Université Paul Verlaine, Metz

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques

par

Alexandre REY ALCANTARA

Théorie de l'indice et géométrie basique d'un feuilletage riemannien

Soutenue publiquement le 2 novembre 2011, devant le jury composé de :

Moulay-Tahar Benameur	(PR Metz, Directeur de thèse)
Sylvie Paycha	(PR Clermont-Ferrand, Rapporteur)
Alexander Gorokhovsky	(Associate PR Boulder, Rapporteur)
Jean-Louis Tu	(PR Metz, Examinateur)
Jean Renault	(PR Orléans, Examinateur)
Martin Schlichenmaier	(PR Luxembourg, Examinateur)
Varghese Mathai	(PR Adelaide, Australie, Examinateur)

Remerciements

Je voudrais remercier Moulay-Tahar Benameur qui a bien voulu encadrer ma thèse. Je le remercie pour tout le temps qu'il a bien voulu m'accorder, pour les opportunités qu'il m'a proposées, et j'en profite pour saluer ses grandes qualités pédagogiques.

Je voudrais remercier Alexander Gorokhovsky et Sylvie Paycha d'avoir bien voulu rapporter ma thèse et d'avoir consacrer autant de temps à sa relecture. Je remercie également Jean-Louis Tu, Jean Renault, Varghese Mathai et Martin Schlichenmaier d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je voudrais témoigner de ma reconnaissance à Aziz El-Kacimi pour m'avoir acceuilli à Lille, pour avoir répondu à mes nombreuses questions et m'avoir délivré de très bons conseils et de précieuses explications tout au long de ce travail. Je voudrais également remercier Alexander Gorokhovsky, Gaël Meigniez et Gilbert Hector, qui ont bien voulu discuter avec moi et me prodiguer d'excellents conseils.

Je souhaiterais remercier les membres du LMAM avec qui j'ai travaillé durant ces quatre dernières années, plus particulièrement l'équipe de Géométrie Non-Commutative et les collègues avec qui j'ai collaboré pour mes enseignements. Je citerais parmi eux Nicolas Louvet, Philippe Bonneau, Nicolas Prudhon et Dong Ye. Je remercie également Angela Pasquale qui a toujours accepté de répondre à mes questions avec énormément de gentillesse.

Je voudrais remercier mes collègues doctorants du LMAM pour tous les bons moments que nous avons passés ensemble et pour la solidarité qui s'est toujours exprimée entre nous. Je citerais parmi eux Frédéric Albert, Indrava Roy, El-Kaïoum Moutuou, Stéphane Garnier, Mikaël Chopp et en particulier Jérôme Noël qui m'a offert à de nombreuses reprises sa précieuse aide et sans qui j'aurais passé des pauses de midi bien plus moroses. Je voudrais également remercier mes collègues de bureaux Imen Ayadi et Ivan Lassagne avec qui j'ai partagé d'excellents moments et qui me manqueront.

Je souhaiterais également remercier la formidable secrétaire du LMAM Isabelle Naviliat.

Je voudrais saluer les doctorants que j'ai rencontré lors de conférences et avec qui j'ai passé de très bons moments, en particulier Haïja Moustafa, Maria-Paula Gomez-Aparicio, et Nicolas Hussenot.

Je voudrais profiter de cette occasion pour témoignier à Chakib Bennis de la profonde gratitude que j'ai à son égard pour tout le temps qu'il a bien

voulu m'accorder tout au long de mes études, pour les conseils qu'il m'a prodigué durant ces dix dernières annés et pour tout ce qu'il a fait pour moi. Je crois qu'il est temps de lui avouer que c'est lui qui a fait naître en moi la vocation de l'enseignement.

Je tiens à témoignier ma reconnaissance à Dorin Bucur pour les précieux conseils qu'il m'a délivrés à de très nombreuses reprises, pour le temps qu'il a bien voulu m'accorder et pour m'avoir incité à entreprendre ce travail et pour m'avoir toujours prodigué de judicieux conseils.

Je voudrais spécialement remercier Anne Lux pour tout le temps qu'elle a bien voulu m'accorder, et je sais combien son temps est précieux. Je voudrais la remercier pour les nombreux conseils qu'elle m'a prodigués et pour l'aide formidable qu'elle m'a apporté durant les six semaines où j'ai eu la chance de la remplacer au lycée Fabert de Metz.

Je voudrais remercier mes collègues du lycée Fabert qui se sont montrés particulièrement accueillants et qui m'ont beaucoup soutenus durant le bref séjour que j'ai effectué auprès d'eux. Je voudrais citer particulièrement Jean-Denis Eiden, Sylvie Larose et Christiane Vincent.

Je tiens également à remercier tous mes collègues actuels du lycée Henri Poincaré de Nancy dont l'aide et le soutien me sont très précieux.

Je voudrais remercier ma famille. Tout d'abord mon beau-père Didier pour son soutien, ses encouragements, son aide et puis tout simplement parce que je sais qu'il est très fier de moi. Je voudrais remercier mes frères d'avoir supporté pendant toutes ces années mes cassages de pieds, mes exigences, ma mauvaise humeur (cette liste n'est pas exhaustive) et puis aussi de ne pas avoir pris assez de temps pour eux.

Je tiens absolument à profiter de cette occasion pour remercier ma mère pour tout ce qu'elle a fait pour moi. Pour l'éducation qu'elle m'a donnée, pour s'être occupé avec autant de ferveur de sa famille, pour avoir tout fait pour que je puisse prendre en mains mon destin. Elle a été à mes côtés durant toutes mes études, m'a toujours encouragé, soutenu, assisté et a tout fait pour faciliter ma réussite. Je n'aurais jamais eu l'occasion de faire des études sans elle et je n'aurais certainement pas accompli un aussi beau parcours. Je sais combien elle est fière de moi et combien elle aurait aimé pouvoir être à ma place. Je tiens donc à lui témoigner ma plus profonde gratitude.

Je souhaiterais remercier ma tendre compagne Jeanne-Sophie qui m'a encouragé, soutenu, supporté mes sauts d'humeurs, mes baisses de moral, mes lamentations, mes "maux de tête" à répétition, et qui est restée à mes

côtés tout au long de ces années. Je lui dois beaucoup.

Je terminerais par non-remercier Ralph Chill, responsable de la bibliothèque du LMAM, qui a mis plus de trois ans pour commander un malheureux livre.

Je voudrais finir en remerciant mon pays, ma patrie la France. Durant ces quatre dernières années, l'idée de perpétuer la tradition française des mathématiques, d'entretenir la réputation des mathématiques françaises m'a toujours accompagnée. Je ne saurais cacher l'amour que je voue à mon pays, celui qui a acceuilli mes parents immigrés, qui m'a vu grandir, qui m'a nourri, soigné et éduqué et qui ne m'a jamais reproché mon nom aux sonorités étrangères.

Table des matières

1 Introduction **7**

2 Rappels sur les opérateurs différentiels **12**
2.1 Opérateurs différentiels 12
2.1.1 Opérateurs différentiels elliptiques 12
2.1.2 L'opérateur de signature 16
2.1.3 L'opérateur de Dolbeault 17
2.1.4 L'opérateur de Dirac 19
2.2 Actions de groupes compacts 22
2.2.1 Cohomologie de de Rham invariante 22
2.2.2 Opérateurs différentiels invariants 24
2.2.3 L'opérateur de signature invariant 26
2.2.4 L'opérateur de Dolbeault invariant 28

3 Feuilletages riemanniens **29**
3.1 Connexion et courbure 29
3.1.1 La connexion de Levi-Civita transverse 29
3.1.2 Courbure principale 33
3.2 Géométrie basique d'un feuilletage riemannien 37
3.2.1 Généralités 37
3.2.2 Cohomologie basique pour les suspensions 41
3.2.3 Forme volume transversale et opérateur de Hodge basique 44

4 Opérateurs différentiels basiques **50**
4.1 Opérateurs transversalement elliptiques 50
4.2 Le Laplacien basique 61
4.3 L'opérateur de de Rham basique 67
4.4 L'opérateur de signature basique 68
4.5 L'opérateur de Dolbeault basique 73
4.6 L'opérateur de Dirac basique 75
4.7 Exemples 79
4.7.1 Exemples de calculs de signature basiques 79

4.7.2 Exemples de calculs d'indice de l'opérateur de Dolbeault basique 87

5 Invariance par homotopie feuilletée de la signature basique 93

6 L'indice basique en tant qu'indice distributionnel 98
6.1 Existence de l'indice distributionnel 98
6.2 Le cas des actions libres 104
6.3 Multiplicativité et excision 107
6.4 Lien avec l'indice basique et l'indice équivariant 114

A Généralités sur les feuilletages et théorie de Molino 117
A.1 Premières définitions 117
A.2 Structures transverses 120
A.3 Holonomie 121
A.4 Théorie de Molino 123

B Notion de $\mathcal{F}$-fibrés 125

C Index 130

Chapitre 1

Introduction

La notion de feuilletage a été introduite dans les années 1940 par Erehsmann et Reeb. Elle a été ensuite développée par Haefliger, Novikov, Thurston, ...[Thu74, Nov63, Hae58]. Dans le cas d'un feuilletage riemannien, la cohomologie des formes différentielles basiques introduite par B. Reinhart [Rei59a], qui est alors de dimension finie [EKASH85], a joué un rôle important dans la production d'invariants topologiques pour ces feuilletages. Il est ainsi possible par exemple de définir, comme dans le cas d'une variété fermée, la caractéristique d'Euler basique ou encore la signature basique d'un feuilletage riemannien.

De plus il a été démontré dans [EKA90] que ces invariants sont des indices de Fredholm d'opérateurs différentiels *basiques* transversalement elliptiques sur le feuilletage. A. El Kacimi a plus précisement prouvé que tout opérateur différentiel basique transversalement elliptique sur un feuilletage riemannien possède un indice de Fredholm appelé *indice basique*.

La question naturelle qui s'est alors posée est le calcul de tels indices par des formules topologiques. C'est ce que nous appellerons dans cette thèse le problème de l'indice basique, il a été posé pour la première fois dans [EKA90].

Le problème de l'indice basique s'est avéré assez difficile et malgré plusieurs tentatives, il est resté ouvert jusqu'en 2010. En 2010 deux travaux importants ont été réalisés indépendamment par A. Gorokhovsky et J. Lott [GL10] et par J. Bruning, F. Kamber et K. Richardson [BKR10a, BKR10b] et ont permis de donner les premières formules d'indice basique. Dans l'article [GL10], une formule topologique est obtenue sous certaines hypothèses sur le faisceau de Molino, en utilisant une approche classique appuyée en partie sur la formule de l'indice d'Atiyah-Segal-Singer [AS68]. Dans [BKR10a, BKR10b], aucune hypothèse importante n'est imposée au feuilletage riemannien et la formule obtenue est une somme de contributions associées à la stratification par les adhérences des feuilles. Ce dernier travail ne fournit pas de formule topologique aussi explicite que la formule d'Atiyah-Singer.

Le problème de l'indice basique est intimement lié au célèbre problème

de l'indice pour les opérateurs transversalement elliptiques pour les actions de goupes de Lie compacts sur des variétés fermées, tel qu'énoncé par M. F. Atiyah dans [Ati]. La solution du problème de l'indice basique a donc des conséquences sur le calcul des multiplicités de certaines représentations de groupes de Lie compacts dans la *représentation indice* définie par Atiyah [Duf].

Même si le problème de l'indice transverse d'Atiyah est toujours ouvert, des réponses partielles ont été apportées par N. Berline et M. Vergne dans l'article [BV96b] ainsi que dans [BV96a]. Les formules de délocalisation de Berline-Vergne pourraient donc en principe fournir grâce au théorème de Molino, des informations importantes sur l'indice basique d'un opérateur différentiel basique transversalement elliptique sur un feuilletage riemannien. Parce que la formule de Berline-Vergne ne permet pas de calculer les multiplicités, une telle approche ne suffit pas à calculer l'indice basique par une formule topologique.

Nous avons choisi dans ce travail une approche unifiant les deux problèmes de l'indice. Plus précisément, le problème de l'indice basique d'El Kacimi et le problème de l'indice transverse d'Atiyah peuvent être generalisés et unifiés en un seul problème introduit et étudié dans cette thèse. Nous nous intéressons à la situation d'un feuilletage riemannien muni d'une action feuilletée d'un groupe de Lie compact G et à l'étude des opérateurs basiques G-invariants qui sont $(G,\mathcal{F})$-transversalement elliptiques, c'est-à-dire dont le symbole principal restreint à la fois aux orbites de G et au feuilletage $\mathcal{F}$ est inversible. Nous démontrons que de tels opérateurs possèdent un *indice basique distributionnel* qui est une distribution centrale sur G. Lorsque le feuilletage est de dimension maximale (formé d'une seule feuille, la variété ambiante) on retrouve la notion d'opérateurs G-transversalement elliptiques et leur indice selon Atiyah. Lorsque le groupe G est le groupe trivial $G=\{e\}$ on retrouve la notion d'opérateurs basiques transversalement elliptiques par rapport au feuilletage et leur indice basique selon El Kacimi. Le cas général étudié dans cette thèse peut donc être naïvement compris comme une interpolation entre ces deux situations géométriques extrêmes. Dans le cas général, notons que si l'opérateur basique est transversalement elliptique pour le feuilletage, alors l'indice distributionnel appartient à $R(G)$.

Comme dans Atiyah nous démontrons que l'indice distributionnel basique satisfait aux axiomes habituels d'excision et multiplicativité. Nous donnons aussi la formule obtenue dans le cas des actions libres. Enfin l'application du théorème de Molino nous permet, comme dans le cas sans action décrit plus haut, de relier l'indice distributionnel basique à un indice distributionnel d'Atiyah classique sur la variété basique du feuilletage et relativement au produit cartésien de G par le groupe orthogonal transverse.

Nous allons maintenant décrire plus en détails les résultats démontrés dans ce travail. Lors de notre étude des invariants géométriques provenant

d'opérateurs basiques, nous étudions la signature basique $\sigma(M/\mathcal{F})$. En établissant un "lemme de Poincaré basique", nous démontrons le résultat suivant :

Théorème. 34 Soit $f : (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{F}')$ une équivalence d'homotopie feuilletée, entre deux feuilletages riemanniens homologiquement orientables, préservant les orientations. Alors $\sigma(N/\mathcal{F}') = \sigma(M/\mathcal{F})$.

Nous étudions ensuite la situation d'un feuilletage riemannien muni d'une action d'un groupe de Lie compact G. En suivant l'article d'Atiyah [Ati], et en l'adaptant au cas des feuilletages, nous montrons alors qu'un opérateur G-invariant basique transversalement elliptique par rapport à l'action du groupe et du feuilletage, admet un indice distributionnel basique :

Théorème. 35 On suppose que D est $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique. On note $\chi_{\ker D}$ le caractère de la représentation $\ker D$. Alors $\chi_{\ker D}$ est bien défini et vit dans l'espace de Sobolev $H^{-\dim W^\sharp}(G)$.
On note $\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D) = \chi_{\ker D} - \chi_{\ker D^*}$ que nous appelons ici indice distributionnel basique.

Nous étudions ensuite les propriétés de cet indice distributionnel. Nous commençons par étudier le cas des actions libres : on suppose qu'on a une action lisse d'un groupe de Lie compact de la forme $G \times H$ tel que H agit librement sur la variété M. On a donc un fibré principal $M \to M/H$. On suppose de plus que M/H est muni d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ qui se relève sur M en un feuilletage riemannien $\mathcal{F}^\sharp$ et que toutes les actions considérées sont feuilletées. Un opérateur différentiel D $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique sur M/H se relève alors en un opérateur $(G \times H, \mathcal{F}^\sharp)$-transversalement elliptique $D^\sharp$. L'indice de ce dernier se calcule alors à partir de l'indice de D de la manière suivante :

Théorème. 36 On a

$$\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(D^\sharp) = \sum_{a\in\hat{H}} \mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D \otimes \underline{W_a^*})\chi_a,$$

où $(W_a)_{a\in\hat{H}}$ est un ensemble de représentants de l'ensemble des classes de repésentations irréductibles unitaires du groupe H, χ_a le caractère associé à W_a, et $\underline{W_a}$ est le fibré vectoriel au-dessus de M/H associé à W_a.

Nous étudions ensuite la propriété de multiplicativité. Considérons deux variétés fermées munies de feuilletages riemanniens $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ munies d'action feuilletées de G et H respectivement. Si A est un opérateur $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique agissant sur M et B est un opérateur $(H, \mathcal{F}')$-transversalement elliptique agissant sur M' alors ces deux opérateurs induisent un opérateur $G \times H$-invariant $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$-basique $A\sharp B$ sur $M \times M'$ qui est $(G \times H, \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$-transversalement elliptique. De plus l'indice de $A\sharp B$ se calcule comme suit :

Théorème. 37

$$\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(A\sharp B) = \mathrm{ind}^{G}_{-\infty,B}(A)\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(B).$$

Supposons maintenant qu'on a une variété non-compacte U munie d'un feuilletage et d'une action feuilletée de G et une variété compacte M vérifiant les mêmes hypothèses. On suppose de plus qu'on a un plongement $j : U \to M$ respectant les feuilletages et les actions de groupes. Si D est un opérateur différentiel $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique sur U, vérifiant une certaine hypothèse, on peut alors définir le poussé-en-avant $j_*(D)$ et on a :

Théorème. 38 L'indice distributionnel basique $\mathrm{ind}^{G}_{-\infty,B}(j_*(D))$ est indépendant du choix de j.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous suivons une méthode classique en géométrie des feuilletages et appliquons le théorème de structure des feuilletages riemanniens dû à P. Molino [Mol88]. Nous utilisons donc le théorème de Molino afin de calculer l'indice distributionnel basique d'un opérateur D qui est $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique en fonction de l'indice équivariant d'un opérateur $\bar{D}$ sur la variété basique qui est G-transversalement elliptique. Lorsque G est le groupe trivial, cette construction a été réalisée dans [EKA90], l'utilisation de l'indice distributionnel permet alors de généraliser cette approche. Plus précisément nous démontrons :

Théorème. 40 L'indice distributionnel basique de D est donné par

$$\mathrm{ind}^{G}_{-\infty,B}(D) = \mathrm{ind}^{G}_{-\infty}(\bar{D}^H)$$

où H désigne le groupe orthogonal et $\bar{D}^H$ est la restriction aux sections H-invariantes d'un certain opérateur différentiel elliptique $(G \times H)$-invariant sur la variété basique.

La thèse est structurée de la manière suivante.

Dans la première partie nous donnons les rappels nécéssaires sur les opérateurs différentiels elliptiques. Puis nous étudions le cas des opérateurs invariants par rapport à l'action d'un groupe de Lie compact. Ces résultats sont classiques et sont rappelés pour le confort du lecteur.

Dans la deuxième partie nous nous concentrons sur les feuilletages riemanniens. Nous définissons les outils nécessaires à leur étude comme la connexion de Levi-Civita transverse et la forme de courbure principale. Nous définissons ensuite la cohomologie basique.

Le but de la troisième partie est l'étude des opérateurs transversalement elliptiques au feuilletage. Nous suivons l'article d'A. El-Kacimi [EKA90] pour montrer que de tels opérateurs ont des propriétés similaires aux opérateurs

différentiels elliptiques sur les variétés fermées. Nous étudions ensuite les opérateurs différentiels classiques comme le Laplacien basique et décrivons des propriétés classiques de la cohomologie basique. Nous calculons également des exemples d'indices d'opérateurs transversalement elliptiques et terminons par étudier l'invariance par homotopie feuilletée de la signature basique.

La quatrième partie est dédiée à la situation d'un feuilletage riemannien muni d'une action d'un groupe de Lie compact G respectant le feuilletage. Nous nous intéressons alors aux opérateurs transversalement elliptiques par rapport au feuilletage et à l'action du groupe. Nous montrons que les opérateurs de ce type admettent un indice basique distributionnel (théorème 35) et établissons les propriétés de cet indice. A l'aide du théorème de Molino, nous montrons alors (théorème 40) qu'on peut ramener ce problème à celui d'un opérateur transversalement elliptique par rapport au produit cartésien de G et d'un groupe orthogonal, et établissons ainsi le lien entre le problème de l'indice basique et le problème de l'indice équivariant (théorème 40).

Une question naturelle qui pourrait prolonger cette thèse est par exemple l'adaptation du travail de Berline et Vergne afin d'obtenir une formule de délocalisation pour calculer l'indice distributionnel basique.

L'annexe A introduit les premières notions sur les feuilletages et rappelle les deux théorèmes de structure sur les feuilletages riemanniens dûs à P. Molino [Mol88].

L'annexe B rappelle la notion de $\mathcal{F}$-fibré vectoriel [KT75].

Chapitre 2

Rappels sur les opérateurs différentiels

Soient (M, g) une variété compacte connexe riemmanienne sans bord orientée de dimension n de coordonnées locales $(x_1, ..., x_n)$, et E, E' des fibrés vectoriels hermitiens au-dessus de M de rang N et N'. On notera $\Xi(M)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M, $\langle ., . \rangle_g$ le produit scalaire ponctuel associé à la métrique g, $\langle ., . \rangle_M$ le produit scalaire L^2 ou $\langle ., . \rangle$ s'il n'y a pas d'ambiguïté et ∇^M la connexion de Levi-Civita sur M.

2.1 Opérateurs différentiels

Nous allons commencer par rappeler quelques éléments de la théorie des opérateurs différentiels elliptiques, en particulier le fait que de tels opérateurs admettent un indice de Fredholm (voir [AS68, Gil84, LM89, Roe98]) et étudier un peu plus en détails les opérateurs différentiels provenant de situations géométriques : le Laplacien, l'opérateur de de Rham, l'opérateur de signature, l'opérateur de Dolbeault et l'opérateur de Dirac.

2.1.1 Opérateurs différentiels elliptiques

Dans tout le paragraphe nous rappellerons les différents théorèmes sans donner de démonstration. Le lecteur intéressé trouvera les différentes démonstrations dans [LM89].

Définition 1. On appelle opérateur différentiel d'ordre m sur M une application linéaire $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ tel que D s'écrit localement sous la forme

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où $D^\alpha = i^{|\alpha|}\dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $a_\alpha(x) \in \hom(E_x, E'_x)$.

Remarque. En utilisant des trivialisations locales on peut voir localement $a_\alpha(x)$ comme un élément de $\mathcal{M}_{N,N'}(C^\infty(M))$ l'ensemble des matrices de taille $N \times N'$ à coefficients dans $C^\infty(M)$.

Définition 2. Soient $x \in M$ et $\xi \in T_x^*M$, le symbole principal de D en x et ξ est l'application linéaire $\sigma(D)(x,\xi) : E_x \to E'_x$ définie par

$$\sigma(D)(x,\xi) = i^m \sum_{|\alpha|=m} \xi_1^{\alpha_1}...\xi_n^{\alpha_n} a_\alpha(x).$$

Remarque. On note $\pi : T^*M \to M$ la projection.
Alors le symbole de D est une section du fibré $\hom(\pi^*(E), \pi^*(E'))$ au-dessus de T^*M. Le symbole $\sigma(D)(x,\xi)$ est un polynôme homogène de degré m par rapport à la variable ξ.

Définition 3. On dit que l'opérateur différentiel D est elliptique si pour tout co-vecteur non-nul $\xi \in T^*M\backslash\{0\}$ le symbole $\sigma(D)(x,\xi)$ est inversible.

Exemple 1. Il est facile de voir que la différentielle de de Rham
$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 et que son symbole est donné par $\sigma(d)(x,\xi)(\omega) = i\xi \wedge \omega$ où $\omega \in \Lambda^k T_x^*M$.

Définition 4. Soit dvol la forme volume canonique sur la variété riemannienne M. Si h est une métrique hermitienne sur le fibré vectoriel E, on munit $\Gamma(E)$ du produit scalaire défini par

$$\left\langle \sigma, \sigma' \right\rangle = \int_M h(\sigma, \sigma')\text{dvol}.$$

On appelle adjoint formel de D l'opérateur $D^* : \Gamma(E'^*) \to \Gamma(E^*)$ caractérisé par

$$\left\langle D(\sigma), \sigma' \right\rangle = \left\langle \sigma, D^*(\sigma') \right\rangle.$$

Proposition 1. Soit $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ un opérateur différentiel d'ordre m et D^* son adjoint formel. Alors D^* est un opérateur différentiel d'ordre m et le symbole de D^* est donné par $\sigma(D^*)(x,\xi) = \sigma(D)(x,\xi)^*$.
En particulier D est elliptique si et seulement si D^* est elliptique.

Exemple 2. On notera δ l'adjoint formel de la différentiel de de Rham d.
Rappelons qu'avec les conventions de signe habituelles,
$\delta : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$ est donné par $\delta = (-1)^{nk+n-1} * d*$, où $*$ désigne l'opérateur de Hodge sur M (voir [LM89]).
Le Laplacien $\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ est un opérateur différentiel d'ordre 2.
De plus son symbole est donné par $\sigma(\Delta)(x,\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = ||\xi||^2 Id$.
En particulier le Laplacien est un opérateur elliptique.

Exemple 3. On note $\Omega^{\text{pair}} = \oplus_{\text{k pair}}\Omega^k(M)$ et $\Omega^{\text{impair}} = \oplus_{\text{k impair}}\Omega^k(M)$.
L'opérateur $D = d + \delta$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 sur $\Omega^*(M)$.
Comme $D^2 = \Delta$, on voit que D est un opérateur elliptique.
Dans la suite on appellera opérateur de de Rham l'opérateur
$D_+ : \Omega^{\text{pair}} \to \Omega^{\text{impair}}$ qui est la restriction de l'opérateur D à $\Omega^{pair}(M)$.

Définition 5. Soient ∇ une connexion linéaire sur E et $s \in \mathbb{N}$.
On appelle s-ième norme de Sobolev (associée à la connexion ∇ et à la métrique hermitienne sur E) la norme

$$||\sigma||_s^2 = \sum_{j=0}^{s} ||\nabla^j(\sigma)||^2$$

où $||.||$ est la norme induite par la métrique sur M et E.
On appelle s-ième espace de Sobolev la complétion de $\Gamma(E)$ pour la norme de Sobolev. On le notera $H^s(E)$.

Remarque. On peut montrer que la définition des espaces de Sobolev est indépendante du choix de la métrique et de la connexion (voir [LM89]).

On rappelle que la variété M est supposée compacte.

Théorème 1 (d'inclusion de Sobolev)**.** Soit $s > \dfrac{n}{2} + k$, on a une inclusion continue $H^s(E) \subset C^k(E)$.

Théorème 2 (Lemme de Rellich)**.** Si $s' < s$ on a $H^s(E) \subset H^{s'}(E)$. De plus l'inclusion est dense et compacte.

Proposition 2. Soit $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ un opérateur différentiel d'ordre m, alors D se prolonge en un opérateur borné $D : H^s(E) \to H^{s-m}(E'), \forall s \in \mathbb{N}$.

Théorème 3. Soit $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E')$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre m.

(i) Si U est un ouvert de M et $\sigma \in H^s(E)$, alors $D(\sigma)_{|U}$ est de classe C^∞ implique que $\sigma_{|U}$ est de classe C^∞ (régularité elliptique).

(ii) Si $s \in \mathbb{N}$, D se prolonge en un opérateur de Fredholm $D : H^s(E) \to H^{s-m}(E')$ dont l'indice de Fredholm défini par

$$\text{ind}(D) = \dim\ker D - \dim\ker D^*$$

est indépendant de s. De plus on calcule cet indice en regardant uniquement l'action de D sur les sections C^∞ de E.

Le lecteur trouvera les preuves des différents points du théorème suivant dans [LM89, Gil84].

Théorème 4. Soit $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ un opérateur différentiel elliptique formellement auto-adjoint d'ordre $m > 0$. Alors

(i) Les valeurs propres de D sont réelles.
(ii) Les espaces propres de D sont de dimension finie et formés de sections C^∞.
(iii) L'ensemble des valeurs propres de D est une suite qui tend en module vers $+\infty$ (autrement dit D est un opérateur à résolvante compacte).
(iv) $L^2(M,E)$ est la somme hilbertienne des espaces propres de D.
(v) Si $(\lambda_k)_k$ est la suite des valeurs propres de D on a $\lambda_k \sim ck^{\frac{m}{n}}$ où c est une constante.

Théorème 5. Soit $D : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ un opérateur différentiel elliptique formellement auto-adjoint d'ordre m. Alors on a une décomposition L^2-orthogonale

$$\Gamma(E) = \ker D \oplus \mathrm{Im} D.$$

Exemple 4. Si $E = \Lambda T^*M$ et D est le Laplacien Δ,
alors $\mathrm{Im}\Delta = \mathrm{Im}d \oplus \mathrm{Im}d^*$ et $\ker\Delta = \mathcal{H}^*(M)$ est l'ensemble des formes harmoniques. On obtient alors la décomposition de de Rham-Hodge :

$$\Omega^p(M) = \mathcal{H}^p(M) \oplus \mathrm{Im}d \oplus \mathrm{Im}d^*.$$

Corollaire 1. La cohomologie de de Rham $H^*(M)$ est isomorphe à l'espace des formes harmoniques $\mathcal{H}^*(M)$.

Nous rappelons ici cette démonstration car elle nous sera utile par la suite.

Démonstration. Selon la décomposition de de Rham-Hodge on a
$\Omega^*(M) = \mathcal{H}^*(M) \oplus \mathrm{Im}d \oplus \mathrm{Im}\delta$ où $\mathcal{H}^*(M) = \{\omega \in \Omega^*(M)/d\omega = 0 \text{ et } \delta\omega = 0\}$ et $\mathrm{Im}\delta \cong (\ker d)^\perp$.
Donc $\ker d = \mathcal{H}^*(M) \oplus \mathrm{Im}d$, puisque $d^2 = 0$.
Donc $H^*(M) = \ker d/\mathrm{Im}d \cong \mathcal{H}^*(M)$. □

Exemple 5. Dans le cas de l'opérateur de de Rham D_+, l'indice de D_+ est égal à la caractéristique d'Euler $\chi(M)$. En effet :
le noyau de D_+ est $\ker D_+ = \ker \Delta_{|\Omega^{\mathrm{pair}}}$, donc le noyau de D_+ est l'espace des formes harmoniques paires.
Or l'espace des formes harmoniques $\mathcal{H}^*(M)$ est isomorphe à la cohomologie de de Rham $H^*(M)$.
Donc $\dim\ker D_+ = \dim H^{\mathrm{pair}}(M)$.
De même on a $\dim\ker D_+^* = \dim H^{\mathrm{impair}}(M)$. Donc $\mathrm{ind}(D_+) = \chi(M)$.

Définition 6. On suppose ici que D est un opérateur différentiel elliptique formellement auto-adjoint positif d'ordre $m > 0$, on peut alors définir par calcul fonctionnel l'opérateur D^{-s} où $s \in \mathbb{R}$ (voir [Gil84]) : si λ est une valeur propre non-nulle et v un vecteur propre associé on pose $D^{-s}(v) = \lambda^{-s}v$, si $\lambda = 0$ et v est un vecteur propre associé on pose $D^{-s}(v) = 0$.

Citons un dernier résultat, dont le lecteur intéressé touvera la preuve dans [Gil84].

Théorème 6. Sous les mêmes, hypothèse, on note d_λ la dimension de l'espace propre associé à λ.
Si $s > \dfrac{\dim M}{m}$, alors D^{-s} est traçable et $trD^{-s} = \sum_{\lambda>0} \dfrac{d_\lambda}{\lambda^s}$.

2.1.2 L'opérateur de signature

Supposons que M est orientée sans bord et de dimension $n = 4l$.

Rappel. L'application $Q : H^{2l}(M) \times H^{2l}(M)$ définie par

$$Q([\omega], [\omega']) = \int_M \omega \wedge \omega'$$

est une forme bilinéaire bien définie, symétrique et non-dégénérée.
On note $\sigma(M)$ sa signature, appelée la signature de M.

Définition 7. On note $\tau : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ l'application définie par

$$\tau = (-1)^{l+\frac{k(k-1)}{2}} *$$

où $*$ désigne l'opérateur de Hodge.

Proposition 3. L'application τ est une involution qui anticommute avec l'opérateur $D = d + \delta$.

Démonstration. On rappelle que $\delta = (-1)^{nk+n-1} * d *$ où $*$ désigne l'opérateur de Hodge et $*^2 = (-1)^{k(n-1)}$. Donc ici $\delta = - * d *$ et $*^2 = (-1)^k Id$, et τ anticommute avec D. □

Définition 8. On note $\Omega^*(M) = \Omega^*_+(M) \oplus \Omega^*_-(M)$ où $\Omega^*_+(M)$ (respectivement $\Omega^*_-(M)$) est l'espace propre de τ associé à la valeur propre 1 (respectivement -1).
On appelle opérateur de signature et on note D_+ la restriction de D à $\Omega^*_+(M)$, $D_+ : \Omega^*_+(M) \to \Omega^*_-(M)$.

Proposition 4. L'indice de Fredholm de l'opérateur de signature D_+ est la signature $\sigma(M)$ de la variété M.

Démonstration. On rappelle que l'espace $\mathcal{H}^*(M)$ des formes harmoniques est isomorphe à $H^*(M)$.
Comme τ anticommute avec D et commute avec Δ, τ se restreint en une involution $\tau : \ker D \to \ker D$ et $\tau : \ker \Delta \to \ker \Delta$.
On a donc les décompositions

$$\mathcal{H}^*(M) = \mathcal{H}^*_+(M) \oplus \mathcal{H}^*_-(M)$$

$$H^*(M) = H^*_+(M) \oplus H^*_-(M).$$

Donc $\mathrm{ind}(D_+) = \dim \mathcal{H}^*_+(M) - \dim \mathcal{H}^*_-(M) = \dim H^*_+(M) - \dim H^*_-(M)$.
Or $\mathcal{H}^*_+(M) = \oplus_{k<2l}\mathcal{H}^*_+(M) \cap (\mathcal{H}^k(M) \oplus \mathcal{H}^{4l-k}(M)) \oplus \mathcal{H}^{2l}_+(M)$,
et $\mathcal{H}^*_-(M) = \oplus_{k<2l}\mathcal{H}^*_-(M) \cap (\mathcal{H}^k(M) \oplus \mathcal{H}^{4l-k}(M)) \oplus \mathcal{H}^{2l}_-(M)$.
Soit V_k l'espace $H^k(M) \oplus H^{4l-k}(M)$ où $k \in \{0, ..., 2l-1\}$.
Alors $H^k(M)$ et $H^{4l-k}(M)$ sont permutés par l'action de τ.
Donc τ agit sur V_k et τ s'écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc l'espace propre associé à 1 est l'ensemble des éléments de la forme $(\omega, \tau(\omega))$.
Donc la dimension de l'espace propre associé à 1 est $\dim H^k(M)$.
De même la dimension de l'espace propre associé à -1 est $\dim H^k(M)$.
Donc

$$\dim(\oplus_{k<2l}\mathcal{H}^*_+(M) \cap (\mathcal{H}^k(M) \oplus \mathcal{H}^{4l-k})) - \dim(\oplus_{k<2l}\mathcal{H}^*_-(M) \cap (\mathcal{H}^k(M) \oplus \mathcal{H}^{4l-k})) = 0,$$

et $\mathrm{ind}(D_+) = \dim H^{2l}_+(M) - \dim H^{2l}_-(M)$.
Or $\tau = *$ sur $H^{2l}(M)$, donc si $\alpha \in H^{2l}_+(M)$ et $\beta \in H^{2l}_-(M)$ on a :

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \alpha) &= \int_M \alpha \wedge \alpha \\ &= \int_M \alpha \wedge \tau(\alpha) \\ &= \int_M \alpha \wedge *\alpha \\ &= \langle \alpha, \alpha \rangle_M > 0 \end{aligned}$$

Donc $Q(\alpha, \alpha) > 0$. De même

$$\begin{aligned} Q(\beta, \beta) &= \int_M \beta \wedge \beta \\ &= \int_M -\beta \wedge \tau(\beta) \\ &= -\int_M \beta \wedge *\beta \\ &= -\langle \beta, \beta \rangle_M < 0 \end{aligned}$$

Donc $Q(\beta, \beta) < 0$.
Donc par définition de la signature d'une forme bilinéaire on a
$\mathrm{ind}(D_+) = \sigma(Q)$. □

2.1.3 L'opérateur de Dolbeault

Supposons à présent que la variété M est munie d'une structure complexe. Les premiers résultats de ce paragraphe sont supposés relativement

connus, nous omettons donc les démonstrations et renvoyons le lecteur à la référence [Wel80].

Définition 9. On note $TM_{\mathbb{C}} = TM \otimes \mathbb{C}$, on note J l'automorphisme associé à la structure complexe.
Comme $J^2 = -Id$ on a une décomposition en somme directe

$$TM_{\mathbb{C}} = TM_{(1,0)} \oplus TM_{(0,1)}$$

où $TM_{(1,0)}$ et $TM_{(0,1)}$ sont les sous-fibrés associés aux valeurs propres i et $-i$ de J.
On a alors une décomposition du fibré en algèbres extérieures
$\Lambda^k T^*M_{\mathbb{C}} = \oplus_{r+s=k} \Lambda^{r,s}$ où $\Lambda^{r,s} = \Lambda^r T^*M_{(1,0)} \otimes \Lambda^s T^*M_{(0,1)}$.

Définition 10. Une section de $\Lambda^{r,s}$ est appelée une forme différentielle de type (r,s).
On notera $\Omega^{r,s}(M,\mathbb{C})$ l'espace des formes différentielles de type (r,s).
On a de manière évidente $\Omega^k(M,\mathbb{C}) = \oplus_{r+s=k} \Omega^{r,s}(M,\mathbb{C})$.
Sur $\Omega^k(M,\mathbb{C})$ la différentielle de de Rham se décompose en la somme de deux opérateurs

$$\partial : \Omega^{r,s}(M,\mathbb{C}) \to \Omega^{r+1,s}(M,\mathbb{C}) \text{ et } \bar{\partial} : \Omega^{r,s} \to \Omega^{r,s+1}(M,\mathbb{C})$$

vérifiant les relations :

$$\partial^2 = 0,\ \bar{\partial}^2 = 0,\ \text{et } \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

On obtient donc un complexe différentiel pour tout $r \geq 0$:

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s}(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s+1}(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots$$

appelé complexe de Dolbeault. La cohomologie associée sera appelée cohomologie de Dolbeault et notée $H^{r,s}(M,\mathbb{C})$.

Proposition 5. L'opérateur de Hodge induit un isomorphisme
$* : \Omega^{r,s}(M,\mathbb{C}) \to \Omega^{q-r,q-s}(M,\mathbb{C})$.
On pose $\delta'' = - * \bar{\partial} *$, alors δ'' est l'adjoint formel de $\bar{\partial}$.

Proposition 6. On notera Δ'' l'opérateur défini par $\Delta'' = \delta''\bar{\partial} + \bar{\partial}\delta''$. L'opérateur Δ'' est un opérateur différentiel d'ordre 2 auto-adjoint et elliptique.

Démonstration. Cette preuve est similaire au cas du Laplacien, nous l'omettrons donc. □

Théorème 7. On note

$$\mathcal{H}^{r,s}(M,\mathbb{C}) = \{\omega \in \Omega^{r,s}(M) / \bar{\partial}\omega = 0 \text{ et } \delta''\omega = 0\} = \ker \Delta''.$$

On a les propriétés suivantes :

(i) l'espace vectoriel $\mathcal{H}^{r,s}(M,\mathbb{C})$ est de dimension finie,
(ii) on a une décomposition L^2-orthogonale

$$\Omega^{r,s}(M,\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{r,s}(M,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\Delta'') = \mathcal{H}^{r,s}(M,\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Im}(\bar{\partial}) \oplus \mathrm{Im}(\delta'').$$

(ii) l'espace vectoriel $H^{r,s}(M,\mathbb{C})$ est isomorphe à $\mathcal{H}^{r,s}(M,\mathbb{C})$ et donc de dimension finie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les théorèmes 4 (page 14) et 5 (page 15) pour les deux premiers points. La démonstration du troisième point est similaire au cas de la cohomologie de de Rham. □

Définition 11. A partir du complexe de Dolbeault

$$\ldots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,s}(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,s+1}(M,\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \ldots$$

on construit l'opérateur de Dolbeault D_{Dol} défini par

$$D_{Dol} = \bar{\partial} + \bar{\partial}^* : \Omega^{0,\mathrm{pair}} \to \Omega^{0,\mathrm{impair}}.$$

Proposition 7. L'opérateur de Dolbeault possède un indice de Fredholm donné par

$$\mathrm{ind}(D_{Dol}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^{0,k}(M,\mathbb{C}).$$

Démonstration. On a $D_{Dol}^2 = \Delta''$, et Δ'' est elliptique donc D_{Dol} est elliptique et possède un indice.
Le calcul de l'indice est similaire au calcul de l'indice de l'opérateur de de Rham (voir l'exemple 5). □

2.1.4 L'opérateur de Dirac

Nous allons à présent rappeler la construction et les propriétés de l'opérateur de Dirac et voir le lien avec les opérateurs définis précédemment (voir par exemple [LM89, Gil84, Roe98]).

Notation 1. On note $\mathbb{C}l(M) = Cl(TM) \otimes \mathbb{C}$ le fibré en algèbre de Clifford au-dessus de M et ∇^M la connexion de Levi-Civita sur M.

Définition 12. Soient E un fibré en $\mathbb{C}l(M)$-modules au-dessus de M, h une métrique hermitienne sur E et ∇^E une connexion linéaire sur E.
On note l'action de $\xi \in \mathbb{C}l(T_xM)$ sur un élément $v \in E_x$ par $c(\xi)v$.
On dit que (E,h,∇^E) est un fibré de Clifford si :
(i) La connexion ∇^E est une connexion métrique.
(ii) Pour tout $\xi \in \mathbb{C}l(T_xM)), c(\xi)$ est antisymétrique c'est-à-dire

$$h(c(\xi)s_1, s_2) = -h(s_1, c(\xi)s_2), \forall s_1, s_2 \in \Gamma(E).$$

(iii) La connexion ∇^E vérifie $[\nabla^E, c] = 0$ où $[\nabla^E, c] = \nabla^E c - c\nabla^M$, c'est-à dire si $X \in \Xi(M), Y \in \Xi(M), s \in \Gamma(E)$,

$$\nabla^E_X(c(Y)s) = c(\nabla^M_X(Y))s + c(Y)\nabla^E_X(s).$$

Notation 2. Dans la suite (E, h, ∇^E) désigne un fibré de Clifford.

Définition 13. On appelle opérateur de Dirac l'opérateur noté D obtenu à partir de la composition des applications suivantes :

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla^E} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\cong} \Gamma(TM \otimes E) \xrightarrow{c} \Gamma(E)$$

Plus précisément si $\{e_1, ..., e_n\}$ est un repère local orthonormé de TM on a

$$D = \sum_{j=1}^{n} c(e_j) \circ \nabla^E_{e_j}.$$

Proposition 8. L'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1. De plus son symbole est donné par

$$\sigma(D)(x, \xi) = ic(\xi).$$

Démonstration. Soit $x \in M, \{e_1, ..., e_n\}$ une base de T_xM et $(x_1, ..., x_n)$ des coordonnées locales en x tel que x correspond à 0 et e_j à $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.
Au travers l'identification $T_xM \cong T^*_xM$, e_j correspond à dx_j.
En utilisant des trivialisations locales autour de x, on peut écrire $\nabla^E_{e_j}$ comme la somme de $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et d'un opérateur différentiel d'ordre 0.

Donc au voisinage de x, on peut écrire D comme la somme de $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c(e_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$ et d'un opérateur différentiel d'ordre 0.
Donc D est bien un opérateur différentiel d'ordre 1. Si $\xi \in T^*_xM$ est un co-vecteur non-nul, $\xi = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \xi_j dx_j$.

Donc $\sigma(D)(x, \xi) = i\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c(e_j)\xi_j = ic(\sum_{j=1}^{n} e_j\xi_j) = ic(\xi)$.
Donc $\sigma(D^2)(x, \xi) = c(\xi)^2 = ||\xi||^2$ (par définition de la multiplication de Clifford).
Donc D^2 et D sont elliptiques. □

Rappel. Rappelons qu'on a les formules $d = \sum_{j=1}^{n} e_j \wedge \nabla^M_{e_j}$ et

$\delta = d^* = -\sum_{j=1}^{n} i_{e_j} \nabla^M_{e_j}$ (voir [LM89]).

Proposition 9. L'opérateur de Dirac D est formellement auto-adjoint.

Démonstration. Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ un repère local orthonormé de TM et $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$. On a ponctuellement

$$\begin{aligned}
&h(D(s_1), s_2)_x - h(s_1, D(s_2))_x \\
&= \sum_{j=1}^{q} h(c(e_j)\nabla^E_{e_j}(s_1), s_2)_x - h(s_1, c(e_j)\nabla^E_{e_j}(s_2))_x \\
&= \sum_{j=1}^{q} h(c(e_j)\nabla^E_{e_j}(s_1), s_2)_x + h(c(e_j)s_1, \nabla^E_{e_j}(s_2))_x \\
&= \sum_{j=1}^{q} h(\nabla^E_{e_j}(c(e_j)s_1), s_2)_x - h(c(\nabla^M_{e_j}(e_j))s_1, s_2)_x \\
&+ h(c(e_j)s_1, \nabla^E_{e_j}(s_2))_x \\
&= (\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(h(c(e_j)s_1, s_2))_x) - h(c(\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(e_j))s_1, s_2)_x \\
&= -\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(i_{e_j}\omega)_x + \omega(\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(e_j))_x
\end{aligned}$$

où ω est la 1-forme définie par $\omega(X) = -h(c(X)s_1, s_2), \forall X \in \Xi(M)$. Donc

$$\begin{aligned}
h(D(s_1), s_2) - h(s_1, D(s_2)) &= -\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(i_{e_j}\omega) + \omega(\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(e_j)) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} (i_{e_j}\nabla^M_{e_j} + i_{\nabla^M_{e_j}(e_j)})\omega + \omega(\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(e_j)) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j}\nabla^M_{e_j}\omega \\
&= \delta\omega
\end{aligned}$$

Donc $\int_M h(D(s_1), s_2) - h(s_1, D(s_2))\text{dvol} = \int_M \delta\omega\text{dvol}$ où dvol désigne la forme volume canonique.
Donc $\langle D(s_1), s_2\rangle - \langle s_1, D(s_2)\rangle = \langle \delta\omega, 1\rangle = \langle \omega, d1\rangle = 0$.
Donc D est formellement auto-adjoint. □

Proposition 10. Si E est le fibré tangent TM on a un isomorphisme naturel de fibrés vectoriels $Cl(TM) \cong \Lambda T^*M$ ([LM89]) et l'opérateur de Dirac D est conjugué à $d + \delta$.
En particulier D^2 est conjugué au Laplacien Δ.

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ un repère local orthonormé.
Au travers de l'identification $Cl(M) \cong \Lambda T^*M$ l'élément $c(e)\omega$ devient $e \wedge \omega - i_e\omega$.
Or $d = \sum_{j=1}^{n} e_j \wedge \nabla^M_{e_j}$ et $\delta = d^* = -\sum_{j=1}^{n} i_{e_j} \nabla^M_{e_j}$.
Donc $d + \delta = \sum_{j=1}^{n} (e_j \wedge . - i_{e_j}) \nabla^M_{e_j}$ est conjugué à $\sum_{j=1}^{n} c(e_j) \nabla^M_{e_j}$ c'est-à-dire à l'opérateur de Dirac.
Or $(d + \delta)^2 = d^2 + d\delta + \delta d + \delta^2$. Comme $d^2 = \delta^2 = 0$, on a $(d + \delta)^2 = \Delta$.
Donc D^2 est conjugué au Laplacien Δ. □

Remarque. En munissant $Cl(TM)$ des bonnes graduations (voir [LM89]) on retrouve ainsi l'opérateur de de Rham et l'opérateur de signature à l'aide de l'opérateur de Dirac.

2.2 Actions de groupes compacts

Nous allons à présent étudier le cas où notre variété est munie d'une action de groupe. Dans un premier temps nous étudions la cohomologie de de Rham invariante, puis nous verrons que pour les opérateurs que nous avons étudiés précédemment, nous pouvons définir un indice en tant que représentation. Nous finissons par donner la formule d'Atiyah-Singer qui permet de calculer cet indice dans le cas des opérateurs de signature et de Dolbeault.

2.2.1 Cohomologie de de Rham invariante

Soit M une variété compacte connexe munie d'une action lisse d'un groupe de Lie compact G.
On munit M d'une structure riemannienne G-invariante et on munit G de la mesure de Haar normalisée.

Définition 14. Soit $\omega \in \Omega^*(M)$.
On dit que ω est G-invariante si $\forall g \in G$, on a $g^*(\omega) = \omega$.
On notera $\Omega^*(M/G)$ l'ensemble des forme différentielles G-invariantes.
On voit immédiatement que $\Omega^*(M/G)$ est une algèbre différentielle $\mathbb{Z}_2$-graduée et un $C^\infty(M/G)$-module.
On note $H^*(M/G)$ la cohomologie des formes différentielles invariantes.

Notation 3. Si E est un G-fibré vectoriel au-dessus de M, on notera $\Gamma(M, E/G)$ le $C^\infty(M/G)$-module des sections G-invariantes.

Proposition 11. On note $i : \Omega^*(M/G) \to \Omega^*(M)$ l'inclusion, alors i induit une application $i^\sharp : H^*(M/G) \to H^*(M)$.

Démonstration. En effet on a $i(d\omega) = d(i(\omega))$, d'où le résultat. □

Définition 15. L'action de G sur M induit une action de G sur $H^*(M)$: soit $g \in G$, on pose $g.([\omega]) = (g^{-1})^*([\omega]) := [(g^{-1})^*(\omega)]$.
On note $H^*(M)^G$ le sous-espace vectoriel de $H^*(M)$ des classes de cohomologie invariantes.

Proposition 12. On note M l'application $M : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M/G)$ définie par

$$M(\omega) = \int_G g^*(\omega) dg.$$

Alors $\forall \omega \in \Omega^*(M),\ M(d\omega) = d(M(\omega))$.
En particulier M induit une application $M^\sharp : H^*(M) \to H^*(M/G)$.

Démonstration. Remarquons que $\int_G g^*(\omega) dg$ est bien G-invariante.

$$\begin{aligned} M(d\omega) &= \int_G g^*(d\omega) dg \\ &= \int_G dg^*(\omega) dg \\ &= d(\int_G g^*(\omega) dg) \text{ (dérivation sous le signe somme)} \\ &= d(M(\omega)). \end{aligned}$$

□

Proposition 13. On a
- $i^\sharp(H^*(M/G)) \subset H^*(M)^G$
- $i^\sharp \circ M^\sharp_{|H^*(M)^G} = Id_{H^*(M)^G}$ et $M^\sharp \circ i^\sharp = Id_{|H^*(M/G)}$

C'est-à-dire $H^*(M)^G \cong H^*(M/G)$. On obtient donc que $H^*(M/G)$ s'identifie à un sous-espace de $H^*(M)$ et comme M est compacte, $H^*(M/G)$ est de dimension finie.

Démonstration.
- Soit $[\omega] \in H^*(M/G)$,
  on a $g^*([\omega]) = [g^*(\omega)] = [\omega]$ car $\omega \in \Omega^*(M/G)$,
  donc $i^\sharp([\omega]) \in H^*(M)^G$.
- Soit $[\omega] \in H^*(M)^G$, c'est-à-dire $g^*([\omega]) = [\omega]$,
  donc $[g^*(\omega) - \omega] = 0$ et $g^*(\omega) - \omega = d\beta_g$ où $\beta_g \in \Omega^*(M)$ (comme l'action de G sur M est C^∞, on voit facilement qu'on peut choisir β_g de manière à ce que β_g dépende de manière C^∞ de g).
  Donc $\int_G g^*(\omega) dg - \omega = \int_G d\beta_g dg = d\left(\int_G \beta_g dg\right)$.

Donc $\left[\int_G g^*(\omega)dg\right] = [\omega]$, c'est-à-dire $[M(\omega)] = [\omega]$.
Donc $M^\sharp([\omega]) = [\omega]$ et $i^\sharp(M^\sharp([\omega])) = [\omega]$.

□

Notation 4. On note $g^\sharp$ l'application induite par g^* sur $H^*(M)$.

Proposition 14. Si G est connexe, alors $g^\sharp = Id_{|H^*(M)}$.

Démonstration. On emploiera ici la notation ϕ_g pour le difféomorphisme sur M induit par g.
Soit $\gamma : \mathbb{R} \to G$ un chemin C^∞ tel que $\gamma(0) = e$ et $\gamma(1) = g$.
Soit $H : \mathbb{R} \times M \to M,\ (t, x) \mapsto \phi_{\gamma(t)}(x)$, alors H est C^∞ et $H(0, .) = Id_M$ et $H(1, .) = \phi_g$.
Donc $\phi_e = Id_M$ et ϕ_g sont homotopes, donc ϕ_g^* induit l'identité sur $H^*(M)$.
Donc $g^\sharp = Id_{|H^*(M)}$. □

Corollaire 2. Si G est connexe alors $H^*(M/G) \cong H^*(M)$.

Démonstration. Découle des deux propositions précédentes. □

Proposition 15. On note toujours δ l'adjoint formel de d.
Comme G agit par isométrie sur M, $\Omega^*(M/G)$ est stable par δ.
On notera alors D_+^G la restriction de l'opérateur de de Rham aux formes G-invariantes, c'est-à-dire $D_+^G : \Omega^{\text{pair}}(M/G) \to \Omega^{\text{impair}}(M/G)$.
En notant $\chi(M/G) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim H^k(M/G)$, on a $\text{ind}(D_+^G) = \chi(M/G)$.
De plus si G est connexe, l'indice de D_+^G est égal à $\chi(M)$ la caractéristique d'Euler de M .

Démonstration. La démonstration est similaire au cas général.
Si G est connexe on a vu que $H^*(M) \cong H^*(M/G)$, d'où le résultat. □

2.2.2 Opérateurs différentiels invariants

Définition 16. Soit $\pi : G \to Gl(V)$ une représentation unitaire de dimension finie de G notée (π, V). On note $V^G = \{x \in V / \pi(g)(x) = x,\ \forall g \in G\}$ et $\kappa(V) = \dim V^G$.

Lemme 1. Sous les mêmes hypothèses, on a

$$\kappa(V) = \int_G tr(\pi(g))dg.$$

Démonstration. Soit P^G la projection orthogonale de V sur V^G, alors
$\forall x \in H,\ P^G(x) = \int_G \pi(g)(x)dg.$

Par définition $P^G(x) \in V^G$, donc $(P^G)^2 = P^G$. Comme (π, V) est unitaire on a que P^G est auto-adjoint.
Donc $\dim P^G = tr(P^G) = \int_G tr(\pi(g))dg$ (il suffit d'exprimer la trace à l'aide du produit scalaire). □

Définition 17. On note $R(G)$ l'anneau des représentations de G.
Si $[V] - [V'] \in R(G)$, on pose $\kappa([V] - [V']) = \kappa(V) - \kappa(V')$.

Notation 5. Soient H un espace de Hilbert, $\pi : G \to GL(H)$ une représentation de G.

Définition 18. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de Fredholm.
Si T est G-invariant, alors $\ker T$ et $\ker T^*$ sont des représentations de dimension finie de G.
On pose alors $\mathrm{ind}^G(T) = [\ker T] - [\ker T^*] \in R(G)$.

Proposition 16. Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Fredholm G-invariant alors $\kappa(\mathrm{ind}^G(T)) = \mathrm{ind}(T^G)$ où $T^G = T_{|H^G}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\kappa(\mathrm{ind}^G(T)) &= \dim(\ker T)^G - \dim(\ker T^*)^G \\ &= \dim \ker T^G - \dim \ker(T^G)^* \\ &= \mathrm{ind}(T^G).\end{aligned}$$

□

Définition 19. Soit $g \in G$, on appelle indice de g le réel
$\mathrm{ind}^G(T)(g) = tr(\pi(g)_{|\ker T}) - tr(\pi(g)_{|\ker T^*})$.

Proposition 17. Sous les mêmes hypothèses, on a

$$\mathrm{ind}(T^G) = \int_G \mathrm{ind}^G(T)(g)dg.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}(T^G) &= \kappa(\mathrm{ind}^G(T)) \\ &= \int_G tr(\pi_{\mathrm{ind}^G(T)}(g))dg \\ &= \int_G \left(tr(\pi(g)_{|\ker T}) - tr(\pi(g)_{|\ker T^*})\right) dg \\ &= \int_G \mathrm{ind}^G(T)(g)dg.\end{aligned}$$

□

2.2.3 L'opérateur de signature invariant

Définition 20. On suppose ici que M est orientée sans bord de dimension $n = 4l$.
On note Q^G la restriction de la forme bilinéaire de signature Q à $H^{2l}(M)^G$. La signature de Q^G sera notée $\sigma(M/G)$.

Proposition 18. Sous les mêmes hypothèses, on note
$\Omega^*(M/G) = \Omega^*_+(M/G) \oplus \Omega^*_-(M/G)$ la décompostion induite par la décomposition $\Omega^*(M) = \Omega^*_+(M) \oplus \Omega^*_-(M)$ et D^G_+ la restriction de l'opérateur de signature aux formes G-invariantes, c'est-à-dire $D^G_+ : \Omega^*_+(M/G) \to \Omega^*_-(M/G)$. Alors $\mathrm{ind}(D^G_+) = \sigma(M/G)$. De plus si G est connexe alors $\mathrm{ind}(D^G_+) = \sigma(M)$.

Démonstration. La démonstration est similaire au cas général.
Si G est connexe on a vu que $H^*(M) \cong H^*(M/G)$, d'où le résultat. □

Définition 21. Sous les mêmes hypothèses, le groupe de Lie G agit sur $H^{2l}(M)$, donc $H^{2l}(M)$ est une représentation de dimension finie de G.
On pose $\mathrm{ind}^G(D_+) := [H^{2l}_+(M)] - [H^{2l}_-(M)] \in R(G)$ où D_+ désigne l'opérateur de signature.

Proposition 19. Sous les mêmes hypothèses, on a

$$\kappa(\mathrm{ind}^G(D_+)) = \mathrm{ind}(D^G_+) = \sigma(M/G).$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 17 (page 25). □

Corollaire 3. Sous les mêmes hypothèses, si G est connexe alors G agit trivialement sur $H^*(M)$, donc $\forall g \in G$, on a $\mathrm{ind}^G(D_+)(g) = \sigma(M)$.

Démonstration. On a $\mathrm{ind}^G(D_+)(g) = \chi_{\mathrm{ind}^G(D_+)}(g)$ où $\chi_{\mathrm{ind}^G(D_+)}$ est le caractère de la représentation $\mathrm{ind}^G(D_+) = [H^{2l}_+(M)] - [H^{2l}_-(M)]$.
Or G agit trivialement sur $H^*(M)$,
donc $\chi_{\mathrm{ind}^G(D_+)}(g) = \dim H^{2l}_+(M) - \dim H^{2l}_-(M)$.
Donc $\mathrm{ind}^G(D_+)(g) = \sigma(M)$. □

Nous allons à présent rappeler la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature [AS68]. On supposera que le groupe G préserve l'orientation de M.

Proposition 20. Soit $g \in G$, on note M^g l'ensemble des points fixes de g sur M. Alors M^g est une sous-variété compacte sans bord de M (non connexe, de dimension non constante en général).

Démonstration. Voir [LM89] par exemple.

Proposition 21. Soient $g \in G$ et N^g le fibré normal au-dessus de M^g, c'est-à-dire $\forall x \in M^g, N^g_x = (T_x M^g)^\perp$.
Comme G agit par isométries sur M, le fibré normal N^g admet une décomposition

$$N^g = N^g(-1) \oplus \oplus_{0<\theta<\pi} N^g(\theta)$$

où $N^g(\theta)$ et $N^g(-1)$ sont des sous-fibrés de N et g_* agit sur $N^g(\theta)$ (respectivement $N^g(-1)$) par une rotation d'angle θ (respectivement par $-Id$).

Définition 22. Si E est un fibré vectoriel au-dessus de M^g,
on notera $\mathbb{L}$ la $\mathbb{L}$-classe totale de E qui est définie à partir des classes de Pontrjagin par la suite multiplicative :

$$\mathbb{L}(E) = \prod \frac{x_j}{\mathrm{th}(x_j)}.$$

On notera $m^\theta(E)$ la classe caractéristique définie à partir des classes de Chern par la suite multiplicative :

$$m^\theta(E) = \prod \frac{\mathrm{th}(\frac{i\theta}{2})}{\mathrm{th}(\frac{x_j + i\theta}{2})}$$

(pour plus de détails voir par exemple [AS68, LM89, Hir78, MS74]).

Théorème 8 (formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature)**.** Soit $g \in G$, alors l'indice équivariant de l'opérateur de signature est donné par :

$$\mathrm{ind}^G(D_+)(g) = \int_{M^g} \mathcal{L}(g)$$

où $\mathcal{L}(g) \in H^*(M^g)$ est une classe caractéristique.
Plus précisément on a,

$$\int_{M^g} \mathcal{L}(g) = 2^{t-r} \int_{M^g} \prod_{0<\theta<\pi} (i \tan(\theta/2))^{-s(\theta)} \mathbb{L}(M^g) \\ \mathbb{L}(N^g(-1))^{-1} e(N^g(-1)) \prod_{0<\theta<\pi} m^\theta(N^g(\theta))$$

où e désigne la classe d'Euler, $2t = \dim M^g$, $2r = \dim N^g(-1)$ et $s(\theta) = \dim_{\mathbb{C}} N^g(\theta)$.

Corollaire 4. On a alors $\mathrm{ind}(D^G_+) = \int_G \left[\int_{M^g} \mathcal{L}(g) \right] dg.$

Démonstration. En effet $\mathrm{ind}(D^G_+) = \int_G \mathrm{ind}^G(D_+)(g) dg.$ □

2.2.4 L'opérateur de Dolbeault invariant

Nous allons à présent rappeler le théorème de Lefschetz holomorphe [AS68].

Définition 23. On suppose que M admet une structure complexe.
Soient E un fibré vectoriel complexe au-dessus de M et $\theta(E)$ le faisceau des germes de sections holomorphes de E.
On définit l'opérateur de Dolbeault D_{Dol} à partir du complexe de Dolbeault associé à E :

$$\cdots \xrightarrow{\bar\partial+\bar\partial^*} \Lambda^{0,s}\otimes E \xrightarrow{\bar\partial+\bar\partial^*} \Lambda^{0,s+1}\otimes E \xrightarrow{\bar\partial+\bar\partial^*} \cdots$$

On suppose qu'on a un groupe fini d'automorphismes agissant sur M.

Proposition 22. Soit $g\in G$, on note N^g le fibré normal au-dessus de M^g. Comme G agit par isométrie sur M, le fibré normal N^g admet une décompostion $N^g=\bigoplus_{0<\theta\leqslant\pi} N^g(\theta)$ où $N^g(\theta)$ est un sous-fibré de N^g et g_* agit sur $N^g(\theta)$ par la multiplication par $e^{i\theta}$.

Définition 24. Si E est un fibré vectoriel au-dessus de M^g, on notera $\mathcal{U}^\theta$ la classe caractéristique définie à partir des classes de Chern par la suite multiplicative :

$$\mathcal{U}^\theta=\prod_j\left(\frac{1-e^{-x_j-i\theta}}{1-e^{-i\theta}}\right)^{-1}$$

(pour plus de détails voir par exemple [AS68]).

Théorème 9 (de Lefschetz holomorphe)**.** Soit $g\in G$, alors l'indice équivariant de l'opérateur de Dolbeault est donné par :

$$\mathrm{ind}^G(D_{Dol})(g)=\int_{M^g}\mathcal{L}(g)$$

où $\mathcal{L}(g)\in H^*(M^g)$ est une classe caractéristique.
Plus précisément on a

$$\int_{M^g}\mathcal{L}(g)=\int_{M^g}\frac{ch(E_{|M^g})(g)\prod_{0<\theta<\pi}\mathcal{U}^\theta(N^g(\theta))td(M^g)}{\det(1-g_{|(N^g)^*})}$$

où *ch* désigne la classe de Chern totale et *td* désigne la classe de Todd totale.
De plus l'indice de l'opérateur de Dolbeault est donné par

$$\mathrm{ind}(D_{Dol})=\chi(M,\theta(E))$$

où $\chi(M,\theta(E))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dim H^k(M,\theta(E))$.
Dans le cas où E est le fibré trivial $E=M\times\mathbb{C}$ on retrouve la proposition 7 (page 19).

Chapitre 3

Feuilletages riemanniens

On suppose maintenant que la variété M est munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$.

3.1 Connexion et courbure

3.1.1 La connexion de Levi-Civita transverse

Nous allons commencer par définir la connexion de Levi-Civita transverse (voir [Ton97]) qui joue un rôle similaire à celui de la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne.

Définition 25. On appelle fibré normal le fibré vectoriel au-dessus de M noté $\nu\mathcal{F}$ défini par $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$. On note $\pi : TM \to \nu\mathcal{F}$ la projection canonique. On a $TM = T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}^{\perp}$, alors la métrique riemannienne g permet de définir un isomorphisme de fibrés vectoriels $\sigma : \nu\mathcal{F} \to T\mathcal{F}^{\perp}$ tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{\nu\mathcal{F}}$.

Remarque. On note $g = g_{|T\mathcal{F}} \oplus g_{|T\mathcal{F}^{\perp}}$. Alors g induit une métrique riemannienne $g_{\nu\mathcal{F}}$ sur $\nu\mathcal{F}$ définie par $g_{\nu\mathcal{F}} = \sigma^*(g_{|T\mathcal{F}^{\perp}})$.

Définition 26. On définit la dérivée de Lie sur $\nu\mathcal{F}$ par

$$\forall X \in \Xi(M),\ \forall s \in \Gamma(\nu\mathcal{F}),\ \mathcal{L}_X(s) = \pi([X, \sigma(s)]).$$

On notera encore $\mathcal{L}_X$ le prolongement de la dérivée de Lie aux puissances extérieurs de $\nu\mathcal{F}$.

Définition 27. Soit h une métrique sur $\nu\mathcal{F}$ (h est appelée une métrique transverse). Si $X \in \Xi(M)$, on note $\mathcal{L}_X(h)$ le 2-tenseur symétrique sur $\nu\mathcal{F}$ défini par

$$\forall s, s' \in \Gamma(\nu\mathcal{F}),\ \mathcal{L}_X(h)(s, s') = X(h(s, s')) - h(\mathcal{L}_X(s), s') - h(s, \mathcal{L}_X(s')).$$

Définition 28. On dit que la métrique h sur $\nu\mathcal{F}$ est invariante par holonomie si

$$\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \mathcal{L}_V(h) = 0,$$

autrement dit si $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}), \forall s, s' \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$ on a

$$V(h(s,s')) = h(\pi([V,\sigma(s)]),s')+h(s,\pi([V,\sigma(s')]) = h(\mathcal{L}_V(s),s')+h(s,\mathcal{L}_V(s')).$$

On dit que la métrique g sur M est quasi-fibrée si la métrique induite par g sur $\nu\mathcal{F}$ est invariante par holonomie.

Proposition 23. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien si et seulement s'il existe une métrique invariante par holonomie sur $\nu\mathcal{F}$.

Démonstration. C'est une reformulation de la proposition 117 (page 119). □

Remarque. Dans la suite on supposera que $\mathcal{F}$ est riemmanien et que g est quasi-fibrée.

Définition 29. On appelle connexion de Bott la connexion partielle sur $\nu\mathcal{F}$ définie par

$$\forall s \in \nu\mathcal{F},\ \mathring{\nabla}_X(s) = \pi([X,\sigma(s)]) = \mathcal{L}_X(s),\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}).$$

Définition 30. Soit ∇ une connexion sur $\nu\mathcal{F}$ on dit que ∇ est une connexion adaptée si $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}), \nabla_V = \mathring{\nabla}_V$.

Proposition 24. De l'identité de Jacobi, on déduit que la courbure d'une connexion adaptée ∇ est nulle le long des feuilles : $\forall U, V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ on a

$$R_\nabla(U,V) = \nabla_U \circ \nabla_V - \nabla_V \circ \nabla_U - \nabla_{[U,V]} = 0.$$

Définition 31. On appelle torsion de ∇ la 2-forme T_∇ à valeurs dans $\nu\mathcal{F}$ définie par

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X(\pi(Y)) - \nabla_Y(\pi(X)) - \pi([X,Y]),\ \forall X, Y \in \Xi(M).$$

Proposition 25. Si ∇ est une connexion adaptée alors $T_\nabla = 0$.

Démonstration. Soient $X, Y \in \Xi(M)$, on note $X = X_1 + X_2$ et $Y = Y_1 + Y_2$ où $X_1, Y_1 \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $X_2, Y_2 \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$.

$$\begin{aligned}
&T_\nabla(X,Y)\\
&= T_\nabla(X_1,Y) + T_\nabla(X_2,Y)\\
&= T_\nabla(X_1,Y) + T_\nabla(X_2,Y_1) + T_\nabla(X_2,Y_2)\\
&= \nabla_{X_1}(\pi(Y)) - \pi([X_1,Y]) + \nabla_{X_2}(\pi(Y_1)) - \nabla_{Y_1}(\pi(X_2)) - \pi([X_2,Y_1])\\
&+ \nabla_{X_2}(\pi(Y_2)) - \nabla_{Y_2}(\pi(X_2)) - \pi([X_2,Y_2])\\
&= \pi([X_1,\sigma(\pi(Y))]) - \pi([X_1,Y]) + \nabla_{X_2}(\pi(Y_1)) - \nabla_{Y_1}(\pi(X_2)) - \pi([X_2,Y_1])\\
&+ \pi(\nabla^M_{X_2}(Y_2)) - \pi(\nabla^M_{Y_2}(X_2)) - \pi([X_2,Y_2])\\
&= -\pi([Y_1,\sigma(\pi(X_2))]) - \pi([X_2,Y_1]) + \pi(T_{\nabla^M}(X_2,Y_2)) = 0
\end{aligned}$$

□

Définition 32. Soit ∇ une connexion sur $\nu\mathcal{F}$ et $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, si $X \in \Xi(M)$, on note $\mathcal{L}_V(\nabla)_X : \Gamma(\nu\mathcal{F}) \to \Gamma(\nu\mathcal{F})$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{L}_V(\nabla)_X(s) = \mathcal{L}_V(\nabla_X(s)) - \nabla_{[V,X]}(s) - \nabla_X(\mathcal{L}_V(s)),\ \forall s \in \Gamma(\nu\mathcal{F}).$$

Définition 33. Soit ∇ une connexion sur $\nu\mathcal{F}$, on dit que ∇ est invariante par holonomie si $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, on a $\mathcal{L}_V(\nabla) = 0$.
On dit que ∇ est basique si ∇ est adaptée et invariante par holonomie.

Proposition 26. Soit ∇ une connexion basique sur $\nu\mathcal{F}$, alors $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ on a $i_V(R_\nabla) = 0$ et $\mathcal{L}_V(R_\nabla) = 0$.

Démonstration. Soient $Y \in \Xi(M)$ et $s \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$ alors,

$$\begin{aligned} R_\nabla(V,Y)(s) &= \nabla_V \circ \nabla_Y(s) - \nabla_Y \circ \nabla_V(s) - \nabla_{[V,Y]}(s) \\ &= \mathring{\nabla}_V \circ \nabla_Y(s) - \nabla_Y \circ \mathring{\nabla}_V(s) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(s) \\ &= \mathcal{L}_V(\nabla_Y(s)) - \nabla_Y(\mathcal{L}_V(s)) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(s) \\ &= (\mathcal{L}_V(\nabla)_Y)(s) = 0 \end{aligned}$$

Soient $Y, Z \in \Xi(M)$ et $s \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$. On a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_V(R_\nabla)(Y,Z)(s) \\
&= \mathcal{L}_V(R_\nabla(Y,Z)(s)) - R_\nabla(\mathcal{L}_V(Y),Z)(s) - R_\nabla(Y,\mathcal{L}_V(Z))(s) - R_\nabla(Y,Z)(\mathcal{L}_V(s)) \\
&= \mathcal{L}_V(\nabla_Y\nabla_Z(s) - \nabla_Z\nabla_Y(s) - \nabla_{[Y,Z]}(s)) - (\nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}\nabla_Z(s) - \nabla_Z\nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(s) \\
&- \nabla_{[\mathcal{L}_V(Y),Z])}(s)) - (\nabla_Y\nabla_{\mathcal{L}_V(Z)}(s) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Z)}\nabla_Y(s) - \nabla_{[Y,\mathcal{L}_V(Z)])}(s)) \\
&- (\nabla_Y\nabla_Z(\mathcal{L}_V(s)) - \nabla_Z\nabla_Y(\mathcal{L}_V(s)) - \nabla_{[Y,Z]}(\mathcal{L}_V(s))) \\
&= \nabla_Y(\mathcal{L}_V(\nabla_Z(s)) - \nabla_Z(\mathcal{L}_V(\nabla_Y(s)) - \nabla_{\mathcal{L}_V([Y,Z])}(s) + \nabla_Z\nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(s) \\
&+ \nabla_{[\mathcal{L}_V(Y),Z])}(s) - \nabla_Y\nabla_{\mathcal{L}_V(Z)}(s) + \nabla_{[Y,\mathcal{L}_V(Z)])}(s) - \nabla_Y\nabla_Z(\mathcal{L}_V(s)) + \nabla_Z\nabla_Y(\mathcal{L}_V(s)) \\
&= (\mathcal{L}_V(\nabla_Y\nabla_Z(s)) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(\nabla_Z(s))) - (\mathcal{L}_V(\nabla_Z\nabla_Y(s)) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Z)}(\nabla_Y(s))) \\
&- (\mathcal{L}_V(\nabla_{[Y,Z]}(s) - \nabla_{[Y,Z]}(\mathcal{L}_V(s)) + \nabla_Z\nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(s) + \nabla_{[\mathcal{L}_V(Y),Z])}(s) \\
&- \nabla_Y\nabla_{\mathcal{L}_V(Z)}(s) + \nabla_{[Y,\mathcal{L}_V(Z)])}(s) - \nabla_Y\nabla_Z(\mathcal{L}_V(s)) + \nabla_Z\nabla_Y(\mathcal{L}_V(s)) \\
&= \nabla_Y(\mathcal{L}_V(\nabla_Z(s) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Z)}(s) - \nabla_Z(\mathcal{L}_V(s))) - \nabla_Z(\mathcal{L}_V(\nabla_Y(s) - \nabla_{\mathcal{L}_V(Y)}(s) \\
&- \nabla_Y(\mathcal{L}_V(s))) - \nabla_{\mathcal{L}_V([Y,Z])}(s) + \nabla_{[\mathcal{L}_V(Y),Z]}(s) + \nabla_{[Y,\mathcal{L}_V(Z)]}(s) \\
&= -\nabla_{\mathcal{L}_V([Y,Z])}(s) + \nabla_{[\mathcal{L}_V(Y),Z]}(s) + \nabla_{[Y,\mathcal{L}_V(Z)]}(s) \\
&= -\nabla_{[V[Y,Z]]+[[V,Y],Z]+[Y,[V,Z]]}(s) = 0
\end{aligned}$$

□

Notation 6. On désigne toujours par ∇^M la connexion de Levi-Civita.

Définition 34. On définit une connexion sur $\nu\mathcal{F}$ par $\nabla_X(s) = \pi([X,\sigma(s)]) = \mathring{\nabla}_X(s)$ si $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $\nabla_X(s) = \pi(\nabla^M_X(\sigma(s)))$ si $X \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$.

Remarque. Comme ∇^M et $\mathring{\nabla}$ sont des connexions, on a bien que ∇ est une connexion.

Remarque. Par définition la connexion ∇ est une connexion adaptée, en particulier

$$\forall U, V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ R_\nabla(U,V) = 0.$$

Définition 35. Soit $\tilde{\nabla}$ une connexion sur $\nu\mathcal{F}$. On dit que $\tilde{\nabla}$ est une connexion métrique si

$$\forall X \in \Xi(M),\ \forall s, s' \in \Gamma(\nu\mathcal{F}),\ X(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) = g_{\nu\mathcal{F}}(\tilde{\nabla}_X(s), s') + g_{\nu\mathcal{F}}(s, \tilde{\nabla}_X(s')).$$

Remarque. Etant donné la définition de la connexion ∇ et comme g est quasi-fibrée on a

$$\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \forall s, s' \in \Gamma(\nu\mathcal{F}),\ V(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) = g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_V(s), s') + g_{\nu\mathcal{F}}(s, \nabla_V(s')).$$

Théorème 10. La connexion ∇ est une connexion métrique.

Démonstration. Comme $\nabla = \mathring{\nabla}_{T\mathcal{F}} + \nabla^M_{T\mathcal{F}^\perp}$ et $g = g_{|T\mathcal{F}} + g_{|T\mathcal{F}^\perp}$, la compatibilité de $\mathring{\nabla}_{T\mathcal{F}}$ avec $g_{|T\mathcal{F}}$ et de $\nabla^M_{T\mathcal{F}^\perp}$ avec $g_{|T\mathcal{F}^\perp}$ entraînent que ∇ est métrique puisq'on a un isomorphisme entre $T\mathcal{F}^\perp$ et $\nu\mathcal{F}$. Donc ∇ est une connexion métrique. □

Théorème 11. La connexion ∇ est l'unique connexion métrique sans torsion sur $\nu\mathcal{F}$. La connexion ∇ est appelée connexion de Levi-Civita transverse.

Démonstration. On a vu que ∇ est une connexion métrique et ∇ est une connexion adaptée. Donc ∇ est sans torsion.
Soit $X \in \Xi(M)$, et $s, s' \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$, On a

$$\begin{aligned}
&2g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_X(s), s') \\
&= g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_X(s), s') + g_{\nu\mathcal{F}}(\nabla_X(s), s') \\
&= X(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) - g_{\nu\mathcal{F}}(s, \nabla_X(s')) + g_{\nu\mathcal{F}}(s', \nabla_X(s)) \\
&= X(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) - (g_{\nu\mathcal{F}}(s, \nabla_{\sigma(s')}(\pi(X)) + \pi([X, \sigma(s')])) \\
&+ g_{\nu\mathcal{F}}(s', \nabla_{\sigma(s)}(\pi(X)) + \pi([X, \sigma(s)])) \\
&= X(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) - (\sigma(s')(g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), s)) - g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), \nabla_{\sigma(s')}(s))) \\
&- g_{\nu\mathcal{F}}(s, \pi([X, \sigma(s')])) + (\sigma(s)(g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), s')) - g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), \nabla_{\sigma(s)}(s'))) \\
&+ g_{\nu\mathcal{F}}(s', \pi([X, \sigma(s)])) \\
&= X(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) - \sigma(s')(g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), s)) - g_{\nu\mathcal{F}}(s, \pi([X, \sigma(s')])) \\
&+ \sigma(s)(g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), s')) - g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), \nabla_{\sigma(s)}(s')) + g_{\nu\mathcal{F}}(s', \pi([X, \sigma(s)])) \\
&+ g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), \nabla_{\sigma(s')}(s) - \nabla_{\sigma(s)}(s')) \\
&= X(g_{\nu\mathcal{F}}(s,s')) - \sigma(s')(g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), s)) - g_{\nu\mathcal{F}}(s, \pi([X, \sigma(s')])) \\
&+ \sigma(s)(g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), s')) - g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), \nabla_{\sigma(s)}(s')) + g_{\nu\mathcal{F}}(s', \pi([X, \sigma(s)])) \\
&+ g_{\nu\mathcal{F}}(\pi(X), \pi([\sigma(s), \sigma(s')]))
\end{aligned}$$

$\nabla_X(s)$ est uniquement déterminée par la formule ci-dessus, d'où l'unicité de ∇. □

Théorème 12. La connexion ∇ est invariante par holonomie.
Par conséquent ∇ est une connexion basique et on a

$$\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ i_V(R_\nabla) = \mathcal{L}_V(R_\nabla) = 0.$$

Démonstration. Nous venons de montrer que la connexion de Levi-Civita transverse est entièrement déterminée par la métrique g qui est quasi-fibrée (et donc invariante par holonomie). Par conséquent la connexion ∇ est elle aussi invariante par holonomie. □

3.1.2 Courbure principale

Nous allons à présent définir la forme de courbure principale du feuilletage $\mathcal{F}$ (voir [Ton97]).

Notation 7. On note encore $\nabla : \Omega^r(M, \nu\mathcal{F}) \to \Omega^{r+1}(M, \nu\mathcal{F})$ la dérivée extérieure associée à ∇ définie par

$$\begin{aligned}\nabla\omega(X_0, ..., X_r) = &\sum_{j=0}^{r}(-1)^j \nabla_{X_j}(\omega(X_0, ..., \hat{X}_j, ..., X_p)) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_r)\end{aligned}$$

où $\omega \in \Omega^r(M, \nu\mathcal{F})$ et $X_j \in \Xi(M)$.

Définition 36. On notera $\tau^k(M, \nu\mathcal{F})$ l'espace des tenseurs de degré k à valeurs dans $\nu\mathcal{F}$.
On note $\tilde{\mathcal{L}}$ l'application linéaire $\tilde{\mathcal{L}} : \Omega^r(M, \nu\mathcal{F}) \to \tau^{r+1}(M, \nu\mathcal{F})$ définie par $\forall X, Y_1, ..., Y_r \in \Xi(M)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}(\omega)(X, Y_1, ..., Y_r) &:= (\tilde{\mathcal{L}}_X(\omega))(Y_1, ..., Y_r) \\ &:= \nabla_X(\omega(Y_1, ..., Y_r)) - \sum_{i=1}^{r}\omega(Y_1, ..., \nabla^M_X(Y_i), ..., Y_r)\end{aligned}$$

Proposition 27. $\forall \omega \in \Omega^r(M, \nu\mathcal{F})$, on a

$$\nabla(\omega)(Y_1, ..., Y_{r+1}) = \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\tilde{\mathcal{L}}_{Y_i}(\omega))(Y_1, ..., \hat{Y}_i, ..., Y_{r+1}).$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\tilde{\mathcal{L}}_{Y_i}(\omega))(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1})\\
&=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{Y_i}(\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1}))\\
&+\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{k=1,k\neq i}^{r+1}(-1)^{i}\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,\nabla^M_{Y_i}(Y_k),...,Y_{r+1})\\
&=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{Y_i}(\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1}))\\
&+\sum_{i<k}(-1)^{i}\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,\nabla^M_{Y_i}(Y_k),...,Y_{r+1})\\
&+\sum_{k<i}(-1)^{i}\omega(Y_1,...,\nabla^M_{Y_i}(Y_k),...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1})\\
&=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{Y_i}(\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1}))\\
&+\sum_{i<k}(-1)^{i}\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,\nabla^M_{Y_i}(Y_k),...,Y_{r+1})\\
&+\sum_{i<k}(-1)^{k}\omega(Y_1,...,\nabla^M_{Y_k}(Y_i),...,\hat{Y_k},...,Y_{r+1})\\
&=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{Y_i}(\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1}))\\
&+\sum_{i<k}(-1)^{i}\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,\nabla^M_{Y_i}(Y_k),...,Y_{r+1})\\
&+\sum_{i<k}(-1)^{k+k-i+1}\omega(Y_1,...,\hat{Y_k},...,\nabla^M_{Y_k}(Y_i),...,Y_{r+1}).
\end{aligned}
$$

Or la connexion de Levi-Civita est sans torsion,
donc

$$
\begin{aligned}
\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,[Y_i,Y_k],...,Y_{r+1}) &= \omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,\nabla^M_{Y_i}(Y_k),...,Y_{r+1})\\
&\quad-\omega(Y_1,...,\hat{Y_k},...,\nabla^M_{Y_k}(Y_i),...,Y_{r+1}).
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}(\tilde{\mathcal{L}}_{Y_i}(\omega))(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{Y_i}(\omega(Y_1,...,\hat{Y_i},...,Y_{r+1})) \\
&+ \sum_{i<k}(-1)^i\omega([Y_i,Y_k],Y_1,...,\hat{Y_i},...,\hat{Y_k},...,Y_{r+1}) \\
&= \nabla(\omega)(Y_1,...,Y_{r+1}).
\end{aligned}$$

□

Remarque. En particulier pour $r = 1$ on a

$$\begin{aligned}
\nabla(\omega)(X,Y) &= \nabla_X(\omega(Y)) - \nabla_Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \\
&= (\tilde{\mathcal{L}}_X(\omega))(Y) - (\tilde{\mathcal{L}}_Y(\omega))(X).
\end{aligned}$$

Définition 37. Soit $\alpha \in \tau^2(M,\nu\mathcal{F})$ le 2-tenseur défini par $\alpha = -\tilde{\mathcal{L}}(\pi)$, où la projection canonique $\pi : TM \to \nu\mathcal{F}$ est vue comme un élément de $\Omega^1(M,\nu\mathcal{F})$. Le tenseur α est appelé la deuxième forme fondamentale le long des feuilles.

Remarque. Si $X, Y \in \Xi(M)$, on a

$$\alpha(X,Y) = -\nabla_X(\pi(Y)) + \pi(\nabla^M_X(Y)).$$

Proposition 28. La deuxième forme fondamentale α est symétrique.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) &= -\nabla_X(\pi(Y)) + \pi(\nabla^M_X(Y)) + \nabla_Y(\pi(X)) - \pi(\nabla^M_Y(X)) \\
&= -\nabla_X(\pi(Y)) + \nabla_Y(\pi(X)) + \pi(\nabla^M_X(Y) - \nabla^M_Y(X)) \\
&= -\nabla_X(\pi(Y)) + \nabla_Y(\pi(X)) + \pi([X,Y]) \\
&= T_\nabla(X,Y) = 0.
\end{aligned}$$

□

Remarque. On note encore α la restriction de α à $\Gamma(T\mathcal{F}) \times \Gamma(T\mathcal{F})$; en particulier $\forall U, V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, on a $\alpha(U,V) = \pi(\nabla^M_U(V))$.

Proposition 29. Si $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$ et $\forall U, V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ on a

$$\mathcal{L}_Y(g)(U,V) = g(\nabla^M_U(Y),V) + g(U,\nabla^M_V(Y)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_Y(g)(U,V)\\
&= Y(g(U,V)) - g(\mathcal{L}_Y(U),V) - g(U,\mathcal{L}_Y(V))\\
&= Y(g(U,V)) - g([Y,U],V) - g(U,[Y,V])\\
&= Y(g(U,V)) - g(\nabla^M_Y(U) - \nabla^M_U(Y),V) - g(U,\nabla^M_Y(V) - \nabla^M_V(Y))\\
&= (Y(g(U,V)) - g(\nabla^M_Y(U),V) - g(U,\nabla^M_Y(V))) + g(\nabla^M_U(Y),V)\\
&+ g(U\nabla^M_V(Y))\\
&= g(\nabla^M_U(Y),V) + g(U,\nabla^M_V(Y)).
\end{aligned}$$

□

Proposition 30. $\forall Y \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp),\ \forall U,V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ on a

$$\mathcal{L}_Y(g_{|T\mathcal{F}})(U,V) = -2g(Y,\alpha(U,V)).$$

Démonstration. Comme la connexion de Levi-Civita est métrique on a

$$\begin{aligned}
g(\nabla^M_U(Y),V) &= U(g(Y,V)) - g(Y,\nabla^M_U(V))\\
&= -g(Y,\nabla^M_U(V))\\
&= -g(Y,\pi(\nabla^M_U(V)))\\
&= -g(Y,\alpha(U,V)).
\end{aligned}$$

De même on a $g(U,\nabla^M_V(Y)) = -g(Y,\alpha(U,V))$.
Donc $\mathcal{L}_Y(g_{|T\mathcal{F}})(U,V) = -2g(Y,\alpha(U,V))$. □

Proposition 31. Pour tout $s \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$, il existe un unique morphisme de fibrés vectoriel $W(s) : T\mathcal{F} \to T\mathcal{F}$ qui vérifie

$$\forall U,V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ g_{\nu\mathcal{F}}(\alpha(U,V),s) = g(W(s)(U),V).$$

De plus l'application $s \mapsto W(s)$ est $C^\infty(M)$-linéaire.
On appellera cette application l'application de Weingarten.

Démonstration. $\forall x \in M,\ g_{\nu\mathcal{F},x}(\alpha_x(U_x,.),s_x)$ est une forme linéaire sur $T_x\mathcal{F}$, or $T_x\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie,
donc $\exists! W(s)(U)_x \in T_x\mathcal{F}$ tel que $g_{\nu\mathcal{F},x}(\alpha_x(U_x,.),s_x) = g_x(W(s)(U)_x,V_x)$.
L'application $x \mapsto g_{\nu\mathcal{F},x}(\alpha_x(U_x,.),s_x)$ est C^∞,
donc l'application $x \mapsto W(s)(U)_x$ est C^∞ et $W(s)(U) \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
De l'égalité $g_{\nu\mathcal{F}}(\alpha(U,V),s) = g(W(s)(U),V)$ on deduit que l'application $s \mapsto W(s)$ est $C^\infty(M)$-linéaire. □

Définition 38. L'application $\mathrm{tr}W : \Gamma(\nu\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ définie par $s \mapsto \mathrm{tr}W(s)$ est une forme linéaire.
On prolonge $\mathrm{tr}W$ en une 1-forme $\kappa \in \Omega^1(M)$ définie par
$\kappa(V) = 0, \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $\kappa(s) = \mathrm{tr}W(s), \forall s \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$.
La forme κ est appelée la 1-forme de courbure principale.

Remarque. Soient $\{e_1, ..., e_p\}$ un repère orthonormé local de $T\mathcal{F}$ et $s \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$.

$$\begin{aligned} trW(s) &= \sum_{i=1}^{p} g(W(s)(e_i), e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} g(\pi(\nabla^M_{e_i}(e_i)), s) \\ &= g(\pi(\sum_{i=1}^{p} \nabla^M_{e_i}(e_i)), s). \end{aligned}$$

Définition 39. Soit $\{e_1, ..., e_p\}$ un repère orthonormé local de $T\mathcal{F}$.
On appelle champ de vecteur de courbure principal le champ de vecteur H défini localement par $H = \pi(\sum_{i=1}^{p} \nabla^M_{e_i}(e_i))$.
En particulier la 1-forme duale de H est donc la 1-forme de courbure principal du feuilletage.

3.2 Géométrie basique d'un feuilletage riemannien

Nous allons définir la cohomologie basique du feuilletage $\mathcal{F}$. Cette cohomologie a pour but de représenter la cohomologie de l'espace des feuilles $M/\mathcal{F}$, bien que celui-ci ne soit pas muni d'une structure de variété en général. Puisque nous nous plaçons dans le cadre des feuilletages riemanniens, nous verrons plus tard que la cohomologie basique vérifie les mêmes propriétés que la cohomologie de de Rham. Nous calculons explicitement cette cohomologie dans le cas des feuilletages par suspension. Dans ce paragraphe nous définissons également la différentielle transverse aux feuilles, la forme volume transversale et l'opérateur de Hodge basique qui nous serons utiles pour la suite.

3.2.1 Généralités

Définition 40. Soit $\omega \in \Omega^*(M)$, on dit que ω est basique si

$$\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ i_V(\omega) = \mathcal{L}_V(\omega) = 0.$$

On note $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ l'ensemble des formes basiques qui est une algèbre différentielle graduée et $H^*(M/\mathcal{F})$ la cohomologie associée.

Remarque. $\Omega^0(M/\mathcal{F})$ est l'ensemble des fonctions C^∞ constantes le long des feuilles.

Proposition 32. Soient $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ des coordonnées locales associées à une carte feuilletée et $\omega \in \Omega^*(M)$.
Alors ω est basique si et seulement si ω est de la forme

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant q} \omega_I dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$$

où $I = (i_1, ..., i_k)$ et ω_i est une fonction indépendante de $x_1, ..., x_p$, c'est-à-dire $\dfrac{\partial}{\partial x_l}(\omega_I) = 0, \forall l$.

Démonstration. On suppose que ω est basique.
Donc $\forall 1 \leq l \leq p,\ i_{\partial_l}(\omega) = 0$, donc $\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_I dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$.
De plus on a $\mathcal{L}_V(\omega) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
Or $\mathcal{L}_V(\omega) = \sum_{i_1 < ... < i_k} \mathcal{L}_V(\omega_I) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} + \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_I \mathcal{L}_V(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k})$
et

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_V(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) &= \mathcal{L}_V(dy_{i_1}) \wedge ... \wedge dy_{i_k} + ... + dy_{i_1} \wedge ... \wedge \mathcal{L}_V(dy_{i_k}) \\
&= d\mathcal{L}_V(y_{i_1}) \wedge ... \wedge dy_{i_k} + ... + dy_{i_1} \wedge ... \wedge d\mathcal{L}_V(y_{i_k}) \\
&= d(V(y_{i_1})) \wedge ... \wedge dy_{i_k} + ... + dy_{i_1} \wedge ... \wedge d(V(y_{i_k})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_V(\omega_I) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
En particulier $\partial_l(\omega_i) = 0,\ \forall l$.
On suppose que $\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_I dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$ avec $\dfrac{\partial}{\partial x_l}(\omega_i) = 0, \forall l$.
Soit $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, donc $V = \sum_{i=1}^{p} V_i \partial_{x_i}$.
On a clairement $i_V(\omega) = 0$. Or
$\mathcal{L}_V(\omega) = \sum_{i_1 < ... < i_k} \mathcal{L}_V(\omega_I) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} + \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_I \mathcal{L}_V(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k})$,
Comme précédemment $\mathcal{L}_V(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) = 0$.
Donc $\mathcal{L}_V(\omega_I) = V(\omega_I) = 0$ car $\dfrac{\partial}{\partial x_l}(\omega_I) = 0, \forall l$. Donc ω est basique. □

Proposition 33. L'inclusion $\Omega^*(M/\mathcal{F}) \hookrightarrow \Omega^*(M)$ induit un morphisme injectif d'espace vectoriel $H^1(M/\mathcal{F}) \to H^1(M)$.

Démonstration. Soient $\omega \in \Omega^1(M/\mathcal{F})$ telle que $\omega = df$ où $f \in C^\infty(M)$ et $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$. On a $V(f) = i_V(df) = i_V(\omega) = 0$ car ω est basique.
Donc $f \in \Omega^0(M/\mathcal{F})$ et $[\omega] = 0$ dans $H^1(M/\mathcal{F})$. □

Exemple 6. On considère le feuilletage de codimension q par fibration $\pi : M \to B$ où M et B sont des variétées compactes.

Nous allons montrer que π^* est un isomorphisme de $\Omega^*(B)$ sur $\Omega^*(M/\mathcal{F})$.
Montrons d'abord que $\pi^*(\Omega^*(B)) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})$.
Soit $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, $i_V(\pi^*(\omega)) = i_{\pi_*(V)}(\omega)$.
Or ici $T\mathcal{F} = Ker\ \pi_*$, donc $\pi_*(V) = 0$ et $i_V(\pi^*(\omega)) = 0$.
De même $i_V(d(\pi^*(\omega))) = 0$. Donc $\pi^*(\Omega^*(B)) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})$.
On sait que π est une submersion, donc π^* est injective.
Soit $\alpha \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$, montrons qu'il existe $\omega \in \Omega^*(B)$ tel que $\alpha = \pi^*(\omega)$.
Soient $z \in M$, U une carte en M et $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ les coordonnées locales sur U. Alors $(y_1, ..., y_q)$ sont des coordonnées locales autour de $\pi_*(z)$.
Comme α est basique, localement α s'écrit sous la forme :
$\alpha_z = \sum_{i_1<...<i_k} f_I(y) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$ où $I = (i_1, ..., i_k)$.
On pose $\omega^U_{\pi(z)} = \sum_{i_1<...<i_k} f_I(y) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$. On a donc $\alpha = \pi^*(\omega^U)$.
En prenant une partition de l'unité subordonnée à de telles cartes on obtient ainsi une forme différentielle ω sur B telle que $\alpha = \pi^*(\omega)$.
Donc π^* est surjective et π^* est un isomorphisme.
De plus π^* induit un isomorphisme de $H^*(B)$ sur $H^*(M/\mathcal{F})$.

Définition 41. Soit $X \in \Xi(M)$, on dit que X est feuilleté si
$\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, $[X, V] \in \Gamma(T\mathcal{F})$. On note $\Xi(M, \mathcal{F})$ l'ensemble des champs feuilletés.

Proposition 34. L'ensemble des champs feuilletés $\Xi(M, \mathcal{F})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une algèbre de Lie pour le crochet de Lie et un $\Omega^0(M/\mathcal{F})$-module. De plus $\Gamma(T\mathcal{F})$ est un idéal de $\Xi(M, \mathcal{F})$.

Démonstration. Soient $X, Y \in \Xi(M, \mathcal{F})$ et $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ alors
$[[X, Y], V] = -[[V, X], Y] - [[Y, V], X] \in \Gamma(T\mathcal{F})$. Donc $\Xi(M, \mathcal{F})$ est stable par le crochet de Lie et donc une sous algèbre de Lie de $\Xi(M)$.
Soient $X \in \Xi(M, \mathcal{F})$, $f \in \Omega^0(M/\mathcal{F})$ et $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ alors
$[fX, V] = f[X, V] - V(f)X = f[X, V]$ car $f \in \Omega^0(M/\mathcal{F})$. Ainsi $\Xi(M, \mathcal{F})$ est stable par multiplication par les fonctions lisses basiques. Donc $\Xi(M, \mathcal{F})$ est un $\Omega^0(M/\mathcal{F})$-module.
De plus $\Gamma(T\mathcal{F})$ est clairement un idéal de $\Xi(M, \mathcal{F})$ pour le crochet de Lie. □

Définition 42. On note $\Xi(M/\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie $\Xi(M/\mathcal{F}) = \Xi(M, \mathcal{F})/\Gamma(T\mathcal{F})$, qui est appelée l'algèbre des champs de vecteurs basiques sur M.
L'algèbre de Lie $\Xi(M/\mathcal{F})$ est un $\Omega^0(M/\mathcal{F})$-module.

Proposition 35. Soit $X \in \Xi(M)$, les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) le champ de vecteurs X est un champ feuilletée,
(ii) le flot de X $(\varphi^X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est feuilleté $\forall t \in \mathbb{R}$,
(iii) dans une carte feuilleté $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ les composantes de X selon $y_1, ..., y_q$ sont indépendantes de $x_1, ..., x_p$.

Démonstration. Le champ X est feuilleté si et seulement si
$[X,Y] = \mathcal{L}_X(Y) \in \Gamma(T\mathcal{F}), \forall Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
Donc X est feuilleté si et seulement si le flot de X préserve les feuilles.
Donc les deux premiers points sont équivalents.
Soit $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ des coordonnées locales adaptées au feuilletage $\mathcal{F}$.
Soit $f(x,y)\partial y_i$ un champ feuilleté,
alors $[f(x,y)\partial y_i, \partial x_k]$ est tangent au feuilletage.
Or $[f(x,y)\partial y_i, \partial x_k] = \partial x_k(f(x,y))\partial y_i + f(x,y)[\partial y_i, \partial x_k] = \partial x_k(f(x,y))\partial y_i$.
Donc nécessairement $\partial x_k(f(x,y)) = 0$ et f est indépendante de y.
Donc les champs feuilletés sont bien de la forme voulue.
Soit X un champ de vecteurs de la forme $f_i(x,y)\partial x_i + g_i(y)\partial y_i$ et $h(x,y)\partial x_k$ un champ tangent au feuilletage. On a

$$\begin{aligned}
&[f(x,y)\partial x_i + g(y)\partial y_i, h(x,y)\partial x_k] \\
&= [f(x,y)\partial x_i, h(x,y)\partial x_k] + [g(y)\partial y_i, h(x,y)\partial x_k] \\
&= f(x,y)\partial x_i(h(x,y))\partial x_k - h(x,y)\partial x_k(f(x,y))\partial x_i + f(x,y)h(x,y)[\partial x_i, \partial x_k] \\
&+ g(y)\partial y_i(h(x,y))\partial x_k - 0 + g(y)h(x,y)[\partial y_i, \partial x_k] \\
&= f(x,y)\partial x_i(h(x,y))\partial x_k - h(x,y)\partial x_k(f(x,y))\partial x_i + f(x,y)h(x,y)[\partial x_i, \partial x_k] \\
&+ g(y)\partial y_i(h(x,y))\partial x_k.
\end{aligned}$$

Comme $T\mathcal{F}$ est involutif, on a bien que $[f(x,y)\partial x_i + g(y)\partial y_i, h(x,y)\partial x_k]$ est tangent au feuilletage. Donc X est feuilleté. □

Proposition 36. L'espace vectoriel des champs de vecteurs basiques $\Xi(M/\mathcal{F})$ est isomorphe aux sections de $\Gamma(T\mathcal{F})$ dont les coordonnées locales dans une carte feuilletée ne dépendent que des coordonnées transverses (on notera $\Gamma_B(\nu\mathcal{F})$ l'ensemble de ces sections).

Démonstration. Soit $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ des coordonnées locales adaptées au feuilletage $\mathcal{F}$. On identifiera $\nu\mathcal{F}$ et $T\mathcal{F}^\perp$.
Soit $\phi : \Xi(M/\mathcal{F}) \to \Gamma_B(\nu\mathcal{F})$ définie par

$$\phi\left(X = \sum_{i=1}^{p} f_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{q} g_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \sum_{i=1}^{q} g_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

L'application ϕ est clairement un épimorphisme d'espace vectoriel, dont le noyau est $\Gamma(T\mathcal{F})$. D'où le résultat. □

Le théorème suivant est démontré dans [Dom98].

Théorème 13. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage riemmannien alors il existe une métrique quasi-fibrée telle que la forme de coubure principale κ est basique.

Remarque. Dans la suite on supposera donc que κ est basique et par conséquent le champ de vecteur de courbure principal sera un champ de vecteur basique.

Nous allons à présent définir la différentielle transverse aux feuilles (voir par exemple [Mol88, Ton97]).

Définition 43. On identifie $\nu\mathcal{F}$ et $T\mathcal{F}^{\perp}$.
On a $TM = T\mathcal{F} \oplus \nu\mathcal{F}$, donc $T^*M = T^*\mathcal{F} \oplus \nu^*\mathcal{F}$.
Soit U une carte locale feuilletée de coordonnées $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$.
Si $\omega \in \Omega^*(M)$ est de la forme

$$\omega = \sum_{i_1,...,i_r,j_i,...,j_s} f_{i,j}(x,y) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_s},$$

on dit que ω est une forme de bidegré (r,s).
On notera $\Omega^{r,s}(M)$ l'ensemble des formes de bidegré (r,s).

Définition 44. Si $\omega \in \Omega^{r,s}(M)$, alors $d\omega$ est la somme de formes de type $(r+1,s), (r,s+1), (r-1,s+2)$. On note $d_{\mathcal{F}}\omega$ la composante de bidegré $(r+1,s)$ de $d\omega$, $d_{\pitchfork}\omega$ la composante de bidegré $(r,s+1)$ de $d\omega$, et $d_{-1,2}\omega$ la composante de bidegré $(r-1,s+2)$ de $d\omega$. L'application $d_{\mathcal{F}}$ est appelée différentielle le long des feuilles et $d_{\pitchfork}$ est appelée différentielle transverse aux feuilles.

Proposition 37. Les applications $d_{\mathcal{F}}$ et $d_{-1,2}$ vérifient $d_{\mathcal{F}}^2 = 0$, $d_{-1,2}^2 = 0$, $d_{\mathcal{F}}d_{-1,2} + d_{-1,2}d_{\mathcal{F}} + d_{\pitchfork} = 0$, $d_{-1,2}d_{\pitchfork} + d_{\pitchfork}d_{-1,2} = 0$ et $d_{\mathcal{F}}d_{\pitchfork} + d_{\pitchfork}d_{\mathcal{F}} = 0$.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega^{r,s}(M)$, alors $d^2\omega \in \Omega^{r+s+2}(M)$ et $d^2\omega = 0$.
Or $d\omega = (d_{\mathcal{F}} + d_{-1,2} + d_{\pitchfork})\omega$. Donc

$$\begin{aligned} d^2\omega = (d_{\mathcal{F}}^2 &+ d_{\mathcal{F}}d_{-1,2} + d_{\mathcal{F}}d_{\pitchfork} + d_{-1,2}d_{\mathcal{F}} \\ &+ d_{-1,2}^2 + d_{-1,2}d_{\pitchfork} + d_{\pitchfork}d_{\mathcal{F}} + d_{\pitchfork}d_{-1,2} + d_{\pitchfork}^2)\omega = 0 \end{aligned}$$

Or $d_{\mathcal{F}}^2\omega$ est l'unique composante de bidegré $(r+2,s)$ dans $d^2\omega$, donc $d_{\mathcal{F}}^2\omega = 0$.
Or $(d_{\mathcal{F}}d_{\pitchfork} + d_{\pitchfork}d_{\mathcal{F}})\omega$ est la composante de bidegré $(r+1,s+1)$ dans $d^2\omega$, donc $(d_{\mathcal{F}}d_{\pitchfork} + d_{\pitchfork}d_{\mathcal{F}})\omega = 0$.
De la même manière on obtient $d_{\mathcal{F}}d_{-1,2} + d_{-1,2}d_{\mathcal{F}} + d_{\pitchfork} = 0$,
$d_{-1,2}d_{\pitchfork} + d_{\pitchfork}d_{-1,2} = 0$, et $d_{-1,2}^2 = 0$. □

Remarque. Notons que dans ce paragraphe, nous n'avons pas utilisé le fait que le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien.

3.2.2 Cohomologie basique pour les suspensions

Notation 8. Soient T et B des variétés compactes et $\rho : \pi_1(B) \to Isom(T)$ un morphisme de groupe. On note $\Gamma = \rho(\pi_1(B))$, $\tilde{M} = \tilde{B} \times T$ et $M = \tilde{M}/\Gamma$ munie du feuilletage définie par la suspension du groupe Γ et du morphisme ρ (voir proposition 116 page 118).
On va calculer la cohomologie basique de $(M, \mathcal{F})$.

Lemme 2. On note $\pi : \tilde{M} \to M$ la projection canonique.
Soit $E \to M$ un fibré vectoriel et $\tilde{E} = \pi^*(E)$, alors l'application π induit un isomorphisme de $\Gamma(M, E)$ sur $\Gamma(\tilde{M}, \tilde{E}/\Gamma)$, où $\Gamma(\tilde{M}, \tilde{E}/\Gamma)$ désigne l'ensemble des sections Γ-invariantes de $\tilde{E}$.
En particulier on a

$$C^\infty(M) \cong C^\infty(\tilde{M}/\Gamma),\ \Xi(M) \cong \Xi(\tilde{M}/\Gamma) \text{ et } \Omega^*(M) \cong \Omega^*(\tilde{M}/\Gamma).$$

Démonstration. Par définition du quotient $M = \tilde{M}/\Gamma$, la projection π est un revêtement et on a un isomorphisme $C^\infty(M) \cong C^\infty(\tilde{M}/\Gamma)$.
Soit U une carte locale de M trivialisant le fibré E.
Donc $\Gamma(E_{|U}) \cong C^\infty(U)^N$ où N est le rang du fibré E
et $\Gamma(\tilde{E}_{|\pi^{-1}(U)}) \cong C^\infty(\pi^{-1}(U))^N \cong (C^\infty(U/\Gamma))^N \cong (C^\infty(U)^N)^\Gamma$ où $(C^\infty(U)^N)^\Gamma$ désigne l'ensemble des éléments de $(C^\infty(U)^N)$ invariants par l'action de Γ.
D'où le résultat. □

Lemme 3. Soit $\omega \in \Omega^*(T/\Gamma)$, alors il existe une unique forme différentielle $\phi(\omega) \in \Omega^*(M)$ telle que $\pi^*(\phi(\omega)) = q_2^*(\omega)$, où $q_2 : \tilde{M} \to T$ désigne la deuxième projection.

Démonstration. Puisque q_2 est Γ-équivariante, $q_2^*(\omega)$ est Γ-invariante.
Or $\pi^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(\tilde{M}/\Gamma)$ est un isomorphisme, donc il existe une unique forme différentielle $\phi(\omega) \in \Omega^*(M)$ telle que $\pi^*(\phi(\omega)) = q_2^*(\omega)$. □

Proposition 38. L'application $\phi : \Omega^*(T/\Gamma) \to \Omega^*(M)$ définie précédemment vérifie : $\phi(\Omega^*(T/\Gamma)) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})$.
De plus ϕ est un isomorphisme d'algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(T/\Gamma)$ sur $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ et ϕ induit un isomorphisme de $H^*(T/\Gamma)$ sur $H^*(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Soit $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, il existe un unique champ de vecteurs $\tilde{V} \in \Gamma(T\tilde{\mathcal{F}})$ tel que $V = \pi_*(\tilde{V})$. Montrons que $i_V(\phi(\omega)) = 0$.
On a $\pi^*(i_V(\phi(\omega))) = i_{\tilde{V}}(\pi^*(\phi(\omega)) = i_{\tilde{V}}(q_2^*(\omega)) = 0$ car $q_{2,*}(\tilde{V}) = 0$.
Or $\pi^* : \Omega^*(M) \to \Omega^*(\tilde{M}/\Gamma)$ est un isomorphisme, donc $i_V(\phi(\omega)) = 0$.
Montrons que $d_M\phi(\omega) = \phi(d_T\omega)$ où d_M désigne la différentielle de de Rham sur M et d_T désigne la différentielle de de Rham sur T.

$$\begin{aligned}\pi^*(d_M\phi(\omega)) &= d_{\tilde{M}}(\pi^*(\phi(\omega))) \\ &= d_{\tilde{M}}(q_2^*(\omega)) \\ &= q_2^*(d_T\omega) \\ &= \pi^*(\phi(d_T\omega))\end{aligned}$$

Donc $d_M\phi(\omega) = \phi(d_T\omega)$. Par conséquent on obtient de la même manière que précédemment $i_V(d(\phi(\omega)) = 0$. Ainsi $\phi(\omega)$ est basique.
De plus ϕ est clairement un homomorphisme d'algèbres graduées.

Montrons que ϕ est injective.

$$\begin{aligned}\phi(\omega) = 0 &\Rightarrow \pi^*(\omega) = 0\\ &\Rightarrow q_2^*(\omega) = 0\\ &\Rightarrow \omega = 0\end{aligned}$$

car q_2 est une fibration. Donc ϕ est injective.
Montrons que ϕ est surjective.
Soit $\omega \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$, on a $\pi^*(\omega)$ est $\tilde{\mathcal{F}}$-basique et Γ-invariante,
donc $\pi^*(\omega) \in \Omega^*(\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}})^\Gamma$ où $\Omega^*(\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}})^\Gamma$ désigne les formes différentielles $\tilde{\mathcal{F}}$-basique et Γ-invariante.
Montrons que $q_2^* : \Omega^*(T)^\Gamma \to \Omega^*(\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}})^\Gamma$ est un isomorphisme.
Or $\tilde{M} \to T$ est une fibration (non-compacte), donc $q_2^* : \Omega^*(T) \to \Omega^*(\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}})$ est un isomorphisme.
Or q_2 est Γ-équivariante, donc q_2^* induit un isomorphisme
$q_2^* : \Omega^*(T)^\Gamma \to \Omega^*(\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}})^\Gamma$.
Donc il existe $\alpha \in \Omega^*(T/\Gamma)$ tel que $q_2^*(\alpha) = \pi^*(\omega)$, et ϕ est surjective. □

Proposition 39. On note G l'adhérence de Γ dans le groupe de Lie compact $Isom(T)$ des isométries de T. Alors $\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \Omega^*(T/G)$ et $H^*(M/\mathcal{F}) = H^*(T/G)$.

Démonstration. On rappelle que le groupe G est muni de la topologie compact ouvert engendrée par les ensembles de la forme

$$W(K,U) = \{g \in Isom(M)/g(K) \subset U\}$$

où K est un compact de M et U un ouvert de M (voir [Hel01]). Cette topologie est la topologie initiale associée à la famille de semi-normes

$$p_{K,j}(g) = sup_{x\in K}||D^j g(x)||.$$

Soit $(g_k)_k$ une suite de Γ convergeant vers $g \in G$ et $\omega \in \Omega^*(T/\Gamma)$.
Donc $g_k^*(\omega) = \omega, \forall k$ et en passant à la limite on a $g^*(\omega) = \omega$.
Donc $\Omega^*(T/\Gamma) \subset \Omega^*(T/G)$ et $\Omega^*(T/G) = \Omega^*(T/\Gamma) = \Omega^*(M/\mathcal{F})$. □

Exemple 7. Reprenons l'exemple du feuilletage de Kronecker $T = S^1$,
$\Gamma = \mathbb{Z}$, $M = S^1 \times S^1/\mathbb{Z}$. La cohomologie basique est alors donnée par $H^*(S^1/\Gamma)$ où Γ est l'image du morphisme $\rho : \mathbb{Z} \to Isom(S^1)$.
Rappelons que la cohomologie du cercle S^1 est donnée par $H^0(S^1) \cong \mathbb{R}$ et $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$.
L'espace $H^0(S^1)$ est représenté par les fonctions constantes,
donc $H^0(S^1/\Gamma) \cong \{0\}$ et par dualité de Poincaré on obtient $H^1(S^1/\Gamma) \cong \{0\}$.

3.2.3 Forme volume transversale et opérateur de Hodge basique

Supposons à présent que le feuilletage $\mathcal{F}$ est également transversalement orientable.

Définition 45. Soit $(F_1, ..., F_q)$ un repère orthonomé de $\nu\mathcal{F}$.
On appelle forme volume transversale la forme $\nu \in \Omega^q(\nu\mathcal{F})$ définie par

$$\nu(s_1, ..., s_q) = \det(g(s_i, F_j))_{i,j},\ \forall s_i \in \Gamma(\nu\mathcal{F}).$$

Proposition 40. La forme volume transversale ν vérifie

$$\mathcal{L}_V(\nu) = 0, \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}).$$

Démonstration. On a $\det(g(s_i, F_j)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \epsilon(\sigma) g(s_1, F_{\sigma(1)})...g(s_q, F_{\sigma(q)})$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\nu)(s_1, ..., s_q) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \epsilon(\sigma)\mathcal{L}_V(g(s_1, F_{\sigma(1)})...g(s_q, F_{\sigma(q)})) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} \epsilon(\sigma) g(s_1, F_{\sigma(1)})...\mathcal{L}_V(g)(s_i, F_{\sigma(i)})...g(s_q, F_{\sigma(q)}).\end{aligned}$$

Comme la métrique g est quasi-fibrée, on obtient le résultat voulu. □

Remarque. On considère ν comme un élément de $T\mathcal{F}^\perp$, donc ν se prolonge en une q-forme $\nu \in \Omega^q(M)$ qui vérifie $i_V(\nu) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.

Proposition 41. La forme volume transversale ν est une forme basique.

Démonstration. Soient $X_1, ..., X_q \in \Xi(M)$.
On note $X_i = X_i' + X_i''$, où $X_i' \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $X_i'' \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$.

$$\mathcal{L}_V(\nu)(X_1, ..., X_q) = V(\nu(X_1, ..., X_q)) - \sum_{i=1}^{q} \nu(X_1, ..., \mathcal{L}_V(X_i), ..., X_q).$$

Comme $i_V(\nu) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, par multilinéarité on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\nu)(X_1, ..., X_q) &= V(\nu(X_1'', ..., X_q'')) - \sum_{i=1}^{q} \nu(X_1, ..., \mathcal{L}_V(X_i'), ..., X_q) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{q} \nu(X_1'', ..., \mathcal{L}_V(X_i''), ..., X_q'') \\ &= V(\nu(X_1'', ..., X_q'')) - \sum_{i=1}^{q} \nu(X_1, ..., [V, X_i'], ..., X_q) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{q} \nu(X_1'', ..., \mathcal{L}_V(X_i''), ..., X_q'').\end{aligned}$$

Puisque $T\mathcal{F}$ est involutif, $[V, X_i'] \in \Gamma(T\mathcal{F})$,

et $\mathcal{L}_V(\nu)(X_1, ..., X_q) = V(\nu(X_1'', ..., X_q'')) - \sum_{i=1}^{q} \nu(X_1'', ..., \mathcal{L}_V(X_i''), ..., X_q'')$.

On a alors $\mathcal{L}_V(\nu)(X_1, ..., X_q) = \mathcal{L}_V(X_1'', ..., X_q'')$ où $X_i'' \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$. La proposition précédente entraîne que $\mathcal{L}_V(\nu) = 0$. □

Proposition 42. La forme ν est une forme fermée, c'est-à-dire $d\nu = 0$.

Démonstration. On a $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \mathcal{L}_V(\nu) = 0$,
c'est-à-dire $(i_V \circ d + d \circ i_V)(\nu) = 0$. Or $i_V(\nu) = 0$, donc $i_V \circ d(\nu) = 0$.
Par conséquent $d\nu \in \Omega^{q+1}(\nu\mathcal{F})$, et $d\nu = 0$. □

Comme M est une variété orientable et $\mathcal{F}$ est transversalement orientable, le fibré vectoriel $T\mathcal{F}$ est orientable.

Définition 46. On appelle forme caractéristique de $\mathcal{F}$ (ou forme volume le long des feuilles) la p-forme sur M définie par $\chi_\mathcal{F} = *\nu$ où $*$ est l'opérateur de Hodge.
Quitte à changer l'orientation de $T\mathcal{F}$, on peut supposer que $\chi_\mathcal{F}$ définit l'orientation de $T\mathcal{F}$.
Par conséquent si $(E_1, ..., E_p)$ est un repère orthonormé de $T\mathcal{F}$, $\chi_\mathcal{F} \in \Omega^p(M)$ est donnée par

$$\chi_\mathcal{F}(Y_1, ..., Y_p) = \det(g(Y_i, E_j))_{i,j},\ \forall Y_i \in \Xi(M).$$

Remarque. On a
(i) $\chi_\mathcal{F} \wedge \nu = \text{dvol}$ la forme volume canonique de M,
(ii) $\forall Y \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp), i_Y(\chi_\mathcal{F}) = 0$.

Proposition 43 (formule de Rummler [Rum79])**.** La forme caractéristique $\chi_\mathcal{F}$ vérifie

$$d\chi_\mathcal{F} = -\kappa \wedge \chi_\mathcal{F} + \varphi_0$$

où $\varphi_0 \in \Omega^{p+1}(M)$ vérifie $\forall V_1, ..., V_p \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ i_{V_1} \circ ... \circ i_{V_p}(\varphi_0) = 0$ et κ est la forme de courbure principale.

Démonstration. Calculons $\mathcal{L}_Y(\chi_\mathcal{F})(E_1, ..., E_p)$ où $Y \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et E_k est un

repère orthonormé (local) de $T\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_Y(\chi_\mathcal{F})(E_1,...,E_p) &= Y(\chi_\mathcal{F}(E_1,...,E_p)) - \sum_{k=1}^{p} \chi_\mathcal{F}(E_1,...,\mathcal{L}_Y(E_k),...,E_p) \\ &= Y(1) - \sum_{k=1}^{p} g(\mathcal{L}_Y(E_k),E_k)\chi_\mathcal{F}(E_1,...,E_p) \\ &= -\sum_{k=1}^{p} g([Y,E_k],E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{p} g([E_k,Y],E_k).\end{aligned}$$

Or la connexion de Levi-Civta ∇^M est une connexion métrique,
donc $Y(g(E_k,E_k)) - g(\nabla^M_Y(E_k),E_k) - g(E_k,\nabla^M_Y(E_k)) = 0$,
donc $Y(1) - 2g(\nabla^M_Y(E_k),E_k) = 0$ et $g(\nabla^M_Y(E_k),E_k) = 0$.
Donc $\mathcal{L}_Y(\chi_\mathcal{F})(E_1,...,E_p) = \sum_{k=1}^{p} g(\nabla^M_Y(E_k)+[E_k,Y],E_k)$.
Or ∇^M est sans torsion, donc $\nabla^M_Y(E_k)+[E_k,Y] = \nabla^M_{E_k}(Y)$.
Donc $\mathcal{L}_Y(\chi_\mathcal{F})(E_1,...,E_p) = \sum_{k=1}^{p} g(\nabla^M_{E_k}(Y),E_k)$.
Calculons $\kappa(Y)$ où $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$.
On a $\kappa(Y) = trW(Y) = \sum_{k=1}^{p} g(W(Y)(E_k),E_k)$, où W est l'application de Weingarten introduite à la proposition 36. Donc $\kappa(Y) = \sum_{k=1}^{p} g(\nabla^M_{E_k}(E_k),Y)$.
Comme ∇^M est une connexion métrique,
on a $\kappa(Y) = \sum_{k=1}^{p} E_k(g(E_k,Y)) - g(E_k,\nabla^M_{E_k}(Y))$.
Or $Y \in \Gamma(T\mathcal{F}^\perp)$ et E_k est repère de $T\mathcal{F}$, donc $g(E_k,Y) = 0$,
et $\kappa(Y) = \sum_{k=1}^{p} -g(E_k,\nabla^M_{E_k}(Y))$.
Donc $\mathcal{L}_Y(\chi_\mathcal{F})(E_1,...,E_p) = -\kappa(Y)\chi_\mathcal{F}(E_1,...,E_p)$.
Donc $\mathcal{L}_Y(\chi_\mathcal{F}) = -\kappa(Y)\chi_\mathcal{F} + \omega$ où $\omega \in \Omega^p(M)$ vérifie la condition voulue.
C'est-à-dire $(i_Y \circ d + d \circ i_Y)(\chi_\mathcal{F}) = -i_Y(\kappa \wedge \chi_\mathcal{F}) + \omega$ puisque $\chi_\mathcal{F}$ est nulle sur $T\mathcal{F}$.
Donc $i_Y d\chi_\mathcal{F} = -i_Y(\kappa \wedge \chi_\mathcal{F}) + \omega$,
et $d\chi_\mathcal{F} = -\kappa \wedge \chi_\mathcal{F} + \varphi_0$ où $\varphi_0 \in \Omega^{p+1}(M)$ vérifie la condition voulue.

□

Proposition 44. Si $\alpha \in \Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$, la $p+1$-forme φ_0 vérifie $\alpha \wedge \varphi_0 = 0$.

De plus si la forme de courbure principale κ est nulle on a alors $\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} = 0$.

Démonstration. Soient $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ les coordonnées associées à une carte feuilletée.
On note $X_1, ..., X_n$ les champs de vecteurs définis par $X_i = \partial_{x_i},\ \forall \leq i \leq p$ et $X_i = \partial_{y_j},\ \forall 1 \leq j \leq q$.
$(\varphi_0 \wedge \alpha)(X_1, ..., X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varphi_0(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p+1)})\alpha(X_{\sigma(p+2)}, ..., X_{\sigma(n)})$
or α est basique, donc $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ i_V(\alpha) = 0$.
Donc $\alpha(X_{\sigma(p+2)}, ..., X_{\sigma(n)}) \neq 0$ seulement si $\forall p+2 \leq i \leq n,\ X_{\sigma(i)} \notin \Gamma(T\mathcal{F})$, et dans ce cas $\forall 1 \leq i \leq p,\ \partial_{x_i} \in \{X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p+1)}\}$,
donc $\varphi_0(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(p+1)}) = 0$,
donc $\varphi_0 \wedge \alpha(X_1, ..., X_n) = 0$. □

Définition 47. On appelle opérateur de Hodge basique l'application linéaire $\bar{*} : \Omega^k(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{q-k}(M/\mathcal{F})$ définie par $\bar{*}\omega = (-1)^{p(q-k)} * (\omega \wedge \chi_{\mathcal{F}})$.

Lemme 4. Soit $\omega \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$ alors $\bar{*}\omega$ est une forme basique.

Démonstration. Soient $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ des coordonnées locales associées à une carte feuilletée.
On peut écrire ω sous la forme $\omega = \sum_i \omega_i dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$ donc

$$\begin{aligned}
\bar{*}\omega &= (-1)^{p(q-k)} \sum_i \omega_i * (dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} \wedge \chi_{\mathcal{F}}) \\
&= (-1)^{p(q-k)} \sum_i \omega_i * (dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) \\
&= \epsilon \sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}
\end{aligned}$$

où $\epsilon = 1$ ou -1. Donc $\bar{*}\omega$ est une forme basique. □

Proposition 45. (i) $\forall \omega \in \Omega^k(M/\mathcal{F}),\ *\omega = \bar{*}\omega \wedge \chi_{\mathcal{F}}$
(ii) $\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F}),\ \alpha \wedge \bar{*}\beta = (-1)^{pq} \langle \alpha, \beta \rangle_g \nu$
(iii) $\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F}),\ \alpha \wedge \bar{*}\beta = \beta \wedge \bar{*}\alpha$
(iv) $\forall \omega \in \Omega^k(M/\mathcal{F}),\ \bar{*}^2\omega = (-1)^{k(q-k)}\omega$

Démonstration. Soient $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ des coordonnées locales associées à une carte feuilletée.

(i) On écrit ω sous la forme $\omega = \sum_i \omega_i dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$,
donc $*\omega = \epsilon \sum_i \omega_i dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}$ où $\{j_1, ..., j_{q-k}\}$ est le complémentaire de $\{1, ..., k\}$ dans $\{1, ..., q\}$ et ϵ est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & n \\ i_1 & ... & i_k & 1 & ... & p & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.

Donc $*\omega = \epsilon(-1)^{p(q-k)} \sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p$.
De plus on a

$$\begin{aligned}
\bar{*}\omega &= (-1)^{p(q-k)} * (\sum_i \omega_i dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) \\
&= (-1)^{p(q-k)+pk} * (\sum_i \omega_i dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \wedge dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) \\
&= (-1)^{pq} \epsilon' \sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}
\end{aligned}$$

où ϵ' est la signature de la permutation
$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & n \\ 1 & ... & p & i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.
Or $\epsilon' = (-1)^{pk}\epsilon$.
Donc

$$\begin{aligned}
\bar{*}\omega \wedge \chi_{\mathcal{F}} &= (-1)^{p(q+k)} \epsilon \sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \\
&= (-1)^{p(q-k)} \epsilon \sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \\
&= *\omega.
\end{aligned}$$

(ii) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\alpha = dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$ et $\beta = dy_{l_1} \wedge ... \wedge dy_{l_k}$.
Donc $\bar{*}\beta = (-1)^{pq}\epsilon dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}$ où ϵ est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & n \\ 1 & ... & p & l_1 & ... & l_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.
Donc $\alpha \wedge \bar{*}\beta = (-1)^{pq}\epsilon dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}$.
S'il existe des indices tel que $dy_{i_m} = dy_{j_n}$, alors $\alpha \wedge \bar{*}\beta = 0$;
sinon $\alpha \wedge \bar{*}\beta = (-1)^{pq}\epsilon\epsilon'\nu$, où
ϵ' est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & q \\ i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.
Or $\langle \alpha, \beta \rangle_g = 1$ si et seulement si les mêmes dy_{i_m} apparaissent dans l'écriture de α et β et dans ce cas $\epsilon = \epsilon'$,
c'est-à-dire si et seulement si α et $\bar{*}\beta$ n'ont aucun dy_{i_m} en commun.
Donc on a bien $\alpha \wedge \bar{*}\beta = (-1)^{pq} \langle \alpha, \beta \rangle_g \nu$.

(iii) Soient $\alpha, \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$,

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \bar{*}\beta &= (1)^{pq} \langle \alpha, \beta \rangle_g \nu \\
&= (-1)^{pq} \langle \beta, \alpha \rangle_g \nu \\
&= \beta \wedge \bar{*}\alpha.
\end{aligned}$$

(iv) Soit $\omega \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$.
On écrit ω sous la forme $\omega = \sum_i \omega_i dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$,

on a

$$\begin{aligned}\bar{*}\omega &= (-1)^{p(q-k)} * (\sum_i \omega_i dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) \\ &= (-1)^{p(q-k)+pk} * (\sum_i \omega_i dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \wedge dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) \\ &= (-1)^{pq} \epsilon \sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}\end{aligned}$$

où $\{j_1, ..., j_{q-k}\}$ est le complémentaire de $\{1, ..., k\}$ dans $\{1, ..., q\}$ et ϵ est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & n \\ 1 & ... & p & i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}&\bar{*}^2\omega \\ &= (-1)^{p(q-(q-k))}(-1)^{pq}\epsilon * (\sum_i \omega_i dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}} \wedge dx_1 \wedge ... \wedge dx_p) \\ &= (-1)^{p(k+q)}(-1)^{p(q-k)}\epsilon * (\sum_i \omega_i dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}) \\ &= \epsilon\epsilon' \sum_i \omega_i dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}\end{aligned}$$

où ϵ' est la signature de la permutation
$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & n \\ 1 & ... & p & j_1 & ... & j_{q-k} & i_1 & ... & i_k \end{pmatrix}$.
Or $\epsilon' = (-1)^{k(q-k)}\epsilon$.
Donc $\bar{*}^2\omega = (-1)^{k(q-k)}\omega$.

□

Remarque. On peut réécrire le produit scalaire sur $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ induit par le produit scalaire L^2 sur M à l'aide de l'opérateur de Hodge basique et de la forme caractéristique $\chi_{\mathcal{F}}$:

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F}),\ \langle \alpha, \beta \rangle_M = \int_M \alpha \wedge *\beta = \int_M \alpha \wedge \bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}}.$$

Chapitre 4

Opérateurs différentiels basiques

Dans ce paragraphe nous reprenons en détails l'article d'Aziz El Kacimi-Alaoui "Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications" [EKA90], en complétant certains résultats, afin de montrer qu'un opérateur différentiel basique transversalement elliptique se comporte comme un opérateur différentiel elliptique. Nous étudions ensuite le cas particulier du Laplacien basique, de l'opérateur de de Rham basique, de l'opérateur de signature basique, de l'opérateur de Dolbeault basique, et l'opérateur de Dirac basique. De plus nous interprétons l'indice de ces opérateurs en termes d'invariants géométriques liés au feuilletage et calculons des exemples.

4.1 Opérateurs transversalement elliptiques

Commençons par rappeler la notion d'espace de Sobolev basique ([KT87]). On désigne toujours par ∇ la connexion de Levi-Civita transverse.

Définition 48. Soit $s \in \mathbb{N}$ on appelle s-norme de Sobolev sur $\Lambda\nu^*\mathcal{F}$ la norme $||\omega||^2_{B,s} = \sum_{k=0}^{s} ||\nabla^k(\omega)||^2_B$, où $\nabla^k(\omega) \in \Gamma(\hom(\nu\mathcal{F}^{\otimes k}, \nu\mathcal{F})/\mathcal{F})$ et $||.||_B$ est la norme induite par la norme L^2.

Définition 49. On appelle s-ième espace de Sobolev basique la complétion de $\Lambda\nu^*\mathcal{F}$ par rapport à la norme $||.||_{B,s}$. On notera cet espace $H^s(M/\mathcal{F})$.

Remarque. La norme $||.||_{B,s}$ ne dépend que de la métrique transverse $g_{\nu\mathcal{F}}$.

Remarque. Comme la connexion ∇ est donnée dans les directions transverses par la projection de la connexion de Levi-Civita, on obtient le dia-

gramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^s(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^s(\Lambda\nu^*\mathcal{F}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega^*(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Gamma(\Lambda\nu^*\mathcal{F}) \end{array}$$

En particulier $H^s(M/\mathcal{F})$ est isométrique à l'adhérence de $\Lambda\nu^*\mathcal{F}$ dans $H^s(\Lambda\nu^*\mathcal{F}))$.

Remarque. On identifie $\Lambda\nu^*\mathcal{F}$ avec un sous-fibré de ΛT^*M.
On note $||.||_s$ la norme de Sobolev sur $H^s(\Omega^*(M))$.
On sait que la norme de Sobolev sur $H^s(\Omega^*(M)) = H^s(\Lambda T^*M)$ induit une norme sur $H^s(\Lambda\nu^*\mathcal{F}) \subset H^s(\Omega^*(M))$.
Donc $H^s(M/\mathcal{F}) \subset H^s(\Omega^*(M))$ est topologiquement équivalent à l'adhérence de $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ dans $H^s(\Omega^*(M))$ muni de la norme $||.||_s$, c'est-à-dire que les normes $||.||_{B,s}$ et $||.||_s$ sont équivalentes.
On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^s(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & H^s(\Omega^*(M)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega^*(M/\mathcal{F}) & \longrightarrow & \Omega^*(M) \end{array}$$

Théorème 14 (lemme de Rellich basique)**.** Soient $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}^*$, alors les inclusions $H^{s+t}(M/\mathcal{F}) \hookrightarrow H^s(M/\mathcal{F})$ sont compactes et denses.

Démonstration. Voir [KT87]. □

Théorème 15 (d'inclusion de Sobolev basique)**.** Soit $s > \dfrac{n}{2} + k$, on a une inclusion continue $H^s(M/\mathcal{F}) \subset C^k(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Voir [KT87]. □

Remarque. Si E est un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel (voir annexe B) et ∇ une connexion basique sur E, on définit de la même manière les espaces de Sobolev basiques $H^s(M, E/\mathcal{F})$ (notés aussi $H^s(E/\mathcal{F})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) qui vérifient les mêmes propriétés que $H^s(M/\mathcal{F})$.

Définition 50. Soient E et E' des $\mathcal{F}$-fibrés vectoriel de rang N et N'.
On dit que $D : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F})$ est un opérateur différentiel basique d'ordre $m \in \mathbb{N}$, si D est une application linéaire et sur une carte feuilletée de coordonnées $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$, D s'écrit

$$D = \sum_{|s| \leq m} a_s(y) D^\alpha$$

où $D^\alpha = i^{|\alpha|}\dfrac{\partial^s}{\partial y_1^{s_1}...\partial y_q^{s_q}}$, $s \in \mathbb{N}^q$ et $a_s(y) \in \hom(E_{(x,y)}, E'_{(x,y)})$.

Remarque. En utilisant des trivilisations locales de E et E' on peut voir $a_s(y)$ comme un élément de $\mathcal{M}_{N,N'}(C^\infty(M/\mathcal{F}))$.

Définition 51. Le fibré conormal $\nu^*\mathcal{F}$ s'identifie avec $\{\xi \in T^*M/\xi(X) = 0\}$. Soient $z \in M$ un point de coordonnées (x, y) et $\xi \in \nu^*\mathcal{F}$, le symbole principal de D en z et ξ est l'application linéaire $\sigma(D)(z, \xi) : E_z \to E'_z$ définie par

$$\sigma(D)(x, \xi) = i^m \sum_{|s|=m} \xi_1^{s_1}...\xi_q^{s_q} a_s(y).$$

On dit que D est $\mathcal{F}$-transversalement elliptique (ou transversalement elliptique s'il n'y a pas d'ambiguïté)si pour tout $z \in M$, et pour tout
$\xi \in \nu\mathcal{F}^*,\ \sigma(D)(x, \xi)$ est un isomorphisme.
On dit que D est fortement transversalement elliptique si pour tout $z \in M$, et pour tout $\xi \in \nu^*\mathcal{F}$ non-nul, $\sigma(D)(x, \xi)$ est définie positive.

Remarque. On note $\pi : T^*M \to M$ la projection. Alors le symbole principal de D est une section basique du fibré $\hom(\pi^*(E), \pi^*(E'))$.

Exemple 8. On note d_B la restriction de la différentielle de de Rham d à $\Omega^*(M/\mathcal{F})$, $d_B : \Omega^*(M/\mathcal{F}) \to \Omega^*(M/\mathcal{F})$.
Alors d_B est un opérateur différentiel basique d'ordre 1.
De plus son symbole est donné par $\sigma(d_B)(z, \xi)(\omega) = i\xi \wedge \omega$ où $\omega \in \Lambda\nu^*\mathcal{F}_z$.

Remarque. Afin de montrer qu'un opérateur transversalement elliptique se comporte comme un opérateur elliptique usuel, nous allons procéder en trois étapes en suivant le théorème de Molino : le cas des feuilletages de Lie à feuilles denses, le cas des feuilletages transversalement parallélisables et enfin le cas des feuilletages riemanniens. Nous commençons par traiter le cas des feuilletages à feuilles denses dont se déduisent les autres cas. Dans la suite E et E' désignent des $\mathcal{F}$-fibrés hermitiens et $D : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique transversalement elliptique d'ordre $m = 2m'$ (si D est un opérateur d'odre m' on se ramène à un opérateur d'ordre $2m'$ en remplaçant D par D^*D).

Proposition 46. On suppose que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Lie à feuilles denses. Alors $\Gamma(E/\mathcal{F})$ et $\Gamma(E'/\mathcal{F})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, D est un opérateur de Fredholm et

$$\mathrm{ind}(D) = \dim\Gamma(E/\mathcal{F}) - \dim\Gamma(E'/\mathcal{F}).$$

Démonstration. Soient $z \in M, ev_z : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to E_z, \sigma \mapsto \sigma_z$ et $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$ tel que $\sigma_z = 0$.
Si γ est un chemin le long d'une feuille de $\mathcal{F}$ tel que $\gamma(t_0) = z$, alors $\dot{\gamma} \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et comme σ est basique $\nabla_{\dot{\gamma}}(\sigma) = 0$. C'est-à-dire σ est parallèle le long de γ.
Comme σ_z est nul, σ est nulle le long de γ.
Par connexité des feuilles σ est nulle le long de la feuille en z.
Or le feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage à feuilles denses, donc σ est nulle sur M. Ainsi ev_z est injective et $\dim \Gamma(E/\mathcal{F}) \leq rang(E) < \infty$.
De même $\dim \Gamma(E'/\mathcal{F}) \leq rang(E')$.
Par conséquent D est une application linéaire agissant sur des espaces vecoriels de dimension finie, et D est Fredholm et $\mathrm{ind}(D) = \dim \Gamma(E/\mathcal{F}) - \dim \Gamma(E'/\mathcal{F})$. □

Remarque. Notons que nous avons uniquement utilisé le fait que le feuilletage était à feuilles denses.

Remarque. Nous allons à présent supposer que $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage transversalement parallélisable.
On sait alors par le théorème de Molino que les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : M \to W$. On notera $k = \dim W$.
De plus on a $C^\infty(M/\mathcal{F}) \cong C^\infty(W)$.

Définition 52. Soit $u \in W$, on considére le $\mathcal{F}$-fibré hermitien E.
On note L_u la fibre de π en u (L_u est l'adhérence d'une feuille de $\mathcal{F}$ qui se projette sur u).
Le feuilletage $\mathcal{F}$ induit un feuilletage sur L_u qui est un feuilletage de Lie à feuilles denses.
Donc $\dim \Gamma(L_u, E/\mathcal{F}) < +\infty$ (voir proposition 46 page 52) et on pose $\bar{E}_u = \Gamma(L_u, E/\mathcal{F})$.

Proposition 47. Avec les notations précédentes, $\bar{E}$ est un fibré vectoriel hermitien au-dessus de W appelé fibré utile.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la dimension de $\bar{E}_u$ est indépendante de u. Soient u_1 et u_2 des points de W.
Les automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{F}$ se relèvent naturellement (puisque E est un $\mathcal{F}$-fibré) en automorphismes infinitésimaux de $\mathcal{F}_E$ (le feuilletage induit par $\mathcal{F}$ sur le fibré E), et il en est de même du groupe qu'ils engendrent.
Or ce groupe est transitif sur M et se projette sur W.
Donc il existe dans ce groupe un élément γ tel que $\gamma(L_{u_1}) = L_{u_2}$.

Si γ_E est son relevé, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E_{u_1} & \xrightarrow{\gamma_E} & E_{u_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{u_1} & \xrightarrow{\gamma} & L_{u_2} \end{array}$$

L'automorphisme γ_E induit alors un isomorphisme entre $\bar{E}_{u_1}$ et $\bar{E}_{u_2}$.
Par définition $\bar{E}$ est la réunion pour chaque $u \in W$, d'un espace vectoriel de dimension N_0 associé à ce point.
On définit sur $\bar{E}$ une structure de fibré vectoriel au-dessus de W à l'aide des trivialisations locales suivantes :
soient $u_0 \in W, z_0 \in \pi^{-1}(u_0)$ et N_0 sections basiques $\alpha_1, ..., \alpha_{N_0}$ de E linéairement indépendantes en z_0.
L'ouvert de M où ces sections restent linéairement indépendantes est saturé pour la fibration π, donc se projette sur un ouvert U de W dans lequel $\alpha_1, ..., \alpha_{N_0}$ définissent une trivialisation locale de $\bar{E}$.
Il est immédiat de vérifier que ces trivialisations locales sont différentiablement compatibles (le passage d'une telle trivialisation à une autre se faisant par une matrice de fonctions basiques, regardées comme fonctions différentiables sur W).
On note h la métrique hermitienne sur E.
Comme pour tout $u \in W$, l'espace vectoriel $\bar{E}_u$ est muni d'une métrique $\bar{h}_u$ provenant de la métrique h.
Le fibré $\bar{E}$ est alors canoniquement munie d'une métrique hermitienne $\bar{h}$. □

Proposition 48. Soit $\psi : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(\bar{E}),\ \sigma \mapsto \psi(\sigma)$
où $\psi(\sigma)_u = \sigma|_{L_u} \in \bar{E}_u$.
L'application ψ est un isomorphisme.
De plus $\forall s \in \Gamma(\bar{E}),\ \psi^{-1}(s)_z = s_{\pi(z)}(z) \in E_z,\ \forall z \in M$.

Démonstration. Par définition de ψ^{-1}, il est trivial que si $s \in \Gamma(\bar{E})$ alors $\psi^{-1}(s)$ est basique.
Un simple calcul montre que ψ^{-1} est bien l'inverse de ψ. □

Définition 53. La métrique quasi-fibrée sur M induit une métrique riemannienne sur W. On notera $d\mu$ la mesure sur W induite par cette métrique.
Comme la métrique h sur E est invariante le long des feuilles,
si $\alpha, \beta \in \Gamma(E/\mathcal{F})$, la fonction $z \in M \mapsto h_z(\alpha_z, \beta_z) \in \mathbb{C}$ est basique et induit donc une fonction sur W notée $\theta(\alpha, \beta)$.
On définit alors un produit scalaire sur $\Gamma(E/\mathcal{F})$ par

$$\langle \alpha, \beta \rangle_E = \int_W \theta(\alpha, \beta)(w) d\mu(w).$$

Proposition 49. On munit $\Gamma(\bar{E})$ du produit scalaire induit par la métrique $\bar{h}$, alors l'application $\psi : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(\bar{E})$ est une isométrie.

Démonstration. Par définition $\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle_{\bar{E}} = \int_W \bar{h}(\psi(\alpha), \psi(\beta)) d\mu$.
et $\bar{h}(\psi(\alpha), \psi(\beta)) = h(\alpha, \beta)$.
Donc $\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle_{\bar{E}} = \int_W h(\alpha, \beta) d\mu = \langle \alpha, \beta \rangle_E$. □

Notation 9. On a $TM = T\bar{\mathcal{F}} \oplus \nu\bar{\mathcal{F}}$ et $TM = T\mathcal{F} \oplus (\nu\mathcal{F} \cap T\bar{\mathcal{F}}) \oplus \nu\bar{\mathcal{F}}$.
On note (x, p, t) des coordonnées adaptées à cette décomposition.
La coordonnée t définit des coordonnées locales sur W.
On notera aussi $y = (p, t)$ de manière que (x, y) sont des coordonnées locales adaptées au feuilletage $\mathcal{F}$.
On écrit D sous la forme $D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) \frac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}}$
où $a_\alpha(y) \in \hom(E_{(x,y)}, E_{(x,y)})$ (localement sur un ouvert U de M, $a_\alpha(y)$ s'identifie à une matrice de $\mathcal{M}_N(C^\infty(U/\mathcal{F}))$).

Lemme 5. (i) Le fibré vectoriel $\pi^*(\bar{E})$ s'identifie à un sous-fibré de E.
(ii) Le fibré vectoriel $\pi^*(\bar{E})$ est stable par $a_\alpha(y)$.

Démonstration. (i) Soient $ev_m : \bar{E}_{\pi(m)} \to E_m,\ \sigma \mapsto \sigma(m)$,
et $ev : \pi^*(\bar{E}) \to E,\ (m, \sigma) \mapsto \sigma(m)$.
Comme l'application ev_m est linéaire pour tout m de M, $ev = (ev_m)_{m \in M}$ est un morphisme de fibrés vectoriels.
Soit $\sigma \in \Gamma(L_t, E/\mathcal{F})$, si $\sigma_{(x,p,t)} = 0$ alors comme σ est basique on a que $\sigma = 0$ (voir démonstration de la proposition 46 page 53).
Donc $ev_{(x,p,t)}$ est injective et $\pi^*(\bar{E})$ s'identifie à un sous-fibré de E.
(ii) Soit $\sigma \in \pi^*(\bar{E})_{(x,p,t)} = \Gamma(L_t, E/\mathcal{F})$.
Montrons que $a_\alpha(y)(\sigma) \in \pi^*(\bar{E})_{(x,p,t)}$.
Localement $a_\alpha(y)$ s'identifie à une matrice de $\mathcal{M}_N(C^\infty(U/\mathcal{F}))$, or une fonction basique est constante le long des feuilles de $\mathcal{F}$, donc constante le long des feuilles de $\bar{\mathcal{F}}$.
Par conséquent les coefficients de la matrice a_α sont indépendants de la coordonnée p, et $a_\alpha(p, t)(\sigma) \in \pi^*(\bar{E})_{(x,p,t)}$. Ainsi $\pi^*(\bar{E})$ est stable par $a_\alpha(p, t)$.

□

Remarque. Comme les coefficients de la matrice $a_\alpha(p, t)$ sont indépendants de la coordonnée p, on notera $\tilde{a}_\alpha(t)$ l'application linéaire induite par $a_\alpha(p, t)$ sur $\pi^*(\bar{E})$.
De plus si $s \in \Gamma(\bar{E})$, on a $\psi \circ a_\alpha(p, t) \circ \psi^{-1}(s) = \tilde{a}_\alpha(t)(s)$.

Proposition 50. Sous les mêmes hypothèses, $\bar{D} = \psi \circ D \circ \psi^{-1}$ est un opérateur différentiel d'ordre m et $\sigma(\bar{D})(t, \eta) = \sum_{|\alpha|=m} \tilde{a}_\alpha(t) \eta_1^{\alpha_1} ... \eta_k^{\alpha_k}$

où $\eta \in T_t^*W$, $k = \dim W$ et on identifie T^*W à un sous-espace de $\nu^*\mathcal{F}$.
En particulier si D est $\mathcal{F}$-transversalement elliptique, alors $\bar{D}$ est elliptique.

Démonstration. On a $T^*W \cong (\nu\bar{\mathcal{F}})^*$,
donc $T^*W \cong \{\xi \in T^*M / \xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\bar{\mathcal{F}})\}$.
Or $\nu^*\mathcal{F} \cong \{\xi \in T^*M / \xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F})\}$,
donc T^*W s'identifie à un sous-fibré de $\nu^*\mathcal{F}$.
Soit U une carte locale de W et r le rang du fibré $\bar{E}$.
En utilisant des trivialisations locales on a que $\Gamma(\bar{E}_{|U}) \cong C^\infty(W)^r$ c'est-à-dire $\Gamma(\bar{E}_{|U})$ est un module libre de rang r sur $C^\infty(W)$.
Soient $s_1, ..., s_r$ des sections de $\Gamma(\bar{E}_{|U})$ qui engendrent $\Gamma(\bar{E}_{|U})$.
On note $\sigma_i = \psi^{-1}(s_i)$. Comme $\psi : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(\bar{E})$ est un isomorphisme, $\Gamma(E/\mathcal{F})$ est un module libre de rang r sur $C^\infty(M/\mathcal{F})$ engendré par $\sigma_1, ..., \sigma_r$.
Soient $g_i \in C^\infty(W)$, si $s = \sum_{i=1}^{r} g_i(t)s_i$ alors $\psi^{-1}_{(s)} = \sum_{i=1}^{r} g_i(\pi(p,t))\sigma_i$, et si $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f_i\sigma_i$ avec f_i basique, alors $\psi(\sigma) = \sum_{i=1}^{r} \tilde{f}_i(t)s_i$ où $\tilde{f}_i$ est la fonction sur W induite par f_i (comme f_i est une fonction basique, elle est constante le long des feuilles de $\mathcal{F}$ et donc par continuité constante sur les feuilles de $\bar{\mathcal{F}}$).
Soit $s = \sum_{i=1}^{r} g_i(t)s_i \in \Gamma(\bar{E}_{|U})$, comme $\psi^{-1}(s)$ est basique on peut calculer $D(\psi^{-1}(s))$ sur un ouvert adapté aux feuilletages $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$.

On note (x, y) avec $y = (p, t)$ les coordonnées locales sur cet ouvert, on a

$$\begin{aligned}
\bar{D}(s) &= \psi \circ D \circ \psi^{-1}(s) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \psi \circ D \circ \psi^{-1}(g_i(t)s_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \psi \circ D(g_i(\pi(p,t))\psi^{-1}(s_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\leq m} \psi \left(a_\alpha(p,t)\psi^{-1}(s_i) \frac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}} g_i(\pi(p,t)) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\leq m} \psi \left(a_\alpha(p,t)\psi^{-1}(s_i) \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1^{\alpha_1} ... \partial t_k^{\alpha_k}} g_i(\pi(p,t)) \right) \\
&\quad \text{(car } g_i(\pi(p,t)) \text{ est indépendante de } p\text{)} \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{a}_\alpha(t)(s_i) \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1^{\alpha_1} ... \partial t_k^{\alpha_k}} g_i(t) \\
&= \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{a}_\alpha(t) \frac{\partial^\alpha}{\partial t_1^{\alpha_1} ... \partial t_k^{\alpha_k}}(s).
\end{aligned}$$

Donc $\tilde{D}$ est un opérateur différentiel d'ordre m et
$\sigma(\bar{D})(t, \eta) = \sum_{|\alpha|\leq m} \tilde{a}_\alpha(t)\eta_1^{\alpha_1} ... \eta_k^{\alpha_k}, \ \forall \eta \in T_t^* W.$
Comme T^*W s'identifie à un sous-espace de $\nu^*\mathcal{F}$ et que $\tilde{a}_\alpha(t)$ est la restriction de $a_\alpha(p, t)$, on déduit que $\bar{D}$ est elliptique. □

Théorème 16. Si $s \in \mathbb{N}$, l'opérateur D se prolonge en un opérateur de Fredholm $D : H^s(E/\mathcal{F}) \to H^{s-m}(E'/\mathcal{F})$ dont l'indice est indépendant de s. On notera $\mathrm{ind}_B(D)$ l'indice de Fredholm de D et on a $\mathrm{ind}_B(D) = \mathrm{ind}(\bar{D})$.

Démonstration. L'opérateur $\bar{D}$ est elliptique et la variété W est compacte, donc $\bar{D} : H^s(\bar{E}) \to H^{s-m}(\bar{E}')$.
Or $\Gamma(E/\mathcal{F})$ et $\Gamma(\bar{E})$ sont isométriquement isomorphes, donc $H^s(E/\mathcal{F})$ et $H^s(\bar{E})$ sont isomorphes.
Comme D et $\bar{D}$ sont conjugués on obtient le résultat voulu. □

Théorème 17. Si de plus l'opérateur D est auto-adjoint,

(i) les espaces propres de D sont de dimension finie et formés de sections C^∞,

(ii) L'ensemble des valeurs propres de D est une suite qui tend en valeur absolue vers $+\infty$ (autrement dit D est un opérateur à résolvante compacte),

(iii) $L^2(M, E/\mathcal{F})$ est la somme hilbertienne des espaces propres de D,

(iv) si $(\lambda_k)_k$ est la suite des valeurs propres de D, alors $\lambda_k \sim ck^{\frac{m}{\dim W}}$ où c est une constante.

Démonstration. Les opérateurs D et $\bar{D}$ sont conjugués au travers de l'application $\psi : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(\bar{E})$ qui est un isomorphisme isométrique, donc D^* et $\bar{D}^*$ sont conjugués. Les propriétés valent pour les opérateurs elliptiques, or D est conjugué à $\bar{D}$ et l'opérateur $\bar{D}$ est elliptique,
donc elles valent aussi pour D. □

Théorème 18. Si de plus l'opérateur D est auto-adjoint, on a une décomposition L^2-orthogonale

$$\Gamma(E/\mathcal{F}) = \ker D \oplus \mathrm{Im} D$$

où $\ker D$ est de dimension finie.

Démonstration. Découle des résultats précédents. □

Théorème 19. On note d_λ la dimension de l'espace propre de D associé à λ. Comme dans le cas général (étudié dans le premier chapitre), on peut définir l'opérateur D^{-s}. Si $m > 0$ et $s > \dfrac{\dim W}{m}$, alors D^{-s} est traçable et $trD^{-s} = \displaystyle\sum_{\lambda>0} \frac{d_\lambda}{\lambda^s}$.

Démonstration. Découle des résultats précédents. □

On revient à présent au cas où $\mathcal{F}$ est riemannien et transversalement orientable.
On note $M^\sharp$ le fibré des repères orthonormés transverses et $\mathcal{F}^\sharp$ le feuilletage relevé.
Le feuilletage $(M^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ est un feuilletage transversalement parallélisable, on notera $W^\sharp$ la variété basique de $(M^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ et on suppose que $\dim W^\sharp > 0$.
Le groupe $H = SO(q)$ agit sur $(M^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ et préserve les feuilles, donc H induit une action sur $W^\sharp$.

Proposition 51. On note $E^\sharp$ le relevé de E sur $M^\sharp$.
Le fibré $E^\sharp$ est un $\mathcal{F}^\sharp$-fibré hermitien H-équivariant.
On note $\bar{E}^\sharp$ le fibré utile associé au fibré $E^\sharp$, alors l'action de H sur $E^\sharp$ induit de manière naturelle une action de H sur $\bar{E}^\sharp$.

Démonstration. Soit $\rho_E : E^\sharp \to E$ la projection induite par $\rho : M^\sharp \to M$.
L'image réciproque par ρ_E de la connexion ∇ sur E est une connexion $\nabla^\sharp$ sur $E^\sharp$ qui en fait un fibré feuilleté.

On a alors un diagramme commutatif où toutes les applications sont feuilletées :

$$\begin{array}{ccc} E^\sharp & \xrightarrow{\rho_E} & E \\ {\scriptstyle q^\sharp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ M^\sharp & \xrightarrow{\rho} & M \end{array}$$

La connexion $\nabla^\sharp$ est donc basique et compatible avec la métrique hermitienne $h^\sharp$ sur $E^\sharp$ relevée de h.
D'autre part l'action de H sur $M^\sharp$ se relève à l'aide de cette connexion en une action sur $E^\sharp$ qui préserve à la fois le feuilletage $\mathcal{F}_{E^\sharp}$ et la métrique hermitienne $h^\sharp$ □

Remarque. (i) On a les isomorphismes suivants :

$$C^\infty(M/\mathcal{F}) \cong C^\infty(M^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H \cong C^\infty(W^\sharp)^H.$$

(ii) Comme $\Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ est isomorphe à $\Gamma(\bar{E}^\sharp)$, on a

$$\Gamma(E/\mathcal{F}) \cong \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H \cong \Gamma(\bar{E}^\sharp)^H.$$

(iii) On définit le produit scalaire sur $\Gamma(E/\mathcal{F})$ par restriction à $\Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H$ de celui défini comme précédemment sur $\Gamma(E^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ à l'aide de la métrique $h^\sharp$.

Définition 54. L'opérateur D se relève en un opérateur différentiel basique H-invariant $D^\sharp : \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \to \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H & \xrightarrow{D^\sharp} & \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \Gamma(E/\mathcal{F}) & \xrightarrow{D} & \Gamma(E'/\mathcal{F}) \end{array}$$

Proposition 52. En utilisant les champs fondamentaux de H on définit un opérateur différentiel d'ordre 2 H-invariant Δ_H qui s'annule sur $\Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H$ et tel que $D' = D^\sharp + (\Delta_H)^{m'}$ (où $2m'$ est l'ordre de D) est transversalement elliptique.

Démonstration. Voir [EKA90]. □

Proposition 53. On note $\bar{D}'$ l'opérateur induit par D' sur $W^\sharp$.
Alors $\bar{D}'$ est un opérateur différentiel elliptique d'ordre m.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 50 page 56. □

Théorème 20. Si $s \in \mathbb{N}$, l'opérateur D se prolonge en un opérateur de Fredholm $D : H^s(E/\mathcal{F}) \to H^{s-m}(E'/\mathcal{F})$ dont l'indice est indépendant de s. On notera $\mathrm{ind}_B(D)$ l'indice de Fredholm de D, qu'on appellera l'indice basique de D. On a alors $\mathrm{ind}_B(D) = \mathrm{ind}(\bar{D}'^H)$ où $\bar{D}'^H$ désigne la restriction à $\Gamma(\bar{E}^\sharp)^H$.

Démonstration. Comme $\mathcal{F}^\sharp$ est transversalement parallélisable,
on sait d'après le théorème 16 (page 57) que $D^\sharp$ se prolonge en un opérateur sur $H^s(M^\sharp, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$. Or l'opérateur D est conjugué à $D^{\sharp,H} = D^\sharp_{|\Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H}$et donc à $\bar{D}'^H$. L'action de H sur $\Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ se prolonge en une action de H sur $H^s(M^\sharp, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$. Donc en restreignant $D^{\sharp,H}$ aux sections invariantes par H de $H^s(M^\sharp, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ on obtient un prolongement de D sur $H^s(M, E/\mathcal{F})$.
Le deuxième point découle immédiatement du fait que D est conjugué à $\bar{D}'^H$. □

Théorème 21. Si de plus D est auto-adjoint on a :

(i) Les espaces propres de D sont de dimension finie et formés de sections C^∞.

(ii) L'ensemble des valeurs propres de D est une suite de valeurs propres qui tend en valeur absolue vers $+\infty$ (autrement dit D est un opérateur à résolvante compacte).

(iii) $L^2(E, M/\mathcal{F})$ est la somme hilbertienne des espaces propres de D.

(iv) Si $(\lambda_k)_k$ est la suite des valeurs propres de D, il existe une constante $c > 0$ telle que $\lambda_k \geq ck^{\frac{m}{\dim W^\sharp}}$.

Démonstration. L'application $\psi : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(\bar{E})$ est un isomorphisme isométrique qui commute avec l'action de H, donc $(D^{\sharp,H})^*$ et $(\bar{D}'^H)^*$ sont conjugués. Les propriétés sont vérifiées pour les opérateurs elliptiques,
or D est conjugué à $\bar{D}'^H$ qui est la restriction d'un opérateur elliptique,
donc le résultat est vrai pour D. □

Théorème 22. Si de plus D est auto-adjoint, on a une décompositon L^2-orthogonale :

$$\Gamma(E/\mathcal{F}) = \ker D \oplus \mathrm{Im} D$$

où $\ker D$ est de dimension finie.

Démonstration. La décomposition est vraie pour l'opérateur $\bar{D}'$ induit par D' sur $W^\sharp$. Comme D est conjugué à $\bar{D}'^H$ il suffit de restreindre la décomposition induite par $\bar{D}'$ aux sections invariantes pour obtenir le résultat voulu. □

Théorème 23. On note d_λ la dimension de l'espace propre de D associé à λ. Si $m > 0$ et $s > \dfrac{\dim W^\sharp}{m}$, alors D^{-s} est traçable et $trD^{-s} = \displaystyle\sum_{\lambda>0} \frac{d_\lambda}{\lambda^s}$.

Démonstration. Découle des résultats précédents. □

Remarque. Etudions à présent le cas où la variété basique W est de dimension nulle.

Proposition 54. Le feuilletage $(M^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ est un feuilletage à feuilles denses si et seulement si $\dim W^\sharp = 0$.

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage à feuilles denses,
alors tous les points de M appartiennent à l'adhérence de la même feuille, et donc $\dim W^\sharp = 0$.
Si $\dim W^\sharp = 0$ alors tous les points de M appartiennent à l'adhérence de la même feuille, donc $\mathcal{F}^\sharp$ est un feuilletage à feuilles denses. □

Proposition 55. Si $\dim W^\sharp = 0$, alors

$$\mathrm{ind}(D) = \dim \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H - \dim \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H.$$

Démonstration. On a $\mathrm{ind}(D) = \mathrm{ind}(D^{\sharp,H})$, car ces deux opérateurs sont conjugués. Comme le feuilletage $(M^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ est un feuilletage à feuilles denses, on sait que $\mathrm{ind}(D^\sharp) = \dim \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) - \dim \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ (voir proposition 46 page 52).
Donc $\mathrm{ind}(D) = \mathrm{ind}(D^{\sharp,H}) = \dim \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H - \dim \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H$. □

Remarque. Dans le cas où le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas transversalement orientable les résultats précédents restent valable, il suffit de remplacer partout le groupe $H = SO(q)$ par $O(q)$.

Problème ouvert. Calculer l'indice basique en fonction d'invariants transverses au feuilletage.

4.2 Le Laplacien basique

Etudions à présent le cas du Laplacien basique (voir [EKA90, PR96, KT87]).

Définition 55. On note P la projection orthogonale de $L^2(\Omega^*(M))$ sur $L^2(\Omega^*(M/\mathcal{F}))$.

Proposition 56. $P(\Omega^*(M)) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Voir [PR96]. □

Définition 56. On note $d_B : \Omega^*(M/\mathcal{F}) \to \Omega^*(M/\mathcal{F})$ la restriction de la différentielle de de Rham aux formes basiques et δ_B son adjoint formel.
On appelle Laplacien basique l'opérateur

$$\Delta_B = d_B\delta_B + \delta_B d_B : \Omega^*(M/\mathcal{F}) \to \Omega^*(M/\mathcal{F}).$$

Remarque. On a $\delta_B = P \circ \delta$, où δ désigne l'adjoint formel de la différentiel de de Rham. Comme $P \circ d \circ P = d \circ P$, on a $P \circ \delta \circ P = P \circ \delta$.
Donc $\delta_B \circ P = P \circ \delta = \delta_B$.

Proposition 57. Le Laplacien basique Δ_B est un opérateur différentiel basique d'ordre 2 fortement transversalement elliptique.

Démonstration. Comme d_B est un opérateur différentiel basique d'ordre 1, il en est de même de son adjoint formel δ_B.
Donc Δ_B est un opérateur différentiel basique d'ordre 2.
Le calcul du symbole principal est similaire au cas général,
donc $\sigma(\Delta_B)(z,\xi) = ||\xi||^2$. □

Remarque. Nous allons calculer explicitement l'opérateur δ_B et en déduire une expression explicite pour le Laplacien basique Δ_B (voir [PR96]).

Proposition 58. $\forall \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F}), \delta_B(\beta) = (-1)^{q(k+1)-1} \bar{*}(d - \kappa\wedge)\bar{*}\beta$, où q est la codimension du feuilletage et κ la forme de courbure principale.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
&\langle d\gamma, \beta \rangle_M \\
=&\int_M d\gamma \wedge *\beta \\
=&\int_M d\gamma \wedge \bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}} \\
=&(-1)^k \int_M \gamma \wedge d(\bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}}) \\
=&(-1)^k \int_M \gamma \wedge (d\bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{q-k} \bar{*}\beta \wedge d\chi_{\mathcal{F}}) \\
=&(-1)^k \int_M \gamma \wedge (d\bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{q-k} \bar{*}\beta \wedge (-\kappa \wedge \chi_{\mathcal{F}} + \varphi_0)) \\
=&(-1)^k \int_M \gamma \wedge (d\bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{q-k+1} \bar{*}\beta \wedge \kappa \wedge \chi_{\mathcal{F}}) + (-1)^{q-k} \gamma \wedge \bar{*}\beta \wedge \varphi_0 \\
=&(-1)^k \int_M \gamma \wedge (d\bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}} - \kappa \wedge \bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}}) + (-1)^{q-k} \gamma \wedge \bar{*}\beta \wedge \varphi_0
\end{aligned}
$$

or $\gamma \wedge \bar{*}\beta$ est basique, donc $\gamma \wedge \bar{*}\beta \wedge \varphi_0 = 0$ (voir proposition 44 page 46). Donc

$$\begin{aligned}
&\langle d\gamma, \beta\rangle_M \\
=&(-1)^k \int_M \gamma \wedge ((d\bar{*}\beta - \kappa \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi_{\mathcal{F}}) \\
=&(-1)^{k+k(k-1)(n-k+1)} \int_M \gamma \wedge *^2((d\bar{*}\beta - \kappa \wedge \bar{*}\beta) \wedge \chi_{\mathcal{F}}) \\
=&(-1)^{k+k(k-1)(n-k+1)+p(n-p-(n-p-k+1))} \int_M \gamma \wedge *(\bar{*}(d\bar{*}\beta) - \bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta)) \\
=&(-1)^{(n-p)(k+1)+1} \int_M \gamma \wedge *(\bar{*}(d\bar{*}\beta) - \bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta)) \\
=&(-1)^{(n-p)(k+1)+1} \int_M < \gamma, (\bar{*}(d\bar{*}\beta) - \bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta) >_g \text{dvol}
\end{aligned}$$

puisque $q = n - p$. □

Corollaire 5. $\forall \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$, $\delta_B(\beta) = ((-1)^{q(k+1)-1}\bar{*}d\bar{*} + \kappa_\lrcorner)(\beta)$ où $\lrcorner$ désigne le produit intérieur.

Démonstration. Soient $\beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$ et $\alpha \in \Omega^{k-1}(M/\mathcal{F})$. Par la proposition précédente il suffit de montrer que $(-1)^{q(k+1)}\bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta) = \kappa_\lrcorner(\beta)$.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \kappa_\lrcorner(\beta)\rangle_M &= \langle \kappa \wedge \alpha, \beta\rangle_M \\
&= (-1)^{k-1} \int_M \kappa \wedge \alpha \wedge *\beta \text{ dvol} \\
&= (-1)^{k-1} \int_M \alpha \wedge \kappa \wedge *\beta \text{ dvol} \\
&= (-1)^{k-1+(q-k+1)(q-(q-k+1))} \int_M \alpha \wedge \kappa \wedge \bar{*}\beta \wedge \chi_{\mathcal{F}} \text{ dvol} \\
&= (-1)^{(k-1)(q-k+2)} \int_M \alpha \wedge \bar{*}(\bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta)) \wedge \chi_{\mathcal{F}} \text{ dvol} \\
&= (-1)^{(k-1)(q-k)} \int_M \alpha \wedge *(\bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta))\text{dvol} \\
&= \left\langle \alpha, (-1)^{(k-1)(q-k)}\bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta) \right\rangle_M .
\end{aligned}$$

Or $(k-1)(q-k) \equiv q(k+1) \bmod 2$
donc $(-1)^{q(k+1)}\bar{*}(\kappa \wedge \bar{*}\beta) = \kappa_\lrcorner(\beta)$. □

Corollaire 6. $P \circ \delta = \delta \circ P + (-1)^p(\varphi_0)_\lrcorner \circ (\chi_{\mathcal{F}} \wedge .) \circ P$

Démonstration. Soit $\beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$ et $\alpha \in \Omega^{k-1}(M/\mathcal{F})$.
$\langle \alpha, \delta P\beta\rangle_M = \langle d\alpha, P\beta\rangle_M$

De la même manière que pour la démonstration précédente, comme $P\beta$ est basique on a

$$\langle d\alpha, P\beta\rangle_M = (-1)^k \int_M \alpha\wedge(d\bar{*}P\beta\wedge\chi_{\mathcal{F}}-\kappa\wedge\bar{*}P\beta\wedge\chi_{\mathcal{F}})+(-1)^{q-k}\alpha\wedge\bar{*}P\beta\wedge\varphi_0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha, \delta P\beta\rangle_M \\
&= (-1)^k \int_M \alpha\wedge(d\bar{*}P\beta\wedge\chi_{\mathcal{F}} - \kappa\wedge\bar{*}P\beta\wedge\chi_{\mathcal{F}}) + (-1)^{(q-k)p}\alpha\wedge\varphi_0\wedge\bar{*}P\beta \\
&= \int_M \alpha\wedge *\delta_B P\beta + (-1)^k\alpha\wedge\varphi_0\wedge *(P\beta\wedge\chi_{\mathcal{F}}) \\
&= \langle\alpha, \delta_B P\beta\rangle_M + (-1)^{k(p+1)}\int_M \alpha\wedge\varphi_0\wedge *(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta) \\
&= \langle\alpha, \delta_B P\beta\rangle_M + (-1)^{k(p+1)+(k-1)(n-k+1)}\int_M \alpha\wedge *^2(\varphi_0\wedge *(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta)) \\
&= \langle\alpha, \delta_B P\beta\rangle_M + (-1)^{k(p+1)+(k-1)(p+q-k+1)}\int_M \alpha\wedge *^2(\varphi_0\wedge *(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta)) \\
&= \langle\alpha, \delta_B P\beta\rangle_M + (-1)^{k(q-k)-(p+q-k+1)}\int_M \alpha\wedge *^2(\varphi_0\wedge *(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta)).
\end{aligned}$$

Or $\forall\gamma\in\Omega^r(M),\ \forall\omega\in\Omega^s(M),\ \gamma\lrcorner(\omega) = (-1)^{(s-r)(n-s)} * (\gamma\wedge *\omega)$, donc

$$\begin{aligned}
&(-1)^{k(q-k)-(p+q-k+1)}\int_M \alpha\wedge *^2(\varphi_0\wedge *(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta)) \\
&= (-1)^{k(q-k)-(p+q-k+1)+(p+k-(p+1))(n-(p+k))}\int_M \alpha\wedge *((\varphi_0)\lrcorner(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta)).
\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
&k(q-k)-(p+q-k+1)+(p+k-(p+1))(n-(p+k)) \\
&\equiv k(q-k)-n+k-1+(k-1)(q-k) \bmod 2 \\
&\equiv (q-k)(k+k-1)-n+k-1 \bmod 2 \\
&\equiv k-q-n+k-1 \bmod 2 \\
&\equiv p-1 \bmod 2
\end{aligned}$$

donc $\langle\alpha, \delta P\beta\rangle_M = \langle\alpha, \delta_B P\beta\rangle_M - (-1)^p\langle\alpha, (\varphi_0)\lrcorner(\chi_{\mathcal{F}}\wedge P\beta)\rangle_M$.
Donc $\delta P = \delta_B P - (-1)^p(\varphi_0)\lrcorner(\chi_{\mathcal{F}}\wedge .)\circ P$,
or $\delta_B\circ P = P\circ\delta = \delta_B$.
Donc $P\circ\delta = \delta\circ P + (-1)^p(\varphi_0)\lrcorner\circ(\chi_{\mathcal{F}}\wedge .)\circ P$. □

Remarque. On note $\epsilon = (-1)^p(\varphi_0)\lrcorner\circ(\chi_{\mathcal{F}}\wedge.)$. Donc on a $P\circ\delta = \delta\circ P+\epsilon\circ P$. L'opérateur ϵ est un opérateur différentiel d'ordre 0 qui vérifie $\epsilon(\Omega^*(M/\mathcal{F})) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})^\perp$. En effet :
$P \circ \delta = \delta \circ P + \epsilon \circ P$
donc $P \circ \delta = P \circ \delta \circ P + P \circ \epsilon \circ P$
or $P \circ d \circ P = d \circ P$
donc $P \circ \delta \circ P = \delta \circ P$
donc $P \circ \epsilon \circ P = 0$.

Corollaire 7. On a $d \circ P = P \circ d + (-1)^p P \circ (\chi_{\mathcal{F}}\lrcorner) \circ (\varphi_0 \wedge .)$.

Démonstration. Il suffit de prendre l'adjoint dans le corollaire précédent. □

Théorème 24. (i) Sur $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ on a

$$\Delta_B = \Delta + \epsilon \circ d + d \circ \epsilon.$$

(ii) On a la relation suivante entre le Laplacien basique et le Laplacien usuel :

$$\Delta_B \circ P = \tilde{\Delta} \circ P = P \circ \bar{\Delta} \circ P$$

où $\tilde{\Delta} = \Delta + \epsilon \circ d + d \circ \epsilon$ et $\bar{\Delta} = \Delta + \epsilon^*\epsilon$.

Démonstration. (i) Soit $\beta \in \Omega^*_B(M)$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta_B(\beta) &= (P\delta d + dP\delta)(\beta) \\
&= (P\delta Pd + dP\delta P)(\beta) \\
&= ((\delta P + \epsilon P)d + d(\delta P + \epsilon P))(\beta) \\
&= ((\delta + \epsilon)d + d(\delta + \epsilon))(\beta) \\
&= (\Delta + \epsilon \circ d + d \circ \epsilon)(\beta).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta} \circ P &= P\tilde{\Delta}P \\
&= P(\Delta + \epsilon d + d\epsilon) \\
&= P\Delta P + P\epsilon dP + Pd\epsilon P \\
&= P\Delta P + P\epsilon PdP + (dP - P\epsilon^*)\epsilon P.
\end{aligned}$$

Or $\epsilon(\Omega^*(M/\mathcal{F})) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})^\perp$,
donc $P\epsilon^*\epsilon P = 0$ et $\tilde{\Delta} \circ P = P\Delta P - P\epsilon^*\epsilon P = P\bar{\Delta}P$.

□

Théorème 25. Si $s \in \mathbb{N}$, le Laplacien basique Δ_B se prolonge en un opérateur de Fredholm $\Delta_B : H^s(M/\mathcal{F}) \to H^{s-2}(M/\mathcal{F})$ dont l'indice est indépendant de s.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 16 page 57 sur les opérateurs transversalement elliptiques. □

Théorème 26. (i) Les espaces propres de Δ_B sont de dimension finie et formés de sections C^∞.
(ii) L'ensemble des valeurs propres de Δ_B est une suite tendant vers $+\infty$ (autrement dit Δ_B est un opérteur à résolvante compacte).
(iii) $L^2(\Omega^*(M/\mathcal{F}))$ est la somme hilbertienne des espaces propres de Δ_B.
(iv) Si $(\lambda_k)_k$ est la suite des valeurs propres de Δ_B, on a $\lambda_k \geq ck^{\frac{2}{\dim W^\sharp}}$ où c est une constante.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 17 page 57 sur les opérateurs transversalement elliptiques. □

Remarque. L'asymptotique du spectre du Laplacien basique permet d'étudier le noyau de la chaleur basique (voir [Ton97, NRT90, PR96, Ric10, Ric98]).

Définition 57. On note $\mathcal{H}^*(M/\mathcal{F}) = \ker \Delta_B$.
Un élément de $\mathcal{H}^*(M/\mathcal{F})$ est appelé une forme basique harmonique.

Théorème 27 (Décomposition de de Rham-Hodge basique)**.** On a une décomposition orthogonale

$$\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \mathcal{H}^*(M/\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}\Delta_B = \mathcal{H}^*(M/\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Im}d_B \oplus \mathrm{Im}\delta_B,$$

où $\mathcal{H}(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 18 page 58 sur les opérateurs transversalement elliptiques. □

Corollaire 8. La cohomologie basique $H^*(M/\mathcal{F})$ est de dimension finie.

Démonstration. Comme dans le cas classique (voir corollaire 1) la décomposition de de Rham-Hodge basique implique $H^*(M/\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^*(M/\mathcal{F})$.
Donc $\dim H^*(M/\mathcal{F}) < +\infty$. □

Nous allons à présent étudier la dualité de Poincaré pour la cohomologie basique. Pour cela nous allons rappeler quelques résultats importants en renvoyant le lecteur aux différentes références : [EKASH85, Ser85, EKAH86, EKA90, Mas92, AL92, Dom98].

Proposition 59. La cohomologie basique en dimension maximale $H^q(M/\mathcal{F})$ est soit isomorphe à $\mathbb{R}$, soit isomorphe à 0.

Démonstration. Voir [EKASH85]. □

Définition 58. On dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable si $H^q(M/\mathcal{F}) \neq 0$.

Théorème 28. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable si et seulement si $\mathcal{F}$ est minimalisable, c'est-à-dire il existe une métrique quasi-fibrée sur M tel que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés minimales.

Démonstration. Voir [Mas92, AL92]. □

Théorème 29. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable si et seulement s'il existe un métrique quasi-fibré sur M tel que la forme de courbure principale κ est nulle.

Démonstration. Voir [Dom98]. □

Remarque. En particulier pour une telle métrique la forme volume le long des feuilles $\chi_{\mathcal{F}}$ est $\mathcal{F}$-fermée, c'est-à-dire $d\chi_{\mathcal{F}}(V_1, ..., V_{p+1}) = 0$ si $V_i \in \Gamma(T\mathcal{F})$.

Proposition 60. On suppose que $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable.
Alors l'opérateur de Hodge basique $\bar{*} : \Omega^k(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{q-k}(M/\mathcal{F})$ vérifie $\bar{*}\Delta_B = \Delta_B\bar{*}$ et induit un isomorphisme $\bar{*} : \mathcal{H}^k(M/\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^{q-k}(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Comme $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable, la courbure principale du feuilletage κ est nulle (voir [Dom98]).
En appliquant le corollaire 5 page 63 on a alors $\delta_B = (-1)^{q(k+1)-1}\bar{*}d_B\bar{*}$, d'où $\Delta_B = (-1)^{q(k+1)-1}\bar{*}d_B\bar{*}d_B + d_B\bar{*}d_B\bar{*}$.
Donc $(-1)^{q(k+1)-1}\bar{*}\Delta_B = \bar{*}\bar{*}d_B\bar{*}d_B + \bar{*}d_B\bar{*}d_B\bar{*}$ et
$(-1)^{q(k+1)-1}\Delta_B\bar{*} = \bar{*}d_B\bar{*}d_B\bar{*} + d_B\bar{*}d_B\bar{*}\bar{*}$.
Comme on a $\bar{*}^2 = (-1)^{k(q-k)}Id$, on a $\bar{*}\Delta_B = \Delta_B\bar{*}$. □

Théorème 30 (Dualité de Poincaré)**.** Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable, alors on a un isomorphisme

$$H^k(M/\mathcal{F}) \cong H^{q-k}(M/\mathcal{F}).$$

Démonstration. Découle de la proposition précédente. □

Remarque.
(i) Ce résultat a d'abord été montré par B. Reinhart [Rei59b] sans l'hypothèse de l'orientation homologique. Mais en 1981 Y. Carrière [Car84] a construit un feuilletage riemannien qui ne satisfait pas la dualité de Poincaré.
(ii) Ce résultat a été démontré par une méthode différente dans [Ser85, EKAH86].

4.3 L'opérateur de de Rham basique

Définition 59. Soient $D_B = d_B + \delta_B$, $\Omega^{\text{pair}}(M/\mathcal{F}) = \oplus_{\text{k pair}}\Omega^k(M/\mathcal{F})$ et $\Omega^{\text{impair}}(M/\mathcal{F}) = \oplus_{\text{k impair}}\Omega^k(M/\mathcal{F})$.
On appelle opérateur de de Rham basique l'opérateur
$D_B^+ : \Omega^{\text{pair}}(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{\text{impair}}(M/\mathcal{F})$ qui est la restriction de D_B à $\Omega^{\text{pair}}(M/\mathcal{F})$.

Proposition 61. L'opérateur de de Rham basique est un opérateur différentiel basique d'ordre 1 transversalement elliptique.
De plus si $s \in \mathbb{N}$, l'opérateur de de Rham basique se prolonge en un opérateur de Fredholm $D_B^+ : H^s(M/\mathcal{F}) \to H^{s-1}(M/\mathcal{F})$ dont l'indice est indépendant de s.

Démonstration. On a $D_B^2 = \Delta_B$ et Δ_B est transversalement elliptique, donc D_B^+ est transversalement elliptique.
Pour le deuxième point il suffit d'appliquer les résultats sur les opérateurs transversalement elliptiques. □

Définition 60. On appelle caractéristique d'Euler basique l'entier relatif noté et défini par $\chi(M/\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \dim H^i(M/\mathcal{F})$.

Proposition 62. L'indice de l'opérateur de de Rham basique $\mathrm{ind}_B(D_B^+)$ est donné par la caractéristique d'Euler basique $\chi(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Comme dans la cas classique,
le noyau de D_B^+ est $\ker D_B^+ = \ker(\Delta_B)_{|\Omega^{\mathrm{pair}}(M/\mathcal{F})}$.
Donc le noyau de D_B^+ est l'espaces des formes harmoniques paires.
Comme l'espace des formes harmoniques est isomorphe à la cohomologie de de Rham $H^*(M/\mathcal{F})$, on a $\dim \ker D_B^+ = \dim H^{\mathrm{pair}}(M/\mathcal{F})$.
De même on a $\dim \ker (D_B^+)^* = \dim H^{\mathrm{impair}}(M/\mathcal{F})$.
Donc $\mathrm{ind}_B(D_B^+) = \chi(M/\mathcal{F})$. □

Exemple 9. Dans le cas d'un feuilletage par fibration $\pi : M \to B$, on a $H^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*(B)$.
Donc la caractéristique d'Euler basique de $(M, \mathcal{F})$ est égale à la caractérisitque d'Euler de la variété B.

Exemple 10. Dans le cas d'un feuilletage par suspension $M = \tilde{B} \times T/\Gamma$, on a $H^*(M/\mathcal{F}) \cong H^*(T)^G$. Donc la caractéristique d'Euler basique de $(M, \mathcal{F})$ est égale à $\chi(T/G) = \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \dim H^k(T/G)$.

4.4 L'opérateur de signature basique

Proposition 63. Si $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable, on munit d'une métrique quasi-fibrée telle que κ est nulle.
Alors $[\nu] \neq 0$, c'est-à-dire $[\nu]$ engendre $H^q(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\nu = d\alpha$ où $\alpha \in \Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$.
On a

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \chi_{\mathcal{F}} &= d\alpha \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{q-1}\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} \\ &= \nu \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{q-1}\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} \\ &= dvol + (-1)^{q-1}\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Or $\chi_{\mathcal{F}} \in \Omega^{p,0}(M)$ et $d\chi_{\mathcal{F}} = d_{\mathcal{F}}\chi_{\mathcal{F}} + d_{\pitchfork}\chi_{\mathcal{F}} + \rho$
où $d_{\mathcal{F}}\chi_{\mathcal{F}} \in \Omega^{p+1,0}(M) = \{0\}$, $d_{\pitchfork}\chi_{\mathcal{F}} \in \Omega^{p,1}(M)$ et $\rho \in \Omega^{p-1,2}(M)$.
Comme $\kappa = 0$, la forme carctéristique $\chi_{\mathcal{F}}$ est $\mathcal{F}$-fermée, donc $d_{\pitchfork}\chi_{\mathcal{F}} = 0$ et $d\chi_{\mathcal{F}} = \rho$.
Or $\alpha \in \Omega^{0,q-1}(M)$ et $\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} = \alpha \wedge \rho$,
donc $\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} \in \Omega^{p-1,q+1}(M) = \{0\}$ et $\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}} = 0$.
Donc $d(\alpha \wedge d\chi_{\mathcal{F}}) = \text{dvol}$ et $[\text{dvol}] = 0$ dans $H^n(M)$ (ce qui est contradictoire puisque M est orientée et $H^n(M)$ est engendré par [dvol]).
Donc $[\nu] \neq 0$ dans $H^q(M/\mathcal{F})$. □

Remarque. La forme volume transversale ν est donc une forme basique harmonique.

Exemple 11. Dans le cas d'un feuilletage par fibration $\pi : M \to B$, on a $H^k(M/\mathcal{F}) \cong H^k(B)$, donc $(M, \mathcal{F})$ est un feuilletage homologiquement orientable si et seulement si la variétée B est orientable.
Ici la notion d'orientation transverse de $\mathcal{F}$ coïncide donc avec la notion d'orientation homologique de $\mathcal{F}$.

Proposition 64. On suppose que $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable et $q = 4l$. On munit M d'une métrique quasi-fibrée telle que κ est nulle.
On définit une forme bilinéaire Q_B sur $H^{2l}(M/\mathcal{F}) \times H^{2l}(M/\mathcal{F})$ par

$$Q_B([\omega_1], [\omega_2]) = \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \chi_{\mathcal{F}}.$$

Alors Q_B est bien définie, symétrique et non-dégénérée.

Démonstration. De manière évidente Q_B est bilinéaire et symétrique.
Montrons que Q_B est bien définie. Soient $\alpha \in \Omega^{2l-1}(M/\mathcal{F})$ et $\omega_2 \in \Omega^{2l-1}(M/\mathcal{F})$.
Montrons que $Q_B(d\alpha, \omega_2) = 0$.
On a $d(\alpha \wedge \omega_2) = d\alpha \wedge \omega_2 + (-1)^{2l-1}\alpha \wedge d\omega_2 = d\alpha \wedge \omega_2$ car ω_2 est fermée.
Donc $Q_B(d\alpha, \omega_2) = \displaystyle\int_M d(\alpha \wedge \omega_2) \wedge \chi_{\mathcal{F}}$.
Or $d(\alpha \wedge \omega_2 \wedge \chi_{\mathcal{F}}) = d(\alpha \wedge \omega_2) \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{4l-1}\alpha \wedge \omega_2 \wedge d\chi_{\mathcal{F}}$,
donc $\displaystyle\int_M d(\alpha \wedge \omega_2 \wedge \chi_{\mathcal{F}}) = \int_M d(\alpha \wedge \omega_2) \wedge \chi_{\mathcal{F}} + (-1)^{4l-1} \int_M \alpha \wedge \omega_2 \wedge d\chi_{\mathcal{F}}$.
Selon le théorème de Stokes on a $\displaystyle\int_M d(\alpha \wedge \omega_2 \wedge \chi_{\mathcal{F}}) = 0$,

donc $Q_B(d\alpha, \omega_2) = \int_M \alpha \wedge \omega_2 \wedge d\chi_{\mathcal{F}}$.
Or $\alpha \wedge \omega_2 \in \Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$, donc $\alpha \wedge \omega_2 \wedge d\chi_{\mathcal{F}} = 0$ (voir proposition 44 page 46),
donc $Q_B(d\alpha, \omega_2) = 0$ et Q_B est bien définie.
Montrons que Q_B est non-dégénérée.
Soit $[\omega_1] \in H^{2l}(M/\mathcal{F})$ tel que $\forall [\omega_2] \in H^{2l}(M/\mathcal{F}),\ Q_B([\omega_1],[\omega_2]) = 0$.
Donc $\int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \chi_{\mathcal{F}} = 0$ et $\int_M \omega_1 \wedge \bar{*}\bar{*}\omega_2 \wedge \chi_{\mathcal{F}} = 0$,
donc $\langle \omega_1, \bar{*}\omega_2 \rangle_M = 0$.
Donc $\forall \omega_2 \in Z^{2l}(M/\mathcal{F}),\ \langle \omega_1, \bar{*}\omega_2 \rangle_M = 0$,
or $\bar{*}^2 = (-1)^{2l(4l-2l)} Id$, donc $\forall \beta \in Z^{2l}(M/\mathcal{F}),\ \langle \omega_1, \beta \rangle_M = 0$.
Or $\langle \omega_1, \omega_1 \rangle_M > 0$ si $\omega_1 \neq 0$, donc $\omega_1 = 0$ et Q_B est non-dégénérée. □

Dans la suite du paragraphe on suppose que $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable, $q = 4l$, et la forme de courbure principale κ est nulle.

Définition 61. La signature de Q_B est appelée la signature basique de $(M, \mathcal{F})$ et est notée $\sigma(M/\mathcal{F})$.

Définition 62. On note $\tau : \Omega^k(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{q-k}(M/\mathcal{F})$ l'application définie par

$$\tau = (-1)^{l + \frac{k(k-1)}{2}} \bar{*}$$

où $\bar{*}$ désigne l'opérateur de Hodge basique.

Proposition 65. L'application τ est une involution qui anticommute avec l'opérateur $D_B = d_B + \delta_B$.

Démonstration. On rappelle que $\delta_B = (-1)^{q(k+1)-1} \bar{*} d_B \bar{*}$ puisque $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable.
Un simple calcul montre alors que τ est une involution qui anticommute avec D_B. □

Définition 63. On note $\Omega^*(M/\mathcal{F}) = \Omega^*_+(M/\mathcal{F}) \oplus \Omega^*_-(M/\mathcal{F})$ où $\Omega^*_+(M/\mathcal{F})$ (respectivement $\Omega^*_-(M/\mathcal{F})$) est l'espace propre de τ associé à la valeur propre 1 (respectivement -1).
On appelle opérateur de signature basique et on note D_B^+ la restriction de D_B à $\Omega^*_+(M/\mathcal{F})$, $D_B^+ : \Omega^*_+(M/\mathcal{F}) \to \Omega^*_-(M/\mathcal{F})$.

Proposition 66. L'opérateur de signature basique D_B^+ est un opérateur différentiel basique d'ordre 1 transversalement elliptique.
De plus si $s \in \mathbb{N}$, l'opérateur de signature basique se prolonge en un opérateur de Fredholm $D_B^+ : H^s(M/\mathcal{F}) \to H^{s-2}(M/\mathcal{F})$ dont l'indice est indépendant de s.

Démonstration. La démonstration est similaire au cas de l'opérateur de de Rham basique. Pour le deuxième point il suffit d'appliquer les résultats sur les opérateurs transversalement elliptiques. □

Proposition 67. L'indice de l'opérateur de signature basique est donné par la signature basique $\sigma(M/\mathcal{F})$ de $(M, \mathcal{F})$.

Démonstration. La démonstration est similaire au cas classique (voir proposition 4). □

Proposition 68. Dans le cas d'un feuilletage homologiquement orientable de codimension $q = 4k$ par fibration $\pi : M \to B$, la signature basique $\sigma(M, \mathcal{F})$ est égale à la signature de la variété B. L'indice de l'opérateur de sinature basique coïncide donc avec la signature de B.

Lemme 6. On note $*_B$ l'opérateur de Hodge sur B et $\bar{*}$ l'opérateur de Hodge basique sur M. Soit $\omega \in \Omega^k(B)$, on a $\pi^*(*_B\omega) = (-1)^{pq}\bar{*}(\pi^*(\omega))$.

Démonstration. On a localement $\omega_y = \sum_{i_1<...<i_k} f_I(y)dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$,
donc $*_B(\omega_y) = \epsilon \sum_{i_1<...<i_k} f_I(y)dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}$ où ϵ est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & ... & & q \\ i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \pi^*(*_B(\omega))_z &= \epsilon \sum_{j_1<...<j_k} f_I(\pi(z))\pi^*(dy_{J_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}}) \\ &= \epsilon \sum_{j_1<...<j_k} f_J(\pi(z))dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}} \end{aligned}$$

car $y_j \circ \pi = y_j$.
Or $\pi^*(\omega)_z = \sum_{i_1<...<i_k} f_I(\pi(z))\pi^*(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) = \sum_{i_1<...<i_k} f_I(\pi(z))dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$,
donc

$$\begin{aligned} \bar{*}(\pi^*(\omega)_z) &= (-1)^{pq}\bar{*}(\sum_{i_1<...<i_k} f_I(\pi(z))dx_1 \wedge ... \wedge dx_p \wedge dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}) \\ &= (-1)^{pq}\epsilon' \sum_{i_1<...<i_k} f_I(\pi(z)) \wedge dy_{j_1} \wedge ... \wedge dy_{j_{q-k}} \end{aligned}$$

où ϵ' est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & & ... & & & & n \\ 1 & ... & p & i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.
On a $\epsilon = \epsilon'$, donc $\pi^*(*_B\omega) = (-1)^{pq}\bar{*}(\pi^*(\omega))$. □

Lemme 7. On a $d_{Bas} \circ \pi^* = \pi^* \circ d_B$ où d_{Bas} désigne la différentielle sur $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ et d_B la différentielle de de Rham sur $\Omega^*(B)$. De plus $\delta_{Bas} \circ \pi^* = \pi^* \circ \delta_B$.

Démonstration. Avec les conventions de signe habituelles on a $\delta_{Bas} = (-1)^{q(k-1)-1} \bar{*} d_{Bas} \bar{*}$ et $\delta_{Bas} = (-1)^{q(k-1)-1} * d_{Bas} *$.

$$\begin{aligned}\pi^* \circ ((-1)^{q(k-1)-1} * d_{Bas} *) &= (-1)^{q(k-1)-1}(-1)^{pq}(-1)^{pq}(\bar{*} d_{Bas} \bar{*}) \circ \pi^*) \\ &= \delta_{Bas} \circ \pi^*\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 68. On sait que $\sigma(B) = \text{ind}(D_+)$ où D_+ désigne l'opérateur de signature sur la variété B.
Et $\sigma(M/\mathcal{F}) = \text{ind}_B(D_B^+)$ où D_B^+ désigne l'opérateur de signature basique sur M. Les lemmes précédents impliquent que les opérateurs D_+ et D_B^+ sont conjugués, donc admettent le même indice. Ainsi $\sigma(B) = \sigma(M/\mathcal{F})$. □

Nous allons étudier la signature basique d'un feuilletage par suspension $M = \tilde{B} \times T/\Gamma$. On rappelle que $q_2 : \tilde{M} \to T$ désigne la deuxième projection.

Proposition 69. Soit $\omega \in \Omega^k(T/\Gamma)$, on a $\phi(*_T \omega) = \bar{*}\phi(\omega)$, où $\bar{*}$ désigne l'opérateur de Hodge basique sur M et $*_T$ désigne l'opérateur de Hodge sur T.

Démonstration. Soient $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$ des coordonnées locales sur $\tilde{M}$ en $(\tilde{x}, y)$, donc $(y_1, ..., y_q)$ sont des coordonnées locales en y et $(x_1 \circ \pi^{-1}, ..., x_p \circ \pi^{-1}, y_1 \circ \pi^{-1}, ..., y_q \circ \pi^{-1})$ sont des coordonnées locales en $[\tilde{x}, y]$.
Localement on a $\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} f_I(y) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_q}$.
Montrons que $q_2^*(*_T \omega) = (-1)^{pq} *_B (q_2^*(\omega))$, où $*_B$ l'opérateur de Hodge basique sur $\tilde{M}$.
On a $*_T \omega = \epsilon \sum_{i_1 < ... < i_k} f_I(y) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_{q-k}}$ où ϵ est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & ... & & q \\ i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.
Comme $y_l \circ q_2 = y_l$, on a

$$\begin{aligned}q_2^*(*_T \omega) &= \epsilon \sum_{i_1 < ... < i_k} f_I(q_2(\tilde{x}, y)) q_2^*(dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_{q-k}}) \\ &= \epsilon \sum_{i_1 < ... < ik} f_I(q_2(\tilde{x}, y)) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_{q-k}}\end{aligned}$$

Or $q_2^*(\omega) = \sum_{i_1 < ... < i_k} f_I(q_2(\tilde{x}, y)) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_k}$,
donc $*_B q_2^*(\omega) = (-1)^{pq} \epsilon' \sum_{i_1 < ... < i_k} f_I(q_2(\tilde{x}, y)) dy_{i_1} \wedge ... \wedge dy_{i_{q-k}}$ où ϵ' est la signature de la permutation $\begin{pmatrix} 1 & & & & ... & & & n \\ 1 & ... & p & i_1 & ... & i_k & j_1 & ... & j_{q-k} \end{pmatrix}$.

Or $\epsilon' = \epsilon$, donc $q_2^*(*_T\omega) = (-1)^{pq} *_B (q_2^*(\omega))$.
Selon le lemme 6 page page 71, on a $\forall \alpha \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$, $*_B\pi^*(\alpha) = (-1)^{pq}\pi^*(\bar{*}\alpha)$.
Ainsi $q_2^*(*_T\omega) = (-1)^{pq} *_B (\pi^*(\phi(\omega))$,
donc $\pi^*(\phi(*_T\omega)) = \pi^*(\bar{*}\phi(\omega))$,
et $\phi(*_T\omega) = \bar{*}\phi(\omega)$. □

Proposition 70. On note d_T la différentielle sur $\Omega^*(T)$ et donc sur $\Omega^*(T/G)$ et d_B la différentielle sur $\Omega^*(M/\mathcal{F})$.
Comme T est munie d'une structure riemannienne G-invariante, l'adjoint formel δ_T de d_T se restreint à $\Omega^*(T/G)$.
On a alors $\delta_B \circ \phi = \phi \circ \delta_T$, en particulier l'opérateur $D_B = d_B + \delta_B$ est conjugué à $D^G = d_T + \delta_T : \Omega^*(T/G) \to \Omega^*(T/G)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\phi \circ \delta_T &= \phi \circ ((-1)^{q(k-1)-1} *_T d_T * T) \\ &= (*_B(-1)^{q(k-1)-1} d_B *_B) \circ \phi \\ &= \delta_B \circ \phi\end{aligned}$$

□

Corollaire 9. La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est donnée par

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \sigma(T/G).$$

Démonstration. On sait que $\sigma(M/\mathcal{F}) = \mathrm{ind}_B(D_B^+)$ où D_B^+ désigne l'opérateur de signature basique sur M.
Et $\sigma(M/G) = \mathrm{ind}(D_+^G)$ où D_+^G désigne l'opérateur de signature invariant sur T.
On vient de voir que D_+^G et D_B^+ sont conjugués, donc ont le même indice.
Donc $\sigma(M/\mathcal{F}) = \sigma(T/G)$. □

4.5 L'opérateur de Dolbeault basique

On suppose que $\mathcal{F}$ est transversalement holomorphe et pour simplifier on supposera que $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable.
Alors le fibré $\nu\mathcal{F}_{\mathbb{C}} = \nu\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ hérite d'une structure complexe dont on notera J l'automorphisme associé.
La métrique riemmanienne transverse g définit une métrique hermitienne $\tilde{g}(.,.) = ((g(.,.) + g(J.,J.))/2$ (c'est-à-dire $\tilde{g}(J.,J.) = \tilde{g}(.,.)$ sur $\nu\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ et invariante le long des feuilles) et en fait un $\mathcal{F}$-fibré hermitien.
Dans ce cas on dira que le feuilletage $\mathcal{F}$ est hermitien.

Définition 64. Comme $J^2 = -Id$, on a une décomposition en somme directe $\nu\mathcal{F}_{\mathbb{C}} = \nu\mathcal{F}_{(1,0)} \oplus \nu\mathcal{F}_{(0,1)}$ où $\nu\mathcal{F}_{(1,0)}$ et $\nu\mathcal{F}_{(0,1)}$ sont les sous-fibrés de $\nu\mathcal{F}$ associés

aux valeurs propres i et $-i$ de J.
On a alors une décomposition du fibré en algèbres extérieures
$\Lambda^k\nu^*\mathcal{F}_{\mathbb{C}} = \oplus_{r+s=k}\Lambda^{r,s}$ où $\Lambda^{r,s} = \Lambda^p\nu^*\mathcal{F}_{(1,0)} \otimes \Lambda^q\nu^*\mathcal{F}_{(0,1)}$.

Définition 65. Une section basique du $\mathcal{F}$-fibré $\Lambda^{r,s}$ est appelée forme différentielle basique de type (r,s).
On notera $\Omega^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$ l'espace des formes différentielles basiques de type (r,s). On a de manière évidente $\Omega^k(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) = \oplus_{r+s=k}\Omega^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$.
Comme dans la cas classique d'une variété complexe, sur les formes basiques $\Omega^k(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$ la différentielle d se décompose en la somme de deux opérateurs $\partial : \Omega^{r,s}(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{r+1,s}(M/\mathcal{F})$ et $\bar{\partial} : \Omega^{r,s}(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{r,s+1}(M/\mathcal{F})$ qui vérifient les relations

$$\partial^2 = 0,\ \bar{\partial}^2 = 0,\ \text{et } \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

On obtient donc un complexe différentiel

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{r,s+1}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots$$

appelé complexe de Dolbeault basique du feuilletage $\mathcal{F}$.
La cohomologie associée sera appellée cohomologie de Dolbeault basique de $\mathcal{F}$ et notée $H^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$.

Proposition 71. L'opérateur de Hodge basique induit un isomorphisme
$\bar{*} : \Omega^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) \to \Omega^{q-r,q-s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$.
On pose $\delta''_B = -\bar{*}\partial\bar{*}$, alors δ''_B est l'adjoint formel de $\bar{\partial}$.

Démonstration. Cette preuve est similaire au cas classique qui a été traité précédemment, nous renvoyons le lecteur à la première partie de ce document. □

Proposition 72. On notera Δ''_B l'opérateur défini par $\Delta''_B = \delta''_B\bar{\partial} + \bar{\partial}\delta''_B$. L'opérateur Δ''_B est un opérateur différentiel basique d'ordre 2 formellement auto-adjoint et transversalement elliptique.

Démonstration. Cette preuve est similaire au cas du Laplacien basique et est omise ici. □

Théorème 31. On note

$$\mathcal{H}^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) = \{\omega \in \Omega^{r,s}(M/\mathcal{F})/\bar{\partial}\omega = 0 \text{ et } \delta''_B\omega = 0\} = \ker\Delta''_B.$$

On a alors les propriétés suivantes :
(i) l'espace vectoriel $\mathcal{H}^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$ est de dimension finie,
(ii) on a une décomposition L^2-orthogonale

$$\Omega^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C}) = \mathcal{H}^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})\oplus\mathrm{Im}(\Delta''_B) = \mathcal{H}^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})\oplus\mathrm{Im}(\bar{\partial})\oplus\mathrm{Im}(\delta''_B)$$

(iii) l'espace vectoriel $H^{r,s}(M/\mathcal{F})$ est isomorphe à $\mathcal{H}^{r,s}(M/\mathcal{F},\mathbb{C})$ et donc de dimension finie.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les résultats sur les opérateurs transversalement elliptique pour les deux premiers points. La démonstration du troisième point est similaire au cas de la cohomologie basique. □

Théorème 32 (dualité de Serre)**.** Comme le feuilletage $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable, l'application $\bar{*}$ induit un isomorphisme de $H^{r,s}(M/\mathcal{F})$ sur $H^{r-q,s-q}(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. L'opérateur de Hodge basique $\bar{*}$ commute avec Δ''_B,
et induit un isomorphisme de $\mathcal{H}^{r,s}(M/\mathcal{F})$ sur $\mathcal{H}^{r-q,s-q}(M/\mathcal{F})$ et donc un isomorphisme de $H^{r,s}(M/\mathcal{F})$ sur $H^{r-q,s-q}(M/\mathcal{F})$. □

4.6 L'opérateur de Dirac basique

Etudions maintenant l'opérateur de Dirac basique ([BKR10a]).

Notation 10. On identifie le fibré normal $\nu\mathcal{F}$ avec $T\mathcal{F}^{\perp}$.
On note $\mathbb{C}l(\nu\mathcal{F}) = Cl(\nu\mathcal{F}) \otimes \mathbb{C}$ le fibré en algèbre de Clifford au-dessus de M.

Définition 66. Soit E un fibré en $\mathbb{C}l(\nu\mathcal{F})$-modules au-dessus de M.
On note toujours ∇ la connexion de Levi-Civita transverse et ∇^M la connexion de Levi-Civita.
Soit h une métrique hermitienne sur E et ∇^E une connexion linéaire sur E.
On note l'action de $\xi \in \mathbb{C}l(\nu_x\mathcal{F})$ sur un élément $v \in E_x$ par $c(\xi)v$.
On dit que (E, h, ∇^E) est un fibré de Clifford basique si :

(i) Le fibré E est un fibré feuilleté.
(ii) La connexion ∇^E est une connexion métrique et basique.
(iii) Pour tout $\xi \in \mathbb{C}l(\nu_x\mathcal{F})$, $c(\xi)$ est antisymétrique sur E_x.
(iv) Si $X \in \Xi(M), Y \in \Gamma(\nu\mathcal{F}), s \in \Gamma(E)$,

$$\nabla^E_X(c(Y)s) = c(\nabla_X(Y))s + c(Y)\nabla^E_X(s).$$

Notation 11. Dans la suite (E, h, ∇^E) désigne un fibré de Clifford basique.

Lemme 8. Si $Y \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$ un champ de vecteurs basiques et $s \in \Gamma(E)$ une section basique, alors $c(V)s$ est une section basique de E.

Démonstration. Comme s est basique et Y est feuilleté, si $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ on a $\nabla^E_V(s) = 0$ et $\nabla_V(Y) = 0$.
Donc $\nabla^E_V(c(Y)s) = c(\nabla_V(Y))s + c(Y)\nabla^E_V(s) = 0$. □

Définition 67. On appelle opérateur de Dirac transversal l'opérateur noté D_{tr} obtenue à partir de la composition des applications suivantes :

$$\Gamma(E) \xrightarrow{(\nabla^E)^{tr}} \Gamma(\nu^*\mathcal{F} \otimes E) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\nu\mathcal{F} \otimes E) \xrightarrow{c} \Gamma(E) \ ,$$

où $(\nabla^E)^{tr}$ est la projection sur $\nu^*\mathcal{F}$ de $\nabla^E : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ et $\cong$ est l'isomorphisme induit par la métrique quasi-fibrée sur M.
Plus précisément si $\{e_1, ..., e_q\}$ est un repère orthonormée de $\nu\mathcal{F}$, on a

$$D_{tr} = \sum_{j=1}^{q} c(e_j)(\nabla^E_{e_j})^{tr}.$$

Proposition 73. L'opérateur de Dirac transversal induit un opérateur différentiel basique d'ordre 1 sur $\Gamma(E/\mathcal{F})$.
De plus cet opérateur est transversalement elliptique et son symbole est donné par

$$\sigma(D_{tr})(x, \xi) = c(\xi).$$

Démonstration. Soit $s \in \Gamma(E/\mathcal{F})$, montrons que $D_{tr}(s)$ est une section basique.
Au voisinage d'un point $x \in M$, on choisit un repère local $\{e_1, ..., e_q\}$ formé de champs de vecteurs basiques. Soit $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, alors

$$\begin{aligned}
\nabla^E_V(D_{tr}(s)) &= \sum_{j=1}^{q} \nabla^E_V(c(e_j)(\nabla^E_{e_j})^{tr}(s)) \\
&= \sum_{j=1}^{q} c(\nabla_V(e_j))\nabla^E_{e_j}(s) + c(e_j)\nabla^E_V(\nabla^E_{e_j}(s)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

car e_j est un champ de vecteur basique et s est une section basique.
Donc D_{tr} induit bien un opérateur sur $\Gamma(E/\mathcal{F})$.
La même démonstration que dans le cas classique (voir proposition 8 page 20) montre que D_{tr} est basique et transversalement elliptique. □

Proposition 74. L'adjoint formel de l'opérateur de Dirac transversal est $(D_{tr})^* = D_{tr} - c(H)$ où H désigne le champ de vecteur basique de courbure principal.

Démonstration. Soit $\{e_1, ..., e_q\}$ un repère local de $\nu\mathcal{F}$ formé de champs de

vecteurs basiques et $s_1, s_2 \in \Gamma(E/\mathcal{F})$. On a ponctuellement

$$\begin{aligned}
&h(D_{tr}(s_1), s_2)_x - h(s_1, D_{tr}(s_2))_x \\
&= \sum_{j=1}^{q} h(c(e_j)\nabla^E_{e_j}(s_1), s_2)_x - h(s_1, c(e_j)\nabla^E_{e_j}(s_2))_x \\
&= \sum_{j=1}^{q} h(c(e_j)\nabla^E_{e_j}(s_1), s_2)_x + h(c(e_j)s_1, \nabla^E_{e_j}(s_2))_x \\
&= \sum_{j=1}^{q} h(\nabla^E_{e_j}(c(e_j)s_1), s_2)_x - h(c(\nabla^M_{e_j}(e_j))s_1, s_2)_x \\
&+ h(c(e_j)s_1, \nabla^E_{e_j}(s_2))_x \\
&= (\sum_{j=1}^{q} \nabla_{e_j}(h(c(e_j)s_1, s_2)))_x - h(c(\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(e_j))s_1, s_2)_x \\
&= -\sum_{j=1}^{q} \nabla_{e_j}(i_{e_j}\omega)_x + \omega(\sum_{j=1}^{q} \nabla^M_{e_j}(e_j))_x
\end{aligned}$$

où ω est la 1-forme basique définie par $\omega(X) = -h(c(X)s_1, s_2), \forall X \in \Gamma(\nu\mathcal{F})$. Donc

$$\begin{aligned}
h(D_{tr}(s_1), s_2) - h(s_1, D_{tr}(s_2)) &= -\sum_{j=1}^{q} \nabla_{e_j}(i_{e_j}\omega) + \omega(\sum_{j=1}^{q} \nabla_{e_j}(e_j)) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} (i_{e_j}\nabla_{e_j} + i_{\nabla_{e_j}(e_j)})\omega + \omega(\sum_{j=1}^{q} \nabla_{e_j}(e_j)) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j}\nabla_{e_j}\omega.
\end{aligned}$$

On complète localement le repère $\{e_1, ..., e_q\}$ en un repère orthonormé $\{e_1, ..., e_n\}$ de TM. On pose $\nabla^{tan} = \nabla^M - \nabla$ où ∇^M désigne la connexion de Levi-Civita. Soit $\beta \in \Omega^1(M/\mathcal{F})$, calculons $\delta\beta$,

$$\begin{aligned}
\delta\beta &= -\sum_{j=1}^{n} i_{e_j}\nabla^M_{e_j}\beta \\
&= -\sum_{j=1}^{n} i_{e_j}\nabla_{e_j}\beta - \sum_{j=1}^{n} i_{e_j}\nabla^{tan}_{e_j}\beta \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j}\nabla_{e_j}\beta - \sum_{j=q+1}^{n} i_{e_j}\nabla^{tan}_{e_j}\beta
\end{aligned}$$

On écrit β sous la forme $\beta = \sum_{k=1}^{q} \beta_k e_k^*$ où β_k sont des fonctions basiques. On a alors

$$\begin{aligned}
\delta\beta &= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta - \sum_{j=q+1}^{n} i_{e_j} \nabla_{e_j}^{tan} (\sum_{k=1}^{q} \beta_k e_k^*) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta - \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{n} \beta_k i_{e_j} \nabla_{e_j}^{tan} (e_k^*) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta - \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{n} \beta_k i_{e_j} (\sum_{m=q+1}^{n} h(\nabla_{e_j}^M (e_k^*), e_m^*) e_m^*) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta - \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{n} \beta_k i_{e_j} (\sum_{m=q+1}^{n} h(\nabla_{e_j}^M (e_m^*), e_k^*) e_m^*) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta - \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=q+1}^{n} \beta_k h(\nabla_{e_j}^M (e_j^*), e_k^*) \\
&= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta + i_H \beta,
\end{aligned}$$

où H est le champ de vecteurs de courbure principale.
Donc si $\beta \in \Omega^1(M/\mathcal{F})$, alors $-\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \beta = \delta\beta - i_H \beta$. On a donc

$$\begin{aligned}
h(D_{tr}(s_1), s_2) - h(s_1, D_{tr}(s_2)) &= -\sum_{j=1}^{q} i_{e_j} \nabla_{e_j} \omega \\
&= \delta\omega - i_H \omega \\
&= \delta\omega + h(c(H)s_1, s_2) \\
&= \delta\omega - h(s_1, c(H)s_2).
\end{aligned}$$

Comme dans le cas général (voir proposition 9 page 21),
on a donc $\langle D_{tr}(s_1), s_2 \rangle - \langle s_1, D_{tr}(s_2) - c(H)s_2 \rangle = 0$.
D'où le résultat. □

Remarque. Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable, le forme de courbure principal et donc le champ de vecteurs de courbure principale sont nuls. Par conséquent l'opérateur de Dirac transversal est auto-adjoint.

Définition 68. On appelle opérateur de Dirac basique l'opérateur

$$D_B = D_{tr} - \frac{1}{2} c(H) : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E/\mathcal{F}).$$

Proposition 75. L'opérateur de Dirac basique est un opérateur différentiel basique d'ordre 1, auto-adjoint et transversalement elliptique.

Démonstration. Découle des résultats précédents. □

Théorème 33. Si E est le fibré normal au feuilletage $\nu\mathcal{F}$,
on a $\mathbb{C}l(\nu\mathcal{F}) \cong \Lambda\nu^*\mathcal{F}$. Et l'opérateur de Dirac transversal est conjugué à l'opérateur $d_B + \delta_B$.
En particulier D_{tr}^2 est conjugué au Laplacien basique Δ_B.

Démonstration. La démonstration est similaire au cas classique (voir proposition 10 page 22). □

Remarque. En munissant $\Omega^*(M/\mathcal{F}) \cong \Gamma(\Lambda\nu^*\mathcal{F})$ des bonnes graduations, on retrouve ainsi l' opérateur de de Rham basique et l'opérateur de signature basique à l'aide de l'opérateur de Dirac transversal.

4.7 Exemples

4.7.1 Exemples de calculs de signature basiques

Exemple 12. On considère le feuilletage par suspension où
$B = S^1, T = \mathbb{C}P_2$. Le groupe fondamental de B est alors $\mathbb{Z}$, on définit le morphisme de groupe $h : \mathbb{Z} \to S^1$ par $1 \mapsto e^{i\theta}$ où θ est irrationnel et $e^{i\theta}$ agit sur T par

$$e^{i\theta}.[z_0, z_1, z_2] = [e^{i\theta}z_0, z_1, z_2].$$

On note $G = S^1$, alors G est l'adhérence de $h(\pi_1(B))$ et le calcul de la signature basique de $(M, \mathcal{F})$ se ramène au calcul de l'indice de l'opérateur de signature sur T restreint aux formes G-invariantes D_+^G.
Pour cela nous allons utiliser la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature (théorème 8 page 27).

Proposition 76. Soit $g \in G\backslash\{1\}$, l'ensemble des points fixes par g est $T^g = \{[1,0,0]\} \cup \{[0, z_1, z_2]/z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*\}$. En particulier $T^g = T^G$.

Démonstration. On suppose que $g.[z_0, z_1, z_2] = [z_0, z_1, z_2]$.
Donc $gz_0 = \lambda z_0, z_1 = \lambda z_1, z_2 = \lambda z_2$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Donc $z_0 = 0, (1-\lambda)z_1 = 0, (1-\lambda)z_2 = 0$ ou $g = \lambda, (1-\lambda)z_1 = 0, (1-\lambda)z_2 = 0$, donc $z_0 = 0$ ou $g = \lambda, z_1 = 0, z_2 = 0$.
Donc $T^g = \{[1,0,0]\} \cup \{[0, z_1, z_2]/z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*\}$. □

Remarque. On notera $P = [1,0,0]$ et $\mathcal{S} = \{[0, z_1, z_2]/z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*\}$. On remarque que $\mathcal{S} \cong \mathbb{C}P_1$.

Proposition 77. Soient $g = e^{i\theta} \in G\backslash\{-1, 1\}$ et N^g le fibré normal au-dessus de T^g. Alors g_* agit sur N^g par une rotation d'angle $-\theta$.

Démonstration. On utilise la carte $U = \{[z_0, z_1, z_2]/z_0 \neq 0\}$ de coordonnées locales $\phi([z_0, z_1, z_2]) = \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right)$.
On note τ_g le difféomorphisme induit par g sur T,

$$\begin{aligned}\phi \circ \tau_g \circ \phi^{-1} &= \phi(\tau_g([1, x_1, x_2])) \\ &= \phi([e^{i\theta}, x_1, x_2]) \\ &= (e^{-i\theta}x_1, e^{-i\theta}x_2)\end{aligned}$$

alors $mat(\tau_{g,*[1,x-1,x-2]}) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. D'où le résultat. □

Rappel. La cohomologie de de Rham de $\mathbb{C}P_2$ est donnée par :
$H^0(\mathbb{C}P_2) = \mathbb{C}1, H^1(\mathbb{C}P_2) = \{0\}, H^2(\mathbb{C}P_2) = \mathbb{C}\omega, H^3(\mathbb{C}P_2) = \{0\}$,
$H^4(\mathbb{C}P_2) = \mathbb{C}\omega \wedge \omega$ où ω est une classe caractéristique.

Proposition 78. La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est donnée par :

$$\sigma(M, \mathcal{F}) = \text{ind}(D_+^G) = \int_G \int_{M^g} \mathcal{L}(g)$$

et

$$\sigma(M, \mathcal{F}) = \int_G \mathcal{L}(g, P) + \int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(g, \mathcal{S})dg$$

où $\mathcal{L}(g, P)$ et $\int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(g, \mathcal{S})$ se calculent par la formule d'Atiyah-Singer.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature. □

Proposition 79. Si $g = e^{i\theta}$ on a, $\mathcal{L}(g, P) = -\text{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$.

Démonstration. Comme $\{P\}$ est une variété de dimension 0,
en appliquant la formule d'Atiyah-Segal-Singer on a $\mathcal{L}(g, P) = 2^0 \left(i \tan(\frac{-\theta}{2})\right)^{-2}$,
c'est-à-dire $\mathcal{L}(g, P) = -\text{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$. □

Proposition 80. Si $g = e^{i\theta}$, on a

$$\int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(g, \mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} (1 + \text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}))c_1(N^g) = 1 + \text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}) \int_{\mathcal{S}} c_1(N^g)$$

où $c_1(N^g)$ est la première classe de Chern de N^g.

Démonstration. On applique la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature.
Ici $N^g = N^g(\theta)$, $t = 1$, $r = 0$ et $s(\theta) = 1$.
Donc $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(g,\mathcal{S}) = 2\int_{\mathcal{S}} \left(i\tan(\frac{-\theta}{2})\right)^{-1} L(M^g)m^\theta(N^g)$.
On a $L(M^g) = 1 + L_1(M^g) + ...$ où $L_k(M^g) \in H^{4k}(\mathcal{S})$.
Or $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{S} = 1$, donc $H^k(\mathcal{S}) = \{0\}, \forall k \geq 3$.
Donc $L(M^g) = 1$ et $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(g,\mathcal{S}) = 2i\text{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right)\int_{\mathcal{S}} m^\theta(N^g)$.
Calculons $m^\theta(N^g)$. On note $y = c_1(N^g)$ et on rappelle que $c_1(N^g) \in H^2(\mathcal{S})$.
On a $\displaystyle m^\theta(N^g) = \text{th}(\frac{-i\theta}{2})\frac{1+\text{th}(\frac{y}{2})\text{th}(\frac{-i\theta}{2})}{\text{th}(\frac{y}{2})+\text{th}(\frac{-i\theta}{2})}$ et $\text{th}(z) = z + o(z^2)$,

donc $\displaystyle m^\theta(N^g) = \text{th}(\frac{-i\theta}{2})\frac{1+\text{th}(\frac{-i\theta}{2})\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}+\text{th}(\frac{-i\theta}{2})} = \frac{1+\text{th}(\frac{-i\theta}{2})\frac{y}{2}}{\coth(\frac{-i\theta}{2})\frac{y}{2}+1}$.
Or $\displaystyle\frac{1}{1+z} = 1 - z + o(z^2)$, donc $m^\theta(N^g) = (1+\text{th}(\frac{-i\theta}{2})\frac{y}{2})(1-\coth(\frac{-i\theta}{2})\frac{y}{2})$.
Or $\text{th}(iz) = i\tan z$, donc $\displaystyle m^\theta(N^g) = 1 - \frac{i}{2}(\tan\frac{\theta}{2} + \text{cotan}\frac{\theta}{2})y$. Donc on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \mathcal{L}(g,\mathcal{S}) &= 2i\text{cotan}(\frac{\theta}{2})\int_{\mathcal{S}} m^\theta(N^g)\\ &= -2i\text{cotan}(\frac{\theta}{2})\int_{\mathcal{S}} \frac{i}{2}(\tan(\frac{\theta}{2}) + \text{cotan}(\frac{\theta}{2}))y\\ &= \int_{\mathcal{S}} (1+\text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}))c_1(N^g)\end{aligned}$$

□

Corollaire 10. La signature basique de $(M,\mathcal{F})$ est donnée par

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \text{ind}(D^G_+) = 1.$$

Démonstration. En raison des résultats précédents, on a

$$\text{ind}(D^G_+) = \int_{S^1} -\text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}) + (1+\text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}))\int_{\mathcal{S}} c_1(N^g)\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Or $\displaystyle\int_{S^1} \text{cotan}^2(\frac{\theta}{2})\frac{d\theta}{2\pi}$ est divergente et $\text{ind}(D^G_+) \in \mathbb{Z}$.
Donc on a forcément $\displaystyle\int_{\mathcal{S}} c_1(N^g) = 1$ et $\text{ind}(D^G_+) = 1$. □

Remarque. On peut retrouver ce résultat par une autre méthode :
on a déjà vu que $\text{ind}(D^G_+) = \sigma(T/G)$ (voir corollaire 3 page 26), or ici le groupe G est connexe, donc $\sigma(T/G) = \sigma(T) = \sigma(\mathbb{C}P_2) = 1$.

Remarque. On a $\text{ind}(D_+^G) = \int_G \int_{T^G} \mathcal{L}(g)dg$. En effet :
Si $g \in G$, on a $T^g = T^{<g>} = T^{<\bar{g}>}$,
où $< g >$ est le sous-groupe engendré par g et $< \bar{g} >$ son adhérence.
Si $\theta \in]0,1[$ est irrationnel, alors $< e^{2\pi i\theta} >$ est dense dans G.
On note $A_\theta =< e^{2\pi i\theta} >$ et $A = \cup_{\theta\in]0,1[,\theta\notin\mathbb{Q}} A_\theta$.
On remarque que le complémentaire A^c est dénombrable. On a

$$\begin{aligned}
\text{ind}(D_+^G) &= \int_G \int_{T^g} \mathcal{L}(g)dg \\
&= \int_A \int_{T^g} \mathcal{L}(g)dg + \int_{A^c} \int_{M^g} \mathcal{L}(g)dg \\
&= \int_A \int_{T^G} \mathcal{L}(g)dg \text{ car } A^c \text{ est de mesure nulle} \\
&= \int_A \int_{T^G} \mathcal{L}(g)dg + \int_{A^c} \int_{M^G} \mathcal{L}(g)dg \\
&= \int_G \int_{T^G} \mathcal{L}(g)dg.
\end{aligned}$$

Pourtant il n'est pas possible d'intervertir ces deux intégrales. En effet :

$$\int_{T^G} \int_G \mathcal{L}(g)dg = \int_{T^G} \int_{S^1} -\text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}) + (1 + \text{cotan}^2(\frac{\theta}{2}))c_1(N^g)\frac{d\theta}{2\pi},$$

mais $\int_{S^1} \text{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$ est divergente.

Exemple 13. On considère le feuilletage par suspension où
$B = S^1, T = \mathbb{C}P_2$. Le groupe fondamental de B est alors $\mathbb{Z}$, on définit le morphisme de groupe $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ par $1 \mapsto 1$ où 1 agit sur T par

$$1.[z_0, z_1, z_2] = [z_1, z_2, z_0].$$

On note $G = \mathbb{Z}_3 = h(\pi_1(B))$. Le calcul de la signature basique de $(M, \mathcal{F})$ se ramène au calcul de l'indice de l'opérateur de signature D_+^G sur T restreint aux formes G-invariantes.

Proposition 81. On note $A_0 = [1, 1, 1]$, $A_1 = [1, j, j^2]$, $A_2 = [1, j^2, j]$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, alors la variété de points fixes associée à 1 est : $T^1 = \{A_0, A_1, A_2\}$.

Démonstration. On suppose que $1.[z_0, z_1, z_2] = [z_0, z_1 z_2]$.
Donc $z_1 = \lambda z_0, z_2 = \lambda z_1, z_0 = \lambda z_2$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$,
donc $z_1 = \lambda z_0, z_2 = \lambda^2 z_0, z_0 = \lambda^3 z_0$ et $z_1 = \lambda z_0, z_2 = \lambda^2 z_0, \lambda^3 = 1$.
Donc les points fixes de 1 sont de la forme $[z_0, \lambda z_0, \lambda^2 z_0] = [1, \lambda, \lambda^2]$
où λ est une racine cubique de l'unité. D'où le résultat. □

Remarque. Comme 1 est un générateur de G on a $T^G = T^1 = \{A_0, A_1, A_2\}$.

Proposition 82. On utilise la carte $U = \{[z_0, z_1, z_2]/z_0 \neq 0\}$ de coordonnées locales $\phi([z_0, z_1, z_2]) = (\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})$.
On note $g = 1$ et τ_g le difféomorphisme induit sur T,
alors $mat(\tau_{g,*[1,x-1,x-2]}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \phi \circ \tau_g \circ \phi^{-1} &= \phi(\tau_g([1, x_1, x_2])) \\ &= \phi([x_1, x_2, 1]) \\ &= \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right), \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 83. La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est alors donnée par :

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \text{ind}(D_+^G) = \int_G \int_{M^g} \mathcal{L}(g)$$

et

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \frac{1}{3}(\int_M \mathcal{L}(0, M) + \int_{M^1} \mathcal{L}(1, M^1) + \int_{M^2} \mathcal{L}(2, M^2))$$

où $\int_M \mathcal{L}(0, M) = \sigma(M) = 1$ et $\int_{M^1} \mathcal{L}(1, M^1)$ et $\int_{M^2} \mathcal{L}(2, M^2)$ se calculent par la formule d'Atiyah-Segal-Singer.
De plus $\int_{M^1} \mathcal{L}(1, M^1) = \mathcal{L}(1, A_0) + \mathcal{L}(1, A_1) + \mathcal{L}(1, A_2)$ et
$\int_{M^2} \mathcal{L}(2, M^2) = \mathcal{L}(2, A_0) + \mathcal{L}(2, A_1) + \mathcal{L}(2, A_2)$.

Démonstration. C'est la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature. □

Proposition 84. On a $\mathcal{L}(1, A_k) = \mathcal{L}(2, A_k) = \frac{1}{3}$.

Démonstration. Soit N l'espace tangent à M en A_k, N est un espace vectoriel complexe de dimension complexe 2.

On a : $mat(\tau_{1,*A_0}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, mat(\tau_{1,*A_1}) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{j^2} \\ -\frac{1}{j^2} & 0 \end{pmatrix}$,

et $mat(\tau_{g,*A_2}) = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{j^2} \\ -\frac{1}{j} & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $tr(mat(\tau_{1,*A_k})) = -1$ et $\det(mat(\tau_{1,*A_k})) = 1$.
Les valeurs propres de $mat(\tau_{1,*A_k})$ sont donc les racines du polynôme $X^2 + X + 1$, c'est-à-dire les racines cubiques de l'unité : j, j^2.
De même les valeurs propres de $mat(\tau_{2,*A_k})$ sont j et j^2.
D'après Atiyah-Segal-Singer on en déduit que $\mathcal{L}(1, A_k) = 2^0(i\tan(\frac{\theta}{2}))^{-1}(i\tan(\theta))^{-1}$ où $\theta = \frac{2\pi}{3}$.
Donc $\mathcal{L}(1, A_k) = \frac{1}{3}$. De même $\mathcal{L}(2, A_k) = \frac{1}{3}$. □

Remarque. On remarque que G préserve l'orientation.

Corollaire 11. La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est donnée par $\sigma(M/\mathcal{F}) = 1$.

Démonstration. On a vu que $\mathcal{L}(1, A_k) = \mathcal{L}(2, A_k) = \frac{1}{3}$,
or $\int_{M^1} \mathcal{L}(1, M^1) = \mathcal{L}(1, A_0) + \mathcal{L}(1, A_1) + \mathcal{L}(1, A_2)$ et
$\int_{M^2} \mathcal{L}(2, M^2) = \mathcal{L}(2, A_0) + \mathcal{L}(2, A_1) + \mathcal{L}(2, A_2)$.
Donc $\int_{M^1} \mathcal{L}(1, M^1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ et de même $\int_{M^2} \mathcal{L}(2, M^2) = 1$.
Or $\sigma(M/\mathcal{F}) = \frac{1}{3}(\int_M \mathcal{L}(0, M) + \int_{M^1} \mathcal{L}(1, M^1) + \int_{M^2} \mathcal{L}(2, M^2))$,
donc $\sigma(M/\mathcal{F}) = \frac{1}{3}(1 + 1 + 1) = 1$. □

Remarque. Ici on a $\sigma(M/\mathcal{F}) = 1 = \sigma(T)$.
On peut retrouver ce résultat par une autre méthode :
comme $H^2_+(T) = \mathbb{C}$ et $H^2_-(T) = \{0\}$ on a $H^2_+(T)^G = \mathbb{C}$ et $H^2_-(T)^G = \{0\}$.
Donc $\sigma(M/\mathcal{F}) = \dim H^2_+(T)^G - \dim H^2_-(T)^G = 1$.

Exemple 14. On note $\mathbb{H}$ le corps des quaternions. On peut voir $\mathbb{H}$ comme l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, où a et b vérifient $|a|^2 + |b|^2 = 1$. On note $G = SU(2)$. Le groupe G est isomorphe à $\{q \in \mathbb{H}/|q| = 1\}$. On considère le feuilletage par suspension $B \times T$ où $T = \mathbb{H}P_1$ et $G = SU(2)$ agit sur T par

$$g.[q_0, q_1] = [g.q_0, q_1].$$

Le calcul de la signature basique se ramène au calcul de l'indice de l'opérateur de signature sur T restreint aux formes G-invariantes D^G_+.

Proposition 85. On note $A_0 = [0, 1]$ et $A_1 = [1, 0]$. Soit $g \in G\backslash\{1\}$, alors la variété de points fixes de g est $M^g = \{A_0\} \cup \{A_1\}$. On a donc $M^G = \{A_0\} \cup \{A_1\}$.

Démonstration. On suppose que $g.[q_0, q_1] = [q_0, q_1]$.
Donc $gq_0 = \lambda q_0, q_1 = \lambda q_1$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Donc $(g - \lambda)q_0 = 0, (1 - \lambda)q_1 = 0$.
Donc $g = \lambda, q_1 = 0$ ou $q_0 = 0, \lambda = 1$.
Donc les points fixes sont $[q_0, 0]$ et $[0, q_1]$, c'est-à-dire $[0, 1]$ et $[1, 0]$. □

Rappel. Soit G un groupe de Lie compact connexe et $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction continue qui vérifie $f(gtg^{-1}) = f(t)$, alors

$$\int_G f(g)dg = \frac{1}{|W|} \int_T \det((I - Ad(g^{-1})_{|\mathfrak{g}/\mathfrak{t}})f(t)dt$$

où W désigne le groupe de Weyl de G, T le tore maximal de G, et $\mathfrak{g}, \mathfrak{t}$ leur algèbre de Lie respective.

Démonstration. Voir [Far06] par exemple. □

Rappel. Le tore de $SU(2)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$. Donc le tore de $SU(2)$ est isomorphe à S^1.
Le groupe de Weyl de $SU(2)$ est le groupe des permutations $\mathcal{S}_2$.

Démonstration. Voir [Far06] par exemple. □

Proposition 86. La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est alors donnée par

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \int_{M^g} \mathcal{L}(g)\phi(g)dg$$

où $\phi(g) = \det(I - Ad(g^{-1})_{|su(2)/s^1})$, s^1 désigne l'algèbre de Lie de S^1 et $su(2)$ désigne l'algèbre de Lie de $SU(2)$.
En particulier

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \frac{1}{2} \int_{S^1} (\mathcal{L}(g, A_0) + \mathcal{L}(g, A_1))\phi(g)dg$$

où $\mathcal{L}(g, A_0)$ et $\mathcal{L}(g, A_1)$ se calculent par la formule d'Atiyah-Segal-Singer.

Démonstration. Par la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature on a

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \int_{SU(2)} \int_{M^g} \mathcal{L}(g)dg = \int_{SU(2)} \mathrm{ind}^G(D)(g)dg$$

où D désigne l'opérateur de signature sur T.
Or $\mathrm{ind}^G(D)(g) = \chi_V(g) - \chi_{V'}(g)$ où $\chi_V(g)$ est le caractère de la représentation $\ker D$ et $\chi_{V'}(g)$ est le caractère de la représentation $\ker D^*$.
Comme le caractère d'une représentation est une fonction centrale on a que $\mathrm{ind}^G(D)$ vérifie $\mathrm{ind}^g(D)(tgt^{-1}) = \mathrm{ind}^G(D)(g)$.

Donc on peut appliquer la formule de Weyl à $\mathrm{ind}^G(D)$.
Comme $W = \mathcal{S}_2$, on a

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \frac{1}{|W|}\int_{S^1}\phi(g)\mathrm{ind}^G(D)(g)dg = \frac{1}{2}\int_{S^1}\int_{M^g}\phi(g)\mathcal{L}(g)dg.$$

□

Proposition 87. Soit $g \in S^1$, on écrit g sous la forme $g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, alors $mat(\tau_{g,*A_0}) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ et $mat(\tau_{g,*A_1}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, où τ_g est le difféomorphisme sur T induit par g.

Démonstration. On écrit $[1, q]$ sous la forme $[1, 0, \alpha, \beta], \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
On a $g([1, 0, z_1, z_2]) = [e^{i\theta}, 0, z_1, z_2] = [1, 0, e^{-i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2]$.
Or l'application $[1, 0, z_1, z_2] \mapsto (z_1, z_2)$ est une carte de T,
donc $mat(\tau_{g,*A_0}) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

On a $g([z_1, z_2, 1, 0]) = [e^{i\theta}z_1, e^{-i\theta}z_2, 1, 0]$, donc $mat(\tau_{g,*A_1}) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

□

Remarque. On remarque G préserve l'orientation.

Proposition 88. Soit $g \in S^1\backslash\{1\}$, on a $\mathcal{L}(g, A_0) = \mathrm{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$ et
$\mathcal{L}(g, A_1) = -\mathrm{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$.

Démonstration. On applique la formule d'Atiyah-Segal-Singer pour la G-signature, $\mathcal{L}(g, A_0) = 2^0\left(i\tan(\frac{-\theta}{2})\right)^2 = -\mathrm{cotan}^2(\frac{-\theta}{2})$.
Et $\mathcal{L}(g, A_1) = 2^0(i\tan(\frac{\theta}{2}))^{-1}(i\tan(\frac{-\theta}{2}))^{-1} = \mathrm{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$. □

Corollaire 12. La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est donnée par $\sigma(M/\mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. On a

$$\sigma(M/\mathcal{F}) = \mathrm{ind}(D^G_+) = \frac{1}{2}\int_{S^1}(\mathcal{L}(g, A_0) + \mathcal{L}(g, A_1))\phi(g)dg,$$

et $\mathcal{L}(g, A_0) + \mathcal{L}(g, A_1) = -\mathrm{cotan}^2(\frac{-\theta}{2}) + \mathrm{cotan}^2(\frac{\theta}{2})$.
Donc $\sigma(M/\mathcal{F}) = 0$. □

Remarque. Ici on a $\sigma(M/\mathcal{F}) = 0 = \sigma(T)$.
On peut retrouver ce résultat par une autre méthode :
comme $\mathbb{H}P_1 \cong S^4$ on a $H^2_+(T) = \{0\}$ et $H^2_-(T) = \{0\}$,
donc $H^2_+(T)^G = \{0\}$ et $H^2_-(T)^G = \{0\}$.
Donc $\sigma(M/\mathcal{F}) = \dim H^2_+(T)^G - \dim H^2_-(T)^G = 0$.

4.7.2 Exemples de calculs d'indice de l'opérateur de Dolbeault basique

Exemple 15. On considère le feuilletage par suspension où
$B = S^1, T = \mathbb{C}P_2$. Le groupe fondamental de B est alors $\mathbb{Z}$, on définit le morphisme de groupe $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ par $1 \mapsto 1$ où 1 agit sur T par

$$1.[z_0, z_1, z_2] = [z_1, z_2, z_0].$$

On note $G = \mathbb{Z}_3$ et on reprend les notations de l'exemple 13.
Comme dans le cas de l'opérateur de signature basique, l'opérateur de Dolbeault basique D_B^{Dol} est conjugué à l'opérateur de Dolbeault sur T restreint aux formes G-invariantes D_G^{Dol}.
Le calcul de $\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol})$ se ramène donc au calcul de l'indice de D_G^{Dol}.
On appliquera donc la formule de Lefschetz holomorphe (théorème 9 page 28) et on prendra ici pour fibré vectoriel le fibré trivial $E = T \times \mathbb{C}$.
On notera $\mathrm{ind}^G(D^{Dol})(g) = Dol(g, T^g)$.

Proposition 89. L'indice de l'opérateur de Dolbeault basique est donné par :

$$\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \frac{1}{3}\left(\int_M Dol(0, M) + \int_{M^1} Dol(1, M^1) + \int_{M^2} Dol(2, M^2)\right),$$

où $\displaystyle\int_M Dol(0, M) = \mathrm{ind}(D^{Dol}) = \chi(T, E)$ et $\displaystyle\int_{M^1} Dol(1, M^1)$ et $\displaystyle\int_{M^2} Dol(2, M^2)$ se calculent par la formule de Lefschetz holomorphe.
De plus $\displaystyle\int_{M^1} Dol(1, M^1) = \sum_{k=0}^{2} Dol(1, A_k)$ et $\displaystyle\int_{M^2} Dol(2, M^2) = \sum_{k=0}^{2} Dol(2, A_k)$.

Démonstration. On sait que $\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \mathrm{ind}(D_G^{Dol})$,
il suffit alors d'appliquer le théorème de Lefschetz holomorphe.
Le calcul des points fixes a été fait précédemment (voir proposition 81 page 81). □

Proposition 90. On a $Dol(1, A_k) = \dfrac{1}{3}$ et $Dol(2, A_k) = \dfrac{1}{3}$.

Démonstration. La variété $\{A_k\}$ est de dimension 0, donc selon la formule de Lefschetz holomorphe on a

$$\begin{aligned} Dol(1, A_k) &= \frac{1}{\det(1 - g_{|(N^g)^*})} \\ &= ((1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})(1 - e^{i\frac{4\pi}{3}}))^{-1} \\ &= (1 - e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1)^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De même $Dol(2, A_k) = \dfrac{1}{3}$. □

Proposition 91. L'indice de l'opérateur de Dolbeault basique est donné par :

$$\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \frac{1}{3}\chi(T,E) + \frac{2}{3}.$$

Démonstration. Au vue des résultats précédents on a :
$3\mathrm{ind}_B(\Delta_B'') = \chi(T,E) + 3 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3}$. □

Exemple 16. On considère le feuilletage par suspension où
$B = S^1, T = \mathbb{C}P_3$. Le groupe fondamental de B est alors $\mathbb{Z}$, on définit le morphisme de groupe $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$ par $1 \mapsto 1$ où 1 agit sur T par

$$1.[z_0,z_1,z_2,z_3] = [z_1,z_2,z_3,z_0].$$

On note $G = \mathbb{Z}_4$. Pour calculer l'indice de l'opérateur de Dolbeault basique, on se ramène au calcul de l'indice de l'opérateur de Dolbeault sur T restreint aux formes G-invariantes D_G^{Dol}.
On appliquera donc la formule de Lefschetz holomorphe et on prendra ici pour fibré vectoriel le fibré trivial $E = T \times \mathbb{C}$.

Proposition 92. On note $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $A_0 = [1,1,1,1]$, $A_1 = [1, e^{i\theta}, -1, e^{3i\theta}]$, $A_2 = [1,-1,1,-1]$, $A_3 = [1, e^{3i\theta}, -1, e^{i\theta}]$.
Alors la variété de points fixes associée à 1 est : $T^1 = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$.

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration de la proposition 81 page 81. □

Remarque. Comme 1 engendre G on a $T^G = T^1 = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$.

Proposition 93. La variété de points fixes associée à 2 est $T^2 = F_1 \cup F_2$ où
$F_1 = \{[z_1,z_2,z_1,z_2]/(z_1,z_2) \neq (0,0)\}$ et
$F_2 = \{[z_1,-z_2,-z_1,z_2]/(z_1,z_2) \neq (0,0)\}$.

Démonstration. On suppose que $2.[z_0,z_1,z_2,z_3] = [z_0,z_1,z_2,z_3]$.
Donc $z_2 = \lambda z_0, z_3 = \lambda z_1, z_0 = \lambda z_2, z_1 = \lambda z_3$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$,
et $z_2 = \lambda z_0, z_3 = \lambda^2 z_3, z_0 = \lambda^2 z_0, z_1 = \lambda z_3$,
donc $z_0 \neq 0, \lambda^2 = 1, z_2 = \lambda z_0, z_1 = \lambda z_3$
ou bien $z_0 = 0, z_2 = 0, \lambda^2 = 1, z_1 = \lambda z_3$.
Donc $[z_0,z_1,z_2,z_3]$ est de la forme $[z_0,z_1,\lambda z_0,\lambda z_1]$ avec $(z_0,z_1) \neq (0,0)$ et $\lambda^2 = 1$.
D'où le résultat. □

Remarque. (i) On note $H = \mathbb{Z}_2$, le sous-groupe de G engendré par 2 est isomorphe à H, donc $T^H = T^2$.
(ii) On a $F_1 \cong \mathbb{C}P_1$ et $F_2 \cong \mathbb{C}P_1$.

Proposition 94. On note $C = \tau_{1,*A_k}$, alors le spectre de C est $\{-1, e^{i\theta}, e^{3i\theta}\}$. De même le spectre de $\tau_{3,*A_k}$ est $\{-1, e^{i\theta}, e^{3i\theta}\}$.

Démonstration. On a $X^4 - 1$ annule C. Si λ est valeur propre de C, alors $\lambda^4 = 1$.
Or 1 n'est pas valeur propre de C, donc $\sigma(C) \subset \{-1, e^{i\theta}, e^{3i\theta}\}$.
Après calcul on a, $mat(\tau_{1,*A_1}) = \begin{pmatrix} -1 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $tr(mat(\tau_{1,*A_1})) = -1$ et $\det(mat(\tau_{1,*A_1})) = -1$.
Donc $\sigma(\tau_{1,*A_1}) = \{-1, e^{i\theta}, e^{3i\theta}\}$ (si une valeur propre avait une multiplicité ≥ 2, on trouverait une autre valeur pour la trace et le déterminant).
Après calcul on a, $mat(\tau_{1,*A_1}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $tr(mat(\tau_{1,*A_1})) = -1$ et $\det(mat(\tau_{1,*A_1})) = -1$.
Donc $\sigma(\tau_{1,*A_1}) = \{-1, e^{i\theta}, e^{3i\theta}\}$.
Après calcul on a, $mat(\tau_{1,*A_1}) = \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $tr(mat(\tau_{1,*A_1})) = -1$ et $\det(mat(\tau_{1,*A_1})) = -1$.
Donc $\sigma(\tau_{1,*A_1}) = \{-1, e^{i\theta}, e^{3i\theta}\}$. □

Proposition 95. L'indice de l'opérateur de Dolbeault basique est donné par :

$$\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \frac{1}{4}\left(\int_M Dol(0,M) + \int_{M^1} Dol(1,M^1) + \int_{M^2} Dol(2,M^2) + \int_{M^3} Dol(3,M^3)\right)$$

où $\int_M Dol(0,M) = \mathrm{ind}(D^{Dol}) = \chi(T,E)$ et $\int_{M^1} Dol(1,M^1)$, $\int_{M^2} Dol(2,M^2)$ et
$\int_{M^3} Dol(3,M^3)$ se calculent par la formule de Lefschetz holomorphe.
De plus $\int_{M^1} Dol(1,M^1) = \sum_{k=0}^{3} Dol(1,A_k)$, $\int_{M^3} Dol(3,M^3) = \sum_{k=0}^{3} Dol(3,A_k)$ et
$\int_{M^2} Dol(1,M^2) = \int_{F_1} Dol(2,F_1) + \int_{F_2} Dol(2,F_2)$.

Démonstration. On sait que $\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \mathrm{ind}(D_G^{Dol})$,
il suffit alors d'appliquer le théorème de Lefschetz holomorphe.
Le calcul des points fixes a été fait précédemment. □

Proposition 96. On a $Dol(1,A_k) = \frac{1}{4}$ et $Dol(3,A_k) = \frac{1}{4}$.

Démonstration. La variété $\{A_k\}$ est de dimension 0, donc selon la formule de Lefschetz holomorphe on a

$$\begin{aligned} Dol(1, A_k) &= \frac{1}{\det(1 - g_{|(N^g)^*})} \\ &= ((1+1)(1-e^{i\theta})(1-e^{3i\theta}))^{-1} \text{ où } \theta = \frac{2\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}(1+i-i+1)^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

De même $Dol(3, A_k) = \frac{1}{4}$. □

Proposition 97. On a $\int_{F_1} Dol(2, F_1) = -\frac{1}{4}$ et $\int_{F_2} Dol(2, F_2) = -\frac{1}{4}$.

Démonstration. On applique la formule de Lefschetz holomorphe.
On note N le fibré normal à F_1.
Le polynôme $X^2 - 1$ annule $\tau_{2,*}$, donc le spectre de $\tau_{2,*}$ est contenu dans $\{-1, 1\}$, et la seule valeur propre de $\tau_{2,*}$ agissant sur N est -1.
Donc $\det(1 - \tau_{2,*})_{|N} = (1+1)(1+1) = 4$.
Le fibré E est trivial, donc $ch(E_{|F_1}) = 1$.
Donc $\int_{F_1} Dol(2, F_1) = \int_{F_1} \frac{\mathcal{U}^{-1}(N) td(F_1)}{4}$.
Or $F_1 = \mathbb{C}P_1$ et $H^k(\mathbb{C}P_1) = \{0\}$ si $k \geq 3$.
Par définition $td(F_1) = td(\mathbb{C}P_1) = 1 + Td_1(\mathbb{C}P_1) = 1 + \frac{1}{2}c_1(\mathbb{C}P_1)$.
On notera η_k le fibré tautologique au-dessus de $\mathbb{C}P_k$,
on a $c_1(T\mathbb{C}P_1) = -2c_1(\eta_1)$ (voir [MS74]). Donc $td(\mathbb{C}P_1) = 1 - c_1(\eta_1)$.
Or $(T\mathbb{C}P_3)_{|\mathbb{C}P_1} = T\mathbb{C}P_1 \oplus N$, donc $i^*(T\mathbb{C}P_3) = T\mathbb{C}P_1 \oplus N$ où $i : \mathbb{C}P_1 \to \mathbb{C}P_3$ est l'inclusion.
Donc $\mathcal{U}^{-1}(i^*(T\mathbb{C}P_3)) = \mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_1)\mathcal{U}^{-1}(N)$,
et par conséquent $\mathcal{U}^{-1}(N) = (\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_1))^{-1} i^*(\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_3))$.
Or $T\mathbb{C}P_1$ est un fibré en droites complexes au-dessus de $\mathbb{C}P_1$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_1) = &= \left(\frac{1 - e^{-x_1 - i\pi}}{1 - e^{-i\pi}}\right)^{-1} \text{ où } x_1 = c_1(T\mathbb{C}P_1) \\ &= 2(1 + e^{-x_1})^{-1} \\ &= 2(2 - x_1)^{-1} \\ &= (1 - \frac{1}{2}x_1)^{-1} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x_1 \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_1))^{-1} = 1 - \frac{1}{2}x_1$.
Calculons $\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_3)$.
Rappelons qu'on a $T\mathbb{C}P_3 \oplus \eta_3 \cong \eta_3^* \oplus ... \oplus \eta_3^*$ (voir [MS74]).
Donc $\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_3) = (\mathcal{U}^{-1}(\eta_3^*))^4(\mathcal{U}^{-1}(\eta_3))^{-1}$.
Par un calcul similaire au calcul précédent on a $(\mathcal{U}^{-1}(\eta_3))^{-1} = 1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_3)$.
De plus

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}(\eta_3^*) &= (\frac{1 - e^{-c_1(\eta_3^*) - i\theta}}{1 - e^{-i\theta}})^{-1} \\
&= 2(1 + e^{c_1(\eta_3)})^{-1} \\
&= 2(2 + c_1(\eta_3))^{-1} \\
&= (1 + \frac{1}{2}c_1(\eta_3))^{-1} \\
&= 1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_3)
\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{U}^{-1}(\eta_3^*))^4 = (1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_3))^4 = 1 - \frac{4}{2}c_1(\eta_3) = 1 - 2c_1(\eta_3)$.
Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_3) &= (1 - 2c_1(\eta_3))(1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_3)) \\
&= 1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_3) - 2c_1(\eta_3) \\
&= 1 - \frac{5}{2}c_1(\eta_3)
\end{aligned}$$

Donc $i^*(\mathcal{U}^{-1}(T\mathbb{C}P_3)) = 1 - \frac{5}{2}c_1(\eta_1)$.
Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}(N) &= (1 + 2c_1(\eta_1))(1 - \frac{5}{2}c_1(\eta_1)) \\
&= 1 + 2c_1(\eta_1) - \frac{5}{2}c_1(\eta_1) \\
&= 1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_1)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{-1}(N)td(F_1) &= (1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_1))(1 - c_1(\eta_1)) \\
&= 1 - \frac{1}{2}c_1(\eta_1) - c_1(\eta_1) \\
&= 1 - \frac{3}{2}c_1(\eta_1)
\end{aligned}$$

Donc $\int_{F_1} Dol(2, F_1) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{C}P_1} -\frac{3}{2} c_1(\eta_1) = \frac{3}{8}$.
De même $\int_{F_2} Dol(2, F_2) = \frac{3}{8}$. □

Proposition 98. On a $\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \frac{1}{4}\chi(T, E) + \frac{5}{16}$.

Démonstration. Au vu des résultats précédents on a,
$\mathrm{ind}_B(D_B^{Dol}) = \frac{1}{4}(\mathrm{ind}(D^{Dol}) + 1/4 + 1/4 + 3/8 + 3/8)$. □

Chapitre 5

Invariance par homotopie feuilletée de la signature basique

Nous allons montrer à l'aide d'un "lemme de Poincaré basique" que la signature basique est un invariant d'homotopie feuilletée.

Proposition 99. Soient $(N, \mathcal{F}')$ une variété feuilletée vérifiant les mêmes conditions et $f : (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{F}')$ une application feuilletée, alors $f^*(\Omega^*(N/\mathcal{F}'))$ est inclus dans $\Omega^*(M/\mathcal{F}))$ et f induit une application linéaire

$$f^* : (H^*(N/\mathcal{F}')) \to H^*(M/\mathcal{F})).$$

Démonstration. Soient $\omega \in \Omega^*(N/\mathcal{F}')$ et $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$,
on a $i_V(f^*(\omega))_x = i_{f_{*x}(V_x)}(\omega),\ \forall x \in M$, or $f_*(T\mathcal{F}) \subset (T\mathcal{F}')$,
donc $f_{*x}(V_x) \in T_{f(x)}\mathcal{F}'$.
Or $\omega \in \Omega^*(N/\mathcal{F}')$, donc $i_{f_{*x}(V_x)}(\omega) = 0,\ \forall x \in M$.
De même on a $i_V(df^*(\omega)) = 0$, donc $f^*(\omega)$ est basique. □

Définition 69. Soit $t \in \mathbb{R}$, on note $j_t : M \to \mathbb{R} \times M$, $x \mapsto (t, x)$
et $I_0^1 : \Omega^*(\mathbb{R} \times M) \to \Omega^*(M)$, $\omega \mapsto \displaystyle\int_0^1 j_t^*(\omega)dt$.

Proposition 100. On note $\pi_2 : \mathbb{R} \times M \to M$ la deuxième projection et on munit $\mathbb{R} \times M$ du feuilletage $\pi_2^*(T\mathcal{F})$ où $\pi_2^*(T\mathcal{F})_{(t,x)} = T_x\mathcal{F}$.
On a $I_0^1(\Omega^*(\mathbb{R} \times M/\pi_2^*(T\mathcal{F})) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Montrons que $j_t : (M, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R} \times M, \pi_2^*(T\mathcal{F}))$ est feuilletée.
Soit $x \in M$ et $j_{t*x} : T_xM \to T_{(t,x)}\mathbb{R} \times M$, l'application induite par j_t. Comme $T_{(t,x)}\mathbb{R} \times M = T_t\mathbb{R} \times T_xM = \mathbb{R} \times T_xM$, et j_{t*x} est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Id_{T_xM} \end{pmatrix}$, donc $V_x \in T_x\mathcal{F}$ entraîne que $j_{t*x}(V_x) \in T_x\mathcal{F}$. Ainsi $j_{t*}(T\mathcal{F}) \subset \pi_2^*(T\mathcal{F}))$,

c'est-à-dire j_t est feuilletée.
Soit $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R} \times M/\pi_2^*(T\mathcal{F}))$, donc $j_t^*(\omega) \in \Omega^*(M/\mathcal{F})$.
Soit $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$, on a $i_V \left(\int_0^1 j_t^*(\omega)dt \right) = \int_0^1 i_V(j_t^*(\omega))dt = 0$
car $j_t^*(\omega)$ est $\mathcal{F}$-basique,
et $i_V \circ d \left(\int_0^1 j_t^*(\omega)dt \right) = i_V \left(\int_0^1 dj_t^*(\omega)dt \right) = \int_0^1 i_V \circ d(j_t^*(\omega))dt = 0$
car $j_t^*(\omega)$ est $\mathcal{F}$-basique.
Donc $I_0^1(\omega)$ est $\mathcal{F}$-basique. □

Proposition 101. Si $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R}\times M)$, on a $j_1^*(\omega) - j_0^*(\omega) = \int_0^1 j_s^* \left(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(\omega) \right) ds$.

Démonstration. Si $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R} \times M)$, par linéarité on peut supposer
que $\omega = f(t,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} + g(t,x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} & j_s^*(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(f(t,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k})) \\ &= j_s^* \left(\frac{d}{dt} f(t,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} + \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}) \right) \\ &= \frac{d}{dt}_{|s} f(t,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Or $\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(g(t,x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}})$ est une forme de bidegré $(1, k-1)$,
c'est-à-dire $\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(g(t,x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}) \in \Omega^{(1,k-1)}(\mathbb{R} \times M)$,
ainsi $j_s^*(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(g(t,x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}})) \in \Omega^{(1,k-1)}(M) = \{0\}$,
d'où $j_s^*(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(g(t,x)dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}})) = 0$.
Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_0^1 j_s^*(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(\omega))ds &= \int_0^1 \frac{d}{dt}_{|s} f(t,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} ds \\ &= f(1,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} - f(0,x)dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \\ &= j_1^*(\omega) - j_0^*(\omega). \end{aligned}$$

□

Proposition 102. Soient $(N, \mathcal{F}')$ une variété feuilleté vérifiant les mêmes hypothèses que $(M, \mathcal{F})$ et $\phi, \psi : M \to N$ des applications feuilletées homotopes, c'est-à-dire qu'il existe $H : \mathbb{R} \times M \to N$ une application C^∞ telle que

(i) $H(0,x) = \phi(x)$
(ii) $H(1,x) = \psi(x)$
(iii) $\forall t \in \mathbb{R}, H(t,.)$ est feuilletée.

Alors l'application $h : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ définie par $h = I_0^1 \circ i_{\frac{d}{dt}} \circ H^*$ vérifie $h(\Omega^*(N/\mathcal{F}')) \subset \Omega^*(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Montrons que $H : (\mathbb{R}\times M, \pi_2^*(T\mathcal{F})) \to (N, \mathcal{F}')$ est feuilletée.
Soit $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$, montrons que $H_{*(t,x)}(\pi_2^*(T\mathcal{F})_{(t,x)}) \subset T_{H(t,x)}\mathcal{F}'$,
c'est-à-dire $H_{*(t,x)}(T_x\mathcal{F}) \subset T_{H(t,x)}\mathcal{F}'$.
Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ H(t,.)$ est feuilletée, d'où $\forall t \in \mathbb{R},\ H(t,.)_{*x}(T_x\mathcal{F}) \subset T_{H(t,x)}\mathcal{F}'$,
donc $H_{*(t,x)}(T_x\mathcal{F}) \subset T_{H(t,x)}\mathcal{F}'$ et H est feuilletée.
Soit $\omega \in \Omega^*(N/\mathcal{F}')$, donc $H^*(\omega) \in \Omega(\mathbb{R} \times M/\pi_2^*(T\mathcal{F}))$.
Montrons que $i_{\frac{d}{dt}}(H^*(\omega)) \in \Omega(\mathbb{R} \times M/\pi_2^*(T\mathcal{F}))$.
Soit $Y \in \Gamma(\pi_2^*(T\mathcal{F}))$,
on a $i_Y \circ i_{\frac{d}{dt}}(H^*(\omega)) = -i_{\frac{d}{dt}} \circ i_Y(H^*(\omega)) = 0$ car $H^*(\omega)$ est $\pi_2^*(T\mathcal{F})$-basique.
Et

$$\begin{aligned} i_Y \circ d \circ i_{\frac{d}{dt}}(H^*(\omega)) &= i_Y \circ (\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}} - i_{\frac{d}{dt}} \circ d)(H^*(\omega)) \\ &= i_Y(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(H^*(\omega))) - i_Y \circ i_{\frac{d}{dt}}(d(H^*(\omega)) \\ &= (\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}} \circ i_Y - i_{[\frac{d}{dt},Y]})(H^*(\omega)) + i_{\frac{d}{dt}} \circ i_Y(dH^*(\omega)) \\ &= -i_{[\frac{d}{dt},Y]}(H^*(\omega)) \end{aligned}$$

car $H^*(\omega)$ est $\pi_2^*(T\mathcal{F})$-basique.
Or $Y \in \Gamma(\pi_2^*(T\mathcal{F}))$, donc $\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times M,\ Y_{(t,x)} \in \pi_2^*(T\mathcal{F})_{(t,x)} = T_x\mathcal{F}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ Y_{(t,x)} \in T_x\mathcal{F}$. Donc $[\frac{d}{dt}, Y] = 0$ et $i_{\frac{d}{dt}}(H^*(\omega))$ est $\pi_2^*(T\mathcal{F})$-basique.
Or I_0^1 préserve les formes basiques, donc $h(\omega)$ est $\mathcal{F}$-basique. □

Proposition 103. Sous les mêmes hypothèses, on a $\phi^* - \psi^* = h \circ d + d \circ h$.

Démonstration. Soit $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R} \times M)$,
On a $j_1(H^*(\omega)) - j_0(H^*(\omega)) = \int_0^1 j_t^*(\mathcal{L}_{\frac{d}{dt}}(H^*\omega))dt$, $\psi = j_1 \circ H^*$ et
$\phi = j_0 \circ H^*$, donc

$$\begin{aligned} \psi^*(\omega) - \phi^*(\omega) &= \int_0^1 j_t^* \circ i_{\frac{d}{dt}} \circ d(H^*\omega) + j_t^* \circ d \circ i_{\frac{d}{dt}}(H^*\omega)dt \\ &= \int_0^1 j_t^* \circ i_{\frac{d}{dt}} \circ H^*(d\omega)dt + \int_0^1 d \circ j_t^* \circ i_{\frac{d}{dt}}(H^*\omega)dt \\ &= h \circ d(\omega) + d \circ h(\omega). \end{aligned}$$

□

Corollaire 13. Sous les mêmes hypotheses, on a $\phi^* = \psi^*$ sur $H^*(N/\mathcal{F}')$.

Proposition 104. Soit $f : (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{F}')$ une équivalence d'homotopie feuilletée, c'est-à-dire :

(i) f est feuilletée
(ii) il existe $g : (N, \mathcal{F}') \to (M, \mathcal{F})$ une application feuilletée telle que $f \circ g \sim Id_N$ et $g \circ f \sim Id_M$ parmi les applications feuilletées.
Alors f induit un isomorphisme $f^* : H^*(N/\mathcal{F}') \to H^*(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Sur $H^*(M/\mathcal{F})$ on a $g^* \circ f^* = Id$,
et sur $H^*(N/\mathcal{F}')$ on a $f^* \circ g^* = Id$,
donc $f^* : H^*(N/\mathcal{F}') \to H^*(M/\mathcal{F})$ est un isomorphisme. □

On suppose désormais que $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable
et $q = 4l$.

Définition 70. Soit $f : (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{F}')$ une application feuilletée.
On dit que f préserve les orientations transverses si $f^*([\nu]) = \lambda[\nu']$ avec $\lambda > 0$.

Lemme 9. Si $f : (M, \mathcal{F}) \to (N, \mathcal{F}')$ est une équivalence d'homotopie feuilletée préservant les orientations transverses alors $\forall \omega' \in Z^q(N/\mathcal{F}')$,
on a

$$\left\langle f^*(\omega'), \nu \right\rangle_M = \lambda \left\langle \omega', \nu' \right\rangle_N .$$

Démonstration. On sait que f induit un isomorphisme
$f^* : H^*(N/\mathcal{F}') \to H^*(M/\mathcal{F})$,
donc $f^*([\nu']) \in H^q(M/\mathcal{F}) = \mathbb{R}[\nu]$ et $f^*([\nu']) = \lambda[\nu]$ avec $\lambda > 0$,
ainsi $f^*(\nu') = \lambda\nu + \alpha$ où $\alpha \in d\Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$.
On a $\omega' \in Z^q(N/\mathcal{F}')$, donc $[\omega'] \in H^q(N/\mathcal{F}') = \mathbb{R}[\nu']$,
donc $\omega' = \mu\nu' + \beta$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\beta \in d\Omega^{q-1}(N/\mathcal{F}')$.
Par conséquent $f^*(\omega') = \mu f^*(\nu') + f^*(\beta)$, et

$$\begin{aligned}\left\langle f^*(\omega'), \nu \right\rangle_M &= \int_M (\mu f^*(\nu') + f^*(\beta)) \wedge *\nu \\ &= \mu \int_M f^*(\nu') \wedge \chi_{\mathcal{F}} + \int_M f^*(\beta) \wedge \chi_{\mathcal{F}}\end{aligned}$$

Or $f^*(\beta) \in d\Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$, donc $\displaystyle\int_M f^*(\beta) \wedge \chi_{\mathcal{F}} = 0$ (voir proposition 44).

Ainsi $\left\langle f^*(\omega'), \nu \right\rangle_M = \mu \displaystyle\int_M (\lambda\nu + \alpha) \wedge \chi_{\mathcal{F}} = \mu\lambda \int_M \nu \wedge \chi_{\mathcal{F}} + \mu \int_M \alpha \wedge \chi_{\mathcal{F}}$.

Or $\alpha \in d\Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$, donc comme précédemment $\displaystyle\int_M \alpha \wedge \chi_{\mathcal{F}} = 0$

et $\left\langle f^*(\omega'), \nu \right\rangle_M = \mu\lambda \displaystyle\int_M dvol_M = \mu\lambda$.

Or $\left\langle \omega', \nu' \right\rangle_N = \displaystyle\int_N (\mu\nu' + \beta') \wedge *\nu' = \mu \int_N \nu' \wedge \chi_{\mathcal{F}'} + \int_N \beta' \wedge \chi_{\mathcal{F}'}$.

Comme $\beta' \in d\Omega^{q-1}(N/\mathcal{F}')$, on a $\displaystyle\int_N \beta \wedge \chi_{\mathcal{F}'} = 0$.

Donc $\left\langle \omega', \nu' \right\rangle_N = \mu \displaystyle\int_N dvol_N = \mu$, d'où le résultat. □

Théorème 34. Sous les mêmes hypotheses, $\sigma(N/\mathcal{F}') = \sigma(M/\mathcal{F})$.

Démonstration. Soient $[\omega_1'], [\omega_2'] \in H^{2l}(N/\mathcal{F}')$,

$$\begin{aligned} Q_B(f^*[\omega_1'], f^*[\omega_2']) &= \int_M f^*(\omega_1' \wedge \omega_2') \wedge *\nu \\ &= \int_M f^*(\omega_1' \wedge \omega_2') \wedge \chi_{\mathcal{F}} \\ &= \left\langle f^*(\omega_1' \wedge \omega_2'), \nu \right\rangle_M \\ &= \lambda \left\langle \omega_1' \wedge \omega_2', \nu' \right\rangle_N \\ &= \lambda \int_N \omega_1' \wedge \omega_2' \wedge *\nu' \\ &= \lambda Q_B'(\omega_1', \omega_2') \end{aligned}$$

avec $\lambda > 0$.
Donc $\sigma(Q_B') = \sigma({}^t f^* Q_B f^*) = \sigma(Q_B)$. □

Exemple 17. On considère le feuilletage par suspension $M = B \times T/\Gamma$ où $B = S^1$, $T = \mathbb{C}P_2$ et Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}_3$ et donné par l'action de $\mathbb{Z}$ sur $Isom(\mathbb{C}P_2)$ défini par $1.[z_0, z_1, z_2] = [z_1, z_2, z_0]$.
On considère également le feuilletage par suspension $M' = B' \times T'/\Gamma'$ où $B' = S^1$, $T' = S^4$ et Γ' est isomorphe à $\mathbb{Z}_3$ et donné par l'action de $\mathbb{Z}$ sur $Isom(\mathbb{C}P_2)$ défini par $1.(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_1, x_4)$.
La signature basique de $(M, \mathcal{F})$ est donnée par $\sigma(M/\mathcal{F}) = \sigma(T/\Gamma)$.
Comme $H^2_+(\mathbb{C}P_2) = \mathbb{R}$ et $H^2_-(\mathbb{C}P_2) = 0$,
on a $H^2_+(\mathbb{C}P_2)^\Gamma = \mathbb{R}$ et $H^2_-(\mathbb{C}P_2)^\Gamma = 0$. Donc $\sigma(M/\mathcal{F}) = 1$.
La signature basique de $(M', \mathcal{F}')$ est donnée par $\sigma(M'/\mathcal{F}') = \sigma(T'/\Gamma')$.
Comme $H^2(S^4) = \{0\}$, on a $\sigma(M'/\Gamma') = 0$.
On en déduit que les feuilletages $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ ne sont pas homotopiquement équivalents.

Problème ouvert. Dans [EKAN93], A. El-Kacimi et M. Nicolau montrent à l'aide de suites spectrales que la cohomologie basique est un invariant topologique. Il est surement possible de montrer que la signature basique est invariante par une homotopie feuilletée continue.

Chapitre 6

L'indice basique en tant qu'indice distributionnel

Dans l'article de 1974 [Ati], Atiyah étudie les opérateurs transversalement elliptiques par rapport à l'action d'un groupe de Lie compact. Il montre que de tels opérateurs admettent un indice en tant que distribution. La formule de N. Berline et M. Vergne permet alors de calculer cet indice ([BGV04, BV96b, BV96a]). Nous allons reprendre l'article d'Atiyah et l'adapter au cas d'un feuilletage muni d'une action de groupe de Lie compact respectant le feuilletage. Nous montrons qu'un opérateur transversalement elliptique par rapport au feuilletage et à l'action du groupe admet un indice basique en tant que distribution et étudions certaines propriétés de cet indice. Nous finissons par explorer le lien avec l'indice distributionnel classique d'Atiyah sur la variété basique.

6.1 Existence de l'indice distributionnel

Nous considérons toujours notre variété fermée M munie d'un feuilletage riemannien. Soit G un groupe de Lie compact.

Définition 71. On dit qu'une action $\tau : G \times M \to M$ est feuilletée si elle est lisse et si pour tout $g \in G$, $\tau_g = \tau(g, .)$ est une application feuilletée c'est-à-dire $\tau_{g*}(T\mathcal{F}) \subset (T\mathcal{F})$.

Dans la suite on suppose que l'action de G sur M est feuilletée et on munit M d'une structure riemannienne quasi-fibrée G-invariante.
On suppose de plus que la variété basique $W^\sharp$ associée à $(M, \mathcal{F})$ vérifie $\dim W^\sharp > 0$.

Lemme 10. Soit E un $\mathcal{F}$-fibré G-équivariant au-dessus de M. Alors l'action induite de G sur les sections de E, préserve les sections basiques de E.

Démonstration. On munit E d'une connexion basique ∇. Quitte à moyenner cette connexion, on peut supposer que ∇ est G-invariante.
Soient $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$, $g \in G$ et $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
On a $\nabla_V(g.\sigma) = g.\nabla_V(\sigma) = 0$ puisque σ est basique. D'où le résultat. □

Notation 12. Soient E et E' des $\mathcal{F}$-fibrés G-équivariant au-dessus de M et $D : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique G-invariant d'ordre m. On note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie de G. Si $Y \in \mathcal{G}$, on note Y^* le champ fondamental associé à Y.
Si $z \in M$, on notera $\Theta(z)$ l'orbite de z dans M. On note $T^*_G M$ le "fibré cotangent" à l'action de G sur M défini par :

$$T^*_G M = \{\xi \in T^*M,\ \xi(Y^*) = 0,\ \forall Y \in \mathcal{G}\}.$$

Notons que $T^*_G M$ n'est en général ni un fibré vectoriel topologique ni une variété.

Définition 72. On dit que D est $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique si
$\forall z \in M,\ \forall \gamma \in ((T^*_G M)_z \cap \nu^*_z \mathcal{F}) \backslash \{0\},\ \sigma(D)(z, \gamma)$ est inversible.

Remarque. On a $(T^*_G M)_z \cap \nu^*_z \mathcal{F} \cong (T_z\Theta(z) \oplus T_z\mathcal{F})^\perp$.

Notation 13. On notera $H^k(G)$ le k-ième espace de Sobolev sur G qui a été défini dans la première partie de cette thèse.

L'opérateur D est G-invariant et $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique, par conséquent $\ker D$ et $\ker D^*$ sont des représentations de G (pas forcément de dimension finies). On peut alors appliquer le théorème de Peter-Weyl et écrire le noyau de D comme une somme de représentations irréductibles unitaires :

$$\ker D = \oplus_{a \in \hat{G}} m_a V_a$$

où $(V_a)_{a \in \hat{G}}$ est un ensemble de représentants des représentations irréductibles unitaires du groupe G, et les entiers m_a sont les multiplicités qu'on peut calculer à partir du lemme de Schur.
On pose alors $\chi_{\ker D} = \sum_{a \in \hat{G}} m_a \chi_a$ où χ_a est le caractère de la représentation V_a. Nous allons voir que cette série est effectivement convergente en un certain sens. On exprime $\chi_{\ker D}$ comme une forme linéaire continue sur $C^\infty(G)$ définie par

$$\langle \chi_{\ker D}, \phi \rangle := \sum_{a \in \hat{G}} m_a \int_G \chi_a(g)\phi(g)dg =: \int_G \phi(g) tr(\pi_{\ker D}(g))dg$$

où $\pi_{\ker D}$ désigne la représentation de G dans $\ker D$. Avec ces hypothèses, nous pouvons énoncer :

Théorème 35. $\chi_{\ker D}$ est une distribution qui appartient à l'espace de Sobolev $H^{-\dim W^\sharp}(G)$.

Remarque. Par définition du caractère d'une représentation, $\chi_{\ker D}$ est une distribution centrale.

Nous allons utiliser plusieurs lemmes. Supposons d'abord que D est d'ordre $m = 2m'$. Soient $\{Y_1, ..., Y_k\}$ une base de $\mathcal{G}$ et Y_i^* les champs fondamentaux induits sur M. On munit E d'une connexion basique ∇ qu'on peut supposer G-invariante. On pose

$$\Delta = Id - \sum_{i=1}^{k} (\nabla_{Y_i^*})^2 : \Gamma(E) \to \Gamma(E).$$

Lemme 11. L'opérateur Δ est basique et G-invariant.

Démonstration. On désigne pour simplifier, lorsqu'aucune confusion n'est possible, par Y_i^* l'opérateur différentiel associé à Y_i agissant soit comme champ de vecteur sur les fonctions différentiables soit sur les sections différentiables de E via la connexion basique ∇, i.e. l'opérateur $\nabla_{Y_i^*}$. Un simple calcul montre que Y_i^* est un opérateur différentiel G-invariant.
Soient $V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$. Comme ∇ est basique, on a $R_\nabla(V, Y_i^*) = 0$. Donc $\nabla_V(\nabla_{Y_i^*}(\sigma)) = -\nabla_{Y_i^*}(\nabla_V(\sigma)) - \nabla_{[V,Y_i^*]}(\sigma)$.
Comme σ est basique, on a $\nabla_V(\sigma) = 0$. Comme l'action de G sur M est feuilletée, le champ de vecteurs Y_i^* est feuilleté. Donc $[V, Y_i^*]$ est tangent au feuilletage. Ainsi $\nabla_{[V,Y_i^*]}(\sigma) = 0$ et $\nabla_V(\nabla_{Y_i^*}(\sigma)) = 0$.
Ainsi Y_i^* induit un opérateur $Y_i^* : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E/\mathcal{F})$.
Soient (U, ϕ) une carte feuilletée de M de coordonnées $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q)$.
On peut écrire Y_i^* sous la forme $Y_i^* = \sum_{k=1}^{p} g_k(x,y)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{q} f_k(x,y)\frac{\partial}{\partial y_k}$.
Or $Y_i^*(y_k) = f_k(x,y)$ et $Y_i^*(y_k) = \lim_{t\to 0} \frac{y_k(exp((tY_i).z) - y_k(z)}{t}$.
L'action de G sur M est feuilletée, donc $\tau_{exp(tY_i)}$ envoie une feuille sur une autre feuille et la fonction $y_k(exp(tY_i).z)$ est indépendante des coordonnées x_i. Donc $f_k(x,y)$ est indépendante de x, et sur $\Gamma(E/\mathcal{F})$ l'opérateur $\nabla_{Y_i^*}$ s'écrit sous la forme $\sum_{k=1}^{q} f_k(y)\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_k}}$. C'est-à-dire $\nabla_{Y_i^*}$ est un opérateur différentiel basique. Donc Δ est un opérateur différentiel basique G-invariant. □

Lemme 12. On pose maintenant

$$A = (D, \Delta^{m'}) : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F}) \oplus \Gamma(E/\mathcal{F}),$$

A est un opérateur différentiel basique G-invariant d'ordre $m = 2m'$.
Alors le symbole $\sigma(A)(z, \gamma)$ est injectif si $\gamma \in \nu_z^*\mathcal{F}\backslash\{0\}$.

Démonstration. On utilise les notations précédentes et les notations introduites dans la notation 12.
On a $\sigma(A)(z,\gamma)(\eta) = (\sigma(D)(z,\gamma)(\eta), \sigma(\Delta^{m'})(z,\gamma)(\eta))$ et
$\nu_z^*\mathcal{F} = (\nu_z^*\mathcal{F} \cap (T_G^*M)_z) \oplus (\nu_z^*\mathcal{F} \cap T_z\Theta(z))$.
On écrit $\gamma = \alpha + \xi$ où $\alpha \in \nu_z^*\mathcal{F} \cap (T_G^*M)_z$ et $\xi \in \nu_z^*\mathcal{F} \cap T_z\Theta(z)$,
et $\sigma(\Delta^{m'})(z,\gamma) = \sigma(\Delta^{m'})(z,\alpha)$.
Supposons que $\alpha \neq 0$.
On a $\sigma(A)(z,\gamma)(\eta) = 0 \Rightarrow \sigma(D)(z,\gamma)(\eta) = 0$ et $\sigma(\Delta^{m'})(z,\gamma)(\eta) = 0$.
Donc $\eta = 0$ puisque $\sigma(\Delta^{m'})(z,\gamma)$ est injectif (le symboles de Δ se calcule comme dans le cas du laplacien usuel).
Si maintenant $\alpha = 0$, alors $\sigma(A)(z,\gamma)(\eta) = \sigma(D)(z,\gamma)(\eta) = 0$,
or D est $(G,\mathcal{F})$-transversalement elliptique, donc $\eta = 0$.
Donc $\sigma(A)(z,\gamma)$ est injectif si $\gamma \in \nu_z^*\mathcal{F}\backslash\{0\}$. □

Revenons à présent à la démonstration du théorème 35.

Démonstration du théorème 35. Avec les notations précédentes, l'opérateur $A^*A = D^*D + \Delta^{2m'} : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E/\mathcal{F})$ est un opérateur différentiel basique G-invariant d'ordre $4m' = 2m$. De plus, A^*A est $\mathcal{F}$-transversalement elliptique. On note

$$(\ker D)_\lambda = \{\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})/\ D(\sigma) = 0 \text{ et } \Delta(\sigma) = \lambda\sigma\}$$

et

$$(A^*A)_\lambda = \{\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})/\ A^*A(\sigma) = \lambda^{2m'}\sigma\}.$$

On pose $a_\lambda = \dim(\ker D)_\lambda$ et $b_\lambda = \dim(A^*A)_\lambda$.
On a $(\ker D)_\lambda \subset (A^*A)_\lambda$, donc $a_\lambda \leq b_\lambda < +\infty$ (puisque A^*A est $\mathcal{F}$-transversalement elliptique).
Selon le théorème 23 page 60 si $s > \dfrac{\dim W^\sharp}{4m'}$, l'opérateur $(A^*A)^{-s}$ est traçable et $tr(A^*A)^{-s} = \displaystyle\sum_{\lambda^{2m'} \in Sp(A^*A)} \frac{b_\lambda}{\lambda^{2m's}}$ où $Sp(A^*A)$ désigne le spectre de A^*A. L'espace $(\ker D)_\lambda$ est une représentation de dimension finie de G et on note $f_\lambda = \chi_{(\ker D)_\lambda}$ son caractère.
Comme G agit unitairement sur $(\ker D)_\lambda$, en diagonalisant $g \in G$, on obtient $|f_\lambda(g)| = |trg|_{(\ker D)_\lambda}| \leq a_\lambda \leq b_\lambda$.
Donc si $s > \dfrac{\dim W^\sharp}{2m'}$, $h = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp(\Delta)} \frac{f_\lambda}{\lambda^{m's}}$ est normalement convergente et h est donc une fonction continue.
On note encore $Y_1, ..., Y_k$ les champs de vecteurs sur G prolongés par translation à gauche de $Y_1, ..., Y_k \in \mathcal{G}$. On pose

$$\Delta_G = Id - \sum_{i=1}^{k} Y_i^2.$$

Nous montrons maintenant que $\Delta_G(f_\lambda)(g) = tr(\Delta g|_{(\ker D)_\lambda})$.
Il suffit pour cela de montrer que $Y_i(f_\lambda)(g) = tr(Y_i^* g_{|(KerD)_\lambda})$.
Soient $\sigma \in (\ker D)_\lambda$ et $x \in M$, alors on a

$$\begin{aligned}
(Y_i^* \circ \tau_g)(\sigma)_x &= Y_i^*(\tau_g(\sigma))_x \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^{tY_i}.(\tau_g(\sigma)_{e^{-tY_i}.x}) - \tau_g(\sigma)_x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^{tY_i}.(g.(\sigma_{(g^{-1}e^{-tY_i})}.x) - \tau_g(\sigma)_x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(e^{tY_i}g).(\sigma_{(g^{-1}e^{-tY_i})}.x) - \tau_g(\sigma)_x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\tau_{(e^{tY_i}g)}(\sigma)_x - \tau_g(\sigma)_x}{t}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $Y_i^* \circ \tau_g = \lim_{t\to 0} \dfrac{\tau_{(e^{tY_i}g)} - \tau_g}{t}$, et
$tr((Y_i^* \circ \tau_g)_{|(\ker D)_\lambda}) = \lim_{t\to 0} \dfrac{tr(\tau_{(e^{tY_i}g)|(\ker D)_\lambda}) - tr(\tau_{g|(\ker D)_\lambda})}{t}$.
Or e^{tY_i} est la courbe intégrale de Y_i. Donc

$$\begin{aligned}
Y_i(f_\lambda)(g) &= \lim_{t\to 0} \frac{e^{-tY_i}(f_\lambda)(g) - f_\lambda(g)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f_\lambda(e^{tY_i}g) - f_\lambda(g)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{tr(\tau_{(e^{tY_i}g)|(\ker D)_\lambda}) - tr(\tau_{g|(\ker D)_\lambda})}{t}.
\end{aligned}$$

Ainsi $Y_i(f_\lambda)(g) = tr(Y_i^* g_{|(KerD)_\lambda})$.
On déduit alors que $\forall g \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_G(f_\lambda)(g) &= tr(\Delta g|_{(\ker D)_\lambda}) \\
&= tr(g\Delta|_{(\ker D)_\lambda}) \\
&= \lambda tr(g|_{(\ker D)_\lambda}) \text{ car } \Delta = Id \text{ sur } (\ker D)_\lambda \\
&= \lambda f_\lambda(g)
\end{aligned}$$

Donc $\Delta_G^{m'}(f_\lambda) = \lambda^{m'} f_\lambda$, et $\chi_{\ker D} = \sum_{\lambda \in Sp(\Delta)} f_\lambda = \Delta_G'^{s}(h)$ où h a été définie précédemment est continue si $s > \dfrac{\dim W^\sharp}{2m'}$. Donc $\chi_{\ker D} \in H^{-\dim W^\sharp}(G)$.
Le résultat est donc vrai si D est d'ordre $m = 2m'$.
Si D est d'ordre m quelconque, on a D^*D est d'ordre $2m$, et on peut appliquer le résultat à D^*D. Comme $\ker D = \ker D^*D$, le résultat est alors vrai pour D. □

Définition 73. On note alors

$$\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D) = \chi_{\ker D} - \chi_{\ker D^*}$$

qu'on appelle indice distributionnel basique.

Remarque. Si on note $\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D)_\lambda = \chi_{(\ker D)_\lambda} - \chi_{(\ker D^*)_\lambda}$, alors

$$\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D) = \sum_{\lambda \in Sp(\Delta)} \mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D)_\lambda.$$

On note D_s le prolongement de D en tant qu'opérateur borné $D_s : H^s(M, E/\mathcal{F}) \to H^{s-m}(M, E'/\mathcal{F})$ et on note $\Gamma(E/\mathcal{F})_\lambda, H^s(M, E/\mathcal{F})_\lambda$ le noyau de l'opérateur $\Delta - \lambda Id$ dans $\Gamma(E/\mathcal{F})$ et $H^s(M, E/\mathcal{F})$ respectivement.

Corollaire 14. L'opérateur D induit un opérateur $D_\lambda : \Gamma(E/\mathcal{F})_\lambda \to \Gamma(E'/\mathcal{F})_\lambda$, et $(D_s)_\lambda = D_s|_{H^s(M,E/\mathcal{F})_\lambda}$ est un opérateur de Fredholm.
En notant $\mathrm{ind}((D_s)_\lambda) = \chi_{\ker(D_s)_\lambda} - \chi_{\ker(D_s^*)_\lambda}$, on a

$$\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D_s) = \sum_{\lambda \in Sp(\Delta)} \mathrm{ind}((D_s)_\lambda).$$

Et $\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D_s)$ est indépendant de s, plus précisément

$$\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D_s) = \mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D).$$

Démonstration. L'opérateur D est G-invariant, donc D et Δ commutent et D induit un opérateur $D_\lambda : \Gamma(E/\mathcal{F})_\lambda \to \Gamma(E'/\mathcal{F})_\lambda$.
Or $(D, \Delta - \lambda Id) : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E/\mathcal{F}) \oplus \Gamma(E'/\mathcal{F})$ a un symbole injectif.
Donc cet opérateur admet une paramétrix à gauche G-invariante notée T.
Comme T est G-invariant, T commute avec Δ et on peut restreindre T en un opérateur $T_\lambda : \Gamma(E'/\mathcal{F})_\lambda \to \Gamma(E/\mathcal{F})_\lambda$.
De la même manière $D^*_\lambda : \Gamma(E'/\mathcal{F})_\lambda \to \Gamma(E/\mathcal{F})_\lambda$ admet une paramétrix à droite. Donc D_λ s'étend en un opérateur de Fredholm $(D_s)_\lambda : H^s(M, E/\mathcal{F}) \to H^{s-m}(M, E'/\mathcal{F})$, et on sait alors que l'indice de $(D_s)_\lambda$ est indépendant de s. □

Remarque. Si D est un opérateur différentiel basique G-invariant, $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique et si de plus D commute avec l'action feuilletée d'un autre groupe de Lie compact H alors D est évidemment $(G \times H, \mathcal{F})$-transversalement elliptique. On peut alors écrire l'indice distributionnel de D sous la forme

$$\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(D) = \sum_{\alpha \in \hat{G}, \beta \in \hat{H}} c_{\alpha,\beta} \chi_\alpha \chi_\beta$$

où pour α fixé $c_{\alpha,\beta} = 0$ pour presque tout β.
On peut donc voir $\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(D)$ comme une application linéaire continue de $C^\infty(G)$ dans $C^\infty(H)$, définie par

$$\phi \mapsto \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\chi\beta \int_G \phi\chi\alpha dg.$$

6.2 Le cas des actions libres

Soient G et H des groupes de Lie compacts. On suppose que l'action de $G \times H$ sur M est lisse et que H agit librement sur M. On a donc un fibré principal $p : M \to M/H$ de groupe structural H au-dessus de la variété M/H et p est une submersion G-équivariante.

Proposition 105. Soit $\mathcal{F}^\sharp$ un feuilletage riemannien sur M tel que l'action de $G \times H$ sur M est feuilletée.
Le feuilletage $\mathcal{F}^\sharp$ induit alors un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ sur M/H tel que l'action de G sur M/H est feuilletée.

Démonstration. Comme l'action de $G \times H$ est feuilletée, la projection p est feuilletée. Donc p induit un feuilletage sur M/H dont les feuilles sont de la forme $p(L)$ où L est une feuille de $\mathcal{F}^\sharp$. Le reste de la preuve est clair. □

Dans la suite on munit M d'une structure riemannienne quasi-fibrée $(G \times H)$-invariante.

Proposition 106. Soit E un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel G-équivariant au-dessus de M/H. On note $E^\sharp$ le relevé de E sur M, alors $E^\sharp$ est un $\mathcal{F}^\sharp$-fibré vectoriel $G \times H$-équivariant.

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration de la proposition 51 et est omise ici. □

Notation 14. Soient E et E' des $\mathcal{F}$-fibrés G-équivariants au-dessus de M/H.

Proposition 107. Soit $D : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel $\mathcal{F}$-basique G-invariant et $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique.
Alors il existe un opérateur différentiel $\mathcal{F}^\sharp$-basique $D^\sharp : \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \to \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ qui est $(G\times H)$-invariant et $(G\times H, \mathcal{F}^\sharp)$-transversalement elliptique tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H & \xrightarrow{D^\sharp} & \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(E/\mathcal{F}) & \xrightarrow[D]{} & \Gamma(E'/\mathcal{F}) \end{array}$$

Démonstration. Si $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$, on a $D^\sharp(\sigma \circ p) = D(\sigma) \circ p$.
Soient (x, y) des coordonnées locales sur M/H adaptées au feuilletage $\mathcal{F}$ et (x, y, t) les coordonnées locales sur M correspondantes (qui sont adaptées au feuilletage $\mathcal{F}^\sharp$). On remarque $p(x, y, t) = p(x, y)$. Localement $D(\sigma)$ s'écrit sous la forme $D(\sigma) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) \frac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}}(\sigma)$,

donc $D(\sigma) \circ p = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) (\frac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}}(\sigma)) \circ p$,

et $D^\sharp(\sigma \circ p) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(p(y, t)) \frac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}}(\sigma \circ p)$ car $p(x, y, t) = p(x, y)$.

Donc $D^\sharp$ est un opérateur différentiel $\mathcal{F}^\sharp$-basique.
Montrons que $D^\sharp$ est G-invariant.
Soient $z \in M$ et $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$,

$$\begin{aligned} g.\left(D^\sharp(\sigma \circ p)\right)(z) &= g.\left(D^\sharp(\sigma \circ p)(g^{-1}.z)\right) \\ &= g.(D(\sigma)(g^{-1}.p(z))) \text{ car } p \text{ est } G\text{-invariante} \\ &= g.\left(D(\sigma)\right)(p(z)) \\ &= D(g.\sigma)(p(z)) \text{ car } D \text{ est } G\text{-invariant} \\ &= D^\sharp(g.\sigma \circ p)(z). \end{aligned}$$

Donc $D^\sharp$ est G-invariant.
Montrons que $D^\sharp$ est H-invariant.

$$\begin{aligned} h.(D^\sharp(\sigma \circ p))(z) &= h.(D(\sigma) \circ p)(z) \\ &= D(\sigma) \circ p(z) \text{ car } D(\sigma) \circ p \text{ est } H\text{-invariante} \\ &= D^\sharp(\sigma \circ p)(z) \\ &= D^\sharp(h.\sigma \circ p)(z) \text{ car } \sigma \circ p \text{ est } H\text{-invariante} \end{aligned}$$

Donc $D^\sharp$ est H-invariant et $G \times H$-invariant.
En raison de la forme locale de $D^\sharp$ et D étant $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique on déduit que $D^\sharp$ est $(G \times H, \mathcal{F}^\sharp)$-transversalement elliptique. □

On note $(W_a)_{a \in \hat{H}}$ un ensemble de représentants de l'ensemble des classes de représentations irréductibles unitaires de H. On notera χ_a le caractére de W_a et $\underline{W_a} = M \times_H W_a$ le G-fibré vectoriel au-dessus de M/H associé à W_a.

Théorème 36. Avec les notations de la proposition précédente on a

$$\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G \times H}(D^\sharp) = \sum_{a \in \hat{H}} \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(D \otimes \underline{W_a^*}) \chi_a \in C^{-\infty}(G \times H)^{G \times H}.$$

Démonstration. L'espace $\Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ est une représentation de H,
donc $\Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \cong \oplus_{a\in\hat{H}} m_a W_a$ (Théorème de Peter-Weyl)
où $m_a = \dim \hom_H(W_a, \Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp))$ (Lemme de Schur).
Or $\hom_H(W_a, \Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)) \cong (\Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \otimes W_a^*)^H$.
Notons que $E^\sharp \otimes W_a^*$ est un $\mathcal{F}^\sharp$-fibré et que
$\Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \otimes W_a^* \cong \Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)$. En effet,
soit ∇_1 une connexion basique sur le fibré $E^\sharp$. On munit le fibré $M \times W_a^*$ de la connexion standard plate ∇_2 et le fibré $E^\sharp \otimes W_a^*$ de la connexion $\nabla = \nabla_1 \otimes \nabla_2$.
La courbure de ∇ est donnée par $R_\nabla = R_{\nabla_1} \otimes 1 + 1 \otimes R_{\nabla_2}$.
De plus $\forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}^\sharp),\ i_X(R_{\nabla_1}) = 0$ et ∇_2 est plate,
donc $\forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}^\sharp),\ i_X(R_{\nabla_1\otimes\nabla_2}) = 0$, c'est-à-dire $E^\sharp \otimes W_a^*$ est $\mathcal{F}^\sharp$-fibré.
Par ailleurs $\Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*) \cong \Gamma(M, E^\sharp) \otimes W_a^*$. Montrons que cet isomorphisme induit un isomorphisme de sections basiques. Si $\sigma \in \Gamma(M, E^\sharp)$ est basique et $w \in W_a^*$ alors $\sigma \otimes w$ est une section basique de $\Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*)$.
En effet $X \in \Gamma(T\mathcal{F})$, on a $\nabla_{1,X}(\sigma) = 0$. Donc

$$\begin{aligned}\nabla_X(\sigma \otimes w) &= \nabla_{1,X}(\sigma) \otimes w + \sigma \otimes \nabla_{2,X}(w)\\ &= \sigma \otimes \nabla_{2,X}(w)\\ &= \sigma \otimes d(w)\\ &= 0 \text{ car } w \text{ est un vecteur fixé de } W_a^*.\end{aligned}$$

On obtient ainsi un isomorphisme

$$\Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp) \cong \Gamma(M, E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \otimes W_a^*,$$

donc $\hom_H(W_a, \Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)) \cong \Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)^H$,
et $\hom_H(W_a, \Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)) \cong \Gamma(M/H, E \otimes \underline{W_a^*}/\mathcal{F})$.
Le coefficient de χ_a dans $\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(D^\sharp)$ est donc l'indice de l'opérateur
$(G \times H)$-invariant $D^\sharp \otimes Id_a : \Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)^H \to \Gamma(M, E'^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)^H$.
Comme on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)^H & \xrightarrow{D^\sharp\otimes Id_a} & \Gamma(M, E'^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)^H\\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong\\ \Gamma(M/H, E \otimes \underline{W_a^*}) & \xrightarrow{D\otimes Id_{\underline{a}}} & \Gamma(M/H, E' \otimes \underline{W_a^*})\end{array}$$

et que H agit trivialement sur $\Gamma(M, E^\sharp \otimes W_a^*/\mathcal{F}^\sharp)^H$,
on obtient que le coefficient de χ_a dans $\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(D^\sharp)$ est $\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(D \otimes Id_{\underline{a}})$.
□

6.3 Multiplicativité et excision

Notation 15. Soient $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ des feuilletages riemanniens transversalement orientés sur des variétés compactes connexes orientées. On munit M et M' de métriques quasi-fibrées.
Soient E un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel au-dessus de M et E' un $\mathcal{F}'$-fibré vectoriel au-dessus de M'. On note $E \boxtimes E'$ le produit tensoriel externe de E et E' au-dessus de $M \times M'$, c'est-à-dire $E \boxtimes E'_{(z,t)} = E_z \otimes E'_t,\ \forall (z,t) \in M \times M'$.
On munit $M \times M'$ du feuilletage $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ défini par :
$T_{(z,t)}(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') = T_z\mathcal{F} \oplus T_t\mathcal{F}',\ \forall (z,t) \in M \times M'$.

Proposition 108. Le fibré vectoriel $E \boxtimes E'$ est un $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$-fibré vectoriel au-dessus de $M \times M'$. De plus si $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$ et $\sigma' \in \Gamma(E'/\mathcal{F})$, alors $\sigma \boxtimes \sigma' \in \Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$.

Démonstration. Soient ∇_1 et ∇_2 des connexions basiques sur E et E'.
On munit $E \boxtimes E'$ de la connexion $\nabla = \nabla_1 \boxtimes \nabla_2$, caractérisée par
$\nabla(\sigma \boxtimes \sigma') = \nabla_1(\sigma) \boxtimes \sigma' + \sigma \boxtimes \nabla_2(\sigma'),\ \forall \sigma \in \Gamma(E), \forall \sigma' \in \Gamma(E')$.
La courbure de ∇ est donné par $R_\nabla = R_{\nabla_1} \boxtimes 1 + 1 \boxtimes R_{\nabla_2}$.
Soient $X + X' \in \Gamma(T(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'))$, on a alors :
$i_{X+X'}(R_\nabla) = i_X(R_{\nabla_1}) \boxtimes 1 + 1 \boxtimes i_{X'}(R_{\nabla_2}) = 0$ car ∇_1 est $\mathcal{F}$-basique et ∇_2 est $\mathcal{F}'$-basique.
Donc ∇ est une connexion basique sur $E \boxtimes E'$ et $E \boxtimes E'$ est un $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$-fibré.
Le deuxième point est évident. □

Proposition 109. Sous les mêmes hypothèses, soit $A : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique d'ordre m.
On note $\tilde{A} = A \boxtimes 1$ l'opérateur induit par A sur $\Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$ qui est caractérisé par
$\tilde{A}(\sigma \boxtimes \sigma') = A(\sigma) \boxtimes \sigma',\ \forall \sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F}),\ \forall \sigma' \in \Gamma(E'/\mathcal{F})$.
Alors $\tilde{A}$ est un opérateur différentiel basique d'ordre m.

Démonstration. Vérifions d'abord que A induit bien un opérateur sur $\Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$. On utilise encore la connexion basique $\nabla = \nabla_1 \boxtimes \nabla_2$.
On note ϕ, ϕ^1, ϕ^2 les transports parallèles associés à $\nabla, \nabla^1, \nabla^2$.
Par unicité du transport parallèle, on a $\phi = \phi^1 \boxtimes \phi^2$.
Soit $\sigma \boxtimes \sigma' \in \Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$,
donc $\sigma \boxtimes \sigma'$ est parallèle le long de toutes les courbes le long des feuilles de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$, c'est-à-dire si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est une courbe le long des feuilles de $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ on a $\phi_t(\sigma \boxtimes \sigma'_{\gamma(0)}) = \sigma \boxtimes \sigma'_{\gamma(t)}$, où ϕ_i^t est le transport parallèle le long de $\gamma_i(t)$. Ainsi $\phi_t^1(\sigma_{\gamma_1(0)}) \boxtimes \phi_t^2(\sigma'_{\gamma_2(0)}) = \sigma_{\gamma_1(t)} \boxtimes \sigma'_{\gamma_2(t)}$,
et $\phi_t^1(\sigma_{\gamma_1(0)}) = \sigma_{\gamma_1(t)}$ et $\phi_t^2(\sigma'_{\gamma_2(0)}) = \sigma'_{\gamma_2(t)}$.
C'est-à-dire σ (respectivement σ') est parallèle le long de toutes courbes le long des feuilles de $\mathcal{F}$ (respectivement $\mathcal{F}'$).
Par conséquent $\sigma \in \Gamma(E/\mathcal{F})$ et $\sigma' \in \Gamma(E'/\mathcal{F})$.

Donc $\tilde{A}(\sigma \boxtimes \sigma') = A(\sigma) \boxtimes \sigma'$ est bien défini et A induit un opérateur sur $\Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$.
Soient (x, y) des coordonnées locales sur M adaptées au feuilletage $\mathcal{F}$ et (k, l) des coordonnées locales sur M' adaptées au feuilletage $\mathcal{F}'$. Donc (x, y, k, l) sont des coordonnées locales sur $M \times M'$ adaptées au feuilletage $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$.
Localement A s'écrit sous la forme $A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) \dfrac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}}$
où $a_\alpha(y) \in \hom(E_{(x,y)}, E_{(x,y)})$.
Ainsi $\tilde{A} = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) \boxtimes 1 \dfrac{\partial^\alpha}{\partial y_1^{\alpha_1} ... \partial y_q^{\alpha_q}}$
où $a_\alpha(y) \boxtimes 1 \in \hom(E \boxtimes E'_{(x,y,k,l)}, E \boxtimes E'_{(x,y,k,l)})$.
On en conclut que $\tilde{A}$ est basique. □

Corollaire 15. Sous les mêmes hypotheses,
$\forall (z, t) \in M \times N,\ \forall \xi \in \nu^* \mathcal{F},\ \sigma(\tilde{A})((z, t), \xi) = \sigma(A)(z, \xi) \boxtimes 1$.
De plus si A est $\mathcal{F}$-transversalement elliptique alors $\tilde{A}$ est $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$-transversalement elliptique.

Démonstration. Le calcul du symbole est évident au vu de la démonstration précédente.
On utilisera les identifications suivantes : $T_{(z,t)}(M \times M') \cong T_z M \oplus T_t M'$ et $T^*_{(z,t)}(M \times M') \cong T^*_z M \oplus T^*_t M'$.
Les fibrés $T\mathcal{F}$ et $T\mathcal{F}'$ s'identifient à des parties de $T^*(M \times M')$. De plus on a :

$$\begin{aligned}
\nu^*(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') &\cong \{\xi \in T^*(M \times M')/\xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'))\} \\
&\cong \{\xi \in T^*(M \times M')/\xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F} \oplus T\mathcal{F}')\} \\
&\cong \{\xi \in T^*(M \times M')/\xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F})\} \\
&\cap \{\xi \in T^*(M \times M')/\xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}')\} \\
&\cong \{\xi_1 + \xi_2 \in T^*M \oplus T^*M'/\xi_1(X) + \xi_2(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F})\} \\
&\cap \{\xi_1 + \xi_2 \in T^*M \oplus T^*M'/\xi_1(X) + \xi_2(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}')\}.
\end{aligned}$$

Or si $\xi_2 \in T^*M'$, on a $\xi_2(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(TM)$ et si $\xi_1 \in T^*M$, on a $\xi_1(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(TM')$. Donc $\nu^*(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$ est isomorphe à $\{\xi \in T^*M/\xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F})\} \cap \{\xi \in T^*M'/\xi(X) = 0,\ \forall X \in \Gamma(T\mathcal{F}')\}$, et $\nu^*(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$ est isomorphe à $\nu^*\mathcal{F} \cap \nu^*\mathcal{F}'$.
Or $\sigma(A)(z, \xi)$ est inversible si $\xi \in \nu^*\mathcal{F}$, donc $\sigma(\tilde{A})((z, t), \xi)$ est inversible si $\xi \in \nu^*(\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$, et $\tilde{A}$ est $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$-transversalement elliptique. □

Proposition 110. Soient $E \to M$ un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel et $E' \to M'$ un $\mathcal{F}'$-fibré vectoriel, $A : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique $\mathcal{F}$-transversalement elliptique d'ordre m et $B : \Gamma(E'/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique d'ordre m $\mathcal{F}'$-transversalement elliptique.

(i) Alors les opérateurs $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ commutent.

(ii) On note $A\sharp B = \begin{pmatrix} \tilde{A} & -\tilde{B}^* \\ \tilde{B} & \tilde{A}^* \end{pmatrix}$. Alors $A\sharp B$ est un opérateur différentiel basique d'ordre m et $\sigma(A\sharp B) = \begin{pmatrix} \sigma(A)\boxtimes 1 & -1\boxtimes\sigma(B)^* \\ 1\boxtimes\sigma(B) & \sigma(A)^*\boxtimes 1 \end{pmatrix}$.
De plus $A\sharp B$ est $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}'$-transversalement elliptique.

Démonstration. (i) Soient $\sigma\in\Gamma(E/\mathcal{F})$ et $\sigma'\in\Gamma(E'/\mathcal{F})$, on a $\tilde{A}(\sigma\boxtimes\sigma') = A(\sigma)\boxtimes\sigma'$.

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\tilde{A}(\sigma\boxtimes\sigma')) &= \tilde{B}(A(\sigma)\boxtimes\sigma')\\ &= A(\sigma)\boxtimes B(\sigma')\\ &= \tilde{A}(\sigma\boxtimes B(\sigma'))\\ &= \tilde{A}(\tilde{B}(\sigma\boxtimes\sigma')).\end{aligned}$$

Donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ commutent.

(ii) Le deuxième point découle des propositions précédentes.

□

Notation 16. Soient G, H des groupes de Lie compacts. Dans la suite on suppose qu'on a une action lisse de G sur M et une action lisse de $G\times H$ sur M'.
On suppose de plus que ces actions sont feuilletées, que M est munie d'une structure riemannienne quasi-fibrée G-invariante et M' d'une structure riemannienne quasi-fibrée $(G\times H)$-invariante.
On suppose de plus que E est un fibré G-équivariant et que E' est un fibré $(G\times H)$-équivariant.
On a une action lisse feuilletée de $G\times H$ sur $M\times M'$ donnée par $(g,h).(z,t) = (g.z,(g,h).t),\ \forall(g,h)\in G\times H,\ \forall(z,t)\in M\times M'$ et $E\boxtimes E'$ est un fibré $(G\times H)$-équivariant.

Théorème 37. Soient $A:\Gamma(E/\mathcal{F})\to\Gamma(E/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique G-invariant $(G,\mathcal{F})$-transversalement elliptique et
$B:\Gamma(E'/\mathcal{F})\to\Gamma(E'/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique $(G\times H)$-invariant et $(G\times H,\mathcal{F}')$-transversalement elliptique. Alors $A\sharp B$ est un opérateur différentiel basique $(G\times H,\ \mathcal{F}\oplus\mathcal{F}')$-transversalement elliptique et

$$\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(A\sharp B) = \mathrm{ind}^{G}_{-\infty,B}(A)\ \mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(B)\in C^{-\infty}(G\times H).$$

Nous allons utiliser plusieurs lemmes.

Lemme 13. L'opérateur $A\sharp B$ est $(G\times H)$-invariant et $(G\times H,\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}')$-transversalement elliptique.

Démonstration. Montrons que $A\sharp B$ est $(G\times H)$-invariant.
Soient $\sigma\in\Gamma(E/\mathcal{F})$, $\sigma'\in\Gamma(E'/\mathcal{F})$, et $(g,h)\in G\times H$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}((g,h).(\sigma\boxtimes\sigma')) &= \tilde{A}\left(g.\sigma\boxtimes(g,h).\sigma'\right)\\ &= A(g.\sigma)\boxtimes(g,h).\sigma'\\ &= g.A(\sigma)\boxtimes(g,h).\sigma' \text{ car } A \text{ est } G\text{-invariant}\\ &= (g,h).(A(\sigma)\boxtimes\sigma')\\ &= (g,h).(\tilde{A}(\sigma\boxtimes\sigma')).\end{aligned}$$

Donc $\tilde{A}$ est $(G\times H)$-invariant. De même $\tilde{B}$ est $(G\times H)$-invariant.
Ainsi $A\sharp B$ est $(G\times H)$-invariant.
Montrons que $A\sharp B$ est un opérateur $(G\times H,\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}')$-transversalement elliptique. Soit $(z,t)\in M\times M'$, on a :
$(T_{(z,t)}\Theta^{G\times H}(z,t)+T_{(z,t)}(\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}'))^{\perp}=(T_{(z,t)}\Theta^{G\times H}(z,t)+T_z\mathcal{F}+T_t\mathcal{F}')^*$.
Donc $(T_{(z,t)}\Theta^{G\times H}(z,t)+T_{(z,t)}(\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}'))^{\perp}\cong(T^*_{G\times H}(M\times M'))_{(z,t)}\cap\nu_z^*\mathcal{F}\cap\nu_t^*\mathcal{F}'$.
Or l'orbite de z dans M sous l'action de G est contenue dans l'orbite de (z,t) dans $M\times M'$ sous l'action de $G\times H$,
ainsi $T_z\Theta^G(z)\subset T_{(z,t)}\Theta^{G\times H}(z,t)$ et $(T^*_{G\times H}(M\times M'))_{(z,t)}\subset(T^*_GM)_z$.
Or A est $(G,\mathcal{F})$-transversalement elliptique,
donc $\forall\xi\in(T^*_GM)_z\cap\nu_z^*\mathcal{F}$, $\sigma(\tilde{A})((z,t),\xi)$ est inversible.
En particulier $\forall\xi\in(T^*_{G\times H}(M\times M'))_{(z,t)}\cap\nu_z^*\mathcal{F}$, $\sigma(\tilde{A})((z,t),\xi)$ est inversible.
Or B est $(G\times H,\mathcal{F}')$-transversalement elliptique,
donc $\forall\xi\in(T^*_{G\times H}(M\times M'))_{(z,t)}\cap\nu_t^*\mathcal{F}'$, $\sigma(\tilde{B})((z,t),\xi)$ est inversible.
On en déduit que $\sigma(A\sharp B)((z,t),\xi)$ est inversible $\forall\xi\in(T_{(z,t)}\Theta^{G\times H}(z,t)+T_{(z,t)}(\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}'))^*$,
c'est-à-dire que $A\sharp B$ est $(G\times H,\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}')$-transversalement elliptique.

□

Lemme 14. Les noyaux de $A\sharp B$ et de $(A\sharp B)^*$ sont donnés par :

$$\ker(A\sharp B)=\oplus_\lambda\ker A\boxtimes(\ker B)_\lambda\oplus\oplus_\lambda\ker A^*\boxtimes(\ker B^*)_\lambda,$$

$$\ker((A\sharp B)^*)=\oplus_\lambda\ker A^*\boxtimes(\ker B)_\lambda\oplus\oplus_\lambda\ker A\boxtimes(\ker B^*)_\lambda.$$

Démonstration. On note P_0,Q_0,P_1,Q_1 les opérateurs définis par :
$(A\sharp B)^*(A\sharp B)=\begin{pmatrix}\tilde{A}^*\tilde{A}+\tilde{B}^*\tilde{B} & 0\\ 0 & \tilde{A}\tilde{A}^*+\tilde{B}\tilde{B}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_0 & 0\\ 0 & Q_0\end{pmatrix}$ et

$(A\sharp B)(A\sharp B)^*=\begin{pmatrix}\tilde{A}\tilde{A}^*+\tilde{B}^*\tilde{B} & 0\\ 0 & \tilde{A}^*\tilde{A}+\tilde{B}\tilde{B}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & 0\\ 0 & Q_1\end{pmatrix}$
Les opérateurs P_0,Q_0,P_1,Q_1 sont des opérateurs différentiels basiques $G\times H$ invariants.
On a $\ker(A\sharp B)=\ker((A\sharp B)^*(A\sharp B))=\ker P_0\oplus\ker Q_0$, et
$\ker((A\sharp B)^*)=\ker((A\sharp B)(A\sharp B)^*)=\ker P_1\oplus\ker Q_1$.
On a $\ker\tilde{A}\cap\ker\tilde{B}\subset\ker P_0$.

Soit $\sigma \in \Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}') \oplus \Gamma(E \boxtimes E'/\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}')$,
$\langle P_0(\sigma), \sigma\rangle = \langle \tilde{A}(\sigma), \tilde{A}(\sigma)\rangle + \langle \tilde{B}(\sigma), \tilde{B}(\sigma)\rangle$, donc $\ker P_0 = \ker \tilde{A} \cap \ker \tilde{B}$.
Or $\ker \tilde{B}$ est formé de sections basiques $\sigma(z,t)$ telles que
$\forall z \in M,\ \sigma(z,.) \in \ker B$.
On écrit $\ker B = \oplus_\lambda (\ker B)_\lambda$ la décomposition de $\ker B$ en fonction des valeurs propres de Δ_H comme dans la démonstration du théorème 35.
De même on écrit $\ker \tilde{B} = \oplus_\lambda (\ker \tilde{B})_\lambda$ et $\ker P_0 = \oplus_\lambda (\ker P_0)_\lambda$.
Donc $(\ker \tilde{B})_\lambda$ est l'espace des sections lisses basiques du fibré vectoriel plat $K_{B_\lambda} = M \times (\ker B)_\lambda$ au-dessus de M.
Or $\tilde{A}$ commute avec $\tilde{B}$ et Δ_H, donc $\tilde{A}$ induit un opérateur sur $(\ker \tilde{B})_\lambda$, c'est-à-dire sur les sections basiques de K_{B_λ}.
Or $\tilde{A} = A \boxtimes 1$, donc l'opérateur induit est $A \boxtimes 1_{K_{B_\lambda}}$.
Or $\ker P_0$ est formé par les sections basiques de $\ker \tilde{B}$ annulées par $\tilde{A}$, ainsi $(\ker P_0)_\lambda$ est formé par les sections basiques de $(\ker \tilde{B})_\lambda$ annulées par $\tilde{A}$, donc $(\ker P_0)_\lambda = \ker(A \boxtimes 1_{K_{B_\lambda}}) = \ker A \boxtimes (\ker B)_\lambda$.
En permutant $\tilde{A}, \tilde{A}^*, \tilde{B}$ et $\tilde{B}^*$ on obtient :

$$\begin{aligned}\ker(A\sharp B) &= \ker P_0 \oplus \ker Q_0 \\ &= \oplus_\lambda \ker A \boxtimes (\ker B)_\lambda \oplus \oplus_\lambda \ker A^* \boxtimes (\ker B^*)_\lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ker((A\sharp B)^*) &= \ker P_1 \oplus \ker Q_1 \\ &= \oplus_\lambda \ker A^* \boxtimes (\ker B)_\lambda \oplus \oplus_\lambda \ker A \boxtimes (\ker B^*)_\lambda\end{aligned}$$

□

Revenons à la démonstration du théorème 37.

Démonstration du théorème 37. En appliquant les lemmes précédents on a, $\chi_{\ker(A\sharp B)} = \sum_\lambda \chi_{\ker A \boxtimes (\ker B)_\lambda} + \sum_\lambda \chi_{\ker A^* \boxtimes (\ker B^*)_\lambda}$.
Or $\ker A \boxtimes (\ker B)_\lambda$ est une représentation de $G \times H$ de la forme $\pi(g,h) = \pi_1(g) \otimes \pi_2(g,h)$, ainsi $\chi_{\ker A \boxtimes (\ker B)_\lambda} = \chi_{\ker A} \chi_{(\ker B)_\lambda}$.
Par conséquent $\chi_{\ker(A\sharp B)} = \sum_\lambda \chi_{\ker A} \chi_{(\ker B)_\lambda} + \sum_\lambda \chi_{\ker A^*} \chi_{(\ker B^*)_\lambda}$, et

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(A\sharp B) &= \sum_\lambda \chi_{\ker A} \chi_{(\ker B)_\lambda} + \sum_\lambda \chi_{\ker A^*} \chi_{(\ker B^*)_\lambda} \\ &\quad - \sum_\lambda \chi_{\ker A^*} \chi_{(\ker B)_\lambda} + \sum_\lambda \chi_{\ker A} \chi_{(\ker B^*)_\lambda} \\ &= \sum_\lambda \chi_{\ker A} \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(B)_\lambda - \sum_\lambda \chi_{\ker A} \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(B)_\lambda \\ &= \sum_\lambda \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(A) \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(B)_\lambda \\ &= \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(A) \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(B).\end{aligned}$$

□

Remarque. Comme B est un opérateur différentiel basique $(G\times H)$-invariant et $(G\times H,\mathcal{F}')$-transversalement elliptique on peut écrire son indice distributionnel sous la forme $\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(B)=\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\chi_\alpha\chi_\beta$.
Comme $(\ker B)_\lambda$ et $(\ker B^*)_\lambda$ sont de dimension finies on a un nombre fini d'indices alpha tel que $c_{\alpha,\beta}\neq 0$.
Donc le produit de $\mathrm{ind}^{G}_{-\infty,B}(A)\in C^{-\infty}(G)$ et $\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(B)\in C^{-\infty}(G\times H)$ est bien défini.
Si $\phi\in C^\infty(H)$ et $\psi\in C^\infty(G)$ on a :
$\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(A\sharp B)(\psi\otimes\phi)=\mathrm{ind}^{G}_{-\infty,B}(\psi\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(B)(\phi))$.

Nous allons maintenant étudier la propriété d'excision pour l'indice distributionnel basique.

Notation 17. Soit U une variété non-compacte munie d'un feuilletage riemmanien $\mathcal{F}'$et d'une action lisse feuilletée du groupe de Lie compact G.
On suppose qu'on a un plongement $j:U\to M$ tel que j est feuilletée et G-équivariante, et on suppose de plus que $j(U)$ est saturé dans M.

Soit $E\to U$ un $\mathcal{F}'$-fibré G-équivariant tel que E est trivial en dehors de la saturation d'un compact de U. L'application j est un difféomorphisme local de U sur $j(U)$, donc on peut définir le fibré vectoriel poussé-en-avant $j_*(E)$.

Proposition 111. Le fibré vectoriel $j_*(E)$ est un $\mathcal{F}$-fibré G-équivariant au-dessus de $j(U)$ et se prolonge en un $\mathcal{F}$-fibré G-équivariant au-dessus de M.

Démonstration. Comme E est G-équivariant et j est G-équivariante, $j_*(E)$ est G-équivariant au-dessus de $j(U)$.
Soient (x,y) des coordonnées locales sur U adaptées au feuilletage $\mathcal{F}'$, comme j est un difféomorphisme local qui préserve le feuilletage, $(x\circ j^{-1},y\circ j^{-1})$ sont des coordonnées locales sur $j(U)$ adaptées au feuilletage $\mathcal{F}$. E étant un $\mathcal{F}'$-fibré au-dessus de U, on munit $j_*(E)$ de la connexion induite par une connexion basique sur E.
Donc $j_*(E)$ est un $\mathcal{F}$-fibré, et $j_*(E)$ est trivial en dehors de la saturation d'un compact de $j(U)$. Puisque $j(U)$ est un ouvert saturé, on prolonge $j_*(E)$ par un fibré au-dessus de M qui est trivial en-dehors de $j(U)$ et qu'on note $j_!(E)$. Montrons maintenant que $j_!(E)$ est un $\mathcal{F}$-fibré. Si $j(U)$ est dense alors le résultat est immédiat et on peut donc réduire au cas où $j(U)$ n'est pas dense dans M. En utilisant les résultats de [Hae88], voir aussi [EKAN93], il est facile de montrer qu'il existe un voisinage tubulaire ouvert N saturé (même pour les fermetures de feuilles) du bord de U dans M ainsi qu'une fonction $\tilde{\varphi}$ sur M tels que

- $\tilde{\varphi}$ est une fonction basique pour les fermetures de feuilles de $\mathcal{F}$, et donc pour $\mathcal{F}$, qui est de plus de classe C^∞ sur M ;

– $0 \leq \tilde{\varphi} \leq 1$;
– La restriction de $\tilde{\varphi}$ à U est identiquement égale à 1 ;
– La restriction de $\tilde{\varphi}$ au complémentaire de N dans U^c est égale à 0.
En utilisant la fonction basique $\tilde{\varphi}$, on construit alors une connexion basique sur $j_!(E)$. □

Proposition 112. Sous les mêmes hypothèses, soit $D : \Gamma(E/\mathcal{F}') \to \Gamma(E'/\mathcal{F}')$ un opérateur différentiel basique G-invariant $(G, \mathcal{F}')$-transversalement elliptique tel qu'en dehors de la saturation d'un compact de U, $D = Id$ modulo les trivialisations de E et E'. Alors D induit un opérateur différentiel basique G-invariant $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique sur $j(U)$, qu'on note $j_*(D)$, et qui se prolonge en dehors de $j(U)$ par l'identité.

Démonstration. On a $j_*(D) = j_* \circ D \circ j_*^{-1}$. Montrons que $j_*(D)$ est G-invariant.
Soient $\sigma \circ j \in \Gamma(j_*(E)/\mathcal{F})$, $z \in j(U)$, et $g \in G$,

$$\begin{aligned}
j_*(D)\,(g.((\sigma \circ j)_z)) &= j_*(D)(g.(\sigma_{g^{-1}.j(z)})) \\
&= j_* \circ D(g.(\sigma_{j^{-1}(g^{-1}.j(z))})) \\
&= j_* \circ D(g.(\sigma_{g^{-1}.z})) \text{ car } j^{-1} \text{ est } G\text{-équivariante} \\
&= j_* \circ D((g.\sigma)_z) \\
&= j_*\,(g.(D(\sigma)_z) \text{ car } D \text{ est } G\text{-invariant} \\
&= g.(j_* \circ D(\sigma)_z) \text{ car } j \text{ est } G\text{-équivariante} \\
&= g.(j_* \circ D \circ j_*^{-1}(\sigma_{j(z)})) \\
&= g.(j_*(D)((\sigma \circ j)_z)).
\end{aligned}$$

Donc $j_*(D)$ est G-invariant.
En utilisant les coordonnées locales (x, y) sur U et $(x \circ j^{-1}, y \circ j^{-1})$ sur $j(U)$ de la proposition précédente on constate que $j_*(D)$ est $\mathcal{F}$-basique,
et que $\sigma(j_*(D))(z, \xi) = \sigma(D)(j^{-1}(z), \xi)$, donc $j_*(D)$ est $(G, \mathcal{F})$-transversalement elliptique. □

Théorème 38. Sous les mêmes hypothèses, $\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(j_*(D))$ est indépendant du choix de j.

Démonstration. Soit $\sigma \in \Gamma(j_*(E)/\mathcal{F})$,
en dehors de $j(U)$, $j_*(D)$ est égal à l'identité, donc

$$\begin{aligned}
D(\sigma \circ j) = 0 &\Leftrightarrow \mathit{supp}(\sigma \circ j) \subset U \text{ et } D(\sigma) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathit{supp}(\sigma) \subset j(U) \text{ et } j_*(D)(\sigma) = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\ker j_*(D) = \ker D$. De même $\ker j_*(D)^* = \ker D^*$. Comme $j_*(D)$ est un opérateur $(G, \mathcal{F})$-transversallement elliptique sur une variété fermée, il

admet un indice distributionnel basique. Par conséquent D admet un indice distributionnel basique et comme ces deux opérateurs ont les mêmes noyaux on a $\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(j_*(D)) = \mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D)$. □

6.4 Lien avec l'indice basique et l'indice équivariant

Nous reprenons les notations de la section 4.1.
Nous allons maintenant étudier le problème de l'indice basique dans le cas où la variété M est munie d'un feuilletage riemannien transversalement orienté $\mathcal{F}$ et d'une action feuilletée d'un groupe de Lie compact G.
On note $H = SO(q)$ et on suppose que $\dim W^\sharp > 0$.
Soient E et E' des $\mathcal{F}$-fibrés G-équivariant et $D : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(E'/\mathcal{F})$ un opérateur différentiel basique G-invariant $(G,\mathcal{F})$-transversalement elliptique d'ordre $m = 2m'$.
On a vu précédemment que D admet un indice distributionnel basique $\mathrm{ind}^G_{-\infty,B}(D)$.

Lemme 15. L'action feuilletée de G sur M se relève en une action feuilletée de G sur $M^\sharp$. De plus l'action de G sur $M^\sharp$ commute avec l'action de H et on a une action feuilletée de $G \times H$ sur $M^\sharp$.

Démonstration. Evident. □

Lemme 16. Le $\mathcal{F}$-fibré G-équivariant E au-dessus de M se relève en un $\mathcal{F}^\sharp$-fibré $G \times H$-équivariant au-dessus de $M^\sharp$ noté $E^\sharp$.

Démonstration. La démonstration est similaire à la démonstration de la proposition 51. □

Lemme 17. (i) L'action feuilletée de $G \times H$ sur $(M^\sharp, \mathcal{F}^\sharp)$ induit une action de $G \times H$ sur $W^\sharp$.
(ii) Comme $\bar{E}_u = \Gamma(L_u, E/\mathcal{F})$, $\forall u \in W$, l'action de $G \times H$ sur $E^\sharp$ induit une action sur le fibré utile $\bar{E}$.
(iii) De plus on a trivialement que l'application $\psi : \Gamma(E/\mathcal{F}) \to \Gamma(\bar{E})$ est $(G \times H)$-invariante.

Démonstration. Evident. □

Proposition 113. L'opérateur D se relève sur $M^\sharp$ en un opérateur $D^\sharp : \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp) \to \Gamma(E'^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)$ qui est basique $(G \times H)$-invariant $(G \times H, \mathcal{F}^\sharp)$-transversalement elliptique d'ordre m.
En particulier $D^\sharp$ admet un indice distributionnel basique $\mathrm{ind}^{G\times H}_{-\infty,B}(D^\sharp)$.

Démonstration. Evident. □

Théorème 39. On rappelle que l'opérateur $D^\sharp$ induit un opérateur $\bar{D} : \Gamma(\bar{E}) \to \Gamma(\bar{E}')$, et que ces deux opérateurs sont conjugués.
L'opérateur $\bar{D}$ est donc $(G \times H)$-invariant $(G \times H)$-transversalement elliptique et admet par conséquent un indice distributionnel $\mathrm{ind}_{-\infty}^{G\times H}(\bar{D})$ au sens d'Atiyah (voir [Ati]). De plus ces deux opérateurs ont le même indice distributionnel, c'est-à-dire

$$\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G\times H}(D^\sharp) = \mathrm{ind}_{-\infty}^{G\times H}(\bar{D}).$$

Démonstration. Les opérateurs $\bar{D}$ et $D^\sharp$ sont conjugués,
donc ils ont les mêmes noyaux et conoyaux. D'où le résultat. □

Théorème 40. On note $D^{\sharp,H} = D^\sharp_{|\Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H}$ et $\bar{D}^H = \bar{D}_{|\Gamma(\bar{E})^H}$.
Alors l'indice distributionnel basique de D est donné par

$$\mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(D) = \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(D^{\sharp,H}) = \mathrm{ind}_{-\infty}^{G}(\bar{D}^H).$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence immédiate des isomorphismes suivants $\Gamma(E/\mathcal{F}) \cong \Gamma(E^\sharp/\mathcal{F}^\sharp)^H \cong \Gamma(\bar{E})^H$ et $\ker D \cong \ker D^{\sharp,H} \cong \ker \bar{D}^H$, qui proviennent de la définition de $D^\sharp$. □

Remarque. Pour $G = \{e\}$ on retrouve le problème posé par El-Kacimi dans [EKA90].

Remarque. On a $\mathrm{ind}_{-\infty}^{G\times H}(\bar{D}) = \sum_{\rho\in G\hat{\times}H} (m_\rho^+ - m_\rho^-)\chi_\rho$ où
$m_\rho^+ - m_\rho^- = \mathrm{ind}((\bar{D}\otimes W_\rho^*)^{G\times H})\chi_\rho$.
Et $\mathrm{ind}_{-\infty}^{G}(\bar{D}^H) = \sum_{a\in\hat{G}}(m_a^+ - m_a^-)\chi_a$ où $m_a^+ - m_a^- = \mathrm{ind}((\bar{D}^H \otimes V_a^*)^G)\chi_a$.

Théorème 41. On a $\mathrm{ind}((\bar{D}^H \otimes V_a^*)^G) = \mathrm{ind}((D\otimes V_a^*)^{G\times H}),\ \forall a \in \hat{G}$.
Autrement dit

$$\langle \mathrm{ind}_{-\infty}^{G}(\bar{D}^H), \chi_a\rangle = \langle \mathrm{ind}_{-\infty}^{G\times H}(\bar{D}), \chi_a \otimes 1_H\rangle$$

et

$$\langle \mathrm{ind}_{-\infty,B}^{G}(D), \chi_a\rangle = \langle \mathrm{ind}_{-\infty}^{G\times H}(\bar{D}), \chi_a \otimes 1_H\rangle.$$

Démonstration. On notera $\bar{D}^H \otimes V_a^* = \bar{D}^H \otimes 1_a$ où $1_a = Id_{V_a^*}$.
Si (π, V_a) est une représentation irréductible de G, alors (π, V_a) induit une représentation irréductible de $G \times H$ donnée par $(\tilde{\pi}, V_a)$ où $\tilde{\pi}(g,h) = \pi(g)$ c'est-à-dire $(\tilde{\pi}, V_a) = (\pi \otimes 1_H, V_a)$.
Montrons que $\bar{D} \otimes 1_a : \Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^* \to \Gamma(\bar{E}') \otimes V_a^*$ est $(G \times H)$-invariant.

Soient $(g,h) \in G \times H,\ \sigma \in \Gamma(\bar{E})$ et $v \in V_a^*$, on a

$$\begin{aligned}
\bar{D} \otimes 1_a((g,h).(\sigma \otimes v)) &= \bar{D} \otimes 1_a((g,h).\sigma, g.v) \\
&= \bar{D}((g,h).\sigma) \otimes g.v \\
&= (g,h).\bar{D}(\sigma) \otimes g.v \text{ car } \bar{D} \text{ est } (G \times H)\text{-invariant} \\
&= (g,h).(\bar{D}(\sigma \otimes v)) \\
&= (g,h).(\bar{D} \otimes 1_a(\sigma \otimes v)).
\end{aligned}$$

Comme $\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*$ est engendré par des éléments de la forme $\sigma \otimes v$ on a que $\bar{D} \otimes 1_a$ est $(G \times H)$-invariant.
On note $P = \bar{D} \otimes 1_a$. Montrons que $(P^H)^G = P^{G \times H}$ où $P^{G \times H} = P_{|(\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^{G \times H}}$ et $P^H = P_{|(\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H}$ et $(P^H)^G = P^H_{|((\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H)^G}$.
On a $(\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^{G \times H} = \{s \in \Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^* / \forall (g,h) \in G \times H,\ (g,h).s = s\}$, et $(\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H = \{s \in \Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^* / \forall h \in H,\ h.s = s\}$, et

$$\begin{aligned}
((\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H)^G &= \{s \in (\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H / \forall g \in G,\ g.s = s\} \\
&= \{s \in \Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^* / \forall h \in H,\ h.s = s \text{ et } \forall g \in G,\ g.s = s\} \\
&= \{s \in \Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^* / \forall (g,h) \in G \times H,\ (g,h).s = s\} \\
&= (\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^{G \times H}
\end{aligned}$$

Donc $(P^H)^G = P^{G \times H}$. Montrons que $(\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H = \Gamma(\bar{E})^H \otimes V_a^*$.
Soient $\sigma \in \Gamma(\bar{E})$ et $v \in V_a^*$. On a

$$\begin{aligned}
\sigma \otimes v \in (\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H &\Leftrightarrow \forall h \in H,\ h.(\sigma \otimes v) = \sigma \otimes v \\
&\Leftrightarrow \forall h \in H,\ h.\sigma \otimes v = \sigma \otimes v \\
&\Leftrightarrow \sigma \in \Gamma(\bar{E})^H.
\end{aligned}$$

Comme $\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*$ est engendré par des éléments de la forme $\sigma \otimes v$ on déduit que $(\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H = \Gamma(\bar{E})^H \otimes V_a^*$.
Montrons que $\mathrm{ind}((\bar{D}^H \otimes V_a^*)^G) = \mathrm{ind}(((\bar{D} \otimes V_a^*)^H)^G) = \mathrm{ind}((D \otimes V_a^*)^{G \times H}$.
Or $\Gamma(\bar{E})^H \otimes V_a^* = (\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H$,
donc $(\Gamma(\bar{E})^H \otimes V_a^*)^G = ((\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^H)^G = (\Gamma(\bar{E}) \otimes V_a^*)^{G \times H}$. D'où le résultat. □

Problème ouvert. Calculer l'indice distributionnel basique en fonctions d'invariants transverses au feuilletage.

Annexe A

Généralités sur les feuilletages et théorie de Molino

Nous allons rappeler les premières notions sur les feuilletages. Nous rappellerons également la construction des feuilletages par suspension, la notion de structure transverse, en particulier la définition des feuilletages riemanniens qui est l'objet de ce manuscrit, et enfin la notion d'holonomie(voir par exemple [Mol88, MM03, Ton97, EKAB84]).

A.1 Premières définitions

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe orientée sans bord de dimension n.

Définition 74. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q sur M est la donnée d'un atlas maximal $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ où $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to U_i$ est un difféomorphisme qui vérifie :
si $U_i \cap U_j$ est non-vide, le changement de cartes $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : (x, y) \mapsto (x', y')$ est de la forme $x' = \varphi_{ij}(x, y)$ et $y' = \gamma_{ij}(y)$.
Un tel atlas est dit feuilleté et de telles cartes sont appelées des cartes feuilletées.
Soit $\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ la seconde projection. On appelle plaque du feuilletage $\mathcal{F}$ les fibres de l'application $\pi \circ \varphi_i^{-1}$.
La variété M est décomposée en sous-variétés connexes de dimension p. Ces sous-variétés sont appelées les feuilles de $\mathcal{F}$ et sont une réunion de plaques.

Proposition 114. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension q sur M donné par un atlas maximal $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$. Alors l'application $f_i = \pi \circ \varphi_i^{-1} : U_i \to \mathbb{R}^q$ est une submersion.
De plus si $U_i \cap U_j$ est non-vide, on a $f_j = \gamma_{ij} \circ f_i$ et les $(\gamma_{ij})_{ij}$ vérifient une relation de cocycle.

Les submersions f_i et les difféomorphismes γ_{ij} de $\mathbb{R}^q$ caractérisent complètement le feuilletage $\mathcal{F}$.

Remarque. On peut alors donner une définition alternative de la notion de feuilletage.

Définition 75. On appelle feuilletage sur M la donnée d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de M, et d'une famille de submersions $f_i : U_i \to T$ sur une variété T de dimension q (appelée variété transverse) qui vérifie :
$\forall i, j$ tels que $U_i \cap U_j$ est non-vide on a $f_j = \gamma_{ji} \circ f_i$ où
$\gamma_{ji} : f_i(U_i \cap U_j) \to f_j(U_i \cap U_j)$ sont des difféomorphismes qui vérifient une condition de cocycle.
On dit que $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})$ est un cocycle feuilleté définissant $\mathcal{F}$.

Définition 76. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur M, si $x \in M$ on note $T_x\mathcal{F}$ l'espace tangent en x à la feuille contenant x.
On note $T\mathcal{F} = \amalg_{x\in M} T_x\mathcal{F}$, $T\mathcal{F}$ est appellé l'espace tangent au feuilletage.

Remarque. L'espace tangent au feuilletage $T\mathcal{F}$ est un sous-fibré vectoriel involutif de dimension p de TM.
De plus par le théorème de Frobenius, le feuilletage $\mathcal{F}$ est entièrement caractérisé par la donnée de $T\mathcal{F}$.

Exemple 18. Si $p : M \to B$ est une submersion, alors les composantes connexes des fibres de p définissent un feuilletage sur M.
En particulier si M est de la forme $M = F \times B$, on peut munir M du feuilletage dont les feuilles sont les ensembles de la forme $F \times \{b\}, b \in B$.

Exemple 19. Soit $\pi : M \to B$ une fibration avec $\dim M = n$ et $\dim B = q$.
On sait que π est une submersion et que $TM = V(M) \oplus H(M)$ où
$V(M) = Ker\ \pi_*$ et π_* induit un isomorphisme de $H(M)$ sur TB.
Alors $V(M)$ est un sous-fibré involutif de TM et définit un feuilletage sur M de codimension q dont les feuilles sont les fibres de la fibration.

Définition 77. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur M et $(M', \mathcal{F}')$ est une autre variété feuilletée, on dira que l'application C^∞ $f : M \to M'$ est feuilletée si pour toute feuille L de $\mathcal{F}$, $f(L)$ est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}'$, ou de manière équivalente si $f_*(T\mathcal{F}) \subset T\mathcal{F}'$.

Définition 78. On dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est simple, si $\mathcal{F}$ est défini par une submersion dont les fibres sont connexes.

Définition 79. On dit qu'un ouvert U de M est simple, si le feuilletage $\mathcal{F}$ restreint à U est un feuilletage simple.

Remarque. Tout point de M possède un voisinage ouvert qui est un ouvert simple.

Définition 80. Soit U une partie de M, on dit que U est saturé pour $\mathcal{F}$, si U est une réunion de feuilles, autrement dit si la feuille passant par un point x de U est contenue dans U.

Définition 81. Soit T une sous-variété de M de dimension q, on dit que T est une transversale si en tout point de T l'espace tangent à T est supplémentaire à l'espace tangent au feuilletage en ce point.
On dit qu'une transversale est totale si elle rencontre toute les feuilles du feuilletage

Remarque. (i) Un feuilletage admet toujours au moins une transversale totale.
(ii) En tout point de M il passe au moins toujours une transversale.

Remarque. Nous allons à présent rappeler la construction des feuilletages par suspension qui nous sera utile pour fournir des exemples de feuilletages.

Définition 82. Soient B et T des variétés connexes de dimension p et q respectivement, et $h : \pi_1(B) \to Diff(T)$ un morphisme de groupes où $\pi_1(B)$ désigne le groupe fondamental de B.
On note $\tilde{M} = \tilde{B} \times T$ où $\tilde{B}$ désigne le revêtement universel de B et $\tilde{p} : \tilde{B} \to B$ la projection associée.

Proposition 115. On a une action C^∞ de $\pi_1(B)$ sur $\tilde{M}$ définie par

$$L_{[\gamma]}(\tilde{x}, y) = ([\gamma].\tilde{x}, h([\gamma])(y)),\ \forall \tilde{x} \in \tilde{B},\ \forall y \in T.$$

On notera $M = \tilde{M}/\pi_1(B)$ la variété quotient et $\pi : \tilde{M} \to M$ la surjection canonique.

Proposition 116. On munit $\tilde{M}$ d'un feuilletage de codimension q noté $\tilde{\mathcal{F}}$ défini par $T\tilde{B}$ dont les feuilles sont de la forme $\tilde{B} \times \{y\}, y \in T$.
Comme $L_{[\gamma]}$ envoie une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$, on peut définir un feuilletage $\mathcal{F}$ sur M de codimension q dont les feuilles sont de la forme $\pi(\tilde{L})$ ou $\tilde{L}$ est une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$.
Le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ est alors appelé feuilletage par suspension du morphisme h.

Remarque. L'application $\tilde{p}$ induit une fibation localement triviale
$p : M \to B$ de fibre T. On voit alors que les fibres de p sont des transversales totales et connexes du feuilletage $(M, \mathcal{F})$ (on dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse à la fibration p).
La variété T s'identifie alors à une transversale de $(M, \mathcal{F})$.

Exemple 20. On considère le feuilletage où B est le cercle S^1 et $T = S^1$.
Donc $\tilde{B} = \mathbb{R}$ et $\pi_1(B) = \mathbb{Z}$. On définit le morphisme de groupe
$\rho : \pi_1(B) \to Diff(T)$ par $\rho(1) = M_{e^{2\pi i\theta}}$ où $M_{e^{2\pi i\theta}}$ désigne la multiplication

par $e^{2\pi i\theta}$.
On obtient alors un feuilletage sur le tore T^2.
Si θ est rationnel les feuilles sont difféomorphes au cercle S^1, sinon les feuilles sont isomorphes à la droite réelle $\mathbb{R}$ (et elles sont denses).

A.2 Structures transverses

Soit $(U_i, f_i, T, \gamma_{ij})$ un cocycle feuilleté définissant le feuilletage $\mathcal{F}$ sur la variété M.
Une structure transverse à $\mathcal{F}$ est une structure sur T invariante par les γ_{ij}.

Remarque. On appelle espace des feuilles l'espace quotient $M/\mathcal{F}$ (c'est-à-dire deux points sont équivalents s'ils appartiennent à la même feuille) muni de la topologie quotient.
En fonction du feuilletage $\mathcal{F}$ la topologie de $M/\mathcal{F}$ peut-être radicalement différente (voir par exemple [Mol88]).
Plus le feuilletage diffère d'un feuilletage simple, plus $M/\mathcal{F}$ diffère d'une variété. On peut voir une structure transverse sur $\mathcal{F}$ comme une structure géométrique sur l'epace des feuilles $M/\mathcal{F}$, bien que $M/\mathcal{F}$ ne soit pas muni d'une structure de variété en général.

Définition 83. Si T est une variété riemannienne et les γ_{ij} sont des isométries, on dira que $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemmannien.

Proposition 117. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est riemannien si et seulement si on peut munir M d'une métrique riemmanienne g tel que :
(i) $\ker g_x = T_x\mathcal{F}, \forall x \in M$,
(ii) $\mathcal{L}_V(g) = 0, \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ où
$\mathcal{L}_V(g)(X,Y) = V(g(X,Y)) - g(\mathcal{L}_V(X), Y) - g(X, \mathcal{L}_V(Y))$.

Définition 84. Si la variété T admet un parallélisme invariant par les γ_{ij}, on dira que $\mathcal{F}$ est transversalement parallélisable.

Remarque. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement parallélisable, alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien. En effet : il suffit de définir la métrique riemannienne sur le fibré normal $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ en un point et de la transporter sur toute la variété M à l'aide du parallélisme transverse.

Définition 85. Si T est un groupe de Lie et les γ_{ij} sont des translations, on dira que $\mathcal{F}$ est un feuilletage de Lie.

Remarque. Un feuilletage de Lie est transversalement parallélisable. En effet : tout groupe de Lie est parallélisable et on peut toujours choisir un parallélisme invariant par translation à gauche.

Définition 86. Si T est orientable et les γ_{ij} préservent l'orientation on dira que $\mathcal{F}$ est transversalement orientable.

Proposition 118. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement orientable si et seulement si le fibré normal $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ est orientable.

Définition 87. Si T est une variété analytique complexe et les γ_{ij} sont biholomorphes, on dira que $\mathcal{F}$ est transversalement holomorphe.

Définition 88. Si T est une variété spin et les γ_{ij} préservent la structure spin, on dira que $\mathcal{F}$ est transversalement spin.

Exemple 21. Dans le cas d'un feuilletage par fibration $\pi : M \to B$, une structure transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ est exactement le tiré-en-arrière d'une structure géométrique sur la base B.

Exemple 22. Dans le cas d'un feuilletage par suspension $M = \tilde{B} \times T/\pi_1(B)$ du morphisme h, une structure transverse au feuilletage $\mathcal{F}$ est exactement une structure géométrique sur T invariante par l'action du groupe $\Gamma = h(\pi_1(B))$.

A.3 Holonomie

Dans ce paragraphe nous allons rappeler la notion d'holonomie (voir par exemple [CC00, Mol88, MM03, EKAB84, Ton97]).

Soient L une feuille de $\mathcal{F}$, x_0, x_0' des points de L et T, T' des transversales passant en x et x'.

Proposition 119. On suppose que $\mathcal{F}$ est un feuilletage simple défini par une submersion $\pi : M \to W$ dont les fibres sont connexes.
Comme x_0 et x_0' sont dans la même feuille, on a $\pi(x_0) = \pi(x_0')$.
L'application π induit des difféomorphismes locaux d'un ouvert V de T sur W et d'un ouvert V' de T' sur W.
On peut restreindre ces ouverts tel que $\pi(V) = \pi(V')$. On obtient donc un difféomorphisme $\phi : V \to V'$ appelé glisser le long des feuilles.

Proposition 120. Revenons au cas d'un feuilletage quelconque.
Soient $\gamma : [0,1] \to L$ un chemin continue de x_0 à x_0',
et $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_k = 1$ une subdivision de $[0,1]$ tel que pour $i = 1, ..., k$ l'image de $\gamma([t_i - 1, t_i])$ est contenue dans un ouvert feuilleté U_i.
Comme $\gamma([t_i - 1, t_i])$ est connexe, $\gamma([t_i - 1, t_i])$ est contenu dans une plaque $(L_0)_i$ dans l'ouvert U_i.
Soit T_i une transversale à la variété feuilletée $(U_i, \mathcal{F}_{U_i})$ passant en $x_i = \gamma(t_i)$.
Glisser le long des feuilles définit un difféomorphisme ϕ_i d'un voisinage ouvert V_{i-1} de x_{i-1} dans T_{i-1} sur un voisinage ouvert V_i de x_i dans T_i.
On a donc un difféomorphisme $\phi_k \circ \phi_{k-1} \circ ... \circ \phi_1$ d'un voisinage ouvert de x_0 dans T sur un voisinage ouvert de x_0' dans T'.

Ce difféomorphisme sera encore appelé glisser le long de γ et parfois noté hol_γ.
On appelle holonomie de γ le germe de ce difféomorphisme qu'on notera $hol_\gamma^{T,T'}$ ou hol_γ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 121. L'holonomie de γ vérifie les propriétés suivantes :
(i) L'holonomie de γ ne dépend pas des transversales intermédiaires T_i.
(ii) L'holonomie de γ ne dépend pas de la chaîne d'ouverts feuilletés mais uniquement du chemin γ.
(iii) L'holonomie de γ ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ à extrémités fixées.
(iv) Si α est un autre chemin le long de la feuile L tel que α et γ soient composables alors on a $hol_{\alpha\gamma} = hol_\alpha hol_\gamma$.
(v) Soient S une autre transversale en x_0 et S' une autre transversale en x_0', alors $hol_\gamma^{S,S'} = hol_{\bar{x_0'}}^{T',S'} \circ hol_\gamma^{T,T'} \circ hol_{\bar{x_0}}^{S,T}$ où $\bar{x_0}$ et $\bar{x_0'}$ désignent les chemins constants en x_0 et x_0'.

Proposition 122. Si γ est un lacet en x_0, c'est-à-dire si $x_0' = x_0$ et $T' = T$, alors hol_γ laisse fixe x_0.
Comme hol_γ ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ, on a donc un morphisme de groupe $\pi_1(L, x_0) \to Diff_{x_0}(T)$ du groupe fondamental de L en x_0 vers le groupe des germes de difféomorphismes locaux de T qui laissent fixe x_0. L'image ce morphisme est un sous-groupe de $Diff_{x_0}(T)$ appelé le groupe d'holonomie de L en x_0.
On dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est sans holonomie si pour toute feuille le groupe d'holonomie est trivial.

Définition 89. On dit que deux chemins α et γ le long de la même feuille et ayant les mêmes extrémités ont la même holonomie si $hol_{\alpha^{-1}\gamma} = Id$.
Cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des classes d'homotopie le long de la même feuille et ayant les mêmes extrémités. Les classes d'équivalence seront appelées des classes d'holonomie.

Définition 90. On appelle groupoïde la donnée d'un couple $(G^{(1)}, G^{(0)})$, où $G^{(0)} = X$ est l'espace des unités et $G^{(1)}$ est l'espace des flèches $\gamma : X \to X$ munis des applications suivantes :
- l'inclusion $\Delta : X \to G^{(1)}$,
- l'inverse $i : G^{(1)} \to G^{(1)}$,
- l'image $r : G^{(1)} \to X$,
- la source $s : G^{(1)} \to X$,
- la composition $m : G_2^{(1)} \to$, où $G_2^{(1)}$ est l'ensemble de paires d'éléments composables (γ, γ') dans $G^{(1)}$, c'est-à-dire $r(\gamma') = s(\gamma)$.

Les applications ci-dessus doivent vérifier les propriétés suivantes :
- $r(\Delta(x)) = s(\Delta(x))$, et $m(u, \Delta(s(u))) = u = m(\Delta(r(u)), u)$,

- $r(i(u)) = s(u)$ et $m(u, i(u)) = \Delta(r(u))$, $m(i(u), u) = \Delta(s(u))$,
- $s(m(u, v)) = s(v)$ et $r(m(u, v)) = r(u)$,
- $m(u, m(v, w)) = m(m(u, v), w)$ si $r(w) = s(v)$ et $s(u) = r(v)$.

Définition 91. On appelle groupoïde d'holonomie de $(M, \mathcal{F})$ le groupoïde $G_{\mathcal{F}}$ où $G^{(0)}$ est la variété M et $G^{(1)}$ est donné par les classes d'holonomie de chemin le long des feuilles.
L'inclusion est donnée par les classes d'holonomie de chemin constant, l'inverse et la composition sont donnés par l'inverse et la composition des chemins, et la source et l'image sont donnés par le point de départ et d'arrivée du chemin.

A.4 Théorie de Molino

Nous allons rappeler maintenant deux théorèmes dûs à Pierre Molino qui donnent la structure des feuilletages riemanniens. Pour plus de détails voir [Mol88, MM03, EKAB84].

Théorème 42. On suppose que le feuilletage $(M, \mathcal{F})$ est transversalement parallélisable, alors :

(i) Les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration localement triviale $\pi : M \to W$ appelée fibration basique de $(M, \mathcal{F})$. La variété W sera appelée la variété basique de $(M, \mathcal{F})$.

(ii) Il existe un groupe de Lie simplement connexe Γ tel que le feuilletage $\mathcal{F}_0$ induit dans chaque adhérence de feuille F est un Γ-feuilletage de Lie à feuilles denses.

Théorème 43. On suppose que $\mathcal{F}$ est transversalement orientable. Soit alors $SO(q) \to M^\sharp \to M$ le fibré principal des repères orthonormés transverses à $\mathcal{F}$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ se relève sur $M^\sharp$ en un feuilletage $\mathcal{F}^\sharp$ tel que :

(i) $\dim \mathcal{F} = \dim \mathcal{F}^\sharp$

(ii) Le feuilletage $\mathcal{F}^\sharp$ est transversalement parallélisable et invariant par l'action du groupe $H = SO(q)$.

De plus le parallélisme transverse à $\mathcal{F}^\sharp$ se compose d'une partie verticale $(Q_1, ..., Q_N)$ où $N = q(q-1)/2 = \dim SO(q)$ formées des champs fondamentaux de l'action de $SO(q)$ sur $M^\sharp$ et d'une partie horizontale $(P_1, ..., P_q)$ donnée par la connexion de Levi-Civita transverse du fibré principal $SO(q) \to M^\sharp \to M$.
Le parallélisme $(P_1, ..., P_q, Q_1, ..., Q_N)$ vérifie :

(i) $[P_i, P_j]$ est vertical pour $i, j = 1, ..., q$,

(ii) $[P_i, Q_k]$ est horizontal pour $i = 1, ..., q, k = 1..., N$,

(iii) $[Q_k, Q_l]$ est vertical pour $k, l = 1, ..., N$.

Remarque. On peut toujours supposer quitte à passer à un revêtement à deux feuillets que $(M, \mathcal{F})$ est transversalement orientable (voir [MM03]).

Le théorème reste vrai si le feuilletage n'est pas transversalement orientable, il suffit de remplacer $SO(q)$ par $O(q)$.

Annexe B

Notion de $\mathcal{F}$-fibrés

Nous allons à présent étudier la notion de $\mathcal{F}$-fibrés ([KT75]) qui sera la classe de fibrés vectoriels que nous considérerons par la suite. Nous commencerons par faire quelques rappels sur les connexions (voir [Spi79, GHV73, KT68]). On désignera par X une variété.

Définition 92. Soit P un fibré principal au-dessus de X de groupe structural G, où G est un groupe de Lie compact.
On appelle connexion sur P la donnée d'un sous-fibré principal H tel que :
(i) $\forall z \in H, T_zP = V_z \oplus H_z$ où H_z désigne la fibre de H en z.
(ii) $\forall g \in G, \forall z \in P, H_{zg} = (R_g)_* H_z$ où R_g est l'action à droite de g sur P.

Définition 93. Soit P un fibré principal au-dessus de X de groupe structural G, où G est un groupe de Lie compact.
On appelle connexion sur P la donnée d'un sous-fibré principal H donné par le noyau d'une 1-forme G-invariante ξ sur P à valeurs dans $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie du groupe G.
L'invariance de ξ signifie : $(R_g)^*(\xi) = Ad_{g^{-1}}(\xi)$.

Remarque. Les deux définitions précédentes sont en fait équivalentes (voir [Spi79, GHV73]). Si E est le fibré vectoriel associé à P, on alors une correspondance biunivoque entre l'ensemble des connexions linéaires sur le fibré vectoriel E et l'ensemble des connexions sur le fibré pincipal P.

Proposition 123. Soient E un fibré vectoriel au-dessus de X et ∇ une connexion linéaire sur E.
Alors il existe une unique connexion linéaire ∇^* sur E^* (notée encore ∇ s'il n'y a pas d'ambiguïté) telle que
$\forall \sigma \in \Gamma(E),\ \forall \sigma^* \in \Gamma(E^*),\ \forall X \in \Xi(M),$

$$\langle \nabla^*(\sigma^*), \sigma \rangle (X) + \langle \sigma^*, \nabla(\sigma) \rangle (X) = (d \langle \sigma^*, \sigma \rangle)(X).$$

De plus la courbure de ∇ est donnée par :

$$R_{\nabla^*}(X,Y)(\sigma^*) = -R_\nabla(X,Y)^*(\sigma^*),\ \forall X, Y \in \Xi(M),\ \forall \sigma^* \in \Gamma(E^*).$$

Proposition 124. Soient E et E' des fibrés vectoriels au-dessus de X et ∇, ∇' des connexions linéaires sur E et E'.
Alors il existe une unique connexion linéaire notée $\nabla \otimes \nabla'$ sur $E \otimes E'$ tel que :

$$\nabla \otimes \nabla'(\sigma \otimes \sigma') = \nabla(\sigma) \otimes \sigma' + \sigma \otimes \nabla(\sigma'), \forall \sigma \in \Gamma(E), \forall \sigma \in \Gamma(E').$$

De plus la courbure de $\nabla \otimes \nabla'$ est donnée par :

$$R_{\nabla \otimes \nabla'} = R_\nabla \otimes Id + Id \otimes R_{\nabla'}.$$

Proposition 125. Soient E un fibré vectoriel au-dessus de X et ∇ une connexion linéaire sur E.
Alors il existe une unique connexion linéaire ∇_{Λ^k} sur $\Lambda^k E$ (notée encore ∇ s'il n'y a pas d'ambiguité) telle que :

$$\nabla_{\Lambda^k}(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_k) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_1 \wedge ... \wedge \nabla(\sigma_i) \wedge ... \wedge \sigma_k, \forall \sigma_i \in \Gamma(E).$$

De plus la courbure de ∇_{Λ^k} est donnée par : $\forall X, Y \in \Xi(M),\ \forall \sigma_i \in \Gamma(E)$,

$$R_{\nabla_{\Lambda^k}}(X, Y)(\sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_k) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_1 \wedge ... \wedge R_\nabla(X, Y)(\sigma_i) \wedge ... \wedge \sigma_k.$$

Proposition 126. Soient E un fibré vectoriel au-dessus de X, ∇ une connexion linéaire sur E, et γ un chemin dans X.
Alors il existe un unique morphisme de fibrés vectoriels $\phi : \mathbb{R} \times E_{\gamma(0)} \to E$ qui induit $\gamma : \mathbb{R} \to X$ tel que sur chaque fibre ϕ est un isomorphisme et $\phi^\sharp \circ \nabla = d \circ \phi^\sharp$ où $\phi^\sharp$ est l'application induite par ϕ sur $\Gamma(E)$.
L'isomorphisme $\phi_t : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}$ est appelé transport parallèle le long de γ de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$.

Définition 94. Si $\sigma \in \Gamma(E)$, on dit que σ est parallèle le long de γ si σ vérifie $\phi_t(\sigma_{\gamma(0)}) = \sigma_{\gamma(t)}$.

Proposition 127. Soient E un fibré vectoriel au-dessus de X et ∇ une connexion linéaire sur E. Alors on a :

(i) Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins composables, alors le transport parallèle associé à $\gamma_1\gamma_2$ est la composé du transport paralléle associé à γ_1 et de celui associé à γ_2.

(ii) Le transport parallèle associé à ∇ ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ si et seulement si la courbure de ∇ est nulle (c'est-à-dire la connexion ∇ est plate).

Démonstration. Voir [KT68]. □

Proposition 128. Soit E un fibré vectoriel au-dessus de X.
On suppose que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout chemin γ dans X et $\forall t \in [0,1]$, on a un isomorphisme $\phi_t : E_{\gamma(0)} \to E_{\gamma(t)}$,

(ii) pour tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que U est convexe, U contient l'origine et U est l'image d'une carte de M, on note λ_x le chemin de U où $\lambda_x(t) = tx$ avec $x \in U$, alors l'application $U \to Gl_n(\mathbb{R})$ qui à x associe le transport parallèle associé à λ_x est C^∞,

alors il existe une unique connexion ∇ sur E tel que ϕ_t est le transport parallèle le long de γ de $\gamma(0)$ à $\gamma(t)$.
De plus si γ est la courbe intégrale de X, ∇_X est donnée par :

$$\nabla_X = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_t^{-1}(\sigma_{\gamma(0)}) - \sigma_{\gamma(0)}}{t}.$$

Démonstration. Voir [KT68, Spi79]. □

Revenons à présent à notre variété M munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$. Soit P un fibré principal au-dessus de M de groupe structural G où G est un groupe de Lie compact et $p : P \to M$ la projection.
On notera E le fibré vectoriel associé à P.
Soit H une connexion sur P on notera ξ la 1-forme de connexion sur P à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ associée à H et ∇ la dérivée covariante sur E associée à H. On rappelle que $\forall z \in P$, la submersion p induit un ismorphisme d'espace vectoriel de H_z sur $T_{p(z)}M$.

Définition 95. On pose $\tau = p^*(T\mathcal{F})$. On dit que le fibré principal P est feuilleté si τ est intégrable.
Dans ce cas τ définit un feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ sur P tel que $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\tilde{\mathcal{F}})$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ est invariant par l'action de G.
On dit que le fibré vectoriel E est feuilleté si le fibré principal associé est un fibré feuilleté, et on dit dans ce cas que ∇ est une connexion adaptée.

Définition 96. On dit que la connexion H est basique si ξ est basique.
Si le fibré principal P est feuilleté et admet une connexion basique, on dira que P est un $\mathcal{F}$-fibré principal.
On dit que le fibré vectoriel E est un $\mathcal{F}$-fibré vectoriel si le fibré principal associé est un $\mathcal{F}$-fibré et on dira dans ce cas que ∇ est une connexion basique.

Proposition 129. Si E est un fibré vectoriel muni d'une connexion linéaire ∇, alors :

(i) le fibré E est un fibré feuilleté si et seulement si sa courbure R_∇ vérifie $R_\nabla(U,V) = 0,\ \forall U, V \in \Gamma(T\mathcal{F})$,

(ii) le fibré E est un $\mathcal{F}$-fibré si et seulement si $i_V(R_\nabla) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.

Démonstration. Voir [KT75]. □

Exemple 23. Selon le théorème 12, $\nu\mathcal{F}$ muni de la connexion de Levi-Civita transverse est un $\mathcal{F}$-fibré.

Proposition 130. Si E est un $\mathcal{F}$-fibré alors E^* et $\Lambda^k E^*$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés.

Démonstration. Comme E est un $\mathcal{F}$-fibré, on a $i_V(R_\nabla) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
Donc $i_V(R_{\nabla^*}) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$ et $i_V(R_{\nabla^*_{\Lambda^k}}) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.
C'est-à-dire E^* et $\Lambda^k E^*$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés. □

Corollaire 16. On note $\nu\mathcal{F}^* = \nu^*\mathcal{F}$. Alors $\nu^*\mathcal{F}$ et $\Lambda^k\nu^*\mathcal{F}$ sont des $\mathcal{F}$-fibrés.

Définition 97. Soient E un fibré feuilleté au-dessus de M et ∇ une connexion adaptée sur E.
Si $\alpha \in \Gamma(E)$, on dit que α est basique si $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \nabla_V(\alpha) = 0$.
On note $\Gamma(E/\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des sections basiques.

Remarque. On voit immédiatement que $\Gamma(E/\mathcal{F})$ est un $\Omega^0(M/\mathcal{F})$-module.

Exemple 24. Les sections basiques du fibré normal $\nu\mathcal{F}$, sont exactement les champs de vecteurs basiques. En effet :
si X est tangent au feuilletage, la connexion de Levi-Civita transverse ∇_X est donné par la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$, il suffit alors d'utiliser la caractérisation des champs basiques donnée par les propositions 35 et 36.

Proposition 131. L'espace des sections basiques de $\Lambda^k\nu^*\mathcal{F}$ est isomorphe à l'espace des formes différentielles basiques de degré k.

Démonstration. On a
$\Omega^k(M/\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega^k(M)/\ i_V(\omega) = \mathcal{L}_V(\omega) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})\}$,
donc $\Omega^k(M/\mathcal{F}) \cong \{\omega \in \Omega^k(\nu\mathcal{F})/\ \mathcal{L}_V(\omega) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})\}$.
Montrons que $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \nabla^*_V = \mathcal{L}_V$.
La connexion ∇^* est caracterisée par :
$\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \forall s \in \Gamma(\nu\mathcal{F}),\ \forall s^* \in \Gamma(\nu^*\mathcal{F})$
$\langle\nabla^*(s^*), s\rangle(V) + \langle s^*, \nabla(s)\rangle(V) = (d\langle s^*, s\rangle)(V)$.
Donc on a

$$\begin{aligned}\nabla^*_V(s^*)(s) &= -s^*(\nabla_V(s)) + V(s^*(s)) \\ &= -s^*(\mathcal{L}_V(s)) + V(s^*(s)) \\ &= \mathcal{L}_V(s^*)(s)\end{aligned}$$

Donc $\forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}),\ \forall \omega \in \Omega^k(\nu\mathcal{F}),\ \mathcal{L}_V(\omega) = \nabla^*_V(\omega)$.
Donc $\Omega^k(M/\mathcal{F}) \cong \{\omega \in \Omega^k(\nu\mathcal{F})/\ \nabla^*_V(\omega) = 0,\ \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})\}$. □

Proposition 132. Soient E un fibré feuilleté et ∇, ∇' des connexions adaptées sur E. Alors $\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}), \nabla_V(\sigma) = \nabla'_V(\sigma)$.
En particulier la notion de section basique est indépendante du choix de la connexion adaptée.

Démonstration. Voir [KT75]. □

Définition 98. Soit E un fibré muni d'une métrique hermitienne h.
On peut considérer h comme une section du fibré S^2E^* des formes bilinéaires symétriques sur E. La connexion basique ∇ sur E s'étend de manière naturelle en une connexion basique ∇^S sur S^2E^*.
On dira que E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien si $\nabla^S_V(h) = 0, \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F})$.

Proposition 133. Si le fibré E est un $\mathcal{F}$-fibré hermitien, alors le feuilletage $\mathcal{F}_E$ sur E relevé du feuilletage $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien.

Démonstration. Le fibré normal à $\mathcal{F}_E$ s'identifie à la somme directe du fibré TE tangent aux fibres de $q : E \to M$ et du fibré $q^*(\nu\mathcal{F})$ qui sont munis de métiques riemanniennes invariantes le long des feuilles de $\mathcal{F}_E$. □

Annexe C

Index

Cet index indique les pages où sont présentées les différentes notions introduites dans la thèse :
métrique quasi-fibrée : page 30,
connexion de Levi-Civita transverse : page 31 et page 32,
courbure principale : page 36,
forme différentielle basique : page 37,
cohomologie basique : page 37,
forme volume transversale : page 44,
forme caractéristique : page 45,
espace de Sobolev basique : page 50 ,
opérateur différentiel basique : pages 51 et 52,
opérateur différentiel basique transversalement elliptique : page 52,
indice basique : page 60,
Laplacien basique : page 61,
caractéristique d'Euler basique : page 68,
signature basique : page 70,
indice distributionnel basique : page 103,
$\mathcal{F}$-fibré : page 127,
connexion basique : page 127.

Bibliographie

[AL92] J. A. Alvarez Lopez. The basic component of the mean curvature of riemannian foliations. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 10 :179–194, 1992.

[AS68] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators : 3. *The Annals of Mathematics*, 87(3) :546–604, 1968.

[Ati] M.F. Atiyah. *Elliptic operators and compact groups.* Lecture Notes in Math. 401.

[BGV04] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators.* Grundlehren text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[BKR10a] J. Brüning, Franz F. W. K., and K. Richardson. Index theory for basic dirac operators on riemannian foliations. *Preprint*, 2010.

[BKR10b] J. Brüning, Franz F. W. Kamber, and K. Richardson. The equivariant index theorem for tansversally elliptic operators and the basic index theorem for riemannian foliations. *Preprint*, 2010.

[BV96a] N. Berline and M. Vergne. The chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index. *Inventiones Mathematicae*, 124(1) :11–49, 1996.

[BV96b] N. Berline and M. Vergne. L'indice équivariant des opérateurs transversallement elliptiques. *Inventiones Mathematicae*, 124(1) :51–101, 1996.

[Car84] Y. Carrière. Flots riemanniens. *Astérisque*, 116 :31–52, 1984.

[CC00] A. Candel and L. Conlon. *Foliations 1*, volume 23 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Wilmington, DE, 2000.

[Dom98] D. Dominguez. Finiteness and tenseness theorems for riemannian foliations. *American Journal of Mathematics*, 120(6) :1237–1276, 1998.

[Duf] M. Duflo. Opérateurs transversalement elliptiques et formes différentielles équivariantes.

[EKA90] A. El Kacimi-Alaoui. Opérateurs transversalement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications. *Compositio Mathematica*, 73(1) :57–106, 1990.

[EKAB84] A. El Kacimi-Alaoui and R. Barre. *Foliations*, volume 11 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish Inc., Wilmington, DE, 1984.

[EKAH86] A. El Kacimi-Alaoui and G. Hector. Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien. *Annales de l'institut Fourier*, 36(3) :207–227, 1986.

[EKAN93] A. El Kacimi Alaoui and M. Nicolau. On the topological invariance of the basic cohomology. *Mathematische Annalen*, 295 :627–634, 1993.

[EKASH85] A. El Kacimi-Alaoui, V. Sergiescu, and G. Hector. La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie. *Mathematische Zeitschrift*, 188 :593–599, 1985.

[Far06] J. Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie*. Calvage et Mounet, 2006.

[GHV73] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone. *Connections, curvature, and cohomology vol2*, volume 47-2 of *Pure and applied Mathematics*. Academic Press, 1973.

[Gil84] P. B. Gilkey. *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, volume 11 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish Inc., Wilmington, DE, 1984.

[GL10] A. Gorokhovsky and J. Lott. The index of a transverse dirac type operator : the case of abelain molino sheaf. *Preprint*, 2010.

[Hae58] A. Haefliger. Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 32(1) :248–329, 1958.

[Hae88] A. Haefliger. Leaf closures in riemannian foliations. *A Fête of Topology, Academic Press, Boston, MA*, pages 3–32, 1988.

[Hel01] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.

[Hir78] F.E.P. Hirzebruch. *Topological methods in algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1978.

[KT68] F.W. Kamber and P. Tondeur. *Flat manifolds*. Lecture Notes in Math. 67. Springer-Verlag, 1968.

[KT75] F.W. Kamber and P. Tondeur. *Foliated bundles and characteristic classes*. Lecture Notes in Math. 493. Springer-Verlag, 1975.

[KT87] F. Kamber and P. Tondeur. De Rahm-Hodge theory for riemannian foliations. *Math. Ann.*, pages 415–431, 1987.

[LM89] H. Blaine Jr. Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry.* Princeton university press, 1989.

[Mas92] X. Masa. Duality and minimality in riemannian foliations. *Comment. Math. Helvetici*, 67 :17–27, 1992.

[MM03] I. Moerdijk and J. Mrcun. *Introduction to foliations and Lie groupoids*, volume 91 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Mol88] P. Molino. *Riemmannian foliations*, volume 73 of *Progress in Mathematics.* Birkhauser Boston, Inc., Boston, 1988.

[MS74] J. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes*, volume 76 of *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton ; Tokyo University Press, Tokyo, 1974.

[Nov63] SP Novikov. Topology of foliations. *Trans. Moscow Math. Soc*, 14 :268–305, 1963.

[NRT90] S. Nishikawa, M. Ramachandran, and P. Tondeur. The heat equation for riemmanian foliations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 319(2) :619–630, 1990.

[PR96] E. Park and K. Richardson. The basic laplacian of a riemannian foliation. *American Journal of Mathematics*, 118 :1249–1275, 1996.

[Rei59a] B.L. Reinhart. Foliated manifolds with bundle-like metrics. *The Annals of Mathematics*, 69(1) :119–132, 1959.

[Rei59b] B.L. Reinhart. Harmonic integrals on foliated manifolds. *American Journal of Mathematics*, 81(2) :529–536, 1959.

[Ric98] K. Richardson. The asymptotics of heat kernels on riemannian foliations. *Geometric and Functional Analysis*, 8(2), 1998.

[Ric10] K. Richardson. Traces of heat operators on riemannian foliations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(5), 2010.

[Roe98] J. Roe. *Elliptic operators, topology and asymptotic methods.* Chapman & Hall/CRC, 1998.

[Rum79] H. Rummler. Quelques notions imples en géométries riemanniennes et leurs applications aux feuilletages compacts. *Comment. Math. Helvetici*, 54 :224–239, 1979.

[Ser85] V. Sergiescu. Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens. *Annales de l'institut Fourier*, 35(3) :137–158, 1985.

[Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry vol 2.* Publish or Perish, Inc, 1979.

[Thu74] W. Thurston. The theory of foliations of codimension greater than one. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 49(1) :214–231, 1974.

[Ton97] P. Tondeur. *Geometry of Foliations*, volume 90 of *Monographs in Mathematics*. Birkhauser Verlag, 1997.

[Wel80] R.O.N. Wells. *Differential analysis on complex manifolds*. Springer, 1980.