

N°d'ordre : 4390

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Par **Hervé HOCQUARD**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **INFORMATIQUE**

Colorations de graphes sous contraintes

Soutenue le : 5 décembre 2011

Après avis des rapporteurs :

Guillaume Fertin Professeur
Olivier Togni MDC (HDR)

Devant la commission d'examen composée de :

Guillaume Fertin	Professeur	Rapporteur
Mickaël Montassier ..	MDC (HDR)	Directeur de thèse
Alexandre Pinlou	MDC	Examineur
André Raspaud	Professeur	Directeur de thèse
Éric Sopena	Professeur	Examineur
Olivier Togni	MDC (HDR)	Rapporteur

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier Mickaël Montassier et André Raspaud d'avoir encadré cette thèse.

Un grand merci également à Michel Mendès France et Mariano Cid qui m'ont encouragé à préparer cette thèse. Michel Mendès France avec qui j'ai eu la chance de travailler, dans une autre vie, sur le Théorème des nombres premiers. Michel m'a envoyé voir Robert Cori qui m'a dirigé vers André Raspaud...et c'est là que tout commence.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans Mickaël Montassier qui a été certainement plus qu'un directeur de thèse, il a su s'adapter à ma situation particulière, il a fait preuve de patience et a toujours été là pour moi.

Je remercie ensuite Guillaume Fertin et Olivier Togni pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs lectures attentives ont permis d'améliorer la qualité et la clarté de ce manuscrit. Leurs commentaires judicieux m'ont été très profitables.

Je souhaite également remercier Alexandre Pinlou pour avoir accepté de participer à mon jury. Sa lecture attentive du manuscrit m'a permis d'améliorer sa qualité et même certains résultats.

Un grand merci également à Éric Sopena d'avoir présidé ce jury et de m'avoir encouragé et conseillé durant ces trois années.

Je remercie également mes co-auteurs : Youssou Dieng, Reza Naserasr, Pascal Ochem et Petru Valicov.

Je n'oublie bien évidemment pas tous ceux que j'ai eu l'occasion de rencontrer au LaBRI et qui ont parcouru avec moi ce long chemin qui mène jusqu'au doctorat : Julien Bernet, Nicolas Bonichon, Min Chen, Émilie Diot, Paul Dorbec, Florent Foucaud, Adrien Guignard, Thomas Morsellino, Arnaud Pêcher, Gabriel Renault et bien d'autres.

Je n'oublie pas non plus le personnel administratif du LaBRI, en particulier Cathy Roubineau, Brigitte Cudeville, Lebna Mizani et Philippe Biais, que j'ai sollicités à de nombreuses reprises.

Un grand merci aussi à mes amis et collègues de l'université Bordeaux 4 qui m'ont soutenu (et supporté!) pendant ces trois années : Alain, Benoîte, Bertrand,

Gérard, Jean-Bernard, Jean-Paul, Jean-Michel, Roger, Sophie, Vanessa...et beaucoup d'autres.

Je remercie bien évidemment mes amis et ma famille pour leur soutien sans faille. Mes parents, ma belle-mère, mes grands-parents d'adoption, ma soeur, mon beau-frère, mon filleul qui n'ont jamais cessé de croire en moi, même s'ils n'ont toujours pas compris l'intérêt de colorier des graphes (mis à part mon filleul âgé de 4 ans...).

Enfin la dernière personne que je remercie c'est Lucie, mon épouse, qui a toujours cru en moi et qui a su trouver les mots pour me motiver dans les moments de doute.

Colorations de graphes sous contraintes

Résumé : Dans cette thèse, nous nous intéressons à différentes notions de colorations sous contraintes. Nous nous intéressons plus spécialement à la coloration acyclique, à la coloration forte d'arêtes et à la coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants.

Dans le Chapitre 2, nous avons étudié la coloration acyclique. Tout d'abord nous avons cherché à borner le nombre chromatique acyclique pour la classe des graphes de degré maximum borné. Ensuite nous nous sommes attardés sur la coloration acyclique par listes. La notion de coloration acyclique par liste des graphes planaires a été introduite par Borodin, Fon-Der Flaass, Kostochka, Raspaud et Sopena. Ils ont conjecturé que tout graphe planaire est acycliquement 5-liste coloriable. De notre côté, nous avons proposé des conditions suffisantes de 3-liste coloration acyclique des graphes planaires.

Dans le Chapitre 3, nous avons étudié la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques en majorant l'indice chromatique fort en fonction du degré moyen maximum. Nous nous sommes également intéressés à la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques sans cycles de longueurs données et nous avons également obtenu une majoration optimale de l'indice chromatique fort pour la famille des graphes planaires extérieurs. Nous avons aussi présenté différents résultats de complexité pour la classe des graphes planaires subcubiques.

Enfin, au Chapitre 4, nous avons abordé la coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants en déterminant les majorations de l'indice avd-chromatique en fonction du degré moyen maximum. Notre travail s'inscrit dans la continuité de celui effectué par Wang et Wang en 2010. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur la famille des graphes de degré maximum au moins 5.

Mots clefs : graphe planaire, coloration acyclique, coloration forte d'arêtes, coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants, degré moyen maximum, cycle.

Discipline : Informatique

LaBRI
Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE)

Graph coloring under constraints

Abstract : In this thesis, we are interested in various coloring of graphs under constraints. We study acyclic coloring, strong edge coloring and adjacent vertex-distinguishing edge coloring.

In Chapter 2, we consider acyclic coloring and we bound the acyclic chromatic number by a function of the maximum degree of the graph. We also study acyclic list coloring. The notion of acyclic list coloring of planar graphs was introduced by Borodin, Fon-Der Flaass, Kostochka, Raspaud, and Sopena. They conjectured that every planar graph is acyclically 5-choosable. We obtain some sufficient conditions for planar graphs to be acyclically 3-choosable.

In Chapter 3, we study strong edge coloring of graphs. We prove some upper bounds of the strong chromatic index of subcubic graphs as a function of the maximum average degree. We also obtain a tight upper bound for the minimum number of colors in a strong edge coloring of outerplanar graphs as a function of the maximum degree. We also prove that the strong edge k -colouring problem, when $k = 4, 5, 6$, is NP-complete for subcubic planar bipartite graphs with some girth condition.

Finally, in Chapter 4, we focus on adjacent vertex-distinguishing edge coloring, or avd-coloring, of graphs. We bound the avd-chromatic number of graphs by a function of the maximum average degree. This work completes a result of Wang and Wang in 2010.

Keywords : planar graph, acyclic coloring, strong edge coloring, adjacent vertex-distinguishing edge coloring, maximum average degree, cycle.

Discipline : Computer Science

LaBRI
Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération,
33405 Talence Cedex (FRANCE)

Table des matières

Table des matières	1
Table des figures	3
Introduction	5
1 Généralités sur les graphes	13
1.1 Introduction	14
1.2 Définitions	14
1.2.1 Adjacence	14
1.2.2 Degré d'un sommet, degré maximum d'un graphe	15
1.2.3 Sous-graphes	15
1.2.4 Chaînes, cycles et connexité	17
1.2.5 Mineur de graphe	17
1.2.6 Graphe représentatif des arêtes	18
1.2.7 Carré d'un graphe	18
1.2.8 Subdivision d'un graphe	19
1.3 Quelques classes de graphes	19
1.3.1 Stables et graphes complets	19
1.3.2 Arbres et forêts	19
1.3.3 Les graphes planaires et planaires extérieurs	20
1.3.4 Les graphes k -dégénérés	22
1.3.5 Les graphes bipartis	22
1.4 Quelques notions de coloration	22
1.4.1 Coloration des sommets d'un graphe	22
1.4.2 Coloration des arêtes d'un graphe	23
2 Coloration acyclique	25
2.1 Introduction	26
2.1.1 Coloration acyclique	26
2.1.2 Coloration acyclique par listes	28
2.2 Graphes de degré maximum borné	32
2.2.1 Préliminaires	32
2.2.2 GS-arbre (good spanning tree)	33
2.2.3 Graphes de degré maximum 5	34
2.2.4 Graphes de degré maximum 6	37

2.2.5	Graphes de degré maximum $\Delta \geq 7$	37
2.3	Graphes planaires sans cycles de longueurs données	41
2.3.1	Graphes planaires sans cycles de longueurs données	42
2.3.2	Graphes planaires sans triangles proches	48
2.4	Conclusion	56
3	Coloration forte d'arêtes	59
3.1	Introduction	60
3.2	Complexité de la coloration forte d'arêtes pour les graphes planaires subcubiques	64
3.2.1	Complexité de la 4-COLORATION FORTE d'arêtes	64
3.2.2	Complexité de la 5-COLORATION FORTE d'arêtes	66
3.2.3	Complexité de la 6-COLORATION FORTE d'arêtes	68
3.3	Graphes subcubiques de degré moyen maximum borné	75
3.3.1	Preuve du Théorème 3.1.5.1	76
3.3.2	Preuve du Théorème 3.1.5.2	79
3.3.3	Preuve du Théorème 3.1.5.3	82
3.3.4	Preuve du Théorème 3.1.5.4	84
3.4	Graphes planaires subcubiques sans cycles de longueurs données	86
3.4.1	Propriétés structurelles	87
3.4.2	Procédure de déchargement	88
3.5	Graphes planaires extérieurs	90
3.6	Conclusion	92
4	Coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants	95
4.1	Introduction	96
4.2	Graphes de degré moyen maximum borné	97
4.2.1	Propriétés structurelles de H	98
4.2.2	Procédure de déchargement	104
4.3	Conclusion	106
	Conclusion	107
	Bibliographie	111

Table des figures

1.1	Exemples de graphes.	14
1.2	Le prisme P est d'ordre 6 et 3-régulier.	15
1.3	Exemples de sous-graphes.	16
1.4	Exemple de sous-graphe couvrant.	16
1.5	Exemple de graphe contenant un mineur $K_{2,4}$	18
1.6	Exemple de graphe représentatif des arêtes.	18
1.7	Exemple de carré d'un graphe.	19
1.8	Le graphe complet K_5	19
1.9	Exemple d'arbre.	20
1.10	Un arbre couvrant de plus courts chemins enraciné sur le sommet 7.	20
1.11	Le graphe K_4 est planaire.	21
1.12	Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ à 6 sommets.	22
2.1	Exemples de graphes non acycliquement 4-coloriables.	26
2.2	Le graphe G tel que $\chi_a(G) = 3$ et $\chi_a^l(G) \neq 3$	29
2.3	La liste $L_u = (2, 1, 1, 1)$	33
2.4	Exemples de sommets et de faces liés.	42
2.5	Configurations réductibles.	43
2.6	Règles de déchargement.	47
3.1	$\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$	60
3.2	Constructions d'Erdős et Nešetřil.	61
3.3	Le prisme P tel que $\chi'_s(P) = 9$	61
3.4	$\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$	62
3.5	Couleur forcée	64
3.6	Transport d'une couleur	64
3.7	Sous-gadget M	65
3.8	Gadget de sommet Q	65
3.9	Connexion de gadgets de sommets dans G'	65
3.10	Gadgets de sommet et d'arête pour une maille 8 du Théorème 3.1.9	67
3.11	Gadget de sommet pour une maille 9 du Théorème 3.1.9	67
3.12	Motif principal	68
3.13	Graphe P	69
3.14	Gadget Q de sommet utilisé pour le Théorème 3.1.10	69
3.15	Gadget d'arête pour le Théorème 3.1.10	70
3.16	Un graphe G tel que $\text{mad}(G) = 2$ et $\chi'_s(G) = 6$	75

3.17	Configurations réductibles.	78
3.18	Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$	78
3.19	Configurations réductibles.	81
3.20	Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ et $\chi'_s(G) > 7$	81
3.21	Configurations réductibles.	83
3.22	Configurations réductibles.	86
3.23	Un graphe G tel que $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ et $\chi'_s(G) = 10$	86
3.24	Exemple d'un graphe planaire extérieur tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$	90
3.25	Configurations interdites	91
3.26	Cas où $ C \leq 4$	92
4.1	Configuration du Lemme 4.2.2.2.	101
4.2	Configuration du Lemme 4.2.2.3.	102
4.3	Configuration du Lemme 4.2.2.4.	103
4.4	Configuration du Lemme 4.2.2.5.	103
4.5	Configuration du Lemme 4.2.2.6.	104

Introduction

La coloration de graphes tient une place privilégiée dans le domaine des mathématiques discrètes. Les colorations de graphes ont de nombreuses applications et ne se limitent pas seulement à la gestion d'emploi du temps ou d'examens comme on l'enseigne dans le secondaire. On peut par exemple évoquer la modélisation des réseaux téléphoniques [6].

Un des premiers problèmes de coloration de graphes est certainement le problème des Quatre Couleurs posé par Francis Guthrie en 1852 : toute carte géographique peut être coloriée avec quatre couleurs de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes. En 1976, le problème des Quatre Couleurs est devenu le Théorème des Quatre Couleurs puisque Appel et Haken [5], assistés d'un ordinateur, l'ont résolu.

Il existe de nombreuses variantes de problèmes de colorations de graphes, disons plutôt qu'il existe de nombreux types de colorations sous contraintes. La coloration standard ou la plus naturelle est la coloration propre de sommets. Commençons par introduire les différents problèmes de colorations sous contraintes qui font l'objet de ce mémoire.

Une *k-coloration propre* des sommets ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) d'un graphe G est une application c de l'ensemble des sommets $V(G)$ de G dans l'ensemble de couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que si deux sommets u et v sont adjacents alors $c(u) \neq c(v)$. Un graphe qui admet une *k-coloration* est dit *k-coloriable*. Le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G est *k-coloriable*.

Une *affectation de listes* de G est une fonction L qui alloue à chaque sommet $v \in V(G)$ une liste $L(v)$ de couleurs qu'il peut prendre. Soit G un graphe et L une affectation de listes de G . Le graphe G est *L-liste coloriable* s'il existe une coloration propre ϕ de G telle que $\phi(v) \in L(v)$ pour tout $v \in V(G)$. Si G est *L-liste coloriable* pour toute affectation de listes L avec $|L(v)| \geq k$ pour tout $v \in V(G)$, alors G est dit *k-liste coloriable*. Le *nombre chromatique par listes* de G , noté $\chi^l(G)$, est le plus petit entier k tel que G est *k-liste coloriable*.

La notion de *L-liste coloration* a été introduite par Vizing [84] en 1976 et Erdős, Rubin et Taylor [37] en 1979. Dans [37], Erdős, Rubin et Taylor ont complètement caractérisé la classe des graphes 2-liste coloriables. Thomassen [82] a prouvé en 1994 que tout graphe planaire est 5-liste coloriable. Voigt [85] et Mirzakhani [70] ont

exhibé des graphes planaires qui ne sont pas 4-liste coloriables. De nombreux auteurs se sont alors intéressés à déterminer sous quelles conditions un graphe planaire est 3- ou 4-liste coloriable. Dans [48], Gutner a prouvé que le problème consistant à déterminer si un graphe planaire est 3-liste coloriable (resp. 4-liste coloriable) est NP-complet.

Une *coloration acyclique* d'un graphe G est une coloration propre de G telle que G ne contient pas de cycle bicolorié ; en d'autres termes, le graphe induit par toute union de deux classes de couleurs est une forêt. Le *nombre chromatique acyclique* d'un graphe G , noté $\chi_a(G)$, est le plus petit entier k tel que G est acycliquement k -coloriable. Observons que $\chi(G) \leq \chi_a(G)$ pour tout graphe G .

La notion de coloration acyclique de graphes a été introduite par Grünbaum [47] en 1973 et étudiée par Mitchem [71], Albertson et Berman [2] et Kostochka [64]. En 1979, Borodin [12] a résolu une conjecture de Grünbaum en prouvant que tout graphe planaire est acycliquement 5-coloriable. Ce résultat est optimal puisqu'il existe des graphes planaires 4-réguliers non acycliquement 4-coloriables (Grünbaum [47]). De plus, en 1976, Kostochka et Melnikov ont proposé la construction d'un graphe biparti non acycliquement 4-coloriable [65].

De nombreux auteurs ont également étudié la classe des graphes de degré maximum borné. Ils ont ainsi majoré le nombre chromatique acyclique par une fonction dépendant de $\Delta(G)$, le degré maximum du graphe G . Concernant les graphes de faible degré maximum, Grünbaum [47] a prouvé en 1973 que tout graphe de degré maximum au plus 3 est acycliquement 4-coloriable, puis Burnstein [25] a montré que tout graphe de degré maximum au plus 4 est acycliquement 5-coloriable. Les classes de graphes de degré maximum 5 ou de degré maximum au moins 6 ont été étudiées par Fertin et Raspaud [42, 43], Yadav *et al.* [92, 90] et récemment par Kostochka [66].

Dans ce mémoire, nous étudions la classe des graphes de degré maximum supérieur ou égal à 5.

Nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème A : Tout graphe G est tel que $\chi_a(G) \leq f(\Delta)$ pour $\Delta \geq 5$,

$$\text{avec } f(\Delta) = \begin{cases} 8 & \text{si } \Delta = 5 \text{ [52]} \\ 11 & \text{si } \Delta = 6 \text{ [51]} \\ 17 & \text{si } \Delta = 7 \text{ [35]} \\ \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor + 3 & \text{si } \Delta \geq 8 \text{ [35]}. \end{cases}$$

Similairement à la notion de coloration (propre) par listes, on peut définir la coloration acyclique par listes : la L -coloration doit être acyclique. On notera, $\chi_a^l(G)$, le *nombre chromatique acyclique par listes* de G .

En 2002, Borodin, Fon-Der Flaass, Kostochka, Raspaud, et Sopena [16] ont été les premiers à s'intéresser à la coloration acyclique par listes des graphes planaires. Ils ont prouvé que tout graphe planaire est acycliquement 7-liste coloriable. Ils ont également proposé la conjecture suivante :

Conjecture B : *Tout graphe planaire est acycliquement 5-liste coloriable.*

Cette conjecture a attiré beaucoup d'attention récemment, car si elle est vraie, alors elle renforce le théorème de Borodin [12] sur la 5-coloration acyclique des graphes planaires et celui de Thomassen [82] sur la 5-liste coloration des graphes planaires.

Théorème C (Borodin, 1976 [12]) : *Tout graphe planaire est acycliquement 5-coloriable.*

Théorème D (Thomassen, 1994 [82]) : *Tout graphe planaire est 5-liste coloriable.*

Cependant, cette conjecture semble difficile et n'a été infirmée ou démontrée que pour certaines classes de graphes planaires.

Dans le Chapitre 2, nous donnons des conditions suffisantes pour qu'un graphe planaire admette une 3-coloration acyclique par listes. Plus précisément, nous montrons les résultats suivants :

Théorème E [53] : *Tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 12 est acycliquement 3-liste coloriable.*

Théorème F [55] : Soit G un graphe planaire et $d_{\Delta}(G)$ la distance minimale (en terme de nombre d'arêtes) qui sépare deux triangles dans G . Si G satisfait une des conditions suivantes :

1. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 10, et $d_{\Delta}(G) \geq 2$
2. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 9, et $d_{\Delta}(G) \geq 3$
3. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 8, et $d_{\Delta}(G) \geq 5$
4. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 7, et $d_{\Delta}(G) \geq 7$

alors G est acycliquement 3-liste coloriable.

Une k -coloration d'arêtes à distance 2 ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de l'ensemble des arêtes $E(G)$ de G dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes. Cette notion a été introduite en 1983 par Fouquet et Jolivet [44, 45]. L'indice chromatique fort de G , noté $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration d'arêtes à distance 2.

Ce type de coloration peut être par exemple utilisé pour modéliser un problème d'allocation de fréquences dans les réseaux radio [9, 78, 79, 80].

Nous nous intéresserons à la majoration de cet indice chromatique fort en fonction du degré maximum Δ du graphe.

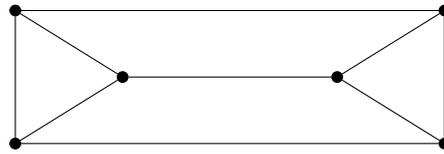
En 1985, Erdős et Nešetřil ont conjecturé au cours d'une conférence à Prague que :

Conjecture G (Erdős et Nešetřil, 1985 [68]) : *Tout graphe G vérifie $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ (le degré maximum du graphe) est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.*

La Conjecture d'Erdős et Nešetřil a été vérifiée en 1992 pour $\Delta \leq 3$, indépendamment par Andersen et Horák *et al.* [4, 59]. Faudree *et al.* ont également conjecturé [40] que :

Conjecture H (Faudree *et al.*, 1992 [40]) : *Tout graphe planaire subcubique G (i.e. de degré maximum au plus 3) est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$.*

Si cette conjecture est vraie, alors cette majoration est la meilleure possible car la coloration d'arêtes à distance 2 du prisme représenté ci-dessous nécessite au moins 9 couleurs. Lorsque $\Delta = 4$, Cranston [33] a prouvé que 22 couleurs étaient suffisantes. À notre connaissance aucun auteur ne s'est intéressé aux graphes tels que $\Delta \geq 5$.



Le prisme P avec $\chi'_s(P) = 9$

Dans ce mémoire nous avons concentré nos efforts sur la famille des graphes subcubiques. Nous obtenons des majorations de $\chi'_s(G)$ en fonction du degré moyen maximum d'un graphe G , noté $\text{mad}(G)$.

Rappelons que $\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$.

En particulier nous avons montré que :

Théorème I [58] : Soit G un graphe subcubique :

1. Si $\text{mad}(G) < \frac{15}{7}$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
2. Si $\text{mad}(G) < \frac{27}{11}$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
3. Si $\text{mad}(G) < \frac{13}{5}$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
4. Si $\text{mad}(G) < \frac{36}{13}$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

La maille d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans G . Étant donné que tout graphe planaire de maille au moins g vérifie $\text{mad} < \frac{2g}{g-2}$, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire I' [58] : Soit G un graphe planaire subcubique de maille g :

1. Si $g \geq 30$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
2. Si $g \geq 11$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
3. Si $g \geq 9$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
4. Si $g \geq 8$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Une meilleure borne est obtenue pour les graphes planaires subcubiques de maille 16.

Théorème J [58] : Si G est un graphe planaire subcubique de maille $g \geq 16$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.

Nous avons étudié la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques sans cycles de longueurs données, et nous avons démontré :

Théorème K [57] : Soit G un graphe planaire subcubique sans cycles de longueurs 6 à 11, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Faudree *et al.* [40] se sont intéressés à la classe des graphes planaires et ont démontré que :

Théorème L (Faudree *et al.*, 1992 [40]) : Si G est un graphe planaire de degré maximum Δ alors, $\chi'_s(G) \leq 4\Delta + 4$. De plus, pour tout $\Delta \geq 2$, on peut construire un graphe G tel que $\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$.

Pour les graphes planaires extérieurs nous obtenons :

Théorème M [56] : Si G est un graphe planaire extérieur de degré maximum $\Delta \geq 3$ alors $\chi'_s(G) \leq 3\Delta - 3$. De plus, pour tout $\Delta \geq 3$, il existe un graphe planaire extérieur G tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$.

Nous avons également abordé les problèmes de complexité, plus précisément les problèmes de décision de ce type de coloration. La théorie de la complexité des algorithmes étudie formellement la difficulté intrinsèque des problèmes algorithmiques. Elle définit plusieurs classes de complexité (P, NP, ...) permettant de classer les algorithmes selon leurs caractéristiques.

En algorithmique, un problème de décision est une question mathématiquement définie portant sur des paramètres donnés sous forme manipulable informatiquement, et demandant une réponse par oui ou non. Ainsi, savoir si, étant donné un ensemble de villes et une distance d , il existe un chemin passant par toutes les villes et de longueur inférieure à d , est un problème de décision (en l'occurrence, le problème du voyageur de commerce).

Mahdian a prouvé que le problème de déterminer si pour toute maille fixée, un graphe biparti admet une coloration d'arêtes à distance 2 utilisant au plus k couleurs, avec $k \geq 4$, est un problème NP-complet [69]. Pour cela, il a utilisé une réduction depuis le problème de k -COLORATION propre d'un graphe qui est NP-complet

pour $k \geq 3$ [46]. Erickson *et al.* ont prouvé que le problème reste un problème NP-complet dans le cas des graphes bipartis de degré maximum 3, de maille 6 et pour $k = 5$ [38].

Voici un aperçu de nos résultats :

Théorème N [56] :

- N1. Le problème de 4-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et pour toute maille quelconque fixée.
- N2. Le problème de 5-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille 8, et pour les graphes planaires subcubiques de maille 9.
- N3. Le problème de 6-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille 4.

La notion de coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants peut être considérée comme étant un cas particulier de la notion de coloration propre d'arêtes sommets distinguants. En effet, une *k-coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants*, ou *k-avd-coloration*, d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G utilisant au plus k couleurs et telle que pour toute paire de sommets adjacents u, v , l'ensemble des couleurs des arêtes incidentes à u est différent de l'ensemble des couleurs des arêtes incidentes à v . L'*indice avd-chromatique* de G , noté $\chi'_{avd}(G)$, est le plus petit entier k tel que G est *k-avd-coloriable*. Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des graphes sans arêtes isolées. La coloration d'arêtes sommets distinguants est également connu sous les noms de *coloration forte d'arêtes sommets distinguants* [94] et *1-coloration forte d'arêtes* [1]. Zhang *et al.* ont entièrement caractérisé le nombre avd-chromatique pour les chaînes, les cycles, les arbres, les graphes complets et les graphes bipartis complets [94].

Ils ont également proposé la conjecture suivante :

Conjecture O (Zhang *et al.*, 2002 [94]) : *Si G est un graphe connexe avec au moins 6 sommets, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Dans [7], Balister *et al.* ont prouvé cette conjecture pour la famille des graphes de degré maximum 3 et pour les graphes bipartis.

Dans [88], Wang et Wang ont fait le lien entre le degré moyen maximum et l'avd-coloration en prouvant que :

Théorème P (Wang et Wang, 2010 [88]) : *Soit G un graphe connexe de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré moyen maximum $mad(G)$.*

- 1. *Si $mad(G) < 3$ et $\Delta(G) \geq 3$, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$.*
- 2. *Si $mad(G) < \frac{5}{2}$ et $\Delta(G) \geq 4$, ou $mad(G) < \frac{7}{3}$ et $\Delta(G) = 3$, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

3. Si $mad(G) < \frac{5}{2}$ et $\Delta(G) \geq 5$, alors $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si G contient des sommets adjacents de degré maximum.

Motivés par ce résultat, nous avons prouvé que :

Théorème Q [54] : Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G) \geq 5$ et $mad(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Ce mémoire se décompose en quatre chapitres. Le Chapitre 1 présente les définitions et les notations qui nous seront utiles. Le Chapitre 2 est réservé à la coloration acyclique et à la coloration acyclique par listes. Le Chapitre 3 est quant à lui dédié à la coloration forte d'arêtes et le Chapitre 4 sera consacré à la coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants. Enfin dans le Chapitre 5, nous proposons une sélection de problèmes.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Contenu

1.1	Introduction	14
1.2	Définitions	14
1.2.1	Adjacence	14
1.2.2	Degré d'un sommet, degré maximum d'un graphe	15
1.2.3	Sous-graphes	15
1.2.4	Chaînes, cycles et connexité	17
1.2.5	Mineur de graphe	17
1.2.6	Graphe représentatif des arêtes	18
1.2.7	Carré d'un graphe	18
1.2.8	Subdivision d'un graphe	19
1.3	Quelques classes de graphes	19
1.3.1	Stables et graphes complets	19
1.3.2	Arbres et forêts	19
1.3.3	Les graphes planaires et planaires extérieurs	20
1.3.4	Les graphes k -dégénérés	22
1.3.5	Les graphes bipartis	22
1.4	Quelques notions de coloration	22
1.4.1	Coloration des sommets d'un graphe	22
1.4.2	Coloration des arêtes d'un graphe	23

Dans ce chapitre nous donnons quelques définitions de théorie des graphes.

1.1 Introduction

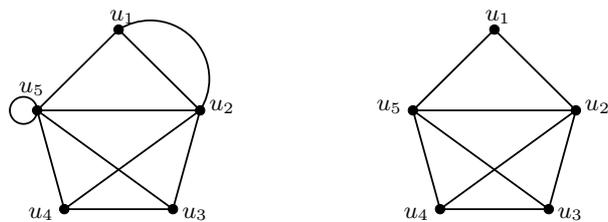
Dans ce chapitre, nous introduisons les différentes notions utilisées en théorie des graphes de manière courante et dont nous nous servirons dans ce document. Ces notations sont standards et peuvent être retrouvées dans [10, 11, 36].

Nous y présentons également des notions de coloration de graphes qui sont au centre de nos travaux. Nous en profiterons pour donner un bref état de l'art sur ces différentes colorations.

1.2 Définitions

Un *graphe* $G = (V(G), E(G))$ est constitué d'un ensemble non vide fini de *sommets*, noté $V(G)$ ou V , et d'un ensemble fini d'*arêtes*, noté $E(G)$ ou E , qui sont des paires de sommets de $V(G)$. Afin d'alléger les notations on note uv ou vu la paire de sommets $\{u, v\}$. Une arête uv est une boucle si $u = v$. Dans le cas général, un graphe peut avoir des arêtes multiples, c'est-à-dire des arêtes différentes qui ont les mêmes extrémités. Par exemple sur la Figure 1.1(a), le graphe H possède une boucle en u_5 et une arête multiple u_1u_2 (il s'agit en fait ici d'une arête double).

Dans toute la suite de ce document, nous considérerons uniquement des graphes (non orientés) sans boucle ni arête multiple, c'est à dire des graphes *simples*. Le nombre de sommets d'un graphe est appelé *l'ordre* du graphe. Le graphe G donné en exemple sur la Figure 1.1(b) est d'ordre 5 et a pour ensemble de sommets $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ et pour ensemble d'arêtes $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_5, u_2u_3, u_2u_4, u_2u_5, u_3u_4, u_3u_5, u_4u_5\}$.



(a) Le graphe H avec une arête multiple et une boucle.

(b) Le graphe G est dit simple.

FIGURE 1.1: Exemples de graphes.

1.2.1 Adjacence

Deux sommets u et v d'un graphe G sont dits *adjacents* s'il existe une arête entre u et v dans G . Les sommets u et v sont appelés *extrémités* de l'arête uv . On dit aussi que u et v sont *voisins* et que l'arête uv est *incidente* aux sommets u et v . L'ensemble des sommets adjacents à u est appelé le voisinage de u ; il sera noté

par $N_G(u)$ ou $N(u)$ si le contexte fait référence de façon claire au graphe considéré. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles possèdent une extrémité commune.

1.2.2 Degré d'un sommet, degré maximum d'un graphe

Le *degré* d'un sommet u de G , noté $d_G(u)$ (ou $d(u)$), est égal au nombre de ses voisins dans G , soit $d_G(u) = |N(u)|$. Un sommet de degré k (resp. au moins k , au plus k) est un k -sommet (resp. $\geq k$ -sommet, $\leq k$ -sommet). De même, un k -voisin de u (resp. $\geq k$ -voisin, $\leq k$ -voisin) est un sommet de degré k (resp. au moins k , au plus k) adjacent à u .

Proposition 1.2.1

Dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, on a :
$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2|E(G)|.$$

On peut alors en déduire le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.2

Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

Le *degré maximum* d'un graphe G , noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés des sommets de G . En d'autres termes, $\Delta(G) = \max_{u \in V(G)} \{d(u)\}$. De même, le *degré minimum* de G , noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G . Pour le graphe G de la Figure 1.1(b), nous avons $\Delta(G) = 4$ et $\delta(G) = 2$.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est un *graphe régulier*. Un graphe est k -régulier si tous ses sommets sont de degré k . En particulier un graphe 3-régulier est appelé *cubique* et un graphe G tel que $\Delta(G) \leq 3$ est appelé *subcubique*. Par exemple, le graphe P de la Figure 1.2 est un graphe cubique (3-régulier).

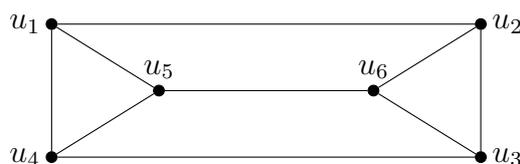


FIGURE 1.2: Le prisme P est d'ordre 6 et 3-régulier.

1.2.3 Sous-graphes

Un graphe H est un *sous-graphe* d'un graphe G si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ et toutes les arêtes de $E(H)$ ont leurs extrémités dans $V(H)$; nous utiliserons la notation $H \subseteq G$. Par exemple, si nous considérons les trois graphes G , H_1 et H_2 de la Figure 1.3, nous avons $H_1 \subseteq G$ et $H_2 \subseteq G$.

Soit S un ensemble de sommets de G , $S \subseteq V(G)$. Le sous-graphe de G induit par S , noté $G[S]$, est le graphe défini comme suit :

1. $V(G[S]) = S$.

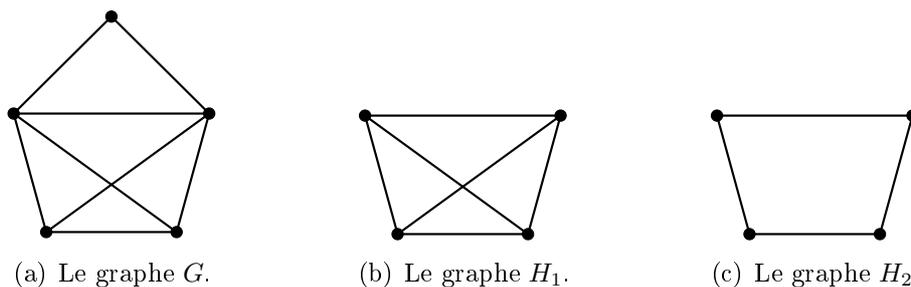


FIGURE 1.3: Exemples de sous-graphes.

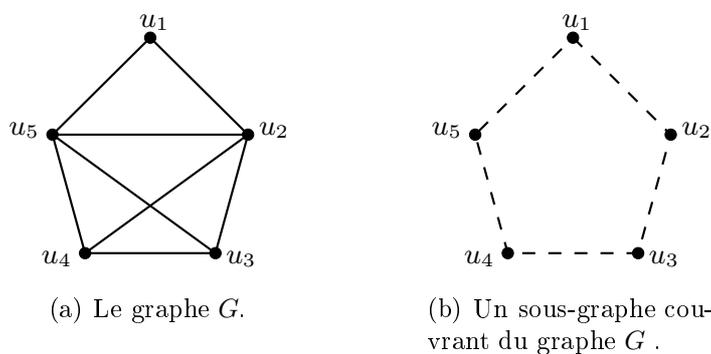


FIGURE 1.4: Exemple de sous-graphe couvrant.

2. Toutes les arêtes de $E(G)$ ayant leurs deux extrémités dans S sont également dans $E(G[S])$.

Par exemple, si nous considérons les trois graphes G , H_1 et H_2 de la Figure 1.3, le graphe H_1 est un sous-graphe induit de G , mais H_2 ne l'est pas.

Un graphe $H = (V(H), E(H))$ est un *sous-graphe couvrant* d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ si H est un sous-graphe de G et $V(H) = V(G)$. En d'autres termes un sous-graphe couvrant de G est un sous-graphe de G qui contient tous les sommets de G . Un exemple de sous-graphe couvrant du graphe de la Figure 1.4(a) est donné sur la Figure 1.4(b). Les arêtes du sous-graphe couvrant sont représentées en pointillés.

Le sous-graphe de G obtenu en supprimant un sommet v et toutes les arêtes incidentes à ce dernier est noté $G \setminus \{v\}$ (ou plus simplement $G \setminus v$). De même, le sous-graphe de G obtenu en supprimant l'arête uv est noté $G \setminus \{uv\}$ (ou $G \setminus uv$) (notons dans ce cas que supprimer l'arête uv n'implique pas la suppression des sommets u et v). Ces notions s'étendent de manière naturelle aux ensembles de sommets ou d'arêtes.

1.2.4 Chaînes, cycles et connexité

Une *chaîne* dans un graphe G est une suite (v_0, v_1, \dots, v_k) de sommets telle que deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} sont reliés par une arête. La longueur d'une telle chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose ; k dans notre exemple. Une chaîne qui ne contient pas deux fois le même sommet (à l'exception éventuelle de ses extrémités) est dite *élémentaire*. La *distance* entre deux sommets u et v dans un graphe est la longueur d'une plus courte chaîne reliant u et v , notée $dist_G(u, v)$ ou $dist(u, v)$. Le *diamètre* d'un graphe G noté $diam(G)$ est la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G . Formellement on a : $diam(G) = \max_{x, y \in V(G)} \{dist_G(x, y)\}$.

Un *cycle* est une chaîne élémentaire (u_0, u_1, \dots, u_n) où $u_0 = u_n$.

Une arête reliant deux sommets non adjacents sur un cycle est appelée *corde*.

La *maille* d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans ce graphe. Elle est notée $g(G)$. Par convention, la maille d'un graphe sans cycle est infinie.

Un graphe est dit *connexe* si toute paire de sommets u, v de ce graphe est reliée par une chaîne. Un graphe G est *k-connexe* si le nombre minimum de sommets dont l'élimination rend G non connexe ou le réduit à un sommet unique est au moins k . On peut remarquer que si un graphe est $(k + 1)$ -connexe, alors il est k -connexe.

On peut aussi remarquer que la relation $\{x = y, \text{ ou } x \neq y \text{ et il existe dans } G \text{ une chaîne reliant } x \text{ et } y\}$ est une relation d'équivalence. Les classes de cette relation d'équivalence constituent une partition de $V(G)$ en sous-graphes connexes de G , appelés les *composantes connexes* de G .

En d'autres termes, une composante connexe d'un graphe G est sous-graphe connexe maximal, c'est-à-dire un sous-graphe tel que tout sous-graphe de G le contenant strictement n'est pas connexe.

1.2.5 Mineur de graphe

Il existe une notion plus générale que celle de sous-graphe qui repose en outre sur l'opération de *contraction* d'arête. Rappelons que les graphes que nous considérons sont simples et sans boucle.

La *contraction* d'une arête uv d'un graphe G est l'opération qui consiste à remplacer les deux sommets u et v par un unique sommet w et à relier ce dernier à l'ensemble des voisins de u et de v (l'arête uv disparaissant). On note ce graphe G/uv .

L'opération de contraction d'arête peut être répétée, et on définit plus généralement le graphe obtenu par contraction d'un ensemble d'arêtes A de G , noté G/A .

Un graphe H est un *mineur* d'un graphe G si H est obtenu à partir de G par une série de suppressions de sommets, de suppressions d'arêtes et de contractions d'arêtes, dans n'importe quel ordre.

Remarquons que si I est un mineur de H et H est un mineur de G , alors I est un mineur de G .

Par exemple, la Figure 1.5(a), représente le graphe de Petersen P_{10} . En contrac-

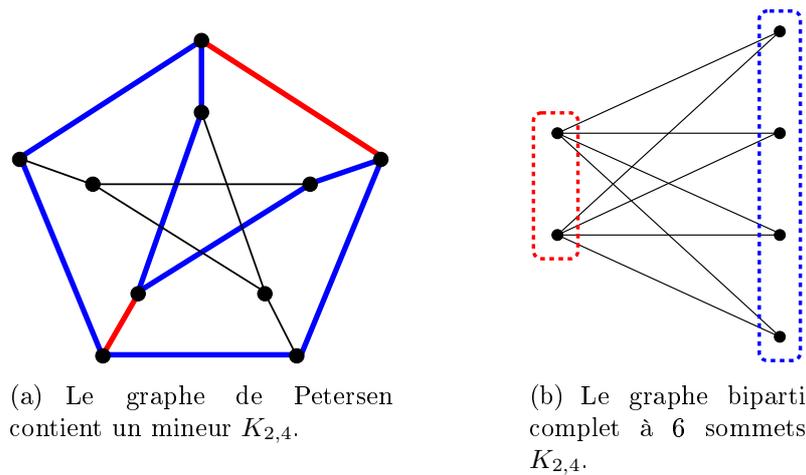


FIGURE 1.5: Exemple de graphe contenant un mineur $K_{2,4}$.

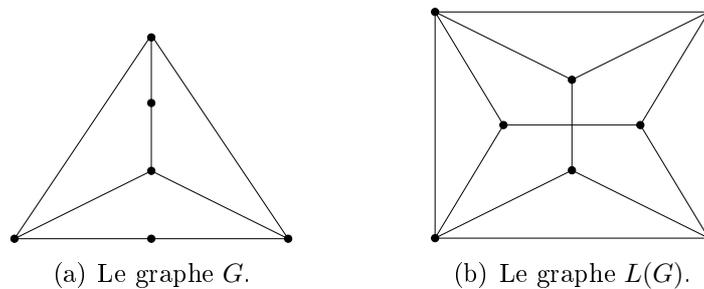


FIGURE 1.6: Exemple de graphe représentatif des arêtes.

tant les deux arêtes rouges et en ne gardant que les arêtes bleues, et les sommets adjacents aux arêtes bleues, on obtient un graphe biparti complet $K_{2,4}$. Donc le graphe de Petersen admet $K_{2,4}$ comme mineur.

1.2.6 Graphe représentatif des arêtes

Le *graphe représentatif des arêtes*, en anglais *line graph*, d'un graphe G , noté $L(G)$, est défini comme le graphe ayant pour sommets l'ensemble des arêtes de G et tel que deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux arêtes correspondantes sont adjacentes dans G . La Figure 1.6 montre un exemple de graphe représentatif des arêtes.

1.2.7 Carré d'un graphe

Le carré d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est le graphe, noté G^2 , ayant le même ensemble de sommets que G et tel que deux sommets sont adjacents dans G^2 si et seulement si ils sont à distance au plus 2 dans G .

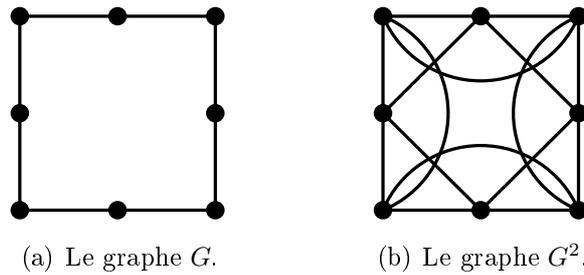
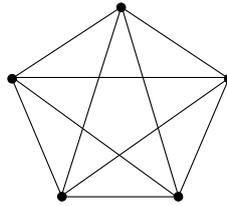


FIGURE 1.7: Exemple de carré d'un graphe.

FIGURE 1.8: Le graphe complet K_5 .

1.2.8 Subdivision d'un graphe

Subdiviser une arête dans un graphe revient à remplacer cette arête par une chaîne de 2-sommets intermédiaires. Une *subdivision d'un graphe* G est un graphe H obtenu en subdivisant les arêtes de G .

1.3 Quelques classes de graphes

Nous décrivons dans cette partie différentes classes de graphes que nous aurons l'occasion de rencontrer dans la suite de ce mémoire.

1.3.1 Stables et graphes complets

Un *stable* est un ensemble de sommets indépendants (*i.e.* pour tous sommets u, v de cet ensemble, u et v ne sont pas adjacents).

Un *graphe complet* à n sommets, noté K_n , est un graphe tel que toute paire de sommets est reliée par une arête. Ce graphe est aussi appelé une *n-clique*. Par exemple, le graphe complet à 5 sommets, noté K_5 , est représenté sur la Figure 1.8.

1.3.2 Arbres et forêts

Un graphe ne contenant pas de cycle est une *forêt*. Chaque composante connexe d'une forêt est un *arbre*. Les sommets de degré 1 d'une forêt sont appelés *feuilles*, les autres sont appelés sommets *internes*. Un exemple d'arbre est donné sur la Figure 1.9 : les sommets i_1, i_2, \dots, i_6 sont les sommets internes alors que les sommets f_1, f_2, \dots, f_6 sont les feuilles.

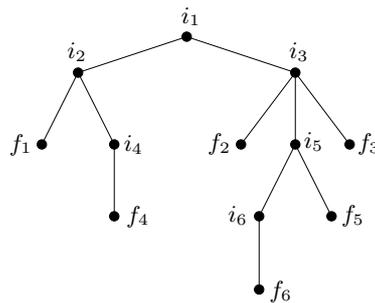


FIGURE 1.9: Exemple d'arbre.

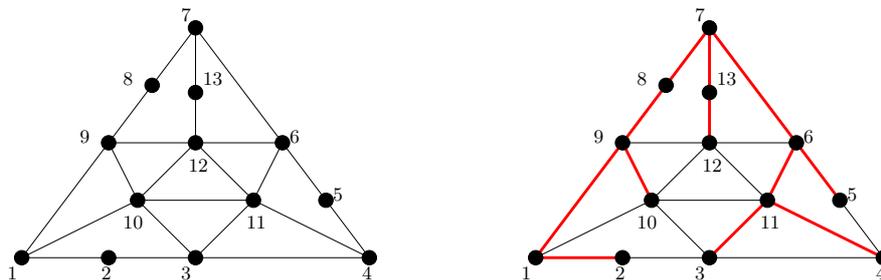


FIGURE 1.10: Un arbre couvrant de plus courts chemins enraciné sur le sommet 7.

Arbre enraciné : Un arbre *enraciné* $T(x)$ est un arbre T avec un sommet spécifié appelé la racine de T . Les arbres enracinés sont souvent représentés de telle sorte que la racine soit le sommet situé le plus haut, par exemple l'arbre de la Figure 1.9 a pour racine i_1 .

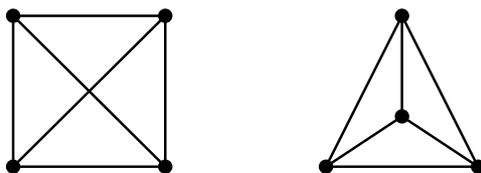
On dit qu'un sommet v est un *descendant* d'un sommet u si le sommet u est sur la chaîne entre v et la racine de l'arbre. On dit aussi que u est un *ancêtre* de v . Si u et v sont reliés par une arête alors on dit que u est le *père* de v et donc v est un *fil* de u . Deux sommets ayant le même père sont dit *frères*.

La *profondeur* d'un sommet est la distance qui le sépare de la racine. La profondeur de l'arbre est la plus grande profondeur de ses feuilles.

Arbre couvrant : Un sous-graphe couvrant G' de G est un *arbre couvrant* si G' est un arbre. Un arbre T couvrant G est dit de plus courts chemins s'il existe un sommet r tel que pour tout sommet v , $dist_G(r, v) = dist_T(r, v)$. Un tel arbre peut être obtenu à partir de tout graphe G en faisant un parcours en largeur sur G (cf. Figure 1.10).

1.3.3 Les graphes planaires et planaires extérieurs

Un graphe *planaire* est un graphe ayant une représentation dans le plan sans croisement d'arêtes. Par exemple, le graphe K_4 représenté sur la Figure 1.11 est un graphe planaire car il est possible de le représenter dans le plan sans croisement.

FIGURE 1.11: Le graphe K_4 est planaire.

Une *face* est une région du plan bordée par un ensemble d'arêtes et telle que deux points arbitraires de cette région peuvent être reliés par une courbe ne rencontrant ni sommets, ni arêtes. La seule face dont la surface est infinie est la face *externe*. Le *rang* (ou la *taille*) d'une face f , noté $r(f)$, est le nombre d'arêtes bordant f . Une face de rang k (resp. au moins k , au plus k) est une k -face (resp. $\geq k$ -face, $\leq k$ -face). L'ensemble des faces d'un graphe planaire G est noté $F(G)$.

Une des formules que nous utiliserons durant ce mémoire est la formule suivante due à Euler :

Théorème 1.3.1 (Formule d'Euler)

Si G est un graphe planaire connexe, $|V(G)|$ son nombre de sommets, $|E(G)|$ son nombre d'arêtes et $|F(G)|$ son nombre de faces, alors

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2.$$

Corollaire 1.3.2

Si G est un graphe planaire de maille au moins g , alors $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(|V(G)| - 2)$.

Corollaire 1.3.3

Si G est un graphe planaire tel que $|V(G)| \geq 3$, alors $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ et si G ne contient pas de triangles alors $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

De plus, Kuratowski [67] a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :

Théorème 1.3.4 (Kuratowski, 1930 [67])

Un graphe fini est planaire si et seulement s'il est sans mineur K_5 et sans mineur $K_{3,3}$.

Un graphe *planaire extérieur* est un graphe ayant une représentation planaire telle que tous les sommets du graphe se trouvent sur la même face.

Le *degré moyen* d'un graphe G est égal à $\frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$ et son *degré moyen maximum*, noté $\text{mad}(G)$, est :

$$\text{mad}(G) = \max \left\{ \frac{2|E(H)|}{|V(H)|}, H \subseteq G \right\}$$

Dans le cas des graphes planaires, le degré moyen maximum est un paramètre lié à la maille comme suit :

Observation 1.3.5

Soit G un graphe planaire de maille g . Alors $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$.

À noter que le degré moyen maximum peut être calculé en temps polynomial [62].

1.3.4 Les graphes k -dégénérés

Un graphe G est k -dégénéré si tout sous-graphe H de G contient un sommet de degré au plus k . Par exemple, une forêt est 1-dégénérée ou encore un graphe planaire extérieur est 2-dégénéré. De même, en utilisant la formule d'Euler, nous pouvons vérifier que tout graphe planaire est 5-dégénéré.

1.3.5 Les graphes bipartis

Un graphe est dit *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles U et V telle que chaque arête ait une extrémité dans U et l'autre dans V . Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impaire. Un graphe biparti est dit *complet* si chaque sommet de U est relié à chaque sommet de V (cf. Figure 1.12). On le note $K_{|U|,|V|}$.

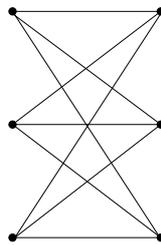


FIGURE 1.12: Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ à 6 sommets.

1.4 Quelques notions de coloration

Dans cette dernière partie, nous abordons les notions de colorations propres de sommets et d'arêtes. Nous donnons leurs définitions ainsi que certains résultats fondamentaux. De nombreux résultats de coloration ainsi que de nombreux problèmes ouverts sont rassemblés dans l'ouvrage de Jensen et Toft [63].

1.4.1 Coloration des sommets d'un graphe

Une k -coloration propre des sommets d'un graphe G est une application $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de l'ensemble des sommets $V(G)$ de G dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux sommets adjacents dans G reçoivent des couleurs différentes, i.e. si $uv \in E(G)$, alors $c(u) \neq c(v)$.

Un graphe qui admet une k -coloration est dit k -coloriable. Le nombre chromatique de G , noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration.

On peut remarquer que si G est un graphe k -dégénéré alors $\chi(G) \leq k + 1$. En 1941, Brooks a proposé une majoration de $\chi(G)$ en fonction du degré maximum $\Delta(G)$:

Théorème 1.4.1 (Brooks, 1941 [23])

Soit G un graphe connexe. Si G n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Parmi les nombreux résultats relatifs au nombre chromatique nous pouvons citer le célèbre résultat de Appel et Haken obtenu en 1977 à l'aide d'un ordinateur :

Théorème 1.4.2 (Appel et Haken, 1976 [5])

Si G est un graphe planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.

Appel et Haken ont ainsi répondu à ce qui est certainement la toute première question de coloration des graphes due à Francis Guthrie en 1852 : “Est-il possible de colorier n'importe quelle carte avec seulement quatre couleurs sachant que deux régions partageant une même frontière ne peuvent recevoir des couleurs identiques ?”.

Actuellement, de nombreux chercheurs s'emploient à prouver (de façon directe ou indirecte) le Théorème de Appel et Haken sans l'aide d'ordinateurs et ainsi aboutir à une preuve purement mathématique. De nombreuses colorations sous contraintes ont ainsi émergé afin de prouver ce résultat mathématiquement. Par exemple, Grünbaum a introduit la notion de coloration acyclique [47].

1.4.2 Coloration des arêtes d'un graphe

Une k -coloration propre des arêtes d'un graphe G est une application c définie sur $E(G)$ telle que pour toutes arêtes adjacentes $uv, vw \in E(G)$, $c(uv) \neq c(vw)$. L'indice chromatique de G , noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration d'arêtes. On peut remarquer que $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Le plus important résultat portant sur ce paramètre est dû à Vizing en 1964 :

Théorème 1.4.3 (Vizing, 1964 [83])

Pour tout graphe G , nous avons $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Le théorème de Vizing permet donc de classer les graphes en deux classes : les graphes ayant un indice chromatique égal à Δ dits de *classe 1* et ceux ayant un indice chromatique égal à $\Delta + 1$ dits de *classe 2*. Le problème qui consiste à déterminer si un graphe simple est de classe 1 ou 2 est un problème NP-complet. Nous reviendrons sur ces notions de NP-complétude dans le Chapitre 3.

Chapitre 2

Coloration acyclique

Contenu

2.1	Introduction	26
2.1.1	Coloration acyclique	26
2.1.2	Coloration acyclique par listes	28
2.2	Graphes de degré maximum borné	32
2.2.1	Préliminaires	32
2.2.2	GS-arbre (good spanning tree)	33
2.2.3	Graphes de degré maximum 5	34
2.2.4	Graphes de degré maximum 6	37
2.2.5	Graphes de degré maximum $\Delta \geq 7$	37
2.3	Graphes planaires sans cycles de longueurs données	41
2.3.1	Graphes planaires sans cycles de longueurs données	42
2.3.2	Graphes planaires sans triangles proches	48
2.4	Conclusion	56

Dans ce chapitre nous étudions les notions de coloration acyclique et de coloration acyclique par listes.

2.1 Introduction

2.1.1 Coloration acyclique

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Une k -coloration propre d'un graphe G ($k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) est une application $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que deux sommets adjacents dans G reçoivent des couleurs différentes, i.e. si $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. Un graphe qui admet une k -coloration est dit k -coloriable. Une coloration acyclique de G est une coloration propre des sommets de G telle qu'il n'existe pas de cycle bicolorié. En d'autres termes, le graphe induit par toute union de deux classes de couleurs est une forêt. Le nombre chromatique acyclique de G , $\chi_a(G)$, est le plus petit entier k tel que G est acycliquement k -coloriable.

Cette notion a été introduite par Grünbaum [47] en 1973 dans le but de démontrer le théorème des quatre couleurs. Il a prouvé que tout graphe planaire est acycliquement 9-coloriable et a conjecturé que 5 couleurs étaient suffisantes. Mitchem [71] a réduit le nombre de couleurs à 8, Albertson et Berman [2] à 7 et Kostochka [64] à 6. C'est finalement Borodin [12] qui en 1979 a confirmé la conjecture de Grünbaum en prouvant que :

Théorème 2.1.1 (Borodin, 1979 [12])

Tout graphe planaire est acycliquement 5-coloriable.

Ce résultat est le meilleur possible puisqu'il existe des graphes planaires 4-réguliers non acycliquement 4-coloriables (Grünbaum [47], Figure 2.1(a)). En 1976, Kostochka et Melnikov ont proposé la construction d'un graphe biparti non acycliquement 4-coloriable [65] (Figure 2.1(b)).

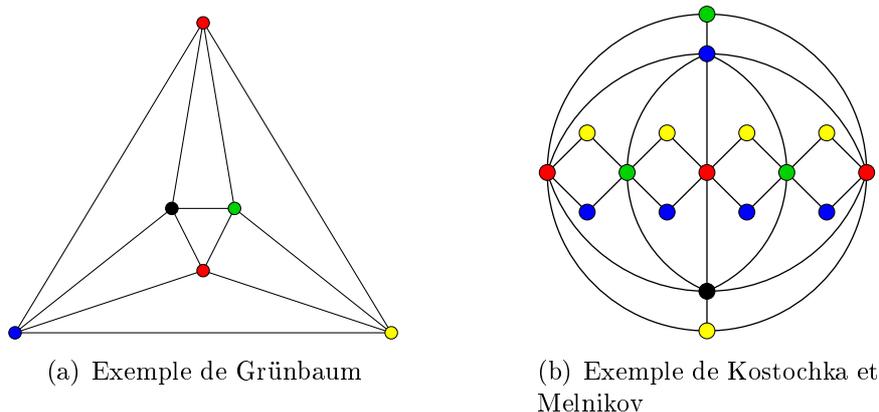


FIGURE 2.1: Exemples de graphes non acycliquement 4-coloriables.

En se restreignant à la classe des graphes planaires de maille donnée, Borodin, Kostochka et Woodall ont démontré en 1999 le résultat suivant :

Théorème 2.1.2 (Borodin, Kostochka et Woodall, 1999 [22])

- (1) Si G est planaire de maille $g \geq 5$, alors $\chi_a(G) \leq 4$.

(2) Si G est planaire de maille $g \geq 7$, alors $\chi_a(G) \leq 3$.

Il est naturel de majorer ce nombre chromatique acyclique par une fonction dépendant de $\Delta(G)$, le degré maximum du graphe G . C'est pour cette raison que de nombreux auteurs se sont intéressés à la classe des graphes de degré maximum borné. Concernant les graphes de faible degré maximum, Grünbaum a prouvé en 1973 que :

Théorème 2.1.3 (Grünbaum, 1973 [47])

Tout graphe de degré maximum au plus 3 est acycliquement 4-coloriable.

Ce résultat est optimal puisque K_4 (graphe complet à 4 sommets) est de degré maximum 3 et n'est pas acycliquement 3-coloriable.

D'autre part, Burnstein s'est intéressé au nombre chromatique acyclique des graphes de degré au plus quatre :

Théorème 2.1.4 (Burnstein, 1979 [25])

Tout graphe de degré maximum au plus 4 est acycliquement 5-coloriable.

Ce résultat est le meilleur possible puisque K_5 est de degré maximum 4 et n'est pas acycliquement 4-coloriable.

On peut alors remarquer que pour $\Delta(G) \leq 4$, $\chi_a(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Pour le cas général, Alon, McDiarmid et Reed ont utilisé une approche probabiliste :

Théorème 2.1.5 (Alon, McDiarmid et Reed, 1990 [3])

Si G est un graphe de degré maximum Δ , alors $\chi_a(G) = O(\Delta^{4/3})$ lorsque $\Delta \rightarrow +\infty$.

Ils ont dans le même temps prouvé l'existence de graphes tels que $\chi_a(G) \geq \Omega(\Delta^{4/3}/(\log \Delta)^{1/3})$. Les preuves de ces deux résultats utilisent des arguments probabilistes et notamment le Lemme local de Lovász.

À notre connaissance, aucune construction de graphes utilisant $\chi_a(G) \geq \Delta + 2$ couleurs n'a été encore proposée pour de petites valeurs de Δ . Le graphe complet quant à lui vérifie $\chi(G) = \chi_a(G) = \Delta(G) + 1$.

Dans ce mémoire, nous nous sommes plus précisément intéressés à la classe des graphes de degré maximum supérieur ou égal à 5.

En 2007, Fertin et Raspaud [43] ont prouvé que tout graphe de degré maximum 5 est acycliquement coloriable avec 9 couleurs.

Ils ont également présenté un algorithme de coloration acyclique des graphes de degré maximum $\Delta \geq 6$, en $\frac{\Delta(\Delta-1)}{2} + 1$ couleurs si Δ est pair, et en $\frac{\Delta(\Delta-1)}{2}$ couleurs si Δ est impair. Avant eux, Skulrattanakulchai [81] avait aussi proposé un algorithme de coloration acyclique des graphes de degré maximum $\Delta \leq 3$. La majoration proposée par Fertin et Raspaud a été récemment améliorée par Yadav *et al.* [91] qui ont prouvé que tout graphe de degré maximum $\Delta \geq 8$ est acycliquement coloriable avec au plus $\frac{3\Delta^2 + 4\Delta + 8}{8}$ couleurs. Yadav *et al.* [92] ont également prouvé que tout graphe de degré maximum 5 est acycliquement coloriable avec 8 couleurs. De notre côté, nous avons obtenu le même résultat en utilisant un ordre de coloration sur les sommets. Récemment, Kostochka et Stocker ont prouvé que 7 couleurs suffisent

[66]. En étudiant les graphes de degré maximum 6, Yadav *et al.* [90] ont également prouvé que 12 couleurs sont suffisantes. Nous avons diminué cette majoration à 11 couleurs en utilisant des arguments similaires à la démonstration du résultat pour les graphes de degré maximum 5.

Nous avons montré que :

Théorème 2.1.6

Tout graphe G est tel que $\chi_a(G) \leq f(\Delta)$ pour $\Delta \geq 5$,

$$\text{avec } f(\Delta) = \begin{cases} 8 & \text{si } \Delta = 5 \\ 11 & \text{si } \Delta = 6 \\ 17 & \text{si } \Delta = 7 \\ \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor + 3 & \text{si } \Delta \geq 8. \end{cases}$$

Nous améliorons ainsi les résultats de Fertin et Raspaud [43] et ceux de Yadav *et al.* [91] pour $5 \leq \Delta \leq 16$.

2.1.2 Coloration acyclique par listes

Une affectation de listes de G est une fonction L qui alloue à chaque sommet $v \in V(G)$ une liste $L(v)$ de couleurs valides. Soient G un graphe et L une affectation de listes de G . Le graphe G est *L -liste coloriable* s'il existe une coloration ϕ de G telle que $\phi(v) \in L(v)$ pour tout $v \in V(G)$. Si G est L -liste coloriable pour toute affectation de listes L avec $|L(v)| \geq k$ pour tout $v \in V(G)$, alors G est dit *k -liste coloriable*. Le *nombre chromatique de listes* de G , $\chi^l(G)$, est le plus petit entier k tel que G est k -liste coloriable.

La notion de L -liste coloration a été introduite par Vizing [84] en 1976 et Erdős, Rubin et Taylor [37] en 1979.

Observation 2.1.7

Tout graphe k -liste coloriable est k -coloriable. La réciproque n'est pas vraie. De plus, $\chi^l(G)$ peut être arbitrairement plus grand que $\chi(G)$.

Concernant la famille des graphes planaires, un des plus importants résultats de coloration par listes a été démontré par Thomassen en 1994 :

Théorème 2.1.8 (Thomassen, 1994 [82])

Tout graphe planaire est 5-liste coloriable.

On peut également ajouter la contrainte d'acyclicité à ce type de coloration et ainsi définir la coloration acyclique par listes : c'est une L -coloration propre qui doit être acyclique. On notera, $\chi_a^l(G)$, le *nombre chromatique acyclique de listes* de G . On peut alors remarquer que :

Observation 2.1.9

Pour tout graphe G , $\chi_a^l(G) \geq \chi_a(G)$.

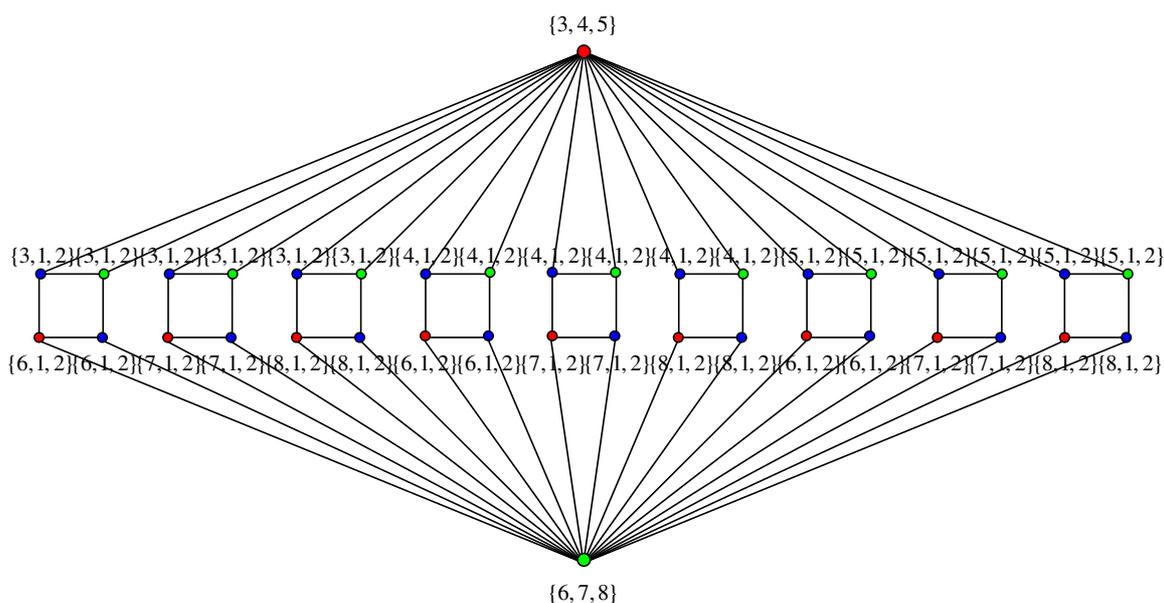


FIGURE 2.2: Le graphe G tel que $\chi_a(G) = 3$ et $\chi_a^l(G) \neq 3$.

Le nombre chromatique acyclique par listes peut être strictement supérieur au nombre chromatique acyclique : il existe des graphes qui sont acycliquement coloriables avec 3 couleurs alors qu'ils ne sont pas acycliquement 3-liste coloriables (Figure 2.2). De plus la différence entre ces deux nombres chromatiques peut être arbitrairement grande (voir exemples dans [73]).

Borodin *et al.* [16] ont été les premiers à s'intéresser à la coloration acyclique par listes des graphes planaires en prouvant que :

Théorème 2.1.10 (Borodin, Fon-Der Flaass, Kostochka, Raspaud et Sopena, 2002 [16])
Tout graphe planaire est acycliquement 7-liste coloriable.

et ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.1.11 (Borodin, Fon-Der Flaass, Kostochka, Raspaud et Sopena, 2002 [16])
Tout graphe planaire est acycliquement 5-liste coloriable.

Si cette conjecture est vraie, alors elle renforce le théorème de Borodin [12] sur la 5-coloration acyclique des graphes planaires et celui de Thomassen [82] sur la 5-liste coloration des graphes planaires. Cette conjecture a été vérifiée pour certaines classes de graphes planaires.

Certains auteurs se sont également intéressés à des conditions suffisantes de coloration acyclique par listes sur certaines classes de graphes. Notamment, Montassier, Ochem et Raspaud [75] ont proposé des conditions suffisantes de coloration acyclique par listes de graphes de degré moyen maximum borné.

Théorème 2.1.12 (Montassier, Ochem et Raspaud, 2006 [75])

- (1) *Tout graphe G tel que $\text{mad}(G) < \frac{8}{3}$ est acycliquement 3-liste coloriable.*
- (2) *Tout graphe G tel que $\text{mad}(G) < \frac{19}{6}$ est acycliquement 4-liste coloriable.*

(3) Tout graphe G tel que $\text{mad}(G) < \frac{24}{7}$ est acycliquement 5-liste coloriable.

De plus, Montassier, Raspaud et Wang ont prouvé en 2007 que :

Théorème 2.1.13 (Montassier, Raspaud et Wang, 2007 [77])

Tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 et 5, ou sans cycles de longueurs 4 et 6, est acycliquement 5-liste coloriable.

Chen et Wang [32] se sont intéressés aux cycles de longueur 3 situés à distance d (longueur minimale d'une chaîne qui sépare deux cycles) et ont démontré que tout graphe planaire, sans cycles de longueur 4 et sans triangles à distance au moins 3, est acycliquement 5-liste coloriable. Récemment, Zhang et Xu [93] ont prouvé que tout graphe planaire sans cycles de longueur 4 ni cycles cordaux de longueur 6 est acycliquement 5-liste coloriable.

On peut remarquer que dans tous les résultats cités, les cycles de longueur 4 sont interdits. Le lecteur intéressé pourra trouver dans [18], une extension des résultats de Montassier et al. [77] : un graphe planaire est acycliquement 5-liste coloriable s'il ne contient pas de cycles de longueur i adjacents à un cycle de longueur j avec $3 \leq j \leq 5$ si $i = 3$ et $4 \leq j \leq 6$ si $i = 4$.

Récemment, Chen et Raspaud ont démontré que :

Théorème 2.1.14 (Chen et Raspaud, 2011 [30])

Tout graphe planaire sans cycles de longueur 4 ni triangles intersectant est acycliquement 5-liste coloriable.

Concernant, les conditions de 4-liste coloration acyclique des graphes planaires, Montassier [74] a amélioré les résultats de [22] sur la 4-coloration acyclique des graphes planaires de maille 5, en prouvant que tout graphe planaire de maille au moins 5 est acycliquement 4-liste coloriable. Dans [76], Montassier, Raspaud et Wang ont également prouvé que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 6, ou sans cycles de longueurs 4, 5 et 7, ou sans cycles de longueurs 4, 5 et sans triangles intersectant, est acycliquement 4-liste coloriable. Dans ce même article, ils ont proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.1.15 (Montassier, Raspaud et Wang, 2000 [76])

Tout graphe planaire sans cycles de longueur 4 est acycliquement 4-liste coloriable.

Cette conjecture semble difficile à prouver. Wang et Chen [87] ont démontré que tout graphe planaire sans cycles de longueur 4 est acycliquement 6-liste coloriable. Cependant, certains auteurs ont pu vérifier la Conjecture 2.1.15 en s'interdisant certaines longueurs de cycles (voir [21, 27, 28, 31]). Le résultat le plus abouti est celui dû à Chen et Raspaud qui ont prouvé que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 et 5 est acycliquement 4-liste coloriable [29]. Ce résultat, a été également obtenu indépendamment par Borodin et Ivanova [20]. À noter qu'il existe des graphes planaires sans cycles de longueurs 4 et 5 qui ne sont pas acycliquement 3-liste coloriables [86]. Ce qui nous conduit tout naturellement aux conditions suffisantes de 3-liste coloration acyclique des graphes planaires.

En 1976, Steinberg (cf. Problème 2.9 [63]) a conjecturé que :

Conjecture 2.1.16 (Steinberg, 1976 [63])

Les graphes planaires sans cycles de longueurs 4 et 5 sont 3-coloriables.

En 1990, Erdős a proposé la relaxation suivante de la Conjecture de Steinberg : Quel est le plus petit entier i tel que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à i est 3-coloriable ? La meilleure majoration connue est $i = 7$ [17]. En effet, Borodin *et al.* ont démontré en 2005 que :

Théorème 2.1.17 (Borodin *et al.*, 2005 [17])

Tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 7 est 3-coloriable.

Cette question est également étudiée dans le cadre de la coloration par listes :

Problème 2.1.18

Quel est le plus petit entier i tel que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à i est 3-liste coloriable ?

En 2003, Voigt [86] a démontré que la Conjecture de Steinberg ne pouvait être pas étendue à la notion de coloration par listes ; d'où, $i \geq 6$. Cependant, en 1996, Borodin [13] a prouvé que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 9 est 3-coloriable ; en fait, 3-liste coloriable. D'où, $i \leq 9$.

Dans ce mémoire, nous étudions la question d'Erdős dans le cadre de la coloration acyclique par listes :

Problème 2.1.19

Quel est le plus petit entier i ($i \geq 6$) tel que tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à i est acycliquement 3-liste coloriable ?

Nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 2.1.20

Tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 12 est acycliquement 3-liste coloriable.

À noter que ce résultat a été démontré indépendamment par Borodin [14]. Ce dernier a amélioré ce résultat en prouvant que :

Théorème 2.1.21 (Borodin et Ivanova, 2010 [19])

Tout graphe planaire sans cycles de longueurs 4 à 11 est acycliquement 3-liste coloriable.

Comme Chen et Wang [32] l'ont fait dans le cadre de la 5-liste coloration acyclique, nous avons abordé la question de la 3-liste coloration acyclique en autorisant les triangles, mais en ajoutant une contrainte relative à la distance qui les sépare. On notera $d_{\Delta}(G)$ la distance minimale (longueur minimale d'une chaîne) qui sépare deux triangles dans G . Nous prouvons que :

Théorème 2.1.22

Soit G un graphe planaire. Si G satisfait une des conditions suivantes :

1. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 10, et $d_{\Delta}(G) \geq 2$
 2. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 9, et $d_{\Delta}(G) \geq 3$
 3. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 8, et $d_{\Delta}(G) \geq 5$
 4. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 7, et $d_{\Delta}(G) \geq 7$
- alors G est acycliquement 3-liste coloriable.

Dans la suite de ce chapitre, nous étudierons dans un premier temps la coloration acyclique des graphes de degré maximum borné, puis la coloration acyclique par listes de graphes planaires sans cycles de longueurs données.

2.2 Graphes de degré maximum borné

Dans cette partie nous démontrons le Théorème 2.1.6 en le décomposant en plusieurs théorèmes pour faciliter la compréhension des preuves.

2.2.1 Préliminaires

Comme nous l'avons signalé en introduction, nous nous sommes focalisés sur les familles de graphes de degré maximum borné et notamment aux graphes de degré maximum au plus 5, au plus 6, au plus 7 et au moins 8. Voici les résultats que nous avons obtenus.

Théorème 2.2.1

Tout graphe de degré maximum cinq est acycliquement 8-coloriable.

Théorème 2.2.2

Tout graphe de degré maximum six est acycliquement 11-coloriable.

La preuve de ces théorèmes est basée sur l'existence d'un certain type d'arbre couvrant que nous nommerons *GS-arbre* et de l'utilisation d'un ordre sur ce GS-arbre pour la coloration des sommets.

Nous présenterons également les deux résultats suivants :

Théorème 2.2.3

Tout graphe G de degré maximum au plus 7 est acycliquement 17-coloriable.

Théorème 2.2.4

Soit $\Delta \geq 8$ et $f(\Delta) = \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor + 3$. Tout graphe G de degré maximum Δ est acycliquement coloriable avec au plus $f(\Delta)$ couleurs.

Ce qui améliore le résultat de Yadav *et al.* [91] pour $7 \leq \Delta \leq 16$.

Commençons par introduire quelques notations.

Toutes les notations qui suivent ont été introduites dans [43]. Une coloration acyclique partielle d'un graphe G est une coloration φ d'un sous-ensemble S de $V = V(G)$ telle que φ est une coloration acyclique de $G[S]$ (le sous-graphe de G induit par S). Une coloration acyclique sur un sous-ensemble $S \subseteq V$ qui utilise au

plus k couleurs est appelée une k -coloration acyclique partielle de G . Soit φ une k -coloration acyclique partielle de G et v un sommet non colorié de G . Nous dirons qu'une couleur c pour le sommet v est autorisée pour étendre φ si la coloration partielle φ' définie par $\varphi'(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in S$ et par $\varphi'(v) = c$ est une k -coloration acyclique partielle de G . Soit $u \in V \setminus S$, nous noterons par $N_c(u) = N(u) \cap S$, l'ensemble des voisins coloriés de u (où $N(u)$ est l'ensemble des voisins de u , i.e. $N(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$) et $\#cn(u) = |N_c(u)|$.

$SC(N_c(u))$ représentera l'ensemble des couleurs utilisées par les sommets de $N_c(u)$ et on notera $\#dcn(u) = |SC(N_c(u))|$. Pour un sommet u et une couleur c donnés, notons $n_c(u)$ le nombre de sommets de $N_c(u)$ coloriés par la couleur c . Pour tout sommet u , on note $L_u = (n_1, n_2, \dots, n_{\#dcn(u)})$ où chaque n_i représente le nombre de fois qu'une couleur apparaît dans le voisinage de u et $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{\#dcn(u)}$. Par exemple pour la Figure 2.3, nous avons : tous les voisins de u sont coloriés, d'où $\#cn(u) = 5$ et $N_c(u) = N(u)$, $SC(N_c(u)) = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $\#dcn(u) = 4$ et $L_u = (2, 1, 1, 1)$ (deux voisins de u sont coloriés par c_1 , un voisin de u est colorié par c_2 (resp. c_3, c_4)). Enfin pour terminer nous utiliserons la notation $[[i; j]]$ pour nommer l'ensemble des entiers $\{i, i + 1, \dots, j\}$.

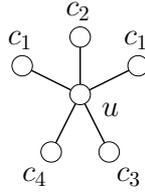


FIGURE 2.3: La liste $L_u = (2, 1, 1, 1)$

2.2.2 GS-arbre (good spanning tree)

Soit G un graphe connexe Δ -régulier. Un *GS-arbre* de G est un arbre couvrant T de G tel que T contient un sommet adjacent à $\Delta - 1$ feuilles (une feuille étant un sommet de degré 1).

Théorème 2.2.5

Tout graphe connexe Δ -régulier admet un GS-arbre.

Démonstration. Soient G un graphe connexe Δ -régulier et $k \geq 2$ le diamètre de G (si $k = 1$, G est un graphe complet et admet donc un GS-arbre). On rappelle que : $diam(G) = \max_{x, y \in V(G)} \{dist_G(x, y)\}$. Soient u et v deux sommets de G à distance

k . Supposons que nous choisissons u de telle sorte qu'il ait le plus petit nombre de voisins à distance $k - 1$ de v . Soit u_1 un voisin de u qui est à distance $k - 1$ de v et soient u_2, \dots, u_{Δ} les $\Delta - 1$ autres voisins de u . Démontrons que $G_1 = G \setminus \{u_2, \dots, u_{\Delta}\}$ est connexe. Supposons que G' est une composante connexe de G_1 qui contient v . Puisque u et v sont connectés dans G_1 , alors G' contient u_1 et u . Considérons maintenant G'' , une composante connexe qui ne contient ni v ni u . Soit x un sommet quelconque de G'' . Puisque k est le diamètre de G alors x est à

distance exactement k de v dans G . En effet, la chaîne reliant x à v passe par u_2, \dots ou u_Δ . Or $d_G(u_i, v) = k - 1$ ou k (pour $1 \leq i \leq \Delta$) donc $d_G(x, v) \geq k - 1 + 1 = k$; k étant le diamètre de G permet de conclure que $d_G(x, v) = k$. Tout voisin de x à distance $k - 1$ de v dans G est aussi un voisin de u . Cependant x n'est pas adjacent à u_1 , sinon il serait dans la même composante connexe que u . D'où, dans G , x a moins de voisins à distance $k - 1$ de v que u . Ce qui contredit le choix de u . Donc $G_1 = G \setminus \{u_2, \dots, u_\Delta\}$ est connexe.

Nous pouvons alors construire un GS-arbre T de G de la façon suivante : dans un premier temps on choisit un arbre couvrant T_1 de G_1 , puis on ajoute à T_1 les arêtes uu_2, \dots, uu_Δ qui couvrent les sommets u_2, \dots, u_Δ . \square

2.2.3 Graphes de degré maximum 5

Avant tout, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.6

Tout graphe G de degré maximum au plus 5 et de degré minimum strictement plus petit que 5 est acycliquement 8-coloriable.

La preuve du Théorème 2.2.1 est divisée en deux parties suivant le degré minimum du graphe G :

- (1) Soit $\delta(G) < 5$ et alors le Lemme 2.2.6 nous permet de colorier acycliquement G avec au plus 8 couleurs,
- (2) ou $\delta(G) = 5$ et dans ce cas l'existence d'un GS-arbre nous permet de trouver un ordre de coloration sur les sommets du graphe et obtenir une coloration acyclique avec au plus 8 couleurs.

Les techniques de coloration que nous utilisons sont inspirées de celles présentes dans [43, 81, 90, 92].

2.2.3.1 Preuve du Lemme 2.2.6

Dans cette partie nous prouvons que si G est connexe avec $\Delta(G) \leq 5$ et $\delta(G) < 5$, alors G est acycliquement 8-coloriable. La preuve est basée sur un algorithme glouton. Tout d'abord définissons une relation d'ordre \prec sur les sommets de G , puis nous colorions les sommets de G en respectant cet ordre \prec . Soit v un sommet de degré $d(v) < 5$. Considérons T un arbre couvrant de G enraciné en v . Définissons l'ordre \prec sur les sommets de G par un ordre postfixe sur T , il est défini de la manière suivante : soient x_1, \dots, x_n des sommets de G tels que pour tout i, j , $1 \leq i < j \leq n$, $x_i \prec x_j$ et $x_n = v$. Nous pouvons alors remarquer que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, x_i a au plus 4 voisins x_j tel que $j < i$. Nous colorions alors les x_i successivement en utilisant les Lemmes 2.2.8 et 2.2.9. La coloration de G obtenue sera une coloration acyclique utilisant au plus 8 couleurs.

Commençons par une observation tirée de [43] :

Observation 2.2.7 (Fertin et Raspaud, 2007 [43])

Soit G un graphe de degré maximum 5 et soit φ une 8-coloration acyclique partielle de G . Supposons que v est un sommet non colorié de G . Si tous les voisins coloriés

de v ont des couleurs différentes, alors il suffit de colorier proprement v pour étendre φ . Si une couleur c apparaît $n_c(v) > 1$ fois parmi les voisins coloriés de v , alors pour colorier v , nous devons nous interdire $2n_c(v)$ couleurs pour éviter la création possible de cycles bicoloriés passant par v et les sommets coloriés par c .

Lemme 2.2.8

Soit G un graphe tel que $\Delta(G) \leq 5$ et soit φ une 8-coloration acyclique partielle de G . Pour tout sommet non colorié u tel que $\#cn(u) \leq 3$, il existe une couleur disponible pour u qui nous permet d'étendre φ .

Démonstration. Dans un premier temps, supposons qu'aucune couleur n'est répétée parmi les voisins de u , en d'autres termes $L_u = (0)$ (ce qui signifie qu'aucun voisin de u n'est encore colorié), $L_u = (1)$, $L_u = (1, 1)$, ou $L_u = (1, 1, 1)$. Par l'Observation 2.2.7, il suffit de colorier proprement u , ce qui est possible puisque nous avons au moins 5 couleurs possibles.

Dans un second temps supposons qu'une couleur apparaît au moins deux fois parmi les voisins coloriés de u . Puisque $\#cn(u) \leq 3$, nous avons exactement trois cas : $L_u = (2)$, $L_u = (2, 1)$, ou $L_u = (3)$. Lorsque $L_u = (2)$, $L_u = (2, 1)$ (resp. $L_u = (3)$), d'après l'Observation 2.2.7, nous devons nous interdire quatre couleurs pour colorier u afin d'éviter toute création de cycles bicoloriés (resp. six couleurs) et au plus deux couleurs supplémentaires (resp. une couleur) pour respecter la condition de coloration propre. Pour chaque cas, il reste au moins un choix pour colorier u . \square

Lemme 2.2.9

Soit G un graphe tel que $\Delta(G) \leq 5$ et soit φ une 8-coloration acyclique partielle de G . Pour tout sommet non colorié u tel que $\#cn(u) = 4$, il existe une couleur disponible pour u qui nous permet d'étendre φ .

Démonstration. Soient G un graphe tel que $\Delta(G) \leq 5$ et φ une 8-coloration acyclique partielle de G , et u un sommet non colorié tel que $\#cn(u) = 4$. Considérons v_1, v_2, v_3, v_4 les quatre voisins coloriés de u , et pour tout $1 \leq i \leq 4$ et tout $1 \leq j \leq 4$, on appelle v_i^j les quatre voisins de v_i distincts de u . Pour étendre φ à u , nous étudions toutes les possibilités pour L_u :

Cas $L_u = (1, 1, 1, 1)$. Par l'Observation 2.2.7, il suffit de colorier proprement u (il y a 4 couleurs possibles).

Cas $L_u = (2, 1, 1)$. Par l'Observation 2.2.7, nous devons nous interdire quatre couleurs pour colorier u afin d'éviter toute création de cycles bicoloriés et trois couleurs supplémentaires pour respecter la condition de coloration propre. Il reste alors une couleur pour colorier u .

Cas $L_u = (3, 1)$. Sans perte de généralité supposons que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = \varphi(v_3) = 1$ et $\varphi(v_4) = 2$. S'il existe une couleur $\alpha \in \llbracket 3; 8 \rrbracket$ qui ne se trouve pas dans un hypothétique cycle bicolorié avec les couleurs 1, α , alors nous pouvons colorier u avec α . Sinon, cela signifie que chaque couleur dans $\llbracket 3; 8 \rrbracket$ apparaît deux fois (et exactement deux fois) dans le voisinage de v_1, v_2, v_3 , et pour chaque v_i ($1 \leq i \leq 3$), nous avons $\#dcn(v_i) = 4$. Il suffit alors de recolorier v_1 avec une couleur différente de 1, 2 et de celles dans $SC(N_c(v_1))$

(nous avons deux couleurs possibles pour v_1). D'où, L_u devient $(2, 1, 1)$, un cas traité précédemment.

Cas $L_u = (4)$. Sans perte de généralité supposons que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = \varphi(v_3) = \varphi(v_4) = 1$. Nous pouvons remarquer que si l'un des v_i est tel que $\#dcn(v_i) = 4$, par exemple v_1 , alors nous pouvons recolorier v_1 avec une couleur différente de 1 et de celles de $SC(N_c(v_1))$. Nous obtenons alors $L_u = (3, 1)$, un cas traité précédemment. Supposons alors que pour tout $1 \leq i \leq 4$, $\#dcn(v_i) \leq 3$. Nous devons nous interdire six couleurs ($\lfloor (4 \times 3)/2 \rfloor$) pour colorier u afin d'éviter toute création de cycles bicoloriés et une couleur supplémentaire pour respecter la condition de coloration propre. Il reste alors une couleur pour colorier u .

Cas $L_u = (2, 2)$. Sans perte de généralité supposons que $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = 1$ et $\varphi(v_3) = \varphi(v_4) = 2$. Nous pouvons remarquer que si l'un des v_i est tel que $\#dcn(v_i) = 4$, par exemple v_j , alors nous pouvons recolorier v_j avec une couleur différente de 1 et 2 et de celles de $SC(N_c(v_j))$. Nous obtenons alors $L_u = (2, 1, 1)$, un cas traité précédemment. Supposons alors que pour $1 \leq i \leq 4$, $\#dcn(v_i) \leq 3$. Si on ne peut pas colorier u avec une couleur de $\llbracket 3; 8 \rrbracket$, alors pour tout $1 \leq i \leq 4$, $\#dcn(v_i) = 3$, et sans perte de généralité $SC(N_c(v_1)) = SC(N_c(v_2)) = \{3, 4, 5\}$, $SC(N_c(v_3)) = SC(N_c(v_4)) = \{6, 7, 8\}$. Nous nous intéresserons à v_1 et son voisinage. Nous tenterons de recolorier v_1 avec une couleur différente de 1 : si nous réussissons, alors nous obtenons une nouvelle liste L_u qui a déjà été traitée ; sinon, nous trouverons une couleur pour u qui permet d'étendre φ . Si $\#cn(v_1) = 3$, alors on recolorie v_1 avec une couleur différente de $\llbracket 1; 5 \rrbracket$ et nous avons terminé. Supposons alors que $\#cn(v_1) = 4$ et sans perte de généralité supposons que $\varphi(v_1^1) = \varphi(v_1^2) = 3$, $\varphi(v_1^3) = 4$, et $\varphi(v_1^4) = 5$. Nous tentons de recolorier v_1 avec une couleur différente de 1, 3, 4, 5, et celles de $SC(N_c(v_1^1))$. S'il existe une couleur libre, alors nous avons terminé car $L_u = (3, 1)$ ou $L_u = (2, 1, 1)$ (des configurations déjà résolues). Si on ne peut pas recolorier v_1 , alors $SC(N_c(v_1^1)) = SC(N_c(v_1^2)) = \{1, 2, 6, 7, 8\}$ et nous pouvons colorier u avec 3 (puisque 3 n'apparaît pas dans $SC(N_c(v_3))$, $SC(N_c(v_4))$), et v_1^1 a un unique voisin colorié par 1 (v_1). Ce qui termine la preuve. □

2.2.3.2 Preuve du Théorème 2.2.1

Dans cette partie nous démontrons que :

Tout graphe de degré maximum 5 est acycliquement 8-coloriable.

Soit G un graphe de degré maximum 5. Si $\delta(G) < 5$, alors le Lemme 2.2.6 nous permet de conclure. Supposons par la suite que G est un graphe connexe 5-régulier.

Soit T un GS-arbre de G (un tel arbre couvrant existe d'après le Théorème 2.2.5). Soit x_n un sommet adjacent à quatre feuilles dans T . Nous ordonnons les sommets de G de x_1 à x_n en respectant un ordre postfixe sur T enraciné en x_n avec x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre feuilles. Pour commencer, nous colorions x_1, x_2, x_3, x_4 avec des couleurs différentes puis nous colorions successivement x_5, x_6, \dots, x_n . Nous

colorions x_i avec $5 \leq i \leq n-1$, en utilisant les Lemmes 2.2.8, et 2.2.9, sans jamais recolorier x_1, x_2, x_3, x_4 . Dans le Lemme 2.2.8, aucune recoloration n'est utilisée. Dans le cas $L_u = (3, 1)$ du Lemme 2.2.9, v_1 ne peut pas être x_1, x_2, x_3 ou x_4 puisque v_1 a quatre voisins coloriés et u n'est pas x_n . De la même façon dans le cas $L_u = (4)$ du Lemme 2.2.9, v_1 ne peut pas être x_1, x_2, x_3 ou x_4 . Dans le cas $L_u = (2, 2)$ du Lemme 2.2.9, nous nous focalisons sur v_1 . Si v_1 est par exemple x_1 , alors nous nous intéressons à v_2 au lieu de v_1 (puisque v_1 et v_2 ont les mêmes couleurs, nous sommes certains que v_2 n'est ni x_2 , ni x_3 , ni x_4). À ce stade de la procédure nous avons une coloration acyclique de $G \setminus \{x_n\}$ telle que x_1, x_2, x_3, x_4 utilisent quatre couleurs distinctes. Il nous reste alors à colorier x_n , ce qui nous amène à considérer deux cas :

Cas $L_{x_n} = (1, 1, 1, 1, 1)$. Par l'Observation 2.2.7, il suffit de colorier proprement x_n (nous pouvons car nous avons trois couleurs possibles).

Cas $L_{x_n} = (2, 1, 1, 1)$. Sans perte de généralité $\varphi(x_1) = \varphi(x_{n-1}) = 1, \varphi(x_2) = 2, \varphi(x_3) = 3, \varphi(x_4) = 4$. Nous tentons de colorier x_n avec 5, 6, 7 et 8. Soit c'est possible et dans ce cas nous avons terminé. Sinon, cela signifie que $SC(N_c(x_1)) = SC(N_c(x_{n-1})) = \{5, 6, 7, 8\}$. Dans ce cas, nous colorions x_n avec 1 et nous recolorions proprement x_1 et x_{n-1} .

Ce qui complète la preuve du Théorème 2.2.1. □

2.2.4 Graphes de degré maximum 6

Nous avons également démontré que :

Théorème 2.2.10

Tout graphe de degré maximum 6 est acycliquement 11-coloriable.

Les techniques de preuve de ce théorème sont les mêmes que celles utilisées pour le théorème précédent et s'appuient sur le lemme suivant :

Lemme 2.2.11

Tout graphe G de degré maximum au plus 6 et de degré minimum strictement plus petit que 6 est acycliquement 11-coloriable.

Le lecteur intéressé pourra trouver l'intégralité de ces preuves dans [51].

2.2.5 Graphes de degré maximum $\Delta \geq 7$

Nous généralisons dans cette partie les résultats obtenus précédemment en utilisant les mêmes techniques ad hoc mises en œuvre pour $5 \leq \Delta \leq 6$, et montrons le résultat suivant :

Tout graphe G est tel que $\chi_a(G) \leq f(\Delta)$ pour $\Delta \geq 7$,

$$\text{avec } f(\Delta) = \begin{cases} 17 & \text{si } \Delta = 7 \\ \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor + 3 & \text{si } \Delta \geq 8. \end{cases}$$

2.2.5.1 Lemme de coloration

La plupart des notations utilisées ont déjà été définies précédemment. De plus, la notion d'ordre sur les sommets reste capitale pour la preuve. Soit G un graphe de degré maximum au moins 7. Considérons $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ les sommets de G et appelons φ_i une coloration partielle acyclique définie sur les sommets $\{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ de G . On définit l'ordre sur les sommets de la façon suivante. Soit T un arbre couvrant de G enraciné en x_n . Si G n'est pas Δ -régulier alors on choisit x_n tel que $d(x_n) < \Delta$. Si G est Δ -régulier alors T est un GS-arbre de G (un tel arbre existe d'après le Théorème 2.2.5) et x_n est un sommet adjacent à $\Delta - 1$ feuilles dans T . On note $F_T = \{x_1, \dots, x_{\Delta-1}\}$ l'ensemble des $\Delta - 1$ feuilles voisines de x_n dans T . On ordonne alors les sommets de T de telle sorte que la distance entre x_i et x_n dans T soit une fonction décroissante en i . Ceci nous assure que φ_i a colorié au plus $\Delta - 1$ voisins de x_{i+1} pour $i < n$. Chacun des φ_i sera construit à partir de φ_{i-1} après quelques modifications minimales de φ_{i-1} .

Lemme 2.2.12

Soit G un graphe de degré maximum $\Delta \geq 8$ muni d'un ordre sur les sommets comme défini précédemment et soit φ_i ($1 \leq i \leq \Delta - 2$) une coloration partielle acyclique qui a colorié les sommets x_1, x_2, \dots, x_i en utilisant au plus $f(\Delta) = \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor + 3$ couleurs. Supposons que $L_{x_{i+1}} = (1, 1, \dots, 1)$ (où l , $1 \leq l \leq \Delta - 1$, représente le nombre de 1) ou $L_{x_{i+1}} = (n_1, n_2, \dots, n_k, 1, \dots, 1)$ (tels que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 2$, $k > 0$ et $1 \leq l \leq \Delta - 2$ représente le nombre de 1). Alors il existe une coloration acyclique φ_{i+1} de $G[\{x_1, x_2, \dots, x_{i+1}\}]$ qui utilise au plus $f(\Delta)$ couleurs.

Démonstration. Si $L_{x_{i+1}} = (1, 1, \dots, 1)$, nous pouvons remarquer qu'il suffit de colorier proprement x_{i+1} (ce qui est possible car $\Delta - 1 < f(\Delta)$ pour tout $\Delta \geq 8$). Supposons alors que $L_{x_{i+1}} = (n_1, n_2, \dots, n_k, 1, \dots, 1)$ ($n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 2$). Nous pouvons avant tout remarquer que $k \leq \lfloor \frac{\Delta - 1 - l}{2} \rfloor$. Soit $SN_{c_j}(x_{i+1})$ l'ensemble des voisins coloriés de x_{i+1} avec la couleur c_j et soit $|SN_{c_j}(x_{i+1})| = n_j$. Pour tout sommet $y \in SN_{c_j}(x_{i+1})$ avec $n_j \geq 2$, si y a $\Delta - 1$ voisins coloriés ayant tous des couleurs distinctes, alors nous pouvons changer la couleur de y de telle sorte que cette nouvelle couleur n'apparaît pas parmi les voisins de x_{i+1} . Ce qui est possible puisque nous pouvons nous assurer que $y \notin F_T$ (y ne peut pas être $x_1, x_2, \dots, x_{\Delta-1}$ puisque y a $\Delta - 1$ voisins coloriés et x_{i+1} n'est pas x_n). De plus, le changement de couleur de y dans ce cas ne peut pas créer de cycle bicolorié puisque nous avons $k + l + \Delta - 1 < f(\Delta)$ pour $\Delta \geq 8$ (1) (la preuve de cette inégalité et des suivantes sera proposée dans le paragraphe 2.2.5.3).

De la même façon, pour tout z dans $SN_{c_j}(x_{i+1})$, si le nombre de couleurs différentes utilisées par les voisins de z est $\Delta - 2$ ou $\Delta - 3$, nous pouvons changer la couleur de z en une couleur non utilisée par les voisins de x_{i+1} telle que la coloration obtenue conserve l'acyclicité dans $SN_{c_j}(x_{i+1})$. Nous pouvons procéder de cette façon si $z \notin F_T$. Cependant nous pouvons remarquer qu'au plus un sommet de F_T est colorié c_j . Ce changement de couleur est possible car $f(\Delta) > (k + l) + (\Delta - 2) + \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor$ pour $\Delta \geq 8$ (2) et $f(\Delta) > (k + l) + (\Delta - 3) + 3 \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor$ pour $\Delta \geq 8$ (3).

Dans la nouvelle coloration partielle, nous avons au plus $k \lfloor \frac{\Delta - 2}{2} \rfloor + (\Delta - 1 - k - l) \lfloor \frac{\Delta - 4}{2} \rfloor$ couleurs interdites pour x_{i+1} afin d'éviter toute création de cycles bicoloriés

et $\lfloor \frac{\Delta-1-l}{2} \rfloor + l$ couleurs supplémentaires pour respecter la condition de coloration propre. Nous avons alors au plus $\frac{\Delta^2-4\Delta-l\Delta+5l+2k+3}{2}$ couleurs interdites pour colorier x_{i+1} . De plus, comme $\frac{\Delta^2-4\Delta-l\Delta+5l+2k+3}{2} < f(\Delta)$ pour $\Delta \geq 8$ (4), nous avons une couleur libre pour étendre φ à x_{i+1} . \square

2.2.5.2 Preuve du Théorème 2.2.4

Soit T un arbre couvrant de G enraciné en x_n conformément au Théorème 2.2.5 et soit $F_T = \{x_1, x_2, \dots, x_{\Delta-1}\}$ l'ensemble des feuilles voisines de x_n sur T . Nous commençons par colorier ces $\Delta - 1$ feuilles avec $\Delta - 1$ couleurs distinctes. À chaque étape nous supposons que φ est une coloration partielle acyclique de l'ensemble des sommets $A = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$, nous montrerons qu'il est possible de trouver une coloration partielle acyclique φ' sur $A \cup \{x_{i+1}\}$ en opérant quelques modifications sur φ si nécessaire. Durant la procédure certains sommets peuvent être recoloriés, par contre, les couleurs attribuées aux sommets de F_T ne seront pas modifiées.

Soit $A(x_{i+1})$ l'ensemble des voisins de x_{i+1} dans A . Supposons que les couleurs c_1, \dots, c_j sont utilisées dans $A(x_{i+1})$ et chaque couleur c_k ($1 \leq k \leq j$) est utilisée n_k fois. Si $n_k = 1$ pour un k quelconque, alors nous pouvons conclure à l'aide du Lemme 2.2.12. Soient $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{n_k}}$ les sommets de $A(x_{i+1})$ coloriés c_k . Si pour un certain j un des sommets parmi $x_{k_j} \notin F_T$ a plus de $\Delta - 4$ voisins parmi A coloriés avec des couleurs différentes, alors nous pouvons recolorier ce sommet avec une couleur différente de celles utilisées par les autres sommets de $A(x_{i+1})$. Ceci étant possible grâce aux inégalités suivantes :

$$f(\Delta) > k + (\Delta - 1) \text{ pour } \Delta \geq 8 \text{ avec } k \leq \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor \quad (5)$$

$$f(\Delta) > k + (\Delta - 2) + \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor \text{ pour } \Delta \geq 8 \text{ avec } k \leq \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor \quad (6)$$

$$f(\Delta) > k + (\Delta - 3) + 3\lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor \text{ pour } \Delta \geq 8 \text{ avec } k \leq \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor \quad (7).$$

Après ces recolorations de sommets nous pourrons appliquer le Lemme 2.2.12 et ainsi obtenir une $f(\Delta)$ -coloration acyclique de G .

Sinon il y a au plus $k + k \lfloor \frac{\Delta-2}{2} \rfloor + (\Delta - 1 - k) \lfloor \frac{\Delta-4}{2} \rfloor < f(\Delta)$ (8), avec $\Delta \geq 8$, couleurs interdites pour x_k et nous avons alors un choix valide de couleur pour x_k .

À ce stade de la coloration, nous avons obtenu une coloration acyclique de $G \setminus \{x_n\}$ telle que $x_1, x_2, \dots, x_{\Delta-1}$ utilisent $\Delta - 1$ couleurs distinctes. Il nous reste à colorier x_n et pour cela nous devons considérer deux cas :

1. **Cas** $L_{x_n} = (1, 1, \dots, 1)$. Dans ce cas nous avons Δ couleurs distinctes. Il suffit de colorier proprement x_n (ce qui est possible car $\Delta < f(\Delta)$ pour tout $\Delta \geq 8$).
2. **Cas** $L_{x_n} = (2, 1, \dots, 1)$. Dans ce cas nous avons $\Delta - 1$ couleurs distinctes (et exactement une couleur qui apparaît deux fois). Nous devons nous interdire au plus $\frac{2(\Delta-1)}{2}$ couleurs afin d'éviter toute création de cycle bicolorié, et $\Delta - 1$ couleurs supplémentaires pour conserver la condition de coloration propre. Nous devons alors nous interdire au plus $2(\Delta - 1)$ couleurs pour pouvoir étendre φ à x_n . Ce qui est possible puisque $2(\Delta - 1) < f(\Delta)$ pour tout $\Delta \geq 8$.

Ce qui termine la preuve du Théorème 2.2.4.

À noter que le Théorème 2.2.3 se démontre de la même façon.

2.2.5.3 Preuves des inégalités (1) à (8)

Pour commencer nous pouvons rappeler que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1$$

Preuve de (1) :

Remarquons que $\Delta^2 - 7\Delta + 5 > 0$ pour tout $\Delta \geq 8$. D'où,

$$\begin{aligned} \Delta^2 - 7\Delta + 5 > 0 &\implies \Delta^2 - 6\Delta + 3 + 2 - \Delta > 0 \\ &\implies \Delta^2 - 6\Delta + 3 - l > 0 \text{ parce que } 1 \leq l \leq \Delta - 2 \\ &\implies 3\Delta + l - 3 < \Delta^2 - 3\Delta \\ &\implies \frac{\Delta - 1 - l}{2} + l + \Delta - 1 < \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \left(\frac{\Delta - 1}{2} - 1 \right) + 3 \\ &\implies \left\lfloor \frac{\Delta - 1 - l}{2} \right\rfloor + l + \Delta - 1 < \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \right\rfloor + 3 \\ &\implies k + l + \Delta - 1 < f(\Delta) \end{aligned}$$

Preuve de (2) :

Remarquons que $\Delta^2 - 8\Delta + 8 > 0$ pour tout $\Delta \geq 8$. D'où,

$$\begin{aligned} \Delta^2 - 8\Delta + 8 > 0 &\implies \Delta^2 - 7\Delta + 6 + 2 - \Delta > 0 \\ &\implies \Delta^2 - 7\Delta + 6 - l > 0 \text{ parce que } 1 \leq l \leq \Delta - 2 \\ &\implies 4\Delta + l - 6 < \Delta^2 - 3\Delta \\ &\implies \frac{\Delta - 1 - l}{2} + l + \Delta - 2 + \frac{\Delta - 1}{2} < \frac{\Delta^2 - 3\Delta}{2} \\ &\implies k + l + \Delta - 2 + \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \right\rfloor < f(\Delta) \end{aligned}$$

Preuve de (3) :

Remarquons que $\Delta^2 - 10\Delta + 12 > 0$ pour tout $\Delta \geq 9$. D'où,

$$\begin{aligned} \Delta^2 - 10\Delta + 12 > 0 &\implies \Delta^2 - 9\Delta + 10 + 2 - \Delta > 0 \\ &\implies \Delta^2 - 9\Delta + 10 - l > 0 \text{ parce que } 1 \leq l \leq \Delta - 2 \\ &\implies \frac{\Delta - 1 - l}{2} + l + \Delta - 3 + 3 \times \frac{\Delta - 1}{2} < \frac{\Delta^2 - 3\Delta}{2} \\ &\implies k + l + \Delta - 3 + 3 \times \left\lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \right\rfloor < f(\Delta) \end{aligned}$$

Pour $\Delta = 8$, le membre de gauche est $k + l + 14$ et $f(\Delta) = 21$, et l'inégalité se déduit du fait que $k + l \leq 6$. (remarquons que $k + l \leq \Delta - 2$)

Preuve de (4) :

Remarquons que $(\Delta - 4)l - 2 > 0$ pour $\Delta \geq 8$ et $l \geq 1$. D'où,

$$\begin{aligned} (\Delta - 4)l - 2 > 0 &\implies \Delta - 1 - l < \Delta - 5l + l\Delta - 3 \\ &\implies -4\Delta + 2k + 3 + 5l - l\Delta < -3\Delta \\ &\implies \frac{\Delta - 1 - l}{2} + l + k\frac{\Delta - 2}{2} + (\Delta - 1 - k - l) \times \frac{\Delta - 4}{2} < \frac{\Delta^2 - 3\Delta}{2} \\ &\implies \left\lfloor \frac{\Delta - 1 - l}{2} \right\rfloor + l + k \left\lfloor \frac{\Delta - 2}{2} \right\rfloor + (\Delta - 1 - k - l) \left\lfloor \frac{\Delta - 4}{2} \right\rfloor < f(\Delta) \end{aligned}$$

Preuves de (5), (6), (7) : nous pouvons remarquer que les inégalités (1), (2), (3) sont valides pour $l = 0$.

Preuve de (8) :

Appelons $FC(u) = k + k \lfloor \frac{\Delta-2}{2} \rfloor + (\Delta - 1 - k) \lfloor \frac{\Delta-4}{2} \rfloor$ le nombre de couleurs que nous devons éviter pour étendre la coloration à u . Rappelons que $f(\Delta) = \frac{\Delta^2 - 5\Delta}{2} + 2 \times \lfloor \frac{\Delta-1}{2} \rfloor + 3$.

Supposons tout d'abord que Δ est pair. Soit, $\Delta = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

D'où, $f(\Delta) = 2n^2 - 3n + 1$ et $FC(u) \leq 2n^2 - 3n$. Nous pouvons alors remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $FC(u) < f(\Delta)$.

Supposons maintenant que Δ est impair. Soit, $\Delta = 2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

D'où, $f(\Delta) = 2n^2 - n + 1$ et $FC(u) \leq 2n^2 - 2n$. Nous pouvons alors remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $FC(u) < f(\Delta)$.

2.3 Graphes planaires sans cycles de longueurs données

À noter qu'il existe de nombreux résultats sur la coloration acyclique par listes [32, 75, 76, 77]. Dans cette partie nous nous concentrons sur la 3-coloration acyclique par listes et démontrons nos deux principaux résultats :

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 12 est acycliquement 3-liste coloriable.

Soit G un graphe planaire. Si G satisfait une des conditions suivantes :

1. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 10, et $d_\Delta(G) \geq 2$
2. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 9, et $d_\Delta(G) \geq 3$
3. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 8, et $d_\Delta(G) \geq 5$

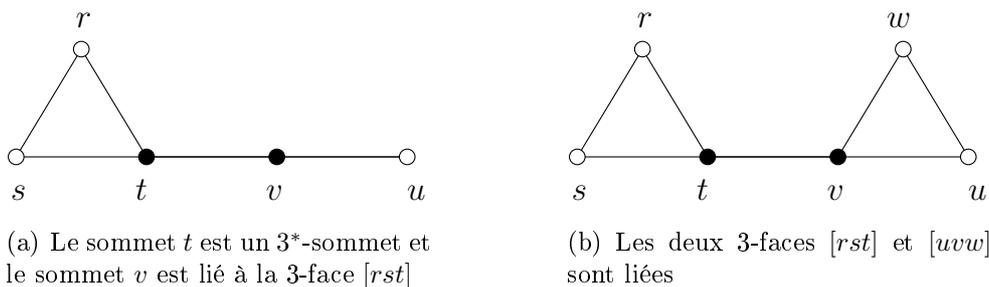


FIGURE 2.4: Exemples de sommets et de faces liés.

4. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 7, et $d_{\Delta}(G) \geq 7$ alors G est acycliquement 3-liste coloriable.

Commençons par introduire quelques notations nécessaires à la compréhension de ce qui va suivre.

Soit $v \in V(G)$, on note $n_i(v)$ le nombre de i -sommets adjacents à v pour $i \geq 1$, et $m_3(v)$ le nombre de 3-faces incidentes à v . Un 3-sommets est appelé 3^* -sommets s'il est incident à une 3-face et adjacent à un 2-sommets (par exemple sur la Figure 2.4(a), le sommet t est un 3^* -sommets). Une 3-face $[rst]$ telle que $d(r) = d(s) = d(t) = 3$ et telle que r, s ou t est un 3^* -sommets est appelée une 3^* -face. Deux 3-faces $[rst]$ et $[uvw]$ sont appelées *liées* s'il existe une arête tv qui relie ces deux 3-faces tel que $d(t) = d(v) = 3$ (cf. Figure 2.4(b)). Un sommets v est *lié* à une 3-face $[rst]$ s'il existe une arête entre v et autre sommets de la frontière de $[rst]$, disons t , tel que $d(t) = 3$ (par exemple sur la Figure 2.4(b), le sommets v est lié à la 3-face $[rst]$). Notons $n^*(v)$ le nombre de 3^* -faces liées à v .

2.3.1 Graphes planaires sans cycles de longueurs données

Pour prouver le Théorème 2.1.20 nous raisonnons par contradiction. Supposons que H est un contre-exemple d'ordre minimum (en terme de nombre de sommets) au Théorème 2.1.20. Soit L une affectation de liste avec $|L(v)| = 3$ pour tout $v \in V(H)$ telle que H n'admet pas de L -coloration acyclique.

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que H est connexe. Tout d'abord étudions les propriétés structurelles de H puis en utilisant la formule d'Euler et une procédure de déchargement nous aboutirons à une contradiction.

2.3.1.1 Propriétés structurelles de H

Lemme 2.3.1

Le contre-exemple d'ordre minimum H au Théorème 2.1.20 possède les propriétés suivantes :

- (C1) H ne contient pas de 1-sommets.
- (C2) Une 3-face n'a pas de 2-sommets sur sa frontière.

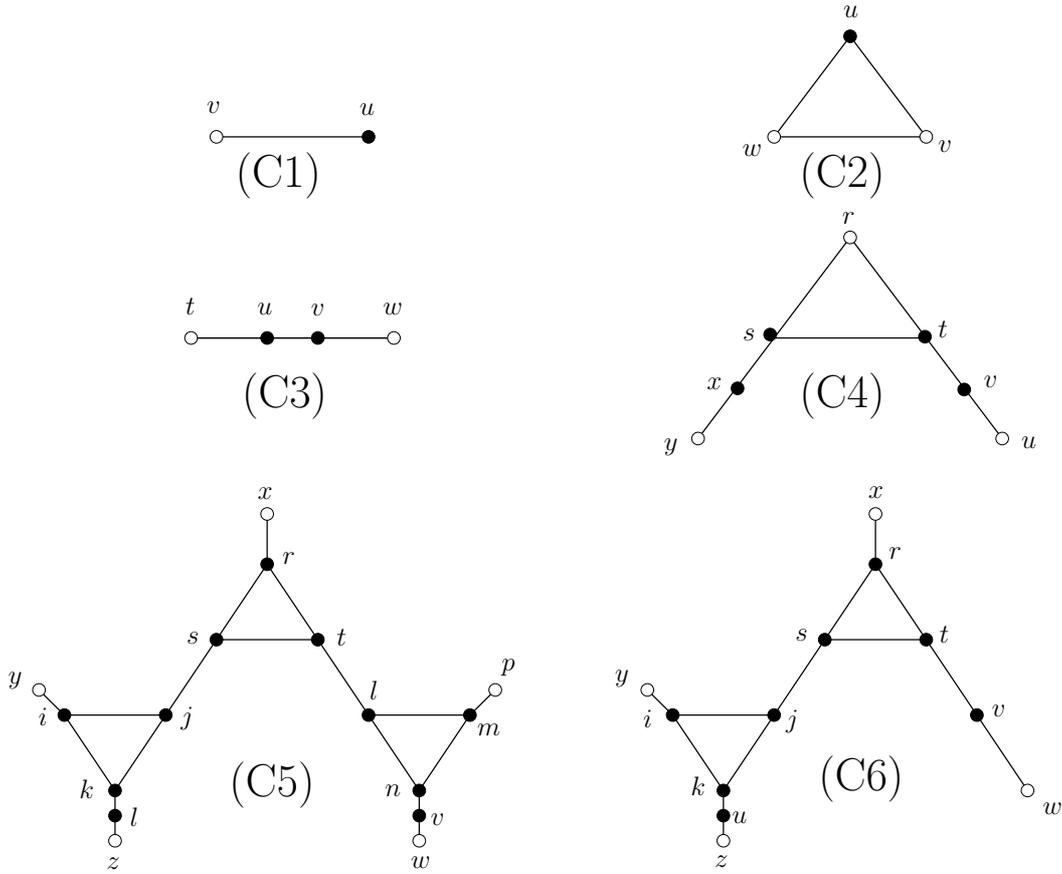


FIGURE 2.5: Configurations réductibles.

- (C3) Un 2-sommet n'est pas adjacent à un 2-sommet.
 (C4) Une 3-face a au plus un 3*-sommets sur sa frontière.
 (C5) Une 3-face $[rst]$ telle que $d(r) = d(s) = d(t) = 3$ est liée à au plus une 3*-face.
 (C6) Deux 3*-faces ne peuvent pas être liées.

Démonstration.

- (C1) Supposons que H contient un 1-sommet u adjacent à un sommet v . Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{u\}$ admet une L -coloration acyclique c . Pour étendre cette coloration à H il suffit de colorier u avec $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v)\}$. La coloration obtenue est acyclique, une contradiction.
- (C2) Supposons que H contient un 2-sommet u incident à une 3-face $[uvw]$. Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{u\}$ admet une L -coloration acyclique c . Nous pouvons étendre la coloration à H en coloriant u avec $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(w)\}$.
- (C3) Supposons que H contient un 2-sommet u adjacent à un 2-sommet v . Soient t et w les autres voisins de u et v respectivement. Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{u\}$ admet une L -coloration acyclique c . Nous étendons cette coloration à H . Supposons dans un premier temps que $c(t) \neq c(v)$. Alors il

suffit de colorier u avec $c(u) \in L(u) \setminus \{c(t), c(v)\}$. Supposons dans un second temps que $c(t) = c(v)$, nous colorions u avec $c(u) \in L(u) \setminus \{c(v), c(w)\}$. Dans les deux cas, la coloration obtenue est acyclique, une contradiction.

- (C4) Supposons que H contient une 3-face $[rst]$ avec deux 3*-sommets s et t . Supposons que t (resp. s) est adjacent à un 2-sommet v (resp. x) avec $v \neq r, s$ par (C2) (resp. $x \neq r, t$). Soit u (resp. y) l'autre voisin de v (resp. x) tel que $u \neq r, s$ (resp. $y \neq r, t$). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{v\}$ admet une L -coloration acyclique c . Nous étendons cette coloration à H . Si $c(u) \neq c(t)$, alors nous colorions v avec une couleur différente de $c(u)$ et de $c(t)$, la coloration obtenue est acyclique. Sinon, $c(u) = c(t)$. Si possible, nous colorions v avec $c(v) \in L(v) \setminus \{c(t), c(r), c(s)\}$. Si on ne peut pas colorier v , cela signifie que, sans perte de généralité, $L(v) = \{1, 2, 3\}$, $c(u) = c(t) = c(x) = 1$, $c(r) = 2$ et $c(s) = c(y) = 3$. Nous observons alors que nécessairement $L(t) = \{1, 2, 3\}$ (sinon on pourrait recolorier t avec $\alpha \in L(t) \setminus \{1, 2, 3\}$ puis colorier v proprement). De la même manière $L(s) = \{1, 2, 3\}$ et $L(x) = \{1, 2, 3\}$. À ce stade nous recolorions t avec la couleur 3, s avec la couleur 1 et x avec la couleur 2, enfin nous colorions v avec la couleur 2. On peut remarquer que la coloration obtenue est acyclique.
- (C5) Supposons que H contient une 3-face $[rst]$ incidente à trois 3-sommets tels que deux d'entre eux sont liés à deux 3*-faces $[ijk]$ et $[lmn]$. Supposons que $[ijk]$ et $[lmn]$ sont liées à $[rst]$ par les arêtes sj et tl , respectivement. Appelons y le troisième voisin de i , x le troisième voisin de r , et p le troisième voisin de m . Supposons que le 2-sommet u (resp. v) est adjacent à k et z (resp. n et w). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{v\}$ admet une L -coloration acyclique c . Nous étendons cette coloration à H . Si $c(w) \neq c(n)$, alors nous colorions v avec une couleur différente de $c(w)$ et $c(n)$, la coloration obtenue est acyclique. Sinon, $c(w) = c(n)$. Si possible, nous colorions v avec $c(v) \in L(v) \setminus \{c(n), c(l), c(m)\}$. Si on ne peut pas colorier v , cela signifie que, sans perte de généralité, $L(v) = \{1, 2, 3\} = L(l) = L(m)$, $c(w) = c(n) = c(t) = c(p) = 1$, puis en permutant les couleurs de l et m , nous sommes assurés que $L(r) = \{1, 2, 3\} = L(s)$ et $c(x) = c(j) = 1$, alors en permutant les couleurs de r et s , nous pouvons affirmer que $L(i) = \{1, 2, 3\} = L(k)$, $c(y) = c(u) = 1$, et $c(z) \in \{2, 3\}$. Soit $\alpha = \{2, 3\} \setminus \{c(z)\}$. Nous recolorions k, s, l, v avec α et m, r, i avec $c(z)$. La coloration obtenue est acyclique.
- (C6) Supposons que H contient deux 3*-faces $[rst]$ et $[ijk]$ qui sont liées par l'arête sj . Appelons y le troisième voisin de i et x le troisième voisin de r . Supposons que le 2-sommet u (resp. v) est adjacent à k et z (resp. t et w). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{v\}$ admet une L -coloration acyclique c . Nous étendons cette coloration à H . Si $c(w) \neq c(t)$, alors nous colorions v avec une couleur différente de $c(w)$ et $c(t)$, la coloration obtenue est acyclique. Sinon, $c(w) = c(t)$. Si possible, nous colorions v avec $c(v) \in L(v) \setminus \{c(t), c(r), c(s)\}$. Si on ne peut pas colorier v , cela signifie que, sans perte de généralité, $L(v) = \{1, 2, 3\} = L(r) = L(s)$, $c(w) = c(t) = c(x) = c(j) = 1$, et en permutant les couleurs de r et s , nous sommes certains que $L(i) = \{1, 2, 3\} = L(k)$, $c(y) = c(u) = 1$, et $c(z) \in \{2, 3\}$. Soit $\alpha = \{2, 3\} \setminus \{c(z)\}$. Nous recolorions

k, s, v avec α et r, i avec $c(z)$. La coloration obtenue est acyclique. \square

Nous choisissons un plongement de H tel que toutes les faces sont de taille 3 ou au moins 13, ce qui est possible d'après le Lemme 2.3.2 puisque H contient au moins un cycle de longueur strictement supérieure à 3 (sinon H contiendrait un 1-sommet ou deux 2-sommets adjacents, ce qui contredirait (C1) et (C3)).

Lemme 2.3.2

Soit H un graphe planaire connexe sans cycle de longueurs 4 à i ($i \geq 4$). Si H contient un cycle de longueur au moins $i + 1$, alors il existe un plongement dans le plan tel que chaque face de H est soit de taille 3, soit de taille au moins $i + 1$.

Démonstration. Soit H un graphe planaire connexe sans cycle de longueurs 4 à i ($i \geq 4$) contenant un cycle de longueur au moins $i + 1$. Si H est 2-connexe, alors, pour chaque plongement de H , toutes les faces sont entourées par un cycle, ce qui prouve le résultat. Supposons alors que H est 1-connexe. Soient S_1, \dots, S_k l'ensemble des composantes 2-connexes maximales de H tel que S_1 contient un cycle de longueur au moins $i + 1$ et tel que pour tout j , avec $2 \leq j \leq k$, il existe $l < j$ tel que S_j partage un sommet avec S_l . Nous allons maintenant décrire la construction d'un tel plongement de H dans le plan en k étapes. À chaque étape s , nous obtiendrons un plongement \mathbb{S}_s du graphe induit par les sommets de S_1, \dots, S_s tel que (P1) chaque face est de taille 3 ou au moins de taille $i + 1$ et (P2) chaque sommet est incident à une face de taille au moins $i + 1$. Le plongement attendu sera donné par \mathbb{S}_k . À l'étape 1, \mathbb{S}_1 est donné par un plongement de S_1 dans le plan et \mathbb{S}_1 vérifie (P1) et (P2). À l'étape s , S_s partage un sommet x avec le graphe \mathbb{S}_{s-1} . Le sommet x dans \mathbb{S}_{s-1} est incident à une face de taille au moins $i + 1$, appelons cette face f . Nous plongeons S_s sur f et soit \mathbb{S}_s le plongement obtenu. On peut alors remarquer que \mathbb{S}_s satisfait (P1) et (P2). À l'étape k , nous obtenons un plongement de H tel que chacune de ses faces est soit de taille 3 soit de taille au moins $i + 1$. \square

Lemme 2.3.3

Soit H un graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes et f faces. Alors, nous avons l'égalité suivante :

$$\sum_{v \in V(H)} (11d(v) - 26) + \sum_{f \in F(H)} (2r(f) - 26) = -52 \quad (2.1)$$

Démonstration. La formule d'Euler $n - m + f = 2$ peut être réécrite comme suit $(22m - 26n) + (4m - 26f) = -52$. La relation $\sum_{v \in V(H)} d(v) = \sum_{f \in F(H)} r(f) = 2m$ complète la preuve. \square

2.3.1.2 Procédure de déchargement

Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 2.1.20. Alors, H vérifie le Lemme 2.3.1.

Nous considérons une fonction poids $\omega : V(H) \cup F(H) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\omega(x) = 11d(x) - 26$ si $x \in V(H)$ et par $\omega(x) = 2r(x) - 26$ si $x \in F(H)$. On

peut en déduire par l'équation (2.1) que la somme totale des poids est égale à -52 . Nous définissons alors des règles de déchargement (R1) et (R2) (voir ci-après) puis redistribuons les poids suivant ces règles. Une fois la procédure de déchargement terminée, une nouvelle fonction poids ω^* est créée. Cependant, la somme totale des poids est inchangée. Nous allons alors prouver que $\omega^*(x) \geq 0$ pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$. Ce qui va nous conduire à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -52 < 0$$

ainsi nous aurons démontré qu'aucun contre-exemple n'existe.

Tout d'abord commençons par définir les règles de déchargement de la façon suivante :

- (R1.1) Chaque ≥ 3 -sommets v donne 2 à chaque 2-sommets adjacent.
- (R1.2) Chaque ≥ 4 -sommets v donne 9 à chaque 3-face incidente et 1 à chaque 3*-face liée.
- (R2.1) Chaque 3*-sommets v donne 5 à sa 3-face incidente.
- (R2.2) Chaque 3-sommets v , qui n'est pas un 3*-sommets et qui n'est pas lié à une 3*-face, donne 7 à sa 3-face incidente (s'il en existe une).
- (R2.3) Chaque 3-sommets v , qui est un 3*-sommets et qui est lié à une 3*-face, donne 1 à chaque 3*-face liée et donne 6 à sa 3-face incidente (s'il en existe une).

Pour compléter la démonstration il nous reste à montrer que la nouvelle fonction $\omega^*(x)$ est à valeurs positives pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommets. Alors par (C1), $k \geq 2$.

Cas $k = 2$. On a $\omega(v) = -4$ et v est adjacent à deux ≥ 3 -sommets par (C3). Par (R1.1), $\omega^*(v) = -4 + 2 \cdot 2 = 0$.

Cas $k = 3$. On a $\omega(v) = 7$. Puisque H ne contient pas de 4-cycles, v est incident à au plus une 3-face. Supposons pour commencer que v n'est pas incident à une 3-face. Alors par (R1.1) et (R2.3), v donne au plus 3 fois une charge de 2. D'où, $\omega^*(v) \geq 7 - 3 \cdot 2 \geq 1$. Supposons maintenant que v est incident à une 3-face. Si v est un 3*-sommets, alors $\omega^*(v) = 7 - 5 - 2 = 0$ par (R1.1) et (R2.1). Si v est lié à une 3*-face alors $\omega^*(v) \geq 7 - 6 - 1 = 0$ par (R2.3). Enfin si v n'est ni adjacent à un 2-sommets ni lié à une 3*-face alors $\omega^*(v) = 7 - 7 = 0$ par (R2.2).

Cas $k \geq 4$. On a $\omega(v) = 11k - 26$. On peut remarquer que par (C1), (C2) et les définitions de $n^*(v)$ et de sommets liés que :

$$m_3(v) \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad \text{et} \quad k - 2m_3(v) \geq n_2(v) + n^*(v)$$

$$k \geq 2m_3(v) + n_2(v) + n^*(v) \tag{2.2}$$

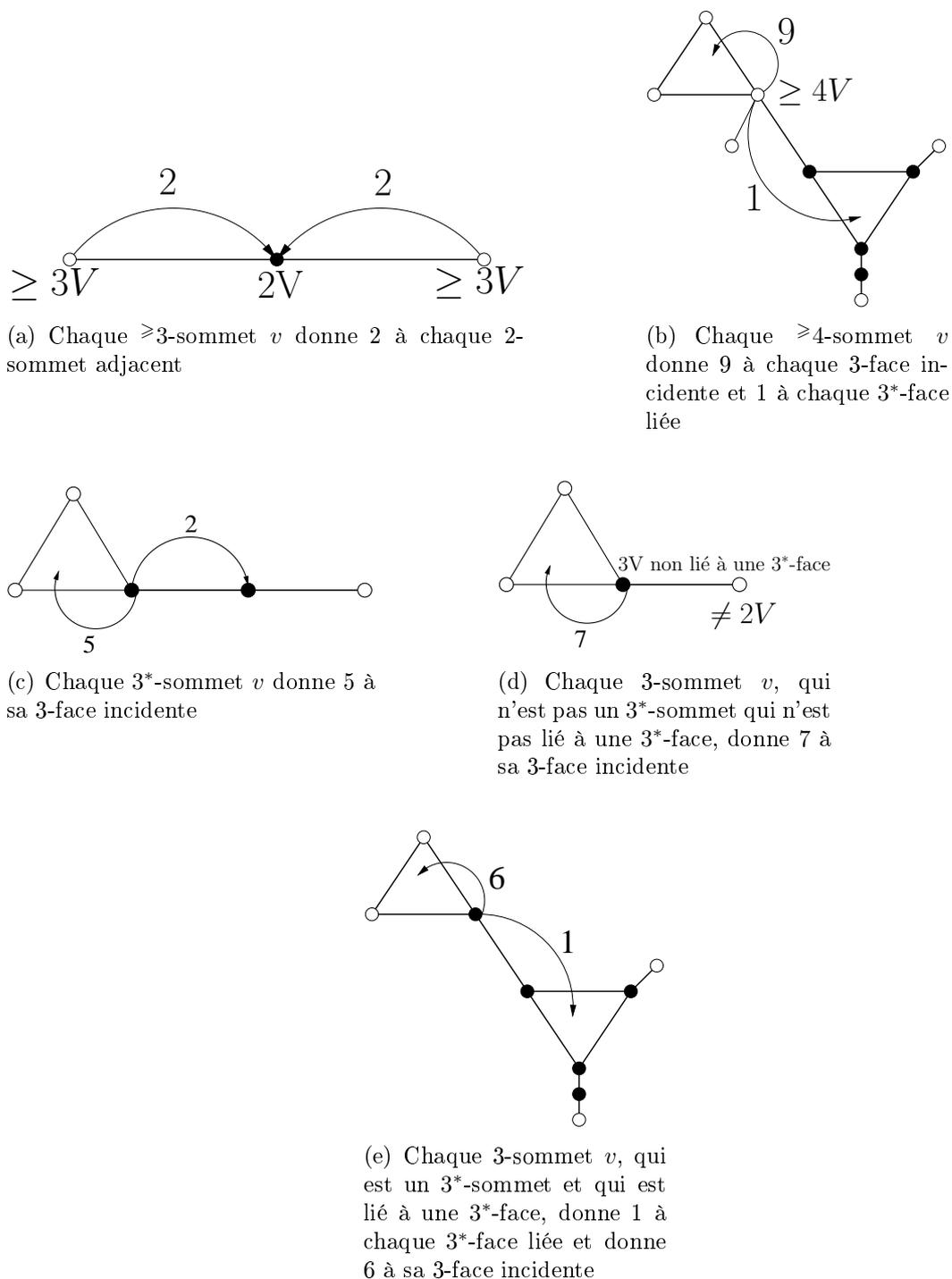


FIGURE 2.6: Règles de déchargement.

Il suit par (R1.1), (R1.2) et l'équation (2.2) que :

$$\begin{aligned}
 \omega^*(v) &= 11k - 26 - 9m_3(v) - n^*(v) - 2n_2(v) \\
 &\geq 11k - 26 - 9m_3(v) - \frac{9}{2}n^*(v) - \frac{9}{2}n_2(v) \\
 &\geq 11k - 26 - \frac{9}{2}k \\
 &\geq \frac{13}{2}k - 26 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Supposons que f est une k -face. Alors, $k = 3$ ou $k \geq 13$ par hypothèse.

Cas $k \geq 13$. On a $\omega^*(f) = \omega(f) = 2k - 26 \geq 0$.

Cas $k = 3$. On a $\omega(f) = -20$. Soit $f = [rst]$. Par (C2), f n'est pas incidente à un 2-sommet ; d'où, $d(r) \geq 3, d(s) \geq 3, d(t) \geq 3$. Par (C4), f est incidente à au plus un 3*-sommet. On peut remarquer que si un des sommets r, s, t est un ≥ 4 -sommet, alors par (R1.2) (R2.1) (R2.2) (R2.3) $\omega^*(f) \geq -20 + 9 + 5 + 6 = 0$. Supposons alors que $d(r) = d(s) = d(t) = 3$ et notons r_0, s_0, t_0 les autres voisins de r, s, t , respectivement. Supposons que f est une 3*-face et que r est son unique 3*-sommet. Par (C6) ni s ni t n'est lié à une 3*-face. De plus, s_0 et t_0 donnent 1 à f par (R1.2) et (R2.3). D'où $\omega^*(f) = -20 + 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 1$. Supposons maintenant que f n'est pas une 3*-face. Par (C5) au plus un sommet parmi r, s et t est lié à une 3*-face. D'où $\omega^*(f) \geq -20 + 6 + 2 \cdot 7 = 0$, par (R1.2), (R2.2) et (R2.3).

Nous avons prouvé que pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$, $\omega^*(x) \geq 0$. Ce qui termine la démonstration du Théorème 2.1.20.

2.3.2 Graphes planaires sans triangles proches

Dans cette partie nous proposons de nouvelles conditions suffisantes de 3-coloration acyclique par listes, affinant ainsi le résultat obtenu au Théorème 2.1.20. Nous démontrons que tout graphe planaire G est acycliquement 3-liste coloriable s'il vérifie une des conditions suivantes :

1. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 10, et $d_{\Delta}(G) \geq 2$
2. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 9, et $d_{\Delta}(G) \geq 3$
3. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 8, et $d_{\Delta}(G) \geq 5$
4. G ne contient pas de cycle de longueurs 4 à 7, et $d_{\Delta}(G) \geq 7$

$d_{\Delta}(G)$ désigne la distance minimale (en terme de nombre d'arêtes) qui sépare deux triangles dans G .

2.3.2.1 Préliminaires

Soient G un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 2.1.22 et L une liste telle que G ne soit pas acycliquement L -coloriable.

Lemme 2.3.4 ([14, 15, 53, 75])

Le contre-exemple G ne contient pas :

1. de 1-sommets,
2. deux 2-sommets adjacents,
3. de 3-sommets adjacents à deux 2-sommets,
4. de 4-sommets adjacents à trois 2-sommets,
5. de triangles xyz avec $d(x) = 2$,
6. de triangles xyz tel que $d(x) = d(y) = 3$, et x et y sont adjacents à un 2-sommet,
7. de chaîne xyz tel que $d(x) = d(y) = d(z) = 3$, et tel que x, y, z sont adjacents à des 2-sommets.

Les preuves des Lemmes 2.3.4.1, 2.3.4.2, 2.3.4.5 sont triviales. Les Lemmes 2.3.4.3, 2.3.4.4 sont prouvés dans [75], le Lemme 2.3.4.6 dans [14, 53], et le Lemme 2.3.4.7 dans [15].

Lemme 2.3.5

Soit G un graphe planaire connexe à n sommets, m arêtes et f faces. Soit $k \geq 2$, nous avons l'égalité suivante :

$$\sum_{v \in V(G)} ((k-2)d(v) - 2k) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 2k) = -4k \quad (2.3)$$

Démonstration. La formule d'Euler $n - m + f = 2$ peut être réécrite ainsi $((2k-4)m - 2kn) + (4m - 2kf) = -4k$. La relation $\sum_{v \in V(H)} d(v) = \sum_{f \in F(H)} r(f) = 2m$ complète la preuve. \square

Nous montrerons que G a un plongement qui ne satisfait pas la formule d'Euler. La contradiction complètera la preuve. Nous choisissons un plongement de G tel que toutes les faces sont de taille 3 ou au moins 11 (resp. 10, 9, 8), ce qui est possible d'après le Lemme 2.3.2 puisque G contient au moins un cycle de taille > 3 (sinon G contiendrait un 1-sommet ou deux 2-sommets adjacents, ce qui contredirait le Lemme 2.3.4).

2.3.2.2 Preuve du Théorème 2.1.22.1

Soit G un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 2.1.22.1. Le graphe G vérifie le Lemme 2.3.4 et l'Equation (2.4) (on fixe $k = 11$ dans l'Equation (2.3)) :

$$\sum_{v \in V(G)} (9d(v) - 22) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 22) = -44 \quad (2.4)$$

Nous utilisons une procédure de déchargement. Nous définissons une fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(x) = 9d(x) - 22$ si $x \in V(G)$ et $\omega(x) =$

$2r(x) - 22$ si $x \in F(G)$. On en déduit de l'Equation (2.4) que la somme totale des poids est égale à -44 . Nous définissons des règles de déchargement puis redistribuons les poids suivant ces règles établies. Une fois la procédure de déchargement terminée nous aurons créé une nouvelle fonction poids ω^* . Toutefois, la somme totale des poids reste inchangée pendant la procédure. Nous montrerons alors que pour tout $x \in V(G) \cup F(G)$, $\omega^*(x) \geq 0$, ce qui nous conduira à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = -44 < 0 \quad (2.5)$$

ce qui prouvera qu'aucun contre-exemple existe.

Notre procédure de déchargement se déroule en deux étapes :

Étape 1. Chaque ≥ 3 -sommets donne 2 à chaque 2-sommets adjacent.

Une fois l'Étape 1 terminée, nous continuons avec l'Étape 2 :

Étape 2. Chaque ≥ 3 -sommets v incident à un triangle T donne $\omega'(v)$ à T . Chaque ≥ 3 -sommets v à distance exactement 1 d'un triangle lui donne $\omega'(v)/n_T(v)$, où $\omega'(x)$ est la nouvelle charge de $x \in V(G) \cup F(G)$ (après l'Étape 1) et $n_T(v)$ le nombre de triangles à distance exactement 1 de v .

Soit v un k -sommets. Par le Lemme 2.3.4.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$ On a $\omega(v) = -4$. Par le Lemme 2.3.4.2, v est adjacent à des ≥ 3 -sommets. D'où, $\omega'(v) = -4 + 2 \cdot 2 = 0$ d'après l'Étape 1. Les sommets de degré 2 ne sont pas concernés par l'Étape 2 ; d'où, $\omega^*(v) = 0$.

Cas $k = 3$ On a $\omega(v) = 5$. Par le Lemme 2.3.4.3, v est adjacent à au plus un 2-sommets. Si v est adjacent à un 2-sommets, alors $\omega'(v) = 5 - 2 = 3$ et $\omega'(v) = 5$ sinon. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 4$ On a $\omega(v) = 14$. Par le Lemme 2.3.4.4, v est adjacent à au plus deux 2-sommets. Si v est adjacent à deux (resp. un, zéro) 2-sommets, alors $\omega'(v) = 14 - 2 \cdot 2 = 10$ (resp. 12, 14). D'où par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k \geq 5$ On a $\omega(v) = 9k - 22$. Le sommets v donne 2 à chaque 2-sommets pendant l'Étape 1. Donc $\omega'(v) \geq 9k - 22 - 2k = 7k - 22 \geq 13$. Donc par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

D'où, après les étapes 1 et 2, nous obtenons : $\forall v \in V(G), \omega^*(v) \geq 0$. Nous pouvons remarquer qu'à la fin de l'Étape 1, chaque ≥ 3 -sommets peut donner (au cours de l'Étape 2) au moins $\frac{3}{2}$ à chaque triangle qui se trouve à distance exactement 1.

Soit f une k -face. Trivialement si $k \geq 11$, alors $\omega^*(f) = \omega(f) = 2r(f) - 22 \geq 0$. Supposons que f est une 3-face xyz telle que $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$. Par le Lemme 2.3.4.5, $d(x) \geq 3$. Au début nous avons, $\omega(f) = -16$. Considérons deux cas :

- (1) Si $d(z) \geq 4$, alors les sommets x, y, z donnent au moins $3 + 3 + 10$ à f et donc $\omega^*(f) \geq 0$.
- (2) Supposons alors que $d(x) = d(y) = d(z) = 3$. Par le Lemme 2.3.4.6, au plus un sommets parmi x, y, z est adjacent à un 2-sommets. Si l'un de ces sommets est adjacent à un 2-sommets, par exemple x , alors x donne 3 à f , et chacuns des

sommets y et z donnent 5 à f . Supposons maintenant que y et z sont adjacents à deux sommets distincts, disons y_1 et z_1 (différents de x, y, z), chacun donne au moins $\frac{3}{2}$ à f par l'observation précédente. D'où $\omega^*(f) \geq -16 + 3 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot \frac{3}{2} \geq 0$. Si aucun des sommets x, y, z est adjacent à un 2-sommet, nous obtenons de la même manière $\omega^*(f) \geq -16 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot \frac{3}{2} \geq 0$.

À l'issue des Étapes 1 et 2, nous avons : $\forall x \in V(G) \cup F(G), \omega^*(x) \geq 0$. La contradiction obtenue par l'Equation (2.5) complète la démonstration.

2.3.2.3 Preuve du Théorème 2.1.22.2

Soit G un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 2.1.22.2. Le graphe G vérifie le Lemme 2.3.4 et l'Equation (2.6) (on fixe $k = 10$ dans l'Equation (2.3)) :

$$\sum_{v \in V(G)} (4d(v) - 10) + \sum_{f \in F(G)} (r(f) - 10) = -20 \quad (2.6)$$

Similairement à la preuve du Théorème 2.1.22.1, nous utilisons une procédure de déchargement. Nous définissons une fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(x) = 4d(x) - 10$ si $x \in V(G)$ et $\omega(x) = r(x) - 10$ si $x \in F(G)$. On en déduit de l'Equation (2.6) que la somme totale des poids est égale à -20 . Nous définissons des règles de déchargement puis redistribuons les poids suivant ces règles établies. Une fois la procédure de déchargement terminée nous aurons créé une nouvelle fonction poids ω^* . Toutefois, la somme totale des poids reste inchangée pendant la procédure. Nous montrerons alors que pour tout $x \in V(G) \cup F(G)$, $\omega^*(x) \geq 0$, ce qui nous conduira à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = -20 < 0 \quad (2.7)$$

Notre procédure de déchargement se déroule en deux étapes :

Étape 1. Chaque ≥ 3 -sommet donne 1 à chaque 2-sommet adjacent.

Une fois l'Étape 1 terminée, nous continuons avec l'Étape 2 :

Étape 2. Chaque ≥ 3 -sommet v à distance au plus 1 d'un triangle lui donne $\omega'(v)/n_T(v)$, où $\omega'(x)$ est la nouvelle charge de $x \in V(G) \cup F(G)$ (après l'Étape 1) et $n_T(v)$ le nombre de triangles à distance exactement 1 de v .

On peut remarquer qu'un sommet peut être à distance (au plus) 1 d'au plus un triangle.

Soit v un k -sommet. Par le Lemme 2.3.4.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$ On a $\omega(v) = -2$. Par le Lemme 2.3.4.2, v est adjacent à des ≥ 3 -sommets. D'où, $\omega'(v) = -2 + 2 \cdot 1 = 0$ d'après l'Étape 1. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 3$ On a $\omega(v) = 2$. Par le Lemme 2.3.4.3, v est adjacent à au plus un 2-sommet. Si v est adjacent à un 2-sommet, alors $\omega'(v) = 2 - 1 = 1$ et $\omega^*(v) = 2$ sinon. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 4$ On a $\omega(v) = 6$. Par le Lemme 2.3.4.4, v est adjacent à au plus deux 2-sommets. Si v est adjacent à deux (resp. un, zéro) 2-sommets, alors $\omega'(v) = 6 - 2 \cdot 1 = 4$ (resp. 5, 6). D'où par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k \geq 5$ On a $\omega(v) = 4k - 10$. Le sommet v donne 1 à chaque 2-sommet pendant l'Étape 1. Donc $\omega'(v) \geq 4k - 10 - k = 3k - 10 \geq 5$. Donc par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

D'où, après les étapes 1 et 2, nous obtenons : $\forall v \in V(G), \omega^*(v) \geq 0$. Nous pouvons remarquer qu'à la fin de l'Étape 1, chaque ≥ 3 -sommet peut donner (au cours de l'Étape 2) au moins 1 à chaque triangle (s'il y en a) qui se trouve à distance exactement 1.

Soit f une k -face. Trivialement si $k \geq 10$, alors $\omega^*(f) = \omega(f) = r(f) - 10 \geq 0$. Supposons que f est une 3-face xyz telle que $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$. Nous avons $\omega(f) = -7$ et par le Lemme 2.3.4.5, $d(x) \geq 3$. De plus par le Lemme 2.3.4.6, nous en déduisons que si x et y sont des 3-sommets, alors au plus l'un deux est adjacent à un 2-sommet. Si $d(z) \geq 4$, alors $\omega^*(f) \geq -7 + 1 + 2 + 4 = 0$. Supposons alors que $d(x) = d(y) = d(z) = 3$. Sans perte de généralité, nous considérons deux cas : (1) x est adjacent à un 2-sommet, (2) x n'est pas adjacent à un 2-sommet.

- (1) Le sommet x donne 1 à f ; les sommets y et z donnent 2 à f . De plus, les voisins y_1, z_1 ($\neq x, y, z$) de y, z respectivement sont distincts et chacun d'eux donne au moins 1 à f . D'où, $\omega^*(f) \geq -7 + 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$.
- (2) Les sommets x, y, z donnent chacun 2 à f . De plus, les voisins x_1, y_1, z_1 ($\neq x, y, z$) de x, y, z respectivement sont distincts et chacun d'eux donne au moins 1 à f . D'où, $\omega^*(f) \geq -7 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \geq 0$.

À l'issue des Étapes 1 et 2, nous avons : $\forall x \in V(G) \cup F(G), \omega^*(x) \geq 0$. La contradiction obtenue par l'Equation (2.7) complète la démonstration.

2.3.2.4 Preuve du Théorème 2.1.22.3

Soit G un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 2.1.22.3. Le graphe G vérifie le Lemme 2.3.4 et l'Equation (2.8) (on fixe $k = 9$ dans l'Equation (2.3)) :

$$\sum_{v \in V(G)} (7d(v) - 18) + \sum_{f \in F(G)} (2r(f) - 18) = -36 \quad (2.8)$$

Définissons une fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(x) = 7d(x) - 18$ si $x \in V(G)$ et $\omega(x) = 2r(x) - 18$ si $x \in F(G)$. D'après l'Equation (2.8) que la somme totale des poids est égale à -36 . Définissons des règles de déchargement puis redistribuons les poids suivant ces règles établies. Une fois la procédure de déchargement terminée nous aurons créé une nouvelle fonction poids ω^* . La somme totale des poids reste inchangée pendant la procédure. Nous montrerons alors que pour tout $x \in V(G) \cup F(G)$, $\omega^*(x) \geq 0$, ce qui nous conduira à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = -36 < 0 \quad (2.9)$$

Notre procédure de déchargement se déroule en deux étapes :

Étape 1. Chaque ≥ 3 -sommets donne 2 à chaque 2-sommet adjacent.

Une fois l'Étape 1 terminée, nous continuons avec l'Étape 2 :

Étape 2. Chaque ≥ 3 -sommets v à distance au plus 2 d'un triangle lui donne $\omega'(v)/n_T(v)$, où $\omega'(x)$ est la nouvelle charge de $x \in V(G) \cup F(G)$ (après l'Étape 1) et $n_T(v)$ le nombre de triangles à distance exactement 1 de v .

Nous remarquons qu'un sommet peut être à distance (au plus) 2 d'au plus un triangle.

Soit v un k -sommets. Par le Lemme 2.3.4.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$ On a $\omega(v) = -4$. Par le Lemme 2.3.4.2, v est adjacent à des ≥ 3 -sommets. D'où, $\omega'(v) = -4 + 2 \cdot 2 = 0$ d'après l'Étape 1. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 3$ On a $\omega(v) = 3$. Par le Lemme 2.3.4.3, v est adjacent à au plus un 2-sommets. Si v est adjacent à un 2-sommets, alors $\omega'(v) = 3 - 2 = 1$ et $\omega'(v) = 3$ sinon. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 4$ On a $\omega(v) = 10$. Par le Lemme 2.3.4.4, v est adjacent à au plus deux 2-sommets. Si v est adjacent à deux (resp. un, zéro) 2-sommets, alors $\omega'(v) = 10 - 2 \cdot 2 = 6$ (resp. 8, 10). D'où par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k \geq 5$ On a $\omega(v) = 7k - 18$. Le sommets v donne 2 à chaque 2-sommets pendant l'Étape 1. Donc $\omega'(v) \geq 7k - 18 - 2k = 5k - 18 \geq 7$. Donc par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

D'où, après les étapes 1 et 2, nous obtenons : $\forall v \in V(G), \omega^*(v) \geq 0$. Nous pouvons remarquer qu'à la fin de l'Étape 1, chaque ≥ 3 -sommets peut donner (au cours de l'Étape 2) au moins 1 à chaque triangle (s'il y en a) qui se trouve à distance au plus 2.

Soit f une k -face. Trivialement si $k \geq 9$, alors $\omega^*(f) = \omega(f) = 2r(f) - 18 \geq 0$. Supposons que f est une 3-face xyz telle que $d(x) \leq d(y) \leq d(z)$. Nous avons $\omega(f) = -12$ et par le Lemme 2.3.4.5, $d(x) \geq 3$. Soient xx_1x_2 , yy_1y_2 , et zz_1z_2 les trois 2-chaînes sommets disjoints qui contiennent x, y, z respectivement (de telles chaînes existent puisqu'il n'y a pas de cycle de longueurs 4 à 8). De plus par le Lemme 2.3.4.6, nous en déduisons que si x et y sont des 3-sommets, alors au plus l'un deux est adjacent à un 2-sommets. Si $d(y) \geq 4$, alors les sommets y et z peuvent donner chacun au moins 6 et $\omega^*(f) \geq 0$. On suppose alors que $d(x) = d(y) = 3$. Tout d'abord, on considère que $d(z) \geq 4$. Si x et y ne sont pas adjacents à un 2-sommets, alors les sommets x, y, z donne au moins 1, 3, 6 respectivement et les sommets x_2, y_1 donnent au moins $2 \cdot 1$; d'où, $\omega^*(f) \geq -12 + 1 + 3 + 6 + 2 \cdot 1 \geq 0$. Supposons maintenant que $d(x) = d(y) = d(z) = 3$. Sans perte de généralité, nous considérons deux cas : (1) x est adjacent à un 2-sommets, (2) x n'est pas adjacent à un 2-sommets.

- (1) Le sommet x donne 1 à f ; les sommets y et z donnent 3 à f . Si l'un des sommets parmi x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 est un ≥ 4 -sommet, alors $\omega^*(f) \geq 0$. Supposons alors que x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 sont de degré au plus 3. Par les Lemmes 2.3.4.2 et 2.3.4.6, nous avons $d(x_2) = d(y_1) = d(z_1) = 3$. D'après le Lemme 2.3.4.3, y_2 et z_2 peuvent être choisis de telle sorte que $d(y_2) = d(z_2) = 3$ (les deux voisins de y_1 (resp. z_1) différents de y (resp. z) ne peuvent être tous les deux de degré 2). Donc x_2, y_1, z_1, y_2 , et z_2 donnent chacun 1 à f . D'où, $\omega^*(f) \geq -12 + 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 0$.
- (2) Les sommets x, y, z donnent chacun 3 à f . De même, si l'un des sommets $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ est ≥ 4 -sommet, alors $\omega^*(f) \geq 0$. Supposons alors que $d(x_1) = d(y_1) = d(z_1) = 3$. Donc x_1, y_1 , et z_1 donnent chacun 1 à f . D'où, $\omega^*(f) \geq -12 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \geq 0$.

À l'issue des Étapes 1 et 2, nous avons : $\forall x \in V(G) \cup F(G), \omega^*(x) \geq 0$. La contradiction obtenue par l'Equation (2.9) complète la démonstration.

2.3.2.5 Preuve du Théorème 2.1.22.4

Soit G un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 2.1.22.4. Le graphe G vérifie le Lemme 2.3.4 et l'Equation (2.10) (on fixe $k = 8$ dans l'Equation (2.3)) :

$$\sum_{v \in V(G)} (3d(v) - 8) + \sum_{f \in F(G)} (r(f) - 8) = -16 \quad (2.10)$$

Définissons une fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\omega(x) = 3d(x) - 8$ si $x \in V(G)$ et $\omega(x) = r(x) - 8$ si $x \in F(G)$. On en déduit de l'Equation (2.10) que la somme totale des poids est égale à -16 . Définissons des règles de déchargement puis redistribuons les poids suivant ces règles établies. Une fois la procédure de déchargement terminée nous aurons créé une nouvelle fonction poids ω^* . La somme totale des poids reste inchangée pendant la procédure. Nous montrerons alors que pour tout $x \in V(G) \cup F(G)$, $\omega^*(x) \geq 0$, ce qui nous conduira à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(G) \cup F(G)} \omega(x) = -16 < 0 \quad (2.11)$$

Notre procédure de déchargement se déroule en deux étapes :

Étape 1. Chaque ≥ 3 -sommet donne 1 à chaque 2-sommet adjacent.

Une fois l'Étape 1 terminée, nous continuons avec l'Étape 2 :

Étape 2. Chaque ≥ 3 -sommet v à distance au plus 3 d'un triangle lui donne $\omega'(v)/n_T(v)$, où $\omega'(x)$ désigne la nouvelle charge de $x \in V(G) \cup F(G)$ (après l'Étape 1) et $n_T(v)$ le nombre de triangles à distance exactement 1 de v .

Nous remarquons qu'un sommet peut être à distance (au plus) 3 d'au plus un triangle.

Soit v un k -sommet. Par le Lemme 2.3.4.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$ On a $\omega(v) = -2$. Par le Lemme 2.3.4.2, v est adjacent à des ≥ 3 -sommets. D'où, $\omega'(v) = -2 + 2 \cdot 1 = 0$ d'après l'Étape 1. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 3$ On a $\omega(v) = 1$. Par le Lemme 2.3.4.3, v est adjacent à au plus un 2-sommet. Si v est adjacent à un 2-sommet, alors $\omega'(v) = 1 - 1 = 0$ et $\omega^*(v) = 1$ sinon. Par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k = 4$ On a $\omega(v) = 10$. Par le Lemme 2.3.4.4, v est adjacent à au plus deux 2-sommets. Si v est adjacent à deux (resp. un, zéro) 2-sommets, alors $\omega'(v) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$ (resp. 3, 4). D'où par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

Cas $k \geq 5$ On a $\omega(v) = 3k - 8$. Le sommet v donne 1 à chaque 2-sommet pendant l'Étape 1. Donc $\omega'(v) \geq 3k - 8 - k = 2k - 8 \geq 2$. Donc par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$.

D'où, après les étapes 1 et 2, nous obtenons : $\forall v \in V(G), \omega^*(v) \geq 0$. Nous pouvons remarquer qu'à la fin de l'Étape 1, chaque ≥ 3 -sommet peut donner (au cours de l'Étape 2) au moins 1 à chaque triangle (s'il y en a) qui se trouve à distance au plus 2. Observons également que :

(1) chaque ≥ 4 -sommet peut donner au moins 2 au triangle (s'il y en a) à distance au plus 3 au cours de l'Étape 2, (2) un 3-sommet non adjacent à un 2-sommet peut donner 1 au triangle (s'il y en a) à distance au plus 3 au cours de l'Étape 2, et (3) l'unique configuration de sommets qui ne peut pas donner est un 3-sommet adjacent à un 2-sommet. On en déduit alors par le Lemme 2.3.4.7 :

Observation 2.3.6

Soit rst une 2-chaîne composée de ≥ 3 -sommets. Alors au moins un des sommets qui compose la chaîne a une charge d'au moins 1 après l'Étape 1.

Soit f une k -face. Trivialement, si $k \geq 8$, alors $\omega^*(f) = \omega(f) = r(f) - 8 \geq 0$.

Soient $xx_1x_2x_3$, $yy_1y_2y_3$, et $zz_1z_2z_3$ trois 3-chaînes sommets disjoints qui contiennent x, y, z respectivement (de telles chaînes existent puisqu'il n'y a pas de cycle de longueurs 4 à 7). Nous avons $\omega(f) = -5$.

Nous considérerons différents cas en fonction des degrés de x, y , et z :

Considérons le cas $d(x) = 3$, $d(y) = 3$, $d(z) \geq 4$, et $d(x_1) = 2$. Pendant l'Étape 2, y et z donnent 1 et au moins 2 respectivement. Si au moins un des sommets parmi y_1, y_2, y_3 est de degré au moins 4, alors $\omega^*(f) = -5 + 1 + 2 + 2 = 0$. Supposons alors que $d(y_i) \leq 3$ pour $i = 1, 2, 3$. D'après les Lemmes 2.3.4.2, 2.3.4.3, 2.3.4.5, et 2.3.4.6, nous pouvons choisir les sommets y_i tels que $d(y_i) = 3$ pour $i = 1, 2, 3$ (puisque un 3-sommet est adjacent à au plus un 2-sommet). Par l'Observation 2.3.6, nous sommes assurés qu'au moins un sommet parmi y_1, y_2, y_3 a une charge d'au moins 1 après l'Étape 1. Ce poids est alors transféré à f pendant l'Étape 2. De la même manière par le Lemme 2.3.4.2, x_2 est de degré au moins 3. Si $d(x_2) \geq 4$, alors $\omega^*(f) = -5 + 1 + 2 + 1 + 2 \geq 0$. Supposons alors que $d(x_2) = 3$. Soit x'_3 le troisième voisin de x_2 (puisque il n'y a pas de cycles de longueurs 4 à 7, x'_3 est différent de

$x, y, z, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$). Du Lemme 2.3.4.3, on en déduit que $d(x_3) \geq 3$ et $d(x'_3) \geq 3$. D'où d'après l'Observation 2.3.6, au moins un sommet parmi x_3, x'_3 a une charge d'au moins 1 à la fin de l'Étape 1. Ce poids est alors transféré à f pendant l'Étape 2. D'où, $\omega^*(f) \geq -5 + 1 + 2 + 1 + 1 = 0$.

Considérons le cas $d(x) = 3, d(y) = 3, d(z) \geq 4$, et $d(x_1) \geq 3, d(y_1) \geq 3$. Pendant l'Étape 2, x, y et z donnent 1, 1, et au moins 2 respectivement. Si au moins un des sommets parmi $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ est de degré au moins 4, alors $\omega^*(f) = -5 + 1 + 1 + 2 + 2 \geq 0$. Supposons alors que $d(x_i) \leq 3$ et $d(y_i) \leq 3$ pour $i = 1, 2, 3$. Par les Lemmes 2.3.4.2, 2.3.4.3, 2.3.4.5, et 2.3.4.6, nous pouvons choisir les sommets x_i et y_i tels que $d(x_i) = 3$ et $d(y_i) = 3$ pour $i = 1, 2, 3$. D'où par l'Observation 2.3.6, nous sommes assurés qu'au moins un sommet parmi x_1, x_2, x_3 (resp. y_1, y_2, y_3) a une charge d'au moins 1 après l'Étape 1. Ce poids est alors transféré à f pendant l'Étape 2. D'où, $\omega^*(f) = -5 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 \geq 0$.

Considérons le cas $d(x) = d(y) = d(z) = 3$, et $d(x_1) = 2$. Pendant l'Étape 2, f reçoit 1 de y et 1 de z . Nous montrerons dans un premier temps que chacune des chaînes $y_1y_2y_3$ et $z_1z_2z_3$ donne au moins 1 à f . Considérons $y_1y_2y_3$. Si au moins un des sommets parmi y_1, y_2, y_3 est de degré au moins 4, alors cette chaîne donnera au moins 1 à f . Sinon, par les Lemmes 2.3.4.2, 2.3.4.3, 2.3.4.5, et 2.3.4.6, nous pouvons supposer que $d(y_i) = 3$ pour $i = 1, 2, 3$. D'où par l'Observation 2.3.6, nous sommes assurés qu'au moins un sommet parmi y_1, y_2, y_3 a une charge d'au moins 1 à la fin de l'Étape 1. De la même manière, la chaîne $z_1z_2z_3$ au moins 1 à f . Par le Lemme 2.3.4.2, x_2 est de degré au moins 3. Si $d(x_2) \geq 4$, alors $\omega^*(f) = -5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 \geq 0$. Supposons alors que $d(x_2) = 3$. Soit x'_3 le troisième voisin de x_2 (puisque'il n'y a pas de cycles de longueurs 4 à 7, x'_3 est différent de $x, y, z, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$). Du Lemme 2.3.4.3, on en déduit que $d(x_3) \geq 3$ et $d(x'_3) \geq 3$. D'où d'après l'Observation 2.3.6, au moins un sommet parmi x_3, x'_3 a une charge d'au moins 1 à la fin de l'Étape 1. Ce poids est alors transféré à f pendant l'Étape 2. D'où, $\omega^*(f) = -5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 0$.

Considérons le cas $d(x) = d(y) = d(z) = 3$, et $d(x_1) \geq 3, d(y_1) \geq 3, d(z_1) \geq 3$. En utilisant le même type d'arguments, on peut prouver que $\omega^*(f) \geq -5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \geq 0$.

À l'issue des Étapes 1 et 2, nous avons : $\forall x \in V(G) \cup F(G), \omega^*(x) \geq 0$. La contradiction obtenue par l'Equation (2.11) complète la démonstration.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que pour tout graphe vérifiant $5 \leq \Delta \leq 16$, nous avons $\chi_a(G) \leq f(\Delta)$ (voir Théorème 2.1.6). La preuve s'appuie sur un ordre de coloration défini sur les sommets du graphe. Pour les petites valeurs de Δ , cet ordre nous permet d'obtenir des majorations intéressantes de $\chi_a(G)$. Cependant ce même ordre, tel que nous l'utilisons, nous empêche de diminuer le nombre chromatique acyclique de manière significative pour les grandes valeurs de Δ .

Concernant la 3-liste coloration acyclique, les résultats que nous obtenons (Théorèmes 2.1.20 et 2.1.22) sont basés sur des techniques de déchargement local. Ces

techniques ne nous permettent pas d'améliorer nos résultats. En utilisant des techniques de déchargement global, Borodin et Ivanova [19] ont prouvé que :

Tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à 11 est acycliquement 3-liste coloriable.

Nous concluons avec quelques problèmes spécifiques.

Question 1

Peut-on trouver des graphes de degré maximum Δ , $5 \leq \Delta \leq 100$ (Δ petit), tels que $\chi_a(G) > \Delta + 1$?

Question 2

Prouver que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i est acycliquement 3-liste coloriable pour $6 \leq i \leq 10$.

Question 3

Prouver que tout graphe planaire de maille au moins 6 est acycliquement 3-liste coloriable.

Question 4

Étant donné $i \geq 6$, existe-t-il une constante d telle que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i avec $d_\Delta(G) \geq d$ est acycliquement 3-liste coloriable. Pour i donné, si d existe, quelle est la plus petite valeur de d ?

Chapitre 3

Coloration forte d'arêtes

Contenu

3.1	Introduction	60
3.2	Complexité de la coloration forte d'arêtes pour les graphes planaires subcubiques	64
3.2.1	Complexité de la 4-COLORATION FORTE d'arêtes	64
3.2.2	Complexité de la 5-COLORATION FORTE d'arêtes	66
3.2.3	Complexité de la 6-COLORATION FORTE d'arêtes	68
3.3	Graphes subcubiques de degré moyen maximum borné	75
3.3.1	Preuve du Théorème 3.1.5.1	76
3.3.2	Preuve du Théorème 3.1.5.2	79
3.3.3	Preuve du Théorème 3.1.5.3	82
3.3.4	Preuve du Théorème 3.1.5.4	84
3.4	Graphes planaires subcubiques sans cycles de longueurs données	86
3.4.1	Propriétés structurelles	87
3.4.2	Procédure de déchargement	88
3.5	Graphes planaires extérieurs	90
3.6	Conclusion	92

Dans ce chapitre nous étudions la coloration d'arêtes à distance 2 ou coloration forte d'arêtes. Cette notion a été introduite en 1983 par Fouquet et Jolivet [44, 45].

3.1 Introduction

Une k -coloration d'arêtes à distance 2 ($k \in \mathbb{N}, n \geq 1$) d'un graphe G est une application $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ de l'ensemble des arêtes $E(G)$ de G dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ de telle sorte que deux arêtes adjacentes ou adjacentes à une même arête reçoivent des couleurs différentes. L'indice chromatique fort de G , noté $\chi'_s(G)$, est le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration d'arêtes à distance 2.

Ce type de coloration peut être par exemple utilisé pour modéliser un problème d'allocation de fréquences dans les réseaux radio [9, 78, 79, 80]. D'autres applications de ce type de coloration existent, nous renvoyons le lecteur aux références suivantes [68, 89].

Dans cette partie nous nous intéresserons à la majoration de l'indice chromatique fort en fonction de Δ . Une majoration naturelle est donnée par $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$. En effet, si on veut colorier une arête quelconque uv d'un graphe G , il faut éviter les $\Delta - 1$ couleurs des arêtes incidentes à v et $\Delta - 1$ couleurs pour chacune des arêtes incidentes à ces mêmes arêtes incidentes à v (Figure 3.1). Il faut donc éviter $\Delta(\Delta - 1)$ couleurs du "côté" de v . Par symétrie, on obtient le même nombre de couleurs à éviter du "côté" de u . Ce qui nous fournit la majoration $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$.

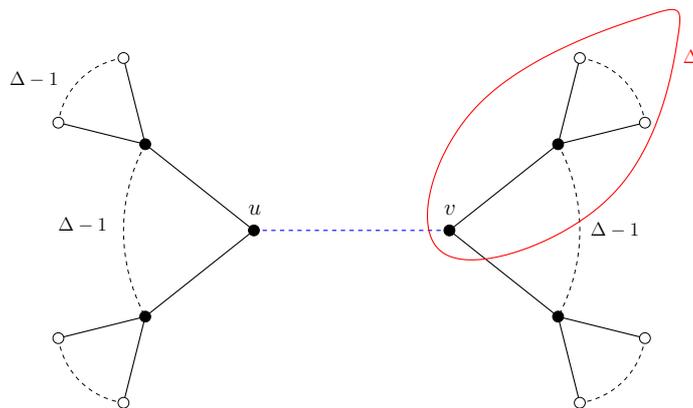


FIGURE 3.1: $\chi'_s(G) \leq 2\Delta(\Delta - 1) + 1$

En 1985, Erdős et Nešetřil ont conjecturé au cours d'une conférence à Prague que :

Conjecture 3.1.1 (Erdős et Nešetřil, 1985)

Tout graphe G vérifie $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ (le degré maximum du graphe) est pair et $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair.

De plus, ils ont au cours de cette même conférence proposé une construction de graphes tels que $\chi'_s(G) = \frac{5}{4}\Delta^2$ si Δ est pair et $\chi'_s(G) = \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ si Δ est impair (cf. Figure 3.2). La construction de tels graphes est la suivante :

Si Δ est pair, on remplace chaque sommet qui compose un cycle de taille 5 par un stable composé de $\Delta/2$ sommets. Ensuite on relie chaque sommet de ces

cinq stables de telle sorte que deux sommets de deux stables différents sont reliés si et seulement si les sommets du cycle de taille 5 initial sont adjacents. Si Δ est impair, on remplace deux sommets adjacents d'un cycle de taille 5 par deux stables composés de $(\Delta + 1)/2$ sommets. Les trois autres sommets du cycle sont remplacés par des stables de taille $(\Delta - 1)/2$. On relie chaque sommet de la même façon que pour le cas Δ pair.

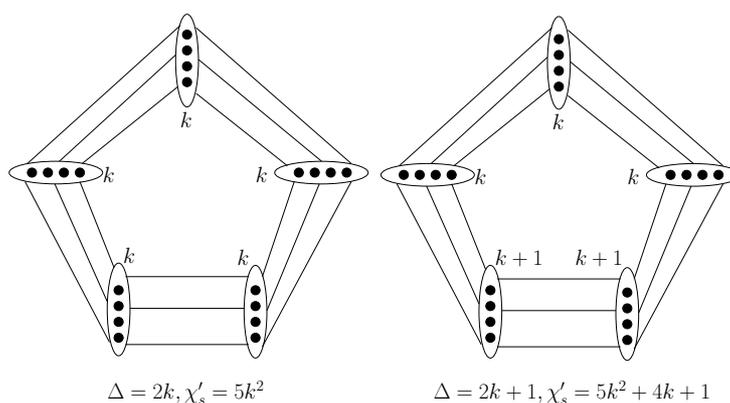
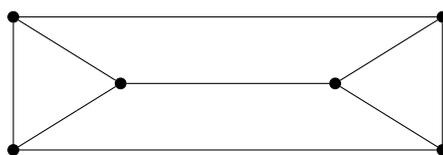


FIGURE 3.2: Constructions d'Erdős et Nešetřil.

La Conjecture 3.1.1 a été vérifiée en 1992 pour $\Delta \leq 3$, indépendamment par Andersen et Horák *et al.* [4, 59]. Faudree *et al.* ont également conjecturé [40] que tout graphe planaire subcubique G (*i.e.* de degré maximum au plus 3) est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$. Si cette conjecture est vraie, alors cette majoration est la meilleure possible car la coloration d'arêtes à distance 2 du prisme nécessite au moins 9 couleurs (*cf.* Figure 3.3). Lorsque $\Delta = 4$, Cranston [33] a prouvé que 22 couleurs étaient suffisantes. La borne inférieure issue de la construction d'Erdős et Nešetřil est de 20 couleurs.

FIGURE 3.3: Le prisme P tel que $\chi'_s(P) = 9$

Si on résume la situation, à l'aide d'un algorithme glouton on obtient $\chi'_s(G) \simeq 2\Delta^2$ et en s'appuyant sur la Conjecture d'Erdős et Nešetřil, nous avons : $\chi'_s(G) \simeq \frac{5}{4}\Delta^2$.

La meilleure amélioration de ce "facteur 2" est due à Molloy et Reed.

Théorème 3.1.2 (M. Molloy et B. Reed, 1997 [72])

Si G est un graphe de degré maximum Δ , alors $\chi'_s(G) \leq 1,998\Delta^2$ (pour Δ suffisamment grand).

Quant à Faudree *et al.* [40] ils se sont intéressés à la classe des graphes planaires et ont démontré que :

Théorème 3.1.3 (Faudree et al., 1990 [40])

Si G est un graphe planaire de degré maximum Δ , alors $\chi'_s(G) \leq 4\Delta + 4$. De plus, pour tout $\Delta \geq 2$, on peut construire un graphe G tel que $\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$ (cf. Figure 3.4).

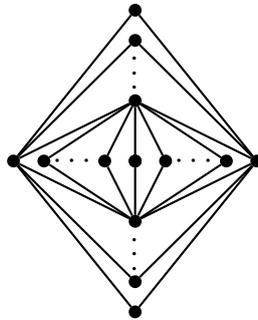


FIGURE 3.4: $\chi'_s(G) = 4\Delta - 4$

Faudree et al. [39] ont également conjecturé que les graphes bipartis sont tels que $\chi'_s(G) \leq \Delta^2$.

Nous avons étudié la famille des graphes planaires extérieurs et nous avons obtenu que :

Théorème 3.1.4

Tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta \geq 3$ est tel que $\chi'_s(G) \leq 3\Delta - 3$. De plus, pour tout $\Delta \geq 3$, il existe un graphe G tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$.

Nous nous sommes également intéressés à la question de la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques en déterminant des majorations de χ'_s en fonction du degré moyen maximum. Nous avons prouvé le résultat suivant :

Théorème 3.1.5

Soit G un graphe subcubique :

1. Si $\text{mad}(G) < \frac{15}{7}$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
2. Si $\text{mad}(G) < \frac{27}{11}$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.
3. Si $\text{mad}(G) < \frac{13}{5}$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
4. Si $\text{mad}(G) < \frac{36}{13}$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Rappelons que la maille d'un graphe G est la longueur d'un plus petit cycle contenu dans G . Étant donné que tout graphe planaire de maille au moins g vérifie $\text{mad}(G) < \frac{2g}{g-2}$, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.6

Soit G un graphe planaire subcubique de maille g :

1. Si $g \geq 30$, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.
2. Si $g \geq 11$, alors $\chi'_s(G) \leq 7$.

3. Si $g \geq 9$, alors $\chi'_s(G) \leq 8$.
4. Si $g \geq 8$, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Nous avons également étudié la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques sans cycles de longueurs données, et nous avons démontré :

Théorème 3.1.7

Soit G un graphe planaire subcubique sans cycles de longueurs 6 à 11, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Mahdian a prouvé que le problème de déterminer si pour toute maille fixée, un graphe biparti admet une coloration d'arêtes à distance 2 utilisant au plus k couleurs, avec $k \geq 4$, est un problème NP-complet [69]. Pour cela, il a utilisé une réduction depuis le problème de k -COLORATION propre d'un graphe qui est NP-complet pour $k \geq 3$ [46]. Erickson *et al.* ont prouvé que le problème reste un problème NP-complet dans le cas des graphes bipartis de degré maximum 3, de maille 6 et pour $k = 5$ [38]. On peut remarquer qu'aucun résultat ne concerne la famille des graphes planaires.

Nous présenterons différents résultats de NP-complétude pour la classe des graphes planaires subcubiques, ce qui permettra de légitimer les conditions suffisantes de 6-coloration forte d'arêtes que nous allons établir. Avant de présenter nos résultats, rappelons quelques notions importantes pour la suite.

Le problème de k -COLORATION FORTE d'arêtes est défini de la façon suivante :

INSTANCE : Un graphe G et un entier naturel non nul k .

QUESTION : Est-ce que G admet une coloration forte d'arêtes avec au plus k couleurs ?

Le problème de 3-COLORATION est défini de la manière suivante :

INSTANCE : Un graphe G .

QUESTION : Est-ce que G est coloriable (proprement) avec au plus trois couleurs ?

Le problème de 3-COLORATION est connu comme étant NP-complet même lorsqu'on se restreint à la classe des graphes planaires de degré maximum 4 [46].

Voici un aperçu de nos résultats :

Théorème 3.1.8

Le problème de 4-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et pour toute maille quelconque fixée.

Théorème 3.1.9

Le problème de 5-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille 8, et pour les graphes planaires subcubiques de maille 9.

Théorème 3.1.10

Le problème de 6-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille 4.

3.2 Complexité de la coloration forte d'arêtes pour les graphes planaires subcubiques

3.2.1 Complexité de la 4-COLORATION FORTE d'arêtes

Rappelons le résultat que nous démontrons dans cette partie.

Le problème de 4-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et pour toute maille quelconque fixée.

Démonstration. Le problème est dans NP puisqu'on peut vérifier en temps polynomial, pour une coloration d'arêtes donnée, s'il s'agit ou non d'une coloration forte d'arêtes. Nous prouvons le théorème par réduction depuis la 3-COLORATION des graphes planaires de degré maximum 4.

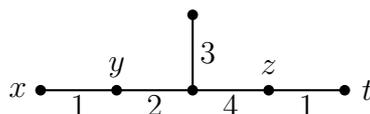


FIGURE 3.5: Couleur forcée

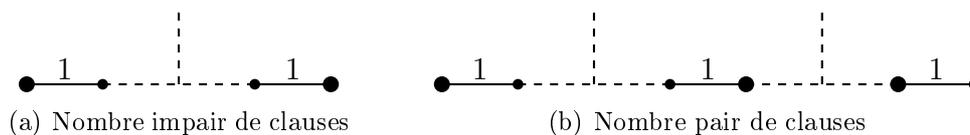


FIGURE 3.6: Transport d'une couleur

Nous pouvons tout d'abord constater, dans le cadre de la 4-coloration forte d'arêtes, que sur le graphe de la Figure 3.5 les arêtes xy, zt vont recevoir les mêmes couleurs. En dupliquant plusieurs copies de ce graphe comme indiqué sur les Figures 3.6(a), 3.6(b), nous pouvons augmenter la distance entre les arêtes qui vont utiliser la même couleur. De plus, en choisissant un nombre pair ou impair de copies du graphe de la Figure 3.5, nous pouvons forcer les deux sommets aux extrémités du graphe construit de façon à ce qu'ils fassent partie d'une même bipartition du graphe ou pas. Sur les Figures 3.6(a) et 3.6(b), les bipartitions sont représentées par des petits et des gros sommets.

Nous sommes maintenant prêts à construire le sous-gadget générique M (Figure 3.7) qui sera utilisé au cours de notre réduction. Nous pouvons également vérifier, en étudiant un à un tous les cas, et par simple permutation des couleurs

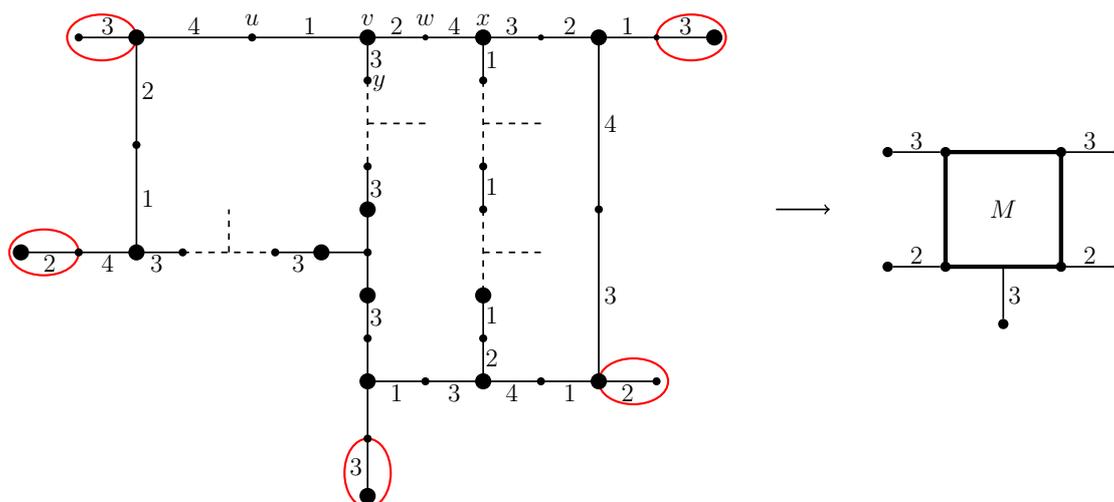


FIGURE 3.7: Sous-gadget M

que la 4-coloration forte d'arêtes de M , représentée sur la Figure 3.7, est unique. Par exemple, on peut s'en apercevoir en coloriant sur la Figure 3.7 uv avec 1, vw avec 2, wx avec 4 et vy avec 3. La couleur des arêtes restantes est alors forcée. De plus M est biparti (la bipartition est représentée sur la figure par des petits et des gros sommets) et a une maille arbitraire d'une taille aussi grande que nous souhaitons.

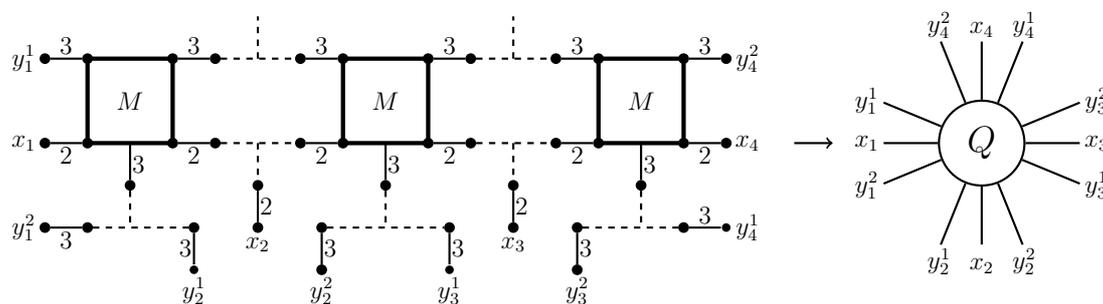


FIGURE 3.8: Gadget de sommet Q

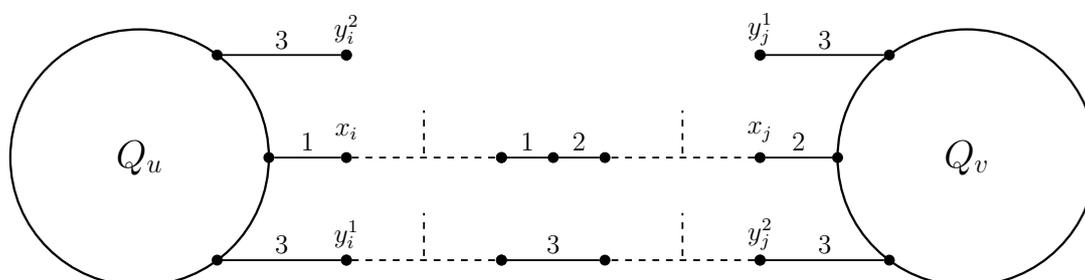


FIGURE 3.9: Connexion de gadgets de sommets dans G'

Considérons un graphe planaire G et de degré maximum 4, nous allons construire un graphe G' de la façon suivante. Chaque sommet v de G est remplacé par une

copie Q_v du graphe Q représenté sur la Figure 3.8 qui contient trois copies du sous-gadget M . Nous pouvons aussi remarquer que dans la mesure où M est biparti et de maille quelconque (fixée), alors Q est aussi biparti et de maille quelconque (fixée).

Pour toute arête uv de G , nous choisissons un indice i pour Q_u et j pour Q_v , puis nous joignons x_i de Q_u avec x_j de Q_v , nous relions aussi un des sommets pris parmi y_i^1, y_i^2 avec un des sommets pris parmi y_j^1, y_j^2 . Ces connexions sont établies avec un nombre aussi grand que l'on veut de clauses comme indiqué sur la Figure 3.9. On peut remarquer que les liaisons entre les sommets se font de telle sorte que le graphe obtenu est planaire. De plus, par construction le graphe obtenu G' est biparti et de maille arbitrairement grande.

Nous dirons que la *couleur de Q* est la couleur des arêtes incidentes aux sommets x_i de Q (la couleur 2 sur la Figure 3.8). De même, la *couleur interdite de Q* est la couleur des arêtes incidentes à y_i^1 et y_i^2 (la couleur 3 sur la Figure 3.8).

La Figure 3.9 montre que pour toute arête $uv \in G$, Q_u et Q_v sont porteurs de couleurs différentes et ont la même couleur interdite. De plus, comme G est connexe alors toutes les copies de Q ont la même couleur interdite, par exemple la couleur 3, de ce fait, aucune copie de Q n'est coloriée 3.

Si G est 3-coloriable, alors pour tout sommet $v \in G$, nous pouvons affecter la couleur de v à Q_v puis étendre la coloration de G' aux arêtes à distance au plus 2, en utilisant au plus 4 couleurs. Réciproquement, pour une 4-coloration forte d'arêtes donnée de G' , nous obtenons une 3-coloration de G en affectant la couleur de Q_v au sommet v . D'où G' admet une 4-coloration forte d'arêtes si et seulement si G est 3-coloriable, ce qui termine la preuve. □

3.2.2 Complexité de la 5-COLORATION FORTE d'arêtes

Dans cette partie nous démontrons le résultat suivant :

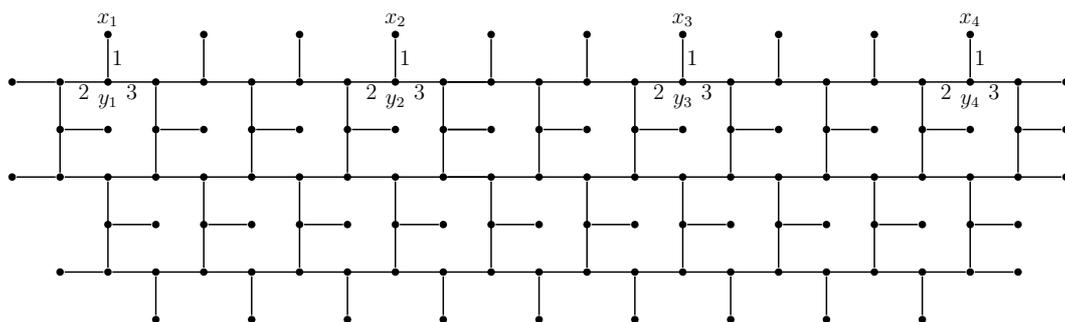
Le problème de 5-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille 8, et pour les graphes planaires subcubiques de maille 9.

Démonstration. Nous traitons la preuve pour la maille 8, dans la mesure où les mêmes arguments peuvent être utilisés pour la maille 9.

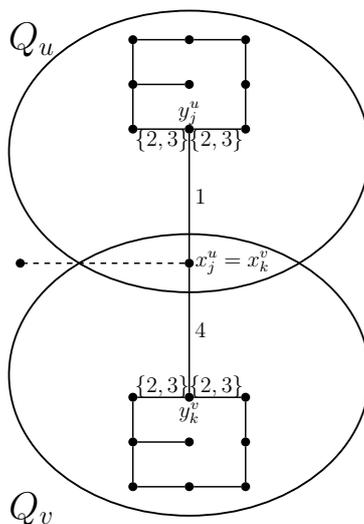
Le problème est dans NP puisqu'on peut vérifier en temps polynomial, pour une coloration d'arêtes donnée, s'il s'agit ou non d'une coloration forte d'arêtes. Comme pour le Théorème 3.1.8, nous prouvons le théorème par réduction depuis la 3-COLORATION des graphes planaires de degré maximum 4.

Considérons un graphe G de degré maximum 4, nous construisons le graphe G' de la façon suivante. Chaque sommet v de G est remplacé par une copie $Q_v^{x_1, x_2, x_3, x_4}$ du graphe Q représenté sur la Figure 3.10(a).

Pour toute arête uv de G , nous identifions un sommet x_i de $Q_v^{x_1, x_2, x_3, x_4}$ avec un sommet x_j de $Q_u^{x_1, x_2, x_3, x_4}$ de telle sorte que le graphe G' obtenue soit planaire. De



(a) Gadget de sommet



(b) Gadget d'arête

FIGURE 3.10: Gadgets de sommet et d'arête pour une maille 8 du Théorème 3.1.9

plus, lors de chaque identification, nous ajoutons un sommet de degré 1 adjacent au sommet identifié (voir Figure 3.10(b), on identifie x_j^u avec x_k^v).

On remarque d'après les Figures 3.10(a) et 3.10(b) que G' est biparti. De plus, G' n'a pas de cycle de taille strictement plus petite que 8, d'où G' est de maille 8.

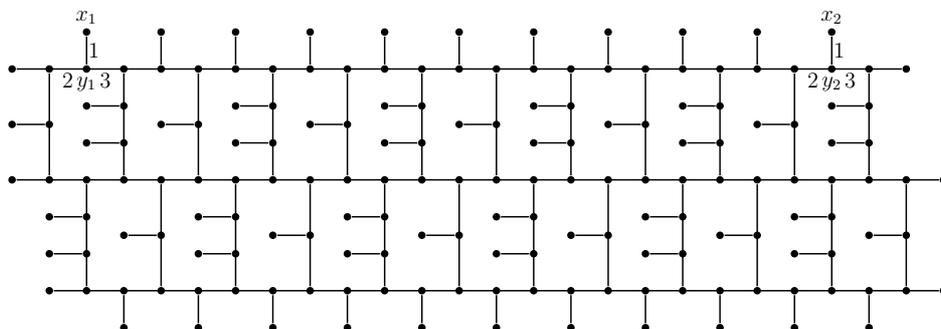


FIGURE 3.11: Gadget de sommet pour une maille 9 du Théorème 3.1.9

On peut montrer par une étude de cas (omise dans ce mémoire) que la coloration forte des arêtes de Q proposée par la Figure 3.10(a) est unique. Nous appellerons la *couleur de Q* la couleur des arêtes $x_i y_i$ dans Q (couleur 1 sur la Figure 3.10(a)). De même, les *couleurs interdites de Q* sont les couleurs des arêtes incidentes à y_j dans Q , différentes de $x_i y_i$ (couleurs 2 et 3 sur la Figure 3.10(a)). Sur la Figure 3.10(b) on remarque que toute arête $uv \in G$, Q_u et Q_v reçoivent des couleurs distinctes et ont les mêmes couleurs interdites. De plus, le fait que G soit connexe nous assure que toutes les copies de Q ont les mêmes couleurs interdites, 2 et 3, et donc aucune copie de Q n'est coloriée avec 2 ou 3.

Si G est 3-coloriable, alors pour tout sommet $v \in G$, nous pouvons affecter la couleur de v à Q_v puis étendre la coloration à G' en utilisant au plus 5 couleurs. Réciproquement, pour une 5-coloration forte d'arêtes donnée de G' , nous obtenons une 3-coloration de G en affectant la couleur de Q_v au sommet v . D'où G' admet une 5-coloration forte d'arêtes si et seulement si G est 3-coloriable, ce qui termine la preuve.

Dans le cas de la maille 9, nous utilisons le gadget de sommet représenté sur la Figure 3.11, quant au gadget d'arête il est identique à celui utilisé pour la maille 8. La preuve est en tout identique à celle rédigée pour la maille 8. □

3.2.3 Complexité de la 6-COLORATION FORTE d'arêtes

Dans cette section nous démontrons le résultat suivant :

Le problème de 6-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille 4.

Démonstration. Le problème est dans NP puisqu'on peut vérifier en temps polynomial, pour une coloration d'arêtes donnée, s'il s'agit ou non d'une coloration forte d'arêtes. Nous prouvons le théorème par réduction depuis la 3-COLORATION des graphes planaires de degré maximum 4. Pour un graphe G de l'instance de 3-COLORATION des graphes planaires de degré maximum 4 nous proposerons la construction d'un graphe G' (planaire biparti de degré maximum 4 et de maille 4) tel que G est 3-coloriable si et seulement si G' admet une 6-coloration forte d'arêtes.

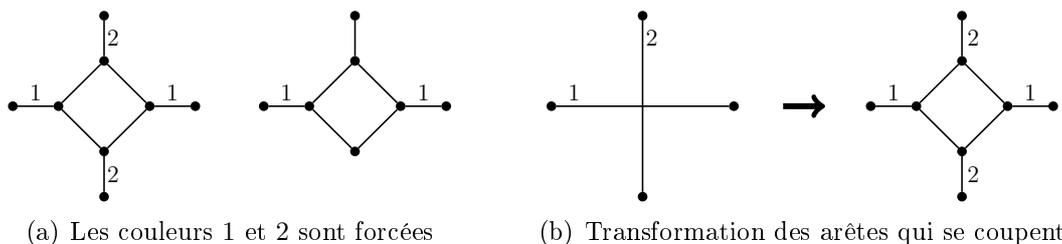


FIGURE 3.12: Motif principal

Commençons par une observation :

Observation 3.2.1

Pour toute 6-coloration forte d'arêtes des graphes de la Figure 3.12(a), les arêtes à distance 3 reçoivent les mêmes couleurs (les couleurs 1 et 2 sont forcées).

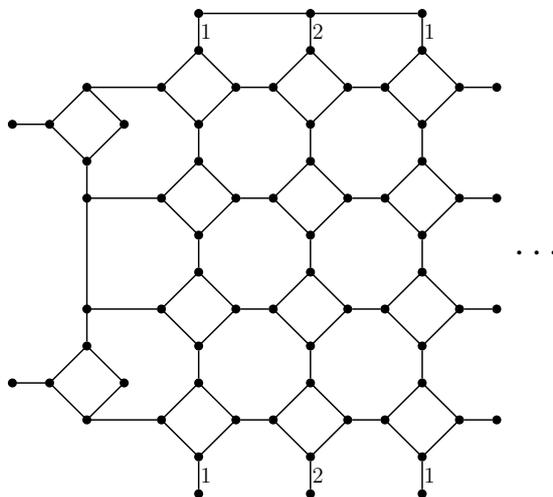


FIGURE 3.13: Graphe P

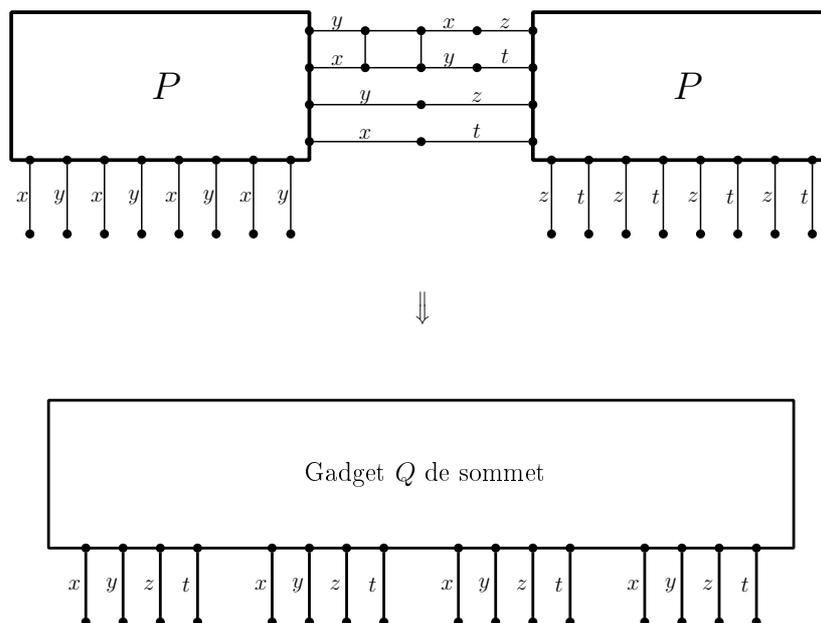


FIGURE 3.14: Gadget Q de sommet utilisé pour le Théorème 3.1.10

L'Observation 3.2.1, associée au graphe P de la Figure 3.13, montre que pour toute 6-coloration d'arêtes et à permutations près, les couleurs 1 et 2 sont forcées. Nous pouvons remarquer également que P est biparti.

Construisons maintenant le graphe représenté sur la Figure 3.14 qui sera notre gadget de sommet. Prenons deux copies du graphe P avec six paires d'arêtes pendantes (coloriées par $\{x, y\}$ et $\{z, t\}$ respectivement) puis nous connectons les arêtes

de telle sorte que les couleurs x, y, z, t sont toutes différentes, ainsi le graphe obtenu a huit paires d'arêtes pendantes. On peut remarquer que le graphe obtenu Q est planaire, biparti, subcubique et tel que $\chi'_s(Q) = 6$.

Construisons maintenant le gadget de sommet *i.e.* le graphe G_v qui va remplacer un sommet v de G dans G' . On prend une copie du graphe Q et nous choisissons un plongement du graphe de façon à obtenir quatre quadruplets d'arêtes coloriées x, y, z et t dans cet ordre. On peut remarquer que chaque paire d'arêtes qui se croisent sont remplacées par des cycles de taille 4 comme l'indique la Figure 3.12(b) et ce graphe transformé est planaire. Considérons quatre arêtes pendantes (une pour chaque quadruplet) du graphe Q obtenu ayant la même couleur, par exemple la couleur x . On nomme x_k^v ($1 \leq k \leq 4$) chacun des sommets de degré 1 incidents à ces arêtes pendantes.

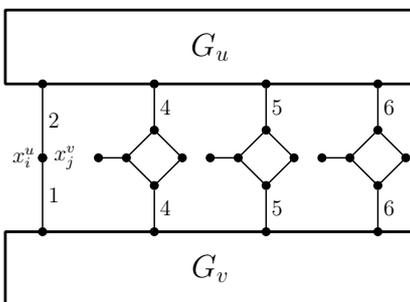
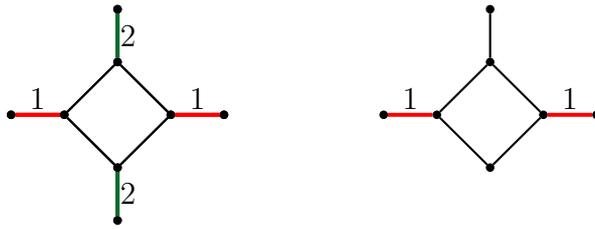


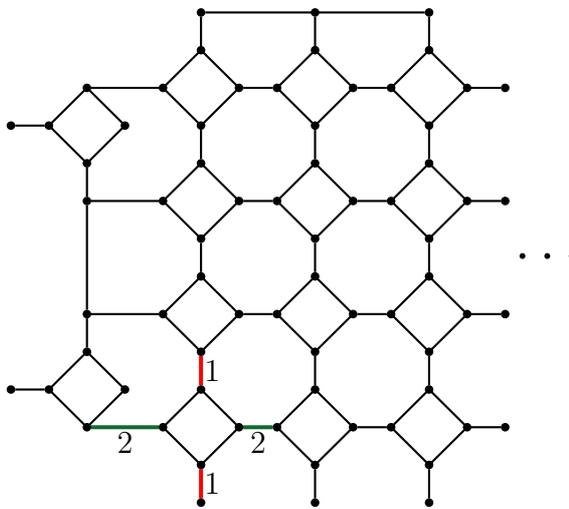
FIGURE 3.15: Gadget d'arête pour le Théorème 3.1.10

Pour chaque arête uv de G , on identifie dans G' les sommets x_i^u et x_j^v , puis nous relierons les trois autres paires d'arêtes comme indiqué sur la Figure 3.15. Remarquons que si G' est connexe, alors pour toute 6-coloration forte d'arêtes de G' les couleurs 4, 5 et 6 utilisées sur la Figure 3.15 ne sont plus utilisées pour colorier chacune des arêtes incidentes à un sommet x_i^v .

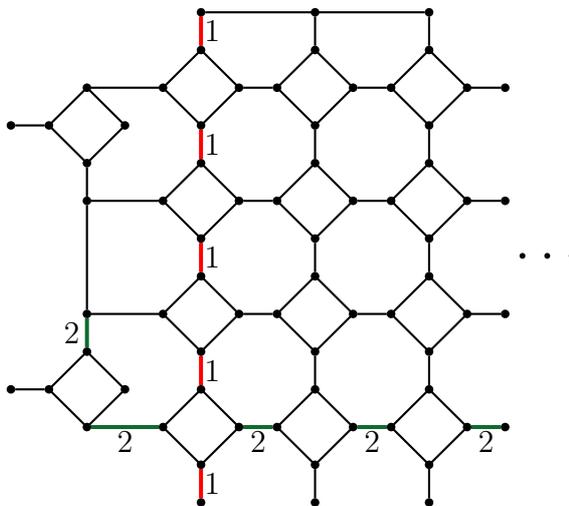
Prouvons maintenant que G est 3-coloriable si et seulement si G' admet une 6-coloration forte d'arêtes. Comme nous l'avons démontré précédemment, par exemple pour le Théorème 3.1.8, les couleurs interdites de G' dans le cadre d'une 6-coloration d'arêtes sont les couleurs qui ne sont pas incidentes à des sommets x_i^v . D'où, dans G' nous avons trois couleurs interdites. Si G est 3-coloriable alors nous affectons la couleur d'un sommet v de G à une arête pendante de G_v incidente à x_i^v dans G' et nous étendons la coloration à une 6-coloration forte d'arêtes de G' . Réciproquement, pour une 6-coloration forte d'arêtes de G' , puisque nous avons trois couleurs interdites pour G' , nous pouvons utiliser la couleur de l'arête incidente à x_i^v dans le graphe G_v pour colorier v dans G . Vous trouverez le déroulement de la preuve du Théorème 3.1.10 sur les différentes figures qui suivent. \square



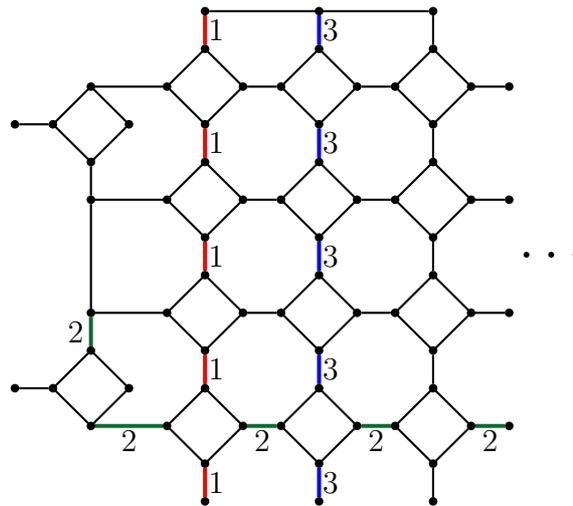
Observation : propagation des couleurs rouge et bleue.



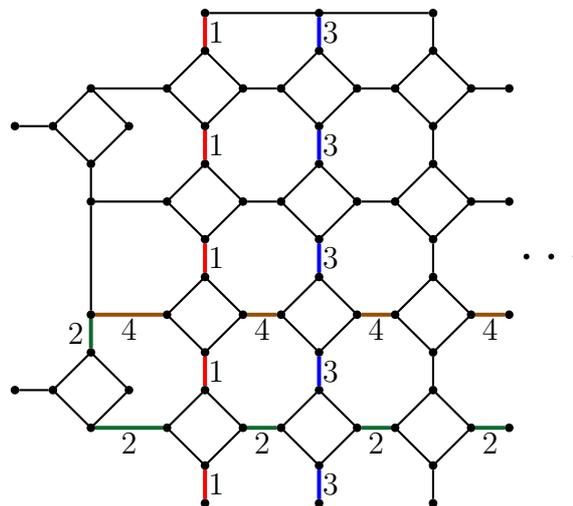
Étape 1 : on colorie les premières arêtes.



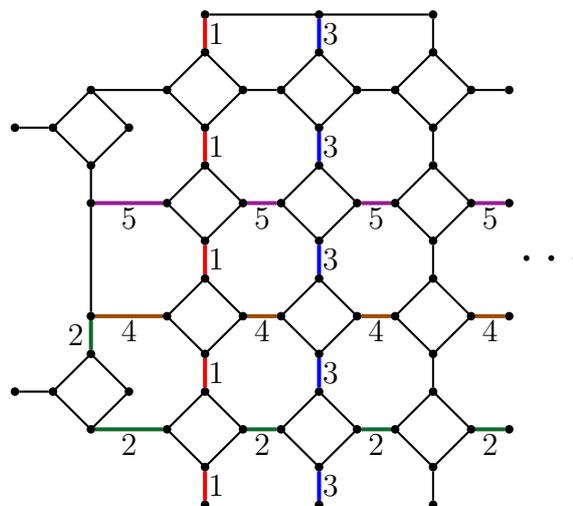
Étape 2 : les couleurs rouge et verte se propagent.



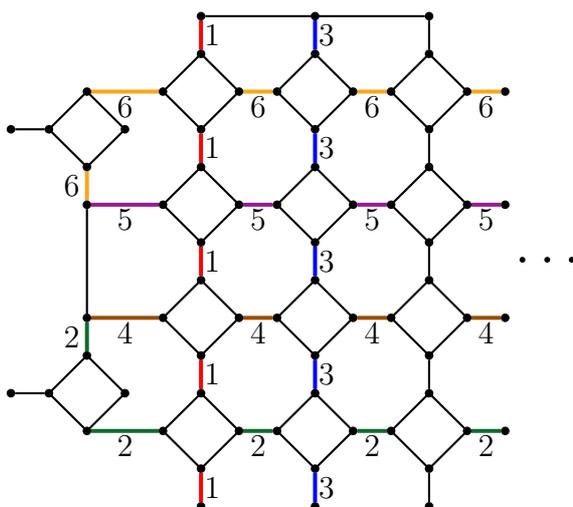
Étape 3 : une nouvelle couleur (bleue) apparaît et se propage.



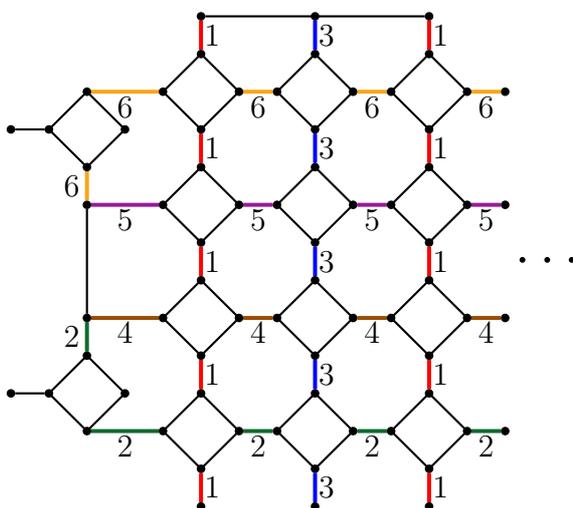
Étape 4 : une nouvelle couleur (marron) apparaît et se propage.



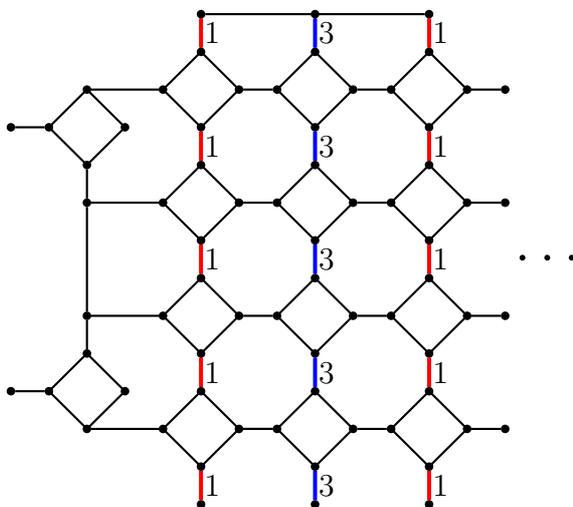
Étape 5 : une nouvelle couleur (violet) apparaît et se propage.



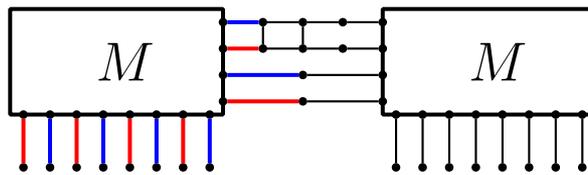
Étape 6 : une nouvelle couleur (orange) apparaît et se propage.



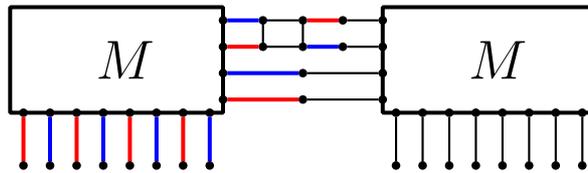
Étape 7 : la couleur rouge est forcée.



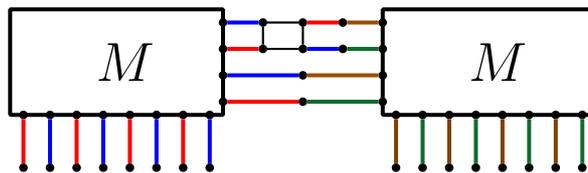
Graphe P.



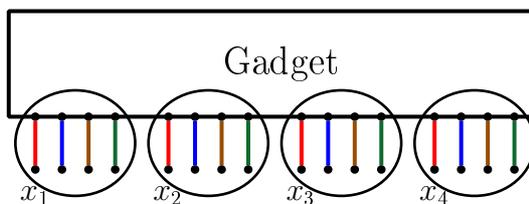
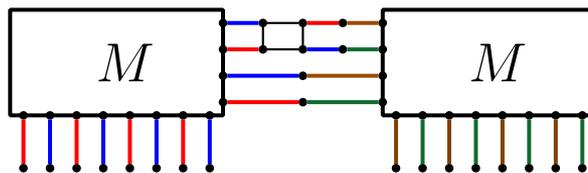
Étape 8 : construction du gadget de sommet, on prend deux copies de P.



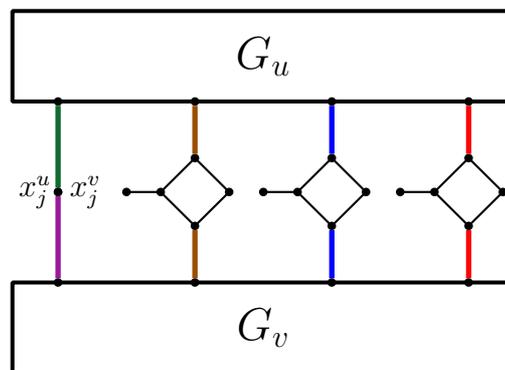
Étape 9 : les couleurs rouge et bleue se propagent.



Étape 10 : les couleurs verte et marron apparaissent et se propagent.



Gadget de sommet.



Gadget d'arête.

3.3 Graphes subcubiques de degré moyen maximum borné

Notations Un *2-sommet fort* est un sommet de degré 2 adjacent à deux 3-sommets, sinon il s'agit d'un *2-sommet léger*. Un 3_k -sommet est un 3-sommet adjacent à exactement k 2-sommets. Deux arêtes sont à distance 1 si elles ont un sommet en commun et elles sont à distance 2 si elles ne sont pas à distance 1 et si elles ont deux extrémités adjacentes. Nous appellerons $N_2(uv)$ l'ensemble des arêtes à distance au plus 2 de l'arête uv et nous noterons $SC(N_2(uv))$ l'ensemble des couleurs utilisées par les arêtes de $N_2(uv)$. Nous appellerons $c(E')$, avec $E' \subseteq E(G)$, l'ensemble des couleurs utilisées par les arêtes de E' avec la coloration c .

Observons que tout arbre subcubique G vérifie $\chi'_s(G) \leq 5$ et que la majoration est atteinte par exemple si deux sommets de degré 3 sont adjacents. Le graphe G représenté sur la Figure 3.16 ($\text{mad}(G) = 2$, $\chi'_s(G) = 6$) montre que l'on ne peut pas espérer un résultat du type : tout graphe subcubique G avec $\text{mad}(G) < k$ où $k > 2$ vérifie $\chi'_s(G) \leq 5$.

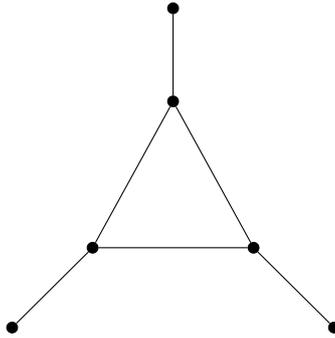


FIGURE 3.16: Un graphe G tel que $\text{mad}(G) = 2$ et $\chi'_s(G) = 6$

Nous utilisons une procédure de déchargement pour prouver le Théorème 3.1.5. Pour chaque cas, nous considérons un contre-exemple H minimisant $\sigma(H) = |E(H)| + |V(H)|$ tel que $\text{mad}(H) < m$ (m valant $\frac{15}{7}$ pour le premier item, $\frac{27}{11}$ pour le deuxième item, $\frac{13}{5}$ pour le troisième et $\frac{36}{13}$ pour le dernier). Puis nous exhibons un ensemble \mathcal{S} de *configurations réductibles* que H ne peut pas contenir compte tenu de sa minimalité. Enfin nous décrivons la procédure de déchargement en définissant tout d'abord une fonction poids $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d(x) - m$. On remarque alors que compte tenu des hypothèses faites, la somme totale des poids est strictement négative. Il nous reste à définir des règles de déchargement qui permettent de modifier les poids des sommets tout en conservant la somme totale de ces mêmes poids. Cela crée une nouvelle fonction poids ω^* sur chaque sommet. En utilisant le fait que H est tel que $\text{mad}(H) < m$ et que H ne contient aucune configuration de \mathcal{S} , nous montrons qu'à la fin de la procédure de déchargement, les poids de tous les sommets de H sont positifs. Ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < 0$$

d'où, aucun contre-exemple au Théorème 3.1.5 ne peut exister.

3.3.1 Preuve du Théorème 3.1.5.1

Soit H un contre-exemple au Théorème 3.1.5.1 minimisant $|E(H)| + |V(H)|$: H n'admet pas de coloration forte d'arêtes avec 6 couleurs, $\text{mad}(H) < \frac{15}{7}$ et pour toute arête e , $\chi'_s(H - e) \leq 6$. On peut supposer que H est connexe ; sinon, par minimalité de H , on peut colorier indépendamment chacune des composantes connexes. On appellera *3-sommet léger* un 3-sommet adjacent à un 1-sommet, sinon il s'agit d'un *3-sommet fort*.

Propriétés structurelles de H

Lemme 3.3.1

Le contre-exemple H vérifie les propriétés suivantes :

1. H ne contient pas de 1-sommet adjacent à un 2-sommet.
2. H ne contient pas de 3-sommet adjacent à un 1-sommet et à un 2-sommet.
3. H ne contient pas de 3-sommet adjacent à deux 1-sommets.
4. H ne contient pas de chaîne uvw où u , v et w sont des 2-sommets.
5. H ne contient pas de chaîne uvw où u , v et w sont des 3-sommets légers.

Démonstration.

1. Supposons que H contient un 1-sommet u adjacent à un 2-sommet v (cf. Figure 3.17(a)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$, qui par minimalité de H admet une 6-coloration forte d'arêtes. En comptant le nombre de couleurs disponibles pour étendre la coloration de H' à H , on remarque que nous avons au moins trois couleurs libres pour colorier uv . En effet, à distance 1 (de uv) on ne peut pas utiliser la couleur utilisée par vw , et à distance 2 (de uv) on ne peut pas utiliser les couleurs utilisées par ww_1 et ww_2 . Il reste alors 3 couleurs pour étendre la coloration c à H , d'où la contradiction.
2. Supposons que H contient un 3-sommet u adjacent à un 1-sommet v et à un 2-sommet w (cf. Figure 3.17(b)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$, qui par minimalité de H admet une 6-coloration forte d'arêtes. Afin d'étendre la coloration à H , il suffit de colorier uv avec une couleur différente de celles de xw , wu , uy et yy_1 , yy_2 (si ces arêtes existent). Il nous reste donc au moins un choix pour colorier uv . Nous pouvons donc étendre la coloration c à H , d'où la contradiction.
3. Supposons que H contient un 3-sommet u adjacent à deux 1-sommets v et w (cf. Figure 3.17(c)). Considérons $H' = H \setminus \{uv\}$, qui par minimalité de H admet une 6-coloration forte d'arêtes. Afin d'étendre la coloration à H , il suffit de colorier uv avec une couleur différente de celles de uw , ux , xx_1 et xx_2 . Il nous reste alors au moins deux choix et nous pouvons donc étendre la coloration c à H , d'où la contradiction.
4. Supposons que H contient une chaîne uvw où u , v et w sont des 2-sommets (cf. Figure 3.17(d)). Considérons $H' = H \setminus \{uv, vw\}$, qui par minimalité de

H admet une 6-coloration forte d'arêtes. En comptant le nombre de couleurs disponibles pour étendre la coloration de H' à H , on remarque que nous avons au moins deux couleurs libres pour colorier uv puis au moins une couleur libre pour colorier vw (et ce après avoir colorié uv).

5. Supposons que H contient une chaîne $xuvwy$ où u , v et w sont trois 3-sommets légers. Appelons u_1 (resp. v_1 , w_1) le voisin de u (resp. v , w) de degré 1. Supposons que $N(x) = \{u, x_1, x_2\}$, $N(u) = \{x, u_1, v\}$, $N(v) = \{u, v_1, w\}$, $N(w) = \{v, w_1, y\}$, $N(y) = \{w, y_1, y_2\}$ (cf. Figure 3.17(e)). Considérons $H' = H \setminus \{uu_1, uv, vv_1, vw, ww_1\}$. Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de H' , qui utilise six couleurs. Nous allons étendre la coloration à H . Supposons tout d'abord que $c(ux) = c(wy)$. Nous colorions uv , vw , uu_1 , ww_1 et vv_1 dans cet ordre, ce qui est possible par simple comptage pour chaque arêtes du nombre de couleurs libres pour étendre la coloration. Supposons maintenant que $c(ux) \neq c(wy)$. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $c(ux) = 5$ et $c(wy) = 6$. Dans un premier temps, nous tentons de colorier l'arête uu_1 avec la couleur 6. Si cela est possible, alors nous affectons la couleur 6 à uu_1 puis nous colorions uv , vw , ww_1 et vv_1 dans cet ordre, ce qui est possible par simple comptage du nombre de couleurs libres. Si nous ne pouvons pas colorier uu_1 avec la couleur 6, nous sommes assurés de la présence de la couleur 6 dans le voisinage de x . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $c(xx_1) = 6$. En appliquant le même type de raisonnement à ww_1 , nous pouvons supposer sans perte de généralité que $c(yy_1) = 5$. Nous affectons alors la même couleur α à uu_1 et ww_1 , avec $\alpha \in \llbracket 1; 6 \rrbracket \setminus \{c(xx_2), 5, 6, c(yy_2)\}$. Enfin pour terminer nous colorions uv , vw et vv_1 dans cet ordre, ce qui est possible par simple comptage du nombre de couleurs libres. Dans chaque cas, nous avons pu étendre c à H , ce qui est une contradiction. □

Procédure de déchargement sur H

On pose $\omega(x) = d(x) - \frac{15}{7}$ pour tout $x \in V(H)$.

Nous réalisons notre procédure de déchargement en deux étapes :

Étape 1. Chaque 3-sommet fort donne $\frac{2}{7}$ à chaque 3-sommet adjacent et $\frac{1}{7}$ à chaque 2-sommet adjacent.

Lorsque l'Étape 1 est terminée, une nouvelle fonction poids ω' est créée. Nous continuons alors avec l'Étape 2 :

Étape 2. Chaque 3-sommet léger donne $\frac{8}{7}$ à son unique 1-sommet adjacent.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommet. Remarquons que $k \geq 1$.

Cas $k = 1$. Observons que $\omega(v) = -\frac{8}{7}$. Par le Lemme 3.3.1.1, v est adjacent à un 3-sommet u qui est un 3-sommet léger par définition. D'où, v reçoit $\frac{8}{7}$ de u pendant l'Étape 2. On en déduit alors que $\omega^*(v) = -\frac{8}{7} + \frac{8}{7} = 0$.

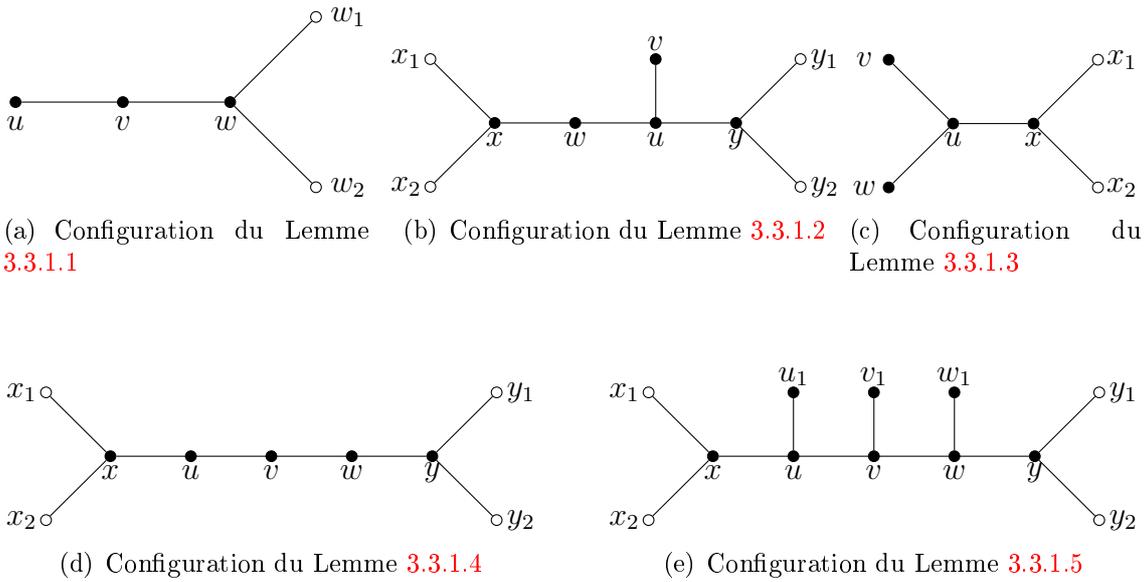


FIGURE 3.17: Configurations réductibles.

Cas $k = 2$. Observons que $\omega(v) = -\frac{1}{7}$. Par les Lemmes 3.3.1.1, 3.3.1.2 et 3.3.1.4, v est adjacent à au moins un 3-sommet fort. D'où, par l'Étape 1, $\omega^*(v) \geq -\frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 0$.

Cas $k = 3$. Observons que $\omega(v) = \frac{6}{7}$. Supposons que v est un 3-sommet fort. Notons $n_b(v)$ le nombre de 3-sommetts dans le voisinage de v . On peut remarquer que $0 \leq n_b(v) \leq 3$. D'où, par l'Étape 1, $\omega^*(v) \geq \frac{6}{7} - n_b(v) \times \frac{2}{7} - (3 - n_b(v)) \times \frac{1}{7} \geq 0$, pour tout $0 \leq n_b(v) \leq 3$. Supposons alors que v est un 3-sommet léger. Par le Lemme 3.3.1.3, v est adjacent à un unique 1-sommet et par le Lemme 3.3.1.2, v n'est pas adjacent à un 2-sommet. Enfin, par le Lemme 3.3.1.5, v est adjacent à au moins un 3-sommet fort. D'où, par les Étapes 1 et 2, $\omega^*(v) \geq \frac{6}{7} + \frac{2}{7} - \frac{8}{7} = 0$.

Ce qui termine la preuve. Un exemple de graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ qui n'admet pas une coloration forte d'arêtes avec 6 couleurs est donné sur la Figure 3.18.

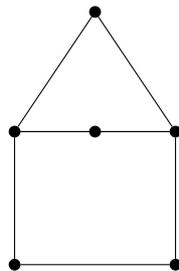


FIGURE 3.18: Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{7}{3}$ et $\chi'_s(G) > 6$

D'après le Corollaire 3.1.6, tout graphe planaire de maille au moins 30 admet une 6-coloration forte d'arêtes. Le lemme suivant améliore ce résultat :

Lemme 3.3.2

Si G est un graphe planaire subcubique de maille au moins 16, alors $\chi'_s(G) \leq 6$.

Démonstration. Notre preuve est basée sur le fait que tout graphe planaire de maille au moins $5d + 1$ et de degré minimum au moins 2, contient une chaîne constituée de d 2-sommets consécutifs.

Supposons que H est un graphe planaire subcubique de maille 16 qui n'admet pas une 6-coloration forte d'arêtes et qui possède un nombre minimum d'arêtes. Considérons H' le graphe obtenu en enlevant tous les 1-sommets de H . Par les Lemmes 3.3.1.1 et 3.3.1.3, H' est de degré minimum 2. Puisque H' est planaire et de maille 16, alors il contient une chaîne d'au moins trois 2-sommets consécutifs. Soit uvw une telle chaîne. Par les Lemmes 3.3.1.2 et 3.3.1.5, aucun des sommets u, v, w est un 3-sommet léger dans H . Par le Lemme 3.3.1.4, dans H , u, v, w ne sont pas tous des 2-sommets. Dans tous les cas, nous obtenons une contradiction. \square

3.3.2 Preuve du Théorème 3.1.5.2

Soit H un contre-exemple au Théorème 3.1.5.2 minimisant $|E(H)| + |V(H)|$: H n'admet pas une coloration forte d'arêtes avec 7 couleurs, $\text{mad}(H) < \frac{27}{11}$ et pour toute arête e , $\chi'_s(H - e) \leq 7$. On peut supposer que H est connexe ; sinon, par minimalité de H , on peut colorier indépendamment chacune des composantes connexes.

Propriétés structurelles de H

Lemme 3.3.3

Le contre-exemple H vérifie les propriétés suivantes :

1. H ne contient pas de ≤ 1 -sommet.
2. H ne contient pas de chaîne uvw où u, v et w sont des 2-sommets.
3. H ne contient pas de 3-sommet adjacent à deux 2-sommets dont l'un est un 2-sommet léger.
4. H ne contient pas deux 3-sommets adjacents à un même 2-sommet.

Démonstration.

- 1-2. Trivial (cf. Figures 3.19(a) et 3.19(b)).
3. Supposons que H contient un 3_2 -sommet (ou un 3_3 -sommet) u adjacent à un 2-sommet léger v . Soit w le 2-sommet léger adjacent à v (cf. Figure 3.19(c)). Considérons $H' = H \setminus \{uv, vw\}$, qui par minimalité de H admet une 7-coloration forte d'arêtes. Commençons par colorier l'arête uv avec une couleur différente de celles de $ux, xx_1, xx_2, uu_1, u_1u_2$ et wy . Nous pouvons alors colorier uv puisque il nous reste au moins une couleur disponible. Nous colorions maintenant vw avec une couleur différente de celles de wy, yy_1, yy_2, uv, uu_1 et ux . Ce qui est possible puisqu'il reste au moins une couleur non utilisée. On peut donc étendre la coloration de H' à H , ce qui fournit une contradiction.

4. Supposons que H contient deux 3_3 -sommets u et w adjacents à un même 2-sommet v . $N(u) = \{u_1, u_2, v\}$, $N(w) = \{w_1, w_2, v\}$, $N(u_1) = \{u, x\}$, $N(u_2) = \{u, y\}$, $N(x) = \{u_1, x_1, x_2\}$, $N(y) = \{u_2, y_1, y_2\}$, $N(w_1) = \{w, t\}$, $N(w_2) = \{w, z\}$, $N(t) = \{w_1, t_1, t_2\}$, $N(z) = \{w_2, z_1, z_2\}$ (cf. Figure 3.19(d), ceci est une représentation mais ce n'est pas la seule). Considérons $H' = H \setminus \{uv, vw\}$. Puisque H est un contre-exemple d'ordre minimum, $\chi'_s(H') \leq 7$ et il existe une coloration forte d'arêtes de H' , c utilisant au plus 7 couleurs. Nous allons étendre la coloration à H . Commençons par colorier vw . Observons que $|\llbracket 1; 7 \rrbracket \setminus SC(N_2(vw))| \geq 1$, alors nous choisissons une couleur libre et nous colorions vw . Ensuite, si on ne peut pas colorier uv , cela signifie que $|\llbracket 1; 7 \rrbracket \setminus SC(N_2(uv))| = 0$ et sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $c(vw) = 1$, $c(w_1) = 2$, $c(w_2) = 3$, $c(u_1) = 4$, $c(u_2) = 5$, $c(x_1) = 6$, $c(x_2) = 7$. Dans ce cas, nous tentons de recolorier vw avec une couleur différente de 1. Si c'est possible alors il ne reste plus qu'à colorier uv avec 1. Si on ne peut pas, alors sans perte de généralité $c(w_1) = 6$, $c(w_2) = 7$, alors on tente de recolorier w_1 avec une couleur différente de 4 et 5. Si c'est possible alors il ne reste plus qu'à colorier uv avec 2. Si on ne peut pas, alors en utilisant un argument similaire on en déduit que $c(t_1) = 5$, $c(t_2) = 4$, et nous essayons alors de colorier w_2 . Nous continuons à colorier de la même manière les arêtes restantes non coloriées dans l'ordre suivant : w_2 , u_1 , u_2 . Si au cours d'une de ces étapes, la recoloration est possible, alors nous aurons une couleur libre pour colorier uv . Si cela n'est pas possible, alors à la fin de la procédure nous obtenons sans perte de généralité, les couleurs suivantes : $c(z_1) = 4$, $c(z_2) = 5$, $c(x_1) = 2$, $c(x_2) = 3$, $c(y_1) = 3$, $c(y_2) = 2$. Nous pouvons alors recolorier certaines arêtes : $c(u_2) = c(w_1) = 1$, $c(vw) = 5$. On peut alors colorier uv avec la couleur 2. On a donc réussi à étendre c à H , ce qui est une contradiction.

□

Procédure de déchargement sur H

Posons $\omega(x) = d(x) - \frac{27}{11}$ pour tout $x \in V(H)$.

On définit les règles de déchargement de la façon suivante :

- (R1) Chaque 3_3 -sommet donne $\frac{2}{11}$ à chaque 2-sommet fort adjacent.
- (R2) Chaque 3_1 -sommet et chaque 3_2 -sommet donne $\frac{3}{11}$ à chaque 2-sommet fort adjacent.
- (R3) Chaque 3-sommet donne $\frac{5}{11}$ à son 2-sommet léger adjacent.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommet. Par le Lemme 3.3.3.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$. Observons que $\omega(v) = -\frac{5}{11}$. Supposons que v est un 2-sommet fort. Par le Lemme 3.3.3.4, v est adjacent à au plus un 3_3 -sommet. D'où, par (R1) et (R2), $\omega^*(v) \geq -\frac{5}{11} + 1 \times \frac{2}{11} + 1 \times \frac{3}{11} = 0$. Supposons maintenant que v est léger. Par le Lemme 3.3.3.2, v est adjacent à un 3-sommet u . D'où, par (R3), $\omega^*(v) = -\frac{5}{11} + 1 \times \frac{5}{11} = 0$.

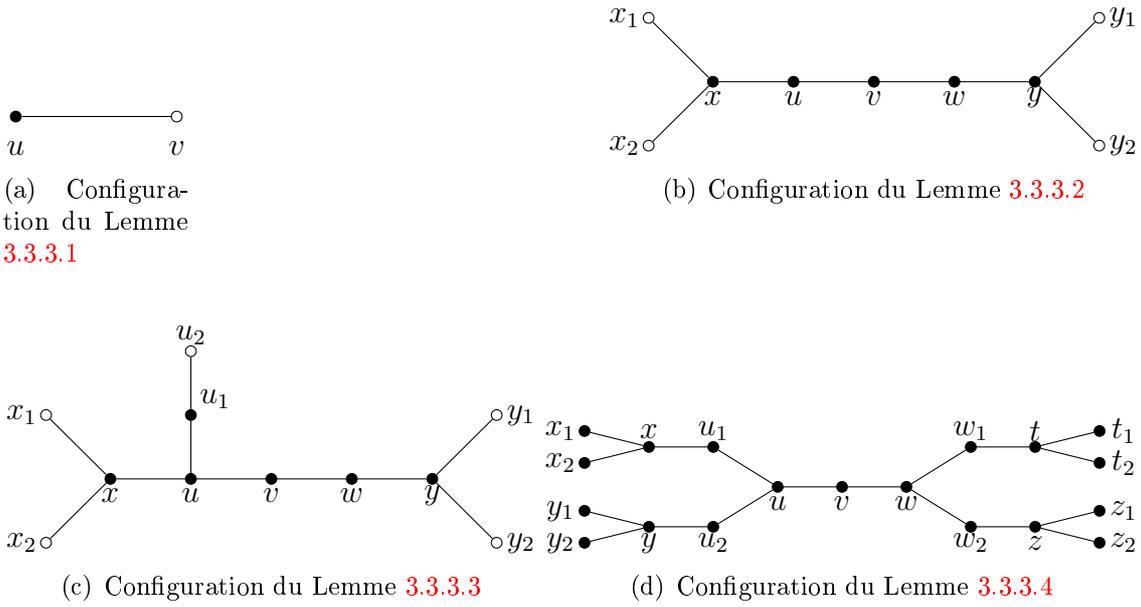


FIGURE 3.19: Configurations réductibles.

Cas $k = 3$. Observons que $\omega(v) = \frac{6}{11}$. Par les Lemmes 3.3.3.3 et 3.3.3.4, nous aboutissons aux différents cas suivants pour v :

- v est adjacent à trois 2-sommets forts et par (R1), $\omega^*(v) = \frac{6}{11} - 3 \times \frac{2}{11} = 0$.
- v est adjacent à au plus deux 2-sommets forts. D'où, par (R2), $\omega^*(v) \geq \frac{6}{11} - 2 \times \frac{3}{11} = 0$.
- v est adjacent à au plus un 2-sommet léger et par (R3), $\omega^*(v) \geq \frac{6}{11} - 1 \times \frac{5}{11} \geq 0$.

Ce qui termine la preuve. Un exemple de graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ qui n'admet pas une coloration forte d'arêtes avec 7 couleurs est donné sur la Figure 3.20.

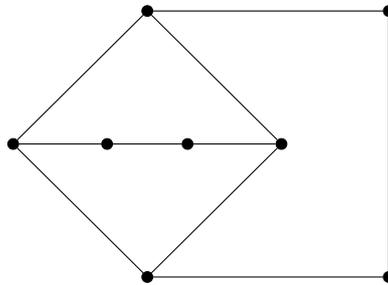


FIGURE 3.20: Un graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{5}{2}$ et $\chi'_s(G) > 7$

3.3.3 Preuve du Théorème 3.1.5.3

Soit H un contre-exemple au Théorème 3.1.5.3 minimisant $|E(H)| + |V(H)|$: H n'admet pas une coloration forte d'arêtes avec 8 couleurs, $\text{mad}(H) < \frac{13}{5}$ et pour toute arête e , $\chi'_s(H - e) \leq 8$. On peut supposer que H est connexe ; sinon, par minimalité de H , on peut colorier indépendamment chacune des composantes connexes.

Propriétés structurelles de H

Lemme 3.3.4

Le contre-exemple H vérifie les propriétés suivantes :

1. H ne contient pas de ≤ 1 -sommets.
2. H ne contient pas deux 2-sommets adjacents.
3. H ne contient pas de 3-sommet adjacent à trois 2-sommets.
4. H ne contient pas de 2-sommet adjacent à deux 3_2 -sommets.

Démonstration.

Nous noterons L l'ensemble des couleurs $L = \llbracket 1; 8 \rrbracket$.

1. Trivial (cf. Figure 3.21(a)).
2. Supposons que H contient un 2-sommet u adjacent à un 2-sommet v . Soient t et w les autres voisins de u et v respectivement (cf. Figure 3.21(b)). Par minimalité de H , le graphe $H' = H \setminus \{tu, uv, vw\}$ est tel que $\chi'_s(H') \leq 8$ et il existe une coloration forte d'arêtes de H' , c utilisant au plus 8 couleurs. Nous pouvons montrer que la coloration peut être étendue à H . En effet, on peut remarquer que $|L \setminus SC(N_2(tu))| \geq 2$, $|L \setminus SC(N_2(uv))| \geq 4$ et $|L \setminus SC(N_2(vw))| \geq 2$. Clairement nous pouvons étendre la coloration c à H , ce qui est une contradiction.
3. Supposons que H contient un 3-sommet v adjacent à trois 2-sommets u , w et t (cf. Figure 3.21(c)). Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes de $H' = H \setminus \{vt, vu, vw\}$, c utilisant au plus 8 couleurs. Nous pouvons montrer que la coloration peut être étendue à H . En effet, on peut remarquer que $|L \setminus SC(N_2(vt))| \geq 3$, $|L \setminus SC(N_2(vu))| \geq 3$ et $|L \setminus SC(N_2(vw))| \geq 3$. Clairement nous pouvons étendre la coloration c à H , ce qui est une contradiction.
4. Supposons que H contient deux 3_2 -sommets qui ont un 2-sommet comme voisin commun. Alors, il existe une chaîne composée de cinq sommets dans H , $uvwxy$ telle que u , w et y sont des 2-sommets et v , x sont des 3_2 -sommets (cf. Figure 3.21(d), cette représentation n'est pas la seule possible). Considérons $H' = H \setminus \{vw, wx\}$. Par minimalité de H , $\chi'_s(H') \leq 8$ et il existe une coloration forte d'arêtes de H' , c utilisant au plus 8 couleurs. Nous allons étendre cette coloration à H . Commençons par décolorier les arêtes uv et xy . Maintenant nous allons recolorier ces deux arêtes. Chacune de ces arêtes a deux couleurs libres : c_{uv}^1, c_{uv}^2 pour uv et c_{xy}^1, c_{xy}^2 pour xy . Supposons, qu'il existe au moins une couleur commune : $c_{uv}^1 = c_{xy}^1$. Nous choisissons alors cette couleur pour colorier uv et xy . Après la coloration de ces arêtes, vw et wx ont chacune au moins

deux couleurs libres, nous pouvons donc les colorier. Supposons maintenant que $c_{uv}^1, c_{uv}^2, c_{xy}^1$ et c_{xy}^2 sont quatre couleurs distinctes. Colorions uv avec c_{uv}^1 et xy avec c_{xy}^1 . Puisque vw a trois couleurs libres (qu'elle peut utiliser au début de la procédure), il existe au moins une couleur non utilisée, α . Donc nous colorions vw avec cette couleur α . À la fin de la procédure il nous reste à colorier wx . Si cela n'est pas possible, cela signifie que les trois couleurs libres pour cette arête au début de la procédure sont utilisées par uv, vw et xy . Dans ce cas, si $c_{uv}^2 \neq c_{vw}$, alors nous recolorions uv avec c_{uv}^2 . Sinon, on recolorie xy avec c_{xy}^2 (ce qui est possible car $c_{uv}^1, c_{uv}^2, c_{xy}^1$ et c_{xy}^2 sont différentes). D'où, il nous reste une couleur libre pour wx , ce qui complète la coloration de H .

□

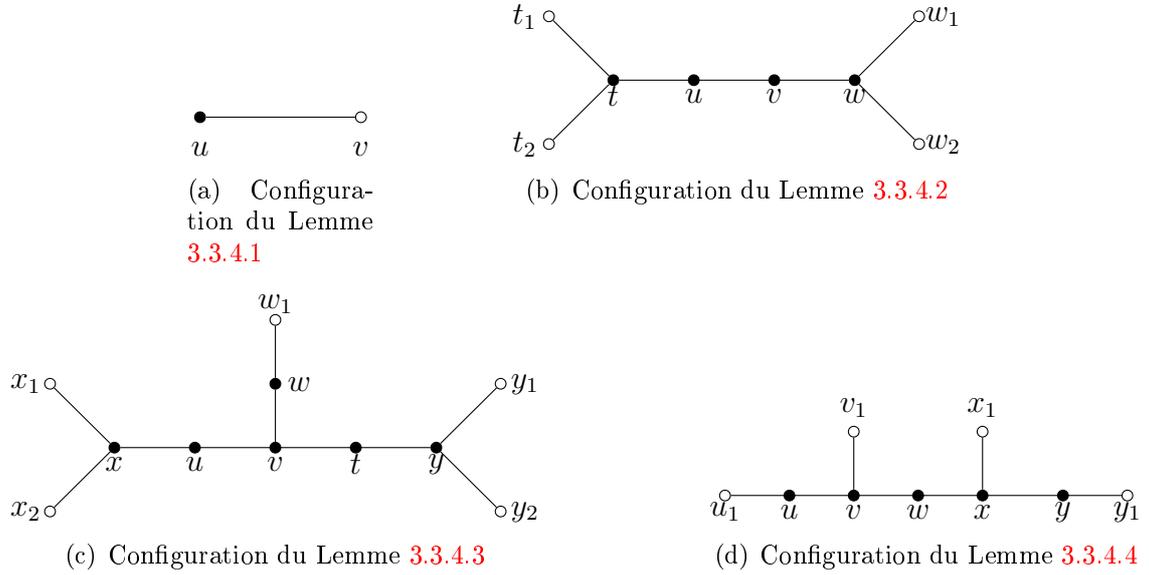


FIGURE 3.21: Configurations réductibles.

Procédure de déchargement sur H

On pose $\omega(x) = d(x) - \frac{13}{5}$ pour tout $x \in V(H)$.

On définit les règles de déchargement de la façon suivante :

- (R1) Chaque 3_1 -sommets donne $\frac{2}{5}$ à son unique 2-sommets adjacent.
- (R2) Chaque 3_2 -sommets donne $\frac{1}{5}$ à chaque 2-sommets adjacent.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommets. Par le Lemme 3.3.4.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$. Observons que $\omega(v) = -\frac{3}{5}$. Par les Lemmes 3.3.4.2, 3.3.4.3 et 3.3.4.4, v est adjacent à au moins un 3_1 -sommets. Par les Lemmes 3.3.4.2, 3.3.4.3 et 3.3.4.4, le second voisin de v est un 3_2 -sommets ou un 3_1 -sommets. D'où, par (R1) et (R2), $\omega^*(v) \geq -\frac{3}{5} + 1 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{1}{5} = 0$.

Cas $k = 3$. Observons que $\omega(v) = \frac{2}{5}$. Par le Lemme 3.3.4.3, v est adjacent à au plus deux 2-sommets. S'il s'agit d'un 3_1 -sommets, alors par (R1), $\omega^*(v) \geq \frac{2}{5} - 1 \times \frac{2}{5} = 0$. S'il s'agit d'un 3_2 -sommets, alors par (R2), $\omega^*(v) \geq \frac{2}{5} - 2 \times \frac{1}{5} = 0$.

Ce qui termine la preuve.

3.3.4 Preuve du Théorème 3.1.5.4

Soit H un contre-exemple au Théorème 3.1.5.4 minimisant $|E(H)| + |V(H)|$: H n'admet pas une coloration forte d'arêtes avec 9 couleurs, $\text{mad}(H) < \frac{36}{13}$ et pour toute arête e , $\chi'_s(H - e) \leq 9$. On peut supposer que H est connexe ; sinon, par minimalité de H , on peut colorier indépendamment chacune des composantes connexes.

Propriétés structurelles de H

Lemme 3.3.5

Le contre-exemple H vérifie les propriétés suivantes :

1. H ne contient pas de ≤ 1 -sommets.
2. H ne contient pas deux 2-sommets adjacents.
3. H ne contient pas de 3-sommets adjacent à deux 2-sommets.
4. H ne contient pas deux 3_1 -sommets adjacents.

Démonstration.

Nous noterons L l'ensemble des couleurs $L = \llbracket 1; 9 \rrbracket$.

1. Trivial (cf. Figure 3.22(a)).
2. La preuve du Lemme 3.3.5.2 est identique à celle du Lemme 3.3.4.2 (cf. Figure 3.22(b)).
3. Supposons que H contient un 3-sommets v adjacent à deux 2-sommets u et w . Soit t le troisième voisin de v (cf. Figure 3.22(c)). Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{vt, vu, vw\}$ utilisant au plus 9 couleurs. On peut remarquer que $|L \setminus SC(N_2(vt))| \geq 1$, $|L \setminus SC(N_2(vu))| \geq 3$ et $|L \setminus SC(N_2(vw))| \geq 3$. On peut donc étendre c à H , ce qui est une contradiction.
4. Supposons que H contient deux 3_1 -sommets adjacents. Soient u et v ces deux 3_1 -sommets et x, y leurs 2-sommets adjacents respectifs.
 - Si $x = y$ alors, considérons z le troisième sommets adjacent à u . Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{zu, ux, xv, vu\}$, utilisant au plus 9 couleurs. En comptant le nombre de couleurs libres pour colorier chacune des arêtes zu, ux, xv, vu , on peut étendre c à H .
 - Si $x \neq y$, soit t le 3-sommets adjacent à x (cf. Figure 3.22(d) qui est une représentation possible de la configuration). Considérons la chaîne $txuvy$. Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{tx, xu\}$, utilisant au plus 9 couleurs. On décolorie alors les arêtes uv et vy . Donc les arêtes tx, vy et uv ont chacune deux couleurs libres. De plus, xu a trois couleurs disponibles. Supposons que nous pouvons colorier tx avec

$\alpha \in \{a_1, a_2\}$ et vy avec $\beta \in \{a_3, a_4\}$. Nous étudions deux cas en fonction des couleurs libres de tx et vy :

- 4.1 Il existe au moins une couleur commune, disons par exemple : $a_1 = a_3$. On colorie tx et vy avec a_1 (puisque ces arêtes sont à distance 3, elles peuvent être coloriées avec des couleurs identiques). Nous avons alors au moins une couleur libre pour colorier uv et nous colorions cette arête avec cette couleur libre. L'arête xu a au moins une couleur libre et nous la prenons pour colorier xu . Ce qui étend la coloration à H , une contradiction.
- 4.2 Les quatre couleurs sont différentes et sans perte de généralité $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ et $a_4 = 4$. Nous colorions tx et vy avec 1 et 3, respectivement. Nous essayons de colorier uv : soit nous avons une couleur libre, disons b , et nous l'utilisons pour colorier uv soit $SC(N_2(uv)) \setminus \{1, 3\} = \llbracket 1, 9 \rrbracket \setminus \{1, 3\}$. Nous distinguons alors ces deux cas :
- Supposons qu'il existe une couleur b qui peut être utilisée pour uv . Si xu a une couleur libre, on peut étendre la coloration c à H , ce qui est une contradiction. Sinon, les trois couleurs libres que nous avons initialement pour xu sont 1, 3 et b . Si on peut recolorier tx avec 2, nous avons terminé, puisque nous obtenons une nouvelle couleur pour xu . Si ce n'est pas le cas, nous avons $b = 2$. Nous pouvons alors recolorier vy avec 4 et nous obtenons alors une couleur libre pour colorier xu et étendre c à H , une contradiction.
 - Supposons que $SC(N_2(uv)) = \llbracket 1, 9 \rrbracket$. Nous recolorions tx avec 2 et nous colorions uv avec 1. Nous essayons alors de colorier xu : soit nous réussissons soit les trois couleurs libres que nous avons initialement pour xu sont 1, 2 et 3. Dans ce cas, nous recolorions vy avec 4 et nous colorions xu avec 3. Ce qui étend la coloration à H , une contradiction.

□

Procédure de déchargement sur H

Posons $\omega(x) = d(x) - \frac{36}{13}$ pour tout $x \in V(H)$.

On définit les règles de déchargement en deux étapes :

Étape 1. Chaque 3_0 -sommet donne $\frac{1}{13}$ à chaque 3_1 -sommet adjacent.

Lorsque l'Étape 1 est terminée, une nouvelle fonction poids ω' est créée sur les 3_1 -sommets, nous considérons alors l'Étape 2 :

Étape 2. Chaque 3_1 -sommet donne $\frac{5}{13}$ à son 2-sommet adjacent.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommet. Par le Lemme 3.3.5.1, $k \geq 2$.

Cas $k = 2$. Observons que $\omega(v) = -\frac{10}{13}$. Par les Lemmes 3.3.5.2 et 3.3.5.3, v est adjacent à deux 3_1 -sommets. D'où, par l'Étape 2, $\omega^*(v) = -\frac{10}{13} + 2 \times \frac{5}{13} = 0$.

Cas $k = 3$. Observons que $\omega(v) = \frac{3}{13}$. Par le Lemme 3.3.5.3 v peut être soit un 3_1 -sommet, soit un 3_0 -sommet. Supposons que v est un 3_1 -sommet. Par

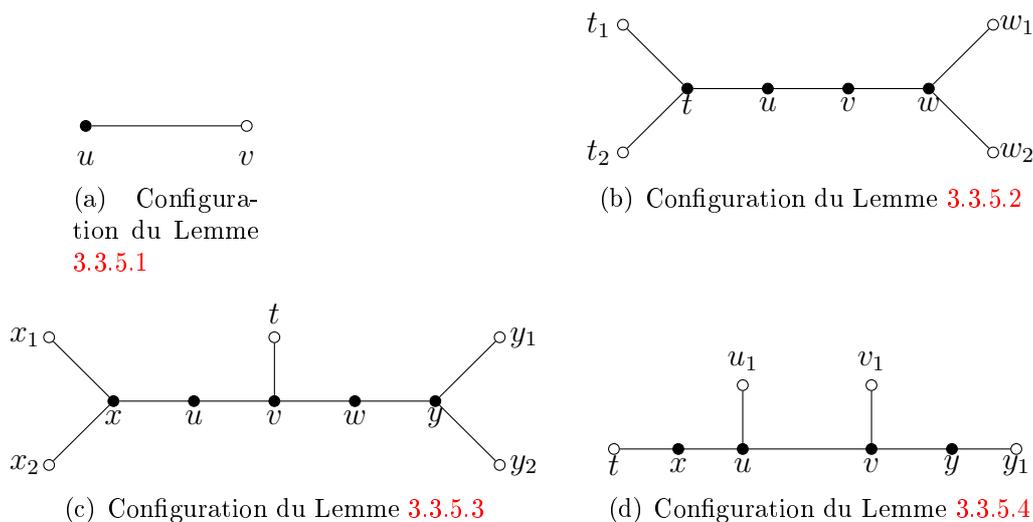


FIGURE 3.22: Configurations réductibles.

le Lemme 3.3.5.4 et après l'Étape 1, $\omega'(v) = \frac{3}{13} + 2 \times \frac{1}{13}$, d'où par l'Étape 2, $\omega^*(v) \geq 0$. Supposons maintenant que v est un 3_0 -sommet. Par l'Étape 1, $\omega^*(v) \geq \frac{3}{13} - 3 \times \frac{1}{13} = 0$.

Ce qui complète la démonstration.

Un exemple de graphe G avec $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ qui n'admet pas une coloration forte d'arêtes avec 9 couleurs est donné sur la Figure 3.23.

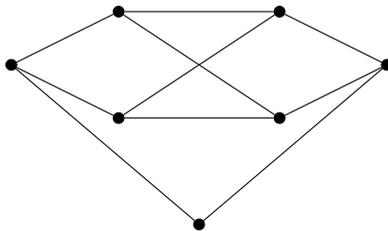


FIGURE 3.23: Un graphe G tel que $\text{mad}(G) = \frac{20}{7}$ et $\chi'_s(G) = 10$.

3.4 Graphes planaires subcubiques sans cycles de longueurs données

Dans cette section nous démontrons :

Si G un graphe planaire subcubique sans cycles de longueurs 6 à 11, alors $\chi'_s(G) \leq 9$.

Considérons un contre-exemple H au Théorème 3.1.7 minimisant le nombre d'arêtes de H . Par la suite nous allons exhiber un ensemble \mathcal{S} de configurations

que H ne peut pas contenir compte tenu de sa minimalité. Nous définissons une fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ pour un graphe planaire G tel que la somme totale des poids est strictement négative d'après la formule d'Euler. Il nous reste à définir des règles de déchargement qui permettent de modifier les poids des sommets et des faces mais en conservant la somme totale de ces mêmes poids. En utilisant le fait que H est planaire subcubique sans cycles de longueurs 6 à 11 et que H contient aucune configuration de S , nous montrons que les poids de tous les sommets et de toutes les faces de H sont positifs à la fin de la procédure de déchargement. Ce qui nous conduit à la contradiction suivante :

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) < 0$$

d'où, aucun contre-exemple au Théorème 3.1.7 ne peut exister.

3.4.1 Propriétés structurelles

Dans cette partie, nous étudions les propriétés structurelles de H .

Lemme 3.4.1

Le graphe H ne contient pas

1. de sommet d'articulation,
2. deux 2-sommets adjacents,
3. de 3-sommet adjacent à deux 2-sommets,
4. de 2-sommet incident à une 3-face,
5. de 3-sommet incident à une 3-face et adjacent à un 2-sommet,
6. deux 3-faces ayant une arête commune,
7. de 2-sommet incident à une 4-face,
8. de 3-face ayant une arête commune avec une 4-face.

Démonstration. Nous noterons L l'ensemble des couleurs $L = \llbracket 1; 9 \rrbracket$.

1. Supposons que H contient un sommet d'articulation (*i.e.* la suppression de ce sommet augmente le nombre de composantes connexes). Puisque H est subcubique, il contient un isthme u_1u_2 (*i.e.* la suppression de cette arête augmente le nombre de composantes connexes). Soit H_i la composante connexe de $H \setminus \{u_1u_2\}$ qui contient le sommet u_i . Par minimalité de H , H_i admet une coloration forte d'arêtes c_i qui utilise au plus 9 couleurs. Soit $S_{i,1}$ l'ensemble des arêtes de H_i incidentes à u_i . Soit $S_{i,2}$ l'ensemble des arêtes de H_i adjacentes à au moins une arête de $S_{i,1}$. Remarquons que $|c_i(S_{i,1})| \leq 2$, $|c_i(S_{i,2})| \leq 4$, et $c_i(S_{i,1}) \cap c_i(S_{i,2}) = \emptyset$. Par permutation des couleurs dans la coloration c_2 de H_2 , nous pouvons obtenir une coloration c de $H \setminus \{u_1u_2\}$ telle que $c(S_{1,1}) \cap c(S_{2,1}) = \emptyset$ et $|c(S_{1,2} \cup S_{2,2})| \leq 4$. D'où, $c(S_{1,1}) \cap c(S_{2,1}) = \emptyset$ et $|c(S_{1,1} \cup S_{2,1} \cup S_{1,2} \cup S_{2,2})| \leq 8$, il existe alors au moins une couleur libre pour u_1u_2 et ainsi étendre c à H , d'où la contradiction.

2. Voir le Lemme 3.3.5.2.
3. Voir le Lemme 3.3.5.3.
4. Supposons que H contient un triangle xyz tel que $d(y) = 2$. Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{yz\}$ qui utilise au plus 9 couleurs. On peut remarquer que $|L \setminus c(N_2(yz))| \geq 1$ et donc qu'on peut étendre la coloration c à H , d'où la contradiction.
5. Supposons que H contient un triangle xyz , tel que x est adjacent à un 2-sommet u . Soit v le troisième sommet adjacent au sommet y . Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{xu, xy, yv, yz, xz\}$ qui utilise au plus 9 couleurs. Nous colorions d'abord vy et yz , puis les trois arêtes restantes. On a donc étendu c à H , ce qui est une contradiction.
6. Supposons que H contient deux triangles xyz et yzt qui partagent l'arête yz . Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{yz\}$ qui utilise au plus 9 couleurs. Par simple comptage des couleurs libres pour étendre la coloration de H' à H , nous avons au moins trois couleurs libres pour colorier yz . Nous pouvons alors étendre c à H , d'où la contradiction.
7. Supposons que H contient un 4-cycle $xyzt$ tel que $d(x) = 2$. Soient t et y les voisins de x . Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{xt, xy\}$ qui utilise au plus 9 couleurs. Nous pouvons étendre la coloration de H' à H par simple comptage des couleurs libres.
8. Supposons que H contient un 4-cycle $xyzt$ qui partage l'arête xy avec le triangle xyu . Par minimalité de H , il existe une coloration forte d'arêtes c de $H' = H \setminus \{xy\}$ qui utilise au plus 9 couleurs. Par simple comptage des couleurs libres pour étendre la coloration de H' à H , nous avons au moins une couleur libre pour colorier xy . Nous pouvons alors étendre c à H , d'où la contradiction.

□

3.4.2 Procédure de déchargement

Lemme 3.4.2

Soit G un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces. Nous avons la relation suivante :

$$\sum_{v \in V(G)} (5d(v) - 12) + \sum_{f \in F(G)} (r(f) - 12) = -24$$

Démonstration. La formule d'Euler $n - m + f = 2$ peut s'écrire de la façon suivante $(10m - 12n) + (2m - 12f) = -24$. La relation $\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{f \in F(G)} r(f) = 2m$ permet de conclure.

□

Considérons la fonction poids $\omega : V(G) \cup F(G) \rightarrow \mathbb{R}$ pour un graphe planaire G par $\omega(x) = 5d(x) - 12$ si $x \in V(G)$ et $\omega(x) = r(x) - 12$ si $x \in F(G)$. La somme totale des poids vaut -24 d'après le Lemme 3.4.2.

Nous définissons alors les règles de déchargement telles que chaque 3-sommet donne

(R1) 1 à chaque 2-sommet adjacent,

(R2) 3 à chaque 3-face incidente,

(R3) 2 à chaque face incidente de taille 4 ou 5.

Pour $x \in V(G) \cup F(G)$, on note $\omega^*(x)$ le poids de x après la phase de déchargement. Soit H un contre-exemple d'ordre minimum au Théorème 3.1.7, vérifions que $\omega^*(x)$ est positif ou nul pour tout $x \in V(H) \cup F(H)$. Nous obtiendrons ainsi la contradiction suivante

$$0 \leq \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H) \cup F(H)} \omega(x) = -24 < 0$$

ce qui montrera qu'il n'existe pas de contre-exemple au Théorème 3.1.7.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommet. Alors, $k \geq 2$ par le Lemme 3.4.1.1.

Cas $k = 2$. Observons que $\omega(v) = -2$ et que v est adjacent à deux 3-sommets d'après le Lemme 3.4.1.2. Par (R1), $\omega^*(v) = -2 + 2 \times 1 = 0$.

Cas $k = 3$. Observons que $\omega(v) = 3$.

On appellera *face légère* une k -face telle que $3 \leq k \leq 5$. Supposons que H contient deux faces légères adjacentes f_1 et f_2 de tailles k_1 et k_2 respectivement, avec $k_1 \leq k_2$. Par le Lemme 3.4.1.2, f_1 et f_2 ont au plus deux arêtes communes. Si f_1 et f_2 ont exactement une arête en commun alors H contient un cycle de taille $k_1 + k_2 - 2$. D'après les hypothèses, $k_1 + k_2 - 2 < 6$, tel que $k_1 = 3$ et $k_2 \leq 4$, ce qui est proscrit par les Lemmes 3.4.1.6 et 3.4.1.8. Si f_1 et f_2 ont exactement deux arêtes en commun, alors f_1 et f_2 sont obligatoirement des 5-faces par les Lemmes 3.4.1.4 et 3.4.1.7, d'où H contient un cycle de taille $k_1 + k_2 - 4 = 6$, ce qui est interdit.

On en déduit alors que H ne contient pas de faces légères adjacentes, ce qui implique que v est incident à au plus une face légère. De plus, par le Lemme 3.4.1.3, v est adjacent à au plus un 2-sommet.

Si v est incident à une 3-face, alors il n'est pas adjacent à un 2-sommet d'après le Lemme 3.4.1.4. D'où, par (R2), $\omega^*(v) = 3 - 1 \times 3 = 0$.

Si v est incident à une 4-face ou une 5-face, alors par (R1) et (R3), $\omega^*(v) \geq 3 - 1 \times 2 - 1 \times 1 = 0$.

Si v n'est pas incident à une face légère, alors d'après (R1), $\omega^*(v) \geq 3 - 1 \times 1 = 2$.

Soit $f \in F(H)$ une k -face. Alors, $k = 3, 4, 5$ ou $k \geq 12$ par hypothèses et par le Lemme 3.4.1.1.

Cas $k = 3$. Observons que $\omega(f) = -9$. Par le Lemme 3.4.1.4, une 3-face n'est pas incidente à un 2-sommet. D'où, par (R2), $\omega^*(f) = -9 + 3 \times 3 = 0$.

Cas $k = 4$. Observons que $\omega(f) = -8$. Par le Lemme 3.4.1.7, une 4-face n'est pas incidente à un 2-sommet. D'où, par (R3), $\omega^*(f) \geq -8 + 4 \times 2 = 0$.

Cas $k = 5$. Observons que $\omega(f) = -7$. Par les Lemmes 3.4.1.2 et 3.4.1.3, une 5-face est incidente à au plus un 2-sommet. D'où, par (R3), $\omega^*(f) \geq -7 + 4 \times 2 = 1$.

Cas $k \geq 12$. $\omega^*(f) = \omega(f) = k - 12 \geq 0$.

3.5 Graphes planaires extérieurs

Dans cette partie nous étudions la famille des graphes planaires extérieurs et montrons que :

Tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta \geq 3$ est tel que $\chi'_s(G) \leq 3\Delta - 3$. De plus, pour tout $\Delta \geq 3$, il existe un graphe G planaire extérieur tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$.

Un graphe planaire extérieur tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$ est proposé sur la Figure 3.24.

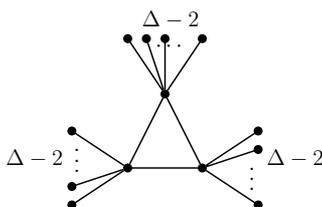


FIGURE 3.24: Exemple d'un graphe planaire extérieur tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$.

Une arête est dite *pendante* si elle est incidente à un sommet de degré 1.

Démonstration. Nous définissons un ordre partiel \preceq sur les graphes tel que $G_1 \preceq G_2$ si et seulement si

- $|E(G_1)| < |E(G_2)|$ ou
- $|E(G_1)| = |E(G_2)|$ et G_1 contient strictement moins d'arêtes pendantes que G_2 .

Soit $k \geq 3$ le plus petit entier tel qu'il existe un contre-exemple de degré maximum k . Parmi les contre-exemples de degré maximum k , prenons en un qui soit minimal pour \preceq .

Pour $v \in V(G)$, posons $I(v) = \{xv, xv \in E(G)\}$ et pour $xy \in E(G)$, posons $I(xy) = \{xu, xu \in E(G)\} \cup \{yv, yv \in E(G)\}$.

Nous allons tout d'abord démontrer que G ne contient pas la Configuration 1 représentée sur la Figure 3.25(a). En d'autres termes, G ne contient pas d'arêtes xy telles que $G \setminus I(xy)$ contienne deux composantes connexes distinctes G_1 et G_2 telles que $|E(G_1)| \geq 1$ et $|E(G_2)| \geq 1$.

Supposons que G contienne une telle arête. Soient G_1, \dots, G_l les composantes connexes de $G \setminus I(xy)$ et supposons $|E(G_1)| \geq 1$ et $|E(G_2)| \geq 1$. Posons $H_i = G[E(G_i) \cup I(xy)]$ pour $1 \leq i \leq l$. Par minimalité de G , H_i admet une coloration

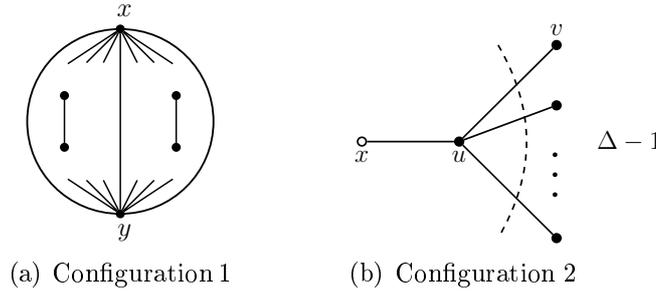


FIGURE 3.25: Configurations interdites

forte des arêtes ϕ_i utilisant au plus $3k - 3$ couleurs. De plus, pour chaque ϕ_i , les couleurs des arêtes $I(xy)$ sont distinctes. Par permutations des couleurs sur chaque ϕ_i , il est possible de créer une coloration forte des arêtes de G , une contradiction.

Montrons maintenant que G ne contient pas la Configuration 2, c'est-à-dire que G ne contient pas de sommet u qui soit adjacent à exactement $d(u) - 1$ sommets de degré 1.

Supposons que G contienne un tel sommet u et soit v un sommet de degré 1 adjacent à u . Le graphe $G \setminus \{uv\}$ admet une coloration forte des arêtes ϕ utilisant au plus $3k - 3$ couleurs (par minimalité de G). Il est alors possible d'étendre ϕ à uv .

Soit $G' = G \setminus \{v : d_G(v) = 1\}$. Observons que $\delta(G') \geq 2$ (sinon G contiendrait un sommet u adjacent à exactement $d_G(u) - 1$ sommets de degré 1 ; ce qui est impossible d'après la Configuration 2).

Remarquons que G' est 2-connexe. Supposons le contraire et soit v un sommet d'articulation de G' . Par construction, v est également un sommet d'articulation de G . Soient G_1, \dots, G_l les composantes connexes de $G \setminus I(v)$. Posons $H_i = G[E(G_i) \cup I(v)]$. D'après la Configuration 2 et par minimalité de G , H_i admet une coloration forte d'arêtes ϕ_i . Par permutations des couleurs sur $I(v)$ pour chaque ϕ_i , il est possible d'obtenir une coloration forte des arêtes de G , une contradiction.

Le graphe G' est un graphe planaire extérieur 2-connexe : G' admet un plongement dont la face infinie est bordée par un cycle $C = x_0x_1 \dots x_{n-1}x_0$.

Par la Configuration 1, les seules cordes possibles dans G' sont les cordes reliant x_i et $x_{i+2} \pmod{n}$.

Si $|C| \leq 4$, alors on peut vérifier que (Figure 3.26) :

$\chi'_s(G) \leq \max\{2(k-2) + 4, 2(k-3) + 5, 2(k-3) + (k-2) + 5\} \leq 3k - 3$ dès que $k \geq 3$.

Supposons $|C| \geq 5$. Si G contient une corde, par exemple, v_1v_3 , alors d'après la Configuration 1, v_2 est de degré 2 dans G . Soit G^* le graphe obtenu à partir de $G \setminus \{v_2\}$ en ajoutant deux sommets de degré 1 x et y reliés respectivement à v_1 et v_3 .

Par choix de \preceq , $G^* \preceq G$. Par minimalité de G , G^* admet une coloration forte des arêtes ϕ . Observons que la coloration ϕ reste valide lorsqu'on identifie x et y , une contradiction.

Il suit que C est un cycle sans cordes. Le graphe G est donc constitué d'un cycle sans cordes $x_0x_1 \dots x_{n-1}x_0$ où chaque x_i est adjacent à au plus $k - 2$ sommets de

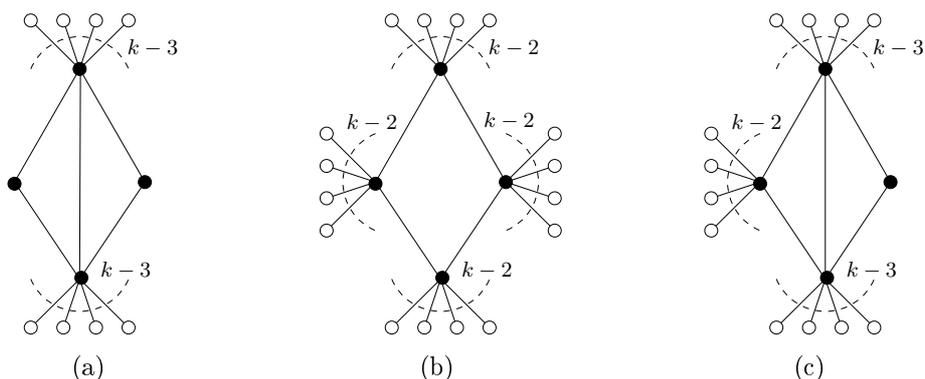


FIGURE 3.26: Cas où $|C| \leq 4$.

degré 1.

On peut vérifier que si $\Delta(G) = k = 3$, alors nous pouvons colorier G en utilisant au plus $3k - 3 = 6$ couleurs. Nous construisons itérativement une coloration appropriée pour les grandes valeurs de k : lorsque k augmente d'une unité, il y a au plus une arête pendante supplémentaire pour chaque sommet du cycle et trois nouvelles couleurs (libres). Nous pouvons alors utiliser ces trois couleurs pour colorier les arêtes qui viennent d'être créées, de telle façon que deux nouvelles arêtes incidentes à deux sommets adjacents reçoivent des couleurs distinctes. \square

3.6 Conclusion

Afin de vérifier la pertinence de nos résultats liés au degré moyen maximum, considérons la fonction $f(n) = \inf\{\text{mad}(G) \mid \chi'_s(G) > n\}$. Clairement, $f(5) = 2$, et nous avons prouvé que pour $n = 6$ (7, 8, 9 resp.) :

$$\frac{45}{21} = \frac{15}{7} < f(6) \leq \frac{7}{3} = \frac{49}{21} \quad ; \quad \frac{54}{22} = \frac{27}{11} < f(7) \leq \frac{5}{2} = \frac{55}{22}$$

$$\frac{252}{91} = \frac{36}{13} < f(8) \leq \frac{20}{7} = \frac{260}{91} \quad ; \quad \frac{252}{91} = \frac{36}{13} < f(9) \leq \frac{20}{7} = \frac{260}{91}$$

Nous n'avons pas pu exhiber une meilleure borne que celle de $f(9)$ pour évaluer $f(8)$. Cette question reste en suspens.

Il semble également difficile de prouver la conjecture proposée par Faudree *et al.* dans [40], *tout graphe planaire subcubique G est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$* . Cependant, au vu de nos résultats, on peut se poser les questions suivantes :

Question 3.6.1

Peut-on prouver que tout graphe planaire subcubique G de maille $g \geq 7$ est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$?

Concernant la famille des graphes planaires subcubiques sans cycles de longueurs données qui admettent une coloration forte d'arêtes avec au plus 9 couleurs, nous pouvons nous poser la question suivante :

Question 3.6.2

Pour quelles valeurs de i et j , peut-on prouver qu'un graphe planaire subcubique G sans cycles de longueurs i à j est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$?

Enfin pour conclure :

Question 3.6.3

Peut-on prouver que le problème de 5-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et pour toute maille quelconque fixée ?

Chapitre 4

Coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants

Contenu

4.1	Introduction	96
4.2	Graphes de degré moyen maximum borné	97
4.2.1	Propriétés structurelles de H	98
4.2.2	Procédure de déchargement	104
4.3	Conclusion	106

Dans ce chapitre nous étudions la notion de coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants qui est un cas particulier de la coloration propre d'arêtes sommets distinguants.

4.1 Introduction

Une k -coloration propre d'arêtes sommets distinguants, ou k -pvd-coloration, d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G telle que pour toute paire de sommets u, v ($u \neq v$), l'ensemble des couleurs affectées aux arêtes incidentes à u est différent de celui affecté aux arêtes incidentes à v . Le plus petit entier k tel que G admet une coloration propre d'arêtes sommets distinguants avec au plus k couleurs est appelé l'observabilité de G et est noté $\chi'_{pvd}(G)$. Une minoration de l'observabilité d'un graphe est donnée par : $\chi'_{pvd}(G) \geq \max\{(i!n_i)^{1/i} : 1 \leq i \leq \Delta\}$, où n_i représente le nombre de sommets de degré i dans G et Δ le degré maximum de G . Cet invariant a été étudié pour différentes familles de graphes [8, 24, 26, 34, 41, 60, 61]. En 1997, Burris et Schelp ont conjecturé que :

Conjecture 4.1.1 (Burris et Schelp, 1997 [24])

Soient G un graphe qui ne contient pas plus d'un sommet isolé ni d'arêtes isolées et j le plus petit entier tel que $\binom{j}{k} \geq n_k$ (pour $1 \leq k \leq \Delta$), alors $\chi'_{pvd}(G) = j$ ou $j+1$.

La notion de coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants peut être considérée comme étant un cas particulier de la notion de coloration propre d'arêtes sommets distinguants. En effet, une k -coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants, ou k -avd-coloration, d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G utilisant au plus k couleurs et telle que pour toute paire de sommets adjacents u, v , l'ensemble des couleurs des arêtes incidentes à u est différent de l'ensemble des couleurs des arêtes incidentes à v . L'indice avd-chromatique de G , noté $\chi'_{avd}(G)$, est le plus petit entier k tel que G est k -avd-coloriable. Dans ce qui suit, nous considérerons uniquement des graphes sans arêtes isolées. La coloration d'arêtes sommets distinguants est également connue sous les noms de *coloration forte d'arêtes sommets distinguants* [94] et *1-coloration forte d'arêtes* [1]. Zhang *et al.* ont entièrement caractérisé l'indice avd-chromatique pour les chaînes, les cycles, les arbres, les graphes complets et les graphes bipartis complets [94]. Par exemple, pour les cycles, ils ont prouvé que :

Théorème 4.1.2 (Zhang, Liu et Wang, 2002 [94])

Pour tout cycle C_p , on a :

$$\chi'_{avd}(C_p) = \begin{cases} 3 & \text{si } p \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 & \text{si } p \not\equiv 0 \pmod{3} \text{ et } p \neq 5 \\ 5 & \text{si } p = 5 \end{cases}$$

Ils ont également proposé la conjecture suivante :

Conjecture 4.1.3 (Zhang, Liu et Wang, 2002 [94])

Si G est un graphe connexe avec au moins 6 sommets, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$.

En 2005, Hatami a démontré que :

Théorème 4.1.4 (Hatami, 2005 [49])

Tout graphe G de degré maximum $\Delta(G) > 10^{20}$ et sans arêtes isolées est tel que $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 300$.

Dans [7], Balister *et al.* ont prouvé la Conjecture 4.1.3 pour la famille des graphes de degré maximum 3 et pour les graphes bipartis.

Dans [88], Wang et Wang ont fait le lien entre le degré moyen maximum et l'avd-coloration en prouvant que :

Théorème 4.1.5 (Wang et Wang, 2010 [88])

Soit G un graphe connexe de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré moyen maximum $mad(G)$.

1. Si $mad(G) < 3$ et $\Delta(G) \geq 3$, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$.
2. Si $mad(G) < \frac{5}{2}$ et $\Delta(G) \geq 4$, ou $mad(G) < \frac{7}{3}$ et $\Delta(G) = 3$, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$.
3. Si $mad(G) < \frac{5}{2}$ et $\Delta(G) \geq 5$, alors $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si G contient des sommets adjacents de degré maximum.

Nous avons affiné le Théorème 4.1.5.2 en prouvant :

Théorème 4.1.6

Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G) \geq 5$ et $mad(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$, alors $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Remarquons que le Théorème 4.1.6 est vérifié pour $\Delta(G) = 3$ et $\Delta(G) = 4$ [88].

Notations Un 2-sommet est dit *léger* s'il est adjacent à au moins un autre 2-sommet. Sinon, on dira que c'est un 2-sommet *fort*. On rappelle que $d_G(v)$ représente le degré du sommet v dans G . On notera $[n]$ l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit ϕ une k -avd-coloration du graphe G . On note $C_\phi(v) = \{\phi(uv) | uv \in E(G)\}$ l'ensemble des couleurs affectées aux arêtes incidentes au sommet v . On peut alors redéfinir l'avd-coloration de la manière suivante : une coloration propre d'arêtes est sommets adjacents distinguante si $C_\phi(u) \neq C_\phi(v)$ pour toute paire de sommets adjacents u et v .

La section suivante est dédiée à la preuve du Théorème 4.1.6.

4.2 Graphes de degré moyen maximum borné

Soit G un contre-exemple au Théorème 4.1.6 minimisant $|E(G)| + |V(G)|$. Posons $\Delta = \Delta(G)$. Tout d'abord, montrons que G est connexe. Pour cela, nous raisonnons par l'absurde et supposons que G n'est pas connexe. Soient G_1 et G_2 deux composantes connexes de G ($mad(G_1) < 3 - \frac{2}{\Delta}$ et $mad(G_2) < 3 - \frac{2}{\Delta}$). Sans perte de généralité supposons qu'il existe un sommet x de $V(G_1)$ tel que $d_G(x) = \Delta$. Par minimalité de G , G_1 admet une $(\Delta + 1)$ -avd-coloration. S'il existe un sommet y de G_2 tel que $d_G(y) = \Delta$, alors par minimalité de G , G_2 admet une $(\Delta + 1)$ -avd-coloration.

Sinon, supposons que tout sommet de G_2 est de degré strictement inférieur à Δ . Si $\Delta(G_2) \geq 3$ alors d'après le Théorème 4.1.5.1 (rappelons que $\text{mad}(G_2) < 3 - \frac{2}{\Delta} < 3$), $\chi'_{avd}(G_2) \leq \Delta(G_2) + 2 \leq \Delta(G) + 1$. Si $\Delta(G_2) = 2$ alors d'après le Théorème 4.1.2, $\chi'_{avd}(G_2) \leq 5 \leq \Delta(G) + 1$. Dans chaque cas nous obtenons une contradiction, ce qui nous assure que G est connexe.

Soit H le graphe obtenu à partir de G en enlevant tous les 1-sommets de G , *i.e.* $H = G \setminus \{v \in V(G), d_G(v) = 1\}$. Puisque G est connexe alors H aussi. De plus $\text{mad}(H) < 3 - \frac{2}{\Delta}$.

4.2.1 Propriétés structurelles de H

Commençons par énumérer quelques propriétés structurelles de H .

Lemme 4.2.1

H possède les propriétés suivantes :

1. $\delta(H) \geq 2$, où $\delta(H)$ est le degré minimum de H .
2. Soit $v \in V(H)$ tel que $d_H(v) = 2$, alors $d_G(v) = 2$.
3. Soit uvw une chaîne dans H telle que $d_H(v) = d_H(w) = 2$, alors $d_G(u) = d_H(u)$ et $d_G(x) = d_H(x)$.

Démonstration. Les preuves des Lemmes 4.2.1.1 et 4.2.1.2 sont inspirées des preuves des Claims 1 et 2 dans [88].

1. Supposons par contradiction que $\delta(H) \leq 1$. Nous avons alors deux cas :

- (1) $\delta(H) = 0$. Dans ce cas G est l'étoile $K_{1, \Delta(G)}$, d'où $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G)$, ce qui fournit la contradiction.
- (2) Supposons maintenant que $\delta(H) = 1$. Soit u un 1-sommet dans H adjacent à un sommet v . Nous remarquons alors que $d_G(u) = k \geq 2$. Dans G , on nomme u_1, \dots, u_{k-1} les $(k-1)$ 1-sommets adjacents à u différents de v . Considérons $G' = G \setminus \{u_1\}$.

Si $\Delta(G') < \Delta(G)$, alors G' admet une $(\Delta(G') + 2)$ -avd-coloration ϕ d'après le Théorème 4.1.5.1 ($\text{mad}(G') \leq \text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta} < 3$). Cette coloration ϕ est une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration partielle de G . En coloriant uu_1 proprement, on étend ainsi ϕ à G (puisque $|C_\phi(u)| = \Delta(G)$, $|C_\phi(v)| < \Delta(G)$, et $|C_\phi(u_1)| = 1$), une contradiction.

Si $\Delta(G') = \Delta(G)$, alors par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(uv) = 1$ et $\phi(uu_i) = i$ pour $2 \leq i \leq k-1$. Nous colorions uu_1 avec la couleur k : soit nous avons terminé car $C_\phi(u) \neq C_\phi(v)$, soit v vérifie $C_\phi(v) = \{1, 2, \dots, k-1, k\}$. Dans ce cas, nous colorions uu_1 avec la couleur $k+1$. Ce qui étend la coloration à G , une contradiction.

2. Soit v un 2-sommet dans H adjacent à deux sommets x et y . Supposons par contradiction que $d_G(v) = k > 2$. Dans G , on nomme v_1, \dots, v_{k-2} les $(k-2)$ 1-sommets adjacents à v différents de x et de y . Considérons $G' = G \setminus \{v_1\}$.

Si $\Delta(G') < \Delta(G)$, alors G' admet une $(\Delta(G') + 2)$ -avd-coloration ϕ d'après le Théorème 4.1.5.1. Cette coloration ϕ est une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration partielle de G que nous pouvons étendre à G en coloriant proprement vv_1 ($|C_\phi(v)| = \Delta(G)$, $|C_\phi(x)| < \Delta(G)$, $|C_\phi(y)| < \Delta(G)$ et $|C_\phi(v_1)| = 1$), une contradiction.

Si $\Delta(G') = \Delta(G)$, alors par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(vx) = 1$, $\phi(vy) = 2$, et $\phi(vv_i) = i + 1$ pour $2 \leq i \leq k - 2$ avec $k \geq 3$. Supposons d'abord que $k = 3$. Nous colorions vv_1 avec la couleur 3 : soit nous avons terminé (si $C_\phi(v) \neq C_\phi(x)$ et $C_\phi(v) \neq C_\phi(y)$), soit un voisin de v , par exemple x , vérifie $C_\phi(x) = \{1, 2, 3\}$. Nous recolorions vv_1 avec la couleur 4 : soit nous avons terminé, soit y vérifie $C_\phi(y) = \{1, 2, 4\}$. Nous recolorions alors vv_1 avec la couleur 6 (c'est possible car $\Delta(G) \geq 5$) ; ce qui étend la coloration à G , une contradiction. Supposons maintenant que $k \geq 4$. Nous colorions vv_1 avec la couleur k . Soit la coloration obtenue est une avd-coloration de G , soit un voisin de v , par exemple x , vérifie $C_\phi(x) = \{1, 2, 3, \dots, k - 1, k\}$. Nous recolorions alors vv_1 avec la couleur $k + 1$. Soit nous avons terminé, soit $C_\phi(y) = \{1, 2, 3, \dots, k - 1, k + 1\}$. Dans ce cas, nous recolorions vv_2 avec k (v_2 existe car $k \geq 4$). Ce qui étend la coloration à G , une contradiction.

3. Soit une chaîne uvw dans H telle que $d_H(v) = d_H(w) = 2$. D'après le Lemme 4.2.1.2, $d_G(v) = d_G(w) = 2$. Supposons par contradiction que $d_G(u) \neq d_H(u)$ (on en déduit par les Lemmes 4.2.1.1, 4.2.1.2 et la construction de H que $d_G(u) \geq 3$). Il existe donc au moins un 1-sommet adjacent à u dans G , par exemple u_1 . Considérons $G' = G \setminus \{vw\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Si $\phi(uv) \neq \phi(wx)$, alors nous colorions vw (1) proprement si $d_G(x) \geq 3$, ou (2) avec une couleur différente de celles affectées aux arêtes incidentes à v et x si $d_G(x) = 2$. La coloration obtenue est une avd-coloration de G ((1) $|C_\phi(u)| \geq 3$, $|C_\phi(x)| \geq 3$, $|C_\phi(v)| = |C_\phi(w)| = 2$ et $C_\phi(v) \neq C_\phi(w)$, (2) $|C_\phi(u)| \geq 3$, $|C_\phi(v)| = |C_\phi(w)| = |C_\phi(x)| = 2$, $C_\phi(v) \neq C_\phi(w)$, et $C_\phi(w) \neq C_\phi(x)$). Sinon, on permute les couleurs affectées à uu_1 et uv . La coloration ainsi obtenue est toujours une avd-coloration de G' . On étend alors la coloration à G comme précédemment, ce qui fournit la contradiction. □

Lemme 4.2.2

Le graphe H ne contient pas

1. de chaîne uvw telle que $d_H(u) = d_H(v) = d_H(w) = 2$ [88],
2. de 3-sommet adjacent à un 2-sommet,
3. de 4-sommet adjacent à trois 2-sommetts,
4. de k -sommet adjacent à un 2-sommet léger pour $3 \leq k \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$,
5. de k -sommet adjacent à $(k - 2)$ 2-sommetts légers pour $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \Delta - 1$,
6. de k -sommet adjacent à k 2-sommetts pour $k \geq 5$.

Démonstration.

1. Ce cas est prouvé dans [88].
2. Soit u un 3-sommet dans H . Dans H , considérons u_1, u_2 et u_3 les trois voisins de u . Supposons que $d_H(u_1) = 2$ (Figure 4.1). D'après le Lemme 4.2.1.2, $d_H(u_1) = 2 = d_G(u_1)$. Soit v le second voisin de u_1 différent de u . Nous considérons les deux cas suivants :

(1) Supposons tout d'abord que $d_H(v) = 2$. Par les Lemmes 4.2.1.2 et 4.2.1.3, $d_H(v) = 2 = d_G(v)$ et $d_H(u) = 3 = d_G(u)$. Soit w le second voisin de v différent de u_1 . Considérons $G' = G \setminus \{u_1v\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Si $\phi(uu_1) \neq \phi(vw)$, alors nous colorions u_1v proprement, et nous étendons alors ϕ à G , une contradiction. Remarquons que si $u = w$, nous avons immédiatement $\phi(uu_1) \neq \phi(vw)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u \neq w$, $\phi(uu_1) = \phi(vw) = 1$, $\phi(uu_2) = 2$ et $\phi(uu_3) = 3$. Nous recolorions uu_1 avec 4. Si la coloration obtenue est une avd-coloration, alors nous pouvons étendre la coloration à G comme précédemment. Sinon, cela signifie qu'un voisin de u , disons u_2 , vérifie $C_\phi(u_2) = \{2, 3, 4\}$. Nous recolorions alors uu_1 avec la couleur 5 : soit nous obtenons une avd-coloration partielle de G que l'on peut étendre à tout G , soit u_3 vérifie $C_\phi(u_3) = \{2, 3, 5\}$. Finalement, nous colorions uu_1 avec 6 (ceci étant possible car $\Delta(G) \geq 5$) et nous étendons ainsi la coloration à G , ce qui fournit la contradiction.

(2) Supposons maintenant que $d_H(v) > 2$. Si $d_G(u) = d_H(u) = 3$, alors nous considérons $G' = G \setminus \{uu_1\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(u_1v) = \alpha \leq 3$, $\phi(uu_2) = 2$ et $\phi(uu_3) = 3$. Nous colorions uu_1 avec 4, soit nous avons terminé, soit un voisin de u , par exemple u_2 , vérifie $C_\phi(u_2) = \{2, 3, 4\}$. Nous colorions uu_1 avec 5 : soit nous avons terminé, soit u_3 vérifie $C_\phi(u_3) = \{2, 3, 5\}$. Finalement, nous pouvons colorier uu_1 avec 6 et la coloration est étendue à G , une contradiction.

Supposons que $d_G(u) = k > 3$ ($k \leq \Delta(G)$). Dans G , on appelle u_4, \dots, u_k les $(k - 3)$ 1-sommets adjacents à u . Considérons $G' = G \setminus \{uu_k\}$. Si $\Delta(G') < \Delta(G)$, alors G' admet une $(\Delta(G') + 2)$ -avd-coloration ϕ d'après le Théorème 4.1.5.1 ($\text{mad}(G') \leq \text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta} < 3$). Cette coloration ϕ est une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration de G' que nous pouvons étendre à G en coloriant uu_k proprement ($|C_\phi(u)| = \Delta(G)$, $|C_\phi(u_2)| < \Delta(G)$, $|C_\phi(u_3)| < \Delta(G)$, $|C_\phi(u_1)| = 2$ et $|C_\phi(u_k)| = 1$), une contradiction.

Si $\Delta(G') = \Delta(G)$, alors par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(uu_i) = i$ pour tout $i \in [k - 1]$ (avec $4 \leq k \leq \Delta(G)$). Supposons d'abord que $k > 4$. Nous colorions uu_k avec k . Soit nous obtenons une avd-coloration de G' et nous pouvons l'étendre à G , soit un voisin de u , par exemple u_2 , vérifie $C_\phi(u_2) = \{1, 2, 3, \dots, k - 1, k\}$. Nous colorions uu_k avec $k + 1$. Soit nous avons terminé, soit $C_\phi(u_3) = \{1, 2, 3, \dots, k - 1, k + 1\}$. Dans ce cas, nous recolorions uu_{k-1} avec k . Ce qui étend la coloration à G , une contradiction. Supposons maintenant que $k = 4$. Nous colorions uu_4 avec

4, soit nous avons terminé, soit un voisin de u (différent de u_1), disons u_2 , vérifie $C_\phi(u_2) = \{1, 2, 3, 4\}$. Nous recolorions uu_4 avec 5, soit nous avons terminé, soit u_3 vérifie $C_\phi(u_3) = \{1, 2, 3, 5\}$. Nous recolorions alors uu_4 avec 6 (ce qui est possible car $\Delta(G) \geq 5$), ce qui étend la coloration à G et nous fournit une contradiction.

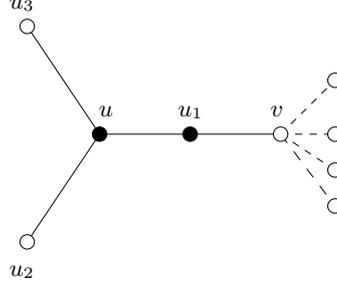


FIGURE 4.1: Configuration du Lemme 4.2.2.2.

3. Soit u un 4-sommet dans H . Dans H , on nomme u_1, u_2, u_3 et u_4 les quatre voisins de u . Supposons également que $d_H(u_1) = d_H(u_2) = d_H(u_3) = 2$ (Figure 4.2). D'après les Lemmes 4.2.1.2, $d_G(u_1) = d_G(u_2) = d_G(u_3) = 2$. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, soit v_i le second voisin de u_i (différent de u). Nous considérons deux cas :
 - (1) Supposons que l'un des u_i est un 2-sommet léger, par exemple u_1 . Soit w le second voisin de v_1 différent de u_1 . On en déduit alors par le Lemme 4.2.1.3, $d_H(w) = d_G(w)$ et $d_H(u) = d_G(u) = 4$. De plus, d'après le Lemme 4.2.2.1, $d_H(w) > 2$. Considérons $G' = G \setminus \{u_1v_1\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G)+1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(uu_i) = i$ pour tout $i \in [4]$. Si $\phi(uu_1) \neq \phi(v_1w)$, alors nous colorions u_1v_1 proprement. Ce qui étend ϕ à G , une contradiction. Supposons alors que $\phi(uu_1) = \phi(v_1w) = 1$. Nous recolorions uu_1 avec la couleur 5, soit la coloration obtenue est une avd-coloration de G' et nous pouvons l'étendre à G , soit u_4 vérifie $C_\phi(u_4) = \{2, 3, 4, 5\}$. Nous colorions uu_1 avec 6 et nous colorions u_1v_1 proprement, ce qui étend la coloration à G et nous fournit une contradiction.
 - (2) Supposons que u_1, u_2, u_3 sont trois 2-sommets forts. Si $d_G(u) = d_H(u) = 4$, alors nous considérons $G' = G \setminus \{uu_1\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(u_1v_1) = \alpha \leq 4$ et $\phi(uu_{i+1}) = i + 1$ pour tout $i \in [3]$. Nous colorions uu_1 avec 5, soit nous avons terminé, soit u_4 vérifie $C_\phi(u_4) = \{2, 3, 4, 5\}$. Nous recolorions alors uu_1 avec 6, ce qui étend la coloration à G et nous fournit une contradiction. Supposons que $d_G(u) = k > 4$ ($k \leq \Delta(G)$). Dans G , on note u_5, \dots, u_k les $(k - 4)$ 1-sommets adjacents à u . Considérons $G' = G \setminus \{uu_k\}$. Si $\Delta(G') < \Delta(G)$, alors G' admet une $(\Delta(G') + 2)$ -avd-coloration ϕ d'après le Théorème 4.1.5.1 ($\text{mad}(G') \leq \text{mad}(G) < 3 - \frac{2}{\Delta} < 3$). Cette coloration

ϕ est une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration partielle de G que nous étendons à G en coloriant uu_k proprement ($|C_\phi(u)| = \Delta(G)$, $|C_\phi(u_4)| < \Delta(G)$, $|C_\phi(u_1)| = |C_\phi(u_2)| = |C_\phi(u_3)| = 2$ et $|C_\phi(u_k)| = 1$), une contradiction. Si $\Delta(G') = \Delta(G)$, alors par minimalité de G , $G' = G \setminus \{uu_k\}$ admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(uu_i) = i$ pour tout $i \in [k - 1]$ (avec $5 \leq k \leq \Delta(G)$). Nous colorions uu_k avec k . Si la coloration obtenue est une avd-coloration de G , nous avons terminé. Sinon cela signifie que u_4 vérifie $C_\phi(u_4) = \{1, 2, 3, \dots, k - 1, k\}$, alors nous colorions uu_k avec $k + 1$. Ce qui étend la coloration à G , une contradiction.

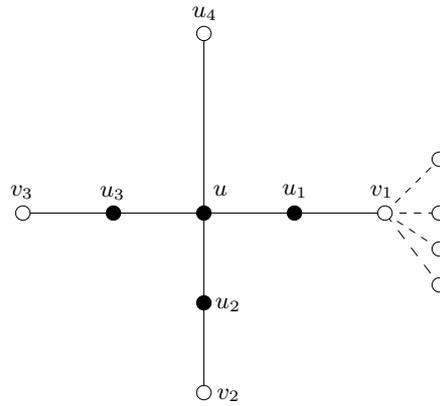


FIGURE 4.2: Configuration du Lemme 4.2.2.3.

4. Soit u un k -sommets dans H adjacent à un 2-sommets léger v tel que $3 \leq k \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$. Soient w le second voisin de v différent de u et x le second voisin de w différent de v . Appelons u_1, \dots, u_{k-1} les $(k - 1)$ voisins de u différents de v (Figure 4.3). Par les Lemmes 4.2.1.2 et 4.2.1.3, $d_H(w) = d_G(w) = 2 = d_G(v) = d_H(v)$ et $d_G(u) = d_H(u) = k$. D'après le Lemme 4.2.2.1, $d_H(x) > 2$. Considérons $G' = G \setminus \{vw\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(uu_i) = i$ pour tout $i \in [k - 1]$ et $\phi(uv) = k$. Si $\phi(uv) \neq \phi(wx)$, alors nous colorions proprement vw . Ce qui étend ϕ à G , une contradiction. Supposons maintenant que $\phi(uv) = \phi(wx) = k$. Nous tentons de recolorier uv avec chaque couleur $c \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$. Si nous réussissons alors nous pouvons colorier tout G ; sinon cela signifie que pour tout $c \in \{k + 1, \dots, 2k - 1\}$ il existe $i \in [k - 1]$ tel que $C_\phi(u) \setminus \{k\} \cup \{c\} = C_\phi(u_i)$. Dans ce cas, nous recolorions uv avec la couleur $2k$ ce qui est possible car $3 \leq k \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$. La coloration obtenue est une avd-coloration de G' . Nous étendons alors la coloration à G comme précédemment.
5. Soit u un k -sommets dans H . Considérons $(k - 2)$ chaînes dans H , $uv_j^1 v_j^2 v_j^3$ avec $j \in [k - 2]$, telles que $d_H(v_j^1) = d_H(v_j^2) = 2$ et $d_H(v_j^3) > 2$ (d'après le Lemme 4.2.2.1). D'après le Lemme 4.2.1.2, $d_G(v_j^1) = d_G(v_j^2) = 2$ et par le Lemme 4.2.1.3, $d_G(u) = d_H(u) = k$. Soient x et y les deux voisins de u

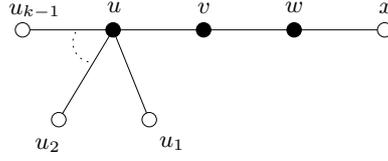


FIGURE 4.3: Configuration du Lemme 4.2.2.4.

différents d'un des v_j^1 (Figure 4.4). Considérons $G' = G \setminus \{v_1^1 v_1^2\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Nous considérons deux cas :

- (1) $\phi(uv_1^1) \neq \phi(v_1^2 v_1^3)$. Nous colorions $v_1^1 v_1^2$ proprement, ce qui étend ϕ à G , une contradiction.
- (2) Sans perte de généralité, on peut supposer que $\phi(uv_1^1) = 1 = \phi(v_1^2 v_1^3)$, pour tout $j \in [k - 2]$, $\phi(uv_j^1) = j$, $\phi(ux) = k - 1$ et $\phi(uy) = k$. Si un des $v_j^2 v_j^3$ ($j \in [k - 2]$), par exemple $v_2^2 v_2^3$, est tel que $\phi(v_2^2 v_2^3) \neq 1$, alors nous décolorions $v_2^1 v_2^2$, puis nous permutons les couleurs de uv_1^1 et uv_2^1 , et finalement nous colorions proprement $v_1^1 v_1^2$ et $v_2^1 v_2^2$. La coloration obtenue est une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration de G . Considérons maintenant que pour tout $j \in [k - 2]$, $\phi(v_j^2 v_j^3) = 1$. Nous recolorions uv_1^1 avec $k + 1$. Si la coloration obtenue est une avd-coloration de G' , alors nous étendons la coloration à G en coloriant $v_1^1 v_1^2$ proprement. Sinon, cela signifie qu'un des voisins de u (x ou y), disons x , vérifie $C_\phi(x) = \{2, 3, 4, \dots, k - 1, k, k + 1\}$. Nous recolorions alors uv_1^1 avec $k + 2$ (ce qui est possible car $k \leq \Delta(G) - 1$). Soit nous obtenons une avd-coloration de G' que nous pouvons étendre à G , soit $C_\phi(y) = \{2, 3, \dots, k - 1, k, k + 2\}$. Dans ce cas, nous décolorions $v_2^1 v_2^2$, puis nous colorions uv_2^1 avec $k + 1$. Nous colorions alors proprement $v_1^1 v_1^2$ et $v_2^1 v_2^2$. Ce qui étend la coloration à G , une contradiction.

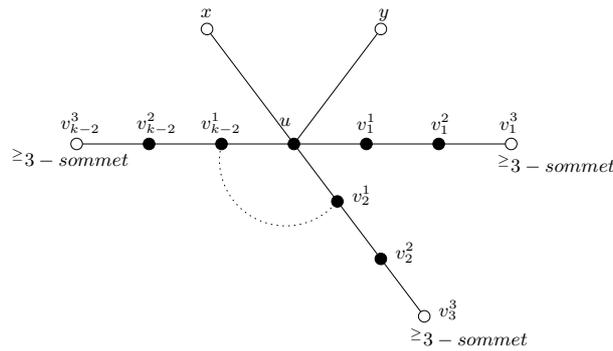


FIGURE 4.4: Configuration du Lemme 4.2.2.5.

6. Soit u un k -sommet dans H adjacent à k 2-sommets u_1, \dots, u_k , avec $k \geq 5$. Pour tout $i \in [k]$, on appelle v_i le second voisin de u_i (distinct de u). D'après le Lemme 4.2.1.2, $d_G(u_i) = 2$ pour tout $i \in [k]$ (Figure 4.5). Nous considérons deux cas :

- (1) Supposons que l'un des u_i est un 2-sommet léger, par exemple u_1 . Soit w le second voisin de v_1 différent de u_1 . Donc d'après le Lemme 4.2.1.3, $d_H(w) = d_G(w)$ et $d_H(u) = d_G(u) = k$. De plus, d'après le Lemme 4.2.2.1, $d_H(w) > 2$. Considérons $G' = G \setminus \{u_1v_1\}$. Par minimalité de G , G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\phi(uu_i) = i$ pour tout $i \in [k]$. Si $\phi(uu_1) \neq \phi(v_1w)$, alors nous colorions u_1v_1 proprement. Ce qui étend ϕ à G , une contradiction. Supposons maintenant que $\phi(uu_1) = \phi(v_1w) = 1$. Nous recolorions uu_1 avec $k + 1$ et nous colorions u_1v_1 proprement, ce qui étend la coloration à G et nous fournit une contradiction.
- (2) Supposons maintenant que u_1, \dots, u_k sont k 2-sommets forts. Supposons d'abord que $d_G(u) = d_H(u)$. Considérons $G' = G \setminus \{uu_1\}$. Par minimalité de G ou par le Théorème 4.1.5.1, G' admet une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration ϕ . Sans perte de généralité on peut supposer que $\phi(uu_{i+1}) = i + 1$ pour tout $i \in [k - 1]$ et $\phi(u_1v_1) = \alpha \leq k - 1$. Nous colorions uu_1 avec une couleur parmi $[\Delta(G) + 1] \setminus (\{2, \dots, k\} \cup \{\alpha\})$. Ce qui étend la coloration à G , une contradiction. Supposons alors que $d_G(u) = l > d_H(u)$ tel que $l \leq \Delta(G)$. Dans G , on nomme u_{k+1}, \dots, u_l les $(l - k)$ 1-sommets adjacents à u (avec $k < l \leq \Delta(G)$). Considérons $G' = G \setminus \{uu_l\}$. Par minimalité de G ou par le Théorème 4.1.5.1, ϕ est une $(\Delta(G) + 1)$ -avd-coloration partielle de G . Si $\Delta(G') < \Delta(G)$ alors nous pouvons étendre ϕ à G en coloriant uu_l proprement, une contradiction. Si $\Delta(G') = \Delta(G)$, alors sans perte de généralité, supposons que $\phi(uu_i) = i$ pour tout $i \in [l - 1]$. Nous colorions uu_l avec l . Ce qui étend la coloration à G et fournit une contradiction.

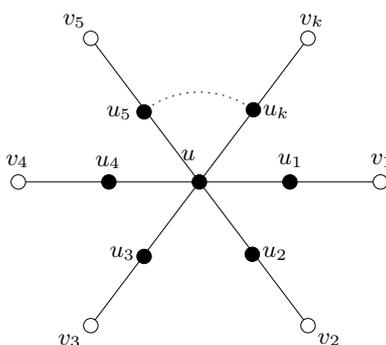


FIGURE 4.5: Configuration du Lemme 4.2.2.6.

□

4.2.2 Procédure de déchargement

Dans cette partie nous utilisons une procédure de déchargement sur les sommets du graphe H en définissant la fonction poids suivante $\omega : V(H) \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\omega(x) = d_H(x)$. On en déduit des hypothèses faites sur le degré moyen maximum ($\text{mad}(H) <$

$3 - \frac{2}{\Delta}$) que la somme totale des poids est strictement inférieure à $(3 - \frac{2}{\Delta})|V(H)|$. Nous définissons alors des règles de déchargement afin de redistribuer les poids tout en conservant la somme totale initiale des poids. Une fois la procédure terminée, une nouvelle fonction poids ω^* est créée. On montre que pour tout sommet v , $\omega^*(v) \geq 3 - \frac{2}{\Delta}$. On aboutit alors à la contradiction suivante :

$$\left(3 - \frac{2}{\Delta}\right) |V(H)| \leq \sum_{x \in V(H)} \omega^*(x) = \sum_{x \in V(H)} \omega(x) < \left(3 - \frac{2}{\Delta}\right) |V(H)|$$

prouvant ainsi qu'aucun contre-exemple ne peut exister.

On définit les règles de déchargement de la façon suivante :

(R1) Tout $\geq (\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1)$ -sommet donne $1 - \frac{2}{\Delta}$ à chaque 2-sommet léger adjacent.

(R2) Tout ≥ 4 -sommet donne $\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}$ à chaque 2-sommet fort adjacent.

Soit $v \in V(H)$ un k -sommet. D'après le Lemme 4.2.1.1, $k \geq 2$. Considérons les différents cas suivants :

Cas $k = 2$. On a $\omega(v) = 2$. D'après le Lemme 4.2.2.1, v est adjacent à au plus un 2-sommet. De plus, par le Lemme 4.2.2.2, v n'est pas adjacent à un 3-sommet. Supposons que v est un 2-sommet fort. D'où, par (R2), $\omega^*(v) \geq 2 + 2 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}) = 3 - \frac{2}{\Delta}$. Supposons maintenant que v est un 2-sommet léger. D'après le Lemme 4.2.2.4, v est adjacent à un $\geq (\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1)$ -sommet. D'où, par (R1), $\omega^*(v) = 2 + 1 \times (1 - \frac{2}{\Delta}) = 3 - \frac{2}{\Delta}$.

Cas $k = 3$. Par (R1) et (R2), $\omega(v) = 3 = \omega^*(v) > 3 - \frac{2}{\Delta}$.

Cas $k = 4$. On a $\omega(v) = 4$. Supposons tout d'abord que $5 \leq \Delta(G) \leq 6$. Si v n'est pas adjacent à un 2-sommet léger, alors par le Lemme 4.2.2.3, v est adjacent à au plus deux 2-sommets forts. D'où, par (R2), $\omega^*(v) \geq 4 - 2 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}) > 3 - \frac{2}{\Delta}$. Sinon, d'après les Lemmes 4.2.2.3 et 4.2.2.5, v est adjacent à au plus un 2-sommet léger et un 2-sommet fort. D'où, par (R1) et (R2), $\omega^*(v) \geq 4 - 1 \times (1 - \frac{2}{\Delta}) - 1 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}) > 3 - \frac{2}{\Delta}$ ($5 \leq \Delta(G) \leq 6$). Supposons maintenant que $\Delta(G) \geq 7$. Alors d'après les Lemmes 4.2.2.3 et 4.2.2.4, v est adjacent à au plus deux 2-sommets forts. D'où, par (R2), $\omega^*(v) \geq 4 - 2 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}) > 3 - \frac{2}{\Delta}$.

Cas $5 \leq k \leq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil$. On a $\omega(v) = k$. D'après les Lemmes 4.2.2.4 et 4.2.2.6, v est adjacent à au plus $(k - 1)$ 2-sommets forts. D'où, par (R2), $\omega^*(v) \geq k - (k - 1) \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}) > 3 - \frac{2}{\Delta}$ pour $k \geq 5$.

Cas $\lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1 \leq k \leq \Delta - 1$. D'après les Lemmes 4.2.2.5 et 4.2.2.6, v est adjacent à au plus $(k - 3)$ 2-sommets légers et deux 2-sommets forts. D'où, par (R1) et (R2), $\omega^*(v) \geq k - (k - 3) \times (1 - \frac{2}{\Delta}) - 2 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{\Delta}) \geq 3 - \frac{2}{\Delta}$ pour $k \geq \lceil \frac{\Delta}{2} \rceil + 1$.

Cas $k = \Delta$. On a $\omega(v) = \Delta$. D'après le Lemme 4.2.2.6, v est adjacent à au plus $(\Delta - 1)$ 2-sommets. On en déduit alors d'après (R1), $\omega^*(v) \geq \Delta - (\Delta - 1) \times (1 - \frac{2}{\Delta}) = 3 - \frac{2}{\Delta}$.

Ce qui termine la preuve.

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons vérifié la Conjecture 4.1.3 pour la famille des graphes tels que $\Delta \geq 3$ et de degré moyen maximum strictement inférieur à $3 - \frac{2}{\Delta}$. Il semble cependant difficile de prouver la Conjecture 4.1.3 en utilisant uniquement une procédure de déchargement locale. En revanche, on pourrait étudier les graphes tels que $\chi'_{avd}(G) = \Delta + 1$ et se poser la question suivante :

Question 4.3.1

Peut-on prouver que si $mad(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$ et $\Delta(G) \geq 5$, alors $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si G contient des sommets adjacents de degré maximum ?

Question 4.3.2

Peut-on améliorer la majoration $3 - \frac{2}{\Delta(G)}$ pour $\Delta(G) \geq 5$?

Question 4.3.3

Peut-on construire un graphe G de degré maximum $\Delta(G) \geq 5$ avec $mad(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)} + \epsilon$ tel que $\chi'_{avd}(G) > \Delta(G) + 1$ (avec ϵ aussi petit que l'on veut) ?

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons abordé différents problèmes de coloration : ceux liés à la coloration acyclique, puis ceux liés à la coloration d'arêtes à distance 2 et enfin ceux liés à la coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants.

Dans le **Chapitre 2**, nous avons étudié la coloration acyclique. Tout d'abord nous avons cherché à borner $\chi_a(G)$ pour la classe des graphes de degré maximum borné. Ensuite nous nous sommes attardés sur la coloration acyclique par listes et plus précisément sur la 3-liste coloration acyclique des graphes planaires sans cycles de tailles donnés. Cependant, plusieurs questions restent en suspens :

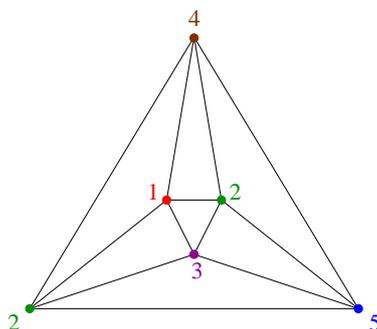
Question 1

Peut-on trouver des graphes de degré maximum Δ (Δ petit), $\Delta \geq 5$, tels que $\chi_a(G) > \Delta + 1$? On rappelle que $\chi_a(K_{\Delta+1}) = \Delta + 1$ et $\Delta(K_{\Delta+1}) = \Delta$.

Dans la recherche de tels graphes nous pouvons remarquer que :

Observation 1

$\chi_a(K_n) = \chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$, $\chi_a(K_{2n} \setminus \mathcal{M}) = 2n - 1 = \Delta(K_{2n} \setminus \mathcal{M}) + 1 \gg \chi(K_{2n} \setminus \mathcal{M}) = n \simeq \frac{\Delta}{2}$ avec \mathcal{M} un couplage parfait.



$G = K_6 \setminus \mathcal{M}$ n'est pas acycliquement 4-coloriable

Cette approche nous semble prometteuse. Kostochka et Stocker [66] ont prouvé récemment que tout graphe de degré maximum 5 est acycliquement coloriable avec au plus 7 couleurs. Une question naturelle que l'on se pose est :

Question 2

Peut-on prouver que tout graphe de degré maximum 5 est tel que $\chi_a(G) \leq 6$?

Si on démontre que tout graphe de degré maximum 5 est acycliquement coloriable avec 6 couleurs alors le résultat est optimal puisque K_6 est de degré maximum 5 et n'est pas acycliquement 5-coloriable.

Le bon ordre de coloration des sommets ne nous a pas permis de répondre à cette question. Toutefois un tel ordre de coloration de sommets pourrait être réutilisé pour d'autres variantes de coloration.

En matière de 3-coloration acyclique par listes de nombreuses questions subsistent :

Question 3

Peut-on prouver que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i est acycliquement 3-liste coloriable pour $6 \leq i \leq 10$?

De plus, on sait que si G est planaire de maille 7, alors $\chi_a(G) \leq 3$ [15].

Question 4

Peut-on prouver que tout graphe planaire de maille au moins 6 est acycliquement 3-liste coloriable ?

Une autre approche serait inspirée du Problème d'Havel [50] en version acyclique :

Question 5

Existe-t-il r tel que $d(C_i, C_j) \geq r \Rightarrow \chi_a(G) \leq 3$, avec $C_i, C_j \in \{C_3, \dots, C_6\}$?

Question 6

Étant donné $i \geq 6$, existe-t-il une constante d telle que tout graphe planaire sans cycle de longueurs 4 à i avec $d_\Delta(G) \geq d$ est acycliquement 3-liste coloriable. Pour i donné, si d existe, quelle est la plus petite valeur de d ?

Dans le **Chapitre 3**, nous avons étudié la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques en déterminant les majorations de χ'_s en fonction du degré moyen maximum. Nous nous sommes également intéressés à la coloration forte d'arêtes des graphes subcubiques sans cycles de longueurs données. Nous avons également présenté différents résultats de NP-complétude pour la classe des graphes planaires subcubiques, ce qui a permis de légitimer les conditions suffisantes de 6-coloration forte d'arêtes que nous avons établis. Après avoir étudié ces différents aspects, plusieurs questions émergent :

Question 7

Peut-on prouver que tout graphe planaire subcubique G de maille $g \geq 7$, est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$?

L'argument de planarité que nous avons utilisé pour diminuer la maille de 30 à 16 n'est pas suffisant pour diminuer les mailles des autres cas (*cf.* Corollaire 3.3.2). Il faut donc utiliser d'autres arguments de planarité pour diminuer ces mailles. On peut également imaginer qu'en utilisant une procédure de déchargement globale nous pourrions améliorer nos majorations établies dans le Théorème 3.1.5.

Concernant la famille des graphes planaires subcubiques sans cycles de longueurs données qui admettent une coloration forte d'arêtes avec au plus 9 couleurs, nous pouvons nous poser la question suivante :

Question 8

Pour quelles valeurs de i et j , peut-on prouver qu'un graphe planaire subcubique G sans cycles de longueurs i à j est tel que $\chi'_s(G) \leq 9$?

Nous avons également obtenu une majoration optimale de l'indice chromatique fort pour la famille des graphes planaires extérieurs en prouvant que :

Tout graphe planaire extérieur G de degré maximum $\Delta \geq 3$ est tel que $\chi'_s(G) \leq 3\Delta - 3$. De plus, pour tout $\Delta \geq 3$, il existe un graphe planaire extérieur G tel que $\chi'_s(G) = 3\Delta - 3$.

En ce qui concerne les problèmes de décision, nous avons été les premiers à nous restreindre à la classe des graphes planaires. On peut cependant se poser quelques questions :

Question 9

Peut-on prouver que le problème de 5-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et pour toute maille quelconque fixée ?

Question 10

Peut-on prouver que le problème de 7-COLORATION FORTE d'arêtes est NP-complet pour les graphes planaires de degré maximum 3 ?

Dans le **Chapitre 4**, nous avons abordé la coloration d'arêtes sommets adjacents distinguants en déterminant les majorations de χ'_{avd} en fonction du degré moyen maximum. Notre travail s'inscrit dans la continuité de celui effectué par Wang et Wang en 2010 [88]. Nous nous sommes focalisés sur la famille des graphes de degré maximum au moins 5. Cependant, il subsiste plusieurs interrogations. Notamment une question de caractérisation comme l'ont proposé Wang et Wang [88] :

Question 11

Peut-on prouver que si $mad(G) < 3 - \frac{2}{\Delta(G)}$ et $\Delta(G) \geq 5$, alors $\chi'_{avd}(G) = \Delta(G) + 1$ si et seulement si G contient des sommets adjacents de degré maximum ?

Question 12

Peut-on améliorer la majoration $3 - \frac{2}{\Delta(G)}$ pour $\Delta(G) \geq 5$?

En utilisant une procédure de déchargement globale par exemple, on pourrait peut être encore affiner nos résultats.

On se pose également une question relative à l'optimalité de nos résultats :

Question 13

Trouver G et $f(\Delta)$ tels que $\text{mad}(G) = f(\Delta)$ et $\chi'_{\text{avd}}(G) > \Delta + 1$.

Bibliographie

- [1] S. Akbari, H. Bidkhori, and N. Nosrati. r -strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.*, 306 :3005–3010, 2006.
- [2] M. O. Albertson and D. M. Berman. Every planar graph has an acyclic 7-coloring. *Israel J. Math.*, 28 :169–174, 1977.
- [3] N. Alon, C. McDiarmid, and B. Reed. Acyclic coloring of graphs. *Random Struct. Algor.*, 2(3) :277–288, 1991.
- [4] L.D. Andersen. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10. *Discrete Mathematics*, 108 :231–252, 1992.
- [5] K. Appel and W. Haken. The existence of unavoidable sets of geographically good configurations. *Illinois J. Math.*, 20 :218–297, 1976.
- [6] B. Balasundaram and S. Butenko. *Handbook of Optimization in Telecommunications*, volume 5, pages 865–890. Springer, 2006.
- [7] P. N. Balister, E. Györi, J. Lehel, and R. H. Schelp. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings. *SIAM J. Discrete Math.*, 21 :237–250, 2007.
- [8] P.N. Balister, O.M. Riordan, and R.H. Schelp. Vertex-distinguishing edge-colorings of graphs. *Journal of Graph Theory*, 42 :95–109, 2003.
- [9] C.L. Barrett, G. Istrate, V.S.A. Kumar, M.V. Marathe, S. Thite, and S. Thulasidasan. Strong edge coloring for channel assignment in wireless radio networks. *Proc. of the 4th annual IEEE international conference on Pervasive and Communications Workshops*, pages 106–110, 2006.
- [10] C. Berge. *Graphes*. Gauthiers–Villars, 3rd edition, 1987.
- [11] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. New York : Macmillan, 1976.
- [12] O. V. Borodin. On acyclic coloring of planar graphs. *Discrete Math.*, 25 :211–236, 1979.
- [13] O. V. Borodin. Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings. *J. Graph Theory*, 21(2) :183–186, 1996.
- [14] O. V. Borodin. Acyclic 3-choosability of planar graphs without cycles of length 4 from 12. *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, 16(5) :26–33, 2009.
- [15] O. V. Borodin, M. Chen, A. O. Ivanova, and A. Raspaud. Acyclic 3-choosability of sparse graphs with girth at least 7. *Discrete Math.*, 310 :2426–2434, 2010.

- [16] O. V. Borodin, D. G. Fon-Der Flaass, A. V. Kostochka, A. Raspaud, and E. So-pena. Acyclic list 7-coloring of planar graphs. *J. Graph Theory*, 40 :83–90, 2002.
- [17] O. V. Borodin, A. N. Glebov, A. Raspaud, and M. R. Salavatipour. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 93 :303–311, 2005.
- [18] O. V. Borodin and A. O. Ivanova. Acyclic 5-choosability of planar graphs without adjacent short cycles. *Submitted for publication*, 2009.
- [19] O. V. Borodin and A. O. Ivanova. Acyclic 3-choosability of planar graphs with no cycles of length from 4 to 11. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 7 :275–283, 2010.
- [20] O. V. Borodin and A. O. Ivanova. Acyclic 4-choosability of planar graphs with no 4- and 5-cycles. *Submitted for publication*, 2010.
- [21] O. V. Borodin, A. O. Ivanova, and A. Raspaud. Acyclic 4-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor triangular 6-cycles. *Discrete Math.*, 310 :2946–2950, 2010.
- [22] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, and D. R. Woodall. Acyclic colourings of planar graphs with large girth. *J. London Math. Soc.*, 60(2) :344–352, 1999.
- [23] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 37 :194–197, 1941.
- [24] A.C. Burriss and R.H. Schelp. Vertex-distinguishing proper edge-colorings. *Journal of Graph Theory*, 26 :73–83, 1997.
- [25] M.I. Burstein. Every 4-valent graph has an acyclic 5-coloring. *Soobšč. Akad. Nauk Gruzin SSR*, 93 :21–24, 1979.
- [26] J. Cerný, M. Horňák, and R. Soták. Observability of a graph. *Mathematica Slovaca*, 46(1) :21–31, 1996.
- [27] M. Chen and A. Raspaud. Planar graphs without 4, 5 and 8-cycles are acyclically 4-choosable. *Electron. Notes in Discrete Math.*, 34 :659–667, 2009.
- [28] M. Chen and A. Raspaud. On acyclic 4-choosability of planar graphs without short cycles. *Discrete Math.*, 310 :2113–2118, 2010.
- [29] M. Chen and A. Raspaud. Planar graphs without 4- and 5-cycles are acyclically 4-choosable. *Submitted for publication*, 2010.
- [30] M. Chen and A. Raspaud. A sufficient condition for planar graphs to be acyclically 5-choosable. *Submitted for publication*, 2010.
- [31] M. Chen, A. Raspaud, N. Roussel, and X. Zhu. Acyclic 4-choosability of planar graphs. *Discrete Math.*, 311 :92–101, 2011.
- [32] M. Chen and W. Wang. Acyclic 5-choosability of planar graphs without 4-cycles. *Discrete Math.*, 308(5) :6216–6225, 2008.
- [33] D.W. Cranston. Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4 using 22 colors. *Discrete Mathematics*, 306(21) :2772–2778, 2006.

-
- [34] E. Dedó, D. Torri, and N. Zagaglia Salvi. The observability of the Fibonacci and the Lucas cubes. *Discrete Math.*, 255 :55–63, 2002.
- [35] Y. Dieng, H. Hocquard, and R. Naserasr. Acyclic coloring of graphs with given maximum degree, 2010. Conference 8FCC.
- [36] R. Diestel. *Graph Theory*. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2005.
- [37] P. Erdős, A. L. Rubin, and H. Taylor. Choosability in graphs. *Congr. Numer.*, 26 :125–157, 1979.
- [38] J. Erickson, S. Thite, and D. Bunde. Distance-2 edge coloring is NP-complete. Technical report, Department of Computer Science, University of Illinois, 2005.
- [39] R.J. Faudree, A. Gyárfas, R.H. Schelp, and Zs. Tuza. Induced matchings in bipartite graphs. *Discrete Mathematics*, 78 :83–87, 1989.
- [40] R.J. Faudree, A. Gyárfas, R.H. Schelp, and Zs. Tuza. The strong chromatic index of graphs. *Ars Combinatoria*, 29B :205–211, 1990.
- [41] O. Favaron, H. Li, and R.H. Schelp. Strong edge coloring of graphs. *Discrete Math.*, 159 :103–109, 1996.
- [42] G. Fertin and A. Raspaud. Acyclic coloring of graphs of maximum degree Δ . *DMTCS proc. AE*, pages 389–396, 2005.
- [43] G. Fertin and A. Raspaud. Acyclic coloring of graphs of maximum degree five : nine colors are enough. *Inform. Process. Lett.*, 105 :65–72, 2008.
- [44] J.L. Fouquet and J.L. Jolivet. Strong edge-colorings of graphs and applications to multi- k -gons. *Ars Combinatoria A*, 16 :141–150, 1983.
- [45] J.L. Fouquet and J.L. Jolivet. Strong edge-coloring of cubic planar graphs. *Progress in Graph Theory*, pages 247–264, 1984.
- [46] M.R. Garey, D.S. Johnson, and L.J. Stockmeyer. Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1(3) :237–267, 1976.
- [47] B. Grünbaum. Acyclic colorings of planar graphs. *Israel J. Math.*, 14 :390–408, 1973.
- [48] S. Gutner. The complexity of planar graph choosability. *Discrete Math.*, 159 :119–130, 1996.
- [49] H. Hatami. $\Delta + 300$ is a bound on the the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number. *J. Combin. Theory Ser. B*, 95 :246–256, 2005.
- [50] I. Havel. O zharvitelnosti rovinných grafů třemi barvami. *Math. Geometrie Theorie Grafů*, pages 89–91, 1970.
- [51] H. Hocquard. Acyclic coloring of graphs with maximum degree six. *Inform. Process. Lett.*, 111 :748–753, 2011.
- [52] H. Hocquard and M. Montassier. Acyclic coloring of graphs of maximum degree five. Technical report, LaBRI, 2008.

- [53] H. Hocquard and M. Montassier. Every planar graph without cycles of lengths 4 to 12 is acyclically 3-choosable. *Inform. Process. Lett.*, 109 :1193–1196, 2009.
- [54] H. Hocquard and M. Montassier. Adjacent vertex-distinguishing edge coloring of graphs with maximum degree Δ . *To appear in JOCO*, 2011.
- [55] H. Hocquard, M. Montassier, and A. Raspaud. A note on the acyclic 3-choosability of some planar graphs. *Discret Appl. Math.*, 158(10) :1104–1110, 2010.
- [56] H. Hocquard, P. Ochem, and P. Valicov. Strong edge coloring and induced matchings. *Submitted for publication*, 2011.
- [57] H. Hocquard, P. Ochem, and P. Valicov. Strong edge colouring of planar graphs. Technical report, LaBRI, 2011.
- [58] H. Hocquard and P. Valicov. Strong edge colouring of subcubic graphs. *Discrete Appl. Math.*, 159(15) :1650–1657, 2011.
- [59] P. Horák, H. Qing, and W.T. Trotter. Induced matchings in cubic graphs. *Journal of Graph Theory*, 17 :151–160, 1993.
- [60] M. Horňák. Asymptotic behaviour of the observability of Q_n . *Discrete Math.*, 176 :139–148, 1997.
- [61] M. Horňák and R. Soták. Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts. *Ars Combinatoria*, 41 :289–301, 1995.
- [62] T. R. Jensen and B. Toft. Choosability versus chromaticity. *Geombinatorics*, 5 :45–64, 1995.
- [63] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience, New York, 1995.
- [64] A. V. Kostochka. Acyclic 6-colorings of planar graphs. *Metody Diskret. Anal.*, 28 :40–56, 1976.
- [65] A. V. Kostochka and L. S. Melnikov. Note to the paper of Grünbaum on acyclic colorings. *Discrete Math.*, 14 :403–406, 1976.
- [66] A. V. Kostochka and C. Stocker. Graphs with maximum degree 5 are acyclically 7-colorable. *Ars Mathematica Contemporanea*, 4 :153–164, 2011.
- [67] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 :271–283, 1930.
- [68] M. Mahdian. The strong chromatic index of graphs. Master's thesis, University of Toronto, 2000.
- [69] M. Mahdian. On the computational complexity of strong edge coloring. *Discrete Appl. Math.*, 118(3) :239–248, 2002.
- [70] M. Mirzakhani. A small non-4-choosable planar graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 17 :15–18, 1996.

-
- [71] J. Mitchem. Every planar graph has an acyclic 8-coloring. *Duke Math. J.*, 41 :177–181, 1974.
- [72] M. Molloy and B. Reed. A bound on the strong chromatic index of a graph. *J. Combin. Theory Ser. B*, 69(2) :103–109, 1997.
- [73] M. Montassier. Colorations de graphes sous contraintes, conception de réseaux embarqués tolérants aux pannes. *Ph. D. Thesis, Université Bordeaux 1, France*, 2005.
- [74] M. Montassier. Acyclic 4-choosability of planar graphs with girth at least 5. *Trends in Mathematics : Graph Theory in Paris*, pages 299–310, 2007.
- [75] M. Montassier, P. Ochem, and A. Raspaud. On the acyclic choosability of graphs. *J. Graph Theory*, 51 :281–300, 2006.
- [76] M. Montassier, A. Raspaud, and W. Wang. Acyclic 4-choosability of planar graphs without cycles of specific lengths. In *Topics in discrete mathematics, Algorithms Combinatorics*, volume 26, pages 473–491. Springer, Berlin, 2006.
- [77] M. Montassier, A. Raspaud, and W. Wang. Acyclic 5-choosability of planar graphs without small cycles. *J. Graph Theory*, 54 :245–260, 2007.
- [78] T. Nandagopal, T. Kim, X. Gao, and V. Barghavan. Achieving MAC layer fairness in wireless packet networks. *Proc. 6th ACM Conf. on Mobile Computing and Networking*, pages 87–98, 2000.
- [79] S. Ramanathan. A unified framework and algorithm for (T/F/C) DMA channel assignment in wireless networks. *Proc. IEEE INFOCOM'97*, pages 900–907, 1997.
- [80] S. Ramanathan and E.L. Lloyd. Scheduling algorithms for multi-hop radio-networks. *IEEE/ACM Trans. Networking*, 2 :166–177, 1993.
- [81] S. Skulrattanakulchai. Acyclic colorings of subcubic graphs. *Inform. Process. Lett.*, 92 :161–167, 2004.
- [82] C. Thomassen. Every planar graph is 5-choosable. *J. Combin. Theory Ser. B*, 62 :180–181, 1994.
- [83] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p -graph. *Metody Diskret. Analiz.*, 3 :23–30, 1964.
- [84] V.G. Vizing. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors. *Metody Diskret. Analiz.*, (19) :3–10, 1976.
- [85] M. Voigt. List colourings of planar graphs. *Discrete Math.*, 120 :215–219, 1993.
- [86] M. Voigt. A non-3-choosable planar graph without cycles of length 4 and 5. *Discrete Math.*, 307 :1013–1015, 2007.
- [87] W. Wang and M. Chen. Planar graphs without 4-cycles are acyclically 6-choosable. *J. Graph Theory*, 61 :307–323, 2009.

- [88] W. Wang and Y. Wang. Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of graphs with smaller maximum average degree. *J. Comb. Optim.*, 19 :471–485, 2010.
- [89] D. B. West. Strong edge-coloring, open problems - graph theory and combinatorics. <http://www.math.uiuc.edu/west/openp/strongedge.html>.
- [90] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, and V. Ch. Venkaiah. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree 6. *Electron. Notes Discrete Math.*, 35 :177–182, 2009.
- [91] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, and V. Ch. Venkaiah. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree Δ . *Proc. of Indian Mathematical Society*, 35 :177–182, 2009.
- [92] K. Yadav, S. Varagani, K. Kothapalli, and V. Ch. Venkaiah. Acyclic vertex coloring of graphs of maximum degree 5. *Discrete Math.*, 311 :342–348, 2011.
- [93] H. Zhang and B. Xu. Acyclic 5-choosability of planar graphs with neither 4-cycles nor chordal 6-cycles. *Discrete Math.*, 309(20) :6087–6091, 2009.
- [94] Z. Zhang, L. Liu, and J. Wang. Adjacent strong edge coloring of graphs. *Appl. Math. Lett.*, 15 :623–626, 2002.