

UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGÉNIERIE POUR L'INFORMATION



Laboratoire Mathématiques, Images et Applications



THÈSE présentée par :

Agathe CHOLLET

soutenue le : **7 décembre 2010**
pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université de La Rochelle**
Mention : **Mathématiques et Applications**

Formalismes non classiques pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète

---

JURY :

Gilles Dowek	Professeur, École Polytechnique, Rapporteur
Henry Lombardi	Maître de Conférences HDR, Université de Franche-Comté, Rapporteur
Jean-Pierre Reveillès	Professeur Émérite, Université d'Auvergne, Rapporteur
Jean Petitot	Directeur d'Étude à l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, Examinateur
Michel Berthier	Professeur, Université de La Rochelle, Examinateur
Guy Wallet	Professeur, Université de La Rochelle, Directeur de thèse
Eric Andres	Professeur, Université de Poitiers, Co-directeur de thèse
Laurent Fuchs	Maître de conférences, Université de Poitiers, Encadrant scientifique

Remerciements

Quelques remerciements pour commencer, de convention certes, mais surtout de toutes sincérités et avec ma plus profonde gratitude.

Je débuterai par Guy Wallet, dont les qualités scientifiques et humaines seront toujours un exemple pour moi. Je le remercie de m'avoir appris et fait découvrir de nombreux pans des mathématiques et de la logique. Son soutien, son exigence, son aide précieuse et décisive, ses idées, son encouragement, sa tolérance ont permis l'élaboration et l'accomplissement de cette thèse. Je remercie ensuite Laurent Fuchs pour avoir partagé avec moi sa curiosité scientifique et pour m'avoir tant de fois « emmené dans sa valise ». Il m'a permis de découvrir et m'a enseigné de nombreux domaines scientifiques passionnants. Je le remercie pour l'aventure Coq durant laquelle, avec Nicolas Magaud, nous avons pu tant échanger et partager. Je remercie Eric Andres pour avoir accepté de co-diriger cette thèse, pour m'avoir transmis les connaissances nécessaires en géométrie discrète et pour ses conseils méthodologiques et scientifiques. Je remercie aussi Gaelle Largeteau Skapin pour avoir toujours, et avec beaucoup d'humour et de sympathie, collaboré à ces travaux.

Je tiens sincèrement à remercier les membres de mon jury de thèse. Tout d'abord, mes rapporteurs, Ms. Jean-Pierre Reveillès, Gilles Dowek et Henry Lombardi, j'ai eu le plaisir de les rencontrer à différents moments plus ou moins avancés de ma thèse et leurs remarques, toujours pertinentes, surtout au moment des rapports m'ont beaucoup apporté. Je suis très fière, de par leurs compétences et envergures scientifiques, qu'ils aient accepté de rapporter et critiquer ces travaux. Je remercie Michel Berthier d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Et finalement, je remercie Jean Petitot de me faire l'honneur d'être présent et d'avoir suivi ces travaux.

Je remercie ma région, celle de Poitou-Charentes, pour le financement de ces travaux.

Je remercie l'ensemble des enseignants-chercheurs du laboratoire MIA et du département de mathématiques de l'université de La Rochelle, notamment son directeur, Michel Berthier. Je les remercie pour les cours de qualités qu'ils m'ont donnés ainsi que leurs discussions chaleureuses au quotidien. Une mention particulière pour Christophe Saint-Jean qui a souvent pris le temps de m'aider tant au niveau programmation que dans ses conseils et le partage de ses points de vue. Je n'oublierai pas Christine Sicard, secrétaire du Laboratoire MIA qui, au quotidien, de par sa gentillesse et son efficacité, m'a rendu de nombreux services. Je remercie aussi les membres du laboratoire SIC pour m'avoir accueillie.

Ensuite, mes camarades de classe. Tout d'abord, Sloven, merci pour ton amitié au quotidien, tes discussions astucieuses, ton aide précieuse tant pratique que logistique. Ensuite, je remercie tous mes camarades du MIA, du SIC et d'ailleurs, $\mathcal{C}$harles, **R**omain, Mathéo, José, Benjamin, Guillaume, Aurélie, Baptiste, Stéphane, Luca, Virginie .. pour avoir partagé du savoir et des jolis moments avec moi. Une pensée particulière pour Marc, mon ami poitevin qui a parcouru ces trois années avec moi, de colloques en workshop, de Saint-Dié à Playa del Carmen, de la gare de Poitiers au SIC...

Puis mes compagnons de routes et amis. Tout d'abord, Loulou, à qui je dois beaucoup. Puis,

Benjamin qui a su me faire découvrir de nombreux domaines scientifiques et qui, de par ses discussions éclairées m'a donné goût à la recherche. Je remercie aussi mes amis Delphine et Guillaume pour leurs partages d'idéaux et leurs intérêts constants à mes travaux. Je remercie aussi mes copines Béné et Marion pour leurs précieuses relectures de cette thèse. Je les remercie aussi, ainsi que Wi et Anoul, pour leur partage, depuis bien longtemps, de leurs pensées et leurs passions. Je les remercie toutes les six d'avoir parfois su réduire mes doutes et m'avoir toujours entourée. Je remercie aussi mes co-fondateurs de SYNAPSE, Arnaud, Clémence et Clotilde qui m'ont toujours beaucoup apporté durant ces trois années tant dans la réalisation citoyenne que dans le partage de nos expériences scientifiques. Pour finir, je salue mon ami du vendredi, Léo, ingrédient indispensable à ma sociabilité qui partage depuis quelques années toutes ses considérations artistiques, humaines et humouristiques avec moi.

Je remercie ensuite l'ensemble de ma famille. Ma mère tout d'abord. Celle qui a permis de faire de chacun de nous trois, mon frère, ma soeur et moi, des êtres particulièrement stables et donc, capables de réaliser ce que l'on voulait. Elle nous a donné un amour, une confiance, un temps, une admiration, une éducation dont tout enfant qui le perçoit et le reçoit ne peut être qu'heureux. Mon père ensuite, je le remercie pour le temps passé devant mes cahiers de mathématiques puis pour nos discussions autour de celles-ci. Je le remercie pour avoir guidé et éveillé chacun de mes intérêts majeurs. Je leur dédie à tous les deux cette thèse. Je remercie ensuite ma soeur, Mélanie, qui a eu le bon goût de tout me montrer, notamment une voie que j'ai su suivre par admiration. Je remercie mon petit frère, Valentin, dont l'intelligence non-académique et humaniste saura toujours me rappeler où je dois être. Je remercie mes grands-mères, Mémé et Mamy Lolotte dont l'affection et l'oreille attentive m'ont toujours beaucoup apporté.

Pour finir en beauté, car il l'est, je remercie mon amour Baptiste, dont la douce présence, les qualités d'esprit, les discussions qui en découlent, le soutien, l'exigence à mon égard ... me permettent de découvrir et de réaliser ce que j'aime.

Table des matières

Publications **iii**

0 Introduction **1**
0.1 Préambule . . . 1
0.2 Historique . . . 3
0.3 Présentation du plan . . . 7

1 Deux présentations de la droite d'Harthong-Reeb **11**
1.1 Introduction . . . 11
1.2 La droite d'Harthong-Reeb basée sur une axiomatique nonstandard . . . 11
1.2.1 Arithmétique nonstandard axiomatique . . . 11
1.2.2 Construction de la droite d'Harthong-Reeb . . . 15
1.2.3 Isomorphisme entre $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{R}_{lim}$ . . . 19
1.3 Nouvelle droite d'Harthong-Reeb définie à partir des Ω-nombres . . . 20
1.3.1 Introduction au modèle de Laugwitz-Schmieden . . . 20
1.3.2 Changement d'échelle sur les Ω-Entiers . . . 27
1.3.3 Isomorphisme entre $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ . . . 28
1.3.4 En pratique, sur machine . . . 29

2 Processus d'arithmétisation **31**
2.1 Introduction . . . 31
2.1.1 Arithmétisation directe et ses limites . . . 32
2.2 Arithmétisation d'objets continus du point de vue d'une arithmétique nonstandard axiomatique . . . 33
2.2.1 Description générale du processus d'arithmétisation . . . 33
2.2.2 Exemples d'arithmétisation de courbes . . . 38
2.3 Arithmétisation d'objets continus du point de vue des Ω-Entiers . . . 44
2.3.1 Description du schéma . . . 44
2.3.2 En pratique et illustrations . . . 48
2.4 Conclusion . . . 56

3 Analyse de la constructivité **59**
3.1 Introduction . . . 59
3.2 Logique constructive . . . 60
3.3 Retour sur les définitions de $\mathcal{HR}_\omega$ d'un point de vue constructif . . . 62
3.3.1 Cadre logique de la version axiomatique de l'arithmétique nonstandard utilisée pour définir $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ . . . 63
3.3.2 Cadre logique de la version arithmétique des Ω-nombres utilisée pour définir $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ . . . 65
3.4 La droite d'Harthong-Reeb est-elle constructive ? . . . 68
3.4.1 Définition d'un corps de Heyting-Bridges . . . 68

3.4.2 $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ est un corps de Heyting-Bridges 70
3.4.3 $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ basée sur les Ω-nombres est-il un corps de Heyting-Bridges ? . . . 76
3.5 Esquisse de la formalisation en Coq de la droite d'Harthong-Reeb 82
3.6 Conclusion 83

Conclusion **85**

Publications **87**

Liste des figures **87**

Bibliographie **91**

Chapitre 0

Introduction

0.1 Préambule

Comme cela a été la cas pour la physique, le développement de l'informatique s'est appuyé sur les mathématiques existantes et a entrainé de nouveaux développements mathématiques spécifiques. Plus exactement, outre la majeure partie des travaux qui consiste à développer cette nouvelle science, il a fallu aussi adapter les objets usuels de mathématiques (systèmes numériques, objets et représentations géométriques, etc.). De plus, d'une part, la réflexion sur le calcul informatique redonne de l'importance au point de vue constructif en mathématique. D'autre part, les représentations graphiques fournies par les ordinateurs sur les écrans se font avec des pixels, d'où l'émergence d'une géométrie discrète par essence différente de la géométrie continue.

Ce dernier point se place dans le contexte plus général et plus ancien du conflit entre le discret et le continu. Ces deux notions sont antagonistes et pourtant, non seulement on utilise souvent des représentations discrètes pour décrire des phénomènes continus mais aussi, on a couramment une perception continue d'objets discrets. Dans le premier cas, citons le temps que l'on décompose en secondes ou les distances que l'on scinde en mètres. Dans le second cas, citons un film qui n'est composé que d'images fixes ou encore d'une ligne sur un écran d'ordinateur qui n'est en fait qu'une succession discontinue des pixels allumés. Cette mutabilité entre le discret et le continu est d'ailleurs à l'origine de célèbres paradoxes de Zénon d'Élée tel celui d'Achille et la Tortue.

Les contraintes matérielles des ordinateurs imposent une représentation discrète des objets continus. La définition de cette représentation discrète n'est pas une opération simple, il n'existe pas de processus de discrétisation unique. Même si des objets discrets ont été définis, ils ne possèdent pas les mêmes propriétés que les objets continus qu'ils sont sensés représenter. La géométrie discrète s'est développée pour étudier les propriétés de ces nouveaux objets et leurs relations avec les objets continus dont ils sont issus. À la notion de droite continue correspondent plusieurs définitions de droite discrète aux propriétés relativement différentes.

Une approche de la géométrie discrète dirigée vers l'informatique qui a pris une grande importance dans les vingt dernières années est celle initiée par J.P. Reveillès. Elle est appelée Géométrie Analytique Discrète (DGA). L'origine de cette approche est une définition finitaire de la droite réelle apparue dans le contexte suivant. À la fin des années quatre-vingt, à Strasbourg, un groupe de mathématiciens, dont G. Reeb et J. Harthong a développé une conception nonstandard du continu basée sur les nombres entiers. Plus tard et en particulier dans cette thèse, ce point de vue se formalise sous la forme d'une structure numérique appelée la *droite d'Harthong-Reeb*. Ce système est défini comme l'effet d'un changement d'échelle extrêmement contractant sur des

entiers nonstandard. Il est équivalent, en un certain sens que l'on précisera dans ce travail, au système classique des nombres réels.

La base de l'idée de ce changement d'échelle est l'analyse nonstandard. À son origine, le calcul infinitésimal, comme initié par Leibniz et Newton, fait intervenir le concept d'infinitésimaux, c'est-à-dire des quantités non nulles très petites. Ces infinitésimaux ont été utilisés pour définir la notion de différentiation. Néanmoins, malgré la puissance de ces méthodes, la notion de nombre infinitésimal n'était pas bien définie. Ces nombres, plus petits en valeur absolue que chaque nombre positif mais tout de même différents de zéro, ne satisfont pas toutes les propriétés usuelles des nombres réels. Par exemple, chaque multiple d'un nombre infinitésimal est un nombre infinitésimal, ce qui met en défaut la propriété d'Archimède. Au $19^{\text{ème}}$ siècle cela a conduit au développement de l'approche, maintenant classique, du calcul basé sur la notion de limite définie avec des nombres réels. Ce n'est que beaucoup plus tard, au milieu du $20^{\text{ème}}$ siècle, qu'une approche alternative, l'analyse nonstandard, a été proposée. Son intérêt principal est l'introduction rigoureuse des nombres infiniment grands et petits dans le système des nombres réels.

Ce cadre permet de définir une notion de changement d'échelle sur des nombres entiers nonstandard dont le résultat est ce système discret/continu qu'est la droite d'Harthong-Reeb. Son utilisation en géométrie discrète produit ce que nous appelons le processus d'arithmétisation qui donne des définitions d'objets discrets classiquement définis dans le continu. L'arithmétisation est obtenue en transformant un schéma d'intégration numérique de solutions d'équations différentielles en un schéma « équivalent » arithmétique. Il est intéressant de savoir que ce processus a permis à J.P. Reveillès de définir le concept de droite discrète analytique. Cette notion n'est plus nonstandard mais elle est devenue purement arithmétique. Par la suite, la géométrie analytique discrète s'est largement développée sur cette base.

La méthode d'arithmétisation évoquée ci-dessus donne une représentation de fonctions continues qui est purement algorithmique. Ce fait met en évidence une remarquable propriété de constructivité de cette approche, propriété voulue par les initiateurs (Reeb, Harthong, etc.). Dans ce travail, on se propose d'analyser plus finement la part de constructivité de la droite d'Harthong-Reeb et de proposer un autre cadre nonstandard permettant d'améliorer cette propriété. Autrement dit, on veut exprimer l'arithmétisation et ce sur quoi elle repose, la droite d'Harthong-Reeb, dans un langage mathématique et une logique adaptés à l'informatique. Ce point de vue nous différentie de nos prédécesseurs qui, implicitement, restaient dans le cadre de la logique classique. Pour l'objet qui nous intéresse : la droite d'Harthong-Reeb, le critère de constructivité que nous avons choisi utilise la description par Bridges ([Bridges 1999]) d'un système de nombres réels constructifs.

La première approche de la construction de la droite discrète-continue, par J. Harthong et G. Reeb, a été introduite avec l'aide d'une version axiomatique de l'analyse nonstandard. La limitation majeure de cette approche est que les entiers infiniment grands n'ont qu'un statut axiomatique, ils ne sont donc pas calculables comme les entiers numériques. Une autre théorie nonstandard fournissant des arithmétiques nonstandard qui semble plus constructive est celle des Ω-nombres de Laugwitz et Schmieden.

Les Ω-nombres, et plus précisement les Ω-entiers pour ce qui nous intéresse, sont des suites

d'entiers munies de relations et opérations adaptées. Le rôle des entiers infiniment grands sera naturellement joué par les suites qui tendent vers l'infini. Il s'avère possible de reconstruire une droite d'Harthong-Reeb basée, non pas sur une arithmétique nonstandard axiomatique mais sur ces Ω-entiers.

L'objet de cette thèse est de décrire et d'étudier ces deux versions de la droite d'Harthong-Reeb et les méthodes d'arithmétisation qui en découlent. In fine, on a la volonté d'aboutir à un cadre aussi constructif que possible permettant un transfert complet à l'informatique. Le plan est détaillé dans le paragraphe (0.3).

0.2 Historique

Ce qui est présenté dans cette partie est la liste des articles et autres textes qui, de notre point de vue, sont des contributions importantes qui ont précédé et préparé le présent travail. Les articles sont présentés par ordre chronologique de sorte que soient mises en évidence les idées qui ont conduit à ce système discret-continu. Il a parfois été difficile de trouver les sources, ceci justifie en partie la non exhaustivité de cette liste.

Les termes en italique corrrespondent à des passages ou des termes extraits de l'article en question.

0.2.0.1 Reeb, *La mathématique nonstandard, vieille de soixante ans ?* ([Reeb 1978])

Ce texte commence par l'assertion, devenue slogan dans la suite : « *Les entiers naïfs ne remplissent pas* $\mathbb{N}$ ». Elle signifie d'après l'auteur qu'il n'y a pas de raison que les entiers atteints de manière naïve en partant de 1 et en itérant l'opération d'ajouter 1 remplissent totalement l'*ensemble*[1] $\mathbb{N}$.

Le point de vue nonstandard de l'analyse introduit le qualificatif « naïf » sur les entiers. Cette caractéristique permet de distinguer les entiers que l'on peut atteindre en ajoutant 1 puis 1 puis 1, etc. de ceux qui sont trop grands pour cela (les infiniment grands). Reeb montre quelques propriétés sur cette appellation. Par exemple, si ω est non naïf, alors, tout entier a naïf est inférieur à ω. À partir de cette distinction, il introduit les notions usuelles de l'analyse nonstandard (ANS), c'est-à-dire les infiniment petits (inverses des entiers non naïfs), des relations d'équivalences, etc.

Au sujet de l'aspect constructif des mathématiques, Reeb défend que l'ANS l'est davantage que les mathématiques classiques, en effet, Reeb écrit : *Une légende très répandue et tenace veut que la mathématique nonstandard - par opposition à la mathématique classique - produise souvent des objets, ayant le pur mérite d'exister, mais n'ayant guère vocation à la dignité d'objet naïf (ou palpable). La situation est en fait exactement inverse. En effet, d'une part, la mathématique nonstandard s'est précisement dotée du vocabulaire susceptible de se rapprocher du désir exprimé par la légende ; la mathématique classique ne se soucie aucunement de la distinction naïf* $\Leftrightarrow$ *non naïf. D'autre part, en plus du vocabulaire, la mathématique nonstandard dispose d'une méthode pour dépister des objets naïfs ainsi que le suggère la propriété suivante : Soit* X *un ensemble tel que tout nombre réel infiniment petit* J *vérifie* $J \in X$*, alors, il existe* a*,* b *rationnels naïfs,*

1. Au sens classique de sa définition.

non nuls, $a < b$ tel que $[a/b] \subset X$. Dans un second temps, Reeb montre des exemples d'études d'objets usuels dans une approche d'approximations par des objets simples (typiquement, des fonctions dérivées de l'exponentielle par des fonctions polynomiales). Il introduit ainsi la notion de *loupe* par le changement de variables

$$\omega x = X$$
$$\omega y = Y$$

où ω est un entier non naïf (donc infiniment grand). On voit apparaitre ici le changement d'échelle générateur de la droite d'Harthong-Reeb. Reeb explique, dans le même sens que sa définition, que :

Dans un croquis plan, on ne distingue pas des points infiniment proches (autrement dit, on agit comme si le pouvoir séparateur de l'oeil s'arrête exactement à l'infiniment petit). Il est alors très intéressant d'observer les graphes de certaines fonctions (ou d'autres objets) agrandis ou rapetissés.

Pour finir, il liste les champs d'application de l'ANS : le calcul de probabilités, mécanique des fluides, cosmologie (car cette science manipule des échelles, ayant une hiérarchie complexe certes mais des échelles quand même), les équations différentielles etc..

0.2.0.2 Harthong, *Eléments pour une théorie du continu* ([Harthong 1983])

L'objectif de cette étude est de montrer que si l'on considère vraie la phrase « Les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ », on peut alors retrouver, à partir d'ensembles dénombrables toutes les propriétés du continu.

J. Harthong développe sa théorie du continu discret en introduisant une échelle de grandeur sur les entiers. Après avoir introduit des notions de base de l'analyse nonstandard, il donne un exemple classique d'analyse combinatoire sur $\sqrt{\pi}$ pour illustrer ces notions.

La conclusion porte sur les avantages à utiliser la théorie discrète du continu qu'il développe. Ils sont de deux ordres, tout d'abord la simplicité des objets manipulés : de *vraies* fonctions définies sur les ensembles finis. Puis, comme tout se passe dans des ensembles finis, aucune vérification d'existence n'est nécessaire.

0.2.0.3 Reveillès, *Discrétisation finie de la droite réelle et application à la théorie de l'itérations* ([Reveillès 1985])

J.P. Reveillès présente dans cet article comment définir des modèles discrétisés de segments de droite réelle. C'est le cadre de l'analyse nonstandard qui permet ceci. Le texte présente tout d'abord la définition de la discrétisation du segment unité $[0, 1]$. En effet, en choisissant un entier ω infiniment grand et en adaptant une égalité relative à ω sur les entiers, J.P. Reveillès montre comment on obtient une forme d'équivalence entre le segment unité de $\mathbb{R}$ et ce système. Dans le cas où ω est standard, la structure définie comme telle est une topologie discrète. Dans un second temps, cette définition discrète est étendue à un segment quelconque de $\mathbb{R}$. Puis des propriétés classiques de continuité, dérivabilité, etc., pour ce qui est des fonctions numériques sur cet espace sont prouvées.

La deuxième partie de ce texte traite d'une application de ce système numérique discret / continu.

0.2.0.4 Harthong-Reeb, *Intuitionnisme 84* ([Harthong 1989])

Cet article revient sur le contentieux qui existe depuis le début du $20^{\text{ème}}$ siècle entre mathématiques constructives et mathématiques classiques. Les auteurs, J. Harthong et G. Reeb critiquent l'argumentaire déployé à l'époque et défendent majoritairement l'idée que ces deux formes de mathématiques ne sont pas en opposition mais sont complémentaires.

(...) l'intuitionnisme est plus actuel que jamais ; au fond, c'est simplement la position philosophique de ceux qui ne croient pas qu'on puisse une fois pour toutes enfermer la mathématique dans un dogme figé, que par exemple, l'invention de l'ordinateur, qui est un phénomène technologique et historique, peut modifier la mathématique comme l'usage (par Galilée) de la lunette a transformé la mécanique.

La thèse principalement soutenue par les auteurs est que les mathématiques en tant que science sont constructives. Les mathématiques formelles sont davantage du coté de l'abstraction et de la théorie. Et effet, du fait que les mathématiques constructives donnent une sémantique aux objets qu'elles manipulent, elles ne restent pas dans l'abstrait et le théorique comme les mathématiques formelles.

(...) la richesse d'une science est la confrontation entre la théorie et l'expérience ; dans le cas de la mathématique, (...) c'est la confrontation entre la mathématique formelle et la mathématique constructive qui serait la véritable source de progrès et d'enrichissement pour la mathématique en tant que science.

Les auteurs développent largement l'idée que l'intuitionnisme est proche de la réalité et qu'en ce sens, c'est une science comme les autres. Ils prennent l'exemple de l'arithmétique et distinguent les entiers concrets, qui existent réellement, que l'on peut atteindre par un calcul concret des autres. Ils défendent l'idée selon laquelle la théorie de Peano est trop pauvre pour décrire la réalité arithmétique.

Ce texte, quelque peu éloigné de nos préoccupations car trop « philosophique », offre une description d'un lien inédit entre l'intuitionnisme et les mathématiques nonstandard.

0.2.0.5 Reeb, Reveillès, Troesch, Urlacher, *Equations différentielles et nombres entiers* ([Reeb 1987])

Dans ce travail, les auteurs proposent une *réconciliation entre les équations différentielles et les nombres entiers*. Ceci, malgré le caractère a priori impossible de la démarche puisque les premières appartiennent au monde continu et les secondes au monde discret. La méthode décrite dans cet article pour représenter des objets continus n'utilise que les nombres entiers. Ce qui est mis en valeur ici, c'est que cette méthode fournit des résultats identiques à celle utilisant des calculs sur les nombres flottants mais avec un gain de temps.

Cette méthode, appelée le processus d'arithmétisation, est une technique d'intégration numérique d'équations différentielles uniquement définie avec les nombres entiers. L'unité ou l'échelle de calcul devient un paramètre de l'algorithme, on peut donc la choisir et ainsi décider le degré du précision du tracé. Lorsque cette échelle devient grande, la sortie de l'algorithme est proche de la solution du système continu de départ d'après les propriétés de l'analyse nonstandard.

Différentes équations différentielles sont intégrées ($y' = y$, $y' = y^2 - x$, ...) dans différentes méthodes de résolutions (Euler, Runge-Kutta, ...). Les algorithmes et les résultats y sont détaillés. La méthode générale est appelée *Programme SINUS*.

SINUS est comparé à l'algorithme de tracé d'exponentielles de Bresenham qui, étonnamment pour les auteurs, est identique au premier à quelques nuances de remplacement de divisions/multiplications par des soustractions/additions. Par contre, même si les deux algorithmes ont exactement les même sorties, SINUS est beaucoup plus rapide que l'algorithme de tracé de Bresenham.

0.2.0.6 Diener, *Application du calcul de Harthong-Reeb aux routines graphiques* ([Diener 1992])

Reprenant les idées précédentes, cet article est le premier à mettre en évidence un véritable système numérique avec sa structure algébrique : la droite d'Harthong-Reeb. Il l'applique aux tracés de fonctions continues sur machine. Il reprend les travaux de J.P. Reveillès sur l'application de la droite d'Harthong-Reeb et évoque d'éventuelles applications à des routines graphiques.

L'auteur décrit rigoureusement le processus d'arithmétisation du schéma d'Euler avec son interprétation à l'échelle intermédiaire. Il distingue l'échelle de calcul de l'échelle de tracé. Il en déduit un algorithme de discrétisation de certaines fonctions continues (exponentielles, cercles, fonctions polynomiales, ...).

0.2.0.7 Reveillès, *Mathématiques discrètes et Analyses Non Standard* ([Salanskis 1992])

Ce travail constitue un chapitre du livre de J.M. Salanskis et H. Sinaceur *Le Labyrinthe du Continu*. Comme le nom de cette étude l'indique, l'auteur fait le lien entre l'analyse nonstandard et les mathématiques discrètes qu'il qualifie comme *l'ensemble des techniques mathématiques employées en Informatique ou dans les disciplines voisines plutôt qu'un véritable domaine de Mathématiques*.

L'auteur y fait le lien entre les mathématiques discrètes idéales et le discret classique. Il y explique comment le calcul en nombres entiers, inspiré des mathématiques discrètes idéales est en cohérence avec ce qui est fait classiquement en algorithmique informatique. Par exemple, le fait que la définition des droites discrètes analytiques issue de ces théories coincide avec l'algorithme de Bresenham.

0.2.0.8 Holin, *Harthong-Reeb analysis and digital circles* ([Holin 1991])

L'auteur présente dans ce papier l'application de la méthode d'arithmétisation d'Euler plongée dans la droite d'Harthong-Reeb aux champs de vecteurs et plus spécifiquement aux cercles. Dans la lignée de J.P. Reveillès, il présente des algorithmes pour faire de la représentation graphique. L'auteur donne une description de la droite d'Harthong-Reeb. Partant de schémas numériques appliqués au cercle vu comme solution d'une équation différentielle, il déduit, en passant dans la droite d'Harthong-Reeb, des algorithmes de calcul de cercles discrets. Finalement, il compare son algorithme avec d'autres (Bresenham, Heun, Euler dans les réels) pour en dégager deux avantages. Le premier est que le travail en nombres entiers n'influe pas sur la précision de la sortie graphique par rapport à des algorithmes qui travaillent sur les nombres réels. Le second avantage est que les tableaux de comparaisons de temps d'exécution montrent qu'il est plus rapide de travailler en nombres entiers.

0.2.0.9 Holin, *Artefacts of integers-computed circles* ([Holin 1996])

Cet article décrit, dans un premier temps, le cadre théorique et applicatif du papier précédent. C'est-à-dire qu'il introduit des algorithmes de tracé de cercles à partir du plongement du schéma d'Euler dans la droite d'Harthong-Reeb.

Puis l'auteur décrit des artefacts que l'on peut produire avec ces algorithmes lorsqu'ils ne sont pas appliqués aux objets pour lesquels ils ont été établis. Les trois artefacts décrits sont les *manes*, les overflow / underflows et le moiré. L'objet de l'étude est d'apporter une explication à l'existence de ces phénomènes. Une partie de l'analyse repose sur une présentation nonstandard qui regroupe dans un même halo des pixels distincts, l'autre partie est basée sur une représentation en bits des nombres entiers.

0.2.0.10 Reveillès, Richard, *Back and Forth between Continuous and Discrete for the Computer Scientist* ([Reveillès 1996])

Dans un premier temps, cet article riche et complet traite des fondations d'une approche discrète/continue d'un système numérique pour l'informatique. En utilisant l'analyse nonstandard, les auteurs font la construction d'un système de nombres réels en utilisant uniquement les nombres entiers. Deux applications sur la méthode d'Euler utilisant un pas infiniment petit sont proposées.

Ensuite, les auteurs décrivent les conflits qui existent entre le continu et le discret au sein de l'informatique. Différents exemples autour de problèmes géométriques sont décrits. Le coeur de l'article est la description de la théorie de la géométrie discrète idéale. Découlant du cadre logique de la première partie, elle est à la frontière entre les théories discrètes et les théories continues puisqu'elle ne manipule que des nombres entiers (nonstandard) mais est infiniment proche de la géométrie euclidienne classique.

Finalement, la définition de droite analytique discrète est déduite de la géométrie discrète idéale. Les auteurs montrent comment les objets de la géométrie discrète idéale produisent naturellement des définitions arithmétiques.

0.3 Présentation du plan

Cette thèse se présente en trois chapitres dont l'ordre ne reflète pas la chronologie du travail effectué dans sa préparation. En effet, temporellement, nous avons étudié la droite d'Harthong-Reeb basée sur l'arithmétique nonstandard axiomatique dans sa totalité (modèle, arithmétisation, constructivité). Puis, dans un second temps, nous avons étudié les trois mêmes champs pour la droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-nombres (étude du modèle, de l'Ω-arithmétisation, de la constructivité). Ici, le choix pour le plan a été de regrouper, en trois chapitres, les trois grand thèmes : les deux versions de la droite d'Harthong-Reeb, les processus d'arithmétisation qui en découlent et finalement, l'étude de la constructivité de chacune de ces droites.

Chapitre 1 : Arithmétiques nonstandard et définitions de la droite d'Harthong-Reeb. Le chapitre (1) décrit deux versions de la droite d'Harthong-Reeb, système numérique discret / continu. Comme il s'agit d'un changement d'échelle fortement contractant sur des entiers nonstandard, il nous faudra tout d'abord introduire ces notions d'arithmétiques nonstandard.

- La première version est axiomatique. Elle découle de l'analyse nonstandard développée par Edward Nelson [Nelson 1977] : Internal Set Theory. On ne développe qu'une version minimale suffisante pour construire la droite d'Harthong-Reeb.
- La seconde version est une arithmétique découlant de l'approche de l'analyse nonstandard par Laugwitz et Schmieden [Laugwitz 1992] dans laquelle les nombres standard sont représentés dans le monde des objets mathématiques usuels.

Dans les deux cas, après avoir développé chacune des théories nonstandard précédentes, la droite d'Harthong-Reeb est définie sur celles-ci. On y détaille les relations et opérations adéquates. Enfin, on montre dans quel sens le système défini peut être considéré comme continu.

Chapitre 2 : Processus d'arithmétisation. Le chapitre (2) présente ce que l'on appelle le processus d'arithmétisation. Il s'agit d'un processus de discrétisation d'objets classiquement définis dans le continu. L'idée générale de l'arithmétisation est de plonger un processus de résolution d'équation différentielle (le schéma d'Euler) dans la droite d'Harthong-Reeb et ainsi d'obtenir des équivalents discrets d'entités classiquement définies sur les nombres réels.

Comme ce processus est défini dans le cadre de la droite d'Harthong-Reeb, nous présentons deux versions de ce procédé. La première version est construite à partir des entiers nonstandard axiomatiques. C'est la méthode qui a été initialement définie par G. Reeb, J.P. Reveillès, etc. On montrera d'ailleurs comment cela a conduit à la définition de droite analytique discrète Dans la seconde version, appelée Ω-arithmétisation, basée sur les entiers nonstandard effectifs de Laugwitz et Schmieden, deux nouvelles qualités se dégagent. Le principe de cette méthode est inchangé et le résultat de l'algorithme est formellement le même. Les nouveaux effets sont les suivants :

- L'algorithme opère sur des Ω-nombres d'une manière totalement constructive et ainsi, dans les faits, on peut représenter adéquatement toutes les entités présentes dans la théorie.
- Le résultat de cet algorithme apparaît comme une représentation multi-échelle exacte de fonctions continues sur lesquelles la méthode est appliquée.

Du premier point, on peut déduire que l'implémentation de la méthode n'implique pas des erreurs à l'approximation incontrolée. Le second point est particulièrement intéressant du point de vue de l'imagerie en informatique. Cet aspect multi-échelle est une conséquence directe de l'Ω-arithmétisation : il découle de la nature du paramètre d'échelle ω utilisé dans la méthode. Ce paramètre, un Ω-entier infiniment grand, encode une infinité d'échelles croissantes. Le processus d'arithmétisation donne simultanément une discrétisation de la fonction initiale à chacune de ces échelles. De nos jours, beaucoup de développement en analyse d'images, modélisation géométrique, etc., utilisent des approches multi-échelle et doivent jongler avec des problèmes de précision numérique. L'Ω-arithmétisation est un processus de discrétisation qui a des propriétés intéressantes relativement à ces deux aspects.

Des illustrations sont proposées et expliquées pour différents exemples. Les deux images (1 et 2) représentent deux discrétisations de droite d'équation $y = 3x/5$ pour chacun des processus de discrétisations.

Chapitre 3 : Analyse de la constructivité. Le chapitre (3) traite de la part de constructivité de nos modèles. Cette partie présente dans un premier temps (3.2), d'une manière très brève, les mathématiques constructives. Il s'agit d'en dégager les principales propriétés et d'expliquer

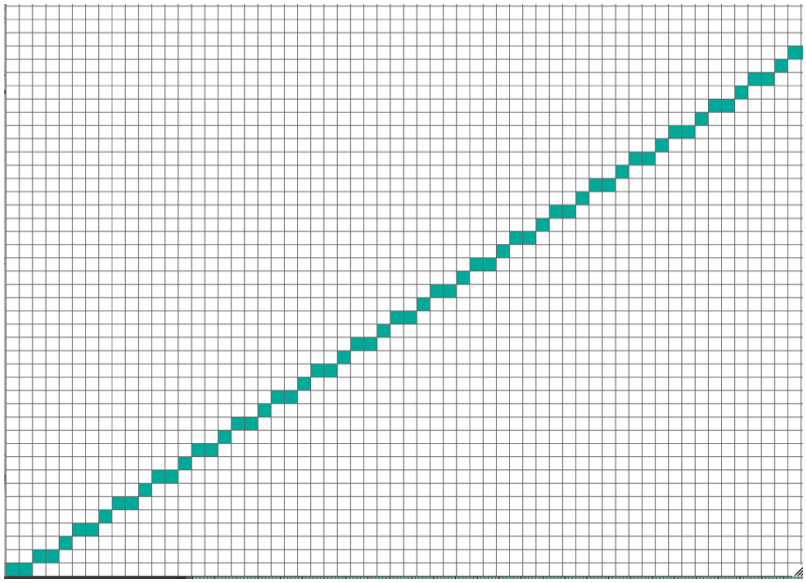


FIGURE 1 – Arithmétisation basée sur l'approche axiomatique de l'arithmétique nonstandard.

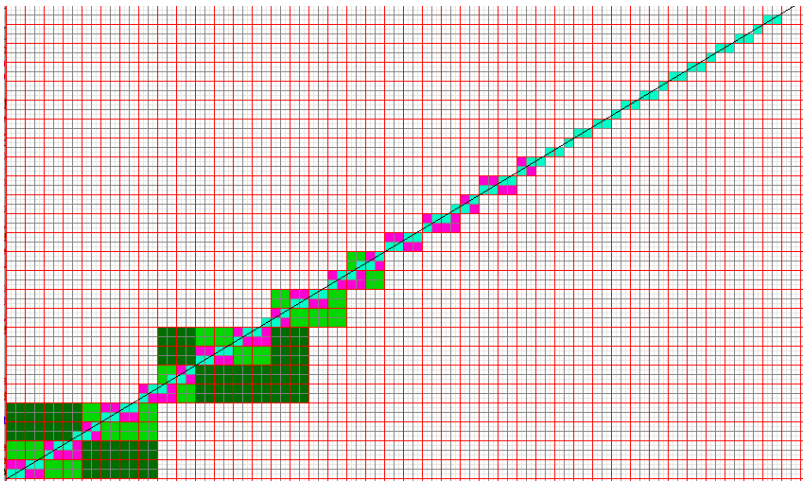


FIGURE 2 – Ω-arithmétisation basée sur l'approche nonstandard de Laugwitz et Schmieden.

pourquoi leur cadre est adapté à nos travaux. L'argument majeur est le lien fort qui existe entre la logique des mathématiques constructives et l'informatique.

Dans un second temps, nous revenons sur les définitions des relations définies dans le chapitre (1) dans le but de les adapter aux mathématiques constructives.

La dernière partie est consacrée : 1) à la présentation de l'axiomatique d'une droite réelle constructive dûe à D. Bridges, 2) à l'analyse des propriétés de nos deux versions de la droite d'Harthong-Reeb en rapport avec cette axiomatique.

Il apparaît d'abord que la droite d'Harthong-Reeb basée sur une axiomatique nonstandard satisfait pleinement les axiomes de Bridges. Son défaut de constructivité tient au statut purement axiomatique des entiers nonstandard et au cadre logique que l'on s'est donné. La recherche d'un système arithmétique nonstandard constructif nous a amené à considérer les entiers de Laugwitz et Schmieden. Mais ceci a eu une conséquence sur la vérification de notre critère de constructivité : l'axiomatique proposée par D. Bridges doit être modifiée pour être vérifiée dans ce cadre. Dans ce sens, c'est un affaiblissement de la constructivité du système obtenu. Néanmoins, on pourrait estimer que cette droite d'Harthong-Reeb constitue une autre forme de continu constructif différente de celle décrite par Bridges.

Chapitre 1

Deux présentations de la droite d'Harthong-Reeb

Sommaire

0.1 Préambule 1
0.2 Historique 3
0.3 Présentation du plan 7

1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour but de présenter la droite d'Harthong-Reeb. Il s'agit d'un système discret / continu résultant d'une forte contraction sur l'ensemble des entiers relatifs. Pour représenter cette notion de « forte contraction », nous utilisons des nombres infiniment grands. Ces derniers sont donnés par l'une ou l'autre des deux versions suivantes de l'arithmétique nonstandard.

La première version est axiomatique. Elle découle de l'analyse nonstandard développée par Edward Nelson ([Nelson 1977]) : Internal Set Theory. On ne développe qu'une version minimale suffisante pour construire la droite d'Harthong-Reeb.

La seconde version est une arithmétique nonstandard découlant du point de vue de Laugwitz et Schmieden ([Laugwitz 1983]). Dans ce cadre, les nombres nonstandard ne sont plus définis axiomatiquement mais ils apparaissent comme des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Dans chacun des deux cas, l'arithmétique nonstandard correspondante sera présentée puis nous donnerons la construction de la droite d'Harthong-Reeb qui en résulte et nous montrerons dans quel sens le système numérique obtenu peut être considéré comme une version du continu.

1.2 La droite d'Harthong-Reeb basée sur une axiomatique nonstandard

1.2.1 Arithmétique nonstandard axiomatique

Dans la partie 1.2.1.1 nous présentons quelques aspects importants de l'analyse nonstandard. On y développe notamment quelques distinctions entre les mathématiques *usuelles* et les mathématiques nonstandard en ce qui concerne les nombres. Cette première approche n'est qu'informelle. Dans 1.2.1.2, on introduit l'axiomatique minimale sur laquelle repose la construction de la droite d'Harthong-Reeb. Ce n'est que dans cette partie que l'on donne les définitions exactes.

1.2.1.1 Quelques notions générales d'analyse nonstandard

L'analyse nonstandard a été introduite dans les années dix-neuf-cent-soixante dans le but de traiter de manière cohérente les notions d'infiniment grands et petits. Plusieurs théories ont été développées, qui toutes, malgré leurs diversités, donnent la possibilité de faire des distinctions entre les objets usuels dit *standard* et des entités dites nonstandard. Cette sous-partie introduit de manière informelle des notions très générales sur le nonstandard. Pour les nombres éléments de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on distingue :

- les nombres standard, ceux que l'on utilise usuellement, on les notera *st(x)* pour dire que *x est standard*
- les nombres nonstandard, cette classe d'éléments est en partie constituée des nombres infiniment grands, c'est-à-dire des nombres plus grands que tous les entiers standard, des nombres infiniment petits, c'est-à-dire des nombres plus petits en valeur absolue que tous les entiers standard et de toutes les sommes et produits d'un standard avec un non standard (par exemple si ε est un nombre nonstandard alors $3+\varepsilon$ l'est aussi).

Voici quelques définitions sur les classes de nombres qui découlent de la distinction entre standard et nonstandard.

- Un nombre réel x est *infiniment grand* si sa valeur absolue est plus grande que tout entier standard
$$\forall n \in \mathbb{N},\ st(n),\ |x| > n$$
et on note $x \simeq +\infty$ si $x > 0$ et $x \simeq -\infty$ si $x < 0$.
- Un nombre réel x est dit *infiniment petit* s'il est plus petit, en valeur absolue, que l'inverse de tout entier standard non nul
$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ st(n),\ |x| < \frac{1}{n}$$
et on note $x \simeq 0$.
- Un nombre réel x est dit *limité* s'il n'est pas infiniment grand
$$\exists n \in \mathbb{N},\ st(n),\ |x| \leqslant n$$
on notera $lim(x)$ dans ce cas.

Les nombres infiniment grands sont tous nonstandard. À part le nombre zéro, les nombres infiniment petits sont nonstandard. Les nombres réels limités peuvent être standard ou nonstandard ; typiquement, ils apparaissent sous la forme de la somme d'un nombre standard et d'un nombre infiniment petit. Par ailleurs, dans les nombres entiers, les nombres limités sont les nombres standard, ces deux classes sont confondues du fait qu'il n'existe pas de nombres infiniment petits autre que zéro dans l'ensemble des nombres entiers.

1.2.1.2 L'axiomatique minimale

Nous présentons dans ce paragraphe une axiomatique minimale dans l'esprit de certains travaux de Nelson et de Lutz ([Nelson 1987, Lutz 1992]). Elle est suffisante à la construction de la droite d'Harthong-Reeb. Ici, nous nous contenterons de définir une axiomatique sur les entiers puisqu'eux seuls sont nécessaires à la construction de la droite d'Harthong-Reeb. On se place donc dans une approche classique de $\mathbb{Z}$ muni d'un ensemble d'opérations ($+$, $-$, $\times$, ...) et de

relations ($=, \geqslant$, ...). Dans le but d'enrichir la théorie, on ajoute un nouveau prédicat qui donne aux éléments de $\mathbb{Z}$ la propriété d'être *limité* ou non. Ce prédicat est caractérisé par cinq axiomes dont voici les premiers.

ANS1	Le nombre 1 est limité.
ANS2	La somme et le produit de nombres limités sont limités.
ANS3	Pour tout x, y de $\mathbb{Z}$ tels que x est limité et $\|y\| \leqslant \|x\|$ alors y est limité.

À ce stade, les axiomes ne permettent pas de distinctions entre la notion d'"être limité" ou celle d'"être entier". L'axiome suivant $ANS4$ introduit une distinction entre ces deux notions, les limités devenant une sous-classe stricte de $\mathbb{Z}$.

ANS4	Il existe des entiers non limités.

Il en découle une échelle de grandeur sur les nombres. D'un coté, les entiers limités et de l'autre les infiniment grands. On notera $\mathbb{Z}_{lim}$ l'ensemble des entiers limités, $\mathbb{Z}_{+\infty}$ l'ensemble des entiers positifs infiniment grands dont par exemple ω est un élément sur la figure (1.1) et on notera $\mathbb{Z}_{-\infty}$ l'ensemble des entiers négatifs infiniment grands.

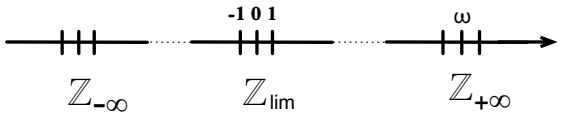


FIGURE 1.1 – Représentation intuitive des classes sur les entiers.

Remarquons que cette arithmétique nonstandard est une extension de la théorie initiale de $\mathbb{Z}$. Cela signifie que tout ce qui est vrai dans la théorie initiale est vrai dans l'extension. À ce propos, il faut prendre quelques précautions concernant le statut des propositions.

Par exemple la propriété « tout nombre est pair ou impair » est classique dans le sens où elle ne fait pas intervenir le nouveau prédicat *limité*. Du fait qu'elle soit vraie classiquement sur $\mathbb{Z}$, elle le reste ici. Mais, prenons par exemple la proposition « être limité ». Cette proposition fait explicitement intervenir le prédicat « limité ». Pour la prouver sur tous les entiers, on pourrait utiliser la récurrence. Ainsi de ANS1, on sait que le nombre 1 est limité, puis, en supposant que n est limité, de ANS2, on déduit que $n + 1$ l'est aussi, ce qui conduirait à la conclusion que « tout nombre entier est limité ». Or, ANS4 contredit cette propriété. On en déduit donc que les propriétés de ce type sont très particulières au point que l'on ne puisse pas leur appliquer la récurrence. La distinction entre les deux types de propositions est établie dans la définition suivante.

Définition 1 *Une proposition est dite* interne *si elle ne fait pas intervenir le prédicat « être limité ». On dira qu'elle est* externe *sinon.*

Une proposition interne est donc une proposition usuelle avec laquelle on peut raisonner comme d'habitude. Nous allons maintenant décrire deux nouveaux principes s'appliquant à certaines propositions. Le premier permet de prolonger le domaine de validité d'une proposition interne jusqu'à des nombres infiniment grands. Le second est un principe de construction par la récurence externe.

Proposition 1 *(Principe de permanence) Soit $\mathcal{P}(x)$ une proposition interne telle que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n limité. Alors, il existe un entier infiniment grand $\nu \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m tel que $0 \leqslant m \leqslant \nu$, $\mathcal{P}(m)$ est vraie.*

$\lhd$ L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{N};\ \forall y \in [0, x]\ \mathcal{P}(y)\}$ est bien interne et contient $\mathbb{N}_{lim}$. Du fait que ce dernier soit externe, l'inclusion $\mathbb{N}_{lim} \subset A$ est stricte et conduit donc au résultat. $\rhd$

Le cinquième axiome est décrit dans une forme très proche de l'utilisation que l'on veut en faire. Il apparaît dans l'analyse de la constructivité de la droite d'Harthong-Reeb dans le chapitre (3).

ANS5 Soit $\mathcal{P}(u)$ une proposition (interne ou externe) où u est une suite de $\mathbb{Z}^p$ (avec p un nombre entier limité). On suppose que :

1. il existe un élément $x_0 \in \mathbb{Z}^p$ tel que $\mathcal{P}(x_0)$ soit vraie
2. pour tout nombre entier limité n et pour toute suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{Z}^p$ telle que $\mathcal{P}((x_k)_{0\leqslant k\leqslant n})$ soit vraie alors il existe un élément x_{n+1} de $\mathbb{Z}^p$ tel que $\mathcal{P}((x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1})$ soit vraie.

Alors, il existe une suite interne infinie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout nombre limité n, $\mathcal{P}((x_k)_{0\leqslant k\leqslant n})$ soit vraie.

Dans la suite, on considère que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs muni des opérations et relations usuelles sur cet ensemble et enrichi par tout ce qui a été introduit dans ce paragraphe (axiomes, principe de permanence, ...).

1.2.1.3 Les réels nonstandard

Cette échelle de grandeur sur les nombres entiers, à savoir la possibilité de distinguer les nombres limités et les nombres infiniment grands, se propage sur les nombres réels. Ce qui nous intéresse ici, c'est d'avoir un élément de comparaison pour prouver que la droite d'Harthong-Reeb définie ci-après est isomorphe au système des nombres réels.

On suppose que l'on dispose, en plus de l'ensemble $\mathbb{Z}$, de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On peut alors introduire l'ensemble $\mathbb{R}_{lim}$ des nombres réels limités.

$$\mathbb{R}_{lim} =_{\text{déf}} \{x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge |x| < n\}$$

Cet ensemble est muni de l'égalité (notée $\simeq$) et de l'inégalité (notée $\lesssim$) suivantes, pour x et $y \in \mathbb{R}_{lim}$:

- $x \simeq y \Leftrightarrow_{\text{déf}} \forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow |x - y| < \dfrac{1}{n}$
- $x \lesssim y \Leftrightarrow_{\text{déf}} x \leqslant y \vee x \simeq y$

Une fois que l'échelle de grandeur nonstandard a été introduite, il est naturel de considérer que toute l'analyse classique se fait dans $\mathbb{R}_{lim}$. Le système $(\mathbb{R}_{lim,}, \simeq, \lesssim, +, \times)$ apparait comme un représentant nonstandard du continu classique.

1.2.2 Construction de la droite d'Harthong-Reeb

Comme expliqué dans l'introduction, l'idée d'Harthong et de Reeb est de construire un système numérique uniquement d'entiers équivalent au continu en prenant comme nouvelle unité un nombre infiniment grand. L'échelle de grandeur dont nous disposons maintenant dans $\mathbb{Z}$ va

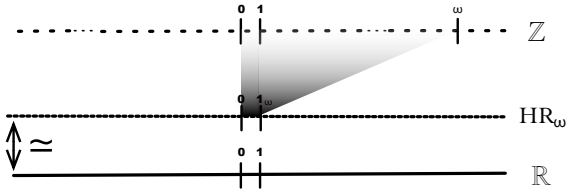


FIGURE 1.2 – Représentation intuitive de la droite d'Harthong-Reeb.

nous permettre de définir rigoureusement ce système. On l'appellera la *droite d'Harthong-Reeb* et elle sera notée $\mathcal{HR}_\omega$. Cet ensemble résulte d'un changement d'échelle fortement contractant sur les entiers. Ce dernier consiste à identifier un entier infiniment grand avec l'unité. Pour cela, on a besoin de fixer un nombre pour représenter cette échelle. On pose

$$\boxed{\omega \in \mathbb{N} \text{ tel que } \omega \simeq +\infty}$$

On dira aussi que ω est une échelle. L'existence de ω découle de ANS4. On peut à présent définir la droite d'Harthong-Reeb et en étudier quelques propriétés.

1.2.2.1 Formalisation de la droite d'Harthong-Reeb

Les opérations sur $\mathcal{HR}_\omega$ sont définies à partir de celle sur $\mathbb{Z}$, on note $=$, $>$, $\geqslant$, $+$, $.$, ... les différentes opérations et relations usuellement définies sur $\mathbb{Z}$. Dans le nouveau système $\mathcal{HR}_\omega$, les symboles sont indicés d'un ω pour rappeler que ces relations et opérations dépendent de *l'échelle* ω.

Définition 2 *On appelle $\mathcal{HR}_\omega$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont limités à l'échelle ω, c'est-à-dire*

$$\mathcal{HR}_\omega =_{déf} \{x \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge |x| \leqslant n\omega\}$$

Il apparaît que $\mathcal{HR}_\omega$ est un sous ensemble externe de $\mathbb{Z}$. On remarque que l'élément $\omega^2 \in \mathbb{Z}$ n'appartient pas à $\mathcal{HR}_\omega$, en effet, il n'existe pas d'entier limité n tel que $\omega^2 \leqslant n\omega$.

Sur cet ensemble, on définit les relations d'égalité et d'ordre, qui sont toutes externes. En effet, elles font directement intervenir le prédicat "être limité".

Définition 3 *Soit x et y deux éléments de $\mathcal{HR}_\omega$, on dit que x* ***et*** *y* ***sont égaux*** *à l'échelle ω et on note $=_\omega$ lorsque*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow\ n|x - y| \leqslant \omega$$

Montrons tout d'abord que cette égalité est bien une *relation d'équivalence.*

Réflexivité : On a bien évidemment $n\lfloor x-x\rfloor = 0 \leqslant \omega$ pour tout n.

Symétrie : Comme la valeur absolue est symétrique, cette relation l'est aussi.

Transitivité : Supposons que pour tout entier limité n, on ait $n\lfloor x-y\rfloor \leqslant \omega$ et $n\lfloor y-z\rfloor \leqslant \omega$. Alors $n\lfloor x-z\rfloor \leqslant n\lfloor x-y\rfloor + n\lfloor y-z\rfloor \leqslant 2\omega$. Donc, pour tout entier limité m, on obtient en prenant n=2m que $m\lfloor x-z\rfloor < \omega$.

On remarque que tous les nombres entiers limités sont égaux à zéro pour l'égalité $=_\omega$. En effet, si n, x et y sont des entiers alors $lim(n)$, $lim(x)$, et $lim(y)$ impliquent, d'après ANS2, $lim(n\lfloor x-y\rfloor)$ et donc $n\lfloor x-y\rfloor$ est bien inférieur à ω. Par définition, cela signifie que tous les nombres limités sont égaux et nuls. Par contre, tous les nombres égaux à zéro ne sont pas forcément limités. Par exemple $\lfloor\sqrt{\omega}\rfloor$ est infiniment grand dans $\mathbb{Z}$ et nul à l'échelle ω. Ici, $\sqrt{\omega}$ est la définition usuelle de la racine carrée, i.e. $\sqrt{\omega}.\sqrt{\omega} = \omega$. Si $\lfloor\sqrt{\omega}\rfloor$ était limité, cela signifierait qu'il existe un entier n limité tel que $\lfloor\sqrt{\omega}\rfloor \leqslant n$ et que le carré de ce n serait supérieur à ω et donc infiniment grand, ce qui est impossible d'après l'axiome ANS2. Mais, il est vrai que $\lfloor\sqrt{\omega}\rfloor =_\omega 0$ car pour tout entier limité n, on a bien $n\lfloor\sqrt{\omega}\rfloor \leqslant \omega$.

Définition 4 *Pour deux éléments x et y de $\mathcal{HR}_\omega$, on dit que x* ***est inférieur à*** *y à l'échelle ω et on note $x \leqslant_\omega y$ lorsque*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow\ n(x-y) \leqslant \omega$$

Montrons que cette définition de l'inégalité est bien une *relation d'ordre.*

Réflexivité : On a bien évidemment $n(x-x) = 0 \leqslant \omega$ pour tout n.

Antisymétrie : De $n(x-y) \leqslant \omega$ et $n(y-x) \leqslant \omega$ pour tout n limité, on déduit $n\lfloor y-x\rfloor < \omega$, c'est-à-dire $x =_\omega y$.

Transitivité : Supposons que pour tout entier limité n, on ait $n(x-y) \leqslant \omega$ et $n(y-z) \leqslant \omega$. Alors $n(x-z) = n(x-y) + n(y-z) \leqslant 2\omega$. Donc, pour tout entier limité m tel que n=2m, on a bien $m(x-z) \leqslant \omega$.

Il n'y a pas de lien direct entre l'inégalité sur les entiers et celle sur les éléments de $\mathcal{HR}_\omega$. En effet, deux entiers a et b tel que $a \leqslant b$ peuvent très bien vérifier $b \leqslant_\omega a$. Par exemple, $1 \leqslant 2$ et $2 \leqslant_\omega 1$ puisque tous les entiers limités sont égaux dans $\mathcal{HR}_\omega$. On a tout de même la propriété suivante :

Proposition 2 *Pour tout a et $b \in \mathcal{HR}_\omega$, $(a \leqslant b \vee a =_\omega b) \Leftrightarrow b \leqslant_\omega a$.*

$\lhd$ Supposons $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n(a-b) \leqslant \omega$, ainsi, ou bien $a \leqslant b$ ou bien $a > b$ auquel cas, $a - b = \lfloor a-b\rfloor$ et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n\lfloor a-b\rfloor \leqslant \omega$ ce qui est la définition de $a =_\omega b$.
Inversement, ou bien $a \leqslant b$ implique $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n(a-b) \leqslant 0 \leqslant \omega$; ou bien $a =_\omega b$ et du fait que pour un entier quelconque, on ait toujours $a \leqslant \lfloor a\rfloor$ on en déduit $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n(a-b) \leqslant n\lfloor a-b\rfloor \leqslant \omega$. $\rhd$

Définition 5 *Soient x et $y \in \mathcal{HR}_\omega$, x est* ***inférieur strictement*** *à l'échelle ω à y et on le note $<_\omega$ lorsque*

$$x \leqslant_\omega y\ \wedge\ \neg(x =_\omega y).$$

Il est souvent plus facile d'utiliser les quantificateurs pour le prouver lorsque cela est nécessaire. Montrons que l'inégalité stricte est équivalente à

$$x <_\omega y \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge n(y-x) \geqslant \omega$$

$\lhd$ Supposons que $x \leqslant_\omega y \ \wedge \ \neg(x =_\omega y)$, ainsi, d'après la définition de l'égalité sur $\mathcal{HR}_\omega$ et le fait qu'elle est supposée fausse ici, on en déduit l'existence[1] d'un entier n limité tel que $(n(x-y) \geqslant \omega)^{(1)} \vee (n(y-x) \geqslant \omega)^{(2)}$, (1) est impossible d'après l'hypothèse $x \leqslant_\omega y$. (2) conduit à la conclusion.
Inversement, supposons $\exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge n(y-x) > \omega$, ainsi $(\forall k \in \mathbb{N},\ lim(k) \wedge k(y-x) \leqslant \omega)$ conduit à une contradiction pour k=n, d'où $(\neg(x =_\omega y))$. D'autre part, l'existence d'un entier limité tel que $n(y-x) > \omega$ implique que $(y-x)$ est positive et donc pour tout entier positif limité k, $k(y-x) > 0 > -\omega$ et ainsi $\forall k \in \mathbb{N},\ lim(k) \Rightarrow k(x-y) \leqslant \omega$ $\rhd$

Sur $\mathcal{HR}_\omega$, on définit deux opérations, la somme et le produit sur ces nombres. La somme est l'addition classique sur $\mathbb{Z}$ elle est notée $+_\omega$. La somme, l'inverse et l'élément neutre 0_ω sont définis comme suit x et $y \in \mathcal{HR}_\omega$:

$$\forall x, y \in \mathcal{HR}_\omega^2 \quad x +_\omega y =_{déf} x + y \qquad -_\omega x =_{déf} -x \qquad 0_\omega =_{déf} 0$$

Puisque ω devient la nouvelle unité, cela se répercute sur la multiplication car on veut que ω soit l'élément neutre pour la multiplication. Celle-ci, notée $\times_\omega$ va donc être adaptée à ce nouvel élément neutre. Le produit $\times_\omega$, l'opération d'inverse et l'élément neutre sont définis par :

$$\forall (x,y,z)\mathcal{HR}_\omega^2 \times (\mathcal{HR}_\omega \backslash \{0\}) \quad x \times_\omega y =_{déf} \left\lfloor \frac{x \times y}{\omega} \right\rfloor \qquad z^{-_\omega 1} =_{déf} \left\lfloor \frac{\omega^2}{z} \right\rfloor \qquad 1_\omega =_{déf} \omega$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x et $\{x\}$ sa partie fractionnaire. On remarque que la définition de la multiplication $\times_\omega$ permet de conserver la caractéristique interne de cette opération sur $\mathcal{HR}_\omega$. En effet, si $(x,y) \in \mathcal{HR}_\omega^2$ alors, il existe un couple de nombres entiers limités (n,m) tels que $\lfloor x \rfloor \leqslant n\omega$ et $\lfloor y \rfloor \leqslant m\omega$ et donc $\lfloor xy \rfloor \leqslant nm\omega^2$. Finalement, il existe un nombre entier limité $p = mn$ tel que $\left\lfloor \frac{\lfloor xy \rfloor}{\omega} \right\rfloor \leqslant \frac{\lfloor xy \rfloor}{\omega} \leqslant p\omega$.

Montrons aussi que la définition de l'inverse est cohérente :

$$\begin{aligned}
x \times_\omega x^{-_\omega 1} &=_{\text{déf}} x \times_\omega \left\lfloor \frac{\omega^2}{x} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{x}{\omega} \times \left\lfloor \frac{\omega^2}{x} \right\rfloor \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{x}{\omega} \times \frac{\omega^2}{x} - \frac{x}{\omega} \times \left\{ \frac{\omega^2}{x} \right\} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \omega - \frac{x}{\omega} \times \left\{ \frac{\omega^2}{x} \right\} \right\rfloor \\
&= \omega - \frac{x}{\omega} \times \left\{ \frac{\omega^2}{x} \right\} - \left\{ \omega - \frac{x}{\omega} \times \left\{ \frac{\omega^2}{x} \right\} \right\} =_\omega \omega
\end{aligned}$$

car $\frac{x}{\omega} \times \left\{ \frac{\omega^2}{x} \right\}$ est limité donc nul à l'échelle ω et $\left\{ \omega - \frac{x}{\omega} \times \left\{ \frac{\omega^2}{x} \right\} \right\} < 1$ donc nul à l'échelle ω .

1. On se place ici dans le cadre de la logique classique. Dans le chapitre (3) sur la constructivité, on verra comment il faut adapter les définitions des diverses relations afin de pouvoir raisonner de manière constructive.

Il faut adapter à cette nouvelle définition de la multiplication toutes les opérations qui en découlent. Par exemple, la fonction racine carrée, noté $\sqrt[(\omega)]{}$, doit vérifier $\sqrt[(\omega)]{a} \times_\omega \sqrt[(\omega)]{a} =_\omega a$ et $\sqrt[(\omega)]{\omega} =_\omega \omega$. Elle peut être définie par $\sqrt[(\omega)]{a} = \lfloor \omega\sqrt{a} \rfloor$ où $\sqrt{}$ désigne la racine carrée usuelle et $a \in \mathcal{HR}_\omega$.

Ces opérations et relations sont *extensionnelles* vis-à-vis de l'égalité $=_\omega$, c'est-à-dire que pour tout $x,\ x',\ y$ et y' tels que $x =_\omega x'$ et $y =_\omega y'$, on a

1. $x \leqslant_\omega y \Leftrightarrow x' \leqslant_\omega y'$;
2. $x +_\omega y =_\omega x' +_\omega y'$;
3. $-_\omega x =_\omega -_\omega x'$;
4. $x \times_\omega y =_\omega x' \times_\omega y'$;
5. $x^{-_\omega 1} =_\omega x'^{-_\omega 1}$ pour x non nul dans $\mathcal{HR}_\omega$.

Voici la preuve :

$\lhd$ On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow\ n|x - x'| \leqslant \omega$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow\ n|y - y'| \leqslant \omega$

1.
$$\begin{aligned} x \leqslant_\omega y &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ (lim(n) \Rightarrow\ n(y - x) < \omega) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (lim(n) \Rightarrow\ n(y - y') + n(y' - x') + n(x' - x) < \omega) \end{aligned}$$
et ainsi, pour tout m limité tel que $n = 3m$, on a bien
$$\forall m \in \mathbb{N},\ (lim(m) \Rightarrow\ m(y' - x') < \omega).$$

2. $n|x + y - y' - x'| \leqslant n|x - x'| + n|y - y'| \leqslant 2\omega$, donc pour tout m limité tel que $n = 2m$ limité, on a bien $m|x + y - y' - x'| \leqslant \omega$.
3. Pour tout entier n limité, on a bien $n|(-x) - (-x')| = n|x - x'| \leqslant \omega$.
4. Pour tout entier n limité,
$$\begin{aligned} n|x \times_\omega y - x' \times_\omega y'| &\leqslant n|(xy)/\omega - (x'y')/\omega| + n|\{(xy)/\omega\} - \{(x'y')/\omega\}| \\ &\leqslant (n/\omega)|xy - x'y'| + n \\ &= (n/\omega)|xy - x'y + x'y - x'y'| + n \\ &\leqslant (n/\omega)|(x - x')||y| + (n/\omega)|(y - y')||x'| + n \\ &\leqslant (k_y + k_{x'} + 1)\omega \end{aligned}$$
(où k_y est l'entier limité qui vient de $y \in \mathcal{HR}_\omega$ et $k_{x'}$ celui de $x' \in \mathcal{HR}_\omega$)
Donc pour tout m limité tel que $n = (k_y + k_{x'} + 1)m$, on a bien $m|x \times_\omega y - y' \times_\omega x'| \leqslant \omega$.
5. Pour tout entier limité $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} n|\lfloor \omega^2/x \rfloor - \lfloor \omega^2/x' \rfloor| &\leqslant n|\omega^2/x - \omega^2/x'| + n \\ &= n|x - x'||\omega/x||\omega x'| + n \\ &\leqslant (k_x k_{x'} + 1)\omega \end{aligned}$$
(où k_y est l'entier limité qui vient de $x \in \mathcal{HR}_\omega$ non nul et $k_{x'}$ celui de $x' \in \mathcal{HR}_\omega$ non nul)
Donc pour tout m limité tel que $m = (k_x k_{x'} + 1)m$, on a bien $m|x^{-1} - x'^{-1}| \leqslant \omega$.$\rhd$

La droite d'Harthong-Reeb est définie par le système $(\mathcal{HR}_\omega, =_\omega, \leqslant_\omega, +_\omega, \times_\omega)$. Son aspect discret réside dans le fait qu'elle ne soit constituée que d'entiers, regardons à présent ce pourquoi on considère qu'elle est continue.

1.2.3 Isomorphisme entre $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{R}_{lim}$

Dans (1.2.1.1), $\mathbb{R}_{lim}$ a été introduit, il s'agit à présent de montrer comment se réalise le passage entre les éléments de $\mathcal{HR}_\omega$ et ceux de $\mathbb{R}_{lim}$. Pour cela, on introduit deux fonctions φ_ω et ψ_ω, inverses l'une de l'autre, en considérant les égalités adaptées $=_\omega$ et $\simeq$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \varphi_\omega & : & \mathcal{HR}_\omega & \to & \mathbb{R}_{lim} \\ & & X & \mapsto & X/\omega \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\begin{array}{ccccc} \psi_\omega & : & \mathbb{R}_{lim} & \to & \mathcal{HR}_\omega \\ & & x & \mapsto & \lfloor \omega x \rceil \end{array}\right\}$$

Pour tout $x, y \in \mathcal{HR}_\omega$ et $u \in \mathbb{R}_{lim}$, on a :

1. $x \leqslant_\omega y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\omega(x) \lesssim \varphi_\omega(y)$;
2. $\varphi_\omega(x +_\omega y) \simeq \varphi_\omega(x) + \varphi_\omega(y)$;
3. $\varphi_\omega(x \times_\omega y) \simeq \varphi_\omega(x) \times \varphi_\omega(y)$;
4. $\varphi_\omega(0_\omega) \simeq 0$ et $\varphi_\omega(1_\omega) \simeq 1$;
5. $x =_\omega y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\omega(x) \simeq \varphi_\omega(y)$;
6. $\psi_\omega \circ \varphi_\omega(x) =_\omega x$ et $\varphi_\omega \circ \psi_\omega(u) \simeq u$.

Preuve 1 *1.*

$$\begin{aligned} x \leqslant_\omega y &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (lim(n) \Rightarrow n(x-y) \leqslant \omega) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left(lim(n) \Rightarrow \left(\frac{x}{\omega} - \frac{y}{\omega}\right) \leqslant \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left(lim(n) \Rightarrow (\varphi_\omega(x) - \varphi_\omega(y)) \leqslant \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \varphi_\omega(x) \lesssim \varphi_\omega(y); \end{aligned}$$

2. $\varphi_\omega(x +_\omega y) = \dfrac{x+y}{\omega} \simeq \varphi_\omega(x) + \varphi_\omega(y)$;

3. $\varphi_\omega(x \times_\omega y) =_{déf} \varphi_\omega\left(\left\lfloor \dfrac{x.y}{\omega} \right\rceil\right) = \dfrac{1}{\omega}\left\lfloor \dfrac{x.y}{\omega} \right\rceil = \dfrac{xy}{\omega^2} - \dfrac{1}{\omega}\left\{\dfrac{xy}{\omega}\right\} \simeq \dfrac{xy}{\omega^2} \simeq \varphi_\omega(x) \times \varphi_\omega(y)$;

4. $\varphi_\omega(0_\omega) = \dfrac{0}{\omega} \simeq 0$ *et* $\varphi_\omega(1_\omega) = \dfrac{\omega}{\omega} \simeq 1$;

5.

$$\begin{aligned} x =_\omega y &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (lim(n) \Rightarrow n\lvert x-y\rvert \leqslant \omega) \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \left(lim(n) \Rightarrow \left\lvert \frac{x}{\omega} - \frac{y}{\omega}\right\rvert \leqslant \frac{1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \varphi_\omega(x) \simeq \varphi_\omega(y); \end{aligned}$$

6. $\psi_\omega \circ \varphi_\omega(x) =_{déf} \psi_\omega\left(\dfrac{x}{\omega}\right) = \dfrac{x}{\omega}.\omega =_\omega x$ *et*
$\varphi_\omega \circ \psi_\omega(x) = \varphi_\omega(\lfloor x.\omega \rceil) = \dfrac{\lfloor x.\omega \rceil}{\omega} = \dfrac{x.\omega}{\omega} - \dfrac{\{x.\omega\}}{\omega} \simeq x$
(car $\{x.\omega\} < 1$ *et d'où* $\{x\omega\}/\omega \simeq 0$*).*

C'est en ce sens que $(\mathbb{R}_{lim,}, \simeq, \lesssim, +, \times)$ et $(\mathcal{HR}_\omega, +, \times_\omega, =_\omega, <_\omega)$ sont isomorphes.

Ainsi, chaque nombre réel a son équivalent dans la droite d'Harthong-Reeb.

1.2.3.1 Transition

Le système $(\mathcal{HR}_\omega, +, \times_\omega, =_\omega, <_\omega)$, constitué uniquement de nombres entiers est isomorphe au système des nombres réels limités. Nous avons donc maintenant un système numérique discret et continu. Néanmoins, à l'origine de la définition de $\mathcal{HR}_\omega$, on choisit un nombre entier infiniment grand ω. Or, ce nombre n'existe que d'une manière axiomatique : seul l'axiome ANS4 assure l'existence de notre unité. Il en découle que ce nombre ω ne peut être représenté sur machine que de l'une des deux manières suivantes :

- Comme un nombre entier usuel choisi assez grand (par exemple $\omega = 100$ ou $\omega = 2^{64}$), ce qui revient à se placer dans l'analogie et l'approximation, et non pas dans la représentation exacte.
- Comme un symbole formel satisfaisant les propriétés voulues. Dans ce cas, la représentation est exacte mais la théorie et les calculs que l'on peut en déduire dépendent explicitement du symbole ω qui n'appartient pas au monde des entités numériques manipulées par la machine.

On adopte donc dans la section suivante un autre point de vue qui va pallier ces défauts.

1.3 Nouvelle droite d'Harthong-Reeb définie à partir des Ω-nombres

1.3.1 Introduction au modèle de Laugwitz-Schmieden

Dans l'article *Ω-Calculus as a Generalization of Field Extension, An alternative Approach to Nonstandard Analysis*[Laugwitz 1983] [2], Detlef Laugwitz explique la manière dont Curt Schmieden et lui-même étendent une théorie des nombres rationnels par le simple ajout d'une constante extérieure Ω. Cette extension s'apparente à une théorie nonstandard des nombres réels. Il nous a paru intéressant de tester leur point de vue comme base de définition du système de la droite d'Harthong-Reeb et d'en mesurer la constructivité.

Nous considérons une théorie T de l'arithmétique dans laquelle sont représentés l'ensemble $\mathbb{Z}$ ainsi que toutes les opérations et relations usuellement définies sur cet ensemble : $(=, \leqslant, +, \times, ..)$.

Au sujet des notations des relations et opérations, comme on va réintroduire une nouvelle arithmétique nonstandard et une « nouvelle » droite d'Harthong-Reeb, on utilisera les mêmes notations que dans la sous-partie précédente, à savoir, aucun indice lorsque l'on est sur les entiers (de $\mathbb{Z}$ ou des nouveaux introduits) [3] et on indicera par ω lorsque l'on sera dans $\mathcal{HR}_\omega$.

On étend la théorie T en une nouvelle théorie $T < \Omega >$ obtenue en rajoutant une nouvelle constante Ω à T. L'usage de Ω est régi par la définition basique suivante. Dans $T < \Omega >$ est représenté l'analogue de l'ensemble $\mathbb{Z}$ que l'on notera $\mathbb{Z}_\Omega$ ainsi que les opérations et relations usuelles sur cet ensemble que l'on notera généralement comme celles de $\mathbb{Z}$ [4].

1.3.1.1 La Définition Basique

Notée (BD) dans la suite, la définition basique s'énonce ainsi :

2. Les papiers [Laugwitz 1958, Laugwitz 1992, Laugwitz 1983] traitent aussi de cette théorie.

3. On ne fait pas de distinction, bien que ces deux ensembles soient différents et que les opérations sur le nouvel ensemble font directement intervenir les opérations sur $\mathbb{Z}$. C'est essentiellement dû au fait qu'il n'y a pas de confusion possible en général. Lorsqu'il y aura confusion possible, on se permettra d'indicer par $\mathbb{Z}$, par exemple, la somme sur les entiers pourra être écrite "$+_\mathbb{Z}$"

4. En cas d'ambiguité, on ajoutera $\mathbb{Z}$ en indice des opérations et relations

Soit $S(n)$ une proposition sur $\mathbb{N}$. S'il existe un N tel que $S(n)$ soit vraie pour tout $n > N$, alors $S(\Omega)$ est vraie.

Plus précisement, s'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait $S(n)$ dans la théorie T, alors, dans la nouvelle théorie T<Ω>, S(Ω) est vraie. Cette règle a pour but de prolonger ce qui est vrai sur les entiers à ce nouvel élément Ω. (BD) précise dans notre contexte le sens du principe de Leibniz « les lois du fini réussissent dans l'infini ».

La première chose que l'on peut dire sur Ω, c'est qu'il appartient à $\mathbb{Z}$. On appelle Ω-entiers, sous entendu relatifs, les éléments de $\mathbb{Z}_\Omega$. Dans cet ensemble, il y avait 1, 2, 3, ... et maintenant, il y a Ω en plus. Ensuite, il découle de (BD) que Ω est infiniment grand. Être infiniment grand signifie $\forall p \in \mathbb{N},\ \Omega > p$, or pour chaque élément $p \in \mathbb{N}$, il existe bien un $N = p$ tel que pour tout $n > N$, on ait $n > p$ et donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Omega > p$.

Après avoir vu l'aspect syntaxique de cette extension nonstandard avec l'ajout de cette entité Ω, nous allons pouvoir aborder l'aspect sémantique de cette théorie. Usuellement, dans les mathématiques, exceptée la théorie des modèles, la distinction entre les aspects sémantiques et syntaxiques est rarement bien établie. C'est aussi le cas dans les travaux de D. Laugwitz et C. Schmieden. Le développement qui suit concerne l'aspect sémantique, on montre comment les suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ incarnent les éléments de $\mathbb{Z}_\Omega$.

1.3.1.2 Les Ω-entiers

On considère dans la suite que

Un Ω-entier est une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$.

et donc $\mathbb{Z}_\Omega$ s'identifie à $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$. Dans un premier temps, on introduit **les éléments standard** de $\mathbb{Z}_\Omega$. Les éléments standard de $\mathbb{Z}_\Omega$ sont les suites dont tous les termes sont égaux à un même entier à partir d'un certain rang.

$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ standard *si et seulement si* $(\exists p \in \mathbb{Z})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(a_n = p)$

On identifie les Ω-entiers standard aux éléments de $\mathbb{Z}$. C'est-à-dire, pour signifier que ($x \in \mathbb{Z}_\Omega$ est standard), on utilisera la notation $x \in \mathbb{Z}$.

Sans pouvoir les caractériser vraiment, les *éléments nonstandard* sont tous ceux qui ne sont pas standard, $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $((-n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1$ si n est pair et par $u_n = n$ si n est impair en sont quelques exemples.

Dans un second temps, on pose

Ω est la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

Ce postulat n'est pas justifié en lui-même sinon qu'il est cohérent avec la théorie.

Lors de l'extension de l'ensemble $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_\Omega$, le transfert des définitions de $\mathbb{Z}$ sur les Ω-entiers se fait naturellement. Le plongement naturel de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_\Omega$ est défini par la fonction

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}l & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}_\Omega \\ & & \nu & \mapsto & (\nu,\ \nu,\ \nu,\ ...) \end{array}$$

qui à chaque entier associe la suite constante égale à cet entier. Elle établie le lien entre le système basé sur $\mathbb{Z}$ et celui basé sur $\mathbb{Z}_\Omega$. Via ce plongement, $\mathbb{Z}$ est strictement inclus dans $\mathbb{Z}_\Omega$.

Ici, faisons une petite mise en garde sur une différence majeure entre la version axiomatique de l'arithmétique nonstandard et celle des Ω-nombres développée dans cette section. Dans le premier cas, les éléments nonstandard étaient déjà dans $\mathbb{Z}$, ils y étaient intégrés et le formalisme nonstandard permettait de les mettre en valeur. Alors que dans le dernier cas, on étend $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}_\Omega$, ce qui introduit des éléments nonstandard. Maintenant, les éléments qui jouent le rôle des standard sont ceux dans $\mathbb{Z}$ et les nonstandard sont les éléments de $\mathbb{Z}_\Omega \backslash \mathbb{Z}$. Nous n'avons donc pas besoin d'introduire un prédicat « st » pour qualifier les éléments standard de $\mathbb{Z}_\Omega$ puisqu'ils sont confondus avec $\mathbb{Z}$.

Il s'agit à présent de définir dans notre modèle, l'ensemble des Ω-entiers des relations et opérations associées telles que l'égalité, l'inégalité, etc. On appelle $\mathbb{N}_\Omega$ les éléments de $\mathbb{Z}_\Omega$ positifs à partir d'un certain rang, c'est-à-dire les suites de $\mathbb{N}$. Toute fonction a de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, a une extension naturelle qui est la fonction

$$\begin{array}{rccc} a & : & \mathbb{N}_\Omega & \to & \mathbb{Z}_\Omega \\ & & \nu & \mapsto & a_\nu =_{\text{déf}} (a(\nu_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

Ainsi, chaque Ω-entier a considéré comme la fonction $n \to a_n$ peut être étendu par ce processus en une suite $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_\Omega}$. On remarque en particulier que a_Ω s'identifie exactement à a.

Du fait que les Ω-nombres soient des suites, les définitions qui vont suivre sont très proches des définitions usuelles sur les suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. La nuance est que l'on ne s'intéresse pas ici aux premiers termes des suites. Seul le comportement à l'infini est pris en compte, toutes les propriétés sont définies *à partir d'un certain rang de la suite.*

Définition 6 *Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux Ω-entiers, l'**égalité**, notée $=$, est définie par :*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ a_n =_{\mathbb{Z}} b_n$$

Montrons que cette relation est bien une *relation d'équivalence*, soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois Ω-entiers.

- On a bien évidemment l'existence d'un $N(=0)$ tel que $a_n = a_n\ \forall n > N$.
- La symétrie sur cette égalité découle directement de celle sur les entiers classiques.
- Par définition, on a $\exists N$ tel que $n > N$ on a $a_n = b_n$ et $\exists M$ tel que $n > M$ on a $b_n = c_n$. Ainsi, on a bien, pour tout entier n supérieur à $P = max(M, N)$ l'égalité $a_n = c_n$ et ainsi la *transitivité* $(a_n) = (c_n)$.

De la même manière, l'inégalité stricte et l'inégalité large sont les inégalités terme à terme sur $\mathbb{Z}$ à partir d'un certain rang.

Définition 7 *Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux Ω-entiers, l'**inégalité stricte**, notée $<$, est définie par*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N,\ a_n <_{\mathbb{Z}} b_n.$$

*L'**inégalité large**, notée $\leqslant$, est définie par*

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N,\ a_n \leqslant_{\mathbb{Z}} b_n$$

On montre que cette relation $\leqslant$ est bien une relation d'ordre :

- On a bien évidemment à partir de $n = 0$, pour tout $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = a_n$.
- De l'existence d'un N_1 et d'un N_2 tel que $(\forall n > N_1,\ (a_n \leqslant b_n))$ et $(\forall n > N_2,\ (b_n \leqslant a_n))$, on obtient bien que pour tout n à partir de $N = \max(N_1, N_2), (a_n = b_n)$
- De même, de l'existence d'un N_1 et d'un N_2 tel que $(\forall n > N_1,\ (a_n \leqslant b_n))$ et $(\forall n > N_2,\ (b_n \leqslant c_n))$, on obtient bien que pour tout n à partir de $N = \max(N_1, N_2), (a_n \leqslant c_n)$.

Cette relation d'ordre n'est pas une relation d'ordre total. En effet certains Ω-nombres ne sont pas comparables, par exemple $((-1)^n)$ et $((-1)^{n+1})$.

On introduit à présent les opérations *somme* et *produit* sur notre ensemble. Ces opérations sur les Ω-entiers sont celles définies classiquement sur $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$.

Définition 8 *Soient deux Ω-Entiers $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$, on définit (et note) :*

- $a + b =_{déf} (a_n +_{\mathbb{Z}} b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $0_\Omega =_{déf} (0)_{n\in\mathbb{N}}$, $-_\Omega a =_{déf} (-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $a \times b =_{déf} (a_n \times_{\mathbb{Z}} b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $1_\Omega =_{déf} (1)_{n\in\mathbb{N}}$,

Comme souvent en mathématiques, on notera le système $(\mathbb{Z}_\Omega, +, \times, =, <)$ par $\mathbb{Z}_\Omega$. Ce système est beaucoup plus riche que le système de $\mathbb{Z}$, par exemple les classes d'éléments suivantes mettent en valeur les nouveaux éléments.

1.3.1.3 Classes d'éléments distinguables

Les limités Un nombre limité $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}_\Omega$ peut être standard ou nonstandard, il vérifie seulement d'être inférieur en valeur absolue à un élément standard positif. On définit formellement les Ω-nombres limités par :

a limité *si et seulement si* $(\exists p \in \mathbb{N})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\lvert a_n\rvert \leqslant p)$

On remarque que tous les éléments standard sont limités, pour preuve, soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_\Omega$ un nombre standard, par définition

$$(\exists k \in \mathbb{Z})(\exists M \in \mathbb{N})(\forall m > M)(a_m = k),$$

donc à partir de ce même rang, on a bien $(\lvert a_n\rvert \leqslant \lvert k\rvert)$ et ainsi, il existe $p = \lvert k\rvert$ et $N(= M)$, tel que pour tout $n > N$, $(\lvert a_n\rvert \leqslant p)$.

La réciproque est fausse, par exemple le nombre $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas standard mais est limité.

Les nonstandard infiniment grands Parmi les Ω-entiers nonstandard, on distingue les Ω-entiers infiniment grands. Ce sont les éléments non limités. Ils sont caractérisés par le fait d'être supérieurs en valeur absolue à tous les entiers de $\mathbb{N}$. Formellement, pour un élément $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

a infiniment grand *si et seulement si* $(\forall p \in \mathbb{N})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\ p \leqslant \lvert a_n\rvert)$

Cette relation est équivalente à dire que a est infiniment grand si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert = +\infty$. On dira que a est *infiniment grand positif* si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ et qu'il est *infiniment grand négatif* si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Il peut bien par contre être ni l'un ni l'autre, par exemple $((-n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un nombre infiniment grand ni positif ni négatif.

1.3.1.4 Vérité faible et vérité forte

Le système $(\mathbb{Z}_\Omega,\ +,\ \times,\ =,\ <)$ n'est pas vraiment un modèle d'une extension nonstandard des nombres entiers, car sinon, tout ce que est vrai dans $\mathbb{Z}$ le serait dans $\mathbb{Z}_\Omega$, ce qui n'est pas le cas.

Les propriétés sur l'ordre, qui sont vraies dans $\mathbb{Z}$, ne sont pas toujours vérifiées dans $\mathbb{Z}_\Omega$. Par exemple,

$$(\forall a, b \in \mathbb{Z}_\Omega) \quad (a \geqslant b) \vee (b \geqslant a) \tag{1.1}$$

n'est pas vraie comme on peut le voir sur le cas particulier pour $a = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = ((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Néanmois, si on se donne deux Ω-entiers $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad (a_n \geqslant b_n) \vee (b_n \geqslant a_n). \tag{1.2}$$

En utilisant (BD), on obtient $(a_\Omega \geqslant b_\Omega) \vee (b_\Omega \geqslant a_\Omega)$ et donc (1.1) du fait que $a_\Omega = a$ et $b_\Omega = b$. Il y a contradiction. Pour éviter ceci, on admet que l'application de (BD) conduit à la notion de vérité faible. On introduit ainsi la distinction logique suivante :

> Soit $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ une proposition interne avec $x_1, ..., x_n$ des variables libres à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour $a_i = (a_{i,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_\Omega$, $i = 1,\ ..., n$, si
>
> $$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall m > M)(P(a_{1,m}, a_{2,m},\ ..., a_{n,m})) \text{ est vrai,}$$
>
> la proposition $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ est dite *faiblement vraie.*

On parle de *vérité forte* pour la vérité usuelle. Plus simplement, la vérité d'une proposition est faible lorsque l'on a besoin dans une preuve de passer aux suites et de prouver que la propriété est vraie terme à terme à partir d'un certain rang.

Exemple de propriété *faiblement vraie* On veut pouvoir comparer deux Ω-entiers $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$, donc savoir, si

$$a < b \vee a = b \vee a > b \quad (**).$$

Ce qui n'est pas du tout évident avec des suites puisque l'on peut très bien avoir, par exemple pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(a_{3k} < b_{3k}) \vee (a_{3k+1} = b_{3k+1}) \vee (a_{3k+2} > b_{3k+2}.$$

Mais, sur les entiers classiques, on sait que pour tout n

$$a_n < b_n \vee a_n = b_n \vee a_n > b_n.$$

Et ainsi obtenir que la proposition $(**)$ soit *faiblement vraie.* On peut donc en déduire que sur les Ω-entiers, la relation d'ordre est (faiblement) décidable.

1.3.1.5 Les Ω-nombres rationnels

De la même manière qu'ont été introduits les Ω-nombres entiers, on peut définir les Ω-nombres rationnels. Les Ω-nombres rationnels sont les suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Laugwitz et Schmieden ont introduit les Ω-nombres rationnels dans l'objectif de définir l'analyse. L'ensemble des Ω-nombres rationnels était pour eux le modèle adapté pour décrire le continu. C'est dans ce sens que cet

ensemble nous intéresse, lorsque l'on voudra prouver que $\mathcal{HR}_\omega$ est isomorphe aux nombres réels, c'est à ce modèle du continu que l'on se référera. Nous verrons dans la suite quelques exemples d'arguments qu'ils ont développés pour montrer que leur théorie convient à ce but.

Cet ensemble, constitué des suites de nombres rationnels sera noté $\mathbb{Q}_\Omega$, on le munit de deux opérations, la somme et le produit, qui sont définies terme à terme sur les suites avec les opérations usuelles. De même, les relations de comparaisons sont, comme pour les Ω-entiers, définies terme à terme à partir d'un certain rang. Et bien sûr, pour la vérité, la *basique définition* est valable sur ces nombres.

On peut à présent définir le système qui va être équivalent aux nombres réels, pour cela, on introduit l'ensemble des Ω-nombres rationnels limités :

$$\mathbb{Q}_\Omega^{lim} =_{\text{def}} \{x \in \mathbb{Q}_\Omega,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |x| < n\}$$

On munit cet ensemble d'une égalité (notée $\simeq$) et d'une inégalité (notée $\lesssim$) suivantes, pour x et $y \in \mathbb{Q}_\Omega^{lim}$:

- $x \simeq y$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ n|x-y| < 1$
- $x \lesssim y$ si et seulement si $x \leqslant y \vee x \simeq y$

Comme $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont des suites de $\mathbb{Q}$, ces définitions peuvent encore s'écrire :

- $x \simeq y \Leftrightarrow_{\text{def}} (\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists M \in \mathbb{N})\ (\forall m \geqslant M)\ n|x_m - y_m| < 1$
- $x \lesssim y \Leftrightarrow_{\text{def}} ((\exists M \in \mathbb{N}),\ (\forall m \geqslant M)\ x_m \leqslant y_m) \vee$
  $((\forall n \in \mathbb{N})(\exists M \in \mathbb{N})\ (\forall m \geqslant M)\ n|x_m - y_m| < 1)$

Les opérations de somme et produit restent les mêmes que sur les Ω-nombres rationnels, à savoir, la somme et le produit terme à terme. Ainsi, pour $x = (x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$

- $x + y =_{\text{déf}} (x_m + y_m)$ $-x =_{\text{déf}} (-x_m)$ $0 =_{\text{déf}} (0,\ 0,\ ...)$
- $x \times y =_{\text{déf}} (x_m \times y_m)$ pour $x = a/b = (a_m/b_m)$ non nul, $x^{-1} =_{\text{déf}} (b_m/a_m)$ $1 =_{\text{déf}}$ $(1,\ 1,\ ...)$

Laugwitz et Schmieden ont montré qu'une certaine version de l'analyse mathématique peut être développée en prenant $(\mathbb{Q}_\Omega^{lim}, \simeq, \lesssim, +, \times)$ comme modèle du continu. Pour s'en persuader regardons l'exemple extrait de [Laugwitz 1992]. Il s'agit d'obtenir la formule :

$$e = \left(1 + \frac{1}{\Omega}\right)^\Omega.$$

où $e = \sum_{k=0}^{\Omega} \frac{1}{n!}$. On donne ici une idée de la preuve :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{\Omega}\right)^\Omega &= \sum_{k=0}^{\Omega} (\Omega k) \left(\frac{1}{\Omega}\right)^k \\
&= 1 + 1 + \frac{\Omega!}{2!(\Omega-2)!} \times \frac{1}{\Omega^2} + \frac{\Omega!}{3!(\Omega-3)!} \times \frac{1}{\Omega^3} + \ ... + \frac{1}{\Omega^\Omega} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)\left(1-\frac{2}{\Omega}\right) + \ ... + \ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)...\left(1-\frac{k}{\Omega}\right) + \\
&\quad .... + \ \frac{1}{2!}\left(\frac{\Omega-1}{\Omega^{\Omega-3}}\right) + \frac{1}{\Omega^{\Omega-2}} + \frac{1}{\Omega^\Omega}.
\end{aligned}$$

Comme on a $\frac{1}{\Omega} \simeq 0$; $\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right) \simeq \frac{1}{2!}$; $\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)\left(1-\frac{2}{\Omega}\right) \simeq \frac{1}{3!}$ c'est-à-dire que pour tout k limité, on a $\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\Omega}\right)...\left(1-\frac{k-1}{\Omega}\right) \simeq \frac{1}{k!}$, d'après le lemme de Robinson, il existe un entier infiniment grand $\nu < \Omega$ tel que $\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\Omega}{k}\left(\frac{1}{\Omega}\right)^k \simeq \sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!}$. Ainsi on en déduit que $\left(1+\frac{1}{\Omega}\right)^{\Omega} \simeq \sum_{k=0}^{\Omega}\frac{1}{k!} + \sum_{k=\nu+1}^{\Omega}\binom{\Omega}{k}\left(\frac{1}{\Omega}\right)^k - \sum_{k=\nu+1}^{\Omega}\frac{1}{k!}$.

Montrons que les deux derniers termes de cette somme sont infinitésimaux :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\nu+1}^{\Omega}\frac{1}{1\times 2\times ...\times k} &= \frac{1}{1\times 2\times ...\times(\nu+1)}\left(1+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)}+...+\frac{1}{(\nu+2)....\Omega}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1+\frac{1}{\nu+2}+\frac{1}{(\nu+2)^2}+...+\frac{1}{(\nu+2)^{\Omega-\nu-3}}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{(\nu+1)!}\times\frac{1}{1-\frac{1}{\nu+2}} \simeq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\nu+1}^{\Omega}\binom{\Omega}{k}\left(\frac{1}{\Omega}\right)^k &= \sum_{k=\nu+1}^{\Omega}\frac{\Omega!}{k!(\Omega-k)!}\left(\frac{1}{\Omega}\right)^k\\
\text{Or } \frac{\Omega!}{k!(\Omega-k)!}(\frac{1}{\Omega})^k &\leqslant \frac{1}{k!}\times\left(\frac{\Omega-k+1}{\Omega}\right)\times ...\times\frac{\Omega}{\Omega}\leqslant\frac{1}{k!}\\
\text{Donc } \sum_{k=\nu+1}^{\Omega}(\Omega k)\left(\frac{1}{\Omega}\right)^k &\leqslant \sum_{k=\nu+1}^{\Omega}\frac{1}{k!}\simeq 0
\end{aligned}$$

Finalement $\left(1+\frac{1}{\Omega}\right)^{\Omega} \simeq \sum_{n=0}^{\Omega}\frac{1}{n!} =_{\text{déf}} e$.

1.3.1.6 Propriétés simples

La plupart des fonctions usuelles découlent naturellement de ce qui se passe dans $\mathbb{Z}$. Regardons deux exemples, celui de la division euclidienne et celui de la répartition d'un Ω-nombre rationnel en sa partie entière et sa partie décimale.

Division euclidienne Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ deux Ω-entiers, on cherche à légitimer l'existence de r et q, deux Ω-entiers qui seraient respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b. C'est-à-dire, montrer que $\exists\ q,\ r \in \mathbb{Z}_\Omega$ tels que $a = qb + r$ sous la condition $0 \leqslant r < b$. Il va s'agir de transférer ce qui se passe au niveau des suites de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_\Omega$. Dans $\mathbb{Z}$, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n(a_n \div b_n) + (a_n \mod b_n)$, on a donc dans $\mathbb{Z}_\Omega$ $a = b(a \div b) + (a \mod b)$.

Ainsi, on construit les Ω-entiers r et q en posant :

$$\begin{cases} q = a \div b =_{\text{déf}} (a_n \div b_n) \\ r = a \mod b =_{\text{déf}} (a_n \mod b_n) \end{cases}$$

Parties entières et parties décimales d'un Ω-rationnel À chaque Ω-rationnel, on associe sa *partie entière* et sa *partie décimale* :
Soit $a = (a_n)$ un Ω-rationnel où les a_n sont des éléments de $\mathbb{Q}$.
On pose $\lfloor a \rfloor := (\lfloor a_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lfloor a_n \rfloor$ désigne la partie entière de a_n

et $\{a\} := (\{a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{a_n\}$ la partie décimale de a_n.
Ainsi, chaque Ω-rationnel a peut s'écrire $\lfloor a \rfloor + \{a\}$ où $\lfloor a \rfloor$ est un Ω-Entier et $0 \leqslant \{a\} < 1$.

1.3.2 Changement d'échelle sur les Ω-Entiers

Cette partie présente une seconde construction de la droite d'Harthong-Reeb. Ce que l'on fait ici, c'est utiliser l'ensemble des Ω-entiers comme base de construction de cette droite.

1.3.2.1 Retour sur le modèle d'Harthong-Reeb

Nous allons à présent établir le changement d'échelle sur les Ω-entiers. Pour cela, on se fixe :

$$\boxed{\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ un élément de } \mathbb{N}_\Omega \text{ infiniment grand.}}$$

Il peut s'agir de $\Omega = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais la construction qui suit est générale et s'applique à tout nombre infiniment grand de $\mathbb{N}_\Omega$. Par contre, contrairement à la première construction de la droite d'Harthong-Reeb de (1.2.2), notre échelle est effective puisqu'il s'agit d'une suite de nombres entiers relatifs.

Pour les notations, comme précédemment, les opérations et relations sans indice correspondent à celles sur $\mathbb{Z}_\Omega$ (où à celles sur $\mathbb{Z}$), et celles avec l'indice ω définissent celles de la droite d'Harthong-Reeb.

1.3.2.2 Formalisation de la droite d'Harthong-Reeb

On introduit l'ensemble, noté $\mathcal{HR}_\omega$, des entiers de $\mathbb{Z}_\Omega$ limités à l'échelle ω.

$$\boxed{\mathcal{HR}_\omega =_{\text{déf}} \{x \in \mathbb{Z}_\Omega,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |x| \leqslant n\omega\}}$$

On munit $\mathcal{HR}_\omega$ de la relation d'égalité suivante. Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathcal{HR}_\omega$.

$$\boxed{a =_\omega b \textit{ si et seulement si } \ (\text{pour tout n de } \mathbb{N},\ n|a-b| \leqslant \omega)}$$

On peut décliner cette définition au niveau de chaque terme des suites, ainsi, $a =_\omega b$ peut s'écrire : $\exists n \in \mathbb{N}, \exists M_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m > M_n, \quad n(a_m - b_m) \leqslant \omega_m$.

L'inégalité est définie pour deux Ω-nombres $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\boxed{a \leqslant_\omega b \textit{ si et seulement si } \ (\text{pour tout n de } \mathbb{N}, n(a-b) \leqslant \omega)}$$

De même, l'inégalité large est déclinable au niveau de chaque terme des suites. C'est-à-dire que $a \leqslant_\omega b$ peut s'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m > M_n, \quad n(a_m - b_m) \leqslant \omega_m$.

Quitte à remplacer $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_\Omega$ par un autre Ω-nombre qui lui est égal dans $\mathbb{Z}_\Omega$, on peut supposer que $\omega_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Enfin, on introduit les opérations de somme (notée $+_\omega$) avec un élément neutre associé (noté 0_ω) et une fonction opposée (noté $-_\omega x$) pour les $x \in \mathcal{HR}_\omega$). Ainsi qu'une multiplication (notée $\times_\omega$), d'un élément neutre associé (noté 1_ω) et d'une opération inverse (notée x^{-1}) pour les $x \in \mathcal{HR}_\omega$ non nuls. Soient $a, b \in \mathcal{HR}_\omega$ et $c \in \mathcal{HR}_\omega$ non nul[5], on définit :

5. Et, quitte à remplacer $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par un autre Ω-nombre qui lui est égal dans $\mathbb{Z}_\Omega$, on peut supposer que $c_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$a +_\omega b =_{déf} a + b \qquad -_\omega a =_{déf} -a \qquad 0_\omega =_{def} 0$$

$$a \times_\omega b =_{déf} \left\lfloor \frac{a \times b}{\omega} \right\rfloor \qquad c^{-_\omega 1} =_{déf} \left\lfloor \frac{\omega^2}{c} \right\rfloor \qquad 1_\omega =_{déf} \omega$$

Ainsi, on appelle droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-entiers le système :

$$(\mathcal{HR}_\omega, +_\omega, \times_\omega, =_\omega, \leqslant_\omega)$$

Les propriétés et remarques faites dans la partie (1.2.2.1) restent valables pour cette nouvelle version de la droite d'Harthong-Reeb (relations et opérations extentionnelles, existence de la racine carrée, lien entre entre l'inégalité sur les entiers et celle sur $\mathcal{HR}_\omega$, etc.). La différence majeure entre ce système et la première version de la droite d'Harthong-Reeb est que celui-ci est représentable sur les ordinateurs. On verra dans le chapitre prochain que, en tant que système numérique, son implémentation est plus intéressante que celle basée sur des entiers nonstandard axiomatiques. De même, le chapitre (3) qui traite de la part de constructivité de ces systèmes, explique les différences entre ces deux modèles.

1.3.2.3 Exemples

Pour avoir une idée de la manière dont on peut remplacer directement certains nombres réels dans $\mathcal{HR}_\omega$, voici quelques exemples. On se place dans le cas $\omega = \Omega$, c'est-à-dire que l'unité ω est la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce système, on représente les nombres comme suit :

- Un élément $a \in \mathbb{Z}$ est représenté par $a_\omega = (an)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $a \in \mathbb{Z}$, par exemple, le nombre 2_ω est la suite $(0, 2, 4, 6, ...) = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Le nombre $(1/2)_\omega$ est représenté par $(\lfloor n/2 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Le nombre $\sqrt[(\omega)]{2_\omega}$ est représenté par $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $m_n = \max(k \in \mathbb{N}, (k \times k) \div n \leqslant 2n)$. La formule générale du calcul d'une racine carrée de $a = (a_n) \in \mathcal{HR}_\omega$ est $\sqrt[(\omega)]{a} =_{\text{déf}} (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = \max(k \in \mathbb{N}, (k \times k) \div \omega_n \leqslant a_n)$

1.3.3 Isomorphisme entre $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$

Dans ce contexte, le système de nombres réels approprié pour prouver l'isomorphisme avec $\mathcal{HR}_\omega$ est celui proposé par Laugwitz et Schmieden $(\mathbb{Q}_\Omega^{lim}, \simeq, \lesssim, +, \times)$.

Pour prouver cet isomorphisme, on introduit les deux fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \varphi_\omega & : & \mathcal{HR}_\omega & \to & \mathbb{Q}_\Omega^{lim} \\ & & x & \mapsto & x/\omega \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccccc} \psi_\omega & : & \mathbb{Q}_\Omega^{lim} & \to & \mathcal{HR}_\omega \\ & & u & \mapsto & (\lfloor \omega u \rfloor) \end{array} \right\}$$

Pour tout $x, y \in \mathcal{HR}_\omega$ et $u \in \mathbb{Q}_\Omega^{lim}$, on a :

1. $x \leqslant_\omega y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\omega(x) \lesssim \varphi_\omega(y)$;
2. $\varphi_\omega(x +_\omega y) \simeq \varphi_\omega(x) + \varphi_\omega(y)$;
3. $\varphi_\omega(x \times_\omega y) \simeq \varphi_\omega(x) \times \varphi_\omega(y)$;
4. $\varphi_\omega(0_\omega) \simeq 0$ et $\varphi_\omega(1_\omega) \simeq 1$;
5. $x =_\omega y \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_\omega(x) \simeq \varphi_\omega(y)$;

6. $\psi_\omega \circ \varphi_\omega(x) =_\omega x$ et $\varphi_\omega \circ \psi_\omega(u) \simeq u$.

C'est en ce sens que $(Q_\Omega^{lim}, \simeq, \lesssim, +, \times)$ et $(\mathcal{HR}_\omega, +, \times_\omega, =_\omega, <_\omega)$ sont isomorphes.

Les preuves étant très proches de ce qui a pu être fait dans la preuve (1) qui montre l'isomorphisme entre la version de $\mathcal{HR}_\omega$ construite sur l'arithmétique nonstandard minimale et le système $\mathbb{R}_{lim}$, nous ne les détaillerons pas ici.

On remarque que lorsque l'on passe de $\mathcal{HR}_\omega$ à $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$, au bout du compte, on définit des suites de rationnels. L'équivalent d'un Ω-entier $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les Ω-nombres rationnels est une suite $(a_n/\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Parmi les Ω-nombres de $\mathcal{HR}_\omega$, il peut être intéressant d'établir une distinction entre ceux qui représentent des nombres réels classiques (définis à partir des suites de Cauchy) et ceux qui ne le sont pas. Cette distinction sera nécessaire dans le chapitre (4) qui traite de la constructivité de la droite d'Harthong-Reeb. La notion qui permet cette distinction sera introduite à ce moment là.

1.3.4 En pratique, sur machine

Les Ω-nombres sont des fonctions, ainsi, les langages fonctionnels sont parfaitement adaptés à leurs manipulations. Nous avons choisi d'implanter nos algorithmes dans le langage fonctionnel Ocaml[6]. Il nous a suffit de définir le type

```
type omega_int = Om_int of (int -> int)
```

qui représente une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ pour définir nos objets.

Les opérations ont été définies terme à terme à partir de celles existantes sur les entiers. On comprend donc l'intérêt de programmer avec un langage fonctionnel.

– La somme pour deux nombres a et b de type `Om_int` :

```
let plus (Om_int a) (Om_int b) = (Om_int (function n -> (a n) + (b n));;
```

– La multiplication pour deux nombres a et b de type `Om_int` :

```
let times (Om_int a) (Om_int b) = (Om_int (function n -> (a n) * (b n));;
```

– La différence de a par b de type `Om_int` :

```
let moins (Om_int a) (Om_int b) = (Om_int (function n -> (a n) - (b n)));;
```

– La division euclidienne de a par b de type `Om_int` :

```
let div (Om_int a) (Om_int b) = (Om_int (function n -> (a n) / (b n)));;
```

– Le reste de la division euclidienne de a par b de type `Om_int` :

```
let modulo (Om_int a) (Om_int b) = (Om_int (function n -> ((a n) mod (b n))));;
```

La fonction `let eval n (Om_int a) = (a n)` permet d'évaluer un Ω-entier $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ au rang n.

Les nombres sont définis par

– les standard $a \in \mathcal{HR}_\omega$: `let a_om a = (Om_int (function n -> a))`

– la suite $\Omega = (n)_{n\in\mathbb{N}}$: `let Omega = (Om_int (function m -> m))`

– les multiples $a \in \mathcal{HR}_\omega$ de l'unité $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$
`let n_om a = (Om_int (function m -> (times (eval (un_om m )) a )))` où `un_om` doit être au préalable défini pour décrire l'unité ω.

6. http ://caml.inria.fr/

1.3.4.1 Conclusion

Nous venons d'introduire deux prototypes du système $(\mathcal{HR}_\omega, +, \times_\omega, =_\omega, <_\omega)$. Le premier est basé sur une arithmétique nonstandard axiomatique, l'autre sur la théorie nonstandard de Laugwitz et Schmieden dont l'avantage est l'aspect concret de ces objets. De par son aspect discret / continu, cette version du continu semble intéressante pour aborder le problème de la discrétisation d'objets continus. L'objet de la partie suivante est de présenter ce qui a été appelé le *processus d'arithmétisation*, c'est-à-dire le plongement dans $\mathcal{HR}_\omega$ de courbes continues.

Chapitre 2

Processus d'arithmétisation

Sommaire

1.1 Introduction 11
1.2 La droite d'Harthong-Reeb basée sur une axiomatique nonstandard . . 11
1.2.1 Arithmétique nonstandard axiomatique 11
1.2.2 Construction de la droite d'Harthong-Reeb 15
1.2.3 Isomorphisme entre $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{R}_{lim}$ 19
1.3 Nouvelle droite d'Harthong-Reeb définie à partir des Ω-nombres 20
1.3.1 Introduction au modèle de Laugwitz-Schmieden 20
1.3.2 Changement d'échelle sur les Ω-Entiers 27
1.3.3 Isomorphisme entre $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ 28
1.3.4 En pratique, sur machine 29

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter ce qui va être appelé le *processus d'arithmétisation*. Il s'agit de proposer un algorithme qui calcule et définit des entités discrètes. On vient de voir que la droite d'Harthong-Reeb est équivalente en un certain sens à l'ensemble des nombres réels. L'idée générale de l'arithmétisation est de plonger un processus de résolution d'équation différentielle (le schéma d'Euler) dans $\mathcal{HR}_\omega$ et ainsi de définir des équivalents discrets d'entités classiquement continues.

On utilise ici les deux définitions précédentes de la droite d'Harthong-Reeb notées indistinctement $\mathcal{HR}_\omega$ pour définir le processus d'arithmétisation. Dans les deux premières sous-parties (2.1.1) et (2.2), la version de $\mathcal{HR}_\omega$ dans laquelle on travaille est celle basée sur l'arithmétique nonstandard axiomatique. Deux raisons motivent ce choix. Le premier argument est historique, lorsqu'en autres, Harthong, Reeb, Reveillès, Diener ([Reeb 1987], [Diener 1992]) ont travaillé sur ce processus, il a été défini à partir de la version axiomatique d'une arithmétique nonstandard. Le second argument est que la manipulation des objets est plus simple avec cette version. En effet, le travail se fait avec des entiers plutôt que des suites d'entiers.

Néanmoins, du fait que les Ω-nombres sont des entiers nonstandard plus effectifs, il parait plus intéressant d'utiliser la version de $\mathcal{HR}_\omega$ basée sur ces derniers. C'est ce qui est fait dans la seconde partie de ce chapitre (2.3).

Dans les deux cas, des exemples ainsi que des illustrations seront fournis.

2.1.1 Arithmétisation directe et ses limites

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le système discret $\mathcal{HR}_\omega$ des nombres entiers relatifs est équivalent en un certain sens au système continu des nombres réels limités. En conséquence, toute entité doit avoir un équivalent discret au niveau de $\mathcal{HR}_\omega$. On appelle *arithmétisation* d'une notion continue tout procédé qui permet de la transporter sur $\mathcal{HR}_\omega$ en un concept équivalent.

Dans cette section, on veut montrer comment on peut arithmétiser directement des fonctions f continues réelles. Nous aurons particulièrement besoin du cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Etant donnée une telle fonction f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, son arithmétisée directe est une fonction discrète F définie par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{HR}_\omega \times \mathcal{HR}_\omega & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathcal{HR}_\omega \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_\omega \times \varphi_\omega} & & \Big\uparrow{\scriptstyle \psi_\omega} \\ \mathbb{R}_{lim} \times \mathbb{R}_{lim} & \xrightarrow[\quad f \quad]{} & \mathbb{R}_{lim} \end{array}$$

avec :

$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathcal{HR}_\omega \times \mathcal{HR}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{HR}_\omega \\ & & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = z \\ \psi_\omega & : & \mathbb{R}_{lim} & \longrightarrow & \mathcal{HR}_\omega \\ & & z & \longmapsto & \lfloor z\omega \rfloor \\ \varphi_\omega \times \varphi_\omega & : & \mathcal{HR}_\omega \times \mathcal{HR}_\omega & \longrightarrow & \mathbb{R}_{lim} \times \mathbb{R}_{lim} \\ & & (X,Y) & \longmapsto & (x,y) = \left(\dfrac{X}{\omega}, \dfrac{Y}{\omega}\right) \end{array}$$

On a donc, $\forall X, Y \in \mathcal{HR}_\omega,\ \ F(X,Y) = \left\lfloor f\left(\dfrac{X}{\omega}, \dfrac{Y}{\omega}\right)\omega \right\rfloor$, ce qui revient à utiliser ψ_ω et φ_ω comme deux changements de variables réciproques. Cette formule utilise des calculs sur les nombres réels. Or, notre propos est de ne faire des calculs qu'avec des entiers et de ne plus passer par des calculs dans $\mathbb{R}$.

Pour des fonctions « simples », telles que les fonctions polynomiales, cette formule ne nécessite pas de faire de calculs dans $\mathbb{R}$. En effet, si on pose $f(x,y) = x^p y^q$, l'arithmétisée F de f est : $F(X,Y) = \left\lfloor \dfrac{X^p Y^q}{\omega^{p+q-1}} \right\rfloor$ qui s'interprète comme $X^p Y^q \div \omega^{p+q+1}$. Néanmoins, d'une manière générale, pour de nombreuses fonctions, telles que celles définies par limite d'une suite ou par une intégrale, l'arithmétisation directe ne convient pas car elle fait appel à la fonction f dont les valeurs ne sont connues que de manière approximative. De plus, il est possible que pour ces fonctions, l'utilisation de la partie entière ne soit pas optimale. C'est par exemple le cas de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Par contre ces fonctions peuvent être définies comme solution d'équations différentielles. La suite de ce chapitre présente une méthode d'arithmétisation de fonctions qui consiste à arithmétiser une méthode de résolution numérique d'équations différentielles. Comme par exemple la méthode d'Euler.

2.2 Arithmétisation d'objets continus du point de vue d'une arithmétique nonstandard axiomatique

La philosophie de la méthode d'arithmétisation consiste à donner un équivalent purement arithmétique (ou encore discret) d'un processus classique de calcul d'approximation de fonction. La méthode de résolution numérique des équations différentielles que l'on utilisera est la méthode d'Euler.

2.2.1 Description générale du processus d'arithmétisation

On se donne une fonction $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ définie sur une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose que f est suffisamment régulière. Pour simplifier l'exposé, on suppose que f est définie au moins sur $\mathbb{R}_{lim} \times \mathbb{R}_{lim}$ et qu'elle prend des valeurs limitées sur cet ensemble. On considère l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = f(t, x)$ avec la condition initiale $x(a) = b$ où a et b sont des réels limités. On se propose d'arithmétiser la solution $x : t \mapsto x(t)$ de ce problème.

2.2.1.1 Première étape : la discrétisation du schéma d'Euler à l'échelle ω.

La méthode d'Euler consiste à effectuer une récurrence sur les suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ en utilisant le système récursif

$$\begin{cases} t_0 = a,\ x_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + h \\ x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \end{cases}$$

où h est le pas.

Cette méthode, basée sur l'itération, permet de déterminer des approximations de la fonction $x(t)$ qui sont d'autant plus précises que h est petit. Le contexte de l'analyse nonstandard permet d'avoir un nombre h infiniment petit et on peut donc considérer que l'approximation, au moins pour un nombre standard d'itérations, est infiniment proche de l'objet à arithmétiser. Dans la perspective de déterminer une version arithmétisée du schéma d'Euler, il est intéressant de prendre un pas h qui soit l'inverse d'un entier infiniment grand. On pose $h = \dfrac{1}{\beta}$ avec $\beta \in \mathbb{N}$ tel que $\beta \simeq +\infty$. Le système devient donc :

$$(\star) \begin{cases} t_0 = a,\ x_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{\beta} \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\beta} f(t_n, x_n) \end{cases}$$

A présent, on veut plonger ce schéma dans $\mathcal{HR}_\omega$ via la fonction ψ_ω de manière à ne travailler qu'avec des entiers. On notera avec des lettres majuscules les entiers de $\mathcal{HR}_\omega$. Ainsi, pour T_k et $X_k \in \mathcal{HR}_\omega$, on veut donc définir un schéma de la forme

$$\begin{cases} T_0 = A,\ X_0 = B \\ T_{n+1} = T_n + P \\ X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta \end{cases}$$

avec T_k, X_k des éléments de $\mathcal{HR}_\omega$ pour tout k, P le pas et $F(T_n, X_n)$ une fonction de $\mathcal{HR}_\omega \times \mathcal{HR}_\omega \to \mathcal{HR}_\omega$ qui seront précisés dans la suite.

Ce transfert n'est pas automatique dans le sens où il y a des choix à faire. On montre dans la suite que les choix qui sont faits sont légitimes. Nous ne nous attarderons pas sur le traitement des conditions initiales en supposant que l'on connait $A = \lfloor a\omega \rfloor$, $B = \lfloor \omega b \rfloor$. La difficulté vient de ce que la fonction ψ_ω n'est pas linéaire sur les entiers, mais seulement à l'échelle ω. En effet pour $a, b \in \mathbb{R}_{lim}$, on a

$$\psi_\omega(a+b) =_{\text{déf}} \lfloor \omega(a+b) \rfloor =_{\mathbb{Z}} \lfloor \omega a \rfloor + \{\omega a\} + \lfloor \omega b \rfloor + \{\omega b\} - \{\omega(a+b)\} =_\omega \lfloor \omega a \rfloor + \lfloor \omega b \rfloor =_{\text{déf}} \psi_\omega(a) + \psi_\omega(b).$$

Ainsi, une première conséquence est que les égalités suivantes sont vraies seulement à l'échelle ω :

$$\begin{cases} \psi_\omega(t_{n+1}) =_\omega \psi_\omega(t_n) + \psi_\omega\left(\dfrac{1}{\beta}\right) \\ \psi_\omega(x_{n+1}) =_\omega \psi_\omega(x_n) + \psi_\omega\left(\dfrac{1}{\beta} f(t_n, x_n)\right) \end{cases}$$

De plus, on peut vérifier que

$$\psi_\omega\left(\frac{1}{\beta} f(t_n, x_n)\right) =_\omega \left\lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t_n, x_n) \rfloor \right\rfloor = \lfloor \omega f(t_n, x_n) \rfloor \div \beta$$

est seulement vraie à l'échelle ω.

En effet

$$\begin{aligned} \psi_\omega\left(\frac{1}{\beta} f(t_n, x_n)\right) &=_{\text{déf}} \left\lfloor \frac{\omega}{\beta} f(t_n, x_n) \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t_n, x_n) \rfloor \right\rfloor + \left\{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t_n, x_n) \rfloor \right\} + \frac{1}{\beta} \{\omega f(t_n, x_n)\} - \left\{ \frac{\omega}{\beta} f(t_n, x_n) \right\} \\ &=_\omega \left\lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t_n, x_n) \rfloor \right\rfloor. \end{aligned}$$

A partir de tout cela, pour T, $X \in \mathcal{HR}_\omega$, on pose $F(T, X) =_{\text{déf}} \left\lfloor \omega f\left(\dfrac{T}{\omega}, \dfrac{X}{\omega}\right) \right\rfloor$ et $P =_{\text{déf}} \omega \div \beta$ et on considère le schéma itératif suivant, avec des égalités dans $\mathbb{Z}$:

$$(\star\star') \begin{cases} T_0 = \lfloor a\omega \rfloor, \ X_0 = \lfloor \omega b \rfloor \\ T_{n+1} = T_n + \omega \div \beta \\ X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta \end{cases}$$

En fait, on s'est inspiré d'égalités vraies sur $\mathcal{HR}_\omega$ pour définir ce schéma itératif avec des égalités sur $\mathbb{Z}$. On va montrer dans la suite que ce schéma convient. Néanmoins et contrairement à ce que l'on pourrait croire en lisant certains textes antérieurs ([Holin 1991] [Diener 1992]), ce schéma résulte d'un choix. Certes il est assez naturel, mais il aurait été possible d'en faire un autre, en choisissant par exemple de prendre

$$X_{n+1} = X_n + \left\lfloor \frac{\omega}{\beta} f(t_n, x_n) \right\rfloor.$$

Le pas de ce schéma est $T_{n+1} - T_n = \omega \div \beta$. Remarquons que, pour l'instant, β est un élément de $\mathbb{N}$ infiniment grand sans contrainte supplémentaire. Pour simplifier l'écriture du schéma, on suppose de plus que β est un diviseur de ω :

$$\boxed{\omega = \alpha\beta \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{N}.}$$

On obtient ainsi finalement le schéma itératif dans $\mathcal{HR}_\omega$:

$$(\star\star) \begin{cases} T_0 = \lfloor a\omega \rfloor,\ X_0 = \lfloor \omega b \rfloor \\ T_{n+1} = T_n + \alpha \\ X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta \end{cases}$$

Dans le but de montrer que ce schéma $(\star\star)$ est bien, dans un certain sens, l'équivalent dans $\mathcal{HR}_\omega$ de $(\star)$ dans $\mathbb{R}_{lim}$, on définit $(\spadesuit)$ le plongement de $(\star\star)$ dans $\mathbb{R}_{lim}$ par φ_ω :

$$(\spadesuit) \begin{cases} t'_0 = a',\ x_0 = b' \\ t'_{n+1} = t'_n + \dfrac{1}{\beta} \\ x'_{n+1} = x'_n + \dfrac{1}{\beta} f'(t'_n, x'_n) \end{cases}$$

avec

- $a' =_{\text{déf}} \varphi_\omega(A)$ et $b' =_{\text{déf}} \varphi_\omega(B)$
- $t'_k =_{\text{déf}} \varphi_\omega(T_k) = \dfrac{T_k}{\omega}$ et $x'_k =_{\text{déf}} \varphi_\omega(X_k) = \dfrac{X_k}{\omega}$
- $f'(t'_n, x'_n) =_{\text{déf}} \varphi_\omega(F(\psi_\omega(t'_n), \psi_\omega(x'_n)) \div \beta)\beta = \dfrac{1}{\alpha}\left\lfloor \dfrac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, x'_n) \rfloor \right\rfloor$

Remarquons que, puisque $\varphi_\omega : \mathcal{HR}_\omega \to \mathcal{HR}_\omega$ est linéaire pour l'addition $+$, le schéma $(\spadesuit)$ est exactement l'image de $(\star\star)$ par φ_ω. Ainsi, on a la propriété suivante :

Proposition 3 *Sous l'hypothèse $\omega = \beta\alpha$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha \simeq +\infty$ et $\beta \simeq +\infty$,* les systèmes $(\star)$ et $(\spadesuit)$ sont infiniment proches *dans le sens où :*

- *les conditions initiales de $(\star)$ et $(\spadesuit)$ sont infiniment proches ($a' \simeq a$ et $b' \simeq b$ dans $\mathbb{R}_{lim}$)*
- *les fonctions f et f' de $(\star)$ et $(\spadesuit)$ sont infiniment proches ($f'(t,x) \simeq f(t,x)$ pour tout (t,x) dans $\mathbb{R}^2_{lim}$)*

Avant de démarrer la preuve, on remarque que les propriétés de proximité décrites dans cette proposition amènent au fait que les solutions de ces deux schémas $(\star)$ et $(\spadesuit)$ sont infiniment proches au moins pendant un certain temps.

$\lhd$ Le premier point est vrai du fait que les fonctions φ_ω et ψ_ω sont inverses l'une de l'autre. En effet,

$$a' = \varphi_\omega(A) = \varphi_\omega(\psi_\omega(a)) \simeq a$$

et de même pour b.

Pour prouver le second point, on utilise la décomposition pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\lfloor u \rfloor = u - \{u\}$. Le calcul qui suit amène à la conclusion :

$$\begin{aligned} f'(t,x) &= \frac{1}{\alpha}\left\lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t,x) \rfloor \right\rfloor \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t,x) \rfloor - \left\{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t,x) \rfloor \right\} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta} \omega f(t,x) - \frac{1}{\beta} \{\omega f(t,x)\} - \left\{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t,x) \rfloor \right\} \right) \\ &= f(t,x) - \frac{1}{\omega} \{\omega f(t,x)\} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t,x) \rfloor \right\} \end{aligned}$$

Comme on a supposé $\alpha \simeq +\infty$ on a $\dfrac{\{\omega f(t_n, x_n)\}}{\omega} \simeq 0$ et $\dfrac{\{\lfloor \omega f(t_n, x_n) \rfloor / \beta\}}{\alpha} \simeq 0$ et ainsi on obtient bien $f'(t,x) \simeq f(t,x)$. $\rhd$

On peut ainsi poser la définition suivante :

Définition 9 *En supposant que $\omega = \alpha\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \simeq +\infty$, $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \simeq +\infty$, l'*arithmétisation à l'échelle ω du schéma d'Euler

$$(\star) \begin{cases} t_0 = a,\ x_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{\beta} \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\beta} f(x_n, t_n) \end{cases}$$

est le schéma à variables T_k, X_k dans $\mathcal{HR}_\omega$:

$$(\star\star) \begin{cases} T_0 = \lfloor a\omega \rfloor,\ X_0 = \lfloor \omega b \rfloor \\ T_{n+1} = T_n + \alpha \\ X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta \end{cases}$$

où $F(T_n, X_n) = \left\lfloor \omega f\left(\dfrac{T_n}{\omega}, \dfrac{X_n}{\omega}\right) \right\rfloor$.

L'ensemble des points $(T_n, X_n)_{n \geqslant 0}$ décrit le graphe d'une fonction discrète que l'on peut nommer l'arithmétisée à l'échelle ω de la fonction continue $t \mapsto x(t)$. Cette fonction discrète n'est pas définie sur un intervalle de $\mathbb{Z}$ car $T_{n+1} - T_n = \alpha \simeq +\infty$. Dans le but de « rapprocher les points T_n » et d'obtenir une fonction discrète définie sur un intervalle de $\mathbb{Z}$, on va effectuer un changement d'échelle en passant à une échelle plus petite que ω.

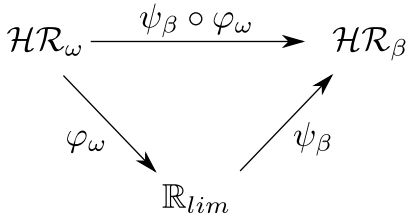
2.2.1.2 Deuxième étape : interprétation du schéma d'Euler arithmétisé à une échelle intermédiaire

On veut, à présent, exprimer $(\star\star)$ dans une échelle intermédiaire. Du fait que $\omega = \alpha\beta$, il parait naturel de choisir soit α soit β pour être cette échelle intermédiaire. Chacune d'entre elles simplifie une ligne différente du schéma $(\star\star)$. Dans l'objectif de simplifier les deux, on choisit de faire l'hypothèse $\alpha = \beta$. On pose, pour toute la fin de la partie 2.2 :

$$\boxed{\omega = \beta^2 \text{ avec } \beta \simeq +\infty \text{ dans } \mathbb{Z}.}$$

Notons qu'une étude plus complexe mais de même nature que celle qui va suivre peut être faite sans l'hypothèse simplificatrice $\alpha = \beta$. C'est le cas par exemple lorsque, dans la partie (2.3.2.4), on arithmétise une ellipse. On veut définir l'interprétation du schéma $(\star\star)$ à l'échelle intermédiaire β.

Pour cela, les éléments de $\mathcal{HR}_\omega$ vont être plongés dans $\mathcal{HR}_\beta$ en préservant le lien avec $\mathbb{R}_{lim}$. Ceci revient à considérer la transformation suivante :



Cela revient à considérer la composée de fonctions suivante :

$$\begin{array}{rccl} \psi_\beta \circ \varphi_\omega & : & \mathcal{HR}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{HR}_\beta \\ & & x & \longmapsto & x \div \beta = \psi_\beta\left(\dfrac{x}{\omega}\right) = \left\lfloor \dfrac{x}{\omega}\beta \right\rfloor \end{array}$$

Ainsi, à chaque élément x de $\mathcal{HR}_\omega$ correspond l'élément $x \div \beta \in \mathcal{HR}_\beta$. Pour transformer le schéma ($\star\star$), il est utile d'introduire la décomposition unique suivante :

Pour tout $x \in \mathcal{HR}_\omega$,
$$x = \widetilde{x}\beta + \widehat{x}$$
avec $\widetilde{x} =_{\text{déf}} x \div \beta \in \mathcal{HR}_\beta$ et $\widehat{x} =_{\text{déf}} x \mod \beta \in \{0,\ 1,\ \ldots\ \beta - 1\}$

$\widetilde{x}$ représente le quotient et $\widehat{x}$ le reste de la division euclidienne de x par β.

On va à présent appliquer cette transformation au schéma d'Euler.

Tout d'abord, lorsqu'on regarde ce qui se passe au niveau de la variable T, on obtient de $T_{n+1} = T_n + \beta$ la décomposition suivante :

$$\widetilde{T}_{n+1}\beta + \widehat{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n\beta + \widehat{T}_n + \beta.$$

D'après l'unicité de la décomposition euclidienne, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widehat{T}_{n+1} = \widehat{T}_n \end{cases}$$

On voit ici que le choix de considérer $\alpha = \beta$ est cohérent puisqu'il permet d'avoir un pas de $\widetilde{T}_{n+1} - \widetilde{T}_n = 1$. On remarque que la seconde ligne faisant intervenir les $\widehat{T}$ n'est pas pertinente car les $\widehat{T}$ restent constants. On ne la fera pas intervenir dans le schéma final puisqu'elle n'apporte aucune information supplémentaire sur les $\widetilde{T}_n$.

On applique ensuite cette décomposition à F :

$$F(T_k, X_k) = \widetilde{F}(T_k, X_k)\beta + \widehat{F}(T_k, X_k)$$

avec $\widetilde{F}(T_k, X_k) \in \mathcal{HR}_\beta$ et $\widehat{F}(T_k, X_k) \in \{0,\ 1,\ \ldots, \beta - 1\}$. Pour simplifier les écritures, on introduit les notations $\widetilde{F}_k =_{\text{déf}} \widetilde{F}(T_k, X_k)$ et $\widehat{F}_k =_{\text{déf}} \widehat{F}(T_k, X_k)$. On a donc

$$F(T_k, X_k) = \widetilde{F}_k\beta + \widehat{F}_k$$

En reportant ces décompositions dans la dernière ligne du schéma d'Euler

$$X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta$$

on obtient

$$\beta\widetilde{X}_{n+1} + \widehat{X}_{n+1} = \beta\widetilde{X}_n + \widehat{X}_n + (\beta\widetilde{F}_n + \widehat{F}_n) \div \beta.$$

Par définition de la décomposition $\beta\widetilde{F}_n + \widehat{F}_n$, on a $(\beta\widetilde{F}_n + \widehat{F}_n) \div \beta = \widetilde{F}_n$. On obtient

$$\beta\widetilde{X}_{n+1} + \widehat{X}_{n+1} = \beta(\widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \div \beta) + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \mod \beta$$

D'après l'unicité du résultat d'une division euclidienne, on a :

$$\begin{cases} \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \mod \beta \end{cases}$$

Finalement, on pose la définition suivante :

Définition 10 *En supposant que $\omega = \beta^2$ avec $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \simeq +\infty$,* l'arithmétisation du schéma $(\star)$ calculé à l'échelle ω et interprété à l'échelle β *est le schéma à variables $\widetilde{X}, \widehat{X}, \widetilde{T} \in \mathcal{HR}_\beta$:*

$$(\star\star\star) \begin{cases} \widetilde{T}_0 = \lfloor a\beta^2 \rfloor \div \beta,\ \widetilde{X}_0 = \lfloor b\beta^2 \rfloor \div \beta \text{ et } \widehat{X}_0 = \lfloor b\beta^2 \rfloor \mod \beta \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \mod \beta \end{cases}$$

où $\widetilde{F}_n = \widetilde{F}_n(T_n, X_n)$.

Il faut comprendre que $\widehat{X}_k$ est une variable auxiliaire de calcul alors que $\widetilde{T}_k$ et $\widetilde{X}_k$ sont maintenant les variables significatives. L'ensemble des couples $(\widetilde{T}_n, \widetilde{X}_n)$ représente le graphe d'une fonction discrète $X \mapsto X(T)$ que l'on nomme l'arithmétisée de la fonction $t \mapsto (t)$c calculée à l'échelle $\beta^2 = \omega$, interprétée à l'échelle β. D'après $(\star\star\star)$, cette fonction est maintenant définie sur un intervalle de $\mathbb{Z}$.

2.2.2 Exemples d'arithmétisation de courbes

On se propose d'étudier quelques arithmétisations de fonctions. Dans un premier temps, la fonction exponentielle sera présentée. Dans un second temps, l'arithmétisation de la droite sera étudiée afin de présenter la définition actuelle de la notion de droite analytique discrète introduite par J. P. Reveillès. Mais commençons tout d'abord par étudier la signification des sorties graphiques en fonction des différents paramètres.

2.2.2.1 Sortie graphique

On se propose de représenter graphiquement les fonctions discrètes obtenues par l'algorithme d'arithmétisation. Il est important que cette représentation soit cohérente avec la multiplicité des échelles qui interviennent. Pour cela, on considère que le plan graphique est $\mathbb{R}^2$ puis, pour chaque échelle γ ($\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \simeq +\infty$) on plonge $\mathcal{HR}^2_\gamma$ dans $\mathbb{R}^2$ via l'application $\varphi_\gamma \times \varphi_\gamma : (X, Y) \mapsto \left(\frac{X}{\gamma}, \frac{Y}{\gamma}\right)$. La représentation en pixels des éléments de $\mathcal{HR}^2_\gamma$ consiste à associer à chaque point de $(X, Y) \in \mathcal{HR}^2_\gamma$ (point entier par définition) le carré

$$C\left(\frac{x}{\gamma}, \frac{y}{\gamma}; \frac{1}{\gamma}\right) =_{\text{déf}} \left[\frac{x}{\gamma}, \frac{x}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right] \times \left[\frac{y}{\gamma}, \frac{y}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right].$$

Dans le cas où, comme dans les calculs qui précèdent, on a $\omega = \alpha\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ et $\alpha, \beta \simeq +\infty$, un point $(X, Y) \in \mathcal{HR}^2_\omega$ est représenté par le pixel $C\left(\frac{X}{\alpha\beta}, \frac{Y}{\alpha\beta}; \frac{1}{\alpha\beta}\right)$. Lorsque l'on passe à l'échelle intermédiaire β, au point (X, Y) de $\mathcal{HR}^2_\omega$, on fait correspondre $(X \div \alpha, Y \div \alpha) \in \mathcal{HR}^2_\beta$ lui même représenté par le pixel $C\left(\frac{X \div \alpha}{\beta}, \frac{Y \div \alpha}{\beta}; \frac{1}{\beta}\right)$. Donc, au niveau des pixels, le passage de l'échelle $\omega = \alpha\beta$ à l'échelle β se traduit par la correspondance :

$$C\left(\frac{X}{\alpha\beta}, \frac{Y}{\alpha\beta}; \frac{1}{\alpha\beta}\right) \longmapsto C\left(\frac{X \div \alpha}{\beta}, \frac{Y \div \alpha}{\beta}; \frac{1}{\beta}\right)$$

En conséquence, le pixel $C\left(\frac{k}{\beta}, \frac{l}{\beta}; \frac{1}{\beta}\right)$ à l'échelle β est l'image par le changement d'échelle de l'échelle $\omega = \alpha\beta$ à l'échelle β, des α^2 pixels $C\left(\frac{k\alpha + i}{\alpha\beta}, \frac{l\alpha + j}{\alpha\beta}; \frac{1}{\alpha\beta}\right)$ à l'échelle $\omega = \alpha\beta$ pour $0 \leqslant i \leqslant \alpha - 1$ et $0 \leqslant j \leqslant \alpha - 1$. Ces α^2 pixels sont justement ceux que l'on obtient en subdivisant $C\left(\frac{k}{\beta}, \frac{l}{\beta}; \frac{1}{\beta}\right)$ en α^2 pixels de même taille.

L'image (2.1) donne un exemple avec $\omega = 6$, $\alpha = 2$ et $\beta = 3$. Le carré grisé $C\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ se subdivise en quatre pixels qui sont $C\left(\frac{4}{6}, \frac{2}{6}; \frac{1}{6}\right)$, $C\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{6}; \frac{1}{6}\right)$, $C\left(\frac{4}{6}, \frac{3}{6}; \frac{1}{6}\right)$ et $C\left(\frac{5}{6}, \frac{3}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

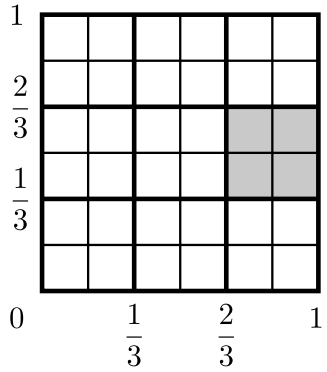


FIGURE 2.1 – Carré unité dans $\mathcal{HR}_\omega$ avec représentation de l'échelle intermédiaire de calcul β.

2.2.2.2 L'exponentielle

La fonction réelle exponentielle $t \to \gamma exp(t)$ avec $\gamma \in \mathbb{R}_{lim}$ est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} x(0) &= \gamma \\ x' &= x \end{cases}$$

Ainsi, lorsque l'on cherche à définir le système d'arithmétisation dans $\mathcal{HR}_\omega$ adapté à cette fonction, on calcule la fonction F

$$F(\widetilde{T}_n\beta + A \bmod \beta, \widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n) = \widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n \text{ et donc } \widetilde{F}_n = \widetilde{X}_n.$$

Puisque la condition initiale du système continu est $x(0) = \gamma$, on obtient $\widetilde{T}_0 = 0$, $\widetilde{X}_0 = \lfloor \gamma\beta^2 \rfloor \div \beta$ et $\widehat{X}_0 = \lfloor \gamma\beta^2 \rfloor \mod \beta$. Ainsi, le schéma d'Euler correspondant à l'arithmétisation de la fonction exponentielle calculée à l'échelle β^2 et interprétée à l'échelle β est

$$\begin{cases} \widetilde{T}_0 = 0,\ \widetilde{X}_0 = \lfloor \gamma\beta^2 \rfloor \div \beta \text{ et } \widehat{X}_0 = \lfloor \gamma\beta^2 \rfloor \mod \beta \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widetilde{X}_n + \widehat{X}_n) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widetilde{X}_n + \widehat{X}_n) \bmod \beta \end{cases} \tag{2.1}$$

C'est typiquement le style d'algorithme proposé par G. Reeb ([Reeb 1987]). Cet algorithme définit une fonction discrète $T \mapsto E(T)$ pour $T \geqslant 0$ dans $\mathcal{HR}_\beta$ qui est l'arithmétisation de la fonction exponentielle au sens où $E(T)/\beta \simeq e^{T/\beta}$ pour $T \in \mathcal{HR}_\beta$ et $e^t \simeq E(\lfloor \beta t \rfloor)/\beta$ pour $t \in \mathbb{R}_{lim}$.

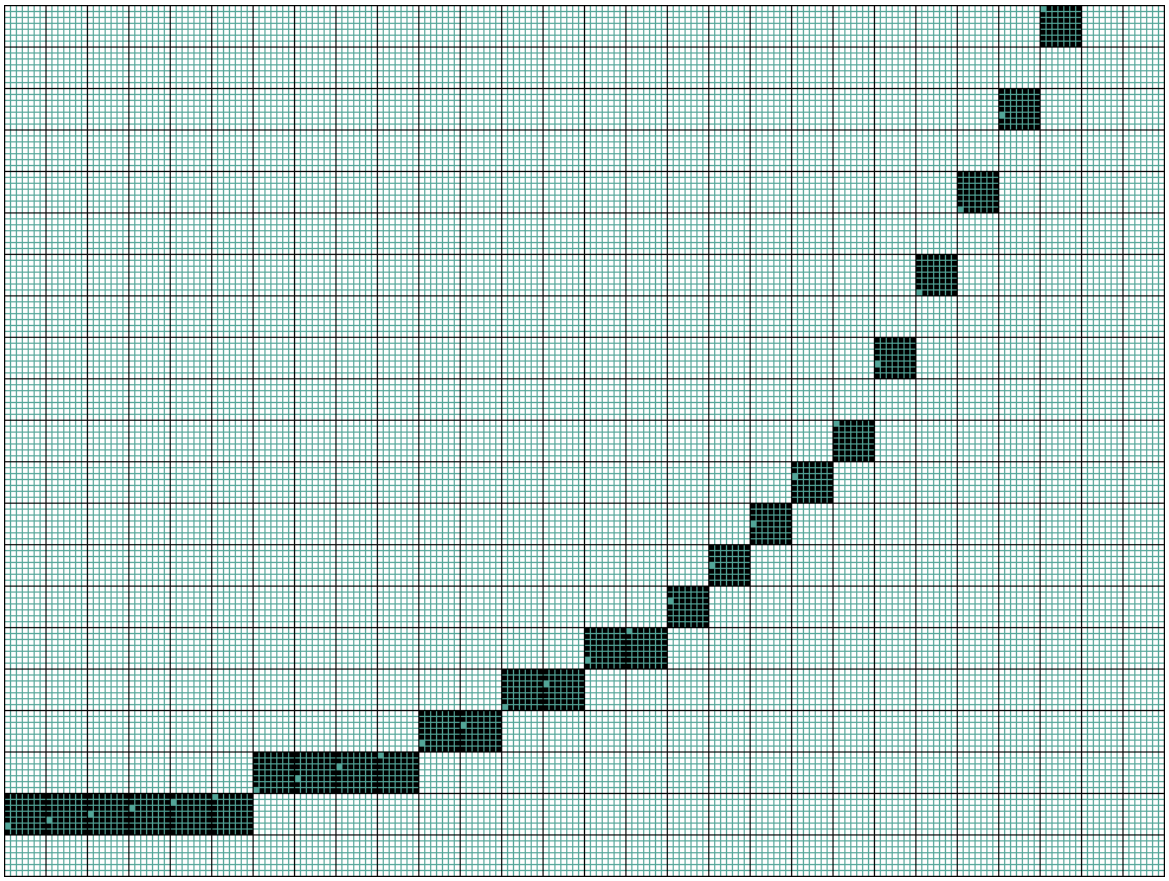


FIGURE 2.2 – Représentation de l'arithmétisation de la fonction $t \to (17/100)e^t$ à l'échelle $\beta = 7$. En noir est représentée l'arithmétisée de cette fonction calculée par l'algorithme (2.1) ; en vert clair est représentée l'arithmétisée à l'échelle $\omega = \beta^2$ dont le domaine de définition n'est pas un intervalle.

La figure (2.2) représente l'arithmétisation de la fonction $t \to (17/100)e^t$. Le tracé noir est la sortie de l'algorithme (2.1) avec $\beta = 7$ et $\gamma = 17/100$. Les conditions initiales sont donc :

- $\widetilde{T}_0 = 0$,
- $\widetilde{X}_0 = \lfloor (17/100)\beta^2 \rfloor \div \beta = 1$
- $\widehat{X}_0 = \lfloor (17/100)\beta^2 \rfloor \mod \beta = 1$.

Le tracé plus clair est la sortie de l'algorithme ($\star\star$) du paragraphe (2.2.1.1) adapté à la fonction exponentielle en ($(\star\star)_{\exp}$) avec les mêmes paramètres que pour la courbe noire, c'est-à-dire $\alpha = \beta = 7$ et $\gamma = 17/100$.

$$(\star\star)_{\exp} \begin{cases} T_0 = 0,\ X_0 = \lfloor \omega\gamma \rfloor \\ T_{n+1} = T_n + \alpha \\ X_{n+1} = X_n + X_n \div \beta \end{cases}$$

Les conditions initiales sont $T_0 = 0$, $X_0 = \lfloor (17/100)\beta^2 \rfloor = 8$. On voit sur cet exemple que lorsque le passage à l'échelle intermédiaire n'a pas été fait, le domaine de représentation est discontinu. Dans le cas de la figure (2.1) les points sont éloignés les uns des autres d'une distance $\alpha = 7$.

2.2.2.3 De l'arithmétisation d'une droite continue aux droites analytiques discrètes de Reveillès

La méthode d'arithmétisation du schéma d'Euler semble un outil bien trop compliqué et lourd pour l'appliquer à un objet aussi simple qu'une droite. Cela d'autant plus que dans ce cas, l'arithmétisation directe fonctionne bien. Néanmoins, la méthode a été testée et, en retombée inattendue, le résultat obtenu a conduit J.P. Reveillès à la notion des droites analytiques discrètes qui généralise la notion de droite issue de l'algorithme de Bresenham.

On cherche à arithmétiser une droite d'équation $x = ct + d$ avec c et d des nombres réels donnés. Dans un premier temps, on peut définir l'arithmétisation directe de la fonction $t \mapsto x(t) = ct + d$ comme c'est présenté dans la première partie (2.1.1). L'arithmétisation directe de cette fonction à l'échelle ω est la fonction

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathcal{HR}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{HR}_\omega \\ & & T & \longmapsto & \left\lfloor \omega x \left(\dfrac{T}{\omega} \right) \right\rfloor = \lfloor cT + \omega d \rfloor \end{array}$$

Le graphe correspondant à cette arithmétisation est $\left\{ (X,T) \in \omega^2 ; X = \lfloor cT + \omega d \rfloor \right\}$, ce qui correspond à prendre pour chaque abscisse T de $\mathcal{HR}_\omega$ le point entier le plus proche et sous la droite continue d'équation $X = cT + \omega d$. Le défaut manifeste de cette fonction est qu'elle oblige à manipuler directement des nombres réels.

Dans un second temps, déterminons l'arithmétisée de la fonction x vue comme solution d'une équation différentielle, c'est-à-dire en utilisant la discrétisation de la méthode d'Euler présentée ci-dessus. On a $x' = c$ avec la condition initiale $x(0) = d$. Le schéma d'Euler lui correspondant est donc :

$$(\Leftrightarrow) \begin{cases} t_0 = 0 \text{ et } x_0 = d \\ t_{n+1} = t_n + 1/\beta \\ x_{n+1} = x_n + c/\beta \end{cases}$$

et le schéma d'Euler discrétisé via la double échelle $\omega = \beta^2$ est :

$$(\bullet)\begin{cases} \widetilde{T}_0 = 0,\ \widetilde{X}_0 = \lfloor \omega d \rfloor \div \beta \text{ et } \widehat{X}_0 = \lfloor \omega d \rfloor \bmod \beta \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + C) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + C) \bmod \beta \end{cases}$$

où $C = \lfloor \omega c \rfloor \div \beta$. L'ensemble des couples $(\widetilde{T}_k, \widetilde{X}_k)$ est le graphe d'une fonction $T \to X(T)$ définie

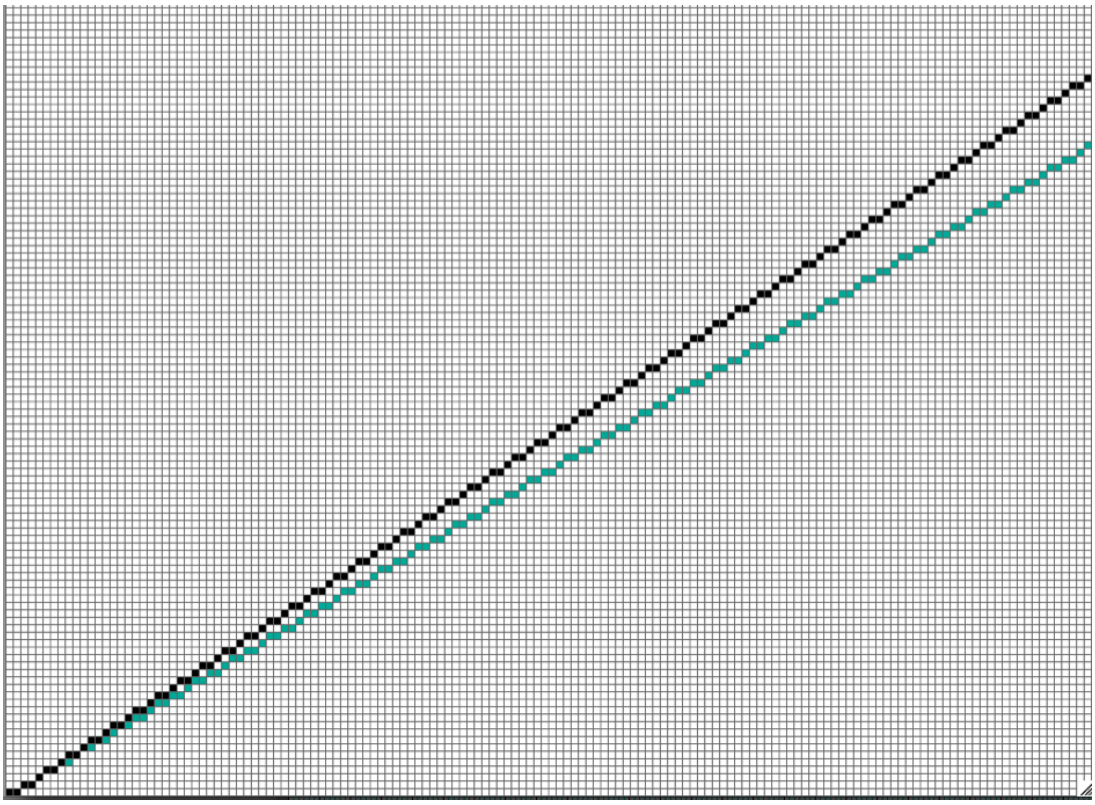


FIGURE 2.3 – Arithmétisations de la fonction $t \mapsto 2t/3$ avec $\beta = 10$ (en vert clair) et $\beta = 1000$ (en noir).

sur un intervalle de $\mathbb{Z}$, on peut voir quelques tracés de cet algorithme sur la figure (2.3). La fonction $T \mapsto X(T)$ est appelée l'arithmétisée, calculée à l'échelle ω et interprétée à l'échelle β de la fonction $t \mapsto x(t)$. La figure (2.3) représente une partie de l'arithmétisatisée de la fonction $t \mapsto 2t/3$ tracée avec $\beta = 10$ (en clair) et $\beta = 1000$ (en noir). Le tracé en noir est beaucoup plus précis que le clair, ceci explique que les deux tracés divergent.

Ce qui est intéressant ici, c'est de remarquer que (confer [Reveillès 1996, Reveillès 1991, Reveillès 1992]) cet algorithme est équivalent à celui de Bresenham. On rappelle que Bresenham a défini en 1962 un algorithme de tracés de segments qui détermine une approximation discrète et entière de segment de droite entre deux points donnés. Il consiste à calculer à chaque étape l'erreur entre la valeur réelle de la droite et le point tracé et d'en déduire le point suivant. Ce qui différencie l'algorithme de Bresenham de l'approche de Reveillès est que ce premier n'est qu'un algorithme de tracé, il ne se base pas sur une définition analytique globale. Dans celle proposée

ici, tous les éléments sont des entiers.

Il est intéressant de remarquer que la fonction discrète $T \mapsto X(T)$ a priori générée par un algorithme itératif est aussi décrite par une formule analytique.

Précisément, pour tout $T \in \mathcal{HR}_\omega$, on a $X(T) = \lfloor C_\beta T + D_\beta \rfloor$ où $C_\beta := \dfrac{\lfloor \beta^2 c \rfloor \div \beta}{\beta}$ et $D_\beta := \dfrac{\lfloor \beta^2 d \rfloor}{\beta}$.

Pour preuve, on introduit la variable $X_n := \widetilde{X}_n \beta + \widehat{X}_n$ avec des valeurs dans $\mathcal{HR}_\omega$ où $\omega = \beta^2$. De la formule inductive $X_{n+1} = X_n + C$, on déduit pour chaque n on a $X_n = X_0 + nC$. On calcule $X_0 = \widetilde{X}_0 \beta + \widehat{X}_0 = (\lfloor \omega\, d \rfloor \div \beta)\beta + \lfloor \omega\, d \rfloor \bmod \beta = \lfloor \omega\, d \rfloor$ on a l'expression $X_n = n(\lfloor \omega\, c \rfloor \div \beta) + \lfloor \omega\, d \rfloor$ et finalement

$$\widetilde{X}_n = \left\lfloor \frac{n(\lfloor \omega\, c \rfloor \div \beta) + \lfloor \omega\, d \rfloor}{\beta} \right\rfloor.$$

$\widetilde{T}_n = n$ conduit au résultat.

Les éléments du graphe de la fonction $T \mapsto X(T)$ sont les points à coordonnées entières qui sont sur ou juste en dessous de la droite continue d'équation $x = C_\beta\, t + D_\beta$. La pente de cette droite est $C_\beta = \dfrac{(\lfloor \beta^2\, c \rfloor \div \beta)}{\beta} \simeq c$ et pour $t = 0$ on a $x = D_\beta = \dfrac{\lfloor \beta^2\, d \rfloor}{\beta} \simeq \beta\, d$. Ainsi, cette droite est infiniment proche de la droite initiale.

Finalement, du fait que $\left\lfloor \dfrac{C_\beta T + D_\beta}{\beta} \right\rfloor - X = 0$ soit équivalent à

$$0 \leqslant \frac{C_\beta T + D_\beta}{\beta} - B < 1,$$

le graphe de la fonction $T \mapsto \lfloor C_\beta T + D_\beta \rfloor$ est l'ensemble des $(T, X) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$0 \leqslant KT - \beta X + \beta D_\beta \leqslant \beta$$

Ce style d'inégalité est à l'origine du concept de la droite analytique discrète introduite par Reveillès :

Soient $a, b, \gamma, \tau \in \mathbb{Z}$, la droite analytique discrète *de pente (a, b), d'épaisseur τ et d'origine γ est l'ensemble des points $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que*

$$\gamma \leqslant aX - bY < \gamma + \tau$$

2.2.2.4 Transition

Comme indiqué dans (1.2.3.1), on peut remarquer que les illustrations graphiques précédemment sont faites pour β prenant des valeurs entières « grandes » (ici jusqu'à 1000) mais usuelles et non infiniment grandes. Ce défaut est une motivation pour définir la méthode d'arithmétisation dans le cadre des Ω-nombres.

2.3 Arithmétisation d'objets continus du point de vue des Ω-Entiers

Nous allons à présent et pour la suite de ce chapitre, travailler avec l'arithmétique nonstandard décrite dans (1.3.1). On rappelle que l'extension de $\mathbb{Z}$ notée $\mathbb{Z}_\Omega$ est constituée de l'ensemble des suites de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Les opérations somme et produit sont définies comme la somme et le produit des éléments de suites terme à terme. Pour les relations d'égalité et d'inégalité, on dit que la suite $a = (a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est égale (resp. inférieure à) $b = (b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ s'il existe un rang M tel que pour tout $m > M$, a_m est égal (resp. inférieur à) b_m.

On dénote maintenant par $\mathcal{HR}_\omega$ la droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-entiers. Dans ce contexte, l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire le continu, est représenté par $\mathbb{Q}^{lim}$ (présenté dans le premier chapitre 1.3.3). Pour qu'il n'y ait pas de confusion dans la suite au niveau des notations des indices, on notera toujours par la lettre m les indices des suites de Ω-nombres et on appellera ceci la *profondeur* de la suite. Étant donné $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{HR}_\omega$, pour chaque valeur m de la profondeur le terme correspondant x_m est dans $\mathbb{Z}$. On réserve la lettre n pour l'indice d'itération du schéma d'Euler. Par exemple la seconde ligne du schéma s'écrit $T_{n+1} = T_n + 1$ avec T_{n+1}, T_n et $1 \in \mathcal{HR}_\omega$, ce qui donne en terme d'entiers $(T_m)_{n+1} = (T_m)_n + (1_m)$. Pour finir, lorsque l'on voudra parler de la profondeur $m^{\text{ième}}$ de la $n^{\text{ième}}$ itération de T, on le notera $T_{m,n}$. C'est-à-dire que le premier indice correspond à la profondeur dans la suite définissant l'Ω-entier et le second indice désigne le nombre d'itérations calculé par le schéma.

2.3.1 Description du schéma

On considère une fonction $f : \mathbb{Q}_\Omega^{lim} \times \mathbb{Q}_\Omega^{lim} \longrightarrow \mathbb{Q}_\Omega^{lim}$. Contrairement à la première version du processus d'arithmétisation introduite dans la section (2.2), on ne peut pas supposer que cette fonction f est continue ou plus régulière puisque l'on n'a pas défini cette notion dans le cadre des Ω-nombres rationnels de Laugwitz et Schmieden. On ne sait d'ailleurs pas non plus ce que signifie $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$. Néanmoins, ces notions d'équations différentielles, de dérivée, de continuité, etc. peuvent prendre du sens dans $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$en suivant l'approche de Laugwitz et Schmieden ([Laugwitz 1992] [Laugwitz 1958] [Laugwitz 1983]). Comme nous ne désirons pas faire ici de l'analyse classique avec les Ω-nombres, nous ne présenterons pas cette étude. L'idée est que, si l'équation $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ n'a pas de statut ici, dans $\mathbb{Q}_{lim}$ le schéma d'Euler lui est parfaitement défini. On contourne la difficulté en s'intéressant directement au schéma d'Euler. Les fonctions f de $\mathbb{Q}_\Omega^{lim} \times \mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ considérées dans les algorithmes sont des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$.

On considère le schéma d'Euler continu dans $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$

$$(\bigstar)\begin{cases} t_0 = a,\ x_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{\beta} \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\beta} f(x_n, t_n) \end{cases}$$

où $a, b \in \mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ et β un entier infiniment grand.

Comme précédemment, on va chercher l'équivalent de ce schéma dans les entiers de la droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-nombres entiers. Pour ceci, on considère la fonction ψ_ω intro-

duite dans le chapitre précédent pour prouver l'isomorphisme entre $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ et $\mathcal{HR}_\omega$:

$$\begin{array}{rccc} \psi_\omega & : & \mathbb{Q}_\Omega^{lim} & \to & \mathcal{HR}_\omega \\ & & u & \mapsto & (\lfloor \omega u \rfloor) \end{array}$$

Dès à présent, on introduit la fonction réciproque φ_ω [1] de ψ_ω :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\omega & : & \mathcal{HR}_\omega & \to & \mathbb{Q}_\Omega^{lim} \\ & & x & \mapsto & x/\omega \end{array}$$

Pour les mêmes raisons que dans la première version de (2.2), on est amené à introduire une forme analogue à $(\star\star')$:

$$(\bigstar\bigstar) \begin{cases} T_0 = A,\ X_0 = B \\ T_{n+1} = T_n + P \\ X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta \end{cases}$$

avec T_k, X_k des éléments de $\mathcal{HR}_\omega$ pour tout k et $F(T_n, X_n)$ une fonction de $\mathcal{HR}_\omega \times \mathcal{HR}_\omega$ dans $\mathcal{HR}_\omega$ et, inspirés par ce qui a été fait dans la partie précédente, on pose :

- $F(T_n, X_n) = \psi_\omega(f(T_n/\omega, X_n/\omega)) = \lfloor \omega f(T_n/\omega, X_n/\omega) \rfloor$
- $P = \psi_\omega(1/\beta) = \omega \div \beta$
- $A = \psi_\omega(a) = \lfloor \omega a \rfloor$
- $B = \psi_\omega(b) = \lfloor \omega b \rfloor$

Ici, on ne présente pas tout le détail expliqué dans la partie précédente pour prouver que si l'on pose $\omega = \alpha\beta$ avec $\beta \simeq +\infty$ et $\alpha \simeq +\infty$, alors, le schéma discret $(\bigstar\bigstar)$ est équivalent au schéma continu $(\bigstar)$. En effet, le déroulement est très proche : on plonge $(\bigstar\bigstar)$ dans $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ via φ_ω. Comme cette fonction est linéaire, on obtient un représentant exactement équivalent dans le continu de $(\bigstar\bigstar)$. Puis, finalement, on montre que ce schéma est équivalent à celui de départ $(\bigstar)$ (dans le sens où les conditions initiales et les étapes d'évolutions sont infiniment proches les unes des autres).

On considère donc le schéma itératif à valeurs dans $\mathcal{HR}_\omega$ sous l'hypothèse $\omega = \alpha\beta$ et dans lequel les objets sont des suites ($T_n = ((T_m)_{m\in\mathbb{N}})_n$, $X_n = ((X_m)_{m\in\mathbb{N}})_n$ pour $n \in \mathbb{N}$) :

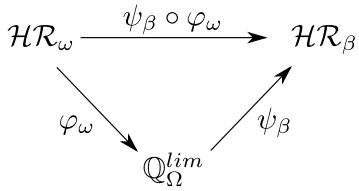
$$(\bigstar\bigstar) \begin{cases} T_0 = \lfloor \omega a \rfloor,\ X_0 = \lfloor \omega b \rfloor \\ T_{n+1} = T_n + \alpha \\ X_{n+1} = X_n + F(T_n, X_n) \div \beta \end{cases}$$

avec $F(T_n, X_n) = \lfloor \omega f(T_n/\omega, X_n/\omega) \rfloor$.

2.3.1.1 Passage à l'échelle intermédiaire

Pour les mêmes raisons que précédemment, à savoir que le pas de ce schéma est infiniment grand et donc que les points sont extrêmement éloignés les uns des autres, on calcule ce schéma à une échelle intermédiaire. On fait l'hypothèse $\alpha = \beta$ et donc $\omega = \beta^2$. La fonction $\psi_\beta \circ \varphi_\omega$ est la transformation via $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ suivante

1. On rappelle que lorsque l'on parle de *fonction réciproque*, c'est au sens des égalités sur $\mathcal{HR}_\omega$ et $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ c'est-à-dire $=_\omega$ et $\simeq$.



Cette fonction,

$$\begin{array}{rccl} \psi_\beta \circ \varphi_\omega & : & \mathcal{HR}_\omega & \longrightarrow & \mathcal{HR}_\beta \\ & & x & \longmapsto & x \div \beta \left(= \psi_\alpha \left(\frac{x}{\omega} \right) = \left\lfloor \frac{x}{\omega} \alpha \right\rfloor \right) \end{array}$$

permet de trouver des représentants dans $\mathcal{HR}_\beta$ des éléments de $\mathcal{HR}_\omega$.

Pour tout $x \in \mathcal{HR}_\omega$,

$$x = \widetilde{x}\beta + \widehat{x}$$

avec $\widetilde{x} =_{\text{déf}} x \div \beta \in \mathcal{HR}_\alpha$ et $\widehat{x} =_{\text{déf}} x \mod \beta \in \{0,\ 1,\ \ldots\ \beta - 1\}$ $\widetilde{x}$ représente le quotient et $\widehat{x}$ le reste de la division euclidienne de x par β.
La transformation d'un nombre réel de $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ en un élément de $\mathcal{HR}_\beta$ via $\mathcal{HR}_\omega$ est

$$x \longmapsto (X_m)_m = (\lfloor \beta_m^2 x \rfloor \div \beta_m)_m$$

Les conditions initiales à l'échelle intermédiaire sont les suites définies par :

$$\begin{cases} \widetilde{T}_0 = (\widetilde{T}_m)_0 = (\lfloor \beta_m^2 a \rfloor \div \beta_m)_{m \in \mathbb{N}} \\ \widetilde{X}_0 = (\widetilde{X}_m)_0 = (\lfloor \beta_m^2 b \rfloor \div \beta_m)_{m \in \mathbb{N}} \\ \widehat{X}_0 = (\widehat{X}_m)_0 = (\lfloor \beta_m^2 b \rfloor \mod \beta_m)_{m \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

Le schéma général à l'échelle intermédiaire β

$$(\star\star\star) \begin{cases} \widetilde{T}_0 = \lfloor a\beta^2 \rfloor \div \beta,\ \widetilde{X}_0 = \lfloor b\beta^2 \rfloor \div \beta \text{ et } \widehat{X}_0 = \lfloor b\beta^2 \rfloor \bmod \beta \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + \widetilde{F}_n) \bmod \beta \end{cases}$$

où $\widetilde{F}_n = \lfloor \omega f_n(T_n/\omega, X_n/\omega) \rfloor$. On rappelle que les $\widehat{X}_k$ sont des variables auxiliaires de calcul alors que les $\widetilde{T}_k$ et $\widetilde{X}_k$ sont les variables significatives. L'ensemble des couples $(\widetilde{T}_n, \widetilde{X}_n)$ représente le graphe de la fonction $T \mapsto X(T)$ qui est une forme d'arithmétisation calculée à l'échelle $\beta^2 = \omega$ et interprétée à l'échelle β ; c'est une fonction discrète définie sur un intervalle de $\mathbb{Z}$.

Comme les objets β, $\widetilde{X}_n, \widetilde{T}_n$ et $\widehat{X}_n$ sont des suites $((\beta_m)_{m \in \mathbb{N}}, ((\widetilde{X}_m)_{m \in \mathbb{N}})_n, (\widetilde{T}_m)_m \in \mathbb{N})_n$ et $(\widehat{X}_m)_{m \in \mathbb{N}})_n$, on peut écrire ce schéma en terme d'entiers. Chaque profondeur m est indépendante des autres profondeurs de la suite lors de la mise en oeuvre de l'algorithme. Cela signifie que l'on peut regarder le schéma profondeur par profondeur. Néanmoins, c'est seulement lorsque l'on a la sortie « complète », c'est-à-dire constituée des Ω-nombres que l'on a une représentation exacte de la fonction donnée par l'algorithme.

En fait, le schéma suivant ($\star\star\star$) revient à faire pour chaque profondeur m des suites le schéma constitué d'entiers (de $\mathbb{Z}$).

$$\blacklozenge_m \begin{cases} \widetilde{T}_{m,0} = \lfloor a\beta_m^2 \rfloor \div \beta_m,\ \widetilde{X}_{m,0} = \lfloor b\beta_m^2 \rfloor \div \beta_m \text{ et } \widehat{X}_{m,0} = \lfloor b\beta_m^2 \rfloor \bmod \beta_m \\ \widetilde{T}_{m,n+1} = \widetilde{T}_{m,n} + 1 \\ \widetilde{X}_{m,n+1} = \widetilde{X}_{m,n} + (\widehat{X}_{m,n} + \widetilde{F}_{m,n}) \div \beta_m \\ \widehat{X}_{m,n+1} = (\widehat{X}_{m,n} + \widetilde{F}_{m,n}) \bmod \beta_m \end{cases}$$

où $\widetilde{F}_{m,n} = \lfloor \omega_m f_n(T_{m,n}/\omega_m, X_{m,n}/\omega_m) \rfloor$.

Les deux itérateurs "n" et "m" ont des rôles bien distincts, en effet, lorsque n augmente, on a de plus en plus de points sur le graphe. Lorsque m évolue, c'est la précision et l'information qui augmentent. Plus cet indice est grand, plus β_m sera grand aussi, donc le pas sera petit et finalement, l'information sera de plus en plus grande, c'est-à-dire que l'approximation sera de plus en plus fine.

2.3.1.2 Les Ω-itérations

Comment utiliser le schéma itératif ($\star\star\star$) pour décrire la fonction discrète $T \mapsto X(T)$ obtenue ? Si on procède comme d'habitude, étant donné un nombre $N \in \mathbb{N}$ arbitraire, on applique N fois le schéma ($\star\star\star$) aux conditions initiales, ce qui donne une suite $(\widetilde{T}_k, \widetilde{X}_k)_{0 \leqslant k \leqslant N}$; le résultat de N-itérations est $(\widetilde{T}_N, \widetilde{X}_N) \in \mathcal{HR}_\beta^2$ et en faisant varier N, les points $(\widetilde{T}_N, \widetilde{X}_N)$ décrivent le graphe de la fonction X. Ce mode d'utilisation du schéma ($\star\star\star$) est insuffisant car il conduit à une fonction X dont le domaine de définition est de longueur nulle dans $\mathcal{HR}_\beta$: pour tout $N \in \mathbb{N}$, $T_N - T_0 =_\beta 0$ du fait que $T_N - T_0 = N$ est un entier standard. Pour supprimer ce défaut, il faut généraliser cette notion d'itération.

Définition 11 *Étant donné un Ω-nombre naturel $N = (N_m)_{m\in\mathbb{N}}$, le* résultat de N-itérations appliquées *à ($\star\star\star$) est le couple d'entiers relatifs $(\widetilde{T}_N, \widetilde{X}_N)$ obtenu de la manière suivante : pour chaque profondeur $m \in \mathbb{N}$, l'application de N_m-itérations au schéma $\blacklozenge_m$ fournit comme résultat un couple $(\widetilde{T}_{m,N_m}, \widetilde{X}_{m,N_m}) \in \mathbb{Z}^2$ et on pose $\widetilde{T}_N = (\widetilde{T}_{m,N_m})_{m\in\mathbb{N}}$ et $\widetilde{X}_N = (\widetilde{X}_{m,N_m})_{m\in\mathbb{N}}$.*

Par exemple, le résultat de $N = (2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ itérations est obtenu de la manière suivante. On effectue

- une itération à la profondeur 0, ce qui donne $(\widetilde{T}_{0,1}, \widetilde{X}_{0,1})$
- deux itérations à la profondeur 1, ce qui donne $(\widetilde{T}_{1,2}, \widetilde{X}_{1,2})$
- quatre itérations à la profondeur 2, ce qui donne $(\widetilde{T}_{2,4}, \widetilde{X}_{2,4})$
- ...
- 2^m itérations à la profondeur m, ce qui donne $(\widetilde{T}_{m,2^m}, \widetilde{X}_{m,2^m})$

Le résultat est le couple $(\widetilde{T}_N, \widetilde{X}_N)$ défini par $\widetilde{T}_N = (\widetilde{T}_{m,2^m})_{m\in\mathbb{N}}$ et $\widetilde{X}_N = (\widetilde{X}_{m,2^m})_{m\in\mathbb{N}}$.

D'autre part, cette définition est cohérente avec la donnée d'un Ω-nombre $\tau \in \mathcal{HR}_\beta$ tel que $\widetilde{T_0} < \tau$, et que l'on cherche à savoir comment le schéma ($\star\star\star$) peut donner la valeur $(X(\tau))$ correspondante. En effet, on introduit les notations $\tau = (\tau_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $\widetilde{T_k} = (\widetilde{T}_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ et $\widetilde{X_k} = (\widetilde{X}_{m,k})_{m\in\mathbb{N}}$ pour la sortie de l'algorithme. On peut supposer que $\widetilde{T}_{m,0} < \tau_m$ dans $\mathbb{Z}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. D'après le schéma ($\star\star\star$) $\widetilde{T}_{k+1} = \widetilde{T}_k + 1$ donc, pour chaque niveau $m \in \mathbb{N}$ des suites, on a $\widetilde{T}_{m,k+1} = \widetilde{T}_{m,k} + 1$. Ainsi, on voit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a besoin de $\tau_m - \widetilde{T}_{0,m}$ itérations pour obtenir la valeur en τ_m partant de celle de $\widetilde{T}_{m,0}$. En conséquence, on observe que

le nombre d'itérations dépend du niveau $m \in \mathbb{N}$. On voit que $\widetilde{T}(\tau)$ est obtenu après avoir fait N_τ itérations du schéma ($\star\star\star$) avec $N_\tau = (\tau_m - t_{0,m})_{m\in\mathbb{N}}$.

Il y aura toujours lors des représentations graphiques N+1 pixels représentés. C'est-à-dire que pour chaque profondeur m, on aura les N_m points calculés par l'algorithme ajoutés au point correspondant à la condition initiale.

2.3.2 En pratique et illustrations

En pratique, les algorithmes donnent des informations exactes et infinies. Lorsqu'on calcule, on ne peut extraire que des informations finies. Il va falloir donc faire des choix au sujet des informations à conserver. Les paragraphes qui suivent expliquent comment les différents paramètres influent sur la sortie graphique.

Dans nos programmes, l'algorithme calcule exactement les objets que l'on manipule. C'est en ce sens que les calculs effectués sont exacts. Mais, bien evidemment, lors de l'évaluation graphique, on ne doit choisir qu'un nombre fini d'éléments à tracer. Le fait que l'évaluation ne se fasse qu'à la toute fin du processus permet de choisir en toute occasion le degré d'approximation et de précision désiré.

On peut résumer tout cela en disant que les calculs sont exacts et que l'évaluation ne donne que les approximations désirées et maitrisées jusqu'au bout. De manière plus précise, l'algorithme d'arithmétisation et les objets en entrée et en sortie de cet algorithme sont de nature *fonctionnelle*. En conséquence et en prolongement de ce qui a été indiqué dans la partie (1.3.4), le cadre de la programmation fonctionnelle est particulièrement adapté pour la mise en oeuvre de la méthode.

Ce qui va être fait dans la suite est, dans un premier temps, la présentation de la lecture de ces schémas et ce qu'apporte l'utilisation des Ω-nombres, à savoir l'aspect multi-échelle du résultat. Dans un second temps, certains exemples d'arithmétisation seront proposés.

2.3.2.1 L'aspect multiéchelle et le choix de β

Rappelons que l'on a choisi un Ω-nombre naturel $\beta = (\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ infiniment grand. L'algorithme d'arithmétisation calcule à l'échelle $\omega = \beta^2$ et, par passage à l'échelle intermédiaire, fournit comme résultat les couples $(\widetilde{T}, \widetilde{X}) \in \mathcal{HR}^2_\beta$. On se propose de représenter graphiquement ces éléments $(\widetilde{T}, \widetilde{X})$.

Dans le cadre précédent de l'approche axiomatique nonstandard (2.2.2.1), un point $(a, b) \in \mathcal{HR}^2_\beta$ est représenté par le pixel $C\left(\frac{a}{\beta}, \frac{b}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right)$, c'est-à-dire le carré $D = [a/\beta, (a+1)/\beta] \times [b/\beta, (b+1)/\beta]$. Lorsque l'on passe aux Ω-nombres, il faut représenter graphiquement un point $(a, b) = (a_m, b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{HR}^2_\beta$. Une généralisation naturelle du mode de représentation précédent consiste à applique la règle suivante :

> Un Ω-couple $(a, b) = (a_m, b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{HR}^2_\beta$ est représenté à l'échelle $\beta = (\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par la suite $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ des carrés
>
> $$D_m = [a_m/\beta_m, (a_m+1)/\beta_m] \times [b_m/\beta_m, (b_m+1)/\beta_m]$$
>
> Et on appelle Ω-pixel cette représentation.

Chaque carré D_m $m \in \mathbb{N}$ est associé à une grille rectangulaire qui subdivise le plan en carrés de cette taille. En général, lorsque m varie, ces grilles se chevauchent de manière aléatoire. Ce phénomène rend difficile la représentation d'une Ω-pixel dans un seul dessin.

Par exemple, sur les cinq figures de (2.4), on observe les cinq premières grilles de tracés avec la suite $\beta = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sur (a) sont représentés quatre pixels du premier niveau, puis sur (b), on a les deux premiers niveaux (en noir quatres pixels de côté 1/1 et en rouge seize pixels de côté 1/2). Sur l'image (c), on a ajouté le troisième niveaux en bleu avec trente-six pixels de côté 1/3. Sur les dessins (d) et (e) on a respectivement ajouter les quatrième et cinquième niveaux de représentation (en gris les pixels de côté 1/4 et en vert, les pixels de côté 1/5).

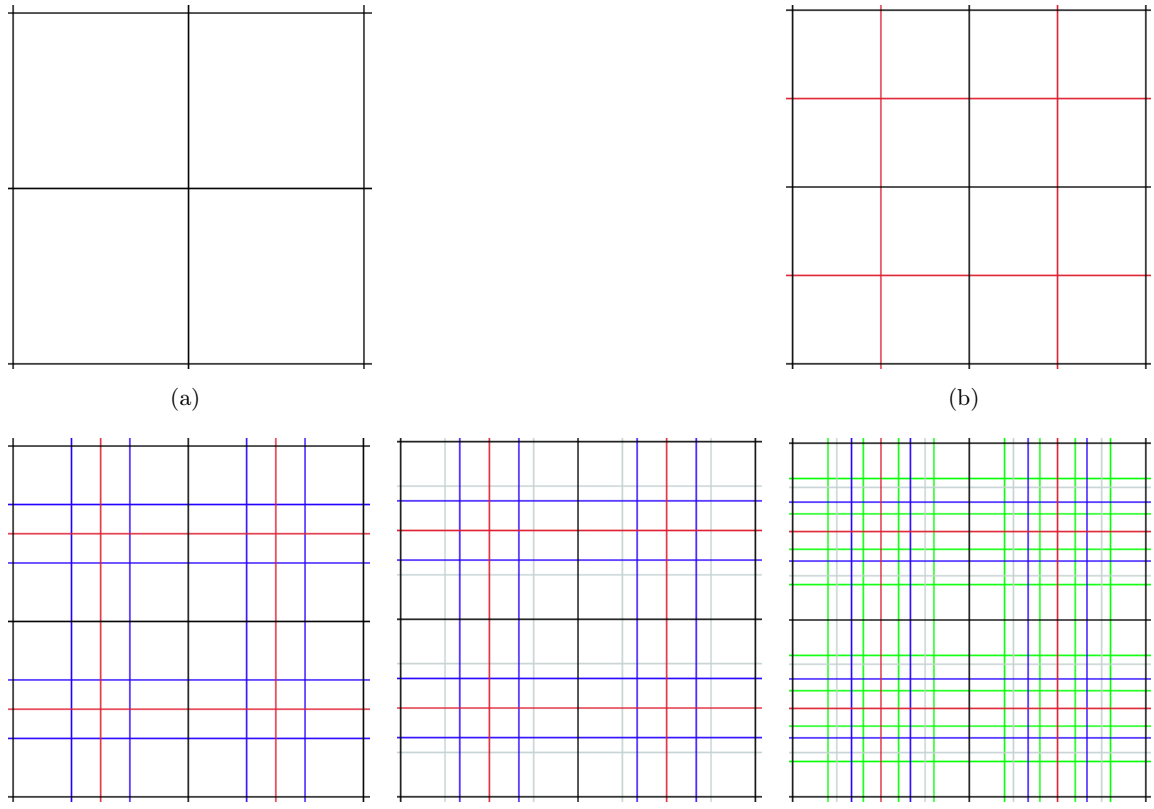


FIGURE 2.4 – Cinq premières grilles de tracé pour $\beta = (n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Si $\beta = (\beta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est choisi de telle sorte que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \beta_{m+1} \text{ est un multiple de } \beta_m \qquad (\sharp)$$

chaque grille s'obtient par subdivision de la précédente. Par exemple, dans la figure (2.5), $\beta = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. De même que pour la figure précédente (2.4), les cinq premiers niveaux sont rajoutés tour à tour, on a en noir les pixels de côté 1/1, en rouge les pixels de côté 1/2, en bleu les pixels de côté 1/4, en gris les pixels de côté 1/8 et en vert, ceux de côté 1/16.

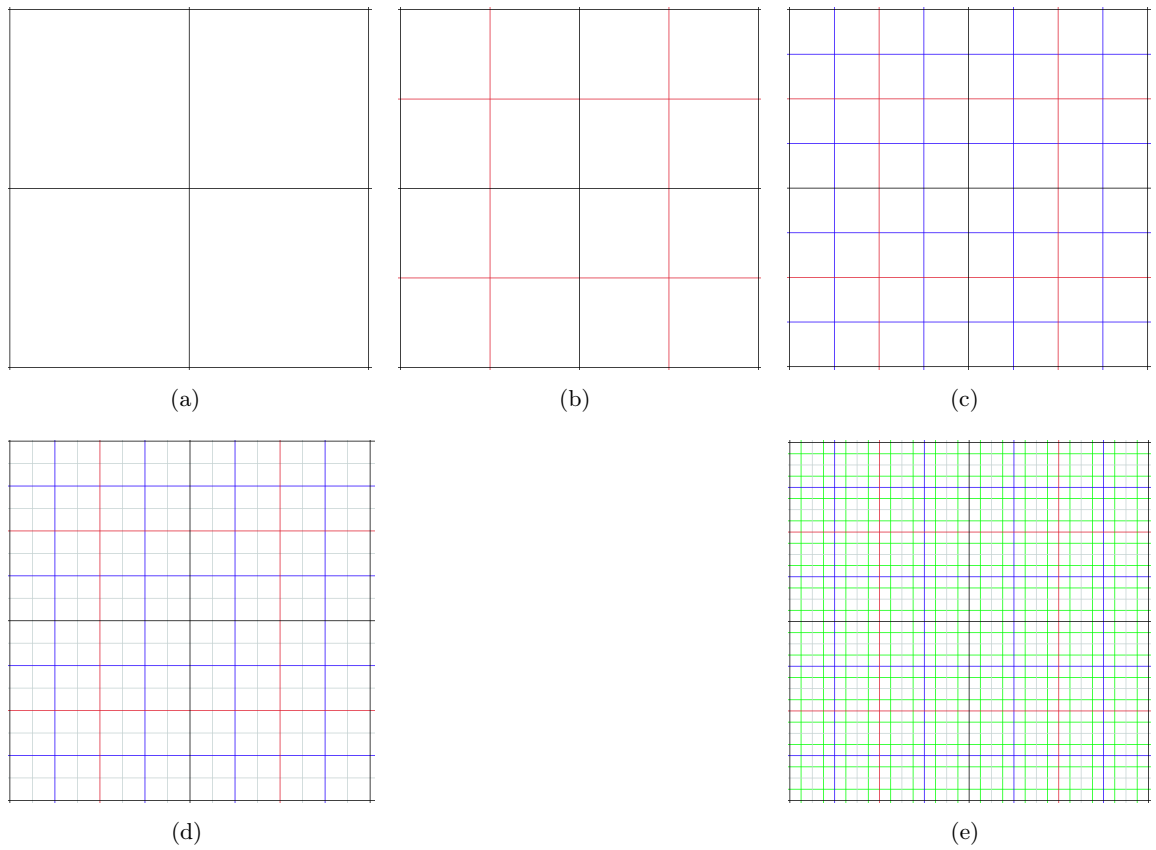


FIGURE 2.5 – Cinq premières grilles de tracé pour $\beta = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il découle des considérations précédentes que le choix d'une échelle $\beta = (2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la propriété ($\sharp$) est approprié. Dans la suite des tracés, on utilisera exclusivement l'échelle $\beta = (2^m)_{m\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas, pour chaque profondeur m, chaque pixel se divise régulièrement en quatre pixels à la profondeur $m+1$, ce qui rend possible, par des choix de couleurs différentes attribuées à chaque profondeur, de donner une représentation graphique unifiée d'un Ω-pixel.

L'aspect multi-échelle de la représentation en terme d'Ω-nombre est donc intrinsèque à la structure des objets que l'on manipule. En effet, travailler avec des suites permet de considérer que chaque profondeur représente une échelle de lecture.

En conclusion, un Ω-pixel est une suite de pixels de côté $1/2^m$ ($m \in \mathbb{N}$) et, lorsque l'on passe de la profondeur m à la profondeur $m+1$, le côté du pixel se divise par 2 et les grilles ne se chevauchent pas. Malgré cela, il faut noter qu'il n'y a aucune raison pour que, dans la représentation d'un même Ω-pixel, pour tout m le pixel à la profondeur $m+1$ soit contenu dans le pixel à la profondeur m.

Les images ci-dessous illustrent ceci : commençons par l'exception (2.6), les différentes représentations des profondeurs du point (0, 0) sont encastrées les unes dans les autres. Sur la figure (2.7) qui représente les premières échelles du point (1,1), la disjonction entre tous les carrés est remarquable. La dernière figure (2.8) illustre un cas où, par hasard, il y a encastrement des

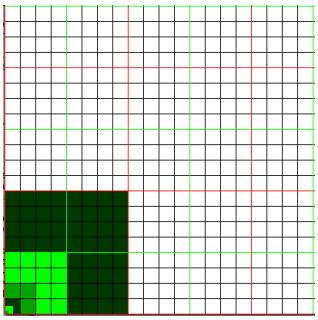


FIGURE 2.6 – Tracé de cinq profondeurs du point (0,0).

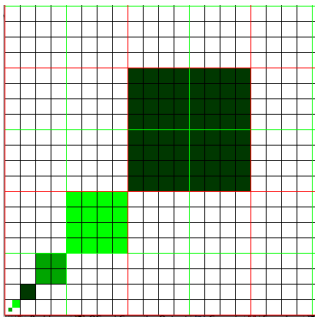


FIGURE 2.7 – Tracé de cinq profondeurs du point (1,1).

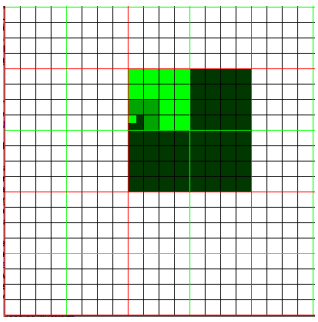


FIGURE 2.8 – Tracé de cinq profondeurs d'un point calculé par l'algorithme.

échelles. Il s'agit des cinq premières itérations du point $((2^n)_{n\geqslant 0}, \widetilde{x}((2^n)_{n\geqslant 0}))$ où $t \mapsto \widetilde{x}(t)$ est l'arithmétisation de la fonction $t \mapsto t^2$.

D'une manière générale, les représentations des graphes qui suivent sont faites sur des abscisses et ordonnées positives. C'est-à-dire que l'Ω-pixel en bas à gauche représente le point (0,0). Pour les abscisses, cela est justifié par le fait que l'on commence toujours les itérations à zéro. Ce choix a aussi été fait pour les ordonnées, on a toujours choisi de représenter des fonctions croissantes par commodité. Mais l'algorithme peut générer des fonctions non croissantes, négatives, etc. Seuls quelques exemples (notamment sur les ellipses (2.3.2.4)) nécessitent des cadres centrés en (0,0). Dans ces cas particuliers, l'origine (0,0) sera précisée.

2.3.2.2 Exemple de la droite

On peut à présent regarder un exemple de tracé de fonction. Commençons par l'objet le plus simple, à savoir la fonction dont le graphe est une droite. On se propose de tracer la sortie de l'algorithme :

$$\begin{cases} \widetilde{T}_0 = 0,\ \widetilde{\widetilde{X}}_0 = 0 \text{ et } \widehat{X}_0 = 0 \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{\widetilde{X}}_{n+1} = \widetilde{\widetilde{X}}_n + (\widehat{X}_n + 3/5) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + 3/5) \bmod \beta \end{cases}$$

Pour la figure (2.9), on a choisit ici $\beta = (2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $N = (3^m)_{m\in\mathbb{N}}$ Ω-itérations. Comme on le voit dans l'algorithme, la pente de la droite est ici 3/5 et les conditions initiales sont (0,0). Les cinq niveaux qui sont tracés ici sont les 1 (en vert foncé), 2 (en vert clair), 3 (en rose), 4 (en bleu turquoise) et 8 (en noir). Cela correspond à cinq niveaux d'échelles. Le quadrillage en rouge représente la taille d'un pixel pour l'échelle 3 et celui en gris l'échelle 4. On a choisit de tracer $N = (3^m)_{m\in\mathbb{N}}$ Ω-itérations, il y a donc 4 $(= 1 + 3^1)$ pixels du premier niveaux qui sont tracés, $10(= 1 + 3^2)$ pixels pour le niveau 2, $28(= 1 + 3^3)$ pixels pour le niveau 3 en rose, ...

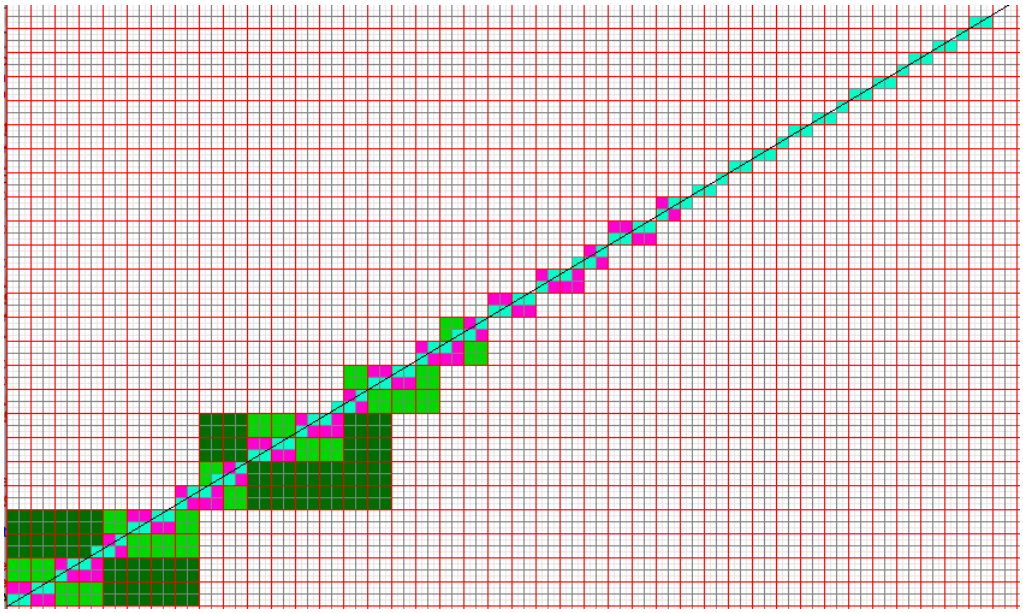


FIGURE 2.9 – Arithmétisation de la droite d'équation y=3x/5 à cinq échelles différentes $(3^m)_{m\in\mathbb{N}}$ itérations.

La figure (2.10) est une autre représentation de la même droite d'équation y=3x/5 avec $(7.2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ itérations. Comme pour la figure (2.9), les profondeurs 1 (8 pixels en noir), 2 (15 pixels en bleu), 3 (29 en rouge), 4 (57 en vert) et 8 (561 pixels en noir) sont représentés.

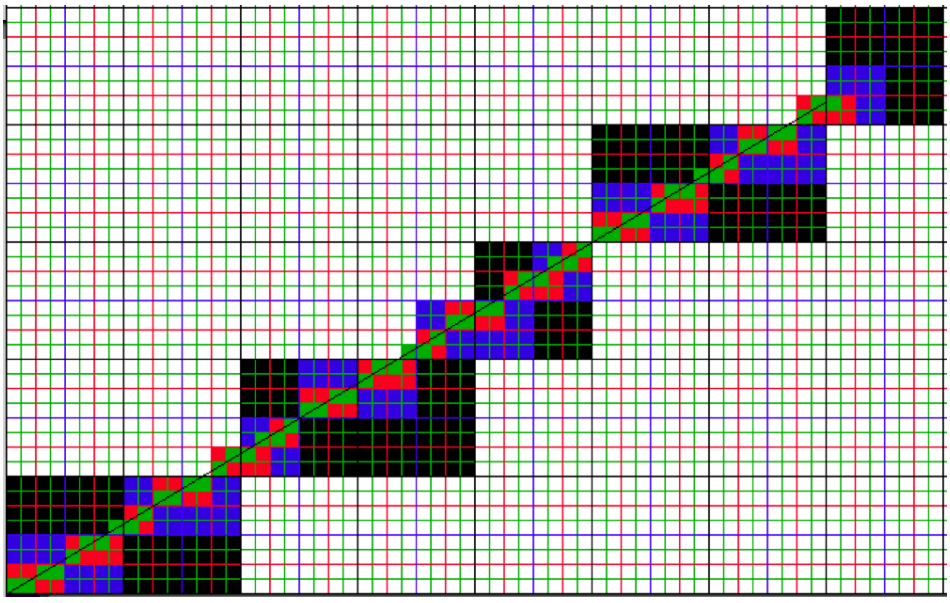


FIGURE 2.10 – Arithmétisation de la droite d'équation y=3x/5 à cinq échelles différentes avec $(7.2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ itérations.

2.3.2.3 Fonctions polynomiales et illustration du choix de l'Ω-itération N

Les images (2.11) et (2.12) représentent l'arithmétisation de la même fonction $t \to t^2/2$ [2] avec $\beta = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la sortie de l'algorithme

$$\begin{cases} \widetilde{T}_0 = 0,\ \widetilde{X}_0 = 0 \text{ et } \widehat{X}_0 = 0 \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + 1 \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + \widetilde{T}_n) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + \widetilde{T}_n) \bmod \beta \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ vaut ici $(\widetilde{T}_n)$. Deux choix de Ω-itérations sont proposés ici, pour la figure (2.11), le nombre d'itérations est $N = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour la figure (2.12), on a choisi $N = (5.2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'intérêt de la notion d'Ω-itération est que l'on choisit la corrélation entre l'échelle (c'est-à-dire l'approximation) et le nombre de points tracés. Le graphe obtenu sur la figure (2.11) est plus pertinent que celui de (2.12) car on a pris en compte le fait que les premiers niveaux (en jaune et rose clair) apportent des informations pauvres et grossières. Les tracés n'apportent aucune information puisqu'ils s'éloignent visiblement de l'objet idéal.

2. A priori, cette fonction est solution de l'équation différentielle $x' = tx$ avec $x(0) = 0$. Dans le cadre des Ω-nombres, on oublie cette équation différentielle et on utilise directement le schéma d'Euler associé.

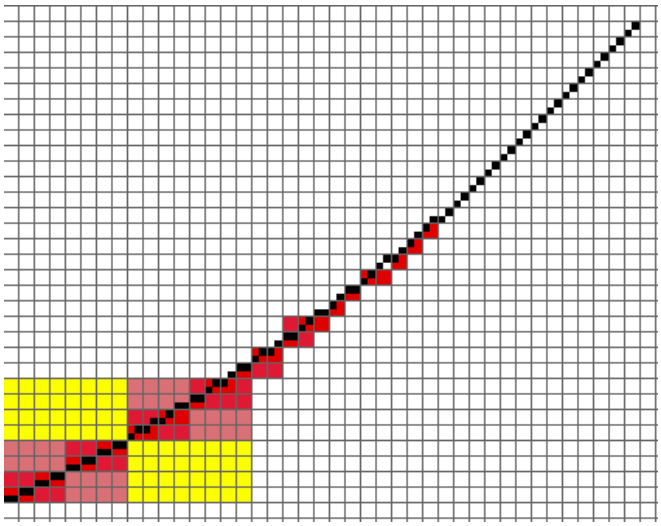


FIGURE 2.11 – Représentation de quatre échelles de l'arithmétisation de la fonction $t \to t^2/2$ avec $N = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ itérations.

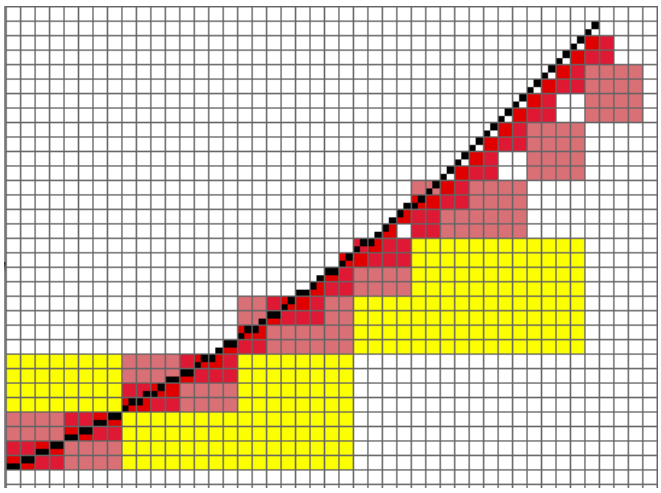


FIGURE 2.12 – Représentation de quatre échelles de l'arithmétisation de la fonction $t \to t^2/2$ avec $N = (5.2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ itérations.

2.3.2.4 Ω-arithmétisation d'ellipses

D'une manière générale, en géométrie discrète, une fois les droites et graphes de fonctions simples étudiés, on s'intéresse aux ellipses. Le schéma d'arithmétisation pour les ellipses est un peu différent du schéma d'arithmétisation décrit dans ce chapitre, en effet l'ellipse est un objet paramétré dans le plan (de $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Dans cette partie, l'idée n'est pas ici de présenter rigoureusement la méthode d'arithmétisation des ellipses car elle est relativement proche de

ce qui a été fait auparavant. Les détails se trouvent dans l'article ([Chollet 2010]) qui est une extension de ([Richard 2009]). On ne donnera ici que les grandes lignes de ce travail. L'idée reste la même, à savoir que l'on considère l'équation différentielle dont la fonction à arithmétiser est la solution. Maintenant, on ne fait pas l'hypothèse $\alpha = \beta$, c'est-à-dire que l'on garde la décomposition $\omega = \alpha\beta$ avec $\alpha \simeq +\infty$ et$\beta \simeq +\infty$. Les variables ne sont plus le temps t et la fonction x de t mais ici, elles sont x et y de t.

De manière précise, on considère l'ellipse d'équation

$$\frac{x(t)^2}{a^2} + \frac{y(t)^2}{b^2} = 1 \tag{2.2}$$

où a et $b \in \mathbb{Q}$.
Le système paramétrique suivant est solution de (2.2)

$$\begin{cases} x &= a\ \cos(t) \\ y &= b\ \sin(t) \end{cases} \tag{2.3}$$

et est caractérisé par système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= -a/b\ y(t) \\ y' &= b/a\ x(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

On considère donc le schéma d'Euler correspondant

$$\begin{cases} (x_0, y_0) &= (0, b) \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) &= (x_n, y_n) + (-\frac{a}{b}h\ y_n, \frac{b}{a}h\ x_n). \end{cases} \tag{2.5}$$

Finalement, on considère le schéma interprété à l'échelle intermédiaire α et calculé à l'échelle $\omega = \beta\alpha$ qui représente l'arithmétisation d'une ellipse de paramètre a et b :

$$\begin{cases} (\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0) &= (0, \lfloor \omega b \rfloor \div \beta) \\ (\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0) &= (0, \lfloor \omega b \rfloor \bmod \beta) \\ (f_n^1, f_n^2) &= ((-a(\widetilde{Y}_n\beta + \widehat{Y}_n)) \div (b\beta), b(\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n) \div (a\beta)) \\ (\widetilde{X}_{n+1}, \widetilde{Y}_{n+1}) &= (\widetilde{X}_n + (\widehat{x}_n + f_n^1) \div \beta, \widetilde{Y}_n + (\widehat{Y}_n + f_n^2) \div \beta) \\ (\widehat{X}_{n+1}, \widehat{Y}_{n+1}) &= ((\widehat{X}_n + f_n^1) \bmod \beta, (\widehat{Y}_n + f_n^2) \bmod \beta) \end{cases} \tag{2.6}$$

Dans le papier ([Chollet 2010]), des propriétés de connexités sont montrées dans ce modèle basé sur des Ω-nombres. Les propriétés de connexités des cercles avaient été prouvées par Aurélie Richard et al. dans ([Richard 2009]). Le théorème de connexité des ellipses ne sera pas démontré mais voici son énoncé :

Théorème 1 *Chaque arc d'ellipse généré par l'algorithme (2.6) dans le rectangle* $R_{l,w}$[3] *est* 8-Ω*-connexe pour* $l = a\beta \div b$ *et* $b\beta \div a$.

La figure (2.13) illustre ceci avec pour paramètres de l'ellipse $a = 4$ $b = 2$ $\alpha = (2_m)_{m\in\mathbb{N}}$ $\beta = (7m)_{m\in\mathbb{N}}$. Le rectangle $R_{2\beta,\lfloor 0,5 \rfloor}$ a aussi été tracé. Lorsque l'ellipse est à l'intérieur de ce rectangle, tous les arcs sont connexes alors que les arcs à l'extérieur de ce rectangle ne le sont pas forcément.

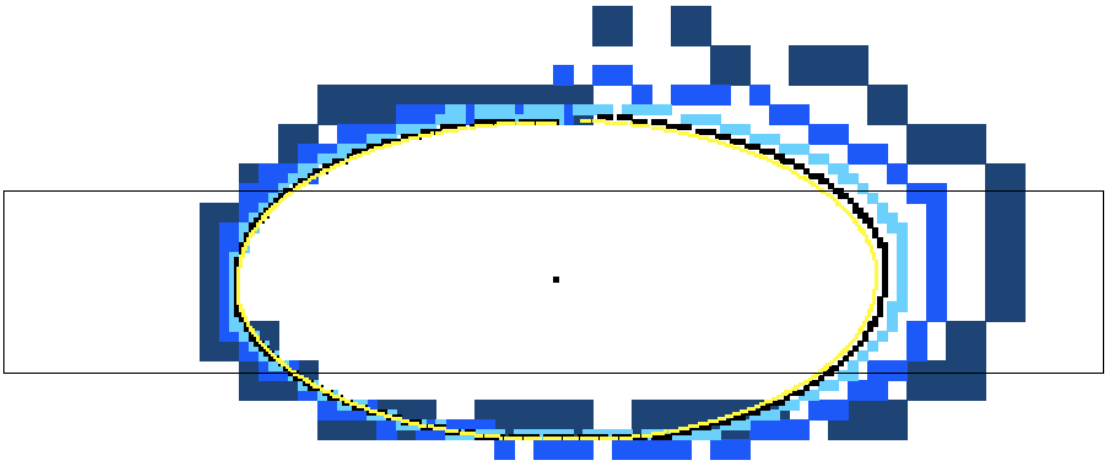


FIGURE 2.13 – Représentation d'arcs d'ellipse mettant en évidence le théorème (1) .

De même, comme on le voit sur ces cercles, le premier (2.14) qui vérifie $a = b = (2)_{m\in\mathbb{N}}$ avec $\beta = (9m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\alpha = (2m)_{m\in\mathbb{N}}$ est 8-connexe alors qu'avec les paramètres $a = b = (2)_{m\in\mathbb{N}}$, $\beta = (3m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\alpha = (3m)_{m\in\mathbb{N}}$, le cercle (2.15) ne l'est pas.

2.4 Conclusion

Dans cette partie, une notion d'arithmétisation, c'est-à-dire une définition d'objets discrets qui sont équivalents à des objets continus, a été présentée. L'intérêt majeur de cette méthode de génération d'objets discrets est qu'elle n'utilise que des entiers. Pour cela, il a été nécéssaire d'utiliser des entiers nonstandard. Malgré l'idée première selon laquelle l'aspect nonstandard des éléments peut paraître incompatible avec la transcription sur machine, on a vu que les Ω-nombres de Laugwitz-Schmieden permettent une implémentation de ces nombres infiniment grands.

La partie suivante traite du cadre théorique logique relatif à la droite d'Harthong-Reeb. En quelques sortes, on y montre dans quelle mesure chacune des deux méthodes est compatible avec les calculs sur machines. Plus précisément, on y teste la constructivité de la droite d'Harthong-Reeb et des modèles arithmétiques nonstandard proposés dans les premières parties.

3. $R_{l,w}$ représente le rectangle de longueur l et de hauteur w.

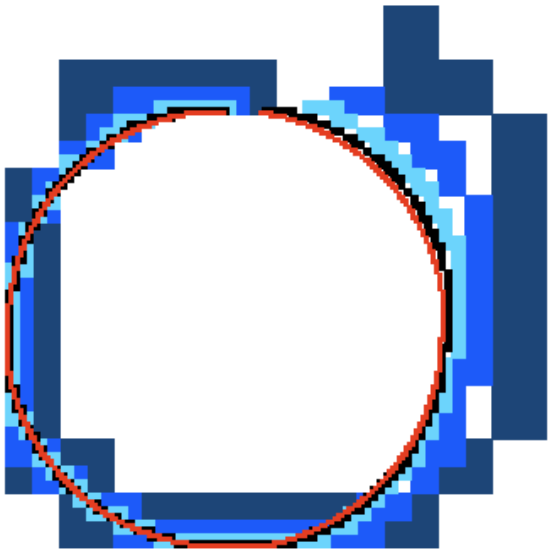


FIGURE 2.14 – Illustration du théorème (1) avec des tracés d'arcs de cercle connexes pour les paramètres $a = b = (2)_{m\in\mathbb{N}}$ avec $\beta = (9m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\alpha = (2m)_{m\in\mathbb{N}}$.

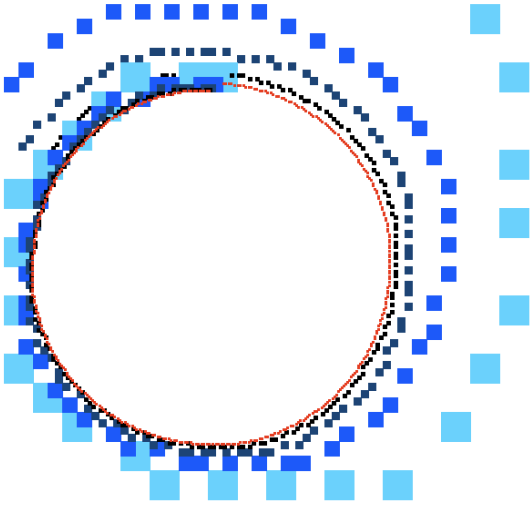


FIGURE 2.15 – Illustration du théorème (1) avec des tracés d'arcs de cercle connexes pour les paramètres $a = b = (2)_{m\in\mathbb{N}}$, $\beta = (3m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\alpha = (3m)_{m\in\mathbb{N}}$

Chapitre 3

Analyse de la constructivité

Sommaire

2.1 Introduction 31
2.1.1 Arithmétisation directe et ses limites 32
2.2 Arithmétisation d'objets continus du point de vue d'une arithmétique nonstandard axiomatique 33
2.2.1 Description générale du processus d'arithmétisation 33
2.2.2 Exemples d'arithmétisation de courbes 38
2.3 Arithmétisation d'objets continus du point de vue des Ω-Entiers 44
2.3.1 Description du schéma 44
2.3.2 En pratique et illustrations 48
2.4 Conclusion 56

3.1 Introduction

Ce chapitre traite du cadre logique et des propriétés constructives de la droite d'Harthong-Reeb. Il se développe en quatres sections.

Dans un premier temps (3.2), on décrira quelques aspects du constructivisme dans le but d'en dégager les principales propriétés et d'expliquer en quoi son cadre est adapté à nos travaux. L'argument majeur est le lien fort existant entre la logique des mathématiques constructives et l'informatique.

Dans un second temps (3.3), on reviendra sur les définitions d'un point de vue constructif des deux versions de la droite d'Harthong-Reeb (l'une basée sur une arithmétique nonstandard axiomatique, l'autre basée sur les Ω-nombres de Laugwitz-Schmieden).

Dans un troisième temps (3.4), on rappelle la définition axiomatique des nombres réels constructifs de Bridges. Cette axiomatique nous a servi à estimer le « degré » de constructivé des deux modèles de la droite d'Harthong-Reeb.

Finalement (3.5), une présentation brève de l'implémentation en coq de la droite d'Harthong-Reeb sera présentée.

Dans ce chapitre, il va nous falloir en permanence distinguer la droite d'Harthong-Reeb basée sur les entiers nonstandard définis axiomatiquement et celle basée sur les Ω-nombres de Laugwitz et Schmieden. Ainsi, pour clarifier l'exposé, nous avons choisi d'adopter les notations suivantes :

- $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ dénote la droite d'Harthong-Reeb construite à partir des entiers nonstandard définis axiomatiquement
- $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ dénote la droite d'Harthong-Reeb définie à partir des entiers nonstandard de Laugwitz et Schmieden

– $\mathcal{HR}_\omega$ dénote la droite d'Harthong basée indifféremment sur l'une ou l'autre des théories nonstandard

3.2 Logique constructive

Cette brève introduction à la logique constructive ou encore appelée intuitionniste, celle des mathématiques constructives ne se veut pas exhaustive. En effet, le but ici est premièrement de présenter les motivations qui nous ont amenées à considérer cette logique. Nous expliquerons quelques unes des nuances qui existent entre la logique à la base des mathématiques classiques (ou encore formalistes) et la logique constructive. Ces différences sont importantes car les distinctions entre les mathématiques constructives et mathématiques classiques se font principalement au niveau de la logique. Pour de plus amples descriptions, on peut lire ([Lombardi 2003] [Beeson 1985] [Troelstra 1988] [Bishop 1985]).

3.2.0.5 Petit historique

Le courant intuitionniste est né au début du $20^{\text{ième}}$ siècle avec Luitzen Brouwer ([Brouwer 1920]) lors des débats sur les fondements des mathématiques qui ont accompagnés la naissance de la théorie des ensembles. Ce courant a été abondonné par la majorité des écoles mathématiques du fait que les intuitionnistes rejetaient certains principes (tel que le Tiers Exclus ou l'axiome du choix) qui étaient considérés comme nécessaires pour prouver une large partie des mathématiques, et notamment l'analyse.

Néanmoins, certains mathématiciens ont continué à développer ce point de vue. Arend Heyting ([Heyting 1956]) donne le premier développement formel de la logique intuitionniste. En parallèle, Kolmogorov ([Kolmororov 1932]) développe une analyse proche de celle de Heyting. Cela donna l'interprétation BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) de la logique intuitionniste qui sera décrite plus loin (3.2.0.7). En 1967, Errett Bishop dans *Fondations of Constructive Analysis* ([Bishop 1967]) reprend le programme de Brouwer et montre que l'on peut développer de manière constructive et riche l'essentiel de l'analyse. Pour ce qui nous intéresse, Douglas S. Bridges a déduit de l'approche de E. Bishop une axiomatique d'un continu constructif.

Ce courant a pris une nouvelle importance depuis que le développement de l'informatique a montré l'importance pratique de l'exigence d'effectivité et de constructivité. Au cours des années soixantes, de nombreux travaux se sont développés à la frontière de l'informatique, de la logique et des mathématiques constructives.

3.2.0.6 Motivation, le lien entre mathématiques constructives et informatique

Comme expliqué dans l'introduction générale, notre objectif est de définir des objets adaptés aux machines, c'est-à-dire discrets, équivalents à ceux définis dans le continu. La logique classique est incompatible avec la réalité matérielle de l'ordinateur. Certaines opérations autorisées par la logique classique ne peuvent être transcrites sur machine. Un exemple très simple est la propriété de décidabilité du signe des nombres réels. L'analyse classique postule, via la logique sous-jacente, que tout nombre réel a un signe déterminé. Il se trouve que la représentation la plus courante des nombres réels sur ordinateur, à savoir celle des nombres flottants, satisfait cette propriété de décidabilité du signe. Ainsi, la logique classique appliquée aux nombres réels et la faiblesse

d'une implémentation se soutiennent alors qu'elles mériteraient d'être interrogées toutes les deux puisque la décidabilité n'est pas algorithmiquement réalisable.

Les mathématiques constructives et les ordinateurs ont ceci en commun de travailler de manière algorithmique. Ce que l'on appelle ici *algorithme* est un procédé systématique de calcul. La vérité en logique constructive est le résultat d'une construction, d'un calcul. Cette construction est transformable en un programme. On retrouve dans ([Reeves 1987]) tout un panel de théories mathématiques constructives adaptées au langage informatique.

En logique intuitionniste, les preuves doivent être des constructions, des calculs, des algorithmes. On ne doit pas douter qu'elles aboutissent en un temps fini. L'interprétation BHK des connecteurs logiques et des quantificateurs permettent d'établir les liens entre les preuves constructives et la notion de programme informatique. Par exemple, prouver constructivement que $(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y)$ *est vraie* revient à donner une fonction qui, appliquée à un élément a de A, donne un élément b de B tel que $P(a, b)$ soit vraie.

D'une manière générale et sans entrer dans les détails, le lien entre les mathématiques constructives et l'informatique apparait fortement dans la *correspondance de Curry-Howard* ([Sorensen 2006]). Cette correspondance a été le point de départ de nombreuses théories incluant à la fois un langage typé de programmation fonctionnel et un système de preuve. Un exemple est la *Théorie constructive des types* de Per Martin-Löf dans laquelle les preuves sont des objets de la théorie et elles ont les mêmes propriétés que les programmes.

C'est une théorie de cette nature qui a donné naissance au logiciel d'aide à la preuve Coq. Il s'agit d'un assistant de preuve qui permet l'écriture et la vérification de preuves mathématiques. La section (3.5), extraite du papier ([Magaud 2010]), esquisse l'implémentation des différents modèles et preuves qui sont développés dans la suite de ce chapitre.

3.2.0.7 Logique intuitionniste

La logique constructive est souvent vue comme négative puisqu'elle rejette certains principes (Tiers Exclus, axiome du choix, ..). En fait, les motivations originelles, à savoir que l'existence des objets et des preuves puissent toujours être justifiée par un calcul ou une construction, étaient positives.

La première distinction entre les logiques classique et constructive est au sujet du *Tiers Exclus*. Le principe du Tiers Exclus soutient que, de deux propositions contradictoires P et $\neg P$, l'une est nécessairement vraie. Le tiers cas, celui où l'on ne sait pas est exclu. Ce que Brouwer reprochait essentiellement à ce principe est son application sans discernement à des situations par essence infinies. Voici une preuve utilisant directement le principe du Tiers Exclus et qui n'est pas valide en logique intuitionniste. La proposition à démontrer est : *il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.* La preuve consiste, connaissant l'irrationalité de $\sqrt{2}$, à considérer le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Le principe du Tier Exclus postule que « tout nombre réel est soit rationnel, soit irrationnel ». On applique cela à $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ainsi si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, les candidats à la proposition sont $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ et dans le second cas, les candidats sont $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ (et donc $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$. Ainsi, cette preuve affirme l'existence de deux entités a et b vérifiant une certaine propriété sans jamais pour autant fournir explicitement un tel couple (a, b). Le problème posé ici par le Tiers Exclus est qu'il traite deux cas sans pour autant savoir lequel est vrai. Nous sommes clairement à l'opposé d'un traitement algorithmique.

Dans un cadre général de logique constructive, les preuves de théorème d'existence fournissent explicitement un candidat. On retrouve cette notion dans l'interprétation des connecteurs logiques et des quantificateurs universels que l'on donne ci-après. L'interprétation B-H-K (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) découle de l'interprétation de la vérité en logique intuitionniste qui consiste à dégager une preuve constructive.

- Une preuve de $P \wedge Q$ signifie que l'on a une preuve de P et une preuve de Q
- Une preuve de $P \vee Q$ signifie que l'on a une preuve de P ou bien une preuve de Q. En d'autres termes, une preuve de $P \vee Q$ est un couple (n, r) où $n \in \{0, 1\}$. Si $n = 0$, r doit être une preuve de P et si $n = 1$, r est une preuve de Q.
- Une preuve de $P \Rightarrow Q$ est une fonction $p \rightarrow q$ qui transforme une preuve p de P en une preuve q de Q.
- $\neg P$ signifie $P \Rightarrow \perp$ [1].
- Une preuve de $\forall x \in X, P(x)$ est, pour un ensemble X défini au préalable, une construction $(x, q) \rightarrow p(x, q)$ qui prend en entrée un $x \in X$ et une preuve q que x appartient à X et donne en sortie une preuve $p(x, q)$ de $P(x)$.
- une preuve de $\exists x \in X, P(x)$ est, pour un ensemble X défini au préalable, un triplet (x, q, p) où x est un objet, q un preuve de $x \in X$ et p une preuve de l'assertion $P(x)$.

Cette interprétation des quantificateurs, présentée par Heyting dans ([Heyting 1956]) en 1930 est la base des théories constructives, notamment de la théorie des types de Per Martin-Löf ([Martin-Löf 1984]).

L'analyse du point de vue constructif des raisonnements classiques identifie un certain nombre de principes, par exemple le Petit Principe d'Omniscience (PPO), plus ou moins contestables. Soit (a_n) une suite d'entiers, le fait d'affirmer que $\forall n, a_n$ est nul ou bien qu'il existe un n tel que a_n est non nul est appelé PPO. Le rejet du tiers exclus et l'interprétation (BHK) des quantificateurs amène au refus de celui-ci. Ce principe (PPO) n'est pas considéré comme vrai car il suppose une connaissance *a priori* de ce qui se passe dans l'infini potentiel. Son rejet a pour conséquence de rendre indécidable le signe d'un nombre réel. En effet un nombre irrationnel est une suite infinie de décimales et on ne connait pas, a priori, le signe de chacunes d'entre elles (par exemple un nombre qui commencerait par 0, 0000...). Néanmoins, selon les écoles de constructivisme, certaines variantes existent à propos du rejet ou de l'acceptation de certains principes.

3.3 Retour sur les définitions de $\mathcal{HR}_\omega$ d'un point de vue constructif

La logique constructive modifie le point de vue et l'approche sur les objets et les structures en comparaison à la logique classique. Ceci s'applique particulièrement sur les relations d'égalité et d'ordre définies sur le continu. Par exemple, l'approche des axiomes et des propositions chez Bridges dans un corps de Heyting-Bridges, l'inégalité stricte a un rôle plus fondamental que l'inégalité large. De même, il faut préciser soigneusement le sens de la définition de la relation de distinction [2] notée $\neq$ car il s'avère qu'il n'est pas pertinent de la définir comme $(\neg =)$. De ce point de vue, nous allons reprendre les définitions d'ordre, d'égalité, de distinction sur la droite

1. Le symbole $\perp$ signifie que la proposition implique une absurdité.
2. On utilisera ce terme *distinction* pour décrire la non-égalité car le terme *inégalité* est davantage utilisé pour les relations d'ordres et le terme *non-égalité* est négatif

d'Harthong-Reeb.

Le cadre logique pour le point de vue d'une arithmétique nonstandard axiomatique sera présenté dans un premier temps. On y détaillera les règles, relations et opérations pour la définition de la droite d'Harthong-Reeb basée sur ces entiers. Puis, dans un second temps, le cadre logique des Ω-entiers de Laugwitz et Schmieden ainsi que celui de la droite d'Harthong-Reeb associée seront développés.

3.3.1 Cadre logique de la version axiomatique de l'arithmétique nonstandard utilisée pour définir $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$

3.3.1.1 Cadre logique de l'arithmétique nonstandard axiomatique

Rappelons que dans ce cadre d'arithmétique nonstandard, on ajoute aux règles classiques sur les entiers de $\mathbb{Z}$ un prédicat « être limité »qui est caractérisé par les cinq axiomes suivants :

ANS1 Le nombre 1 est limité.

ANS2 La somme et le produit de nombres limités sont limités.

ANS3 Pour tout x, y de $\mathbb{Z}$ tels que x est limité et $|y| \leqslant |x|$ alors y est limité.

ANS4 Il existe des entiers non limités.

ANS5 Soit $\mathcal{P}(u)$ une formule (interne ou externe) où u est une suite de $\mathbb{Z}^p$ (avec p un nombre entier limité). On suppose que

1. il existe un élément $x_0 \in \mathbb{Z}^p$ tel que $\mathcal{P}(x_0)$ soit vraie
2. pour tout nombre entier limité n et pour toute suite $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{Z}^p$ telle que $\mathcal{P}((x_k)_{0\leqslant k\leqslant n})$ soit vraie alors il existe un élément x_{n+1} de $\mathbb{Z}^p$ tel que $\mathcal{P}((x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1})$ soit vraie.

Alors, il existe une suite interne infinie $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout nombre limité n, $\mathcal{P}((x_k)_{0\leqslant k\leqslant n})$ soit vraie.

Le cadre logique que l'on se donne autour de ces entiers est le suivant. Il s'énonce en trois règles :

(R1) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x = 0 \vee x < 0 \vee x > 0$ (même pour x infiniment grand).

(R2) Les nombres entiers limités sont identifiés aux nombres entiers usuels [3].

(R3) On utilise seulement la logique intuitionniste.

D'un point de vue constructif, la règle (R1) est la plus contestable. En effet, la décidabilité du signe d'un nombre n'est, à priori vraie que sur les entiers naifs ou encore constructifs. La règle (R2) dit que la décidabilité est possible sur nos entiers limités alors que la règle (R1) étend ceci à tous les entiers (limité ou infiniment grand). Nous allons utiliser les règles R1, R2, R3 dans les preuves pour montrer que le droite d'Harthong-Reeb basée sur des entiers nonstandard caractérisés par les cinq axiomes est un corps de Heyting au sens de Bridges.

3.3.1.2 Retour sur les définitions des relations dans $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$

Les paragraphes qui suivent réintroduisent les définitions des relations d'égalité, d'ordres et de distinction sur $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ d'un point de vue constructif. En apparence, elles concordent avec celles définies dans le chapitre (1) mais comme la signification des quantificateurs est différente, il ne

3. Ces nombres usuels, que G. Reeb nommait les entiers naïfs, constituent la base de l'analyse mathématique constructive

faut pas les interpréter de la même manière. Les opérations algébriques restent inchangées dans leurs définitions car le cadre constructif n'influent pas sur elles.

La droite d'Harthong-Reeb, notée $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge |x| \leqslant n\omega\}$$

où $\omega \simeq +\infty$ et $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs muni de l'axiomatique minimale définie dans (1.2.1.2) et des relations et opérations classiques notées $(=, \leqslant, +, \times)$.

Définition 12 *$\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ est munie de l'égalité à l'échelle ω, notée $=_\omega$ et définie pour $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$ par*

$$x =_\omega y \Leftrightarrow_{déf} \forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n|x - y| \leqslant \omega.$$

Par la suite, la relation $=_\omega$ sera appelée égalité à l'échelle ω.

On se rend compte dès à présent que l'égalité à l'échelle ω définie n'est pas, en général, décidable. En effet, la quantification universelle sur l'entier limité n impose une quantité de vérification infinie. Remarquons que le même phénomène est observable dans les définitions de droites constructives réelles ([Bridges 1999]).

Définition 13 *L'inégalité stricte à l'échelle ω, notée $<_\omega$, est définie pour $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$ par :*

$$x <_\omega y \Leftrightarrow_{déf} \exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge n(y - x) \geqslant \omega.$$

On dira dans la suite que x est inférieur à l'échelle ω à y.

Comme dans l'article de Bridges, la *relation de distinction à l'échelle ω* notée $\neq_\omega$ est définie à partir de la relation d'ordre à l'échelle ω.

Définition 14 *Pour $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$, la distinction à l'échelle ω est définie par*

$$x \neq_\omega y \Leftrightarrow_{déf} (x <_\omega y) \vee (y <_\omega x).$$

Il est clair que $x \neq_\omega y$ implique $\neg(x =_\omega y)$ (cette dernière propriété signifiant que de l'hypothèse $x =_\omega y$ on sait déduire une contradiction). Par contre, la réciproque n'a aucune raison d'être vraie ce qui fait qu'il n'y a pas d'équivalence entre $x \neq_\omega y$ et $\neg(x =_\omega y)$. En effet, contrairement à ce qui se passe en logique classique, la négation intuitionniste de $(\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n|x - y| \leqslant \omega)$, n'est pas de nature à impliquer constructivement

$$(\exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge n|y - x| \geqslant \omega)\ (\star)$$

puisque cette dernière condition présuppose la connaissance effective d'un nombre limité $n \in \mathbb{N}$ tel que $|y - x| \geqslant \omega$. Le résultat suivant montre que la définition choisie de $\neq_\omega$ nous permet justement de récupérer la propriété $(\star)$.

Proposition 4 *Soient deux éléments x et y de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$, on a $x \neq_\omega y$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge n|y - x| \geqslant \omega$.*

⊲Par définition $x \neq_\omega y$ implique $\exists n \in \mathbb{N},\ lim(n) \wedge n|y - x| \geqslant \omega$. Réciproquement, s'il existe un nombre limité $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|x - y| \geqslant \omega$, on considère le signe du nombre entier x-y (immédiatement accessible par R1) et on en déduit que $x <_\omega y$ ou que $y <_\omega x$. ⊳

De la même manière, nous utilisons la relation d'ordre stricte à l'échelle ω pour définir la *relation d'ordre large*.

Définition 15 *Pour deux éléments x et y de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$, on dit que x est inférieur ou égal à y à l'échelle ω et on le note*

$$x \leqslant_\omega y \text{ lorsque } \forall z \in \mathcal{HR}_\omega^{ax},\ ((z <_\omega x) \Rightarrow (z <_\omega y))$$

Il est possible de montrer que la condition $(x <_\omega y) \vee (x =_\omega y)$ (notée (i)) implique $x \leqslant_\omega y$ mais que la réciproque n'a, à nouveau, aucune raison d'être valide. Le résultat suivant donne deux conditions équivalentes à la définition (15), l'une très proche de (i) et l'autre énoncée en terme de quantificateurs.

Proposition 5 *Soient x et $y \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $x \leqslant_\omega y$

(2) $x \leqslant y \vee x =_\omega y$

(3) $\forall n \in \mathbb{N},\ lim(n) \Rightarrow n(x-y) \leqslant \omega$

◁

[(1) implique (2)] On suppose (1). Si $x \leqslant y$, on arrive au résultat. On se place dans le cas où $y < x$. Pour chaque nombre limité $p \in \mathbb{N}$, on considère l'élément

$$z_p =_{\text{déf}} x - \lfloor \omega/p \rfloor$$

de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$. On a donc $x - z_p \geqslant \omega/p - 1$ d'où

$$(p+1)(x-z_p) \geqslant (p+1)\omega/p - (p+1) \geqslant \omega$$

car $\omega \geqslant p(p+1)$. On en déduit $z_p <_\omega x$ d'où $z_p <_\omega y$ et donc aussi $z_p < y$. En conséquence, $z_p < y < x$ et, pour tout nombre limité $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n|x-y| = n(x-y) \leqslant n\lfloor \omega/p \rfloor \leqslant \frac{n}{p}\omega$$

En choisissant $p = n$, on obtient $n|x-y| \leqslant \omega$ pour tout n limité.

[(2) implique (3)] On suppose (2). Si $x \leqslant y$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ limité, le nombre $n(x-y)$ est négatif ou nul et donc inférieur ou égal à ω. Si $x > \omega y$, alors, pour tout nombre limité $n \in \mathbb{N}$, on a $n(x-y) \leqslant n|x-y| \leqslant \omega$.

[(3) implique (1)] On suppose (3) et on considère $z \in \mathcal{HR}_\omega$ tel que $z <_\omega x$. Donc, on sait qu'il existe un nombre limité $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(x-z) \geqslant \omega$ et que $n(x-y) \leqslant \omega$ pour tout nombre limité $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $y - z = (y-x) + (x-z) \geqslant \frac{\omega}{k} - \frac{\omega}{n}$. En prenant $n = 2k$, on obtient $2k(y-z) \geqslant \omega$.

▷

3.3.2 Cadre logique de la version arithmétique des Ω-nombres utilisée pour définir $\mathcal{HR}_\omega^{om}$

Nous allons à présent définir le cadre logique pour la version de la droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-nombres de Laugwitz et Schmieden. Ce que l'on note maintenant $=, >, +, \times$, etc. sont les relations et opérations sur les entiers nonstandard de Laugwitz et Schmieden. Les symboles indicés par ω représentent les opérations et relations sur la droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-nombres.

3.3.2.1 Cadre logique des Ω-entiers

Rappelons que l'ensemble des Ω-entiers, noté $\mathbb{Z}_\Omega$ est constitué des suites de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ munies d'une égalité (resp. d'une inégalité), noté $=$ (resp $<$) définie pour $a =_{\text{déf}} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et
$b =_{\text{déf}} (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\text{il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geqslant N,\ a_n = b_n$$

(resp. $a < b$ lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N,\ a_n < b_n$). Les opérations de somme et produit sont définies terme à terme sur les suites, on les note $+$ et $\times$. (Section 1.3.1).

Du fait que les Ω-entiers soient des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, la question de l'existence *a priori* des entités infiniment grandes ne se pose plus. Par exemple, la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est infiniment grande et parfaitement définie. Mais d'autres problèmes apparaissent. Par exemple, la structure des Ω-nombres interdit notamment la décidabilité du signe des Ω-entiers. Par exemple, l'Ω-nombre $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est ni nul, ni positif, ni négatif. Néanmoins, pour tout n, le signe de $(-1)^n$ est décidable.

C'est pour cela que dans le chapitre (1) on a introduit la notion de vérité faible. Il s'agit d'une vérité nonstandard introduite par la nature des Ω-nombres dont on rappelle la définition :

Définition 16 *Soit $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ une proposition interne avec $x_1, ..., x_n$ des variables libres à valeurs dans $\mathcal{HR}_\omega$. Pour $a_i = (a_{i,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{HR}_\omega$, $i = 1,\ ..., n$, si*

$$(\exists M \in \mathbb{N})(\forall m > M)(P(a_{1,m}, a_{2,m},\ ..., a_{n,m}))\ \textit{est vrai,}$$

la proposition $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ est dite faiblement vraie.

D'après cette définition la proposition *Tout nombre entier est positif ou nul ou négatif* est faiblement vraie. Ce qui revient à dire qu'il est (fortement) vrai que pour un Ω-nombre $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \vee a_n < 0 \vee a_n < 0$.

La règle logique que l'on pose sur les Ω-entiers est que seule la logique intuitionniste est utilisée. Dans cette vision de l'arithmétique nonstandard, il n'y a pas besoin d'ajouter des règles du fait de l'effectivité des objets.

3.3.2.2 Retour sur les définitions des relations dans $\mathcal{HR}_\omega^{om}$

Dans ce contexte, la droite d'Harthong-Reeb, notée $\mathcal{HR}_\omega^{om}$, est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{Z}_\Omega\ ;\ \exists n \in \mathbb{N} \quad |x| \leqslant n\,\omega\}$$

où ω est un entier infiniment grand, $\mathbb{Z}_\Omega$ l'ensemble des entiers nonstandard de (3.3.2.1) et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers standard de la théorie. On rappelle ici qu'une différence entre les deux arithmétiques nonstandard étudiées est que, dans la première, les infiniment grands sont au préalable dans la théorie arithmétique et on ne fait que les mettre en lumière avec le prédicat *lim*. Alors que chez Laugwitz et Schmieden l'arithmétique de base (contenant les entiers constructifs ou encore naïfs) est étendue de manière à obtenir une arithmétique nonstandard. Ainsi, $\mathbb{N}$ est assimilé à l'ensemble des entiers positifs standard de $\mathbb{Z}_\Omega$. Et chaque entier a de $\mathbb{N}$ est identifié à la suite constante $(a)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}_\Omega$.

Définition 17 *$\mathcal{HR}_\omega^{om}$ est munie de l'égalité définie pour x et $y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ par*

$$x =_\omega y \Leftrightarrow_{déf} \forall n \in \mathbb{N},\ n|x - y| \leqslant \omega.$$

La non-décidabilité de l'égalité est ici double. En effet, on a une quantification universelle sur le n qui consiste donc à avoir une potentielle infinité de vérification à faire pour prouver l'égalité. Et, de plus, puisque les éléments de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ sont des suites, on peut écrire l'égalité de $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k > K,\ n\lfloor x_k - y_k \rfloor \leqslant \omega_k.$$

Il y a donc une double quantification universelle.

Définition 18 *L'inégalité entre deux éléments x et y de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$, notée $>_\omega$ est définie par*

$$y >_\omega x \text{ lorsque } \exists n \in \mathbb{N},\ n\,(y - x) \geqslant \omega.$$

Ici, l'inégalité n'est pas non plus décidable puisque pour montrer $y >_\omega x$, cela revient à vérifier l'existence d'un entier standard n tel qu'il existe un entier K à partir duquel pour tout $k > K$, $n(y_k - x_k) \geqslant \omega_k$. Ce qui revient à faire une infinité de vérifications.

Définition 19 *La relation de distinction, notée $\neq_\omega$ est définie pour x et $y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ par*

$$x \neq_\omega y \text{ lorsque } (x >_\omega y \vee y >_\omega x).$$

Contrairement à ce qui a été fait dans la version axiomatique, on ne peut pas définir $\neq_\omega$ comme étant $\exists n \in \mathbb{N}, n\lfloor x - y \rfloor \geqslant \omega$. En effet, ceci n'est pas vrai dans ce cas car on n'a pas la décidabilité du signe.

Finalement, on donne la définition de l'inégalité large.

Définition 20 *Constructivement, pour $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, l'inégalité large à l'échelle ω est définie par*

$$x \leqslant_\omega y \text{ lorsque } \forall z \in \mathcal{HR}_\omega^{om},\ x >_\omega z \Rightarrow y >_\omega z.$$

Cette définition peut être donnée en terme de quantificateurs.

Proposition 6 *Pour x et $y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, $x \leqslant_\omega y \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ n(x - y) \leqslant \omega$.*

On prouve ceci par : $\lhd$ On suppose $x \leqslant_\omega y$ et que donc $\forall z \in \mathcal{HR}_\omega^{om},\ x >_\omega z \Rightarrow y >_\omega z$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère le nombre $z_p =_{\text{déf}} x - \lfloor \omega/p \rfloor$. z_p est inférieur à x du fait qu'il existe bien un entier limité $k(= p + 1)$ tel que $k(x - z_p) = k\lfloor \omega/p \rfloor \geqslant \omega$ et donc par hypothèse, $z_p <_\omega y$. Ainsi, il existe un entier limité m tel que $m(y - z_p + \lfloor \omega/p \rfloor) \geqslant \omega$, on en déduit que $(x - y) \leqslant \lfloor \omega/p \rfloor - \omega/m$. D'où, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$p(x - y) \leqslant p\lfloor \omega/p \rfloor - p\omega/m = p\omega/p - p\{\omega/p\} - p\omega/m \leqslant \omega$$

Inversement, on suppose que $(\forall p \in \mathbb{N})\ (p(x - y) \leqslant \omega)$ et soit $z \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tel que $(z <_\omega x)$. Il existe donc un entier limité k tel que $k(x - z) \geqslant \omega$. Ainsi,

$$2k(y - z) = 2k(y - x) + 2k(x - z) \geqslant 2k(y - x) + 2\omega.$$

Du fait que par hypothèse, pour tout p, $(p(x - y) \leqslant \omega$, lorsque $p = 2k$, on obtient $2k(y - z) \geqslant \omega$. $\rhd$

3.4 La droite d'Harthong-Reeb est-elle constructive ?

3.4.1 Définition d'un corps de Heyting-Bridges

Dans son article de 1999, *Constructive Mathematics : a Fondation for Computable Analyse*, Douglas Bridges donne une définition axiomatique d'une droite réelle constructive ([Bridges 1999]). Après avoir expliqué les motivations et intérêts des mathématiques constructives, il introduit la notion de Corps de Heyting. Puis il expose l'axiomatique qui donne à ce corps la caractéristique de droite réelle constructive et développe quelques propriétés usuelles sur les réels.

3.4.1.1 Structure d'un corps de Heyting-Bridges

Voici la description de ce qu'est un système de nombres réels constructifs d'après Bridges. On se donne un ensemble $\mathcal{R}$ muni de deux éléments notés 0 et 1 et des relations et opérations suivantes.

- ◇ Une relation d'ordre stricte, notée $>$, de laquelle découle les trois définitions suivantes.
  - Une relation de distinction, définie pour x, et y dans $\mathcal{R}$ par

$$x \neq y \Leftrightarrow (x > y \vee y > x).$$

  - Une relation d'inégalité large, définie pour x, y et z dans $\mathcal{R}$ par

$$x \geqslant y \Leftrightarrow \forall z(y > z \Rightarrow x > z).$$

  - La relation d'égalité, définie pour x et y dans $\mathcal{R}$ par

$$x = y \Leftrightarrow x \geqslant y \wedge y \geqslant x.$$

- ◇ Une opération d'addition $(x, y) \mapsto x + y$, à laquelle est associée une application $opp : x \mapsto -x$.
- ◇ Une opération de multiplication $(x, y) \mapsto x.y$ à laquelle est associée une application inv : $x \mapsto x^{-1}$ (pour $x \neq 0$).
- ◇ Les éléments 0 et 1 vérifient $0 \neq 1$.
- ◇ Les opérations, relations et applications précédentes sont extensionnelles, ce qui signifie que si $\divideontimes$ est une relation, alors $x \divideontimes y$ et $x = x'$ et $y = y'$ implique $x' \divideontimes y'$ que si $\bowtie$ est une opération, alors $x = x'$ et $y = y'$ implique $y \bowtie x = y' \bowtie x'$ et que si f est une application, $x = x'$ implique $f(x) = f(x')$.

3.4.1.2 Les axiomes

Nous allons maintenant énoncer trois groupes d'axiomes qui caractérisent la structure précédente.

Premier groupe d'axiomes, noté (A1), au sujet des opérations (somme et produit) Pour tous x, y et z de $\mathcal{R}$,

(1) $x + y = y + x$
(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
(3) $0 + x = x$

(4) $x + (-x) = 0$
(5) $xy = yx$
(6) $(xy)z = x(yz)$
(7) $1x = x$
(8) $xx^{-1} = 1$ si $x \neq 0$
(9) $x(y + z) = xy + xz$

On remarque que l'on a aussi $-xy = x(-y)$.

Second groupe d'axiomes, noté (A2), au sujet de l'inégalité Pour tous x, y et z de $\mathcal{R}$,

(1) $\neg(x > y \wedge y > x)$
(2) $(x > y) \Rightarrow \forall z(x > z \vee z > y)$
(3) $\neg(x \neq y) \Rightarrow x = y$
(4) $(x > y) \Rightarrow \forall z(x + z > y + z)$
(5) $(x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$

Troisième groupe d'axiomes, noté (A3), propriétés spéciales de l'inégalité Comme d'habitude, on appelle *borne supérieure* d'un sous ensemble non vide S de $\mathcal{R}$, un élément j de $\mathcal{R}$ vérifiant :

⋆ $\forall s \in S,\ j \geqslant s$
⋆ $\forall j' < j,\ \exists s \in S$ tel que $s > j'$.

Le troisième groupe d'axiome est constitué des deux axiomes suivants :

(1) *Axiome d'Archimède :* Pour tout $x \in \mathcal{R}$, il existe un entier naturel usuel[4] n tel que $x < n.1$.
(2) *Principe de la borne supérieure :* Soit S un sous ensemble non vide de $\mathcal{R}$ borné relativement à la relation $\geqslant$, et tel que pour tous éléments $\alpha,\ \beta$ de $\mathcal{R}$ vérifiant $\alpha < \beta$, on ait soit β comme borne supérieure de S, soit l'existence d'un $s \in S$ tel que $s > \alpha$. Alors, la borne supérieure de S existe.

Finalement,

Définition 21 *On appelle* corps de Heyting-Bridges *un système*

$$(\mathcal{R}, >, \neq, \leqslant, +, ., 0, 1, opp, inv)$$

vérifiant les trois groupes d'axiomes (A1), (A2) et (A3).

Notons que l'appellation « corps de Heyting-Bridges » n'est pas usuelle. Elle a seulement été introduite dans ([Chollet 2009]). Comme d'habitude en mathématiques, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, il convient d'appeler $\mathcal{R}$ le corps de Heyting-Bridges sans nécessairement rappeler toutes les relations, opérations, etc. qui le caratérise.

4. Puisque dans notre cadre, nous travaillons avec des extensions nonstandard de l'ensemble habituel des nombres entiers naturels, nous sommes obligés de rajouter l'adjectif usuel pour signifier que le nombre entier en question est standard (ou naïf ou constructif si on préfère).

3.4.1.3 Quelques remarques au sujet du corps de Heyting-Bridges

Pour commencer, voici quelques propriétés qui sont vraies sur l'ensemble des nombres réels défini classiquement (non constructif) et qui ne le sont pas automatiquement sur un corps de Heyting-Bridges.

Premièrement, la *décidabilité de l'égalité* n'est pas systématiquement vraie, on n'a pas toujours $\forall x \in \mathcal{R},\ (x = 0 \vee x \neq 0)$. De même, la *trichromie* qui signifie $\forall x \in \mathcal{R},\ (x < 0 \vee x = 0 \vee x > 0)$ n'est généralement pas vraie sur le corps de Heyting-Bridges. Ces principes sont remplacés par la propriété constructive (axiome (A2.2)) qui permet de diviser une preuve en plusieurs cas.

Le *principe de la borne supérieure* qui s'énonce classiquement *tout sous ensemble non vide borné de $\mathcal{R}$ a une borne supérieure* n'est pas automatiquement vérifié dans un corps de Heyting-Bridges. Il est remplacé par le dernier axiome (A3.2). L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ défini en mathématiques classiques (via par exemple les suites de nombres rationnels de Cauchy) vérifie ces axiomes et est donc un corps de Heyting-Bridges. Pour autant, il n'est (évidemment) pas constructif car sa manipulation en analyse usuelle utilise systématiquement la logique classique qui permet par exemple de décider du signe d'un élément. En fait, ces axiomes ne sont un critère de constructivité que lorsque que l'on se place exclusivement dans une logique intuitionniste sans autre principe.

3.4.2 $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ est un corps de Heyting-Bridges

On se place dans le cadre logique défini dans (3.3.1), on considère l'ensemble $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ muni de l'égalité à l'échelle ω (notée $=_\omega$), de l'inégalité à l'échelle ω (notée $<_\omega$), de la distinction à l'échelle ω (notée $\neq_\omega$), d'une opération de somme (notée $+_\omega$), d'une opération de multiplication (notée $\times_\omega$) ainsi que de deux éléments 0_ω et 1_ω et de deux fonctions $opp_\omega : x \mapsto -_\omega x$ et $inv_\omega : x \mapsto x^{-1_\omega}$. On a le théorème suivant :

Théorème 2 *La droite d'Harthong-Reeb $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ est un corps de Heyting-Bridges.*

Pour prouver cela il faut vérifier les seize axiomes de Bridges. Ce résultat découle en partie, des redéfinitions des relations dans $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ du paragraphe (3.3.1.2). A chaque fois, l'énoncé sera rappelé encadré et la preuve suivra délimitée par des $\lhd\rhd$ pour signifier son début et sa fin.

Preuve de (A1), somme et produit

X, Y et Z désignent des éléments de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$. Les quatres premiers axiomes de ce groupe sont
- (A1.1) $X +_\omega Y =_\omega Y +_\omega X$
- (A1.2) $(X +_\omega Y) +_\omega Z =_\omega X +_\omega (Y +_\omega Z)$
- (A1.3) $0_\omega +_\omega X =_\omega X$
- (A1.4) $X +_\omega (-_\omega X) =_\omega 0_\omega$

Ils traitent de propriétés de la somme. Du fait que

1. la somme sur $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ soit définie comme étant la somme sur $\mathbb{Z}$
2. l'égalité sur $\mathbb{Z}$ implique l'égalité $=_\omega$ de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$,

les preuves que $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ satisfait ces quatre axiomes sont triviales.

Les cinq axiomes qui suivent traitent du produit. Les preuves sont détaillées car ici les définitions particulières du produit et de l'égalité sur $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ interviennent clairement. On utilise souvent la décomposition suivante : pour $U \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$,

$$(\star) \quad U = \lfloor U \rfloor + \{U\}$$

avec $\lfloor U \rfloor$ un entier de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ et $0 \leqslant \{U\} < 1$.

(A1.5) $X \times_\omega Y =_\omega Y \times_\omega X$

$\lhd$ $X \times_\omega Y = \left\lfloor \dfrac{XY}{\omega} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{YX}{\omega} \right\rfloor = Y \times_\omega X =_\omega Y \times_\omega X$ $\rhd$

(A1.6) $(X \times_\omega Y) \times_\omega Z =_\omega X \times_\omega (Y \times_\omega Z)$

$\lhd$ Par définition, on a $(X \times_\omega Y) \times_\omega Z = \left\lfloor \left\lfloor \dfrac{X.Y}{\omega} \right\rfloor \dfrac{Z}{\omega} \right\rfloor$. On utilise la décomposition $(\star)$, on obtient ainsi

$$(X \times_\omega Y) \times_\omega Z = \left\lfloor \frac{XYZ}{\omega^2} \right\rfloor + \left\{ \frac{XYZ}{\omega^2} \right\} - \left\{ \frac{XY}{\omega} \right\} \frac{Z}{\omega} - \left\{ \left\lfloor \frac{X.Y}{\omega} \right\rfloor \frac{Z}{\omega} \right\}$$

Du fait que Z soit un élément de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$, il existe un entier standard n tel que $\lfloor Z \rfloor \leqslant n\omega$. Alors, on a

$$\left| \left\{ \frac{XYZ}{\omega^2} \right\} - \left\{ \frac{XY}{\omega} \right\} \frac{Z}{\omega} - \left\{ \left\lfloor \frac{X.Y}{\omega} \right\rfloor \frac{Z}{\omega} \right\} \right| \leqslant n + 2$$

et ainsi, $(X \times_\omega Y) \times_\omega Z) =_\omega \left\lfloor \dfrac{XYZ}{\omega^2} \right\rfloor$.

De la même manière, on a $X \times_\omega (Y \times_\omega Z) =_\omega \left\lfloor \dfrac{XYZ}{\omega^2} \right\rfloor$. $\rhd$

(A1.7) $1_\omega \times_\omega X =_\omega X$

$\lhd$ $1_\omega \times_\omega X = \omega \times_\omega X = \left\lfloor \dfrac{\omega X}{\omega} \right\rfloor = \lfloor X \rfloor = X =_\omega X.$ $\rhd$

(A1.8) $X \times_\omega X^{(-1)_\omega} =_\omega 1_\omega$ si $X \neq_\omega 0_\omega$

$\lhd$ On rappelle que l'inverse de X est $\left\lfloor \frac{\omega^2}{X} \right\rfloor$. Ainsi, en utilisant la décomposition ($\star$), on obtient

$$\begin{aligned} X \times_\omega X^{(-1)_\omega} &= \left\lfloor \frac{X \left\lfloor \frac{\omega^2}{X} \right\rfloor}{\omega} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{X\frac{\omega^2}{X} - X\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\}}{\omega} \right\rfloor \\ &= \frac{X\frac{\omega^2}{X} - X\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\}}{\omega} - \left\{ \frac{X\frac{\omega^2}{X} - X\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\}}{\omega} \right\} \\ &= \omega - \frac{X}{\omega}\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\} - \left\{ \frac{X\frac{\omega^2}{X} - X\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\}}{\omega} \right\} \end{aligned}$$

$x \in \mathcal{HR}^{ax}_\omega$, il existe donc un entier standard n tel que $|X| \leqslant n\omega$ et ainsi :

$$\left| \frac{X}{\omega}\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\} - \left\{ \frac{X\frac{\omega^2}{X} - X\left\{\frac{\omega^2}{X}\right\}}{\omega} \right\} \right| \leqslant n+1.$$

Ceci permet de conclure $X \times_\omega X^{(-1)_\omega} =_\omega \omega = 1_\omega$. $\rhd$

(A1.9) $X \times_\omega (Y +_\omega Z) =_\omega X \times_\omega Y +_\omega X \times_\omega Z$

$\lhd$Par définition $X \times_\omega (Y +_\omega Z) = \left\lfloor \frac{X.Y + X.Z}{\omega} \right\rfloor$. D'autre part,

$$\begin{aligned} X \times_\omega Y +_\omega X \times_\omega Z &=_\omega \left\lfloor \frac{XY}{\omega} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{XZ}{\omega} \right\rfloor \\ &=_\omega \left\lfloor \frac{XY+XZ}{\omega} \right\rfloor + \left\{ \frac{XY}{\omega} + \frac{XZ}{\omega} \right\} - \left\{ \frac{XY}{\omega} \right\} - \left\{ \frac{XZ}{\omega} \right\} \end{aligned}$$

Du fait que, $\left| \left\{ \frac{XY}{\omega} + \frac{XZ}{\omega} \right\} - \left\{ \frac{XY}{\omega} \right\} - \left\{ \frac{XZ}{\omega} \right\} \right| \leqslant 3$, on obtient finalement

$$X \times_\omega Y +_\omega X \times_\omega Z =_\omega \left\lfloor \frac{XY}{\omega} + \frac{XZ}{\omega} \right\rfloor =_\omega X \times_\omega (Y +_\omega Z). \rhd$$

Preuves de (A2), propriétés sur $>_\omega$

X, Y, Z désignent des éléments de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$.

$$\boxed{\text{(A2.1)}\ \neg\,(X >_\omega Y\ et\ Y >_\omega X)}$$

$\lhd$Par définition, $X >_\omega Y \Leftrightarrow \exists n,\ lim(n)$ tel que $(X - Y) > \dfrac{\omega}{n}$ et ainsi $X > Y$. L'hypothèse $(X >_\omega Y\ et\ Y >_\omega X)$ implique que sur $\mathbb{N}$ on a $(X > Y\ et\ Y > X)$. Donc $(X >_\omega Y\ et\ Y >_\omega X)$ implique bien une contradiction. $\rhd$

$$\boxed{\text{(A2.2)}\ (X >_\omega Y) \Rightarrow \forall Z\ (X >_\omega Z\ ou\ Z >_\omega Y)}$$

$$\begin{aligned}
\lhd X >_\omega Y \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ (lim(n) \wedge n(X - Y) > \omega)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ (lim(n) \wedge n(X - Z + Z - Y) > \omega)\\
&\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N},\ (lim(n) \wedge n(X - Z) + n(Z - Y) > \omega)
\end{aligned}$$

On utilise ici la propriété décidable suivante sur les entiers : pour a, b, c dans $\mathbb{Z}$ si $a + b > c$ alors $2a > c$ ou bien $2b > c$. Ceci découle du fait que l'on puisse toujours comparer deux nombres entiers. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}, (lim(n) \wedge (2n(X - Z) > \omega \text{ ou } 2n(Z - Y) > \omega))\\
&\Rightarrow \quad \forall Z\ (X >_\omega Z \text{ ou } Z >_\omega Y) \rhd
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{(A2.3)}\ \neg(X \neq_\omega Y) \Rightarrow X =_\omega Y}$$

$\lhd\ \neg(X \neq_\omega Y)$ est défini par $\neg((X >_\omega Y) \vee (Y >_\omega X))$.
On suppose $\neg(X >_\omega Y) \vee (Y >_\omega X)$, c'est-à-dire que l'existence d'un entier limité n vérifiant $n(X-Y) > \omega$ ou $n(Y-X) > \omega$ implique une contradiction. Par ailleurs, pour X et Y quelconques fixés et pour tout entier limité k on sait si $k|X - Y| < \omega$ ou $k|Y - X| \geqslant \omega$. Le second cas est impossible par hypothèse, on a donc bien $X =_\omega Y$. $\rhd$

$$\boxed{\text{(A2.4)}\ (X >_\omega Y) \Rightarrow \forall Z\ (X +_\omega Z >_\omega Y +_\omega Z)}$$

$\lhd\ (X >_\omega Y)$ signifie par définition qu'il existe un entier limité n tel que $n(X - Y) > \omega$. n vérifie aussi $n((X + Z) - (Z + Y)) > \omega$ et ainsi, on a bien $(X +_\omega Z >_\omega Y +_\omega Z)$. $\rhd$

$$\boxed{\text{(A2.5)}\ (X >_\omega 0_\omega\ et\ Y >_\omega 0_\omega) \Rightarrow X \times_\omega Y >_\omega 0_\omega}$$

$\lhd$On suppose que $(X >_\omega 0\ et\ Y >_\omega 0)$, ainsi il existe un couple (n, m) d'entiers limités vérifiant $nX > \omega$ et $mY > \omega$.
Ainsi, $nmX \times_\omega Y = nm \left\lfloor \dfrac{XY}{\omega} \right\rfloor = nm\dfrac{XY}{\omega} - nm \left\{ \dfrac{XY}{\omega} \right\} \geqslant \omega - mn$. Et comme nm est limité, on a $nm < \dfrac{\omega}{2}$ et donc, il existe bien $p = 2nm$ tel que $pX \times_\omega Y > \omega$. Ce qui signifie par définition $X \times_\omega Y >_\omega 0_\omega$. $\rhd$

Preuve de (A3), propriétés spéciales sur $>_\omega$

Nous avons besoin, pour prouver la propriété d'Archimède, de préciser ce que sont les « entiers »de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$. À tout élément $n \in \mathbb{Z}$, on associe l'élément $n_\mathcal{R} \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$ défini par :

$$n_\omega =_{\text{déf}} \begin{cases} 0_\omega & \text{si } n = 0 \\ 1_\omega + 1_\omega + ... + 1_\omega \text{ (n fois)} & \text{si } n > 0 \\ -(1_\omega + ... + 1_\omega) \text{ (n fois)} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Afin de simplifier les notations, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, l'élément $n_\mathcal{R}$ est aussi noté n.

Les entiers de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ peuvent être vu comme les entiers de $\mathbb{N}$ multiplié par l'unité 1_ω. Ainsi, on a $n_\omega = n.1_\omega = n.\omega$.

(A3.1) **Axiome d'Archimède** : Pour tout $X \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$ il existe un entier limité $n \in \mathbb{N}$ tel que $X < n_\omega$

$\lhd$ Soit $X \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$, par définition, il existe un entier n limité tel que $\left|X\right| \leqslant n\omega$. C'est-à-dire que $X \leqslant n_\omega$.

L'axiome d'Archimède découle donc directement de la définition de l'ensemble $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$. En effet si un élément X est dans $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ alors il existe un nombre entier limité tel que $\left|X\right| \leqslant n\omega$ ce qui signifie bien que $X < (n+1)_\omega$. $\rhd$

(A3.2) **Principe constructif de la borne supérieure** : Soit S un sous ensemble non vide de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ borné relativement à la relation $\geqslant_\omega$, et tel que pour tous éléments $\alpha,\ \beta$ de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ vérifiant $\alpha <_\omega \beta$, on ait
– soit β comme majorant de S,
– soit l'existence d'un $s \in S$ tel que $s >_\omega \alpha$.
Alors, la borne supérieure de S existe.

$\lhd$ L'idée générale de la preuve de cet énoncé est de construire la borne supérieure à partir de deux suites. La première, appelée (b_n), est globalement décroissante et composée de majorants du sous-ensemble S. La seconde, (s_n) est croissante et composée d'éléments de S. À terme, ces deux suites *convergent* vers la borne supérieure nommée τ. Il y a donc trois étapes dans cette preuve :

– construction des suites (b_n) et (s_n)
– définition de τ
– vérification que τ est bien la borne supérieure de S.

Construction des suites (b_n) et (s_n) Soient s_0 et b_0 deux éléments de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ tels que le premier est un élément de S et le second est un majorant strict de S. On a donc $s_0 <_\omega b_0$. On définit $\alpha_0 =_{\text{déf}} \frac{2}{3}s_0 + \frac{1}{3}b_0$ et $\beta_0 =_{\text{déf}} \frac{1}{3}s_0 + \frac{2}{3}b_0$. Comme $s_0 <_\omega b_0$, on a aussi $\alpha_0 <_\omega \beta_0$. D'après les hypothèses de l'axiome, deux cas se présentent :

1. β^0 est un majorant de S, on pose alors :
   – $b_1 =_{\text{déf}} \beta_0$
   – $s_1 =_{\text{déf}} s_0$

2. $\exists s \in S$ tel que $s >_\omega \alpha_0$, on pose alors :
   - $b_1 =_{\text{déf}} b_0 + s - \alpha_0$
   - $s_1 =_{\text{déf}} s$

Dans ces deux cas, s_1 est un élément de S et b_1 en est un majorant, ils vérifient $\min_{0\leqslant k\leqslant 1} b_k \geqslant s_1 \geqslant s_0$ and $b_1 - s_1 =_\omega \frac{2}{3}(b_0 - s_0)$. Le schéma (3.2) illustre ceci.

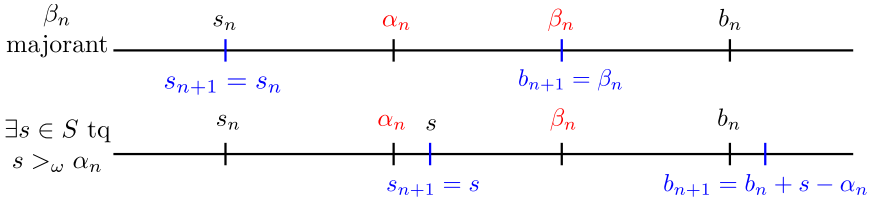


FIGURE 3.1 – Illustration de la construction des suites (b_n) et (s_n).

On peut ainsi réitérer le procédé et donc obtenir, d'après l'axiome ANS5 l'existence d'une suite $(s_k, b_k)_k \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{Z}^2$ telle que pour tout entier n standard, on ait
- s_n est un élément de S
- b_n est un majorant de S
- $\min_{0\leqslant k\leqslant n} b_k \geqslant s_n \geqslant \ldots \geqslant s_1 \geqslant s_0$
- $b_n - s_n =_\omega \left(\frac{2}{3}\right)^n (b_0 - s_0)$

Définition de τ Le principe de permanence (décrit dans la proposition (1) du chapitre (1)) nous donne l'existence d'un infiniment grand $\nu \in \mathbb{N}$, tel que

$$\min_{0\leqslant k\leqslant \nu} b_k \geqslant s_\nu \geqslant \ldots \geqslant s_1 \geqslant s_0.$$

On considère donc l'élément

$$\tau =_{\text{déf}} \min_{0\leqslant k\leqslant \nu} b_k \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}.$$

Vérification que τ est bien la borne supérieure de S Les deux points qui caractérisent la notion de borne supérieure sont :

(l) $\forall s \in S$, $\tau \geqslant_\omega s$

(ll) $\forall \mu \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$, $\mu <_\omega \tau$, $\exists s \in S$ tel que $s \geqslant_\omega \mu$

Vérifions que l'élément τ vérifie bien ces deux points.

(l) Soit s un élément quelconque de S, on veut montrer que $\tau \geqslant_\omega s$. On sait que la propriété $\tau \geqslant_\omega s$ est constructivement équivalente à $\neg(s >_\omega \tau)$. Si on suppose que $s >_\omega \tau$, on peut trouver un entier (standard) $n \in \mathbb{N}$ tel que $s - \tau >_\omega b_n - s_n$ car $s >_\omega \tau$ signifie $s - \tau >_\omega 0$ et donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $s - \tau >_\omega n\left(\frac{2}{3}\right)^n (b_0 - s_0)$. D'après les propriétés de τ, $b_n \geqslant_\omega \tau \geqslant_\omega s_n$, d'où $s - \tau >_\omega b_n - s_n \geqslant_\omega b_n - b$ et alors, $s - \tau >_\omega b_n - \tau$ conduit à la contradiction $s >_\omega b_n$. On a donc bien $\tau \geqslant_\omega s$ pour tout $s \in S$.

(ll) Soit μ un élément de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ vérifiant $\mu <_\omega \tau$, on cherche un $s \in S$ tel que $s >_\omega b$. On peut choisir un entier n tel que $\tau - \mu >_\omega b_n - s_n$. D'après les propriétés de τ, on sait que $s_n \leqslant_\omega \tau \leqslant_\omega b_n$, ainsi $b_n \geqslant_\omega \tau \geqslant_\omega s_n \geqslant_\omega \mu$ et donc on a l'inégalité $(\tau - s_n) + (s_n - \mu) >_\omega b_n - s_n \geqslant_\omega \tau - s_n$. Il en résulte que $s_n - \mu >_\omega 0$ et ainsi on a bien trouvé un élément $s(=_{\text{déf}} s_n) \in S$ vérifiant $s >_\omega \mu$. ⊳

C'est ce dernier axiome qui donne réellement l'aspect continu de cette droite. Voici, par exemple comment, grâce à cet axiome on atteint des nombres *irrationnels*. Considérons l'ensemble $S = \{x \in \mathcal{HR}_\omega,\ x^{(2)_\omega} \leqslant_\omega 2_\omega\}$ où ici la puissance $(2)_\omega$ est le carré du nombre adapté à la multiplication dans $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$. Vérifions que cet ensemble satisfait bien les hypothèses de l'axiome (A3.2) ce qui nous amènera à la conclusion que la borne supérieure "$\sqrt{2}$" existe. On considère α et $\beta \in \mathcal{HR}_\omega^{ax}$ tels que $\alpha <_\omega \beta$ et on cherche dans chaque cas à montrer que soit β est un majorant de S, soit à montrer l'existence d'un élément de S qui soit supérieur à α . Au niveau arithmétique on a la décidabilité du signe, ainsi on considère les deux cas suivants :

- $\alpha \leqslant 0$, dans ce cas, on a bien un élément de 1_ω de S tel que $\alpha <_\omega 1_\omega$.
- $\alpha > 0$, par transitivité on en déduit que $\beta > 0$ et on considère les deux cas suivant :
  - $\beta^{(2)_\omega} \geqslant_\omega 2_\omega$ et donc β est un majorant de S
  - $\beta^{(2)_\omega} <_\omega 2_\omega$ et ainsi, l'élément $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2_\omega}\right)$ est dans S puisque

    $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2_\omega}\right)^{(2)_\omega} <_\omega \beta \leqslant_\omega 2_\omega$ et est un majorant de α car $\beta >_\omega \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2_\omega}\right) >_\omega \alpha$.

On peut en conclure que la borne supérieure de l'ensemble $S = \{x \in \mathcal{HR}_\omega^{ax},\ x^{(2)_\omega} \leqslant_\omega 2_\omega\}$ existe.

D'autre part, cet axiome prend tout son sens sur les sous-ensembles externes de $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ C'est le cas dans cet exemple du fait que l'on utilise l'égalité à l'échelle ω. En effet, dans les cas de sous-ensemble interne, la borne supérieure existe car elle existe dans l'ensemble de départ $\mathbb{Z}$.

3.4.2.1 Conclusion

On vient de montrer que la droite d'Harthong-Reeb $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$, basée sur une arithmétique non-standard axiomatique satisfait les axiomes de Bridges. Cela a été prouvé dans un cadre le plus proche possible du cadre constructif. Les deux défauts majeurs de constructivité sont :

- l'introduction axiomatique des entiers infiniment grands
- la décidabilité arbitraire du signe (règle (R1)) de tous les entiers.

La partie suivante reprend les seize axiomes de Bridges en les adaptant à la droite d'Harthong-Reeb basée sur les Ω-entiers. Ceci permet d'éviter les deux défauts précédents.

3.4.3 $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ basée sur les Ω-nombres est-il un corps de Heyting-Bridges ?

On rappelle que $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ dénote l'ensemble des Ω-nombres limité à l'échelle ω. Le cadre où les entiers nonstandard sont constructifs induit que l'on ne montre qu'une version affaiblie du théorème du corps de Heyting-Bridges. Ceci est dû au fait que, dans $\mathcal{HR}_\omega^{om}$, il y a beaucoup d'éléments irréguliers en un certain sens. Pour préciser cette notion, on va être amené à introduire la relation de congruence et la notion de régularité.

3.4.3.1 Enoncé du théorème de Heyting-Bridges adapté à $\mathcal{HR}_\omega^{om}$

Pour pouvoir énoncer le théorème, il faut introduire quelques définitions appropriéees. Tout d'abord, voici les deux notions qui viennent d'être évoquées.

Définition 22 *Deux éléments $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ sont* congruents *et on note $x \bigwedge y$ si*

$$(\forall r \in \mathbb{N}^*)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant K)(\forall l \geqslant K) \quad \left|\frac{x_k - y_k}{\omega_k} - \frac{x_l - y_l}{\omega_l}\right| \leqslant \frac{1}{r}.$$

En d'autres termes, $x \bigtriangleup y$ quand la suite de nombres rationnels $((x_n - y_n)/\omega_n)$ est une suite de Cauchy. On remarque que cette relation est extentionnelle dans $\mathcal{HR}_\omega^{om}$.

Définition 23 *$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* régulier *s'il vérifie :*

$$(\forall r \in \mathbb{N}^*)(\exists K \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant K)(\forall l \geqslant K) \quad \left|\frac{x_k}{\omega_k} - \frac{x_l}{\omega_l}\right| \leqslant \frac{1}{r}.$$

Remarquons que $x \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ est régulier si et seulement si x est congruent à 0_ω. D'autre part, dire que x est régulier revient à dire que $\left(\frac{x_n}{\omega_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Il en découle qu'il est naturel d'identifier tout élément régulier $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ avec le nombre réel constructif défini par la suite de nombres rationnels $\left(\frac{x_n}{\omega_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut d'ailleurs vérifier que si deux éléments réguliers $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ vérifient $x =_\omega y$, alors les deux suites de Cauchy correspondantes $\left(\frac{x_n}{\omega_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{y_n}{\omega_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définissent le même nombre réel constructif. Evidemment, il y beaucoup d'éléments non réguliers dans $\mathcal{HR}_\omega^{om}$.

D'autre part, nous avons besoin d'introduire une notion affaiblie de la borne supérieure.

Définition 24 *Un élément $\tau \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ est la* borne supérieure faible *d'un ensemble S non vide de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ s'il vérifie :*

(I') $\forall \mu <_\omega \tau,\ \exists s \in S$ *tel que* $\mu <_\omega s$

(II') $(\forall \nu \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ *tel que* $\tau <_\omega \nu)(\exists b$ *majorant de* $S)\ \tau \leqslant_\omega b <_\omega \nu$

Cette définition est très proche de celle proposée par Bridges. On rappelle la définition constructive proposée par Bridges : τ est une borne supérieure de S de $\mathcal{R}$ non vide lorsque :

(A) $\forall \mu \in \mathcal{HR}_\omega^{om},\ \mu < \tau,\ \exists s \in S$ tel que $\mu < s$

(B) $\forall s \in S,\ \tau \geqslant s$

Les points (I') et (A) sont les mêmes. Si l'on se place dans le cadre axiomatique d'un corps de Heyting-Bridges, le point (II') implique clairement le point $\neg\neg$(B), en effet, si on suppose (II') alors l'existence d'un s dans S tel que $s > \tau$ implique par hypothèse l'existence d'un majorant b de S tel que $s > b$. Ce qui est absurde.

L'analogue du théorème (2) sur $\mathcal{HR}_\omega^{ax}$ montre en quel sens $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ est un modèle constructif du continu. Le théorème de constructivité s'énonce comme suit.

Théorème 3 *Le système $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(a) *il satisfait toutes les propriétés d'un corps de Heyting-Bridges sauf les axiomes* A2.(2)*,* A2.(3) *et* A3.(2)*.*

(b) A2.(2)' *Si $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ sont tels que $x <_\omega y$, alors, pour tout $z \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, l'existence d'un $q \in \mathbb{N}$ tel que $(q(y - z) \geqslant \omega) \vee (q(z - x) \geqslant \omega)$ est faiblement vrai.*

(c) A2.(3)' *Si $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ sont tels que $x \bigtriangleup y$ et $\neg(x \neq_\omega y)$, alors $x =_\omega y$.*

(d) A3.(2)' *Si S est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ borné relativement à la relation $\geqslant_\omega$ et tel que pour tout couple (α, β) de $\mathcal{HR}_\omega^{om} \times \mathcal{HR}_\omega^{om}$ où β est un majorant strict de S et α un élément de S et pour tout a et $b \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tels que $\alpha \leqslant_\omega a \leqslant_\omega b \leqslant_\omega \beta$ on ait*

- *soit b est un majorant de S*
- *soit l'existence d'un $s \in S$ tel que $s \geqslant_\omega a$.*

Alors, il existe un élément $\tau \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ qui est la borne supérieure faible de S.

3.4.3.2 Remarques sur le théorème

Pourquoi $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ ne satisfait-il pas exactement tous les axiomes d'un corps ordonné de Heyting-Bridges ? La raison principale est qu'il existe dans ce système beaucoup d'éléments irréguliers ce qui fait la différence avec les constructions habituelles des nombres réels constructifs. Il est facile de trouver un contre exemple de (A2.3) : considérons l'Ω-nombre $x = (x_n) \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ défini pas $x_n = 1$ si n est pair et $x_n = \omega_n$ si n est impair ; alors, il est clair que $\neg(x \neq_\omega 0)$ et $\neg(x =_\omega 0)$.

L'axiome A2.2' est très proche de l'axiome A2.2. On rappelle qu'il s'énonce ainsi dans un corps $\mathcal{R}$ de Heyting : pour x, y de $\mathcal{R}$, $x < y \Rightarrow \forall z \in \mathcal{R}, x < z \vee z < y$. En se plaçant dans $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ avec la définition de l'inégalité à l'échelle ω, on obtiendrait : pour x, y de $\mathcal{HR}_\omega$, $x <_\omega y \Rightarrow \forall z \in \mathcal{HR}_\omega^{om},\ (\exists p \in \mathbb{N})(p(y-z) \geqslant \omega) \vee (\exists q \in \mathbb{N})(q(z-x) \geqslant \omega)$. Ceci ne peut être vérifié que faiblement, c'est-à-dire que si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, alors , $x <_\omega y \Rightarrow \forall z \in \mathcal{HR}_\omega^{om},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\exists p \in \mathbb{N})(p(y_n - z_n) \geqslant \omega) \vee (\exists q \in \mathbb{N})(q(z_n - x_n) \geqslant \omega)$.

Les hypothèses de l'axiome de la borne supérieure ont dû être adaptées à ce système du fait de la présence des éléments irréguliers de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$. On rappelle qu'initialement, pour un corps de Heyting-Bridges $\mathcal{R}$, un sous-ensemble non vide et borné relativement à la relation $\geqslant_\mathcal{R}$ a une borne supérieure dès lors que pour tout α, $\beta \in \mathcal{R}$ tels que $\alpha <_\mathcal{R} \beta$ on ait soit

- β majorant
- l'existence d'un $s \in S$ tel que $s \geqslant_\mathcal{R} \alpha$.

Or, dans $\mathcal{HR}_\omega^{om}$, un ensemble aussi simple que le singleton ne vérifie pas ces conditions. En effet, les hypothèses reviennent à vérifier l'axiome A2.2 qui n'est pas vrai ici.

Il est probable que la présence de ces éléments très irréguliers soit le prix à payer pour avoir un système à la fois continu et discret basé sur une arithmétique nonstandard.

3.4.3.3 Preuves du théorème (3.4.3.1)

Les quatres points du théorème seront prouvés indépendamment les uns des autres.

> Le système associé à $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ est un corps de Heyting mais ne vérifiant pas les axiomes A2.(2), A2.(3) et A3.(2).

$\lhd$ Les preuves que $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ vérifient les axiomes du premier groupe ainsi que ceux du second groupe ((A2.1), (A2.4) et (A2.5)) sont les mêmes que dans le cas axiomatique de la définition d'une arithmétique nonstandard.

La démonstration que $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ vérifie la propriété (A3.1) est triviale du fait que pour tout $x \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, il existe par définition $p \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant |x| \leqslant p\omega = p1_\omega$. $\rhd$

> A2.(2)' Si $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ sont tels que $x <_\omega y$, alors, pour tout $z \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, l'existence d'un $q \in \mathbb{N}$ tel que $(q(y-z) \geqslant \omega) \vee (q(z-x) \geqslant \omega)$ est faiblement vrai.

$\lhd$ On considère $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tels que $x <_\omega y$. Alors, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $p(y-x) \geqslant \omega$. Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$, on a $p(y-z)+p(z-x) \geqslant \omega$. Du fait que pour tout n, il est vrai que $a_n+b_n > c_n \Rightarrow (2a_n > c_n) \vee (2b_n > c_n)$ on obtient d'après (BD) que $(2p(y-z) \geqslant \omega) \vee (2p(z-x) \geqslant \omega)$ est faiblement vrai. $\rhd$

> A2.(3)' Si $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ sont tels que $x \bigtriangleup y$ et $\neg(x \neq_\omega y)$, alors $x =_\omega y$.

$\lhd$On considère $x, y \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tels que $x \bigtriangleup y$ et $\neg(x \neq_\omega y)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n =_{\text{déf}} (x_n - y_n)/\omega_n$. Ainsi, par définition,

(1) $\neg(x \neq_\omega y) \Leftrightarrow \neg[(\exists q)(\exists N)((\forall n \geqslant N)\ u_n \geqslant 1/q) \vee ((\forall n \geqslant N)\ u_n \leqslant -1/q)]$,

(2) $x \bigwedge y \Leftrightarrow (\forall p)(\exists K)(\forall k \geqslant K)(\forall l \geqslant K)\ |u_k - u_l| \leqslant 1/p$,

Montrons que ces deux points impliquent $(\forall r)(\exists M)(\forall m \geqslant M)\ |u_m| \leqslant 1/r$, ce qui est équivalent à $x = y$.

Dans la preuve qui suit toutes les variables quantifiées prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$.

Considérons un entier arbitraire $r \in \mathbb{N}$ et soit $p =_{\text{déf}} 3r$. D'après l'hypothèse (2),on déduit l'existence d'un nombre $K \in \mathbb{N}$ tel que

$$(\forall k \geqslant K)(\forall l \geqslant K)\ |u_k - u_l| \leqslant 1/(2p).$$

En particulier

$$(\forall l \geqslant K)\ u_K - 1/(2p) \leqslant u_l \leqslant u_K + 1/(2p) \tag{3.1}$$

Par ailleurs, du fait que u_K soit un nombre rationnel, la propriété $(u_K \geqslant 1/p) \vee (u_K < 1/p)$ est décidable. Supposons que $u_K \geqslant 1/p$. De (3.1) on obtient que $1/(2p) \leqslant u_l$ pour tout $l \geqslant K$. L'hypothèse (1) du lemme assure que ceci est impossible. En conséquence, on peut affirmer que $u_K < 1/p$. Encore une fois, de (3.1) on déduit que $u_l \leqslant 1/p + 1/(2p) = 3/(2p)$ pour tout $l \geqslant K$. De $3/(2p) = 1/(2r) \leqslant 1/r$,on obtient $(\forall l \geqslant K)\ u_l \leqslant 1/r$. De la même manière, on montre que $(\forall l \geqslant K)\ u_l \geqslant -1/r$, ce qui amène à la conclusion. ⊳

A3(2)' Si S est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ borné relativement à la relation $\geqslant_\omega$ et tel que pour tout couple (α, β) de $\mathcal{HR}_\omega^{om2}$ où β est un majorant strict de S et α un élément de S et pour tout a et $b \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tels que $\alpha \leqslant_\omega a \leqslant_\omega b \leqslant_\omega \beta$ on ait
– soit b comme majorant de S
– soit l'existence d'un $s \in S$ tel que $s \geqslant_\omega a$.
Alors, il existe un élément $\tau \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ qui est la borne supérieure faible de S.

⊲**Idée générale de la preuve** Dans cette preuve, on construit un Ω-entier τ qui va être la borne supérieure faible. Pour cela, on définit deux suites Ω-entiers $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et constituée d'éléments de S. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est globalement décroissante et contituée de majorants stricts de S. Comme pour la version axiomatique de la définition de l'arithmétique nonstandard, la preuve se fait en trois étapes :

– construction de deux suites $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$
– définition de τ, candidat à la borne supérieure faible
– vérification que τ est bien la borne supérieure de S.

Nous aurons besoin d'utiliser des suites d'Ω-entiers dans la démonstration qui suit. Il nous faut donc introduire quelques notations. Considérons une suite $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'Ω-entiers, les indices "n" de cette suites sont dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, b^n est un Ω-entier $(b_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ et donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, b_k^n est un élément de $\mathbb{Z}$.

Première étape : construction des suites (s^n) et (b^n). Pas à pas, nous allons construire deux suites, la première $(s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tout d'abord, on choisit un majorant strict b^0 de S et s^0 un élément de S tels que $b^0 >_\omega s^0 \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$. Puis, on construit deux Ω-entiers α^0 et β^0 tels que

$$\alpha^0 =_{\text{déf}} \frac{2}{3}s^0 + \frac{1}{3}b^0 \text{ et } \beta^0 =_{\text{déf}} \frac{1}{3}s^0 + \frac{2}{3}b^0$$

Du fait que $s^0 \leqslant_\omega \alpha^0 \leqslant_\omega \beta^0 \leqslant_\omega b^0$, on peut appliquer les hypothèses du théorème. On pose $\varepsilon^1 =_{\text{déf}} \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0)$. On a deux cas :

1. β^0 est un majorant de S, dans ce cas, on construit :
   - $b^1 =_{\text{déf}} \beta^0 + \varepsilon^1$
   - $s^1 =_{\text{déf}} s^0$
2. $\exists s \in S$ tel que $s >_\omega \alpha^0$ et dans ce cas, on construit :
   - $b^1 =_{\text{déf}} b^0 + s - \alpha^0 + \varepsilon^1$
   - $s^1 =_{\text{déf}} s$

La figure (3.2) illustre ces deux cas.

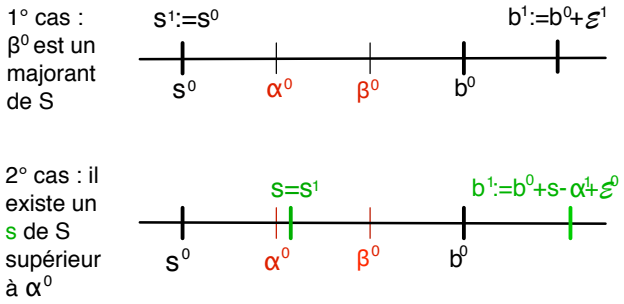


FIGURE 3.2 – Illustration de la construction des suites (b^n) et (s^n).

b^1 et s^1 ont bien les propriétés suivantes : s^1 est un élément de S, b^1 est un majorant strict de S et

$$b^1 - s^1 =_\omega 2.\frac{2}{3}(b^0 - s^0) \tag{3.2}$$

En effet, dans le premier cas,

$$\begin{aligned} b^1 - s^1 &= \beta^0 + \varepsilon^1 - s^0 = \left(\frac{1}{3}s^0 + \frac{2}{3}b^0\right) + \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) - s^0 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) + \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) + \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) \\ &= 2.\frac{2}{3}(b^0 - s^0). \end{aligned}$$

Et dans le second cas,

$$\begin{aligned} b^1 - s^1 &= b^0 + s - \alpha^1 + \varepsilon^1 - s \\ &= b^0 - \left(\frac{2}{3}s^0 + \frac{1}{3}b^0\right) + \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) + \left(\frac{2}{3}\right)(b^0 - s^0) \\ &= 2.\frac{2}{3}(b^0 - s^0) \end{aligned}$$

Voici le cas général de la construction des deux suites : on suppose que l'on a déjà construit deux suites infinies $(s^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ d'éléments de S et $(b^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de majorants stricts de S tels que $s^0 \leqslant_\omega \cdots \leqslant_\omega s^n$ et pour tout $k = 0, \ldots, n$ $b^k - s^k =_\omega (k+1)\left(\frac{2}{3}\right)^k (b^0 - s^0)$.

Ensuite, on introduit $\alpha^n =_{\text{def}} \frac{2}{3}s^n + \frac{1}{3}b^n$ et $\beta^n =_{\text{def}} \frac{1}{3}s^n + \frac{2}{3}b^n$.

Comme $s^n \leqslant_\omega \alpha^n \leqslant_\omega \beta^n \leqslant_\omega b^n$, on peut appliquer les hypothèses du théorème et ainsi obtenir les deux cas suivants :

1. si β^n est un majorant de S, dans ce cas, on pose :
   - $b^{n+1} =_{\text{déf}} \beta^n + \varepsilon^n$
   - $s^{n+1} := s^n$
2. $\exists s \in S$ tel que $s >_\omega \alpha^n$ ainsi, $s >_\omega s^n$ dans $\mathbb{Z}_\omega$ et on peut supposer que $s = (s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ avec $s_m^n \leqslant s_m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$; on pose :
   - $b^{n+1} =_{\text{déf}} b^n + s - \alpha^n + \varepsilon^n$
   - $s^{n+1} = s$

On définit la suite ε^n par $\left(\frac{2}{3}\right)^n (b^0 - s^0)$. Elle permet d'assurer que les b^n soient toujours des majorants *stricts* de S. Définis comme tels, les éléments des suites s^n et b^n ont bien les propriétés voulues à savoir, pour tout n, b^{n+1} est un majorant strict de S, $s^{n+1} \in S$, $s^n \leqslant_\omega s^{n+1}$ et

$$b^{n+1} - s^{n+1} =_\omega (n+2)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (b^0 - s^0).$$

Le calcul est le même que dans le cas (3.2).

Etape 2 : construction du candidat τ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k = 0, \ldots, n$, on a $s^n <_\omega b^k$ et donc $s^n < b^k$ dans $\mathbb{Z}_\Omega$. Ainsi, il existe $M_n^k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geqslant M_n^k$, $s_m^n < b_m^k$ dans $\mathbb{Z}$. Maintenant, on considère la suite d'entiers $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\mathcal{M}_0 = M_0^0$ et $\mathcal{M}_{n+1} = \max(M_{n+1}^0, \ldots, M_{n+1}^{n+1}, \mathcal{M}_n + 1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement, on définit $\tau = (\tau_m)$ tel que

$$\begin{array}{|c|}\hline \forall m \in \mathbb{N},\ m < \mathcal{M}_0 \quad \tau_m =_{\text{déf}} 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \mathcal{M}_n \leqslant m < \mathcal{M}_{n+1} \quad \tau_m =_{\text{déf}} s_m^n \\ \hline \end{array}$$

Etape 3 : τ est bien la borne supérieure faible de S Vérifions que l'élément τ construit dans l'étape 2 vérifie bien les deux points suivants qui caractérisent la notion de borne supérieure faible :

(l') $\forall \mu \in \mathcal{HR}_\omega^{om}, \mu <_\omega \tau,\ \exists s \in S$ tel que $\mu <_\omega s$

(ll') $(\forall \nu \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tel que $\tau <_\omega \nu)(\exists b$ majorant de $S)$ $\tau \leqslant_\omega b <_\omega \nu$

Preuve de (I') : Soit $\mu \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tel que $\mu <_\omega \tau$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau - \mu >_\omega b^k - s^k$ et donc $s^k - \mu >_\omega b^k - \tau$. On sait que pour tout n, $s^n \leqslant_\omega \tau \leqslant_\omega b^n$, on en déduit $b^k - \tau \geqslant_\omega 0$. Ainsi, on obtient par transitivité $s^k - \mu >_\omega 0$ ce qui conclut (I') car $s^k \in S$.

Preuve de (II') : Soit $\nu \in \mathcal{HR}_\omega^{om}$ tel que $\tau <_\omega \nu$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\nu - \tau >_\omega b^n - s^n$ et donc $\nu - b^n >_\omega \tau - s^n$. Comme $s^n \in S$, on a $\tau - s^n \geqslant_\omega 0$ et ainsi, par transitivité $\nu - b^n >_\omega 0$. Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, b^n est un majorant de S, on arrive à la conclusion souhaitée. $\triangleright$

Cette preuve de l'existence de la borne supérieure faible possède la qualité de construire effectivement et au fur et à mesure le candidat à être la borne supérieure faible de l'ensemble donné.

3.5 Esquisse de la formalisation en Coq de la droite d'Harthong-Reeb

Dans le but de s'assurer définitivement de la validité des preuves, nous avons utilisé l'assistant d'aide à la preuve Coq [Bertot 2004, Coq development team 2008] pour formaliser et valider nos preuves.

Le développement proposé ici n'est qu'une brève représentation du travail réalisé dans un projet en cours. Pour de plus amples détails, on peut se référer à ([Magaud 2010]). L'intégralité des preuves et formalisations se trouve sur la page `http://galapagos.gforge.inria.fr`. La formalisation en Coq de nos ensembles est faite par *modules* qui interagissent entre eux. Dans le premier module, noté ($\star$), on caractérise l'axiomatique minimale de l'arithmétique définie dans (3.3.1). On appelle `A` un type défini par un module qui vérifie ($\star$). Puis, dans un autre module, on définit la construction de la droite d'Harthong-Reeb sur ce type `A`.

Voici les prémisses de la construction de la droite d'Harthong-Reeb sur le type `A` des entiers nonstandard. Tout d'abord, on définit la propriété `P` qui caractérise les éléments de `A` appartenant à $\mathcal{HR}_\omega$ par [5] :

```
Definition P :=
  fun (x:A) => exists n:A, (lim n /\ 0 ?< n /\ (|x| ?<= n*w)).
```

Où `lim` représente le predicat *limité* et les relations `?<` et `?<=` sont les relations de comparaisons dans `A`. Après ça, $\mathcal{HR}_\omega$ (noté `HRw`) est défini comme l'ensemble des éléments de `A` qui satisfont `P` :

```
Definition HRw := {x:A | P x}.
```

Ainsi, les éléments de $\mathcal{HR}_\omega$ sont ceux de type `A` pour lesquels on a une preuve qu'ils satisfont la propriété `P`. Ils sont représentés dans Coq par un couple (`a` , `h`) où `a` est un élément de `A` et `h` une preuve que `a` vérifie `P`.

Les opérations arithmétiques de $\mathcal{HR}_\omega$ sont définies à partir de celle sur `A` qui sont notées `+` pour la somme, `*` pour le produit et `/` pour la division euclidienne. Il est préalablement nécessaire de vérifier que, par exemple, si deux éléments sont dans $\mathcal{HR}_\omega$ alors, leur somme et leur produit aussi.

Les deux lemmes qui suivent énoncent cela :

```
Lemma Pplus : forall x y, P x -> P y -> P (x + y).

Lemma Pmult : forall x y, P x -> P y -> P (( x * y) / w).
```

Les opérations arithmétiques sont définies en utilisant une opération qui décompose un élément de $\mathcal{HR}_\omega$ en un élément de type `A` et une preuve que cet élément est dans $\mathcal{HR}_\omega$ (i.e une preuve qu'il vérifie `P`). La définition de la somme dans $\mathcal{HR}_\omega$ est :

```
Definition HRwplus (x y: HRw) : HRw :=
 match x with exist xx Hxx => match y with exist yy Hyy =>
  exist P (xx + yy) (Pplus xx yy Hxx Hyy)
end end.
```

5. Le symbole $\wedge$ représente le connecteur logique *and*.

Les éléments donnés `x` et `y` de $\mathcal{HR}_\omega$ sont décomposés en `xx` et `yy` de `A` et en preuves `Hxx` et `Hyy` qui montre respectivement que `xx` et `yy` vérifient `P`. Ainsi, l'addition de `xx` et `yy` est calculée et d'après le lemme `Pplus` on sait que le résultat satisfait la propriété `P`. De la même manière, la multiplication sur $\mathcal{HR}_\omega$ est définie via le lemme `Pmult` par :

```
Definition HRwmult (x y: HRw) : HRw :=
 match x with exist xx Hxx => match y with exist yy Hyy =>
  exist P ((xx * yy) / w) (Pmult xx yy Hxx Hyy)
end end.
```

Les relations de comparaison ($\geqslant_\omega$, $>_\omega$, $\neq_\omega$) sont directement implémentées en Coq d'après leurs définitions [6] :

```
Definition HRwgt (y x : HRw) : Prop :=
 match y with exist yy Hyy => match x with exist xx Hxx =>
  (exists n, lim n /\ 0 ?< n /\ (w ?<= (n*(yy+ (-xx)))))
end end.

Definition HRwge (a b : HRw) : Prop :=
 (proj1_sig b) ?<= (proj1_sig a) \/ HRwequal a b.

Definition HRwdiff (x y : HRw) : Prop := HRwgt x y \/ HRwgt y x.
```

où `(proj1_sig a)` dénote l'élément `aa` de type `A` pour lequel on a une preuve qu'il satisfait `P`. De même, on introduit toutes les relations et opérations dont on a besoin.

Nous avons prouvé dans Coq que la droite d'Harthong-Reeb construite sur le module ($\star$) vérifiait les seize axiomes de Bridges. Ce travail avait pour but de valider nos preuves dans un premier temps mais il s'agit surtout de commencer l'implémentation du système d'Harthong-Reeb dans Coq. Pour cela, nous avons créé un module autour des Ω-nombres de Laugwitz et Schmieden qui permet une représentation exacte d'objets continus. Ce modèle des nombres réels sur Coq pourra être utilisé pour des calculs géométriques. Le principal avantage est que l'exécution des algorithmes d'une part et les preuves qu'ils sont corrects d'autre part peuvent être fait dans le même cadre.

3.6 Conclusion

Le principe de définition de la droite d'Harthong-Reeb est constructif lorsque l'on ne se préoccupe pas de savoir si les entiers sur lesquels on se base le sont ou non. C'est ce que l'on a montré dans la partie (3.4.2).

Les entiers nonstandard d'IST considérés dans un premier temps ne pouvaient être effectifs du fait même de leur statut d'existence axiomatique. La recherche d'un système arithmétique nonstandard constructif nous a amené à considérer les entiers de Laugwitz et Schmieden. Mais ceci a eu une conséquence sur la vérification de notre critère de constructivité : l'axiomatique proposée par Bridges pour caractériser un corps des nombres réels constructif a dû être modifiée.

6. Le symbole $\setminus/$ représente le connecteur logique *or*.

La droite d'Harthong-Reeb $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ basée sur l'arithmétique nonstandard de Laugwitz et Schmieden s'éloigne du point de vue constructif d'une droite réelle de Bridges. En quelque sorte, $\mathcal{HR}_\omega^{om}$ est une nouvelle forme de continu, différente de celle formalisée par les axiomes de Bridges, laissant la place à de nombreux éléments irréguliers.

Conclusion

Dans l'objectif de traiter les fondements du passage entre le discret et le continu notre choix a été de se placer dans un cadre aussi constructif que possible dans le but de s'assurer d'un contenu algorithmique en accord avec l'informatique. Notre travail se base sur l'étude d'un modèle discret du continu, la droite d'Harthong-Reeb, dont les qualités constructives avaient été évoquées par Reeb. Nous avons donc cherché dans un premier temps à tester la constructivité de la droite d'Harthong-Reeb dans sa version originale (à savoir celle basée sur une arithmétique nonstandard axiomatique) et avons conclu que les défauts de constructivité étaient majoritairement liés aux entiers nonstandard. Nous avons donc réinterprété la droite d'Harthong-Reeb sur d'autres entiers nonstandard. Le choix des Ω-nombres de Laugwitz et Schmieden, qui se voulait en premier lieu une stratégie de gain de constructivité a eu une influence positive sur le processus d'arithmétisation.

En effet, nous avons montré que l'Ω-arithmétisation mène à des algorithmes (constructifs) qui sont exactement transcrits en programmes informatiques. Un point important est que les programmes d'arithmétisation ne génèrent aucune erreur numérique. De plus, les résultats de l'Ω-arithmétisation de fonctions réelles sont des représentations multi-échelles de ces fonctions. Cet aspect multi-résolutionnel découle directement de la nature intrinsèque de l'Ω-entier infiniment grand qui est une fonction encodant simultannément une infinité d'échelles.

D'un autre coté, l'utilisation par Laugwitz et Schmieden de la logique classique est en conflit avec la part de constructivité des Ω-nombres et ajoute des confusions théoriques. De plus, la notion de vérité faible est imposée artificiellement par les règles sans aucune explication sur la raison et le sens de cette étrange contrainte. Pour ces dernières raisons, la perspective immédiate de ce travail est de changer de cadre théorique. La première piste est de reprendre la construction de la droite d'Harthong-Reeb dans le cadre du formalisme de la théorie constructive des types de Per Martin-Löf ([Martin-Löf 1982, Martin-Löf 1984]) aussi appelée théorie intuitionniste de types et qui est notée T dans la suite. Avant de développer les raisons de ce choix, notons que d'autres formalismes offrant des avantages proches sont aussi envisageables, par exemple celui de la Déduction Modulo initiée par Dowek, Hardin et Kirchner ([Dowek 2003]).

Le choix de la théorie constructive des types est que cette approche des mathématiques et de l'informatique convient bien pour, à la fois développer des mathématiques constructives et écrire des programmes. Au niveau théorique, T apparaît comme un fondation constructive des mathématiques qui est une alternative à l'axiomatique usuelle de la théorie des ensembles telle que ZFC (Zermalo-Fraenkel munie de l'axiome du choix). Dans T, il n'y a pas d'univers préxistant ; les ensembles sont introduits d'une manière controlée en utilisant des règles inductives. De plus, T ne dépend pas de logique préexistante ; en fait, les propositions logiques sont aussi des objets de T via l'isomorphisme de Curry-Howard qui identifie les propositions avec l'ensemble de ces preuves. Une proposition fausse est interprétée par l'ensemble vide. Finalement, chaque règle formelle est précédée d'une explication sémantique qui lui donne son sens. En conséquence, T est une théorie sémantique et syntaxique. Bien sur, dans T, il y a l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels et il est facile d'y introduire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs. L'interprétation de la théorie des types en langage de programmation est largement développée dans ([Nordström 1990]).

La seconde raison pour adopter T est que Martin-Löf a défini dans ([Martin-Löf 1990]) une extension nonstandard T_∞ de T. Cet auteur a montré que la théorie formelle T_∞ avait un modèle naturel $\mathcal{M}_\infty$ qui est construit dans le modèle standard $\mathcal{M}$ de T. Puisque les entités de $\mathcal{M}$ sont constructives, on peut utiliser le modèle $\mathcal{M}_\infty$ pour développer une approche complètement constructive de la droite d'Harthong-Reeb et de la méthode d'arithmétisation correspondante.

Une autre perspective de travail est d'exploiter et de développer cette représentation discrète multi-échelle du continu qui émerge de notre travail pour aborder des problèmes de géométrie discrète en rapport avec la géométrie euclidienne.

Publications

Revues internationales

- *Insight in Discrete Geometry and Computational Content of a Discrete Model of the Continuum*. A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, E. Andres, Pattern recognition, vol 42, num 10, october 2009

Conférences internationales

- *Formalizing a Discrete Model of the Continuum in Coq from a Discrete Geometry Perspective*. N. Magaud, A. Chollet, L. Fuchs, in ADG'10, Munich, 2010
- Ω-*Arithmetization of elipse*. A. Chollet, G. Wallet, E. Andres, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, A. Richard in CompImage, Buffalo, 2010, LNCS
- Ω-*Arithmetization : a Discrete Multi-resolution Representation of Real Functions*. A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, E. Andres, G. Largeteau-Skapin, Springers's LNCS Volume 5852 for IWCIA conference, Mexique, 2009
- *A First Look into a Formal and Constructive Approach for Discrete Geometry using Nonstandard analysis*. L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, G. Wallet, E. Andres, A. Chollet, DGCI 2008, Lyon, 21-32

Table des figures

1 Arithmétisation basée sur l'approche axiomatique de l'arithmétique nonstandard. 9
2 Ω-arithmétisation basée sur l'approche nonstandard de Laugwitz et Schmieden. . 9

1.1 Représentation intuitive des classes sur les entiers. 13
1.2 Représentation intuitive de la droite d'Harthong-Reeb. 15

2.1 Carré unité dans $\mathcal{HR}_\omega$ avec représentation de l'échelle intermédiaire de calcul β. 39
2.2 Représentation de l'arithmétisation de la fonction $t \to (17/100)e^t$ à l'échelle $\beta = 7$. En noir est représentée l'arithmétisée de cette fonction calculée par l'algorithme (2.1) ; en vert clair est représentée l'arithmétisée à l'échelle $\omega = \beta^2$ dont le domaine de définition n'est pas un intervalle. 40
2.3 Arithmétisations de la fonction $t \mapsto 2t/3$ avec $\beta = 10$ (en vert clair) et $\beta = 1000$ (en noir). 42
2.4 Cinq premières grilles de tracé pour $\beta = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ 49
2.5 Cinq premières grilles de tracé pour $\beta = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. 50
2.6 Tracé de cinq profondeurs du point (0,0). 51
2.7 Tracé de cinq profondeurs du point (1,1). 51
2.8 Tracé de cinq profondeurs d'un point calculé par l'algorithme. 51
2.9 Arithmétisation de la droite d'équation y=3x/5 à cinq échelles différentes $(3^m)_{m\in\mathbb{N}}$ itérations. 52
2.10 Arithmétisation de la droite d'équation y=3x/5 à cinq échelles différentes avec $(7.2^m)_{m\in\mathbb{N}}$ itérations. 53
2.11 Représentation de quatre échelles de l'arithmétisation de la fonction $t \to t^2/2$ avec $N = (3^n)_{n\in\mathbb{N}}$ itérations. 54
2.12 Représentation de quatre échelles de l'arithmétisation de la fonction $t \to t^2/2$ avec $N = (5.2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ itérations. 54
2.13 Représentation d'arcs d'ellipse mettant en évidence le théorème (1) 56
2.14 Illustration du théorème (1) avec des tracés d'arcs de cercle connexes pour les paramètres $a = b = (2)_{m\in\mathbb{N}}$ avec $\beta = (9m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\alpha = (2m)_{m\in\mathbb{N}}$. 57
2.15 Illustration du théorème (1) avec des tracés d'arcs de cercle connexes pour les paramètres $a = b = (2)_{m\in\mathbb{N}}$, $\beta = (3m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $\alpha = (3m)_{m\in\mathbb{N}}$ 57

3.1 Illustration de la construction des suites (b_n) et (s_n). 75
3.2 Illustration de la construction des suites (b^n) et (s^n). 80

Bibliographie

[Beeson 1985] M. J. Beeson. Foundations of constructive mathematics. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 1985. 60

[Bertot 2004] Y Bertot et P. Castéran. Interactive theorem proving and program development, Coq'Art : The calculus of inductive constructions. Springer, 2004. 82

[Bishop 1967] E. Bishop. Foundations of constructive analysis. McGraw-Hill, 1967. 60

[Bishop 1985] E. Bishop et D. Bridges. Constructive analysis. Springer-Verlag, 1985. 60

[Bridges 1999] D. S. Bridges. *Constructive Mathematics : a Foundation for Computable Analysis.* Theoretical Computer Science, vol. 219, pages 95–109, 1999. 2, 64, 68

[Brouwer 1920] L. E. J. Brouwer. *Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung ?* Mathematische Annalen, vol. 83, pages 201–210, 1920. 60

[Chollet 2009] A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin et E. Andres. *Insight in discrete geometry and computational content of a discrete model of the continuum.* Pattern recognition, vol. 42, pages 2220–2228, 2009. 69

[Chollet 2010] A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, E Andres, G. Largeteau-Skapin et A. Richard. *Ω-Arithmetization of Ellipses.* CompIMAGE'10, LNCS 6026, pages 24–36, 2010. 55

[Coq development team 2008] Coq development team. *The Coq Proof Assistant Reference Manual, Version 8.2.* LogiCal Project, 2008. 82

[Diener 1992] M. Diener. *Application du Calcul de Harthong-Reeb aux Routines Graphiques.* In J.-M. Salanskis et H. Sinaceurs, editeurs, Le Labyrinthe du Continu, pages 424–435. Springer, 1992. 6, 31, 34

[Dowek 2003] G. Dowek, T. Hardin et C Kirchner. *Theorem proving modulo.* Journal of Automates Reasoning, vol. 31, pages 33–72, 2003. 85

[Harthong 1983] J. Harthong. *Éléments pour une théorie du continu.* Astérisque, vol. 109/110, pages 235–244, 1983. 4

[Harthong 1989] G. Harthong J. et Reeb. *Intuitionnisme 84.* In H. Barreau et J. Harthong, editeurs, La mathématiques non standard, pages 211–252. Éditions du CNRS, 1989. 5

[Heyting 1956] A. Heyting. *Intuitionism an Introduction.* Studies in Logic and Foundations of Mathematics, 1956. 60, 62

[Holin 1991] H. Holin. *Harthong-Reeb analysis and digital circles.* The Visual Computer 8, pages 8–17, 1991. 6, 34

[Holin 1996] H. Holin. *Some Artefacts of integer-computed circles.* Annal of Mathematics and Artificial Intelligence 16, pages 153–181, 1996. 7

[Kolmororov 1932] A.N. Kolmororov. *Zur Deutung der Intuitionistischen Logik.* Mathematische Zeitschrift 35, pages 58–65, 1932. 60

[Laugwitz 1958] D. Laugwitz et C. Schmieden. *Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung.* Mathematische Zeitschrift, vol. 89, pages 1–39, 1958. 20, 44

[Laugwitz 1983] D. Laugwitz. *Ω-calculus as a generalization of field extension.* In A. Hurd, editeur, Nonstandard Analysis - Recent developments, Lecture Notes in Mathematics, pages 144–155. Springer, 1983. 11, 20, 44

[Laugwitz 1992] D. Laugwitz. *Leibniz' Principle and Omega Calculus.* In J.M. Salanskis et H. Sinacoeur, editeurs, Le Labyrinthe du Continu, pages 144–155. Springer France, 1992. 8, 20, 25, 44

[Lombardi 2003] H. Lombardi. *Le programme de Hilbert et les Mathématiques Constructives.* Repères IREM, num 50, 2003. 60

[Lutz 1992] R. Lutz. *La Force Modalisatrice des Théories Infinitésimales Faibles.* J.M. Salanski, H. Sinaceur (Eds), Le Labyrinthe du Continu, Springer, 1992. 12

[Magaud 2010] N. Magaud, A. Chollet et L. Fuchs. *Formalizing a Discrete Model of the Continuum in Coq from a Discrete Geometry Perspective.* In Automated Deduction in Geometry, ADG'10, Munich, Germany, July 22–24 2010. 61, 82

[Martin-Löf 1982] P. Martin-Löf. *Constructive mathematics and computer programming.* In Logic, Methodology and Philosophy of Science VI, pages 153–175, 1982. 85

[Martin-Löf 1984] P. Martin-Löf. Intuitionnistic type theory. Bibliopolis, Napoli, 1984. 62, 85

[Martin-Löf 1990] P. Martin-Löf. *Mathematics of infinity.* In COLOG-88 Computer Logic, Lecture Notes in Computer Science, pages 146–197. Springer-Verlag Berlin, 1990. 86

[Nelson 1977] E. Nelson. *Internal Set Theory : A new approach to nonstandard analysis.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 83, no. 6, pages 1165–1198, November 1977. 8, 11

[Nelson 1987] E. Nelson. *Radically Elementary Theory.* Annals of Mathematics Studies, Princeton university Press, 1987. 12

[Nordström 1990] B. Nordström, K. Petersson et J.M. Smith. Programming in martin-löf type theory. Oxford University Press, 1990. 85

[Reeb 1978] G. Reeb. *La mathématique nonstandard, vielle de soixante ans ?* Publication IRMA, 1978. 3

[Reeb 1987] G. Reeb, J-P. Reveillès, A. Troesch et E. Urlacher. *Equations différentielles et nombres entiers.* page 32p, 1987. 5, 31, 40

[Reeves 1987] S. Reeves. *Programming as Constructive Mathematics.* page 32p, 1987. 61

[Reveillès 1985] J-P. Reveillès. *Discrétisatio finie de la droite discrète réelle et application àla théorie de l'itération.* pages 5–20, 1985. 4

[Reveillès 1991] J-P. Reveillès. *Géométrie discrète, Calcul en nombres entiers et algorithmique.* PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991. 42

[Reveillès 1992] J.-P. Reveillès. *Mathématiques discrètes et analyse non standard.* In Le Labyrinthe du Continu, pages 382–390, 1992. 42

[Reveillès 1996] J-P. Reveillès et D. Richard. *Back and Forth between continuous and discrete for the working computer scientist.* Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Mathematics and Informatic, vol. 16, no. 1-4, pages 89–152, 1996. 7, 42

[Richard 2009] A. Richard, G. Wallet, L. Fuchs, E. Andres et G. Largeteau-Skapin. *Arithmetization of A Circular Arc.* In DGCI 2009, Montreal, Canada, 2009. 55

[Salanskis 1992] J.-M. Salanskis et H. Sinaceurs, editeurs. Le labyrinthe du continu. Springer, 1992. 6

[Sorensen 2006] M.H. Sorensen et P. Urzyczyn. Lectures on the curry-howard isomorphism, volume 149 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006. 61

[Troelstra 1988] A. S. Troelstra et D. van Dalen. Constructivism in mathematics : An introduction, volume I. North-Holland, 1988. 60

Formalismes non classiques pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète

Résumé :

L'objet de ce travail est l'utilisation de certains formalismes non classiques (analyses nonstandard, analyses constructives) afin de proposer des bases théoriques nouvelles autour des problèmes de discrétisations d'objets continus. Ceci est fait en utilisant un modèle discret du système des nombres réels appelé droite d'Harthong-Reeb ainsi que la méthode arithmétisation associée qui est un processus de discrétisation des fonctions continues. Cette étude repose sur un cadre arithmétique nonstandard. Dans un premier temps, nous utilisons une version axiomatique de l'arithmétique nonstandard. Puis, dans le but d'améliorer le contenu constructif de notre méthode, nous utilisons une autre approche de l'arithmétique nonstandard découlant de la théorie des Ω-nombres de Laugwitz et Schmieden. Cette seconde approche amène à une représentation discrète et multi-résolution de fonctions continues. Finalement, nous étudions dans quelles mesures, la droite d'Harthong-Reeb satisfait les axiomes de Bridges décrivant le continu constructif.

Mots clés : Analyse nonstandard, Géométrie Discrète, Mathématiques Constructives

Non classical formalisms for the computing treatment of the topoligy and the discrete geometry

Summary :

The aim of this work is to introduce new theoretical basis for the discretization of continuous objects using non classical formalisms. This is done using a discrete model of the continuum called the Harthong-Reeb line together with the related arithmetization method which is a discretisation process of continuous functions. This study stands on a nonstandard arithmetical framework. Firstly, we use an axiomatic version of nonstandard arithmetic. In order to improve the constructive content of our method, the next step is to use another approach of nonstandard arithmetic deriving from the theory of Ω-numbers by Laugwitz and Schmieden. This second approach leads to a discrete multi-resolution representation of continuous functions. Afterwards, we investigate to what extent the Harthong-Reeb line fits Bridges axioms of the constructive continuum.

Keywords : Nonstandard Analysis, Discrete Geometry, Constructive Mathematics

Laboratoire Mathématiques
Image et Interactions
Avenue Michel Crépeau
17042 La Rochelle Cedex 01