

UNIVERSITE DE PROVENCE – AIX MARSEILLE UNIVERSITE

Ecole Doctorale Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique

***SUR LA COMPREHENSION DES PHENOMENES
DE COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE DANS
LES PROPULSEURS A POUDRE***

T H È S E

Présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PROVENCE - AIX MARSEILLE UNIVERSITE

Spécialité Mécanique énergétique

par

Julie DEVESVRE

Le 13 décembre 2011

COMPOSITION DU JURY

Rapporteurs

M. BOUKAMEL Adnane, Directeur de l'EHTP, Casablanca MAROC

M. PLOURDE Frédéric, Directeur de recherche, Institut P', Université de Poitiers

Examineurs

M. BURTSHELL Yves, Professeur, IUSTI, Université de Provence

M. CHAMPANEY Laurent, Professeur, LMT, ENS de Cachan

M. GIORDANO Jérôme, Maître de Conférences, IUSTI, Université de Provence (co-directeur)

M. MEDALE Marc, Professeur, IUSTI, Université de Provence (co-directeur)

Invités

M. LEJEUNES Stéphane, Ingénieur de Recherche, LMA, Marseille

M. PETITOT Stéphane, Ingénieur Propulsion Solide, CNES, Evry

Remerciements

Les travaux qui font l'objet de ce mémoire ont été réalisés au laboratoire IUSTI (Institut Universitaire des Systèmes Thermiques Industriels UMR CNRS 6595). Je remercie Lazhar Houas pour son accueil au sein de l'équipe qu'il dirige, l'équipe DTF (Dynamique et Thermo-physique des Fluides).

Je remercie Marc Médale et Jérôme Giordano qui ont encadré ce travail. Je les remercie pour ce tout ce qu'ils m'ont appris et pour leurs nombreux conseils dispensés au cours de ces trois années.

J'adresse mes remerciements à l'ensemble des membres du jury d'avoir accepté de consacrer un peu de leur temps pour examiner mon travail : merci à Adnane Boukamel et Frédéric Plourde pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon manuscrit en acceptant d'en être les rapporteurs ; merci à Laurent Champaney qui m'a fait le plaisir et l'honneur de présider mon jury (j'ai apparemment ouvert la voie à toute une série de présidence) ; enfin merci à Yves Burtschell pour sa présence en tant qu'examinateur et pour ses remarques lors de ma soutenance.

Mes remerciements vont également à Stéphane Lejeunes qui a partagé avec moi ses connaissances en matière d'élastomère, et ce jusqu'à la dernière minute ; et à Stéphane Petitot pour m'avoir ouvert les portes de la direction des lanceurs (DLA) au Centre spatial d'Evry. Je les remercie pour leur présence à ma soutenance de thèse.

Parce que j'ai eu la possibilité d'avoir une part expérimentale dans mes travaux, je remercie les expérimentateurs tube à chocs du laboratoire : Lazhar H., George J., Christian M., Laurent B. et Alice C.

Je tiens à remercier tous ceux avec qui j'ai pu partager d'agréables moments à l'IUSTI : Lionel, Jérôme, Jean-Denis, Pierre, David, Hervé, Laurent, Benjamin ainsi que tous ceux que j'ai pu croiser pendant ma thèse.

L'occasion est trop belle pour ne pas la saisir, les amis merci !!!!!

Merci à Mymy, Rafik, Julie F., Delphine, Ramla, Clo, Dri, tous mes grands fous 8B1/3, Michel P., aux Kchanais (Danièle et les Christines : les drôles de dames du DGM, tous les membres du DGM qui me réservent toujours un super accueil lors de mes passages à Cachan, PapaJess, Bouga Bien, la Choco's Team, la Lika et tous les autres), Stéphanie, Yoann & Julie D., Jérémy & Audrey, Quentin.

Eva, ma choupinette, je te remercie d'avoir fait le déplacement pour ma soutenance. J'étais super heureuse de t'avoir à mes côtés à cette occasion. Mon petit doigt me dit que nous aurons encore de nombreux événements à fêter ensemble dans les années à venir ☺

Je remercie sincèrement mes parents, ma sœur et mon frère pour leur courage, car je pense définitivement qu'il en faut pour me supporter. Merci pour votre soutien inconditionnel et pour vos encouragements.

Enfin, Sébastien, merci. Sans beaucoup ni infiniment, merci tout simplement.

A Joe & Jane
A mon p'tit loup

Table des matières

1	Equations générales	18
1.1	Equation du problème fluide	19
1.1.1	Equation de conservation de la masse	19
1.1.2	Equation de conservation de la quantité de mouvement	21
1.1.3	Equation de conservation de l'énergie	22
1.2	Equations du problème de mécanique du solide déformable	23
1.2.1	Cas d'un problème d'élasticité en grandes déformations	24
1.2.2	Cas d'un problème d'hyperélasticité	25
2	Méthodes de résolution	32
2.1	Résolution des équations de la dynamique des fluides compressibles	33
2.2	Résolution des équations de la dynamique des solides déformables	35
2.2.1	Cas d'un problème d'élasticité en grandes déformations	35
2.2.2	Cas d'un problème d'hyperélasticité	40

2.2.3	Discrétisation temporelle	47
2.3	Conclusion	49
3	Validations	52
3.1	Cas des grandes déformations en élasticité linéaire	53
3.1.1	Etude d'une solution analytique	53
3.1.2	Comparaison simulation numérique / modèle analytique	55
3.2	Cas d'hyperélasticité	59
3.2.1	Etude d'un cas de traction	59
3.2.2	Etude d'un cas de sollicitations composées compression/cisaillement .	66
3.2.3	Etude d'un cas de cisaillement	68
3.3	Conclusions	75
4	Méthode numérique de couplage de MARCUS et CARBUR	77
4.1	Couplage numérique	78
4.1.1	Algorithmes de couplage	78
4.1.2	Passage des conditions aux limites	80
4.1.3	Traitement du maillage dynamique	81
5	Elaboration d'un banc d'essai d'interactions fluide-structure	84

5.1	Introduction	85
5.2	Réalisation de la maquette d'essai	86
5.2.1	1er montage : plaque d'élastomère horizontale	86
5.2.2	2ème montage : plaque d'élastomère verticale	90
5.3	Comparaison des résultats expérimentaux aux simulations numériques	91
6	Conclusion et perspectives	99
7	Annexes	101
7.1	Annexe A : Différents modèles de potentiels d'énergie libre isotropes incompressibles	102
7.2	Annexe B : Discrétisation par la méthode des éléments finis d'un problème d'élasticité linéaire	103
7.2.1	Matrice de masse élémentaire	106
7.2.2	Matrice de rigidité élémentaire	106
7.3	Annexe C : Discrétisation par la méthode des éléments finis d'un problème d'hyperélasticité	110
7.3.1	Matrice de masse élémentaire	113
7.3.2	Matrice tangente élémentaire	113

Table des figures

1	Maquette d'Ariane 5 au Bourget	8
2	Ariane 5	9
3	Détails d'un MPS	10
4	Illustration de l'écoulement au sein du P230 (champ de vorticité) : localisation des différents détachements tourbillonnaires (source AVIO)	11
5	Détails des phases de création des VSA, VSP et VSO	12
1.1	Définition du domaine Oméga	23
3.1	Description de la poutre étudiée et de ses conditions limites	53
3.2	Comparaison analytique numérique pour le maillage 200x11 nœuds	56
3.3	Comparaison analytique numérique pour le maillage 400x21 nœuds	57
3.4	Conditions limites en déplacement et en effort du cas de traction/compression	59
3.5	Superposition du déplacement u^A obtenu analytiquement et numériquement .	62
3.6	Evolution de l'écart entre les solutions analytique et numérique en fonction de l'effort imposé pour un maillage de 10x10 éléments - Cas de traction/compression	64

3.7	Evolution de l'écart entre les solutions analytique et numérique en fonction de l'effort imposé pour un maillage de 10x10 éléments - Cas de traction/compression (Zoom sur la partie centrale de la figure 3.6)	65
3.8	Conditions limites en déplacement et en effort d'un cas de compression	67
3.9	Conditions limites en déplacement et en effort d'un cas de cisaillement	69
3.10	Contrainte Π_{12} en cisaillement sur le code ZeBuLoN pour un maillage de 10x10 éléments	70
3.11	Déformation ϵ_{xy} en cisaillement sur le code MARCUS (facteur d'amplification de 2)	70
3.12	Déformée du domaine sur le code MARCUS pour les 4 tailles de mailles étudiées	71
3.13	Zoom sur l'extrémité supérieure droite pour les 4 tailles de maillage	72
3.14	Evolution des écarts e_u et e_v en fonction de la taille du maillage	73
4.1	Algorithme de couplage	79
4.2	Passage des conditions aux limites à l'interface	80
4.3	Répartitions des déplacements du maillage dynamique	81
4.4	Maillage dynamique	82
5.1	Montage des travaux de Jérôme Giordano	85
5.2	Tenue d'une plaque à l'horizontale	87
5.3	Configuration du montage envisagé	88
5.4	Quelques résultats préliminaires	89

5.5	Montage choisi avec plaque verticale	90
5.6	Comparaison entre simulation et expérience : amplitude de la flèche	91
5.7	Comparaison entre expérience (bas) et simulation (haut) toutes les $50 \mu s$ de $t = 0 s$ à $t = 200 \mu s$: Ombroscopie et schlieren	92
5.8	Comparaison entre expérience (bas) et simulation (haut) toutes les $50 \mu s$ de $t = 250 s$ à $t = 400 \mu s$: Ombroscopie et schlieren	93
5.9	Schématisation des recirculations induites par l'écoulement dans le tube à chocs	96
5.10	Allure de la déformée de la plaque sous les effets 3D	97

Liste des tableaux

2.1	Domaine de stabilité du schéma temporel de Newmark	48
2.2	Méthodes classiques associées à différents couple (γ, β)	48
3.1	Ecart entre u_{ana}^A et u_{num}^A	58
3.2	Ecart entre la solution analytique et la solution du déplacement horizontal u^A	62
3.3	Ecart entre la solution analytique et la solution du déplacement horizontal v^A	63
3.4	Section après déformation et calcul de l'écart avec la section avant essai . . .	66
3.5	Données pour le calcul de u_{ex}^A par une extrapolation de Richardson	67
3.6	Ecart entre l'extrapolation asymptotique de Richardson de la solution et la solution numérique	68
3.7	Ecart entre la solution numérique de référence et la solution numérique obtenue sur MARCUS	72

Introduction

Dans les années 60, face aux progrès russes et américains dans le domaine de la conquête spatiale, la communauté scientifique européenne exprima le souhait de la création d'un programme spatial scientifique européen. C'est en collaboration avec les britanniques et les allemands que la fusée à trois étages Europa fut développée. Les échecs rencontrés au cours de ses différents lancements amenèrent les acteurs du projet à l'abandonner. C'est le 31 juillet 1973 que les pays européens s'accordèrent pour lancer le projet Ariane. Six ans plus tard, le 24 décembre 1979, Ariane 1 effectua son premier vol. Il sera suivi de plusieurs dizaines d'autres tirs réalisés par Ariane 2, Ariane 3 et Ariane 4. Toujours dans un soucis de progression et de compétitivité, le projet Ariane 5 (fig.1), fut initié en janvier 1985. Sa création fut confiée à l'ESA (maître d'ouvrage) et au CNES (maître d'œuvre). Son premier lancement réussi n'aura lieu qu'en octobre 1997 après avoir essuyé un échec en juin 1996. Le bilan en décembre 2011 s'élève finalement à près de 50 lancements validés.



FIGURE 1 – Maquette d'Ariane 5 au Bourget

Ariane 5 est le premier lanceur dit à trois étages. Il se compose d'un étage principal cryotechnique (EPC) équipé d'un moteur VULCAIN (fig.2a). Le moteur est l'élément propulsif de l'EPC. Il délivre jusqu'à 116 tonnes de poussée dans le vide. Sa mise à feu de 7s avant le décollage permet de contrôler sa montée en puissance et de la stabiliser. Accolés à l'EPC, on trouve deux étages accélérateurs à poudre (EAP) ou boosters (fig.2b). Ils ont pour mission d'arracher les 725 tonnes du lanceur à la table de lancement avec une accélération de 0,5 g au décollage. D'une hauteur de plus de 30 m, les EAP sont chargés chacun de près de 240 tonnes de propergol solide (230 tonnes initialement, d'où leur nom MPS P230 ou P230)(Scippa [1]).

Ils délivrent une poussée combinée de 1370 tonnes au décollage, soit plus de 90% de la poussée du lanceur à ce moment. Leur durée totale de fonctionnement est de 130 secondes avec une poussée moyenne de 1000 tonnes avant leur largage vers 70 km d'altitude. Enfin, l'étage à propergol stockable (EPS) est l'étage supérieur destiné à propulser la charge utile d'Ariane 5 vers son orbite finale et à assurer une injection orbitale de précision. Il emporte pour cela 9,7 tonnes d'ergols stockables qui alimentent son moteur Aestus.

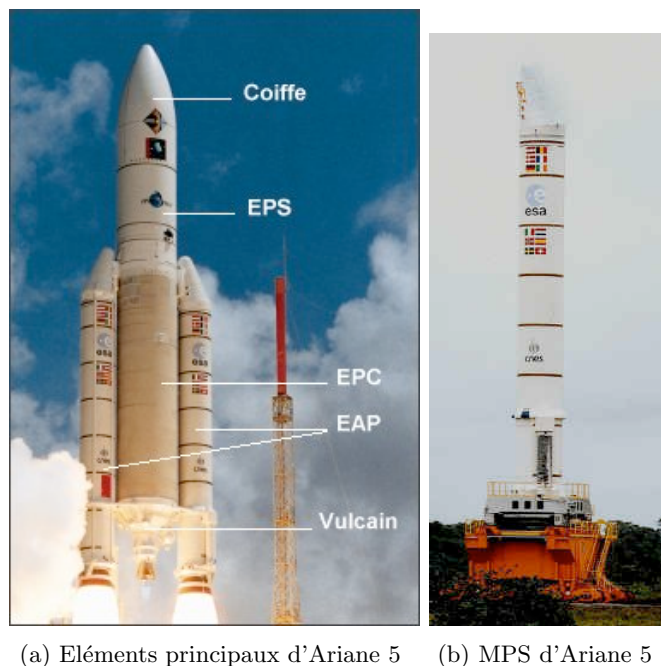


FIGURE 2 – Ariane 5

Basés sur le principe de la propulsion par combustion de propergol, les EAP sont également appelés Moteurs à Propulsion Solide ou MPS. Utilisée au décollage, la propulsion solide délivre une forte poussée en un temps minimal à partir d'une masse et d'un volume réduits. Cependant ce principe présente un inconvénient : la combustion du propergol une fois amorcée ne peut être stoppée.

Un booster est constitué principalement d'une enveloppe métallique, d'un chargement de propergol ou poudre, d'une tuyère, de protection thermique de face (PTF ou joint) et d'un allumeur (fig.3). Ce dernier est souvent muni d'un petit chargement apportant l'énergie nécessaire au lancement de la combustion du chargement principal.

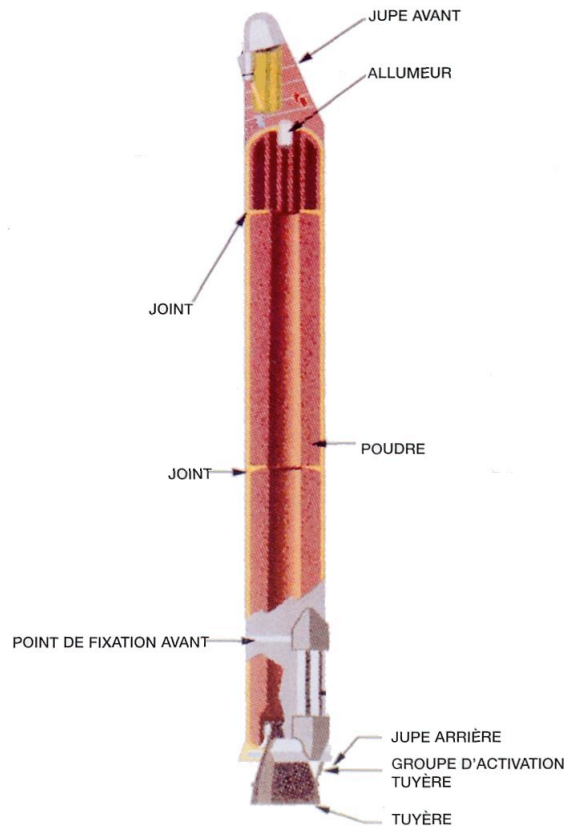


FIGURE 3 – Détails d'un MPS

La combustion du propergol se fait par couches parallèles et les gaz qui en résultent sont canalisés par le convergent dans la tuyère. Pour des raisons technologiques, le propergol est coulé en trois blocs, nécessitant la fragmentation du propulseur. Le premier bloc a une géométrie étoilée offrant une très grande surface de combustion afin d'assurer la poussée initiale nécessaire. Les deux autres sont de géométrie cylindro-conique. Les différents blocs sont séparés par une PTF empêchant la combustion du propergol de se faire par la face amont.

Les MPS P230 sont dotés de capteurs de pression au niveau des fonds avant et arrière du moteur permettant d'accéder à la pression instantanée régnant dans le moteur en vol. Ce système de capteurs a confirmé l'apparition d'oscillations de pression (ODP) à basses fréquences autour de celles des premiers modes longitudinaux du moteur (*Join-Lambert* [2] et *Ballereau et al.* [3]). Ces ODP induisent des vibrations (de l'ordre de 23Hz) dans tout le propulseur qui peuvent être préjudiciables aux charges embarquées. L'écoulement dans

la chambre de combustion (*Simoes* [4]) présente de petites perturbations autour des valeurs moyennes. Ces perturbations peuvent provenir de la combustion du propergol mais également de détachements tourbillonnaires (*Brown* [5]). On identifie dans ces détachements le mécanisme à l'origine des ODP. Ce phénomène a été l'objet de nombreuses recherches aux Etats-Unis (*Flandro & Jacobs* [6] et *Gulick & Magiawala* [7]) et en France dans le cadre du programme ASSM dirigé par le CNES (*Lupoglazoff & Vuillot* [8], *Vuillot & Casalis* [9] et *Ribereau et al.* [10]).

On recense trois types de détachements générés à différents niveaux dans les MPS (fig.4 et fig.5) :

- Angle Vortex Shedding (VSA) ou détachement tourbillonnaire d'angle ;
- Parietal Vortex Shedding (VSP) ou détachement tourbillonnaire pariétal ;
- Obstacle Vortex Shedding (VSO) ou détachement tourbillonnaire d'obstacle.

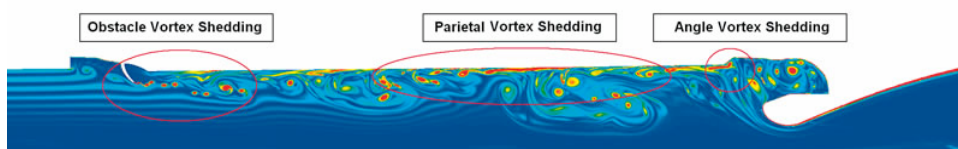


FIGURE 4 – Illustration de l'écoulement au sein du P230 (champ de vorticité) : localisation des différents détachements tourbillonnaires (source AVIO)

Angle Vortex Shedding (VSA) : ce type de détachement est généré par la géométrie des blocs de propergol. En effet, lorsqu'ils présentent un angle ou un brusque élargissement de section de passage, il se crée une couche cisailée avec un profil de vitesse axial. Les structures tourbillonnaires se déplacent alors à vitesse constante depuis le point anguleux. Le VSA a été mis en évidence à nombreuses reprises, que se soit par les expériences sur la maquette 2D plan de l'ESPCI (*Favray* [11]) ou sur le montage en gaz froid VIOLETTE (*Goncalves de Miranda* [12]) mais également par simulation numérique (*Dupays* [13]).

Parietal Vortex Shedding (VSP) : les VSP, découvertes en 1969 (*Varapaev & Yagodka* [14]), se présentent dans les fronts de combustion et sont induits par l'instabilité naturelle de l'écoulement. La vorticité instationnaire s'organise en structures semblant émerger de la paroi (*Cagnon et al.* [15], *Godfroy & Tissier* [16], *Lupoglazoff & Vuillot* [17] et [8]). De nombreux travaux théoriques (*Casalis et al.* [18] et *Griffon & Casalis* [19]), numériques (*Casalis et al.* [20]) et expérimentaux (*Guery et al.* [21]) ont permis de mettre en exergue les VSP. On

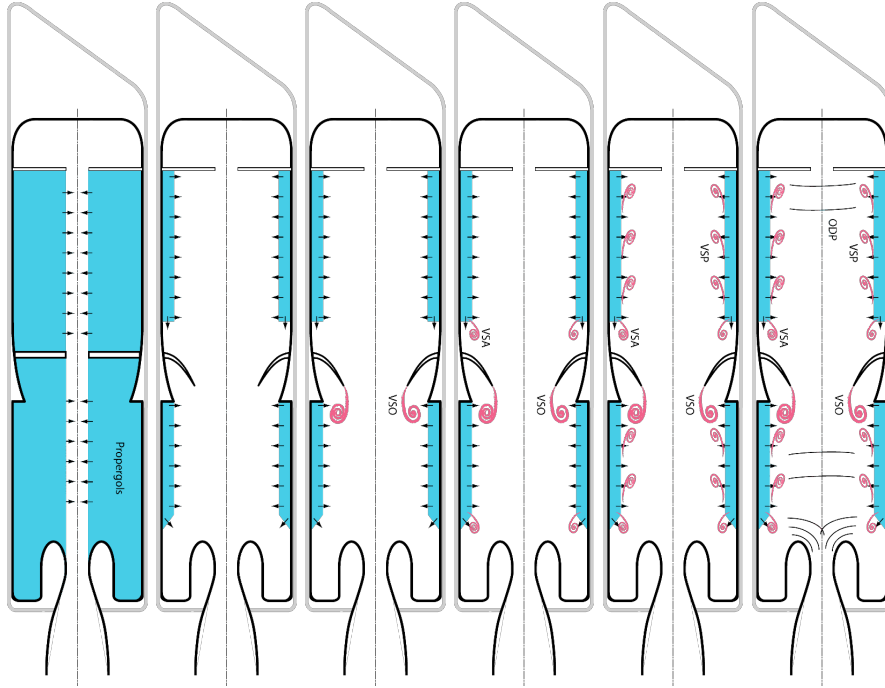


FIGURE 5 – Détails des phases de création des VSA, VSP et VSO

peut citer par exemple les montages VECLA et VALDO de l'ONERA (*Avalon et al.* [22] et *Avalon & Lambert* [23]).

Obstacle Vortex Shedding (VSO) : le sillage induit par les obstacles (principalement les PTF) présents dans l'écoulement entraîne également la formation de tourbillons. En outre, les PTF sont constituées d'un élastomère, relativement souple, dont les déformations peuvent se coupler avec la fréquence des lâchés tourbillonnaires. On assiste alors à un phénomène de couplage fluide-structure préjudiciable pour le moteur. Au cours de ces dernières années, ces mécanismes ont été l'objet de nombreuses études menées notamment par l'ENSMA (*Couton et al.* [24] et *Vetel* [25]), l'ONERA et le CNES (*Cerqueira et al.* [26], [27], [28] et *Nunes* [29]), la SNPE (*Della Pietra et al.* [30]). Ce type de simulation multiphysique représente un grand challenge pour la communauté scientifique (mécanique du propergol, élastomère soumis à de forts gradients thermiques, écoulement instationnaire de fluides multiphasiques, déplacement des conditions limites à l'injection du propergol ...). Par ailleurs, dans notre laboratoire, de précédents travaux ont permis le développement d'un code d'interactions fluide-structure (*Giordano* [31] et *Giordano et al* [32]) ainsi que la conception d'expérience visant à la validation de ce type de codes (*Giordano et al* [33]). La géométrie de cette expérience se voulait proche de celle rencontrée dans les phénomènes des VSO : une plaque libre de se déformer est soumise aux sollicitations mécaniques d'un écoulement compressible. Ainsi, on cherche

d’abord à valider les approches couplées numériques sur un cas test simplifié n’incluant pas toute la physique du MPS. La principale différence se situe dans le comportement de la structure déformable : dans ces premières expériences, la plaque est en acier et peut correctement être caractérisée par une loi de comportement linéaire élastique ce qui n’est plus valable dans le cas d’un élastomère. C’est dans ce contexte que se situent les travaux de thèse exposés dans ce manuscrit. Notre objectif vise ainsi à étendre notre approche numérique aux couplages fluide-structure mettant en jeu une structure au comportement non linéaire en vue d’aborder, plus tard, les problèmes de VSO présents dans la propulsion solide.

Notre approche est basée sur le couplage de deux codes autonomes indépendants : CARBUR et MARCUS.

Le premier, développé depuis une quinzaine d’années (*Cardoso* [34]), est un code volumes finis simulant des écoulements instationnaires compressibles à grande vitesse, réactifs et hors équilibres. L’utilisation de ce code a permis, par exemple de concevoir un système d’aspiration de couche limite optimal en vue d’accroître le temps de rafale des souffleries supersoniques à choc réfléchi (*Cardoso et al.* [35]). Des simulations conduites avec CARBUR ont également apporté une meilleure compréhension de la prédominance des effets visqueux dans les phénomènes d’hystérésis rencontrés dans un écoulement autour d’un dard axisymétrique (*Burtschell & Zeitoun* [36]).

Le second code, MARCUS, est un code éléments finis modélisant entre autres la dynamique des structures déformables. Il est aussi utilisé dans les simulations d’écoulement thermoconvectifs (*Medale & Cochelin* [37]) ainsi que les écoulements incompressibles diphasiques d’un lit granulaire soumis à un cisaillement (*Chauchat & Medale* [38]). C’est dans ce code que nous étendrons l’étude de problèmes linéaires à des problèmes non linéaires pour des matériaux élastomériques.

Dans le but d’accroître la synergie des travaux dédiés aux VSO, nous avons pris l’initiative d’inviter certains acteurs de la propulsion solide en janvier 2008. En présence de personnes du CNES, de l’ONERA, de la SNPE mais également du Laboratoire de Mécanique et d’Acoustique de Marseille (LMA, UPR 7051), nous avons pu définir un cadre pour les activités de la présente thèse. Ces activités sont ainsi complémentaires des activités en cours dans cette communauté et doivent nous conduire à la réalisation d’une nouvelle expérience de référence. Cette rencontre a également permis de définir une stratégie concernant le choix des matériaux pour, non seulement les expériences que nous avons menées et qui seront présentées dans ce manuscrit, mais aussi celle réalisées à l’ENSMA sur le banc MICAT. Ainsi, ce rapport présente le bilan des travaux effectués au cours de ces trois années de thèse au sein du laboratoire IUSTI : dans un **premier chapitre** nous présentons les différentes équations

réglissant d'une part le problème fluide et d'autre part le problème lié à la mécanique des solides déformables. Nous avons par ailleurs traité le cas d'un problème d'élasticité en grandes déformations puis le cas d'un problème d'hyperélasticité (caractéristique des élastomères). Le **deuxième chapitre** présente les méthodes de résolution des équations établies dans le chapitre 1. Nous exposerons ainsi la méthode des volumes finis utilisée pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Dans le cas des équations de la dynamique des structures, nous avons détaillé comme précédemment les deux types de problèmes étudiés. Pour le problème en élasticité linéaire en grandes déformations, nous présentons la formulation variationnelle associée. Pour le problème d'hyperélasticité, nous avons dans un premier temps établi l'existence de différents modèles de comportement. Une fois le modèle associé au matériau utilisé choisi, nous avons explicité la formulation variationnelle du problème et les méthodes de résolution envisagées. Dans les deux cas, la méthode de discrétisation spatiale utilisée est la méthode des éléments finis. Le **troisième chapitre** dresse un bilan des tests numériques réalisés en vue de la validation des éléments de code hyperélastiques apportés à MARCUS. Nous avons pour cela soit étudié des cas simples dont nous connaissions une solution analytique, soit procédé à une comparaison avec les résultats établis par S. Lejeunes et A. Boukamel au LMA. Dans le **quatrième chapitre**, nous présentons la méthode de couplage numérique utilisée pour les codes CARBUR et MARCUS. Enfin, nous exposons dans le **cinquième chapitre** la conception du montage, les résultats expérimentaux que nous avons obtenus ainsi que ceux des simulations. Une comparaison entre simulation et expérience sera proposée.

Bibliographie

- [1] S.Scippa, M. Biagioni & M. Bussière. *Ariane solid boosters experience*. 5th International Symposium on Propulsion for Space Transportation, 1996.
- [2] A. Join-Lambert, M. Halle & C. Dauviau. *Ariane 5, Oscillations de pression EAP, Synthèse des exploitations AEROSPATIALE des tirs au banc P230*. Rapport interne AEROSPATIALE AS-NT-1-A-1845-ASAI, 1996.
- [3] S. Ballereau, F. Godfroy, J-F. Guery & D. Ribereau. *Assessment on analysis and prediction method applied on thrust oscillations of Ariane 5 solid rocket motor*. 39th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, 2003.
- [4] M. Simoes. *Modélisation eulérienne de la phase dispersée dans les moterus à propergol solide, avec prise ne compte de la pression articulaire*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006.
- [5] R.S. Brown, R. Dunlar, S.W.Young & R.C Waugh. *Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets*. Journal of Spacecraft and Rocket, vol.18, N°4, p. 312-319, 1981.
- [6] G.A Flandro. & H.R Jacobs *Vortex-generated sound in cavities*. AIAA Aero-Acoustics Conference, papier N° 73-1014, 1973.
- [7] F.E.C Gulick & K. Magiawala. *Excitation of acoustic modes in a chamber by vortex shedding*. Journal of Sound and Vibration, vol.64, N°3, p.455-457, 1979.
- [8] N. Lupoglazoff & F. Vuillot. *Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors - Numerical simulations and comparisons with firing tests*. 34th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, papier N°96-0761, 1996-a.
- [9] F. Vuillot & G. Casalis. *Recent advances on the stability of large segmented space boosters*. 2nd European Conference on Launcher Technology - Space Solid Propulsion, 2000.
- [10] D. Ribereau, J.F Guery & P Le Breton. *Numerical simulation of thrust oscillations of Ariane 5 solid rocket boosters*. 2nd European Conference on Launcher Technology - Space Solid Propulsion, 2000.

- [11] F. Favray. *Etude de l'instabilité d'un écoulement confiné. Application à un modèle hydrodynamique de propulseur à propergol solide pour lanceur spatial*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, 1999.
- [12] F. Goncalves de Miranda. *Etude numérique de l'écoulement instationnaire diphasique dans les propulseurs à propergol solide d'Ariane 5*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2000.
- [13] J. Dupays. *Contribution à l'étude du rôle de la phase condensée dans la stabilité d'un propulseur à propergol solide pour lanceur spatial*. AIAA Journal, vol.19, N°3, 1996.
- [14] V.N. Varapaev & V.I Yagodkin. *Flow stability in a channel with porous walls*. Izv. AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti I Gaza, vol.4, N°5, p.91-95, 1969.
- [15] B. Cagnon, JC. Chastenot, JF. Guery & F. Godfroy. *Programme Oscillations de Poussée*. Base de données numérique, Rapport technique SME, 5823/SNPE/DFP/CER, 1997.
- [16] F. Godfroy & PY. Tissier. *Simulation numérique du vortex shedding dans les maquettes 1/15^e du booster P230 d'Ariane 5*. Programme ASSM, Axe de Stabilité de Fonctionnement, Rapport technique SNPE 883/SNPE/S/NE/D, 1993.
- [17] N. Lupoglazoff & F. Vuillot. *Synthèse des résultats obtenus sur le cas test "C2"*. Programme ASSM, Axe Stabilité de Fonctionnement, Rapport technique ONERA 40/6133 EY, 1993.
- [18] G. Casalis, G. Avalon & JC. Pineau. *Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls*. Physic of Fluids, vol. 10, N°10, p.25-58, 1998.
- [19] J. Griffon & G. Casalis. *On the non parallel stability of the injection-induced two-dimensional Taylor flow*. Physic of Fluids, vol. 13, N°6, p.1635-1644, 2001.
- [20] G. Casalis, J. Griffon, G. Avalon, B. Ugurtas & F. Vuillot. *Instability and resonance in a system simulating the solid propellant motors behaviour* 2nd European Conference on Launcher Technology - Space Solid Propulsion, 2000.
- [21] JF. Guery, f. Vuillot, G. Avalon, F. Plourde, J. Anthoine & B. Platet. *Use of cold flow experiments in the ASSM-program - Lesson and results*. 2nd European Conference on Launcher Technology - Space Solid Propulsion, 2000.
- [22] G. Avalon, G. Casalis & J. Griffond. *Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection*. 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, papier N°98-3218, 1998.
- [23] G. Avalon & D. Lambert. *Montage VALDO : premiers essais de mise au point et de qualification*. Rapport technique ONERA RF 5/00064 DEFA, 2000.
- [24] D. Couton, F. Plourde & S. Doan Kim. *Cold gas simulation of a solid propellant rocket motor*. AIAA Journal, vol. 34, N°12, p. 1462-1464, 1996.

- [25] J. Vetel. *Interaction des structures pariétales sur le développement instationnaire d'écoulements cisailés en milieu confiné - Rôle de l'injection différentielle*. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2001.
- [26] S.Cerqueira, F. Feyel & G. Avalon. *A first step to fluid-structure interaction inside solid propellant rocket motors*. Proceedings of Fluid Structure Interaction, 2009-a.
- [27] S.Cerqueira, G. Chaineray, B. Courbet, M. Errera, F. Feyel & F. Vuillot. *Validation of fluid-structure coupling computations for solid propellant rocket motors applications*. 3rd European Conference for Aerospace Sciences, 2009-b.
- [28] S.Cerqueira, G. Avalon & F. Feyel. *An experimental investigation of fluid-structure interaction inside solid propellant rocket motors*. 45th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit 2009-c.
- [29] R. Nunes. *Interaction fluide-structure sur les mécanismes d'instabilité tourbillonnaires en cavité confinée*. Thèse de Doctorat, ENSMA Poitiers, 2007.
- [30] P. Della Pietra, F. Godfroy & JF. Guery. *Couplage fluid/structure appliqué en propulsion spatiale*. 15^{ème} Congrès Français de Mécanique, 2001.
- [31] J. Giordano. *Contribution à la modélisation numérique des problèmes d'interactions fluide-fluide et fluide-structure*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille I, 2004.
- [32] J. Giordano, Y. Burtschell & M. Medale. *Application d'interactions fluide-structure : impact d'une onde de choc sur une plaque déformable*. 1^{er} Colloque GDR Interactions Fluide-Structure, 2005a.
- [33] J. Giordano, G. Jourdan, Y. Burtschell, M. Medale, D.E Zeitoun & L. Houas. *Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction*. Shock Waves, vol. 14, N°1-2, p. 103-110, 2005b.
- [34] M. Cardoso. *Contribution numérique à l'étude des écoulements à haute enthalpie*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille I, 1997a.
- [35] M. Cardoso, Y. Burtschell & D.E. Zeitoun. *Numerical simulation about different methods for avoiding driver gas pollution in shock tunnel*. 1997b.
- [36] Y. Burtschell & D.E. Zeitoun. *Shock wave interactions in an axisymmetric steady flow*. Shock Waves, 13 :487, 2003.
- [37] M. Medale & B. Cochelin. *A parallel computer implementation of the Asymptotic Numerical Method to study thermal convection instabilities*. Journal of Computational Physics, vol. 228, Issue 22, p. 8249-8262, 2009.
- [38] J. Chauchat & M. Medale. *A three-dimensional numerical model for incompressible two-phase of a granular bed submitted to a laminar shearing flow*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, Issue 9-12, p. 439-449, 2010.

Chapitre 1

Equations générales

Cette partie a pour but de présenter les différentes équations mises en jeu dans les problèmes d'interactions fluide-structure. Dans un premier temps, nous présentons les équations décrivant des écoulements compressibles figés ou réactifs. Dans un second temps, nous traitons les équations d'un problème de mécanique des solides dans le cas de grandes déformations en élasticité linéaire et dans le cas de matériaux hyperélastiques.

1.1 Equation du problème fluide

Nous considérons un écoulement répondant aux caractéristiques suivantes :

1. Le milieu fluide est continu ;
2. il est compressible ;
3. il est constitué de N_s espèces de gaz parfaits ;
4. son comportement rhéologique est newtonien ;
5. l'écoulement est laminaire ;
6. la force de pesanteur est négligée.

Les trois équations de continuité régissant l'écoulement fluide pour l'espèce s étudiée sous les hypothèses citées sont (*Anderson* [1] et *Hoffmann et al.* [2]) :

- L'équation de conservation de la masse ;
- l'équation de conservation de la quantité de mouvement ;
- l'équation de conservation de l'énergie.

1.1.1 Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{\partial \rho_s u_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

où ρ_s est la masse volumique de l'espèce s , t la variable temporelle, x_i la variable spatiale et u_i^s la vitesse de l'espèce dans la direction i .

Cette vitesse se décompose comme la somme de la vitesse de diffusion de l'espèce dans la direction i $u_{i,d}^s$ et de la vitesse moyenne du mélange u_i :

$$u_i^s = u_{i,d}^s + u_i \quad (1.2)$$

Par ailleurs, u_i peut s'écrire comme la pondération de la vitesse de chaque espèce par sa fraction massique :

$$u_i = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\rho_s}{\rho} u_i^s = \sum_{s=1}^{N_s} Y_s u_i^s \quad (1.3)$$

avec ρ la masse volumique du mélange et en posant $Y_s = \frac{\rho_s}{\rho}$ la fraction massique de l'espèce s .

L'expression du flux de diffusion de masse $Q_{i,d}^s$ est donnée par :

$$Q_{i,d}^s = \rho Y_s u_{i,d}^s \quad (1.4)$$

On en fait une approximation par la loi de Fick à l'aide d'un coefficient de diffusion unique D comme suit :

$$Q_{i,d}^s = \rho D \frac{\partial Y_s}{\partial x_i} x_i \quad (1.5)$$

et où D se calcule en supposant la constante de Lewis égale à 1, 2 :

$$\rho D = \frac{\mu Le}{Pr} \text{ avec } Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \text{ et } C_p = \sum_{s=1}^{N_s} Y_s C_{p,s} \quad (1.6)$$

avec Pr est le nombre de Prandtl, μ la viscosité dynamique du fluide, λ sa conductivité et C_p sa capacité thermique.

Si l'on somme l'ensemble des équations (1.1) sur le nombre d'espèces N_s , on obtient l'équation de conservation de la masse du domaine fluide :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.7)$$

1.1.2 Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho u_j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j u_i + p \delta_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_i} = 0 \quad (1.8)$$

avec p la pression du mélange, δ_{ij} le symbole de Kronecker et τ_{ij} les termes du tenseur $\bar{\bar{\tau}}$ des contraintes de cisaillement.

En supposant que le fluide a un comportement newtonien (hypothèse 4), on peut écrire les termes du tenseurs $\bar{\bar{\tau}}$ sous la forme :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \eta \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (1.9)$$

où η la viscosité de volume du fluide.

Sous l'hypothèse de Stokes, on a la relation :

$$3\eta + 2\mu = 0 \quad (1.10)$$

soit :

$$\eta = -\frac{2}{3}\mu \quad (1.11)$$

En ingérant cette expression dans l'équation (1.8), on a finalement la forme du tenseur de contrainte de cisaillement suivante :

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (1.12)$$

1.1.3 Equation de conservation de l'énergie

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i e_t + u_i p - u_i \tau_{ij} + q_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.13)$$

avec e_t l'énergie totale massique et q_i le flux de chaleur de conduction dans la direction i .

1.2 Equations du problème de mécanique du solide déformable

Considérons un domaine déformable Ω tel que :

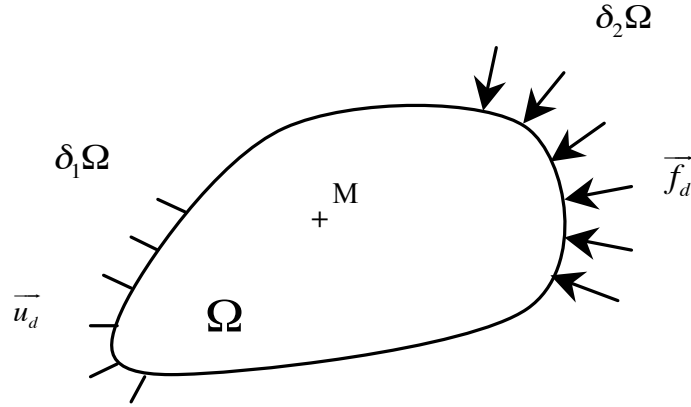


FIGURE 1.1 – Définition du domaine Oméga

- $\delta_1 \Omega$ la frontière du domaine à déplacement imposé
- $\delta_2 \Omega$ la frontière du domaine à effort imposé
- $\delta_1 \Omega \cup \delta_2 \Omega = \delta \Omega$
- $\delta_1 \Omega \cap \delta_2 \Omega = \emptyset$

L'équation locale de la dynamique du milieu continu déformable s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}(M, t) + \vec{f}_v(M, t) = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}(M, t)}{\partial t^2} \quad \forall M \in \Omega \quad \text{et} \quad \forall t \quad (1.14)$$

où $\vec{f}_v$ représentent les forces volumiques, ρ_s la masse volumique de la structure et $\vec{U}(M, t)$ le champ de déplacement au point M à l'instant t .

Deux types de conditions limites sont à prendre en compte :

- *Condition limite en déplacement* : $\vec{U}(M, t) = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1\Omega$
- *Condition limite de type effort* : $\bar{\bar{\sigma}}(M, t) \cdot \vec{n} = \vec{f}_d \quad \forall M \in \delta_2\Omega$ où $\vec{n}$ normale extérieure à $\delta_2\Omega$ en M

1.2.1 Cas d'un problème d'élasticité en grandes déformations

Soit $\bar{\bar{\varepsilon}}(M, t)$ le tenseur des déformations. Il s'exprime en grandes déformations par la relation suivante :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M, t) = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{\nabla}} \vec{U}(M, t) + \bar{\bar{\nabla}}^t \vec{U}(M, t) + \bar{\bar{\nabla}} \vec{U}(M, t) \cdot \bar{\bar{\nabla}}^t \vec{U}(M, t) \right) \quad (1.15)$$

Le tenseur des contraintes est relié au tenseur des déformations par la loi de Hooke généralisée en élasticité linéaire :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M, t) = 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}}(M, t) + \lambda Tr(\bar{\bar{\varepsilon}}(M, t))\bar{\bar{I}} \quad (1.16)$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Par ailleurs, nous pouvons exprimer ces coefficients en fonction du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.17)$$

On peut alors exprimer la loi de comportement sous la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \bar{\bar{\mathcal{D}}} \bar{\bar{\varepsilon}} \quad (1.18)$$

où $\overline{\overline{D}}$ est appelé tenseur de Hooke généralisé. Il caractérise un matériau élastique linéaire en fonction de E et de ν .

1.2.2 Cas d'un problème d'hyperélasticité

Le problème mécanique à résoudre est globalement similaire à celui exposé dans le cadre d'un problème d'élasticité en grandes déformations. Si l'équation de la dynamique et les conditions limites restent inchangées, la loi de comportement n'est plus la même.

Nous allons dans un premier temps faire un point sur la forme de la loi de comportement d'un matériau hyperélastique. Dans un second temps, nous poserons les équations caractérisant un problème d'hyperélasticité.

Notations

Avant de décrire l'élaboration de la loi de comportement hyperélastique, nous posons quelques notations utiles à la compréhension de ce qui suit :

- $\overline{\overline{F}}$ est le gradient de la transformation : $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\nabla}}_0 \vec{U} + \overline{\overline{I}}$
- $\overline{\overline{C}}$ est le tenseur de Cauchy-Green droit : $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t \cdot \overline{\overline{F}}$
- $\overline{\overline{B}}$ est le tenseur de Cauchy-Green gauche : $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{F}} \cdot \overline{\overline{F}}^t$
- $\overline{\overline{E}}$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange : $\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{C}} - \overline{\overline{I}})$
- J est le Jacobien de $\overline{\overline{F}}$: $J = \det \overline{\overline{F}}$
- $\overline{\overline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy
- $\overline{\overline{\Pi}}$ est le Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
- $\overline{\overline{S}}$ est le Second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff
- $\overline{\overline{L}}$ est le tenseur des vitesses de déformation : $\overline{\overline{L}} = \dot{\overline{\overline{F}}} \cdot \overline{\overline{F}}^{-1}$
- $\overline{\overline{D}}$ est le tenseur taux de déformation : $\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{L}} + \overline{\overline{L}}^t)$
- ρ_0, ρ sont les masses volumiques dans la configuration initiale et actuelle et $\rho = \frac{\rho_0}{J}$
- T est la température
- s l'entropie spécifique

- $\vec{q}$ est le flux de chaleur dans la configuration actuelle
- $\vec{Q}$ est le flux de chaleur dans la configuration initiale et $\vec{Q} = J.\overline{\overline{F}}^{-1}.\vec{q}$

Loi de comportement

La loi de comportement d'un système déformable se construit à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem (*Fremond-06* [3]). Cette inégalité est obtenue en utilisant le premier principe (bilan d'énergie mécanique et thermique du système) et le second principe (inégalité fondamentale de bilan d'entropie) de la thermodynamique. En introduisant l'énergie libre de Helmholtz ψ , l'inégalité de Clausius-Duhem (*Truesdell* [4] et *Truesdelle & Toupin* [5]) traduit la positivité de la dissipation. Exprimée dans différentes descriptions, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
\text{Description eulérienne : } \Phi &= \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{q}.\vec{\nabla}T \geq 0 \\
\text{Description mixte : } \Phi_0 &= \overline{\overline{\Pi}} : \overline{\overline{\dot{F}}} - \rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{Q}.\vec{\nabla}_0T \geq 0 \\
\text{Description lagrangienne : } \Phi_0 &= \overline{\overline{S}} : \overline{\overline{\dot{E}}} - \rho_0(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{Q}.\vec{\nabla}_0T \geq 0
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Les matériaux hyper élastiques constituent une catégorie des matériaux élastiques. Ils se caractérisent par deux propriétés fondamentales : toutes les déformations qu'ils subissent sont réversibles et ils ne dissipent pas d'énergie. La loi de comportement doit respecter le principe d'objectivité, c'est-à-dire qu'elle doit être invariante pour tout changement de référentiel.

Sous toutes ces hypothèses et en supposant les effets thermiques nuls, les équations (1.19) permettent d'exprimer les lois suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\overline{\sigma}} = 2\rho\overline{\overline{B}}\frac{\partial\psi(\overline{\overline{B}})}{\partial\overline{\overline{B}}} = 2\frac{\rho_0}{J}\overline{\overline{B}}\frac{\partial\psi(\overline{\overline{B}})}{\partial\overline{\overline{B}}} \\ \overline{\overline{\Pi}} = \rho_0\frac{\partial\psi(\overline{\overline{CouB}})}{\partial\overline{\overline{F}}} \\ \overline{\overline{S}} = 2\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\overline{E}}} \end{array} \right. \tag{1.20}$$

On définit Ψ le potentiel d'énergie libre par unité de volume comme étant :

$$\Psi = \rho_0\psi \tag{1.21}$$

La forme générale de la loi de comportement hyperélastique s'écrit dans chacune des

descriptions (eulérienne, mixte et lagrangienne) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\bar{\sigma}} = \frac{2}{J} \bar{\bar{B}} \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{B}})}{\partial \bar{\bar{B}}} \\ \bar{\bar{\Pi}} = \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{C}} \text{ ou } \bar{\bar{B}})}{\partial \bar{\bar{F}}} \\ \bar{\bar{S}} = 2 \frac{\partial \Psi(\bar{\bar{C}})}{\partial \bar{\bar{C}}} \end{array} \right. \quad (1.22)$$

Isotropie

On dit d'un matériau qu'il est isotrope si ses propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Dans le cas de matériaux hyperélastiques, l'isotropie se traduit par l'expression du potentiel Ψ en fonction des invariants fondamentaux des tenseurs de Cauchy Green $\bar{\bar{C}}$ ou $\bar{\bar{B}}$ (*Sidoroff* [6]). Ceux-ci s'expriment comme suit, où $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{C}}$ ou $\bar{\bar{B}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = tr(\bar{\bar{X}}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left(tr^2(\bar{\bar{X}}) - tr(\bar{\bar{X}}^2) \right) \\ I_3 = \det(\bar{\bar{X}}) \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Désormais, nous pouvons écrire Ψ sous la forme :

$$\Psi(I_1(\bar{\bar{C}}), I_2(\bar{\bar{C}}), I_3(\bar{\bar{C}})) = \Psi(I_1(\bar{\bar{B}}), I_2(\bar{\bar{B}}), I_3(\bar{\bar{B}})) \quad (1.24)$$

Dans l'équation (1.22), la variation de Ψ par rapport à $\bar{\bar{C}}$, $\bar{\bar{B}}$ ou $\bar{\bar{F}}$ se décompose comme :

$$\frac{\partial \Psi(\bar{\bar{X}})}{\partial \bar{\bar{X}}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{\bar{X}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \bar{\bar{X}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \bar{\bar{X}}} \quad (1.25)$$

La variation des invariants I_i par rapport à $\bar{\bar{X}}$ diffère selon le cas où $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{C}}$ ou $\bar{\bar{B}}$ ou $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{F}}$. On distinguera donc les deux cas suivants :

– lorsque $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{C}}$ ou $\bar{\bar{B}}$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \bar{\bar{X}}} = \bar{\bar{I}} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \bar{\bar{X}}} = I_1 \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{X}} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \bar{\bar{X}}} = I_3 \bar{\bar{X}}^{-1} \quad (1.26)$$

– lorsque $\bar{\bar{X}} = \bar{\bar{F}}$:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \bar{\bar{X}}} = 2\bar{\bar{F}} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \bar{\bar{X}}} = 2\bar{\bar{F}} \left(I_1 \bar{\bar{I}} - \bar{\bar{C}} \right) \quad \frac{\partial I_3}{\partial \bar{\bar{X}}} = I_3 \bar{\bar{F}}^{-t} \quad (1.27)$$

L'expression de la loi de comportement est donc désormais explicitée par :

$$\begin{cases} \bar{\bar{\sigma}} = \frac{2}{J} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{\bar{B}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{B}}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \bar{\bar{I}} \right] \\ \bar{\bar{\Pi}} = 2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{\bar{F}} - 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{F}} \cdot \bar{\bar{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \bar{\bar{F}}^{-t} \\ \bar{\bar{S}} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} I_1 \right) \bar{\bar{I}} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \bar{\bar{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} I_3 \bar{\bar{C}}^{-1} \right] \end{cases} \quad (1.28)$$

Contrainte interne

Certains matériaux présentent, en plus de propriétés matérielles, un comportement particulier traduit sous la forme de contraintes internes. L'incompressibilité et l'inextensibilité dans une direction en font partie. Ces propriétés sont introduites dans la loi de comportement par l'intermédiaire d'un scalaire, fonction du gradient de la déformation et d'un multiplicateur de Lagrange p souvent assimilé à une pression hydrostatique (*Boukamel* [7]).

Une majorité d'élastomères présente un comportement incompressible ou quasi incompressible. La fonction représentative de l'incompressibilité est $c = J - 1 = 0$. Le multiplicateur de Lagrange choisi est assimilable à une pression. La loi de comportement prend donc la forme suivante :

$$\begin{cases} \bar{\bar{S}} = 2 \left(\frac{\partial \Psi(\bar{\bar{C}})}{\partial \bar{\bar{C}}} - p \frac{\partial c}{\partial \bar{\bar{C}}} \right) \\ \bar{\bar{\sigma}} = \frac{2}{J} \left(\frac{\partial \Psi(\bar{\bar{B}})}{\partial \bar{\bar{B}}} - p \frac{\partial c}{\partial \bar{\bar{B}}} \right) \bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{\Pi}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\bar{F}}} - p \frac{\partial c}{\partial \bar{\bar{F}}} \end{cases} \quad (1.29)$$

Reste à exprimer dans les différentes configurations l'expression de la dérivée de la contrainte d'incompressibilité :

$$\frac{\partial c}{\partial \bar{C}} = \frac{J}{2} \bar{C}^{-1} \quad \frac{\partial c}{\partial \bar{B}} = \frac{J}{2} \bar{B}^{-1} \quad \frac{\partial c}{\partial \bar{F}} = \text{Cof}(\bar{F}) \quad (1.30)$$

et donc de la loi de comportement pour un matériau incompressible :

$$\begin{cases} \bar{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\bar{C})}{\partial \bar{C}} - p J \bar{C}^{-1} \\ \bar{\sigma} = \frac{2}{J} \frac{\partial \Psi(\bar{B})}{\partial \bar{B}} \bar{B} - p \bar{I} \\ \bar{\Pi} = \frac{\partial \Psi(\bar{C})}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F}) \end{cases} \quad (1.31)$$

La détermination complète de la loi de comportement passe donc par la connaissance de l'expression du potentiel d'énergie libre Ψ .

Position du problème

Sous l'hypothèse d'un matériau incompressible, le problème mécanique à résoudre, exprimé dans le cas d'une description mixte, est le suivant :

1. on définit le gradient de la transformation :

$$\bar{F}(M, t) = \bar{\nabla}_0 \vec{U}(M, t) + \bar{I} \quad (1.32)$$

2. l'équation de la dynamique à satisfaire est :

$$\bar{\nabla}_0 \cdot \bar{\Pi}(M, t) + \vec{f}_v(M, t) = \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}(M, t)}{\partial t^2} \quad (1.33)$$

3. la loi de comportement est :

$$\bar{\Pi} = \frac{\partial \Psi(\bar{C})}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F}) \quad (1.34)$$

avec la condition d'incompressibilité $J = \det(\bar{F}) = 1$

4. les conditions limites à respecter sont :

- *Condition limite en déplacement* : $\vec{U}(M, t) = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1 \Omega$

- *Condition limite de type effort* : $\overline{\overline{\Pi}}(M, t) \cdot \vec{n} = \vec{f}_d \quad \forall M \in \delta_2\Omega$ où $\vec{n}$ normale extérieure à $\delta_2\Omega$ en M

Bibliographie

- [1] J.D. Anderson. *Hypersonic end high temperature gas dynamic*. McGraw-Hill Book Company, 1989.
- [2] K.A. Hoffmann, S.T. Chiang, S. Siddiqui & M. Papadakis. *The finite element method*. Butterworth Heinemann (Fifth edition), 1996.
- [3] M. Fremond. *The Clausius-Duhem inequality, an interesting and productive inequality*. Nonsmooth Mechanics and Analysis, Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 12, p. 107-118, 2006.
- [4] C. Truesdell. *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*. Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 1, p. 125-300, 1952.
- [5] C. Truesdell & R. Toupin. *The classical field theories of mechanics*. Handbuch der Physik, vol. 3, 1960.
- [6] F. Sidoroff. *Cours sur les grandes déformations*. Ecole d'été Sophia-Antipolis, 1982.
- [7] A. Boukamel. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, 1988.

Chapitre 2

Méthodes de résolution

Dans ce chapitre, nous développons une méthode de résolution des équations posées dans le chapitre précédent. Nous commencerons donc par l'étude de la résolution des équations de la mécanique des fluides avec une discrétisation spatiale par la méthode des volumes finis. Ensuite, nous présentons la résolution des équations de la dynamique de solides déformables. Nous dissocierons l'élasticité linéaire en grandes déformations de l'hyperélasticité car si la méthode de discrétisation (méthode des éléments finis) est la même, son application diffère légèrement d'un cas à l'autre. Concernant la discrétisation temporelle du problème, nous présenterons le schéma d'intégration de Newmark.

2.1 Résolution des équations de la dynamique des fluides compressibles

Nous avons vu au chapitre précédent les équations aux dérivées partielles (EDP) de Navier-Stokes pour un mélange de gaz réactifs. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \{U_{vc}\}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left[\overline{\overline{\mathcal{F}}}(\{U_{vc}\}) \right] = \{0\} \quad (2.1)$$

où pour un problème en 2D

- $\{U_{vc}\}$ représente le vecteur des variables conservatives, avec u_i les composantes de la vitesse, ρ la masse volumique du mélange et Y_{es} les fractions massiques des Ns espèces présentes :

$$\{U_{vc}\} = \begin{pmatrix} \rho Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho Y_{Ns} \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho e \end{pmatrix}$$

- $\overline{\overline{\mathcal{F}}}(\{U_{vc}\})$ est égal à la somme des vecteurs flux dans deux directions d'espace :

$$\overline{\overline{\mathcal{F}}}(\{U_{vc}\}) = F \vec{x}_1 + G \vec{x}_2 \quad (2.2)$$

qui se décomposent eux même en une partie convective et diffusive :

$$\overline{\overline{\mathcal{F}}}(\{U_{vc}\}) = (F_c + F_d) \vec{x}_1 + (G_c + G_d) \vec{x}_2 \quad (2.3)$$

Ces flux s'expriment de la manière suivante pour les flux convectifs :

$$F_c = \begin{pmatrix} \rho Y_1 u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho Y_{Ns} u_1 \\ \rho u_1^2 + p \\ \rho u_1 u_2 \\ (\rho e + p) u_1 \end{pmatrix} \quad G_c = \begin{pmatrix} \rho Y_1 u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho Y_{Ns} u_2 \\ \rho u_2 u_1 \\ \rho u_2^2 + p \\ (\rho e + p) u_2 \end{pmatrix}$$

et pour les flux diffusifs :

$$F_d = \begin{pmatrix} \rho Y_1 u_{1\ 1}^d \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho Y_{Ns} u_{Ns\ 1}^d \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ (u_1 \tau_{11} + u_2 \tau_{12}) + q_1 \end{pmatrix} \quad G_d = \begin{pmatrix} \rho Y_1 u_{1\ 2}^d \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho Y_{Ns} u_{Ns\ 2}^d \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ (u_1 \tau_{21} + u_2 \tau_{22}) + q_2 \end{pmatrix}$$

et dans l'expression des flux diffusifs les termes visqueux prennent les formes suivantes :

$$\tau_{11} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (2.4)$$

$$\tau_{22} = \frac{4}{3}\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2.5)$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (2.6)$$

La géométrie réelle de l'écoulement est discrétisée en une somme de cellules (quadrilatères) dans lesquelles chaque grandeur physique est supposée constante. Une cellule C_i représente un volume $d\mathcal{V}$ de contrôle ou l'on peut intégrer l'équation 2.1 (*Goudonov* [1], *Harten et al.* [2]), on obtient la forme suivante :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} \int_{C_i} d\mathcal{V} + \sum_{k=1}^{faces} \left((\vec{\mathcal{F}}_k) \int_{\partial C_i^k} \vec{n} d\mathcal{S} \right) = 0 \quad (2.7)$$

où $\vec{n}$ est la normale d'une des quatre *faces*.

La résolution de ce système d'équations se fait à l'ordre 2 en espace et en temps. Le schéma employé est de type MUSCL (*Cardoso* [3]). L'estimation des flux convectifs se fait par la résolution d'un problème de Riemann aux interfaces (*Toro* [4]). La partie diffusive est quand à elle traitée par une méthode de différences finies (*Hirsch* [5]).

Dans le cas d'un problème d'interaction fluide-structure la géométrie du domaine fluide varie, donc le maillage aussi. Dès lors, il est plus rigoureux d'utiliser une description cinématique mixte *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (*Hirtand et al.* [6]). La forme discrétisée 2.7 devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U_i \int_{C_i} d\mathcal{V}(t) \right) + \sum_{k=1}^{faces} \left((\vec{\mathcal{F}}_k - \vec{w}_k U_k) \int_{\partial C_i^k} \vec{n} d\mathcal{S} \right) = 0 \quad (2.8)$$

où $\vec{w}_k$ représente la vitesse de la face k de la cellule.

Notons que la vitesse du maillage n'est pas prise en compte dans la méthode de résolution. Nous avons pu montrer dans nos précédents travaux (*Giordano et al.* [7]) que dans nos problèmes où cette vitesse du maillage est très faible vis-à-vis de la vitesse d'écoulement, l'erreur commise est négligeable.

2.2 Résolution des équations de la dynamique des solides déformables

2.2.1 Cas d'un problème d'élasticité en grandes déformations

Formulation variationnelle

En élasticité, une forme variationnelle du problème posé localement peut s'obtenir par le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) énoncé par *Germain* en 1972 [8]. Pour un milieu matériel isolé, on distingue les actions extérieures agissant sur le milieu des actions intérieures

représentant les liaisons entre les parties possibles du milieu. L'énoncé du principe nécessite la définition de mouvement virtuel : le mouvement virtuel d'un milieu matériel est défini à chaque instant par un champ de vecteur déplacement virtuel $\vec{U}^*(M, t)$ cinématiquement admissible. Cela signifie qu'il vérifie les mêmes conditions aux limites sur $\delta_1\Omega$ que le champ de déplacement $\vec{U}(M, t)$ qui lui est associé. Afin de respecter la condition de stationnarité, on associe au champ de déplacement virtuel admissible sa première variation $\overline{\overline{\nabla}}\vec{U}^*(M, t)$. Dans l'expression de la formulation variationnelle du problème, nous serons amenés à calculer $\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{\nabla}}\vec{U}^*(M, t)$. Ce produit devant être symétrique, avec $\overline{\overline{\sigma}}$ lui-même symétrique, il faut que le second membre le soit également. On décompose alors en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique faisant ainsi apparaître la première variation du tenseur virtuel de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}^*$:

$$\overline{\overline{\varepsilon}}^*(M, t) = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\nabla}}\vec{U}^*(M, t) + \overline{\overline{\nabla}}^t\vec{U}^*(M, t) \right) \quad (2.9)$$

Le Principe des Puissances Virtuelles se décompose en deux axiomes :

- *Axiome d'objectivité* : la puissance virtuelle des efforts intérieurs associée à tout mouvement de corps rigide est nulle
- *Axiome d'équilibre dynamique* : à chaque instant et pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des quantités d'accélération P_a^* est égale à la somme des puissances virtuelles des efforts intérieurs P_i^* et des efforts extérieurs P_e^* :

$$P_i^* + P_e^* = P_a^* \quad (2.10)$$

En se basant sur l'axiome d'équilibre dynamique et sur l'équation d'équilibre (2.9), on obtient la formulation :

$$I = \int_{\Omega} \overline{\overline{\nabla}}.\overline{\overline{\sigma}}(M, t).\vec{U}^*(M, t)dV + \int_{\Omega} \vec{f}_v.\vec{U}^*(M, t)dV \quad (2.11)$$

$$= \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}(M, t)}{\partial t^2}.\vec{U}^*(M, t)dV \quad (2.12)$$

En faisant intervenir $\overline{\overline{\varepsilon}}^*$, on sait que :

$$\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}}(M, t) \cdot \vec{U}^*(M, t) = \nabla \cdot (\bar{\sigma}(M, t) \cdot \vec{U}^*(M, t)) - \bar{\sigma}(M, t) : \bar{\bar{\varepsilon}}^*(M, t) \quad (2.13)$$

et en tenant compte des conditions limites en déplacement, on peut écrire :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\bar{\sigma}(M, t) \cdot \vec{U}^*(M, t)) dV = \int_{\delta\Omega} \bar{\sigma}(M, t) \cdot \vec{U}^*(M, t) \cdot \vec{n} dS \quad (2.14)$$

$$= \int_{\delta\Omega_2} \vec{f}_d \cdot \vec{U}^*(M, t) dS \quad (2.15)$$

on a alors :

$$I = - \int_{\Omega} \bar{\sigma}(M, t) : \bar{\bar{\varepsilon}}^*(M, t) dV + \int_{\delta\Omega_2} \vec{f}_d \cdot \vec{U}^*(M, t) dS + \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{U}^*(M, t) dV \quad (2.16)$$

$$= \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \vec{U}^*(M, t) dV \quad (2.17)$$

- puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$P_i^* = - \int_{\Omega} \bar{\sigma}(M, t) : \bar{\bar{\varepsilon}}^*(M, t) dV \quad (2.18)$$

- puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$P_e^* = \int_{\delta\Omega_2} \vec{f}_d \cdot \vec{U}^*(M, t) dS + \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \vec{U}^*(M, t) dV \quad (2.19)$$

- puissance virtuelle d'accélération :

$$P_a^* = \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \vec{U}^*(M, t) dV \quad (2.20)$$

Le problème s'écrit alors :

trouver $\vec{U} \in \{\vec{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega), \vec{U} = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$

tel que $\forall \delta\vec{U}^* \in \{\delta\vec{U}^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \delta\vec{U}^* = \vec{0} \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$

$$I = \int_{\Omega} \bar{\sigma} : \bar{\bar{\varepsilon}}^* dV - \int_{\delta\Omega_2} \vec{f}_d \cdot \delta\vec{U}^* dS - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta\vec{U}^* dV + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta\vec{U}^* dV = 0 \quad (2.21)$$

Discrétisation par la méthode des éléments finis

La méthode choisie pour traiter ce problème est celle des éléments finis. La littérature est composée de nombreux auteurs détaillant cette méthode (*Zienkiewicz & Taylor* [9] et *Batoz & Dhett* [10]), nous nous contenterons d'en rappeler les grandes lignes. La méthode des éléments finis consiste à discrétiser spatialement le domaine étudié afin d'obtenir une formulation discrète associée à l'équation (2.21). Dans le but de traiter les cas de géométries complexes, il faut procéder à la décomposition du domaine Ω en sous-domaines géométriques élémentaires Ω^e et de la frontière $\delta\Omega$ en sous-frontières géométriques élémentaires $\delta\Omega^e$. C'est ce que l'on appelle la discrétisation spatiale du modèle géométrique. Les sous-domaines Ω^e et les sous-frontières $\delta\Omega^e$ doivent vérifier :

- Le domaine initial est remplacé par la réunion d'un ensemble d'éléments :

$$\bigcup_{e=1}^{Ndelt} \Omega^e = \Omega \quad (2.22)$$

où $Ndelt$ indique le nombre de domaines élémentaires.

- La frontière initiale est remplacée par la réunion d'un ensemble d'éléments :

$$\bigcup_{e=1}^{Nfelt} \delta\Omega^e = \delta\Omega \quad (2.23)$$

où $Nfelt$ indique le nombre de frontières élémentaires.

- deux éléments Ω^e ne peuvent avoir en commun que des points de leur frontière respective.

La forme variationnelle I peut également se décomposer en une partie faisant intervenir le domaine et en une partie faisant intervenir la frontière :

$$I = I_{\Omega} + I_{\delta\Omega} \quad (2.24)$$

avec la décomposition de I_{Ω} et $I_{\delta\Omega}$ suivante :

$$I_{\Omega} = \sum_{e=1}^{Ndel} I_{\Omega_e} \quad (2.25)$$

$$I_{\delta\Omega} = \sum_{e=1}^{N_{fel}} I_{\delta\Omega_e} \quad (2.26)$$

Le champ de déplacement étant continu sur tout le domaine, on peut le discrétiser de la manière suivante :

$$\vec{U}(X, t) = \sum_{i=1}^{NNT} \vec{U}_i(X, t) N_i(X) \quad (2.27)$$

$$\vec{U}^*(X, t) = \sum_{i=1}^{NNT} \vec{U}_i^*(X, t) N_i(X) \quad (2.28)$$

où $X = (x, y)$ représente la base des coordonnées du domaine Ω , NNT le nombre de nœuds total, $\vec{U}_i(X, t)$ les degrés de liberté en chaque nœud et $N_i(X)$ les fonctions d'interpolation associées à la base X .

I_{Ω} et $I_{\delta\Omega}$ se discrétisent alors sous la forme :

$$I_{\Omega} = \langle U_i^* \rangle \left[[\mathbf{M}] \{\ddot{U}_i\} + [\mathbf{K}] \{U_i\} - \{\mathbf{F}_v\} \right] \quad (2.29)$$

$$I_{\delta\Omega} = - \langle U_i^* \rangle \{\mathbf{F}_d\} \quad (2.30)$$

faisant apparaître $[\mathbf{M}]$ la matrice de masse, $[\mathbf{K}]$ la matrice rigidité, $\{\mathbf{F}_v\}$ le vecteur des forces de volume et $\{\mathbf{F}_d\}$ le vecteur des efforts imposés. Le détail du calcul de ces éléments est présenté en Annexe B.

En posant $\{\mathbf{F}\} = \{\mathbf{F}_v\} + \{\mathbf{F}_d\}$ le vecteur des efforts généralisés, on peut écrire le système global sous la forme :

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{U}_i\} + [\mathbf{K}] \{U_i\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.31)$$

2.2.2 Cas d'un problème d'hyperélasticité

Lorsqu'un élastomère est soumis à une sollicitation dynamique, il réagit en combinant une réponse hyperélastique et une réponse visqueuse. C'est la réponse visqueuse qui rend compte de la propriété dissipative associée au comportement des élastomères. Les effets de dissipation se traduisent au travers de différents mécanismes tels que les frottements visqueux ou secs, les glissements internes ou encore l'effet Mullins (*Mullins* [11]). De nombreux modèles décrivant ces mécanismes existent, mais ils restent souvent spécifiques à un matériau considéré. Les modèles de Poyting-Thomson et de Zener (*Carpentier* [12] et *Méo* [13]) sont entre autres des modèles de comportement dissipatif.

Dans l'étude que nous menons, nous nous intéressons à des cas de dynamique rapide. Nous avons considéré les temps d'étude suffisamment courts pour supposer les effets dissipatifs de l'élastomère négligeables. C'est pourquoi, le modèle de potentiel d'énergie libre présenté est un modèle ne représentant que les comportements hyperélastiques.

Modèles de potentiel d'énergie libre

Il existe dans la littérature deux types d'approche pour exprimer le potentiel d'énergie libre ψ en fonction des invariants fondamentaux I_1 et I_2 : l'approche statistique et l'approche phénoménologique.

L'approche statistique se base sur la compréhension physique de phénomènes observés sur la structure moléculaire des élastomères. Ceci a permis à *Treolar* en 1943 [14] de proposer la forme de potentiel suivante :

$$\psi(I_1, T) = \frac{1}{2} N k T (I_1 - 3) \quad (2.32)$$

où N est le nombre de chaînes moléculaires par unité de volume, T la température absolue et k la constante de Boltzmann.

L'approche phénoménologique se base quant à elle sur un raisonnement mathématique en se référant aux phénomènes observés expérimentalement et en faisant fi du comportement de la structure moléculaire du matériau.

Il existe dans la littérature une multitude de formes de potentiel d'énergie libre permettant de traiter les cas d'isotropie (ou d'anisotropie) ou d'incompressibilité (ou de compressibilité).

Il s'avère que les matériaux constituant les PTF des boosters P230 ont un comportement isotrope incompressible. Nous nous sommes donc intéressé plus particulièrement à cette catégorie de potentiel pour n'en retenir qu'un : le modèle de Mooney-Rivlin. Sa caractérisation nous a en effet permis de travailler sur la gamme de matériau souhaitée. Nous proposons en Annexe A un aperçu de différents potentiels d'énergie libre isotropes incompressibles caractérisant l'hyperélasticité des élastomères.

Modèle de Mooney (1940) et de Mooney-Rivlin (1951) : C'est en 1940 que Melvin Mooney (*Mooney* [15]) propose l'un des premiers modèles de potentiel d'énergie libre phénoménologiques généralisé, 10 ans plus tard, par le modèle de Rivlin & Saunders (*Rivlin & Saunders* [16]) souvent nommé modèle de Mooney-Rivlin, sous la forme polynomiale suivante :

$$\Psi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{+\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \quad (2.33)$$

où C_{ij} sont des constantes matérielles déterminées expérimentalement et telles que $C_{00} = 0$. Chaque développement à un ordre donné correspond à la plupart des lois polynomiales. Si l'on considère les développements aux premier et deuxième ordres, on distingue :

- au premier ordre, pour $i = 1$ et $j = 0$ le modèle de Néo Hooke :

$$\Psi = C_{10}(I_1 - 3) \quad (2.34)$$

Ce modèle reste fiable pour des taux de déformations de l'ordre de 50 %.

- au deuxième ordre, pour $i = 1$ et $j = 1$ le modèle de Mooney-Rivlin :

$$\Psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (2.35)$$

Ce modèle voit son champ de validation plus étendu puisqu'il offre une bonne corrélation avec l'expérience jusqu'à des taux de déformations de l'ordre de 150 %.

Outre les développements aux ordres successifs du modèle, l'approche expérimentale de Rivlin & Saunders a suscité de nombreuses extrapolations par de nombreux auteurs. Plus récemment, dans les années 90, *Yeoh* [17] propose un modèle applicable aux élastomères

chargés en noir de carbone. Il constate expérimentalement que la variation de ψ par rapport à I_2 est négligeable. L'énergie de déformation est alors à 3 coefficients et indépendante de I_2 :

$$\Psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (2.36)$$

La forme du potentiel retenue est donc la suivante :

$$\Psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (2.37)$$

où seule la connaissance des coefficients C_{10} et C_{01} donne la détermination totale de Ψ .

Formulation variationnelle et choix de la méthode de résolution

En reprenant le principe des puissances virtuelles énoncé dans le cadre des grandes déformations, et en l'adaptant à un problème d'hyperélasticité, on a à résoudre le problème suivant :

$$\text{trouver } \vec{U} \in \{ \vec{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega), \vec{U} = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1 \Omega \}$$

$$\text{tel que } \forall \delta \vec{U}^* \in \{ \delta \vec{U}^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \delta \vec{U}^* = \vec{0} \quad \forall M \in \delta_1 \Omega \}$$

$$\int_{\Omega} \overline{\Pi}(\vec{U}) : \overline{\varepsilon}^*(\delta \vec{U}^*) dV - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{U}^* dV - \int_{\delta \Omega_2} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{U}^* dS + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U}^* dV = 0 \quad (2.38)$$

Nous nous limiterons dans cette partie à la présentation de trois types de formulations : la méthode de pénalisation, la méthode du Lagrangien et la méthode dite du Lagrangien perturbé. Chacune d'entre elles sera considérée dans le cas d'un potentiel hyperélastique incompressible en description mixte. Un aperçu plus détaillé des principes variationnels existants peut être consulté notamment dans les travaux de *Lejeunes* [18].

Méthode de pénalisation : Si on considère un matériau compressible dont le coefficient de poisson ν tend vers 0,5. Son coefficient d'incompressibilité tend alors vers l'infini. On peut ainsi assimiler ce matériau à un matériau incompressible. Sous ces hypothèses, la seule inconnue du problème est le champ de déplacement $\vec{U}$, la condition locale d'incompressibilité étant introduite via une pénalité dans la forme du potentiel d'énergie libre ψ .

Malkus & Hughes [19] et *Holzappel* [20] entre autres ont notamment abordé différentes approches de la pénalisation dans leurs travaux. Appliquées à une description mixte, elles ne permettent pas de distinguer dans l'opérateur tangent les non linéarités géométriques et matérielles.

Avec la méthode de pénalisation, la condition d'incompressibilité était directement intégrée à l'expression du potentiel d'énergie libre via un terme de pénalisation. Nous allons désormais envisager une méthode consistant à prendre en compte cette condition directement dans la formulation variationnelle sous la forme d'un multiplicateur de Lagrange. Il ne s'agit plus alors d'un problème à une inconnue mais à deux : le champ de déplacement $\vec{u}$ et le multiplicateur p .

Méthode du Lagrangien : On considère p un multiplicateur de Lagrange assimilé à une pression. Le problème à résoudre est dans ce cas :

$$\text{trouver } \vec{U} \in \{\vec{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega), \vec{U} = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1\Omega\} \text{ et } p \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

$$\text{tel que } \forall \delta \vec{U}^* \in \{\delta \vec{U}^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \delta \vec{U}^* = \vec{0} \quad \forall M \in \delta_1\Omega\} \text{ et } \delta p^* \in \mathcal{L}^2(\Omega)$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \bar{\Pi}(\vec{U}) : \bar{\varepsilon}^* dV - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{U}^* dV - \int_{\delta\Omega_2} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{U}^* dS + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U}^* dV = 0 \\ \int_{\Omega} (J(\vec{U}) - 1) \delta p^* dV = 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

où $\bar{\Pi}(\vec{U})$ s'exprime comme décrit dans l'équation 1.31 et où la deuxième équation traduit la condition d'incompressibilité explicitée dans le chapitre précédent comme $c = J - 1 = 0$.

La linéarisation du problème nous permet d'écrire la matrice tangente sous la forme :

$$[\mathbf{K}_t] = \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{UU}] & [\mathbf{VK}_{UP}] \\ [\mathbf{VK}_{PU}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

La résolution du système associé passe normalement par une méthode d'élimination de Gauss ou à l'aide d'une méthode itérative de système linéaire. Dans le cas présent, l'opérateur tangent présente un bloc nul, il n'est donc pas défini positif et ne permet pas la résolution du problème. Cette raison nous motive à envisager une autre méthode pour notre étude telle que la méthode dite en Lagrangien perturbé.

Méthode du Lagrangien perturbé : Cette méthode consiste également à considérer p comme une variable indépendante. En revanche la condition d'incompressibilité est exprimée sous la forme :

$$J - 1 = \frac{p}{\mathcal{K}} \quad \text{avec } \mathcal{K} \text{ coefficient d'incompressibilité} \quad (2.41)$$

En effet, $\mathcal{K} \rightarrow \infty$ lorsque $\nu \rightarrow 0,5$ dans le cas de matériaux incompressibles, donc la condition $c = J - 1 = 0$ est toujours respectée. Le problème à résoudre est alors le suivant :

trouver $\vec{U} \in \{\vec{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega), \vec{U} = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$ et $p \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

tel que $\forall \delta\vec{U}^* \in \{\delta\vec{U}^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \delta\vec{U}^* = \vec{0} \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$ et $\delta p^* \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(I_1(\vec{U}), I_2(\vec{U}))}{\partial \vec{F}} - p \text{Cof}(\vec{F}) \right) : \vec{\varepsilon}^* dV - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta\vec{U}^* dV - \int_{\delta\Omega_2} \vec{f}_d \cdot \delta\vec{U}^* dS + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta\vec{U}^* dV = 0 \\ \int_{\Omega} ((J(\vec{U}) - 1) - \frac{p}{\mathcal{K}}) \delta p^* dV = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Si la première équation est inchangée par rapport à la méthode en Lagrangien, la deuxième traduit désormais l'incompressibilité via la coefficient $\mathcal{K}$.

A présent, la linéarisation du problème donne la forme de la matrice tangente suivante :

$$[\mathbf{K}_t] = \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{UU}] & [\mathbf{VK}_{UP}] \\ [\mathbf{VK}_{PU}] & [\mathbf{VK}_{PP}] \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

- $[\mathbf{VK}_{UU}] = \Delta_{\vec{U}} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\mathbf{F}}} - p \text{Cof}(\bar{\mathbf{F}}) \right) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV$
- $[\mathbf{VK}_{UP}] = \Delta_p \int_{\Omega} -p \text{Cof}(\bar{\mathbf{F}}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV$
- $[\mathbf{VK}_{PU}] = \Delta_{\vec{U}} \int_{\Omega} (J(\vec{U}) - 1) \delta p^* dV$
- $[\mathbf{VK}_{PP}] = \Delta_p \int_{\Omega} -\frac{p}{\kappa} \delta p^* dV$

où l'opérateur $\Delta_{\vec{U}}$ calcule la première variation de l'expression par rapport à $\vec{U}$ et Δ_p la première variation par rapport à p .

Le bloc $[\mathbf{VK}_{PP}]$ rend la matrice $[\mathbf{K}_t]$ définie positive et le système admet une solution.

Choix de la méthode : Dans notre démarche de résolution, nous avons dans un premier temps envisagé d'utiliser une méthode de pénalisation, puis la méthode du Lagrangien et enfin la méthode du Lagrangien perturbé. Nous avons pu voir les avantages et inconvénients des formulations variationnelles associées à chacune des méthodes. Finalement, les méthodes de pénalisation et du Lagrangien ont été abandonnées. La première car l'opérateur tangent ne distingue pas les non linéarités géométriques des matérielles, la deuxième car ce même opérateur non défini positif ne permet pas la résolution du système. Nous avons donc choisi de travailler avec la méthode du Lagrangien perturbé et de procéder à la résolution du système par une méthode de condensation statique décrite dans la partie qui suit.

Discrétisation par la méthode des éléments finis

Comme dans le cas de l'élasticité linéaire en grandes déformations, la méthode consiste à décomposer le domaine en sous domaines géométriques Ω^e et la frontière $\delta\Omega$ en sous-frontières géométriques élémentaires $\delta\Omega^e$ de sorte à décomposer I en intégrale de domaine et de frontière (cf eq. 2.24). Le champ de déplacement étant continu sur tout le domaine, on peut le discrétiser comme indiqué aux équations (2.27) et (2.28).

Dans le cadre d'une formulation variationnelle exprimée en Lagrangien perturbé, nous avons vu que le champ de déplacement n'était plus la seule inconnue. En effet, à $\vec{U}$ s'ajoute le multiplicateur de Lagrange p . Contrairement au champ de déplacement, p est discontinu d'un élément à l'autre, donc son approximation se fait linéairement sur chaque élément de la manière suivante :

$$p^e(\xi, \eta) = a^e + b^e \xi + c^e \eta \quad (2.44)$$

où $\xi = (\xi, \eta) \in [-1; 1]^2$ représente la base des coordonnées paramétriques de l'élément de référence et a, b, c , paramètres inconnus à déterminer pour chaque élément, sont les degrés de liberté non nodaux de pression.

Nous posons sur un élément :

$$\{p^e\} = \begin{Bmatrix} a^e \\ b^e \\ c^e \end{Bmatrix} \quad (2.45)$$

Après assemblage, la forme globale du problème s'écrit :

$$< \delta U_i^*, \delta p^* > \left[[\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{U}_i \\ \Delta p \end{Bmatrix} + [\mathbf{K}_t] \begin{Bmatrix} \Delta U_i \\ \Delta p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

où $[\mathbf{M}]$ désigne la matrice de masse, $[\mathbf{K}_t]$ la matrice tangente et $\{\mathbf{F}\}$ le vecteur des efforts généralisés décomposable en $\{\mathbf{F}_d\} + \{\mathbf{F}_v\}$ comme vu précédemment. Le détail du calcul de ces éléments est présenté en Annexe C. En décomposant $[\mathbf{M}]$ et $[\mathbf{K}_t]$, on a alors :

$$< \delta U_i^*, \delta p^* > \left[\begin{bmatrix} [\mathbf{M}_{UU}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{U}_i \\ \Delta p \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{UU}] & [\mathbf{VK}_{UP}] \\ [\mathbf{VK}_{PU}] & [\mathbf{VK}_{PP}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_i \\ \Delta p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

La discontinuité de la pression d'un élément à l'autre permet de procéder à une opération de condensation statique afin d'éliminer les degrés de liberté de pression du système global. On peut alors exprimer localement la pression comme suit :

$$\{\Delta p^e\} = -[\mathbf{VK}_{PP}^e]^{-1} [\mathbf{VK}_{PU}^e] \{\Delta U_i^e\} \quad (2.48)$$

Nous pouvons ainsi substituer l'expression de $\{\Delta p^e\}$ dans le système global :

$$[\mathbf{M}_{UU}] \{\Delta \ddot{U}_i\} + ([\mathbf{VK}_{UU}] - [\mathbf{VK}_{UP}] [\mathbf{VK}_{PP}]^{-1} [\mathbf{VK}_{PU}]) \{\Delta U_i\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.49)$$

En généralisant l'équation, on peut l'écrire sous la forme :

$$[\mathbf{M}_{UU}] \{\Delta \ddot{U}_i\} + [\mathbf{K}] \{\Delta U_i\} = \{\mathbf{F}\} \quad (2.50)$$

où l'on décompose la matrice tangente globale :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{VK}_{UU}] - [\mathbf{VK}_{UP}] [\mathbf{VK}_{PP}]^{-1} [\mathbf{VK}_{PU}] \quad (2.51)$$

2.2.3 Discrétisation temporelle

Après avoir discrétisé spatialement le problème, nous devons passer à sa discrétisation temporelle. Pour cela, nous adoptons le schéma d'intégration de Newmark [21]. Il est sans aucun doute le schéma implicite le plus utilisé pour les problèmes de dynamique (*Hughes* [22]). Le principe de cette méthode consiste à déterminer par un développement limité la position et la vitesse à l'instant $n + 1$ à partir des mêmes grandeurs à l'instant n , le problème à discrétiser étant du type :

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{U}_{n+1}\} + [\mathbf{K}] \{U_{n+1}\} = \{\mathbf{R}_{n+1}\} \quad (2.52)$$

On suppose :

- $U(M, t = 0) = U_0 \quad \forall M \in \Omega \text{ à } t = 0$
- $\dot{U}(M, t = 0) = \dot{U}_0 \quad \forall M \in \Omega \text{ à } t = 0$

et on écrit à l'aide de développement de Taylor l'approximation au second ordre de U et au premier ordre de $\dot{U}$:

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta) \ddot{U}_n + 2\beta \ddot{U}_{n+1} \right] \quad (2.53)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma)\ddot{U}_n + \gamma\ddot{U}_{n+1} \right] \quad (2.54)$$

où β et γ sont des paramètres de l'algorithme desquels dépendent la stabilité et la précision du schéma d'intégration obtenu. Le tableau 2.1 présente différents domaines des couples (γ, β) pour lesquels le schéma d'intégration est stable ou pas :

Domaine	Stabilité
$\gamma \leq \frac{1}{2}$	instable
$\frac{1}{2} \leq \gamma$ et $2\beta \leq \gamma$	conditionnellement stable
$\frac{1}{2} \leq \gamma$ et $\gamma \leq 2\beta$	inconditionnellement stable

TABLE 2.1 – Domaine de stabilité du schéma temporel de Newmark

Le tableau 2.2 liste quelques méthodes classiques ainsi que leurs propriétés associées (explicite ou pas, précision et stabilité) :

Nom de la méthode	γ	β	Propriétés	Précision	Stabilité
Différence centrée	$\frac{1}{2}$	0	Explicite	2	Conditionnellement stable
Fox Goodwin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	Implicite	2	Conditionnellement stable
Accélération linéaire	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	Implicite	2	Conditionnellement stable
Accélération moyenne	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	Implicite	2	Inconditionnellement stable

TABLE 2.2 – Méthodes classiques associées à différents couple (γ, β)

On souhaite pouvoir calculer les termes d'accélération à l'instant $n + 1$ en fonction des variables cinématiques connues à l'instant n . Pour cela, nous posons :

$$\tilde{U}_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \ddot{U}_n \quad (2.55)$$

et

$$\tilde{\dot{U}}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{U}_n \quad (2.56)$$

En remplaçant l'expression de U_{n+1} ds (2.52), on obtient :

$$([\mathbf{M}] + [\mathbf{K}] \beta \Delta t^2) \{\ddot{U}_{n+1}\} = \{\mathbf{R}_{n+1}\} - [\mathbf{K}] \tilde{U}_{n+1} \quad (2.57)$$

Avec les conditions initiales en position et vitesse, et à partir de (2.57), nous pouvons calculer l'accélération $\ddot{U}_0$ initiale par :

$$[\mathbf{M}] \ddot{U}_0 = \{\mathbf{R}\} - [\mathbf{K}] U_0 \quad (2.58)$$

2.3 Conclusion

Nous avons dans cette partie détaillé les méthodes de résolutions présentée au chapitre précédent. Pour les équations de la dynamique des fluides, c'est une méthode de volumes finis exprimée en 2D qui a été choisie. Pour les équations de la mécanique des solides déformables, nous avons fait le choix de la méthode des éléments finis pour la discrétisation spatiale. En revanche, la méthode a été adaptée au cas traité. En effet, nous avons pu constater que pour traiter correctement le cas de matériaux élastomères incompressibles, plusieurs méthodes pouvaient être envisagées. Nous en avons décrit trois pour finalement opter pour la méthode du Lagrangien perturbé. Elle nous a ainsi permis d'éliminer l'inconnue de pression introduite par la relation d'incompressibilité par une méthode de condensation statique. Les méthodes décrites ont été développées dans le code structure du laboratoire MARCUS afin de procéder à leur validation. C'est ce que nous proposons d'exposer au chapitre suivant.

Bibliographie

- [1] S.K. Goudonov. *A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics*. Mat. Sb., vol. 47, p. 357-393, 1959.
- [2] A. Harten, P.D. Lax & B. Van Leer. *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*. SIAM Review, vol. 25, p. 35-61, 1983.
- [3] M. Cardoso. *Contribution numérique à l'étude des écoulements à haute enthalpie*. Thèse de Doctorat, IUSTI UMR 6595 Université de Provence, 1997.
- [4] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer, 1997.
- [5] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows*. Wiley, 1989.
- [6] C.W. Hirtand, A.A. Amsden & J.L. Cook. *An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds*. Journal of Computational Physics, vol. 135, p. 203-216, 1997.
- [7] J. Giordano, J. Jourdan, Y. Burtschell, M. Medale, D.E. Zeitoun & L. Houas. *Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction*. Shock Waves, 2004.
- [8] P.Germain. *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson, 1972.
- [9] O.C. Zienkiewicz & R.L. Taylor. *The finite element method*. Butterworth Heinemann (Fifth edition), 2000.
- [10] J.L. Batoz & G. Dhatt. *Modélisations des structures par éléments finis. Volume 1 : Solides élastiques*. Hermes, 1990.
- [11] L. Mullins. *Effect of stretching on the properties of rubber*. Journal of Rubber Research, 1947.
- [12] C. Carpentier-Gabrieli. *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, 1995.
- [13] S. Méo. *Modélisation numérique du comportement mécanique de structures en élastomère : de l'élasticité à la thermo-visco-hyperélasticité*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, 2000.

- [14] L.R.U. Treolar. *The Physical States of Rubber in relation to its Molecular Structure*. Journal of the Society of Dyes and Colourists, 59 : 247. doi : 10.1111/j.1478-4408, 1943.
- [15] M. Mooney. *A theory of large elastic deformation*. Journal of Applied Physics, vol. 11, p. 582-592, 1940.
- [16] R.S. Rivlin & D.W. Saunders. *Large elastic deformations of isotropic materials vii. experiments on the deformation of rubber*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 243, p. 251-288, 1951.
- [17] O.H. Yeoh. *Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates*. Rubber Chemistry and Technology, vol. 63, p. 792-805, 1990.
- [18] S. Lejeunes. *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèle*. Thèse de l'Université Aix-Marseille II, 2006.
- [19] D.S. Malkus & T.J.R. Hughes. *Mixed finite element methods-reduced and selective integration technique : a unification of concepts*. Computational Methods Applied Mechanical Engineering, vol. 15, p. 63-81, 1978.
- [20] G.A. Holzapfel. *Non linear solid mechanics*. John Wiley & Sons Ltd, 2000.
- [21] N.M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 85, p. 67-94, 1959.
- [22] T.J.R. Hughes. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.

Chapitre 3

Validations

L'objectif de ce chapitre est de valider les éléments de simulation apportés au code MARCUS. Les problèmes de statique et de dynamique pouvant être validés de manière indépendante, nous présentons dans ce chapitre des cas de validation associés à des problèmes de statique. Dans un premier temps, nous nous intéressons à un problème d'élasticité linéaire en grandes déformations dont nous pouvons calculer la solution de manière analytique. Ensuite, nous traitons le cas d'un problème d'hyperélasticité pour différentes sortes de sollicitations. Nous validerons cette partie soit à partir d'une solution analytique, soit par une étude en convergence de maillage ou encore par comparaison avec des résultats établis par le code utilisé au Laboratoire de Mécanique et Acoustique de Marseille (LMA).

3.1 Cas des grandes déformations en élasticité linéaire

3.1.1 Etude d'une solution analytique

Dans cette partie, nous envisageons le cas d'une poutre en traction uniaxiale. On travaille sous l'hypothèse des déformations planes. La poutre considérée est déformable de section $S = bh$. E et ν caractérisent les propriétés du matériaux dont elle est constituée et les conditions limites considérées sont les suivantes :

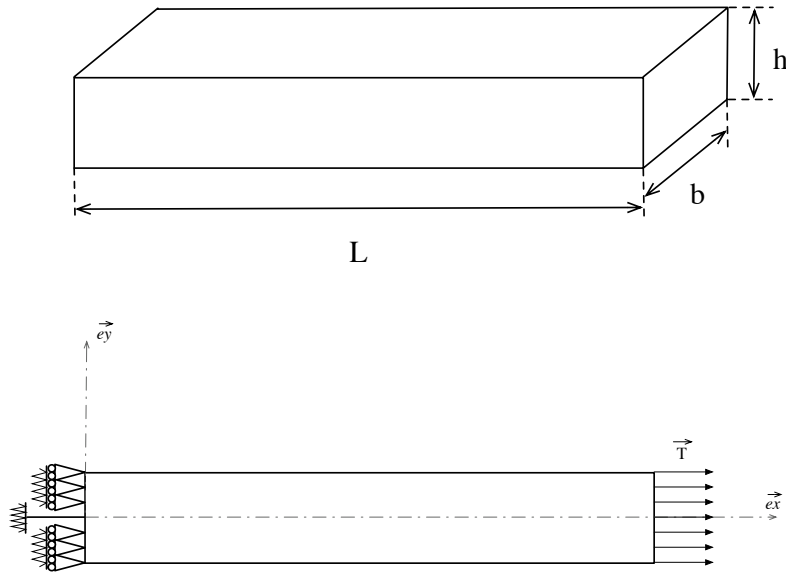


FIGURE 3.1 – Description de la poutre étudiée et de ses conditions limites

- *déplacement* : sur la face gauche, tous les déplacements horizontaux (suivant $\vec{e}_x$) sont tous bloqués et seul le déplacement vertical (suivant $\vec{e}_y$) du nœud central est bloqué
- *effort* : sur la face droite, un effort de traction uniaxial est appliqué de manière uniforme
 $\vec{T} = T\vec{e}_x$

Le champ de déplacements est supposé s'exprimer sous la forme :

$$\vec{U}(x, y) = u(x)\vec{e}_x + v(y)\vec{e}_y \quad (3.1)$$

Les tenseurs des contraintes $\bar{\sigma}$ et des déformations $\bar{\epsilon}$ peuvent s'écrire comme suit :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad \bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Par ailleurs, les forces volumiques sont considérées comme étant nulles : $\vec{f}_v = 0$ et les termes d'accélération sont nuls.

Sous toutes ces hypothèses, on peut écrire :

- *équation d'équilibre* : $\vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\sigma}} = \vec{0} \Rightarrow \bar{\bar{\sigma}} = cste$
- *Conditions limites de type effort* : $\bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{n} = \frac{T}{S} \vec{e}_x$ ce qui implique $\sigma_{xy} = 0$, $\sigma_{yy} = 0$ et $\sigma_{xx} = \frac{T}{S}$

La loi de comportement (1.14) nous permet alors d'écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} \\ 0 = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Les deux premières égalités suffisent à la résolution du problème. En exprimant les coefficients λ et μ en fonction de E et ν comme indiqué en (1.17), nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{T(1-\nu^2)}{ES} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{-T\nu(1+\nu)}{ES} \end{cases} \quad (3.4)$$

Enfin, en grandes déformations, avec la forme de $\vec{U}(x, y)$ donnée en (3.1), les termes ε_{ii} s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Le système à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{T(1-\nu^2)}{ES} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \frac{-T\nu(1+\nu)}{ES} \end{cases} \quad (3.6)$$

et la solution associée :

$$\begin{cases} u(x) = \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2T(1-\nu^2)}{ES}} \right] x \\ v(y) = \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{2T\nu(1+\nu)}{ES}} \right] y \end{cases} \quad (3.7)$$

Nous allons confronter les résultats obtenus par simulation numérique à la solution analytique ainsi calculée.

3.1.2 Comparaison simulation numérique / modèle analytique

Nous considérons le cas de traction uniaxiale présenté précédemment :

- La poutre étudiée a pour longueur $L = 1m$, pour hauteur $h = 0,01cm$ et pour largeur $b = 1m$;
- les conditions aux limites restent les mêmes avec un effort T variable de 500 à 10000N ;
- les caractéristiques matériaux sont les suivantes :
 - . $E = 2,2 \cdot 10^6 Pa$
 - . ν successivement égal à 0 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,45

Nous comparons la solution analytique avec les résultats numériques obtenus pour 2 tailles de maillage constitué d'éléments de type Q4 : 200×11 nœuds et 400×21 nœuds. Pour cela, nous traçons le déplacement horizontal analytique et numérique du nœud repéré A en fonction de l'effort T pour les différentes valeurs de ν et pour les 2 tailles de maillage.

On représente la comparaison entre le déplacement du nœud A calculé analytiquement et obtenu numériquement pour le maillage 200×11 nœuds sur la figure 3.2 et du maillage 400×21 nœuds sur la figure 3.3 :

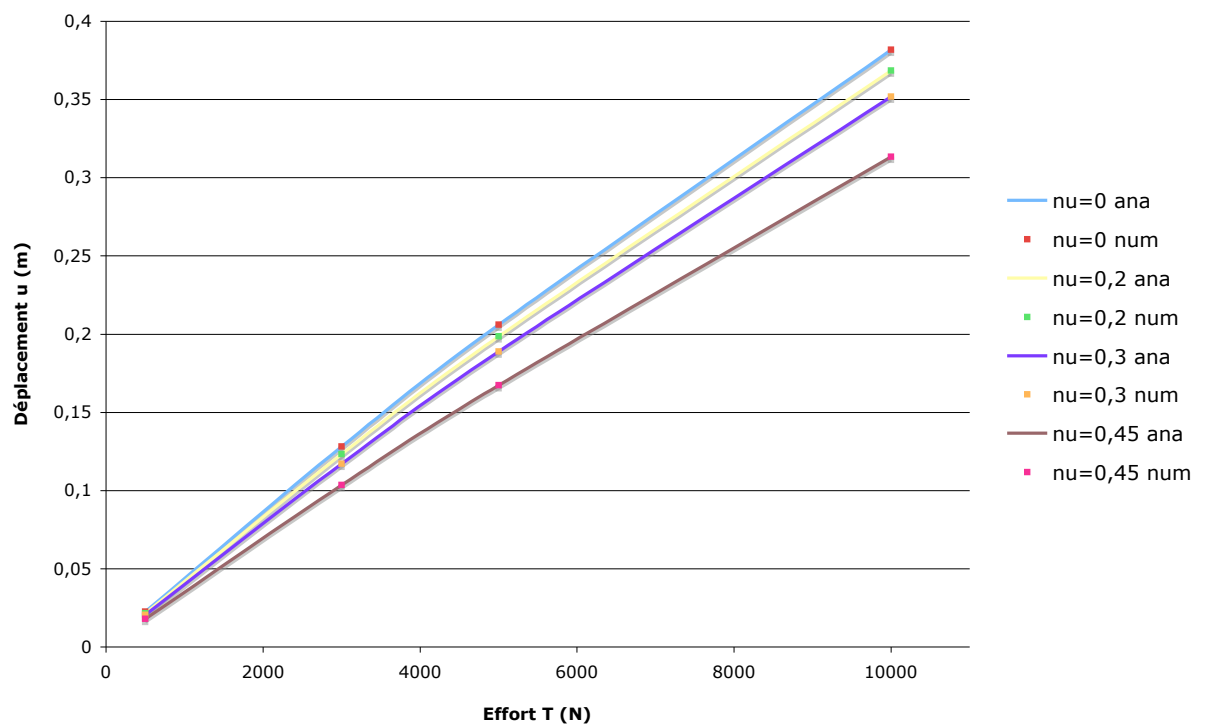


FIGURE 3.2 – Comparaison analytique numérique pour le maillage 200x11 nœuds

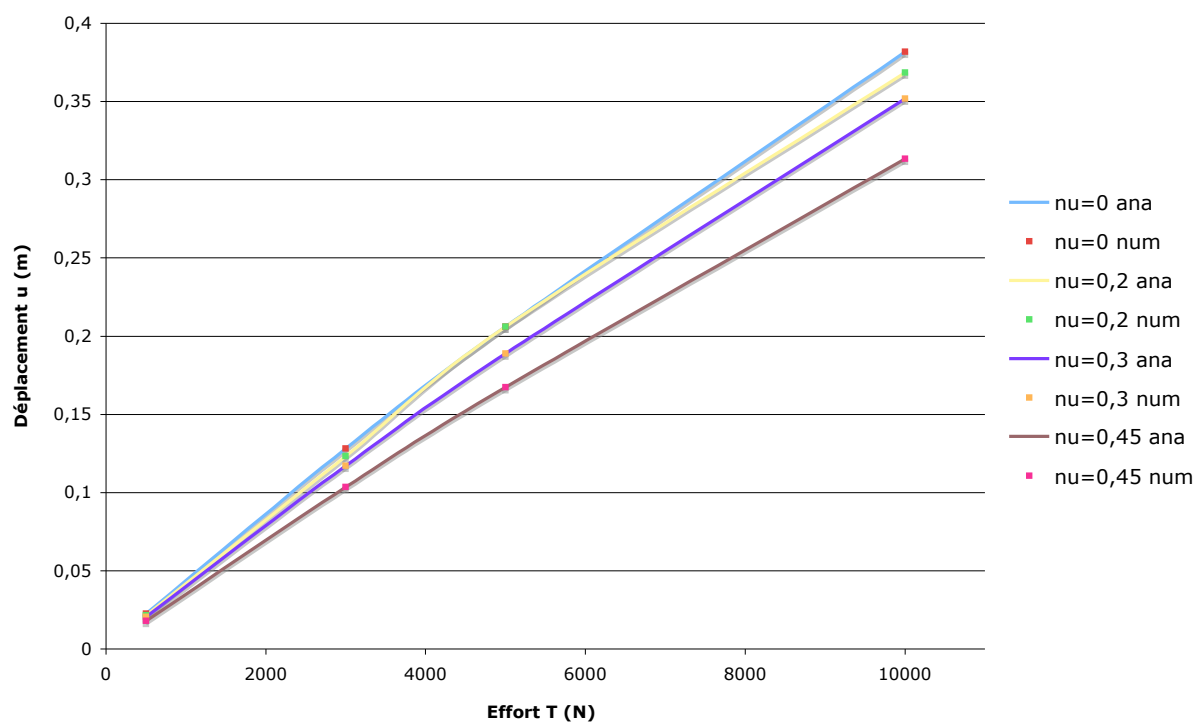


FIGURE 3.3 – Comparaison analytique numérique pour le maillage 400x21 nœuds

Par ailleurs, on calcule l'écart entre la valeur du déplacement horizontal au nœud A obtenue analytiquement et numériquement comme suit :

$$e_u^A = 100 \times \frac{|u_{ana}^A - u_{num}^A|}{|u_{ana}^A|} \quad (3.8)$$

avec :

- u_{ana}^A : déplacement calculé analytiquement au nœud A
- u_{num}^A : déplacement obtenu numériquement au nœud A

Effort (N) Ecart (%)	500	3000	5000	10000
$e_u^A, \nu = 0$	$7,25.10^{-5}$	$1,17.10^{-4}$	$1,84.10^{-4}$	$1,15.10^{-4}$
$e_u^A, \nu = 0,2$	$9,70.10^{-5}$	$1,57.10^{-4}$	$5,50.10^{-4}$	$7,04.10^{-4}$
$e_u^A, \nu = 0,3$	$1,88.10^{-4}$	$3,61.10^{-4}$	$2,16.10^{-4}$	$1,36.10^{-4}$
$e_u^A, \nu = 0,45$	$2,58.10^{-4}$	$1,70.10^{-4}$	$1,48.10^{-4}$	$1,42.10^{-4}$

TABLE 3.1 – Ecart entre u_{ana}^A et u_{num}^A

Conjointement aux figures (3.2) et (3.3) et au tableau (3.1), on constate que l'écart e_u^A est très faible, de l'ordre de moins de 1% dans tous les cas, et ce pour les deux tailles de maillage. On peut en déduire que la simulation numérique converge vers la solution analytique et semble donc validée.

3.2 Cas d'hyperélasticité

Pour chacune des études menées, on travaille sur un carré d'élastomère de côté c et de section $S = cb$. Le matériau constituant la structure considérée a un comportement hyperélastique modélisé par un potentiel de type Mooney Rivlin (cf eq. 2.37) où les coefficients $C_{10} = 2,0.10^5 Pa$ et $C_{01} = -6,9.10^3 Pa$. Nous avons implémenté et testé la formulation incompressible établie en (2.42).

3.2.1 Etude d'un cas de traction

On décompose les conditions limites du problème en des conditions de déplacement et d'effort réparties comme suit (cf fig. 3.4) :

- *déplacement* : sur la face gauche, le déplacement horizontal est bloqué en chaque nœud tandis que sur la face inférieure, c'est le déplacement vertical de chaque nœud qui est bloqué.
- *effort* : sur la face droite, un effort de traction ($T > 0$) ou de compression ($T < 0$) est appliqué de manière uniforme $\vec{T} = T\vec{x}$.

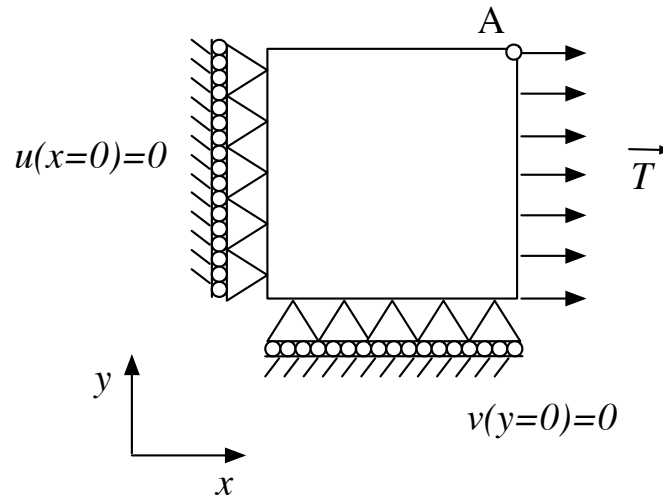


FIGURE 3.4 – Conditions limites en déplacement et en effort du cas de traction/compression

Calcul de la solution analytique

On suppose que le champ de déplacement peut s'exprimer pour un problème en 2D sous la forme :

$$\vec{U}(x, y) = u(x)\vec{e}_x + v(y)\vec{e}_y \quad (3.9)$$

On définit le gradient de la transformation par :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

de sorte qu'il respecte la condition d'incompressibilité $J - 1 = \det(F) - 1 = 0$.

On a en conséquence les relations suivantes entre les déplacements u et v et α :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + 1 = \alpha \\ \frac{\partial v}{\partial y} + 1 = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \quad (3.11)$$

En notant que les invariants du tenseur de Cauchy-Green droit $\overline{\overline{C}}$ se calculent en fonction de α et ont pour expression :

$$I_1(\alpha) = I_2(\alpha) = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} + 1 \quad (3.12)$$

L'état de contrainte associé nous amène à la relation suivante :

$$\Pi_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial F_{11}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial F_{11}} \quad (3.13)$$

soit

$$2(C_{10} + C_{01})(\alpha - \frac{1}{\alpha^3}) = \frac{T}{S} \quad (3.14)$$

De cette relation, on en déduit α en fonction de l'effort T , S et des constantes matériaux C_{10} et C_{01} : $\alpha = \alpha(S, T, C_{10}, C_{01})$. Du système d'équations (3.11), on peut enfin déterminer l'expression complète du champ de déplacement solution $\vec{U}(x, y) = u(x)\vec{x} + v(y)\vec{y}$:

$$\begin{cases} u(x) = (\alpha - 1)x \\ v(y) = (\frac{1}{\alpha} - 1)y \end{cases} \quad (3.15)$$

Comparaisons simulations numériques / modèle analytique

Le maillage du domaine est constitué d'éléments de type Q9. La répartition de l'effort sur la face droite en chaque nœud se fait alors de la manière suivante :

- Aux deux nœuds extrêmes : $\frac{T.h}{2.S.N_{element}} \frac{1}{3}$
- Aux nœuds milieux : $\frac{T.h}{2.S.N_{element}} \frac{4}{3}$
- Aux autres nœuds : $\frac{T.h}{2.S.N_{element}} \frac{2}{3}$

Nous avons envisagé des cas de tractions où $T > 0$ et de compression où $T < 0$. Nous nous intéressons aux déplacements du noeud extrême du bord droit A pour différentes tailles de maillage respectivement constitués de 10, 20 et 40 éléments par côté avec un rapport d'éclatement de 1.

L'une des premières constatations est que les déplacements u et v en A sont constants quelle que soit la taille du maillage. Ce constat nous permet d'envisager des maillages constitués de peu d'éléments pour ce genre de sollicitations. Les simulations seront alors moins coûteuses en terme de temps de calcul.

Nous avons calculé les écarts e_u et e_v définis par les équations (3.16) et (3.17) listés dans les tableaux 3.2 et 3.3 pour chaque effort T .

$$e_u = 100 \times \frac{|u_{ana}^A - u_{num}^A|}{|u_{ana}^A|} \quad (3.16)$$

$$e_v = 100 \times \frac{|v_{ana}^A - v_{num}^A|}{|v_{ana}^A|} \quad (3.17)$$

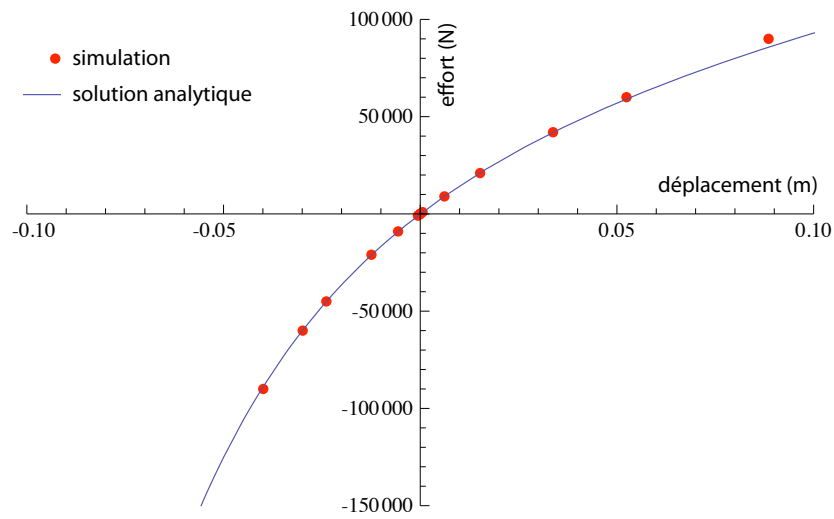


FIGURE 3.5 – Superposition du déplacement u^A obtenu analytiquement et numériquement

Effort (N)	u_{num}^A (mm)	u_{ana}^A (mm)	e_u (%)
90000	88,5487	95,2227	7,01
60000	52,4327	53,5355	2,06
42000	33,7607	33,8563	0,28
21000	15,2205	15,1135	0,71
9000	6,14452	6,09072	0,89
900	0,590364	0,585155	0,89
90	0,0588023	0,0582854	0,89
-90	-0,0587505	-0,0582	0,95
-900	-0,58518	-0,580064	0,88
-9000	-5,62629	-5,58105	0,81
-21000	-12,4028	-12,3257	0,62
-45000	-23,8646	-23,83	0,14
-60000	-29,8788	-29,9545	0,25
-90000	-39,9083	-40,28	0,92

TABLE 3.2 – Ecart entre la solution analytique et la solution du déplacement horizontal u^A

Effort (N)	$v_{num}^A(mm)$	$v_{ana}^A(mm)$	e_v (%)
90000	-61,3817	-64,5091	4,85
60000	-41,5477	-42,2312	1,62
42000	-28,8895	-28,9548	0,22
21000	-14,1467	-14,05	0,69
9000	-5,96259	-5,91072	0,88
900	-0,588754	-0,583448	0,91
90	-0,058798	-0,058269	0,91
-90	0,0587806	0,0582	0,99
-900	0,587026	0,5817	0,92
-9000	5,79048	5,7412	0,86
-21000	13,22604	13,1352	0,69
-45000	27,1056	27,06	0,17
-60000	35,137	35,2312	0,27
-90000	49,8736	50,4527	1,15

TABLE 3.3 – Ecart entre la solution analytique et la solution du déplacement horizontal v^A

A partir de déformations de l'ordre de 30%, l'écart se situe entre 2% et 7%. En deçà de 30% de déformations, l'écart calculé, inférieur à 1%. Si l'on trace l'évolution des écarts e_u et e_v en fonction de l'effort T (cf fig. 3.6), on peut constater qu'ils sont minimaux pour des efforts intermédiaires. En effet, pour de faibles efforts, les déformations sont beaucoup trop faibles et sont mal estimées par la simulation où la précision du calcul ne permet pas d'avoir une erreur relative plus faible. En revanche, des efforts plus importants engendrent de plus grandes déformations et l'écart est alors imputable au modèle. En effet, dans l'approche analytique, l'élastomère est supposé parfaitement incompressible et dans les simulations, une certaine variation de volume est considérée. Cette différence de comportement devient plus notable dès lors que les déformations sont plus importantes.

On calcule également la surface $S_{uv} = (c + u).(c + v)$ (cf tableau 3.4) que l'on compare à $S_c = c^2 = 40000mm^2$ par l'intermédiaire de $e_{S_{uv}}$ (eq. 3.18) afin de vérifier que la condition d'incompressibilité soit bien respectée. L'ordre de grandeur obtenu pour chacun des efforts nous permet de valider le respect de la condition.

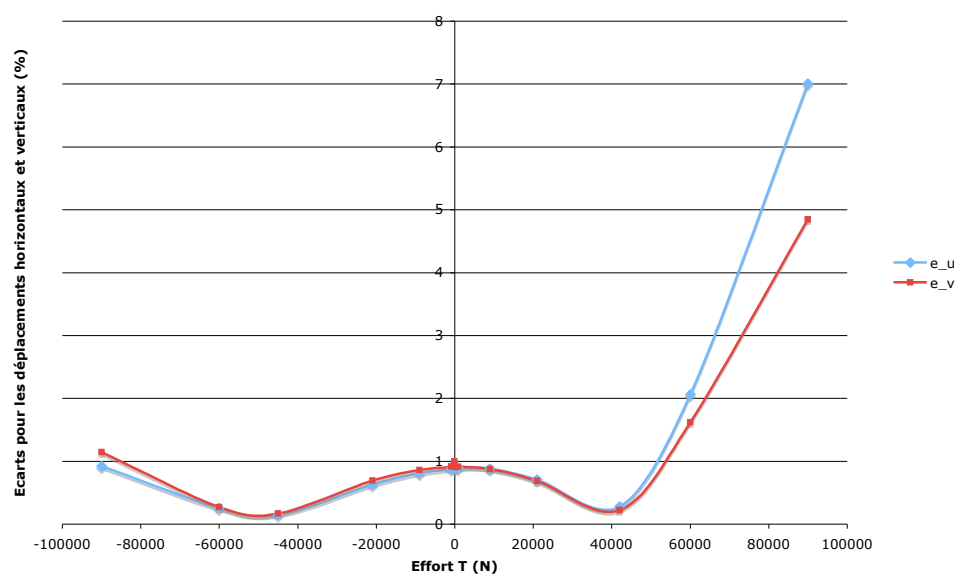


FIGURE 3.6 – Evolution de l'écart entre les solutions analytique et numérique en fonction de l'effort imposé pour un maillage de 10x10 éléments - Cas de traction/compression

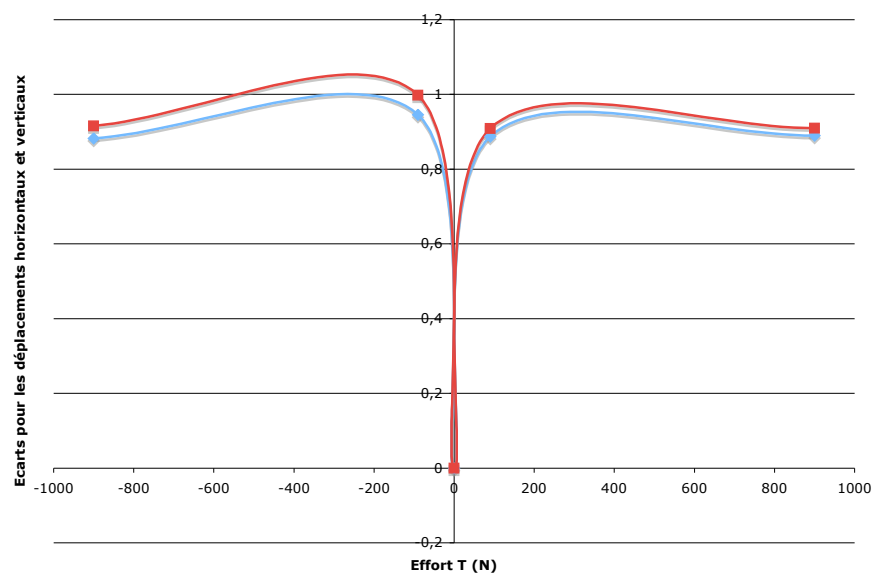


FIGURE 3.7 – Evolution de l'écart entre les solutions analytique et numérique en fonction de l'effort imposé pour un maillage de 10x10 éléments - Cas de traction/compression (Zoom sur la partie centrale de la figure 3.6)

$$e_{S_{uv}} = 100 \times \frac{|S_c - S_{uv}|}{|S_c|} \quad (3.18)$$

Effort (N)	S_{uv} (mm ²)	$e_{S_{uv}}$ (%)
90000	39998,13	$4,7.10^{-3}$
60000	3998,542	$3,6.10^{-3}$
42000	39998,91	$2,7.10^{-3}$
21000	39999,44	$1,4.10^{-3}$
9000	39999,749	$0,6.10^{-3}$
900	39999,974	$6,395.10^{-5}$
90	39999,997	$6,394.10^{-6}$
-90	40000,0026	$6,4165.10^{-6}$
-900	40000,0257	$6,421.10^{-5}$
-9000	40000,2591	$0,65.10^{-3}$
-21000	40000,6081	$1,5.10^{-3}$
-45000	40001,3357	$3,3.10^{-3}$
-60000	40001,7886	$4,5.10^{-3}$
-90000	40002,6894	$6,7.10^{-3}$

TABLE 3.4 – Section après déformation et calcul de l'écart avec la section avant essai

Ces résultats nous permettent de valider les éléments de code traitant les problèmes d'hyperélasticité pour un matériau incompressible dans le cas de sollicitations de type traction/compression.

3.2.2 Etude d'un cas de sollicitations composées compression/cisaillement

On décompose les conditions limites du problème en des conditions de déplacement et d'effort comme suit (cf fig. 3.8) :

- *déplacement* : sur la face gauche, les déplacements horizontaux et verticaux sont bloqués en chaque nœud, les autres faces sont libres de se déformer
- *effort* : sur la face droite, un effort de compression est appliqué de manière uniforme $\vec{T} = -T\vec{x}$ où $T = 45000N$.

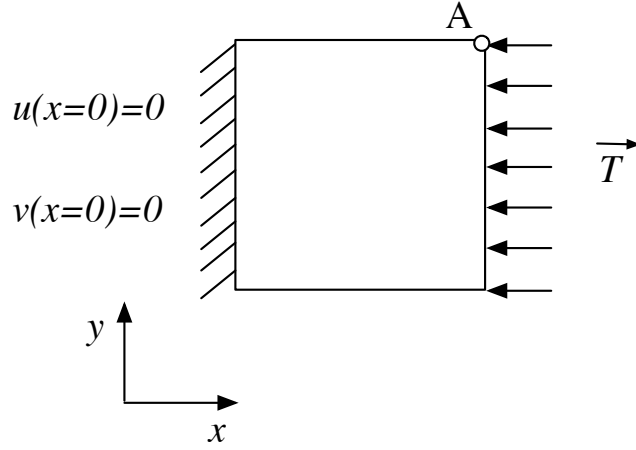


FIGURE 3.8 – Conditions limites en déplacement et en effort d'un cas de compression

On souhaite mesurer la convergence en maillage en observant les déplacements du point A pour différentes tailles de maillages respectivement constitués de 5, 10 et 20 éléments par côté (rapport d'élancement de 1). Pour cela, nous avons utilisé la méthode d'extrapolation de Richardson (*Alvin et al.* [1]) afin d'approcher la valeur asymptotique de u en A (u_{va}^A) permettant de calculer e_u comme suit :

$$e_u = 100 \times \frac{|u_{va}^A - u_{num}^A|}{|u_{va}^A|} \quad (3.19)$$

On trouve alors pour des maillages successifs de 5, 10 et 20 éléments par côtés :

5x5	$h_1 = 0,04m$	$u_{num1}^A = -0,0218204m$
10x10	$h_2 = 0,02m$	$u_{num2}^A = -0,0218298m$
20x20	$h_3 = 0,01m$	$u_{num3}^A = -0,0218318m$

TABLE 3.5 – Données pour le calcul de u_{ex}^A par une extrapolation de Richardson

On peut ainsi obtenir la valeurs des coefficients $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{C}_\alpha$ et de u_{ex}^A :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\ln\left(\frac{u_{num1}^A - u_{num2}^A}{u_{num2}^A - u_{num3}^A}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)} = 2,232660757 \quad (3.20)$$

$$\tilde{C}_\alpha = \frac{u_{num2}^A - u_{num3}^A}{h_2^\alpha - h_3^\alpha} = 0,015781555 \quad (3.21)$$

$$u_{va}^A = u_{num3}^A - \tilde{C}_\alpha h_3^\alpha = -0,021832341m \quad (3.22)$$

Un tableau des écarts nous donne :

Ecart (%)	Maillage	5x5	10x10	20x20
	e_u	0,054	0,011	0,0023

TABLE 3.6 – Ecart entre l’extrapolation asymptotique de Richardson de la solution et la solution numérique

Ce tableau met en avant de faibles valeurs d’écarts entre la solution obtenue numériquement et la solution obtenue par l’extrapolation de Richardson. Ceci traduit le fait que les simulations numériques convergent fortement vers la solution asymptotique.

Ces résultats nous permettent de valider les éléments de code traitant les problèmes d’hyperélasticité pour un matériau incompressible dans le cas de sollicitations composées de type compression/cisaillement.

3.2.3 Etude d’un cas de cisaillement

On décompose les conditions limites du problème en des conditions de déplacement et d’effort comme suit (cf fig. 3.9) :

- *déplacement* : sur la face gauche, les déplacements horizontaux et verticaux sont bloqués en chaque nœud, les autres faces sont libres de se déformer
- *effort* : sur la face droite, un effort de cisaillement est appliqué de manière uniforme $\vec{T} = T\vec{y}$ où $T = 9000N$.

Afin de valider nos simulations numériques dans ce cas de cisaillement, nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus par Stéphane Lejeunes avec le code ZeBuLoN. La partie

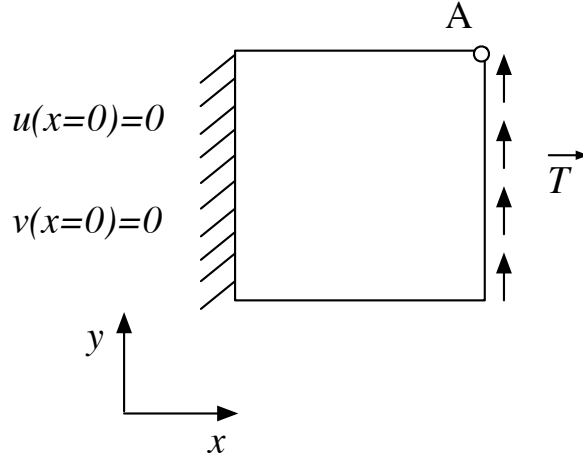


FIGURE 3.9 – Conditions limites en déplacement et en effort d'un cas de cisaillement

traitant les cas d'hyperélasticité a été développée et validée par les travaux entrepris par Stéphane Lejeunes et Adnane Boukamel (*Boukamel* [2], *Lejeunes et al.* [3] et *Lejeunes* [4]).

Observons les résultats obtenus sur le code ZeBuLoN (cf fig. 3.10) et sur le code MARCUS (cf fig. 3.11, fig. 3.12 et fig. 3.13).

On observe pour les deux codes utilisés, une déformée de maillage similaire et ce quelle que soit la taille de maillage. Si l'on observe la déformée de l'extrémité supérieure droite (cf fig. 3.13) obtenue sur MARCUS, nous pouvons constater que plus le maillage est raffiné, plus la déformée tend vers une déformée limite. Le comportement qualitatif du matériau étudié sur MARCUS est donc validé par celui étudié sur ZeBuLoN.

On s'intéresse également aux déplacements du nœud extrême du bord droit A pour différentes tailles de maillage respectivement constitués de 10, 20, 40 et 80 éléments par côté au rapport d'élancement de 1. Nous notons u_{ref} et v_{ref} les valeurs de ces déplacements obtenus sur le code ZeBuLoN pour un maillage constitué de 10x10 éléments que l'on considère comme valeurs de référence. On calcule alors :

$$e_u = 100 \times \frac{|u_{ref} - u_{num}^A|}{|u_{ref}|} \quad (3.23)$$

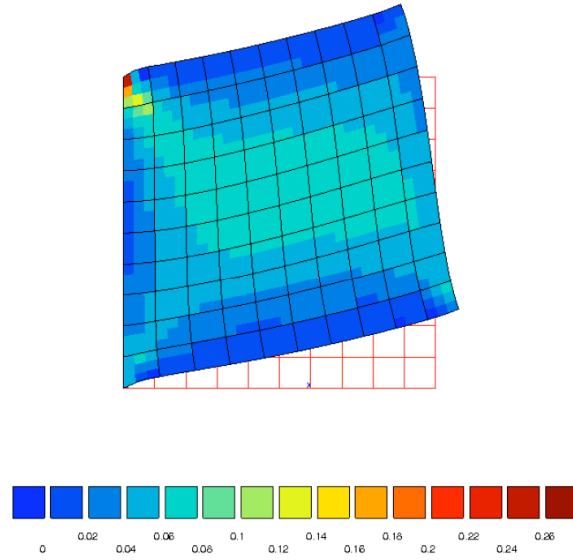


FIGURE 3.10 – Contrainte Π_{12} en cisaillement sur le code ZeBuLoN pour un maillage de 10x10 éléments

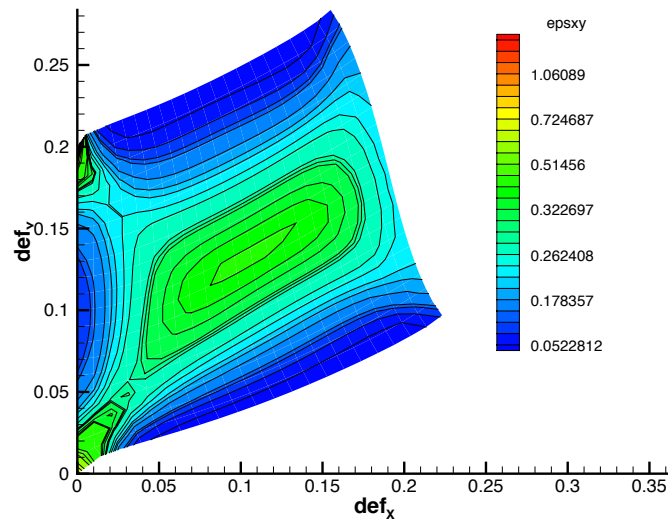
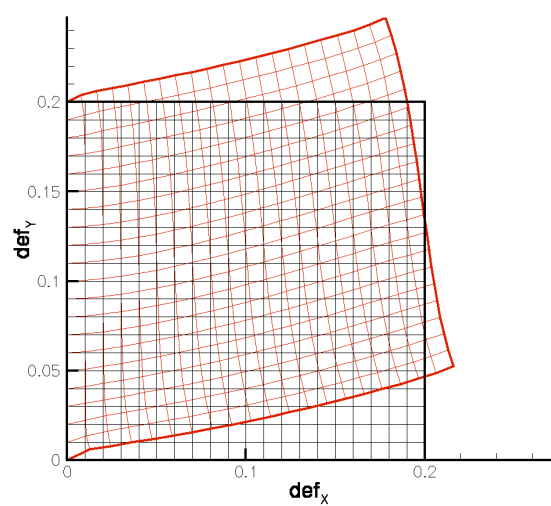
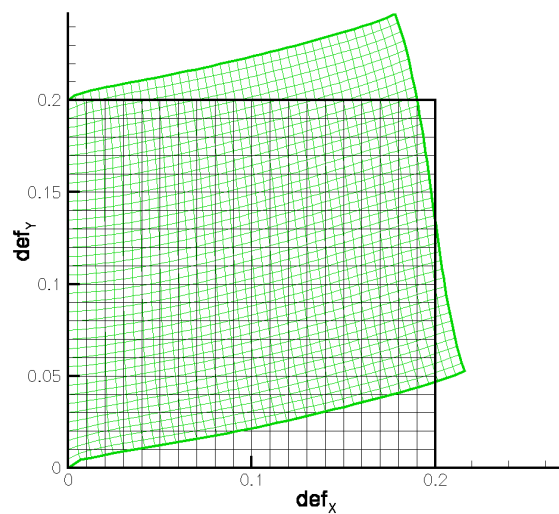


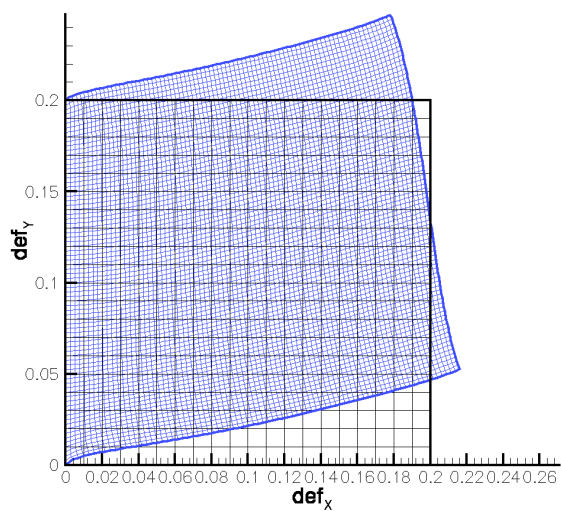
FIGURE 3.11 – Déformation ϵ_{xy} en cisaillement sur le code MARCUS (facteur d'amplification de 2)



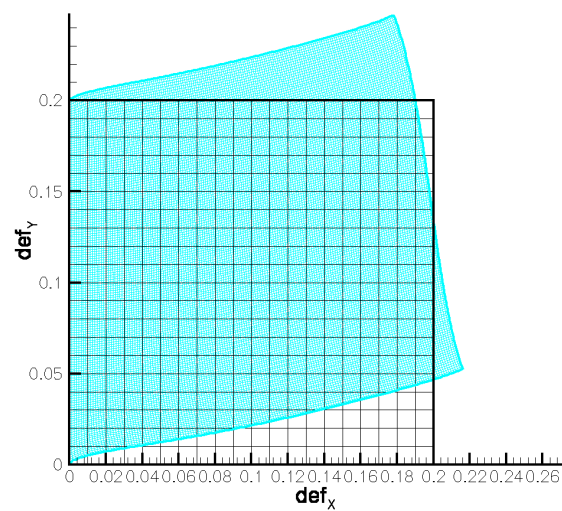
(a) Maillage 10x10



(b) Maillage 20x20



(c) Maillage 40x40



(d) Maillage 80x80

FIGURE 3.12 – Déformée du domaine sur le code MARCUS pour les 4 tailles de mailles étudiées

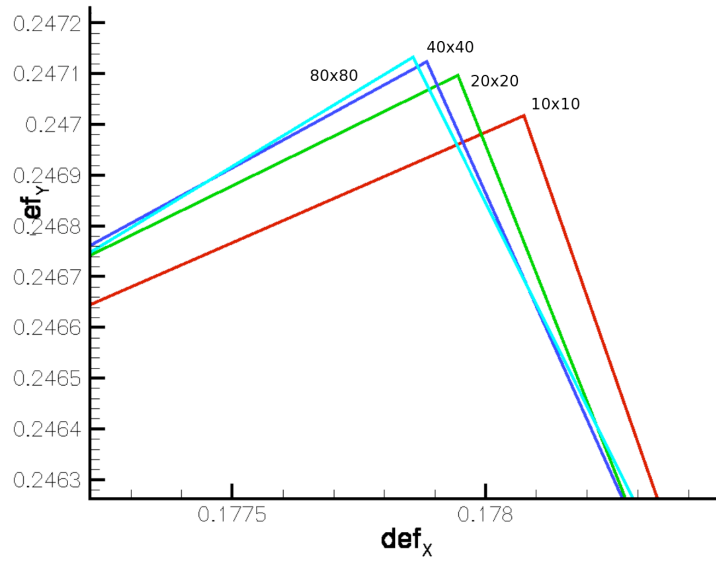


FIGURE 3.13 – Zoom sur l'extrémité supérieure droite pour les 4 tailles de maillage

$$e_v = 100 \times \frac{|v_{ref} - v_{num}^A|}{|v_{ref}|} \quad (3.24)$$

Sachant que $u_{ref} = -22,232mm$ et $v_{ref} = 46,672mm$, les valeurs des écarts obtenues sont répertoriées dans le Tableau 3.7

	10x10	20x20	40x40	80x80
u_{num}^A (mm)	-21,9247	-22,0549	-22,1156	-22,144
e_u (%)	1,38	0,80	0,52	0,39
v_{num}^A (mm)	47,0177	47,0967	47,1251	47,1336
e_v (%)	0,74	0,91	0,97	0,99

TABLE 3.7 – Écart entre la solution numérique de référence et la solution numérique obtenue sur MARCUS

Les courbes de la figure (3.14) montre que l'écart tend vers une valeur asymptotique proche de 1% pour le déplacement v et de 0,4% pour le déplacement u . Rappelons que nous comparons ces déplacements à une solution de référence obtenue pour un maillage composé de 10x10 éléments. Sous cette condition, nous pouvons envisager que plus le maillage est fin, plus nous convergions vers la solution et donc plus on s'éloigne de v_{ref} obtenue sur un maillage plus grossier.

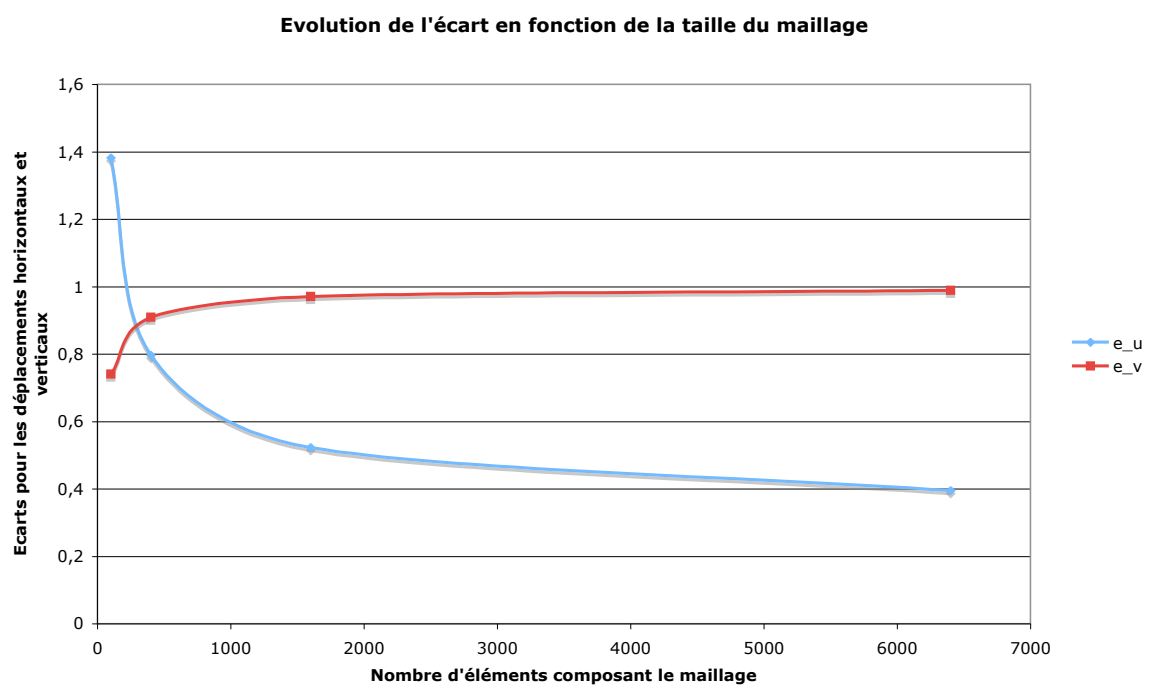


FIGURE 3.14 – Evolution des écarts e_u et e_v en fonction de la taille du maillage

Cette dernière comparaison code à code nous permet de valider les éléments de code traitant les problèmes d'hyperélasticité pour un matériau incompressible dans le cas de sollicitations de type cisaillement.

3.3 Conclusions

Après avoir présenté les équations associées aux différents problèmes de la mécanique et les méthodes de résolution associées aux chapitres précédents, nous avons procédé à la validation des éléments développés dans le code MARCUS.

Dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire en grandes déformations, nous avons pu valider nos développements par l'intermédiaire de l'étude d'un cas particulier dont nous pouvions calculer une solution analytique.

Dans le cas des problèmes d'hyperélasticité, nous avons fait le choix de valider ces éléments par l'étude de 3 cas différents. Une première étude portait sur un essai de traction/compression dont nous connaissions une solution analytique. Les résultats se sont avérés concluants. La deuxième étude de type compression/cisaillement a elle été validée par le calcul d'une solution de référence par une extrapolation de Richardson. Là encore, les résultats obtenus sont suffisamment satisfaisants pour considérer que les simulations numériques ont convergé vers la solution du problème. Enfin, nous avons étudié le cas d'un élastomère soumis à une sollicitation de type cisaillement. Cette fois, nous avons fait le choix de valider nos résultats en les comparant à ceux obtenus par le code ZeBuLoN, code considéré comme fiable vis-à-vis de ces problématiques. Les constatations résultantes de cette comparaison sont également favorables à la validation des éléments d'hyperélasticité introduits dans MARCUS.

Bibliographie

- [1] K.F. Alvin, W.L Oberkampf, B.M. Rutherford & K.V. Diegert. *Methodology for characterizing modeling and discretization uncertainties in computational simulation*. Sandia Report, vol.4, p. 28-37, 2000.
- [2] A. Boukamel. *Etude théorique et expérimentale d'un stratifié caoutchouc-acier en grandes déformations*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille II, 1988.
- [3] S. Lejeunes, A. Boukamel, B. Cochelin & E. Zoppitelli. *Stabilité matérielle structurelle d'un lamifié élastomère-métal*. Acte du sixième colloque national en calcul des structures, vol. 2, p. 535-542, 2003.
- [4] S. Lejeunes. *Modélisation de structures lamifiées élastomère-métal à l'aide d'une méthode de réduction de modèle*. Thèse de l'Université Aix-Marseille II, 2006.

Chapitre 4

Méthode numérique de couplage de MARCUS et CARBUR

Nous présentons ici la stratégie adoptée pour coupler le code fluide au code structure. Tout d'abord sera exposé l'algorithme de couplage, puis comment sont transférées les grandeurs physiques de pression et de géométrie au travers de l'interface. Ensuite, nous décrirons nos choix pour traiter la dynamique du maillage.

4.1 Couplage numérique

4.1.1 Algorithmes de couplage

Dans ce chapitre nous présentons la stratégie adoptée pour coupler les deux codes numériques en vue de traiter les problèmes d’interactions fluide-structure. Notre approche a consisté, dès les travaux de Giordano *et al.* [1], à coupler des codes numériques autonomes dédiés à chaque sous domaines : fluide ou structure. En effet, la voie consistant à développer une approche numérique ”monolithique” où l’ensemble des comportements sont décrits par un unique code est généralement sous-optimale d’un point de vue physique et mathématique (Piperno & Farhat [2]). Cependant, notre approche comporte également un écueil important : le couplage entre les codes étant un couplage faible, une partie de la physique peut ne pas être correctement prise en compte. Il faut donc dans ce dernier cas porter une attention particulière à la façon dont les codes dialoguent au cours de la simulation, particulièrement sur le pas de temps du couplage (Piperno [3] et Piperno & Farhat [4]).

L’enchaînement des communications entre les deux codes suit un algorithme. De manière générale, on distinguera les algorithmes en série, où les codes s’exécutent l’un après l’autre et les algorithmes parallèles où les calculs sont menés simultanément. Notons que dans le cas d’algorithme série, les deux domaines sont forcément décalés temporellement (Farhat *et al.* [5] et Farhat [6]). Nous avons choisi dans nos travaux l’algorithme où les codes s’enchaînent en série avec des sous-cyclages. Le déroulement des communications est présenté sur la figure 4.1.

Le pas temporel de couplage est fixé à l’initialisation du calcul au regard de la dynamique de la structure. Par exemple, si l’on peut estimer la période propre T du premier mode de la structure par un modèle analytique ou une analyse modale, nous prenons usuellement un pas de couplage t_c inférieur à $T/100$. Si on ne peut pas estimer la période propre a priori, une étude de convergence est nécessaire. En outre, comme le calcul de l’écoulement est explicite avec un pas de temps souvent très faible (inférieur à 10^{-6} s), il y a plusieurs itérations pour le domaine fluide par pas de couplage. Notons qu’une étude de convergence du pas de couplage peut être nécessaire si la structure est sollicitée sur des modes supérieurs au premier. Il a été observé par Piperno *et al.* [3], [2] et par Farhat *et al.* [5], que pour de forts sous-cyclages, il pouvait y avoir non conservation de l’énergie entre le fluide et la structure. Les simulations que nous avons menées n’ont jamais montré de problèmes sensibles à ce niveau. Nous avons confronté notre approche à des cas de références (Bispligoff *et al.* [7]), conçu un montage pour confronter nos résultats à l’expérience (Giordano *et al.* [8]) et notre stratégie semble

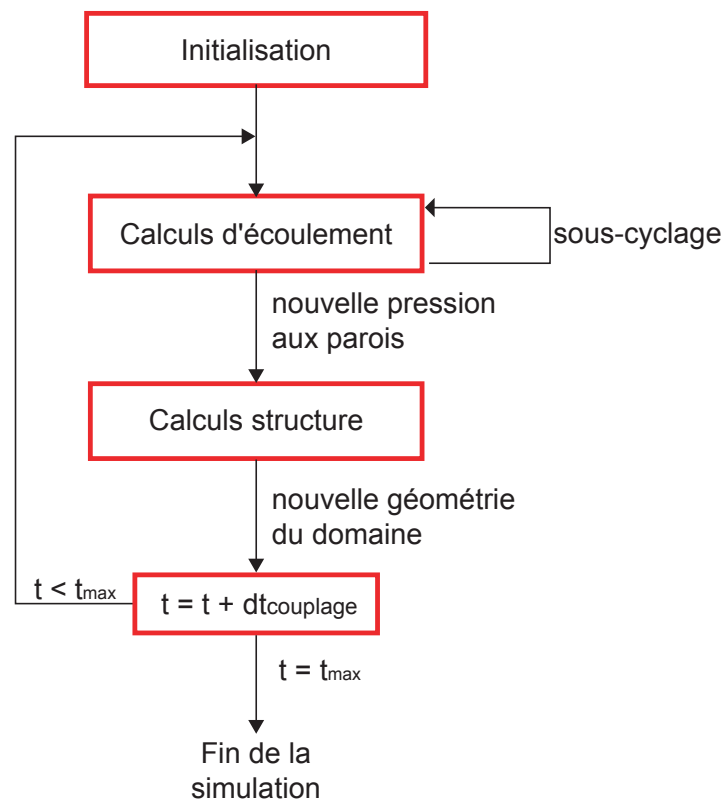


FIGURE 4.1 – Algorithme de couplage

être validée. Ainsi, nous adopterons, pour l'instant, cette stratégie dans nos simulations.

4.1.2 Passage des conditions aux limites

Le passage des conditions aux limites, c'est-à-dire de la géométrie de la structure vers le fluide et de la pression pariétale en retour, est facilité par l'utilisation de maillages coincidents entre les deux sous domaines. La figure 4.2 résume cette méthode de passage.

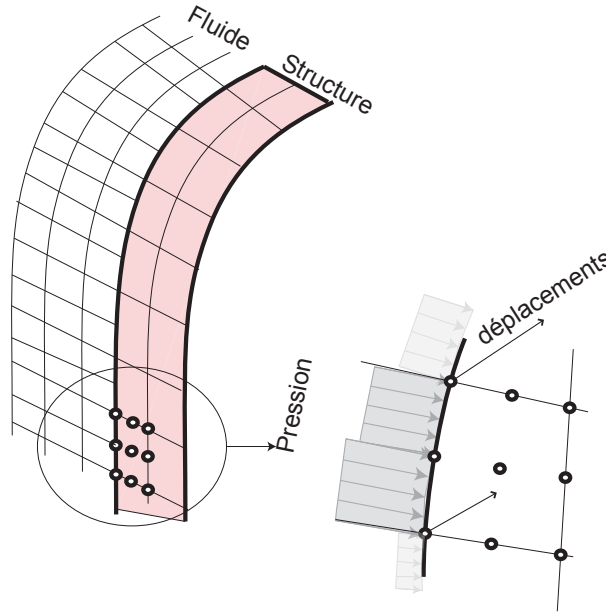


FIGURE 4.2 – Passage des conditions aux limites à l'interface

Si l'on néglige les efforts induits par la viscosité vis-à-vis de ceux de pression dans le tenseur des contraintes du fluide, nous obtenons les relations de chargement mécanique suivantes :

$$\bar{\sigma}(\forall M \in \partial_2 S, t) \cdot \vec{n} = -p \cdot \vec{n} \quad (4.1)$$

et

$$\bar{\sigma}(\forall M \in \partial_2 S, t) \cdot \vec{t} = \vec{0} \quad (4.2)$$

avec M un point appartenant à la frontière de la structure où les efforts sont imposés ($\partial_2 S$).

4.1.3 Traitement du maillage dynamique

Dans la thèse de Jerome Giordano (*Giordano* [1]), deux méthodes de traitement de la déformation du maillage avaient été considérées. La première consistait à considérer le maillage comme une pseudo-structure avec des propriétés mécanique fictives et de prendre en compte les déplacements imposés par une simulation éléments finis en dynamique. Si cette méthode permet une répartition homogène des déformations sur les mailles dues aux déplacements des frontières, elle demeure trop coûteuse en temps calculs. Nous utiliserons donc une méthode analytique de répartition homogène des déformations sur le maillage. Considérons le déplacement $\vec{d}$ d'un nœud de la frontière à répartir sur le maillage. Ce déplacement a pour composantes dx et dy . On notera $\vec{d}_i$ le déplacement à appliquer à la cellule i (dont les composantes sont dx_i et dy_i) de longueur initiale $\vec{l}_i$ comme sur le schéma 4.3.

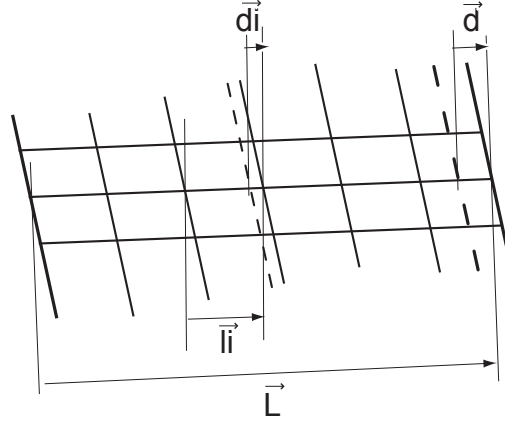


FIGURE 4.3 – Répartitions des déplacements du maillage dynamique

Pour que les déformations soient équivalentes pour chaque cellule, nous posons

$$\frac{\vec{L} - \vec{d}}{\vec{L}} = \frac{\vec{l}_i - \vec{d}_i}{\vec{l}_i} \quad (4.3)$$

d'où

$$\vec{d}_i = \left(1 - \frac{\vec{L} - \vec{d}}{\vec{L}} \right) \vec{l}_i \quad (4.4)$$

et l'on vérifie bien sûr que

$$\sum \vec{d}_i = \vec{d} \quad (4.5)$$

Avec ces relations simples, nous obtenons un maillage dynamique qui conserve ses caractéristiques au cours de la simulation, comme le raffinement des couches limites. De plus, le temps de calcul est faible vis-à-vis des simulations fluide et structure. Nous donnons en exemple, le maillage après déformation d'une plaque horizontale soumise au passage d'une onde de choc sur la figure 4.4.

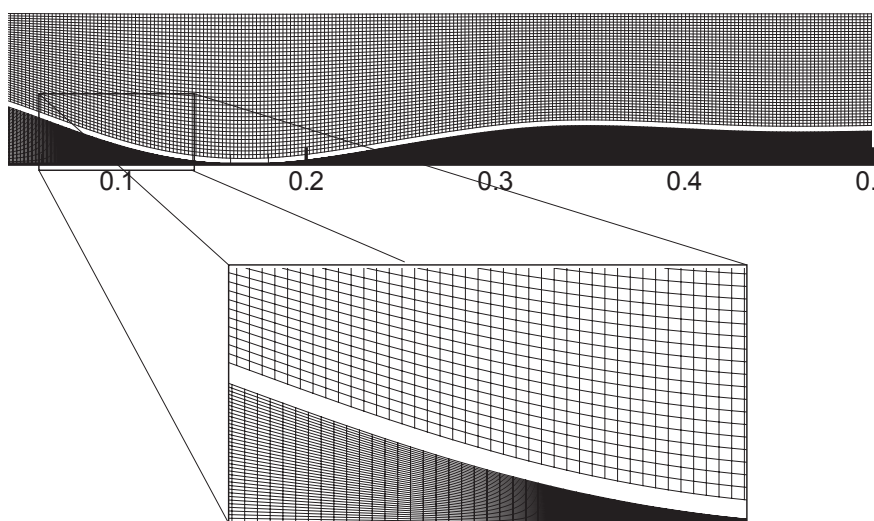


FIGURE 4.4 – Maillage dynamique

Bibliographie

- [1] J. Giordano. *Contribution à la modélisation numérique des problèmes d'interactions fluide-fluide et fluide-structure*. Thèse de Doctorat, Université Aix-Marseille I, 2004.
- [2] S. Piperno & C. Farhat. *Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems*. Revue européenne des élément finis, vol. 9, p. 655-680, 2000.
- [3] S. Piperno. *Simulation numérique de phénomènes d'interaction fluide-structure*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1995.
- [4] S. Piperno & C. Farhat. *Design and evaluation of staggered partitioned procedures for fluid-structure interaction simulations*. Rapport de Recherche 3241 INRIA, 1997.
- [5] C. Farhat, M. Lesoinne & N. Maman. *Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problem : three field formulation, geometrical conservation and distributed solution*. International Journal of Numerical Methods in Fluids, vol. 21, p. 807-835, 1995.
- [6] C. Farhat. *High performance simulation of coupled nonlinear transient aeroelastic problem*. Actes de la troisième école d'été de modélisation numérique en thermique, 1996.
- [7] R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, & R.L. Halfman. *Aeroelasticity*. Dover books on physics, 1955.
- [8] J. Giordano, G. Jourdan, Y. Burtschell, M. Medale, D.E Zeitoun & L. Houas. *Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction*. Shock Waves, vol. 14, N°1-2, p. 103-110, 2005.

Chapitre 5

Elaboration d'un banc d'essai d'interactions fluide-structure

Ce chapitre traite de l'élaboration d'un banc d'essai d'interactions fluide-structure. Nous présentons les investigations qui ont amené au montage retenu et à son utilisation dans l'un des tubes à chocs dont dispose le laboratoire. Les simulations numériques seront alors comparées aux expériences menées.

5.1 Introduction

A ce jour, la littérature manque d'études de cas de référence permettant la validation de modèles numériques et expérimentaux concernant les problématiques d'interactions fluide-structure similaires à ceux des MPS P230. Nous avons donc conçu une nouvelle expérience disposant d'une structure déformable en élastomère soumise au passage d'une onde de choc. L'ENSMA dispose du banc d'essai MICAT pour lequel les essais se font sans choc, sur des temps longs et en tenant compte du coulage acoustique. Nous avons donc fait en sorte de développer un banc d'essai qui lui soit complémentaire, adaptable au tube à choc du laboratoire. Le passage du choc représente une sollicitation impulsionnelle fortement instationnaire pour la structure. On s'est inspiré pour cela de travaux antérieurs réalisés à l'IUSTI. Dans le cadre de sa thèse, Giordano (*Giordano* [1]) a étudié les mouvements d'une plaque d'acier verticale placée dans le tube à choc T80 (cf fig. 5.1).

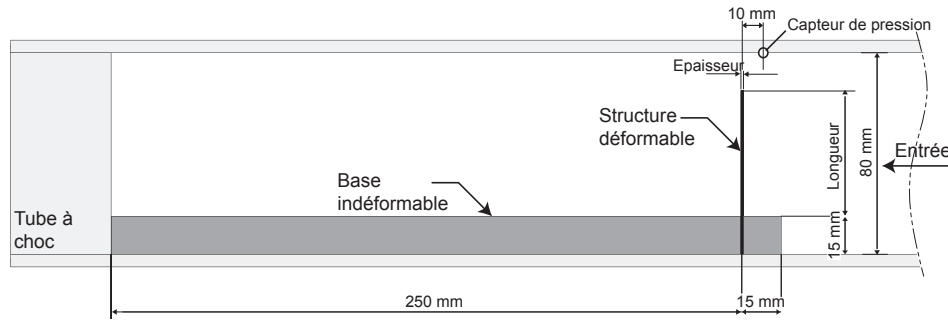


FIGURE 5.1 – Montage des travaux de Jérôme Giordano

Pour notre expérience, nous avons envisagé dans un premier temps de réaliser nos essais dans le tube à choc T500. Il s'est avéré que la qualité de l'écoulement était altérée par le système découpe-onde qui génère des réflexions d'ondes parasites. Ces perturbations ne sont pas maîtrisables et nous conduisent à écarter cette installation dans l'optique de l'élaboration d'un cas test. Nous avons donc travaillé sur le tube à choc T80 de l'équipe expérimentale composée de G. Jourdan et L. Houas. Nous avons utilisé un matériau élastomère SMAC-TANE 50 caractérisable par un potentiel d'énergie libre de Mooney-Rivlin et pour lequel nous connaissons $C_{10} = 2,0 \cdot 10^5 Pa$, $C_{01} = -6,9 \cdot 10^3 Pa$, sa densité $d = 1,19$ et son module d'incompressibilité $K = 1,9 \cdot 10^9 Pa$.

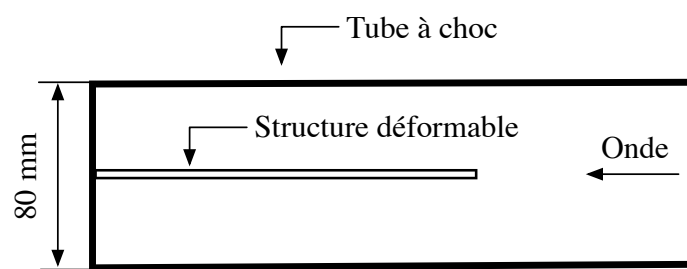
5.2 Réalisation de la maquette d'essai

Le montage que nous avons à concevoir devait être adaptable au tube à choc T80 (section de la chambre d'essai de 80 mm par 80 mm). Nous souhaitons qu'il comporte une structure en élastomère déformable au passage de l'onde du choc. Afin d'assurer une bonne visualisation expérimentale nous devons privilégier de grandes déformations mais également des déformations rapides afin d'obtenir une forte interaction entre la structure et la rafale. Nous devons également envisager une géométrie simple engendrant un écoulement 2D. Une telle configuration permet d'avoir de meilleures visualisations et donc de meilleures mesures. En ce sens, nous avons pensé qu'utiliser une structure de type plaque plane comme l'a fait précédemment Giordano pouvait être une bonne solution. Nous avons alors deux configurations envisageables. La première consistant à placer la plaque horizontalement, la deuxième verticalement.

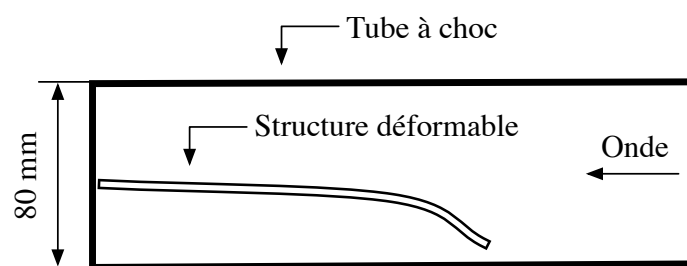
5.2.1 1er montage : plaque d'élastomère horizontale

Nous avons dans un premier temps étudié la possibilité de travailler sur un montage présentant la structure à l'horizontale. L'élastomère étant de nature plus souple que l'acier, nous devons concevoir un montage qui tienne en position la plaque (cf fig. 5.2a) afin qu'elle ne s'affaisse pas (cf fig. 5.2b). Cette contrainte nous a amené à concevoir un système de support pour la plaque étudiée représenté sur la figure (5.3). Nous avons choisi une plaque de longueur 250 mm, d'une épaisseur de 2 mm solidaire au montage à ses deux extrémités par des liaisons complètes sur chacun des supports (droit et gauche). Les bords de part et d'autre du montage sont considérés en contact avec les fenêtres de la chambre d'essai. Pour solliciter cette structure, il faut un écoulement dissymétrique c'est pourquoi le support droit est composé d'un générateur de chocs (cf fig. 5.3b).

Une simulation de la tenue du montage lorsqu'on applique une pression de $1.10^5 Pa$ sur le générateur de chocs a été étudiée. On peut observer sur les figures (5.4a) et (5.4b) la répartition des contraintes de Von Mises sur l'ensemble du système et sur la figure (5.4c) le déplacement en chaque nœuds du maillage. Les déformations transversales de la plaque testée et du support droit sont trop importantes et risquent d'entraîner la détérioration du tube à choc. La configuration présentant la plaque horizontalement ne convient pas à l'étude de notre cas, c'est pourquoi nous utiliserons une configuration présentant la plaque d'élastomère à la verticale.

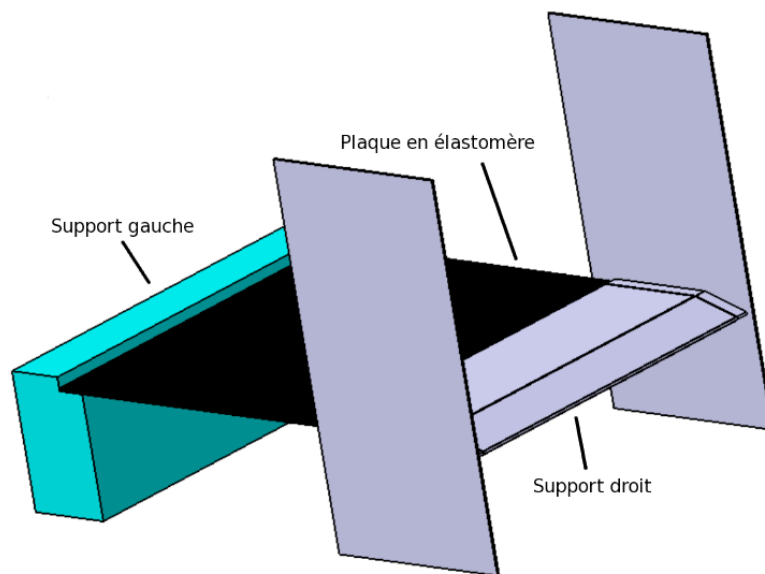


(a) Plaque horizontale

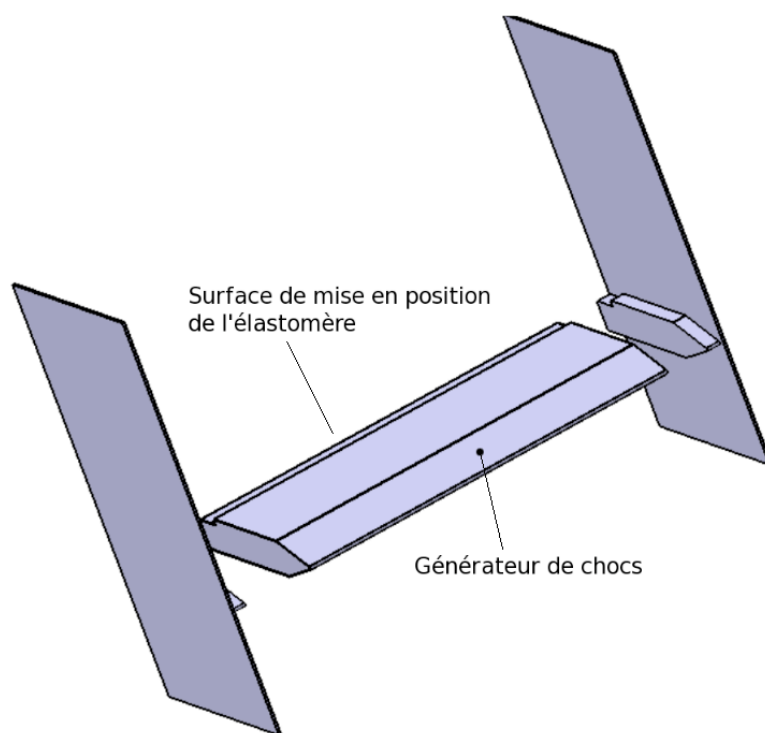


(b) Plaque affaissée

FIGURE 5.2 – Tenue d'une plaque à l'horizontale

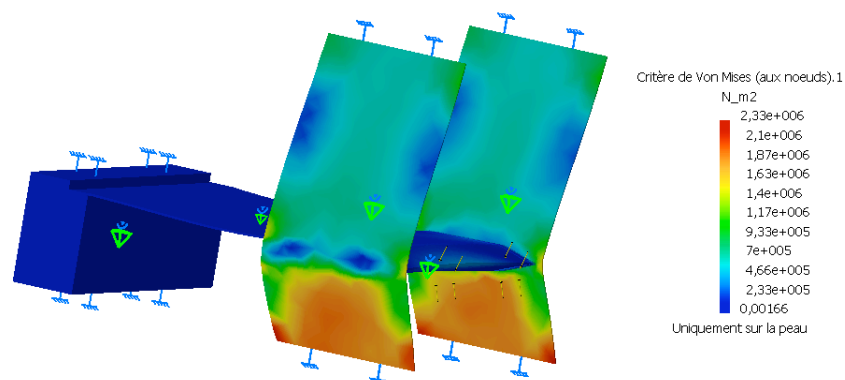


(a) Montage pour plaque horizontale

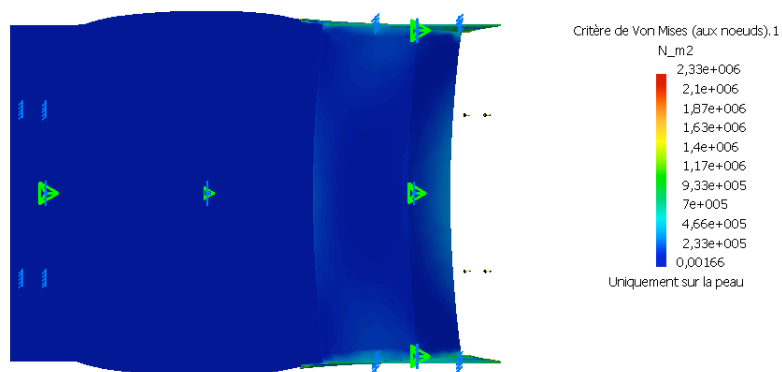


(b) Détail du support droit de la plaque

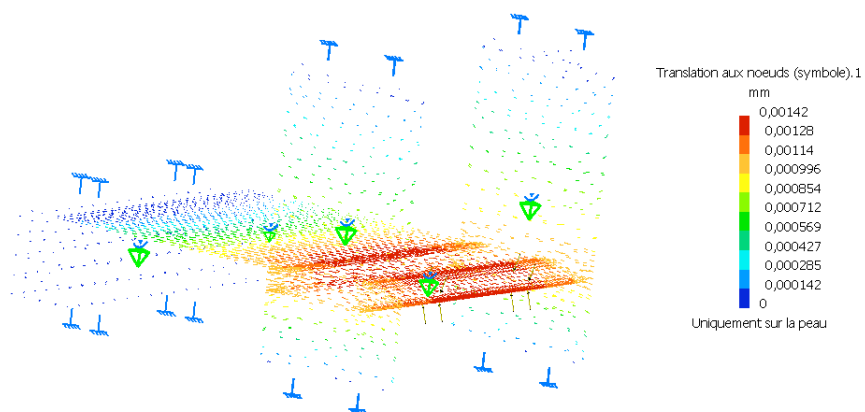
FIGURE 5.3 – Configuration du montage envisagé



(a) Champ de contraintes de Von Mises



(b) Champ de contraintes de Von Mises (vue de dessus)



(c) Déplacement des nœuds du maillage

FIGURE 5.4 – Quelques résultats préliminaires

5.2.2 2ème montage : plaque d'élastomère verticale

Nous pouvions faire le choix de prendre la même configuration que celle utilisée par Giordano dans ses travaux (*Giordano* [2]) seulement pour la même raison que précédemment (fig. 5.2b), nous avons retenu une solution où la plaque d'élastomère est à la verticale tombante (cf fig. 5.5).

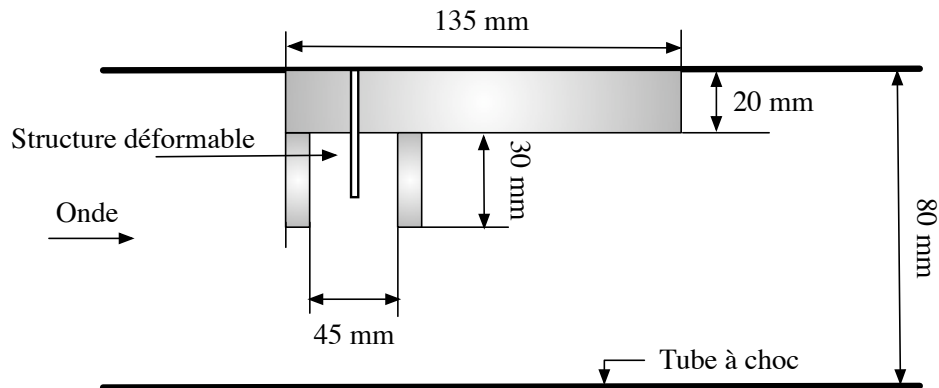


FIGURE 5.5 – Montage choisi avec plaque verticale

Ce montage se compose de la structure déformable en élastomère de 30 *mm* de haut, 2 *mm* d'épaisseur et de 80 *mm* de large (largeur de la chambre d'essai du tube à choc) et d'une base indéformable. La plaque est encastree dans la base sur une hauteur de 15 *mm*. La surface de la plaque exposée au choc est donc de 15 *mm* x 80 *mm*. Les mouvements de la plaque seront assez rapides car elle est courte. On suppose que les parois du tube à chocs sont, comme la base, indéformables. La plaque se situe entre deux marches. Elles ont pour but de piéger les chocs réfléchis et de permettre ainsi à la plaque d'élastomère étudiée d'être sollicitée même après le passage de la rafale. A l'entrée de la chambre d'essai, l'onde incidente a un Mach compris entre 1,1 et 1,7. Le dispositif de diagnostic comprend une caméra rapide qui fournit des clichés ombroscopiques de l'écoulement. On pourra ainsi, à partir de ces photos, mesurer le déplacement de la plaque.

Dans une telle configuration, l'écoulement induit par cette géométrie, la plaque en élastomère et ses mouvements font de ce problème un cas similaire de ce que l'on rencontre dans les boosters de fusée. Nous avons donc retenu ce montage pour nos essais dans le tube à chocs T80.

5.3 Comparaison des résultats expérimentaux aux simulations numériques

Afin de valider notre approche numérique, nous avons procédé à la comparaison des résultats expérimentaux et ceux obtenus par simulations numériques. L'expérience et la simulation se font pour un nombre de Mach $Ma = 1,5$ et l'écoulement a un Reynolds $Re = 730000$. La figure 5.6 présente l'évolution de la flèche au cours du temps de l'extrémité libre de la plaque. Pour l'expérience, nous avons tracé la flèche maximale correspondant au déplacement du milieu de l'arête (plan médian vertical de la plaque) et la flèche minimale correspondant au déplacement d'une de ses extrémités. L'évolution du déplacement obtenu numériquement est celle du milieu de l'arête. Les figures 5.7 et 5.8 montrent la confrontation des photos ombroscopiques obtenues sur le T80 à des images provenant de simulations numériques.

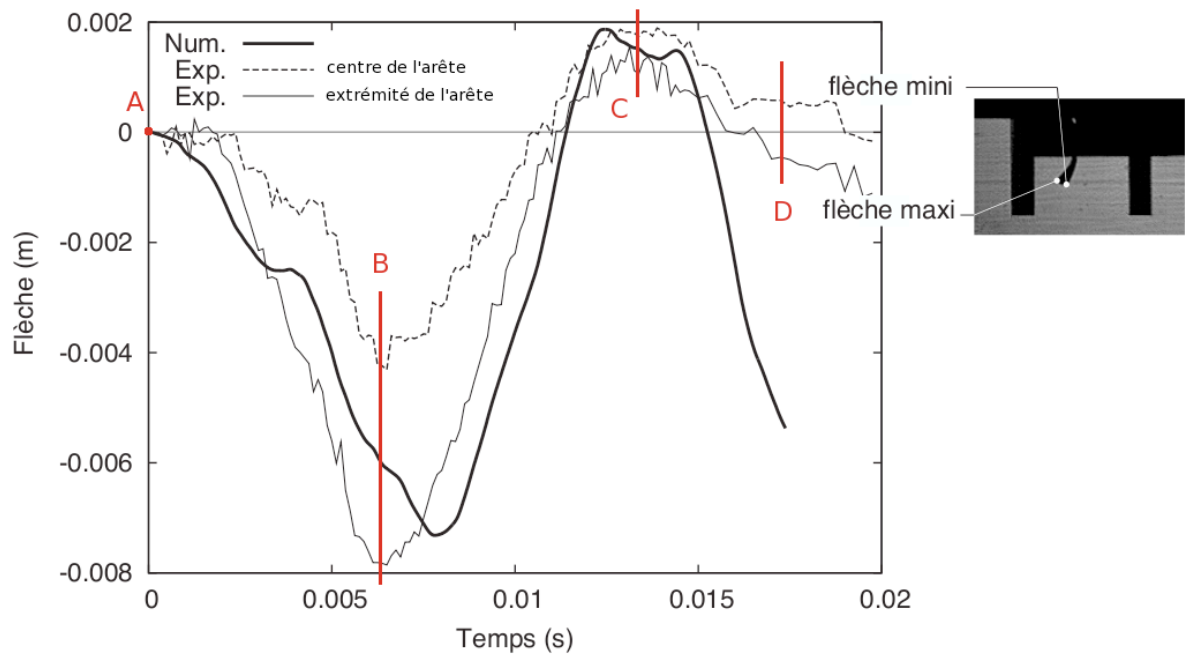


FIGURE 5.6 – Comparaison entre simulation et expérience : amplitude de la flèche

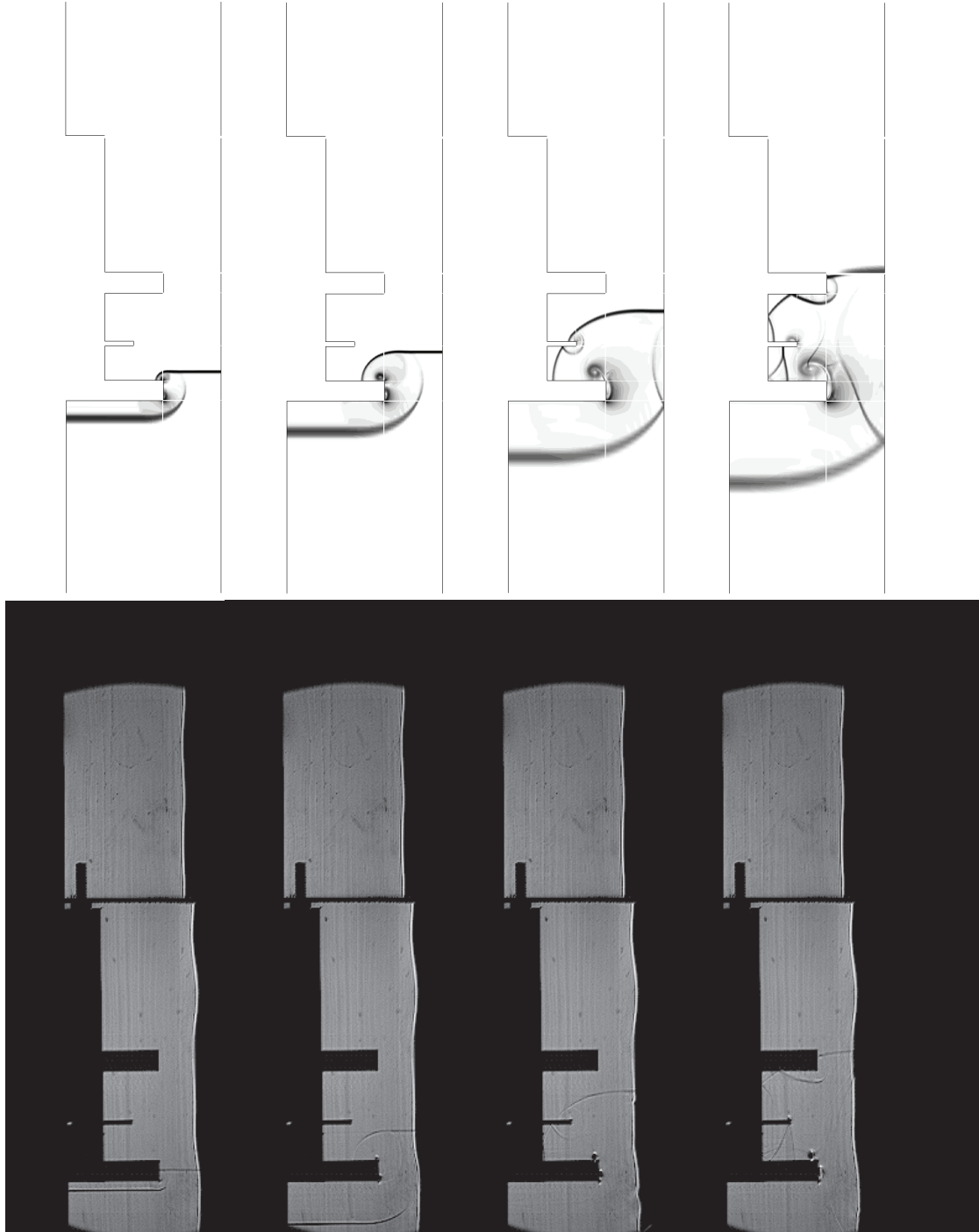


FIGURE 5.7 – Comparaison entre expérience (bas) et simulation (haut) toutes les $50 \mu s$ de $t = 0 s$ à $t = 200 \mu s$: Ombroscopie et schlieren

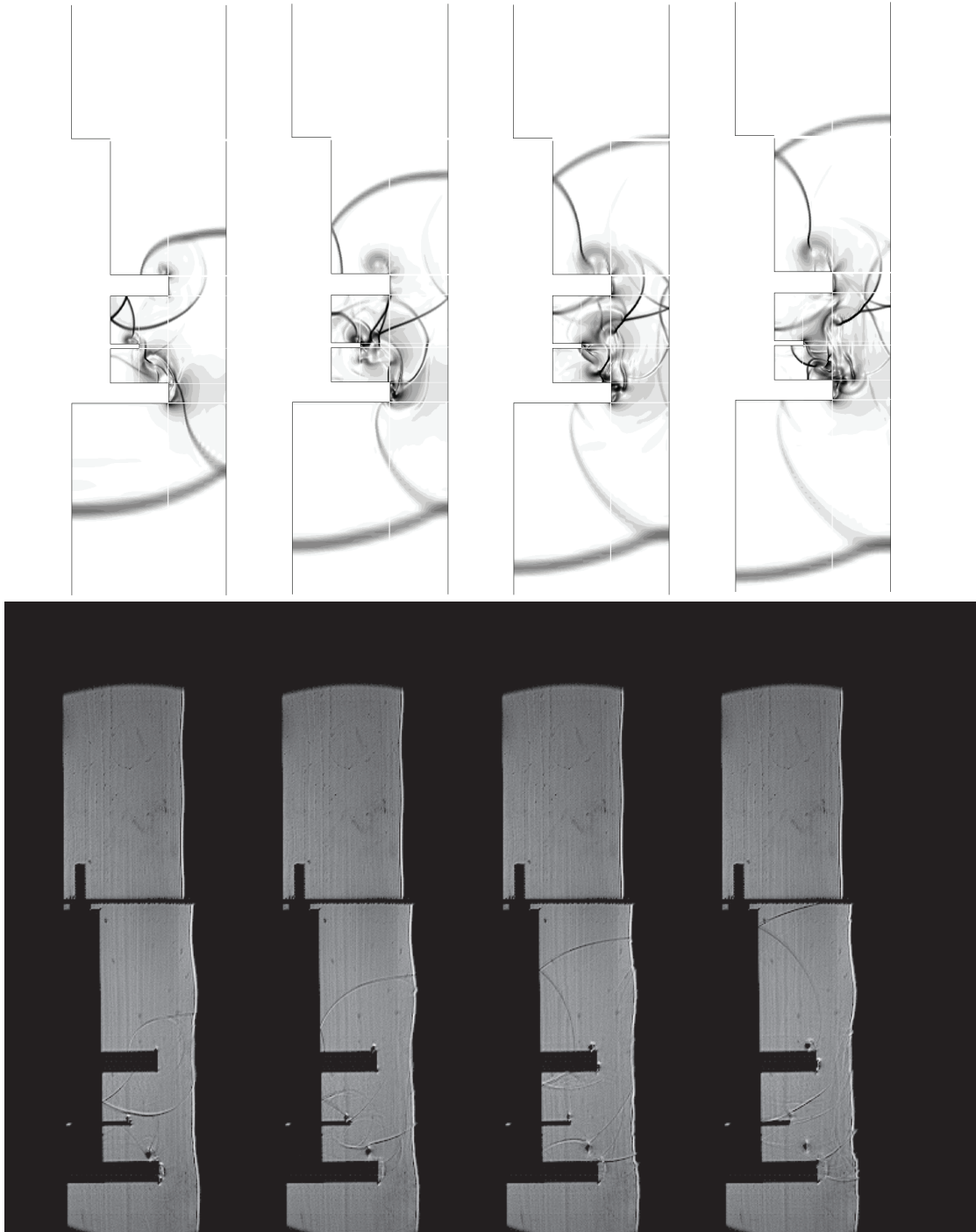


FIGURE 5.8 – Comparaison entre expérience (bas) et simulation (haut) toutes les $50 \mu s$ de $t = 250 s$ à $t = 400 \mu s$: Ombroscopie et schlieren

A partir des clichés pris au cours de l'expérience, nous avons fait les observations suivantes :

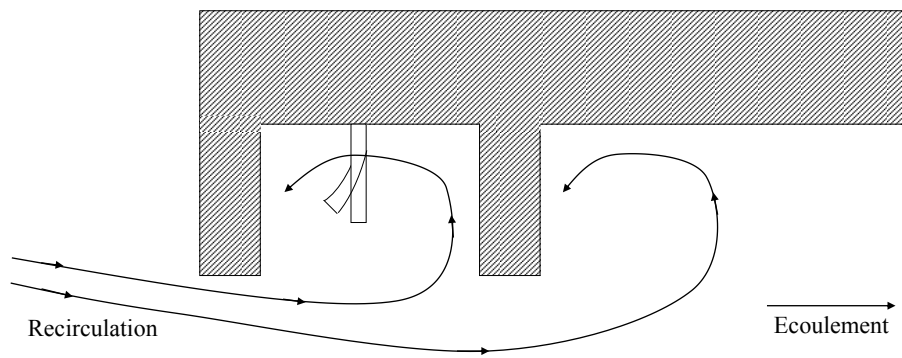
- L'onde incidente se heurte au premier obstacle rigide et donne naissance à un choc transmis et à un vortex attaché à l'extrémité de la marche. Le choc transmis impacte la plaque sans la déformer et le vortex se développe et se détache du bord de fuite. Plusieurs ondes réfléchies sont générées entre les deux obstacles rigides où elles sont piégées. L'écoulement se fait dans la même direction que l'onde incidente, de l'entrée du tube à chocs vers le fond du tube.
- Après que l'onde incidente et les ondes réfléchies soient passées, on observe la plaque qui se déforme dans le sens opposé à l'écoulement. A ce moment, on constate qu'il existe un déphasage entre le passage de l'onde sur la plaque et la déformation de la plaque.
- Pendant que la plaque se déforme (début de la phase AB de la courbe figure 5.6), après que l'onde incidente se soit réfléchi sur le fond du tube, nous l'avons observée sur sa phase de retour vers le montage, à contre courant, et à nouveau frapper la plaque. Les effets 3D de celle-ci sont alors clairement visibles. Les ondes réfléchies du premier passage de la rafale, après être arrivées en fond de tube repassent également sur la structure déformable ce qui amène la flèche de la plaque à son maximum (position B de la courbe figure 5.6). A ce moment, l'écoulement dans le tube à chocs s'inverse et se fait du fond du tube vers l'entrée de la chambre d'essai. Les effets 3D commencent alors à diminuer.
- La plaque revient vers la position verticale plus rapidement qu'elle ne l'a quittée (phase BC de la courbe figure 5.6) et a donc à nouveau un mouvement à contre courant. Elle bascule ensuite dans l'autre sens avec la présence d'effet 3D sur sa déformée. Dans ce sens, la flèche maximale est inférieure à celle obtenue précédemment (à partir du point C de la courbe figure 5.6).
- Le retour du choc change à nouveau le sens de l'écoulement et la plaque revient vers sa position verticale. Les effets 3D sont là encore atténués.

Ces constatations nous amènent à dire que la dynamique de l'écoulement est plus rapide que celle de l'élastomère. On a pu noter que la période de l'écoulement était de l'ordre de la moitié de celle de la plaque. Lorsque l'écoulement passe sur la marche, il se crée un phénomène de recirculation suivant lequel la structure se déforme (cf fig. 5.9a). L'écoulement étant plus rapide au milieu de la plaque que sur les côtés (c'est là qu'il y a les plus grandes vitesses), les efforts qui y sont appliqués sont plus importants et en conséquence, les déformations y sont plus grandes qu'au bord (d'un facteur 2). Lorsque la flèche de la plaque est au maxi-

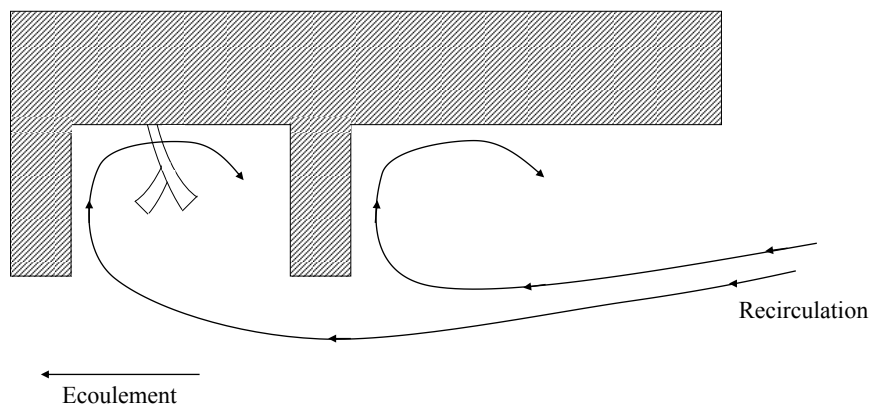
mun, les effets 3D dominent les déformations de la structure étudiée. Ce comportement correspond au début de la phase AB délimitée sur la figure 5.6. Lorsque l'onde incidente revient du fond du tube à chocs sur la plaque, son effet est associé à la recirculation entraînant un supplément de déformation et une amplification des effets 3D. On se repère alors au point B sur la figure 5.6. La phase BC correspond au retour élastique de la plaque vers sa position verticale superposé à la recirculation créée entre les deux obstacles au changement de sens de l'écoulement (cf fig. 5.9b). Les effets 3D sont proportionnels à l'amplitude de la déformation de la plaque en élastomère. Ils sont donc absents lorsque celle-ci revient dans sa configuration initiale. De cette position, l'obstacle déformable se redéforme dans l'autre sens cette fois mais les 3D ont une intensité moins importante que précédemment. Au passage du retour de choc, le sens de l'écoulement est inversé et comme nous l'avons représenté figure 5.9c, une nouvelle recirculation naît entre les obstacles rigides et repousse la plaque vers sa position initiale. On se situe alors sur la portion CD de l'évolution des flèches.

Les observations précédentes peuvent se justifier soit par le comportement de l'écoulement, soit par les effets dissipatifs de la plaque. En effet, dans cette configuration de tube à chocs avec obstacles (marches), l'écoulement devient rapidement très complexe et 3D. Il en est de même pour l'objet déformable dont on sollicite un mode 3D. Ces effets changent significativement la raideur de la plaque car son inertie quadratique est augmentée, la raideur en 3D est supérieure à celle en 2D (cf fig. 5.10). Par ailleurs, il s'avère que les effets de recirculation autour des marches sont les principales causes de déformation de la structure étudiée et que les effets des ondes incidentes et réfléchies ont un rôle d'amplificateur. La dynamique de la plaque est pilotée par la dynamique des recirculations entre les obstacles rigides. Concernant le comportement du matériau, expérimentalement on ne voit pas d'effets de dynamique rapide de la plaque car le retour élastique est fortement atténué par la dissipation du matériau et de l'écoulement.

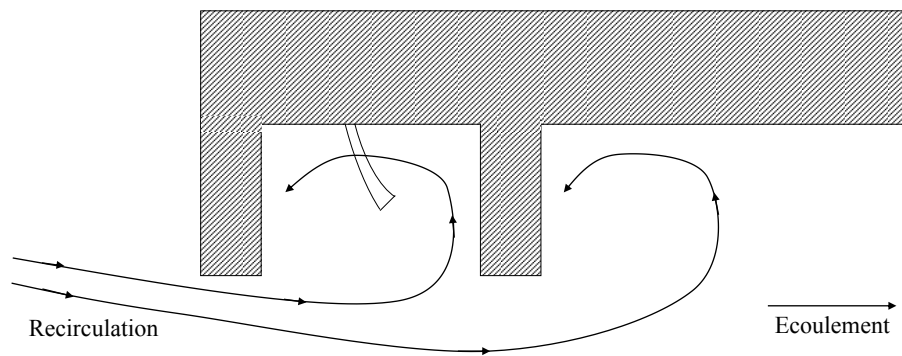
La tendance de l'évolution des flèches numérique et expérimentales sont similaires. En revanche on constate que leurs amplitudes diffèrent. A partir de la réflexion de l'onde en fond du tube, l'écoulement n'est plus simulé par CARBUR. En conséquence, les recirculations qui en découlent, causes principales des déformations de la plaque ne sont pas toutes simulées. A cette absence de recirculation s'ajoute également l'absence du comportement dissipatif du matériau dans la modélisation de son comportement. Au delà de la phase BC de la figure 5.6), le modèle d'écoulement et le modèle du matériau ne sont plus représentatifs de l'expérience.



(a) Schéma de la première recirculation



(b) Schéma de la deuxième recirculation



(c) Schéma de la troisième recirculation

FIGURE 5.9 – Schématisation des recirculations induites par l'écoulement dans le tube à chocs

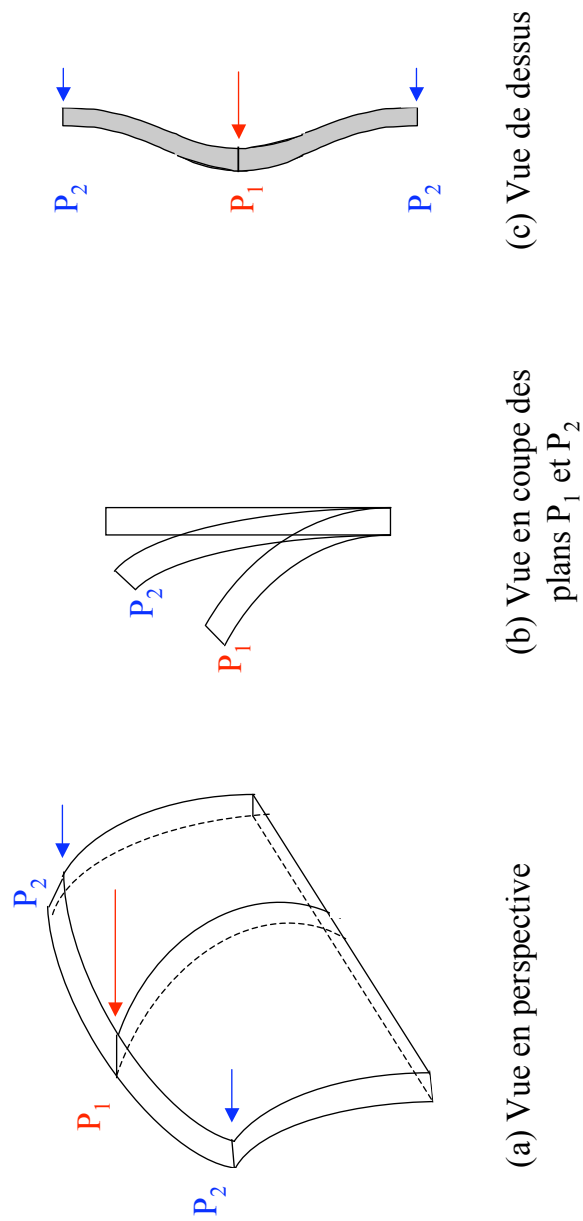


FIGURE 5.10 – Allure de la déformée de la plaque sous les effets 3D

Bibliographie

- [1] J. Giordano. *Contribution à la modélisation numérique des problèmes d'interactions fluide-fluide et fluide-structure*. Thèse de Doctorat, Université d'Aix-Marseille I, 2004.
- [2] J. Giordano, G. Jourdan, Y. Burtschell, M. Medale, D.E Zeitoun & L. Houas. *Shock wave impacts on deforming panel, an application of fluid-structure interaction*. Shock Waves, vol. 14, N°1-2, p. 103-110, 2005.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Ce manuscrit de thèse aborde les problèmes d’interactions fluide-structure rencontrés au niveau des protections de face dans les boosters de fusée. Dans un premier temps, nous avons présenté les équations traitant le problème fluide d’un côté et le problème de mécanique des solides déformables d’un autre, puis nous avons abordé les méthodes de résolution associées. Nous avons pu ainsi exposer les méthodes de modélisation du comportement de matériaux hyperélastiques incompressibles. Après avoir caractérisé celui du matériau étudié par un potentiel d’énergie libre de type Mooney-Rivlin, nous avons procédé à différents tests afin de valider les nouveaux développements apportés au code MARCUS. Nous avons ainsi successivement comparé les résultats de simulations à une solution calculée analytiquement pour une sollicitation en traction/compression, à une approximation extrapolation de Richardson pour une sollicitation de type compression/cisaillement et aux résultats obtenus par le code ZeBuLoN au LMA pour une sollicitation de type cisaillement.

Nous avons ensuite présenté la stratégie de couplage entre les codes fluides CARBUR et solides MARCUS. Notre méthode a consisté à coupler deux codes autonomes par un couplage faible. C’est un algorithme en série avec enchaînement des codes par sous-cyclages qui gère le dialogue entre MARCUS et CARBUR. Afin de faciliter le passage des conditions limites à l’interface, nous avons utilisé des maillages coïncidents entre les sous domaines. Ensuite la méthode retenue pour traiter le maillage dynamique a été exposée.

Nous avons développé la conception d’un banc d’essai testé sur le tube à chocs T80 du laboratoire. Deux montages différents ont été envisagés : un présentant une plaque d’élastomère

disposée horizontalement dans l'écoulement et un présentant cette même plaque de manière verticale. La deuxième configuration a été retenue. Une campagne expérimentale pour différentes valeurs du nombre de Mach ($1,1 < \text{Mach} < 1,7$) a été menée ainsi que des simulations numériques pour $\text{Ma}=1,5$. Enfin, nous avons confronté les résultats expérimentaux aux résultats de simulations numériques. Il s'est avéré que les déformations étaient principalement dues aux recirculation engendrées par l'écoulement au cours de l'expérience. Durant la simulation numérique, les ondes de retour réfléchies en fond de tubes n'ont pas été considérées car l'écoulement se fait dans un tube ouvert. L'écoulement induisant certaines recirculations observées lors de l'expérience manque alors. Il n'y a donc pas de pertinence à confronter les résultats expérimentaux aux résultats de simulations numériques à partir du retour des ondes depuis le fond du tube à chocs. Par ailleurs, la propriété dissipative des élastomère a été considérée comme négligeable lors de la modélisation de leur comportement et nous avons envisagé que le problème soit 2D et non 3D comme nous l'avons observé lors des campagnes d'essais.

Nous avons envisagé à chacune des étapes des problèmes uniquement en deux dimensions. Malgré les précautions prises dans le cadre des essais expérimentaux, nous avons noté que les effets 3D ne pouvaient pas être négligés. Le montage ombroscopique ne permet pas de mesurer autre chose que des phénomènes plans, c'est pourquoi les déformations doivent impérativement être 2D. Dans la perspective d'améliorer les travaux menés à ce jour, le montage devrait être reconsidéré et retesté dans le tube à chocs afin de se ramener à un problème en deux dimensions. Par exemple, nous pourrions reprendre la configuration étudiée et commencer par ôter le premier obstacle rigide de sorte que la plaque d'élastomère reçoive la rafale en direct.

Il pourrait également être envisagé de développer un nouveau modèle numérique représentatif des lois de comportement pour les matériaux type élastomère non pas hyperélastique mais visco-hyperélastique et de reconsidérer les simulations numériques avec ce modèle pour mesurer les effets dissipatifs au sein de ce matériau.

Dans le cadre de nos travaux, nous avons étudié un cas d'interactions fluide-structure où les structures mises en jeu étaient constituées d'élastomères. Aujourd'hui, cette catégorie de matériaux s'utilise dans de nombreuses applications autres que celles liées à la propulsion solide. En effet, leurs propriétés dissipatives trouvent tout leur intérêt dans le cadre, par exemple, d'applications de type génie civil. Des éléments en élastomères sont souvent employés afin de procéder au contrôle de l'amortissement des effets sismiques sur des bâtiments par l'intermédiaire d'amortisseurs élastomères.

Chapitre 7

Annexes

Les annexes qui suivent complètent en partie la liste de modèles de potentiels d'énergie libre isotropes incompressibles exposée au chapitre 2 et présentent la discrétisation par la méthode des éléments finis des problèmes en grandes déformation et en hyperélasticité (en 2 dimensions) étudiée également au chapitre 2.

7.1 Annexe A : Différents modèles de potentiels d'énergie libre isotropes incompressibles

Modèle d'Ogden *Ogden* propose en 1972 [1] l'un des modèles les plus utilisés avec le modèle de Rivlin & Saunders. Contrairement aux précédents, le modèle développé par Ogden ne dépend pas des invariants du tenseur de Cauchy-Green mais des élongations principales λ_i . L'énergie de déformation décrit leurs variations de la configuration de référence à la configuration actuelle par la relation :

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3) \quad (7.1)$$

où N désigne l'ordre de l'énergie de déformation, μ_k les coefficients de cisaillement, les α_k des constantes sans dimension et les λ_i vérifient $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Par linéarisation on obtient une relation entre le module de cisaillement linéaire μ et les paramètres matériau μ_k et α_k :

$$2\mu = \sum_{k=1}^N \mu_k \alpha_k \quad \mu_k \alpha_k > 0 \quad (7.2)$$

Avec ce potentiel, c'est pour $N = 3$ que l'on obtient une très bonne corrélation avec l'expérimental. On retrouvera pour des cas particuliers une expression d'énergie polynomiale :

- pour $N = 1$ et $\alpha_1 = 2$, on retrouve le modèle Néo Hookéen avec $C_{10} = \frac{\mu}{2}$
- pour $N = 2$, $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = -2$, on retrouve le modèle de Mooney-Rivlin avec $C_{10} = \frac{\mu}{2}$ et $C_{20} = -\frac{\mu}{2}$

Autres modèles De nombreux modèles adaptés à un type de matériau ou un type de réponse existent. Le modèle de Gent-Thomas se construit avec une fonction logarithmique du deuxième invariant (*Gent-Thomas* [2]), le modèle de Hart-Smith est un modèle adapté à des cas de déformations $> 500\%$ et dépend de 3 coefficients matériaux (*Hart-Smith* [3]), tout comme celui de Rivlin & Sawyers (*Rivlin & Sawyers* [4]), ou encore le modèle de Lamber-Diani & Rey (*Lamber-Diani & Rey* [5]).

7.2 Annexe B : Discrétisation par la méthode des éléments finis d'un problème d'élasticité linéaire

Dans le cadre de l'élasticité linéaire, en négligeant les termes d'amortissement, la formulation variationnelle (2.21) s'écrit :

trouver $\vec{U} \in \{\vec{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega), \vec{U} = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$
tel que $\forall \delta\vec{U}^* \in \{\delta\vec{U}^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \delta\vec{U}^* = \vec{0} \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$

$$I = \int_{\Omega} \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\varepsilon}}^* dV - \int_{\delta\Omega} \vec{f}_d \cdot \delta\vec{U}^* dS - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta\vec{U}^* dV + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta\vec{U}^* dV = 0 \quad (7.3)$$

Par ailleurs, nous avons vu avec l'équation (2.31) que le système global pouvait s'écrire sous la forme :

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{U}_i\} + [\mathbf{K}_t] \{U_i\} = \{\mathbf{F}\} \quad (7.4)$$

Intéressons nous à la forme de la matrices de masse $[\mathbf{M}]$ et à la matrice tangente $[\mathbf{K}_t]$. Elle sont le résultat de l'assemblage de leurs matrices élémentaires associées $[\mathbf{M}^e]$ et $[\mathbf{K}_t^e]$.

On pose en 2D :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{\nabla}} \vec{U} + \bar{\bar{\nabla}}^t \vec{U} + \bar{\bar{\nabla}} \vec{U} \cdot \bar{\bar{\nabla}}^t \vec{U} \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

et on a également :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{\nabla}} \delta\vec{U}^* + \bar{\bar{\nabla}}^t \delta\vec{U}^* \right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^* & \varepsilon_{xy}^* \\ \varepsilon_{xy}^* & \varepsilon_{yy}^* \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

En 2D, le champ des déplacements s'exprime comme suit :

$$\begin{cases} \vec{U} = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y \\ \vec{U}^* = u^*(x, y)\vec{e}_x + v^*(x, y)\vec{e}_y \end{cases} \quad (7.7)$$

On a alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right] \end{cases} \quad (7.8)$$

et :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (7.9)$$

Par ailleurs, la matrice des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}$ est reliée à $\bar{\bar{\varepsilon}}$ par l'équation (1.16) et en considérant l'expression donnée par l'équation (1.17).

Et en 2D, on a :

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = (2\mu + \lambda)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy} \end{cases} \quad (7.10)$$

On note :

$$\begin{aligned}
D_1 &= (2\mu + \lambda) = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\
D_2 &= \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\
D_3 &= \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

ce qui nous permet d'écrire les contraintes σ_{ij} en fonction des déplacements :

$$\begin{cases}
\sigma_{xx} = D_1 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + D_2 \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\
\sigma_{yy} = D_1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + D_2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\
\sigma_{xy} = D_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right)
\end{cases} \tag{7.12}$$

Enfin, sur l'élément de référence Q4 considéré, l'approximation du champ de déplacement est donnée par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation N_i (*Batoz & Dhett* [6]) :

$$\vec{U}^e(\xi, t) = \begin{Bmatrix} u_i^e(\xi, t) \\ v_i^e(\xi, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \\ u_4^e \\ v_4^e \end{Bmatrix} \tag{7.13}$$

$$\vec{U}^e(\xi, t) = \begin{Bmatrix} u_i^e(\xi, t) \\ v_i^e(\xi, t) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{U_i^e\} \tag{7.14}$$

De la même manière, la forme du champ de déplacement virtuel est la suivante :

$$\vec{U}^{e*}(\xi, t) = \begin{Bmatrix} u_i^{e*}(\xi, t) \\ v_i^{e*}(\xi, t) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{U_i^{e*}\} \tag{7.15}$$

7.2.1 Matrice de masse élémentaire

$$I_{acc}^e = \int_{\Omega^e} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}^e}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U}^{e*} dV \quad (7.16)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \rho_s \left(\langle \delta u_i^{e*} \rangle \frac{\partial^2 \{u_i^e\}}{\partial t^2} + \langle \delta v_i^{e*} \rangle \frac{\partial^2 \{v_i^e\}}{\partial t^2} \right) \det J_e d\xi d\eta \quad (7.17)$$

$$= \langle \delta U_i^{e*} \rangle [\mathbf{M}^e] \{\ddot{U}_i^e\} \quad (7.18)$$

où la matrice masse élémentaire est donnée par :

$$[\mathbf{M}^e] = \int_0^1 \int_0^1 \rho_s [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.19)$$

et $\det J_e$ est le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation de l'élément de référence Q4 à Ω_e

7.2.2 Matrice de rigidité élémentaire

$$I_{def}^e = \int_{\Omega} \overline{\overline{\sigma^e}} : \overline{\overline{\varepsilon^{e*}}} dV \quad (7.20)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \overline{\overline{\sigma^e}} : \overline{\overline{\varepsilon^{e*}}} \det J_e d\xi d\eta \quad (7.21)$$

On a :

$$\mathcal{A} = \overline{\overline{\sigma^e}} : \overline{\overline{\varepsilon^{e*}}} = Tr(\overline{\overline{\sigma^e}} \cdot \overline{\overline{\varepsilon^{e*}}}) \quad (7.22)$$

$$= \sigma_{xx}^e \varepsilon_{xx}^{e*} + 2\sigma_{xy}^e \varepsilon_{xy}^{e*} + \sigma_{yy}^e \varepsilon_{yy}^{e*} \quad (7.23)$$

Exprimé en fonction des champs de déplacement, $\mathcal{A}$ prend la forme suivante en fonction des coefficients D_i définis par les équation (7.11) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = & D_1 \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial x} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial x} + \frac{D_1}{2} \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial x} \left(\frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial x} \right)^2 + \frac{D_2}{2} \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial x} \left(\frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial y} \right)^2 \\
& + D_3 \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial y} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial y} + D_3 \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial y} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial y} \\
& + \frac{D_1}{2} \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial x} \left(\frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial x} \right)^2 + D_2 \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial x} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial y} + \frac{D_2}{2} \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial x} \left(\frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial y} \right)^2 \\
& + D_3 \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial y} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial x} + D_3 \frac{\partial \langle \delta u_i^{e*} \rangle}{\partial y} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial y} \\
& + D_1 \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial y} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial y} + \frac{D_1}{2} \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial y} \left(\frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial y} \right)^2 + \frac{D_2}{2} \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial y} \left(\frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial x} \right)^2 \\
& + D_3 \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial x} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial x} + D_3 \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial x} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{v_j^e\}}{\partial y} \\
& + \frac{D_1}{2} \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial y} \left(\frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial y} \right)^2 + D_1 \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial y} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial x} + \frac{D_2}{2} \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial y} \left(\frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial x} \right)^2 \\
& + D_3 \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial x} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial y} + D_3 \frac{\partial \langle \delta v_i^{e*} \rangle}{\partial x} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial x} \frac{\partial \{u_j^e\}}{\partial y}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

La matrice élémentaire associée à cette décomposition de $\overline{\sigma^e} : \overline{\varepsilon^{e*}}$ en fonction des champs de déplacement est non linéaire. Afin de résoudre le système algébrique non linéaire considérée par la méthode de Newton-Raphson, il est préférable de construire la matrice tangente associée $[\mathbf{K}_t^e]$. Pour cela, nous calculons la première variation de la forme intégrale I_{def}^e .

$$\Delta I_{def}^e = \int_0^1 \int_0^1 \Delta(\overline{\sigma^e} : \overline{\varepsilon^{e*}}) \det J_e d\xi d\eta \tag{7.25}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \Delta \mathcal{A} \det J_e d\xi d\eta \tag{7.26}$$

avec $\Delta \mathcal{A} = \Delta \overline{\sigma^e} : \overline{\varepsilon^{e*}}$ qui se décompose sous la forme suivante :

Le système matriciel de ΔI_t^e se met alors sous la forme :

$$\Delta I_{def}^e = (< \delta U_i^{e*} > < \delta V_i^{e*} >) [\mathbf{K}_t^e] \begin{pmatrix} \{\Delta U_j^e\} \\ \{\Delta V_j^e\} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

avec $[\mathbf{K}_t^e]$ décomposable en :

$$[\mathbf{K}_t^e] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_t^{e1}] & [\mathbf{K}_t^{e2}] \\ [\mathbf{K}_t^{e3}] & [\mathbf{K}_t^{e4}] \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

où chaque bloc $[\mathbf{K}_t^{ei}]$ s'exprime comme suit :

-

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tij}^{e1} = & \int_0^1 \int_0^1 [D_1 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + D_1 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} \frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + D_2 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} \frac{\partial u}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \\ & + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} \left(\frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \frac{\partial u}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \right)] \det J_e d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.31)$$

-

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tij}^{e2} = & \int_0^1 \int_0^1 [D_1 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} \frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + D_2 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + D_2 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} \frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \\ & + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} \left(\frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \right)] \det J_e d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.32)$$

-

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tij}^{e3} = & \int_0^1 \int_0^1 [D_1 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} \frac{\partial u}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + D_2 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + D_2 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} \frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \\ & + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} \left(\frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \frac{\partial u}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \right)] \det J_e d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.33)$$

-

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{tij}^{e4} = & \int_0^1 \int_0^1 [D_1 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + D_1 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + D_2 \{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \} \frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \\ & + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + D_3 \{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \} \left(\frac{\partial v}{\partial x} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \frac{\partial v}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \right)] \det J_e d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.34)$$

7.3 Annexe C : Discrétisation par la méthode des éléments finis d'un problème d'hyperélasticité

Dans le cadre d'un problème incompressible d'hyperélasticité dans une description mixte, en négligeant les termes d'amortissement, la formulation variationnelle (2.42) s'écrit :

trouver $\vec{U} \in \{\vec{U} \in \mathcal{H}^1(\Omega), \vec{U} = \vec{U}_d \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$ et $p \in \mathcal{L}^2(\Omega)$
tel que $\forall \delta \vec{U}^* \in \{\delta \vec{U}^* \in \mathcal{H}_0^1(\Omega), \delta \vec{U}^* = \vec{0} \quad \forall M \in \delta_1\Omega\}$ et $\delta p^* \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(I_1(\vec{U}), I_2(\vec{U}))}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F}) \right) : \bar{\varepsilon}^* dV - \int_{\Omega} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{U}^* dV - \int_{\delta\Omega} \vec{f}_d \cdot \delta \vec{U}^* dS + \int_{\Omega} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U}^* dV = 0 \\ \int_{\Omega} ((J(\vec{U}) - 1) - \frac{p}{K}) \delta p^* dV = 0 \end{cases} \quad (7.35)$$

Nous considérons le cas d'un matériau caractérisable par un potentiel d'énergie libre de type Mooney-Rivlin (cf eq. (2.37)).

Ainsi, nous avons $\Psi(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$ et $\frac{\partial \Psi(I_1(\vec{U}), I_2(\vec{U}))}{\partial \bar{F}}$ se décompose en fonction des invariants de $\bar{C}$:

$$\frac{\partial \Psi(I_1, I_2)}{\partial \bar{F}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \bar{F}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \bar{F}} \quad (7.36)$$

avec :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} &= C_{10} \text{ et } \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} = C_{01} \\ - \frac{\partial I_1}{\partial \bar{F}} &= 2\bar{F} \text{ et } \frac{\partial I_2}{\partial \bar{F}} = 2\bar{F}(I_1 \bar{I} - \bar{C}) \end{aligned}$$

L'équation devient alors :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}} = 2C_{10}\bar{F} + 2C_{01}\bar{F}(I_1 \bar{I} - \bar{C}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{11} & \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{12} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{21} & \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{22} \end{bmatrix} \quad (7.37)$$

et les termes de $\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}$ s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{11} = 2C_{10}(\frac{\partial u}{\partial x} + 1) + 2C_{01} \left[(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)(\frac{\partial v}{\partial y} + 1)^2 - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} (\frac{\partial v}{\partial y} + 1) \right] \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{12} = 2C_{10} \frac{\partial u}{\partial y} + 2C_{01} \left[\frac{\partial u}{\partial y} (\frac{\partial v}{\partial x})^2 - \frac{\partial v}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial x} + 1)(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) \right] \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{21} = 2C_{10} \frac{\partial v}{\partial x} + 2C_{01} \left[\frac{\partial v}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial y})^2 - \frac{\partial u}{\partial y} (\frac{\partial u}{\partial x} + 1)(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) \right] \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}}_{22} = 2C_{10}(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) + 2C_{01} \left[(\frac{\partial v}{\partial y} + 1)(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)^2 - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial x} + 1) \right] \end{array} \right. \quad (7.38)$$

Par ailleurs, nous avons vu eq. (2.46) que la discrétisation par la méthode des éléments finis nous amenait à la forme globale du système suivante :

$$< \delta U_i^*, \delta p^* > \left[[\mathbf{M}] \left\{ \begin{array}{c} \Delta \ddot{U}_i \\ \Delta p \end{array} \right\} + [\mathbf{K}_t] \left\{ \begin{array}{c} \Delta U_i \\ \Delta p \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \right] = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (7.39)$$

En 2D, avec le champ de déplacement s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U} = u(x, y)\vec{e}_x + v(x, y)\vec{e}_y \\ \vec{U}^* = u^*(x, y)\vec{e}_x + v^*(x, y)\vec{e}_y \end{array} \right. \quad (7.40)$$

et on a :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}^* = \frac{1}{2} \left(\bar{\bar{\nabla}} \delta \vec{U}^* + \bar{\bar{\nabla}}^t \delta \vec{U}^* \right) = \left[\begin{array}{cc} \varepsilon_{xx}^* & \varepsilon_{xy}^* \\ \varepsilon_{xy}^* & \varepsilon_{yy}^* \end{array} \right] \quad (7.41)$$

Sur l'élément de référence Q9 considéré, l'approximation du champ de déplacement est donnée par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation N_i (*Batoz & Dhett* [6]) :

$$\vec{U}^e(\xi, t) = \left\{ \begin{array}{c} u_i^e(\xi, t) \\ v_i^e(\xi, t) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ \vdots \\ \vdots \\ u_8^e \\ v_8^e \\ u_9^e \\ v_9^e \end{array} \right\} \quad (7.42)$$

$$\vec{U}^e(\xi, t) = \left\{ \begin{array}{c} u_i^e(\xi, t) \\ v_i^e(\xi, t) \end{array} \right\} = [\mathbf{N}] \{U_i^e\} \quad (7.43)$$

De la même manière, la forme du champ de déplacement virtuel est la suivante :

$$\vec{U}^{e*}(\xi, t) = \left\{ \begin{array}{c} u_i^{e*}(\xi, t) \\ v_i^{e*}(\xi, t) \end{array} \right\} = [\mathbf{N}] \{U_i^{e*}\} \quad (7.44)$$

Enfin, l'approximation de la pression se fait linéairement sur les éléments et de façon discontinue d'un élément à l'autre :

$$p^e(\xi, \eta) = a^e + b^e \xi + c^e \eta \quad (7.45)$$

$$= \langle a^e \quad b^e \quad c^e \rangle \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \xi \\ \eta \end{array} \right\} \quad (7.46)$$

$$= \langle p^e \rangle \{V_{PG}\} \quad (7.47)$$

où $\{V_{PG}\}$ est le vecteur des coordonnées des points de Gauss.

7.3.1 Matrice de masse élémentaire

$$I_{acc}^e = \int_{\Omega^e} \rho_s \frac{\partial^2 \vec{U}^e}{\partial t^2} \cdot \delta \vec{U}^{e*} dV \quad (7.48)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \rho_s \left(\langle \delta u_i^{e*} \rangle \frac{\partial^2 \{u_i^e\}}{\partial t^2} + \langle \delta v_i^{e*} \rangle \frac{\partial^2 \{v_i^e\}}{\partial t^2} \right) \det J_e d\xi d\eta \quad (7.49)$$

$$= \left(\langle \delta U_i^{e*} \rangle \langle \delta p_i^{e*} \rangle \right) \begin{bmatrix} [\mathbf{M}^e]_{11} & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta \ddot{U}_j^e\} \\ \{\Delta p_j^e\} \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

où la matrice masse élémentaire $[\mathbf{M}^e]_{11}$ est donnée par :

$$[\mathbf{M}^e]_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \rho_s [\mathbf{N}]^t [\mathbf{N}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.51)$$

et $\det J_e$ est le déterminant de la matrice Jacobienne de la transformation de l'élément de référence Q9 à Ω_e

7.3.2 Matrice tangente élémentaire

La matrice élémentaire associée en partie à la décomposition de $(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F})) : \bar{\varepsilon}^*$ est non linéaire. Comme nous l'avons vu dans le cas d'un problème d'élasticité en grandes déformations, la résolution de l'équation matricielle passe par le calcul de la matrice tangente associée. Pour cela nous calculons la première variation de la forme intégrale et obtenons :

$$\Delta I_t^e = \left(\langle \delta U_i^{e*} \rangle \langle \delta p^{e*} \rangle \right) \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{UU}^e] & [\mathbf{VK}_{UP}^e] \\ [\mathbf{VK}_{PU}^e] & [\mathbf{VK}_{PP}^e] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta U_j^e\} \\ \{\Delta p^e\} \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

avec :

- $[\mathbf{VK}_{UU}^e] = \Delta_{\vec{U}} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F}) \right) : \bar{\varepsilon}^* dV$
- $[\mathbf{VK}_{UP}^e] = \Delta_p \int_{\Omega} -p \text{Cof}(\bar{F}) : \bar{\varepsilon}^* dV$
- $[\mathbf{VK}_{PU}^e] = \Delta_{\vec{U}} \int_{\Omega} (J(\vec{U}) - 1) \delta p^* dV$

$$- [\mathbf{VK}_{PP}^e] = \Delta_p \int_{\Omega} -\frac{p}{\mathcal{K}} \delta p^* dV$$

On écrit le gradient de la transformation comme suit :

$$\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\nabla}} \vec{U} + \overline{\overline{I}} = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.53)$$

avec :

$$\begin{cases} F_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + 1 \\ F_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \\ F_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ F_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + 1 \end{cases} \quad (7.54)$$

On peut également développer l'expression de la matrice des cofacteurs de $\overline{\overline{F}}$ associée $\text{Cof}\overline{\overline{F}}$:

$$\text{Cof}\overline{\overline{F}} = \begin{bmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

Le tenseur de Cauchy-Green droit $\overline{\overline{C}}$ s'écrit alors :

$$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t \overline{\overline{F}} \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

avec :

$$\begin{cases} C_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ C_{xy} = C_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1\right) \\ C_{yy} = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \end{cases} \quad (7.57)$$

Développons chaque bloc de la matrice tangente élémentaire.

Bloc $[\mathbf{VK}_{UU}^e]$:

$$[\mathbf{VK}_{UU}^e] = \Delta_{\vec{v}} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F}^e) \right) : \bar{\varepsilon}^{e*} dV \quad (7.58)$$

$$= \Delta_{\vec{v}} \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}} - p \text{Cof}(\bar{F}^e) \right) : \bar{\varepsilon}^{e*} \det J_e d\xi d\eta \quad (7.59)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}} - p \Delta \text{Cof}(\bar{F}^e) \right) : \bar{\varepsilon}^{e*} \det J_e d\xi d\eta \quad (7.60)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left(\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}} : \bar{\varepsilon}^{e*} - p \Delta \text{Cof}(\bar{F}^{e*}) : \bar{\varepsilon}^{e*} \right) \det J_e d\xi d\eta \quad (7.61)$$

Intéressons-nous au terme $\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}} : \bar{\varepsilon}^{e*}$. Il se décompose comme suit :

$$\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}} : \bar{\varepsilon}^{e*} = \frac{\partial \langle \delta u^{*e} \rangle}{\partial x} \Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{11} + \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \delta u^{*e} \rangle}{\partial y} \left[\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{12} + \Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{21} \right] + \quad (7.62)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \langle \delta v^{*e} \rangle}{\partial x} \left[\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{12} + \Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{21} \right] + \frac{\partial \langle \delta v^{*e} \rangle}{\partial y} \Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{22} \quad (7.63)$$

avec, en posant $C_{01} = E_1$ et $C_{10} = E_2$:

$$\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{11} = 2 \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right)^2 \right] \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial x} - 2E_1 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial y} \quad (7.64)$$

$$+ 2E_1 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial x} \right] \quad (7.65)$$

$$\frac{1}{2} \left[\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{12} + \Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \bar{F}}_{21} \right] = \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + E_1 \left[2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \right] \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial y} \quad (7.66)$$

$$- E_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial x} \quad (7.67)$$

$$+ \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + E_1 \left[2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \right] \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial x} \quad (7.68)$$

$$- E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial y} \quad (7.69)$$

$$\Delta \frac{\partial \Psi^e}{\partial \overline{\overline{F}}_{22}} = 2 \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right)^2 \right] \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial y} - 2E_1 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial x} \quad (7.70)$$

$$+ 2E_1 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial y} \right] \quad (7.71)$$

Quant à $\Delta \text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\overline{\varepsilon^{e*}}}$, il s'écrit :

$$\Delta \text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\overline{\varepsilon^{e*}}} = \frac{\partial < \delta u^{*e} >}{\partial x} \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial < \delta u^{*e} >}{\partial y} \left(\frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial x} \right) \quad (7.72)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial < \delta v^{*e} >}{\partial x} \left(\frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \{v_j^e\}}{\partial x} \right) + \frac{\partial < \delta v^{*e} >}{\partial y} \frac{\partial \Delta \{u_j^e\}}{\partial x} \quad (7.73)$$

Finalement, on peut décomposer $[\mathbf{VK}_{UU}^e]$ en fonction des degrés de liberté et on obtient :

$$\Delta I_{t_{UU}}^e = (< \delta U_i^{e*} > < \delta V_i^{e*} >) \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{UU}^e]_{11_{ij}} & [\mathbf{VK}_{UU}^e]_{12_{ij}} \\ [\mathbf{VK}_{UU}^e]_{21_{ij}} & [\mathbf{VK}_{UU}^e]_{22_{ij}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta U_j^e\} \\ \{\Delta V_j^e\} \end{pmatrix} \quad (7.74)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{VK}_{UU}^e]_{11_{ij}} &= \int_0^1 \int_0^1 \{2\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right)^2 \right] < \frac{\partial N_j}{\partial x} > - 2\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \\ &+ \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \left[2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \right] < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \\ &- \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) < \frac{\partial N_j}{\partial x} > - \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} \frac{p}{2} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \} \det J_e d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.75)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{VK}_{UU}^e]_{12_{ij}} &= \int_0^1 \int_0^1 \{2\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] < \frac{\partial N_j}{\partial y} > - 2\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \\ &+ \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} \left[E_2 + E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \left[2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \right] < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \\ &- \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} p < \frac{\partial N_j}{\partial y} > - \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} \frac{p}{2} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \} \det J_e d\xi d\eta \end{aligned} \quad (7.76)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{VK}_{UU}^e]_{21_{ij}} = & \int_0^1 \int_0^1 \{2\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \left[2(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] < \frac{\partial N_j}{\partial x} > - 2\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \frac{\partial v}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial x} + 1) < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \\
& + \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} [E_2 + E_1(\frac{\partial v}{\partial x})^2] < \frac{\partial N_j}{\partial y} > + \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 \left[2\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - (\frac{\partial u}{\partial x} + 1)(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) \right] < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \\
& - \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + \{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} p < \frac{\partial N_j}{\partial x} > - \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} \frac{p}{2} < \frac{\partial N_j}{\partial y} > \} \det J_e d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{VK}_{UU}^e]_{22_{ij}} = & \int_0^1 \int_0^1 \{2\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} [E_2 + E_1(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)^2] < \frac{\partial N_j}{\partial y} > - 2\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} E_1 \frac{\partial u}{\partial y} (\frac{\partial u}{\partial x} + 1) < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \\
& + \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} [E_2 + E_1(\frac{\partial u}{\partial y})^2] < \frac{\partial N_j}{\partial x} > + \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 \left[2\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - (\frac{\partial u}{\partial x} + 1)(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) \right] < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \\
& - \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} E_1 (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})(\frac{\partial u}{\partial x} + 1) < \frac{\partial N_j}{\partial y} > - \{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} \frac{p}{2} < \frac{\partial N_j}{\partial x} > \} \det J_e d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{7.78}$$

Bloc $[\mathbf{VK}_{UP}^e]$:

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e] = \Delta_p \int_{\Omega} -p \text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\varepsilon^{e*}} dV \tag{7.79}$$

$$= \Delta_{\vec{p}} \int_0^1 \int_0^1 -p \text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\varepsilon^{e*}} \det J_e d\xi d\eta \tag{7.80}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 -\Delta p \text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\varepsilon^{e*}} \det J_e d\xi d\eta \tag{7.81}$$

avec $\text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\varepsilon^{e*}}$ qui s'écrit :

$$\text{Cof}(\overline{\overline{F^e}}) : \overline{\varepsilon^{e*}} = \frac{\partial < \delta u^{*e} >}{\partial x} (\frac{\partial v}{\partial y} + 1) - \frac{1}{2} \frac{\partial < \delta u^{*e} >}{\partial y} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) \tag{7.82}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial < \delta v^{*e} >}{\partial x} (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial < \delta v^{*e} >}{\partial y} (\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + 1) \tag{7.83}$$

Finalement, on peut décomposer $[\mathbf{VK}_{UP}^e]$ en fonction des degrés de liberté et on obtient :

$$\Delta I_{tUP}^e = (< \delta U_i^{e*} > < \delta V_i^{e*} >) \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{UP}^e]_{11_i} & [\mathbf{VK}_{UP}^e]_{12_i} & [\mathbf{VK}_{UP}^e]_{13_i} \\ [\mathbf{VK}_{UP}^e]_{21_i} & [\mathbf{VK}_{UP}^e]_{22_i} & [\mathbf{VK}_{UP}^e]_{23_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a^e \\ \Delta b^e \\ \Delta c^e \end{Bmatrix} \tag{7.84}$$

où chaque bloc se décompose de la manière suivante :

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e]_{11_i} = \int_0^1 \int_0^1 [(\frac{\partial v}{\partial y} + 1)\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} - \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.85)$$

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e]_{12_i} = \int_0^1 \int_0^1 [\xi(\frac{\partial v}{\partial y} + 1)\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} - \xi\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.86)$$

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e]_{13_i} = \int_0^1 \int_0^1 [\eta(\frac{\partial v}{\partial y} + 1)\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\} - \eta\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.87)$$

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e]_{21_i} = \int_0^1 \int_0^1 [(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} - \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.88)$$

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e]_{22_i} = \int_0^1 \int_0^1 [\xi(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} - \xi\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.89)$$

$$[\mathbf{VK}_{UP}^e]_{23_i} = \int_0^1 \int_0^1 [\eta(\frac{\partial u}{\partial x} + 1)\{\frac{\partial N_i}{\partial y}\} - \eta\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\{\frac{\partial N_i}{\partial x}\}] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.90)$$

Bloc $[\mathbf{VK}_{PU}^e]$:

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e] = \Delta_{\vec{U}} \int_{\Omega} (J(\vec{U}) - 1) \delta p^* dV \quad (7.91)$$

$$= \Delta_{\vec{p}} \int_0^1 \int_0^1 (J(\vec{U}) - 1) \delta p^* \det J_e d\xi d\eta \quad (7.92)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \Delta(J(\vec{U}) - 1) \delta p^* \det J_e d\xi d\eta \quad (7.93)$$

On calcule $\det \bar{\bar{F}} - 1$ et on obtient :

$$\det \bar{\bar{F}} - 1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7.94)$$

et sa première variation est la suivante :

$$\Delta(\det \bar{\bar{F}} - 1) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1\right) \frac{\partial \{\Delta u_j^e\}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \{\Delta u_j^e\}}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1\right) \frac{\partial \{\Delta v_j^e\}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \{\Delta v_j^e\}}{\partial x} \quad (7.95)$$

On peut ainsi décomposer $[\mathbf{VK}_{PU}^e]$ en fonction des degrés de liberté et on obtient :

$$\Delta I_{t_{PU}}^e = \begin{bmatrix} \delta a^{e*} & \delta b^{e*} & \delta c^{e*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{PU}^e]_{11j} & [\mathbf{VK}_{PU}^e]_{12j} \\ [\mathbf{VK}_{PU}^e]_{21j} & [\mathbf{VK}_{PU}^e]_{22j} \\ [\mathbf{VK}_{PU}^e]_{31j} & [\mathbf{VK}_{PU}^e]_{32j} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \{\Delta U_i^e\} \\ \{\Delta V_i^e\} \end{pmatrix} \quad (7.96)$$

où chaque bloc se décompose de la manière suivante :

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e]_{11j} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial v}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\rangle \right] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.97)$$

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e]_{21j} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\xi \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\rangle - \xi \frac{\partial v}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\rangle \right] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.98)$$

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e]_{31j} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial y} + 1 \right) \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\rangle - \eta \frac{\partial v}{\partial x} \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\rangle \right] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.99)$$

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e]_{12j} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\rangle - \frac{\partial u}{\partial y} \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\rangle \right] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.100)$$

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e]_{22j} = \int_0^1 \int_0^1 \left[\xi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\rangle - \xi \frac{\partial u}{\partial y} \left\langle \frac{\partial N_j}{\partial x} \right\rangle \right] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.101)$$

$$[\mathbf{VK}_{PU}^e]_{32j} = \int_0^1 \int_0^1 [\eta(\frac{\partial u}{\partial x} + 1) < \frac{\partial N_j}{\partial y} > - \eta \frac{\partial u}{\partial y} < \frac{\partial N_j}{\partial x} >] \det J_e d\xi d\eta \quad (7.102)$$

Bloc $[\mathbf{VK}_{PP}^e]$:

$$[\mathbf{VK}_{PP}^e] = \Delta_p \int_{\Omega} -\frac{p}{\mathcal{K}} \delta p^* dV \quad (7.103)$$

$$= \Delta_{\vec{p}} \int_0^1 \int_0^1 -\frac{p}{\mathcal{K}} \delta p^* \det J_e d\xi d\eta \quad (7.104)$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 -\frac{1}{\mathcal{K}} \Delta p \delta p^* \det J_e d\xi d\eta \quad (7.105)$$

En fonction des paramètres inconnus, on peut alors écrire :

$$\Delta I_{t_{PP}}^e = < \delta a^{e*} \quad \delta b^{e*} \quad \delta c^{e*} > \begin{bmatrix} [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{11} & [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{12} & [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{13} \\ [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{21} & [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{22} & [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{23} \\ [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{31} & [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{32} & [\mathbf{VK}_{PP}^e]_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a^e \\ \Delta b^e \\ \Delta c^e \end{Bmatrix} \quad (7.106)$$

$$\Delta I_{t_{PP}}^e = < \delta a^{e*} \quad \delta b^{e*} \quad \delta c^{e*} > -\frac{1}{\mathcal{K}} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \\ \xi & \xi^2 & \xi\eta \\ \eta & \xi\eta & \eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta a^e \\ \Delta b^e \\ \Delta c^e \end{Bmatrix} \quad (7.107)$$

Bibliographie

- [1] R.W. Ogden. *Large deformation isotropic elasticity on the correlation of the theory and experiment for incompressible rubberlike solids*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences, vol. 326, p. 526-584, 1992.
- [2] A.N. Gent & A.G Thomas. *Forms for the stored (strain) energy fonction for vulcanized rubber*. Journal of polymer Science, vol. 28, p. 625-637, 1958.
- [3] L.J. Hart-Smith. *Elasticity parameters for finite deformations of ruber-like materials*. Journal of Applied Physics, vol. 17, p. 608-627, 1966.
- [4] R.S Rivlin & K.N. Sawyers. *The strain-energy function for elastomers*. Transactions of the Society of Rheology, vol. 20(4), p. 545-557, 1976.
- [5] J. Lambert-Diani & C. Rey. *New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers*. European Journal of Mechanics and Solids, vol. 18, p. 1027-1043, 1999.
- [6] J.L. Batoz& G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, tome 1, 1995.

Dans les propulseurs de fusée, des instabilités aéroacoustiques et des interactions de type fluide-structure sont à l'origine de fortes oscillations de poussées pouvant déranger la poussée du moteur mais également causer des dommages non négligeables. On trouve dans les moteurs de fusée des protections thermiques de face (PTF) coincées entre les pains de propergol. Leurs déplacements se trouvent être la principale cause des interactions fluide structure (IFS) présentes dans les booster.

Dans ce contexte, nous avons développé une approche numérique visant à simuler les problèmes d'IFS. Notre méthode se base sur le couplage de deux codes dissociés : l'écoulement est simulé avec le code CARBUR tandis que la dynamique des structures déformables est traitée par le code MARCUS. Une loi de comportement hyperélastique a été implémentée dans MARCUS afin de simuler le mouvement des PTF. Une campagne expérimentale a été menée dans notre laboratoire sur le tube à chocs T80 et en guise de validation du couplage des codes, les résultats numériques et expérimentaux ont été confrontés.

Mots clés Modélisation numérique - Grandes déformations - Hyperélasticité - Interaction fluide structure - Couplage numérique - Tube à chocs.

In a solid rocket motor, high pressure oscillations induced by aeroacoustic instabilities and fluid structure interaction (FSI) may lead to disturb rocket thrust and cause damages. In the rocket motors, flexible inhibitors made of insulating material are initially bonded to the propellant, and FSI is mainly induced by their displacement.

In this context, a numerical approach to simulate FSI problems has been developed. Our method is based on the coupling of two dissociated codes : fluid flow is computed with CARBUR, while the dynamics of deformable structures is simulated by MARCUS. A hyperelastic behaviour law has been implemented in MARCUS in order to simulate the movement of flexible inhibitors. An experimental approach has been led in the shock waves tubes (T80) in our laboratory and as a validation of FSI coupling codes, numerical and experimental results have been compared.

Keywords Numerical simulation - Large strain - Hyperelasticity - Fluid structure interaction - Numerical coupling - Shock waves tube.