, pour une pose donnée, le torseur d'efforts \boldsymbol{f} appliqué sur la plate-forme par les câbles, est obtenu par la relation linéaire suivante :

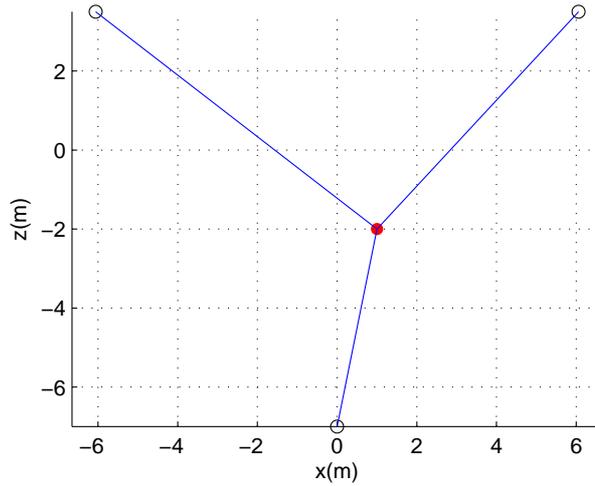
$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{f} \quad (3.81)$$

Ainsi, pour un intervalle de tensions admissibles $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ pour chaque câble, l'ensemble des torseurs admissibles Z s'écrit :

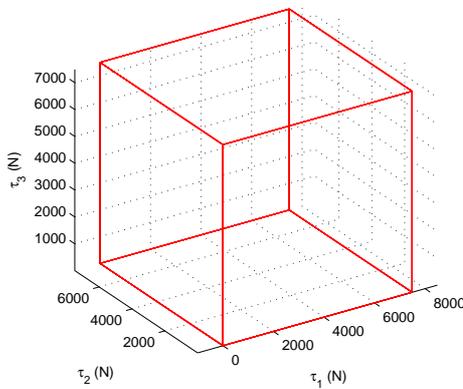
$$Z = \{\boldsymbol{f}_e \mid \exists \boldsymbol{\tau} \in [\tau_{min}, \tau_{max}] \text{ t.q. } -\boldsymbol{W}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (3.82)$$

Dans le cas du robot plan à 3 câbles et 2 DDL montré à la Fig.3.8(a), le cube (en supposant que les limites de tensions sont les mêmes pour tous les câbles) représentant l'ensemble des tensions admissibles est présenté à la Fig. 3.8(b). La Fig. 3.8(c) présente quant à elle l'image de ce cube dans l'espace des torseurs de la plate-forme.

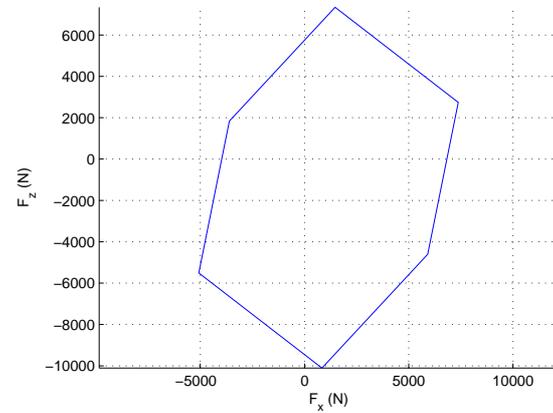
Pour un robot à m câbles et n DDL, Bouchard [25] remarque que l'image de l'hypercube des tensions admissibles par la matrice \boldsymbol{W} est un polytope particulier appelé zonotope. Une caractérisation des facettes de ce zonotope a permis à Gouttefarde [50] d'écrire les



(a) Schéma d'un robot à 3 câbles plan pleinement contraint



(b) Cube des tensions admissibles



(c) Zonotope des torseurs admissibles

FIGURE 3.8 - *Cube des tensions admissibles et son image dans l'espace des torseurs sur la plate-forme pour l'exemple de robot plan à 3 câbles et 2 DDL de la Fig. 3.8(a).*

conditions d'appartenance d'un torseur à l'ensemble des torseurs admissibles sous la forme d'un système d'inégalités linéaires :

$$Z = \{\mathbf{f}_e \mid \mathbf{C}\mathbf{f}_e \leq \mathbf{d}\} \quad (3.83)$$

En considérant le modèle simplifié de câble pesant, l'ensemble des torseurs admissibles s'écrit :

$$Z = \{\mathbf{f}_e \mid \exists \boldsymbol{\tau}_x \in [\boldsymbol{\tau}_{xmin}, \boldsymbol{\tau}_{xmax}] \text{ t.q. } -(\mathbf{W}_x \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{f}_{cab}) + \mathbf{f}_e = \mathbf{0}\} \quad (3.84)$$

où, tel que présenté à la section 3.3.2, les limites τ_{xmin} et τ_{xmax} sur le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ ne sont pas les mêmes pour tous les câbles et dépendent de la pose de la plate-forme. L'image de l'ensemble des tensions admissibles est alors obtenue de la même manière que pour le modèle de câble sans masse à l'Eq. (3.83). D'après l'Eq. (3.29), on obtient :

$$Z = \{\mathbf{f}_e \mid \mathbf{C}(\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_{cab}) \leq \mathbf{d}\} \quad (3.85)$$

soit :

$$Z = \{\mathbf{f}_e \mid \mathbf{C}\mathbf{f}_e \leq \mathbf{d}'\} \quad (3.86)$$

où :

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} + \mathbf{C}\mathbf{f}_{cab} \quad (3.87)$$

Ainsi, vérifier si les câbles peuvent équilibrer un torseur donné \mathbf{f}_e en une pose donnée, revient à vérifier si ce torseur vérifie le système d'inégalités (3.86).

La différence majeure dans la description de ce polytope, par rapport à celle obtenue pour un modèle de câble sans masse, réside dans la détermination des limites de tensions exprimées en fonction des composantes τ_{i_x} (section 3.3.2).

3.4.2 Exemples et comparaison au modèle de câble sans masse

Afin de pouvoir représenter facilement le zonotope des torseurs admissibles, nous considérons uniquement deux robots plans à 2 DDL avec une plate-forme ponctuelle. Le zonotope peut ainsi être représenté dans un plan, c'est un polygone convexe. Nous proposons d'étudier un robot suspendu et un robot pleinement contraint.

Afin d'évaluer les capacités de ces robots et de pouvoir comparer le modèle de câble sans masse non-élastique au modèle simplifié de câble pesant, nous utilisons comme critère la force maximale admissible dans toutes les directions. La valeur de cette force correspond au rayon r_{max} du plus grand cercle centré en 0 (torseur nul) inclus dans le zonotope Z . La ligne j du système d'inégalités de l'Eq. (3.86) représente un demi-plan délimité par la droite D_j . Le rayon maximal correspond à la distance minimale entre les droites D_j et l'origine du repère :

$$r_{max} = \min_{j=1..p} \left(\frac{d'_j}{\|\mathbf{c}_j\|} \right) \quad (3.88)$$

où d'_j correspond à la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur \mathbf{d}' , et \mathbf{c}_j la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice \mathbf{C} . Il faut noter que si l'un des d'_j est négatif, cela signifie que l'origine (torseur nul) n'est pas inclus dans le zonotope des torseurs d'efforts admissibles.

Robot plan à 4 câbles et 2 DDL Les coordonnées des points de sortie des câbles sont données au Tab. 3.5. La Fig. 3.9(a) présente un schéma de ce robot. Le câble utilisé pour ce robot est celui décrit au Tab. 2.8.

TABLEAU 3.5 - Robot plan à 4 câbles et 2 DDL : coordonnées des points de sortie de câbles exprimées dans le repère global.

| | x (m) | y (m) | z (m) |
|----------------|-------|-------|-------|
| \mathbf{a}_1 | 10 | 0 | 10 |
| \mathbf{a}_2 | 10 | 0 | -10 |
| \mathbf{a}_3 | -10 | 0 | 10 |
| \mathbf{a}_4 | -10 | 0 | 10 |

3.4. Génération du zonotope des torseurs admissibles et comparaison au modèle de câble sans masse

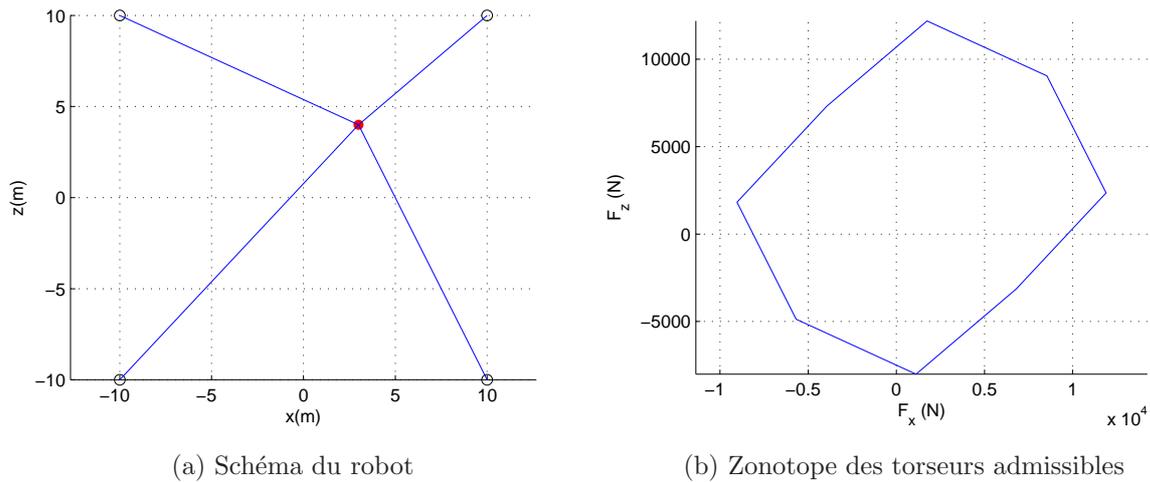


FIGURE 3.9 - Schéma du robot plan à 4 câbles et 2 DDL et représentation du zonotope des torseurs admissibles pour la pose considérée.

Sur un espace de travail, allant de $-7,5m$ à $7,5m$ suivant les axes x et z discrétisé avec un pas de $0,2m$, nous avons calculé la force maximale admissible dans n'importe quelle direction dans le plan des forces F_x et F_z . Les résultats pour le modèle simplifié de câble pesant sont présentés à la Fig. 3.10(a). Les erreurs relatives présentées à la Fig. 3.10(b) sont déterminées pour une pose donnée par l'équation suivante :

$$\varepsilon_{r_{max}} = \frac{r_{max} - r_{max0}}{r_{max0}} \quad (3.89)$$

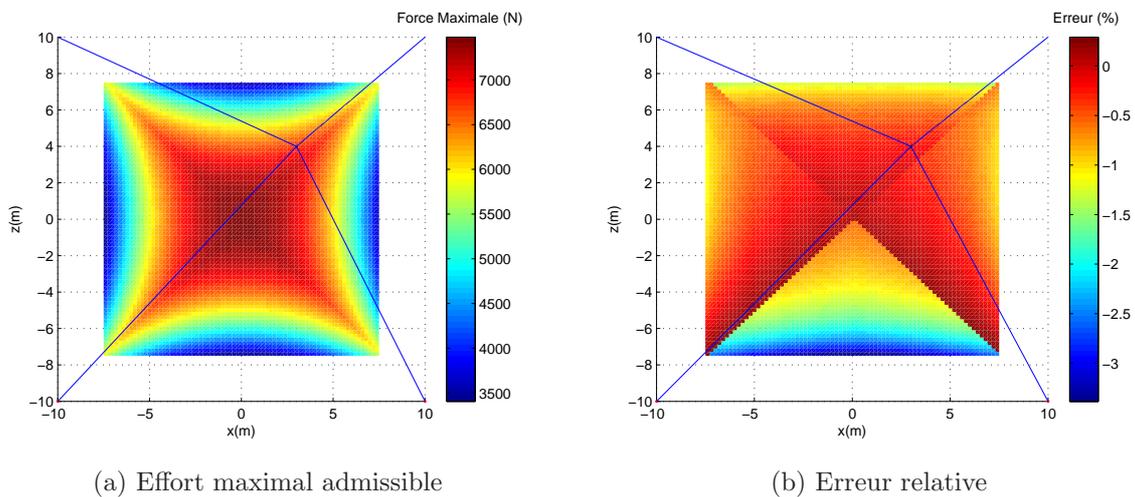


FIGURE 3.10 - Force maximale admissible, et erreur relative par rapport au modèle de câble sans masse pour le robot plan à 4 câbles et 2 DDL.

où r_{max0} est la force maximale obtenue avec le modèle de câble sans masse non-élastique, et r_{max} la force maximale obtenue en utilisant le modèle simplifié de câble pesant. On peut remarquer à la Fig. 3.10(b) que sur une grande partie de l'espace de travail l'erreur est assez faible ($< 1\%$). Toutefois, on remarque une augmentation de cette erreur relative dans deux parties de l'espace de travail :

- sur les cotés et le haut de l'espace de travail : dans ces parties, la diminution de la capacité à générer un torseur avec des câbles pesants vient de la limite de tension maximale, qui du fait de la masse des câbles est atteinte plus rapidement.
- dans la partie basse de l'espace de travail : ici, la diminution de la force maximale disponible est due à la diminution des tensions dans les câbles du bas. En effet, dans cette partie, ces câbles sont presque horizontaux et la limite de tension minimale due au critère de validité du modèle (voir section 3.3.2.5) augmente. Ceci entraîne une diminution de la force maximale admissible. Cette fois-ci, c'est la limite basse de tension qui limite la force disponible.

Notons que le fait d'avoir une configuration de robot pleinement contrainte permet d'augmenter les tensions dans les câbles en modifiant la distribution des tensions (par l'ajout d'une combinaison linéaire des vecteurs formant une base noyau de \mathbf{W}_x). Ceci limite les effets de la masse des câbles. L'erreur relative maximale sur l'ensemble de l'espace de travail est de 3,39%. Cette erreur reste donc assez faible.

Robot plan suspendu à 3 câbles et 2 DDL Dans ce deuxième exemple (Fig. 3.11(a), Tab. 3.6 et Tab. 2.8.) l'étude de la capacité du robot à générer une force doit être réalisée différemment. En effet, le robot considéré ici est un robot à câbles suspendu, et nécessite donc une charge à la plate-forme afin de pouvoir garder les câbles sous tension. Ce robot n'étant pas pleinement contraint, il est par exemple impossible d'équilibrer un effort extérieur dirigé vers le haut. Le zonotope des torseurs admissibles est donc décalé, et ne contient plus l'origine (force nulle). Nous avons décidé d'étudier les forces maximales admissibles dans toutes les directions en addition de la charge supportée (plate-forme à vide ou chargée). Ainsi le cercle de rayon maximal recherché pour une pose donnée sera centré au « point » de coordonnées $[0 \ -m_{PF}g]$, où m_{PF} est la valeur de la masse ponctuelle. Son expression devient :

$$r_{max} = \min_{j=1\dots p} \left(\frac{c_{j2}m_{PF}g + d'_j}{\|\mathbf{c}_j\|} \right) \quad (3.90)$$

où c_{jk} est l'élément de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{C} .

Les forces maximales admissibles dans les 2 cas de charge ($m_{PF} = 30kg$ et $m_{PF} = 300kg$) sont présentées à la Fig. 3.12. Les erreurs relatives associées sont présentées à la Fig. 3.13.

TABLEAU 3.6 - Robot plan à 3 câbles et 2 ddl : coordonnées des points de sortie de câbles exprimés dans le repère global.

| | x (m) | y (m) | z (m) |
|----------------|-------|-------|-------|
| \mathbf{a}_1 | 0 | 0 | 0 |
| \mathbf{a}_2 | 5 | 0 | 0 |
| \mathbf{a}_3 | 15 | 0 | 0 |

Comme dans le cas de l'étude réalisée à la section 3.2, on peut remarquer sur ces figures que la différence entre les deux modèles est beaucoup plus importante dans le cas d'une faible charge. En effet, l'erreur relative maximale obtenue sur l'espace de travail étudié est supérieure 50% dans le cas où la plate-forme est à vide, alors qu'elle est environ 10 fois

3.5. Conclusions

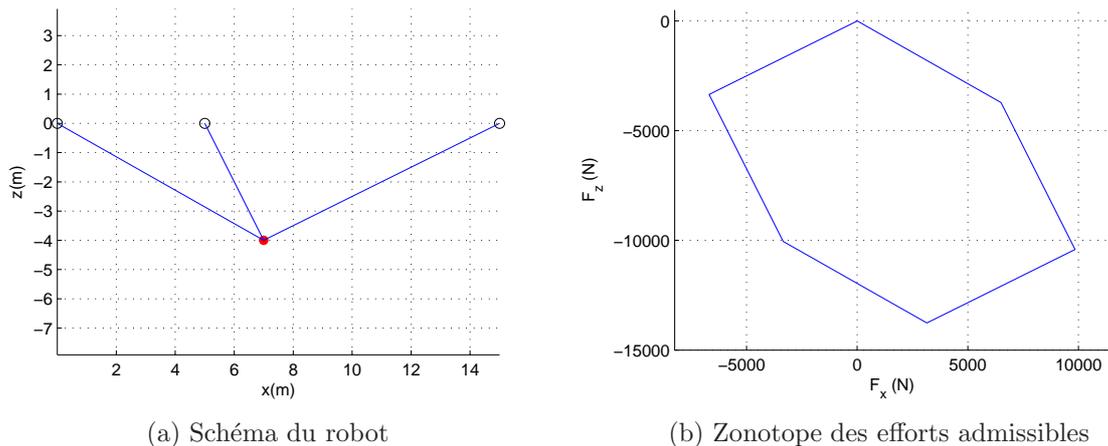


FIGURE 3.11 - Schéma du robot plan à 3 câbles et 2 DDL et représentation du zonotope des forces admissibles pour la pose considérée.

plus faible lorsque la plate-forme est chargée. Ceci s'explique à nouveau par le fait que lorsque les tensions dans les câbles sont importantes, la masse propre du câble influence son comportement dans une moindre mesure.

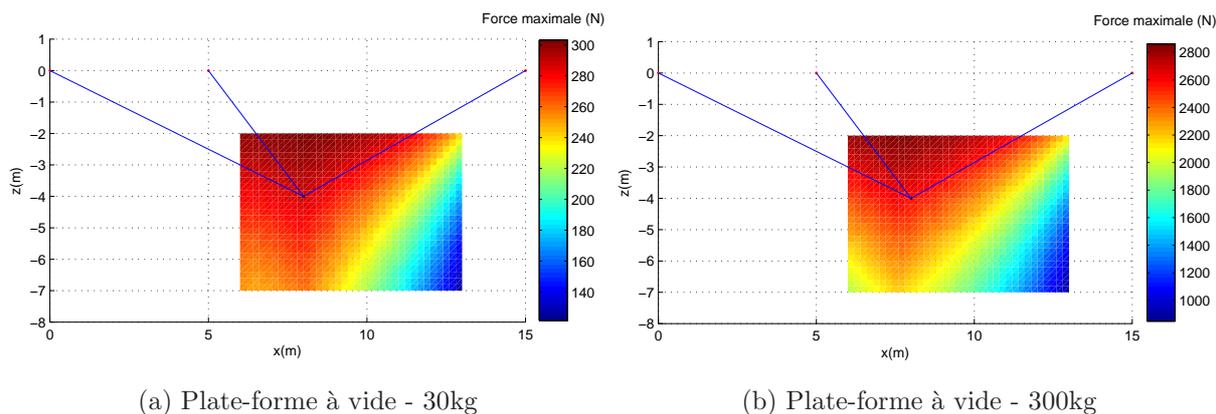


FIGURE 3.12 - Force maximale admissible pour le robot plan suspendu à 3 câbles et 2 DDL.

Pour les deux exemples étudiés, le robot de type suspendu semble plus fortement affecté par la masse des câbles que le robot pleinement contraint. Dans le cas du robot pleinement contraint, la possibilité de générer des efforts internes en augmentant les tensions dans les câbles permet de limiter l'effet de la déflexion des câbles. Pour le robot suspendu, cette capacité à générer des efforts internes est beaucoup plus limitée et varie fortement avec la charge transportée. Il est probable que ces observations puissent être transposées aux robots à câbles à 6 DDL (pleinement contraints et suspendus).

3.5 Conclusions

Basé sur l'hypothèse que le profil du câble ne s'éloigne pas trop de la corde $A_i B_i$, certaines simplifications dans les équations du modèle de caténaire élastique peuvent être

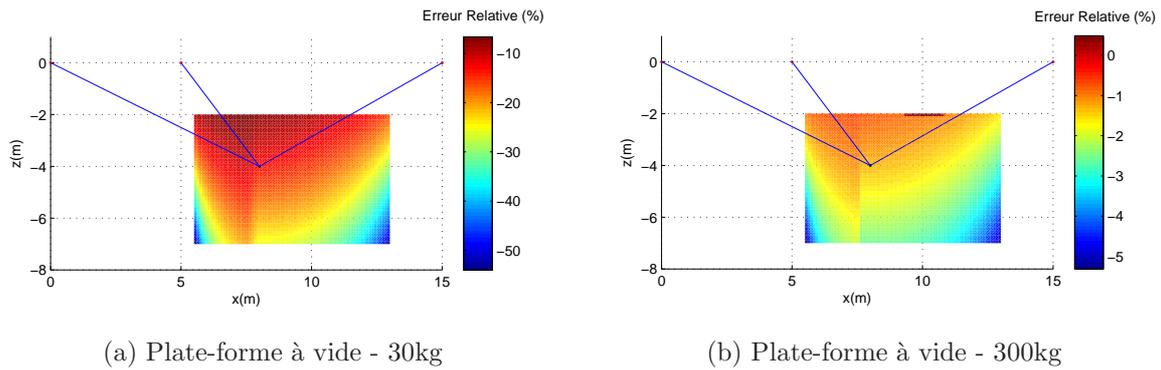


FIGURE 3.13 - Erreurs relatives sur la force maximale admissible pour le robot plan suspendu à 3 câbles et 2 DDL.

réalisées. Quand le critère de validité (Eq. (3.11)) de ces simplifications est vérifié, elles permettent :

- d'obtenir une expression explicite du profil du câble (Eq. (3.7)) ;
- de découpler partiellement le problème géométrique inverse. Les tensions et les longueurs des câbles peuvent être déterminées séparément. Les tensions doivent cependant être déterminées préalablement au calcul des longueurs des câbles ;
- d'obtenir une relation linéaire entre les composantes τ_{l_x} et τ_{l_z} de la force appliquée par la plate-forme sur le câble i , ce qui entraîne :
 - une diminution par 2 du nombre d'inconnues de l'équilibre statique ;
 - l'expression de l'équilibre statique de la plate-forme sous la forme d'un système carré pour $m = n$.

Cette expression de l'équilibre statique de la plate-forme permet d'éviter la résolution d'un système d'équations non-linéaires couplées nécessaire dans le cas du modèle de caténaire élastique. Ainsi, le système d'équations décrivant l'équilibre statique de la plate-forme avec le modèle simplifié de câble pesant élastique s'apparente fortement au cas du modèle de câble non pesant. Une étude sur les erreurs résultant de la simplification effectuée indique que le modèle simplifié de câble donne des résultats très proches du modèle de caténaire élastique, à condition que le critère de validité soit respecté.

Le modèle simplifié de câble pesant permet également de caractériser l'ensemble des torseurs admissibles d'un robot à câbles en une pose donnée, en utilisant une méthode similaire à celle utilisée pour le modèle de câble sans masse. Une comparaison des zonotopes des torseurs d'efforts admissibles obtenues avec le modèle de câble sans masse et le modèle simplifié de câble pesant a été faite. Le critère de comparaison utilisé est la force maximale admissible dans toutes les directions. Les résultats obtenus pour deux exemples de robots à câbles montrent que les robots suspendus semblent beaucoup plus affectés par l'utilisation d'un modèle de câble pesant, au moins pour les exemples considérés. Ceci est probablement dû à la capacité limitée des robots suspendus à générer des efforts internes dans la plate-forme permettant d'augmenter les tensions dans les câbles.

Chapitre 4

Détermination de la configuration optimale pour un robot suspendu à 8 câbles et 6 DDL de grande dimension

Sommaire

| | | |
|-----|---|-----|
| 4.1 | Cadre de l'étude | 80 |
| 4.2 | Définition de la configuration optimale | 82 |
| 4.3 | Description générale de la procédure de détermination de la configuration optimale | 88 |
| 4.4 | Détermination de l'ensemble des configurations à étudier | 89 |
| 4.5 | Sélection des arrangements de câbles sur critères géométriques | 98 |
| 4.6 | Discrétisation des paramètres géométriques et vérification de l'équilibre statique de la plate-forme et des collisions entre câbles | 100 |
| 4.7 | Evaluation, vérification finale et obtention de la configuration optimale | 104 |
| 4.8 | Application aux dimensions du démonstrateur du projet CoGiRo | 104 |
| 4.9 | Conclusions | 111 |

Ce chapitre décrit une méthode de conception de robots parallèles à câbles suspendus de grande dimension installés dans une pièce rectangulaire. Cette méthode permet de déterminer, en quasi-statique, la meilleure configuration à 8 câbles pour une application de type « pick & place » à 6 DDL en considérant le modèle simplifié de câble pesant. Rappelons que nous appelons configuration d'un robot parallèle à câbles, la donnée d'une géométrie des points de sortie des câbles, d'une géométrie des points d'attache sur la plate-forme et de l'arrangement des câbles entre ces deux ensembles de points. Le critère d'optimisation utilisé est basé sur la capacité d'une configuration donnée à accepter un décalage de la position du centre de masse de la plate-forme chargée. Une vérification des collisions entre les câbles permet d'éliminer au préalable un certain nombre de configurations non-réalisables. Un exemple d'application de cette méthode est finalement présenté.

4.1 Cadre de l'étude

4.1.1 Type de robots et application visée

Les applications visées dans cette étude sont de type « pick- and-place » de fortes charges sur de grandes distances. Nous nous intéressons pour ce type d'application aux robots parallèles à câbles suspendus. Comme nous l'avons vu à la section 1.1.1, ce type de robot fait référence aux mécanismes possédant m câbles pour contrôler les n degrés de liberté de la plate-forme mobile ($m \geq n$) et pour lesquels les points de sortie des câbles sont situés au dessus de l'espace de travail. Les câbles sont maintenus tendus grâce à la gravité agissant comme un câble virtuel supplémentaire tirant verticalement vers le bas avec une tension constante. La Figure 4.1 présente un exemple de robot suspendu à 6 câbles et 6 DDL.

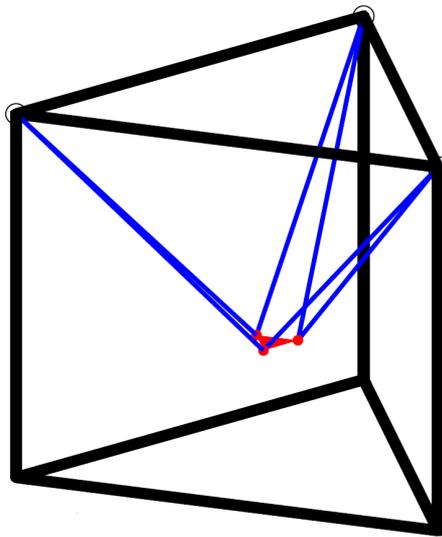
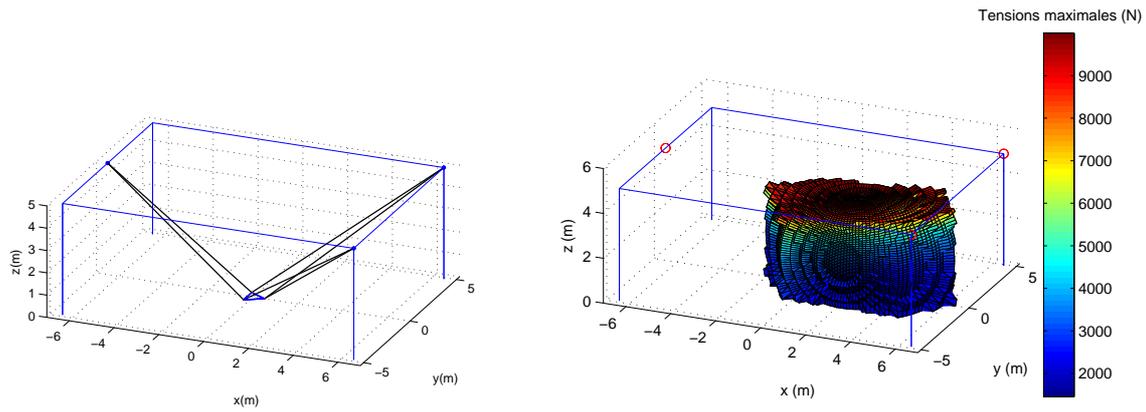


FIGURE 4.1 - *Un exemple de robot suspendu à 6 câbles et 6 DDL.*

Très peu d'études ont été réalisées sur le choix de la géométrie des points de sortie et d'attache des câbles et de l'arrangement des câbles entre ces deux ensembles de points dans le cas des robots à câbles suspendus. La principale géométrie qui a été étudiée est celle d'un des premiers robots à câbles : le Robocrane [3]. Les points de sortie des 6 câbles de ce robot à 6DDL, sont positionnés deux à deux aux sommets d'un triangle équilatéral. Il paraît assez naturel d'utiliser 6 câbles pour les robots suspendus à 6 DDL. En effet, ce nombre de câbles est nécessaire et suffisant au contrôle de tous les DDL de la plate-forme grâce à la gravité qui permet de garder les câbles sous tension. Deux géométries des points de sortie des 6 câbles viennent naturellement à l'esprit : le triangle et l'hexagone. Le triangle avec 2 sorties de câbles par sommet est le plus utilisé car il permet généralement d'obtenir des rotations de la plate-forme plus importantes. En effet, dans le cas d'une géométrie hexagonale (des points de sortie et des points d'attache), dans la position centrale de référence, les axes des câbles sont presque concourants empêchant ainsi la rotation autour de l'axe vertical z .

Toutefois, une telle configuration n'est pas forcément adaptée lorsqu'on cherche à travailler dans un espace parallélépipédique. En effet, tel qu'illustré à la Fig. 4.2, l'empreinte au sol d'une configuration possédant une géométrie des points de sortie des câbles triangulaire se trouve être beaucoup plus grande que la zone de travail. Ainsi, si on souhaite



(a) Représentation d'un robot de type Robo- (b) Espace de travail statique à orientation constante crane

FIGURE 4.2 - Représentation d'un robot type Robocrane installé dans une pièce rectangulaire et son espace de travail statique à orientation constante.

installer un tel robot dans une pièce rectangulaire (hangar, entrepôt...), il serait plus intéressant d'utiliser une géométrie des points de sortie des câbles rectangulaire afin d'optimiser l'empreinte au sol du robot. Dans ce cas, il est assez naturel de souhaiter utiliser 8 câbles pour des raisons de symétrie des géométries des points de sortie et d'attache.

Dans les travaux présentés dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux robots parallèles à câbles suspendus qui possèdent plus de câbles que de degrés de liberté de la plate-forme mobile. La présente étude a pour objectif la détermination des configurations de robots suspendus à 8 câbles et 6 DDL permettant de couvrir une grande partie d'une zone ayant une empreinte au sol rectangulaire. On considèrera d'ailleurs dans cette étude que le robot est installé dans une pièce rectangulaire possédant des murs et un plafond. Les dimensions de cette pièce sont génériques (Fig. 4.3) afin que l'étude réalisée ici puisse être transposée à n'importe quelle pièce rectangulaire.

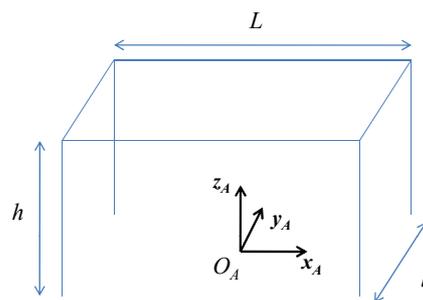


FIGURE 4.3 - Schéma de la pièce rectangulaire.

4.1.2 Contraintes de symétrie sur les configurations étudiées

Afin de limiter le nombre de paramètres décrivant les configurations étudiées et ainsi diminuer le nombre de configurations considérées, nous introduisons des contraintes sur la géométrie du robot et l'arrangement des câbles. Nous nous limitons dans cette étude à

l'évaluation des configurations présentant une symétrie centrale. En effet, cette contrainte de symétrie permet d'obtenir des configurations présentant des comportements homogènes sur l'ensemble de l'espace de travail désiré. Cette contrainte s'applique sur les différents éléments définissant la configuration d'un robot à câbles.

- Géométrie des points de sortie des câbles : tout point de sortie positionné dans la pièce possèdera un point de sortie symétrique par rapport au centre de symétrie de la géométrie des points de sortie des câbles. Ce centre de symétrie sera explicité dans la partie de ce chapitre décrivant les différentes possibilités de points de sortie des câbles (section 4.4.1). De plus, cette symétrie devra également s'appliquer au nombre de câbles sortant d'un point de sortie. Ainsi, si d'un point sortent k câbles, de son point symétrique devront également sortir k câbles.
- Géométrie des points d'attache sur la plate-forme : comme pour les points de sortie des câbles, tous les points d'attache des câbles sur la plate-forme formeront une figure symétrique. Cette symétrie s'appliquera également au nombre de câbles attachés en chaque point.
- Arrangement des câbles : l'arrangement des câbles respectera les symétries précédentes. Ainsi, si un câble sort du point A_k pour aller au point B_j , le câble (ou un des câbles) sortant du point A_k^s (symétrique du point A_k) sera attaché au point B_j^s (symétrique du point B_j). Il faut noter que tant que la configuration n'est pas complètement définie, le câble sortant du point A_i n'est pas forcément considéré comme étant connecté au point B_i .

Cette contrainte de symétrie centrale appliquée à la géométrie du robot et à l'arrangement des câbles permet de simplifier fortement l'étude. En effet, elle permet de diminuer considérablement le nombre de configurations à considérer.

4.2 Définition de la configuration optimale

Il n'est jamais facile de comparer différents robots car le résultat de la comparaison est directement dépendant du critère utilisé. Ainsi, une configuration de robot peut présenter un espace de travail à orientation constante très étendu mais, en contrepartie, être incapable de réaliser de grandes rotations. De la même manière, un robot peut transporter de très lourdes charges, mais dans un espace limité. Il est donc nécessaire de choisir un critère adapté permettant de sélectionner parmi les nombreuses configurations de robots à câbles laquelle est « optimale » pour la tâche à réaliser. Cette partie s'attache à décrire ce que nous considérerons être une « configuration optimale ». Le critère choisi est basé sur la capacité à admettre un décalage du centre de gravité de la plate-forme chargée. En effet, lors du transport d'une charge (typiquement une caisse ou une palette chargée) le nouveau centre de gravité de la plate-forme peut se déplacer par rapport au centre géométrique de la plate-forme.

4.2.1 Torseurs d'efforts à compenser

Une des principales applications candidates des robots à câbles suspendus est le transport de charges sur de grandes dimensions. En quasi-statique, les efforts extérieurs appliqués à la plate-forme se limitent généralement au poids de la charge transportée. En effet, pour ce type de robots travaillant sur de très grands espaces de travail, il paraît raisonnable de penser que les déplacements se font à des vitesses et accélérations assez faibles limitant ainsi les effets dynamiques. Généralement, la position du centre de masse

de la plate-forme chargée est considérée être au centre de la plate-forme O_B (centre de symétrie). Toutefois, lors de l'accroche et du transport de la charge, le centre de gravité de la plate-forme chargée peut se trouver décalé par rapport à son centre de symétrie (Fig. 4.4).

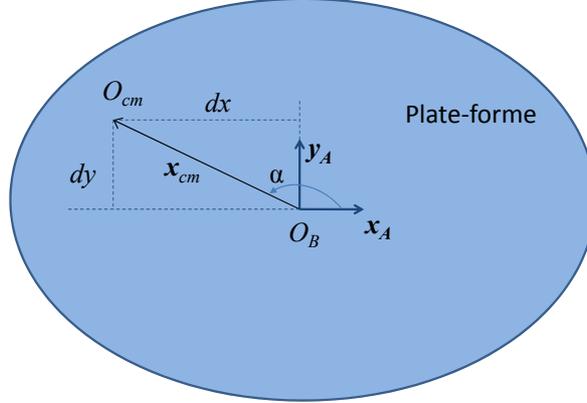


FIGURE 4.4 - Schéma de la plate-forme mobile : position du centre de masse O_{cm} par rapport au centre géométrique de la plate-forme O_B dans le plan horizontal.

Ce décalage a pour effet de changer le torseur d'efforts extérieurs que les câbles doivent équilibrer. Pour une masse transportée m_{tr} , le torseur d'efforts extérieurs \mathbf{f}_e écrit en O_B et exprimé dans le repère global \mathcal{R}_A est :

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} m_{tr}\mathbf{g} \\ m_{tr}\mathbf{g} \times \mathbf{x}_{cm} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ avec $g = 9,81m/s^2$, où \mathbf{x}_{cm} est le vecteur $\overrightarrow{O_B O_{cm}}$ dans le repère global \mathcal{R}_A , et m_{tr} la masse transportée allant de m_v (plate-forme à vide) à m_c (somme de la masse de la plate-forme et de la charge maximale). Dans l'Eq. (4.1), seule l'action du poids de la plate-forme et de la charge est considéré. Pour $\mathbf{x}_{cm} = [dx, dy, dz]^T$ on obtient un torseur des efforts extérieurs de la forme :

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{tr}g \\ m_{tr}gdy \\ -m_{tr}gdx \\ 0 \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{tr}g \\ m_{tr}gr\sin\alpha \\ -m_{tr}gr\cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (4.2)$$

où r et α sont des coordonnées cylindriques de la position de la projection du centre de masse O_{cm} sur le plan horizontal ($O_B, \mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A$) tel que présenté à la Fig. 4.4.

4.2.2 Vérification de l'inclusion de l'ensemble des torseurs désirés dans l'ensemble des torseurs admissibles

La position du centre de masse de la plate-forme chargée peut être décalée et peut donc créer un torseur d'efforts extérieurs contenant des moments suivant les axes \mathbf{x} et

4.2. Définition de la configuration optimale

\mathbf{y} (Eq. (4.2)). Il serait intéressant de savoir dans quelle mesure le robot peut accepter ce décalage, c'est-à-dire, dans quelle mesure l'équilibre statique de la plate-forme chargée reste réalisable avec des tensions admissibles dans les câbles.

Ainsi, nous décidons d'évaluer la configuration courante en terme de décalage maximal admissible du centre de masse O_{cm} par rapport au centre géométrique O_B . Cette évaluation est basée sur les travaux présentés à la section 3.3, où le zonotope des torseurs admissibles pour une pose donnée est décrit. Cet ensemble prend en compte un modèle de câble pesant. L'ensemble Z des torseurs \mathbf{f}_e admissibles pour un intervalle donné de tensions admissibles dans les câbles est défini par l'équation suivante, tel que décrit par l'Eq. (3.84) du chapitre 3 :

$$Z = \{\mathbf{f}_e \mid \exists \boldsymbol{\tau}_x \in [\boldsymbol{\tau}_{xmin}, \boldsymbol{\tau}_{xmax}] \text{ tel que } \mathbf{W}_x \boldsymbol{\tau}_x = \mathbf{f}_e - \mathbf{f}_{cab}\} \quad (4.3)$$

En utilisant la méthode décrite dans [50], il est également possible de décrire le zonotope Z sous la forme suivante (voir section 3.3) :

$$Z = \{\mathbf{f}_e \mid \mathbf{C} \mathbf{f}_e \leq \mathbf{d}'\} \quad (4.4)$$

La ligne j du système d'inégalités de l'Eq. (4.4) décrit un demi-espace délimité par l'hyperplan H_j d'équation $\mathbf{c}_j \mathbf{f}_e = d'_j$. L'ensemble des torseurs admissibles Z correspond donc à l'intersection des demi-espaces délimités par les hyperplans H_j ($j = 1 \dots p$ où p est la dimension du vecteur \mathbf{d}'). Si un torseur d'efforts \mathbf{f}_e vérifie toutes les lignes de l'inégalité (Eq. (4.4)), il fait partie du zonotope des torseurs admissibles.

Grâce à cette description de Z , nous pouvons déterminer le rayon maximal r_{max} du cercle centré en O_B (centre géométrique de la plate-forme) tel que si la projection du centre de masse de la plate-forme sur le plan $(O_B, \mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)$ est située à l'intérieur de ce cercle, le torseur d'efforts extérieurs résultant du poids de la plate-forme peut être équilibré. La Fig. 4.5 montre un tel cercle de rayon r_{max} .

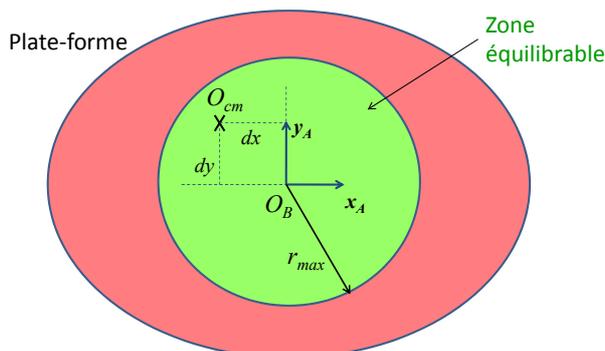


FIGURE 4.5 - Disque de rayon r_{max} représentant l'ensemble des positions de la projection sur le plan $(O_B, \mathbf{x}_A, \mathbf{y}_A)$ du centre de masse de la plate-forme pour lesquelles la charge peut être équilibrée avec des tensions admissibles.

En considérant que la masse de la plate-forme peut varier avec la charge transportée entre m_v , qui correspond à la masse de la plate-forme à vide, et m_c , qui correspond à la somme de la masse à vide et de la charge maximale admise, l'ensemble des torseurs à équilibrer a la forme d'un cône tronqué. Cet ensemble de torseurs désirés est représenté à la Fig. 4.6 dans le sous-espace (M_x, M_y, F_z) . M_x , M_y et F_z représentent respectivement

les moments autour de l'axe \mathbf{x} et de l'axe \mathbf{y} et les forces suivant l'axe \mathbf{z} dans l'espace des torseurs. Les rayons des bases de ce cône ont pour valeur $m_v gr$ et $m_c gr$ respectivement pour la base supérieure et la base inférieure. La base supérieure est située à $F_z = -m_v g$, et la base inférieure à $F_z = -m_c g$.

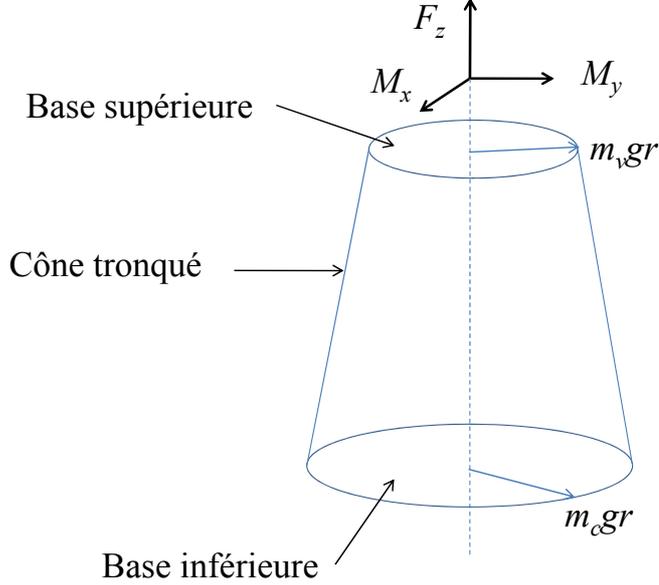


FIGURE 4.6 - Représentation de l'ensemble des torseurs d'efforts désirés dans le repère (M_x, M_y, F_z) : un cône tronqué.

Il faut donc vérifier que pour un r donné, le cône tronqué des torseurs d'efforts désirés est inclus dans le zonotope des torseurs admissibles. Le zonotope est un ensemble convexe et le cône tronqué est également convexe, il suffit donc de vérifier que les deux disques de base du cône tronqué sont inclus dans le zonotope Z . Ces deux disques sont des ensembles de dimensions 2 correspondant à l'ensemble des torseurs de la forme :

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_{tr}g \\ m_{tr}gr \sin\alpha \\ -m_{tr}gr \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi \quad (4.5)$$

où $m = m_v$ ou m_c . L'équation de l'hyperplan H_j s'écrit :

$$\{\mathbf{f}_e \mid \mathbf{c}_j \mathbf{f}_e = d'_j\} \quad \text{où } \mathbf{c}_j = [c_{j1} \ c_{j2} \ c_{j3} \ c_{j4} \ c_{j5} \ c_{j6}] \quad (4.6)$$

où \mathbf{C} et \mathbf{d}' de l'Eq. (4.4) sont de la forme :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p \end{bmatrix}$$

4.2. Définition de la configuration optimale

$$\mathbf{d}' = [d'_1 \quad \dots \quad d'_p]$$

l'Eq. (4.6) correspondant à la ligne j de l'Eq. (4.4).

L'intersection d'un de ces hyperplans H_j avec le plan dans lequel se trouve la base supérieure ($F_z = -m_v g, F_x = F_y = M_z = 0$) ou inférieure ($F_z = -m_c g, F_x = F_y = M_z = 0$) de l'ensemble des torseurs désirés, est la droite D_j et s'écrit :

$$\{\mathbf{f}_e \mid [c_{j4} \quad c_{j5}] \mathbf{f} = d'_j + m_{tr} g c_{j3}\} \quad (4.7)$$

où \mathbf{f} est de la forme :

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

La figure 4.7 montre une partie de ces droites pour un exemple de robot suspendu à 8 câbles et 6 DDL dans le plan de la base supérieure (m_v) du cône tronqué des torseurs d'efforts désirés.

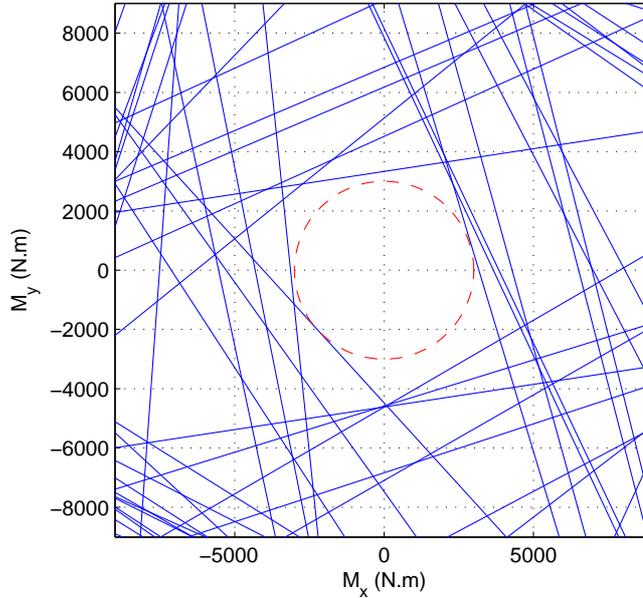


FIGURE 4.7 - *Intersections des 112 hyperplans H_j avec le plan de la base supérieure du cône tronqué des torseurs d'efforts désirés et cercle de rayon maximal des couples admissibles (pointillés).*

Notons \mathbf{n}_j le vecteur normal à la droite D_j droite d'intersection de l'hyperplan H_j avec le plan contenant la base courante (supérieure ou inférieure) :

$$\mathbf{n}_j = \begin{bmatrix} c_{j4} \\ c_{j5} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Chaque hyperplan H_j sépare l'espace en deux sous-espace. D'après l'Eq. (4.4), le zonotope Z est défini comme l'intersection des sous espaces délimités par les hyperplans H_j ($1 \leq j \leq p$) :

$$\{\mathbf{f}_e \mid \mathbf{c}_j \mathbf{f}_e \leq d'_j\} \quad (4.10)$$

Ainsi, l'intersection du zonotope avec le plan de la base inférieure ou supérieure correspond à l'intersection des demi-plans délimités par les droites D_j et décrit par :

$$\{\mathbf{f} \mid [c_{j4} \ c_{j5}] \mathbf{f} \leq d_j + m_{tr} g c_{j3}\} \quad (4.11)$$

Le rayon r_m du plus grand cercle centré en $[0, 0]^T$ dans le plan (M_x, M_y) inclus dans tous les demi-plans décrits par l'Eq. (4.11), correspond au moment maximal admissible autour des axes \mathbf{x} et \mathbf{y} . Le cercle correspondant est représenté à la Fig.4.7 en pointillés.

Pour déterminer ce rayon r_m il faut dans un premier temps calculer pour chaque droite D_j la distance r_j de cette droite D_j à l'origine $[0, 0]^T$ du plan (M_x, M_y) tel que présenté à la Fig. 4.8 :

$$r_j = \frac{d_j + m_{tr} g c_{j3}}{\|\mathbf{n}_j\|}, \quad j = 1 \dots p \quad (4.12)$$

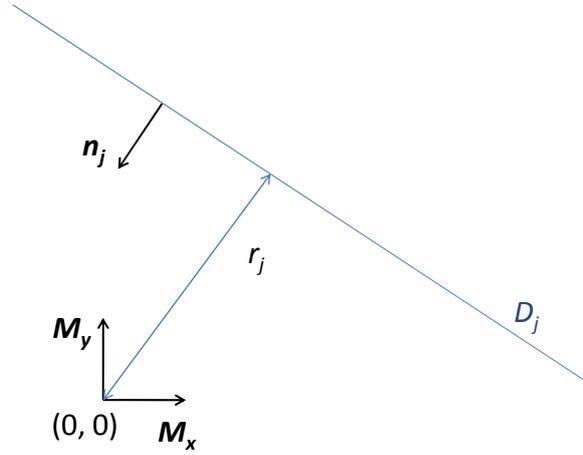


FIGURE 4.8 - Représentation d'une droite D_j intersection de l'hyperplan H_j avec le plan (M_x, M_y) contenant la base courante du cône tronqué, et distance de cette droite à l'origine du plan (M_x, M_y) .

Ainsi, le moment maximal admissible r_m est calculé par :

$$r_m = \min_{j=1 \dots p} r_j \quad (4.13)$$

Notons que si un des r_j est négatif, l'origine $[0, 0]^T$ du plan (M_x, M_y) ne se trouve pas à l'intérieur de l'intersection du zonotope Z avec le plan contenant la base étudiée : la charge ne peut pas être équilibrée, même si le centre de masse est confondu avec O_B .

Le rayon obtenu r_m est un moment. Il faut le transformer afin de trouver le rayon r_{max} présenté à la Fig. 4.5. D'après l'Eq. (4.5), on peut l'obtenir par :

$$r_{max} = \frac{r_m}{m_v g} \quad \text{ou} \quad r_{max} = \frac{r_m}{m_c g} \quad (4.14)$$

selon la base étudiée. Ce calcul est réalisé pour la base supérieure et la base inférieure du cône tronqué et le rayon r_{max} minimal (entre les 2 bases) correspond au déplacement maximal admissible du centre de gravité de la plate-forme chargée pour la configuration et la pose courantes du robot.

Remarquons que ce critère de sélection de la configuration et/ou pose adéquate a été choisi en référence aux conditions de l'application visée (« pick-and-place ») et en fonction du type de robot étudié (suspendu). Il est tout à fait possible pour une autre application et une autre catégorie de robots à câbles (pleinement contraint par exemple) d'utiliser un autre critère tout en gardant la procédure de conception décrite dans la section 4.3 inchangée.

4.3 Description générale de la procédure de détermination de la configuration optimale

Nous avons introduit, dans la partie précédente, le critère sur lequel la détermination de la configuration optimale est basée. Toutefois, de nombreuses étapes doivent être réalisées au préalable afin de sélectionner les configurations acceptables et supprimer les configurations non-réalisables pour diverses raisons (collisions de câbles, équilibre statique non-réalisable ou espace de travail désiré non atteignable).

4.3.1 Données d'entrée de la procédure

Afin d'appliquer la procédure à un cas pratique de choix de la configuration d'un robot à câbles suspendu à 8 câbles et 6 DDL, il est nécessaire de fixer certains paramètres. Ils sont détaillés ici.

- Dimensions de la pièce (Fig. 4.3) dans laquelle le robot sera installé (en m) :
 - Longueur : L
 - Largeur : l
 - Hauteur : h
- Masse de la plate-forme (en kg) :
 - A vide : m_v
 - Avec la charge maximale transportée : m_c
- Limites de l'espace de travail désiré (voir section 4.6.4) :
 - Axe \mathbf{x} : $[-L_{WS}/2, L_{WS}/2]$
 - Axe \mathbf{y} : $[-l_{WS}/2, l_{WS}/2]$
 - Axe \mathbf{z} : $[-h_{WS}/2, h_{WS}/2]$
 - Orientation autour de l'axe \mathbf{x} : $[-\phi_{WS}, \phi_{WS}]$
 - Orientation autour de l'axe \mathbf{y} : $[-\theta_{WS}, \theta_{WS}]$
 - Orientation autour de l'axe \mathbf{z} : $[-\psi_{WS}, \psi_{WS}]$
- Caractéristiques du câble utilisé :
 - Section non-déformée : A_0 (en m^2)
 - Masse linéique : ρ_0 (en kg/m)
 - Contrainte maximale admissible : σ_{max} (en MPa)
- Tensions admissibles dans les câbles (en N) :
 - Tension minimale : τ_{min}
 - Tension maximale : τ_{max}
- Domaine et pas de discrétisation des paramètres permettant de décrire la géométrie des points de sortie des câbles (voir section 4.4.1)
- Domaine et pas de discrétisation des paramètres permettant de décrire la géométrie des points d'attache des câbles sur la plate-forme (voir section 4.4.2)

4.3.2 Les différentes étapes de la procédure

La procédure de détermination de la configuration optimale peut se décomposer en 4 phases qui sont :

- détermination de l'ensemble des configurations possibles (voir section 4.4).
- sélection des arrangements de câbles sur des critères géométriques (voir section 4.5).
- discrétisation des paramètres géométriques et vérification de la faisabilité de l'équilibre statique de la plate-forme et de l'absence de collisions entre les câbles (voir section 4.6).
- vérification des configurations restantes et détermination de la configuration optimale (voir section 4.7).

La fig. 4.9 présente les différentes étapes de la procédure.

4.4 Détermination de l'ensemble des configurations à étudier

Afin de connaître la configuration d'un robot à câbles, plusieurs paramètres doivent être déterminés. Ainsi, il est nécessaire de connaître le nombre de points de sortie des câbles sur la base, la position de chacun de ces points et le nombre de câbles passant par chacun d'entre eux. De la même manière, il est nécessaire de déterminer la géométrie de la plate-forme, c'est à dire le nombre et la position des points d'attache des câbles ainsi que le nombre de câbles attachés en chacun de ces points. Une fois ces différents paramètres déterminés, la géométrie du robot est connue. Il reste toutefois à déterminer l'arrangement des câbles entre la base et la plate-forme, c'est-à-dire, la répartition des câbles entre les différents points d'attache et de sortie. Dans cette partie, nous détaillons les différentes possibilités que nous avons choisi d'étudier pour tous ces paramètres.

4.4.1 Points de sortie des câbles

Comme nous l'avons vu à la section 4.1, nous étudions uniquement les cas où les points de sortie des câbles sont situés sur les murs ou au plafond de la pièce rectangulaire présentée à la Fig. 4.3. Les points de sortie peuvent donc être situés dans 5 plans. Étant donné que l'on étudie une architecture de robot à câbles suspendu, les points de sortie des câbles sont situés au dessus de l'espace de travail désiré et il paraît assez naturel de les placer le plus haut possible dans la pièce afin de profiter au maximum de son volume.

Afin de diminuer le nombre de paramètres géométriques à évaluer, nous avons décidé de limiter les positions possibles des points de sortie des câbles aux arêtes du plafond ainsi qu'aux arêtes verticales de la pièce. Les arêtes verticales seront uniquement utilisées pour la configuration à 8 points de sortie des câbles présentée à la section 4.4.1.3. Les positions possibles des points de sortie des câbles sont montrées à la Fig. 4.10.

Ainsi, nous obtenons différents types possibles de géométries des points de sortie de câbles. Ces géométries sont décrites dans les sous-sections 4.4.1.1 à 4.4.1.3. Notons que le nombre de points de sortie considérés dans ces sous-sections représente le nombre de points distincts.

La description de ces géométries permet de créer la matrice \mathbf{A} dont les colonnes \mathbf{a}_i contiennent les coordonnées des points de sortie des câbles dans le repère \mathcal{R}_A . Afin de fixer l'ordre dans lequel les vecteurs \mathbf{a}_i sont organisés dans la matrice \mathbf{A} , nous considérons que le point de coordonnées $[L/2, -l/2, h]$ correspond au vecteur \mathbf{a}_1 (première colonne de

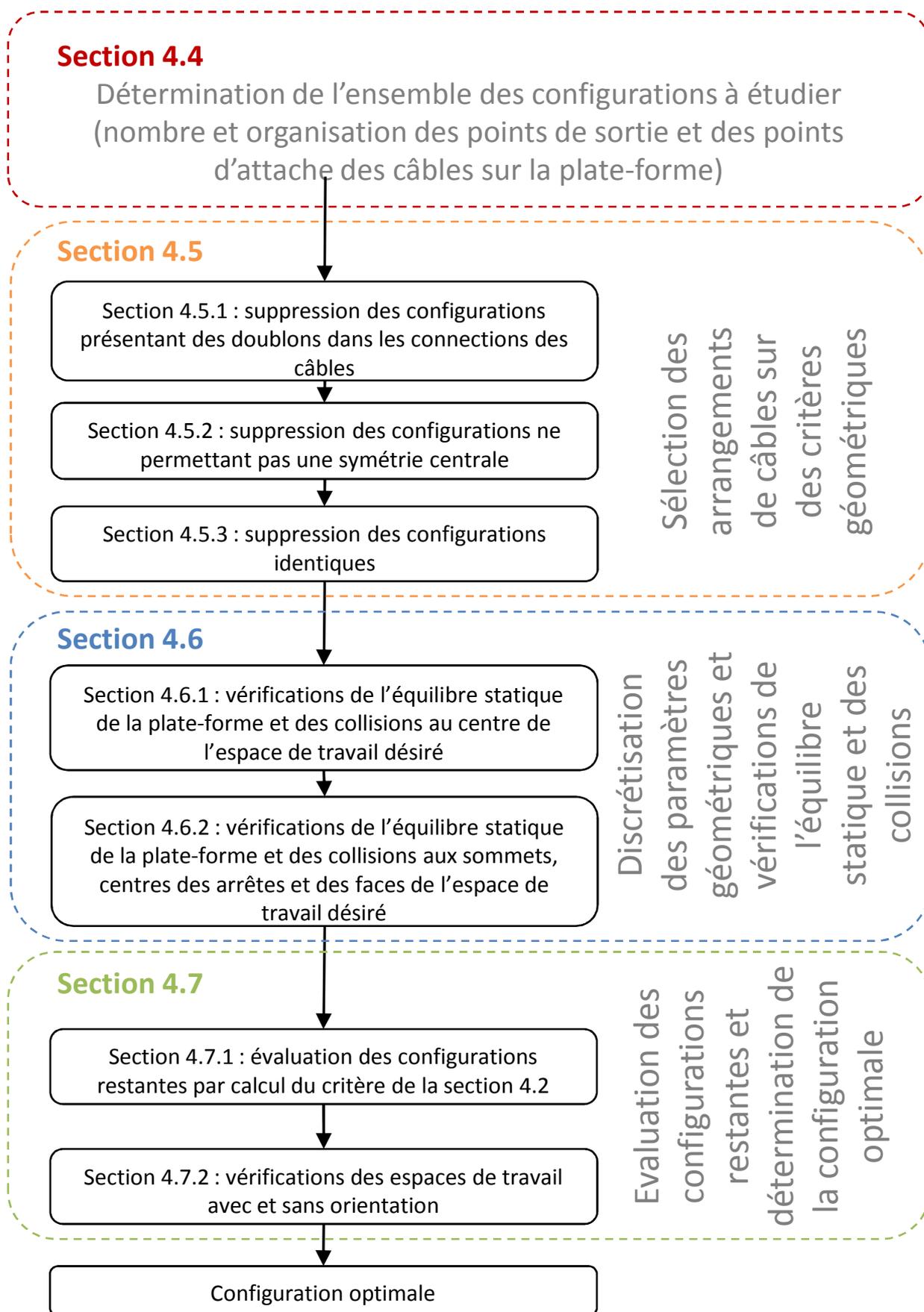


FIGURE 4.9 - Description de la procédure de détermination de la configuration optimale.

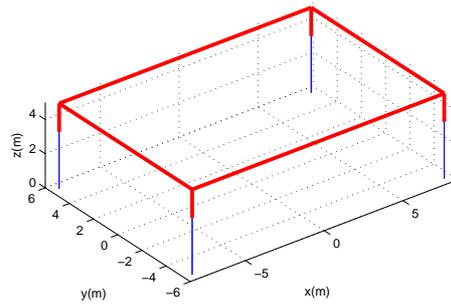
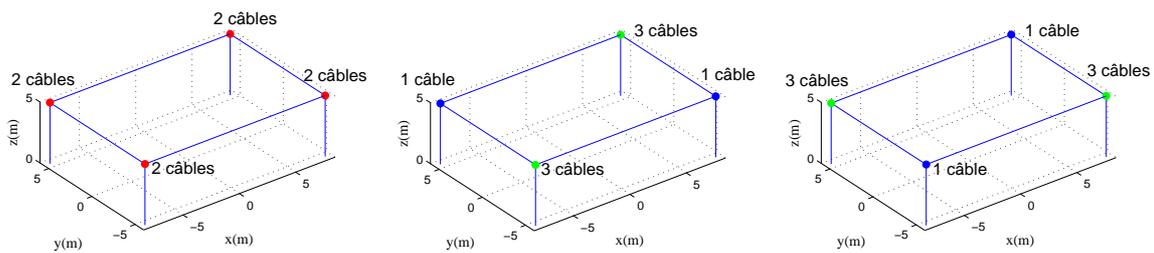


FIGURE 4.10 - Schéma des géométries possibles (gras) des points de sortie des câbles dans la pièce.

A), les positions dans \mathbf{A} des autres points de sortie étant obtenues en tournant dans le sens trigonométrique autour de z_A .

4.4.1.1 4 points de sortie

Ce cas est le plus simple. En effet, il est naturel de placer les quatre points de sortie des câbles aux 4 coins hauts de la pièce, ce qui permet d'obtenir la plus grande base possible. La description de cette géométrie de points de sortie des câbles ne nécessite donc aucun paramètre autre que ceux dérivant la pièce elle-même. Toutefois, plusieurs répartitions des câbles sont possibles étant donné que nous avons 8 câbles et 4 points de sortie. Il est donc possible d'avoir 1, 2 ou 3 câbles par point de sortie. Ceci donne 3 répartitions possibles des câbles, notées 22, 13 ou 31, qui permettent d'avoir une symétrie centrale pour la géométrie des points de sortie des câbles. La Fig. 4.11 montre ces différentes répartitions ainsi que le nom des géométries associées. Pour les géométries à 4 points de sortie distincts, le centre de symétrie est situé au centre du plafond de la pièce.



(a) Répartition 22 (géométrie 4_1) (b) Répartition 13 (géométrie 4_2) (c) Répartition 31 (géométrie 4_3)

FIGURE 4.11 - Schémas des différentes répartitions des points de sortie de câbles pour une géométrie à 4 points.

4.4.1.2 6 points de sortie

Pour cette géométrie à 6 points de sortie de câbles, on choisit à nouveau parmi ces 6 points, 4 points situés aux 4 coins du plafond comme pour la configuration précédente à 4 points. Il faut positionner les 2 points restants. On choisit de situer ces points sur les

4.4. Détermination de l'ensemble des configurations à étudier

arêtes du plafond, et symétriquement par rapport au centre du plafond (centre de symétrie de cette géométrie). Pour cela, il existe deux possibilités : les 2 points sont situés sur la grande arête ou sur la petite. Appelons ces configurations 6_A et 6_B , respectivement. Il faut introduire un paramètre afin de définir la position d'un des 2 points, la position du deuxième étant déterminée par symétrie. Les paramètres l_A et l_B (pour les configurations A et B, respectivement) présentés aux Fig. 4.12 et 4.13 peuvent varier entre 0 et L et entre 0 et l , respectivement. Pour la présente configuration à 6 points de sortie, il existe 3 répartitions possibles des câbles qui sont présentées aux Fig. 4.12 et 4.13.

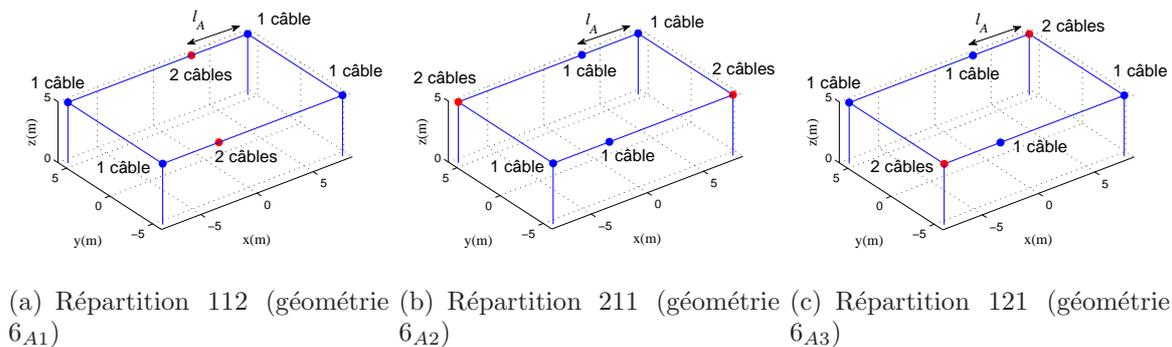


FIGURE 4.12 - Schémas des différentes répartitions des points de sortie des câbles pour la géométrie A à 6 points.

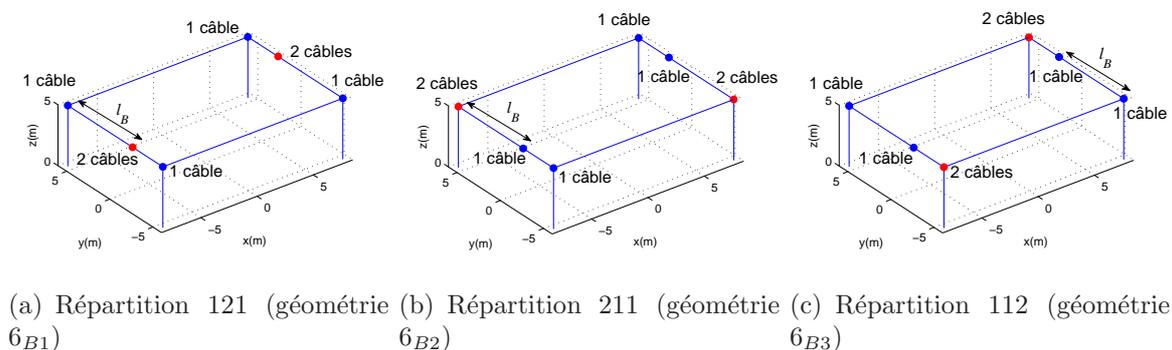


FIGURE 4.13 - Schémas des différentes répartitions des points de sortie de câbles pour une géométrie B à 6 points.

4.4.1.3 8 points de sortie

Cette géométrie à 8 points de sortie de câbles peut être vue comme l'union des deux configurations A et B du cas à 6 points de sortie. Ainsi, on choisit de positionner 4 points aux quatre coins du plafond et un point sur chaque arête du plafond, symétriques deux à deux. Dans ce cas, deux paramètres sont utilisés pour définir la géométrie, l_A et l_B variant de 0 à L et de 0 à l , respectivement. Étant donné que l'on a ici 8 points de sortie pour 8 câbles, il n'y a qu'une seule répartition possible des câbles : 1 câble par point. Cette géométrie 8_A est présentée à la Fig 4.14(a).

Nous allons également étudier une géométrie particulière pour le cas à 8 points de sortie. En effet, nous considérons une géométrie où les points de sortie ne sont pas tous situés au plafond. Ainsi, nous utilisons les 4 points de la géométrie à 4 points de sortie,

auxquels nous ajoutons les 4 mêmes points mais à une altitude inférieure. Le paramètre h_B sera utilisé afin de décrire la hauteur de ces 4 autres points. Ce paramètre évolue de 0 à $h/2$. Nous avons limité ce paramètre à $h/2$ afin de considérer que des robots suspendus, pour lesquels les câbles sortent généralement de points situés au dessus de l'espace de travail du robot. Cette géométrie appelée 8_B est présentée à la Fig. 4.14(b).

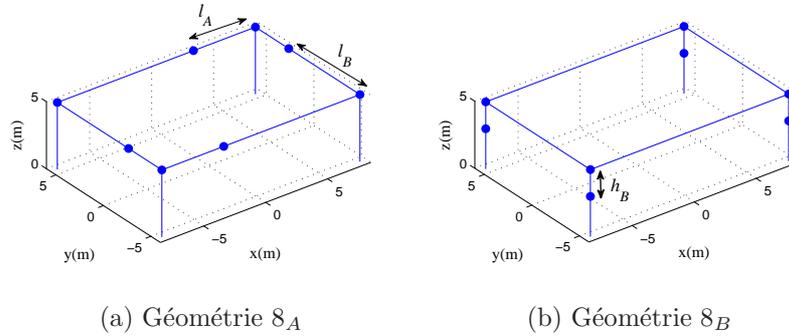


FIGURE 4.14 - Schémas des 2 géométries à 8 points.

4.4.2 Points d'attache sur la plate-forme

Dans cette section, nous décrivons les différentes possibilités considérées de géométries des points d'attache des câbles sur la plate-forme. Afin de limiter le nombre de configurations de robots à étudier, et donc les temps de calcul, nous considérerons uniquement des plate-formes planes et deux formes particulières de plate-formes spatiales.

Afin de pouvoir contrôler les 6 DDL de la plate-forme, au moins 3 points d'attache distincts et non alignés sont nécessaires. Toutefois, si l'on ajoute la condition de symétrie centrale (voir section 4.1.2), 3 points ne sont pas suffisants car ils se trouveraient situés sur une même droite, ce qui empêcherait la génération d'un moment autour de la droite passant par ces 3 points. Les géométries de plate-forme détaillées ici ont de 4 à 8 points d'attache des câbles. Notons que les paramètres utilisés pour décrire la géométrie de la plate-forme sont désignés par des lettres majuscules contrairement à ceux décrivant la géométrie des points de sortie des câbles qui le sont par des minuscules. De plus afin de pouvoir numéroter les points d'attache des câbles, un point de départ a été choisi pour chaque géométrie. Aux sections 4.4.2.1 à 4.4.2.7, ce point est repéré par un rectangle dessiné autour du point. La numérotation est réalisée en tournant dans le sens trigonométrique autour de z . Ceci permet de créer la matrice \mathbf{B}' dont les colonnes correspondent aux coordonnées \mathbf{b}_i des points d'attache des câbles dans l'ordre qui vient d'être décrit. Notons que le câble i sortant du point A_i n'est pas forcément attaché au point B'_i . La répartition des câbles entre les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B}' est présentée à la section 4.5.

4.4.2.1 Plate-forme plane à 4 points d'attache

Afin de caractériser une géométrie de plate-forme possédant 4 points d'attache de câbles, nous avons limité les géométries considérées à des figures régulières présentant des symétries par rapport aux plans de symétrie de la pièce dans laquelle le robot évolue. Ainsi, alors que la contrainte de symétrie centrale (voir section 4.1.2) permettrait de considérer des parallélogrammes, nous nous sommes limité au rectangle et au losange.

4.4. Détermination de l'ensemble des configurations à étudier

Rectangle : deux paramètres sont utilisés afin de décrire cette géométrie des points d'attache. Ces paramètres sont la longueur et la largeur du rectangle. Ces paramètres sont appelés L_1 pour la longueur et L_2 pour la largeur de la plate-forme. Ces paramètres sont présentés à la Fig. 4.15(a).

Losange : pour une plate-forme dont les points d'attache des câbles forment un losange, nous utilisons également deux paramètres afin de décrire cette fois-ci les dimensions des diagonales. Les mêmes noms de paramètres que pour le rectangle sont utilisés tel que présenté à la Fig. 4.15(b).

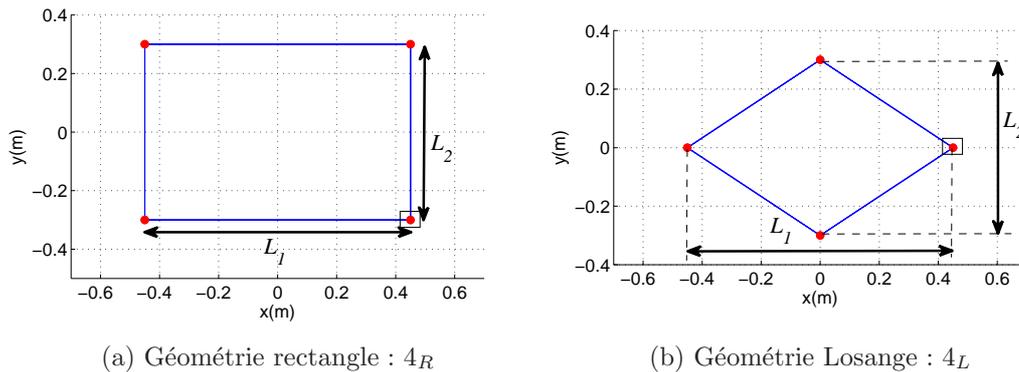


FIGURE 4.15 - Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 4 points d'attache distincts.

Notons que pour ces deux géométries il existe, tout comme pour les points de sortie de câbles sur la base, différentes répartitions possibles des câbles. Ces répartitions, ici 22 (géométrie 4_{R1} ou 4_{L1}), 13 (géométrie 4_{R2} ou 4_{L2}) et 31 (géométrie 4_{R3} ou 4_{L3}), ne sont pas détaillées ici, car ce sont exactement les mêmes que celles des points de sortie des câbles présentées à la section 4.4.1.1.

4.4.2.2 Plate-forme plane à 5 points d'attache

Afin de respecter les contraintes de symétrie décrites à la section 4.1.2, la géométrie de plate-forme à 5 points d'attache distincts présente un point central en plus des 4 points utilisés dans la géométrie à 4 points de la section 4.4.2.1. Ce point central est confondu avec le centre géométrique de la plate-forme. Nous avons besoin de deux paramètres afin de décrire la géométrie de la plate-forme : L_1 et L_2 . La Fig. 4.16 présente les deux géométries considérées avec les paramètres correspondants. Il existe trois répartitions des câbles pour chacune de ces géométries. Elles sont nommées 5_{R1} , 5_{R2} et 5_{R3} (et 5_{L1} , 5_{L2} et 5_{L3}).

4.4.2.3 Plate-forme plane à 6 points d'attache

Toujours dans un objectif de limitation des temps de calcul, pour la géométrie à 6 points d'attache distincts, nous avons limité les géométries considérées à l'hexagone. Les angles entre les diagonales de l'hexagone sont fixés ($\pi/3$ entre deux diagonales consécutives), les paramètres dimensionnels étant les longueurs des diagonales. Ceci permet de nous affranchir de 2 paramètres. On appellera ces paramètres L_1 , L_2 , et L_3 , tel que présenté à la Fig. 4.17(a). Les géométries présentées sur cette figure présentent chacune 3 répartitions de câbles possibles (voir section 4.4.1.2) nommées 6_{P1} , 6_{P2} et 6_{P3} .

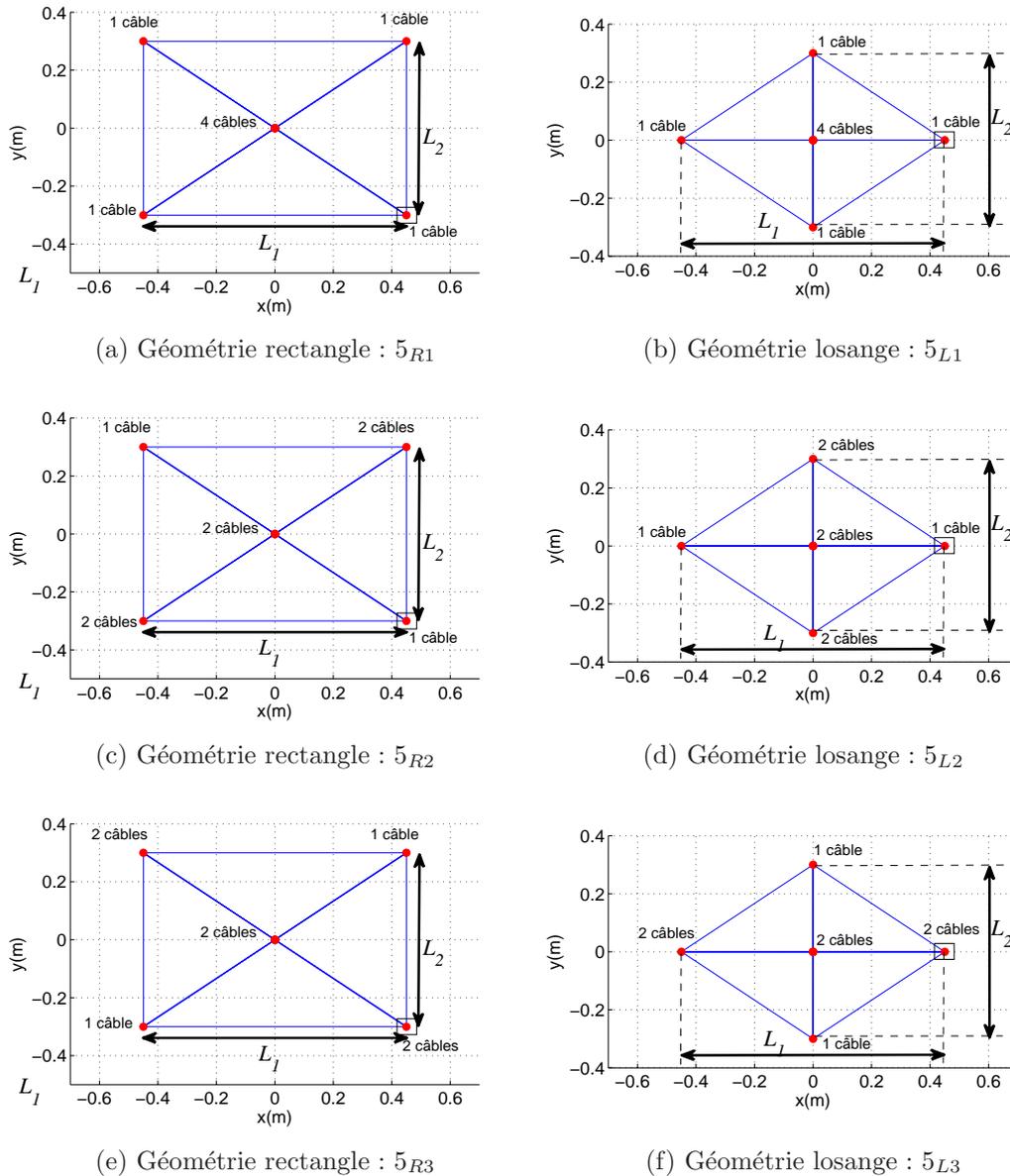


FIGURE 4.16 - Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 5 points d'attache.

4.4.2.4 Plate-forme spatiale à 6 points d'attache

Cette géométrie possède également 6 points d'attache de câbles. Toutefois, à la différence de la section 4.4.2.3, ces points ne sont pas tous situés dans un plan. Nous étudierons une géométrie particulière de double pyramide à base rectangulaire. Ainsi, 2 paramètres L_1 et L_2 sont utilisés afin de définir les dimensions de la base de la plate-forme et un paramètre L_3 permet de décrire la « hauteur » de la plate-forme. Cette plate-forme est présentée avec les paramètres correspondants à la Fig. 4.17(b). Les géométries présentées sur cette figure présentent chacune 3 répartitions de câbles possibles (voir section 4.4.1.2) nommées 6_{S1} , 6_{S2} et 6_{S3} .

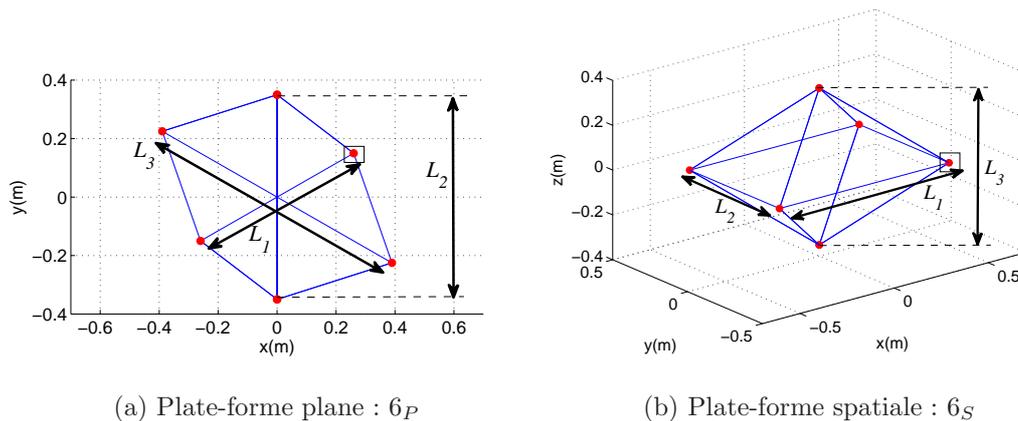


FIGURE 4.17 - Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 6 points d'attache.

4.4.2.5 Plate-forme plane à 7 points d'attache

La géométrie de plate-forme à 7 points considérée est semblable à celle à 6 points plane, mais avec le point central de la plate-forme en plus. Les 3 mêmes paramètres L_1 , L_2 , et L_3 sont utilisés et présentés à la Fig. 4.18. Notons que la géométrie spatiale à 7 points (double pyramide avec un point supplémentaire central) n'est pas considéré dans cette étude du fait des probables collisions avec les câbles attachés au centre de la base rectangulaire d'une telle plate-forme. Une seule répartition des câbles est possible pour cette géométrie.

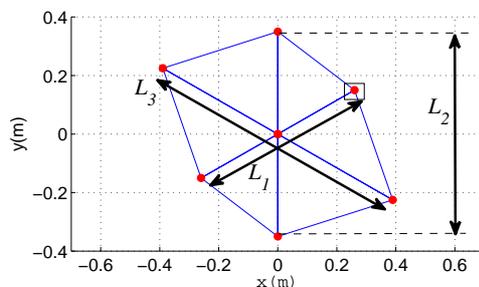


FIGURE 4.18 - Schéma de la plate-forme à 7 points d'attache.

4.4.2.6 Plate-forme plane à 8 points d'attache

Pour la géométrie de plate-forme à 8 points d'attache des câbles, nous considérons un octogone. Ainsi, comme pour l'hexagone (voir section 4.4.2.4), les angles entre les diagonales sont fixés ($\pi/4$ entre deux diagonales consécutives) et les paramètres permettant de décrire la géométrie de la plate-forme sont les longueurs des diagonales. On définit ainsi les paramètres L_1 , L_2 , L_3 et L_4 présentés à la Fig. 4.19(a).

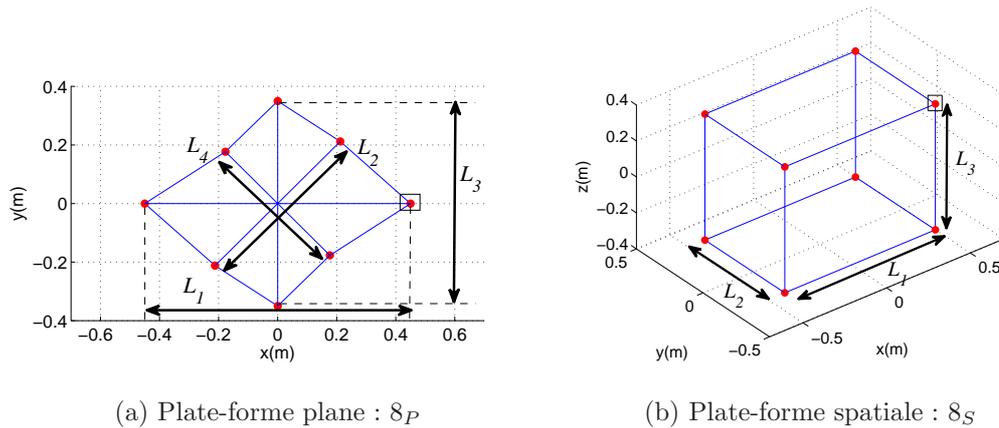


FIGURE 4.19 - Schémas des 2 géométries considérées de plate-forme à 8 points d'attache.

4.4.2.7 Plate-forme spatiale à 8 points d'attache

Nous avons finalement choisi une géométrie parallélépipédique pour décrire cette géométrie de plate-forme. Ainsi, les 8 points d'attache des câbles sont situés aux sommets d'un parallélépipède. Nous utilisons 3 paramètres afin de décrire la géométrie des points d'attache de cette plate-forme. Ces paramètres, L_1 , L_2 et L_3 , représentent la longueur, la largeur et la hauteur de la plate-forme tel que décrit par la Fig.4.19(b).

4.4.3 Résumé des géométries

Nous avons décrit toutes les géométries qui seront prises en compte dans la procédure de choix de configuration optimale décrite dans ce chapitre. Le nombre de géométries à étudier en fonction du nombre de points distincts est résumé dans le Tab. 4.1.

TABLEAU 4.1 - Nombre de géométries différentes en fonction du nombre de points de sortie et de points d'attache des câbles distincts.

| Nombre de points distincts | Nombre de géométries de points des sortie | Nombre de géométries de plate-forme |
|----------------------------|---|-------------------------------------|
| 4 | 3 | 6 |
| 5 | 0 | 6 |
| 6 | 6 | 6 |
| 7 | 0 | 1 |
| 8 | 2 | 2 |
| Total | 11 | 21 |

4.5 Sélection des arrangements de câbles sur critères géométriques

Afin de décrire complètement la configuration d'un robot à câble, il est nécessaire de connaître sa géométrie, c'est-à-dire la position des points de sortie et des points d'attache des câbles sur la plate-forme, mais également de savoir de quelle manière les câbles sont connectés de la base à la plate-forme. Dans la procédure de choix de configuration décrite dans ce chapitre, nous parcourons toutes les possibilités d'arrangements de câbles.

Suite à la description dans la section 4.4 des géométries possibles de points de sortie de câbles et de points d'attache sur la plate-forme, nous avons pour chacune d'entre elles une matrice de 8 colonnes \mathbf{A} pour les points de sortie de câbles et une matrice de 8 colonnes \mathbf{B}' pour les points d'attache sur la plate-forme.

Chacun des 8 câbles sortant des 8 points A_i de la matrice \mathbf{A} peut être attaché à n'importe quel point B'_i de la matrice \mathbf{B}' . Le nombre de possibilité de connections peut être calculé par le nombre d'arrangements possibles de 8 câbles sur 8 points : $A_8^8 = 40320$.

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, des contraintes de symétrie centrale ont été imposées sur la géométrie des points de sortie et des points d'attache des câbles (section 4.1.2). Des contraintes similaires sont également imposées à l'arrangement des câbles. Ainsi, il suffit de déterminer l'arrangement des quatre premiers câbles. L'arrangement des quatre autres câbles étant alors déterminé par symétrie. Cette contrainte diminue donc fortement le nombre de possibilités d'arrangements de câbles à considérer qui devient $A_8^4 = 1680$.

Parmi ces nombreuses possibilités restantes d'arrangements de câbles, certaines ne sont pas réalisables. Ainsi, en fonction des géométries de points d'attache et de points de sortie des câbles étudiées, le nombre d'arrangement peut être réduit. En effet, plusieurs types d'arrangements peuvent être supprimés car non réalisables physiquement ou parce qu'ils ne respectent pas la contrainte de symétrie centrale. Nous allons maintenant détailler les types d'arrangement de câbles que nous avons ainsi pu supprimer.

4.5.1 Suppression des arrangements avec des câbles confondus

Parmi les 1680 arrangements possibles de câbles, il peut arriver que pour des géométries possédant des points de sortie confondus, plusieurs câbles partageant un même point de sortie s'accrochent au même point sur la plate-forme. Ainsi, dans le cas d'une géométrie où les points A_i et A_j sont confondus (les câbles i et j partagent un même point de sortie), les arrangements de câbles pour lesquels les points B_i et B_j sont confondus doivent être supprimés. En effet, les configurations ainsi créées possèdent 2 câbles inutiles car chacun confondu avec un autre câble : l'un des câbles i ou j et son symétrique.

4.5.2 Suppression des arrangements ne permettant pas la réalisation des contraintes de symétrie

La contrainte de symétrie centrale sur les arrangements de câbles introduite à la section 4.1.2 nous a déjà permis de réduire le nombre d'arrangements à étudier de 40320 à 1680. Toutefois, certains arrangements parmi ces 1680 restants peuvent s'avérer non conformes à la contrainte de symétrie imposée. En effet, certains arrangements des 4 premiers câbles ne permettent pas d'accrocher les 4 autres câbles de manière symétrique. Cette situation est rencontrée dans le cas où les câbles sortant des points A_i et A_j s'attachent respectivement

aux points B'_p et B'_q et que B'_q n'est autre que le point $B'_p{}^s$, symétrique du point B'_p . Le câble sortant du point A_i^s , symétrique du point A_i , ne pourra pas être accroché au point $B'_p{}^s$, symétrique du point B'_p , car l'emplacement est déjà pris par le câble sortant du point A_j , et car un seul câble peut être attaché au point B'_q . Ce type d'arrangement est donc supprimé.

4.5.3 Suppression des arrangements donnant des configurations identiques

Étant donné que parmi les géométries étudiées certaines possèdent plusieurs points de sortie de câbles confondus, certains arrangements de câbles peuvent mener à des configurations identiques. Ainsi lorsque d'un même point de la base sort 2 câbles (ou plus), si le premier s'accroche au point B'_i , et que le deuxième s'accroche au point B'_j , la configuration où le premier câble s'accroche au point B'_j , et le deuxième au point B'_i , sera parfaitement identique à la précédente (si tous les autres câbles sont répartis de manière identique). Ainsi, la présente étape de la procédure permet d'éliminer de tels doublons de configurations (suppression d'une des deux configurations identiques).

4.5.4 Bilan de la phase de sélection des arrangements sur critères géométriques

Cette étape de sélection des configurations par suppression des arrangements non réalisables pour cause de câbles confondus, de non respect de la contrainte de symétrie, ou de configurations identiques, permet de diminuer fortement le nombre de configurations à considérer. En effet, la contrainte de symétrie des arrangements permet de passer de 40320 arrangements à 1680 pour un couple donné de géométries de points de sortie et de points d'attaches des câbles. Les étapes présentées au sections 4.5.1, 4.5.2 et 4.5.3 permettent de diminuer encore fortement ce nombre. Le nombre d'arrangements considérés pour chaque couple de géométries est présenté au Tab. 4.2.

TABLEAU 4.2 - *Nombre d'arrangements de câbles à étudier après suppression des arrangements présentant des câbles confondus, ne permettant pas la symétrie ou résultant en des configurations identiques.*

| | Points d'attache | $4_R/4_L$ | | $5_R/5_L$ | | $6_P/6_S$ | 7 | $8_P/8_S$ |
|------------------|------------------|-----------|-------|-----------|---------|-----------|--------|-----------|
| Points de sortie | Organisation | 22 | 13/31 | 114 | 122/212 | toutes | toutes | toutes |
| 4 | 22 | 18 | 8 | 64 | 40 | 40 | 96 | 96 |
| | 13/31 | 8 | 4 | 36 | 32 | 24 | 80 | 64 |
| $6_A/6_B$ | toutes | 40 | 24 | 44 | 68 | 88 | 144 | 192 |
| $8_A/8_B$ | toutes | 96 | 64 | 48 | 96 | 192 | 192 | 384 |

A partir des résultats présentés dans ce tableau et du nombre de géométries différentes de points d'attache et de sortie des câbles (Tab. 4.1), nous pouvons calculer le nombre de configurations à étudier pour chaque jeu de paramètres dimensionnels : 20738. Sans la phase de sélection présentée dans cette section, il aurait été nécessaire d'étudier 564480 configurations (environ 22 fois plus). Si l'étude avait été effectuée avec le nombre d'arrangements de 8 câbles sur 8 points ($A_8^8 = 40320$), 13547520 configurations auraient du être étudiées, soit environ 543 fois plus.

4.6 Discrétisation des paramètres géométriques et vérification de l'équilibre statique de la plate-forme et des collisions entre câbles

Les sections précédentes 4.4 et 4.5 ont présenté les configurations à tester considérées (géométries des points d'attache et de sortie des câbles), ainsi que les méthodes permettant de supprimer les arrangements de câbles non réalisables géométriquement (câbles confondus et configurations identiques) ou ne satisfaisant pas les conditions de symétrie imposées dans le cadre de cette étude (section 4.1.2).

Dans cette section, pour toutes les géométries et arrangements de câbles résultant de la sélection effectuée à la section 4.5, et pour tous les jeux de paramètres dimensionnels à étudier, l'équilibre statique de la plate-forme de ces configurations est testé en différentes poses de l'espace de travail. Une vérification de l'absence de collisions entre câbles est également réalisée.

4.6.1 Discrétisation des paramètres géométriques

Les paramètres géométriques permettant de décrire les géométries des points d'attache et des points de sortie des câbles et présentés tout au long de la section 4.4 sont discrétisés selon les données de la procédure de détermination de la configuration optimale (section 4.3.1).

4.6.2 Description des poses testées

Les vérifications de l'équilibre statique de la plate-forme et des collisions entre les câbles ne sont pas réalisées sur l'ensemble de l'espace de travail prescrit, mais uniquement en quelques poses particulières de cet espace. Ainsi les positions suivantes de l'espace de travail prescrit, représentées à la Fig. 4.20, sont considérées :

- le centre
- les 8 sommets
- les 6 centres des faces
- les 12 milieux des arêtes

Pour chacune de ces positions de l'espace de travail, plusieurs orientations sont testées conformément aux orientations désirées par l'utilisateur. Par exemple, en fonction de l'intervalle des orientations autour de l'axe z désiré, plusieurs poses sont vérifiées pour chacun de ces points particuliers de l'espace de travail. le nombre de ces poses dépend du pas de discrétisation de l'intervalle d'orientations choisi.

Notons que dès qu'une configuration ne répond pas à un critère (tensions dans les câbles inadmissibles ou de collisions entre câbles), la configuration est supprimée et la procédure passe à la configuration suivante.

4.6.3 Torseurs testés

Pour toutes les configurations et les poses testées, plusieurs torseurs d'efforts extérieurs peuvent être considérés dans la vérification de l'équilibre statique de la plate-forme. Dans la présente étude, deux torseurs sont considérés. Ils correspondent au poids de la plate-forme à vide et avec la charge maximale tel que le centre de gravité de la plate-forme est situé au centre géométrique O_B de la plate-forme.

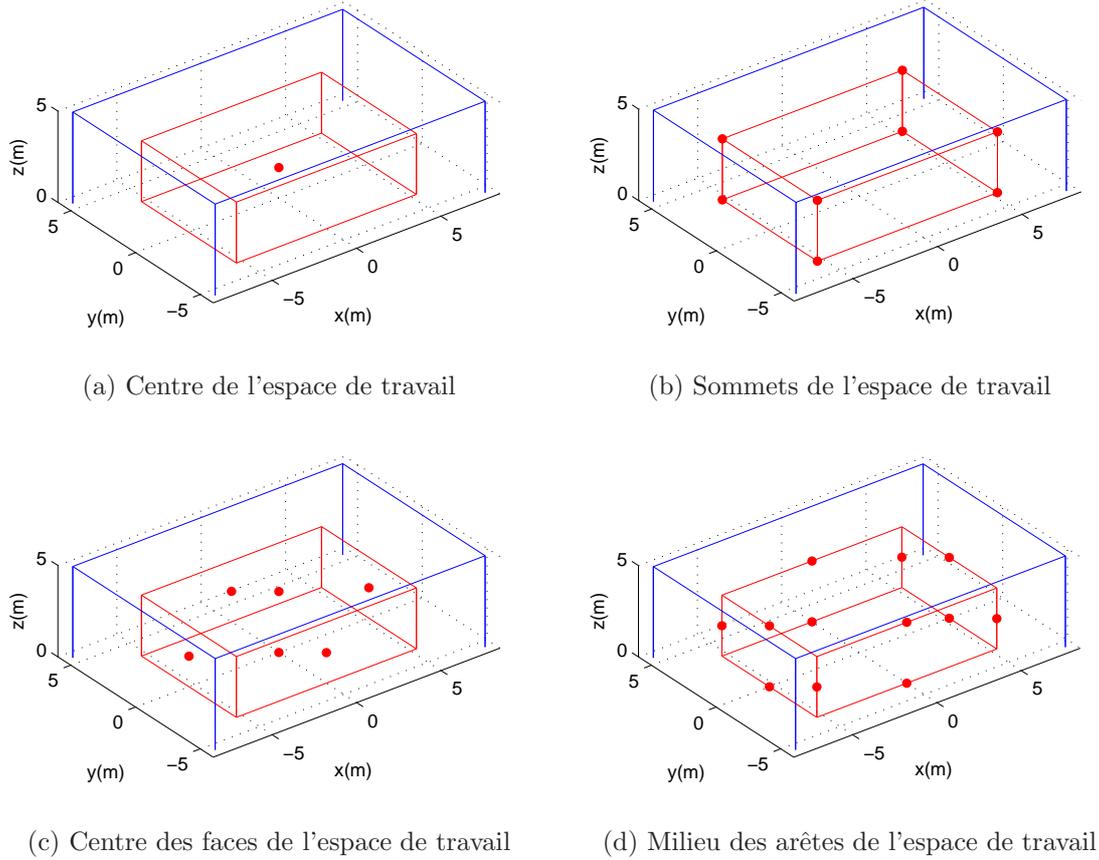


FIGURE 4.20 - Points de l'espace de travail testés lors de l'étape de vérification de l'équilibre statique de la plate-forme et des collisions entre câbles.

4.6.4 Vérification de l'équilibre statique de la plate-forme

Le problème de vérification de l'équilibre statique consiste à déterminer s'il existe une distribution de tensions comprise dans l'intervalle des tensions admissibles défini par l'utilisateur permettant d'équilibrer le torseur des efforts extérieurs. Avec le modèle simplifié de câble pesant présenté au chapitre 3 à la section 3.1, et comme nous l'avons vu dans la suite de ce même chapitre, les tensions n'apparaissent pas directement dans le système d'équations décrivant l'équilibre statique de la plate-forme (Eq. (3.29)). Le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ de cette équation regroupe les composantes horizontales $\tau_{l_{i_x}}$ des forces $\boldsymbol{\tau}_{l_i}$ appliquées par la plate-forme aux câbles aux points B_i . Afin que l'équilibre statique de la plate-forme soit considéré réalisable, différentes limites concernant les valeurs des $\tau_{l_{i_x}}$ ont été introduites à la section 3.3. Ces mêmes limites sont utilisées ici.

Néanmoins, étant donné que nous nous intéressons aux robots possédant 8 câbles et 6 DDL et contrairement au cas où $m = n$, le système décrivant l'équilibre statique de la plate-forme, présenté à l'Eq. (3.29), n'est pas carré. En effet, la matrice \mathbf{W}_x n'est pas carrée et le système (3.29) d'inconnue $\boldsymbol{\tau}_x$ est sous-déterminé. Dans un premier temps, afin de vérifier l'équilibre statique de la plate-forme, la pseudo-inverse de Moore-Penrose qui minimise la norme au carré des composantes $\tau_{l_{i_x}}$ est utilisée. Si le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$ ainsi obtenu satisfait les contraintes présentées à la section 3.3, la pose courante est validée comme appartenant à l'espace de travail du robot.

Toutefois, l'utilisation de la pseudo-inverse dans la résolution de l'équilibre statique de

la plate-forme donne une solution particulière au problème. Si cette solution ne respecte pas les contraintes, cela ne signifie pas que l'équilibre statique de la plate-forme n'est pas réalisable. Il est en effet possible de se déplacer dans le noyau de la matrice \mathbf{W}_x afin de trouver une solution $\boldsymbol{\tau}_x$ (si elle existe) respectant les contraintes. A cette fin, nous vérifions si le torseur d'efforts extérieurs considéré appartient à l'ensemble des torseurs admissibles compte tenu des contraintes (intervalles de tensions admissibles). La méthode permettant cette vérification, décrite à la section 4.2, consiste à vérifier si le torseur d'efforts extérieurs se trouve dans le zonotope Z des torseurs admissibles, dans quel cas il est possible de trouver une solution admissible $\boldsymbol{\tau}_x$ au système (3.29) décrivant l'équilibre statique de la plate-forme.

4.6.5 Vérification de l'absence de collisions entre les câbles

Parmi les nombreuses configurations à étudier, certaines peuvent présenter des collisions entre câbles à l'intérieur de l'espace de travail, ce qui les rend a priori inutilisables. Nous choisissons donc de supprimer ces configurations. Si les câbles sont considérés être des segments de droites, il est possible d'utiliser une méthode de détection de collision entre câbles basée sur le calcul de la distance entre deux segments de droite dans l'espace [75]. Cependant, dans le cas de robots à câbles de grande dimension, la masse des câbles doit être prise en compte, et les câbles ne peuvent donc plus être considérés comme droits. La méthode de détection des collisions par calcul de la distance entre deux segments n'est donc plus applicable.

En outre, l'étude des robots possédant plus de câbles que de DDL de la plate-forme pose un problème. Comme nous l'avons vu dans la section 4.6.4, il existe une infinité de solutions $\boldsymbol{\tau}_x$ à l'Eq. (3.29). Pour un modèle de câble pesant, chaque solution physiquement réalisable correspond à un profil de câble différent, le profil du câble i étant directement lié à la composante τ_{li_x} . Ainsi pour chaque pose étudiée, si l'équilibre statique est réalisable (voir section 4.6.4), chaque câble peut avoir une série de profils différents en fonction de la solution choisie pour le vecteur $\boldsymbol{\tau}_x$.

Nous souhaitons donc utiliser une méthode de détection des collisions permettant de prendre en compte tous les cas de tensions admissibles de tous les câbles et donc tous les profils possibles. Ainsi, quelle que soit la solution $\boldsymbol{\tau}_x$ choisie, dans l'intervalle des solutions admissibles, le profil de câble obtenu sera pris en compte par le programme de détection des collisions entre câbles.

Supposons que les limites de tensions minimales dans les câbles sont choisies de façon à correspondre à la limite d'utilisation du modèle simplifié de câble pesant décrit au chapitre 3 à l'Eq. (3.11). Chaque profil possible de câble est donc obligatoirement compris entre la corde (droite $A_i B_i$) et le profil correspondant à la tension minimale dans le câble. Cette tension minimale admissible correspond à la limite inférieure sur la composante τ_{li_x} , tel que décrit au chapitre 3 :

$$\tau_{li_x} = \rho_0 g L_i \quad (4.15)$$

L'ensemble des profils de câbles possibles est donc forcément inclus dans le triangle formé par la corde et par les deux tangentes au câble aux points A_i et B_i pour une tension minimale tel que présenté à la Fig. 4.21. Ces deux tangentes se coupent au point C_i . Les coordonnées de ce point dans le repère \mathcal{R}_i peuvent être obtenues à partir des équations des deux tangentes présentées aux Eqs. (3.13) et (3.12) et sont égales à : $(B_{i_x}/2, B_{i_z}/2 - B_{i_x}/4)$. Notons que la position du point C_i ne dépend pas des caractéristiques du câble, et donc

que ce triangle est le même quel que soit le câble utilisé. Notons également qu'il peut être possible d'utiliser un critère plus restrictif afin de limiter la déflexion, et diminuer ainsi les dimensions du triangle.

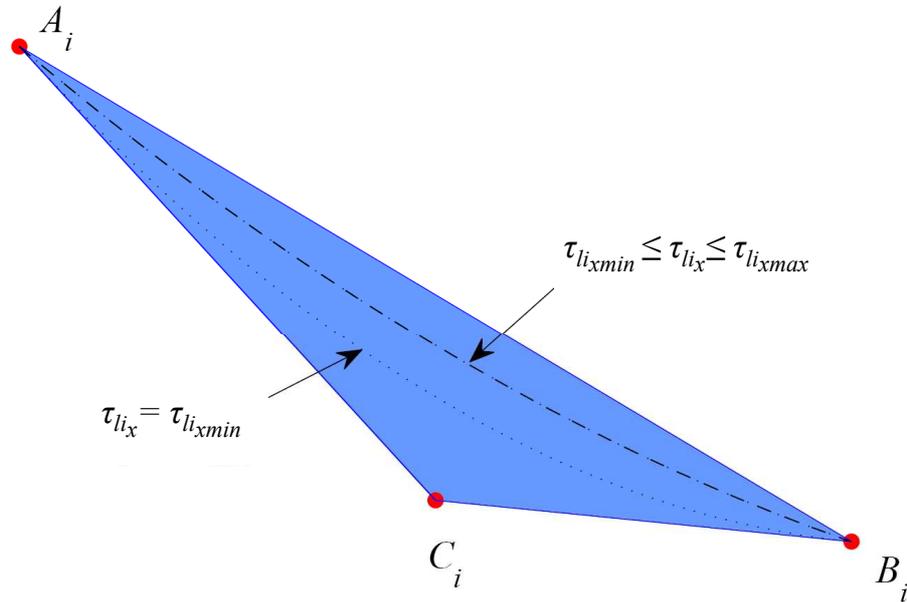


FIGURE 4.21 - Schéma du triangle considéré pour le test de collision et du profil du câble pour la tension minimale et pour une tension intermédiaire.

Une éventuelle collision entre deux câbles peut donc être détectée par vérification de l'intersection entre deux triangles (représentant les deux câbles considérés) dans l'espace. De nombreux algorithmes existent pour détecter ce type d'intersection. Cette méthode de vérification est conservative, et peut donc entraîner des détections de collisions inexistantes. Il aurait également été possible d'utiliser un quadrilatère (ou un polygone possédant plus de 4 cotés) en lieu et place du triangle afin de mieux coller au profil du câble à tension minimale au prix de temps de calcul plus importants.

Cette vérification de collisions entre câbles est réalisée pour toutes les configurations et poses pour lesquelles l'équilibre statique de la plate-forme est vérifié. Elle ne garantit pas que toutes les configurations restantes ne présentent jamais de collisions dans l'espace de travail. Elle permet simplement d'éliminer les configurations pour lesquelles les poses de l'espace de travail considérées ici (voir section 4.6.2) présentent une forte probabilité de collision entre câbles.

4.6.6 Bilan de l'étape de sélection par vérification de l'équilibre statique et de l'absence de collisions

Cette étape de vérification de la possibilité, pour un certain nombre de poses, de réaliser l'équilibre statique de la plate-forme (à vide ou chargée) avec des tensions admissibles dans les câbles, combinée à la vérification de l'absence de collisions entre les câbles, permet de ne garder que les configurations capables a priori de couvrir l'ensemble de l'espace de travail prescrit.

4.7 Evaluation, vérification finale et obtention de la configuration optimale

Les différentes étapes précédentes permettent de diminuer considérablement le nombre de configurations à étudier. Cependant, rien ne permet de dire que toutes les configurations restantes correspondent aux exigences de la tâche. Tout d'abord seuls quelques points de l'espace de travail ont été testés et donc l'accessibilité à l'intégralité de l'espace de travail n'est pas garantie. Il en va de même des collisions entre câbles qui peuvent exister en d'autres poses de l'espace de travail que celles considérées à la section 4.6.2. La dernière étape de la procédure présentée dans cette section a pour objectif d'évaluer les configurations restantes et de vérifier qu'elles répondent bien aux contraintes de l'application souhaitée.

4.7.1 Calcul du critère d'évaluation pour les configurations restantes

Conformément à la section 4.2, nous pouvons classer les configurations restantes en se basant sur leur capacité à tolérer un décentrage du centre de masse de la plate-forme chargée. Ainsi, le calcul du déplacement maximal admissible r_{max} est réalisé pour chacune des configurations restantes sur tous les points particuliers de l'espace de travail définis à la section 4.6.2. Les valeurs de r_{max} obtenues pour l'ensemble de ces configurations et poses permettent de classer les configurations restantes (par ordre de mérite).

4.7.2 Vérification de la “continuité” de l'espace de travail

Tout au long de la procédure de détermination de la configuration optimale, les tests sur l'espace de travail n'ont été réalisés qu'en quelques poses particulières. Il n'est donc pour l'instant pas possible de garantir que les vérifications faites sur ces poses particulières de l'espace de travail sont valables sur l'ensemble de l'espace de travail.

Pour la meilleure configuration (d'après le critère défini à la section 4.2), nous testons l'ensemble de l'espace de travail discrétisé afin de vérifier que l'équilibre statique de la plate-forme est réalisable et qu'aucune collision entre câble n'apparaît. Pour chaque pose de l'espace de travail discrétisé, le test présenté à la section 4.6.4 est réalisé. Si la configuration la mieux classée présente des collisions à l'intérieur de l'espace de travail désiré ou présente des poses pour lesquelles l'équilibre statique de la plate-forme n'est pas réalisable, elle est supprimée. Le test de la section 4.6.4 est alors réalisé pour la deuxième meilleure configuration, et ainsi de suite jusqu'à trouver la configuration satisfaisant toutes les contraintes. Cette dernière configuration est considérée comme la configuration optimale.

4.8 Application aux dimensions du démonstrateur du projet CoGiRo

Dans le cadre du projet ANR CoGiRo (« Control of Giant Robots »), la conception et la réalisation d'un démonstrateur est prévue. Il s'agit d'un robot parallèle à 8 câbles et 6 DDL a priori destiné à des applications de transport de charges lourdes sur de grandes dimensions. Il sera installé dans une pièce rectangulaire.

A titre d'exemple, appliquons la méthode de détermination de la configuration optimale de robot à câbles suspendu présentée dans ce chapitre au cas de ce démonstrateur.

4.8.1 Données de la procédure

- Dimensions de la pièce :
 - $L = 16m$
 - $l = 11m$
 - $h = 5m$
- Masse de la plate-forme :
 - à vide : $70kg$
 - avec la charge maximale : $500kg$
- Dimensions de l'espace de travail désiré :
 - longueur : $L_{WS} = 2L/3$
 - largeur : $l_{WS} = l/2$
 - hauteur : $h_{WS} = h/2$
 - orientations autour de l'axe x : $\phi_{WS} = 0$
 - orientations autour de l'axe y : $\theta_{WS} = 0$
 - orientations autour de l'axe z : $\psi_{WS} = \pi/12$
- Discrétisation de l'espace de travail désiré (voir section 4.7.2) :
 - longueur : pas de $5cm$
 - largeur : pas de $5cm$
 - hauteur : pas de $5cm$
 - orientations autour de l'axe z : pas de $\pi/24$
- Caractéristiques du câble utilisé :
 - section non-déformée : $A_0 = 13,05mm^2$
 - masse linéique : $\rho_0 = 0,12kg/m$
 - contrainte maximale : $\sigma_{max} = 177GPa$
- Tensions admissibles dans les câbles :
 - tension minimale : $\tau_{min} = 70N$
 - tension maximale : $\tau_{max} = 9240N$
- Autres limites de tension minimale :
 - pas de déflexion en dessous de B_i : $\alpha_{0i} < 0$ (voir section 3.3.2.4)
 - limite de validité du modèle simplifié de câble pesant : $\tau_{i_x} \geq 4\rho_0gL_i$ (un facteur 4 a été utilisé afin de limiter les déflexions)
- Paramètres géométriques des points de sortie des câbles (ces paramètres sont constants dans cet exemple)
 - $l_A = L/2$
 - $l_B = l/2$
 - $h_B = h/5$
- Domaine et pas de discrétisation des paramètres géométriques des points d'attache des câbles sur la plate-forme (L_1, L_2, L_3, L_4) : de $L/25$ à $3L/25$ avec un pas de $L/50$.

4.8.2 Résultats obtenus après les vérifications des équilibres statiques et des collisions

La procédure de détermination de la configuration optimale produit, après les étapes de sélection des arrangements (section 4.5) et de sélection basée sur la faisabilité de l'équilibre statique et l'absence de collisions entre câbles (section 4.6), 35 configurations. Parmi elles, les 25 meilleures configurations (selon le critère présenté à la section 4.2) sont regroupées dans le Tab. 4.3, et classées par ordre de mérite.

Parmi celles-ci on retrouve des configurations possédant des arrangements de câbles et des géométries de points de sortie et d'attache identiques avec uniquement des dimensions de plate-forme différentes. Toutes ces configurations ne sont donc pas originales et peuvent être regroupées en 4 catégories :

- 8 points de sortie (géométrie 8_B) et 8 points d'attache (géométrie 8_S) : configurations 1 à 8 et 20, tel que présenté à la Fig. 4.22. Pour ce groupe de configurations, on peut remarquer que les points d'attache des câbles sur la plate-forme sont situés aux sommets d'un parallélépipède. Les points de sortie des câbles sont au nombre de 8 avec une organisation de type 8_B . Notons que les 8 meilleures configurations obtenues (classée selon le critère défini préalablement) sont de ce type, avec des dimensions de plate-forme différentes.

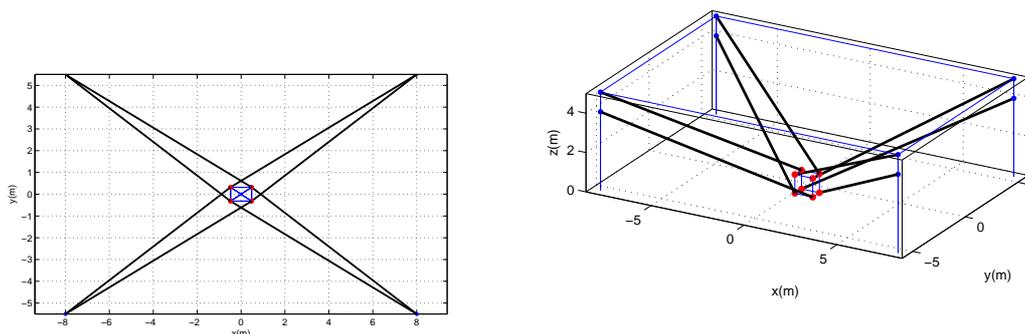


FIGURE 4.22 - Schéma de la configuration 1 du Tab. 4.3.

- 6 points de sortie (géométrie 6_{A3}) et 5 points d'attache (géométrie 5_{R1}) : configurations 9, 11, 13, 22 et 25, tel que présenté à la Fig. 4.23. Ce type de configurations présente 4 câbles venant se fixer en un même point sur la plate-forme qui est le centre géométrique de celle-ci. Ces câbles permettent de contrôler la position de ce point, alors que les 4 autres câbles fixés aux extrémités d'un rectangle, permettent de contrôler les orientations de la plate-forme.
- 4 points de sortie (géométrie 4_1) et 5 points d'attache (géométrie 5_{R1}) : configurations 10, 14, 15, 17, 21, et 23, tel que présenté à la Fig. 4.24. Les configurations de ce groupe ressemblent à celles du précédent. En effet, on retrouve une géométrie similaire des points d'attache des câbles sur la plate-forme. Quatre câbles sont fixés au centre géométrique alors que les quatre autres sont attachés aux sommets d'un rectangle. La différence réside dans la géométrie des points de sortie de câbles. Contrairement au cas précédent, les points de sortie sont au nombre de 4 et positionnés aux 4 coins du plafond de la pièce.
- 4 points de sortie (géométrie 4_1) et 8 points d'attache (géométrie 8_P) : configurations

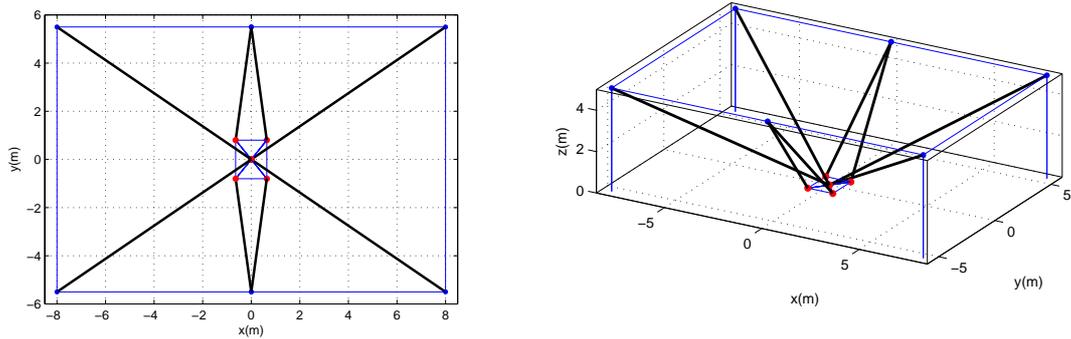


FIGURE 4.23 - Schéma de la configuration 9 du Tab. 4.3.

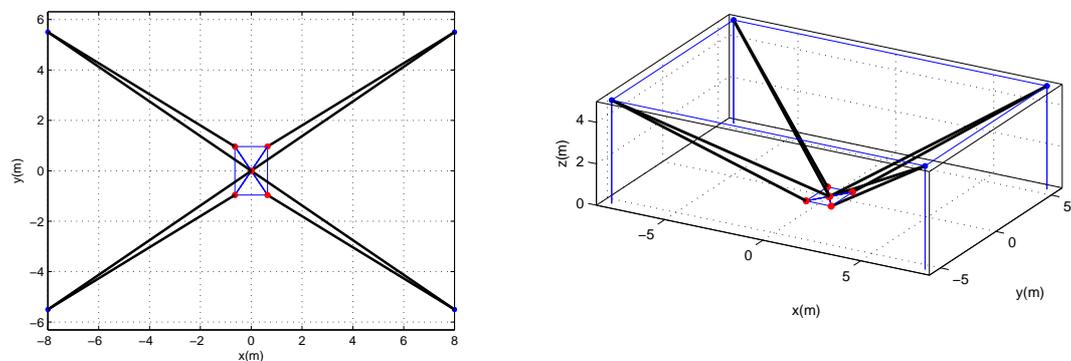


FIGURE 4.24 - Schéma de la configuration 10 du Tab. 4.3.

12, 16, 18, 19 et 24, présentées à la Fig. 4.25. Ce dernier groupe de configurations, qui possèdent 4 points de sortie de câbles et 8 points d'attache sur la plate-forme, présente une géométrie un peu moins régulière que les précédents groupes. En effet, on peut remarquer que de chaque sommet du plafond de la pièce sortent 2 câbles, le premier allant se fixer au sommet d'un « grand » losange, et le deuxième allant se fixer au sommet d'un losange plus petit tourné de 45° par rapport au premier. Cet angle entre les deux losanges permet le contrôle des orientations de la plate-forme autour de l'axe vertical.

Les schémas des 25 meilleures configurations regroupées dans le Tab. 4.3 sont présentés à l'annexe C.

4.8.3 Vérification des configurations optimales

La première partie de la procédure de sélection de configurations produit un ensemble de configurations capables d'atteindre différentes poses particulières de l'espace de travail désiré. Il s'agit maintenant de déterminer la meilleure d'entre elles. A cette fin nous utilisons tout d'abord le critère défini à la section 4.2. Les valeurs de ce critère pour chacune des configurations sont présentées dans le Tab. 4.3. On peut remarquer que d'après ce tableau la configuration 1 est celle présentant le critère le plus élevé ($r_{max} \simeq 26cm$).

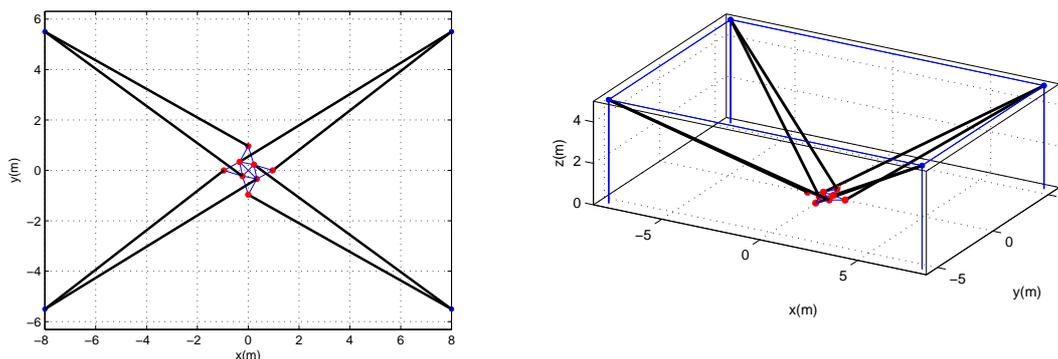


FIGURE 4.25 - Schéma de la configuration 12 du Tab. 4.3.

Toutefois, il est nécessaire de vérifier la faisabilité de l'équilibre statique de la plateforme (à vide et chargée) et l'absence de collisions entre les câbles au travers de l'espace de travail prescrit. Nous avons donc discrétisé l'espace de travail avec un pas de 5cm suivant les axes x , y et z et un pas de $\pi/24$ pour l'orientation autour de z . Rappelons que les orientations autour des axes x et y sont constantes et nulles dans l'exemple traité ici.

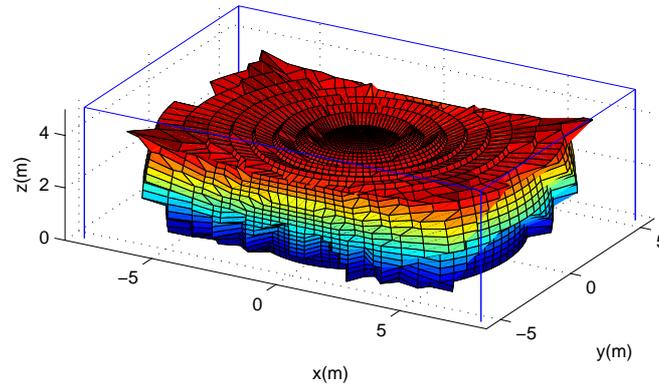
La figure 4.26(b) présente l'espace de travail statique de la configuration 1 avec les orientations prescrites autour de l'axe z (voir section 4.8.1). On peut remarquer que cet espace de travail couvre largement l'espace de travail désiré. Notons que la différence par rapport à l'espace de travail statique à orientation nulle (Fig. 4.26(a)) est assez faible. Elle se situe principalement dans la partie supérieure de l'espace de travail.

Afin d'évaluer la configuration 1, les capacités de rotations de cette configuration autour de l'axe z sont testées sur l'intervalle $[-\pi/6; \pi/6]$ discrétisé avec un pas de $\pi/24$. L'espace de travail statique résultant est présenté à la Fig. 4.26(c). L'espace de travail diminue surtout sur la partie supérieure.

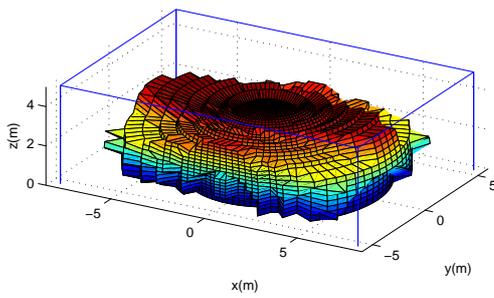
Remarquons également que dans cet exemple de dimensionnement du démonstrateur du projet CoGiRo, nous avons ajouté une limite de tension minimale basée sur le critère de validité du modèle simplifié de câble pesant. En effet, nous avons contraint les tensions dans les câbles par l'inégalité :

$$\tau_{i_x} \geq 4\rho_0 g L_i \tag{4.16}$$

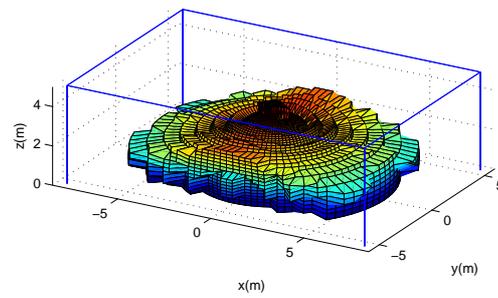
Cet inégalité a pour effet de limiter la déflexion des câbles avec pour objectif de diminuer les dimensions du triangle contenant le câble i (Fig. 4.21). En effet, sans cette inégalité, de nombreuses collisions sont détectées et les espaces de travail s'en trouvent drastiquement réduits, alors que la majorité de ces collisions sont des faux positifs (Fig. 4.27).



(a) Orientation nulle

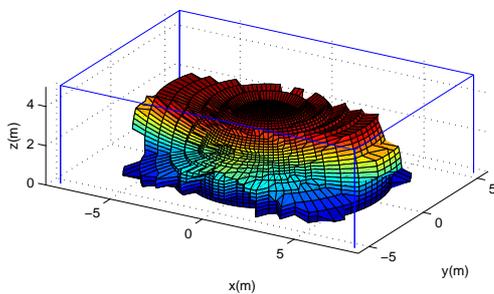


(b) Orientation appartenant à $[-\pi/12; \pi/12]$

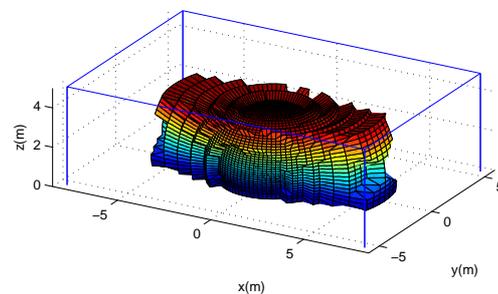


(c) Orientation appartenant à $[-\pi/6; \pi/6]$

FIGURE 4.26 - Espace de travail statique de la configuration 1 pour différentes plages d'orientations autour de l'axe z .



(a) $\pi_{i_x} \geq 2\rho_0 g L_i$



(b) $\pi_{i_x} \geq \rho_0 g L_i$

FIGURE 4.27 - Espace de travail statique de la configuration 1 pour différentes limites de tension minimale, pour des orientations dans l'intervalle $[-\pi/12; \pi/12]$ autour de z .

TABEAU 4.3 - Description des configurations restantes à la fin de la procédure de sélection de configurations appliquée à l'exemple du démonstrateur du projet CoGiRo.

| Configuration | Géométrie de la base | Géométrie de la plate-forme | Arrangement câbles | | | | Paramètres de la base | | | Paramètres de la plate-forme | | | | r_{max} (m) |
|---------------|----------------------|-----------------------------|--------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------|-------|-------|------------------------------|-----------|-----------|-----------|---------------|
| | | | A ₁ | A ₂ | A ₃ | A ₄ | l_A | l_B | h_B | L_1 (m) | L_2 (m) | L_3 (m) | L_4 (m) | |
| 1 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₆ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 0,64 | 0,96 | 0 | 0,2613 |
| 2 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₆ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 0,96 | 0,96 | 0 | 0,2380 |
| 3 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₆ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,28 | 0,64 | 0,96 | 0 | 0,2256 |
| 4 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₆ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,64 | 0,64 | 0,96 | 0 | 0,2095 |
| 5 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₆ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,64 | 0,96 | 0,96 | 0 | 0,1828 |
| 6 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,64 | 0,64 | 0,64 | 0 | 0,1682 |
| 7 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 0,64 | 0,64 | 0 | 0,1529 |
| 8 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,64 | 0,96 | 0,64 | 0 | 0,1099 |
| 9 | 6 _{A3} | 5 _{R1} | B ₈ | B ₇ | B ₅ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,28 | 1,6 | 0 | 0 | 0,0731 |
| 10 | 4 ₁ | 5 _{R1} | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,28 | 1,92 | 0 | 0 | 0,0597 |
| 11 | 6 _{A3} | 5 _{R1} | B ₈ | B ₇ | B ₅ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 1,6 | 0 | 0 | 0,0583 |
| 12 | 4 ₁ | 8 _P | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,64 | 1,92 | 0,96 | 0,0575 |
| 13 | 6 _{A3} | 5 _{R1} | B ₈ | B ₇ | B ₅ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 1,28 | 0 | 0 | 0,0559 |
| 14 | 4 ₁ | 5 _{R1} | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 1,92 | 0 | 0 | 0,0512 |
| 15 | 4 ₁ | 5 _{R1} | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,64 | 0 | 0 | 0,0493 |
| 16 | 4 ₁ | 8 _P | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,64 | 1,92 | 0,64 | 0,0483 |
| 17 | 4 ₁ | 5 _{R1} | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 1,6 | 0 | 0 | 0,0472 |
| 18 | 4 ₁ | 8 _P | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,64 | 1,6 | 0,64 | 0,0464 |
| 19 | 4 ₁ | 8 _P | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,64 | 1,28 | 0,64 | 0,0442 |
| 20 | 8 _B | 8 _S | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 0,96 | 0,64 | 0 | 0,0421 |
| 21 | 4 ₁ | 5 _{R1} | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,96 | 0 | 0 | 0,0415 |
| 22 | 6 _{A3} | 5 _{R1} | B ₈ | B ₇ | B ₅ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,64 | 1,6 | 0 | 0 | 0,0411 |
| 23 | 4 ₁ | 5 _{R1} | B ₈ | B ₁ | B ₃ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,96 | 1,28 | 0 | 0 | 0,0406 |
| 24 | 4 ₁ | 8 _P | B ₇ | B ₂ | B ₄ | B ₁ | L/2 | l/2 | h/5 | 1,92 | 0,64 | 1,92 | 1,28 | 0,0405 |
| 25 | 6 _{A3} | 5 _{R1} | B ₈ | B ₇ | B ₅ | B ₂ | L/2 | l/2 | h/5 | 0,64 | 1,28 | 0 | 0 | 0,0401 |

4.9 Conclusions

Dans ce chapitre, une procédure permettant de déterminer une configuration « optimale » de robot suspendu à 8 câbles et 6 DDL de grande dimension ayant les caractéristiques prescrites pour une application de type « pick and place » dans une pièce rectangulaire est présentée. Cette méthode considère un ensemble de géométries de points d'attaches (de 4 à 8 points distincts) et de points de sortie de câbles (de 4 à 8 points distincts) et teste tous les arrangements possibles de câbles entre ces géométries de points de sortie et de points d'attache des câbles sur la plate-forme.

Le critère d'optimisation proposé est basé sur la capacité du robot à tolérer un déplacement du centre de gravité de la plate-forme chargée. Il permet d'évaluer les configurations et de choisir une configuration adéquate pour le type d'application considéré ici.

Appliquée au cas d'un démonstrateur de robot à câbles de grande dimension ($16m \times 11m \times 5m$) pour le projet ANR CoGiRo, cette procédure de sélection de configuration produit plusieurs géométries permettant d'atteindre les caractéristiques souhaitées en terme de charge à déplacer, de volume de travail et de capacités d'orientations autour de l'axe vertical z .

Cette procédure peut facilement s'adapter à différents cas d'étude. Ainsi, en modifiant le critère, il est par exemple possible d'appliquer cette procédure à la détermination de configurations de robots pleinement contraints à 8 câbles et 6 DDL. Nous l'avons ainsi utilisé dans le cadre de la conception d'un prototype de ce type avec comme critère d'optimisation l'énergie minimum développée sur l'ensemble de l'espace de travail.

Conclusion

Cette thèse présente les travaux de recherche traitant de la modélisation des robots parallèles à câbles de grandes dimensions pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable.

Résumé des contributions

Modélisation élastique des câbles

A partir de tests de traction réalisés sur différents types de câbles, nous avons mis en exergue le fait que le comportement en traction des câbles est généralement non-linéaire. Si dans la littérature l'élasticité des câbles est généralement prise en compte par le module d'Young de matériau constituant le câble, les tests de traction effectués ont montré que cette approximation n'est pas correcte. Ainsi, **différentes approximations (linéaire, linéaire par partie et non-linéaire)** doivent être considérées afin de modéliser plus fidèlement **le comportement élastique des câbles**. De plus pour un type de câble donné, il semble nécessaire d'effectuer des tests de traction afin de sélectionner l'approximation la plus adaptée.

Modèles de câbles pesants

Une partie importante de la thèse est consacrée à la prise en compte de la masse des câbles. En s'appuyant sur un modèle de caténaire élastique présenté par Irvine [59], la formulation des problèmes géométriques et de l'équilibre statique de la plate-forme mobile d'un robot parallèle à câbles a été présentée au chapitre 2. Nous avons ensuite illustré par des exemples l'importance de la prise en compte de la masse des câbles sur le comportement des robots parallèles à câbles de grande dimension. Le **modèle statique de caténaire élastique** permet une modélisation réaliste du comportement statique d'un câble mais son expression est fortement non-linéaire. Ainsi, le problème géométrique inverse revient à résoudre un système d'équations couplées non-linéaires ce qui, en l'état, rend difficile son utilisation en temps réel.

Sous l'hypothèse d'une faible déflexion du câble, une simplification de ce modèle de caténaire élastique, présenté dans [59], permet de formuler l'expression du profil d'un câble pesant de manière explicite. Dans le chapitre 3, l'équilibre statique de la plate-forme d'un robot parallèle à m câbles et n DDL, ainsi que le problème géométrique inverse utilisant ce **modèle simplifié de câble pesant** sont présentés. Ce modèle permet un découplage partiel du calcul des tensions et des longueurs des câbles. Les tensions dans les câbles doivent être déterminées avant de pouvoir calculer les longueurs des câbles. De plus, ce modèle simplifié de câble pesant permet de diminuer à m le nombre d'inconnues du problème géométrique direct. Ainsi, pour un robot parallèle à n DDL et n câbles, ce

système d'équations est carré. Une étude de deux exemples de robots suspendus a montré que les erreurs dues à la simplification du modèle de caténaire élastique sont faibles.

Espace de travail statique

L'espace de travail d'un robot parallèle à câbles est généralement défini comme l'ensemble des poses pour lesquelles un torseur (ou un ensemble de torseurs) d'efforts extérieurs peut être équilibré avec des tensions admissibles dans les câbles. Néanmoins, lorsque la masse des câbles n'est pas négligeable, cette définition n'est pas adaptée. Tout d'abord, la tension varie le long du câble lorsque la masse du câble n'est pas négligée. Il faut donc considérer **les tensions maximale et minimale** apparaissant dans le câble afin d'appliquer les contraintes de tensions admissibles. Nous avons également identifié, pour certaines poses de la plate-forme d'un robot suspendu, un phénomène dit de « **câble pendant** ». Pour ces poses (généralement proches des limites de l'espace de travail), l'équilibre statique de la plate-forme impose à certains câbles de pendre sous la plate-forme. Les câbles en question exercent ainsi sur la plate-forme une force dirigée vers bas. Cette force, uniquement due au poids du câble pendant, est importante quand le câble pend de manière conséquente. Ceci peut causer des problèmes de collision entre ce câble et son environnement (le sol par exemple). Du fait des fortes longueurs de câbles ainsi déroulées, une limite sur la longueur du câble doit être introduite.

Une **nouvelle définition de l'espace de travail statique** des robots parallèles à câbles pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable a par conséquent été proposée. Elle prend en compte les paramètres suivants :

- tensions maximale et minimale
- altitude minimale du câble
- longueur maximale de câble disponible.

Génération de torseurs d'efforts

La nature de l'expression linéaire de l'équilibre statique de la plate-forme d'un robot parallèle à câbles obtenue à partir du modèle simplifié de câble pesant nous a permis d'étudier la **capacité à générer un ensemble de torseur d'efforts**. A partir de l'ensemble des tensions admissibles exprimées en fonction des composantes horizontales τ_x de la force exercée sur un câble en son point d'attache sur la plate-forme, le **zonotope des torseurs d'efforts admissibles** peut être décrit. Une comparaison des forces maximales admissibles dans toutes les directions obtenues d'une part avec le modèle simplifiée de câble pesant et d'autre part avec le modèle de câble sans masse, a finalement été réalisée pour deux exemples de robots plan pleinement contraints.

Conception

Une méthode de conception optimale d'un robot suspendu à 8 câbles et 6 DDL a été proposée au chapitre 4. Cette procédure de conception a pour objectif de déterminer la configuration optimale d'un robot à câbles suspendu évoluant dans une pièce rectangulaire de dimension importante. Cette méthode de conception est adaptée aux robots parallèles à câbles de grande dimension pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable. Ainsi, le modèle simplifié de câble pesant est utilisé tout au long de la procédure afin d'évaluer les capacités du robot en terme d'espace de travail statique et de capacité à générer un torseur d'efforts désiré. Une méthode de détection des collisions entre câbles présentant

une déflexion a été proposée afin de vérifier l'absence d'interférences entre les câbles dans l'espace de travail prescrit.

La configuration permettant d'admettre le décalage maximal du centre de masse de la plate-forme chargée est considérée comme optimale. La détermination de ce décalage maximal est basée sur l'étude du zonotope des torseurs admissibles du chapitre 3.

Perspectives

La nature du système linéaire décrivant l'équilibre statique de la plate-forme obtenu avec le modèle simplifié de câble pesant devrait permettre d'adapter à ce cas bon nombre d'études déjà réalisées avec le modèle de câble sans masse.

Amélioration de la formulation du modèle simplifié

Le modèle simplifié de câble pesant détaillé au chapitre 3 possède une singularité de formulation lorsque le câble est vertical. En effet, les équations à la base du modèle ne sont alors plus valides mathématiquement. Il serait intéressant de développer un modèle ne possédant pas cette singularité. Pour cela, il pourrait être envisagé d'écrire l'équation de comportement du câble en fonction du terme dx/dz à la place de dz/dx . Le modèle résultant serait donc valide pour un câble vertical, mais serait par contre non défini pour un câble horizontal. Une combinaison des deux modèles permettrait sûrement de couvrir l'ensemble des cas d'étude.

Espace de travail

De nombreuses études peuvent être menées quant à la détermination des espaces de travail des robots à câbles pour lesquels la masse des câbles n'est pas négligeable. Il pourrait notamment être intéressant d'étudier les frontières de l'espace des poses polyvalentes en utilisant le modèle simplifié de câble pesant.

Commande

La formulation du modèle simplifié de câble pesant diminue considérablement les temps de calcul en comparaison du modèle de caténaire élastique. Ce modèle est donc plus adapté à une utilisation en temps réel. Il serait donc intéressant de réaliser une **commande en quasi statique d'un robot à câbles de grande dimension** en utilisant le modèle simplifié de câble pesant. Les dimensions du démonstrateur dont le choix de configuration a été étudiée au chapitre 4 devrait permettre de mettre en évidence l'influence de la masse des câbles. Une commande utilisant le modèle simplifié de câble pesant devrait ainsi permettre d'améliorer la précision.

Robots redondants suspendus

Assez peu de travaux ont été réalisés sur la **distribution des tensions dans les câbles des robots parallèles à câbles redondant suspendus**. En effet, contrairement aux robots pleinement contraints pour lesquels le noyau de la matrice \mathbf{W} passe dans le cadran positif des tensions dans les câbles, pour les robots suspendus redondants, l'augmentation des tensions de certains câbles entraînent une diminution des tensions des

Conclusion

autres câbles. Il serait intéressant d'étudier expérimentalement la distribution des tensions et la capacité à garder tous les câbles tendus avec un robot à câble de ce type.

Publications

Conférences internationales

1. N. RIEHL, M. GOUTTEFARDE, S. KRUT, C. BARADAT ET F. PIERROT, Effects of non-negligible cable-mass on the static behavior of large workspace cable-driven parallel mechanisms, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA'09)*, Kobe, Japon, Mai 2009.
2. N. RIEHL, M. GOUTTEFARDE, C. BARADAT ET F. PIERROT, On the determination of cable characteristics for large dimension cable-driven mechanisms, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA'10)*, Anchorage, Alaska, USA, Mai 2010.
3. N. RIEHL, M. GOUTTEFARDE, C. BARADAT ET F. PIERROT, On the static workspace of large dimensions cable-suspended robots with non negligible cable mass, *Proc. of the ASME Int. Design Engineering Technical Conferences (IDETC'10)*, Montréal, Québec, Canada, Août 2010.

Bibliographie

- [1] ABLOW, C. M., AND SCHECHTER, S. Numerical Simulation of Undersea Cable Dynamics. *Ocean Engineering* 10, 6 (2009), 443–457.
- [2] AGAHI M. ANS NOTASH, L. Trajectory planning and impact reduction in wired-actuated parallel manipulators with elastic wires. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (Montréal, Québec, Canada, 2010).
- [3] ALBUS, J., BOSTELMAN, R., AND DAGALAKIS, N. The NIST Robocrane. *Journal of Robotic Systems* 10, 2 (1993), 709–724.
- [4] ALP, A. B., AND AGRAWAL, S. K. Cable suspended robots : design, planning and control. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2002), pp. 4275–4280.
- [5] ALP, A. B., AND AGRAWAL, S. K. Cable suspended robots : feedback controllers with positive inputs. In *American Control Conference* (2002), pp. 815–820.
- [6] ARAI, B. Y. T., YUASA, K. E. I., MAE, Y., INOUE, K., AND KOYACHI, N. A Hybrid Drive Parallel Arm For Heavy Material Handling. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, March (2002), 45–54.
- [7] AREF, M. M., AND TAGHIRAD, H. D. Geometrical Workspace Analysis of a Cable-driven redundant parallel Manipulator : KNUIT CDRPM. In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2008).
- [8] ARSENAULT, M. Optimization of the prestress stable wrench closure workspace of planar parallel three-degree-of-freedom cable-driven mechanisms with four cables. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2010), pp. 1182–1187.
- [9] AZIZIAN, K., CARDOU, P., AND MOORE, B. On the boundaries of the wrench-closure workspace of planar parallel cable-driven Mechanisms. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (Montréal, Québec, Canada, 2010).
- [10] BARRETTE, G. *Analyse des mécanismes parallèles actionnés par câbles*. M.Sc thesis, Université de Laval Quebec, 2000.
- [11] BARRETTE, G. Determination of the Dynamic workspace of Cable-Driven Planar Parallel Mechanisms. *Journal of mechanical design* 127 (2005), 242–248.
- [12] BEHZADIPOUR, S. Stiffness of Cable-based Parallel Manipulators With Application to Stability Analysis. *Journal of mechanical design* 128 (Jan. 2006), 303–310.
- [13] BEHZADIPOUR, S., AND KHAJEPOUR, A. Design of reduced DOF parallel cable-based robots. *Mechanism and Machine Theory* 39 (2004), 1051–1065.
- [14] BORGSTROM, P., JORDAN, B., BORGSTROM, B., STEALEY, M., SUKHATME, G., BATALIN, M., AND KAISER, W. NIMS-PL : A Cable-Driven Robot With Self-Calibration Capabilities. *IEEE Transactions on Robotics* 25, 5 (2009), 1005–1015.

- [15] BORGSTROM, P. H., BORGSTROM, N. P., STEALEY, M. J., JORDAN, B., SUKHATME, G. S., BATALIN, M.A., AND KAISER, W. J. Generation of Energy efficient Trajectories for NIMS3D, a Three-Dimensional Cabled Robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Pasadena, California, USA, 2008), pp. 2222–2227.
- [16] BOSSCHER, P. *Disturbance Robustness Measures and Wrench-Feasible Workspace Generation Techniques for Cable-Driven Robots*. PhD thesis, George W. Woodruff School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, 2004.
- [17] BOSSCHER, P., AND EBERT-UPHOFF, I. A stability measure for underconstrained cable-driven robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2004), pp. 4943–4949.
- [18] BOSSCHER, P., AND EBERT-UPHOFF, I. Wrench-based analysis of cable-driven robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2004), pp. 4950–4955.
- [19] BOSSCHER, P., AND EBERT-UPHOFF, I. Disturbance robustness measures for underconstrained cable-driven robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Orlando, Florida, USA, 2006), pp. 4205–4212.
- [20] BOSSCHER, P., RIECHEL, A. T., AND EBERT-UPHOFF, I. Wrench-feasible workspace generation for cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics* 22 (2006), 890–902.
- [21] BOSSCHER, P., WILLIAMS II, R. L., BRYSON, L. S., AND CASTRO-LACOUTURE, D. Cable-Suspended Robotic Contour Crafting System. *ASME International Design Engineering Technical Conference* 17 (2006).
- [22] BOSSCHER, P., WILLIAMS II, R. L., AND TUMMINO, M. A Concept for Rapidly-Deployable Cable Robot Search and Rescue Systems. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (2005).
- [23] BOSTELMAN, R., ALBUS, J., DAGALAKIS, N., JACOFF, A., AND CROSS, J. Applications of The NIST Robocrane. In *5th international Symposium on Robotics and Manufacturing* (Maui, HI, USA, 1994).
- [24] BOUCHARD, S. *Géométrie des robots parallèles entraînés par des câbles*. PhD thesis, Université Laval, Québec, Canada, 2008.
- [25] BOUCHARD, S., AND GOSSELIN, C. A simple control strategy for overconstrained parallel cable mechanisms. In *20th Canadian Congress of Applied Mechanics (CANCAM)* (2005).
- [26] BOUCHARD, S., AND GOSSELIN, C. Kinematic sensitivity of a very large cable-driven parallel mechanism. In *ASME International Design Engineering Technical Conferences* (2006).
- [27] BRAU, E., GOSSELIN, F., AND LALLEMAND, J. P. Design of a singularity free architecture for cable driven haptic interfaces. In *First Joint Eurohaptics Conference and Symposium on Haptic Interfaces for Virtual Environment and Teleoperator Systems* (2005), pp. 208–213.
- [28] BROWN, G. W. Suspension System for Supporting and Conveying Equipment, Such as a Camera, US Patent No 4 625 938, 1987.
- [29] BUCKHAM, B., DRISCOLL, F. R., AND NAHON, M. Development of a Finite Element Cable Model for Use in Low-Tension Dynamics Simulation. *Journal of Applied Mechanics* 71 (2004), 476–485.

-
- [30] CHANG, S.-L., LEE, J.-J., AND YEN, H.-C. Kinematic and compliance analysis for tendon-driven robotic mechanisms with flexible tendons. *Mechanism and Machine Theory* 40 (2005), 728–739.
- [31] CUNNINGHAM, D. P., AND ASADA, H. H. Continuous Path Tracing by a Cable-Suspended, Under-Actuated Robot : THE Winch-Bot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Anchorage, Alaska, USA, 2010), pp. 1255–1260.
- [32] DEWDNEY, P., NAHON, M. A., AND VEIDT, B. The Large Adaptive Reflector : A Giant Radio Telescope with an Aero Twist. *Canadian Aeronautics and Space Journal* 48, 4 (2002), 239–250.
- [33] DIAO, X., AND MA, O. A method of verifying force-closure condition for general cable manipulators with seven cables. *Mechanism and Machine Theory* 42, 12 (Dec. 2007), 1563–1576.
- [34] DIAO, X., AND MA, O. Vibration analysis of cable-driven parallel manipulators. *Multibody System Dynamics* 21 (2009), 347–360.
- [35] DU, J., BAO, H., DUAN, X., AND CUI, C. Jacobian analysis of a long-span cable-driven manipulator and its application to forward solution. *Mechanism and Machine Theory* 45 (2010), 1227–1238.
- [36] DUAN, B. Y., QIU, Y. Y., ZHANG, F. S., AND ZI, B. On design and experiment of the feed cable-suspended structure for super antenna. *Mechatronics* 19 (2009), 503–509.
- [37] DUFFIN, R. J. On fourier analysis of linear inequality systems. In *Pivoting and Extension*, vol. 1 of *Mathematical Programming Studies*. Springer Berlin Heidelberg, 1974, pp. 71–95.
- [38] EBERT-UPHOFF, I., AND VOGLEWEDE, P. A. On the connections between cable-driven robots, parallel manipulators and grasping. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2004), pp. 4521–4526.
- [39] FANG, H., AND MERLET, J.-P. Multi-criteria optimal design of parallel manipulators based on interval analysis. *Mechanism and Machine Theory* 40, 2 (2005), 151–171.
- [40] FANG, S., FRANITZA, D., TORLO, M., BEKES, F., AND HILLER, M. Motion control of a tendon-based parallel manipulator using optimal tension distribution. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 9 (2004), 561–568.
- [41] FATTAH, A., AND AGRAWAL, S. K. Workspace and Design Analysis of Cable-Suspended Planar Parallel Robots. In *ASME Design Engineering Technical Conference* (Montréal, Québec, Canada, 2002), no. DETC2002/MECH-34330.
- [42] FATTAH, A., AND AGRAWAL, S. K. On the Design of Cable-Suspended, Planar Parallel Robots. *ASME Journal of Mechanical Design* 127 (2005), 1021–1028.
- [43] FERRARESI, C. A new methodology for the determination of the workspace of six-DOF redundant parallel structures actuated by nine wires. *Robotica* 25 (2007), 113–120.
- [44] FITZSIMMONS, J. T., VEIDT, B., AND DEWDNEY, P. Steady-state analysis of the multi-tethered aerostat platform for the Large Adaptive Reflector telescope. In *SPIE* (2000), pp. 476–487.
- [45] GHOLAMI, P., AREF, M., AND TAGHIRAD, H. D. On The Control of the KNTU CDRPM : A Cable Driven Redundant Parallel Manipulator. In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (2008).

- [46] GOBAT, J., AND GROSENBAUGH, M. Time-domain numerical simulation of ocean cable structures. *Ocean Engineering* 33 (July 2006), 1373–1400.
- [47] GOSSELIN, C. Stiffness Mapping for parallel manipulators. *IEEE Transactions on robotics and Automation* 6 (1990), 377–382.
- [48] GOUTTEFARDE, M. *Analyse de l'espace des poses polyvalentes des mécanismes parallèles entraînés par câbles*. PhD thesis, Faculté des Sciences et de Génie - Université Laval, Québec, 2005.
- [49] GOUTTEFARDE, M., AND GOSSELIN, C. M. Analysis of the Wrench-Closure Workspace of Planar Parallel Cable-Driven Mechanisms. *IEEE Transactions on Robotics* 22, 3 (2006), 434–445.
- [50] GOUTTEFARDE, M., AND KRUT, S. Characterization of Parallel Manipulator Available Wrench Set Facets. In *Advances in Robot Kinematics, 11th International Symposium* (2010), pp. 475–482.
- [51] GOUTTEFARDE, M., MERLET, J. P., AND DANNEY, D. Wrench-Feasible Workspace of Parallel Cable-Driven Mechanisms. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Roma, 2007), pp. 1492–1497.
- [52] HASSAN, M., AND KHAJEPOUR, A. Analysis of Hybrid Cable-Actuated Parallel Manipulators With a Constraining Leg For Lower-Degree-Of-Freedom Operation. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (San Diego, California, USA, 2009), no. DETC2009-87705.
- [53] HAVLIK, S. A cable-suspended robotic manipulator for large workspace operations. *Computer Aided Civil Infrastructure Engineering* 15 (2000), 56–68.
- [54] HILLER, M., FANG, S., MIELCZAREK, S., VERHOEVEN, R., AND FRANITZA, D. Design, analysis and realization of tendon-based parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory* 40 (2004), 429–445.
- [55] HIRATA, Y., AND SATO, M. 3-Dimensional interface Device for Virtual Work Space. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (Raleigh, North Carolina, USA, 1992), pp. 889–896.
- [56] HOMMA, K., AND FUKUDA, O. Wire-driven Leg Rehabilitation System : Development of a 4-DOF Experimental System. In *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics* (2003), pp. 908–913.
- [57] HOMMA, K., FUKUDA, O., AND NAGATA, Y. Study of Wire-Driven Leg Rehabilitation System. In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems* (Sendai, Japan, 2004), pp. 1668–1673.
- [58] INGLESE, F.-X., LUCIDARME, P., RICHARD, P., AND FERRIER, J.-L. A Human-Scale Virtual Environment with Haptic Feedback. In *Second International Conference on Informatics in Control, automation and Robotics* (2005), pp. 140–145.
- [59] IRVINE, H. *Cable Structures*. 1981.
- [60] JIANG, Q., AND KUMAR, V. The Direct kinematics of objects suspended from cables. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (Montréal, Québec, Canada, 2010).
- [61] KABAYASHI, T., AND TAKAHASHI, Y. Vibration Control for two Dimensional Wire Driven Positioning Robot. In *37th SICE Annu. Conf.* (Tokyo, Japan, 1998), pp. 869–874.

- [62] KAWAMURA, S., CHOE, W., TANAKA, S., AND PANDIAN, S. R. Development of an ultrahigh speed robot FALCON using wire-driven system. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Nagoya, Japan, 1995), pp. 215–220.
- [63] KAWAMURA, S., AND ITO, K. A New Type of Master Robot for Teleoperation Using a Radial Wire Drive System. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (Yokohama, Japan, 1993), pp. 55–60.
- [64] KAWAMURA, S., KINO, H., AND WON, C. High-speed manipulation by using parallel wire-driven robots. *Robotica* 18 (2000), 13–21.
- [65] KHALIL, W., AND DOMBRE, E. *Modélisation, Identification et Commande des robots*, 2^e ed. 1999.
- [66] KIM, S., KOIKE, Y., AND SATO, M. Tension Based 7-DOF Force Feedback Device : SPIDAR-G. *Transactions on Control, Automation, and Systems Engineering* 4 (2002), 9–16.
- [67] KOZAK, K., AND WANG, Q. Z. E. J. Static analysis of cable-driven manipulators with non-negligible cable mass. *IEEE Transactions on Robotics* 22 (2006), 425–433.
- [68] KRUT, S., COMPANY, O., AND PIERROT, F. Force performance indexes for parallel mechanisms with actuation redundancy, especially for parallel wire-driven manipulators. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2004* (2004), pp. 3936–3941.
- [69] LACARBONARA, W., AND PACITTI, A. Nonlinear Modeling of cables with flexural stiffness. *Mathematical problems in Engineering* 2008 (2008).
- [70] LAFOURCADE, P. *Etude des manipulateurs parallèles à câbles, conception d’une suspension active pour soufflerie*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l’Aéronautique et de l’Espace, 2004.
- [71] LAFOURCADE, P., LLIBRE, M., AND REBOULET, C. Le manipulateur à câbles SACSO. In *Conférence Internationale Francophone d’Automatique* (2002).
- [72] LAFOURCADE, P., AND VERHOEVEN, R. Une nouvelle architecture, fortement redondante, pour un manipulateur à câbles au volume de travail étendu. In *16^e Congrès Français de Mécanique* (Nice, France, 2003).
- [73] LAFOURCADE, P., ZHENG, Y.-Q., AND LIU, X.-W. Stiffness Analysis of Wire-Driven Kinematic Manipulators. In *11th World Congress in Mechanism and Machine Science* (Tianjin, China, 2004).
- [74] LEFRANÇOIS, S., AND GOSSELIN, C. Point-to-Point Control of a Pendulum-Like 3-DOF Underactuated Cable-Driven Robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Anchorage, Alaska, USA, 2010), pp. 5187–5193.
- [75] LUMELSKY, V. J. On fast computation of distance between line segments. *Information processing letters* 21 (1985), 55–61.
- [76] MAEDA, K., TADOKORO, S., TAKAMORI, T., HILLER, M., AND VERHOEVEN, R. On design of a redundant wire-driven parallel robot WARP manipulator. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Detroit, MI, USA, 1999), pp. 895–900.
- [77] MAIER, T., AND WOERNIE, C. Flatness-Based Control of Underconstrained Cable Suspension Manipulators. In *ASME Design Engineering Technical Conference* (Las Vegas, Nevada, USA, 1999), no. DETC99/VIB-8223.

- [78] MASCIOLA, M. C., NAHON, M., AND DRISCOLL, F. R. Static Analysis of a Lumped Mass Cable System. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (Montréal, Québec, Canada, 2010).
- [79] MEGARD, C., RÉMY-NERIS, O., TANGUY, E., BELLANTE, P., AND PERRET, J. KINEHAPTIQUE : a robotic system for upper limb rehabilitation. In *Virtual Reality International Conference* (Laval, 2006).
- [80] MENDEWALD, A. L. Means for suspending and moving a platform or the like, US Patent No 2 164 128, 1939.
- [81] MERLET, J.-P. *Les Robots Parallèles*, 2^e ed. Paris, France, 1997.
- [82] MERLET, J.-P. Analysis of the Influence of Wires Interference on the Workspace of Wire Robots. *Advances in Robot Kinematics June 2004* (2004), 211–218.
- [83] MERLET, J.-P. Kinematics of the wire-driven parallel robot MARIONET using linear actuators. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Pasadena, CA, 2008), pp. 3857–3862.
- [84] MERLET, J.-P., DANEY, D., WINCH, A., AND NEEDS, A. A portable , modular parallel wire crane for rescue operations. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Anchorage, Alaska, USA, 2010), pp. 2834–2839.
- [85] MORIZONO, T., KURAHASHI, K., AND KAWAMURA, S. Realization of a virtual sports training system with parallel wire mechanism. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Albuquerque, New Mexico, USA, 1997), vol. pages, pp. 3025–3030.
- [86] NAN, R., AND PENG, B. A chinese concept for 1 ~ km² radio telescope. *Acta Astronautica* 46 (2000), 667–675.
- [87] NOTASH, L., AND MCCOLL, D. Workspace investigation of wire-actuated parallel manipulators with uncertainties in wire connections. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (Montréal, Québec, Canada, 2010).
- [88] OH, S.-R., AND AGRAWAL, S. K. Cable-suspended planar parallel robots with redundant cables : controllers with positive cable tensions. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2003), pp. 3023–3028.
- [89] OH, S. R., AND AGRAWAL, S. K. A reference governor-based controller for a cable robot under input constraints. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 13 (2005), 639–645.
- [90] OTTAVIANO, E., CECCARELLI, M., PAONE, A., AND CARBONE, G. A Low-Coast Easy Operation 4-Cable Driven Parallel Manipulator. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Barcelona, Spain, 2005), pp. 4019–4024.
- [91] PERREAULT, S., AND GOSSELIN, C. Cable-driven parallel mechanisms : application to a locomotion interface. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (2007).
- [92] PUSEY, J., FATTAH, A., AGRAWAL, S., AND MESSINA, E. Design and workspace analysis of a 6-6 cable-suspended parallel robot. *Mechanism and Machine Theory* 39 (2004), 761–778.
- [93] RAHIMI, M. A., HEMAMI, H., AND ZHENG, Y. F. Experimental Study of a Cable-Drivent Suspended Platform. In *IEEE International Conference on Robotics an Automation* (Detroit, Michigan, USA, 1999), pp. 2342–2347.

-
- [94] RIECHEL, A. T., AND EBERT-UPHOFF, I. Force-feasible workspace analysis for underconstrained, point-mass cable robots. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2004), pp. 4956–4962.
- [95] ROBERTS, R. G., GRAHAM, T., AND LIPPITT, T. On the Inverse Kinematics, Statics, and Fault Tolerance of Cable-Suspended Robots. *Journal of Robotic Systems* 15 (1998), 581–597.
- [96] ROSATI, G., GALLINA, P., AND MASIERO, S. Design, Implementation and Clinical Tests of a Wire-Based Robot for Neurorehabilitation. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering* 15 (2007), 560–569.
- [97] ROSATI, G., GALLINA, P., MASIERO, S., AND ROSSI, A. Design of a new 5 DOF wire-based robot for rehabilitation. In *9th International Conference on Rehabilitation Robotics* (2005), pp. 430–433.
- [98] RYU, D., CHO, C., KIM, M., AND SONG, J.-B. Design of a 6-DOF Haptic Master for Teleoperation of a Mobile Manipulator. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Taipei, Taiwan, 2003), pp. 3243–3248.
- [99] SHIANG, W.-J., CANNON, D., AND GORMAN, J. Optimal force distribution applied to a robotic crane with flexible cables. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (2000), pp. 1948–1954.
- [100] SKYCAM. <http://skycam.tv>.
- [101] SPIDERCAM. <http://www.spidercam.net>.
- [102] SPYDERCAM. <http://spydercam.com>.
- [103] STAROSSEK, U. Dynamic Stiffness Matrix of Sagging Cable. *Journal of Engineering Mechanics* 117, 12 (1991), 2815–2829.
- [104] STAROSSEK, U. Cable Dynamics - A Review. *Structural Engineering International* 4, 3 (1994), 171–176.
- [105] SURDILOVIC, D., AND BEMHARDT, R. STRING-MAN : A New Wire Robot for Gait Rehabilitation. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (New Orleans, Louisiana, USA, 2004), pp. 2031–2036.
- [106] TADOKORO, S., MURAO, Y., HILLER, M., MURATA, R., KOHKAWA, H., AND MATSUSHIMA, T. A motion base with 6-DOF by parallel cable drive architecture. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 7 (2002), 115–123.
- [107] TADOKORO, S., VERHOEVEN, R., HILLER, R., AND TAKAMORI, T. A Portable Parallel Manipulator for Search and Rescue at Large-Scale Urban Earthquakes and an Identification Algorithm for the Installation in Understructured Environments. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems* (Kyongju, Korea, 1999), pp. 1222–1227.
- [108] TAKEMURA, F., ENOMOTO, M., TANAKA, T., AND DENOU, K. Development of the balloon-cable driven robot for information collection from sky and proposal of the search strategy at a major disaster. In *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics* (Monterey, California, USA, 2005), pp. 24–28.
- [109] TANGUY, E., THÉAUDIN, N., JOLY, H., SILORET, M., MÉGARD, C., AND RÉMY-NERIS, O. Test de faisabilité d’utilisation d’un système robotisé à retour d’effort dans la rééducation du membre supérieur de l’adulte. In *22^e Congrès de la SOFMER de Médecine Physique et de Réadaptation* (Saint-Malo, France, 2007).

- [110] TREVELYAN, J. P. A suspended Device for Humanitarian Demining. In *Eurel International Conference on the Detection of Abandoned Land Mines* (Edinburgh, UK, 1996), pp. 51–55.
- [111] USHER, K., WINSTANLEY, G., CORKE, P., STAUFFACHER, D., AND CARNIE, R. Air vehicle simulator : an application for a cable array robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Barcelona, Spain, 2005), pp. 2253–2258.
- [112] VERHOEVEN, R. *Analysis of the Workspace of Tendon-Based Stewart-Platforms*. PhD thesis, Fakultat für Ingenieurwissenschaften "Ingenieurwissenschaften - Campus Duisburg" Abteilung Maschinenbau, 2003.
- [113] VISCOMI B. V. MICHALERYA, W. D. L. U. L.-W. Automated Construction in the ATLSS integrated building systems. *Automation in Construction* 3 (1994), 35–43.
- [114] WILLIAMS, R. L., XIN, M., AND BOSSCHER, P. Contour-Crafting-Cartesian-Cable Robot System Concepts : Workspace and Stiffness Comparisons. In *ASME International Design Engineering Technical Conference* (New-York, NY, USA, 2008).
- [115] WILLIAMS II, R. L. Cable suspended haptic interface. *International Journal of Virtual Reality* 3, 3 (1998), 13–21.
- [116] ZI, B., DUAN, B., DU, J., AND BAO, H. Dynamic modeling and active control of a cable-suspended parallel robot. *Mechatronics* 18 (Feb. 2008), 1–12.
- [117] ZITZEWITZ, J. V., RAUTER, G., STEINER, R., BRUNSCHWEILER, A., AND RIENER, R. A Versatile Wire Robot Concept as a Haptic Interface for Sport Simulation. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation* (Kobe, Japan, 2009), pp. 313–318.

Annexe A

Description du démonstrateur ReelAx6

A.1 Description générale

Les principales caractéristiques du démonstrateur ReelAx6 sont :

- une base composée de trois poteaux de $3m$ de haut placés aux sommets d'un triangle équilatéral de $3m$ de côté.
- 6 actionneurs situés aux pieds des poteaux (deux par poteau). Des moteurs « direct-drive » actionnent les tambours autour desquels les câbles sont enroulés. L'utilisation de moteur direct drive permet d'obtenir une mesure indirecte de la tension dans les câbles par l'intermédiaire de l'image du courant.
- des capteurs de force ont été installés sur le chemin de câble. Ils permettent d'avoir une mesure direct de la tension dans le câble.
- le diamètre maximal de chaque câble est de $2mm$.
- la masse maximale de la plate-forme chargée est de $25kg$.
- le système de commande du robot est basé sur un bus de terrain Ethernet Beckhoff (EtherCAT). Il permet, dans une optique d'un futur agrandissement du démonstrateur, de limiter les fils électriques de connections entre les actionneurs, les codeurs, le variateur et le PC de contrôle.

Le démonstrateur a été conçu afin d'être facilement reconfigurable. Ainsi la géométrie des points de sortie des câbles peut être modifiée afin de tester différentes configurations. La plate-forme permet également de modifier rapidement la géométrie des points d'attache des câbles. Le chemin de câble de l'actionneur au point de sortie du câble a également été conçu de façon à pouvoir s'adapter à la géométrie choisie. Les différents éléments du démonstrateur sont présentés dans la section suivante.

A.2 Présentation des différents éléments du robot ReelAx6

A.2.1 Description de la base

Les poteaux ont été dimensionnés afin de limiter leur flexion due aux forces appliquées par les câbles. La section du poteau a été choisie afin de limiter la flèche maximale à $1mm$ à l'extrémité du poteau. Les poteaux ont une section carré creuse de $150mm$ de côté et



FIGURE A.1 - *Le démonstrateur ReelAx6, un robot parallèle à 6 câbles et 6 DDL reconfigurable.*

de $3mm$ d'épaisseur.

A.2.2 L'enrouleur

A.2.2.1 Cinématique

Dans un objectif de précision, nous avons conçu l'enrouleur (Fig. A.2) de manière à ce que le câble sorte du tambour par un point fixe. Ainsi, le tambour se déplace lors de l'enroulement afin de réaliser un enroulement régulier sur un seul tour le long du tambour. La translation du tambour est réalisée par une vis à bille d'un pas de $2mm$ permettant d'enrouler un câble de diamètre maximal $2mm$. Cette vis encastrée dans le bâti de l'enrouleur permet au tambour, entraîné en rotation par le moteur, de se déplacer en translation et ainsi assure un enroulement régulier du câble.

Pour transmettre la rotation au tambour, un entraînement par deux tiges excentrées traversant le tambour a été choisi. La liaison entre ces tiges et le tambour est assuré par des douilles à billes.

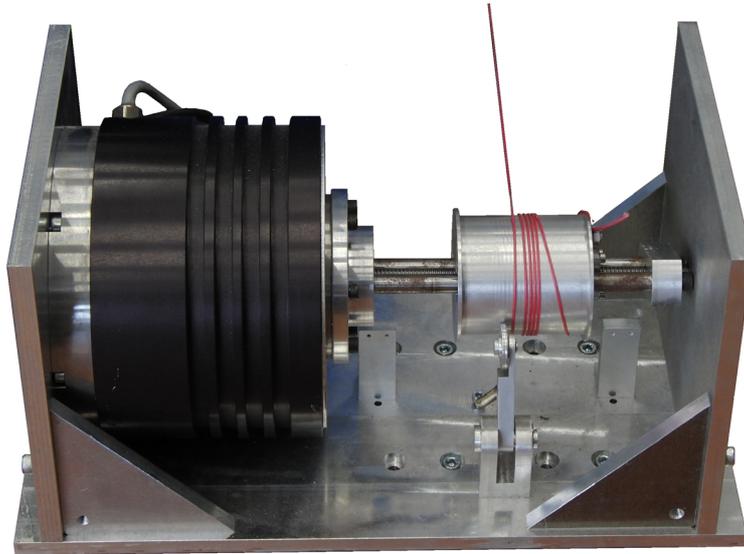


FIGURE A.2 - Photo de l'enrouleur.

A.2.2.2 Tambour

Le tambour a été dimensionné afin de pouvoir enrouler $4m$ de câble (longueur maximale déroulée aux extrémités de l'espace de travail). Le diamètre du tambour a été choisi suffisamment grand afin de ne pas endommager le câble avec un rayon de courbure trop petit. D'après différentes normes sur les câbles pour le levage, le rayon de courbure minimum doit être d'au moins 22 fois le rayon du câble. Le tambour a un diamètre de $62mm$ et une longueur de $64mm$.

A.2.2.3 Moteur

Le moteur choisi est un moteur direct drive de la marque ETEL (référence RTMB-100-70). Il permet d'atteindre des vitesses de rotation de $400tr/min$ et un couple de $90Nm$. La technologie direct drive permet également d'obtenir une mesure indirecte du couple par image du courant.

A.2.3 Chemin de câble de l'enrouleur au point de sortie du câble

Le chemin de câble est facilement modifiable afin de pouvoir s'adapter à différentes géométries des points de sortie des câbles.

A.2.3.1 Poulie de renvoi et capteur de force

Le câble sort de l'enrouleur horizontalement par un point fixe. Une poulie de renvoi redirige le câble verticalement afin de l'amener jusqu'au point de sortie situé en haut du poteau. Cette poulie est instrumentée avec un capteur de force en traction. Le capteur de force est positionné à 45 degrés par rapport à l'arrivée du câble, tel que présenté à la Fig. A.3. La mesure faite correspond donc à $\sqrt{2}$ fois la tension dans le câble. L'étendue de mesure du capteur de force utilisé est de $0N$ à $500N$, ce qui autorise des tensions dans les câbles allant jusqu'à $353N$.

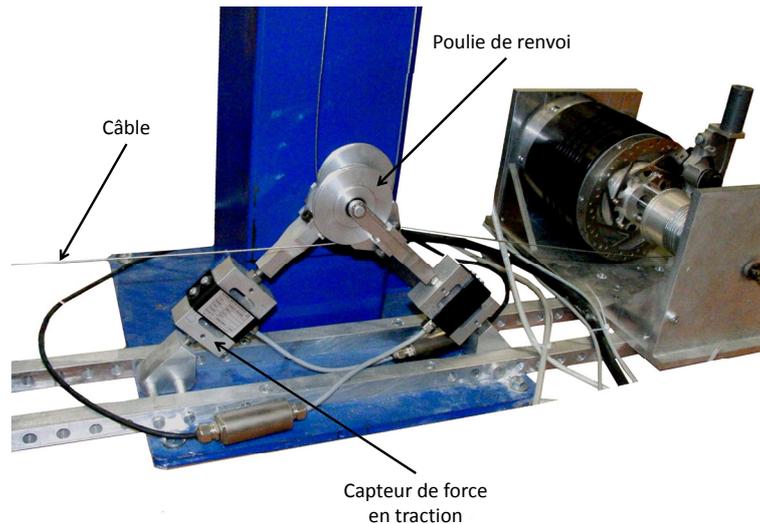


FIGURE A.3 - Photo du système poulie / capteur de force.

Notons que la position du système poulie/capteur de force peut être modifiée afin de s'adapter à la géométrie des points de sortie des câbles choisie.

A.2.3.2 Dernière poulie et point de sortie du câble

Après la poulie instrumentée présentée à la section A.2.3.1, le câble remonte le long du poteau jusqu'à une seconde poulie de renvoi dont l'objet est de réorienter le câble vers le centre de l'espace de travail jusqu'à s'attacher à la plate-forme mobile. Toutefois, la plate-forme étant mobile, la direction de sortie du câble varie. L'oeillet représente la position de sortie du câble et est considéré comme étant un point (le point de sortie) dans les modèles. Pour des raisons de précision, nous souhaitons que ce point reste fixe pendant le fonctionnement du robot. Nous avons donc conçu l'oeillet afin qu'il autorise une variation de la direction de sortie du câble tout en limitant les frottements. Cet oeillet est présenté à la Fig. A.4. L'oeillet doit être orienté vers le centre de l'espace de travail afin de limiter les frottements.

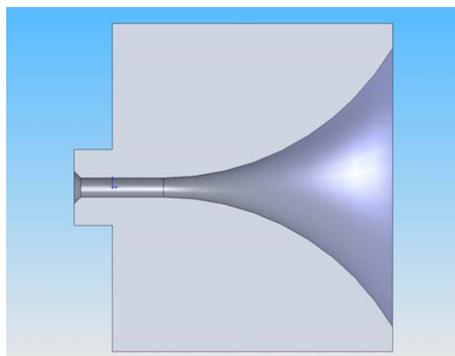


FIGURE A.4 - Coupe de l'oeillet (point de sortie du câble).

La géométrie des points de sortie des câbles pouvant être modifiée afin de changer la configuration du robot, ce deuxième système de renvoi du câble doit être reconfigurable.

Le système composé de la dernière poulie et de l'oeillet est présenté à la Fig. A.3. Il possède deux liaisons rotoïdes permettant d'ajuster la direction de sortie du câble. Notons qu'un système de serrage permet de fixer la position du point de sortie du câble.

Comme on peut le voir à la Fig. A.3, la dernière poulie de renvoi est fixée à une plaque elle même attachée au poteau. Ce système d'attache sur le poteau permet de modifier facilement la position du point de sortie du câble. En effet, la plaque sur laquelle est fixé le système poulie/oeillet possède une matrice de points de fixation. Ceci permet de modifier horizontalement la position du point de sortie du câble. Cette plaque étant fixée au poteau par serrage, il est possible de faire varier son altitude le long du poteau. Trois géométries différentes des points de sortie des câbles sont présentées aux Fig. A.6(a), A.6(b) et A.6(c).

A.3 ReelAx8

Une évolution du démonstrateur ReelAx6 a été récemment réalisée. Un poteau (et donc 2 câbles) a été ajouté afin d'augmenter le nombre de configurations possibles. Les quatre poteaux sont cette fois positionnés aux sommets d'un rectangle d'approximativement $4m$ sur $3m$. Cette nouvelle version du démonstrateur, présentée à la Fig.A.5, va notamment permettre de tester les configurations obtenues par la méthode de selection décrite au chapitre 4.



FIGURE A.5 - Photo de la version ReelAx8 du démonstrateur.

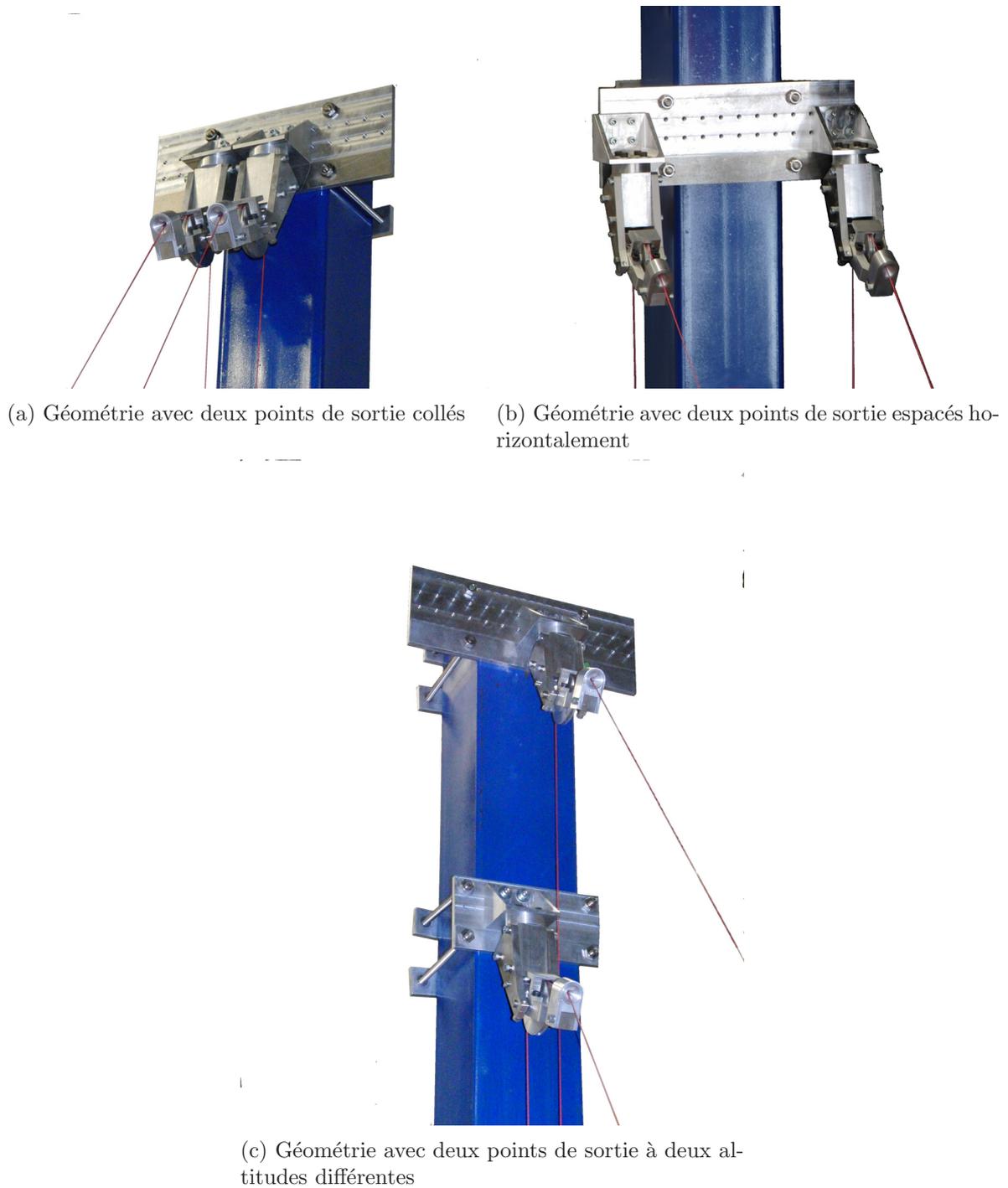


FIGURE A.6 - *Trois géométrie possibles des points de sortie des câbles.*

Annexe B

Méthodes de détermination du câble adéquat pour un robot à câbles de grande dimension

Lorsque l'on souhaite choisir le câble à utiliser pour une application donnée et pour une configuration de robot connue, il est nécessaire de déterminer la tension maximale pouvant apparaître dans l'espace de travail du robot. Toutefois, la masse du câble a une influence sur la tension. Ainsi, une fois la masse du câble prise en compte, une tension plus élevée est obtenue, et un câble de diamètre plus important sera nécessaire, la tension maximale va à nouveau augmenter, et ainsi de suite.

Nous avons donc proposé deux méthodes de détermination d'un câble permettant de supporter à la fois la tension due à la charge transportée et à la masse de câble déroulé. La première se base sur une simple boucle, alors que la deuxième utilise sur un processus d'optimisation.

Notons que pour ces deux méthodes, un type de câble (matériau et construction) à utiliser doit être spécifié, afin de connaître la contrainte maximale admissible σ_{max} , la masse volumique du matériau M_v , et le module d'Young E . Le paramètre à déterminer est le diamètre (ou la masse linéique ρ_0 qui lui est proportionnelle).

B.1 Méthode basée sur une boucle de détermination du câble

Pour une pose donnée, le processus de détermination du câble commence par la détermination de la tension maximale apparaissant dans le câble avec le modèle de câble sans masse non élastique. Cette valeur nous permet de déterminer une section de câble permettant de supporter cette tension (avec un coefficient de sécurité). Les caractéristiques du câble étant alors connues, il est possible de calculer une nouvelle valeur de la tension maximale en utilisant le modèle de caténaire élastique. Cette nouvelle tension nous permet de déterminer une nouvelle section de câble, et ainsi de suite. Ce processus de détermination de câble se termine lorsque la variation de diamètre entre deux itérations de la boucle devient inférieure à une valeur seuil ε choisie. Pour les différents exemples étudiés, cette méthode converge en seulement quelques itérations. Le schéma de la Fig. B.1 présente cette méthode.

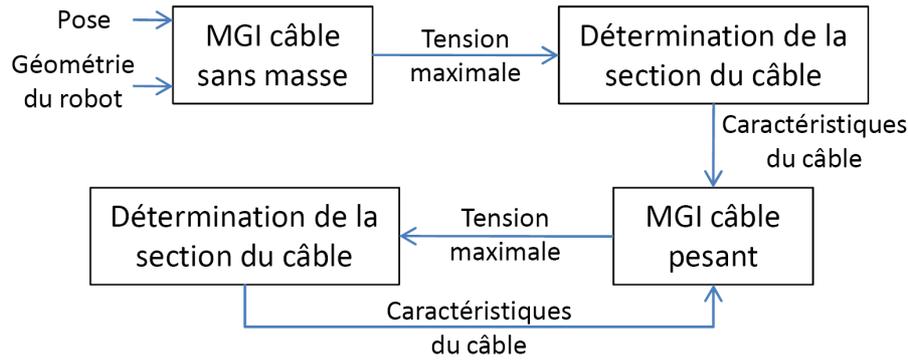


FIGURE B.1 - Boucle de détermination des caractéristiques du câble (MGI = Modèle Géométrique Inverse).

B.2 Méthode basée sur une optimisation

La première méthode bien que fonctionnelle présente l'inconvénient de nécessiter, pour chaque pose étudiée, plusieurs itérations au cours desquelles le problème géométrique inverse est résolu. Ainsi, lorsque l'espace de travail à étudier est discrétisé assez finement, ceci peut résulter en des temps de calcul assez importants. Nous proposons donc de réaliser cette détermination des caractéristiques du câble par une seule optimisation basée sur la résolution du problème géométrique inverse du robot.

Le critère à minimiser ici est le diamètre du câble, ou sa masse linéique (tous deux proportionnels l'un à l'autre), sous contrainte de pouvoir supporter la tension maximale dans le câble pour la pose étudiée.

Ainsi, les équations considérées sont composées des équations de l'équilibre statique (Eq. (2.19)) et des équations décrivant le profil des câbles (2.10) et (2.11). Dans ces deux dernières équations, la variable A_0 , correspondant à la section non-déformée du câble, peut être remplacée par son expression la reliant à la masse linéique du câble ρ_0 ($A_0 = \rho_0/M_v$). Les équations (2.10) et (2.11) ne contiennent alors plus qu'une variable rendant compte de la dimension du câble. Elles contiennent en outre les constantes pour un type de câble choisi, le module d'Young E et la masse volumique du matériau M_v :

$$x(l_{0i}) = \frac{\tau_{i_x} l_{0i} M_v}{E \rho_0} + \frac{|\tau_{i_x}|}{\rho_0 g} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{i_z}}{\tau_{i_x}} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{\tau_{i_z} - \rho_0 g l_{0i}}{\tau_{i_x}} \right) \right] \quad (\text{B.1})$$

$$z(l_{0i}) = \frac{\tau_{i_z} l_{0i} M_v}{E \rho_0} - \frac{l_{0i}^2 g M_v}{2E} + \frac{1}{\rho_0 g} \left[\sqrt{\tau_{i_x}^2 + \tau_{i_z}^2} - \sqrt{\tau_{i_x}^2 + (\tau_{i_z} - \rho_0 g l_{0i})^2} \right] \quad (\text{B.2})$$

Les inconnues du problème sont donc les m longueurs de câble non déformées l_{0i} , les composantes τ_{i_x} et τ_{i_z} des forces τ_{i} pour chacun des m câbles, et la masse linéique du type de câble considéré ρ_0 . Le vecteur d'inconnues de dimension $3m + 1$ est donc :

$$\left[\tau_{1_x} \quad \tau_{1_z} \quad l_{01} \quad \cdots \quad \tau_{m_x} \quad \tau_{m_z} \quad l_{0m} \quad \rho_0 \right] \quad (\text{B.3})$$

Des contraintes d'inégalités sont également ajoutées. Elles correspondent à la contrainte maximale admissible σ_{max} pour le type de câble utilisé :

$$\frac{kM_v\tau_{imax}}{\rho_0} \leq \sigma_{max} \quad \forall i = 1 \dots n \quad (\text{B.4})$$

où k est le facteur de sécurité utilisé.

Finalement le problème d'optimisation dont la résolution donne la masse linéique du câble adéquat consiste à minimiser ρ_0 ($\rho_0 > 0$) tel que les Eqs. (B.1), (B.2), (2.19) et (B.4) avec les inconnues de l'Eq. (B.3).

Annexe C

Schémas des configurations obtenues pour l'exemple de la section 4.8

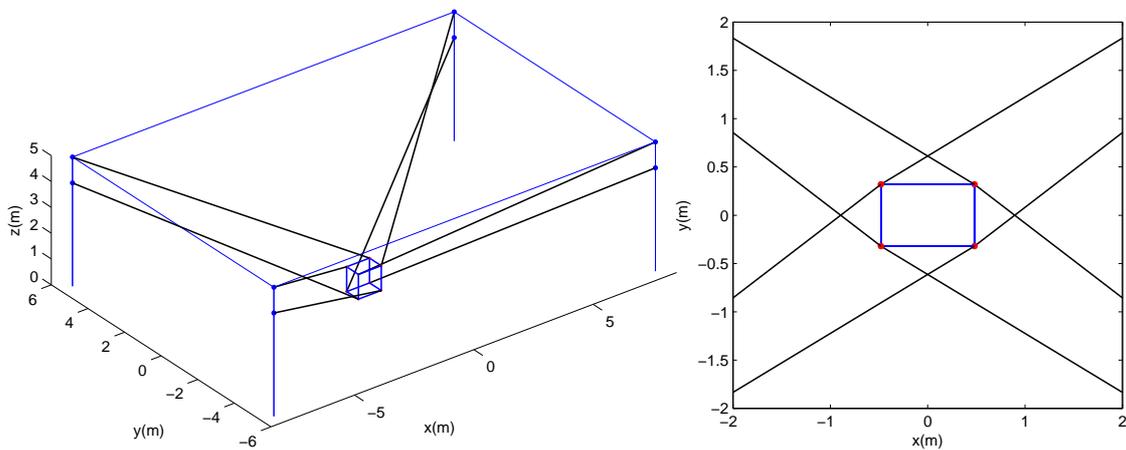


FIGURE C.1 - Schéma de la configuration 1.

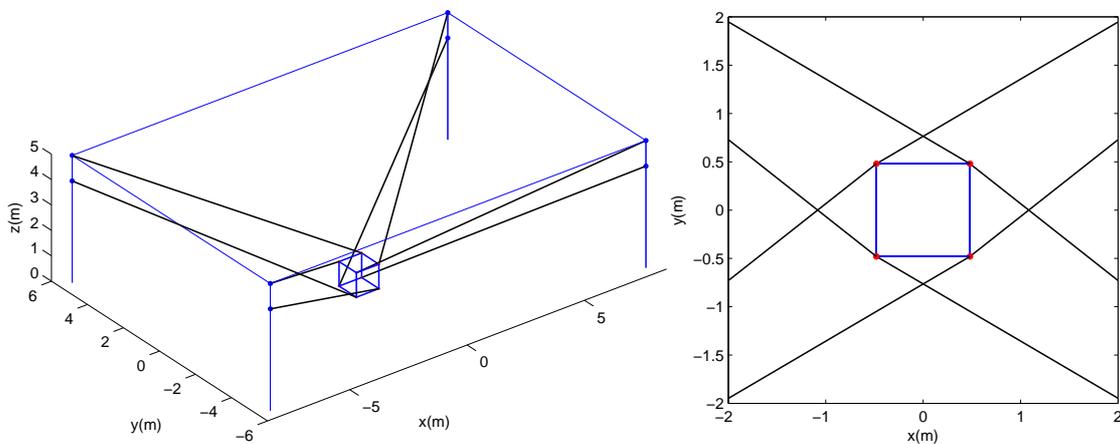


FIGURE C.2 - Schéma de la configuration 2.

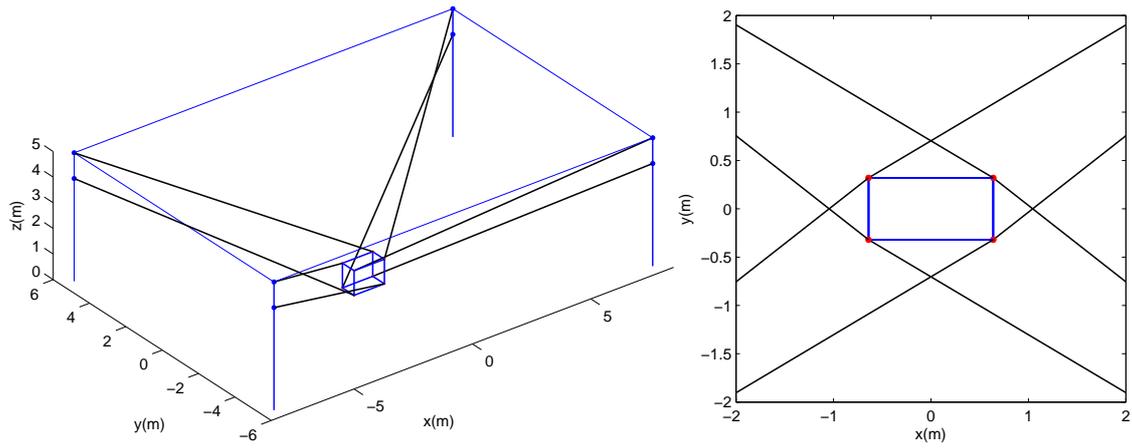


FIGURE C.3 - Schéma de la configuration 3.

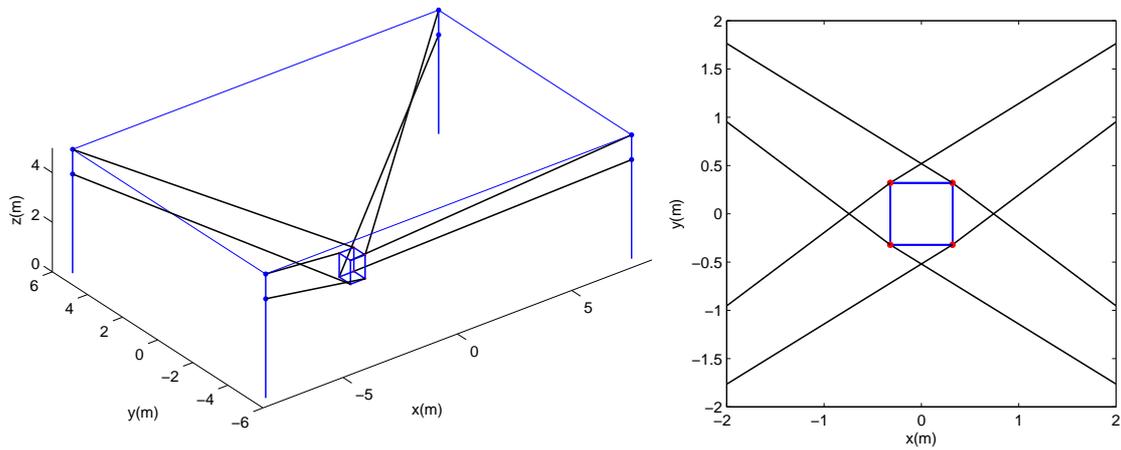


FIGURE C.4 - Schéma de la configuration 4.

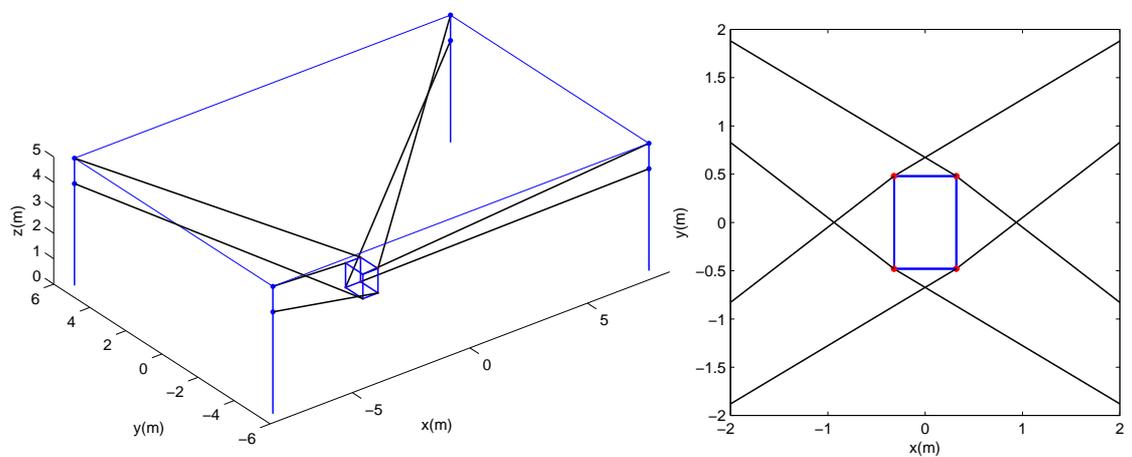


FIGURE C.5 - Schéma de la configuration 5.

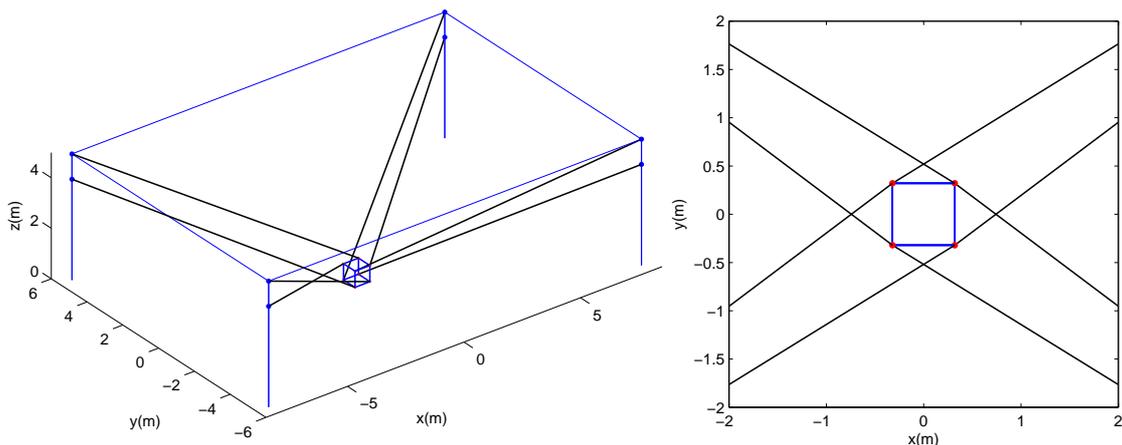


FIGURE C.6 - Schéma de la configuration 6.

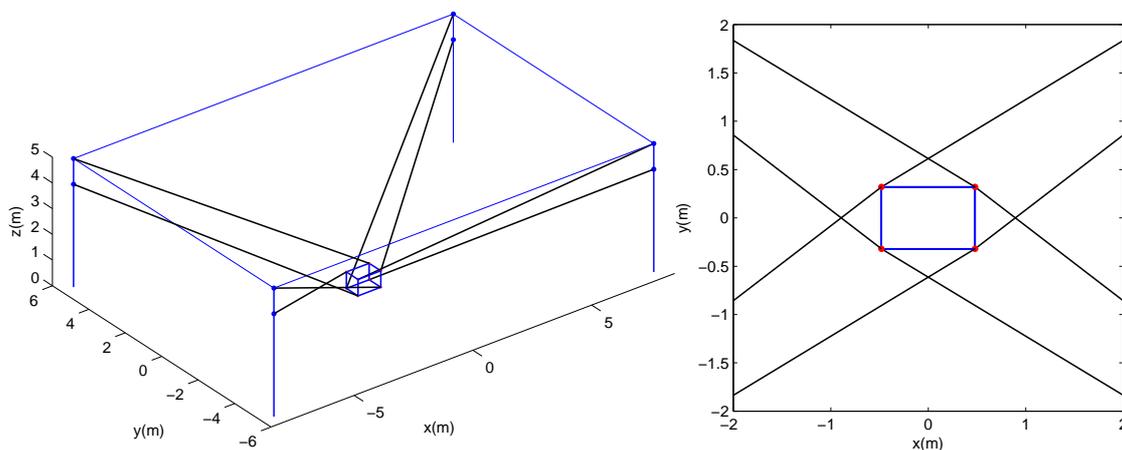


FIGURE C.7 - Schéma de la configuration 7.

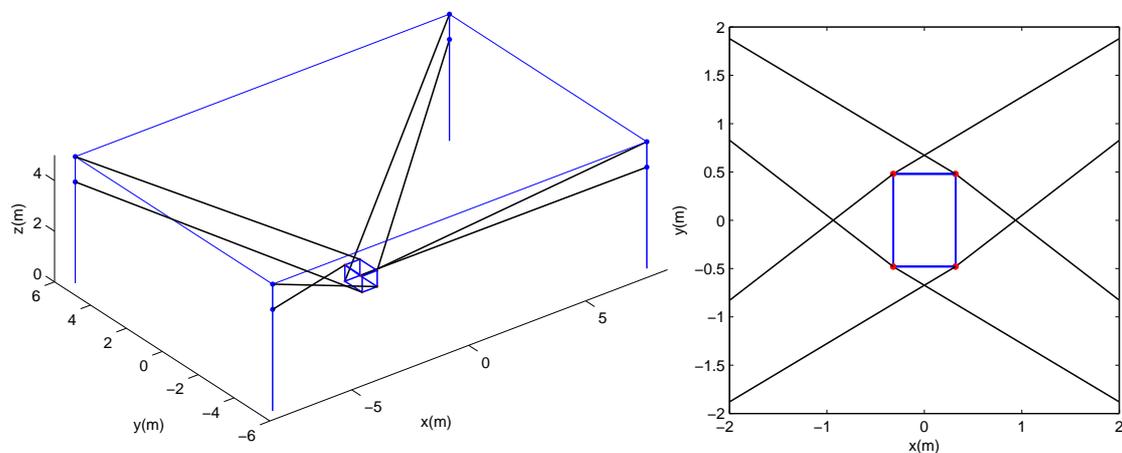


FIGURE C.8 - Schéma de la configuration 8.

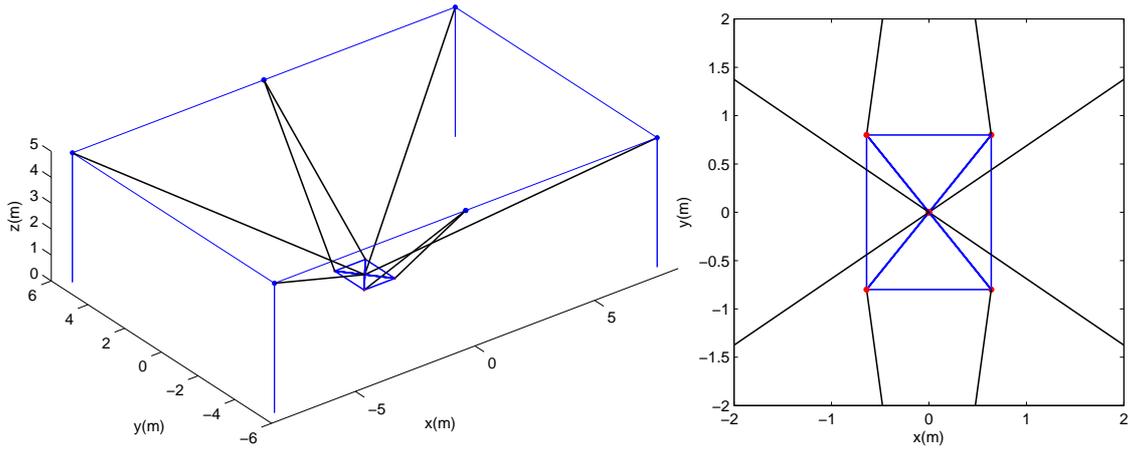


FIGURE C.9 - Schéma de la configuration 9.

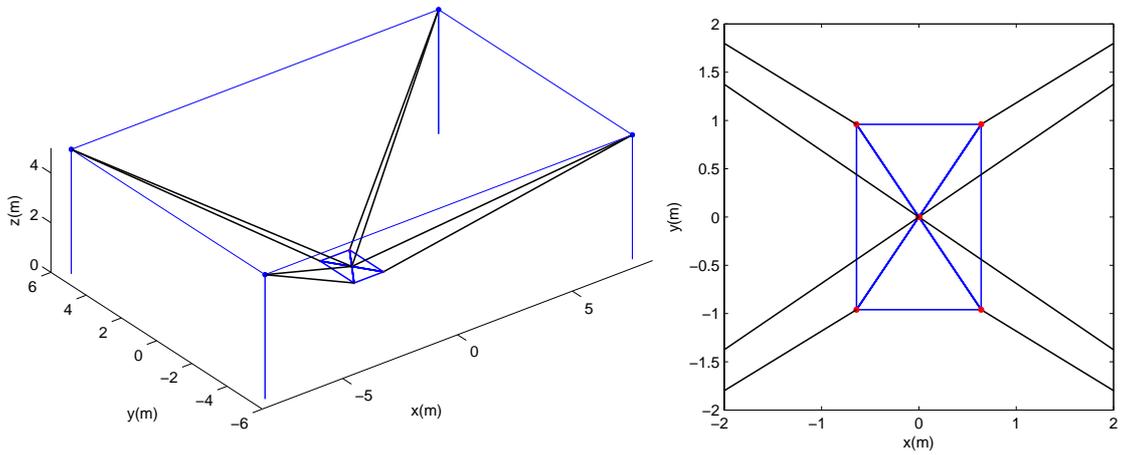


FIGURE C.10 - Schema de la configuration 10.

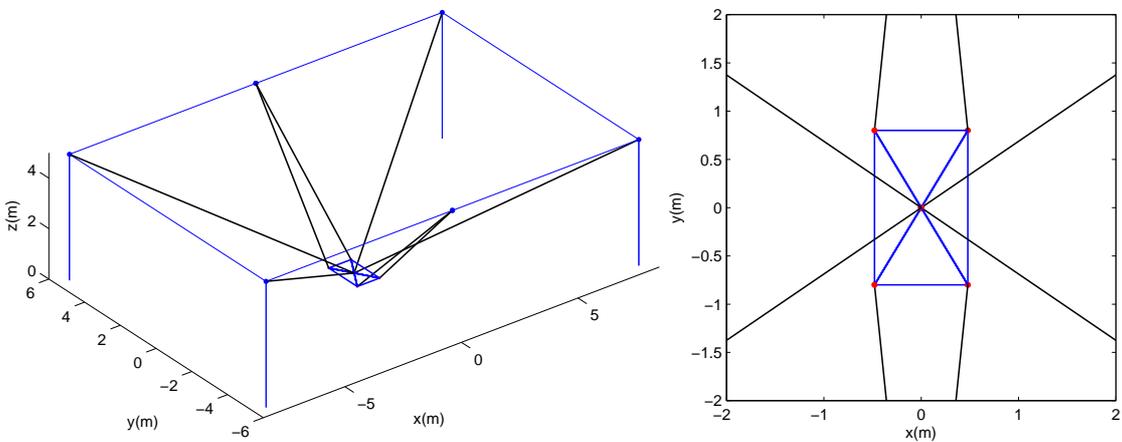


FIGURE C.11 - Schéma de la configuration 11.

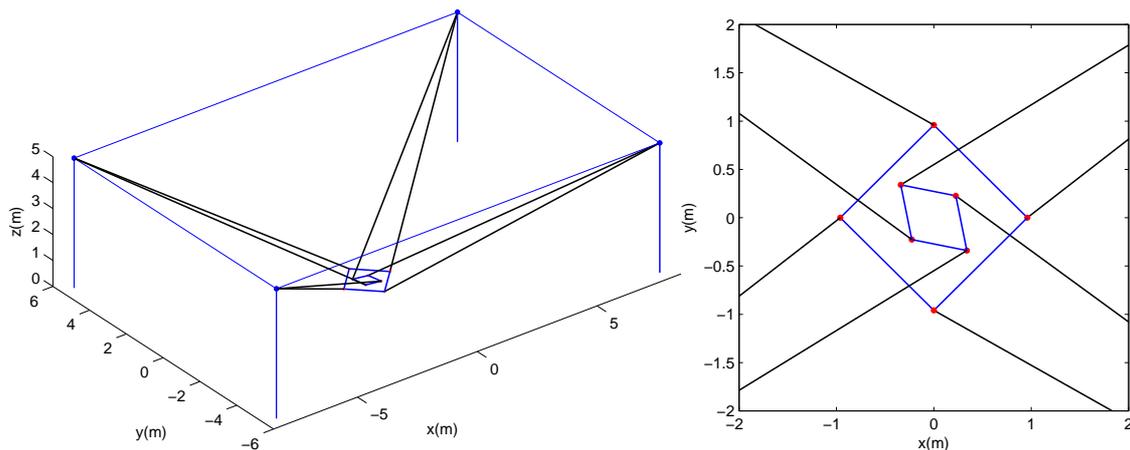


FIGURE C.12 - Schéma de la configuration 12.

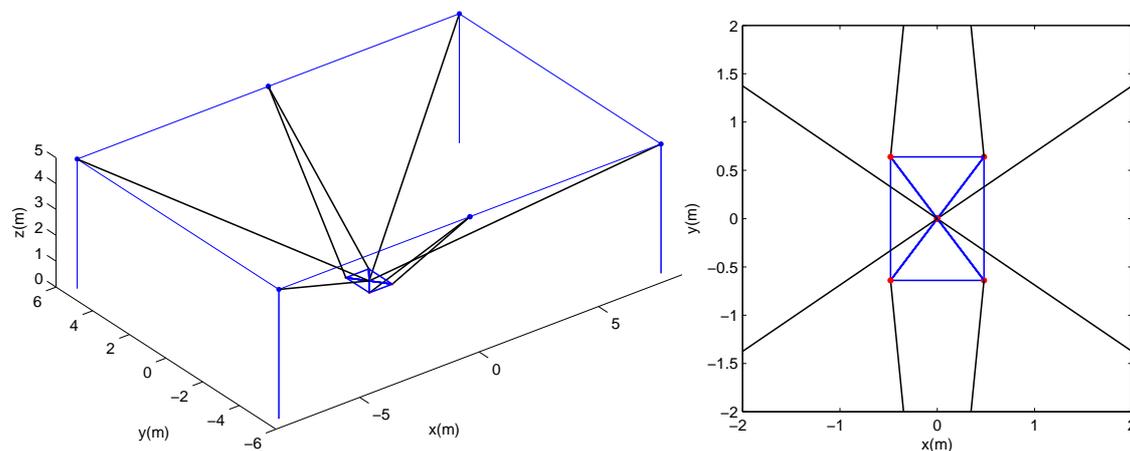


FIGURE C.13 - Schéma de la configuration 13.

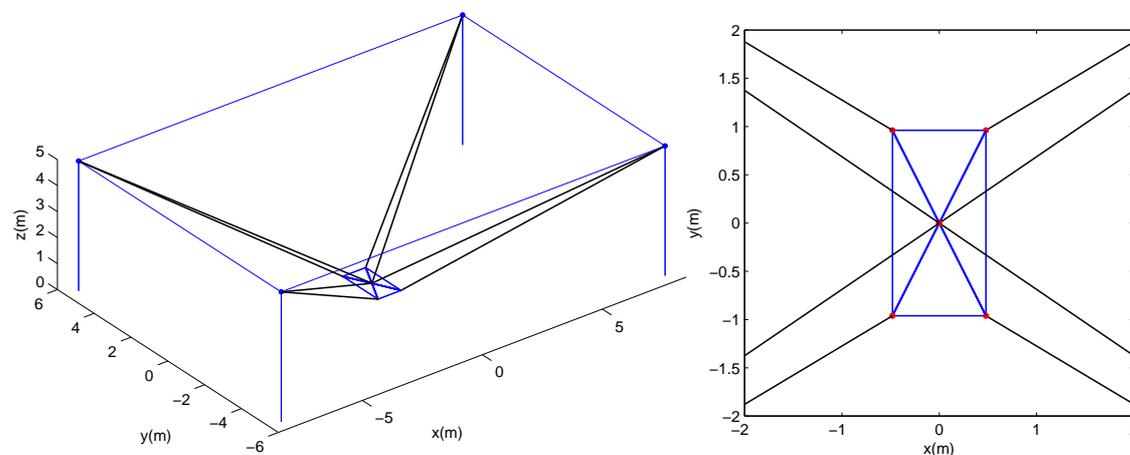


FIGURE C.14 - Schéma de la configuration 14.

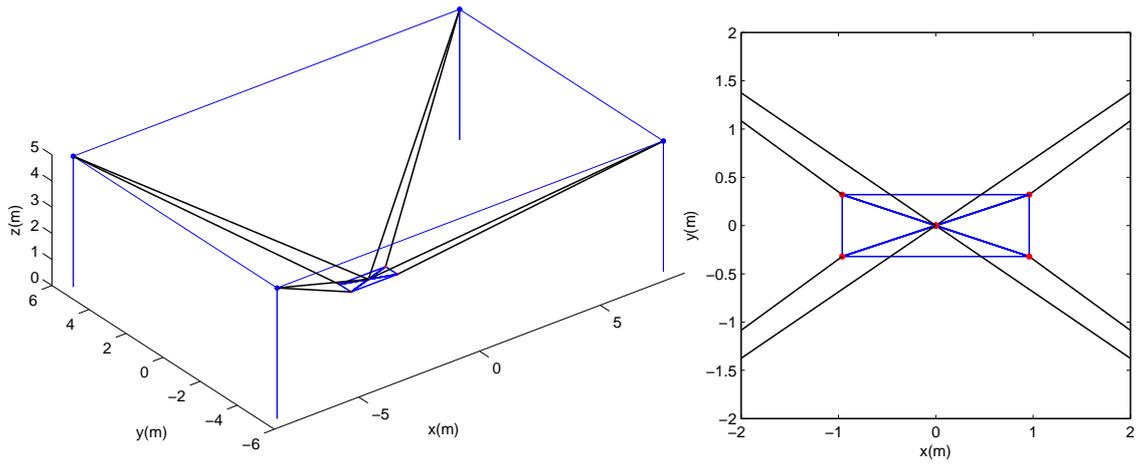


FIGURE C.15 - Schéma de la configuration 15.

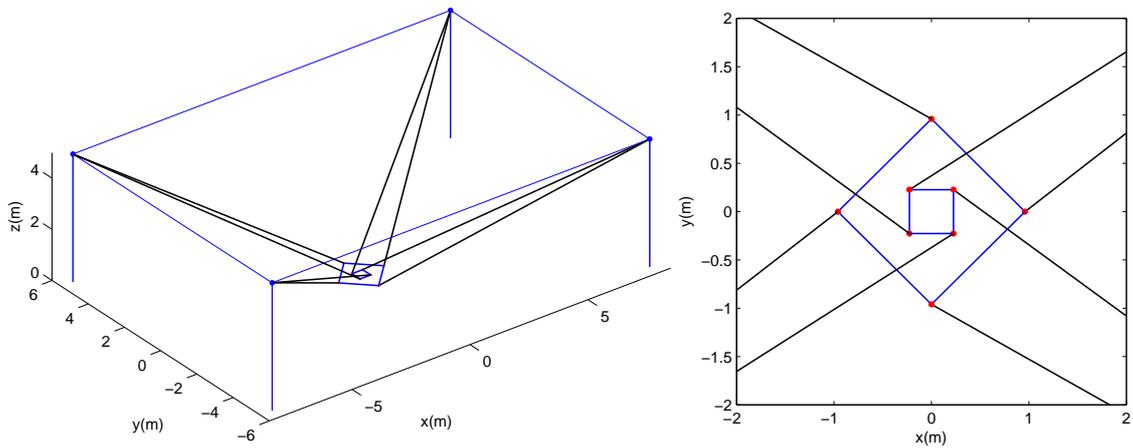


FIGURE C.16 - Schéma de la configuration 16.

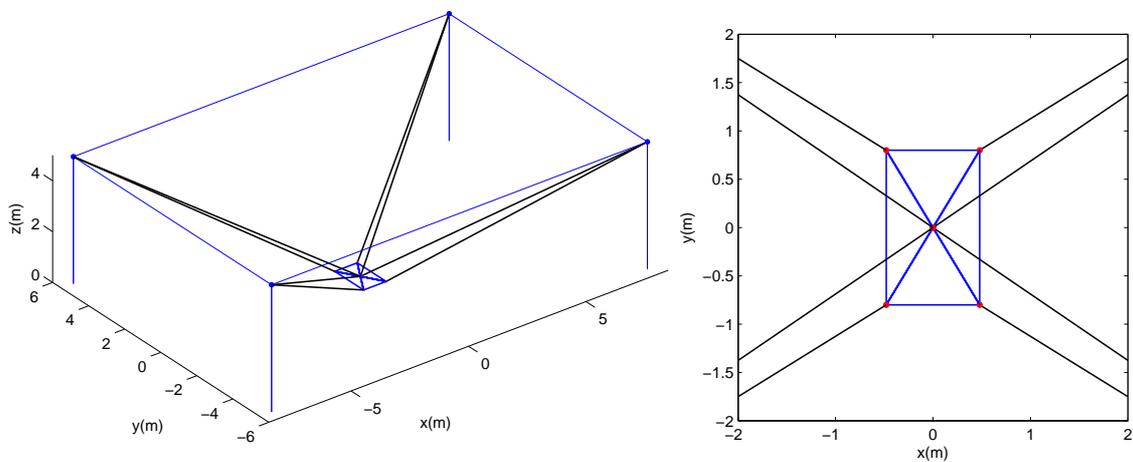


FIGURE C.17 - Schéma de la configuration 17.

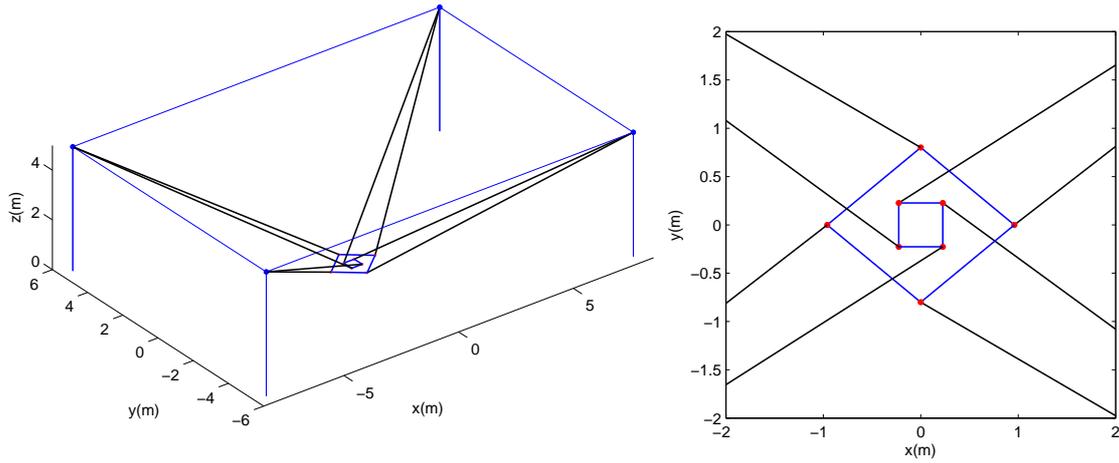


FIGURE C.18 - Schéma de la configuration 18.

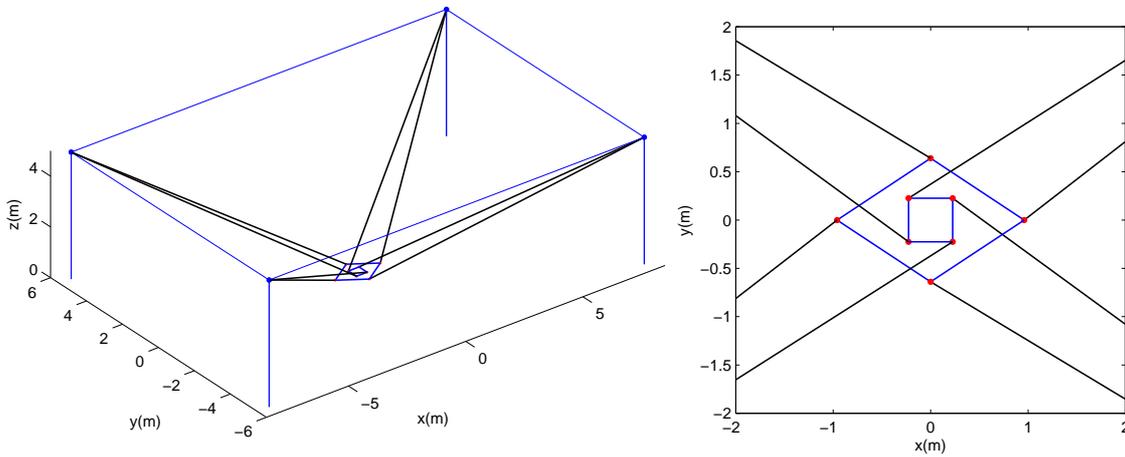


FIGURE C.19 - Schéma de la configuration 19.

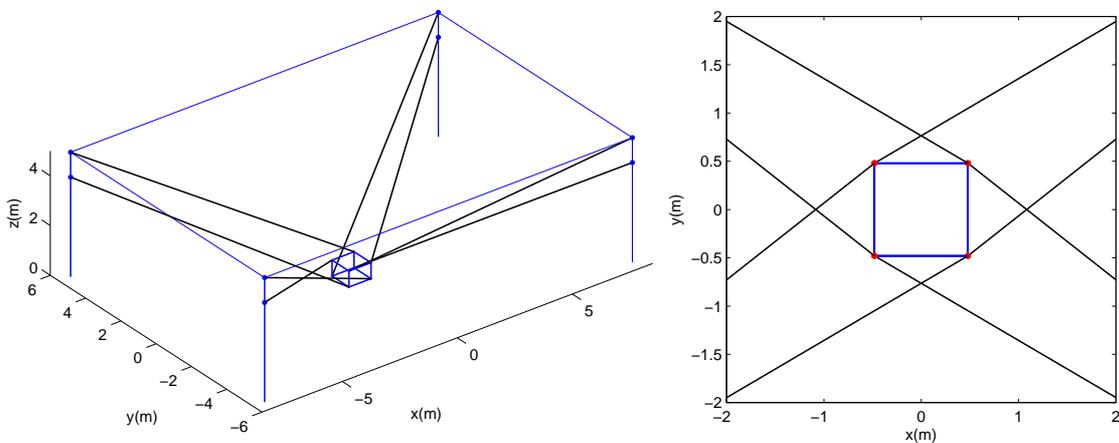


FIGURE C.20 - Schéma de la configuration 20.

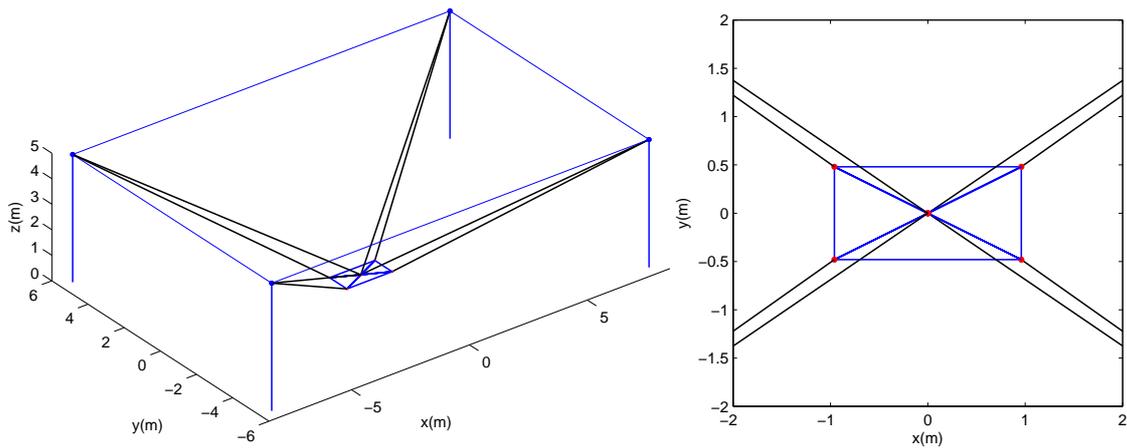


FIGURE C.21 - Schéma de la configuration 21.

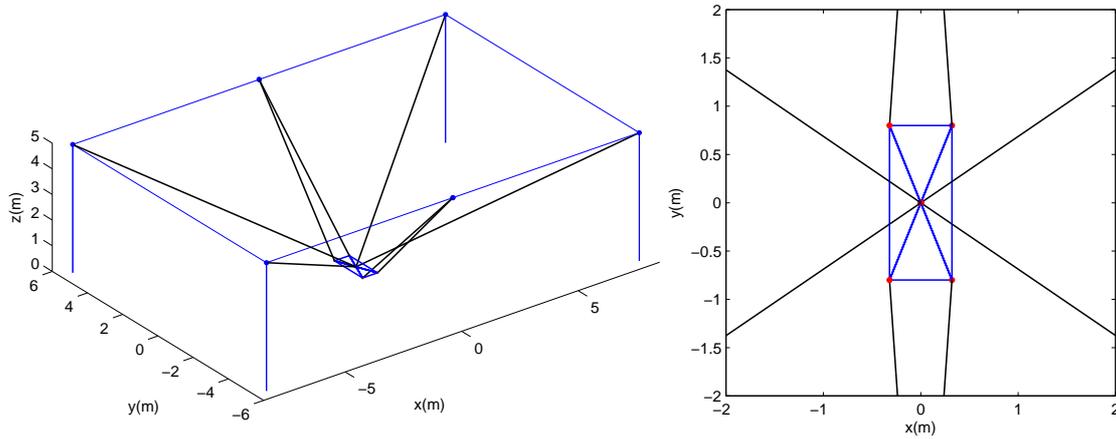


FIGURE C.22 - Schéma de la configuration 22.

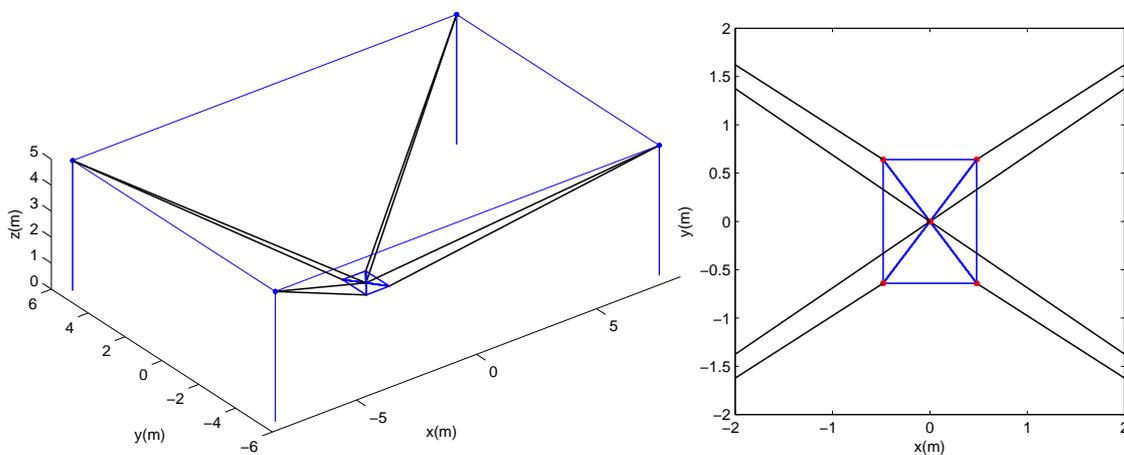


FIGURE C.23 - Schéma de la configuration 23.

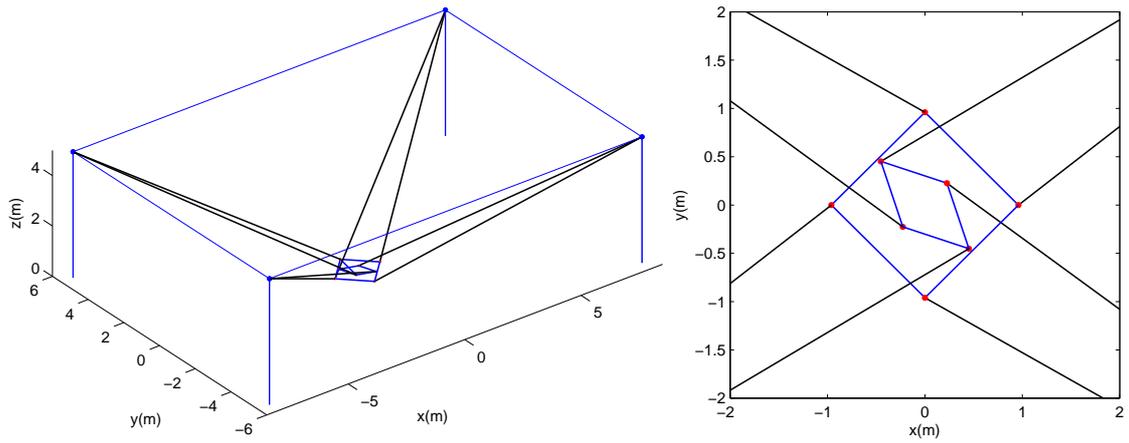


FIGURE C.24 - Schéma de la configuration 24.

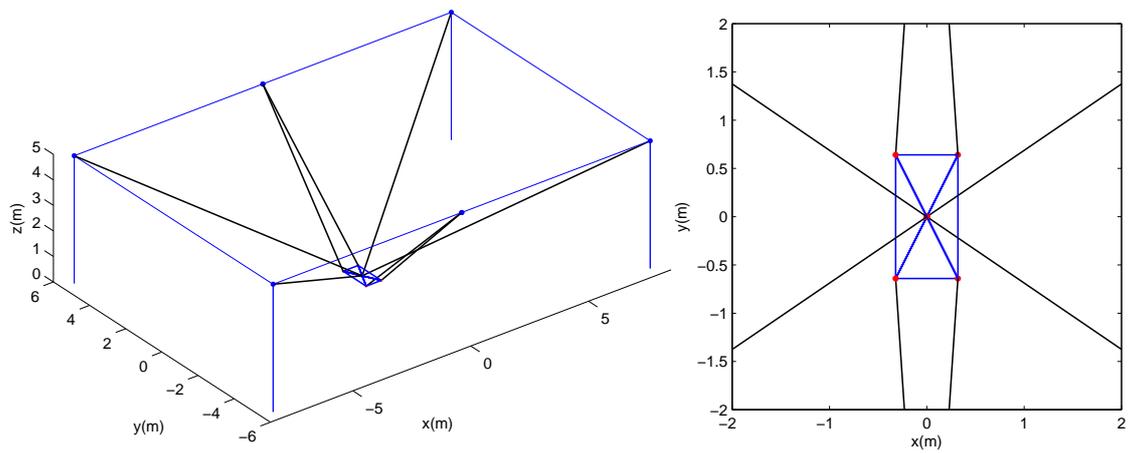


FIGURE C.25 - Schéma de la configuration 25.