



THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

Discipline ou spécialité : Génie Mécanique

Présentée et soutenue par : Julien ASTOUL

Le : 4 Novembre 2011

Titre :

Méthode et outil pour la conception optimale d'une denture spiroconique

Jury :

M. Pascal LAFON, Professeur - Université de Troyes	Président
M. Jérôme FORTIN, Professeur - Université de Picardie	Rapporteur
M. Jean - Marc LINARES, Professeur - Université de la Méditerranée	Rapporteur
M. Marc SARTOR, Professeur - Université de Toulouse	Directeur de thèse
M. Manuel PAREDES, Maître de conférences - Université de Toulouse	Examineur
M. Emmanuel MERMOZ, Docteur Ingénieur - Eurocopter, Marignane	Examineur

Ecole doctorale : MEGEP

Unité de recherche : Institut Clément Ader

Avant propos

Les travaux de recherche synthétisés dans le présent mémoire répondent à un besoin à la fois scientifique et industriel. Ils ont été menés dans le cadre d'un partenariat entre l'Institut Clément Ader et Eurocopter. Mes remerciements vont donc à ces deux entités ainsi qu'à leur représentant respectif : Marc Sartor et Emmanuel Mermoz.

Je remercie Marc Sartor pour sa bienveillance et l'éclairage scientifique qu'il a su m'apporter. Je remercie Emmanuel Mermoz pour son soutien constant dans les moments difficiles. Je les remercie sincèrement pour leur confiance et leur patience.

Je remercie les « dentistes » : Lionel Auricombe, Alain Benet, Eric Ruiz, Matthias Gatti et son équipe. Ils m'ont enseigné les méthodes courantes de conception et de fabrication des engrenages à denture spiroconique. Je remercie M. SAMCEF : Jean-Claude Tourniaire. Sa connaissance aigüe du code de calcul exploité m'a beaucoup aidé lors du développement de la simulation de l'engrènement sous charge des dentures spiroconiques.

Je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'avancement des travaux.

Je remercie mes collègues de l'Institut Clément Ader.

Je remercie mes collègues d'Eurocopter.

Je remercie les membres du jury.

Je remercie ma famille.

Je remercie ma mère.

Et mon père.

Diffusion électronique

Laboratoire d'accueil : Institut Clément Ader, 135 avenue de Ranguel, 31077 Toulouse, France, www.institut-clement-ader.org

Titre : Méthode et outil pour la conception optimale d'une denture spiroconique

Résumé : Le rendement d'un hélicoptère est étroitement lié à son poids. L'allègement des composants profite à la charge utile transportable. Il implique généralement une diminution de leur rigidité, donc une augmentation de leur déformation. Les boîtes de transmission par engrenages sont particulièrement concernées. Elles doivent assurer le transit de puissances importantes à masse minimale. Les axes des roues dentées se désalignent alors avec l'application du chargement. Les topographies des dentures spiroconiques sont corrigées pour tolérer ce déplacement et optimiser les performances du mécanisme. La portée d'engrènement ne doit pas toucher une arête afin d'éviter toute surpression par effet de bord et une dégradation prématurée des dents. Il faut améliorer la répartition de l'effort transmis et des pressions de contact. L'erreur de transmission induit des vibrations et du bruit. Il faut donc la minimiser. Le processus de correction courant est manuel. Il est fastidieux et requiert une longue période d'apprentissage. Les travaux présentés s'inscrivent dans le cadre d'une automatisation du processus. L'usinage et l'engrènement des dentures sont simulés numériquement. Les méthodes proposées sont simples et robustes. Trois problèmes d'optimisation différents sont traités et analysés.

Mots-clés : Engrenage, Spiroconique, Optimisation, Portée d'engrènement, Erreur de transmission

Title : Method and tool for optimal design of spiral bevel gears

Abstract : The performance of a helicopter is closely linked to its weight. The components are lightened to benefit the carried payload. That usually involves a reduction in their stiffness, so an increase in their deformation. The transmission gear boxes are particularly affected. They must ensure the transit of high powers with a minimal mass. The load makes the axes of the gears misaligned. The topographies of the spiral bevel gear teeth are corrected in order to tolerate the displacement and optimize the mechanism performances. The contact path must not touch tooth edges to avoid any overpressure and premature degradation. The distribution of the transmitted load and of the contact pressures must be improved. The transmission error induces vibrations and noise. Therefore, it must be minimized. The current correction process is manual. It is tedious and requires a long learning period. The presented works fit into the scheme of an automated process. The machining and meshing of the teeth are simulated numerically. The proposed methods are simple and robust. Three different optimization problems are discussed and analyzed.

Keywords : Spiral bevel gear, Optimization, Contact path, Transmission error

Table des matières

1	Nomenclature	11
2	Introduction	15
3	Etat de l'art	19
3.1	Introduction	19
3.1.1	Théorie des engrenages	19
3.1.2	Engrenage à denture spiroconique	22
3.1.3	Boite de transmission à engrenages	24
3.2	Génération des dentures	27
3.2.1	Fabrication	27
3.2.2	Modélisation	30
3.2.3	Contrôle de topographie	31
3.3	Engrènement des dentures	33
3.3.1	Engrènement à vide	33
3.3.2	Engrènement sous charge	35
3.4	Optimisation des dentures	39
3.4.1	Optimisation à vide	39
3.4.2	Optimisation sous charge	42
3.5	Conclusion	44
4	Simulation du processus de génération des dentures	47
4.1	Introduction	47
4.2	Modélisation de l'outil	49
4.2.1	Définition de la géométrie de l'outil	49
4.2.2	Définition paramétrique de la surface de l'outil	50
4.3	Modélisation de la machine	52
4.3.1	Machine à commande mécanique	52
4.3.2	Machine à commande numérique	53
4.3.3	Méthode du roulement modifié	56
4.4	Modélisation du travail d'enveloppe	57

4.4.1	Paramétrage de la surface génératrice _____	57
4.4.2	Paramétrage de la surface enveloppe _____	58
4.4.3	Résolution de l'équation d'enveloppe _____	59
4.5	Génération de l'enveloppe _____	62
4.5.1	Génération du pied de la dent _____	62
4.5.2	Génération du profil de la dent _____	64
4.5.3	Stabilisation de la convergence du calcul _____	67
4.6	Cas d'application _____	72
4.7	Conclusion _____	74
5	Simulation de l'engrènement des dentures _____	77
5.1	Introduction _____	77
5.2	Localisation du contact à vide _____	79
5.2.1	Positionnement relatif des éléments de l'engrenage _____	79
5.2.2	Définition de l'écart entre deux flancs en vis-à-vis _____	81
5.2.3	Approximation du point de contact _____	83
5.3	Détermination de la portée d'engrènement à vide _____	85
5.3.1	Sélection du premier point d'approche et du dernier point de retrait ____	85
5.3.2	Estimation de l'erreur de transmission cinématique _____	87
5.3.3	Cas d'application du programme _____	92
5.4	Détermination de la portée d'engrènement sous charge _____	97
5.4.1	Modélisation des pièces par éléments finis _____	97
5.4.2	Traitement de l'engrènement par éléments finis _____	102
5.4.3	Cas d'application du programme _____	104
5.5	Conclusion _____	108
6	Maitrise et optimisation de l'engrènement _____	111
6.1	Introduction _____	111
6.2	Contraintes d'engrènement à vide _____	113
6.2.1	Risque de surpression lié au contact en bord _____	113
6.2.2	Évaluation de l'amplitude du contact à vide en bord de profil _____	114
6.2.3	Exemple d'application du programme _____	118

6.3	Maitrise du positionnement de la portée à vide _____	121
6.3.1	Définition de l'objectif _____	121
6.3.2	Choix des variables _____	124
6.3.3	Exemple d'application du programme _____	125
6.4	Minimisation de la pression de contact maximale _____	132
6.4.1	Processus de correction manuelle _____	132
6.4.2	Processus d'optimisation automatique _____	136
6.4.3	Cas d'application du programme _____	137
6.5	Minimisation de l'erreur de transmission cinématique _____	142
6.5.1	Processus d'optimisation automatique _____	142
6.5.2	Cas d'application du programme _____	142
6.6	Conclusion _____	149
7	Conclusion _____	151
8	Perspectives _____	153
9	Annexes _____	155
9.1	Conversion des données machine #463 _____	155
9.2	Conversion des données outil #463 _____	156
10	Références _____	159

1 Nomenclature

Indice

m : Pièce maître

s : Pièce esclave

Outil

ϕ_t : Position angulaire autour de l'axe de l'outil

s_t : Abscisse curviligne suivant le profil de l'outil

α_t : Position angulaire suivant le profil de l'outil

B_t : Paramètre d'identification du flanc de l'outil

R_t : Rayon moyen de l'outil

D_t : Diamètre moyen de l'outil

l_t : Largeur de plat de l'outil

s_f : Longueur d'arc de pointe de l'outil

α_f : Angle de pointe de l'outil

R_f : Rayon de pointe de l'outil

W_f : Largeur entre pointes de l'outil

XW_f : Position radiale du point d'intersection du profil avec le plat de l'outil

α_p : Angle du profil de l'outil

B_p : Paramètre d'identification du profil de l'outil

R_p : Rayon du profil de l'outil

Machine

ϕ_p : Position angulaire de la pièce

A : Centre machine / sommet cône primitif

Γ : Angle de pied machine

B : Base coulissante

E : Centre machine / centre berceau

ϕ_c : Position angulaire du berceau

ϕ_{c0} : Position angulaire initiale du berceau

S : Distance radiale

j : Angle de pivotement

i : Angle d'inclinaison

φ : Angle de rotation de l'outil

C_i : Coefficients de roulement modifié berceau / pièce

Géométrie

M_{pt} : Matrice de passage du repère de l'outil au repère de la pièce

L_{pt} : Sous-matrice de rotation 3×3 de M_{pt}

\vec{r}_t : Vecteur position de la surface de l'outil exprimé dans le repère de l'outil

\vec{n}_t : Normale unitaire à la surface de l'outil exprimée dans le repère de l'outil

\vec{r}_p : Vecteur position de la surface de la dent exprimé dans le repère de la pièce

\vec{n}_p : Normale unitaire à la surface de la dent exprimée dans le repère de la pièce

\vec{r}_w : Vecteur position de la surface de la dent exprimé dans le repère conventionnel de la pièce

\vec{n}_w : Normale unitaire à la surface de la dent exprimée dans le repère conventionnel de la pièce

Pièce

ρ : Rapport de réduction de l'engrenage

a_w : Saillie extérieure de la dent

H_w : Hauteur utile de la dent

W_w : Largeur de la dent

G_w : Génératrice extérieure de la dent

Z_w : Nombre de dents de la pièce

θE_w : Epaisseur angulaire en milieu de maillage du profil de la dent

p_w : Pas de dent angulaire de la pièce

R_w : Rayon de sphère de la pièce

γ_w : Angle de cône de la pièce

γ_f : Angle de cône minimal de la pièce

γ_h : Angle de cône maximal de la pièce

γ_p : Angle primitif de la pièce

γ_H : Angle de tête de la pièce

γ_F : Angle au raccordement pied / profil de la dent

Discrétisation

Np_w : Nombre de positions angulaires suivant le pas de la dent

NR_w : Nombre de points suivant la largeur de la dent

$N\gamma_w$: Nombre de points suivant le profil de la dent

Ns_f : Nombre de points suivant la pointe de l'outil

Déplacement relatif

A_w : Décalage axial de la pièce

O : Décalage hypoïde

γ : Décalage angulaire

Engrenage

$I\theta_m$: Index de position angulaire de la pièce maître

θ_m : Angle de rotation de la pièce maître

θ_s : Angle de rotation de la pièce esclave

Θ_m : Angle de référence de la pièce maître, milieu de l'engrènement

δc_s : Angle entre le point maître et la surface esclave

$e\theta_s$: Erreur de transmission cinématique de l'engrenage

$E\theta_s$: Amplitude de l'erreur de transmission cinématique de l'engrenage

θJ_s : Jeu angulaire de fonctionnement à vide de l'engrenage

Optimisation

CR_{im} : Fonction contrainte suivant la largeur de la dent

$C\gamma_{im}$: Fonction contrainte suivant la hauteur utile de la dent

$E\Theta_s$: Fonction objectif du positionnement de la portée à vide

Conversion

C_{463} : Constante de la machine #463

C_{e463} : Constante d'excentrique de la machine #463

ϕ_{e463} : Angle d'excentrique de la machine #463

ϕ_{g463} : Angle du guide de came de la machine #463

I_{c463} : Intervalle de division de la machine #463

S_{c463} : Réglage de came de la machine #463

O_{c463} : Hauteur de came de la machine #463

R_{c463} : Rayon primitif de came de la machine #463

$m_{c/w463}$: Rapport de roulement came / pièce de la machine #463

C_{d463} : Constante de bloc de diamantage

I_{d463} : Numéro de bras de diamantage

S_{d463} : Réglage du diamant

S_{d463} : Réglage de fin du diamant
end

A_{d463} : Réglage axial du bloc de diamantage

O_{d463} : Réglage vertical du bloc de diamantage

R_{d463} : Réglage radial du bloc de diamantage

α_{d463} : Angle de pression extérieur

2 Introduction

La transmission de la puissance est une problématique fondamentale. La transmission de la puissance mécanique est étudiée depuis l'antiquité. Les savants rivalisent alors d'ingéniosité pour économiser la puissance nécessaire au déplacement d'une charge utile. De nombreux mécanismes trouvent leur origine à cette époque. Avec le temps, les dispositifs primaires évoluent puis intègrent des machines de plus en plus complexes. La roue et l'engrenage sont parmi les premiers composants mécaniques inventés. Ils sont notamment employés dans la conception de véhicules. Aujourd'hui, une charge utile peut être transportée sur terre, dans l'eau, dans l'air ou dans l'espace. L'hélicoptère est un vecteur aérien. La transmission de la puissance du moteur aux divers organes mécaniques est assurée par des roues dentées. Celles-ci sont cylindriques ou coniques quand l'orientation de leur axe de rotation diffère. Idéalement, le mouvement transmis reste uniforme. Ce n'est le cas que lorsque les surfaces des dents en contact sont conjuguées. Les directions des axes des roues ne doivent alors pas varier. Cependant, la masse de l'hélicoptère est minimisée au profit de la charge utile. Tous les composants des boîtes de transmission sont donc allégés au maximum. Ils se déforment sous l'effet du chargement qui leur est appliqué. Cela induit un désalignement des axes des engrenages qui n'est pas négligeable. Les dentures doivent le tolérer. Pour cela, leurs flancs sont systématiquement recourbés dans la direction longitudinale. La portée d'engrènement est ainsi tenue loin des bords. En pratique, les surfaces ne sont donc jamais vraiment conjuguées. Il existe alors une erreur de transmission cinématique. L'engrenage génère inévitablement des vibrations et du bruit. Celui-ci est atténué par l'augmentation du nombre de dents simultanément engrenées sous charge. Les dentures sont alors inclinées d'un angle d'hélice pour favoriser l'accroissement du rapport de conduite. En outre, le partage de la charge à transmettre entre les diverses paires de dents en contact est amélioré. Cela contribue à la résistance de l'engrenage. Le fonctionnement du mécanisme doit être assuré pour toute la gamme de chargements prévue.

Les dentures spiroconiques sont recourbées, inclinées et générées sur un cône. Elles sont conçues pour rediriger l'axe de rotation et transmettre un couple élevé. Elles ne respectent pas scrupuleusement les préconisations de la théorie des engrenages mais assurent néanmoins la fonction souhaitée. Leurs surfaces ne sont pas conjuguées. Elles n'ont pas de formulation analytique directe. Il faut simuler leur fabrication. Chaque dent est usinée une à une par travail d'enveloppe. L'outil et la machine-outil doivent être modélisés. Les points de la surface enveloppe du profil de la dent sont recherchés à l'intersection de cônes et de sphères donnés. Ceux du pied sont recherchés sur ces mêmes sphères pour une abscisse curviligne de pointe d'outil donnée. Le problème est résolu par analyse numérique. L'algorithme de recherche repose sur la méthode de *Newton-Raphson*. Ce dernier est très performant. Toutefois, il n'est pas suffisamment robuste. La robustesse des algorithmes employés dans la littérature abordée est peu évoquée. Les voies d'amélioration ne sont pas clairement détaillées.

Le quatrième chapitre de ce mémoire présente divers recours pour stabiliser la convergence du calcul.

Les surfaces engrenantes n'ont pas une définition analytique globale. Elles ne sont connues que ponctuellement. La simulation du fonctionnement à vide de l'engrenage requiert donc aussi un traitement par analyse numérique. Plusieurs approches existent dans la littérature. Leur intelligibilité est plus ou moins évidente. Les travaux exposés dans le cinquième chapitre de ce mémoire sont axés sur un raisonnement simple et physique. La méthode adoptée peut sembler rudimentaire. Néanmoins, elle procure une bonne stabilité à la simulation de l'engrènement à vide. Plusieurs publications proposent des méthodes similaires. Elles sont toutes basées sur des techniques d'interpolation. Ici, il n'en est rien. Les points potentiellement en contact appartiennent aux flancs des dents engrenées. Ils sont générés successivement. La plus courte distance calculées entre deux points en vis-à-vis indique le lieu du contact. La recherche du point de contact repose donc sur une analyse comparative d'entités données. La convergence de l'algorithme ne dépend que de la simulation de l'usinage des dentures décrite précédemment.

Les positions d'engrènement traitées lors de l'analyse du comportement sous charge sont déterminées dans la simulation à vide. Les flancs en contact doivent s'interpénétrer légèrement pour amorcer le calcul. Ce dernier est réalisé par la méthode des éléments finis avec un outil d'analyse non-linéaire du commerce. Le maillage des dentures est construit automatiquement à partir des points issus de la simulation de l'usinage. Les nœuds ne sont donc pas obtenus par interpolation. La modélisation est ainsi plus précise et la mise en données plus rapide.

Toute la chaîne de simulation depuis l'usinage à l'engrènement des dentures est automatisée. L'outil développé dans le cadre de cette thèse répond aux problématiques liées à la conception, au calcul et à la fabrication des engrenages spiroconiques. Ce mémoire en présente les fondements. Le module de simulation des topographies et de l'engrènement des dentures est placé au cœur d'un processus d'optimisation automatique. Celui-ci délivre l'opérateur d'une tâche longue et fastidieuse. En outre, son objectivité lui confère un potentiel supérieur à celui d'un opérateur humain. L'amélioration du comportement de l'engrenage n'est plus tributaire d'une appréciation subjective. Les logiciels commerciaux actuels n'offrent qu'une analyse rapide de l'engrènement. L'optimisation est alors manuelle. Les phases d'amélioration sont traitées par une technique d'essais-erreurs. Quelques publications récentes proposent un processus automatique en deux étapes. Il s'agit d'une recherche successive de la topographie idéale puis des réglages de la machine-outil pour s'en approcher au mieux. Le sixième chapitre de ce mémoire présente une nouvelle méthode basée sur l'optimisation directe des réglages de la machine-outil. De plus, le problème tient simultanément compte des portées avec et sans désalignement des axes de l'engrenage. La portée à vide sans déplacement ne doit toucher aucun bord de flanc. Les fonctions contrainte et objectif sont élaborées de telle sorte que la discrétisation du modèle ne compromette pas la progression du processus. Trois sortes

d'optimisation sont proposées. La première procédure assure une maîtrise du positionnement de la portée d'engrènement à vide avec déplacement. Elle a surtout vocation à dégrossir le travail par un centrage préliminaire de la portée sur le flanc lorsque la configuration initiale est particulièrement mauvaise. En effet, la seconde procédure est plus lourde puisqu'elle implique un calcul par la méthode des éléments finis. Son rôle est la minimisation de la pression de contact maximale relevée au cours de l'engrènement sous charge des dentures. Elle bénéficie d'une sensibilité sur le partage de la charge entre les dents en contact que ne possède pas un opérateur humain avec les outils courants. Généralement, celui-ci ne raisonne qu'à travers sa perception de l'étalement de la portée. La troisième procédure minimise l'amplitude de l'erreur de transmission cinématique. Il est mis en évidence que cela induit une amélioration du partage de la charge et une diminution de la pression de contact. Ce lien n'est pas clairement établi dans la littérature actuelle.

3 Etat de l'art

3.1 Introduction

3.1.1 Théorie des engrenages

L'engrenage est connu depuis l'antiquité. Ses dents sont alors de simples tiges de bois. Il est exploité dans les tours de potier, les moulins à eau, à vent. Il constitue des mécanismes de levage, d'irrigation. Son utilisation ne se limite pas à la transmission de puissance. Il est également présent dans les premiers calculateurs. Le mécanisme d'*Anticythère* semble être le plus ancien et la *Pascaline* le plus célèbre.

L'engrenage travaille généralement en rotation. Il transmet une puissance et transforme un mouvement. Il couvre encore aujourd'hui de vastes champs d'applications. On le retrouve dans des pompes, des moteurs et notamment des transmissions mécaniques. Il compose les boîtes de vitesse des automobiles, les boîtes de transmission des hélicoptères. Cette dernière application sert à orienter et amplifier le couple moteur.

Les dentures doivent résister à l'effort transmis. De plus, leur engrènement ne doit pas perturber le fonctionnement du mécanisme. Un mouvement continu et uniforme des pièces est souvent idéal. L'engrenage doit donc être homocinétique. Les sollicitations dynamiques sont ainsi minimisées. Elles n'amplifient pas la pression de contact des dents engrenées. Les vibrations sont faibles. Elles induisent donc peu de bruit.

Dans la bibliographie, on distingue les engrenages à axes parallèles, concourants et gauches. Le premier sert à réduire ou multiplier la vitesse. Les autres permettent en plus une réorientation du mouvement de rotation. La denture est droite ou hélicoïdale. Cette dernière améliore le rapport de conduite de l'engrenage. Le nombre de dents simultanément en contact est supérieur. La charge à transmettre est ainsi mieux répartie.

L'engrenage à axes parallèles est en mouvement plan. On le modélise donc par une représentation plane. Le point de contact se déplace en deux dimensions suivant les profils de dents engrenées. Ceux-ci prennent des formes diverses. Les profils en épicycloïde et en développante de cercle sont les plus courants. Les premiers sont étudiés par *Romer*, *Desargues* et *La Hire*. Les seconds sont vraisemblablement découverts par *Euler* [1]. Ils sont représentés sur la Figure 1. *La Hire* propose une méthode de construction graphique de profils conjugués. *Camus* [2] approfondit les travaux de *La Hire* et montre que « dans un engrenage homocinétique, la normale au contact passe par un point fixe de la ligne des centres ». *Euler* [1] donne une construction précise des profils conjugués en développante de cercle. Toutefois, il ne semble pas avoir conscience de tous leurs avantages. La fabrication de dentures à développante de cercle exploite des techniques simples. Les pièces sont usinées par travail de forme ou d'enveloppe. Ce dernier procédé est particulièrement adapté à la rectification des dentures hélicoïdales. Les dents obtenues sont robustes. L'engrenage est homocinétique et

conserve cette propriété quelque soit son entraxe. Son mouvement ne dépend donc pas de la position relative de ses axes et il ne génère aucune erreur de transmission. Son fonctionnement est comparable à celui de deux roues de friction. Sur la Figure 2, les cercles primitifs (r_1 , r_2) correspondent aux roues. Celles-ci sont en contact au point fixe I de la ligne des centres O_1 et O_2 . Elles roulent sans glisser l'une sur l'autre. Le point I est donc le centre instantané de rotation du mouvement. On peut aussi faire le rapprochement avec deux galets liés par une courroie. Les galets sont schématisés par les cercles de base (r_{b1} , r_{b2}) et la courroie par la ligne de conduite (KL). Cette dernière représente l'ensemble des lieux de contact des dents engrenées. Elle passe par le point I. L'engrenage répond bien à la définition de *Camus*.

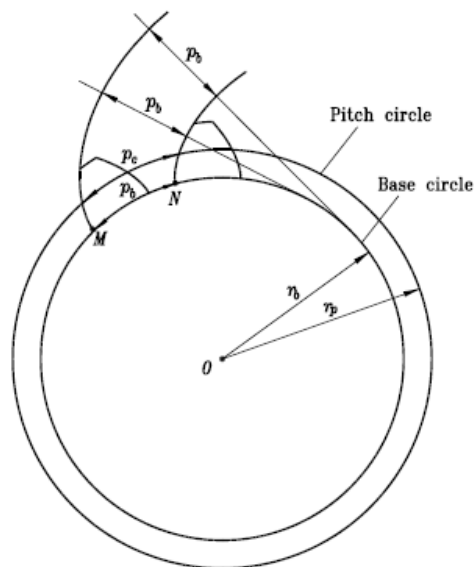


Figure 1 : Profil de denture en développante de cercle [9].

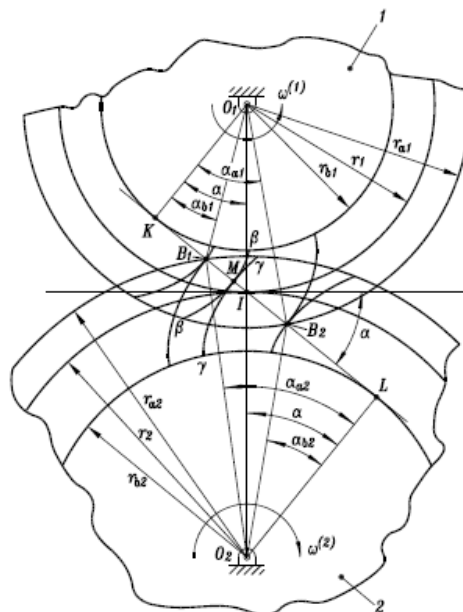


Figure 2 : Engrenement de profils de denture en développante de cercle [9].

Le profil de denture en développante de cercle est aujourd'hui si populaire qu'il semble être l'aboutissement de la théorie des engrenages. Il offre un excellent compromis. Cependant, il ne résout pas tous les problèmes pratiques liés à l'engrènement de dentures. Il n'est adapté qu'à des roues dentées dont les directions des axes sont bien stabilisées. L'engrenage traditionnel ne tolère pas d'importants écarts d'orientation relative de ses axes. Or, la direction relative des axes est affectée par les tolérances de fabrication et de montage. De plus, elle varie avec l'application du chargement. Les boîtes de transmission des hélicoptères sont relativement souples. En effet, leur dimensionnement doit répondre à un objectif de masse minimale. Les efforts induisent donc des déformations et des déplacements non négligeables. Le profil en développante de cercle n'est pas forcément la solution optimale à tous les cas d'application. Pour les engrenages à axes concourants, la théorie recommande l'emploi de profils conjugués en développante de cercle sphérique. Ceux-ci sont présentés dans la partie suivante.

Considérons maintenant le cas où les axes d'un engrenage ont une position et une direction relatives quelconques. Les surfaces primitives sont alors des hyperboloïdes de révolution, Figure 3. Elles roulent et glissent inéluctablement l'une sur l'autre. Les dentures donnent au mécanisme sa liberté d'adaptation. Leur forme et leur topographie déterminent l'adaptabilité et le comportement de l'engrenage en fonctionnement.

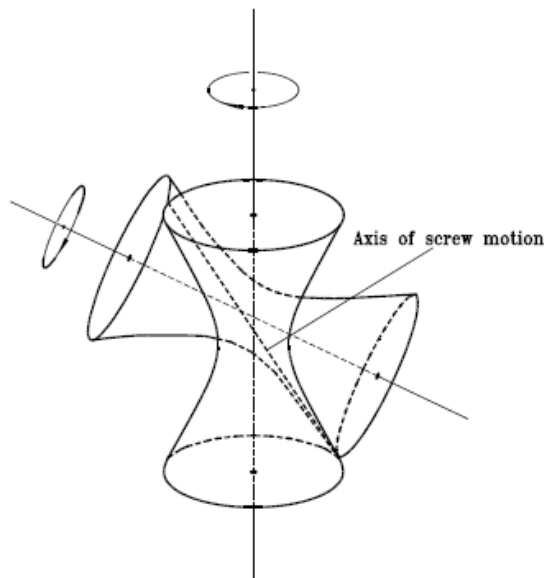


Figure 3 : Surfaces primitives [9].

Dans l'une de ses publications, *Litvin* [8] retrace l'histoire de divers acteurs du développement théorique et technologique des mécaniques engrenantes modernes. La littérature regorge d'ouvrages traitant de la théorie des engrenages. Ceux de *Buckingham* [4], *Henriot* [6] et *Litvin* [7] [9] sont désormais classiques. Ils présentent l'approche couramment admise. *Dooner* [10] propose une étude de l'engrènement par la théorie des visseurs. *Di Puccio* [11] [12] développe une formulation originale de la théorie des engrenages.

3.1.2 Engrenage à denture spiroconique

Les surfaces primitives d'un engrenage à axes concourants sont généralement des cônes dont les sommets respectifs sont confondus avec l'intersection des axes, Figure 4. La nature sphérique d'un tel engrenage ne permet pas d'en réduire l'étude à une simple représentation plane. Il faut donc raisonner en trois dimensions. La théorie des engrenages préconise alors un profil de denture en développante de cercle sphérique. Divers ouvrages [4] [6] [20] expliquent en détail ce résultat.

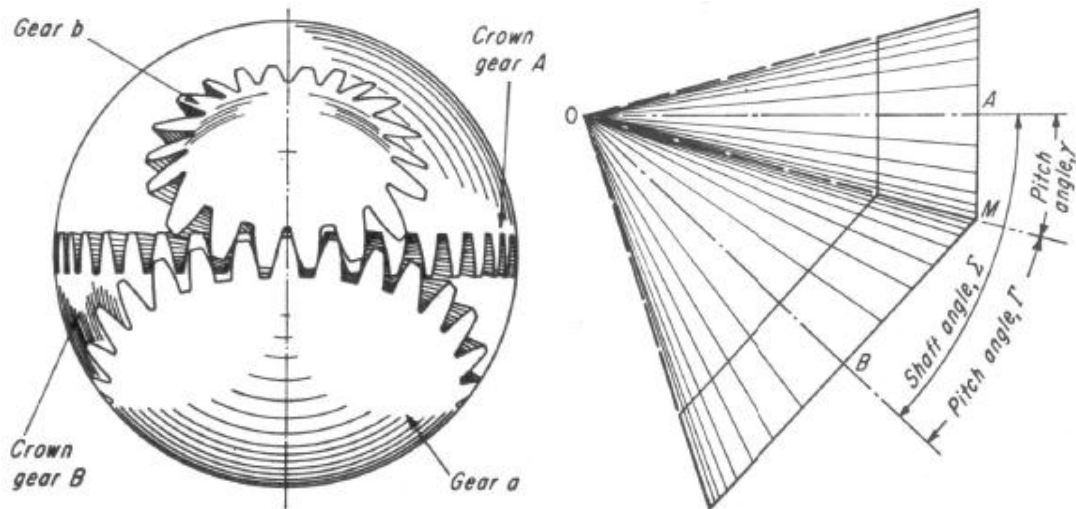


Figure 4 : Roue plate génératrice et cônes primitifs [3].

Le flanc de dent théorique de la roue plate génératrice est représenté sur la Figure 5. Sa forme est complexe. Aucun procédé de fabrication classique ne permet de la reproduire. En pratique, on la remplace donc par une surface simple, Figure 5. Cette dernière est plane ou de révolution. On reprend les techniques couramment employées pour la génération de dentures d'engrenages à axes parallèles.

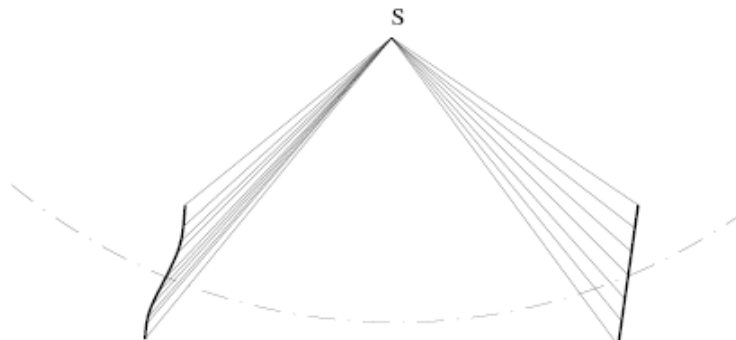


Figure 5 : Profils de denture théorique et pratique de la roue plate génératrice [20].

Ainsi, la plupart des profils de denture d'engrenages à axes concourants produits dans l'industrie ne sont pas en développante de cercle sphérique. C'est notamment le cas de ceux que l'on retrouve dans les boîtes de transmission des hélicoptères. En effet, la rectification des flancs de dents est réalisée par travail d'enveloppe. La meule a une surface de révolution. Elle

matérialise une dent de la roue plate génératrice. Son profil est composé de portions rectilignes ou curvilignes. L'engrenage obtenu a un comportement différent de l'idéal théorique. Sa ligne de conduite n'est pas plane, Figure 6. Elle décrit un huit. On parle alors de dentures octoïdes. Il existe une importante variété de formes de dentures. Celles-ci sont tracées sur la Figure 7. Elles découlent souvent des méthodes de fabrication développées par les principaux constructeurs de machine-outil. Ce mémoire ne traite que de la denture *Gleason*.

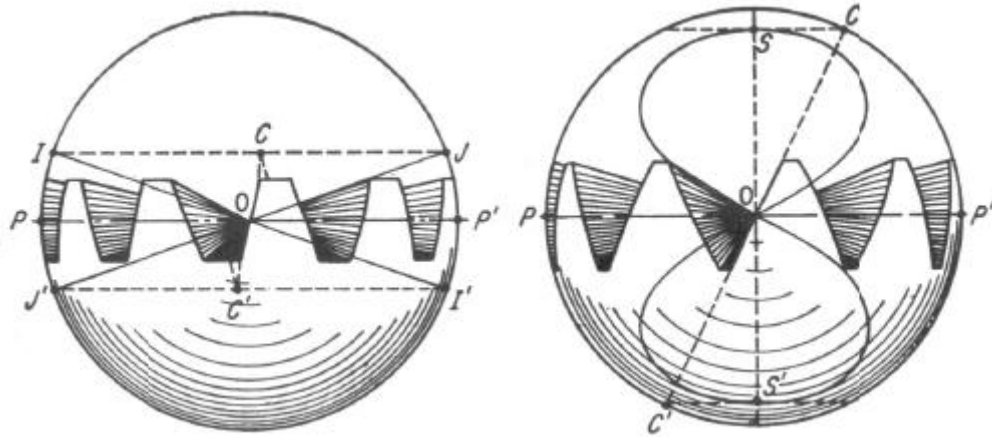
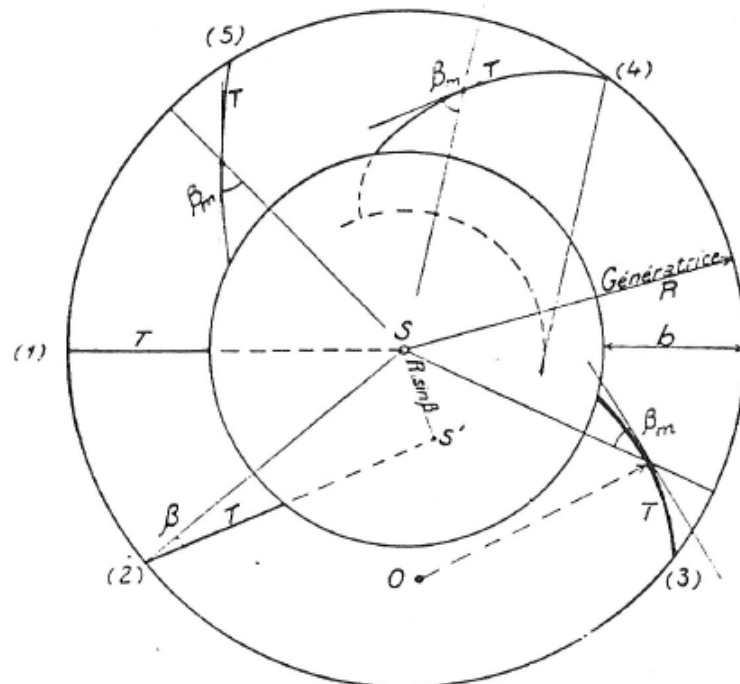


Figure 6 : Ligne de conduite de dentures involute et octoïde [3].



- (1) Denture droite
- (2) Denture "hélicoïdale"
- (3) Denture GLEASON
- (4) Denture KLINGELNBERG
- (5) Denture OERLIKON

Figure 7 : Principaux types de denture spiroconique [5].

3.1.3 Boite de transmission à engrenages

La puissance générée par les moteurs d'un hélicoptère transite via les boites de transmission vers les rotors et les accessoires, Figure 8 et Figure 9. Sur les gros hélicoptères, elle peut atteindre 2200 kW sur un seul des deux moteurs. Les vitesses de rotation sont alors très élevées aux entrées. Le couple transmis au rotor principal est fortement amplifié. Les dentures, les paliers et les carters sont soumis à d'importantes sollicitations. Les éléments des boites de transmissions se déplacent et se déforment. Cela perturbe leurs comportements. Ce problème est d'autant plus avéré que la minimisation de la masse est de mise. L'allègement des pièces implique généralement une réduction de la rigidité des ensembles mécaniques. Ceux-ci se déforment donc davantage. La maîtrise de leur comportement requiert alors des modèles complets et complexes. La simulation puis l'optimisation de l'engrènement des dentures deviennent indispensables à l'amélioration des performances du système.

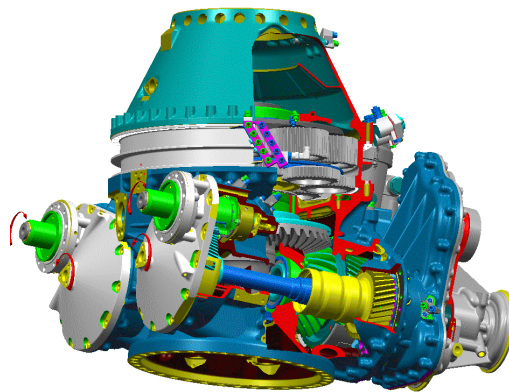


Figure 8 : Boite de transmission principale d'hélicoptère.

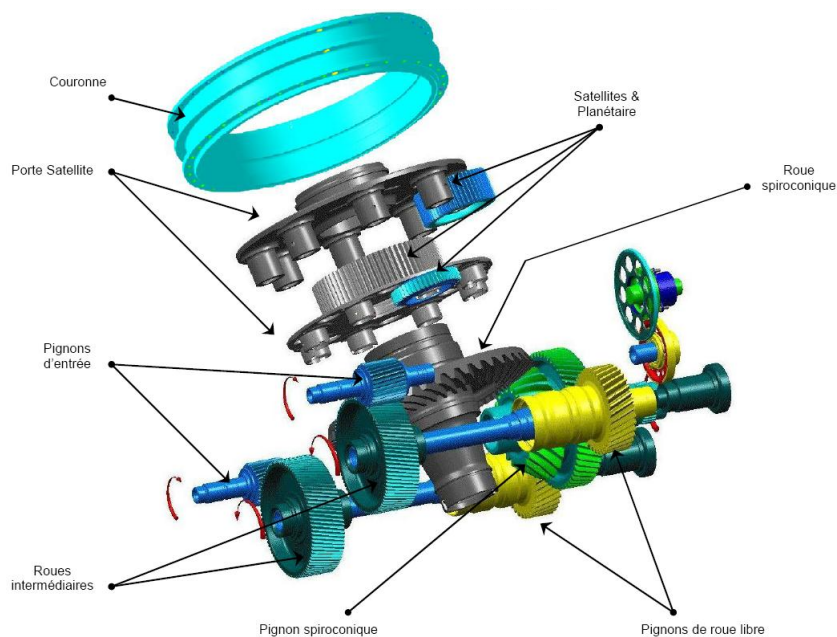


Figure 9 : Vue éclatée de l'intérieur d'une boite de transmission.

Un rapport de la NASA [15] présente les résultats d'une étude menée sur le bruit généré par une boîte de transmission principale d'hélicoptère. Il révèle que la principale source de bruit provient de l'engrènement des dentures. Le cheminement des ondes est schématisé sur la Figure 10. Les vibrations se propagent depuis la boîte de transmission vers la cabine via l'air et la structure. Le bruit dégrade alors les performances du pilote et le confort des passagers.

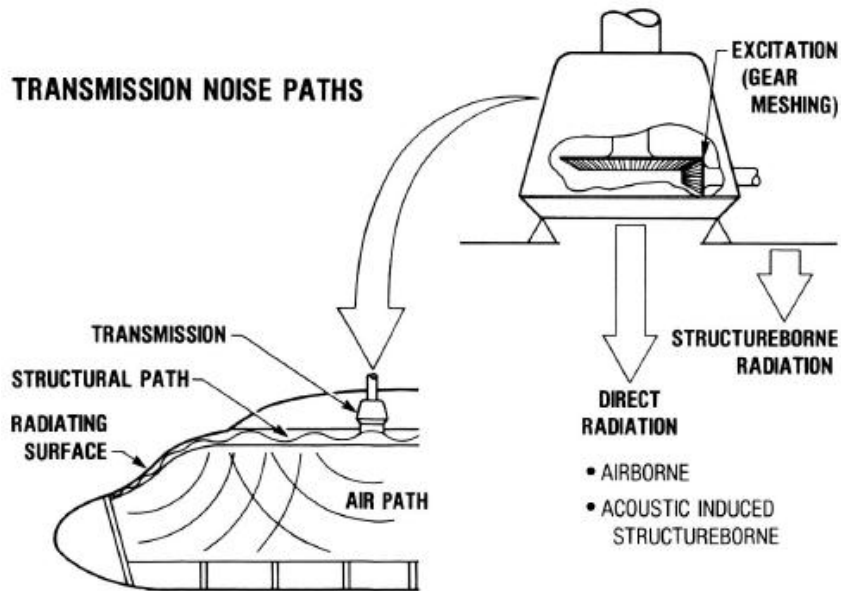


Figure 10 : Propagation du bruit vers la cabine d'un hélicoptère via la structure [15].

Le rapport dénote un lien entre l'aggravation du bruit en cabine et l'augmentation de la puissance associée à la réduction de la masse des nouveaux hélicoptères, Figure 11. Cela confirme notamment un regain de difficulté dans la maîtrise de l'engrènement sous charge des dentures lorsque l'on affaiblit la rigidité du mécanisme.

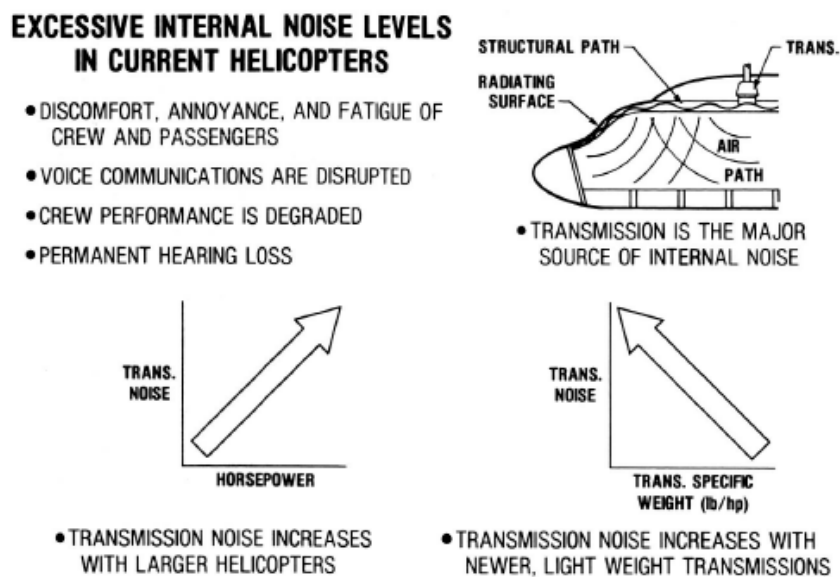


Figure 11 : Evolution du bruit et du rapport poids / puissance d'un hélicoptère [15].

D'après le rapport, l'erreur de transmission est la principale source d'excitation vibratoire de l'engrenage. Elle reflète l'écart entre l'engrènement réel et le mouvement homocinétique. Elle est inévitable. Son annulation suppose que les surfaces en contact soient conjuguées. Or, un engrenage dont les flancs de dent sont conjugués semble extrêmement sensible au déplacement relatif des dentures. En pratique, un décalage quelconque entre deux surfaces finies en contact linéique risque fort de provoquer une migration subite du contact en bord. Cela implique une sévère augmentation du bruit, de la pression de contact et une dégradation de la durée de vie de l'engrenage. Les flancs des engrenages à denture spiroconique *Gleason* ne sont pas conjugués. Ils présentent donc systématiquement une erreur de transmission à vide également appelée erreur de transmission cinématique. Cette dernière est tracée sur la Figure 12. Elle compose l'erreur de transmission globale. Elle influe directement sur le bruit émis par l'engrènement. Le rapport suggère donc une diminution de son amplitude.

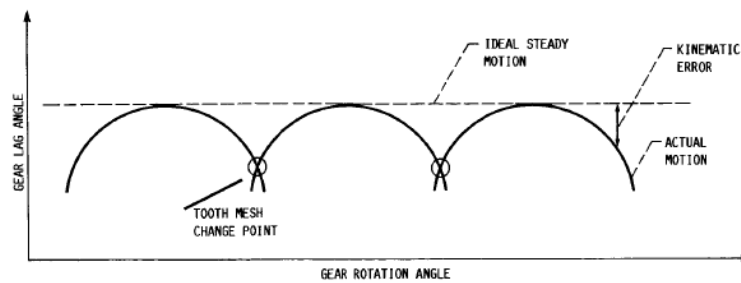


Figure 12 : Erreur de transmission cinématique courante d'un engrenage [15].

L'identification des sources du bruit repose sur les résultats de diverses mesures vibratoires et acoustiques. La Figure 13 montre le spectre vibratoire relevé à proximité des engrenages. L'engrènement des dentures spiroconiques génère les pics les plus élevés. Sa contribution au bruit perçu par le copilote est mise en évidence sur la Figure 14.

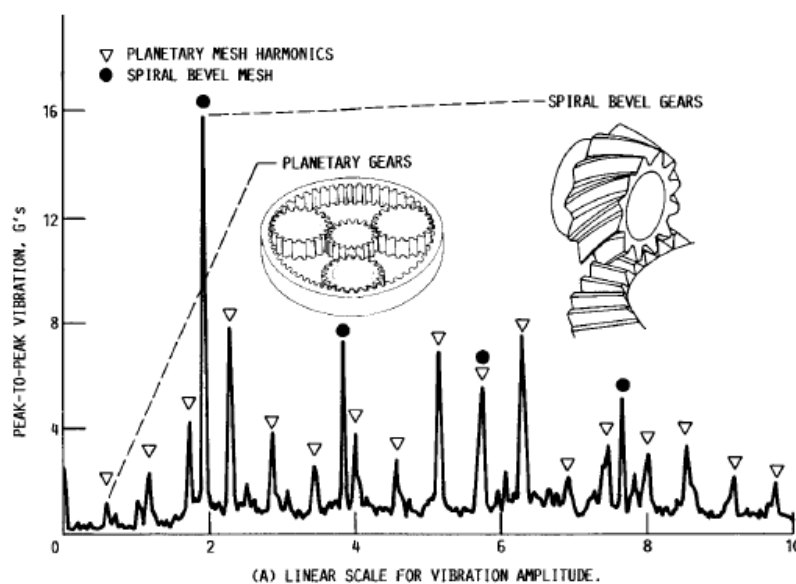


Figure 13 : Spectre vibratoire d'une boîte de transmission d'hélicoptère [15].

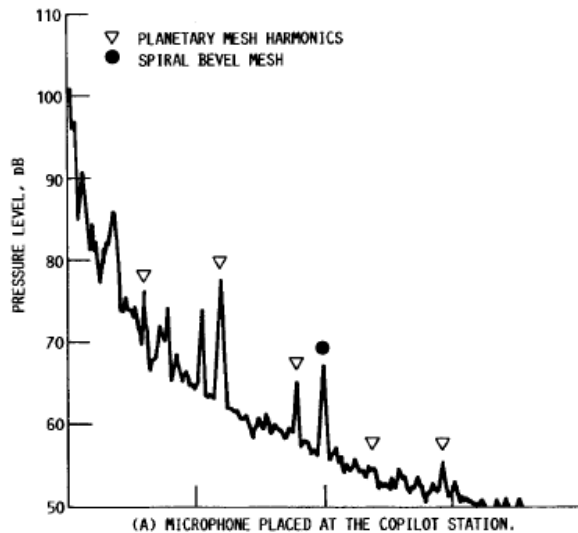


Figure 14 : Spectre acoustique d'un hélicoptère mesuré côté copilote [15].

La maîtrise de l'engrènement sous charge n'a pas pour unique enjeu la suppression du désagrément sonore. Elle inclut également l'amélioration du rendement des engrenages, le contrôle de leur durée de vie. L'erreur de transmission n'est pas le seul indicateur de qualité. Elle doit être associée au partage de charge, à la pression de contact, à toutes les contraintes auxquelles sont soumises les dents.

Tout cela commence par un état de l'art de la conception des engrenages à dents spiroconiques. La suite de ce chapitre présente différents travaux traitant de méthodes pour la modélisation, la simulation et l'optimisation de l'engrènement. L'étude bibliographique est développée en trois étapes logiques. On s'intéresse donc d'abord à la génération des dents. Celles-ci sont obtenues par simulation de leur processus d'usinage. Les moyens d'essai et de contrôle permettant la validation de modèles sont présentés. On aborde ensuite la simulation de leur engrènement à vide et sous charge. Enfin, on expose les récentes avancées en matière d'optimisation des engrenages à dents spiroconiques.

3.2 Génération des dents

3.2.1 Fabrication

De nos jours, les engrenages à dents spiroconiques sont usinés par des machines-outils à commande numérique dédiées. Celles-ci sont décrites par *Handsuh* [18] dans un rapport de la NASA datant de 1991. Elles sont conçues pour l'usinage de précision. Elles doivent garantir la réalisation quasiment exacte des topographies de dents optimisées. La Figure 15 montre l'une d'elles et laisse imaginer combien ces machines sont massives et rigides. On distingue la pièce travaillée en vert et l'outil en bleu. Tous les constructeurs développent des architectures équivalentes. La cinématique est détaillée dans le quatrième chapitre. Elle est universelle et polyvalente. En effet, elle permet de reproduire les diverses méthodes de fabrications exploitées aujourd'hui.

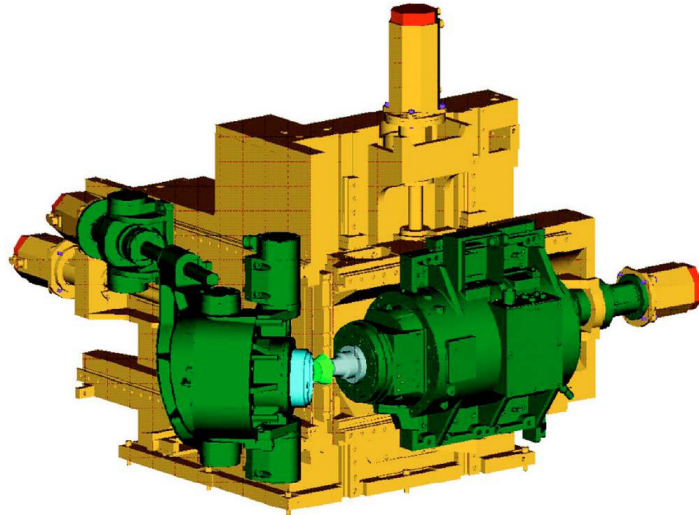


Figure 15 : Machine-outil à commande numérique [43].

Il existe trois principaux procédés de fabrication. La méthode *Palloïd* produit la denture *Oerlikon*. Elle est la moins répandue. Son principe est schématisé sur la Figure 16. Une fraise mère conique agit comme une vis sans fin engrenée avec la pièce usinée. Elle travaille donc en continu. Cela assure des taux de productivité élevés. Toutefois, cette méthode n'est appliquée qu'au taillage. Il semble difficile de l'adapter à la rectification de denture. Par conséquent, les états de surface obtenus n'atteignent pas une excellente qualité. La retouche après traitement de surface s'avère également compromise.

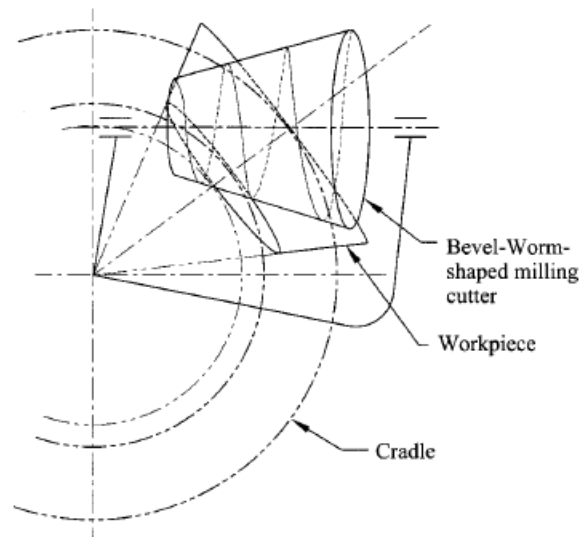


Figure 16 : Méthode de fabrication "Palloïd" [25].

La méthode *Face-Hobbing* produit la denture *Klingelnberg*. Elle est décrite sur la Figure 17. Les rotations de la pièce usinée et de l'outil sont liées. Ce dernier suit le mouvement d'un cercle (*roll circle*) qui roule sans glisser sur un cercle attaché à une roue plate imaginaire (*ground circle*). Ses lames tracent donc des épicycloïdes. Elles travaillent en continu. Comme la précédente, cette méthode a un haut rendement productif. Cependant, elle présente les mêmes inconvénients.

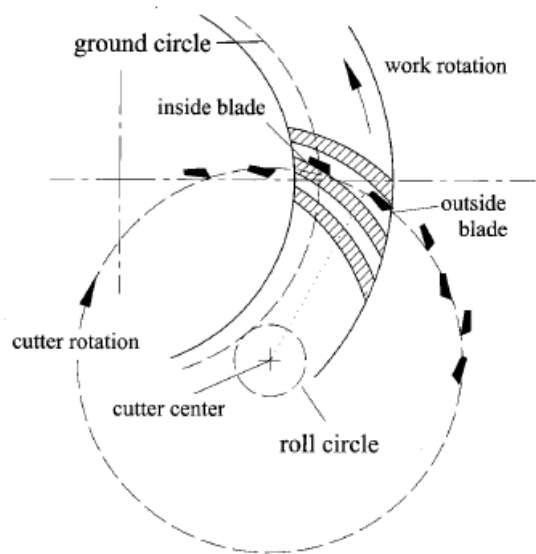


Figure 17 : Méthode de fabrication "Face Hobbing" [25].

La méthode *Face-Milling* produit la denture *Gleason*. La Figure 18 illustre son principe. L'outil matérialise une dent à forme circulaire de la roue plate imaginaire. Sa rotation est indépendante de celle de la pièce usinée. Chaque dent est successivement générée par travail d'enveloppe. L'outil peut être une simple meule de révolution. Cette méthode convient donc particulièrement à la rectification de surface. Elle est couramment employée pour la fabrication des engrenages à dentures spiroconiques montés dans les boîtes de transmission d'hélicoptères. Ce mémoire porte uniquement sur ce dernier procédé. Des essais menés par la NASA amènent à comparer les méthodes *Face-Hobbing* et *Face-Milling*. *Handschuh* [19] présente l'analyse des résultats obtenus. D'après ce rapport, les différences entre les deux engrenages testés sont ténues. L'amplitude des contraintes en pied de dent est comparable. La denture *Klingelnberg* est légèrement moins bruyante.

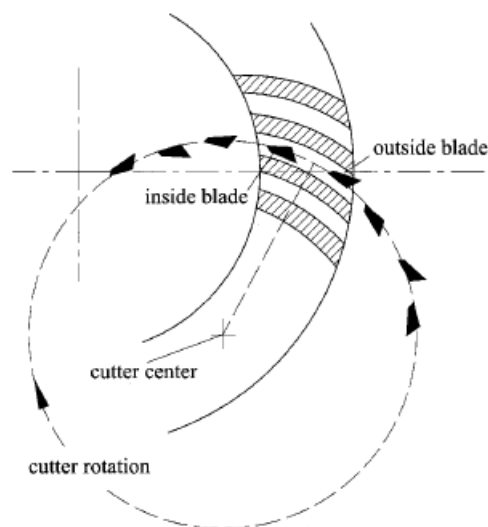


Figure 18 : Méthode de fabrication "Face Milling" [25].

3.2.2 Modélisation

Litvin [16] est parmi les premiers auteurs à proposer la simulation informatique de l'usinage de dentures spiroconiques. Il s'appuie sur le procédé de fabrication développé par *Gleason*. Les flancs de dent sont donc réalisés par travail d'enveloppe. En chaque instant de l'opération, les surfaces génératrice et générée sont en contact linéique. Plus tard, *Litvin* [17] décrit en détail la machine-outil à commande numérique *Phoenix* produite par le constructeur. Il juge vaine la réalisation de profils de dents conjugués en contact linéique. De telles dentures sont très sensibles au désalignement. Cela pose particulièrement problème dans les transmissions d'hélicoptère.

Les machines à commande numériques ne sont pas encore répandues quand *Madrosky* [47] adopte une démarche comparable à celle de *Litvin*. Il code en Fortran le fonctionnement de la machine-outil à commande mécanique #463 produite par *Gleason*. Les surfaces obtenues sont ainsi fidèles à celles réellement usinées. Cependant, les aptitudes de la machine modélisée sont restreintes. Le mécanisme est complexe et peu souple. Il interdit des configurations désormais possibles. En effet, les machines à commande numérique d'aujourd'hui offrent une plus grande liberté d'action.

Lin [22] propose une modélisation mathématique du procédé de fabrication des engrenages à dentures spiroconiques et hypoïdes. Le modèle comporte quatre ensembles. Le premier décrit la géométrie de l'outil. Le second formalise la méthode du roulement modifié. Celle-ci est expliquée au quatrième chapitre. Le troisième définit la chaîne cinématique qui lie le mouvement de l'outil à celui de la pièce usinée. Le quatrième introduit l'équation d'enveloppe. Cette dernière gouverne la génération par travail d'enveloppe. Sa formulation est donnée dans le quatrième chapitre.

Fong [25] reprend le modèle mathématique exposé par *Lin*. Il en détaille clairement les équations. Son approche est simple et universelle. La machine-outil virtuelle est polyvalente. Elle reproduit de nombreux procédés de fabrication de denture. Les méthodes *Face-hobbing*, *Face-milling* et *Palloïd* sont citées. L'outil peut opérer un travail de forme ou d'enveloppe. Les axes de la machine sont fixes ou se déplacent suivant le même principe que le roulement modifié. On souhaite programmer un module simple et robuste qui simule la génération de dentures spiroconiques. Or, la modélisation de *Fong* semble être la plus facile à implémenter. Elle sert donc de base aux travaux développés dans le quatrième chapitre de ce mémoire. Dans sa publication, *Fong* donne les équations de passage des réglages de la machine-outil #463 aux paramètres de la machine virtuelle. Toutes les formules de conversion requises sont fournies en annexe. *Shih* [27] renforce la polyvalence du modèle mathématique de *Fong*.

Di Puccio [13] applique son approche de la théorie des engrenages à la génération de dentures *Gleason*. Cette méthode requiert un seul système de référence pour simuler le procédé *Face-milling*. *Gabiccini* [14] en améliore la stabilité. Il l'implante dans un processus d'optimisation dont l'objectif est d'ajuster au mieux la surface générée à une cible donnée.

3.2.3 Contrôle de topographie

La forme et la position relative des flancs de dents engrenées déterminent le comportement du mécanisme. L'optimisation de topographie améliore l'engrènement des dentures. Néanmoins, la conformité des surfaces usinées et simulées est essentielle. La cohérence des prédictions établies par calcul en dépend. Il faut donc maîtriser la fabrication des pièces. Pour cela, l'amplitude des variations géométriques doit être bornée. Le tolérancement est la définition de limites admissibles. Bruyère [20] applique cette notion aux engrenages coniques à denture droite. Il analyse l'influence des écarts de forme et de position des flancs sur le comportement de l'engrenage. Vincent [21] prolonge ce travail. Il propose des méthodes et des outils d'analyse de ces variabilités. Celles-ci impactent sensiblement les fonctions techniques du mécanisme. Les plus déterminantes sont identifiées dans le Tableau 1.

<i>Fonction technique</i>	<i>Caractéristiques importantes</i>
Grande régularité dans la transmission du mouvement	Saut tangentiel et radial Erreur totale de division Erreur composée tangentielle et radiale Faux rond
Silence de fonctionnement Bonne capacité en charge dynamique	Saut tangentiel et radial Erreur individuelle de pas Erreur totale de profil Erreur d'inclinaison longitudinale
Grande capacité de charge statique	Erreur individuelle de pas Erreur d'inclinaison longitudinale
Pas d'indication particulière de fonction	Erreur composée radiale Erreur d'inclinaison longitudinale Erreur totale de profil

Tableau 1 : Erreurs de fabrication et fonctions techniques impactées [21].

Les topographies des flancs jouent un rôle majeur dans l'engrènement des dentures. Elles sont donc soigneusement contrôlées. La surface simulée est représentée par une grille de points de mesure, Figure 19. Les pièces sont examinées sur une machine à mesurer tridimensionnelle. Le palpeur approche chaque point suivant la normale au flanc virtuel, Figure 20. L'erreur de topographie est l'ensemble des écarts observés entre les surfaces virtuelle et usinée. Elle peut provenir d'une simulation numérique fautive. Le jeu dans les axes de la machine-outil est cependant la source d'erreurs la plus courante. Les distances mesurées sont alors de l'ordre du micromètre.

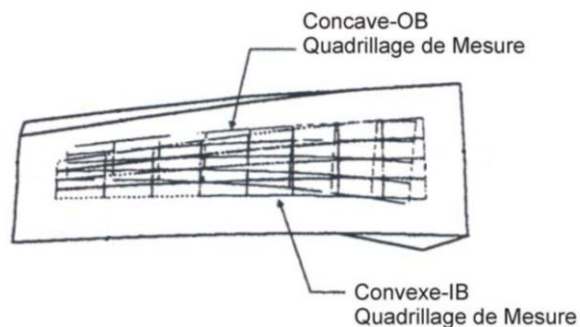


Figure 19 : Grille de points de mesure de topographie [48].

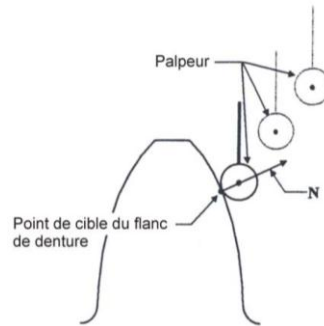


Figure 20 : Direction de mesure normale au flanc de dent [48].

La Figure 21 montre le résultat du contrôle des topographies d'un pignon. *Lin* [23] propose de réduire l'écart entre les surfaces simulée et réelle. Les réglages de la machine-outil sont ajustés par régression linéaire. Le jeu dans les axes est ainsi compensé. Dans une publication ultérieure, *Lin* [24] présente une nouvelle méthode pour corriger l'erreur de fabrication. Il applique alors une technique d'optimisation. Les variables du problème sont les réglages de la machine-outil. D'après *Lin*, cette approche est plus efficace. *Wang* [26] améliore la conformité des surfaces en agissant sur la distance radiale. Cette dernière varie en fonction de la position angulaire de la pièce usinée. Son expression est un polynôme du second degré. Le procédé est comparable à celui du roulement modifié.

Ce mémoire ne traite pas des erreurs de fabrication. Les surfaces générées ne sont pas usinées. On préfère les comparer à celles obtenues par un logiciel certifié. Le coût est bien moindre. Les infimes écarts de topographie proviennent alors d'erreurs numériques. La vérification des surfaces simulées est abordée en détail au quatrième chapitre.

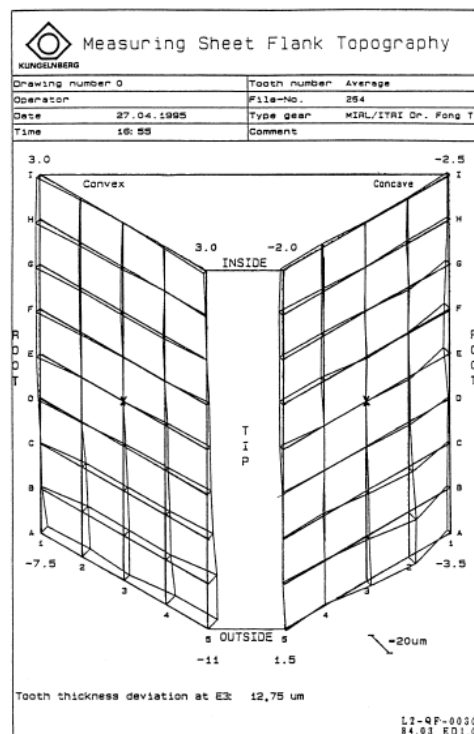


Figure 21 : Relevé d'écarts de topographie d'un pignon [24].

3.3 Engrenement des dentures

3.3.1 Engrenement à vide

Dans son mémoire de thèse, *Madrosky* [47] présente une modélisation simple de l'engrenement à vide. Les flancs du pignon et de la roue sont générés et positionnés en interpénétration autour des axes de rotation de l'engrenage. Leur surface est maillée. En chaque position angulaire donnée du pignon, le contact correspond au plus grand des angles calculés autour de l'axe de la roue entre les nœuds du pignon et le flanc de la roue. Les points de la roue en vis-à-vis des nœuds du pignon sont déterminés par interpolation. Cette procédure est répétée pour cinq paires de dents adjacentes potentiellement engrenées. L'analyse des résultats obtenus permet d'identifier la paire de dents en contact. *Sheveleva* [42] adopte une démarche similaire. Elle considère un champ de distances entre les deux flancs en vis-à-vis, Figure 21. La première surface est quadrillée. La seconde est interpolée. La plus courte distance calculée correspond au contact. *Astoul* [51] reprend partiellement cette méthode. Les points de la seconde surface ne sont pas déterminés par interpolation. Ils sont générés par simulation de l'usinage du flanc. Ce procédé est exposé dans le cinquième chapitre de ce mémoire.

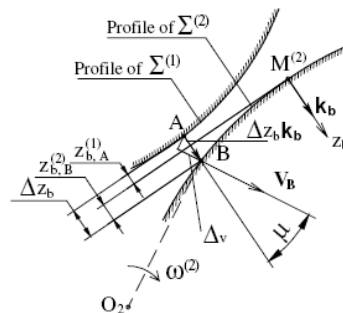


Figure 22 : Distance entre deux surfaces en contact [42].

Litvin [29] propose une approche plus abstraite. La modélisation mathématique du contact entre deux surfaces continues repose sur deux conditions. Premièrement, les flancs se touchent en un même point. Deuxièmement, ils sont tangents en ce point. En outre, ils sont obtenus par travail d'enveloppe. Un système d'équations non linéaires formalise ces trois axiomes. Sa résolution nécessite l'emploi de méthodes numériques complexes. La stabilité de l'algorithme devient difficile à maîtriser. En effet, ce procédé est moins intelligible que le précédent. Il implique un nombre supérieur d'équations non linéaires traitées simultanément. *Litvin* [31] applique sa méthode à la détection d'interférences en pied de dents engrenées à vide. Il l'implante aussi dans une démarche de conception d'engrenages à dentures spiroconiques. *Litvin* [32] désire stabiliser la portée d'engrenement et atténuer le bruit émis. Il préconise alors une forme longitudinale de la portée. Cette dernière est peu sensible au déplacement relatif des dentures. Le rapport de conduite est accru et le risque de contact en bord réduit. *Litvin* recommande la maîtrise d'une erreur de transmission d'allure parabolique. L'amplitude des vibrations générées peut ainsi être réduite.

Vogel [37] conceptualise davantage l'engrènement à vide de dentures. Malgré tout, son approche semble comparable à celle de *Litvin*. Il détermine la portée d'engrènement sans générer les flancs de dents. Son modèle mathématique lie les équations de génération par travail d'enveloppe aux conditions de contact. Celles-ci sont illustrées par la Figure 23. La simulation de l'engrènement est directe. Cependant, *Vogel* augmente encore la taille du système d'équations non linéaires. Il alourdit donc la méthode de calcul numérique. Le risque d'instabilité de l'algorithme augmente.

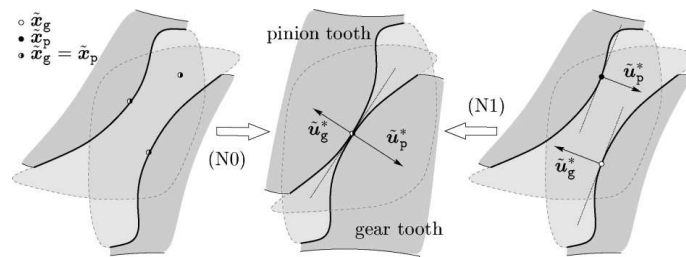


Figure 23 : Conditions mathématiques d'existence d'un point de contact [37].

Fan [43] simule l'engrènement à vide de dentures usinées par travail d'enveloppe ou de forme. Il exploite la même approche que *Litvin*. Son algorithme est intégré au logiciel *CAGE*. Il s'agit de l'outil d'aide à la conception d'engrenages développé par *Gleason*. La Figure 24 illustre les résultats obtenus. *Fan* [44] modifie sa méthode pour stabiliser le calcul. Il allège le système d'équations non-linéaires en exprimant les angles de rotation des pièces en fonction des autres paramètres du modèle. La convergence de l'algorithme est ainsi mieux maîtrisable. En outre, La durée du calcul diminue. Ce raisonnement est repris dans les travaux exposés au quatrième chapitre. On minimise le nombre d'équations non linéaires traitées par analyse numérique.

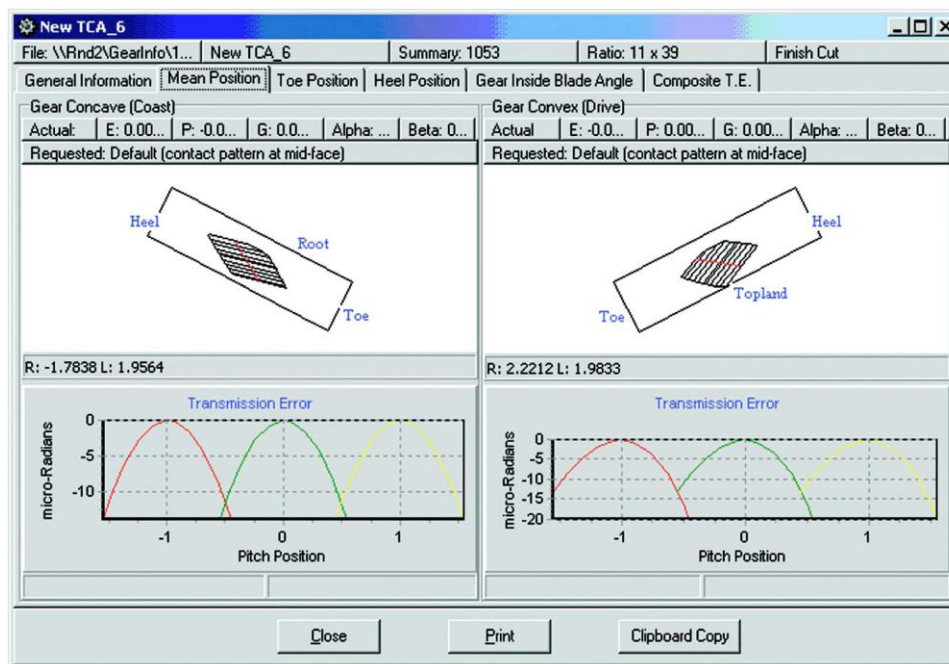


Figure 24 : Analyse de l'engrènement à vide [43].

Vimercati [45] utilise un solveur basé sur la méthode des éléments finis. Il soumet donc l'engrenage à un léger couple. Ses résultats concordent avec ceux des autres procédés, Figure 25. Cependant, cette dernière démarche est plus lourde et implique des durées de calcul bien supérieures. Elle n'est généralement mise en œuvre que dans le cadre de simulations de l'engrènement sous charge.

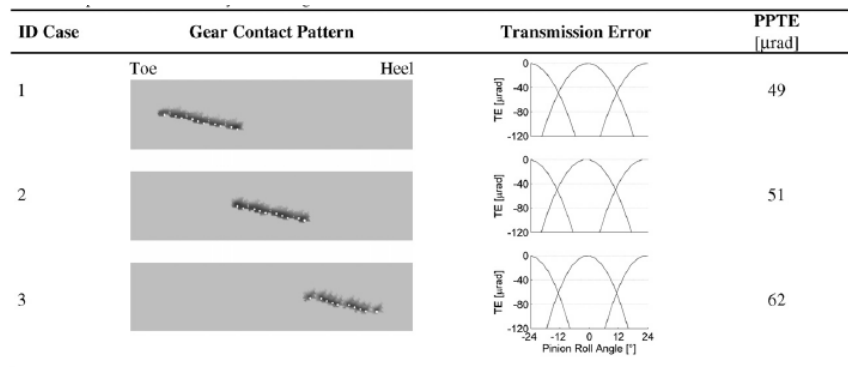


Figure 25 : Analyse de l'engrènement à faible charge [45].

3.3.2 Engrènement sous charge

Madrosky [47] propose en 1987 une modélisation de l'engrènement sous charge plutôt avancée pour son époque. En effet, il prend déjà en compte les rigidités des dents. Celles-ci sont calculées par la méthode des éléments finis. Le reste du système est considéré comme infiniment rigide. Quoique, le déplacement relatif des axes de l'engrenage découle de la déformation du dispositif complet. La rigidité à l'écrasement des surfaces en contact est déduite de la théorie de *Hertz*. Les différentes raideurs sont attribuées à des ressorts montés en série. La raideur du ressort équivalent modélise la rigidité totale du contact d'une paire de dents. Montés en parallèle, les ressorts équivalents reproduisent les dents engrenées. Leur comportement détermine donc le partage de la charge par couples de dents en contact. Ce dernier est obtenu par traitement simultané des équations d'équilibre et de compatibilité des déplacements. La solution du système d'équations non linéaire est recherchée par la méthode de *Newton-Raphson*. Des paraboloïdes assimilés à deux tonneaux interpolent la surface des flancs au voisinage de la zone de contact. Celle-ci est centrée sur le point de contact à vide. Elle est supposée de forme elliptique. Les rayons de courbure principaux en son centre et la direction du grand axe sont définis analytiquement. La théorie de *Hertz* donne l'enfoncement des surfaces, les dimensions de l'ellipse et la pression de contact. *Gosselin* [28] applique scrupuleusement les mêmes techniques que *Madrosky*. Il simule le fonctionnement d'un engrenage à dentures spiroconiques pour diverses topographies de flanc. Son analyse recommande une maximisation du rapport de conduite. Les résultats suggèrent de réduire l'erreur de transmission cinématique et la raideur d'engrènement. Le partage de la charge semble ainsi amélioré. *Lelkes* [48] simule le comportement de dentures fabriquées suivant la méthode *Palloïd*. Il emploie également la démarche de *Madrosky*. Pourtant, la théorie de *Hertz* repose sur des hypothèses incompatibles avec les conditions au contact de dentures

spiroconiques. En effet, les surfaces en vis-à-vis sont conformes, les solides finis et un glissement existe dans la zone de contact. *Icard* [49] opte alors pour une approche discrète basée sur la théorie de *Boussinesq* et *Cerruti*. Il envisage de tenir compte du glissement. Cependant, il ne parvient pas à maîtriser la convergence de l'algorithme de *Kalker* dans le cas de contacts multiples. La méthode du point fixe est finalement privilégiée et le glissement négligé. L'algorithme semble stable, rapide et précis. Les rigidités des dents, des jantes et des voiles sont modélisées. *Alves* [50] accélère le calcul de la rigidité globale hors écrasement grâce à un ensemble de fonctions d'interpolation.

Litvin [30] adopte une première démarche comparable à celle de *Madrosky*. L'enfoncement local des flancs en contact et ses dimensions sont calculés analytiquement. Sa forme est supposée elliptique. La déformation globale d'une dent est obtenue par la méthode des éléments finis. La compatibilité des déplacements donne la répartition sur les dents de l'effort à transmettre. Les contraintes en pieds de dents sont déterminées par la méthode des éléments finis. La force appliquée à chaque dent est alors distribuée le long du grand axe de l'ellipse suivant un profil semi-ellipsoïdal. *Bibel* [36] résout l'ensemble de la simulation de l'engrènement sous charge par la méthode des éléments finis. Les dentures sont modélisées en trois dimensions sous PATRAN. Les solides sont ensuite maillés. Le contact est traité par le code de calcul MARC dont l'algorithme semble plus performant que celui de NASTRAN. *Litvin* [33] et *Argyris* [35] optent pour cette dernière approche. Ils exploitent le programme ABAQUS. Les maillages sont construits automatiquement à partir des points générés sur les flancs de dents sans passer par un logiciel de CAO. La modélisation par éléments finis des dentures est donc plus précise et plus rapide. Elle peut ainsi être implantée dans un processus d'optimisation automatique. Les travaux exposés dans le cinquième chapitre de ce mémoire reposent sur cette technique. *Litvin* [34] utilise un modèle à trois dents engrenées, Figure 26. Il ne tient compte que de la rigidité des dents. La roue est fixe. Le couple est appliqué suivant l'axe du pignon. La Figure 27 décrit les conditions aux limites imposées. Le résultat de la simulation met en évidence tout contact en bord de dent. *Vimercati* [45] exploite aussi un code de calcul basé sur la méthode des éléments finis. Cependant, il ne précise pas l'origine du solveur employé. Ses travaux montrent que l'augmentation du couple induit une augmentation du rapport de conduite et une diminution de l'erreur de transmission quasi-statique, Figure 28.

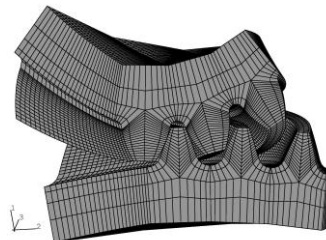


Figure 26 : Modèle à trois dents engrenées [35].

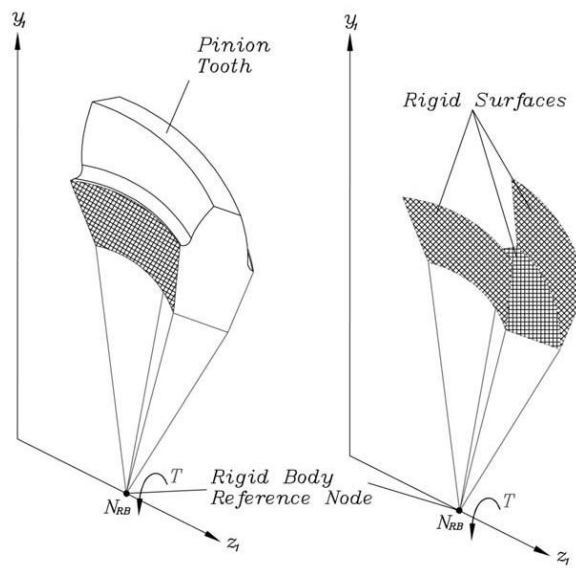
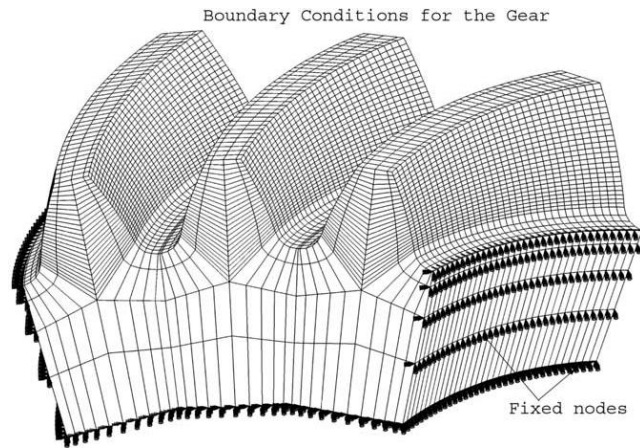


Figure 27 : Application des conditions aux limites et du chargement [35].

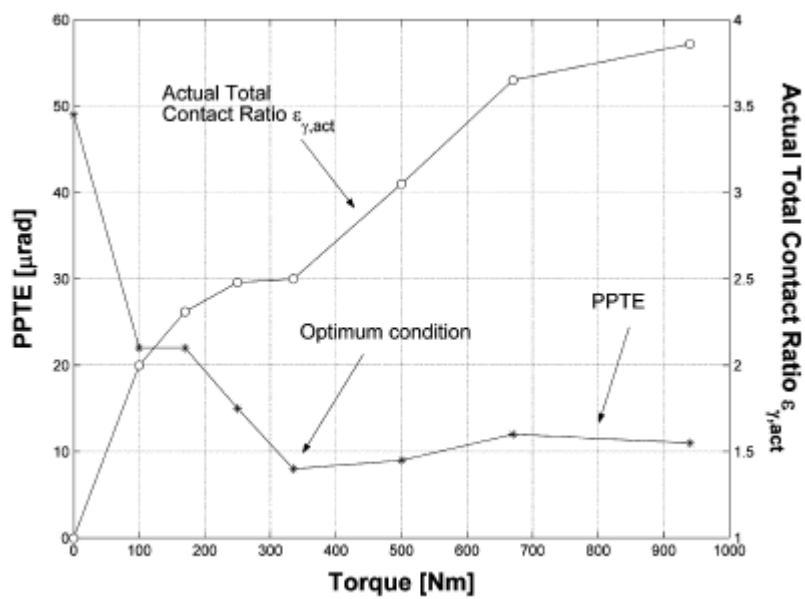


Figure 28 : Erreur de transmission et rapport de conduite sous charge [45].

Dans ses publications, *Simon* [38] [39] [40] [41] présente la mise en œuvre d'une approche assez originale. Celle-ci repose sur l'hypothèse que l'écrasement des flancs progresse suivant des lignes de contact potentiel. Ces dernières sont le lieu des distances minimales entre surfaces opposées en chaque position d'engrènement. Elles sont représentées sur la Figure 29. Les lignes sont discrétisées pour en déterminer les profils de pression respectifs tracés sur la Figure 30. Le calcul de la pression de contact en chaque point d'une ligne est basé sur la théorie de *Hertz*. Les déformations des dents sont obtenues par la méthode des éléments finis.

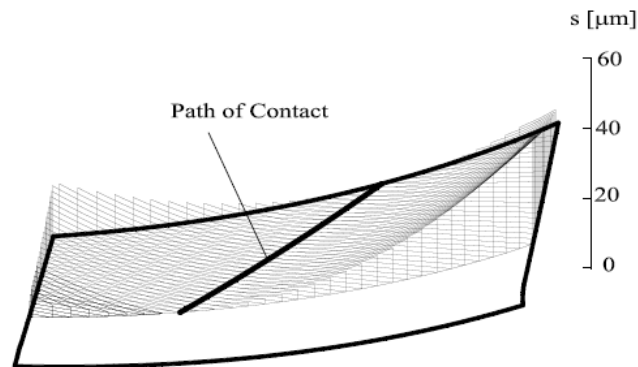


Figure 29 : Lignes de contact potentiel et portée d'engrènement [41].

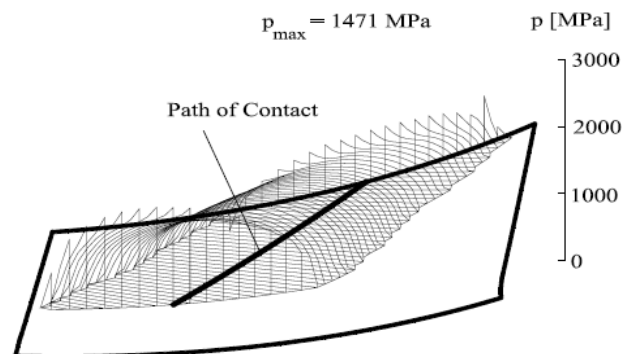


Figure 30 : Pressions suivant chaque ligne de contact et portée d'engrènement [41].

Bracci [46] propose une approximation de la portée d'engrènement. Il s'inspire d'un procédé d'inspection couramment pratiqué dans l'industrie. L'érosion d'un verni bleu au contact des deux flancs de dent révèle la portée. Une couche de marqueur est donc modélisée sur le flanc de dent de la roue. Elle vient interférer avec le flanc de dent du pignon et l'intersection des deux surfaces délimite la zone de contact, Figure 31. Son épaisseur n'est pas constante. Elle est automatiquement ajustée afin que le résultat corresponde à celui d'un outil de référence. La portée d'engrènement est l'enveloppe des zones de contact, Figure 32. Après étalonnage, la fiabilité de la simulation semble correcte quelle que soit la topographie ou la position relative des flancs. Elle est validée par comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de la méthode des éléments finis. L'approche géométrique de *Bracci* requiert une courte durée de calcul. Cependant, les pressions de contact et les contraintes en pieds de dent demeurent inconnues.

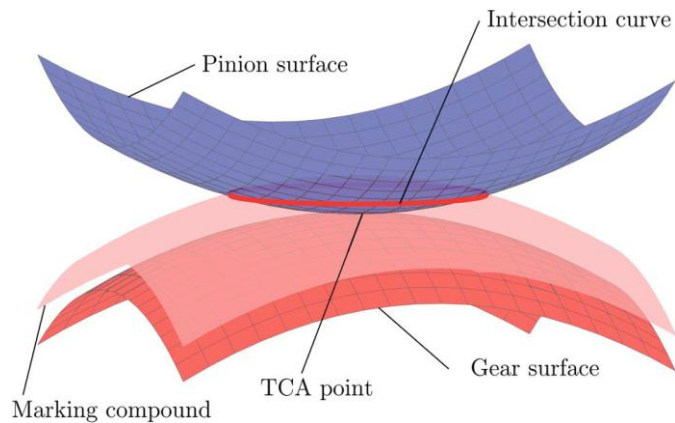


Figure 31 : Estimation de la zone de contact entre deux surfaces [66].

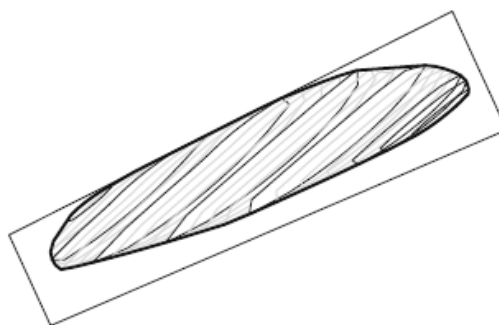


Figure 32 : Zones de contact et portée d'engrènement [46].

3.4 Optimisation des dentures

3.4.1 Optimisation à vide

Litvin [52] propose une première démarche d'amélioration du comportement à vide des engrenages à dentures spiroconiques. L'optimisation de forme nécessite des moyens technologiques trop avancés pour l'époque. La simulation rigoureuse de l'engrènement passe par des méthodes numériques lourdes. En effet, la surface des flancs de dents est liée au processus de fabrication. Cela interdit sa mise en équation. Toutefois, *Litvin* définit une formulation approchée. Il en déduit une relation analytique entre l'erreur de transmission cinématique et le désalignement des axes de l'engrenage. Ce procédé facilite la maîtrise de l'engrènement à vide avec de courtes durées de calcul. *Litvin* [53] [55] cherche à diminuer le bruit généré par l'engrènement, accroître la durée de vie des dentures et leur charge admissible. Cela implique l'insensibilisation de la portée au désalignement ainsi que le contrôle de la position et de la forme de l'ellipse de contact en milieu d'engrènement. *Litvin* constate que le comportement de dentures à profils conjugués est excessivement sensible au déplacement relatif des axes. Il recommande l'ajustement de profils non-conjugués. Son second procédé repose alors sur la maîtrise d'une erreur de transmission cinématique de forme parabolique. Le comportement sous charge induit est analysé par la méthode des éléments finis. *Litvin* [54] expose une approche où surfaces idéale et générée sont ajustées.

Les réglages de la machine-outil agissent sur l'engrènement à vide des dentures. *Lelkes* [56] en étudie les influences propres et conjuguées. Les résultats de son plan d'expérience révèlent les paramètres prépondérants et esquissent une voie d'amélioration. Les rayons du profil et de l'outil semblent déterminants.

Cao [57] adopte le raisonnement de *Litvin*. Il en déduit un problème d'optimisation multi-objectif. Celui-ci a pour variables : le centre machine / centre berceau, la dérivée seconde de l'erreur de transmission cinématique, les deuxième et troisième coefficients de roulement modifié berceau / pièce, l'angle d'inclinaison de la portée par rapport au cône de pied. Ses objectifs sont : la rectitude et l'orientation de la portée à vide, la symétrie et l'amplitude de l'erreur de transmission. Un algorithme génétique pilote le processus. Une procédure comparable à celle de *Litvin* donne le point de départ du calcul. Ainsi, *Cao* [58] définit trois points alignés par lesquels passe la portée à vide, Figure 33. Il fixe la valeur maximale de l'erreur de transmission cinématique. Les réglages adéquats de la machine-outil sont alors déterminés. Un essai confirme l'état de la portée prédéfinie.

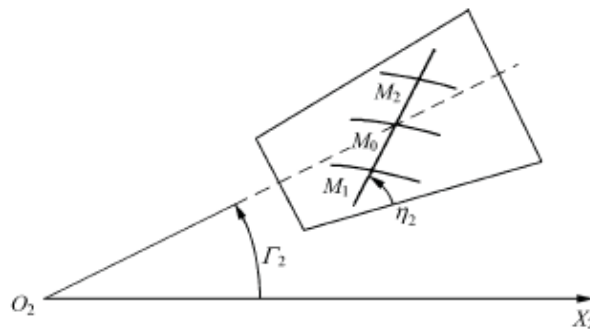


Figure 33 : Définition de la portée d'engrènement à vide [58].

La distance radiale est un réglage de la machine-outil. Elle est généralement constante. *Wang* [60] la considère variable en fonction de la position angulaire de la pièce usinée. Cela procure un degré de liberté supplémentaire qui assouplit la procédure développée par *Litvin*. Les modifications de la portée et de l'erreur de transmission sont mieux découplées. Leur contrôle est amélioré. La courbe attribuée à l'erreur de transmission est souvent du deuxième ordre. *Wang* [61] choisit une forme du quatrième ordre, Figure 34. Cette dernière favorise la réduction du bruit généré par l'engrènement des dentures.

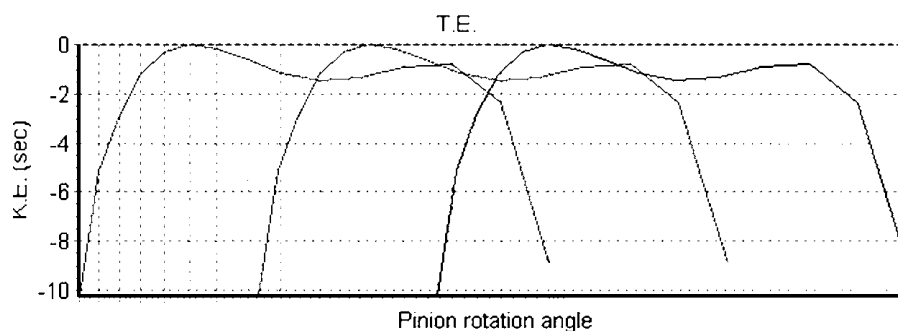


Figure 34 : Erreur de transmission cinématique de degré quatre [61].

Le « ease-off » représente l'enveloppe des plus courts écarts relevés suivant les normales au flanc d'une dent ayant engrenée. Il traduit le reste d'un bout de pâte à modeler passé entre deux flancs en contact au cours de l'engrènement. Il n'existe pas si les deux surfaces sont conjuguées. Cela est donc le cas de dentures droites à profil en développante de cercle. En réalité, deux flancs conjugués ne sont pas forcément la panacée face au désalignement et aux déformations. Par expérience, un engrenage génère moins de bruit après rodage. *Shih* [62] prend donc pour optimum le « ease-off » de dentures rodées, Figure 35. Celui-ci est reconstruit après palpage des flancs sur machine à mesurer tridimensionnelle. Les réglages de la machine-outil donnant l'écart minimal avec la cible sont obtenus par régression linéaire. La matrice de sensibilité est mal conditionnée et quasiment singulière. Par conséquent, *Shih* emploie la méthode de décomposition en valeurs singulières. Il renforce ainsi la stabilité numérique de l'algorithme. La procédure peut aussi viser un « ease-off » théorique. Un objectif pertinent découle de l'approche de *Litvin*. *Shih* [63] prédéfinit l'engrènement à vide. Le « ease-off » est alors décrit le long de la portée en fonction de l'erreur de transmission cinématique donnée, Figure 36. Sa construction est complétée par anticipation de l'étalement du contact, Figure 37.

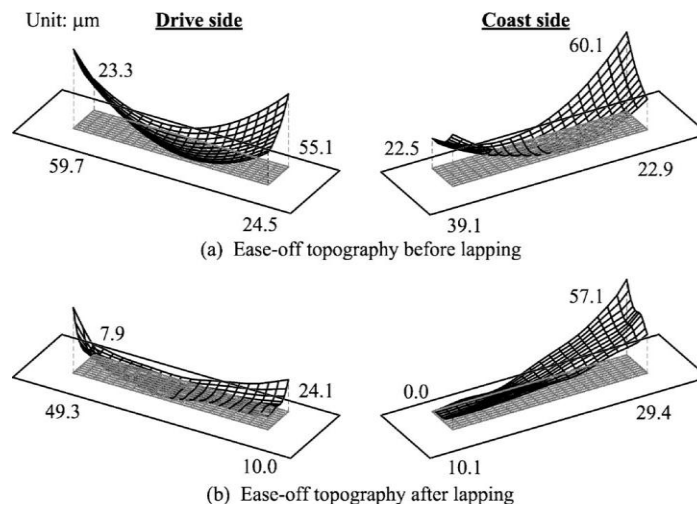
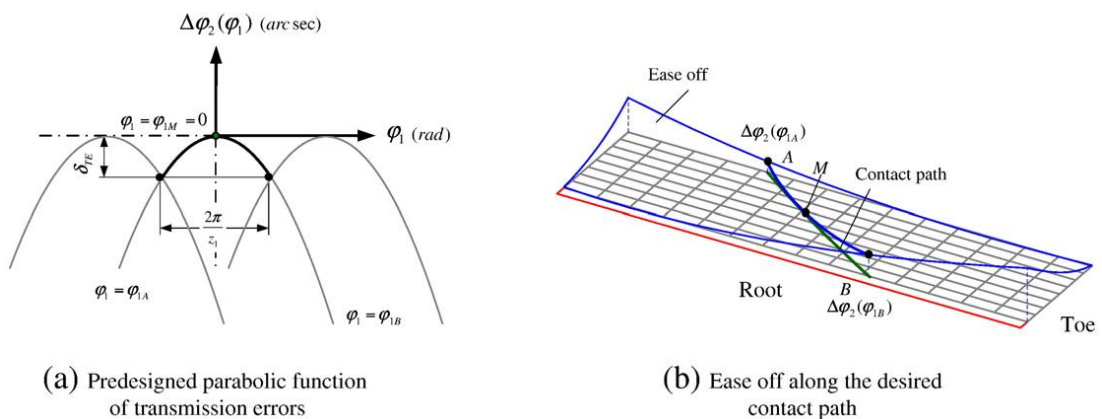


Figure 35 : Mesure du « ease-off » de dentures avant et après rodage [62].



(a) Predesigned parabolic function of transmission errors

(b) Ease off along the desired contact path

Figure 36 : Définition du « ease-off » par rapport à l'erreur de transmission [63].

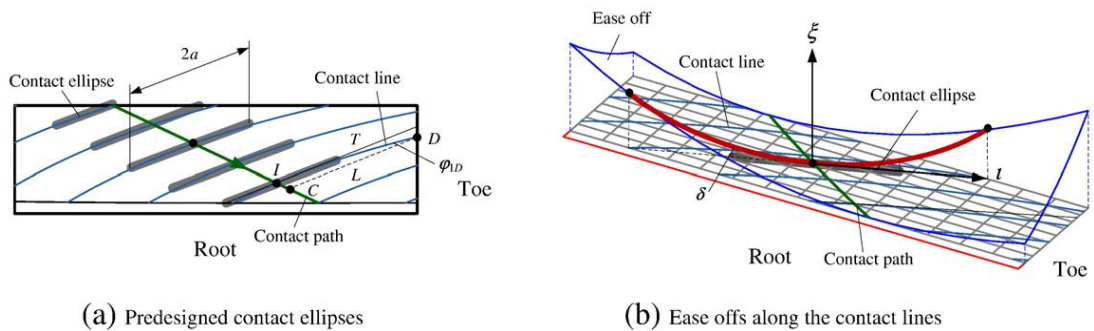


Figure 37 : Définition du « ease-off » par rapport à l'étalement du contact [63].

Aucun des raisonnements présentés ne tient compte du désalignement sous charge. La portée est simplement désensibilisée. *Astoul* [67] considère simultanément sa localisation à vide et sous charge. La méthode est détaillée dans le sixième chapitre de ce mémoire.

3.4.2 Optimisation sous charge

À ce jour, la littérature compte peu de publications traitant de l'optimisation du comportement sous charge de dentures spiroconiques. *Simon* [59] analyse l'influence de la géométrie de l'outil sur la pression de contact maximale et l'amplitude de l'erreur de transmission quasi-statique. Deux arcs de cercle tangents constituent le profil de l'outil considéré. Leur rayon et le diamètre de l'outil sont les paramètres à corriger. *Simon* lance les calculs pour plusieurs cas de déplacement relatif des dentures et diverses intensités de couple. Sa méthode de simulation de l'engrènement sous charge est décrite en amont.

Artoni [64] propose un processus d'optimisation entièrement automatique. Sa démarche ressemble beaucoup à celle de *Shih*. Elle consiste en deux étapes. Premièrement, le « ease-off » cible est identifié. Il doit suivre une surface approchable avec la machine-outil exploitée. Une forme polynomiale du quatrième ordre semble être un bon compromis entre simplicité et flexibilité. Elle doit minimiser l'aire inoccupée par la portée dans une zone donnée. Cette dernière est définie conformément à la norme *ANSI / AGMA 2005-D03*, Figure 38. Les variables sont les coefficients de la fonction quartique. Le « ease-off » optimal est obtenu par la méthode de *Nelder-Mead*. L'approximation de la portée d'engrènement sous charge est due à *Bracci*. Deuxièmement, les réglages adéquats de la machine-outil sont recherchés. *Artoni* exploite la méthode de *Levenberg-Marquardt*.

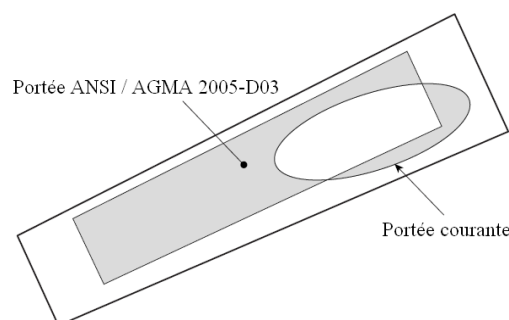


Figure 38 : Zone à occuper par la portée d'engrènement sous charge [64].

Ses travaux abordent ensuite la minimisation de l'erreur de transmission quasi-statique. *Artoni* [65] considère la norme du vecteur composé des amplitudes des trois premiers harmoniques calculés par transformée de *Fourier* rapide. La pression de contact maximale est minimisée simultanément. La portée ne doit toucher aucun bord de flanc. Une contrainte égalité exprime donc l'absence de pression hors de la zone définie par la norme *ANSI / AGMA 2005-D03*. L'objectif est la somme de l'erreur de transmission, de la pression et de la contrainte. Un poids est attribué au deux premières valeurs, une pénalité à la troisième. Les variables sont bornées. La recherche du « *ease-off* » optimal est basée sur la méthode de *Hooke* et *Jeeves*. *Artoni* utilise la modélisation de l'engrènement sous charge développé par *Kolivand* et *Kahraman*. Les résultats révélés sur la Figure 39 semblent prometteurs. Cependant, l'auteur ne précise pas s'ils sont obtenus après détermination des réglages de la machine-outil.

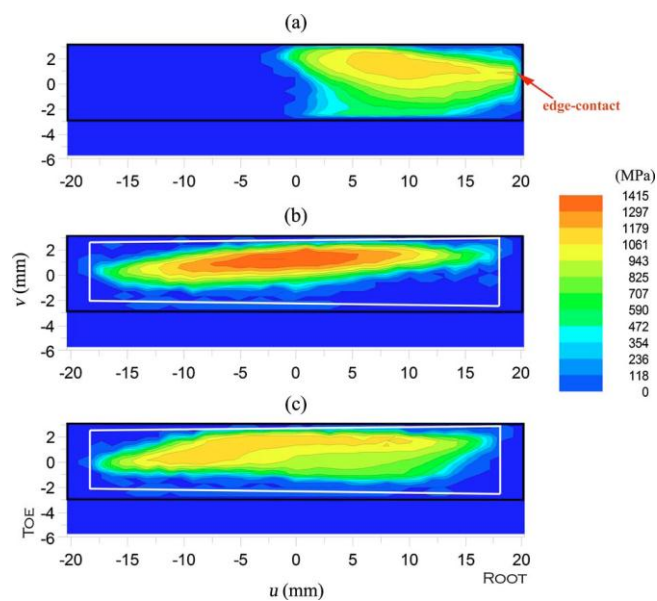


Figure 39 : Minimisation de la pression de contact maximale [65].

Gabiccini [66] reprend le travail de *Artoni* [64] précédemment détaillé. Son objectif devient la désensibilisation de la portée d'engrènement sous charge au déplacement relatif des dentures. Des intervalles de tolérance sont attribués aux composantes du désalignement. Toutes les combinaisons de leurs bornes sont testées. L'enveloppe des portées déplacées est tracée sur la Figure 40. Elle doit décrire au mieux une zone elliptique donnée.

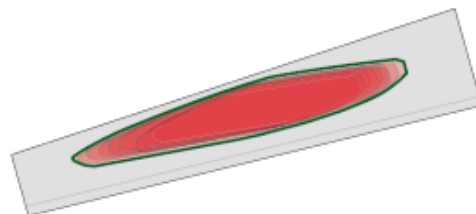


Figure 40 : Portées pour un ensemble de déplacements relatifs des dentures [66].

3.5 Conclusion

L'engrenage est fait pour transmettre une puissance et transformer un mouvement. La géométrie et les mathématiques montrent que les dentures à profil en développante de cercle sont performantes. Néanmoins, ce résultat est établi dans un contexte purement théorique. En pratique, de telles dentures ne sont pas toujours les mieux adaptées. Le montage, les déplacements et les déformations sous charge impliquent un désalignement des axes de l'engrenage. Ceux-ci changent d'orientation. Deux flancs de dents conjuguées à vide ne le sont donc plus sous charge et réciproquement. En outre, ils sont en contact linéique. La moindre variation de direction relative des roues peut aussitôt décaler le contact en bord de flanc. La pression de contact croît alors considérablement. Cela peut gravement écourter la durée de vie de l'engrenage. Les surfaces sont donc toujours corrigées pour réduire la sensibilité de la portée d'engrènement. Par conséquent, elles ne sont plus conjuguées. L'engrenage commet alors une erreur de transmission cinématique. Il vibre et génère du bruit. Il devient même l'une des principales sources du désagrément sonore ressenti dans le cockpit d'un hélicoptère. L'essentiel des engrenages est dans les boîtes de transmission. Les dentures spiroconiques sont souvent les plus bruyantes. En effet, leur comportement est difficile à maîtriser. Elles ne sont pas modélisables analytiquement. Il faut simuler leur procédé de fabrication.

Les machines-outils à commande numérique actuelles sont polyvalentes. Elles peuvent reproduire les trois techniques de génération décrites. Leur cinématique est donc équivalente. *Fong* propose un modèle mathématique universel. Celui-ci semble simple. Sa formalisation est clairement détaillée dans la littérature. Il sert de base aux travaux présentés dans le quatrième chapitre de ce mémoire. Plusieurs méthodes sont développées pour améliorer la robustesse de la simulation d'usinage. Seules les topographies obtenues par *Face-Milling* sont traitées.

La simulation de l'engrènement à vide repose sur l'approche de *Madrosky*. Toutefois, une solution de remplacement de l'interpolation de surface est présentée dans le cinquième chapitre. Le nombre d'équations non-linéaires à résoudre simultanément reste faible. Cela évite une complexification des méthodes numériques employées. L'algorithme est simple, stable et rapide. Ces qualités favorisent son implantation dans une procédure d'optimisation. La simulation de l'engrènement sous charge exploite la méthode des éléments finis. La démarche proposée par *Litvin* lui procure une grande flexibilité. Le maillage des dentures est construit automatiquement. Il peut être intégré à un modèle simplifié ou complet de la boîte de transmission. Le premier accélère l'optimisation des dentures. Le second affine l'analyse de l'engrènement sous charge.

Litvin considère qu'une optimisation judicieuse de l'engrènement à vide impacte favorablement le comportement sous charge des dentures. Il préconise alors une portée centrée sur les flancs et une erreur de transmission cinématique en forme de parabole. Son raisonnement est pertinent. L'idée proposée dans le sixième chapitre va encore plus loin. La configuration optimisée est pseudo-chargée. Le désalignement des axes de l'engrenage résulte

du calcul des déplacements et des déformations sous charge du mécanisme complet. Les portées à vide décalée et non décalée sont simultanément examinées au cours du processus d'optimisation. Ce dernier est automatique. Il peut ensuite exploiter un calcul sous charge basée sur la méthode des éléments finis plutôt qu'une simulation à vide.

4 Simulation du processus de génération des dentures

4.1 Introduction

Dans ce quatrième chapitre, on expose une méthode simple, robuste et efficace pour la simulation du processus de génération des dentures spiroconiques. C'est sans doute la partie la plus complexe de ce mémoire. Pour reproduire virtuellement la fabrication d'une dent de la pièce, le procédé le plus intuitif est une succession d'opérations booléennes soustrayant la matière de l'outil à celle de la pièce en fonction de leur position relative au cours de l'usinage. La mise en œuvre de cette méthode est facile avec l'utilisation d'un logiciel de CAO tel que CATIA V5. Cependant, sa durée d'exécution est très longue pour un résultat peu précis. Elle n'est donc pas suffisamment efficace pour être utilisée à l'intérieur d'une boucle d'optimisation. Elle induirait des temps de calcul rédhibitoires.

L'approche proposée est plus abstraite. Il est essentiel de parfaitement maîtriser la simulation du procédé d'usinage par travail d'enveloppe. Pour cela, il ne faut pas négliger la compréhension du sens physique de l'opération réalisée. Ainsi, la maîtrise de ce procédé de fabrication pourra être extrapolée à la génération d'autres types de dentures. Les schémas qui illustrent le raisonnement sont donc construits avec beaucoup de rigueur pour imaginer avec justesse l'origine des équations. L'algorithme qui en découle est le cœur du programme informatique développé pour la simulation d'engrenages à dentures spiroconiques. Il donne les surfaces qui impactent l'engrènement à vide puis sous charge. Dans le cadre de l'optimisation, il est donc lancé de très nombreuses fois avec de multiples configurations. Celles-ci doivent être traitées sans erreur avec la même précision et la même vitesse. La stabilité de l'algorithme est fondamentale. La viabilité du processus d'optimisation en dépend.

La simulation de l'opération d'usinage reflète la fabricabilité de la denture générée. La surface résultante n'admet pas de formalisation analytique. Elle doit donc être déterminée par analyse numérique. L'outil et la machine-outil à commande numérique sont modélisables analytiquement. L'architecture cinématique de la machine est conçue pour reproduire le mouvement d'engrènement de la roue génératrice avec la pièce. L'outil suit la trajectoire d'une dent de la roue. La trace de son déplacement constitue une famille de surface dont l'enveloppe est la surface du creux de la dent usinée dans la pièce.

Les simulations de l'engrènement à vide et sous charge sont abordées dans le cinquième chapitre. Les approches adoptées nécessitent la génération d'un maillage homogène de la surface des flancs de dents. Cette contrainte est directement prise en compte dans l'algorithme de génération du profil du flanc de la dent. La procédure associée est donc plus complexe que celle qui génère le pied. Les points de la surface sont localisés aux intersections de sphères et de cônes. Cela implique la résolution numérique d'un système d'équations. La méthode de recherche des solutions est celle de *Newton-Raphson*. Elle est très rapide mais ne fonctionne pas telle quelle pour tous les cas de configuration des axes de la machine. Une

modification de l'algorithme est proposée pour garantir sa convergence dans tous les cas. Le programme hérite alors d'une grande robustesse.

La validité des résultats obtenus est vérifiée par comparaison avec ceux calculés par un logiciel officiellement fiable. L'évaluation est ainsi plus rapide et moins coûteuse qu'en passant par la fabrication des pièces. Les topographies simulées atteignent une précision inférieure au micromètre. La conformité des surfaces des flancs de dents est primordiale car leur forme conditionne le comportement de l'engrenage à vide et sous charge.

4.2 Modélisation de l'outil

4.2.1 Définition de la géométrie de l'outil

Les travaux présentés dans ce chapitre abordent uniquement le cas de la génération de dentures par la méthode du *face-milling*. L'outil couramment utilisé pour l'opération de taillage est un outil tourteau à plaquettes. La rectification des flancs de dents est réalisée avec une meule boisseau. L'outil considéré est composé de surfaces de révolution. Sa modélisation est similaire à celle proposée par *Gabiccini* [14]. La section transverse est composée de trois parties représentées sur la Figure 41. Leurs points de raccordement satisfont une continuité en position et en tangence.

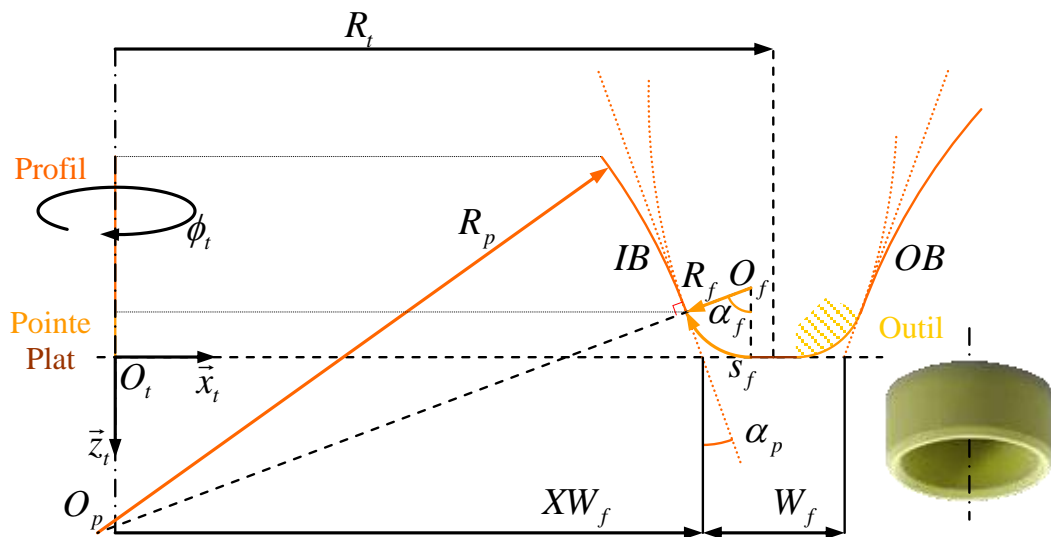


Figure 41 : Géométrie de la section transverse de l'outil.

Le plat est la surface plane en bout d'outil qui usine le fond de dent. La pointe a une forme torique convexe définie par le rayon d'arête. Elle réalise le pied de dent qui raccorde le fond au profil. Ce dernier est généré par le profil de l'outil dont la surface peut être conique, torique concave ou convexe. Il est caractérisé par deux paramètres géométriques, l'un est son rayon de profil, l'autre est son angle de pression. Cet angle est défini entre l'axe de rotation de l'outil et la tangente à la courbe du profil prise à l'intersection de celle-ci avec le plat. Les deux flancs, interne et externe, sont paramétrés de la même façon. Le flanc concave de l'outil réalise le flanc convexe de la dent et le convexe génère le concave. Ces flancs sont espacés de la distance entre pointes. Elle est définie entre les points d'intersection de chacune des deux courbes de profils avec le plat. Le rayon moyen de l'outil est pris au milieu de la distance entre pointes.

Les trois premiers paramètres cités (rayon d'arête, rayon de profil, angle de pression) sont intrinsèques à chacun des flancs. Les deux derniers (distance entre pointes, rayon moyen de l'outil) donnent leurs positions par rapport à l'axe de l'outil. Ces huit réglages sont

indépendants. Ils ont, évidemment, une importance déterminante sur la géométrie de la dent. La distance entre pointes agit directement sur l'épaisseur. Le rayon de profil et l'angle de pression ont une influence prépondérante sur la forme du profil de la denture. Dans le sixième chapitre, on détaillera plus précisément l'impact de chacun d'entre eux sur les topographies des flancs et, par conséquent, sur la position et la forme de la portée d'engrènement.

4.2.2 Définition paramétrique de la surface de l'outil

L'outil est de révolution. Pour en paramétrer la surface, seules deux coordonnées sont donc nécessaires. En effet, un point du flanc peut être localisé par sa position angulaire autour de l'axe de rotation de l'outil et par son abscisse curviligne le long du profil de la section transverse. Ces deux paramètres sont représentés sur la Figure 42.

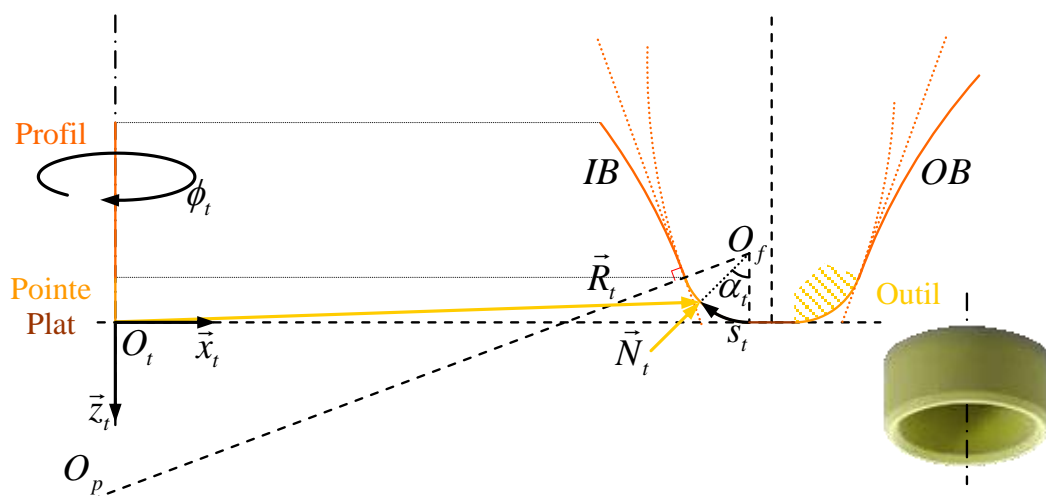


Figure 42 : Paramétrage de la section transverse de l'outil.

Tout d'abord, un premier paramétrage est défini dans le plan contenant l'axe de l'outil. Tout point du flanc y est situé par ses positions radiale et axiale. Ensuite, il n'y a plus qu'à considérer sa position angulaire autour de l'axe pour en déduire la formalisation mathématique de la surface complète. On a vu précédemment qu'un flanc de l'outil est composé de trois parties. Seules deux sont modélisées. Le plat n'est pas pris en compte dans la simulation du processus de génération. On admet que l'enveloppe de sa trajectoire est cylindrique. En effet, il est vérifiable par démonstration analytique que la révolution d'un plan autour d'un axe génère un cylindre. Parfois, dans le cas d'un usinage flanc par flanc, il n'y a pas exactement continuité en tangence de la surface du fond de dent. Dans le jargon de la fabrication, cette discontinuité est appelée « *paire de fesses* ». Elle n'est pas modélisée. Seul le profil et la pointe de l'outil sont paramétrés.

La courbure du profil est définie par son rayon et la position de son centre. Celle-ci dépend des natures du flanc et du profil. Le flanc est externe ou interne, le profil est concave ou convexe. On considère le profil droit comme un arc de cercle de courbure très faible. Deux paramètres binaires prennent la valeur ± 1 en fonction des cas. L'un vaut +1 pour le flanc

externe, -1 pour l'interne, l'autre vaut +1 pour un profil concave, -1 pour un convexe. L'approche est identique avec la pointe de l'outil. L'analyse trigonométrique de la Figure 41 donne les équations suivantes :

Position du centre de courbure du profil :

$$\text{Equation [1]} \quad XO_p = XW_f + B_t \cdot B_p \cdot R_p \cdot \cos(\alpha_p)$$

$$\text{Equation [2]} \quad ZO_p = B_p \cdot R_p \cdot \sin(\alpha_p)$$

Position du centre de courbure de la pointe :

$$\text{Equation [3]} \quad XO_f = XO_p - B_t \cdot B_p \cdot \sqrt{(R_f + B_p \cdot R_p)^2 - (R_f + ZO_p)^2}$$

$$\text{Equation [4]} \quad ZO_f = -R_f$$

On calcule également la longueur d'arc de la pointe :

$$\text{Equation [5]} \quad \alpha_f = \arctan\left(\frac{(XO_p - XO_f)}{(ZO_p - ZO_f)}\right)$$

$$\text{Equation [6]} \quad s_f = R_f \cdot \alpha_f$$

La surface de l'outil est caractérisée par sa forme et son orientation. Mathématiquement, cela est formalisé par le vecteur position d'un point lui appartenant et sa normale unitaire en ce point. Le paramétrage de la section transverse s'écrit alors de la façon suivante :

Pour le profil :

$$\text{Equation [7]} \quad \text{Position} \quad \begin{cases} X_t = XO_p - B_t \cdot B_p \cdot R_p \cdot \sin(\alpha_t) \\ Z_t = ZO_p - B_p \cdot R_p \cdot \cos(\alpha_t) \end{cases}$$

$$\text{Equation [8]} \quad \text{Normale} \quad \begin{cases} U_t = -B_t \cdot \sin(\alpha_t) \\ W_t = -\cos(\alpha_t) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \alpha_t = \alpha_f - B_p \cdot (s_t - s_f) / R_p$$

Pour la pointe :

$$\text{Equation [9]} \quad \text{Position} \quad \begin{cases} X_t = XO_f + B_t \cdot R_f \cdot \sin(\alpha_t) \\ Z_t = ZO_f \cdot (1 - \cos(\alpha_t)) \end{cases}$$

$$\text{Equation [10]} \quad \text{Normale} \quad \begin{cases} U_t = -B_t \cdot \sin(\alpha_t) \\ W_t = -\cos(\alpha_t) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \alpha_t = s_t / R_f$$

4.3 Modélisation de la machine

4.3.1 Machine à commande mécanique

Jadis, l'usinage des dentures des engrenages spiroconiques était réalisé sur des machines à mécanisme dédié. Leur chaîne cinématique complexe reproduisait le mouvement d'engrènement de la roue génératrice avec la pièce usinée à l'aide de trains d'engrenages, de cames et de procédés peu intuitifs. Bien qu'ingénieux, ces dispositifs limitaient la capacité de mouvement des axes. La technique du roulement modifié n'était appliquée qu'à la rotation du berceau. Son principe est détaillé plus loin. Le diamantage des flancs de la meule était géré par un mécanisme qui ne permettait pas d'établir une expression analytique de la surface exacte de l'outil. Celle-ci ne pouvait être modélisée que par la simulation de l'opération de diamantage. Les équations données pour la paramétrer ne faisaient alors que l'approximer. De plus, divers réglages prenaient des valeurs fixées dans des tables. Cela induisait une évolution discrète des configurations de la machine. Il y avait donc des solutions intermédiaires irréalisables, donc des surfaces de flancs de dents ingénérables. Cette singularité s'avérait être un obstacle majeur à l'intégration de ce processus dans une boucle d'optimisation. Cet inconvénient n'est plus d'actualité. L'avènement de l'ère numérique a permis de supplanter les mécanismes complexes. Le pilotage simultané de la vitesse et de la position des axes des machines a simplifié leurs architectures tout en augmentant leurs capacités. Désormais, les opérations de diamantage et d'usinage sont commandées numériquement. La Figure 43 et la Figure 44 illustrent les changements amenés par le pilotage numérique des axes de la machine-outil.

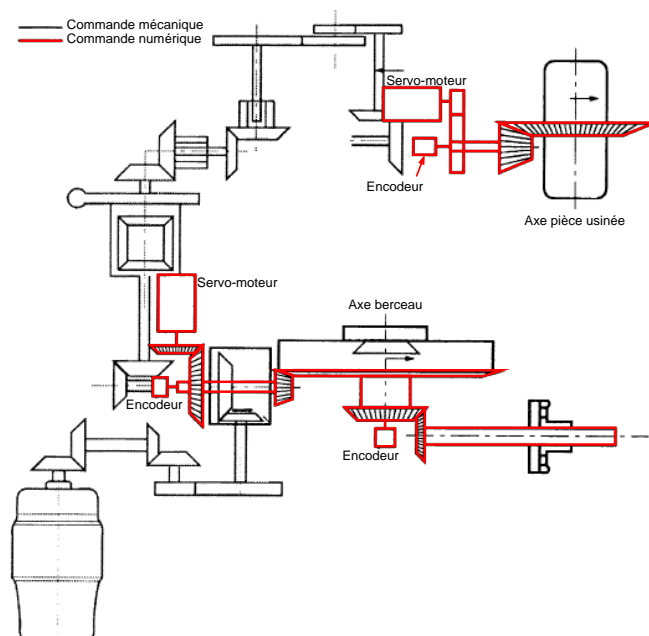


Figure 43 : Cinématique de la machine-outil.

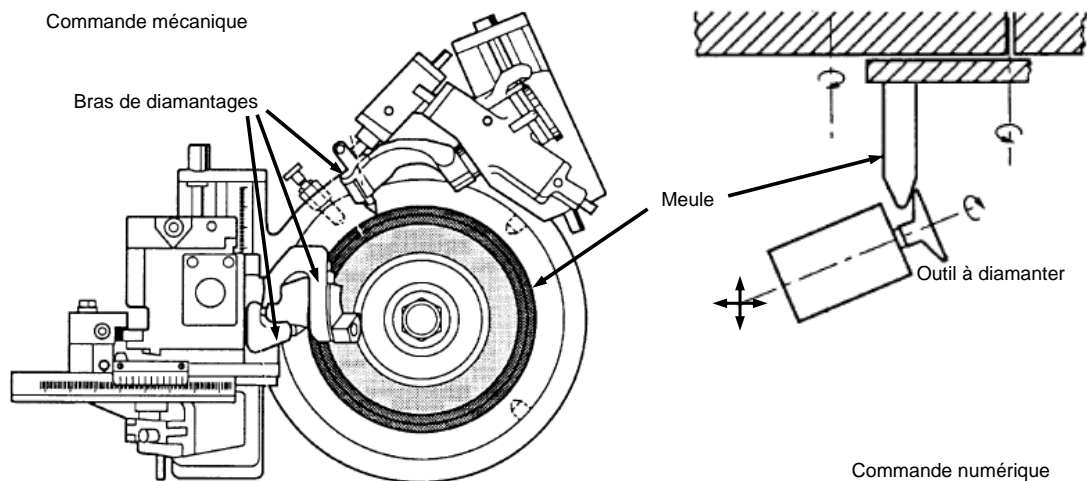


Figure 44 : Bloc de diamantage.

Aujourd'hui, la machine à commande numérique peut prendre des configurations plus variées avec un nombre minimal de réglages. Ceux-ci sont liés aux paramètres de la machine à commande mécanique par des formules de traduction définies dans la littérature. *Madrosky* donne les équations fournies par le constructeur de machine *Gleason* liant le mécanisme du bloc de diamantage à la géométrie du profil de l'outil. Il propose également d'en obtenir la forme par simulation de l'opération de diamantage et compare les deux méthodes. Les résultats sont suffisamment proches pour ne retenir que l'approche de *Gleason*, plus facile à mettre en œuvre. La technique du roulement modifié est réalisée par un système came / guide came. La conversion des paramètres de ce système en coefficients du polynôme de l'équation du roulement modifié est abordée dans le mémoire de *Madrosky* [47] et l'article de *Fong* [25]. Le premier exprime l'angle de rotation de la pièce usinée en fonction de l'angle de rotation du berceau. Il donne les formules de calcul des quatre premiers coefficients du polynôme. Le second exprime l'angle de rotation du berceau en fonction de l'angle de rotation de la pièce usinée. Il énonce l'équation du roulement modifié exacte obtenue par analyse mécanique du mouvement de la machine-outil conventionnelle #463 de *Gleason*. De son développement limité en série de *Taylor*, il déduit les sept premiers coefficients du polynôme. Cette dernière approche est choisie pour le gain de précision apporté par l'emploi d'un polynôme de degrés six. Toutes les formules et les tables liées à la traduction des réglages sont données en annexe. On y propose les conversions des paramètres de la machine à commande mécanique vers le modèle mathématique de *Fong* et diverses conventions propres aux fabricants de machine à commande numérique.

4.3.2 Machine à commande numérique

La machine-outil à commande numérique modélisée a potentiellement 6 axes. En effet, les axes de la distance radiale, du centre machine au centre berceau, de la base coulissante, de l'outil, du berceau et de la pièce peuvent être asservis en vitesse et en position. Dans le cadre des travaux de recherche réalisés, seuls 2.5 axes sont exploités. L'automate commande la vitesse de rotation de l'outil, la position et la vitesse angulaire du berceau et de la pièce. La

cinétique des axes n'est pas prise en compte dans la modélisation. La configuration de la machine est définie par quatorze réglages. Les angles de berceau, de pied, les réglages radial, centre machine / centre berceau, base coulissante et centre machine / sommet cône primitif sont représentés sur la Figure 45. Les angles d'inclinaison et de pivotement sont utilisés dans le cadre de méthodes d'usinage qui ne sont pas exposées. Dans les cas couramment abordés, ils sont donc laissés nuls. Cependant, le programme développé en tient compte. La Figure 46 les illustre. Il y a également les six coefficients du polynôme de l'équation du roulement modifié.

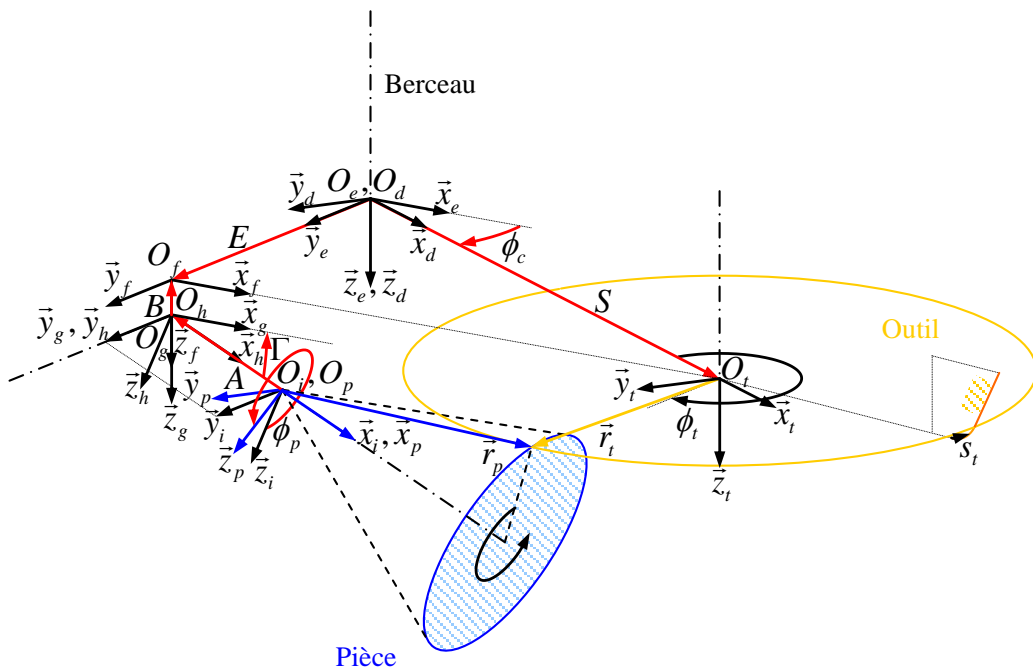


Figure 45 : Architecture de la machine-outil à commande numérique.

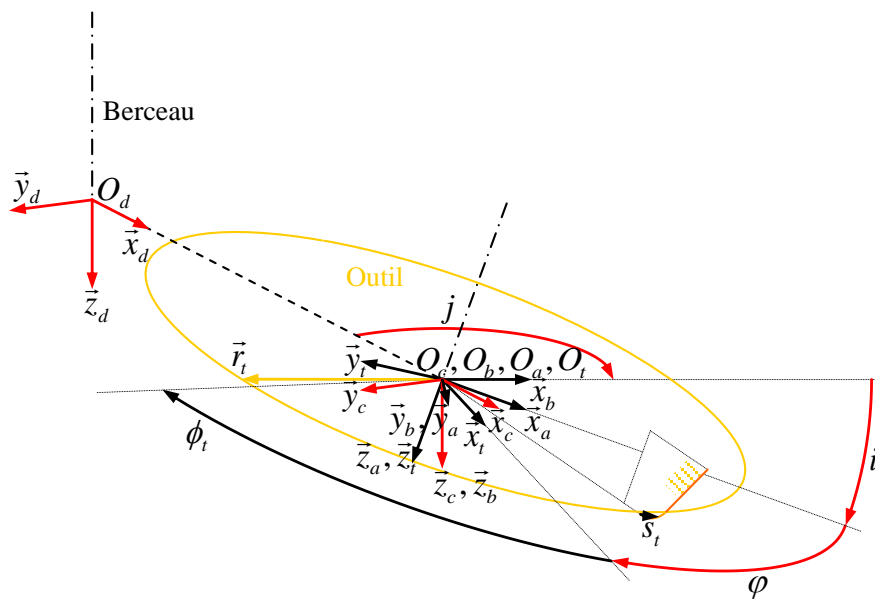


Figure 46 : Réglages machine optionnels.

La cinématique de la machine permet de reproduire le mouvement d'engrènement de la pièce usinée avec la roue plate génératrice, Figure 47. Celle-ci est imaginaire mais l'une de ses dents est matérialisée par l'outil qui en suit donc la trajectoire. Cela implique une interdépendance du mouvement de l'outil et de la pièce. L'angle du berceau est lié à celui de la pièce par une fonction polynomiale dont le coefficient du terme d'ordre 1 est le rapport de réduction de l'engrenage formé par la pièce usinée et la roue plate génératrice. Les cinq autres termes du polynôme sont dus à la méthode du roulement modifié qui est détaillée dans la partie suivante.

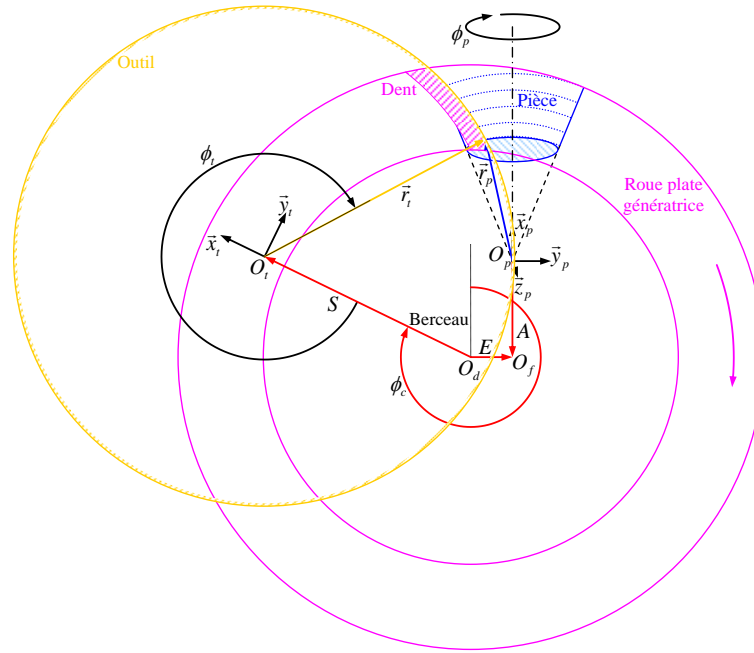


Figure 47 : Engrènement de la pièce usinée avec la roue plate génératrice.

L'architecture de la machine à commande numérique est modélisée par l'ensemble des matrices de transformation suivantes :

Matrices de translation :

$$M_{ih} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{gf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{fe} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & E \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{dc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & S \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de rotation :

$$M_{pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_p) & -\sin(\phi_p) & 0 \\ 0 & \sin(\phi_p) & \cos(\phi_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{hg} = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma) & 0 & \sin(\Gamma) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\Gamma) & 0 & \cos(\Gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{ed} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_c) & \sin(\phi_c) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi_c) & \cos(\phi_c) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{cb} = \begin{bmatrix} -\sin(j) & -\cos(j) & 0 & 0 \\ \cos(j) & -\sin(j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{ba} = \begin{bmatrix} \cos(i) & 0 & \sin(i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(i) & 0 & \cos(i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{at} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La modélisation est définie en coordonnées homogènes exprimées dans des repères orthonormés directs. L'équation matricielle suivante traduit le passage du repère de l'outil à celui de la pièce usinée :

Equation [11] $M_{pt} = M_{pi} \cdot M_{ih} \cdot M_{hg} \cdot M_{gf} \cdot M_{fe} \cdot M_{ed} \cdot M_{dc} \cdot M_{cb} \cdot M_{ba} \cdot M_{at}$

4.3.3 Méthode du roulement modifié

La méthode du roulement modifié est employée pour affiner la maîtrise de la position et de la forme de la portée d'engrènement en influant sur les topographies des flancs de dents. Pour cela, on modifie le mouvement relatif de l'outil par rapport à la pièce usinée. Mathématiquement, on formalise cela par une expression polynomiale de paramètres cinématiques de la machine en fonction de l'angle de rotation, soit du berceau, soit de la pièce selon la convention adoptée. La première est celle des constructeurs de machine. Elle est donc majoritairement choisie dans la littérature. Cependant, le modèle de *Fong* repose sur la seconde convention. Or, il sert de base à l'élaboration de l'algorithme simulant la génération des dentures. On a donc opté pour cette même règle afin de confronter nos résultats à ceux publiés dans l'article de *Fong* [25]. Le passage d'une convention à l'autre est bâti sur la méthode des moindres carrés. L'erreur d'approximation induite reste négligeable. La technique de conversion est détaillée en annexe.

La méthode du roulement modifié peut être appliquée à divers réglages de la machine mais, aujourd'hui, elle est principalement employée pour piloter le mouvement relatif du berceau et de la pièce. La Figure 48 montre l'influence spécifique de chacun des coefficients du polynôme sur les topographies des flancs de dents. L'équation du roulement modifié qui lie l'angle de rotation du berceau à celui de la pièce usinée est la suivante :

Equation [12] $\phi_c(\phi_p) = \phi_{c0} + c_1 \cdot \phi_p + \frac{c_2}{2!} \cdot \phi_p^2 + \frac{c_3}{3!} \cdot \phi_p^3 + \frac{c_4}{4!} \cdot \phi_p^4 + \frac{c_5}{5!} \cdot \phi_p^5 + \frac{c_6}{6!} \cdot \phi_p^6$

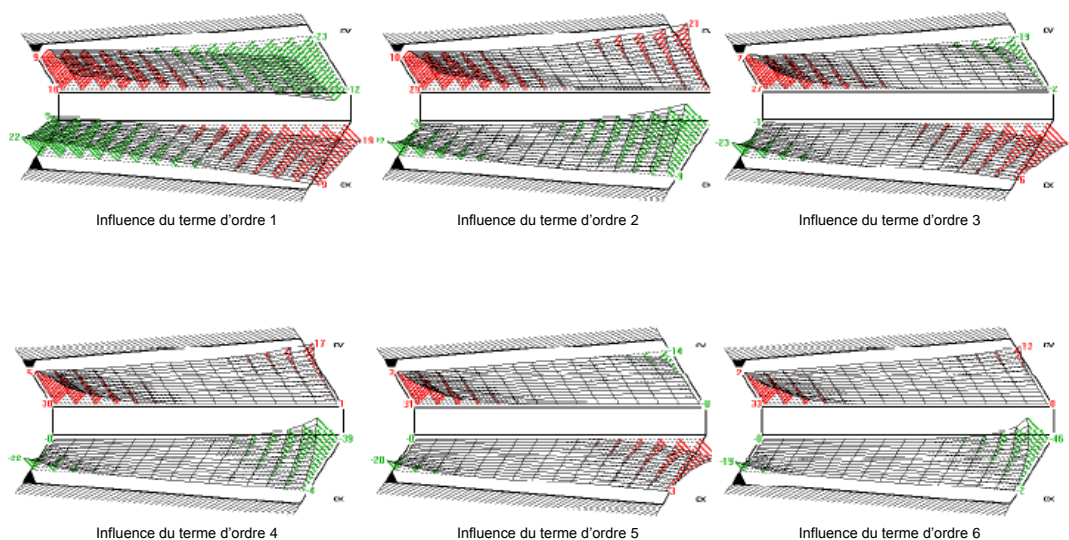


Figure 48 : Influences des termes du polynôme de l'équation du roulement modifié.

4.4 Modélisation du travail d'enveloppe

4.4.1 Paramétrage de la surface génératrice

La surface génératrice est celle de l'outil. Elle est paramétrée par l'abscisse curviligne le long de son profil et l'angle autour de son axe d'un point lui appartenant. Son mouvement dans l'espace génère la surface enveloppe. Il est indexé par la position angulaire de la pièce usinée. Les caractéristiques géométriques de l'outil sont détaillées précédemment. La position et l'orientation de la surface sont modélisées, respectivement, par le vecteur d'un point lui appartenant et le vecteur de sa normale en ce point, Figure 49. Ce dernier est orienté dans le sens vers lequel se trouve la matière de l'outil.

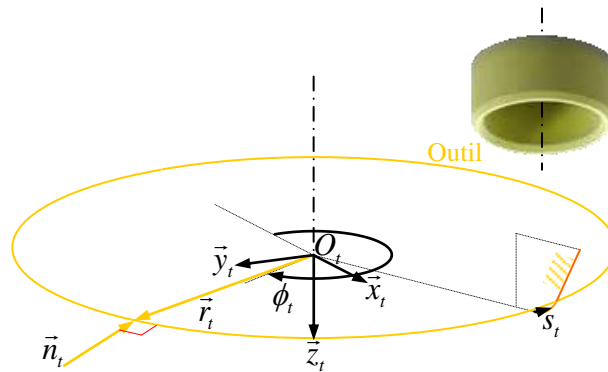


Figure 49 : Paramétrage de la surface de l'outil.

Position :

$$\text{Equation [13]} \quad \vec{r}_t = \begin{bmatrix} x_t(s_t, \phi_t) \\ y_t(s_t, \phi_t) \\ z_t(s_t, \phi_t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} x_t = X_t(s_t) \cdot \cos(\phi_t) \\ y_t = X_t(s_t) \cdot \sin(\phi_t) \\ z_t = Z_t(s_t) \end{cases}$$

Normale :

$$\text{Equation [14]} \quad \vec{n}_t = \frac{\frac{\partial \vec{r}_t}{\partial s_t} \times \frac{\partial \vec{r}_t}{\partial \phi_t}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}_t}{\partial s_t} \times \frac{\partial \vec{r}_t}{\partial \phi_t} \right\|} = \begin{bmatrix} u_t(s_t, \phi_t) \\ v_t(s_t, \phi_t) \\ w_t(s_t, \phi_t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} u_t = U_t(s_t) \cdot \cos(\phi_t) \\ v_t = U_t(s_t) \cdot \sin(\phi_t) \\ w_t = W_t(s_t) \end{cases}$$

4.4.2 Paramétrage de la surface enveloppe

La surface enveloppe est l'ensemble infini des empreintes usinées par l'outil dans la pièce au cours de leur mouvement relatif. Comme la Figure 50 et la Figure 51 le montrent, c'est la surface du creux de la denture. Elle enveloppe la famille de surfaces décrite par la trajectoire de la surface génératrice. Elle dépend donc de l'architecture cinématique de la machine et de la forme de l'outil. Sa position et son orientation sont alors exprimées en fonction de la matrice de passage du repère de l'outil à celui de la pièce et, respectivement, de la position et de l'orientation de la surface de l'outil. Sa normale est sortante par rapport à la matière.

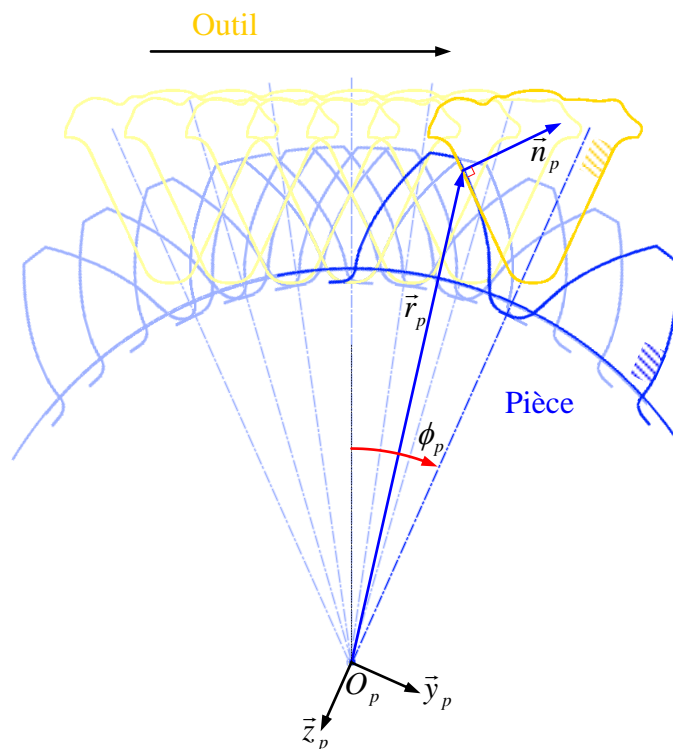


Figure 50 : Mouvement vu depuis le repère fixe global.

Position :

$$\text{Equation [15]} \quad \vec{r}_p = M_{pt} \cdot \vec{r}_t = \begin{bmatrix} x_p(s_t, \phi_t, \phi_p) \\ y_p(s_t, \phi_t, \phi_p) \\ z_p(s_t, \phi_t, \phi_p) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normale :

$$\text{Equation [16]} \quad \vec{n}_p = L_{pt} \cdot \vec{n}_t = \begin{bmatrix} u_p(s_t, \phi_t, \phi_p) \\ v_p(s_t, \phi_t, \phi_p) \\ w_p(s_t, \phi_t, \phi_p) \end{bmatrix}$$

4.4.3 Résolution de l'équation d'enveloppe

La génération des surfaces des flancs de dents relève d'un problème de géométrie différentielle dont la résolution est basée sur la théorie des enveloppes. Cette dernière permet de démontrer qu'un point de la surface enveloppe est le lieu où la normale à la surface génératrice est perpendiculaire à sa vitesse par rapport à la surface enveloppe. La Figure 51 illustre cette affirmation. La famille de surfaces décrite par la trajectoire de la surface génératrice est donc tangente à la surface enveloppe. Elle est indexée par l'angle de rotation de la pièce usinée. Sa vitesse est donc la dérivée de sa position exprimée dans le repère de la pièce par rapport à son paramètre d'indexation. L'équation qui suit formalise la condition d'existence du point sur la surface enveloppe.

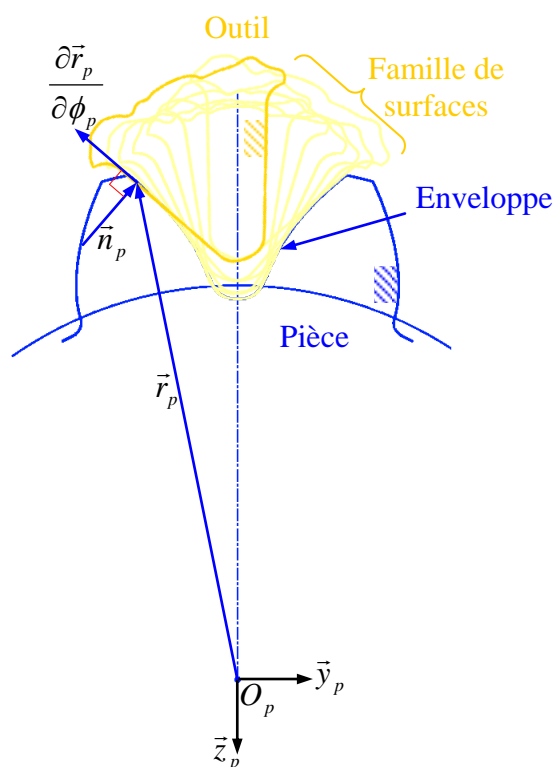


Figure 51 : Mouvement vu depuis le repère mobile de la pièce.

Équation d'enveloppe :

$$\text{Equation [17]} \quad f_p = \vec{n}_p \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \phi_p} = 0$$

Après développement, simplification et factorisation, on retrouve la formulation proposée par *Fong*. La cohérence des relations algébriques données dans l'article a été vérifiée avec le logiciel de calcul formel MAPLE. En allant plus loin dans l'analyse de l'équation d'enveloppe, on peut écrire :

$$\text{Equation [18]} \quad a_1 \cdot u_t + a_2 \cdot v_t + a_3 \cdot w_t + a_4 \cdot (x_t \cdot v_t - y_t \cdot u_t) + a_5 \cdot (x_t \cdot w_t - z_t \cdot u_t) + a_6 \cdot (y_t \cdot w_t - z_t \cdot v_t) = 0$$

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot U_t \cdot \cos(\phi_t) + a_2 \cdot U_t \cdot \sin(\phi_t) + a_3 \cdot W_t \\ \text{Equation [19]} \quad & + a_4 \cdot (X_t \cdot \cos(\phi_t) \cdot U_t \cdot \sin(\phi_t) - X_t \cdot \sin(\phi_t) \cdot U_t \cdot \cos(\phi_t)) \\ & + a_5 \cdot (X_t \cdot \cos(\phi_t) \cdot W_t - Z_t \cdot U_t \cdot \cos(\phi_t)) \\ & + a_6 \cdot (X_t \cdot \sin(\phi_t) \cdot W_t - Z_t \cdot U_t \cdot \sin(\phi_t)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equation [20]} \quad & (a_1 \cdot U_t + a_5 \cdot (X_t \cdot W_t - Z_t \cdot U_t)) \cdot \cos(\phi_t) \\ & + (a_2 \cdot U_t + a_6 \cdot (X_t \cdot W_t - Z_t \cdot U_t)) \cdot \sin(\phi_t) + a_3 \cdot W_t = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation ayant une forme trigonométrique simple :

$$\text{Equation [21]} \quad e_1 + e_2 \cdot \cos(\phi_t) + e_3 \cdot \sin(\phi_t) = 0$$

Tout point satisfaisant cette dernière équation est sur l'enveloppe. Pour résoudre l'équation et exprimer la position angulaire du point autour de l'axe de l'outil, on pose :

$$\text{Equation [22]} \quad \cos(\phi_t) = (1 - t^2) / (1 + t^2), \quad \sin(\phi_t) = 2 \cdot t / (1 + t^2), \quad t = \tan(\phi_t / 2)$$

On obtient alors une équation du second degré :

$$\text{Equation [23]} \quad e_1 + e_2 \cdot (1 - t^2) / (1 + t^2) + e_3 \cdot 2 \cdot t / (1 + t^2) = 0$$

$$\text{Equation [24]} \quad (e_1 + e_2) + 2 \cdot e_3 \cdot t + (e_1 - e_2) \cdot t^2 = 0$$

Ses solutions sont les deux racines d'une parabole :

$$\text{Equation [25]} \quad t1 = \left(-e_3 + \sqrt{e_2^2 + e_3^2 - e_1^2} \right) / (e_1 - e_2)$$

$$\text{Equation [26]} \quad t2 = \left(-e_3 - \sqrt{e_2^2 + e_3^2 - e_1^2} \right) / (e_1 - e_2)$$

$$\text{Equation [27]} \quad \text{Si } e_1 - e_2 = 0, \text{ alors } t1 = t2 = -e_1 / e_3$$

Avec :

$$e_1 = a_3 \cdot W_t$$

$$e_2 = a_1 \cdot U_t + a_5 \cdot (X_t \cdot W_t - Z_t \cdot U_t)$$

$$e_3 = a_2 \cdot U_t + a_6 \cdot (X_t \cdot W_t - Z_t \cdot U_t)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & \cos(\Gamma) \cdot (\cos(i) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\tau) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\tau)) \cdot B + (\cos(\tau) \cdot \sin(\Gamma) \\ & \cdot \sin(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot (-\cos(\Gamma) \cdot \sin(i) + \cos(i) \cdot \sin(\Gamma) \cdot \sin(\tau))) \cdot E + \cos(\varphi) \cdot \sin(i) \\ & \cdot \partial B(\phi_p) / \partial \phi_p + (\cos(i) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\tau) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\tau)) \cdot \partial E(\phi_p) / \partial \phi_p + S \cdot (\cos(\Gamma) \\ & \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(i) \cdot \sin(j - \tau) + (\cos(i) \cdot \cos(j) \cdot \cos(\varphi) - \sin(j) \cdot \sin(\varphi)) \cdot (\sin(\Gamma) \\ & - \partial \phi_c(\phi_p) / \partial \phi_p)) - (\cos(i) \cdot \sin(j) \cdot \cos(\varphi) + \cos(j) \cdot \sin(\varphi)) \cdot \partial S(\phi_p) / \partial \phi_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = & -\cos(\Gamma) \cdot (\cos(i) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\tau) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\tau)) \cdot B + (\sin(i) \cdot \cos(\Gamma) \\ & \cdot \sin(\varphi) + \sin(\Gamma) \cdot (\cos(\varphi) \cdot \cos(\tau) - \cos(i) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\tau))) \cdot E - \sin(\varphi) \cdot \sin(i) \\ & \cdot \partial B(\phi_p) / \partial \phi_p - (\cos(i) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\tau) + \cos(\varphi) \cdot \sin(\tau)) \cdot \partial E(\phi_p) / \partial \phi_p - S \cdot (\cos(\Gamma) \\ & \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(i) \cdot \sin(j - \tau) + (\cos(i) \cdot \cos(j) \cdot \sin(\varphi) + \sin(j) \cdot \cos(\varphi)) \cdot (\sin(\Gamma) \\ & - \partial \phi_c(\phi_p) / \partial \phi_p)) + (\cos(i) \cdot \sin(j) \cdot \sin(\varphi) - \cos(j) \cdot \cos(\varphi)) \cdot \partial S(\phi_p) / \partial \phi_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \cos(\Gamma) \cdot \sin(i) \cdot \cos(\tau) \cdot B + (\cos(\Gamma) \cdot \cos(i) + \sin(\Gamma) \cdot \sin(i) \cdot \sin(\tau)) \cdot E \\
&\quad - \cos(i) \cdot \partial B(\phi_p) / \partial \phi_p + \sin(i) \cdot \cos(\tau) \cdot \partial E(\phi_p) / \partial \phi_p - \sin(i) \cdot \sin(j) \cdot \partial S(\phi_p) / \partial \phi_p \\
&\quad + S \cdot (\sin(i) \cdot \cos(j) \cdot (\sin(\Gamma) - \partial \phi_c(\phi_p) / \partial \phi_p) - \cos(\Gamma) \cdot \cos(i) \cdot \sin(j - \tau)) \\
a_4 &= \cos(i) \cdot (\sin(\Gamma) - \partial \phi_c(\phi_p) / \partial \phi_p) - \cos(\Gamma) \cdot \sin(i) \cdot \sin(\tau) + \partial \phi(\phi_p) / \partial \phi_p \\
a_5 &= \cos(\Gamma) \cdot \cos(\tau) \cdot \cos(\varphi) \\
&\quad - \sin(\varphi) \cdot (\sin(i) \cdot (\sin(\Gamma) - \partial \phi_c(\phi_p) / \partial \phi_p) + \cos(i) \cdot \cos(\Gamma) \cdot \sin(\tau)) \\
a_6 &= -\cos(\Gamma) \cdot \cos(\tau) \cdot \sin(\varphi) \\
&\quad - \cos(\varphi) \cdot (\sin(i) \cdot (\sin(\Gamma) - \partial \phi_c(\phi_p) / \partial \phi_p) + \cos(i) \cdot \cos(\Gamma) \cdot \sin(\tau)) \\
\tau &= j - \phi_c(\phi_p)
\end{aligned}$$

On remonte alors aux solutions de l'équation trigonométrique précédente :

Equation [28] $\phi_{1_t} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{-e_3 + \sqrt{e_2^2 + e_3^2 - e_1^2}}{e_1 - e_2}\right) + 2 \cdot \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

Equation [29] $\phi_{2_t} = 2 \cdot \arctan\left(\frac{-e_3 - \sqrt{e_2^2 + e_3^2 - e_1^2}}{e_1 - e_2}\right) + 2 \cdot \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

Equation [30] Si $e_1 - e_2 = 0$, $\phi_{1_t} = \phi_{2_t} = -2 \cdot \arctan(e_1/e_3) + 2 \cdot \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

Pour une abscisse curviligne de l'outil et une position angulaire de la pièce données, deux angles de l'outil sont solutions de l'équation d'enveloppe. Deux points à des positions angulaires distinctes sur la surface de l'outil satisfont donc leur condition d'existence sur la surface de la pièce usinée. Ils sont représentés sur la Figure 52. Le critère de choix de la solution valide est présenté dans la prochaine partie.

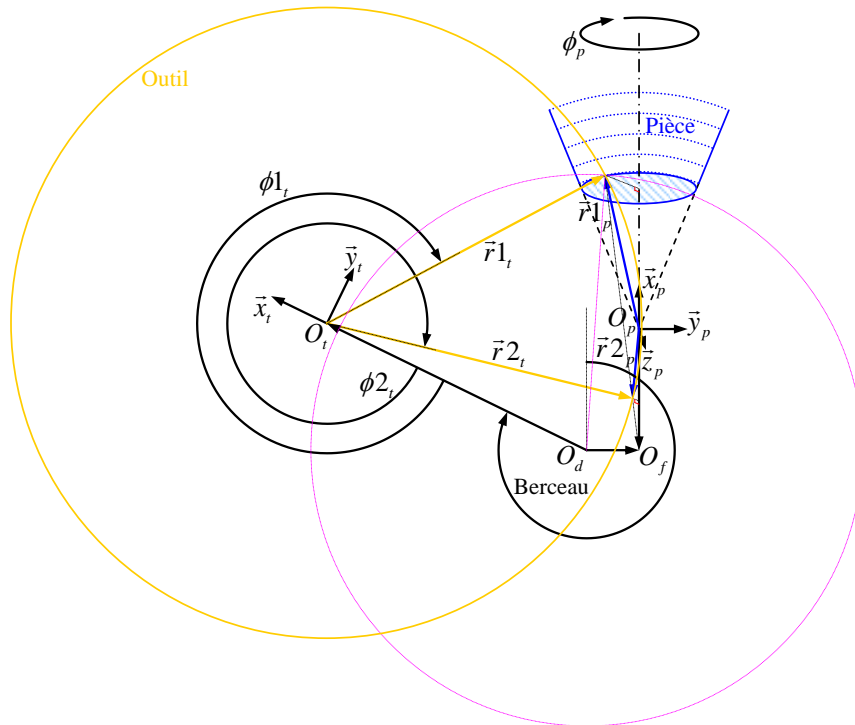


Figure 52 : Solutions de l'équation d'enveloppe.

4.5 Génération de l'enveloppe

4.5.1 Génération du pied de la dent

Le pied de la dent est généré par la pointe de l'outil. Chaque point de sa surface est recherché sur une sphère de rayon donné et dont le centre est confondu avec le sommet du cône primitif de la pièce usinée, Figure 53. L'abscisse curviligne du point le long de la pointe est donnée et son angle autour de l'axe de rotation de l'outil est déduit de la résolution de l'équation d'enveloppe. Il faut alors trouver la position angulaire de la pièce pour laquelle le point de la surface enveloppe appartient à la sphère. L'algorithme de recherche est basé sur la méthode de *Newton-Raphson*. Son principe et le procédé proposé pour améliorer sa robustesse sont détaillés plus loin. L'équation à résoudre exprime l'annulation de la distance radiale entre la sphère du point courant et la sphère cible.

$$\text{Equation [31]} \quad \sqrt{x_p^2(\phi_p) + y_p^2(\phi_p) + z_p^2(\phi_p)} - R_w = 0$$

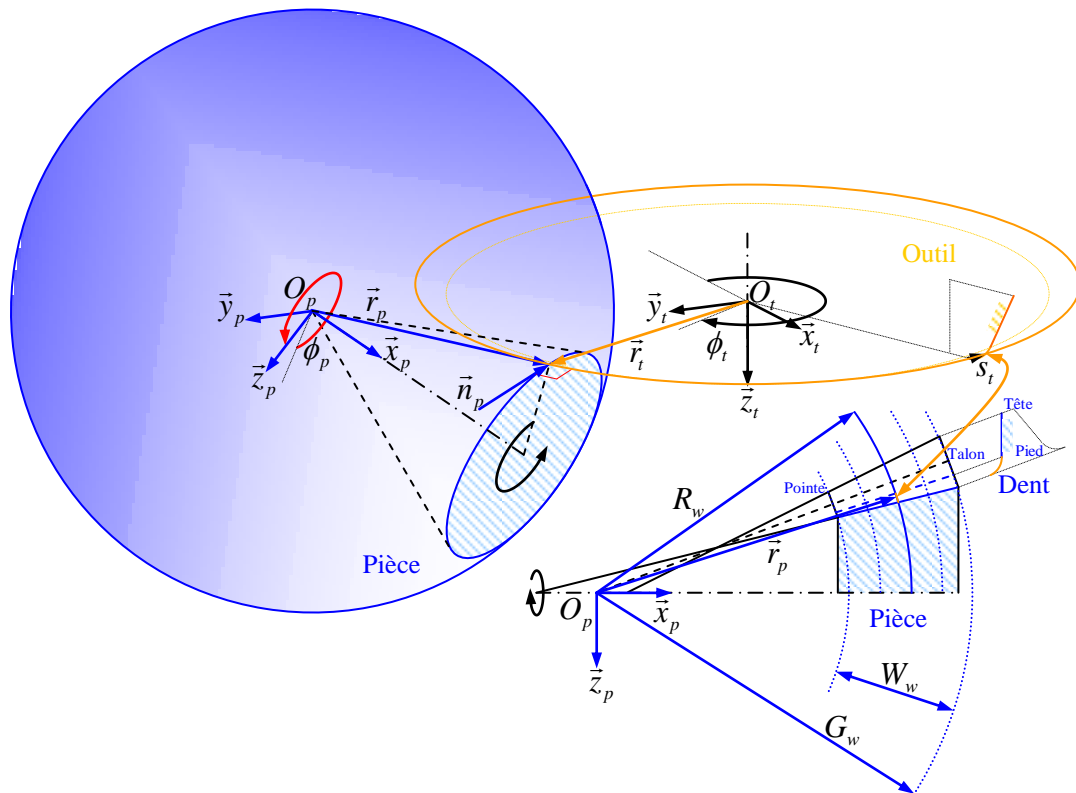


Figure 53 : Génération du pied de la dent.

La génération des points de la surface démarre en talon de la dent au raccordement du fond avec le pied. Elle progresse depuis le pied vers la tête et du talon vers la pointe de la dent. Le développement qui suit présente la trame du calcul implémentée dans l'application informatique de cette méthode. On montre, dans la dernière sous-partie, que la convergence du calcul n'est pas garantie dans tous les cas avec l'algorithme tel qu'il est présenté ci-dessous. Celui-ci doit donc être amélioré pour palier à ce problème.

On discrétise la longueur d'arc de la pointe en parts égales. L'abscisse curviligne est prise nulle au point de raccordement du plat avec la pointe. Elle évolue par incréments jusqu'à la transition de la pointe avec le profil de l'outil.

$$\text{Equation [32]} \quad s_t \in [0, s_f], \quad s_{pas} = s_f / Ns_f$$

La largeur de denture est également fractionnée de façon homogène. Le rayon de sphère varie pas à pas depuis la génératrice extérieure vers le sommet du cône primitif.

$$\text{Equation [33]} \quad R_w \in [G_w, G_w - W_w], \quad R_{pas} = W_w / NR_w$$

L'angle initial de position de la pièce est nul.

$$\text{Equation [34]} \quad \phi_p(0) = 0$$

La position courante du point appartenant à l'enveloppe est calculée pour la position angulaire de la pièce donnée. On en déduit alors le rayon de la sphère sur laquelle il est situé et sa distance par rapport à la sphère visée.

$$\text{Equation [35]} \quad \Delta R_w(\phi_p) = \sqrt{x_p^2(\phi_p) + y_p^2(\phi_p) + z_p^2(\phi_p)} - R_w$$

On procède identiquement avec la position du point de l'enveloppe dérivée par rapport à l'angle de position de la pièce.

$$\text{Equation [36]} \quad \Delta R_w(\phi_p + \Delta\phi_p) = \sqrt{x_p^2(\phi_p + \Delta\phi_p) + y_p^2(\phi_p + \Delta\phi_p) + z_p^2(\phi_p + \Delta\phi_p)} - R_w$$

La direction et le sens de variation de l'écart entre la sphère courante et la cible sont formalisés par le coefficient directeur de la tangente en ϕ_p à la fonction $\Delta R_w(\phi_p)$. Celui-ci est évalué par application de la méthode de différence finie.

$$\text{Equation [37]} \quad \Delta R'_w(\phi_p) = d\Delta R_w(\phi_p) / d\phi_p \approx (\Delta R_w(\phi_p + \Delta\phi_p) - \Delta R_w(\phi_p)) / \Delta\phi_p$$

L'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses donne la position angulaire de la pièce mise à jour. On obtient donc la nouvelle position courante du point appartenant à l'enveloppe.

$$\text{Equation [38]} \quad \phi_p(i+1) = \phi_p(i) - \Delta R_w(\phi_p(i)) / \Delta R'_w(\phi_p(i))$$

On boucle sur l'Equation [35] jusqu'à ce que l'écart entre la position angulaire courante de la pièce et sa mise à jour soit inférieur au seuil de convergence donné. Le point de l'enveloppe est considéré comme suffisamment proche de la sphère cible quand le critère d'arrêt suivant est satisfait :

$$\text{Equation [39]} \quad |\phi_p(i+1) - \phi_p(i)| < \epsilon\phi_p$$

Par soucis de conformité avec la convention adoptée par les constructeurs de machine-outil à commande numérique, les vecteurs de position et d'orientation des surfaces générées sont exprimés dans le repère w représenté sur la Figure 54. Ainsi, l'axe \vec{z}_w devient l'axe de la pièce usinée dans le cinquième chapitre sur l'engrènement de dentures.

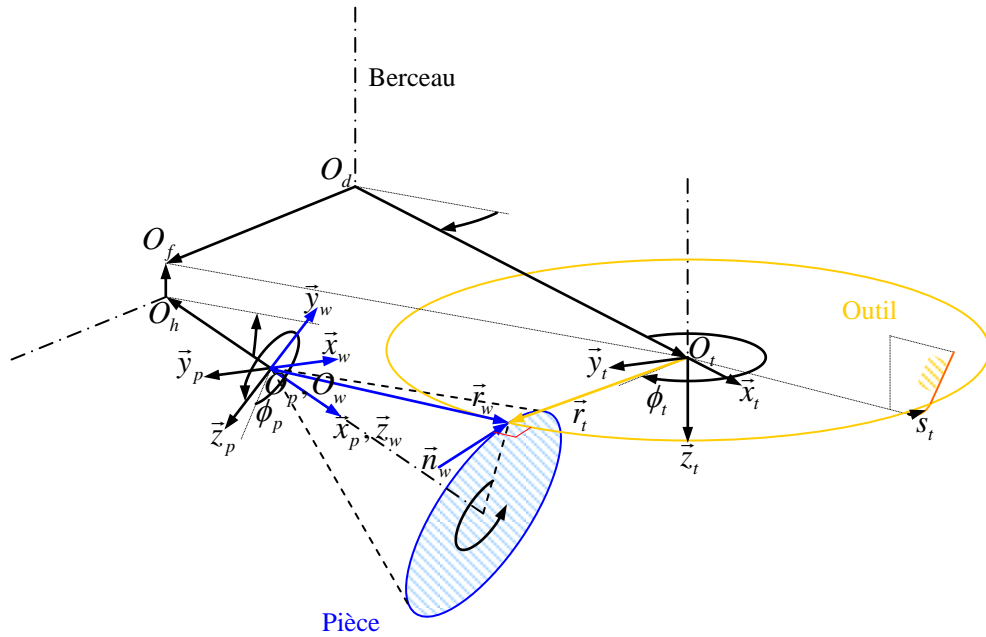


Figure 54 : Repère conventionnel de la pièce.

Equation [40] $\vec{r}_w = M_{wp} \cdot \vec{r}_p$

Equation [41] $\vec{n}_w = M_{wp} \cdot \vec{n}_p$

$$\text{Avec : } M_{wp} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5.2 Génération du profil de la dent

Le profil de la dent est généré par le profil de l'outil. Les points de sa surface sont localisés aux intersections de sphères et de cônes centrés sur le sommet du cône primitif de la pièce, Figure 55. Les rayons des sphères et les angles des cônes sont donnés. Pour chaque point, l'angle autour de l'axe de l'outil est solution de l'équation d'enveloppe. L'abscisse curviligne du point le long du profil de l'outil et la position angulaire de la pièce sont déterminés de manière à placer le point de l'enveloppe au croisement de la sphère et du cône visés. Ce sont les deux variables d'un système de deux équations à résoudre numériquement par la méthode de *Newton-Raphson*. La première équation formalise la condition d'existence du point courant sur la sphère visée. La seconde exprime l'annulation de l'écart angulaire entre la génératrice du cône auquel appartient le point courant de l'enveloppe et celle du cône cible. La génération des points de la surface progresse depuis le raccordement du pied avec le profil vers la tête de la dent et du talon vers la pointe.

Equation [42]
$$\begin{cases} \sqrt{x_p^2(s_t, \phi_p) + y_p^2(s_t, \phi_p) + z_p^2(s_t, \phi_p)} - R_w = 0 \\ \arctan\left(\sqrt{y_p^2(s_t, \phi_p) + z_p^2(s_t, \phi_p)} / x_p(s_t, \phi_p)\right) - \gamma_w = 0 \end{cases}$$

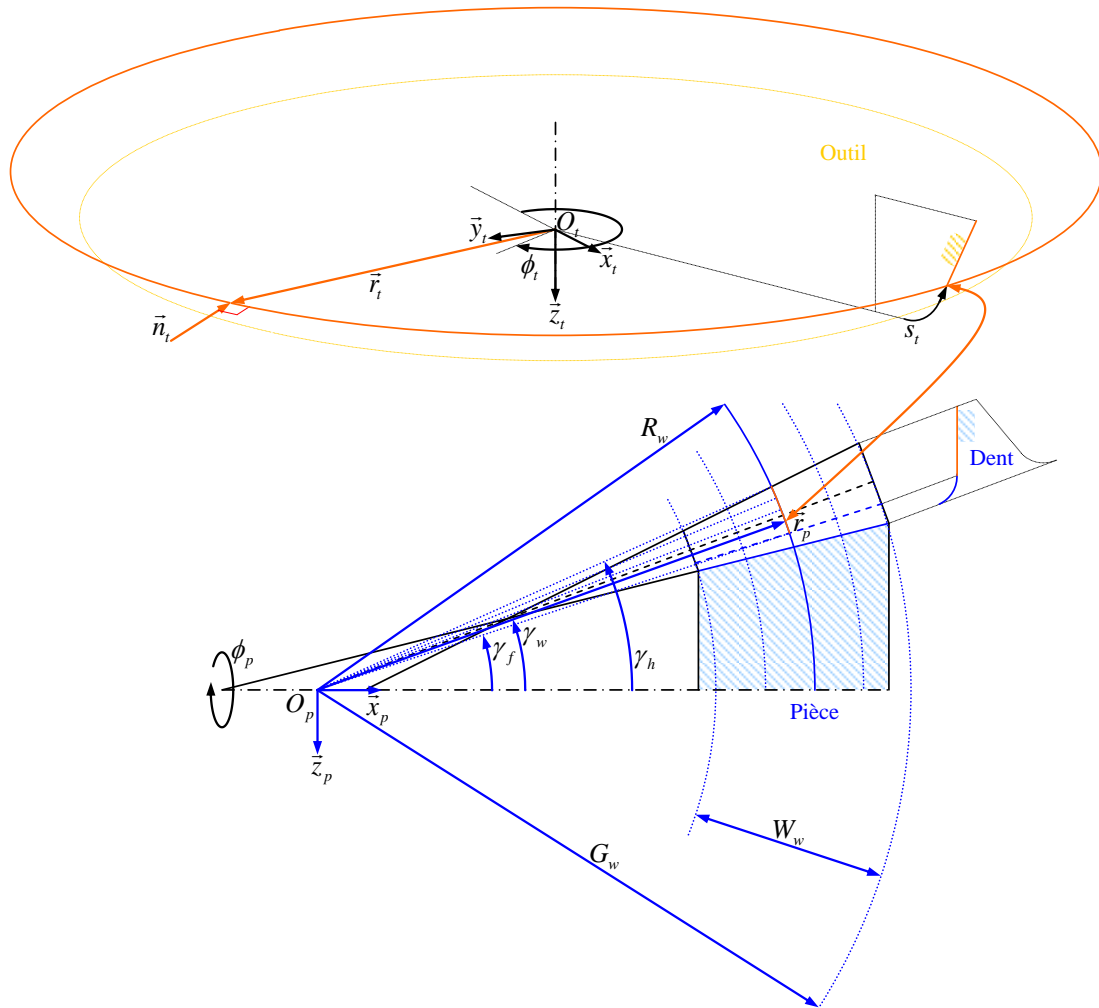


Figure 55 : Génération du profil de la dent.

L'algorithme de calcul est un peu plus complexe que le précédent puisqu'il fait intervenir l'inversion d'une matrice Jacobienne de dimension 2. Il est développé comme suit.

Comme pour le pied de la dent, on discrétise la denture suivant sa largeur.

Equation [43] $R_w \in [G_w, G_w - W_w], R_{pas} = W_w / NR_w$

Par contre, ici, l'abscisse curviligne du point le long du profil de l'outil est une inconnue. En chaque section sphérique, on fractionne l'angle entre la génératrice du cône auquel appartient le point du bord de tête et celle du cône passant par le point de raccordement du profil avec le pied de la dent. Cela permet de construire un maillage plus homogène.

Equation [44] $\gamma_w \in [\gamma_f, \gamma_h], \gamma_{pas} = (\gamma_h - \gamma_f) / N\gamma_w$

Les coordonnées du point de raccordement du profil avec le pied de la dent sont obtenues avec le module de génération du pied explicité précédemment. On en déduit l'angle au sommet du cône passant par ce point.

Equation [45] $\gamma_f = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_w^2(s_f, \phi_p) + y_w^2(s_f, \phi_p)}}{z_w(s_f, \phi_p)}\right)$

L'angle au sommet du cône auquel appartient le point du bord de tête est calculé à partir des données géométriques de la denture.

$$\text{Equation [46]} \quad \gamma_h = \gamma_p + \arctan\left(\frac{(a_w - (G_w - R_w)) \cdot \tan(\gamma_H - \gamma_p)}{R_w}\right)$$

L'abscisse curviligne initiale est égale à la longueur d'arc de la pointe de l'outil.

$$\text{Equation [47]} \quad s_i(0) = s_f$$

L'angle initial de position de la pièce est nul.

$$\text{Equation [48]} \quad \phi_p(0) = 0$$

On détermine la position courante du point de l'enveloppe à partir de son abscisse curviligne le long du profil de l'outil et de la position angulaire de la pièce. On calcule alors la distance radiale entre ce point et la sphère cible ainsi que son écart angulaire par rapport au cône visé.

$$\text{Equation [49]} \quad \Delta R_w(s_i, \phi_p) = \sqrt{x_p^2(s_i, \phi_p) + y_p^2(s_i, \phi_p) + z_p^2(s_i, \phi_p)} - R_w$$

$$\text{Equation [50]} \quad \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p) = \arctan\left(\frac{\sqrt{y_p^2(s_i, \phi_p) + z_p^2(s_i, \phi_p)}}{x_p(s_i, \phi_p)}\right) - \gamma_w$$

Les valeurs dérivées de la distance radiale et de l'écart angulaire sont évaluées par rapport à la variation de l'abscisse curviligne.

$$\text{Equation [51]} \quad \Delta R_w(s_i + \Delta s_i, \phi_p) = \sqrt{x_p^2(s_i + \Delta s_i, \phi_p) + y_p^2(s_i + \Delta s_i, \phi_p) + z_p^2(s_i + \Delta s_i, \phi_p)} - R_w$$

$$\text{Equation [52]} \quad \Delta \gamma_w(s_i + \Delta s_i, \phi_p) = \arctan\left(\frac{\sqrt{y_p^2(s_i + \Delta s_i, \phi_p) + z_p^2(s_i + \Delta s_i, \phi_p)}}{x_p(s_i + \Delta s_i, \phi_p)}\right) - \gamma_w$$

Elles sont également calculées par rapport à l'évolution de la position angulaire de la pièce usinée.

$$\text{Equation [53]} \quad \Delta R_w(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p) = \sqrt{x_p^2(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p) + y_p^2(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p) + z_p^2(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p)} - R_w$$

$$\text{Equation [54]} \quad \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p) = \arctan\left(\frac{\sqrt{y_p^2(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p) + z_p^2(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p)}}{x_p(s_i, \phi_p + \Delta \phi_p)}\right) - \gamma_w$$

On construit alors la matrice Jacobienne du système d'équations à résoudre. Les dérivées partielles des fonctions à annuler par rapports aux variations des inconnues y sont arrangées comme exprimé ci-dessous.

$$\text{Equation [55]} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta R_w(s_i, \phi_p)}{\partial s_i} & \frac{\partial \Delta R_w(s_i, \phi_p)}{\partial \phi_p} \\ \frac{\partial \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p)}{\partial s_i} & \frac{\partial \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p)}{\partial \phi_p} \end{bmatrix}$$

Ces dérivées partielles sont estimées en appliquant la méthode numérique de différence finie. En effet, elles ne peuvent être définies analytiquement. Leur valeur algébrique n'est donc pas connue.

$$\text{Equation [56]} \quad \frac{\partial \Delta R_w(s_i, \phi_p)}{\partial s_i} \approx \frac{(\Delta R_w(s_i + \partial s_i, \phi_p) - \Delta R_w(s_i, \phi_p))}{\Delta s_i}$$

$$\text{Equation [57]} \quad \frac{\partial \Delta R_w(s_i, \phi_p)}{\partial \phi_p} \approx \frac{(\Delta R_w(s_i, \phi_p + \partial \phi_p) - \Delta R_w(s_i, \phi_p))}{\Delta \phi_p}$$

$$\text{Equation [58]} \quad \frac{\partial \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p)}{\partial s_i} \approx \frac{(\Delta \gamma_w(s_i + \partial s_i, \phi_p) - \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p))}{\Delta s_i}$$

$$\text{Equation [59]} \quad \frac{\partial \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p)}{\partial \phi_p} \approx \frac{(\Delta \gamma_w(s_i, \phi_p + \partial \phi_p) - \Delta \gamma_w(s_i, \phi_p))}{\Delta \phi_p}$$

On calcule le déterminant de la matrice Jacobienne. Il caractérise la direction et le sens d'évolution de l'écart entre le point appartenant à l'enveloppe et l'intersection visée en fonction des variables du problème.

Equation [60] $\det(J) = \partial\Delta R_w(s_i, \phi_p) / \partial s_i \cdot \partial\Delta\gamma_w(s_i, \phi_p) / \partial \phi_p - \partial\Delta\gamma_w(s_i, \phi_p) / \partial s_i \cdot \partial\Delta R_w(s_i, \phi_p) / \partial \phi_p$

La nouvelle position courante du point de l'enveloppe est déduite de la mise à jour de l'abscisse curviligne du point le long du profil de l'outil et de la position angulaire de la pièce usinée.

Equation [61] $s_i(i+1) = s_i(i) - (\partial\Delta\gamma_w(s_i, \phi_p) / \partial \phi_p \cdot \Delta R_w(s_i, \phi_p) - \partial\Delta R_w(s_i, \phi_p) / \partial \phi_p \cdot \Delta\gamma_w(s_i, \phi_p)) / \det(J)$

Equation [62] $\phi_p(i+1) = \phi_p(i) - (\partial\Delta R_w(s_i, \phi_p) / \partial s_i \cdot \Delta\gamma_w(s_i, \phi_p) - \partial\Delta\gamma_w(s_i, \phi_p) / \partial s_i \cdot \Delta R_w(s_i, \phi_p)) / \det(J)$

On itère sur l'Equation [49] et l'Equation [50] jusqu'à la validation du critère d'arrêt. L'écart entre le point de l'enveloppe et l'intersection de la sphère avec le cône est alors suffisamment faible.

Equation [63] $\sqrt{(s_i(i+1) - s_i(i))^2 + (\phi_p(i+1) - \phi_p(i))^2} < \sqrt{\varepsilon s_i^2 + \varepsilon \phi_p^2}$

4.5.3 Stabilisation de la convergence du calcul

On a montré que deux points à des positions angulaires distinctes sur la surface de l'outil satisfont leur condition d'existence sur la surface de la pièce usinée. On ne retient que celui dont la distance radiale avec la sphère visée est minimale. La Figure 56 montre les écarts entre les sphères bleues passant par les points solutions et la cible en rouge.

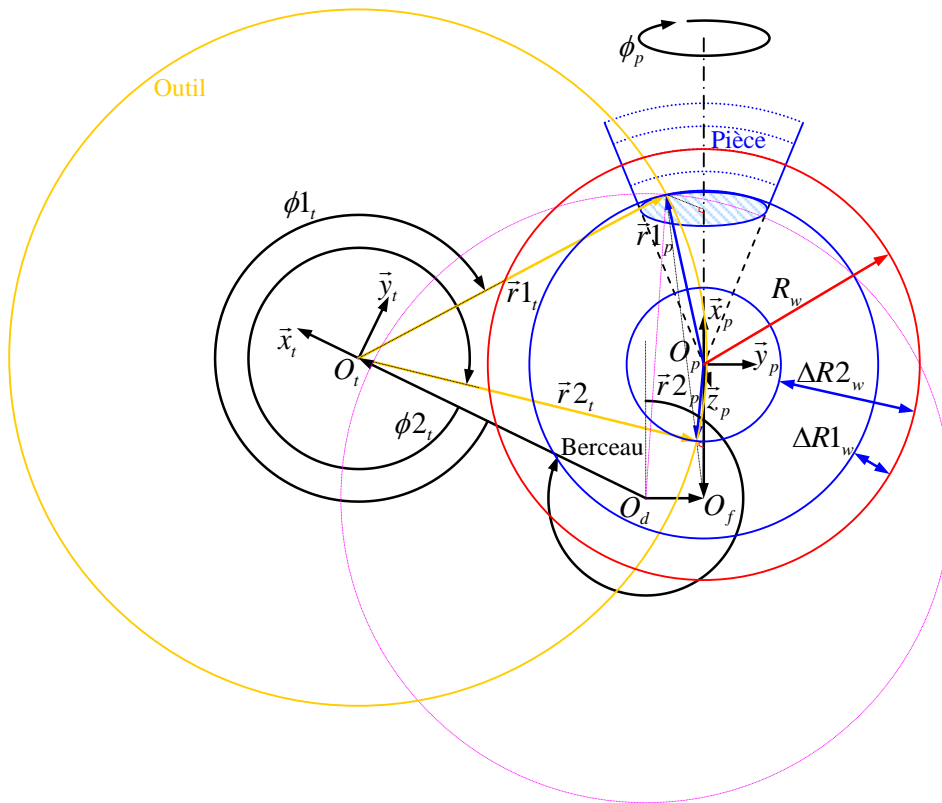


Figure 56 : Sélection de la solution valide de l'équation d'enveloppe.

La courbe tracée sur la Figure 57 représente l'évolution des rayons des sphères passant par les points solutions de l'équation d'enveloppe en fonction de la position angulaire de la pièce. Il s'agit d'une parabole ajustée par la méthode des moindres carrés. Une ellipse serait certainement mieux adaptée. Elle approxime la ligne de raccord du pied et du profil de la dent car, dans le cas présent, l'abscisse curviligne considérée est celle de la jonction de la pointe et du profil de l'outil. Les marques bleues représentent la solution retenue, celle dont résulte l'écart minimal par rapport à la cible rouge. La solution rejetée est marquée en noir. La Figure 57 est obtenue avec le module de génération du pied de la dent à partir des réglages de la machine-outil donnés dans le Tableau 2.

Pièce	GEAR	
Flanc de la dent	CONCAV	
Angle initial de position de la pièce	0	deg
Abscisse curviligne du point le long de la pointe de l'outil (égale à la longueur d'arc de la pointe dans le cas présent)	1.466	mm
Diamètre moyen de l'outil	152.392	mm
Largeur entre pointes	1.910	mm
Angle de profil actif	20	deg
Rayon de profil actif	∞	mm
Rayon d'arête actif	1.2	mm
Angle initial de berceau	60	deg
Angle d'inclinaison	0	deg
Angle de pivotement	0	deg
Angle de pied	49.8	deg
Réglage radial	109	mm
Réglage centre machine / centre berceau	0	mm
Réglage base coulissante	-2.1	mm
Réglage centre machine / sommet cône primitif	0	mm
Coefficient Roulement Modifié R1	0.794488	
Coefficient Roulement Modifié R2	0	
Coefficient Roulement Modifié R3	0.001704	
Coefficient Roulement Modifié R4	0	
Coefficient Roulement Modifié R5	-0.000024	
Coefficient Roulement Modifié R6	0	

Tableau 2 : Paramètres pour générer la ligne de raccord du pied et du profil de la dent.

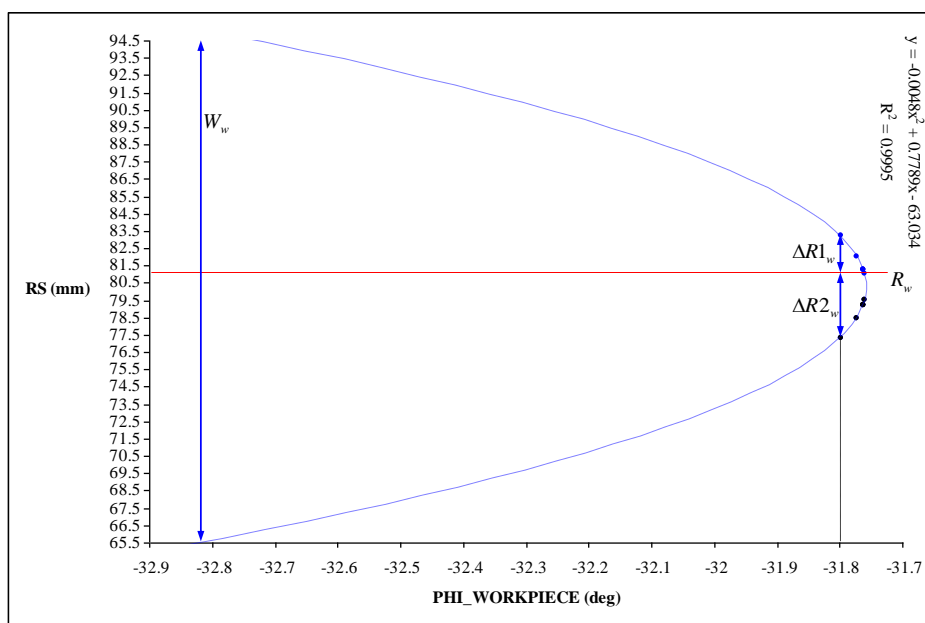


Figure 57 : Rayon de la sphère en fonction de la position angulaire de la pièce.

Écarts déduits des deux solutions de l'équation d'enveloppe :

Equation [64] $\Delta R1_w = \sqrt{x1_p^2 + y1_p^2 + z1_p^2} - R_w$

Equation [65] $\Delta R2_w = \sqrt{x2_p^2 + y2_p^2 + z2_p^2} - R_w$

Sélection de l'angle de l'outil donnant l'écart minimal :

Equation [66] $\Delta R_w = \min(\Delta R1_w, \Delta R2_w) \rightarrow \phi_i(s_i, \phi_p)$

La configuration initiale des axes de la machine-outil virtuelle doit être suffisamment proche de celle qui permet d'obtenir la denture souhaitée. En effet, si l'on part de réglages trop éloignés, on s'expose alors au risque de ne pas converger vers la solution. Aujourd'hui, les paramètres de base sont donc issus d'un logiciel de pré-dimensionnement fourni par le constructeur de machines. On y entre les données géométriques globales de la denture et il en sort la configuration correspondante des axes.

On a vu précédemment que le processus de génération de la denture est piloté par deux variables. L'abscisse curviligne du point le long du profil de l'outil décrit la surface génératrice et la position angulaire de la pièce indexe le mouvement relatif de l'outil. La valeur initiale de l'angle de rotation est définie arbitrairement nulle. Il est alors possible que le discriminant de l'Equation [24] soit négatif et que l'équation d'enveloppe n'ait donc pas de solution réelle. Ce qui est le cas pour les positions de l'outil tracées en noir dans la section représentée sur la Figure 58. Elles ne constituent pas une famille de surfaces ayant une enveloppe commune. Si l'on ne modifie pas l'algorithme présenté en amont, une erreur résulte du calcul de la racine du discriminant négatif et le processus est stoppé.

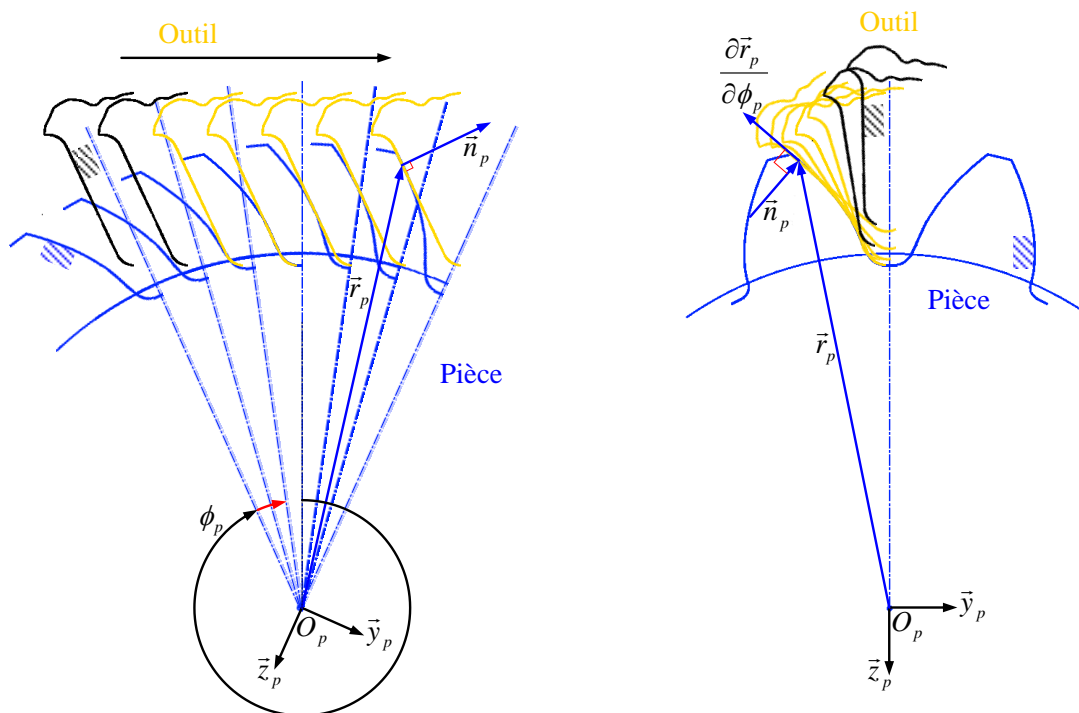


Figure 58 : Positions de l'outil violant la condition d'existence de l'enveloppe.

Le problème est également observé sur la Figure 57. En effet, on constate qu'au delà d'une certaine valeur de l'angle, a fortiori lorsqu'elle est nulle, la fonction n'est pas définie et la surface enveloppe n'existe pas. Pour pallier à cette difficulté, on incrémente la valeur initiale de l'angle de position de la pièce usinée jusqu'à ce que le discriminant de l'Equation [24] devienne positif. La fonction représentée sur la Figure 57 est alors définie et la surface enveloppe existe. Le sens de progression de l'angle est dirigé vers le domaine de génération. Il est défini en fonction de la position de départ de l'outil par rapport à la pièce. Ce procédé rend le programme beaucoup plus tolérant aux conditions initiales du calcul. La Figure 47 schématise une configuration de départ pour laquelle le sens de rotation de la pièce doit être positif. Le signe est défini par la relation suivante :

$$\text{Equation [67]} \quad s\phi_p = \text{signe}(E - S \cdot \sin(\phi_{c0}))$$

La configuration initiale des axes de la machine n'est pas la seule source d'instabilité du programme. Comme cela est présenté plus haut, l'algorithme de recherche des points des flancs de dents repose sur la méthode de *Newton-Raphson*. Celle-ci est choisie principalement pour son efficacité. En effet, elle converge très rapidement vers la solution lorsque la fonction considérée et sa dérivée sont monotones. Cependant, on vient de montrer que l'Equation [24] n'admet pas nécessairement de solution réelle. Il n'y a alors pas de surface enveloppe. Les sphères bleues tracées sur la Figure 56 n'existent pas. La distance radiale entre la cible et le point solution est donc indéterminée. En d'autres termes, la fonction qui pilote l'algorithme de recherche n'est pas définie. Or, l'occurrence de cette situation augmente avec la diminution de l'angle de spirale de la pièce. La Figure 60 montre une configuration critique. L'évolution de l'algorithme mène alors le calcul hors du domaine de définition de la fonction et le processus est stoppé. Cela se produit, par exemple, pour le premier point de calcul marqué en vert sur la Figure 59. Celle-ci représente en bleu la progression de la solution retenue. Elle est obtenue de la même façon que la Figure 57.

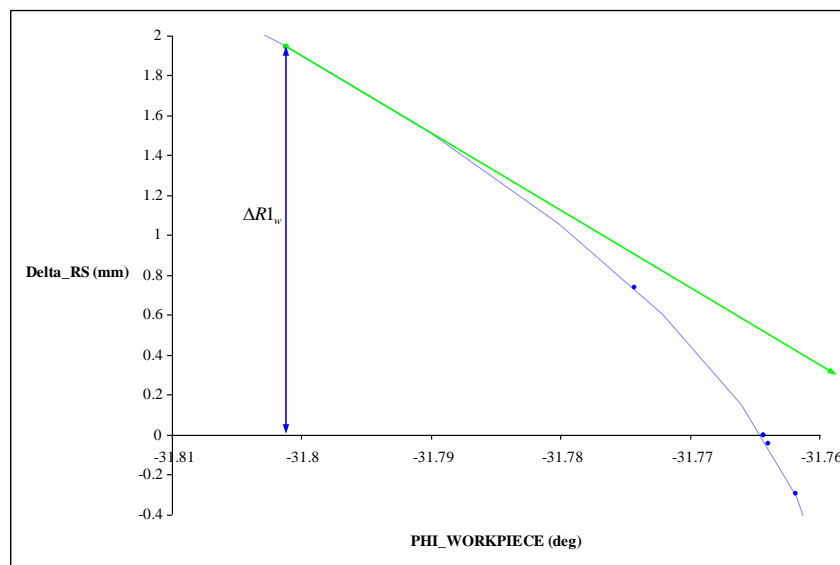


Figure 59 : Ecart radial en fonction de la position angulaire de la pièce.

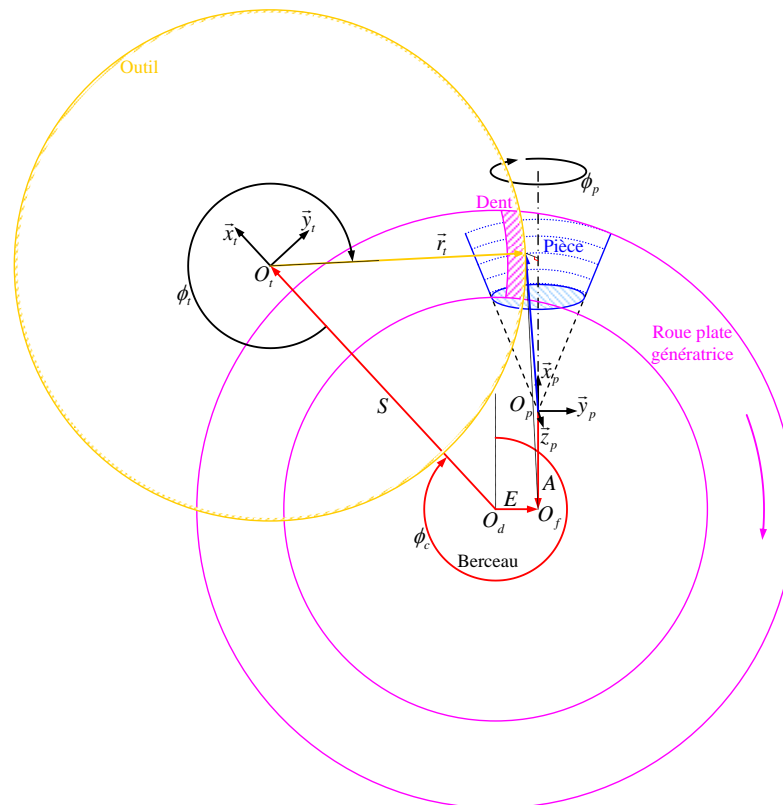


Figure 60 : Configuration d'usinage d'une denture à faible angle de spirale.

L'algorithme de recherche des points de la surface des flancs de dents tel qu'il est présenté en amont n'est donc pas suffisamment robuste. La Figure 59 montre que la méthode de *Newton-Raphson* ne permet pas, à elle seule, de résoudre tous les cas de configuration réalistes des axes de la machine. Quelques lignes ont donc été ajoutées au code du programme pour ramener le calcul dans le domaine de définition de l'enveloppe lorsque l'intersection de la tangente au point courant avec l'axe des abscisses se situe au delà de la limite. Si cela est le cas, on applique une bisection successive de l'intervalle entre l'abscisse du point courant et l'abscisse hors du domaine jusqu'à ce que celle-ci corresponde à un point de la courbe représentée sur la Figure 61. On y a schématisé une évolution typique de l'algorithme de recherche. Ce procédé améliore la robustesse du programme tout en permettant de profiter de l'efficacité de la méthode de *Newton-Raphson* dès que celle-ci est applicable. De plus, il est extrêmement simple à mettre en œuvre.

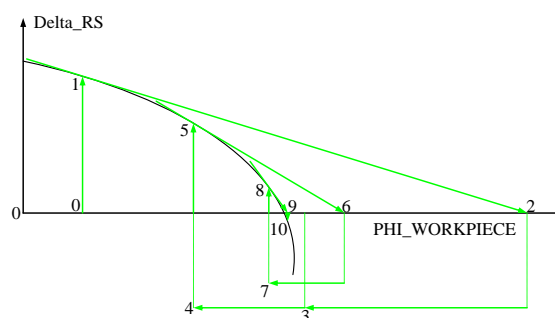


Figure 61 : Progression de l'algorithme de recherche des points des flancs de dents.

4.6 Cas d'application

Le programme de simulation d'engrenages à dentures spiroconiques est développé avec un souci de clarté et de simplicité. Les données en entrée sont limitées aux paramètres strictement nécessaires et suffisants. Il faut éviter la redondance d'informations susceptibles d'interférer. Cela permet de réduire le risque d'erreur à l'acquisition des entrées. Le prototype est codé en VBA sous EXCEL. Il est composé de modules organisés en hiérarchie. Ceux-ci sont construits de manière rigoureuse et identique. Chaque routine est commentée avec pour objectif de ne pas perdre de vue le sens physique du problème traité. Dans ce même but, les nombreuses variables du programme sont nommées explicitement.

Le programme a été éprouvé pour quelques couples d'engrenages spiroconiques existants. Il a parfaitement fonctionné à chaque fois. Cependant, un plan d'expérience basé sur un échantillon de tests plus important et plus varié permettrait de confirmer sa validité avec plus d'assurance. Le temps de calcul avec la densité du maillage présenté sur la Figure 64 est inférieur à la seconde. Le PC a 2 CPU cadencés à 1800 MHz. La conformité des topographies générées a été vérifiée par comparaison avec celles issues d'un logiciel certifié. La Figure 62 représente l'écart entre les deux surfaces. Son amplitude est maximale dans des coins diamétralement opposés. Une erreur d'arrondi lors de la tabulation des coefficients du polynôme en est l'origine. On remarque sur la Figure 48 que cela coïncide avec les influences des termes d'ordre 5 et 6 de l'équation du roulement modifié. On note, malgré tout, que la plus grande distance calculée est inférieure au micromètre. Les résultats obtenus pour chacun des cas testés corrént de la même façon. La Figure 63 montre la conformité du profil simulé avec le relevé au conturographe de celui du flanc fabriqué.

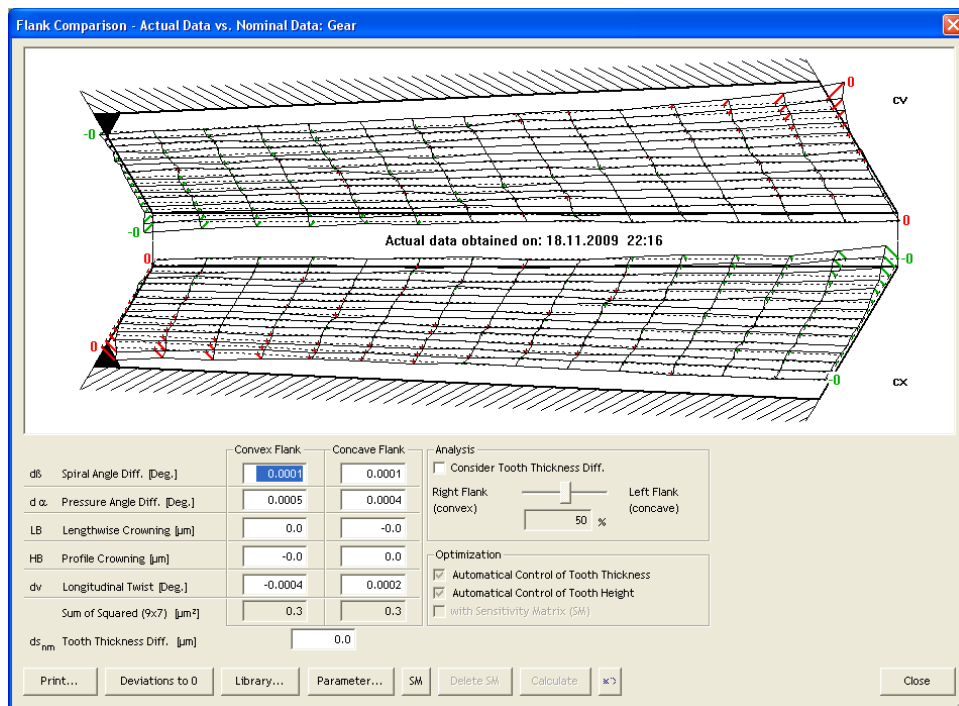


Figure 62 : Validation des surfaces générées.

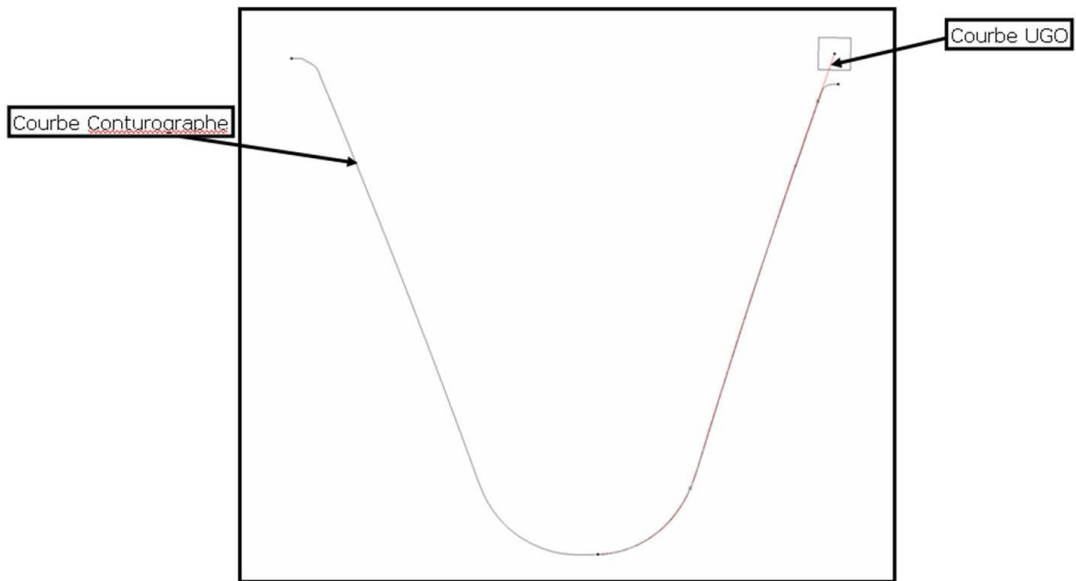


Figure 63 : Comparaison des profils simulé et relevé au conturographe.

La construction de splines et de surfaces à partir du nuage de points présenté sur la Figure 64 est codée en VBA sous CATIA V5. On peut alors réaliser le modèle CAO de la pièce, Figure 64. L'épaisseur de dent est calculée pour satisfaire un jeu de fonctionnement donné à une position d'engrènement à vide fixe. Le fond de la dent n'est pas généré. Il est modélisé par l'ensemble de segments de droite joignant les points en vis-à-vis qui le raccordent avec les pieds des deux dents. En réalité, sa surface est conique lorsque les flancs sont usinés simultanément. Si ce n'est pas le cas, l'usinage de l'un des flancs peut produire en fond de dent une singularité appelée « *paire de fesses* » dans le jargon de la fabrication. Il s'agit d'une discontinuité en tangence de la surface due au repositionnement de l'outil. Elle influe probablement sur les contraintes en fond de dents mais pas sur les pressions de contact des flancs. Elle est donc négligée puisque seules ces dernières sont exploitées dans les travaux exposés au sixième chapitre de ce mémoire.

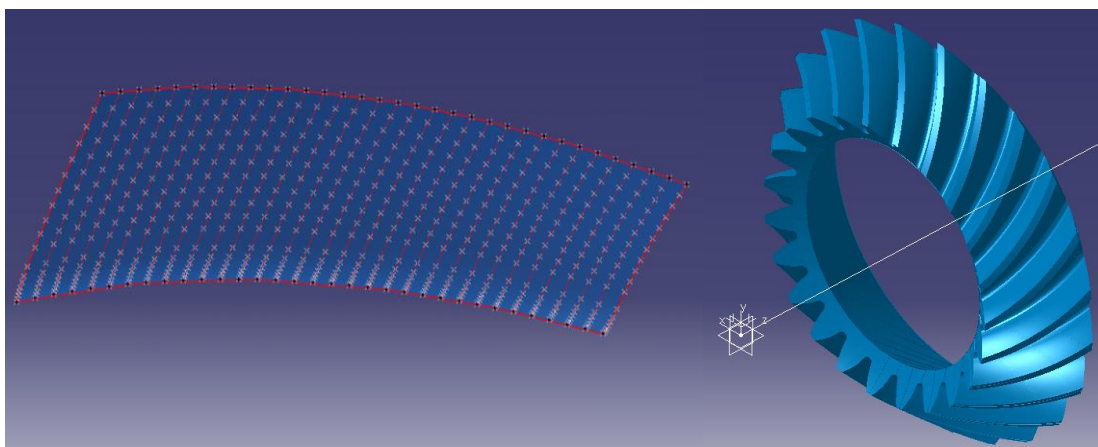


Figure 64 : Modèle CAO d'une denture d'engrenage spiroconique.

4.7 Conclusion

Contrairement aux surfaces des flancs de dents des engrenages courants, celles des spiroconiques ne sont pas réglées. Elles résultent de l'enveloppe des positions successives de la surface de l'outil qui les génère. Il n'existe donc pas d'équation exacte pour les modéliser. Une simple approche analytique ne peut rendre compte de la forme et du comportement de ces pièces mécaniques. Il faut alors recourir aux outils d'analyse numérique. Tout doit être simulé, depuis leur fabrication jusqu'à leur fonctionnement. Ainsi, l'obtention des topographies précises des flancs de dents nécessite la simulation de la phase de rectification. Dans ce mémoire, on s'intéresse uniquement à la dernière étape de finition des dentures.

Le modèle développé repose sur une géométrie de meule et une cinématique de machine données. L'outil est de révolution et sa section transversale se compose de trois parties. Le plat génère le fond de la dent, la pointe génère le pied et le profil génère le profil. Il est monté sur une machine à commande numérique à six axes dont l'architecture est conçue pour reproduire le mouvement d'engrènement de la pièce usinée avec la roue plate génératrice. Cette dernière est imaginaire, la meule suit la trajectoire de l'une de ses dents. La rotation de la roue est liée à la rotation de la pièce. Leur relation suit un polynôme. Son premier coefficient est le rapport de réduction. Les autres termes sont ajoutés pour modifier le mouvement relatif des deux entités. Ils donnent plus de latitude au réglage des topographies des flancs de dents. Ce procédé est appelé méthode de roulement modifié.

Les paramètres considérés pour générer les surfaces peuvent être nombreux. Le modèle développé ici en considère suffisamment pour produire une grande variété de géométries d'engrenages. Il est fondé sur une analyse numérique du processus d'usinage. Le résultat obtenu est donc de nature discrète. Les flancs ne sont connus que sous la forme d'un ensemble de points. Ceux qui appartiennent au pied de la dent sont recherchés sur des sphères à une abscisse curviligne de pointe d'outil donnée. Ceux qui appartiennent au profil de la dent sont recherchés à l'intersection de ces mêmes sphères et de cônes donnés.

L'algorithme de calcul des points solutions est basé sur la méthode de *Newton-Raphson*. En effet, le problème n'a pas de solution analytique exacte. Il est formé de trois équations à trois inconnues qui sont, l'angle de rotation de la pièce usinée, l'angle de position de l'outil et l'abscisse curviligne du point le long du profil de l'outil. Deux équations formalisent l'appartenance des points aux sphères et aux cônes visés, une troisième traduit la condition d'engrènement des surfaces génératrice et générée. Cette dernière donne une expression analytique directe de l'angle de position de l'outil en fonction des deux autres variables. Cela réduit donc à deux le nombre d'équations à résoudre simultanément par la méthode de *Newton-Raphson*.

Ainsi simplifiée, l'approche prend un sens physique plus clair et compréhensible. Il devient aisé de bien maîtriser le processus de calcul. Des procédures sont alors développées

pour assurer et accélérer la convergence. Elles procurent au programme une robustesse lui permettant d'évoluer dans tout le domaine de faisabilité et de générer une très grande variété de topographies.

La machine virtuelle est supposée parfaite, notamment infiniment rigide. Il y a donc des écarts entre les surfaces théoriques et usinées dus aux erreurs de fabrication. Par commodité, les résultats obtenus sont validés par comparaison à ceux issus d'un logiciel certifié. A même jeu de réglages machine donnés, la distance maximale séparant les deux topographies générées est inférieure au micromètre. Cette différence a pour principale origine l'erreur d'arrondi commise lors de la tabulation des paramètres dans l'interface du logiciel de référence.

La quantité de réglages machine employés est variable selon le type de denture voulu. Plusieurs d'entre eux ne sont pas considérés dans le cadre de ce mémoire. De plus, la méthode de roulement modifié n'est appliquée qu'à l'angle de rotation du berceau. D'autres paramètres peuvent être manipulés par cette même technique. Tout cela a une influence sur les topographies des flancs de dents qui peut s'avérer intéressante notamment pour améliorer le fonctionnement des engrenages.

Les flancs de dents sont désormais connus. L'étape suivante est donc l'étude de leur engrènement. N'ayant pas de définition analytique de ces entités, le recours à la simulation est à nouveau nécessaire. L'approche développée dans le cinquième chapitre repose donc sur la reproduction numérique du mécanisme physique.

5 Simulation de l'engrènement des dentures

5.1 Introduction

L'étude du fonctionnement des engrenages à denture spiroconique prolonge naturellement la maîtrise de leur fabrication. Dans le quatrième chapitre, on s'efforce de rendre simple et stable l'algorithme simulant la génération des dentures. On réalise alors que la difficulté de la tâche découle principalement de l'abstraction des concepts mathématiques employés. La méthode proposée est très efficace, mais elle ne reflète pas clairement le sens physique de l'usinage par enlèvement de matière. Dans ce chapitre, on adopte donc une approche plus pragmatique. Les techniques déployées peuvent sembler rudimentaires mais elles garantissent la robustesse de l'algorithme développé.

Deux dents sont engrenées si elles sont en contact. La simulation de l'engrènement à vide passe donc par l'étude du contact entre deux flancs de dents. L'un des flancs est maître, son vis-à-vis est esclave. La surface maître est modélisée par un nuage de points de densité uniforme. Le point qui estime au mieux le contact à vide présente l'écart angulaire minimal avec son projeté sur la surface esclave. L'angle est calculé autour de l'axe de la pièce esclave, entre un point prédéfini du flanc maître et son vis-à-vis sur l'esclave. L'algorithme recherche ainsi une solution approchée parmi un ensemble d'entités prédéfinies. Les seules inconnues du problème sont les variables de génération du point de la surface esclave. L'éventuel risque de divergence du calcul est circonscrit au module de génération des flancs. Il est donc simple à appréhender.

À vide, l'engrenage est supposé isostatique. Le contact entre deux dents existe si la paire de dents contigüe n'est pas engrenée. Il ne peut y avoir plus d'une paire de dent simultanément en contact. La valeur de l'angle minimal entre les deux flancs est évaluée en deux positions situées à un pas de dent d'écart. Le point de contact correspondant à la plus petite des deux valeurs appartient à la zone d'engrènement. La ligne de conduite à vide est donc modélisée par l'ensemble des points de contact validés. Par conséquent, ses frontières sont approximées par les deux points extrêmes. Cette méthode repose simplement sur la sélection d'entités connues. La stabilité de l'algorithme ne peut donc être compromise quelles que soient les positions des portées d'engrènement sur les flancs de dents. Le chargement et l'allègement croissants des boîtes de transmission de puissance d'hélicoptères amplifient le déplacement relatif des dentures. Les portées à vide et sous charge n'occupent donc pas les mêmes positions. La simulation de l'engrènement à vide de dentures déplacées donne une appréciation de l'emplacement des portées sous charge.

L'engrenage à denture spiroconique génère une erreur de transmission à vide couramment appelée erreur de transmission cinématique. Ainsi, un mouvement de rotation uniforme du membre moteur induit une vitesse de rotation variable du membre entraîné. L'analyse de l'engrènement à vide renseigne sur le comportement sous charge de l'engrenage. L'erreur de transmission cinématique reflète l'amplitude des vibrations et l'intensité des chocs

produits par l'engrènement des dentures. Elle agit sur le rendement et la durée de vie de l'engrenage. Sa modélisation améliore la maîtrise de phénomènes tels que le bruit et la fatigue. Elle est un témoin majeur de la qualité de l'engrènement. La réduction de son amplitude est généralement bénéfique. La méthode de calcul de l'erreur de transmission cinématique repose sur la construction d'une chaîne de cotes angulaire passant par les points de contact détectés à l'intérieur la zone d'engrènement. Le résultat est donc discret. Cependant, il suit approximativement une évolution parabolique. *Litvin* puis bien d'autres auteurs confirment cette observation. Un polynôme du second degré peut être ajusté, par la méthode des moindres carrés, aux valeurs calculées. On améliore ainsi l'estimation de l'amplitude de l'erreur de transmission.

La simulation de l'engrènement sous charge est basée sur la méthode des éléments finis. Le volume de chaque pièce est donc discrétisé. La construction du maillage nécessite le calcul de l'épaisseur de dent. Si les deux flancs sont usinés simultanément, celle-ci est déduite du creux laissé par l'outil. S'ils sont générés séparément, alors il faut simuler l'engrènement à vide pour chacun des deux flancs puis les caller de façon à respecter un jeu de fonctionnement minimal donné. On travaille sur un modèle simplifié de l'engrenage pour favoriser la rapidité du calcul. La simulation de l'engrènement sous charge exploite un module d'analyse non-linéaire industriel. Elle doit démarrer avec une légère interpénétration des flancs en contact. La première position angulaire de chaque membre de l'engrenage est donc issue d'une simulation de l'engrènement à vide. Le résultat rend compte de l'existence de l'effet de bord et du déplacement de la portée d'engrènement lors de la mise en charge du système. Il doit être qualitativement correct pour ne pas fausser la progression du processus d'optimisation proposé au sixième chapitre.

5.2 Localisation du contact à vide

5.2.1 Positionnement relatif des éléments de l'engrenage

La position relative des flancs de dents engrenées est définie par quatre paramètres indépendants. La position de référence est telle que les sommets des cônes primitifs des deux pièces sont confondus. Elle est l'origine du déplacement axial de la pièce maîtresse, de la pièce esclave et de l'offset ou décalage hypoïde. Ce dernier correspond à la distance minimale entre les deux axes déplacés. Il est donc donné suivant la perpendiculaire commune aux axes des deux pièces. Le positionnement angulaire des pièces est défini autour de cette même droite. Ces paramètres sont représentés sur la Figure 66.

Chacun d'eux a son propre effet global sur la position de la portée d'engrènement. La Figure 65 schématise l'influence du déplacement axial P et hypoïde E du pignon. Les sens de variation sont conformes à la convention de signe adoptée par la firme *Gleason*. Il s'agit de la convention admise dans les travaux décrits par la suite.

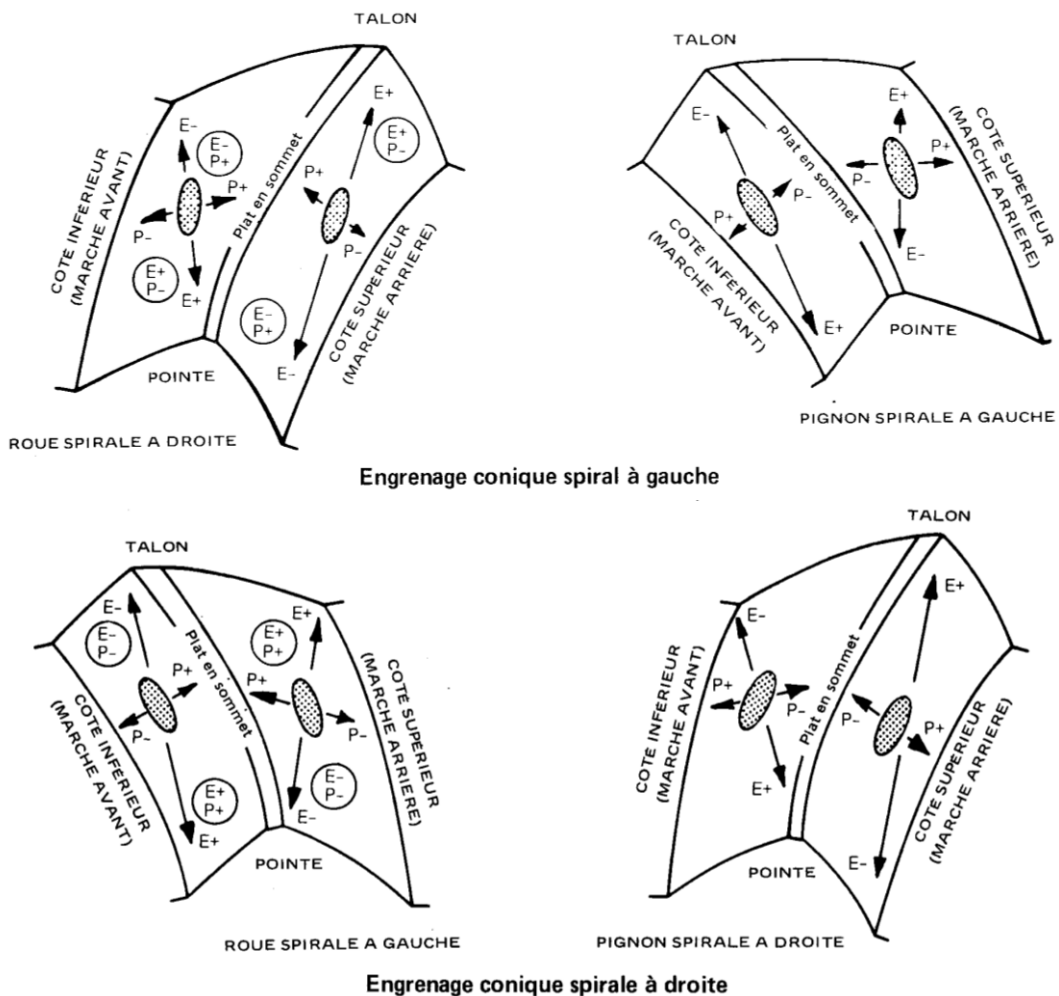


Figure 65 : Influence du déplacement du pignon sur la position de la portée.

La convention de signe définie par la firme *Gleason* est illustrée sur la Figure 66 pour un sens de spirale du pignon à gauche. Le déplacement axial de chacune des deux pièces est négatif lorsqu'il est orienté vers le sommet du cône primitif, positif s'il est dirigé vers l'extérieur. Avec la position du couple représentée sur la Figure 66 et un sens de spirale du pignon à gauche, le décalage hypoïde est négatif quand la roue descend, positif lorsqu'elle monte. Pour un sens de spirale du pignon à droite, les signes sont opposés. Le déplacement angulaire entre les axes des pièces est négatif quand celles-ci se rapprochent, positif si elles s'éloignent.

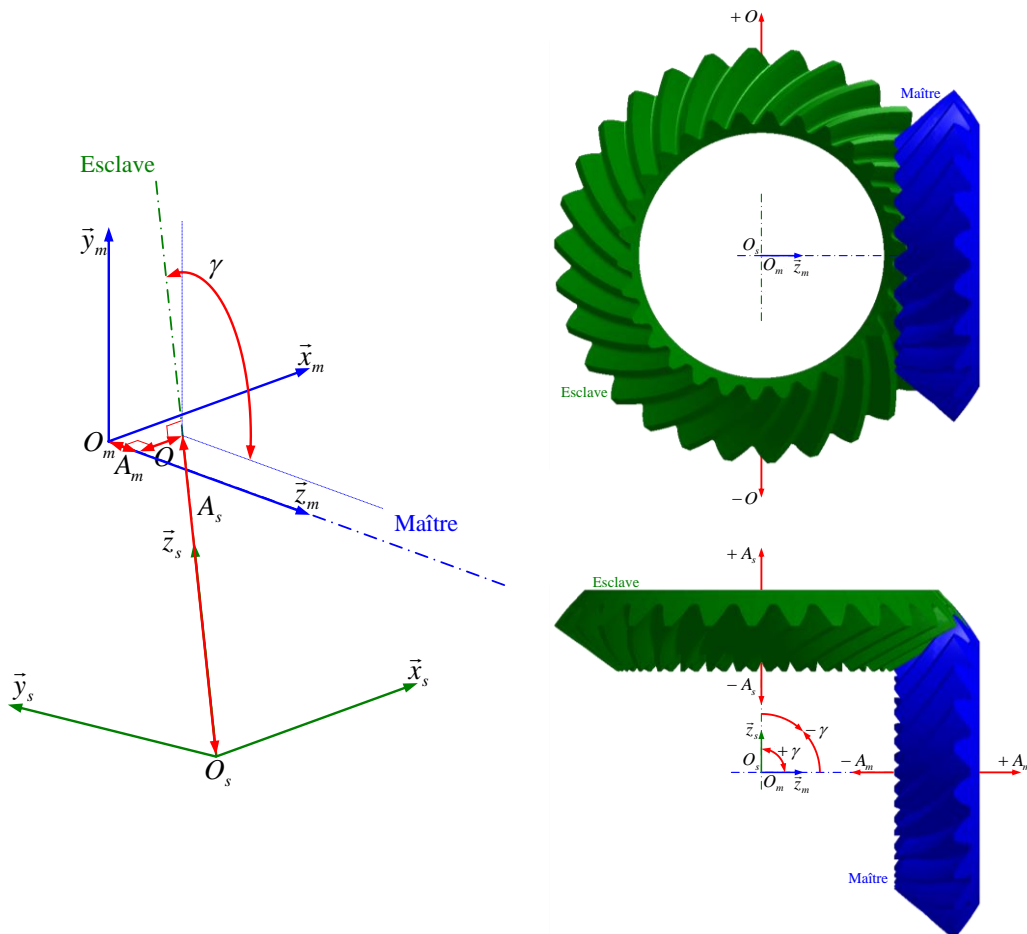


Figure 66 : Déplacements relatifs des pièces engrenées.

L'origine du positionnement relatif des dentures est variée. Elle peut relever d'une mise en position initiale imposée par des contraintes de conception ou calculée pour compenser des écarts en fonctionnement. Il peut également s'agir de configurations d'engrènement modélisant le déplacement des dents pour divers cas de charges. En effet, la position relative des flancs de dents due aux déformations du mécanisme complet peut être déduite d'une analyse globale par éléments finis. Cela permet notamment de simuler l'engrènement des pièces avec un modèle local plus léger. Le calcul est ainsi suffisamment rapide pour être itéré de nombreuses fois lors d'un processus d'optimisation raisonnablement court. Celui-ci est détaillé dans le sixième chapitre.

5.2.2 Définition de l'écart entre deux flancs en vis-à-vis

Les surfaces des flancs de dents n'ont pas de définition globale explicite. Elles ne sont donc connues que ponctuellement. Par conséquent, il n'est pas possible d'étudier le contact des flancs par une approche purement analytique. La méthode proposée repose alors sur l'évaluation de l'écart entre un nuage de points et une surface potentiellement générée. Le nuage de points modélise le flanc de dent de la pièce maître. Sa position angulaire autour de l'axe de la pièce est donnée. Un point du flanc de dent de la pièce esclave est généré, s'il existe, en vis-à-vis de chaque point du flanc de dent de la pièce maître. La Figure 67 permet d'imaginer le processus.

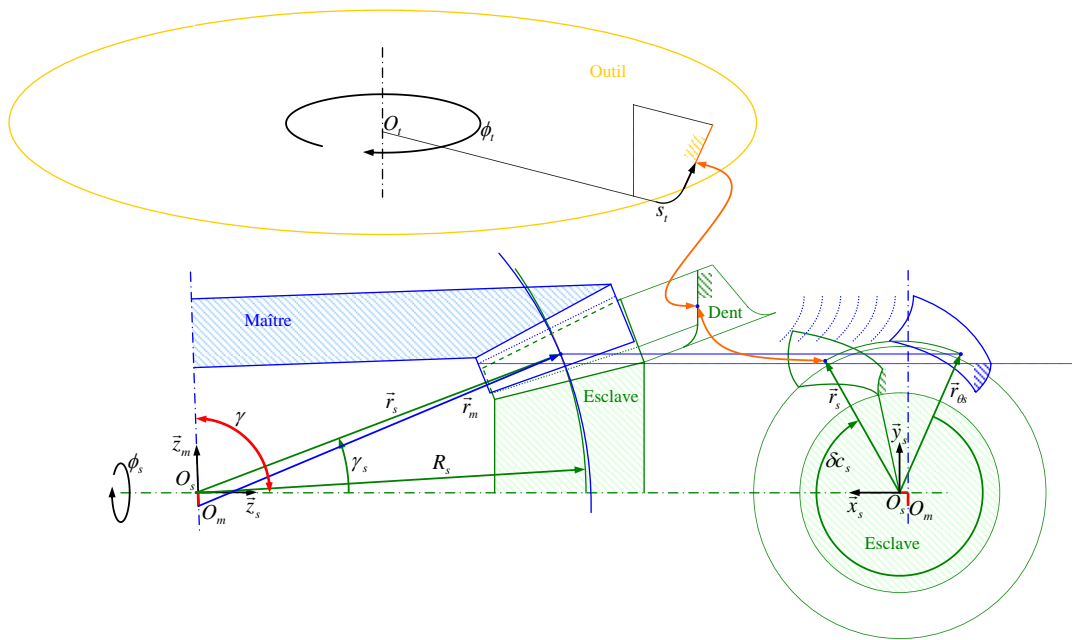


Figure 67 : Génération du point esclave en vis-à-vis du point maître.

Les points de la surface du flanc esclave sont donc calculés avec le module de génération du profil de la dent présenté dans le quatrième chapitre. L'algorithme de recherche du point esclave en vis-à-vis du point maître est relativement simple à concevoir.

Tout d'abord, on met en position l'un des points qui décrivent le flanc maître. En effet, les points des deux pièces sont générés dans le même repère. La pièce maître doit donc être placée en position d'engrènement avec la pièce esclave. Cette étape nécessite plusieurs transformations matricielles.

Le point considéré est tourné d'un angle de rotation de la pièce maître donné.

Equation [68] $\vec{r}_{\theta_m} = M_{\theta_m} \cdot \vec{r}_m$

$$\text{Avec : } M_{\theta_m} = \text{rotation}(\vec{z}_m, \theta_m) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_m) & -\sin(\theta_m) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \vec{z}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il est, ensuite, positionné dans le domaine d'engrènement des deux pièces. On le fait donc pivoter d'un demi-tour autour de l'axe de rotation de la pièce maître.

Equation [69] $\vec{r}_{mn} = M_{mn} \cdot \vec{r}_{\theta n}$

$$\text{Avec : } M_{mn} = \text{rotation}(\vec{z}_m, \pi) = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) & 0 & 0 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ses coordonnées sont alors exprimées dans le repère de la pièce esclave dont la position et l'orientation par rapport au repère de la pièce maître sont données par les quatre paramètres indépendants présentés dans la partie précédente. Ceux-ci sont tracés en rouge sur la Figure 67.

Equation [70] $\vec{r}_{\theta s} = M_{sm} \cdot \vec{r}_{mn}$

$$\text{Avec : } M_{sm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -A_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & O \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit : } M_{sm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & O \\ 0 & \cos(\gamma) & \sin(\gamma) & A_m \cdot \sin(\gamma) \\ 0 & -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) & A_m \cdot \cos(\gamma) - A_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit les positions radiale et angulaire du point du flanc de la pièce maître exprimée dans le repère de la pièce esclave.

Equation [71] $R_s = \sqrt{x_{\theta s}^2 + y_{\theta s}^2 + z_{\theta s}^2}$

Equation [72] $\gamma_s = \arctan\left(\sqrt{x_{\theta s}^2 + y_{\theta s}^2} / z_{\theta s}\right)$

Enfin, le module de génération du profil de dent est appelé pour calculer la position du point du flanc de la pièce esclave exprimée dans le repère de la pièce esclave.

Equation [73] $(R_s, \gamma_s) \xrightarrow{N-R} \vec{r}_s(s_t, \phi_p)$

Son algorithme converge parfois difficilement lorsque la configuration initiale des variables du calcul est trop éloignée de la solution. Pour en améliorer l'efficacité, on génère préalablement un tableau de valeurs initiales par variables. Le tableau représente une discrétisation homogène du flanc de la dent. Ses cases correspondent aux points du profil de la dent déterminés de proche en proche grâce au module de génération. La recherche d'un point quelconque de la surface est donc initialisée par une procédure qui sélectionne, pour chaque variable, la valeur dans la case liée au point du flanc le plus proche. Cette technique augmente la stabilité et la rapidité de la routine de recherche du point de contact.

Pour cela, on détermine l'index radial du point le plus proche dans les tables de stockage des résultats de la génération du flanc de la pièce. Ce numéro est le nombre de sections sphériques comptées depuis le talon de la dent.

$$\text{Equation [74]} \quad IR_w = 1 + \text{arrondi} \left\langle (NR_w - 1) \cdot (G_w - R_w) / W_w \right\rangle, R_w \in [G_w, G_w - W_w]$$

Ensuite, on génère le point de raccordement du profil avec le pied de la dent sur la sphère passant par le point recherché. La valeur initiale de la variable ϕ_p est tirée de son tableau de stockage. Le point de raccordement est le premier point de la section sphérique du profil.

$$\text{Equation [75]} \quad (R_w, s_f) \xrightarrow{N-R} \vec{r}_w(\phi_p)$$

$$\text{Avec : } \phi_p(0) = T\phi_p(I\gamma_w, IR_w), I\gamma_w = 1$$

On en déduit l'index angulaire du point stocké le plus proche du point recherché. Ce numéro est le nombre de points comptés sur le profil depuis le point de raccordement.

$$\text{Equation [76]} \quad I\gamma_w = 1 + \text{arrondi} \left\langle (N\gamma_w - 1) \cdot (\gamma_w - \gamma_f) / (\gamma_h - \gamma_f) \right\rangle, \gamma_w \in [\gamma_f, \gamma_h]$$

À présent, le point désiré peut être généré avec la garantie que l'algorithme converge rapidement. Les valeurs initiales des variables s_t et ϕ_p sont tirées de leur tableau de stockage.

$$\text{Equation [77]} \quad (R_w, \gamma_w) \xrightarrow{N-R} \vec{r}_w(s_t, \phi_p)$$

$$\text{Avec : } s_t(0) = Ts_t(I\gamma_w, IR_w), \phi_p(0) = T\phi_p(I\gamma_w, IR_w)$$

5.2.3 Approximation du point de contact

La méthode d'estimation du point de contact à vide repose sur l'hypothèse que tous les points du flanc esclave ont une trajectoire circulaire autour de l'axe de la pièce. Elle découle de l'approche géométrique illustrée sur la Figure 68 pour un couple d'engrenages à dentures droites et axes parallèles. À une position d'engrènement donnée, on détermine le point appartenant à la surface esclave dont la trajectoire passe par le point considéré sur le flanc maître. Cette démarche est également schématisée sur la Figure 67 pour un couple d'engrenages à dentures spiroconiques et axes quelconques. L'algorithme de recherche du point de contact traite ainsi l'un après l'autre l'ensemble des points qui décrivent le flanc maître en partant depuis le talon vers la pointe de la dent et en balayant chaque section sphérique du pied à la tête du profil. L'analyse des écarts angulaires de chaque paire de points en vis-à-vis conduit à la localisation du contact des deux flancs de dents. Celui-ci se situe au voisinage du couple de points dont l'écart est minimal. La précision avec laquelle sa position est estimée dépend donc de la densité du nuage de points qui couvre le flanc maître. Par conséquent, son amélioration altère inévitablement la durée du calcul. Toutefois, la précision requise dans la suite des travaux est atteinte en un temps suffisamment court.

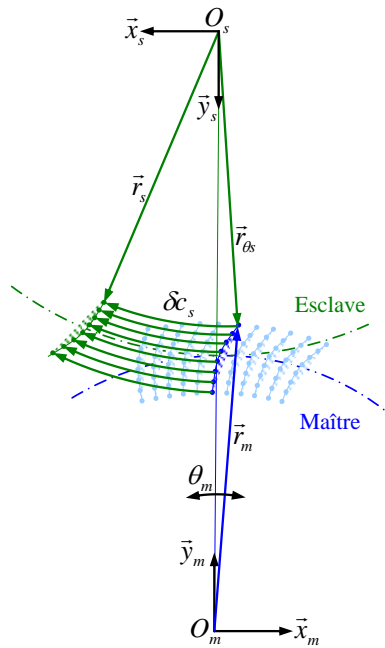


Figure 68 : Ecart angulaire entre le flanc maître et le flanc esclave.

Tout d'abord, on exécute la procédure détaillée auparavant. Celle-ci calcule la position du point maître exprimée dans le repère de la pièce esclave. On en déduit les positions radiale et angulaire d'un éventuel point esclave associé. À partir de ces coordonnées, on teste l'existence du point dans la largeur et la hauteur de la dent. Premièrement, il faut que la valeur du rayon soit située entre celles des génératrices intérieure et extérieure. Deuxièmement, la valeur de l'angle doit être comprise entre celles des angles au raccord et en tête du profil calculés sur la section sphérique courante. Si ces deux conditions sont satisfaites, l'existence du point est vérifiée. Celui-ci est alors généré.

Equation [78] $\vec{r}_{\theta_s} = M_{sm} \cdot M_{\theta_m} \cdot M_{\theta_n} \cdot \vec{r}_m \rightarrow (R_s, \gamma_s)$

Equation [79] $(R_s, \gamma_s) \xrightarrow{N-R} \vec{r}_s(s_t, \phi_p), \vec{n}_s(s_t, \phi_p)$

Avec : $R_s \in [G_w, G_w - W_w], \gamma_s \in [\gamma_f, \gamma_h]$

Les deux pièces sont virtuellement positionnées l'une par rapport à l'autre. Le flanc maître balaye la zone d'engrènement supposé alors que le flanc esclave occupe une position quelconque. Ils peuvent donc éventuellement s'interpénétrer. Or, on définit le contact comme étant le lieu où l'écart angulaire entre les deux flancs est minimal. La valeur de l'angle entre deux points en vis à vis doit alors être négative s'il y a interpénétration de la matière. Le signe de l'angle dépend de la situation de la matière par rapport à l'un des deux flancs. La manière dont est développé l'algorithme pousse à choisir le flanc esclave. La position de la matière est indiquée par une variable qui prend, suivant le cas, la valeur ± 1 .

Si la matière est située dans le sens trigonométrique : $sM_s = 1$

Si la matière est située dans le sens anti-trigonométrique : $sM_s = -1$

Il s'agit du signe de la coordonnée axiale du produit vectoriel de la normale à la surface par la position du point généré sur le flanc esclave.

$$\text{Equation [80]} \quad M_s = \vec{n}_s \times \vec{r}_s \rightarrow sM_s = \text{signe}\langle zM_s \rangle$$

L'angle est défini autour de l'axe de rotation de la pièce esclave. Il est orienté depuis le flanc maître vers l'esclave. On en déduit l'écart angulaire dont le sens dépend de la situation de la matière.

$$\text{Equation [81]} \quad \delta c_s = sM_s \cdot \text{angle}\langle \vec{z}_s, \vec{r}_{\theta_s}, \vec{r}_s \rangle$$

La procédure est réitérée depuis l'Equation [78] pour chaque point du nuage. Le couple de points dont l'écart angulaire est minimal se trouve au plus près du contact.

$$\text{Equation [82]} \quad \min\langle \delta c_s \rangle \rightarrow \vec{r}_s, \vec{r}_m, \vec{r}_{\theta_s}, \vec{r}_{\theta m}$$

5.3 Détermination de la portée d'engrènement à vide

5.3.1 Sélection du premier point d'approche et du dernier point de retrait

La méthode précédemment proposée donne une approximation du point de contact par analyse de l'écart angulaire de deux flancs de dents à une position d'engrènement donnée. Le flanc maître évolue dans une zone d'engrènement présumée dont les limites ne sont pas connues. Celles-ci sont donc à estimer en tenant compte d'une dent voisine. On considère que deux paires de dents ne peuvent être simultanément en contact. Ainsi, la position à laquelle les deux paires de dents se relaient dans l'engrènement peut être évaluée. Les extrémités de la ligne de conduite à vide sont détectées par comparaison des écarts minimaux liés à deux positions angulaires du flanc maître espacées d'un pas de dent.

On pose donc l'hypothèse que le système reste parfaitement isostatique en fonctionnement à vide. Dans de multiples ouvrages de la littérature, il est démontré qu'un profil en développante de cercle sphérique confère aux engrenages coniques des propriétés à vide identiques à celles des cylindriques. Actuellement, les techniques d'usinage courantes ne permettent pas de fabriquer cette surface théorique. Dans le cas des couples d'engrenages à dentures spiroconiques générés, les surfaces des flancs de dents ne remplissent donc pas complètement les conditions d'engrènement idéales préconisées par la théorie. De plus, leur topographie varie substantiellement en fonction des coefficients de l'équation du roulement modifié. Elles n'ont pas de formulation analytique explicite. Leur évolution relative au cours de l'engrènement n'est donc pas formellement maîtrisée. Par conséquent, la continuité de l'engrènement à vide n'est pas mathématiquement prouvée. La simultanéité du contact de plusieurs paires de dents ne se justifie pas dans le cas présent.

Ces assertions donnent lieu à un algorithme simple et robuste. Il découle de la réflexion déjà développée pour la recherche du contact à vide. On modélise les entités inconnues par des objets ponctuellement approximatés. Ainsi, on résout successivement chaque problème lié à

la simulation de l'engrènement à vide. Les surfaces des flancs de dents sont représentées par un ensemble de points et leurs normales. Le point de contact de deux flancs est alors repéré parmi l'ensemble de paires de points respectivement liés à chacune des surfaces. La ligne de conduite est donc approchée par les points de contact détectés au cours de l'engrènement. Ses extrémités sont sélectionnées parmi ces points.

L'algorithme proposé exploite donc toutes les procédures développées en amont. Son point de départ est choisi proche du milieu présumé de la zone d'engrènement. La position angulaire initiale de la pièce maîtresse est telle que le centre du flanc appartient au plan parallèle à l'axe de la roue et contenant l'axe du pignon. Le flanc maître tourne dans le sens trigonométrique jusqu'à ce que le contact soit relayé par la dent voisine. L'écart angulaire minimal entre les deux flancs à la position courante devient supérieur à sa valeur un pas de dent plus tôt. Il n'y a plus contact à la position courante. Celle-ci est donc hors du domaine d'engrènement.

Equation [83] $\delta c_s(I\theta_m) > \delta c_s(I\theta_m - s\theta_m \cdot (Np_w - 1)) + s\theta_m \cdot sM_s \cdot p_s$, $s\theta_m = \text{signe}(\theta_m)$

Le flanc maître recule alors du pas de dent puis tourne en sens inverse jusqu'à remplir la condition précédente. Les deux extrémités de la ligne de conduite sont ainsi approximées. À chaque itération, on compare l'écart angulaire minimal entre les deux flancs pour les positions courante et retardée d'un pas de dent. La position à laquelle le contact n'est pas admis est éliminée. La Figure 69 schématise l'algorithme avec un engrenage à axes parallèles. Le flanc maître progresse dans le sens anti-trigonométrique. En bleu foncé, ce sont les positions pour lesquelles le contact existe sur la ligne de conduite. En bleu clair, ce sont celles qui ont été éliminées.

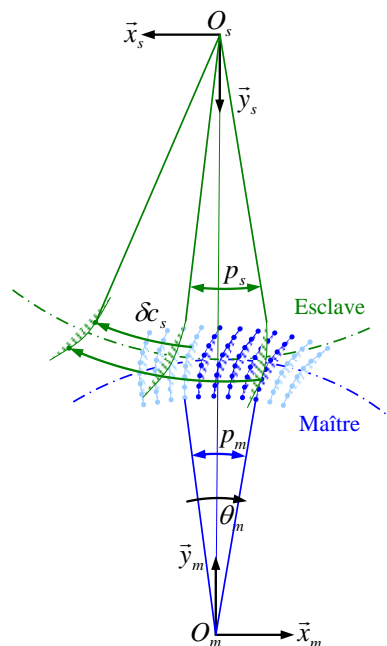


Figure 69 : Détection des extrémités de la ligne de conduite à vide.

5.3.2 Estimation de l'erreur de transmission cinématique

Dans un couple de pièces engrenées, le membre menant entraîne à vitesse de rotation constante le membre mené. En théorie, s'il n'y a pas d'erreur de transmission, celui-ci tourne exactement à la vitesse du menant pondérée du rapport de réduction de l'engrenage. En pratique, il existe inévitablement un décalage entre les positions théorique et réelle. Plusieurs facteurs en sont à l'origine. La mise en position des pièces n'est pas parfaite. Les positions et les formes des surfaces fabriquées sont inexactes. Les déplacements et les déformations dus au chargement appliqué dévient les entités réelles de leur modélisation théorique à vide. Les axes sont donc désalignés et gauchis. Les surfaces en contact sont écrasées.

L'erreur de transmission est donc l'écart angulaire entre les positions théorique et réelle de la pièce menée. La théorie des engrenages montre, dans de multiples ouvrages de la littérature, que l'erreur de transmission cinématique de couples à axes concourants est nulle si et seulement si la denture a un profil en développante de cercle sphérique. Or ce n'est pas notre cas. Les couples d'engrenages à dentures spiroconiques générés commettent donc systématiquement une erreur de transmission. Celle-ci est calculée à partir des positions d'engrènement à vide simulées dans la partie précédente. Le flanc maître appartient au membre menant, l'esclave au mené.

La position d'engrènement la plus proche du milieu de la ligne de conduite est choisie comme référence. On considère que les positions théorique et réelle y sont confondues. Le décalage angulaire de ces deux positions est alors évalué pour chaque autre position d'engrènement. Il correspond à l'erreur de transmission cinématique de l'engrenage. La Figure 70 illustre ce raisonnement pour un couple à axes parallèles. La ligne rouge symbolise le milieu de la ligne de conduite. Le point de contact à la position de référence est en rouge. Aux autres positions d'engrènement, il est en jaune. Le flanc maître tourne à pas constant dans le sens trigonométrique. Le pas de rotation théorique du flanc esclave est lui aussi constant. L'erreur de transmission prend une allure parabolique.

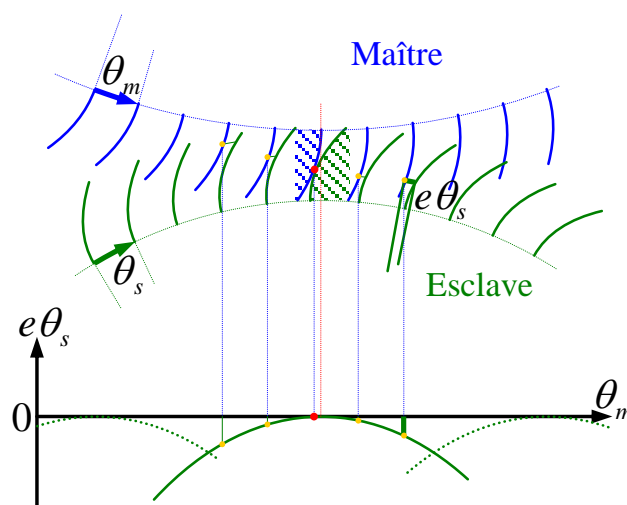


Figure 70 : Erreur de transmission cinématique pour un engrenage à axes parallèles.

Dans le cas des engrenages à dentures spiroconiques, l'erreur de transmission cinématique est le résultat du calcul d'une chaîne de cotes angulaire autour de l'axe de rotation de la pièce esclave. La Figure 71 représente les angles impliqués.

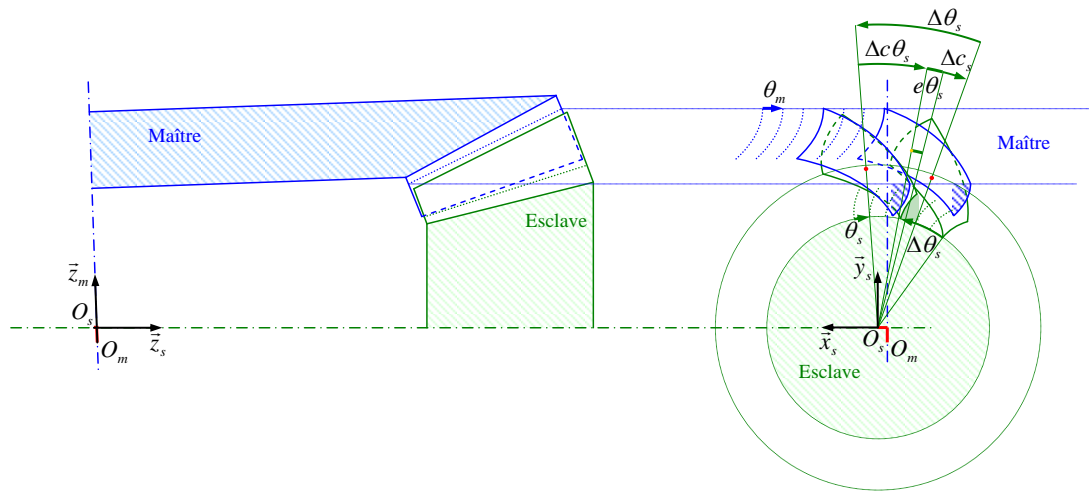


Figure 71 : Erreur de transmission cinématique pour un engrenage à axes concourants.

On détermine l'angle entre chaque position d'engrènement théorique du flanc esclave et la référence. Il s'agit de la position angulaire du flanc maître depuis l'origine pondérée du rapport de réduction de l'engrenage.

Equation [84] $\Delta\theta_s = (\theta_m - \Theta_m) \cdot \rho, \rho = Z_m / Z_s$

La position angulaire réelle du flanc esclave est déduite de deux angles. Le premier va du point d'engrènement détecté pour la position de référence jusqu'à celui de la position considérée.

Equation [85] $\Delta c\theta_s = \text{angle} \langle \vec{z}_s, \vec{R}_{\Theta_s}, \vec{r}_{\theta_s} \rangle$

Le second est calculé sur la surface esclave depuis le point de contact estimé à la position considérée vers celui qui correspond à la position de référence.

Equation [86] $\Delta c_s = \text{angle} \langle \vec{z}_s, \vec{r}_s, \vec{R}_s \rangle$

La somme de ces trois angles donne l'erreur de transmission angulaire simulée autour de l'axe de rotation de la pièce esclave. Celle-ci est nulle à la position d'engrènement de référence. Pour les autres positions, elle traduit un retard du mouvement de rotation du membre mené par rapport à celui du menant modifié du rapport de réduction. Son signe est conventionnellement choisi négatif. Or, les angles sont exprimés dans le repère orthonormé direct de la pièce esclave. On doit donc tenir compte de la situation de la matière par rapport au flanc esclave.

Equation [87] $e\theta_s = sM_s \cdot (\Delta\theta_s + \Delta c\theta_s + \Delta c_s)$

L'erreur de transmission cinématique est estimée en chaque position d'engrènement. Un exemple de résultat est tracé sur la Figure 72. On constate alors que le nuage de points forme une parabole. Cela n'est pas forcément vrai lorsque le contact se situe en bord de flanc. Néanmoins, l'ajustement d'un polynôme du second degré à l'ensemble de points par la méthode des moindres carrés est admissible si la portée d'engrènement est à l'intérieur du flanc. Sur la Figure 72, on montre donc la parabole ajustée à l'exemple de résultat tracé. Le coefficient de détermination renseigne sur la qualité de l'ajustement. Une valeur égale à 1 indique une coïncidence exacte. On en est très proche. Cela signifie que la courbe modélise convenablement la variation de l'erreur de transmission cinématique en fonction de la position angulaire du membre menant.

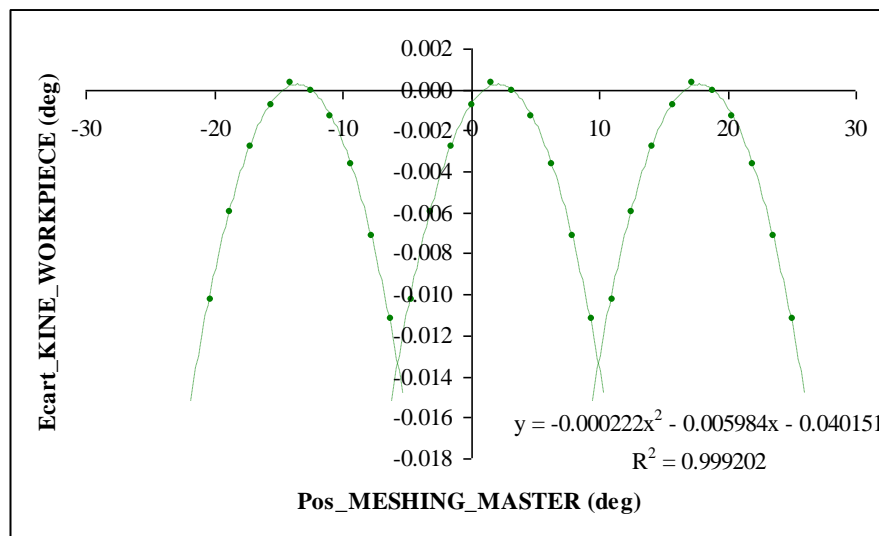


Figure 72 : Erreur de transmission en fonction de la position angulaire du menant.

Ainsi, cet ajustement améliore substantiellement la précision avec laquelle on peut calculer l'amplitude de l'erreur de transmission. L'algorithme développé repose sur la méthode des moindres carrés. On impose donc la forme de la fonction à ajuster.

Equation [88] $e_{\theta_s}(\theta_m) = d_0 + d_1 \cdot \theta_m + d_2 \cdot \theta_m^2$

L'opération consiste alors à minimiser la somme des écarts aux carrés entre les ordonnées des points considérés et les ordonnées respectives issues de la fonction polynomiale choisie.

Equation [89]
$$\min \left\langle \sum_{i=1}^{i=n} (e_{\theta_{si}} - e_{\theta_s}(\theta_{mi}))^2 \right\rangle \rightarrow d_0, d_1, d_2, 1 \leq i \leq n, n = Np_w - 1$$

On fait l'hypothèse que la fonction à minimiser admet un minimum. Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles de la fonction par rapport aux coefficients du polynôme à ajuster sont nulles.

Equation [90]
$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{i=n} (e_{\theta_{si}} - e_{\theta_s}(\theta_{mi}))^2}{\partial d_k} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (-\theta_{mi}^k) (e_{\theta_{si}} - e_{\theta_s}(\theta_{mi})) = 0$$

Cela suppose la résolution d'un système d'équations dont la taille dépend du nombre de coefficients à déterminer.

$$\text{Equation [91]} \quad \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^k \cdot e\theta_s(\theta_{mi}) = \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi}^k$$

L'ajustement d'un polynôme du second degré implique le calcul de ses trois coefficients. Le système à résoudre comprend alors trois équations.

$$\text{Equation [92]} \quad \begin{cases} n \cdot d_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi} \cdot d_1 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 \cdot d_2 = \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} & k=0 \\ \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi} \cdot d_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 \cdot d_1 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^3 \cdot d_2 = \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi} & k=1 \\ \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 \cdot d_0 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^3 \cdot d_1 + \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^4 \cdot d_2 = \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi}^2 & k=2 \end{cases}$$

Il peut être écrit sous une forme matricielle.

$$\text{Equation [93]} \quad \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi} & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 \\ \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi} & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^3 \\ \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^3 & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \\ \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi} \\ \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi}^2 \end{bmatrix}$$

L'inversion de la matrice est réalisée directement par la méthode des cofacteurs. On obtient alors les coefficients du polynôme qui passe au mieux par le nuage de points.

$$\text{Equation [94]} \quad \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi} & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 \\ \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi} & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^3 \\ \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^2 & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^3 & \sum_{i=1}^{i=n} \theta_{mi}^4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \\ \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi} \\ \sum_{i=1}^{i=n} e\theta_{si} \cdot \theta_{mi}^2 \end{bmatrix}$$

Le retard angulaire du membre mené suit une évolution parabolique. Il diminue puis augmente progressivement. Cela traduit une accélération puis une décélération de la pièce. L'engrènement de deux dents est successivement relayé par la paire voisine. Le membre mené accomplit un mouvement de rotation périodique. Celui-ci se reproduit à l'identique à chaque pas de dent. La parabole associée à chaque couple de dents engrenées est la même. On obtient donc l'évolution complète de l'erreur de transmission en dupliquant la parabole ajustée un pas de dent en arrière et en avant. Les intersections des courbes correspondent aux extrémités de la ligne de conduite. Le sommet de la parabole ajustée est situé au milieu. La position angulaire du membre menant est donc l'abscisse à laquelle la dérivée de la fonction s'annule.

$$\text{Equation [95]} \quad de\theta_s(\theta_m)/d\theta_m = d_1 + 2 \cdot d_2 \cdot \theta_m = 0$$

Equation [96] $\theta_m = -d_1/(2 \cdot d_2) = \Theta_m$

L'amplitude de l'erreur de transmission est égale à l'écart entre l'ordonnée au sommet de la parabole et l'ordonnée au point d'intersection de la parabole avec son duplicata translaté du pas angulaire du membre menant suivant l'axe des abscisses. La démarche du calcul est illustrée par la Figure 73.

Equation [97] $E\theta_s = e\theta_s(\Theta_m) - e\theta_s(\Theta_m - p_m/2)$

Equation [98] $E\theta_s = d_0 + d_1 \cdot \Theta_m + d_2 \cdot \Theta_m^2 - d_0 - d_1 \cdot (\Theta_m - p_m/2) - d_2 \cdot (\Theta_m - p_m/2)^2$

Equation [99] $E\theta_s = d_1 \cdot p_m/2 + d_2 \cdot \Theta_m \cdot p_m - d_2 \cdot p_m^2/4$

Equation [100] $E\theta_s = (d_1/(2 \cdot d_2) + \Theta_m - p_m/4) \cdot d_2 \cdot p_m$ avec $\Theta_m = -d_1/(2 \cdot d_2)$

Equation [101] $E\theta_s = -d_2 \cdot (p_m/2)^2$

Equation [102] $E\theta_s = -d_2 \cdot (\pi/Z_m)^2$

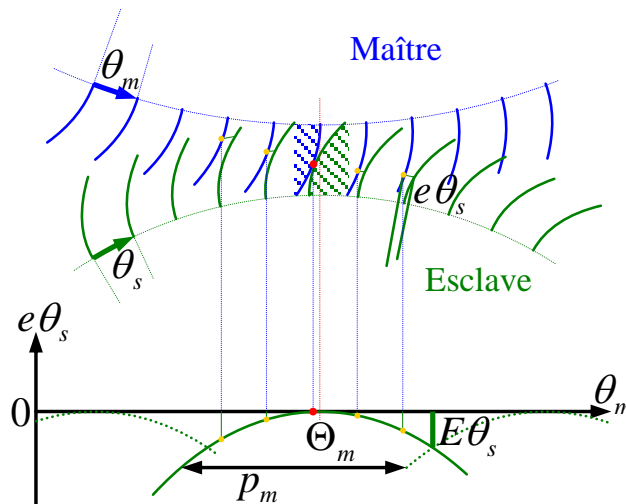


Figure 73 : Amplitude de l'erreur de transmission.

Les intersections des paraboles correspondent aux points d'entrée et sortie de la zone d'engrènement. Elles sont également les lieux de passage du contact d'une paire de dent à l'autre. Le mouvement de rotation de la pièce menée quitte alors une phase de décélération pour une phase d'accélération. La transition est brutale. L'accélération de la pièce varie instantanément. Le jerk induit est donc élevé. Cela signifie que les dents subissent un choc lors de leur entrée en contact. L'intensité de l'impact varie avec la forme et l'amplitude de l'erreur de transmission. Celle-ci donne également l'amplitude des oscillations du membre mené. Elle renseigne donc sur le comportement vibratoire de l'engrènement en fonctionnement. Dans le sixième chapitre, on montre que la diminution de sa valeur à vide améliore les conditions d'engrènement sous charge. Elle agit directement sur la tenue en fatigue et la durée de vie des pièces. Les vibrations du système génèrent du bruit. Elles peuvent aussi influencer le comportement de structures adjacentes.

5.3.3 Cas d'application du programme

La méthode proposée pour la simulation de l'engrènement à vide est beaucoup plus simple et pragmatique que celle qui est employée pour la génération des dentures. Elle repose simplement sur une analyse trigonométrique de l'engrenage. L'algorithme qui en découle jouit d'une grande robustesse. Sa stabilité dépend uniquement de celle du module de génération des dentures. Celui-ci fait l'objet d'importants travaux de consolidation développés dans le quatrième chapitre. La procédure de simulation de l'engrènement est codée en VBA sous EXCEL. Ce choix favorise le développement rapide d'un prototype. Le programme est aisément porté et interfacé avec les logiciels connexes. Ses résultats sont chargés sous CATIA V5 pour une visualisation interactive. En revanche, le langage interprété amoindrit la vitesse d'exécution des algorithmes. Celle-ci peut être quasiment décuplée si les procédures sont compilées.

La validité des résultats est confirmée par l'analyse du fonctionnement réel de l'engrenage fabriqué. Les caractéristiques géométriques des pièces sont détaillées dans le Tableau 3. Celles des outils y figurent également. Les réglages de la machine virtuelle sont exprimés conformément à la convention adoptée par *Fong* pour son modèle mathématique. Les données de base sont générées avec le logiciel de dimensionnement fourni par le fabricant de machine-outil à commande numérique. Elles sont ensuite importées puis traduites. Les règles et les techniques de traduction sont précisées en annexe.

Pièce	PINION	GEAR	
Flanc de la dent	CONCAV	CONVEX	
Nombre de dents	23	30	
Module extérieure	5	5	mm
Angle de pression	20	20	deg
Hauteur totale extérieure	10.24	10.24	mm
Saillie extérieure	5.6	3.65	mm
Angle de tête	40.2	54.283	deg
Angle primitif	37.483	52.517	deg
Largeur de dent	29	29	mm
Sens de spirale	LH	RH	
Sens de rotation	ANTI-HORAIRE	HORAIRE	
Statut d'entraînement de la pièce	MENEE	MENANTE	
Diamètre moyen de l'outil	143.013	152.392	mm
Largeur entre pointes	1	1.910	mm
Angle de profil actif	19.225	20	deg
Rayon de profil actif	392.872	∞	mm
Rayon d'arête actif	0.76	1.2	mm
Angle initial de berceau	60.891	300.183	deg
Angle d'inclinaison	0	0	deg
Angle de pivotement	0	0	deg
Angle de pied	35.717	49.8	deg
Réglage radial	68.646	72.2	mm
Réglage centre machine / centre berceau	-0.479	0	mm
Réglage base coulissante	-0.937	-2.1	mm
Réglage centre machine / sommet cône primitif	-1.348	0	mm
Coefficient Roulement Modifié R1	0.639404	0.794488	
Coefficient Roulement Modifié R2	-0.005814	0	
Coefficient Roulement Modifié R3	0.000598	0.001704	
Coefficient Roulement Modifié R4	-0.000997	0	
Coefficient Roulement Modifié R5	0.000023	-0.000024	
Coefficient Roulement Modifié R6	-0.000168	0	

Tableau 3 : Données de modélisation des pièces de l'engrenage.

L'engrènement peut être simulé pour diverses positions relatives des pièces. La configuration de l'engrenage sans déplacement est telle que les sommets des deux cônes primitifs sont confondus et leurs axes, orthogonaux. La Figure 74 présente les portées à vide simulées sans déplacements en vis-à-vis de celles obtenues par l'essai. On constate que les positions des portées sur les flancs de dent sont similaires. Cette corrélation apporte un premier élément de validation du modèle proposé.

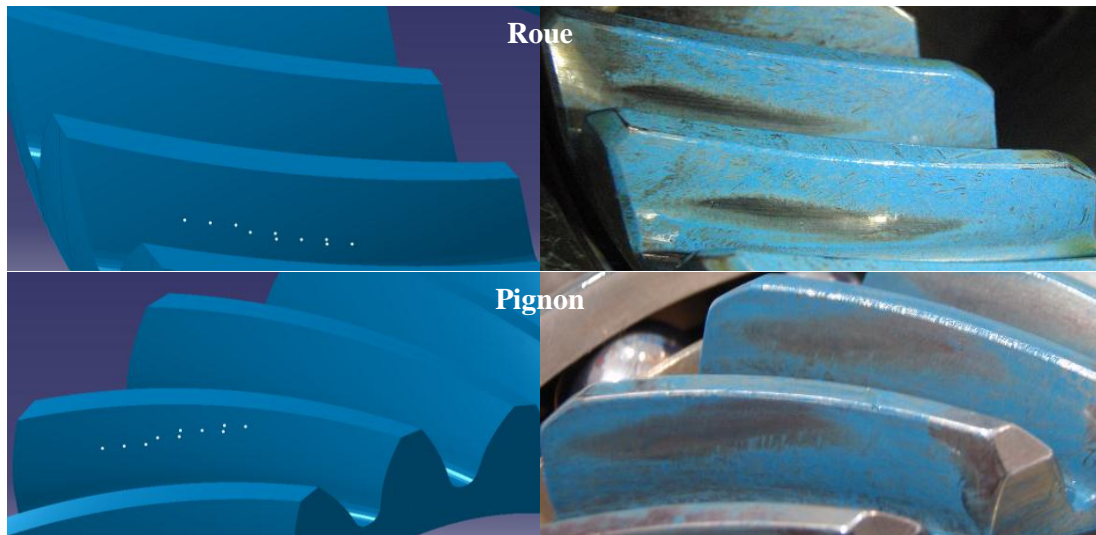


Figure 74 : Comparaison des portées simulées sans déplacement à l'essai à vide.

L'empreinte de la portée observée sur la Figure 74 est mise en évidence par érosion du marqueur bleu dont les pièces sont enduites. L'écart entre la théorie et la pratique a plusieurs origines. Les formes des pièces fabriquées ne sont pas exactes. Elles respectent néanmoins des intervalles de tolérance restreints. Bien que très précise, la mise en position des pièces n'est également pas parfaite.

L'entraînement de l'engrenage implique l'application d'un couple sur le membre menant. Celui-ci est faible. Il compense uniquement les diverses petites pertes du système. Cependant, l'effort au contact des dents suffit à légèrement écraser les flancs. Le contact n'est pas un point, mais une ellipse. L'épaisseur de la couche de marqueur amplifie le phénomène. On observe donc une trace étalée et non une ligne. Celle-ci est présumée vers le centre de la zone où le marquage est le plus prononcé. Il s'agit de la partie la plus brillante de la trace.

La simulation de l'engrènement fournit une approximation de cette ligne théorique. Elle repose sur la discrétisation de la surface et du mouvement du flanc de dent du membre menant. Les points blancs représentés sur la Figure 74 sont donc autour de la ligne. Ils appartiennent au nuage de points qui modélise le flanc maître. Chacun d'eux est une estimation du point de contact à une position d'engrènement donnée. Pour cette application, le nuage de points compte 13 points suivant la hauteur du profil par 37 dans la largeur de la dent. Le pas de rotation du membre menant vaut un dixième de son pas de dent.

Le positionnement relatif des pièces de l'engrenage influence la forme et la localisation des portées. En fonctionnement à vide, les sommets des cônes primitifs sont généralement confondus. Cependant, un décalage des axes des pièces peut parfois compenser les effets néfastes d'un déplacement dû au chargement du système global. Il peut également être utilisé pour imiter les conditions d'engrènement sous charge. Les déplacements relatifs des pièces sont alors déduits d'une analyse par éléments finis du mécanisme complet. Ils sont donnés dans le Tableau 4. Cette technique permet d'obtenir un positionnement de la portée à vide approximant celui de la portée sous charge.

Déplacement axial du pignon	0.441742	mm
Déplacement axial de la roue	-0.065310	mm
Déplacement hypoïde	-0.401187	mm
Déplacement angulaire	0.005277	deg

Tableau 4 : Déplacements relatifs issus de l'analyse globale par éléments finis.

Les portées à vide simulées avec déplacements sont, sur la Figure 75, en vis-à-vis de celles obtenues par l'essai sous charge. Leur évolution semble tout à fait cohérente avec celle des empreintes révélées sur les pièces fabriquées. En comparant la Figure 75 à la Figure 74, on constate que l'étalement de la zone de contact a principalement progressé vers le talon des dents.

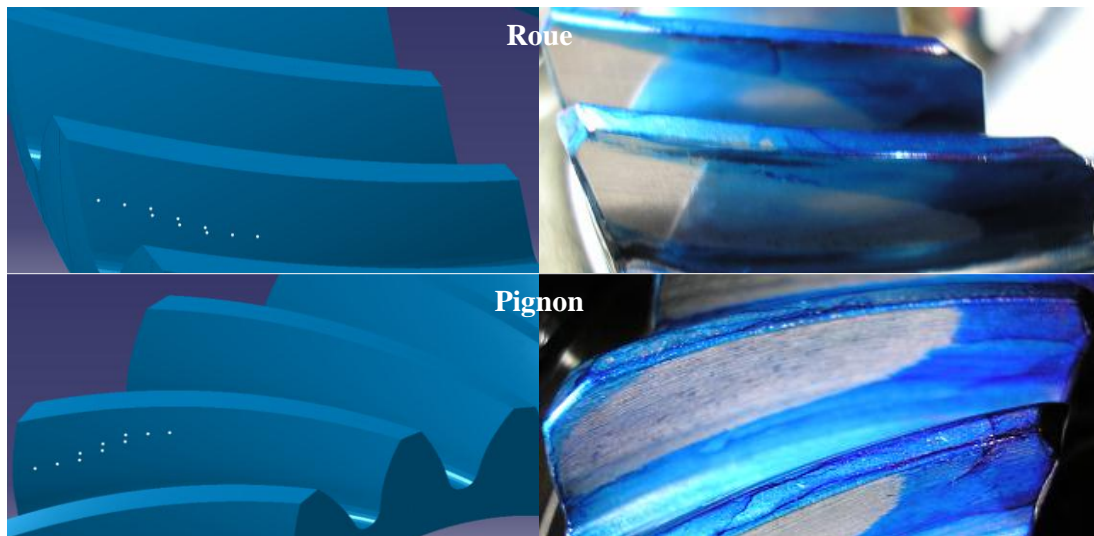


Figure 75 : Comparaison des portées simulées avec déplacements à l'essai en charge.

Cette observation souligne l'idée de considérer l'engrènement à vide avec déplacements comme une approximation du fonctionnement sous charge. On suppose alors que l'empreinte réelle s'étend autour de la portée simulée. Celle-ci est localisée très rapidement grâce à la procédure proposée en amont. La maîtrise de sa position par un processus itératif est donc concevable. Un positionnement judicieux à l'intérieur des flancs de dents peut permettre de dégrossir efficacement une optimisation de l'engrènement sous charge. On réduit ainsi le recours au calcul par la méthode des éléments finis. Une telle approche est développée et testée dans le sixième chapitre de ce mémoire.

L'orientation des déplacements relatifs des pièces est modélisée conformément à la convention de signe préconisée par *Gleason*. Le fabricant de machine-outil propose une analyse de l'évolution du positionnement des portées en fonction des variations du déplacement axial du pignon et du décalage hypoïde des deux pièces. Ceux-ci sont traités de manière indépendante. Leur influence respective est schématisée pour chaque membre de l'engrenage. Un extrait du document fourni par *Gleason* est déjà donné par la Figure 65. Les flèches indiquent la direction et le sens d'évolution de la portée sur le flanc de la dent.

La convention avec laquelle on calcule et impose les déplacements relatifs des pièces est unique. Elle doit être rigoureusement respectée. Son implémentation dans la procédure de simulation de l'engrènement à vide est donc vérifiée. La Figure 76 montre la corrélation de l'évolution de la portée simulée avec celle prévue par *Gleason*.

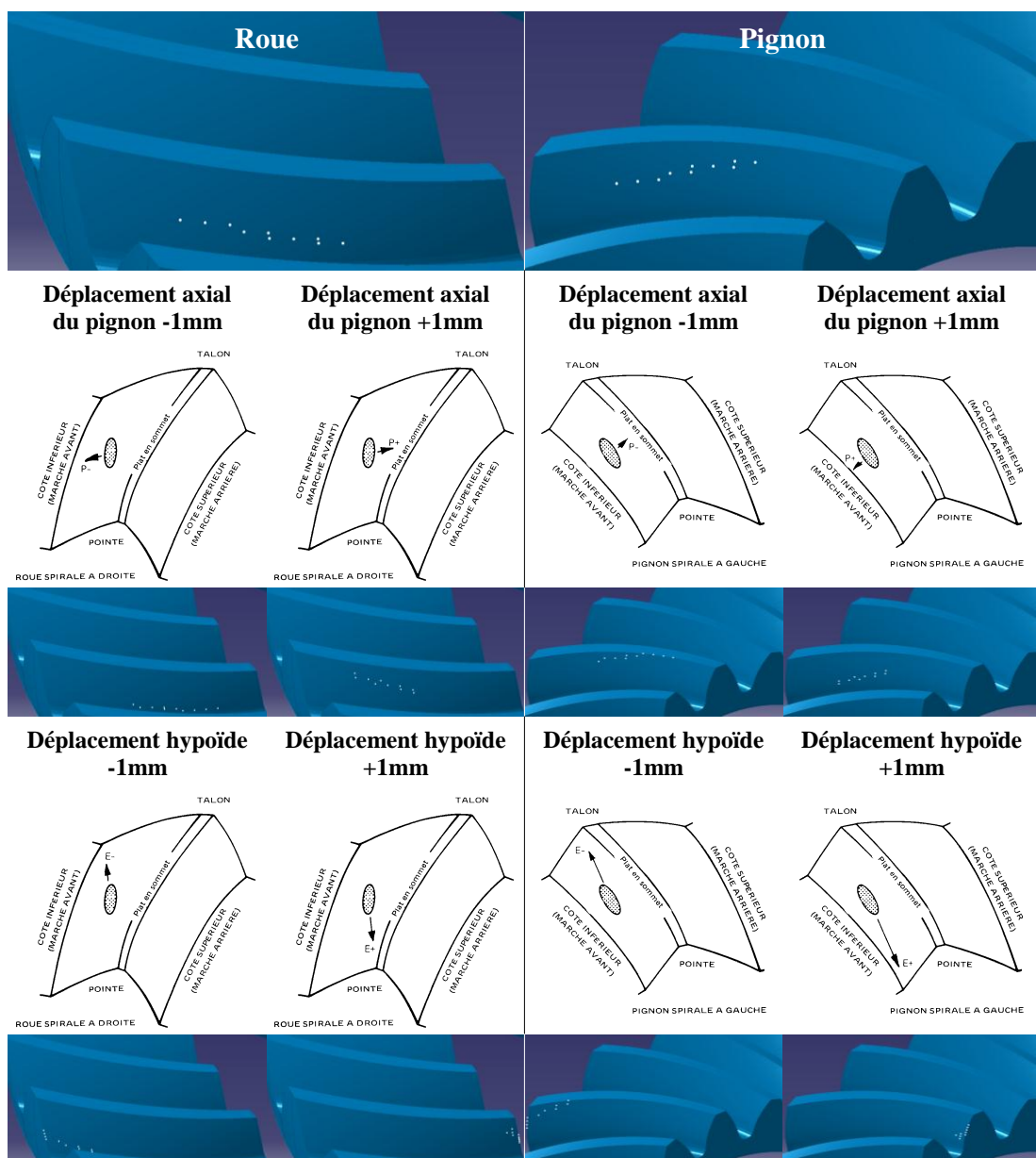


Figure 76 : Comparaison du déplacement des portées à celui prévu par Gleason.

Le fonctionnement du programme est également vérifié lorsque le contact se situe en bord de flanc. Les résultats obtenus sont donnés sur la Figure 77. On remarque alors que l'erreur de transmission ne suit plus une parabole.

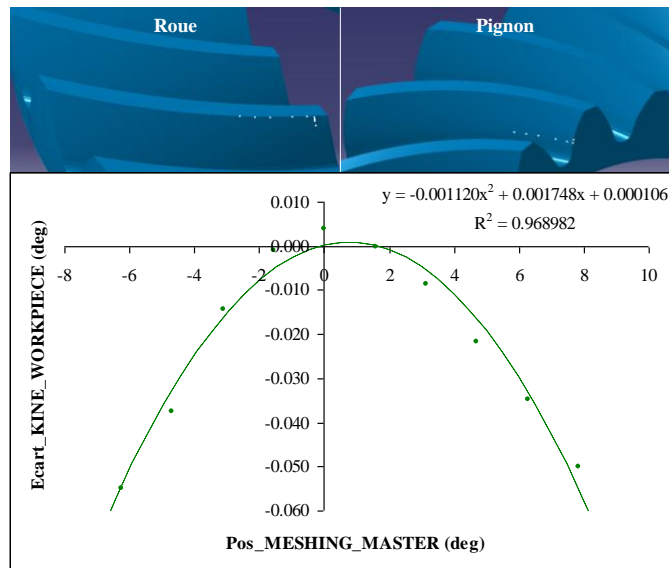


Figure 77 : Erreur de transmission pour un contact en bord de flanc.

Les discrétisations du profil du flanc maître et de son mouvement sont réglables. La Figure 78 présente les résultats obtenus pour deux résolutions différentes. Les simulations sont exécutées sur un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Une modélisation précise de l'engrènement n'induit pas un gain d'information notable. Les positionnements des portées sont semblables quelle que soit la finesse de la simulation. Par contre, la durée de calcul du modèle le plus fin est décuplée. Une telle précision s'avère superflue lorsque l'on souhaite simplement évaluer la taille et la position des portées sur les flancs de dents des pièces engrenées. Elle est inutile au bon fonctionnement du processus d'optimisation proposé dans le sixième chapitre. L'implémentation d'une méthode de dichotomie peut considérablement améliorer l'efficacité de l'algorithme de recherche du contact.

13 points suivant la hauteur de dent	31 points suivant la hauteur de dent
37 points suivant la largeur de dent	87 points suivant la largeur de dent
Pas de rotation 1:10 du pas de dent	Pas de rotation 1:20 du pas de dent
Durée de calcul 24 secondes	Durée de calcul 246 secondes

Figure 78 : Précision du résultat de la simulation de l'engrènement à vide.

5.4 Détermination de la portée d'engrènement sous charge

5.4.1 Modélisation des pièces par éléments finis

La modélisation du volume de la denture requiert le calcul de l'épaisseur des dents. Par convention, on considère celle-ci comme l'angle, autour de l'axe de la pièce, entre les centres des deux flancs de dents. Ceux-ci sont générés soit simultanément soit indépendamment. La méthode de calcul de l'épaisseur des dents dépend donc du mode d'usinage de la pièce. Selon le cas, l'approche est radicalement différente.

Dans le premier, l'épaisseur angulaire est directement déduite de la valeur du creux de dent généré par l'outil. Elle est représentée sur la Figure 79. La précision du résultat est indépendante du degré de discrétisation des deux flancs.

Equation [103] $\theta E_w = p_w - \left| \text{angle} \langle \vec{z}, \vec{r}_{CVw}, \vec{r}_{CXw} \rangle \right|$

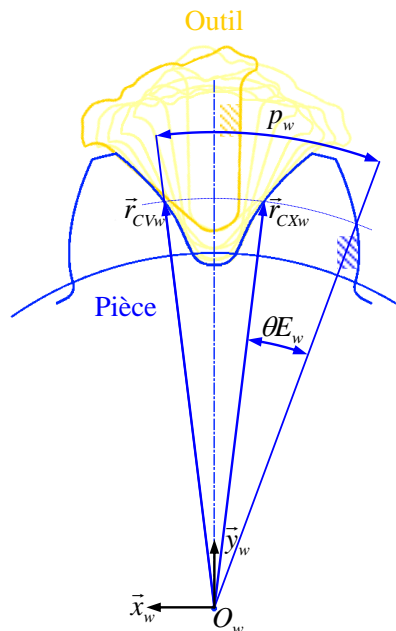


Figure 79 : Epaisseur angulaire pour un usinage simultané des deux flancs de dents.

Dans le second, la démarche est beaucoup plus complexe. Elle est schématisée sur la Figure 81. On impose le jeu de fonctionnement à vide de l'engrenage. L'engrènement est simulé pour chaque flanc de dent de la pièce traitée. L'autre membre du couple a une épaisseur de dent connue. Il est considéré comme menant. Ses deux flancs sont relativement positionnés pour former un creux de la denture. Celui-ci est centré sur le plan contenant l'axe du pignon et parallèle à l'axe de la roue. Les centres des flancs sont écartés du demi-angle du creux de part et d'autre du plan. La Figure 80 illustre le positionnement relatif des flancs de dent de la roue lorsque celle-ci entraîne le pignon.

Equation [104] $\theta O_G = \arctan \left(O / \sqrt{(G_G - W_G/2)^2 - O^2} \right)$

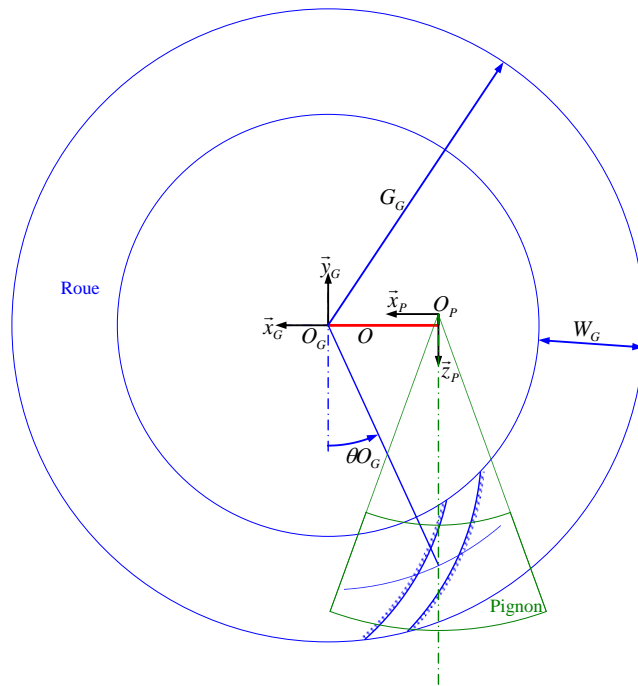


Figure 80 : Positionnement relatif des flancs avec la roue pour membre menant.

Les deux flancs de la pièce maître sont alors dans leur position initiale pour la simulation de l'engrènement. Ceux de la pièce esclave ont la position angulaire donnée par la procédure de génération des surfaces. Ils sont arbitrairement placés hors de la zone d'engrènement sur la Figure 81.

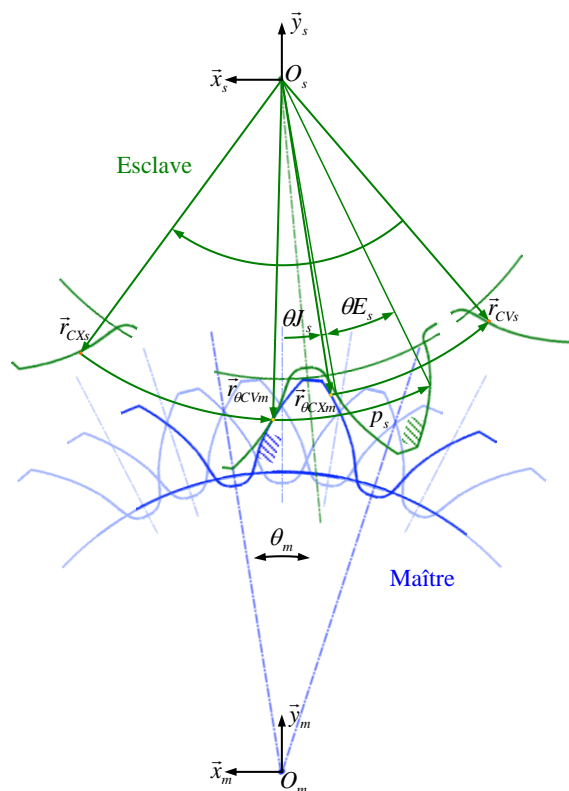


Figure 81 : Epaisseur angulaire pour un usinage de la denture flanc par flanc.

On recherche les points d'engrènement qui approximent la ligne de conduite inhérente à chaque flanc maître. Leurs coordonnées sont exprimées dans le repère de la pièce esclave. Ils sont représentés en jaune sur la Figure 81. Simultanément, on estime les points de contact qui forment les portées d'engrènement des deux flancs esclaves. Leur couleur est orange. On établit alors la chaîne de cotes angulaire qui part du flanc convexe de la pièce maître jusqu'au concave de l'esclave. Les deux surfaces sont écartées d'un jeu angulaire donné. L'épaisseur de dent de la pièce esclave est la seule inconnue de la chaîne de cotes. Sa valeur est donc déduite de celles des autres angles. Elle est ainsi calculée pour toutes les positions d'engrènement. Le point d'engrènement du flanc concave de la pièce maître peut être séparé par plusieurs pas de dent de celui du convexe. Cette éventualité est prise en compte. La Figure 81 illustre le cas d'un écart égal à un pas de dent en arrière du point d'engrènement du flanc convexe. La plus faible épaisseur trouvée garanti le jeu de fonctionnement minimal imposé à vide. L'Equation [105] exprime l'épaisseur de dent de la pièce esclave en fonction des composantes de la chaîne de cotes angulaire. La précision du résultat dépend du degré de discrétisation de la surface et du mouvement de chaque flanc de dent de la pièce maître.

Equation [105]

$$\theta E_s = \left| \text{angle} \langle \vec{z}, \vec{r}_{CVs}, \vec{r}_{CXs} \rangle + \text{angle} \langle \vec{z}, \vec{r}_{\theta CXm}, \vec{r}_{CVs} \rangle + \text{angle} \langle \vec{z}, \vec{r}_{CXs}, \vec{r}_{\theta CVm} \rangle + np_{CVm} \cdot p_s \right| - \theta J_s$$

Chaque flanc est modélisé par un nuage de points. La position relative des deux entités est définie par l'épaisseur angulaire de la dent. On peut alors directement construire le maillage volumique d'une dent puis de la pièce par répétition circulaire, Figure 82. Les points du nuage sont des nœuds du maillage. Celui-ci a une topologie conçue pour concilier trois impératifs.

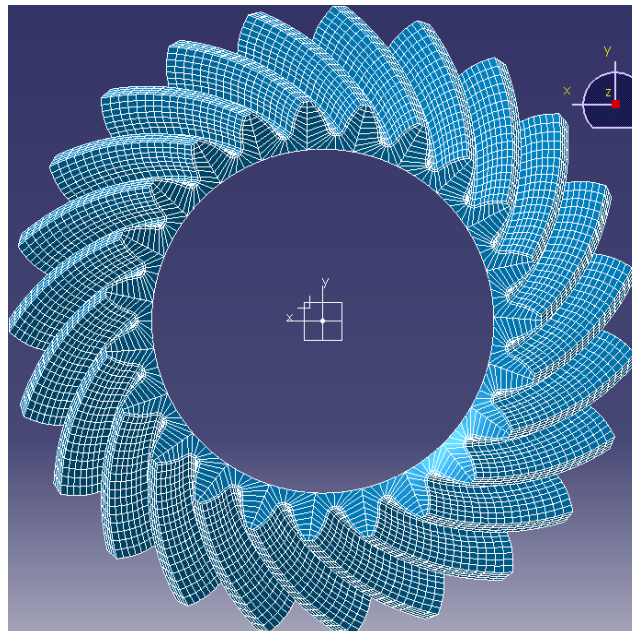


Figure 82 : Maillage de la pièce.

Premièrement, le maillage aux abords des surfaces des deux flancs doit être d'une excellente qualité. En effet, il influe sur la validité de l'analyse des contraintes en pied de dent.

De plus, il modélise la zone de contact potentiel en profil de dent. Celui-ci est à la fois le lieu d'application de la charge et d'observation des déplacements induits. Sa raideur doit donc être fidèlement simulée. Par conséquent, on appose systématiquement au moins une sous-couche de mailles orthogonales aux surfaces. Il y en a deux sur la Figure 83.

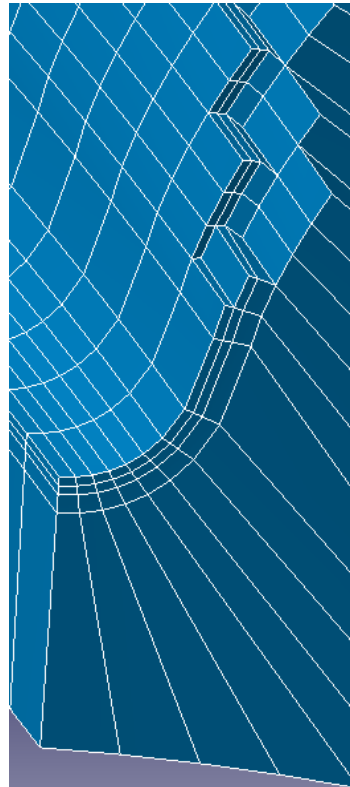


Figure 83 : Maillage orthogonal à la surface des flancs de dents.

Deuxièmement, le nombre de nœuds doit être aussi faible que possible afin de modérer la durée du calcul par la méthode des éléments finis. Néanmoins, la densité du maillage doit rester raisonnablement suffisante au voisinage des flancs de dent pour ne pas impliquer d'aberration. Il faut alors éviter de propager la finesse du maillage au-delà de la denture en l'annulant précocement. Ainsi, on privilégie de larges mailles à l'interface conique de la couronne dentée.

Troisièmement, la topologie du maillage doit assurer la modélisation d'une grande variété de formes de denture. Une souplesse de grande amplitude est nécessaire au bon fonctionnement du processus d'optimisation. Celui-ci est détaillé dans le sixième chapitre de ce mémoire. Il requiert une invariance de la quantité d'éléments du maillage pour conserver l'homogénéité du calcul. Cependant, il peut tester des formes de surface très diverses au fil des itérations. La topologie du maillage doit donc tolérer ces variations. Il faut que la faisabilité du calcul soit satisfaite pour toute configuration sensée des variables d'optimisation. Le processus ne doit pas être interrompu à cause d'un maillage inadmissible.

La procédure de génération du maillage d'une dent est codée en VBA sous EXCEL. Elle produit un fichier compatible avec l'environnement développé par la société *Samtech*. La taille

du maillage autour des zones sensibles est réglable. On peut donc gérer le nombre de nœuds suivant le profil et le pied de la dent. La quantité d'éléments dans la largeur de la dent est telle que les mailles de sous-couche ne soit pas trop disproportionnées. Le nombre de sous-couche est également modifiable. Une faible discrétisation du volume de la dent induit une exécution rapide du calcul. Cela rend la durée du processus d'optimisation tolérable. Un maillage fin permet d'améliorer la précision des résultats. Il est donc indispensable à une analyse poussée des sollicitations de la dent. On contrôle la pression de contact maximale. La contrainte maximale en pied de dent est également évaluée. La Figure 84 présente deux tailles de maillage. La simulation du contact et de l'engrènement sous charge est présentée dans la partie suivante.

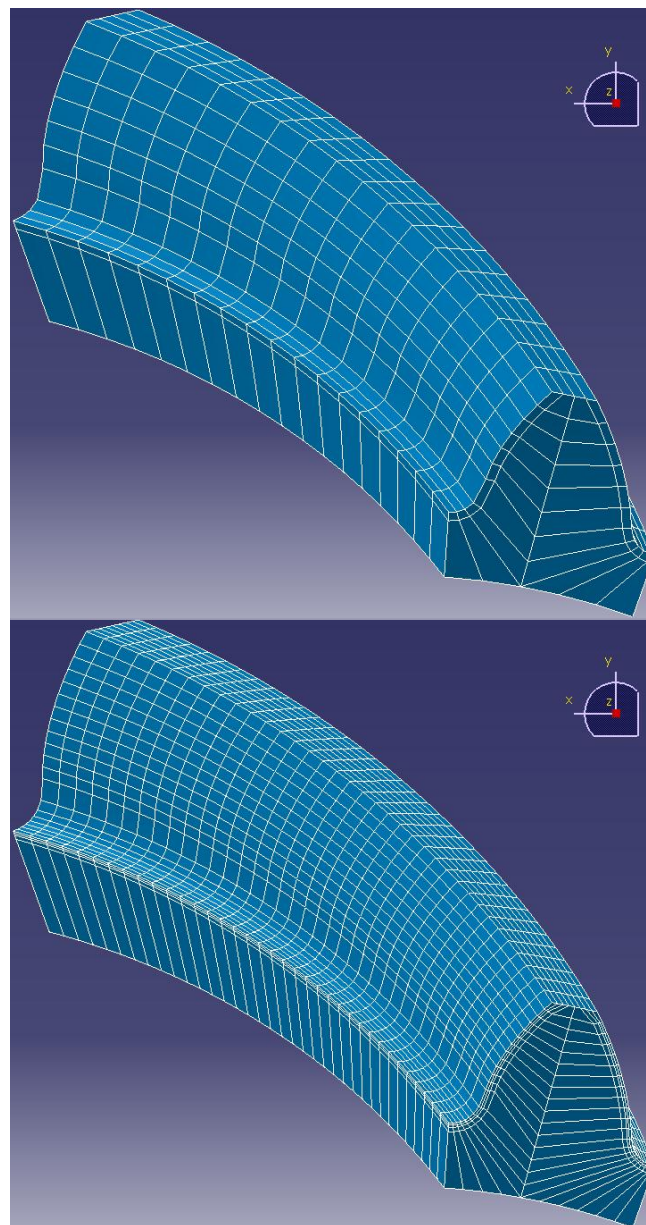


Figure 84 : Taille du maillage.

5.4.2 Traitement de l'engrènement par éléments finis

La procédure évoquée précédemment construit le maillage d'une dent et l'enregistre dans un fichier au format compatible avec le solveur SAMCEF. Avec la même syntaxe, on stocke aussi les positions successives de chaque pièce de l'engrenage au cours d'une période de fonctionnement égale à un pas de dent du membre menant. Celles-ci sont évaluées par le module de simulation de l'engrènement à vide. On génère ainsi deux fichiers pour chaque élément du système. L'un contient le maillage d'une dent de la pièce, l'autre définit sa position. Tous ces fichiers sont exploités par un script écrit dans le langage propre à *Samtech*. Ce fichier est immuable. Il gère la construction du maillage de chaque pièce par répétition circulaire de celui de la dent respective. Il pilote également leur positionnement relatif et l'application des conditions aux limites.

Le système complet inclut le carter et les divers équipements de la boîte de transmission de puissance. La Figure 86 en montre un aperçu. De plus, il est soumis à un ensemble de conditions aux limites complexe. Dans les travaux exposés au sixième chapitre, le modèle considéré est minimaliste. Il est présenté sur la Figure 85. Il faut vite s'assurer de la validité du processus d'optimisation. On privilégie donc la rapidité d'exécution du calcul.

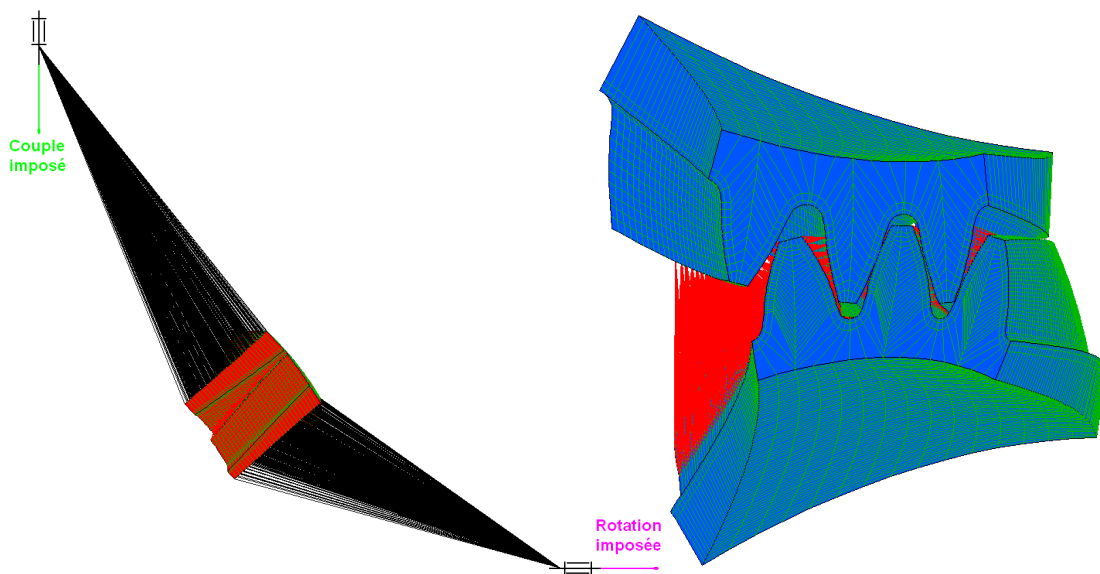


Figure 85 : Modèle simplifié et ses conditions aux limites.

Seules trois dents de chaque membre de l'engrenage sont modélisées. En effet, on suppose que le rapport de conduite sous charge est inférieur à 3 dents. Ce chiffre est le nombre maximal de paires de dents simultanément en contact au cours de l'engrènement sous charge. Chaque nœud de l'interface conique de la portion de denture est rigidement connecté à l'axe de la pièce respective. La position relative des dentures sous charge est reproduite par déplacement des axes. Les composantes du décalage découlent d'une analyse du système complet par la méthode des éléments finis. Elles sont alors traitées conformément à la convention mise en place par la firme *Gleason*. Les conditions aux limites du modèle simplifié

sont basiques. Elles sont schématisées sur la Figure 85. Un couple est appliqué suivant l'axe de la pièce qui entraîne l'engrenage. L'axe du membre mené est successivement encastré en des positions angulaires données. Les conditions de contact entre les surfaces des flancs en vis-à-vis sont symbolisées par les faisceaux rouges sur la Figure 85.

La simulation du contact sous charge est gérée par les algorithmes et les options préconisés par *Samtech*. L'engrènement sous charge peut être simulé via deux méthodes.

La première traite le problème par une analyse statique linéaire. Elle exploite le code de calcul ASEF. Le module de simulation de l'engrènement à vide donne les positions angulaires successives des membres de l'engrenage. Le calcul est exécuté indépendamment en chaque position à partir des résultats de l'étude du contact à vide. La totalité du chargement est appliquée au système qui répond alors par une déformation. Celle-ci satisfait les conditions d'équilibre définies par le principe fondamental de la statique. La zone de contact est considérée comme indépendante des déformations du système sous charge. Elle n'est pas redéfinie en cours de calcul.

Cette approche est inappropriée dans le cadre d'une analyse du système complet incluant la denture. En effet, elle ne rend pas compte du déplacement de la portée au cours de la phase d'application du chargement. Or, les boîtes de transmission de puissance d'hélicoptères subissent des déformations qui influencent l'évolution des conditions d'engrènement. Les portées à vide et sous charge occupent donc des positions généralement différentes.

La seconde méthode considère ce phénomène. Elle consiste en une analyse statique non-linéaire du problème. Le calcul est géré par le code MECANO. Le module de simulation de l'engrènement à vide fournit toutes les positions angulaires du membre mené et uniquement la première du menant. La position d'engrènement initiale doit causer une légère interpénétration des deux dents en contact. Elle est le point de départ du processus itératif de recherche de l'équilibre statique du système. La zone de contact est réactualisée au cours du calcul. Elle se déplace et s'étale jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Le résultat sert de point initial des itérations pour la position angulaire suivante du membre mené. L'algorithme traite ainsi successivement toutes les positions d'engrènement données.

Dans le cas du modèle simplifié, les deux méthodes sont acceptables. En effet, la déformation du système complet est modélisée par le décalage relatif des membres de l'engrenage. Hormis les portions de dentures impliquées dans l'engrènement, l'ensemble du système est infiniment rigide. La position de la portée évoluera donc peu lors du chargement. On a néanmoins choisi d'utiliser l'outil d'analyse non-linéaire MECANO. Le manuel d'aide du code de calcul SAMCEF propose plusieurs options. Les essais ont montré que la combinaison des méthodes de pénalité et des itérations découplées induit la plus courte durée de calcul pour le modèle simplifié. Dans le cas du modèle complet, la méthode des itérations couplées est plus efficace.

5.4.3 Cas d'application du programme

La simulation de l'engrènement sous charge est gérée par le module MECANO du code de calcul SAMCEF. Les données de modélisation de l'engrenage étudié sont répertoriées dans le Tableau 3. Le modèle du système complet est donné sur la Figure 86. Il représente une boîte de transmission de puissance arrière d'hélicoptère. Le maillage compte un total de 775000 nœuds. Le calcul dure environ 30 heures sur un Cluster de 4 CPU à 2 cœurs cadencés à 2600 MHz. Le carter est écorché pour distinguer les dentures, les roulements et leurs billes.

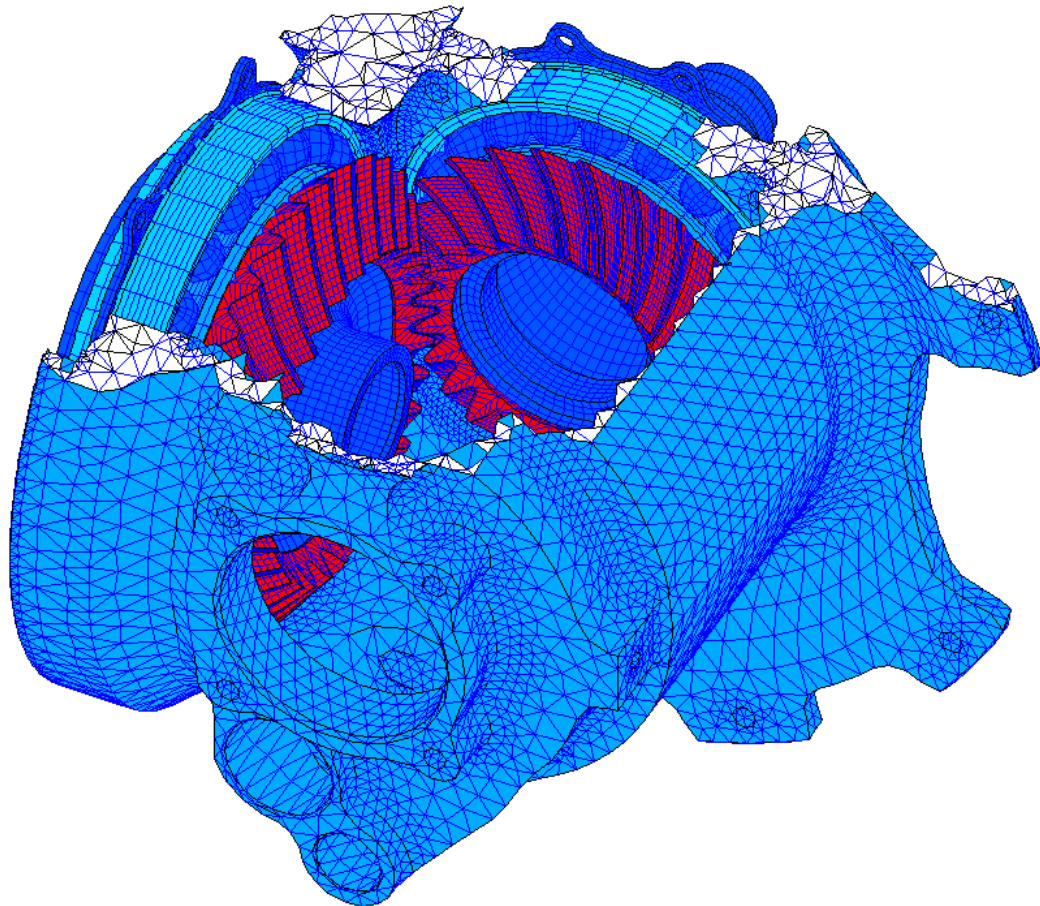


Figure 86 : Modèle complet d'une boîte de transmission de puissance d'hélicoptère.

La représentation graphique du résultat est donnée sur la Figure 87. La théorie peut ainsi être confrontée au relevé de l'essai pratique correspondant. On constate alors qualitativement que la position et la forme de la portée simulée coïncident très bien avec celles de l'empreinte relevée sur la pièce réelle. La validité des résultats n'est pas vérifiée quantitativement. On ne dispose pas de moyens techniques capables de mesurer les pressions de contact entre deux dents avec la résolution nécessaire. Cependant, le processus d'optimisation sous charge proposé dans le sixième chapitre exploite uniquement la sensibilité des valeurs. Celle-ci importe donc plus que leur exactitude.

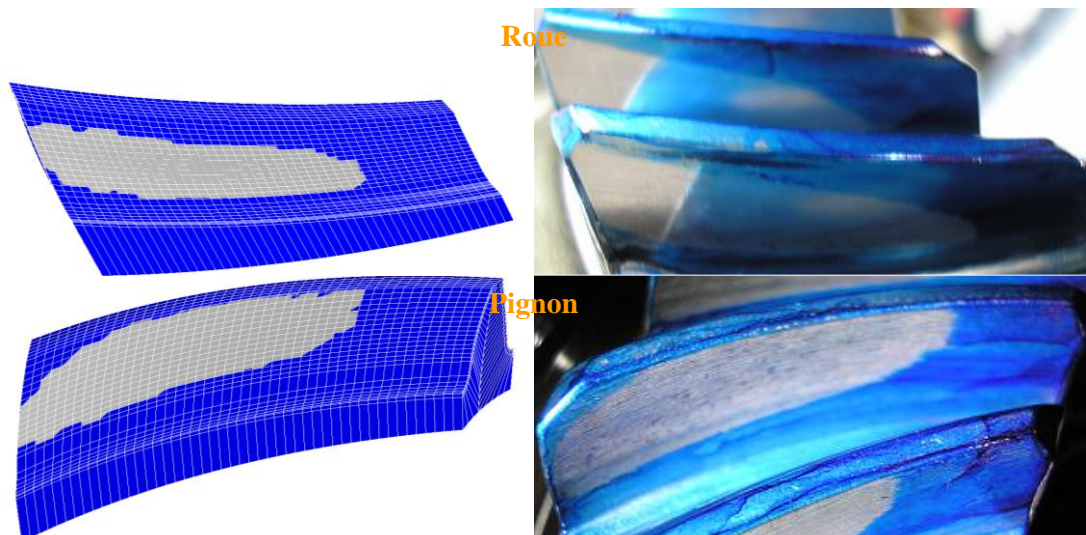


Figure 87 : Portées sous charge simulées et réelles du modèle complet.

Les conditions d'engrènement à vide et sous charge sont différentes. La portée peut donc éventuellement se déplacer sur le bord d'un flanc lors de la mise en charge du système. La pression de contact devient alors très vite inadmissible. La rupture à court terme est hautement probable. Il est impératif d'éviter ce risque. On a donc vérifié que le code de calcul employé rend compte de l'existence de l'effet de bord. Ce dernier est révélé sur la Figure 88. On remarque des pics de pressions en tête de dent du pignon et en pied de dent de la roue. Le rapport d'essai atteste d'une légère ligne brune en pied de dent de la roue. Les photographies de la Figure 89 en sont issues. Les valeurs de pression calculées sont vraisemblablement fausses mais leur répartition s'avère pertinente.

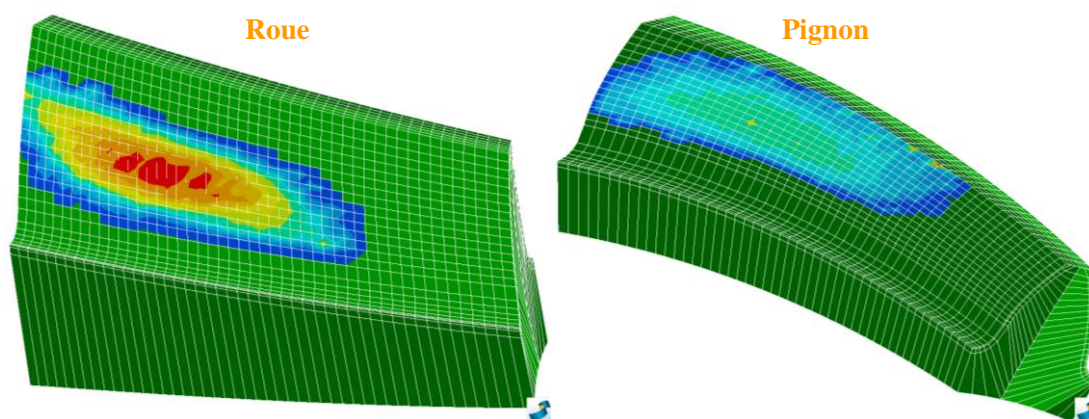


Figure 88 : Répartition des pressions de contact de la portée.

La taille du maillage influence les valeurs des pressions de contact. Ce phénomène est dû à la nature du contact. Lorsqu'il ne touche pas le bord d'un flanc, celui-ci forme une ellipse longue et étroite. La théorie de *Hertz* laisse entendre que la répartition des pressions suit un parabolôïde elliptique. La concordance des valeurs calculées et du profil de pression théorique augmente avec la densité du maillage. Si l'on élargi ce dernier, les valeurs sont moyennées, donc elles diminuent. Le maillage doit alors nécessairement conserver une taille et une

topologie identiques au cours du processus d'optimisation sous charge proposé plus loin. La Figure 89 montre les résultats obtenus pour deux types de maillage. Les deux simulations sont exécutées avec le modèle simplifié sur un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Les composantes du déplacement relatif des pièces sont données dans le Tableau 4. Les portées tracées sur la Figure 89 coïncident avec le résultat de la simulation du modèle complet illustré précédemment sur la Figure 88. L'amplitude des valeurs de pression de contact est moindre pour le maillage large. Cependant, la localisation de la zone de contact est comparable dans les deux cas. Il est indéniable qu'un accroissement de la discrétisation des pièces et de leur mouvement dégrade sévèrement la rapidité du calcul.

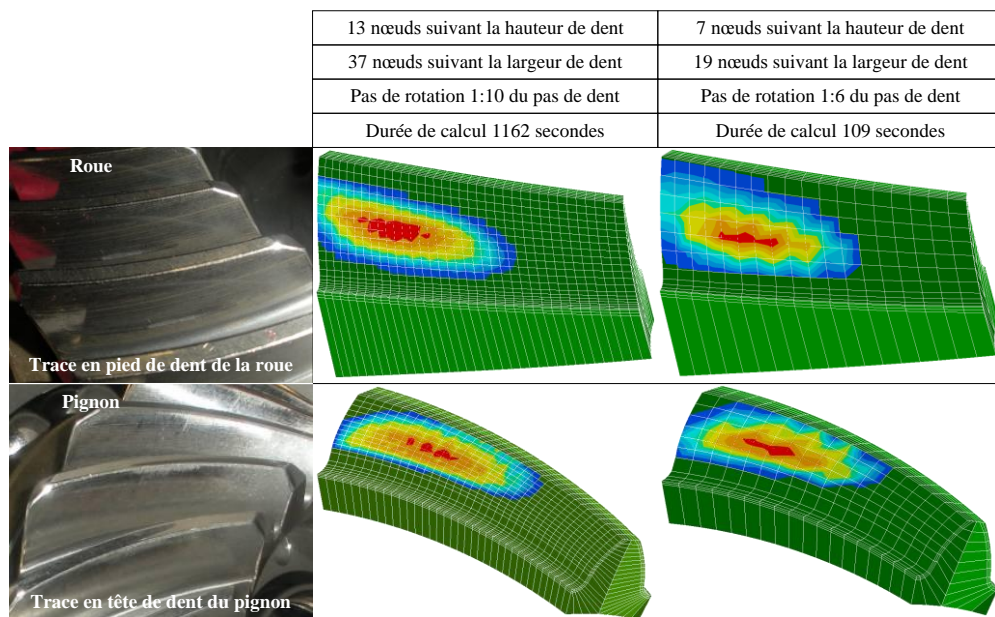


Figure 89 : Précision du résultat de la simulation de l'engrènement sous charge.

La Figure 90 représente la répartition de l'effort à transmettre par dent engrenée. On observe une phase pendant laquelle trois dents sont sollicitées en même temps. Le rapport de conduite sous charge de l'engrenage est donc légèrement supérieur à 2 dents. Il s'agit du nombre moyen de dents simultanément en contact au cours de l'engrènement.

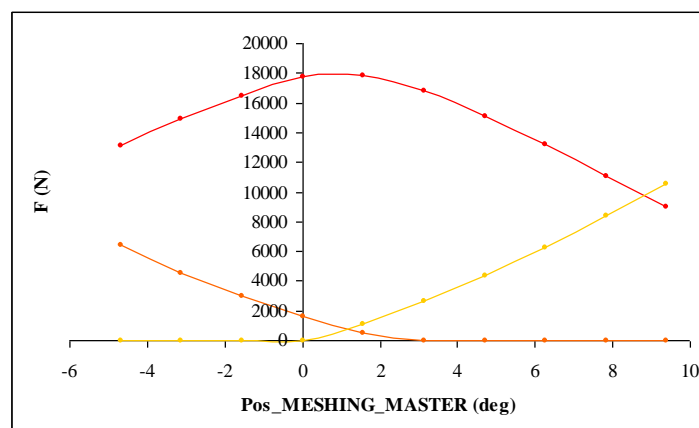


Figure 90 : Effort repris par chacune des dents engrenées.

La Figure 91 confirme qu'au maximum trois dents sont simultanément en contact au cours de l'engrènement sous charge simulé avec le modèle simplifié. Cela est perceptible à la position 4. Le nombre de dents pris en compte pour la simulation est donc suffisant.

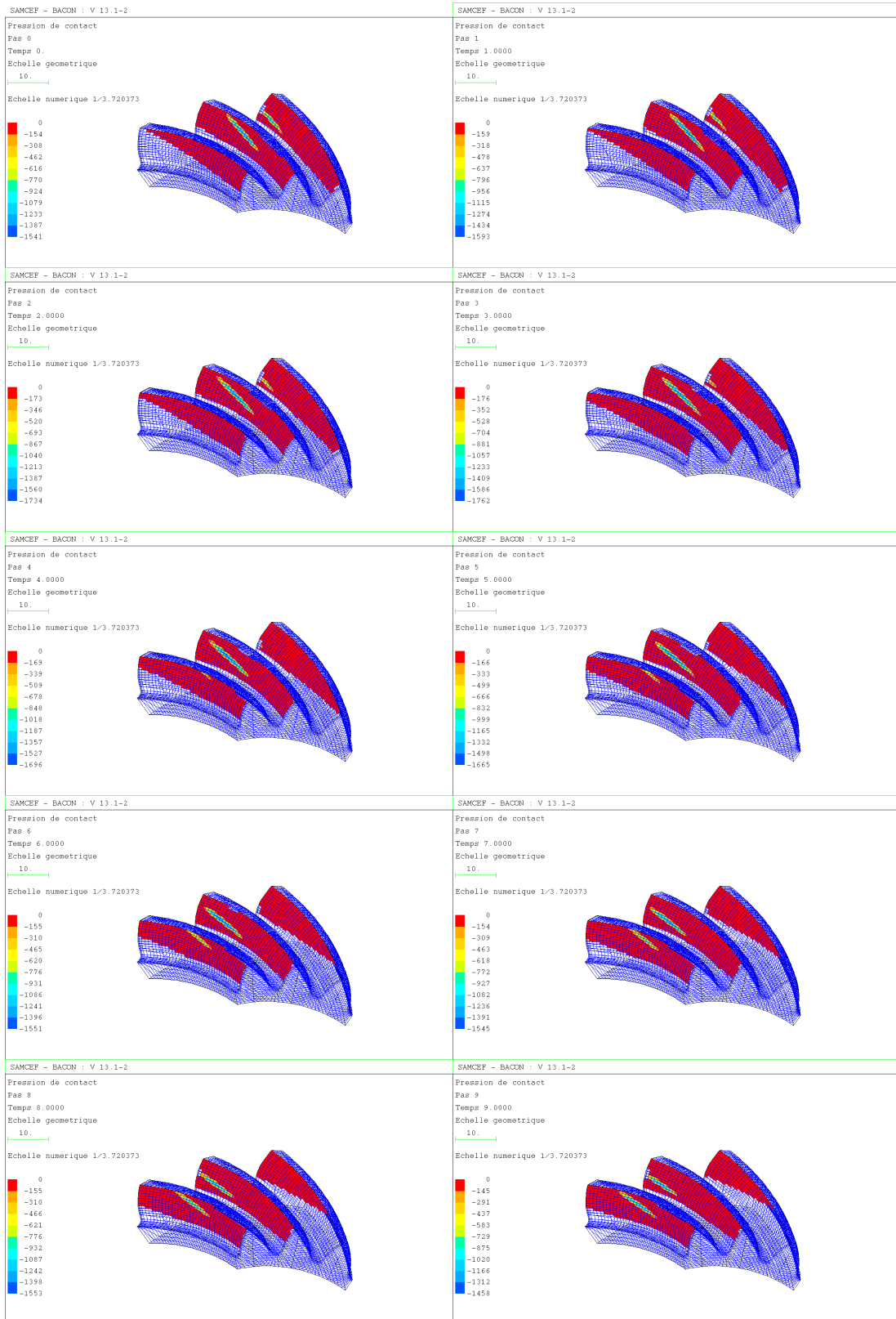


Figure 91 : Résultat pas à pas de la simulation de l'engrènement sous charge.

5.5 Conclusion

Le contact est localisé par détection de l'écart minimal entre un nuage de points et une surface. Ces deux entités sont issues de la procédure exposée au quatrième chapitre. La simulation de l'engrènement à vide requiert l'ensemble des réglages permettant la génération de deux flancs distincts ainsi que les paramètres de positionnement relatif des deux pièces engrenées. Cela représente un grand nombre de variables à gérer tant au développement qu'à l'exécution du programme. A la base, celui-ci est donc conçu avec la volonté de ne pas ajouter de la complexité à la complexité à moins que cela ne s'avère nécessaire.

La méthode proposée repose donc sur une approche plus pragmatique que celle adoptée pour la simulation d'usinage des flancs de dents. L'écriture de l'algorithme n'en est que plus intuitive. Cela permet d'éviter toute erreur d'interprétation des équations et du code. Les problèmes liés à l'analyse numérique sont également plus simple à appréhender. La stabilité du programme est alors aisément maîtrisée. Celui-ci bénéficie donc d'une excellente robustesse quelle que soit la forme et la position relative des pièces engrenées.

L'existence d'un contact entre deux corps est soumise à deux conditions. La première est évidente. Il faut que deux points appartenant chacun à la surface d'un solide différent soient confondus. La seconde est plus conceptuelle. Elle est respectée lorsque, en ces mêmes points, les normales à chacune des deux surfaces orientées par convention commune sont colinéaires et opposées. En théorie, ces deux conditions de contact doivent être simultanément satisfaites. En pratique, les deux solides existent et sont en contact.

La méthode proposée repose alors sur la seule hypothèse que l'écart entre les deux surfaces est minimal au point de contact. Une dent est considérée comme un solide constitué de matière dont l'enveloppe est modélisée ponctuellement via la simulation du procédé d'usinage par génération. Les surfaces des flancs de dents en contact n'ont donc pas de formulation globale. Elles ne sont connues que par leurs points et leur orientation qui dépend de la situation de la matière.

Dans cette approche, l'une des deux surfaces en contact est modélisée par son nuage de points. Les points en vis-à-vis sur la surface opposée sont potentiellement connus. En effet, ils peuvent être déterminés au besoin. Le contact est trouvé en un point du nuage. Les deux conditions de contact n'y sont donc pas rigoureusement remplies. La taille du maillage influe sur la précision avec laquelle le point de contact est approximé. Cela signifie que l'on aboutit généralement à une légère interpénétration des solides au voisinage du point de contact estimé.

La précision du résultat varie dans le même sens que la durée du calcul. L'un ne peut être amélioré qu'au détriment de l'autre. Néanmoins, la localisation de la portée d'engrènement ne nécessite pas une importante précision. Celle-ci est donc ajustée afin de permettre l'implantation du programme à l'intérieur d'une boucle d'optimisation. L'exécution du module de simulation de l'engrènement des pièces dure alors quelques secondes. Elle est suffisamment

rapide pour tolérer un grand nombre d'itération. Il est indispensable que le processus converge vers la solution en un temps raisonnablement court. De plus, l'algorithme doit être parfaitement stable afin d'assumer la résolution de tout cas de configuration. Il est donc développé pour fonctionner de la même façon quelle que soit la position du contact sur les flancs de dents. La méthode de calcul reste identique en bord ou à l'intérieur du flanc.

Les approches proposées précédemment impliquent une discrétisation des résultats. Or, un processus d'optimisation évolue généralement mieux lorsque les fonctions considérées sont continues. Dans le sixième chapitre, le but est donc de concevoir un objectif et des contraintes dont la variation est suffisamment continue pour favoriser l'évolution de l'algorithme d'optimisation.

6 Maitrise et optimisation de l'engrènement

6.1 Introduction

Les simulations des comportements à vide et sous charge de l'engrenage à dentures spiroconiques sont conformes aux essais présentés dans le cinquième chapitre. Leur exécution peut être répétée pour divers cas de configuration du modèle. Elles ouvrent ainsi la voie à l'optimisation automatique de la topographie des flancs de dent. Cet exercice éprouve la tolérance de l'algorithme à la variation des paramètres de génération des dentures et au déplacement relatif des membres de l'engrenage. L'automatisation rend le processus totalement objectif et considérablement efficace. En effet, l'ordinateur est exempt de tout jugement et travaille en continu de jour comme de nuit. Chaque cas d'optimisation est traité indépendamment. Pour résoudre le problème, la machine doit être en mesure de le percevoir. Cela passe par la conceptualisation et la formulation mathématique des conditions de fonctionnement. L'analyse du comportement de l'engrenage repose alors sur des critères d'évaluation quantitatifs.

Ainsi, les fonctions contraintes du problème d'optimisation déterminent la présence et l'intensité du contact en bord de flanc. Leur rôle est de forcer le processus à éloigner des bords les portées d'engrènement à vide sans et avec déplacement des axes de l'engrenage. Elles sont définies dans la seconde partie de ce chapitre. Un cas d'application illustre leur efficacité. En éloignant les portées du bord, on réduit le risque d'endommagement des dentures. L'engrenage transmet un couple. La portée bouge et s'étale avec l'application du chargement. Si elle touche une arête, alors il apparaît un effet de bord. Celui-ci implique un risque de surpression locale. Par conséquent, il peut induire une dégradation prématurée des dentures par matage, micropitting, écaillage puis rupture. Sa simulation par la méthode des éléments finis requiert une modélisation extrêmement précise des solides en contact. À ce jour, ce type de calcul prend un temps incompatible avec son implantation dans un processus itératif. L'effet de bord n'est donc pas rigoureusement pris en compte. En effet, l'engrènement sous charge est simulé avec un modèle qui privilégie la rapidité à la précision du calcul. Néanmoins, ce dernier permet la détection de pics de pression dus à la troncature de la zone de contact.

L'optimisation de l'engrènement sous charge exploite la méthode des éléments finis. Bien que le modèle soit simplifié, la durée du calcul reste conséquente pour un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Une étape de positionnement de la portée d'engrènement à vide avec déplacement permet de réduire le recours à la méthode des éléments finis. Elle est traitée dans la troisième partie du chapitre sous la forme d'un problème d'optimisation. La fonction objectif oriente la progression de l'algorithme. Elle doit donc évoluer de façon suffisamment stable et continue. La minimisation de sa valeur implique le rapprochement du milieu de la portée et d'un point du nuage qui modélise le flanc actif du pignon. En outre, elle favorise une diminution de l'erreur de transmission cinématique. La portée d'engrènement à vide sans déplacement doit

respecter les contraintes admises précédemment. Les variables sont judicieusement choisies parmi les paramètres de génération des dentures. Leur nombre est restreint afin d'écourter la durée du processus. Deux cas d'application sont proposés. Le premier concerne un positionnement de la portée au centre du flanc, le second, en tête et talon de la dent.

Le comportement de l'engrenage dépend considérablement de la topographie des flancs de denture. Jadis, celle-ci était corrigée manuellement. On fabriquait les pièces. L'engrenage était assemblé puis testé. Un opérateur expérimenté examinait la portée d'engrènement puis rectifiait l'une des deux surfaces en contact. La tâche était réitérée jusqu'à l'obtention d'une portée jugée convenable. Avec l'essor de l'informatique, ce processus est devenu virtuel, limitant ainsi le recours aux essais. Cependant, la correction de la topographie reste à l'appréciation de l'opérateur. L'exercice est complexe et répétitif. Aujourd'hui, la puissance de calcul disponible favorise une automatisation du processus. L'ordinateur travaille en temps masqué. Un algorithme d'optimisation pilote alors l'évolution de la surface. L'objectif est d'obtenir une pression de contact minimale. Les contraintes sont celles évoquées en amont. Les variables sont des réglages de la machine. Ces derniers se distinguent par l'acuité de leur influence sur la topographie. La méthode est détaillée dans la quatrième partie de ce chapitre. Le cas d'application traité intervient après positionnement de la portée au centre du flanc actif du pignon.

Dans la cinquième partie du chapitre, le processus d'optimisation vise à minimiser l'amplitude de l'erreur de transmission cinématique obtenue avec déplacement relatif des dentures. Les contraintes et les variables sont identiques à celles considérées dans le cadre d'une minimisation de la pression de contact. Les deux méthodes proposées améliorent le comportement sous charge de l'engrenage. On compare donc leur efficacité.

6.2 Contraintes d'engrènement à vide

6.2.1 Risque de surpression lié au contact en bord

Quel que soit le cas de charge appliqué, la portée d'engrènement ne doit pas se situer en bord de flanc. Ceci vaut au démarrage, donc à vide. Il faut exclure tout contact impliquant l'arête d'une dent. Un tel contact peut induire l'apparition de surpressions. Celles-ci ont généralement un effet destructif à court terme. Les dégradations engendrées sont regroupées sur la Figure 92. Le premier symptôme est une marque qui matérialise le lieu des surpressions. Il traduit un matage des surfaces en contact. Au cours du temps, cela évolue vers du micropitting qui constitue une amorce de craque. Cette dernière produit un écaillage du flanc, voire une rupture de la dent. Les surpressions de contact peuvent donc avoir des conséquences catastrophiques sur le comportement de l'engrenage. Le fonctionnement de toute la chaîne de transmission de puissance peut être compromis.

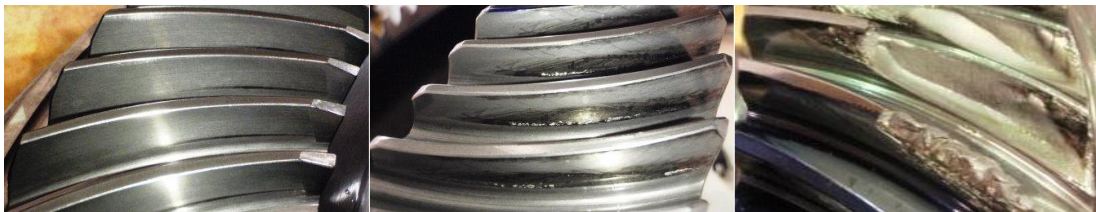


Figure 92 : Dégradations de dentures.

Les surpressions générées par le contact d'une arête avec un flanc de dent sont dues à l'effet de bord. Celui-ci peut être mis en évidence par la méthode des éléments finis. Pour cela, le maillage de la zone concernée doit être extrêmement dense. La Figure 93 illustre le résultat obtenu pour une simulation en deux dimensions du phénomène. La pression augmente très rapidement vers le bord en contact. Si la discrétisation requise est appliquée à toutes les arêtes potentiellement en contact, alors le modèle exploité devient très long à traiter avec les moyens technologiques actuels. Le modèle simplifié présenté au cinquième chapitre est trop peu précis pour simuler véritablement l'effet de bord. Néanmoins, l'existence de ce dernier est révélée par les pics de pression obtenus sur les arêtes des flancs. Ceux-ci sont observables en tête de dent du pignon sur la Figure 93. La photo d'essai, déjà exposée en amont, confirme qu'il s'agit d'une zone de surpression.

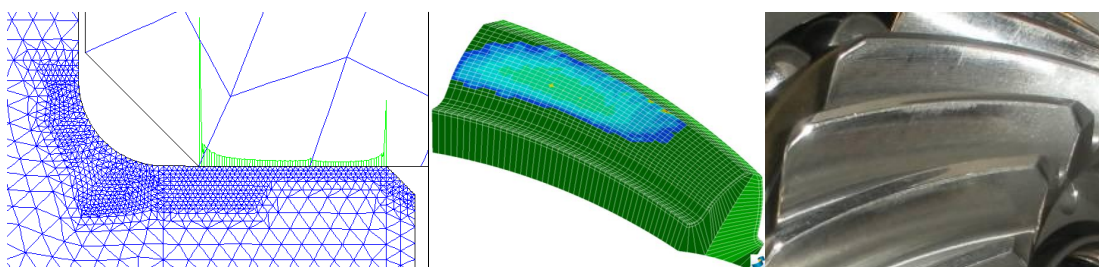


Figure 93 : Détection de l'effet de bord.

6.2.2 Évaluation de l'amplitude du contact à vide en bord de profil

Sous charge, l'intensité du contact en bord de flanc peut être indiquée par l'amplitude des pics de pression. À vide, la pression de contact est nulle. Une méthode est alors proposée pour estimer le degré d'interaction d'une arête avec un flanc de dent. Elle repose sur l'analyse de l'orientation relative des surfaces en contact.

Pour que deux surfaces orientées soit en contact, elles doivent être confondues en un même point et les normales respectives y sont colinéaires et opposées. Cette dernière condition n'est vérifiée que si le contact ne se situe pas en bord de flanc. Quand le cas se présente, pour des surfaces à courbure monotone, l'écart entre les deux normales reflète l'amplitude de la transformation à effectuer afin d'éloigner le point de contact du bord. On en déduit une appréciation de l'acuité du contact sur l'arête.

Le contact en bord est prohibé. La portée d'engrènement à vide est donc contrainte à ne pas toucher les arêtes des flancs en contact. On suppose que si cette condition est satisfaite pour ses extrémités, alors elle l'est également pour l'ensemble de la portée. Sa transgression doit être quantifiée afin d'automatiser le processus de contrôle. Elle est donc formulée par le biais de fonctions contraintes. Il est possible d'écrire une contrainte par bord, par flanc et par extrémité. Le raccordement du profil avec le pied de dent est considéré comme un bord. Cela implique la formulation de seize contraintes.

La méthode employée pour la simulation de l'engrènement à vide ne permet pas de situer le contact en bord de la surface esclave puisque seules les arêtes du flanc maître sont générées. On ne peut donc en déduire que les contraintes relatives au contact potentiel en bord de la surface maître. Par conséquent, le pignon et la roue sont tour à tour maître et esclave. Deux simulations d'engrènement à vide sont nécessaires. Chacune d'elle donne les positions des extrémités de la portée, les normales aux surfaces en ces points ainsi que les bornes en pied et tête des profils concernés.

$$\text{Equation [106]} \quad (\theta_m, \vec{r}_m) \xrightarrow{E} \vec{r}_m, \vec{n}_m, \vec{n}_{sm}, \gamma_f, \gamma_h$$

On évalue alors l'appartenance de chaque point extrême aux bords de la surface maître. Il y a quatre bords, donc autant d'équations. Celles-ci sont énoncées en suivant pour la pointe, le talon, le pied et la tête de dent. Si l'égalité est nulle à la précision numérique près, alors le point est considéré sur le bord.

$$\text{Equation [107]} \quad CR_{1m} = G_m - W_m - R_m$$

$$\text{Equation [108]} \quad CR_{2m} = R_m - G_m$$

$$\text{Equation [109]} \quad C\gamma_{1m} = R_m \cdot (\gamma_f - \gamma_m)$$

$$\text{Equation [110]} \quad C\gamma_{2m} = R_m \cdot (\gamma_m - \gamma_h)$$

Lorsque cela est le cas, on lance le processus de quantification de l'acuité du contact en bord. Il repose sur le traitement de l'écart relatif des normales aux surfaces au point de contact

estimé. Il est développé selon la trame présentée. Tout d'abord, la normale à la surface esclave est projetée sur le plan tangent à la surface maître. Ce dernier est nécessairement perpendiculaire à la normale à la surface maître.

$$\text{Equation [111]} \quad C\vec{n}_{sm} = \text{projection}(\vec{n}_m, \vec{n}_{sm})$$

$$\text{Avec : } C\vec{n}_{sm} = \begin{bmatrix} Cu_{sm} \\ Cv_{sm} \\ Cw_{sm} \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_m = \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_{sm} = \begin{bmatrix} u_{sm} \\ v_{sm} \\ w_{sm} \end{bmatrix}$$

La projection est appliquée orthogonalement à la surface maître.

$$\text{Equation [112]} \quad C\vec{n}_{sm} - \vec{n}_{sm} = k \cdot \vec{n}_m \Rightarrow \begin{cases} Cu_{sm} - u_{sm} = k \cdot u_m \\ Cv_{sm} - v_{sm} = k \cdot v_m \\ Cw_{sm} - w_{sm} = k \cdot w_m \end{cases}$$

Elle appartient au plan tangent à la surface maître. Le repère dans lequel elle est exprimée à son origine contenue dans le plan.

$$\text{Equation [113]} \quad u_m \cdot Cu_{sm} + v_m \cdot Cv_{sm} + w_m \cdot Cw_{sm} = 0$$

$$\text{Equation [114]} \quad u_m \cdot (u_{sm} + k \cdot u_m) + v_m \cdot (v_{sm} + k \cdot v_m) + w_m \cdot (w_{sm} + k \cdot w_m) = 0$$

On en déduit l'expression du coefficient :

$$\text{Equation [115]} \quad k = -(u_m \cdot u_{sm} + v_m \cdot v_{sm} + w_m \cdot w_{sm})$$

Les coordonnées du vecteur obtenu sont alors connues.

$$\text{Equation [116]} \quad \begin{cases} Cu_{sm} = (1 - u_m^2) \cdot u_{sm} - u_m \cdot v_m \cdot v_{sm} - u_m \cdot w_m \cdot w_{sm} \\ Cv_{sm} = (1 - v_m^2) \cdot v_{sm} - v_m \cdot u_m \cdot u_{sm} - v_m \cdot w_m \cdot w_{sm} \\ Cw_{sm} = (1 - w_m^2) \cdot w_{sm} - w_m \cdot u_m \cdot u_{sm} - w_m \cdot v_m \cdot v_{sm} \end{cases}$$

On détermine le rayon de la sphère centrée sur le sommet du cône primitif et passant par l'extrémité de la projection.

$$\text{Equation [117]} \quad C\vec{r}_m = \vec{r}_m + C\vec{n}_{sm}$$

$$\text{Equation [118]} \quad CR_m = \|C\vec{r}_m\| = \sqrt{Cx_m^2 + Cy_m^2 + Cz_m^2}$$

La fonction contrainte est l'écart radial entre la frontière du flanc et l'extrémité de la projection, Figure 94. Elle est satisfaite si sa valeur est négative. Celle-ci est nulle ou positive si le point de contact est sur l'arête. Elle est calculée par les équations qui suivent pour la pointe et le talon de dent. La contrainte est d'autant plus violée que sa valeur est élevée. Elle constitue donc un indice de qualité de la portée d'engrènement. La sensibilité des contraintes aux perturbations des variables oriente l'évolution de l'algorithme d'amélioration.

$$\text{Equation [119]} \quad CR_{1m} = G_m - W_m - CR_m$$

$$\text{Equation [120]} \quad CR_{2m} = CR_m - G_m$$

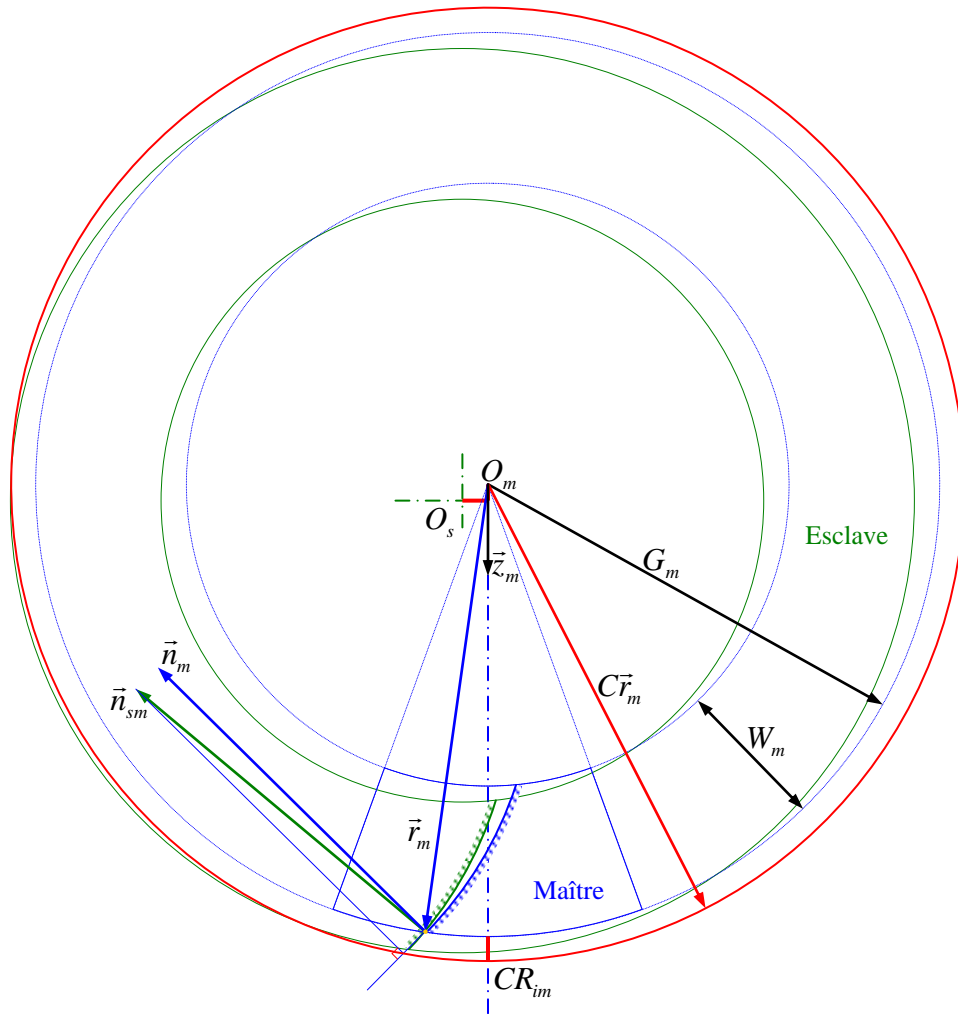


Figure 94 : Contrainte suivant la largeur de denture.

La fonction contrainte est aussi évaluée pour le pied et la tête de dent. Elle est égale à l'écart angulaire entre la frontière du flanc et l'extrémité de la projection, Figure 95. Cependant, il est préférable de considérer la longueur d'arc plutôt que l'angle. En effet, l'harmonisation des ordres de grandeur des contraintes favorise la stabilité du processus d'amélioration de la portée d'engrènement.

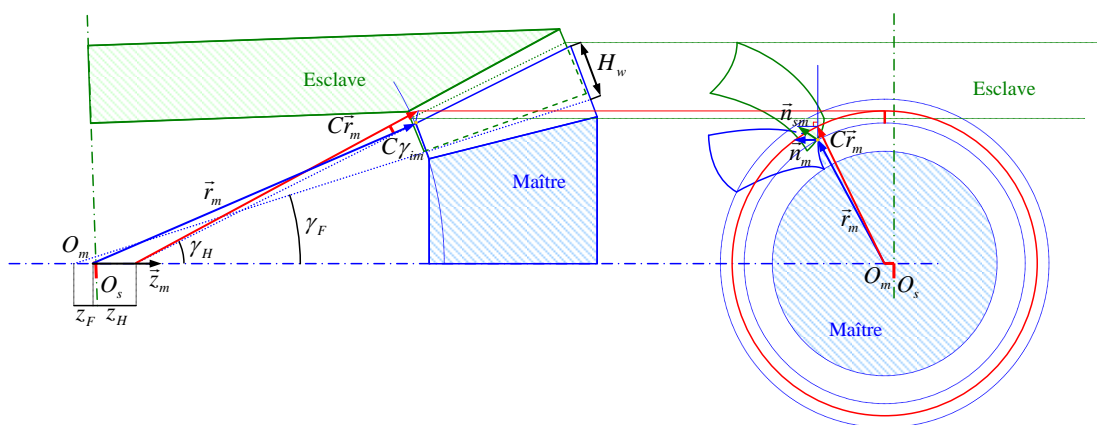


Figure 95 : Contrainte suivant la hauteur de denture.

On admet que la ligne de raccordement du pied au profil de dent appartient à une surface conique. Les cônes de raccord et de tête de dent ont leur axe confondu avec celui de la pièce mais leur sommet est différent de celui du cône primitif. Les équations qui suivent doivent prendre en compte ce décalage potentiel.

L'extrémité de la projection de la normale à la surface esclave est à l'intersection d'une sphère et d'un cône centrés au sommet du cône de raccord. La longueur d'arc est égale au produit du rayon de la sphère par l'écart angulaire entre le raccord et l'extrémité. On en déduit l'expression mathématique de la fonction contrainte au raccord de dent.

Equation [121] $C\gamma_{1m} = CR_m \cdot (\gamma_F - C\gamma_m)$

Avec : $CR_m = \sqrt{Cx_m^2 + Cy_m^2 + (Cz_m + z_F)^2}$ et $C\gamma_m = \arctan\left(\sqrt{Cx_m^2 + Cy_m^2} / (Cz_m + z_F)\right)$

La fonction contrainte en tête de dent est établie de la même façon.

Equation [122] $C\gamma_{2m} = CR_m \cdot (C\gamma_m - \gamma_H)$

Avec : $CR_m = \sqrt{Cx_m^2 + Cy_m^2 + (Cz_m + z_H)^2}$ et $C\gamma_m = \arctan\left(\sqrt{Cx_m^2 + Cy_m^2} / (Cz_m + z_H)\right)$

La Figure 96 illustre la définition géométrique des bornes au raccord et en tête de dent. Le cône au raccordement du profil avec le pied du flanc maître a pour axe celui de la pièce et passe par les points générés aux extrémités de la largeur de denture. Il est caractérisé par son angle au sommet et sa position suivant l'axe de la pièce.

Equation [123] $\gamma_F = \arctan\left(\left(\sqrt{xfg_m^2 + yfg_m^2} - \sqrt{xfp_m^2 + yfp_m^2}\right) / (zfg_m - zfp_m)\right)$

Equation [124] $z_F = zfg - \sqrt{xfg_m^2 + yfg_m^2} / \tan(\gamma_F)$

On modélise pareillement l'arête en tête de dent.

Equation [125] $\gamma_H = \arctan\left(\left(\sqrt{xhg_m^2 + yhg_m^2} - \sqrt{xhp_m^2 + yhp_m^2}\right) / (zhg_m - zhp_m)\right)$

Equation [126] $z_H = zhg - \sqrt{xhg_m^2 + yhg_m^2} / \tan(\gamma_H)$

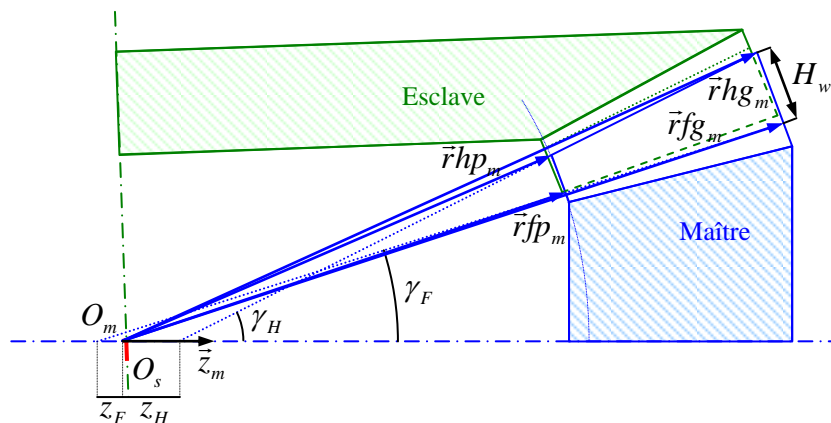


Figure 96 : Angles au raccord et en tête de denture.

6.2.3 Exemple d'application du programme

Les valeurs des paramètres de l'engrenage modélisé sont obtenues avec un logiciel de pré-dimensionnement. Elles sont identiques à celle présentées au cinquième chapitre. On corrige uniquement le flanc concave du pignon. Il est actif dans le sens d'engrènement courant et le nombre de dents à retoucher est minimal. Les flancs de denture sont donc rectifiés séparément pour le pignon et simultanément pour la roue.

Le point de départ du processus d'amélioration de la portée d'engrènement est volontairement non admissible. Les variables du problème sont initialisées à des valeurs excessivement éloignées d'une combinaison possible. Le choix des réglages à ajuster est justifié dans la partie suivante. Ils sont inscrits en rouge dans le Tableau 5.

Pièce	PINION	GEAR	
Flanc de la dent	CONCAV	CONVEX	
Nombre de dents	23	30	
Module extérieure	5	5	mm
Angle de pression	20	20	deg
Hauteur totale extérieure	10.24	10.24	mm
Saillie extérieure	5.6	3.65	mm
Angle de tête	40.2	54.283	deg
Angle primitif	37.483	52.517	deg
Largeur de dent	29	29	mm
Sens de spirale	LH	RH	
Sens de rotation	ANTI-HORAIRE	HORAIRE	
Statut d'entraînement de la pièce	MENEE	MENANTE	
Diamètre moyen de l'outil	140	152.392	mm
Largeur entre pointes	1	1.910	mm
Angle de profil actif	20	20	deg
Rayon de profil actif	400	∞	mm
Rayon d'arête actif	0.76	1.2	mm
Angle initial de berceau	60.891	300.183	deg
Angle d'inclinaison	0	0	deg
Angle de pivotement	0	0	deg
Angle de pied	35.717	49.8	deg
Réglage radial	60	72.2	mm
Réglage centre machine / centre berceau	-0.479	0	mm
Réglage base coulissante	-0.937	-2.1	mm
Réglage centre machine / sommet cône primitif	-1.348	0	mm
Coefficient Roulement Modifié R1	0.639404	0.794488	
Coefficient Roulement Modifié R2	-0.005814	0	
Coefficient Roulement Modifié R3	0.000598	0.001704	
Coefficient Roulement Modifié R4	-0.000997	0	
Coefficient Roulement Modifié R5	0.000023	-0.000024	
Coefficient Roulement Modifié R6	-0.000168	0	

Tableau 5 : Données de modélisation initiales.

Les composantes du déplacement relatif des axes de l'engrenage sont déduites d'une analyse sous charge de la boîte de transmission par la méthode des éléments finis. Déjà employées dans le cinquième chapitre, elles sont rappelées dans le Tableau 6.

Déplacement axial du pignon	0.441742	mm
Déplacement axial de la roue	-0.065310	mm
Déplacement hypoïde	-0.401187	mm
Déplacement angulaire	0.005277	deg

Tableau 6 : Déplacements relatifs issus de l'analyse globale par éléments finis.

La Figure 97 montre les portées d'engrènement à vide simulées sans et avec déplacement. Elles sont représentées sur le flanc du pignon. Toutes deux sont situées en talon de dent. La première est en blanc. Elle est localisée sur l'arête du pignon et de la roue. La seconde est en rouge. Le chargement induit un recul du pignon par rapport au centre de l'engrenage. La portée quitte alors l'arête du pignon mais reste sur celle de la roue. Les conditions de contact sont exécrables dans les deux cas. On choisit une configuration initiale extrême afin d'illustrer la tolérance du processus d'amélioration de la portée d'engrènement.



Figure 97 : Portées à vide initiales sur le pignon sans et avec déplacement.

Ce dernier est piloté automatiquement par une application informatique du commerce qui propose divers algorithmes d'optimisation. Le logiciel BOSS QUATTRO est développé par la société *Samtech*. Un aperçu de son interface est présenté sur la Figure 98. Le module d'optimisation ouvre le classeur EXCEL, lance la macro VBA et gère l'évolution des variables en fonction des résultats lus dans la feuille. Son lien avec le classeur est schématisé dans la fenêtre en haut, à gauche. Au-dessous, un choix de graphes permet de visualiser la progression du calcul. Les valeurs des variables et des contraintes sont listées dans les tables de droite. En premier plan, la petite fenêtre signale l'arrêt des itérations.

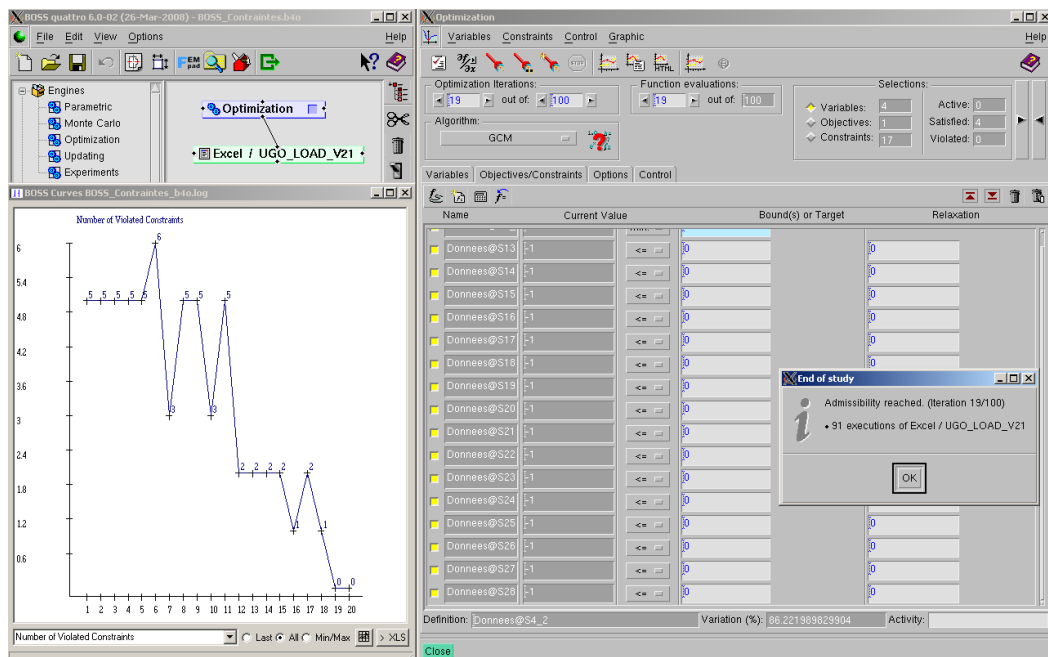


Figure 98 : Interface du module de contrôle du processus.

Dans l'exemple présent, seule la portée à vide sans déplacement est considérée. Le casse-tête à résoudre compte donc seize contraintes. Pour chaque itération, le nombre de contraintes violées est marqué sur la Figure 99. Initialement, cinq d'entre elles ne sont pas respectées. Le problème est complexe et sensible. L'amplitude de variation des paramètres manipulés est restreinte afin de stabiliser davantage la progression de l'algorithme. On observe malgré tout une évolution plutôt accidentée. Néanmoins, le processus converge en moins d'une heure sur un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Toutes les contraintes sont alors satisfaites.

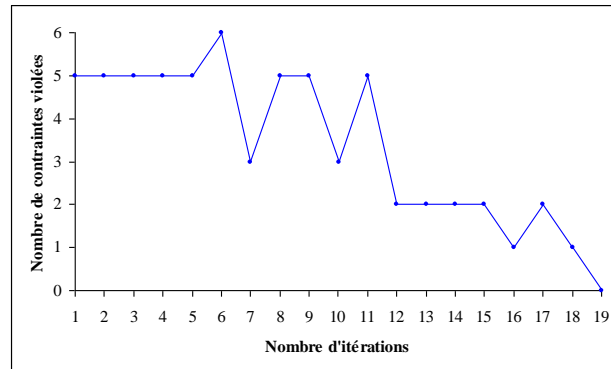


Figure 99 : Evolution du nombre de contraintes violées.

À terme, les valeurs des variables sont modifiées. Elles sont inscrites dans le Tableau 7. Le réglage radial est le paramètre dont la valeur présente la plus ample modification. Son influence est détaillée dans la partie suivante. La Figure 100 montre le résultat obtenu. La portée est notamment décalée dans la direction de la largeur de denture. Elle ne touche plus les bords.

Pièce	PINION	
Flanc de la dent	CONCAV	
Diamètre moyen de l'outil	140.862	mm
Angle de profil actif	19.827	deg
Rayon de profil actif	400.07	mm
Réglage radial	68.367	mm

Tableau 7 : Valeurs des variables après satisfaction des contraintes.

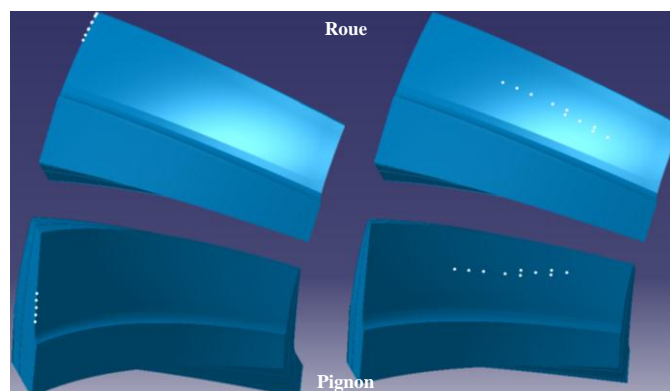


Figure 100 : Portée sans déplacements avant et après satisfaction des contraintes.

6.3 Maitrise du positionnement de la portée à vide

6.3.1 Définition de l'objectif

Une méthode est proposée pour maîtriser la position de la portée à vide sur le flanc. Elle repose sur un processus d'optimisation. Celui-ci est schématisé sur la Figure 101. Il est piloté par le logiciel BOSS QUATTRO du groupe *Samtech*. Les valeurs initiales des variables du problème sont issues d'un programme de pré-dimensionnement. Leur évolution découle de l'analyse automatique de l'influence de leur variation sur le résultat obtenu sous EXCEL. Une macro codée en VBA modélise l'engrènement à vide sans déplacement et détermine les valeurs des fonctions contrainte. Elle simule également la portée à vide avec déplacement et évalue la fonction objectif. Les sensibilités des sorties du calcul aux perturbations des entrées orientent la progression du processus. La boucle d'optimisation est itérée jusqu'à satisfaction des contraintes et convergence de l'objectif.

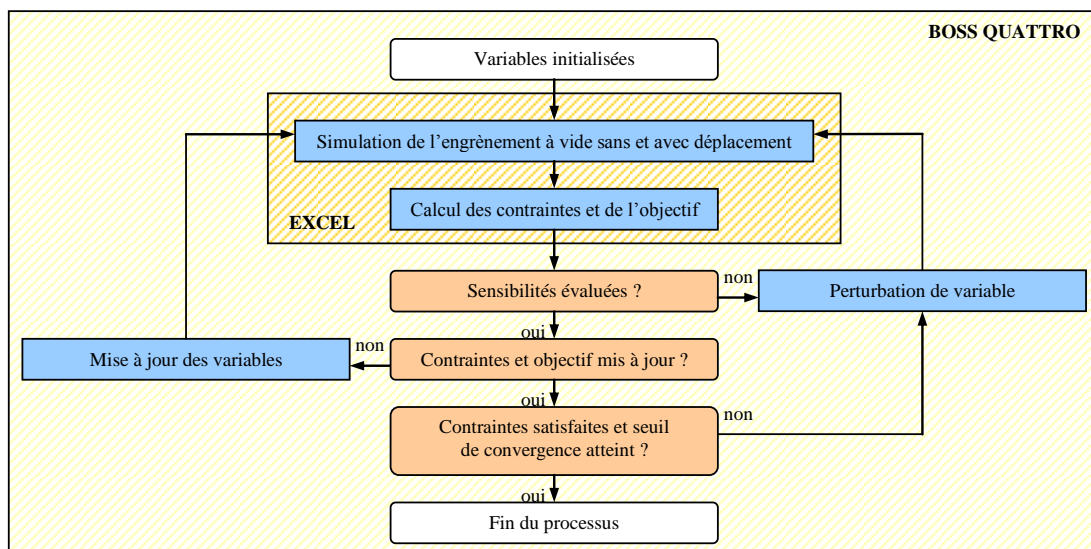


Figure 101 : Processus de positionnement de la portée à vide avec déplacement.

La méthode est robuste et tolérante. Elle fonctionne quelle que soit la position initiale de la portée d'engrènement sur le flanc. Le déplacement relatif des axes de l'engrenage est parfaitement supporté. Toute topographie obtenue avec l'algorithme de génération des surfaces est tolérée. Les valeurs des variables doivent simplement permettre de générer les flancs en contact. Leur combinaison assure impérativement un mode d'usinage par travail d'enveloppe tel que présenté dans le quatrième chapitre. La configuration de départ ne doit pas compromettre le calcul dès la première itération. Elle peut être considérablement loin de la solution sans pour autant impliquer une absurdité. Au terme du processus, l'engrènement à vide sans déplacement ne porte sur aucune arête et la portée simulée avec déplacement est centrée sur une cible choisie par l'opérateur. Le centrage exact n'est cependant pas garanti. Le respect des contraintes est prépondérant. L'algorithme converge parfois vers un compromis entre satisfaction des contraintes et proximité de la cible.

La destination du milieu de la portée d'engrènement à vide avec déplacement est définie en amont par l'utilisateur. Elle est sélectionnée parmi les points du nuage qui modélise le flanc du pignon. L'écart entre l'origine et la cible doit être quantifié de sorte que la variation de sa valeur ne soit pas beaucoup perturbée par la discrétisation du modèle. Un comportement trop erratique de la fonction objectif déroute l'évolution du processus. Cela peut gravement nuire à la résolution du problème.

La cible et le milieu approximatif de la portée sont deux points d'un nuage prédéfini. Le premier reste fixe. Le second bouge au cours des itérations. Il demeure néanmoins l'un des points du nuage. Il saute donc irrégulièrement d'un point à l'autre de la surface discrétisée. Sa position peut être insensible aux faibles changements de valeur des paramètres de génération du flanc. Par conséquent, une distance entre les deux points ne peut pas être la fonction objectif du processus d'optimisation. En effet, l'évolution de sa valeur est excessivement sensible à la discrétisation de la surface. Elle est donc très instable et discontinue.

L'insensibilité de la fonction objectif aux perturbations des variables provoque l'arrêt du processus. Elle rend indéfinissable le sens de progression de l'optimisation. Celle-ci est effectivement orientée par l'allure de la fonction objectif. Il est nécessaire que l'algorithme réponde correctement aux variations des paramètres de génération du flanc. La forme quantitative de l'objectif doit donc parfaitement traduire son expression qualitative littérale. Le milieu de la portée d'engrènement doit se situer au plus près de la cible choisie sur le flanc de dent du pignon. Cela induit une minimisation de l'écart angulaire entre le point cible maître et la surface esclave en vis-à-vis calculé à la position angulaire de milieu d'engrènement. Cette fonction objectif est suffisamment stable et continue pour orienter convenablement le processus d'optimisation. En effet, elle varie même quand le milieu de la portée ne bouge pas. Sa sensibilité aux perturbations des variables est supérieure à celle de la fonction évoquée en amont.

L'approche retenue est illustrée par la Figure 102 pour un engrenage à denture droite. Elle est également schématisée pour une denture spiroconique sur la Figure 103. Le calcul de la valeur de la fonction objectif est quasiment identique à celui de l'erreur de transmission.

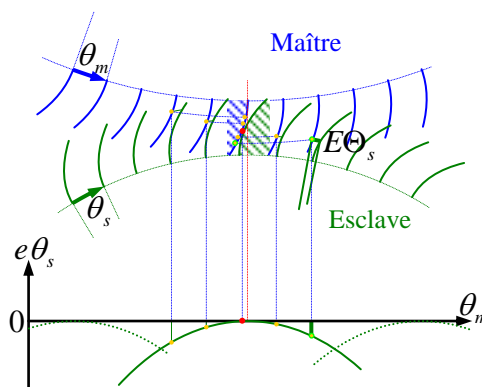


Figure 102 : Objectif tracé pour un engrenage à axes parallèles.

Sur la Figure 102 et la Figure 103, la cible est marquée en vert. Le milieu approximatif de la portée est en rouge. Il est déduit de la simulation de l'engrènement à vide avec déplacement. Il s'agit du point de contact des flancs à la position angulaire de milieu de l'engrènement. Le positionnement relatif des surfaces peut alors être tel que le point cible n'a pas de vis-à-vis. Cela est couramment le cas avec un engrènement à denture spiroconique. La Figure 103 l'explique. L'écart angulaire entre le point cible maître et la surface esclave est évalué en la position angulaire pour laquelle il est minimal. Son tracé en fonction de l'angle de la pièce maître décrit une parabole. Il est comparable à celui de l'erreur de transmission cinématique. Un polynôme du second degré est donc ajusté par la méthode des moindres carrés. Le sommet de la courbe correspond alors à la position angulaire du flanc maître en laquelle la valeur de l'écart est minimale. Cette dernière résulte du calcul des composantes de la chaîne de cotes angulaire construite autour de l'axe de rotation de la pièce esclave entre les surfaces maître et esclave, Figure 103. Les décalages de positions angulaires des deux flancs avec le milieu de l'engrènement sont strictement liés par le rapport de réduction de l'engrenage. L'écart angulaire inclut donc l'erreur de position relative des flancs. Ainsi, la minimisation de sa valeur favorise la réduction de l'erreur de transmission cinématique. Le raisonnement est mis en évidence sur la Figure 102. L'écart entre le point vert et l'axe des abscisses diminue par déplacement ou aplatissement de la parabole. Il est nul si la cible et le milieu de la portée d'engrènement sont confondus ou s'il n'existe pas d'erreur de transmission. Le calcul des composantes de la chaîne de cotes angulaire prend la forme mathématique suivante :

Equation [127] $\Delta\Theta_s = (\Theta_{Tm} - \Theta_m) \cdot \rho, \rho = Z_m / Z_s$

Equation [128] $\Delta c\Theta_s = \text{angle}\langle \vec{z}, \vec{R}_{\Theta_s}, \vec{R}_{T\Theta_s} \rangle$

Equation [129] $\Delta c_s = \text{angle}\langle \vec{z}, \vec{R}_{T_s}, \vec{R}_s \rangle$

Equation [130] $E\Theta_s = -sM_s \cdot (\Delta\Theta_s + \Delta c\Theta_s + \Delta c_s)$

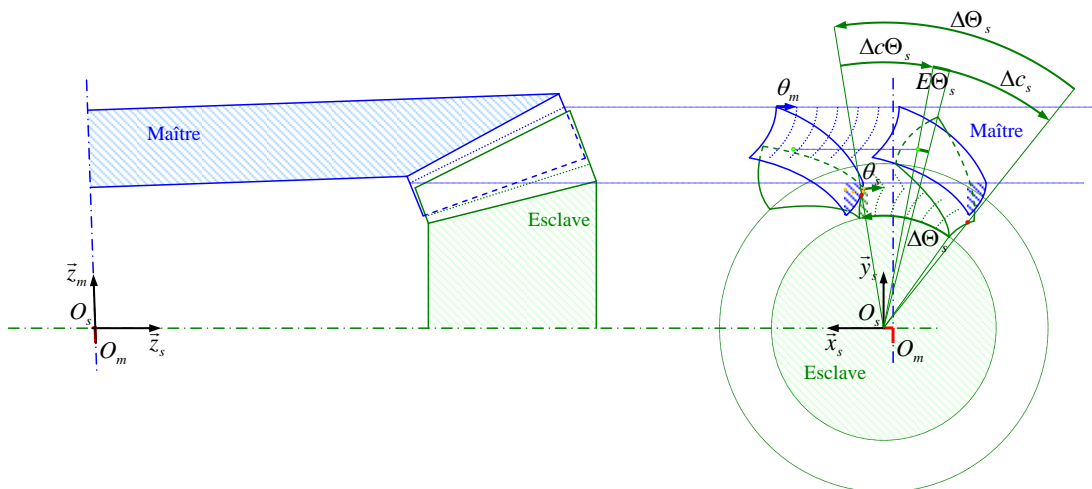


Figure 103 : Objectif tracé pour un engrènement à axes concourants.

6.3.2 Choix des variables

Le processus d'optimisation assure simultanément deux tâches. La première est la satisfaction des contraintes. Tout contact en bord de flanc est exclu lors de l'engrènement à vide sans déplacement. La seconde est l'atteinte de l'objectif. Le milieu de la portée à vide avec déplacement est au plus proche de l'emplacement visé. L'algorithme modifie la valeur des variables à la recherche de la meilleure combinaison. Quatre paramètres de génération sont retenus pour leur influence spécifique sur la position et la forme des portées.

L'angle et le rayon du profil de l'outil modifient la portée suivant la hauteur de dent. Ils sont respectivement associés à son positionnement et sa dimension. Une augmentation du rayon favorise la conformité des surfaces donc étire la portée, une réduction la resserre. Les deux paramètres sont représentés sur la Figure 104.

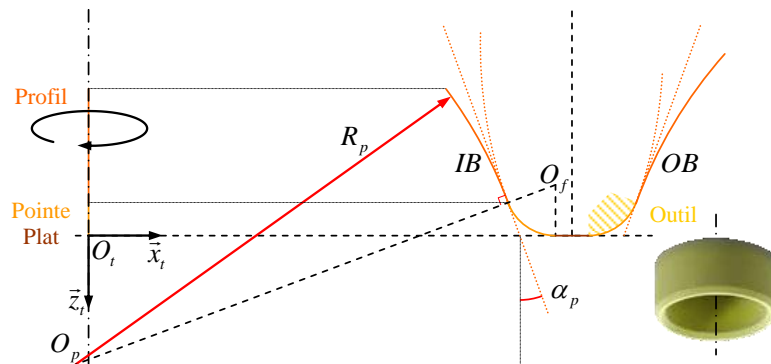


Figure 104 : Variables influant suivant la hauteur de denture.

Le réglage radial et le rayon moyen de l'outil influent suivant la largeur de denture. Le premier déplace la portée, le second l'étire ou la resserre. Ils sont notés sur la Figure 105.

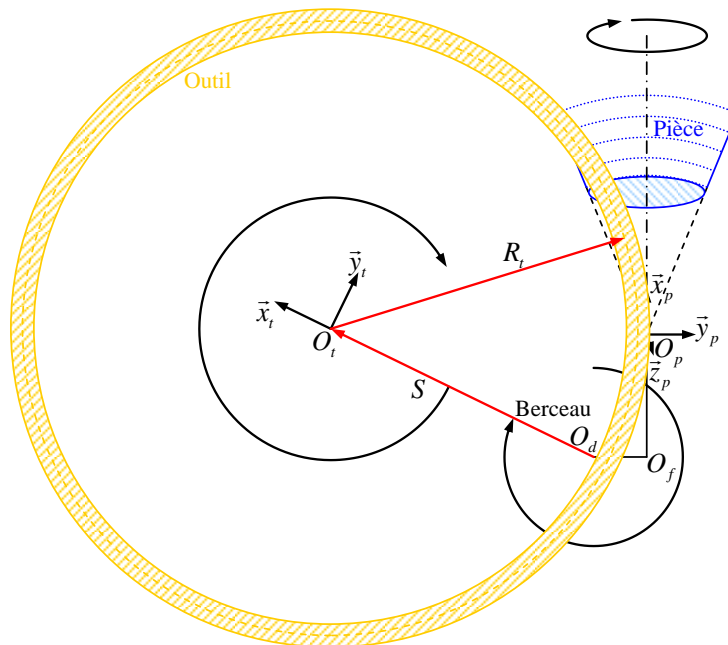


Figure 105 : Variables influant suivant la largeur de denture.

6.3.3 Exemple d'application du programme

Dans la première application proposée, on choisit de positionner la portée d'engrènement à vide avec déplacement au centre du flanc. Initialement, celle-ci est localisée sur l'arête du talon de dent. Le point de départ du processus est représenté sur la Figure 97. On bride l'amplitude de variation des quatre paramètres afin d'améliorer la stabilité de la convergence. Le résultat ci-dessous est obtenu en une heure avec un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Les contraintes violées passent progressivement de cinq à aucune, Figure 106. La valeur de la fonction objectif diminue puis se stabilise, Figure 107. Le sursaut observé est probablement dû à la discrétisation du problème. Cela peut induire une analyse de sensibilité inexacte qui contrarie passagèrement l'optimisation.

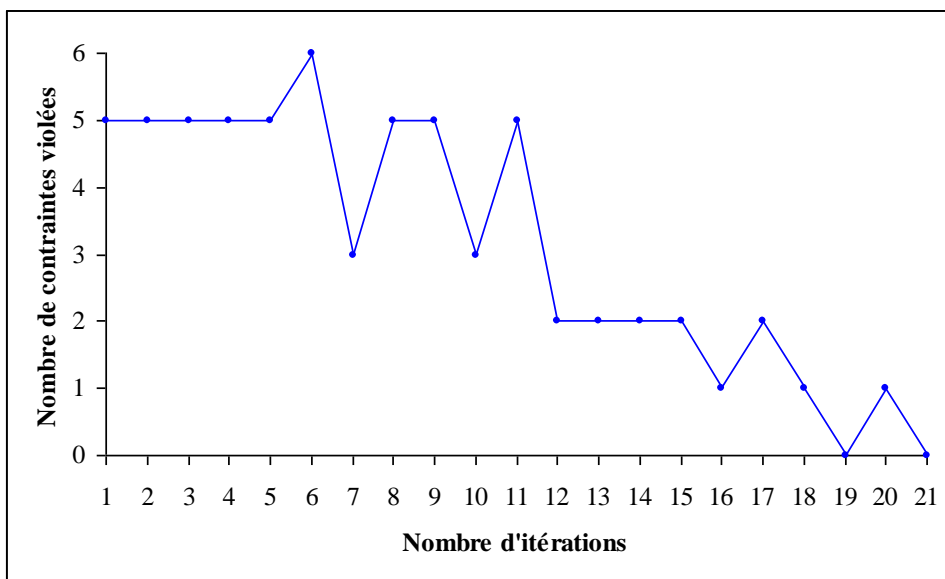


Figure 106 : Evolution du contact en bord de la portée à vide sans déplacement.

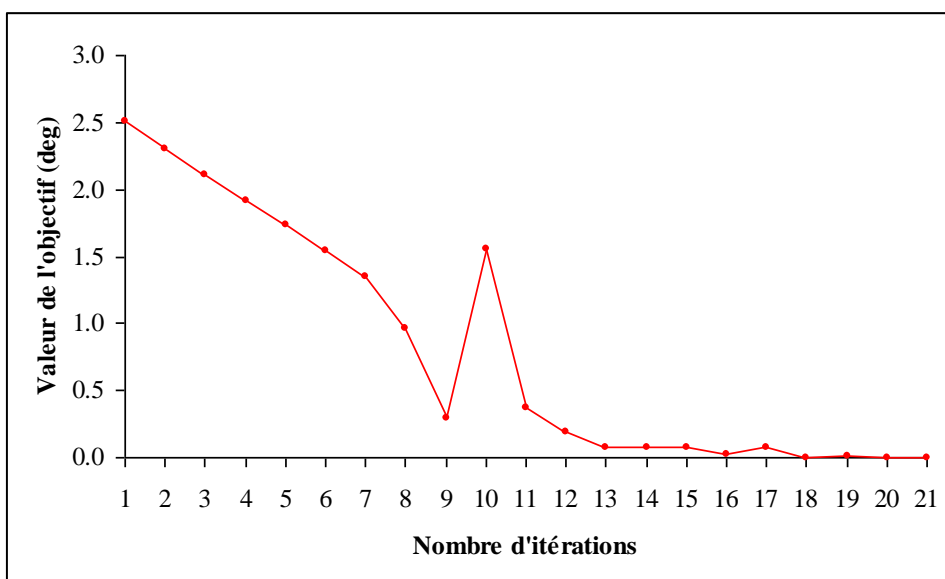


Figure 107 : Evolution du positionnement au centre de la portée avec déplacement.

Sur la Figure 108, le centre du flanc est indiqué en vert. L'ensemble des points blancs modélise la portée d'engrènement à vide sans déplacement. Il ne s'étend plus le long de l'arête de la dent. La portée avec déplacement est marquée en rouge. On constate qu'elle n'est pas parfaitement centrée dans la largeur de denture. Son rapprochement de la cible entre en conflit avec la satisfaction des contraintes. L'algorithme progresse alors difficilement et s'arrête sur un compromis. Une modélisation plus précise du problème et une meilleure maîtrise des options du module d'optimisation peuvent améliorer le résultat. Les valeurs des variables après positionnement sont listées dans le Tableau 8. Le réglage radial présente la plus ample modification. En effet, les portées sont principalement déplacées suivant la largeur de denture.

Pièce	PINION	
Flanc de la dent	CONCAV	
Diamètre moyen de l'outil	140.959	mm
Angle de profil actif	19.82	deg
Rayon de profil actif	399.995	mm
Réglage radial	68.459	mm

Tableau 8 : Valeurs des variables après positionnement au centre.

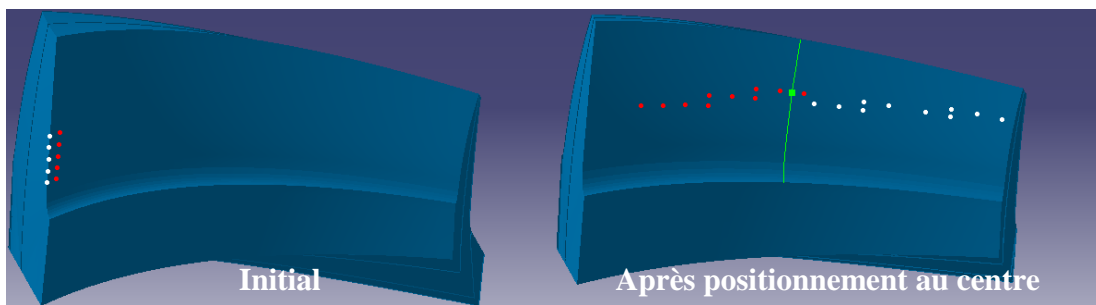


Figure 108 : Portées à vide avant et après positionnement au centre.

Une analyse des caractéristiques fonctionnelles de l'engrènement est développée à partir des résultats mis en forme dans les prochaines figures. L'erreur de transmission cinématique est tracée sur la Figure 109 pour une phase d'engrènement égale à trois pas de dent. Il s'agit de l'écart de la position angulaire de la roue par rapport à celle du pignon pondérée du rapport de réduction. Son amplitude entre intersections et sommets des paraboles vaut environ 0.0094 degrés. La Figure 110 représente l'effort repris par chaque dent engrenée en différentes positions d'engrènement. Ce motif est répété périodiquement à un pas de dent d'intervalle. L'évolution de la charge sur la dent en approche est tracée en jaune. Le rouge est pour la dent en milieu d'engrènement, l'orange pour la dent en retrait. On remarque une phase pendant laquelle les trois dents sont sollicitées simultanément. Le triple contact apparaît clairement sur la Figure 112 pour les temps 3, 4 et 5. Le rapport de conduite sous charge de l'engrènement est donc supérieur à 2 dents. L'enfoncement au contact des flancs et la flexion des dents favorisent la répartition de l'effort à transmettre. La Figure 111 montre la portée en charge avec déplacement sur les flancs de la roue et du pignon. Celle-ci s'étale amplement mais aucun pic de pression n'est observé sur les arêtes.

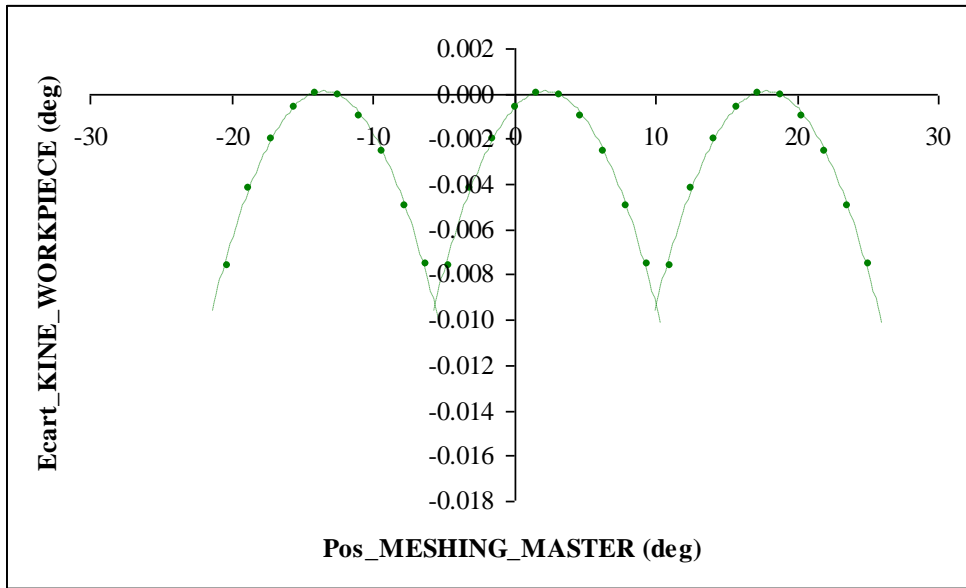


Figure 109 : Erreur de transmission cinématique avec déplacement.

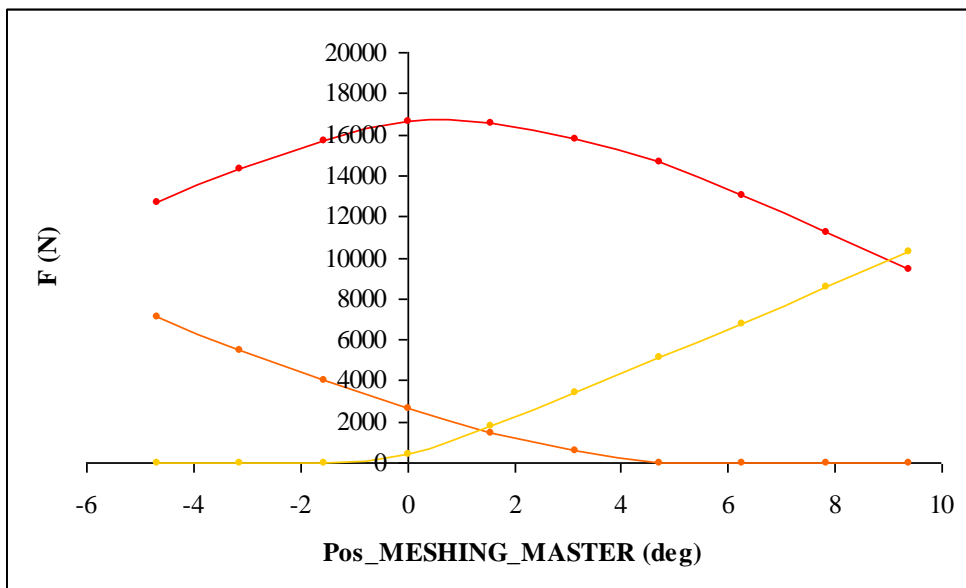


Figure 110 : Partage de charge avec déplacement.

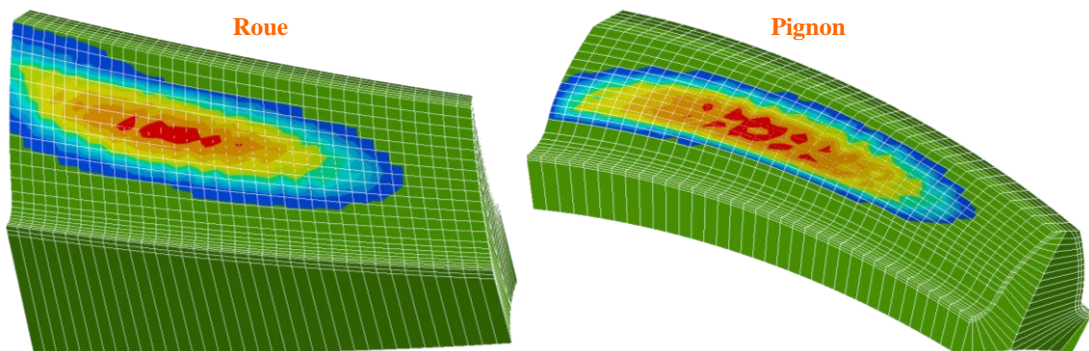


Figure 111 : Portée sous charge avec déplacement.

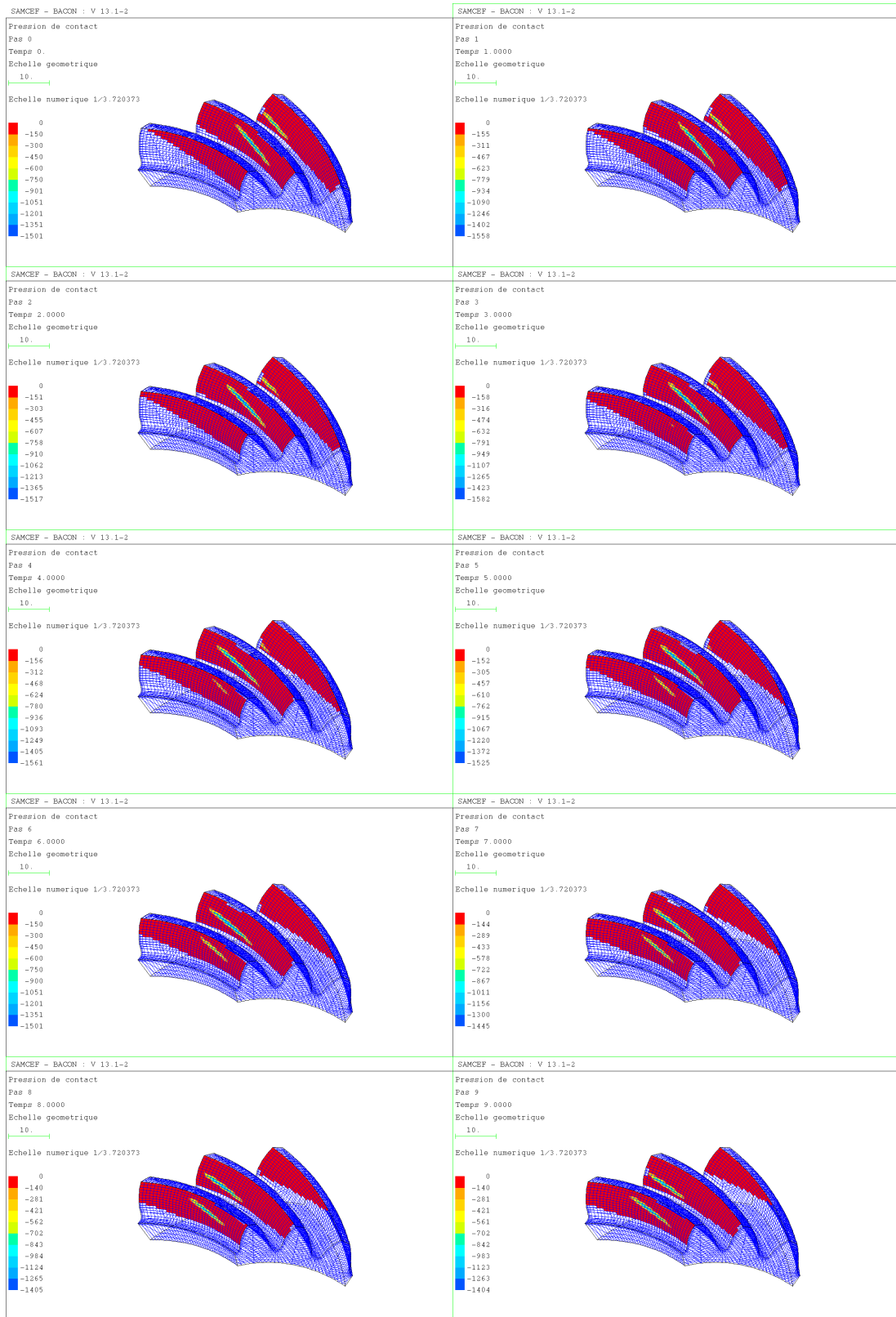


Figure 112 : Engrenement sous charge avec déplacement.

Les Figures 110, 111, 112 sont le fruit d'un post-traitement du résultat par la méthode des éléments finis avec le modèle simplifié présenté dans le cinquième chapitre. Elles aident à mesurer la validité du résultat directement obtenu après optimisation à vide.

On propose une seconde application pour un positionnement de la portée d'engrènement en tête et talon de dent du pignon. Le point de départ est identique à celui de l'exercice précédent. Le processus est stoppé manuellement après avoir travaillé durant une nuit, soit environ sept heures. La Figure 113 montre que toutes les contraintes sont progressivement satisfaites. L'une des fonctions contrainte est ponctuellement activée. En effet, la Figure 114 révèle un effleurement de la portée à vide sans déplacement blanche en bord de tête du flanc. Avec la Figure 113, on constate que la fonction objectif converge. L'instabilité du début découle des sursauts du nombre de contraintes violées. Le milieu de la portée à vide avec déplacement rouge atteint quasiment la cible verte, Figure 114. Le Tableau 9 détaille les valeurs des variables modifiées.

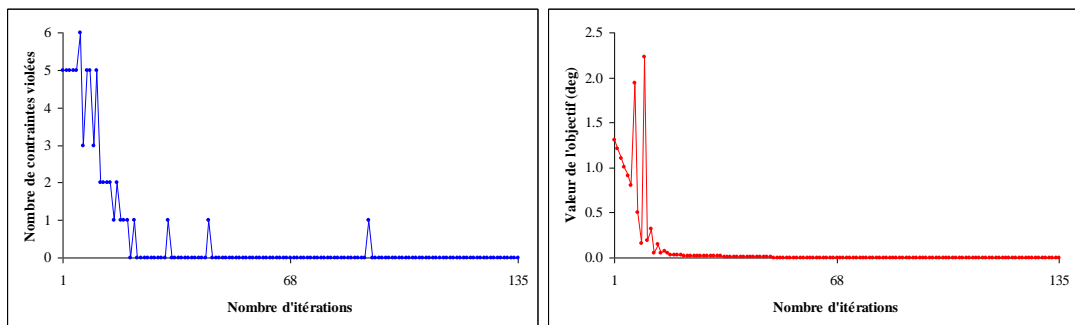


Figure 113 : Evolution du processus de positionnement des portées d'engrènement.

Pièce	PINION	
Flanc de la dent	CONCAV	
Diamètre moyen de l'outil	140.717	mm
Angle de profil actif	19.046	deg
Rayon de profil actif	399.896	mm
Réglage radial	68.369	mm

Tableau 9 : Valeurs des variables après positionnement au talon.

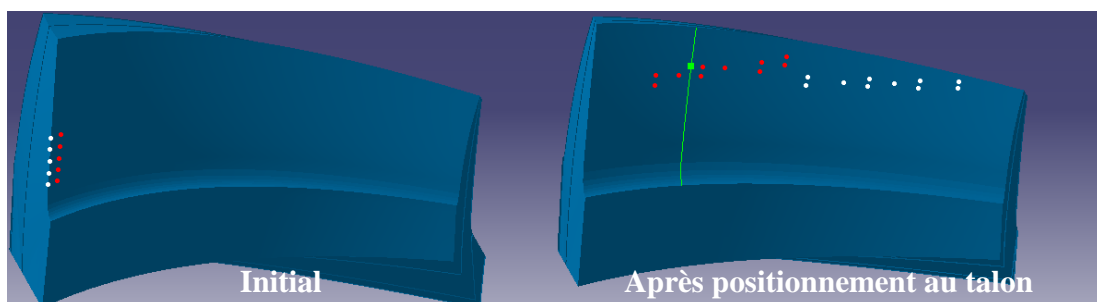


Figure 114 : Portées à vide avant et après positionnement au talon.

L'amplitude de l'erreur de transmission cinématique relevée sur la Figure 115 est de 0.0093 degrés. L'allure de la courbe est très proche de celle tracée dans l'application précédente. La Figure 116 montre qu'il en est de même pour l'évolution de la répartition de l'effort transmis. On observe des pics de pression en tête de dent du pignon sur la Figure 117. L'ellipse de contact est effectivement tronquée par l'arête de tête en plusieurs positions d'engrènement, Figure 118.

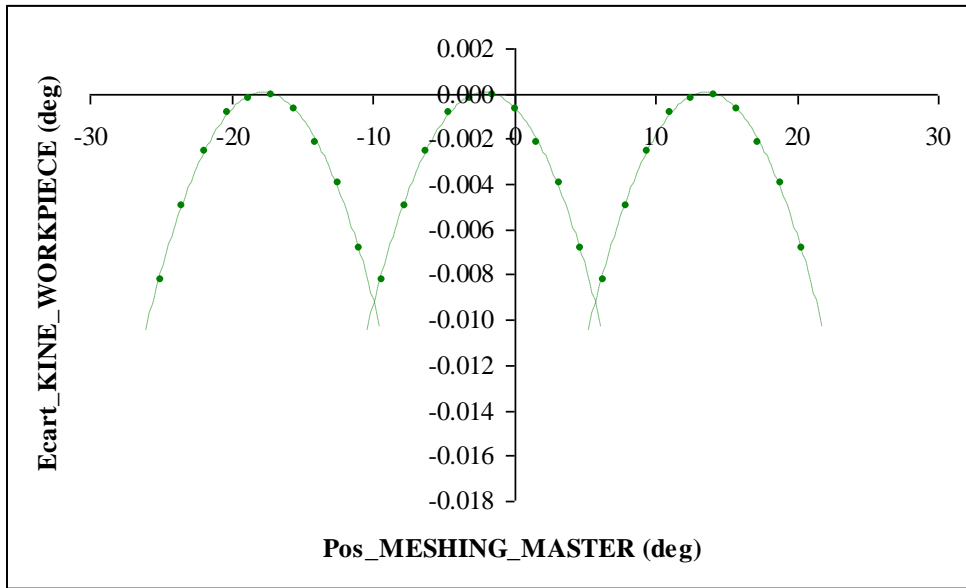


Figure 115 : Erreur de transmission cinématique avec déplacement.

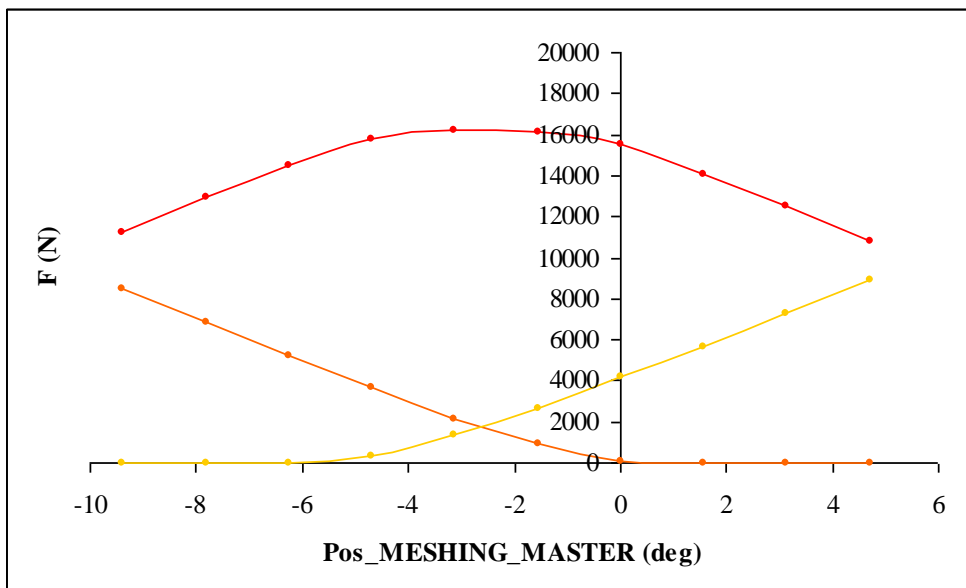


Figure 116 : Partage de charge avec déplacement.

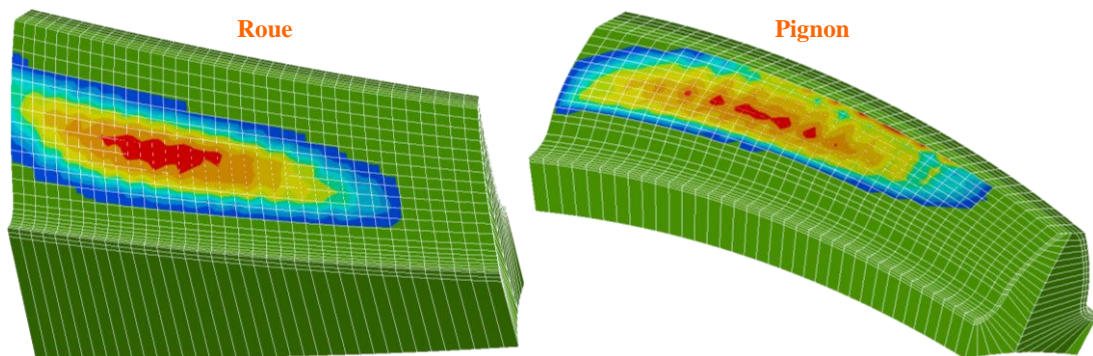


Figure 117 : Portée sous charge avec déplacement.

Avec la Figure 117 et la Figure 118, on réalise que la portée à vide avec déplacement doit se situer loin des bords. Il faut éviter que l'écrasement des flancs en contact ne s'étende sur une arête. Une marge en bord de flanc permettrait probablement de parer au problème.

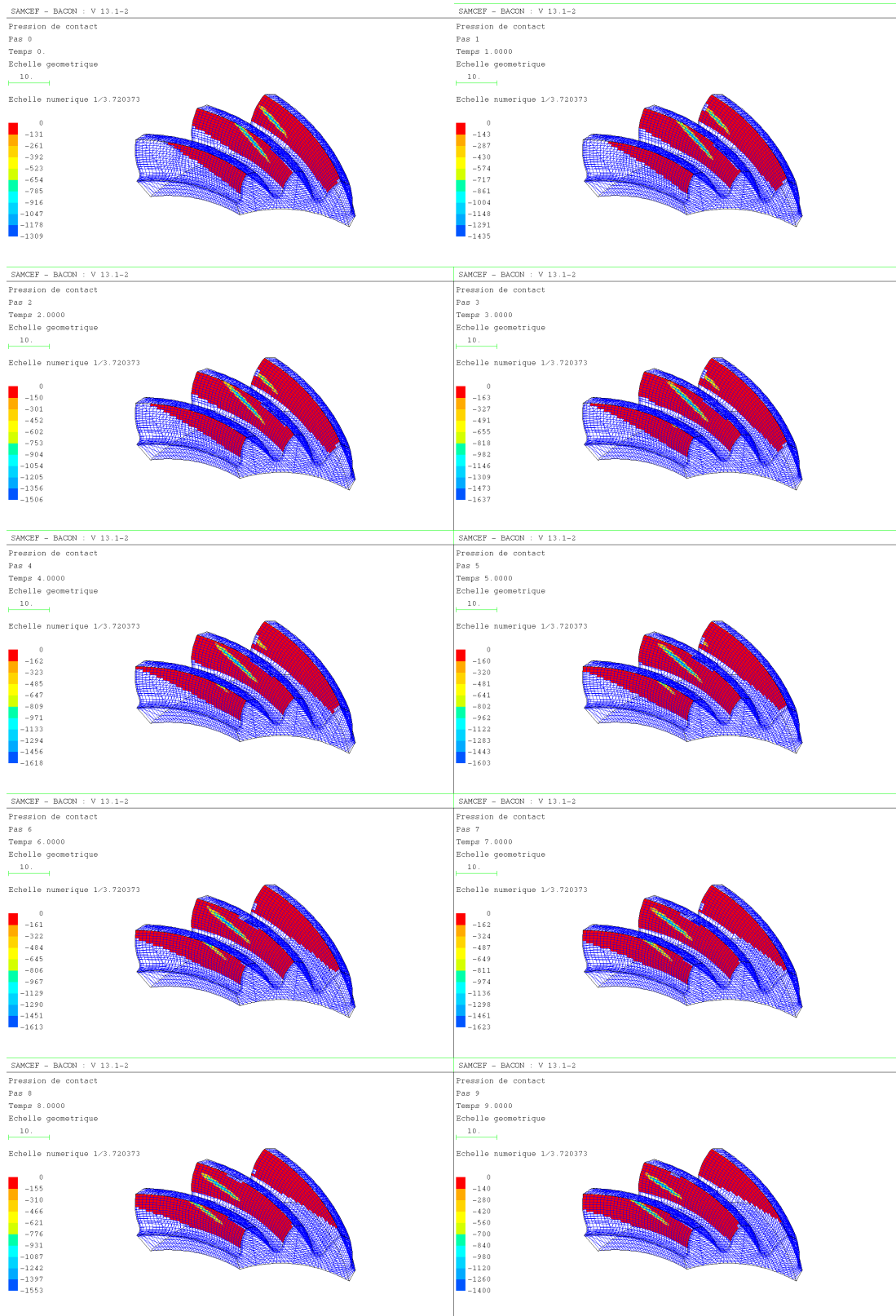


Figure 118 : Engrenement sous charge avec déplacement.

6.4 Minimisation de la pression de contact maximale

6.4.1 Processus de correction manuelle

Avant que la simulation de l'engrènement ne soit maîtrisée, les topographies de flancs de dentures spiroconiques sont corrigées par essai-erreur. Les pièces de l'engrenage sont donc fabriquées et assemblées. Un essai d'engrènement à vide puis sous charge permet d'analyser la localisation réelle des portées. Si le résultat n'est pas satisfaisant, alors la surface du flanc actif du pignon ou de la roue est ré-usinée après modification des réglages de la machine-outil. Le cycle est ainsi réitéré. L'ajustement des paramètres d'usinage repose sur un savoir-faire empirique. Le processus est long et coûteux. Il ne s'agit pas véritablement d'une optimisation du comportement de l'engrenage mais plutôt d'une correction de la topographie du flanc afin d'éloigner la portée des arêtes. Les progrès en électronique, informatique et analyse numérique rendent possible une simulation des portées d'engrènement à vide et sous charge. L'approximation du positionnement des portées réduit le nombre d'essais nécessaires. Les réglages de la machine-outil sont variés. Leur manipulation n'est pas intuitive. On préfère donc modéliser directement la surface du flanc. Celle-ci est alors représentée par une grille aux nœuds de laquelle sont imposés des écarts de topographie. Elle est mise à jour par une régression linéaire de plusieurs paramètres d'usinage. Cependant, son ajustement est généralement inexact. Il est même parfois impossible. En effet, le procédé de fabrication exploité ne permet pas d'obtenir n'importe quelle surface de denture. De plus, la simulation d'usinage repose sur la modélisation d'une machine-outil à commande mécanique obsolète dont la cinématique est moins souple que celle des machines à commande numérique actuelles.

Le processus de correction manuelle des portées d'engrènement est schématisé par la Figure 119. Il est opéré sur un logiciel codé en FORTRAN dont le développement est initié par *Madrosky* en 1987 puis prolongé par *Icard* en 2005. Les paramètres géométriques de la denture et les réglages initiaux de la machine-outil sont donnés. L'opérateur lance la simulation de l'engrènement à vide sans déplacement. Il visualise la localisation de la portée sur les flancs du pignon et de la roue. Si celle-ci touche un bord, alors la topographie d'un flanc doit être corrigée. Les variables sont alors mises à jour. L'opérateur vérifie la nouvelle position de la portée. Il cesse le cycle si celle-ci ne touche pas un bord. Ensuite, il exécute la simulation de l'engrènement sous charge avec déplacement et examine la portée. Aucune zone de contact ne doit porter sur une arête. La valeur maximale de la pression de contact doit être inférieure à un critère empirique. En outre, elle est la plus faible possible. Si la condition n'est pas respectée ou qu'un minimum n'est pas atteint, l'opérateur modifie manuellement la topographie du flanc. Les variables sont mises à jour. Il faut alors vérifier que les portées d'engrènement à vide sans déplacement et sous charge avec déplacements ne débordent pas des flancs et que le critère n'est pas violé. Il faut aussi réduire la pression de contact. La boucle est réitérée jusqu'à converger sur une solution satisfaisante. L'amélioration du comportement de l'engrenage repose sur un savoir-faire empirique.

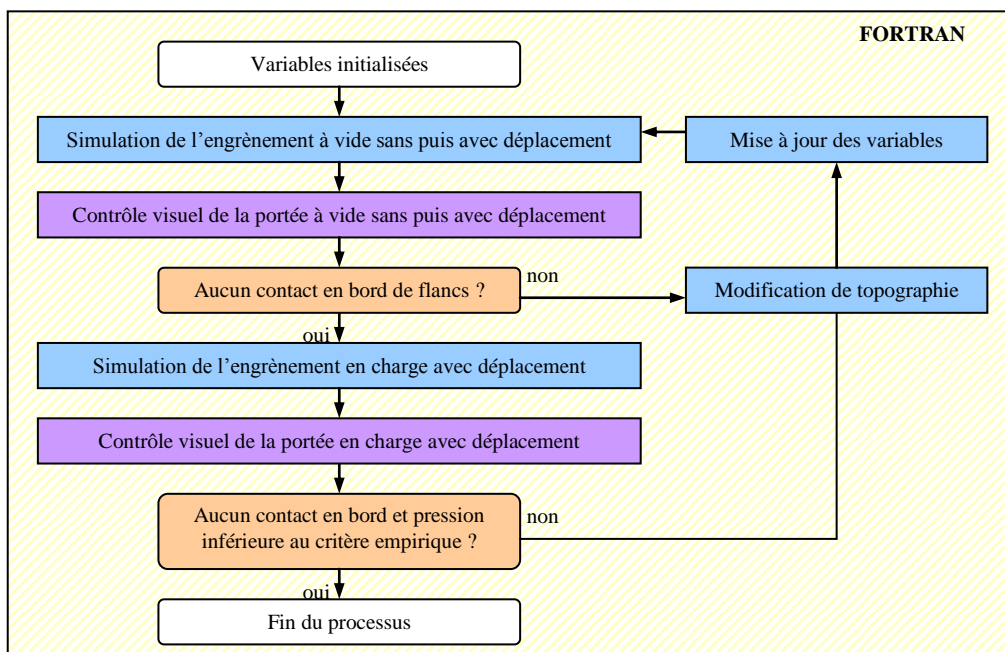


Figure 119 : Processus de correction manuelle de la topographie d'un flanc.

Après correction de la topographie, l'engrenage est testé sur un banc d'essai. Selon son comportement, une nouvelle correction peut s'avérer nécessaire. Le cas analysé au second cinquième en est l'exemple. Il s'agit de l'itération N. Une itération N + 1 est réalisée en raison des marques observées en tête de dent du pignon et pied de dent de la roue. Le Tableau 10 révèle la modification de quatorze paramètres.

Correction du flanc concave du pignon	Itération N	Itération N + 1	
Diamètre moyen de l'outil	143.013	142.72	mm
Largeur entre pointes	1	1	mm
Angle de profil actif	19.225	20.051	deg
Rayon de profil actif	392.872	394.65	mm
Rayon d'arête actif	0.76	0.76	mm
Angle initial de berceau	60.891	60.846	deg
Angle d'inclinaison	0	0	deg
Angle de pivotement	0	0	deg
Angle de pied	35.717	35.717	deg
Réglage radial	68.646	68.331	mm
Réglage centre machine / centre berceau	-0.479	-0.83	mm
Réglage base coulissante	-0.937	-1.212	mm
Réglage centre machine / sommet cône primitif	-1.348	-0.877	mm
Coefficient Roulement Modifié R1	0.639404	0.640426	
Coefficient Roulement Modifié R2	-0.005814	-0.010066	
Coefficient Roulement Modifié R3	0.000598	0.000764	
Coefficient Roulement Modifié R4	-0.000997	-0.001740	
Coefficient Roulement Modifié R5	0.000023	0.000126	
Coefficient Roulement Modifié R6	-0.000168	-0.000298	

Tableau 10 : Valeurs des paramètres pour les deux corrections effectuées.

Les marques témoignent d'une plastification du matériau. Celle-ci résulte d'une forte pression de contact. Le programme FORTRAN ne simule pas clairement le problème. Malgré cela, l'opérateur doit éloigner les portées de l'arête sans trop accroître la pression maximale estimée. La Figure 120 confirme le déplacement des portées. La Figure 123 montre la

disparition des pics de pression. Cependant, on remarque une augmentation de l'erreur de transmission cinématique avec la Figure 121. Une dégradation du partage de charge est avérée sur la Figure 122. Le rapport de conduite sous charge tombe quasiment à 2 dents.

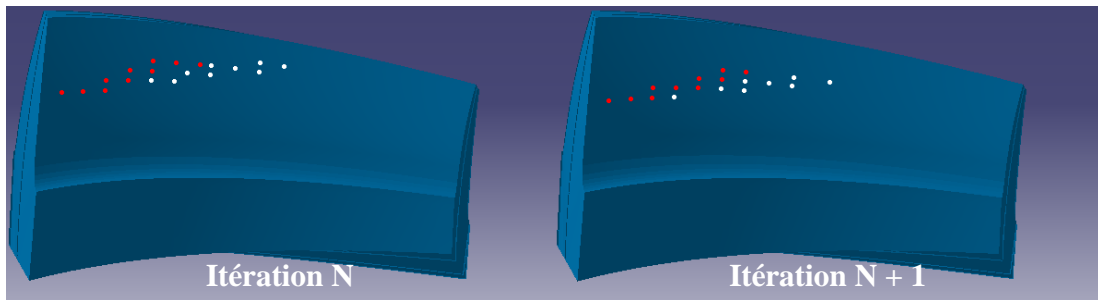


Figure 120 : Portées à vide pour les deux corrections effectuées.

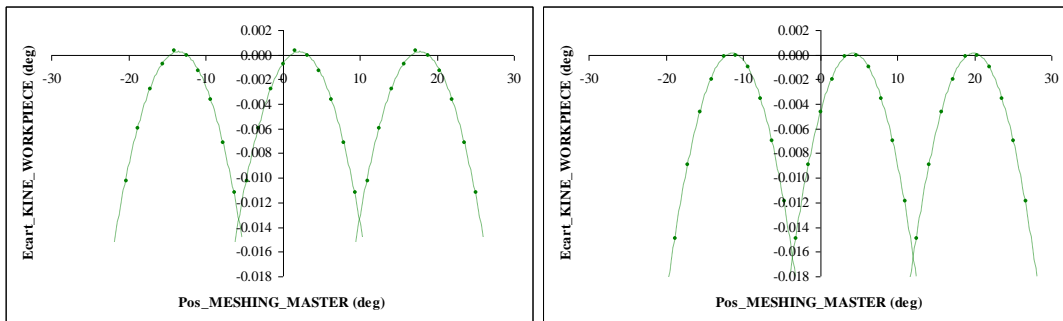


Figure 121 : Erreur de transmission cinématique avec déplacement pour N et N + 1.

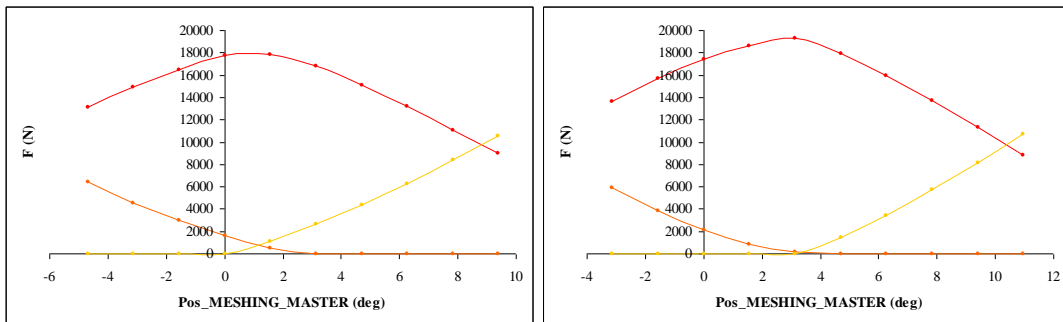


Figure 122 : Partage de charge avec déplacement pour N et N + 1.

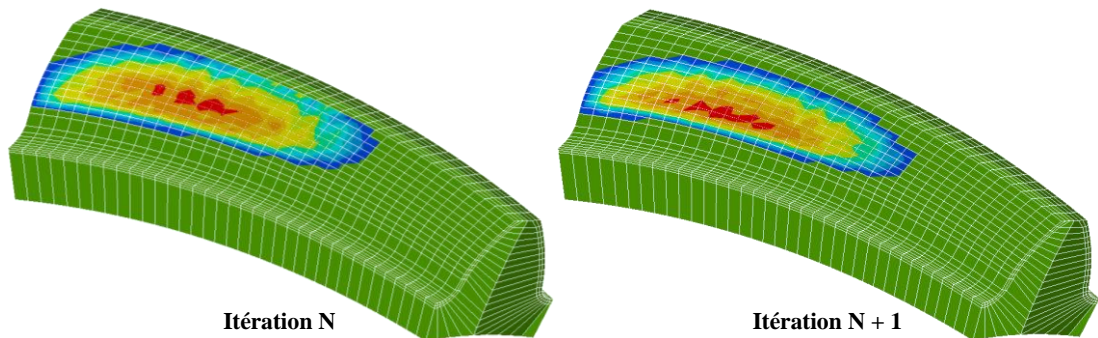


Figure 123 : Portée sous charge avec déplacement coté pignon pour N et N + 1.

Les valeurs des pressions de contact calculées sont inexactes. Cela n'empêche pas de les comparer à modèles équivalents. Ainsi, la Figure 124 donne des pressions globalement supérieures à celles de l'itération N présentées dans le cinquième chapitre.

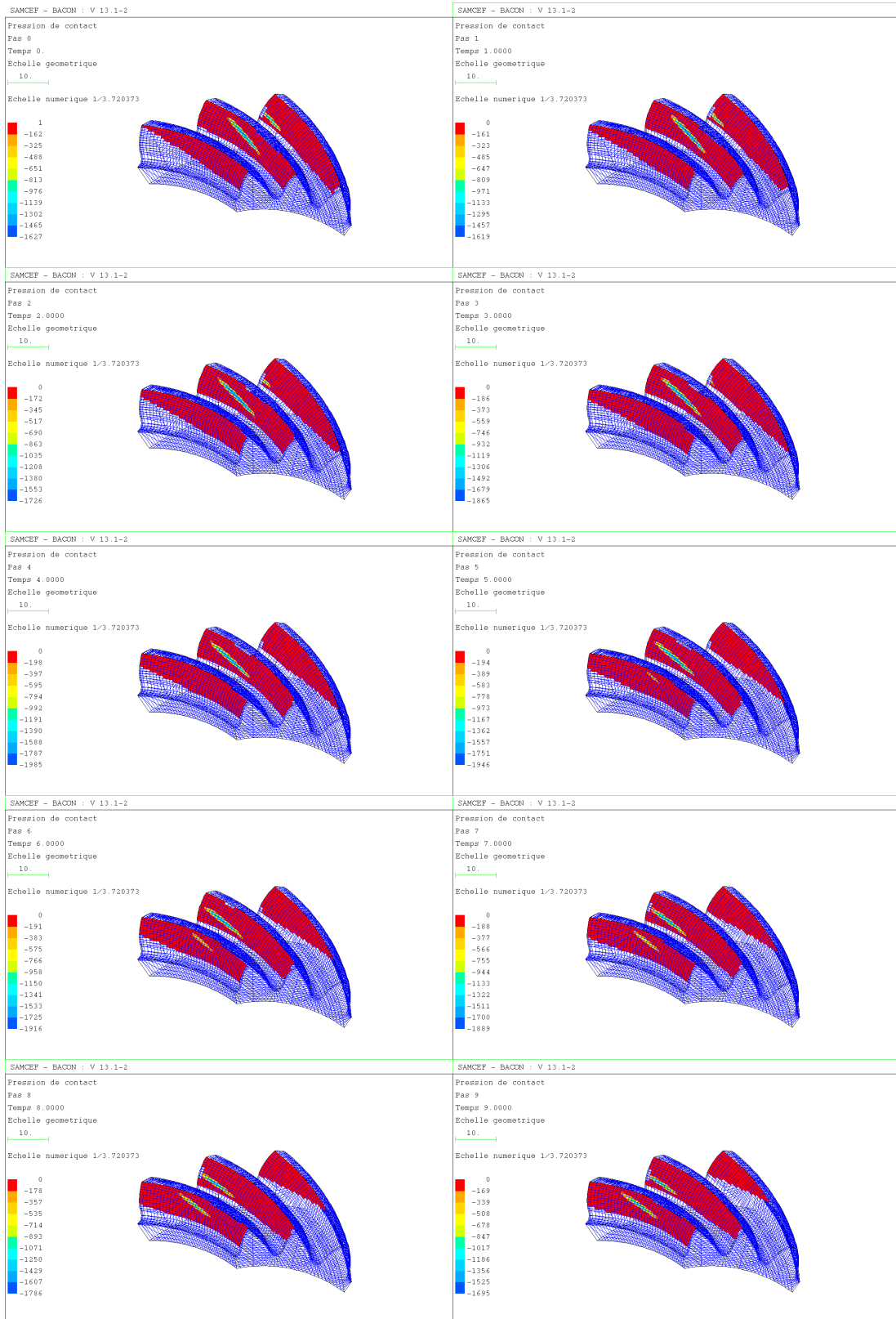


Figure 124 : Engrenement sous charge avec déplacement pour N + 1.

6.4.2 Processus d'optimisation automatique

L'efficacité du processus de correction manuelle est tributaire de l'expérience de l'opérateur. Celle-ci s'acquiert patiemment au fil des itérations. Elle forge la perception de l'effet d'une variation de topographie sur la forme et la position des portées. L'apprentissage est long et coûteux. Il passe par le traitement de divers cas de correction de denture. Les premières réalisations peuvent pâtir du manque de savoir-faire. Les pratiques doivent être révisées à chaque étude inédite. Plus ennuyeux, l'opérateur perçoit difficilement le lien entre forme de surface et erreur de transmission. Il ne se rend pas compte de son action sur le partage de charge. Il ne lui est donc pas évident de minimiser la pression de contact. En effet, celle-ci dépend à la fois du nombre de dents simultanément engrenées et de l'étalement local des zones de contact. Dans l'application précédente, l'opérateur ne parvient pas à éloigner les portées du bord sans dégrader le partage de charge.

La gestion manuelle du problème d'optimisation est extrêmement complexe. Le travail est répétitif. Un processus automatique permet de remplacer la perception humaine par une approche déterministe. Il est schématisé par la Figure 125. La méthode repose donc sur une analyse de la sensibilité du résultat à la perturbation de chaque variable. Celles-ci sont en nombre restreint afin de limiter la durée de l'opération et d'alléger ainsi la phase de développement de la méthode. On choisit les six coefficients de l'équation du roulement modifié présentés dans le quatrième chapitre. Ces paramètres ont des ordres de grandeur équivalents. Ils permettent une manipulation minutieuse des portées. Ils agissent notamment sur la topographie en périphérie de flanc.

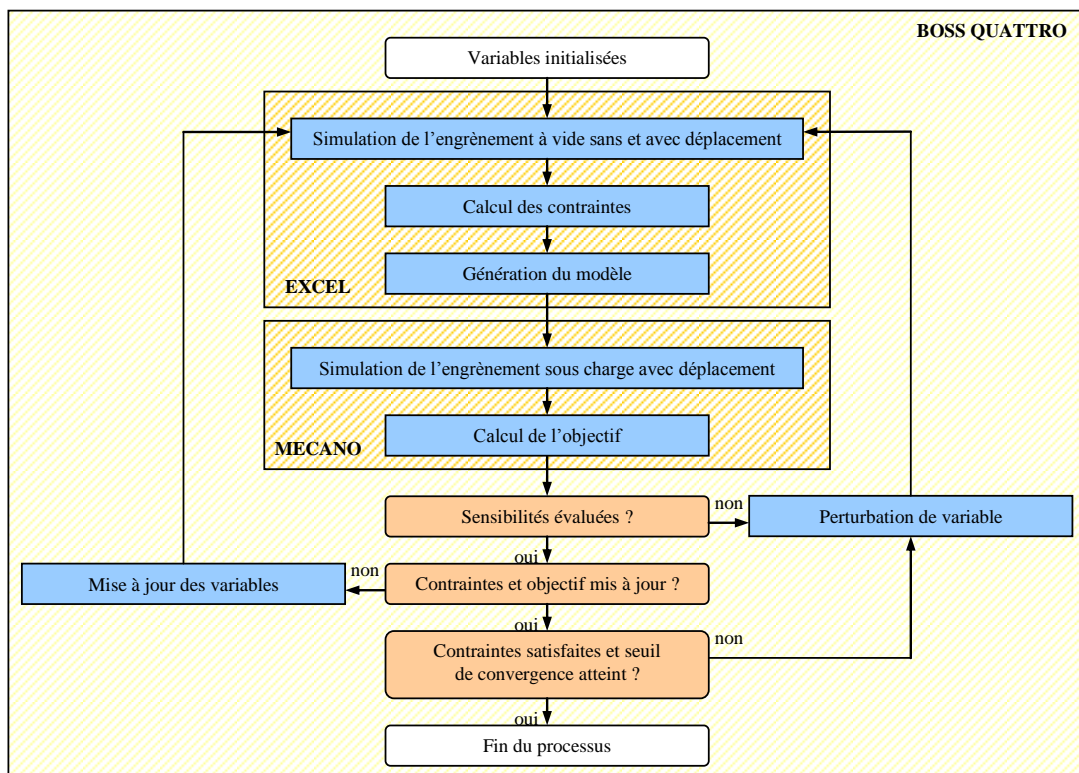


Figure 125 : Processus d'optimisation automatique sous charge des dentures.

Les contraintes du problème d'optimisation sont détaillées dans la seconde partie du chapitre. On considère ici les extrémités des portées d'engrènement à vide sans et avec déplacement. Celles-ci ne doivent pas se situer en bord de flanc. L'objectif est le minimum de la pression de contact maximale de la portée sous charge. La modélisation de l'engrènement sous charge est exposée en fin du cinquième chapitre.

Le processus est piloté par le gestionnaire d'applications BOSS QUATTRO. Ce dernier gère les études paramétriques, l'optimisation multidisciplinaire, l'analyse *Monte Carlo*, les plans d'expérience. Il est développé par la société *Samtech*. Les valeurs initiales des variables sont importées d'un programme de pré-dimensionnement ou d'une étude antérieure. Le module d'optimisation démarre EXCEL puis exécute la macro qui simule l'engrènement à vide sans et avec déplacement, évalue les fonctions contrainte et prépare le modèle d'engrènement sous charge avec déplacement. Il lance alors sous MECANO le script qui simule le comportement sous charge du mécanisme par la méthode des éléments finis à partir des maillages des dentures et des positions d'engrènement fournis par la macro EXCEL. Il lit les valeurs des fonctions contrainte et objectif. Les variables sont tour à tour perturbées pour évaluer leur influence sur le résultat et estimer ainsi une combinaison de valeurs qui va dans le sens d'une amélioration. Elles sont ensuite mises à jour, de même que les contraintes et l'objectif. La boucle est répétée jusqu'à satisfaction de toutes les contraintes et atteinte du seuil de convergence de l'objectif.

Cette nouvelle approche ne sollicite plus l'intuition de l'opérateur. Elle ne requiert donc pas un long apprentissage. L'application traite chaque problème d'optimisation sans a priori. Ainsi, elle privilégie naturellement une amélioration du partage de charge à un étalement de la portée d'engrènement. Tout cas inédit est géré de façon totalement objective. L'automatisation permet d'exécuter le processus en temps masqué.

6.4.3 Cas d'application du programme

Le processus d'optimisation automatique est mis à l'épreuve avec l'engrenage précédemment traité. On part des valeurs de réglage issues du centrage de la portée d'engrènement à vide avec déplacement. Les résultats sont donc comparés à ceux de la configuration initiale ainsi qu'à ceux obtenus par correction manuelle de la topographie du flanc actif du pignon. Le processus tourne de nuit sur un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Il est stoppé manuellement à la vingt neuvième itération après environ sept heures de travail. Aucune erreur n'est générée durant l'exécution des divers modules. Ceux-ci tolèrent parfaitement la grande variété de configurations évaluées. Cela confirme la robustesse des algorithmes employés.

La progression du processus peut être analysée avec la Figure 126. L'évolution du nombre de contraintes violées est tracée en bleu. Son allure chaotique reflète une importante sensibilité du positionnement des portées d'engrènement à la variabilité des paramètres. Cette instabilité bouscule l'évolution de la fonction objectif du problème d'optimisation. Elle implique la

discontinuité de la convergence observée sur le graphe rouge. Ce comportement erratique découle également de la discrétisation du modèle. Les brusques sursauts de pression sont dus au contact en bord de flanc. Ils coïncident généralement avec de fortes violations de contraintes. Néanmoins, la tendance globale correspond à une réduction de la pression de contact maximale. L'algorithme ne trouve pas un minimum mais il diminue progressivement la valeur de la fonction objectif. On retient la combinaison de valeurs des variables qui donne le meilleur résultat. Celui-ci est obtenu à la vingt et unième itération. Toutes les contraintes sont alors satisfaites et la valeur de la fonction objectif est au plus bas. Sur la Figure 127, on constate que les portées à vide ne touchent aucun bord. En blanc, la portée sans déplacement est resserrée vers la pointe de dent. En rouge, la portée avec déplacement ne bouge pas. Le Tableau 11 liste les valeurs des variables modifiées.

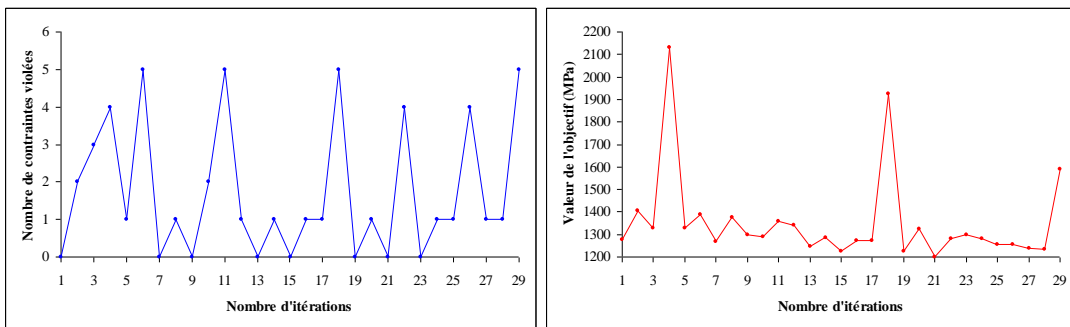


Figure 126 : Evolution du processus de minimisation de la pression de contact.

Pièce	PINION
Flanc de la dent	CONCAV
Coefficient Roulement Modifié R1	0.640054
Coefficient Roulement Modifié R2	-0.005219
Coefficient Roulement Modifié R3	-0.001244
Coefficient Roulement Modifié R4	-0.000292
Coefficient Roulement Modifié R5	-0.001435
Coefficient Roulement Modifié R6	0.000445

Tableau 11 : Valeurs des variables après minimisation de la pression de contact.

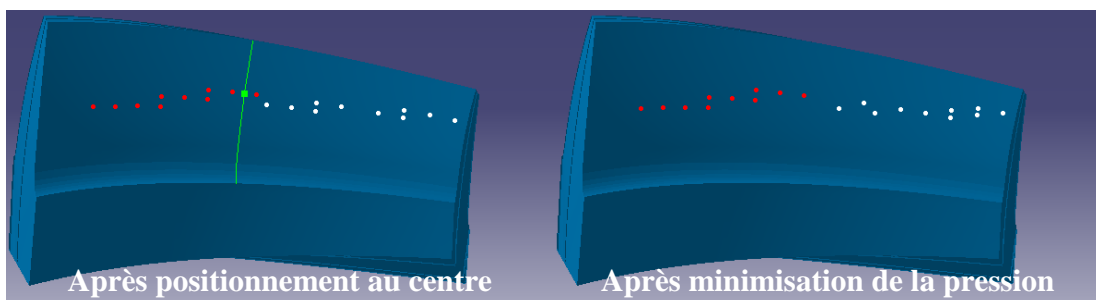


Figure 127 : Portées à vide avant et après minimisation de la pression de contact.

Un modèle en éléments finis des dentures avec de larges mailles favorise la rapidité de simulation de l'engrènement sous charge. Les valeurs de pression de contact calculées sont assurément fausses. Cependant, leur analyse relative pour des modèles identiques est valable.

La Figure 128 présente le résultat obtenu avant et après optimisation. Le processus automatique réduit la pression maximale de 77 MPa.

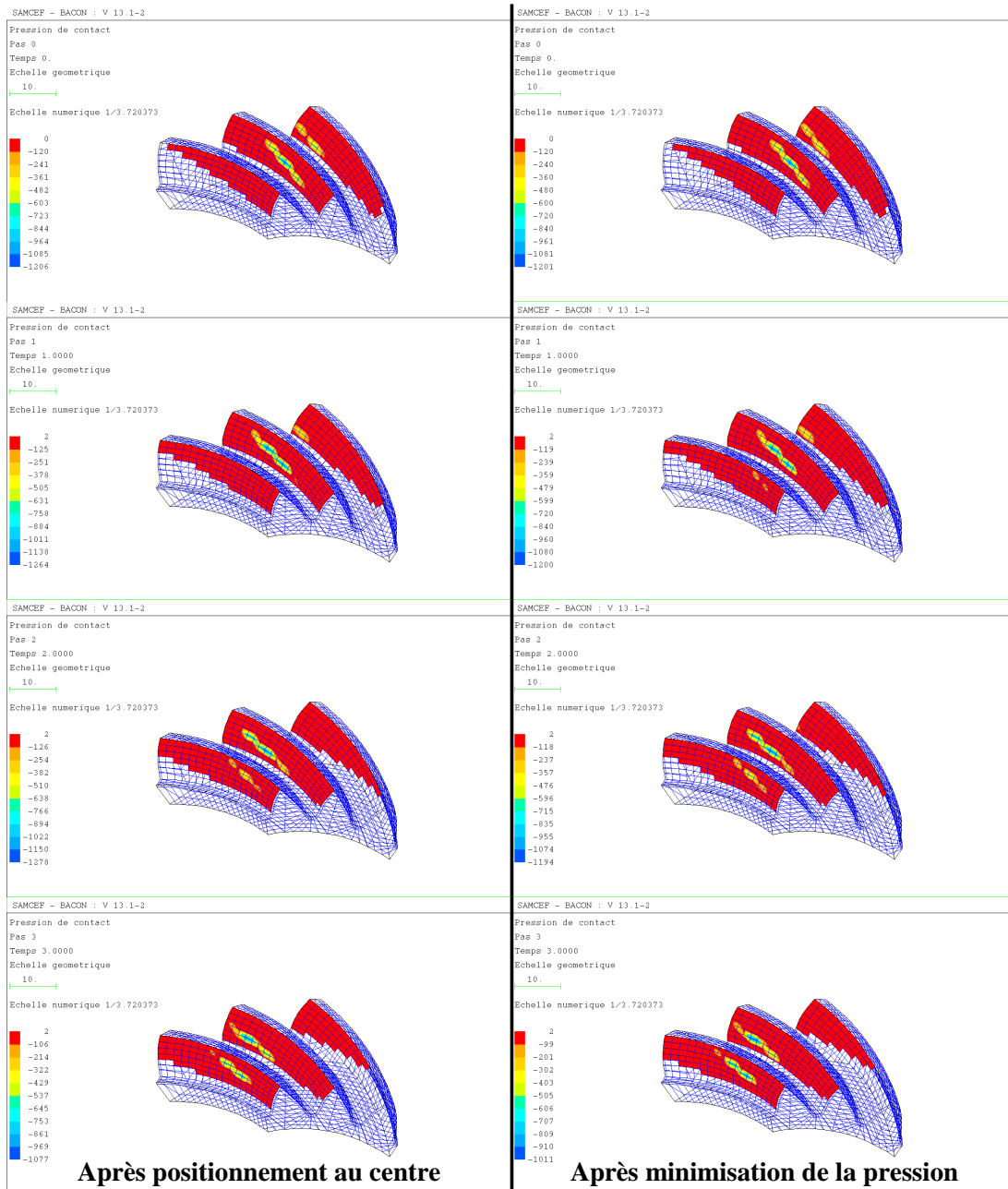


Figure 128 : Pressions de contact avant et après minimisation.

La discrétisation du modèle est grossière. Seule quatre positions d'engrènement sont simulées. Dans de telles conditions, minimiser la charge ou la pression est comparable. Cette dernière option assure une évaluation du contact en bord. La Figure 131 ne révèle ainsi aucun pic de pression. Sur la Figure 130, on constate une amélioration du partage de charge. Pourtant, la position et la forme de la portée restent presque inchangées. Cette manœuvre est donc irréalisable manuellement puisque l'opérateur n'est aiguillé que par ces dernières. On remarque également une diminution de l'erreur de transmission cinématique, Figure 129.

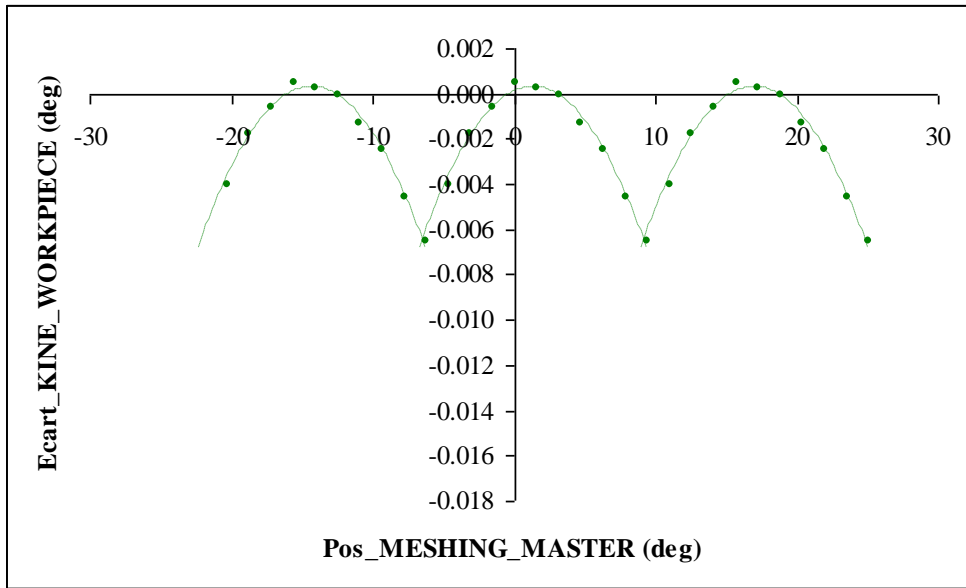


Figure 129 : Erreur de transmission cinématique avec déplacement.

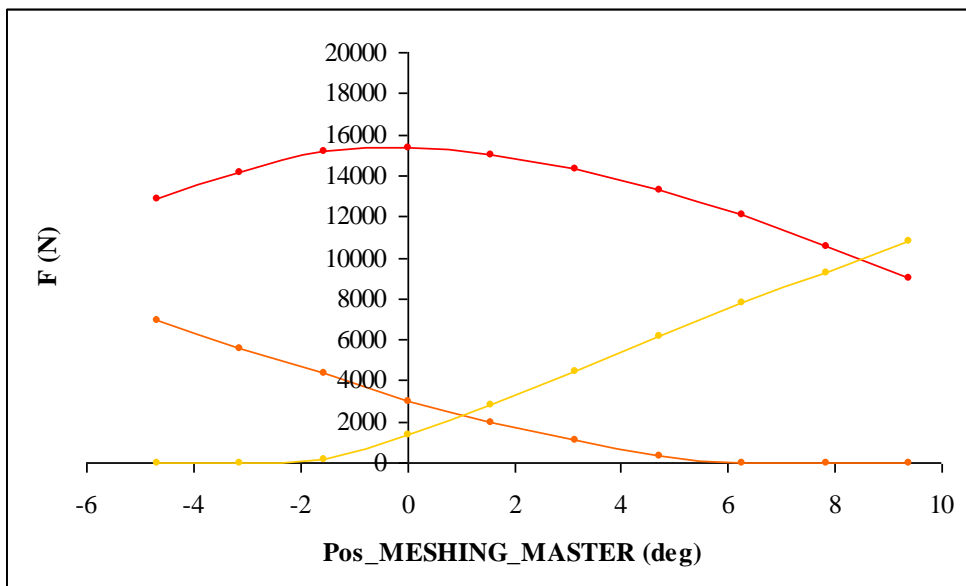


Figure 130 : Partage de charge avec déplacement.

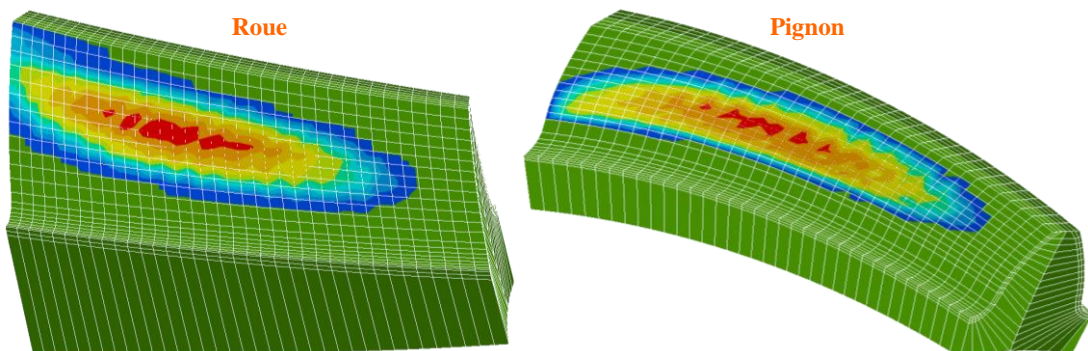


Figure 131 : Portée sous charge avec déplacement.

La Figure 132 est le résultat d'une modélisation de l'engrènement équivalente à celle des autres cas d'application exposés dans ce mémoire. La comparaison du résultat avec celui du processus de correction manuelle montre tout le potentiel de la méthode proposée.

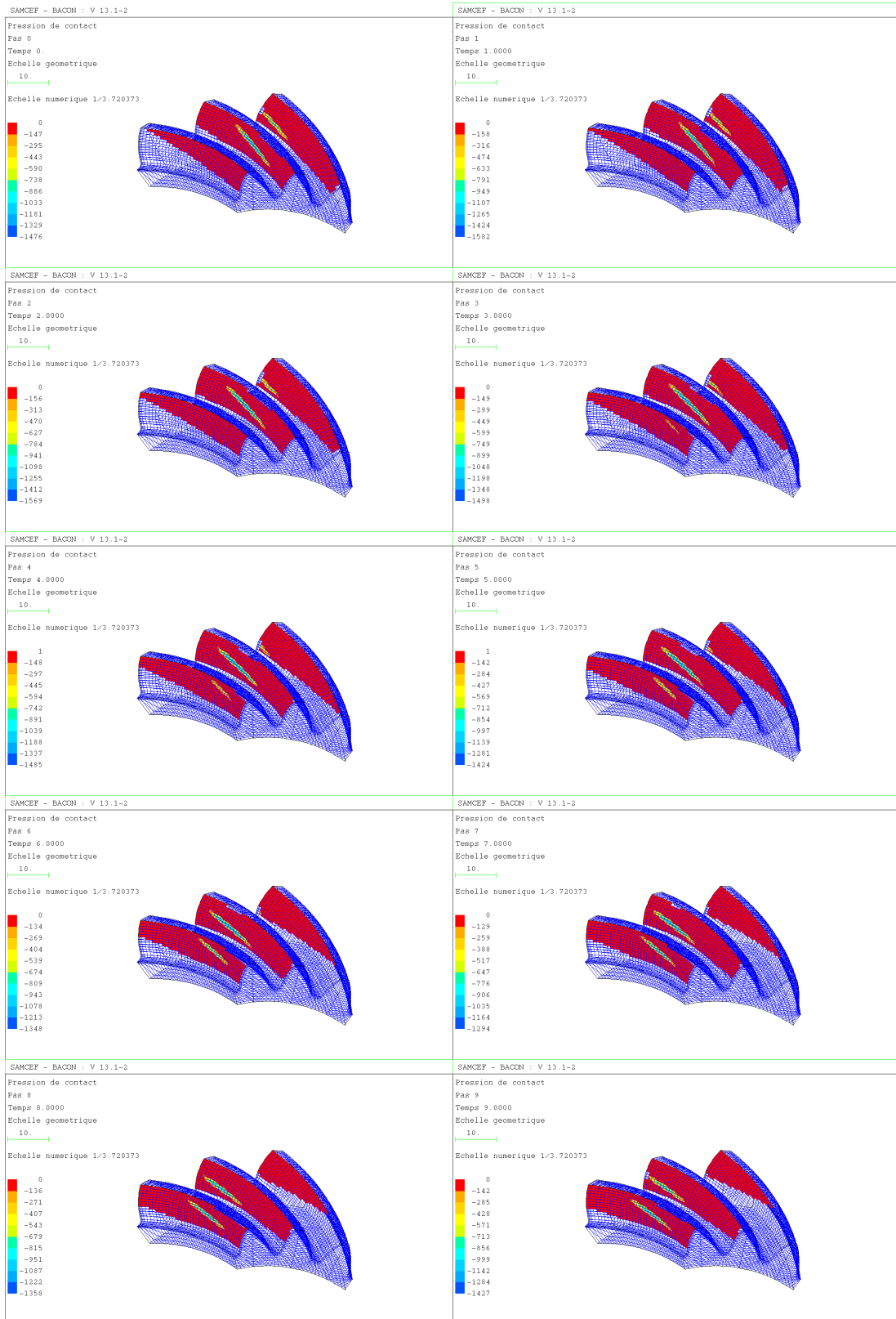


Figure 132 : Engrènement sous charge avec déplacement.

6.5 Minimisation de l'erreur de transmission cinématique

6.5.1 Processus d'optimisation automatique

L'étude du cas d'application présenté dans la partie précédente semble indiquer un lien entre l'amélioration du partage de charge et la réduction de l'erreur de transmission cinématique avec déplacement. Cette dernière est déduite d'une simulation de l'engrènement à vide. Son calcul n'a pas recours à la méthode des éléments finis. Il est alors beaucoup plus rapide que celui de la pression de contact. Une idée de l'écart de durée émane de la comparaison des cas d'application traités au cinquième chapitre. On propose donc maintenant d'analyser l'effet d'une minimisation de l'amplitude de l'erreur de transmission cinématique sur le partage de charge. Le processus d'optimisation suit l'organigramme de la Figure 101. Toutefois, l'objectif calculé est ici différent. Afin de confronter les deux méthodes, les variables choisies sont les mêmes. Ce sont les six coefficients de l'équation du roulement modifié présentés dans le quatrième chapitre. L'élaboration des fonctions contraintes est développée dans la seconde partie de ce chapitre. Aucun contact à vide n'est admis en bord de flanc. La fonction objectif est la valeur maximale de l'erreur de transmission cinématique avec déplacement telle qu'elle est définie au cinquième chapitre. Son calcul repose sur l'hypothèse d'une allure parabolique du tracé de l'erreur de transmission. Or, cette dernière peut être erronée lorsqu'il y a contact en bord de flanc. La portée d'engrènement à vide avec déplacement doit donc initialement se situer loin des bords. Elle résulte généralement d'un positionnement préalable sur le flanc.

6.5.2 Cas d'application du programme

L'engrenage considéré pour tester le processus est toujours le même. Le point de départ de l'optimisation est le résultat du positionnement de la portée d'engrènement à vide avec déplacement au centre du flanc actif du pignon. L'évolution de l'algorithme est révélée par la Figure 133. Elle est quasiment continue jusqu'à la huitième itération puis devient chaotique. Les origines de ce dernier comportement sont partiellement citées dans le cas d'application précédent. Si la portée d'engrènement à vide avec déplacement touche un bord, alors on commet un abus en faisant l'hypothèse que l'erreur de transmission décrit une parabole. L'erreur induite sur la valeur de la fonction objectif est aussi source d'instabilité.

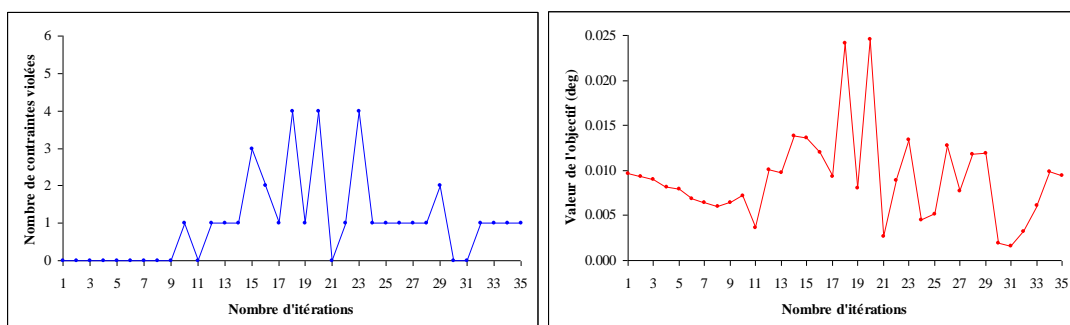


Figure 133 : Evolution du processus de minimisation de l'erreur de transmission.

Le processus est stoppé manuellement au bout de six heures de fonctionnement sur un PC de 2 CPU cadencés à 1800 MHz. Il compte alors trente-cinq itérations. Sa progression semble plutôt hasardeuse après la huitième itération. On propose donc d'analyser le résultat de cette dernière. Les valeurs modifiées des six coefficients sont listées dans le Tableau 12. On observe un décalage vers le talon de dent de la portée d'engrènement à vide avec déplacement marquée en rouge sur la Figure 134. La portée sans déplacement blanche bouge peu. Aucune des deux portées ne touche un bord du flanc. L'accroissement de leur écart indique une augmentation de leur sensibilité au déplacement relatif des membres de l'engrenage. Elles s'avèrent donc légèrement plus sensibles que celles obtenues après minimisation de la pression de contact maximale.

Pièce	PINION
Flanc de la dent	CONCAV
Coefficient Roulement Modifié R1	0.639315
Coefficient Roulement Modifié R2	-0.004763
Coefficient Roulement Modifié R3	-0.000063
Coefficient Roulement Modifié R4	-0.000472
Coefficient Roulement Modifié R5	0.000101
Coefficient Roulement Modifié R6	-0.000154

Tableau 12 : Valeurs des variables après minimisation de l'erreur de transmission.

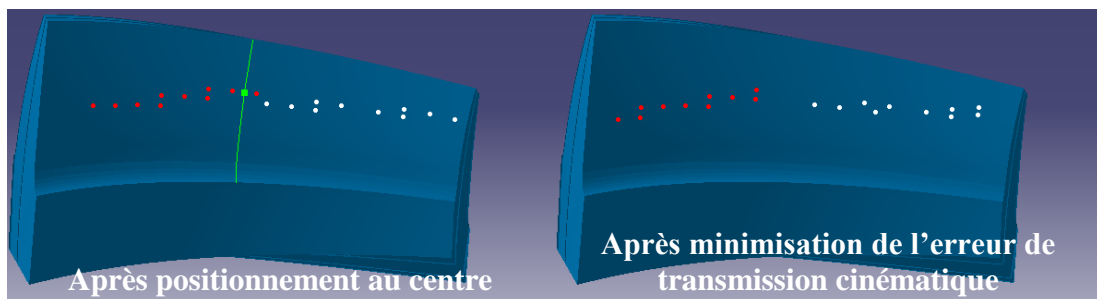


Figure 134 : Portées à vide avant et après minimisation de l'erreur de transmission.

Dans ce mémoire, deux méthodes d'amélioration du comportement sous charge de l'engrenage à denture spiroconique sont exposées. On propose donc de comparer leur performance. Par conséquent, la mise en forme des résultats et la modélisation dont ils découlent sont rigoureusement identiques dans tout cas d'application traité. Le processus automatique atteint la huitième itération en une heure et demie. L'erreur de transmission cinématique est tracée sur la Figure 135. Son amplitude est réduite de 0.0033 degrés. Avec 0.0061 contre 0.0067 degrés, elle est à peine inférieure à celle qui résulte de la première méthode. La Figure 136 montre un partage de charge similaire à celui de la Figure 130. Le rapport de conduite sous charge est là aussi largement supérieur à 2 dents. Ainsi, la seconde méthode améliore également la répartition de l'effort global à transmettre. Cela semble confirmer la réciprocité de la relation constatée précédemment entre le partage de charge et l'erreur de transmission cinématique avec déplacement. La portée d'engrènement sous charge frôle davantage le bord en talon de dent sur la Figure 137 que sur la Figure 131. Cependant, on ne remarque pas de pic de pression.

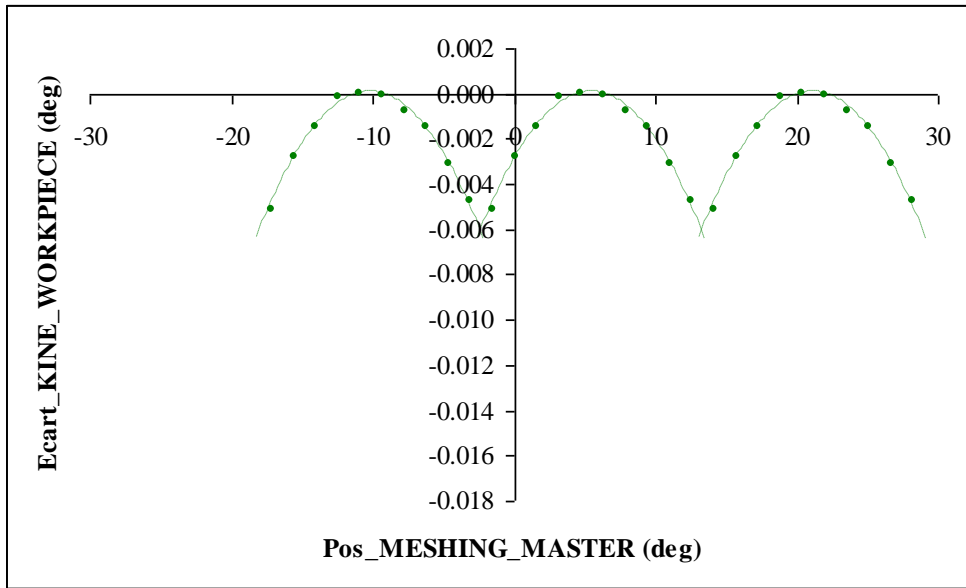


Figure 135 : Erreur de transmission cinématique avec déplacement.

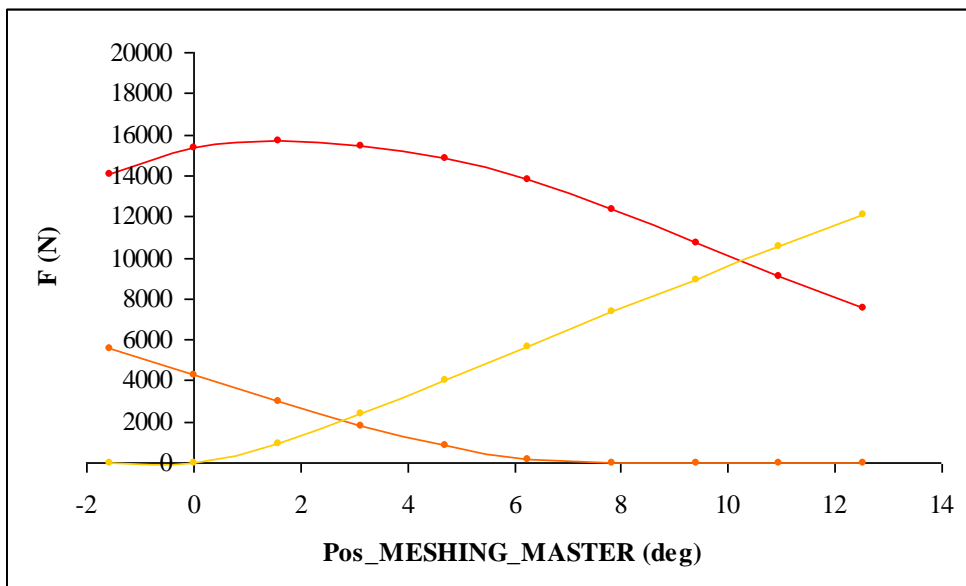


Figure 136 : Partage de charge avec déplacement.

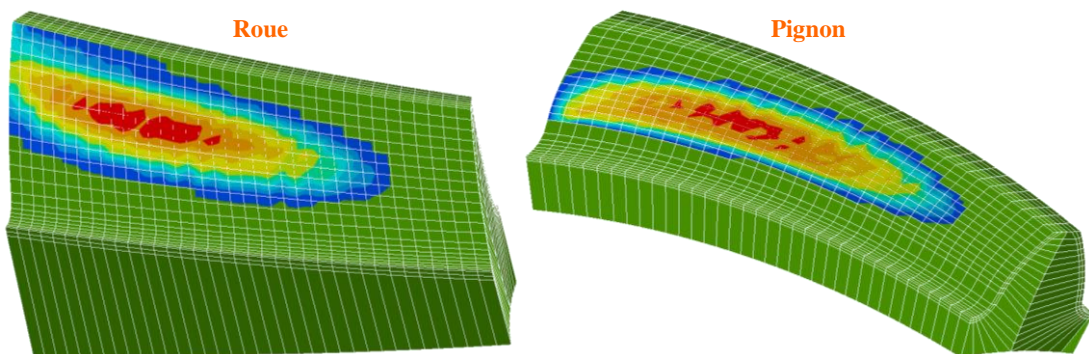


Figure 137 : Portée sous charge avec déplacement.

L'engrènement sous charge est détaillé par la Figure 138. Les valeurs de pression de contact affichées sont un peu plus faibles que celles observées sur la Figure 132. Avec un résultat équivalent en une durée moindre, la seconde méthode paraît plus efficace.

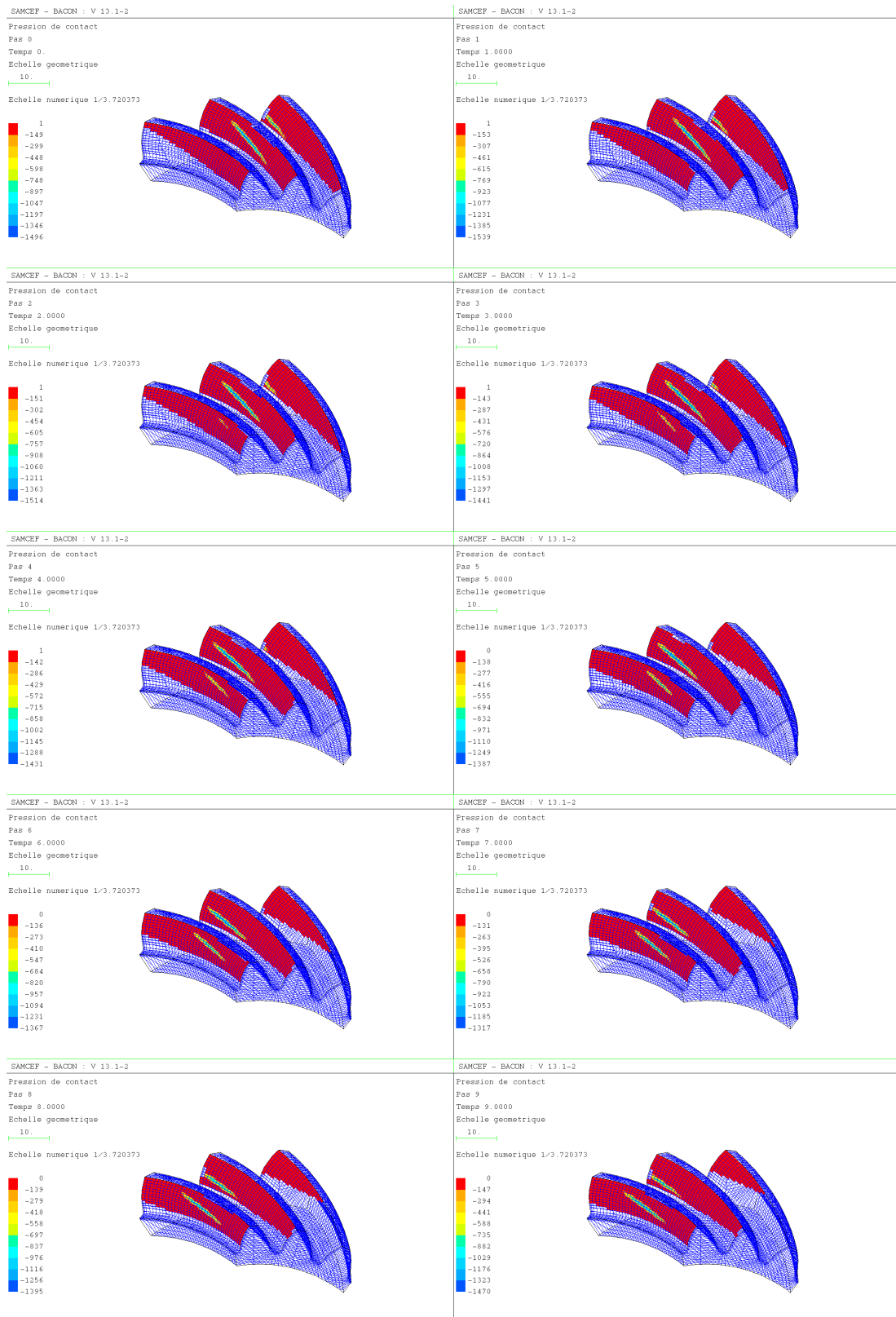


Figure 138 : Engrènement sous charge avec déplacement.

Malgré la progression erratique du processus, la Figure 133 indique un résultat encore meilleur à la trente et unième itération. On propose donc de procéder à son analyse. La liste des valeurs des coefficients mise à jour est donnée dans le Tableau 13. En rouge sur la Figure 139, la portée d'engrènement à vide avec déplacement effleure un coin du talon de dent. La portée sans déplacement blanche est collée contre le bord de pointe. Ainsi, les deux portées s'éloignent. Leur sensibilité au déplacement relatif des dentures augmente.

Pièce	PINION
Flanc de la dent	CONCAV
Coefficient Roulement Modifié R1	0.640044
Coefficient Roulement Modifié R2	-0.003533
Coefficient Roulement Modifié R3	-0.001974
Coefficient Roulement Modifié R4	0.000224
Coefficient Roulement Modifié R5	-0.000318
Coefficient Roulement Modifié R6	-0.000068

Tableau 13 : Valeurs des variables à la 31^{ème} itération.

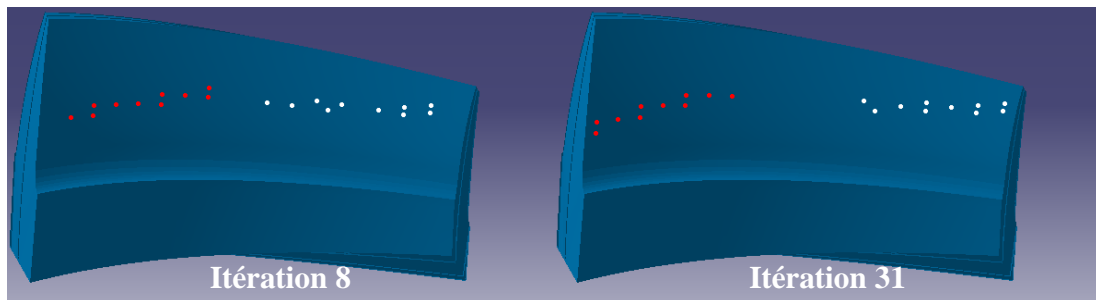


Figure 139 : Portées à vide à la 8^{ème} et 31^{ème} itération.

D'après la Figure 140, l'erreur de transmission cinématique avec déplacement n'a plus une forme du deuxième ordre. La proximité du coin associée aux larges variations des valeurs des coefficients transforme son allure. Son amplitude est néanmoins plus faible que précédemment. Elle vaut maintenant environ 0.003 degrés. L'amélioration du partage de charge est remarquable. La Figure 141 révèle une sollicitation simultanée de trois dents sur cinquante pourcent du pas de la denture. Avec environ 2.5 dents, le rapport de conduite sous charge est le meilleur de tous ceux obtenus dans les divers cas d'application traités. Il est supérieur à 1 dent car la transmission d'un couple provoque le rapprochement puis l'écrasement des flancs en contact. Ce dernier dépend de la proximité initiale des surfaces en vis-à-vis. Or, celle-ci est accentuée par la diminution de l'amplitude de l'erreur de transmission cinématique avec déplacement. Les dents engrenées entrent donc en contact plus rapidement sous l'effet de la charge appliquée. L'effort transmis est alors mieux réparti sur les dentures. Cependant, un pic de pression apparaît sur la Figure 142 dans un coin du talon de dent. Il laisse présager un risque de dégradation prématuré des flancs. En effet, la portée d'engrènement sous charge est trop proche du bord bien que toutes les contraintes du problème d'optimisation soient respectées. L'optimisation réduit la tolérance de l'engrenage à l'étalement du contact et au déplacement relatif des dentures. Le processus automatique recherche donc un compromis optimal entre objectif et contraintes.

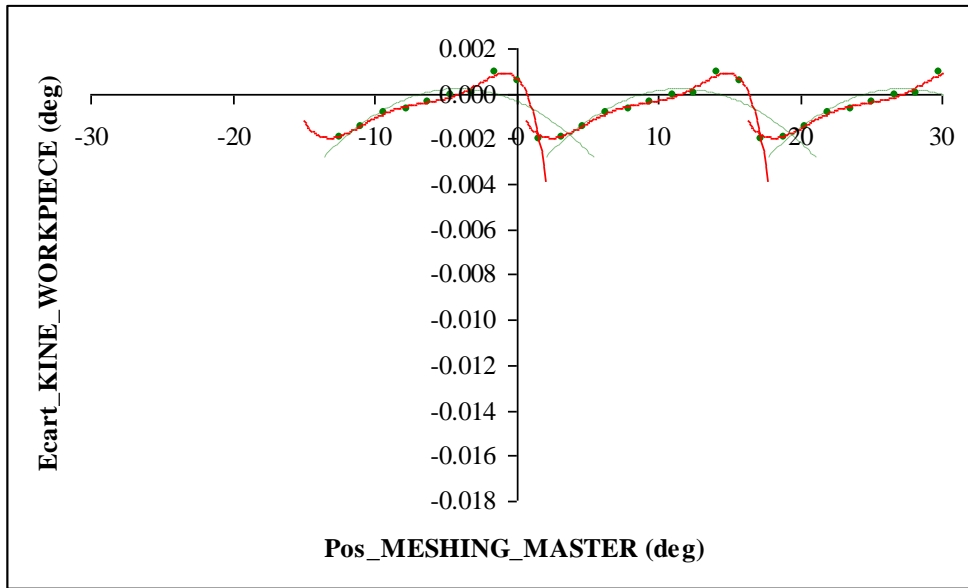


Figure 140 : Erreur de transmission cinématique avec déplacement.

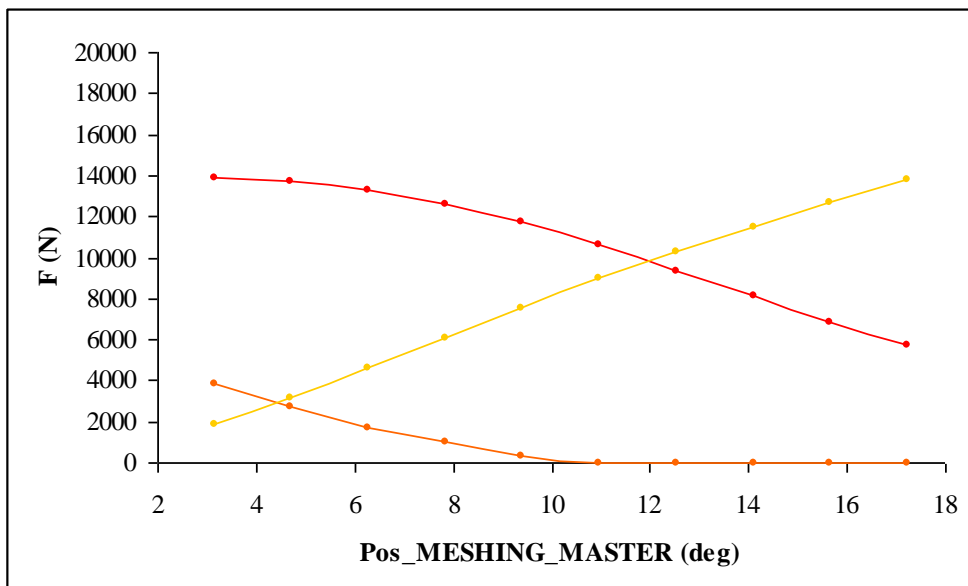


Figure 141 : Partage de charge avec déplacement.

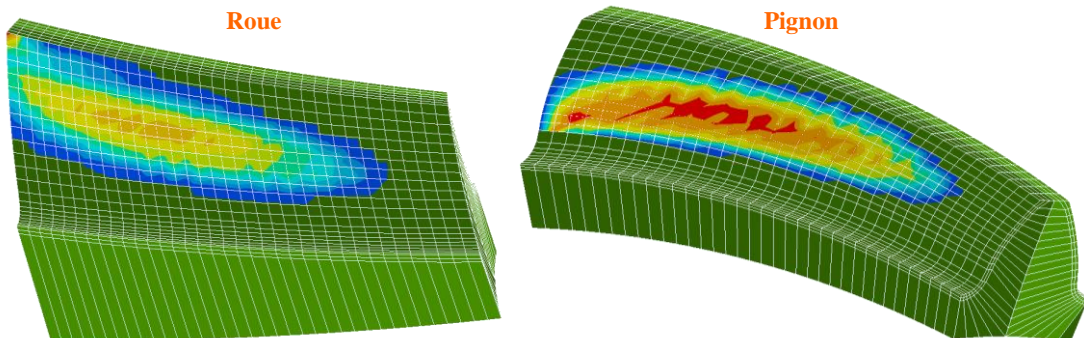


Figure 142 : Portée sous charge avec déplacement.

La Figure 143 affiche des valeurs de pression de contact encore plus faibles que celles de l'étude précédente. L'étalement des ellipses reste similaire. Cette diminution est essentiellement due à l'amélioration du partage de charge.

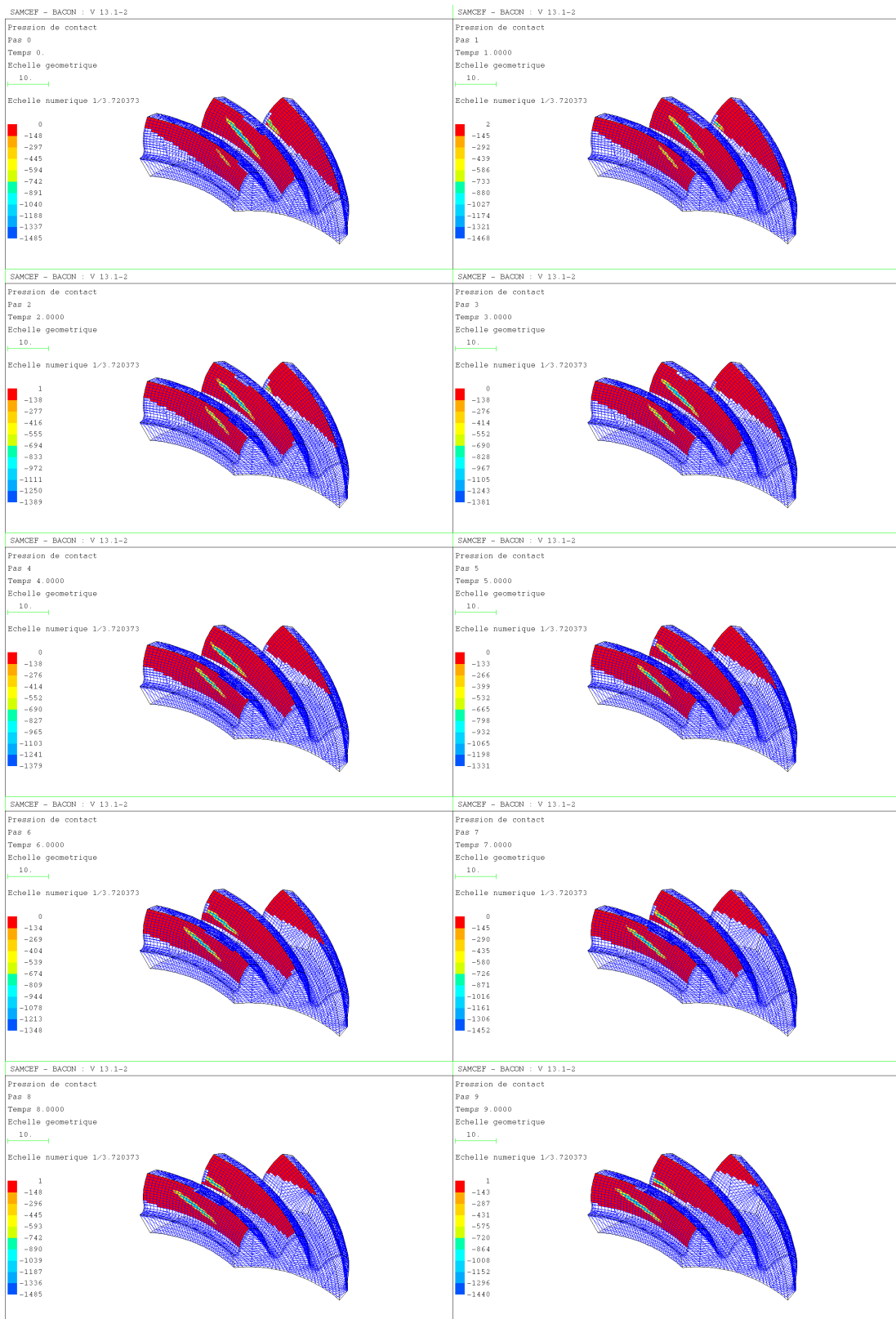


Figure 143 : Engrenement sous charge avec déplacement.

6.6 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de définir un processus automatique permettant d'améliorer le fonctionnement sous charge de l'engrenage spiroconique. L'engrènement des dentures génère des vibrations et des chocs. Cela produit du bruit et des efforts dynamiques qui se propagent aux paliers. Les conséquences sont diverses. Le confort sonore des passagers de l'aéronef est impacté. La vibration d'éléments voisins est excitée avec le risque d'atteindre une fréquence de résonance. Les phénomènes dynamiques accélèrent la fatigue des pièces. Ils dégradent donc la durée de vie du mécanisme. Le rendement du système est également altéré. L'erreur de transmission du mouvement du membre entraînant de l'engrenage est une source de vibrations et de chocs. Pour un mouvement de rotation uniforme de l'entrée, la sortie ne tourne pas à vitesse constante. Elle accélère et décélère périodiquement autour d'une vitesse de rotation moyenne donnée par le rapport de réduction de l'engrenage. La forme et l'amplitude des oscillations renseignent sur l'intensité des effets dynamiques.

Généralement, l'erreur de transmission est simulée pour deux niveaux de modélisation. L'erreur de transmission cinématique découle de la simulation de l'engrènement à vide. L'erreur de transmission quasi-statique est déduite de l'étude de l'engrènement sous charge simulé par analyses statiques successives. Un niveau de modélisation plus fidèle au sens physique permettrait d'appréhender l'erreur de transmission dynamique. Les fluctuations du mouvement de rotation du membre entraîné sont principalement dues aux formes et aux positions relatives des surfaces en contact. Celles-ci ont une définition nominale. Leurs variations ont pour origine la fabrication, le montage et le chargement des pièces. Seul ce dernier facteur est pris en compte dans l'approche développée. Le déplacement relatif des axes de l'engrenage modélise partiellement l'effet du chargement. Il est donc intégré dans la simulation de l'engrènement à vide. On considère alors qu'une minimisation de la valeur maximale de l'erreur de transmission cinématique implique une amélioration du comportement en charge du mécanisme.

Ainsi, les dentures sont soumises à des sollicitations cycliques. Cela induit un phénomène de fatigue du matériau. À terme, la répétition temporelle de pressions de contact excessives mène à un micro-pitting puis à un écaillage du flanc de dent. Pareillement, de trop hautes contraintes en pied de dent génèrent une amorce de crique entraînant la rupture. Une réduction de l'amplitude de ces sollicitations locales implique donc une diminution du risque de dégradation des dentures. La minimisation de la valeur maximale des pressions de contact mène vers une homogénéisation des valeurs de pression de l'ensemble des zones de contact entre deux dents engrenées. Cela suppose une meilleure répartition de l'effort global transmis. Elle implique aussi l'étalement de la zone de contact en la position d'engrènement pour laquelle la pression est maximale entre les deux flancs de dent. Généralement, cela amoindrit l'amplitude des contraintes en pied de dent. Le processus d'optimisation de l'engrènement sous charge a donc pour objectif de minimiser la pression de contact maximale.

La simulation de l'engrènement sous charge exploite la méthode des éléments finis. Celle-ci s'avère coûteuse en temps de calcul. Il vaut mieux donc réduire le nombre potentiel d'itérations du processus visant à minimiser la pression de contact. Ainsi, la première étape passe par la maîtrise du positionnement de la portée allié au respect des contraintes. On considère alors la simulation de l'engrènement à vide obtenue avec les axes des pièces déplacés. La position relative des membres de l'engrenage est issue de l'analyse sous charge de la boîte de transmission complète par la méthode des éléments finis. Les contraintes interdisent tout contact en bord de flanc de dent dans la simulation de l'engrènement à vide avec les axes des pièces non déplacés et déplacés. Le point de départ du processus de positionnement est éventuellement inadmissible. Un centrage de la portée d'engrènement à vide avec déplacement produit une première ébauche convenable avant optimisation du comportement sous charge du mécanisme. De plus, la méthode de positionnement proposée tend à réduire l'amplitude de l'erreur de transmission cinématique de l'engrenage.

Aujourd'hui, l'amélioration du comportement sous charge des dentures devient une tâche difficile à accomplir manuellement. Le processus d'optimisation des engrenages est rapidement limité s'il s'appuie sur la seule perception humaine des relations de cause à effet. Une boîte de transmission d'hélicoptère subit d'importantes sollicitations pour un poids minimal. Cela implique une déformation non négligeable du mécanisme. L'atteinte de l'objectif entre alors couramment en conflit avec la satisfaction des contraintes. Le résultat est donc un compromis complexe à réaliser. L'optimisation automatique permet d'exploiter une simulation fidèle de l'engrènement sous charge. Son déroulement ne requiert pas l'intervention d'un humain. Elle peut donc être exécutée en temps masqué. De longues durées de calcul sont tolérables. Le modèle pris en compte est alors plus précis. De plus, la méthode proposée reste ouverte aux progrès scientifiques et techniques de la modélisation. Le résultat est mieux maîtrisé et plus objectif que celui obtenu par un humain sur la base de son expérience. Cela permet d'envisager des configurations d'engrènement inexplorées jusqu'à présent.

7 Conclusion

Cette thèse est réalisée dans le cadre d'une convention CIFRE. Les travaux scientifiques rapportés doivent donc intégrer les besoins techniques de l'industrie. Ils ont pour objectif l'amélioration du fonctionnement des engrenages spiroconiques dans un milieu soumis à d'importantes sollicitations. Le processus d'adaptation des topographies des flancs de dents est manuel. Le nombre de paramètres mis en jeu est conséquent bien qu'un seul des deux flancs actifs soit modifié. Il s'agit d'un travail itératif, long et fastidieux. Il se déroule en plusieurs étapes dépendantes et répétées jusqu'à obtention d'une topographie de flanc de dent à la fois tolérante aux déplacements relatifs des deux pièces engrenées et induisant une pression maximale de contact la plus faible possible. Pour cela, on modifie directement la topographie de la surface du flanc, on contrôle la position et l'amplitude de la pression maximale de contact entre les deux pièces engrenées positionnées sous charge, on vérifie la position de la portée à vide en prenant soin d'éviter tout contact en bord de denture et enfin on lance le programme de génération du flanc qui essaie d'approcher au mieux la surface définie. On recommence autant de fois que nécessaire en s'efforçant de converger vers le meilleur compromis possible. Il s'agit donc d'une méthode d'optimisation manuelle dont l'efficacité repose sur une perception et un savoir acquis au cours d'années d'expériences. De plus, le processus est orienté par un jugement humain, arbitraire, biaisé, voire figé, par l'expérience. Si l'on introduit la prise en compte de phénomènes nouveaux ou de contraintes nouvelles, il faut reconstruire son expérience et réadapter son jugement. Cela peut prendre énormément de temps, notamment si pour une meilleure résolution du problème, la manipulation d'un plus grand nombre de paramètres s'avère nécessaire. Un ordinateur n'a pas de conscience, donc pas d'état d'âme. Un programme informatique convergera donc, de façon objective, vers une solution optimale.

L'immersion dans le milieu industriel s'est avérée nécessaire et constructive. Les travaux sont alors orientés vers la recherche d'une solution permettant d'automatiser le processus d'adaptation des topographies des flancs de dent. Une boucle d'optimisation autonome peut fonctionner en continu, jours et nuits. Cela libère ainsi un temps masqué. La durée d'une itération peut être allongée au-delà d'un temps raisonnablement court pour un travail manuel. Cela offre la possibilité de tenir compte de phénomènes, dus notamment au chargement, de manière plus réaliste et donc plus précise. On peut également imaginer de simuler de nouveaux phénomènes, d'enrichir la modélisation. De nouvelles configurations peuvent être évaluées dans un temps relativement court. Cela permet de condenser dans un seul problème d'optimisation les attentes de divers domaines de compétence tels que la conception, le calcul, la fabrication. Cependant, la rapidité de convergence du calcul dépend des performances technologiques des moyens employés. L'accroissement de la puissance des processeurs, le déploiement de techniques de réductions et de parallélisations du calcul, laissent envisager des temps de résolution de plus en plus courts. Il est donc apparu essentiel de développer ce travail en gardant à l'esprit la possibilité d'ouverture du processus à

l'exploitation des ressources à venir. La précision de calcul est donc adaptable. La gestion de paramètres de fabrication inexploitée jusqu'alors est potentiellement intégrable. Le programme est interfacé avec un module de calcul et un module d'optimisation du commerce. Cela permet, éventuellement, de bénéficier des dernières avancées disponibles sur le marché dans ces deux domaines sans pour autant être tributaire de la solution choisie.

Tout module implémenté dans une boucle d'optimisation doit faire preuve d'une robustesse infaillible. En effet, au fil des itérations, la recherche de la solution optimale mène le calcul en des lieux variés du domaine d'évolution, voire hors de ses bornes. Il est absolument essentiel que le programme ne génère pas une erreur. Il doit être dans la capacité d'assumer le calcul quel qu'il soit pour, éventuellement, revenir à l'intérieur du domaine et converger vers l'optimum. Cette robustesse ne peut être atteinte que par une maîtrise totale des algorithmes de calcul. Or, il est beaucoup plus aisé de cerner un développement simple plutôt que complexe. Les méthodes présentées dans ce mémoire sont donc relativement simples. Elles sont également polyvalentes pour éviter de multiplier le nombre de procédures spécifiques à différents cas de figure. Ainsi, le nombre d'équations non linéaires à résoudre simultanément est réduit au minimum. Il est le même pour la génération des flancs de dents que pour la simulation de l'engrènement. Cela permet d'améliorer le contrôle de la convergence de l'algorithme de résolution numérique. La polyvalence du module de génération réside dans sa capacité à simuler une importante variété de méthodes d'usinage. Concernant l'analyse du contact, elle est réalisée de la même façon quelle que soit la position du point de contact. Qu'il soit à l'intérieur du flanc ou sur un bord, l'algorithme de traitement est identique. De plus, il tolère n'importe quelle position relative des pièces engrenées. Il est conditionné pour coller au mieux à la réalité du phénomène physique. La simulation est ici abordée avec une approche concrète, mécanique. Les contraintes du problème d'optimisation reposent sur des éléments qui existent. Elles ne sont issues ni d'interpolations, ni d'extrapolations qui sont susceptibles de générer des situations imaginaires, difficiles à appréhender. Cela leur procure une stabilité suffisante pour assurer le rôle de garde-fou. Leur but est de contenir l'évolution du calcul dans le domaine de recherche défini comme l'ensemble des solutions potentiellement réalisables. À l'intérieur de ce domaine, la progression est uniquement guidée par la fonction objectif. Celle-ci est construite pour varier de façon la plus continue et monotone possible. Ainsi, la convergence de l'algorithme est plus rapide et plus sûre. Les variables du problème sont choisies judicieusement et avec parcimonie. Un trop grand nombre allonge de manière rédhibitoire la durée de résolution et peut rendre instable la convergence. Pour l'heure, seules celles ayant une influence de premier ordre sur la fonction objectif sont considérées.

8 Perspectives

Parmi les perspectives à court terme, on peut envisager d'augmenter le nombre de variables prises en compte. Il convient de le faire progressivement pour parer aux éventuels problèmes que cela peut engendrer. Le bénéfice en est une modification plus fine et souple des topographies des flancs de dents. L'optimalité de la solution s'en trouve améliorée. Le calcul précis des contraintes en pied de dent par la méthode des éléments finis va permettre un contrôle plus fin de la tenue en fatigue des pièces. Un module d'analyse de l'interférence de taillage doit être développé. En effet, celle-ci représente une contrainte de fabrication majeure dans le cas d'une rectification en mode Simplex. L'usinage d'un flanc ne doit pas entraîner la détérioration de son opposé par contact avec l'outil. La possibilité de réaliser des gains financiers sur la fabrication des pièces peut être étudiée. Le programme est capable de générer une denture spiroconique à courbure de spirale inversée. Cette configuration permet, dans certain cas, de supprimer une opération de soudage délicate et onéreuse entre le pignon et l'arbre. Cela induit une réduction de 10 à 20% du coût total de la pièce, un temps de cycle raccourci de 20% et la suppression de coûts non récurrents. Pour réduire encore les coûts de production, la faisabilité de couples d'engrenages usinés en Duplex peut être évaluée. Les deux flancs de dent sont alors usinés simultanément. Actuellement, il est impossible d'optimiser manuellement la topographie d'un flanc tout en conservant une position de portée acceptable sur son opposé. Il y a beaucoup trop de paramètres interférents en jeu. L'automatisation du processus peut probablement solutionner ce problème. Les modifications à apporter au programme pour cela semblent mineures. Le développement de modules de génération spécifiques permettrait d'appliquer la même démarche d'optimisation aux engrenages droits, hélicoïdaux, face ou autres. En gérant plus efficacement la répartition de la charge sur les dents engrainées, on peut mettre en évidence la simplification d'architectures cinématiques de boîte de transmission. Cela amène, par exemple, à remplacer un train épicycloïdal, à supprimer un étage de réduction. Sur un plan plus scientifique, la modélisation par éléments finis peut être enrichie avec la simulation de phénomènes multiphysiques. L'erreur de transmission sous charge est un indicateur fondamental dans l'analyse du comportement vibratoire du système. Des approfondissements dans ce domaine peuvent mener à une meilleure maîtrise de la dynamique de la boîte de transmission. L'étude du contact élastohydrodynamique fournit des informations sur la chaleur dégagée par l'engrènement des pièces. La simulation thermique de l'ensemble mécanique peut alors être affinée. Avec les moyens techniques actuels, le rendement dépend de phénomènes trop complexes et intriqués pour espérer en calculer la valeur exacte en un temps raisonnable. Il y aurait donc d'importants travaux à réaliser sur la manière dont on gère le calcul par éléments finis. Des techniques de réduction de modèle et de parallélisations du traitement peuvent être employées en attendant la prochaine révolution technologique.

9 Annexes

9.1 Conversion des données machine #463

Réglages de la machine :

Equation [131] $C_{e463} = 203.2$

Equation [132] $C_{463} = 381$

Equation [133] Spirale à droite : $E = -E_{463}$

Equation [134] Spirale à gauche : $E = E_{463}$

Equation [135] $S = 2 \cdot C_{e463} \cdot \sin(\phi_{e463}/2)$

Equation [136] $\phi_{c0} = 2 \cdot \pi - \phi_{c463} + \phi_{e463}/2$

Formule du roulement modifiée pour la machine #463 :

Equation [137]
$$g(\phi_c, \phi_p) = C_{463} \cdot (\sin(\phi_{g463}) + \sin(R_{c463} \cdot (\phi_c - m_{c/w463} \cdot \phi_p) / C_{463}) + \sin(\phi_c - \phi_{g463})) + (O_{c463} - S_{c463}) \cdot \sin(\phi_c - m_{c/w463} \cdot \phi_p) = 0$$

Définition du roulement modifié berceau / pièce :

Equation [138]
$$\phi_c(\phi_p) = \phi_{c0} + c_1 \cdot \phi_p + \frac{c_2}{2!} \cdot \phi_p^2 + \frac{c_3}{3!} \cdot \phi_p^3 + \frac{c_4}{4!} \cdot \phi_p^4 + \frac{c_5}{5!} \cdot \phi_p^5 + \frac{c_6}{6!} \cdot \phi_p^6$$

Equation [139]
$$\frac{\partial \phi_c(\phi_p)}{\partial \phi_p} = c_1 + c_2 \cdot \phi_p + \frac{c_3}{2!} \cdot \phi_p^2 + \frac{c_4}{3!} \cdot \phi_p^3 + \frac{c_5}{4!} \cdot \phi_p^4 + \frac{c_6}{5!} \cdot \phi_p^5$$

Equation [140]
$$c_i = \frac{\partial^i \phi_c(0)}{\partial \phi_p^i}$$

Coefficients du polynôme de roulement modifié berceau / pièce :

Equation [141]
$$g(\phi_c, \phi_p) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^i g(\phi_c, \phi_p)}{\partial \phi_p^i} = 0 \left. \vphantom{\frac{\partial^i g(\phi_c, \phi_p)}{\partial \phi_p^i}} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^i \phi_c(0)}{\partial \phi_p^i} = c_i$$

$$\phi_p = 0 \Rightarrow \phi_c(0) = 0$$

Equation [142] $m_{c/w463} = Z_w / I_{c463}$

Equation [143] $c_1 = (m_{c/w463} \cdot (O_{c463} - S_{c463} + R_{c463})) / (R_{c463} + O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463}))$

Equation [144] $c_2 = (-C_{463} \cdot c_1^2 \cdot \sin(\phi_{g463})) / (R_{c463} + O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463}))$

Equation [145]
$$c_3 = (C_{463} \cdot c_1^3 \cdot \cos(\phi_{g463}) - 3 \cdot C_{463} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \sin(\phi_{g463}) + (c_1 - m_{c/w463})^3 \cdot (O_{c463} - S_{c463} + R_{c463}^3 / C_{463}^2)) / (R_{c463} + O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463}))$$

Equation [146]
$$c_4 = (6 \cdot C_{463} \cdot c_1^2 \cdot c_2 \cdot \cos(\phi_{g463}) + C_{463} \cdot \sin(\phi_{g463}) \cdot (c_1^4 - 3 \cdot c_2^2 - 4 \cdot c_1 \cdot c_3) + 6 \cdot (O_{c463} - S_{c463}) \cdot c_2 \cdot (c_1 - m_{c/w463})^2 + 6 \cdot c_2 \cdot (c_1 - m_{c/w463})^2 \cdot R_{c463}^3 / C_{463}^2) / (R_{c463} + O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463}))$$

$$\begin{aligned}
& c_5 = (10 \cdot (O_{c463} - S_{c463}) \cdot c_3 \cdot (c_1 - m_{c/w463})^2 - (O_{c463} - S_{c463}) \cdot (c_1 - m_{c/w463})^5 + 15 \cdot (O_{c463} \\
\text{Equation [147]} & - S_{c463}) \cdot c_2^2 \cdot (c_1 - m_{c/w463}) - 1/C_{463}^4 \cdot (C_{463}^5 \cdot (c_1 \cdot \cos(\phi_{g463})) \cdot (c_1^4 - 15 \cdot c_2^2 - 10 \cdot c_1 \cdot c_3) + 5 \\
& \cdot \sin(\phi_{g463}) \cdot (2 \cdot c_2 \cdot (c_3 - c_1^3) + c_1 \cdot c_4)) - 5 \cdot C_{463}^2 \cdot R_{c463}^3 \cdot (3 \cdot c_2^2 + 2 \cdot c_3 \cdot (c_1 - m_{c/w463})) \\
& \cdot (c_1 - m_{c/w463}) + (c_1 - m_{c/w463})^5 \cdot R_{c463}^5) / (R_{c463} + O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463})) \\
& c_6 = (-C_{463} \cdot c_1^6 \cdot \sin(\phi_{g463}) - 15 \cdot (O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463})) \cdot c_1^4 \cdot c_2 + 20 \cdot c_1^3 \cdot (C_{463} \cdot c_3 \\
\text{Equation [148]} & \cdot \sin(\phi_{g463}) + 3 \cdot (O_{c463} - S_{c463}) \cdot c_2 \cdot m_{c/w463}) + 15 \cdot c_1^2 \cdot (3 \cdot C_{463} \cdot c_2^2 \cdot \sin(\phi_{g463}) + (O_{c463} - S_{c463} \\
& + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463})) \cdot c_4 - 6 \cdot (O_{c463} - S_{c463}) \cdot c_2 \cdot m_{c/w463}^2) + 6 \cdot c_1 \cdot (-C_{463} \cdot c_5 \cdot \sin(\phi_{g463}) + 5 \cdot \\
& (O_{c463} - S_{c463}) \cdot c_4 \cdot m_{c/w463}) + 10 \cdot c_2 \cdot ((O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463})) \cdot c_3 + (O_{c463} - S_{c463}) \\
& \cdot m_{c/w463}^3) + 5 \cdot (3 \cdot (O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463})) \cdot c_2^2 - 2 \cdot C_{463} \cdot c_3^2 \cdot \sin(\phi_{g463}) + 3 \cdot (O_{c463} \\
& - S_{c463}) \cdot c_4 \cdot m_{c/w463}^2 - 3 \cdot c_2 \cdot (C_{463} \cdot c_4 \cdot \sin(\phi_{g463}) + 4 \cdot (O_{c463} - S_{c463}) \cdot c_3 \cdot m_{c/w463} + (O_{c463} \\
& - S_{c463}) \cdot m_{c/w463}^4) + 15/C_{463}^2 \cdot (c_3^3 + 4 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot (c_1 - m_{c/w463}) + c_4 \cdot (c_1 - m_{c/w463})^2) \cdot R_{c463}^3 \\
& - 15/C_{463}^4 \cdot c_2 \cdot (c_1 - m_{c/w463})^4 \cdot R_{c463}^5) / (R_{c463} + O_{c463} - S_{c463} + C_{463} \cdot \cos(\phi_{g463}))
\end{aligned}$$

9.2 Conversion des données outil #463

Caractéristiques du bras de diamantage :

I_{d463}	911	512	931	921	521	961	Unit
PLD_{d463}	50.8	50.8	25.4	50.8	50.8	25.4	mm
AIN_{d463}	15	37.47	16.73	15	16.73	16.73	deg
AIG_{d463}	15	0	16.73	15	0	16.73	deg
O_{d463}	O_{d463}	O_{d463}	$O_{d463} - PLD_{d463}$	O_{d463}	O_{d463}	$O_{d463} - PLD_{d463}$	mm

$$\text{Equation [149]} \quad R_f = S_{d463}^{end}$$

Formules Gleason issues du code source du logiciel Spiro corrigées :

$$\text{Equation [150]} \quad e_1 = R_{d463} - (S_{d463} \cdot \cos(\alpha_{d463} + AIN_{d463})) / \cos(AIN_{d463})$$

$$\text{Equation [151]} \quad R_p = \sqrt{(PLD_{d463}^2 + (S_{d463} \cdot \sin(AIN_{d463}) / \cos(AIG_{d463}))^2) \cdot (1 + (e_1 / O_{d463})^2) \cdot (1 + (\tan(\alpha_{d463}))^2)}$$

$$\text{Equation [152]} \quad XO_p = -B_t \cdot R_p / \sqrt{1 + (\tan(\alpha_{d463}))^2} / (1 + (O_{d463} / e_1)^2) - \sqrt{e_1^2 + O_{d463}^2}$$

$$\text{Equation [153]} \quad ZO_p = -R_p / \sqrt{1 + (1 + (O_{d463} / e_1)^2) / (\tan(\alpha_{d463}))^2} + C_{d463} - A_{d463} + B_t \cdot S_{d463} \cdot \sin(\alpha_{d463} + AIN_{d463}) / \cos(AIN_{d463})$$

$$\text{Equation [154]} \quad \alpha_p = \arctan\left(1 / \sqrt{(R_p / ZO_p)^2 - 1}\right)$$

$$\text{Equation [155]} \quad XW_f = \left| XO_p + B_t \cdot \sqrt{R_p^2 - ZO_p^2} \right|$$

Méthode d'usinage Duplex :

$$\text{Equation [156]} \quad W_f = XW_{f,OB} - XW_{f,IB}$$

$$\text{Equation [157]} \quad D_t = XW_{f,OB} + XW_{f,IB}$$

Méthode d'usinage Simplex :

Définition du flanc passif de l'outil satisfaisant les limites de fabrication avant risque d'effondrement d'arête

Equation [158] $l_{t \min} = 0.05 \text{ mm}$

Equation [159] $R_{f \min} = 0.05 \text{ mm}$

Equation [160] $\alpha_{p \min} = 10 \text{ deg}$

Equation [161] $W_f = \sqrt{(R_p + R_f)^2 - (ZO_p - R_f)^2} - \sqrt{R_p^2 - ZO_p^2} + l_{t \min} + R_{f \min} \cdot \tan\left(\pi/4 - \alpha_{p \min}/2\right)$

Equation [162] $W_{f \min} = 1 \text{ mm}$

Equation [163] $D_t = 2 \cdot XW_f - B_t \cdot W_f$

10 Références

Introduction

- [1] L. Euler, "Supplementum de figura dentium rotarum". In *Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, pp. 207 – 231, 1767.
- [2] C. Camus, "Sur la figure des dents des roues et des ailes des pignons, pour rendre les horloges plus parfaites". In *Histoire de l'académie royale des sciences*, pp. 165 – 197, 1733.
- [3] W. Coleman, "Guide to bevel gears". Gleason Works, 1963.
- [4] E. Buckingham, "Analytical mechanics of gears". Dover, 1963.
- [5] "Memento de l'auditeur". In *cours de l'Institut de l'engrenage et des transmissions, cycle spécial aérospatiale*, 1986.
- [6] G. Henriot, "Engrenages: Conception, Fabrication, Mise en œuvre". Dunod, 8^e édition, 2007.
- [7] F. L. Litvin, "Theory of gearing". In *NASA RP – 1212*, 1989.
- [8] F. L. Litvin, "Development of gear technology and theory of gearing". In *NASA RP – 1406*, 1997.
- [9] F. L. Litvin, A. Fuentes, "Gear geometry and applied theory". Cambridge University Press, 2^e édition, 2004.
- [10] M. Griffis, "Proving Dooner's third law of gearing: A study of curvature". Symposium commemorating the legacy, works and life of Sir Robert Stawell Ball upon the 100th anniversary of "A treatise on the theory of screws", Cambridge, USA. Proceedings of the conference, 2000.
- [11] F. Di Puccio, M. Gabiccini, M. Guiggiani, "Alternative formulation of the theory of gearing". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 40, pp. 613 – 637, 2005.
- [12] F. Di Puccio, M. Gabiccini, M. Guiggiani, "Generation and curvature analysis of conjugate surfaces via a new approach". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 41, pp. 382 – 404, 2006.
- [13] F. Di Puccio, M. Gabiccini, M. Guiggiani, "An invariant approach for gear generation with supplemental motions". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, pp. 275 – 295, 2007.
- [14] M. Gabiccini, A. Artoni, F. Di Puccio, M. Guiggiani, "A regularization method for hypoid gear synthesis using the invariant approach". IFToMM, Besançon, France. Proceedings of the conference, 2007.
- [15] J. J. Coy, R. F. Handschuh, D. G. Lewicki, R. G. Huff, E. A. Krejsa, A. M. Karchmer, "Identification and Proposed Control of Helicopter Transmission Noise at the Source". In *NASA TM – 89312*, 1987.

Génération des dentures

- [16] F. L. Litvin, W. J. Tsung, J. J. Coy, R. F. Handschuh, C. B. P. Tsay, "New generation methods for spur, helical, and spiral bevel gears". In *NASA TM – 88862*, 1986.
- [17] F. L. Litvin, N. X. Chen, "Generation of gear tooth surfaces by application of CNC machines". In *NASA CR – 195306*, 1994.
- [18] R. F. Handschuh, R. C. Bill, "Recent manufacturing advances for spiral bevel gears". In *NASA TM – 104479*, 1991.
- [19] R. F. Handschuh, M. Nanlawala, J. M. Hawkins, D. Mahan, "Experimental comparison of face-milled and face-hobbed spiral bevel gears". In *NASA TM – 2001-210940*, 2001.

- [20] J. Bruyère, "Contribution à l'optimisation de la conception des engrenages coniques à denture droite: Analyse et synthèse de la géométrie et des tolérances". Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2006.
- [21] J. P. Vincent, "Modèles et outils d'analyse des variabilités en phase de conception de produits à denture". Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2010.
- [22] G. C. Y. Lin, C. B. P. Tsay, Z. H. Fong, "Mathematical model of spiral bevel and hypoid gears manufactured by the modified roll method". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 32, pp. 121 – 136, 1997.
- [23] G. C. Y. Lin, C. B. P. Tsay, Z. H. Fong, "Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears with minimum surface-deviation". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 33, pp. 785 – 803, 1998.
- [24] G. C. Y. Lin, C. B. P. Tsay, Z. H. Fong, "Computer-aided manufacturing of spiral bevel and hypoid gears by applying optimization techniques". In *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 114, pp. 22 – 35, 2001.
- [25] Z. H. Fong, "Mathematical model of universal hypoid generator with supplemental kinematic flank correction motions". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 122, pp. 136 – 142, March 2000.
- [26] P. Y. Wang, Z. H. Fong, "Adjustability improvement of face-milling spiral bevel gears by modified radial motion (MRM) method". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 40, pp. 69 – 89, 2005.
- [27] Y. P. Shih, Z. H. Fong, G. C. Y. Lin, "Mathematical model for a universal face hobbing hypoid gear generator". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, pp. 38 – 47, January 2007.

Engrènement des dentures

- [28] C. Gosselin, L. Cloutier, Q. D. Nguyen, "A general formulation for the calculation of the load sharing and transmission error under load of spiral bevel and hypoid gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 30, pp. 433 – 450, 1995.
- [29] F. L. Litvin, Y. Zhang, "Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gear". NASA CR – 4342, 1991.
- [30] F. L. Litvin, J. S. Chen, J. Lu, R. F. Handschuh, "Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 118, pp. 561 – 567, December 1996.
- [31] F. L. Litvin, A. G. Wang, R. F. Handschuh, "Computerized generation and simulation of meshing and contact of spiral bevel gears with improved geometry". In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 158, pp. 35 – 64, 1998.
- [32] F. L. Litvin, Q. Fan, A. Fuentes, "Computerized design, generation, and simulation of meshing and contact of face-milled formate cut spiral bevel gears". NASA CR – 2001-210894, 2001.
- [33] F. L. Litvin, A. Fuentes, Q. Fan, R. F. Handschuh, "Computerized design, simulation of meshing, and contact and stress analysis of face-milled formate generated spiral bevel gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 37, pp. 441 – 459, 2002.
- [34] F. L. Litvin, A. Fuentes, B. R. Mullins, R. Woods, "Computerized design, generation, simulation of meshing and contact, and stress analysis of formate cut spiral bevel gear drives". NASA CR – 2003-212336, 2003.
- [35] J. Argyris, A. Fuentes, F. L. Litvin, "Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears". In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 1057 – 1095, 2002.
- [36] G. D. Bibel, R. F. Handschuh, "Meshing of spiral bevel gearset with 3D finite element analysis". In NASA TM – 107336, 1996.

- [37] O. Vogel, A. Griewank, G. Bär, "Direct gear tooth contact analysis for hypoid bevel gears". In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 3965 – 3982, 2002.
- [38] V. Simon, "Load distribution in hypoid gears". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 122, pp. 529 – 535, December 2000.
- [39] V. Simon, "Load distribution in spiral bevel gears". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, pp. 201 – 209, February 2007.
- [40] V. Simon, "Computer simulation of tooth contact analysis of mismatched spiral bevel gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, pp. 365 – 381, 2007.
- [41] V. Simon, "Influence of tooth errors and misalignments on tooth contact in spiral bevel gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 43, pp. 1253 – 1267, 2008.
- [42] G. I. Sheveleva, A. E. Volkov, V. I. Medvedev, "Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, pp. 198 – 215, 2007.
- [43] Q. Fan, "Computerized modeling and simulation of spiral bevel and hypoid gears manufactured by Gleason face hobbing process". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, pp. 1315 – 1327, November 2006.
- [44] Q. Fan, "Enhanced algorithms of contact simulation for hypoid gear drives produced by face-milling and face-hobbing processes". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, pp. 31 – 37, January 2007.
- [45] M. Vimercati, "Mathematical model for tooth surfaces representation of face-hobbed hypoid gears and its application to contact analysis and stress calculation". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 42, pp. 668 – 690, 2007.
- [46] A. Bracci, M. Gabiccini, A. Artoni, M. Guiggiani, "Geometric contact pattern estimation for gear drives". In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, pp. 1563 – 1571, 2009.
- [47] D. Madrosky, "Conception des engrenages spiro-coniques: Géométrie et simulation du comportement". Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1987.
- [48] M. Lelkes, "Definition des engrenages KlingelInberg". Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002.
- [49] Y. Icard, "Engrenage spiroconique: Modélisation sous charge appliquée au domaine aéronautique". Thèse de Doctorat en Génie Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2005.
- [50] J. T. Alves, M. Guingand *, J. P. de Vaujany, "Set of functions for the calculation of bending displacements for spiral bevel gear teeth". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, pp. 349 – 363, 2010.
- [51] J. Astoul, M. Sartor, J. Geneix, E. Mermoz, "A simple and robust method for spiral bevel gear generation and tooth contact analysis". IDMMME – Virtual Concept, Bordeaux, France. Proceedings of the conference, 2010.

Optimisation des dentures

- [52] F. L. Litvin, P. Rahman, R. N. Goldrich, "Mathematical models for the synthesis and optimization of spiral bevel gear tooth surfaces". NASA CR – 3553, 1982.
- [53] F. L. Litvin, H. T. Lee, "Generation and tooth contact analysis of spiral bevel gears with predesigned parabolic functions of transmission errors". NASA CR – 4259, 1989.
- [54] F. L. Litvin, N. X. Chen, Y. Zhang, T. J. Krenzer, R. F. Handschuh, "Computerized generation of surfaces with optimal approximation to ideal surfaces". In *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 110, pp. 39 – 55, 1993.

- [55] F. L. Litvin, A. Fuentes, B. R. Mullins, R. Woods, "Design and stress analysis of low-noise adjusted bearing contact spiral bevel gears". NASA CR – 2002-211344, 2002.
- [56] M. Lelkes, D. Play, J. Márialigeti, "Cutting parameters definition for kinematic optimization of spiral bevel gears". In *Periodica Polytechnica Transportation Engineering* vol. 30, no. 1 – 2, pp. 93 – 109, 2002.
- [57] X. M. Cao, Z. D. Fang, J. L. Zhang, "Analysis and Design of the Pinion Machine Settings for Spiral Bevel Gears". IFToMM, Besançon, France. Proceedings of the conference, 2007.
- [58] X. M. Cao, Z. D. Fang, H. Xu, J. Su, "Design of pinion machine tool-settings for spiral bevel gears by controlling contact path and transmission errors". In *Chinese Journal of Aeronautics*, vol. 21, pp. 179 – 186, 2008.
- [59] V. Simon, "Head-cutter for optimal tooth modifications in spiral bevel gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, pp. 1420 – 1435, 2009.
- [60] P. Y. Wang, Z. H. Fong, "Mathematical model of face-milling spiral bevel gear with modified radial motion (MRM) correction". In *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 41, pp. 1307 – 1323, 2005.
- [61] P. Y. Wang, Z. H. Fong, "Fourth-order kinematic synthesis for face-milling spiral bevel gears with modified radial motion (MRM) correction". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 128, pp. 457 – 467, March 2006.
- [62] Y. P. Shih, Z. H. Fong, "Flank modification methodology for face-hobbing hypoid gears based on ease-off topography". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 129, pp. 1294 – 1302, December 2007.
- [63] Y. P. Shih, "A novel ease-off flank modification methodology for spiral bevel and hypoid gears". In *Mechanism and Machine Theory*, vol. 45, pp. 1108 – 1124, 2010.
- [64] A. Artoni, A. Bracci, M. Gabiccini, M. Guiggiani, "Optimization of the loaded contact pattern in hypoid gears by automatic topography modification". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 131, pp. 011008-1 – 9, January 2009.
- [65] A. Artoni, M. Kolivand, A. Kahraman, "An ease-off based optimization of the loaded transmission error of hypoid gears". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 132, pp. 011010-1 – 9, January 2010.
- [66] M. Gabiccini, A. Bracci, M. Guiggiani, "Robust optimization of the loaded contact pattern in hypoid gears with uncertain misalignments". In *Journal of Mechanical Design*, vol. 132, pp. 041010-1 – 8, April 2010.
- [67] J. Astoul, M. Sartor, J. Geneix, E. Mermoz, "A method for mastering the contact path location of spiral bevel gears by optimizing machine-tool settings". ICMERA, Bucharest, Romania. Proceedings of the conference, 2010.