

UNIVERSITÉ DE PROVENCE - AIX MARSEILLE I

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

Spécialité : Mécanique et physique des fluides

École doctorale : Physique, modélisation et sciences pour l'ingénieur

présentée par

David CEBRON

**L'instabilité elliptique dans les enveloppes fluides
des planètes et des étoiles**

Composition du jury

Sacha	BRUN	
Andrew	JACKSON	
Michael	LE BARS	<i>Co-directeur de thèse</i>
Patrice	LE GAL	<i>Directeur de thèse</i>
Pierre	MAUBERT	<i>Invité</i>
Caroline	NORE	<i>Rapporteur</i>
Franck	PLUNIAN	
Michel	RIEUTORD	<i>Rapporteur</i>
Andreas	TILGNER	

Remerciements

La thèse est une longue aventure, qu'il est bien difficile de raconter, et qui ne saurait exister sans le concours d'un certain nombre de personnes. Mes premiers remerciements vont naturellement à mes trois encadrants de thèse : Patrice Le Gal, Michael Le Bars et Pierre Maubert. Patrice, directeur de thèse, a toujours été disponible pour discuter ou partager avec moi sa connaissance étendue des fluides en rotation, et me conseiller malgré ses importantes responsabilités administratives. Je remercie également Michael qui a accompagné chaque étape de ce travail, des calculs théoriques aux simulations numériques, que ce soit sur des questions de pure physique des fluides ou de géo-/astro-physique. Ce travail à plusieurs facettes n'aurait pu exister sans ses compétences sur tous ces sujets. Enfin, Pierre, au-delà de son aide sur les aspects numériques, en particulier pour utiliser les serveurs de calculs nationaux, m'a accompagné lors de mes premiers pas dans l'enseignement en tant que moniteur à l'IUT Saint-Jérôme de Marseille. Un grand merci donc, à vous trois, pour votre grand investissement dans l'encadrement de cette thèse : grâce à vous, ce travail est resté un plaisir et un jeu de bout en bout.

Je remercie également l'ensemble des membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce travail : Sacha Brun, Andrew Jackson, Franck Plunian, Andreas Tilgner, et je remercie en particulier les rapporteurs, Caroline Nore et Michel Rieutord, pour leurs lectures détaillées du manuscrit et leurs suggestions. Merci aussi, Caroline, pour les différentes conversations qu'on a eu, aussi bien sur les aspects techniques des simulations MHD que sur les écoulements générés par précession. Merci Michel, pour ton aide sur les questions de physique des fluides stellaires qui se sont posées au cours de ma thèse.

Ce travail a aussi bénéficié de l'aide ou de la collaboration d'un certain nombre de personnes que je tiens à remercier. Un grand merci à Wietze Herreman, qui m'a associé dès le début à sa recherche, m'initiant aux aléas des études expérimentales et à la manipulation du galinstan. Merci aussi à Patrice Meunier pour son aide précieuse sur les écoulements associés à la précession. Merci à Stéphane Le Dizès également, pour ses éclairages sur la méthode WKB et ses pièges. La partie astrophysique de ce travail est née d'une collaboration avec Claire Moutou initiée au cours de cette thèse : merci Claire, pour tes remarques et ton aide sur les questions d'astrophysique. Merci aussi à Jérôme Noir, qui a initié notre collaboration sur l'instabilité elliptique excitée par libration. Enfin, je remercie Alban Sauret, doctorant de l'équipe, avec qui j'ai beaucoup travaillé et discuté sur les écoulements générés par libration, mais aussi sur tous les autres sujets de recherche en cours dans l'équipe.

Je n'oublie pas non plus les personnes qui permettent au laboratoire de fonctionner et donc aux thèses de se dérouler dans de bonnes conditions. Je pense en particulier à Hubert Ekongolo N'Kake, Patrice Joly, Lucienne Bazzali, Delphine Lignon ou Sophie Mebkhout. Merci aussi à Karine Boudoyan à qui j'ai souvent demandé des publications inaccessibles, qu'elle m'envoyait dans la semaine !

Merci aussi à l'ensemble des jeunes chercheurs, doctorants ou post-doctorants, qui ont

rendu les journées de travail agréables, de la pause-café de 10h à celle de 16h, voire à la pizza de 19h30... Un grand merci donc à vous tous, avec qui j'ai pris plaisir à discuter, voyager, danser ou boire un coup : Pierre-Yves, Marie-Laure, Sylvain, Oriane, Hadrien, Henri, Romain, Cyprien, Luis, Justin...

Enfin, la thèse est un travail très prenant, qui déborde généralement du cadre du laboratoire. Je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui l'ont rendu possible. Merci Gwenn, pour les coups de fil ou les échanges de mails à des heures improbables, sur des questions scientifiques tout aussi improbables, les soirées ou les week-ends, et ce, depuis la prépa en passant par les stages... Merci à tous les autres amis et à la famille pour leur soutien constant, et enfin, merci à Hélène, qui m'a accompagné constamment malgré la distance.

Résumé

L'instabilité elliptique peut apparaître dès qu'un écoulement présente des lignes de courant elliptiques, ce qui en fait une instabilité générique des fluides tournants. Si sa pertinence en aéronautique ne laisse plus de doute, sa prise en compte dans l'étude des écoulements géo- et astrophysiques pose de nombreuses questions qui constituent la motivation principale de ce travail théorique, numérique et expérimental.

Après une introduction aux écoulements tournants, le chapitre 1 présente les trois forçages mécaniques présents aux échelles planétaires qui seront considérés dans ce travail : les marées, la précession et la libration. Un état de l'art sur les écoulements et les instabilités associés à ces forçages est alors décrit, formant le cadre de cette étude.

Le chapitre 2 présente les premières simulations numériques de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale. Ces simulations nous permettent de quantifier l'influence de différentes complexités géophysiques et d'obtenir des lois d'échelles caractérisant l'instabilité. L'interaction de l'instabilité elliptique avec les deux autres forçages mécaniques est ensuite considérée. La section 2.4 montre que la présence simultanée de marées et de libration est susceptible d'exciter une instabilité elliptique au sein des astres synchronisés. La section 2.5 développe et valide une théorie analytique sur l'interaction des marées et de la précession. Enfin, la section 2.6 démontre que l'instabilité elliptique peut se développer à partir d'écoulements convectifs ou stratifiés.

Le chapitre 3 s'intéresse à la magnétohydrodynamique (MHD) de l'instabilité elliptique. De nouveaux résultats sur l'aspect inductif de l'instabilité sont obtenus et validés numériquement. La génération d'un effet dynamo associé à l'instabilité elliptique est également abordé. Une partie expérimentale liée à ce travail est ensuite décrite, basée sur un dispositif MHD. Après une étude de la dynamique non-linéaire de l'instabilité sous champ, le dispositif est modifié afin de mettre en place une dynamo synthétique. L'amplitude du champ magnétique imposé pouvant être assez grande pour restabiliser l'écoulement, ce dispositif permet d'étudier la saturation par l'écoulement d'une telle dynamo. Des premiers résultats en ce sens sont présentés.

Le chapitre 4 utilise les résultats obtenus pour étudier la présence de l'instabilité elliptique au sein de planètes, lunes et étoiles connues. Le cas particulier de la Lune est d'abord considéré et un scénario, basé sur l'instabilité elliptique, est proposé puis évalué pour expliquer la dynamo lunaire primitive. Les astres telluriques sont ensuite considérés dans un cadre plus général, et une étude de stabilité adaptée à ce contexte montre que l'instabilité est possible sur la Terre primitive, Europe et trois exoplanètes (55CnCe, CoRoT-7b et GJ1214b). Enfin, la possible existence de l'instabilité au sein de certains systèmes extra-solaires à Jupiter chauds est considérée, montrant sa pertinence pour certains d'entre eux tel que celui de Tau-boo.

Mots-clefs : instabilité elliptique, rotation, marées, précession, libration, convection, champ magnétique, dynamo, Lune, exoplanètes

Abstract

The elliptical instability is a generic instability which takes place in any rotating fluid whose streamlines are (even slightly) elliptically deformed. Its presence in an aeronautical context is well established, but its existence in geo- or astrophysical large scale flows raises many issues. This is the starting point of this theoretical, numerical and experimental work.

After introducing basics of the rotating flows, chapter 1 presents the three natural planetary mechanical forcings considered in this work : tides, precession and libration. A state-of-the-art of the flows and instabilities associated with these forcings is then given, which constitutes the framework of this study.

Chapter 2 presents the first numerical simulations of the elliptical instability in an ellipsoidal geometry, relevant for planets. These simulations allow to quantify the influence of different natural geophysical complexities, and to derive the scaling laws needed to bridge the gap between numerics and planetary applications. The interaction of the elliptical instability with the two other forcings is then considered. Section 2.4 shows that the simultaneous presence of tides and libration can excite an elliptical instability inside fluid layers of synchronized celestial bodies. In section 2.5, a theoretical analysis of the interaction between tides and precession is developed and validated. Finally, in section 2.6, we prove that the elliptical instability can still develop over convective or stratified flows.

Chapter 3 focuses on the magnetohydrodynamics (MHD) of the elliptical instability. New results on the magnetic induction by the elliptical instability are obtained and validated numerically. The possible dynamo capability of the instability is also tackled. The experimental part of this work, based on a MHD setup, is then described. Our measurements allow to study the non-linear dynamics of the instability under an external imposed magnetic field. The experimental setup is then modified in order to obtain a synthetic dynamo. The amplitude of the imposed magnetic field being large enough to restabilize the flow, this setup allows to study the saturation by the flow of such a dynamo. First results on this point are presented.

Chapter 4 uses the obtained results to study the presence of the elliptical instability in known planets, moons, and stars. The particular case of the Moon is first considered and a scenario, based on the elliptical instability, is proposed and evaluated to explain the early lunar dynamo. Telluric bodies are then considered in a more general context, and a stability analysis adapted to this context shows that the instability can be expected in the Early Earth, Europa and three exoplanets (55CnCe, CoRoT-7b et GJ1214b). Finally, the possible development of the instability in extra-solar Hot-Jupiters systems is considered, showing its relevance for some of them, such as the system of Tau-boo.

Keywords : elliptical instability, rotation, tides, precession, libration, convection, magnetic field, dynamo, Moon, exoplanets

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte, applications de l'instabilité elliptique	3
1.1.1	Aéronautique	3
1.1.2	Géo/Astro-physique	3
1.2	Introduction aux fluides tournants	5
1.2.1	Dynamique en référentiel non-galiléen	5
1.2.2	Équation de vorticité	6
1.2.3	Adimensionnement	6
1.3	Écoulements à bas nombre de Rossby	7
1.3.1	Écoulements géostrophiques	7
1.3.2	Ondes inertielles	10
1.3.3	Couches et pompage d'Ekman	12
1.3.4	Latitude critique, éruption de couche limite	13
1.3.5	Spin-up	15
1.4	Écoulements de base dûs aux forçages	16
1.4.1	Forçages mécaniques : libration, précession et marées	16
1.4.2	Précession	20
1.4.3	Libration en longitude dans une sphère	22
1.4.4	Déformations de marées	23
1.5	Instabilités inertielles	26
1.6	Problématique générale	30
2	Instabilité elliptique	33
2.1	Introduction	35
2.1.1	Historique	35
2.1.2	Interprétation physique	36
2.1.3	Approche locale, approche globale	39
2.2	Approche numérique	40
2.2.1	Méthode numérique utilisée	40
2.2.2	Validation de la méthode numérique	43
2.3	Particularités hydrodynamiques	44
2.3.1	Influence de l'aplatissement	45
2.3.2	Influence de la rotation de la déformation	49
2.3.3	Influence de l'obliquité	50

2.3.4	Amplitude de l'instabilité : loi d'échelle	51
2.3.5	Angle du spin-over et amplitude	54
2.3.6	Dissipation visqueuse de l'instabilité : loi d'échelle	57
2.3.7	Instabilité secondaire	58
2.3.8	Extension à la coquille : influence d'une graine interne	59
2.3.9	Extension : instabilités multipolaires	60
2.4	Interaction des marées et de la libration	61
2.4.1	Écoulement de base	63
2.4.2	Analyse de stabilité	64
2.4.3	Validation de l'écoulement de base et instabilité	65
2.5	Interaction des marées et de la précession	68
2.5.1	Écoulement de base : solution analytique	69
2.5.2	Validation numérique et expérimentale	74
2.5.3	Précession et instabilité elliptique	77
2.5.4	L'instabilité de précession	81
2.6	Instabilité thermo-elliptique	83
2.6.1	Définition du problème et nombres adimensionnels	84
2.6.2	Etude théorique et numérique	87
2.6.3	Applications planétaires et stellaires	92
2.7	Synthèse du chapitre 2 et publications	95
3	Instabilité magnéto-elliptique	97
3.1	Introduction	99
3.1.1	Le champ magnétique terrestre et l'effet dynamo	99
3.1.2	L'effet dynamo : une étude récente	101
3.2	Équations de la magnétohydrodynamique	102
3.2.1	Électromagnétisme des milieux continus	103
3.2.2	Équation du mouvement	107
3.2.3	L'effet dynamo : une instabilité MHD	108
3.3	Modèle numérique	108
3.3.1	Méthodes locales pour les simulations MHD	108
3.3.2	Équations MHD résolues	109
3.3.3	Conditions aux limites	110
3.3.4	Méthode numérique	111
3.4	Validations du modèle	112
3.4.1	Une dynamo cinématique de type Ponomarenko	112
3.4.2	Une dynamo cinématique de type VKS	113
3.4.3	Benchmark : une dynamo convective	115
3.5	Application à l'instabilité elliptique MHD	118
3.5.1	Induction magnétique du mode de spin-over	119
3.5.2	Induction magnétique du mode (1,3) de l'instabilité elliptique	123
3.5.3	Induction magnétique de la LDEI	126
3.5.4	Étude en configuration dynamo	127
3.6	Expériences d'induction dans un cylindre	129
3.6.1	Dispositif expérimental	129

3.6.2	Amortissement de l'instabilité elliptique par effet Joule	131
3.6.3	Effet de l'ellipticité et du nombre d'Ekman	134
3.6.4	Dynamique non-linéaire	135
3.7	Dynamo synthétique expérimentale	137
3.7.1	Boucle de rétroaction expérimentale	137
3.7.2	Premiers résultats expérimentaux	139
3.8	Synthèse du chapitre 3 et publications	143
4	Applications astrophysiques	145
4.1	Champ magnétique lunaire	147
4.1.1	Problématique	147
4.1.2	Dynamo et instabilité elliptique	149
4.1.3	Application à la Lune	152
4.1.4	Conclusion	164
4.2	Stabilité des astres telluriques	165
4.2.1	Introduction	166
4.2.2	Celestial mechanics and elliptical instability	167
4.2.3	Generic stability of the elliptical instability in a planetary context	172
4.2.4	Application to solar/extrasolar systems	180
4.2.5	Conclusion and discussion	190
4.3	Étoiles extra-solaires	193
4.3.1	Introduction	193
4.3.2	Elliptic instability in astrophysics : growth rate and observables . .	194
4.3.3	Application to hot-jupiter systems	197
4.3.4	Results and discussions	200
4.4	Synthèse du chapitre 4 et publications	202
5	Conclusions et perspectives	203
5.1	Conclusions	203
5.2	Perspectives	205
	Annexes	209
	Annexe A Liste des publications	211
	Annexe B Lexique : notions géophysiques	213
	Annexe C Instabilité de l'axe médian et spin-over	217
C.1	Analogie, équations	217
C.2	Instabilité de l'axe médian	218
	Annexe D Stabilité du mode de spinover en présence de précession	221

Annexe E Stabilité des astres telluriques	223
E.1 Stability of non-synchronized systems	223
E.2 Stability of synchronized systems	224
E.3 Diurnal tide and elliptical instability	225
E.4 Resonances of gravito-inertial waves	226
Annexe F Figures of equilibrium	231
F.1 Deformations of a homogeneous body	231
F.1.1 Rotating homogeneous fluid body	231
F.1.2 Rotating homogeneous fluid body with internal constant vorticity	232
F.1.3 Tidally deformed homogeneous fluid body	234
F.1.4 Generalized ellipsoidal figures of equilibrium	234
F.2 Theory of (planetary equilibrium) figures	235
Annexe G Exoplanetary systems parameters	237
Annexe H Instabilité elliptique et Jupiters chauds	241
H.1 Évolution orbitale	241
H.2 Anomalies de rayon	243
Bibliographie	245

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte, applications de l'instabilité elliptique	3
1.2	Introduction aux fluides tournants	5
1.3	Écoulements à bas nombre de Rossby	7
1.4	Écoulements de base dûs aux forçages	16
1.5	Instabilités inertielles	26
1.6	Problématique générale	30

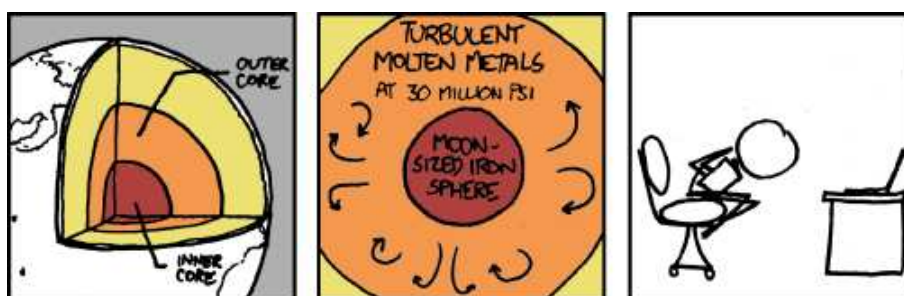
L'hypothèse d'Alfred Wegener sur la dérive des continents fit soudainement voir la Terre comme un objet fluide plutôt que solide. À l'opposé, Rhines (1986) nous raconte que les océanographes ont progressivement fait le chemin inverse : paradoxalement, la prise en compte de la rotation terrestre donne une certaine rigidité aux océans. En effet, un célèbre théorème de la mécanique des fluides, le théorème de Taylor-Proudman, stipule qu'un fluide en rotation s'oppose à toute variation de l'écoulement selon l'axe de rotation. Cette propriété remarquable est à l'origine de nombreuses propriétés des écoulements à l'échelle planétaire, qu'ils aient lieu dans l'atmosphère, l'océan ou le noyau liquide terrestre. Ainsi, le rôle central joué par la rotation dans les écoulements naturels ou dans les applications industrielles est à l'origine d'une littérature fournie depuis près d'un siècle.

Historiquement, la mécanique des fluides en rotation est issue des mesures faites à bord du Fram par l'océanographe Nansen au cours de ses expéditions polaires, à la fin du XIX^{ème} siècle. Ekman, pour interpréter ces observations, prend en compte la rotation de la Terre et explique ainsi pourquoi le courant de dérive généré par le vent est orienté à 45° du lit de ce dernier : c'est la célèbre spirale d'Ekman, dont la confirmation par des mesures in situ n'aura lieu que 90 ans plus tard (Chereskin, 1995).

L'hydrodynamique des fluides en rotation est maintenant une discipline classique de la mécanique des fluides. La forme de rigidité conférée par la force de Coriolis rend l'étude de ces écoulements particulièrement riche, avec la présence d'ondes, d'instabilités, d'écoulements secondaires, etc. Dans les années 70, une nouvelle instabilité des fluides en rotation est découverte : l'instabilité elliptique. Cette instabilité concerne tout fluide en rotation ayant des lignes de courant elliptiques. Cette instabilité générique est donc susceptible

d'intervenir dans de nombreux domaines, en particulier au sein des enveloppes fluides des planètes et des étoiles.

La section 1.1 rappelle les différents contextes dans lesquels l'instabilité elliptique peut être trouvée, à savoir l'aéronautique, où elle a été découverte, et en géo- et astrophysique. Les sections 1.2 et 1.3 rappellent quelques éléments importants de mécanique des fluides en rotation, qui nous seront utiles dans notre étude. La section 1.4 établit le lien entre les forçages présents à l'échelle planétaire, tels que les marées, la libration ou la précession, et les écoulements tournants qui y sont associés. Enfin, la section 1.5 introduit la classe des instabilités inertielles, dont l'instabilité elliptique fait partie. Le chapitre se termine avec la section 1.6, qui présente le contexte et la problématique générale de ce travail.



I FREAK OUT ABOUT FIFTEEN MINUTES INTO
READING ANYTHING ABOUT THE EARTH'S CORE
WHEN I SUDDENLY REALIZE IT'S RIGHT UNDER ME.

Courtesy of <http://xkcd.com>

1.1 Contexte, applications de l'instabilité elliptique

1.1.1 Aéronautique

Historiquement, l'instabilité elliptique a été découverte durant la guerre froide, quasiment simultanément de part et d'autre du rideau de fer. A l'Ouest, l'instabilité elliptique a été découverte dans un contexte aéronautique, au cours des études de sillages d'avions. En effet, l'avion génère en se déplaçant différents tourbillons qu'il laisse dans son sillage. En particulier, la portance des ailes génère deux tourbillons principaux (fig. 1.1a), intenses et contra-rotatifs. La portance des gros porteurs produit des tourbillons d'une telle intensité qu'un petit avion traversant son sillage subit un violent mouvement de roulis qui le met en danger. Ce type d'accidents a conduit les aéroports à imposer des temps d'attente entre chaque décollage et atterrissage. Le trafic augmentant, la dissipation de ces tourbillons devient alors un enjeu économique important. Les études de ces tourbillons de sillage et de leur dissipation ont ainsi conduit Crow (1969) à étudier l'interaction d'une paire de tourbillons contra-rotatifs, étude précisée par Widnall *et al.* (1971) et Moore (1971). Ces travaux montrent l'existence d'une instabilité à grande longueur d'onde, dite de Crow, qui engendre la formation d'anneaux de vorticité (fig. 1.1b), mais ces travaux semblent également indiquer l'existence d'une instabilité à courte longueur d'onde. Cependant, Moore & Saffman (1974) soulignent que ces pr dictiones théoriques sont probablement un artefact de la théorie utilisée. Simultanément, en considérant la dynamique d'anneaux tourbillonnaires, Widnall *et al.* (1974) prouvent que les analyses précédentes ne sont en fait correctes qu'en présence d'une forte vitesse axiale, et démontrent l'existence de l'instabilité dans un contexte plus général : l'instabilité elliptique est d couverte¹ ! Le mécanisme de l'instabilité sera expliqué par Moore & Saffman (1975) et Tsai & Widnall (1976), et elle est donc parfois appelée instabilité de Moore-Saffman-Tsai-Widnall (MSTW). Plus tard, Bayly (1986) et Waleffe (1990) démontrent son existence dans le contexte plus générique des écoulements à lignes de courant elliptiques, et elle est donc explicitement nommée par Malkus (1989) instabilité elliptique². Dans les sillages d'avions, cette instabilité, tout comme l'instabilité de Crow, est donc susceptible d'être excitée et ainsi de favoriser la dissipation des tourbillons de bout d'aile (voir le brevet de Corjon *et al.*, 2004, basé sur cette idée).

1.1.2 Géo/Astro-physique

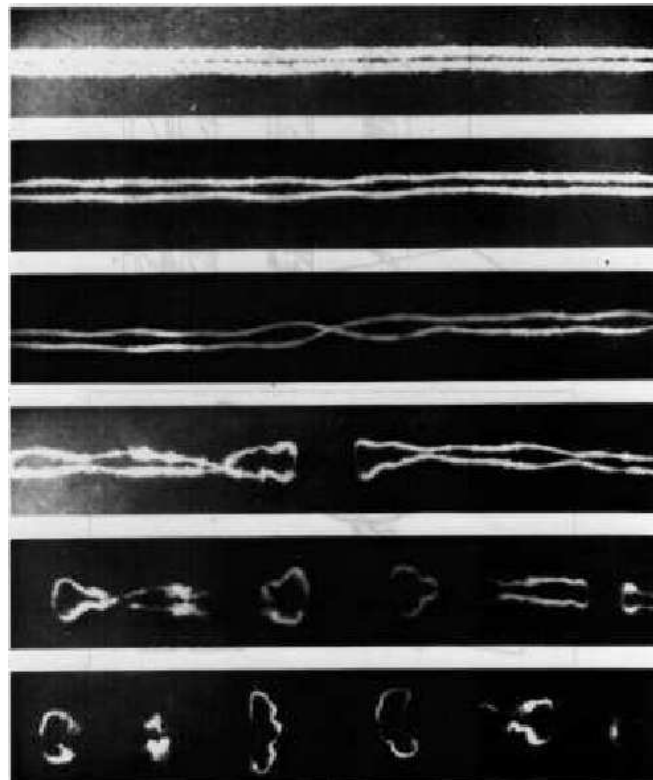
Il est couramment admis que les forces de flottabilité sont à l'origine du champ magnétique des planètes et des étoiles. Ainsi, le modèle actuellement accepté pour la Terre considère que le champ magnétique terrestre provient de la convection thermo-solutale du noyau externe liquide, due à la cristallisation de la graine interne. Cependant, la validité d'un tel modèle est discutable pour certaines planètes ou lunes telles que la Lune primitive, la Terre primitive, Ganymède, Mercure, etc. De plus, même dans les cas où ce modèle

1. Pour l'anecdote, Sheila Widnall sera nommée à la tête de l'U.S. Air Force entre 1993 et 1997, devenant ainsi la première femme à ce haut poste du département de la défense.

2. Malkus (1989) la nomme aussi instabilité de marées puisque dans un contexte géophysique, la déformation elliptique provient des effets de marées.



(a)



(b)

FIGURE 1.1 – (a) *Tourbillons dans le sillage d'un avion civil (1974, Credit : NASA).* (b) *Tourbillons dans le sillage d'un B-47 (tiré de Crow, 1969). Les photographies sont espacées de 15 s. L'instabilité de Crow est clairement visible pour les deux tourbillons contra-rotatifs, tout comme les anneaux de vorticité qui en résultent.*

semble valide, des mécanismes additionnels peuvent modifier significativement le mouvement du fluide, en particulier les forçages mécaniques tels que les marées, la précession ou la libration. Il semble donc important de caractériser la réponse du fluide à ces forçages pour les noyaux fluides des planètes telluriques mais aussi, plus généralement, pour les atmosphères des planètes gazeuses, les océans internes, aussi appelés *de sub-surface*, des satellites de glace et les zones convectives ou radiatives des étoiles.

1.2 Introduction aux fluides tournants

Cette section établit les équations fondamentales régissant la dynamique d'un fluide incompressible dans un repère en rotation en partant des équations usuelles de Navier-Stokes en repère galiléen. L'adimensionnement des équations fait alors apparaître les nombres adimensionnels pertinents pour ces écoulements. Une présentation plus complète du sujet peut être trouvée dans les ouvrages de Greenspan (1968), de Rieutord (1997) ou de Guyon *et al.* (2001).

1.2.1 Dynamique en référentiel non-galiléen

On note ρ la masse volumique du fluide, supposé incompressible et newtonien, ν sa viscosité cinématique, $\boldsymbol{\Omega}(t)$ le vecteur rotation dépendant du temps t du référentiel, \mathbf{r} le vecteur position, \mathbf{u}_a la vitesse du fluide dans un repère galiléen (repère absolu représenté par un indice a) et \mathbf{u}_r sa vitesse dans le repère en rotation (représenté par un indice r). En repère galiléen, les équations de Navier-Stokes pour un fluide soumis à un potentiel ϕ de forces massiques (e.g. $\phi = gz$ pour la gravité) s'écrivent alors :

$$\partial_t \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_a \cdot \nabla \mathbf{u}_a = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}_a - \nabla \phi, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_a = 0. \quad (1.2)$$

Dans le référentiel non-galiléen lié à $\boldsymbol{\Omega}$, (1.1) et (1.2) s'écrivent (cf. encart)

$$\partial_t \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r \cdot \nabla \mathbf{u}_r = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta \mathbf{u}_r - 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r - (\mathrm{d}_t \boldsymbol{\Omega})_a \times \mathbf{r}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_r = 0. \quad (1.4)$$

avec la pression réduite $\tilde{p} = p/\rho + \phi + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2/2$, que l'on notera p par la suite. Le travail de la force de Coriolis, normale au mouvement des particules fluides, est nul mais nous verrons par la suite qu'elle confère aux fluides tournants une sorte d'élasticité s'opposant aux mouvements selon l'axe de rotation, ce qui permet la propagation d'ondes appelées *ondes inertielles*. La force d'entraînement, ici centrifuge, dérive d'un potentiel et ne fait donc qu'induire un gradient radial de pression pour les fluides confinés. Cependant, dès lors qu'une surface libre est présente, cette force est primordiale : l'aplatissement terrestre, par exemple, provient majoritairement de son effet. Enfin, l'accélération de Poincaré $-(\mathrm{d}_t \boldsymbol{\Omega})_a \times \mathbf{r}$ est un terme de forçage de l'équation de Navier-Stokes : lorsqu'elle non-nulle, l'écoulement trivial $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$, appelé *rotation solide*, n'est plus solution.

Dans un souci de simplification des notations, on omettra l'indice r dans la suite.

Accélération en référentiel non-galiléen

En notant D une dérivée lagrangienne, les variations temporelles d'un champ vectoriel quelconque \mathbf{A} dans les deux repères sont alors liées par

$$(D_t \mathbf{A})_a = (D_t \mathbf{A})_r + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{A}$$

Appliquée au vecteur \mathbf{r} , cette équation donne immédiatement

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{A}$$

et appliquée de nouveau à l'expression précédente, on obtient

$$(D_t \mathbf{u}_a)_a = (D_t \mathbf{u}_r)_r - \mathbf{f}_c - \mathbf{f}_e - \mathbf{f}_p$$

avec les pseudo-forces d'inertie usuelles

- (i) de Coriolis $\mathbf{f}_c = -2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_r$
- (ii) d'entraînement $\mathbf{f}_e = -\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -1/2 \nabla(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2$
- (iii) de Poincaré $\mathbf{f}_p = -(\mathbf{d}_t \boldsymbol{\Omega})_a \times \mathbf{r}$

1.2.2 Équation de vorticité

Le rotationnel de l'équation (1.3) donne l'équation pour la vorticité $\boldsymbol{\zeta}$, définie par $\boldsymbol{\zeta} = \nabla \times \mathbf{u}$:

$$\partial_t \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\zeta} - [(\boldsymbol{\zeta} + 2 \boldsymbol{\Omega}) \cdot \nabla] \mathbf{u} = E \Delta \boldsymbol{\zeta} \quad (1.5)$$

Par rapport à l'équation usuelle de vorticité en référentiel inertiel, le référentiel tournant introduit un terme, dit de *vorticité planétaire*, $2 \boldsymbol{\Omega}$ qui s'ajoute au terme de vorticité $\boldsymbol{\zeta}$. La somme $\boldsymbol{\zeta} + 2 \boldsymbol{\Omega}$ est appelée vorticité absolue. En l'absence de rotation, le terme $\boldsymbol{\zeta} \cdot \nabla \mathbf{u}$ représente les variations de vorticité liées à celles de longueur ou d'orientation des tubes de vorticité. La rotation ajoute une contribution supplémentaire à ces variations, qui peut être dominante pour des vitesses de rotation élevées.

1.2.3 Adimensionnement

Avec R et U les échelles de longueur et de vitesse dans le référentiel en rotation à la vitesse typique Ω , l'équation (1.3) s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\nabla^* p_r^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* - \frac{2}{Ro} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}^* - R\Omega \left(\frac{d\mathbf{e}_z}{dt^*} \right)_a \times \mathbf{r}^* \quad (1.6)$$

avec $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\Omega}/\|\boldsymbol{\Omega}\|$, l'exposant $*$ indiquant une variable adimensionnelle ou un opérateur considéré par rapport aux variables adimensionnelles. Le nombre de Reynolds $Re = UR/\nu$ et de Rossby $U/(\Omega R)$ apparaissent alors comme étant les nombres adimensionnels pilotant l'écoulement. Le premier représente le rapport entre les ordres de grandeur du terme de transport advectif de l'équation du mouvement et le terme visqueux. Le second est le rapport entre les ordres de grandeur du terme de transport advectif de l'équation du

mouvement et du terme de force de Coriolis : les écoulements à faibles nombres de Rossby sont dominés par les effets dûs à la rotation. Pour les écoulements naturels terrestres de surface, le nombre de Rossby ne devient faible que pour des écoulements à grandes échelles : $\Omega \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ donc même en considérant des écoulements rapides avec des vitesses de l'ordre de $U \sim 10 \text{ m.s}^{-1}$, l'effet de la rotation terrestre n'est significatif (i.e. $Ro \sim 0.1$) que pour des écoulements impliquant des échelles supérieures à $L \sim 1000 \text{ km}$. Cela explique pourquoi la rotation terrestre influence le sens des mouvements cycloniques de grande échelle et leur impose un sens de rotation opposé dans les hémisphères nord et sud, mais n'influence pas les tornades³.

Enfin, le rapport entre les ordres de grandeur du terme visqueux et du terme de force de Coriolis définit le nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega R^2)$. Ce nombre intervient principalement dans l'étude des écoulements près d'une paroi en rotation. Notons que lorsque la vitesse typique de l'écoulement est celle de la rotation i.e. $U \sim \Omega R$, on a alors $Re = 1/E$.

1.3 Écoulements à bas nombre de Rossby

Dans cette section, on considère les écoulements à faibles nombres de Rossby, i.e. ceux pour lesquels les effets de rotation et de force de Coriolis sont dominants. L'écoulement dit de rotation solide est alors la principale réponse du fluide tournant. A cet écoulement primaire s'ajoutent des écoulements de plus faibles amplitudes, dit secondaires, comme les écoulements géostrophiques présentés en section 1.3.1. Enfin, les écarts à cet écoulement de base sont associés à des propagations d'ondes dans les fluides tournants. De telles ondes ne sont pas liées à la compressibilité du fluide (ce serait alors des ondes acoustiques) mais à l'effet de la force de Coriolis. La linéarité des équations du mouvement à faible nombre de Rossby permet une étude simple de ces ondes qui jouent un rôle primordial en géophysique. La présentation de ces notions indispensables se base sur l'introduction aux fluides tournants de Guyon *et al.* (2001), en partie synthétisée dans la thèse de Lagrange (2009).

1.3.1 Écoulements géostrophiques

Comme cela a été mentionné, en l'absence d'accélération de Poincaré la rotation solide est toujours solution de l'équation du mouvement (section 1.2.1). L'équation du mouvement (1.3) admet aussi d'autres solutions, moins triviales, dont certaines peuvent être déterminées sous quelques hypothèses simplificatrices. Supposant $Ro \ll 1$ et $E \ll 1$, les équations (1.3) et (1.5) se réduisent à

$$\partial_t \mathbf{u} + 2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (1.7)$$

$$\partial_t \zeta = 2 (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.8)$$

3. et encore moins les tourbillons de vidange de baignoire, qui sont principalement contrôlés par les conditions initiales, ainsi que par la géométrie du conteneur (effets de bords).

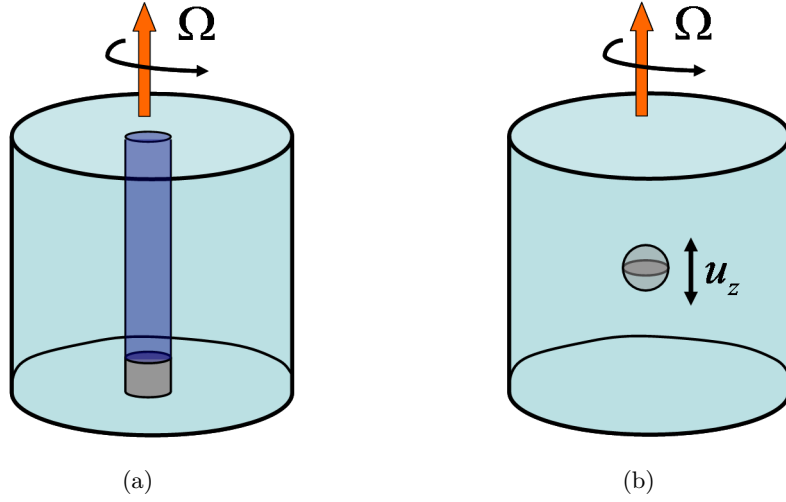


FIGURE 1.2 – (a) Si un petit cylindre est fixé sur le fond d'un cylindre fluide en rotation à vitesse Ω , une colonne de Taylor se forme au-dessus, qu'on peut visualiser par injection d'encre. (b) Une bille de même densité que le fluide est légèrement déplacée selon l'axe de rotation du fluide. Du fait de la rotation du fluide, la bille subit alors une force de rappel et oscille, comme si le fluide possédait une élasticité.

Les écoulements géostrophiques sont alors les solutions de ces équations pour $\boldsymbol{\Omega}$ et \mathbf{u} quasi-stationnaires, i.e sont solutions de

$$\nabla p = -2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} , \quad (1.9)$$

$$\partial_z \mathbf{u} = \mathbf{0} . \quad (1.10)$$

Il vient alors qu'un écoulement géostrophique a les trois caractéristiques suivantes, qui constituent le *théorème de Taylor-Proudman* :

1. l'écoulement est normal au gradient de pression : les lignes de courant coïncident donc avec les isobares,
2. la vitesse \mathbf{u} de l'écoulement est indépendante de la coordonnée définie le long de l'axe de rotation, notée z ,
3. la section d'une courbe plane normale à $\boldsymbol{\Omega}$ qui suit le mouvement du fluide reste constante (en particulier, la section des tubes de vorticit   reste constante par le th  or  me de Kelvin).

On donne ci-dessous quelques cas d'applications permettant d'introduire des notions utiles pour la suite.

Colonnes de Taylor-Proudman

Consid  rons un petit objet fix   sur la paroi inf  rieure d'un cylindre de fluide en rotation solide. La vitesse de rotation du cylindre est alors l  g  rement chang  e de sorte qu'une

faible rotation différentielle est créée entre le cylindre et le fluide. L'expérience (fig. 1.2a) montre qu'apparaît alors au dessus de notre objet un écoulement qui s'étend sur toute la hauteur du cylindre (car il est indépendant de z) : il forme une colonne de fluide. En fait, tout se passe comme si l'intérieur de cette colonne était séparé de l'extérieur. A l'extérieur de la colonne on a alors le même écoulement que si on avait un fluide parfait en rotation s'écoulant autour d'un cylindre solide vertical. Cette colonne de fluide a été prédite théoriquement par Proudman et confirmée expérimentalement par Taylor. On parle de *colonne de Taylor* ou de *cylindres géostrophiques*. De fait, du colorant injecté à l'intérieur de cette colonne y reste pendant très longtemps tandis que du colorant injecté à l'extérieur évite le cylindre. De plus, un déplacement de l'obstacle sur le fond déplacerait également la colonne de Taylor qui le surplombe ainsi que le colorant. Notons que dans de telles expériences, l'écoulement n'est pas parfaitement géostrophique car le théorème de Taylor-Proudman n'est par exemple pas vérifié à l'éventuelle surface libre ou à l'interface intérieur/extérieur de la colonne de Taylor où la viscosité n'est plus négligeable (il y a donc un petit échange de fluide à ce niveau).

Coriolis et élasticité apparente des fluides en rotation

Considérons à présent un objet solide, une bille par exemple, au sein d'un fluide tournant (fig. 1.2b). Un mouvement vertical nécessite alors une force plus importante lorsque le fluide est en rotation, et l'influence du mouvement vertical se transmet à de grandes distances en-dessous et au-dessus de la bille (en l'absence de rotation, la perturbation due au mouvement s'amortirait sur une distance de l'ordre de la dimension de l'objet). Enfin, des injections de colorant montrent que le déplacement du solide génère des rotations du fluide de sens contraire au-dessus et en dessous de celui-ci. Tout ceci est quantifiable avec l'équation (1.8) dont la composante selon e_z s'écrit $\partial_t \zeta_z = 2 \partial_z u_z$, ce qui permet d'écrire la divergence de (1.7) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta p) - 4 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.11)$$

ce qui donne pour une perturbation périodique de pulsation λ

$$\Delta p - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (1.12)$$

équation appelée *équation de Poincaré* depuis le travail de Cartan (1922). Supposant le corps de révolution autour de e_z et $\partial_r p = 0$ sur l'axe du corps, une vitesse de translation orientée par e_z génère une vorticité ζ_z de signe contraire au-dessus et en-dessous de l'objet ainsi qu'une suppression au-dessus de l'objet, et une dépression en-dessous. De plus, pour de faibles amplitudes, ces écarts de pression augmentent linéairement avec le déplacement : si on relâche le corps, il revient en oscillant à sa position d'équilibre. Tout se passe donc comme si le fluide en rotation était muni d'une certaine élasticité, d'une 'raideur' dimensionnelle de l'ordre de l'échelle de pression $\rho \Omega^2 R^2$. Cette élasticité apparente n'est en aucun cas liée à la compressibilité du fluide mais uniquement à la rotation qui tend à s'opposer aux perturbations tridimensionnelles (théorème de Taylor-Proudman).

Cylindre tangent

Dans les deux cas précédents, la simple présence d'un solide dans un fluide tournant génère deux zones distinctes quasiment indépendantes l'une de l'autre : la colonne de Taylor sus-jacente au solide et le reste du fluide. Naturellement, à l'interface entre ces deux zones, un cisaillement, lissé par la viscosité, peut apparaître sur le pourtour de la colonne de Taylor, pourtour aussi appelé *cylindre tangent*. Cette zone où la viscosité ne peut plus être négligée est appelée *couche de Stewartson* et a donné lieu à de nombreuses études (Morrison & Morgan, 1956; Proudman, 1956; Stewartson, 1957, 1966). Elles constituent en fait un cas particulier de couches visqueuses appelées *couches internes de cisaillement* (voir section 1.3.4).

1.3.2 Ondes inertielles

1.3.2.1 Relation de dispersion et propagation

Prenant deux fois le rotationnel de (1.7), on obtient, avec (1.4) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta \mathbf{u}) + 4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{u} = 0 . \quad (1.13)$$

Les solutions de (1.13) forment une famille orthogonale appelée *ondes inertielles*, qui est un sous-ensemble des ondes planes (i.e. modes normaux : voir Waleffe, 1990). On peut donc chercher une solution de (1.13) sous la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0 e^{i\phi} = \mathbf{u}_0 e^{i(\lambda t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.14)$$

où λ est la pulsation de l'onde, et \mathbf{k} son vecteur d'onde. L'introduction de cette solution dans l'équation (1.13) donne la relation de dispersion des ondes inertielles

$$\lambda = 2 \cos \gamma \quad (1.15)$$

avec γ l'angle entre \mathbf{k} et $\boldsymbol{\Omega}$. La relation de dispersion ne dépend donc pas de la norme de \mathbf{k} mais seulement de son orientation, et λ augmente lorsque \mathbf{k} se rapproche de l'axe de rotation. De plus, il apparaît que la fréquence adimensionnée des ondes inertielles est toujours comprise sur une certaine plage de valeurs⁴ : $\lambda \in [-2; 2]$. Il est intéressant de noter l'analogie directe entre les ondes inertielles et les ondes dites internes associées à la stratification du milieu de propagation. En effet, dans ce dernier cas, la relation de dispersion peut s'écrire $\lambda = N \sin \gamma$, avec $N = \sqrt{-g \partial_z(\rho/\rho_0)}$ la fréquence de Brünt-Vaisälä, g étant la gravité et ρ_0 la moyenne sur z de la masse volumique (e.g. Rieutord & Noui, 1999, pour une étude de cette analogie en géométrie sphérique).

La condition d'incompressibilité donne $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$, ce qui implique que toute onde hydrodynamique est transverse dans un fluide incompressible, en particulier les ondes

4. Notons que le résultat $\lambda \in [-2; 2]$ provient directement du préfacteur 2 de la force de Coriolis. En effet, la reprise de l'étude avec une force de Coriolis $\mathbf{f}_c = -\alpha \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ mène à $\lambda \in [-|\alpha|; |\alpha|]$.

inertielles. La vitesse selon \mathbf{k} pour laquelle la phase ϕ de l'onde inertielle est constante est appelée vitesse de phase, et est donnée par

$$\mathbf{v}_p = \pm 2 \frac{\cos \gamma}{\|\mathbf{k}\|} \mathbf{e}_k \quad (1.16)$$

où $\mathbf{e}_k = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$. La propagation des ondes inertielles est donc clairement dispersive. La vitesse de propagation de l'énergie est appelée vitesse de groupe et vaut :

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{2}{\|\mathbf{k}\|} \mathbf{e}_k \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_k) \quad (1.17)$$

ce qui traduit une propagation de l'énergie perpendiculairement à \mathbf{k} . Lorsque $\cos \gamma = 0$, la relation de dispersion donne $\lambda = 0$, ce qui mène à une vitesse de phase nulle et une vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = \pm 2 \|\mathbf{k}\|^{-1} \mathbf{e}_z$: on retrouve alors les écoulements géostrophiques, résultant de l'équilibre entre les forces de pression et de Coriolis. Dans le cas général, un écoulement quelconque implique aussi bien des modes géostrophiques (modes inertiels avec $\lambda = 0$) que des ondes inertielles.

1.3.2.2 Surface caractéristique

Le caractère hyperbolique de l'équation (1.13) implique l'existence de surfaces, appelées *surfaces caractéristiques*, le long desquelles une discontinuité de pression ou de vitesse (parallèle à ces dernières) peut se propager. Ces surfaces sont des cônes dont le demi-angle au sommet θ dépend de la fréquence adimensionnelle λ selon

$$\cos \theta = \lambda/2 . \quad (1.18)$$

Une expérience historique (Görtler, 1944, 1957) permet de les observer dans un cylindre de fluide en rotation grâce à un disque horizontal oscillant le long de l'axe de rotation. L'amplitude des mouvements étant faible, tout comme le rayon du disque devant celui du cylindre, cela permet d'observer la propagation d'une petite perturbation dans un tel système. Pour $\lambda < 2$, la perturbation se propage le long de cônes d'angle au sommet donné par (1.18). Pour $\lambda = 2$, ces surfaces caractéristiques deviennent des plans horizontaux. Les colonnes de Taylor-Proudman présentées en section 1.3.1 correspondent à des surfaces caractéristiques telles que $\lambda = 0$ (modes géostrophiques).

1.3.2.3 Modes inertiels, modes de Kelvin

L'équation (1.13) est hyperbolique, ce qui rend difficile l'obtention des solutions vérifiant les conditions aux limites d'une géométrie quelconque. Cependant, ces solutions en domaine confiné, appelées *modes inertiels*, peuvent être obtenues analytiquement pour des géométries simples telles que le cylindre (Kelvin, 1880), la sphère (Bryan, 1889; Zhang *et al.*, 2001) ou le sphéroïde (Zhang *et al.*, 2004). Dans le cas du cylindre, ces solutions, appelées *modes de Kelvin*, ont été généralisées récemment au cas visqueux par Herreman (2009). Cependant, dans la plupart des cas, les modes inertiels ne sont pas connus analytiquement et doivent donc être calculés numériquement : c'est ainsi le cas de la coquille sphérique⁵ ou de l'ellipsoïde triaxial.

5. même si certains modes, purement toroïdaux, comme le mode de spin-over ont été obtenus analytiquement (Rieutord & Valdettaro, 1997).

Les modes inertiels se retrouvent dans différents contextes, ce qui en fait encore aujourd'hui un sujet d'étude à part entière. Ainsi, dans un contexte aérospatial, ces modes peuvent affecter, lorsqu'ils sont forcés, la stabilité des engins volants en rotation contenant des réservoirs de carburant liquide. Par exemple, la dynamique des satellites en rotation est couplée à la dynamique du fluide embarqué, qui doit donc être correctement décrite (Stewartson, 1959; Gans, 1984; Garg *et al.*, 1986; Agrawal, 1993; Bao & Pascal, 1997). Ces modes ont également été observés au sein des océans (Chelton & Schlax, 1996; Cipollini *et al.*, 2001) mais aussi dans l'atmosphère (Kursinski *et al.*, 1996), contextes dans lesquels ils sont aussi appelés *ondes de Rossby* (voir le livre de Vanyo, 2001, pour ces applications spécifiques). Enfin, à plus grande échelle, ces modes inertiels sont également étudiés en géo- et astrophysique. Ainsi, ces modes pourraient être présents au sein du noyau liquide terrestre et Aldridge & Lumb (1987) disent en avoir identifiés certains dans les données de grande précision de Melchior & Ducarme (1986). Cependant, même si leur détection est vraisemblable (Rieutord, 1995, 2000), ce point reste débattu (e.g. Melchior *et al.*, 1988; Crossley *et al.*, 1991; Banka & Crossley, 1999) et pour le moment seul le mode de spinover du noyau liquide semble avoir été détecté (Neuberg *et al.*, 1987). Enfin, ces modes pourraient jouer un rôle au sein des étoiles en rotation rapide (e.g. Papaloizou & Pringle, 1978) et des planètes géantes gazeuses (e.g. Schaeffer & Cardin, 2005). Kuhn *et al.* (2000) associent d'ailleurs certaines observations solaires à la présence d'ondes inertielles (voir aussi Busse *et al.*, 2005; Kaladze & Wu, 2006, à ce sujet), ce qui reste encore débattu (Williams *et al.*, 2007).

1.3.3 Couches et pompage d'Ekman

Dans les sections précédentes, la viscosité a été négligée, ce qui n'est pas toujours possible. Par exemple, les ondes inertielles dans une sphère en rotation sont amorties par viscosité et n'apparaissent donc pas sans forçage. Usuellement, selon l'approche de la théorie des couches limites, on sépare l'écoulement en un écoulement de volume supposé non-visqueux et un écoulement de proche paroi où la viscosité est prédominante. La transition entre ces deux écoulements s'effectue alors à une distance caractéristique δ_E de la paroi qui correspond à l'état d'équilibre entre force de Coriolis et force visqueuse (exception faite des parois selon l'axe de rotation, comme les parois latérales d'un cylindre, où la couche visqueuse résulte d'un équilibre entre le terme d'advection et le terme visqueux⁶). Cette couche de fluide entre la paroi et δ_E est appelée couche d'Ekman et a une taille caractéristique $\delta_E \sim \sqrt{E}$. Les couches d'Ekman ont la particularité d'aspirer ou de refouler du fluide : c'est le pompage d'Ekman \mathbf{u}_p . Ainsi, les couches d'Ekman influencent l'écoulement en volume et le pompage d'Ekman peut être vu comme un écoulement secondaire en \sqrt{E} .

Exemple : dans le cas simple d'une paroi perpendiculaire à l'axe de rotation Ω et de normale sortante $\mathbf{n} = \pm \mathbf{e}_z$ une expression du pompage d'Ekman est $\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n} = -\sqrt{E/4} \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z$. On en déduit que si $\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z > 0$ (resp. $\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{e}_z < 0$) la couche d'Ekman éjecte (resp. aspire) du fluide.

6. On parle alors de couche limite visqueuse.

Les applications géophysiques se situent en général dans la limite $E \ll 1$, et les couches d'Ekman sont ainsi typiquement très fines et donc difficiles à étudier expérimentalement. Dans le noyau terrestre, la loi d'échelle $\delta_E \sim \sqrt{E}$ prédit une couche d'Ekman laminaire d'une épaisseur de l'ordre de 1 m. Notons cependant que des instabilités sont susceptibles de s'y développer (e.g. Lorenzani, 2001, en géométrie sphérique). Ainsi, Faller (1963) a identifié deux types d'instabilités, notées I et II, au sein des couches d'Ekman laminaires, qui apparaissent respectivement pour des nombres de Reynolds locaux (basés sur l'épaisseur et la vitesse locales de la couche) de 125 et 55. L'analyse de stabilité linéaire de Lingwood (1997) permet d'expliquer les résultats expérimentaux et d'interpréter ces instabilités en termes d'instabilités convectives. L'instabilité de type I, aussi appelée *instabilité cross-flow*, est associée à la présence d'un point d'inflexion instable dans le profil de vitesse de la couche, tandis que l'instabilité de type II est due à l'effet combiné des forces de Coriolis et visqueuses (voir la revue de Faller, 1991). D'après ces résultats, les couches d'Ekman purement laminares du noyau terrestre pourraient n'être que marginalement stables car leurs nombres de Reynolds locaux sont typiquement autour de 100 (Cardin & Olson, 2007). Une série de travaux récents sur ces couches d'Ekman, prenant en compte l'influence du champ magnétique⁷, confirme que la couche d'Ekman à la frontière noyau-manteau pourrait se déstabiliser dans une bande critique s'étendant sur 45° de part et d'autre de l'équateur terrestre (Desjardins *et al.*, 1999, 2001, 2004).

1.3.4 Latitude critique, éruption de couche limite

Pour étudier les fluides visqueux en rotation, on a longtemps supposé que les effets de viscosité étaient confinés à la couche d'Ekman et que l'écoulement pouvait être décomposé en puissances de $E^{1/2}$ dans ces couches comme dans l'intérieur (le *bulk*) du fluide. Hormis le travail pionnier de Stewartson (1972) et celui plus récent de Kerswell (1995), qui montrent l'existence d'autres lois d'échelles dans ces écoulements, une exception notable à cette hypothèse usuelle concerne le cas particulier de couches internes alignées avec l'axe de rotation, qui a suscité un certain nombre d'études (Morrison & Morgan, 1956; Proudman, 1956; Stewartson, 1957, 1966). Ces couches apparaissent notamment sur le cylindre tangent associé à un objet immergé dans un fluide en rotation (voir section 1.3.1). Dans ce cas, des couches en $E^{1/3}$, $E^{1/4}$ et même $E^{2/7}$ (Stewartson, 1966) peuvent être présentes : elles transportent alors du fluide entre les différentes couches visqueuses de l'écoulement et résolvent les discontinuités de vitesses générées par les conditions aux limites. Ainsi, en plus du pompage d'Ekman usuel en $E^{1/2}$ s'ajoute un nouveau pompage obéissant à une loi d'échelle différente.

En fait, de façon plus générale, des couches internes de cisaillement apparaissent dès lors qu'un fluide en rotation solide est perturbé avec une fréquence λ inférieure à deux fois la rotation de base ($\lambda \in [-2; 2]$). En effet, les équations non-visqueuses linéarisées sont alors hyperboliques et des discontinuités dans l'écoulement peuvent se propager sans atténuation le long de cônes caractéristiques. Ainsi, en présence de viscosité, ces discontinuités sont lissées par des couches de cisaillement internes apparaissant le long de ces

7. On parle alors de *couches d'Ekman-Hartmann*.

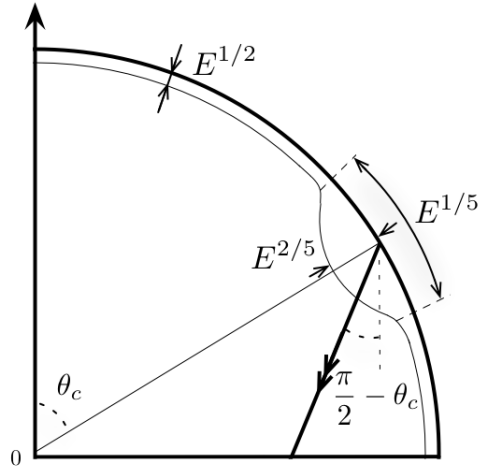


FIGURE 1.3 – Schéma représentant les différentes lois d'échelle proposées par Kerswell (1995) pour les couches de cisaillement interne au niveau des latitudes critiques (Cortoisie d'A. Sauret).

surfaces caractéristiques. Comme indiqué en section 1.3.2, Görtler (1944, 1957) et Oser (1958) ont observé ces surfaces expérimentalement dans le cas d'un disque oscillant axialement (voir Greenspan (1968) pour la théorie et les références associées). Elles peuvent être observées dans d'autres cas tels que par exemple en présence de coins (cf. Wood (1965, 1966) ainsi que les observations expérimentales de McEwan (1970)) ou en présence de discontinuités dans les conditions aux limites (Walton (1975), analogue oscillant du travail de Stewartson (1957)). Notons que Tilgner (2000) a montré qu'en fait ces couches de cisaillement sont les enveloppes de paquets d'ondes inertielles localisées dans l'espace, ce qui les distingue nettement des couches de cisaillement en fluides non-tournants.

On peut à présent se demander si une perturbation purement visqueuse telle qu'une couche d'Ekman oscillante (en temps et/ou en espace, par exemple du fait d'une libration ou d'une déformation des parois) peut générer des couches internes de cisaillement. De fait, dans un tel cas, des couches de cisaillement peuvent être créées à une latitude particulière θ appelée *latitude critique*⁸ donnée par $\lambda = 2 \cos \theta_c$. A cette latitude, l'énergie transportée par les ondes inertielles court le long de la paroi au lieu d'être réfléchie dans l'intérieur du fluide (e.g. Greenspan, 1968). Notons que cet effet est essentiellement non-visqueux (Kerswell, 1995) alors même que l'origine de la perturbation est purement visqueuse. Stewartson & Roberts (1963) ont montré que cela conduit à un changement local de l'épaisseur de la couche d'Ekman qui passe soudainement du scaling usuel en $E^{1/2}$ à une épaisseur en $E^{2/5}$ (fig. 1.3) : c'est l'*éruption de la couche d'Ekman*, ainsi baptisée par Bondi & Lyttleton (1953). Enfin, contrairement à ce qu'on a longtemps pensé, même si cet effet est local, il peut avoir une grande importance. Kerswell (1995) démontre en effet que les couches de cisaillement générées ne sont pas négligeables et peuvent transpor-

8. De façon rigoureuse, l'angle θ est en fait la colatitude.

ter du moment angulaire à travers tout le fluide, donc être dynamiquement importantes. Noir *et al.* (2001) confirment cela numériquement en considérant la taille des zones de cisaillement et les vitesses impliquées en leur sein, et valident le processus de génération non-linéaire d'une circulation géostrophique dans la couche d'Ekman proposé par Busse (1968) pour expliquer les expériences de Malkus (1968). Ce processus a d'ailleurs récemment été mis en évidence et mesuré expérimentalement par Morize *et al.* (2010).

1.3.5 Spin-up

Le spin-up est le processus de mise en rotation d'un fluide. Le cas le plus simple est celui d'un fluide au repos dans un conteneur soudainement mis en rotation. Cependant, le terme spin-up recouvre également des changements impulsionsnels de vitesse pour des fluides extérieurs ou intérieurs à un domaine solide, éventuellement stratifiés, en présence d'un champ magnétique, etc. Le spin-up joue un rôle important dans la dynamique des écoulements atmosphériques et océaniques pour lesquels les effets de la rotation terrestre sont importants voire dominants. Ce problème a donc été très étudié durant cette dernière décennie pour des fluides homogènes ou stratifiés, dans différentes configurations et géométries. La plupart de ces travaux sont mis en perspective dans les articles de review de Benton & Clark (1974) et Duck & Foster (2001).

Si on considère un cylindre infini de rayon R , le spin-up est une simple diffusion de la vitesse à travers le volume. En effet, l'écoulement axisymétrique $U_\theta(r, t) \mathbf{e}_\theta$ est alors régi par l'équation de Navier-Stokes en projection selon \mathbf{e}_θ :

$$\frac{\partial U_\theta(r, t)}{\partial t} = E \Delta U_\theta(r, t) = E \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) U_\theta(r, t) \quad (1.19)$$

adimensionnée par la longueur R et le temps Ω^{-1} , Ω étant la vitesse angulaire de la paroi. Une résolution analytique est alors possible (cf. encart). Dans la réalité, le cylindre est de hauteur finie H , ce qui entraîne la présence de deux zones de recirculation au niveau des parois solides supérieures et inférieures : c'est le pompage d'Ekman (e.g. Wedemeyer, 1964). Ce pompage accélère notablement la mise en rotation du fluide dès lors que $H/(2R) \gg E^{-1/4}$ (Greenspan & Howard, 1963).

Naturellement, en géométrie sphérique, le pompage d'Ekman est inévitable, et la vitesse azimutale lors d'un incrément de vitesse de $1/\delta$ à 1 est donnée par Greenspan (1968) :

$$U_\theta(r, t) = U_\theta(r, t = 0) + \frac{\delta - 1}{\delta} e^{-(1-s^2)^{-3/4} t \sqrt{E}}. \quad (1.20)$$

Enfin, notons qu'en présence de turbulence, par exemple induite par de la convection thermique, la viscosité turbulente semble devoir être utilisée pour expliquer les données expérimentales (Brito *et al.*, 2004). La turbulence en volume accélère donc le spin-up mais il reste à expliciter le mécanisme sous-jacent par lequel les tensions de Reynolds permettent un transfert de moment plus efficace.

Spin-up 2D : solution analytique

Considérant un cylindre de rayon R avec un barreau cylindrique intérieur fixe de rayon r_i , on définit le paramètre δ par $U_\theta(r, t = 0) = (r/\delta)(1 - r_i^2/r^2)/(1 - r_i^2)$, ce qui correspond à un incrément de vitesse de $1/\delta$ à 1 du cylindre externe (une vitesse initiale nulle correspondant à $\delta \rightarrow \infty$), on obtient l'évolution temporelle du champ de vitesse total (e.g. Sauret, 2009)

$$U_\theta(r, t) = \frac{r}{\delta} \frac{1 - r_i^2/r^2}{1 - r_i^2} + 2 \frac{\delta - 1}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{e^{-s_n^2 E t}}{s_n},$$

d'où on peut déduire la vortacité $\omega(r, t) = U_\theta(r, t)/r + \partial_r U_\theta(r, t)$,

avec $A_n = [J_1(s_n, r) Y_1(s_n, r_i) - J_1(s_n, r_i) Y_1(s_n, r)]/f'(s, 1)$,

où $f(s, r) = J_1(s, r) Y_1(s, r_i) - J_1(s, r_i) Y_1(s, r)$,

J_1 et Y_1 étant respectivement les fonctions de Bessel de première et seconde espèce et s_n le n-ième zéro de $f(s, 1)$.

1.4 Écoulements de base dûs aux forçages

Les ondes inertielles existent dans tout fluide en rotation. Habituellement amorties par viscosité, la présence d'un forçage mécanique permet d'en exciter certaines. Plus généralement, un forçage mécanique force un écoulement appelé *écoulement de base*. Cette section décrit cet écoulement pour les forçages de libration, précession et marées. La section 1.5 sera ensuite consacrée à l'étude de stabilité de cet écoulement de base.

1.4.1 Forçages mécaniques : libration, précession et marées

Les astres sont soumis à des perturbations mécaniques variées, qui peuvent avoir des répercussions importantes sur les mouvements de leurs couches fluides. Lorsque ces perturbations présentent une certaine régularité en temps ou en espace, elles sont appelées *forçages mécaniques (harmoniques)*. Les principaux forçages mécaniques s'exerçant sur les astres sont la précession, les marées et la libration (fig. 1.4).

1.4.1.1 Précession, nutations

L'axe de rotation propre d'une planète change au cours du temps. Son mouvement moyen, appelé précession, se manifeste par un mouvement de rotation de l'axe de rotation propre de la planète (fig. 1.4a). Ainsi, l'axe de rotation de la Terre autour duquel cette dernière tourne en 23.93 h décrit lui même un mouvement de rotation avec une période d'environ 25 700 ans, décrivant ainsi un cône de demi-angle au sommet égal à environ 23.5° , angle appelé *obliquité*⁹. Ainsi, il y a 4800 ans par exemple, c'est l'étoile Thuban qui se trouvait être au pôle Nord céleste (fig. 1.5a), jouant le rôle d'étoile polaire¹⁰. La

9. L'obliquité est l'angle entre l'axe de rotation propre d'une planète et une perpendiculaire à son plan orbital.

10. C'était alors l'apogée de la civilisation égyptienne antique et il semblerait d'ailleurs que certains temples égyptiens furent construits en référence à Thuban (voir e.g. Belmonte, 2001).

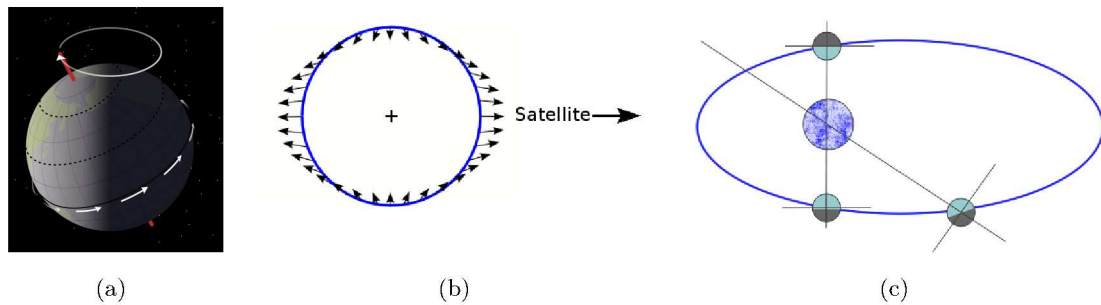


FIGURE 1.4 – Les principaux forçages mécaniques : (a) la précession est un mouvement de rotation de l’axe de rotation propre d’une planète, (b) les forces de marées déforment les enveloppes d’une planète, et (c) la libration est une différence instantanée périodique entre les vitesses angulaires de rotation propre et de révolution orbitale.

première description historique de ce mouvement de l’axe des pôles terrestres, aussi appelé *précession des équinoxes* en astronomie, est attribuée à Hipparque, aux environs de -150 (e.g. Meeus & Savoie, 1992; Thomson, 2009).

Le mouvement de l’axe de rotation propre d’une planète se compose donc d’un mouvement moyen, la précession, auquel s’ajoute un mouvement oscillant : la nutation. Découverte en 1749 par l’astronome britannique James Bradley, elle fut expliquée 20 ans plus tard par D’Alembert (1749), puis Euler (1749) qui en donna une description plus concise¹¹. La nutation est usuellement décomposée en deux composantes : la *nutation en longitude*, qui est une oscillation périodique de la vitesse de précession, et une *nutation en obliquité* qui est une oscillation périodique de l’obliquité, i.e. de l’orientation de l’axe de rotation propre de la planète. Pour la Terre par exemple, la nutation provient essentiellement d’une oscillation appelée *nutation de Bradley*, d’une période de 18.6 ans et d’une amplitude de $17''$ en longitude et $9''$ en obliquité. Les autres termes de la nutation terrestre sont beaucoup plus faibles (le second plus important, d’une période de 183 jours, a une amplitude de $1.3''$ en longitude et $0.6''$ en obliquité). Pour la Terre, notons qu’une récente convention [IAU, 2001, IB 88, Résolution B1.7] réserve le terme nutation aux oscillations de périodes supérieures à deux jours (le terme libration est alors parfois employé pour les oscillations de périodes inférieures à deux jours : voir e.g. Brzeziński & Capitaine, 2010).

1.4.1.2 Marées

Les marées sont dues à la présence d’autres corps à proximité de l’astre considéré, exerçant sur lui leur attraction gravitationnelle (fig. 1.4b). L’astre n’étant pas parfaitement rigide, il répond à ce forçage en se déformant dans son ensemble : chaque couche de l’astre, de son atmosphère à son noyau interne, est donc déformée. Sur Terre, ce phénomène est clairement visible sur l’hydrosphère, et les premières observations du mouvement

11. Euler omis cependant de mentionner les travaux de D’Alembert sur lesquels il s’est appuyé, ce qui mena D’Alembert à revendiquer vigoureusement son antériorité (voir Wilson, 1987, pour plus de détails).



(a)



(b)

FIGURE 1.5 – (a) La précession des équinoxes se traduit par un déplacement moyen du pôle Nord céleste le long d'un cercle. Dans l'hémisphère Nord, ce déplacement anti-horaire est superposé ici à la carte du ciel, permettant ainsi de localiser les étoiles pouvant indiquer le Nord. Credit : <http://calgary.rasc.ca/radecl.htm> (autorisation de L. McNish, auteur de l'image). (b) L'image de gauche montre la Lune (le 5 juillet 2003) à un moment de sa libration défavorable à l'observation, comparé à l'image de droite (le 29 décembre 2003). Par rapport à l'image de droite, notons la proximité du cratère Endymion et de la Mer des Crises avec le bord de la Lune sur l'image de gauche, et les Mers de Humboldt, Marginale et de Smyth ne sont pas visibles. La libration lunaire est principalement due à la variation de sa vitesse orbitale : on parle de librations optiques. Credit : www.stargazing.net/david (autorisation de David Haworth, auteur de l'image).

montant (flux ou flot) puis descendant (reflux ou jusant) des eaux des mers et des océans remontent à l'Antiquité, au IV^{ème} siècle av. J.-C. (Pythéas en Atlantique, Alexandre le Grand en Inde). Même si une description précise des cycles de la marée océanique et de son lien avec la Lune et le Soleil est donnée par Posidonios au I^{er} siècle av. J.-C., il faut attendre le travail de Newton pour expliquer correctement ce lien, en termes d'interaction gravitationnelle (voir Cartwright, 2001, pour le détail historique).

1.4.1.3 Librations

Enfin, considérons un astre tournant sur lui-même avec une période T_{spin} (durée du jour sidéral de l'astre), en orbite autour d'un attracteur avec une période orbitale T_{orb} (durée de l'année sur l'astre). On suppose que $T_{spin} = T_{orb}$, ce qui signifie que l'astre tourne en moyenne aussi vite sur lui-même qu'il tourne autour de son astre attracteur. L'astre est alors dit *synchonisé*, et c'est par exemple le cas de notre Lune. On appelle alors librations les oscillations de l'astre perçues par un observateur à la surface de l'astre attracteur. Usuellement, les librations désignent ainsi les faibles oscillations de la Lune que l'on peut observer depuis la Terre (fig. 1.5b). C'est d'ailleurs dans ce contexte que les librations ont été observées pour la première fois par G. D. Cassini (la première explication du phénomène sera proposée par Newton, 1687). Ces librations se composent d'une *libration en latitude* (oscillation Nord-Sud de la Lune, qui semble alors dire oui de la tête) et d'une *libration en longitude* (oscillation Est-Ouest de la Lune, qui semble alors dire non de la tête). Les librations, qu'elles soient en longitude ou en latitude, ont deux origines : une origine purement géométrique due aux positions respectives de la Lune et de l'observateur, on parle alors de *libration optique* ou *apparente*, et une origine physique liée aux oscillations de la rotation lunaire, on parle alors de *libration physique* ou *réelle*.

Librations optiques en latitude : la libration optique lunaire en latitude provient principalement de l'inclinaison de 5.14° du plan orbital lunaire par rapport au plan orbital terrestre, appelé *plan de l'écliptique*. Avec l'obliquité lunaire, d'environ 1.54° , un observateur terrestre perçoit ainsi une oscillation (de période $T_{spin} = T_{orb}$) apparente Nord-Sud de la Lune d'environ 6.7° , valeur que les perturbations solaires peuvent modifier de $\pm 0.9^\circ$.

Librations optiques en longitude : la libration optique en longitude provient principalement de la vitesse variable de la Lune sur son orbite (ce qui est liée à son excentricité orbitale non-nulle). Ainsi, il existe une différence instantanée entre les vitesses angulaires de rotation propre et de révolution orbitale : même si les vitesses moyennes (en temps) sont les mêmes, les vitesses instantanées ne sont pas égales (fig. 1.4c). Ce phénomène donne une oscillation Est-Ouest de la Lune d'environ 8.16° pour un observateur terrestre : la Lune nous montre en moyenne la même face mais il est périodiquement possible d'en voir un peu plus sur son bord Est ou son bord Ouest (fig. 1.5b). Une autre libration optique en longitude, dite *parallactique* ou *diurne*, provient du fait que l'observateur terrestre est à la surface de la Terre¹². Cela mène à une parallaxe d'environ 1.9° , favorisant l'observation du bord Est (resp. Ouest) lunaire en début (resp. fin) de nuit.

12. qui n'est pas ponctuelle!

Librations physiques : la libration physique provient de l'oscillation de l'axe de rotation propre de l'astre observé. La libration physique admet deux origines : les forçages périodiques externes, telles que par exemple les perturbations gravitationnelles des autres corps en orbite ou les modifications du moment angulaire atmosphérique (voir Noir *et al.*, 2009, pour une revue), ou des perturbations non-périodiques telles que l'impact d'un astéroïde. Dans le premier cas, les librations physiques sont dites *forçées* et les périodes de librations associées sont liées aux périodes des forçages, tandis que dans le second cas, les librations physiques sont dites *libres*, et la période de libration est alors liée aux fréquences propres de l'astre (donc à sa répartition des masses) même si cette terminologie est parfois ambiguë (e.g. Bois, 1995). Notons qu'après un impact, les librations physiques libres finissent par disparaître, amorties par dissipation (pour la Lune, voir par exemple Rambaux & Williams, 2011, pour plus de détails).

Plus généralement, notons qu'on parle de libration pour tout astre en résonance spin-orbite¹³. Notons aussi que le forçage mécanique associé à la libration en latitude correspond à celui de la nutation en obliquité, tandis que le forçage mécanique associé à la libration en longitude correspond à la variation de la longueur du jour pour un astre qui n'est pas en résonance spin-orbite : ainsi, un même forçage mécanique est appelé différemment si l'astre est en résonance spin-orbite ou non.

1.4.2 Précession

1.4.2.1 Conteneur sphéroïdal

Dans le cas d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde en précession, l'écoulement de base fut déterminé quasiment simultanément par Hough (1895) à Cambridge, et Sloudsky (1895) à Moscou, puis réobtenu un peu plus tard par Poincaré (1910). Cet écoulement, maintenant appelé *écoulement de Poincaré*, est une rotation solide autour d'un axe fixe dans le référentiel en précession, auquel s'ajoute un écoulement irrotationnel permettant d'assurer la condition de non-pénétration aux bords (voir aussi Malkus, 1994). Cependant, en l'absence de viscosité, une infinité de solutions existe et seule l'introduction d'une couche d'Ekman permet de déterminer sans ambiguïté l'écoulement solution : c'est ce qu'a fait Busse (1968), aboutissant à une formule analytique implicite.

Vanyo (1991) et Vanyo *et al.* (1995) tentèrent de confirmer expérimentalement cette théorie dans un conteneur d'ellipticité¹⁴ $f = 1/100$ sans toutefois y parvenir clairement (voir Pais & Le Mouél, 2001). Des simulations numériques ont donc été menées, d'abord dans des coquilles sphériques (Tilgner, 1999b; Tilgner & Busse, 2001), puis pour une sphère (Noir *et al.*, 2001), et enfin dans des conteneurs sphéroïdaux par Lorenzani &

13. En ralentissant progressivement sous les effets de marées, les astres passent par des états intermédiaires stables (sous certaines conditions) correspondant à des valeurs rationnelles simples du rapport de la période rotation propre sur la période orbitale. Ces rapports, liés à un phénomène de résonance, sont notés $p : q$ ou p/q , ce qui signifie que l'astre tourne p fois sur lui-même lorsqu'il fait q révolutions orbitales. Typiquement, Mercure est en résonance spin-orbite 3 : 2, tandis que la Lune actuelle est en résonance 1 : 1 (rotation synchrone).

14. Ici, l'ellipticité f du sphéroïde est définie par $f = 1 - b/a$, a et b étant respectivement le rayon équatorial et polaire.

Tilgner (2001), validant la théorie de Busse (1968). Noir *et al.* (2003) ont alors confirmé expérimentalement cette théorie avec de nouvelles expériences, dans un conteneur de rapport d'aspect plus grand (i.e. $f = 1/25$).

En section 2.5, nous reprenons ce cheminement pour un ellipsoïde triaxial en précession : nous considérons tout d'abord un fluide non-visqueux (section 2.5.1.1) en suivant la méthode de Poincaré (1910), puis un fluide visqueux (section 2.5.2) en étendant les résultats de Busse (1968) à ce cas plus général, avant de valider numériquement ces prédictions (section 2.5.2).

Interprétation en terme de forçage d'ondes inertielles : l'écoulement stationnaire décrit ci-dessus correspond au forçage du mode inertiel noté $(2, 1, 1)$ dans Greenspan (1968), parfois appelé *mode de spinover* ou *mode de tilt-over*. Ce mode, qui correspond dans la sphère à une simple rotation autour d'un axe équatorial, est excité par un léger mais soudain changement de la direction de l'axe de rotation d'un fluide en rotation solide¹⁵ (Greenspan, 1968). La précession pouvant être vue comme une séquence de changements infinitésimaux de la direction de l'axe de rotation du fluide, il est logique de voir apparaître ce mode. De plus, stationnaire dans la sphère, ce mode se met à dériver lorsque l'aplatissement du conteneur est non-nul (il n'a alors plus la dépendance temporelle du tilt-over de la sphère). Ainsi, comme l'ont remarqué Stewartson & Roberts (1963), Greenspan (1968) puis Noir *et al.* (2003), une résonance est possible entre le forçage de précession et le mode de tilt-over.

1.4.2.2 Conteneur cylindrique

Dans une analyse linéaire non-visqueuse, Kelvin (1880) proposa que l'écoulement de base corresponde à une rotation solide, solution particulière des équations sur laquelle se superposent des modes inertiels (les modes de Kelvin), permettant le respect des conditions aux limites sur les parois normales à l'axe de rotation (avec naturellement une fréquence $\lambda \in [-2; 2]$ pour chacun des modes). Une telle analyse, étendue par Kudlick (1966) et Greenspan (1968) au cas visqueux (prise en compte des couches visqueuses au niveau des parois), suffit pour prédire précisément les structures et paramètres des modes (i.e. amplitude, fréquence et taux de décroissance visqueuse). Elle a été vérifiée par de nombreuses études expérimentales et numériques (Fultz, 1959; McEwan, 1970; Kobine, 1995; Kerswell & Barenghi, 1995). Cependant, lorsque la fréquence de précession est proche de la fréquence libre d'un mode, son amplitude diverge par un phénomène de résonance¹⁶. Il est alors nécessaire d'inclure à la fois les effets visqueux (ce qui a été fait par Gans, 1970, dans le cas particulier de la résonance d'un cylindre précessant à 90°) et les effets non-linéaires pour prévoir la saturation en amplitude des modes. L'ensemble de ces effets a finalement été pris en compte dans une analyse faiblement non-linéaire par Meunier *et al.* (2008) dans le cas d'une faible précession (i.e. $Ro \ll 1$) à un angle quelconque, et validé expérimentalement dans la même étude.

15. C'est d'ailleurs ainsi que W. Malkus et W.G. Wing ont déterminé expérimentalement la fréquence propre ($\lambda_{211} = 1$) et le facteur de décroissance visqueuse de ce mode.

16. Cette résonance entre le forçage et une onde inertielle est appelée *résonance directe*, par opposition aux *résonances paramétriques* d'ondes inertielles qui sont des instabilités (section 1.5).

1.4.3 Libration en longitude dans une sphère

La libration longitudinale étant une variation périodique de la vitesse angulaire du conteneur, elle n'est rien d'autre qu'une perturbation périodique d'un fluide en rotation. De même que dans l'expérience de Görtler décrite en section 1.3.2, cette perturbation est susceptible d'exciter des ondes inertielles, ce qui a été étudié expérimentalement pour la première fois par Aldridge & Toomre (1969) dans une sphère. De plus, Aldridge (1967) fait état de deux observations expérimentales qui susciteront l'attention :

1. Un écoulement moyen de rotation, dit *zonal*, est créé en volume
2. Une instabilité centrifuge, localisée près de la paroi extérieure se manifeste, sous la forme de rouleaux, dits de *Taylor-Görtler*.

Durant la même période, Wang (1970) obtient analytiquement l'écoulement zonal dans un cylindre avec les méthodes développées pour la précession (Busse, 1968), et confirme ses résultats expérimentalement. Vingt ans plus tard, Rieutord (1991) confirme les résonances d'ondes inertielles observées par Aldridge (voir aussi Tilgner, 1999a, à ce sujet). Plus récemment, motivés par les applications géophysiques de la libration, Noir *et al.* (2009) reviennent à la sphère et étudient expérimentalement l'apparition des rouleaux de Taylor-Görtler. Cette étude est complétée numériquement par Calkins *et al.* (2010), confirmant notamment la présence de l'écoulement zonal. Busse (2010) adapte son calcul de 1968, et obtient ainsi analytiquement l'écoulement zonal dans la sphère pour de faibles fréquences de libration. Cette théorie faiblement non-linéaire a été confirmée expérimentalement et numériquement par Sauret *et al.* (2010), puis étendue au cas d'une fréquence quelconque de libration dans une coquille sphérique (Sauret *et al.*, 2011b). Enfin, Noir *et al.* (2010) étudient expérimentalement l'apparition des rouleaux de Taylor-Görtler dans un cylindre, ainsi que l'écoulement zonal, travaux complétés numériquement et théoriquement par Sauret *et al.* (2011a).

Précisons un peu les choses : de façon générale, on considère un conteneur axisymétrique arbitraire mais fini, de rayon R , contenant un fluide homogène incompressible de viscosité cinématique ν . Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen, on suppose que la paroi externe tourne à la vitesse

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \left(\Omega_0 + \frac{\Delta\Omega}{2} \cos(\omega_{lib}t) \right) \mathbf{k}, \quad (1.21)$$

où Ω_0 est la vitesse angulaire moyenne, $\Delta\Omega$ est l'amplitude de libration, ω_{lib} la pulsation de libration et \mathbf{k} le vecteur unitaire de l'axe de rotation du conteneur. Avec R et Ω_0^{-1} les échelles de longueur et de temps respectivement, la condition aux limites à la paroi externe s'écrit (cf. section 1.2) :

$$\mathbf{u} = r (1 + \epsilon \cos(\omega t)) \mathbf{e}_\theta, \quad (1.22)$$

où \mathbf{e}_θ est le vecteur unitaire orthoradial, r est la coordonnée radiale polaire, \mathbf{u} la vitesse dans le référentiel en rotation, $\epsilon = \Delta\Omega/(2\Omega_0)$ l'amplitude adimensionnée de libration et $\omega = \omega_{lib}/\Omega_0$ la pulsation de libration adimensionnée. Les travaux cités ci-dessus ne considèrent que des géométries axisymétriques, et se concentrent tous sur un régime, appelé ici *non quasi-statique* : la fréquence de libration est suffisamment grande pour que

l'intérieur fluide ne puisse pas suivre les oscillations de la paroi externe. En régime quasi-statique au contraire, le spin-up (cf. section 1.3.5) s'effectue sur un temps beaucoup plus court que la période des oscillations et l'intérieur fluide suit la vitesse de la paroi externe. Ainsi, le temps adimensionnel de spin-up étant d'ordre $1/\sqrt{E}$ en présence de pompage d'Ekman, le rapport ω/\sqrt{E} permet de distinguer le régime quasi-statique ($\omega/\sqrt{E} \ll 1$) de l'autre régime ($\omega/\sqrt{E} \gg 1$). Pour $\omega/\sqrt{E} \gg 1$, le fluide en volume est donc immobile en première approximation, hormis proche de la paroi externe, sur une épaisseur visqueuse, où il est soumis au cisaillement induit par les variations de vitesse de la paroi. Cependant, un écoulement moyen zonal est alors observé dans l'intérieur fluide, d'ordre ϵ^2 , et l'écoulement de base de la libration pour l'intérieur fluide d'un conteneur axisymétrique peut donc s'écrire

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \omega \ll \sqrt{E} : 1 + \epsilon \cos(\omega t) \mathbf{e}_\theta \\ \omega \gg \sqrt{E} : 1 + \epsilon^2 \Omega_2(r) \mathbf{e}_\theta \end{cases} \quad (1.23)$$

avec $\Omega_2(r)$ la vitesse angulaire de l'écoulement zonal moyen, obtenue analytiquement par Wang (1970) pour le cylindre, et Busse (2010) en géométrie sphérique (voir aussi Sauret *et al.*, 2011b).

1.4.4 Déformations de marées

Considérons un système binaire, par exemple formé d'une planète et de sa lune. Chacun des corps exerce sur l'autre un champ gravitationnel dont résulte des forces de marées qui déforment l'ensemble de leurs couches : c'est la *déformation de marées*. Ainsi, notre Lune déforme la croûte terrestre deux fois par jour avec une amplitude de 50 cm. En première approximation, la déformation de marées déforme les coupes normales à l'axe de rotation en des ellipses (section 1.4.4.1). Cependant, de façon plus générique, la déformation de marées peut-être vue comme un développement multipolaire (section 1.4.4.2), somme d'une déformation dipolaire, tripolaire, etc.

1.4.4.1 Déformation elliptique (ou dipolaire)

En première approximation, la déformation de marées rend les parois elliptiques. Une couche fluide interne, telle que par exemple la couche fluide du noyau terrestre, est donc forcée de suivre une ellipse à vitesse constante à la frontière. Mathématiquement, la condition à la paroi, ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, s'écrit donc $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = U_w$ avec $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = (x b/a, y a/b)$ un vecteur tangent à l'ellipse et $\mathbf{t} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}/|\tilde{\boldsymbol{\tau}}|$ le vecteur unitaire associé. Dans l'intérieur (le 'bulk'), les lignes de courant sont donc elliptiques et le champ de vitesses associé à un tel écoulement s'écrit de façon exacte :

$$\mathbf{u}_b = -\frac{a}{b} y \mathbf{e}_x + \frac{b}{a} x \mathbf{e}_y, \quad (1.24)$$

avec (a, b) les demi-axes des ellipses. Cet écoulement, solution des équations de Navier-Stokes, est l'écoulement considéré par Gledzer *et al.* (1977) ou Kerswell (2002) pour l'étude de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale. Par ailleurs, lorsque l'instabilité elliptique est étudiée en milieu infini, Le Dizès & Eloy (1999) ou Kerswell (2002) privilégient

l'écoulement suivant écrit sous forme de fonction de courant en coordonnées polaires :

$$\Psi = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^2}{2} \cos 2\theta, \quad (1.25)$$

avec $\beta = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2)$, appelé ellipticité par la suite¹⁷. Le champ de vitesse associé à la fonction de courant (1.24) est donc

$$\mathbf{u}_b = -(1 + \beta) y \mathbf{e}_x + (1 - \beta) x \mathbf{e}_y. \quad (1.26)$$

Le lien entre les expressions (1.24) et (1.26) est le suivant. Considérant $\beta = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2)$, Kerswell (2002) pose $(a, b) = (\sqrt{1 + \beta}, \sqrt{1 - \beta})$ pour l'écoulement (1.24), ce qui mène à l'écoulement considéré par Bayly (1986) :

$$\mathbf{u}_b = -A y \mathbf{e}_x + A^{-1} x \mathbf{e}_y, \quad (1.27)$$

avec $A = \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)}$, parfois également appelé ellipticité ou paramètre d'ellipticité. L'échelle de longueur est alors donnée par $R = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$. Comme le remarquent Bayly (1986) et Kerswell (2002), les écoulements (1.26) et (1.24) (ou (1.27)) sont alors équivalents à l'échelle de temps près : le facteur multiplicatif $\sqrt{1 - \beta^2}$ nécessaire pour passer de (1.27) à (1.26) revient à passer de l'échelle de temps Ω^{-1} à l'échelle de temps $(\sqrt{1 - \beta^2} \Omega)^{-1}$. Cette nouvelle échelle de temps permet d'obtenir un écoulement qui disparaît lorsque $\beta \rightarrow 1$, comme pour l'écoulement (1.26), au contraire de l'écoulement (1.24) qui tend vers un écoulement de Couette plan lorsque $\beta \rightarrow 1$. Dans (1.25) ou (1.26), le premier terme correspond à une rotation solide, et le deuxième à un écoulement élongationnel (à -45° de l'axe polaire). Notons dès à présent que les lignes d'iso-vitesses sont alors des ellipses d'ellipticité 2β .

Il est important de remarquer que la vitesse tangentielle de (1.24) vaut $\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = \|\tilde{\boldsymbol{\tau}}\|^{-1} = [(x b/a)^2 + (y a/b)^2]^{-1/2}$, ce qui implique qu'elle varie le long de la ligne de courant : la vitesse est plus faible dans les zones de plus grande courbure (e.g. la vitesse est plus grande au petit-axe qu'au grand axe). Par conséquent, entre l'intérieur et la paroi, une zone de raccordement va apparaître pour faire la transition entre les lignes de courant elliptiques de l'intérieur, solution de Navier-Stokes mais avec une vitesse variable, et la paroi où le fluide est forcé de suivre une ellipse à vitesse constante. Ce raccordement est localisée dans la couche visqueuse de proche paroi, i.e. la couche d'Ekman en géométrie sphérique, d'épaisseur typique $O(\sqrt{E})$, et il est possible d'en tenir compte sous certaines hypothèses¹⁸ (cf. section 1.4.4.2).

1.4.4.2 Déformation multipolaire

Comme l'ont remarqué Le Dizès & Eloy (1999), il est possible de généraliser l'écoulement elliptique présenté en section 1.4.4.1 à une déformation multipolaire, définie par la

17. β n'est pas l'excentricité mathématique ε des lignes de courant, liée à β par $\varepsilon = \sqrt{2\beta/(1 + \beta)}$. La définition de l'ellipticité variant selon les sources, nous appellerons ici β l'ellipticité.

18. Concernant la couche visqueuse associée à cet écoulement de base, mentionnons également ici le travail peu connu de Kilgenstein (1985) qui calcule analytiquement son développement aux courts instants pour un ellipsoïde triaxial dont la rotation est soudainement stoppée.

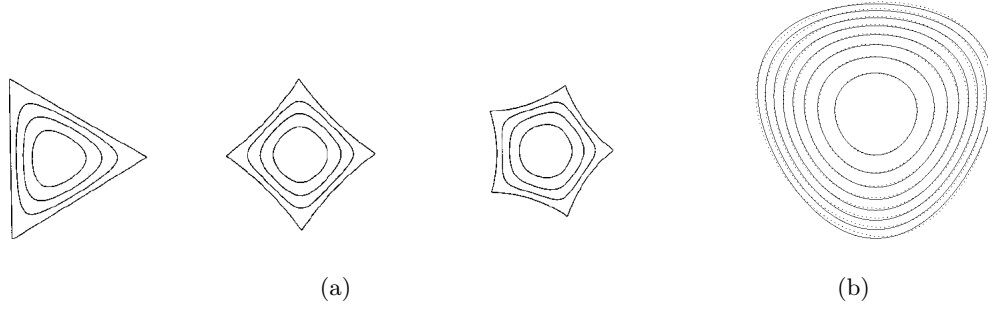


FIGURE 1.6 – (a) Lignes de courant pour $n = 3, 4, 5$ (de gauche à droite), la ligne de courant extérieure étant obtenue pour $\beta_n = 1$ (tiré de Le Dizès & Eloy, 1999). (b) Figure tirée de Eloy (2000) montrant l’écoulement théorique (1.28), en traits pleins, et l’écoulement (1.30) tenant compte de la correction visqueuse en traits discontinus pour $n = 3$, $\beta_3 = 0.2$ et $E = 0.1$.

fonction de courant

$$\Psi_n = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^n}{n} \cos n\theta, \quad (1.28)$$

où n est un entier plus grand que 1 lié au nombre de symétries de l’écoulement associé¹⁹. L’écoulement est donc ici une rotation solide (premier terme), superposé à un écoulement élongationnel multipolaire (second terme) d’ordre n et d’intensité β . La forme de la ligne de courant $\Psi_n = C$ est caractérisée par le paramètre (voir Le Dizès & Eloy, 1999, pour plus de détails)

$$\beta_n = \beta \left(\frac{2nC}{n-2} \right)^{n/2-1} \quad (1.29)$$

qui mesure son asymétrie (voir fig. 1.6). Pour $n = 2$, l’écoulement est celui de la section 1.4.4.1 : toutes les lignes de courant sont des ellipses d’ellipticité $\beta_2 = \beta$. Pour $n \geq 3$, la déformation des lignes de courant n’est plus homogène, ce que reflète la variation de β_n avec la valeur C : la ligne de courant tend vers le cercle pour les petits β_n et devient de plus en plus angulaire lorsque β_n tend vers 1, valeur limite pour laquelle apparaissent n points singuliers (coins). Pour $\beta_n > 1$, les lignes de courant ne sont plus fermées et nous nous restreignons donc à la gamme $\beta_n \in [0; 1]$.

De même qu’en section 1.4.4.1, si cet écoulement est généré par une paroi déformée, l’adhérence à la paroi impose une vitesse tangentielle constante le long de celle-ci et une zone de raccordement va alors apparaître entre l’intérieur, où (1.28) est établi, et la paroi. La fonction de courant (1.28) doit alors être corrigée afin de tenir compte de l’existence de cette zone. Dans la limite des faibles déformations (i.e. $\beta \ll 1$), la correction au premier ordre de la fonction de courant pour de faibles viscosités $E \lesssim \beta$ a été obtenue

19. $n = 1$ correspond simplement à un déplacement du centre.

analytiquement par Eloy (2000). La fonction de courant de l'écoulement total peut alors s'écrire

$$\Psi_n = -\frac{r^2}{2} + \beta \frac{r^n}{n} \sin n\theta + \beta \sqrt{E} \frac{1-n}{n^{3/2}} e^{k_\nu(r-1)} \sin \left[k_\nu(r-1) + n\theta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (1.30)$$

avec $k_\nu = \sqrt{n/(2E)}$ et une paroi située en $\psi = -1/2$ (cf. fig. 1.6b).

1.5 Instabilités inertielles

Les instabilités inertielles sont les instabilités directement liées à l'inertie du fluide et donc au terme $D_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ dans l'équation de Navier-Stokes (1.1). Les instabilités inertielles existent donc au sein d'un fluide homogène non-visqueux, contrairement par exemple à l'instabilité de Rayleigh-Taylor ou à l'instabilité visqueuse des écoulements parallèles. Un certain nombre d'instabilités, telles que l'instabilité de Taylor-Couette (ou centrifuge) ou l'instabilité elliptique, se rangent dans cette classe d'instabilités.

Considérant plus particulièrement les fluides en rotation, le passage dans le référentiel tournant fait émerger du terme d'inertie $D_t \mathbf{u}$ les pseudo-forces d'inertie (cf. encadré de la section 1.2). Les instabilités inertielles peuvent alors être plus particulièrement rattachées à l'une ou l'autre de ces forces : l'instabilité de Taylor-Couette par exemple est plus particulièrement associée à la présence de la force d'entraînement centrifuge tandis que l'instabilité elliptique est plutôt reliée à la force de Coriolis. Naturellement, la famille des instabilités inertielles plutôt rattachées à la force de Coriolis trouvent une description privilégiée en terme d'ondes inertielles dans la mesure où ces dernières sont directement associées à cette force. Ainsi, il est possible de les interpréter en termes de résonance d'ondes inertielles, ce que l'on appellera par la suite l'approche ou l'analyse *globale*²⁰ : c'est par exemple le cas des instabilités de Crow, elliptique, multipolaire (section 2.3.9) ou de l'instabilité de courbure d'un anneau de vorticité (Fukumoto & Hattori, 2003; Hattori & Fukumoto, 2003; Fukumoto & Hattori, 2005). Dans le cas particulier où il existe un forçage périodique imposé, en espace ou en temps, ces instabilités s'insèrent dans le cadre plus général des instabilités paramétriques : le mécanisme sous-jacent est alors une résonance d'une paire d'ondes inertielles avec la perturbation externe périodique appliquée (cf. encart).

Donnons quelques exemples. Considérons tout d'abord le cas d'un forçage temporel avec par exemple un cylindre de fluide en rotation dont la hauteur varie périodiquement en temps, ce qui suppose un fluide légèrement compressible (fig. 1.7 a). De même qu'en section 1.3.2, il est alors possible d'exciter des ondes inertielles : quand la fréquence du forçage est proche de celle d'une onde, une *résonance directe* entre le forçage et l'onde permet à l'onde de croître et de se maintenir en dépit de l'amortissement visqueux. Dans ce cas, déjà rencontré pour l'écoulement de base d'un cylindre en précession (section 1.4.2), la croissance initiale est régie par un processus linéaire, transférant directement de l'énergie du forçage vers l'onde. Un autre processus peut également avoir lieu, d'origine fondamentalement non-linéaire cette fois : le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ peut permettre de coupler deux ondes inertielles avec le forçage externe, la résonance est alors une *résonance triadique*.

20. Par opposition à une approche ou analyse *locale* : voir section 2.1.3.

Instabilité paramétrique

Un oscillateur est paramétrique lorsque sa période propre dépend du temps. Typiquement, un enfant sur une balançoire déplie et replie ses jambes au cours d'une période, modifiant à chaque instant la longueur effective du pendule ainsi constitué et donc sa période propre. Le système modèle de ce type d'instabilité est le botafumeiro, encensoir géant fixé à la croisée du transept de la cathédrale de St Jacques de Compostelle : huit hommes (les tiraboleiros) donnent de la corde au point le plus élevé du mouvement et tirent sur elle au point le plus bas, accroissant ainsi spectaculairement l'oscillation de l'encensoir ^a. En l'assimilant à un pendule simple de longueur l dont le point de suspension oscille verticalement à la pulsation ω_e , en l'absence de frottement son mouvement est régi par

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 [1 + 2f \cos(\omega_e t)] \sin \theta = 0$$

où θ est la position de l'encensoir par rapport à la verticale, $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ est la période propre du pendule et f un paramètre du forçage (uniquement dépendant de la gravité, de l'amplitude et de la pulsation du forçage). L'étude de l'équation (1.31), appelée *équation de Mathieu*, montre que l'oscillateur peut alors se déstabiliser sous certaines conditions (i.e. si l'énergie est apportée au 'bon' moment) : l'amplitude des mouvements augmente alors à chaque période. Ce type d'instabilité se retrouve dans différents domaines de la physique tels que la mécanique des fluides avec par exemple l'instabilité de Faraday ou l'électrocinétique avec un circuit LC (i.e. avec une inductance et une capacité) où la distance entre les armatures du condensateur varie périodiquement.

^a. Il s'élève à 20.6 m de haut, formant un arc de 65 m tout au long du transept et passe au ras du sol à une vitesse de 68 km/h, laissant derrière lui un fin sillage de fumée et d'encens.

Cette instabilité paramétrique, étudiée expérimentalement (Graftieaux *et al.*, 2002; Graftieaux, 2003) et numériquement (Duguet, 2004; Duguet *et al.*, 2005, 2006), a récemment été analysée théoriquement (Racz, 2006; Racz & Scott, 2008a,b) avec les méthodes et outils déjà développés pour les autres instabilités paramétriques des fluides en rotation, comme l'instabilité elliptique ou l'instabilité de précession d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde.

Considérons à présent un exemple de forçage spatial avec un vortex soumis à un cisaillement dans un plan normal à l'axe de rotation, par exemple du fait de la présence d'un deuxième vortex parallèle ou du fait que le vortex tourne au sein d'un conteneur déformé. Dans ce cas, de même que dans le cas du forçage temporel, le cisaillement peut se combiner avec une paire d'ondes inertielles, formant une résonance triadique, et ainsi donner lieu à une instabilité paramétrique appelée instabilité elliptique. Cette instabilité, au centre de ce travail, sera présentée plus en détail en section 2.1. Notons que dans le premier cas des deux vortex en interaction, les centres des vortex sont susceptibles de se déplacer, contrairement au cas du fluide tournant dans un conteneur déformé. Dans le cas où les vortex parallèles sont contra-rotatifs, cela peut donner lieu à une autre instabilité

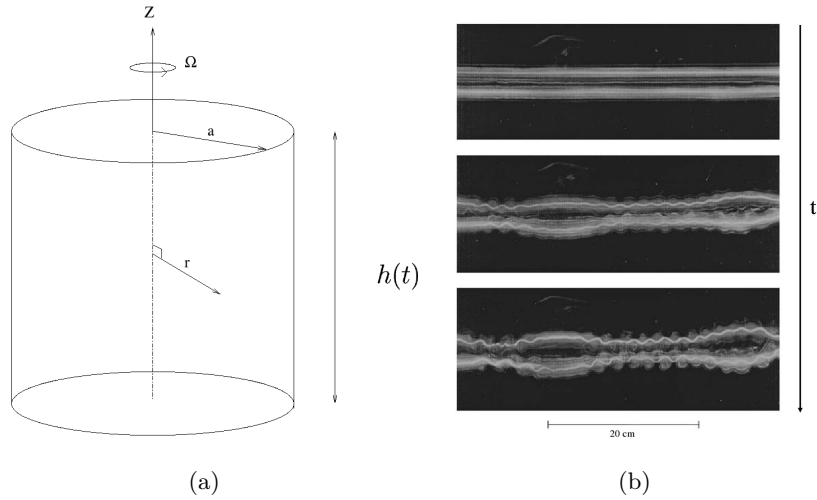


FIGURE 1.7 – (a) Cylindre de fluide en rotation dont la hauteur varie périodiquement en temps. (b) Visualisation, issue de Leweke & Williamson (1998a), de l'évolution temporelle (du haut vers le bas) d'une paire de vortex sous l'action combinée de l'instabilité de Crow (grande longueur d'onde) et de l'instabilité elliptique (courte longueur d'onde). La coupe est faite le long de l'axe de rotation des deux vortex, pour $Re=2750$, et la paire évolue vers l'observateur.

appelée *instabilité de Crow* ou *instabilité coopérative*²¹ (voir aussi section 1.1.1). Cette instabilité, qui n'existe donc pas dans le cas du vortex confiné dans un conteneur, résulte également d'une résonance triadique (e.g. Kuhlmann *et al.*, 2005). Contrairement à l'instabilité elliptique qui peut se développer sur des longueurs d'ondes arbitrairement petites en l'absence de viscosité, l'instabilité de Crow est une instabilité dite de grande longueur d'onde dans la mesure où elle se développe sur une échelle de l'ordre de la distance entre les vortex (fig. 1.7 b).

Enfin, dans le cas d'un fluide tournant au sein d'un conteneur de taille fixée, outre l'instabilité elliptique, d'autres instabilités inertielles peuvent se développer. Si par exemple, le cisaillement qui s'ajoute à la rotation de base n'est pas dipolaire mais tripolaire ou, plus généralement, multipolaire (cf. section 1.4.4.2), une *instabilité multipolaire* peut se développer sur l'écoulement de base (1.28), le modifiant complètement. Cette instabilité, dont l'étude commence avec l'analyse de stabilité locale de Le Dizès & Eloy (1999), fera l'objet de la section 2.3.9.

Par ailleurs, dans le cas d'un conteneur axisymétrique en précession, l'écoulement de base introduit en section 1.4.2 peut se déstabiliser par couplage de modes inertiels, instabilité appelée ici *instabilité inertielle de précession*. Cette instabilité est bien comprise pour le cylindre depuis les travaux théoriques et expérimentaux de Lagrange *et al.* (2007,

21. Notons qu'un unique vortex proche d'une paroi devrait aussi exciter cette instabilité mais cela n'a pas encore été observé.

2008, 2011). En revanche, en géométrie sphérique, elle reste mal connue en dépit de l'étude théorique de Kerswell (1993b) sur l'instabilité d'un fluide non-visqueux dans un sphéroïde en précession²². En effet, les résultats numériques de Tilgner & Busse (2001); Lorenzani (2001); Lorenzani & Tilgner (2001, 2002, 2003) montrent qu'une instabilité dite visqueuse apparaît dans le cas de fluides en rotation au sein d'une sphère en précession (le mécanisme proposé par Kerswell (1993b), basé sur le cisaillement dû à l'ellipticité du conteneur, ne peut expliquer en l'état une telle instabilité). Cette instabilité a été interprétée (Lorenzani & Tilgner, 2003) comme une déstabilisation des couches internes de cisaillement (voir section 1.3.4). Ainsi, en géométrie sphéroïdale, l'instabilité inertielle de précession et l'instabilité visqueuse de précession sont toutes deux susceptibles d'être excitées, mais il n'est pas possible actuellement de distinguer l'une de l'autre en présence d'adhérence aux parois (voir l'étude de Lorenzani & Tilgner, 2003, qui porte sur ce problème) : nous regrouperons donc ces instabilités sous le terme générique *instabilité de précession*²³.

22. Kerswell (1993b) la nomme *instabilité de cisaillement*, appellation que nous ne retenons pas pour éviter toute confusion avec l'*instabilité de Kelvin-Helmholtz* (aussi appelée *instabilité de cisaillement*).

23. Note : ces deux formes d'instabilité de précession sont capables d'exciter une dynamo (voir respectivement Tilgner, 2005; Wu & Roberts, 2009, pour les instabilités visqueuse et inertielle de précession).

1.6 Problématique générale

Les sections précédentes ont introduit les mécanismes importants à l'œuvre au sein des fluides en rotation. Parmi ceux-ci, les instabilités jouent un rôle particulier car leur apparition modifie profondément l'écoulement fluide. Ainsi, un simple fluide en rotation au sein d'un conteneur ellipsoïdal est susceptible de se déstabiliser complètement par excitation de l'instabilité elliptique : l'écoulement devient alors complexe et complètement tridimensionnel. Les forces de marées déformant l'ensemble des enveloppes d'un astre (atmosphère, océan, manteau, noyau d'une planète, zones convectives et radiatives d'une étoile, etc.) leur donnant une forme ellipsoïdale, il a été suggéré que l'instabilité elliptique puisse apparaître au sein des enveloppes fluides de certaines planètes. Une telle apparition aurait de multiples répercussions géophysiques pour l'astre en question. Par exemple, l'écoulement, profondément modifié par l'instabilité, n'évacuerait pas la chaleur avec la même efficacité, ce qui est primordial dans le cas de l'interface noyau liquide - manteau. Par ailleurs, dans le cas d'un fluide conducteur, l'apparition de l'instabilité a un effet direct sur le champ magnétique. Enfin, la dissipation accrue dans la couche fluide, liée à la présence de l'instabilité, doit être prise en compte dans l'évolution orbitale de l'astre. Son apparition au sein d'étoiles doubles permettrait par exemple d'accélérer leur synchronisation. Ces quelques exemples montrent que les conséquences de l'instabilité elliptique peuvent être importantes, et il importe donc de correctement la caractériser dans un contexte planétaire. C'est à cela que s'attache ce travail.

Au sein du chapitre 2, la pertinence de l'instabilité elliptique dans un contexte planétaire est étudiée. Ainsi, la section 2.3 caractérise l'instabilité elliptique d'un point de vue hydrodynamique, apportant par exemple un élément de réponse aux questions suivantes : quel est l'influence de l'aplatissement polaire d'une planète ? Quelle est la vigueur de l'écoulement généré par l'instabilité elliptique ? Quelle est le surcroît de dissipation liée à l'apparition de l'instabilité elliptique au sein du noyau liquide d'une planète ? La section 2.4 étudie l'interaction de la libration et des marées, répondant entre autres à la question suivante : sous quelles conditions une instabilité elliptique peut-elle être excitée par libration ? Enfin, la section 2.6 considère l'influence d'un champ thermique sur l'instabilité elliptique. Ce point est important car la plupart des écoulements géophysiques sont convectifs, et il est donc important de vérifier que l'instabilité elliptique peut se développer sur des tels écoulements.

Le chapitre 3 s'intéresse à l'interaction de l'instabilité elliptique avec un champ magnétique. En effet, le champ magnétique des astres étant souvent mesuré, il pourrait être une signature de la présence de l'instabilité elliptique au sein d'un astre. Le problème inductif, posé par le cas d'un astre immergé au sein d'un champ magnétique externe tel que par exemple Io soumis au champ magnétique jovien, est d'abord considéré et caractérisé numériquement, expérimentalement et théoriquement. Le problème dynamo, plus difficile, qui considère l'excitation spontanée d'un champ magnétique par l'instabilité elliptique, est également abordé avec les outils numériques et expérimentaux.

Enfin, en section 4, les résultats obtenus sont appliqués à différents astres. En section 4.2, les différents scénarios pouvant exciter une instabilité elliptique sont présentés dans

un contexte astrophysique général, liant mécanique des fluides et mécanique céleste. La stabilité des corps telluriques du système solaire vis à vis de l'instabilité elliptique est alors réévaluée, et l'étude étendue aux exoplanètes telluriques. En section 4.1, nous considérons plus particulièrement la Lune primitive. Proposant une nouvelle interprétation de l'origine du magnétisme lunaire, encore mal expliquée, nous combinons nos résultats pour évaluer quantitativement la pertinence d'un scénario s'appuyant sur une instabilité inertielle et démontrons son accord avec les données disponibles. Enfin, en section 4.3, le cas des corps gazeux est abordé, en considérant particulièrement les systèmes extra-solaires à Jupiters chauds.

Chapitre 2

Instabilité elliptique

Sommaire

2.1	Introduction	35
2.2	Approche numérique	40
2.3	Particularités hydrodynamiques	44
2.4	Interaction des marées et de la libration	61
2.5	Interaction des marées et de la précession	68
2.6	Instabilité thermo-elliptique	83
2.7	Synthèse du chapitre 2 et publications	95

L'instabilité elliptique est une instabilité tridimensionnelle susceptible d'apparaître dès lors qu'un fluide tournant présente des lignes de courant elliptiques (voir Kerswell, 2002, pour une revue). Cette instabilité générique intervient dans de nombreux systèmes dans lesquels l'ellipticité provient par exemple d'interactions entre tourbillons ou de parois déformées. Elle a été étudiée dans le contexte des sillages d'avions (e.g. Leweke & Williamson, 1998*a,b*), des tourbillons atmosphériques et océaniques (e.g. Afanasyev, 2002), des noyaux liquides planétaires (e.g. Kerswell & Malkus, 1998), des étoiles doubles (Rieutord, 2003) et des disques d'accrétion (e.g. Goodman, 1993; Lubow *et al.*, 1993; Ryu & Goodman, 1994). Plus récemment, les effets magnétohydrodynamiques de l'instabilité elliptique ont été étudiés, avec des applications en turbulence magnétohydrodynamique (Thess & Zikanov, 2007), ou dans le contexte des processus d'induction à l'œuvre à l'échelle planétaire (Lacaze *et al.*, 2006; Herreman *et al.*, 2009).

Dans ce chapitre, des lignes de courant elliptiques, ingrédient fondamental de l'instabilité elliptique, sont obtenues et étudiées en considérant un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde triaxial. Au-delà de l'aspect fondamental de cette étude de mécanique des fluides, la pertinence géo- et astrophysique de cette géométrie permet de quantifier la robustesse de cette instabilité par rapport aux particularités du contexte planétaire. Pour ce faire, nous nous basons sur des simulations numériques, ce qui nous permet de tester l'ajout progressif de complexités naturelles. Ainsi, une fois l'instabilité elliptique introduite (section 2.1), le modèle numérique est présenté et validé en section 2.2 avant d'être utilisé en section 2.3 pour l'étude. L'influence de l'aplatissement polaire d'une planète est

étudiée en section 2.3.1, puis les sections 2.3.2 et 2.3.3 s'intéressent respectivement à l'influence du mouvement orbital et de l'obliquité planétaire. L'outil numérique nous permet également d'étudier des grandeurs d'intérêt difficiles à mesurer expérimentalement telles que par exemple la vigueur de l'écoulement généré par l'instabilité (section 2.3.4 et 2.3.5) ou la dissipation associée (section 2.3.6).

Au-delà des complexités géométriques, la présence d'autres forçages à l'échelle planétaire, tels que les forçages mécaniques ou thermiques, posent aussi la question de l'existence de l'instabilité dans un tel contexte. La section 2.4 considère l'interaction entre le forçage de marées et le forçage de libration. Nous confirmons notamment pour la première fois qu'une instabilité elliptique peut en effet être excitée par librations, et des premiers résultats sur cette instabilité sont donnés. En 2.5, l'interaction de l'instabilité elliptique et de la précession est étudiée. Enfin, la section 2.6 montre que l'instabilité elliptique peut se développer sur des écoulements convectifs, tels que ceux du noyau terrestre, ou thermiquement stratifiés tel que l'est probablement le noyau de Io.

2.1 Introduction

2.1.1 Historique

Le résumé ci-dessous reprend en partie l'introduction de Kerswell (2002) pour les études sur l'instabilité elliptique entre les années 70 où elle fut découverte et les années 90. L'instabilité elliptique fut découverte de façon simultanée mais indépendante de part et d'autre du rideau de fer. À l'ouest, l'instabilité elliptique émerge des travaux déjà décrits en section 1.1.1, à savoir Crow (1969), Widnall *et al.* (1974), Moore & Saffman (1975), Tsai & Widnall (1976), Vladimirov *et al.* (1983a), Vladimirov & Il'in (1988) et Robinson & Saffman (1984).

Au même moment, un groupe russe étudie expérimentalement des ellipsoïdes triaxiaux de fluide. Leurs résultats sont en accord avec les travaux classiques de Greenhill (1879), Hough (1895) et Poincaré (1910) pour des rotations autour du petit axe (stable) et de l'axe median (instable) mais des instabilités inattendues apparaissent pour les rotations autour du grand axe, a priori stable (Gledzer *et al.*, 1974). Des instabilités similaires sont observées dans un cylindre elliptique (Gledzer *et al.*, 1976), ce que Gledzer *et al.* (1976) confirment par une analyse de stabilité linéaire. Revenant aux ellipsoïdes, Gledzer *et al.* (1977) étendent cette analyse aux perturbations de vitesse quadratiques en variables d'espace. Ces résultats sont confirmés ultérieurement par différentes expériences (Roesner & Schmieg (1980) pour les ellipsoïdes, Chernous'ko (1978) pour les cylindres, ainsi que Vladimirov & Vostretsov (1986)).

L'instabilité elliptique fut redécouverte numériquement par Pierrehumbert (1986), ce qui amena Bayly (1986) à étudier théoriquement la stabilité d'un écoulement elliptique. L'analyse de Floquet de ce dernier révèle qu'un tel écoulement est linéairement instable pour des perturbations tridimensionnelles. Landman & Saffman (1987) montrent que la prise en compte de la viscosité dans cette analyse ne modifie pas le mécanisme de l'instabilité. Une interprétation physique de l'instabilité est donnée par Waleffe (1990) qui montre qu'elle provient d'une élongation exponentielle de la vorticité. Un peu auparavant, Waleffe (1989) avait généralisé l'analyse de Gledzer *et al.* (1976) en géométrie cylindrique, prédisant par une analyse faiblement non-linéaire que l'instabilité devrait être supercritique. Reprenant cette géométrie, Malkus (1989) révèle expérimentalement les aspects non-linéaires de l'instabilité qui peut croître, saturer, puis soudainement rendre l'écoulement complètement turbulent avant que l'écoulement ne se relaminarise : le cycle se reproduit alors à nouveau, produisant un écoulement intermittent. A partir de ce moment, les études se multiplient. Craik (1989)  tudie l'influence d'une rotation de la déformation et obtient des résultats en accord avec les expériences antérieures de Boubnov (1978); Vladimirov *et al.* (1983b). Ses résultats seront confirmés théoriquement par Gledzer & Ponomarev (1992) et Kerswell (1994). Considérant un écoulement non-confiné, Miyazaki & Fukumoto (1992) incluent une stratification de densité axiale et montrent théoriquement que les taux de croissance sont alors toujours réduits. Miyazaki (1993)  tudie les effets combinés d'une telle stratification et d'une rotation de la déformation, aboutissant à une formule analytique du taux de croissance. Revenant à une déformation stationnaire, Kerswell (1993a)  tudie les effets combinés d'un confinement dans un cylindre elliptique avec un éventuel barreau central, d'une stratification axiale ou radiale et d'un champ

magnétique. Il montre que dans ce cas, une stratification axiale est toujours stabilisante tandis qu'une déformation radiale est toujours déstabilisante pour l'instabilité, ce que l'étude de Le Bars & Le Dizès (2006) confirme. Il montre également que l'effet du champ magnétique est également toujours stabilisant (voir aussi Kerswell, 1994). Haj-Hariri & Homsy (1997) étendent l'analyse de Floquet de Bayly (1986) à un fluide viscoélastique, travail qui sera complété plus tard par Fabijonas & Holm (2004b) qui considèrent l'instabilité elliptique au sein de fluides complexes. Goodman (1993) est le premier à étudier la présence de l'instabilité elliptique au sein des disques d'accrétion, portant ainsi son étude dans un contexte astrophysique. Ses résultats seront confirmés par les simulations numériques 2D de Ryu & Goodman (1994) : le transport de moment angulaire par l'instabilité dans une telle configuration n'est pas significative (voir aussi les études de Lubow *et al.*, 1993; Balbus & Hawley, 1998). Dans le même contexte, Lebovitz & Lifschitz (1996b,a) reconsidèrent le problème classique de la stabilité des ellipsoïdes de Riemann, qui représentent des modèles très simplifiés d'étoiles (voir l'annexe F), et montrent que l'instabilité elliptique peut s'y développer. Le Dizès *et al.* (1996) reviennent à un simple écoulement elliptique non-confiné, et considèrent un vortex évoluant en temps. Kerswell & Malkus (1998) considèrent une oscillation temporelle de la rotation différentielle entre la déformation et le fluide et suggèrent sa présence au sein de Io et Europe. De façon générale, l'inclusion d'une dépendance en temps pour un écoulement elliptique peut être déstabilisante, comme le montrent les travaux de Craik & Allen (1992); Bayly *et al.* (1996); Forster & Craik (1996); Biello *et al.* (2000). L'évolution non-linéaire de l'instabilité et sa saturation, initiée par Waleffe (1989), est étudiée théoriquement et numériquement par Mason & Kerswell (1999) en géométrie cylindrique, confirmant le mécanisme de saturation proposé. Enfin, de nouvelles expériences étudient l'instabilité elliptique dans les sillages (Lewke & Williamson, 1998b) et dans l'interaction de deux vortex (Lewke & Williamson, 1998a). La littérature sur le sujet se multiplie soudainement à partir des années 2000 et il devient alors difficile de décrire son évolution. Citons quelques contributions de mes prédécesseurs à l'IRPHE qui constituent une part de l'expérience acquise au laboratoire : l'extension de l'instabilité elliptique au cas d'un cisaillement multipolaire est étudiée en géométrie cylindrique par Le Dizès & Eloy (1999); Eloy *et al.* (2000); Le Dizès (2000); Eloy & Le Dizès (2001); Eloy *et al.* (2003), l'apparition de l'instabilité elliptique au sein de vortex par Le Dizès & Laporte (2002); Lacaze *et al.* (2005a, 2007); Le Dizès (2008), son développement en géométrie sphérique, en lien avec des applications géophysiques, par Lacaze *et al.* (2004, 2005b, 2006); Le Bars *et al.* (2007); Herreman *et al.* (2009); Le Bars *et al.* (2010) et Guimbard *et al.* (2010) ont étudié son interaction avec une stratification axiale en géométrie cylindrique.

2.1.2 Interprétation physique

Bayly (1986), motivé par les simulations spectrales de Pierrehumbert (1986), montre par une analyse de Floquet que l'écoulement elliptique (1.27) perturbé par des ondes planes est instable en l'absence de viscosité. Cette analyse est étendue au cas visqueux par Landman & Saffman (1987). Il faut cependant attendre le travail de Waleffe (1990) pour obtenir une véritable interprétation physique de l'instabilité. Ce dernier parvient à obtenir une solution exacte visqueuse non-linéaire en considérant l'écoulement de base

(1.26), qu'il écrit sous la forme

$$\mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} 0 & -(1+\beta) & 0 \\ 1-\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} , \quad (2.1)$$

où \mathbf{x} est le vecteur position et \mathbf{D} est la matrice de l'écoulement élongationnel de l'écoulement elliptique (β étant l'ellipticité des lignes de courant, définie en section 1.4.4.1). Considérant une perturbation \mathbf{u} de cet écoulement de base, son évolution est régie par l'équation de Navier-Stokes ou de façon équivalente, par son rotationnel, i.e. l'équation de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Ainsi, la vitesse $\mathbf{u}_b + \mathbf{u}$ est régie par l'équation

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega} + 2\partial_z \mathbf{u} - \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2.2)$$

sans aucune approximation. Le premier et le second terme du membre de droite représentent respectivement l'inclinaison et l'étirement de la perturbation en vorticité de l'écoulement de base. Le troisième est l'inclinaison et l'étirement de la vorticité de l'écoulement de base par la perturbation. Le quatrième et le cinquième sont les termes non-linéaires et visqueux. Waleffe (1990) considère alors une perturbation qui consiste simplement en une rotation en bloc :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x} . \quad (2.3)$$

Pour ce type de perturbation, les termes non-linéaires et visqueux sont identiquement nuls. De plus, le premier et le troisième terme se compensent exactement. Ainsi, l'équation (2.2) se réduit à $\partial_t \boldsymbol{\omega} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\omega}$ i.e. (cf. équation (2.1))

$$\dot{\omega}_1 = -\beta \omega_2 \quad (2.4)$$

$$\dot{\omega}_2 = -\beta \omega_1 \quad (2.5)$$

qui admet un mode propre croissant exponentiellement, donné par $\omega_1 = -\omega_2$. Cela démontre qu'une rotation solide avec une vorticité dans la direction de l'élongationnel est une solution croissante exponentielle exacte non-linéaire visqueuse du problème. L'instabilité elliptique, i.e. ici l'étirement exponentiel d'une perturbation de vorticité, sature en s'écartant de la direction d'étirement, comme l'avait proposé Waleffe (1989) dans sa thèse, ce qui a été confirmé expérimentalement par Gledzer *et al.* (1974) et Eloy (2000).

Waleffe (1990) montre également clairement le caractère paramétrique de l'instabilité elliptique en prouvant que cette dernière peut être décrite par un type d'équation usuel pour les oscillateurs paramétriques, une *équation de Ince* (Magnus, 1966). En effet, si l'écoulement de base (1.26) est perturbé par une onde plane d'amplitude X , alors Waleffe (1990) montre que l'évolution de cette perturbation est donnée par

$$(1 - \xi \cos 2\phi) \ddot{X} + 4 \xi \sin(2\phi) \dot{X} + \xi_2 X = 0 , \quad (2.6)$$

où ξ et ξ_2 sont des constantes, et ϕ la phase du vecteur d'onde. Avec $Z = (1 - \xi \cos 2\phi)X$, cette équation se met sous la forme standard d'une *équation de Hill* :

$$(1 - \xi \cos 2\phi) \ddot{Z} + (C - 4 \xi \cos 2\phi) Z = 0 , \quad (2.7)$$

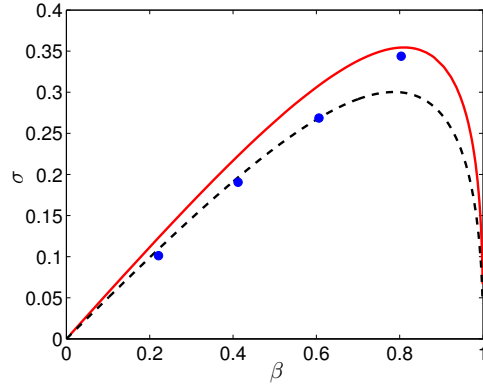


FIGURE 2.1 – Taux de croissance σ de l'instabilité elliptique en fonction de la déformation β des lignes de courant. La ligne continue correspond à l'analyse de Floquet de l'écoulement (1.26), pertinent en géométrie cylindrique. L'accord avec les valeurs obtenues numériquement (ronds) par Pierrehumbert (1986) est excellent jusqu'à des ellipticités de l'ordre de $\beta \approx 0.8$. Ces dernières sont légèrement inférieures, probablement du fait des contraintes de conditions aux limites du calcul numérique (Bayly, 1986). La ligne interrompue correspond à l'écoulement (1.24), au sein d'un ellipsoïde avec l'aplatissement optimal $c = \sqrt{ab} = (1 - \beta^2)^{1/4}$ et un facteur multiplicatif supplémentaire $\sqrt{1 - \beta^2}$ pour que les échelles de temps soient les mêmes (cf. section 1.4.4.1)

d'une forme très proche de l'équation de Mathieu pour les petits A (cf. section 1.5), confirmant le caractère paramétrique de l'instabilité. Ce type d'équation étant bien connu, l'arsenal mathématique associé peut alors être utilisé, ce qui permet par exemple à Waleffe (1990) de construire des solutions analytiques localisées, en lien direct avec les résultats antérieurs de Bayly (1986).

Enfin, Waleffe (1990) obtient analytiquement le taux de croissance de cette perturbation dans la limite des petites ellipticités :

$$\sigma = \frac{9}{16} \beta, \quad (2.8)$$

en accord avec l'analyse de Floquet de Bayly (1986). Nous avons mené à nouveau l'analyse décrite par Bayly (1986), et les résultats sont représentés en figure 2.1, montrant que la pente de $9/16$ à l'origine est une bonne approximation jusqu'à des ellipticités relativement élevées. Notons un maximum $\sigma \approx 0.354$, obtenu pour $\beta \approx 0.81$.

La stabilité de l'écoulement de base (1.24) dans un ellipsoïde triaxial $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ a été étudiée par Gledzer *et al.* (1977), étude reprise par Kerswell (2002). Cette analyse étant décrite et étendue à un écoulement plus général en annexe D, elle n'est pas reprise ici et nous nous contentons d'en donner le résultat : dans le cas particulier de l'écoulement (1.24), le taux de croissance de petites rotations solides perturbatives est

donné par

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}} , \quad (2.9)$$

nul pour $a = c$ ou $a = b$. Cette expression admet un maximum $\sigma_{\max} = (b - a)/(a + b)$ pour $c = \sqrt{ab} = (1 - \beta^2)^{1/4}$. Pour cet aplatissement optimal, la figure 2.1 montre que σ a la même allure que le taux de croissance donné par l'analyse de Floquet pour un écoulement non-confiné. Le cas limite $\beta \rightarrow 0$ pour cet aplatissement optimal vaut

$$\sigma = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^3}{8} + O(\beta^4) \quad (2.10)$$

ce qui donne bien une pente à l'origine légèrement inférieure à 9/16. La figure 2.1 montre qu'un maximum $\sigma \approx 0.3$ est également obtenu pour $\beta = [1/2 \cdot (\sqrt{5} - 1)]^{1/2} \approx 0.786$.

2.1.3 Approche locale, approche globale

L'approche locale consiste à considérer de façon lagrangienne un écoulement non-confiné perturbé par une onde plane. Cela revient à ne considérer que des perturbations de courtes longueurs d'onde. Cette approche, initiée par Bayly (1986) et Craik & Criminale (1986) pour l'instabilité elliptique, s'est progressivement raffinée jusqu'aux travaux sur la méthode WKB dans le cadre de l'hydrodynamique de Friedlander & Vishik (1991) et Lifschitz & Hameiri (1991). L'approche locale permet d'obtenir les taux de croissance, souvent sous forme analytique explicite, et permet de prouver qu'une simple ligne de courant elliptique est intrinsèquement instable.

L'approche globale considère un écoulement de base, éventuellement confiné, et le décompose en ses modes normaux. Cette approche permet donc de tenir compte des effets de confinement et de suivre l'évolution de l'instabilité mode par mode. Il est possible d'étendre cette approche à une analyse faiblement non-linéaire : l'évolution temporelle de l'instabilité peut alors être calculée, mode par mode, depuis sa croissance initiale exponentielle jusqu'à sa saturation. Dans le cadre de l'instabilité elliptique, cette approche a été développée par Eloy *et al.* (2000, 2003) en géométrie confinée cylindrique, en se basant sur les modes de Kelvin (section 1.3.2.3). En géométrie confinée sphérique, Lacaze *et al.* (2004, 2005b) ont confirmé la pertinence d'une telle approche. Les instabilités inertielles résultant d'une résonance triadique de modes normaux n'apparaissent alors que si les conditions suivantes, appelées *conditions de résonance*, sont vérifiées :

$$m_2 - m_1 = m \quad (2.11)$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega \quad (2.12)$$

$$k_2 - k_1 = k \quad (2.13)$$

où m_i , ω_i et k_i sont respectivement les nombre d'onde azimuthaux, les pulsations et les nombres d'onde radiaux des deux modes normaux en résonance avec le forçage de nombre d'onde azimuthal m , de pulsation ω et de nombre d'onde radial k . Dans le cas particulier de l'instabilité multipolaire par exemple, les conditions de résonance pour un élongationnel

fixe dans le référentiel inertiel sont données par (e.g. Eloy & Le Dizès, 2001) : $\omega = 0$ et $k = 0$, m étant l'ordre de la symétrie de la perturbation élongationnelle ($m = 2$ pour l'instabilité elliptique). Dans le cas de l'instabilité inertielle de précession en géométrie cylindrique (e.g. Lagrange *et al.*, 2008), le forçage de précession donne $m = 1$ tandis que ω et k sont la pulsation et le nombre d'onde radial du mode de Kelvin forcé qui constitue l'écoulement de base (e.g. Lagrange *et al.*, 2008, 2011).

2.2 Approche numérique

D'un point de vue numérique, la plupart des études de l'instabilité elliptique considèrent la dynamique 3D de deux vortex déformés initialement 2D (e.g. Lundgren & Mansour, 1996; Sipp & Jacquin, 1998; Lacaze *et al.*, 2007; Roy *et al.*, 2008). En effet, le travail pionnier de Pierrehumbert (1986) montre numériquement la présence de cette instabilité pour un écoulement plan associé à un vortex elliptique au sein d'une boîte, avec des conditions de glissement et une périodicité supposée dans la direction axiale : le problème linéaire aux valeurs propres est alors résolu par une méthode spectrale, et le taux de croissance de l'instabilité obtenu. Les études numériques en milieu confiné sont moins nombreuses. Mason & Kerswell (1999) utilisent un système de coordonnées elliptico-polaire non-orthogonal afin de résoudre l'écoulement dans un cylindre déformé par des méthodes spectrales ; l'évolution temporelle non-linéaire de deux modes différents de l'instabilité elliptique est alors calculée avec des conditions d'adhérence sur les parois latérales et des conditions de glissement sur les parois inférieure et supérieure du cylindre. Seyed-Mahmoud *et al.* (2000) obtiennent numériquement les fréquences et les taux de croissance de l'instabilité dans des ellipsoïdes et des coquilles ellipsoïdales en utilisant une méthode de Galerkin linéaire, en projetant l'écoulement sur une sélection d'ondes inertielles. Finalement, Ou *et al.* (2007) étudient la stabilité de domaines fluides ellipsoïdaux compressibles auto-gravitants et soulignent l'apparition de l'instabilité elliptique. Cependant, jusqu'ici, l'évolution non-linéaire visqueuse de l'instabilité elliptique au sein d'un conteneur n'a pas encore été simulée numériquement. Cette section présente une méthode numérique permettant de telles simulations. Le modèle numérique est validé par comparaison avec les résultats de la littérature sur un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde triaxial faiblement déformé.

2.2.1 Méthode numérique utilisée

Dans notre étude de l'instabilité elliptique, le problème à résoudre numériquement peut se décrire génériquement sous la forme suivante : au sein d'une géométrie non-axisymétrique à parois fixes, quel est l'écoulement d'un fluide en rotation ? La configuration de référence dans ce travail est issue des études expérimentales dans un ellipsoïde faiblement déformé (Lacaze *et al.*, 2004, 2005b; Herreman *et al.*, 2009; Le Bars *et al.*, 2010). Dans ces expériences, une cavité sphérique de rayon R , moulée dans un cylindre de silicone, est rempli avec du liquide et mis en rotation à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe (Oz). Le cylindre est alors légèrement comprimé d'une quantité s selon (Ox), perpendiculairement à l'axe de rotation. La cavité devient alors un ellipsoïde triaxial d'axes $(a, b, c) = (R - s, R + s, R)$, avec une ellipticité équatoriale $\beta = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$

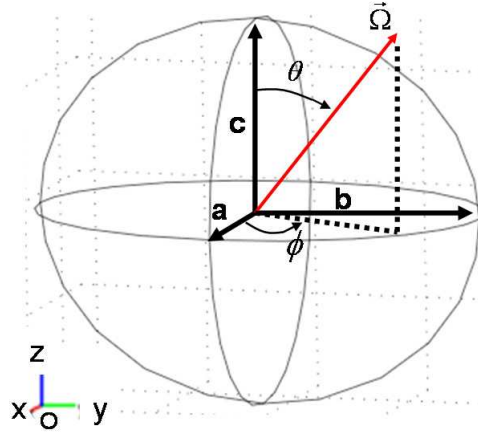


FIGURE 2.2 – Schéma du problème considéré : un fluide est en rotation dans un ellipsoïde triaxial d'axes (a, b, c) , liés au référentiel (Ox, Oy, Oz) , avec une vitesse tangentielle constante le long des parois dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation Ω .

et une vitesse tangentielle constante le long de la paroi déformée, égale à ΩR à l'équateur. Une telle configuration est le modèle le plus simple d'un noyau planétaire liquide sans graine solide interne, au sein d'un manteau déformé par les forces de marées, avec une vitesse tangentielle constante. De façon similaire, notre modèle numérique de référence résout l'écoulement d'un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde d'axes (a, b, c) liés au référentiel (Ox, Oy, Oz) , avec une vitesse tangentielle constante le long de la paroi dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation Ω (fig. 2.2). La longueur c de l'axe polaire peut être choisie indépendamment des autres longueurs a et b (avec $b > a$), ce que ne permettait pas le dispositif expérimental. De plus, l'axe de rotation de l'ellipsoïde peut être incliné par rapport à l'axe polaire, ce qui nous permettra d'étudier l'influence de l'obliquité en section 2.3.3 ou l'interaction avec la précession en section 2.5. Notons cependant que, par défaut, c sera égal à la moyenne des axes équatoriaux $R_{eq} = (a + b)/2$, et l'axe de rotation sera selon (Oz) , de même que dans le dispositif expérimental. Dans toutes nos simulations, le fluide est initialement au repos, puis soudainement, une vitesse angulaire constante est imposée de sorte que la vitesse tangentielle le long de la paroi déformée dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation soit égale à $\Omega (a' + b')/2$, où a' et b' sont les axes de la paroi elliptique dans ce plan. Nos résultats sont adimensionnés par l'échelle de longueur R_{eq} et l'échelle de temps Ω^{-1} . Ainsi, cinq nombres adimensionnels permettent de caractériser le système : le nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega R_{eq}^2)$, où ν est la viscosité cinématique du fluide, l'ellipticité $\beta = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$ de la déformation, le rapport d'aspect c/b qui quantifie l'aplatissement de l'ellipsoïde, et finalement l'inclinaison θ et la déclinaison ϕ de l'axe de rotation. Le problème résolu numériquement est donc régi par le système d'équations

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} - 2 \Omega_c^* \times \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.15)$$

où des conditions d'adhérence à la paroi sont utilisées pour le fluide. Notons que nous travaillons toujours dans un référentiel où les parois de l'ellipsoïde sont fixes, ce qui correspond au référentiel inertiel de référence dans la plupart des cas. La force de Coriolis $-2 \mathbf{\Omega}_c^* \times \mathbf{u}$ est uniquement utilisée en section 2.3.2 où l'ellipsoïde est entièrement soumis à une rotation supplémentaire $\mathbf{\Omega}_c^* \mathbf{e}_z$.

Dans la plupart des travaux, les études numériques des noyaux liquides planétaires approximent les noyaux par une sphère ou un sphéroïde, ce qui permet d'exploiter l'axisymétrie par décomposition spectrale. Les méthodes spectrales, à la fois rapides et précises, ne peuvent cependant pas être appliquées aisément à notre cas où l'axisymétrie est brisée. Nos simulations sont donc menées avec un code basé sur la méthode des éléments finis. Ce type de code est largement utilisé en ingénierie car des géométries complexes peuvent être considérées, ce qui constitue d'ailleurs une des points forts de ce type de méthode numérique. Ainsi, l'implémentation de notre ellipsoïde triaxial et des conditions aux limites nécessaires se fait assez simplement, le prix à payer étant un coût de calcul accru par rapport à des méthodes spectrales. Avec le logiciel commercial COMSOL Multiphysics[®], un maillage non-structuré d'éléments tétraédriques est créé. Les éléments utilisés sont des éléments standards de Lagrange $P1 - P2$, linéaires pour la pression et quadratiques pour le champ de vitesses. Notons qu'aucune technique de stabilisation n'est utilisée dans ce travail. L'avance en temps est régie par un solveur IDA (Implicit Differential-Algebraic), basé sur un schéma BDF (Backward Differencing Formulas), décrit par Hindmarsh *et al.* (2005). A chaque pas de temps, le système est résolu avec le solveur direct linéaire pour matrices creuses PARDISO¹.

L'instabilité elliptique induit une déstabilisation 3D des lignes de courant initialement 2D et elliptiques. Pour étudier ses propriétés globales, il est donc naturel d'introduire la valeur moyenne de la vitesse verticale en valeur absolue $W = \frac{1}{V} \iiint_V |w| d\tau$, avec w la vitesse adimensionnelle verticale et V le volume de l'ellipsoïde. L'évolution typique de W en fonction du temps est représenté en figure 2.3a pour $E = 1/500$ et $\beta = 0.317$. À $t = 0$, le fluide est au repos au sein de l'ellipsoïde, et la condition d'adhérence à la paroi met progressivement le fluide en rotation. Le premier pic sur W , juste après $t = 0$, provient du pompage d'Ekman (section 1.3.3) qui apparaît durant le spin-up (section 1.3.5) i.e. sur une durée de l'ordre du temps d'Ekman $t_E = E^{-1/2} \Omega^{-1}$, beaucoup plus court que le temps typique de diffusion visqueuse $t_v = R_{eq}^2/\nu = E^{-1} \Omega^{-1}$ (Benton & Clark, 1974). En figure 2.3a par exemple, le temps adimensionnel d'Ekman donne $\Omega t_E \approx 22$, en accord avec l'évolution de W . Une fois le fluide en rotation, l'écoulement est essentiellement bidimensionnel avec des lignes de courant elliptiques, ce qui correspond à l'écoulement de base de l'instabilité elliptique. Cette dernière croît alors exponentiellement, passe par un overshoot puis atteint un état de saturation stationnaire. Définissant le taux de croissance σ de l'instabilité elliptique comme la constante de temps de la croissance exponentielle, la figure 2.3b représente une étude de convergence numérique du taux de croissance en fonction du raffinement du maillage. Le nombre de degrés de liberté (ou DoF pour Degrees of Freedom) du problème est choisi entre $4 \cdot 10^4$ DoF et $7 \cdot 10^4$ DoF en fonction de l'ellipticité et du nombre d'Ekman, ce qui est un bon compromis entre précision et temps CPU raisonnable.

1. www.pardiso-project.org

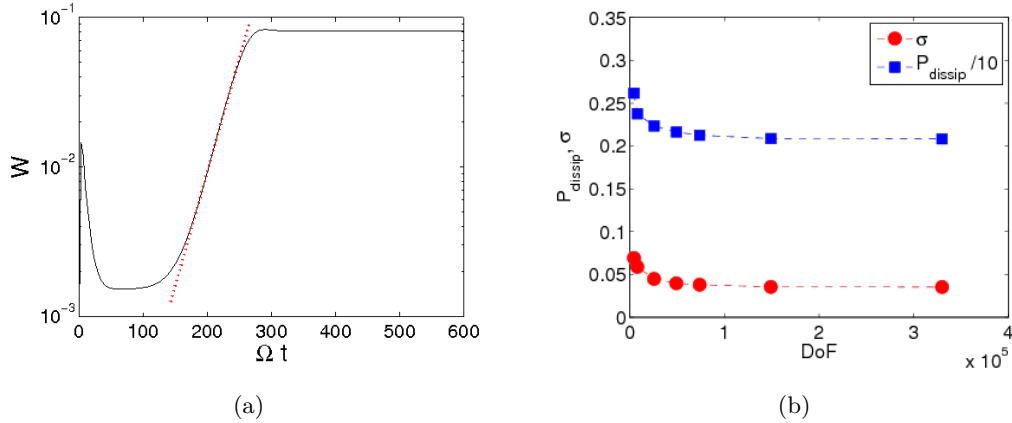


FIGURE 2.3 – Simulations pour $E = 1/500$, $\beta = 0.317$ et $c = (a + b)/2$. (a) Évolution temporelle de la valeur moyenne de la vitesse verticale, montrant la phase de spin-up ($\Omega t_E \approx 22$), la croissance exponentielle de l’instabilité elliptique (fit exponentiel avec un taux de croissance $\sigma = 0.352$) et sa saturation. (b) Convergence avec le nombre de degrés de liberté (DoF) du taux de croissance σ et de la puissance dissipée P_{dissip} à saturation. Les résultats présentés en (a) sont calculés avec 42459 DoF.

2.2.2 Validation de la méthode numérique

Une première validation visuelle est donnée en comparant la forme de l’écoulement observée expérimentalement (fig. 2.4a) avec l’écoulement issu des simulations numériques (fig. 2.4b). La forme usuelle en S du spin-over est retrouvée (Lacaze *et al.*, 2004), issue de la rotation supplémentaire qui apparaît dans le plan équatorial, pointant dans le voisinage de la direction d’élongation. Afin de valider quantitativement le modèle numérique, l’évolution du taux de croissance de l’instabilité est comparée en figure 2.5 à la théorie linéaire donnée par Lacaze *et al.* (2004) pour de faibles ellipticités :

$$\frac{\sigma}{\beta} = \frac{1}{2} - K \frac{\sqrt{E}}{\beta}, \quad (2.16)$$

où K est une constante égale à $K = 2.62$ dans la limite des petits β (Hollerbach & Kerswell (1995); Lacaze *et al.* (2004)). Notons que le second terme dans le membre de droite de l’équation 2.16 correspond à l’amortissement visqueux du taux de croissance dû à la présence des couches d’Ekman proches des parois (voir Kudlick, 1966; Hollerbach & Kerswell, 1995). L’expression (2.16) permet de décrire un nombre d’Ekman critique pour le seuil de l’instabilité, égal à :

$$E_c = \left(\frac{\beta}{2K} \right)^2. \quad (2.17)$$

Proche du seuil, les résultats numériques sont en très bon accord avec la théorie linéaire, jusqu’à des ellipticités de l’ordre de $\beta \approx 0.5$. Notons en particulier que tous les points

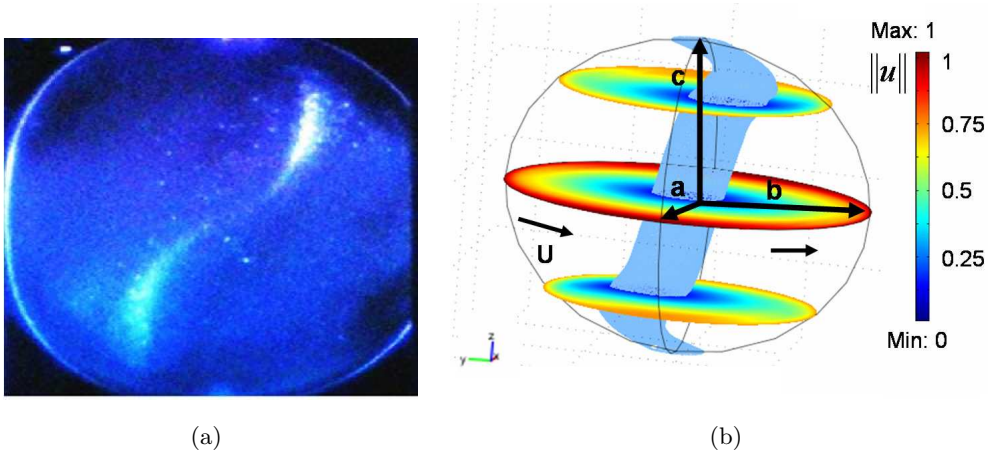


FIGURE 2.4 – Validation des simulations numériques. (a) Visualisation au Kalliroscope du mode de spin-over dans le plan méridien de l'élongation maximale pour $E = 1/4000$ et $\beta = 0.16$. La forme typique en S de l'axe de rotation est due à la combinaison de la rotation principale imposée par la paroi et du mode de spin-over, qui correspond à une rotation dans le plan équatorial. (b) Coupes du champ de vitesse $\|\mathbf{u}\|$ et iso-surface $\|\mathbf{u}\| = 0.15$ à saturation de l'instabilité elliptique pour $E = 1/344$, $\beta = 0.317$, $c = (a + b)/2$ et 49900 DoF. La forme en S du spin-over est retrouvée.

correspondant à différents (β, E) se superposent lorsque σ/β est exprimé en fonction de \sqrt{E}/β (voir formule 2.16). Ce point est particulièrement intéressant pour les applications planétaires pour lesquelles les très faibles valeurs de E ne sont pas atteignables avec les moyens de calculs actuels mais peuvent être compensées par des ellipticités β plus élevées.

Finalement, lorsque l'ellipticité est trop élevée ($\beta > 0.5$), la figure 2.5 montre que le taux de croissance décroît. L'instabilité elliptique finit par disparaître pour de trop grandes ellipticités, au moment où les couches d'Ekman des parois en opposition se perturbent de manière importante. Notons que la position du taux de croissance maximal σ avec l'ellipticité est obtenue autour de $\beta = 0.5$, de façon relativement indépendante du nombre d'Ekman. Cela indique que la décroissance est probablement due à des effets géométriques liés aux fortes ellipticités en jeu, plutôt qu'à des effets d'atténuation visqueuse².

2.3 Particularités hydrodynamiques

Dans cette section, seule l'hydrodynamique est considérée. Des complications supplémentaires importantes présentes dans un contexte planétaire sont quantifiées : (i) l'influence de l'aplatissement de l'ellipsoïde (e.g. aplatissement au niveau des pôles sur Terre), (ii) l'influence de l'ajout d'une force de Coriolis, ce qui revient à prendre en compte le

2. Il est difficile de lier ce maximum avec le maximum de la figure 2.1 dans la mesure où les échelles de temps en jeu ne sont pas les mêmes : ici, lorsque $\beta \rightarrow 1$, l'écoulement tend vers un écoulement de Couette plan et non vers un écoulement nul (voir section 1.4.4.1 pour plus de détails).

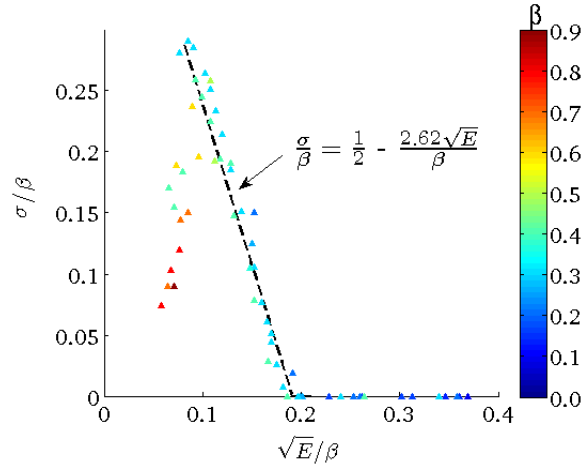


FIGURE 2.5 – Validation des simulations numériques. Évolution du taux de croissance pour ($E \geq 1/2000$, $\beta \leq 0.95$, $c = (a + b)/2$) et comparaison avec la théorie linéaire, représentée par la ligne discontinue. Le coefficient 2.62 est valide dans la limite des faibles ellipticités (Lacaze et al., 2004). Un bon accord est obtenu pour des ellipticités allant jusqu'à des valeurs de 0.5.

mouvement orbital de l'astre compagnon responsable de la déformation et (iii) l'influence de l'inclinaison de l'axe de rotation par rapport au plan de déformation i.e. l'obliquité. On s'intéressera également à deux quantités importantes pour les applications planétaires, à savoir (i) l'amplitude de l'instabilité à saturation, et (ii) la puissance dissipée par l'instabilité.

2.3.1 Influence de l'aplatissement

Le mode de spin-over est le mode de l'instabilité elliptique le plus connu en géométrie ellipsoïdale. De fait, il correspond au mode excité expérimentalement lorsque l'on déforme une sphère ou une coquille sphérique à l'aide de deux rouleaux fixes (Lacaze *et al.*, 2004, 2006). Cependant, dans ce cas particulier, l'axe médian de l'ellipsoïde est aligné avec l'axe de rotation, ce qui est très rarement le cas des planètes ou des étoiles. En effet, la rotation propre des astres engendre dans la plupart des cas un aplatissement beaucoup plus grand que la déformation de marées, ce qui implique que l'axe polaire est alors le plus petit axe des trois. La situation est encore plus prononcée pour certaines étoiles, comme Regulus A dont le rayon équatorial moyen est d'environ 32% plus grand que son rayon polaire (McAlister *et al.*, 2005).

Les premiers travaux sur ce point commencent avec Kerswell (1994) qui considère la base des modes inertiels d'un sphéroïde oblate ($a = b$). Valide dans la limite des faibles ellipticités équatoriales, cette approche lui permet de calculer les 60 premières résonances sub-harmoniques exactes et leur taux de croissance σ pour différentes valeurs d'aplatissement c/b . La modification de σ par l'aplatissement peut être obtenue analytiquement

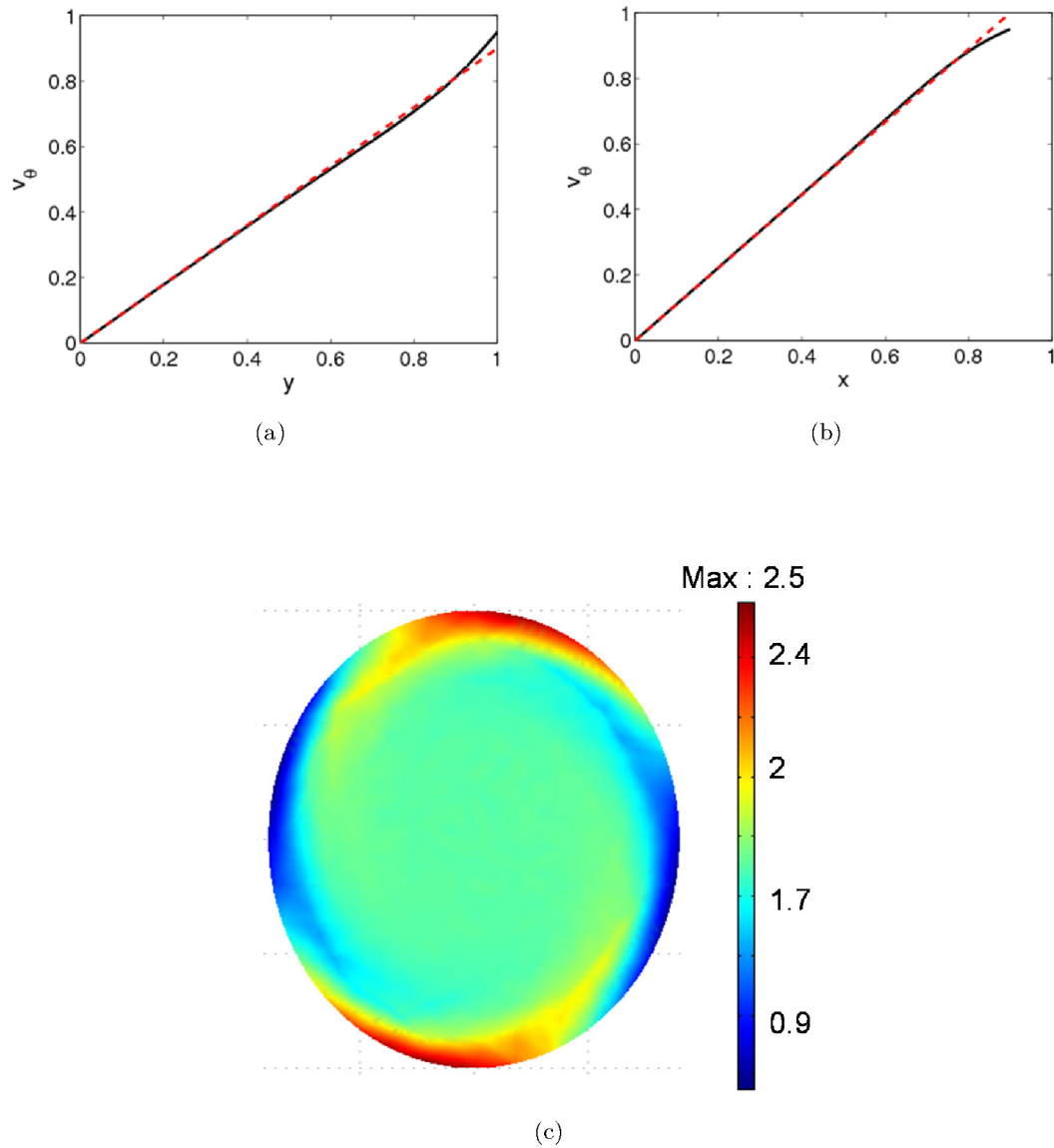


FIGURE 2.6 – Vitesse azimuthale v_θ pour $E = 0.011$, $\beta = 0.1$, $c = \frac{a+b}{2}$. (a) Coupe selon (Oy) à $x = 0$. (b) Coupe selon (Ox) à $y = 0$. (c) Coupe dans le plan équatorial de la composante selon (Oz) de la vorticité (lignes continues). Les lignes discontinues rouges en figures (a) et (b) représentent l'écoulement de base théorique (2.18), qui admet une vitesse tangentielle variable le long des lignes de courant elliptiques. Un bon accord est obtenu avec les résultats numériques, excepté dans la fine couche visqueuse de proche paroi, où des cellules de recirculation apparaissent afin de raccorder la condition de vitesse constante à la paroi.

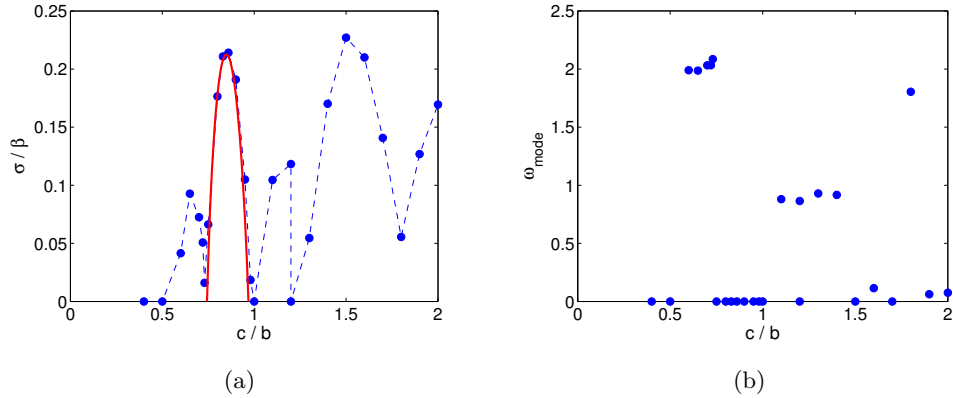


FIGURE 2.7 – Influence de la longueur c de l'axe polaire de l'ellipsoïde (aligné avec l'axe de rotation) sur la sélection de mode de l'instabilité elliptique ($E = 1/688, \beta = 0.317$). (a) Variation du taux de croissance σ en fonction de l'aplatissement c/b . Un excellent accord entre l'expression (2.19), représentée par la ligne continue, et les calculs numériques est obtenu. (b) Variation de la fréquence principale du mode sélectionné, déterminée par une analyse de Fourier une fois l'état saturé atteint. Notons qu'un mode de spin-over avec une longueur d'onde de 1 est obtenu pour $c/b \approx 1.6$ ($\omega_{\text{mode}} \approx 0$).

dans le cas particulier du spin-over en partant de l'écoulement de base (1.24) que l'on rappelle ici :

$$\mathbf{u}_b = -\frac{a}{b} y \mathbf{e}_x + \frac{b}{a} x \mathbf{e}_y, \quad (2.18)$$

et en recherchant les perturbations non-visqueuses linéaires en coordonnées d'espace. Ici, \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y sont respectivement les vecteurs unitaires de (Ox) et de (Oy) . Dans un domaine ouvert, cet écoulement correspond à des lignes de courant elliptiques avec une ellipticité $\beta = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$ comme dans le modèle numérique, avec une vitesse tangentielle variable. La figure 2.6 montre que cet écoulement théorique représente une très bonne approximation de notre écoulement de base même si une vitesse tangentielle constante est imposée à notre paroi elliptique, ce qui génère une petite recirculation visqueuse en proche paroi. Pour un tel écoulement, nous avons vu (section 2.1) que le taux de croissance est :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}} \quad (2.19)$$

Ce taux de croissance théorique est valable pour le spin-over, i.e. pour $a \leq c \leq b$ seulement, et est nul pour $c = b$ ou $c = a$. Un maximum $\sigma_{\text{max}} = (b - a)/(a + b)$ est obtenu pour $c = \sqrt{ab}$. On peut remarquer que l'expression (2.16) conduisant à $\sigma = \beta/2$ dans le cas non-visqueux est retrouvée avec $a = R_{eq} + s$ et $b = R_{eq} - s$ dans la limite $s \ll R_{eq}$ et donc $\beta \rightarrow 0$. Notons que la valeur expérimentale $c = (a + b)/2$ est très proche de $c = \sqrt{ab}$

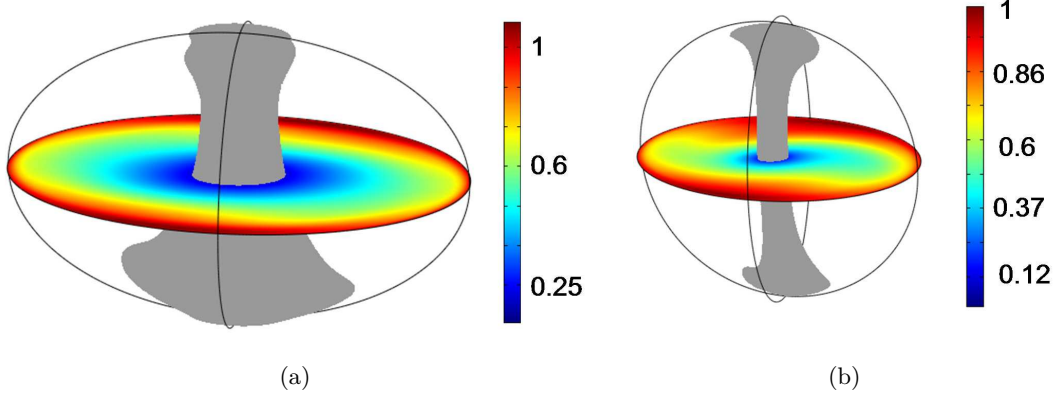


FIGURE 2.8 – Visualisations des champs de vitesses de différents modes de l'instabilité elliptique (paramètres : $E = 1/700$, $\beta = 0.317$). (a) Coupe équatoriale du champ de vitesse $\|\mathbf{u}\|$ et iso-surface $\|\mathbf{u}\| = 0.22$ pour le mode $(1,3)$ ($c/b = 0.65$). (b) Coupe équatoriale du champ de vitesse $\|\mathbf{u}\|$ et iso-surface $\|\mathbf{u}\| = 0.18$ pour le mode $(0,2)$ ($c/b = 1.1$).

pour de faibles ellipticités, ce qui conduit à des taux de croissance voisins ; même pour une ellipticité de 0.7 par exemple, la différence entre le taux de croissance calculé pour $c = (a + b)/2$ et la valeur maximale est de seulement 2 %.

Les résultats numériques sont présentés en figure 2.7. Afin de les comparer avec la prédiction analytique non-visqueuse (2.19), un terme d'amortissement visqueux $-K\sqrt{E}$ est ajouté à (2.19). Un excellent accord théorie/simulations est trouvé pour $a \leq c \leq b$, ce qui représente une validation supplémentaire de notre approche. Cependant, on trouve une constante $K \approx 2.5$ légèrement différente de la constante théorique $K = 2.62$ attendue pour le mode de spin-over dans la limite des faibles ellipticités. En fait, cette constante varie avec la déformation comme l'indique notre étude systématique à $\beta = 0.42$ qui mène, par ajustement, à $K = 2.78$. Néanmoins, on peut remarquer que K reste toujours du même ordre de grandeur. On peut également remarquer qu'en raison d'une relative dispersion des résultats numériques présentés en figure 2.5, une constante $K = 2.5$ par exemple reste correcte. Par conséquent, dans ce qui suit, nous utiliserons $K = 2.5$.

En plus de confirmer la loi théorique de Gledzer & Ponomarev (1992), nous sommes maintenant en mesure d'explorer la gamme $c \leq a$ ou $c \geq b$, où d'autres modes, non-linéaires en coordonnées d'espace, peuvent se développer. Comme le montre la figure 2.7, différents modes de l'instabilité elliptique, caractérisés par leur fréquence d'oscillation principale, apparaissent selon le rapport c/b (voir aussi la figure 2.8 pour une visualisation de ces modes instationnaires). La variation de l'aplatissement est donc similaire à la variation du rapport d'aspect dans le cas d'un cylindre elliptique déformé (Eloy *et al.*, 2003). Puisque l'instabilité elliptique provient d'une résonance paramétrique de deux ondes d'inertielles de nombres azimutaux m et $m + 2$ avec le champ de cisaillement imposé, le mode correspondant est noté $(m, m + 2)$, et oscille à la fréquence $\omega_{mode} = m + 1$. Par exemple, le mode de spin-over correspond au mode stationnaire $(-1, 1)$ avec une demi-longueur d'onde le long de l'axe de rotation. Selon la figure 2.7b, le mode $(1, 3)$ peut être

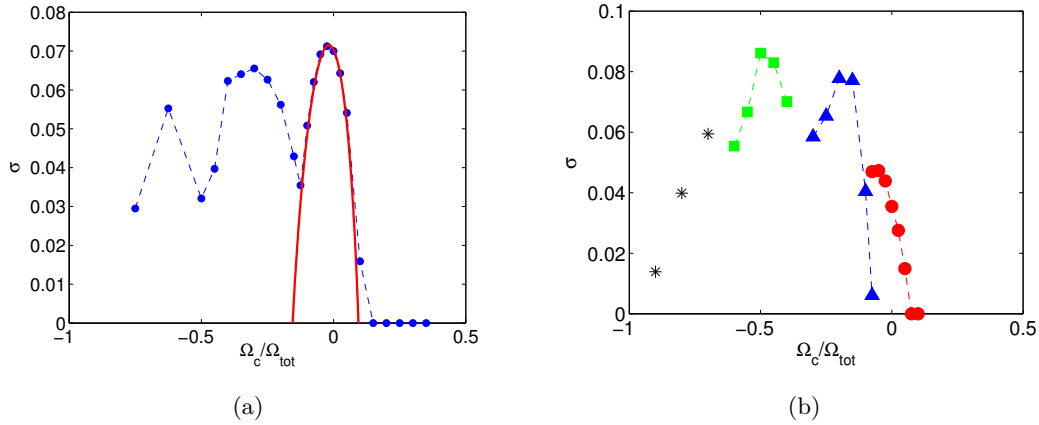


FIGURE 2.9 – Évolution du taux de croissance en présence d'une rotation globale ($\beta = 0.317$ et $E_{tot} = \nu/(\Omega_{tot} R_{eq}^2) = 10^{-3}$, où Ω_{tot} prend en compte la rotation globale et la rotation du fluide, i.e. $\Omega_{tot} = \Omega_c + \Omega$). (a) $c = (a + b)/2$, i.e. $c/b = 0.86$: le spinover est alors excité en l'absence de rotation globale. Un bon accord est trouvé avec la solution analytique (ligne continue rouge). Lorsque Ω_c diminue, d'autres modes apparaissent avec une plus petite longueur d'onde. (b) $c/b = 0.65$: le mode (1,3) est alors excité en l'absence de rotation globale. D'autres modes peuvent être excités : • représente le mode (1,3), ▲ le spinover, ■ le mode (-1,1) avec une longueur d'onde le long de l'axe de rotation, et les * correspondent à d'autres modes.

observé lorsque $c < b$ et le mode (0,2) lorsque $c > a$. Pour des rapports encore plus grands, le mode (-1,1) réapparaît mais avec un plus grand nombre de longueurs d'onde que le spin-over. Notons enfin que le confinement géométrique interdit tout mode stationnaire pour $c < b$.

2.3.2 Influence de la rotation de la déformation

En géo- ou astrophysique, la déformation de marées d'un corps (planète, satellite ou étoile) n'est pas immobile mais en rotation du fait du mouvement orbital de l'attracteur. L'influence de cette rotation, appelée rotation globale ci-dessous, sur l'instabilité elliptique a été étudiée théoriquement par une approche WKB (Craik, 1989; Miyazaki, 1993; Leblanc, 1997; Le Dizès, 2000), une analyse en modes normaux (Gledzer & Ponomarev, 1992; Kerswell, 1994) mais aussi numériquement pour des vortex particuliers tels que des vortex de Stuart (Leblanc & Cambon, 1998; Potylitsin & Peltier, 1999) ou de Taylor-Green (Sipp *et al.*, 1999). L'influence de cette rotation a également été étudiée expérimentalement dans des cylindres déformés (Vladimirov *et al.*, 1983b; Le Bars *et al.*, 2007) et des ellipsoïdes (Boubnov, 1978; Le Bars *et al.*, 2010). Tous ces travaux montrent que cette rotation globale a un effet stabilisant sur les vortex cycloniques, et un effet déstabilisant sur les vortex anti-cycloniques, excepté dans le cas où la rotation globale compense quasiment la rotation de l'écoulement de base, auquel cas l'instabilité elliptique

disparaît.

L'expression théorique du taux de croissance pour des perturbations linéaires en espace (ce qui correspond au spinover usuel) peut être obtenue à l'aide de l'approche développée par Gledzer & Ponomarev (1992) que l'on étend ici au cas où une rotation globale à la vitesse angulaire $\Omega_c \mathbf{e}_z = \Omega_c^* \Omega \mathbf{e}_z$ est présente :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b^2 - c^2 + 2 \Omega_c^* a b)(c^2 - a^2 - 2 \Omega_c^* a b)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}}. \quad (2.20)$$

Notons que ceci est un cas particulier d'une analyse de stabilité plus générale développée en annexe D dans le cas d'un ellipsoïde en précession. Ainsi, en présence de rotation globale, la gamme d'existence du spinover est modifiée et s'échelonne entre $c = b\sqrt{1 + 2\Omega_c^* a/b}$ et $c = a\sqrt{1 + 2\Omega_c^* b/a}$, le maximum théorique étant maintenant atteint pour $\frac{c^2}{a b} = \Omega_c^* + \sqrt{1 + \Omega_c^* (a/b + b/a + \Omega_c^*)}$. Dans notre modèle numérique, l'ajout d'une force de Coriolis est immédiat et les résultats numériques sont présentés en figure 2.9a. Une fois encore, ils sont en accord avec la prédiction théorique dès lors que le terme d'amortissement visqueux $-2.5\sqrt{E}$, trouvé en section 2.3.1 est ajouté à l'expression non-visqueuse (2.20). D'autres modes sont excités en dehors de la bande de résonance du spinover, ce qui avait déjà été observé expérimentalement par Le Bars *et al.* (2010).

Finalement, on peut étudier comment l'aplatissement et la rotation globale interagissent l'un avec l'autre. Considérant par exemple un ellipsoïde oblate avec un rapport d'aspect c/b tel que le mode (1, 3) soit excité en l'absence de rotation globale, la figure 2.9b montre que le spinover est retrouvé lorsque l'on diminue Ω_c . Plus généralement, on trouve que le mode $(-1, 1)$ est le plus instable dans le domaine anticyclonique jusqu'à une valeur $\Omega_c/\Omega_{tot} \lesssim -1$ où l'écoulement se restabilise, en accord avec les conclusions de Le Bars *et al.* (2010).

2.3.3 Influence de l'obliquité

Dans les noyaux planétaires, les déformations de marée sont généralement dans le plan orbital plutôt que dans le plan équatorial, ce qui signifie qu'elles ne sont pas orthogonales à l'axe de rotation. Les travaux antérieurs ne prennent pas en compte ce phénomène, même si l'obliquité peut être importante, par exemple $23^\circ 26'$ pour la Terre. Dans cette section, nous étudions donc l'effet d'obliquité en considérant que la forme du corps reste un ellipsoïde triaxial en première approximation.

Du point de vue numérique, l'axe de rotation est incliné et orienté selon le vecteur unitaire $\mathbf{k}_c = (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$, où ϕ est l'azimut, et θ la colatitute en coordonnées sphériques (fig. 2.2). Supposant par exemple que l'axe de rotation est incliné dans le plan (Oxz) (i.e. $\phi = 0$), on peut étudier l'influence de l'obliquité θ sur l'instabilité elliptique. Pour $\theta = 0$, on retrouve naturellement la configuration usuelle avec $\beta = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2)$ et un rapport d'aspect c/b . Pour $\theta = \pi/2$, on retrouve les résultats de la section 2.3.1 en échangeant a et c , i.e. $\beta = |b^2 - c^2|/(b^2 + c^2)$ et le rapport d'aspect vaut maintenant a/b . Entre ces deux cas limites, les lignes de courant dans les plans perpendiculaires à l'axe de rotation restent des ellipses, mais leurs centres ne sont plus sur l'axe de rotation, excepté pour le plan équatorial $z = 0$. Notons que même si

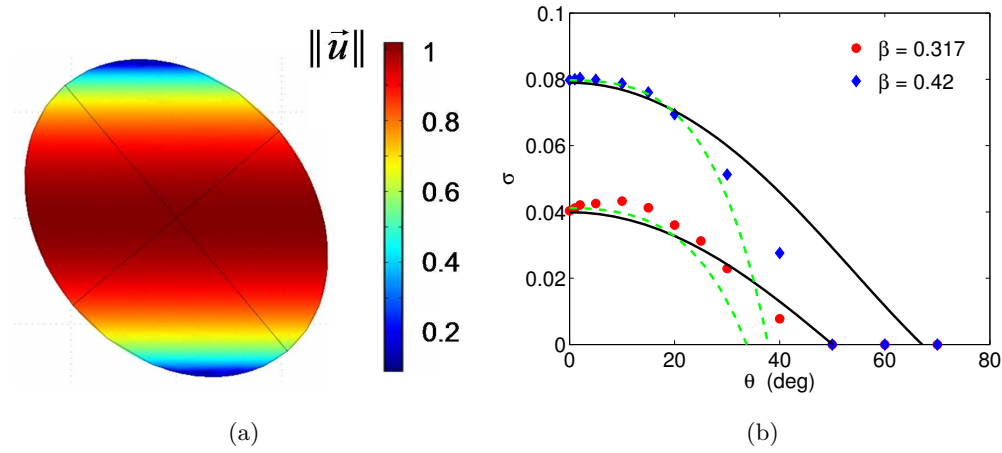


FIGURE 2.10 – (a) Norme de la vitesse à la paroi externe de l'ellipsoïde. (b) Évolution du taux de croissance σ avec l'obliquité θ pour $E = 1/600$ (vitesse angulaire fixée) et deux valeurs d'ellipticité $\beta = 0.317$ et $\beta = 0.42$. Les lignes $--$ correspondent à l'expression (2.19), qui prend en compte les valeurs apparentes des axes vues du plan équatorial, tandis que les lignes continues correspondent à l'expression (2.16) en considérant simplement la valeur de l'ellipticité apparente vue du plan équatorial. Le coefficient K (correction visqueuse de σ) est déterminé pour $\theta = 0^\circ$ puis maintenu constant.

cela ressemble à l'écoulement considéré par Kerswell (1993b), le référentiel considéré est ici celui du laboratoire et il manque donc ici la force de Coriolis pour que l'instabilité inertielle de précession puisse se développer. Vu du plan équatorial, la longueur apparente de l'axe de l'ellipsoïde aligné avec l'axe de rotation est $\tilde{c} = (\sin^2(\theta)/a^2 + \cos^2(\theta)/c^2)^{-1/2}$ tandis que le grand et le petit axe des lignes de courant elliptiques sont respectivement $\tilde{b} = b$ et $\tilde{a} = (\cos^2(\theta)/a^2 + \sin^2(\theta)/c^2)^{-1/2}$. Le taux de croissance de l'instabilité peut donc être estimé avec les formules (2.16) ou (2.19) en utilisant ces longueurs apparentes. La figure 2.10 montre que les résultats numériques pour le spinover sont en accord avec ces estimations jusqu'à des obliquités d'environ $\theta \sim 20^\circ$. Ensuite, les taux de croissances diffèrent significativement, probablement du fait que la géométrie est alors assez différente d'un ellipsoïde apparent avec une rotation autour de l'un de ses axes. Cependant, les valeurs obtenues restent entre les deux expressions proposées. Notons que pour le nombre d'Ekman étudié ici, l'instabilité elliptique ne réapparaît pas autour de $\theta \sim 90^\circ$, ce qui serait le cas pour des nombres d'Ekman plus faibles : comme l'étude de la section 2.3.1 le montre, d'autres modes pourraient en effet apparaître du fait de la modification de l'aplatissement.

2.3.4 Amplitude de l'instabilité : loi d'échelle

L'amplitude de l'écoulement généré par l'instabilité à saturation est une quantité clé pour les applications géo- et astrophysiques. En effet, elle permet de comparer l'impact

d'une instabilité elliptique sur l'écoulement par rapport aux autres forçages, par exemple la convection thermique. Afin d'étudier l'amplitude de l'écoulement lié à l'instabilité à saturation, on définit l'amplitude A^* par

$$A^* = \max_V \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\| \quad (2.21)$$

où V est le volume de fluide, \mathbf{u} le champ de vitesse adimensionnel et \mathbf{u}_b l'écoulement de base théorique (2.18). L'évolution de A^* en fonction du nombre d'Ekman est montrée en figure 2.11a pour différentes ellipticités : il apparaît clairement que A^* est non-nul au dessous du seuil de l'instabilité elliptique du fait des différences au voisinage de la paroi entre l'écoulement de base théorique et l'écoulement imposé par la vitesse tangentielle constante sur la frontière (fig. 2.6). En fait, la différence est maximale sur la paroi, le long du petit axe équatorial où la vitesse théorique est maximale. On peut donc calculer l'amplitude correspondante $\lambda_{(\beta)}$ théoriquement :

$$\lambda_{(\beta)} = \frac{b}{(a+b)/2} - 1 = \frac{2}{1 + \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}} - 1 \quad (2.22)$$

qui dépend seulement de β . On définit ensuite l'amplitude de l'écoulement lié à la présence de l'instabilité par $A = A^* - \lambda_{(\beta)}$, égal à zéro sous le seuil (fig. 2.11b).

Loin du seuil, l'instabilité secondaire apparaît, qui induit une dynamique superposée à l'état saturé primaire ; par exemple pour $\beta = 0.317$, $E = 1/1500$, $c = (a+b)/2$, le spin-over n'est plus stationnaire et se met à osciller légèrement autour de l'écoulement moyen, à une pulsation adimensionnelle d'environ $\omega_{sec} \approx 1.4$. Notons que ceci est en accord avec Kerswell (2002) qui prédit que la saturation de l'instabilité primaire n'est stable que pour une petite gamme de déformation (voir section 2.3.7 pour plus de détails sur cette instabilité secondaire). Ainsi, l'amplitude A doit être moyennée en temps pour s'affranchir de ces fluctuations de petite échelle. Puisque ces fluctuations ont une échelle de temps typique de l'ordre d'une révolution $2\pi/\Omega$, tandis que le temps caractéristique de l'instabilité elliptique donné par le taux de croissance dimensionnel est de l'ordre de $(\Omega \beta/2)^{-1}$, la moyenne est menée sur un temps typique de $\Omega^{-1} \sqrt{4\pi/\beta}$, moyenne géométrique de ces deux échelles de temps.

La figure 2.11b montre que tous les résultats numériques se regroupent sur une courbe maîtresse au-dessus du seuil, pourvu que la variable $E_c/E - 1$ soit utilisée, ce qui est confirmé par les mesures expérimentales de Herreman *et al.* (2010). Loin du seuil, l'amplitude semble saturer autour de 1, ce qui signifie que les vitesses générées par l'instabilité elliptique sont comparables à la rotation imposée initialement entre le fluide et la déformation.

Près du seuil, une loi en racine $A \approx 0.6 \sqrt{E_c/E - 1}$ reproduit correctement les résultats, ce qui est représentatif d'une bifurcation fourche. En fait, cette loi d'échelle peut être retrouvée analytiquement en partant du modèle développé par Lacaze *et al.* (2004) pour décrire l'évolution non-linéaire visqueuse du mode de spinover. Ce modèle, d'abord utilisé par Hough (1895) et Poincaré (1910) pour étudier la rotation solide d'un fluide

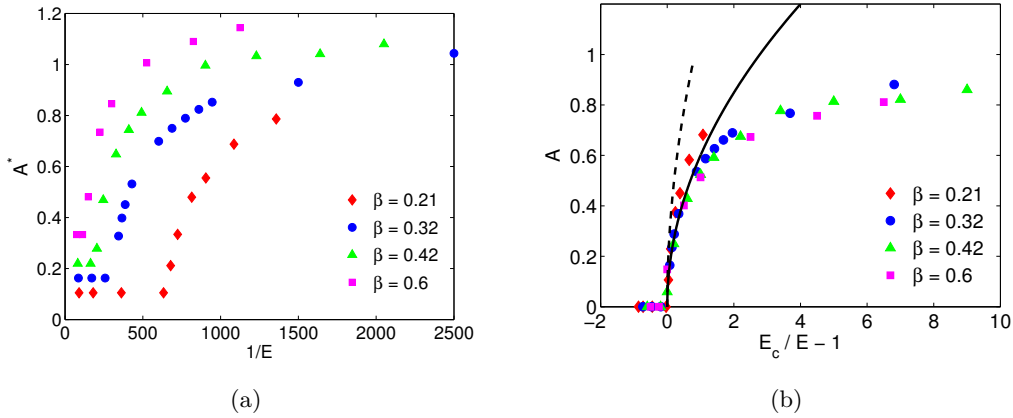


FIGURE 2.11 – Variation de l'amplitude à saturation de l'écoulement associé à l'instabilité elliptique pour différentes ellipticités β et différents nombres d'Ekman E . (a) Valeur maximum de la différence entre la vitesse obtenue et la vitesse théorique de l'écoulement de base (2.18). (b) Amplitude de l'instabilité elliptique prenant en compte la correction due aux cellules de recirculation (fig. 2.6c) : tous les points se superposent sur une courbe maîtresse lorsque la variable de distance au seuil ($E_c/E - 1$) est utilisée. La courbe discontinue correspond à la loi d'échelle (2.29), tandis que la ligne continue correspond à un ajustement du préfacteur i.e. $A \approx 0.6\sqrt{E_c/E - 1}$.

non-visqueux dans un sphéroïde, peut s'écrire (voir aussi l'annexe C) :

$$\dot{\omega}_x = -\alpha_1 (1 + \omega_z) \omega_y - \nu_{so} \omega_x, \quad (2.23)$$

$$\dot{\omega}_y = -\alpha_2 (1 + \omega_z) \omega_x - \nu_{so} \omega_y, \quad (2.24)$$

$$\dot{\omega}_z = \beta \omega_x \omega_y - \nu_{ec} \omega_z + \nu_{nl} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (2.25)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur rotation du spinover, $\alpha_1 = \beta/(2 - \beta)$ et $\alpha_2 = \beta/(2 + \beta)$. Les termes d'amortissement sont obtenus théoriquement (aucun paramètre ajustable) : $\nu_{so} = 2.62 \sqrt{E}$ est le taux d'amortissement visqueux linéaire du spinover déjà obtenu par Greenspan (1968), $\nu_{ec} = 2.85 \sqrt{E}$ est le taux d'amortissement visqueux linéaire de la rotation axiale, et $\nu_{nl} = 1.42 \sqrt{E}$ est l'effet de la couche d'Ekman sur l'interaction non-linéaire du spinover avec lui-même (voir Greenspan (1968) pour plus de détails). Même si ce modèle ne prend pas en compte tous les termes visqueux d'ordre $O(\sqrt{E})$, ni les corrections non-linéaires induites par les couches de cisaillement internes, il est en bon accord avec les expériences, que ce soit pour le taux de croissance ou la saturation non-linéaire (Lacaze *et al.*, 2004). Ce modèle peut donc légitimement être utilisé pour étudier l'évolution non-linéaire visqueuse du spinover.

De simples manipulations algébriques permettent d'obtenir un état stationnaire non-

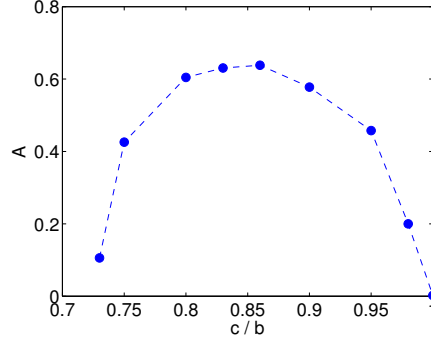


FIGURE 2.12 – Amplitude A de l'instabilité elliptique en fonction de l'aplatissement ($E = 1/688$, $\beta = 0.317$).

trivial pour $\beta > 2\nu_{so}$:

$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \nu_{so}]}{\alpha_2\beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_2^2/\sqrt{\alpha_1\alpha_2}]}} \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2\nu_{so}]}{\beta^2 - 2\nu_{nl}\beta}}, \quad (2.26)$$

$$\omega_y = \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \nu_{so}]}{\alpha_1\beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1\alpha_2} + \alpha_1^2/\sqrt{\alpha_1\alpha_2}]}} \approx \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2\nu_{so}]}{\beta^2 - 2\nu_{nl}\beta}} \approx \mp \omega_x, \quad (2.27)$$

$$\omega_z = \frac{\nu_{so}}{\beta} \sqrt{4 - \beta^2} - 1 \approx \frac{2\nu_{so}}{\beta} - 1 \quad (2.28)$$

où les approximations sont faites en supposant $\beta \ll 1$. Comme l'amplitude A correspond à la norme de l'écoulement $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ associé au spinover, elle vaut près du seuil ($\beta \approx 2 \cdot 2.62\sqrt{E_c}$ et $E_c/E - 1 \ll 1$) :

$$A \approx \sqrt{\frac{\nu_{ec}}{2(\nu_{so} - \nu_{nl})} \left(\frac{E_c}{E} - 1 \right)} \approx 1.1 \sqrt{\frac{E_c}{E} - 1} \quad (2.29)$$

en accord avec l'expression $A \approx 0.6 \sqrt{E_c/E - 1}$ obtenue à partir des simulations (voir fig. 2.11b). Même si nous pourrions penser que l'écart sur le préfacteur provient des déformations finies utilisées dans les simulations, nous verrons en section 3.5.1 que c'est plutôt la méthode de calcul de A qui mène à cette différence.

Enfin, reprenant les simulations de la section 2.3.1, l'évolution de l'amplitude du mode de spinover en fonction de l'aplatissement est donnée en figure 2.12. L'amplitude est maximale lorsque le taux de croissance (donc l'écart au seuil de l'instabilité) est maximal.

2.3.5 Angle du spin-over et amplitude

Nous avons vu que le mode de spin-over fait tourner le fluide autour d'un axe perpendiculaire à l'axe d'entraînement du fluide. L'effet conjoint de ces deux rotations est donc une inclinaison de l'axe de rotation fluide. La condition d'adhérence à la paroi donne finalement la forme de 'S' caractéristique observée expérimentalement et numériquement.

Il est alors naturel de se demander ce qui contrôle l'angle de rotation observé θ_{so} , et s'il est possible de prédire cette grandeur caractéristique de la saturation de l'instabilité.

D'un point de vue théorique, le modèle de Lacaze *et al.* (2004), qui a été utilisé en section 2.3.4, prédit trois angles caractéristiques pour le spin-over³ : sa colatitude de saturation aux temps longs θ_{sat} , sa colatitude maximum durant la croissance de l'instabilité, i.e. l'angle à l'overshoot θ_{max} et son déphasage en azimut à saturation ϕ_{sat} . Ce modèle prédit également un taux de croissance de l'instabilité elliptique donné par (Herreman *et al.*, 2009)

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{4 - \beta^2}} - 2.62\sqrt{E}, \quad (2.30)$$

ce qui implique, pour de faibles ellipticités, un seuil $\beta/E^{1/2} > 5.24$ et donc un paramètre de contrôle de l'instabilité $\chi = \beta/E^{1/2}$. Les trois angles théoriques donnés par ce modèle sont représentés en figure 2.13 en fonction de l'écart au seuil normalisé $\delta = (\chi - 5.24)/5.24$ (en section 2.3.4, c'était aussi le paramètre clé contrôlant l'amplitude proche du seuil). On montre aisément à l'aide des formules (2.26), (2.27) et (2.28) les résultats suivants :

1. La colatitude à saturation tend vers 90° dans la limite des grands δ
2. L'azimut à saturation est donné par $\tan \phi_{sat} = -\sqrt{(2 - \beta)/(2 + \beta)}$ et ne dépend donc que de β . Ainsi, ϕ_{sat} tend vers -30° (resp. -45°) dans la limite des grands (resp. petits) δ .

ce qui est en excellent accord avec les figure 2.13a et c. La figure 2.13b montre que l'overshoot en colatitude prévu par le modèle peut être très important et semble tendre vers 90° loin du seuil. Naturellement, en réalité, il existe des dissipations supplémentaires, et il n'est pas possible d'obtenir des colatitudes supérieures à 45° : les figures 2.13a et b montrent donc les limites de ce modèle sur ces prédictions. Enfin, la figure 2.13d montre que l'azimut à saturation est en fait quasiment indépendant de l'écart au seuil et varie quasi-linéairement avec l'ellipticité, de -45° à $\beta \rightarrow 0$ à -30° à $\beta \rightarrow 1$.

Lacaze *et al.* (2004) ont effectué les premières comparaisons des résultats du modèle aux mesures expérimentales dans un ellipsoïde pour ($\beta = 0.16 / E \in [2 \cdot 10^{-4}; 4 \cdot 10^{-4}]$) et trouvent que l'angle observé est correctement prédit par θ_{max} , plutôt que par θ_{sat} , ce qui pourrait provenir de la technique de visualisation (Kalliroscope) selon les auteurs. Les mesures sous champ magnétique dans un cylindre de Herreman *et al.* (2009) confirment que l'évolution de l'amplitude de saturation, à laquelle θ_{so} est lié, suit l'évolution de θ_{max} plutôt que θ_{sat} , avec cependant, $\theta_{so} \approx 1.42 \theta_{max}$ au lieu de la suggestion $\theta_{so} \approx \theta_{max}$ de Lacaze *et al.* (2004). C. Morize a mené une campagne de mesures systématiques de la colatitude à saturation, en partie publiée dans Morize *et al.* (2009), et repris en figure 2.13e. La comparaison avec les figures 2.13a et b confirme les remarques de la littérature : l'angle observé suit plutôt l'évolution de θ_{max} que celle de θ_{sat} . En revanche, les simulations numériques semblent plutôt en accord avec la figure 2.13a, ce qui laisse penser que l'angle visualisable au Kalliroscope ne reflète pas directement le rapport entre vorticité équatoriale et vorticité axiale. Notons par ailleurs que les simulations numériques confirment que l'azimut à saturation du spin-over est en effet quasiment uniquement

3. Notons que ce modèle ne prédit pas d'overshoot en azimut.

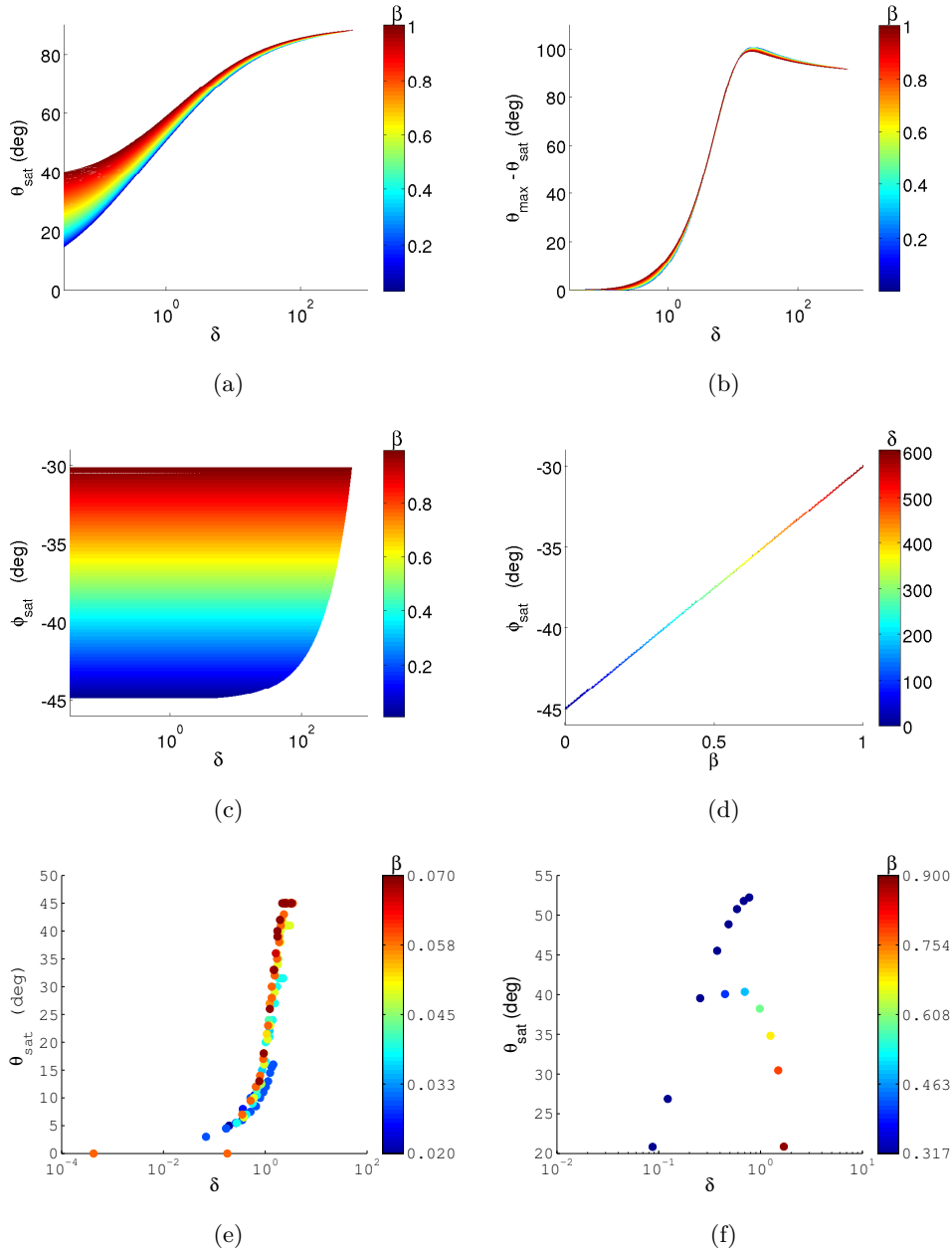


FIGURE 2.13 – Angles caractéristiques du spinover. (a) Colatitude à saturation prédite par le modèle en fonction de l'écart au seuil normalisé δ . (b) Overshoot en colatitude durant la croissance de l'instabilité prédit par le modèle en fonction de l'écart au seuil normalisé δ . (c) Déphasage en azimuth à saturation prédit par le modèle en fonction de l'écart au seuil normalisé δ . (d) Déphasage en azimuth à saturation prédit par le modèle en fonction de l'ellipticité β . (e) Mesures expérimentales de C. Morize de la colatitude à saturation, déjà présentées en partie dans Morize et al. (2009). (f) Simulations numériques : angle à saturation calculé à partir de la vorticité hors des couches visqueuses ($\tan\theta$ étant donné par le rapport entre vorticité équatoriale et vorticité selon l'axe de rotation).

fonction de l'ellipticité. Enfin, notons que l'amplitude A étudié en section 2.3.4 s'écarte de la loi en racine dès lors que la colatitude du spin-over commencer à saturer à sa valeur maximum de $\sim 45^\circ$.

2.3.6 Dissipation visqueuse de l'instabilité : loi d'échelle

Lors de la synchronisation d'un système binaire, l'évolution orbitale et la variation de la vitesse de rotation sont directement liées à l'énergie dissipée par les marées (Rieutord, 2003; Le Bars *et al.*, 2010) qui reste cependant mal contrainte par nos connaissances géophysiques, même pour la Terre (e.g. Williams, 2000; Touma & Wisdom, 1994). Dans la plupart des modèles usuels, la dissipation visqueuse dans les noyaux planétaires fluides est supposée négligeable devant les autres sources de dissipation telles que la dissipation liée à la composante non-élastique du manteau solide. Cependant, même si cette approximation semble a priori justifiée, elle doit être réexaminée en présence d'instabilité elliptique : nous avons vu en section 2.3.4 que cette dernière pouvait générer un écoulement aussi important que l'écoulement de base et donc induire des cisaillements significatifs entre l'intérieur du fluide et la paroi. Notre objectif ici est d'étudier l'évolution de cette dissipation avec la déformation et le nombre d'Ekman.

L'équation usuelle du bilan de puissance pour un fluide incompressible permet d'écrire

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\tilde{u}^2}{2} \right) d\tau = \iint_S (\bar{\bar{\sigma}}_v \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} ds - \iiint_V \bar{\bar{\sigma}}_v : \nabla \tilde{\mathbf{u}} d\tau, \quad (2.31)$$

où $\bar{\bar{\sigma}}_v = \eta (\nabla \tilde{\mathbf{u}} + {}^t \nabla \tilde{\mathbf{u}})$ est le tenseur des efforts visqueux d'un fluide newtonien, S est la surface de l'ellipsoïde, $\tilde{\mathbf{u}} = \Omega R_{eq} \mathbf{u}$ est le champ de vitesse dimensionnel, ρ la masse volumique et η la viscosité dynamique du fluide. Cette section considère uniquement le spinover. Ce mode étant stationnaire, les deux termes du membre de droite de l'équation (2.31) se compensent : le premier permet de maintenir la rotation du fluide par adhérence aux parois tandis que le second est la puissance dissipée en volume P dans le fluide. Dans la suite, on utilise comme échelle typique de puissance, la puissance dissipée durant le spin-down d'une sphère de rayon équivalent R_{eq} et de moment d'inertie I_Δ ($I_\Delta = 2/5 MR^2$ pour une sphère homogène de masse M et de rayon R), i.e. l'énergie cinétique de rotation $E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \Omega^2$ divisé par le temps d'Ekman t_E . Notons que la puissance dissipée provient majoritairement du cisaillement en proche paroi : son estimation numérique est donc délicate et doit être regardée avec attention comme le montre par exemple la figure 2.3b.

Sous le seuil, la puissance dissipée n'est pas tout à fait nulle du fait des recirculations (fig. 2.6). Cette dissipation est liée à l'écoulement élongationnel induit par l'ellipticité, qui varie comme $\beta \Omega R$ pour les petites ellipticités. Ainsi, la puissance dissipée dimensionnelle sous le seuil varie simplement comme

$$\iiint_V \bar{\bar{\sigma}}_v : \nabla \tilde{\mathbf{u}} d\tau \sim \eta \beta^2 \Omega^2 R^3, \quad (2.32)$$

ce que confirment nos simulations numériques.

Loin du seuil, le modèle proposé par Le Bars *et al.* (2010) considère que le spin-over est simplement une rotation solide supplémentaire équatoriale Ω_{SO} en dehors des

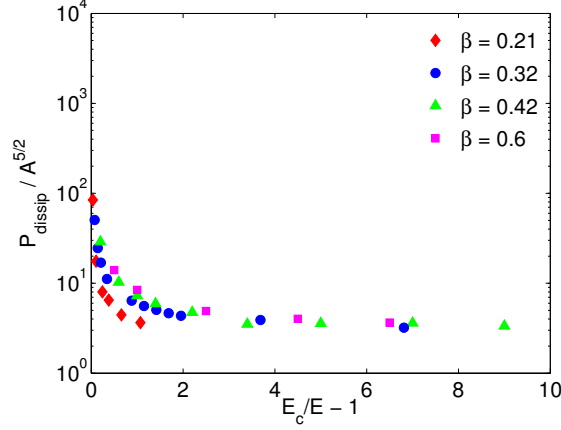


FIGURE 2.14 – Dissipation visqueuse par l’instabilité elliptique en fonction de la distance au seuil. Les résultats se rassemblent sur une courbe maîtresse et semblent converger vers une saturation vers une valeur d’ordre 1 loin du seuil.

couches visqueuses d’Ekman, d’épaisseur $h = \xi \sqrt{\nu/\Omega_{SO}}$, ξ étant d’ordre 1. Ainsi, dans ce modèle, la dissipation est uniquement localisée dans la couche visqueuse de proche paroi, où l’écoulement suit la rotation de la paroi par adhérence. Dans cette modélisation simple mais a priori suffisante, le couple exercé par le conteneur sur le fluide est $\mathbf{C}^{\mathbf{m}/\mathbf{c}} = -2 M \nu \frac{R}{h} \boldsymbol{\Omega}_{SO}$, et la puissance dissipée par le système est $P = -\frac{2}{\xi} M R \sqrt{\nu} \Omega^{5/2} A^{5/2}$, où A est l’amplitude adimensionnelle du spin-over (voir. section 2.3.4). La puissance adimensionnelle P_{dissip} donnée par ce modèle s’écrit finalement

$$P_{dissip} = \frac{|P|}{\frac{1}{2} I_{\Delta} \Omega^3 \sqrt{E}} = \frac{10}{\xi} A^{5/2}, \quad (2.33)$$

où A est de l’ordre de 1 dans la limite des faibles nombres d’Ekman.

L’évolution de P_{dissip} mesurée sur nos simulations est donnée en figure 2.14. Ces résultats confirment le comportement prédit par (2.33), avec une saturation loin du seuil, et $\xi \approx 1$, comme attendu⁴, ce qui confirme que P provient essentiellement de la dissipation par cisaillement au niveau des couches d’Ekman.

2.3.7 Instabilité secondaire

Proche du seuil, l’instabilité elliptique apparaît à travers une bifurcation, dite *primaire*. L’instabilité elliptique primaire ne peut saturer et rester stable qu’uniquement dans une certaine gamme de forçage, donnée en géométrie cylindrique par (Kerswell, 2002)

$$\beta - \beta_c = O(E) \quad (2.34)$$

4. ξ semble en fait légèrement supérieur à 1, de l’ordre de 1.5, ce qui est en accord avec Lorenzani (2001) qui trouve une épaisseur de couche d’Ekman de $1.4 E^{1/2}$ pour des sphères en rotation.

où β_c est l'ellipticité critique i.e. au seuil. Au-delà de cette fenêtre, une instabilité secondaire apparaît, déstabilisant l'écoulement saturé de l'instabilité primaire (Waleffe, 1989; Mason & Kerswell, 1999; Eloy *et al.*, 2000). Cette instabilité secondaire, déjà évoquée en section 2.3.4, a été étudiée par des analyses de stabilité faiblement non-linéaires de l'instabilité elliptique : les analyses initiales de Hellberg & Orszag (1988) et Waleffe (1989) ont été développées par Mason & Kerswell (1999), Lebovitz & Saldanha (1999) et Sipp (2000), puis complétées par Rodrigues & De Luca (2009) et Fukumoto & Hirota (2008); Mie & Fukumoto (2010); Fukumoto *et al.* (2010). Notre étude numérique montre qu'en géométrie ellipsoïdale, elle apparaît autour de $E = 1/1000$ pour $\beta = 0.317$ et $c = (a + b)/2$, ce qui donne $\beta - \beta_c \sim 100 E$. Il semble donc que la fenêtre (2.34) soit une borne inférieure pour l'apparition de l'instabilité secondaire. Notons également que les expériences de Lacaze confirment que le mode de spin-over en géométrie ellipsoïdale est beaucoup plus stable qu'en géométrie cylindrique⁵. D'autres bifurcations sont en théorie possibles, même si elles n'ont pas été observées avec certitude. Ainsi, l'analyse faiblement non-linéaire en géométrie ellipsoïdale de Lebovitz & Saldanha (1999) donne quatre types de bifurcations possibles. L'explosion turbulente de l'écoulement observée par Malkus (1989) et Eloy *et al.* (2000) semble indiquer qu'un petit nombre de bifurcations successives est suffisant pour amorcer la transition à la turbulence de l'écoulement, ce qui est cohérent avec le scénario de transition de Ruelle-Takens (Kerswell, 2002).

2.3.8 Extension à la coquille : influence d'une graine interne

Dans un contexte planétaire, une graine interne solide peut être présente, comme c'est le cas pour la Terre. Il est alors légitime de se demander quelle est son influence sur l'instabilité elliptique. Lacaze *et al.* (2005b) ont étudié théoriquement le problème pour une graine interne sphérique, et ont comparé les résultats théoriques à l'expérience pour un rapport d'aspect de la coquille $\eta = 0.3$ (η étant ainsi le rapport du rayon intérieur au rayon extérieur). Les modes inertiels dans une telle géométrie n'étant pas connus analytiquement (voir section 1.3.2.3), une analyse globale de stabilité n'est pas possible. Lacaze *et al.* (2005b) suggèrent donc d'adapter le modèle qu'ils ont proposé dans Lacaze *et al.* (2004) pour le mode de spin-over (voir section 2.3.4) en tenant compte de l'amortissement supplémentaire dû à la couche d'Ekman introduite par la graine interne. Hollerbach & Kerswell (1995) ont montré que le terme d'amortissement surfacique du spin-over dans une coquille sphérique est donné par $-2.62 f(\eta) \sqrt{E}$, avec la correction $f(\eta) = (1 + \eta^4)/(1 - \eta^5)$, ce qui donne bien $-2.62 \sqrt{E}$ pour la sphère pleine⁶. Pour en tenir compte, Lacaze *et al.* (2005b) multiplient tous les termes visqueux de (2.23), (2.24) et (2.25) par $f(\eta)$, et montrent que cela permet de prédire correctement le taux de croissance ainsi que les valeurs d'overshoot et saturation de la vitesse verticale pour $\eta = 1/3$. Ainsi, avec cette modification, les formules (2.30) pour le taux de croissance, et (2.26), (2.27), (2.28) pour la saturation, restent valides.

Nous présentons ici l'analogie numérique de l'étude de Lacaze *et al.* (2005b), et menons

5. Notons aussi que les fortes déformations utilisées dans nos simulations modifient aussi la fenêtre de stabilité de l'instabilité elliptique primaire.

6. La différence entre cette expression et celle de Lacaze *et al.* (2005b) est due au nombre d'Ekman, ici basé sur le rayon externe et non sur l'épaisseur de la coquille.

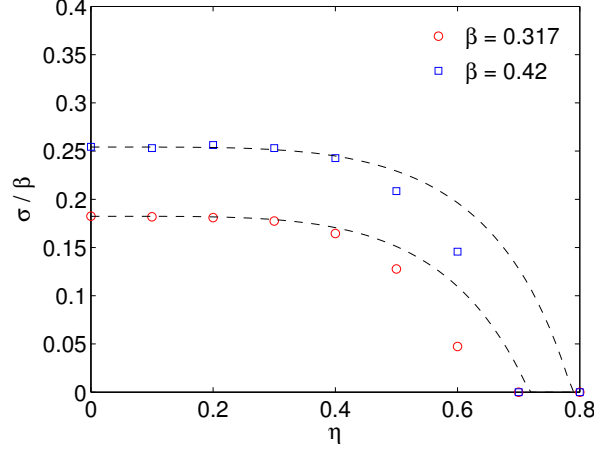


FIGURE 2.15 – Évolution du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec le rapport d'aspect de la graine interne ellipsoïdale pour $E = 0.0017$.

la première étude systématique du taux de croissance en fonction de η . Cependant, nous choisissons ici de considérer une graine ellipsoïdale, homothétique de la paroi externe. La figure 2.15 montre que même aux fortes ellipticités utilisées ici, la formule théorique (2.30) adaptée au cas de la coquille

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{4 - \beta^2}} - 2.62 f(\eta) \sqrt{E} \quad (2.35)$$

est en bon accord avec les simulations numériques. Notons que l'écart à la théorie observé aux grands η est attendu dans la mesure où les couches visqueuses des parois internes et externes finissent par entrer en interaction pour les nombres d'Ekman considérés ici.

2.3.9 Extension : instabilités multipolaires

L'écoulement de base de l'instabilité elliptique étant la superposition d'une rotation solide et d'un écoulement élongationnel, une généralisation naturelle consiste à considérer la superposition d'une rotation solide et d'un écoulement élongationnel multipolaire i.e. ayant une symétrie de révolution d'ordre $n \geq 2$ (voir section 1.4.4.2). L'étude de la stabilité d'un tel écoulement commence avec l'analyse locale de Le Dizès & Eloy (1999), basée sur la méthode de Lifschitz & Hameiri (1991). Les auteurs montrent que pour $n \in [2; 4]$, un tel écoulement est instable pour des perturbations non-visqueuses de courte longueur d'onde dès lors que $\beta > 0$, avec un taux de croissance proportionnel au paramètre d'asymétrie β_n (voir section 1.4.4.2). Pour $n \geq 5$, l'écoulement n'est instable que s'il est suffisamment déformé, i.e. si β_n est plus grand qu'une certaine valeur critique dépendant de n . Cette étude de stabilité est confirmée expérimentalement par Eloy *et al.* (2000) dans un cylindre déformé, pour les symétries $n = 2$ (instabilité elliptique) et $n = 3$ (instabilité dite *tripolaire* ou *triangulaire*). Simultanément, Le Dizès (2000) inclue une force de Coriolis

à l'analyse locale de stabilité, étendant ainsi l'étude au cas où la déformation est en rotation. Considérant les modes de Kelvin d'un vortex de Rankine en milieu infini, Eloy & Le Dizès (2001) mènent une analyse de stabilité globale de l'instabilité multipolaire et confirment qu'elle résulte de résonances d'ondes inertielles. Enfin, cette analyse est étendue au cas d'un vortex confiné en géométrie cylindrique (Eloy *et al.*, 2003).

Dans cette section, nous montrons que l'instabilité multipolaire reste présente en géométrie sphérique à l'aide des premières simulations numériques de cette instabilité. Afin de se rapprocher de la configuration expérimentale de L. Lacaze, nous avons choisi de considérer un conteneur de géométrie

$$r(\theta, z) = [1 + \beta \cos(n\theta)] \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}, \quad (2.36)$$

ce qui correspond bien à une sphère légèrement déformée dans des plans équatoriaux, avec un rayon polaire invariant égal à c . De même que pour l'étude numérique de l'instabilité elliptique, on impose une vitesse tangentielle $U\sqrt{1 - z^2}$ le long de la paroi déformée, dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Ainsi, pour le cas particulier $n = 3$, dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation, l'écoulement est celui de Eloy & Le Dizès (2001), qui établissent l'écoulement de base (1.28), de vorticité constante, avec un cylindre en rotation déformé par trois rouleaux. Les simulations numériques montrent que l'instabilité tripolaire existe également en géométrie sphéroïdale (fig. 2.16c), ce qui avait déjà été observé par L. Lacaze expérimentalement et décrit dans sa thèse de doctorat (Lacaze, 2004, pp. 136-137) ainsi que sur une présentation en ligne⁷ (Lacaze, 2005). Afin de comparer plus quantitativement nos simulations à la théorie, les taux de croissance obtenus sont comparés en figure 2.16e au taux de croissance théorique de l'instabilité multipolaire déterminé par Le Dizès (2000) dans la limite $\beta \ll 1$:

$$\sigma = \frac{(n+4)^2}{64} (n-1) \beta - K \sqrt{E} \quad (2.37)$$

où K est le coefficient d'amortissement surfacique visqueux, et $(n-1)\beta$ est le cisaillement local (voir Le Dizès, 2000, pour plus de détails). Les taux de croissance numériques de l'instabilité tripolaire (fig. 2.16e) sont en accord avec la théorie linéaire, le coefficient d'amortissement visqueux étant pris égal à $K \approx 11.5$.

Concernant l'instabilité quadripolaire, la figure 2.16b, issue des calculs théoriques de Lacaze (2005) suggère son existence en géométrie sphéroïdale. Les simulations numériques présentées (fig. 2.16d et f) confirment pour la première fois l'existence de cette instabilité⁸. Les taux de croissance obtenus sont également en accord avec la tendance prévue par la théorie (2.37). Notons cependant une plus grande dispersion des points.

2.4 Interaction des marées et de la libration

Jusqu'à très récemment, la libration n'avait été étudiée qu'au sein de conteneurs axisymétriques (cf. section 1.4.3). Cette géométrie permet en effet d'isoler les effets du couplage

7. www.phys.ens.fr/~dormy/MHD/GdR/PDF/Ondes/Lacaze.pdf

8. Notons que pour des raisons de contraintes expérimentales, l'instabilité quadripolaire n'a pas plus été observée en géométrie cylindrique.

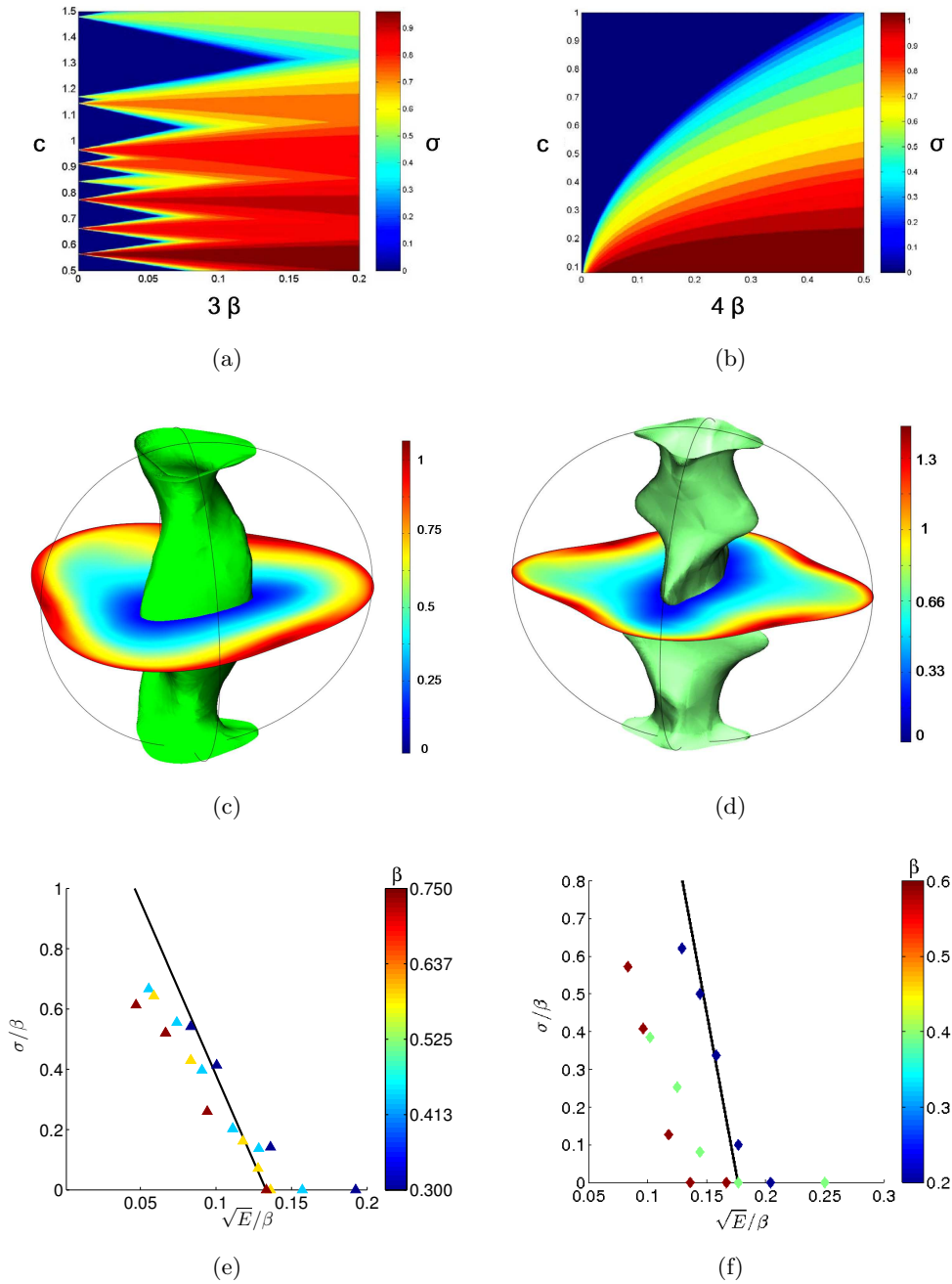


FIGURE 2.16 – (a) (resp. b) Taux de croissance théorique σ obtenu par Lacaze (2005) pour l'instabilité tripolaire (resp. quadrupolaire) en fonction du rayon polaire c et de $n\beta$. (c) (resp. d) représente l'instabilité tripolaire (resp. quadrupolaire) à saturation avec une coupe équatoriale du champ de vitesse $\|\mathbf{u}\|$ et une iso-surface $\|\mathbf{u}\| = 0.125$ (resp. $\|\mathbf{u}\| = 0.16$) à saturation pour $\beta = 0.1$, $c = 1$, $E = 0.0025$ (resp. $E = 0.0033$) et 75000 DoF. (e) (resp. f) Évolution du taux de croissance de l'instabilité tripolaire (resp. quadrupolaire) pour $E \geq 1/1600$, $\beta \in [0.1; 0.25]$, $c = 1$. La théorie linéaire (2.37) est représentée par une ligne continue noire avec $K \approx 11.5$ (resp. $K \approx 17$) pour l'instabilité tripolaire (resp. quadrupolaire).

visqueux et donc de l'étudier indépendamment des autres couplages possibles. Cependant, dans un contexte naturel, les corps sont déformés par les forces de marées et sont donc plutôt de formes ellipsoïdales. Il semble donc important d'étudier l'interaction de ces deux forçages mécaniques.

L'étude menée dans cette section trouve son origine dans les expériences menées par J. Noir et J. M. Aurnou à UCLA. Suite à nos discussions, nous avons mené des simulations numériques et développé une analyse WKB permettant d'interpréter leur résultats expérimentaux, ce qui a ainsi confirmé l'existence d'une instabilité elliptique au sein d'un ellipsoïde en libration. Ce travail a donné lieu à une publication commune, et je détaille ci-dessous ma contribution à cette étude.

2.4.1 Écoulement de base

On considère un fluide homogène incompressible au sein d'un ellipsoïde triaxial en libration. Dans le référentiel lié au conteneur, l'équation de la paroi ellipsoïdale s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (2.38)$$

où (x, y, z) est le système de coordonnées d'origine le centre de l'ellipsoïde, (Ox) et (Oy) respectivement le long du grand et du petit axe équatorial, et (Oz) le long de l'axe de rotation de longueur c . L'ellipticité est $\beta = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ et le rapport d'aspect est défini comme $c^* = c/R$, avec $R = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$. Dans le référentiel absolu, le mouvement de libration longitudinal du conteneur est modélisé par une évolution temporelle de sa vitesse de rotation :

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Delta\phi\omega_l \sin(\omega_l t), \quad (2.39)$$

où Ω_0 est sa vitesse angulaire moyenne, $\Delta\phi$ l'amplitude de libration en radians et ω_l sa pulsation de libration.

Dans le référentiel lié au conteneur, les équations du mouvement, adimensionnées par l'échelle de longueur R , et l'échelle de temps Ω_0^{-1} , s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + 2(1 + \epsilon \sin ft) \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} \\ = -\nabla \pi + E \nabla^2 \mathbf{u} - \epsilon f \cos(ft) (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.41)$$

avec la force de Coriolis $2(1 + \epsilon \sin ft)\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}$, la pression réduite π , qui inclue la force centrifuge, et la force de Poincaré $\epsilon f \cos ft(\mathbf{e}_z \times \mathbf{r})$. Le nombre d'Ekman est défini par $E = \nu/(\Omega_0 R^2)$, où ν est la viscosité cinématique. La pulsation adimensionnelle de libration f est définie par $f = \omega_l/\Omega_0$, tandis que le paramètre de forçage en libration est défini par $\epsilon = \Delta\phi f$. La conditions d'adhérence impose à la paroi $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

La solution de l'équation (2.40) vérifie une condition d'adhérence à la paroi de l'ellipsoïde (2.38). Dans la limite des faibles nombres d'Ekman, l'écoulement peut se décomposer en une composante non-visqueuse \mathbf{U} en volume et un écoulement de couche limite

$\tilde{\mathbf{u}}$. Kerswell & Malkus (1998) proposent une solution aux équations non-visqueuses du mouvement vérifiant la non-pénétration aux parois :

$$\mathbf{U} = -\epsilon \sin ft (\mathbf{e}_z \times \mathbf{r} - \beta \nabla xy), \quad (2.42)$$

On établit facilement que les contraintes de Reynolds associées à (2.42) sont compensées par le gradient de pression. Ainsi, les interactions non-linéaires dans l'intérieur fluide quasiment non-visqueux ne peuvent générer d'écoulement zonal moyen (Greenspan, 1968; Busse, 2010). Néanmoins, la condition d'adhérence n'est pas vérifiée par cette solution, ce qui implique l'existence de corrections visqueuses dans la couche d'Ekman, dont les interactions non-linéaires peuvent générer un écoulement zonal dans l'intérieur (Wang, 1970; Busse, 2010; Calkins *et al.*, 2010; Noir *et al.*, 2010; Sauret *et al.*, 2010).

Nos simulations numériques, présentées en section 2.4.3, nous permettent de confirmer que (2.42) correspond effectivement à l'écoulement de base en dépit des valeurs modérées des nombre d'Ekman de nos simulations ($E = 5 \cdot 10^{-4}$). De plus, les simulations montrent clairement que cet écoulement de base peut exciter une instabilité elliptique, dite *LDEI* pour *Libration-Driven Elliptical Instability*, ce qui est en accord avec les analyses de stabilité présentées ci-dessous.

2.4.2 Analyse de stabilité

Comme le mentionnent Kerswell & Malkus (1998), deux ondes inertielles d'un fluide en rotation peuvent être couplées par l'écoulement de base (2.42), à partir duquel elles extraient leur énergie. Puisque l'écoulement de base est de nombre azimuthal $m = 2$ et de fréquence f , cette résonance triadique ne peut apparaître que pour les conditions de résonance suivantes :

$$m_a - m_b = \pm 2 \quad \text{et} \quad \lambda_a - \lambda_b = \pm f, \quad (2.43)$$

où m_a, m_b sont les nombres d'ondes azimuthaux des deux ondes inertielles en résonance, et λ_a, λ_b sont leur fréquences adimensionnalisées par Ω_0 . En outre, les deux ondes doivent avoir des structures poloïdales proches pour interagir, ce qui correspond aux *résonances principales* de Eloy *et al.* (2000). Une analyse globale de la LDEI se baserait sur cet ensemble de conditions en considérant les modes inertiels de la géométrie considérée. Malheureusement, les modes inertiels dans une géométrie triaxiale restent encore très peu connus, ce qui ne permet pas de mener une telle analyse.

Une étude récente dans la limite des faibles ellipticités de Zhang *et al.* (2011) suggère qu'une libration longitudinale ne peut pas faire résoner de mode inertiel par forçage direct. Toutefois, il est important de noter que cela ne signifie aucunement qu'aucune résonance triadique de modes inertiels ne peut exister dans un ellipsoïde triaxial⁹. Ainsi, comme le montrent Kerswell & Malkus (1998) pour $\beta \ll 1$ et $f = 1$, les modes se propageant à la même vitesse mais dans des directions azimuthales opposées peuvent entrer en résonance avec le forçage de libration.

9. On retrouve la distinction entre résonance directe (forçage) et résonance triadique (instabilité) déjà évoquée en section 1.5.

Au vu de l'état actuel des connaissances sur les modes inertiels en géométrie triaxiale, une analyse globale de la LDEI aux valeurs finies d'ellipticité considérées dans ce travail est hors de portée. Une approche locale, indépendante par essence de la géométrie du conteneur, semble donc indiquée. Une telle étude a été menée dans Herreman *et al.* (2009) dans le cas particulier $f = 1$, et complétée en section 4.2 (voir aussi l'annexe E.2). Le taux de croissance non-visqueux σ_{inv} au premier ordre donne alors :

$$\sigma_{inv} = \frac{16 + f_{res}^2}{64} \beta \epsilon, \quad (2.44)$$

où $f_{res} \neq 0$ est la fréquence résonante de forçage.

Dans la limite WKB stricte $k \gg 1$, la relation de dispersion entre la fréquence de forçage et les ondes planes excitées montre que toutes les pulsations de forçage entre -4 et $+4$ sont résonantes. Toutefois, en prenant en compte la forme du conteneur et l'inévitable amortissement visqueux, seules quelques valeurs de fréquence de forçage seront en fait résonantes. Ces résonances se produiront lorsque les ondes planes théoriques seront des approximations suffisamment correctes des ondes inertielles en jeu au sein du conteneur considéré et lorsque le forçage de libration sera suffisamment fort pour compenser la dissipation visqueuse. Il est possible de montrer que l'excitation de l'instabilité n'est pas seulement possible à la résonance exacte f_{res} mais est également possible autour de cette valeur, dans une bande $f \in [f_{res} - \sigma_{inv}; f_{res} + \sigma_{inv}]$, où le taux de croissance est donné par :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{inv}^2 - (f_{res} - f)^2} - KE^{1/2}. \quad (2.45)$$

La constante K est d'ordre 1, et dépend du mode excité. Le premier terme du membre de droite de (2.45) définit la gamme de fréquences instables autour d'une résonance particulière f_{res} ; le second terme décrit l'amortissement visqueux de l'instabilité. Au-delà de la limite stricte WKB, nos résultats précédents (e.g. Le Bars *et al.*, 2010) nous incitent à penser que cette équation a une portée générale, une fois les valeurs de fréquence résonance f_{res} et le coefficient de dissipation visqueux K déterminés. Notons que ces deux grandeurs dépendent des modes inertiels excités, et donc de la forme du conteneur.

2.4.3 Validation de l'écoulement de base et instabilité

Une première série de simulations a été menée en 2D en partant d'un fluide au repos ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$), et en initiant les librations à partir de $t = 0$, dans le repère du conteneur. La figure 2.17 représente l'évolution typique obtenue : après un transitoire relativement long, de l'ordre du temps visqueux E^{-1} (voir fig. 2.17a), l'écoulement théorique (2.42) est effectivement établi dans l'intérieur fluide (fig. 2.17b) et les corrections nécessaires pour vérifier la condition d'adhérence aux parois se localisent dans la couche d'Ekman, d'épaisseur $E^{-1/2}$. Une petite dissymétrie persiste entre les phases prograde et rétrograde des cycles de libration, mais son amplitude reste limitée à de faibles valeurs (par exemple autour de 2.5% à $E = 4 \times 10^{-4}$). Notons qu'en 3D, le pompage d'Ekman accélère significativement l'établissement de l'écoulement de base (voir section 1.3.5).

Considérant à présent un ellipsoïde triaxial, l'ellipticité est fixée à $\beta = 0.44$ afin de maximiser le taux de croissance (voir fig. 2.5, qui considère un cas un peu différent de

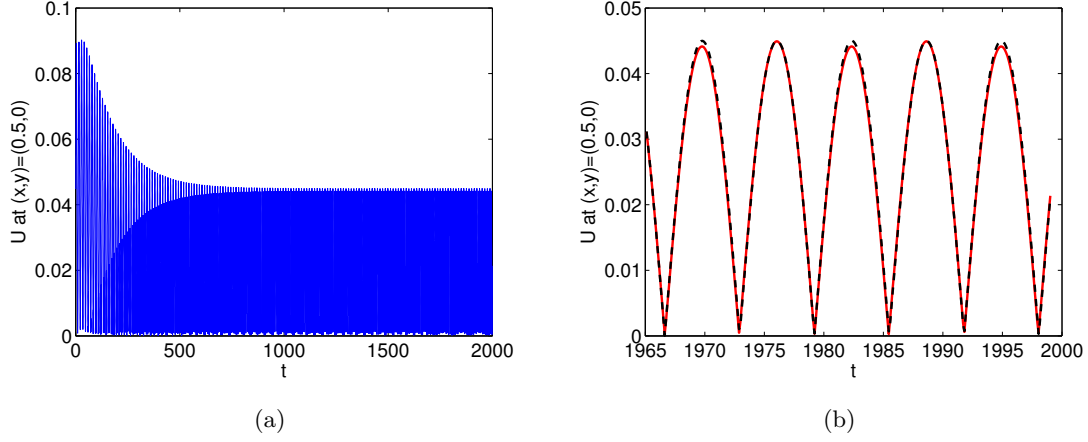


FIGURE 2.17 – (a) Évolution temporelle de la norme de la vitesse au point de coordonnées $(x = 0.5, y = 0)$ pour $f = 0.5$, $\epsilon = 0.1$, $\beta = 0.1$ and $E = 4 \times 10^{-4}$. (b) Zoom de (a) une fois l'écoulement établi : la ligne continue rouge représente les résultats numériques, et la ligne discontinue noire représente l'écoulement théorique (2.42).

l'instabilité elliptique). Une étude systématique est alors menée en fonction de la fréquence de forçage pour confirmer l'apparition de l'instabilité et la validité de la loi (2.45) pour le taux de croissance. Le taux de croissance est déterminé en minimisant l'écart, en norme, de la vitesse verticale en valeur absolue W (voir section 2.2.1) à une exponentielle avec offset i.e. à une fonction $A_0 + A_1 \exp(\sigma t)$. Des simulations supplémentaires avec $0.75 < c^* < 1.1$ sont également présentées pour illustrer l'effet de la géométrie sur la stabilité de l'écoulement.

Un exemple d'évolution temporelle est présenté en figure 2.18a, où W est normalisé par sa valeur moyenne entre $t = 100$ et $t = 200$ (i.e. après la phase de spin-up et avant la possible déstabilisation). L'instabilité elliptique est clairement présente et dans ce cas précis, une dynamique temporelle assez riche est observée, en accord avec les résultats expérimentaux de J. Noir. En particulier, des cycles de croissance et saturation sont observés. L'écoulement typique au cours d'un tel cycle est illustré en figure 2.18b, qui représente la norme de la vitesse dans un plan méridien et un plan de coordonnée $z = -0.5$.

L'étude systématique du taux de croissance en fonction de f pour $c^* = 1$ est représentée en figure 2.19a et comparée à la formule analytique (2.45). L'instabilité elliptique est obtenue au sein de deux bandes de fréquences centrées en $f_{res} \approx 1.835$ et $f_{res} \approx 1.67$ et un excellent accord avec (2.45) est obtenu. La figure 2.19b représente une l'évolution du taux de croissance avec le rapport d'aspect c^* à une fréquence de résonance fixée à $f = 1.8$. De même que le décalage (ou *detuning*) en fréquence autour de la fréquence résonante, le facteur géométrique c^* modifie significativement le taux de croissance de l'instabilité elliptique, qui disparaît même pour $c^* \lesssim 0.6$. Les formes de cloche observées correspondent à des modes différents, et $c^* = 1$ maximise le taux de croissance d'un mode, en accord avec l'étude menée en section 2.3.1. Ces simulations numériques confirment que la libration en

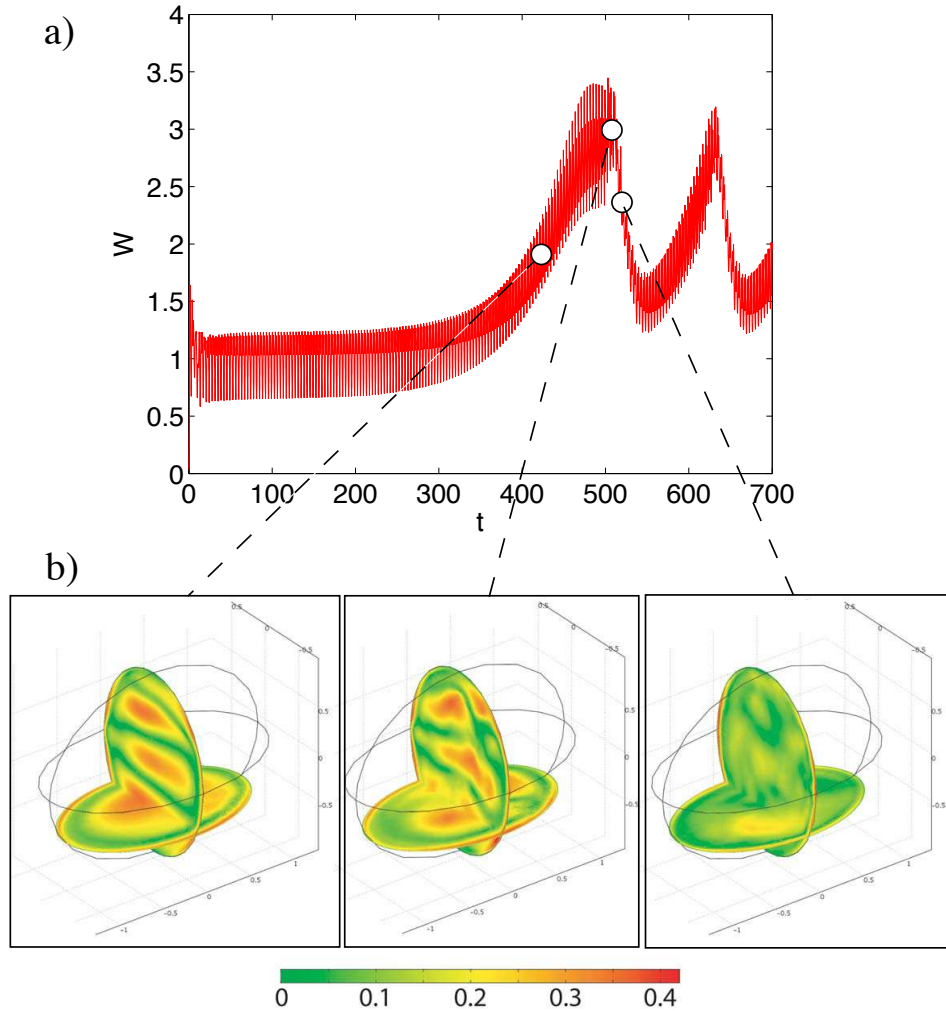


FIGURE 2.18 – (a) Évolution temporelle de la moyenne de la valeur absolue de la vitesse verticale, normalisée par sa valeur moyenne entre $t = 100$ et $t = 200$ (i.e. après la phase de spin-up et avant la possible déstabilisation) pour $E = 5 \times 10^{-4}$, $\beta = 0.44$, $f = 1.76$, $\epsilon = 0.92$ and $c^* = 0.95$. (b) Norme de la vitesse $||\mathbf{u}||$ dans un plan méridien et un plan de coordonnée $z = -0.5$. La séquence montre, de gauche à droite, l'évolution typique de $||\mathbf{u}||$ durant une croissance exponentielle, une saturation et un retour vers l'écoulement de base.

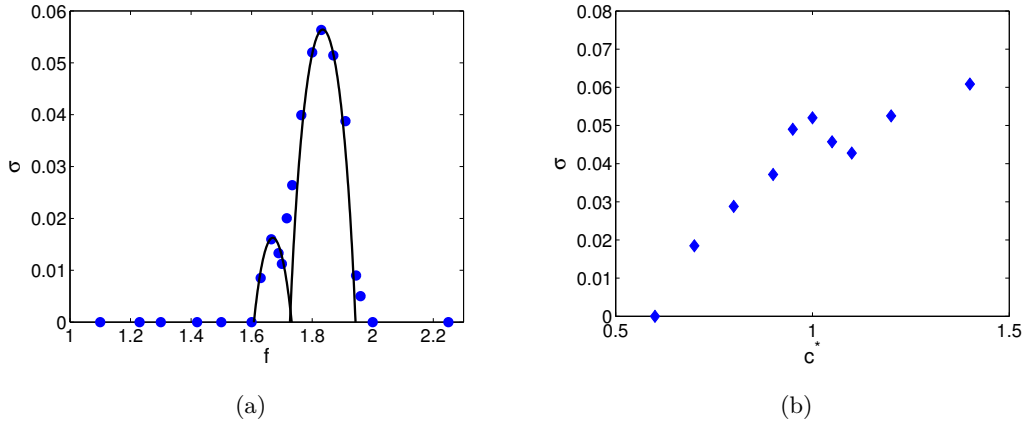


FIGURE 2.19 – (a) Taux de croissance de la LDEI en fonction de la fréquence de libration f ($E = 5 \times 10^{-4}$, $\beta = 0.44$, $\epsilon = 0.9913$, et $c^* = 1$). La courbe continue représente le taux de croissance analytique (2.45), où f_{res} et K sont déterminés en ajustant la formule théorique à chaque maximum local du taux de croissance ($K \approx 3.38$ pour $f_{res} \approx 1.835$ et $K \approx 5$ pour $f_{res} \approx 1.67$). (b) Taux de croissance en fonction du rapport d'aspect c^* ($E = 5 \times 10^{-4}$, $\beta = 0.44$, $\epsilon = 0.9913$ et $f = 1.8$).

longitude peut exciter une instabilité elliptique, et valident la formule (2.45) de l'analyse WKB.

2.5 Interaction des marées et de la précession

Dans les systèmes naturels, aussi bien la rotation que les marées déforment un corps en un ellipsoïde triaxial (au moins en première approximation), ce qui pose la question d'une éventuelle présence de l'instabilité elliptique. De plus, un forçage de précession est également à prendre en compte pour des systèmes géo ou astrophysiques et il est donc nécessaire d'étudier son interaction avec le forçage de marées, en présence ou non des instabilités associées à chacun de ces deux forçages. Le problème complet est assez complexe et implique trois référentiels différents en rotation : le référentiel en précession, avec par exemple une période $T_p \approx 26000$ ans pour la Terre, le référentiel lié à la marée, avec une période de $T_d \approx 27$ jours pour le système Terre-Lune, et le référentiel du manteau, avec une période de 23.93 heures pour la Terre. Avant de mener cette étude complexe, une première étape est de considérer le cas particulier d'une précession synchrone avec les marées ($T_d = T_p$) car dans ce cas, l'ellipsoïde triaxial est fixe dans le référentiel de précession et la théorie peut être menée analytiquement (voir schéma en fig. 2.20). Cette étude a été menée en collaboration avec P. Meunier et a fait l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids* (Cébron *et al.*, 2010b).

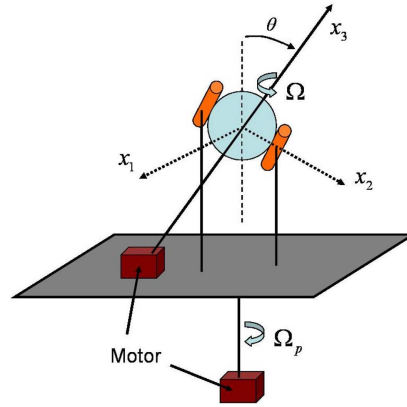


FIGURE 2.20 – Schéma du problème considéré. Un sphéroïde creux et déformable est rempli de liquide et mis en rotation à vitesse angulaire constante Ω le long de son axe (Ox_3). L'axe du sphéroïde est incliné à un angle de précession θ et fixé sur une table tournant à la vitesse de précession Ω_p . Enfin, deux rouleaux alignés avec (Ox_3) déforment le sphéroïde en un ellipsoïde triaxial par compression le long de l'axe (Ox_2), perpendiculaire à l'axe de rotation.

2.5.1 Écoulement de base : solution analytique

Dans cette section, l'étude de Poincaré (1910) est reconsidérée au sein d'un ellipsoïde triaxial, et l'écoulement d'un fluide non-visqueux en précession est résolu explicitement. Dans un second temps, la viscosité est prise en compte en étendant l'étude de Busse (1968) selon l'approche de Noir *et al.* (2003). Comme indiqué en figure 2.20, on considère l'écoulement tournant au sein d'un ellipsoïde triaxial en précession d'axes principaux notés (a_1, a_2, a_3) dans cette section¹⁰. On définit (Ox_1, Ox_2, Ox_3) dans le référentiel du bourrelet de marées, confondu ici avec le référentiel de précession, de telle sorte que Ox_i est aligné avec l'axe a_i du conteneur, et (Ox_3) est l'axe de rotation du manteau. On note Ω la vitesse imposée de rotation et on utilise Ω^{-1} comme échelle de temps. On introduit aussi le rayon moyen équatorial $R_{eq} = (a_1 + a_2)/2$, utilisé comme échelle de longueur. Finalement, le problème peut être décrit par six nombres adimensionnels : l'ellipticité $\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$, le rapport d'aspect a_3/a_1 , le nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega R_{eq}^2)$, où ν est la viscosité cinématique, et les trois composantes adimensionnelles du vecteur précession $\mathbf{\Omega}_p$ dans le référentiel absolu, i.e. l'angle θ entre $\mathbf{\Omega}_p$ et \mathbf{e}_{x_3} , l'angle θ_2 entre $\mathbf{\Omega}_p$ et \mathbf{e}_{x_1} et la vitesse angulaire de précession Ω_p , positive (resp. négative) pour une précession prograde (resp. rétrograde).

10. La notation (a_1, a_2, a_3) n'est utilisée qu'uniquement dans cette section, afin de simplifier l'écritures des équations. Nous reviendrons par la suite à l'écriture des demi-grand axes (a, b, c) .

2.5.1.1 Extension de l'écoulement de Poincaré

On cherche un écoulement de base, solution des équations d'Euler dans le référentiel de précession i.e.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p - 2 \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{u}, \quad (2.46)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.47)$$

pour le fluide contenu dans l'ellipsoïde. Dans ce référentiel, avec l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1, \quad (2.48)$$

on transforme la géométrie ellipsoïdale en une sphère avec la transformation $(x'_k) = (x_k/a_k)_{k \in (1,2,3)}$ et la vitesse du fluide au sein de la sphère s'écrit donc

$$(\mathbf{U}'_k) = \left(\frac{U_k}{a_k} \right)_{k \in (1,2,3)}. \quad (2.49)$$

Suivant l'approche de Poincaré (1910), on considère ce qu'il appelle des *mouvements simples*, c'est-à-dire des vitesses $\mathbf{U}(U_1, U_2, U_3)$ pouvant être décrites comme des combinaisons linéaires des coordonnées de l'espace. Cette hypothèse nous mène à considérer une rotation solide quelconque dans la sphère, i.e. $\mathbf{U}' = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$, où $\boldsymbol{\omega}'(\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3)$ dépend du temps a priori. L'équation (2.49) donne alors le champ de vitesse

$$\mathbf{U} = (U_k)_{k \in (1,2,3)} = \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \omega'_{k+1} x_{k-1} - \frac{a_k}{a_{k+1}} \omega'_{k-1} x_{k+1} \right)_{k \in (1,2,3)}, \quad (2.50)$$

où on utilise des permutations circulaires sur $k \in (1, 2, 3)$ pour les indices.

Nous allons maintenant chercher les *mouvements simples* solutions des équations d'Euler pour la partie solénoïdale de notre écoulement, en prenant en compte les conditions aux limites de non-pénétration pour sa partie irrotationnelle. Cet écoulement est appelé *écoulement de Poincaré*. On choisit de suivre la démarche proposée par Tilgner (1999c) dans sa thèse d'habilitation, et reprise par Noir (2000) dans sa thèse de doctorat, plutôt que la formulation lagrangienne de Poincaré (1910), un peu plus laborieuse. On déduit le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ du champ de vitesse (2.50) :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{U} = (\omega_k)_{k \in (1,2,3)} = \frac{1}{2} \left(\left[\frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_{k-1}} \right] \omega'_k \right)_{k \in (1,2,3)}. \quad (2.51)$$

Notons que $\boldsymbol{\omega}'$ est indépendant des variables d'espace de telle sorte que $\boldsymbol{\omega}$ est uniforme. En prenant le rotationnel de l'équation (2.46), les équations non-visqueuses pour $\boldsymbol{\omega}$ donnent les trois équations scalaires suivantes

$$\frac{d\omega_k}{dt} + (\alpha_{k+1,k} - \alpha_{k-1,k})\omega_{k-1}\omega_{k+1} = \alpha_{k-1,k}\Omega_{p,k-1}\omega_{k+1} - \alpha_{k+1,k}\Omega_{p,k+1}\omega_{k-1} \quad (2.52)$$

pour des permutation des indices sur $k \in (1, 2, 3)$, avec les coefficients $\alpha_{i,j} = 2/(\eta_{ij} + 2) = 2(\eta_{ji} + 1)/(\eta_{ji} + 2)$ et les différentes ellipticités $\eta_{ij} = (a_i^2 - a_j^2)/a_j^2$ de l'ellipsoïde.

Les équations pour le cas particulier d'un sphéroïde sont naturellement retrouvées avec $a_1 = a_2$.

Considérant uniquement les solutions stationnaires du problème, on résout le système (2.52) analytiquement :

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \frac{a_3^2 + a_2^2}{\gamma_1} \Omega_{p,1}, \quad (2.53)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \frac{a_3^2 + a_1^2}{\gamma_2} \Omega_{p,2}, \quad (2.54)$$

où $\beta_{ij} = (a_i^2 + a_j^2)/(2a_i a_j) = \beta_{ji}$ et $\gamma_i = \omega_3(a_i^2 - a_3^2)/\beta_{12} + 2 \Omega_{p,3} a_1 a_2$. Le champ de vitesse associé s'écrit alors :

$$U_1 = a_1 \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \left(-\frac{x_2}{a_2} + \frac{2 a_1 \Omega_{p,2} x_3}{\gamma_2} \right), \quad (2.55)$$

$$U_2 = a_2 \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{2 a_2 \Omega_{p,1} x_3}{\gamma_1} \right), \quad (2.56)$$

$$U_3 = a_3 \frac{\omega_3}{\beta_{12}} \left(\frac{2 a_3 \Omega_{p,1} x_2}{\gamma_1} - \frac{2 a_3 \Omega_{p,2} x_1}{\gamma_2} \right). \quad (2.57)$$

Notons que le choix de ω_3 est arbitraire ici. En fait, ω_3 est fixé par la couche visqueuse d'Ekman et ne peut donc être déterminé que par une étude visqueuse, du type de celle de Busse (1968) par exemple, menée dans la section 2.5.1.2. Notons aussi que le champ de vitesse diverge pour $\gamma_1 = 0$ et $\gamma_2 = 0$. Cette étude non-visqueuse donne donc deux résonances, qui correspondent à une résonance entre la fréquence du forçage de précession et celle du tilt-over (voir Noir *et al.* (2003) pour plus de détails). Naturellement, l'amplitude de ces résonances est fixée par la viscosité et nécessite donc une étude visqueuse pour être décrite. Ces résonances linéaires sont obtenues pour deux fréquences de précession particulières (dépendantes du rapport d'aspect), qui sont :

$$\Omega_{p,3} = \frac{a_3^2 - a_i^2}{a_1^2 + a_2^2} \omega_3 \quad (2.58)$$

pour $i \in (1, 2)$. Il vient immédiatement que les ellipsoïdes oblates ($a_1, a_2 > a_3$) ont leurs résonances dans le régime rétrograde (i.e. dans la zone $\Omega_{p,3} < 0$) tandis que les ellipsoïdes prolates ($a_1, a_2 < a_3$) ont leurs résonances dans le régime prograde. Notons que, comparé au cas sphéroïdal déjà traité dans la littérature, un résultat important ici est l'apparition d'une deuxième résonance, liée à l'ellipticité du conteneur.

2.5.1.2 Extension de l'écoulement de Busse

En suivant l'approche de Busse (1968), la viscosité peut être prise en compte dans notre étude d'un ellipsoïde triaxial en précession. Ici, on choisit de suivre l'approche équivalente de Noir *et al.* (2003) basée sur l'équilibre entre le couple d'inertie $\mathbf{\Gamma}_i$, le couple de pression (ou topographique) $\mathbf{\Gamma}_p$, et le couple visqueux $\mathbf{\Gamma}_v$. A l'ordre dominant, l'équation d'équilibre des couples donnée par Busse (1968), pour un écoulement tournant

stationnaire $\mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ dans le référentiel de précession au sein d'un volume V de surface Σ s'écrit :

$$2 \int_V \overbrace{\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{q})}^{\Gamma_i} dV = - \oint_{\Sigma} \overbrace{p \mathbf{r} \times \mathbf{n}}^{\Gamma_p} d\Sigma + E \int_V \overbrace{\mathbf{r} \times \nabla^2 \mathbf{q}}^{\Gamma_v} dV, \quad (2.59)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position et \mathbf{n} est le vecteur unitaire sortant normal à Σ (voir Noir *et al.*, 2003). Il reste à expliciter ces termes pour notre ellipsoïde triaxial.

Au premier ordre, le gradient de pression équilibre la force centrifuge, ce qui donne :

$$p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[(\omega_{i+1}^2 + \omega_{i-1}^2) x_i^2 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \omega_i \omega_j x_i x_j \right]. \quad (2.60)$$

Ainsi, dans la limite des faibles ellipticités, i.e. au premier ordre en $\eta = 1 - a_3/a_1$ et $\eta_2 = 1 - a_2/a_1$, le couple de pression s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}_p = - \oint p \mathbf{r} \times \mathbf{n} d\Sigma = (\Gamma_{p,k})_{k \in (1,2,3)} = I \begin{pmatrix} (\eta - \eta_2) \omega_2 \omega_3 \\ -\eta \omega_1 \omega_3 \\ \eta_2 \omega_1 \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

où I est le moment d'inertie dans l'approximation sphérique. Notons que l'expression de Noir *et al.* (2003) est retrouvée pour le sphéroïde (i.e. $a_1 = a_2$ donc $\eta_2 = 0$).

Après quelques manipulations algébriques, le couple de précession s'écrit simplement :

$$\mathbf{\Gamma}_i = I \boldsymbol{\Omega}_p \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.62)$$

Finalement, les équations (2.61) et (2.62) donnent $\mathbf{\Gamma}_p \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ et $\mathbf{\Gamma}_i \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$, et donc avec l'équation (2.59), on a $\mathbf{\Gamma}_v \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Ainsi, l'écoulement étant stationnaire, il n'y a aucune rotation différentielle selon $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}_{x_3} = \omega^2. \quad (2.63)$$

En effet, dans le référentiel tournant du fluide, la vitesse angulaire du conteneur selon $\boldsymbol{\omega}$ est nulle : la seule rotation différentielle entre le fluide et le conteneur est dans le plan équatorial de sorte qu'il n'y a aucun spin-up. Cela peut aussi être retrouvé avec une analyse de couche visqueuse, suivant l'approche de Busse (1968), qui montre que le pompage volumique d'Ekman est solution des équations d'Euler dès lors que la condition dite de solvabilité (2.63) est vérifiée. Selon cette équation, aussi appelée la *condition de non spin-up* par Noir *et al.* (2003), le seul mouvement relatif entre l'intérieur et la paroi est une rotation donnée par $\boldsymbol{\omega}_{eq} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}$. Nous devons donc calculer le couple visqueux associé à cette rotation différentielle équatoriale. Ce calcul repose sur l'idée suivante : pour maintenir un écoulement stationnaire, le couple délivré au fluide pour compenser les frottements visqueux est donné par le taux de décroissance qui serait obtenu si la précession était brutalement stoppée à un temps t . Ce taux est simplement le taux de dissipation d'énergie par un mode de Poincaré dans un système non-forcé, à $t = 0$. Ce

taux est donné par la théorie de Greenspan (1968), valide dans le référentiel tournant avec le fluide. Ainsi, la solution linéaire pour la décroissance visqueuse du spinover nous amène à introduire un nouveau nombre d'Ekman $E_f = E/\omega$ et une nouvelle unité de temps $\tilde{t} = t\omega$, basés sur la vitesse de rotation du fluide ω . Selon Greenspan (1968), l'évolution temporelle de $\boldsymbol{\omega}_{eq}$ dans le référentiel galiléen est :

$$\boldsymbol{\omega}_{eq}(\tilde{t}) = e^{\lambda_r \tilde{t} \sqrt{E_f}} \left[\cos\left(\lambda_i \tilde{t} \sqrt{E_f}\right) \boldsymbol{\omega}_{eq}(0) - \sin\left(\lambda_i \tilde{t} \sqrt{E_f}\right) \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{eq}(0)}{\omega} \right] \quad (2.64)$$

avec $\lambda_r = -2.62$ et $\lambda_i = 0.259$. Notons que rigoureusement parlant, dans un ellipsoïde triaxial, l'ellipticité modifie les valeurs propres des modes inertiels, ainsi que les corrections visqueuses de ces valeurs propres (Greenspan, 1968). Ainsi, dans le cas particulier d'un sphéroïde oblate ($a_1 = a_2$) d'excentricité $e = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2}$, la fréquence propre du mode de Poincaré est donnée par $2/(2 - e^2)$, tandis que λ_r et λ_i sont donnés à l'ordre 2 par (Zhang *et al.*, 2004) :

$$\lambda_r = -\frac{3(19 + 9\sqrt{3})}{28\sqrt{2}} + \frac{-1039 + 171\sqrt{3}}{1232\sqrt{2}} \eta_{31}^2 + O(e^4) \approx -2.62 - 0.426 e^2 \quad (2.65)$$

$$\lambda_i = -\frac{3(-19 + 9\sqrt{3})}{28\sqrt{2}} + \frac{1039 + 171\sqrt{3}}{1232\sqrt{2}} \eta_{31}^2 + O(e^4) \approx 0.258 + 0.766 e^2 \quad (2.66)$$

expressions comparées¹¹ aux valeurs exactes en figure 2.21. Dans la limite des faibles ellipticités considérée ici, cette correction peut être négligée¹².

Revenant aux variables E et t , cette équation permet d'écrire le couple équatorial visqueux :

$$\boldsymbol{\Gamma}_v = I \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_{eq}}{dt} \right)_{t=0} = I\sqrt{\omega E} \begin{pmatrix} \lambda_r \omega_1 + \lambda_i \omega_2/\omega \\ \lambda_r \omega_2 - \lambda_i \omega_1/\omega \\ \lambda_r (\omega_3 - 1) \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Finalement, l'équilibre des couples donné par (2.59) projeté sur l'axe de rotation du fluide $\boldsymbol{\omega}$ (la *condition de non spin-up* (2.63)) et sur les axes principaux \mathbf{e}_{x_1} and \mathbf{e}_{x_3} donne le système d'équations suivant :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_3 (1 - \omega_3), \quad (2.68)$$

$$\Omega_{p,2} \omega_3 - \Omega_{p,3} \omega_2 = (\eta - \eta_2) \omega_2 \omega_3 + \left(\lambda_r \omega_1 \omega_3^{1/4} + \lambda_i \frac{\omega_2}{\omega_3^{1/4}} \right) \sqrt{E}, \quad (2.69)$$

$$\Omega_{p,1} \omega_2 - \Omega_{p,2} \omega_1 = \eta_2 \omega_1 \omega_2 - \lambda_r \omega_3^{1/4} (1 - \omega_3) \sqrt{E}. \quad (2.70)$$

Ce système non-linéaire peut être résolu efficacement par une méthode de continuation (perturbations successives sur la longueur a_2) en partant de la solution de Busse (1968)

11. Notons que la valeur usuelle $\lambda_i \approx 0.259$ utilisée depuis Greenspan (1968) est en fait égale à $\lambda_i \approx 0.258$ selon les valeurs exactes données par Zhang *et al.* (2004).

12. Remarquons également que le facteur d'amortissement visqueux $\lambda_r = -2.62$, d'intérêt pour l'instabilité elliptique, reste toujours inférieur à -3.3 pour un sphéroïde prolata ($a_1 = a_2$).

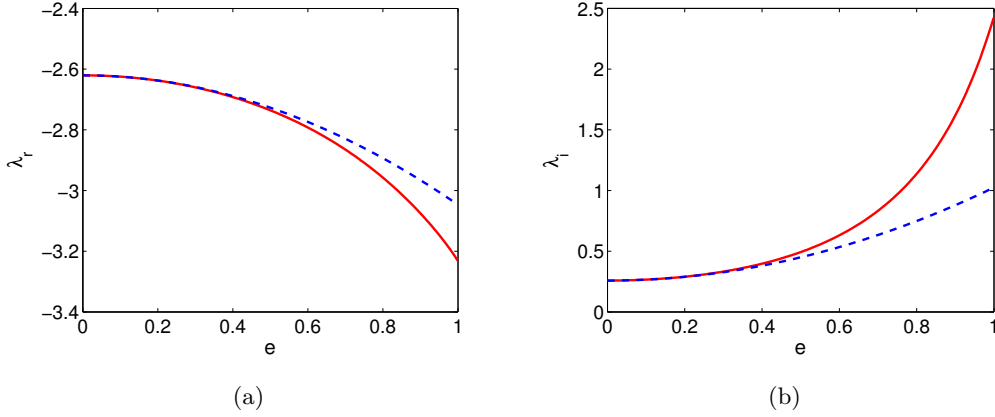


FIGURE 2.21 – Évolution avec l'excentricité $e = (1 - a_3^2/a_1^2)^{1/2}$ des corrections visqueuses λ_r (fig. a) et λ_i (fig. b) des valeurs propres du mode de Poincaré pour un sphéroïde oblate ($a_1 = a_2$). Les lignes continues correspondent aux valeurs exactes obtenues avec la théorie de Zhang et al. (2004), tandis que les lignes discontinues représentent les développements à l'ordre e^2 de cette théorie (équations (2.65) et (2.66)).

dans un sphéroïde. Un exemple est donné en figure 2.22 où la solution dans le cas sphéroïdal (le cas $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ de la figure 3 de Noir *et al.* (2003), ce qui donne un nombre d'Ekman $E = 3 \cdot 10^{-5}$) est comparée au cas d'un ellipsoïde triaxial légèrement déformé ($\beta = 0.03$) avec le même rapport d'aspect a_3/a_1 . Notons que même une très faible déformation β change significativement la solution obtenue.

2.5.2 Validation numérique et expérimentale

Dans cette section, nous validons et testons la gamme de validité de nos solutions analytiques par comparaison avec des résultats numériques et expérimentaux.

2.5.2.1 Résolution numérique

Nous considérons un fluide en rotation au sein d'un ellipsoïde triaxial d'axes (a_1, a_2, a_3) (fig. 2.20). Nous travaillons dans le référentiel en précession. Avec un fluide initialement au repos dans ce référentiel, une vitesse tangentielle constante $U\sqrt{1 - (x_3/a_3)^2}$ est imposée à $t = 0$ à la paroi externe dans chaque plan de coordonnées x_3 perpendiculaire à l'axe de rotation (Ox_3), où U est la vitesse imposée à la paroi le long de l'équateur. L'échelle de temps Ω^{-1} est fixée en écrivant la vitesse tangentielle à l'équateur $U = \Omega R_{eq}$. Les équations de Navier-Stokes avec des conditions de non-glissement sont alors résolues, en prenant en compte la force de Coriolis associée à la précession Ω_p . Ainsi, dans le référentiel (Ox_1, Ox_2, Ox_3) liée à la déformation ellipsoïdale, qui est aussi le référentiel de précession

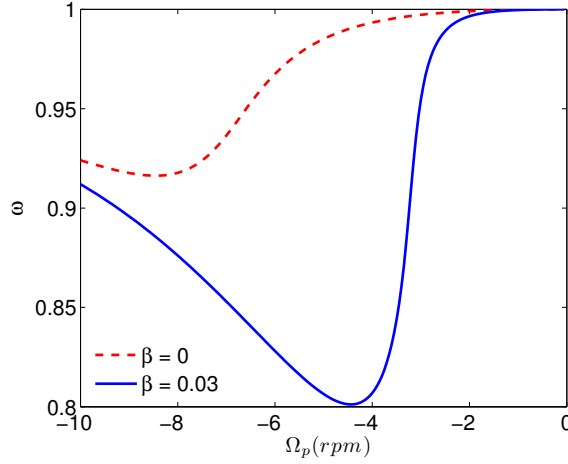


FIGURE 2.22 – Amplitude théorique de la vitesse angulaire ω du mode de tilt-over dans un sphéroïde ($\beta = 0$), et pour un ellipsoïde triaxial légèrement déformé ($\beta = 0.03$). Les autres paramètres utilisés dans cette figure sont ceux de Noir et al. (2003) : vitesse angulaire du conteneur $\Omega = 207$ rpm et $a_1 = 0.125$ m (de sorte que le nombre d’Ekman est $E = 3 \cdot 10^{-5}$), $\theta = 9^\circ$, $a_3/a_1 = 0.96$ et $\theta_2 = 0^\circ$. Le cas sphéroïdal correspond au cas $\nu = 10^{-5}$ m²/s en figure 3 de Noir et al. (2003). On peut noter que même une faible déformation équatoriale modifie significativement la solution obtenue.

dans nos hypothèses de travail, nous résolvons :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} - 2\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{u}, \quad (2.71)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.72)$$

Dans ce travail, la gamme de paramètres étudiée est $E \geq 10^{-3}$ et $\epsilon \leq 0.32$. Une fois un état permanent atteint (stationnaire ou périodique), nous déterminons la vitesse angulaire de rotation de l’intérieur du fluide, i.e. en-dehors de la couche visqueuse de paroi. Pour ce faire, nous introduisons au sein du fluide un ellipsoïde centré sur l’origine, homothétique de la paroi externe dans un rapport κ . Nous définissons alors la rotation angulaire $\boldsymbol{\omega}$ dans l’intérieur fluide comme la valeur moyenne de la rotation angulaire au sein de cet ellipsoïde homothétique. Afin de nous prémunir de l’influence des couches visqueuses, nous considérons une couche visqueuse d’une épaisseur adimensionnelle (e.g. Owen & Rogers, 1989) $\delta_\nu \approx 5\sqrt{E}$, et fixons donc notre rapport d’homothétie à $\kappa \approx 1 - \delta_\nu \approx 1 - 5\sqrt{E}$. Nos calculs sont menés avec la méthode éléments finis décrite en section 2.2.

2.5.2.2 Dispositif expérimental

Les détails du dispositif expérimental figurent dans Meunier *et al.* (2008) et Lagrange *et al.* (2008), traitant le cas d’un cylindre en précession. Ici, le dispositif a été légèrement modifié afin d’étudier la précession d’un sphéroïde. Cela permet de valider la théorie à des

nombres d'Ekman inaccessibles numériquement. Malheureusement, le dispositif est pour l'instant limité au cas d'une géométrie sphéroïdale ($a_1 = a_2$) et n'est donc pas encore à même de valider la théorie développée ici pour un ellipsoïde triaxial. Des modifications supplémentaires seraient nécessaires pour rendre le plan équatorial elliptique, comme par exemple l'utilisation de deux rouleaux comprimant le sphéroïde.

Le sphéroïde, fait au laboratoire, a été obtenu en assemblant deux cavités hémisphéroïdales usinées dans des cylindres solides de Plexiglas. La précision machine (10 microns) garantit que le saut entre les deux parties est inférieur à la taille de la couche d'Ekman (de l'ordre de $300\mu\text{m}$ à $E = 10^{-5}$). Ce sphéroïde, de diamètre équatorial 17 cm et de rapport d'aspect $a_3/a_1 = 0.85$ est rempli avec de l'eau et monté sur un moteur qui est lui-même placé sur une plate-forme tournante. Les vitesses angulaires du sphéroïde et de la plate-forme sont stables à moins de 0.1% et l'angle de précession θ entre les deux axes varie de 5° à 15° avec une exactitude de 0.1° .

Des lasers pulsés YAG sont utilisés pour créer un plan lumineux perpendiculaire à l'axe de rotation de la plate-forme. Une caméra PIV (Particle Image Velocimetry) est située sur la plate-forme tournante, alignée avec l'axe de rotation du sphéroïde. Ceci permet d'obtenir des mesures PIV dans un plan presque parallèle au plan équatorial (x_1, x_2) et situé à une distance $x_3 = 5$ cm au-dessus. Les lasers YAG n'étant pas montés sur la plate-forme, le plan de mesure est incliné d'un angle θ par rapport au plan équatorial, ce qui induit une erreur d'au plus 2 cm (pour $\theta = 15^\circ$) sur la position axiale des vecteurs vitesses. Cependant, les composantes de vitesse mesurées correspondent exactement aux composantes x_1, x_2 de vitesse car la caméra est alignée avec l'axe de rotation du sphéroïde. Il n'y a aucune distorsion d'images à l'interface air-Plexiglas (interface plane) mais il y a des distorsions dues à l'interface sphéroïdale Plexiglas-eau. Ces déformations restent petites car les indices de réfraction du Plexiglas et de l'eau sont très proches. Ces distorsions ont été calculées analytiquement et vérifiées expérimentalement avec une grille. Elles apparaissent principalement à la surface du sphéroïde et introduisent une erreur maximum de 15% sur le déplacement radial des particules. Cela ne biaise pas les mesures car seule la région centrale du champ de vitesse a été utilisée pour le traitement des données. Les images PIV ont été tournées numériquement afin de supprimer la rotation de base de l'écoulement avant d'être traitées par un algorithme de cross-correlation PIV (DPIVsoft : voir Meunier & Leweke, 2003).

Dans le référentiel du sphéroïde, le champ de vitesse 2D s'est avéré être un écoulement quasi-uniforme de translation dont la direction et l'amplitude varient avec la fréquence Ω_p de précession. Cet écoulement moyen est lié aux composantes équatoriales de la vitesse angulaire (ω_1, ω_2) qui créent un écoulement uniforme de translation $(\alpha_{31} x_3 \omega_2, -\alpha_{32} x_3 \omega_1)$ dans le plan $x_3 = 5$ cm. Cet écoulement correspond aux derniers termes dans les équations (2.55) et (2.56) dans le cas $a_1 = a_2$. Les premiers termes de ces équations correspondent à la rotation angulaire axiale ω_3 , égale à $(\omega_3 - 1)$ dans le référentiel du sphéroïde, et donc relativement petite hors des zones de résonances. Les mesures de vitesse moyenne et de vorticité moyenne permettent donc de remonter simplement aux trois composantes du vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$. C'est la première fois que de telles mesures sont menées dans un sphéroïde en précession, et elles seront comparées aux résultats numériques et théoriques dans la section suivante.

2.5.2.3 Validation en géométrie sphéroïdale

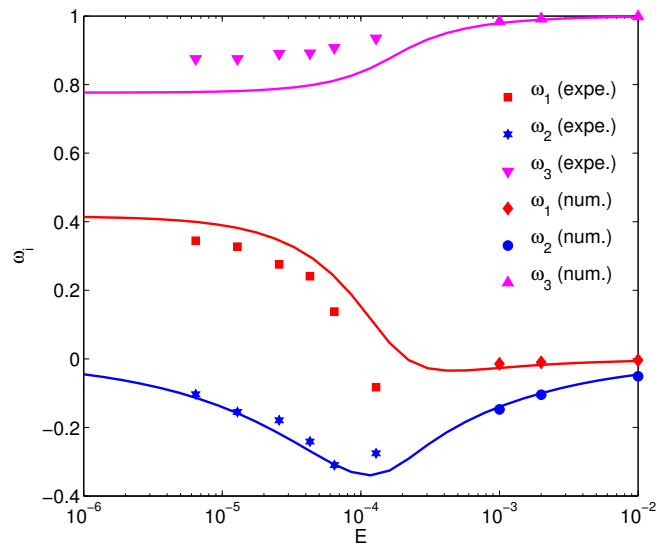
En figure 2.23, la théorie proposée par Busse (1968) est validée sur plus de trois décades en nombre d'Ekman pour deux angles de précession différents. L'intérêt des résultats présentés est double. Tout d'abord, ils valident le modèle numérique, qui peut maintenant être utilisé pour étudier les ellipsoïdes triaxiaux. De plus, ils complètent les validations précédentes de la théorie de Busse (e.g. Noir *et al.*, 2001; Tilgner & Busse, 2001; Lorenzani & Tilgner, 2001; Noir *et al.*, 2003), en particulier pour des nombres d'Ekman assez grands. Notons comme Tilgner & Busse (2001) que l'analyse théorique requiert que l'angle entre le vecteur rotation du conteneur et le vecteur rotation du fluide soit petit afin que l'analyse de couche d'Ekman reste valide. Cela pourrait expliquer les différences entre les mesures expérimentales et les prédictions théoriques pour le plus grand des angles de précession considéré ici ($\theta = 15^\circ$). Une validation supplémentaire du modèle numérique et de la théorie de Busse est donnée en figure 2.24 (a) où les composantes de l'axe de rotation du tilt-over sont en excellent accord sur une large gamme de vitesse de précession. Notons que loin de la résonance, on retrouve les résultats non-visqueux de Poincaré (1910) avec $\omega_3 = 1$.

2.5.3 Précession et instabilité elliptique

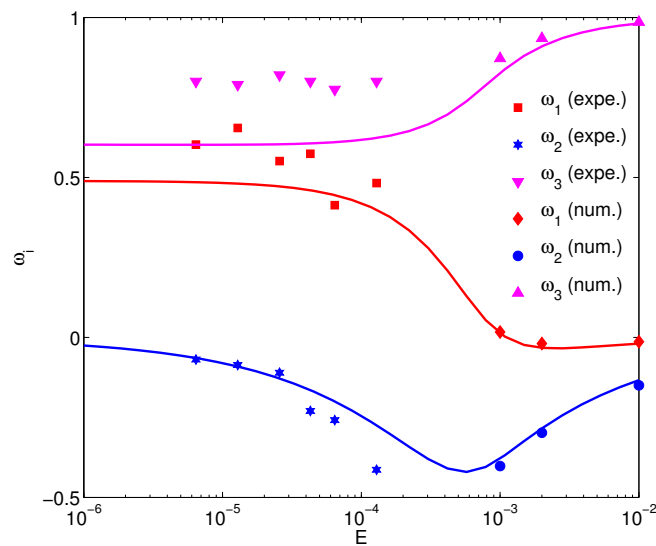
Une première série de simulations a été menée pour $a_3/a_1 = 0.86$, $\theta = 10^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$, $E = 1/600$, $\beta = 0.1$ et différentes vitesses de précession. Les résultats sont montrés en figure 2.24 (b). L'excellent accord entre les simulations numériques et la solution analytique visqueuse sur l'ensemble de la gamme étudiée confirme la validité de notre généralisation théorique. Notons que l'écoulement non-visqueux de Poincaré est retrouvé loin des résonances. Comme attendu, une seconde résonance apparaît pour l'ellipsoïde triaxial, les deux résonances restant dans le domaine rétrograde ici car $a_1, a_2 > a_3$ (voir. eq. 2.58). Enfin, comme Noir *et al.* (2003) l'ont déjà fait remarquer, la viscosité lisse les pics de résonance mais modifie également leur position.

Le tilt-over est donc bien décrit par notre solution analytique à des nombres d'Ekman relativement larges et des déformations équatoriales modérées. Cependant, deux types d'instabilité peuvent apparaître dans ce cas : l'instabilité elliptique pour des nombres d'Ekman suffisamment petits et/ou des déformations assez grandes, et l'instabilité de précession pour des nombres d'Ekman suffisamment petits et/ou des vitesses de précession assez importantes. Notre étude portant sur l'instabilité elliptique, le nombre d'Ekman est maintenu suffisamment grand pour ne pas exciter d'instabilité de précession, et la déformation équatoriale est augmentée afin d'être au-dessus du seuil de l'instabilité elliptique.

L'apparition et la forme de l'instabilité elliptique en présence d'une rotation globale (i.e. une rotation de la déformation équatoriale selon un axe parallèle à l'axe de rotation du conteneur) a été étudié en section 2.3.2 (voir aussi Le Bars *et al.*, 2007, 2010, pour une étude expérimentale). Dans les notations utilisées ici, ce cas correspond au cas particulier $\theta = 0^\circ$. Le mode usuel de l'instabilité elliptique dans la sphère est le mode de spinover, qui apparaît pour de faibles vitesses de rotation de la déformation équatoriale. L'analyse théorique de stabilité menée en annexe D montre que ce mode est susceptible de pousser

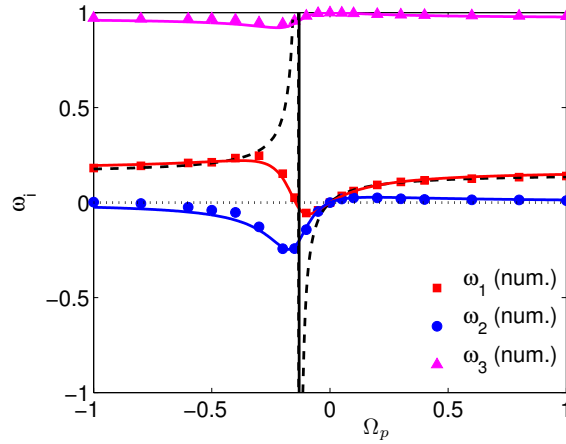


(a)

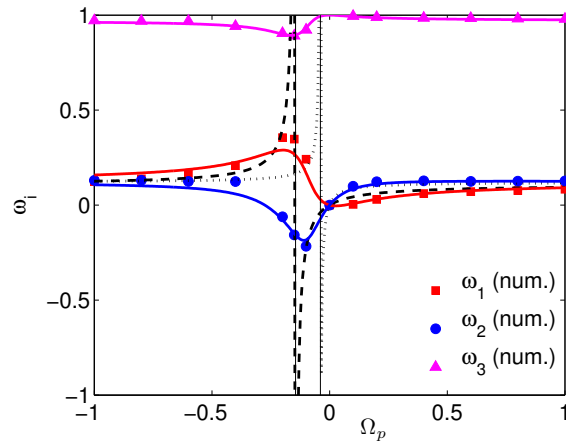


(b)

FIGURE 2.23 – Comparaison des composantes de vitesse angulaire de la solution de Busse pour un sphéroïde (lignes continues) avec les mesures expérimentales PIV et les simulations numériques sur une large gamme de nombre d'Ekman pour $\Omega_p = -0.14$ et $a_3/a_1 = 0.85$. (a) Pour un angle de précession de 5° . (b) Pour un angle de précession de 15° .

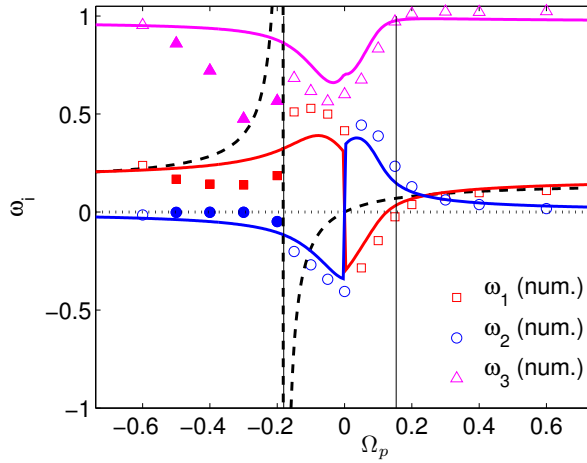


(a)

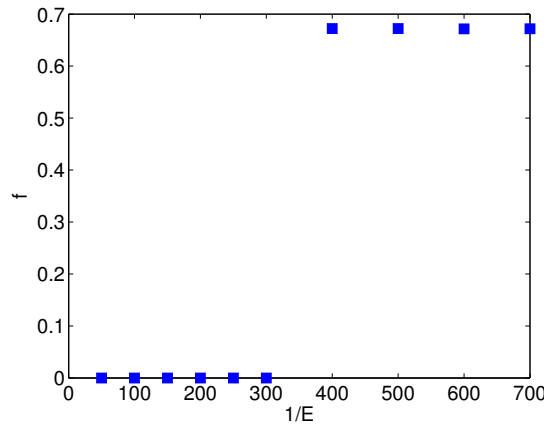


(b)

FIGURE 2.24 – Les composantes du vecteur rotation de l'écoulement dans le sphéroïde, montrées en (a) sont comparées en figure (b) à celles dans l'ellipsoïde triaxial de même rapport d'aspect $a_3/a_1 = 0.86$ ($\theta = 10^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$ et $E = 1/600$). La théorie non-visqueuse de Poincaré et son extension à l'ellipsoïde triaxial sont données par les tirets noirs en choisissant $\omega_3 = \beta_{12} = (a_1^2 + a_2^2)/(2a_1a_2)$ (voir l'étude de stabilité en annexe D). La théorie de Busse et son extension aux ellipsoïdes triaxiaux sont représentées par les lignes continues. Les deux résonances non-visqueuses γ_1 et γ_2 sont indiquées par les lignes verticales noires. (a) Dans le sphéroïde, le bon accord avec la théorie de Busse sur une large gamme de vitesse de précession confirme la validité du modèle numérique. (b) Dans l'ellipsoïde triaxial de même rapport d'aspect, mais avec $\beta = 0.1$, notre solution analytique est en bon accord avec les résultats numériques.



(a)



(b)

FIGURE 2.25 – Paramètres fixés : $\theta = 10^\circ$, $a_3/a_1 = 0.86$, $\theta_2 = 0$ et $\beta = 0.317$ (ce qui correspond à $(a_1 + a_2)/2 = a_3$). (a) Évolution des composantes du vecteur rotation de l'écoulement avec l'amplitude de la vitesse de précession pour $E = 1/600$. Le code couleur est celui de la figure 2.24 (b). Les symboles pleins correspondent aux cas où l'écoulement est oscillant, tandis que les symboles vides correspondent à des écoulements stationnaires. Notons que le changement de signe à $\Omega_p = 0$ est dû aux deux orientations possibles du spinover associé à la saturation de l'instabilité elliptique. (b) Considérant à présent $\Omega_p = -0.4$ pour lequel l'écoulement est oscillant à $E = 1/600$ selon la fig. (a), la pulsation f de l'écoulement est tracée en fonction du nombre d'Ekman. Il apparaît alors clairement que l'écoulement est stationnaire pour $E \gtrsim 1/300$, puis oscille à la pulsation constante $f \approx 0.67$ pour des nombres d'Ekman inférieurs.

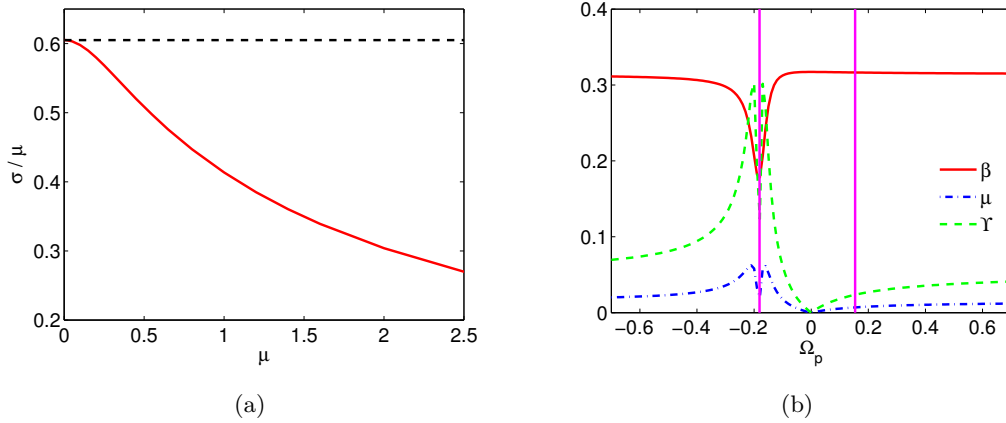


FIGURE 2.26 – (a) Le taux de croissance maximum de l’instabilité inertielle de précession obtenu par analyse de Floquet est représenté en fonction de μ (ligne continue rouge). La ligne discontinue noire représente l’expression analytique $\sigma/\mu = 5\sqrt{15}/32$ obtenue dans la limite $\mu \ll 1$. (b) Évolution de l’ellipticité β et du cisaillement μ des lignes de courant de l’écoulement de Poincaré pour les cas considérés en section 2.5.3 ($\theta = 10^\circ$, $a_3/a_1 = 0.86$, $\theta_2 = 0^\circ$ et $\beta = 0.317$, ce qui correspond à $(a_1 + a_2)/2 = a_3$). L’évolution de Υ , défini par l’équation (2.74) peut ainsi être calculée et montre que l’instabilité elliptique est effectivement attendue. Les lignes verticales représentent les deux résonances (ici $\theta_2 = 0^\circ$).

sur l’écoulement de Poincaré. Notons que le spinover, qui est le mode usuel de l’instabilité elliptique, et le tilt-over, qui est l’écoulement de base de la précession, correspondent au même écoulement : notre solution analytique doit donc les décrire tous les deux. La figure 2.25 (a) montre que c’est en effet le cas autour de $\Omega_p = 0$ où la théorie et les simulations sont en bon accord. De plus, par comparaison avec ce que l’on sait de l’instabilité elliptique dans le cas particulier $\theta = 0^\circ$ (voir la section 2.3.2 pour les détails), on s’attend à ce que l’instabilité elliptique mène à un écoulement instationnaire lorsque Ω_p est en-dessous de la bande de résonance du spinover, et à ce que l’instabilité disparaisse au-dessus de cette bande. Ces résultats sont retrouvés en figure 2.25 (a), où les écoulements oscillants sont en effet observés pour $\Omega_p \in [-0.5; -0.2]$, tandis qu’un bon accord théorie/simulations est obtenu pour les écoulements stationnaires de la gamme $\Omega_p > 0$. Enfin, une étude systématique de la pulsation du mode excité en fonction du nombre d’Ekman pour $\Omega_p = -0.4$ est donnée en figure 2.25 (b). En accord avec les prédictions de l’analyse théorique de stabilité présentée en annexe D, la transition d’un écoulement stationnaire à un écoulement instationnaire est obtenue pour $E \approx 1/300$.

2.5.4 L’instabilité de précession

L’instabilité de précession a été introduite en section 1.5. Rappelons qu’en géométrie sphérique, seule l’instabilité visqueuse de précession est susceptible d’apparaître (e.g. Tilgner, 2005). En revanche, en géométrie sphéroïdale, Kerswell (1993b) montre que deux

autres instabilités peuvent apparaître : l'instabilité inertielle de précession et l'instabilité elliptique (voir section 1.5). En effet, même si le conteneur n'est pas un ellipsoïde triaxial, l'inclinaison des lignes de courant par le mode de tilt-over dans un conteneur sphéroïdal rend ces dernières elliptiques. La compétition entre ces deux instabilités inertielles dépend de leur taux de croissance respectifs. Afin de s'affranchir de l'instabilité elliptique, Kerswell (1993b) considère un fluide non-confiné en rotation dont l'axe de rotation précesse à 90° : l'écoulement dans le référentiel en précession est alors simplement constitué de lignes de courant circulaires dont les centres se décalent progressivement le long d'une droite. Ainsi, la vitesse de précession adimensionnée par la vitesse angulaire de rotation du fluide se confond avec le cisaillement μ . Le taux de croissance σ peut alors être calculé par une analyse de Floquet, qui a été reprise et représentée pour une plus large gamme de μ en figure 2.26a. Dans la limite des faibles cisaillement ($\mu \ll 1$), Kerswell (1993b) obtient une formule analytique :

$$\sigma = \frac{5\sqrt{15}}{32} \mu. \quad (2.73)$$

Considérant un écoulement de base un peu différent de celui de Kerswell (1993b), Naing & Fukumoto (2009) aboutissent au même taux de croissance¹³. Afin d'estimer le résultat de la compétition entre cette instabilité et l'instabilité elliptique, il semble intéressant de comparer leurs taux de croissance. On considère donc le même écoulement avec des lignes de courant légèrement elliptiques ($\beta \ll 1$). L'effet de la précession dans la limite $\mu \ll 1$ est alors d'ordre $\beta\mu^2$ et le ratio Υ des taux de croissance pour un tel écoulement est donc

$$\Upsilon = \frac{\frac{5\sqrt{15}}{32} \mu}{\frac{9}{16} \beta} = \frac{5\sqrt{15}}{18} \frac{\mu}{\beta} \approx \frac{\mu}{\beta}. \quad (2.74)$$

Ainsi, pour $\Upsilon \ll 1$, on s'attend à observer l'instabilité elliptique, et pour $\Upsilon \gg 1$, on s'attend à observer l'instabilité inertielle de précession. Dans le cas par exemple de l'ellipsoïde triaxial étudié en section 2.5.3, il est possible de tracer Υ en fonction de la vitesse de précession. Pour ce faire, on considère l'écoulement de Poincaré dans un tel ellipsoïde, et on en déduit l'ellipticité des lignes de courant ainsi que le cisaillement induit par l'inclinaison du mode de Poincaré dans un tel conteneur. La figure 2.26b représente les résultats, confirmant d'une autre façon que l'écoulement oscillant observé est bien dû à l'instabilité elliptique¹⁴.

Notons enfin que les limites $\Upsilon \ll 1$ et $\Upsilon \gg 1$ ont été étudiées par Naing & Fukumoto (2009) par une analyse de stabilité locale de l'écoulement non-confiné $\mathbf{U} = (-(1-\beta)y, (1+\beta)x, -2\mu y)$. Notons que dans le plan xy , les lignes de courant sont elliptiques, avec un grand axe selon x pour $\beta < 0$, et selon y pour $\beta > 0$. Naing & Fukumoto (2009) obtiennent alors le taux de croissance de l'instabilité elliptique pour $\mu \ll 1$:

$$\sigma = \frac{9}{16} \beta \left[1 - \frac{2}{3} \beta - \frac{3}{32} \mu^2 \right]. \quad (2.75)$$

La correction au taux de croissance $\sigma/\beta = 9/16$ montre que la présence de la force de Coriolis considérée par Naing & Fukumoto (2009) est toujours stabilisante, contrairement

13. Naing & Fukumoto (2009) l'appellent instabilité de Coriolis ou instabilité précessionnelle.

14. En réalité, la forme de l'écoulement obtenu ne laisse pas de doute à ce sujet.

au cas où elle est aligné avec l'axe de rotation (voir section 2.3.2). Dans la limite $\Upsilon \gg 1$, le taux de croissance de l'instabilité inertielle de précession est donné par :

$$\sigma = \frac{5\sqrt{15}}{32} \mu \left[1 + \frac{669}{640} \beta \right]. \quad (2.76)$$

Cette correction montre que l'ellipticité des lignes de courant stabilise l'instabilité lorsque l'axe de précession est aligné avec le grand axe ($\beta < 0$) tandis que l'ellipticité est déstabilisante si l'axe de précession est aligné avec le petit axe ($\beta > 0$).

La reconsidération de ces résultats est en cours, à la fois théoriquement et numériquement, notamment afin de quantifier l'interaction entre instabilité de précession et instabilité elliptique. En effet, la compétition entre ces deux instabilités n'a jamais été vraiment étudiée alors même qu'elles sont toutes deux susceptibles d'être excitées au sein des noyaux liquides planétaires (voir Wicht & Tilgner, 2010, pour une présentation récente de leurs pertinences respectives en géophysique).

2.6 Instabilité thermo-elliptique

Jusqu'ici, les études portant sur l'instabilité elliptique considéraient un fluide isotherme en rotation, éventuellement soumis à une turbulence homogène isotrope (Fabijonas & Holm, 2003, 2004a). Pourtant, dans tous les systèmes naturels, la température joue un rôle important, créant soit une stratification, soit de la convection thermique. Il est donc nécessaire de reprendre les études précédentes afin de quantifier l'influence d'un champ thermique sur l'instabilité elliptique : si, en effet, la convection thermique s'avérait empêcher sa croissance, sa pertinence dans un contexte géophysique serait clairement discutable. D'un autre côté, du point de vue thermique, de nombreuses études ont été menées sur la convection thermique en géométrie sphérique (voir par exemple Aurnou, 2007, et les références citées). Cependant, puisque la plupart des corps astrophysiques sont déformés par des forces de marées, ces études doivent être reprises pour tenir compte d'une éventuelle présence de l'instabilité elliptique. Notons que le lien entre résonance d'ondes gravito-inertielles induites par les forces de marées et champ thermique a été proposé dans une étude géophysique peu connue de Kumazawa *et al.* (1994). Cependant, cette étude considère le forçage résonant d'une onde donnée par les marées, ce qui est différent de l'instabilité elliptique, basée sur une résonance paramétrique d'ondes. Jusqu'ici, le seul travail combinant effets thermiques et instabilité elliptique était l'étude théorique de Le Bars & Le Dizès (2006), qui ont considéré l'influence d'un profil de température diffusif sur l'instabilité elliptique. Dans leur travail, l'instabilité elliptique est interprétée comme la résonance d'ondes gravito-inertielles et son taux de croissance déterminé dans le cas particulier d'une gravité créée par force centrifuge. Afin de compléter ces travaux, nous avons pour objectif de répondre aux questions suivantes : (i) Quelle est l'influence d'une différence de température imposée en géométrie ellipsoïdale sur le taux de croissance de l'instabilité elliptique, et donc en particulier le seuil de l'instabilité ? (ii) Est-il possible d'exciter une instabilité elliptique sur un écoulement de convection thermique ? (iii) Quelle est l'influence d'une instabilité elliptique sur le flux de chaleur et quelles sont les lois d'échelle impliquées ? Notons qu'en complément à notre étude numérique, une étude parallèle de Lavorel & Le Bars (2010) considère le problème du point de vue expérimental.

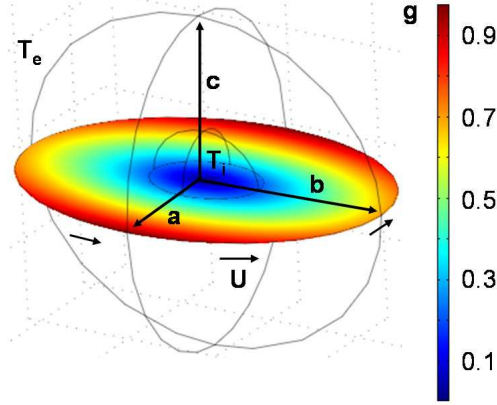


FIGURE 2.27 – Schéma du problème considéré. Le champ de gravité, représenté ici dans le plan équatorial, est calculé explicitement, supposant que la paroi externe est une équipotentielle de gravité $\phi = 0$.

2.6.1 Définition du problème et nombres adimensionnels

Comme indiqué en figure 2.27, le modèle numérique de la section 2.3 est repris avec une coquille ellipsoïdale d'axes (a, b, c) , au lieu d'un simple ellipsoïde, avec une vitesse tangentielle $U\sqrt{1 - (z/c)^2}$ imposée à la paroi externe dans chaque plan de coordonnées $z = \text{cte}$ perpendiculaire à l'axe de rotation (Oz), où U est la vitesse imposée à la paroi dans le plan équatorial. Un ellipsoïde homothétique, d'un rapport d'aspect $\eta = 0.3$, est placé au centre de l'ellipsoïde externe, et une vitesse constante tangentielle $\eta U\sqrt{1 - (z/c)^2}$ est imposée sur sa paroi. Le rayon moyen $R_{eq} = (a + b)/2$ est choisi comme échelle de longueur, et l'échelle de temps Ω^{-1} est définie en écrivant la vitesse tangentielle à la paroi $U = \Omega R_{eq}$. Le problème hydrodynamique est donc décrit par quatre nombres sans dimension : l'ellipticité $\beta = (b^2 - a^2)/(a^2 + b^2)$, le rapport d'aspect de la coquille η (i.e. le rapport homothétique de la paroi interne à la paroi externe), l'aplatissement c/b et le nombre d'Ekman $E_k = \nu/(\Omega R_{eq})$, où ν est la viscosité cinématique. Dans les simulations considérées dans cette section, l'axe polaire c est fixé à $R_{eq} = (a + b)/2$, de même que dans les expériences de Lacaze *et al.* (2005b), ce qui permet d'exciter le mode spin-over.

En plus de ces considérations purement hydrodynamique, l'équation de température est également résolue, avec des températures constantes uniformes T_i et T_e imposées respectivement sur les parois internes et externes. La force de flottabilité est modélisée sous l'approximation de Boussinesq¹⁵ (avec une densité linéaire en température). La force de gravité dans les équations de Navier-Stokes s'écrit donc $\rho \mathbf{g}_* = \rho(T_e) [1 - \alpha(T_* - T_e)] \mathbf{g}_*$, où ρ est la densité du fluide, α le coefficient volumique de dilatation thermique, \mathbf{g}_* la gravité locale, qui dépend de la position, et T_* la température locale. Dans ce modèle, la gravité est calculée en résolvant l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel ϕ , la paroi

15. Voir e.g. Anufriev *et al.* (2005) pour une discussion sur la légitimité de cette approximation en géophysique, en particulier pour le noyau terrestre.

externe correspondant à une équipotentielle¹⁶. Ainsi, les aspects thermiques du problème sont caractérisés par deux nombres adimensionnels : le nombre de Prandtl $Pr = \nu/\kappa$, où κ est la diffusivité thermique, et le nombre de Rayleigh $Ra = (\alpha g_0 (T_i - T_e) d^3)/(\kappa \nu)$, où $d = R_{eq}(1 - \eta)$ est l'épaisseur de la coquille et g_0 la gravité à la surface de la paroi externe de la sphère correspondante, i.e. $g_0 = 4/3 \pi G R_{eq} \rho(T_e)$ avec G la constante de gravitation. Notons que la viscosité cinématique du fluide est supposée indépendante de la température dans cette étude.

Finalement, le problème résolu est décrit par le système d'équations sans dimension suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E_k \Delta \mathbf{u} - \frac{Ra E_k^2}{Pr (1 - \eta)^3} T \mathbf{g}, \quad (2.77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{E_k}{Pr} \Delta T, \quad (2.79)$$

$$\Delta \phi = 3, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{g} = -\nabla \phi, \quad (2.81)$$

où T est l'anomalie (adimensionnelle) de température $T = (T_* - T_e)/(T_i - T_e)$. Toutes les conditions aux limites sont données ci-dessus. Un tel modèle numérique correspond par exemple à un noyau planétaire liquide, avec une graine interne et une différence de température imposée aux frontières. Notons que dans un contexte géophysique, du fait de la compressibilité, la différence de température $\Delta T = T_i - T_e$ à considérer est l'écart à l'adiabat entre la graine interne et la paroi noyau-manteau (CMB). Tous les nombres adimensionnels, leurs valeurs dans cette étude, et les valeurs typiques pour les noyaux de la Terre et de Io sont donnés dans la table 2.1.

Toutes les simulations de cette section sont menées selon la même procédure : partant d'un fluide au repos dans une coquille sphérique de rayon R_{eq} avec un profil initial de température diffusif, la coquille est mise en rotation à vitesse angulaire constante Ω . Une fois l'écoulement établi par résolution des équations ci-dessus, la coquille est déformée en une coquille ellipsoïdale de façon instantanée, et la simulation se poursuit. Cette déformation instantanée permet d'étudier le taux de croissance de l'instabilité elliptique sur un état de base conductif ou convectif connu. Notons qu'ont également été menées des simulations avec un changement graduel de déformation, ainsi que des simulations partant directement d'une coquille ellipsoïdale afin de vérifier que l'état final n'était pas modifié par la procédure.

Deux quantités ont été systématiquement étudiées : (i) le taux de croissance σ de l'instabilité, qui permet ici de quantifier la rétroaction du champ de température sur l'instabilité elliptique, et (ii) le nombre de Nusselt Nu , qui quantifie la rétroaction de l'instabilité elliptique sur les propriétés thermiques du système. Puisque l'instabilité elliptique correspond à une forte déstabilisation tridimensionnelle de l'écoulement initial, σ est déterminé en mesurant la constante de temps de la croissance exponentielle de la valeur moyenne de la vitesse verticale en valeur absolue $W = \frac{1}{V} \int_V |w| d\tau$, où w est la

16. Notons que l'étude avec une gravité purement radiale a également été menée mais n'est pas présentée ici car des instabilités baroclines apparaissent alors, parasitant l'étude de l'instabilité elliptique.

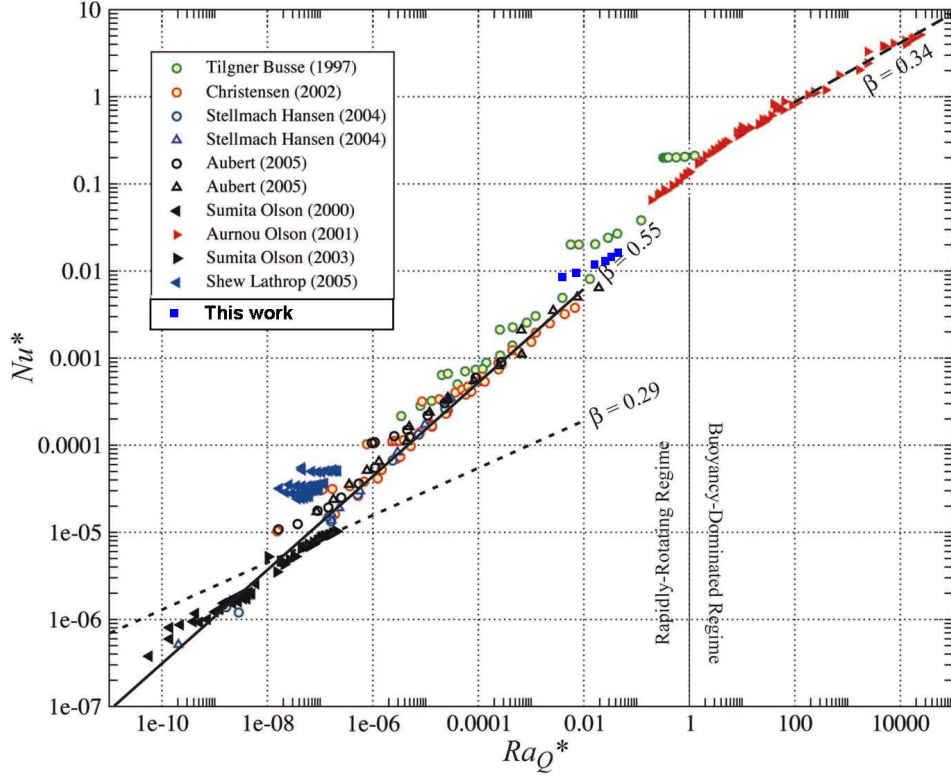


FIGURE 2.28 – Évolution du nombre de Nusselt modifié dans le cas d'une coquille en rotation ($\beta = 0$) pour $Pr = 1$ et $\eta = 0.3$. Comparaison pour $E_k = 1/344$ avec la compilation de résultats numériques et expérimentaux de Aurnou (2007).

vitesse verticale adimensionnelle, et V le volume de la coquille ellipsoïdale. Le nombre de Nusselt est calculé en divisant le flux de chaleur moyen à la paroi externe (une fois le régime établi) par la valeur théorique du flux conductif dans une sphère de rayon R_{eq} . La différence entre ce flux analytique et le flux calculé numériquement pour un ellipsoïde purement conductif est inférieure à 2% pour l'ensemble des simulations présentées.

Les aspects purement hydrodynamiques de ces simulations ont déjà été validés en section 2.3. Une validation complémentaire de la résolution des effets thermiques a été menée en calculant le flux thermique dans une coquille parfaitement sphérique en rotation : en figure 2.28, les résultats à $E = 1/344$ sont comparés à la compilation de résultats donnée par Aurnou (2007) pour le nombre de Nusselt modifié $Nu^* = \frac{Nu E}{Pr}$, où $E = \frac{\nu}{\Omega d^2}$ est le nombre d'Ekman basé sur l'épaisseur de la coquille i.e. $E = (1 - \eta)^{-2} E_k$. Notons que ces simulations se positionnent à un endroit où peu de données étaient disponibles, et sont en accord avec la tendance générale. De plus, ces résultats ont été comparés avec succès à la loi d'échelle proposée par Christensen (2002), obtenue à partir de simulations numériques :

$$Nu^* = 0.077 (Ra_Q^*)^{5/9} \quad (2.82)$$

TABLE 2.1 – Paramètres adimensionnels et leur valeurs dans les simulations numériques présentées. Des estimations, obtenues à partir de la littérature, pour le noyau liquide de la Terre et de Io sont également données.

Definition	Valeurs considérées	Noyaux liquides : Terre & Io
$\beta = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$	0 – 0.32	10^{-7} – 10^{-4}
η	0 – 0.3	0.35 – ?
c/b	0.86 – 1	997/100 – 995/100
E_k	≥ 0.001	10^{-15} – 10^{-13}
$E = (1 - \eta)^{-2} E_k$	≥ 0.002	10^{-15} – 10^{-13}
$Pr = \nu/\kappa$	1	0.25 – 0.25
$Ra = \frac{\alpha g_0 (T_i - T_e) d^3}{\kappa \nu}$	$-3.8 \cdot 10^5$ – 10^6	10^{23} – ?
$Ra_Q^* = Ra Nu E^3 / Pr^2$	$-2.6 \cdot 10^{-5}$ – 0.24	10^{-13} – ?
$Nu = Q_{total} / Q_{conduction}$	1 – 5.6	10^6 – ?
$Nu^* = \frac{Nu E}{Pr}$	≥ 0.002	10^{-8} – ?
$Ro = \frac{\sqrt{\frac{1}{V} \int U^2 d\tau}}{\Omega R_{eq}^2}$	0 – 0.4	10^{-6} – ?

où $Ra_Q^* = Ra Nu E^3 / Pr^2$ est le nombre de Rayleigh basé sur le flux de chaleur au lieu de la différence de température, et qui ne prend pas en compte les effets visqueux ou de diffusion thermique. Un excellent accord est obtenu, validant ainsi le modèle numérique.

2.6.2 Etude théorique et numérique

Dans leur analyse WKB de stabilité linéaire, Le Bars & Le Dizès (2006) considèrent des lignes de courant elliptiques en présence d'un champ thermique diffusif, et obtiennent le taux de croissance de l'instabilité elliptique. Ainsi, dans la limite des faibles déformations d'un fluide non-visqueux, le taux de croissance pour des isothermes elliptiques et des équipotentielles de pesanteur circulaires :

$$\sigma = \frac{9 - 3\tilde{Ra}}{16 - 4\tilde{Ra}}\beta, \quad (2.83)$$

où $\tilde{Ra} = \frac{\eta-1}{\ln(\eta)} \frac{Ra E^2}{Pr}$ est un nombre de Rayleigh modifié, supposé d'ordre 1. L'expression (2.83) montre l'influence des effets thermiques sur l'instabilité elliptique, qui correspond ici à une résonance paramétrique de 2 ondes gravito-inertielles avec la déformation de marées. Le Bars & Le Dizès (2006) montrent également que l'instabilité elliptique ne peut pousser pour $\tilde{Ra} > 3$ car aucune résonance n'est alors possible. Comme le montre la figure 2.30a, la même tendance avec le nombre de Rayleigh est retrouvée dans une coquille sphérique, même si les résultats diffèrent de cette estimation théorique locale.

Comme le montre la figure 2.30a, un premier résultat remarquable des simulations numériques est l'augmentation du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec la stratification thermique (i.e. $Ra < 0$). Il peut sembler surprenant qu'un effet a priori stabilisant comme la stratification favorise la déstabilisation de l'écoulement, mais un tel

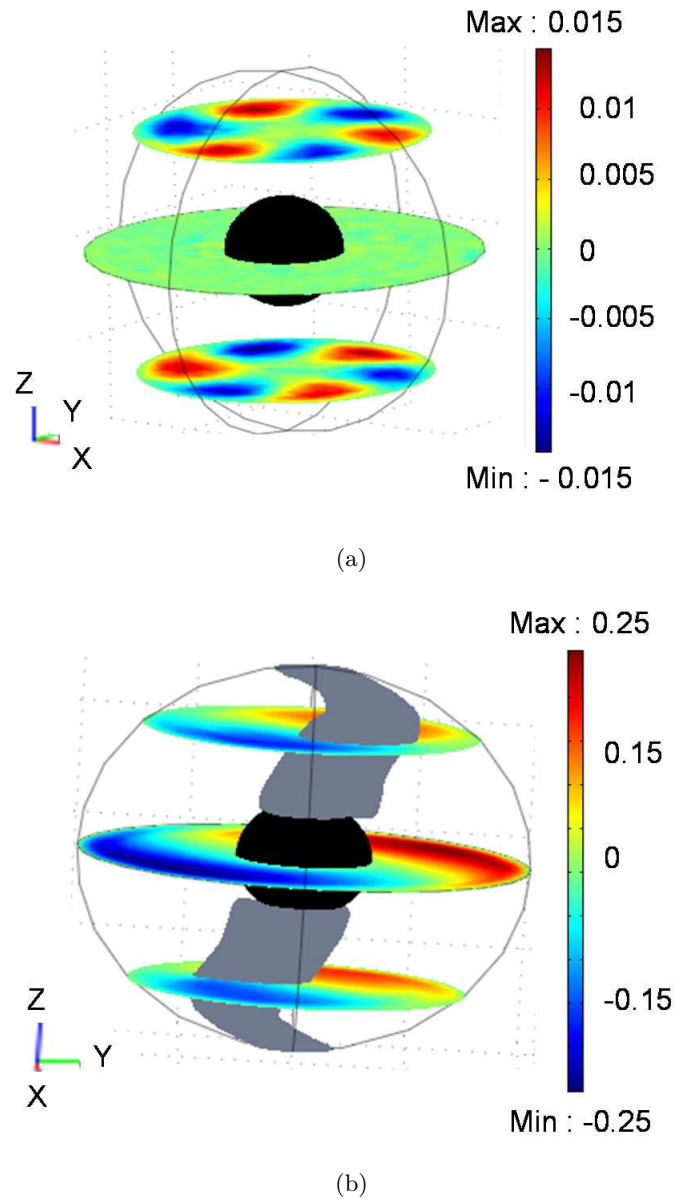
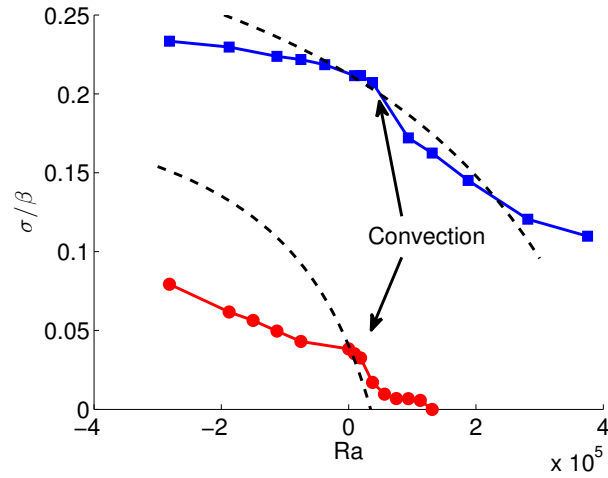


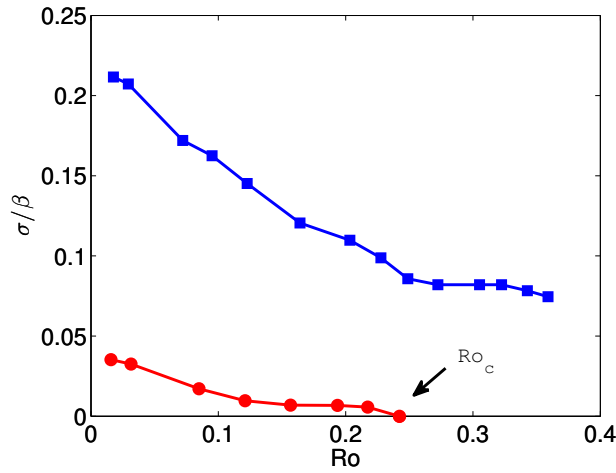
FIGURE 2.29 – Comparaison entre l'écoulement convectif en l'absence d'instabilité elliptique (a , $\beta = 0$), et en présence de l'instabilité elliptique (b , $\beta = 0.317$) pour les mêmes valeurs de nombre d'Ekman $E_k = 1/344$, nombre de Rayleigh $Ra = 18762$ et nombre de Prandtl $Pr = 1$. La vitesse verticale est montrée dans trois plans différents. En figure (b) est également représentée une isosurface de norme de la vitesse $\|\mathbf{u}\| = 0.19$, montrant clairement la forme de 'S' du mode de spin-over.

phénomène a déjà été observé. Ainsi, un écoulement stable de Taylor-Couette peut être déstabilisé par une stratification axiale, menant à l'instabilité dite strato-rotationnelle (voir par exemple les expériences de Le Bars & Le Gal, 2007). Un second résultat, important dans un contexte géophysique, est la possibilité pour l'instabilité elliptique de pousser sur un écoulement convectif établi. Comme le montre la figure 2.29, l'écoulement s'organise alors complètement différemment. En effet, en l'absence d'instabilité elliptique, l'écoulement de convection dans une sphère en rotation rapide s'organise usuellement en colonnes, dites de Busse (fig. 2.29a) ; l'écoulement est principalement 2D, avec une faible vitesse verticale provenant uniquement du pompage d'Ekman au sein des colonnes. La figure 2.29b montre que ces colonnes de Busse sont détruites par la croissance de l'instabilité elliptique dont le champ de vitesses est complètement tridimensionnel. La figure 2.30a montre que le taux de croissance σ de l'instabilité elliptique décroît progressivement lorsque le nombre de Rayleigh est augmenté. En effet, la convection thermique peut être vue comme une perturbation de l'écoulement qui se superpose à l'écoulement de base isotherme de l'instabilité elliptique (i.e. une rotation le long de lignes de courant elliptiques) : quand le nombre de Rayleigh est augmenté, la vitesse convective typique augmente et l'ellipticité de l'écoulement de base est de moins en moins ressentie par les particules fluides, qui ont de plus en plus tendance à suivre le forçage de convection. Cette idée peut être quantifiée avec le nombre de Rossby, rapport entre la moyenne quadratique (ou 'valeur rms') de la vitesse convective et la vitesse de rotation typique ΩR_{eq} : $Ro = \sqrt{\frac{1}{V} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV}$, où \mathbf{u} est la vitesse adimensionnelle dans le référentiel tournant. L'instabilité elliptique devrait alors disparaître pour un nombre de Rossby de l'ordre de 1. Comme l'indique la figure 2.30b, si l'on considère un écoulement légèrement au-dessus du seuil de l'instabilité elliptique (paramètres : $Pr = 1$ et $E_k = 1/344$), le nombre de Rossby critique, défini par un taux de croissance nul, est en effet trouvé autour de $Ro \approx 0.25$. Cependant, à plus haut Reynolds, plus loin du seuil donc, le nombre de Rossby critique semble augmenter (cf. fig. 2.30a pour $E_k = 1/688$), si toutefois il existe. En effet, quand le nombre de Rayleigh augmente, la vitesse convective typique augmente aussi tandis que l'échelle spatiale typique liée à la convection L_{conv} décroît simultanément. Dans la limite des forts nombres de Rayleigh, L_{conv} est très petit et les mouvements turbulents deviennent complètement 3D. Les mouvements convectifs peuvent alors être vus comme une viscosité turbulente, ce qui devrait favoriser la croissance de l'instabilité elliptique selon Fabijonas & Holm (2003). L'étude systématique de ce régime serait très intéressante, mais reste hors de portée de nos moyens de calcul. Néanmoins, nos résultats permettent d'utiliser le nombre de Rossby critique $Ro_c = 0.25$, déterminé pour $E_k = 1/344$, comme borne inférieure pour des nombres d'Ekman inférieurs. Ce résultat est suffisant pour nos applications planétaires et stellaires, comme nous le verrons plus loin.

Quand les instabilités elliptique et thermique sont simultanément présentes, les transferts de chaleurs sont déterminés par la compétition entre la convection thermique naturelle et la convection forcée engendrée par l'instabilité elliptique. Dans ce dernier cas, l'écoulement associé à l'instabilité peut être décomposé en trois zones distinctes : un intérieur homogène, brassé et isotherme, et deux couches visqueuses d'Ekman proches des parois (externe et interne) où les variations de température sont purement diffusives. Le flux de chaleur advecté par l'instabilité est alors déterminé par la taille de la couche



(a)



(b)

FIGURE 2.30 – (a) Influence du nombre de Rayleigh sur le taux de croissance de l’instabilité elliptique pour $\beta = 0.317$, $c = (a+b)/2$, $Pr = 1$ et $E_k = 1/344$ (ronds rouges), $E_k = 1/688$ (carrés bleus). Le taux de croissance donné par l’équation (2.83) est aussi montré avec un terme d’amortissement visqueux surfacique $-K E_k^{1/2}$, où K est une constante de l’ordre de 1 (Lacaze et al., 2005b). La valeur de K est déterminée par comparaison avec la valeur théorique à $Ra = 0$, ce qui donne $K = 3.07$ pour $E_k = 1/344$ (ronds rouges) et $K = 2.91$ pour $E_k = 1/688$ (carrés bleus). (b) Evolution pour $E_k = 1/344$ (ronds rouges) et $E_k = 1/688$ (carrés bleus) du taux de croissance de l’instabilité elliptique avec le nombre de Rossby, calculé selon la loi d’échelle donnée par Christensen & Aubert (2006) $Ro = 0.85 (Ra_Q^*)^{0.41}$. Pour $E_k = 1/344$ (ronds rouges), l’instabilité disparaît pour $Ro \approx 0.25$.

d'Ekman δ_ν , selon $Nu - 1 \sim d/\delta_\nu$. Avec le scaling usuel des couches visqueuses, on obtient $Nu - 1 = \alpha_1/\sqrt{E^*}$, où α_1 est une constante, $E^* = \nu/(u_{ei}d)$ le nombre d'Ekman associé à l'écoulement généré par l'instabilité elliptique, et u_{ei} la vitesse du fluide associée à l'instabilité. Comme on l'a vu en section 2.3.4, cette vitesse u_{ei} peut être estimée numériquement en l'absence de température par soustraction de l'écoulement de base à l'écoulement calculé à saturation. $u_{ei}/(\Omega R)$ est en $\alpha_2 (1 - \eta)^2 \sqrt{E_c/E - 1}$ proche du seuil de l'instabilité, où $\alpha_2 \approx 0.6$ a été obtenu numériquement et où E_c est le nombre d'Ekman critique associé au seuil de l'instabilité. Plus loin du seuil, $u_{ei}/(\Omega R)$ tend à saturer vers 1. Gardant les mêmes lois en présence d'effets thermiques, le nombre de Nusselt près du seuil varie comme

$$Nu - 1 = \alpha_1 \sqrt{\alpha_2} (1 - \eta)^2 (E_c/E - 1)^{1/4} E^{-1/2} . \quad (2.84)$$

Nos résultats numériques, montrés en figure 2.31a, valident cette loi d'échelle avec $\alpha_1 \approx 0.01$ (valeur retrouvée expérimentalement par Lavorel & Le Bars, 2010). Plus loin du seuil, $E^* = E$ et la loi d'échelle s'écrit alors

$$Nu = \alpha_1 / \sqrt{E} . \quad (2.85)$$

Notons que selon ce modèle, le nombre de Nusselt est une mesure de l'amplitude de l'instabilité. L'accord entre nos résultats et la loi d'échelle confirme donc que l'amplitude de l'instabilité n'est pas inhibée par une forte stratification, à condition d'être assez loin du seuil.

Une étude systématique de la variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh est montrée en figure 2.31b. En absence d'instabilité (elliptique ou convective), Nu reste égal à 1 (transfert de chaleur purement diffusif). En présence de l'instabilité elliptique, le flux de chaleur reste constant, supérieur à 1, jusqu'à un nombre de Rayleigh de transition dépendant de E , où la convection naturelle devient plus efficace que la convection forcée. En effet, (2.84) et (2.85) décrivent un flux de chaleur associé à une convection forcée uniquement, et sont donc valides en-dessous du seuil de convection naturelle Ra_c i.e. pour $Ra < Ra_c$. Pour $Ra > Ra_c$, les instabilités convective et elliptique sont en compétition et le flux de chaleur est celui du plus efficace des deux mécanismes (King *et al.*, 2009). Selon les lois d'échelle (2.82) et (2.85), la transition entre la convection forcée et la convection naturelle apparaît pour un nombre de Nusselt de transition $Nu_t^* = NuE/Pr = 0.077 (Ra_Q^*)^{5/9} = \alpha_1 \sqrt{E}/Pr$, ce qui correspond à un nombre de Rayleigh de transition

$$Ra_t \approx 2.5 E^{-8/5} Pr^{1/5} . \quad (2.86)$$

Ainsi, pour $Ra > Ra_t$, le flux de chaleur est contrôlé par les mouvements de convection naturelle, tandis que pour $Ra < Ra_t$, il est contrôlé par l'advection liée à l'instabilité elliptique. En vu de l'application de ces résultats aux planètes, il est intéressant de réécrire ce résultat en terme de *nombre de Rayleigh-flux*, défini par $Ra_f = Ra Nu$, pour lequel la transition apparaît pour

$$Ra_{f_t} \approx 0.025 E^{-21/10} Pr^{1/5} . \quad (2.87)$$

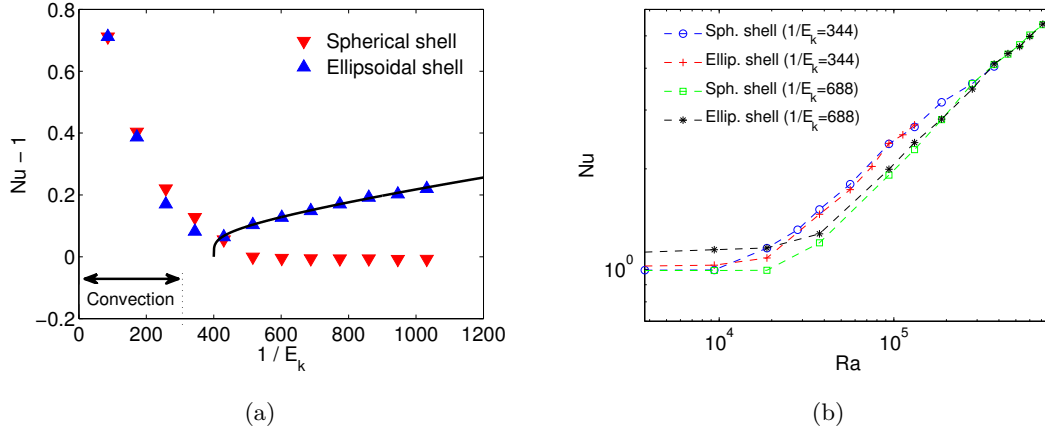


FIGURE 2.31 – (a) Influence de E_k sur Nu pour un écoulement convectif avec $\beta = 0.317$, $c = (a + b)/2$, $Pr = 1$ et $Ra = 18762$. La ligne continue noire représente la loi d'échelle proposée (2.84). (b) Évolution du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh dans des coquilles sphériques et ellipsoïdales ($\beta = 0.317$, $c = (a+b)/2$) pour $Pr = 1$ et $E_k = 1/344$, $E_k = 1/688$. Notons que la dépendance usuelle du Rayleigh critique de convection $Ra_c \propto E_k^{-4/3}$ (voir par exemple Tilgner & Busse, 1997) est visible : la croissance du nombre d'Ekman modifie le seuil et donc, augmente la vigueur de la convection.

2.6.3 Applications planétaires et stellaires

Ainsi que le détaillent Surnita & Yoshida (2003), une stratification stable en densité à travers l'ensemble du noyau externe liquide de la Terre primitive est tout à fait envisageable. Elle aurait même pu être suffisamment importante pour inhiber le démarrage d'une dynamo. Cette stratification initiale doit alors avoir été détruite par un mécanisme qui pourrait être graduel (Lister & Buffett, 1998). Cependant, il pourrait aussi être de type catastrophe, induit par exemple par la nutation trimestrielle forcée (Williams, 1994) ou par un forçage résonant d'ondes gravito-inertielles (Kumazawa *et al.*, 1994). Notre travail propose un mécanisme alternatif basé sur une résonance triadique d'ondes plutôt que sur une résonance directe d'onde. En effet, nous avons montré que la stratification favorisait la résonance triadique de l'instabilité elliptique.

Il est également possible de s'interroger sur la pertinence d'une instabilité elliptique pour le noyau terrestre actuel. Afin d'estimer les ordres de grandeurs en jeu, appliquons les lois d'échelles obtenues en section 2.6.2 au noyau terrestre actuel, dont les mouvements sont générés par la convection. Selon Christensen & Aubert (2006), les valeurs typiques sont $E \approx 5 \cdot 10^{-15}$, $Ra_Q^* \approx 3 \cdot 10^{-13}$ et $Ra_f \approx 10^{29}$ pour $Pr = 0.25$. Une première conséquence immédiate est que $Ro \sim 10^{-6}$ selon la loi d'échelle $Ro = 0.85(Ra_Q^*)^{0.41}$ donnée par Christensen & Aubert (2006). Ainsi, Ro est clairement plus petit que la borne inférieure $Ro_c \approx 0.25$ de disparition de l'instabilité (cf. section 2.6.2) : la convection n'empêche pas le développement de l'instabilité elliptique. De plus, la loi d'échelle (2.87)

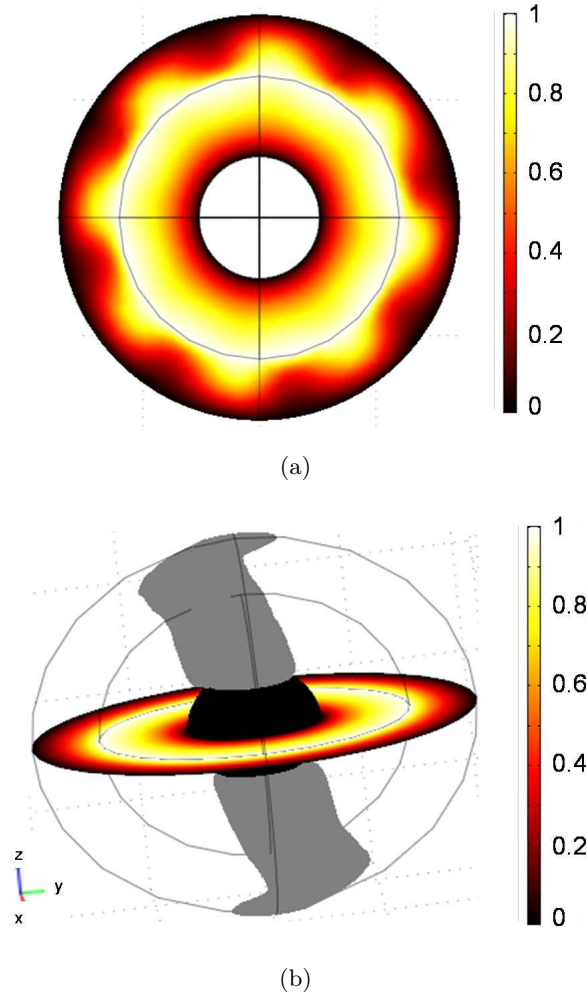


FIGURE 2.32 – Visualisation de la température réduite T dans le cas d'une couche stratifiée sous-jacente à une zone convective ($E_k = 1/344$, $c = (a + b)/2$). Les frontières interne et externe vérifient $T = 0$ et une température $T = 1$ est imposée sur un ellipsoïde de rapport $\eta_2 = 0.7$, de sorte que le nombre de Rayleigh basé sur l'épaisseur de la coquille est $Ra = 18762$, tandis que le nombre de Rayleigh basé sur η_2 est égal à $Ra_2 = Ra (1 - \eta_2)^3 / (1 - \eta)^3 \approx 1512$. (a) Température dans le plan équatorial pour une coquille sphérique de rayon $R_{eq} = c$. (b) Température dans le plan équatorial et iso-surface $\|\mathbf{u}\| = 0.19$ à saturation de l'instabilité elliptique pour la coquille ellipsoïdale correspondante, pour $\beta = 0.317$.

permet d'estimer le nombre de Rayleigh de transition à $Ra_{f_t} \sim 2 \times 10^{28}$. Le noyau terrestre est donc juste au-dessus de la transition entre les deux types de convection vus en section 2.6.2, et le flux de chaleur est contrôlé par la convection naturelle. Cependant, le nombre de Rayleigh de transition est très proche du nombre de Rayleigh actuel. Ainsi, un régime où le flux de chaleur est contrôlé par les marées n'est pas exclu, à d'autres époques ou dans d'autres systèmes planétaires, et dans tous les cas, cette proximité des estimations montre la pertinence de l'instabilité elliptique comme processus majeur à l'oeuvre dans les noyaux planétaires.

Pour finir, de nombreux auteurs supposent qu'une fine couche, appelée *océan du noyau*, en surface du noyau externe, est stratifiée stable : voir e.g Stanley & Mohammadi (2008) pour une revue récente de la littérature sur le sujet. En fait, comme le décrit ce travail, de nombreux indices montrent qu'une telle couche stratifiée stable serait présente dans les régions conductrices d'électricité de plusieurs planètes. La situation est contraire, mais dynamiquement similaire, au sein des étoiles peu massives (typiquement de masse inférieure à deux masses solaires) : sous la photosphère existe une zone convective, sus-jacente d'une zone stratifiée appelée zone radiative. Se posent alors les questions suivantes : une telle configuration bi-couche permet-elle à l'instabilité elliptique de pousser ? Dans quelle zone, i.e. sur la zone stratifiée, sur la zone convective ou sur les deux ? Le flux de chaleur est-il complètement modifié par l'instabilité ? Une unique simulation est présentée en figure 2.32, illustrant notre réponse. Dans cette simulation, la même température $T = 0$ est imposée aux frontières, et une température $T = 1$ est imposée sur une frontière interne neutre correspondant à un ellipsoïde homothétique de ratio $\eta_2 = 0.7$: cela permet d'obtenir une couche interne stratifiée stable et une couche externe convective, avec des cellules de convection clairement visibles (fig. 2.32a). Une fois l'instabilité elliptique excitée, la figure 2.32b montre que l'instabilité pousse sur l'ensemble des couches, et contrôle le flux de chaleur. Ainsi, en présence de l'instabilité elliptique, une stratification thermique (i.e. un profil de température subadiabatique) n'est plus synonyme d'isolation thermique.

2.7 Synthèse du chapitre 2 et publications

Cette section a tout d'abord présenté les premières études numériques de l'instabilité elliptique au sein d'un ellipsoïde. L'approche numérique a permis de compléter les résultats précédents, en particulier sur les effets présents dans un contexte planétaire tels que l'influence de l'aplatissement, de l'ajout d'une force de Coriolis, de l'obliquité ou de la présence d'une graine interne solide. Elle a également permis de valider des lois d'échelles sur l'amplitude de l'écoulement associé à l'instabilité et la puissance dissipée par viscosité. L'ensemble de ce travail a fait l'objet d'une publication dans *Physics of the Earth and Planetary Interiors* (Cébron *et al.*, 2010a).

Dans un second temps, l'interaction de l'instabilité elliptique avec les autres forçages mécaniques systématiquement présents dans un contexte naturel, i.e. la libration et la précession, a été étudiée. Concernant la libration, la prédiction théorique de Kerswell & Malkus (1998) a été confirmée : il est possible d'exciter une instabilité elliptique par une oscillation de la rotation différentielle entre le fluide et la déformation. Afin de distinguer cette forme d'instabilité elliptique du cas usuel où la rotation différentielle est constante, nous les nommons respectivement LDEI (Libration Driven Elliptical Instability) et TDEI (Tide Driven Elliptical Instability). Une analyse théorique de stabilité fournit une formule analytique pour le seuil de l'instabilité, dont la validité est confirmée par les simulations. Ce travail, qui a complété les mesures expérimentales menées par J. Noir et J. Aurnou, a fait l'objet d'une soumission commune à *Physics of the Earth and Planetary Interiors*.

L'interaction de l'instabilité elliptique avec la précession a également été étudiée. Tout d'abord, une solution analytique de l'écoulement de base dans un ellipsoïde triaxial en précession a été obtenue. La simulation numérique du problème valide cette solution sur une large gamme de vitesse de précession. Une étude théorique de stabilité montre que l'instabilité elliptique est encore susceptible d'être excitée dans une telle configuration, ce que confirment les simulations. Un tel écoulement mène ainsi à une compétition entre l'instabilité elliptique et l'instabilité de précession, ce qui reste encore un problème ouvert. Cette étude a été menée en collaboration avec P. Meunier et a fait l'objet d'une publication dans *Physics of Fluids* (Cébron *et al.*, 2010b).

La section se termine en considérant l'interaction de l'instabilité elliptique et d'un champ thermique. En particulier, nous avons montré que l'instabilité elliptique était favorisée par une stratification radiale en géométrie ellipsoïdale, et qu'elle était capable de croître sur des mouvements convectifs, prenant la place des colonnes de Busse usuelles. Enfin, une étude systématique du flux de chaleur montre que ce dernier peut être contrôlé par l'instabilité elliptique plutôt que par la convection naturelle. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans *Geophysical Journal International* (Cébron *et al.*, 2010c).

Chapitre 3

Instabilité magnéto-elliptique

Sommaire

3.1	Introduction	99
3.2	Équations de la magnétohydrodynamique	102
3.3	Modèle numérique	108
3.4	Validations du modèle	112
3.5	Application à l'instabilité elliptique MHD	118
3.6	Expériences d'induction dans un cylindre	129
3.7	Dynamo synthétique expérimentale	137
3.8	Synthèse du chapitre 3 et publications	143

La plupart des objets astrophysiques (planètes, étoiles, galaxies...) ont un champ magnétique, généré soit par induction d'un champ externe, soit par mécanisme auto-entretenu, dit de dynamo. Jusqu'à présent, l'effet dynamo n'a été prouvé que pour deux forçages naturels : la *convection thermo-solutale* (Glatzmaier & Roberts, 1995b), hypothèse retenue dans la plupart des cas, et la *précession* (Tilgner, 2005), un forçage purement mécanique qui pourrait exciter une dynamo dans certaines planètes ou lunes (Malkus, 1968) en dépit d'une célèbre controverse sur sa viabilité énergétique. En effet, cette hypothèse a été sévèrement critiquée dans les années 70 par Rochester *et al.* (1975) et Loper (1975) qui montrent qu'un écoulement de précession laminaire au sein du noyau terrestre dissiperait environ $O(10^7)$ W, ce qui est négligeable devant la puissance nécessaire pour maintenir la géodynamo, estimée à $10^{10}/10^{11}$ W. Plus tard, l'étude de Kerswell (1996) sur la puissance dissipée par un écoulement de précession turbulent lui permet d'établir qu'il est possible qu'un tel écoulement dissipe jusqu'à 10^{14} fois plus que l'écoulement laminaire. Kerswell conclut alors qu'il n'est en fait pas possible d'écarter la possibilité d'une telle dynamo sur des arguments purement énergétiques, comme l'avaient déjà remarqué Roberts & Gubbins (1987). Cependant, par défaut, la présence d'un champ magnétique sur un astre est généralement associé à la présence de convection thermo-solutale dans une couche fluide de l'astre. Ainsi, le champ magnétique terrestre est très probablement généré par les mouvements de convection thermo-solutale au sein du noyau conducteur liquide. Cependant, l'origine du champ magnétique sur la Terre primitive, la Lune, Ganymède

ou Mars est plus incertaine et motive l'étude de mécanismes dynamos alternatifs (Jones, 2003, 2011). La découverte récente de renversements rapides du champ magnétique sur l'étoile extra-solaire Tau-boo est également surprenante (Donati *et al.*, 2008; Fares *et al.*, 2009), et il a été suggéré un lien entre ces renversements et les effets de marées importants dus à la présence d'une planète très massive orbitant à très courte distance de Tau-boo (Fares *et al.*, 2009, 2010), ce qui mène également à réévaluer le modèle classique de dynamo convective. En effet, même si la dynamo est d'origine convective, le rôle des autres mécanismes de forçage peut être très important pour l'organisation de l'écoulement, et donc son efficacité dynamo.

Outre la convection et la précession, deux forçages mécaniques naturels ont également été proposés comme ingrédients importants pour les écoulements dans les noyaux, donc pour les champs magnétiques planétaires : la libration et les marées (e.g. Malkus, 1989). En effet, comme nous l'avons vu en section 2, ces deux forçages sont capables, via l'instabilité elliptique, de puiser de l'énergie dans le mouvement de rotation de la planète pour créer des mouvements tridimensionnels complexes. Jusqu'à présent, les simulations magnétohydrodynamiques de dynamos planétaires ou stellaires ont été menées en géométrie sphérique, ou plus récemment sphéroïdale, ce qui facilite et accélère le calcul, mais interdit le développement d'instabilité elliptique. Du fait des faibles déformations de marées, cette approximation a longtemps été adoptée. Cependant, l'instabilité elliptique est une instabilité paramétrique, et même une déformation infinitésimale peut mener à une modification de premier ordre de l'écoulement. Afin d'étudier ses conséquences MHD, nous avons donc développé les premières simulations numériques MHD dans un ellipsoïde fluide triaxial.

En section 3.1, après avoir introduit l'effet dynamo et son lien historique avec le champ magnétique terrestre, l'état de l'art est rapidement décrit. En section 3.2, les équations régissant la magnétohydrodynamique sont rappelées. Le modèle numérique est ensuite décrit en section 3.3, validé en section 3.4 puis utilisé en section 3.5 pour étudier la magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique. En section 3.6, une étude expérimentale MHD menée en collaboration avec W. Herreman est présentée. Cette étude en géométrie cylindrique permet notamment d'observer l'interaction d'un champ magnétique imposé avec la dynamique non-linéaire de l'instabilité elliptique en régime turbulent. Enfin, en section 3.7, un travail expérimental développé avec G. Verhille sur la dynamo synthétique d'instabilité elliptique est décrit et les premiers résultats obtenus analysés.

3.1 Introduction

3.1.1 Le champ magnétique terrestre et l'effet dynamo

Bien que les aimants soient connus depuis l'Antiquité, les premiers à les utiliser pour s'orienter sont les chinois, vers l'an 1000-1100 (Shu-hua, 1954; Needham & Lu, 1985). Le premier lien historique entre les aimants et l'existence d'un champ magnétique terrestre global n'apparaît que plusieurs siècles plus tard, en 1600, date à laquelle William Gilbert¹ publie *de Magna Magnete Tellure* (Du Grand Aimant de la Terre). Ce dernier propose d'assimiler la Terre à un aimant, expliquant ainsi le comportement des boussoles, que l'on pensait jusqu'alors attirées par l'étoile polaire ou par une grande île magnétique au pôle nord. Un siècle plus tard, Haley réalise les premières cartes du champ magnétique terrestre, montrant ainsi qu'il est principalement dipolaire comme les aimants. Enfin, Gauss prouve en 1839 que la source du champ magnétique terrestre se trouve à l'intérieur de la Terre, apportant une dernière confirmation à l'hypothèse de William Gilbert. Cependant, les travaux de Curie, au début du XX^{ème} siècle montrent qu'aucun aimant permanent ne peut exister aux températures et pressions du centre de la Terre : il faut donc trouver une autre explication. Une autre hypothèse, proposée par H. Lamb au XIX^{ème} siècle, suppose que des courants électriques, créés lors de la formation de la Terre, existent encore dans la Terre et créent le champ magnétique par induction. En effet, il est connu depuis les travaux d'Oersted en 1820 qu'un courant électrique crée un champ magnétique (De Vuyt, 1965). Supposant une conductivité électrique égale à celle du cuivre, Lamb (1883) montre que ces courants diminuent lentement par effet Joule, atteignant 37% de leur valeur initiale au bout de 10^5 ans. Or les études paléomagnétiques montrent que le champ magnétique existe depuis au moins 3 milliards d'années, voire 3,45 milliards d'années selon des travaux récents (Tarduno *et al.*, 2007, 2010). Le champ magnétique terrestre ne peut donc pas être une relique du passé et un mécanisme générateur de champ magnétique doit donc être trouvé. Ces études paléomagnétiques montrent également que l'orientation du champ magnétique terrestre s'est inversé dans le passé. En effet, Bernard Brunhes, directeur de l'observatoire du Puy de Dôme, découvre en 1905 que certaines roches mémorisant la direction du champ magnétique de la Terre indiquent clairement qu'autrefois une boussole aurait pointé non pas vers le Nord mais vers le Sud. A la même époque, le japonais Matuyama date diverses coulées de laves et conclut à l'existence d'inversions multiples à travers les temps géologiques. Leurs conclusions tombent dans l'oubli mais, à partir des années 50, et surtout suite à la publication retentissante de Vine & Matthews (1963), l'existence de séries d'inversions globales de l'orientation du champ magnétique terrestre s'est non seulement imposée mais s'est trouvée être au cœur de la confirmation de la théorie de la dérive des continents de Wegener. En effet, ces études mettent en évidence le phénomène de dérive des continents à partir de l'étude de la variation du champ magnétique terrestre enregistrée dans le plancher océanique, perpendiculairement à la dorsale (fig. 3.1). Ces mêmes études montrent que l'orientation du champ magnétique change de sens de manière chaotique, avec un temps moyen d'attente de 250 000 ans. La dernière inversion, nommée inversion Brunhes-Matuyama, s'est produite il y a 750 000 ans. De même, l'étude du magnétisme solaire montre que le champ à sa surface suit des cycles

1. Physicien anglais et médecin de la reine Élisabeth I^{re}.

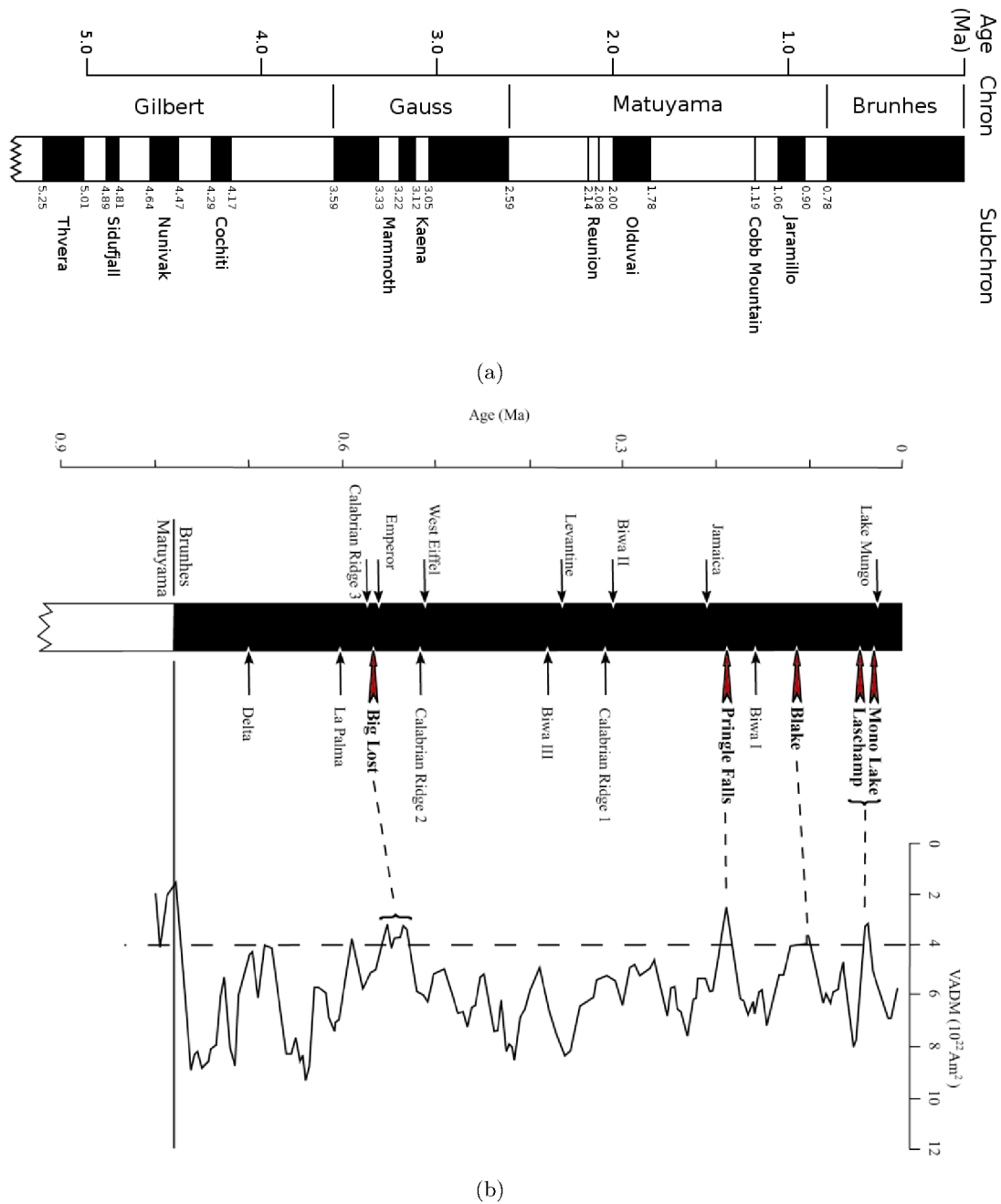


FIGURE 3.1 – Données paléomagnétiques (Source : U.S. Geological Survey Open-File Report 03-187). (a) Évolution temporelle de la direction du champ magnétique terrestre. Les périodes pendant lesquelles le champ magnétique terrestre ne s'inverse pas, appelées chrons, sont représentées par des plages blanches (resp. noires) lorsque sa direction est semblable (resp. opposée) à aujourd'hui. (b) Dates estimées des principales excursions géomagnétiques du chron de Bruhnes et corrélations possibles avec les variations du moment dipolaire axial virtuel estimées par Guyodo & Valet (1999a,b); Guyodo et al. (1999).

réguliers de 22 ans. Cherchant à expliquer ce phénomène, Larmor propose en 1919 que le champ magnétique terrestre provient des mouvements d'un fluide conducteur en son sein. En effet, R. D. Oldham a montré en 1906 à partir d'études sismologiques qu'une partie du noyau terrestre devait être liquide. Ce qui paraissait quelque peu improbable à l'époque, est aujourd'hui une certitude grâce aux études géophysiques menées depuis : la sismologie a confirmé que le noyau terrestre est en grande partie fluide, et la géochimie a prouvé qu'il était constitué de fer. Ce mécanisme de génération spontanée et entretenue d'énergie magnétique à partir de l'énergie cinétique du fluide est appelé *effet dynamo*. Cette appellation provient de l'abréviation de *machine dynamoélectrique*, terme désignant une machine à courant continu fonctionnant en générateur électrique. En effet, le noyau terrestre, comme ces machines, convertit une énergie mécanique en une énergie électromagnétique. Cependant, une différence fondamentale les distingue : du fait des températures et pressions en jeu, aucun aimant n'existe dans le noyau, ce qui impose que le courant électrique, généré par la combinaison d'un écoulement de fluide conducteur et d'un champ magnétique, doit servir à amplifier le champ qui lui a donné naissance. Un tel effet ne prend place que lorsqu'une perturbation de champ magnétique est plus advectée par l'écoulement qu'elle ne diffuse. Dans ce cas, si l'organisation tridimensionnelle de l'écoulement le permet, la perturbation croît exponentiellement au lieu de décroître exponentiellement par diffusion : c'est l'effet dynamo. La croissance du champ magnétique est alors stoppée lorsque le champ magnétique est assez fort pour rétroagir sur l'écoulement qui lui a donné naissance, et ainsi trouver une saturation.

3.1.2 L'effet dynamo : une étude récente

L'étude de cet effet se trouve au croisement entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme : on parle de magnétohydrodynamique (MHD). Dans ce cadre, l'effet dynamo correspond à une instabilité MHD, susceptible de se manifester pour certains écoulements dès lors que le rapport entre le terme source de champ magnétique et sa dissipation, i.e. le nombre de Reynolds magnétique, passe au-dessus d'une certaine valeur : c'est le seuil dynamo. L'étude de l'instabilité dynamo est complexe, et les premiers résultats obtenus, dus à Cowling (1934), sont des théorèmes anti-dynamo qui montrent que des symétries imposées peuvent empêcher la création de champ magnétique. Il faut attendre Bullard & Gellman (1954) qui mettent en évidence numériquement un effet dynamo dans une sphère en se basant sur les travaux pionniers de Elsasser (1946). En réalité, on découvrira plus tard que leurs résultats n'étaient pas convergés (e.g. Dudley & James, 1989). Les premiers exemples de dynamos sont en fait obtenus théoriquement un peu plus tard en ajoutant à un champ de vitesse fluide donné de l'intermittence spatiale (Herzenberg, 1958) ou temporelle (Backus, 1958). Quelques années plus tard, en s'inspirant de la dynamo théorique de Herzenberg (1958), Lowes & Wilkinson (1963, 1968) construisent à partir de solides conducteurs la première dynamo expérimentale², qui porte désormais leurs noms. Peu de temps après, de nouveaux écoulements théoriques capables d'exciter l'instabilité dynamo sont découverts : Lortz (1968), puis les célèbres dynamos de Roberts

2. Au sens entendu ici, i.e. sans utiliser aucun aimant permanent ou électro-aimant. Naturellement, les dynamos avec aimants (comme celles des bicyclettes) sont connues depuis plus longtemps puisque les premières dynamos de ce type ont été fabriquées par Henry Wilde (1868) et Zénobe Gramme (1869).

(1972) et Ponomarenko (1973). Ces deux derniers modèles théoriques mèneront aux premières dynamos expérimentales fluides, plusieurs dizaines d'années plus tard : en 1999, à quelques semaines d'intervalle, une dynamo de type Ponomarenko sera obtenue pendant quelques dizaines de secondes à Riga (Gailitis *et al.*, 2001) juste avant une fuite de sodium liquide qui stoppe net l'expérience, tandis qu'une dynamo de type Roberts sera obtenue à Karlsruhe (Stieglitz & Müller, 2001) pendant plusieurs heures. Pour donner une idée des contraintes pesant sur ce type d'expérience, l'ensemble du dispositif de Karlsruhe a nécessité cinq ans d'élaboration, coûté quelques sept millions d'euros et occupait trois étages d'un bâtiment dédié. Notons qu'un effet dynamo avait été suggéré pour expliquer les arrêts du réacteur à neutrons rapides Phénix en 1989 et 1990, ce qui en aurait fait la première réalisation indirecte de dynamo fluide. Cependant, les travaux de Alemany *et al.* (2000) sur le sujet ne vont pas dans le sens de cette hypothèse. Enfin, l'expérience VKS (Von Karman Sodium, collaboration ENS-Paris, ENS-Lyon et CEA-Saclay) a produit en septembre 2006 la première dynamo basée sur un écoulement libre et turbulent, créé par des disques tournants, et non pas contraint et imposé a priori à l'aide d'une tuyauterie (Monchaux *et al.*, 2007). C'est à ce jour la seule réalisation expérimentale de ce type de dynamo, dite *homogène*, même si des projets sont actuellement en cours, par exemple à l'université du Maryland, ainsi qu'à celle du Madison, aux États-Unis, ou à Dresden en Allemagne.

Du point de vue géophysique, l'étude de l'effet dynamo nécessite de comprendre l'écoulement complexe qui peut exister au sein du noyau terrestre. La première description de cet écoulement est donnée par Busse (1970) : la convection s'organise en une kyrielle de tourbillons dont les axes sont parallèles à l'axe de rotation de la Terre, désormais appelées *colonnes de Busse* ou de *Taylor-Busse* (voir section 1.3.1). Cet écoulement sera confirmé numériquement par Glatzmaier (1988). Il faudra encore une dizaine d'années pour que le code numérique soit étendu au problème complet, couplant température, écoulement fluide et champ magnétique. Après plus d'un an de calcul sur l'un des plus gros ordinateurs Cray de l'époque, Glatzmaier & Roberts (1995*b*) réussissent à produire un champ magnétique du même type que le champ terrestre, c'est-à-dire essentiellement dipolaire comme celui d'un aimant, approximativement orienté selon l'axe de rotation, et présentant parfois des inversions de polarité comme il en existe dans l'histoire de la Terre. Ces résultats encourageants ont été tempérés depuis : les codes numériques, même les plus récents, ne permettent pas d'atteindre les gammes de paramètres du noyau terrestre, et le lien entre leurs résultats et la réalité reste à expliciter.

3.2 Équations de la magnétohydrodynamique

Ces équations sont connues depuis un certain temps. En effet, les équations régissant le mouvement d'un fluide non-visqueux ont été données par L. Euler et J. d'Alembert (XVIII^{ème} siècle) avant d'être étendues aux fluides visqueux par Navier et Stokes (XIX^{ème} siècle). Quant à la partie magnétique, les équations fondamentales la régissant dans un milieu continu matériel ont été formulées par Maxwell (XIX^{ème} siècle).

3.2.1 Électromagnétisme des milieux continus

Cette section présente les équations fondamentales de l'électromagnétisme dans les milieux matériels continus. Une présentation relativement complète du sujet peut être trouvée dans l'ouvrage de référence de Jackson (1975).

3.2.1.1 Équations de Maxwell des milieux

Dans la matière, le champ électromagnétique est régi par des équations appelées *équations de Maxwell des milieux* :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Les deux premières équations, parfois appelées *équations aux sources*, traduisent respectivement que l'induction électrique d'une charge ponctuelle décroît avec le carré de la distance (formule de Green) et l'inexistence de charge ou monopôle magnétique. Notons que les équations de Maxwell sont linéaires vis-à-vis des sources, ce qui permet l'application du principe de superposition pour \mathbf{E} et \mathbf{B} . Les deux dernières équations, parfois appelées *équations intrinsèques des champs*, sont identiques à leur formulation dans le vide car elles sont indépendantes des sources des champs. Pour fermer ce système d'équations, des équations constitutives (phénoménologiques) doivent être ajoutées afin de lier \mathbf{H} à \mathbf{B} , \mathbf{D} à \mathbf{E} et \mathbf{j} à \mathbf{E} et \mathbf{B} . Pour ce faire, le milieu considéré est souvent supposé linéaire, ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{D} = \bar{\bar{\epsilon}} : \mathbf{E}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\bar{\mu}} : \mathbf{H}, \quad (3.6)$$

où $:$ représente un produit tensoriel. Le milieu est souvent supposé homogène isotrope, et les tenseurs $\bar{\bar{\epsilon}}$ et $\bar{\bar{\mu}}$ peuvent alors être remplacés par le scalaire associé (multiplié par le tenseur identité). Ainsi, les équations de Maxwell dans un milieu linéaire homogène isotrope (LHI) s'écrivent donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon}, \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.10)$$

Ainsi, dans le cas des LHI, \mathbf{D} et \mathbf{H} ne sont qu'une écriture différente de \mathbf{E} et \mathbf{B} , et les équations de Maxwell sont formellement équivalentes à leur formulation dans le vide. Notons que l'équation de conservation de la charge se déduit de l'équation (3.10) :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial_t \rho_e. \quad (3.11)$$

La dernière équation constitutive permettant de fermer le système d'équations est la loi d'Ohm, liant \mathbf{j} à \mathbf{E} et \mathbf{B} . Considérant un milieu conducteur à plusieurs porteurs de charges en mouvement à vitesse \mathbf{V} , la *loi d'Ohm généralisée* s'écrit (Kemp & Petschek, 1958; Sutton & Sherman, 1965; Parent *et al.*, 2010) :

$$\mathbf{j} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \underbrace{\frac{\beta_e}{\|\mathbf{B}\|} \mathbf{j} \times \mathbf{B}}_{\text{courant Hall}} + \underbrace{\frac{\beta_e \beta_i}{\mathbf{B}^2} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}_{\text{courant de dérive des ions}} \quad (3.12)$$

avec σ_e la conductivité du milieu, β_e et β_i les paramètres de Hall des électrons et des ions, respectivement³. Dans les métaux, l'effet Hall est négligeable, et la MHD des métaux liquides considère donc la loi d'Ohm simplifiée $\mathbf{j} = \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Combinée avec l'équation de conservation de la charge (3.11), cette forme de la loi d'Ohm donne l'équation d'évolution de la charge :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \rho_e \quad (3.13)$$

3.2.1.2 Relations de passage, conditions aux limites

Dans le cadre d'une modélisation volumique de charges ou de courants, les champs électriques et magnétiques sont spatialement continus en tout point de l'espace. En revanche, des discontinuités peuvent apparaître lorsque la modélisation implique des interfaces. Dans ce cas, les équations de Maxwell imposent aux champs de vérifier certaines conditions, appelées relation de passage, lors du franchissement de ces interfaces. Ainsi, les équations fondamentales de Maxwell dans les milieux (3.7),(3.8),(3.9),(3.10) imposent qu'à l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2, les champs vérifient

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_{ls}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_{ls}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (3.17)$$

où \mathbf{n}_{12} est la normale à l'interface orientée de 1 vers 2, et \mathbf{j}_{ls} et ρ_{ls} représentent respectivement la densité superficielle de courant libre, et la densité superficielle de charge libre, qui peuvent exister à l'interface séparant les deux milieux. Ainsi, la composante normale de \mathbf{B} et la composante tangentielle de \mathbf{E} sont continues au passage de l'interface, au contraire de la composante normale de \mathbf{D} et de la composante tangentielle de \mathbf{H} qui peuvent être discontinues.

Les relations de passage données ci-dessus sont les conditions aux limites naturelles de passage d'un milieu à un autre. Cependant, dans les simulations numériques basées sur des méthodes locales, des conditions doivent être imposées sur les bords du domaine numérique. En simulation numérique, ces conditions sont en général catégorisées en trois types : les conditions aux limites de type Dirichlet, Neumann et de type Robin. Ce dernier

3. En physique des plasmas, un terme supplémentaire est parfois ajouté pour tenir compte du gradient de pression des électrons. Généralement beaucoup plus petit que les autres termes, il est ici négligé.

type de condition sert en électromagnétisme à étudier les courants de surface au voisinage des matériaux très conducteurs, et l'interface est alors modélisée par une condition aux limites d'impédance (e.g. Zaglmayr, 2006). Ce type de conditions aux limites ne sera pas utilisé dans ce travail, et nous nous contentons donc de présenter les conditions aux limites de Dirichlet et Neumann usuelles.

Conducteurs électriques parfaits (ou supraconducteurs)

À l'interface avec un milieu de conductivité électrique infinie (supraconducteur), une couche limite de courant surfacique apparaît (e.g. Roberts, 1967). Les relations de passage montrent alors que le champ électrique au sein du supraconducteur doit être nul pour que le courant reste fini. La relation (3.14) montre alors que le milieu supraconducteur peut être remplacé par une condition aux limites de Dirichlet sur \mathbf{E}

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Notons que les relations de passage montrent également que le champ magnétique ne rentre pas dans le conducteur parfait. Ainsi, à l'interface, le champ magnétique est parallèle à l'interface et le courant électrique perpendiculaire à celle-ci.

Conducteurs magnétiques parfaits (ou conditions de pseudo-vide)

À l'interface avec un milieu de perméabilité magnétique infinie (ferromagnétique pur), le milieu ferromagnétique pur est remplacé par une condition aux limites de Dirichlet sur \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Notons que cette relation peut être remplacée par la condition $\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{j}_{imp}$ si une distribution de courant \mathbf{j}_{imp} est imposée sur l'interface.

Distribution de charges imposée

Si la distribution de charges sur l'interface est connue, la relation de passage (3.16) se réduit à une condition aux limites de Neumann sur \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_{12} = \rho_{ls} \quad (3.20)$$

3.2.1.3 Formulation en potentiels (vecteur et scalaire)

L'équation (3.8) implique que \mathbf{B} dérive d'un potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. L'équation de Maxwell-Faraday (3.9) montre alors l'existence d'un potentiel scalaire $\phi(\mathbf{x}, t)$ vérifiant :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.21)$$

Ainsi, l'équation de Maxwell-Ampère (3.10) s'écrit :

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma_e \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{j}_{ext} - \sigma_e \nabla\phi - \varepsilon \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} \quad (3.22)$$

avec \mathbf{j}_{ext} un éventuel courant électrique externe imposé. Notons que pour toute fonction scalaire ψ , les potentiels

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\phi, \quad (3.23)$$

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (3.24)$$

donnent les mêmes champs électriques et magnétiques. En choisissant le potentiel vecteur \mathbf{A}^* donné par

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \tilde{\phi} = \mathbf{A} + \int_{t_0}^{t_1} \nabla\phi \, dt, \quad (3.25)$$

le champ électrique est donné par $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}^*$ et $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}^*$. Finalement l'équation (3.22) se réduit à l'équation :

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}^*) + \sigma_e \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}^*}{\partial t^2} = \mathbf{j}_{ext}, \quad (3.26)$$

uniquement fonction de \mathbf{A}^* . Une fois \mathbf{A}^* déterminé, le champ électrique est donné par $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}^*$ et le champ magnétique est donné par $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}^*$. Les conditions aux limites vues en section 3.2.1.2 peuvent alors être formulées en terme de potentiel : par exemple, la condition aux limites de type supraconducteur s'écrit $\mathbf{A}^* \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}$ et la condition de pseudo-vide s'écrit $(\nabla \times \mathbf{A}^*) \times \mathbf{n}_{12} = \mathbf{0}$.

3.2.1.4 L'équation d'induction

Même si le système des quatre équations de Maxwell est à présent fermé, sa résolution en l'état est un problème extrêmement difficile. L'hypothèse d'une dynamique non-relativiste permet de le simplifier considérablement. En effet, la limite non-relativiste permet de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction :

$$\frac{\|\varepsilon\mu\partial_t\mathbf{E}\|}{\|\nabla \times \mathbf{B}\|} \sim \frac{U^2}{c^2} \quad (3.27)$$

où U est la vitesse typique du milieu et c la vitesse de la lumière dans le milieu. L'équation (3.13) montre que cette approximation revient à ne considérer uniquement que des échelles de temps grandes devant le temps de relaxation des porteurs de charges. L'ensemble de ces hypothèses permet de ne considérer qu'une seule inconnue, à savoir le champ magnétique \mathbf{B} , défini de façon unique par son rotationnel et sa divergence :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.29)$$

où $\nu_m = 1/(\mu\sigma)$ est la diffusivité magnétique du fluide. La première équation résulte de l'ensemble des hypothèses précédentes, souvent regroupées sous le terme *approximation MHD*, et est appelée *équation d'induction*. Elle correspond à une équation de diffusion, avec un terme source $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, et est invariante par changement de référentiel si le

référentiel est animé d'un mouvement solide à vitesse constante i.e. translation et/ou rotation à vitesse constante (e.g. Pétrélis, 2002). La formulation potentielle de l'équation d'induction s'obtient en négligeant les phénomènes propagatifs dans l'équation (3.26), qui s'écrit alors

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}^*) + \sigma_e \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \mathbf{j}_{ext}. \quad (3.30)$$

Une fois \mathbf{A}^* et \mathbf{B} obtenus, il est possible d'en déduire l'ensemble des autres grandeurs en jeu :

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu\sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (3.32)$$

$$\rho_e = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.33)$$

Notons que ρ_e est la distribution de charges générées par le mouvement du milieu conducteur dans le champ magnétique : elle permet de conserver la charge, par compensation du champ électromoteur $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

3.2.2 Équation du mouvement

Pour les fluides conducteurs, la force de Laplace doit être ajoutée à l'équation de Navier-Stokes considérée en section 2 :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\mu\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{f}, \quad (3.34)$$

où \mathbf{f} correspond aux forces volumiques éventuellement présentes : pesanteur, flottabilité, force de Coriolis, accélération de Poincaré, etc. Notons que la force de Laplace peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu} \right) + \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (3.35)$$

Le premier terme correspond à la pression magnétique, isotrope, tandis que le second est un terme de tension anisotrope. Notons que la pression magnétique $p_m = B^2/(2\mu)$ est associée à un réseau d'ondes, dites d'Alfvén, qui se propagent à la vitesse d'Alfvén $c_A = \sqrt{2p_m/\rho}$. Ces ondes de pression magnétique sont l'analogie des ondes acoustiques qui se propagent à la vitesse $c_s = \sqrt{\gamma p/\rho}$ pour un polytrophe d'indice γ .

Enfin, le rapport entre la force de Laplace et la force de Coriolis (resp. le terme d'inertie) définit le *nombre d'Elsasser* $\Lambda = \sigma_e B^2/(\rho\Omega)$ (resp. le *paramètre d'interaction* $N = \sigma_e L B^2/(\rho U)$), analogue du nombre d'Ekman (resp. de l'inverse du nombre de Reynolds) pour les forces visqueuses.

3.2.3 L'effet dynamo : une instabilité MHD

L'évolution du champ magnétique est régie par l'équation d'induction obtenue en section 3.2.1.4 :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B} + \nu_m \Delta \mathbf{B} \quad (3.36)$$

car $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Dans cette équation, le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}$ représente l'advection du champ magnétique par l'écoulement, $\nu_m \Delta \mathbf{B}$ la diffusion du champ magnétique, et $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est un terme source lié à l'organisation de l'écoulement. Afin de comparer le terme source et le terme diffusif, on utilise le nombre de Reynolds magnétique $Rm = UL/\nu_m$, rapport entre les ordres de grandeurs de ces deux termes (U et L étant respectivement une vitesse et une longueur typique). Pour certains écoulements, lorsque Rm est supérieur à une certaine valeur appelée nombre de Reynolds magnétique critique Rm_c , un champ magnétique peut être créé par le champ de vitesse, résultant d'une conversion de l'énergie cinétique de l'écoulement en énergie magnétique : cette instabilité MHD est l'effet dynamo. Les conditions nécessaires pour qu'un écoulement mène à un effet dynamo, i.e. pour qu'il soit *dynamogène*, sont encore mal caractérisées en dépit de nombreux travaux sur le sujet. Notons que l'invariance de l'équation d'induction par changement de référentiel en mouvement solide à vitesse constante, déjà notée en section 3.2.1.4, permet de choisir avec pertinence le référentiel à utiliser pour résoudre l'écoulement fluide sans modifier le champ magnétique dynamo et sa croissance (e.g. Pétrélis, 2002).

Le nombre de Reynolds hydrodynamique Re est relié au nombre de Reynolds magnétique par le Prandtl magnétique $Pm = \nu/\nu_m$, rapport de la viscosité cinématique du fluide à la diffusivité magnétique : $Rm = Pm Re$. Ce nombre dépend uniquement du matériau conducteur considéré, et vaut typiquement 10^{-6} pour les métaux liquides. Le nombre de Reynolds magnétique critique étant en général entre 10 et 10^4 (Christensen & Aubert, 2006; Tilgner, 2005; Wu & Roberts, 2009), les écoulements de métaux liquides susceptibles d'engendrer un champ dynamo sont nécessairement turbulents. Il est aussi possible de jouer sur Pm en utilisant des matériaux différents. Ainsi, l'expérience MPDX (pour *Madison Plasma Dynamo Experiment*), du groupe de Cary Forest, utilise des plasmas conducteurs, avec un Pm dix fois plus grand que ceux des métaux liquides.

3.3 Modèle numérique

3.3.1 Méthodes locales pour les simulations MHD

Depuis le travail pionnier de Glatzmaier & Roberts (1995*a,b*, 1996*b*), les simulations numériques ont permis de détailler de plus en plus précisément comment un mécanisme dynamo pouvait générer un champ magnétique au sein d'une coquille sphérique. Ces premières simulations numériques considéraient un fluide incompressible sous l'hypothèse de Boussinesq : on parle alors parfois de *codes géodynamos*. Par la suite, ces simulations ont été étendus aux fluides compressibles sous l'hypothèse anélastique (Glatzmaier & Roberts, 1996*a,c*, 1997), plus légitime (voir Anufriev *et al.*, 2005, pour une discussion sur ces deux approximations), en particulier pour les dynamos stellaires. À présent, il existe un certain nombre de codes géodynamos (voir par exemple Christensen *et al.*, 2001, pour

une description et une comparaison des différents codes géodynamo existants), ainsi que quelques codes MHD anélastiques tels que ASH, pour *Anelastic Spherical Harmonic* (e.g. Brun *et al.*, 2004), ou le code de l'université de Leeds. De nombreuses comparaisons des résultats numériques obtenus avec les mesures, principalement terrestres, ont été faites pour confirmer la pertinence de ces simulations (e.g. Dormy *et al.*, 2000, pour une revue). Certains aspects clés tels que l'aspect dipolaire du champ, la dérive vers l'Ouest du champ ou des renversements occasionnels sont retrouvés par la plupart des codes. Cependant, du fait du coût de calcul important, les paramètres adimensionnels utilisés dans les simulations sont très différents des valeurs réalistes estimées dans les noyaux planétaires (Busse, 2002). Afin de se rapprocher des valeurs réelles, les codes numériques sont donc optimisés et massivement parallèles. Généralement, ces simulations numériques MHD exploitent l'hypothèse de géométrie sphérique en utilisant des méthodes spectrales, rapides et précises. Cependant, les communications globales alors requises (e.g. Clune *et al.*, 1999) rendent ces méthodes difficiles à paralléliser. Depuis le travail précurseur de Kageyama & Sato (1997) utilisant les différences finies, quelques études ont été menées avec des méthodes locales, plus facilement adaptables aux architectures parallèles : les éléments finis ont été utilisés (Chan *et al.*, 2001; Matsui & Okuda, 2004*a,b*, 2005), de même que les volumes finis (Hejda & Reshetnyak, 2003, 2004; Harder & Hansen, 2005) ou les éléments spectraux (Fournier, 2004; Fournier *et al.*, 2005). Même si toutes ces études ont été menées en géométrie sphérique, les méthodes locales ont l'avantage de pouvoir simuler des géométries plus complexes telle que des ellipsoïdes triaxiaux. Notons que c'est un point crucial, car jusqu'à présent, tous les codes dynamo existants basés sur des méthodes spectrales sont limités à des géométries axisymétriques, au mieux sphéroïdales ou des géométries cylindriques (Wu & Roberts, 2009; Nore *et al.*, 2011).

3.3.2 Équations MHD résolues

Nous considérons un volume fini de fluide conducteur de viscosité cinématique ν , densité ρ , diffusivité magnétique ν_m et conductivité électrique γ , en rotation à la vitesse angulaire typique Ω au sein d'un conteneur rigide de taille typique R . Avec R comme échelle de longueur, Ω^{-1} comme échelle de temps, et $\Omega R\sqrt{\rho\mu_0}$ comme échelle de champ magnétique, où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, les équations MHD non-relativistes s'écrivent

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + E \Delta \mathbf{u} - 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\text{tot}}, \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{tot}}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{B}, \quad (3.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.40)$$

où $(\mathbf{u}, p, \mathbf{B})$ sont respectivement la vitesse, la pression et le champ magnétique, $\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0$ est le champ magnétique total tenant compte d'un possible champ constant et uniforme \mathbf{B}_0 qui représente le champ externe imposé dans les problèmes d'induction. Les nombres sans dimension sont le nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega R^2)$, et le nombre de Reynolds magnétique $Rm = Pm/E$, où $Pm = \nu/\nu_m$ est le nombre de Prandtl magnétique. Dans

ce travail, une condition d'adhérence est systématiquement utilisée pour le fluide. Notons qu'une force de Coriolis $-2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur rotation du référentiel considéré, est introduite ici de façon générale, et sera utilisée en section 3.4.3. Une fois le champ magnétique résolu, le système d'équations de Maxwell permet d'en déduire la densité de courant électrique de conduction $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$, le potentiel électrique $\Delta V_e = \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ et la distribution de charges $\rho_e = -\epsilon \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$, où ϵ est la permittivité électrique du fluide.

Généralement, les simulations MHD des intérieurs fluides planétaires exploitent la géométrie sphérique avec des méthodes spectrales. Dans notre cas cependant, l'étude de l'instabilité elliptique impose une géométrie non-axisymétrique. Nos calculs sont donc menés avec une méthode standard éléments finis. Cependant, résoudre le champ magnétique avec des méthodes locales soulève certaines difficultés. Dans la communauté utilisant les éléments finis, les simulations MHD sont souvent menées avec une formulation en terme de potentiel vecteur magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (e.g. Plunian & Masse, 1996; Soto *et al.*, 1998; Matsui & Okuda, 2005), ce qui permet de s'assurer que le champ magnétique reste à divergence nulle à chaque instant. Utilisant le potentiel vecteur \mathbf{A}^* défini en section (3.2.1.3), et omettant l'exposant * par la suite, les équations (3.39-3.40) sont donc remplacées par

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{tot}}) + \frac{1}{Rm} \Delta \mathbf{A}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{B}_{\text{tot}} = \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}_0 = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0. \quad (3.42)$$

Naturellement, les deux équations MHD (3.39, 3.40) peuvent être retrouvées à partir des équations (3.41-3.42). L'absence de jauge, généralement introduite dans la formulation potentielle (e.g. Matsui & Okuda, 2005), interdit la présence de domaine purement isolant. En effet, dans ce type de domaine, le champ électrique est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ (e.g. Guermond *et al.*, 2007). Cela impose d'utiliser la variable supplémentaire ϕ , multiplicateur de Lagrange permettant d'assurer la jauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. La variable ϕ joue alors le même rôle que la pression pour un champ de vitesses incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Par conséquent, nous ne pouvons pas avoir de matériau parfaitement isolant dans nos simulations. Afin d'éviter le recours à une jauge ϕ , nous modélisons donc de tels matériaux par des domaines très faiblement conducteurs en comparaison de la conductivité des domaines devant être conducteurs⁴.

3.3.3 Conditions aux limites

La nature non-locale des conditions aux limites magnétiques est un problème de longue date dans les modèles numériques dynamos. En général, avec les méthodes spectrales, le raccordement à la paroi du champ magnétique induit avec un champ extérieur potentiel est imposé analytiquement. Cependant, les méthodes locales mettent en exergue le conflit entre la discrétisation locale et les conditions à l'infini de décroissance des conditions aux limites magnétiques naturelles. Comme le rappellent Isakov *et al.* (2004), différentes solutions ont été proposées dans la littérature pour résoudre ce problème : (i) la condition aux limites de pseudo-vide $\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, qui est une condition locale représentant par

4. Notons que dans le cas d'un problème stationnaire, COMSOL permet d'imposer une jauge.

exemple un domaine extérieur fait d'un conducteur magnétique parfait, a été utilisé par Kageyama & Sato (1997) et Harder & Hansen (2005); (ii) l'immersion du domaine fluide confiné au sein d'un domaine plus large où le problème magnétique est également résolu a été utilisé par Chan *et al.* (2001) en résolvant le champ magnétique, et amélioré par Matsui & Okuda (2004*a,b*) avec une formulation en potentiel vecteur; (iii) la combinaison de méthode locale avec une méthode d'intégrales de frontières (BEM) a été introduite par Iskakov *et al.* (2004) en couplant une méthode volumes finis avec une méthode BEM.

De même que Matsui & Okuda (2004*a,b*), nous choisissons les solutions (i) ou (ii), selon le problème considéré. Quand la solution (ii) est utilisée, nous imposons sur une paroi sphérique externe distante la condition magnétique $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, qui correspond à $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$.

3.3.4 Méthode numérique

Pour résoudre le problème MHD complet, nous utilisons, comme précédemment pour le problème hydrodynamique, le logiciel commercial COMSOL Multiphysics[®]. Pour les variables fluides, l'élément de maillage utilisé est l'élément standard de Lagrange $P1 - P2$, linéaire pour la pression et quadratique pour le champ de vitesses. Les éléments de Lagrange sont des éléments nodaux, bien adaptés pour résoudre le champ de vitesses. Cependant, comme le rappelle Hesthaven & Warburton (2004), l'utilisation de ce type d'élément dans une approche standard de type éléments finis continus nodaux de Galerkin peut générer des solutions parasites non-physiques (e.g. Sun *et al.*, 1995; Jiang *et al.*, 1996, pour une revue). Leur origine admet différentes interprétations telles qu'une mauvaise représentation du noyau de l'opérateur impliqué (e.g. Bossavit, 1988) ou la génération de solutions parasites violant les conditions de divergence, qui ne sont typiquement pas imposées directement (Paulsen & Lynch, 1991). Une autre difficulté émerge dans le cas où l'interface entre un milieu conducteur et un milieu isolant n'est pas lisse : la composante singulière de la solution peut alors ne pas être calculée (voir le lemme de Costabel, 1991). Finalement, des difficultés apparaissent également sur le couplage des champs au travers d'une telle interface. Une première façon de résoudre ces problèmes est de développer des méthodes spécifiques permettant de continuer à utiliser des éléments nodaux, telles que par exemple les méthodes de pénalisation Galerkin discontinue (e.g. Guermond *et al.*, 2007, pour des applications MHD). Une seconde approche consiste à construire des éléments adaptés à l'opérateur considéré. Un travail pionnier de Bossavit (1988, 1990) montre que l'utilisation des éléments conformes de l'espace⁵ $H(\mathbf{rot})$ contruits par Nédélec (1980, 1986) permet de résoudre le problème des modes parasites et rend le couplage des champs naturel. Les méthodes éléments finis basées sur ce type d'éléments conformes (voir Bossavit, 1994, 2008, pour plus de détails), aussi appelés éléments d'arête de Nédélec (ou vectoriel), constituent à présent l'approche dominante pour résoudre les problèmes électromagnétiques avec des géométries complexes (e.g. Jin *et al.*, 1993; Volakis *et al.*, 1998). Un avantage important des éléments d'arête est d'assurer la continuité des composantes tangentielles du champ à travers une interface entre deux milieux, tandis que les composantes normales du champ

5. Pour plus de détails sur ces éléments et les espaces vectoriels associés tels que $H(\mathbf{div})$ et $H(\mathbf{rot})$, espaces pertinents en électromagnétisme, se reporter à Dautray & Lions (1985) ou Girault & Raviart (1986).

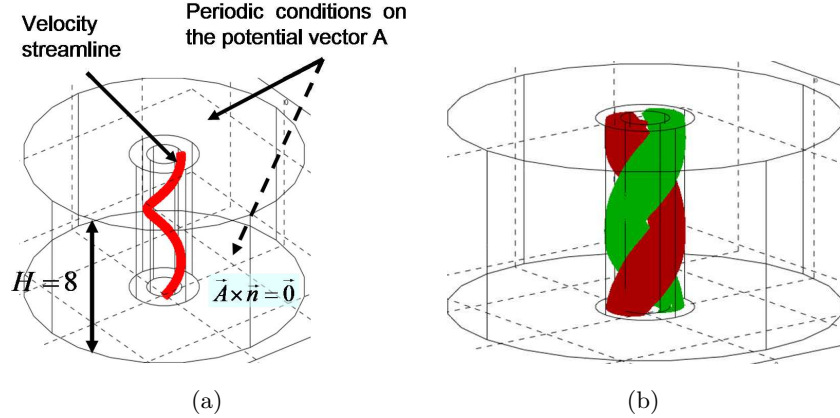


FIGURE 3.2 – (a) Schéma du problème du type Ponomarenko résolu numériquement. Dans le domaine $r \leq 1$, l'écoulement hélicoïdal (3.43) est imposé, dans le domaine $r \in [1; 2]$ le fluide est au repos, et le domaine $r \in [2; 8]$ est considéré comme isolant. (b) Iso-surface de la composante axiale du champ magnétique pour 25 % du champ maximum (rouge) et 25 % du champ minimum (vert) pour $R_m = 20$.

sont libres de s'inverser au passage de l'interface, ce qui est une propriété typique des problèmes électromagnétiques (voir aussi Monk, 2003, pour plus de détails). Cela implique aussi que le rotationnel du champ vectoriel est une fonction intégrable, ce qui rend ces éléments bien adaptés pour des équations comportant un rotationnel, telles que les équations régissant un potentiel vecteur. Dans ce travail, l'élément de maillage utilisé pour le potentiel vecteur magnétique est donc un élément d'arête de Nédélec, linéaire ou quadratique selon le problème considéré. Le nombre de degrés de liberté (DoF) utilisé dans la plupart des simulations se situe entre $5 \cdot 10^4$ DoF pour les dynamos cinématiques et $8 \cdot 10^5$ DoF pour les problèmes MHD complets avec un nombre de Reynolds magnétique autour de 10^3 . Jusqu'à présent, le logiciel commercial COMSOL Multiphysics[®] n'était pas parallèle, et toutes les simulations ont donc été menées sur une unique station de travail avec 96 Go de RAM, et deux processeurs Intel[®] Xeon[®] E5520 (2.26 GHz, 8MB Cache). Notons cependant que la version de COMSOL Multiphysics[®] qui sera délivrée durant l'été 2011 devrait permettre des calculs parallèles et nous espérons pouvoir accéder alors à une puissance de calcul significativement supérieure.

3.4 Validations du modèle

3.4.1 Une dynamo cinématique de type Ponomarenko

Nous considérons dans cette section une configuration de type Ponomarenko, qui est une célèbre dynamo cinématique. Dans sa formulation originale, Ponomarenko (1973) considère l'écoulement d'un fluide électriquement conducteur au sein d'un cylindre de rayon R , immergé au sein d'un milieu conducteur au repos. L'écoulement est un écoule-

ment de vissage de solide rigide, défini en coordonnées cylindriques (r, θ, z) par

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega r \\ R_b \Omega R \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

où R_b est le rapport entre la vitesse axiale et la vitesse de rotation à la paroi $r = R$ (i.e. le pas de l'écoulement de vissage). Nous choisissons R et Ω^{-1} comme échelles respectives de longueur et de temps. Avec cet écoulement imposé, le problème de dynamo cinématique peut être résolu analytiquement et le mode propre critique associé au nombre de Reynolds magnétique minimum $R_m^c = 17.73$ correspond alors à $R_b = 1.3$, $k = -0.39$ et $m = 1$, où k et m sont respectivement les nombres d'ondes axiaux et azimutaux.

Comme le montre le schéma 3.2a, nous considérons ici le cas légèrement différent d'un écoulement hélicoïdal immergé au sein d'un milieu conducteur, de même conductivité, au repos sur le domaine $r \in [1; 2]$, et d'une région isolante $2 \leq r \leq 8$. Considérant $R_b = 1$, et une hauteur $H = 8$ pour cette configuration cylindrique, nous définissons le nombre de Reynold magnétique par $R_m = \Omega R_i^2 / \nu_m$, ce qui nous permet une comparaison directe de nos résultats avec Kaiser & Tilgner (1999) et Laguerre (2006). Les conditions aux limites sont $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ sur la paroi latérale externe, et la périodicité du potentiel vecteur est imposée sur les parois supérieure et inférieure du cylindre. Du point de vue de la validation numérique, la comparaison avec les résultats de la littérature nous permet d'estimer (i) l'influence d'une conductivité externe non-nulle (ii) la capacité du code à résoudre des discontinuités d'écoulement et de conductivités électriques (iii) la pertinence de nos conditions aux limites.

Un résultat typique du champ magnétique excité au-dessus du seuil dynamo est montré en figure 3.2b. Cette topologie du champ est en excellent accord avec la structure attendue (e.g. Laguerre, 2006). Afin d'étudier plus précisément le seuil dynamo, nous considérons l'évolution temporelle de la moyenne quadratique en volume du champ magnétique

$$B_{rms} = \sqrt{\frac{1}{V_s} \int_{V_s} B^2 dV}, \quad (3.44)$$

où V_s est le volume du cylindre de rayon 1, adimensionné par R^3 . Quelques exemples sont montrés en figure 3.3a, en-dessous, proche, et au-dessus du seuil dynamo. Le taux de croissance/décroissance σ du champ magnétique montré en figure 3.3b est alors donné par le taux de croissance/décroissance σ de B_{rms} , déterminé par un ajustement exponentiel de son évolution temporelle. Le seuil dynamo, donné par $\sigma = 0$, est alors obtenu par interpolation pour $Rm_c \approx 18.3$, en excellent accord avec le seuil $Rm_c \approx 18.5$ trouvé par Laguerre (2006). Notons que dans ce cas particulier, l'ordre d'interpolation des éléments de Nédélec utilisés ne semble pas vraiment important (fig. 3.3b).

3.4.2 Une dynamo cinématique de type VKS

Afin de valider les conditions aux limites *pseudo-vides* $\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, nous considérons une dynamo cinématique Von Karman dans un cylindre de rayon R et de rapport d'aspect

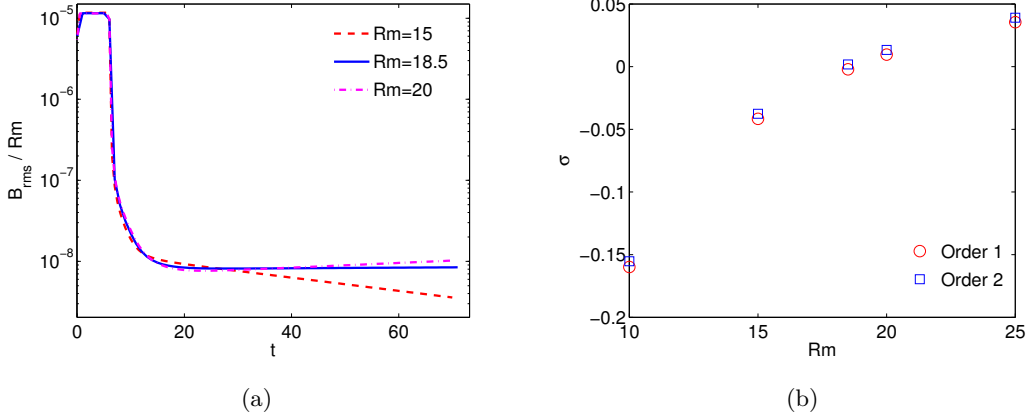


FIGURE 3.3 – Résultats numériques pour la dynamo cinématique de type Ponomarenko. (a) Évolution temporelle de la moyenne quadratique du champ magnétique divisé par Rm en-dessous du seuil dynamo ($Rm = 15$), proche du seuil ($Rm = 18.5$), et au-dessus du seuil dynamo ($Rm = 20$). (b) Évolution du taux de croissance de la dynamo avec le nombre de Reynolds magnétique pour des éléments de Nédélec linéaires et quadratiques. Le maillage utilisé est le même dans les deux cas, avec 43 162 éléments tétraédriques, ce qui donne un modèle avec 52239 DoF pour les éléments linéaires, et 279560 DoF pour les éléments quadratiques.

$H/R = 2$. L'écoulement de base adimensionnel est donné par Gissinger (2009)

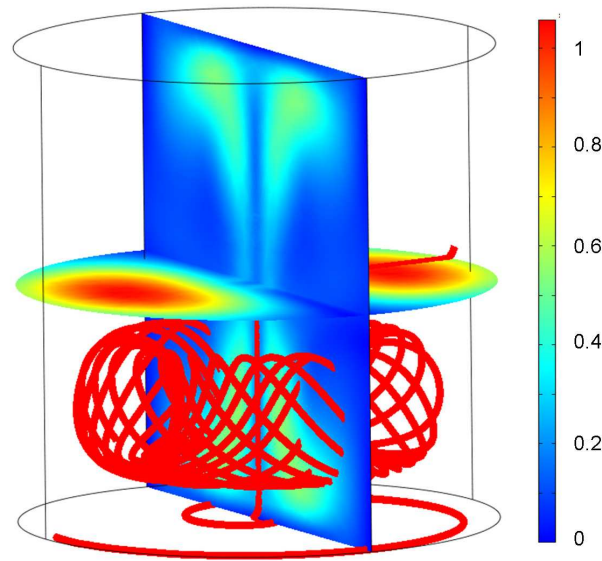
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_r \\ U_\theta \\ U_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} r (1-r)^2 (1+2r) \cos(\pi z) \\ \frac{8}{\pi} r (1-r) \arcsin(z) \\ (1-r)(1+r-5r^2) \sin(\pi z) \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Le nombre de Reynolds magnétique est défini par $Rm = U_{max} R/\nu_m$, avec U_{max} la vitesse maximale de l'écoulement moyen (Gissinger, 2009). En figure 3.4a, le champ magnétique et l'écoulement de base (3.45) sont représentés. Comme attendu, le champ magnétique induit par l'écoulement est un dipôle équatorial (e.g. Gissinger, 2009). Notons que le champ magnétique observé sur la dynamo expérimentale VKS est, lui, un dipôle axial, ce qui a été attribué à la composante non-axisymétrique de l'écoulement (Gissinger, 2009). En figure 3.4, le taux de croissance/décroissance de la dynamo pour différents maillages et ordres d'éléments est représenté. Avec les éléments de second ordre, le nombre de Reynolds magnétique critique obtenu par interpolation est $Rm = 79.2 \pm 0.1$, avec $U_{max} = 1.0755$, atteint en $(r, z) = (0.4842, \pm 1)$. Ce résultat est en excellent accord avec le seuil $Rm = 79$ obtenu numériquement par C. Nore and A. Giesecke (communications personnelles) avec deux autres codes différents, mais en désaccord avec la valeur $Rm = 60$ obtenue numériquement par Gissinger (2009), ce qui reste à expliquer. La figure 3.4 montre également que l'ordre des éléments utilisés a une influence avec ce type de conditions aux limites,

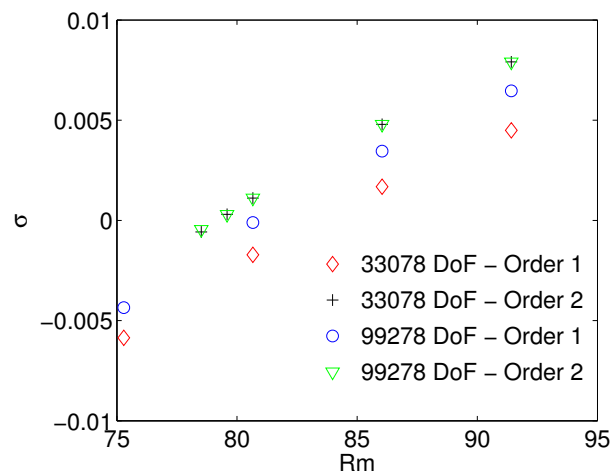
même si les valeurs obtenues restent proches. En fait, l'observation du champ magnétique à la paroi montre que les conditions aux limites sont beaucoup mieux respectées avec des éléments de second ordre qu'avec des éléments linéaires. Dans tous les cas, cette validation montre que le code est capable de reproduire correctement des conditions aux limites de pseudo-vide.

3.4.3 Benchmark : une dynamo convective

Les sections précédentes ont montré que le code donnait des résultats satisfaisants pour des études de dynamos cinématiques. Cette section étend la validation aux dynamos dynamiques, en considérant le benchmark numérique usuel de Christensen *et al.* (2001), basé sur un mouvement de convection thermique dans une coquille sphérique en rotation. Jusqu'à présent, ce benchmark, défini grâce à des méthodes spectrales, n'a été reproduit que deux fois par des méthodes locales. Matsui & Okuda (2004a, 2005) l'ont reproduit sur le Earth Simulator avec une méthode éléments finis. Harder & Hansen (2005) utilisent un code volumes finis et considèrent un cas légèrement différent du benchmark, en utilisant des conditions de pseudo-vide à la paroi externe pour limiter le coût de calcul. Dans cette section, le cas considéré par Harder & Hansen (2005) est reconsidéré avec COMSOL, basé sur des éléments de Nédélec. Nous résolvons donc également l'équation de température et ajoutons une force de flottabilité dans les équations de Navier-Stokes, de même qu'en section 2.6. On adopte l'approximation de Boussinesq, et la gravité varie linéairement avec le rayon. Pour une comparaison directe, nous reprenons ici l'adimensionnement de Christensen *et al.* (2001). La géométrie considérée correspond à une coquille sphérique en rotation d'un rapport d'aspect $\eta = 0.35$, avec un rayon externe $r_0 = 20/13$ et un rayon interne $r_i = 7/13$, où l'échelle de longueur est l'épaisseur de la coquille D . Les températures sont fixées à T_o et $T_o + \Delta T$, respectivement sur les parois externe et interne. L'échelle de temps retenue est D^2/ν , et la température adimensionnelle est définie par $(T - T_o)/\Delta T$. Les températures adimensionnelles sur les parois externe et interne sont donc respectivement 0 et 1. L'induction magnétique B est adimensionnée par $\sqrt{\rho\mu\nu_m\Omega}$, et la pression par $\rho\nu\Omega$. Les paramètres de contrôle adimensionnels sont le nombre de Rayleigh modifié $Ra = \alpha g_0 \Delta T D / (\nu \Omega) = 100$, où α est le coefficient de dilatation thermique et g_0 la gravité à la paroi externe, le nombre d'Ekman $E_k = \nu / (\Omega D^2) = 10^{-3}$ et le nombre de Prandtl thermique $Pr = 1$. Le problème est résolu dans le référentiel en rotation avec la coquille sphérique, de sorte que l'adhérence aux parois se traduit par une vitesse nulle. Les parois internes et externes tournent à la même vitesse de rotation. Le coût important de calcul des méthodes locales nous impose d'utiliser la condition locale de pseudo-vide $\mathbf{n} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, déjà utilisée par Harder & Hansen (2005). Cette condition est différente de celle du benchmark, où un raccordement à un champ potentiel est utilisé, ce qui implique que la solution obtenue peut différer quelque peu. Comme le rappelle Christensen *et al.* (2001), les conditions initiales ont ici une certaine importance dans la mesure où la convection thermique considérée est stable pour de petites perturbations magnétiques, et les solutions dynamos semblent n'avoir qu'un petit bassin d'attraction. Nous choisissons donc d'utiliser les conditions initiales du benchmark, que nous transcrivons en terme de



(a)



(b)

FIGURE 3.4 – Résultats numériques pour la dynamo cinématique de Von Karman, avec des conditions aux limites de pseudo-vide. (a) Les coupes montrent la norme du champ magnétique (normalisée par sa valeur maximale) durant sa croissance exponentielle, lors d'une simulation au-dessus du seuil dynamo ($Rm = 80.6$, 99278 DoF, avec des éléments de Nédélec quadratiques). Des lignes de courant du champ de vitesse utilisé, donné par (3.45), sont aussi représentées. (b) L'évolution du taux de croissance/décroissance de la dynamo cinématique est représentée en fonction du nombre de Reynolds magnétique pour deux maillages différents, avec des éléments de Nédélec linéaires et quadratiques. La valeur du seuil dynamo $Rm_c = 79.2$ est obtenue par interpolation.

potentiel magnétique. Le calcul donne :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} r \sin[\pi(r - r_i)] \cos(2\theta) + f_1(r) + \int (A_\theta + r \partial_r A_\theta) d\theta \\ f_2(r, \theta) \\ \frac{5}{8} \left[4r_0 r - 3r^2 - \frac{r_i^4}{r^2} \right] \sin \theta + \frac{K}{r \sin \theta} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

avec les fonctions arbitraires $f_1(r)$, $f_2(r, \theta)$ et la constante arbitraire K . Comme Christensen *et al.* (2001), nous définissons la densité d'énergie magnétique moyenne dans la coquille par

$$E_m = \frac{1}{2 V_s E Pm} \int_{V_s} \mathbf{B}^2 dV \quad (3.47)$$

où V_s est le volume adimensionnel de la coquille de fluide. La moyenne quadratique du champ magnétique utilisée par Harder & Hansen (2005) est une quantité équivalente définie par $B_{rms} = \sqrt{2 E_m}$. L'énergie magnétique adimensionnelle initiale est donc $E_m = 868$, i.e. $B_{rms} = 41.7$.

Nous considérons tout d'abord le cas 0 du benchmark, qui est un cas non-magnétique. Cela permet de vérifier la validité de l'écoulement de convection nécessaire à la dynamo. Les résultats sont montrés en figure 3.5 en fonction de la résolution spatiale N , définie par la racine troisième du nombre de degrés de libertés pour chaque variable scalaire, comme dans Matsui & Okuda (2005). Les grandeurs considérées sont la moyenne quadratique de l'énergie cinétique

$$E_{kin} = \frac{1}{2 V_s} \int_{V_s} u^2 dV \quad (3.48)$$

et la vitesse de dérive ω des colonnes convectives de grande échelle. Comme l'ont déjà remarqué Matsui & Okuda (2005), la convergence est beaucoup plus lente avec les méthodes locales qu'avec les méthodes spectrales, en particulier pour la vitesse de dérive. Cependant, nos résultats sont en accord avec ceux de Matsui & Okuda (2005) et Harder & Hansen (2005). Les deux variables considérées (E_{kin}, ω) semblent converger vers les valeurs attendues lorsque N augmente.

Nous considérons à présent le cas 1 du benchmark, en résolvant le problème MHD complet. Dans ce cas, les simulations sont très coûteuses en temps de calcul et nous nous limitons donc à une résolution $N \approx 42$, avec des éléments de Nédélec quadratiques. La figure 3.5a montre que dans ce cas, l'énergie cinétique est sous-estimée d'un facteur d'environ 5%, ce qui signifie que l'écoulement est légèrement moins efficace pour soutenir le mécanisme dynamo. Nous nous attendons donc à avoir un seuil dynamo légèrement supérieur à celui du benchmark. Nous trouvons effectivement un seuil dynamo autour de $Pm \approx 7$, supérieur à la valeur de référence $Pm = 5$ du benchmark. Notons cependant que nos résultats sont cohérents avec ceux de Harder & Hansen (2005), qui trouvent un champ magnétique diminuant lentement pour $Pm = 5$ (leur figure 8) mais une dynamo clairement stable pour $Pm = 8$. Les auteurs suggèrent que le champ en décroissance

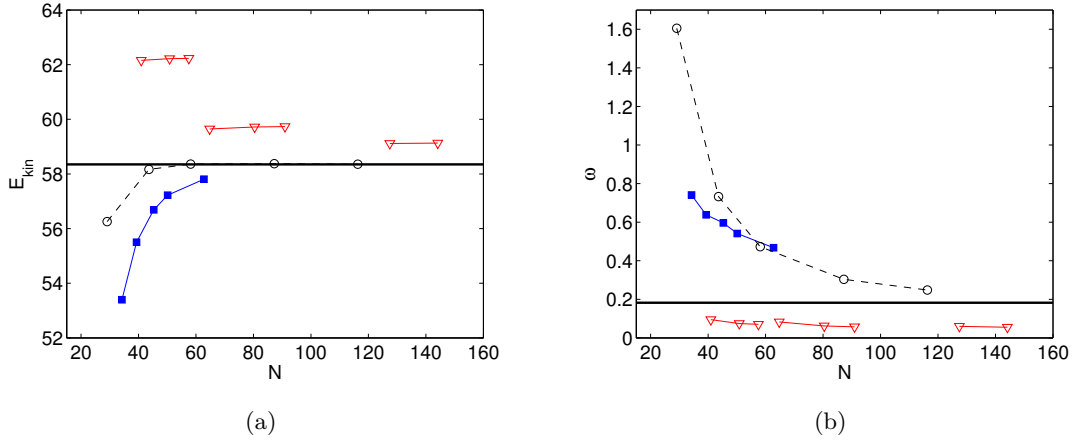


FIGURE 3.5 – Évolution de (a) la moyenne quadratique de l'énergie cinétique et (b) de la vitesse angulaire de dérive dans nos simulations numériques (carrés) dans le cas non-magnétique du benchmark de Christensen et al. (2001), en fonction de la résolution spatiale N . Les résultats sont comparés avec les solutions suggérées (ligne noire continue) par Christensen et al. (2001), avec les résultats de Harder & Hansen (2005) représentés par les cercles noirs vides, et avec les résultats numériques de Matsui & Okuda (2005) donnés par les triangles rouges.

lente obtenu pour $Pm = 5$ correspond au seuil dynamo, et proposent de comparer la dernière valeur atteinte dans leur simulation par le champ magnétique en décroissance avec la valeur du benchmark. Ils comparent donc le champ moyen $B_{rms} \approx 42$ avec la valeur de référence $B_{rms} \approx 35$ du benchmark. Dans nos simulations numériques, proche de notre seuil dynamo $Pm \approx 7$, nous obtenons un champ moyen autour de $B_{rms} \approx 10$. Cette valeur basse est encore une fois à relier à notre sous-estimation de l'énergie cinétique de l'écoulement. Notons également que rien n'exclut qu'une valeur similaire aurait été obtenue par Harder & Hansen (2005) une fois l'état stationnaire atteint dans leur simulation. Avec les ressources de calcul dont nous disposons, nous ne pouvons pas approfondir ces investigations. Néanmoins, cela démontre la capacité du code à simuler des dynamos dynamiques.

3.5 Application à l'instabilité elliptique MHD

Cette étude se place dans la continuité de nos études numériques précédentes de l'instabilité elliptique en géométrie non-axisymétrique. Considérant un ellipsoïde triaxial d'axes (a, b, c) avec $a > b$, dans le référentiel lié à (Ox, Oy, Oz) , nous imposons une vitesse tangentielle constante le long de la paroi déformée, dans chaque plan perpendiculaire à l'axe de rotation, choisi ici selon (Oz) . Une telle configuration est un modèle de noyau planétaire sans graine solide interne (par exemple la lune jovienne Io ou la Terre primitive),

au sein d'un manteau solide déformé par les forces de marées d'un corps compagnon. La longueur c , fixant l'aplatissement de l'ellipsoïde, peut être choisie indépendamment de la longueur des autres axes. Dans cette section, nous utilisons le rayon équatorial moyen R comme échelle de longueur et Ω^{-1} comme échelle de temps, donnée par la vitesse ΩR imposée à la paroi dans le plan équatorial. Outre les deux paramètres adimensionnels E et Rm , deux paramètres adimensionnels, géométriques, supplémentaires sont alors nécessaires pour caractériser le système : l'ellipticité $\beta = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ de la déformation elliptique et le rapport d'aspect c/a .

3.5.1 Induction magnétique du mode de spin-over

Dans cette section, l'ellipsoïde triaxial (a, b, c) est immergé au sein d'une sphère de rayon $8\sqrt[3]{abc}$ de conductivité électrique γ_v . Un champ magnétique constant et uniforme \mathbf{B}_0 est imposé, orienté selon l'axe de rotation. Ce modèle numérique représente par exemple le noyau liquide d'une lune déformée par les forces de marées, au sein d'un champ magnétique externe, comme par exemple les lunes galiléennes Io et Europa, soumises au champ magnétique de Jupiter. Nous considérons tout d'abord le mode de spin-over (figure 3.6a), avec une longueur d'axe polaire $c = (a + b)/2$ (voir section 2.3.1). Le nombre de Prandtl magnétique du fluide est fixé à $Pm = 10^{-4}$. De même que Herreman *et al.* (2009), le champ magnétique est adimensionné par B_0 . Par rapport aux équations (3.37-3.40), cela modifie simplement la force de Laplace dans l'équation (3.37), qui s'écrit à présent :

$$\frac{\Lambda}{Rm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_{\text{tot}} \quad (3.49)$$

avec $\mathbf{B}_{\text{tot}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_0$, où $\mathbf{B}_0 = (0, 0, 1)$ et où le nombre d'Elsasser associé au champ magnétique imposé est défini par $\Lambda = \gamma B_0^2 / (\rho \Omega)$. Cette configuration a déjà été étudiée théoriquement et expérimentalement par Lacaze *et al.* (2006), Thess & Zikanov (2007) et Herreman *et al.* (2009) dans le cas d'un milieu extérieur isolant.

Une première validation visuelle est obtenue en comparant les résultats numériques obtenus (figure 3.6a) avec les calculs théoriques de Lacaze *et al.* (2006). La figure 3.6b montre l'influence de la conductivité externe sur le taux de croissance du mode de spin-over. Comme attendu, pour de faibles rapports de conductivités $\gamma_v/\gamma \lesssim 10^{-3}$, le taux de croissance n'est plus affecté par la faible conductivité du milieu extérieur : le milieu extérieur se comporte alors comme un isolant électrique. Dans la suite, nous fixons $\gamma_v/\gamma = 10^{-4}$.

En combinant les résultats de Lacaze *et al.* (2004) et Thess & Zikanov (2007), Herreman *et al.* (2009) proposent de modéliser l'évolution non-linéaire du mode de spin-over dans le référentiel du laboratoire par le système non-linéaire (voir aussi section 2.3.4) :

$$\dot{\omega}_x = -\alpha_1 (1 + \omega_z) \omega_y - (\nu_{so} + \Lambda/4) \omega_x, \quad (3.50)$$

$$\dot{\omega}_y = -\alpha_2 (1 + \omega_z) \omega_x - (\nu_{so} + \Lambda/4) \omega_y, \quad (3.51)$$

$$\dot{\omega}_z = \beta \omega_x \omega_y - \nu_{ec} \omega_z + \nu_{nl} (\omega_x^2 + \omega_y^2) \quad (3.52)$$

où $\alpha_1 = \beta/(2 - \beta)$, $\alpha_2 = \beta/(2 + \beta)$ et $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur rotation du mode de spin-over. Dans la limite $\beta \ll 1$, les termes d'amortissement sont connus analytiquement depuis

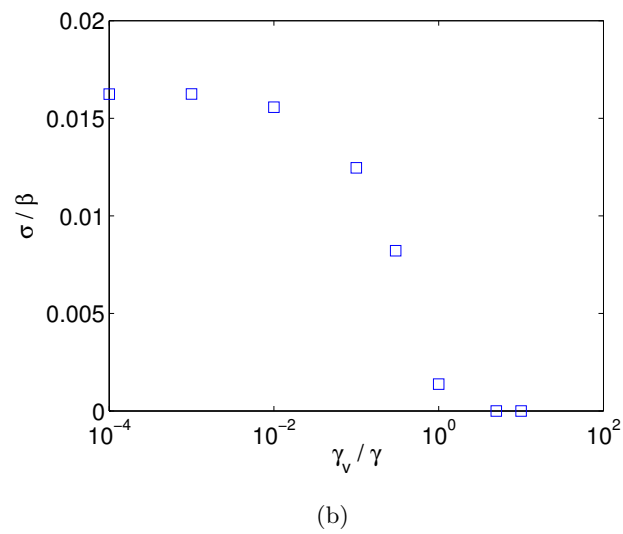
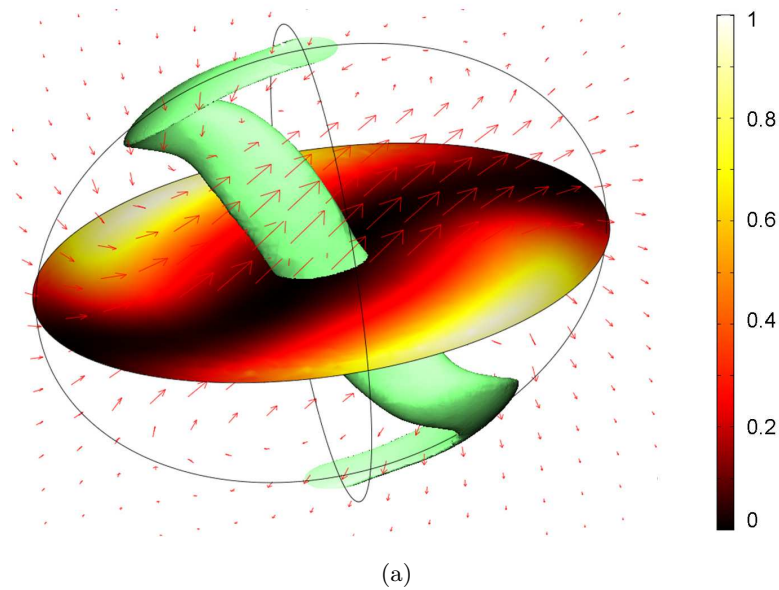


FIGURE 3.6 – Simulations numériques MHD du mode de spin-over dans un ellipsoïde triaxial, avec un champ magnétique uniforme imposé selon l'axe de rotation. Paramètres : $Pm = 10^{-4}$, $\beta = 0.317$, $c = (a+b)/2$ et $\Lambda = 0.02$. (a) Le mode de spin-over est représenté pour $E = 1/500$ par l'iso-surface de vitesse $\|\mathbf{u}\| = 0.12$, et le champ magnétique est représenté par des flèches dont la taille est proportionnelle à la valeur locale du champ magnétique. Dans le plan équatorial, la dissipation Joule est montrée, normalisée par sa valeur maximale. (b) Évolution du taux de croissance σ de l'instabilité elliptique avec le rapport de la conductivité externe γ_v sur la conductivité du fluide γ .

Greenspan (1968) : $\nu_{so} = \alpha\sqrt{E} = 2.62 \sqrt{E}$ est l'amortissement linéaire visqueux du mode de spin-over, $\nu_{ec} = 2.85 \sqrt{E}$ est l'amortissement linéaire visqueux de la rotation axiale et $\nu_{nl} = 1.42 \sqrt{E}$ représente l'effet de la couche visqueuse sur l'interaction non-linéaire du mode de spin-over avec lui-même. Par rapport au système étudié en section 2.3.4, le champ magnétique n'ajoute qu'un terme linéaire correspondant à la dissipation Joule $\Lambda/4$ dans les directions normales au champ imposé. Même si ce modèle ne prend pas en compte tous les termes visqueux d'ordre \sqrt{E} , ni les corrections non-linéaires des couches internes de cisaillement, il est en bon accord avec les mesures expérimentales, que ce soit sur le taux de croissance prédit ou le champ de vitesse à saturation et le champ magnétique induit (Lacaze *et al.*, 2004; Herreman *et al.*, 2009).

En linéarisant le système autour du point fixe trivial $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, le taux de croissance linéaire du mode de spin-over pour $\beta \ll 1$ est donné par (Herreman *et al.*, 2009)

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{4 - \beta^2}} - \tilde{\nu}_{so}, \quad (3.53)$$

où $\tilde{\nu}_{so} = \nu_{so} + \frac{\Lambda}{4}$. Au-dessus du seuil de l'instabilité donné par $\beta/\sqrt{4 - \beta^2} \geq \tilde{\nu}_{so}$, un état stationnaire non-trivial est obtenu, donné par

$$\omega_x = \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \tilde{\nu}_{so}]}{\alpha_2 \beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_2^2 / \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}]}} \approx \pm \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2 \tilde{\nu}_{so}]}{\beta^2 - 2 \nu_{nl} \beta}}, \quad (3.54)$$

$$\omega_y = \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} - \tilde{\nu}_{so}]}{\alpha_1 \beta - \nu_{nl} [\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \alpha_1^2 / \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}]}} \approx \mp \sqrt{\frac{\nu_{ec} [\beta - 2 \tilde{\nu}_{so}]}{\beta^2 - 2 \nu_{nl} \beta}} \approx \mp \omega_x, \quad (3.55)$$

$$\omega_z = \frac{\tilde{\nu}_{so}}{\beta} \sqrt{4 - \beta^2} - 1 \approx \frac{2 \tilde{\nu}_{so}}{\beta} - 1, \quad (3.56)$$

où les approximations sont données pour $\beta \ll 1$. Ces expressions permettent de retrouver l'amplitude équatoriale du mode spin-over (Herreman *et al.*, 2009) :

$$\Omega_{so} = \sqrt{4 \frac{\nu_{ec}}{\beta} \frac{\sigma}{\beta - 4\nu_{nl}/\sqrt{4 - \beta^2}}}. \quad (3.57)$$

Selon Lacaze *et al.* (2006) et Herreman *et al.* (2009), le champ induit par le mode de spin-over non-visqueux dans la limite des faibles nombres de Reynolds magnétique Rm est un dipôle avec un axe de rotation transverse au champ imposé, en quadrature avec l'axe de rotation du mode de spin-over. L'axe de longueur a étant ici le grand axe de l'ellipsoïde, l'angle polaire dans le plan (x, y) du spin-over à saturation peut être estimé par (Herreman *et al.*, 2009) :

$$\phi_{so} = \pm \left| \arctan \left[\sqrt{\frac{2 - \beta}{2 + \beta}} \right] \right| \quad (3.58)$$

de sorte que la vorticit e du mode de spin-over n'est pas exactement align ee avec la direction de l' elongation maximale,  a -45° . Au sein de l'ellipso ide, ainsi qu' a l'ext erieur, l'expression g en erale du champ induit par le spin-over est donn ee par Lacaze *et al.* (2006) pour un Rm arbitraire. Dans la limite des faibles Rm , les composantes cylindriques (B_ρ, B_ϕ, B_z)

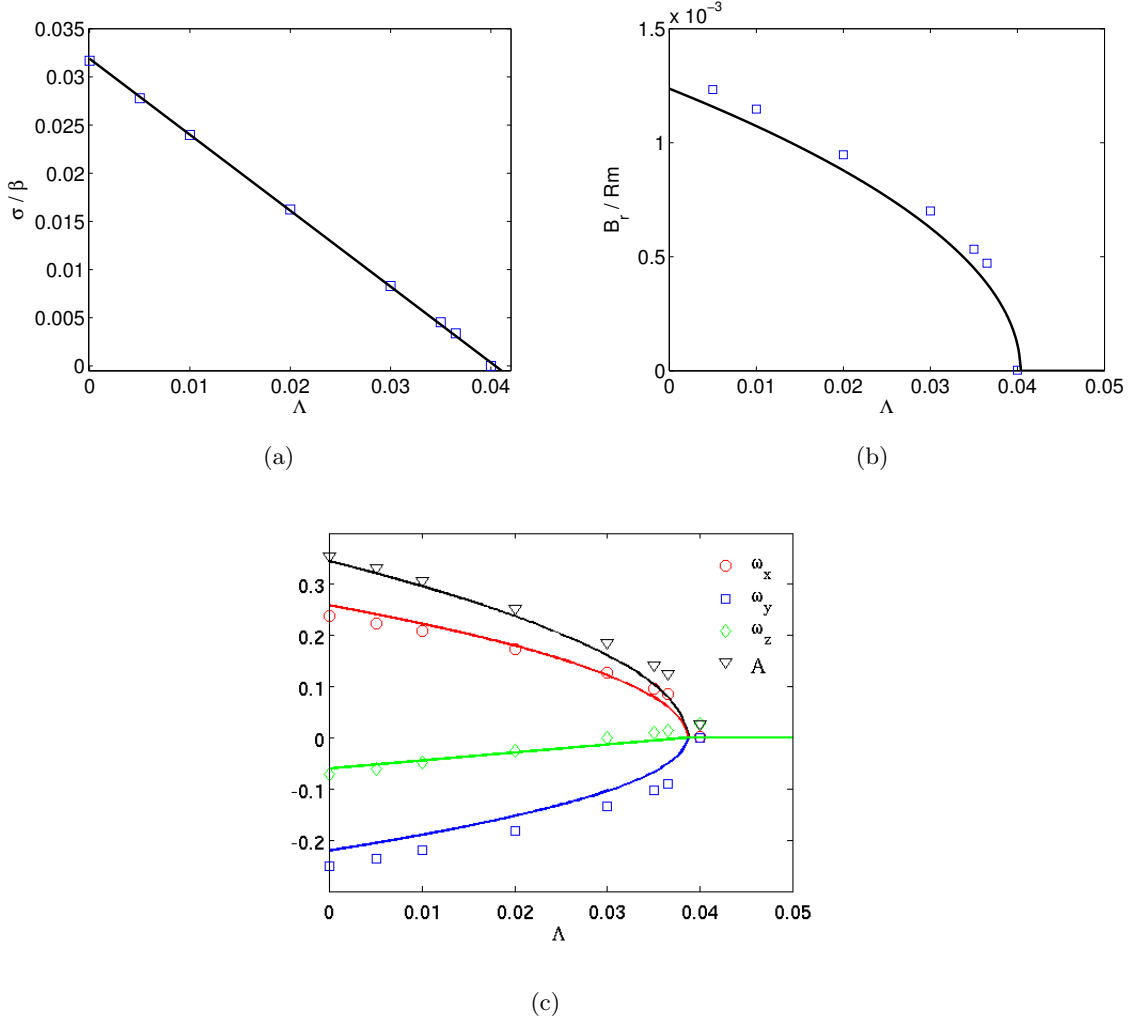


FIGURE 3.7 – Simulations numériques MHD (carrés bleus) et résultats théoriques (lignes continues) du mode de spin-over dans un ellipsoïde triaxial, avec un champ magnétique uniforme imposé le long de l'axe de rotation. Paramètres : $E = 1/344$, $\beta = 0.317$, $c = (a+b)/2$, $Pm = 10^{-4}$ pour l'ellipsoïde fluide, immergé dans une sphère de rayon $8\sqrt[3]{abc}$, avec une conductivité de rapport $\gamma_v/\gamma = 10^{-4}$. Évolution avec le nombre d'Elsasser Λ (a) du taux de croissance de l'instabilité elliptique (b) de l'amplitude adimensionnelle du champ magnétique (radial) induit au point de rayon $r = 2.3$ et de longitude $\phi = 45^\circ$ dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$), et (c) des composantes numériques (symboles) et théoriques (lignes) de la rotation solide associée au mode de spin-over. La composante selon x est représentée par des cercles rouges, la composante selon y par des carrés bleus et la composante selon z par des losanges verts. La théorie est donnée par (3.54), (3.55) et (3.56), avec $\nu_{so} \approx 2.80\sqrt{E}$.

du champ magnétique induit peuvent être exprimées en fonction des variables sphériques (r, θ, ϕ) :

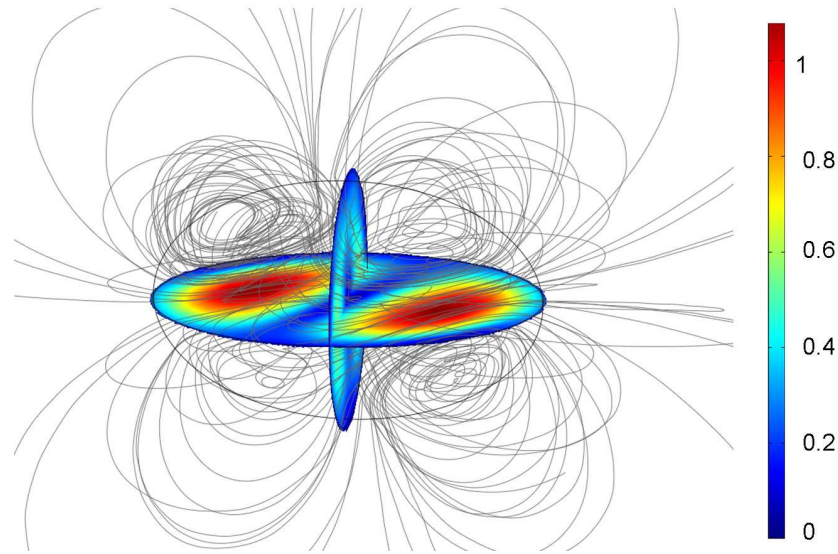
$$\mathbf{B}_i(r, \theta, \phi) = Rm \Omega_{so} \begin{bmatrix} -\frac{1-r^2}{10} \sin(\phi \pm \phi_{so}) + \frac{r^2}{140} (3 \cos(2\theta) - 1) \sin(\phi \pm \phi_{so}) \\ \frac{1-r^2}{10} \cos(\phi \pm \phi_{so}) + \frac{r^2}{70} \cos(\phi \pm \phi_{so}) \\ -\frac{3r^2}{140} \sin(2\theta) \sin(\phi \pm \phi_{so}) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

où ϕ est l'angle polaire dans le plan (x, y) et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ le rayon polaire. Le champ induit dans le domaine extérieur isolant est simplement donné par $\mathbf{B}_e = r^{-3} \mathbf{B}_i(1, \theta, \phi)$.

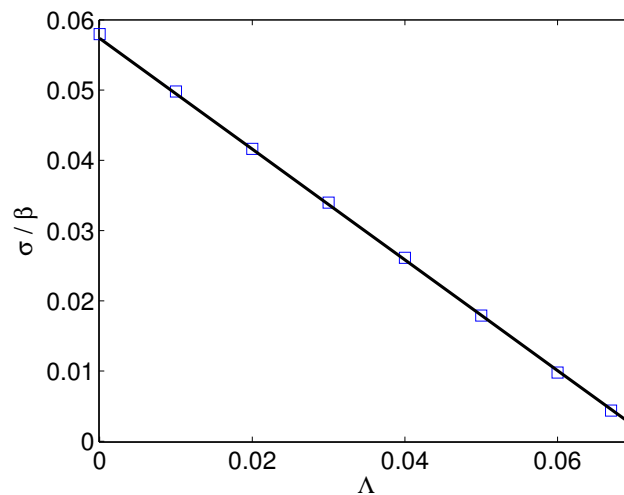
En figure 3.7a, le rôle de la dissipation Joule sur le taux de croissance du mode de spin-over est étudié en comparant les résultats numériques avec le résultat de l'analyse linéaire de stabilité (3.53). Le taux de croissance numérique est obtenu par ajustement d'une croissance initiale exponentielle sur la grandeur $W = 1/V_s \cdot \iiint_{V_s} |w| dV$, avec w la vitesse axiale adimensionnelle et V_s le volume de l'ellipsoïde. Le seul paramètre d'ajustement considéré ici est le coefficient d'amortissement visqueux α , déterminé en l'absence de champ magnétique : on obtient ainsi $\alpha = 2.80$ au lieu de la valeur théorique $\alpha = 2.62$, probablement du fait des valeurs finies de l'ellipticité β utilisées dans nos simulations. Aucun paramètre d'ajustement n'est introduit pour la dépendance du taux de croissance avec le champ magnétique imposé, et la loi d'échelle théorique est donc confirmée. Remarquons que pour des champs magnétiques externes suffisamment forts, la dissipation Joule empêche l'instabilité elliptique de se développer (l'ellipticité et le nombre d'Ekman étant maintenus constants). La précision de la solution numérique est confirmée en figure 3.7b, où l'évolution de l'amplitude du champ magnétique \mathbf{B}_r , radial au point considéré, avec le nombre d'Elsasser est comparée avec l'équation théorique (3.59). Finalement, une dernière grandeur est intéressante à étudier : l'amplitude de l'écoulement à saturation. Notons que cette grandeur est difficile à obtenir expérimentalement, et n'a donc pas encore été étudiée sous champ magnétique. Dans les simulations numériques, l'amplitude A de l'écoulement généré par l'instabilité à saturation est obtenue en déterminant la vorticité additionnelle moyenne de l'écoulement dans l'intérieur fluide (le bulk), par rapport à la vorticité imposée $2 \mathbf{e}_z$ de la rotation de base. Cette valeur est ensuite comparée au vecteur rotation du spin-over donnée par (3.54-3.56). Les résultats sont montrés en figure 3.7c pour les trois composantes du mode de spin-over, ainsi que l'amplitude i.e. la norme du vecteur. L'excellent accord obtenu pour les trois tests donnés en figure 3.7 confirme que le modèle numérique simule correctement le champ induit et sa rétroaction sur l'écoulement. Nous sommes donc à présent en mesure d'aller plus loin et d'étudier l'induction magnétique de modes plus complexes de l'instabilité elliptique. Notons que ces modes sont difficiles à étudier par des approches théoriques et expérimentales.

3.5.2 Induction magnétique du mode (1,3) de l'instabilité elliptique

Excepté pour le mode de spin-over, l'induction magnétique des autres modes de l'instabilité elliptique est difficilement accessible dans la mesure où le champ de vitesses obtenu à saturation n'est pas connu. Afin d'obtenir des informations génériques sur la MHD de



(a)



(b)

FIGURE 3.8 – Simulations numériques MHD du mode $(1,3)$ de l'instabilité elliptique dans un ellipsoïde triaxial, avec un champ magnétique uniforme imposé selon l'axe de rotation. (a) La norme du champ magnétique, normalisée par sa valeur maximale $B = 6.9 \cdot 10^{-4}$, est représentée sur les coupes à la saturation du mode $(1,3)$; les lignes de champ magnétiques sont aussi représentées. Paramètres : $\beta = 0.317$, $E = 1/700$, $c/a = 0.65$ et $\Lambda = 0.02$. (b) Évolution du taux de croissance de l'instabilité elliptique avec le nombre d'Elsasser Λ . Les résultats numériques (carrés bleus) sont en excellent accord avec l'analyse linéaire de stabilité (ligne noire continue) donnée par (3.60), en utilisant $\alpha = 4.24$, déterminé en absence de champ magnétique.

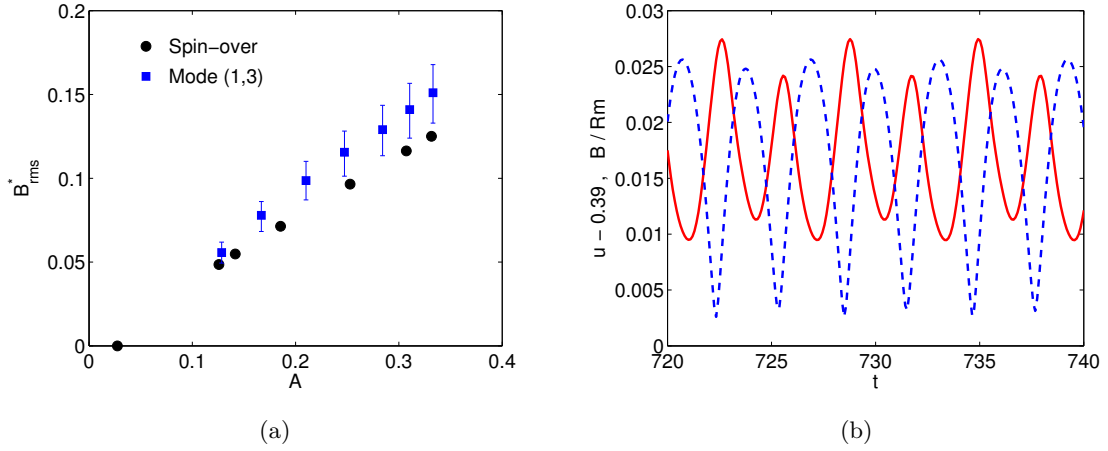


FIGURE 3.9 – (a) Évolution de B_{rms}^* avec l'amplitude du mode A . Pour le mode (1,3), les barres d'erreurs indiquent les valeurs extrêmes atteintes par B_{rms}^* , montrant que l'amplitude des oscillations du champ magnétique induit augmente avec la distance au seuil. (b) Le champ magnétique $\|\mathbf{B}\|/Rm$ et la quantité $\|\mathbf{u}\| - 0.39$ (pour des raisons de lisibilité) sont comparées, pour le point situé à la moitié du grand axe dans le plan équatorial. Le déphasage obtenu est de 1.13, valeur proche de la prédiction théorique $\pi/2 \approx 1.57$.

l'instabilité elliptique, l'approche WKB est pertinente dans la mesure où elle permet de s'affranchir de la connaissance du mode excité. Les perturbations à l'écoulement de base sont recherchées sous la forme d'ondes planes dans la limite $k \gg 1$ et $\beta \ll 1$. Supposant une force de Laplace d'ordre β , l'analyse WKB (Herreman *et al.*, 2009) donne le taux de croissance (voir aussi l'annexe E.1)

$$\sigma = \frac{9}{16} \beta - \alpha \sqrt{E} - \frac{\Lambda}{4}, \quad (3.60)$$

où α est un coefficient d'amortissement visqueux d'ordre 1, et le champ magnétique induit \mathbf{B} est lié à la vitesse typique du mode excité \mathbf{u}_0 par :

$$\mathbf{B} = i \frac{Rm}{2k} \mathbf{u}_0, \quad (3.61)$$

où k est la norme du vecteur d'onde du mode excité. Cette expression générique montre que le champ magnétique induit dû à l'instabilité elliptique est systématiquement proportionnel et en quadrature avec le champ de vitesse associé à l'instabilité. Notons que les solutions (3.60) et (3.61) sont toutes deux en accord avec les résultats analytiques obtenus par une méthode globale pour le cas particulier du mode de spin-over (voir section 3.5.1).

Nous validons ici ces résultats en considérant le mode (1,3) de l'instabilité elliptique, qui oscille 2 fois plus vite que la vitesse angulaire de rotation de l'écoulement. Ce mode est excité en fixant la longueur de l'axe polaire à $c/a = 0.65$ (voir section 2.3.1). Le champ magnétique typique induit par le mode (1,3) est représenté en figure 3.8a. En figure

3.8b, l'excellent accord entre les taux de croissance théoriques et numériques confirme la validité générique de l'amortissement Joule en $-\Lambda/4$. Comme précédemment, le coefficient d'amortissement visqueux, qui dépend de l'ellipticité, est obtenu à champ magnétique nul : $\alpha \approx 4.24$. Le coefficient d'amortissement visqueux vaut $\alpha = 4.24$ pour les simulations présentées, ce qui est de l'ordre de grandeur attendu. L'expression (3.61) est comparée aux données des simulations numériques en figure 3.9a pour le mode de spin-over et le mode (1,3). Pour ce faire, nous avons défini $B_{rms}^* = 2k B_{rms}/Rm$, où $k = 2\pi/\lambda$, avec une longueur d'onde λ égale à $\lambda = 2$ pour le mode de spin-over et $\lambda = 1$ pour le mode (1,3). La vitesse typique u_0 correspond en fait à l'amplitude A du mode (1,3), qui est déterminé par $A = \langle \max_V \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b\| \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ indique une moyenne en temps, et \mathbf{u}_b est l'écoulement de base avant déstabilisation par l'instabilité elliptique. Cette méthode est moins précise que celle utilisée en section 3.5.1 pour le spin-over mais plus générique car utilisable pour chaque mode. La proximité des points en figure 3.9a confirme la validité de l'équation (3.61). Finalement, en figure 3.9b, la quadrature de phase suggérée par l'équation (3.61) entre la vitesse et le champ magnétique induit est validée.

3.5.3 Induction magnétique de la LDEI

De même qu'en section 2.4, on considère ici l'instabilité elliptique dans un ellipsoïde rigide triaxial d'axes (a, b, c) en libration i.e. oscillant à la vitesse angulaire

$$\Omega(t) = \Omega + \Delta\phi f \sin(ft) \quad (3.62)$$

où $\Delta\phi$ et f sont respectivement l'amplitude et la fréquence angulaire de la libration. Avec le rayon équatorial moyen $R = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$ comme échelle de longueur, et Ω^{-1} comme échelle de temps, la vitesse angulaire adimensionnelle s'écrit $1 + \varepsilon \sin(\omega t)$, avec la fréquence angulaire adimensionnelle $\omega = f/\Omega$ et le paramètre de forçage $\varepsilon = \Delta\phi \omega$. Dans ce cas, nous avons vu qu'une instabilité elliptique forcée par libration, dite LDEI, est susceptible de croître pour certaines gammes de fréquence ω . En présence d'un champ magnétique imposé \mathbf{B}_0 , parallèle à l'axe de rotation, une analyse WKB donne alors le taux de croissance théorique de la LDEI dans la limites des grands nombres d'ondes $k \gg 1$ et pour $\beta, \varepsilon \ll 1$ (voir annexe E.2) :

$$\sigma = \frac{16 + \omega^2}{64} \varepsilon\beta - \alpha\sqrt{E} - \frac{\omega^2}{16} \Lambda, \quad (3.63)$$

avec le nombre d'Elsasser $\Lambda = \gamma B_0^2/(\rho\Omega)$ et un coefficient d'amortissement visqueux $\alpha \in [1; 10]$. Dans un contexte astrophysique, l'amortissement Joule peut significativement modifier les propriétés de stabilité de l'écoulement, et le champ induit peut participer aux fluctuations magnétiques mesurées par exemple au voisinage d'Europe, qui est probablement la plus instable des lunes galiléennes (voir section 4.2).

Notre objectif ici est de valider nos prédictions théoriques. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le référentiel lié à l'ellipsoïde. Un champ magnétique uniforme est imposé le long de l'axe de rotation, et l'ellipsoïde est immergé au sein d'une sphère de rayon $6 \sqrt[3]{abc}$, ce milieu environnant étant 10^{-4} fois moins conducteur d'électricité que le fluide. De même qu'en section 3.5.1, nous fixons le nombre de Prandtl magnétique à $Pm = 10^{-4}$.

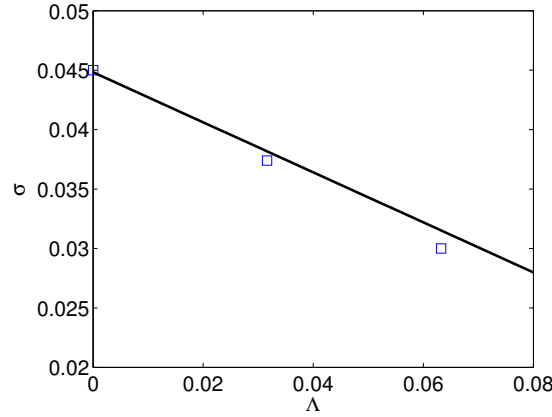


FIGURE 3.10 – Évolution du taux de croissance de la LDEI avec le nombre d'Elsasser Λ associé au champ magnétique uniforme imposé le long de l'axe de rotation pour $\varepsilon = 1$, $\omega = 1.835$, $\beta = 0.44$, $c = 1$ et $E = 5 \cdot 10^{-4}$. Les résultats numériques (carrés bleus) sont en accord avec l'analyse linéaire de stabilité (ligne continue noire) donnée par l'équation (3.63), en utilisant $\alpha = 3.95$, déterminé en absence de champ magnétique.

Afin de favoriser l'apparition de la LDEI, nous choisissons $\varepsilon = 1$, $\omega = 1.835$, $\beta = 0.44$, $c = 1$, et un nombre d'Ekman $E = \nu/(\Omega_0 R^2)$ égal à $E = 5 \cdot 10^{-4}$. L'expression du taux de croissance (3.63) montre qu'un faible nombre d'Ekman est requis pour être au-dessus du seuil de la LDEI car le terme déstabilisant est à présent en $\varepsilon\beta$ au lieu de β . Le coût de calcul supplémentaire imposé par cette valeur du nombre d'Ekman nous a limité à trois simulations, pour $\Lambda = 0$; 0.032; 0.063. Le mode excité de la LDEI dans ces simulations est en fait un mode de type spin-over dont la direction oscille en latitude. Les taux de croissance obtenus sont représentés en figure 3.10 et confirment la validité du terme d'amortissement Joule. Comme précédemment, l'amortissement visqueux est obtenu à champ magnétique nul, donné par $\alpha = 3.95$. Quant à l'amplitude du champ induit, au point de rayon $r = 2$ et de longitude $\phi = 45^\circ$ dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$), déjà considéré en figure 3.7b, le champ magnétique est radial, et égal à $B_r = 0.0013$ pour $\Lambda = 0.032$, et $B_r = 0.001$ pour $\Lambda = 0.063$. Supposant que la théorie présentée en section 3.5.1 reste valide pour ce mode de type spin-over oscillant légèrement, les valeurs théoriques obtenues pour les mêmes paramètres β and E sont respectivement $B_r = 0.0009$ et $B_r = 0.0008$, valeurs très proches des valeurs obtenues numériquement.

3.5.4 Étude en configuration dynamo

Après les études d'induction précédentes, l'étape suivante est naturellement de tester la capacité de l'instabilité elliptique à exciter une dynamo. Afin de répondre à cette question, partant de la configuration utilisée pour les études d'induction, le champ externe imposé est soudainement coupé une fois le régime permanent atteint, et les taux de décroissance du champ mesurés pour différents nombres de Reynolds magnétiques. La figure

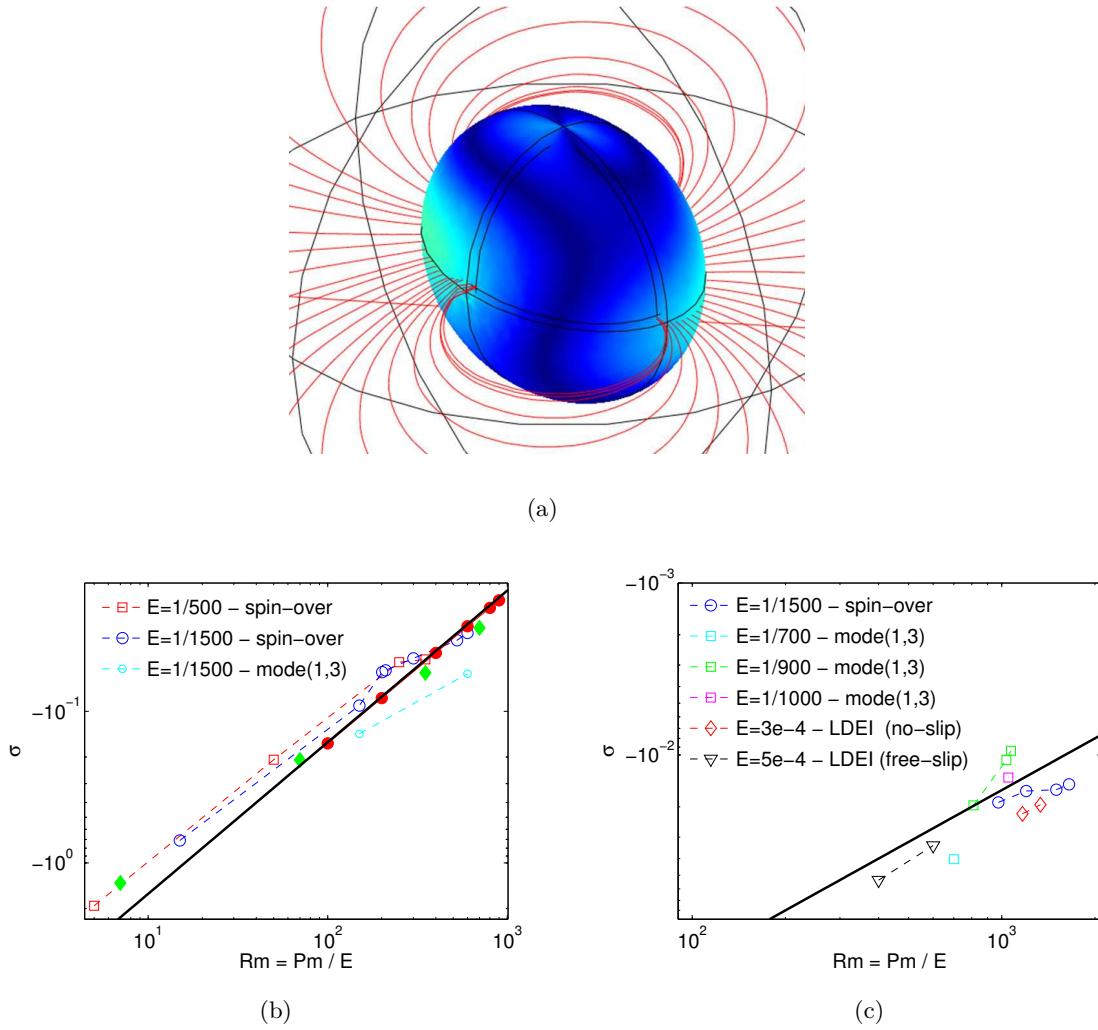


FIGURE 3.11 – *Champ magnétique décroissant lentement dans le temps une fois le champ externe coupé. (a) Norme de la composante radiale cylindrique sortante du champ magnétique (normalisée par sa valeur maximum) représentée sur la paroi externe du domaine fluide ellipsoïdal. Ce champ décroissant est obtenu pour le mode de spin-over pour $\beta = 0.317$ $E = 1/500$, $c = (a + b)/2$ et $Rm = 500$. (b) L'ellipsoïde fluide est immergé au sein d'une sphère isolante de rayon $10 \sqrt[3]{abc}$ (rapport des conductivités de 10^{-4}). La figure montre les résultats pour l'instabilité elliptique (symboles ouverts) et pour la précession (symboles pleins). La ligne continue noire représente la loi d'échelle $-16/Rm$, i.e. un comportement purement diffusif. Les résultats de Tilgner (1998) sont représentés par des cercles rouges tandis que les losanges verts sont les résultats de nos simulations MHD d'une sphère précessant à un angle de 60° et à une vitesse angulaire de $\Omega_p = 0.3$ pour $E = 1/700$. (c) Figure similaire à la figure (b) mais avec des conditions pseudo-vides à la paroi externe. À titre de comparaison, quelques simulations avec l'écoulement à saturation de la LDEI sont aussi représentées dans le cas de parois adhérentes, pour $\varepsilon = 0.92$, $\omega = 1.76$, $\beta = 0.44$, $c = 1$ et $E = 5 \cdot 10^{-4}$; ainsi que dans le cas avec glissement à la paroi pour $\varepsilon = 1$, $\omega = 1.8$, $\beta = 0.44$, $c = 1$ et $E = 3 \cdot 10^{-4}$.*

3.11 montre nos résultats numériques. Nous sommes limités à des nombres de Reynolds magnétique $Rm = Pm/E$ inférieurs à 1000. En effet, le maillage nécessaire pour des nombres de Reynolds magnétique supérieurs mène à des coûts de calcul trop importants. La figure 3.11a montre le champ magnétique dipolaire typique au cours de sa décroissance généré par le mode de spin-over. La figure 3.11b présente l'étude systématique des taux de décroissance du mode de spin-over et du mode (1,3), pour différents nombres d'Ekman, avec un milieu extérieur isolant (rapport des conductivités $\gamma_v/\gamma \leq 10^{-4}$). Les résultats, qui s'alignent sur une loi d'échelle en $1/Rm$, montrent que le paramètre de contrôle est effectivement le nombre de Reynolds magnétique. Cela indique également qu'un comportement diffusif est obtenu dans cette gamme de Rm . Notons que cela n'empêche pas l'écoulement d'être potentiellement capable d'exciter une dynamo. En effet, à titre de comparaison, les taux de décroissance de nos simulations numériques MHD d'une sphère précessant à un angle de 60° et à une vitesse angulaire $\Omega_p = 0.3$ (ce qui correspond au cas étudié par Tilgner, 2005) sont également représentés pour $E = 1/700$. Selon Tilgner (2005), le seuil dynamo est alors obtenu pour $Pm/E \approx 7000$, du moins si la présence de la graine interne solide présente dans ses simulations est négligeable. Cependant, les points représentés en figure 3.11b pour ce cas de précession sont proches des points correspondant à l'instabilité elliptique et ne permettent pas de prédire que l'écoulement est effectivement capable d'exciter une dynamo. Notons que ces résultats sont également proches des taux de décroissance donnés par Tilgner (1998) dans son étude de la dynamo cinématique de l'écoulement de Poincaré dans un sphéroïde en précession d'un rapport d'aspect $c/a = 0.9$. La figure 3.11c est semblable à la figure 3.11b, mais avec des conditions de pseudo-vide à la paroi externe. La plupart des points suivent la tendance diffuse. Néanmoins, le mode (1,3) semble quitter cette tendance pour les grands Rm , ce qui est très encourageant. Une telle tendance laisse penser qu'une dynamo excitée par les marées n'est pas impossible, alors même qu'un travail récent de Herreman & Lesaffre (2011) montre qu'une unique onde inertielle ne peut exciter de dynamo, du moins dans une gamme large de paramètres⁶.

3.6 Expériences d'induction dans un cylindre

Après les études d'induction de l'instabilité elliptique de Lacaze *et al.* (2006) et Herreman *et al.* (2006), le dispositif a été modifié pour étudier l'induction associée à la dynamique, plus riche, de l'instabilité elliptique en géométrie cylindrique. J'ai ainsi collaboré à cette étude expérimentale, publiée dans *Journal of Fluid Mechanics* (Herreman *et al.*, 2010), dont une partie des résultats expérimentaux obtenus est présentée ici.

3.6.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental *IMAGINE* (une abréviation pour *Instabilité MAGnéto INEr-tielle*) a été spécialement conçu pour étudier l'évolution non linéaire de l'instabilité elliptique sous champ magnétique (figure 3.12). Il est semblable au dispositif classique d'étude

6. Ce qui est toutefois différent des écoulements générés par nos instabilités paramétriques à trois ondes.

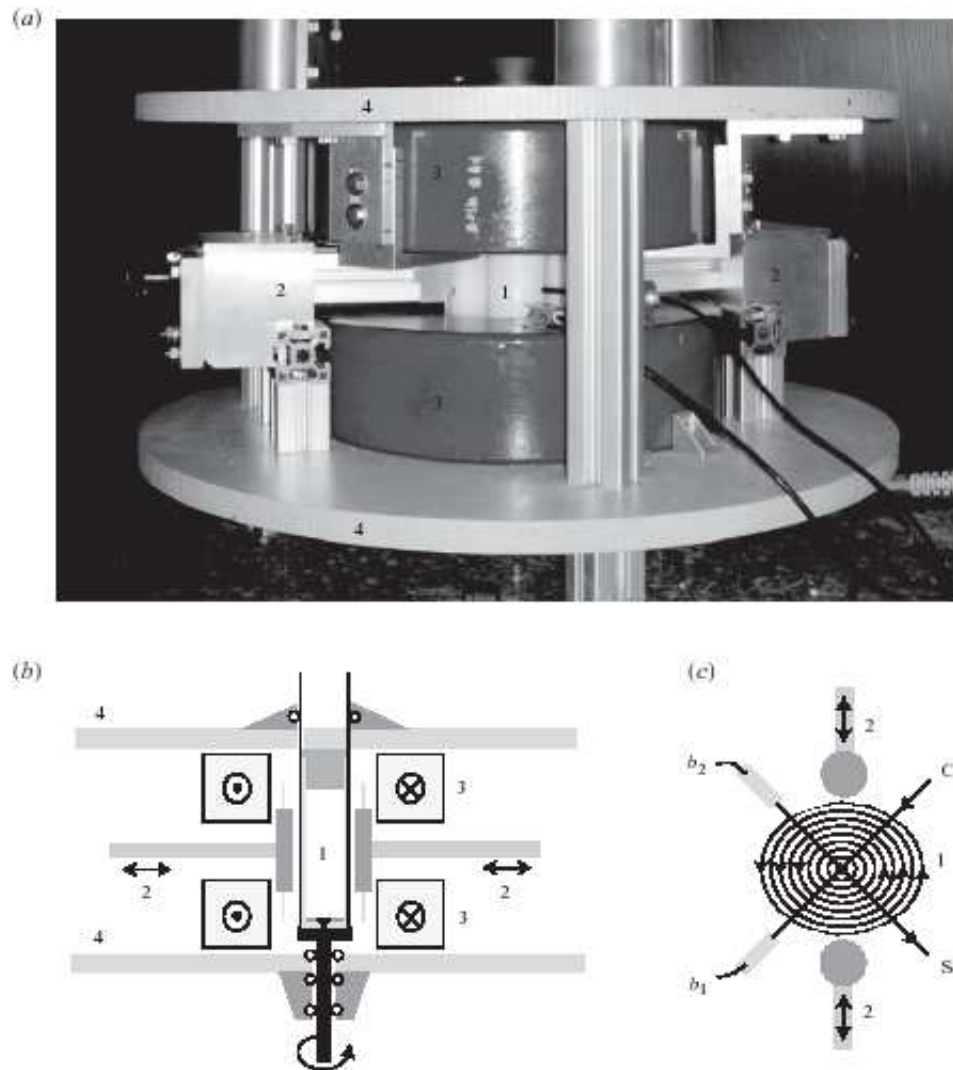


FIGURE 3.12 – (a) Photographie et (b, c) représentations schématisiques du dispositif IMA-GINE, vu respectivement de côté et de dessus. (1) Cylindre déformé elliptiquement, rempli de Galinstan. (2) Rouleaux pour déformation elliptique. (3) Bobines de Helmholtz. (4) Plaques de fer. Les sondes à effet Hall b_1 et b_2 sont placées dans le plan équatorial et mesurent les composantes radiales du champ dans les directions C et S .

hydrodynamique de l'instabilité elliptique développé tout d'abord par Malkus (1989), et utilisé au laboratoire depuis plusieurs années (e.g. Eloy *et al.*, 2003; Lacaze *et al.*, 2005b; Le Bars *et al.*, 2007). La nouveauté réside dans l'utilisation des effets magnétiques pour étudier les phénomènes d'induction dans un métal liquide en vertu de l'application d'un champ magnétique homogène aligné le long de l'axe de rotation. En effet, les ondes inertielles excitées par l'instabilité elliptique sont accompagnées par des champs magnétiques induits, qui sont détectés en dehors du cylindre par des sondes à effet Hall d'une sensibilité maximale de $300 \mu\text{V}/\text{mV}$ (FW - Bel-Sypris - Model 7030). Le fluide conducteur utilisé est du Galinstan, un eutectique de gallium-indium-étain liquide à température ambiante. Ses propriétés physiques sont : une masse volumique $\rho = 6440 \text{ kg. m}^{-3}$, une viscosité cinématique $\nu = 0.93 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, et une conductivité électrique $\sigma_e = 3.41 \pm 0.5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$ (valeur corrigée : voir Herreman *et al.*, 2010). Le fluide est contenu dans un récipient cylindrique déformable (voir le numéro 1 sur la figure 3.12) avec un rayon intérieur $R = 25 \pm 0.5 \text{ mm}$ et une hauteur H qui peut être ajustée entre 120 et 160 mm. Le cylindre tourne à une vitesse angulaire Ω entre 0 et 5 Hz, entraîné par un moteur AC de 600 W, avec un contrôle sur la vitesse angulaire d'une précision inférieure à 1 %. L'ellipticité β de la déformation elliptique peut être modifiée lors de l'expérience dans l'intervalle $[0; 0.3]$. Le cylindre est monté entre deux bobines de Helmholtz refroidies à l'eau (notées 3 sur la figure 3.12) et alimentées par une alimentation continue stabilisée d'une puissance de 3 kW. Nous pouvons imposer l'intensité B_0 du champ dans l'intervalle $[0; 0.12] \text{ T}$. L'amplitude typique du champ induit par l'instabilité est de l'ordre d'un dix millième de B_0 . Par conséquent, des sondes à effet Hall très sensibles sont utilisées, avec une soustraction systématique du champ axial appliqué. Le signal restant est ensuite amplifié par un facteur 100 à 200 et filtré par un filtre passe-bas (fréquence de coupure entre 4 et 20 Hz), avant d'être enregistré par l'unité d'acquisition de données.

Les résultats présentés dans cette section sont adimensionnés par l'échelle de longueur R , l'échelle de temps Ω^{-1} et l'échelle de champ magnétique $B_0 Rm$. Ainsi, le champ induit reflète l'amplitude de l'écoulement perturbé.

3.6.2 Amortissement de l'instabilité elliptique par effet Joule

Deux cas de figures se présentent suivant les valeurs du champ imposé B_0 . À champ faible, la force de Lorentz est insuffisante pour modifier l'instabilité elliptique. Dans ce cas, le champ magnétique induit par le mode instable est une simple image de l'hydrodynamique. En particulier, la croissance exponentielle du mode de spin-over a pu être mesurée en fonction de l'amplitude de la déformation elliptique à proximité du seuil de l'instabilité. Dans le cas où la force de Lorentz n'est plus négligeable, nous avons montré qu'une partie de l'énergie cinétique est dissipée sous forme d'effet Joule, ce qui ralentit la croissance de l'instabilité. En figure 3.13, les résultats obtenus à partir des mesures expérimentales sont donnés pour le mode stationnaire principal $(-1, 1, 1)$ en fonction du nombre d'Elsasser. Ainsi, en figure 3.13a, les taux de croissance mesurés sur les croissance initiales exponentielles sont représentés. Les barres d'erreurs sont calculées à partir de l'écart à chaque ajustement exponentiel. L'amortissement du taux de croissance par effet Joule est parfaitement visible et un ajustement linéaire donne un amortissement en -0.33Λ , ce qui est à comparer à la valeur théorique $-\Lambda/4$ (voir section 3.5.2). Notons que

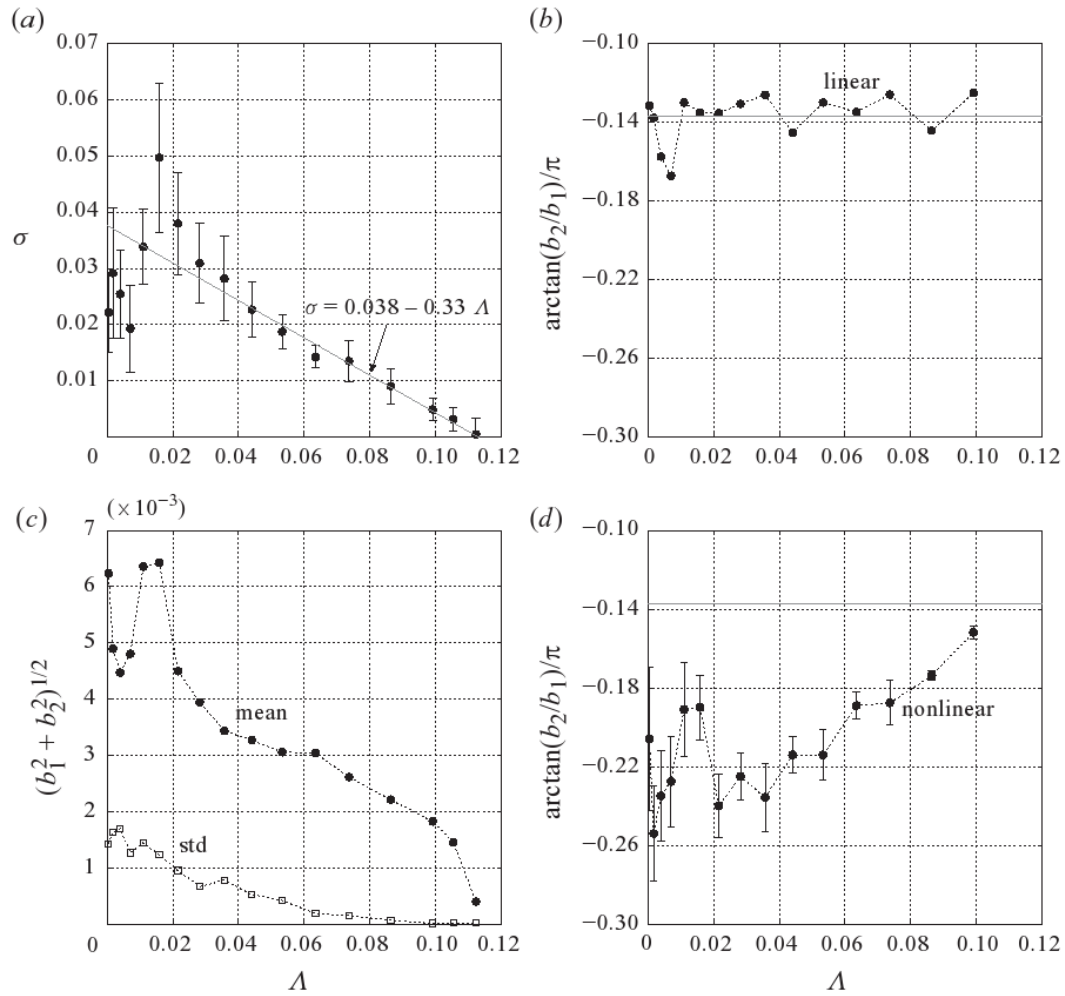


FIGURE 3.13 – Résultats expérimentaux pour le mode stationnaire principal $(-1, 1, 1)$ en fonction du nombre d’Elsasser. (a) Taux de croissance linéaire σ . Un ajustement linéaire pour $\Lambda > 0.02$ est également représenté par une ligne continue. (b) Déphasage angulaire des signaux mesurés par les deux sondes radiales durant l’étape de croissance exponentielle initiale. La ligne continue correspond à l’angle théorique prédit par l’analyse linéaire. (c) Valeurs moyennes (ronds) et écart-types (carrés) du champ radial $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. (d) Déphasage angulaire moyen des signaux mesurés par les deux sondes radiales en régime non-linéaire.

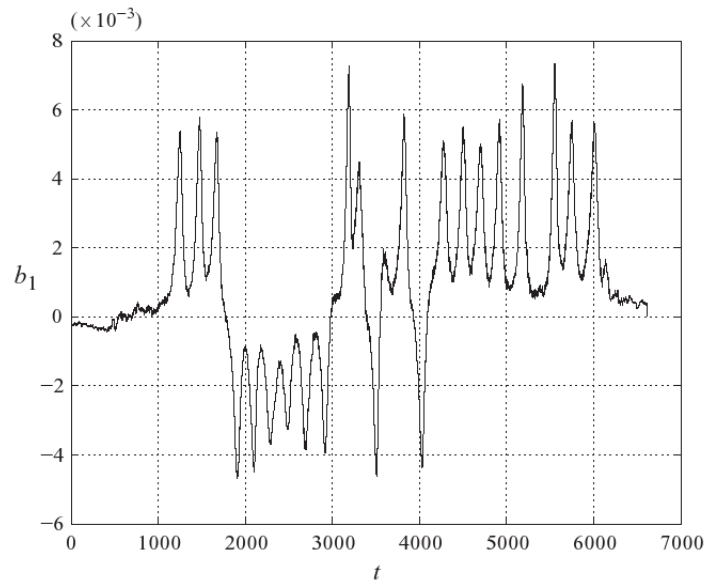


FIGURE 3.14 – Observation de cycles de croissance/décroissance avec des renversements chaotiques. Cette série temporelle a été mesurée par b_1 pour un rapport d'aspect $h = 147/25$, $\beta = 0.156$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$ et $\Lambda = 4.9 \cdot 10^{-3}$.

les taux de croissance mesurés sont typiquement inférieurs aux valeurs théoriques d'un facteur 2. Cet écart n'est pas dû au champ magnétique puisqu'il avait déjà été observé par Eloy *et al.* (2003). Nous pensons qu'il pourrait provenir de la non-homogénéité de la déformation elliptique, appliquée sur environ 2/3 de la hauteur du cylindre (voir Le Bars *et al.*, 2007). En effet, cet effet n'a pas été observé en géométrie sphérique (Herreman *et al.*, 2009). La figure 3.13b montre que le champ magnétique imposé ne modifie pas le déphasage angulaire durant l'étape de croissance exponentielle initiale, en accord avec les prédictions théoriques (voir Herreman *et al.*, 2010). La figure 3.13c montre que l'amplitude du mode, donnée par $(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$, décroît progressivement lorsque Λ augmente, et une bifurcation fourche apparaît à proximité du seuil. Enfin, la figure 3.13d confirme que le déphasage angulaire en régime non-linéaire tend vers la valeur prédite par la théorie linéaire lorsque la distance au seuil diminue.

D'autres expériences ont été réalisées et des transitions similaires dans les séries temporelles ont généralement été observées lorsque Λ est modifié. Toutefois, dans certaines séries, des cycles de croissance/décroissance apparaissent de façon plus organisée, peut-être contrôlée par un attracteur chaotique de basse dimension (voir Herreman *et al.*, 2010, pour plus de détails). La figure 3.14 présente un exemple typique où de telles inversions intermittentes peuvent être observées.

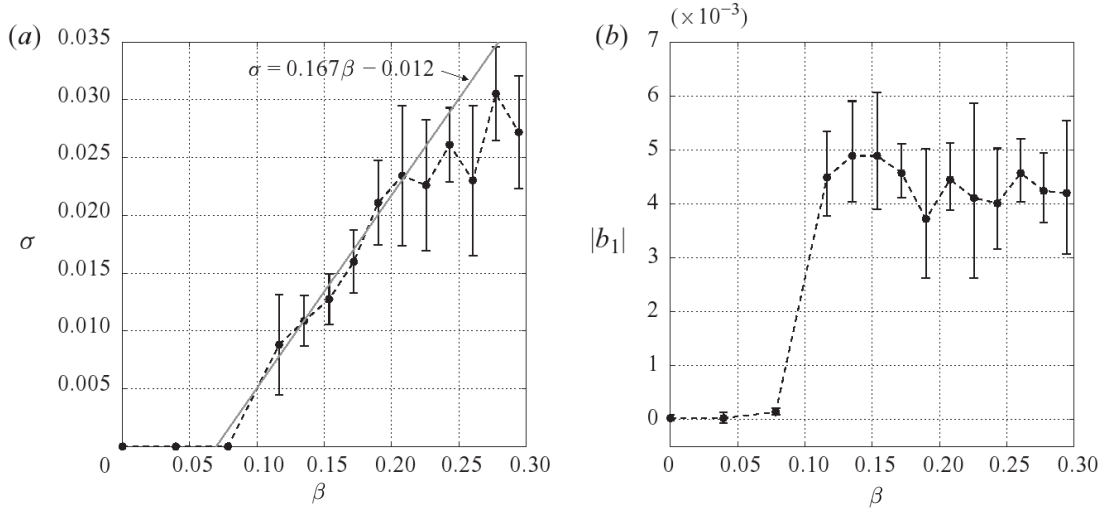


FIGURE 3.15 – (a) Taux de croissance linéaire σ et (b) amplitudes de saturation moyennes avec leurs amplitudes typiques d'oscillations (barres) en fonction de l'ellipticité de la déformation β . Paramètres : $h = 145/25$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$ et $\Lambda = 0.0057$. En (a), la ligne continue représente un ajustement linéaire des six premiers taux de croissance non-nuls à partir du seuil.

3.6.3 Effet de l'ellipticité et du nombre d'Ekman

Nous avons vu en section 2.3.4 que l'amplitude de l'instabilité elliptique dépendait uniquement de la distance au seuil en nombre d'Ekman. Ce point peut également être étudié expérimentalement en variant la déformation et la vitesse de rotation du fluide. Nous avons donc mené une série d'expériences pour $h = 145/25$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$ et une faible valeur du nombre d'Elsasser $\Lambda = 0.0057$. La figure 3.15a montre que le taux de croissance mesuré varie linéairement avec β , en accord avec l'analyse linéaire de stabilité. Cependant, un ajustement linéaire donne une pente de 0.167 au lieu de la valeur prédite par l'analyse globale de stabilité linéaire 0.531. Ce désaccord a déjà été mentionné en section 3.6.2, et provient probablement de l'incertitude sur la déformation elliptique imposée expérimentalement. En figure 3.15b, l'amplitude de saturation moyenne de b_1 ainsi que l'écart-type sont représentés. Le passage du seuil de l'instabilité elliptique est clairement visible autour de $\beta \geq 0.1$. Une fois le seuil franchi, la valeur de saturation semble relativement indépendante de la valeur de la déformation. Notons que des comportements similaires ont déjà été rapportés par Mason & Kerswell (2002) dans le cas d'une couche de fluide plane en précession : les énergies cinétiques des écoulements à faible et forte précessions semblent indépendantes de l'amplitude du forçage de précession dans les régimes loin du seuil linéaire.

Si la déformation ne contrôle pas l'amplitude de l'instabilité, on peut se demander ce qui la contrôle. Afin de répondre à cette question, nous avons mené une nouvelle série de mesures avec un champ magnétique imposé de $B_0 = 110 \cdot 10^{-4}$ T et une ellipticité de

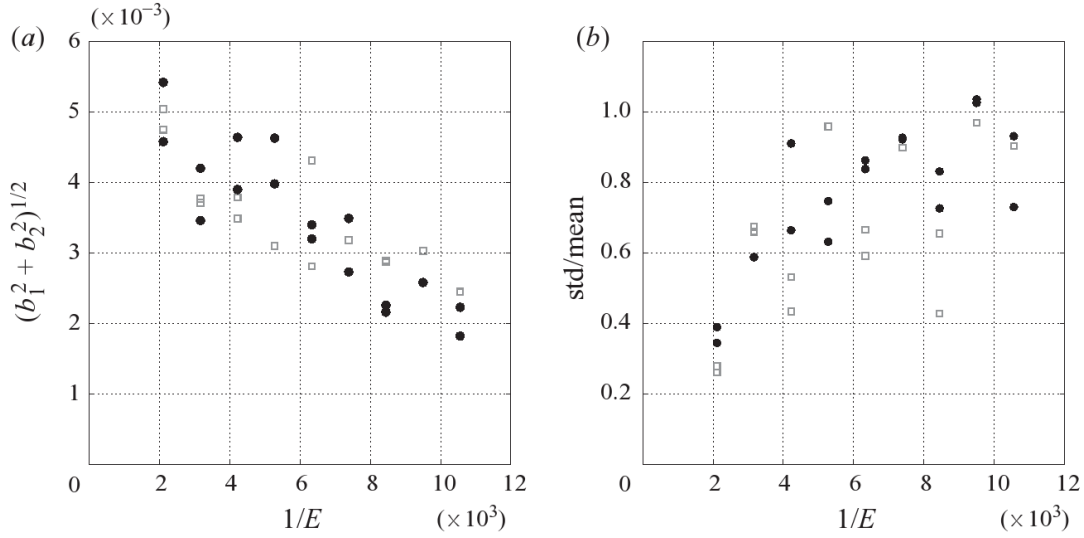


FIGURE 3.16 – (a) Valeur moyenne et (b) rapport de l'écart-type à la valeur moyenne de $(b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$ pour des vitesses de rotation croissantes, représentées par $1/E$. Paramètres : $\beta = 0.15$ et $h = 145/25$. Les ronds (resp. les carrés) représentent une vitesse de rotation positive (resp. négative).

$\beta = 0.15 \pm 0.1$ pour différentes vitesses de rotation Ω dans la gamme $[0.5, 2.5] \times 2\pi \text{ rad.s}^{-1}$. Pour ces vitesses de rotation, le nombre d'Ekman et le nombre de Reynolds magnétique associés varient respectivement dans les intervalles $[0.95, 4.73] \times 10^{-4}$ et $[0.007, 0.036]$. Le nombre d'Elsasser reste faible, variant dans la gamme $[0.0041, 0.0201]$. Chaque série temporelle a été répétée plusieurs fois et la rotation inversée dans certains cas. Cette inversion de la rotation échange les axes d'étirement et de compression, et donc les signaux b_1 et b_2 . Considérant $\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, la valeur moyenne et le rapport de l'écart-type à la valeur moyenne sont respectivement représentés en figure 3.16a et 3.16b. Comme attendu, l'inversion de la rotation ne semble pas modifier les mesures, et l'amplitude moyenne semble diminuer lorsque la vitesse de rotation augmente, contrairement à ce qui a été observé en section 2.3.4. Ce comportement est peut-être dû aux instabilités secondaires (Kerswell, 1999; Eloy *et al.*, 2003; Lagrange *et al.*, 2008) qui diminuent l'amplitude du mode stationnaire lorsque E augmente. La figure 3.16b montre que ce régime pourrait être accompagné d'une augmentation du niveau des fluctuations dans la mesure où l'écart type des fluctuations mesurées augmente progressivement avec $1/E$ jusqu'à des valeurs comparables à l'amplitude moyenne. Cependant, il est difficile d'être catégorique sur ce point à partir de nos mesures de champs magnétiques.

3.6.4 Dynamique non-linéaire

La figure 3.17 illustre la richesse de la dynamique non-linéaire de l'instabilité elliptique lorsque l'on s'éloigne de son seuil de stabilité, par exemple ici en décroissant progressive-

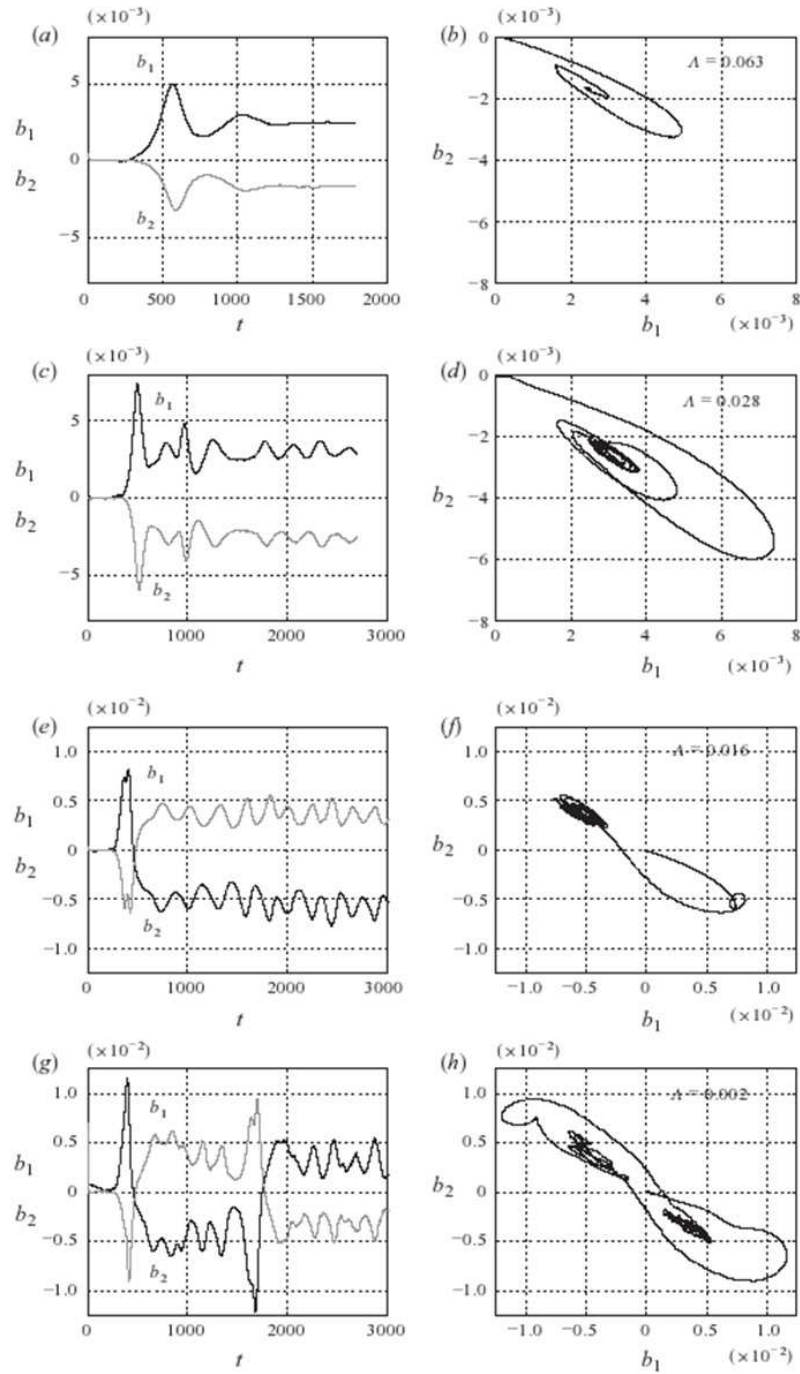


FIGURE 3.17 – Exemples de séries temporelles des champs magnétiques b_1 et b_2 déterminées expérimentalement et diagrammes de phase correspondants pour différentes valeurs du nombre d'Elsasser Λ . Ici, le rapport d'aspect du cylindre vaut $h = 148/25$, le nombre d'Ekman $E = 1.58 \cdot 10^{-4}$ et l'excentricité $\beta = 0.15$.

ment le champ imposé. Pour des champs relativement forts ($\Lambda = 0.063$), la saturation a lieu le long d'une spirale dans le plan (b_1, b_2) . Les trajectoires semblent quitter l'origine vers le bas, comme ce serait le cas pour une bifurcation supercritique. Pour un champ modérément fort ($\Lambda = 0.028$), la structure en spirale dans le plan (b_1, b_2) est toujours présente, mais le système ne sature plus et évolue lentement vers une modulation de cycle limite. Un changement radical est observé pour des champs plus faibles ($\Lambda = 0.016$) : après la croissance initiale le long d'une direction fixe dans le plan de phase, un changement soudain de direction est observé conduisant à un changement de signe des deux composantes magnétiques. Après ce renversement, les champs magnétiques restent dans un domaine près d'un point fixe, avec de petites oscillations irrégulières. Pour un champ magnétique imposé faible ($\Lambda = 0.002$), les oscillations deviennent suffisamment grandes pour entraîner plusieurs inversions. Lorsque ces renversements se produisent, les champs magnétiques induits disparaissent presque complètement, de telle sorte qu'une phase de croissance linéaire peut de nouveau être observée.

3.7 Dynamo synthétique expérimentale

Il est aujourd'hui irréaliste de construire une expérience de dynamo par instabilité elliptique du fait des contraintes expérimentales que cela impliquerait. Cependant, combinant le savoir-faire acquis au cours du travail expérimental présenté en section 3.6 et celui de G. Verhille, une première étape est déjà en cours de développement sur la base du dispositif IMAGINE, permettant de tester la dynamique de saturation de l'écoulement sous champ magnétique. Dans ce modèle de dynamo synthétique (voir par exemple Verhille *et al.*, 2010, pour une approche similaire de l'écoulement de von Karman), une partie du cycle dynamo est générée par une source externe de rétroaction, mais l'écoulement chaotique entraîné par l'instabilité conserve un rôle majeur. Ainsi, à partir d'un champ magnétique axial B^a , nous mesurons le champ magnétique radial induit B_r^i par l'instabilité elliptique, qui, à son tour, contrôle l'intensité du champ magnétique axial appliqué, et est donc capable de modifier l'écoulement. Par conséquent, cette expérience permet d'aborder certaines questions en suspens concernant la dynamique d'une dynamo de marées, en fonction du gain externe dans la boucle de rétroaction. De plus, par rapport au dispositif von Karman de Verhille *et al.* (2010), IMAGINE permet d'inhiber l'instabilité elliptique par le champ magnétique, permettant ainsi de saturer une telle dynamo synthétique par modification de l'écoulement, et non par la puissance finie de l'alimentation des bobines.

3.7.1 Boucle de rétroaction expérimentale

Reprenant le dispositif IMAGINE, la boucle de rétroaction a été initialement constituée en connectant la sonde b_1 sur l'alimentation des bobines à travers un amplificateur : le courant circulant dans les bobines est alors proportionnel au champ induit, qui est lui-même proportionnel au courant induit (schéma 3.18). Le seuil de l'instabilité est alors déterminé par l'induction et le gain γ de la boucle. Cependant, outre les offsets des appareils électroniques, le bruit environnant et les courants dans les plaques ferromagnétiques

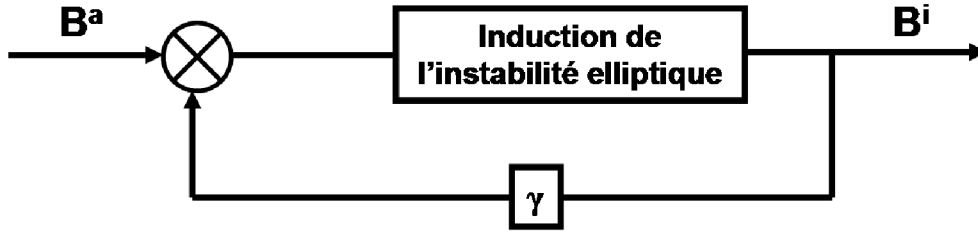


FIGURE 3.18 – Schéma de la rétroaction du signal induit B^i sur le champ appliqué B^a . L'induction de l'instabilité elliptique représente la fonction de transfert, tandis que le gain γ correspond au gain total de la boucle.

du dispositif⁷ induisent un bruit dans la boucle susceptible d'être amplifié. Le problème des offsets, qui dépendent légèrement de la température, a été en partie réglé en thermalisant les appareils, qui restent allumés en continu, et en compensant ces écarts avec l'amplificateur. Le problème du bruit a été plus difficile à régler du fait de la faible induction de l'instabilité elliptique (un dix millième du champ appliqué !). Deux modifications principales ont été apportées pour régler ce problème. Tout d'abord, la sonde b_2 a été positionnée à l'opposée de la sonde b_1 de sorte que $b_1 - b_2$ permet de mesurer uniquement la composante anti-symétrique du champ radial induit et ainsi de s'affranchir du bruit axisymétrique : le signal mesuré provient alors majoritairement de l'induction de l'instabilité elliptique. Ensuite, un micro-manipulateur (optique) a été adapté pour régler l'horizontalité des sondes radiales le plus précisément possible, ce qui minimise la composante du champ axial dans la mesure des sondes. L'horizontalité est ainsi réglée avec une précision de l'ordre de 10^{-5} rad.

Finalement, en s'affranchissant des offsets et du bruit, le champ appliqué à l'instant t_0 est donné par $B^a = B_0^a$, tandis que le champ (radial) induit est donné par $B_r^i = Rm_{eff} B_0^a$, où Rm_{eff} est un nombre de Reynolds magnétique effectif. À l'instant $t_0 + dt$, le champ appliqué est donné par $B^a = B_0^a + \gamma Rm_{eff} B_0^a = (1 + \gamma Rm_{eff}) B_0^a$, avec γ le gain total du bouclage. La série est donc géométrique, et le champ appliqué est donc donné en dessous du seuil ($\gamma Rm_{eff} < 1$) par :

$$B^a = \frac{B_0^a}{1 - \gamma Rm_{eff}}. \quad (3.64)$$

Au-dessus du seuil, i.e. pour $\gamma Rm_{eff} > 1$, la série diverge, et l'instabilité prend place dans la boucle. Cette instabilité est appelée *dynamo synthétique*. Comparé aux expériences déjà menées sur l'écoulement de Von Karman à Lyon, le champ magnétique est ici capable d'inhiber l'instabilité hydrodynamique lui donnant naissance. La saturation d'une telle dynamo est donc ici contrôlé par l'écoulement.

7. Ces plaques ont été mises en place pour obtenir un champ magnétique imposé le plus homogène et uniforme possible dans les mesures d'induction présentées en section 3.6.

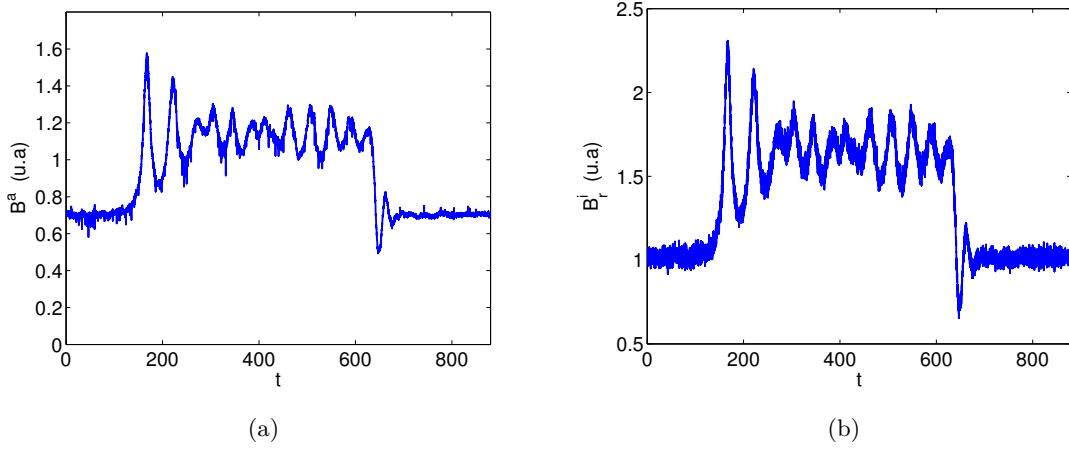


FIGURE 3.19 – Évolution temporelle typique des champs appliqués B^a (fig. a) et du signal B_r^i donné par $b_1 - b_2$ (fig. b). Paramètres : $\beta = 0.14$, $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$, avec un champ initial axial d'environ 70 G. Le temps est ici adimensionné par la vitesse angulaire de rotation Ω du fluide, tandis que les champs sont donnés en unités arbitraires. Notons que le régime hydrodynamique dans cette gamme de paramètres donne des cycles similaires à ceux qui sont représentés sur ces figures.

3.7.2 Premiers résultats expérimentaux

La figure 3.19 montre l'évolution temporelle typique des mesures de champs appliqué et induit. Il est tout d'abord satisfaisant de noter que les modifications apportées au système permettent effectivement d'obtenir des signaux beaucoup moins bruités que ceux obtenus en section 3.6. En effet, les signaux présentés en figure 3.19 sont les signaux bruts, sans filtrage numérique *a posteriori*. Notons également l'offset initial des signaux, montrant qu'un champ constant est initialement appliqué au système afin d'initier le bouclage. Notons que cet offset n'est ici pas un problème dans la mesure où l'alimentation utilisée pour les mesures présentées ici est unipolaire : en l'absence de possibilité d'inverser le courant, il n'est donc pas possible d'étudier de dynamo synthétique avec renversement du champ. Ce type d'étude est en cours grâce à l'acquisition d'une alimentation bipolaire, capable d'amplifier le champ axial dans un sens ou dans l'autre.

3.7.2.1 Étude systématique en fonction de la vitesse de rotation

Une première étude systématique en fonction de la vitesse de rotation a été effectuée (fig. 3.20). Afin de savoir si le seuil de la dynamo est franchi, il faut déterminer le gain de la boucle. La formule (3.64) montre que B_r^i/B^a représente le nombre de Reynolds magnétique effectif Rm_{eff} (fig. 3.20a), tandis que $1 - B_0^a/B_a$ permet d'obtenir γRm_{eff} , et donc γ (fig 3.20b). Le nombre de Reynolds magnétique effectif variant en première approximation linéairement avec la vitesse de rotation, l'évolution linéaire de B_r^i/B^a aux

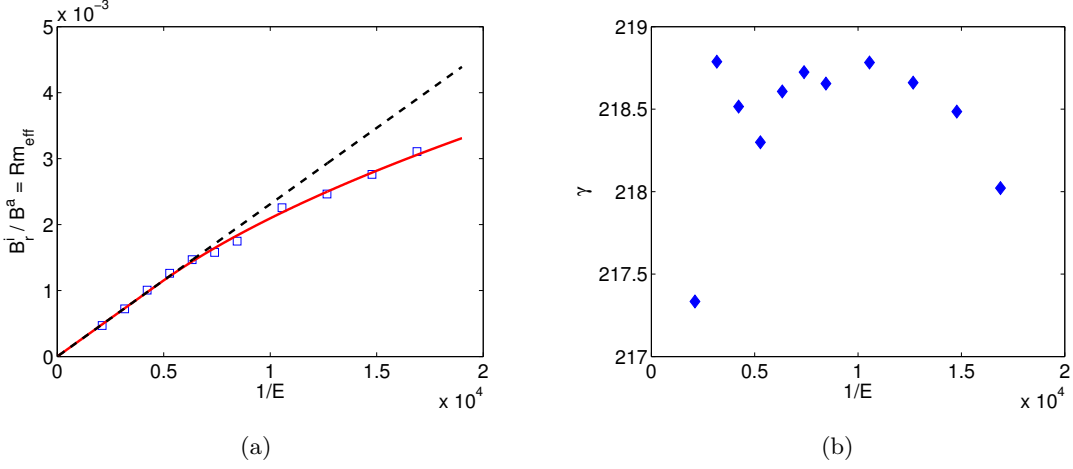


FIGURE 3.20 – Étude systématique en fonction de la vitesse de rotation du rapport du signal B_r^i , donné par $b_1 - b_2$, au champ appliqué (fig. a), et du gain γ de la boucle (fig. b). Paramètres : $\beta = 0.14$, avec un champ initial axial d'environ 70 G. La ligne continue correspond à l'ajustement de la fonction (3.65), tandis que la ligne interrompue est un simple ajustement linéaire des 5 premiers points.

grands nombres d'Ekman est satisfaisante. Pour expliquer l'écart à la tendance linéaire aux faibles nombres d'Ekman, Verhille (2010) propose de considérer le volume de fluide créant le champ magnétique. Lorsque la longueur de diffusion du champ magnétique est plus petite que le rayon du cylindre, le volume utile est donné par $\pi[R^2 - (R - l_d)^2] h$, où $l_d \sim 1/\sqrt{\mu\sigma\Omega}$ est la longueur de diffusion dans le matériau. Une autre façon de voir cela est de considérer l'expulsion du champ magnétique par un écoulement en rotation solide à fort Rm . La figure 3.20a montre ainsi un ajustement sur les points expérimentaux de la fonction associée à ce mécanisme :

$$B_r^i / B^a = \begin{cases} a R^2 \Omega & \text{si } R < b/\sqrt{\Omega} \text{ (longueur de diffusion supérieure à } R) \\ a \Omega \left[R^2 - \frac{1+\text{sgn}(R-b/\sqrt{\Omega})}{2} (R - b/\sqrt{\Omega})^2 \right] & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.65)$$

où a et b sont deux paramètres ajustables. Une telle écriture permet de corriger le volume utile de fluide uniquement dans le cas où $l_d < R$. Le bon ajustement est satisfaisant et le paramètre b issu de l'ajustement permet de remonter à une conductivité électrique de $\sigma_e = (\mu\Omega b^2)^{-1} \approx 7 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, cohérent avec la valeur expérimentale $\sigma_e = 3.41 \pm 0.5 \cdot 10^6 \text{ S.m}^{-1}$. L'écart peut s'expliquer par le fait que le vortex du mode excité de l'instabilité elliptique est incliné, ce dont notre estimation du volume utile ne tient pas compte.

Le gain théorique de la boucle est donné par le produit de la sensibilité du gaussmètre, le gain de l'amplificateur et le facteur entre la tension délivrée par l'amplificateur et le champ magnétique alors créé par l'alimentation. Dans le cas de la figure 3.20b, le gaussmètre est réglé sur 10 G/V, le gain de l'amplificateur est de 30 dB, et le facteur entre la tension en entrée de l'alimentation et le champ magnétique créé est d'environ

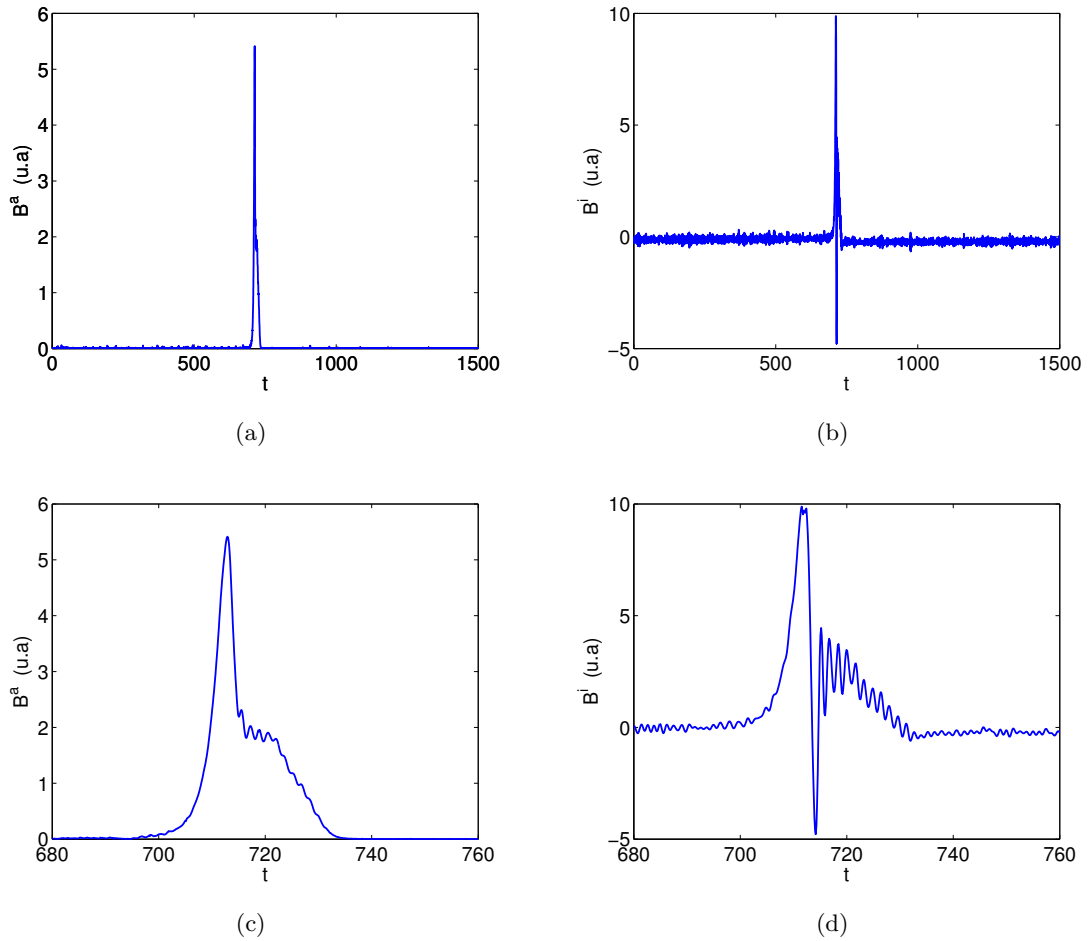


FIGURE 3.21 – Évolution temporelle typique des champ appliqués B^a (fig. a et zoom en fig. c) et du signal B^i donné par $b_1 - b_2$ (fig. b et zoom en fig. d). Paramètres : $\beta = 0.14$, $E = 1.18 \cdot 10^{-4}$, avec un champ initial nul.

66 G/V, ce qui donne un gain total de $0.1 \cdot 10^{3/2} \cdot 66 \approx 209$. La figure 3.20b montre que les mesures sont cohérentes entre elles, fournissant $\gamma \approx 220$, soit 5 % d'écart. Pour l'étude systématique en fonction de la vitesse de rotation effectuée ici, la raison de la suite géométrique γRm est ainsi comprise entre 0.1 et 0.7, et nous sommes donc bien sous le seuil de la dynamo synthétique.

3.7.2.2 Dynamo synthétique

Afin de passer au-dessus du seuil de la dynamo synthétique, le gain de la boucle de rétroaction est augmenté. Cependant, cela demande de placer le dispositif expérimental dans des limites de sensibilités, de gains et de réglages difficiles à mettre en place. Jusqu'à présent, elle n'a donc été obtenue qu'une unique fois avec un fort gain (fig. 3.21), restabilisant l'écoulement brutalement. Ainsi, sur cette mesure, le champ magnétique créé et amplifié à partir de l'écoulement fluide a rapidement rétroagi, inhibant la source qui lui avait donné naissance. Notons qu'au cours de cette mesure, l'amplificateur n'a pas saturé en courant, assurant que la boucle de rétroaction a fonctionné comme prévu. De nouvelles modifications du dispositif expérimental, actuellement en cours, devraient permettre d'étudier de façon systématique cette dynamo synthétique, et d'obtenir des inversions de champ grâce à l'utilisation d'une alimentation bipolaire.

3.8 Synthèse du chapitre 3 et publications

En section 3.3, nous avons montré que des simulations MHD de dynamo étaient possibles avec le logiciel commercial COMSOL Multiphysics[®], basé sur la méthode des éléments finis. Pour ce faire, le code a été validé en section 3.4 sur des cas de dynamos cinématiques, la dynamo de Ponomarenko et un écoulement de Von Karman, mais également sur le benchmark de dynamo dynamique convective proposé par Christensen *et al.* (2001). Les premières simulations numériques de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale sous un champ magnétique imposé ont été présentées en section 3.5. Les résultats sur le taux de croissance en présence de dissipation Joule et le champ induit ont été discutés, et des résultats analytiques, obtenus à partir d'études locales, ont été confirmés. Ces travaux ont fait l'objet d'une soumission à *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*.

En section 3.6, nous avons montré que le champ magnétique pouvait être utilisé pour mesurer et contrôler un écoulement de métal liquide soumis à l'instabilité elliptique. De plus, pour le mode stationnaire $(-1, 1, 1)$ de l'instabilité elliptique, nous avons montré que la dissipation Joule peut être utilisée pour contrôler la transition vers des dynamiques linéaires complexes, décrites pour la première fois par des portraits de phase expérimentaux. Des cycles limites ont été observés, d'abord réguliers puis irréguliers, ainsi que des renversements lorsque l'amplitude de l'écoulement passe à proximité d'un point selle localisé à l'origine. Nous avons également montré que l'ellipticité n'est pas le paramètre adéquat pour décrire l'amplitude à saturation générée par l'instabilité loin du seuil : un écoulement d'ordre 1 peut être généré par une déformation elliptique très petite devant 1. Ces travaux, dont une partie seulement est présentée ici, ont été publiés dans *Journal of Fluid Mechanics* (Herreman *et al.*, 2010).

Enfin, la section 3.7 présente les modifications apportées au dispositif expérimental pour mettre en place une dynamo synthétique basée sur l'instabilité elliptique. Les premières études systématiques donnent des résultats conformes à ce qui est attendu théoriquement, et une première dynamo synthétique a été obtenue, restabilisant brutalement l'écoulement. Ces travaux sur le problème dynamo de l'instabilité elliptique se poursuivent, aussi bien du point de vue expérimental que du point de vue numérique.

Chapitre 4

Applications astrophysiques

Sommaire

4.1	Champ magnétique lunaire	147
4.2	Stabilité des astres telluriques	165
4.3	Étoiles extra-solaires	193
4.4	Synthèse du chapitre 4 et publications	202

L'étude de l'instabilité elliptique dans un contexte planétaire a été initiée par les travaux expérimentaux de Malkus (1989). Sa présence a été suggérée dans le noyau liquide de la Terre (Aldridge *et al.*, 1997), de Io (Kerswell & Malkus, 1998) et dans le noyau primitif de Mars il y a 4 milliards d'années (Arkani-Hamed *et al.*, 2008; Arkani-Hamed, 2009). Outre ces astres telluriques, les astres gazeux ont aussi été considérés : Rieutord (2003) considère ainsi sa présence au sein d'étoiles doubles en orbites rapprochées, déformées par des forces de marées, tandis que Lebovitz & Lifschitz (1996*a,b*) puis Ou *et al.* (2007) montrent qu'elle peut également se développer au sein d'ellipsoïdes de Riemann, i.e. de modèles simples d'étoiles en rotation rapide, non-soumises à des forces de marées (voir annexe F). Enfin, Wicht & Tilgner (2010) montrent dans leur revue que sa présence au sein de la Terre actuelle est improbable, mais qu'il est possible que l'instabilité elliptique soit présente au sein des géantes gazeuses du système solaire.

Ce chapitre reconsidère ces études précédentes afin de quantifier plus précisément la stabilité de ces différents astres, et surtout les conséquences observables de la présence de l'instabilité elliptique. En section 4.1, nous considérons en détails un premier cas d'application : la Lune primitive. Proposant une nouvelle interprétation de l'origine du magnétisme lunaire, encore mal expliquée, nous combinons nos résultats pour évaluer quantitativement la pertinence d'un tel scénario et démontrons son accord avec les données disponibles. La section 4.2 reprend ainsi les différents scénarios possibles pouvant mener à l'excitation d'une instabilité elliptique dans un contexte astrophysique général, liant mécanique des fluides et mécanique céleste. Les études et résultats théoriques de la littérature sont alors étendus par une analyse théorique WKB prenant en compte simultanément un gradient local de température dans la couche fluide considérée et un champ magnétique externe axial provenant d'un mécanisme dynamo indépendant ou d'une source

externe. Ces nouveaux résultats, obtenus dans le cas de la TDEI mais aussi de la LDEI, permettent de réévaluer la stabilité des corps telluriques du système solaire mais aussi d'étudier l'éventuelle présence de l'instabilité elliptique au sein d'exoplanètes telluriques. Enfin, en section 4.3, le cas des corps gazeux est abordé, en considérant particulièrement les systèmes extra-solaires à Jupiters chauds¹.

1. Les Jupiters chauds (ou *Pégasides* du nom de la première planète de ce type, découverte autour de 51 Pegasi) sont des exoplanètes souvent plus massives que Jupiter, orbitant très proche de leur étoile.

4.1 Champ magnétique lunaire

Si la Lune ne génère plus de champ magnétique actuellement, les roches en surface portent la trace d'un champ magnétique passé. Depuis sa découverte il y a plus de quarante ans, son origine reste inexplicée. Les signaux mesurés semblent nécessiter une source interne, temporaire et auto-entrenue de champ magnétique i.e. un mécanisme dynamo. Cependant, le flux de chaleur à travers le noyau liquide lunaire n'a jamais été suffisant pour alimenter une dynamo de type convectif. Nous proposons ici un modèle alternatif basé sur un forçage mécanique. A l'époque du grand bombardement tardif (ou LHB pour *Late Heavy Bombardment*), les impacts météoritiques, violents et fréquents, pourraient avoir temporairement désynchronisé la Lune, excitant dans son noyau liquide une instabilité elliptique générant une dynamo. Dans cette section, nous combinons nos résultats pour montrer qu'un tel mécanisme est capable de générer des champs magnétiques en surface de quelques μT sur quelques dizaines de milliers d'années, en accord avec les mesures paléomagnétiques.

Ce travail inter-disciplinaire résulte d'une collaboration : M. A. Wieczorek a contribué à l'analyse des anomalies magnétiques des cratères d'impact et des vitesses de rotation lunaires après impact, Ö. Karatekin a contribué à l'étude de l'évolution temporelle de la rotation lunaire après impact, et M. Laneuville a mené l'analyse de l'évolution temporelle des couches de roches d'impact fondues. L'analyse hydrodynamique du scénario, menée par M. Le Bars et moi-même, est présentée ci-dessous après avoir introduit le contexte et les différents scénarios possibles.

4.1.1 Problématique

Il est usuellement admis que maintenir un champ magnétique au sein d'un corps céleste implique l'existence d'une couche fluide conductrice en convection. Cependant, le modèle de dynamo par convection thermo-solutale, communément accepté pour expliquer le champ magnétique terrestre, présente des difficultés pour certaines planètes. C'est par exemple le cas de la Lune. Des mesures de champ magnétiques montrent que des portions de croûte lunaire sont fortement magnétisées, et les analyses paléomagnétiques de roches lunaires indiquent que certaines possèdent une magnétisation rémanente stable (Fuller & Cisowski, 1987). Après une quarantaine d'années d'analyse, l'origine du champ magnétique ayant magnétisé la croûte lunaire est encore controversée (Wieczorek *et al.*, 2006b; Garrick-Bethell *et al.*, 2009). Une hypothèse propose que la convection thermique du noyau lunaire ait généré une dynamo, mais cette théorie présente des difficultés du fait de la petite taille du noyau lunaire et des amplitudes de champ magnétique ainsi générées en surface. Stegman *et al.* (2003) et Takahashi & Tsunakawa (2009) ont proposé un modèle basé sur une augmentation temporaire de la vigueur de la convection dans le noyau par déstabilisation d'une couche isolante du manteau. Cependant, ce scénario nécessite une valeur particulière du contraste de densité, difficile à obtenir selon les modèles standards de différenciation planétaire (Breuer & Moore, 2007). Une autre hypothèse suggère que des impacts pourraient avoir généré ou amplifié des champs pré-existants, notamment aux antipodes des plus grands cratères d'impacts (Hood & Artemieva, 2008).

Deux observations nous ont amenés à proposer un modèle dynamo différent pour

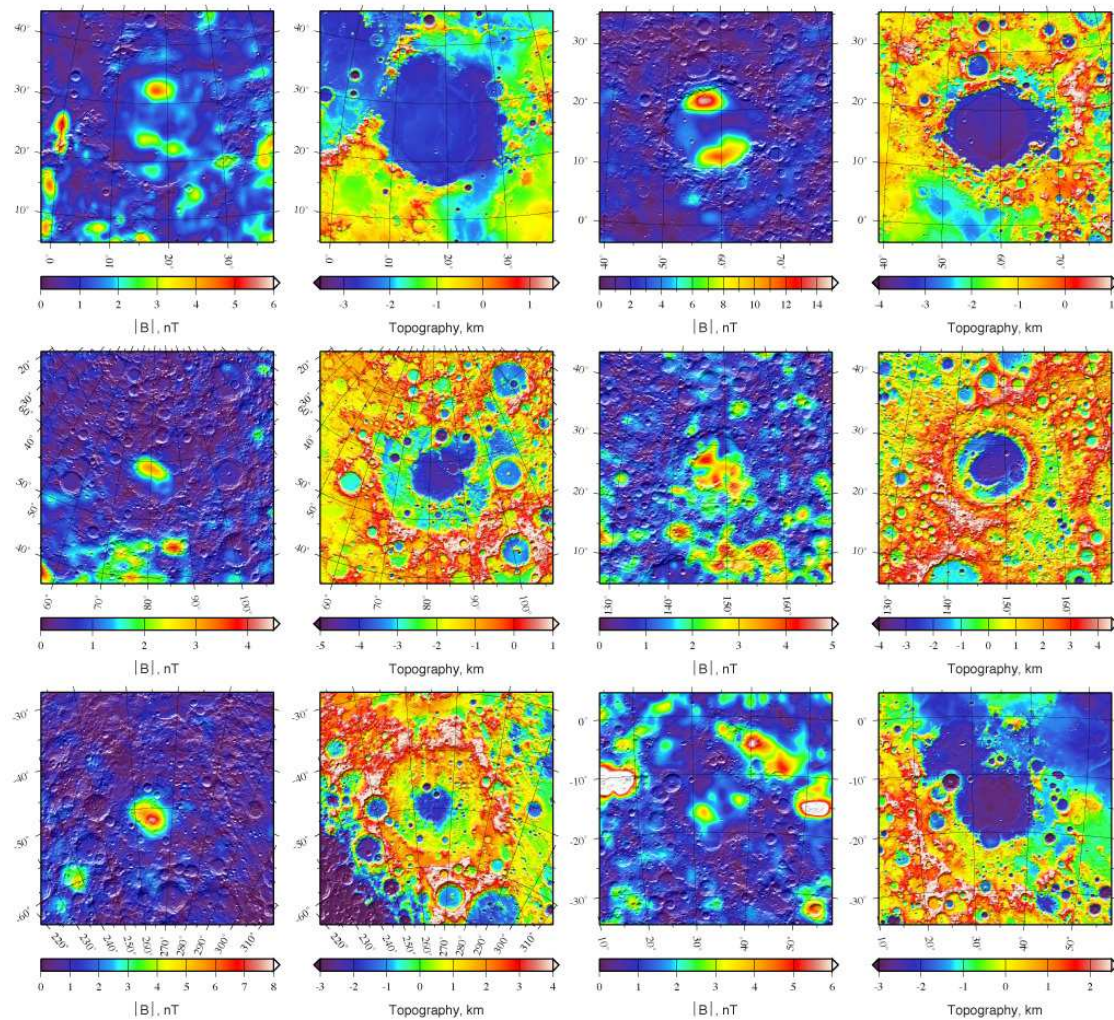


FIGURE 4.1 – Amplitude du champ magnétique total et topographie de surface des cratères d'impact possédant une anomalie centrale de champ magnétique, mesurées à partir de magnétomètres embarqués à bord de sondes spatiales (voir Purucker & Nicholas, 2010). De gauche à droite, chaque paire d'images correspond aux cratères d'impacts Serenitatis et Crisium (première ligne), Humboldtianum et Moscoviense (deuxième ligne) ainsi que Mendel-Rydberg et Nectaris (troisième ligne). Cet ordre correspond à l'âge estimé des cratères, du plus récent au plus ancien selon la chronologie de Wilhelms et al. (1987). Figure de M. A. Wieczorek.

généraliser des champs magnétiques de longue durée, où l'énergie magnétique provient directement de la rotation de la Lune plutôt que d'effets thermiques. Premièrement, six cratères d'impacts datant de l'époque du Nectarien² (voir figure 4.1) présentent des anomalies magnétiques centrales (Halekas *et al.*, 2003). Ce sont très probablement les couches d'impact en fusion qui ont acquis cette magnétisation thermo-rémanente tandis qu'elles se refroidissaient en-dessous de la température de Curie. Un tel processus se déroule sur des échelles de temps relativement longues et nécessite donc un champ magnétique stable, présent sur des dizaines de milliers d'années après l'impact. Deuxièmement, chacun de ces six cratères d'impact indique que la rotation lunaire a dû être fortement perturbée. Ces événements pourraient avoir soit désynchronisé la Lune en lui imprégnant une vitesse de rotation, soit induit des librations de forte amplitude qui pourraient avoir duré quelques dizaines de milliers d'années (Wieczorek & Le Feuvre, 2009).

Une quantité d'énergie gigantesque est stockée dans les mouvements de rotation propre et de révolution orbitale de la Lune. La question est de savoir si cette énergie peut être efficacement transmise dans l'écoulement du noyau liquide, question qui fait débat depuis les années 60 (e.g. Fearn, 1998). Malkus (1963, 1968) a proposé que des instabilités inertielles pourraient être ce moyen de conversion. Bien que la proposition de Malkus fut tout d'abord rejetée sur des arguments considérant des mouvements laminaires (Rochester *et al.*, 1975; Loper, 1975), il a été prouvé depuis, analytiquement et numériquement que les instabilités inertielles impliquent en effet de grandes quantités d'énergie (Kerswell (1996); Le Bars *et al.* (2010); voir aussi section 2.3.6) et sont dynamogènes (Tilgner, 2005, 2007a; Wu & Roberts, 2009).

4.1.2 Dynamo et instabilité elliptique

Il n'a pas encore été explicitement prouvé que l'écoulement associé à l'instabilité elliptique était capable de générer une dynamo. En effet, la non-axisymétrie nécessaire de la géométrie pose une réelle difficulté pour les études numériques : la plupart des codes utilisent en effet une décomposition en harmoniques sphériques pour accélérer le calcul. Cependant, l'instabilité elliptique est une instabilité inertielle, de même que l'instabilité de précession qui est capable de générer une dynamo (Tilgner, 2005, 2007a; Wu & Roberts, 2009). L'instabilité de précession diffère de l'instabilité elliptique uniquement par le fait que les nombres d'onde azimutaux des deux ondes inertielles en résonance diffèrent de 1 au lieu de 2. De plus, notons que le mode spin-over de l'instabilité elliptique est le même écoulement que le mode de Poincaré forcé par la précession (voir section 2.5). Étant donné la forte similarité entre les instabilités elliptique et de précession, nous supposons que l'instabilité elliptique est également dynamogène. La topologie du champ magnétique externe d'une dynamo générée par précession n'a pas été étudiée de façon très détaillée, mais il apparaît que la composante dipolaire et les composantes multi-polaires de bas degré jouent un rôle important (Tilgner, 2005, 2007a).

Le processus dynamo apparaît dès lors que le nombre de Reynolds magnétique $Rm = uR/\nu_m$ est assez grand, où ν_m est la diffusivité magnétique (ici prise égale à $1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, comme dans le noyau terrestre), u la vitesse typique de l'écoulement généré par l'instabilité

2. Le Nectarien est une période géologique de la Lune s'étendant de $-3\,920$ à $-3\,850$ millions d'années. Elle correspond à la formation par impacts météoritiques des grands bassins lunaires.

(i.e. $u \approx \Delta\Omega R$ pour l'instabilité elliptique) et R le rayon typique de la couche fluide considérée. Les simulations de dynamo générée par précession donnent un seuil entre 770, obtenu pour un écoulement laminaire, et 200 – 300 pour un écoulement complètement turbulent (Tilgner, 2005, 2007*a*; Wu & Roberts, 2009). Le Reynolds magnétique critique pour obtenir une dynamo générée par instabilité elliptique est fixé ici à 1000. Cependant, notons que les résultats obtenus (section 4.1.3) sont en fait relativement indépendants de cette valeur : la génération dynamo dans notre modèle dépend principalement de l'existence d'une instabilité elliptique avec un taux de croissance suffisamment grand.

L'amplitude du champ magnétique B généré par une dynamo d'instabilité elliptique peut être estimée en adaptant les lois d'échelle des dynamos de convection au cas considéré ici i.e. un forçage mécanique. L'amplitude du champ magnétique créé dans le noyau est contrôlée par la puissance mécanique disponible plutôt que par un équilibre de forces (Christensen & Aubert, 2006; Christensen *et al.*, 2009; Christensen, 2010). Pour les instabilités elliptiques considérées ici, les effets thermiques ne modifient pas l'amplitude des écoulements générés (section 2.6; Lavorel & Le Bars (2010)). Le noyau est donc modélisé comme un fluide incompressible, conducteur électrique, tout effet thermique ou de stratification étant négligé. Puisque les dynamos de précession (et donc d'instabilité elliptique par hypothèse) ne dépendent pas d'une convection thermique, la puissance mécanique dissipée par l'instabilité est supposée complètement disponible pour la génération d'un champ magnétique.

La puissance mécanique dissipée peut être estimée (Le Bars *et al.* (2010); voir aussi section 2.3.6) pour la forme la plus simple de l'instabilité, i.e. le mode de 'spin-over' qui correspond à une rotation solide inclinée par rapport à l'axe de rotation :

$$P_L \approx \frac{8}{3}\pi R^3 \eta |\Delta\Omega|^2 \frac{R}{\delta} \quad (4.1)$$

où $\delta \approx R\sqrt{E}$ est l'épaisseur de la couche d'Ekman (e.g. Greenspan, 1968), $\eta = \rho\nu_m$ est la viscosité dynamique du noyau et ρ sa densité. Cette dissipation visqueuse résulte des différences de vitesse entre le noyau fluide et le manteau solide au niveau de la couche d'Ekman laminaire localisée à la paroi noyau-manteau. Ainsi, (4.1) donne une borne inférieure de la puissance mécanique dissipée, négligeant la turbulence de volume qui apparaît généralement pour l'instabilité elliptique aux faibles nombres d'Ekman, limite pertinente pour les applications planétaires (Le Bars *et al.*, 2010). Cependant, cette dissipation volumique est en E , alors que la dissipation surfacique est en $E^{1/2}$: l'équation (4.1) doit donc donner l'ordre de grandeur correct. La dissipation de l'énergie associée aux modes de l'instabilité elliptique plus complexes que le mode de spin-over sera également principalement due à la dissipation visqueuse de leur énergie cinétique à travers la couche d'Ekman. Cela implique que l'échelle de puissance dissipée donnée par l'équation (4.1) ne devrait pas dépendre du mode sélectionné. Ainsi, avec un préfacteur f_p , a priori supérieur à 1, la puissance dissipée est donnée par l'équation (4.1).

La même équation que (4.1), à un facteur 2 près, fut obtenu par Williams *et al.* (2001) en considérant la faible précession de l'axe de rotation lunaire (voir leurs équations (81a) et (54)). Ce n'est pas surprenant étant donné la similarité entre le mode de spin-over de l'instabilité elliptique et le mode de Poincaré excité par précession (section 2.5). Cependant, notons que les instabilités elliptiques génèrent des mouvements d'amplitude

beaucoup plus grande que les petits mouvements forcés par précession considérés par Williams *et al.* (2001), où $\Delta\Omega = \Omega_{spin} \sin I$, I étant l'angle de précession (supposé petit) entre l'équateur et le plan écliptique. L'instabilité elliptique est capable de générer des écoulements d'amplitude $\Delta\Omega$, de l'ordre de Ω_{spin} , donc de dissiper beaucoup plus d'énergie, disponible pour la dynamo. Même dans la limite des écoulements de petite amplitude, Yoder & Hutchison (1981) remarquent qu'une autre échelle pour le frottement visqueux à la paroi noyau-manteau lunaire doit être considérée si la couche visqueuse devient turbulente : dans ce cas, le taux de dissipation dépend d'une viscosité turbulente au lieu de la viscosité moléculaire. Le problème du couplage turbulent noyau-manteau n'a pas encore été résolu explicitement, mais une estimation raisonnable est donnée par Yoder & Hutchison (1981) et redéveloppée par Williams *et al.* (2001) (voir leurs équations (81a) and (55)) :

$$P_T \approx \frac{3}{4} \pi^2 \kappa R^5 \rho |\Delta\Omega|^3 f_p, \quad (4.2)$$

où κ est une constante de l'ordre de $7.3 \cdot 10^{-4}$ pour un noyau lunaire liquide de 350 km avec une viscosité $\nu_m = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, valeurs utilisées par la suite, et f_p la constante introduite ci-dessus pour tenir compte de la complexité du mode sélectionné.

Afin d'estimer l'amplitude du champ magnétique créé par instabilité elliptique, nous suivons l'approche de Christensen & Aubert (2006) et relient la puissance dissipée par l'instabilité P à la dissipation Joule D_{ohm} , i.e. $D_{ohm} = f_{ohm} P$ (leur équation 24), où f_{ohm} est une constante qui dépend de la source d'énergie alimentant la dynamo. De plus, supposant que le rapport entre l'énergie magnétique

$$E_B = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{B_{core}^2}{2 \mu} \quad (4.3)$$

et la dissipation Joule est égal au temps de dissipation magnétique (eq. 3 de Christensen & Tilgner, 2004),

$$\frac{E_B}{D_{ohm}} = 1.74 \frac{R}{u}, \quad (4.4)$$

l'amplitude du champ magnétique dans le noyau lunaire est :

$$B_{core,L} = \sqrt{7.0 f_{ohm} f_p \mu \rho R |\Delta\Omega| \sqrt{\nu_m \Omega_{spin}}} \quad (4.5)$$

pour l'estimation laminaire de puissance dissipée (4.1) et

$$B_{core,T} = \sqrt{6.1 f_{ohm} f_p \kappa \mu \rho R^2 |\Delta\Omega|^2} = \sqrt{0.0045 f_{ohm} f_p \mu \rho R^2 |\Delta\Omega|^2} \quad (4.6)$$

pour l'estimation turbulente de la puissance dissipée (4.2), où μ est la perméabilité magnétique du fluide. Du fait de l'atténuation, il est probable que seule la composante dipolaire du champ magnétique soit visible en surface, ce qui donne finalement

$$B \approx f_{dip} B_{core} (R/R_{planet})^3 \quad (4.7)$$

Paramètres	Valeurs
Rayon du noyau lunaire	$R = 350 \text{ km}$
Viscosité du noyau lunaire	$\nu_m = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Densité du noyau lunaire	$\rho = 7500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Rayon moyen de la Lune	$R_{Lune} = 1737.15 \text{ km}$ (Araki <i>et al.</i> , 2009)
Masse de la Lune	$M_{Lune} = 7.348 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ (Konopliv <i>et al.</i> , 2001)
Rayon moyen de la Terre	$R_{Terre} = 6378 \text{ km}$ (Mularie, 2000)
Masse de la Terre	$M_{Terre} = 5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ (Mularie, 2000)
Moment d'inertie polaire lunaire	$C = 0.532 M_{Lune} R_{Lune}^2$ (Konopliv <i>et al.</i> , 1998)
Paramètre de dissipation	$k_2/Q \in [6.3 \cdot 10^{-4}; 0.015]$
Constante turbulente	$\kappa = 7.3 \cdot 10^{-4}$ (Williams <i>et al.</i> , 2001)

TABLE 4.1 – Liste des paramètres et valeurs utilisés.

où R_{planet} est le rayon planétaire moyen, et f_{dip} est le rapport entre la composante dipolaire du champ magnétique et le champ magnétique total à la surface du noyau, qui dépend du mode dynamo sélectionné. Notons que l'ellipticité de l'interface noyau-manteau n'apparaît pas dans ces formules : la valeur de β détermine si une instabilité elliptique peut être excitée ou non, mais une fois l'écoulement développé, les mouvements fluides et le champ magnétique créé dépendent uniquement de la rotation différentielle entre le noyau fluide et le manteau.

Les équations développées ci-dessus donnent une estimation du champ magnétique créé par l'instabilité elliptique mais différentes sources d'incertitudes existent, ce que reflète le préfacteur inconnu $f_{dip}\sqrt{f_{ohm}f_p}$. Christensen & Aubert (2006) estiment le facteur d'efficacité pour la conversion de la puissance mécanique en dissipation Joule entre 0.3 dans leurs simulations numériques à 1 pour le noyau terrestre. Leurs simulations MHD (Christensen *et al.*, 2009) donnent un rapport entre le champ dipolaire externe et le champ interne du noyau f_{dip} entre 1/4 et 1/15 pour une dynamo convective de type terrestre. D'un autre côté, le préfacteur f_p , égal à 1 pour le mode de spin-over, est selon toute vraisemblance plus grand que 1 pour des écoulements plus complexes. S'ajoute à ces préfacteurs, une incertitude sur le rayon du noyau lunaire, e.g. $\pm 50 \text{ km}$, ce qui mène à un champ magnétique de surface modifié d'un facteur 1.6. Une incertitude d'un facteur 10 sur la viscosité moléculaire mène à un facteur d'environ 1.7 d'incertitude sur l'amplitude du champ estimé par la loi d'échelle laminaire. Finalement, comme le rappellent Williams *et al.* (2001), les différentes estimations de κ donnent une gamme entre 0.002 et 0.0005 : par comparaison avec la valeur nominale $\kappa = 0.00073$, l'amplitude du champ magnétique est incertaine d'un facteur d'environ 1.7. Finalement, afin d'obtenir des bornes inférieures robustes, un préfacteur de 0.1 est considéré par la suite dans nos calculs de champ magnétique.

4.1.3 Application à la Lune

Les valeurs des paramètres utilisés dans notre modèle sont rassemblées dans la table 4.1.2. Un noyau liquide d'un rayon moyen de 350 km est supposé, en accord avec les caractéristiques du noyau lunaire actuel, déterminées par des analyses sismiques récentes

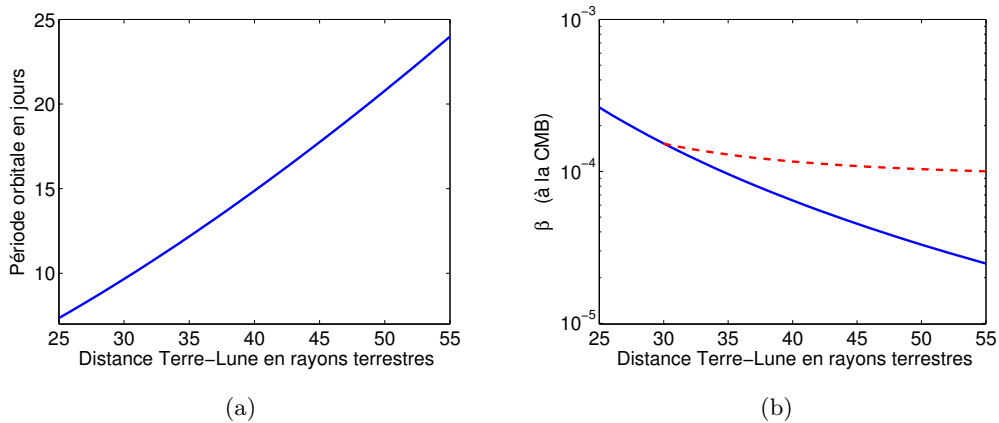


FIGURE 4.2 – (a) Période orbitale et (b) ellipticité β de la CMB en fonction de la distance Terre-Lune. La Lune est supposée être en rotation synchrone et l'excentricité de l'orbite lunaire ainsi que l'obliquité lunaire sont considérées comme nulles. Dans ce modèle, la Lune possède une croûte de 45 km d'épaisseur et de densité 2900 kg.m^{-3} , un manteau de densité 3344 kg.m^{-3} , et un noyau de rayon 350 km et de densité 7500 kg.m^{-3} , ce qui est compatible avec la masse observée de la Lune. En figure b, la ligne continue correspond à une Lune purement hydrostatique et la ligne discontinue correspond au cas où la frontière noyau-manteau est en équilibre hydrostatique avec une lithosphère non-hydrostatique.

(Weber *et al.*, 2011) et d'autres données géophysiques (e.g. Wiczeorek *et al.*, 2006b). Pour le rapport k_2/Q , où k_2 est le nombre de Love d'ordre 2 du potentiel et Q le facteur de qualité des marées (*tidal quality factor*), deux cas limites sont considérés : une limite basse avec la valeur actuelle de $k_2/Q = 6.3 \cdot 10^{-4}$ (Williams *et al.*, 2010), et une limite haute donnée par la mesure $k_2/Q = 0.015$ pour la lune galiléenne Io (Lainey *et al.*, 2009), valeur typique probablement représentative de la Lune durant son évolution primitive.

L'amplitude moyenne en temps de l'ellipticité de la frontière noyau-manteau (ou CMB pour *Core-Mantle Boundary*) est déterminée avec un simple modèle hydrostatique à 3 couches de la Lune en orbite circulaire autour de la Terre. Bien que la lithosphère lunaire ne soit certainement pas en équilibre hydrostatique (e.g. Garrick-Bethell *et al.*, 2006), il est communément admis que le manteau inférieur amortit énormément les ondes sismiques et est en grande partie responsable de la valeur extrêmement importante de la dissipation en volume Q^{-1} (voir la discussion de Wiczeorek *et al.*, 2006a). Il est donc raisonnable de considérer une frontière noyau-manteau conforme à la forme d'équilibre sur des temps géologiques, même si la lithosphère est hors-équilibre. Nos estimations des périodes de rotation et des ellipticités hydrostatiques équatoriales de la frontière (en supposant une rotation synchrone) sont données en figure 4.2 en fonction de la distance Terre-Lune.

Bien que l'ellipticité ait pu atteindre 0.3 lorsque la Lune était au voisinage du lobe de Roche, la plupart des modèles d'évolution prédisent une évolution rapide de la Lune vers une distance de 25 à 35 rayons terrestres en moins de 100 millions d'années (Webb, 1982; Ross & Schubert, 1989; Williams, 2000, 2004). Considérant donc une évolution

entre 25 rayons terrestres et 55 rayons terrestres (la distance Terre-Lune actuelle étant de 60 rayons terrestres), l'ellipticité de la CMB donnée par la théorie hydrostatique est comprise entre $2.5 \cdot 10^{-5}$ et $2.6 \cdot 10^{-4}$, pour des distances Terre-Lune respectives de 25 et 55 rayons terrestres. Supposant la Lune synchronisée, le nombre d'Ekman varie entre $2.7 \cdot 10^{-12}$ aujourd'hui et $8.3 \cdot 10^{-13}$. Le rapport $\beta/E^{1/2}$ est donc toujours supérieur à ~ 15 , et par conséquent le noyau liquide lunaire pourrait potentiellement avoir développé une instabilité elliptique au cours de son évolution. Cependant, une telle instabilité nécessite une rotation différentielle instantanée non-nulle entre le fluide du noyau et la déformation de la frontière noyau-manteau, au moins temporairement. Deux scénarios sont alors envisageables :

1. Une désynchronisation complète de la Lune après un impact suffisamment violent : l'instabilité elliptique éventuellement excitée est alors appelée TDEI pour *Tides Driven Elliptical Instability*
2. Une libration longitudinale de forte amplitude après un impact : l'instabilité elliptique éventuellement excitée est alors appelée LDEI pour *Libration Driven Elliptical Instability*

Comme nous le verrons, si la Lune est initialement désynchronisée, elle passera également par une phase de librations longitudinales de grande amplitude au cours de son retour vers l'état synchronisé. Ces deux scénarios peuvent donc prendre place successivement après un impact donné. Étant donné les temps très courts de resynchronisation (voir sections suivantes), nous supposons que la forme hydrostatique de la CMB avant impact est maintenue durant ces deux scénarios. Les résultats obtenus pour ces deux scénarios sont regroupés en table 4.1.3 et détaillés ci-dessous. Étant donné que la lithosphère lunaire est actuellement loin de l'équilibre hydrostatique, nous considérons également le cas où la frontière noyau-manteau est en équilibre hydrostatique avec une lithosphère non-hydrostatique. De même que Meyer & Wisdom (2010), nous supposons que le champ de gravité lunaire actuel de degré³ 2 résulte principalement de la topographie de surface, figée dans la lithosphère de la Lune primitive. Avec le potentiel gravitationnel associé, ainsi que les potentiels associés à la rotation et aux marées, la forme d'équilibre hydrostatique de la frontière noyau-manteau est calculée. La prise en compte de ce potentiel gravitationnel non-hydrostatique mène à des ellipticités de la frontière noyau-manteau qui sont de 1.3 à 2.4 fois supérieures à celles d'une Lune purement hydrostatique, pour des distances Terre-Lune égales à respectivement 35 et 45 rayons terrestres. L'écart à l'équilibre hydrostatique de la Lune pourrait avoir été encore plus grand dans le passé du fait de la relaxation visqueuse des contraintes : nous considérons donc aussi comme cas limite des ellipticités 10 fois supérieures à l'ellipticité hydrostatique. Bien que les ellipticités retenues ne modifient pas l'amplitude du champ magnétique éventuellement généré, ces valeurs influencent les taux de croissance de l'instabilité elliptique et l'espace de paramètres où elle peut se développer.

Finalement, notons que les marées dynamiques élastiques se superposent à la forme statique de la frontière noyau-manteau et qu'elles peuvent également contribuer à la dissipation visqueuse et à l'excitation d'une instabilité elliptique. Ces marées dynamiques

3. Au sens des harmoniques sphériques.

Origine de la rotation différentielle	Espace des paramètres exploré	Durée typique de la dynamo	Ordre de grandeur de B en surface
Désynchronisation après un impact météoritique (TDEI)	Distance Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres avec une période de rotation après impact entre 3 et 35 jours	$2 \cdot 10^3$ à $8 \cdot 10^3$ ans	$0.1 - 0.3 \mu\text{T}$ (laminaire); $0.3 - 4 \mu\text{T}$ (turbulent)
Librations après un impact météoritique (LDEI)	Distance Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres avec une libration entre 0 et 90°	10^2 à 10^5 ans	$\sim 0.08 - 0.14 \mu\text{T}$ (laminaire); $0.3 - 1 \mu\text{T}$ (turbulent)

TABLE 4.2 – Deux scénarios de génération d’une dynamo par instabilité elliptique. La borne supérieure de l’amplitude du champ magnétique est obtenue pour une frontière noyau-manteau 10 fois plus grande que sa valeur hydrostatique. Dans le cas d’une rotation non-synchrone, les amplitudes de champ considérées correspondent uniquement à des états rotationnels accessibles après un impact à $5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, formant des cratères de 700 km de diamètre.

élastiques oscillent ou tournent par rapport à la forme statique de la CMB, respectivement pour le scénario de librations libres ou de désynchronisation complète. Une rotation synchrone avec une orbite elliptique génère également des marées dynamiques, mais avec une amplitude égale à celle des librations optiques. L’amplitude de ces marées dynamiques est beaucoup plus petite que la déformation hydrostatique de la frontière noyau-manteau et la borne inférieure sur le seuil de l’instabilité elliptique $\beta/E^{1/2} = 5.24$ montre qu’une amplitude de marées dynamiques inférieure à 0.9 m à la frontière noyau-manteau n’aura pas d’influence sur l’écoulement dans le noyau. Utilisant une rigidité élastique de 70 Gpa et une viscosité de 10^{22} Pa.s, valeurs satisfaisant les mesures actuelles des nombres de Love lunaires, les marées dynamiques prédites à la CMB sont d’environ 1 cm actuellement, et 8 cm pour une distance Terre-Lune de 30 rayons terrestres. Avec les paramètres rhéologiques actuels, les marées dynamiques sont donc trop petites pour avoir une influence significative sur l’écoulement et nous considérons donc par la suite uniquement l’ellipticité statique.

4.1.3.1 Scénario 1 : désynchronisation après impact

Le moment angulaire et la vitesse de rotation de la Lune sont instantanément modifiés après un impact avec un astéroïde ou une comète. Après un impact violent, la Lune pourrait s’être désynchronisée (Melosh, 1975; Wicczorek & Le Feuvre, 2009) si le changement de vitesse angulaire de la Lune autour de son axe de rotation est supérieur à la fréquence de libration libre $\omega_{lib} = 0.026 \Omega_{spin}$ (voir ci-dessous). Le changement de vitesse angulaire de la Lune autour de son axe de rotation après un impact est donné par

$$\Delta \Omega = \frac{m}{C} R_{Lune} v \cos i |\cos \Psi| , \quad (4.8)$$

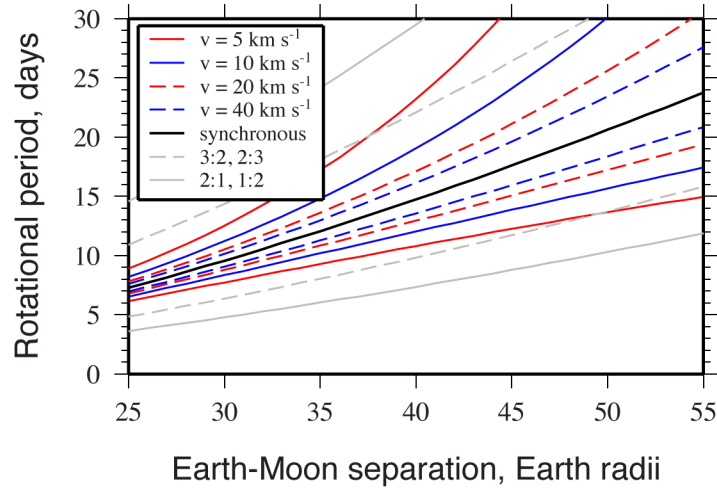


FIGURE 4.3 – Période de rotation propre de la Lune après un impact ayant formé un cratère de 700 km de diamètre. Les changements de vitesse de rotation (prograde ou rétrograde) par rapport à la rotation synchrone (noir) sont calculés en considérant un impact moyen, avec un impacteur de densité $3500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, et des vitesses d'impact de 5, 10, 20 et $40 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Les vitesses de rotation correspondant à des résonances spin-orbite 2 : 1, 3 : 2, 2 : 3 et 1 : 2 sont représentées en gris. Figure de M. A. Wieczorek.

où m est la masse de l'impacteur, v la vitesse d'impact, i l'angle d'impact par rapport à la surface et Ψ l'angle entre le moment angulaire de l'impacteur au moment de l'impact et l'axe de rotation lunaire (Wieczorek & Le Feuvre, 2009). Pour un impacteur de taille et densité données, la taille du cratère d'impact peut être estimée avec les lois d'échelle du régime gravitaire données par Holsapple & Housen (2007). Seule la composante verticale de la vitesse d'impact intervient dans les lois d'échelle pour des impacts obliques, et le diamètre du cratère transitoire est supposé équivalent à la zone (ou cavité) d'excavation, qu'il est possible de déterminer à partir des données gravitationnelles et topographiques lunaires (Wieczorek & Phillips, 1999; Hikida & Wieczorek, 2007).

La fréquence de ces libérations libres est donnée par (voir Goldreich & Peale (1966) et l'équation 5 de Lissauer (1985)) :

$$\omega_{lib} = \Omega_{spin} \sqrt{3 \frac{B - A}{C} H(1, e)}, \quad (4.9)$$

où $A < B < C$ sont donc les trois moments d'inertie principaux du manteau lunaire, et $H \approx 1 - 5/2 \cdot e^2 + 13/16 \cdot e^4 + O(e^6)$, où e est l'excentricité orbitale. L'équation (4.9) montre que la fréquence de libration longitudinale, normalisée par la vitesse orbitale lunaire, est indépendante de la distance Terre-Lune et de la taille de l'impacteur. Considérant le noyau liquide de la Lune d'un rayon d'environ 350 km (e.g. Wieczorek *et al.*, 2006a; Weber *et al.*, 2011), nous déduisons dans nos calculs la contribution du noyau au moment d'inertie polaire C mais il convient de remarquer que cela a peu d'effets sur la fréquence de libration

libre. Avec l'excentricité orbitale actuelle⁴, 0.055, et la valeur actuelle $\gamma = (B - A)/C$ (Konopliv *et al.*, 1998), la fréquence de libration libre vaut 0.026. La différence entre les moments d'inertie équatoriaux a probablement décru avec le temps, par relaxation visqueuse, et la fréquence de libration de la Lune primitive pourrait avoir été un peu plus grande il y a 4 milliards d'années.

Le plus grand des bassins d'impact lunaires ayant une anomalie magnétique centrale est le bassin Serenitatis, pour lequel les données indiquent une zone d'excavation d'environ 700 km de diamètre (Hikida & Wieczorek, 2007). Les autres bassins du Nectarien avec anomalies magnétiques centrales admettent des zones d'excavation d'un diamètre supérieur à 300 km, et tous sont issus d'impacts ayant potentiellement pu désynchroniser la Lune (Wieczorek & Le Feuvre, 2009). En figure 4.3, la période de rotation propre théorique de la Lune est représentée en fonction de la distance Terre-Lune, après un impact ayant créé un cratère de 700 km de diamètre. Pour ces calculs, un impact type moyen est supposé, avec une incidence moyenne $i = \Psi = 45^\circ$, et un impacteur d'une densité de 3500 kg.m^{-3} , représentative d'une grande partie des météorites (Consolmagno *et al.*, 2008). Pour des vitesses d'impact de 5, 10, et 40 km.s^{-1} , la taille de l'impacteur a d'abord été déterminé par les lois d'échelles impact/cratère, et le changement de vitesse de rotation estimée à partir de l'équation (4.8). Pour mémoire, la figure 4.3 montre également la vitesse de rotation synchrone et les vitesses de rotation associées aux résonances spin-orbite 2 : 1, 3 : 2, 2 : 3 et 1 : 2. Même si le changement de vitesse angulaire peut être plus grand avec des angles d'impacts différents, un cratère d'un diamètre inférieur à 700 km mène à des changements de vitesse de rotation plus petits.

Après un impact suffisamment violent pour désynchroniser la Lune, une rotation différentielle $\Delta\Omega$ est générée entre le fluide du noyau et la déformation de la frontière noyau-manteau. On considère ici la déformation statique, supposée gelée dans le manteau aux courtes échelles de temps sur lesquelles prend place la resynchronisation. La vitesse angulaire différentielle $\Delta\Omega$ peut être positive ou négative selon les angles d'impact, et une rotation différentielle persistera tant que le fluide n'aura pas atteint la vitesse de rotation du manteau. Le fluide étant en rotation dans un conteneur solide, le manteau, la réponse fluide à ce changement de vitesse de la paroi se déroulera sur un temps d'Ekman, i.e. $\Omega_{spin}^{-1} E^{-1/2}$ (voir section 1.3.5), où Ω_{spin} est la vitesse de rotation propre de la Lune après impact. Cette estimation est naturellement approximative, et se base sur un écoulement laminaire. Considérant une évolution quasi-stationnaire, où le temps typique de réponse fluide est beaucoup plus grand que le taux de croissance de l'instabilité elliptique, on a (voir par exemple l'annexe E.1) :

$$\frac{\sigma_{growth}}{|\Delta\Omega|} = \frac{(3 \Delta\Omega + 2 \Omega_{spin})^2}{16 (\Delta\Omega + \Omega_{spin})^2} \beta - \alpha\sqrt{E}. \quad (4.10)$$

L'instabilité n'existe pas dans la bande interdite $-3/2 < \Omega_{spin}/\Delta\Omega < -1/2$. La rotation propre de la Lune évolue progressivement vers la resynchronisation, sur une échelle de

4. L'excentricité orbitale e est l'excentricité mathématique de l'orbite elliptique i.e. $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$, où a et b sont respectivement le demi-grand et petit axes de l'orbite.

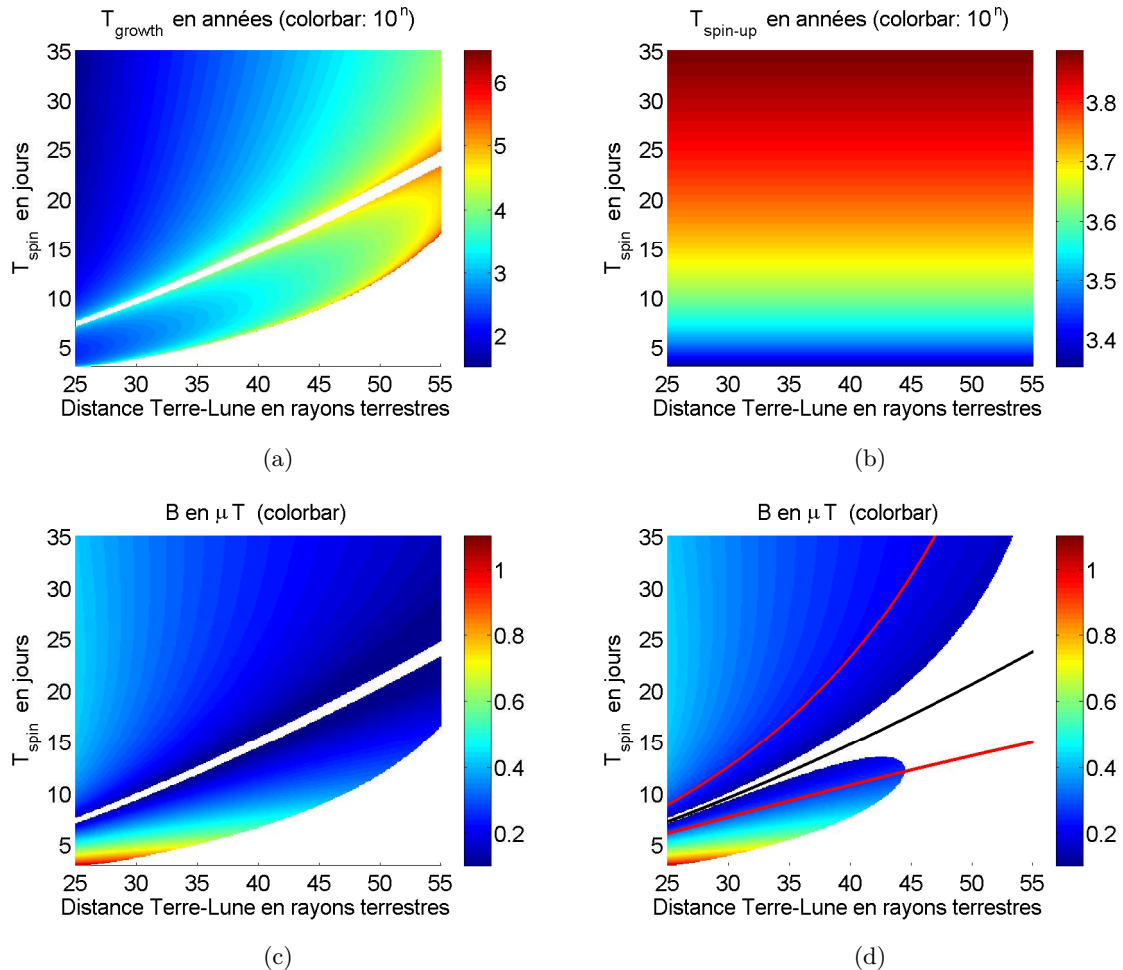


FIGURE 4.4 – (a) Temps de croissance caractéristique de la TDEI dans le cas d’une rotation non-synchrone après un impact, (b) temps de spin-up caractéristique du noyau fluide, (c) champ magnétique estimé à la surface de la Lune (avec l’estimation laminaire de puissance dissipée), calculé quand le nombre de Reynolds magnétique est au-dessus du seuil dynamo. (d) semblable à (c), mais ici le champ magnétique n’est représenté que lorsque le temps de croissance de l’instabilité elliptique est plus court que le temps de spin-up du noyau. En (d) est également représenté l’état de rotation synchrone (ligne continue noire), et la gamme de périodes propres accessibles après un impact de $5 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ ayant formé un cratère de 700 km de diamètre (lignes continues rouges) dans des conditions moyennes d’impact. Pour ces calculs, l’ellipticité de la frontière noyau-manteau est supposée égale à celle d’une Lune purement hydrostatique.

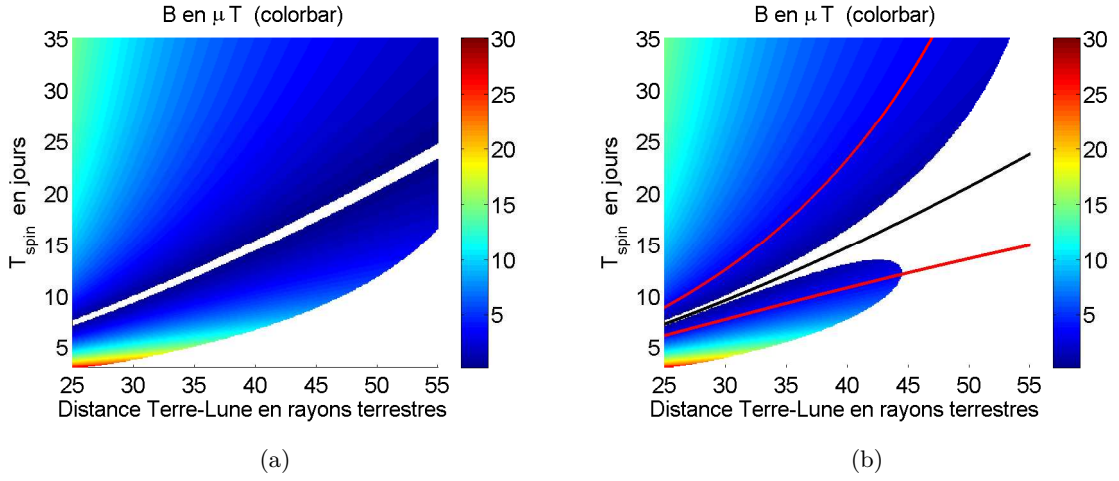


FIGURE 4.5 – *Semblable à la figure 4.4 (c,d), mais avec l'estimation turbulente de puissance dissipée.*

temps donnée par (Peale, 1977) :

$$T_{synch} = \frac{2 \Omega_{spin} d^6 C}{3 G M_{Terre}^2 R_{Lune}^5 k_2} \frac{Q}{k_2}, \quad (4.11)$$

où d est la distance Terre-Lune. Cette échelle de temps est beaucoup plus grande que le temps de réponse fluide en $E^{-1/2}$.

Nous avons évalué ce scénario de génération dynamo pour des distances Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres et des périodes de rotation après impact entre 3 et 35 jours. Les résultats pour une ellipticité de la frontière noyau-manteau d'une Lune en équilibre hydrostatique, ainsi que pour une ellipticité 10 fois plus grande, sont représentés sur les figures 4.4 à 4.7. Sur toutes les figures, les zones en blanc correspondent à des espaces de paramètres sans instabilité elliptique, et donc sans génération de dynamo. Plus spécifiquement, dans les zones en blanc autour de l'état synchronisé, la Lune est en libration autour de cet état (ce qui est décrit séparément, en section 4.1.3.2), et les zones en blanc des coins inférieurs droits correspondent à des zones sans instabilité elliptique (taux de croissance négatifs ou présence de la bande interdite). Notons que le seuil dynamo $Rm > 1000$ joue un rôle limité dans la détermination des zones sans dynamo.

Notons que pour un tel scénario, dans le référentiel en rotation avec le fluide, l'instabilité elliptique génère une vitesse angulaire $\Delta\Omega$. Cependant, le manteau solide possède également une rotation différentielle supplémentaire $\Delta\Omega$ par rapport au fluide du noyau après l'impact. Ainsi, la rotation différentielle moyenne à la frontière noyau-manteau est de l'ordre de $2 \Delta\Omega$. D'un côté, l'énergie dissipée par cette rotation différentielle entre le fluide et le manteau pourrait être utilisée pour accélérer le fluide. D'un autre côté, cette dissipation supplémentaire pourrait contribuer à la dynamo. Dans ce cas, selon l'équation 4.6, l'amplitude du champ magnétique serait plus grande d'un facteur $\sqrt{2}$.

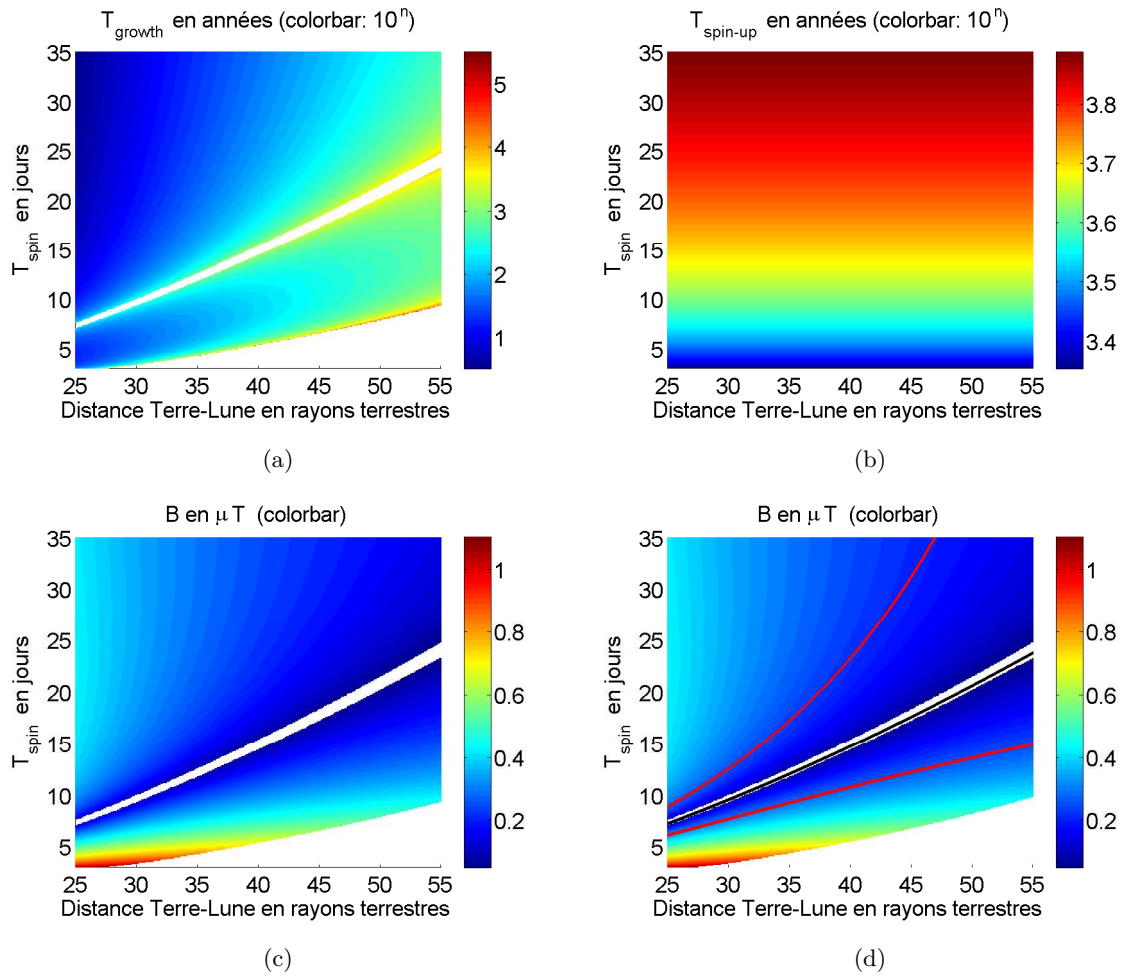


FIGURE 4.6 – Semblable à la figure 4.4 (dans le cas d'une dissipation laminaire), mais avec l'ellipticité de la frontière noyau-manteau 10 fois plus grande que celle d'une Lune purement hydrostatique.

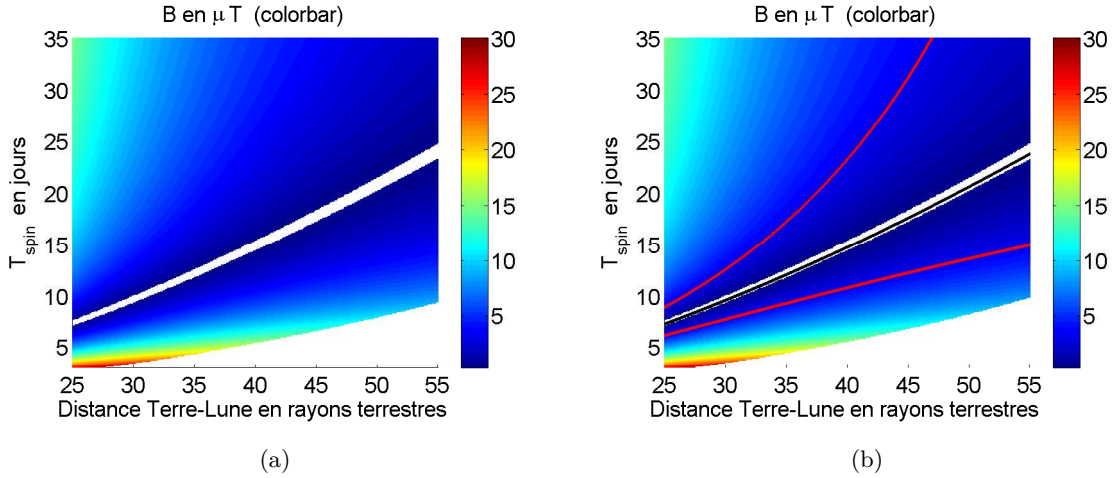


FIGURE 4.7 – Semblable à la figure 4.6 (c,d), mais avec l'estimation turbulente de puissance dissipée.

Pour ce scénario, une fois l'instabilité elliptique développée, le mécanisme dynamo serait actif durant approximativement $10^3 - 10^4$ ans, ce qui correspond au temps de spin-up du noyau. Pour l'espace de paramètres accessibles aux impacts formant un cratère de 700km de diamètre, les champs maximums générés sont d'environ $0.3 \mu\text{T}$ et $4 \mu\text{T}$, respectivement pour les cas de dissipation laminaire et turbulente à la CMB.

4.1.3.2 Scénario 2 : libration après impact

Pour de petits impacts, le changement de vitesse angulaire n'est pas suffisant pour désynchroniser la Lune, et les couples gravitationnels associés à la Terre, agissant sur les moments d'inertie inégaux de la Lune, induisent des librations en latitude et en longitude. Le moment angulaire de la Lune autour de son axe de rotation étant élevé, les librations les plus fortes auront lieu en longitude, avec une fréquence donnée par l'équation (4.9). Après l'impact, l'amplitude de libration décroît exponentiellement avec le temps, sur une échelle de temps typique de (Williams *et al.*, 2001)

$$T_{damp} = \frac{\sqrt{\gamma^*}}{0.497 \sqrt{3}} \frac{\Omega_{spin} d^6 C}{G M_{Terre}^2 R_{Lune}^5 k_2} Q \quad (4.12)$$

où d est la distance Terre-Lune et $\gamma^* = 228.6 \cdot 10^{-6}$ est une modification de γ tenant compte des harmoniques de degré 3. Notons que le noyau fluide ne suit pas les librations du manteau. En effet, le temps de spin-up reste beaucoup plus grand que la période de libration i.e. $\omega_{lib}/\Omega_{spin} \gg E^{1/2}$. Ainsi, le noyau fluide ne peut suivre les variations de vitesse de la frontière noyau-manteau, et continue donc à tourner à la vitesse angulaire constante de l'état synchronisé. Il existe donc une rotation différentielle instantanée entre le fluide et la déformation elliptique, permettant éventuellement à l'instabilité elliptique de croître.

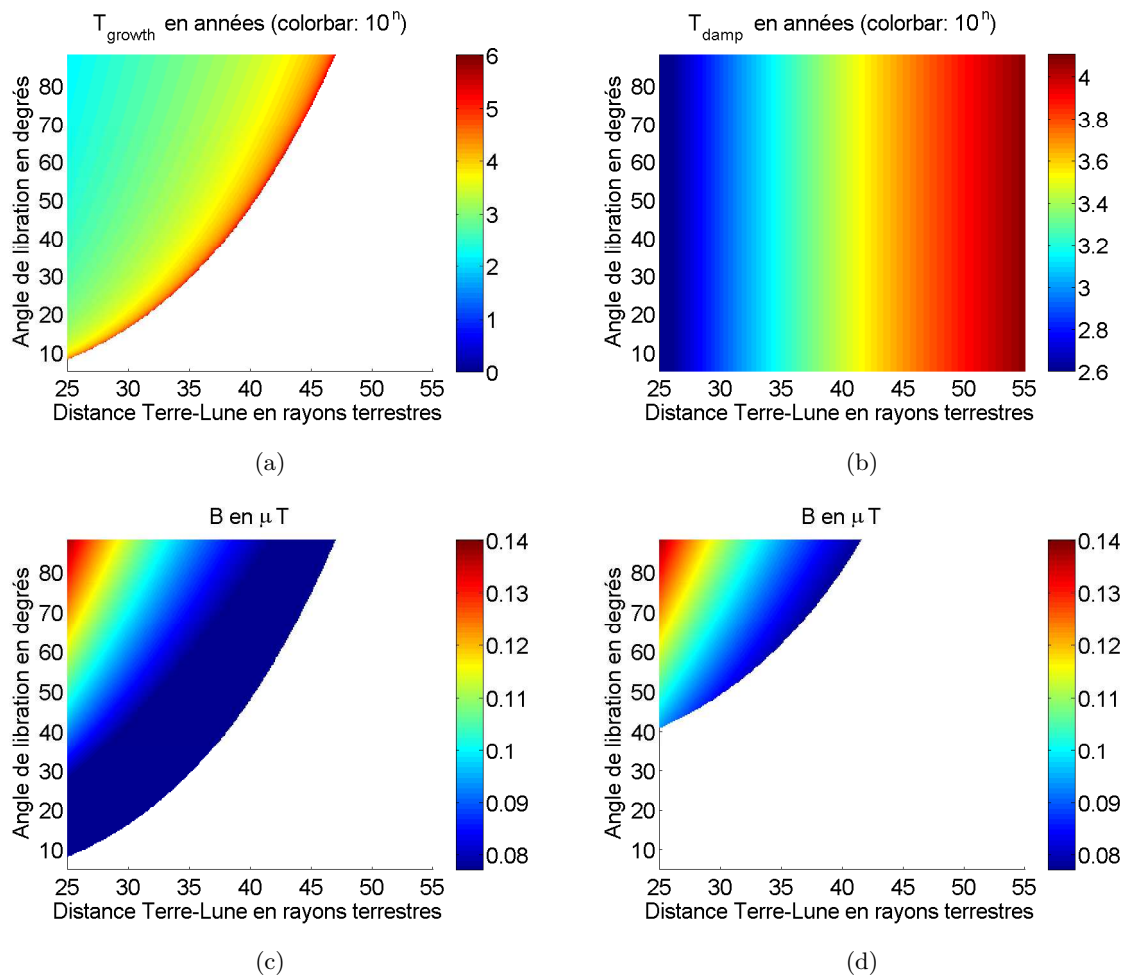


FIGURE 4.8 – (a) Temps de croissance caractéristiques de la LDEI, (b) temps caractéristiques d’amortissement des librations longitudinales, et (c) amplitudes de champ magnétique à la surface de la Lune en utilisant l’estimation laminaire de puissance calculée quand le nombre de Reynolds magnétique est au-dessus du seuil dynamo. En (d), les amplitudes de champ magnétique ne sont représentées que lorsque le temps de croissance de l’instabilité elliptique est plus court que le temps typique d’amortissement des librations. Pour ces calculs, les ellipticités de la frontière noyau-manteau sont prises égales à 10 fois celle d’une Lune purement hydrostatique, et k_2/Q est égal à sa valeur actuelle $6.3 \cdot 10^{-4}$.

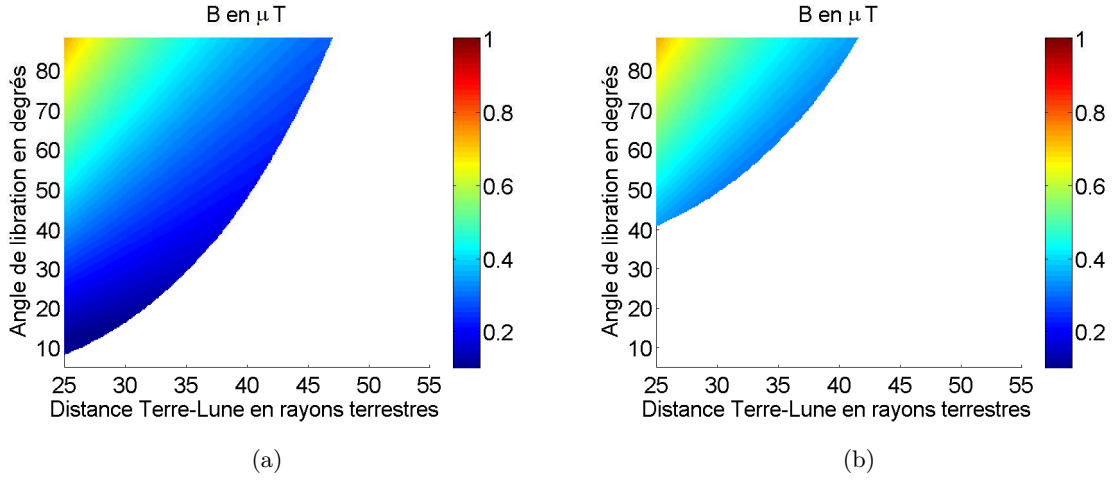


FIGURE 4.9 – Semblable à la figure 4.8 (c,d), mais avec l'estimation turbulente de puissance dissipée.

Le taux de croissance de l'instabilité dans ce cas est donné par (voir par exemple l'annexe E.2) :

$$\omega_{lib} = \frac{16 + (\omega_{lib}/\Omega_{spin})^2}{64} \theta \omega_{lib} \beta - \alpha \Omega_{spin} \sqrt{E}, \quad (4.13)$$

où θ est l'angle de libration et α une constante d'ordre $O(1)$ qui dépend des ondes inertielles excitées. Typiquement, $\alpha = 2.62$ pour le spin-over (Lacaze *et al.*, 2004), ce qui sera utilisé dans nos calculs. L'amplitude du champ magnétique est estimée en utilisant la valeur maximum de la rotation différentielle instantanée, i.e. $|\Delta\Omega| = \theta \omega_{lib}$ pour des oscillations sinusoïdales. Notons que pour des angles de librations importants, les oscillations ne sont plus sinusoïdales et la rotation différentielle maximale vaut

$$|\Delta\Omega| = \omega_{lib} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}. \quad (4.14)$$

Dans ce cas, le taux de croissance de l'instabilité elliptique n'est pas connu analytiquement. Nous utilisons donc $|\Delta\Omega| = \theta \omega_{lib}$, en remarquant que cela surestime la vitesse angulaire d'un facteur $\pi/2$ au maximum.

Ce scénario de génération dynamo a été évalué pour des distances Terre-Lune entre 25 et 55 rayons terrestres, des angles de libration entre 0 et 90° et pour les cas limites :

1. des ellipticités de la déformation statique de la frontière noyau-manteau correspondant à 10 fois les valeurs avant impact d'une Lune en équilibre hydrostatique, avec k_2/Q égal à sa valeur actuelle de $6.3 \cdot 10^{-4}$.
2. des ellipticités de la déformation statique de la frontière noyau-manteau correspondant aux valeurs avant impact d'une Lune en équilibre hydrostatique, avec k_2/Q égal à sa borne supérieure 0.015.

Le premier scénario est représenté en figure 4.8 et 4.9. En figure 4.8, l'amplitude du champ magnétique généré en surface est calculée avec l'estimation laminaire de puissance dissipée, tandis qu'en figure 4.9, le champ est calculé avec l'estimation turbulente de puissance dissipée. Sur toutes les figures, les zones en blanc correspondent à des zones stables pour l'instabilité elliptique, le seuil dynamo $Rm = 1000$ jouant ici encore un rôle limité dans la détermination des espaces de paramètres sans dynamo.

Les taux de croissance de l'instabilité elliptique augmentent avec l'ellipticité de la CMB, et le temps d'amortissement des librations augmente lorsque k_2/Q décroît. Pour le premier scénario, avec une ellipticité de la CMB importante et la valeur actuelle de k_2/Q , les librations libres après impact peuvent générer des champs magnétiques de surface avec des amplitudes d'environ $0.14 \mu\text{T}$ pour l'estimation laminaire de puissance dissipée (fig. 4.8), et $1 \mu\text{T}$ pour l'estimation turbulente de puissance dissipée (fig. 4.9). Le temps d'amortissement des librations dans ce cas est de l'ordre de 10^2 à 10^4 ans, et une dynamo pourrait alors être activée pour des amplitudes de libration supérieures à 40° . Pour le second scénario, avec des ellipticités de la CMB purement hydrostatiques, et un rapport k_2/Q du type de Io, le noyau reste stable sur toute la gamme de paramètres explorée. Enfin, avec des ellipticités de CMB dix fois plus grandes que la valeur hydrostatique avant impact et la borne supérieure $k_2/Q = 0.015$, ou des valeurs d'ellipticités purement hydrostatiques et la borne inférieure $k_2/Q = 6.3 \cdot 10^{-4}$, les temps de croissance typiques de l'instabilité restent plus grands que le temps d'amortissement des librations. Ainsi, bien que de fortes amplitudes de librations pourraient exciter une dynamo, cela n'est possible que sous certaines conditions.

4.1.4 Conclusion

Des instabilités de marées sont susceptibles d'avoir été excitées sur une large gamme de distance Terre-Lune et de périodes de rotation lunaire après impact. Ainsi, sous l'hypothèse d'un écoulement capable d'exciter et de maintenir une dynamo, ces instabilités pourraient avoir généré des champs magnétiques d'amplitude $0.2 - 4 \mu\text{T}$ à la surface de la Lune après la formation d'un cratère typique de 700 km de diamètre. Ces valeurs peuvent être comparées aux valeurs obtenues à partir des analyses paléomagnétiques de roches lunaires, qui donnent un champ entre $1 \mu\text{T}$ et $100 \mu\text{T}$ (Garrick-Bethell *et al.*, 2009). Notons qu'étant donné le préfacteur f et les incertitudes en jeu, un facteur entre 1 et 10 peut exister pour nos prédictions théoriques. En se basant sur un temps de spin-up laminaire du noyau lunaire, la durée des dynamos générées par impact est prédite entre 2000 et 8000 ans, et une épaisseur d'environ 1 km de roches d'impact en fusion se refroidiraient alors en-dessous de leur température de Curie sur cette période, acquérant ainsi une magnétisation thermorémanente (fig. 4.10). En se rapprochant de l'état synchronisé, la Lune passe par une phase de librations libres de grande amplitude, et ces librations pourraient également avoir excité une dynamo, générant des champs en surface de l'ordre de $1 \mu\text{T}$.

Les dynamos excitées par des impacts qui modifient la vitesse de rotation et excitent ainsi des instabilités elliptiques pourraient donc expliquer les anomalies magnétiques lunaires et les magnétisations rémanentes des échantillons analysés. Considérant un scénario différent, des études précédentes ont suggéré que des dynamos excitées par des instabilités elliptiques pourraient avoir existé au sein de Mars (Arkani-Hamed *et al.*, 2008; Arkani-

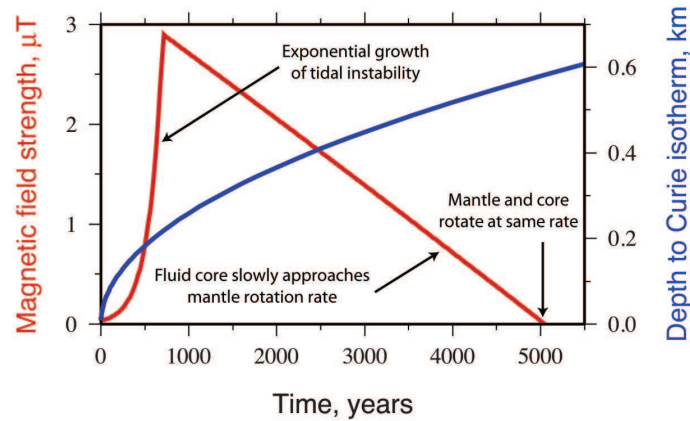


FIGURE 4.10 – Évolution typique du champ magnétique lunaire (courbe rouge) et de la profondeur de la température de Curie (courbe bleue) dans les roches en fusion d'un impact formant un cratère de 700 km de diamètre pour une distance Terre-Lune de 45 rayons terrestres. La phase de croissance exponentielle du champ est estimée avec une perturbation en vitesse dans le noyau de 1 % de la rotation différentielle (entre le noyau et le manteau) et en utilisant une ellipticité de la CMB cinq fois plus grande que sa valeur hydrostatique. L'évolution de la rotation différentielle entre le noyau et le manteau est issue d'une simulation numérique couplée de \ddot{O} . Karatekin (paramètres : table 4.1.2). L'évolution thermique des roches d'impact en fusion a été calculée par M. Laneuville.

Hamed, 2009), et l'approche présentée ici permet non seulement de tester cette hypothèse quantitativement, mais aussi d'estimer les amplitudes de champ magnétique en surface générées par une telle dynamo. De façon similaire, les déformations de marées sur Mercure, Ganymède, le Terre (primitive) et les systèmes exoplanétaires pourraient potentiellement rendre compte de certaines particularités de leurs champs magnétiques.

4.2 Stabilité des astres telluriques

Cette section présente un travail soumis à la revue *Astronomy & Astrophysics*. Rédigé en anglais, il fait le lien entre les études hydrodynamiques et MHD de l'instabilité elliptique, présentées en chapitres 2 et 3, et son existence dans un contexte planétaire. Ce travail a été mené en collaboration avec C. Moutou, du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille.

In this section, the presence of such an elliptical instability driven by tides and librations is investigated in terrestrial bodies in order to confirm its relevance in an astrophysical context. Its consequences on energy dissipation, on magnetic field induction and on heat flux fluctuations at the planetary scale are considered. Previous studies and theoretical results regarding the elliptical instability are re-evaluated and extended to cope with an astrophysical context. In particular, generic analytical expressions of the elliptical in-

stability growth rate are obtained using a local WKB approach, taking into account (i) a local temperature gradient due to an imposed temperature contrast across the considered layer or to the presence of a volumic heat source, and (ii) an imposed magnetic field along the rotation axis, coming from an independent dynamo mechanism or from an external source. The theoretical results are applied to the telluric planets and moons of the solar system as well as to three Super-Earths : 55 CnC e, CoRoT-7b and GJ 1214b.

4.2.1 Introduction

The flows in fluid layers of planets and moons are of primary interest as they imply first order consequences relative to their internal dynamics and orbital evolutions. Indeed, internal flows create torques on solid layers and induce energy dissipation, which remain negligible for stable laminar flows, but become significant for turbulent ones. Moreover, internal flows are directly responsible for magnetic field generation, either by induction of an existing background magnetic field or by excitation of a self-sustained dynamo. Finally, planetary heat fluxes are also directly linked to flows in fluid layers, which can act as thermal blankets for stably stratified configurations, or as efficient heat flux conveyers in the case of convective flows.

Planetary fluid layers are subject to body rotation, which implies that inertial waves can propagate through them (e.g. Greenspan, 1968). Usually damped by viscosity, these waves can however be excited by libration, precession and tides, which are harmonic mechanical forcings of azimuthal periodicity $m = 0, 1$ and 2 respectively. The fluid response to such forcings in ellipsoids is a long standing issue : see e.g. Aldridge & Toomre (1969); Noir *et al.* (2009); Calkins *et al.* (2010); Sauret *et al.* (2010) for librations ; Poincaré (1910); Busse (1968); Cébron *et al.* (2010b) for precession ; Ogilvie & Lin (2004, 2007); Tilgner (2007b); Rieutord & Valdettaro (2010); Morize *et al.* (2010) for tides. In these studies, it has been shown that the dynamics of a fluid layer is completely modified when the forcing resonates with an inertial wave. In addition to these direct forcings, inertial waves can also form triadic resonances, leading to parametric inertial instabilities. For instance, the so-called shear instability can be excited by precession (Kerswell, 1993b; Lorenzani & Tilgner, 2001, 2003), and the elliptical instability can be excited by tides (Malkus, 1989; Rieutord, 2000) and librations (Kerswell & Malkus, 1998).

The elliptical instability is a generic instability that affects any rotating fluid whose streamlines are elliptically deformed (see the review by Kerswell, 2002). A fully three-dimensional turbulent flow is excited in the bulk as soon as (i) the ratio between the ellipticity of the streamlines β and the square root of the Ekman number E (which represents the ratio between the viscous over the Coriolis forces) is larger than a critical value of order one and (ii) as soon as a difference in angular velocity exists between the mean rotation rate of the fluid and the elliptical distortion. In a planetary context, the ellipticity of streamlines is related to the gravitational deformation of the rigid boundaries of the considered fluid layer, corresponding either to dynamic tides or static bulges. The differential rotation between the fluid and the elliptical distortion can be oscillatory when due to libration in synchronized systems, or stationary, as for instance in non-synchronized ones : the elliptical instability is then referred to as libration driven elliptical instability (LDEI) and tide driven elliptical instability (TDEI) respectively. TDEI and LDEI have

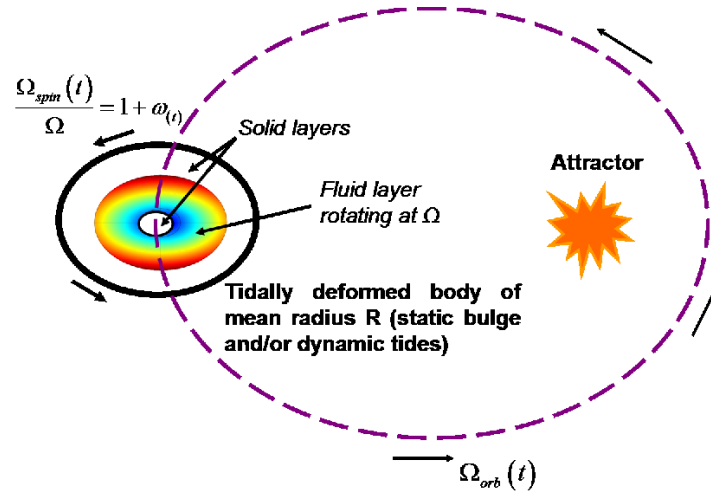


FIGURE 4.11 – Sketch of the problem considered in this work. With the mean rotation rate of the fluid Ω , we define the dimensionless orbital rotation rate $\gamma(t)$ and the dimensionless spin rotation rate $1 + \omega(t)$. Note that the phase lag between the tide and the gravitational potential of the host body is not relevant for our purpose.

already been suggested to take place respectively in Earth (e.g. Aldridge *et al.*, 1997) and in Io (e.g. Kerswell & Malkus, 1998). However, these previous works do not take into account some planetary particularities and need to be revisited. For instance, Aldridge *et al.* (1997) did not take into account the orbital rate of the Moon nor the magnetic field of the Earth, hence neglecting the effects of tides rotation and Joule dissipation on the growth of TDEI. Kerswell & Malkus (1998) implicitly assumed that the tidal response of Io is completely fluid, neglecting the rigidity of its mantle and overestimating the amplitude of librations and tidal deformations. Our purpose here is to extend previous results of the literature on TDEI and LDEI, and to determine general formulas for quantifying the presence of the elliptical instability in terrestrial bodies, taking into account the relevant complexities present in natural systems.

This paper is organized as follows. Section 4.2.2 presents the different celestial forcings which could excite an elliptical instability, first focusing on tides, and then on forced and free librations. In section 4.2.3, we introduce our physical model and develop a local WKB analysis for non-synchronized and synchronized systems, including the effects of viscosity as well as the effects of an imposed magnetic field and a local temperature gradient. These theoretical results are used in section 4.2.4 to investigate the presence or not of TDEI and LDEI in telluric planets and moons of the solar system, as well as in two Super-Earths of extrasolar systems; the possible consequences of those instabilities are finally considered.

4.2.2 Celestial mechanics and elliptical instability

Figure 4.11 presents a sketch of the problem considered in this work. We consider a telluric body of rotation rate Ω_{spin} , orbiting around an attractor (orbit in black dashed

TABLE 4.3 – *List of the different astrophysical configurations which could lead to an elliptical instability in a planetary fluid layer (liquid core, subsurface ocean). β is the ellipticity of the boundaries distortion, $\Delta\Omega$ is the differential rotation rate between the fluid and the elliptical deformation, Ω is the mean spin rate of the planet, ε is the physical libration amplitude, T_{orb} and e are the orbital period and eccentricity, and ω_{free} is the free libration frequency.*

State	Origin of $\Delta\Omega$	Origin of β	$\Delta\Omega$	Instability
Non-Synch.	spin rotation	D.T. ^a	$\Omega_{spin} - \Omega_{orb}$	TDEI
Non-Synch.	meteoritic impact	S.B. ^a	spin-up process	TDEI
Synch.	forced optical libration	D.T.	$2e\Omega \cos(2\pi t/T_{orb})$	LDEI
Synch.	forced physical libration	S.B.	$\varepsilon\Omega \cos(2\pi t/T_{orb})$	LDEI
Synch.	free physical libration	S.B.	$\varepsilon\Omega \cos(\omega_{free}t)$	LDEI
Synch.	any physical libration	S.B. or D.T.	zonal flow ^b	TDEI

^a D.T. stands for dynamic tides and S.B stands for static bulge.

^b Case equivalent to a non-synchronized case (cf. section 4.2.2.4).

line) at the orbital rate Ω_{orb} . This body has a radius R , a mass M and a fluid layer in its interior between an external radius R_2 and an internal radius R_1 , typically a liquid outer core. We suppose that this internal fluid layer is enclosed between an external elliptically deformed solid layer and a possible inner core such as the outer liquid core of the Earth or the subsurface ocean of Europa. The elliptical deformation of streamlines is due either to tides generated by an orbiting companion body (i.e. dynamic tides), or to a so-called frozen elliptical shape of the rigid surface (i.e. static bulge). The usual phase lag between the tide and the gravitational potential of the host body, which is due to internal dissipation, is not relevant for our purpose and is thus forgotten. Three dimensionless numbers are necessary to describe the system : (i) the ellipticity β of the elliptical deformation, (ii) the Ekman number $E = \nu/(\Omega R_2^2)$, where ν is the fluid kinematic viscosity, R_2 is the outer radius of the rotating fluid, and Ω its typical angular velocity before any instability, equal to the mean value of the (possibly varying) mantle spin rate $\Omega_{spin}(t)$, (iii) the differential rotation $\Delta\Omega$ between the fluid and the elliptical distortion, non-dimensionalized by the fluid rotation rate, $\Delta\Omega/\Omega$. We distinguish two cases : the case of a non-synchronized body, and the case of a synchronized body. In the former case, over one spin period, a mean differential rotation exists between the elliptical deformation and the fluid, whereas in the latter case the mean rotation rates of the deformation and of the fluid are equal. The different cases are described in the following and summarized in table 4.3.

4.2.2.1 Non-synchronized bodies

For a non-synchronized body, we consider two cases depending on the origin of the elliptical shape.

First, if the spin rate of the mantle Ω_{spin} is constant, a TDEI can be excited by the elliptical distortion due to dynamic tides, which rotate at the orbital velocity Ω_{orb} . This

is the standard configuration considered for instance by Craik (1989), who showed that TDEI is indeed possible except in a forbidden zone $\Omega_{spin}/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$, where no triadic resonance is possible.

Second, if the elliptical shape is due to a static bulge, a non-null mean differential rotation over one spin period implies that the fluid does not rotate at the same rate as the mantle, which corresponds to a spin-up or a spin-down process. This can occur for instance transiently after a large meteoritic impact, capable of fully desynchronizing the body (see for instance the considered scenario for explaining the Moon magnetic field by Le Bars et al. 2011). In this case, a differential rotation exists between the fluid and the mantle with its frozen bulge, up to the typical spin-up/spin-down time necessary for the fluid to recover the mantle velocity (Greenspan, 1968), i.e. up to

$$t_{spin-up} = \Omega_{spin}^{-1} E^{-1/2}. \quad (4.15)$$

Now, if the growth time of the TDEI is short enough compared to the spin-up time, one can expect a quasi-static evolution of the system, where the modification of the spin rate of the fluid is neglected during the growth of the instability : the former configuration is then transiently recovered.

4.2.2.2 Synchronized bodies

In the synchronized case, even if there is no mean differential rotation between the elliptical deformation and the fluid, oscillations can occur for different reasons. We distinguish below forced librations due to gravitational interactions with other celestial bodies, and free librations induced for instance by a meteoritic impact.

4.2.2.3 Forced librations

In forced librations, frozen static bulge and dynamic tides have to be considered simultaneously. To illustrate this, following Goldreich & Mitchell (2010), we consider a simple toy model without any internal dissipation : a synchronously spinning satellite, with an elastic outer shell and an homogeneous fluid interior, moving on an elliptic orbit. The orbital velocity changes along the orbit, and writes at first order in the orbital eccentricity e

$$\Omega_{orb} = \Omega (1 + 2e \cos \Omega t) \quad (4.16)$$

where Ω is the mean value of the mantle spin rate $\Omega_{spin}(t)$. Considering the influence of the orbital velocity variations on the satellite dynamics, we expect two limit cases : (i) if the rigidity of the elastic shell is null, the shell slides over the fluid and maintains its equilibrium shape, with the long axis of the ellipsoidal figure pointing toward the companion body ; (ii) if the rigidity of the elastic shell is large enough, the entire satellite rotates rigidly with a fixed shape.

In the first case, only the elastic energy E_{elas} varies : the meridians of the shell are stretched and compressed due to the rotation, whereas the spin velocity of the satellite remains constant. This is the so-called optical libration. In the second case, only the

gravitational energy E_{grav} varies and the spin velocity of the satellite changes : this corresponds to the so-called physical libration.

Note that in both cases, the libration period remains small compared to the typical spin-up/spin-down time (4.15), which means that the fluid does not follows the solid boundaries : it never has enough time to adapt to the periodic velocity fluctuations and continues to rotate at the constant synchronous rotation rate Ω . This is the so-called "no spin-up" condition. Hence, in the first case, a differential rotation exists between the fluid rotating at the constant rate Ω and the dynamic tides rotating at the oscillating orbital velocity, $\Delta\Omega/\Omega = 2e \cos \Omega t$. A LDEI can thus be excited by this optical libration, as shown theoretically by Kerswell & Malkus (1998) and Herreman *et al.* (2009). In the second case, a differential rotation $\Delta\Omega/\Omega = \epsilon \cos \Omega t$ exists between the fluid rotating at the constant rate Ω and the static bulge subject to physical librations of amplitude ϵ , which depends on the internal structure of the satellite. In this case also, LDEI is possible, as recently demonstrated experimentally and numerically by Noir *et al.* (2011).

With the more general case of an arbitrary torque applied to the shell, Goldreich & Mitchell (2010) estimated the ratio $\mathfrak{R} = E_{elas}/E_{grav}$ by

$$\mathfrak{R} = \frac{32 \pi}{5} \frac{1 + \tilde{\nu}}{5 + \tilde{\nu}} \frac{(1 + k_f)^2}{k_f} \frac{\tilde{\mu} d R^3}{GM^2} \quad (4.17)$$

where $\tilde{\nu}$ is the Poisson's ratio, k_f the fluid Love number, $\tilde{\mu}$ the shell rigidity, R and d the mean radius and the thickness of the shell, M the mass of the satellite. According to Goldreich & Mitchell (2010), typical values give $\mathfrak{R} \sim 10^{-2}$ for the subsurface ocean of Europa, and $\mathfrak{R} \sim 0.1$ for the subsurface ocean of Titan, whereas the silicate mantle of Io is expected to behave in the limit $\mathfrak{R} \gg 1$. Because of the visco-elastic rheology of real bodies, the effective response should be between the two limit cases given by this model. Goldreich & Mitchell (2010) argue that the total increase of energy would be minimal, which leads us to consider that Europa and Titan, for instance, behave as entirely fluid satellites. On the opposite side, Karatekin *et al.* (2008), Van Hoolst *et al.* (2008, 2009) and Baland & Van Hoolst (2010) considered that the rheology does not allow the bodies to reach their minimal energetic state and assume that they behave rigidly. This issue being still debated, we will consider in this work the whole range of configurations between these two limit cases.

4.2.2.4 Free librations

After a meteoritic impact for instance, so-called free librations can occur on the typical resynchronization time (e.g. Williams *et al.*, 2001). Following the no spin-up condition explained in section 4.2.2.3, the fluid keeps rotating at the orbital velocity (synchronized state) whereas the mantle librates around this mean value. The amplitude ϵ of the free librations depends initially on the impact strength and decreases through time, whereas the libration frequency remains equal to a proper frequency of the body, given by $\omega_{free} = \Omega \sqrt{3(B-A)/C}$ at first order in the orbital eccentricity, (A, B, C) being the three principal moments of inertia of the body (see for instance Lissauer, 1985). Considering a static bulge, free librations can thus drive a LDEI from the differential rotation

$\Delta\Omega/\Omega = \epsilon \cos(\omega_{free}t)$, providing that the growth time of the instability is short compared to the resynchronization time, as will be shown in section 4.2.3.5.

4.2.2.5 Zonal wind induced by physical librations

Finally, in all scenarios involving physical librations, it has recently been determined analytically by Busse (2010), and confirmed experimentally and numerically by Sauret *et al.* (2010), that non-linearities in the Ekman layer driven by the librating rigid boundaries induce a differential rotation in the fluid of amplitude $\Delta\Omega/\Omega = -0.154 (\theta\omega_o/\Omega)^2$, where θ is the amplitude angle of the libration and ω_o its frequency. TDEI can thus be excited by this differential rotation with both static bulge and dynamic tides. Nevertheless, it is important to notice that the differential rotation generated by this process is always very small. We do not expect this mechanism to play an important role in a planetary context, since it is always dominated by LDEI but it is worth to mention its existence that may be relevant in certain astrophysical cases.

4.2.2.6 Typical amplitudes of gravitational distortions

The amplitude β of gravitational distortions, defined here as $\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$, where a_1 and a_2 are respectively the long and short axes of the outer boundary of the considered fluid layer, is generally unknown for celestial bodies. To study the elliptical instability for real cases, we need to estimate it, for instance in assuming an hydrostatic equilibrium shape.

The equilibrium shape of a body of mass M and radius R , is an old problem which begins with the static bulges theory of Newton (1687). This classical theory considers an incompressible no-spinning body at rest deformed by a tidal field at leading order in R/D , which leads to a spheroidal shape and

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{M_2}{M} \frac{R^3}{D^3} + O\left(\frac{R^4}{D^4}\right), \quad (4.18)$$

where M_2 is the mass of the body responsible for the gravitational field and D the distance between the two bodies. This tide is sometimes referred to as the marine tide, where the gravitational potential of the tidal bulge is neglected. Note that this approximation always leads to a relevant but underestimated tidal deformation. When possible, we have used in the following a better estimate of β taking into account the density distribution in the body and the gravitational potential of the tidal bulge :

$$\beta = \frac{3}{2} h_2 \frac{M_2}{M} \frac{R^3}{D^3} \quad (4.19)$$

with the radial displacement Love number h_2 , directly linked to the potential Love number k_2 by $h_2 = 1 + k_2$. A typical value is $k_2 = 3/2$, obtained for an incompressible homogeneous body in hydrostatic equilibrium (e.g. Greff-Lefftz *et al.*, 2005). The tidal Love numbers can be calculated with the Clairaut-Radau theory (see e.g. Van Hoolst *et al.*, 2008).

As shown by equation (4.19), gravitational distortions vary with the inter-bodies distance D . They can thus be divided in a component of constant amplitude, corresponding

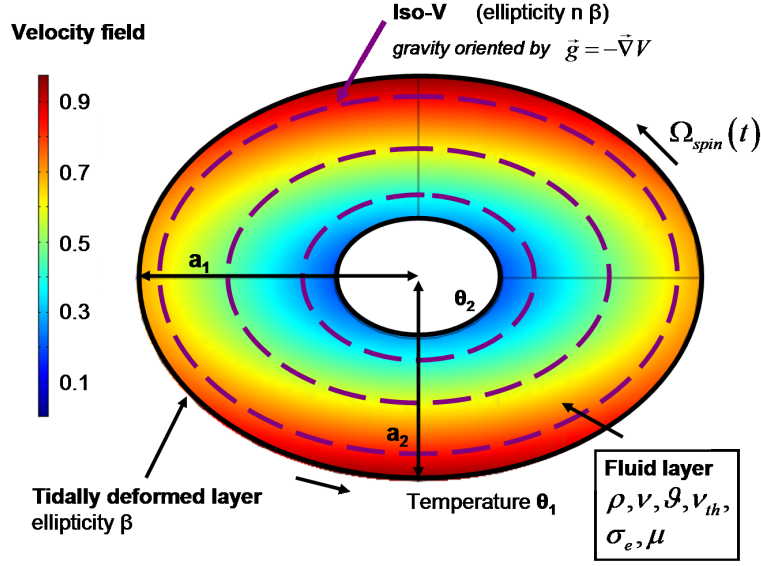


FIGURE 4.12 – Description of an internal liquid layer. The tidal forces deform the core-mantle boundary (CMB) in an ellipse of axes a_1 and a_2 , which leads to an ellipticity β of the streamlines. In this layer, the fluid is rotating at the rate Ω .

to the mean value of the gravitational distortion along the elliptic orbit, plus a smaller component with an amplitude oscillating between $\pm 3e$ times the constant one (e.g. Greenberg *et al.*, 2003). In real cases that we will consider in the following, this oscillating component can be neglected since it will always have a second order influence on the elliptical instability compared to the constant (static or dynamic) component of β (but see appendix E.3). Note nevertheless that in synchronized satellites, these so-called diurnal tides have important consequences for the internal state and the orbital evolution, since the changing shape of the bulge generates time-varying stresses, which generate heat by viscosity or friction.

4.2.3 Generic stability of the elliptical instability in a planetary context

4.2.3.1 Model, equations and dimensionless parameters

We consider a telluric celestial body in the general framework sketched in figure 4.11, and we focus on a liquid layer described in figure 4.12. All dimensional parameters are listed in table 4.4. The instantaneous spin rotation rate $\Omega_{spin} = \Omega (1 + \omega(t))$ may depend on time because of either free or forced physical librations. We focus on an internal fluid layer enclosed in an ellipsoidal shell, with an outer boundary of mean radius R_2 at temperature θ_2 , and an inner boundary at temperature θ_1 , with a mean radius $R_1 = \eta R_2$. As already seen above, because of the no spin-up condition, this fluid layer is initially rotating at the constant rate Ω , equal to the mean value of Ω_{spin} . This layer is considered to be homogeneous, of density ρ_0 , kinematic viscosity ν , thermal expansion

TABLE 4.4 – List of the dimensional variables used in this work.

Orbital (resp. spin) rotation rate	$\Omega_{orb}(t)$ (resp. $\Omega_{spin}(t)$)
Fluid rotation rate*	Ω
Mass of the deformed body (resp. attractor)	M (resp. M_2)
Inter-bodies distance	D
Free libration angular frequency	ω_{free}
Fluid layer mean external radius	R_2
Long/short axis in the equatorial plane	a_1/a_2
Fluid layer mean internal radius	$R_1 = \eta R_2$
Imposed external (resp. internal) temperature	θ_2 (resp. θ_1)
Gravity at the external radius	g_0
Imposed magnetic field	$B_0 \mathbf{e}_{\mathbf{x}_3}$
Fluid density	ρ_0
Fluid kinematic viscosity	ν
Fluid thermal expansion	ϑ
Fluid thermal diffusivity	ν_{th}
Fluid electrical conductivity	σ_e
Fluid magnetic permeability	μ

*mean value of the spin rate.

ϑ , thermal diffusivity ν_{th} , electrical conductivity σ_e and magnetic permeability μ . We focus here on the stability of the elliptical flow in the equatorial plane, but note that our local analysis remains valid in any plane orthogonal to the rotation axis. We choose R_2 as the length scale and Ω^{-1} as the time scale so that the mean basic spin of the body has an unit angular velocity along the rotation axis ($O, \mathbf{e}_{\mathbf{x}_3}$). The elliptical deformation has a dimensionless angular velocity $\gamma(t) \mathbf{e}_{\mathbf{x}_3}$, with $\gamma(t)$ equal to $\Omega_{orb}(t)/\Omega$ when looking at dynamic tides and to $\Omega_{spin}(t)/\Omega$ when looking at static bulges (see table 4.3).

We consider the frame where the elliptical distortion is fixed, which is rotating at the angular velocity $\gamma(t) \mathbf{e}_{\mathbf{x}_3}$, with $\mathbf{e}_{\mathbf{x}_1}$ in the direction of the long axis a_1 and $\mathbf{e}_{\mathbf{x}_2}$ in the direction of the short axis a_2 . The dimensionless equations of fluid motions are :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\gamma \mathbf{e}_{\mathbf{x}_3} \times \mathbf{u} + \frac{d\gamma(t)}{dt} \mathbf{e}_{\mathbf{z}} \times \mathbf{r} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = E \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (4.21)$$

where \mathbf{u} is the fluid velocity, p the pressure (including the centrifugal term) non-dimensionalized by $\rho_0 R_2^2 \Omega^2$, $E = \nu/(\Omega R_2^2)$ the Ekman number based on the external radius, and $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\mathbf{B}} + \mathbf{f}_{\mathbf{L}}$ the volumic force, including the buoyancy force $\mathbf{f}_{\mathbf{B}}$ and the magnetic Lorentz force $\mathbf{f}_{\mathbf{L}}$. The flow is rotating within an ellipse $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$, and we define the ellipticity $\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$.

Using the dimensionless temperature $\theta = (\tilde{\theta} - \theta_2)/(\theta_1 - \theta_2)$, the temperature equation

TABLE 4.5 – *List of relevant dimensionless parameters.*

Aspect ratio of the shell	η
Ellipticity of the distortion	$\beta = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 + a_2^2)$
Distortion rotation rate	$\gamma(t)$
Orbital eccentricity	e
Physical libration rate	$\omega(t)$
Physical libration amplitude	ε
Volumic heat source	K
Ekman number	$E = \nu/(\Omega R_2^2)$
Thermal Prandtl number	$Pr = \nu/\nu_{th}$
Magnetic Prandtl number	$Pr = \sigma_e \mu \nu$
Modified Rayleigh number	$\tilde{Ra} = \vartheta [\theta_1 - \theta_2]g_0/\Omega^2 R_2$
Magnetic Reynolds number	$Rm = \sigma_e \mu \Omega R_2^2$
Elsasser number	$\Lambda = \sigma_e B_0^2/(\rho_0 \Omega)$

is

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \frac{E}{Pr} (\nabla^2 \theta - K), \quad (4.22)$$

where $Pr = \nu/\nu_{th}$ is the thermal Prandtl number and K is a constant standing for a possible volumic heat source. Considering a gravity $\mathbf{g} = g_{(r,\phi)}g_0\mathbf{e}_g$, where \mathbf{e}_g is a unit vector, (r, ϕ) the cylindrical coordinates in the equatorial plane, and g_0 the gravity at the radius R_2 , the dimensionless buoyancy force to add in the Navier-Stokes equations using the Boussinesq approximation is $\mathbf{f}_B = \tilde{Ra} \theta g_{(r,\phi)} \mathbf{e}_g$, with the modified Rayleigh number $\tilde{Ra} = \vartheta [\theta_1 - \theta_2]g_0/\Omega^2 R_2$. Note that in a planetary context, the temperature contrast to take into account corresponds to the non-adiabatic component only, which is the deviation from the thermodynamical equilibrium state.

We also take into account the possible presence of an uniform imposed magnetic field B_0 along the rotation axis \mathbf{e}_{x_3} , which is used as the magnetic field scale. The MHD induction equations have then to be solved simultaneously

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Rm} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4.24)$$

with the magnetic Reynolds number $Rm = \sigma_e \mu \Omega R_2^2$. The magnetic Laplace force acting on the flow is given by $\mathbf{f}_L = (\Lambda/Rm) (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$, with the Elsasser number $\Lambda = \sigma_e B_0^2/(\rho_0 \Omega)$. All dimensionless parameters are listed in table 4.5.

4.2.3.2 Base fields

In the reference frame where the elliptical deformation is stationary, the differential rotation of the fluid has an amplitude $1 - \gamma(t)$. Besides, the ellipticity induces an elongational

flow $-(1 - \gamma(t)) \beta (x_2 \mathbf{e}_{\mathbf{x}_1} + x_1 \mathbf{e}_{\mathbf{x}_2})$, leading to the general elliptical base flow

$$\mathbf{U} = (1 - \gamma(t)) [-(1 + \beta)x_2\mathbf{e}_{\mathbf{x}_1} + (1 - \beta)x_1\mathbf{e}_{\mathbf{x}_2}] \quad (4.25)$$

This flow represents the laminar response of the fluid to the tidal distortion as an exact, non-linear solution of Navier-Stokes equations for any finite viscosity, provided that $(\nabla \times \mathbf{f}) \cdot \mathbf{e}_3 = 2 \, d_t \gamma(t)$. This means that a body volumic force noted \mathbf{f} is necessary to have spin period fluctuations (i.e. free or forced physical librations), as obvious in a planetary context. Equation (4.25) leads to elliptical streamlines of instantaneous ellipticity β . Note that β is not the mathematical eccentricity of the streamlines, given by $\sqrt{2 \beta / (1 + \beta)}$. Note also that the velocity magnitude changes along a streamline, the isovalues of the velocity being elliptical but with an ellipticity 2β .

We further assume that a stationary temperature profile $\Theta(r, \phi)$ is imposed, which is, at order 1 in β , solution of the energy conservation equation (4.22) with the base field \mathbf{U} . We suppose that the modified Rayleigh number \tilde{Ra} is of order β . We also consider the presence of an imposed uniform magnetic field along the rotation axis, produced for instance by a companion body. We assume that the Laplace force does not modify the base flow but only plays a role on the elliptical instability. This implies that this force is of order β . In this context, we will see below that regarding the elliptical instability, equations for fluid motions at order 0 in β are similar to those of the purely hydrodynamical case where the elliptical instability is described as a resonance between two inertial waves. The magnetic and thermal fields only induce a correction in the fluid equations at order 1 in β , hence a correction on the growth rate of the instability, because of the stabilizing effect of the Laplace and buoyancy forces.

4.2.3.3 The WKB method : stability along a streamline

Our local approach is based on the short-wavelength Lagrangian theory developed in Bayly (1986), Craik & Criminale (1986), then generalized in Friedlander & Vishik (1991) and Lifschitz & Hameiri (1991). This method has been successfully applied to the elliptical instability by Le Dizès (2000), then extended to take into account the energy equation and the buoyancy force, or the induction equation and the Laplace force in Le Bars & Le Dizès (2006) and Herreman *et al.* (2009) respectively. To summarize, the WKB method consists in looking for a perturbed solution of the equations of motion under the form of localized plane waves along the streamlines of the base flow. We thus look for a solution of the linearized non-dimensional system of equations (4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24) under the form

$$\mathbf{u}_{(\mathbf{x},t)} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.26)$$

$$\mathbf{p}_{(\mathbf{x},t)} = \mathbf{P} + \mathbf{p}'(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.27)$$

$$\theta_{(\mathbf{x},t)} = \Theta + \theta'(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{x},t)} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(t) e^{i\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{x}}, \quad (4.29)$$

along the streamlines of the base flow described by

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{U}, \quad (4.30)$$

where $\mathbf{k}_{(t)}$ is the time-dependent wave vector, \mathbf{x} the position vector, and where \mathbf{U} (with its corresponding pressure field \mathbf{P}), Θ and $\mathbf{B}_0 = (0, 0, 1)$ are the dimensionless base fields defined in the previous section 4.2.3.2. Dropping the primes for simplicity, the linearized system of equations writes :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{u} + i \mathbf{u} (d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} \\ = -i p \mathbf{k} - 2 \gamma_{(t)} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} - k^2 E \mathbf{u} + \frac{\Lambda}{Rm} (i \mathbf{k} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{B}_0 + \tilde{Ra} \theta g \mathbf{e}_g \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$d_t \theta + i \theta (d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Theta = -k^2 \frac{E}{Pr} \theta \quad (4.33)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} d_t \mathbf{b} + i \mathbf{b} (d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) + i (\mathbf{U} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{b} \\ = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{U} + i (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \mathbf{u} - \frac{k^2}{Rm} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

The classical way to solve these equations is to search a solution where the wave vector \mathbf{k} is a solution of Those equations can be decoupled in space and time to give an equation for the wave vector only :

$$d_t \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (4.36)$$

In this case, the equations for \mathbf{u} , θ , \mathbf{b} are decoupled in space and time, and the solution is then sought under the form of a Taylor expansion in β of all variables, as illustrated in appendix E.1 and E.2.

This approach will be used in the following sections to calculate the growth rate of the instability in the two generic cases : the TDEI, which appears in the case of non-synchronized bodies, and the LDEI, which appears in the case of synchronized bodies.

4.2.3.4 Non-synchronized bodies : inviscid growth rate of the TDEI

In this section, we consider the effects of dynamic tides of amplitude β on the liquid core of a Mercury-like planet orbiting close to its star with (i) constant but different orbital and sidereal rotation periods, (ii) an imposed thermal stratification (see e.g. Manglik *et al.*, 2010), and (iii) an externally imposed magnetic field (e.g. the Sun magnetic field). Note that the same analysis applies to the stratified zone of a star (the so-called radiative zone) tidally deformed by a companion body, taking into account the magnetic field generated by dynamo in its convective zone. The present configuration corresponds to the standard case of the elliptical instability as already known, but completed by the complexities present in real astrophysical cases. Note that these additive effects have already been studied separately, whereas they are simultaneously present in real systems. The effect of the angular velocity of the tidal bulge has been studied in Miyazaki & Fukumoto (1992), Le Dizès (2000), Le Bars *et al.* (2007) and Le Bars *et al.* (2010); the presence of a thermal field has been studied in Le Bars & Le Dizès (2006), Cébron *et al.* (2010c), Lavorel & Le Bars (2010); the presence of an inner solid core has been studied in Lacaze *et al.* (2005b); the presence of an external magnetic field has been studied in Kerswell (1994), Kerswell

(2002), Lacaze *et al.* (2006), Herreman *et al.* (2009). We extend these works in including all of these features in a single formula.

In the non-synchronized case, which is considered in this section, the base flow (4.25) reduces to

$$\mathbf{U} = (1 - \Omega_{orb}/\Omega_{spin}) [-(1 + \beta)x_2\mathbf{e}_{\mathbf{x}_1} + (1 - \beta)x_1\mathbf{e}_{\mathbf{x}_2}]. \quad (4.37)$$

The WKB analysis is then tractable (see appendix E.1), taking into account thermal and magnetic effects in the limit where buoyancy and Laplace forces are of the order β . The instability does not exist in the range $\Omega_{spin}/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$, which is called the forbidden band. It corresponds to the absence of resonance between the elliptical forcing and the inertial waves of the rotating flow (see Le Bars *et al.*, 2007, for a complete discussion). In the present limit, the presence of the thermal and magnetic fields does not affect the forbidden band. Neglecting the thermal diffusion, the inviscid growth rate of the TDEI with the presence of thermal and magnetic fields is

$$\sigma_{inv} = \frac{\sqrt{(2\Omega^G + 3)^4 \beta^2 - 4 \left(\tilde{Ra} r \partial_r \Theta\right)^2}}{16 |1 + \Omega^G|^3} - \frac{\Lambda}{4 |1 + \Omega^G|^3}, \quad (4.38)$$

with $\Omega^G = \Omega_{orb}/(\Omega_{spin} - \Omega_{orb})$, r and $\partial_r \theta$ being respectively the radius and the dimensionless temperature base field radial gradient of the considered streamline. This expression allows to recover the different cases already obtained in the literature. For instance, the purely hydrodynamic growth rate given by Miyazaki & Fukumoto (1992), Le Dizès (2000) and Le Bars *et al.* (2010) is recovered for ($\tilde{Ra} = 0$, $\Lambda = 0$). For a fixed elliptical deformation, we recover the classical inviscid value $\sigma_{inv}/\beta = 9/16$. Finally, in the absence of a thermal field and with a stationary bulge ($\Omega_{orb} = 0$, $\tilde{Ra} = 0$), the magnetic case given in Herreman *et al.* (2009) is also recovered. Formula (4.38) is fully generic and clearly illustrates the stabilizing influence of Joule dissipation and of a local stratification.

4.2.3.5 Synchronized bodies : inviscid growth rate of the LDEI

In this section, we consider the liquid ellipsoidal core of a synchronized moon like Io, or of an extra-solar telluric planet orbiting close to its massive attractor with (i) an orbital period equal to the sidereal rotation period, but with small instantaneous fluctuations of the differential rotation between the elliptical deformation and the fluid, whatever their origin (optical or physical, forced or free librations), (ii) an imposed magnetic field (e.g. the Jupiter's magnetic field for Io), (iii) a local thermal gradient. The dimensionless instantaneous differential rotation between the fluid and the elliptic deformation oscillates with a libration amplitude ϵ (equal to $2e$ for optical librations) and a libration frequency ω_o (equal to 1 for forced librations). Considering the particular case of a fluctuation due to the orbital ellipticity (i.e. $\omega_o = 1$), Kerswell & Malkus (1998) and Herreman *et al.* (2009) have shown that these oscillations can lead to LDEI. We extend these previous studies to the more general case of small fluctuations of arbitrary periods, taking into account a buoyancy. Neglecting the thermal diffusion, the inviscid growth rate of the LDEI is then

(see appendix appendix E.2)

$$\sigma_{inv} = \frac{16 + \omega_o^2}{64} \sqrt{(\epsilon \beta)^2 - \frac{4}{\omega_o^2} \left(\tilde{R}a \ r \ \partial_r \Theta \right)^2} - \frac{\omega_o^2}{16} \Lambda \quad (4.39)$$

at first order in $\epsilon\beta$, taking into account the effects of thermal and magnetic fields in the limit where buoyancy and Laplace forces are of the order β . The forbidden band is given by $|\omega_o| > 4$. As before, the generic formula (4.39) clearly illustrates the stabilizing influence of Joule dissipation and of a local stratification.

The case $\omega_o \rightarrow 0$ corresponds to the limit toward the fully synchronized state. In the case of the TDEI, this limit case is obtained with $\Omega^G \rightarrow \infty$, which gives the inviscid growth rate $\sigma_{inv} = \beta/(4\Omega^G)$ for large wavenumbers. Both expressions for the growth rate are thus consistent in the limit of synchronized state : $\Omega_{orb}/\Omega_{spin} = 1 - \epsilon$ i.e. $|1 + \Omega^G| \sim |\Omega^G| = 1/\epsilon$. The expression given in Herreman *et al.* (2009) is also exactly recovered when $\omega_o = 1$ and $\Lambda = 0$. Note that there is a slight error on the numerator of the magnetic damping term in Herreman *et al.* (2009) : in their considered case, $\omega_o = 1$, the magnetic damping is $-\Lambda/16$, instead of $-3\Lambda/16$.

4.2.3.6 Viscous dissipation

The previous sections present the calculation of the growth rate of the elliptic instability in an inviscid fluid with Joule dissipation and buoyancy stabilization. The calculation of the threshold of the instability necessitates to correctly estimate all dissipative terms. In the case of no-slip boundaries, dissipation occurs mainly in the viscous boundary layers of thickness $E^{1/2}$. This implies a damping term that should alter the growth rate :

$$\sigma = \sigma_{inv} - \alpha E^{1/2} f(\eta), \quad (4.40)$$

where α is a constant of order 1, equal to $\alpha = 2.62$ for the spinover mode of the TDEI and $f(\eta) = (1 + \eta^4)/(1 - \eta^5)$ (see e.g. Kudlick, 1966; Hollerbach & Kerswell, 1995; Lacaze *et al.*, 2005b).

In addition to decreasing the growth rate, viscous dissipation is also of primordial importance to quantify the orbital evolution and rotational history of a binary system during its synchronization. A model has been proposed in Le Bars *et al.* (2010) for a stationary bulge, which allows the authors to estimate the viscous power dissipated by TDEI. Our purpose here is to generalize this model to all cases studied above. Far from threshold, the model proposed by Le Bars *et al.* (2010) considers that the TDEI simply corresponds to a differential rotation between the boundary and the bulk. According to this model, the power dissipated by the system is :

$$P = -2 M R_2^2 \Delta\Omega^2 \Omega E^{1/2}, \quad (4.41)$$

assuming that in the small Ekman numbers limit reached in astrophysical cases, the amplitude of the instability is commensurate with the differential rotation $\Delta\Omega$ (Cébron *et al.*, 2010a).

The tidal quality factor Q is widely used in systems evolution calculations. Using (4.41), we are now in a position to give the theoretical expression of its component associated with the elliptical instability. By analogy with the theory of harmonic oscillators, Q is defined by (e.g. Greenberg (2009) for a recent discussion on Q) the ratio between the maximum potential gravitational energy stored in the tidal distortion over the energy dissipated in one period. The potential energy stored in the bulge is of the order $E_0 \sim 4\pi\rho_0 g_0 s^2 R_2^2$, with s the dimensional height of the tides (e.g. Benest, 1990). Since $\beta \sim s/R_2$, we obtain from equation (4.41)

$$Q \sim \frac{g_0 \beta^2}{R \Delta \Omega^2 E^{1/2}}. \quad (4.42)$$

4.2.3.7 Validity of the approach

The previous analysis is valid when the elliptic instability originates from a resonance of pure hydrodynamic inertial waves. Therefore, any previously derived expressions are limited to the case where buoyancy and Laplace forces are of the same order as the elliptical distortion β . According to (4.31), this means that

$$\frac{\Lambda}{Rm} k \sim \beta \quad \text{and} \quad \tilde{Ra} \sim \beta, \quad (4.43)$$

where k is the dimensionless norm of the wavevector of the excited mode. For a typical planetary core, these conditions can be rewritten

$$B_0 \sim 0.1 \frac{\sqrt{\beta/k}}{R_2 E} \quad \text{in} \quad \mu\text{T} \quad \text{and} \quad \frac{F_{non-adia}}{F_{adia}} \sim 10^{-3} \frac{\beta}{E^2 R_2^4 g_0^2}, \quad (4.44)$$

where $F_{non-adia}$ and F_{adia} are respectively the non-adiabatic and adiabatic components of the core heat flux. The condition on the magnetic field is easily verified for planetary cores over a large range of wave vector k . The condition on the non-adiabatic heat flux is more problematic to quantify : in most planets, the adiabatic profile is supposed to be sufficient to transport core heat flux, and the non-adiabatic component is estimated to be very small, but not known precisely. Nevertheless, one should notice that the condition (4.44) is very restrictive and special attention should be paid in each given configuration. For instance, in the case of Europa, (4.44) implies $F_{non-adia}/F_{adia} \sim 0.1\%$, which seems reasonable ; but in the case of Io, (4.44) implies $F_{non-adia}/F_{adia} \sim 1\%$, which is only marginally verified since the estimated non-adiabatic heat flux is about 1/5 of the adiabatic component (e.g. Kerswell & Malkus, 1998).

Now supposing that the buoyancy or the Laplace force is of order 0 in β , we can wonder if the elliptic instability still exists. In this case, inertial waves will be replaced by gravito-inertial or magneto-inertial waves, and the elliptical instability will arise as a resonance between those modified waves. Resonances of magneto-inertial waves has been studied for instance in Kerswell (1994); Lebovitz & Zweibel (2004); Mizerski & Bajer (2009) in the case of an imposed uniform magnetic field along the spin axis : this is the so-called magnetoelliptic instability. Resonance of gravito-inertial waves has been studied in Le Bars & Le Dizès (2006); Guimbard *et al.* (2010), who concluded that a stratified thermal

field can be either stabilizing or destabilizing depending on the shape of gravitational iso-potentials and isotherms : this is the so-called gravitoelliptical instability. This point is further clarified in appendix E.4, which shows the high sensitivity of the elliptical instability to the specificities of the thermal and gravity fields. Planets with buoyancy or Laplace force of order 0 in β should be the subject of specific studies, which is beyond the scope of the generic results presented here.

4.2.4 Application to solar/extrasolar systems

Using previous results, we are now in a position to calculate the threshold of the elliptical instability for telluric bodies of different systems. We consider that a body is stable or unstable when the mean value of the growth rate over an orbit is respectively positive or negative.

4.2.4.1 Non-synchronized system : tide driven elliptical instability (TDEI)

Let us consider first the TDEI in liquid cores of telluric bodies in the solar system. A rough criteria given by the equations (4.38) and (4.40) leads to a threshold $\beta/\sqrt{E} \sim O(1)$, as already mentioned. In the Solar system, this leads to focus only on Mercury, Venus, and on the Earth-Moon system during its evolution. Most tidal evolution models predict the Moon to rapidly retreat to 25–35 Earth radii in less than about 100 Ma (Webb, 1982; Ross & Schubert, 1989; Williams, 2000, 2004), and we thus consider two limit cases : the actual Earth-Moon system and an early Earth with an early Moon at 30 Earth radii, i.e. two times closer than today. The tabulated values found in the literature for these planets are given in table 4.6. Note that the Ekman number E is calculated with a molecular kinematic viscosity $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition of a liquid outer core.

We first neglect thermal effects. In order to represent all bodies of table 4.6 on the same stability diagram, we define the quantity

$$Y = \beta \left(\alpha f(\eta) \sqrt{E} + \frac{\Lambda}{4|1 + \Omega^G|^3} \right)^{-1}. \quad (4.45)$$

The quantity Y includes the specific dependence in the spin/orbit angular velocity ratio, aspect ratio η of the inner core and the magnetic field. The stability criterium

$$\sigma = \frac{(2\Omega^G + 3)^2}{16 |1 + \Omega^G|^3} \beta - \alpha f(\eta) \sqrt{E} - \frac{\Lambda}{4 |1 + \Omega^G|^3} \geq 0 \quad (4.46)$$

derived from (4.38) and (4.40) is then equivalent to

$$Y \geq \frac{16 |1 + \Omega^G|^3}{(3 + 2\Omega^G)^2}. \quad (4.47)$$

Figure 4.13 represents the stability results for the TDEI in the liquid cores of the non-synchronized planets of the solar system considered in table 4.6. The case of each planet will be discussed in the following. We can already note that, except the Early Earth, the TDEI seems not currently be present in the telluric bodies of the solar system.

TABLE 4.6 – *Physical and orbital characteristics used for the stability calculations and results. Following Herreman et al. (2009), we take as typical values $\sigma_e = 4 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, $\rho_0 = 12\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition.*

	Mercury	Venus	Actual Earth	Early Earth ^b
$M (\times 10^{-24} \text{ kg})$	0.330	4.87	5.98	5.98
$R \text{ (km)}$	2440	6051	6378	6378
$T_{spin} \text{ (d)}$	58.6	−243	0.997	0.418
$T_{orb} \text{ (d)}$	87.97	224.7	27.32	9.67 ^b
Tidal amplitude (m)	0.925 ^a	1.8	0.6	3.4
R_2/R	0.8 ^a	0.17	0.55	0.55
η	0	0	0.35	0
$E (\times 10^{14})$	21	316	0.11	0.047
$\beta \text{ (measured)} (\times 10^7)$	7.6	?	1.9	11
$\beta \text{ (hydrostatic)} (\times 10^7)$	6.8	1.1	0.8	6.7
$B_{suf}^c \text{ (nT)}$	250 ^d	30	$3 \cdot 10^4$	0
$B_0^e \text{ (nT)}$	488	6100	$1.8 \cdot 10^5$	0
Λ	$6.4 \cdot 10^{-6}$	0.004	0.015	0
$\sigma \text{ (years}^{-1}\text{)}$	$-1.5 \cdot 10^{-5}$	−5.43	−7.7	0.003

^a Van Hoolst *et al.* (2007)

^b Considering an Early Moon two times closer than today.

^c Equatorial surface field

^d Anderson *et al.* (2010)

^e Considering a variation in r^{-3} from the core to the planetary surface (r being the spherical radius).

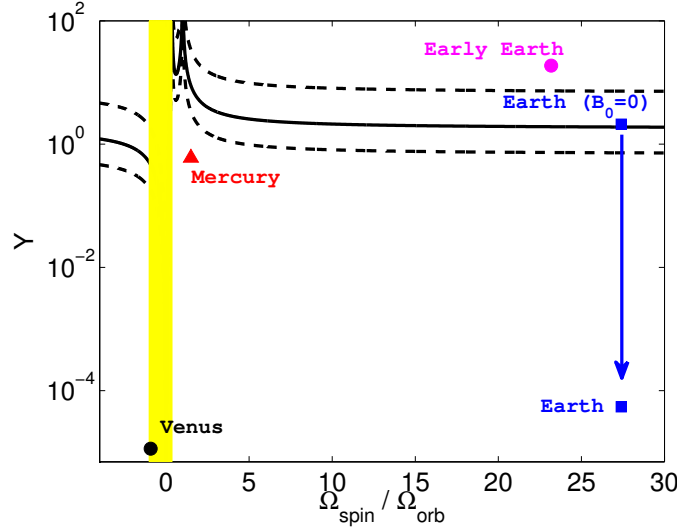


FIGURE 4.13 – TDEI stability diagram for celestial bodies of the solar system. Considering a surfacic viscous damping term of the growth rate $\sigma_s = -\alpha f(\eta) E^{1/2}$ (see section 4.2.3.6), the zone below the black line, defined with $\alpha = 2.62$, is the stable zone, whereas the black dashed lines represent $\alpha = 1$ and $\alpha = 10$. The yellow zone is the so-called ‘forbidden zone’, given by $\Omega_{spin}/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$.

An important result, already noticed in Cébron *et al.* (2010a), is that the Early Earth, with a Moon two times closer than today and in absence of extern magnetic field, is unstable with a good level of confidence. The dissipated power due to the instability was around $5 \cdot 10^{18} W$, which corresponds to a tidal quality factor of $Q \sim 0.003$. This estimation seems huge in comparison to the present dissipation by tidal friction ($\sim 3.75 \cdot 10^{12} W$ according to Munk & Wunsch, 1998) but actually, it simply suggests that the Earth-Moon system was then in rapid evolution. Figure 4.14 shows in more details the stability of the Early Earth, for different values of the length of day and Earth-Moon distances. Note that in absence of meteoroid impacts, the angular momentum conservation links these two quantities, which cannot then vary independently. However, at this epoch, violent meteoroid impacts have probably modified the angular momentum of the early Earth-Moon system (Melosh, 1975; Wieczorek & Le Feuvre, 2009) and we thus keep these two parameters independant, which allows to cope with uncertainties.

The case of the actual Earth is more subtle : if we consider that the actual magnetic field is provided by thermo-solutal convective motions in the core, it has to be considered as an imposed field for the dynamics of the elliptical instability. In this case, the destabilizing term in the growth rate (4.46) is about 10^{-7} , whereas the magnetic damping term is around 0.004. Then the TDEI cannot grow, whatever the Ekman number is. On the contrary, if we consider that the actual magnetic field is provided by the flow driven by the TDEI, the threshold has to be calculated with $\Lambda = 0$, and the actual Earth is slightly unstable, with a growth time of around 14,000 years. The same result was suggested by

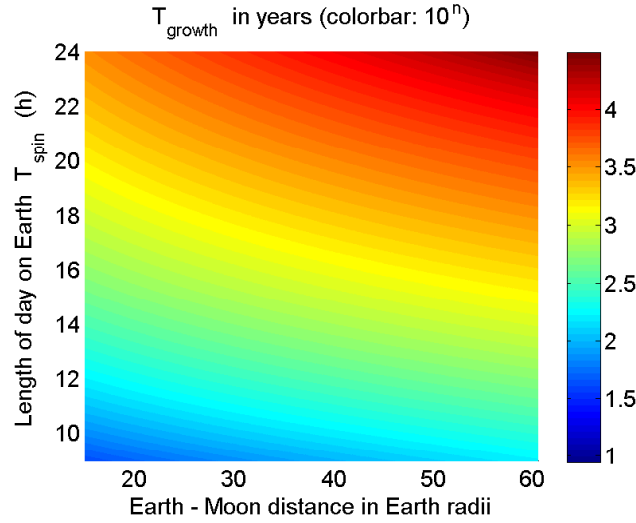


FIGURE 4.14 – Evolution of the typical growth time $T_{growth} = 1/\sigma$ of the instability in the Early Earth core as a function of the Earth-Moon separation and of the length of day on the Early Earth T_{spin} ($\alpha = 2.62$). Note that this diagram assumes no external magnetic field ($B_0 = 0$).

Aldridge *et al.* (1997), neglecting the influence of magnetic field and global rotation.

Considering the actual heat flux of Earth, the corresponding super-adiabatic temperature contrast is about 1 mK, leading to a vigorous convection in the liquid core (Christensen & Aubert, 2006). First, note that this vigorous convection does not prevent the elliptical instability to grow, as shown in Cébron *et al.* (2010c); Lavorel & Le Bars (2010). Second, we can wonder the influence of a stably stratified flow. To confirm the negligible role of the temperature, we can consider, as an upper bound, a subadiabatic gradient of the same order of magnitude in the Early Earth (see Surnita & Yoshida, 2003, for a discussion on this possible stable density stratification in the whole early Earth outer core and its disruption). For the actual Earth, such a stratification leads to $\tilde{Ra} \approx -1.4 \cdot 10^{-6}$, and the dependance $\tilde{Ra} \propto D^3 E^2$ gives the value $\tilde{Ra} \approx -2 \cdot 10^{-7}$ for the Early Earth. Considering $\tilde{Ra} \approx -1 \cdot 10^{-6}$ as an upper bound, the formula (4.38) is valid ($\tilde{Ra} \sim O(\beta)$) and shows that the thermal stratification reduces the growth rate by 2%. This confirms that the role of the temperature can be neglected in the limits considered in this work.

For the last two bodies, note that Venus is in the forbidden band, which means that whatever the tidal deformation or the Ekman number are, the TDEI cannot grow. Mercury is slightly below the threshold of the instability and is thus probably stable today. Note that Mars is clearly stable nowadays ($\beta \ll \sqrt{E}$), but Arkani-Hamed *et al.* (2008); Arkani-Hamed (2009) suggested that past gravitational interactions with an asteroid could have excited a TDEI in the martian core during its fall towards the planet.

TABLE 4.7 – *Physical and orbital characteristics used for the four galilean moons and Titan.*

	Io	Europa	Ganymede	Callisto	Titan
M ($\times 10^{-22}$ kg)	8.93	4.8	14.8	10.8	13.45
R (km)	1822	1561	2631	2410	2576
T_{orb} (d)	1.77	3.55	7.16	16.69	15.95
e ($\times 10^3$)	4.1	9.4	1.3	7.4	28.8
ε ($\times 10^4$)	1.3 ^a	2 ^a	0.056 ^a	0.042 ^a	1.3 ^a
B_0 (nT)	1850	410 ^b	120	10 ^b	0

^a Physical libration amplitude from Noir *et al.* (2009)

^b Order of magnitude from Zimmer *et al.* (2000) of the magnetic field component along the rotation axis of the moon (see also Kabin *et al.*, 1999).

4.2.4.2 Synchronized body : libration driven elliptical instability (LDEI)

4.2.4.3 Galilean moons and Titan

The presence of LDEI in Io has been first suggested by Kerswell & Malkus (1998). In Herreman *et al.* (2009), this suggestion has been reexamined and the magnetic field induced by this possible instability has been quantified. In the following, this calculation is re-evaluated and extended to the four galilean moons (Io, Europa, Ganymede and Callisto), considering the presence of the external magnetic field of Jupiter. Titan is also considered. All necessary data are given in table 4.7 and 4.8.

As described in section 4.2.3.5, we consider an instantaneous differential rotation $\epsilon \cos(\omega_o t)$ for these synchronized bodies. Focusing on the forced librations due to the orbital eccentricity, the libration frequency is $\omega_o = 1$. The amplitude of the libration ϵ is given by $\epsilon = 2e$ for optical librations. For physical librations, obtained for $\Re \gg 1$, $\epsilon = \varepsilon$ has to be measured or estimated (see the data in Noir *et al.*, 2009). In any case, the theoretical analysis is the same, and the use of formula (4.39) with $\tilde{R}a = 0$ (thermal field negligible) and $\omega_o = 1$ gives the LDEI threshold. To obtain a unique stability diagram for all bodies of table 4.7, we define the quantity

$$Y_2 = \left[\epsilon \beta - \frac{4}{17} \Lambda \right] \left[\alpha (1 - \eta) f_{(\eta)} \right]^{-1}, \quad (4.48)$$

and use the Ekman number based on the thickness $E_k = E/(1 - \eta)^2$. The threshold for LDEI given by formulas (4.39) and (4.40)

$$\sigma = \frac{17}{64} \epsilon \beta - \alpha (1 - \eta) f_{(\eta)} \sqrt{E_k} - \frac{1}{16} \Lambda \geq 0 \quad (4.49)$$

is then equivalent to

$$Y_2 \geq \frac{64}{17} \sqrt{E_k}. \quad (4.50)$$

TABLE 4.8 – *Stability results in the case of optical librations ($\epsilon = 2e$ and β from this table and table 4.7). For the considered liquid cores, we take as typical values $\sigma_e = 4 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$, $\rho_0 = 8\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition. For the considered subsurface oceans, we take as typical values $\sigma_e = 0.25 \text{ S.m}^{-1}$ (Hand & Chyba, 2007), $\rho_0 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ and $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.*

	Io	Europa	Ganymede	Callisto	Titan
	core	core	core	core	core
R_2/R	0.52 ^{b,c}	0.38 ^c	0.27 ^d	— ^e	0.35 ^f
η	0	0	0	—	0
$E (\times 10^{14})$	2.7	14	20	—	27
$\beta (\times 10^4)$	60 ^b	9.7 ^g	3.7 ^h	—	1.2 ⁱ
$\Lambda (\times 10^7)$	42	4.1	0.7	—	0
$\sigma (\text{yr}^{-1})$	0.016	0.0025	$-3 \cdot 10^{-4}$	—	$7 \cdot 10^{-5}$
	ocean	ocean	ocean	ocean	ocean
Crust (km)	—	10 ^k	100 ^l	150 ^m	70 ⁿ
Depth (km)	—	100 ^k	150 ^l	150 ^m	200 ⁿ
R_2/R	—	0.99	0.96	0.94	0.97
η	—	0.94	0.94	0.93	0.92
$E (\times 10^{14})$	—	2.0	1.5	4.5	3.5
$\beta (\times 10^4)$	—	9.7 ^g	3.7 ^h	0.72 ^h	1.2 ⁱ
$\Lambda (\times 10^{13})$	—	21	3.5	0.9	0
$\sigma (\text{yr}^{-1})$	—	0.0016	$-6 \cdot 10^{-4}$	$-4 \cdot 10^{-4}$	-10^{-4}

^aPhysical libration amplitude from Noir *et al.* (2009)

^bKerswell & Malkus (1998), considering the static tidal bulge

^cHussmann & Spohn (2004)

^dBland *et al.* (2008)

^eKuskov & Kronrod (2005)

^fGrasset *et al.* (2000)

^gwith $k_2 \approx 0.3$ (Wahr *et al.*, 2006; Baland & Van Hoolst, 2010)

^hEq. (4.19) with $k_2 \approx 0.3$

ⁱ $k_2 \approx 1$ (Goldreich & Mitchell, 2010)

^jPrimary (background) field (Zimmer *et al.*, 2000)

^kWahr *et al.* (2006)

^lBland *et al.* (2009)

^mKuskov & Kronrod (2005)

ⁿSohl *et al.* (2003)

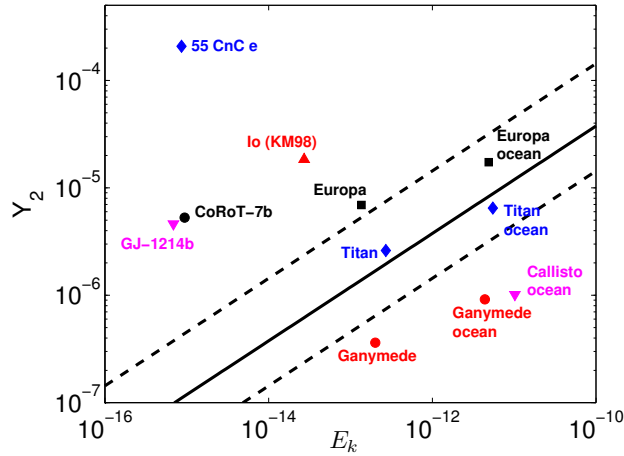


FIGURE 4.15 – LDEI stability diagram for synchronized celestial bodies in the optimal case for the instability, i.e. an optical libration ($\epsilon = 2e$) for a quasi-equilibrium tide. All values are given in table 4.7 and the horizontal axis represents the Ekman number E_k based on the thickness of the fluid layer. The label KM98 for Io reminds that the point is placed with the values used by Kerswell & Malkus (1998). The zone below the black line, defined with the viscous surfacic damping coefficient $\alpha = 2.62$, is the stable zone, whereas the black dashed lines represent respectively the extremum values $\alpha = 1$ and $\alpha = 10$.

This allows to plot the stability diagram shown in figure 4.15 in the case of the optical libration ($\epsilon = 2e$) for a quasi-equilibrium hydrostatic bulge calculated with formula (4.19), corresponding to the optimal case for LDEI (i.e. the maximum possible libration amplitude and the maximum possible elliptical deformation). In the following, we will discuss the stability versus the LDEI of the galilean moons, Titan and three Super-Earths. Because the tidal bulge and the libration amplitudes of these bodies are not yet known (see the discussion of Goldreich & Mitchell, 2010), we will represent the results on diagrams in the (β, ϵ) plane, taking into account the full range of variability of β and ϵ . Therefore, the upper right corner will correspond to the optimal case for the LDEI : the libration of a purely deformable body i.e optical libration with $\epsilon = 2e$ and an hydrostatic bulge. The lower left corner corresponds to the libration of a rigid body (physical librations), associated with the small diurnal tides. In the same way, the lower right corner corresponds also to physical librations, but with an hydrostatic bulge. Finally, the upper left corner corresponds to the libration of a purely deformable body (optical libration) associated to the small diurnal tides amplitude. The relevant physical configurations for each body depend on their compositions and will be specifically discussed in the following for each of them.

First, we consider Io with the values used in the studies of Kerswell & Malkus (1998) and Herreman *et al.* (2009), i.e. a static bulge of ellipticity $\beta = 0.006$ and a libration amplitude assumed to be $\epsilon = 2e$ (see table 4.7). As already found by these authors, Io is found to be unstable with a good level of confidence (typical growth time of 63 years).

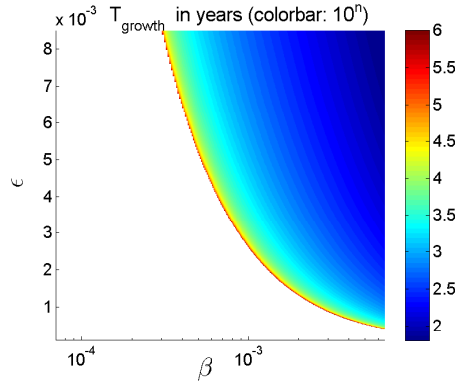


FIGURE 4.16 – Evolution of the typical growth time $T_{growth} = 1/\sigma$ of the instability in Io with the tidal bulge ellipticity β and the libration amplitude ϵ ($\alpha = 2.62$). The upper right corner corresponds to the optimal case considered in Kerswell & Malkus (1998) and Herreman et al. (2009), the upper left corner corresponds to optical librations with a small tidal amplitude corresponding to diurnal tides ($\beta = 7 \cdot 10^{-5}$, $\epsilon = 2e = 0.0082$) and the lower right corner corresponds to the region of physical librations of the static frozen bulge ($\beta = 0.006$, $\epsilon = 1.3 \cdot 10^{-4}$). The white zone corresponds to the stable zone where the instability cannot grow because of dissipative effects (at the boundary with the colored zone, the growth time is infinite). Note that the range of the colorbar is chosen so that color variations are clearly visible.

However, this is an optimal non-realistic case : the ellipticity used is due to a static frozen bulge ($\mathfrak{R} \gg 1$), and the libration amplitude is taken equal to $2e$, as in the deformable case ($\mathfrak{R} \ll 1$). Due to its silicate mantle, the core of Io is expected to be in the limit $\mathfrak{R} \gg 1$, and consequently the ellipticity to consider is indeed $\beta = 0.006$ but the libration amplitude is rather $\epsilon \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$ (see table 4.7), which is 63 times smaller than $2e$. With these more realistic values and taking into account the presence of Jupiter magnetic field, the lower right corner of figure 4.16 shows that Io is expected to be stable, contrary to what was expected. However, in order to obtain a better view of the stability in Io, figure 4.16 gives the typical growth time of the instability for different ellipticities and libration amplitudes, ranging between the limit cases $\mathfrak{R} \gg 1$ and $\mathfrak{R} \ll 1$, with $\epsilon = 2e$ and the diurnal tidal ellipticity $3e\beta \approx 7 \cdot 10^{-5}$, corresponding to a diurnal tide amplitude around 130 m. Future accurate measurements of the tidal amplitude at the core-mantle boundary and of the libration amplitude should confirm our prediction.

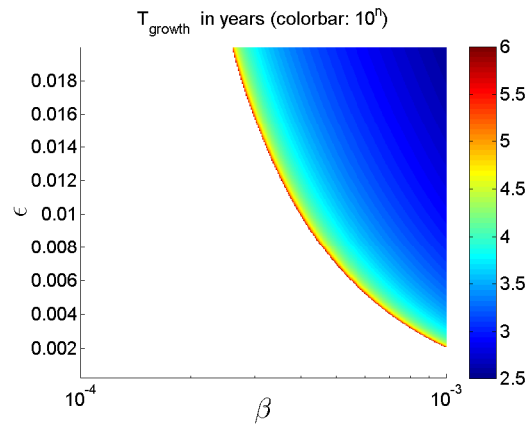
In the optimal case for instability, figure 4.15 shows that the liquid core of Europa is unstable, as already suggested by Kerswell & Malkus (1998), even when taking into account the Joule dissipation due to the presence of Jupiter magnetic field. We calculate the typical growth time of the instability to be around 400 years, and the associated dissipation to be on the order of $P \sim 10^{10} W$. This corresponds to a tidal quality factor of $Q \sim 10^7$, which is two orders of magnitude below the conservative estimation of $3 \cdot 10^{12} W$ for the tidal heating rate on Europa (O'Brien *et al.*, 2002). In reality, only the subsurface ocean is expected to behave in this optimal case, presented in figure 4.15 (Goldreich

& Mitchell, 2010). The silicate mantle of Europa should follow a more rigid response, whose amplitude is controlled by the induced dissipation in the ocean. This libration amplitude of the mantle being not known yet, intermediate behaviours are explored in figure 4.17a. Because of this mechanism, we expect the libration of Europa mantle to follow the behaviour of the icy crust ; consequently, its core is expected to be described by parameters close to the upper right corner of diagram 4.17a. This shows that the core of Europa is expected to be unstable. The elastic behaviour of the icy crust above Europa's ocean is expected to behave in the deformable limit ($\mathfrak{R} \ll 1$), and figure 4.17b shows that the ocean is clearly unstable.

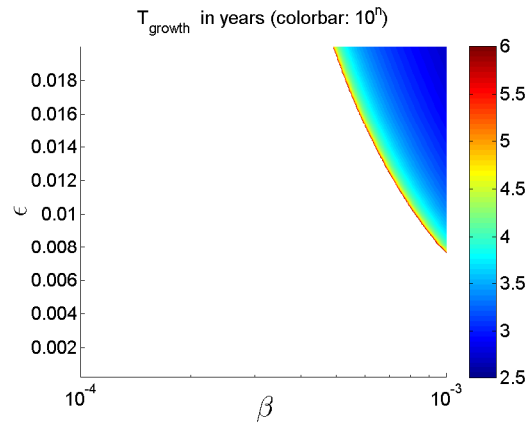
Concerning the two last galilean moons, the core of Ganymede and the subsurface ocean of Callisto and Ganymede are found to be stable in the optimal case (fig. 4.15). A LDEI is improbable today. Figure 4.15 shows also that Titan's core is slightly unstable but remains in the threshold band of uncertainties. The subsurface ocean of Titan is probably stable because even in the optimal case for the LDEI, it remains in the vicinity of the threshold.

4.2.4.4 Super-Earths

The recent discovery of extra-solar telluric planets gives typical examples of synchronized planets in close orbit around their host stars. This particular astrophysical configuration should lead to a vigorous LDEI in their possible liquid cores. In this section, we consider three Super-Earths, expected to be telluric : 55 CnC e, CoRoT-7b and GJ 1214b, respectively at $D = 0.0156$ A.U, $D = 0.0172$ A.U, and $D = 0.0143$ A.U from their host star. The data used are from Winn *et al.* (2011) for 55 CnC e, Valencia *et al.* (2010) for CoroT-7b and Charbonneau *et al.* (2009) for GJ 1214b. They are given in table 4.9. For CoRoT-7b, the work of Léger *et al.* (2011) predicts a core composed of liquid metals, representing 11% of the total planetary volume, as for the actual Earth. The presence of a liquid core in Super-Earths is still not clear (e.g. Wagner *et al.*, 2011, for CoroT-7b) but we can reasonably assume that a planetary liquid core could occupy about one third the radius of the planet, which corresponds to 4 % of the total planetary volume. Because of the proximity of the parent star, these extra-solar planets are expected to be synchronized. The actual orbital eccentricities of CoRoT-7b and GJ 1214b are not known. If they are fully circularized and synchronized, no elliptical instability can grow. On the contrary, if a small libration exists, previous stability formula can be used. Let assume here an orbital eccentricity of $e = 0.001$, well beyond the detection limit. Figure 4.15 shows that in the optimal case these three Super-Earths cores are clearly unstable with a good level of confidence, which means that the LDEI is probably present in their liquid layers. One can notice that this result is not very sensitive to the hypothesis on the size of the considered liquid core : for instance, with the values of table 4.9, CoroT-7b become stable for liquid core aspect ratio R_2/R smaller than 1 % (for the optimal case i.e. optical librations and equilibrium tides). In these estimates, we use the hydrostatic tidal deformation, which underestimates the real tidal deformation. Note also that larger orbital eccentricity would lead to more unstable configurations. Figure 4.18 shows the influence of these uncertainties, as well as the effect of smaller libration amplitudes and tidal deformations. The proximity of the known Super-Earths with their host stars leads



(a)



(b)

FIGURE 4.17 – Same as figure 4.16 but for Europa, considering (a) its possible liquid core and (b) a 100 km depth subsurface ocean. Both the core and the subsurface ocean of Europa are expected to behave in the deformable limit, locating their states in the upper right corner of the diagram. Both are thus found to be unstable.

TABLE 4.9 – *Physical and orbital characteristics used for the stability calculations in exoplanets. We take as typical value $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, consistent with a Fe/Fe-S composition. We use the formula (4.18) to estimate the tidal bulge ellipticity.*

	CoRoT-7b	GJ 1214b	55 CnC e
M (in Earth's mass)	4.8	6.55	8.57
R (in Earth's radius)	1.68	2.678	1.63
T_{orb} (d)	0.854	1.58	0.7365
R_2/R	$1/3^a$	$1/3^b$	$1/3^c$
e	0.001^c	0.001^c	0.057^d
η	0	0	0
E ($\times 10^{16}$)	9.4	6.8	8.6
β ($\times 10^3$)	7	6	5
σ (yr^{-1})	0.01	0.005	0.45

^a Coherent with Léger *et al.* (2011).

^b Coherent with the values from Nettelmann *et al.* (2010).

^c Hypothesis assumed.

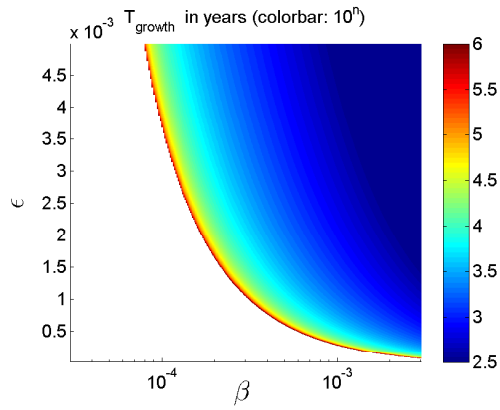
^d Winn *et al.* (2011).

to strong tidal deformations, and the LDEI is then able to grow from very small libration amplitudes, as shown in figure 4.18. Same conclusions are obtained for Kepler-10b (Batalha *et al.*, 2011), assuming the same hypothesis.

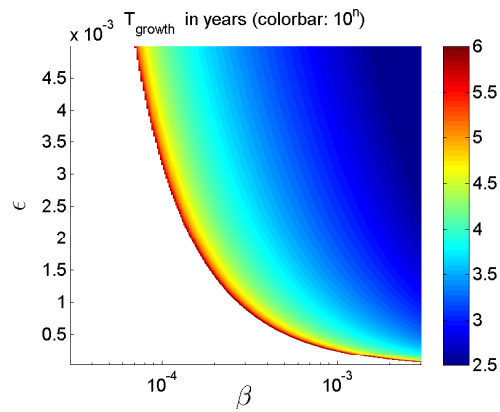
4.2.5 Conclusion and discussion

In conclusion, the presence of the elliptical instability in telluric celestial bodies has been investigated theoretically. New analytical results have been determined to fill the gap between previous studies and astrophysical applications. In particular, generic formulas for the growth rate of the elliptical instability driven respectively by tides (TDEI) and libration (LDEI) have been derived, in the presence of imposed magnetic and thermal base fields. It has been shown that an elliptical instability is strongly expected in the core of the Early Earth, Europa, 55 CnC e, CoRoT-7b and GJ 1214b, as well as in the subsurface ocean of Europa. Those results are valid for the present state of the considered bodies, and do not preclude the existence of elliptical instability in the past. For instance, the Early Earth core was clearly unstable, because of the larger gravitational distortions when the Moon was closer.

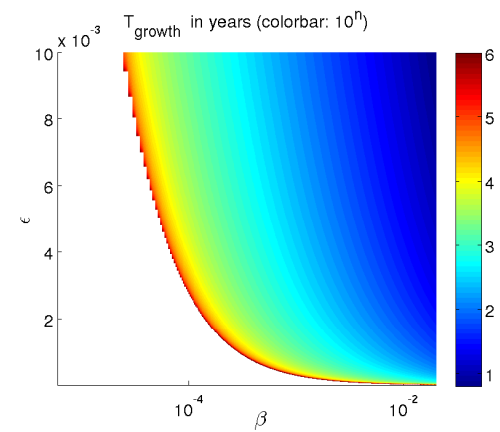
Now, one can wonder what are the signatures and consequences of such an instability on the planetary dynamics. A first consequence would be on the orbital evolution and synchronization process : indeed, the elliptical instability generates three-dimensional turbulent flows with cycles of growth, saturation, fluctuations and relaminarization (e.g. Le Bars *et al.*, 2010). Timescales involved range typically between the spin period and the typical growth time of the instability. Dissipation rates at the planetary scale, and consequently the orbital evolution, may then follow the same variations, with periods of



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.18 – Same as figure 4.16 but for CoroT-7b in figure (a), GJ 1214b in figure (b) and 55 Cnc e in figure (c). The true tidal deformation, larger than the hydrostatic value, leads to an LDEI for a large range of libration amplitudes. Then, the presence of the LDEI in their liquid cores is very probable, whatever the uncertainty ranges.

rapid evolution when an elliptical instability is present, followed by more quiescent periods, for instance when the forbidden zone is reached. This increased dissipation should accelerate the synchronization process, as described in Le Bars *et al.* (2010), and this range of timescales should appear in the evolution of the spin rotation rate.

The second consequence would be on heat flux variations at the planetary surface : indeed, as shown in Cébron *et al.* (2010c); Lavorel & Le Bars (2010), flows driven by elliptical instability are very efficient in transporting heat by advection. Hence, sub-adiabatic cores should not be regarded as thermal blankets when tidally unstable. The usual Nusselt number $Nu = Q_{tot}/Q_{diff}$, ratio between the total outward heat flux Q_{tot} and the purely diffusive outward heat flux Q_{diff} , associated to this heat advection is given by the following scaling law, verified both experimentally (Lavorel & Le Bars, 2010) and numerically (Cébron *et al.*, 2010c) :

$$Nu = \frac{0.01}{\sqrt{E}}. \quad (4.51)$$

This leads to a total outward heat flux advected by the elliptical instability about $Nu \approx 3 \cdot 10^4$ times larger than a purely diffusive outward heat flux. Besides, in the presence of natural thermal convection, the superimposition of chaotic elliptically driven flows would induce large scale variations of the same amplitude.

Finally, internal flows driven by elliptical instability are directly responsible for magnetic field generation. The question of whether or not LDEI and TDEI are dynamo‘ene is still open and remains out of reach of the currently available numerical capacity. But in any case, elliptically driven flows induce a magnetic field from an existing background one. In order to estimate a typical amplitude of such an induced field, we can use the results of our WKB approach. This shows that the dimensionless induced magnetic field inside the core and the instability velocity \mathbf{u}_0 are systematically related by

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} \frac{Rm k_{x_3}}{k^2} \mathbf{u}_0, \quad (4.52)$$

where k and k_{x_3} are respectively the norm and the axial component of the wave vector of the excited mode of the elliptical instability. This generic expression shows that the induced magnetic field due to the elliptical instability is systematically proportional to and in quadrature with the velocity field due to the instability. In the case of the TDEI, $k_{x_3} = k/2$ and in the case of the LDEI, $k_{x_3} = \omega_o k/4$ (see respectively the appendix E.1 and E.2). Then, assuming that at saturation, the typical flow induced by instability is commensurate to the differential rotation between the fluid and the elliptical distortion (see table 4.3), we estimate the surface field by

$$b_{surf} = \frac{Rm k_{x_3}}{k^2} \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \left(\frac{R_2}{R} \right)^3, \quad (4.53)$$

where R is the planet radius. Starting from the jovian magnetic field component along the rotation axis, the LDEI in Europa ($k_{x_3} = k/4$) subsurface ocean is capable of inducing surface variations of up to ~ 0.1 % of the ambient field (reached for $k = 2\pi/(1 - \eta)$ and optical librations, i.e. $\epsilon = 0.0188$), and LDEI in its core up to ~ 100 % of the ambient

field at the surface (reached for $k = 2\pi/(1 - \eta)$ and physical librations, i.e. $\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$). Considering the Galileo's E4 flyby of Europa (see Zimmer *et al.*, 2000; Kabin *et al.*, 1999), the background z-component of the magnetic field is perturbed from 410 nT to 380nT at a distance of Europa about 1.5 Europa radius. This perturbation of 30nT is of the same order of magnitude as the possible LDEI induced magnetic field from the core. Internal sources should thus be considered in addition to plasma currents (Kabin *et al.*, 1999) for the interpretation of Europa magnetic signal.

To finish with, one should notice that the tide driven elliptical instability (TDEI) and the libration driven elliptical instability (LDEI) studied here for telluric planets, can also affect the giant gaseous planets of our solar system (Wicht & Tilgner, 2010), as well as extra-solar gaseous planets such as the hot-jupiters, whose dramatic tidal deformations should excite vigorous elliptical instabilities in the planetary atmospheres, but also in their host stars (Rieutord, 2003; Ou *et al.*, 2007; Cébron *et al.*, 2011).

4.3 Étoiles extra-solaires

Le travail présenté dans cette section constitue une première approche de l'étude de l'instabilité elliptique dans le contexte des systèmes à Jupiters chauds. Ce travail, mené en collaboration avec C. Moutou et R. Farès, a été en partie publié dans les actes du congrès *Detection and dynamics of transiting exoplanets* qui s'est déroulé à l'Observatoire de Haute-Provence Cébron *et al.* (2011).

4.3.1 Introduction

The search for planetary systems shows that a substantial fraction of the observed stars host extrasolar planets. Methods of detection, such as the radial-velocity method or the transit method, are most sensitive to large planets on small orbits. Consequently, many known planets have a mass comparable to that of Jupiter orbiting very close to their host stars. This population of planets, the so-called hot Jupiters, currently include about 25 % of all known planets (Lanza, 2009). The increasing amount of data on these systems allows to constrain more precisely the theoretical models of interaction between two celestial bodies, such as tidal or magnetic mutual influences (e.g. Cuntz *et al.*, 2000; Gu & Suzuki, 2009). Indeed, the permanent and systematic presence of tides in binary systems leads to clear observational evidence of their important roles (see the recent review of Mazeh, 2007). For instance, the ellipsoidal effect or the apsidal motion⁵ are clear signatures of the tidal deformations, whereas the tidal induced dissipation and angular momentum exchanges control the orbital evolution of the system, driving it toward a synchronized state on a circular orbit (neglecting possible thermal tides, which can drive a planet away from synchronism : e.g. Gold & Soter, 1969). In the case of systems composed

5. The apsidal motion, which is the precession of the *line of apsides* of a non-circular orbit (the line of apsides, also called *apse line* is defined by the periapsis and apoapsis for elliptical orbit, and by the orbit's periapsis and focus for parabolic and hyperbolic orbits), is due to the mutual tidal distortion in a binary system (the first correct, and now classical calculation, of this motion was made by Cowling, 1938). A famous example of apsidal motion, for instance, is the perihelion precession of Mercury.

of a star and a close-in companion, the role of tides has been recently investigated, in order to tentatively explain for instance : i) the spin-up of stars with hot jupiters (Pont, 2009), ii) the radius anomaly of strongly irradiated planets (Leconte *et al.*, 2010*b*), iii) the synchronisation or quasi-synchronisation of the stellar spin (Aigrain *et al.*, 2008). Most recent observations have attracted our interest to reconsider the possible consequences of a often ignored ingredient, the elliptical instability. The star τ Boo has a massive planet in short orbit ($4.5 M_{Jup}$ minimum mass and 3.31-day period), and the remarkable property of a stellar surface rotating synchronously with the planetary orbit. It is possible that tides from the planet onto the star have synchronised the thin convective zone of this F7 star, since the mass ratio between the planet and the convective zone is more than 10. Recurrent spectropolarimetric observations have allowed to reconstruct the global magnetic topology of the star since 2006, and its evolution. Two polarity reversals have been observed in two years (Donati *et al.*, 2008; Fares *et al.*, 2009), an evidence for a magnetic cycle of 800 days, much shorter than the Sun's (22 yrs). The role of the planetary tides on the star in this short activity cycle was questioned; a strong shear may take place at the bottom of the convective zone, triggering a more active and rapidly evolving dynamo.

The Spin-orbit misalignment⁶ of one third of transiting hot jupiters (Winn *et al.*, 2010) also questioned the role of tides in such systems, since the tides are responsible for alignment of the planes, circularization of the orbit and synchronisation of periods. The classical idea of planet formation and migration within a disk was also challenged by such observations. Tidal instabilities may cause the rotational axis of both bodies in the system to change orientation with time, at a relatively short timescale. Misaligned systems could thus show unstable rotation axes of stars, rather than tilted orbital planes of the planet. Tidal implications on the internal structure of planets were already reported (Leconte *et al.*, 2010*b*). Since the power dissipated by tides could generate radius anomaly, then the additional power generated by tidal instabilities should also be taken into account in planet modeling.

4.3.2 Elliptic instability in astrophysics : growth rate and observables

In an astrophysical context, the TDEI has been suggested in accretion disks by Goodman (1993) who first explore its role in angular momentum transport. His results are later confirmed by two-dimensional numerical simulations of Ryu & Goodman (1994), which show that the instability induces no significant angular momentum transport in this context (see also Lubow *et al.*, 1993; Balbus & Hawley, 1998). However, Lebovitz & Zweibel (2004) confirm that its presence in accretion disks is possible (see also Mizerski & Bajer, 2009), as well as in the inner parts of barred galaxies, in which the gas flow is slightly elliptical, where the instability could be a source of turbulence. Its presence in accretion disks has recently been reinvestigated, considering the presence of elliptical vortices in these disks (e.g. Lesur & Papaloizou, 2009*a,b*; Lyra & Klahr, 2010). The possible presence of a TDEI in stars is first explored by Lebovitz & Lifschitz (1996*b,a*), who revisit the classical problem of the stability of Riemann ellipsoids. These ellipsoids are stationary incompressible figures of equilibrium, representing very simple self-gravitating

6. The angle considered is the angle between the stellar spin axis and planetary orbit normal (as projected on the sky).

stellar models. Even if the existence of their compressible counter-parts has been questioned (Chambat, 1994; Filippi *et al.*, 1996, 2002), examples have been theoretically and numerically found (e.g. Cazes & Tohline, 2000; Ou, 2006), which proves the relevance of this simple model. Lebovitz & Lifschitz (1996*b,a*) show theoretically that certain of these incompressible ellipsoids, with elliptical streamlines, are prone to the TDEI, which destabilize the figure of equilibrium. This result has been confirmed and numerically extended to polytropic Riemann ellipsoids by Ou *et al.* (2004, 2007), showing that the elliptical instability is able to grow on fully compressible fluid flows. Finally, so far the presence of the TDEI in a star deformed by tidal forces has been proposed by Rieutord (2003) who gave the first description of its possible consequences.

4.3.2.1 Model

Let us consider the star as a massive fluid body, with its own spin and tidally deformed by an orbiting extra-solar planet. For our purpose, the considered layer of the star can be modeled as a rotating flow inside a fixed triaxial ellipsoidal shell of outer axes (a, b, c) , where c is the length of the polar axis. In the following, we will use the mean equatorial radius $R_{eq} = (a + b)/2$ as the lengthscale. We introduce also a timescale Ω^{-1} using the tangential velocity along the deformed outer boundary at the equator $U = \Omega R_{eq}$. Then, the hydrodynamic problem is fully described by five dimensionless numbers : the ellipticity $\beta = |a^2 - b^2|/(a^2 + b^2)$, the shell aspect ratio η , the aspect ratio c/b , the Ekman number $E = \nu/(\Omega R_{eq}^2)$, where ν is the kinematic viscosity of the fluid and the ratio $\Omega^G = \Omega_{orb}/(\Omega - \Omega_{orb})$ where Ω_{orb} is the orbital rate and Ω the fluid angular velocity.

4.3.2.2 Calculation of the instability growth rate

As previously stated, the elliptic instability comes from a parametric (triadic) resonance and takes place in any rotating fluid whose streamlines are (even slightly) elliptically deformed. In the usual hydrodynamic case, the underlying strain field responsible for the elliptic deformation is in resonance with two inertial waves (Bayly, 1986; Waleffe, 1990). However, in the presence of an external magnetic field, magneto-inertial waves can also be in resonance in the limit of non-diffusive magnetic field i.e. in the limit of ideal magnetohydrodynamic (Lebovitz & Zweibel, 2004; Mizerski & Bajer, 2009, 2011) : this is the so-called magneto-elliptical instability. In the same way, when a density stratification is present, gravito-inertial waves can be coupled in the non-diffusive limit (Le Bars & Le Dizès, 2006; Guimbard *et al.*, 2010) : this is the so-called gravito-elliptical instability. In this work, we consider only the coupling of inertial waves, neglecting the effects of a possible density stratification or the presence of a magnetic field (see also Cébron *et al.*, 2011, for a discussion on these specific points). Note, however, that convective flows are in no case a problem for the instability to grow (Lavorel & Le Bars, 2010; Cébron *et al.*, 2010c; Wicht & Tilgner, 2010).

In most of the previous studies on the tidal instability, it is assumed that the tidal deformation is fixed and that the excited resonance is the so-called spin-over mode, which corresponds to a solid body rotation around an axis perpendicular to the spin axis of the system. This is indeed the only perfect resonance in spherical geometry in the absence of

rotation of the elliptical deformation (Lacaze *et al.*, 2004). But in all natural configurations such as binary stars, moon-planet systems or planet-star systems, orbital motions are also present. This implies that the gravitational interaction responsible for the tidal deformation is rotating with an independent angular velocity Ω_{orb} different from the spin of the considered star. This significantly changes the conditions for resonance and the mode selection process, as recently studied in (Le Bars *et al.*, 2007, 2010). A very important point is the apparition of a so-called 'forbidden zone' where the tidal instability cannot grow whatever the deformation and the rotation rates are. This forbidden zone is simply given by the following kinematic conditions $-1 \leq \Omega/\Omega_{orb} \leq 1/3$. This is a key point when observing natural systems possibly affected by the tidal instability. Outside from this forbidden zone, the growth rate of the tidal instability is given by (see e.g. the appendix E.1 or Craik, 1989).

$$\sigma = \frac{(2\Omega^G + 3)^2}{16|1 + \Omega^G|^3} \beta - K E^\gamma, \quad (4.54)$$

where the first term on the right-hand side comes from the inviscid local analysis (voir annexe E.1). The second term is due to the viscous damping of the instability. The prefactor K depends on the excited mode of the tidal instability and on the aspect ratio η , the exponent γ depends on the kind of the viscous damping. If the surfacic damping is dominant, as in the case of no-slip boundaries, $\gamma = 1/2$. On the contrary, in the absence of surfacic viscous damping, the volumic damping in the bulk of the flow is dominant and then $\gamma = 1$. In the case a planetary core or experiments, the boundary conditions are no-slip and the situation is unambiguous : the surfacic damping is dominant. But in the case of stars, the boundary conditions between the radiative and the convective zones are less clearly defined. Concerning the viscous pumping/dissipation, the astrophysical literature shows a disagreement between Tassoul (1987, 1995), who argue that it scale as $E^{1/2}$ (see also Tassoul & Tassoul, 1990, 1992*a,b*, 1997) and Rieutord (1992); Espinosa Lara & Rieutord (2007); Rieutord (2008*a*), who argue that this Ekman pumping/dissipation is rather proportionnal to E (see also Rieutord & Zahn, 1997). In the framework considered by these authors i.e. for an incompressible homogeneous fluid star, there is no ambiguity for us : the viscous pumping/dissipation scales as E . However, we can imagine a more complex model where an Ekman layer exists at the boundary between the radiative zone and the convective zone (and not at the surface of the star as thought by Tassoul), due to a viscosity/density jump and velocity gradients (for instance induced by the presence of the elliptical instability in the convective zone or in the radiative zone). In this case, the viscous pumping/dissipation scale as $E^{1/2}$ (but not for the reasons presented by Tassoul). In this work, we will consider both models in order to obtain conservative results.

4.3.2.3 Observables due to the tidal instability

The tidal instability is expected to be dynamogène, as already suggested in Malkus (1993), Lacaze *et al.* (2006) or Arkani-Hamed *et al.* (2008); Arkani-Hamed (2009). In this case, the magnetic field dynamics should be very different from the dynamics driven by a thermo-solutal convective dynamo. Another interesting feature from an astrophysical

point of view is the inclination of the rotation axis of the flow due to the spinover mode, or at least the modification of the apparent rotation axis when an elliptical instability is present. Indeed, this could be directly related to the spin-orbit obliquity angle. In this case, there is no need to evoke a supplementary non-observable third body to justify the obliquity. The inclination of the rotation axis would be a direct consequence of the tilted rotation axis of the stellar flow. Note that in this case, as there is no supplementary torque acting on the star, the conservation of the angular momentum will imply that the rotation axis of the Hot Jupiter will also be tilted.

Finally, the tidal instability modifies the whole flow, which leads to a stronger viscous dissipation. This supplementary dissipation is larger than the simple dissipation induced by the tidal strain of the elliptically distorted basic flow. This supplementary dissipation could be very important for the synchronization process (see Le Bars *et al.*, 2010). We also expect that this extra dissipation and supplementary heat release could be related to the observed radius anomaly.

4.3.3 Application to hot-jupiter systems

In this section, we consider 29 hot-jupiter systems (physical and orbital characteristics given in the appendix G), and previous expressions will be used to evaluate their stability versus the elliptical instability.

4.3.3.1 Tidal deformation

We note M , R , respectively the mass and the radius of the star, M_2 the mass of the body responsible for the tidal deformation and D the distance between the two. As in section 4.2.2.6, the ellipticity due to tidal forces can be written

$$\beta = \frac{3}{2} h_2 \frac{M_2 R^3}{M D^3} \quad (4.55)$$

with the radial displacement Love number h_2 , directly linked to the potential Love number k_2 by $h_2 = 1 + k_2$. A lower bound of the tidal deformation is thus given by $k_2 = 0$, which is the limiting case of a massless tidal bulge. Then, taken into account the gravitational potential of the tidal bulge systematically increases the tidal deformation. This influence is completely encompassed into k_2 , which depends only on the density profile at first order. This density profile can be obtained in assuming that the star is constituted of a polytropic⁷ gas fluid, which is a good commonly used approximation. In this model, the polytropic index n range typically between $n = 3/2$, representative of a fully convective star, and $n = 3$, which gives a stably stratified polytropic fluid and is thus representative of radiatives zones (e.g. Horedt, 2004). For this two limiting polytropes, the potential Love numbers are respectively $k_2 \approx 0.3$ and $k_2 \approx 0.03$ (Brooker & Olle, 1955). According to Mazeh (2007), typical model of stars leads to $k_2 \in [0.001; 0.01]$, depending on the stellar mass and age. In order to be conservative, we consider the lower bound $k_2 = 0$ (see also Claret & Willems, 2002; Landin *et al.*, 2009, for estimations of k_2 from the apsidal motions constants).

7. A polytropic fluid is defined by the equation of state $p = A \rho^{1+1/n}$ where p is the pressure, ρ the density and (A, n) two constants (see the review of Horedt, 2004, on polytropes).

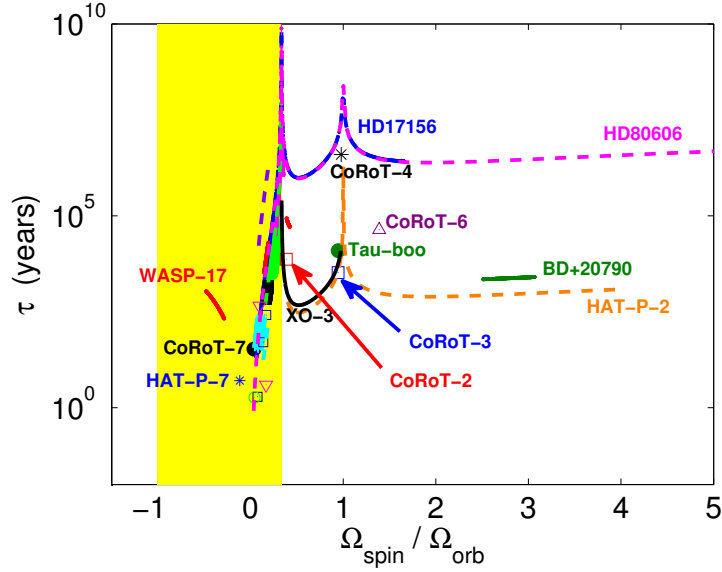


FIGURE 4.19 – Typical timescale $\tau = \sigma^{-1}$ for the inviscid growth of the tidal instability in extra-solar stars, calculated over a whole orbit. Consequently, when the orbital eccentricity of the Hot-Jupiter is 0, the (host) star is represented by a point (e.g. CoRoT-3 or Tau-Boo), whereas an elliptic orbit leads to lines (e.g. HAT-P-2 or HD80606).

4.3.3.2 The stellar model

We model the considered stars as a two zone system : a convective zone where thermal convection is the dominant physical process and a radiative thermally stratified zone. The considered stars are about twice more massive than the Sun, and the convective zone is thus systematically above the radiative zone (e.g. Kippenhahn & Weigert, 1990). We focus on the external convective zone. Considering this external layer with a ratio η given by the depth of the convective zone R_{cz} ⁸, we estimate its growth rate using equation (4.54). Note that the convective fluid motions should not significantly modify the growth rate. Indeed, the Ekman number is typically about 10^{-11} whereas the thermal Rossby number in the convective zone is about $Ro \sim 0.1 - 1$: according to the study presented in section 2.6, this does not prevent the instability to grow. The molecular kinematic viscosity inside this zone is calculated considering the molecular kinematic viscosity of the Sun and assuming a temperature dependance in $T^{-5/2}$. This leads (e.g. Rieutord, 2008b) to $\nu = 0.001 (5800/\zeta)^{5/2}$, with ζ the surface temperature of the star in Kelvin unit, and ν in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$.

4.3.3.3 Stability analysis with free-slip boundaries

In this case, the prefactor K of the viscous damping term in equation (4.54) is simply the square of the wavenumber $k = 2\pi/\lambda = \sqrt{K}$ of the excited mode. However, the value of k , needed to calculate explicitly the damping term, changes with the excited mode. A lower bound estimation for k is given by $k = \pi/(1 - \eta)$, which corresponds to the first unstable mode (a half wavelength inside the gap of the shell). A relevant upper bound is difficult to obtain. However, the balance between the typical inviscid growth rate β and the volume damping term leads to a typical wavelength $\lambda = 2\pi/k$ given by $l \sim \sqrt{E/\beta}$. Then, with typical values $E/\beta \sim 10^{-10}$, we obtain $\lambda \sim 10^{-5}$, which is larger than the Kolmogorov microscale $E^{3/4} \sim 10^{-12}$ given by the Kolmogorov theory which is the scale limit between molecular dissipation and turbulent dissipation. This shows in particular that the different scales are well separated in the flow, allowing the elliptic, large scale instability to grow. Assuming $k \sim O(1)$, the calculated dissipative term is so small that it can be neglected. We thus can consider that this free slip boundaries case leads to a growth rate of the same order of the inviscid growth rate σ . The associated typical timescales $\tau = 1/\bar{\sigma}$ is thus chosen to represent the strength of the instability (fig. 4.19). This model is correct provided that $\tau \gg \Omega_{orb}^{-1}$, which allows to consider a quasi-static situation, and $\tau \ll \tau_2$ where τ_2 is the typical time of stellar evolution. For instance, considering the synchronization time τ_2 , it follows that the presence of the tidal instability is expected in the range $10 \text{ y} \ll \tau \ll 10^6 \text{ y}$. This gives 8 unstable stars.

4.3.3.4 Stability in presence of an Ekman layer

Considering that the viscous damping term in the growth rate expression scales as $E^{1/2}$, the situation is similar to the situation met in experiments or in telluric planets (section 4.2), i.e. with no-slip boundaries. In this case, we have $K = \alpha (1 + \eta^4)/(1 - \eta^5)\alpha f(\eta)$, with $\alpha = O(1)$ a constant, equal to $\alpha = 2.62$ for the spinover mode of the tidal instability. This allows to define a threshold and then to plot the stability diagram shown in the figure 4.20 which summarizes the results. The equation (4.54) allows to write the stability condition $\sigma \geq 0$ equation under the form :

$$Y = \beta \left(\alpha f(\eta) \sqrt{E} \right)^{-1}. \quad (4.56)$$

$$Y = \beta \left(\alpha f(\eta) \sqrt{E} \right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{T} \right)^{-1} \geq \frac{(2 \Omega^G + 3)^2}{16 |1 + \Omega^G|^3} \quad (4.57)$$

which defines the vertical axis Y used in the figure 4.19 (see also section 4.2.4.1). As can be seen on fig. 4.20, among the 12 stars outside the forbidden zone, 8 stars are found to be unstable ($\bar{\sigma} > 0$), which are the same as in the previous model except that HD179949 is replaced by CoRoT-4.

8. In the Sun for instance, the convective zone is located above $R_{cz} \approx 0.7 R_\odot$, where R_\odot is the Sun radius.

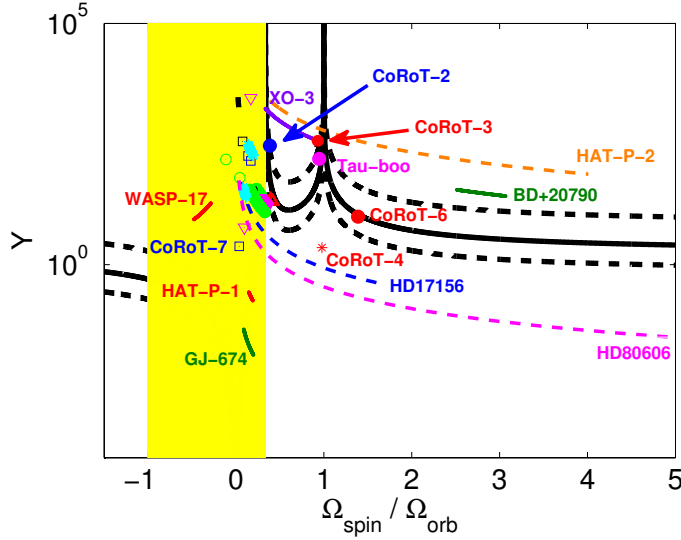


FIGURE 4.20 – *Stability diagram using a dominant surfacic dissipation as in Tassoul’s model. Considering the equation (4.57), the zone below the black line, defined with $\alpha = 2.62$, is the stable zone, whereas the black dashed lines represent $\alpha = 1$ and $\alpha = 10$. The yellow zone is the so-called ‘forbidden zone’, given by $\Omega_{spin}/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$. Among the 29 stars considered, 17 are in the forbidden zone and 8 are unstable.*

4.3.4 Results and discussions

Due to a selection bias (hot Jupiters have orbital periods less than 5-10 days and exoplanets are mainly found around low rotator stars with rotational periods more than 20 days, hence $\Omega/\Omega_{orb} \leq 1/3$), 17 stars lie in the forbidden zone : WASP-17, WASP-10, WASP-19, WASP-18, Kepler-5, TrES-3, HD41004B, CoRoT-7, GJ-674, HD189733, HAT-P-1, HD149026, TrES-2, TrES-1, CoRoT-1, HAT-P-7, WASP-14. Outside the forbidden zone, the stars found to be unstable with both dissipation models are CoRoT-6, τ Boo, CoRoT-2, CoRoT-3, XO-3, HAT-P-2. Apart these ones, HD179949, HD80606, CoRoT-4 could also be unstable (with a lower level of confidency) whereas HD17156 is probably stable. Tidal instability could be invoked to explain the misaligned spin-orbit axes of XO-3b, CoRoT-3b and HD 80606b. The misalignment of WASP-17b, CoRoT-1b, HAT-P-7b a,d WASP-14b (all included in our sample but in the forbidden zone) could be explained by an evolution of the system involving tidal instability occurring before the stellar spin-down. Finally, the short-cycled star τ Boo has been demonstrated to be among the most unstable stars of our sample : not only tides from the planet have an impact on the system’s evolution, but now we can also describe explicitly this process with a physical mechanism, the elliptical instability.

The consequences of tidal instability in hot-jupiter systems have to be deeper investigated : internal structure of stars and planets, misalignement or evolution of the stellar (and planetary) rotation axis, effects on the dynamo. The calculations have to be applied

to a larger sample of systems, where the stellar rotation period would be measured with accuracy. This work is underway, showing that a large number of stars could be unstable. A complementary aspect of this work is to study the presence of an elliptical instability inside the hot-jupiter. An observational proxy of this presence could be the radius anomaly (see Leconte *et al.*, 2010*a,b*, for details) observed for certain hot-jupiters (first results on this point in the appendix H). Finally, the presence of these elliptic instabilities should force the orbital parameters of the binary system to evolve, which could put constraints on the observation of the elliptic instability. Finally, we can wonder about the momentum conservation on this kind of binary system if an elliptic instability is excited : How is the surface of the star modified by the elliptic instability (the only one work considering this point is Ou *et al.*, 2007) ? What about the mechanical coupling by the tidal bulges between the star and the planet ? As shown in the appendix in the appendix H, the study of these issues is in progress, both with theory and numerical simulations, in collaboration with J. Leconte from the CRAL (Lyon).

4.4 Synthèse du chapitre 4 et publications

En section 4.1, un scénario alternatif est proposé pour expliquer la dynamo lunaire primitive : des impacts météoritiques successifs à l'époque du grand bombardement tardif (LHB), pourraient avoir temporairement désynchronisé la Lune, donnant naissance à un écoulement complètement turbulent excité par instabilité elliptique. Les impacts les plus violents ont pu générer un champ magnétique en surface de l'amplitude des signaux mesurés. Ce type de dynamo inertielle, proposé ici pour la Lune primitive, devrait être systématiquement considéré comme une alternative viable au modèle convectif, valide pour la Terre. Ce travail, mené en collaboration avec M. A. Wieczorek, Ö. Karatekin et M. Laneuville, a fait l'objet d'une soumission.

En section 4.2, les résultats théoriques des études précédentes sur l'instabilité elliptique ont été réévalués et étendus afin d'évaluer sa pertinence dans un contexte astrophysique. La stabilité des corps telluriques du système solaire et de trois Super-Terres (55 Cnc e, CoRoT-7b et GJ 1214b) a ainsi pu être quantifiée. La Terre primitive semble être la seule planète tellurique du système solaire instable pour la TDEI (i.e. l'instabilité elliptique avec une rotation différentielle constante entre le fluide et la déformation elliptique). Concernant la LDEI (i.e. l'instabilité elliptique avec une rotation différentielle oscillante en temps entre le fluide et la déformation elliptique), le noyau liquide de Io est *a priori* stable, contrairement à ce qui avait été proposé dans la littérature, mais Europe et les trois Super-Terres sont clairement instables. L'océan de subsurface d'Europe et le noyau de Titan sont instable, mais restent dans la gamme d'incertitude sur le seuil. Naturellement, cela n'exclut pas des situations plus instables dans le passé. Ce travail, mené en collaboration avec C. Moutou, a fait l'objet d'une soumission à *Astronomy & Astrophysics*.

Enfin, des premiers résultats sur les systèmes à Jupiters chauds sont présentés en section 4.3. Cette étude a été initialement motivée par l'étoile τ -boo, dont les renversements rapides du champ magnétique ont été attribués à des effets de marées. Les résultats montrent qu'une instabilité elliptique au sein de τ -boo peut en effet être présente, ce qui est encourageant. L'étape suivante, mené en collaboration avec J. Leconte, sera d'étudier la stabilité d'une planète de type Jupiter chaud, et les échanges de moment cinétiques entre l'étoile et la planète.

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Conclusions

Depuis sa découverte il y a une quarantaine d'années, l'instabilité elliptique s'est peu à peu imposée comme un élément important des écoulements tournants. Si son excitation par les forces de marées au sein des écoulements géo et astrophysiques a été suggérée très tôt (Malkus, 1989), sa présence dans un tel contexte soulève un certain nombre de questions. En effet, les écoulements d'échelle planétaire impliquent de nombreuses complexités susceptibles d'empêcher la croissance d'une instabilité. Ainsi, outre les particularités géométriques et cinématiques de tels écoulements, des forçages mécaniques tels que la précession ou la libration interfèrent avec le forçage de marées (chapitre 1). Par ailleurs, des ingrédients physiques supplémentaires sont à prendre en compte comme la présence d'un champ de températures et donc éventuellement d'écoulements convectifs ou la présence d'un champ magnétique externe. Ce travail théorique, numérique et expérimental apporte des éléments de réponses à ces questions, confirmant la pertinence de l'instabilité elliptique dans un contexte naturel.

L'étude de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale pose des difficultés, aussi bien d'un point de vue expérimental où des conteneurs très déformables ont dû être inventés (Lacaze, 2004), que d'un point de vue numérique où des géométries non-axisymétriques doivent être considérées. Au cours de ce travail, un modèle numérique a donc été validé, permettant les premières simulations numériques de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale (sections 2.1 et 2.2). Nous avons inclus dans ces simulations des complexités géométriques (aplatissement planétaire, présence d'une graine interne solide) et cinématiques (mouvement orbital) dont l'influence sur l'instabilité elliptique a été quantifiée. Des lois d'échelles sur l'amplitude de l'écoulement généré et sur la puissance dissipée par l'instabilité ont également été obtenues et confirmées numériquement (section 2.3). De telles lois d'échelles sont primordiales car les régimes de paramètres des écoulements naturels sont actuellement inaccessibles aux expériences et aux simulations numériques, et les résultats pourront ainsi être extrapolés.

Sur un astre parfaitement synchronisé en orbite circulaire, comme Charon en orbite autour de Pluton, le bourrelet de marée s'aligne à chaque instant sur un même méridien. Une instabilité elliptique au sein d'une couche fluide d'un tel astre n'est alors pas possible.

Cependant, pour un astre synchronisé en orbite elliptique comme notre Lune, le bourrelet de marées oscille faiblement du fait de la libration. Confirmant une prédiction purement théorique de Kerswell & Malkus (1998), nous avons montré qu'une telle libration est susceptible d'exciter une instabilité elliptique au sein d'un tel astre (section 2.4). Des formules analytiques ont été obtenues par une analyse locale de stabilité et comparées avec succès aux résultats des simulations numériques, confirmant leur pouvoir prédictif pour l'étude de stabilité des écoulements planétaires.

L'interaction des forçages de marées et de précession a également été étudiée. Pour ce faire, les analyses théoriques de Poincaré (1910) et Busse (1968) ont été étendues et comparées dans le cas d'un ellipsoïde triaxial en précession (section 2.5). Même si la configuration étudiée n'est pas directement pertinente dans un contexte géophysique, l'excellent accord avec les simulations numériques confirme la validité de ce premier pas vers l'étude complète de cette interaction. Une fois encore, l'instabilité elliptique est susceptible d'être excitée, montrant que la présence de précession n'est pas suffisante pour l'empêcher de se développer.

Un champ thermique est systématiquement présent dans les écoulements naturels, et la présence ou l'absence d'une instabilité elliptique pourrait être assujettie à son influence. Pour être légitime, l'étude de ce point doit considérer des équipotentielles gravitationnelles ellipsoïdales, ce qui est très difficile à mettre en place expérimentalement. L'outil numérique est donc indispensable dans ce cas, et nous a permis de confirmer qu'une instabilité elliptique peut se développer aussi bien sur des écoulements convectifs que sur des écoulements stratifiés stables (section 2.6). Toujours dans l'optique de l'extrapolation aux régimes géophysiques, des lois d'échelles sur le transport de chaleur par l'instabilité elliptique ont été obtenues et validés numériquement.

La magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique constituait une motivation pour ce travail. En effet, la capacité de l'instabilité elliptique à générer un champ magnétique par effet dynamo est extrêmement difficile à étudier expérimentalement, et justifie donc le recours à l'outil numérique (chapitre 3). Les premières simulations numériques de l'instabilité elliptique en géométrie ellipsoïdale sous un champ magnétique ont donc été développées, confirmant des lois d'échelles sur l'induction de l'instabilité. L'étude de la configuration dynamo a aussi été commencée, mais aucune dynamo n'a été obtenue à ce jour à partir de l'écoulement de l'instabilité elliptique. Soulignons toutefois que les écoulements considérés restent très laminaires du fait de la puissance de calcul dont nous disposons et qu'il n'est donc pas du tout exclu que de telles dynamos puissent être obtenues pour des nombres de Reynolds magnétiques plus élevés.

La partie expérimentale de ce travail est ensuite décrite, basée sur un dispositif d'étude magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique en géométrie cylindrique. En effet, une telle géométrie présente une grande richesse de comportements non-linéaires, et l'interaction des écoulements hydrodynamiques avec le champ magnétique constitue un sujet d'étude intéressant du point de vue des systèmes dynamiques. Les régimes de paramètres expérimentaux accessibles ayant été explorés et les écoulements caractérisés (section 3.6), le dispositif a ensuite été modifié afin de mettre en place une dynamo synthétique (section 3.7). L'amplitude maximale du champ magnétique pouvant être imposé étant assez grande pour restabiliser l'écoulement par dissipation Joule, ce dispositif permet d'étudier

la saturation par l'écoulement d'une telle dynamo, ce qui est particulièrement original. Des premiers résultats en ce sens ont été présentés.

Finalement, les résultats obtenus sont utilisés afin de savoir quelles sont les planètes, lunes et étoiles concernées par la présence possible de cette instabilité, et ses possibles conséquences. Le cas particulier de la Lune et de son champ magnétique est d'abord considéré en section 4.1. Même si la Lune ne génère plus de champ magnétique actuellement, les roches en surface portent la trace d'un champ magnétique passé dont l'origine reste controversée. En effet, le flux de chaleur à travers le noyau liquide lunaire semble n'avoir jamais été suffisant pour alimenter une dynamo de type convectif. Nous avons donc proposé un modèle alternatif basé sur l'instabilité elliptique : à l'époque du grand bombardement tardif, les impacts météoritiques, violents et fréquents, pourraient avoir temporairement désynchronisé la Lune, excitant dans son noyau liquide une instabilité elliptique générant une dynamo. Ainsi, sous l'hypothèse d'un écoulement capable d'exciter une dynamo, un tel scénario est évalué et comparé aux données disponibles. Combinant nos résultats, nous montrons qu'un tel mécanisme est capable de générer des champs magnétiques en surface de quelques μT sur quelques dizaines de milliers d'années, en accord avec les mesures paléomagnétiques.

À partir d'une analyse de stabilité généralisée, une étude plus générique sur les astres telluriques, plus proches de nos études théoriques, expérimentales et numériques, a ensuite été menée en section 4.2, aboutissant au résultat suivant : l'instabilité elliptique doit être prise en compte dans l'étude du noyau liquide de la Terre primitive, de Europe et des Super-Terres extra-solaires en orbite rapprochée autour de leur étoile, et, de manière moins probable, au sein de l'océan de subsurface de Europe. Nous avons également montré que l'instabilité elliptique pourrait expliquer une part importante (jusqu'à 100 %) de la composante axiale du champ magnétique induit d'Europe. Notons que le noyau liquide de Io est, en revanche, probablement stable, contrairement à ce qui avait été suggéré dans la littérature (Kerswell & Malkus, 1998).

Enfin, la section 4.3 s'inscrit dans un contexte astrophysique en considérant la stabilité des systèmes extra-solaires à Jupiters chauds. Parmi la trentaine d'étoiles extra-solaires considérées, un grand nombre se trouve dans une zone de paramètres où l'instabilité elliptique ne peut pas se développer, et ce quel que soit les forces de marées en jeu, mais 6 d'entre elles sont probablement sujettes à l'instabilité, à savoir CoRoT-6, Tau-Boo, CoRoT-2, CoRoT-3, XO-3 et HAT-P-2. Ces résultats sont encourageants car des indices observationnels de la présence de l'instabilité pourraient être obtenus sur ces systèmes. Ainsi, le champ magnétique de Tau-boo s'est renversé deux fois en deux ans, ce qui a été attribué aux effets de marées du jupiter chaud Tau Boo-b en orbite rapprochée, sans toutefois que le mécanisme sous-jacent soit explicité.

5.2 Perspectives

D'un point de vue de mécanique des fluides, l'étude des instabilités secondaires de l'instabilité elliptique, initiée par Mason & Kerswell (1999) en géométrie cylindrique, est à poursuivre en géométrie ellipsoïdale. En effet, de telles instabilités sont inévitables dans les régimes de paramètres des écoulements planétaires. De plus, l'étude magnétohydro-

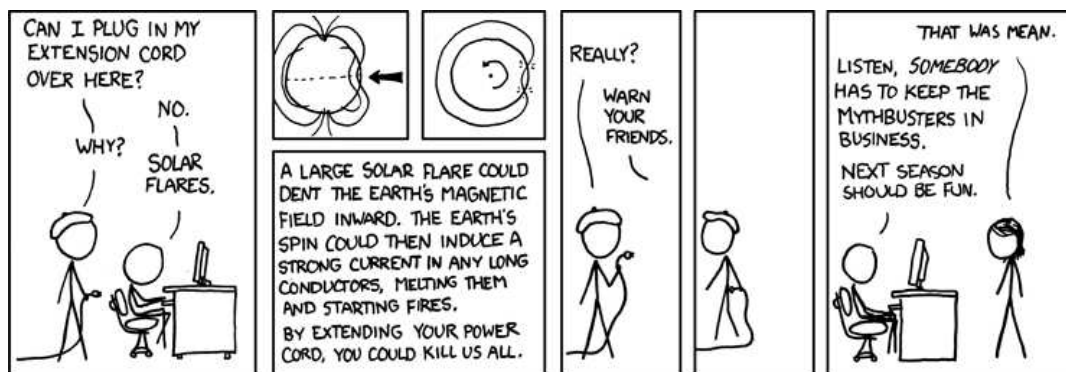
dynamique expérimentale menée dans ce travail semble indiquer que de telles instabilités diminuent la vigueur de l'écoulement généré par l'instabilité elliptique, ce qui reste à confirmer et à analyser (Herreman *et al.*, 2010). Toujours d'un point de vue hydrodynamique, un ingrédient important des écoulements naturels, en particulier pour les étoiles, est la compressibilité du fluide. L'étude de l'instabilité elliptique au sein d'un fluide compressible, déjà initiée par Ou *et al.* (2007), est à poursuivre en présence de forces de marées, et des simulations numériques sous l'approximation anélastique sont en cours de développement. En effet, même si Ou *et al.* (2007) ont montré que l'instabilité elliptique n'est alors pas inhibée, son développement et sa saturation dans un tel contexte devraient être perturbés par le travail que nécessite le brassage d'un fluide stratifié fortement compressible. Enfin, nous avons tout juste initié l'étude des interactions entre les différentes instabilités excitées par les forçages mécaniques de marées, précession et libration. Ainsi, il reste à caractériser la compétition entre instabilité elliptique, instabilité de précession (visqueuse ou inertielle), instabilité centrifuge et instabilité des couches d'Ekman en géométrie ellipsoïdale car elles sont toutes susceptibles de se développer au sein des noyaux liquides planétaires.

D'un point de vue astrophysique, le travail mené en collaboration avec C. Moutou et J. Leconte se poursuit afin d'obtenir des preuves observationnelles de la présence de l'instabilité elliptique au sein des systèmes extra-solaires. Cette recherche tourne essentiellement autour de trois axes. Tout d'abord, la présence de l'instabilité elliptique au sein de l'étoile devrait modifier son axe apparent de rotation, donc son angle spin-orbite, ainsi que son champ magnétique, ce qui devrait être statistiquement visible dans les mesures lorsque le nombre de systèmes analysés sera assez grand. Par ailleurs, une instabilité elliptique peut probablement se développer au sein de la planète de type jupiter chaud, menant à une dissipation en volume accrue qui pourrait expliquer les anomalies de rayons observées. Des premiers résultats sur ce point montrent en effet une certaine corrélation entre l'anomalie de rayon et l'effet de marées. Enfin, cette dissipation interne et la conservation du moment angulaire du système implique que la croissance de l'instabilité elliptique se répercute probablement par une évolution rapide des paramètres orbitaux du système. Une telle évolution à travers le couplage gravitationnel ou magnétique reste à caractériser et à comparer aux données disponibles. Pour ce faire, des simulations numériques avec glissement au lieu d'une adhérence à la paroi ont été développées et leur exploitation est en cours. De ce point de vue, l'extension de ces simulations au cas d'une paroi se déformant sous l'effet des contraintes fluides, entre autre dues à l'instabilité, est en cours d'étude. De telles simulations permettraient d'étudier le développement de l'instabilité elliptique en présence d'une surface libre, ce qui pourrait donner lieu à une saturation non-linéaire de l'instabilité par déformation des parois.

D'un point de vue géophysique, un travail mené de concert avec A. Sauret nous a amené à collaborer avec N. Rambaux afin de quantifier l'influence des forçages de marées, précession et libration et des instabilités associées et de les comparer aux mesures. Ainsi, des mesures de libration d'une précision de quelques mètres devraient être disponibles prochainement avec les missions vers Europe et Ganymède de la sonde NASA/ESA EJSM. Il sera alors possible de contraindre les intérieurs de ces satellites galiléens en comparant les mesures aux prédictions de modèles théoriques de librations. Cependant, les précisions

en jeu sont telles que la prise en compte des efforts fluides au sein des éventuels noyaux liquides et des océans de subsurface doit être modélisée le plus précisément possible. Par ailleurs, les modèles de mutation tels que les célèbres modèle SOS (Sasao *et al.*, 1980) ou MHB (Mathews *et al.*, 2002) utilisent des constantes de couplage entre le manteau et le noyau qui rendent correctement compte des mesures mais qui restent difficiles à contraindre et expliciter d'un point de vue physique. Des travaux récents d'inversion des données (Koot *et al.*, 2010; Koot & de Viron, 2011; Koot & Dumberry, 2011) ont obtenu des valeurs précises de ces constantes, ce qui motive des comparaisons entre ces valeurs et ce qui peut être prédit à partir de lois d'échelles.

Enfin, l'étude magnétohydrodynamique de l'instabilité elliptique se poursuit, notamment sur le problème dynamo. D'un point de vue expérimental, l'acquisition d'une alimentation bipolaire devrait permettre d'étudier des régimes de dynamos synthétiques avec des renversements de polarité, et de continuer le travail commencé avec G. Verhille. D'un point de vue numérique, le code utilisé, COMSOL, devant être bientôt complètement parallèle, la puissance de calcul accrue devrait permettre d'explorer de nouveaux espaces de paramètres. Un autre axe d'étude est celui de l'induction mutuelle de deux instabilités elliptiques se développant au sein de deux couches fluides conductrices distinctes telles que le noyau liquide de Ganymède et son océan salé de subsurface. Outre l'étude des cycles dynamiques d'un tel système couplé, il est possible d'imaginer que ce type de système pourrait être favorable à l'excitation d'une dynamo, selon un processus similaire à celui qui contrôle la dynamo de Rikitake.



Courtesy of <http://xkcd.com>

Annexes

Annexe A

Liste des publications

Articles publiés

1. D. Cébron, M. Le Bars, J. Leontini, P. Maubert, P. Le Gal, 2010. A systematic numerical study of the tidal instability in a rotating triaxial ellipsoid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, vol. 182, pp. 119-128.
2. W. Herreman, D. Cébron, S. Le Dizès, P. Le Gal, 2010. Elliptical instability in rotating cylinders : liquid metal experiments under imposed magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 661, pp. 130-158.
3. D. Cébron, P. Maubert, M. Le Bars, 2010. Tidal instability in a rotating and differentially heated ellipsoidal shell. *Geophys. J. Int.*, vol. 182, pp. 1311-1318.
4. D. Cébron, M. Le Bars, P. Meunier, 2010. Tilt-over mode in a precessing triaxial ellipsoid. *Physics of Fluids*, vol. 22, 116601.
5. A. Sauret, D. Cébron, C. Morize, M. Le Bars, 2010. Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 662, pp. 260-268.

Articles soumis

1. D. Cébron, M. Le Bars, C. Moutou, P. Le Gal, 2011. Elliptical instability in terrestrial planets & moons. Submitted in *Astronomy and Astrophysics*.
2. J. Noir, D. Cébron, M. Le Bars, J. M. Aurnou, 2011. Experimental investigation of the flow driven by forced longitudinal libration in non-axisymmetric containers. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. In revision.
3. D. Cébron, P. Maubert, M. Le Bars, P. Le Gal, 2011. Tides induced magnetic field & Tides driven dynamos. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. In revision.
4. M. Le Bars, M. A. Wicczorek, Ö. Karatekin, D. Cébron and M. Laneuville, 2011. An impact driven dynamo for the early moon. *Nature*. Accepted.
5. A. Sauret, D. Cébron, M. Le Bars, S. Le Dizès, 2011. Fluid flows in a librating cylinder. Submitted in *Physics of Fluids*.

Actes de conférences publiés

1. D. Cébron, C. Moutou, M. Le Bars, P. Le Gal, R. Farès, 2011. Tidal instability in systems' evolution. *Detection and dynamics of transiting exoplanets* in European Physical Journal Conferences, vol. 11.
2. D. Cébron, W. Herreman, M. Le Bars, S. Le Dizès, P. Le Gal, P. Maubert, 2009. Instabilités Magnéto-Inertielles. *12^{ème} Rencontre du Non Linéaire* (Eds. C. Josserand, M. Lefranc, C. Letellier), Non-Linéaire Publications, Paris, 41-46.

Annexe B

Lexique : notions géophysiques

Alignement spin-orbite (des Jupiters chauds) : les mesures menées sur les Jupiters chauds indiquent que l'angle entre l'axe de rotation de l'étoile parente du Jupiter chaud et la normale au plan orbital du Jupiter chaud (projeté sur le ciel) est non-nul dans un grand nombre de cas (dans un tiers des cas environ). L'origine de ce non-alignement n'est pas encore bien compris.

Anomalie de rayon (des Jupiters chauds) : à partir d'un modèle d'intérieur planétaire, des lois d'état associées, et d'un modèle de source de chaleur, il est possible de calculer le rayon de cette planète modèle théorique, et de le comparer à la mesure du rayon de la planète modélisée. Si ce type de calcul est généralement en bon accord avec les mesures, une part significative de Jupiter chauds montre un écart entre les mesures de rayon et les prédictions théoriques. Cette anomalie de rayon ne pouvant s'expliquer avec l'incertitude des mesures et des modèles d'intérieur, elle est donc attribuée au modèle des sources de chaleur (voir aussi section H.2) : l'irradiation de l'étoile proche, seule source de chaleur habituellement considérée, ne permet pas de retrouver les rayons de ces Jupiters chauds et un mécanisme dissipatif significatif a donc été oublié. Différentes hypothèses sont actuellement en cours d'étude : le chauffage associé à la marée (initialement proposé par Bodenheimer *et al.*, 2001), la dissipation associée aux forts vents de surface (proposée par Showman & Guillot, 2002; Guillot & Showman, 2002), la présence de convection au sein d'une couche interne (Chabrier & Baraffe, 2007), etc.

Jupiter chauds : les Jupiter chauds (ou *Pégasides* du nom de la première planète de ce type, découverte autour de 51 Pegasi) sont des exoplanètes souvent plus massives que Jupiter, orbitant très proche de leur étoile.

LDEI (pour *Libration Driven Elliptical Instability*) : instabilité elliptique excitée par une rotation différentielle oscillante (en temps) entre le fluide et la déformation elliptique des lignes de courant. Cette forme d'instabilité elliptique a été prédite pour la première fois par Kerswell & Malkus (1998) à l'aide d'une analyse de stabilité qui a été confirmée ultérieurement par une analyse WKB (Herreman *et al.*, 2009). Un travail conjoint a permis de confirmer son existence et d'étudier certaines de ses particularités, de façon expérimentale par J. Noir et J.A. Aurnou, et de façon numérique dans le cadre de cette thèse

(section 2.4). Dans un contexte géophysique, elle est susceptible d'être excitée au sein des couches fluides des astres synchronisés déformés par effet de marées (voir le chapitre 4 pour les applications géophysiques et sa différence avec la TDEI).

Nombres de Love : dans le cadre de la théorie perturbative introduite par Love (1909, 1911), les harmoniques sphériques d'ordre n des perturbations en déplacement et en potentiel gravitationnel liées à un forçage externe sont proportionnelles à l'harmonique sphérique W_n , d'ordre n , du forçage (e.g. Melchior, 1983, pour plus de détails). Ainsi, sur la base des harmoniques sphériques, le déplacement radial u_r dû au forçage s'écrit

$$u_r = \sum_{n=2}^{\infty} h_n(r) W_n(r, \phi, \theta) / g \quad (\text{B.1})$$

où $h_n(r)$ est appelé le nombre de Love en déplacement radial d'ordre n . De même, le déplacement tangentiel admet une décomposition similaire (basée sur le gradient des harmoniques sphériques), et le facteur multiplicatif $l_n(r)$ est appelé nombre de Love-Shida en déplacement tangentiel d'ordre n (introduit pour la première fois par Shida & Matsuyama, 1912). Enfin, ces déplacements modifient le potentiel gravitationnel, qui, décomposé de la même façon, donne un dernier facteur multiplicatif, $k_n(r)$, appelé nombre de Love en potentiel d'ordre n . Notons que la valeur en surface de ces nombres de Love est souvent également appelée nombre de Love, et qu'usuellement, le forçage considéré est le potentiel de marée, fréquemment tronqué à l'ordre 2. Même si les nombres de Love peuvent être obtenus analytiquement dans quelques cas simples (e.g. Greff-Lefftz *et al.*, 2005, pour une sphère élastique incompressible homogène), un calcul numérique est généralement requis pour les déterminer¹. Notons enfin que du fait de la généralité de leur définition, il est également possible de trouver des nombres de Love associé à des forçages différents tel que, par exemple, la relaxation post-glaciaire (e.g. Spada, 2008; Greff-Lefftz *et al.*, 2010; Spada *et al.*, 2011).

Résonances spin-orbite : en ralentissant progressivement sous les effets de marées, les astres passent par des états intermédiaires stables (sous certaines conditions) correspondant à des valeurs rationnelles simples du rapport de la période rotation propre sur la période orbitale. Ces rapports, liés à un phénomène de résonance, sont notés $p : q$ ou p/q , ce qui signifie que l'astre tourne p fois sur lui-même lorsqu'il fait q révolutions orbitales. Typiquement, Mercure est en résonance spin-orbite 3 : 2, tandis que la Lune actuelle est en résonance 1 : 1 (rotation synchrone).

TDEI (pour *Tides Driven Elliptical Instability*) : instabilité elliptique excitée par une rotation différentielle constante entre le fluide et la déformation elliptiques des lignes de courant. Il s'agit de l'instabilité elliptique usuelle, au sens historique, telle qu'elle a été étudiée dans les années 70 (voir section 1.1.1). Dans un contexte géophysique, elle est susceptible d'être excitée au sein des couches fluides des astres non-synchronisés déformés par effet de marées : la déformation des lignes de courant, liée à la force de marées, tourne à la vitesse orbitale, différente de la vitesse de rotation propre de l'astre considéré (voir

1. Pour une sphère parfaitement rigide, on a naturellement $h_n = k_n = l_n = 0$.

le chapitre 4 pour les applications géophysiques et sa différence avec la LDEI). Hormis la section 2.4 qui traite de la LDEI, l'ensemble du chapitre 2 étudie l'écoulement associé à la TDEI.

Annexe C

Instabilité de l'axe médian et spin-over

C.1 Analogie, équations

Le mode de spin-over est un mode inertiel particulier qui peut être forcé par précession ou excité par l'instabilité elliptique (voir section 1.4.2). En-dehors des couches limites, ce mode correspond à une rotation solide, décrit par son vecteur rotation $\mathbf{\Omega}$. Les équations régissant un tel écoulement ont été données par Hough (1895) et Poincaré (1910) dans le cas non-visqueux, pour une géométrie sphéroïdale. Plus récemment, cette étude a été poursuivie par Gledzer & Ponomarev (1978) et Biello *et al.* (2000). En fait, comme l'ont remarqué Lacaze *et al.* (2006), le mécanisme d'excitation du mode de spin-over par l'instabilité elliptique n'est rien d'autre que l'instabilité d'un solide en rotation autour de son axe médian. De façon plus quantitative, on peut montrer que le problème non-visqueux et non-linéaire de la rotation en bloc d'un fluide dans le référentiel du laboratoire est complètement équivalent au problème de la rotation d'un solide dans le référentiel tournant. En effet, dans les deux cas, les équations du mouvement sont les mêmes, et elles sont d'ailleurs appelées *équations d'Euler* en mécanique des fluides comme en mécanique des solides. Ainsi, avec l'écoulement de base (1.24) au sein d'un ellipsoïde d'axes (a, b, c) fixe dans le référentiel du laboratoire, les équations d'Euler pour la vorticité sont formellement les mêmes que celles qui régissent le vecteur rotation d'un solide, écrites dans le référentiel tournant lié aux axes des moments principaux d'inertie (voir encart de la section 1.2.1) :

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 = -\frac{c^2 - b^2}{b^2 + c^2} \Omega_2 \Omega_3 \quad (\text{C.1})$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 = -\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \Omega_1 \Omega_3 \quad (\text{C.2})$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 = -\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \Omega_1 \Omega_2 \quad (\text{C.3})$$

où (I_1, I_2, I_3) sont les moments d'inertie principaux du solide. Dans le cas où le solide en rotation est un ellipsoïde de masse M et d'axes (a, b, c) , on a $(I_1, I_2, I_3) = (b^2 + c^2, c^2 + a^2, b^2 + a^2) M/5$, et les équations sont alors exactement les mêmes. Le système d'équations

considérées en section 2.3.4 est obtenu sous l'hypothèse de faibles déformations. Notons que ces équations peuvent être généralisées dans le cas fluide à la prise en compte d'une rotation de la déformation selon \mathbf{e}_3 (voir aussi section 2.3.2) :

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{c^2 - b^2}{b^2 + c^2} \Omega_2 \Omega_3 + 2 ab \Omega^* \Omega_2 \quad (\text{C.4})$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \Omega_1 \Omega_3 - 2 ab \Omega^* \Omega_1 \quad (\text{C.5})$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \Omega_1 \Omega_2, \quad (\text{C.6})$$

voire à des écoulements de base plus compliqués (voir annexe D).

C.2 Instabilité de l'axe médian

Considérant un solide quelconque de moments d'inertie principaux (I_1, I_2, I_3) avec $I_2 > I_1 > I_3$ en rotation, son vecteur rotation est gouverné de façon générale par :

$$\dot{\Omega}_1 = -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 + N_1 \quad (\text{C.7})$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 + N_2 \quad (\text{C.8})$$

$$\dot{\Omega}_3 = -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 + N_3 \quad (\text{C.9})$$

où \mathbf{N} représente la résultante des couples extérieurs s'exerçant sur le solide, aussi appelé *toupie* dans ce contexte. L'étude des mouvements de toupies est classique, et on peut montrer que le système d'équations est intégrable dans trois cas, et trois seulement¹ : les toupies d'Euler, de Lagrange² et de Kovalevskaya. En l'absence de tout couple externe ($\mathbf{N} = \mathbf{0}$), les équations ci-dessus sont réduites aux équations (C.1), (C.2) et (C.3). Le moment angulaire est alors conservé et le système est intégrable : c'est la *toupie d'Euler*. La solution du système d'équations (C.1), (C.2), (C.3) s'exprime alors en termes de fonction elliptiques de Jacobi. Plutôt que de mener la résolution complète et explicite du problème, nous nous contentons ci-dessous d'étudier la stabilité de la rotation autour des moments d'inertie principaux de la toupie.

La stabilité de la rotation autour de chaque axe peut être étudiée en fixant une valeur Ω non-nulle à la rotation autour de cet axe, et en la perturbant par une rotation petite $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Ainsi, la stabilité de la rotation $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (\Omega, 0, 0)$ est régie par le système

1. En plus de l'énergie, chacune de ces trois toupies admettent une quantité qui se conserve au cours du mouvement (une intégrale première), ce qui en fait des systèmes intégrables au sens de Liouville.

2. La toupie de Lagrange est la toupie usuelle, en rotation sur un plan, soumise à son poids.

d'équations :

$$\dot{\Omega}_1 = \underbrace{\frac{I_2 - I_3}{I_1}}_{\alpha_1 > 0} \omega_2 \omega_3 \approx 0 \quad (\text{C.10})$$

$$\dot{\Omega}_2 = \underbrace{\frac{I_3 - I_1}{I_2}}_{\alpha_2 < 0} (\Omega + \omega_1) \omega_3 \approx \Omega \omega_3 \quad (\text{C.11})$$

$$\dot{\Omega}_3 = \underbrace{\frac{I_1 - I_2}{I_3}}_{\alpha_3 < 0} (\Omega + \omega_1) \omega_2 \approx \Omega \omega_2. \quad (\text{C.12})$$

Le taux de croissance de la perturbation est donné par le déterminant du système d'équations (C.11), (C.12) :

$$\sigma = \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} = \sqrt{\frac{I_3 - I_1}{I_2} \frac{I_1 - I_2}{I_3}} > 0, \quad (\text{C.13})$$

ce qui montre que cette rotation est instable : c'est l'instabilité de l'axe médian³. La même analyse montre que les rotations autour des deux autres axes sont stables : $\sigma = \pm i \sqrt{|\alpha_1 \alpha_3|}$ pour une rotation $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (0, \Omega, 0)$, et $\sigma = \pm i \sqrt{|\alpha_1 \alpha_2|}$ pour une rotation $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (0, 0, \Omega)$. Notons que dans le cas d'une toupie de révolution ($I_1 = I_2 = A$), l'étude de stabilité montre que seule la rotation $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = (0, 0, \Omega)$ donne un taux de croissance non-nul, égal à $\sigma = \pm i \frac{|I_3 - I_1|}{I_1}$. Cela montre qu'avec une rotation initiale quelconque, la toupie précède à une période $T_p = 2\pi / [\Omega(I_3/A - 1)]$ indépendante de Ω_1 et Ω_2 , donc de l'angle initial. Il est important de se souvenir que l'étude est menée dans le référentiel en rotation, et cette précession est donc un mouvement apparent dans le repère mobile : on parle de *précession Eulerienne*⁴ ou de *polhodie Eulerienne*.

Pour la Terre par exemple, la vitesse angulaire de rotation est d'environ un tour par jour, et l'aplatissement polaire donne $I_3/A - 1 \approx 1/298$, ce qui donne donc une période de précession Eulerienne de 298 jours. On observe effectivement que l'axe instantané de rotation de la Terre fait un angle d'environ 0.3" d'arc avec son axe principal d'inertie. Ainsi, en se plaçant au pôle (moyen), l'axe de rotation instantané se situe à une distance d'environ 10m et on s'attend à le voir tourner autour du pôle avec une période d'environ 298 jours. Le mouvement observé est plus complexe, mais comprend effectivement un terme périodique, qu'on appelle *oscillation de Chandler*, d'une période d'environ 433 jours. L'écart avec les 298 jours n'a été expliqué quantitativement que récemment, par la prise en compte des déformations de la Terre sur ces périodes de temps, des redistributions de masses atmosphérique et océanique, ainsi que des couples extérieurs exercés.

Cette instabilité est naturellement retrouvée pour un cylindre de rayon R , hauteur $2h$ et de masse M , en rotation autour de son axe de révolution. Si la section droite du

3. Ce résultat de stabilité est aussi appelé *The Tennis Racket Theorem* par les anglophones car cette instabilité se manifeste alors clairement.

4. À ne pas confondre avec la précession des équinoxes, observée dans un référentiel inertiel, qui est l'analogie de la précession de la toupie de Lagrange.

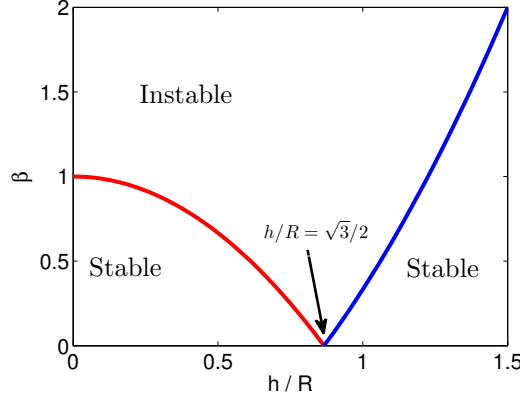


FIGURE C.1 – Diagramme de stabilité pour l'instabilité de l'axe médian d'un cylindre de hauteur $2h$, et de section droite elliptique de grand (resp. petit) axe égal à $R\sqrt{1+\beta}$ (resp. $R\sqrt{1-\beta}$). La courbe rouge décroissante de gauche (resp. bleue croissante de droite) est donnée par le membre de gauche (resp. de droite) de la condition de stabilité (C.17). Pour $h/R = \sqrt{3}/2$, toute déformation elliptique de la section droite mène à l'instabilité.

cylindre est elliptique, de sorte que son grand (resp. petit) axe soit égal à $R\sqrt{1+\beta}$ (resp. $R\sqrt{1-\beta}$), ses moments d'inertie principaux sont donnés par :

$$I_1 = \frac{M R^2}{2} \quad (\text{C.14})$$

$$I_2 = (1+\beta) \frac{M R^2}{4} + \frac{M h^2}{3} \quad (\text{C.15})$$

$$I_3 = (1-\beta) \frac{M R^2}{4} + \frac{M h^2}{3}. \quad (\text{C.16})$$

Dans le cas où $I_2 > I_1 > I_3$, i.e. pour des géométries vérifiant

$$\frac{1+\beta}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{R}\right)^2 > 1 > \frac{1-\beta}{2} + \frac{2}{3} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad (\text{C.17})$$

la rotation autour de l'axe x_1 est instable. Comme le montre la figure C.1, il existe un rapport d'aspect h/R pour lequel une déformation infinitésimale de la section droite du cylindre est instable : $h/R = \sqrt{3}/2$. Dans ce cas, si l'on superpose des cylindres de cette géométrie axialement, la longueur d'onde associée à l'instabilité vaut $\lambda = 4h = 2\sqrt{3} R$, ce qui donne un nombre d'onde $k = \pi/\sqrt{3} \approx 1.81$, à comparer avec le nombre d'onde minimum $k_{min} = 1.58$ du mode de spin-over fluide en géométrie cylindrique (Eloy, 2000, p.127). Le taux de croissance est alors $\sigma = \beta/\sqrt{4-\beta^2}$, de même que dans le cas d'un ellipsoïde faiblement déformé, d'axes $R(1, \sqrt{1+\beta}, \sqrt{1-\beta})$, en rotation autour de x_1 .

Annexe D

Stabilité du mode de spinover en présence de précession

Naing & Fukumoto (2009) ont récemment étudié la stabilité d'un fluide tournant (non-confiné) avec des lignes de courant elliptiques dans le cas particulier d'une précession à 90° . La méthode WKB leur permet de quantifier à la fois l'influence de cette précession particulière sur l'instabilité elliptique, et l'influence du cisaillement elliptique sur l'instabilité inertielle de précession¹. Dans cette section est menée l'analyse (non-visqueuse) de stabilité de l'écoulement de Poincaré dans une ellipsoïde triaxial pour de petites rotations perturbatives. Dans ce cas, les perturbations étant linéaires en variables d'espace (ce qui correspond donc au spinover), le taux de croissance théorique peut être obtenu avec la même méthode que Gledzer & Ponomarev (1992)², mais en utilisant l'écoulement de base plus général \mathbf{U} obtenu en section 2.5.1.1 (avec une valeur arbitraire pour ω_3). Comme le rappelle Kerswell (2002), l'écoulement perturbatif le plus général linéaire en coordonnées d'espace $(x_i)_{i \in [1,3]}$, solution de $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, est

$$u_i - U_i = K_{i+1}(t) \frac{a_i}{a_{i-1}} x_{i-1} - K_{i-1}(t) \frac{a_i}{a_{i+1}} x_{i+1} \quad (\text{D.1})$$

avec l'indice i permutant sur $[1, 3]$, et où les amplitudes scalaires K_i de ces petites rotations perturbatives non-visqueuses peuvent s'écrire $K_i = \varepsilon k_i e^{\sigma t}$. L'écoulement total \mathbf{u} vérifiant l'équation de vorticité non-visqueuse et \mathbf{U} étant solution à l'ordre 0, la solution au premier ordre en ε est solution de

$$M \mathbf{k} = 0 \quad (\text{D.2})$$

où $\mathbf{k} = (k_i)_{i \in (1,2,3)}$ et M est une matrice 3×3 donnée par

$$M = \begin{bmatrix} A_{12} & -A_{21} & -B_{12} \sigma \\ C_1 & B_{13} \sigma & D_{12} \\ -B_{23} \sigma & C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

1. Naing & Fukumoto (2009) l'appellent instabilité de Coriolis ou instabilité pr cessionnelle.
2. Méthode reprise par Kerswell (1993b) pour étudier l'instabilité de cisaillement.

où

$$\begin{aligned} A_{ij} &= 2 \Omega_{p,j} \frac{a_3 \gamma_i}{a_j \gamma_j}, \\ B_{ij} &= \frac{a_i^2 + a_j^2}{a_i a_j}, \\ C_i &= \frac{\gamma_i}{a_3 a_i}, \\ D_{ij} &= -4 \frac{\Omega_{p,i} \Omega_{p,3} a_j^2}{\gamma_i}. \end{aligned}$$

L'écoulement solution au premier ordre est non-nul si $\det(M) = 0$, et le taux de croissance σ est alors donné par la résolution de cette équation. En fait, l'équation du 3^{ème} degré $\det(M) = 0$ se réduit à la forme simple $\sigma^3 + p \sigma = 0$, et le taux de croissance vaut donc

$$\sigma = \sqrt{-p} = \sqrt{\frac{A_{12}B_{13}D_{21} + A_{21}B_{23}D_{12} - C_1C_2B_{12}}{B_{13}B_{23}B_{12}}} \quad (\text{D.4})$$

Notons que l'écoulement de base adimensionnel de Gledzer & Ponomarev (1992) est retrouvé pour la valeur particulière $\omega_3 = \beta_{12}$. Notons aussi que l'on retrouve bien le taux de croissance donné en section 2.3.2, extension du résultat de Gledzer & Ponomarev (1992) au cas particulier d'une déformation tournant à $\Omega_p = (0, 0, \Omega_{br})$:

$$\sigma = \sqrt{-\frac{C_1C_2}{B_{13}B_{23}}} = \sqrt{-\frac{(a_1^2 - a_3^2 + 2a_1a_2\Omega_{br})(a_2^2 - a_3^2 + 2a_1a_2\Omega_{br})}{(a_1^2 + a_3^2)(a_2^2 + a_3^2)}}. \quad (\text{D.5})$$

On peut enfin remarquer que cette méthode donne le taux de croissance non-visqueux, qui doit être corrigé par un terme d'amortissement visqueux surfacique usuel du type $\alpha\sqrt{E}$ (Kudlick, 1966; Hollerbach & Kerswell, 1995), où α est une constante $\alpha \sim 2.62$. Le seuil de l'instabilité est alors donné explicitement par

$$E_c = \frac{1}{\alpha^2} \frac{A_{12}B_{13}D_{21} + A_{21}B_{23}D_{12} - C_1C_2B_{12}}{B_{13}B_{23}B_{12}} \quad (\text{D.6})$$

Pour le cas considéré en figure 2.25, i.e. $\theta = 10^\circ$, $a_3 = (a_1 + a_2)/2$, $\theta_2 = 0$ et $\epsilon = 0.317$, la théorie prédit un nombre d'Ekman critique de l'instabilité autour de $E_c \approx 1/300$, et pour $E = 1/600$, la bande instable du spinover est prédite pour $\Omega_p \in [-0.13; 0.12]$.

Annexe E

Stabilité des astres telluriques

E.1 Stability of non-synchronized systems

Solving (4.30), we find the trajectories :

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} \sqrt{1+\beta} \cos(t\sqrt{1-\beta^2}) \\ \sqrt{1-\beta} \sin(t\sqrt{1-\beta^2}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

where without loss of generality, the origin of time has been defined such that the initial position along the trajectory is $\mathbf{x}_{(t=0)} = [x_1, x_2] = [r \sqrt{1+\beta}, 0]$ (the results of the WKB analysis do not depend on this chosen initial position).

The solution to equation (4.36) at order 1 in β along a streamline (E.1) writes

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{x_1} \\ k_{x_2} \\ k_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x_{1o}} \cos t - k_{x_{2o}} \sin t + \beta k_{x_{2o}} \sin t \\ k_{x_{1o}} \sin t + k_{x_{2o}} \cos t + \beta k_{x_{1o}} \sin t \\ k_0 \cos a \end{bmatrix} \quad (\text{E.2})$$

where $k_{x_{1o}}$, $k_{x_{2o}}$ and k_0 are constant and a is the angle between the wave vector and the rotation axis. We define the phase ϕ of the wave vector by writing $k_{x_{1o}} = k_0 \sin a \cos \phi$, $k_{x_{2o}} = k_0 \sin a \sin \phi$.

We are now in a position to solve the system of linearized equations given in section 4.2.3.3. To do so, we use as unknowns the vertical velocity of the perturbed field u_3 and its vertical vorticity $W_3 = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 = i(k_{x_1} u_2 - k_{x_2} u_1)$, as well as the vertical component b_3 of the perturbed magnetic field and the corresponding magnetic vertical vorticity $C_3 = i(k_{x_1} b_2 - k_{x_2} b_1)$. The resolution is then straightforward (see Herreman *et al.*, 2009).

At order 0, the system reduces to an harmonic equation for u_3 , giving a dispersion relation with a pulsation $f = 2(1 + \Omega^G) \cos a$, with the quantity $\Omega^G = \Omega_{orb}/(\Omega_{spin} - \Omega_{orb})$ already used by Kerswell (2002); Le Bars *et al.* (2010). Solvability conditions imply non-trivial solutions only if $f = 1$, which gives the resonance condition $\cos a = 1/(2(1 + \Omega^G)) \in [-1, 1]$. This means that the instability cannot grow when $\Omega/\Omega_{orb} \in [-1; 1/3]$, which is the so-called forbidden zone. Outside this band, the growth rate is determined by the nullity of the determinant of the solvability conditions system. It is then maximized over

all values of wave vector phase ϕ . The maximum is obtained for $\phi = \pi/4$ and the inviscid growth rate writes :

$$\sigma = \frac{(2\Omega^G + 3)^2}{16 |1 + \Omega^G|^3} \sqrt{\beta^2 - \frac{4 \left[(k^4 + Rm^2) \tilde{R}a r \partial_r \theta - 2 k^2 Rm \Lambda (1 + k^4 E^2/Pr^2) \right]^2}{(2\Omega^G + 3)^4 (1 + k^4 E^2/Pr^2)^2 (k^4 + Rm^2)^2}} - \frac{\Lambda}{4 |1 + \Omega^G|^3 (1 + Rm^2 k^{-4})} - \frac{k^2 \tilde{R}a r \partial_r \theta}{8 (1 + k^4 E^2/Pr^2) |1 + \Omega^G|^3}, \quad (\text{E.3})$$

where r and $\partial_r \Theta$ are respectively the radius and the dimensionless temperature base field radial gradient of the considered streamline. In absence of viscous boundary damping (discussed in section 4.2.3.6), the inviscid growth rate is a correct approximation of the viscous growth rate when the viscous diffusion term $-k^2 E$ in the equation (4.33) is negligible, i.e. for perturbations of wavelength larger than the Ekman thickness \sqrt{E} . The equation (E.3) takes into account the thermal and magnetic diffusions. However, in a typical liquid core, the thermal Prandtl number is about $O(0.1 - 1)$ and the magnetic Prandtl number is about $Pm \approx 10^{-6}$ (e.g. Christensen & Aubert, 2006). Then, in these ranges of values, neglecting the viscous diffusion term leads also to neglect the thermal diffusion term $-k^2 E/Pr$ of equation (4.33), but not the magnetic diffusion term $-k^2/Rm = -k^2 E/Pm$ of equation (4.35) which is $\sim 10^6$ larger. In this case, equation (E.3) gives equation (4.38) in the limit of large wavenumbers.

E.2 Stability of synchronized systems

We consider that the differential rotation between the fluid and the elliptical distortion writes $1 - \gamma(t) = \epsilon \cos(\omega_o t + q)$. Note that the phase q is introduced here because we define the origin of time such that the initial position of the considered trajectory is $x_2 = 0$. Equation (4.30) can be solved analytically to find the trajectories. In the particular case $q = 0$, the solution can be written in the following compact form :

$$\mathbf{x} = s_g r \begin{bmatrix} \sqrt{1 + \beta} \cos \left(\frac{\epsilon}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \sqrt{1 - \beta^2} \right) \\ \sqrt{1 - \beta} \sin \left(\frac{\epsilon}{\omega_o} \sin(\omega_o t) \sqrt{1 - \beta^2} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E.4})$$

with $s_g = \text{sgn}(\cos(\omega_o t))$. In the general case, the wave vector associated to this flow writes :

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{x_1} \\ k_{x_2} \\ k_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{x_{1o}} - \frac{k_{x_{2o}}}{M} (\sin(\omega_o t + q) - \sin q) (1 - \beta) \epsilon \\ k_{x_{2o}} + \frac{k_{x_{1o}}}{M} (\sin(\omega_o t + q) - \sin q) (1 + \beta) \epsilon \\ k_0 \cos a \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

where $k_{x_{1o}}$, $k_{x_{2o}}$ and k_0 are constant and a is the angle between the wave vector and the rotation axis. We define again the phase ϕ by $k_{x_{1o}} = k_o \sin a \cos \phi$, $k_{x_{2o}} = k_o \sin a \sin \phi$.

At leading order in $\epsilon\beta$, the dispersion relation gives $f = 2 \cos a$, and the solvability conditions system admits non-trivial solutions for $f = \omega_o/2$. Consequently, the authorized band is given by $\cos a = \omega_o/4 \in [-1, 1]$ i.e. $|\omega_o| \leq 4$. The growth rate is determined at order 1 in $\epsilon\beta$ and must be maximized above the phases q and ϕ . The maximum is reached for $q = 0$, $\phi = \pi/4$ and gives in the absence of thermal and magnetic fields

$$\frac{\sigma}{\epsilon\beta} = \frac{16 + \omega_o^2}{64}. \quad (\text{E.6})$$

In this last case, Kerswell & Malkus (1998) performed a global approach of the same instability, explicitly considering inertial waves coupling in a spheroidal geometry. In the absence of magnetic and thermal fields, they found a maximum inviscid growth rate $\sigma_{inv}/(\epsilon\beta) = 25/128$, very close to our value $\sigma_{inv}/(\epsilon\beta) = 17/64$. The small difference between the two values is due to the influence of the spheroidal geometry considered in Kerswell & Malkus (1998), leading to more restrictive conditions for destabilization than our local analysis. Similarly, for purely hydrodynamic flow with a stationary deformation as studied in section 4.2.3.4, our analysis gives the inviscid growth rate $\sigma_{inv}/\beta = 9/16$, whereas a global analysis with inertial waves of a spheroid leads to the slightly smaller value $\sigma_{inv}/\beta = 1/2$ (see Lacaze *et al.*, 2004). Taking into account the uncertainties on the different parameters for planetary application, these small differences can be disregarded and the local approach can be used confidently, which presents the great advantage of providing an explicit formula for the growth rate.

Taking into account a buoyancy of order $\epsilon\beta$ as well as the induction equation and a Laplace force of order $\epsilon\beta$ in the presence of an imposed vertical magnetic field B_0 , we obtain the growth rate

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{16 + \omega_o^2}{64} \sqrt{(\epsilon\beta)^2 - \frac{4\omega_o^2 F^2}{(16 + \omega_o^2)^2 (4k^4 + \omega_o^2 Rm^2)^2 (\omega_o^2 + 4k^4 E^2/Pr^2)^2}} \\ & - \frac{\omega_o^2 \Lambda}{16 (1 + k^{-4} \omega_o^2 Rm^2/4)} - \frac{(16 + \omega_o^2) k^2 \tilde{R}a r \partial_r \theta}{16 (\omega_o^2 + 4k^4 E^2/Pr^2)} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

with $F = (64 + \omega_o^2(4k^4 + Rm^2(16 + \omega_o^2)))\tilde{R}a r \partial_r \theta - 4k^2 \omega_o^2 Rm \Lambda (\omega_o^2 + 4k^4 E^2/Pr^2)$, and where r and $\partial_r \theta$ are respectively the radius and the dimensionless temperature radial gradient of the considered streamline. As discussed in the appendix E.1, in astrophysical applications, the thermal diffusion can be neglected ($E/Pr = 0$). In this case, the equation (E.7) gives the equation (4.39) in the limit of large wavenumbers.

E.3 Diurnal tide and elliptical instability

In this work, the periodic forcing due to diurnal tides has been neglected for synchronised bodies. It is thus legitimate to calculate its influence on the LDEI growth. To answer this question, we consider the simplest but severe case of a body with a non rotating (i.e. $\gamma = 0$) diurnal tide of amplitude $\beta_{(t)} = \beta_1 \cos(Mt + q)$, where $\beta_1 = 3\epsilon\beta$ and no global

rotation. Then, the base flow (2.18) reduces to

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & [-(1 + \beta_1 \cos(Mt + q)) x_2 \mathbf{e}_{\mathbf{x}_1} \\ & +(1 - \beta_1 \cos(Mt + q)) x_1 \mathbf{e}_{\mathbf{x}_2}] \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Once again, the phase q is introduced here because we fix the phase of streamlines. Note that the streamlines are not known analytically. The dispersion relation gives the pulsation $f = 2 \cos a$, and the solvability conditions give resonances for $f = (2 + M)/2$ and $f = (2 - M)/2$. The authorized band is thus $|M| \leq 6$. In the limit of small M , the maximal growth rate is obtained with $f = (2 - M)/2$ for $\phi = -\pi/4$ and $q = 0$:

$$\sigma = \left[\frac{9}{16} + \frac{81}{64} M + \left(\frac{1}{8} - \frac{15\pi^2}{32} \right) M^2 \right] \beta_1 \quad (\text{E.9})$$

at the order $O(\Lambda^2) + O(\beta_1 M^3) + O(\beta_1^2)$. Note that this expression agrees with equation (4.38) for $\Lambda = 0$ and $\tilde{R}a = 0$, in the limit $M = 0$. The expression (E.9) shows that slow oscillations of the amplitude of the tidal bulge are not inhibiting for the elliptical instability. On the contrary, the growth rate is enhanced compared to the case of constant amplitude for small M , which means that the diurnal tide would be destabilizing in this case. In the case of planetary interest with $M = 1$, the maximum growth rate writes

$$\sigma = \frac{25}{128} \beta_1, \quad (\text{E.10})$$

which shows again that the diurnal tide can drive an elliptical instability. This effect will thus superimpose on the TDEI and LDEI mechanisms already studied, but with a smaller growth rate since $\beta_1 \ll \beta$.

E.4 Resonances of gravito-inertial waves

In order to clarify the influence of a thermal field with a buoyancy force that is of order zero in β , we consider the generic case with elliptical gravitational iso-potentials of ellipticity $n \beta$ and elliptical base field isotherms of ellipticity $m \beta$, where n and m are arbitrary constants. This generic notation is necessary to deal with all cases, studied for instance in Le Bars & Le Dizès (2006), Lavorel & Le Bars (2010) and Cébron *et al.* (2010c). Focusing on dynamic tides in a non-synchronized system, one would expect the isotherms to follow the streamlines (because of the small thermal diffusion coefficient), as well as the iso-potentials. Hence, $n = m = 1$. On the contrary, looking at the elliptical instability in a subsurface ocean underlain by a rigid mantle, one would expect the iso-potentials to remain quasi-circular $n = 0$. Besides, in the presence of a static bulge, one would expect the system to naturally return to a configuration with $m = 0$ by the generation of baroclinic motions. All situations with $0 \leq m, n \leq 1$ are possible, and one can even imagine other azimuthal periodicities, for instance due to local variations of temperature.

In the case of the TDEI, the WKB approach including zeroth order buoyancy forces in β is tractable. Contrary to the cases studied in appendices (E.1) and (E.2), the forbidden

band where the instability does not exist is now modified by the thermal field and is given by $f_0 \leq 1$, where $f_0 = \sqrt{4 |1 + \Omega^G|^2 + \tilde{R}a r \partial_r \Theta}$. Outside this band, the inviscid growth rate is given, in the limit of large wavenumbers, by :

$$\sigma = \frac{(2\Omega^G + 3)^2 + [1 + 2(1 + \Omega^G)(m - n) - n] \tilde{R}a r \partial_r \Theta}{16 |1 + \Omega^G|^2 + 4 \tilde{R}a r \partial_r \Theta} \frac{\beta}{|1 + \Omega^G|} - \frac{\Lambda}{4 |1 + \Omega^G|^3} \quad (\text{E.11})$$

We can compare the role of the temperature field in (4.38) and (E.11). In the expression (4.38), the temperature field acts as a simple supplementary stabilizing term which corrects the inviscid purely hydrodynamic growth rate. But in the derivation of equation (E.11), waves and resonances (as well as the forbidden band) are modified by buoyancy forces, leading to a modification of the prefactor of β . Actually, the elliptical instability now results from resonances of gravito-inertial waves and should be called the gravito-elliptical instability (see Le Bars & Le Dizès, 2006; Guimbard *et al.*, 2010). As shown below, the supplementary resonances associated to gravito-inertial waves allow the temperature to be destabilizing in certain cases. Same conclusions can be obtained for the magnetic field when Laplace forces are taken into account at zeroth order in β in the limit of ideal magnetohydrodynamic : the elliptical instability then results from resonances between magneto-inertial waves (Kerwell, 1993a, 1994), the forbidden band is modified by the magnetic field, and as shown by Lebovitz & Zweibel (2004), the magnetic field can be either stabilizing or destabilizing depending on the considered case (see also Herreman, 2009; Mizerski & Bajer, 2009, 2011). Naturally, these conclusions are also valid for the LDEI.

In Le Bars & Le Dizès (2006) and in the experiments of Lavorel & Le Bars (2010), the TDEI is studied in the case of a stationary bulge ($\Omega^G = 0$) with circular iso-potentials and elliptical isotherms ($n = 0$, $m = 1$), and the considered temperature profile gives $r \partial_r \Theta = -1$. In this particular case, in the absence of magnetic field, equation (E.11) recovers their result :

$$\sigma = \frac{9 - 3 \tilde{R}a}{16 - 4 \tilde{R}a} \beta. \quad (\text{E.12})$$

As noticed by Le Bars & Le Dizès (2006), a thermal stable stratification ($\tilde{R}a < 0$) is then destabilizing for the elliptical instability. On the contrary, in the case $n = m = 1$, the temperature field is stabilizing for the instability. This high sensitivity of the growth rate of the elliptical instability to the specific gravitational and thermal fields is confirmed by numerical simulations. Using the method described in Cébron *et al.* (2010c), we consider the simple case $\Omega^G = 0$ and $K = 0$, the temperature field being established by a temperature contrast between the two boundaries. In the case where $n = m = 1$, the growth rate (E.11) is enhanced when $\tilde{R}a$ is increased. As shown in figure E.1, this is in perfect agreement with the numerical simulations in a cylindrical shell. In the experimental setup of Lavorel & Le Bars (2010), the gravity is replaced by the centrifugal acceleration, as in Carrigan & Busse (1983), and then the associated equipotentials are circular i.e. $n = 0$ and $m = 0$: as shown in figure E.1, in this case an increasing $\tilde{R}a$ indeed leads to a smaller growth rate and the numerical simulations are in agreement with the predicted growth rate.

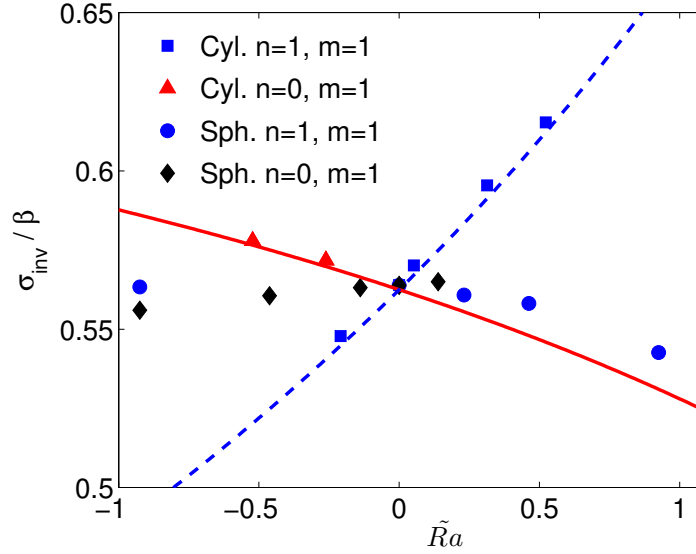


FIGURE E.1 – Growth rate of the TDEI for a cylindrical shell ($\eta = 0.2$, $E = 0.0036$, $\beta = 0.47$, $Pr = 1$) of aspect ratio $H/R = 2$ and an ellipsoidal shell ($\eta = 0.3$, $E = 0.0029$, $\beta = 0.317$, $Pr = 1$) with a rotation axis of length $c = (a + b)/2$. The figure compares the numerical growth rate in the autogravitating case where the gravity is given by the Poisson equation for the gravitational potential of a homogeneous fluid (see Cébron et al. (2010c) for details), and the case where the gravity is played by a centrifugal force ($n = 0$), as in the experiments of Lavorel & Le Bars (2010). The numerical growth rate is translated vertically in the figure, to match the inviscid growth rate $9/16$ at $\tilde{Ra} = 0$, which corresponds to a surfacic damping term coefficient $\alpha = 3.24$ for the cylindrical shell (squares and triangles) and $\alpha = 3.1$ for the ellipsoidal shell (circles and diamonds). Theoretical growth rates are shown by a continuous red line for $n = 0$, $m = 1$ and a dashed blue line for $n = m = 1$.

The conclusions for an autogravitating ellipsoidal shell are more complex. Cébron *et al.* (2010c) find that an increasing \tilde{Ra} leads to a smaller growth rate, which is in contradiction with the theoretical growth rate. This difference shall come from the fact that the thermal stratification propagates the influence of the boundary inside the bulk : the WKB analysis, based on local stability, cannot handle this feature. In the spherical geometry, we can however notice that changes induces by \tilde{Ra} are small for $-1 \leq \tilde{Ra} < 1$ and remain close to the estimates for an autogravitating cylinder.

Those results clearly illustrate the high sensitivity of the growth rate of the elliptical instability to the specific gravitational and thermal fields, as well as to the considered geometry. In planetary applications, stratification (i.e. \tilde{Ra}) generally leads to stabilization, as in the limit of small \tilde{Ra} presented in the main text. Note however that in this case, stratification can only stabilize elliptical instability when \tilde{Ra} is of order 1, which is never the case.

Annexe F

Figures of equilibrium

The equilibrium shape of a body deformed by tides or rotation is a long standing issue which begins with Newton (1687) and been studied by different communities (geophysics, astrophysics,...) with different tools, notations and hypothesis (see e.g. Kopal, 1960; Chandrasekhar, 1969; Zharkov & Trubitsyn, 1980; Murray & Dermott, 1999). However, most of the works on the subject can be divided into two categories. In the continuity of the work of Newton, the first category considers homogeneous ellipsoidal bodies, leading to an analytically, or at least semi-analytically, tractable study. Reconsidered by Chandrasekhar with its Virial method, the monograph of Chandrasekhar (1969) summarizes much of these researches on fluid bodies up to 1968. A rapid review is given in section F.1, linking these ellipsoidal figures of equilibrium with the elliptical instability. A second approach, called *theory of planetary figures*, follows the work of Clairaut (1743), considering a compressible body with a non-constant density profile. A rapid review of this approach is given in section F.2. It is important to notice that the first approach considers homogeneous ellipsoidal bodies with arbitrary deformations whereas the second one is a perturbative theory, which imposes small deformations¹. They are thus two complementary approaches : e.g. the Roche limit is obtained with the first one, whereas the tidal deformation all along the radius of a compressible body, such as the Earth, is given by the second one.

F.1 Deformations of a homogeneous body

F.1.1 Rotating homogeneous fluid body

The spin rotation induced oblateness of celestial bodies is a classical issue in mechanics (for the early history, see e.g. Todhunter, 1873), which begins when Newton (1687) proposed that the mean density of the Earth is 5 or 6 times that of water, and that its shape is not exactly spherical. Considering two 'canals' driven to the centre from the pole and the equator, he found that the weight of the equatorial (resp. polar) column is $a_e g_e - a_e \Omega^2$ (resp. $a_p g_p$), where Ω is the angular rate of the Earth, a_e and a_p (resp. g_e and g_p) respec-

1. So far, the general theory has been developed up to the fifth order (Zharkov & Trubitsyn, 1976; Efimov *et al.*, 1977)

tively the equatorial and the polar radii (resp. gravities). The equilibrium of the columns is reached for equal weights, i.e. for $g_p/g_e = (1 - m_r)a_e/a_p$, where $m_r = \Omega^2 R^3/(GM)$ is the ratio of the centrifugal acceleration at the equator to the mean gravitational acceleration at the equator, noting R the Earth mean radius and G the gravitational constant. Finally, knowing that $g_p/g_e = 1 + f/5 + O(f^2)$ for a self-gravitating spheroid of ellipticity $f = 1 - a_p/a_e$, Newton obtained the so-called *Newton's formula* :

$$f = \frac{5}{4} m_r = \frac{15 \pi}{4} \frac{1}{GT^2 \rho}, \quad (\text{F.1})$$

where T is the spin period of the Earth and ρ its mean volumic mass. Newton's theory that the Earth was flattened at the poles was not universally accepted, as another mathematician Giovanni Cassini (with support from his son Jacques Cassini and grandson César-François Cassini using their measurements) had suggested that the Earth was elongated at the poles. To solve the problem, the Academy of Sciences of Paris sent a group to Peru and another one, including Clairaut, Maupertuis and Celsius, to Lapland. The observations differed massively from Cassinian theory and proved that the Earth is an oblate spheroid.

Maclaurin (1742) suggested that the equilibrium is reached when the columns is balanced at any point. With the exact expression of the self-gravitational potential of a spheroid, he obtained the so-called *Maclaurin's formula* :

$$\tilde{\Omega}^2 = \frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = \frac{2}{e^3} (3 - 2e^2) \sqrt{1 - e^2} \arcsin e - \frac{6}{e^2} (1 - e^2) = \frac{8}{15} e^2 + \frac{8}{105} e^4 + O(e^6), \quad (\text{F.2})$$

with the eccentricity $e = \sqrt{1 - a_p^2/a_e^2}$. Given that $f \sim e^2/2$, this expression allows to recover the Newton's formula (F.1).

Using a three canals system and equating the weights, Jacobi (1834) showed that a class of triaxial ellipsoids are also solutions of the problem². However, he never compared his solutions with those of Maclaurin. It was shown later, in particular by Meyer (1842) and Liouville (1846, 1855) that the Maclaurin spheroids become unstable above a certain deformation, bifurcating into triaxial ellipsoids (see Lyttleton, 1953, for a more extensive historical development of these figures). More specifically, a dynamic instability appears at $e \approx 0.9529$, whereas the secular instability appears at $e = 0.8127$, where the triaxial Jacobi ellipsoids branches on (in the limit of circular equator)³. This is the first historical example of a spontaneous symmetry breaking (Michel, 1975).

F.1.2 Rotating homogeneous fluid body with internal constant vorticity

The next step after the work of Jacobi is done by Dirichlet, who included new solutions of the problem in his lectures on partial differential equations. His untimely death prevented him to write these up into a coherent whole. This was done by Dedekind,

2. In this case, the fluid rotates as a rigid body, which allows to omit the viscosity.

3. A dynamic instability appears in absence of dissipating mechanism. On the contrary, a secular instability manifests itself only if some dissipative mechanism is operative (e.g. the viscous diffusion).

who not only put together the completed sections that Dirichlet had left, but also organized scattered notes into further sections of the paper, and followed the completion of Dirichlet's paper with a paper of his own, containing what is now called Dedekind's theorem (Dirichlet, 1860; Dedekind, 1860). This theorem comes from the fact that the fluid velocity consists in two parts : an angular velocity of rigid-body rotation, and a motion of uniform vorticity superimposed on the latter. Each of these motions can be characterized by a three-component vector (time-dependent, in the general case). Then, it can be shown that interchanging these vectors provides a different solution of the equations for which the geometric figure is the same (i.e., the semiaxes of the ellipsoid are identical in the two motions) : this is the so-called *Dedekind's theorem*. These ellipsoids are said to be adjoint to each other (see e.g. Chandrasekhar, 1969, for details). An example of such a pair of adjoint configurations is the Jacobi-Dedekind pair : the Jacobi ellipsoid is at rest in frame of reference rotating with an angular speed Ω and the Dedekind ellipsoid is at rest in the inertial frame but with a fluid velocity of constant vorticity $\omega = -(a_1^2 + a_2^2)/(a_1 a_2) \Omega$.

Actually, the important observation made by Dirichlet and Dedekind is that a velocity field linear in the cartesian coordinates 'linearizes' the fluid equations : the nonlinear advective term then also becomes a linear expression in the cartesian coordinates. Then, in absence of nonlinear forcing terms, the fluid equations are linear in the cartesian coordinates, and can be reduced to a finite system of ordinary differential equations. This has been rediscovered repeatedly (e.g. Craik, 1989, which studies the elliptical instability with this approach).

Riemann (1860) reconsidered and solved the general problem, and discussed the stability of the steady state solutions, which are now usually referred to as the Riemann ellipsoids, and can be categorized :

1. uniform rotation with no internal motions ; this includes the Maclaurin and Jacobi series
2. angular velocity and vorticity vectors are along a principal axis of the ellipsoid ; the Jacobi and Dedekind series are special cases of these Riemann sequences.
3. angular velocity and vorticity vectors are in the principal plane of the ellipsoid, giving three more classes of ellipsoid.

Of course, the framework of our work leads to guess that the stability of triaxial ellipsoids sequences with internal constant vorticity should be directly related with the elliptical instability. However, the stability analysis of Riemann considers only perturbations that are linear polynomials⁴. Chandrasekhar (1965, 1966) have completed the stability analysis of Riemann, but the link with the elliptical instability has been actually made very recently, by Lebovitz & Lifschitz (1996*a,b*), using a WKB analysis (see also Fassò & Lewis, 2001; Morrison *et al.*, 2009, for other analysis). These previously undetected elliptical instabilities affect most of the parameter space, and have rather large growth rates for the Dedekind family and nearby figures. The presence of the elliptical instability in these purely rotating fluid (absence of any tidal forces) is finally confirmed by Ou *et al.* (2007) with 3D numerical simulations of an inviscid fluid.

4. Moreover the energy criterion used by Riemann has been shown to be erroneous by Lebovitz (1966).

F.1.3 Tidally deformed homogeneous fluid body

In previous sections, only the deformation due to the rotation was considered. In this section, we focus on the deformation due to tidal forces. The equilibrium shape of a body 1 of mass M_1 and radius R_1 , called below as usual the primary, is an old problem which begins with the tides theory of Newton (1687). This classical theory considers an incompressible homogeneous no-spinning body at rest deformed by the tidal field of a rigid sphere, which leads to a spheroidal shape. Neglecting the modification of the potential due to the tidal deformation, the first order deformation is

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{M_2}{M_1} \frac{R_1^3}{D^3}, \quad (\text{F.3})$$

where M_2 is the mass of the body responsible for the tidal field, often called the secondary, and D the distance between the two bodies. Later, Jeans (1917) takes into account the gravitational potential of the tidal bulge (Jeans, 1919, 1929). The deformation is then given exactly by :

$$\frac{\mu}{\pi G \rho} = \frac{1 - \epsilon_2^2}{\epsilon_2^3} \ln \frac{1 + \epsilon_2}{1 - \epsilon_2} - 6 \frac{1 - \epsilon_2^2}{(3 - \epsilon_2^2) \epsilon_2^2} \quad (\text{F.4})$$

with $\mu = G M_2/D^3$ and $\epsilon_2 = \sqrt{1 - c^2/a^2}$, where a is the length of the axis pointing towards the secondary, and c the length of the two other axes. Then, for $e \ll 1$:

$$\beta \approx \frac{15}{4} \frac{M_2}{M_1} \frac{R_1^3}{D^3} \quad (\text{F.5})$$

with ρ the density of the primary and G the gravitational constant (e.g. Ferraz-Mello *et al.*, 2008).

Actually, the Jeans ellipsoids are solutions of a *pure* tidal problem, in the sense that the centrifugal force due to the orbital motion is not taken into account. That is why they are often qualified as non-physical. The simplest problem of a homogeneous mass rotating on a circular orbit about a rigid spherical mass has been first considered by Roche (1850), what is now called the *Roche's problem*. A generalization of this problem, the so-called *Darwin's problem* considers two deformable masses. In this case, solutions have been obtained by Darwin (1906) in the particular cases of bodies of the same mass. Once again, an historical account of the results (up to 1968) on these two problems can be found in Chandrasekhar (1969).

F.1.4 Generalized ellipsoidal figures of equilibrium

The work of Aizenman (1968) is of particular interest, being the first to combine the effects of a centrifugal acceleration and the tidal field, leading to the so-called *Roche-Riemann ellipsoids*. An important recent generalization of most of the previous studies on ellipsoidal figures of equilibrium is given by Lai *et al.* (1993), using energy variational methods. Indeed, they determine the equilibrium and the stability of Roche-Riemann and Darwin ellipsoids for polytropic compressible fluids, in assuming that the surfaces of constant density are self-similar ellipsoids. Leconte *et al.* (2011) verify this hypothesis

by comparison with the theory of planetary (fluid) figures (see section F.2) and obtain analytical expressions for the ellipsoidal shape in the limit of small deformations. Another important recent generalization of the Clairaut approach has been given by Kong *et al.* (2010) for the particular case of Maclaurin spheroid : the theory is extended, in an exact manner, to a two homogeneous layers model. Once again, the results have been later successfully compared with the theory of figures (Schubert *et al.*, 2011).

F.2 Theory of (planetary equilibrium) figures

This perturbative theory, initiated by Clairaut (1743), is also called the Clairaut-Laplace-Lyapunov (CLL) theory in the literature. It allows to take into account a non-constant density profile for the considered body and is thus currently the most common approach. However, as shown by Sterne (1939), this theory requires a numerical integration, even to first order. In an astrophysical context, a detailed account can be found in the exhaustive books of Kopal (1960, 1978) up to the third order (see also the less exhaustive but commonly used book of Zharkov & Trubitsyn, 1980), and the extension of the theory to elastic bodies is summarized in Lanzano (1982)⁵. At first order, the calculation of the equilibrium shape undergoing different perturbations reduces to the problem of finding the response to each separate perturbing potential and adding them linearly (Van Hoolst *et al.*, 2008; Leconte, 2011). For higher order theory, combining perturbing potentials induces cross correlation terms, which leads to a complex problem (Kopal, 1978)⁶. Then, the theory of figures used in this work (e.g in section 4.1) follows the method of Van Hoolst *et al.* (2008).

5. Misprints and slight errors are present in these different works, recently corrected in Chambat *et al.* (2010) and Leconte (2011).

6. Besides, to the knowledge of the author, this problem has never been solved for a practical case.

Annexe G

Exoplanetary systems parameters

TABLE G.1 – Physical and orbital characteristics used for the stability calculation of the 12 stars outside from the forbidden band. The masses M_1 of the stars are given in Sun mass unity M_s , the masses of the exoplanets M_2 are given in Jupiter mass unity M_j , the radius R_1 of the stars is given in Sun radius R_s , the spin and orbital periods are in days (d), the molecular kinematic viscosity is in $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ and the typical timescales of the instability are given in thousand years.

Stars	M_1 (M_s)	R_1 (R_s)	T_{spin} (d)	M_2 (M_j)	T_{orb} (d)	T	E ($\times 10^{16}$)	η	ν
CoRoT-4	1.16	1.17	9.40	0.72	9.20	0.98	1.66	0.84	8.5
CoRoT-6	1.05	1.02	6.40	2.96	8.89	1.39	1.56	0.81	9
BD+20790	0.63	0.71	2.80	6.54	7.78	2.78	3.13	0.64	19.8
Tau-boo	1.30	1.33	3.50	3.50	3.31	0.95	0.46	0.88	8.1
HD179949	1.28	1.19	7.60	0.95	3.09	0.41	1.26	0.87	8.3
HD17156b	1.24	1.44	48.0	3.21	21.2	0.44	5.84	0.81	8.9
HD209458	1.01	1.15	11.4	0.69	3.52	0.31	2.32	0.77	9.4
CoRoT-2	0.97	0.90	4.52	3.31	1.74	0.39	1.70	0.73	10.8
CoRoT-3	1.36	1.54	4.50	21.23	4.26	0.95	0.37	0.95	6.9
HAT-P-2	1.36	1.64	3.80	9.09	5.63	1.48	0.33	0.88	8.2
XO-3b	1.21	1.38	3.70	11.79	2.19	0.59	0.43	0.88	7.7
HD80606	0.90	0.97	44.0	3.94	111	2.53	16.1	0.87	12.1

TABLE G.2 – Physical and orbital characteristics used for the stability calculation of the 17 stars in the forbidden band. The masses M_1 of the stars are given in Sun mass unity M_s , the masses of the exoplanets M_2 are given in Jupiter mass unity M_j , the radius R_1 of the stars is given in Sun radius R_s , the spin and orbital periods are in days (d) and the molecular kinematic viscosity is in ($\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$).

Stars	M_1 (M_s)	R_1 (R_s)	T_{spin} (d)	M_2 (M_j)	e	T_{orb} (d)	T T	E ($\times 10^{16}$)	η	ν
WASP-17	1.20	1.38	10	0.49	0.13	-3.73	-0.37	1.10	0.88	7.38
WASP-10	0.75	0.70	11.90	3.15	0.06	3.09	0.26	11.82	0.65	17.14
WASP-19	0.96	0.94	10.50	1.15	0	0.79	0.08	3.85	0.72	11.42
WASP-18	1.25	1.22	5.60	10.30	0	0.94	0.17	0.84	0.88	7.82
KEPLER-5	1.45	2.07	21	2.16	0	3.55	0.17	1.14	0.88	8.13
TrES-3	0.90	0.80	30	1.92	0	1.31	0.04	13.78	0.80	10.35
HD41004B	0.40	0.40	50	19	0.08	1.33	0.03	313.59	0	35.35
CoRoT-7	0.93	0.87	23.65	0.01	0	0.85	0.04	11.24	0.68	12.68
GJ-674	0.35	0.35	34.80	0.04	0.20	4.69	0.13	285.07	0	35.35
HD189733	0.82	0.79	12	1.13	0.03	2.22	0.18	7.72	0.69	14.14
HAT-P-1	1.13	1.12	26.60	0.52	0.07	4.46	0.17	5.64	0.99	9.28
HD149026	1.30	1.50	12.30	0.36	0.18	2.88	0.23	1.35	0.85	8.65
TrES-2	0.98	1	25.50	1.20	0.08	2.47	0.10	7.08	0.76	9.79
TrES-1	0.87	0.82	32	0.61	0	3.03	0.09	17.33	0.68	12.83
CoRoT-1	0.95	1.11	11	1.03	0	1.51	0.14	2.38	0.76	9.38
HAT-P-7	1.47	1.84	19	1.80	0	-2.20	-0.12	1.27	0.91	7.97
WASP-14	1.32	1.30	13.50	7.72	0.09	2.24	0.17	1.73	0.91	7.59

Annexe H

Instabilité elliptique et Jupiters chauds

H.1 Évolution orbitale

Considérons un système isolé constitué d'une étoile et d'une planète de type jupiter chaud en orbite rapprochée. Avec un indice s pour l'étoile et un indice p pour la planète, on note M la masse, I le moment d'inertie, Ω le vitesse de rotation propre et R le rayon. Le demi-axe de l'orbite est noté a et l'excentricité orbitale e . L'évolution du système est alors régie (e.g. Rieutord, 2003), entre autres, par la conservation du moment angulaire total \mathbf{L} du système

$$\mathbf{L} = \frac{M_s M_p}{M_s + M_p} a^2 \boldsymbol{\Omega}_{orb} \sqrt{1 - e^2} + I_s \boldsymbol{\Omega}_s + I_p \boldsymbol{\Omega}_p \quad (\text{H.1})$$

et la dissipation de l'énergie mécanique E du système,

$$E = -\frac{G M_s M_p}{2 a} + \frac{1}{2} I_s \Omega_s^2 + \frac{1}{2} I_p \Omega_p^2, \quad (\text{H.2})$$

où G est la constante gravitationnelle. Dans le cas des étoiles étudiées en section 4.3, il est possible de se demander quelles sont les conséquences sur l'orbite de la planète de la présence d'une instabilité elliptique au sein de l'étoile. En effet, si l'écoulement, et donc l'axe de rotation de l'étoile, sont modifiés, la conservation du moment angulaire implique un changement des caractéristiques orbitales de la planète. Afin d'étudier ces conséquences, on considère que l'instabilité elliptique se développe sur des échelles de temps suffisamment courtes pour pouvoir négliger la dissipation induite, et on néglige le moment angulaire de rotation propre de la planète devant les autres termes de l'équation (H.1), ce qui est parfaitement justifié dans le cas des systèmes considérés puisque ce terme est typiquement 10^4 fois plus faible. Dans ce cas, notant respectivement θ_1 et θ_2 les angles de $\boldsymbol{\Omega}_s$ et $\boldsymbol{\Omega}_{orb}$ avec \mathbf{L} , l'équation de conservation de \mathbf{L} (H.1) s'écrit :

$$I_s \Omega_s \cos \theta_1 + \mu \sqrt{a} \cos \theta_2 = L \quad (\text{H.3})$$

$$I_s \Omega_s \sin \theta_1 + \mu \sqrt{a} \sin \theta_2 = 0 \quad (\text{H.4})$$

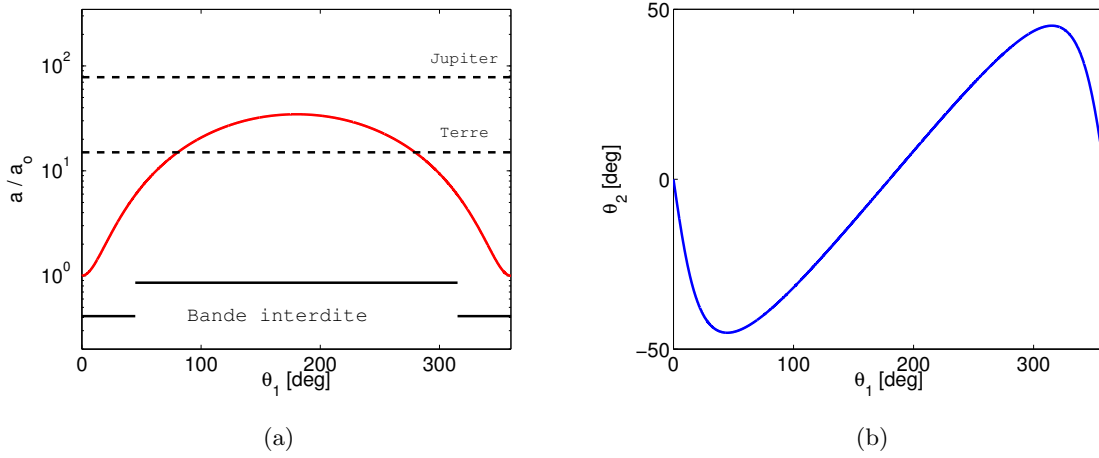


FIGURE H.1 – (a) Évolution de l'orbite lorsque θ_1 (en degrés) augmente. La ligne continue rouge représente le demi-axe orbital (équation (H.6)), rapporté au demi-axe a_o obtenu pour $\theta_1 = 0^\circ$. La bande interdite est comprise entre 0 et la ligne continue noire (régime d'abord prograde, puis rétrograde avant d'être à nouveau prograde), donnée par l'équation (H.8). Les lignes en pointillés représentent les demi-axes orbitaux de la Terre et de Jupiter. (b) Évolution de θ_2 (en degrés) lorsque θ_1 augmente.

où

$$\mu = M_s M_p \sqrt{\frac{G(1-e^2)}{M_s + M_p}}. \quad (\text{H.5})$$

En effet, la troisième loi de Kepler s'écrit $\Omega_{orb}^2 a^3 = G(M_s + M_p)$. Les équations (H.3) et (H.4) donnent

$$a = \frac{L^2 + I_s^2 \Omega_s^2 - 2 L I_s \Omega_s \cos \theta_1}{\mu^2}, \quad (\text{H.6})$$

dont l'évolution, linéaire en $\cos \theta_1$, est représentée en figure H.1a pour une étoile de la masse et du rayon du Soleil tournant sur elle-même en 5 jours (avec $I_s = 2/5 \cdot M_s R_s^2$, ce qui correspond à une sphère homogène), et pour une planète de la masse de Jupiter en mouvement sur une orbite circulaire de rayon $a_o = 10^7$ km pour $\theta_1 = 0^\circ$, ce qui correspond à une planète environ 6 fois plus proche que l'est Mercure du Soleil. Donnons quelques ordres de grandeurs de ce cas typique : le rapport des masses de la planète et de l'étoile est de l'ordre de 1000 et le moment angulaire de rotation propre de l'étoile représente 71 % du moment angulaire total. Le demi-grand axe maximal lorsque θ_1 varie est obtenu pour $\cos \theta_1 = -1$, ce qui donne $a_{max} = (L + I_s \Omega_s)^2 / \mu^2 \approx 35 a_o$. Enfin, remarquons que le cas particulier d'une étoile qui ralentit progressivement sans modifier la direction de son axe de rotation initiale peut être obtenu à partir de la formule (H.6) avec $\cos \theta_1 = 1$, et

on a alors :

$$\frac{a}{a_o} = \left[1 + \frac{I_s \Omega_o}{\mu \sqrt{a_o}} (1 - \cos \alpha) \right]^2, \quad (\text{H.7})$$

avec $\Omega_s(t) = \Omega_o \cos \alpha$. La formule (H.7) conduit toujours à des éloignements de la planète inférieurs à ceux prédits par la formule (H.6) du fait de l'inclinaison.

Dans une certaine gamme de période orbitale, l'instabilité elliptique ne peut pas se développer, et a n'évolue alors plus sous son action : c'est la bande interdite, donnée par $-1 \leq \Omega_s/\Omega_{orb} \leq 1/3$ (voir e.g. l'annexe E.1). À l'aide de la troisième loi de Kepler, cette bande interdite peut être exprimée en fonction du rayon orbital :

$$0 \leq a \leq \left[\frac{G (M_s + M_p)}{\kappa \Omega_s^2} \right]^{1/3}, \quad (\text{H.8})$$

où $\kappa = 9$ si l'orbite est prograde et $\kappa = 1$ si l'orbite est rétrograde. Lorsque θ_1 évolue, le produit scalaire de l'équation (H.1) avec $\boldsymbol{\Omega}_s$ montre que l'orbite est prograde ($\boldsymbol{\Omega}_s \cdot \boldsymbol{\Omega}_{orb} > 0$) pour $\cos \theta_1 \geq I_s \Omega_s / L$ et rétrograde ($\boldsymbol{\Omega}_s \cdot \boldsymbol{\Omega}_{orb} < 0$) sinon, ce qui correspond aux extrema de θ_2 , comme le montre la figure H.1b. Le changement de valeur pour la bande interdite à cette limite prograde/rétrograde est également visible sur la figure H.1a.

Finalement, si l'on considère que l'instabilité elliptique modifie l'axe de rotation de l'étoile, la figure H.1 montre que le plan orbital s'incline en sens opposé pour maintenir la direction de \mathbf{L} constante, tandis que la planète recule afin de maintenir la norme de \mathbf{L} constante. Cependant, le recul maximal de la planète reste raisonnable, même s'il est possible d'imaginer que l'instabilité elliptique finit par disparaître puisque la déformation de marées diminue avec le cube du demi-grand axe orbital. Notons que le cas considéré conduit à un fort recul de la planète car l'étoile tourne sur elle-même rapidement et son moment angulaire représente 71 % du moment total du système. Avec des étoiles en rotation plus lente, le recul de la planète serait plus faible.

H.2 Anomalies de rayon

Les calculs de J. Leconte montrent que certaines planètes de type jupiters chauds présentent des rayons observés R_{obs} qui ne correspondent pas aux rayons R_{irrad} prévus par la théorie (voir Leconte *et al.*, 2010a,b, pour plus de détails). Cet écart est habituellement associé à une source de dissipation supplémentaire, et donc de chaleur, au sein de la planète dont ne tient pas compte la théorie. Nous avons donc tracé en figure H.2 cette anomalie de rayon $AnR = (R_{obs} - R_{irrad})/R_{irrad}$ en fonction du temps typique τ de croissance non-visqueux de la LDEI ($\tau \sim e\beta$ où e est l'excentricité orbitale et β la déformation hydrostatique de la planète). Une corrélation, montrée en bleu, semble visible, même si un plus grand nombre de systèmes serait nécessaire pour la confirmer. Notons que cette corrélation reflète plutôt un lien entre AnR et $e\beta$ i.e. un effet de marées qu'une présence de l'instabilité elliptique.

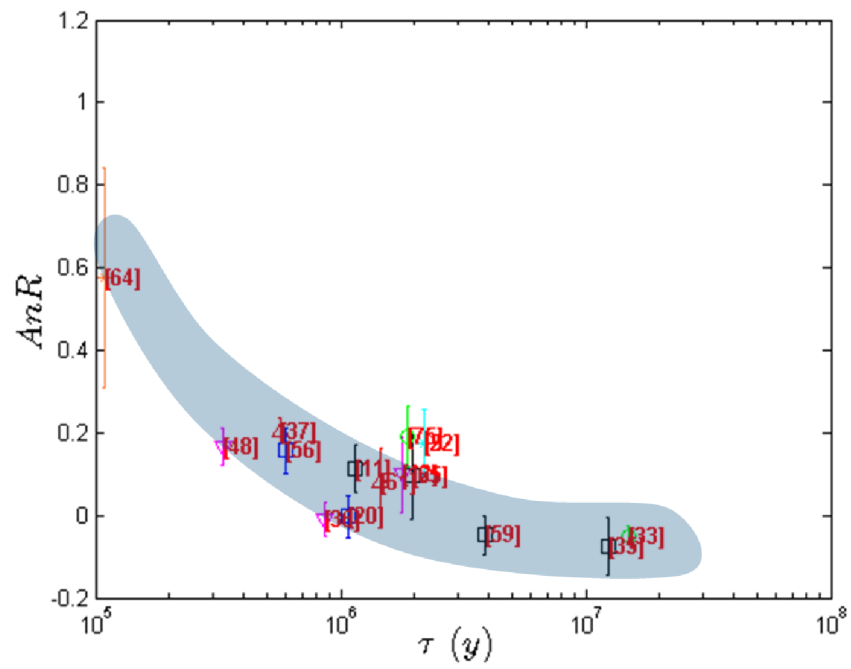


FIGURE H.2 – Anomalies de rayon $AnR = (R_{obs} - R_{irrad})/R_{irrad}$ des planètes en fonction du temps typique τ (en années) de croissance non-visqueux de la LDEI. Les barres d'erreur représentent les incertitudes sur l'anomalie de rayon.

Bibliographie

- AFANASYEV, Y.D. 2002 Experiments on instability of columnar vortex pairs in rotating fluid. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **96** (1), 31–48. [33]
- AGRAWAL, B.N. 1993 Dynamic characteristics of liquid motion in partially filled tanks of a spinning spacecraft. *Journal of guidance, control, and dynamics* **16** (4), 636–640. [12]
- AIGRAIN, S., COLLIER CAMERON, A., OLLIVIER, M., PONT, F., JORDA, L., ALME-NARA, JM, ALONSO, R., BARGE, P., BORDÉ, P., BOUCHY, F. *et al.* 2008 Transiting exoplanets from the corot space mission. *Astronomy and Astrophysics* **488** (2), 43–46. [194]
- AIZENMAN, M.L. 1968 The equilibrium and the stability of the roche-riemann ellipsoids. *The Astrophysical Journal* **153**, 511. [234]
- ALDRIDGE, K.D. 1967 An experimental study of axisymmetric inertial oscillations of a rotating liquid sphere. PhD thesis, University of Toronto. [22]
- ALDRIDGE, KD & LUMB, LI 1987 Inertial waves identified in the earth's fluid outer core. *Nature* **325**, 421–423. [12]
- ALDRIDGE, K., SEYED-MAHMOUD, B., HENDERSON, G. & VAN WIJNGAARDEN, W. 1997 Elliptical instability of the earth's fluid core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **103** (3-4), 365–374. [145, 167, 183]
- ALDRIDGE, K.D. & TOOMRE, A. 1969 Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container. *Journal of Fluid Mechanics* **37** (02), 307–323. [22, 166]
- ALEMANY, A., MARTY, P., PLUNIAN, F. & SOTO, J. 2000 Experimental investigation of dynamo effect in the secondary pumps of the fast breeder reactor superphenix. *Journal of Fluid Mechanics* **403**, 263–276. [102]
- ANDERSON, B.J., ACUÑA, M.H., KORTH, H., SLAVIN, J.A., UNO, H., JOHNSON, C.L., PURUCKER, M.E., SOLOMON, S.C., RAINES, J.M., ZURBUCHEN, T.H. *et al.* 2010 The magnetic field of mercury. *Space science reviews* pp. 1–33. [181]
- ANUFRIEV, AP, JONES, CA & SOWARD, AM 2005 The boussinesq and anelastic liquid approximations for convection in the earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **152** (3), 163–190. [84, 108]

- ARAKI, H., TAZAWA, S., NODA, H., ISHIHARA, Y., GOOSSENS, S., SASAKI, S., KAWANO, N., KAMIYA, I., OTAKE, H., OBERST, J. *et al.* 2009 Lunar global shape and polar topography derived from Kaguya-LALT laser altimetry. *Science* **323** (5916), 897. [152]
- ARKANI-HAMED, J. 2009 Did tidal deformation power the core dynamo of Mars? *Icarus* **201** (1), 31–43. [145, 164, 183, 196]
- ARKANI-HAMED, J., SEYED-MAHMOUD, B., ALDRIDGE, KD & BAKER, RE 2008 Tidal excitation of elliptical instability in the Martian core : Possible mechanism for generating the core dynamo. *Journal of Geophysical Research* **113** (E6), E06003. [145, 164, 183, 196]
- AURNOU, JM 2007 Planetary core dynamics and convective heat transfer scaling. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **101** (5), 327–345. [83, 86]
- BACKUS, G. 1958 A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Annals of Physics* **4** (4), 372–447. [101]
- BALAND, R.M. & VAN HOOLST, T. 2010 Librations of the galilean satellites : The influence of global internal liquid layers. *Icarus* **209** (2), 651–664. [170, 185]
- BALBUS, S.A. & HAWLEY, J.F. 1998 Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks. *Reviews of modern physics* **70** (1), 1. [36, 194]
- BANKA, D. & CROSSLEY, D. 1999 Noise levels of superconducting gravimeters at seismic frequencies. *Geophysical Journal International* **139**, 87–97. [12]
- BAO, GW & PASCAL, M. 1997 Stability of a spinning liquid-filled spacecraft. *Archive of Applied Mechanics* **67** (6), 407–421. [12]
- BATALHA, N.M., BORUCKI, W.J., BRYSON, S.T., BUCHHAVE, L.A., CALDWELL, D.A., CHRISTENSEN-DALSGAARD, J., CIARDI, D., DUNHAM, E.W., FRESSIN, F., GAUTIER, T.N. *et al.* 2011 Kepler’s first rocky planet : Kepler-10b. *The Astrophysical Journal* **729**, 27. [190]
- BAYLY, BJ 1986 Three-dimensional instability of elliptical flow. *Physical review letters* **57** (17), 2160–2163. [3, 24, 35, 36, 38, 39, 175, 195]
- BAYLY, BJ, HOLM, DD & LIFSCHITZ, A. 1996 Three-dimensional stability of elliptical vortex columns in external strain flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **354** (1709), 895. [36]
- BELMONTE, J.A. 2001 On the orientation of old kingdom Egyptian pyramids. *Journal for the History of Astronomy Supplement* **32**, 1. [16]
- BENEST, D. 1990 *Modern methods in celestial mechanics*. Editions Frontières. [179]

- BENTON, ER & CLARK, A. 1974 Spin-up. *Annual Review of Fluid Mechanics* **6** (1), 257–280. [15, 42]
- BIELLO, J.A., SALDANHA, K.I. & LEBOVITZ, N.R. 2000 Instabilities of exact, time-periodic solutions of the incompressible Euler equations. *Journal of Fluid Mechanics* **404**, 269–287. [36, 217]
- BLAND, M.T., SHOWMAN, A.P. & TOBIE, G. 2008 The production of Ganymede’s magnetic field. *Icarus* **198** (2), 384–399. [185]
- BLAND, M.T., SHOWMAN, A.P. & TOBIE, G. 2009 The orbital-thermal evolution and global expansion of Ganymede. *Icarus* **200** (1), 207–221. [185]
- BODENHEIMER, P., LIN, DNC & MARDLING, RA 2001 On the tidal inflation of short-period extrasolar planets. *The Astrophysical Journal* **548**, 466. [213]
- BOIS, E. 1995 Proposed terminology for a general classification of rotational swing motions of the celestial solid bodies. *Astronomy and Astrophysics* **296**, 850. [20]
- BONDI, H. & LYTTLETON, RA 1953 On the dynamic theory of the rotation of the Earth : the effect of precession on the motion of the liquid core. In *Proc. Camb. Phil. Soc.*, vol. 49, pp. 498–515. Cambridge Univ Press. [14]
- BOSSAVIT, A. 1988 A rationale for edge-elements in 3-d fields computations. *Magnetics, IEEE Transactions on* **24** (1), 74–79. [111]
- BOSSAVIT, A. 1990 Solving maxwell equations in a closed cavity, and the question of spurious modes. *Magnetics, IEEE Transactions on* **26** (2), 702–705. [111]
- BOSSAVIT, A. 1994 A new rationale for edge-elements. *International Compumag Society Newsletter* **1** (3), 3–6. [111]
- BOSSAVIT, A. 2008 A uniform rationale for edge elements on various element shapes (tetrahedra, hexahedra, prisms, pyramids) . [111]
- BOUBNOV, BM 1978 Effect of Coriolis force field on the motion of a fluid inside an ellipsoidal cavity. *Izv. Atmos. Ocean. Phys* **14**, 501–504. [35, 49]
- BREUER, D. & MOORE, WB 2007 Dynamics and thermal history of the terrestrial planets, the Moon, and Io. *Treatise on Geophysic* **10** (G. Schubert, ed., Elsevier.), 299–348. [147]
- BRITO, D., AURNOU, J. & CARDIN, P. 2004 Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **141** (1), 3–8. [15]
- BROOKER, RA & OLLE, TW 1955 Apsidal-motion constants for polytropic models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **115**, 101. [197]

- BRUN, A.S., MIESCH, M.S. & TOOMRE, J. 2004 Global-scale turbulent convection and magnetic dynamo action in the solar envelope. *The Astrophysical Journal* **614**, 1073. [109]
- BRYAN, GH 1889 The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* **180**, 187–219. [11]
- BRZEZIŃSKI, A. & CAPITAINE, N. 2010 Semidiurnal signal in ut1 due to the influence of tidal gravitation on the triaxial structure of the earth. *Highlights of Astronomy* **15**, 217. [17]
- BULLARD, E. & GELLMAN, H. 1954 Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **247** (928), 213–278. [101]
- BUSSE, FH 1968 Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *Journal of Fluid Mechanics* **33** (04), 739–751. [15, 20, 21, 22, 69, 71, 72, 73, 77, 166, 204]
- BUSSE, F.H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics* **44** (03), 441–460. [102]
- BUSSE, FH 2002 Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action. *Physics of fluids* **14**, 1301. [109]
- BUSSE, FH 2010 Mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity. *J. Fluid Mech* **650**, 505. [22, 23, 64, 171]
- BUSSE, FH, ZHANG, K. & LIAO, X. 2005 On slow inertial waves in the solar convection zone. *The Astrophysical Journal Letters* **631**, L171. [12]
- CALKINS, M.A., NOIR, J., ELDREDGE, J.D. & AURNOU, J.M. 2010 Axisymmetric simulations of libration-driven fluid dynamics in a spherical shell geometry. *Physics of Fluids* **22**, 086602. [22, 64, 166]
- CARDIN, P. & OLSON, P. 2007 Experiments on core dynamics. *Core Dynamics (Treatise of Geophysics)* **8** (Elsevier), 319–345. [13]
- CARRIGAN, CR & BUSSE, FH 1983 An experimental and theoretical investigation of the onset of convection in rotating spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics* **126**, 287–305. [227]
- CARTAN, ME 1922 Sur les petites oscillations d'une masse fluide. *Bull. Sci. Math* **46**, 317–352. [9]
- CARTWRIGHT, D.E. 2001 *Tides : a scientific history*. Cambridge Univ Pr. [19]
- CAZES, J.E. & TOHLIN, J.E. 2000 Self-gravitating gaseous bars. i. compressible analogs of riemann ellipsoids with supersonic internal flows. *The Astrophysical Journal* **532**, 1051. [195]

- CÉBRON, D., LE BARS, M., LEONTINI, J., MAUBERT, P. & LE GAL, P. 2010a A systematic numerical study of the tidal instability in a rotating triaxial ellipsoid. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* . [95, 178, 182]
- CÉBRON, D., LE BARS, M. & MEUNIER, P. 2010b Tilt-over mode in a precessing triaxial ellipsoid. *Physics of Fluids* **22**, 116601. [68, 95, 166]
- CEBRON, D., LE BARS, M., MOUTOU, C. & LE GAL, P. 2011 Elliptical instability in terrestrial planets & moons. *Submitted to Astronomy & Astrophysics* . [195]
- CÉBRON, D., MAUBERT, P. & LE BARS, M. 2010c Tidal instability in a rotating and differentially heated ellipsoidal shell. *Geophys. J. Int* **182**, 1311–1318. [95, 176, 183, 192, 195, 226, 227, 228, 229]
- CÉBRON, D., MOUTOU, C., LE BARS, M., LE GAL, P. & FARÈS, R. 2011 Tidal instability in exoplanetary systems evolution. *EPJ Web of Conferences* **11**, Edited by F. Bouchy ; R. Díaz ; C. Moutou. [193]
- CHABRIER, G. & BARAFFE, I. 2007 Heat transport in giant (exo) planets : a new perspective. *The Astrophysical Journal Letters* **661**, L81. [213]
- CHAMBAT, F. 1994 On the non-existence of some heterogeneous equivalents of ellipsoidal dedekind figures. *Astronomy and Astrophysics* **292**, 76–81. [195]
- CHAMBAT, F., RICARD, Y. & VALETTE, B. 2010 Flattening of the earth : further from hydrostaticity than previously estimated. *Geophysical Journal International* **183** (2), 727–732. [235]
- CHAN, K.H., ZHANG, K., ZOU, J. & SCHUBERT, G. 2001 A non-linear, 3-D spherical [alpha] 2 dynamo using a finite element method. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **128** (1-4), 35–50. [109, 111]
- CHANDRASEKHAR, S. 1965 The equilibrium and the stability of the riemann ellipsoids. i. *The Astrophysical Journal* **142**, 890. [233]
- CHANDRASEKHAR, S. 1966 The equilibrium and the stability of the riemann ellipsoids. ii. *The Astrophysical Journal* **145**, 842. [233]
- CHANDRASEKHAR, S. 1969 Ellipsoidal figures of equilibrium. *Yale University Press ; 1st edition* p. 253p. [231, 233, 234]
- CHARBONNEAU, D., BERTA, Z.K., IRWIN, J., BURKE, C.J., NUTZMAN, P., BUCHHAVE, L.A., LOVIS, C., BONFILS, X., LATHAM, D.W., UDRY, S. *et al.* 2009 A super-earth transiting a nearby low-mass star. *Nature* **462** (7275), 891–894. [188]
- CHELTON, D.B. & SCHLAX, M.G. 1996 Global observations of oceanic rossby waves. *Science* **272** (5259), 234. [12]
- CHERESKIN, TK 1995 Direct evidence for an Ekman balance in the California Current. *J. Geophys. Res* **100** (18), 261–18. [1]

- CHERNOUS'KO, Y.L. 1978 An experimental study of secondary multi-eddy flows in elliptical cylinders. *Izv. Akad. Nauk SSSR FAO* **14**, 151–153. [35]
- CHRISTENSEN, UR 2002 Zonal flow driven by strongly supercritical convection in rotating spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics* **470**, 115–133. [86]
- CHRISTENSEN, UR 2010 Dynamo scaling laws and applications to the planets. *Space science reviews* pp. 1–26. [150]
- CHRISTENSEN, UR & AUBERT, J. 2006 Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophysical Journal International* **166** (1), 97–114. [90, 92, 108, 150, 151, 152, 183, 224]
- CHRISTENSEN, UR, AUBERT, J., CARDIN, P., DORMY, E., GIBBONS, S., GLATZMAIER, GA, GROTE, E., HONKURA, Y., JONES, C., KONO, M. *et al.* 2001 A numerical dynamo benchmark. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **128** (1-4), 25–34. [108, 115, 117, 118, 143]
- CHRISTENSEN, U.R., HOLZWARTH, V. & REINERS, A. 2009 Energy flux determines magnetic field strength of planets and stars. *Nature* **457** (7226), 167–169. [150, 152]
- CHRISTENSEN, U.R. & TILGNER, A. 2004 Power requirement of the geodynamo from ohmic losses in numerical and laboratory dynamos. *Nature* **429** (6988), 169–171. [151]
- CIPOLLINI, P., CROMWELL, D., CHALLENGER, P.G. & RAFFAGLIO, S. 2001 Rossby waves detected in global ocean colour data. *Geophys. Res. Lett* **28** (2), 323–326. [12]
- CLAIRAUT, A.C. 1743 *Theorie de la figure de la terre : tirée des principes de l'hydrostatique*. David fils. [231, 235]
- CLARET, A. & WILLEMS, B. 2002 New results on the apsidal-motion test to stellar structure and evolution including the effects of dynamic tides. *Astronomy and Astrophysics* **388** (2), 518–530. [197]
- CLUNE, T.C., ELLIOTT, JR, MIESCH, MS, TOOMRE, J. & GLATZMAIER, G.A. 1999 Computational aspects of a code to study rotating turbulent convection in spherical shells. *Parallel Computing* **25** (4), 361–380. [109]
- CONSOLMAGNO, GJ, BRITT, DT & MACKE, RJ 2008 The significance of meteorite density and porosity. *Chemie der Erde-Geochemistry* **68** (1), 1–29. [157]
- CORJON, ALEXANDRE, LAPORTE, FLORENT & LEWEKE, THOMAS 2004 Process and device for accelerating the destruction of at least two vortices in the wake of a moving body, particularly an aircraft. *United States Patent 6719246* (10/080407), Assignee : Airbus, France (Toulouse, FR). [3]
- COSTABEL, M. 1991 A coercive bilinear form for maxwell's equations. *Journal of mathematical analysis and applications* **157** (2), 527–541. [111]

- COWLING, TG 1938 On the motion of the apsidal line in close binary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **98**, 734. [193]
- CRAIK, ADD 1989 The stability of unbounded two-and three-dimensional flows subject to body forces : some exact solutions. *Journal of Fluid Mechanics* **198**, 275–292. [35, 49, 169, 196, 233]
- CRAIK, ADD & ALLEN, HR 1992 The stability of three-dimensional time-periodic flows with spatially uniform strain rates. *Journal of Fluid Mechanics* **234**, 613–627. [36]
- CRAIK, ADD & CRIMINALE, WO 1986 Evolution of wavelike disturbances in shear flows : a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **406** (1830), 13–26. [39, 175]
- CROSSLEY, DJ, HINDERER, J. & LEGROS, H. 1991 On the excitation, detection and damping of core modes. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **68** (1-2), 97–116. [12]
- CROW, S.C. 1969 Stability theory for a pair of trailing vortices. Lab., Boeing Scientific Research Labs Seattle Wash Flight Sciences. [3, 4, 35]
- CUNTZ, M., SAAR, S.H. & MUSIELAK, Z.E. 2000 On stellar activity enhancement due to interactions with extrasolar giant planets. *The Astrophysical Journal Letters* **533**, L151. [193]
- D’ALEMBERT 1749 *Recherches sur la précession des equinoxes et sur la mutation de l’axe de la terre dans le système newtonien*. Paris : David. [17]
- DARWIN, G.H. 1906 On the figure and stability of a liquid satellite. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* **206**, 161–248. [234]
- DAUTRAY, R. & LIONS, J.L. 1985 Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. *Collection du Commissariat à l’Energie Atomique. Serie Scientifique, Paris : Masson, 1984-/ c1985* **1**. [111]
- DE VUYST, A. 1965 Sur l’origine du champ magnétique terrestre. *Ciel et Terre* **81**, 257. [99]
- DEDEKIND, R. 1860 Zusatz zu der vorstehenden abhandlung. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1860** (58), 217–228. [233]
- DESJARDINS, B., DORMY, E. & GRENIER, E. 1999 Stability of mixed ekman-hartmann boundary layers. *Nonlinearity* **12**, 181. [13]
- DESJARDINS, B., DORMY, E. & GRENIER, E. 2001 Instability of ekman-hartmann boundary layers, with application to the fluid flow near the core-mantle boundary. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **123** (1), 15–26. [13]

- DESJARDINS, B., DORMY, E. & GRENIER, E. 2004 Boundary layer instability at the top of the earth's outer core. *Journal of computational and applied mathematics* **166** (1), 123–131. [13]
- DIRICHLET, P.G.L. 1860 *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik*. Verlag der Dieterichschen Buchhandlung. [233]
- DONATI, J.F., MOUTOU, C., FARÈS, R., BOHLENDER, D., CATALA, C., DELEUIL, M., SHKOLNIK, E., CAMERON, AC, JARDINE, MM & WALKER, GAH 2008 Magnetic cycles of the planet-hosting star τ bootis. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **385** (3), 1179–1185. [98, 194]
- DORMY, E., VALET, J.P. & COURTILOT, V. 2000 Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosyst* **1** (10), 1037. [109]
- DUCK, PW & FOSTER, MR 2001 Spin-up of homogeneous and stratified fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics* **33** (1), 231–263. [15]
- DUDLEY, ML & JAMES, RW 1989 Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **425** (1869), 407. [101]
- DUGUET, YOHANN 2004 Simulation numérique de l'instabilité hydrodynamique dans un cylindre de gaz tournant soumis à une compression périodique. PhD thesis, École centrale de Lyon. [27]
- DUGUET, Y., SCOTT, JF & LE PENVEN, L. 2005 Instability inside a rotating gas cylinder subject to axial periodic strain. *Physics of Fluids* **17** (11), 114103. [27]
- DUGUET, Y., SCOTT, J.F. & LE PENVEN, L. 2006 Oscillatory jets and instabilities in a rotating cylinder. *Physics of Fluids* **18**, 104104. [27]
- EFIMOV, AB, ZHARKOV, VN, TRUBITSYN, VP & BOBROV, AM 1977 Figure parameters and gravitational moments of jupiter and saturn. *Soviet Astronomy* **21**, 635–640. [231]
- ELOY, CHRISTOPHE 2000 Instabilité mutipolaire de tourbillons. PhD thesis, Université Aix-Marseille II. [25, 26, 37, 220]
- ELOY, C. & LE DIZÈS, S. 2001 Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field. *Physics of Fluids* **13**, 660. [36, 40, 61]
- ELOY, C., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2000 Experimental study of the multipolar vortex instability. *Physical Review Letters* **85** (16), 3400–3403. [36, 39, 59, 60, 64]
- ELOY, C., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2003 Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* **476**, 357–388. [36, 39, 48, 61, 131, 133, 135]
- ELSASSER, W.M. 1946 Induction Effects in Terrestrial Magnetism Part II. The Secular Variation. *Physical Review* **70** (3-4), 202–212. [101]

- ESPINOSA LARA, F. & RIEUTORD, M. 2007 The dynamics of a fully radiative rapidly rotating star enclosed within a spherical box. *Astronomy and Astrophysics* **470** (3), 1013–1022. [196]
- EULER, L. 1749 Recherches sur la precession des equinoxes et sur la nutation de l’axe de la terre. *Mem. acad. sci. Berlin (Reprinted in Euler, L. Opera Omnia, Series I, vol. 27, p. 236-252.)* **5**, 203–221. [17]
- FABIJONAS, B.R. & HOLM, D.D. 2003 Mean effects of turbulence on elliptic instability in fluids. *Physical review letters* **90** (12), 124501. [83, 89]
- FABIJONAS, B.R. & HOLM, D.D. 2004a Craik–Criminale solutions and elliptic instability in nonlinear-reactive closure models for turbulence. *Physics of Fluids* **16**, 853. [83]
- FABIJONAS, B.R. & HOLM, D.D. 2004b Euler–poincaré formulation and elliptic instability for nth-gradient fluids. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **37**, 7609. [36]
- FALLER, A.J. 1963 An experimental study of the instability of the laminar ekman boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* **15** (04), 560–576. [13]
- FALLER, A.J. 1991 Instability and transition of disturbed flow over a rotating disk. *Journal of Fluid Mechanics* **230**, 245–269. [13]
- FARES, R., DONATI, J.F., MOUTOU, C., BOHLENDER, D., CATALA, C., DELEUIL, M., SHKOLNIK, E., CAMERON, AC, JARDINE, MM & WALKER, GAH 2009 Magnetic cycles of the planet-hosting star τ bootis-ii. a second magnetic polarity reversal. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **398** (3), 1383–1391. [98, 194]
- FARES, R., DONATI, J.F., MOUTOU, C., JARDINE, MM, GRIESSMEIER, J.M., ZARKA, P., SHKOLNIK, EL, BOHLENDER, D., CATALA, C. & CAMERON, AC 2010 Searching for star–planet interactions within the magnetosphere of hd 189733. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **406** (1), 409–419. [98]
- FASSO, F. & LEWIS, D. 2001 Stability properties of the riemann ellipsoids. *Archive for rational mechanics and analysis* **158** (4), 259–292. [233]
- FEARN, DR 1998 Hydromagnetic flow in planetary cores. *Reports on Progress in Physics* **61**, 175. [149]
- FERRAZ-MELLO, S., RODRÍGUEZ, A. & HUSSMANN, H. 2008 Tidal friction in close-in satellites and exoplanets : The darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **101** (1), 171–201. [234]
- FILIPPI, S., RUFFINI, R. & SEPULVEDA, A. 1996 On the implications of the nth-order virial equations for heterogeneous and concentric jacobi, dedekind, and riemann ellipsoids. *The Astrophysical Journal* **460**, 762. [195]

- FILIPPI, S., RUFFINI, R. & SEPULVEDA, A. 2002 Functional approach to the problem of self-gravitating systems : Conditions of integrability. *Physical Review D* **65** (4), 044019. [195]
- FORSTER, GK & CRAIK, ADD 1996 The stability of three-dimensional time-periodic flows with ellipsoidal stream surfaces. *Journal of Fluid Mechanics* **324** (-1), 379–391. [36]
- FOURNIER, A. 2004 *Incompressible Fluid Flows in Rapidly Rotating Cavities*. Princeton University. [109]
- FOURNIER, A., BUNGE, H.P., HOLLERBACH, R. & VILOTTE, J.P. 2005 A Fourier-spectral element algorithm for thermal convection in rotating axisymmetric containers. *Journal of Computational Physics* **204** (2), 462–489. [109]
- FRIEDLANDER, S. & VISHIK, M.M. 1991 Instability criteria for the flow of an inviscid incompressible fluid. *Physical review letters* **66** (17), 2204–2206. [39, 175]
- FUKUMOTO, Y. & HATTORI, Y. 2003 Linear stability of a vortex ring revisited. *Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics* pp. 37–48. [26]
- FUKUMOTO, Y. & HATTORI, Y. 2005 Curvature instability of a vortex ring. *Journal of Fluid Mechanics* **526**, 77–115. [26]
- FUKUMOTO, Y. & HIROTA, M. 2008 Elliptical instability of a vortex tube and drift current induced by it. *Physica Scripta* **2008**, 014041. [59]
- FUKUMOTO, Y., HIROTA, M. & MIE, Y. 2010 Lagrangian approach to weakly nonlinear stability of elliptical flow. *Physica Scripta* **2010**, 014049. [59]
- FULLER, M. & CISOWSKI, S.M. 1987 Lunar paleomagnetism. *Geomagnetism, Vol. 2, p. 307-455* **2**, 307–455. [147]
- FULTZ, D. 1959 a Note on Overstability and the Elastoid-Inertia Oscillations of Kelvin, Solberg, and Bjerknæs. *Journal of Atmospheric Sciences* **16**, 199–208. [21]
- GAILITIS, A., LIELAUSIS, O., PLATACIS, E., DEMENT'EV, S., CIFERSONS, A., GERBETH, G., GUNDRUM, T., STEFANI, F., CHRISTEN, M. & WILL, G. 2001 Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment. *Physical Review Letters* **86** (14), 3024–3027. [102]
- GANS, R.F. 1970 On the precession of a resonant cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **41** (04), 865–872. [21]
- GANS, R.F. 1984 Dynamics of a near-resonant fluid-filled gyroscope. *AIAA journal* **22** (10), 1465–1471. [12]
- GARG, SC, FURUMOTO, N. & VANYO, JP 1986 Spacecraft nutational instability prediction by energy-dissipation measurements. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **9**, 357–362. [12]

- GARRICK-BETHELL, I., WEISS, B.P., SHUSTER, D.L. & BUZ, J. 2009 Early lunar magnetism. *science* **323** (5912), 356. [147, 164]
- GARRICK-BETHELL, I., WISDOM, J. & ZUBER, M.T. 2006 Evidence for a past high-eccentricity lunar orbit. *Science* **313** (5787), 652. [153]
- GIRAULT, V. & RAVIART, P.A. 1986 Finite element methods for navier-stokes equations : theory and algorithms. *NASA STI/Recon Technical Report A* **87**, 52227. [111]
- GISSINGER, C. 2009 A numerical model of the VKS experiment *Eur. Phys. Lett* **87**, 39002. [114]
- GLATZMAIER, G.A. 1988 Numerical simulations of mantle convection : Time-dependent, three-dimensional, compressible, spherical shell. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **43** (2), 223–264. [102]
- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P.H. 1995a A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **91** (1-3), 63–75. [108]
- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P.H. 1995b A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* **377**, 203–209. [97, 102, 108]
- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P.H. 1996a An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection. *Physica D : Nonlinear Phenomena* **97** (1-3), 81–94. [108]
- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P.H. 1996b On the magnetic sounding of planetary interiors. *Physics of the earth and planetary interiors* **98** (3-4), 207–220. [108]
- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P.H. 1996c Rotation and magnetism of earth’s inner core. *Science* **274** (5294), 1887. [108]
- GLATZMAIER, G.A. & ROBERTS, P.H. 1997 Simulating the geodynamo. *Contemporary physics* **38** (4), 269–288. [108]
- GLEDZER, EB, DOLZHANSKII, FV, OBUKHOV, AM & PONOMAREV, VM 1976 An experimental and theoretical study of the stability of motion of a liquid in an elliptical cylinder. *Academy of Sciences, USSR, Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics* **11**, 617–622. [35]
- GLEDZER, EB, NOVIKOV, Y.V., OBUKHOV, AM & CHUSOV, MA 1974 An investigation of the stability of liquid flows in a three-axis ellipsoid. *Izv. Acad. Sci. USSR Atmos. Oceanic Phys* **10**, 69–71. [35, 37]
- GLEDZER, EB, OBUKHOV, AM & PONOMAREV, VM 1977 Stability of liquid motion in vessels of elliptical section. *Fluid Dynamics* **12** (1), 11–18. [23, 35, 38]

- GLEDZER, EB & PONOMAREV, VM 1978 Finite-dimensional approximation of the motions of an incompressible fluid in an ellipsoidal cavity. *Academy of Sciences, USSR, Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics* **13**, 565–569. [217]
- GLEDZER, EB & PONOMAREV, VM 1992 Instability of bounded flows with elliptical streamlines. *Journal of Fluid Mechanics* **240** (-1), 1–30. [35, 48, 49, 50, 221, 222]
- GOLD, T. & SOTER, S. 1969 Atmospheric tides and the resonant rotation of venus. *Icarus* **11** (3), 356–366. [193]
- GOLDREICH, P.M. & MITCHELL, J.L. 2010 Elastic ice shells of synchronous moons : Implications for cracks on europa and non-synchronous rotation of titan. *Icarus* **209** (2), 631–638. [169, 170, 185, 186, 187]
- GOLDREICH, P. & PEALE, S. 1966 Spin-orbit coupling in the solar system. *The Astrophysical Journal* **71**, 425–438. [156]
- GOODMAN, J. 1993 A local instability of tidally distorted accretion disks. *The Astrophysical Journal* **406**, 596–613. [33, 36, 194]
- GÖRTLER, H. 1944 Einige Bemerkungen uber Stromungen in rotierenden Flussigkeiten. *ZAMM* **24**, 210–214. [11, 14]
- GÖRTLER, H. 1957 On forced oscillations in rotating fluids. In *Proceedings*, p. 1. [11, 14]
- GRAFTIEAUX, LAURENT 2003 Étude expérimentale de l’instabilité d’un cylindre de gaz tournant soumis à une compression périodique. PhD thesis, Ecole centrale de Lyon. [27]
- GRAFTIEAUX, L., LE PENVEN, L., SCOTT, JF & GROSJEAN, N. 2002 A new parametric instability in rotating cylinder flow. *Advances in Turbulence IX (ed. IP Castro & PE Hancock)*. CIMNE, Barcelona, Spain . [27]
- GRASSET, O., SOTIN, C. & DESCHAMPS, F. 2000 On the internal structure and dynamics of titan. *Planetary and Space Science* **48** (7-8), 617–636. [185]
- GREENBERG, R. 2009 Frequency dependence of tidal q. *The Astrophysical Journal Letters* **698**, L42. [179]
- GREENBERG, R., HOPPA, G.V., BART, G. & HURFORD, T. 2003 Tidal stress patterns on europa’s crust. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **87** (1), 171–188. [172]
- GREENHILL, AG 1879 On the rotation of a liquid ellipsoid about its mean axis. In *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, , vol. 3, pp. 233–246. [35]
- GREENSPAN, HP 1968 *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press. [5, 14, 15, 21, 53, 64, 73, 121, 150, 166, 169]
- GREENSPAN, HP & HOWARD, LN 1963 On a time-dependent motion of a rotating fluid. *Journal of fluid mechanics* **17** (03), 385–404. [15]

- GREFF-LEFFTZ, M., MÉTIVIER, L. & BESSE, J. 2010 Dynamic mantle density heterogeneities and global geodetic observables. *Geophysical Journal International* **180** (3), 1080–1094. [214]
- GREFF-LEFFTZ, M., METIVIER, L. & LEGROS, H. 2005 Analytical solutions of love numbers for a hydrostatic ellipsoidal incompressible homogeneous earth. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **93** (1), 113–146. [171, 214]
- GU, P.G. & SUZUKI, T.K. 2009 Thermal response of a solar-like atmosphere to an electron beam from a hot jupiter : A numerical experiment. *The Astrophysical Journal* **705**, 1189. [193]
- GUERMOND, J.L., LAGUERRE, R., LÉORAT, J. & NORE, C. 2007 An interior penalty galerkin method for the mhd equations in heterogeneous domains. *Journal of Computational Physics* **221** (1), 349–369. [110, 111]
- GUILLOT, T. & SHOWMAN, AP 2002 Evolution of "51 pegasus b-like" planets. *Astronomy and Astrophysics* **385** (1), 156–165. [213]
- GUIMBARD, D., LE DIZÈS, S., LE BARS, M., LE GAL, P. & LEBLANC, S. 2010 Elliptic instability of a stratified fluid in a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **660**, 240–257. [36, 179, 195, 227]
- GUYODO, Y., RICHTER, C. & VALET, J.P. 1999 Paleointensity record from pleistocene sediments (1.4–0 ma) off the california margin. *Journal of geophysical research* **104** (B10), 22953–22. [100]
- GUYODO, Y. & VALET, JP 1999a Global changes in geomagnetic intensity during the past 800 thousand years. *Nature* **399**, 249–252. [100]
- GUYODO, Y. & VALET, J.P. 1999b Integration of volcanic and sedimentary records of paleointensity : Constraints imposed by irregular eruption rates. *Geophysical research letters* **26** (24), 3669–3672. [100]
- GUYON, E., HULIN, JP & PETIT, L. 2001 Hydrodynamique Physique, Inter Editions/Éditions du CNRS (1991), nouvelle édition revue et augmentée. *EDP Sciences/CNRS Éditions* . [5, 7]
- HAJ-HARIRI, H. & HOMSY, GM 1997 Three-dimensional instability of viscoelastic elliptic vortices. *Journal of Fluid Mechanics* **353**, 357–381. [36]
- HALEKAS, JS, LIN, RP & MITCHELL, DL 2003 Magnetic fields of lunar multi-ring impact basins. *Meteoritics & Planetary Science* **38** (4), 565–578. [149]
- HAND, K.P. & CHYBA, C.F. 2007 Empirical constraints on the salinity of the european ocean and implications for a thin ice shell. *Icarus* **189** (2), 424–438. [185]
- HARDER, H. & HANSEN, U. 2005 A finite-volume solution method for thermal convection and dynamo problems in spherical shells. *Geophysical Journal International* **161** (2), 522–532. [109, 111, 115, 117, 118]

- HATTORI, Y. & FUKUMOTO, Y. 2003 Short-wavelength stability analysis of thin vortex rings. *Physics of Fluids* **15**, 3151. [26]
- HEJDA, P. & RESHETNYAK, M. 2003 Control volume method for the dynamo problem in the sphere with the free rotating inner core. *Studia geophysica et geodaetica* **47** (1), 147–159. [109]
- HEJDA, P. & RESHETNYAK, M. 2004 Control volume method for the thermal convection problem in a rotating spherical shell : test on the benchmark solution. *Studia Geophysica et Geodaetica* **48** (4), 741–746. [109]
- HELLBERG, C.S. & ORSZAG, S.A. 1988 Chaotic behavior of interacting elliptical instability modes. *Physics of Fluids* **31**, 6. [59]
- HERREMAN, WIETZE 2009 Instabilité elliptique sous champ magnétique et dynamo d’ondes inertielles. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I. [11, 227]
- HERREMAN, W., CEBRON, D., LE DIZÈS, S. & LE GAL, P. 2010 Elliptical instability in rotating cylinders : liquid metal experiments under imposed magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics* **661**, 130–158. [52, 129, 131, 133, 143, 206]
- HERREMAN, W., LACAZE, L., LE BARS, M., LE DIZÈS, S. & LE GAL, P. 2006 Magnetic dipole induction by the spin-over mode of the elliptic instability in a rotating liquid metal sphere . [129]
- HERREMAN, W., LE BARS, M. & LE GAL, P. 2009 On the effects of an imposed magnetic field on the elliptical instability in rotating spheroids. *Physics of Fluids* **21**, 046602. [33, 36, 40, 55, 65, 119, 121, 125, 133, 170, 175, 177, 178, 181, 184, 186, 187, 213, 223]
- HERREMAN, W. & LESAFFRE, P. 2011 Stokes drift dynamos. *Journal of Fluid Mechanics* **1** (-1), 1–26. [129]
- HERZENBERG, A. 1958 Geomagnetic dynamos. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **250** (986), 543. [101]
- HESTHAVEN, JS & WARBURTON, T. 2004 High–order nodal discontinuous galerkin methods for the maxwell eigenvalue problem. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **362** (1816), 493. [111]
- HIKIDA, H. & WIECZOREK, M.A. 2007 Crustal thickness of the Moon : New constraints from gravity inversions using polyhedral shape models. *Icarus* **192** (1), 150–166. [156, 157]
- HINDMARSH, A.C., BROWN, P.N., GRANT, K.E., LEE, S.L., SERBAN, R., SHUMAKER, D.E. & WOODWARD, C.S. 2005 SUNDIALS : Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **31** (3), 363–396. [42]

- HOLLERBACH, R. & KERSWELL, RR 1995 Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows. *Journal of Fluid Mechanics* **298**, 327–339. [43, 59, 178, 222]
- HOLSAPPLE, K.A. & HOUSEN, K.R. 2007 A crater and its ejecta : An interpretation of Deep Impact. *Icarus* **187** (1), 345–356. [156]
- HOOD, L.L. & ARTEMIEVA, N.A. 2008 Antipodal effects of lunar basin-forming impacts : Initial 3D simulations and comparisons with observations. *Icarus* **193** (2), 485–502. [147]
- HORED T, G.P. 2004 *Polytropes : applications in astrophysics and related fields*. Springer Netherlands. [197]
- HOUGH, SS 1895 The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* **186**, 469–506. [20, 35, 52, 217]
- HUSSMANN, H. & SPOHN, T. 2004 Thermal-orbital evolution of io and europa. *Icarus* **171** (2), 391–410. [185]
- ISKAKOV, AB, DESCOMBES, S. & DORMY, E. 2004 An integro-differential formulation for magnetic induction in bounded domains : boundary element-finite volume method. *Journal of Computational Physics* **197** (2), 540–554. [110, 111]
- JACKSON, DD 1975 Classical electrodynamics, 848 pp. *John Wiley & Sons, New York* **7**, 1. [103]
- JACOBI, CGJ 1834 Ueber die figur des gleichgewichts. *Annalen der Physik* **109** (8-16), 229–233. [232]
- JEANS, JH 1917 The part played by rotation in cosmic evolution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **77**, 186–199. [234]
- JEANS, J.H. 1919 *Problems of cosmogony and stellar dynamics*. University Press. [234]
- JEANS, JH 1929 Astronomy and cosmogony. *Cambridge, England* p. 313. [234]
- JIANG, B.N., WU, J., POVINELLI, L.A., AERONAUTICS, UNITED STATES. NATIONAL & ADMINISTRATION, SPACE 1996 The origin of spurious solutions in computational electromagnetics. *Journal of computational physics* **125** (1), 104–123. [111]
- JIN, J., JIN, J. & JIN, J.M. 1993 *The finite element method in electromagnetics*. Wiley New York. [111]
- JONES, CA 2003 Dynamos in planets. *Stellar Astrophysical Fluid Dynamics* pp. 159–76. [98]
- JONES, C.A. 2011 Planetary and stellar magnetic fields and fluid dynamos. *Annual Review of Fluid Mechanics* **43** (1). [98]

- KABIN, K., COMBI, MR, GOMBOSI, TI, NAGY, AF, DEZEEUW, DL & POWELL, KG 1999 On Europa's magnetospheric interaction- a mhd simulation of the e 4 flyby. *Journal of geophysical research* **104**, 19. [184, 193]
- KAGEYAMA, A. & SATO, T. 1997 Generation mechanism of a dipole field by a magnetohydrodynamic dynamo. *Physical Review E* **55** (4), 4617–4626. [109, 111]
- KAISER, R. & TILGNER, A. 1999 Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor. *Physical Review E* **60** (3), 2949. [113]
- KALADZE, TD & WU, DJ 2006 Nonlinear Rossby wave dynamics in the solar photosphere. *The Astrophysical Journal Letters* **638**, L49. [12]
- KARATEKIN, Ö., VAN HOOLST, T. & TOKANO, T. 2008 Effect of internal gravitational coupling on Titan's non-synchronous rotation. *Geophysical research letters* **35** (16), L16202. [170]
- KELVIN, L. 1880 Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag* **10** (5), 155–168. [11, 21]
- KEMP, N.H. & PETSCHKE, H.E. 1958 Two-dimensional incompressible magnetohydrodynamic flow across an elliptical solenoid. *Journal of Fluid Mechanics* **4** (06), 553–584. [104]
- KERSWELL, RR 1993a Elliptical instabilities of stratified, hydromagnetic waves. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **71** (1), 105–143. [35, 227]
- KERSWELL, RR 1993b The instability of precessing flow. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **72** (1), 107–144. [29, 51, 81, 82, 166, 221]
- KERSWELL, RR 1994 Tidal excitation of hydromagnetic waves and their damping in the Earth. *Journal of Fluid Mechanics* **274** (-1), 219–241. [35, 36, 45, 49, 176, 179, 227]
- KERSWELL, RR 1995 On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers. *Journal of Fluid Mechanics* **298**, 311–325. [13, 14]
- KERSWELL, RR 1996 Upper bounds on the energy dissipation in turbulent precession. *Journal of Fluid Mechanics* **321**, 335–370. [97, 149]
- KERSWELL, RR 1999 Secondary instabilities in rapidly rotating fluids : inertial wave breakdown. *Journal of Fluid Mechanics* **382**, 283–306. [135]
- KERSWELL, R.R. 2002 Elliptical instability. *Annual review of fluid mechanics* **34** (1), 83–113. [23, 24, 33, 35, 38, 52, 58, 59, 166, 176, 221, 223]
- KERSWELL, RR & BARENGHI, CF 1995 On the viscous decay rates of inertial waves in a rotating circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **285**, 203–214. [21]
- KERSWELL, R.R. & MALKUS, W.V.R. 1998 Tidal instability as the source for Io's magnetic signature. *Geophysical Research Letters* **25** (5), 603–606. [33, 36, 64, 95, 145, 166, 167, 170, 177, 179, 184, 185, 186, 187, 204, 205, 213, 225]

- KILGENSTEIN, P.A. 1985 Time dependent three dimensional boundary-layer in an ellipsoidal cavity. *Journal de mécanique théorique et appliquée* **4** (5), 573–588. [24]
- KING, E.M., STELLMACH, S., NOIR, J., HANSEN, U. & AURNOU, J.M. 2009 Boundary layer control of rotating convection systems. *Nature* **457** (7227), 301–304. [91]
- KIPPENHAHN, R. & WEIGERT, A. 1990 *Stellar structure and evolution*, xvi, 468 pp. 192 figs. [198]
- KOBINE, J.J. 1995 Inertial wave dynamics in a rotating and precessing cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **303**, 233–252. [21]
- KONG, D., ZHANG, K. & SCHUBERT, G. 2010 Shapes of two-layer models of rotating planets. *Journal of Geophysical Research* **115** (E12), E12003. [235]
- KONOPLIV, AS, ASMAR, SW, CARRANZA, E., SJOGREN, WL & YUAN, DN 2001 Recent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission. *Icarus* **150** (1), 1–18. [152]
- KONOPLIV, AS, BINDER, AB, HOOD, LL, KUCINSKAS, AB, SJOGREN, WL & WILLIAMS, JG 1998 Improved gravity field of the Moon from Lunar Prospector. *Science* **281** (5382), 1476. [152, 157]
- KOOT, L. & DUMBERRY, M. 2011 Viscosity of the earth’s inner core : Constraints from nutation observations. *Earth and Planetary Science Letters* . [207]
- KOOT, L., DUMBERRY, M., RIVOLDINI, A., DE VIRON, O. & DEHANT, V. 2010 Constraints on the coupling at the core-mantle and inner core boundaries inferred from nutation observations. *Geophysical Journal International* **182** (3), 1279–1294. [207]
- KOOT, L. & DE VIRON, O. 2011 Atmospheric contributions to nutations and implications for the estimation of deep earth’s properties from nutation observations. *Geophysical Journal International* . [207]
- KOPAL, Z. 1960 *Figures of equilibrium of celestial bodies*. Univ. of Wisconsin Pr. [231, 235]
- KOPAL, Z. 1978 *Dynamics of close binary systems*, , vol. 68. Springer. [235]
- KUDLICK, M.D. 1966 On transient motions in a contained, rotating fluid. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology. [21, 43, 178, 222]
- KUHLMANN, H.C. *et al.* 2005 Strained vortices in driven cavities. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **85** (6), 387–399. [28]
- KUHN, JR, ARMSTRONG, JD, BUSH, RI & SCHERRER, P. 2000 Rossby waves on the sun as revealed by solar ‘hills’. *Nature* **405** (6786), 544–546. [12]
- KUMAZAWA, M., YOSHIDA, S., ITO, T. & YOSHIOKA, H. 1994 Archaean-Proterozoic boundary Interpreted as a Catastrophic collapse of the Stable Density Stratification in the Core. *Jour. Gel. Soc. Japan* **100**, 50–59. [83, 92]

- KURSINSKI, ER, HAJJ, GA, BERTIGER, WI, LEROY, SS, MEEHAN, TK, ROMANS, LJ, SCHOFIELD, JT, MCCLEESE, DJ, MELBOURNE, WG, THORNTON, CL *et al.* 1996 Initial results of radio occultation observations of earth's atmosphere using the global positioning system. *Science* **271** (5252), 1107. [12]
- KUSKOV, OL & KRONROD, VA 2005 Internal structure of europa and callisto. *Icarus* **177** (2), 550–569. [185]
- LACAZE, L. 2004 L'instabilité elliptique : exemples en aéronautique et en géophysique. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre. [61, 203]
- LACAZE, L. 2005 Instabilité multipolaire dans un sphéroïde. In *GDR Dynamo - Ondes inertielles (IRPHE)*. IRPHE - Marseille. [61, 62]
- LACAZE, L., BIRBAUD, A.L. & LE DIZÈS, S. 2005a Elliptic instability in a Rankine vortex with axial flow. *Physics of Fluids* **17**, 017101. [36]
- LACAZE, L., HERREMAN, W., BARS, M.L., DIZÈS, S.L. & GAL, P.L. 2006 Magnetic field induced by elliptical instability in a rotating spheroid. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **100** (4), 299–317. [33, 36, 45, 119, 121, 129, 177, 196, 217]
- LACAZE, L., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2004 Elliptical instability in a rotating spheroid. *Journal of Fluid Mechanics* **505**, 1–22. [36, 39, 40, 43, 45, 52, 53, 55, 59, 119, 121, 163, 196, 225]
- LACAZE, L., LE GAL, P. & LE DIZÈS, S. 2005b Elliptical instability of the flow in a rotating shell. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **151** (3-4), 194–205. [36, 39, 40, 59, 84, 90, 131, 176, 178]
- LACAZE, L., RYAN, K. & LE DIZÈS, S. 2007 Elliptic instability in a strained Batchelor vortex. *Journal of Fluid Mechanics* **577**, 341–361. [36, 40]
- LAGRANGE, R. 2009 Dynamique d'un fluide dans un cylindre en précession . [7]
- LAGRANGE, R., ELOY, C., NADAL, F. & MEUNIER, P. 2008 Instability of a fluid inside a precessing cylinder. *Physics of Fluids* **20**, 081701. [29, 40, 75, 135]
- LAGRANGE, ROMAIN, MEUNIER, PATRICE, ELOY, CHRISTOPHE & NADAL, F. 2007 Etude de la stabilité d'un fluide dans un cylindre en précession. *18ème Congrès Français de Mécanique (Grenoble 2007)* . [28]
- LAGRANGE, R., MEUNIER, P., NADAL, F. & ELOY, C. 2011 Precessional instability of a fluid cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **666**, 104–145. [29, 40]
- LAGUERRE, R. 2006 Approximation des équations 3D de la magnétohydrodynamique par une méthode spectrale-éléments finis nodaux. *Résumés des exposés de la 9e Rencontre du Non-Linéaire Paris 2006* p. 45. [113]

- LAI, D., RASIO, F.A. & SHAPIRO, S.L. 1993 Ellipsoidal figures of equilibrium-compressible models. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **88**, 205–252. [234]
- LAINÉY, V., ARLOT, J.E., KARATEKIN, Ö. & VAN HOOLST, T. 2009 Strong tidal dissipation in Io and Jupiter from astrometric observations. *Nature* **459** (7249), 957–959. [153]
- LAMB, H. 1883 On electrical motions in a spherical conductor. *Proceedings of the Royal Society of London* **35** (224-226), 130. [99]
- LANDIN, NR, MENDES, LTS & VAZ, LPR 2009 Combined effects of tidal and rotational distortions on the equilibrium configuration of low-mass, pre-main sequence stars. *Arxiv preprint arXiv :0904.2535* . [197]
- LANDMAN, MJ & SAFFMAN, PG 1987 On the three-dimensional instability of vortices in a viscous fluid. *Phys. Fluids* **30**, 2339–2342. [35, 36]
- LANZA, AF 2009 Hot jupiters and the evolution of stellar angular momentum. *Arxiv preprint arXiv :0912.4585* . [193]
- LANZANO, P. 1982 *Deformations of an elastic earth*, , vol. 31. Academic Pr. [235]
- LAVOREL, G. & LE BARS, M. 2010 Experimental study of the interaction between convective and elliptical instabilities. *Physics of Fluids* **22**, 114101. [83, 91, 150, 176, 183, 192, 195, 226, 227, 228]
- LE BARS, M., LACAZE, L., LE DIZÈS, S., LE GAL, P. & RIEUTORD, M. 2010 Tidal instability in stellar and planetary binary systems. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **178** (1-2), 48–55. [36, 40, 49, 50, 57, 65, 77, 149, 150, 176, 177, 178, 190, 192, 196, 197, 223]
- LE BARS, M. & LE DIZÈS, S. 2006 Thermo-elliptical instability in a rotating cylindrical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **563**, 189–198. [36, 83, 87, 175, 176, 179, 195, 226, 227]
- LE BARS, M., LE DIZÈS, S. & LE GAL, P. 2007 Coriolis effects on the elliptical instability in cylindrical and spherical rotating containers. *Journal of Fluid Mechanics* **585**, 323–342. [36, 49, 77, 131, 133, 176, 177, 196]
- LE BARS, M. & LE GAL, P. 2007 Experimental analysis of the stratorotational instability in a cylindrical Couette flow. *Physical Review Letters* **99** (6), 64502. [89]
- LE DIZÈS, S. 2000 Three-dimensional instability of a multipolar vortex in a rotating flow. *Physics of Fluids* **12**, 2762. [36, 49, 60, 61, 175, 176, 177]
- LE DIZÈS, S. 2008 Inviscid waves on a Lamb–Oseen vortex in a rotating stratified fluid : consequences for the elliptic instability. *Journal of Fluid Mechanics* **597**, 283–303. [36]
- LE DIZÈS, S. & ELOY, C. 1999 Short-wavelength instability of a vortex in a multipolar strain field. *Physics of Fluids* **11**, 500. [23, 24, 25, 28, 36, 60]

- LE DIZÈS, S. & LAPORTE, F. 2002 Theoretical predictions for the elliptical instability in a two-vortex flow. *Journal of Fluid Mechanics* **471**, 169–201. [36]
- LE DIZES, S., ROSSI, M. & MOFFATT, HK 1996 On the three-dimensional instability of elliptical vortex subjected to stretching. *Physics of Fluids* **8** (8), 2084. [36]
- LEBLANC, S. 1997 Stability of stagnation points in rotating flows. *Physics of Fluids* **9**, 3566. [49]
- LEBLANC, S. & CAMBON, C. 1998 Effects of the Coriolis force on the stability of Stuart vortices. *Journal of Fluid Mechanics* **356**, 353–379. [49]
- LEBOVITZ, NR 1966 On riemann’s criterion for the stability of liquid ellipsoids. *The Astrophysical Journal* **145**, 878. [233]
- LEBOVITZ, N.R. & LIFSCHITZ, A. 1996a New global instabilities of the riemann ellipsoids. *The Astrophysical Journal* **458**, 699. [36, 145, 194, 195, 233]
- LEBOVITZ, N.R. & LIFSCHITZ, A. 1996b Short-wavelength instabilities of riemann ellipsoids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **354** (1709), 927. [36, 145, 194, 195, 233]
- LEBOVITZ, N.R. & SALDANHA, K.I. 1999 On the weakly nonlinear development of the elliptic instability. *Physics of Fluids* **11**, 3374. [59]
- LEBOVITZ, N.R. & ZWEIBEL, E. 2004 Magnetoelliptic instabilities. *The Astrophysical Journal* **609**, 301. [179, 194, 195, 227]
- LECONTE, J. 2011 ?? PhD thesis, Center for Astrophysics (CRAL), Ecole Normale Supérieure in Lyon. [235]
- LECONTE, J., CHABRIER, G., BARAFFE, I. & LEVRARD, B. 2010a Is tidal heating sufficient to explain bloated exoplanets? consistent calculations accounting for finite initial eccentricity. *Astronomy and Astrophysics* **516** (A64), 13p. [201, 243]
- LECONTE, J., CHABRIER, G., BARAFFE, I. & LEVRARD, B. 2010b The radius anomaly in the planet/brown dwarf overlapping mass regime. *EPJ Web of Conferences* **11**, Edited by F. Bouchy ; R. Díaz ; C. Moutou. [194, 201, 243]
- LECONTE, J., LAI, D. & CHABRIER, G. 2011 Distorted, non-spherical transiting planets : impact on the transit depth and on the radius determination. *Astronomy & Astrophysics* **528** (A41). [234]
- LÉGER, A., GRASSET, O., FEGLEY, B., CODRON, F., ALBAREDE, AF, BARGE, P., BARNES, R., CANCE, P., CARPY, S., CATALANO, F. *et al.* 2011 The extreme physical properties of the corot-7b super-earth. *Icarus* . [188, 190]
- LESUR, G. & PAPALOIZOU, J.C.B. 2009a On the stability of elliptical vortices in accretion discs. *Arxiv preprint arXiv :0903.1720* . [194]

- LESUR, G. & PAPALOIZOU, J.C.B. 2009*b* The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models. *Arxiv preprint arXiv :0911.0663* . [194]
- LEWEKE, T. & WILLIAMSON, CHK 1998*a* Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *Journal of Fluid Mechanics* **360** (85), 119. [28, 33, 36]
- LEWEKE, T. & WILLIAMSON, CHK 1998*b* Three-dimensional instabilities in wake transition. *European Journal of Mechanics-B/Fluids* **17** (4), 571–586. [33, 36]
- LIFSCHITZ, A. & HAMEIRI, E. 1991 Local stability conditions in fluid dynamics. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* **3**, 2644. [39, 60, 175]
- LINGWOOD, RJ 1997 Absolute instability of the ekman layer and related rotating flows. *Journal of Fluid Mechanics* **331**, 405–428. [13]
- LIOUVILLE, J. 1846 Sur les figures ellipsoïdales à trois axes inégaux, qui peuvent convenir à l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. *Connaiss. de Temps* pp. 85–96. [232]
- LIOUVILLE, J. 1855 Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe. *J. Math. Pures Appl* **20**, 164–184. [232]
- LISSAUER, J.J. 1985 Can cometary bombardment disrupt synchronous rotation of planetary satellites? *Journal of Geophysical Research* **90** (B13), 11289–11. [156, 170]
- LISTER, J.R. & BUFFETT, B.A. 1998 Stratification of the outer core at the core-mantle boundary. *Physics of the earth and planetary interiors* **105** (1-2), 5–19. [92]
- LOPER, D.E. 1975 Torque balance and energy budget for the precessionally driven dynamo. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **11** (1), 43–60. [97, 149]
- LORENZANI, S. 2001 Fluid instabilities in precessing ellipsoidal shells. PhD thesis, Niedersächsische Staats-und Universitätsbibliothek Göttingen. [13, 29, 58]
- LORENZANI, S. & TILGNER, A. 2001 Fluid instabilities in precessing spheroidal cavities. *Journal of Fluid Mechanics* **447**, 111–128. [20, 29, 77, 166]
- LORENZANI, S. & TILGNER, A. 2002 Numerical Simulations of Precession Driven Flow. In *EGS XXVII General Assembly, Nice, 21-26 April 2002*, , vol. 27, p. 272. [29]
- LORENZANI, S. & TILGNER, A. 2003 Inertial instabilities of fluid flow in precessing spheroidal shells. *Journal of Fluid Mechanics* **492**, 363–379. [29, 166]
- LORTZ, D. 1968 Exact solutions of the hydromagnetic dynamo problem. *Plasma Physics* **10**, 967. [101]
- LOVE, AEH 1909 The yielding of the earth to disturbing forces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **82** (551), 73. [214]

- LOVE, A.E.H. 1911 Some problems of geodynamics. *Some Problems of Geodynamics* Publisher : Cambridge University Press, Cambridge, 1911 **1**. [214]
- LOWES, FJ & WILKINSON, I. 1963 Geomagnetic dynamo : a laboratory model. *Nature* **198**. [101]
- LOWES, FJ & WILKINSON, I. 1968 Geomagnetic dynamo : an improved laboratory model. *Nature* **219**, 717–718. [101]
- LUBOW, SH, PRINGLE, JE & KERSWELL, RR 1993 Tidal instability of accretion disks. *The Astrophysical Journal* **419**, 758. [33, 36, 194]
- LUNDGREN, TS & MANSOUR, NN 1996 Transition to turbulence in an elliptic vortex. *Journal of Fluid Mechanics* **307**, 43–62. [40]
- LYRA, W. & KLAHR, H. 2010 The baroclinic instability in the context of layered accretion. self-sustained vortices and their magnetic stability in local compressible unstratified models of protoplanetary disks. *Arxiv preprint arXiv :1011.0497* . [194]
- LYTTLETON, R.A. 1953 *The stability of rotating liquid masses*. CUP Archive. [232]
- MACLAURIN, C. 1742 *A treatise of fluxions : in two books*, , vol. 1. Ruddimans. [232]
- MAGNUS, W. 1966 Winkler,“Hill’Equations”. [37]
- MALKUS, WVR 1963 Precessional torques as the cause of geomagnetism. *Journal of Geophysical Research* **68** (10), 2871–2886. [149]
- MALKUS, WVR 1968 Precession of the Earth as the Cause of Geomagnetism : Experiments lend support to the proposal that precessional torques drive the earth’s dynamo. *Science* **160** (3825), 259. [15, 97, 149]
- MALKUS, W.V.R. 1989 An experimental study of global instabilities due to the tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **48** (1), 123–134. [3, 35, 59, 98, 131, 145, 166, 203]
- MALKUS, W. 1993 Lectures on Solar and Planetary Dynamos (Energy sources for planetary dynamos). [196]
- MALKUS, WVR 1994 Energy sources for planetary dynamos. In *Lectures on solar and planetary dynamos*, , vol. 1, p. 161. [20]
- MANGLIK, A., WICHT, J. & CHRISTENSEN, U.R. 2010 A dynamo model with double diffusive convection for mercury’s core. *Earth and Planetary Science Letters* **289** (3-4), 619–628. [176]
- MASON, DM & KERSWELL, RR 1999 Nonlinear evolution of the elliptical instability : an example of inertial wave breakdown. *Journal of Fluid Mechanics* **396**, 73–108. [36, 40, 59, 205]

- MASON, RM & KERSWELL, RR 2002 Chaotic dynamics in a strained rotating flow : a precessing plane fluid layer. *Journal of Fluid Mechanics* **471**, 71–106. [134]
- MATHEWS, P.M., HERRING, T.A. & BUFFETT, B.A. 2002 Modeling of nutation and precession : new nutation series for nonrigid earth and insights into the earth’s interior. *Journal of Geophysical Research* **107** (B4), 2068. [207]
- MATSUI, H. & OKUDA, H. 2004a Development of a simulation code for MHD dynamo processes using the GeoFEM platform. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* **18** (4), 323–332. [109, 111, 115]
- MATSUI, H. & OKUDA, H. 2004b Treatment of the magnetic field for geodynamo simulations using the finite element method. *Earth, Planets, and Space* **56** (10), 945–954. [109, 111]
- MATSUI, H. & OKUDA, H. 2005 MHD dynamo simulation using the GeoFEM platform : verification by the dynamo benchmark test. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* **19** (1), 15–22. [109, 110, 115, 117, 118]
- MAZEH, T. 2007 Observational evidence for tidal interaction in close binary systems. *Arxiv preprint arXiv :0801.0134* . [193, 197]
- MCALISTER, HA, BRUMMELAAR, T.A., GIES, DR, HUANG, W., BAGNUOLO, WG *et al.* 2005 First results from the CHARA Array. I. An interferometric and spectroscopic study of the fast rotator α Leonis (Regulus). *The Astrophysical Journal* **628**, 439. [45]
- MCEWAN, AD 1970 Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **40** (03), 603–640. [14, 21]
- MEEUS, J. & SAVOIE, D. 1992 The history of the tropical year. *Journal of the British Astronomical Association* **102** (1), 40–42. [17]
- MELCHIOR, P. 1983 The tides of the planet Earth. *Oxford, Pergamon Press, 1983. 653 p. 1.* [214]
- MELCHIOR, P.W., CROSSLEY, D.J., DEHANT, V.P. & DUCARME, B. 1988 *Have inertial waves been identified from the Earth’s core ?*, d. e. smylie & r. hide edn., , vol. Structure and Dynamics of the Earth’s Deep Interior, pp. 1–12. American Geophysical Union. [12]
- MELCHIOR, P. & DUCARME, B. 1986 Detection of inertial gravity oscillations in the earth’s core with a superconducting gravimeter at brussels. *Physics of the earth and planetary interiors* **42** (3), 129–134. [12]
- MELOSH, HJ 1975 Large impact craters and the moon’s orientation. *Earth and Planetary Science Letters* **26** (3), 353–360. [155, 182]
- MEUNIER, P., ELOY, C., LAGRANGE, R. & NADAL, F.C.O. 2008 A rotating fluid cylinder subject to weak precession. *Journal of Fluid Mechanics* **599**, 405–440. [21, 75]

- MEUNIER, P. & LEWEKE, T. 2003 Analysis and minimization of errors due to high gradients in particle image velocimetry. *Exp. Fluids* **35** (5), 408–421. [76]
- MEYER, CO 1842 De aequilibrii formis ellipsoidicis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1842** (24), 44–59. [232]
- MEYER, J. & WISDOM, J. 2010 Precession of the lunar core. *Icarus* . [154]
- MICHEL, L. 1975 Les brisures spontanées de symétrie en physique. *Le Journal de Physique Colloques* **36** (C7), 7–7. [232]
- MIE, Y. & FUKUMOTO, Y. 2010 Weakly nonlinear saturation of stationary resonance of a rotating flow in an elliptic cylinder. *Journal of Math-for-Industry* **2** (A), 27–37. [59]
- MIYAZAKI, T. 1993 Elliptical instability in a stably stratified rotating fluid. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* **5**, 2702. [35, 49]
- MIYAZAKI, T. & FUKUMOTO, Y. 1992 Three-dimensional instability of strained vortices in a stably stratified fluid. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* **4**, 2515. [35, 176, 177]
- MIZERSKI, KA & BAJER, K. 2009 The magnetoelliptic instability of rotating systems. *Journal of Fluid Mechanics* **632** (-1), 401–430. [179, 194, 195, 227]
- MIZERSKI, KA & BAJER, K. 2011 The influence of magnetic field on short-wavelength instability of riemann ellipsoids. *Physica D : Nonlinear Phenomena* . [195, 227]
- MONCHAUX, R., BERHANU, M., BOURGOIN, M., MOULIN, M., ODIER, P., PINTON, J.F., VOLK, R., FAUVE, S., MORDANT, N., PÉTRÉLIS, F. *et al.* 2007 Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium. *Physical review letters* **98** (4), 44502. [102]
- MONK, P. 2003 *Finite element methods for Maxwell's equations*. Oxford University Press, USA. [112]
- MOORE, DW 1971 Structure of a line vortex in an imposed strain. *Aircraft wake turbulence and its detection* . [3]
- MOORE, DW & SAFFMAN, PG 1974 A note on the stability of a vortex ring of small cross-section. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **338** (1615), 535–537. [3]
- MOORE, DW & SAFFMAN, PG 1975 The instability of a straight vortex filament in a strain field. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **346** (1646), 413. [3, 35]
- MORIZE, C., LE BARS, M., LE GAL, P. & TILGNER, A. 2009 Etude expérimentale des implications des marées dans les systèmes planétaires. *Résumés des exposés de la 12e Rencontre du Non-Linéaire Paris* p. 55. [55, 56]

- MORIZE, C., LE BARS, M., LE GAL, P. & TILGNER, A. 2010 Experimental Determination of Zonal Winds Driven by Tides. *Physical review letters* **104** (21), 214501. [15, 166]
- MORRISON, JA & MORGAN, GW 1956 *The slow motion of a disc along the axis of a viscous, rotating liquid*. Division of Applied Mathematics, Brown University. [10, 13]
- MORRISON, PJ, LEBOVITZ, N.R. & BIELLO, J.A. 2009 The hamiltonian description of incompressible fluid ellipsoids. *Annals of Physics* **324** (8), 1747–1762. [233]
- MULARIE, WM 2000 Department of defense world geodetic system 1984, its definition and relationships with local geodetic systems. *National Geospatial-Intelligence Agency, Tech. Rep.* . [152]
- MUNK, W. & WUNSCH, C. 1998 Abyssal recipes ii : energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Research Part I* **45** (12), 1977–2010. [182]
- MURRAY, C.D. & DERMOTT, S.F. 1999 *Solar system dynamics*. Cambridge Univ Pr. [231]
- NAING, M.M. & FUKUMOTO, Y. 2009 Local instability of an elliptical flow subjected to a Coriolis Force. *Journal of the Physical Society of Japan* **78** (12), 124401. [82, 221]
- NÉDÉLEC, J.C. 1980 Mixed finite elements in r3. *Numer. Math* **35**, 315–341. [111]
- NÉDÉLEC, J.C. 1986 A new family of mixed finite elements in r3. *Numer. Math* **50** (1), 57–81. [111]
- NEEDHAM, J. & LU, G.D. 1985 *Trans-Pacific echoes and resonances : listening once again*. World Scientific Pub Co Inc. [99]
- NETTELMANN, N., FORTNEY, JJ, KRAMM, U. & REDMER, R. 2010 Thermal evolution and interior models of the transiting super-earth gj 1214b. *Arxiv preprint arXiv :1010.0277* . [190]
- NEUBERG, J., HINDERER, J. & ZÜRN, W. 1987 Stacking gravity tide observations in central europe for the retrieval of the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free-wobble. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **91** (3), 853–868. [12]
- NEWTON, I. 1687 *Philosophiae naturalis principia mathematica. For an English translation, see eg IB Cohen and A. Whitman (University of California Press, Berkeley, 1999). In particular, see the Scholium on absolute motion therein* . [19, 171, 231, 234]
- NOIR, J. 2000 Ecoulement d'un fluide dans une cavité en précession : approches numériques et expérimentales. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, Grenoble 1. [70]
- NOIR, J., CALKINS, MA, LASBLEIS, M., CANTWELL, J. & AURNOU, JM 2010 Experimental study of libration-driven zonal flows in a straight cylinder. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* . [22, 64]

- NOIR, J., CARDIN, P., JAULT, D. & MASSON, J.P. 2003 Experimental evidence of non-linear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid. *Geophysical Journal International* **154** (2), 407–416. [21, 69, 71, 72, 74, 75, 77]
- NOIR, J., CÉBRON, D., LE BARS, M. & AURNOU, J.M. 2011 Zonal flow and elliptical instability in librating non-axisymmetric containers. *Submitted to Physics of the Earth and Planetary Interiors* . [170]
- NOIR, J., HEMMERLIN, F., WICHT, J., BACA, SM & AURNOU, JM 2009 An experimental and numerical study of librationally driven flow in planetary cores and subsurface oceans. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **173** (1-2), 141–152. [20, 22, 166, 184, 185]
- NOIR, J., JAULT, D. & CARDIN, P. 2001 Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low Ekman number. *Journal of Fluid Mechanics* **437**, 283–299. [15, 20, 77]
- NORE, C., LÉORAT, J., GUERMOND, J.L. & LUDDENS, F. 2011 Nonlinear dynamo action in a precessing cylindrical container. *Physical Review E* **In press**. [109]
- O'BRIEN, D.P., GEISSLER, P. & GREENBERG, R. 2002 A melt-through model for chaos formation on europa. *Icarus* **156** (1), 152–161. [187]
- OGILVIE, G.I. & LIN, DNC 2004 Tidal dissipation in rotating giant planets. *The Astrophysical Journal* **610**, 477. [166]
- OGILVIE, GI & LIN, DNC 2007 Tidal dissipation in rotating solar-type stars. *The Astrophysical Journal* **661**, 1180. [166]
- OSER, HJ 1958 Experimentelle Untersuchung iiber Harmonische Schwingungen in rotierenden Fliissigkeiten. *ZAMM* **88**, 386–391. [14]
- OU, S. 2006 An approximate solver for riemann and riemann-like ellipsoidal configurations. *The Astrophysical Journal* **639**, 549. [195]
- OU, S., TOHLINE, J.E. & LINDBLOM, L. 2004 Nonlinear development of the secular bar-mode instability in rotating neutron stars. *The Astrophysical Journal* **617**, 490. [195]
- OU, S., TOHLINE, J.E. & MOTL, P.M. 2007 Further evidence for an elliptical instability in rotating fluid bars and ellipsoidal stars. *The Astrophysical Journal* **665**, 1074. [40, 145, 193, 195, 201, 206, 233]
- OWEN, JM & ROGERS, RH 1989 Flow and heat transfer in rotating-disc systems, rotor-stator systems, vol. 1. *Research Studies, Taunton, UK and Wiley, New York* . [75]
- PAIS, MA & LE MOUËL, JL 2001 Precession-induced flows in liquid-filled containers and in the Earth's core. *Geophysical Journal International* **144** (3), 539–554. [20]

- PAPALOIZOU, J. & PRINGLE, JE 1978 Non-radial oscillations of rotating stars and their relevance to the short-period oscillations of cataclysmic variables. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **182**, 423–442. [12]
- PARENT, B., SHNEIDER, M.N. & MACHERET, S.O. 2010 Generalized ohm's law and potential equation in computational weakly-ionized plasmadynamics. *Journal of Computational Physics* . [104]
- PAULSEN, K.D. & LYNCH, D.R. 1991 Elimination of vector parasites in finite element maxwell solutions. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on* **39** (3), 395–404. [111]
- PEALE, SJ 1977 Rotation histories of the natural satellites. In *IAU Colloq. 28 : Planetary Satellites*, , vol. 1, pp. 87–111. [159]
- PÉTRÉLIS, F. 2002 Effet dynamo : Etudes des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. [107, 108]
- PIERREHUMBERT, RT 1986 Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Physical review letters* **57** (17), 2157–2159. [35, 36, 38, 40]
- PLUNIAN, F. & MASSE, P. 1996 An optimal preconditioned scheme for fe modelisation of kinematic mhd dynamo effect. In *ECCOMAS conference on numerical methods in engineering*, pp. 1029–1034. [110]
- POINCARÉ, R. 1910 Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astr.* **27**, 321. [20, 21, 35, 52, 69, 70, 77, 166, 204, 217]
- PONOMARENKO, Y.B. 1973 Theory of the hydromagnetic generator. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **14** (6), 775–778. [102, 112]
- PONT, F. 2009 Empirical evidence for tidal evolution in transiting planetary systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **396** (3), 1789–1796. [194]
- POTYLITSIN, PG & PELTIER, WR 1999 Three-dimensional destabilization of Stuart vortices : the influence of rotation and ellipticity. *Journal of Fluid Mechanics* **387**, 205–226. [49]
- PROUDMAN, I. 1956 The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *Journal of Fluid Mechanics* **1** (05), 505–516. [10, 13]
- PURUCKER, M.E. & NICHOLAS, J.B. 2010 Global spherical harmonic models of the internal magnetic field of the Moon based on sequential and coestimation approaches. *Journal of Geophysical Research (Planets)* **115** (E14), 12007. [148]
- RACZ, J.P. & SCOTT, J.F. 2008a Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. Part 1. Linear theory. *Journal of Fluid Mechanics* **595**, 265–290. [27]

- RACZ, J.P. & SCOTT, J.F. 2008b Parametric instability in a rotating cylinder of gas subject to sinusoidal axial compression. Part 2. Weakly nonlinear theory. *Journal of Fluid Mechanics* **595**, 291–321. [27]
- RACZ, JEAN-PHILIPPE 2006 Instabilité paramétrique dans un cylindre de gaz en rotation soumis à la compression périodique d'un piston. PhD thesis, École centrale de Lyon. [27]
- RAMBAUX, N. & WILLIAMS, JG 2011 The moon's physical librations and determination of their free modes. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* pp. 1–16. [20]
- RHINES, P.B. 1986 Vorticity dynamics of the oceanic general circulation. *Annual review of fluid mechanics* **18** (1), 433–497. [1]
- RIEMANN, B. 1860 Untersuchungen uber die bewegung eines flussigen gleich-artigen ellipsoides. *Abh. d. K onigl. Gesell. der Wiss. zu G ottingen* **9**, 3–36. [233]
- RIEUTORD, M. 1991 Linear theory of rotating fluids using spherical harmonics part II, time-periodic flows. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **59** (1), 185–208. [22]
- RIEUTORD, M. 1992 Ekman circulation and the synchronization of binary stars. *Astronomy and Astrophysics* **259**, 581–584. [196]
- RIEUTORD, M. 1995 Inertial modes in the liquid core of the Earth. *Physics of The Earth and Planetary Interiors* **91** (1-3), 41–46. [12]
- RIEUTORD, M. 1997 *Une introduction à la dynamique des fluides : cours avec exercices corrigés*. Masson. [5]
- RIEUTORD, M. 2000 A note on inertial modes in the core of the Earth. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **117** (1-4), 63–70. [12, 166]
- RIEUTORD, M. 2003 Evolution of rotation in binaries : physical processes. *Stellar Rotation, Proceedings of IAU Symposium No. 215, held 11-15 November, 2002 in Cancun, Yucatan Edited by Andre Maeder and Philippe Eenens* (215), San Francisco : Astronomical Society of the Pacific, 2004., p.394. [33, 57, 145, 193, 195, 241]
- RIEUTORD, M. 2008a The dynamics of rotating fluids and binary stars. *EAS Publications Series* **29**, 127–147. [196]
- RIEUTORD, M. 2008b The solar dynamo. *Comptes Rendus Physique* **9** (7), 757–765. [198]
- RIEUTORD, M. & NOUI, K. 1999 On the analogy between gravity modes and inertial modes in spherical geometry. *The European Physical Journal B* **9** (4), 731–738. [10]
- RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 1997 Inertial waves in a rotating spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **341**, 77–99. [11]
- RIEUTORD, M. & VALDETTARO, L. 2010 Viscous dissipation by tidally forced inertial modes in a rotating spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* **643**, 363–394. [166]

- RIEUTORD, M. & ZAHN, J.P. 1997 Ekman Pumping and Tidal Dissipation in Close Binaries : A Refutation of Tassoul's Mechanism. *The Astrophysical Journal* **474**, 760. [196]
- ROBERTS, GO 1972 Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **271** (1216), 411. [101]
- ROBERTS, P.H. 1967 *An introduction to magnetohydrodynamics*. American Elsevier Pub. Co. [105]
- ROBERTS, PH & GUBBINS, D. 1987 Origin of the main field : kinematics. *Geomagnetism, Vol. 2, p. 185-249* **2**, 185–249. [97]
- ROBINSON, AC & SAFFMAN, PG 1984 Three-dimensional stability of an elliptical vortex in a straining field. *Journal of Fluid Mechanics* **142** (-1), 451–466. [35]
- ROCHE, E 1850 La figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. *Académie des sciences de Montpellier* **1**, 243–262. [234]
- ROCHESTER, MG, JACOBS, JA, SMYLIE, DE & CHONG, KF 1975 Can precession power the geomagnetic dynamo? *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **43** (3), 661–678. [97, 149]
- RODRIGUES, S.B. & DE LUCA, J. 2009 Weakly nonlinear analysis of short-wave elliptical instability. *Physics of Fluids* **21**, 014108. [59]
- ROESNER, KG & SCHMIEG, H. 1980 Instabilities of spin-up and spin-down flows inside of liquidfilled ellipsoids. In *Proc. Colloque Pierre Curie*, pp. 1–5. [35]
- ROSS, MN & SCHUBERT, G. 1989 Evolution of the lunar orbit with temperature-and frequency-dependent dissipation. *Journal of Geophysical Research* **94** (B7), 9533–9544. [153, 180]
- ROY, C., SCHAEFFER, N., LE DIZÈS, S. & THOMPSON, M. 2008 Stability of a pair of co-rotating vortices with axial flow. *Physics of Fluids* **20**, 094101. [40]
- RYU, D. & GOODMAN, J. 1994 Nonlinear evolution of tidally distorted accretion disks : Two-dimensional simulations. *The Astrophysical Journal* **422**, 269–288. [33, 36, 194]
- SASAO, T., OKUBO, S. & SAITO, M. 1980 A simple theory on dynamical effects of stratified fluid core upon nutational motion of the Earth. In *Nutation and the Earth's Rotation*, , vol. 78, p. 165. [207]
- SAURET, ALBAN 2009 Instabilité centrifuge d'un écoulement de taylor-couette elliptique. Master's thesis, École Normale Supérieure de Lyon. [16]
- SAURET, A., CÉBRON, D., LE BARS, M. & LE DIZÈS, S. 2011a Zonal flow driven by viscous coupling in a librating cylinder. *Physics of Fluids* . [22]

- SAURET, A., CÉBRON, D., MORIZE, C., LE BARS, M. *et al.* 2010 Experimental and numerical study of mean zonal flows generated by librations of a rotating spherical cavity. *Journal of Fluid Mechanics* **662**, 260–268. [22, 64, 166, 171]
- SAURET, A., LE DIZÈS, S. & LE BARS, M. 2011*b* Zonal driven flow in a spherical shell. *Journal of Fluid Mechanics* . [22, 23]
- SCHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2005 Rossby-wave turbulence in a rapidly rotating sphere. *Nonlinear Processes in Geophysics* **12** (6), 947. [12]
- SCHUBERT, G., ANDERSON, J., ZHANG, K., KONG, D. & HELLED, R. 2011 Shapes and gravitational fields of rotating two-layer maclaurin ellipsoids : Application to planets and satellites. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* . [235]
- SEYED-MAHMOUD, B., HENDERSON, G. & ALDRIDGE, K. 2000 A numerical model for elliptical instability of the Earth's fluid outer core. *Physics of The Earth and Planetary Interiors* **117** (1-4), 51–61. [40]
- SHIDA, T. & MATSUYAMA, M. 1912 Change of the plumb line referred to the axis of the earth as found from the results of the international latitude observations. *Memoirs of the College of Science and Engineering* **4**, 277–284. [214]
- SHOWMAN, AP & GUILLOT, T. 2002 Atmospheric circulation and tides of "51 pegasus b-like" planets. *Astronomy and Astrophysics* **385** (1), 166–180. [213]
- SHU-HUA, L. 1954 Origine de la boussole 11. aimant et boussole. *Isis* **45** (2), 175–196. [99]
- SIPP, D. 2000 Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb–Oseen vortex. *Physics of Fluids* **12**, 1715. [59]
- SIPP, D. & JACQUIN, L. 1998 Elliptic instability in two-dimensional flattened Taylor–Green vortices. *Physics of Fluids* **10**, 839. [40]
- SIPP, D., LAUGA, E. & JACQUIN, L. 1999 Vortices in rotating systems : Centrifugal, elliptic and hyperbolic type instabilities. *Physics of Fluids* **11**, 3716. [49]
- SLOUDSKY, T. 1895 *De la rotation de la terre supposée fluide à son intérieur*. [20]
- SOHL, F., HUSSMANN, H., SCHWENTKER, B., SPOHN, T. & LORENZ, RD 2003 Interior structure models and tidal Love numbers of Titan. *J. Geophys. Res* **108** (10.1029). [185]
- SOTO, J., PLUNIAN, F. & MASSE, P. 1998 A finite element-spectral formulation for the kinematic mhd dynamo problem. *Computational fluid dynamics'98* pp. 803–808. [110]
- SPADA, G. 2008 Alma, a fortran program for computing the viscoelastic love numbers of a spherically symmetric planet. *Computers & Geosciences* **34** (6), 667–687. [214]

- SPADA, G., BARLETTA, VR, KLEMANN, V., RIVA, REM, MARTINEC, Z., GASPERINI, P., LUND, B., WOLF, D., VERMEERSEN, LLA & KING, MA 2011 A benchmark study for glacial isostatic adjustment codes. *Geophysical Journal International* . [214]
- STANLEY, S. & MOHAMMADI, A. 2008 Effects of an outer thin stably stratified layer on planetary dynamos. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **168** (3-4), 179–190. [94]
- STEGMAN, D.R., JELLINEK, A.M., ZATMAN, S.A., BAUMGARDNER, J.R. & RICHARDS, M.A. 2003 An early lunar core dynamo driven by thermochemical mantle convection. *Nature* **421** (6919), 143–146. [147]
- STERNE, T.E. 1939 Apical motion in binary stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **99**, 451–462. [235]
- STEWARTSON, K. 1957 On almost rigid rotations. *Journal of Fluid Mechanics* **3**, 17–26. [10, 13, 14]
- STEWARTSON, K. 1959 On the stability of a spinning top containing liquid. *Journal of Fluid Mechanics* **5** (04), 577–592. [12]
- STEWARTSON, K. 1966 On almost rigid rotations. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics* **26** (01), 131–144. [10, 13]
- STEWARTSON, K. 1972 On trapped oscillations in a slightly viscous rotating fluid. *Journal of Fluid Mechanics* **54** (04), 749–761. [13]
- STEWARTSON, K. & ROBERTS, PH 1963 On the motion of liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *Journal of fluid mechanics* **17** (01), 1–20. [14, 21]
- STIEGLITZ, R. & MÜLLER, U. 2001 Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Physics of Fluids* **13**, 561. [102]
- SUN, D., MANGES, J., YUAN, X. & CENDES, Z. 1995 Spurious modes in finite-element methods. *Antennas and Propagation Magazine, IEEE* **37** (5), 12–24. [111]
- SURNITA, I. & YOSHIDA, S. 2003 Thermal interactions between the mantle, outer and inner cores, and the resulting structural evolution of the core . [92, 183]
- SUTTON, G.W. & SHERMAN, A. 1965 Engineering magnetohydrodynamics . [104]
- TAKAHASHI, F. & TSUNAKAWA, H. 2009 Thermal core-mantle coupling in an early lunar dynamo : Implications for a global magnetic field and magnetosphere of the early Moon. *Geophysical Research Letters* **36** (24), L24202. [147]
- TARDUNO, J.A., COTTRELL, R.D., WATKEYS, M.K. & BAUCH, D. 2007 Geomagnetic field strength 3.2 billion years ago recorded by single silicate crystals. *Nature* **446** (7136), 657–660. [99]

- TARDUNO, J.A., COTTRELL, R.D., WATKEYS, M.K., HOFMANN, A., DOUBROVINE, P.V., MAMAJEK, E.E., LIU, D., SIBECK, D.G., NEUKIRCH, L.P. & USUI, Y. 2010 Geodynamo, solar wind, and magnetopause 3.4 to 3.45 billion years ago. *Science* **327** (5970), 1238. [99]
- TASSOUL, J.L. 1987 On synchronization in early-type binaries. *The Astrophysical Journal* **322**, 856–861. [196]
- TASSOUL, J.L. 1995 On orbital circulation in late-type close binaries. *The Astrophysical Journal* **444**, 338–341. [196]
- TASSOUL, J.L. & TASSOUL, M. 1990 A time-dependent model for synchronization in close binaries. *The Astrophysical Journal* **359**, 155–163. [196]
- TASSOUL, J.L. & TASSOUL, M. 1992a A comparative study of synchronization and circularization in close binaries. *The Astrophysical Journal* **395**, 259–267. [196]
- TASSOUL, M. & TASSOUL, J.L. 1992b On the efficiency of ekman pumping for synchronization in close binaries. *The Astrophysical Journal* **395**, 604–611. [196]
- TASSOUL, M. & TASSOUL, J.L. 1997 On synchronization in detached close binaries : Reply to rieutord and zahn. *The Astrophysical Journal* **481**, 363. [196]
- THESS, A. & ZIKANOV, O. 2007 Transition from two-dimensional to three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics* **579**, 383–412. [33, 119]
- THOMSON, D.J. 2009 Climate change : Shifts in season. *Nature* **457** (7228), 391–392. [17]
- TILGNER, A. 1998 On Models of Precession Driven Core Flow. *Studia Geophysica et Geodaetica* **42** (3), 232–238. [128, 129]
- TILGNER, A. 1999a Driven inertial oscillations in spherical shells. *Physical Review E* **59** (2), 1789–1794. [22]
- TILGNER, A. 1999b Magnetohydrodynamic flow in precessing spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics* **379**, 303–318. [20]
- TILGNER, A. 1999c Precession driven flow in spheroidal shells. *Habilitationsschrift* . [70]
- TILGNER, A. 2000 Oscillatory shear layers in source driven flows in an unbounded rotating fluid. *Physics of Fluids* **12**, 1101. [14]
- TILGNER, A. 2005 Precession driven dynamos. *Physics of Fluids* **17**, 034104. [29, 81, 97, 108, 129, 149, 150]
- TILGNER, A. 2007a Kinematic dynamos with precession driven flow in a sphere. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **101** (1), 1–9. [149, 150]
- TILGNER, A. 2007b Zonal wind driven by inertial modes. *Physical review letters* **99** (19), 194501. [166]

- TILGNER, A. & BUSSE, FH 1997 Finite-amplitude convection in rotating spherical fluid shells. *Journal of Fluid Mechanics* **332** (-1), 359–376. [92]
- TILGNER, A. & BUSSE, FH 2001 Fluid flows in precessing spherical shells. *Journal of Fluid Mechanics* **426**, 387–396. [20, 29, 77]
- TODHUNTER, I. 1873 *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth from the Time of Newton to that of Laplace*. Macmillan. [231]
- TOUMA, J. & WISDOM, J. 1994 Evolution of the Earth-Moon system. *The Astronomical Journal* **108**, 1943–1961. [57]
- TSAL, C.Y. & WIDNALL, S.E. 1976 The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *Journal of Fluid Mechanics* **73** (04), 721–733. [3, 35]
- VALENCIA, D., IKOMA, M., GUILLOT, T. & NETTELMANN, N. 2010 Composition and fate of short-period super-earths : The case of corot-7b. *A & A* **516** (A20). [188]
- VAN HOOLST, T., RAMBAUX, N., KARATEKIN, Ö. & BALAND, R.M. 2009 The effect of gravitational and pressure torques on titan’s length-of-day variations. *Icarus* **200** (1), 256–264. [170]
- VAN HOOLST, T., RAMBAUX, N., KARATEKIN, Ö., DEHANT, V. & RIVOLDINI, A. 2008 The librations, shape, and icy shell of europa. *Icarus* **195** (1), 386–399. [170, 171, 235]
- VAN HOOLST, T., SOHL, F., HOLIN, I., VERHOEVEN, O., DEHANT, V. & SPOHN, T. 2007 Mercury’s interior structure, rotation, and tides. *Space science reviews* **132** (2), 203–227. [181]
- VANYO, JP 1991 A geodynamo powered by luni-solar precession. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **59** (1), 209–234. [20]
- VANYO, J.P. 2001 *Rotating fluids in engineering and science*. Dover Pubns. [12]
- VANYO, J., WILDE, P., CARDIN, P. & OLSON, P. 1995 Experiments on precessing flows in the Earth’s liquid core. *Geophysical Journal International* **121** (1), 136–142. [20]
- VERHILLE, G. 2010 Études expérimentales en magnétohydrodynamique : effet dynamo, turbulence et induction. PhD thesis, Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON. [140]
- VERHILLE, G., PLIHON, N., BOURGOIN, M., ODIER, P. & PINTON, J.F. 2010 Induction in a von kármán flow driven by ferromagnetic impellers. *New Journal of Physics* **12**, 033006. [137]
- VINE, F.J. & MATTHEWS, D.H. 1963 Magnetic anomalies over oceanic ridges. *Nature* **199** (4897), 947–949. [99]

- VLADIMIROV, VA & IL'IN, KI 1988 Three-dimensional instability of an elliptic Kirchhoff vortex. *Fluid Dynamics* **23** (3), 356–360. [35]
- VLADIMIROV, VA, RYBAK, L.Y. & TARASOV, VF 1983a An experimental and theoretical investigation of the stability of a linear vortex with a deformed core. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **24** (3), 337–345. [35]
- VLADIMIROV, VA, TARASOV, VF & RYBAK, L.I. 1983b The stability of the elliptically deformed rotation of an ideal incompressible fluid in a Coriolis force field. *Akademiia Nauk SSSR Fizika Atmosfery i Okeana* **19**, 586–594. [35, 49]
- VLADIMIROV, VA & VOSTRETSOV, DG 1986 Instability of steady flows with constant vorticity in vessels of elliptic cross-section* 1. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **50** (3), 279–285. [35]
- VOLAKIS, J.L., CHATTERJEE, A. & KEMPEL, L.C. 1998 *Finite element method for electromagnetics : antennas, microwave circuits, and scattering applications*. Wiley-IEEE Press. [111]
- WAGNER, F.W., SOHL, F., RÜCKRIEMEN, T. & RAUER, H. 2011 Physical state of the deep interior of the corot-7b exoplanet. *Arxiv preprint arXiv :1105.1271* . [188]
- WAHR, JM, ZUBER, MT, SMITH, DE & LUNINE, JI 2006 Tides on europa, and the thickness of europa's icy shell. *J. Geophys. Res* **111**. [185]
- WALEFFE, F. 1989 The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence. *PhD Thesis* . [35, 36, 37, 59]
- WALEFFE, F. 1990 On the three-dimensional instability of strained vortices. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* **2**, 76. [3, 10, 35, 36, 37, 38, 195]
- WALTON, IC 1975 Viscous shear layers in an oscillating rotating fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **344** (1636), 101–110. [14]
- WANG, C.Y. 1970 Cylindrical tank of fluid oscillating about a state of steady rotation. *Journal of Fluid Mechanics* **41** (03), 581–592. [22, 23, 64]
- WEBB, DJ 1982 Tides and the evolution of the Earth-Moon system. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **70** (1), 261–271. [153, 180]
- WEBER, R.C., LIN, P.Y., GARNERO, E.J., WILLIAMS, Q. & LOGNONNÉ, P. 2011 Seismic Detection of the Lunar Core. *Science* **331** (6015), 309. [153, 156]
- WEDEMEYER, EH 1964 The unsteady flow within a spinning cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* **20** (03), 383–399. [15]
- WICHT, J. & TILGNER, A. 2010 Theory and modeling of planetary dynamos. *Space science reviews* pp. 1–42. [83, 145, 193, 195]

- WIDNALL, S.E., BLISS, D.B. & TSAI, C.Y. 1974 The instability of short waves on a vortex ring. *Journal of Fluid Mechanics* **66** (01), 35–47. [3, 35]
- WIDNALL, SE, BLISS, D. & ZALAY, A. 1971 Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair. *Aircraft wake turbulence and its detection* pp. 305–338. [3]
- WIECZOREK, MA, JOLLIFF, BL, KHAN, A., PRITCHARD, ME, WEISS, BP, WILLIAMS, JD, HOOD, LL, RIGHTER, K., NEAL, CR, SHEARER, CK *et al.* 2006a New views of the moon. *Rev. Min. Geochem* **60**, 221–364. [153, 156]
- WIECZOREK, M.A., JOLLIFF, B.L., KHAN, A., PRITCHARD, M.E., WEISS, B.P., WILLIAMS, J.G., HOOD, L.L., RIGHTER, K., NEAL, C.R., SHEARER, C.K. *et al.* 2006b The constitution and structure of the lunar interior. *Reviews in mineralogy and geochemistry* **60** (1), 221. [147, 153]
- WIECZOREK, M.A. & LE FEUVRE, M. 2009 Did a large impact reorient the Moon? *Icarus* **200** (2), 358–366. [149, 155, 156, 157, 182]
- WIECZOREK, M.A. & PHILLIPS, R.J. 1999 Lunar multiring basins and the cratering process. *Icarus* **139** (2), 246–259. [156]
- WILHELMS, DE, MCCAULEY, JF & TRASK, NJ 1987 The Geologic History of the Moon, US Geol. Surv. Prof. Pap **1348**, 302. [148]
- WILLIAMS, G.E. 1994 Resonances of the fluid core for a tidally decelerating Earth : cause of increased plume activity and tectonothermal reworking events? *Earth and Planetary Science Letters* **128** (3-4), 155–167. [92]
- WILLIAMS, G.E. 2000 Geological constraints on the Precambrian history of Earth's rotation and the Moon's orbit. *Reviews of Geophysics* **38** (1), 37–59. [57, 153, 180]
- WILLIAMS, GE 2004 The paradox of proterozoic glaciomarine deposition, open seas and strong seasonality near the palaeo-equator : global implications. *The Precambrian Earth : Tempos and Events. Developments in Precambrian Geology* **12**, 448–459. [153, 180]
- WILLIAMS, JG, BOGGS, DH & RATCLIFF, JT 2010 Lunar Fluid Core Moment. In *Lunar and Planetary Institute Science Conference Abstracts*, , vol. 41, p. 2336. [153]
- WILLIAMS, J.G., BOGGS, D.H., YODER, C.F., RATCLIFF, J.T. & DICKEY, J.O. 2001 Lunar rotational dissipation in solid body and molten core. *Journal of geophysical research* **106** (E11), 27933–27. [150, 151, 152, 161, 170]
- WILLIAMS, PE, HATHAWAY, DH & CUNTZ, M. 2007 Solar rossby wave 'hills' identified as supergranules. *The Astrophysical Journal* **662**, L135–L138. [12]
- WILSON, C. 1987 D'alembert versus euler on the precession of the equinoxes and the mechanics of rigid bodies. *Archive for history of exact sciences* **37** (3), 233–273. [17]

- WINN, J.N., FABRYCKY, D., ALBRECHT, S. & JOHNSON, J.A. 2010 Hot stars with hot jupiters have high obliquities. *The Astrophysical Journal Letters* **718**, L145. [194]
- WINN, J.N., MATTHEWS, J.M., DAWSON, R.I., FABRYCKY, D., HOLMAN, M.J., KALLINGER, T., KUSCHNIG, R., SASSELOV, D., DRAGOMIR, D., GUENTHER, D.B. *et al.* 2011 A super-earth transiting a naked-eye star. *Arxiv preprint arXiv :1104.5230* . [188, 190]
- WOOD, WW 1965 Properties of inviscid, recirculating flows. *Journal of Fluid Mechanics* **22** (02), 337–346. [14]
- WOOD, WW 1966 An oscillatory disturbance of rigidly rotating fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **293** (1433), 181–212. [14]
- WU, C.C. & ROBERTS, P.H. 2009 On a dynamo driven by topographic precession. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* **103** (6), 467–501. [29, 108, 109, 149, 150]
- YODER, CF & HUTCHISON, R. 1981 The Free Librations of a Dissipative Moon [and Discussion]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **303** (1477), 327. [151]
- ZAGLMAYR, S. 2006 High order finite element methods for electromagnetic field computation. *Doktorarbeit, Johannes Kepler Universität Linz* . [105]
- ZHANG, K., CHAN, K.I.T.H. & LIAO, X. 2011 On fluid motion in librating ellipsoids with moderate equatorial eccentricity. *Journal of Fluid Mechanics* **1**, 1–12. [64]
- ZHANG, K., EARNSHAW, P., LIAO, X. & BUSSE, FH 2001 On inertial waves in a rotating fluid sphere. *Journal of Fluid Mechanics* **437**, 103–119. [11]
- ZHANG, KEKE, LIAO, XINHAO & EARNSHAW, PAUL 2004 On inertial waves and oscillations in a rapidly rotating spheroid. *Journal of Fluid Mechanics* **504**, 1–40. [11, 73, 74]
- ZHARKOV, VN & TRUBITSYN, VP 1976 Fifth-approximation system of equations for the theory of figure. *Soviet Astronomy* **19**, 366–372. [231]
- ZHARKOV, V.N. & TRUBITSYN, VP 1980 The physics of planetary interiors. *Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1980. 448 p. In Russian.* **1**. [231, 235]
- ZIMMER, C., KHURANA, K.K. & KIVELSON, M.G. 2000 Subsurface oceans on europa and callisto : Constraints from galileo magnetometer observations. *Icarus* **147** (2), 329–347. [184, 185, 193]

