Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :
Aéronautique et Astronautique

Présentée et soutenue par :
Florent Guignery
Le : mardi 6 juillet 2010

TITRE :

Mécanismes microphysiques intervenant dans le sillage proche d'un avion en maillage non structuré

JURY

J.-P. Caltagirone	Professeur des Universités, TREFLE, Bordeaux 1	Président
D. Sipp	Ingénieur de Recherche, ONERA-Meudon	Rapporteur
P. Mirabel	Professeur des Universités, LMSPC, Strasbourg	Rapporteur
R. Paoli	Ingénieur de Recherche HDR, CERFACS	Examinateur
F. Garnier	Ingénieur de Recherche HDR, ONERA-Châtillon	Invité
O. Thual	Professeur des Universités, ENSEEIHT, Toulouse	Directeur de Thèse
E. Montreuil	Professeur associé, ONERA-Châtillon	Co-directeur de Thèse

---

Ecole doctorale : Aéronautique et Astronautique (AA)
Unité de recherche : ONERA

Directeur de Thèse : O. Thual
Co-directeur de Thèse : E. Montreuil

Remerciements

Ces travaux de recherche ont été effectués au sein du Département Mesures Physiques (DMPH) de l'ONERA au centre de Châtillon.

Tout d'abord, je tiens à remercier Pierre Touboul ainsi que Pierre Laroche pour m'avoir accueilli au sein de leur département.

Mes plus chaleureux remerciements vont à Olivier Thual qui a su diriger ce doctorat avec fermeté et diplomatie. Merci pour toute l'implication dont tu as fait preuve, malgré une vie professionnelle très intense. Je te suis très reconnaissant d'avoir toujours été présent et de m'avoir permis de mener ces travaux à leur terme, malgré les nombreuses difficultés rencontrées. Merci d'avoir joué un rôle déterminant, lors de ma deuxième année, en proposant de nouvelles orientations de recherche, alors que les résultats de mes travaux n'étaient pas ceux escomptés.

Dans ce contexte, je tiens également à remercier Emmanuel Rosencher et Jean-Jacques Thibert, directeurs à l'ONERA, respectivement de la branche « Physique » et de la branche « Mécanique des fluides et énergétique », pour m'avoir accordé de leur temps afin de mettre tout en œuvre pour proposer des solutions viables quant au changement d'orientation des travaux. Merci également à Grégoire Casalis, directeur de l'école Doctorale Aéronautique Astronautique, ainsi qu'à Alain Boutier, membre de la Direction Scientifique Générale de l'ONERA, pour m'avoir entendu sur les difficultés rencontrées lors de mes deux premières années.

Un grand merci également à Daniel Cariolle, Roberto Paoli, Ronan Paugam et Jean Luc Estivalezes pour leur accueil lors de réunions fructueuses dans les locaux du CERFACS à Toulouse. Leur présence et surtout leur aide, dans des moments difficiles, ont été capitales.

Je tiens également à remercier Laurent Jacquin et Denis Sipp pour avoir accepté de me rencontrer dans les locaux de l'ONERA à Meudon, de m'avoir conseillé et de m'avoir proposé leur aide.

Je voudrais également remercier chacun des membres du jury, Jean Paul Caltagirone pour l'avoir présidé ainsi que Philippe Mirabel et Denis Sipp pour avoir rapporté ces travaux.

Je tiens à remercier Xavier Vancassel, ingénieur de Recherche à l'ONERA, pour toute l'aide qu'il a su m'apporter et sa grande connaissance sur les aspects microphysiques de la transformation des effluents dans les panaches d'avion. Au-delà de cet aspect professionnel, j'ai passé avec toi de nombreux moments très agréables. J'en garderai d'excellents souvenirs. Merci pour ton écoute et ta disponibilité. Je te souhaite une très bonne continuation et je sais que tu feras un très bon encadrement de la thèse de ta première doctorante.

Je remercie également Emmanuel Montreuil d'avoir accepté d'encadrer ces travaux de thèse après leur réorientation.

Mes remerciements vont également à François Garnier pour son écoute, ses conseils mais également sa très grande sympathie. Je te souhaite le meilleur pour ta nouvelle vie outre atlantique.

Un clin d'oeil pour Rémy Belgodère avec qui j'ai eu le plaisir de travailler pendant quatre mois lors de son stage de fin d'étude de l'école des Mines de Paris. Je te remercie pour le travail que tu as su réaliser mais également pour ta bonne (très bonne) humeur et ta voix incroyable.

Il me reste encore de nombreuses personnes à saluer.

Je souhaite remercier chaleureusement Denis Dutoya et Bernard Courbet pour les nombreux conseils qu'ils m'ont prodigués sur les méthodes numériques et notamment sur l'implicitation des flux et la matrice Jacobienne associée. Merci à vous pour votre pédagogie et pour le temps que vous m'avez accordé.

Un grand merci également à Dominique Scherrer pour l'intérêt qu'il a suscité à mes travaux et ses conseils avisés sur la thermodynamique des mélanges.

Ma gratitude va également à François Vuillot pour son aide sans faille sur la réalisation des premiers maillages à l'aide du logiciel « Harpoon ».

Je remercie tout particulièrement Julien Troyes, Guillaume Turpin, Emeric Martin, Didier Hebert, Frédérique Muller pour les nombreux conseils et toute l'aide qu'ils m'ont donnés sur les difficultés techniques (très nombreuses) rencontrées lors de la mise en place complexe des calculs.

Bien évidemment, j'envoie une très grosse pensée à tous ceux que j'ai côtoyés quotidiennement à mon plus grand plaisir : Gerard Gardette, Alain Delannoy, Patrice Blanchet, Didier Guffond, Arnaud Chazottes, Laurent Chemartin, David Delhaye, Xuan Presteau, Weeded Ghedhaifi, Sylvie Nicolle-Douet, Helène Meler, Marie-Agnès Raoul, Claire Laroche. Merci à Philippe Lalande pour m'avoir couramment encouragé à des heures très souvent tardives.

Je finirai ces remerciements en marquant toute ma reconnaissance envers ma famille.

Table des matières

Introduction 7

Chapitre 1 Mécanismes intervenant dans la formation et l'évolution d'une traînée de condensation 15

1.1. Effluents d'avion 15
1.1.1. Indice d'émission 16
1.1.2. Concentration initiale de particules 17
1.1.3. Indice d'émission apparent 18
1.1.4. Pression de vapeur 18

1.2. Transformations physico-chimiques des effluents dans le sillage 19
1.2.1. Processus de formation de particules 19
1.2.2. Processus de croissance des particules 21
1.2.3. Conclusion 26

1.3. Mécanismes aérodynamiques 26
1.3.1. Régime jet 27
1.3.2. Régime tourbillonnaire 34
1.3.3. Régime de dispersion 36
1.3.4. Régime de diffusion 36

Chapitre 2 Modélisation 39

2.1. Modélisation des effluents d'avion 39
2.1.1. Mélange considéré 39
2.1.2. Traitement de la phase dispersée 41

2.2. Modélisation des processus microphysiques 42
2.2.1. Hypothèses 42
2.2.2. Croissance des particules par condensation : équations de conservation de la masse 43

2.3. Modélisation aérodynamique de l'écoulement 47
2.3.1. Ecoulements turbulents 47
2.3.2. Approche numérique de la turbulence 49
2.3.3. Equations de Navier Stokes 50
2.3.4. Filtrage des équations de Navier Stokes 52

2.3.5. Equations filtrées 54
2.3.6. Introduction d'un formalisme compact 55
2.3.7. Modélisation de la turbulence 57

2.4. Modélisation de la thermodynamique de l'écoulement 67
2.4.1. Equation d'un corps pur 67
2.4.2. Propriétés thermodynamiques d'un mélange idéal 68

Chapitre 3 Méthodes numériques 73

3.1. Discrétisation spatiale 73
3.1.1. Espace discret et bilan discret 74
3.1.2. Evaluation des flux numériques 78

3.2. Intégration temporelle 86
3.2.1. Méthodes explicites 87
3.2.2. Méthodes implicites 88

Chapitre 4 Validation du modèle Microphysique 97

4.1. Simulation 0D de la croissance des cristaux de glace dans une atmosphère au repos 97
4.1.1. Effet de la concentration des suies sur la cinétique de croissance des cristaux de glace et sur leur taille à l'équilibre. 97
4.1.2. Effet de la taille des suies sur la cinétique de croissance des cristaux de glace et sur leur taille à l'équilibre 99
4.1.3. Effet de l'humidité relative sur la cinétique de croissance des cristaux de glace et sur leur taille à l'équilibre 101
4.1.4. Obtention d'une solution stationnaire. Validation du schéma implicite 102

4.2. Simulation de la croissance des cristaux de glace dans un jet chaud subsonique bidimensionnel 107
4.2.1. Utilisation du schéma explicite de type Runge Kutta 2 109
4.2.2. Utilisation du schéma d'intégration temporel implicite à un pas 117

Chapitre 5 Etude aérothermodynamique du mélange d'un jet chaud dans le sillage d'un profil NACA0012 121

5.1. Etude expérimentale 122
5.1.1. Dispositif expérimental 122
5.1.2. Enroulement de la nappe tourbillonnaire 125
5.1.3. Caractéristiques du tourbillon marginal 127
5.1.4. Caractéristiques de l'enroulement du jet chaud 129

5.2. Etude numérique **132**
5.2.1. Conditions initiales et aux limites du domaine de calcul 133
5.2.2. Caractéristiques des maillages 134
5.2.3. Résultats 139

Chapitre 6 Etude des processus microphysiques intervenant lors du mélange d'un jet chaud dans le sillage d'un profil NACA0012 **147**

6.1. Cas de référence **148**
6.1.1. Conditions initiales 148
6.1.2. Domaine de calcul et caractéristiques du maillage 149
6.1.3. Résultats 149

6.2. Influence de certains paramètres liés à l'avion ou à l'atmosphère sur les caractéristiques microphysiques de la traînée **162**
6.2.1. Effet de la taille des particules de suie en sortie moteur 163
6.2.2. Effet de l'humidité relative de l'atmosphère 167

Conclusion et perspectives **171**

Annexes **199**

Bibliographie **183**

Table des Figures

Figure 1.1 : Principe schématique du critère de Schmidt Appleman 9

Figure 1.2 : Traînée de condensation à courte durée de vie..... 9

Figure 1.3 : Traînée de condensation à longue durée de vie (a), évolution de la traînée en nuage artificiel (b) 9

Figure 1.4 : Enroulement des jets et des cristaux de glace autour des deux tourbillons marginaux 11

Figure 1.5 : Image satellite illustrant l'augmentation de la nébulosité par les traînées de condensation 11

Figure 1.1 : Composition des effluents d'avion 15

Figure 1.2 : Schématisation du processus de nucléation homogène homomoléculaire 20

Figure 1.3 : Schématisation du processus de nucléation hétérogène 21

Figure 1.4 : Evolution, en fonction de la température, de la pression de vapeur saturante par rapport à l'eau liquide $P_{sat/liq}$ et par rapport à l'eau solide $P_{sat/sol}$ 23

Figure 1.5 : Evolution, en fonction de la température, du rapport de la pression de vapeur saturante par rapport à l'eau liquide et l'eau solide 24

Figure 1.6 : Schématisation du processus de la condensation de la vapeur d'eau sur une particule d'eau liquide ou solide24

Figure 1.7 : Evolution de la pression de vapeur saturante de l'eau en fonction du rayon d'une particule pour une température fixée à 220K. « Psat,S» représente la valeur de la pression de vapeur saturante en prenant en compte l'effet Kelvin. « Psat,P » représente la valeur de la pression de vapeur saturante en négligeant l'effet Kelvin. « Erreur » rend compte de l'erreur commise sur l'évaluation de Psat lorsque l'effet Kelvin est négligé. 25

Figure 1.8 : Schématisation de l'évolution temporelle du sillage d'un avion commercial..... 27

Figure 1.9 : Schématisation du régime jet. Le jet émis du turboréacteur s'enroule autour du tourbillon marginal 27

Figure 1.10 : Illustration d'un écoulement de type jet en sortie moteur. En rouge : le cône potentiel. En bleu : la zone de mélange. 33

Figure 1.11 : Schématisation du développement spatial du jet axisymétrique homogène 29

Figure 1.12 : Visualisation de l'écoulement aérodynamique par analogie hydraulique, au tunnel hydrodynamique de l'ONERA. Tourbillon marginal à l'extrémité d'une aile rectangulaire. (Visualisation à l'aide de traceurs liquides colorés)..... 31

Figure 1.13 : Formation du tourbillon marginal. Isocontours de vorticité à différentes sections le long de la corde, du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite (de gauche à droite et de haut en bas) (Birch et Lee, 2003) 32

Table des Figures

Figure 1.14 : Visualisation de la descente des deux tourbillons contrarotatifs et du « torque barocline » qui remonte à l'altitude de vol. Extrait de (Paugam, 2008) 35

Figure 2.1 : Composition réelle du panache (en Haut) et composition du mélange considéré pour le modèle (en Bas) 40

Figure 2.2 : Schématisation d'une particule de glace, composée d'une suie (gris) sur laquelle se condense de l'eau 40

Figure 2.3 : Schématisation des régimes d'écoulement autour d'une particule dont le rayon est de l'ordre du libre parcours moyen 45

Figure 2.4 : Evolution théorique du rayon des particules pour différents nombres de Knudsen, $Kn\left(0\right)=\lambda/r\left(0\right)$ avec $r\left(0\right)=20\ nm$. Le trait continu correspond à $Kn\left(0\right)=2{,}5$, le trait en pointillé correspond à $Kn\left(0\right)=10$ et le trait en petits points correspond à $Kn\left(0\right)=36$ (Paoli, Hélie et poinsot, 2004) 46

Figure 2.5 : Spectre de Kolmogorov pour une turbulence homogène et isotrope (Bertier, 2006) 48

Figure 2.6 : Schématisation du principe sur lequel repose les trois grands types d'approche pour la résolution d'écoulements turbulents (Bertier, 2006) 49

Figure 2.7 : Schématisation du développement d'une couche limite sur une plaque plane 64

Figure 3.1 : représentation du découpage du domaine Ω en un nombre fini de cellules 75

Figure 3.2 : Schématisation de deux cellules voisines et de leur interface commune, sur laquelle doit être évalués les flux 79

Figure 3.3 : Schéma d'interpolation des états à l'interface.[a] : Interpolation d'ordre 1. [b] : Interpolation d'ordre 2 80

Figure 3.4 : Schéma d'interpolation d'ordre 2 des états à l'interface. [a] : sans limiteur. [b] : avec limiteur 83

Figure 3.5 : Schématisation des méthodes à un pas multi étapes et des méthodes multi pas à une étape 87

Figure 3.6 : Evolution temporelle de la masse d'eau condensée sur des particules. Mise en évidence de deux équilibres : stable et instable 94

Figure 4.1 : Evolution du rayon des cristaux de glace $r\left(t\right)$ et de la masse de glace $m\left(t\right)$ en fonction du temps pour deux concentrations initiales de particules N. [a] : calcul CEDRE. [b] : Résultats de (Kärcher, 1996) 98

Figure 4.2 : Evolution du rayon des cristaux de glace $r\left(t\right)$ et de la masse de glace $m\left(t\right)$ en fonction du temps pour deux tailles initiales de suie r_s. Calcul CEDRE. 100

Figure 4.3 : Evolution du rayon des cristaux de glace $r\left(t\right)$ et de la masse de glace $m\left(t\right)$ en fonction du temps pour deux valeurs initiales de l'humidité relative RH. Calcul CEDRE. 102

Figure 4.4 : Evolution de la masse d'eau condensée $m\left(t\right)$ en fonction du temps 104

Figure 4.5 : Visualisation de la convergence de la masse d'eau condensée m vers l'état stationnaire ainsi que de la valeur de la valeur propre λ de la matrice $\mathbf{A}$ pour différentes initialisations de la masse d'eau condensée $m_c=0\ g.m^{-3}$ [a], $m_c=0{,}006\ g.m^{-3}$ [b], $m_c=0{,}012\ g.m^{-3}$ [c], $m_c=0{,}024\ g.m^{-3}$ [d] 106

Figure 4.6 Convergence du calcul pour différentes initialisations de la masse d'eau condensée avec conditionnement de la matrice $\mathbf{A}$. A droite, $m_c = 0\ g.m^{-3}$. A gauche $m_c = 0{,}006\ g.m^{-3}$ 107

Figure 4.7 : Maillage 2-D construit autour de la buse de l'injecteur. Maillage complet à droite. Zoom de la zone proche de la buse à gauche.....109

Figure 4.8 : Visualisation de la vitesse longitudinale 110

Figure 4.9 : Visualisation de la température.....110

Figure 4.10 : Visualisation de l'énergie cinétique turbulente 111

Figure 4.11 : Profil axial de la vitesse longitudinale 112

Figure 4.12 : Profil radial de la vitesse longitudinale à $x/D_j = 10$ 112

Figure 4.13 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, de la pression de vapeur (P_v), de la pression de vapeur saturante (P_{sat}) ainsi que du rapport de saturation (S).....113

Figure 4.14 : Cartographie spatiale de la taille des cristaux de glace en aval de la buse 113

Figure 4.15 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, de la pression de vapeur (P_v), de la pression de vapeur saturante (P_{sat}) ainsi que du rapport de saturation (S). [a] modèle de condensation activé. [b] modèle de condensation désactivé.....114

Figure 4.16 : Visualisation spatiale de la taille des cristaux de glace à trois différentes distances de la buse $x/D_j = 100;\ 500;\ 800$ 115

Figure 4.17 : Evolution du rayon moyen des cristaux de glace dans le jet ainsi que de leur nombre.....115

Figure 4.18 : Distribution en taille des cristaux de glace à $x/D_j = 100$ [a], $x/D_j = 300$ [b], $x/D_j = 500$ [c], $x/D_j = 800$ [d].....116

Figure 4.19 : Evolution de la saturation et de la concentration des particules de suie dans le plan $x/D_j = 500$ 117

Figure 4.20 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, de la pression de vapeur (P_v), de la pression de vapeur saturante (P_{sat}) ainsi que du rapport de saturation (S). A gauche : Calcul implicite. A droite : Calcul explicite.....118

Figure 4.21 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, du rayon des particules (r_p) ainsi que de leur densité (N). A gauche : Calcul implicite. A droite : Calcul explicite 119

Figure 5.1 : Visualisation du dispositif expérimental ainsi que des dimensions de la maquette expérimentale 123

Figure 5.2 : Distribution transversale de la vitesse axiale à différentes sections an aval de la maquette. [a] : $x/b = 0.5$; [b] : $x/b = 1$; [c] : $x/b = 3$; [d] : $x/b = 5$; [e] : $x/b = 8$. Visualisation de l'enroulement de la nappe tourbillonnaire. 127

Figure 5.3 : Profils des vitesses axiales U/U_0 ; tangentielles V/U_0 et verticales W/U_0 à $x/b = 0.5$ (à gauche) et $x/b = 8$ (à droite) 128

Figure 5.4 : Evolution de la circulation moyenne du tourbillon en fonction du rayon pour différentes valeurs de x/b ...128

Figure 5.5 : Distribution transversale des taux de turbulence : [a] $x/b = 1$; [b] $x/b = 5$ 129

Figure 5.6 : Distribution de l'écart de température relatif mesurée dans les plans de sondage [a] : $x/b = 0$; [b] : $x/b = 0.5$; [c] : $x/b = 1$; [d] : $x/b = 3$; [e] : $x/b = 5$; [f] : $x/b = 8$ 131

Figure 5.7 : Vue globale du domaine de calcul utilisé pour la simulation numérique de l'écoulement dans le sillage de la maquette NACA0012/injecteur....133

Figure 5.8 : Visualisation du maillage 1 élaboré à l'aide du logiciel « Harpoon ». [a] : coupe 2D du maillage en proche paroi. [b] : coupe 2D du maillage à une envergure. [c] : coupe 2D du maillage à huit envergures....137

Figure 5.9 : Visualisation du maillage 2 élaboré à l'aide du logiciel « Centaur ». [a] : coupe transversale du maillage autour de la maquette. [b] : Visualisation du maillage proche de l'aile. [c] : coupe transversale du maillage à une demie-envergure. [d] : coupe transversale du maillage à huit envergures 138

Figure 5.10 : isocontour de la vorticité axiale colorié par la vitesse axiale adimensionnée (maillage 1) [a] $w_x = -1000\ s^{-1}$; [b] $w_x = -2500\ s^{-1}$ 139

Figure 5.11 : isocontour de la vorticité axiale colorié par la vitesse axiale adimensionnée (maillage 2). [a], $w_x = -1000\ s^{-1}$; [b], $w_x = -2500\ s^{-1}$ 140

Figure 5.12 : profil de la vitesse tangentielle du tourbillon marginal centré sur son noyau tourbillonnaire dans les plan $x/b = 0,5$ [a] et $x/b = 8$ [b], pour les maillages 1 et 2 141

Figure 5.13 : Distribution transversale des taux de turbulence dans les plans $x/b = 1$ et $x/b = 5$ pour le maillage 1 142

Figure 5.14 : Distribution transversale des taux de turbulence dans les plans $x/b = 1$ et $x/b = 5$ pour le maillage 2 143

Figure 5.15 : Distribution de l'écart de température relatif calculée en utilisant le maillage 1 dans les plans de sondage (de gauche à droite et de haut en bas) $x/b = 1$, $x/b = 3$, $x/b = 5$ $x/b = 8$ 144

Figure 5.16 : Distribution de l'écart de température relatif calculée en utilisant le maillage 2 dans les plans de sondage (de gauche à droite et de haut en bas) $x/b = 1$, $x/b = 3$, $x/b = 5$ $x/b = 8$ 145

Figure 5.17 : Dilution basée sur la maximum de température. Comparaison étude expérimentale, étude numérique 146

Figure 6.1 : Evolution de la dilution dans le panache jusqu'à huit envergures lorsque le modèle de condensation est désactivé [a]. Comparaison de la dilution basée sur le scalaire passif z , la température T et la pression de vapeur P_v (modèle de condensation désactivé) [b] 151

Figure 6.2 : Comparaison de l'évolution de la dilution lorsque le modèle de condensation est activé et désactivé. [a] : Dilution basée sur la température; [b] : dilution basée sur la pression partielle de vapeur d'eau. 152

Figure 6.3 : Isocontours de la dilution, à huit envergures, basée sur le scalaire passif z [a], la température T [b] et la pression de vapeur P_v [c] 152

Figure 6.4 : Visualisation de l'enroulement du jet et de la condensation de l'eau dans le panache jusqu'à huit envergures. Isocontour de la masse volumique de la glace $\rho_{glace} = 1,5.10^{-5} kg_{glace}.m^{-3}$ colorié par les isovaleurs de la concentrations des suies N 154

Figure 6.5 : Visualisation de l'enroulement du jet et de la croissance des cristaux de glace dans le panache jusqu'à huit envergures. Isocontour de la concentration des particules $N = 5.10^{+09} m^{-3}$ colorié par les isovaleurs de leur rayon. 155

Figure 6.6 : Visualisation de la masse d'eau condensée par unité de volume coloriée par la saturation pour différents plans $x/b = 0,5$ [a], $x/b = 1$ [b], $x/b = 3$ [c], $x/b = 8$ [d] 156

Figure 6.7 : Isocontours du rayon des cristaux de glace et isolignes de leur concentration pour $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$ 157

Figure 6.8 : Isocontours de la masse volumique de la glace et isolignes de la concentration des cristaux pour $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$ 157

Figure 6.9 : Isocontours du rayon des cristaux de glace et isolignes de leur concentration à $x\ /\ b = 8$. [a] : calcul de la dilution basée sur le scalaire passif. [b] : Calcul de la dilution basée sur la température. 158

Figure 6.10 : Evolution du rayon moyen des cristaux de glace et de leur concentration dans le sillage pour le calcul de référence 160

Figure 6.11 : Distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/b = 3$; $x/b = 5$ et $x/b = 8$ 161

Figure 6.12 : Distribution en taille des cristaux de glace dans le plan $x/b = 8$. Comparaison de la distribution obtenue lorsque la dilution est calculée à l'aide du scalaire passif et à l'aide de la température 162

Figure 6.13 : Isocontours de la masse volumique de la glace et isolignes de la concentration des cristaux pour $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$ lorsque le rayon initiale des suies est $r_s = 100\ nm$ 163

Figure 6.14 : Isocontours du rayon des cristaux de glace et isolignes de leur concentration pour $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$ lorsque le rayon initiale des suies est $r_s = 100nm$ 163

Figure 6.15 : [a] Evolution du rayon moyen des cristaux de glace et de leur concentration dans le sillage avec un rayon de suie en sortie moteur valant $r_s = 100\ nm$. [b] Comparaison de l'évolution du rayon moyen des cristaux avec le calcul de référence 164

Figure 6.16 : Distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/b = 3$; $x/b = 5$ et $x/b = 8$ lorsque le rayon initiale des suies est $r_s = 100\ nm$ 165

Figure 6.17 : Comparaison des distributions en taille des cristaux de glace dans le plan $x/b = 8$ lorsque le rayon des suies vaut $r_s = 10\ nm$ et $r_s = 100\ nm$ 166

Figure 6.18 : Isocontours de la masse volumique de la glace et isolignes de la concentration des cristaux à $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$, lorsque l'humidité relative de l'atmosphère est $RH = 30\%$ 167

Figure 6.19 : Distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/b = 3$; $x/b = 5$ et $x/b = 8$ lorsque l'humidité relative ambiante est $RH = 30\%$ 168

Figure 6.20 : Comparaison des distributions en taille des cristaux de glace dans le plan $x/b = 8$ lorsque le rayon des suies vaut $RH = 60\%$ et $RH = 30\%$ 169

Figure 6.21 : [a] Evolution du rayon moyen des cristaux de glace et de leur concentration dans le sillage avec une humidité relative pour l'atmosphère valant $RH = 30\%$. [b] Comparaison de l'évolution du rayon moyen des cristaux avec le calcul de référence 170

Figure 6.22 : Schéma du contour fermé Ω pour le calcul de la circulation $\mathcal{C}$ du vecteur $\vec{v}$ 175

Figure 6.23 : Représentation géométrique du calcul de la circulation d'un tourbillon 176

Figure 6.24 : Schéma des vitesses de l'écoulemennt en coordonnées cylindriques 176

Figure 6.25 : Distribution radiale de la vitesse tangentielle et de la circulation d'un tourbillon de Lamb Oseen 179

Introduction

Alors qu'Airbus, un des plus grands constructeurs aéronautiques mondial, prévoit le doublement du trafic aérien d'ici quinze ans (Airbus, 2009), l'impact environnemental de l'aviation civile devient un sujet de plus en plus préoccupant. Cet impact, qui doit être non seulement compris, mais également évalué et quantifié, peut avoir diverses origines. Il y a, par exemple, une pollution sonore, chimique ou bien encore une pollution engendrée par des effets radiatifs.

Les sources sonores proviennent majoritairement de la turbulence du jet en sortie de tuyère et sont diminuées par la conception de nouvelles nacelles.

La pollution atmosphérique provient des émissions des turboréacteurs. Ces dernières sont à la fois particulaires et gazeuses. Les particules primaires sont principalement des suies générées par une combustion incomplète du carburant. Les gaz sont composés notamment de dioxyde de carbone CO_2 (gaz inerte mais bien connu pour sa participation à l'effet de serre) et d'oxydes d'azote NO_x. Ces oxydes d'azote interviennent dans plusieurs réactions chimiques avec d'autres composants présents dans l'atmosphère et les effluents d'avion. Ils participent à la destruction ou à la production d'ozone suivant l'altitude de vol. La pollution atmosphérique peut être réduite par l'utilisation de nouveaux carburants alternatifs permettant la réduction d'émissions de CO_2 et de NO_x.

Quant à l'impact radiatif, il est dû principalement, en plus des gaz émis par les turboréacteurs (CO_2, NO_X qui contribuent à la production ou à la destruction de l'ozone O_3 suivant leur lieu d'émission, haute troposphère et stratosphère respectivement, etc.) et des particules de suie elles-mêmes, à la formation, en aval des avions en vol de croisière, de longues traînées blanches, appelées traînées de condensation ou contrails (diminutif anglo saxon pour Condensation Trail). En effet, à l'altitude de croisière, la température proche de $-50°C$ est favorable à la cristallisation (sous forme de glace) de la vapeur d'eau émise par les moteurs. Ces traînées peuvent augmenter la nébulosité modifiant ainsi l'équilibre radiatif naturel de la terre. L'impact radiatif provient à la fois de la traînée elle-même, mais également des cirrus artificiels qui peuvent être induits par ces mêmes traînées. On parle alors de traînées persistantes. Il n'est possible de distinguer les nuages artificiels des cirrus naturels qu'en connaissant précisément l'historique de la traînée. C'est pourquoi, il est

encore difficile d'avoir une estimation précise de la contribution de l'aviation sur le forçage radiatif dû aux cirrus induits. Une estimation du forçage radiatif dû à l'aviation en 2000 est donnée par (Sausen *et al.*, 2005) et réévaluée par (Lee *et al.*, 2009) en se basant sur les données collectées lors du programme TRADEOFF. Le forçage radiatif attribué aux traînées y est estimé à $10\ mW.m^{-2}$. Celui imputé aux cirrus induits reste encore très mal connu et l'incertitude est encore importante suivant les études. Il est estimé entre $28\ mW.m^{-2}$ et $80\ mW.m^{-2}$.

Les premières observations des traînées de condensation ont été faites durant la période 1914-1919, période durant laquelle le nouveau record d'altitude de vol s'élève à $9520\ m$ (14-06-1919, Jean Casale, FRANCE). Dans les années qui suivirent, ce phénomène fut l'objet de peu d'attention jusqu'à ce que la « furtivité » des avions devienne un sujet majeur dans les années 1940-1945.

La possibilité que la vapeur d'eau émise par les moteurs soit à l'origine de ce phénomène a été rapidement evoquée (Varney, 1921). Mais cette explication a été longtemps jugée comme irrecevable puisque l'air ambiant était considéré comme trop sec et la quantité d'eau émise par les moteurs trop faible pour pouvoir expliquer la taille, parfois très importante, des traînées de condensation observées. De plus il était déjà connu, à cette époque, que la sursaturation présente dans le panache devait être considérable pour apporter l'énergie nécessaire à la formation de gouttes ou de particules de glace sans la présence de particules préexistantes, catalyseurs de la condensation. C'est pourquoi plusieurs auteurs (Weickmann, 1919) et (Baschin, 1919) ont suggéré que les moteurs émettaient des poussières ou des particules de suie. Ces dernières permettaient alors la condensation de la vapeur dans de l'air sous-saturé par rapport à l'eau liquide mais saturé par rapport à la glace. Dans les années quarantes, il est connu que la condensation homogène (vapeur d'eau vers eau solide sans aucun germe), est un phénomène rare dans l'atmosphère (lorqu'elle est sursaturée) puisque cette dernière contient naturellement de nombreux noyaux de condensation ($100\ cm^{-3}$). Dans le panache des avions, ces noyaux de condensation peuvent également résulter de la nucléation d'un mélange d'eau et d'acide sulfurique (Mirabel et Katz, 1974) et (Hofmann et Rosen, 1978). L'acide sulfurique provient de la combustion de fuels qui contiennent du soufre (Reiner et Arnold, 1993). La phase des particules formées est également très importante. A conditions thermodynamiques égales (Pression et Température), une particule d'eau sous forme de glace grossira plus rapidement qu'une particule d'eau liquide puisque la sursaturation au dessus de cette dernière est plus importante. A titre d'exemple, à $220K$, la pression de vapeur saturante par rapport à la glace est de $2{,}65\ Pa$ alors qu'elle est de $4{,}36\ Pa$ par rapport à l'eau liquide (Murphy et Koop, 2005).

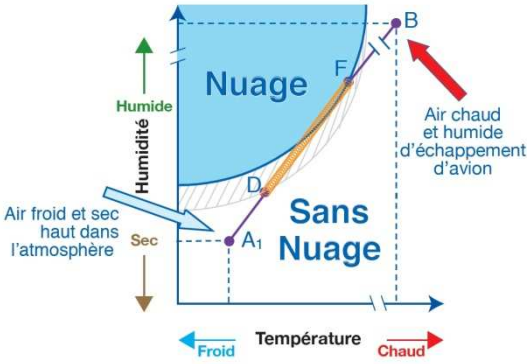

Figure 1.1 : Principe schématique du critère de Schmidt Appleman

Un premier critère sur les conditions nécessaires à la formation d'une traînée a été proposé par (Schmidt, 1941) puis par (Appleman, 1953). Ce critère ainsi nommé « critère de Schmidt-Appleman » repose uniquement sur des conditions thermodynamiques. La Figure 1.1 en donne le principe. L'axe des abscisses représente la température et l'axe des ordonnées l'humidité. La courbe bleue représente la saturation par rapport à l'eau liquide tandis que la courbe grise représente la saturation par rapport à la glace. Le point B correspond aux conditions en sortie des jets chauds et humides des turboréacteurs, tandis que le point A_1 représente les conditions de l'atmosphère qui est froide et sèche. La ligne reliant ces deux points correspond au mélange et au refroidissement des jets dans l'atmosphère. Lorsque cette dernière coupe la courbe bleue, il y a apparition d'une traînée. Au point A_1, la traînée n'a une durée de vie que très courte, cf. Figure 1.2. Si l'atmosphère est plus froide et de même humidité (déplacement horizontal vers la gauche du point A_1), la traînée aura une durée de vie beaucoup plus importante, cf. Figure 1.3(a). Par contre, si l'atmosphère est plus humide et à même température (déplacement vertical vers le haut), elle sera persistante, s'étalera pour évoluer en nuage artificiel de type cirrus, cf. Figure 1.3(b).



Figure 1.2 : Traînée de condensation à courte durée de vie

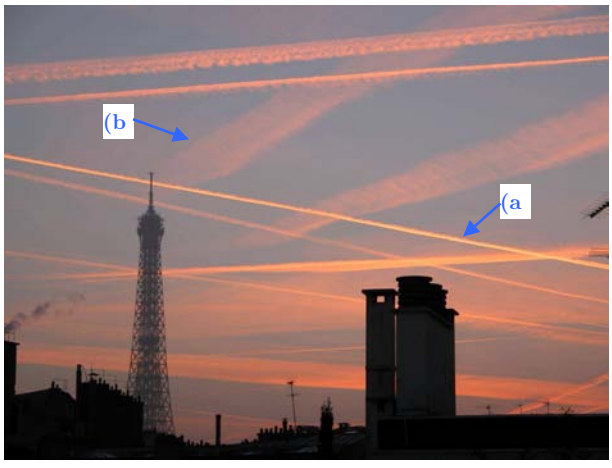

Figure 1.3 : Traînée de condensation à longue durée de vie (a), évolution de la traînée en nuage artificiel (b)

Ce critère a ensuite été repris par (Schumann, 2000) afin d'y apporter de nouvelles considérations qui jouent un rôle important dans la formation de la traînée, notamment le rendement du moteur, c'est-à-dire la conversion entre la chaleur libérée par la combustion et la poussée obtenue.

Ainsi, les traînées de condensation se forment pour plusieurs raisons. La plus importante est le rejet par les moteurs de vapeur d'eau en grande quantité. Pour former une traînée, l'air ambiant doit être suffisamment froid, typiquement une température inférieure à $-40°C$. Néanmoins, de nombreux autres paramètres comme l'humidité relative, la pression ainsi que le processus de mélange du jet avec l'atmosphère et les différents processus de formations de nouvelles particules dans le panache participent à l'apparition des traînées (Schuman, 1996). Si le critère de Schmidt-Appleman permet de savoir si les conditions thermodynamiques (notamment celles de l'atmosphère) sont favorables à l'apparition d'une traînée, il ne donne aucune information sur son épaisseur optique. Ni sa visibilité, ni son impact radiatif ne peuvent alors être connus.

L'épaisseur optique τ d'une traînée dépend de la surface des cristaux de glace de rayon r, de leur concentration N, de l'épaisseur géométrique de la traînée l_c ainsi que d'un coefficient Q_{ext} appelé coefficient d'extinction efficace.

$$\tau = \pi r^2 Q_{ext} N \; l_c. \tag{0.1}$$

Ce critère de visibilité utilisé, par exemple, par (Kärcher, 1996), permet de prendre en compte non seulement la concentration des cristaux mais également les conditions d'éclairage, la distance séparant le point d'observation de la traînée ou bien encore l'angle de vue.

Q_{ext} est compris entre 0 et 4. Il est issu d'un calcul de Mie pour des particules de glace sphériques avec un indice de réfraction de $1,311$ pour un photon de longueur d'onde $0,55\ \mu m$ (Warren, 1984).

Les cirrus faiblement visibles sont caractérisés par une épaisseur optique $\tau_v \geq 3.10^{-2}$, dépendant de la longueur d'onde considérée, des conditions d'éclairage, de la distance et de l'angle de vue.

Ainsi, cette limite inférieure d'épaisseur optique peut être utilisée en tant que critère de visibilité. Toute traînée de condensation dont l'épaisseur optique est supérieure à τ_v sera donc considérée comme visible. Celles d'épaisseur optique moindre seront considérées comme invisibles.

Afin de déterminer cette grandeur, il est donc indispensable de connaître précisément la taille des cristaux de glace, leur concentration ainsi que leur distribution spatiale et leur distribution en taille. Pour cela, l'ensemble des mécanismes aérodynamiques et microphysiques intervenant dans la formation et dans l'évolution d'une traînée de condensation doit être appréhendé sur l'ensemble des échelles de temps et d'espace qu'elle fait intervenir, puisque sa durée de vie peut être de plusieurs heures et son étendue jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres en aval de l'avion.

A l'échelle locale, au niveau de l'avion, déjà, apparaissent les premiers cristaux de glace, responsables de la couleur blanche de la traînée. Ces cristaux résultent de phénomènes microphysiques et notamment de la condensation de la vapeur d'eau sur les particules de suies émises par les moteurs. L'évaluation de ces processus microphysiques est difficile car ils prennent place lors de l'interaction du jet, émis par le moteur, et le tourbillon de bout d'aile. Le tourbillon de bout d'aile appelé tourbillon marginal résulte de la différence de pression entre le haut (extrados) et le bas (intrados) de l'aile. L'air est aspiré vers les zones où la pression est plus basse.

Cet air contourne donc le bout d'aile en s'enroulant le long du saumon, de l'intrados (zone de forte pression) vers l'extrados (zone de basse pression). Le jet est alors, dans un premier temps étiré, puis totalement enroulé autours du tourbillon marginal, cf. Figure 1.4.

Plus en aval de l'avion (jusqu'à environ $20\ km$), la dynamique de la traînée est dominée par l'interaction entre les deux tourbillons contra rotatifs générés par chacune des deux ailes de l'avion. Des instabilités peuvent se développer, comme l'instabilité de Crow (Crow, 1970) et conduire rapidement à la destruction du système tourbillonnaire. Les cristaux de glace sont alors rapidement diffusés par la turbulence atmosphérique et la traînée devient de moins en moins visible et peut parfois même disparaître.

Néanmoins, sous certaines conditions, notamment lorsque l'atmosphère est sursaturée par rapport à la glace, ces traînées peuvent s'étendre sur des échelles spatiales beaucoup plus importantes, plusieurs centaines de kilomètres. On parle de méso-échelle. Elles persistent alors sous forme de nuages artificiels de haute altitude. Il s'agit de cirrus qui, sans le passage de l'avion, n'auraient pas pu se former naturellement. Ces nuages artificiels ont un impact substantiel sur le bilan radiatif de la terre. En effet, ces derniers ont pour effet de filtrer et de piéger certains types de rayonnement notamment les infra rouges qui contribuent au réchauffement de la planète. Les nuages représentent le paramètre le plus important dans le contrôle de la température de l'atmosphère terrestre et le climat. Un changement de la nébulosité peut contribuer à des changements à long terme sur le climat de la Terre. Les traînées de condensation, plus particulièrement celles qui sont persistantes induisent une augmentation de la nébulosité due à l'activité humaine, cf. Figure 1.5. Connaître précisément où, quand et comment se forment les traînées de condensation permettra de déterminer leur contribution à la couverture nuageuse et ainsi leurs effets sur le climat.



Figure 1.4 : Enroulement des jets et des cristaux de glace autour des deux tourbillons marginaux



Figure 1.5 : Image satellite illustrant l'augmentation de la nébulosité par les traînées de condensation

Au niveau de la méso-échelle, de nombreuses études ont été menées. Du point de vue aérodynamique, sur des échelles de temps allant de 15 à 180 min, (Dürbeck et Gerz, 1996) ont étudié l'influene de la stratification de l'atmosphère et (Dörnback et Dürbeck, 1998) l'effet de la turbulence atmosphérique, sur la durée de vie du système tourbillonnaire. Les processus de croissance des cristaux dans une atmosphère stratifiée, sur ces mêmes échelles de temps, ont été

étudiés par (Jensen *et al.*, 1998). Dans son travail de Doctorat, (Paugam, 2008) y a ajouté la turbulence atmosphérique. Il a également étudié les processus microphysiques opérant durant les premières phases d'instabilités (instabilité de Crow) des deux tourbillons contra rotatifs qui débutent environ à $20\ s$ en aval de l'avion. Quant à l'échelle locale, juste au niveau de l'avion, du point de vue aérodynamique, (Labbé, Maglaras et Garnier, 2007) et (Cago, Brunet et Garnier, 2002) ont étudié l'enroulement de la turbulence du jet sur le vortex marginal pour différentes distances jet tourbillon. (Garnier, Brunet et Jacquin, 1997), (Paoli et Garnier, 2005) ainsi que (Paoli *et al.*, 2008) ont proposé une approche temporelle simplifiée pour simuler numériquement la formation de la traînée, c'est-à-dire les processus microphysiques qui interviennent lors de l'interaction d'un jet turbulent et d'un tourbillon théorique. Pour cela, une approche LES a été utilisée. Le calcul a été effectué en deux étapes : la première consiste à simuler le développement de la turbulence dans le jet, un tourbillon de Lamb (cf. Annexes) est ensuite ajouté au champ ainsi obtenu. Il s'agit d'une simulation temporelle ne permettant pas de bien décrire le développement du jet. En effet, des conditions limites de périodicité sont imposées dans la direction axiale du jet. Les gradients axiaux de l'écoulement s'en trouvent négligés. Néanmoins, (Brancher, 1996) a montré que l'instabilité primaire qui se développe dans le jet (l'instabilité de Kelvin Helmoltz) est de nature convective et peut être parfaitement simulée à l'aide d'une approche temporelle à la différence des instabilités absolues, cf. Annexes. Toutes ces études ont permis non seulement d'obtenir les premiers résultats sur la répartition spatiale des cristaux et sur leur taille dans le champ proche, mais également de quantifier, par exemple, l'effet du nombre de Mach du jet sur la croissance des cristaux (Maglaras, 2007). Néanmoins, cette stratégie de calcul ne permet pas, d'une part, de calculer l'écoulement réel autour et dans le sillage de l'avion (formation du tourbillon de bout d'aile, écoulement en sortie moteur) et, d'autre part, de correctement simuler la transition entre la phase dite « jet » et la phase de son enroulement autour du tourbillon marginal, puisque, seul, le jet est simulé dans un premier temps, puis, seulement, l'écoulement tourbillonnaire est ajouté à un temps t arbitraire. Or il a été montré que ce temps t a une influence directe sur la croissance et la cinétique des cristaux de glace (Maglaras, 2007). Il reste donc beaucoup à faire sur la compréhension de la formation de la traînée au niveau de l'avion, et sur le rôle de certains paramètres clés liés à la structure même de l'avion (la géométrie de l'aile, les positions des nacelles etc.), comme le souligne le rapport de l'IPCC (IPCC, 2007).

Dans cette perspective, et pour palier aux inconvénients de l'approche temporelle décrits ci-dessus, ce travail propose une approche dite spatiale de l'écoulement avec une modélisation de la turbulence de type RANS. Cette approche permet, non seulement de résoudre l'écoulement autour de l'avion et d'obtenir un écoulement de son sillage plus précis, mais également de ne pas scinder la simulation en deux parties (jet puis interaction jet tourbillon), rendant ainsi l'interaction jet tourbillon plus précise. Un code de calcul compressible (nombre de Mach élevé du jet) résolvant des écoulements multi espèces (mélange gazeux issu des moteurs) sur des maillages non structurés a été choisi. Il s'agit du code CEDRE développé à l'ONERA. L'utilisation de maillages non structurés permet de mailler des géométries complexes comme un avion, de manière moins laborieuse, très favorable à l'utilisation de l'outil dans un contexte industriel. L'objectif à moyen terme est de proposer un outil aux avionneurs capable de déterminer la signature radiative en terme de traînée de condensation d'un avion. Il pourra ainsi être utilisé en amont, pour l'aide à la conception

d'avions plus verts. Il s'agit là, à ma connaissance, des premières simulations de ce type pour l'étude de la formation d'une traînée de condensation.

Dans cette perspective, une description précise des mécanismes aérodynamiques et microphysiques intervenant dans le sillage d'un avion en vol de croisière est donnée dans le Chapitre 1 . Le Chapitre 2 décrit, d'une part, le modèle microphysique retenu et ajouté au Code CEDRE pour la modélisation de la condensation sur les particules émises par les turboréacteurs, et, d'autre part, le modèle aérodynamique déjà existant, pour la simulation de l'écoulement et du mélange des gaz avec l'atmosphère. Les méthodes numériques utilisées pour résoudre ces équations sont exposées au Chapitre 3 . Le Chapitre 4 est consacré à la validation du modèle microphysique sur des études simplifiées. Ensuite, à travers une simulation tridimensionnelle, de type RANS, de la dynamique du sillage en aval d'une maquette composée d'une aile de type NACA0012 et de deux injecteurs d'air chaud, pour lequel des résultats expérimentaux existent, le Chapitre 5 présente les aptitudes de l'outil numérique à résoudre un tel écoulement issu de l'interaction jet tourbillon. Il s'agit d'une étape très importante, puisque l'outil résout la dynamique sur des maillages non structurés généraux, très intéressants, d'un point de vue industriel, dans le cadre de maillages complexes d'avions plus faciles à mettre en oeuvre, mais plutôt moins favorables à la résolution de l'aérodynamique. Finalement, le Chapitre 6 est consacré à une simulation complète de la formation de la traînée dans le sillage de cette même maquette, en activant le modèle de condensation/évaporation présenté au Chapitre 2 et au Chapitre 4 . L'influence de certains paramètres sur les caractéristiques microphysiques de la traînée, comme la taille des particules de suie émises par les moteurs et l'humidité de l'atmosphère y est également discutée. Ceci constitue, à ma connaissance, la première étude sur la formation de la traînée, qui prend en compte l'écoulement autour et en aval d'un profil sustentateur et de deux injecteurs. Elle propose une nouvelle approche sur la caractérisation de la formation de la traînée et permet de fournir des données plus fines (distribution spatiale en taille et en nombre des cristaux de glace à la fin de l'enroulement du jet autour du tourbillon marginal) pour les scientifiques qui étudient le vieillissement de la traînée sur des échelles spatiales et temporelles plus importantes. Elle ouvre surtout de nouvelles perspectives pour la conception d'avions plus « verts » en terme de traînées de condensation puisqu'elle propose un outil capable, à terme, de tester de nouvelles solutions technologiques ou de design d'avions sur leur « signature radiative ». De même, pour un type d'avion et connaissant les conditions atmosphériques, on peut imaginer que cet outil pourrait constituer une aide à la gestion du trafic aérien en adaptant les plans de vol (changement de l'altitude de vol, de route aérienne) pour éviter les traînées.

CHAPITRE 1 MECANISMES INTERVENANT DANS LA FORMATION ET L'EVOLUTION D'UNE TRAINEE DE CONDENSATION

Comme il a été évoqué en introduction, les mécanismes qui interviennent dans la formation d'une traînée de condensation sont nombreux. Il s'agit de mécanismes aérodynamiques, l'écoulement de l'air autour de l'avion et dans son sillage notamment, qui contribuent au mélange des effluents émis par les turboréacteurs avec l'atmosphère. Ces mécanismes aérodynamiques favorisent ainsi les transformations physico chimiques des espèces dans le panache et plus particulièrement les processus microphysiques de condensation de la vapeur d'eau en cristaux de glace.

1.1. Effluents d'avion

Les effluents d'avion sont composés principalement de dioxyde et de monoxyde de carbone, de vapeur d'eau, d'oxydes d'azote et de soufre, mais également d'hydrocarbures imbrûlés et de suies (Figure 1.1).

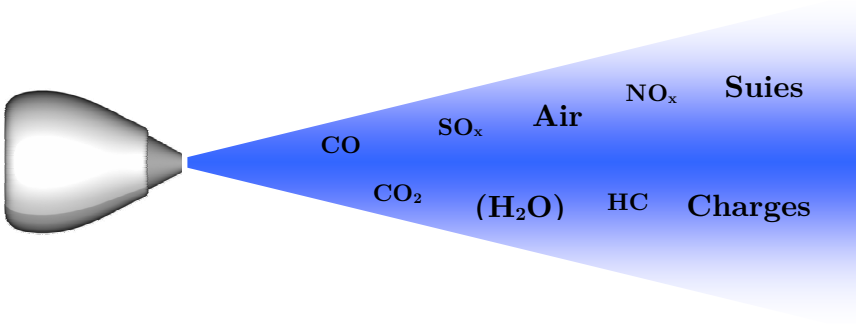

Figure 1.1 : Composition des effluents d'avion

En sortie de tuyère, se trouvent également des charges électriques (particules ou composés chimiques chargés électriquement). Ces dernières interviennent dans les processus de croissance des particules volatiles en favorisant la coagulation de particules portant des charges opposées.

Afin de caractériser quantitativement ces émissions, on définit un certain nombre de grandeurs : l'indice d'émission, la concentration initiale de particules, l'indice d'émission apparent et la pression de vapeur.

1.1.1. Indice d'émission

L'indice d'émission EI d'un composé gazeux A émis par un moteur d'avion se définit comme étant la masse de ce gaz m_A produite par la combustion d'un kilogramme de carburant $m_{carburant}$ (ICAO, 1993):

$$EI_A = \frac{m_A}{m_{carburant}}. \tag{1.1}$$

Le Tableau 1.1 présente l'indice d'émission des principaux constituants émis par un turboréacteur.

Espèces	Indice d'émission EI en g/kg (régime de croisière)
CO_2	3160
H_2O	1230
NO_X	$7,9 - 15,4$
CO	$1 - 3,5$
SO_X	$1 - 3$
HC	$0,2 - 1,3$

Tableau 1.1 : Evaluation quantitative des espèces émises en sortie de réacteur (IPCC, 1999)

L'indice d'émission EIP de particules A est défini par le nombre de particules n_A émises par la combustion d'un kilogramme de carburant :

$$EIP_A = \frac{n_A}{m_{carburant}}. \tag{1.2}$$

L'indice d'émission typique des suies pour un avion de transport civil moderne en régime de croisière est : $EIP_{suies} = 3,5.10^{14}\ kg_{carb}^{-1}$

En ce qui concerne les réacteurs d'avion, on définit un indice d'émission particulier noté AFR pour « Air to Fuel Ratio ». Il s'agit de la masse d'air m_{air} nécessaire à la combustion d'un kilogramme de carburant :

$$AFR = \frac{m_{air}}{m_{carburant}}. \tag{1.3}$$

Pour un avion de transport civil, le rapport air carburant est environ $AFR \approx 60$

Les indices d'émissions doivent absolument être connus si l'on s'intéresse à la composition chimique du panache et aux transformations que les composés chimiques subissent.

1.1.2. Concentration initiale de particules

Afin de connaître la concentration initiale des particules émises par un turboréacteur, en plus de leur indice d'émission, il est nécessaire de connaître le volume des gaz rejeté par kilogramme de kérosène consommé. Il s'agit du volume du panache. Il est composé d'une part, du volume d'air de masse volumique ρ_{air} nécessaire à la combustion, et, d'autre part, du volume des gaz brûlés de masse volumique $\rho_{carburant_gaz}$. Ainsi, le volume du panache émis par kilogramme de kérosène consommé s'écrit :

$$v^{exit}_{panache} = \frac{\frac{m_{air}}{\rho_{air}} + \frac{m_{carburant}}{\rho_{carburant_gaz}}}{m_{carburant}}. \tag{1.4}$$

En faisant l'approximation que la masse volumique des gaz brûlés est peu différente de celle de l'air $\rho_{carburant_gaz} \sim \rho_{air}$, on obtient :

$$v^{exit}_{panache} = \frac{AFR + 1}{\rho_{air}}. \tag{1.5}$$

La valeur de la masse volumique de l'air est celle prise à la température de sortie de tuyère T_{exit}. La concentration initiale de particules est ainsi donnée par le rapport entre leur indice d'émission et le volume du panache, soit :

$$N^{exit}_{A} = \frac{EIP_A}{v^{exit}_{panache}} = \frac{EIP_A \rho_{air}}{AFR + 1}. \tag{1.6}$$

Cette formule permet par exemple de déterminer la concentration des suies en sortie moteur. Si l'on considère que le rapport air/fuel est $AFR \approx 60$, que l'indice d'émission de suies est $EIP_{suies} = 3{,}5.10^{14}\ kg^{-1}_{carb}$ et que les gaz chauds s'écoulent à la température $T_{exit} = 600K$ (température typique des gaz à la sortie d'un turboréacteur) dans une atmosphère où la pression est $P = 22000\ Pa$ (pression à $10000\ m$ d'altitude), soit une masse volumique de $\rho_{air} = 0{,}14\ kg.m^{-3}$, la concentration des suies est : $N^{exit}_{suies} \simeq 8.10^{11}\ m^{-3}$

1.1.3. Indice d'émission apparent

Il est parfois intéressant d'estimer un indice d'émission de particules à partir de leur concentration dans le panache à un instant t donné, pour des mesures en vol par exemple. On considère que le principal phénomène qui modifie leur concentration est la dilution $d(t)$ du panache par entraînement d'air. La dilution représente le rapport entre le volume initial du panache par kilogramme de kérosène consommé par celui occupé à l'instant t :

$$d(t) = \frac{v_{panache}^{exit}}{v_{panache}(t)}. \tag{1.7}$$

Ainsi, l'équation (1.6) devient :

$$N_A(t) = \frac{EIP_A^{app}\rho_{air}}{AFR+1} d(t). \tag{1.8}$$

Et l'indice d'émission apparent est :

$$EIP_A^{app} = \frac{N_A(t).(AFR+1)}{\rho_{air}.d(t)}. \tag{1.9}$$

1.1.4. Pression de vapeur

1.1.4.1. Eau

L'eau, au même titre que tous les autres composés gazeux émis par un moteur, a son propre indice d'émission. Il est donc aisé de connaître la concentration initiale des molécules d'eau vapeur. Néanmoins, on préfère bien souvent quantifier ce nombre de molécules d'eau gazeuse à l'aide de la pression de vapeur lorsque l'on s'intéresse aux processus microphysiques. Si l'on considère que le turboréacteur émet de la vapeur d'eau de masse molaire M_{H_2O} à la température T_{exit}, avec l'hypothèse que la vapeur d'eau soit un gaz parfait de constante R, la pression de vapeur en sortie de tuyère $P_{H_2O}^{exit}$ s'écrit :

$$P_{H_2O}^{exit} = \frac{m_{H_2O}.R.T_{exit}}{M_{H_2O}.v_{panache}^{exit}.m_{carburant}}. \tag{1.10}$$

A l'aide des équations (1.10) et (1.5), on peut écrire :

$$P_{H_2O}^{exit} = \frac{m_{H_2O}.R.T_{exit}.\rho_{air}}{M_{H_2O}.(AFR+1).m_{carburant}}. \tag{1.11}$$

En supposant que le panache évolue de manière isobare dans une atmosphère où la pression est P_{atm}, on a :

$$\rho_{air} = \frac{M_{air}}{R.T_{exit}} P_{atm}. \tag{1.12}$$

Ainsi, (1.11) devient :

$$P_{H_2O}^{exit} = \frac{m_{H_2O}}{\big(AFR+1\big).m_{carburant}} \frac{M_{air}}{M_{H_2O}} P_{atm}. \tag{1.13}$$

Soit en utilisant l'indice d'émission de l'eau (équation (1.1)), on obtient finalement :

$$P_{H_2O}^{exit} = \frac{EI_{H_2O}}{\big(AFR+1\big)} \frac{M_{air}}{M_{H_2O}} P_{atm} \tag{1.14}$$

On peut donc estimer la pression de vapeur en sortie moteur pour un avion en vol de croisière où la pression atmosphérique est $P_{atm} = 22000\ Pa$ et l'indice d'émission de la vapeur d'eau est $EI_{H_2O} = 1{,}23$ (cf. Tableau 1.1). La pression de vapeur vaut alors $P_{H_2O}^{exit} = 715\ Pa$.

1.2. Transformations physico-chimiques des effluents dans le sillage

Les effluents, émis par les turboréacteurs, subissent dans le sillage de l'avion, un certain nombre de transformations et de réactions chimiques qui vont provoquer la création de nouvelles particules et favoriser la croissance des particules pré-existantes et nouvellement formées.

1.2.1. Processus de formation de particules

Le processus fondamental qui intervient dans la création de nouvelles particules est la nucléation. On entend par nouvelles particules, des particules d'un nouveau type (une particule de suie devenant un cristal de glace par exemple) ou bien encore des particules fraîchement formées. Le terme de « nucléation », quant à lui, désigne le processus permettant de générer à partir d'une phase mère devenue instable du point de vue thermodynamique, des fragments d'une nouvelle phase plus stable. La nucléation est, par conséquent, la manifestation d'une diminution de l'énergie libre du système. A titre d'exemple, les cristaux de glace représentent un état de la matière où l'énergie libre est plus petite que celle de l'état à partir duquel ils se sont formés (eau liquide ou vapeur). La nucléation est donc l'agglomération d'atomes en vue de diminuer l'énergie libre du système devenue trop grande (on parle également de système devenu instable du point de vue thermodynamique).

On peut distinguer deux types de nucléation : la nucléation homogène et la nucléation hétérogène. Qu'elle soit homogène ou hétérogène, elle peut être homo ou hétéro moléculaire, suivant que la phase mère est constituée d'une ou plusieurs vapeurs condensables, comme un mélange d'eau et d'alcool ou d'acide.

1.2.1.1. Nucléation homogène

La nucléation homogène se produit en l'absence d'éléments étrangers à la phase mère (poussières par exemple). Notons que cet état de « pureté » n'est jamais atteint dans l'atmosphère. Sans surfaces préexistantes, le système doit fournir une énergie importante à la création d'une interface entre la phase mère et la nouvelle phase, étape essentielle à la création d'une particule. Son énergie libre doit ainsi être extrêmement élevée.

A titre d'exemple, considérons un volume d'air contenant un certain nombre de molécules d'eau sous forme vapeur. La nucléation d'une particule d'eau correspond à un nombre relativement important de molécules d'eau sous forme vapeur rassemblées en un même point : de 50 à 100 environ pour former un embryon de germe liquide. Cette probabilité statistique de rencontre, au même instant, au même point, d'un aussi grand nombre de molécules isolées suppose un nombre considérable de molécules d'eau présent dans le volume d'air. C'est pourquoi, jamais en phase homogène pure, une quelconque condensation ne pourrait intervenir sans que soit au préalable réalisée une sursaturation considérable, c'est-à-dire sans que le système soit extrêmement instable.

Ainsi, ce processus de nucléation homogène homomoléculaire est très rare dans l'atmosphère puisque la phase instable va d'abord nucléer sur les particules préexistantes diminuant l'énergie libre du système qui n'atteindra que très rarement une énergie libre suffisamment importante pour nucléer de manière homogène.

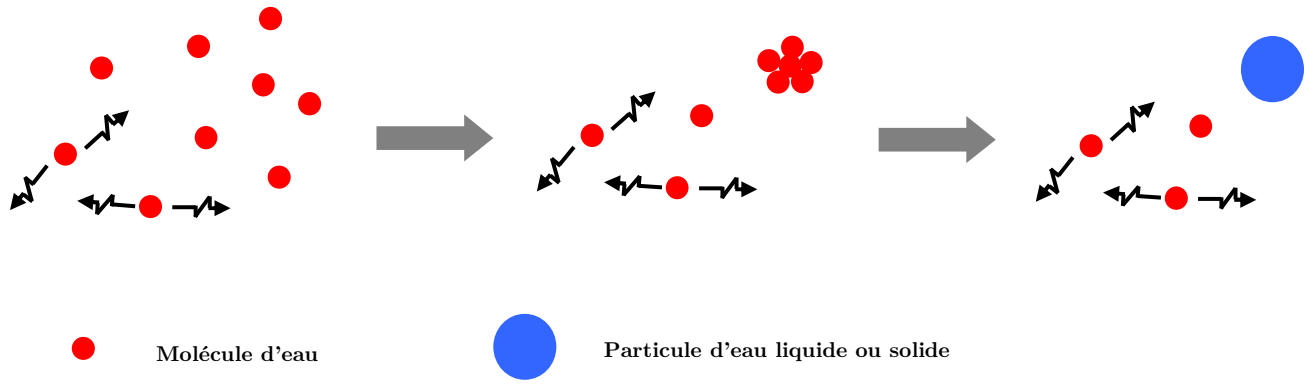

Figure 1.2 : Schématisation du processus de nucléation homogène homomoléculaire

La Figure 1.2 présente une schématisation du processus de nucléation homogène homomoléculaire. Les molécules de vapeur d'eau (coloriées en rouge) peuvent, sous certaines conditions de pression et de température notamment, se trouver en nombre suffisant (50 à 100) au même instant et au même endroit pour permettre de nucléer et former une nouvelle particule d'eau (coloriée en bleu) sous une nouvelle phase.

1.2.1.2. Nucléation hétérogène

La nucléation hétérogène, quant à elle, fait intervenir des particules préexistantes, qui agissent comme des noyaux de condensation dans le cas de la nucléation d'une vapeur. La présence de telles surfaces permet d'abaisser la quantité d'énergie nécessaire à la formation d'une particule puisque le système fait l'économie de la création d'une interface entre deux phases. La nucléation est alors catalysée et ainsi plus efficace.

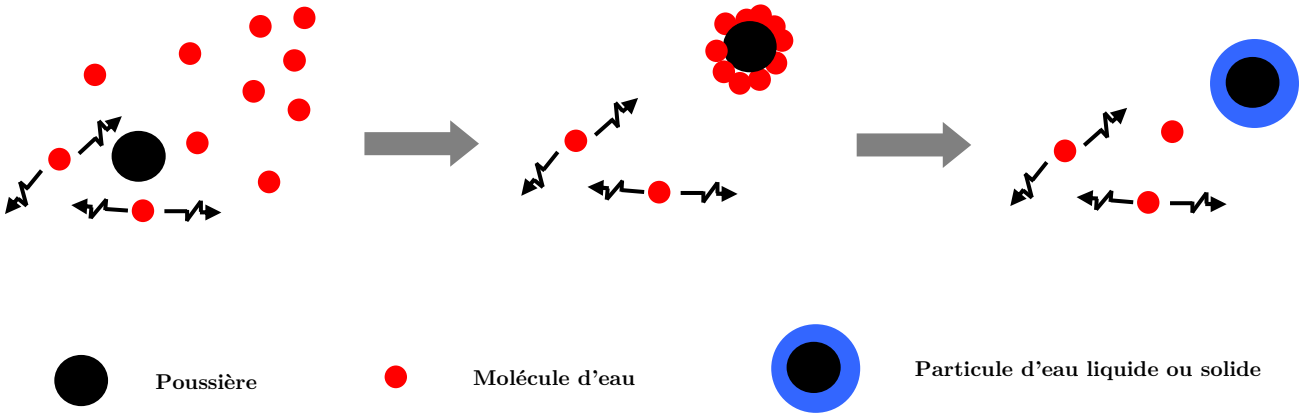

Figure 1.3 : Schématisation du processus de nucléation hétérogène

La Figure 1.3 présente une schématisation du processus de nucléation hétérogène. Les molécules de vapeur d'eau (en rouge) au contact d'une particule de poussière change de phase. Une nouvelle particule est donc formée composée d'une poussière en son centre et d'eau liquide ou solide en périphérie.

Il s'agit bien évidemment du processus que l'on retrouve majoritairement dans l'atmosphère lorsqu'il s'agit de nucléation.

1.2.2. Processus de croissance des particules

La croissance des particules préexistantes ou fraîchement formées est pilotée majoritairement par deux processus majeurs que sont la coagulation et la condensation.

1.2.2.1. La coagulation

Les particules en suspension (aérosols) dans le panache subissent en permanence des collisions avec leurs proches. Ces collisions peuvent être dues à l'agitation thermique aléatoire qui anime chaque molécule. On appelle ce type de coagulation la coagulation Brownienne.

Mais elle peut être également provoquée par la turbulence ou la gravitation dès lors que les particules sont suffisamment grosses (supérieures au micron). La coagulation due aux effets gravitationnels est appelée sédimentation. En outre, la coagulation entre deux particules peut être catalysée par des phénomènes d'attraction ou de répulsion lorsque des charges électriques sont portées par ces dernières.

1.2.2.2. La condensation

Le phénomène

La condensation est un phénomène thermodynamique à l'échelle microscopique, c'est-à-dire à l'échelle de l'atome et des particules. Elle a pour origine un changement de phase vapeur/liquide ou vapeur/solide. La vapeur se condense vers une nouvelle phase sous un plus faible volume.

En pratique, un volume d'air, à une température donnée, ne peut contenir qu'un certain nombre de molécules d'eau sous forme vapeur. Ce nombre maximum de molécules peut être évalué par la pression de vapeur saturante notée P_{sat} qui ne dépend que de la température T soit $P_{sat}(T)$. Si la pression de vapeur, P_v, d'un volume d'air, est supérieure à $P_{sat}(T)$, celui-ci se trouve en équilibre instable que la moindre impureté permettra de rompre en favorisant la condensation de la vapeur jusqu'à un équilibre stable où $P_v = P_{sat}(T)$. La condensation de la vapeur est donc pilotée par le rapport entre la pression de vapeur régnant dans le milieu et la pression de vapeur à saturation. Ce rapport est appelé « rapport de saturation » et est noté S. Il est défini par :

$$S = \frac{P_v}{P_{sat}(T)}. \tag{1.15}$$

La valeur de la saturation permet de distinguer trois configurations :

- $S < 1$: le milieu est sous-saturé
- $S = 1$: le milieu est à l'équilibre
- $S > 1$: le milieu est sur-saturé

Notons que la pression d'équilibre (i.e : $P_{sat}(T)$) entre la phase condensée et la phase vapeur dépend également de la nature de la phase condensée, qui peut être sous forme liquide ou solide. On fera donc la distinction entre la pression à l'équilibre de la vapeur par rapport à sa forme liquide : $P_{sat/liq}(T)$ et par rapport à sa forme solide : $P_{sat/sol}(T)$. Cette différence vient du fait que les interfaces liquide/vapeur et solide/vapeur ne sont pas de même nature et possèdent des propriétés différentes.

L'humidité relative RH est un cas particulier du rapport de saturation S. Il s'agit du rapport entre la pression de vapeur d'eau et la pression de vapeur à saturation par rapport à l'eau liquide. L'humidité relative est donnée par :

$$RH = \frac{P_v}{P_{sat/liq}(T)} \times 100. \tag{1.16}$$

Il existe un nombre important d'équations permettant d'évaluer la valeur de la pression de saturation au dessus d'une surface plane d'eau liquide ou solide. Parmi elles, (Murphy et Koop, 2005) propose lorsque la température est en dessous de 273 K :

- Par rapport à une surface d'eau liquide :

$$\begin{aligned} \ln\left(P_{sat/liq}\right) = {} & 54.842763 - 6763.22/T - 4.21\ln(T) + 0.000367T \\ & + \tanh\left[0.0415(T - 218.8)\right] \\ & \left[53.878 - 1331.22/T - 9.44523\ln(T) + 0.014025T\right]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

- Par rapport à une surface d'eau solide :

$$\ln\left(P_{sat/sol}\right) = 9.550426 - 5723.265/T + 3.53068\ln(T) - 0.00728332T \tag{1.18}$$

$T = [K]$, $P_{sat} = [Pa]$

La Figure 1.4 représente l'évolution de la pression de vapeur saturante par rapport à une interface d'eau liquide et par rapport à une interface d'eau solide, sur une plage de température rencontrée lors d'un vol.

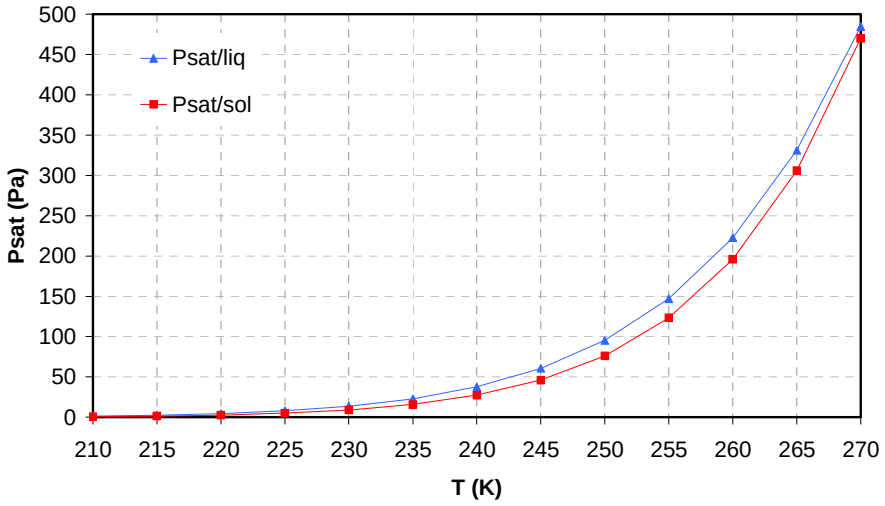

Figure 1.4 : Evolution, en fonction de la température, de la pression de vapeur saturante par rapport à l'eau liquide $P_{sat/liq}$ et par rapport à l'eau solide $P_{sat/sol}$

La courbe représentant la pression saturante par rapport à l'eau liquide possède les mêmes caractéristiques que celle représentant la pression saturante par rapport à l'eau solide. On remarque néanmoins, que la pression de vapeur saturante (ou pression d'équilibre) au-dessus d'une surface plane d'eau liquide, $P_{sat/liq}$, est plus grande qu'au-dessus d'une surface plande de glace, $P_{sat/sol}$. Ainsi, aux altitudes de croisière des avions, il est courant que l'atmosphère soit sursaturée en vapeur d'eau par rapport à la glace, mais non saturée par rapport à l'eau liquide.

Cette différence montre que l'air doit contenir plus de molécules de vapeur d'eau, à une température donnée, pour que ces dernières se condensent sous forme d'eau surfondue.

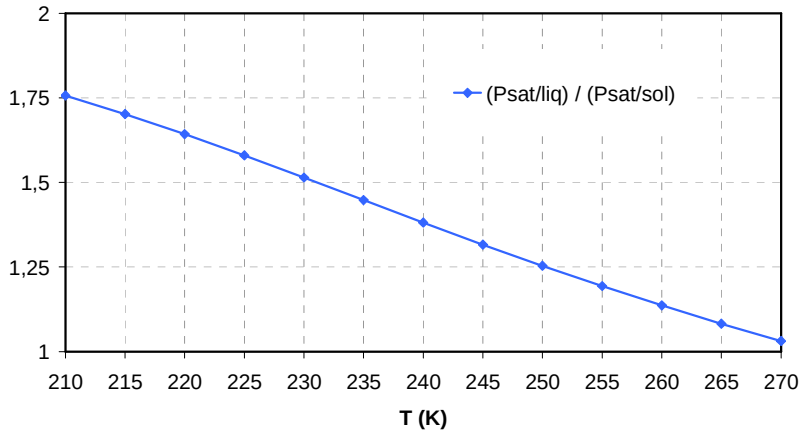

Figure 1.5 : Evolution, en fonction de la température, du rapport de la pression de vapeur saturante par rapport à l'eau liquide et l'eau solide

D'ailleurs, si l'on regarde le rapport entre la pression de vapeur saurante par rapport à l'eau liquide et l'eau solide en fonction de la température (Figure 1.5), on constate qu'il vaut près de 1,65 à 220 K (température de l'atmosphère à l'altitude de vol)

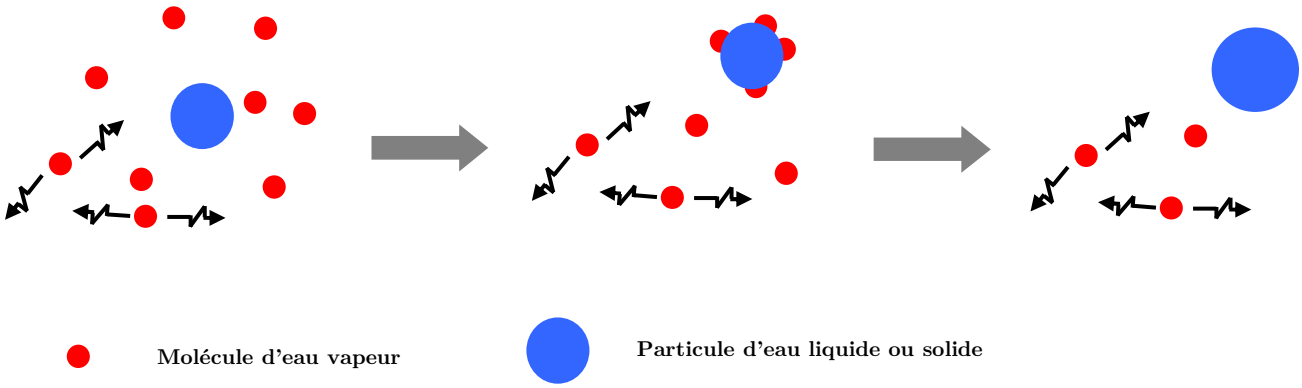

Figure 1.6 : Schématisation du processus de la condensation de la vapeur d'eau sur une particule d'eau liquide ou solide

La schématisation du processus de la condensation de la vapeur d'eau sur une particule d'eau liquide ou solide est donnée sur la Figure 1.6.

Effet Kelvin

Les formulations de la pression saturante données ci-dessus ne sont valables que pour une interface liquide/vapeur (ou solide/vapeur) plane.

L'effet Kelvin permet de prendre en compte l'énergie supplémentaire qu'il est nécessaire d'apporter pour que la phase condensée soit sous une forme sphérique. Notons que la sphère est la forme de surface la plus petite possible. L'énergie supplémentaire provient du fait que l'interface entre la phase vapeur et la phase condensée n'est plus plane mais sphérique. Ainsi, la pression de vapeur saturante par rapport à une interface sphérique $P_{sat,S}$ sera plus importante que son équivalent par rapport à une surface plane $P_{sat,P}$ (Seinfeld et Pandis, 2006).

Pour une particule sphérique de rayon r_p, de masse volumique ρ_p, de masse molaire M_p à la température T_p, la pression de vapeur saturante s'écrit :

$$P_{sat,S} = \exp\left(\frac{2\sigma M_p}{r_p \rho_p R T_p}\right) P_{sat,P}, \tag{1.19}$$

σ est l'énergie de surface en $\left[J.m^{-2}\right]$ ou $\left[N.m^{-1}\right]$

Pour l'eau à $273\ K$, la tension superficielle est $\sigma = 7{,}6.10^{-2} N.m^{-1}$

R est a constante des gaz parfaits en $\left[J.K^{-1}.mol^{-1}\right]$

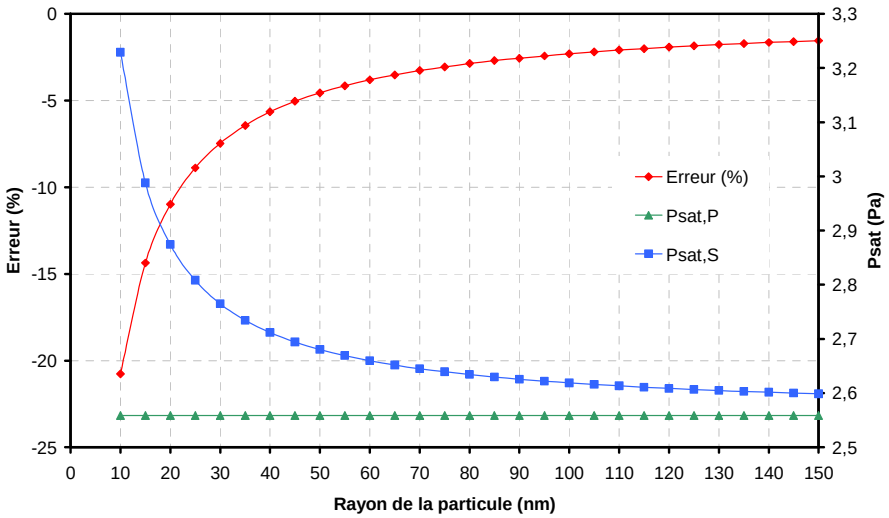

Figure 1.7 : Evolution de la pression de vapeur saturante de l'eau en fonction du rayon d'une particule pour une température fixée à 220K. « Psat,S» représente la valeur de la pression de vapeur saturante en prenant en compte l'effet Kelvin. « Psat,P » représente la valeur de la pression de vapeur saturante en négligeant l'effet Kelvin. « Erreur » rend compte de l'erreur commise sur l'évaluation de Psat lorsque l'effet Kelvin est négligé.

La Figure 1.7 représente l'évolution de la pression de la vapeur saturante de l'eau en fonction du rayon d'une particule pour une température fixée à $220\ K$ ainsi que de l'erreur commise lorsque l'effet Kelvin est négligé. Cette Figure met en évidence que l'effet Kelvin agit notamment sur les petites particules. En effet, plus le rayon de la particule croît et plus elle s'apparente à un plan. Ainsi, l'erreur commise sur l'évaluation de la pression de vapeur saturante en négligeant l'effet Kelvin est inférieure à 5% dès lors que la particule atteint un rayon de cinquante nanomètres et inférieure à 15% pour des particules dont le rayon est de l'ordre de la dizaine de nanomètres.

1.2.3. Conclusion

Ainsi, ces divers processus de création et de croissance de particules font que la composition du panache évolue continuellement. On retrouvera ainsi, outre les émissions issues de la combustion, de nouvelles particules, notamment des composés d'eau et d'acide sulfurique. Ces aérosols créés par nucléation et coagulation ainsi que les particules de suie vont favoriser la condensation de la vapeur d'eau pour donner naissance à des cristaux de glace. La condensation dépend fortement des conditions thermodynamiques locales mais également des propriétés des noyaux de condensation. Etant donné la nature de l'écoulement du sillage décrit dans le paragraphe 1.3 suivant, le panache contient des cristaux de glace de tailles différentes, présentant une répartition spatiale inhomogène.

1.3. Mécanismes aérodynamiques

La dynamique du sillage d'un avion dans l'atmosphère implique différents processus physiques comme l'écoulement du jet, la dynamique des tourbillons marginaux, leur interaction et la turbulence atmosphérique qui ont chacun leurs échelles caractéristiques. Basé sur les travaux de (Gerz, Dübeck et Konopka, 1998), (Lewellen et Lewellen, 2001), (Sussmann et Gierens, 1999), l'évolution du panache peut être qualitativement décrite suivant quatre régimes successifs, cf. Figure 1.8, que sont : le régime jet, le régime tourbillonnaire, le régime de dispersion et enfin, le régime de diffusion.

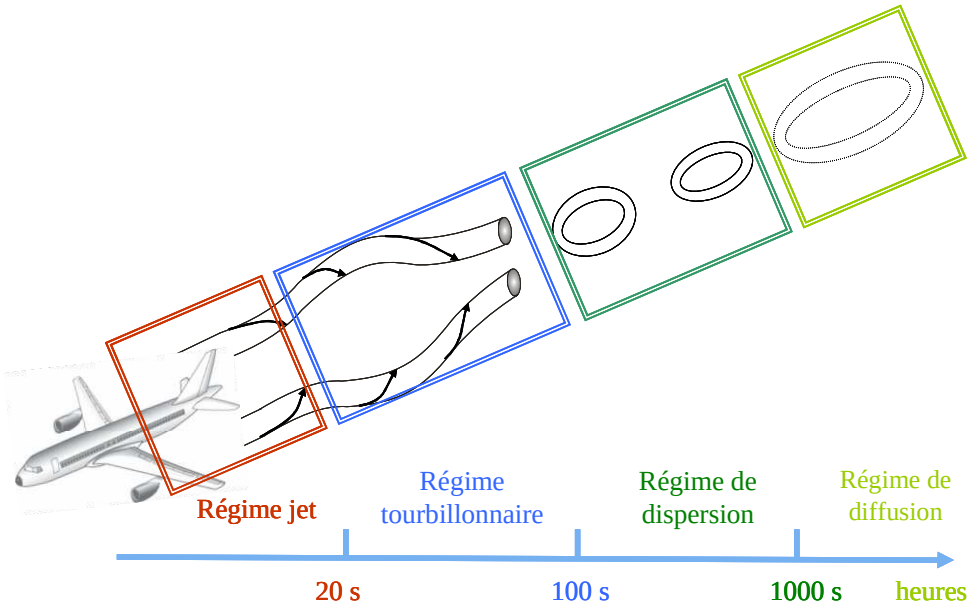

Figure 1.8 : Schématisation de l'évolution temporelle du sillage d'un avion commercial

Le régime jet est ici davantage décrit puisqu'il est directement lié à la présente étude.

1.3.1. Régime jet

Durant ce régime, deux écoulements bien distincts se mettent en place pour ensuite interagir ensemble. Il s'agit du développement du jet en sortie du réacteur et de la formation en bout d'aile d'un tourbillon, appelé tourbillon marginal.

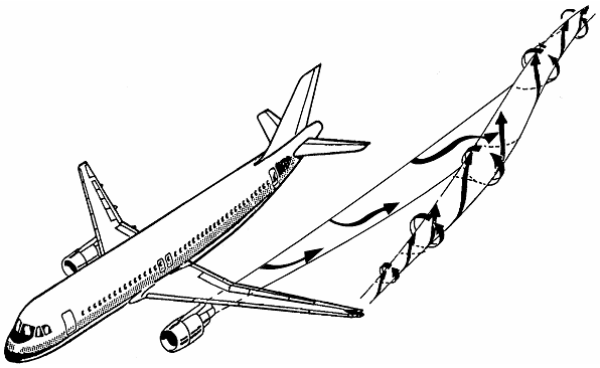

Figure 1.9 : Schématisation du régime jet. Le jet émis du turboréacteur s'enroule autour du tourbillon marginal

La Figure 1.9 illustre ce régime jet avec l'enroulement du jet autour du tourbillon marginal.

1.3.1.1. Ecoulement de type jet

En sortie de tuyère, les gaz chauds provenant de la combustion du kérosène sont expulsés à des températures et vitesses élevées. L'ordre de grandeur de la température et de la vitesse des gaz, pour un avion de transport civil, est typiquement $T_j = 580K$ et $V_j = 480ms^{-1}$ (Jacquin et Garnier, 1996). La structure aérodynamique d'un jet chaud subsonique a fait l'objet de nombreuses études dans les années 50-60 (Hinze et Zijnen, 1949) et (Abramovich, 1963). Toutes ces études ont mis en évidence un certain nombre de points communs. On peut généralement distinguer trois régions dans un jet libre. Le jet est initialement formé d'un cône potentiel (région où les différentes grandeurs thermodynamiques sont constantes et égales aux valeurs en sortie de moteur) entouré par une zone de mélange axisymétrique. L'épaisseur de la couche de mélange augmente longitudinalement. La section du jet croît et la région potentielle interne est graduellement absorbée par la zone de mélange pour disparaître ensuite. Une zone de transition raccorde la région initiale à une région où le jet devient pleinement développé et turbulent (Cf. Figure 1.10). Cette zone de mélange favorise le refroidissement du jet chaud avec l'atmosphère froide. La température étant plus froide dans cette zone, la saturation (Paragraphe 1.2.2.2) est plus facilement atteinte et déjà se forment les premiers cristaux de glace.

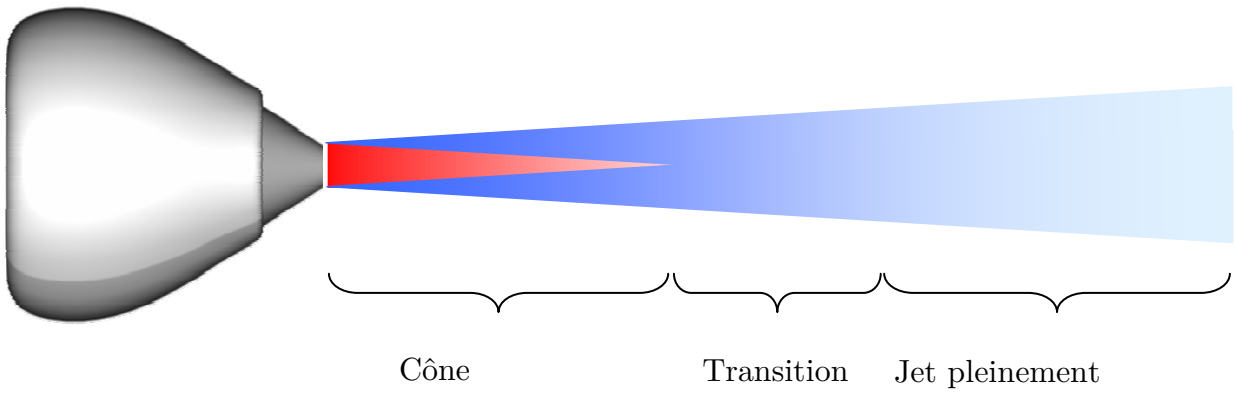

Figure 1.10 : Illustration d'un écoulement de type jet en sortie moteur. En rouge : le cône potentiel. En bleu : la zone de mélange.

L'accroissement de la couche cisaillée est le résultat de deux phénomènes distincts : la diffusion visqueuse et un phénomène d'entraînement. La diffusion visqueuse, qui est toujours présente, est produite par la diffusion linéaire de la quantité de mouvement à travers la couche cisaillée. Le phénomène d'entraînement, quant à lui, est propre à la turbulence et est causé par la présence à la fois de structures macroscopiques cohérentes et de plus petites structures incohérentes. Ce phénomène est prépondérant par rapport à la diffusion visqueuse pour un écoulement turbulent. D'ailleurs, dans de tels écoulements, la turbulence résulte de l'amplification de petites perturbations qui se développent à la périphérie du jet. Le scénario est à peu près le même pour

tous les jets dès que l'on considère un nombre de Reynolds assez important (Mattingly et Chang, 1974).

La transition vers la turbulence pleinement développée provient de différentes instabilités :

- Instabilité primaire :

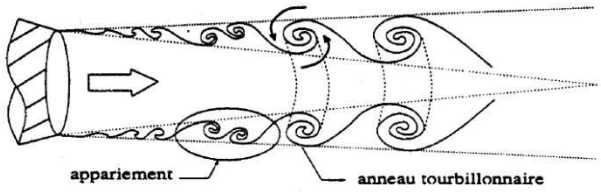

Figure 1.11 : Schématisation du développement spatial du jet axisymétrique homogène

Il s'agit de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Cette dernière est causée par la différence de vitesse de part et d'autre de la couche cisaillée qui engendre l'apparition d'anneaux tourbillonnaires. L'espace entre deux anneaux est lié à la fréquence de lâcher des tourbillons, définie par l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Ces anneaux grossissent par entraînement du fluide extérieur mais également parfois par fusion entre deux tourbillons voisins, cf. Figure 1.11. Ce processus, qui peut se poursuivre jusqu'à la fin du cône potentiel, est donc très important dans le développement tridimensionnel du jet (Verzicco et Orlandi, 1994). Les caractéristiques de ces anneaux tourbillonnaires ont été étudiées théoriquement par une analyse de stabilité linéaire (Morris, 1976), (Michalke et Herman, 1982) et (Batchelor et Gill, 1962).

- Instabilités secondaires :

Les instabilités primaires sont suivies d'instabilités azimutales des anneaux tourbillonnaires (Yule, 1978) . L'anneau se déforme en n « vagues » où n correspond au nombre d'onde de l'instabilité.

La déformation azimutale des anneaux est suivie par l'apparition de paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs. Une fois que ces derniers sont suffisamment intenses, ils se libèrent de l'influence des anneaux. Ils peuvent alors s'expulser par induction mutuelle et s'étendre spatialement par diffusion visqueuse. Cette dernière étape est responsable de l'expansion important du jet à la fin de la transition par entraînement du fluide extérieur. Après l'émergence de ces tourbillons longitudinaux, la transition s'achève par une augmentation brutale de la turbulence au niveau des petites échelles due à une étape complexe de déchirure et d'appariement fractionnel des structures tourbillonnaires, conduisant ainsi le jet à une turbulence pleinement développée.

Les observations expérimentales des jets libres ont également montré que :

- La vitesse moyenne transversale reste faible par rapport à la vitesse longitudinale
- Les variations longitudinales sont faibles devant les variations transverses
- Les épaisseurs de la zone de mélange initiale et de la zone développée varient linéairement dans le sens longitudinal

- Les profils de vitesse et de température dans la zone initiale sont similaires. Ces profils ont une forme proche d'une tangente hyperbolique
- Les profils de vitesse et de température dans la zone pleinement développée sont similaires et présentent une forme de type gaussien.

Si toutes ces premières études ont permis de décrire la topologie de l'écoulement et les lois de variations axiales des vitesses et températures, elles révèlent aussi une grande disparité dans les coefficients de croissance des différentes couches. Ces dernières sont attribuées notamment à des différences sur les conditions initiales. De même, l'effet d'un écoulement externe, d'une différence de température entre cet écoulement et le jet ainsi qu'une différence de densités restent à être défini. Les effets de compressibilité liés à un nombre de mach élevé restent également mal connus.

(Lau, 1981) a étudié ces effets (nombre de Mach et température initiale du jet) sur les grandeurs moyennes et turbulentes de l'écoulement. Cette étude expérimentale a permis de constater notamment que :

- Le cône potentiel se rétrécit lorsque la température de sortie augmente ou le nombre de Mach diminue
- Le pic de turbulence que l'on retrouve à la fin de la zone potentielle chute lorsque le nombre de Mach augmente mais reste insensible à la température se sortie du jet.

Notre Etude ne consiste pas à améliorer la connaissance des processus fondamentaux qui conduisent à l'expansion du jet. Néanmoins, il est important d'en connaître les mécanismes afin d'isoler ceux qui paraissent importants dans la formation de la traînée de condensation et ainsi adapter au mieux notre approche numérique. De plus la topologie de l'écoulement, c'est-à-dire le mélange fort des effluents avec l'air extérieur dans la zone de mélange explique pourquoi c'est lors de ce régime qu'à lieu l'essentiel des transformations chimiques en phase gazeuse (Kärcher, 1994).

1.3.1.2. Formation du tourbillon marginal

Tout profil sustentateur génère à son extrémité un tourbillon appelé tourbillon marginal. Cet écoulement rotationnel peut s'expliquer par le champ de pression sur la surface de l'aile. L'utilisation de la relation de Bernoulli sur une géométrie d'aile bidimensionnelle, met en évidence qu'une aile portante génère un champ de pression plus faible sur son extrados (le dessus de l'aile) que sur son intrados (le dessous de l'aile). Ainsi, en considérant une aile tridimensionnelle, la discontinuité de pression entre l'extrados et l'intrados présente en bout d'aile (le saumon), génère un écoulement rotationnel. En effet, l'air est aspiré vers les zones ou la pression est plus basse. Cet air contourne donc le bout d'aile en s'enroulant le long du saumon, de l'intrados (zone de forte pression) vers l'extrados (zone de basse pression), cf. Figure 1.12. Cet écoulement rotationnel très stable peut persister plusieurs dizaines de minutes. Il a été à l'origine de nombreux accidents en zone aéroportuaire car il peut induire un moment de roulis sur l'avion suiveur. C'est dans ce

contexte que plusieurs études sur la caractérisation précise du tourbillon marginal ont été menées (Rossow et James, 1999), (Jacquin, Fabre et Geffroy, 2001).

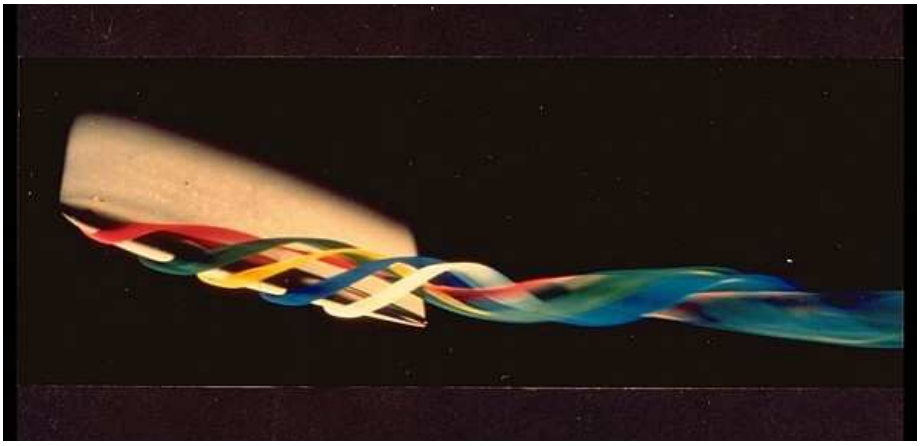

Figure 1.12 : Visualisation de l'écoulement aérodynamique par analogie hydraulique, au tunnel hydrodynamique de l'ONERA. Tourbillon marginal à l'extrémité d'une aile rectangulaire. (Visualisation à l'aide de traceurs liquides colorés).

Les diverses grandeurs qui permettent de caractériser un tourbillon sont sa circulation, sa distribution de vitesse tangentielle et de vorticité ainsi que ses rayons caractéristiques, cf. Annexes. L'évolution temporelle de ces grandeurs n'est pas forcément corrélée. Si les vitesses et vorticités maximales peuvent diminuer, la circulation d'un tourbillon reste constante.

La théorie de Prandtl détermine uniquement le niveau de circulation des tourbillons après enroulement. La conservation des moments de vorticité fixe leur position latérale mais ne donne aucune information sur la formation de ces derniers.

(Birch et Lee, 2003) ont étudié expérimentalement l'influence du nombre de Reynolds et de la valeur de l'angle d'attaque d'un profil d'aile sur les grandeurs caractéristiques du tourbillon marginal. Les deux nombres de Reynolds retenus sont $\mathrm{Re}_c = 1.63.10^5$ et $\mathrm{Re}_c = 3.25.10^5$. Les valeurs de l'angle d'attaque varient, quant à elles, entre $\alpha = 2°$ et $\alpha = 16°$. Si, à nombre de Reynolds élevé, le tourbillon marginal généré au bord de fuite résulte de l'interaction de plusieurs structures tourbillonnaires se développant le long de la corde, pour $\mathrm{Re}_c = 1.63.10^5$ la présence de ces multiples structures tourbillonnaires est moins évidente et le tourbillon marginal résultant est beaucoup moins symétrique. Mais ces structures dans les deux cas existent et le tourbillon marginal résulte de la fusion de ces dernières le long de la corde au niveau du saumon, cf. Figure 1.13.

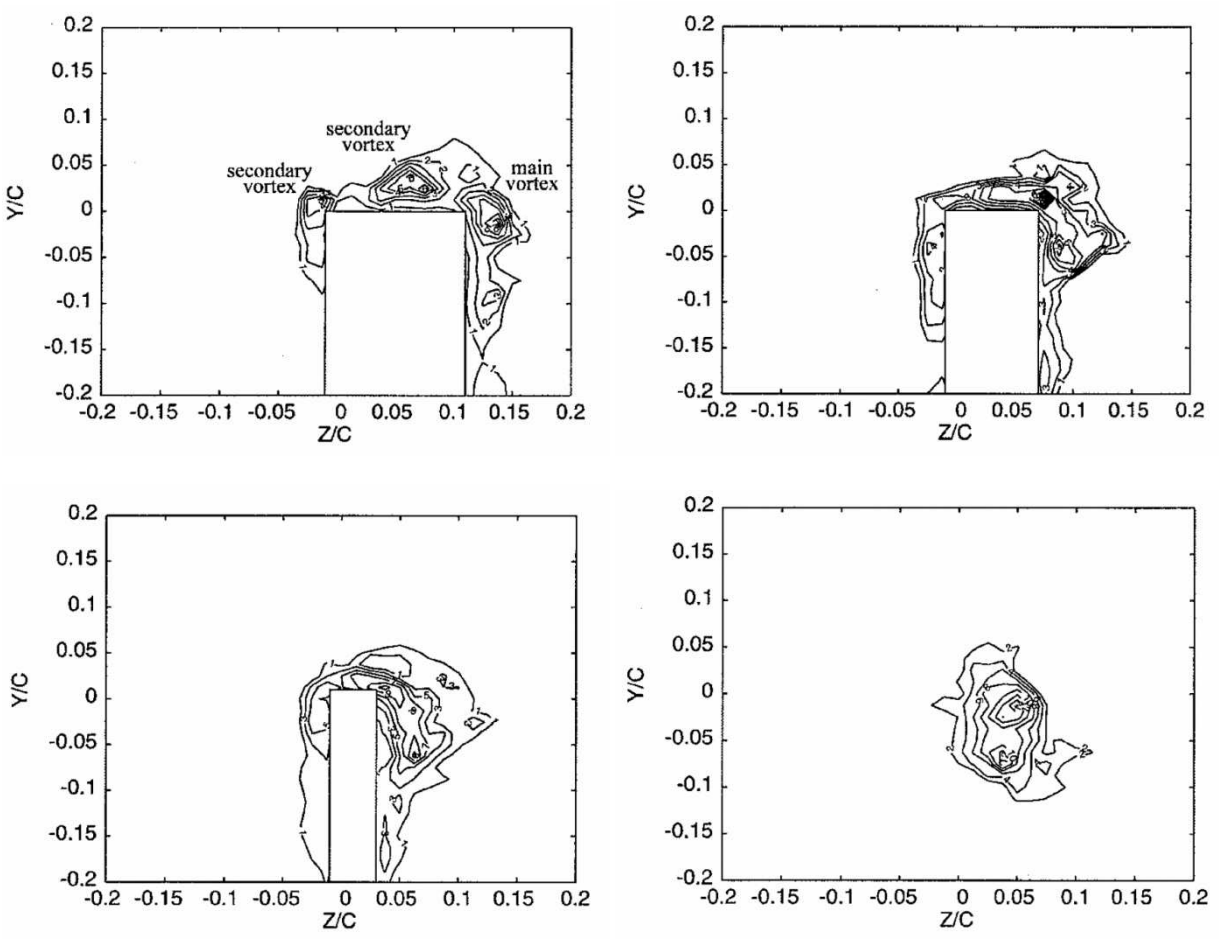

Figure 1.13 : Formation du tourbillon marginal. Isocontours de vorticité à différentes sections le long de la corde, du bord d'attaque jusqu'au bord de fuite (de gauche à droite et de haut en bas) (Birch et Lee, 2003)

La circulation du tourbillon principal augmente le long de la corde pour atteindre son maximum au niveau du bord de fuite. Ce niveau de circulation reste ensuite constant dans le sillage proche. Lorsque l'angle α augmente, la distribution de la circulation sur l'aile augmente ayant pour effet un accroissement de la circulation du tourbillon marginal. De plus, la circulation de ce tourbillon diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. Le rayon visqueux du vortex marginal dans le sillage proche croit notablement avec α. La vitesse axiale au centre du tourbillon adimensionnée par celle de l'écoulement est plus petite que 1 pour des angles $\alpha < 4$ puis pour des angles plus grands devient supérieure à l'unité. Une interprétation possible est que cette vitesse axiale du tourbillon possède une contribution venant de la couche limite et une autre de l'écoulement proche extrados. A partir d'un certain angle, la vitesse accélérée de l'écoulement sur l'extrados permet de contrebalancer le déficit de vitesse axiale que l'on retrouve dans la couche limite.

La topologie de la formation du tourbillon marginale est donc bien comprise. Il résulte de la fusion de multiples structures tourbillonnaires se développant au niveau du saumon le long de la corde du profil d'aile. Il s'agit donc d'une région cruciale sur laquelle une attention particulière doit être portée dans cette étude.

1.3.1.3. Stabilité du tourbillon de sillage

La topologie de l'écoulement derrière un avion de transport dans le champ proche est bien comprise (Spalart, 1998) et (Rossow et James, 1999). Une nappe de vorticité se détache du bord de fuite et s'enroule rapidement autour des deux vortex de bout d'aile : les tourbillons marginaux. Sur le plan expérimental, de fortes instationnarités sont observées derrière une aile d'avion. Celles-ci sont obtenues dans toutes les expériences à grand nombre de Reynolds comme celles de (Devenport *et al.*, 1996) ou celles effectuée à l'ONERA dans le cadre du projet EUROWAKE (Labbé et Sagaut, 2003). Ces mouvements instationnaires rendent la caractérisation de la structure interne du tourbillon difficile.

BOF a compléter

1.3.1.4. Interaction jet tourbillon

A une demi-envergure derrière l'avion, le jet issu du moteur commence déjà à subir les forces tangentielles imposées par le tourbillon marginal. Il est alors dans un premier temps étiré. Il est ensuite complètement enroulé autour du tourbillon marginal plusieurs envergures en aval de l'avion. L'enroulement complet du jet s'effectue sur des distances plus ou moins longues dans le sillage puisqu'il dépend fortement des caractéristiques de l'avion (poids, vitesse d'émission des jets, envergure, position des nacelles).

(Margaris, Marles et Gursul, 2008) ont étudié expérimentalement l'interaction d'un jet froid avec un tourbillon de bout d'aile afin de mieux en comprendre les mécanismes. Cette étude met en évidence que la cinétique de l'interaction jet tourbillon est d'autant plus élevée que la position initiale du jet est proche et que le nombre proposé par (Long, 1961) est petit. Ce nombre adimensionné représente le rapport entre la quantité de mouvement axiale du jet et la circulation du tourbillon. Il met donc en évidence le phénomène prédominant de l'écoulement jet/tourbillon. Pour un jet de masse volumique ρ_j et de vitesse axiale U_j débouchant d'une buse de diamètre d_j dans un écoulement ayant une masse volumique ρ_0 et possédant une vitesse axiale U_0 et interagissant avec un tourbillon de circulation Γ_0, ce nombre est donné par :

$$P_L = \frac{\rho_j U_j \left(U_j - U_0\right) \pi d_j^2}{4 \rho_0 \Gamma_0^2}. \tag{1.20}$$

Dans le champ proche, l'écoulement est dominé par la turbulence du jet et de son enroulement sur le tourbillon. Si le jet est suffisamment près du bout d'aile, sa propre turbulence va entraîner des instabilités qui vont diffuser rapidement le tourbillon. La turbulence du jet est très supérieure à celle du tourbillon, mais décroît rapidement en aval de l'écoulement. C'est pourquoi la position initiale jet par rapport au vortex est très importante. En effet, si le jet est enroulé alors que la majorité de sa turbulence a diffusé, il n'aura que peu d'influence sur le tourbillon.

Si cette étude précise que la turbulence du jet génère des instabilités dans le tourbillon, elle ne permet pas d'affirmer qu'il s'agit du seul phénomène à l'origine des fluctuations. La vitesse axiale du jet est également importante puisque si ce dernier pénètre le tourbillon, ce dernier acquiert alors une vitesse axiale (tourbillon de Batchelor), (Batchelor, 1964), c'est-à-dire que ce dernier possède une vitesse axiale. Des instabilités se développent dues à l'injection, dans le coeur du tourbillon, d'une forte quantité de mouvement axial par le jet (Margaris, Marles et Gursul, 2008).

D'ailleurs, toujours dans l'étude de (Margaris, Marles et Gursul, 2008), la comparaison du champ moyen (moyenne temporelle) avec plusieurs visualisations instantanées met en évidence, d'une part, que certaines structures peuvent être invisibles sur le champ moyen et, d'autre part, que les fluctuations des vitesses tangentielles du tourbillons peuvent avoir pour origine le phénomène aléatoire de la position exacte du tourbillon connu sous le nom de « wandering vortex phenomena ». A titre d'exemple, les structures tourbillonnaires autour du jet semblent avoir un niveau de vorticité bien plus faible que celui du tourbillon marginal. Le champ instantané révèle, quant à lui, que ces niveaux de vorticité sont tout à fait comparables. (Wang et K. M. Q. Zaman, 2002) montrent, d'ailleurs, que la création de ces tourbillons secondaires autour du jet est induite par l'écoulement rotationnel provoqué par le tourbillon marginal et que ces derniers ont, en effet, des niveaux de vorticité importantes. Ainsi, la visualisation du champ moyen diffuse artificiellement certaines grandeurs caractéristiques. D'ailleurs (Devenport *et al.*, 1996) montrent que sur un cas de référence, la valeur instantanée est de l'ordre de 15% supérieure à celle moyennée. Ce phénomène aléatoire du tourbillon est amplifié par la présence du jet. Il augmente avec la valeur du nombre de Long (augmentation de la quantité de mouvement axiale du jet, la circulation du tourbillon reste fixe). Néanmoins, même si l'interaction jet tourbillon est instationnaire, la comparaison champ moyen et champ instantané permet d'affirmer que ces deux méthodes donnent les mêmes tendances.

1.3.2. Régime tourbillonnaire

Une fois les jets complètement enroulés par les deux tourbillons marginaux, ces derniers, par induction mutuelle, vont acquérir une vitesse verticale de descente. Ainsi, les émissions des jets sont entraînées par les tourbillons en dessous de l'altitude de vol, de $150\,m$ jusqu'à $300\,m$ (Paugam, 2008). Lorsque le système tourbillonnaire (constitué des deux tourbillons contra rotatifs) descend dans une atmosphère stratifiée, un second système tourbillonnaire se forme (Spalart, 1996). Cette structure porte le nom de « torque barocline ». Elle est pilotée à la fois par le nouveau système de vortex contra rotatifs et par la poussée d'Archimède. Ce second sillage remonte vers le niveau de vol et entraîne une partie des émissions qui évolue alors dans des conditions différentes de celles restées dans le premier sillage. La Figure 1.14 donne une illustration de la descente des deux tourbillons contrarotatifs ainsi que de la remonté du « torque barocline ». Selon (Gerz, Dübeck et Konopka, 1998) environ 30% des émissions sont piégées dans le second sillage. Les émissions et notamment les cristaux de glace ont alors une distribution en taille très inhomogène

dans le sillage puisque les conditions thermodynamqies locales sont très différentes entre l'altitude du premier système tourbillonnaire (jusqu'à $300\ m$ en dessous de l'altitude de vol) et du deuxième qui remonte au niveau de l'altitude de vol.

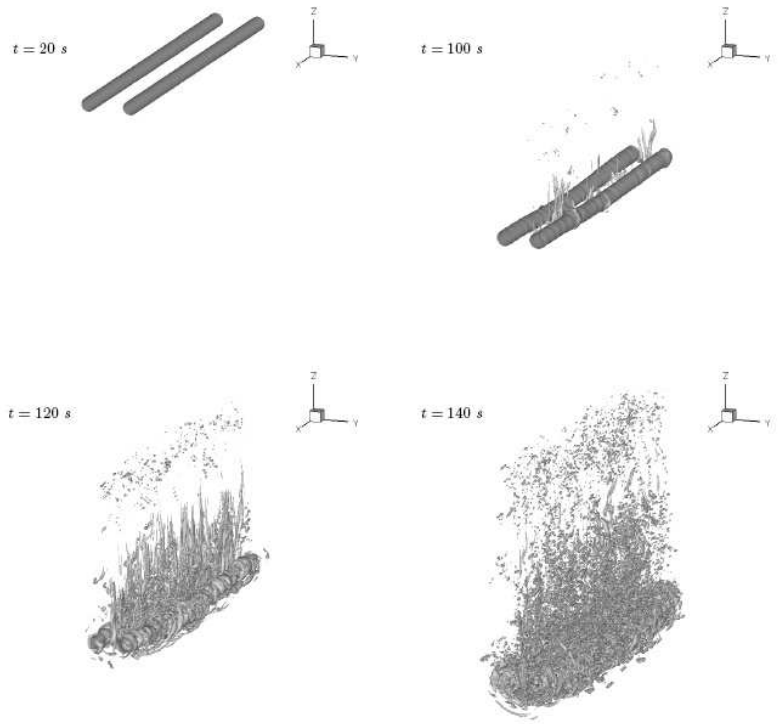

Figure 1.14 : Visualisation de la descente des deux tourbillons contrarotatifs et du « torque barocline » qui remonte à l'altitude de vol. Extrait de (Paugam, 2008)

Le régime tourbillonnaire peut être également marqué par l'effondrement du système tourbillonnaire principal qui subit des instabilités sinusoïdales expliquées pour la première fois par (Crow, 1970). Basé sur le théorème de transport de la vorticité ainsi que sur les relations entre la vitesse et la vorticité du système tourbillonnaire et sur une linéarisation du système d'équations obtenu, (Crow, 1970) évalue le taux d'amplification des instabilités σ_{Crow} ainsi que la longueur d'onde la plus instable λ_{Crow} en fonction du rapport entre le rayon visqueux du tourbillon r_c et la distance entre les deux tourbillons contra rotatifs b_0. Pour le cas d'un Boeing B747 pour lequel $r_c/b_0 = 0.098$ (Widnall, Bliss et Zalay, 1971) montre que la longueur d'onde la plus instable est $\lambda_{Crow} \sim 8.6 b_0$ et le taux d'amplification est $\sigma_{Crow} = 0.034 s^{-1}$

Dans le cas d'une atmosphère stratifiée turbulente, ces valeurs ne sont correctes que pour les premiers instants de ce régime car l'échelle de temps du développement de l'instabilité est fortement influencée par la turbulence atmosphérique. Durant ce régime, la température maximale du panache augmente par compression adiabatique lors de la descente du système tourbillonnaire principal.

A la fin de ce régime, les structures tourbillonnaires s'effondrent là où la distance entre les deux vortex est minimale, cf. Figure 1.8. Il y a une réorganisation de la vorticité sous forme d'anneaux qui continuent leur descente jusqu'à être diffusée par la turbulence.

1.3.3. Régime de dispersion

Dans cette phase, qui débute environ $130\ s$ après le passage de l'avion, les deux tourbillons contra rotatifs se détruisent et génèrent de la turbulence. C'est la fin du régime tourbillonnaire. Le panache se disperse, s'étend et se mélange dans l'atmosphère sous l'effet de forces de flottabilité provoquées par une ou deux fréquences de Brunt-Väïsälä (Lewellen et Lewellen, 2001). La taille des particules est hautement non linéaire. On peut distinguer trois groupes de particules. Le premier groupe est formé par des particules de taille relativement petite ($r \sim 1 - 10\ \mu m$) en concentration élevée ($N \sim 1.10^9\ m^{-3}$). Ce premier groupe correspond aux particules contenues dans les anneaux de vorticité. Le second groupe est constitué des particules localisées là où les deux tourbillons se sont touchés et détruits. Ces particules sont diluées dans l'atmosphère et ne subissent plus, ou peu, la dynamique provoquée par les tourbillons et leur destruction. Le dernier groupe est localisé dans le second système tourbillonnaire. Les particules des deux derniers groupes subissent beaucoup plus les conditions atmosphériques et peuvent être plus ou moins grosses suivant l'humidité relative de l'atmosphère.

1.3.4. Régime de diffusion

Le régime de diffusion commence lorsque la dynamique du sillage provoquée par le passage de l'avion cesse. Le panache ne subit alors plus que les interactions avec l'atmosphère. Le cisaillement provoqué par des vents transversaux, la stratification ainsi que la turbulence atmosphérique continuent de mélanger les effluents, typiquement jusqu'à 2 à 12 heures (Gerz, Dübeck et Konopka, 1998). Dans des conditions de cisaillement favorables, le panache peut s'étendre sur près d' un kilomètre verticalement et quatre kilomètres horizontalement (Dürbeck et Gerz, 1996). Dans les premiers instants de ce régime, environ trente minutes, il y a soit une évaporation complète de toutes les particules de glace lorsque l'humidité de l'atmosphère est faible, soit croissance des particules dépendant de leur localisation dans le panache lorsque l'humidité relative de l'atmosphère est élevée. Dans de telles conditions, les cristaux de glace peuvent atteindre un rayon d'environ $10\ \mu m$ et des concentrations très élevées $N \sim 10 - 200.10^6\ m^{-3}$ comparées à celles rencontrées dans des cirrus naturels ($N \sim 1.10^6\ m^{-3}$).

La description de l'évolution temporelle du sillage en aval d'un avion de croisière montre toute la difficulté pour évaluer correctement les processus microphysiques qui y prennent place, puisque la

dynamique est très complexe et s'étale sur des échelles de temps et d'espace très importantes. Le mélange des effluents avec l'atmosphère est alors très différent suivant les régimes. Pour évaluer précisément la croissance des cristaux de glace durant les régime tourbillonnaire, de dispersion et de diffusion, Il est donc déjà très important de connaître précisément comment la traînée de condensation se forme durant le tout premier régime : le régime jet. C'est l'objet de ce travail qui, à travers la modélisation et la simulation numérique, propose de mieux caractériser la formation de la traînée.

CHAPITRE 2 MODELISATION

Afin de mener des simulations numériques sur la formation d'une traînée de condensation, il est nécessaire de modéliser les processus et phénomènes que l'on souhaite prendre en compte. Cette modélisation passe tout d'abord par les effluents d'avion et leurs transformations, en ce qui concerne la microphysique, mais également par la thermodynamique et l'aérodynamique de l'écoulement.

2.1. Modélisation des effluents d'avion

2.1.1. Mélange considéré

La composition des effluents d'avion a été donnée au paragraphe 1.1. Comme il a été évoqué au paragraphe 1.2, ces effluents subissent, dans le sillage, des transformations physico chimiques qui sont à l'origine notamment de la création de nouvelles espèces et aérosols. Dans cette étude, nous nous intéressons uniquement à la condensation et à l'évaporation de la vapeur d'eau sur les particules déjà existantes en sortie du turboréacteur, c'est-à-dire les suies. Nous étudions donc la croissance des cristaux de glace dans le sillage, formées uniquement à partir des suies et non pas à partir des aérosols, dont nous ne connaissons absolument pas les évolutions dans ce travail. Un modèle plus complexe en mécanismes de transformation des effluents ne pourra être mis en place que lorsque les super calculateurs seront plus performants.

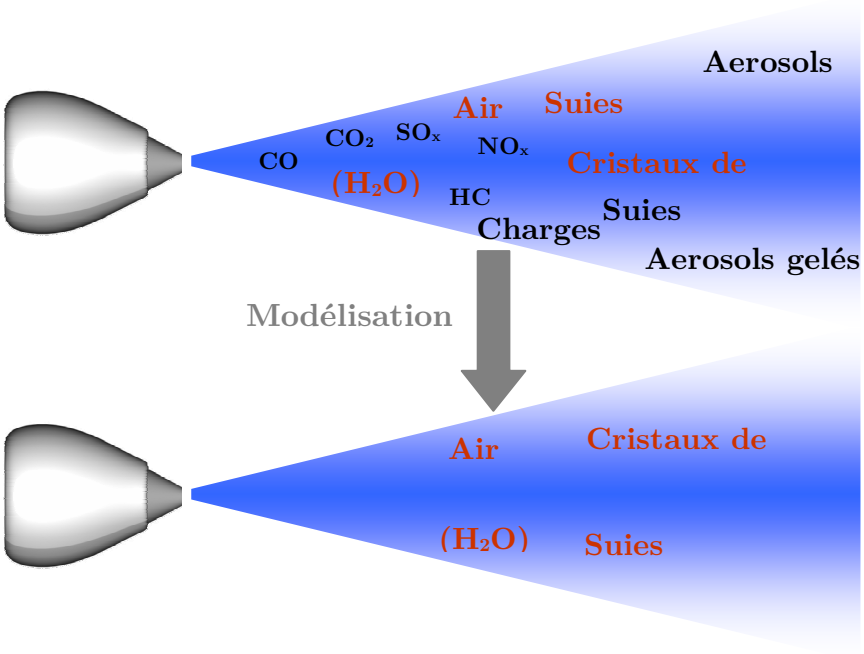

Figure 2.1 : Composition réelle du panache (en Haut) et composition du mélange considéré pour le modèle (en Bas)

Nous considérons ainsi, uniquement un mélange constitué d'air, d'eau sous forme vapeur, de particules de suie et de cristaux de glace (Figure 2.1). Les suies ont une concentration N, sont mono dispersées, i.e. même rayon initial r_s. Lorsque l'eau en phase vapeur se condense sur les suies, ces dernières deviennent des cristaux de glace, supposés sphériques (Kärcher, 1998), de tailles différentes et de rayon r (Figure 2.2). Ce rayon r va croître ou diminuer selon que la particule se trouve dans des conditions sur saturantes (condensation) ou sous saturantes (évaporation) respectivement.

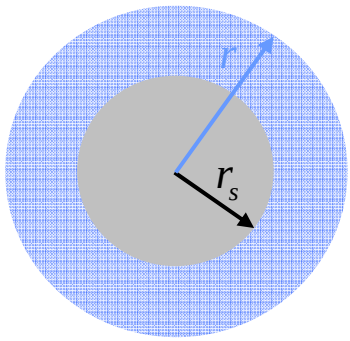

Figure 2.2 : Schématisation d'une particule de glace, composée d'une suie (gris) sur laquelle se condense de l'eau

Le mélange considéré est ainsi composé d'une phase porteuse (air, vapeur d'eau) et d'une phase dispersée (suies, eau condensée). En pratique, la distinction entre eau condensée et suie n'est pas faite, puisque l'eau, si elle se condense, se dépose sur les suies. On considère alors les suies comme des cristaux de glace. Le paragraphe suivant 2.1.2 présente la manière dont est traitée numériquement la phase dispersée.

2.1.2. Traitement de la phase dispersée

Afin de résoudre l'évolution du mélange émis par les turboréacteurs, c'est-à-dire l'évolution, à la fois des gaz et des particules, deux approches peuvent être envisagées : l'approche diphasique Eulérienne à écoulements séparés SF (Separated Flow) et l'approche diphasique Eulérienne à écoulement homogène LHF (Locally Homogeneous Flow)

2.1.2.1. Approche diphasique Eulérienne à écoulements séparés (Separated Flow)

L'approche diphasique Eulérienne à flux séparés consiste à résoudre séparément le système d'équations gouvernant la phase gazeuse (phase porteuse) et celui gouvernant une ou plusieurs classes de particules (phase dispersée), chacune de ces classes étant caractérisée par une vitesse, une température, un diamètre et un nombre de particules. Le système d'équations gouvernant la phase porteuse est alors couplé à celui régissant la phase dispersée via des termes sources liés à leur interaction, typiquement la traînée (loi de Stokes), l'échange de chaleur et le changement de phase.

2.1.2.2. Approche diphasique Eulérienne à écoulement homogène LHF (Locally Homogeneous Flow)

Dans l'approche LHF, les particules de suie qui vont former les cristaux de glace sont supposées en équilibre dynamique (même vitesse) et thermique (même température) avec la phase porteuse. Dans ce cas, il est justifié de décrire ces cristaux de glace de façon analogue à la phase porteuse. Néanmoins, il faudra veiller à ce que les cristaux de glace possèdent leur propre équation d'état.

En sortie de moteur, les particules de suie sont nanométriques. D'après l'étude de (Delhaye, 2007), la distribution en taille des particules primaires, en sortie d'un moteur CFM56-5B, a une forme en log-normale et possède un rayon géométrique moyen de $4\ nm \pm 0{,}1$. Il est communément admis que ces particules primaires forment rapidement, dès la sortie de la chambre de combustion, des agrégats. Ces derniers possèdent, toujours pour un CFM56-5B, un rayon moyen de $27\ nm \pm 1$. Dans le sillage, les agrégats de suie vont constituer des germes catalyseurs et favoriser la condensation de la vapeur d'eau. Ainsi, par des processus de condensation, ces suies vont cristalliser. Devenues alors des cristaux de glace, elles vont continuer à croître jusqu'à des tailles de l'ordre du micromètre à quelques envergures en aval de l'avion. Des mesures in situ dans une traînée de condensation âgée d'une seconde, soit $250\ m$ en aval de l'avion, montrent que le pic de

concentration des cristaux de glace est atteint pour un rayon de l'ordre du micromètre (IPCC, 1999).

Le temps caractéristique de mise en équilibre dynamique d'une particule de rayon r et de masse volumique ρ_p avec sa phase porteuse de viscosité dynamique μ_g est (Paoli, Hélie et poinsot, 2004):

$$t_{ed} = \frac{4\rho_p r^2}{18\mu_g}. \tag{2.1}$$

En considérant une particule uniquement composée de glace ($\rho_p \simeq 924\ kg.m^{-3}$) en mouvement dans de l'air à pression et température $P = 22000Pa$, $T = 220K$ ($\mu_g = 1.4.10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$), ce temps est de l'ordre de :

- $t_{ed} = 1.5.10^{-11}s$ pour une particule de rayon $r = 1.10^{-9}m$
- $t_{ed} = 1.5.10^{-7}s$ pour une particule de rayon $r = 100.10^{-9}m$
- $t_{ed} = 1.5.10^{-5}s$ pour une particule de rayon $r = 1.10^{-6}m$

Ce temps étant plus contraignant que le temps caractéristique de mise en équilibre thermique, cette étude est menée avec l'hypothèse d'équilibre thermique et dynamique des cristaux de glace avec le gaz et donc suivant une approche Eulérienne LHF. Une approche SF avec de si petites particules engendrerait des temps numériques excessifs liés aux critères de stabilité des schémas, cf. paragraphe 3.2.

En outre, l'approche LHF est plus économique en terme de nombre d'équations à résoudre (huit équations contre douze pour la méthode SF).

Dès lors que l'hypothèse d'équilibre thermique et dynamique des cristaux de glace avec le gaz n'est plus valide, il sera possible de poursuivre les calculs en utilisant une approche Separated Flow.

2.2. Modélisation des processus microphysiques

2.2.1. Hypothèses

Le modèle microphysique a pour vocation d'être couplé à une résolution spatiale tridimensionnelle de l'écoulement aérothermodynamique du panache d'un avion jusqu'à plusieurs envergures. La résolution numérique d'un tel écoulement déjà complexe et riche en mécanismes physiques, cf. paragraphe 1.3, impose, dans un premier temps, la mise en place et l'utilisation d'un modèle microphysique simplifié. Ainsi, dans un souci de restitution raisonnable des résultats, en terme de temps de calcul, un certain nombre d'hypothèses sont faites. Elles sont évoquées dans ce paragraphe.

– (Wyslouzil *et al.*, 1994) ont montré que les particules de suie sont plutôt hydrophobes. Leur hydratation a été observée en laboratoire après qu'elles aient été en contact avec de l'acide

sulfurique, ce dernier les rendant alors hydrophiles. Cependant le degré d'exposition à l'acide nécessaire à activer la particule de suie reste encore mal défini. Nous supposons donc que les particules de suies sont hydrophiles. Ainsi ces particules, si elles sont dans des conditions favorables, permettront systématiquement la condensation de la vapeur.

- On néglige les phénomènes de nucléation qui donnent naissance à de nouvelles particules notamment les aérosols constitués d'eau et d'acide sulfurique. Les seules particules présentes dans le panache sont donc les particules de suie émises par le moteur, cristallisées ou sèches.
- On néglige les phénomènes de coagulation qu'elle soit brownienne ou turbulente (Kärcher, 1998). De même la coagulation entre particules chargées n'est pas prise en compte.
- Les processus de sédimentation ne sont pas pris en compte puisque la vitesse de sédimentation d'une particule de cent nanomètres dans l'atmosphère est de l'ordre de $10^{-6} m.s^{-1}$ (Jacobson 2005). Cette hypothèse est d'autant plus valable que, dans cette étude, les particules sont soumises aux forces aérodynamiques du sillage de l'avion. Les forces d'inertie sont donc prépondérantes aux forces de gravitation.
- Concernant la croissance des particules par condensation, l'hypothèse principale est faite sur l'effet Kelvin expliqué au paragraphe 1.2.2.2. En effet, comme il a été évoqué dans la section 2.1.2, les agrégats en sortie moteur ont un rayon moyen de $27\ nm \pm 1$ et grossissent très rapidement par condensation. Or, le paragraphe 1.2.2.2 précise que la sous évaluation faite sur la valeur de la pression de vapeur saturante en négligeant l'effet Kelvin est inférieure à 5% dès lors que la particule atteint un rayon de cinquante nanomètres. On néglige donc, dans un premier temps, l'effet Kelvin.

2.2.2. Croissance des particules par condensation : équations de conservation de la masse

Le mélange, de masse volumique ρ, étant constitué d'air, d'eau en phase vapeur et solide, trois équations de conservation de masse sont nécessaires afin de connaître leur évolution. Les grandeurs conservées sont les masses volumiques de chaque espèce dans le mélange notées ρ_{Air}, $\rho^{v}_{H_2o}$ et $\rho^{s}_{H_2o}$.

Pour chaque espèce j, de fraction massique y_j, sa masse volumique ρ_j est donnée par la relation :

$$\rho_j = y_j \rho. \tag{2.2}$$

La somme des fractions massiques vaut un : $\sum_{i=1,n_e} y_i = 1.$

L'air et la vapeur d'eau sont assimilés à des gaz parfaits, l'eau condensée à un liquide faiblement compressible. Ils obéissent donc chacun à leur propre loi d'état, cf. paragraphe 2.4.1. Dans cette étude, le mélange est supposé idéal, cf. paragraphe 2.4.2.

En utilisant la convention d'Einstein sur les indices répétés, les évolutions temporelles de ces grandeurs conservatives, dans le mélange possédant une vitesse u, sont données sous la forme classique suivante :

$$\frac{\partial \rho_{air}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho_{air} - d_{air} \frac{\partial \rho_{air}}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \rho^v_{H_2O}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho^v_{H_2O} - d^v_{H_2O} \frac{\partial \rho^v_{H_2O}}{\partial x_i} \right) = \varpi^v_{H_2o} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \rho^s_{H_2O}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho^s_{H_2O} - d^s_{H_2O} \frac{\partial \rho^s_{H_2O}}{\partial x_i} \right) = \varpi^s_{H_2o} \tag{2.5}$$

d_j est le coefficient de diffusion de l'espèce j dans le mélange en $\left[m^2.s^{-1}\right]$.

Les taux de transfert massique de vapeur d'eau $\varpi^v_{H_2o}$ et d'eau condensée $\varpi^s_{H_2o}$, $\left[kg.m^{-3}.s^{-1}\right]$, permettent de modéliser les transferts de masse entre la phase solide et la phase vapeur. L'eau, qu'elle soit sous forme vapeur ou qu'elle soit condensée, est conservée et le taux de transfert massique de la vapeur d'eau $\varpi^v_{H_2o}$ est égale et opposée au taux de transfert d'eau condensée $\varpi^s_{H_2o}$: $\varpi^v_{H_2o} = -\varpi^s_{H_2o}$. Ce taux de transfert $\varpi^s_{H_2o}$ dépend bien évidemment des conditions de saturation et plus précisément de l'écart entre la pression de vapeur d'eau P_v et de son équivalent à saturation P_v^{sat}. Il est positif dans des conditions de condensation ($P_v > P_v^{sat}$) et négatif dans des conditions d'évaporation ($P_v < P_v^{sat}$). Il dépend de la concentration des particules N et de leur rayon r. Plus le nombre de particules est important et leur rayon grand, plus elles offrent de surface pour permettre la condensation de la vapeur d'eau et plus la valeur de $\varpi^s_{H_2o}$ est grand. Ainsi, ce taux de transfert, qui dépend également du coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans le mélange d_{H_2o}, est donné par la relation (2.6):

$$\varpi^s_{H_2o} = \prod \frac{4\pi d_{H_2o} M_{H_2o}}{R} \frac{N\,G\,r\left(P_v - P_v^{sat}\right)}{T}. \tag{2.6}$$

- La fonction $\prod$ n'a aucun sens physique mais, permet numériquement, de stopper les transferts de masse, dans des conditions d'évaporation, lorsqu'il n'y a plus d'eau sur la particule :

$$\prod = \begin{cases} 1 & pour\, P_v > P_v^{sat} \;\; ou \;\; r \geq r_s \qquad (condensation) \\ 0 & pour\, P_v < P_v^{sat} \;\; et \;\; r < r_s \qquad (évaporation) \end{cases}, \quad r_s \text{ est le rayon de la suie.}$$

- M_{H_2o} est la masse molaire de l'eau $\left[kg.mol^{-1}\right]$
- R est la constante des gaz parfaits $\left[J.mol^{-1}.K^{-1}\right]$
- T est la température $\left[K\right]$

Le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air d_{H_2o} $\left[m^2.s^{-1}\right]$ est donné par l'expression suivante (Hall et Pruppacher, 1976):

$$d_{H_2o} = 2{,}11.10^{-5}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{1{,}94}\left(\frac{P_0}{P}\right), \tag{2.7}$$

avec $T_0 = 273{,}15\ K$ et $P_0 = 101325$ Pa .

Le taux de transfert $\varpi^s_{H_2o}$ est une loi de Fick modifiée (Sedunov, 1974). Il est dédié à l'étude des phénomènes d'évaporation et de condensation sur des particules dont le rayon est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen. Ainsi, il prend en compte, grâce à la fonction G, le fait que près d'une telle particule, le transport d'une molécule d'eau n'est plus régi par les équations du régime de diffusion mais par les équations données par la théorie cinétique des gaz (Figure 2.3).

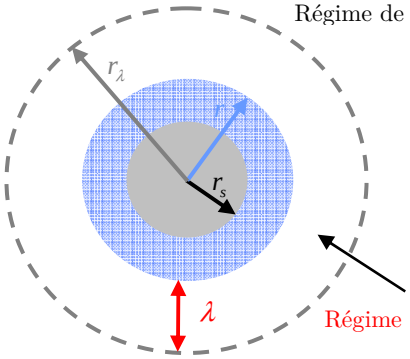

Figure 2.3 : Schématisation des régimes d'écoulement autour d'une particule dont le rayon est de l'ordre du libre parcours moyen

Ainsi la fonction G est une fonction paramétrique caractérisant le passage du régime de diffusion au régime cinétique près de la particule nanométrique grâce au nombre de Knudsen Kn. Selon (Kärcher, 1996), cette fonction est donnée par l'expression suivante :

$$G = \left(\frac{1}{1+Kn} + \frac{4Kn}{3\alpha}\right)^{-1}. \tag{2.8}$$

α est le coefficient de déposition des molécules d'eau sur la glace (Pruppacher et Klett, 1978) et (Mozurkewich, 1986). On utilise ici la valeur proposée par (Kärcher, 1996) soit $\alpha = 0{,}1$

Le nombre de Knudsen est défini par le rapport entre le libre parcours moyen des molécules dans le mélange λ et une longueur caractéristique, ici le rayon r de la particule:

$$Kn = \frac{\lambda}{r} \tag{2.9}$$

Le libre parcours moyen est une grandeur caractéristique importante pour un fluide. En effet, un fluide est un agencement d'un très grand nombre de molécules. Pour de l'air, à pression atmosphérique, la concentration des molécules est de l'ordre $2{,}17.10^{19}\,cm^{-3}$. Le libre parcours moyen représente la distance moyenne parcourue par une molécule avant que celle-ci entre en collision avec une autre molécule. Entre deux collisions une molécule se déplace en ligne droite. Plus

précisément, la trajectoire d'une molécule est une ligne brisée constituée de segments, le long desquels la molécule se meut librement, raccordés par des coudes brusques qui se produisent quand deux molécules se rencontrent (collision binaire).

Le nombre de Knudsen permet donc de distinguer les régimes moléculaires, régime où les collisions d'une molécule dans la masse du gaz sont négligeables, des régimes de fluide quasi continu où les collisions d'une molécule dans la masse du gaz sont très fréquentes.

Le libre parcours moyen est, par définition, inversement proportionnel à la concentration des molécules, ce qui permet d'écrire en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits,

$$\frac{\lambda}{\lambda_{ref}} = \frac{T}{T_{ref}} \frac{P_{ref}}{P}, \tag{2.10}$$

où $\left(\ \right)_{ref}$ est un état de référence connu. ($\lambda_{ref} = 6{,}6.10^{-08}\, m$, $T_{ref} = 293{,}15K$ et $P_{ref} = 1{,}01325.10^{05}\, Pa$)

Lorsque le nombre de Knudsen tend vers zéro, i.e. le rayon de la particule tend vers l'infini, la fonction G tend vers l'unité ($Kn \to 0$ i.e. ($r \to \infty$), $G \to 1$). On retrouve une loi de Fick classique (régime de diffusion). Les collisions entre les molécules d'eau et la particule, de plus grand rayon que le libre parcours moyen, sont statistiquement beaucoup plus élevées et plus favorables à la condensation.

A contrario, quand le nombre de Knudsen est très grand devant l'unité, i.e. le rayon de la particule est très petit par rapport au libre parcours moyen, la fonction G tend vers une valeur plus petite que l'unité.($Kn \gg 1$ i.e. ($r \ll \lambda$), $G \to \frac{3\alpha}{4Kn}$). Il s'agit du régime cinétique. Les probabilités de rencontre entre la molécule d'eau et la particule sont faibles. C'est ce que reflète la valeur vers laquelle tend la fonction G.

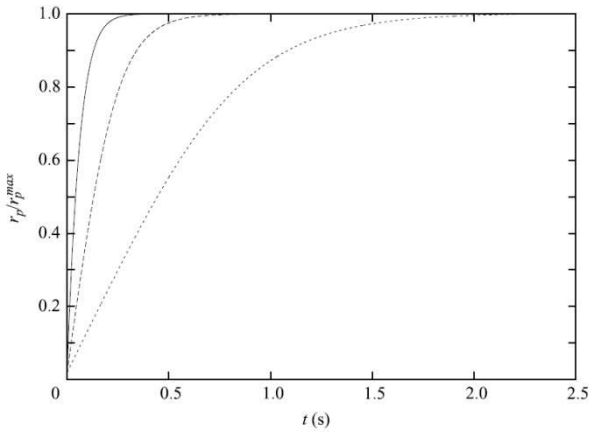

Figure 2.4 : Evolution théorique du rayon des particules pour différents nombres de Knudsen, $Kn(0) = \lambda / r(0)$ avec $r(0) = 20\ nm$. Le trait continu correspond à $Kn(0) = 2{,}5$, le trait en pointillé correspond à $Kn(0) = 10$ et le trait en petits points correspond à $Kn(0) = 36$ (Paoli, Hélie et poinsot, 2004)

La Figure 2.4 représente l'évolution théorique du rayon des particules pour différents nombres de Knudsen. Elle met en évidence que plus le libre parcours moyen λ est faible (i.e. plus le nombre de

Knudsen initial est faible,) plus le taux de croissance des particules est important. La taille finale des particules n'en est pas affectée puisqu'elle ne dépend que des conditions thermodynamiques à l'équilibre.

2.3. Modélisation aérodynamique de l'écoulement

En ce qui concerne le sillage de l'avion, l'écoulement est pleinement turbulent, qu'il s'agisse des gaz émis par les turboréacteurs ou tout simplement l'écoulement de l'air autour, et en aval de l'avion. L'objet de ce paragraphe 2.3 est donc de présenter la modélisation de tels écoulements, ainsi que la manière dont ils sont modélisés en vue d'une résolution numérique.

2.3.1. Ecoulements turbulents

La turbulence est un phénomène que l'on rencontre dans la nature (turbulence atmosphérique) mais également dans de nombreuses problématiques industrielles telles que l'étude de l'aérodynamique interne: combustion, ou encore de l'aérodynamique externe: sillage d'avion.

La turbulence a un caractère aléatoire, désordonné, chaotique et fluctuant. C'est un phénomène imprévisible, non déterministe qui est sensible à la moindre perturbation, puisque sous l'effet d'interactions non linéaires, elle va s'amplifier. La turbulence englobe une très large gamme de longueurs caractéristiques, des plus petits tourbillons aux plus gros.

Malgré ce caractère aléatoire, certaines grandeurs macroscopiques de phénomènes turbulents sont reproductibles comme la traînée et la portance d'un avion, la durée de persistance du sillage d'un avion de ligne ou bien encore la puissance d'un moteur à combustion. Il existe deux régimes d'écoulement : l'un régulier dit « laminaire », l'autre irrégulier dit « turbulent ». Pour étudier la transition d'un écoulement laminaire vers un écoulement turbulent, Osborne Reynolds a introduit en 1883 le nombre de Reynolds (Reynolds, 1883). Ce nombre compare les termes de convection (non linéaires) aux termes de dissipation visqueuse. Pour un fluide en écoulement à la vitesse u, de viscosité cinématique ν et de longueur caractéristique L, ce nombre s'écrit :

$$\mathrm{Re} = \frac{uL}{\nu}. \tag{2.11}$$

A partir d'une certaine valeur critique Re_c, on observe un changement de topologie de l'écoulement. C'est la transition laminaire turbulent. Ce nombre de Reynolds prend des valeurs différentes selon le type d'écoulement. Quand le nombre de Reynolds est plus petit que l'unité ($\mathrm{Re} << 1$), les termes non linéaires (convectifs) sont masqués par la diffusion visqueuse, les équations se rapprochent donc d'équations linéaires. Quand, au contraire, le nombre de Reynolds est plus grand que un ($\mathrm{Re} >> 1$), les termes non linéaires deviennent prépondérants, et l'approximation linéaire n'est plus possible.

En mécanique des fluides, la plupart des écoulements que l'on souhaite étudier, dans un contexte industriel, sont turbulents. Un écoulement pleinement turbulent combine des structures tourbillonnaires dont les échelles couvrent une gamme large et continue, et qui sont toutes en forte interaction en raison de la non linéarité des équations de Navier Stokes. L'effet des petites structures affecte donc le comportement des grosses et inversement.

Il existe une théorie qui a contribué de façon majeure à la compréhension de la turbulence : la théorie de Kolmogorov (1941). Elle repose sur une vision « statistique » de la turbulence.

Elle stipule que dans l'écoulement turbulent, la taille des tourbillons est comprise entre deux valeurs : la plus grande échelle de l'écoulement (imposée par sa géométrie) appelée « échelle intégrale » L et la plus petite échelle appelée « échelle de Kolmogorov » ou « échelle de dissipation visqueuse » η (imposée par la viscosité du fluide). Selon la théorie classique de la cascade d'énergie, l'énergie cinétique turbulente est produite par les grosses structures de l'écoulement, qui interagissent avec l'écoulement moyen. Cette énergie est ensuite transférée par étirement tourbillonnaire sans être dissipée, entre des structures de tailles de plus en plus petites sur une plage de nombres d'ondes nommée « zone inertielle », cf. Figure 2.5.

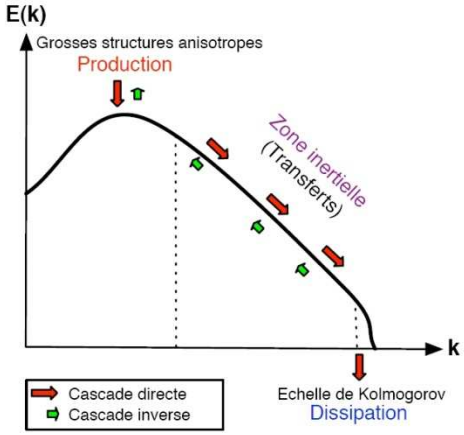

Figure 2.5 : Spectre de Kolmogorov pour une turbulence homogène et isotrope (Bertier, 2006)

L'étendue de cette zone croît avec l'intensité de la turbulence et par conséquent, avec le nombre de Reynolds. L'énergie est enfin dissipée lorsque la taille des structures est du même ordre que l'échelle de longueur associée aux tensions visqueuses. On notera que cette échelle de dissipation est d'autant plus petite que le nombre de Reynolds de l'écoulement à grande échelle est élevé. Plus précisément, des considérations dimensionnelles nous permettent d'écrire :

$$\frac{L}{\eta} = \mathrm{o}\left(\mathrm{Re}_L^{3/4}\right). \tag{2.12}$$

On remarquera à cet égard que tous ces phénomènes sont complètement tridimensionnels puisque les transferts d'énergie s'effectuent par étirement tourbillonnaire.

2.3.2. Approche numérique de la turbulence

En simulation numérique des écoulements turbulents, il existe trois grands types d'approches: la simulation numérique directe (DNS), dans laquelle on cherche à représenter la totalité des phénomènes physiques et donc des échelles, la simulation des grandes échelles (LES), dans laquelle on représente seulement les plus gros tourbillons en fonction du temps, et la simulation moyennée (RANS) dans laquelle on représente seulement l'écoulement moyen, cf. Figure 2.6.

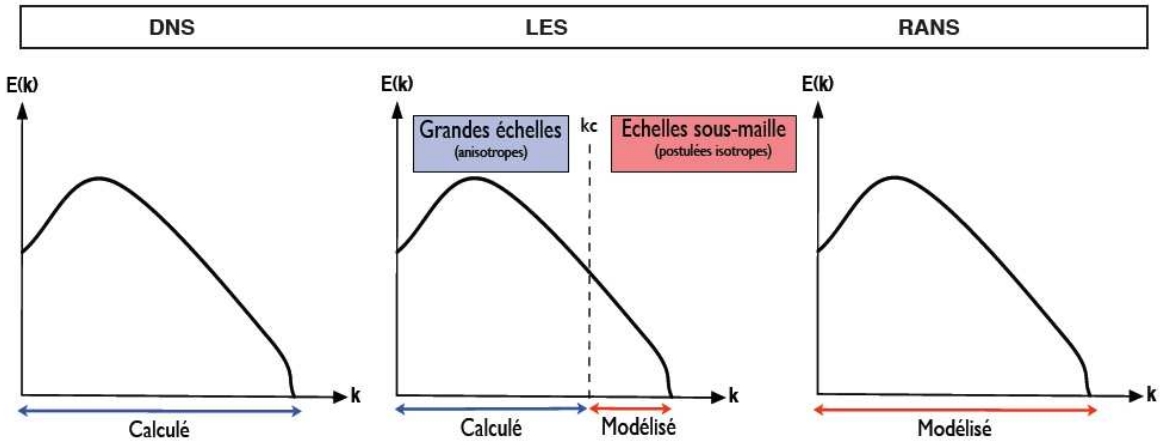

Figure 2.6 : Schématisation du principe sur lequel repose les trois grands types d'approche pour la résolution d'écoulements turbulents (Bertier, 2006)

- Dans l'approche DNS, aucune modélisation de la turbulence n'est faite. Ainsi, toutes les échelles de la turbulence sont résolues. Il est donc nécessaire que toutes les échelles de résolution spatiales soient de la taille de l'échelle de Kolmogorov. Le nombre de mailles, cf. paragraphe 3.1, doit donc être proportionnel à $\mathrm{Re}_L^{9/4}$. Cette approche est par conséquent extrêmement coûteuse et limitée à l'étude de cas académiques à très faible nombre de Reynolds, typiquement inférieur à 1000 .
- Afin de résoudre des écoulements à nombre de Reynolds plus important, la simulation des grandes échelles (LES pour Large Eddy Simulation) ne résout que les échelles de l'écoulement supérieures à une taille de coupure donnée. On suppose qu'en dessous de cette taille, la turbulence est isotrope et peut être modélisée par une viscosité turbulente supplémentaire. L'intérêt de cette approche réside dans le fait qu'elle permet théoriquement de s'affranchir de la simulation d'échelles qui sont à la fois extrêmement petites, et relativement simples à modéliser puisque supposées isotropes. Il s'agit d'un filtrage spatial lié à la taille de coupures des structures tourbillonnaires non résolues.
- L'approche RANS consiste à ne simuler que l'écoulement moyen en temps. Toutes les fluctuations temporelles sont filtrées et leurs effets sur l'écoulement moyen sont modélisés par une viscosité turbulente, ce qui redéfinit complètement la notion d'échelle de longueur dans l'écoulement. En effet, dans les approches précédentes, les échelles de longueur étaient liées à

des structures représentatives de phénomènes physiques instationnaires. En revanche, les échelles de longueur considérées dans l'approche RANS ne sont que des moyennes à grandes échelles : les tailles de maille peuvent être, par conséquent, beaucoup plus importantes. L'avantage de cette approche est lié à son coût, très réduit : non seulement les maillages peuvent être plus grossiers, mais on peut souvent se contenter de calculs 2D (ce qui est impossible en LES et DNS). De plus, du point de vue de la résolution en temps, le fait de ne s'intéresser qu'à un unique état stationnaire permet de prendre des pas de temps décorrelés, cf. paragraphe 3.2, par rapport à la physique des phénomènes, et uniquement limités par la stabilité des méthodes numériques (ce qui rend extrêmement avantageuse l'utilisation de schémas implicites), cf. paragraphe 3.2.2. Cependant, ces approches butent sur un problème conceptuel : les modélisations simples ($k-\varepsilon$, $k-\omega$)donnent des résultats assez peu prédictifs, cf. paragraphe 2.3.7, et les modélisations plus poussées (ASM, v2f, RSM) font apparaître des termes que l'on ne sait pas toujours évaluer, ainsi que de nombreuses constantes à calibrer.

2.3.3. Equations de Navier Stokes

Les équations de Navier Stokes, tout comme les équations de conservation de masse, sont obtenues en effectuant un bilan sur un volume de contrôle d'une quantité, ici la quantité de mouvement. On présente ici aussi l'équation de conservation d'énergie. Toutes ces équations, couplées avec les équations de conservation de masse, présentées au paragraphe 2.2.2, forment un système d'équations qui permet de connaître totalement l'évolution de l'écoulement du mélange, i.e. l'évolution du sillage.

2.3.3.1. Bilan de conservation de la quantité de mouvement

Pour un mélange de masse volumique ρ, possédant une vitesse $\boldsymbol{u}$ de composantes $u_{i=1,3}$, à la pression p, cf. paragraphe 2.4.2, un bilan sur la quantité de mouvement donne trois équations :

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \rho u_i\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},\ i = 1,3 \tag{2.13}$$

On rappelle que la convention d'Einstein sur les indices répétés est utilisée. L'effet des forces de pesanteur est ici négligé.

La matrice τ_{ij} est appelée « tenseur des contraintes visqueuses ». Pour un fluide Newtonien, de viscosité dynamique μ, elle est donnée par :

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \lambda\mu\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{2.14}$$

La déformation d'un fluide Newtonien est donc directement proportionnelle à la force qu'on lui applique. En faisant l'hypothèse de Stokes $\lambda = 2/3$, on obtient :

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{2.15}$$

La viscosité dynamique du mélange μ est une moyenne arithmétique des viscosités des espèces μ_j : $\mu = \sum_j y_j\mu_j$. La viscosité dynamique moléculaire μ_j peut, dans le cas d'un fluide Newtonien, être définie à l'aide de la loi de Sutherland. Cette loi précise que la viscosité d'un fluide Newtonien ne dépend plus que de la température T ; et non plus de la température et des actions mécaniques auxquelles il est soumis.

$$\frac{\mu_j(T)}{\mu_{j,0}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\frac{T_0 + S}{T + S}. \tag{2.16}$$

$\mu_{j,0} = \mu_j(T_0)$ est la viscosité à la température T_0, S est la température de Sutherland. Pour l'air, par exemple, on prend habituellement les valeurs suivantes $\mu_{air,0} = 1{,}711.10^{-5} kg.m^{-1}.s^{-1}$, $T_0 = 273{,}15K$ et $S = 110{,}4K$, ce qui donne une bonne approximation sur une plage de températures de l'ordre de $170K$ à $1900K$ environ.

2.3.3.2. Bilan de conservation de l'énergie

De même, pour un mélange de masse volumique ρ, possédant une vitesse $\boldsymbol{u}$ de composantes $u_{i=1,3}$, à la pression p, un bilan de conservation sur l'énergie totale du mélange e_t donne :

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho e_t\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}u_i\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p u_i\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i\right). \tag{2.17}$$

L'énergie totale du mélange e_t est une combinaison linéaire des énergies totales partielles des espèces $e_{t,j}$ le constituant :

$$e_t = \sum_j y_j e_{t,j}. \tag{2.18}$$

La détermination de l'énergie totale, pour un mélange idéal est donnée au paragraphe 2.4.2.
Le flux de chaleur q_i, pour un fluide de conductivité thermique κ, est donné par la loi de Fourier, qui lie proportionnellement le vecteur flux de chaleur au gradient de température :

$$q_i = -\kappa\frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{2.19}$$

2.3.3.3. Bilan de conservation d'un scalaire passif

Un scalaire passif z est un scalaire qui est convecté et diffusé par l'écoulement sans en modifier le comportement. Pour un écoulement de masse volumique ρ, possédant une vitesse $\boldsymbol{u}$ de composantes $u_{i=1,3}$, un bilan de conservation du scalaire z donne :

$$\frac{\partial \rho z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho z - d_z \frac{\partial z}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{2.20}$$

Dans cette étude, le scalaire passif z représente le rapport entre la concentration des particules N et la masse volumique du mélange ρ : $z = N/\rho$. Il permet de suivre la concentration des particules dans le sillage.

2.3.4. Filtrage des équations de Navier Stokes

Comme évoqué aux paragraphes 2.2.2 et 2.3.3, les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement ainsi que de l'énergie régissent l'écoulement d'un fluide. Simuler numériquement un écoulement revient à résoudre ces équations sur un domaine Ω, représentatif de l'étude considérée, délimité par la surface $\partial\Omega$. Ici, il s'agit de l'écoulement dans le sillage d'un avion. On l'a vu au paragraphe 2.3.2, lorsqu'un écoulement est turbulent, il existe plusieurs approches pour résoudre ces équations et les interactions entre les petites structures tourbillonnaires liées à la turbulence avec l'écoulement macroscopique. Dans le cadre des approches RANS et LES, toutes les échelles ne sont pas résolues et l'interaction turbulence écoulement macroscopique est modélisée. Pour cela, un traitement particulier est appliqué aux équations de conservation. La turbulence ayant un comportement aléatoire, il apparaît pertinent d'appliquer un traitement statistique.

Dans le cadre de cette approche, il existe plusieurs opérateurs de séparation des échelles. Ceux-ci conduisent formellement au même système d'équations constitutives. Ils doivent également vérifier les axiomes de Reynolds qui postulent, que pour toute fonction $f(x_i,t)$ et $g(x_i,t)$ et pour toute constante α, l'opérateur doit être :

Linéaire:
$$\begin{aligned} \overline{f+g} &= \bar{f} + \bar{g}. \\ \overline{\alpha f} &= \alpha \bar{f}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Idempotent:
$$\bar{\bar{f}\bar{g}} = \bar{f}\bar{g}. \tag{2.22}$$

Commutatif pour la dérivation :
$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}. \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

La décomposition de Reynolds consiste à écrire toute fonction f en la somme d'une contribution moyenne $\bar{f}$ et d'une fluctuation f' :

$$f = \bar{f} + f'. \tag{2.24}$$

Les axiomes de Reynolds permettent alors de déduire que :

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= 0. \\ \overline{fg} &= \bar{f}\,\bar{g} + \overline{f'g'}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Dans le cas d'écoulements compressibles, il est avantageux d'introduire la moyenne de Favre. Il s'agit d'une moyenne pondérée par la masse. L'écriture des équations de conservation est alors considérablement simplifiée puisque de nombreux termes de corrélations ne sont plus apparents. La moyenne de Favre $\tilde{f}$ d'une grandeur f s'exprime par :

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}}. \tag{2.26}$$

En explicitant $f = \bar{f} + f'$ où f' est la fluctuation par rapport à la moyenne de Reynolds, on obtient la relation :

$$\tilde{f} = \bar{f} + \frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}}. \tag{2.27}$$

On note en général f'' la fluctuation de f par rapport à sa moyenne de Favre :

$$f = \tilde{f} + f''. \tag{2.28}$$

Ainsi, contrairement à la fluctuation de Reynolds ($\overline{f'} = 0$ par définition) la moyenne statistique de f'' n'est pas nulle ($\overline{f''} = -\frac{\overline{\rho' f'}}{\bar{\rho}}$)

Les deux principaux opérateurs de séparation des échelles sont la moyenne d'ensemble ainsi que la moyenne temporelle. Ils sont présentés ci-après.

2.3.4.1. La moyenne d'ensemble

Celle-ci, encore appelée moyenne stochastique ou bien encore espérance mathématique est définie, pour une fonction aléatoire f, par:

$$\left\langle f\left(x_i,t\right)\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f_k\left(x_i,t\right). \tag{2.29}$$

La fonction $f_k\left(k = 1,\ldots,n\right)$ représente les valeurs prises par f au cours de n réalisations indépendantes du même phénomène. Il s'agit finalement de la moyenne des résultats obtenus sur n réalisations identiques. Cependant cette moyenne nécessite la production de nombreuses réalisations indépendantes, ce qui est souvent irréalisable.

2.3.4.2. La moyenne temporelle

La moyenne temporelle permet de palier le problème de la moyenne d'ensemble évoqué ci-dessus, en définissant l'intégration suivante:

$$\bar{f} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau. \tag{2.30}$$

L'inconvénient de cette moyenne réside principalement dans la nécessité, pour l'écoulement, d'être permanent (définition en Annexe).

Une version modifiée de la moyenne temporelle permet d'étendre son utilisation aux cas instationnaires (formulation Unsteady RANS ou URANS), c'est-à-dire pour les écoulements non permanents. Cette nouvelle moyenne est donnée par la formule:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} f(\tau) d\tau. \tag{2.31}$$

Le temps d'intégration T doit être « suffisamment grand » par rapport aux temps caractéristiques de la turbulence et « suffisamment petit » par rapport aux temps caractérisant l'évolution, à très grande échelle, de l'écoulement, ce qui conduit à une définition un peu floue de T. Il s'agit de l'hypothèse dite d'ergodicité qui permet de considérer que la moyenne temporelle est représentative de la moyenne d'ensemble.

2.3.5. Equations filtrées

Le principe de l'approche RANS consiste à moyenner au sens de Reynolds les équations de Navier Stokes et d'utiliser la décomposition de Favre (sur u_i et e_t) pour prendre en compte les effets de compressibilité. Les équations (2.3), (2.13), (2.17) et (2.20) s'écrivent alors:

- Bilan de masse:

$$\frac{\partial \overline{\rho_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{\overline{u_i}}\,\overline{\rho_j} + \overline{d_j}\frac{\partial \overline{\rho_j}}{\partial x_i} + \overline{d_j{}'\left(\frac{\partial \rho_j}{\partial x_i}\right)'} \right) = \overline{\chi_j}. \tag{2.32}$$

- Bilan de quantité de mouvement:

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\overline{u_l}\rho\widetilde{u_i}} \right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\tau_{il}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\rho u_i' u_l'} \right). \tag{2.33}$$

- Bilan d'énergie:

$$\frac{\partial \overline{\rho}\widetilde{e_t}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\overline{u_l}\rho\widetilde{e_t}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\overline{u_l}\tau_{il}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\overline{p}\overline{u_l}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{q_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\overline{\tau_{lm}' u_m'} - \overline{p' u_l'} - \overline{\rho}\widetilde{u_l'' e_t''} \right). \tag{2.34}$$

- Bilan du scalaire passif:

$$\frac{\partial \overline{\rho_z}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\widetilde{\overline{u_i}}\,\overline{\rho_z} - \overline{d_z}\frac{\partial \overline{\rho_z}}{\partial x_i} + \overline{d_z{}'\left(\frac{\partial \rho_z}{\partial x_i}\right)'} \right) = 0. \tag{2.35}$$

Le filtrage des équations de Navier Stokes fait apparaître un certain nombre de corrélations. Ces termes turbulents, inconnus, doivent être modélisés. C'est l'objet du paragraphe 2.3.7.

2.3.6. Introduction d'un formalisme compact

Dans un soucis de commodité pour la suite de l'étude, les équations (2.32), (2.33), (2.34) et (2.35) sont réécrites suivant une formulation intégrale, c'est-à-dire intégrées sur le domaine Ω, délimité par $\partial\Omega$. En introduisant le vecteur des quantités conservées q, on obtient une seule équation de conservation :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\mathrm{q}d\Omega = -\int_{\partial\Omega}\left(\mathrm{f}+\varphi\right)nd\partial\Omega + \int_{\Omega}\boldsymbol{\varpi}d\Omega. \tag{2.36}$$

Il s'agit de cette équation qu'il conviendra de résoudre numériquement, cf. Chapitre 3 .

Dans un souci de clarté, on ne fait plus apparaître l'opérateur « moyenne » sur les grandeurs.

- Le vecteur q des quantités conservées s'écrit:

$$\mathrm{q} = \begin{pmatrix} \rho_{j,j=1,3} \\ \rho u_{i,i=1,3} \\ \rho e_t \\ \rho_{z_{,z=1,3}} \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

- Le vecteur f est appelé flux Euler. Ce flux est composé d'un terme convectif et d'un terme lié à la pression:

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} u\rho_{j=1,3} \\ u_l\rho u_{i,i=1,3} + p \\ u_l\rho e_t + u_l p \\ u_i\rho_{z=1,3} \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

- Le vecteur φ est appelé flux Navier Stokes. Il contient une contribution laminaire à laquelle peut s'ajouter l'effet de la turbulence. Il s'agit en fait, des termes de corrélations qui apparaissent lorsque les équations de Navier Stokes sont filtrées, cf. paragraphe 2.3.5 :

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{y_{j,j=1,3}} \\ \varphi_{u_{i,i=1,3}} \\ \varphi_{e_t} \\ \varphi_{z,z=1,3} \end{pmatrix} = \varphi_l + \varphi_t. \tag{2.39}$$

- Le flux des espèces φ_{y_i} se décompose de la manière suivante :

$$\varphi_{y_i} = d_i\nabla\rho_i + \varphi_{t_{y_i}} \tag{2.40}$$

Le coefficient de diffusion de l'espèce i est donné par la relation :

$$d_i = \frac{\nu}{Sc_i} \tag{2.41}$$

Le nombre de Schmidt laminaire Sc_i de l'espèce i est un nombre sans dimension qui représente le rapport entre la diffusion de la quantité de mouvement ν (ou viscosité cinématique) et de la

diffusion de l'espèce i. Il est utilisé pour caractériser les écoulements de fluides dans lesquels interviennent simultanément viscosité et transfert de matière.

$$Sc_i = \frac{\nu}{d_i}. \tag{2.42}$$

Losque le nombre de Schmidt est très petit devant la valeur unité, $Sc_i \ll 1$, cela veut dire que la diffusion de l'espèce i dans le mélange est prépondérante par rapport à la diffusion de la quantité de mouvement. Dans cette étude, le nombre de Schmidt laminaire est fixé à 1 pour toutes les espèces.

La contribution turbulente de la diffusion de l'espèce i est représentée par $\varphi_{t_{y_i}}$. Elle est évaluée par le modèle de turbulence présenté au paragraphe 2.3.7.

- Le flux de la quantité de mouvement φ_u, tenseur d'ordre 2, se décompose de la manière suivante :

$$\varphi_u = \tau_{ij} + \tau_{t_{ij}} \tag{2.43}$$

La contribution turbulente de la diffusion de la quantité de mouvement est représentée par le tenseur des contraintes turbulentes ou tenseur de Reynolds $\tau_{t_{ij}}$. Elle est évaluée par le modèle de turbulence présenté au paragraphe 2.3.7.

- Le flux de l'énergie totale est la contribution du flux de chaleur φ_c et de la puissance de frottement $\varphi_u \mathbf{u}$:

$$\varphi_{e_t} = \varphi_c + \varphi_u \mathbf{u}. \tag{2.44}$$

Le flux de chaleur φ_c se décompose de la manière suivante:

$$\varphi_c = -\kappa \nabla T + \varphi_{t_c}. \tag{2.45}$$

La conductivité thermique du fluide κ est reliée à la viscosité dynamique par l'intermédiaire de la capacité calorifique massique à pression constante c_p et du nombre de Prandtl laminaire suivant la relation :

$$\kappa = \frac{\mu c_p}{\mathrm{Pr}}. \tag{2.46}$$

La capacité calorifique à pression constante du mélange est déterminée par une loi polynomiale.

Le nombre de Prandtl laminaire Pr est un nombre sans dimension qui représente le rapport entre la diffusion de la quantité de mouvement ν et la diffusivité thermique α :

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \tag{2.47}$$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible (les métaux ou liquides par exemple) indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température. Dans cette étude, les nombres de Prandtl sont fixés à $0,708$, $6,53$ et $0,713$ pour l'air, la glace et la vapeur d'eau respectivement.

la contribution turbulente de la diffusion de la chaleur est représentée par φ_{t_c}. Elle est évaluée par le modèle de turbulence présenté au paragraphe 2.3.7.

- le vecteur $\boldsymbol{\varpi}$ représente les sources des différentes quantités :

$$\boldsymbol{\varpi} = \begin{pmatrix} \varpi_{y_j} \\ 0 \\ 0 \\ \varpi_z \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

Les sources de masse ϖ_{y_j} sont déterminées par le modèle développé lors de cette étude et décrit au paragraphe 2.2.2.

Les sources de scalaires ϖ_z liées au modèle de turbulence sont explicitées dans le chapitre suivant 2.3.7. Pour le suivi des particules de suie, puisqu'il s'agit d'un scalaire passif (il n'y a pas de créations ou de pertes de suies), le terme source est nul.

2.3.7. Modélisation de la turbulence

Comme on vient de le voir dans les paragraphes 2.3.5 et 2.3.6, la turbulence apparaît sous forme de corrélations, de termes turbulents, dans chacune des équations du système à résoudre. Il s'agit des équations de conservation de masse, de quantité de mouvement, d'énergie et de transport d'un scalaire passif.

Ces termes turbulents sont la diffusion turbulente $\varphi_{t_{y_i}}$ de l'espèce i (relation (2.40)), le tenseur de Reynolds $\tau_{t_{ij}}$ (relation (2.43)) et la diffusion turbulente de la chaleur φ_{t_c} (relation (2.45)).

La modélisation de la turbulence consiste à évaluer ces nouveaux termes. Pour cela, il existe différents modèles reposants sur différentes hypothèses. L'hypothèse utilisée dans cette étude est l' « hypothèse de Boussinesq ».

2.3.7.1. Hypothèse de Boussinesq

- Suivant l'hypothèse de Boussinesq, la diffusion turbulente $\varphi_{t_{y_i}}$ de l'espèce i est évaluée, à l'image de la diffusion laminaire, par une loi de Fick:

$$\varphi_{t_{y_i}} = -\frac{\nu_t}{Sc_t}\nabla\rho_i = -\frac{\mu_t}{Sc_t}\nabla y_i. \tag{2.49}$$

Le coefficient μ_t est appelé coefficient de diffusion turbulente. Il doit être évalué par le modèle de turbulence. A priori, celui-ci dépend des propriétés locales du champ turbulent et de divers

paramètres, tels que la viscosité moléculaire de l'écoulement μ et de la distance à la paroi la plus proche y_p. La formulation précise dépendra du modèle de turbulence choisi, cf. paragraphe 2.3.7.2.

Le nombre Sc_t est le nombre de Schmidt turbulent. Dans le cadre de ce travail, ce nombre est fixé à $0,9$.

- De même, le tenseur de Reynolds, à l'image du tenseur des contraintes visqueuses, est une fonction linéaire du tenseur des déformations :

$$\tau_{t_{ij}} = -\mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}. \tag{2.50}$$

k est appelé énergie cinétique turbulente :

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'}. \tag{2.51}$$

Tout comme le coefficient de diffusion turbulente μ_t, l'énergie cinétique turbulente k doit être évaluée par le modèle de turbulence, cf. paragraphe 2.3.7.2.

- La diffusion turbulente de la chaleur φ_{t_c} est évaluée, à l'image de la diffusion laminaire, par une loi de Fourier:

$$\varphi_{t_c} = -\frac{\mu_t c_p}{\mathrm{Pr}_t} \nabla T. \tag{2.52}$$

Le nombre Pr_t est le nombre Prandtl turbulent. Dans le cadre de ce travail, ce nombre est fixé à $0,9$.

Il existe d'autres hypothèses, notamment celle sur laquelle repose « les modèles ASM » (Algebric Stress model). Dans l'hypothèse de Boussinesq, le tenseur de Reynolds est supposé proportionnel au tenseur taux de déformation S et plus précisément à son déviateur D, cf. paragraphe 2.3.7.2. Cette hypothèse est forte est présuppose que les axes principaux du tenseur de Reynolds sont confondus avec ceux du tenseur des déformations de l'écoulement moyen. Ceci est à peu près exact dans des configurations simples telles que des jets plans ou axisymétriques, couches de mélanges ou couches limites planes. Mais elle est d'autant plus en défaut que la courbure de l'écoulement moyen est importante. Les modèles ASM, qui sont une généralisation du modèle de Boussinesq, tentent de prendre en compte ces phénomènes.

Basés sur l'hypothèse de Boussinesq, divers modèles de turbulence existent pour évaluer la viscosité turbulente μ_t :

- Les modèles algébriques sont des modèles qui ne nécessitent aucune équation de bilan supplémentaire. Toutes les propriétés du « milieu turbulent » sont liées algébriquement aux variables aérothermiques du champ moyen calculé.

- Le modèle à une équation consiste à évaluer la valeur de la viscosité turbulente à l'aide d'une seule propriété du « milieu turbulent »: l'énergie cinétique turbulente k.
- Le modèle à deux équations consiste à évaluer la valeur de la viscosité turbulente à l'aide de deux propriétés du « milieu turbulent »: l'énergie cinétique turbulente k couplée à une autre propriété telle que la dissipation turbulente ε, une échelle de longueur caractéristique de la taille des plus grosses structures turbulentes (échelle intégrale) l, ou bien encore la fréquence de la turbulence ω.
- Le modèle à quatre équations. Les modèles à deux équations permettent, via deux échelles caractéristiques de la turbulence, d'évaluer la viscosité turbulente. L'évaluation du flux de chaleur turbulent φ_{t_c} (cf. équation (2.52)) repose sur l'hypothèse du nombre de Prandtl turbulent constant. Cette hypothèse est loin d'être vérifiée expérimentalement. Des mesures expérimentales montrent en effet que le nombre de Prandtl turbulent varie non seulement d'un écoulement à l'autre mais également au sein d'un même écoulement. L'idée du modèle à quatre équations est d'introduire deux équations supplémentaires sur des échelles caractéristiques de la turbulence thermique pour évaluer une «diffusivité turbulente» α_t analogue à la viscosité turbulente.

Pour cette étude, c'est le modèle à deux équations qui a été utilisé et plus précisément le modèle $k-l$ présenté ci-après.

2.3.7.2. Modèle à deux équations k-l

Comme on l'a vu au paragraphe précédent, le modèle $k-l$ utilise deux équations supplémentaires, l'une pour l'énergie cinétique k (2.53) et l'autre pour l'échelle intégrale l (2.54). Il s'agit d'équations de transport de convection diffusion:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(u\rho k + \varphi_k \right) = \varpi_k. \tag{2.53}$$

$$\frac{\partial \rho l}{\partial t} + \nabla \cdot \left(u\rho l + \varphi_l \right) = \varpi_l. \tag{2.54}$$

Les flux φ_k et φ_l sont les flux de diffusion des quantités k et l respectivement.

A partir de ces deux propriétés particulières de la turbulence, toutes les autres, comme les coefficients de diffusion turbulents ou bien encore les composantes du tenseur de Reynolds peuvent être déduites. Tout comme les flux de diffusion de la masse $\varphi_{t_{y_i}}$, de la quantité de mouvement φ_u ou bien encore de l'énergie φ_{e_t}, les flux de diffusion des quantités k et l sont composés d'une partie laminaire et d'une partie turbulente. L'approximation de Boussinesq est également utilisée ici pour évaluer ces flux turbulents. On obtient alors:

$$\varphi_k = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_{t_k}} \right) \nabla k. \tag{2.55}$$

$$\varphi_l = \left(\mu + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_{t_l}} \right) \nabla l. \tag{2.56}$$

Le nombre Pr_{t_k} est le nombre de Prandtl turbulent pour k. Il est fixé à $0,9$.

Le nombre Pr_{t_l} est le nombre de Prandtl turbulent pour l. Il est fixé à 1.

Il reste à évaluer la viscosité turbulente μ_t. Pour cela, il est nécessaire de distinguer deux régions de l'écoulement:

- La région loin des parois où la turbulence est pleinement développée. Elle n'est pas influencée par les phénomènes visqueux qui se produisent près d'une paroi ($\mu_t \gg \mu$).
- La région près des parois, appelée « région pariétale » où la turbulence est amortie ($\mu_t \ll \mu$).

L'évaluation de la viscosité turbulente doit ainsi tenir compte de ces deux types de région. Dans ce paragraphe nous présentons d'abord le modèle dit « Haut Reynolds » qui est valable lorsque la turbulence est pleinement développée. La partie « Bas Reynolds » présente ensuite les modifications apportées au modèle « haut Reynolds » afin que ce dernier soit également valable près des parois.

Les sources des quantités k et l, ϖ_k et ϖ_l sont évaluées par le modèle haut et bas Reynolds.

Modèle Haut Reynolds

Dans l'hypothèse où la turbulence est homogène et isotrope, la viscosité turbulente μ_t s'écrit:

$$\mu_t = c_\nu \rho l \sqrt{k}. \tag{2.57}$$

c_ν est une constante du modèle.

Pour que, près des parois, l soit égale à la longueur de mélange de Prandtl, il faut poser:

$$c_\nu = c_\mu^{1/4}, \tag{2.58}$$

avec $c_\mu = 0,09$ pour le modèle standard.

D'après la théorie de Prandtl Kolmogorov, valable si les effets visqueux sont négligeables, le taux de dissipation de la turbulence ε s'écrit:

$$\varepsilon = \cancel{\varepsilon_{lam}} + \varepsilon_{turb} = c_\varepsilon \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}, \tag{2.59}$$

où c_ε est une constante du modèle.

Pour les mêmes raisons que pour la constante c_ν, on pose:

$$c_\varepsilon = c_\mu^{3/4}. \tag{2.60}$$

la fréquence de dissipation ω s'écrit alors:

$$\omega = \cancel{\omega_{lam}} + \omega_{turb} = c_\varepsilon \frac{\sqrt{k}}{l}. \tag{2.61}$$

La source ϖ_k de l'énergie cinétique turbulente est égale à la production d'énergie cinétique turbulente par unité de volume P à laquelle on retire sa dissipation $\rho\varepsilon$:

$$\varpi_k = P - \rho\varepsilon. \tag{2.62}$$

Suivant l'hypothèse de Boussinesq, la production d'énergie cinétique turbulente est donnée par:

$$P = 2\mu_t D^2 - \frac{2}{3}\rho k\theta. \tag{2.63}$$

Le tenseur d'ordre 2 D est le déviateur (de trace nulle) du tenseur du taux de déformation $\mathrm{S} = 1/2\left(\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u} + {}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}\right)$, qui est lui-même la partie symétrique du gradient du vecteur vitesse $\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}$:

$$\mathrm{D} = \mathrm{S} - \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathrm{u}\right)\mathrm{I} \tag{2.64}$$

$D^2 = D_{ij}D_{ij}$

Le scalaire θ est la divergence du champ de vitesse, $\theta = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathrm{u}$.

Si les effets de compressibilité sont négligés, c'est-à-dire que la divergence du vecteur vitesse est négligeable devant la somme des composantes du déviateur au carré, i.e. $\theta << D^2$, alors l'équation (2.63) donnant la production d'énergie cinétique turbulente devient:

$$P \simeq 2\mu_t D^2. \tag{2.65}$$

Ainsi, la source ϖ_k de l'énergie cinétique turbulente s'écrit, cf. équation (2.62):

$$\varpi_k = 2\mu_t D^2 - c_\varepsilon \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l}. \tag{2.66}$$

Quant à la source ϖ_l de l'échelle intégrale l , elle s'écrit:

$$\varpi_l = \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_{t_l} l}\left(\kappa^2\left(1 + c_l\left(\frac{P}{\rho\varepsilon} - 1\right)\right) - b_1 g_l^2 - b_2 g_k^2 - b_3 g_k g_l\right). \tag{2.67}$$

c_l est une constante. Afin que le modèle $k-l$ soit équivalent au modèle $k-\varepsilon$ standard on pose:

$c_l = \dfrac{1{,}5 - c_1}{c_2 - c_1}$ avec $c_1 = 1{,}44$ et $c_2 = 1{,}92$ pour le modèle standard.

b_1 , b_2 , b_3 sont des coefficients qui dépendent du nombre de Reynolds turbulent Re_t .

g_k , g_l , g_ε sont les gradients logarithmiques des grandeurs k , l et ε

$g_k = \dfrac{l}{k}\nabla k$, $g_l = \nabla l$, $g_\varepsilon = \dfrac{l}{\varepsilon}\nabla\varepsilon$

Modèle Bas Reynolds: Corrections du modèle Haut Reynolds

Pour prendre en compte les effets d'amortissement liés à la viscosité moléculaire μ , en particulier au voisinage immédiat des parois, les équations (2.57), (2.59) et (2.61) sont réécrites en ajoutant des termes correctifs. La viscosité turbulente s'écrit désormais:

$$\mu_t = f_\nu f_l c_\nu \rho l\sqrt{k}. \tag{2.68}$$

La fonction f_l est une fonction de réalisabilité:

$$f_l = \frac{\sqrt{k}}{\max\left(\sqrt{k}, \alpha\sqrt{k_{eq}}\right)}. \tag{2.69}$$

Avec $k_{eq} = \frac{l}{\sqrt{c_\mu}} l^2 D^2$.

Le coefficient α est un coefficient de réalisabilité. Il est fixé à $\alpha = 0,3$.

Cette fonction permet de limiter les coefficients de corrélation dans les zones de très forte déformation et ainsi satisfaire les contraintes de réalisabilité du tenseur de Reynolds. Il s'agit de conditions mathématiques sur la modélisation évitant que des comportements aberrants, de type énergie cinétique turbulente k négative, se produisent. Ainsi, les termes diagonaux du tenseur de Reynolds, représentant des carrés de vitesses fluctuantes, doivent être positifs. Les tensions de cisaillement doivent, quant à elles, vérifier la relation de Cauchy-Schwartz.

$$\tau_{t_{11}} \geq 0, \quad \tau_{t_{22}} \geq 0, \quad \tau_{t_{22}} \geq 0. \tag{2.70}$$

$$\left|\tau_{t_{12}}\right| \leq \sqrt{\tau_{t_{11}}\tau_{t_{22}}}, \quad \left|\tau_{t_{13}}\right| \leq \sqrt{\tau_{t_{11}}\tau_{t_{33}}}, \quad \left|\tau_{t_{13}}\right| \leq \sqrt{\tau_{t_{11}}\tau_{t_{33}}}, \quad \text{(Cauchy-Schwartz)} \tag{2.71}$$

La fonction f_v simule l'effet d'amortissement dû à la viscosité moléculaire. Elle varie de zéro lorsque le nombre de Reynolds turbulent est très petit devant l'unité, à un lorsque ce nombre de Reynolds est très supérieur à un:

$$f_v = \tanh\left(\frac{\mathrm{Re}_t}{r_v}\right) \tag{2.72}$$

r_v est une constante et vaut $21,3$.

La fréquence de dissipation de la turbulence s'écrit:

$$\omega = \omega_{lam} + \omega_{turb} = 2\kappa^2 \frac{\nu}{l_\varepsilon^2} + f_\varepsilon c_\varepsilon \frac{\sqrt{k}}{l_\varepsilon} \tag{2.73}$$

La fonction f_ε simule l'effet d'amortissement dû à la viscosité moléculaire. Elle varie de zéro (lorsque $\mathrm{Re}_t \ll 1$) à un (lorsque $\mathrm{Re}_t \gg 1$).

$$f_\varepsilon = \tanh\left(\frac{\mathrm{Re}_t}{r_\varepsilon}\right). \tag{2.74}$$

r_ε est une constante et vaut $16,8$.

D'où le taux de dissipation :

$$\varepsilon = \omega_{lam} k + \omega_{turb} k = 2\kappa^2 \frac{\nu}{l_\varepsilon^2} k + f_\varepsilon c_\varepsilon \frac{k^{\frac{3}{2}}}{l_\varepsilon}. \tag{2.75}$$

La constante κ est la constante de Karman, $\kappa = 0,4$.

Ici, l'échelle de dissipation l_ε est supposée égale à l avec, pour éviter des divisions par zéro, une borne inférieure liée à la taille de la maille δ :

$$l_\varepsilon = \max\left(l, c_{l\min}\delta\right) \text{ avec } c_{l\min} = 0,01 \text{ à } 0,1. \tag{2.76}$$

Ainsi, le premier terme ε_{lam} de l'équation (2.75) représente la dissipation directe des tourbillons par effets visqueux. Il est négligeable devant le second membre ε_{turb} lorsque la turbulence est pleinement développée, mais il devient prépondérant au voisinage immédiat des parois (dans la sous couche visqueuse, cf. paragraphe 2.3.7.3):

$$\varepsilon \to 2\nu \frac{k}{y^2} \text{ si } l \sim \kappa y \text{ et } \mathrm{Re}_t << 1. \tag{2.77}$$

Quant à la source de l'énergie cinétique turbulente ϖ_k, elle s'écrit désormais:

$$\varpi_k = 2\mu_t D^2 - \rho\left(2\kappa^2 \frac{\nu}{l_\varepsilon^2} k + f_\varepsilon c_\varepsilon \frac{\overline{k^2}^{\frac{3}{2}}}{l_\varepsilon}\right). \tag{2.78}$$

La source de l'échelle intégrale ϖ_l, afin que près des parois $l = \kappa y$, s'écrit:

$$\varpi_l = \beta \frac{\mu}{l}\left(\kappa^2 - g_l^2\right) + \frac{\mu_t}{\sigma_l l}\left(\kappa^2\left(1 + c_l\left(\frac{P}{\rho\varepsilon} - 1\right)\right) - b_1 g_l^2 - b_2 g_k^2 - b_3 g_k . g_l\right). \tag{2.79}$$

Il est important de noter que ces corrections sont indispensables lorsque le maillage pariétal est fin, c'est-à-dire lorsque la première maille se trouve dans la sous couche visqueuse, sous peine d'une erreur grossière sur un résultat global, comme la perte de charge dans un canal. Néanmoins, elles ne sont pas nécessairement adaptées à d'autres régions loin des parois où le nombre de Reynolds turbulent est faible puisqu'elles peuvent inhiber la transition laminaire turbulent. C'est pourquoi il est souvent utile de faire appel à des lois de parois qui ne nécessitent pas de corrections Bas Reynolds.

2.3.7.3. Couche limite et loi de paroi

En zone pariétale, il est commode d'introduire la vitesse de frottement u_τ, une échelle de longueur l_τ, ainsi qu'une température de frottement θ_τ, en fonction des flux pariétaux que sont la contrainte de cisaillement τ_p et le flux de chaleur q_p. Toutes ces nouvelles fonctions sont la combinaison d'autres variables comme la masse volumique à la paroi ρ_p, la capacité thermique massique à pression constante c_p ainsi que la viscosité cinématique du mélange:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho_p}}. \tag{2.80}$$

$$\theta_\tau = \frac{q_p}{\rho_p u_\tau c_p}. \tag{2.81}$$

$$l_\tau = \frac{\nu}{u_\tau}. \tag{2.82}$$

Ces grandeurs permettent d'adimensionner les grandeurs aérothermiques traditionnelles afin de raisonner en valeurs pariétales représentées par le symbole « $^+$ ». Ainsi, la distance à la paroi y_p devient y^+ et s'écrit:

$$y^+ = \frac{y_p}{l_\tau}. \tag{2.83}$$

Les autres grandeurs pariétales, vitesse et température, sont données par :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}. \tag{2.84}$$

$$T^+ = \frac{T - T_p}{\theta_\tau},\ T_p \text{ est la tempéraure de la paroi.} \tag{2.85}$$

En proche paroi, région de l'écoulement où les effets visqueux sont aussi importants que les effets inertiels, se développe, ce que l'on appelle une couche limite. La Figure 2.7 illustre le développement d'une couche limite, de hauteur δ, le long d'une plaque plane. Ce développement comprend une zone où la couche limite est laminaire puis une zone où elle devient turbulente entre coupée d'une zone de transition. Pour des écoulements le long de profils d'aile, la couche limite devient très rapidement turbulente. Cette dernière peut être décomposée principalement en trois zones:

- La sous-couche visqueuse correspond à une zone où les valeurs de y^+ sont comprises entre 0 et 5. L'écoulement y est de type Couette, c'est-à-dire que l'évolution de la vitesse transversale moyenne $u(y)$ et celle de la température moyenne $T(y)$ est linéaire.
- La zone tampon est une zone de transition entre la sous-couche laminaire et la couche turbulente. Elle est comprise entre $y^+ \approx 5$ et $y^+ \approx 50$.
- La zone logarithmique est la zone de la couche limite turbulente où le profil de vitesse $u(y)$ et de température $T(y)$ suit une loi logarithmique jusqu'à atteindre la valeur de l'écoulement externe.

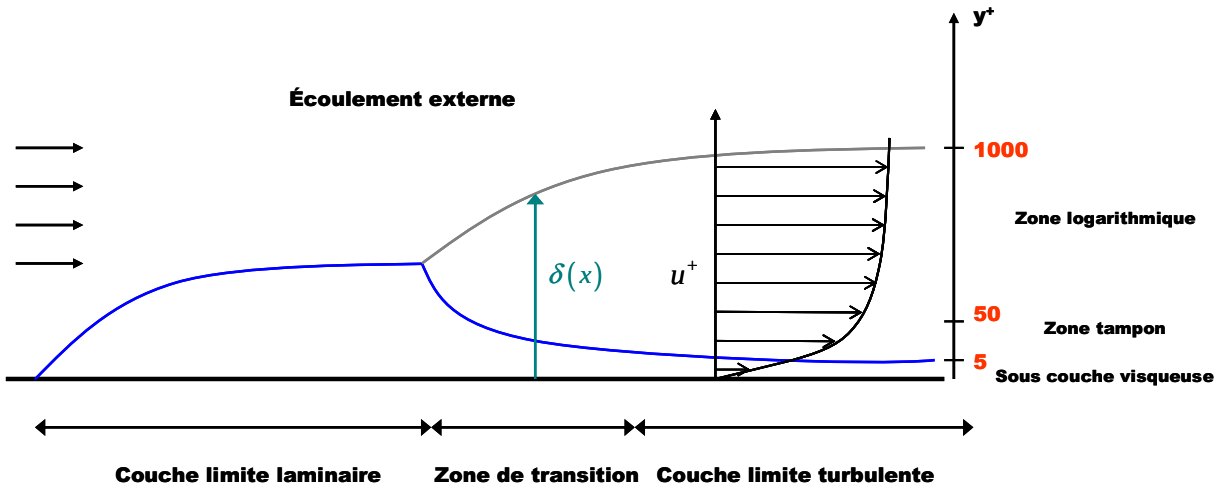

Figure 2.7 : Schématisation du développement d'une couche limite sur une plaque plane

Les lois de paroi permettent d'évaluer les échanges pariétaux τ_p et q_p ainsi que les grandeurs aérothermiques de l'écoulement externe dans des conditions de maillage où le centre de la première maille ne se situe pas dans la sous-couche visqueuse. En effet, lorsque le centre de la première maille se situe dans la sous-couche visqueuse, il est très facile de calculer les échanges pariétaux puisque la variation des grandeurs $u(y)$ et $T(y)$ est linéaire (cf. écoulement de Couette).

Néanmoins mailler la sous-couche visqueuse nécessite des densités de mailles proche de la paroi très importantes. Par ailleurs, les maillages pariétaux fins exigent l'utilisation des corrections bas Reynolds qui peuvent fausser la solution dans d'autres régions comme évoqué au paragraphe 2.3.7.2.

C'est dans cette logique que l'on est souvent amené à construire un maillage normal à la paroi un peu plus grossier. Le centre de la première maille ne se trouve alors plus dans la sous-couche visqueuse et il est plus délicat d'évaluer les flux pariétaux: c'est le rôle des lois de paroi. Notons, dès à présent, que ces lois de paroi ne sont valables que si le centre de la première maille ne se situe pas au-delà d'environ 10 à 20 % de la couche limite totale, soit des tailles de mailles de l'ordre de $y^+ \approx 100$

Pour développer, de façon simplifiée, le principe de fonctionnement d'une loi de paroi, on considère un écoulement bidimensionnel dans le plan $(\mathrm{x,y})$. La plaque se situe le long de l'axe x.

L'hypothèse fondamentale est de supposer que l'écoulement dans la zone proche paroi est de type écoulement de Couette. La viscosité laminaire, la masse volumique, la pression et la chaleur spécifique à pression constante du mélange sont alors supposées constantes. Seule la vitesse axiale u_x est non nulle ($u_y = 0$). De plus, les gradients normaux à la paroi sont supposés prépondérants ($\partial/\partial x \ll \partial/\partial y$). Ainsi $u_x = u_x(y)$.

Avec ces hypothèses, les équations de quantités de mouvement (2.33) se réduisent à:

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} - \left(\overline{\rho u_y' u_x'}\right) = \left(\mu + \mu_t\right) \frac{\partial u_x}{\partial y}. \tag{2.86}$$

De même, l'équation d'énergie (2.34) s'écrit sous la forme:

$$q_p = \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_t}{\mathrm{Pr}_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y}. \tag{2.87}$$

En variables pariétales les équations (2.86) et (2.87) s'écrivent:

$$\left(1 + \mu^+\right) \frac{\partial u^+}{\partial y^+} = 1, \tag{2.88}$$

et

$$\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu^+}{\mathrm{Pr}_t} \right) \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 1, \tag{2.89}$$

avec

$$\mu^+ = \frac{\mu}{\mu_t}. \tag{2.90}$$

L'obtention des équations (2.88) et (2.89) s'étant faite sous de fortes hypothèses (écoulement de Couette), il est important de correctement modéliser la viscosité adimensionnée afin d'être capable de décrire la zone logarithmique pour le calcul de u_x dans la première maille.

Cette dernière s'écrit, selon le modèle de longueur de mélange de Prandtl avec fonction correctrice Bas Reynolds de Van Driest :

$$\mu^+ = F_c^2 L^{+2} \left| \frac{\partial u^+}{\partial y^+} \right|. \tag{2.91}$$

avec $L^+ = \kappa y^+$, (κ constante de Karman)

La fonction correctrice F_c s'écrit: $$F_c = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{26} \right). \tag{2.92}$$

Elle permet de rendre compatible cette loi de paroi avec l'utilisation d'un modèle de turbulence Bas Reynolds puisque ainsi, la loi a pour limite une loi type Couette laminaire.

L'intégration des équations (2.88) et (2.89) donne deux résultats différents suivant que le centre de la première maille soit dans la sous-couche visqueuse ou dans la couche turbulente:

- Sous-couche visqueuse : $\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \sim 1$ soit $u^+ = y^+$
- Couche turbulente : $\frac{\partial u^+}{\partial y^+} \sim \frac{1}{\kappa y^+}$ soit $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(y^+ \right) + C$, C étant une constante d'intégration.

Il est désormais possible de connaître les grandeurs aérothermiques de l'écoulement dans la première maille quelque soit le raffinement du maillage pariétal, ainsi que des flux pariétaux τ_p et q_p à partir des relations(2.86) et (2.87).

Type de maillage pariétal	Avantages	inconvénients
Fin ($y^+ = 1$)	• Evaluation des flux pariétaux très bonne et facile (zone laminaire, écoulement de Couette)	• Nécessité d'activer la correction bas Reynolds du modèle de turbulence • Densité de maillage plus important
Grossier ($y^+ \approx 100$)	• Gain en terme de mailles • La correction bas Reynolds peut être désactivée	• Nécessite une loi de paroi qui peut manquer de précision sur le calcul des flux

Tableau 2.1: Tableau récapitulatif des avantages et inconvénients de l'utilisation de maillages pariétaux fins et plus grossiers

Le Tableau 2.1 résume les avantages et les inconvénients de l'utilisation de maillages pariétaux fins et plus grossiers.

2.4. Modélisation de la thermodynamique de l'écoulement

La modélisation de la thermodynamique permet de fermer le système d'équations bilan, présenté au paragraphe 2.3.3. Le volume massique du mélange correspond à la somme des contributions de chaque espèce. Ces espèces possèdent un comportement qui diffère selon qu'il s'agisse d'un gaz, d'un liquide ou d'un solide. Leur volume massique n'est pas régi par les mêmes lois de variation. Il en est de même pour leur énergie. C'est l'objet de cette section.

2.4.1. Equation d'un corps pur

2.4.1.1. Loi d'état d'un gaz parfait

La loi d'état d'un gaz parfait de volume massique v_j , de masse molaire M_j à la pression p et à la température T s'écrit :

$$v_j = \frac{R}{\mathrm{M}_j}\frac{T}{p}, \tag{2.93}$$

R est la constante des gaz parfait $R = 8.314 J.K^{-1}.mol^{-1}$

2.4.1.2. Loi d'état d'un fluide faiblement compressible

La loi d'état d'un fluide faiblement compressible de volume massique v_j à la pression p et à la température T s'écrit :

$$v_j = v_{j,ref}\frac{1+\alpha_{ref}\left(T-T_{ref}\right)}{1+\beta_{ref}\left(p_j-p_{ref}\right)}, \tag{2.94}$$

$v_{j,ref}$ est le volume massique de référence de l'espèce j dans des conditions de température et de pression de référence T_{ref} et p_{ref}.

α_{ref} est le coefficient de dilatation à pression constante: $\alpha_{ref} = \left(\frac{\partial v_{j,ref}}{\partial T}\right)_{p_{ref}}$.

β_{ref} est le coefficient de compressibilité à température constante: $\beta_{ref} = \left(\frac{\partial v_{j,ref}}{\partial p}\right)_{T_{ref}}$.

Pour l'eau liquide, le coefficient de dilatation à pression constante est $\alpha_{ref} = 1.10^{-4}$ et le coefficient de compressibilité à température constante est $\beta_{ref} = 5.10^{-10}$.

2.4.2. Propriétés thermodynamiques d'un mélange idéal

2.4.2.1. Pression du mélange

La pression p d'un mélange idéal, correspond à la somme des pressions partielles p_j de chaque espèce le constituant. Il s'agit de la loi de Dalton qui s'écrit :

$$p = \sum_{j=1,n_{esp}} p_j. \tag{2.95}$$

2.4.2.2. Energie totale d'un mélange idéal

Pour un mélange idéal, l'énergie interne $e_{t,j}$ d'une espèce correspond à celle prise par l'espèce, considérée seule dans le mélange $e^0_{t,j}$. Ainsi l'équation (2.18) du paragraphe 2.3.3.2, s'écrit :

$$e_t = \sum_j y_j e^0_{t,j}. \tag{2.96}$$

On rappelle que l'énergie totale $e^0_{t,j}$ est la somme de l'énergie interne e^0_j et de l'énergie cinétique :

$$e^0_{t,j} = e^0_j + \frac{1}{2} u_i^2. \tag{2.97}$$

L'énergie interne e^0_j s'écrit en fonction de l'enthalpie massique h^0_j, de la pression p du mélange et du volume massique $v_j = 1/\rho_j$:

$$e^0_j = h^0_j - p v_j. \tag{2.98}$$

L'enthalpie est donnée par la relation suivante :

$$dh = \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_T dp + \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_p dT. \tag{2.99}$$

On obtient, par intégration $h = h\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} \left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_p dT + \int_{p_{ref}}^{p} \left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_T dp.$ (2.100)

Avec $$\left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_T = v - T \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_p. \tag{2.101}$$

et
$$\left.\frac{\partial h}{\partial T}\right|_{p} = c_{p}. \tag{2.102}$$

Soit
$$h = h\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} c_{p} dT + \int_{p_{ref}}^{p} \left(v - T \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_{p} \right) dp. \tag{2.103}$$

Energie interne d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait, la relation (2.101) s'écrit :
$$\left.\frac{\partial h}{\partial p}\right|_{T} = 0. \tag{2.104}$$

et l'expression (2.100) devient :
$$h = h\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} c_{p} dT. \tag{2.105}$$

Ainsi, d'après l'expression (2.98), on obtient :
$$e_{j}^{0} = h_{j}^{0}\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} c_{p,j} dT - p v_{j}^{0}. \tag{2.106}$$

avec $c_{p,j} - c_{v,j} = r_{j}$

et r_{j} la constante de Mariotte $r_{j} = R/M_{j}$, on obtient finalement :
$$e_{j}^{0} = e_{j}^{0}\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} c_{v,j} dT. \tag{2.107}$$

$\int_{T_{ref}}^{T} c_{v,j} dT$ est approchée par une méthode polynomiale.

Energie interne d'un liquide faiblement compressible

En ce qui concerne l'enthalpie massique d'un liquide faiblement compressible, l'expression (2.100) devient :
$$h = h\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} c_{p} dT + \int_{p_{ref}}^{p} \left(v - T \left.\frac{\partial v}{\partial T}\right|_{p} \right) dp. \tag{2.108}$$

Soit
$$h = h\left(T_{ref}, p_{ref}\right) + \int_{T_{ref}}^{T} c_{p} dT + \frac{v_{j,ref}^{0}\left[1 - \alpha_{ref}\left(T - T_{ref}\right)\right]}{\beta} \ln\left[1 - \beta_{ref}\left(p - p_{ref}\right)\right]. \tag{2.109}$$

De même, $\int_{T_{ref}}^{T} c_{p} dT$ est approchée par une méthode polynomiale.

Pour conclure ce Chapitre 2 , dans le cadre de cette étude qui porte sur la simulation numérique des processus microphysiques dans le sillage turbulent d'un avion en vol de croisière, le système d'équations, régissant l'écoulement ,se résume par :

$$
\begin{cases}
\text{Trois équations de conservation de masse:} \\
\dfrac{\partial \rho_{air}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho_{air} - d_{air} \dfrac{\partial \rho_{air}}{\partial x_i} \right) = 0. \\
\dfrac{\partial \rho^v_{H_2O}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho^v_{H_2O} - d^v_{H_2O} \dfrac{\partial \rho^v_{H_2O}}{\partial x_i} \right) = \varpi^v_{H_2o}. \\
\dfrac{\partial \rho^s_{H_2O}}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho^s_{H_2O} - d^s_{H_2O} \dfrac{\partial \rho^s_{H_2O}}{\partial x_i} \right) = \varpi^s_{H_2o}. \\
\text{Trois équations de conservation de la quantité de mouvement:} \\
\dfrac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j \rho u_i \right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \ i = 1,3 \\
\text{Une équation de conservation d'énergie:} \\
\dfrac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho e_t \right) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij} u_i \right) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p u_i \right) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i \right). \\
\text{Une équation de convection diffusion d'un scalaire passif:} \\
\dfrac{\partial \rho z}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i \rho z - d_z \dfrac{\partial z}{\partial x_i} \right) = 0. \\
\text{Deux équations pour le modèle de fermeture (turbulence):} \\
\dfrac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(u \rho k + \varphi_k \right) = \varpi_k. \\
\dfrac{\partial \rho l}{\partial t} + \nabla \cdot \left(u \rho l + \varphi_l \right) = \varpi_l.
\end{cases}
\tag{2.110}
$$

Ce système d'équations peut se mettre sous le formalisme compact suivant :

$$
\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathrm{q} d\Omega = -\int_{\partial\Omega} \left(\mathrm{f} + \varphi \right) n d\partial\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\varpi} d\Omega. \tag{2.111}
$$

avec

$$
\mathrm{q} = \begin{pmatrix} \rho_{i,i=1,3} \\ \rho u_{i,i=1,3} \\ \rho e_t \\ \rho_{z_{k,k=1,3}} \end{pmatrix}, \mathrm{f} = \begin{pmatrix} u\rho_{i=1,3} \\ u_j \rho u_{i,i=1,3} + p \\ u_j \rho e_t + u_j p \\ u_j \rho_{z_{k,k=1,3}} \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{y_{i,i=1,3}} \\ \varphi_{u_{i,i=1,3}} \\ \varphi_{e_t} \\ \varphi_{z_{k,k=1,3}} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varpi} = \begin{pmatrix} \varpi_{y_i} \\ 0 \\ 0 \\ \varpi_{z_k} \end{pmatrix}. \tag{2.112}
$$

L'outil numérique utilisé pour résoudre ce système d'équations est le code CEDRE développé à l'ONERA. Il est utilisé dans de nombreux domaines d'application comme l'aérodynamique, l'aéroacoustique ou bien encore la combustion (Huet, Vuillot et Rahier, 2008), (Murrone et Scherrer, 2005) et (Tesse *et al.*, 2006). Ce dernier permet l'utilisation de maillages non structurés généralisés. Ce type de maillage est le mieux adapté lorsque les géométries à mailler sont

complexes, puisqu'il en facilite la mise en œuvre. Une utilisation pour des études d'écoulements autour d'avions commerciaux, dans un contexte industriel, est ainsi envisageable.

Les méthodes numériques utilisées par cet outil pour la résolution des équations sont présentées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3 METHODES NUMERIQUES

La résolution numérique du système d'équations (2.111) présenté dans le paragraphe 2.3.6 se fait principalement en deux étapes distinctes qui sont la discrétisation spatiale présentée, au paragraphe 3.1, et l'intégration temporelle qui fait l'objet du paragraphe 3.2.

3.1. Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale permet de transformer les équations continues aux dérivées partielles (EDP) de Navier Stokes (système (2.36), paragraphe 2.3.6) en équations différentielles ordinaires (EDO), cf. Annexes. Le système initialement continu devient ainsi discret.

Pour cela, un maillage discret du domaine continu Ω, à modéliser, doit être créé. Ce maillage est constitué d'un nombre fini d'entités géométriques appelées « cellules » ou bien encore « mailles ». Ces cellules sont délimitées par des faces, elles mêmes constituées de sommets ou de points.

Il existe trois principaux types de discrétisation des équations aux dérivées partielles sur un maillage discret en mécanique des fluides :

- Les différences finies. Ces méthodes fonctionnent bien sur des maillages réguliers, et permettent d'atteindre des précisions d'ordre élevé. Elles ne permettent néanmoins pas de s'assurer que les flux intégraux sont conservés. De même, elles ne permettent pas de traiter des géométries complexes.
- Les volumes finis. On utilise la forme intégrale des équations sur chaque volume élémentaire. Cela garantit la conservation des flux et permet de traiter des géométries complexes, mais il est plus difficile d'augmenter l'ordre des schémas.
- Les éléments finis. Ces méthodes exigent l'introduction d'une fonction test (un polynôme d'ordre faible), les équations sont ensuite intégrées et les résidus minimisés. Cela permet de traiter des géométries complexes (maillages composés de tétraèdres), et la validité mathématique des équations est bien démontrée.

Le code CEDRE, choisi pour mener cette étude, est basé sur une approche « volumes finis » qui consiste à effectuer les bilans des différentes grandeurs de l'écoulement sur des volumes de contrôle. Ces derniers peuvent être définis de plusieurs façons :

- Les volumes de contrôle coïncident avec les cellules du maillage. Il s'agit d'une approche « cell centered ». Les quantités q sont alors les quantités conservatives moyennes de la cellule. Cette approche est la plus simple car elle ne nécessite pas la reconstruction d'un maillage dit « dual ».
- Le volume de contrôle est associé à une arête. Il est alors constitué de la réunion des barycentres des triangles adjacents à cette arrête avec les sommets de celle-ci. On parle alors d'éléments barycentriques.
- Une troisième méthode consiste à associer à chaque sommet du maillage le volume s'appuyant sur les centres de gravité des triangles ayant ce sommet en commun.
- La quatrième méthode est une variante de la troisième. En effet, est associé à chaque sommet du maillage le volume s'appuyant sur les milieux des arrêtes ayant ce sommet en commun.

Le code CEDRE utilise une approche « cell centered ».

3.1.1. Espace discret et bilan discret

Afin de résoudre numériquement l'évolution de l'écoulement dans le domaine Ω délimité par la surface $\partial\Omega$, ce dernier est découpé en un nombre fini de sous ensembles appelés mailles ou cellules. Ces mailles permettent de définir des volumes de contrôle sur lesquels peuvent être effectués les bilans des différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement, cf. paragraphe 3.1.

Pour une cellule interne i du domaine, on note v_i l'ensemble des cellules ayant une face en commun avec cette dernière. Cet ensemble constitue le premier voisinage de la cellule i. Par extension, le second voisinage de la cellule i sera l'ensemble des cellules ayant une face en commun avec les cellules appartenant au premier voisinage. Le domaine étudié est alors constitué de m_{int} cellules internes ainsi que m_{lim} cellules limites. Ces cellules limites sont fictives puisqu'elles ne font pas partiez du domaine Ω proprement dit mais sont nécessaires afin de rendre compte de l'interaction de l'écoulement avec l' « extérieur ». L' « extérieur » peut être représenté par une condition limite de type paroi si l'on cherche à étudier l'interaction fluide paroi par exemple (Figure 3.1).

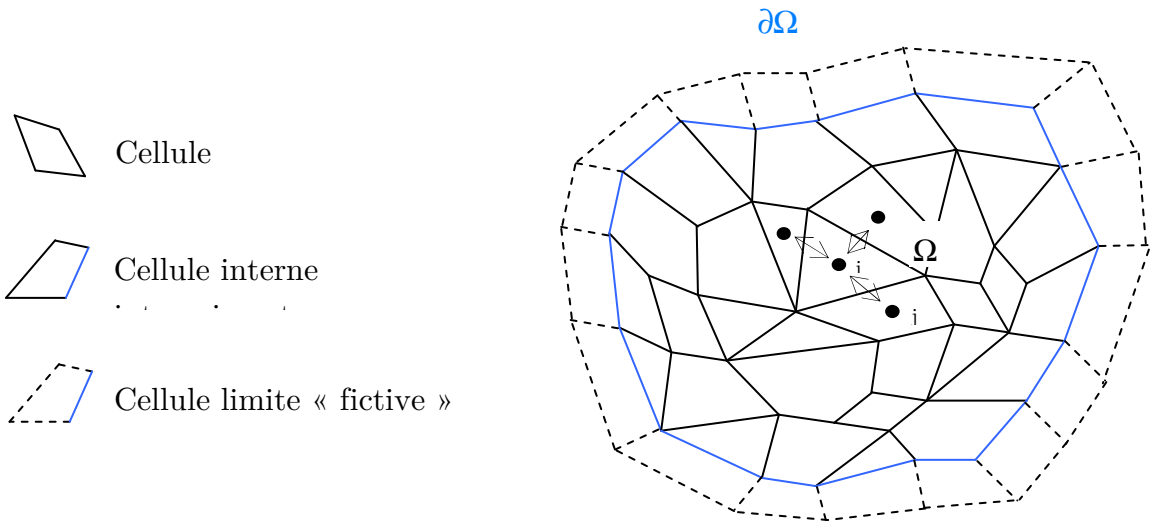

Figure 3.1 : représentation du découpage du domaine Ω en un nombre fini de cellules

Le système d'équations (2.111) sur le volume de contrôle V_i constitué par la cellule i peut alors s'écrire :

$$\overline{V_i \mathrm{q}_i}^{\bullet} = \sum_j \left(\mathrm{E}_{i \leftarrow j} + \Phi_{i \leftarrow j} \right) + V_i \boldsymbol{\varpi}_i, \tag{3.1}$$

$\mathrm{E}_{i \leftarrow j}$, $\Phi_{i \leftarrow j}$ sont respectivement les flux hyperboliques (Euler) et les flux dissipatifs (Navier Stokes) entrant dans la cellule i en provenance de la cellule voisine j et $\boldsymbol{\varpi}_i$ la densité moyenne de source :

$$\mathrm{E}_{i \leftarrow j} = -\int_{A_{ij}} \mathrm{f} \mathrm{n} dA, \quad \Phi_{i \leftarrow j} = -\int_{A_{ij}} \varphi \mathrm{n} dA, \quad V_i \boldsymbol{\varpi}_i = \int_{V_i} \boldsymbol{\varpi} dV. \tag{3.2}$$

Les sources $V_i \boldsymbol{\varpi}_i$ peuvent, en pratique, être évaluées comme une somme de contributions dans des sous cellules de volume V_{ij} associées aux faces où la densité moyenne de source est $\boldsymbol{\varpi}_{ij}$:

$$V_i \boldsymbol{\varpi}_i = \sum_j V_{ij} \boldsymbol{\varpi}_{ij}. \tag{3.3}$$

En adoptant cette formulation, les bilans (3.1) deviennent :

$$\overline{V_i \mathrm{q}_i}^{\bullet} = \sum_j \left(\mathrm{E}_{i \leftarrow j} + \Phi_{i \leftarrow j} + V_{ij} \boldsymbol{\varpi}_{ij} \right). \tag{3.4}$$

En supposant le maillage fixe on a :

$$V_i \overline{\mathrm{q}_i}^{\bullet} = \sum_j \left(\mathrm{E}_{i \leftarrow j} + \Phi_{i \leftarrow j} + V_{ij} \boldsymbol{\varpi}_{ij} \right). \tag{3.5}$$

Cette façon de procéder permet de réunir dans une même unité de traitement les flux et les sources.

Pour les cellules limites, indicées l, l'évolution des états q_l est régie par :

$$\overline{\mathrm{T}_{\Lambda_l}\dot{\mathrm{q}}_l} = \Lambda_l, \tag{3.6}$$

T_{Λ_l} est une matrice de dimension n_q contenant les temps de relaxation associés à la cellule limite l.

Λ_l est un vecteur de dimension n_q contenant les paramètres liés à la condition limite utilisée.

De même en supposant que les temps caractéristiques ne varient pas,

$$\mathrm{T}_{\Lambda_l}\overline{\dot{\mathrm{q}}_l} = \Lambda_l. \tag{3.7}$$

Cette écriture est valable pour des conditions limites de type entrée/sortie, paroi et symétrie notamment.

Les équations différentielles ordinaires valables pour les cellules internes (3.5) et aux limites (3.7) peuvent se rassembler au sein d'un formalisme global :

$$\mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}(\mathrm{Q}). \tag{3.8}$$

La matrice M est diagonale par blocs. Elle contient les volumes des cellules internes et les temps caractéristiques aux limites :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} V_1\mathrm{I}_{n_q} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2\mathrm{I}_{n_q} & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & V_{m_{\mathrm{int}}}\mathrm{I}_{n_q} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \mathrm{T}_{\Lambda,m_{\mathrm{int}}+1} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots & & \mathrm{T}_{\Lambda,m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}} \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

V_i représente le volume de la cellule i, I_{n_q} est la matrice identité de dimension n_q.

n_q représente le nombre de grandeurs conservées. Dans notre étude $n_q = 10$. Il y a en effet trois équations de conservation de la masse pour l'air, la vapeur d'eau et l'eau condensée (les grandeurs conservées sont ρ_{air}, $\rho^v_{H_2O}$ et $\rho^s_{H_2O}$), trois équations de conservation de la quantité de mouvement ($\rho u_1, \rho u_2$ et ρu_3), une équation de conservation de l'énergie totale (ρ_{e_t}), deux équations pour le modèle de turbulence (ρk et ρl) et enfin une équation pour le scalaire passif représentant les suies (ρz).

Q représente l'ensemble des quantités conservées. Il s'agit d'un vecteur contenant $(m_{\mathrm{int}} + m_{\mathrm{lim}})$ blocs. Chacun de ces blocs ayant une dimension n_q.

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \mathrm{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Q}_{m_{\text{int}}+m_{\text{lim}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_q} \end{pmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{n_q} \end{pmatrix}_{m_{\text{int}}+m_{\text{lim}}} \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Ainsi, Q_1 est un vecteur contenant l'ensemble des quantités conservées de la cellule numéroté 1 soit n_q grandeurs.

On utilisera indifféremment le vecteur des quantités conservées Q ou le vecteur des variables primaires U puisqu'il y a équivalence entre ces deux vecteurs.

F représente les déséquilibres. Il s'agit également d'un vecteur contenant $\left(m_{\text{int}} + m_{\text{lim}}\right)$ blocs.

$$\mathrm{F} = \begin{bmatrix} \mathrm{F}_{1\leftarrow j} \\ \vdots \\ \mathrm{F}_{m_{\text{int}}\leftarrow j} \\ \mathrm{F}_{m_{\text{int}}+1\leftarrow j} \\ \vdots \\ \mathrm{F}_{m_{\text{int}}+m_{\text{lim}}\leftarrow j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{n_q} \end{pmatrix}_{1\leftarrow j} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{F}_{n_q} \end{pmatrix}_{m_{\text{int}}\leftarrow j} \\ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{n_q} \end{pmatrix}_{m_{\text{int}}+1\leftarrow j} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{n_q} \end{pmatrix}_{m_{\text{int}}+m_{\text{lim}}\leftarrow j} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

De même, $\mathrm{F}_{1\leftarrow j}$ est un vecteur contenant l'ensemble des flux de la cellule numéroté 1 soit n_q grandeurs. Ces flux proviennent de la contribution de chaque face j constituant la cellule 1.

$\mathrm{F}_{m_{\text{int}}+1\leftarrow j}$ est un vecteur contenant l'ensemble des temps caractéristiques lié à la cellule limite numéroté $m_{\text{int}} + 1$.

$\left(\mathcal{F}_k\right)_{i\leftarrow j} = \left(f_k\right)_{i\leftarrow j} + \left(\varphi_k\right)_{i\leftarrow j} + \left(\varpi_k\right)_{i\leftarrow j}$ représente la somme des contributions des flux Euler, Navier Stokes et sources de la quantité conservative k des faces j constituants la cellule i.

La discrétisation spatiale permet d'évaluer les déséquilibres c'est-à-dire les flux aux interfaces. Elle peut s'effectuer à différents ordres. Plus l'ordre est élevé et plus l'évaluation des flux (déséquilibres) est précise.

Evaluer les flux à l'ordre 1 de la cellule i nécessite seulement la connaissance des grandeurs conservatives dans les cellule i.

Evaluer les flux à l'ordre 2 de la cellule i nécessite la connaissance des grandeurs conservatives dans les cellule i et dans les cellules de son premier voisinage v_i.

Evaluer les flux à l'ordre 3 de la cellule i nécessite la connaissance des grandeurs conservatives dans les cellule i, dans les cellules de son premier voisinage v_i ainsi que dans les cellules constituants le premier voisinage de toutes les cellules appartenant à v_i.

Ainsi, monter en ordre nécessite de connaître toujours plus loin les cellules voisines de la cellule i.

En maillage non structuré, utilisé dans cette étude, il est relativement facile de déterminer les cellules du premier voisinage de la cellule i mais il est extrêmement complexe de déterminer son deuxième voisinage. C'est pourquoi, la discrétisation spatiale est ici d'ordre 2.

Elle se décompose en trois étapes successives : l'interpolation des grandeurs moyennes de maille à droite et à gauche des interfaces, l'évaluation de ces grandeurs aux interfaces et enfin le calcul du flux numérique proprement dit. Ces étapes sont détaillées aux paragraphes 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.1.2.3 et 3.1.2.4.

3.1.2. Evaluation des flux numériques

3.1.2.1. Méthode d'interpolation des grandeurs

Cette étape permet d'interpoler la valeur moyenne des grandeurs conservatives connue au centre des cellules au niveau de leur interface commune.

En maillages structurés généraux, la face constitue l'entité géométrique de base. En effet, contrairement aux mailles qui peuvent posséder un nombre quelconque de faces, une face sera toujours en contact avec deux cellules. Elle constitue alors leur interface commune. En outre, c'est au niveau des faces que se pose le problème de Riemann et du calcul des flux.

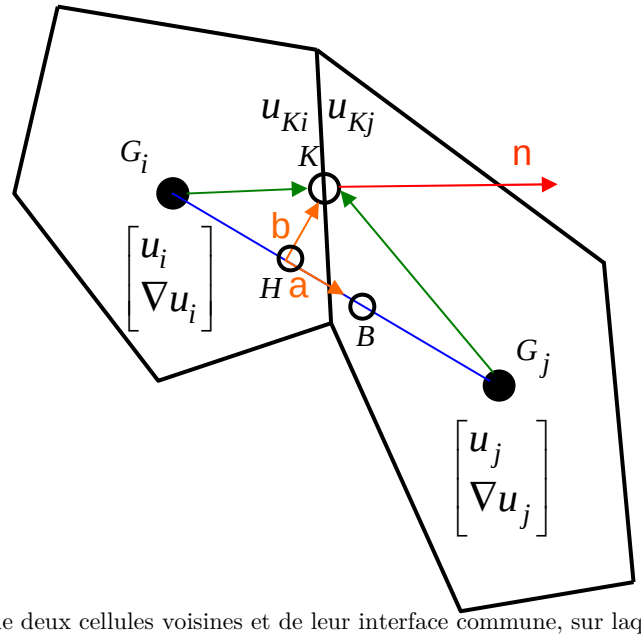

Figure 3.2 : Schématisation de deux cellules voisines et de leur interface commune, sur laquelle doit être évalués les flux

La Figure 3.2 permet d'illustrer un certain nombre de points possédant des caractéristiques géométriques particulières :

- G_i et G_j sont les centres de gravité des cellules i et j.
- K est le centre de la face commune aux cellules i et j, d'aire A et de normale extérieure $\mathtt{n}$.
- H est le point de courbure de la face, défini à partir de la projection de K sur la droite $\left(G_iG_j\right)$.

Y sont également représentés les vecteurs unitaires orthogonaux $\mathtt{a}$ et $\mathtt{b}$, respectivement colinéaires aux droites $\left(G_iG_j\right)$ et $\left(HK\right)$.

A partir de ces entités, trois grandeurs scalaires sont construites afin d'apprécier les irrégularités géométriques locales, au niveau de chaque interface :

- La non orthogonalité : $\alpha_1 = 1 - \left|\cos\left(a,n\right)\right|$, ce critère permet de savoir si la droite reliant les centres de gravité des deux cellules est orthogonale à leur interface commune.
- La courbure : $\alpha_2 = 1 - \dfrac{HK}{G_iG_j}$, ce critère permet d'évaluer la courbure de la courbe reliant les points K, G_i et G_j. Plus cette valeur est importante et moins ces points sont alignés.
- L'hétérogénéité : $\alpha_3 = \dfrac{\left|HG_i - KG_j\right|}{G_iG_j}$, ce critère permet d'évaluer la différence de dimensions entre les deux cellules.

Il est important de noter que les méthodes numériques, développées ci-après, sont optimales dans le cas d'un maillage uniforme où ces trois critères géométriques sont nuls. En maillage non structuré

ces critères peuvent avoir des valeurs importantes et dégrader la qualité de grandeurs aux interfaces et donc la solution recherchée (Leterrier, 2003).

Interpolation linéaire d'ordre 2

L'interpolation consiste à obtenir les états u_{Ki} et u_{Kj} à droite et à gauche de l'interface commune aux deux cellules sur laquelle doit être calculé le flux. L'état u_i correspond à l'état moyen de la cellule i. L'état u_j correspond à l'état moyen de la cellule j.

Les grandeurs u correspondent aux variables naturelles qui se déduisent des variables conservatives q :

$$q = q(u) \Leftrightarrow u = u(q). \tag{3.12}$$

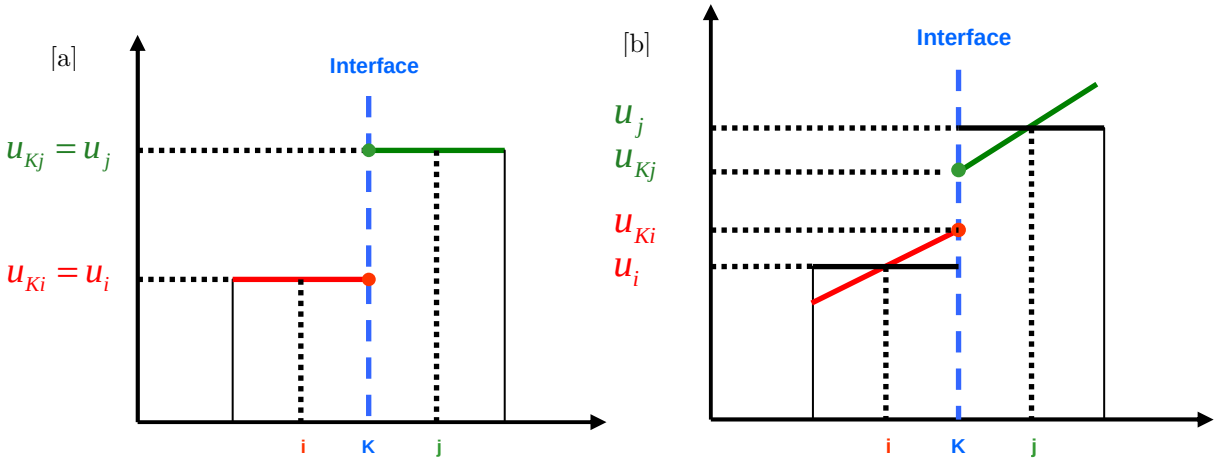

Figure 3.3 : Schéma d'interpolation des états à l'interface.[a] : Interpolation d'ordre 1. [b] : Interpolation d'ordre 2

Les seules quantités connues sont les grandeurs moyennes u_i et u_j de part et d'autre de la face sur laquelle doit être évalués les flux. Lorsque les flux à l'interface sont évalués à partir des seules grandeurs u_i et u_j, aucune opération d'interpolation n'est nécessaire, et la discrétisation spatiale est dite « d'ordre 1 », Figure 3.3[a]. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle rend les schémas de discrétisation spatiale très diffusifs, cf. Annexe. Afin d'éviter une diffusion numérique excessive qui peut être souvent rédhibitoire, il est nécessaire de monter en ordre. Pour cela, les grandeurs moyennes des cellules u_i et u_j sont interpolées linéairement jusqu'à l'interface, là où doivent être calculés les flux (résolution du problème de Riemann), Figure 3.3[b].

Le modèle fondamental d'interpolation adopté est une représentation linéaire par cellule. Ce dernier s'écrit en un point quelconque M de la cellule de coordonnées r et en prenant comme origine un point quelconque X fixe de coordonnées r_X :

$$u(r) = u(r_X) + \nabla u(r_X)(r - r_X). \tag{3.13}$$

En intégrant l'expression (3.13) sur le volume de contrôle, on obtient :

$$\frac{1}{V}\int_V \mathrm{u}(\mathrm{r})dV = \mathrm{u}(\mathrm{r}_X) + \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}(\mathrm{r}_X)\left(\frac{1}{V}\int_V \mathrm{r}dV - \mathrm{r}_X\right). \tag{3.14}$$

Or par définition $\bar{\mathrm{u}} = \frac{1}{V}\int_V \mathrm{u}(\mathrm{r})dV$ et $\frac{1}{V}\int_V \mathrm{r}dV = \mathrm{r}_G$ où G est le centre de gravité du volume de contrôle.

D'où,
$$\bar{\mathrm{u}} = \mathrm{u}(\mathrm{r}_X) + \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}(\mathrm{r}_X)(\mathrm{r}_G - \mathrm{r}_X). \tag{3.15}$$

Ainsi, la moyenne de maille s'identifie à la valeur prise au centre de gravité de la cellule ($\bar{\mathrm{u}} = \mathrm{u}(\mathrm{r}_X)$ lorsque $\mathrm{r}_G = \mathrm{r}_X$)

L'expression (3.13) se réécrit alors :
$$\mathrm{u}(\mathrm{r}) = \mathrm{u}_G + \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_G(\mathrm{r} - \mathrm{r}_G). \tag{3.16}$$

La valeur u_G au centre de gravité s'identifie à la moyenne de maille donnée par la résolution du système des équations de Navier Stokes. Les gradients moyens de maille $\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_G$ sont des variables dérivées qui doivent être évaluées et font l'objet de la section suivante.
$$\mathrm{u}_{Ki} = \mathrm{u}_i + \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_i \cdot G_iK \quad \text{et} \quad \mathrm{u}_{Kj} = \mathrm{u}_j + \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_j \cdot G_jK. \tag{3.17}$$

Calcul du gradient moyen de maille

Afin de déterminer les grandeurs u_{Ki} et u_{Kj} il est donc nécessaire d'évaluer le gradient moyen de maille. Plusieurs méthodes existent notamment la méthode de Green et celle des moindres carrés qui sont présentées ci-dessous.

- Formules de Green :

La méthode est issue du théorème du flux-divergence, aussi appelé le théorème de Green-Ostrogradski. Ce dernier relie la divergence d'un champ vectoriel à la valeur de l'intégrale de surface du flux défini par ce champ. Il énonce ainsi que le flux d'un vecteur à travers une surface fermée est égal à l'intégrale de la divergence de ce vecteur sur le volume délimité par cette surface. Soit :
$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathrm{u}(r)\mathrm{n}dA. \tag{3.18}$$

En supposant u continue le long du contour $\partial\Omega$, on peut écrire :
$$V_i\overline{\nabla\mathrm{u}} = \sum_{j\in v_i}\int_{A_{ij}} \mathrm{u}(r)\mathrm{n}dA. \tag{3.19}$$

On notera que les gradients moyens de maille seront assimilés au gradient calculé au centre de gravité de la cellule.

Or, on peut exprimer $\mathrm{u}(r)$ sur chaque face A_{ij} en fonction de sa valeur au centre K de la face :
$$\mathrm{u}(r) = \mathrm{u}_k + \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_k(\mathrm{r} - \mathrm{r}_k) \tag{3.20}$$

Ainsi, (3.19) s'écrit :

$$V_i\overline{\nabla \mathrm{u}} = \sum_{j\in v_i}\int_{A_{ij}} \left[\mathrm{u}_k + \nabla \mathrm{u}_k\left(\mathrm{r}-\mathrm{r}_k\right)\right]\mathrm{n}\,dA. \tag{3.21}$$

Afin de décomposer cette expression en trois sous ensembles, dont certains pourront être négligés dans certaines configurations, on interpole une seconde fois pour se placer au point de courbure H :

$$\mathrm{u}_H = \mathrm{u}_k + \nabla \mathrm{u}_k\left(\mathrm{r}_H - \mathrm{r}_k\right) = \mathrm{u}_k + \left(HK\right)\nabla \mathrm{u}_k\mathrm{b}. \tag{3.22}$$

Avec u_H la moyenne barycentrique de u_i et u_j.

$$\mathrm{u}_H = \frac{HG_j}{G_iG_j}\mathrm{u}_i + \frac{HG_i}{G_iG_j}\mathrm{u}_j. \tag{3.23}$$

D'où,

$$\mathrm{u}_k = \mathrm{u}_H - \left(HK\right)\nabla \mathrm{u}_k\mathrm{b}. \tag{3.24}$$

(3.21) s'écrit alors :

$$V_i\overline{\nabla \mathrm{u}} = \sum_{j\in v_i}\int_{A_{ij}} \left[\mathrm{u}_H - \left(HK\right)\nabla \mathrm{u}_k\mathrm{b} + \nabla \mathrm{u}_k\cdot\left(\mathrm{r}-\mathrm{r}_k\right)\right]\mathrm{n}\,dA. \tag{3.25}$$

Les deux premiers membres de cette intégrale ne dépendant pas de la variable d'intégration, on a :

$$V_i\overline{\nabla \mathrm{u}} = \sum_{j\in v_i}\mathrm{u}_H A_{ij}\mathrm{n} + \sum_{j\in v_i}\left(HK\right)\nabla \mathrm{u}_k\mathrm{b}A_{ij}\mathrm{n} + \sum_{j\in v_i}\int_{A_{ij}}\left[\nabla \mathrm{u}_k\left(\mathrm{r}-\mathrm{r}_k\right)\right]\mathrm{n}\,dA. \tag{3.26}$$

Le premier terme du second membre ne dépend que de la géométrie, de la moyenne de la maille courante ainsi que des moyennes dans les cellules voisines. Le deuxième terme s'annule lorsque la courbure est nulle, c'est-à-dire lorsque le point de courbure H est confondu avec le centre de la face A_{ij}. Pour un maillage quelconque, le deuxième et le troisième terme ne peuvent pas être négligés. Il faut donc en tenir compte pour évaluer correctement le gradient moyen de maille. Or le gradient $\nabla \mathrm{u}_k$ présent au deuxième et troisième terme est égal, à l'ordre 1, au gradient moyen de la maille. La substitution du gradient de maille en G au gradient en K, se traduit donc par une erreur à l'ordre 1 mais donne un résultat consistant, cf. Annexe.

Le calcul de $\overline{\nabla \mathrm{u}}$ s'effectue en résolvant un système linéaire de taille (3×3) pour chaque cellule. Néanmoins, des maillages comportant des effets de courbure importants peuvent conduire à une matrice singulière. Pour éviter de se trouver dans cette situation, on applique une limitation au terme de courbure rendant alors le calcul du gradient non-consistant.

- Formules des moindres carrées :

Cette méthode constitue une alternative à la méthode de Green et consiste à rechercher la reconstruction linéaire qui minimise, au sens de la norme euclidienne, la différence entre les valeurs interpolées par la reconstruction et les valeurs discrètes utilisées pour l'évaluation des flux. Ce procédé, introduit par T.J. Barth (Barth et Frederickson, 1990) et détaillée dans la thèse de N. Leterrier (Leterrier, 2003) permet, dans le cas simplifié de l'équation de convection-diffusion, d'avoir une reconstruction discontinue des gradients de maille proche, en énergie, de sa contrepartie continue.

Par cette méthode, le calcul du gradient est toujours consistant. Cependant, cette dernière peut se révéler parfois instable, notamment sur des maillages triangulaires ou composés de tétraèdres. On peut empêcher ces instabilités a posteriori en appliquant une limitation isotrope au gradient de maille calculé, mais le limiteur prévu à cet effet par P. Villedieu (Villedieu, 1996) induit alors une dissipation supplémentaire très importante qui affecte significativement la précision de la méthode numérique.

Limiteur

Les schémas dits à « haute précision » c'est-à-dire d'ordre 2 ou supérieur en espace, permettant de palier à une diffusion excessive des schémas d'ordre 1, sont peu stables et engendre des phénomènes d'oscillation dans la solution. En effet, les moyennes de face u_{K_i} et u_{K_j} peuvent ne pas respecter la monotonie entre u_i et u_j. Le limiteur de pente a pour but de remédier à ces défauts. Il a été introduit par Van Leer en 1977 (Van Leer, 1977). Il consiste à introduire des fonctions non linéaires Ψ destinées à limiter les pentes des interpolations et à ainsi rendre, aux schémas numériques, leur caractère TVD (Total Variation Diminuishing), (Hirsh, 1988). Cela permet d'assurer la monotonie entre les valeurs moyennes et les valeurs interpolées, cf. Figure 3.4.

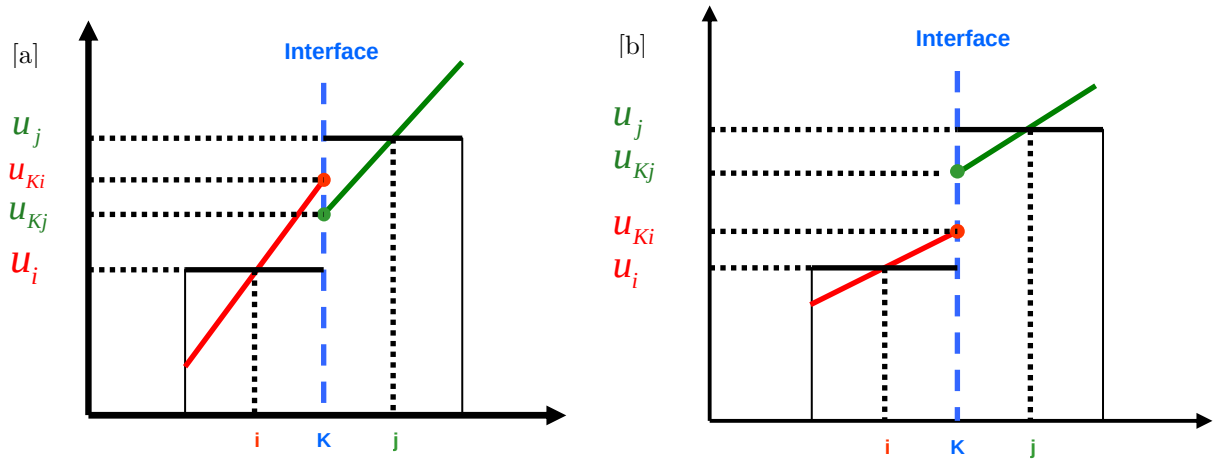

Figure 3.4 : Schéma d'interpolation d'ordre 2 des états à l'interface. [a] : sans limiteur. [b] : avec limiteur

Les valeurs à gauche et à droite limitées s'écrivent :

$$\mathrm{u}_{K_{i,l}} = \mathrm{u}_{K_i} - \Psi\left(\mathrm{u}_B - \mathrm{u}_{K_i}, \mathrm{u}_{K_i} - \mathrm{u}_i\right)\left(\mathrm{u}_B - \mathrm{u}_{K_i}\right). \tag{3.27}$$

$$\mathrm{u}_{K_{j,l}} = \mathrm{u}_{K_j} - \Psi\left(\mathrm{u}_B - \mathrm{u}_{K_j}, \mathrm{u}_{K_j} - \mathrm{u}_j\right)\left(\mathrm{u}_B - \mathrm{u}_{K_j}\right). \tag{3.28}$$

où u_B est l'une des moyennes définies par (3.29)

La forme de la fonction Ψ dépend du limiteur utilisé.

Limiteur minmod : $\psi\left(\mathrm{X},\mathrm{Y}\right) = \min\left(2C-1, \dfrac{\left|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\right|}{\left|\mathrm{X}\right|} - 1\right)$.

Limiteur Superbee : $\psi\big(\mathrm{X},\mathrm{Y}\big) = \min\left[\max\left(2C-1,3-\dfrac{\big|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\big|}{\big|\mathrm{X}\big|}\right),\dfrac{\big|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\big|}{\big|\mathrm{X}\big|}-1\right]$.

Limiteur Van Leer : $\dfrac{C\big|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\big|-\big(1-C\big)\big|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\big|}{C\big|\mathrm{X}+\mathrm{Y}\big|+\big(1-C\big)\big|\mathrm{X}-\mathrm{Y}\big|}$.

C est une constante appelée paramètre de décentrement qui prend généralement la valeur $0,5$

3.1.2.2. Evaluation des états aux interfaces

La moyenne arithmétique entre les états u_i et u_j constitue une bonne approche pour obtenir très simplement et à moindre coût, une évaluation modeste de l'état intermédiaire. La valeur de la moyenne arithmétique u_B est donnée par la relation :

$$\mathrm{u}_B = \alpha_i \mathrm{u}_i + \alpha_j \mathrm{u}_j. \tag{3.29}$$

Avec $\alpha_i + \alpha_j = 1$ et $\alpha_i \geq 0, \alpha_j \geq 0$.

Nous nous intéressons ici à deux choix particulier des coefficients α_i et α_j :

- Dans le premier cas, B est le milieu de G_iG_j .

$$\alpha_i = \alpha_j = 1/2. \tag{3.30}$$

L'ordre 2 est atteint si le maillage est homogène ($HG_i = HG_j$) et si la courbure est nulle ($HK = 0$)

- Dans le second cas, B s'identifie à H , c'est une moyenne barycentrique.

$$\alpha_i = \frac{HG_j}{G_iG_j} \quad \text{et} \quad \alpha_j = \frac{HG_i}{G_iG_j}. \tag{3.31}$$

L'ordre 2 est atteint dès que la courbure est nulle. Ainsi, cette approximation de la moyenne de face est la meilleure qu'il soit possible de construire à partir des seuls états u_i et u_j .

Malgré sa précision en général assez médiocre, la moyenne arithmétique est intéressante puisque :

- Son calcul est très simple (il ne fait pas intervenir les gradients moyens de maille) et pourra être utilisé dans tous les cas où une précision modeste suffit comme l'évaluation de quantités dépendant peu de l'état, par exemple les coefficients de diffusion.
- Une telle moyenne est toujours comprise entre les états u_i et u_j . Elle est donc monotone, ce qui rend son usage utile comme valeur de référence pour les limiteurs par exemple.
- Moyennant certaines précautions, elle pourra servir dans l'évaluation des gradients moyens de mailles par la formule de Green.

3.1.2.3. Détermination des flux hyperboliques

Parmi les nombreuses méthodes existant pour le calcul des flux Euler f , cf. paragraphe 3.1.1, nous nous intéressons ici aux schémas de type flux difference splitting (FDS) qui utilisent un opérateur de décentrement, calculé sur un état intermédiaire entre u_{K_i} et u_{K_j}. L'expression de cet état intermédiaire noté u_K est donné dans le paragraphe 3.1.2.2. Il s'agit de schémas dérivés du schéma de Roe.

Le flux Euler calculé à l'interface, suivant un schéma de Roe f^{Roe}, est donné par :

$$\mathrm{f}^{Roe} = \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_i}\right) + \mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_j}\right)}{2} + \left|\mathrm{J}\left(\mathrm{u}_K\right)\right| \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_i}\right) - \mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_j}\right)}{2}. \tag{3.32}$$

Le flux Euler calculé à l'interface, suivant un schéma de ODF f^{ODF}, est donné par :

$$\mathrm{f}^{ODF} = \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_i}\right) + \mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_j}\right)}{2} + \mathrm{sgn}\left(\mathrm{J}\left(\mathrm{u}_K\right)\right) \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_i}\right) - \mathrm{f}\left(\mathrm{u}_{K_j}\right)}{2}. \tag{3.33}$$

la décomposition du jacobien introduite par D. Dutoya et M.P. Errera (Dutoya et Errera, 1992) permet un calcul relativement simple du Jacobien.

Ainsi, $\mathrm{F}_{i \leftarrow j} = \mathrm{F}_{i \leftarrow j}\left(\mathrm{u}_{K_i}, \mathrm{u}_{K_j}, \mathrm{u}_K\right)$.

3.1.2.4. Détermination des flux diffusifs

Les Flux diffusifs $\Phi_{i \leftarrow j}$, cf. paragraphe3.1.2.1, sont calculés à partir du gradient à l'interface $\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_k$

Evaluation du gradient d'interface

L'évaluation des flux numériques de Navier Stokes exige la connaissance des gradients aux interfaces. Une première évaluation possible repose sur une simple moyenne arithmétique des gradients identique à celle définie pour le calcul de l'état u_K :

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_B = \alpha_i \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_i + \alpha_j \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_j. \tag{3.34}$$

Plus précisément, on prendra ici la moyenne barycentrique (pondération au barycentre H) qui donne la meilleure précision soit :

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_H = \frac{HG_j}{G_iG_j} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_i + \frac{HG_i}{G_iG_j} \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_j. \tag{3.35}$$

Afin de monter en précision, de nombreux schémas ont été élaborés. Néanmoins, ces derniers exigent une régularité minimale du maillage et sont non applicables sur des maillages non structurés généralisés, cf. paragraphe 3.1.1. Dans son travail de Thèse, N. Leterrier (Leterrier, 2003) propose un schéma suffisamment polyvalent pour pouvoir s'adapter à n'importe quel type de maillage non structuré et qui a la particularité d'être aisément paramétrable selon les irrégularités

locales du maillage. Cela permet d'éviter que des singularités n'entraînent des instabilités ou des pertes de précision. La forme de schéma d'interpolation aux interfaces est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_K = \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_H + \theta_g \left[\frac{\mathrm{u}_j - \mathrm{u}_i}{G_i G_j} - \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_H \mathrm{a} \right] \nu_g . \tag{3.36}$$

où a est le vecteur unitaire du segment $G_i G_j$. ν_g et θ_g sont des variables locales. Ces variables locales sont susceptibles de changer à chaque interface considérée, ce qui permet de construire des schémas adaptatifs aux irrégularités locales. Cette famille de schémas à deux paramètres est applicable en dimension quelconque.

Le schéma pour la diffusion de termes scalaires est donné par :

$$\boldsymbol{\nabla}u_K \mathrm{n} = \boldsymbol{\nabla}u_H \mathrm{n} + \frac{\theta_0}{\mathrm{a\,n}} \left[\frac{u_j - u_i}{G_i G_j} - \boldsymbol{\nabla}u_H \mathrm{a} \right]. \tag{3.37}$$

θ_0 est un réel constant pour tout le maillage.

Le schéma pour la diffusion d'un vecteur est donné par :

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_K = \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_H + \frac{\theta_0}{\left(\mathrm{a\,u}\right)^2} \left[\frac{\mathrm{u}_j - \mathrm{u}_i}{G_i G_j} - \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_H \mathrm{a} \right] \mathrm{a}. \tag{3.38}$$

Les coefficients des lois physiques (viscosité, conductivité thermique, diffusion des espèces) sont, quant à eux, évalués à l'état moyen u_K.

Ainsi, $\Phi_{i \leftarrow j} = \Phi_{i \leftarrow j}\left(\mathrm{u}_K, \boldsymbol{\nabla}\mathrm{u}_k\right)$

La discrétisation spatiale du système (3.8) est terminée, tous les termes dépendant de l'espace sont désormais connus. Le système ne dépend plus que de la variable temps t. L'intégration temporelle du système peut alors être effectuée. Elle fait l'objet du paragraphe suivant 3.2.

3.2. Intégration temporelle

L'intégration temporelle a pour but de résoudre le système d'équations ordinaires (3.8) en remplaçant la solution exacte $\mathrm{Q}(t)$ par une suite de valeurs discrètes. Entre les deux instants t^n et t^{n+1}, l'intégration temporelle de (3.8) consiste à évaluer :

$$\mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathrm{F}(\mathrm{U})\, dt. \tag{3.39}$$

avec $\dot{\mathrm{Q}} = \dfrac{\mathrm{Q}^{n+1} - \mathrm{Q}^n}{\Delta t}$ et $\Delta t = t^{n+1} - t^n$.

Il existe de nombreuses méthodes numériques pour intégrer ce système. Parmi elles, on peut distinguer tout d'abord les méthodes dites « explicites » des méthodes « implicites ». Ces deux méthodes peuvent être à un pas, multi évaluations, ou multi pas (Cf. Figure 3.5). Les méthodes à

un pas effectuent l'intégration du système en utilisant seulement les états aux instants physiques t^n et t^{n+1}, contrairement aux méthodes multi pas qui utilisent des instants antérieurs à t^n. Les méthodes à un pas peuvent néanmoins gagner en précision en utilisant des états intermédiaires calculés entre les temps t^n et t^{n+1} (multi évaluations). Ces états intermédiaires n'ont pas de signification physique mais permettent d'obtenir un meilleure évaluation de l'état au temps t^{n+1}. A la différence des méthodes à un pas, les méthodes multi pas nécessitent autant de conditions initiales qu'ils n'ont de pas. Ainsi, une méthode à deux pas aura besoin de deux conditions initiales. Ces conditions initiales supplémentaires, qui n'ont, elles non plus, pas de signification physique, doivent être correctement choisies pour qu'elles n'induisent pas de perturbations dans la solution calculée.

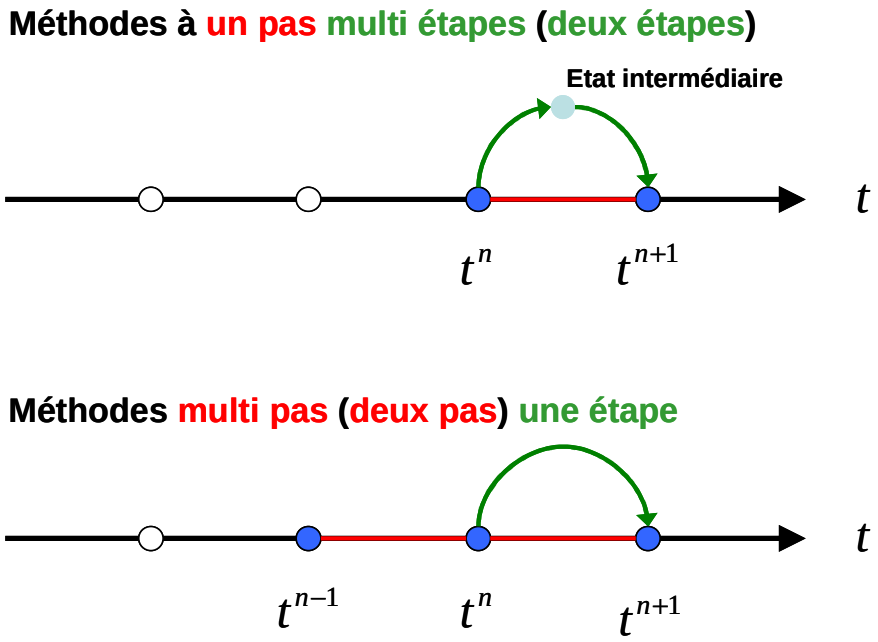

Figure 3.5 : Schématisation des méthodes à un pas multi étapes et des méthodes multi pas à une étape

3.2.1. Méthodes explicites

Ces méthodes sont les plus immédiates et les plus simples à mettre en œuvre puisque le calcul de l'état au temps t^{n+1} ne fait intervenir que l'état au temps t^n. L'inconvénient de ces méthodes est leur limite de stabilité souvent très réduite car fortement conditionnée par une contrainte dite CFL (Courant Friedrichs lewy). Pour un problème monodimensionnel, où la vitesse convective est notée u, celle du son c et où la taille de maille est Δx, ce nombre s'écrit :

$$CFL = \Delta t \frac{u + c}{\Delta x}. \tag{3.40}$$

Le pas de temps Δt doit alors respecter, en tout point du domaine de calcul :

$$\Delta t < CFL_{max}\,\frac{\Delta x}{u+c}. \tag{3.41}$$

La méthode explicite la plus connue est celle d'Euler qui s'écrit :

$$\mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{U}^n\right) \tag{3.42}$$

La matrice M étant diagonale, la résolution de ce système (3.42) ne nécessite pas une mise en œuvre lourde et coûteuse. Néanmoins, la méthode d'Euler est peu précise car seulement d'ordre 1 en temps et son domaine de stabilité est extrêmement réduit.

La méthode de Runge Kutta propose, en plus du schéma Euler, une évaluation supplémentaire entre les temps t^n et t^{n+1}. Il s'agit donc d'une méthode à un pas et deux étapes. Ceci permet d'augmenter le domaine de stabilité de la méthode Euler et de la rendre plus précise. La méthode de Runge Kutta à deux étapes s'écrit :

$$\begin{cases} \mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}}_1 = \mathrm{F}\left(\mathrm{U}^n\right) \\ \mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}\left[\theta \mathrm{U}_1 + \left(1-\theta\right)\mathrm{U}^n\right] \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}^n + \Delta t \dot{\mathrm{Q}}_1 \\ \mathrm{Q}^{n+1} = \mathrm{Q}_1 + \Delta t \dot{\mathrm{Q}} \end{cases}. \tag{3.43}$$

Pour $\theta = 0.5$, la méthode est précise à l'ordre 2 et la stabilité est obtenue pour un pas de temps tel que $CFL_{max} < 0.5$

Ces méthodes étant à un pas et calculant l'état au temps t^{n+1} en ne faisant intervenir que l'état au temps t^n, donnent, à chaque pas de temps, la solution exacte du problème discrétisé. Elles sont donc couramment utilisées pour la résolution de phénomènes instationnaires (dont la solution physique varie avec le temps) lorsque l'on s'interesse à leur évolution entre deux états par exemple.

3.2.2. Méthodes implicites

A la différence des méthodes explicites très contraignantes en terme de CFL_{max}, les méthodes implicites permettent d'obtenir une plage de stabilité beaucoup plus importante avec des CFL_{max} bien plus élevés et même parfois infiniment grand. On parle alors de schémas inconditionnellement stables. Plus le CFL_{max} est grand et plus il est possible d'utiliser des pas de temps de résolution grand. Ce qui n'est pas forcément recherché lorsque l'on s'intéresse à un phénomène instationnaire dont le temps caractéristique est petit, mais qui peut être très avantageux lorsque l'on s'intéresse uniquement à un état stationnaire (qui ne varie pas avec le temps) d'un écoulement dans une canalisation à débit constant par exemple. L'implicitation du schéma temporel permet ainsi d'accélérer la convergence du système à résoudre vers son état stationnaire, s'il existe. On entend par convergence du schéma, les étapes successives d'itérations, qui permettent au système de passer d'un état initial vers un état final stationnaire recherché. Bien sûr, l'utilisation de schémas implicites est possible pour l'étude de phénomènes instationnaires mais le pas de temps choisi devra être bien inférieur au temps caractéristique du phénomène. L'intérêt ici n'est plus d'accélérer la convergence mais d'améliorer la précision des schémas en montant en ordre. On parle d'avancement dans le temps lorsqu'une solution instationnaire d'un problème physique est

recherchée numériquement, mais plutôt d'itérations lorsqu'il s'agit d'une solution stationnaire puisque les états intermédiaires, avant convergence, n'ont aucun sens physique. Dans cette étude, les schémas implicites sont utilisés uniquement pour la recherche de solutions stationnaires.

Cette stabilité accrue s'obtient au prix d'une mise en œuvre plus complexe, faisant intervenir au second membre l'évaluation des flux non plus à l'instant t^n mais à l'instant t^{n+1}. (3.42) s'écrit alors :

$$\mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n+1}\right). \tag{3.44}$$

De manière plus générale, on écrit le θ-schéma suivant :

$$\mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}\left[\theta\mathrm{U}^{n+1} + \left(1-\theta\right)\mathrm{U}^{n}\right]. \tag{3.45}$$

qui admet également comme variante :

$$\mathrm{M}\dot{\mathrm{Q}} = \theta\mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n+1}\right) + \left(1-\theta\right)\mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n}\right). \tag{3.46}$$

Ainsi, selon les valeurs de θ, on obtient différents schémas:

- $\theta = 0$: méthode d'Euler explicite
- $\theta = 0.5$: méthode de Crank Nicolson
- $\theta = 1$: méthode d'Euler implicite

La résolution de ce nouveau système nécessite trois étapes :

- La linéarisation du second membre.
- L'approximation du Jacobien qui apparaît une fois la linéarisation effectuée.
- Enfin, la résolution itérative du système linéaire ainsi obtenu.

3.2.2.1. Linéarisation du second membre

Le second membre du système (3.44) est une fonction non linéaire de l'état U^{n+1}. Un développement de Taylor au premier ordre de $\mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n+1}\right)$ autour de l'état U^{n} permet d'écrire :

$$\mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n+1}\right) = \mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n}\right) + \left.\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Q}}\right|^{n}\left(\mathrm{Q}^{n+1} - \mathrm{Q}^{n}\right) + \mathcal{O}\left[\left(\mathrm{Q}^{n+1} - \mathrm{Q}^{n}\right)\right]^{2}. \tag{3.47}$$

La linéarisation $\mathrm{F}\left(\mathrm{U}^{n+1}\right)$ par rapport à U^{n} consiste à négliger les termes d'ordre deux et supérieurs. On note $\mathrm{J} = \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{Q}}$ la matrice Jacobienne par blocs des flux F par rapport aux états Q.

La matrice Jacobienne est une matrice carrée de dimension $\left(m_{\mathrm{int}} + m_{\mathrm{lim}}\right)^2$.

Chacun de ses blocs correspondent à des matrices carrées de dimension $\left(n_q\right)^2$

Elle s'écrit :

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_2} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_{m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}}} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{Q}_1} & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{Q}_2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}}}{\partial \mathrm{Q}_1} & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}}}{\partial \mathrm{Q}_{m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}}} \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

On remarque que les termes diagonaux correspondent aux dérivées des flux de la cellule i par rapport aux grandeurs conservatives de cette même cellule i.

Les termes extra diagonaux correspondent aux dérivées des flux de la cellule i par rapport aux grandeurs conservatives de toutes les autres cellules du domaine.

Le Jacobien du Flux de la cellule i par rapport aux grandeurs conservatives de la cellule j s'écrit :

$$\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial \mathrm{Q}_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_1\right)_i}{\partial \left(q_1\right)_j} & \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_1\right)_i}{\partial \left(q_2\right)_j} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_1\right)_i}{\partial \left(q_{n_q}\right)_j} \\ \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_2\right)_i}{\partial \left(q_1\right)_j} & \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_2\right)_i}{\partial \left(q_2\right)_j} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_{n_q}\right)_i}{\partial \left(q_1\right)_j} & \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial \left(\mathcal{F}_{n_q}\right)_i}{\partial \left(q_{n_q}\right)_j} \end{pmatrix}. \tag{3.49}$$

Comme il a déjà été précisé au paragraphe 3.1.1, $\left(\mathcal{F}_k\right)_i = \left(f_k\right)_i + \left(\varphi_k\right)_i + \left(\varpi_k\right)_i$ représente la somme des contributions des flux Euler, Navier Stokes et sources de la quantité conservative k des faces constituants la cellule i

Le θ-schéma (3.46) s'écrit alors :

$$\left(\mathrm{M} - \theta \Delta t \mathrm{J}^n\right)\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{U}^n\right). \tag{3.50}$$

3.2.2.2. Approximation du Jacobien

En toute rigueur, le calcul du Jacobien J devrait faire intervenir les cellules du second voisinage pour gagner en précision et atteindre l'ordre 2. En pratique, de nombreux schémas implicites

n'utilisent qu'une approximation du Jacobien à l'aide d'une discrétisation d'ordre 1 noté $\hat{\mathrm{J}}$. Les dérivées des flux de la cellule i ne sont calculées que par rapport aux grandeurs conservatives de cette même cellule ($\partial \mathrm{F}_i \big/ \partial \mathrm{Q}_{j,j\neq i} = 0$). Le système (3.50) se réécrit donc :

$$\left(\mathrm{M} - \theta \Delta t \hat{\mathrm{J}}^n\right)\dot{\mathrm{Q}} = \mathrm{F}\left(\mathrm{U}^n\right). \tag{3.51}$$

Puisque les termes extra diagonaux de la matrice J correspondent aux dérivées des flux de la cellule i par rapport aux grandeurs conservatives de toutes les autres cellules du domaine, ces derniers, pour la matrice $\hat{\mathrm{J}}$ ne sont pas calculés et sont initialisés à zero :

$$\hat{\mathrm{J}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \mathrm{F}_2}{\partial \mathrm{Q}_2} & \ddots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \dfrac{\partial \mathrm{F}_{m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}}}{\partial \mathrm{Q}_{m_{\mathrm{int}}+m_{\mathrm{lim}}}} \end{pmatrix}. \tag{3.52}$$

3.2.2.3. Résolution itérative du système linéaire

Le système (3.51) peut être résolu par une méthode directe (factorisation LU par exemple), mais ces méthodes sont difficiles à appliquer informatiquement à cause de l'espace mémoire exigé. Il est donc résolu à l'aide d'une méthode itérative. Parmi les méthodes existantes, Jacobi, Bicgstab entre autres, celle retenue ici est la méthode de minimisation du résidu (GMRES), mise au point par (Saad et Schultz, 1986), basée sur la méthode de Krylov. La méthode donne un approximation de la solution par un vecteur appartenant à un espace de Krylov avec un résidu minimal. Pour déterminer ce vecteur, on utilise la méthode itérative d' Arnoldi.

3.2.2.4. Solution stationnaire

Comme il a été dit au début du paragraphe 3.2, les méthodes implicites sont particulièrement utilisées lors de la recherche d'une solution stationnaire. Dans un tel cas de figure, les méthodes numériques sont optimisées afin de faire converger rapidement le système vers la solution stationnaire recherchée, au détriment de l'évolution temporelle de la solution.

A titre d'exemple, le schéma implicite Euler est une méthode robuste d'ordre 1 en temps qui conviendra parfaitement pour la recherche d'un état stationnaire avec un grand pas de temps, mais

sa précision temporelle médiocre ne permettra aucunement la recherche d'une solution instationnaire.

La recherche d'une solution stationnaire peut être parfois délicate. En effet, cette dernière peut être stable ou bien instable. Prenons par exemple le cas d'un pendule avec frottement.

Lorsque celui-ci se trouve à sa position d'équilibre basse, si on le bouge légèrement, il retourne, au bout d'un certain temps, à sa position initiale. On parle d' « équilibre stable ».

Par contre, lorsque celui-ci se trouve à sa position d'équilibre haute, si on le bouge légèrement, ce dernier ne va pas retrouver sa position initiale, mais va tendre vers une nouvelle position d'équilibre stable, celle du bas. On parle d' « équilibre instable ».

Considérons le système suivant :

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial t} = \mathrm{F}\left(\mathrm{u}\right).$$

où $\mathrm{u}\left(t\right)$ est dans un espace de dimension m. Si ce système possède une ou des solutions stationnaires u_s, elles sont telles que $\mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right) = 0$. Si l'on s'intéresse à une solution $\mathrm{u}\left(t\right)$ proche de u_s, alors on obtient :

$$\frac{\partial\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)}{\partial t} = \mathrm{F}\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right). \tag{3.53}$$

Une linéarisation au premier ordre autour de la solution stationnaire u_s donne :

$$\frac{\partial\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)}{\partial t} = \mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right) + \frac{\partial \mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right)}{\partial \mathrm{u}}\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right). \tag{3.54}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right)}{\partial \mathrm{u}}\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right). \tag{3.55}$$

Ce système s'intègre facilement en diagonalisant la matrice Jacobienne $\frac{\partial \mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right)}{\partial \mathrm{u}}$.

La matrice diagonale est alors constituée des valeurs propres λ_i de $\frac{\partial \mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right)}{\partial \mathrm{u}}$.

On obtient un système à m équations de la forme :

$$\frac{\partial\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)_i}{\partial t} = \lambda_i\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)_i. \tag{3.56}$$

L'indice i désigne la $i$ème composante du vecteur$\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)$. Ainsi, la stabilité asymptotique ($\mathrm{u}\left(t\right)$ tend vers u_s) est obtenue lorsque chaque composante $\left(\mathrm{u} - \mathrm{u}_s\right)_i$ décroît. C'est-à-dire lorsque les valeurs propres de la matrice Jacobienne des flux sont à valeurs réelles négatives.

Il s'agit de la théorie de stabilité des systèmes non linéaires et plus précisément de la méthode indirecte de Liapunov, (Hahn, 1963) et (Slotine et Li, 1991), dont le théorème est le suivant :

Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $\frac{\partial \mathrm{F}\left(\mathrm{u}_s\right)}{\partial \mathrm{u}}$ ont une partie réelle strictement négative, alors la solution u_s est asymptotiquement stable.

Il est à noter que certains systèmes ne possèdent aucune solution stationnaire. D'autres possèdent une ou des solutions stationnaires et que ces dernières peuvent être inconditionnellement, ou pas, stables ou instables.

3.2.2.5. Développement de l'implicitation du terme de transfert de masse $\varpi^s_{H_2o}$

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons à la condensation de la vapeur d'eau sur les particules de suie dans le sillage proche d'un avion en vol de croisière. Comme il a été évoqué en introduction de ce mémoire, la méthode numérique retenue repose sur une approche RANS, cf. paragraphe 2.3.2. C'est-à-dire que l'on recherche uniquement la solution stationnaire de l'écoulement dans le sillage. L'utilisation de schémas implicites est donc privilégiée afin d'optimiser les méthodes numériques pour la recherche de solutions stationnaires et ainsi diminuer les temps de restitution des calculs. Pour ces schémas, il est nécessaire de calculer la matrice Jacobienne des flux et en particulier de la source $\varpi^s_{H_2o}$ apparaissant dans les équations de conservation de masse de vapeur d'eau et d'eau condensée (paragraphe 2.2.2).

La Figure 3.6 donne typiquement l'évolution de la masse d'eau condensée sur des particules sursaturées en fonction du temps. Cette courbe est représentative d'un système qui présente deux équilibres, l'un instable, avant la condensation, et l'autre asymptotiquement stable, lorsque la vapeur d'eau en excès s'est condensée sur les particules. Ainsi, le système « atmosphère sursaturée » est instable. La pression de vapeur est supérieure à la pression de vapeur saturante. Une simple poussière permet alors de rompre cet équilibre instable et la vapeur d'eau se condense jusqu'à ce que la pression de vapeur soit égale à la pression de vapeur saturante, cf. paragraphe 1.2.2.2. Le système atteint alors un nouvel équilibre, stable cette fois. Ainsi, dans le cadre de la recherche d'une solution stationnaire de ce système à l'aide de schémas implicites, il est important, comme il a été expliqué au paragraphe précédent 3.2.2.4 (théorie de Lyapunov), de contrôler les valeurs propres de la matrice Jacobienne du taux de transfert de masse d'eau $\varpi^s_{H_2o}$, sous peine de ne jamais faire converger le système vers sa solution stationnaire stable.

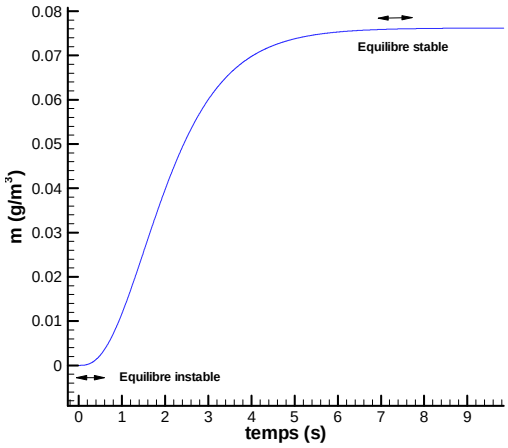

Figure 3.6 : Evolution temporelle de la masse d'eau condensée sur des particules. Mise en évidence de deux équilibres : stable et instable

Ainsi, dans la résolution implicite du modèle de condensation/évaporation, il est important de veiller à ce que les valeurs propres de la matrice Jacobienne des flux soient à valeurs réelles négatives (Cf. paragraphe intitulé « Solution stationnaire » page 91). On a vu que l'implicitation du système d'équations menait à la résolution d'un nouveau système donné par :

$$\left(\mathrm{M} - \theta\Delta t\hat{\mathrm{J}}^n\right)\dot{\mathrm{Q}} = F\left(\mathrm{U}^n\right). \tag{3.57}$$

Le vecteur flux F des grandeurs conservées Q se décompose en trois contributions, cf. paragraphe 3.1.1: le flux Euler E, le flux Navier Stokes Φ ainsi que la source $\boldsymbol{\varpi}$.

Ainsi, pour une cellule i délimitée par j faces on a :

$$\mathrm{F}_i = \sum_j \left(\mathrm{E}_{ij} + \Phi_{ij} + V_{ij}\boldsymbol{\varpi}_{ij}\right). \tag{3.58}$$

Le modèle de condensation n'intervient que sur les sources. Et plus précisément sur les sources de masse d'eau condensée et de vapeur d'eau, $\varpi^s_{H_2o}$ et $\varpi^v_{H_2o}$ avec $\varpi^v_{H_2o} = -\varpi^s_{H_2o}$.

Pour impliciter le terme source, il faut donc calculer son Jacobien par rapport aux grandeurs conservatives.

Pour chaque cellule, on a :

$$\boldsymbol{\varpi} = \begin{pmatrix} \varpi_{\rho_{air}} \\ \varpi^s_{H_2o} \\ \varpi^v_{H_2o} \\ \varpi_{\rho\mathrm{u}} \\ \varpi_{\rho e_t} \\ \varpi_{\rho z} \end{pmatrix}. \tag{3.59}$$

et le Jacobien s'écrit : $\frac{\partial \boldsymbol{\varpi}_{i=1,n_q}}{\partial \mathrm{q}_{j=1,n_q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho_{air}} & \frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho e_t} & \frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho z} \\ \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho_{air}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho e_t} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho z} \\ \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho_{air}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho e_t} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho z} \\ \frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho_{air}} & \frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho e_t} & \frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho z} \\ \frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho_{air}} & \frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho e_t} & \frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho z} \\ \frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho_{air}} & \frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho e_t} & \frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho z} \end{pmatrix}$. (3.60)

Le terme source de condensation/evaporation n'intervenant que sur les quantités $\rho^S_{H_2o}$ et $\rho^V_{H_2o}$, on ne s'intéresse qu'à $\varpi^s_{H_2o}$ et $\varpi^s_{H_2o}$ et à leur Jacobien uniquement par rapport à $\rho^S_{H_2o}$ et $\rho^V_{H_2o}$.

Le Jacobien des termes sources se réduit à :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varpi}_{i=1,n_q}}{\partial \mathrm{q}_{j=1,n_q}} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho_{air}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho^S_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho^V_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho \mathrm{u}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho e_t}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho_{air}}}{\partial \rho z}} \\ \cancel{\frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho_{air}}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \cancel{\frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho \mathrm{u}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho e_t}} & \cancel{\frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho z}} \\ \cancel{\frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho_{air}}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \cancel{\frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho \mathrm{u}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho e_t}} & \cancel{\frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho z}} \\ \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho_{air}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho^S_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho^V_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho \mathrm{u}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho e_t}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho z}} \\ \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho_{air}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho^S_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho^V_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho \mathrm{u}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho e_t}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho e_t}}{\partial \rho z}} \\ \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho_{air}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho^S_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho^V_{H_2o}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho \mathrm{u}}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho e_t}} & \cancel{\frac{\partial \varpi_{\rho z}}{\partial \rho z}} \end{pmatrix}. \quad (3.61)$$

On ne s'intéresse donc qu'à cette matrice :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varpi}}{\partial \mathrm{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} \\ \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \frac{\partial \varpi^v_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} \end{pmatrix}.$$

Or, $\dfrac{\partial \varpi^{v}_{H_2o}}{\partial \rho^{V}_{H_2o}} = -\dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{V}_{H_2o}}$, et $\varpi^{v}_{H_2o} = -\varpi^{s}_{H_2o}$.

On obtient,
$$\frac{\partial \boldsymbol{\varpi}}{\partial \mathrm{q}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} & -\dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} \\ -\dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

On note cette matrice A

Ainsi l'implicitation du terme source se réduit à l'évaluation de A.

On a vu que le signe des valeurs propres de la matrice A était important lorsque l'on s'intéressait à la solution stationnaire stable.

Les valeurs propres λ de A sont solutions du polynôme caractéristique donné par :
$$\det\big(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}\big) = 0. \tag{3.63}$$

Afin de pouvoir contrôler le signe de ces valeurs propres, la matrice A est multipliée par un réel γ qui sera l'unité si les valeurs propres de A sont négatives ou une autre valeur qui sera déterminée a posteriori afin de contraindre la nouvelle matrice $\gamma\mathrm{A}$ à posséder des valeurs propres négatives et ainsi forcer le système à converger vers la solution stationnaire stable recherchée.

Le nouveau polynôme caractéristique s'écrit donc :
$$\det\big(\gamma\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}\big) = 0. \tag{3.64}$$

Après développement, et si on note $X = \dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}}$, on obtient :
$$\lambda^2 - 2\gamma X \lambda = 0. \tag{3.65}$$

Ce polynôme a deux racines réelles $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2\gamma X$

$\lambda < 0$ implique donc $\gamma X < 0$

Ainsi, on veillera à ce que :

- si $\dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} < 0$ alors $\gamma = 1$
- si $\dfrac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} > 0$ alors $\gamma = -1$

Notons que γ n'agit que sur la matrice Jacobienne du terme source de masse.

Les méthodes numériques présentées et le modèle microphysique implicité pour la recherche de solutions stationnaires stables, l'objet du chapitre suivant porte sur la validation de ce nouveau modèle.

CHAPITRE 4 VALIDATION DU MODELE MICROPHYSIQUE

Le modèle de condensation a été développé et ajouté au code CEDRE (paragraphe 2.2.2). On a veillé à ce que ce dernier puisse être utilisé lors de la recherche de solutions stationnaires stables avec l'utilisation de schémas implicites (paragraphe 3.2.2.5). L'objet de ce chapitre est de vérifier que le modèle de condensation fonctionne correctement avec l'utilisation de schémas explicites (recherche de l'évolution temporelle de la solution) puis implicites (recherche de la solution stationnaire). Pour cela, on s'intéresse tout d'abord à la simulation de la croissances de cristaux de glace dans une atmosphère au repos, puis à la simulation de la croissance des cristaux dans un jet plan bi dimensionnel.

4.1. Simulation 0D de la croissance des cristaux de glace dans une atmosphère au repos

4.1.1. Effet de la concentration des suies sur la cinétique de croissance des cristaux de glace et sur leur taille à l'équilibre.

Dans cette section, nous simulons la condensation de la vapeur d'eau sur des particules de suie. Nous nous intéressons à l'évolution temporelle (utilisation de schémas explicites) de la masse d'eau condensée et de la taille des particules. Les suies ont toutes un rayon initial $r_s = 20\ nm$, elles sont donc mono dispersées, et sont dans une atmosphère au repos dont la température est $T_a = 223,45K$ et la pression $P_a = 30230$ Pa. L'humidité relative est initialisée à $RH = 187\%$. (La pression partielle de vapeur d'eau initiale est donc $P_v = 12,33$ Pa avec une pression de vapeur saturante par rapport

à la phase liquide de $P_{sat/liq}\left(T_a\right) = 6{,}57$ Pa), cf. paragraphe 1.2.2.2. La saturation initiale par rapport à la glace vaut alors $S = P_v / P_{sat/glace} = 3{,}11$, avec $P_{sat/glace}\left(T_a\right) = 3{,}96$ Pa.

Cas 1	Cas 2
$r_s = 20\ nm$	
$T_a = 223{,}45K$	
$P_a = 30230$ Pa	
$RH = 187\%$	
$N = 10^{09}$ m^{-3}	$N = 10^{11}$ m^{-3}

Tableau 4.1 : Conditions initiales : Effet de la concentration initiale des suies sur la cinétique de croissance des cristaux

Un premier calcul est effectué avec une concentration initiale de suies fixée à $N = 10^{09}$ m^{-3}. Un deuxième calcul est effectué avec une concentration initiale de suies plus élevée, soit $N = 10^{11}$ m^{-3}. Ainsi, le seul paramètre qui différencie ces deux cas est la concentration initiale des suies. Cela va permettre de quantifier l'effet de ce paramètre sur la cinétique de la croissance des cristaux de glace ainsi que sur leur taille maximale.

Toutes ces conditions ont été choisies afin de reproduire l'étude de (Kärcher, 1996). Le Tableau 4.1 synthétise l'ensemble des conditions initiales pour les deux simulations.

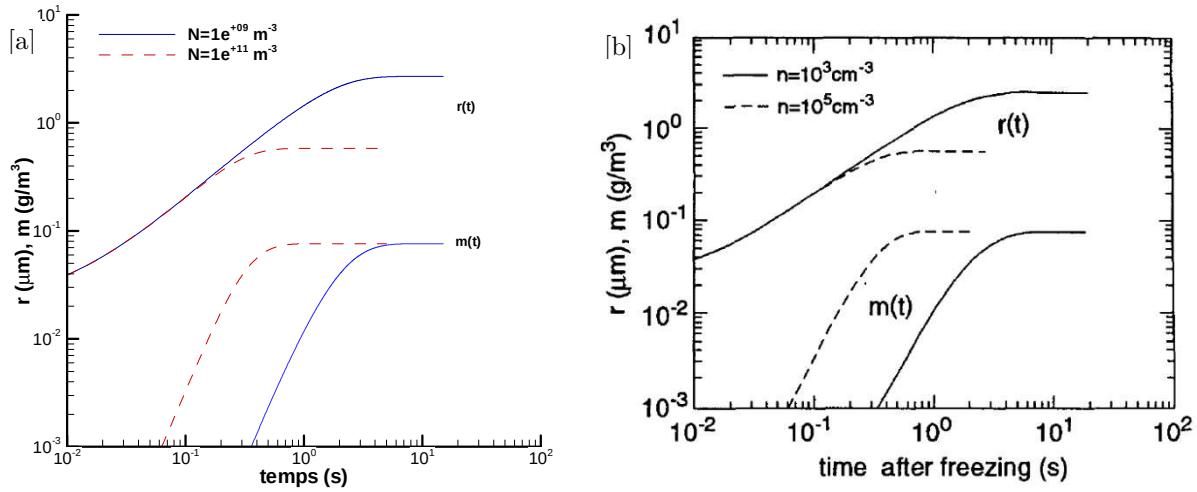

Figure 4.1 : Evolution du rayon des cristaux de glace $r\left(t\right)$ et de la masse de glace $m\left(t\right)$ en fonction du temps pour deux concentrations initiales de particules N. [a] : calcul CEDRE. [b] : Résultats de (Kärcher, 1996)

Sur la Figure 4.1 sont tracées les résultats des deux simulations. Les courbes continues sont relatives au cas où $N = 10^{09}$ m^{-3}, les courbes en pointillés concernent le cas où $N = 10^{11}$ m^{-3}. Cette Figure représente l'évolution de la taille des particules $r\left(t\right)$ ainsi que l'évolution de la masse d'eau condensée $m\left(t\right)$ pour les deux concentrations initiales de particules. La relation entre la masse $m\left(t\right)$ et le rayon $r\left(t\right)$ est donnée par :

$$m(t) = N\frac{4}{3}\pi r(t)^3 \rho_{H_2o,glace}, \tag{4.1}$$

$\rho_{H_2o,glace}$ représente la masse volumique de l'eau sous forme de glace. Elle ne dépend que de la température T et est donnée par la relation (Tabazadeh, Martin et Lin, 2000) :

$$\rho_{H_2o,glace}(T) = 0,916 - 8,75.10^{-5}(T - 273,15) - 1,667.10^{-7}(T - 273,15)^2. \tag{4.2}$$

Les particules atteignent leur taille maximale d'autant plus rapidement que leur concentration est importante. Le rayon final $r_{\max} = 0,6\ \mu m$ est plus petit dans le cas où $N = 10^{11}$ m^{-3} que dans le cas $N = 10^{09}$ m^{-3} où $r_{\max} = 2,75\ \mu m$. En effet $r_{\max} \propto N^{-1/3}$ et la même quantité de vapeur d'eau est distribuée sur plus de particules. La quantité finale d'eau condensée $m_{\max} = 7,76.10^{-2} g.m^{-3}$ reste la même dans les deux cas. Ces résultats calculés avec le code CEDRE Figure 4.1[a] sont parfaitement en accord avec ceux présentés par (Kärcher, 1996), Figure 4.1[b].

4.1.2. Effet de la taille des suies sur la cinétique de croissance des cristaux de glace et sur leur taille à l'équilibre

Dans cette section, nous nous intéressons à l'effet de la taille initiale des particules de suie sur la cinétique de croissance des cristaux. Des schémas d'intégration explicites sont donc utilisés. Comme dans la section 4.1.1, l'atmosphère est au repos, la température est $T_a = 223,45K$ et la pression $P_a = 30230$ Pa . L'humidité relative est initialisée à $RH = 187\%$ et la concentration des suies est fixée à $N = 10^{11}$ m^{-3} . Leur taille, quant à elle, est fixée soit à $r_s = 20\ nm$ soit à $r_s = 200\ nm$. L'ensemble des conditions initiales pour les deux simulations est regroupé dans le Tableau 4.2.

Cas 1	Cas 2
$r_s = 20\ nm$	$r_s = 200\ nm$
$T_a = 223,45K$	
$P_a = 30230$ Pa	
$RH = 187\%$	
$N = 10^{11}$ m^{-3}	

Tableau 4.2 : Conditions initiales : Effet de la taille initiale des suies sur la cinétique de croissance des cristaux

Ainsi, au regard de l'expression du taux de transfert massique $\varpi^s_{H_2o}$, cf. eq. (2.6), les deux paramètres qui varient au cours du temps sont le rayon des particules ainsi que la saturation.

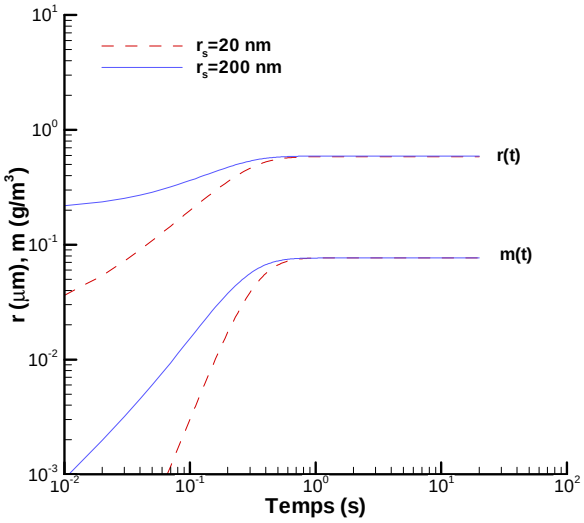

Figure 4.2 : Evolution du rayon des cristaux de glace $r(t)$ et de la masse de glace $m(t)$ en fonction du temps pour deux tailles initiales de suie r_s. Calcul CEDRE.

La Figure 4.2 représente l'évolution de la taille des particules ainsi que celle de la masse d'eau condensée. Les courbes en traits pointillés font référence au cas où la taille des suies est $r_s = 20\ nm$. Celles en trait continu concernent le cas où la taille des suies est $r_s = 200\ nm$. La condensation débute plus tôt lorsque le rayon des suies est plus grand. En effet, au tout début du phénomène de condensation, tandis que la saturation est identique dans les deux cas, une particule de suie de plus grand rayon, offre une plus grande surface sur laquelle la vapeur d'eau va pouvoir se condenser. Ensuite, puisque les suies de plus grand rayon vont permettre dans un premier temps une condensation plus rapide, la saturation va chuter plus rapidement que dans le cas de petites suies. La compétition entre taille de particules et saturation fait que, même si la condensation s'effectue plus tôt lorsque les particules sont plus grandes, à partir de $0{,}08$ seconde environ, la cinétique de condensation est plus rapide dans le cas ou les suies étaient plus petites. La courbe représentant la masse d'eau condensée possède une pente plus accentuée dans le cas des plus petites particules de suie. En ce qui concerne l'évolution du rayon des particules, on note que le taux de croissance, dans le cas des petites suies, est beaucoup plus important. Ainsi, même si, dans la première dixième de seconde, la masse d'eau condensée totale est plus faible dans le cas des petites suies, elle se répartie sur de plus petites particules et ces dernières grossissent alors plus rapidement.

4.1.3. Effet de l'humidité relative sur la cinétique de croissance des cristaux de glace et sur leur taille à l'équilibre

Comme précédemment, l'atmosphère est au repos, la température est $T_a = 223,45K$ et la pression $P_a = 30230$ Pa. La concentration des suies est fixée à $N = 10^{11}$ m^{-3} et leur taille initiale est $r_s = 20$ nm. L'humidité relative est initialisée soit à $RH = 187\%$ $\left(S = P_v \middle/ P_{sat/glace} = 3,11\right)$ soit à $RH = 91\%$ $\left(S = P_v \middle/ P_{sat/glace} = 1,5\right)$. L'humidité relative initiale est donc environ deux fois moins importante dans le deuxième cas mais les particules restent néanmoins sursaturées par rapport à la glace. L'ensemble des conditions initiales pour les deux simulations est regroupé dans le Tableau 4.3.

Cas 1	Cas 2
$r_s = 20$ nm	
$T_a = 223,45K$	
$P_a = 30230$ Pa	
$RH = 187\%$	$RH = 91\%$
$N = 10^{11}$ m^{-3}	

Tableau 4.3 : Conditions initiales : Effet de l'humidité relative initiale sur la cinétique de croissance des cristaux

La Figure 4.3 représente l'évolution de la taille des particules ainsi que celle de la densité d'eau condensée pour ces deux humidités relatives initiales. Les courbes à trait continu correspondent à une humidité relative initiale de $RH = 187\%$. Celles en traits pointillés concerne le cas où $RH = 91\%$.

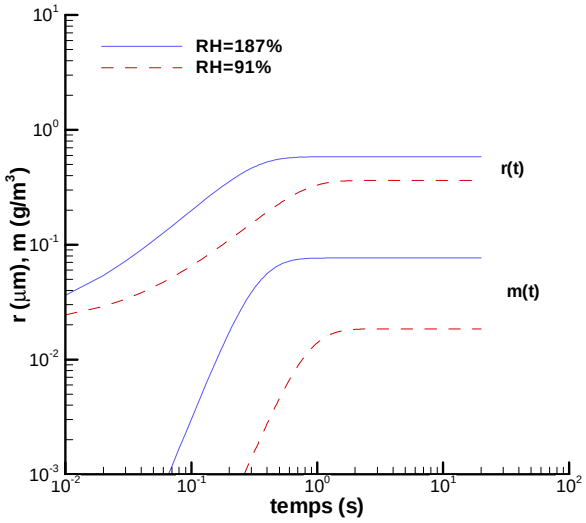

Figure 4.3 : Evolution du rayon des cristaux de glace $r\left(t\right)$ et de la masse de glace $m\left(t\right)$ en fonction du temps pour deux valeurs initiales de l'humidité relative RH . Calcul CEDRE.

On remarque que la condensation est beaucoup plus rapide lorsque l'humidité relative est plus élevée. De même, à l'équilibre, la densité de glace est plus importante dans le cas ou $RH = 187\%$ ($m_{\max} = 7,5.10^{-2} g.m^{-3}$ contre $m_{\max} = 1,8.10^{-2} g.m^{-3}$). En effet, afin que le système soit à l'équilibre, la quantité d'eau vapeur présente se condense jusqu'à ce que la pression partielle de vapeur P_v atteigne la pression à saturation $P_{sat/glace}$. Or $\left(P_v\right)_{RH=187\%} > \left(P_v\right)_{RH=91\%}$. La densité de suies étant identique et constante dans les deux cas, pour les mêmes raisons, la taille finale des particules est plus importante lorsque que l'humidité relative est plus grande $r_{\max} = 0.58\mu m$ contre $r_{\max} = 0.36\mu m$. L'équilibre est atteint en $t = 0.7s$ pour $RH = 187\%$ et $t = 1.7s$ pour $RH = 91\%$.

Dans le cadre de la simulation temporelle 0D de la croissance des cristaux de glace dans une atmosphère au repos, le modèle de condensation, ajouté dans le code CEDRE, fournit les résultats attendus. Afin de valider l'évaluation de la matrice Jacobienne du taux de transfert de masse d'eau $\varpi^s_{H_2o}$, le paragraphe 4.1.4 propose de déterminer la solution stationnaire stable du cas 1 du paragraphe 4.1.1, avec l'utilisation du schéma implicite.

4.1.4. Obtention d'une solution stationnaire. Validation du schéma implicite

Dans le cadre d'une simulation 0D, c'est-à-dire sur une seule maille, de la croissance des cristaux de glace dans une atmosphère au repos, les flux Euler et Navier Stokes sont nuls et l'expression du vecteur flux F , cf. équation (3.11), se simplifie sous la forme :

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_{1\leftarrow j} = \begin{pmatrix} \left(\varpi_1\right)_{1\leftarrow j} \\ \vdots \\ \left(\varpi_{n_q}\right)_{1\leftarrow j} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Puisqu'il n'y a qu'une seule cellule, le Jacobien J, cf. équation (3.48), est simplifié et est donné, pour la cellule interne, par :

$$\mathrm{J} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_1}\right). \tag{4.4}$$

et puisque le vecteur flux n'est désormais composé que des termes sources ϖ,

$$\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \varpi^V_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi^V_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \dfrac{\partial \varpi_{\rho \mathrm{u}}}{\partial \rho e} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \sigma_{\rho e}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \dfrac{\partial \sigma_{\rho e}}{\partial \rho^V_{H_2o}} & \dfrac{\partial \sigma_{\rho e}}{\partial \rho \mathrm{u}} & \dfrac{\partial \sigma_{\rho e}}{\partial \rho e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque les Jacobiens des sources de quantité de mouvement et d'énergie sont déjà pris en compte et calculés dans la version de CEDRE avant le développement du modèle de condensation. Cette simulation nous permet d'isoler notre propre modèle et de focaliser sur :

$$\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial \mathrm{Q}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varpi}}{\partial \mathrm{q}} \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} \\ \dfrac{\partial \varpi^V_{H_2o}}{\partial \rho^S_{H_2o}} & \dfrac{\partial \varpi^V_{H_2o}}{\partial \rho^V_{H_2o}} \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Cette simulation permet ainsi d'isoler la matrice A, cf. équation (3.62).

4.1.4.1. Comportement du système sans conditionnement de la matrice A

Afin de mettre en évidence le problème de solution stationnaire stable et instable évoqué dans le paragraphe 3.2.2.4, nous utilisons dans cette section, un schéma implicite sans conditionnement de la matrice A par le scalaire γ.

Les conditions initiales sont identiques au cas 1 du paragraphe 4.1.1.

Nous recherchons donc la solution stationnaire de la condensation de la vapeur d'eau sur des particules de suie ayant un rayon initial $r_s = 20\ nm$, dans une atmosphère au repos dont la température est $T_a = 223,45K$ et la pression $P_a = 30230$ Pa. La concentration des suies est fixée à $N = 10^{09}$ m^{-3}. L'humidité relative au temps $t = 0\ s$ est initialisée à $RH = 187\%$.

Dans de telles conditions, comme nous l'avons vu à la section 4.1.1, une simulation instationnaire, en utilisant des schémas explicites, permet d'obtenir l'évolution de la masse condensée sur les particules de suie sèches en fonction du temps (Figure 4.4). Sur cette dernière, nous constatons tout d'abord que l'équilibre est atteint au bout d'une seconde et que la masse d'eau condensée maximale est $m_{\max} = 7,76.10^{-2} g.m^{-3}$. On remarque également sur cette courbe, un point d'inflexion vers $t \approx 0,17\ s$ pour une masse de glace d'environ $m \approx 0,01\ g.m^{-3}$.

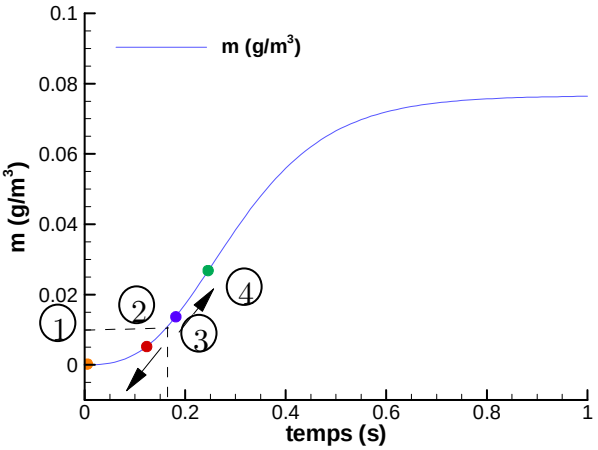

Figure 4.4 : Evolution de la masse d'eau condensée $m(t)$ en fonction du temps

Ce point d'inflexion correspond à un changement de signe de la dérivée seconde de $m(t)$. Au point d'inflexion on a :

$$\frac{\partial^2 m}{\partial t^2} = 0 \tag{4.6}$$

or la dérivée première de $m(t)$ correspond à la source de masse d'eau condensée $\varpi^s_{H_2o}$ de l'équation (2.6).

$$\frac{\partial \varpi^s_{H_2o}}{\partial t} = \frac{\partial^2 m}{\partial t^2} = 0. \tag{4.7}$$

Soit,

$$\varpi^s_{H_2o} = cst. \tag{4.8}$$

Ainsi, au point d'inflexion la source de masse d'eau condensée est constante. Avant ce point, $\partial \varpi^s_{H_2o} / \partial t > 0$, c'est-à-dire que le taux de transfert de masse augmente avec le temps. Après ce point, $\partial \varpi^s_{H_2o} / \partial t < 0$, et le taux de transfert de masse diminue avec le temps.

La valeur propre λ de la matrice A est donnée par :

$$\lambda \approx \frac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial \rho^{S}_{H_2o}} \approx \frac{\partial \varpi^{s}_{H_2o}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \rho^{S}_{H_2o}}. \tag{4.9}$$

Ainsi, au point d'inflexion, $\lambda = 0$. La masse d'eau condensée augmente avec le temps ($\partial \rho^{S}_{H_2o} \big/ \partial t > 0$). On en conclut que :

- Avant le point d'inflexion, la valeur propre λ de la matrice A est supérieure à zéro.
- Après le point d'inflexion, la valeur propre λ de la matrice A est inférieure à zéro.

L'idée, ic,i est de mener quatre simulations autour de ce point d'inflexion en utilisant le schéma implicite.

Au temps $t = 0\ s$, l'humidité relative est $RH = 187\%$, la masse d'eau sous forme vapeur est donc $m_v = 0{,}116\ g.m^{-3}$ qui représente aussi la masse d'eau totale du système (eau vapeur et eau condensée) puisque les suies sont initialement sèches. $m_t = m_v + m_c = 0{,}116\ g.m^{-3} = cst$. Ces conditions sont représentées par le point orange de la Figure 4.4. Il s'agit de la simulation numéro 1.

La simulation 2 consiste à se placer au niveau du point rouge. On débute ainsi la convergence du système à partir de cette condition initiale correspondant à une masse d'eau condensée initiale de $m_c = 0{,}006\ g.m^{-3}$. La masse d'eau sous forme vapeur restante dans le système est $m_v = m_t - m_c = 0{,}11\ g.m^{-3}$.

Ainsi les simulations 1 et 2 représentent des conditions pour lesquelles la valeur de la masse d'eau condensée se situe en amont du point d'inflexion.

Pour la simulation 3, on se place au niveau du point vert. La masse d'eau condensée est alors $m_c = 0{,}012\ g.m^{-3}$ et la masse d'eau sous forme vapeur restante dans le système est donc $m_v = 0{,}104\ g.m^{-3}$.

La simulation 4 consiste à se placer au niveau du point bleu. La masse d'eau condensée est alors $m_c = 0{,}024\ g.m^{-3}$ et la masse d'eau sous forme vapeur restante dans le système est donc $m_v = 0{,}092\ g.m^{-3}$.

Ainsi, pour les simulations 3 et 4, les conditions initiales du calcul sont telles que la valeur de la masse d'eau condensée se situe en aval du point d'inflexion.

La Figure 4.5 représente la convergence des calculs pour les quatre simulations après vingt itérations. La courbe continue bleue représente l'évolution de la valeur de la masse d'eau condensée à chaque itération. La courbe en pointillés rouge représente les valeurs que prennent la valeur propre de la matrice A. On constate que pour les simulations 1 et 2, les valeurs propres de la matrice A sont à chaque itération positives, comme attendu, et que le système converge vers une valeur $m_c = 0\ g.m^{-3}$ qui est la solution stationnaire instable. Pour les simulations 3 et 4, les valeurs propres de la matrice A sont négatives. Le système converge alors naturellement vers la

solution stationnaire stable qui est $m_c = 7,76.10^{-2}\ g.m^{-3}$. On retrouve bien la même quantité de glace calculée en instationnaire dans la section 4.1.1.

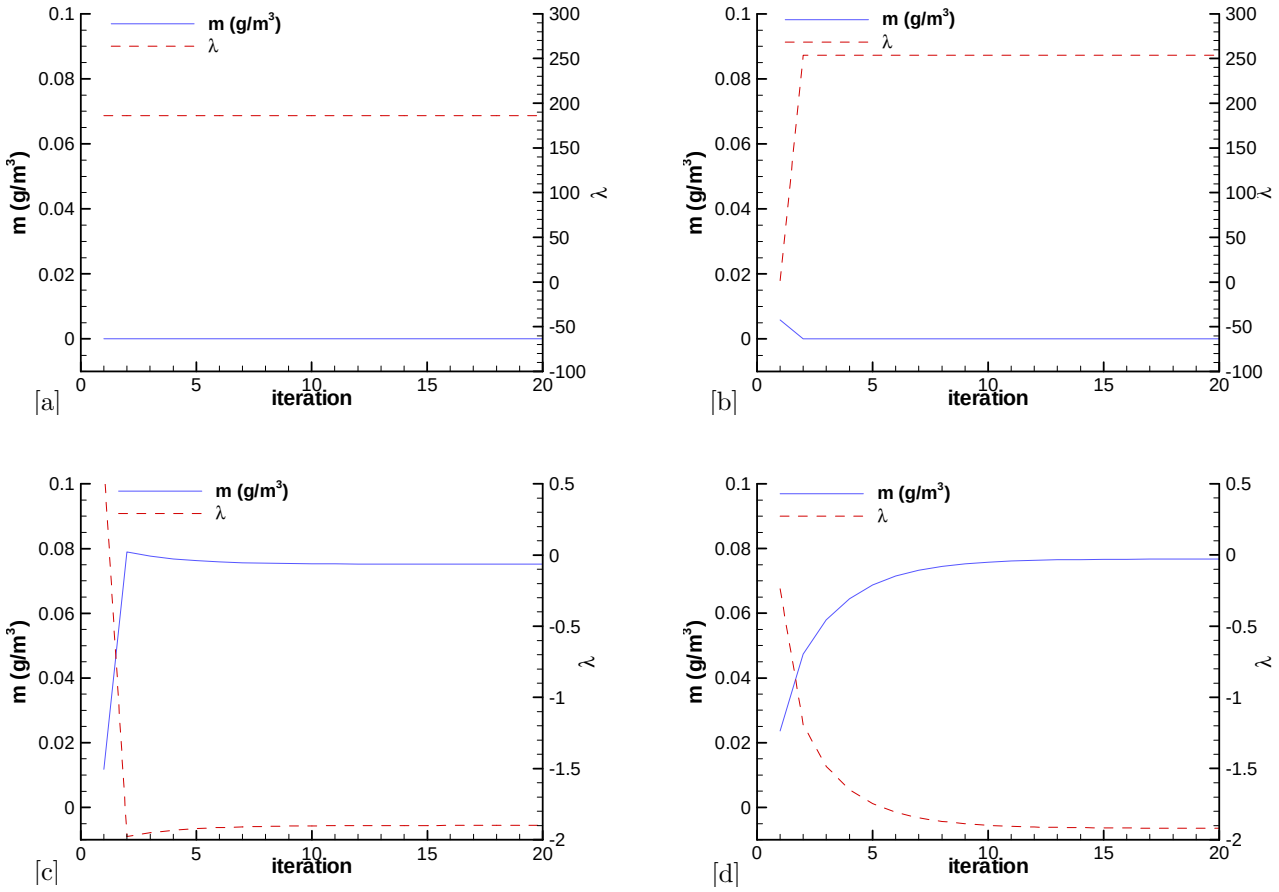

Figure 4.5 : Visualisation de la convergence de la masse d'eau condensée m vers l'état stationnaire ainsi que de la valeur de la valeur propre λ de la matrice $\mathbf{A}$ pour différentes initialisations de la masse d'eau condensée $m_c = 0\ g.m^{-3}$ [a], $m_c = 0,006\ g.m^{-3}$ [b], $m_c = 0,012\ g.m^{-3}$ [c], $m_c = 0,024\ g.m^{-3}$ [d]

Ainsi la Figure 4.5 corrobore le fait que les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ doivent être négatives si l'on souhaite obtenir la solution stationnaire stable, comme il a été évoqué au paragraphe 3.2.2.4. Il est donc nécessaire de contrôler ces valeurs propres en conditionnant la matrice $\mathbf{A}$ à l'aide du scalaire γ si l'on veut s'assurer de converger vers la bonne solution et ceci quelques soient les conditions initiales.

4.1.4.2. Comportement du système avec conditionnement de la matrice A

Dans cette section la matrice $\mathbf{A}$ est conditionnée à l'aide du scalaire γ (cf. paragraphe 3.2.2.4).

On rappelle ici, qu'à chaque itération, et ceci jusqu'à passage du point d'inflexion, sont calculées les valeurs propres λ de la matrice $\mathbf{A}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice possède deux racines réelles qui sont $\lambda = 0$ ou $\lambda = 2\gamma X$. Ainsi, pour savoir si les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont

négatives, il suffit de contrôler le signe de X où X représente le Jacobien de la source de glace par rapport à la masse volumique de la glace dans le mélange. Si $X \geq 0$ alors on impose $\gamma = -1$ et si $X < 0$, c'est-à-dire une fois le point d'inflexion dépassé, alors γ prend la valeur neutre 1.

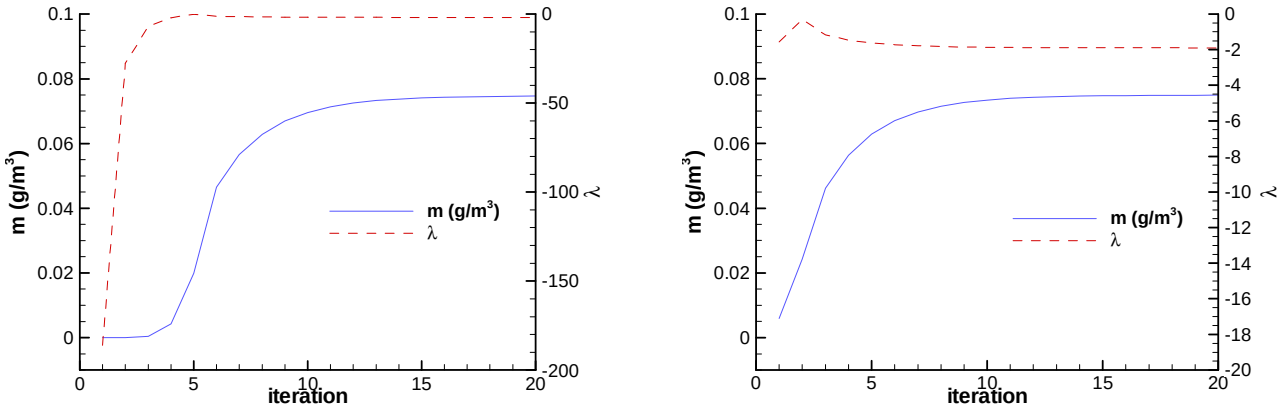

Figure 4.6 Convergence du calcul pour différentes initialisations de la masse d'eau condensée avec conditionnement de la matrice A. A droite, $m_c = 0\ g.m^{-3}$. A gauche $m_c = 0{,}006\ g.m^{-3}$

On effectue alors de nouveau les simulations 1 et 2 pour lesquelles, comme l'a révélé la section précédente, les valeurs propres de A sont positives. On active désormais le conditionnement de la matrice A. Les résultats sont donnés sur la Figure 4.6. La courbe continue bleue représente l'évolution de la valeur de la masse d'eau condensée à chaque itération. La courbe en pointillés rouge représente les valeurs que prennent les valeurs propres de la matrice A conditionnée.

On constate que le conditionnement a permis de contraindre les valeurs propres de la nouvelle matrice $\gamma\mathrm{A}$ a être négatives dans la première partie de la condensation (avant le point d'inflexion), et que le système converge au bout de quelques itérations vers la solution recherchée à savoir $m_c = 7{,}76.10^{-2}\ g.m^{-3}$.

4.2. Simulation de la croissance des cristaux de glace dans un jet chaud subsonique bidimensionnel

Nous nous intéressons désormais à la croissance des cristaux de glace dans la zone de mélange d'un jet bidimensionnel. A la différence de la section précédente, le flux F_i, pour chaque cellule i délimitée par j faces, comporte en plus du terme source, les flux Euler et Navier Stokes, c'est-à-dire les flux de convection et de diffusion:

$$\mathrm{F}_{i\leftarrow j} = \left(\mathrm{f}\right)_{i\leftarrow j} + \left(\varphi\right)_{i\leftarrow j} + \left(\boldsymbol{\varpi}\right)_{i\leftarrow j}. \tag{4.10}$$

La matrice Jacobienne de ce flux n'est plus constituée uniquement des Jacobiens des termes sources mais également des Jacobiens des Flux Euler et Navier Stokes. La détermination des valeurs propres de cette nouvelle matrice est alors beaucoup plus complexe. L'implicitation des Flux Euler et Navier Stokes existe déjà dans le code CEDRE. On a vu dans la section précédente que l'implicitation du terme source « isolé » c'est-à-dire en 0D, sans les flux Euler et Navier Stokes fonctionnait en contrôlant les valeurs propres de la matrice A.

Le schéma implicite fonctionne lorsque,

$$\mathrm{F}_{i\leftarrow j} = \left(\mathrm{f}\right)_{i\leftarrow j} + \left(\varphi\right)_{i\leftarrow j}. \tag{4.11}$$

Il fonctionne également lorsque,

$$\mathrm{F}_{i\leftarrow j} = \left(\boldsymbol{\varpi}\right)_{i\leftarrow j}. \tag{4.12}$$

L'objet de cette section consiste alors à étudier le comportement de ce schéma implicite lorsque,

$$\mathrm{F}_{i\leftarrow j} = \left(\mathrm{f}\right)_{i\leftarrow j} + \left(\varphi\right)_{i\leftarrow j} + \left(\boldsymbol{\varpi}\right)_{i\leftarrow j}. \tag{4.13}$$

Pour cela nous nous intéressons à la croissance des cristaux de glace dans la zone de mélange d'un jet subsonique chaud, là où les effets visqueux et les gradients de vitesse sont forts.

Afin de simuler l'écoulement d'un jet de moteur d'avion commercial en vol de croisière à $10000m$ d'altitude, la pression de l'écoulement externe est fixée à $P_a = 22000Pa$, sa température $T_a = 220K$ et sa vitesse axiale $V_a = 250m.s^{-1}$. L'humidité relative de l'air ambiant est $RH_a = 60\%$. Ainsi, l'atmosphère est sous-saturée par rapport à l'eau liquide $S_{liquide} = 0,60$ mais également par rapport à la glace $S_{glace} = 0,98$ avec $P_{sat/glace}\left(T_a\right) = 2,65$ Pa.

Concernant, le jet, sa température est $T_j = 544K$ et sa vitesse axiale $V_j = 442m.s^{-1}$. Le diamètre de la buse est $D_j = 0,6m$. La concentration des suies en sortie de tuyère est fixée à $N_{suies}^{exit} = 8.10^{12}m^{-3}$ (avec $EIP_{suies} = 3,5.10^{14}kg_{carb}^{-1}$ et $AFR = 60$), cf. paragraphe 1.1. Ces dernières sont mono dispersées et possèdent un rayon $r_s = 10nm$. La pression de vapeur, quant à elle, est $P_v = 660Pa$ (le jet est supposé isobare $P_j = P_a$). Le taux de turbulence du jet est $\tau = 5\%$. Soit, si l'on considère que la turbulence est homogène et isotrope, une énergie cinétique turbulente de $k = 1/2\left(\tau.V_j\right)^2 = 250\ m^2.s^{-2}$. La longueur de mélange est $l = 0,1D_j = 6.10^{-3}m$. Concernant le domaine de calcul, il s'agit d'un rectangle de dimensions $\left[\left(-800D_j,1700D_j\right);\left(-800D_j,800D_j\right)\right]$. Le centre de la buse est situé aux coordonnées$\left[0;0\right]$. Les dimensions de ce domaine sont spatialement très importantes et ne sont pas celles utilisées classiquement dans les études numériques d'écoulement de type jet chaud subsonique (Lau, 1981), (Abramovich, 1963), (Brown et Roshko, 1974). Ces études s'intéressent particulièrement à la propagation de la turbulence et de la diffusion de la zone de cisaillement d'un jet dans une atmosphère au repos, pour différentes valeurs de rapports de températures entre l'écoulement libre et le jet T_j/T_a notamment. Ainsi, seule la connaissance des grandeurs de l'écoulement jusqu'à seulement quelques dizaines de diamètre de jet

est importante. Dans cette étude, nous privilégions l'évolution des grandeurs microphysiques et la connaissance de ces dernières jusqu'à huit envergures en aval de l'avion c'est-à-dire environ huit cents diamètres de jet. De plus, cette étude permettra notamment de valider notre modèle de condensation/évaporation avec l'utilisation de schémas implicites.

Le maillage est constitué d'environ 29000 points, 58000 faces et 29000 éléments. Une vue de ce maillage est donnée Figure 4.7.

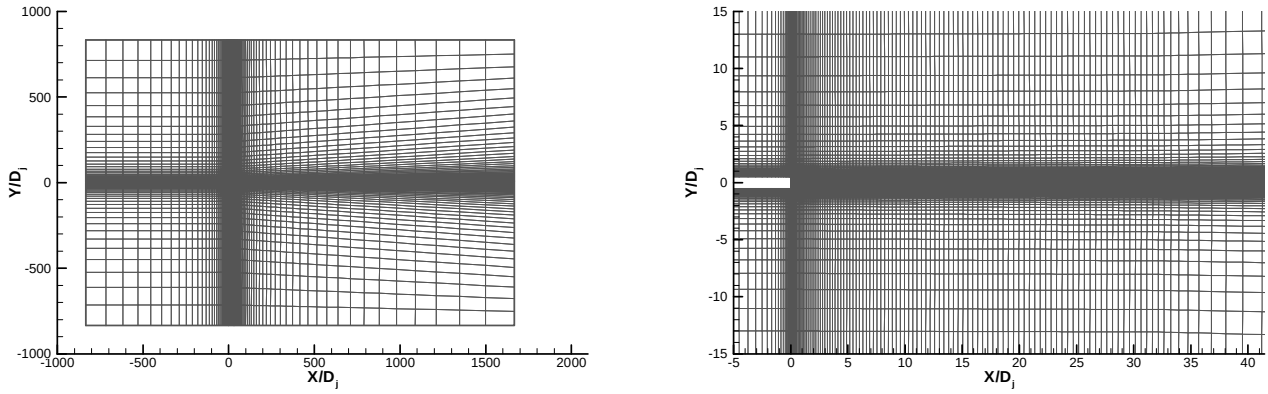

Figure 4.7 : Maillage 2-D construit autour de la buse de l'injecteur. Maillage complet à droite. Zoom de la zone proche de la buse à gauche.

Afin de valider l'implicitation du terme source, deux calculs sont menés : un calcul utilisant un schéma d'intégration temporel explicite de type Runge Kutta 2 avec recherche de la solution instationnaire, et un autre utilisant un schéma implicite à un pas, où seule la solution stationnaire est recherchée.

4.2.1. Utilisation du schéma explicite de type Runge Kutta 2

La chronologie du calcul ainsi que ses caractéristiques sont données par le Tableau 4.4 et le Tableau 4.5 respectivement. La date de fin de calcul est imposée de manière à ce que l'écoulement ait atteint un peu plus la distance de huit envergures d'un avion commercial c'est-à-dire environ $8 * 60 = 480\ m$.

Chronologie du calcul	
Date de début de calcul	0 s
Date de fin de calcul	3 s
Pas de temps	$1.10^{-5} s$
Nombre d'itérations	300000

Tableau 4.4 : Chronologie du calcul d'un jet turbulent en explicite

Caractéristiques du calcul	
Calculateur	1 processeur NEC SX-8R
Temps de calcul	46 heures

Tableau 4.5 : Caractéristiques du calcul d'un jet turbulent en explicite

La visualisation du champ de vitesse longitudinale du jet jusqu'à dix diamètres est donnée sur la Figure 4.8, celle du champ de température sur la Figure 4.9. On y voit le développement de la zone de mélange provoquée par la différence de vitesse et de température entre l'écoulement du jet et l'écoulement externe. Dans cette zone, à la fois, la vitesse longitudinale et la température du jet décroissent pour atteindre les grandeurs de l'air ambiant. Il s'agit d'une zone où se développe également la turbulence comme le montre la Figure 4.10.

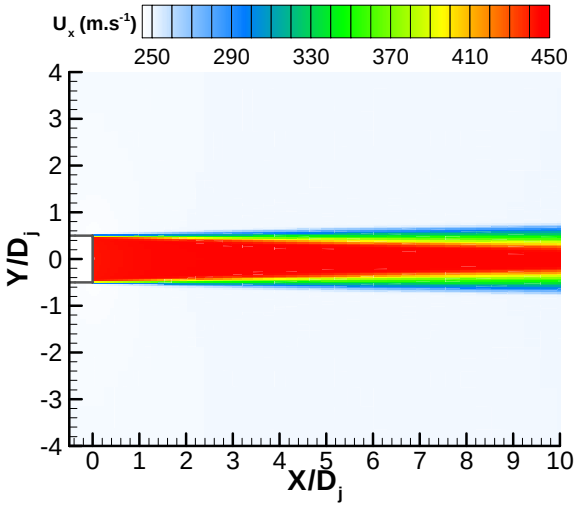

Figure 4.8 : Visualisation de la vitesse longitudinale

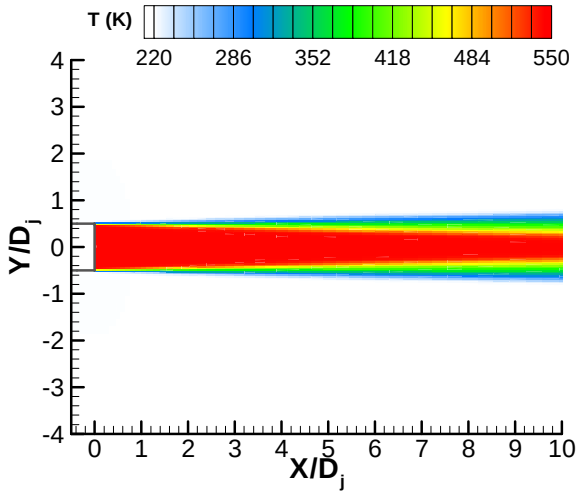

Figure 4.9 : Visualisation de la température

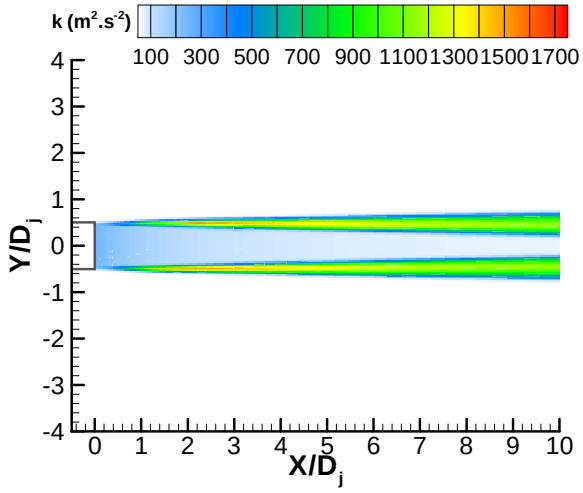

Figure 4.10 : Visualisation de l'énergie cinétique turbulente

Le profil axial de la vitesse longitudinale adimensionnée par la vitesse en sortie de buse est donné sur la Figure 4.11 jusqu'à 1000 D_j . On remarque que le cône potentiel a une dimension importante puisqu'il se termine à environ une vingtaine de diamètres. Dans cette zone la vitesse longitudinale est égale à celle en sortie de buse, c'est-à-dire que la zone de mélange ne s'est pas encore suffisamment développée pour atteindre le centre du jet. A partir de x/D_j , la vitesse décroît pour atteindre celle de l'écoulement externe. Si la longueur du cône potentiel est si importante c'est que la buse ne débouche pas dans une atmosphère au repos mais dans un écoulement possédant lui-même une vitesse longitudinale de 250 $m.s^{-1}$. Quant au profil radial à $x/D_j = 10$, il est donné par la Figure 4.12. On y voit la zone de mélange, zone de transition entre la vitesse du jet et la vitesse de l'écoulement externe.

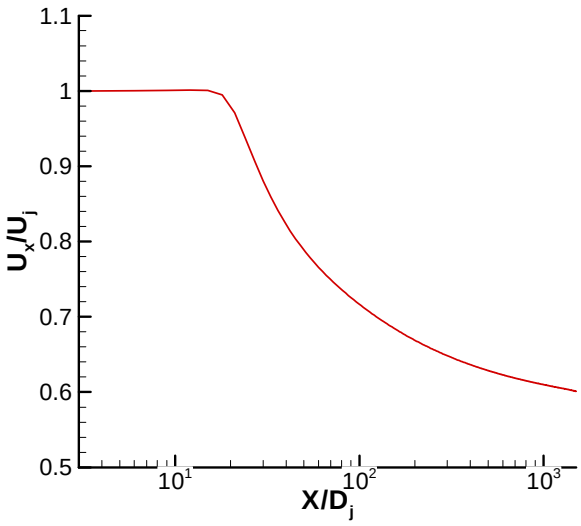

Figure 4.11 : Profil axial de la vitesse longitudinale

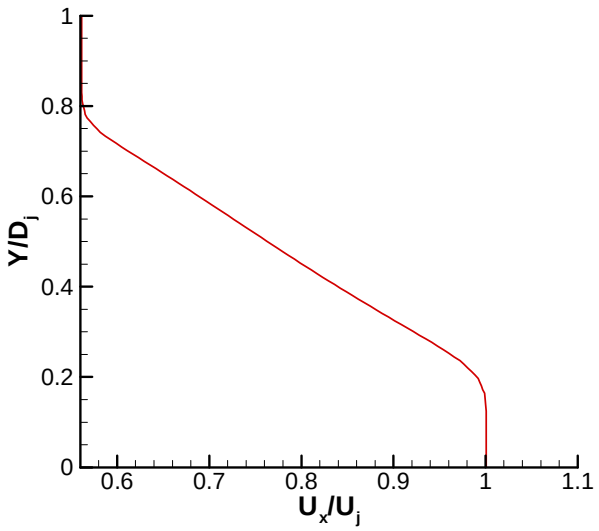

Figure 4.12 : Profil radial de la vitesse longitudinale à $x/D_j = 10$

Dans cette zone de mélange, la température également décroît passant de la température du jet T_j à celle de l'écoulement T_a. Puisque la pression de vapeur à saturation ne dépend que de la température, et diminue avec celle-ci, cette dernière décroît également dans la zone de mélange (courbe bleue en pointillés points de la Figure 4.13). Concernant la masse de vapeur et donc la pression de vapeur, puisque le jet est isobare, de même, par diffusion moléculaire, diffusion turbulente et convection (développement de structures tourbillonnaires, cf. paragraphe 1.3.1.1), elle décroît vers la valeur de l'écoulement externe (courbe en pointillés verte de la Figure 4.13). La température de l'écoulement externe est suffisamment basse pour que, localement dans la zone de mélange, la valeur de la pression de vapeur à saturation devienne plus faible que la pression de vapeur d'eau. La saturation $S = P_v/P_{sat}$ devient alors supérieure à l'unité (courbe continue rouge de la Figure 4.13), les particules sont sursaturées et la condensation peut avoir lieu. La vapeur d'eau se condense sur les particules de suie faisant croître leur rayon (Figure 4.14). On remarque que l'épaisseur de la couche de sursaturation est bien inférieure à la couche de mélange puisqu'il ne suffit pas que la température diminue mais il faut qu'elle diminue suffisamment pour que, localement, la pression de vapeur à saturation devienne plus faible que la pression de vapeur.

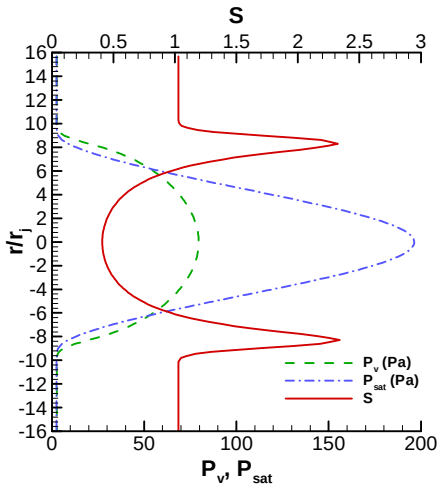

Figure 4.13 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, de la pression de vapeur (P_v), de la pression de vapeur saturante (P_{sat}) ainsi que du rapport de saturation (S)

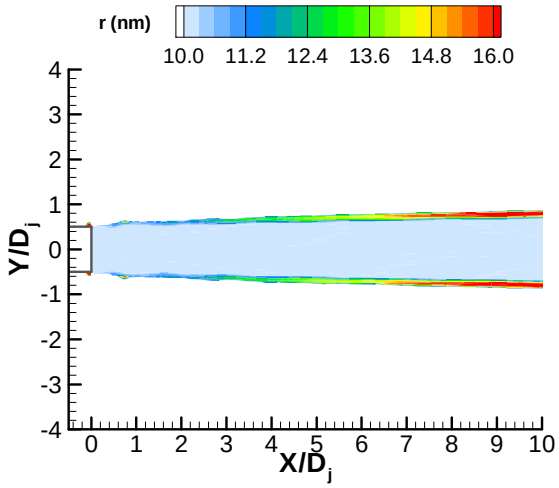

Figure 4.14 : Cartographie spatiale de la taille des cristaux de glace en aval de la buse

Bien sûr, lorsque la condensation a lieu, une partie de la vapeur se condense sur les particules faisant diminuer la pression de vapeur et donc la saturation. L'évolution de la saturation dans le jet à $x/D_j = 800$ est donnée sur la Figure 4.15 avec le modèle de condensation activé [a] et desactivé [b]. Le pic de saturation passe alors $2{,}4$ à $1{,}6$. On remarque que la condensation n'a pas lieu jusqu'à ce que la saturation atteigne la valeur unité.

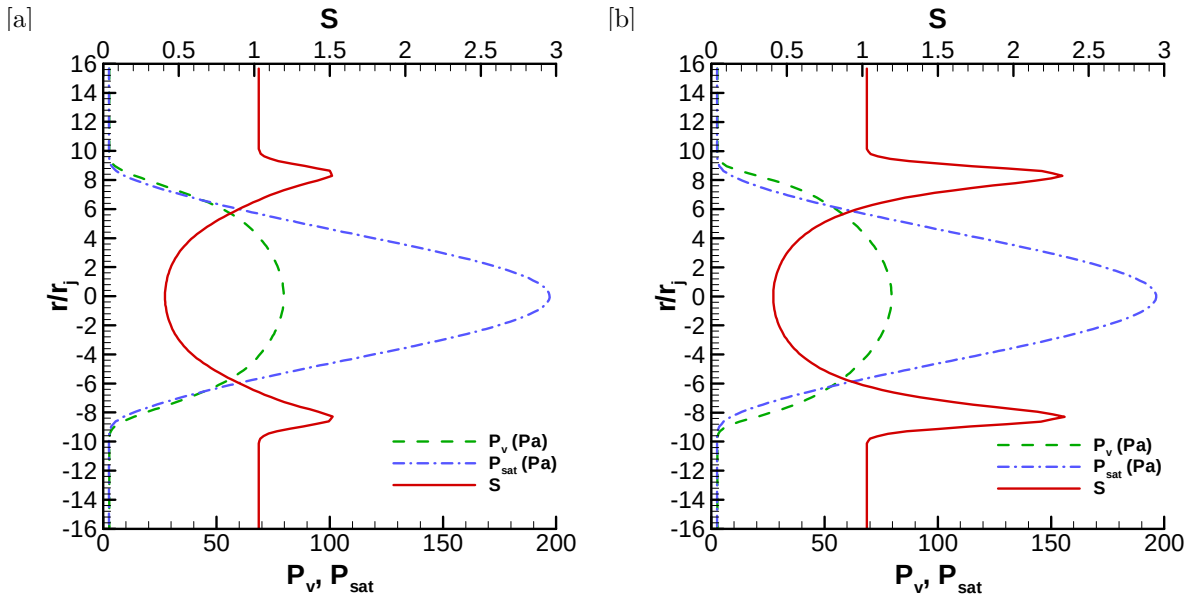

Figure 4.15 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, de la pression de vapeur (P_v), de la pression de vapeur saturante (P_{sat}) ainsi que du rapport de saturation (S). [a] modèle de condensation activé. [b] modèle de condensation désactivé

La Figure 4.16, donne pour trois positions en aval de la buse, $x/D_j = 100;\ 500;\ 800$, la distribution spatiale de la taille des cristaux de glace. On remarque, d'une part, que plus l'on s'éloigne de la buse, plus la taille maximale des cristaux est importante (le rayon maximal passe de $r_{\max} = 0,04\mu m$ à $r_{\max} = 0,8\mu m$, soit un rayon maximal multiplié par vingt lorsque la distance est multipliée par huit), et d'autre part, que l'épaisseur de la couche de sursaturation augmente. Au cœur du jet, la zone de mélange n'est pas suffisamment importante pour que les particules de suie soient sursaturées. Leur rayon reste alors égal à dix nanomètres et ceci jusqu'à $x/D_j = 800$. Ceci s'explique notamment par le fait qu'il s'agit d'une simulation bidimensionnelle d'un jet turbulent et qu'elle n'est pas représentative d'un jet tridimensionnel, la turbulence étant elle-même un phénomène tridimensionnel.

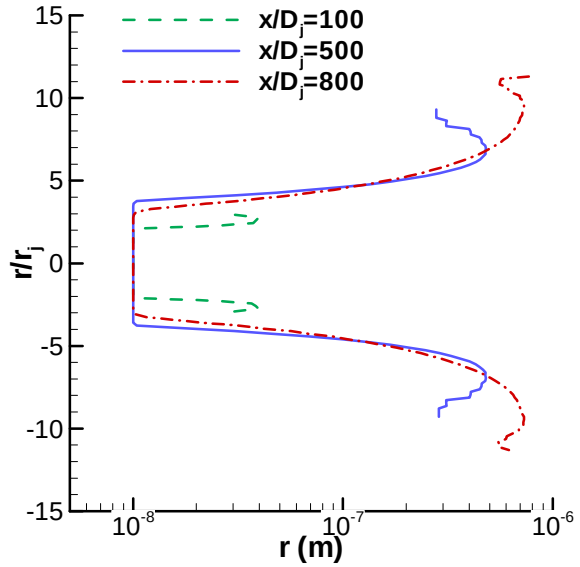

Figure 4.16 : Visualisation spatiale de la taille des cristaux de glace à trois différentes distances de la buse $x/D_j = 100;\ 500;\ 800$

Si l'on regarde l'évolution du rayon moyen des cristaux de glace jusqu'à $x/D_j = 1000$ (Figure 4.17 carrés bleus), celui-ci varie de $10\ nm$ à $240\ nm$. A partir d'environ $x/D_j \simeq 500$, la pente de la courbe est moins importante puisqu'il y a de moins en moins de vapeur disponible qui se condense sur de plus en plus de particules qui deviennent sursaturées (Figure 4.17 points rouges). Le nombre de cristaux de glace passe d'à peine 10% dans le plan $x/D_j = 100$ à près de 70% dans le plan $x/D_j = 1000$

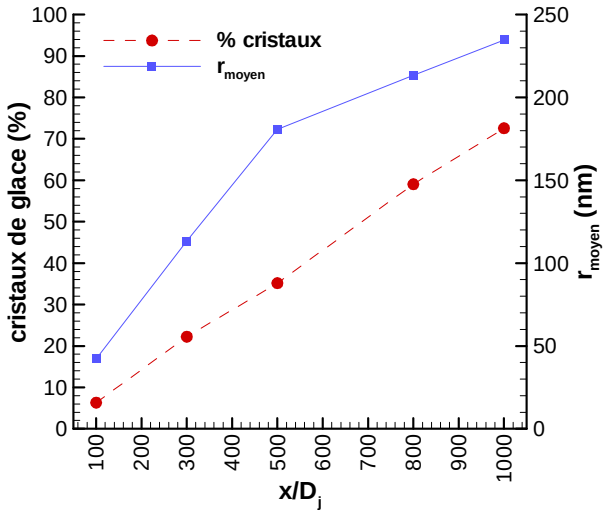

Figure 4.17 : Evolution du rayon moyen des cristaux de glace dans le jet ainsi que de leur nombre

La Figure 4.18 donne la distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/D_j = 100;\ 300;\ 500$ et 800. Les cristaux les plus nombreux appartiennent à la classe $10\ nm < r \leq 20\ nm$. Ils représentent 20% à 30% de la distribution. Il s'agit des particules de suie au centre du jet qui se trouvent à la limite de la couche de sursaturation, là où la concentration des particules sursaturées est la plus importante. Elles ne grossissent que très peu puisque dans cette zone, non seulement leur concentration est importante mais également la sursaturation y est très faible.

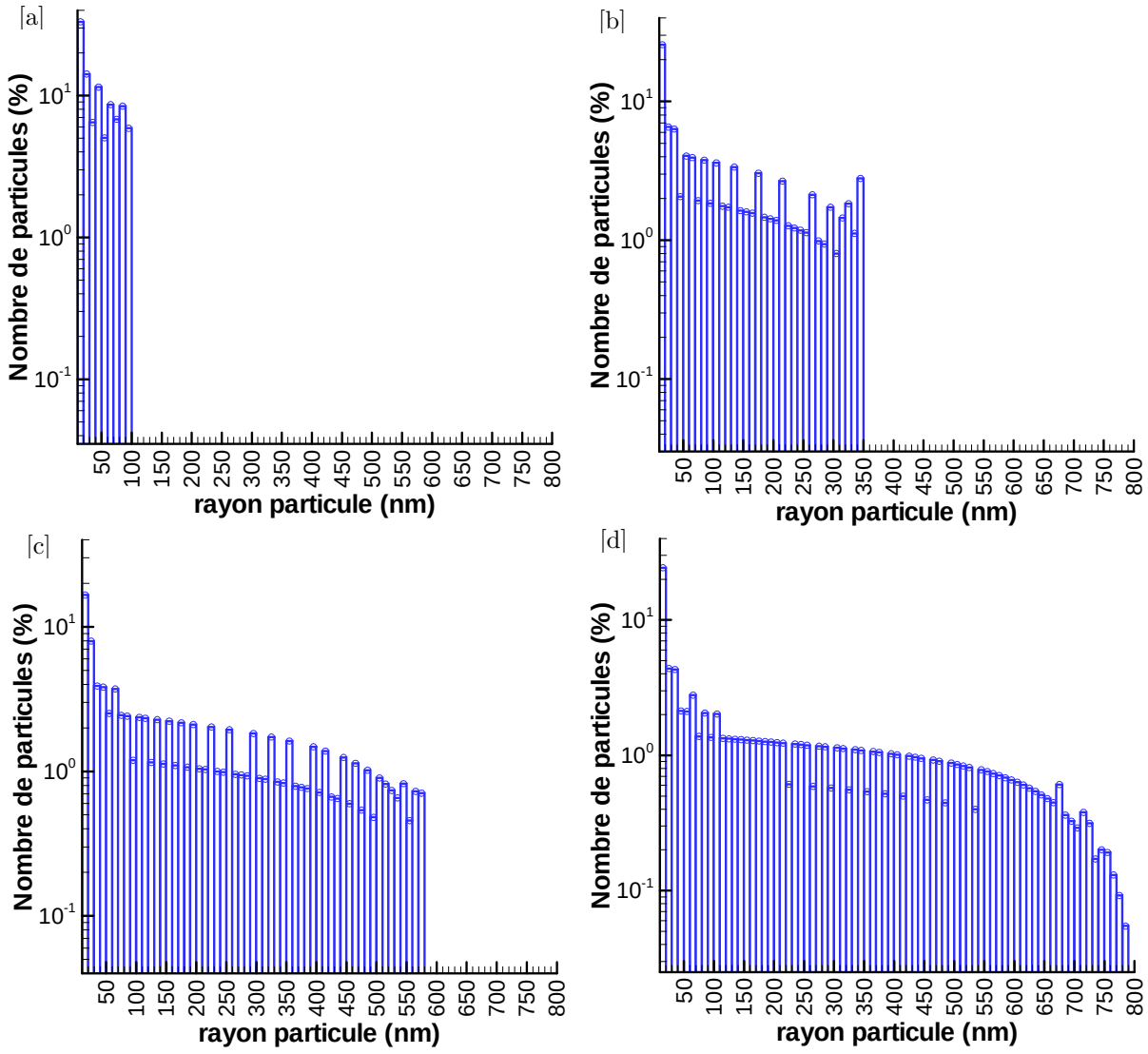

Figure 4.18 : Distribution en taille des cristaux de glace à $x/D_j = 100$ [a], $x/D_j = 300$ [b], $x/D_j = 500$ [c], $x/D_j = 800$ [d]

Plus l'on s'éloigne de la buse, plus la distribution s'étale vers des rayons de cristaux importants. Ainsi, les particules les plus grosses dans le plan $x/D_j = 100$ ont un rayon compris entre $90\ nm$ et $100\ nm$, tandis que celles dans le plan $x/D_j = 800$ ont leur rayon compris entre $780\ nm$ et $790\ nm$.

Dans chacun des plans, hormis les deux, trois premières classes de particules, la distribution semble très homogène et s'explique par le fait que la valeur de la concentration des particules est quasiment la même dans la zone de sursaturation, et plus précisément là où la saturation est supérieure à un et commence à croître. La concentration des particules décroît, vers les bords du jet, en même temps que la saturation (Figure 4.19).

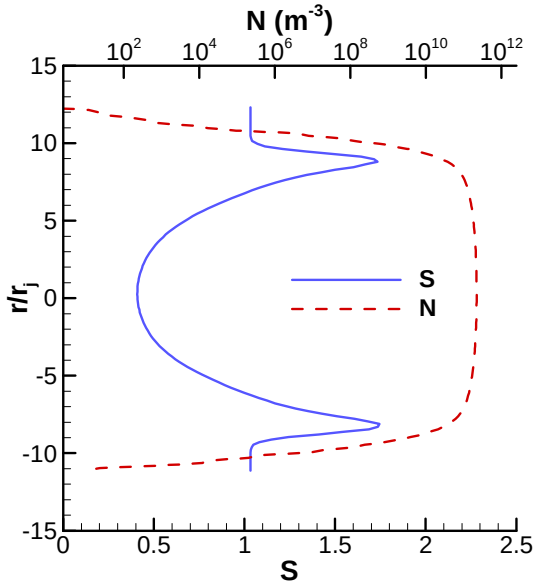

Figure 4.19 : Evolution de la saturation et de la concentration des particules de suie dans le plan $x/D_j = 500$

4.2.2. Utilisation du schéma d'intégration temporel implicite à un pas

La chronologie du calcul ainsi que ses caractéristiques sont données par le Tableau 4.6 et le Tableau 4.7 respectivement. La date de fin de calcul est imposée de manière à ce que l'écoulement ait traversé cinq fois un peu plus la distance de huit envergures d'un avion commercial c'est-à-dire environ $8 * 60 = 480\ m$. Ceci permet d'assurer la convergence du calcul.

Chronologie du calcul	
Date de début de calcul	0 s
Date de fin de calcul	10 s
Pas de temps	$1.10^{-4} s$
Nombre d'itérations	100000

Tableau 4.6 : Chronologie du calcul d'un jet turbulent en implicite

Caractéristiques du calcul	
Calculateur	1 processeur NEC SX-8R
Temps de calcul	16 heures

Tableau 4.7 : Caractéristiques du calcul d'un jet turbulent en implicite

Dans ce paragraphe, les résultats microphysiques obtenus avec le modèle de condensation implicité sont comparés avec ceux du paragraphe précédent, c'est-à-dire lorsque le schéma d'intégration temporel est explicite et ne nécessite pas le calcul de la matrice Jacobienne des flux (Paragraphe 3.2.2).

Sur la Figure 4.20 sont comparés les profils des grandeurs P_v, P_{sat} et S dans le plan $x/D_j = 800$ lorsque le calcul est implicite et lorsqu'il est explicite. Ces courbes ne sont pas commentées ici (cf. Paragraphe 4.2.1) et permettent simplement de constater que les résultats sont identiques que le schéma d'intégration temporel soit explicite ou implicite.

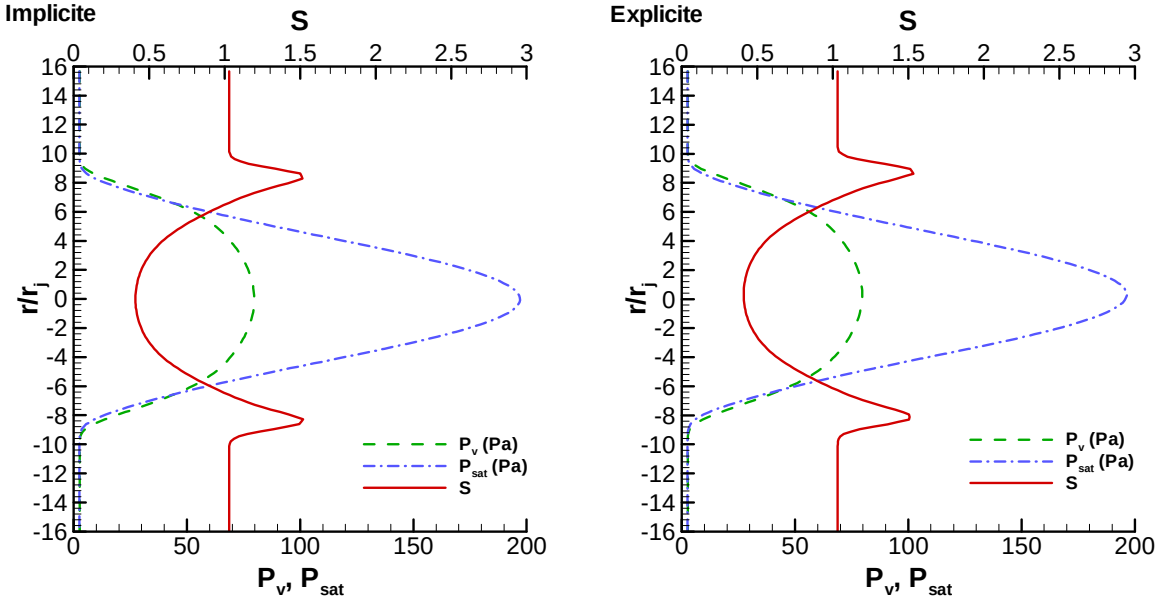

Figure 4.20 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, de la pression de vapeur (P_v), de la pression de vapeur saturante (P_{sat}) ainsi que du rapport de saturation (S). A gauche : Calcul implicite. A droite : Calcul explicite

La quantité de masse condensée étant correctement calculée, le constat est donc le même sur la distribution spatiale de la taille des cristaux de glace. La Figure 4.21 donne un exemple de cette distribution dans le plan $x/D_j = 800$.

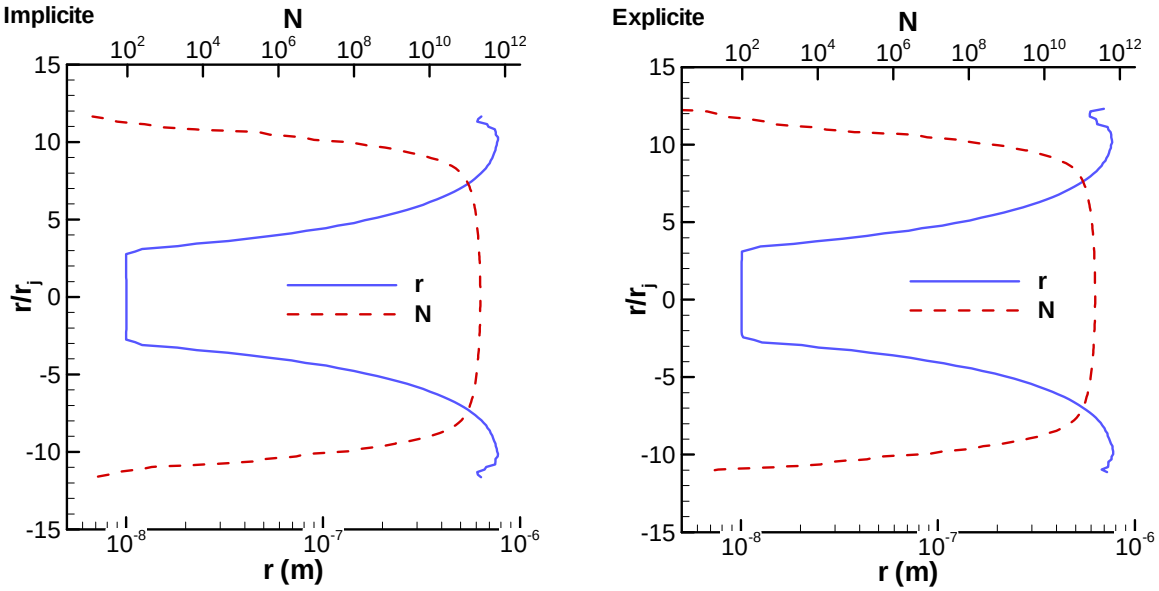

Figure 4.21 : Visualisation spatiale à $x/D_j = 800$, en aval de la buse, du rayon des particules (r_p) ainsi que de leur densité (N). A gauche : Calcul implicite. A droite : Calcul explicite

Le modèle de condensation ainsi que la méthode numérique développée pour sa résolution implicite en temps fonctionne et permet un gain en temps de calcul considérable puisque ce dernier est de $16h$ avec l'utilisation d'un schéma d'intégration temporel implicite contre $46h$ avec son équivalent explicite, soit un gain d'un facteur presque trois sur ce calcul.

CHAPITRE 5 ETUDE AEROTHERMODYNAMIQUE DU MELANGE D'UN JET CHAUD DANS LE SILLAGE D'UN PROFIL NACA0012

Comme il a été mentionné en introduction dans ce mémoire, la formation d'une traînée de condensation, dans le sillage proche d'un avion, résulte d'une part, de processus aérothermodynamiques et d'autre part, de processus microphysiques.

Pour comprendre l'ensemble de ces phénomènes, l'observation permet d'expliquer qualitativement l'écoulement autour de l'avion ainsi que le mélange des jets issus des turboréacteurs dans le sillage. Des mesures de certaines grandeurs physiques caractéristiques permettent, quant à elles, de quantifier les phénomènes.

Il est très difficile d'obtenir des mesures de ces grandeurs caractéristiques dans le sillage très proche d'un avion commercial en vol de croisière. Ainsi, dans le cadre du projet Européen FAR-Wake (Leweke, 2009), (Jacquin *et al.*, 2007) ont étudié expérimentalement le mélange de deux jets chauds dans le sillage proche d'une aile rectangulaire de type NACA0012 placée dans la veine d'essai d'une soufflerie. La maquette, ainsi que les conditions d'utilisation de la soufflerie, sont représentatifs d'un avion en vol de croisière. Bien que ne fournissant aucune donnée concernant les aspects microphysiques, il a été choisi d'utiliser cette étude afin de valider nos choix numériques concernant les aspects aérothermodynamiques.

5.1. Etude expérimentale

5.1.1. Dispositif expérimental

5.1.1.1. Soufflerie

L'étude a été réalisée dans la soufflerie F2 au centre ONERA de Fauga Mauzac. Il s'agit d'une soufflerie atmosphérique à circuit fermé. La dimension longitudinale de la veine d'essai est de 5 m pour une section rectangulaire de 1,4 m de large et 1,8 m de hauteur. Elle est équipée d'un système de vélocimétrie laser tri directionnel monté sur un chariot mobile qui permet d'explorer le champ le long de la veine, jusqu'à huit envergures.

5.1.1.2. Maquette

La maquette est composée d'un générateur de tourbillons et d'un générateur de jets chauds.

Les tourbillons sont engendrés par un profil NACA0012 (National Advisory Committee for Aeronautics) d'envergure $b = 0{,}5\ m$ et de corde $c = 0{,}125\ m$. Ce profil est maintenu au plafond de la soufflerie par un mât central constitué d'un profil NACA0015 de corde égale à $0{,}045\ m$. L'aile est située au centre de la section rectangulaire et est à $0{,}75\ m$ en aval de la section d'entrée. La stabilité du montage est assurée par des haubans.

Quant aux générateurs de jets chauds, ils sont constitués de deux injecteurs situés sous l'intrados de l'aile. L'air chaud est produit par un réchauffeur thermique d'une puissance de 80 kW localisé sous la veine et alimenté en air comprimé à 7 bars. L'air chauffé est acheminé dans chaque éjecteur par une conduite placée à l'intérieur de deux NACA0015 de 0.1m de corde. L'homogénéité du jet est assurée par une grille située en sortie d'éjecteur. Une illustration de ce dispositif est donnée par la Figure 5.1.

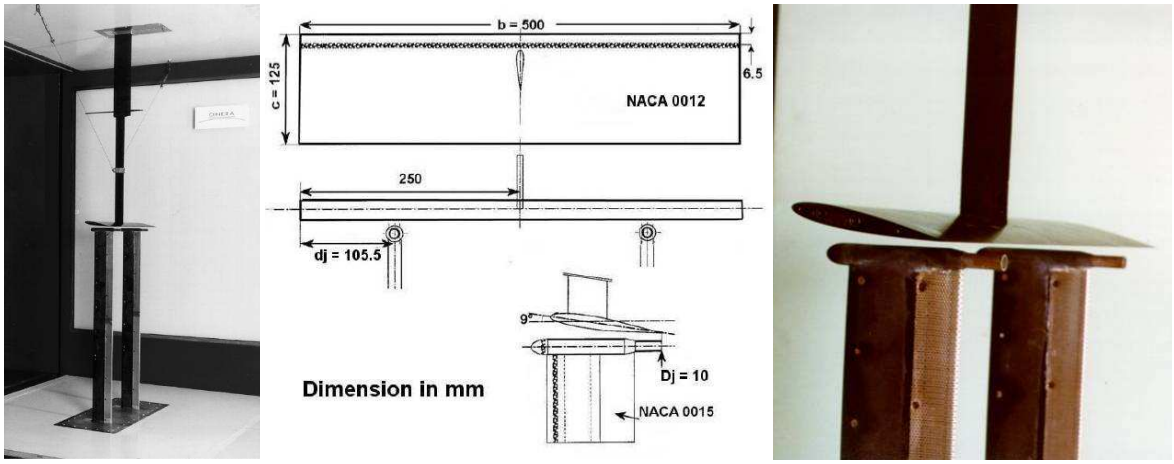

Figure 5.1 : Visualisation du dispositif expérimental ainsi que des dimensions de la maquette expérimentale

Afin d'assurer la reproductibilité de l'écoulement, une bande rugueuse est placée sur l'aile pour imposer la transition de l'écoulement vers un écoulement turbulent. Cette bande est collée parallèlement au bord d'attaque, à une distance égale à 5,2% de la corde. Elle est composée de grains carborundum de 0,1 mm de diamètre soit environ deux fois la hauteur de la couche limite estimée à $\delta/l = 5 \times \mathrm{Re}_c^{-1/2}$

5.1.1.3. Dimensionnement de l'expérience

Il existe plusieurs paramètres dans la littérature pour caractériser l'interaction jet tourbillon. Parmi eux, celui proposé par (Long, 1961) est donné par :

$$P_L = \frac{\rho_j U_j \left(U_j - U_0\right) \pi D_j^2}{4\rho_0 \Gamma_0^2}. \tag{5.1}$$

Il s'agit d'un rapport de similitude qui permet de comparer l'excès de quantité de mouvement axiale du jet avec la quantité de mouvement rotationnelle du tourbillon de bout d'aile.

Pour un Airbus A-330 en vol de croisière, ce rapport de similitude est $P_L = 0,04$. Les paramètres de vol pour cet avion sont répertoriés dans le Tableau 5.1.

Le dimensionnement du dispositif expérimental a été effectué afin de conserver ce rapport de similitude. Il permet donc de reproduire certaines caractéristiques du sillage (concernant exclusivement la phénoménologie de l'enroulement du jet) d'un A-330, en soufflerie, avec l'utilisation d'une maquette de taille réduite.

Conditions de vol de croisière		
Envergure	b	$60\ m$
Rapport d'aspect	AR	$9,3$
Circulation du tourbillon marginal	Γ_0	$540\ m^{-2}.s^{-1}$
Coefficient de portance	C_L	$0,5$
Vitesse de croisière		$252\ m.s^{-1}$
Vitesse des jets de moteur	U_j	$480\ m.s^{-1}$
Rapport de densité	ρ_0/ρ_j	$2,4$
Distance jet vortex adimensionné		23%
Diamètres des jets	D_j	$0,6\ m$

Tableau 5.1 : paramètres caractéristiques d'un bi-moteurs commercial de type Airbus A-330 en régime de croisière

La détermination de la valeur de la circulation du tourbillon marginal pour un avion en vol de croisière est donnée en Annexe.

Les paramètres de la campagne d'essai, répertoriés dans le Tableau 5.2, ont été fixés afin de respecter, à la fois, le rapport des densités de masse entre le jet et l'écoulement externe ρ_0/ρ_j , mais également, le rapport de similitude proposé par Long.

Conditions d'essais		
Envergure	b	$0,5\ m$
Rapport d'aspect	AR	4
Circulation du tourbillon marginal	Γ_0	$1,6\ m^{-2}.s^{-1}$
Vitesse de l'écoulement libre	U_0	$20\ m.s^{-1}$
Vitesse des jets	U_j	$60\ m.s^{-1}$
Rapport de densité	ρ_0/ρ_j	2
Distance jet vortex adimensionné		22%
Diamètres des jets	D_j	$0,01\ m$
Température ambiante	T_a^0	$300K$
Température des jets	T_j^0	$600K$
Nombre de Reynolds base sur la corde	Re_c	1.10^5
Nombre de Mach	M_j	$0,12$

Tableau 5.2 : Paramètres caractéristiques de la campagne d'essai

Le sillage de l'aile peut être exploré sur une distance d'environ huit envergures.

En première approximation, on considère deux temps caractéristiques :

- *Temps caractéristique de convection axiale* :

Il s'agit d'une estimation du temps nécessaire pour qu'une particule fluide émise par le jet parcoure huit envergures

$$\tau_{8b} = \frac{8b}{U_0} \tag{5.2}$$

- *Temps caractéristique de convection tangentielle*

Il s'agit d'une estimation du temps nécessaire pour qu'une particule fluide émise par le jet fasse un tour complet autour de l'axe du tourbillon.

La vitesse tangentielle du tourbillon est donnée par (cf. Annexes) :

$u_\theta = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} = \frac{\Gamma_0}{2\pi d_{jv}}$,

où d_{jv} représente la distance entre le jet et le tourbillon marginal.

Il s'agit de la valeur de la vitesse tangentielle d'un tourbillon de Lamb quand $r > r_c$ où r_c représente le rayon du noyau visqueux (d_{jv} est très supérieur à la valeur du rayon visqueux du tourbillon)

On obtient alors :

$$\tau_{\Gamma_0} = \frac{2\pi d_{jv}}{u_\theta} = \frac{4\left(\pi d_{jv}\right)^2}{\Gamma_0} \tag{5.3}$$

Ainsi, $\frac{\tau_{8b}}{\tau_{\Gamma_0}} = 0.71$

On estime donc que sur les huit envergures accessibles dans la soufflerie, on sera capable d'observer l'enroulement du jet autour du tourbillon sur un peu moins de trois quarts de tour.

5.1.2. Enroulement de la nappe tourbillonnaire

La Figure 5.2 permet d'observer le tourbillon marginal, la nappe tourbillonnaire le long du bord de fuite du profil NACA0012 (ainsi que sur le mât) mais également le jet (couleur rouge). Il est intéressant de noter, à travers cette illustration, que le jet scinde la nappe de vorticité en deux partie : une située entre le tourbillon marginal et le jet, et une autre positionnée entre le jet et le plan de symétrie de la maquette. La partie située entre le jet et le plan de symétrie est isolée du tourbillon puis rapidement diffusée dans le sillage. La deuxième partie, quant à elle, est enroulée autour du tourbillon. Ainsi, elle est la seule à venir contribuer à l'intensité finale du tourbillon marginal.

Concernant le jet, sa vitesse axiale tend rapidement vers celle de l'écoulement. Ainsi, dès $x/b = 3$, il devient difficile de l'observer en utilisant les iso contours de vitesse axiale.

La position du jet et la quantité de mouvement des gaz émis sont donc deux caractéristiques importantes de la maquette. Plus le jet sera proche du saumon de l'aile et moins la nappe tourbillonnaire en bord de fuite de l'aile viendra contribuer à l'intensité du tourbillon marginal, et plus la turbulence du jet pénétra le cœur du tourbillon, cf. paragraphe 1.3.1.4.

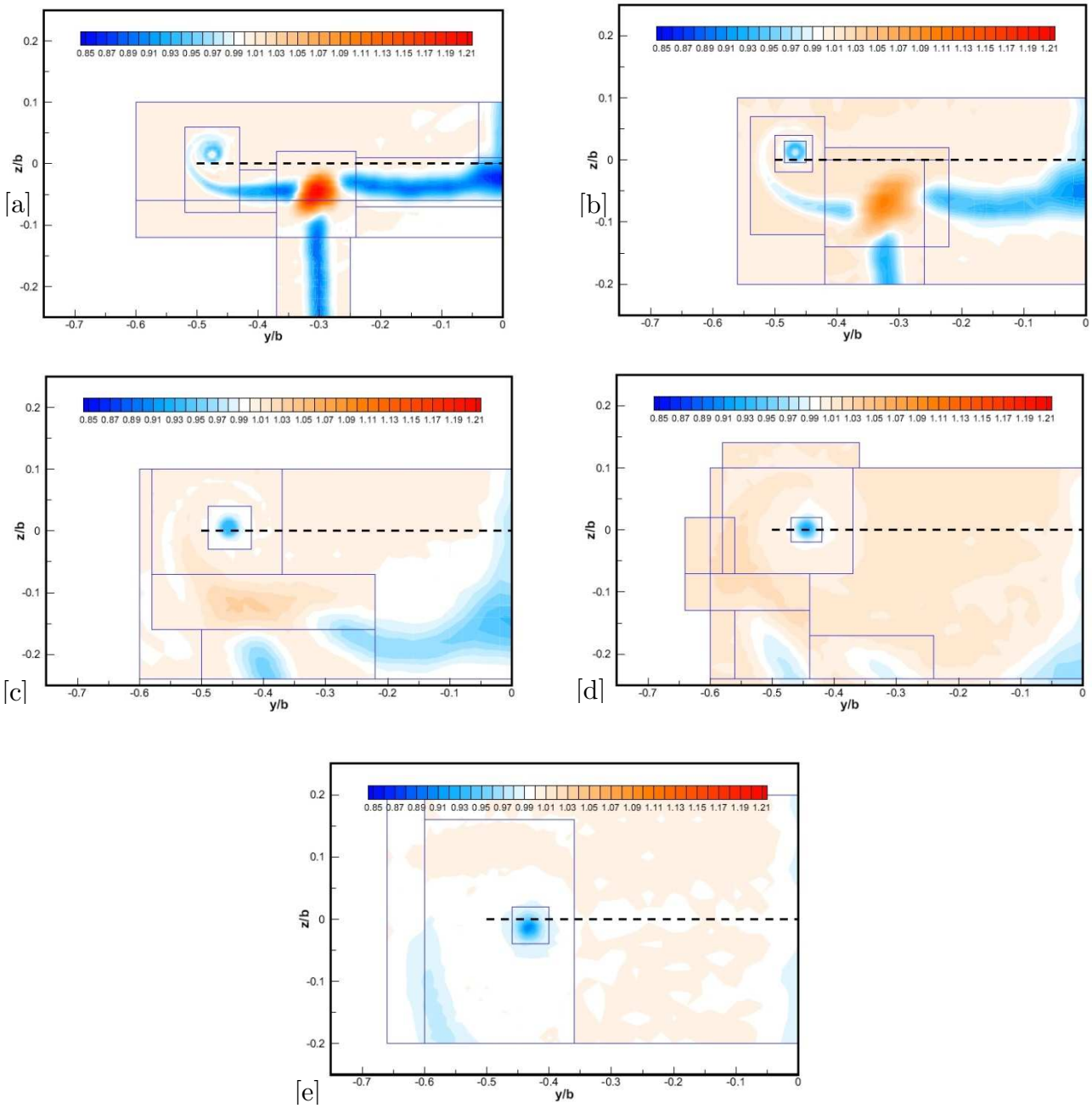

Figure 5.2 : Distribution transversale de la vitesse axiale à différentes sections an aval de la maquette. [a] : $x/b = 0.5$; [b] : $x/b = 1$; [c] : $x/b = 3$; [d] : $x/b = 5$; [e] : $x/b = 8$. Visualisation de l'enroulement de la nappe tourbillonnaire.

5.1.3. Caractéristiques du tourbillon marginal

La Figure 5.3 présente les profils de vitesse correspondant à une exploration verticale de la vitesse moyenne à travers le tourbillon marginal dans les plans $x/b = 0{,}5$ et $x/b = 8$. L'axe des abscisses est centré sur une estimation du centre du tourbillon.

A $x/b = 0{,}5$, la vitesse axiale du tourbillon présente un pic de survitesse en son centre (de 2% environ) accompagné d'un déficit de vitesse de l'ordre de 6%. Le tourbillon est dit alors de type « jet ». Le pic de survitesse peut s'expliquer par l'enroulement autour du saumon des particules fluides issues de l'extrados, là ou la pression est plus faible et la vitesse plus élevée par rapport à l'écoulement externe. Concernant le profil de la vitesse tangentielle, il est caractéristique d'un tourbillon visqueux. Ce profil permet de définir une grandeur particulière à partir du maximum de vitesse tangentielle. Cette grandeur est appelée « rayon visqueux »et est notée r_c. Ce rayon visqueux peut être évalué ici à environ $r_c/b = 0{,}012$, soit $r_c = 6.10^{-3} m$. A l'intérieur du noyau visqueux ($r/r_c < 1$), le fluide est en rotation solide. A l'extérieur, le profil de vitesse tend vers la solution d'un fluide parfait i.e. de viscosité nulle ($v \propto 1/r$). La vitesse verticale du tourbillon, quant à elle, indique que le tourbillon à un léger mouvement de descente de l'ordre de $W/U_0 = -0{,}08$ soit $W = -1{,}6 m s^{-1}$.

A $x/b = 8$, la vitesse axiale du tourbillon ne présente plus de survitesse. Au contraire, à l'intérieur du tourbillon la vitesse a, désormais, un déficit de l'ordre de 10%. La survitesse initiale a été diffusée par la viscosité moléculaire et la turbulence. Le tourbillon est dit de type « sillage ».

Les deux autres profils présentent des caractéristiques similaires par rapport au tourbillon à une demie envergure. Une légère diffusion du tourbillon apparaît puisque la vitesse tangentielle atteint un maximum de $V/U_0 = 0{,}4$ soit $V = 8\ m.s^{-1}$ contre $V = 10\ m.s^{-1}$ à une demie envergure. La taille du rayon visqueux reste quasiment identique. Elle varie en $2.24\sqrt{\nu t}$ avec $t = x/U_0$ le temps et ν la viscosité du fluide ($\nu \sim 10^{-5} m^2.s^{-1}$), cf. Annexe (partie tourbillon de Lamb). Ainsi à huit envergures le rayon visqueux atteint par effets visqueux $r_c \sim 7.10^{-3} m$. La vitesse de descente s'est, quant à elle, creusée. Elle est désormais de $W = -3{,}2 m.s^{-1}$. Cette dernière a augmenté grâce aux forces centrifuges qui se développent entre les deux tourbillons marginaux contra rotatifs.

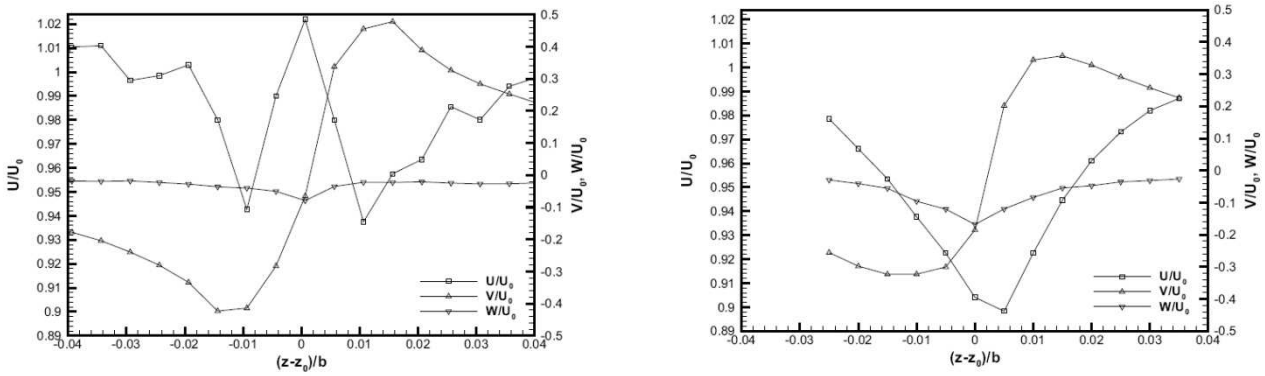

Figure 5.3 : Profils des vitesses axiales U/U_0 ; tangentielles V/U_0 et verticales W/U_0 à $x/b = 0.5$ (à gauche) et $x/b = 8$ (à droite)

La circulation est une autre grandeur très souvent utilisée pour quantifier l'intensité d'un tourbillon, cf. Annexes. Sur la Figure 5.4 sont tracées les distributions radiales de la circulation obtenues dans chaque plan de sondage. La circulation permet de mettre en évidence une nouvelle grandeur caractéristique qui est le rayon de vorticité r_v qui correspond au rayon où la circulation atteint son maximum. Ce rayon vaut le double du rayon visqueux $r_v = 2r_c$. A l'intérieur de la région définie par $r/r_v < 1$, l'écoulement est fortement rotationnel alors qu'à l'extérieur, l'écoulement est quasiment irrotationnel.

La circulation évolue très peu avec la distance avale, et atteint seulement 37.5% de la circulation théorique calculée pour une aile, cf. Annexes. Une grande partie du sillage de l'aile n'est pas enroulé autour du tourbillon marginal et permet d'expliquer ce résultat.

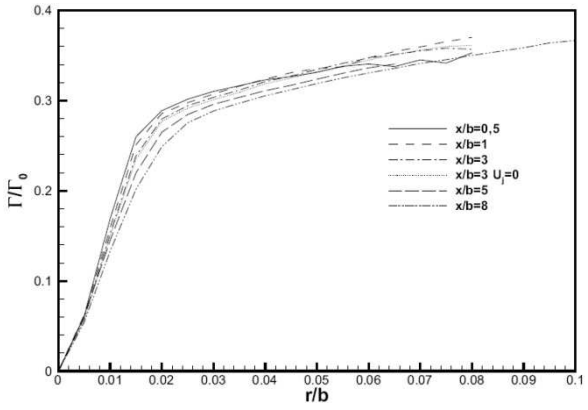

Figure 5.4 : Evolution de la circulation moyenne du tourbillon en fonction du rayon pour différentes valeurs de x/b

Concernant la turbulence dans le sillage, la Figure 5.5 présente la distribution du taux de turbulence $\sqrt{k}/U_0$ où $k = 1/2\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$ est l'énergie cinétique des fluctuations. Dans l'ensemble des plans de sondage le taux de turbulence minimum résolu par le vélocimètre est

inférieur à 4% . Ce niveau est essentiellement dû au bruit de la chaîne anémométrique, le taux de turbulence résiduel de la soufflerie F2 étant bien plus bas ($< 0{,}5\%$).

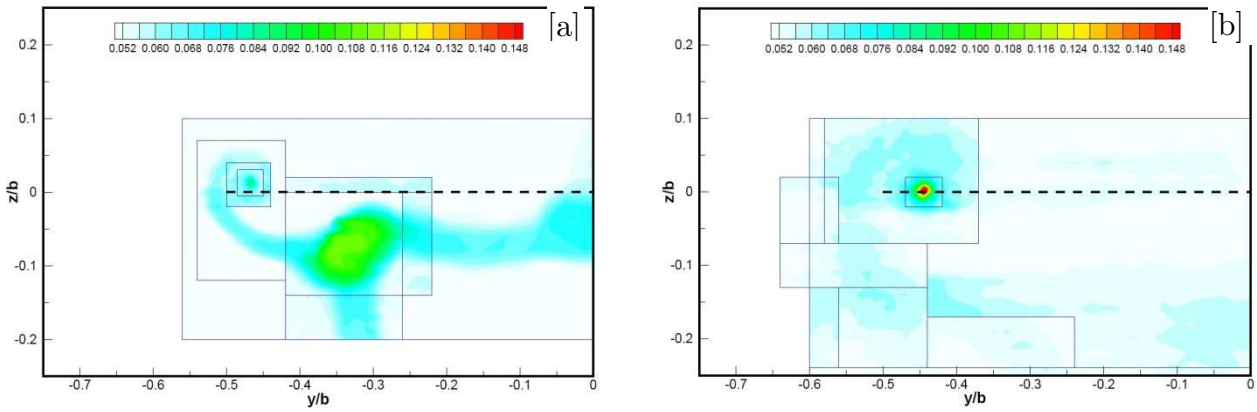

Figure 5.5 : Distribution transversale des taux de turbulence : [a] $x/b = 1$; [b] $x/b = 5$

Dans le plan $x/b = 1$, Figure 5.5[a], la turbulence dans les sillages de l'aile et du mat est typiquement de l'ordre de 6% . Les taux de turbulence sont plus importants dans le jet, de l'ordre de 8% contre 20% mesurés initialement dans le plan $x/b = 0$. Dans le plan $x/b = 5$, sur la Figure 5.5[b], la turbulence décroît ensuite sous l'effet de sa diffusion et de sa dissipation. A $x/b = 5$, seule subsiste une forte contribution d'environ 15% au centre du tourbillon qui est la marque d'une « instationnarité d'ensemble », connue sous les termes anglo-saxons de « meandering » ou « wandering ».

5.1.4. Caractéristiques de l'enroulement du jet chaud

La Figure 5.6 présente l'évolution de la distribution transversale de l'écart de température relatif $\Lambda = \left(T - T_a^0\right)/\left(T_j^0 - T_a^0\right)$, dans les plans $x/b = 0$; $x/b = 0.5$; $x/b = 1$; $x/b = 3$; $x/b = 5$; $x/b = 8$. T_a^0 est la température extérieure et T_j^0 la température initiale du jet.

Dans le plan $x/b = 0$ l'écart de température relatif est maximal. Le sillage thermique des mâts représente seulement 1% de l'écart de température. Par la suite, il ne semble pas perturber les distributions du champ de température.

Dans le plan de sondage $x/b = 0.5$, le centre du jet a sensiblement la même position qu'à l'instant initial. La quantité de mouvement axial du jet reste donc suffisamment importante pour ne pas être influencé par la présence du tourbillon

Au-delà du plan de sondage $x/b = 0.5$, alors que la quantité de mouvement centripète se conserve (cf. 5.1.3), la quantité de mouvement axiale du jet se diffuse. La diffusion du jet devient alors

suffisamment importante pour que le champ de température soit étiré et transporté autour du tourbillon, favorisé par les cisaillements tangentiels du champ de vitesse tourbillonnaire. Le plan de sondage $x/b = 0.5$ marque ainsi la transition entre la fin du « régime jet » et le début du « régime tourbillonnaire ». Dans le régime jet, seuls les cisaillements de vitesse axiale dans la couche de mélange du jet entraînent une très forte diffusion de la température. Dans le régime tourbillonnaire la diffusion de la température est due également à l'étirement du jet par le champ de vitesse centripète induit par le tourbillon.

Dans le dernier plan de sondage $x/b = 8$, la distribution du champ de température est enroulée autour du tourbillon. Cette distribution montre également que le centre du jet a effectué trois quart de tour. Cette position est conforme à celle prédite par l'analyse dimensionnelle (cf. 5.1.1.3).

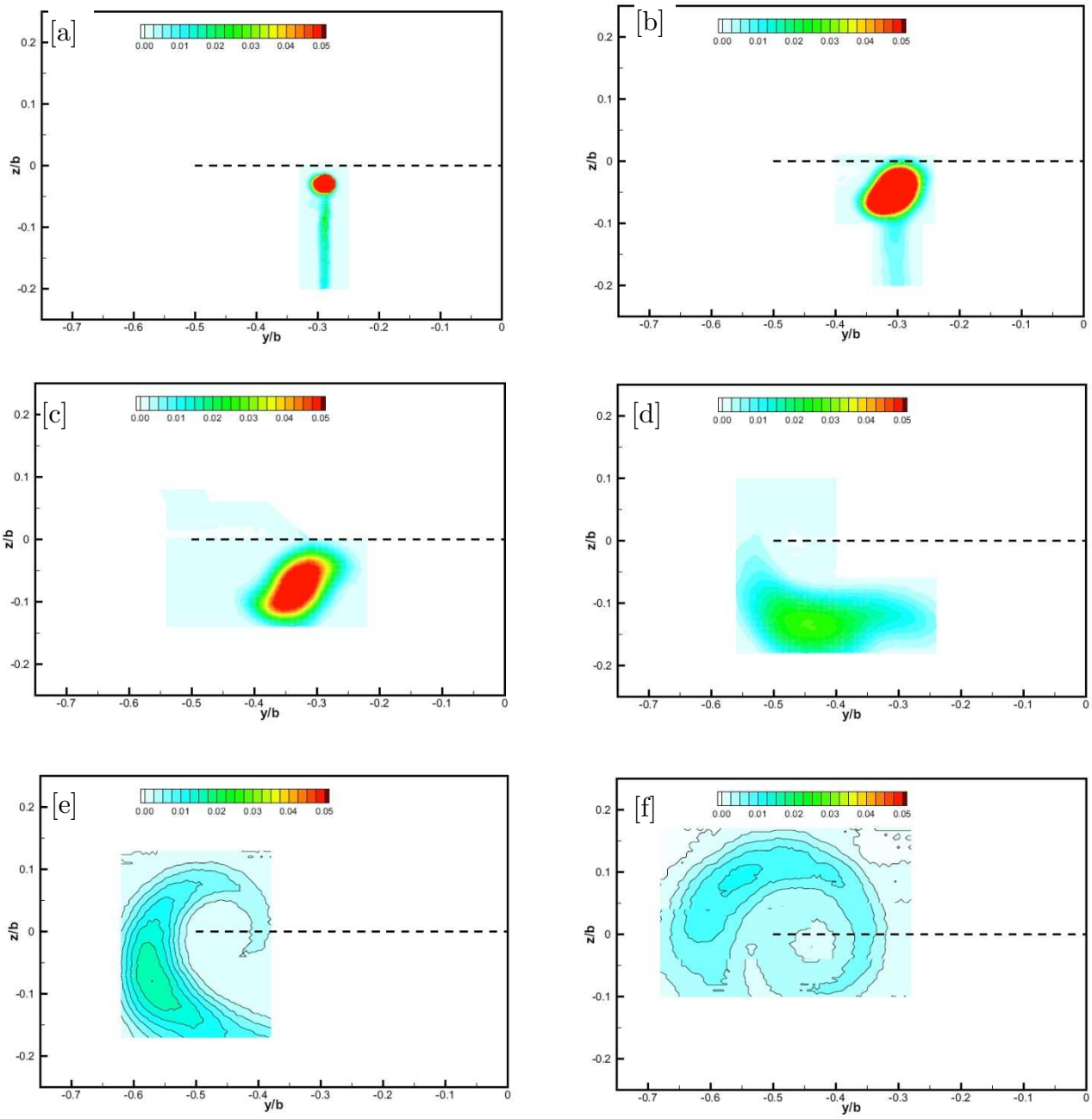

Figure 5.6 : Distribution de l'écart de température relatif mesurée dans les plans de sondage [a] : $x/b = 0$; [b] : $x/b = 0.5$; [c] : $x/b = 1$; [d] : $x/b = 3$; [e] : $x/b = 5$; [f] : $x/b = 8$

5.2. Etude numérique

Les études de (Margaris, Marles et Gursul, 2008) et (Devenport *et al.*, 1996) ont mis en évidence que les mécanismes présents lors de l'interaction jet tourbillon étaient instationnaires. Néanmoins, même si ces auteurs ont montré que les grandeurs étaient anormalement diffusées lorsque le champ était moyen à cause du « vortex wandering phenomena », ce dernier permettait d'obtenir les mêmes tendances obtenues avec des champs instantannés. On se propose donc de mener des calculs stationnaires de type RANS pour notre étude.

Le « vortex wandering phenomena » est un phénomène qui provient des instationnarités. Ainsi la position exacte du tourbillon varie autour d'une position moyenne. La position exacte ne peut donc être connue qu'en s'intéressant au champ instationnaire. Dans son étude, (Margaris, Marles et Gursul, 2008) se sont intéressés à quantifier ce phénomène lors de l'interaction d'un jet et d'un tourbillon dans une veine hydraulique pour différents nombres de Long P_L. Le profil sustantateur est une aile d'envergure $b = 0,46\ m$ et de corde $c = 0,04\ m$. Le nombre de Reynolds basé sur la circulation est $\mathrm{Re}_\Gamma = 5500$, celui basé sur la corde est $\mathrm{Re}_c = 10000$. Le diamètre de sortie de l'injecteur est $d_j = 6.10^{-3}\ m$ et la distance entre l'injecteur et le tourbillon marginal est $d_{cj} = 24.10^{-3}\ m$. Pour quantifier le phénomène, ils utilisent l'écart type de la distribution entre la position moyenne et les différentes positions obtenues grâce aux champs instantanés. A une envergure en aval de la maquette, cette quantité est estimée à 29% de la valeur du rayon visqueux du tourbillon lorsqu'il n'y a pas d'injecteur placé dans l'écoulement. Elle est à 35% avec le simple ajout d'un injecteur sans jet. Puis augmente lorsque l'on augmente la vitesse axiale du jet c'est-à-dire pour des nombres de Long croissants. Lorsque $P_L = 0,13$, l'amplitude est de l'ordre de 45%, quand $P_L = 0,34$, elle est de 93%. Elle atteint jusqu'à 110% avec un nombre de Long de $P_L = 0,78$.

Dans notre étude, non seulement le nombre de Long est faible puisqu'il vaut $P_L = 0,04$, mais également la distance jet tourbillon est plus importante que dans l'étude de Margaris ($d_{cj} = 115.10^{-3}\ m$ contre $d_{cj} = 24.10^{-3}\ m$). On peut donc s'attendre à ce que l'influence du jet n'ait que peu d'importance sur les instationnarités du tourbillon et que ces dernières soient simplement intrinsèques au tourbillon lui-même. Par contre, il est difficile d'en estimer l'importance, puisque dans notre étude les nombres de Reynolds basés sur la circulation du tourbillon Re_Γ et sur la corde de l'aile Re_c sont très différents des valeurs utilisées dans les travaux de (Margaris, Marles et Gursul, 2008), cf. Tableau 5.3.

Nombre de Reynolds	Etude Margaris	Etude courante
Re_c	1.10^4	1.10^5
Re_Γ	5500	10 000

Tableau 5.3 : Nombre de Reynolds basé sur la circulation du tourbillon et basé sur la corde du profil d'aile correspondant à notre étude et à celle de (Margaris, Marles et Gursul, 2008)

A ma connaissance aucune étude a été menée pour quantifier l'influence de ces nombres sur les instabilités du tourbillon marginal.

5.2.1. Conditions initiales et aux limites du domaine de calcul

On reprend ici toutes les caractéristiques de la campagne expérimentale afin de mener une simulation numérique des phénomènes physiques observés dans le sillage de la maquette lors de cette dernière. Les résultats numériques sont alors directement comparables aux résultats expérimentaux. Les caractéristiques du maillage, les modèles utilisés pour la simulation peuvent ainsi être optimisés afin de s'approcher numériquement des résultats obtenus lors de la campagne expérimentale.

Un profil type NACA0012 ainsi que son injecteur, identiques à l'expérience, sont placés dans un domaine de calcul rectangulaire, cf. Figure 5.7.

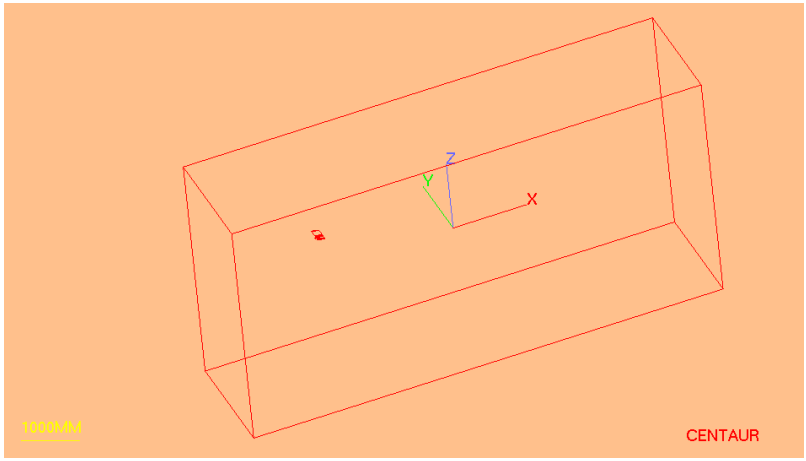

Figure 5.7 : Vue globale du domaine de calcul utilisé pour la simulation numérique de l'écoulement dans le sillage de la maquette NACA0012/injecteur.

Les dimensions du domaine sont : $[16b, 4b, 8b]$ où b représente l'envergure du NACA0012

Les dimensions longitudinales choisies permettent de mener un calcul et obtenir les différentes grandeurs caractéristiques de l'écoulement jusqu'à huit envergures en aval de la maquette.

Les dimensions transversales du domaine ont été imposées de manière à ce que les conditions limites ne viennent pas perturber l'écoulement dans le sillage de la maquette.

Les conditions initiales et aux limites (Tableau 5.4) du domaine de calcul ont été choisies de manière à reproduire les conditions de l'expérience.

Limites	Type de limite	Variables imposées
Amont	Entrée	$U = 20$ m.s^{-1}, $T = 293$ K, $k = 0{,}1$ m^2.s^{-2}, $l = 0{,}001$ m
Aval	Sortie	$P = 101325$ Pa
Plan de symétrie	Symétrie	/
Latérales	Glissement	/
NACA0012	Paroi	/
injecteur	Paroi	/
jet	Entrée	$U = 60$ m.s^{-1}, $T = 600$ K, $k = 4{,}5$ m^2.s^{-2}, $l = 0{,}001$ m

Tableau 5.4 : Conditions limites utilisées pour le calcul RANS de l'écoulement dans le sillage de la maquette

L'écoulement externe possède une vitesse $U_0 = 20$ m.s^{-1}. Sa température est $T_0 = 293$ K et sa pression $P_0 = 101325$ Pa. En sortie d'injecteur, la vitesse du jet est $U_j = 60$ m.s^{-1} et sa température $T_j = 600$ K.

5.2.2. Caractéristiques des maillages

La complexité dans la réalisation du maillage provient de la nécessité de résoudre de nombreuses échelles spatiales. Des échelles les plus petites, liées à la structure du tourbillon (rayon visqueux très petit : $r_c = 6.10^{-3} m$, diamètre de sortie de l'injecteur : $d_j = 10.10^{-3} m$) aux échelles macroscopiques liées à la formation du tourbillon, à l'enroulement du jet, et ceci jusqu'à huit envergures c'est-à-dire plusieurs mètres. Ainsi, la réalisation du maillage doit répondre à de nombreuses exigences. Quatre zones critiques sont identifiées pour cette étude :

- La première zone concerne la région du bout d'aile. Cette région est constituée du saumon ainsi que d'une partie de l'extrados et de l'intrados du profil NACA0012. C'est ici que l'écoulement de l'air va subir les plus forts gradients de pression et de vitesse. C'est en agissant sur l'écoulement de l'air que le profil NACA0012 acquiert sa portance. Il en résulte notamment la formation du tourbillon marginal lié particulièrement au déplacement de l'air, de l'intrados (zone de plus forte pression) vers l'extrados (zone de plus faible pression) comme il est expliqué au paragraphe 1.3.1.2. Des tailles de maille suffisamment fines (de l'ordre du micromètre) en

proche paroi sont donc nécessaires afin de correctement évaluer les forts gradients présents dans la couche limite. Il s'agit d'une condition absolument nécessaire pour permettre la formation numérique du tourbillon marginal. La taille de la première maille proche de la paroi doit être d'autant plus petite si l'on doit mailler la sous couche visqueuse. Cette taille peut être un peu plus importante avec l'utilisation d'une loi de paroi, cf. paragraphe 2.3.7.3. Pour un écoulement de fluide de viscosité cinématique ν à la vitesse U_0 sur une paroi ayant un coefficient de frottement C_f, elle est donnée par l'expression :

$$y = \frac{\nu y^+}{U_0 \sqrt{C_f/2}} \tag{5.4}$$

Avec l'utilisation d'une loi de paroi, dans cette étude, la taille de la première maille est $y = 800\ \mu m$ $\left(\nu\left(T = 293K, P = 101325Pa\right) = 1.5.10^{-5} m^2.s^{-1}\right.$, $U_0 = 20\ m.s^{-1}$, $C_f = 0{,}02$ et $\left.y^+ = 1\right)$. Sans cette loi, la taille devient $y = 8\ \mu m$.

Le rapport de (Moens, 2005) montre qu'un maillage comprenant près de 7.10^6 points dans la région du saumon est nécessaire pour correctement caractériser la formation du tourbillon avec des méthodes numériques comparables à celles utilisées dans cette étude (RANS)

- La deuxième zone concerne la région proche du jet. C'est-à-dire toute la région où se développe la couche de mélange engendrée par les forts gradients de vitesse et de température existants entre l'écoulement du jet et l'écoulement extérieur. Afin de correctement résoudre cette couche de mélange, il est important d'avoir un maillage suffisamment fin. Il est mentionné par plusieurs auteurs et notamment (Boris, Oran et Kolbe, 1992) qui ont étudié numériquement l'écoulement d'un jet subsonique dans une atmosphère au repos en utilisant des méthodes LES, qu'un minimum d'une vingtaine de points était nécessaire dans la couche de mélange. L'ordre de grandeur de la couche de mélange peut être estimé, dans ce cas, par la relation donnée par (Candel, 1974):

$$\frac{\delta}{d_j} = 0{,}153\left(\frac{x}{d_j}\right) + 0{,}002 \tag{5.5}$$

où d_j représente le diamètre initial du jet. A $x/d_j = 2$, par exemple, l'épaisseur de la couche limite est proche de $2{,}464.10^{-2} m$ soit une taille de maille dans cette zone de l'ordre du millimètre. Ceci ne peut être qu'une estimation puisque les conditions aérodynamiques de notre étude ne sont pas les mêmes et notamment, le développement du jet ne s'effectue pas dans une atmosphère au repos. A ma connaissance, peu d'auteurs se sont intéressés à cet écoulement particulier.

- La troisième zone concerne le noyau visqueux du tourbillon marginal dans le sillage. L'étude expérimentale a évaluer le rayon visqueux du tourbillon à $r_c = 6.10^{-3} m$. C'est dans cette région que l'écoulement est en rotation solide et que 70% de la circulation du tourbillon est concentrée, cf. Annexe « Modèle de tourbillon de Lamb Oseen ». Le maillage doit y être suffisamment fin pour permettre de résoudre correctement les grandeurs caractéristiques du tourbillon. (Stumpf *et al.*, 2004) a mené des simulations Euler pour étudier les caractéristiques du sillage proche d'un avion en configuration de décollage. Plusieurs dizaines de points dans le

rayon visqueux ont été nécessaires pour correctement décrire le tourbillon marginal. L'utilisation d'un maillage adaptatif de près de $6,4.10^6$ points a été nécessaire pour sonder jusqu'à une demie envergure en aval de l'avion. Dans notre étude, dix points dans le noyau visqueux impose des tailles de maille de l'ordre de $6.10^{-4}m$. La difficulté vient du fait que la taille de ce noyau visqueux n'évolue que très peu par diffusion dans le sillage et reste encore à $r_c = 7.10^{-3}m$ à huit envergures en aval de la maquette. Ainsi la taille de maille très petite de $6.10^{-4}m$ doit être maintenue jusqu'à quatre mètres. Ce qui est considérable.

Enfin la dernière zone concerne toute la partie où la présence du tourbillon marginal va provoquer un écoulement rotationnel de l'air et va permettre l'étirement puis l'enroulement du jet autour du noyau tourbillonnaire. Il s'agit d'une zone circulaire centrée sur le tourbillon marginal et ayant un rayon au moins égal à la distance séparant le cœur du tourbillon du centre du jet. De même cette région doit s'étendre sur les huit envergures.

A l'évidence, proposer un maillage répondant parfaitement à l'ensemble des critères évoqués ci-dessus est très délicat. En effet celui-ci nécessiterait un nombre considérable de points et donc des ressources informatiques extrêmement importantes.

Les outils numériques disponibles à l'ONERA lors de cette étude, déjà très performants, ne permettent pas d'élaborer des maillages contenant plus de quelques millions de points et quelques dizaine de millions de faces.

Deux maillages sont proposés pour cette étude :

- Concernant le premier maillage (Figure 5.8), les efforts ont été accentués sur le sillage. Il s'agit d'un maillage à dominance hexaédrique élaboré à l'aide du logiciel « Harpoon ». Ce type de maillage permet, à nombre de points équivalents, de diminuer considérablement le nombre de facettes.

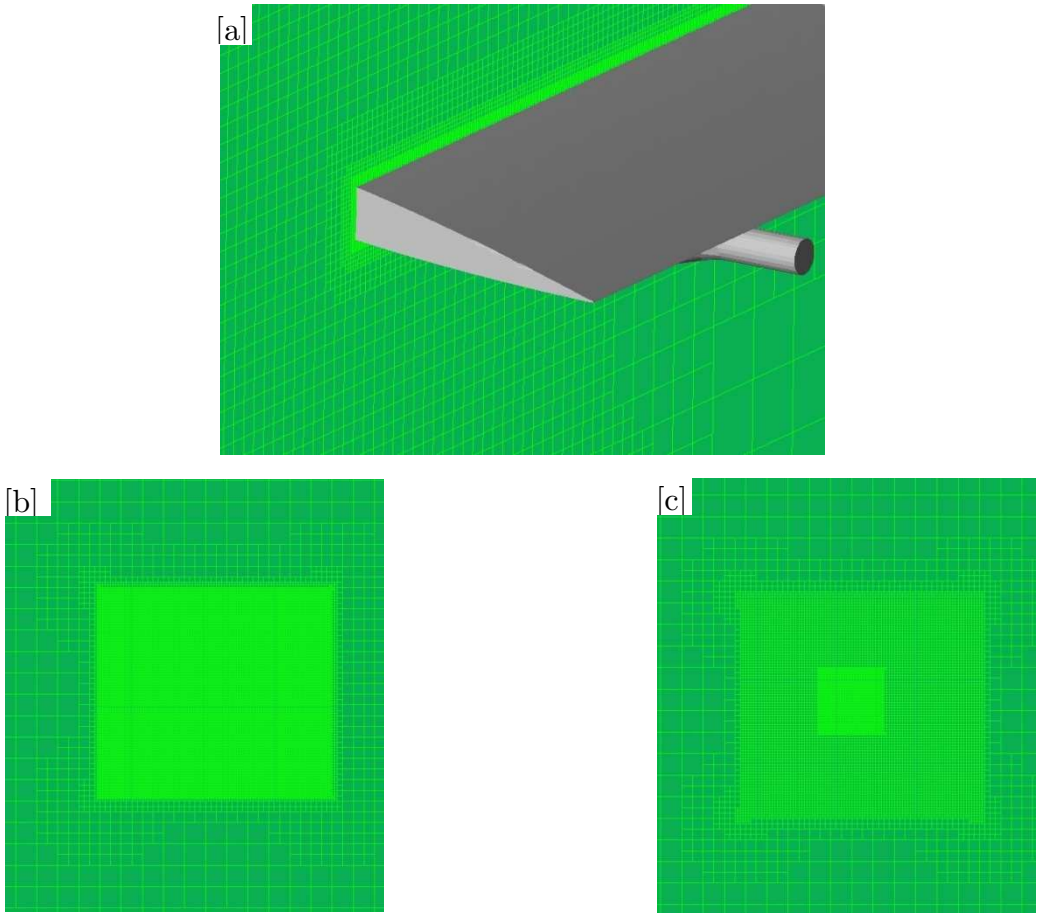

Figure 5.8 : Visualisation du maillage 1 élaboré à l'aide du logiciel « Harpoon ». [a] : coupe 2D du maillage en proche paroi. [b] : coupe 2D du maillage à une envergure. [c] : coupe 2D du maillage à huit envergures

- Le deuxième maillage, quant à lui, a privilégié la région du saumon (Figure 5.9). Il s'agit d'un maillage hybride, c'est-à-dire qui utilise à la fois des hexaèdres et des tétraèdres. Le sillage est composé majoritairement d'hexaèdre tandis que la région proche du saumon est constituée de tétraèdres. Ce maillage a été élaboré à l'aide du logiciel « Centaur ».

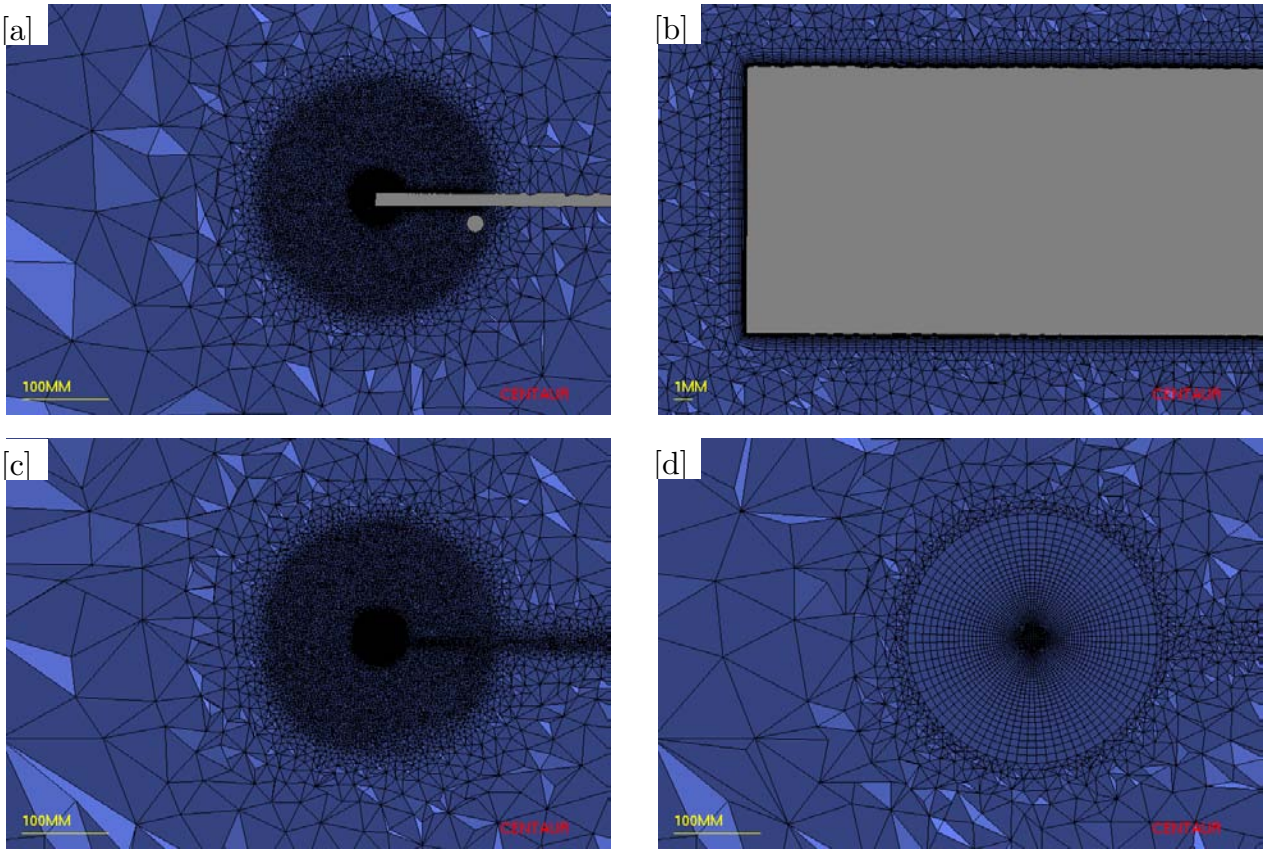

Figure 5.9 : Visualisation du maillage 2 élaboré à l'aide du logiciel « Centaur ». [a] : coupe transversale du maillage autour de la maquette. [b] : Visualisation du maillage proche de l'aile. [c] : coupe transversale du maillage à une demie-envergure. [d] : coupe transversale du maillage à huit envergures

Numéro de Maillage	1	2
Logiciel	Harpoon	Centaur
Points (en millions)	12,6	4,1
Facettes (en millions)	37,7	23,7

Tableau 5.5 : Caractéristiques des deux maillages

Le premier maillage devrait, ainsi, permettre de mieux conserver les grandeurs caractéristiques du tourbillon tout au long des huit envergures, tandis que le deuxième devrait permettre de mieux évaluer la formation du tourbillon marginal. Leurs caractéristiques sont données dans le Tableau 5.5.

Le calcul a été effectué sur 64 processeurs Montecito et a nécessité environ 100 heures de calcul pour le maillage 1 et 70 heures pour le maillage 2.

5.2.3. Résultats

5.2.3.1. Formation du tourbillon marginal

Comme il a été évoqué au paragraphe 1.3.1.2, la formation du tourbillon marginal résulte de l'enroulement de l'écoulement le long de la corde au niveau du bout d'aile, lieu de discontinuités de pression. L'intensité du tourbillon ainsi formé peut être évaluée et représentée par sa vorticité. La vorticité $\vec{\Omega}$ d'un fluide en mouvement rotationnel à la vitesse $\vec{U}$ est représentée par le rotationnel de la vitesse :

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot\vec{U}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial_x \\ \partial/\partial_y \\ \partial/\partial_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

La Figure 5.10 représente deux iso contours de la vorticité axiale coloriée par la vitesse axiale adimensionnée pour le maillage 1 . La Figure 5.10[a] représente l'iso contour $w_x = -1000\ s^{-1}$. La Figure 5.10[b] représente un iso contour pour une valeur de vorticité un peu plus élevée : $w_x = -2500\ s^{-1}$. Ces deux iso contours permettent d'observer l'enroulement. Sur l'iso contour $w_x = -1000\ s^{-1}$, un premier tourbillon est visible sur l'extrados et un deuxième plus important sur le saumon. Ces deux tourbillons fusionnent au bord de fuite de l'aile. Une légère accélération du fluide est visible à la fois sur le saumon et l'extrados. Concernant l'iso contour $w_x = -2500\ s^{-1}$ qui permet de visualiser les tourbillons de plus forte intensité, celui-ci concerne une région beaucoup moins importante.

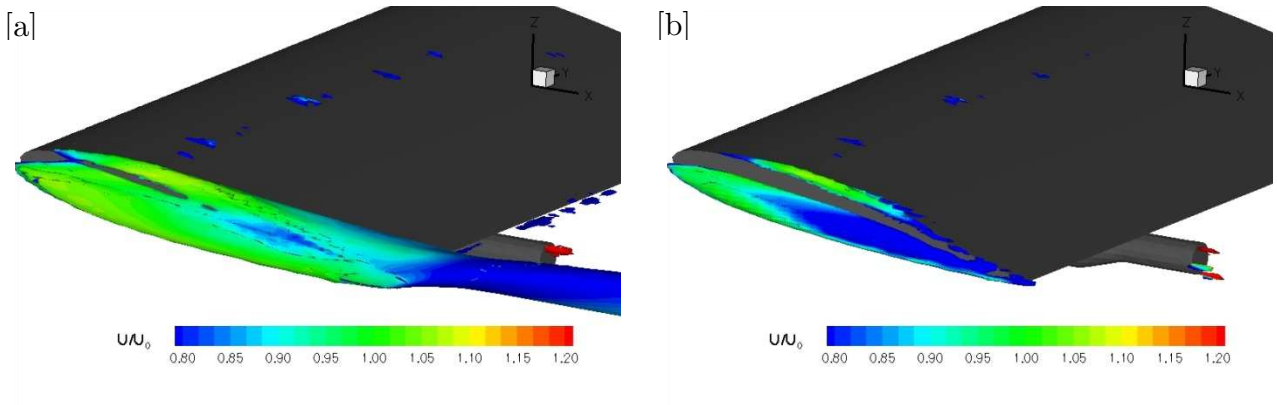

Figure 5.10 : isocontour de la vorticité axiale colorié par la vitesse axiale adimensionnée (maillage 1) [a] $w_x = -1000\ s^{-1}$; [b] $w_x = -2500\ s^{-1}$

La Figure 5.11 est l'équivalent de la figure précédente (Figure 5.10) mais pour le deuxième maillage. Les remarques faites sur la figure précédente sont toujours valables mais la description de l'écoulement y est beaucoup plus précise. L'accélération du fluide y est désormais beaucoup plus

importante notamment sur le saumon proche du bord d'attaque. La région concernant l'iso contour $w_x = -2500\ s^{-1}$ est mieux décrite et s'étend au-delà du bord de fuite à la différence des résultats obtenus avec le premier maillage.

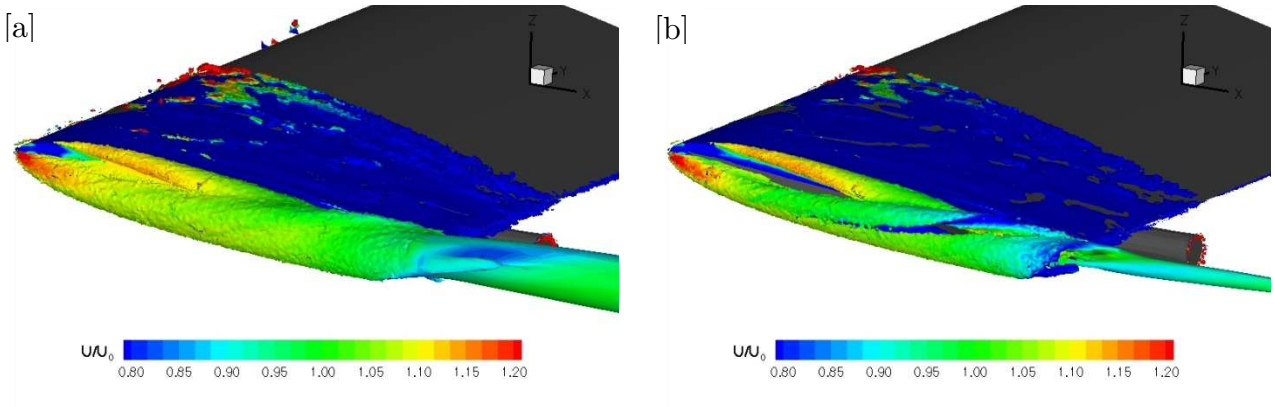

Figure 5.11 : isocontour de la vorticité axiale colorié par la vitesse axiale adimensionnée (maillage 2). [a], $w_x = -1000\ s^{-1}$; [b], $w_x = -2500\ s^{-1}$

Ainsi, comme attendu, le deuxième maillage qui contient une région beaucoup plus dense en points et des tailles de maille plus petites près du saumon de l'aile permet d'obtenir des résultats de meilleure qualité et décrit plus précisément la formation du tourbillon marginal au niveau de l'aile et dans la zone proche du bord de fuite. Un maillage de douze millions de points a été nécessaire lors des travaux de (Ghias, Mittal et Dong, 2005) pour étudier la formation d'un tourbillon marginal sur un NACA2415 jusqu'à une corde à l'aide d'une simulation LES.

5.2.3.2. Caractéristiques du tourbillon marginal

Dans ce paragraphe, les caractéristiques du tourbillon marginal sont évaluées et quantifiées dans le sillage, c'est-à-dire en aval de l'aile, après sa formation, et ce jusqu'à huit envergures. La Figure 5.12 présente les profils des vitesses tangentielles du tourbillon marginal, pour les deux maillages, à une envergure en aval de la maquette (Figure 5.12 [a]) et à huit envergures (Figure 5.12 [b]). A une envergure, on remarque une dissymétrie du profil de la vitesse tangentielle tout comme lors de la campagne de mesure. Le tourbillon marginal formé par le profil NACA0012 n'est donc pas symétrique. Il apparaît également que le maillage 2 permet d'obtenir un maximum de vitesse tangentielle plus important que le maillage 1. Ce maximum est de l'ordre de $0{,}35\ U_0$ pour le maillage 1 contre $0{,}25\ U_0$, soit un gain de près de 40%. Ce gain en amplitude s'explique par le paragraphe précédent puisque la formation du tourbillon est mieux décrite avec le deuxième maillage. Néanmoins, même avec ce maillage, le maximum de vitesse tangentielle reste sous évalué d'environ 27% par rapport à l'expérience. Concernant la valeur du rayon visqueux, il est évalué à $r_c = 10.10^{-3} m$ pour le maillage 2, contre $r_c = 15.10^{-3} m$ pour le maillage 1. L'expérience, quant à elle, a évalué cette valeur à $r_c = 6.10^{-3} m$. Les deux maillages ont donc engendré une diffusion

numérique excessive. Néanmoins, le deuxième maillage a permis de rendre cette diffusion moins importante et ainsi mieux prédire les caractéristiques du tourbillon marginal à une envergure.

A huit envergures (Figure 5.12 [b]), aucun des deux maillages n'a permis d'éviter une diffusion numérique excessive du tourbillon. Ce dernier n'a plus qu'une intensité très faible.

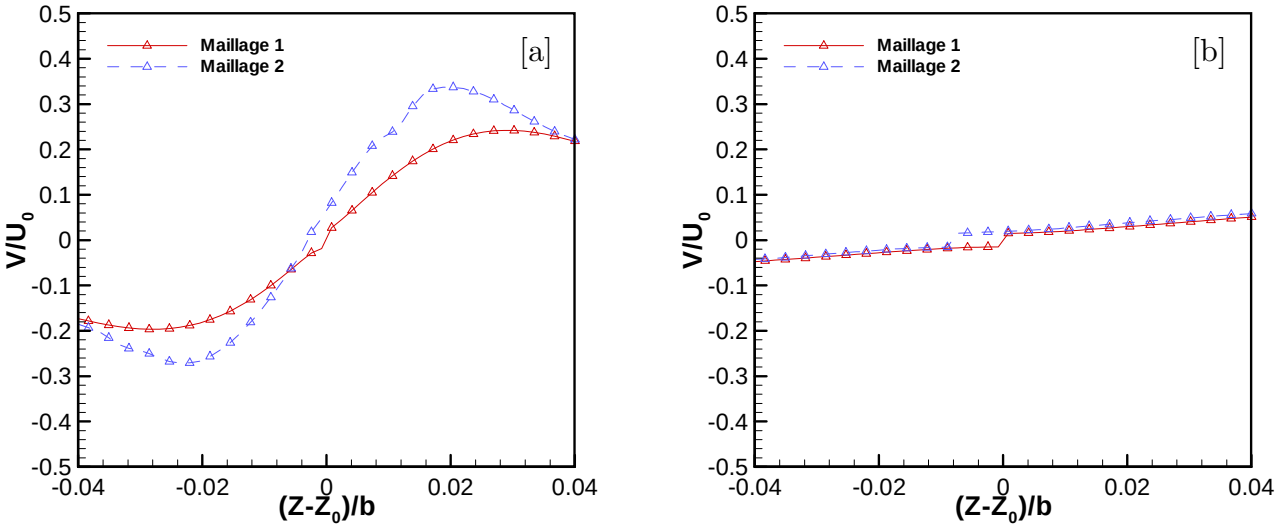

Figure 5.12 : profil de la vitesse tangentielle du tourbillon marginal centré sur son noyau tourbillonnaire dans les plan $x/b = 0{,}5$ [a] et $x/b = 8$ [b], pour les maillages 1 et 2

On voit ici toute la difficulté à, non seulement élaborer un maillage qui permette de correctement simuler la formation du tourbillon marginal et ainsi obtenir des niveaux initiaux corrects concernant les caractéristiques du tourbillon, mais qui soit également capable de conserver les amplitudes de ces grandeurs jusqu'à huit envergures en évitant une diffusion numérique excessive. En effet, si le deuxième maillage permet de mieux décrire la formation du tourbillon et ainsi mieux évaluer les grandeurs caractéristiques proche du bord de fuite de l'aile (à une envergure), il ne permet pas de les conserver jusqu'à huit envergures et finalement ne permet pas d'obtenir de meilleurs résultats que le premier maillage, loin de la maquette (à huit envergures). Mais ces résultats permettent d'affirmer que la diffusion numérique peut notamment être évitée en augmentant le nombre de points dans le sillage. Ils sont d'ailleurs en accord avec l'étude RANS sur la formation du tourbillon d'une aile AFV82 de (Moens, 2005). Cette dernière a révélé, que même avec un maillage de huit millions de points, la diffusion numérique était déjà excessive dès $1/3$ de corde en aval du bord de fuite.

Néanmoins, cette diffusion numérique peut également être expliquée par un mauvais modèle de turbulence qui pourrait créer anormalement de la turbulence, là où il ne devrait pas y en avoir. En effet, ce dernier doit être capable de simuler convenablement les effets de cascades d'énergie des plus grosses structures macroscopiques aux plus petites. Ces dernières transforment alors leur énergie cinétique en chaleur. Si la cascade est mal évaluée, l'énergie cinétique macroscopique des grosses structures tourbillonnaires peut être anormalement dissipée sous forme de chaleur. Il est donc important d'évaluer le taux de turbulence dans le tourbillon marginal calculé lors des

simulations. La Figure 5.13 représente la distribution transversale des taux de turbulence à une envergure et cinq envergures en aval de la maquette pour le maillage 1. Dans le plan $x/b = 1$, le taux de turbulence dans le jet est plus élevée par rapport aux résultats expérimentaux (cf. Figure 5.5), $\tau \simeq 0{,}14$ contre $\tau \simeq 0{,}11$. Il est légèrement sous évalué au cœur du tourbillon. De même, la turbulence dans le sillage de l'aile est trop faible pour être visualisée contrairement aux résultats expérimentaux. A $x/b = 5$, la turbulence dans le tourbillon s'est développée de manière très importante et surtout plus importante par rapport à l'expérience. Elle est la marque du phénomène instationnaire que connaît le tourbillon : le « wandering vortex phenomena », cf. paragraphe 1.3.1.4. Mais, cette turbulence anormalement élévée montre également que le modèle de turbulence, utilisé pour cette étude, n'est pas le plus adapté pour un tel écoulement. D'autres modèles de turbulence donnent de meilleurs résultats lorsque l'écoulement est majoritairement rotationnel. Ces modèles ne reposent plus sur l'hypothèse de Boussinesq qui est une bonne approximation seulement lorsque la courbure de l'écoulement moyen est faible. Il s'agit de modèles algébriques, nommés ASM (Algebric Stress Model), dont l'utilisation dans le code CEDRE, n'était pas encore possible de manière fiable lors de ces calculs. On remarque que ce tourbillon est, encore une fois, anormalement diffusé par rapport à la Figure 5.5.

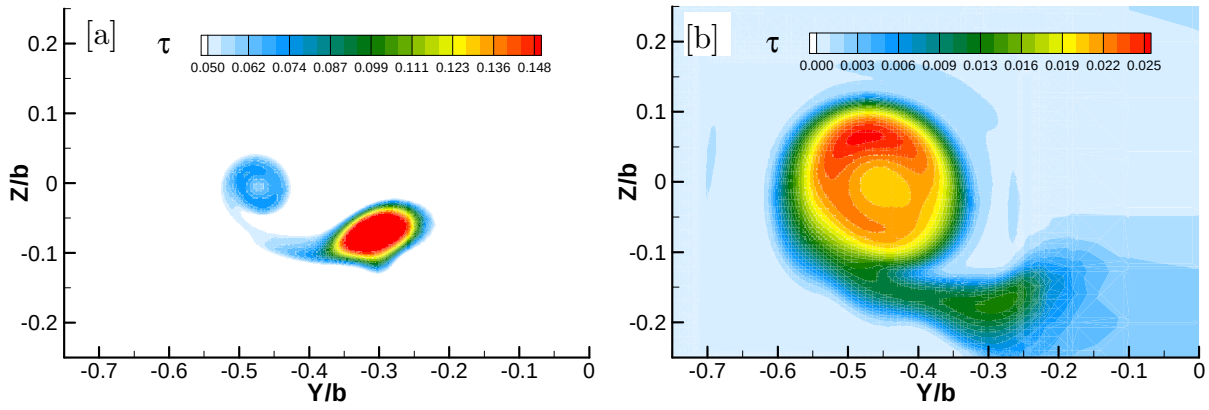

Figure 5.13 : Distribution transversale des taux de turbulence dans les plans $x/b = 1$ et $x/b = 5$ pour le maillage 1

Concernant le deuxième maillage, on retrouve les mêmes tendances obtenues avec le premier maillage, notamment à cinq envergures. Par contre, à une envergure, la turbulence du jet est beaucoup plus faible et est due à cause du maillage beaucoup moins dense dans cette région par rapport au premier maillage.

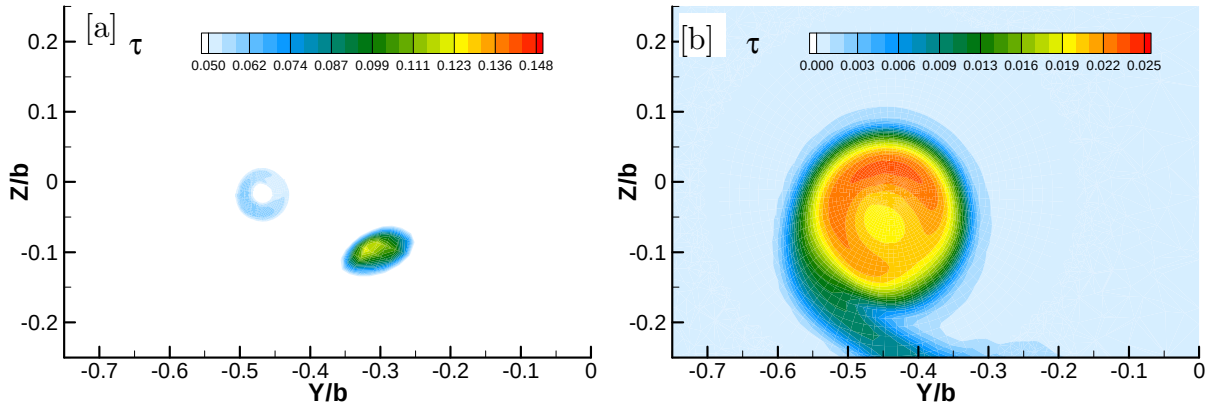

Figure 5.14 : Distribution transversale des taux de turbulence dans les plans $x/b = 1$ et $x/b = 5$ pour le maillage 2

5.2.3.3. Caractéristiques de l'enroulement du jet chaud

Comme il a été fait au paragraphe 5.1.4, la distribution transversale de l'écart de température relatif $\Lambda = \left(T - T_a^0\right)/\left(T_j^0 - T_a^0\right)$ est tracée dans les plans $x/b = 1$, $x/b = 3$, $x/b = 5$ et $x/b = 8$. Si l'on compare ces résultats à ceux présentés par la Figure 5.6, on constate globalement que les niveaux en température sont tout à fait comparables dans chaque section, que l'on utilise le maillage 1 ou 2 (Figure 5.15 et Figure 5.16). Concernant la dynamique de l'enroulement, les résultats sont satisfaisants puisqu'à une envergure le jet commence a être étiré sans néanmoins modifier le centre du jet par rapport à sa position initiale, à trois envergures, ce dernier est beaucoup plus influencé par les forces centripètes imposées par le tourbillon et quitte sa position initiale. A cinq et huit envergures, il s'enroule autour du tourbillon. On remarque que l'enroulement final du jet à huit envergures est à peine de trois quarts pour le premier maillage (Figure 5.15[d]). Il est un peu plus important avec l'utilisation du deuxième maillage Figure 5.16[d].

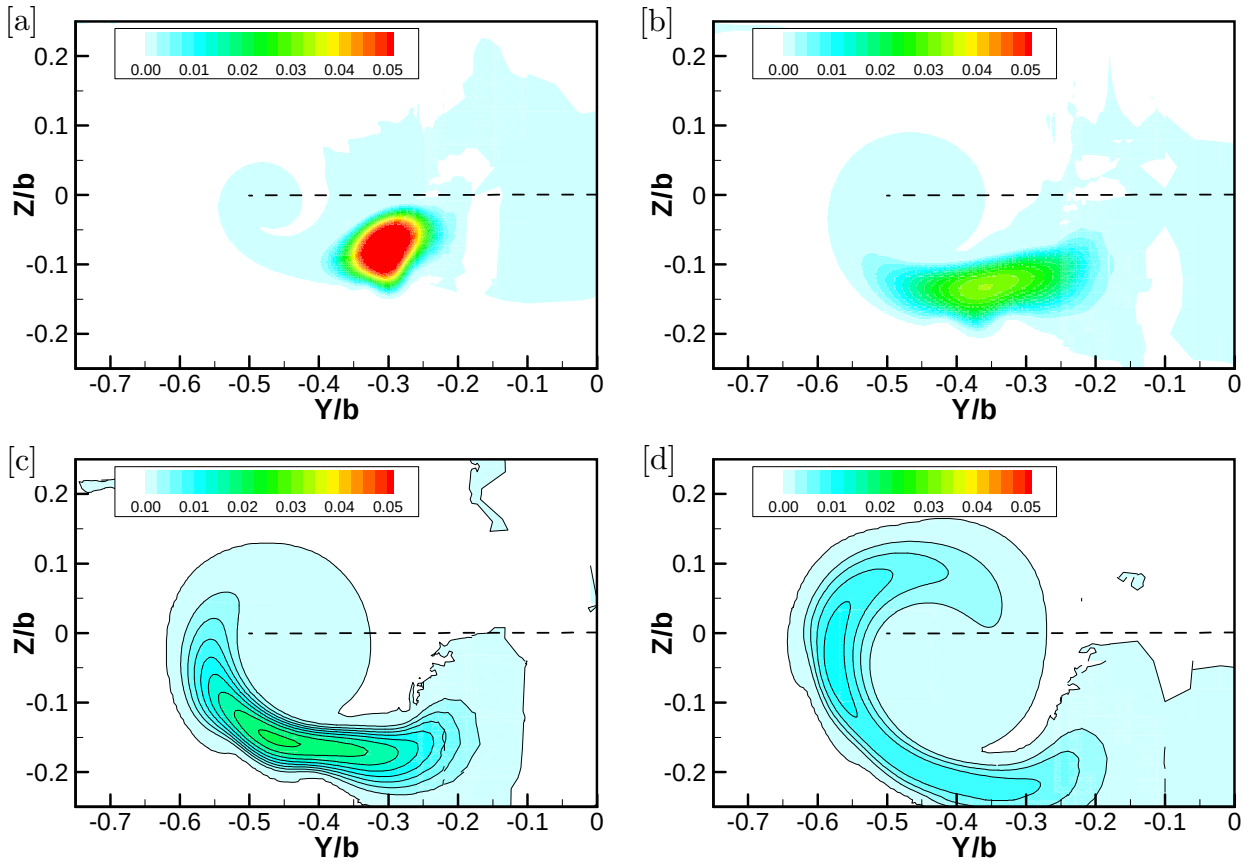

Figure 5.15 : Distribution de l'écart de température relatif calculée en utilisant le maillage 1 dans les plans de sondage (de gauche à droite et de haut en bas) $x/b = 1$, $x/b = 3$, $x/b = 5$ $x/b = 8$

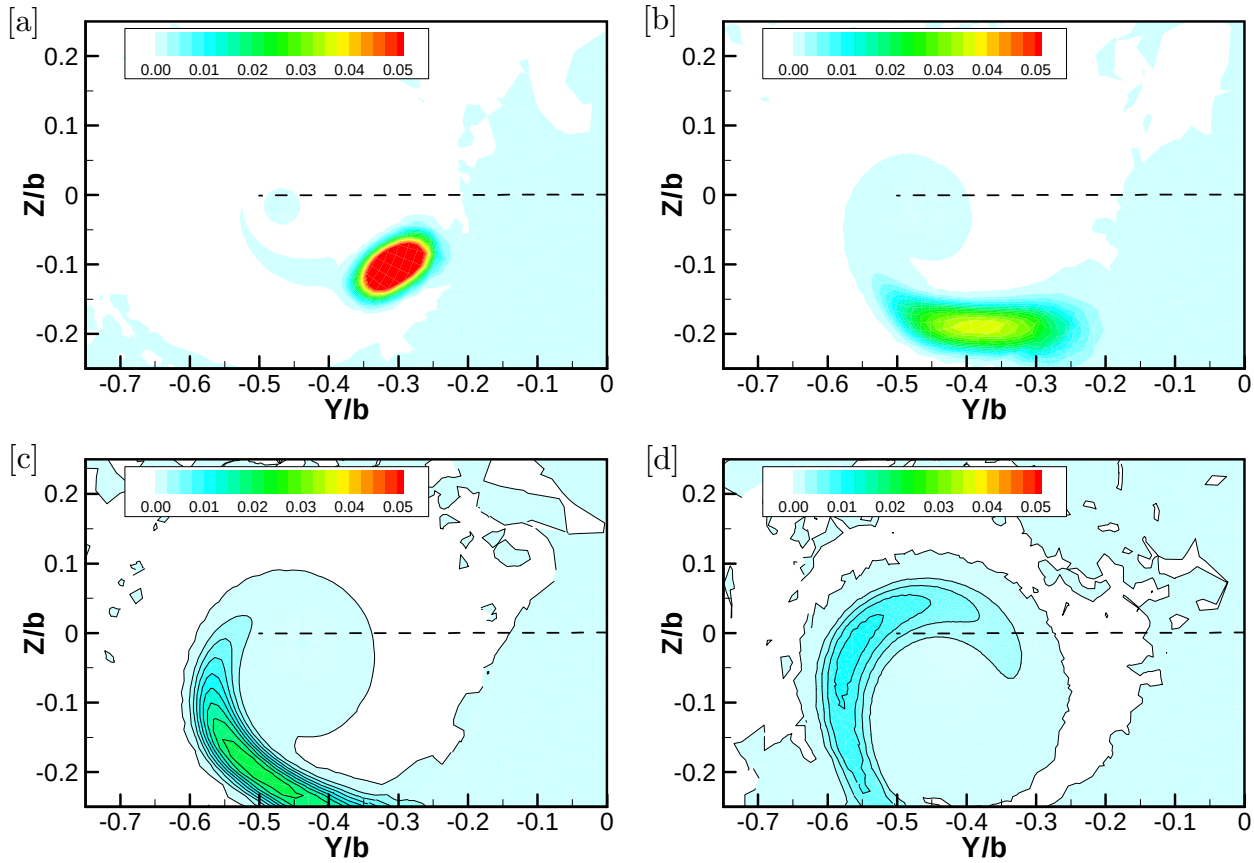

Figure 5.16 : Distribution de l'écart de température relatif calculée en utilisant le maillage 2 dans les plans de sondage (de gauche à droite et de haut en bas) $x/b = 1$, $x/b = 3$, $x/b = 5$ $x/b = 8$

Ainsi, la qualité de l'enroulement du jet dans le sillage n'est pas vraiment amélioré avec l'utilisation du deuxième maillage bien que celui-ci permette d'obtenir un enroulement plus intense de l'écoulement au niveau du saumon de l'aile et donc de mieux générer la formation du tourbillon marginal. Il s'avère donc difficile de générer un maillage, à la fois performant dans la zone proche du saumon (formation du tourbillon marginal) mais également dans le sillage jusqu'à huit envergures, tout en étant limité en nombre de mailles pour des raisons de performance des super calculateurs actuels. Le maillage doit être à la fois performant dans la zone de formation du tourbillon marginal (maillage 2) pour permettre de générer correctement cet écoulement avec notamment les bons niveaux de vorticité, mais également dans le sillage afin de conserver ces niveaux sur des distantes importantes (maillage 1).

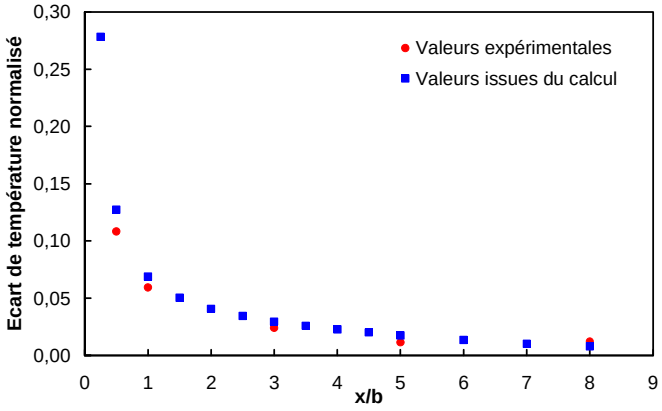

Figure 5.17 : Dilution basée sur la maximum de température. Comparaison étude expérimentale, étude numérique

Malgré cela, ces deux maillages permettent néanmoins d'obtenir un enroulement du jet tout à fait satisfaisant et un champ de température très correct ce qui est important pour l'étude des processus microphysiques qui prennent place dans le sillage. D'ailleurs la dilution d basée sur le maximum de température dans sillage est tout à fait en accord avec celle obtenue de manière expérimentale (Figure 5.17). Elle est calculée dans chaque section transversale par la relation :

$$d = \frac{\left(T_j^{\max} - T_a^0\right)}{\left(T_j^0 - T_a^0\right)} \tag{5.7}$$

où $T_j^{\max}$ est la température maximale du jet dans la section transversale considérée, T_a^0 est la température de l'écoulement libre et T_j^0 est la température initiale du jet.

Ainsi, les gaz chaud émis par les injecteurs sont refroidis avec les mêmes caractéristiques que l'expérience. Ainsi, malgré les limitations du modèle évoquées dans ce chapitre, nous considérons que ces résultats aérodynamiques sont suffisants, dans un premier temps, pour mener des simulations sur les processus microphysiques qui interviennent dans cet écoulement particulier. Toute amélioration, faite pour améliorer la précision de l'aérodynamique, avec l'utilisation de maillages plus ambitieux ou bien encore de modèles de turbulence mieux adaptés notamment, permettra de caractériser plus précisément les processus microphysiques qui s'effectuent lors de l'enroulement du jet dans le sillage.

CHAPITRE 6 ETUDE DES PROCESSUS MICROPHYSIQUES INTERVENANT LORS DU MELANGE D'UN JET CHAUD DANS LE SILLAGE D'UN PROFIL NACA0012

Le chapitre précédent a permis de mettre en place un calcul numérique permettant d'obtenir certaines caractéristiques aérothermodynamiques de l'écoulement dans le sillage d'une maquette composée d'un profil NACA0012 et de deux injecteurs d'air chaud. Notamment, il a permis de quantifier correctement la dilution du panache jusqu'à huit envergures et d'obtenir un enroulement satisfaisant du jet autour du tourbillon marginal. L'objet de ce chapitre est d'ajouter à cet écoulement déjà complexe en mécanismes aérodynamiques, un phénomène physique supplémentaire de condensation et d'évaporation sur des nano particules, représentatives des suies émises par les turboréacteurs d'avion. Ce chapitre permet ainsi d'étudier le comportement de l'outil numérique en vue de futurs calculs sur la formation de la traînée de condensation dans le sillage proche d'avions de transport commerciaux.

On s'intéresse plus particulièrement ici à l'évolution des suies dans le panache, qui sont rapidement mélangées à l'air ambiant par divers mécanismes aérodynamiques évoqués dans les chapitres précédents. Ce mélange favorise le refroidissement du panache, la pression de vapeur d'eau de ce dernier devient supérieure à la pression de vapeur saturante par rapport à la glace et les suies, germes catalyseurs de la condensation, se recouvrent d'une épaisseur de glace plus ou moins importante. On s'intéresse, dans ce chapitre, à la croissance de ces, désormais cristaux de glace, ainsi qu'à leur répartition spatiale et à leur distribution en taille dans le sillage. La concentration initiale des suies émises par le moteur, leur taille ainsi que l'humidité relative de l'atmosphère sont trois paramètres, entre autres, qui modifient les caractéristiques de la traînée de condensation. Ces modifications sont quantifiées dans ce chapitre.

6.1. Cas de référence

6.1.1. Conditions initiales

Afin de permettre l'étude des phénomènes microphysiques dans le sillage de la maquette, il est nécessaire de modifier certains paramètres des calculs précédents. Ainsi, la pression et la température de l'air ambiant sont fixées désormais à $P_a = 22000\ Pa$ et $T_a = 220\ K$. Il s'agit de la pression et de la température de l'atmosphère aux altitudes de vol de croisière des avions de transport commerciaux, soit environ $10000\ m$ d'altitude. L'air ambiant n'est plus sec mais contient de la vapeur d'eau et son humidité relative est initialisée à $RH_a = 60\ \%$ (humidité typique de l'atmosphère à $10000\ m$ d'altitude). L'écoulement de l'air ambiant est toujours $V_a = 20\ m.s^{-1}$. Concernant le jet, sa température est $T_j = 544\ K$ et sa vitesse initiale $V_j = 60\ m.s^{-1}$. Ce dernier émet désormais des particules de suie de rayon $r_s = 10\ nm$ et de concentration $N_s = 8{,}16.10^{11} m^{-3}$ ainsi que de la vapeur d'eau. La valeur de la concentration des suies est obtenue par la relation (1.6) du paragraphe 1.1.2 avec $\rho_{air} = 0{,}14\ kg.m^{-3}$, la masse volumique de l'air en sortie moteur, $AFR = 60$ le rapport air carburant et $EIP_s = 3{,}5.10^{14}\ kg_{carb}^{-1}$, l'indice d'émission de suies. La pression de vapeur d'eau du jet est initialisée à $P_v = 667\ Pa$, relation (1.14) du paragraphe 1.1.4, avec un indice d'émission de vapeur d'eau valant $EI_{H_2O} = 1{,}15\ kg_{H_2O}.kg_{carb}^{-1}$ (moteur de type RB211 équipant les Boeing 767) (Garnier *et al.*, 1997).

Le mélange considéré dans cette étude est donc constitué d'air, de vapeur d'eau, de glace ainsi que des particules de suie. Trois équations de conservation de la masse sont donc utilisées pour quantifier l'évolution des espèces. Concernant les équations de conservation de la vapeur d'eau et de la glace, ces dernières sont couplées via le terme $\varpi_{H_2O}^s$ du paragraphe 2.2.2 afin de modéliser le transfert de masse lors des phénomènes de condensation ou d'évaporation. La modélisation du transport des particules de suie, se fait par l'ajout d'une équation de convection diffusion d'un scalaire passif aux équations classiques de Navier Stokes.

6.1.2. Domaine de calcul et caractéristiques du maillage

Le domaine de calcul est identique à celui utilisé dans le Chapitre 5 . Le maillage utilisé correspond au maillage numéroté 1 . Le maillage numéroté 2 n'a pas été retenu ici car il a posé des problèmes importants de dispersion de la valeur des concentrations des particules de suie. La résolution du diamètre du jet pour le maillage numéro 2 est plus faible que pour le premier maillage. Pour le premier maillage, cette résolution est de dix points jusqu'à trois envergures, c'est-à-dire environ cent cinquante diamètres de jet, puis cinq points. Pour le deuxième maillage, la résolution est de onze points jusqu'à seulement une distance d'environ un diamètre de jet, puis de quatre points. La discrétisation spatiale du jet est alors moins fine et plus favorable à la dispersion.

6.1.3. Résultats

6.1.3.1. Dilution

La dilution d est une grandeur permettant de quantifier le mélange du panache avec l'atmosphère. Par définition, d est un scalaire passif qui vaut initialement 1 dans le panache (c'est-à-dire en sortie de tuyère) et 0 dans l'air ambiant (c'est-à-dire l'atmosphère). Ainsi, la dilution vaut 1 immédiatement en sortie de tuyère du réacteur puis, au fur et à mesure que le panache se mélange avec l'atmosphère décroît vers la valeur 0 . La valeur de la dilution est donc accessible grâce l'équation de convection diffusion du scalaire passif z utilisée pour notre modèle afin de suivre le transport des particules de suie émises par les moteurs.

$$d = \frac{z}{z_0}. \tag{5.8}$$

En sortie moteur, les suies sont émises avec la concentration N_s et la dilution vaut $d = 1$, puis ces dernières sont convectées, diffusées et ainsi mélangées avec l'atmosphère. Leur concentration N s'en trouve diminuée et la valeur de la dilution décroît.

Dans le cas du mélange du jet chaud dans le sillage du profil NACA0012, la dilution d jusqu'à huit envergures est tracée sur la Figure 6.1[a]. Une échelle logarithmique a été volontairement choisie sur l'axe des abscisses afin de mettre en évidence les trois phases que connaît la dilution du panache. La première phase se situe jusqu'à $x / b = 0{,}1$. Le jet est émis dans l'atmosphère, la zone de cisaillement à la périphérie de ce dernier se développe jusqu'à occuper l'ensemble du jet (fin du cône potentiel). Ainsi, le cœur du jet n'est pas encore influencé par l'écoulement de l'air ambiant et la dilution reste proche de un. Dans la deuxième phase, le jet turbulent est pleinement développé et le mélange est très efficace puisque la concentration des suies est très importante au coeur du jet et

est nulle dans l'atmosphère. Les gradients de la concentration sont donc très forts et la diffusion moléculaire est très intense. Cette diffusion est également favorisée par la forte turbulence se développant dans la zone de cisaillement entre le jet et l'atmosphère, cf. Figure 4.10. La troisième phase, à partir de $x / b = 0,5$, correspond à l'étirement puis à l'enroulement complet du jet autour du tourbillon marginal qui continue à favoriser le mélange avec l'atmosphère. La pente de la courbe représentant la dilution est beaucoup moins importante puisque la turbulence du jet commence à se dissiper et que les gradients de concentration des suies sont moins importants.

Sur la Figure 6.1[b] sont également tracées les évolutions des grandeurs $\left(P_{v,j}^{\max} - P_{v,a}^{0}\right)\Big/\left(P_{v,j}^{0} - P_{v,a}^{0}\right)$ et $\left(T_{j}^{\max} - T_{a}^{0}\right)\Big/\left(T_{j}^{0} - T_{a}^{0}\right)$ lorsque le modèle de condensation est désactivé. Les courbes représentant d et $\left(P_{v,j}^{\max} - P_{v,a}^{0}\right)\Big/\left(P_{v,j}^{0} - P_{v,a}^{0}\right)$ sont confondues. Or, les variations de la pression de vapeur sont directement liées aux variations de la fraction massique de la vapeur dans le mélange et aux variations de pression. La pression de vapeur se comportant comme un scalaire passif, cela veut dire que les variations de pression sont très faibles (Le nombre de Mach de l'écoulement du jet est très faible $M_j = 0,12$). Les effets de compressibilité étant négligeables, la variation de la masse volumique du mélange l'est également et la fraction massique de la vapeur d'eau se comporte comme un scalaire passif. Il en sera tout à fait autrement sur un calcul réel d'interaction jet tourbillon dans le sillage d'un gros porteur où les nombres de Mach sont beaucoup plus élevés, aux alentours de $0,9$. De même, les courbes représentant d et $\left(T_{j}^{\max} - T_{a}^{0}\right)\Big/\left(T_{j}^{0} - T_{a}^{0}\right)$ sont confondues. Pour les mêmes raisons, les nombres de Mach des écoulements du jet et de l'air ambiant sont faibles et impliquent que l'énergie cinétique est négligeable par rapport à l'énergie interne. La masse volumique du mélange étant également peu sensible aux effets de compressibilités, la température se comporte comme un scalaire passif. Ainsi, la dilution, lorsque le modèle de condensation n'est pas activé, peut être représentée indifféremment par ces trois grandeurs.

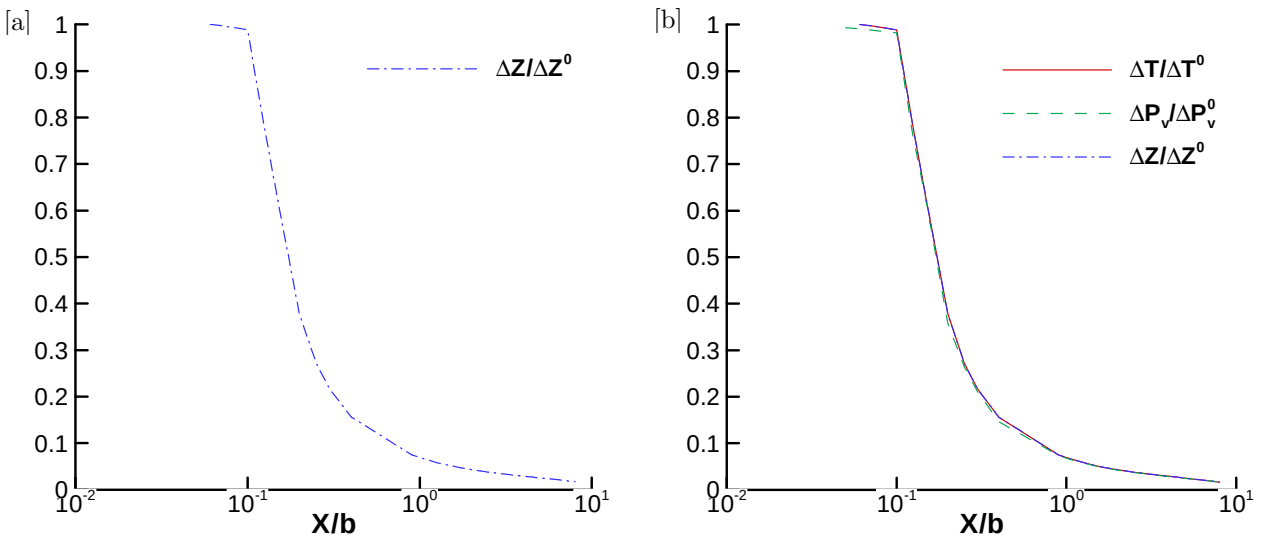

Figure 6.1 : Evolution de la dilution dans le panache jusqu'à huit envergures lorsque le modèle de condensation est désactivé [a]. Comparaison de la dilution basée sur le scalaire passif z , la température T et la pression de vapeur P_v (modèle de condensation désactivé) [b]

On active désormais le modèle de condensation. La formation de la glace autour des particules de suie libère dans leur voisinage, de l'énergie sous forme de chaleur. Il s'agit de la chaleur latente associée au changement de phase de la vapeur d'eau. Ce phénomène est susceptible de modifier la masse volumique du mélange (variation de température) et par conséquent le champ de vitesse. Il est mis en évidence par la Figure 6.2[a] qui représente l'évolution de $\left(T_j^{\max} - T_a^0\right)/\left(T_j^0 - T_a^0\right)$ dans le sillage jusqu'à huit envergures lorsque le modèle de condensation est activé puis désactivé. On remarque que pendant les deux premières phases, les courbes sont parfaitement superposées puis la courbe représentant l'évolution de $\left(T_j^{\max} - T_a^0\right)/\left(T_j^0 - T_a^0\right)$ lorsque le modèle est activé se trouve au dessus à partir de $x\,/\,b = 5$. Ceci s'explique par l'élévation de la température due au changement de phase. Néanmoins, les effets de la chaleur latente peuvent être considérés comme négligeables puisque les deux courbes sont quasiment superposées et que cette différence n'est visible qu'en échelle logarithmique. L'erreur faite sur la dilution calculée à partir de la température ne sera que de $-4{,}9\%$ à huit envergures. Concernant l'évolution de $\left(P_{v,j}^{\max} - P_{v,a}^0\right)/\left(P_{v,j}^0 - P_{v,a}^0\right)$ (Figure 6.2[b]), on remarque une légère différence entre les deux courbes à partir de cinq envergures. Cette fois-ci, la courbe représentant l'évolution lorsque le modèle de condensation est activé se situe au dessous de la deuxième courbe et s'explique par le transfert de masse entre la phase vapeur et la phase condensée. De même, la différence entre ces deux courbes est minime et montre que la condensation jusqu'à huit envergures est encore très peu intense dans notre étude. L'erreur faite sur la dilution calculée à partir de la pression partielle de vapeur, lorsque le modèle de condensation est activé, ne sera que de $+1{,}75\%$ à huit envergures.

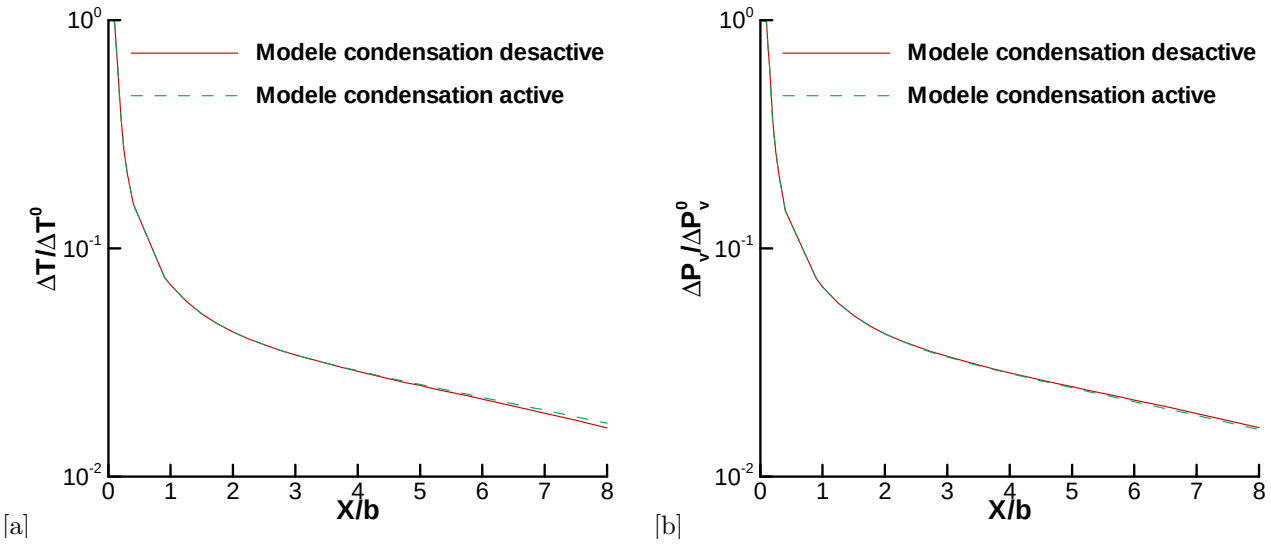

Figure 6.2 : Comparaison de l'évolution de la dilution lorsque le modèle de condensation est activé et désactivé. [a] : Dilution basée sur la température; [b] : dilution basée sur la pression partielle de vapeur d'eau.

Ainsi, dans le cas de l'étude de la condensation de la vapeur d'eau dans le sillage de notre maquette, la dilution peut être indifféremment représentée par la concentration des suies, la température ou bien encore la pression partielle de vapeur. La température et la pression partielle de vapeur se comportent ici comme des scalaires passifs et l'ajout d'une équation de convection diffusion pour le suivi des particules n'est pas nécessaire dans ce cas particulier.

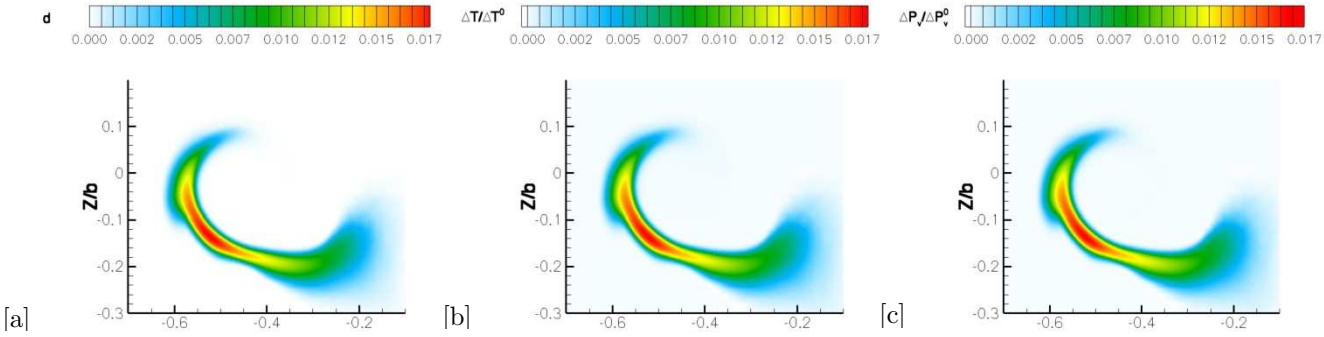

Figure 6.3 : Isocontours de la dilution, à huit envergures, basée sur le scalaire passif z [a], la température T [b] et la pression de vapeur P_v [c]

Ceci est confirmé par la Figure 6.3 qui présente les isocontours à huit envergures de la dilution basée sur le scalaire passif z, la température T et la pression partielle de vapeur P_v. Les champs sont fortement semblables.

6.1.3.2. Répartition spatiale de la taille des cristaux de glace et de la masse de glace

Comme il a été évoqué dans l'introduction de ce travail, il est très important de connaître précisément la taille des cristaux de glace, leur concentration ainsi que leur répartition spatiale et leur distribution en taille lorsque l'on s'intéresse aux effets radiatifs d'une traînée de condensation. L'outil mis en place permet d'accéder à ces informations. Pour le moment, cet outil est utilisé seulement sur le cas de la maquette simplifiée présentée dans le chapitre précédent (Chapitre 5), puisque les champs aérodynamiques ont déjà été obtenus et comparés avec les données expérimentales. Cela va dors et déjà permettre, non seulement, d'évaluer le modèle de condensation/évaporation, récemment ajouté au code CEDRE, dans un écoulement complexe tridimensionnel, mais également d'en apprécier le potentiel pour un calcul plus réaliste. De plus, ce travail va nous apporter des tendances sur les caractéristiques microphysiques de la traînée lorsque certains paramètres initiaux sont changés (concentration initiale et taille des suies, humidité relative de l'atmosphère). Un calcul dans le sillage d'un avion commercial pourra alors être envisagé lors de futures études.

Dans le cadre du calcul de référence, la Figure 6.4 représente la formation puis l'enroulement de la glace dans le sillage de la maquette. Plus précisément, il s'agit d'une visualisation de l'enroulement du jet via l'isocontour de la masse volumique de la glace ($\rho_{glace} = 1{,}5.10^{-5} kg_{glace}.m^{-3}$) colorié par les isovaleurs de la concentration des suies. L'isocontour $\rho_{glace} = 1{,}5.10^{-5} kg_{glace}.m^{-3}$ n'est visible qu'à environ trois envergures. Cela ne signifie pas que la glace ne s'est pas formée plus en amont dans le sillage mais seulement que cette valeur de la masse volumique n'est atteinte qu'à partir de trois envergures. La glace se forme puis s'enroule autour des deux tourbillons marginaux. La concentration des suies, quant à elle, diminue progressivement le long de cet isocontour, à mesure qu'elles s'éloignent de l'injecteur.

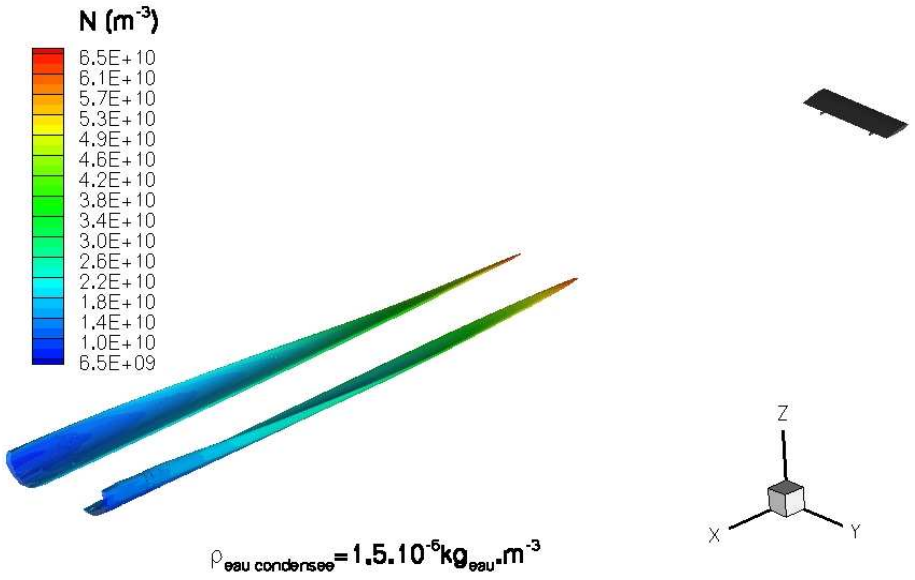

Figure 6.4 : Visualisation de l'enroulement du jet et de la condensation de l'eau dans le panache jusqu'à huit envergures. Isocontour de la masse volumique de la glace $\rho_{glace} = 1,5.10^{-5} kg_{glace}.m^{-3}$ colorié par les isovaleurs de la concentrations des suies N.

A partir des données spatiales de la concentration des suies et de la masse volumique de la glace dans le mélange, le rayon des cristaux de glace, supposés sphériques (Kärcher, 1998), est accessible.

$$r = \left(\frac{3}{4\pi} V_p \right)^{1/3}. \tag{5.9}$$

où V_p est le volume du cristal de glace composé d'une particule de suie de volume V_s et d'une enveloppe de glace de volume V_g.

$$V_p = V_s + V_g, \tag{5.10}$$

avec,

$$V_s = \frac{4}{3} \pi r_s^3. \tag{5.11}$$

Le volume de glace est déterminé à partir de la masse volumique de la glace dans le mélange $\rho^s_{H_2O}$, de la masse volumique de la glace pure $\rho_{H_2O,glace}$, qui ne dépend que de la température (cf. paragraphe 4.1.1), ainsi que la concentration des particules de suie N.

$$V_g = \frac{\rho^s_{H_2O}}{\rho_{H_2O,glace} N}. \tag{5.12}$$

La Figure 6.5 donne une visualisation de la taille des cristaux de glace le long de l'isocontour représentant une concentration de particules particulière : $N = 5.10^{+09} m^{-3}$. Ces derniers ont un rayon de $10\ nm$ en sortie d'injecteur. Ensuite, le panache se refroidit, les particules de suie deviennent sursaturées. La vapeur d'eau se condense et crée sur les particules de suie une

enveloppe de glace. Elles grossissent alors, à mesure qu'elles s'éloignent de l'injecteur jusqu'à atteindre un rayon de $430\ nm$.

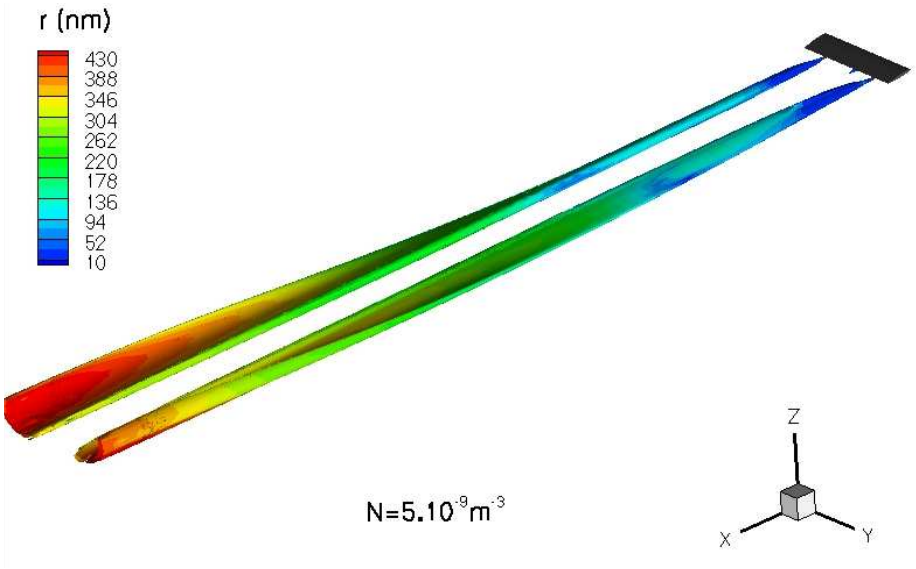

Figure 6.5 : Visualisation de l'enroulement du jet et de la croissance des cristaux de glace dans le panache jusqu'à huit envergures. Isocontour de la concentration des particules $N = 5.10^{+09} m^{-3}$ colorié par les isovaleurs de leur rayon.

Plus précisément, on peut extraire de ce champ tridimensionnel, des coupes bidimensionnelles dans des plans perpendiculaires à l'écoulement axial.

La Figure 6.6 propose une visualisation de la masse de glace formée dans le jet (axe des z) coloriée par la saturation à différentes envergures $x/b = 0{,}5$, $x/b = 1$, $x/b = 3$, $x/b = 8$. A $x/b = 0{,}5$, les cristaux de glace se forment dans un premier temps dans la zone de mélange du jet. Dans cette région, par des mécanismes de diffusion (moléculaire et turbulente) avec l'atmosphère froide et « sèche », la température, la concentration des suies ainsi que la teneur en vapeur d'eau diminuent. La pression de vapeur saturante par rapport à la glace (qui décroît avec la température) devient inférieure à la pression de vapeur d'eau (même si cette dernière décroît également dans la zone de mélange). Cette zone est alors sursaturée et la présence, par diffusion, des particules de suie permet la condensation. Au cœur du jet, la température n'est pas encore suffisamment basse pour permettre à la glace de se former. A $x/b = 1$, les phénomènes de diffusion ont permis de refroidir l'ensemble du jet qui devient complètement sursaturé, même si la saturation reste plus élevée en périphérie. A partir de $x/b = 3$, l'ensemble du jet est presque, et de manière homogène, à la température de l'air ambiant. La valeur de la pression de vapeur saturante par rapport à la glace est donc quasiment la même dans l'ensemble du jet et la répartition de la saturation $S = P_v/P_{sat}$ ne dépend donc plus que de la pression de vapeur d'eau. La teneur en vapeur d'eau étant plus importante au cœur du jet, il en est de même pour la pression de vapeur puisque le jet est isobare. C'est pourquoi la saturation est désormais maximale au cœur du jet et non plus à sa périphérie. La

concentration des suies étant également maximale au coeur du jet, la glace se forme dès lors principalement au centre (la condensation est d'autant plus importante que la saturation et la concentration des particules est grande, cf. équation (2.6). A $x/b = 8$, il n'y a plus d'inversion de tendance (la glace se forme toujours principalement au cœur du jet contrairement à une demie et une envergure) et le jet est enroulé autour du tourbillon marginal.

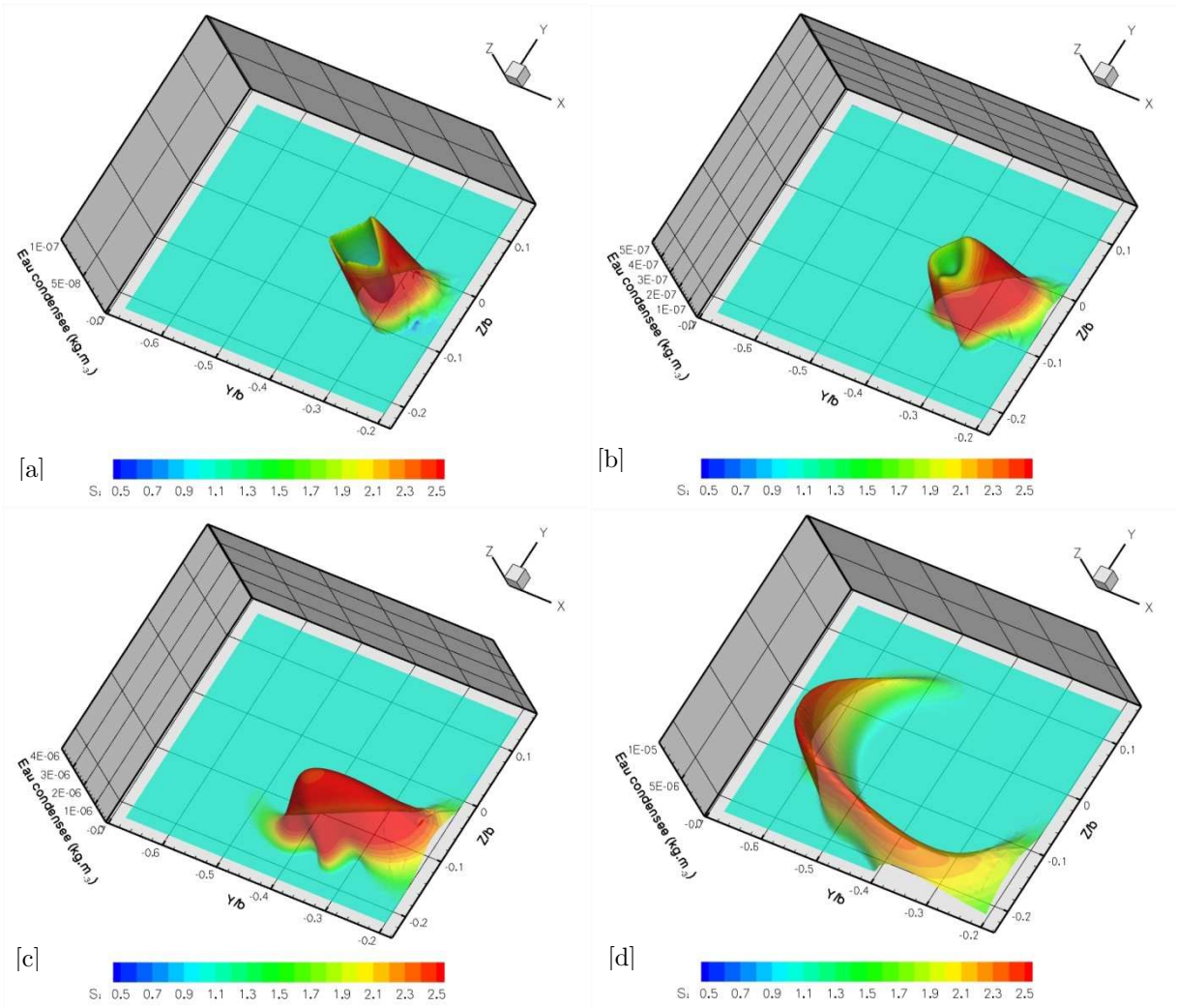

Figure 6.6 : Visualisation de la masse d'eau condensée par unité de volume coloriée par la saturation pour différents plans $x/b = 0,5$ [a], $x/b = 1$ [b], $x/b = 3$ [c], $x/b = 8$ [d]

Ainsi la glace se forme exclusivement dans la zone de mélange du jet jusqu'à une demie envergure, puis commence également à se former au cœur du jet à une envergure (en quantité moins importante qu'en périphérie). A partir de trois envergures et certainement un peu avant, la formation de la glace est plus intense au cœur du jet.

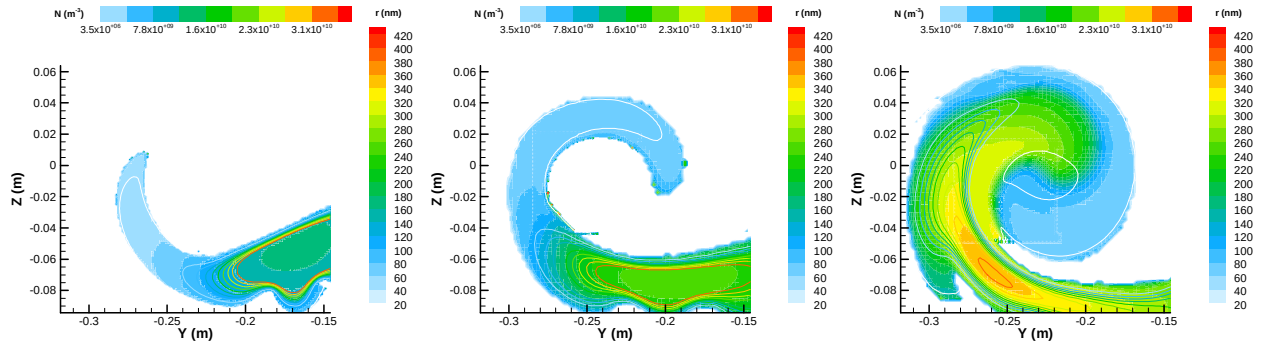

Figure 6.7 : Isocontours du rayon des cristaux de glace et isolignes de leur concentration pour $x\,/\,b = 3$, $x\,/\,b = 5$ et $x\,/\,b = 8$

Si l'on s'intéresse maintenant à la taille des cristaux de glace, la Figure 6.7 représente les isocontours du rayon des cristaux de glace et les isolignes de leur concentration à différentes distances en aval de la maquette (à trois, cinq et huit envergures). Le maximum de la concentration des suies se situe au centre du jet comme attendu, par contre, il en est de même pour la taille des particules. Ceci n'était pas forcément évident puisque même si l'on a vu, qu'effectivement la quantité de glace était plus importante au coeur du jet à partir de trois envergures, elle se répartie sur un nombre beaucoup plus important de particules de suie (Figure 6.8).

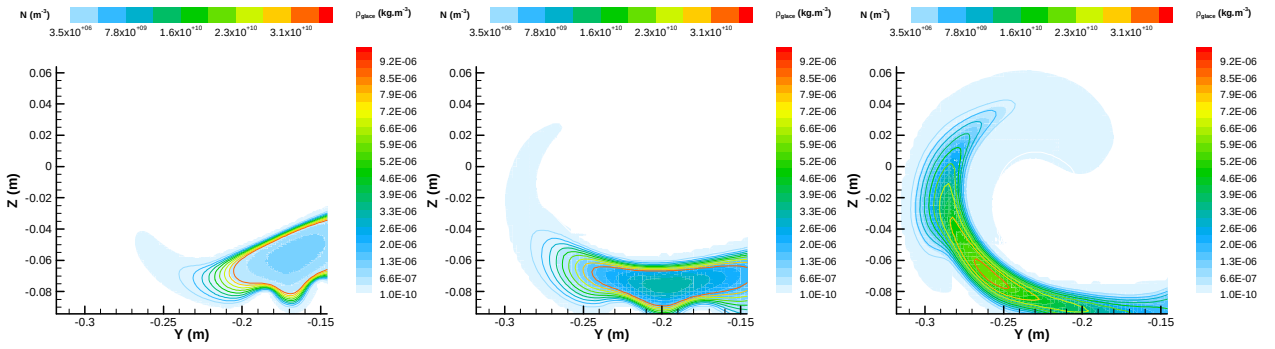

Figure 6.8 : Isocontours de la masse volumique de la glace et isolignes de la concentration des cristaux pour $x\,/\,b = 3$, $x\,/\,b = 5$ et $x\,/\,b = 8$

Dans le paragraphe 6.1.3.1, nous avons évoqué que la température et la pression partielle de vapeur dans le sillage se comportaient comme des scalaires passifs et que la dilution pouvait être indifféremment représentée par un scalaire passif, la température ou bien encore la pression partielle de vapeur.

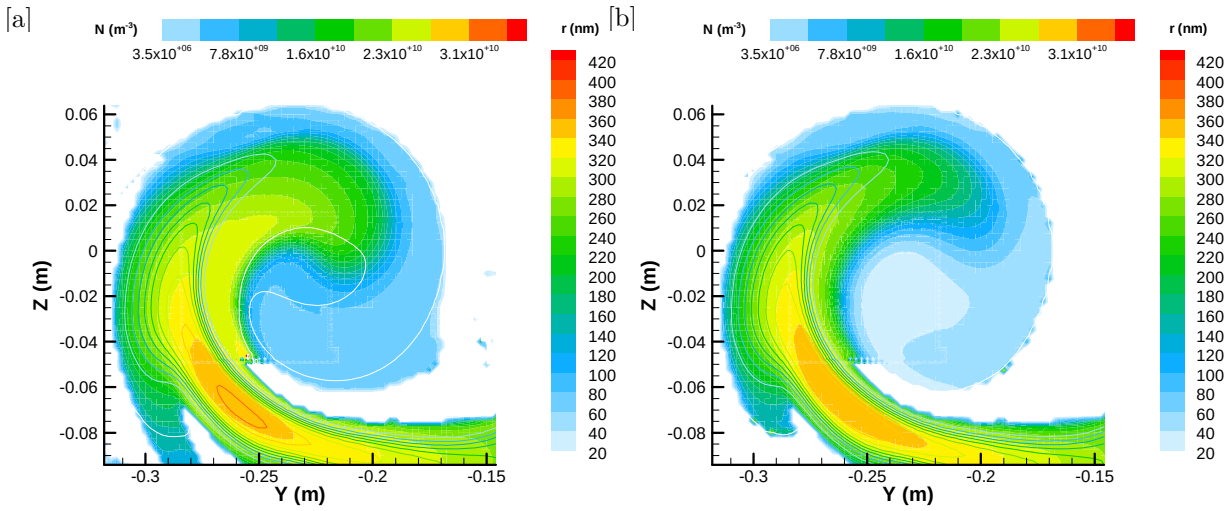

Figure 6.9 : Isocontours du rayon des cristaux de glace et isolignes de leur concentration à $x / b = 8$. [a] : calcul de la dilution basée sur le scalaire passif. [b] : Calcul de la dilution basée sur la température.

La Figure 6.9 permet de quantifier l'implication que peut avoir ce choix sur la taille des cristaux de glace et leur répartition spatiale à huit envergures. Les isocontours du rayon des cristaux de glace y sont tracés dans le plan $x / b = 8$ lorsque la dilution est basée sur un scalaire passif (Figure 6.9[a]) et lorsqu'elle est basée sur la température (Figure 6.9[b]). Dans les deux cas, la taille et la répartition spatiale des cristaux restent très proches. Cela sera confirmé par la distribution en taille des cristaux dans le paragraphe suivant.

6.1.3.3. Evolution du rayon moyen, distribution en taille et en nombre des cristaux de glace

La Figure 6.10 représente l'évolution du rayon moyen des cristaux de glace dans le sillage jusqu' à huit envergures en aval de la maquette, ainsi que du taux des particules de suie qui sont devenues des cristaux de glace par condensation de la vapeur d'eau. Cette figure est obtenue à partir des champs bidimensionnels (extrait du calcul tridimensionnel) dans les plans $x / b = 1$, $x / b = 3$, $x / b = 5$ et $x / b = 8$. Les mêmes que ceux présentés sur la Figure 6.7. Sur chacun de ces plans est faite une moyenne des rayons. On regarde également le nombre de particules ayant un rayon supérieur à celui des suies. Ces dernières sont considérées alors comme des cristaux de glace. Il existe différentes manières de déterminer un rayon moyen suivant que l'on s'intéresse à un rayon équivalent en terme de masse, de surface ou bien encore au sens de la distribution par exemple. Ils se calculent de la manière suivante :

- Rayon moyen en masse :

Dans ce cas, la propriété à laquelle on s'intéresse particulièrement est la masse équivalente de la particule moyenne. On égalise alors la somme des masses de chaque particule avec la masse d'un ensemble de particules ayant le même rayon moyen recherché $r_{moyen,masse}$:

$$n_{total}\frac{4}{3}\pi r_{moyen,masse}^3\rho_{glace} = \sum_{i=1,nb_particules_total} n_i\frac{4}{3}\pi r_i^3\rho_{glace}. \tag{5.13}$$

où n est un nombre de particules avec $n_{total} = \sum_{i=1,nb_particules_total} n_i$.

Soit, $$r_{moyen,masse} = \left(\frac{\sum_{i=1,nb_particules_total} n_i r_i^3}{n_{total}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{5.14}$$

- Rayon moyen en surface :

De même, par un raisonnement analogue concernant la surface, on obtient :

$$n_{total}\pi r_{moyen,surface}^2 = \sum_{i=1,nb_particules_total} n_i\pi r_i^2. \tag{5.15}$$

Soit, $$r_{moyen,surface} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1,nb_particules_total} n_i r_i^2}{n_{total}}}. \tag{5.16}$$

- Rayon moyen au sens PDF :

$$r_{moyen,PDF} = \frac{\sum_{i=1,nb_particules_total} n_i r_i}{n_{total}}. \tag{5.17}$$

La Figure 6.10 donne l'évolution du rayon moyen dans le sillage au sens de la masse, surface et PDF, ainsi que du taux des cristaux de glace. Ces derniers se forment très rapidement puisqu'ils représentent déjà 70% des particules (suies et cristaux de glace) dès une envergure et même l'ensemble des particules à partir de trois envergures. Le mélange du jet est donc très intense et une grande majorité des particules de suie sont devenues des cristaux de glace lors du régime jet avant même que celui-ci ne soit influencé par le tourbillon marginal. Il n'y a que très peu de différences entre les différents rayons moyens. Ce dernier croit linéairement jusqu'à atteindre $230\ nm$ à huit envergures. On remarque que le rayon moyen des cristaux de glace à huit envergures reste faible. Cela est dû particulièrement au temps de séjour de la particule. Dans le cadre de notre étude, et l'utilisation de la maquette, une particule émise par le moteur, représenté ici par l'injecteur, va mettre environ $0{,}2\ s$ pour atteindre une distante équivalente à huit envergures dans le sillage. Ce même temps est d'environ $2\ s$ pour l'Airbus A340. Ainsi, si le nombre de Long (Cf. Chap. 5.1.1.3) s'avère pertinent lorsque l'on s'intéresse à la dynamique du sillage caractéristique d'un gros porteur à partir d'une maquette placée dans une soufflerie. Il est insuffisant lorsque l'on s'intéresse aux processus microphysiques intervenant dans le sillage. Il sera donc très intéressant d'utiliser l'outil numérique, mis en place dans ce travail, sur un maillage de gros porteur afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec des données expérimentales

obtenues en vol. Le nouveau challenge, sera alors d'être capable de poursuivre le calcul jusqu'à environ une trentaine d'envergures, puisque les données expérimentales n'existent, à ma connaissance, qu'à partir de cette distance (Schröder *et al.*, 2000).

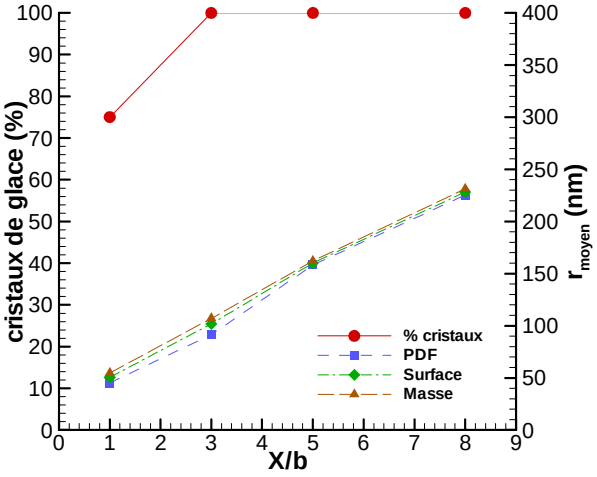

Figure 6.10 : Evolution du rayon moyen des cristaux de glace et de leur concentration dans le sillage pour le calcul de référence

Afin de connaître la répartition en taille des cristaux de glace, la PDF (Probability Density Function) des rayons des cristaux est représentée sur la Figure 6.11 pour différentes positions dans le sillage (à trois, cinq et huit envergures). La PDF dans la classe $10nm \leq r_p < 20nm$ représente la probabilité qu'a une particule d'avoir son rayon compris entre dix et vingt nanomètres. A trois envergures la distribution possède un seul pic et est centrée sur $r = 115\ nm$. 25% des cristaux ont leur rayon compris entre $110\ nm$ et $120\ nm$. A cinq envergures, la distribution possède deux pics, l'une en $r = 145\ nm$, 43% des cristaux appartiennent à cette classe et l'autre en $r = 185\ nm$, 15% des cristaux appartiennent à cette classe. Si l'on se réfère à la Figure 6.7 qui donne les isocontours dans les plans $x/b = 3$, $x/b = 5$ et $x/b = 8$, on comprend mieux que la partie la plus enroulée constituée de cristaux de rayon valant $70\ nm$ environ, possède une concentration en particules si faible, qu'elle n'apparaît pas dans la distribution (PDF inférieure à $0{,}01$). Le premier pic correspond à la partie du jet qui est restée proche de sa position initiale et qui n'a subit encore que peu l'enroulement. Il concerne tout de même 40% des cristaux. Le deuxième pic, beaucoup plus faible (15% des cristaux), correspond à la partie du jet qui a été étirée par le tourbillon. A huit envergures, la distinction entre ces deux maximums est déjà moins évidente puisque le mélange est plus homogène. La distribution est alors centrée sur $220\ nm$. Ainsi, plus l'on s'éloigne dans le sillage plus la distribution translate vers des tailles de particules plus importantes. Cela rejoint l'information donnée par la Figure 6.10 et l'évolution du rayon moyen. Par contre, nous constatons que la distribution n'a pas la même forme suivant la position dans le sillage. Elle est plutôt de type gaussien à trois envergures. Le jet n'est encore que légèrement étiré par le tourbillon. A cinq envergures, la distribution possède deux maxima et révèlent qu'une partie des cristaux présente

dans le jet (premier maximum, $PDF = 40\%$) est moins influencée par le tourbillon et reste proche de la position initiale du jet, alors qu'une deuxième partie (deuxième maximum $PDF = 15\%$) est déjà bien étirée par le tourbillon. A huit envergures, la distinction entre ces deux maxima s'estompe puisque l'ensemble des particules subit l'attraction du tourbillon et le mélange devient plus homogène.

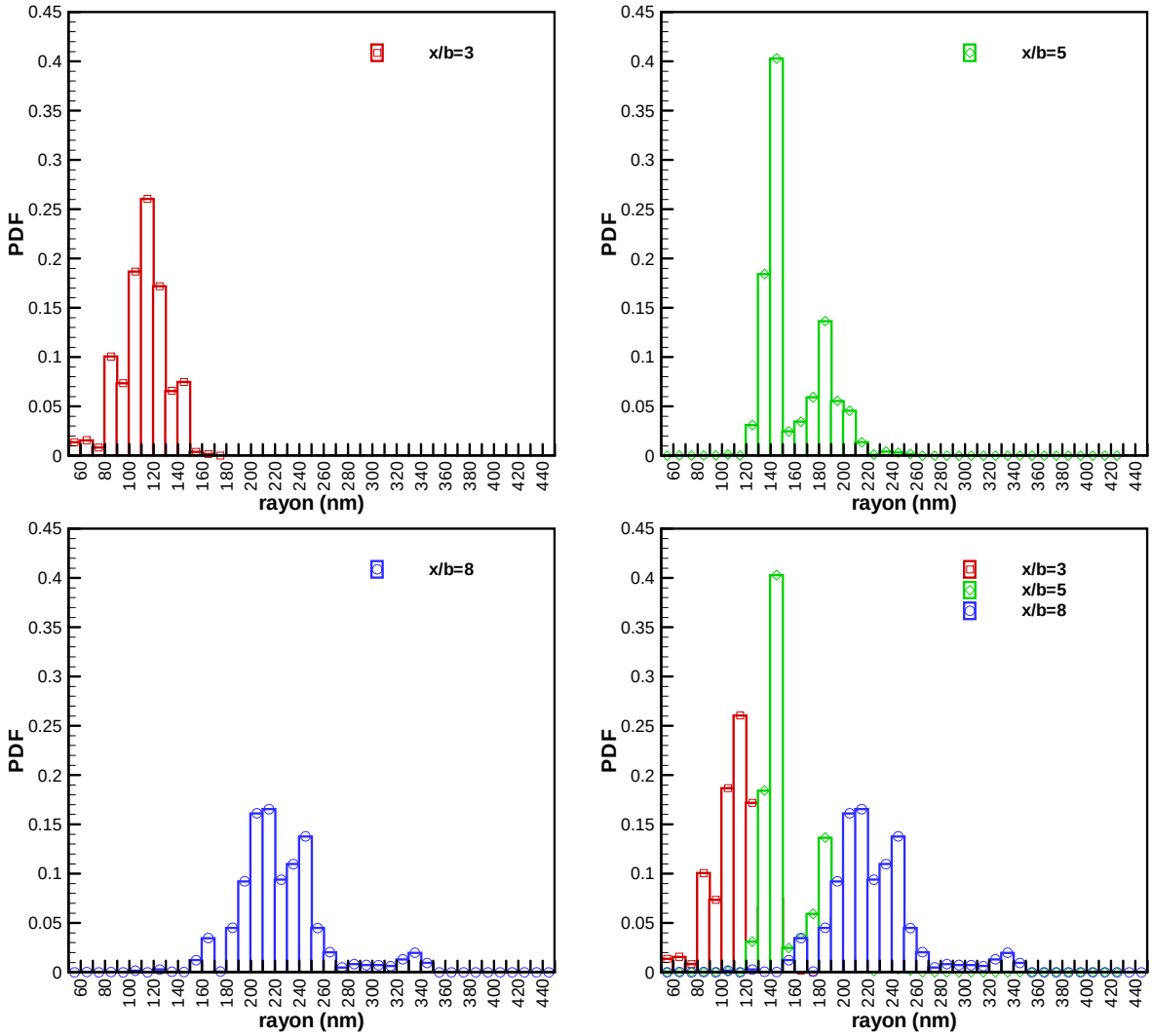

Figure 6.11 : Distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/b = 3$; $x/b = 5$ et $x/b = 8$

Dans le paragraphe 6.1.3.2, nous avons vu que le calcul de la dilution basée sur le scalaire passif représentant la concentration des suies ou basée sur la température permettait d'obtenir des résultats similaires concernant la distribution spatiale de la taille des cristaux de glace.

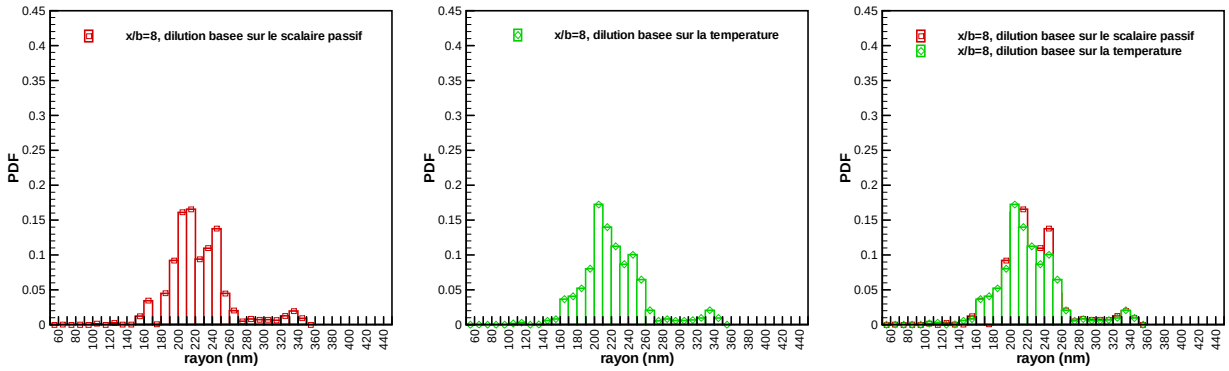

Figure 6.12 : Distribution en taille des cristaux de glace dans le plan $x/b = 8$. Comparaison de la distribution obtenue lorsque la dilution est calculée à l'aide du scalaire passif et à l'aide de la température

La Figure 6.12 présente la distribution en taille des cristaux de glace à huit envergures lorsque la dilution est calculée, soit à partir de la température, soit à partir du scalaire passif représentant la concentration des suies. On s'aperçoit que les deux distributions sont très similaires. Toutes deux sont centrées sur la même classe de particules ($r = 230\ nm$) avec une PDF maximale de 20% et possèdent la même allure. On note toutefois une petite atténuation du deuxième maximum dans le cas où la dilution est calculée sur la température. C'est-à-dire que l'on a un peu moins de cristaux de glace dans la classe $240\ nm < r < 250\ nm$ (11% contre 14%). Cette différence est très minime et peu s'expliquer par l'apport d'énergie dû à la chaleur latente.

6.2. Influence de certains paramètres liés à l'avion ou à l'atmosphère sur les caractéristiques microphysiques de la traînée

Dans cette section, nous nous intéressons aux effets de certains paramètres clés liés à l'avion ou aux propriétés de l'atmosphère sur les caractéristiques microphysiques de la traînée de condensation. Nous focalisons plus particulièrement sur la taille initiale des suies en sortie moteur, leur concentration mais également sur l'humidité relative de l'atmosphère.

6.2.1. Effet de la taille des particules de suie en sortie moteur

Les conditions restent identiques au cas de référence (paragraphe 6.1). Seule la taille des suies est modifiée. Leur rayon passe de $r_s = 10\ nm$ à $r_s = 100\ nm$. Il y a donc un facteur dix sur leur rayon et un facteur cent sur leur surface.

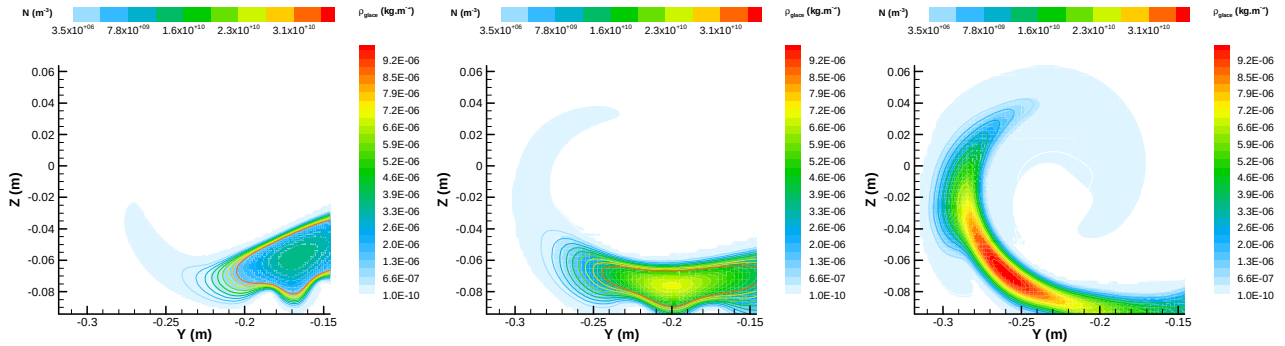

Figure 6.13 : Isocontours de la masse volumique de la glace et isolignes de la concentration des cristaux pour $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$ lorsque le rayon initiale des suies est $r_s = 100\ nm$

Les isocontours de la masse volumique de la glace à trois, cinq et huit envergures sont dessinés sur la Figure 6.13. Par rapport au cas de référence (Figure 6.8), les tendances restent les mêmes, c'est-à-dire que la concentration en glace est plus importante au centre du jet. Néanmoins, le maximum de cette concentration, à huit envergures, est plus important, il est de $9{,}6.10^{-6} kg.m^{-3}$ contre $4{,}6.10^{-6} kg.m^{-3}$ dans le cas de référence. La surface des suies beaucoup plus importante explique ce résultat.

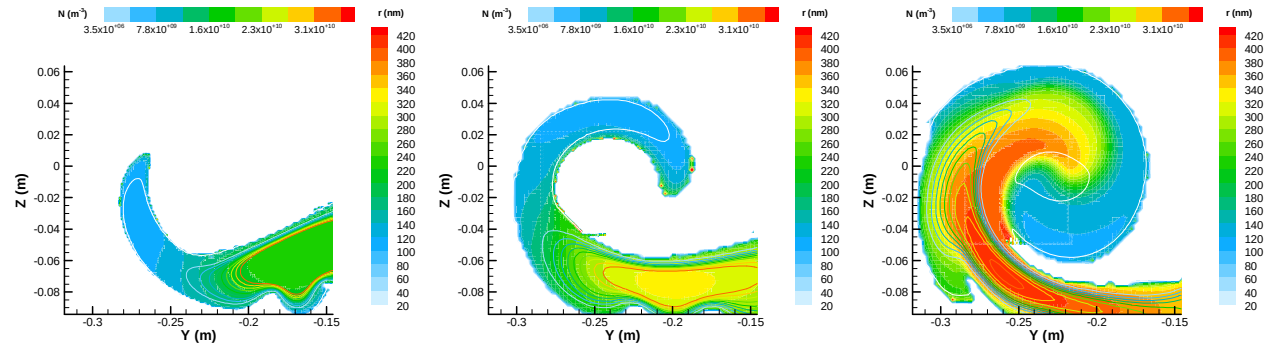

Figure 6.14 : Isocontours du rayon des cristaux de glace et isolignes de leur concentration pour $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$ lorsque le rayon initiale des suies est $r_s = 100nm$

La masse de glace étant plus importante à concentration de suies égale, on retrouve ce résultat sur la distribution spatiale de la taille des cristaux (Figure 6.14). Ainsi, la taille des cristaux est beaucoup plus importante par rapport à la Figure 6.7

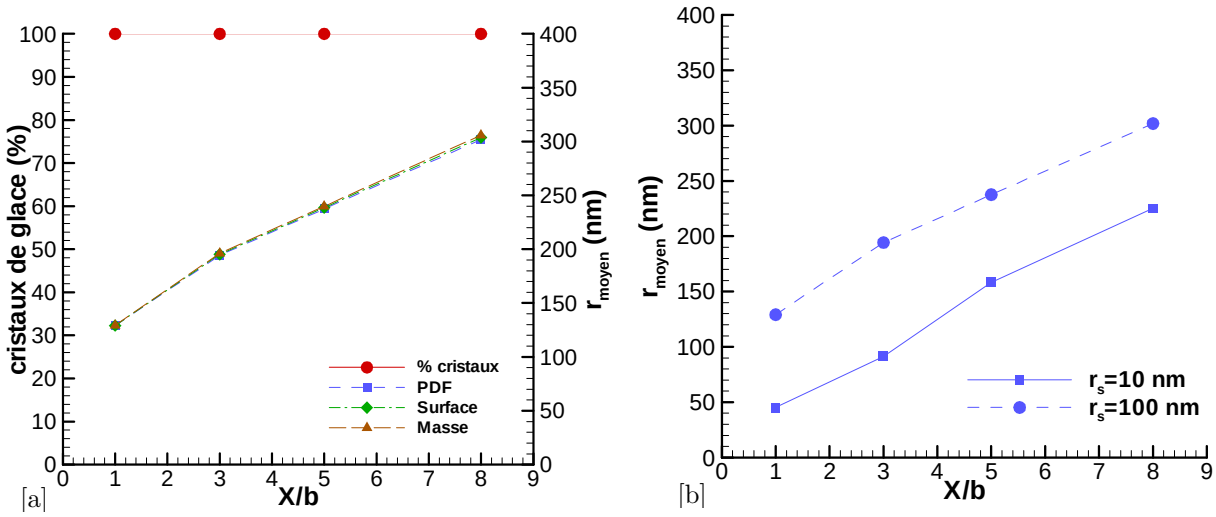

Figure 6.15 : [a] Evolution du rayon moyen des cristaux de glace et de leur concentration dans le sillage avec un rayon de suie en sortie moteur valant $r_s = 100\ nm$. [b] Comparaison de l'évolution du rayon moyen des cristaux avec le calcul de référence

Si l'on regarde l'évolution du rayon moyen dans le sillage (Figure 6.15), le constat est le même. L'évolution est linéaire avec le même coefficient directeur dans le cas de référence (Figure 6.10). Bien évidemment le rayon moyen à huit envergures est plus importante $r = 300\ nm$ contre $r = 230\ nm$. Concernant le taux de cristaux de glace il est déjà à 100% dès une envergure contre 70% lorsque le rayon des suies valait $10\ nm$. Cela provient du critère retenu permettant de classifier la particule comme étant encore sèche ou gelée. Si $r \geq r_s + 10\% r_s$ alors la particule est considérée comme étant un cristal de glace. La taille des suies étant plus grande, la cinétique de la condensation est plus rapide, cf. équation (2.6), et toutes les particules ont grossi d'au moins 10% de leur taille initiale à une envergure.

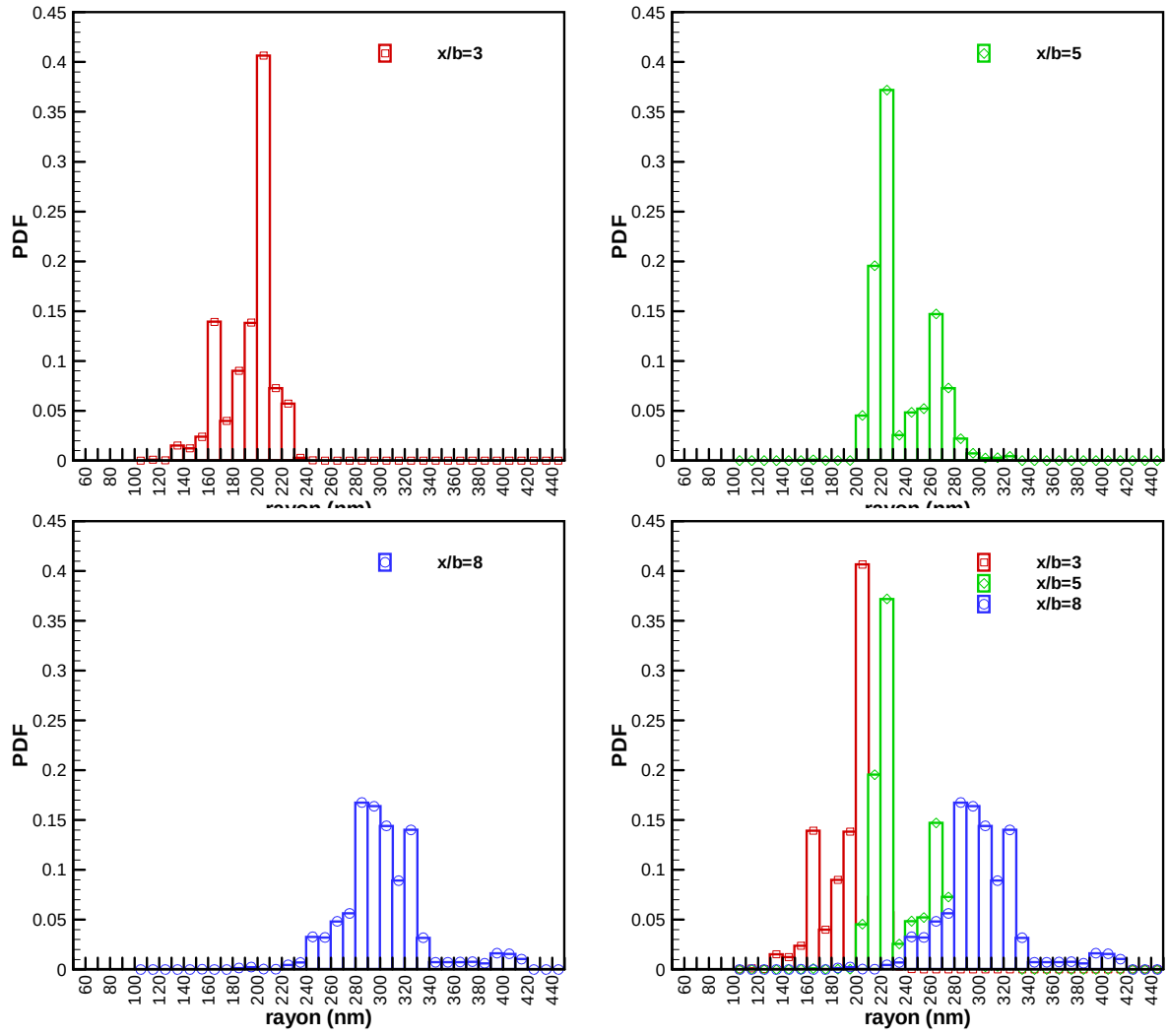

Figure 6.16 : Distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/b = 3$; $x/b = 5$ et $x/b = 8$ lorsque le rayon initiale des suies est $r_s = 100\ nm$

La distribution en taille des cristaux est représentée sur la Figure 6.16 pour différentes positions dans le sillage (à trois, cinq et huit envergures) lorsque le rayon initial des suies est $r_s = 100\ nm$. A trois envergures, la distribution possède deux pics. Près de 15% des particules appartiennent au premier pic et ont leur rayon compris entre $160\ nm$ et $170\ nm$. Mais la majorité des particules (plus de 40%) ont leur rayon compris entre $200\ nm$ et $210\ nm$. Si l'on compare au calcul de référence où le rayon initial des suies est $r_s = 10\ nm$, on constate que la distribution est tout à fait différente puisque le premier maximum est plus prononcé et que le deuxième concerne plus de 40% des particules contre moins de 30% lorsque $r_s = 10\ nm$. La cinétique de croissance des particules est donc fortement modifiée lorsque la taille des suies est plus importante. Ainsi, les particules qui appartienennt à la classe $210\ nm < r < 220\ nm$ correspondent à celles qui se trouvent au centre du jet. Leur concentration y est importante et elles offrent une surface conséquente permettant la

condensation rapide de la vapeur. A partir de cinq envergures, par contre, on retrouve une distribution tout à fait comparable à celle donnée par le calcul de référence où $r_s = 10\ nm$. Elle est simplement décalée vers des tailles de particule plus importantes. Ainsi, à trois envergures, 40% des particules ont leur rayon compris entre $220\ nm$ et $230\ nm$ contre $140\ nm$ et $150\ nm$ lorsque $r_s = 10\ nm$. Ainsi, la taille des suies modifie surtout la cinétique et la distribution en taille des cristaux dans les premières phases de la formation de la traînée. A partir de cinq envergures, nous constatons par contre que les distributions sont tout à fait comparables et seulement décalées vers des tailles de cristaux plus importantes.

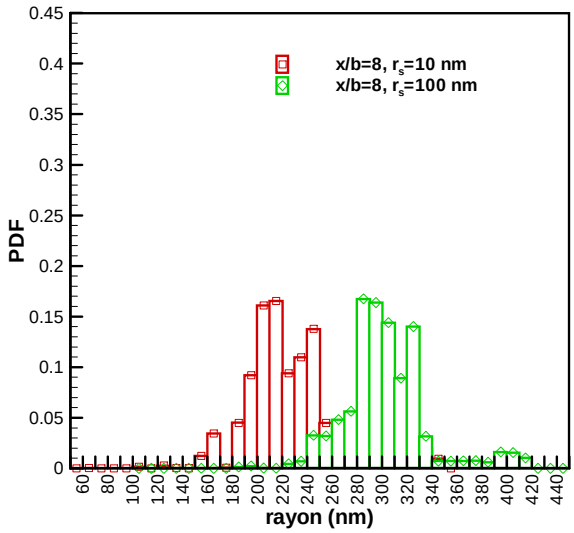

Figure 6.17 : Comparaison des distributions en taille des cristaux de glace dans le plan $x/b = 8$ lorsque le rayon des suies vaut $r_s = 10\ nm$ et $r_s = 100\ nm$

La Figure 6.17 donne une comparaison entre les deux distributions en taille à huit envergures dans les cas où $r_s = 10\ nm$ et $r_s = 100\ nm$. Ces dernières sont très proches l'une de l'autre. On note simplement un déplacement de la distribution vers les plus grandes tailles de particules dans le cas où le rayon des suies est plus important.

La variance est une mesure arbitraire servant à caractériser la dispersion d'une distribution. Elle permet de caractériser la dispersion des valeurs par rapport à la moyenne. Elle est donnée par la formule mathématique suivante :

$$Var(r) = \sum_{i=1}^{nb_classes} p_i \left(r_i - \overline{r}\right)^2 . \tag{5.18}$$

où p_i est la probabilité qu'a une particule d'appartenir à la classe i, r_i est le rayon des particules appartenant à la classe i et $\overline{r}$ le rayon moyen de la distribution.

L'écart type est la racine carrée de la variance.

La distribution à huit envergures lorsque le rayon des suies est de dix nanomètres possède un rayon moyen de $230\ nm$ et une variance de $1300\ nm^2$, soit un écart type d'environ $36\ nm$.

Dans le cas où le rayon des suies vaut cent nanomètres, la distribution à huit envergures possède un rayon moyen de $300\ nm$ et une variance très similaire au cas de référence, c'est-à-dire $1165\ nm^2$, soit un écart type d'environ $34\ nm$. C'est-à-dire que la distibution est très semblable mais simplement décalée vers des valeurs de rayon plus élevées.

6.2.2. Effet de l'humidité relative de l'atmosphère

Les conditions initiales restent toujours identiques à celles du cas de référence (paragraphe 6.1). On s'intéresse dans cette section à l'influence de l'humidité relative de l'atmosphère sur les propriétés microphysiques de la traînée. Ce paramètre n'est, cette fois ci, pas lié aux caractéristiques de l'avion mais à celles de l'atmosphère. L'humidité relative est fixée à $RH = 30\%$ (la saturation par rapport à la glace est alors $S_{glace} = 0,49$) contre 60% ($S_{glace} = 0,98$) dans le calcul de référence.

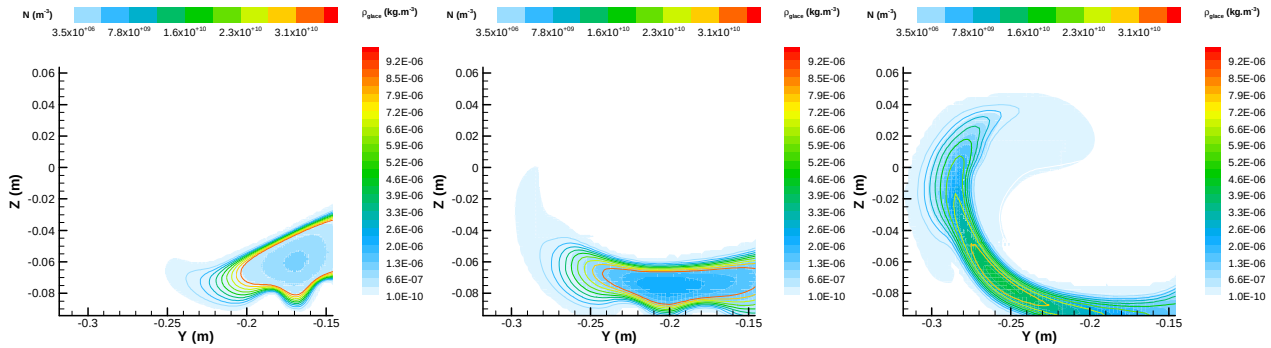

Figure 6.18 : Isocontours de la masse volumique de la glace et isolignes de la concentration des cristaux à $x\ /\ b = 3$, $x\ /\ b = 5$ et $x\ /\ b = 8$, lorsque l'humidité relative de l'atmosphère est $RH = 30\%$

Les isocontours de la masse volumique de la glace à trois, cinq et huit envergures sont dessinés sur la Figure 6.18. Par rapport au cas de référence (Figure 6.8), les tendances restent les mêmes, c'est-à-dire que la concentration en glace est plus importante au centre du jet. Néanmoins, le maximum de cette concentration, à huit envergures, est légèrement plus faible, il est de $4,0.10^{-6} kg.m^{-3}$ contre $4,6.10^{-6} kg.m^{-3}$ dans le cas de référence, soit 13% de glace en moins. On l'a constaté sur la Figure 6.6, le mélange du jet avec l'atmosphère se fait très rapidement et dès une envergure, l'air ambiant pénètre le cœur du jet. Dans ce cas précis, il abaisse localement la pression de vapeur élevée du jet mais de manière insuffisante pour que les particules soient sous saturées et ces dernières continuent de croître à des vitesses plus faibles par rapport au cas où $RH = 60\%$ (le taux de transfert de masse est proportionnel à $\left(P_v - P_v^{sat}\right)$, cf. équation (2.6)). On remarque également que même si les conditions atmosphériques sont très favorables à l'évaporation des cristaux, dans les toutes premières phases du mélange du jet avec l'atmosphère, ici, jusqu'à huit envergures, la saturation du jet reste majoritairement pilotée par la vapeur d'eau émise par le moteur et il y a formation d'une traînée.

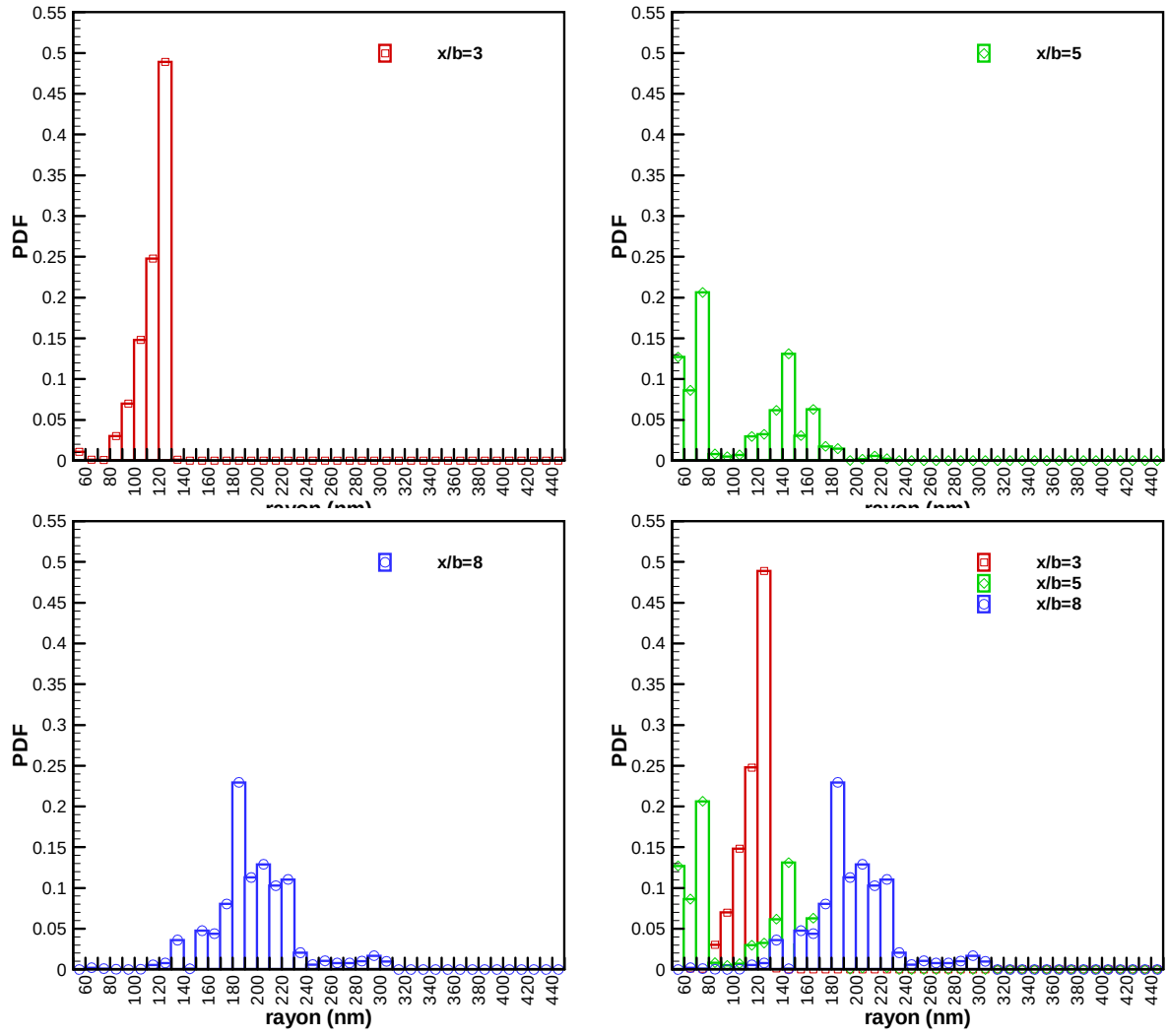

Figure 6.19 : Distribution en taille des cristaux de glace dans les plans $x/b = 3$; $x/b = 5$ et $x/b = 8$ lorsque l'humidité relative ambiante est $RH = 30\%$

La distribution en taille des particules à trois, cinq et huit envergures lorsque $RH = 30\%$ est donnée sur la Figure 6.19. A trois envergures, on constate une distribution assez différente de celle donnée par le cas de référence où l'humidité relative est $RH = 60\%$. En effet, on constate que les plus grosses particules ont leur rayon compris entre $120\ nm$ et $130\ nm$ contre $140\ nm$ et $150\ nm$ pour le cas de référence. Cette différence s'explique par le fait que l'air ambient a déjà pénétré le cœur du jet faisant abaisser localement la saturation. Les particules appartenant à la classe $120\ nm < r < 130\ nm$ représentent désormais 50% de la population. Il s'agit des cristaux se situant au centre du jet. Les particules qui se trouvent en périphérie subissent depuis plus longtemps l'influence de l'air ambiant et peinent à grossir. Ceci explique pourquoi les particules appartenant aux classes $80\ nm < r < 110\ nm$ ne représentent plus que 25% par rapport au 35% du cas de référence. Ceci explique également pourquoi les particules au centre du jet (qui ont moins subi l'influence de l'air ambiant) représentent désormais 50% de la population.

A cinq envergures, contrairement au cas de référence, où l'ensemble de la distribution s'est décalé vers des classes de particules de plus grand rayon, lorsque $RH = 30\%$, une partie des cristaux (ceux à la périphérie du jet) s'évaporent et une partie de la distribution se décale vers les classes de particule de plus petit rayon. C'est pourquoi les cristaux appartenant aux classes comprisent entre $50\ nm$ et $80\ nm$ représentent à elles seules, 42% de la population. Les cristaux au centre du jet, quant à eux, continuent de croître mais de manière beaucoup moins importante par rapport au cas où $RH = 60\%$. Les particules de plus gros rayon sont centrées sur la classe $140\ nm < r < 150\ nm$ contre $180\ nm < r < 190\ nm$ lorsque $RH = 60\%$.

A huit envergures, la distibution est beaucoup plus homogène par rapport à celle à cinq envergures. Les particules qui appartenaient aux classes de particules de petit rayon se sont complètement évaporées. Les particules du centre du jet, quant à elles, continuent de croître.

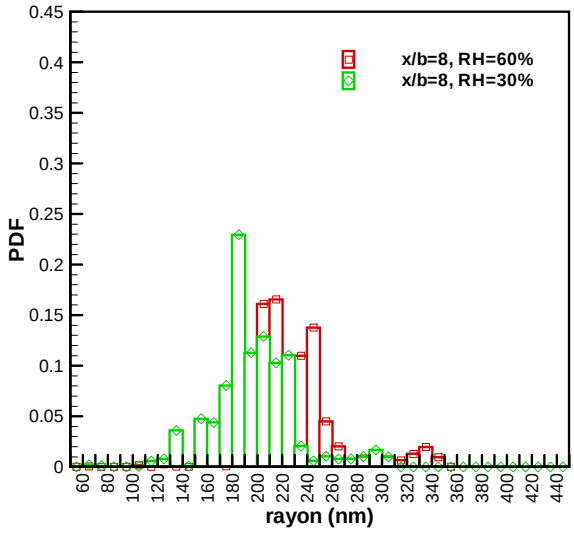

Figure 6.20 : Comparaison des distributions en taille des cristaux de glace dans le plan $x/b = 8$ lorsque le rayon des suies vaut $RH = 60\%$ et $RH = 30\%$

La Figure 6.20 donne une comparaison entre les distributions en taille, à huit envergures, dans les cas où l'humidité relative de l'air ambiant vaut $RH = 30\%$ et $RH = 60\%$ (cas de référence). Globalement, la distribution est décalée vers les classes de particules de plus petit rayon lorsque $RH = 30\%$, puisque le mélange du jet avec l'air ambiant a favorisé l'abaissement de la valeur de la saturation.

La distribution à huit envergures lorsque l'humidité relative de l'air ambient vaut $RH = 60\%$ possède un rayon moyen de $230\ nm$ et une variance de $1300\ nm^2$, un écart type d'environ $36\ nm$.

Dans le cas où l'humidité relative de l'air ambiant est plus faible et vaut $RH = 30\%$, la distribution à huit envergures possède un rayon moyen de $180\ nm$ et une variance un peu plus faible que le cas de référence, c'est-à-dire $1122\ nm^2$ (soit un écart type d'environ $33\ nm$). La distribution est un peu plus dispersée puisque les particules se trouvant à la périphérie du jet ont subi fortement les conditions favorables à l'évaporation de l'air ambiant.

Au regard de la Figure 6.19, on comprend que l'humidité relative de l'atmosphère a un impact important sur la distribution en taille des particules notamment durant les premières phases de l'enroulement du jet, moments où les propriétés thermodynamiques du jet sont encore spatialement très inhomogènes.

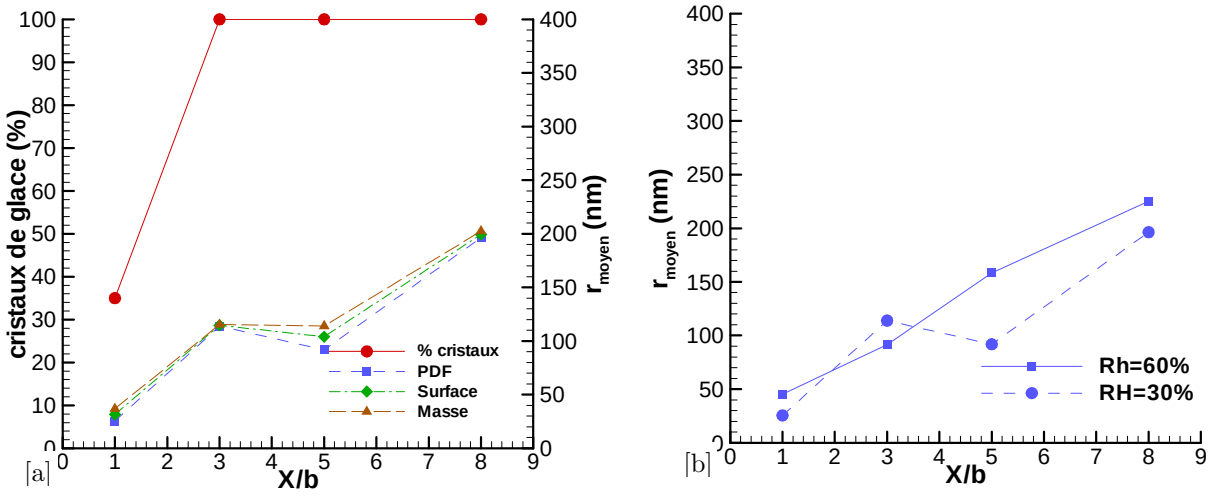

Figure 6.21 : [a] Evolution du rayon moyen des cristaux de glace et de leur concentration dans le sillage avec une humidité relative pour l'atmosphère valant $RH = 30\%$. [b] Comparaison de l'évolution du rayon moyen des cristaux avec le calcul de référence

Lorsque l'on s'intéresse à l'évolution du rayon moyen dans le sillage (Figure 6.21[a]), on constate qu'il continue de croitre, c'est-à-dire que la microphysique reste encore pilotée par la vapeur d'eau émise par le moteur. Ainsi, les conditions atmosphériques, dans le champ proche de l'avion, ont une influence limitée sur l'apparition de la trainée. Par contre, ces dernières vont notamment agir sur la durée de vie de la trainée. Cette durée de vie ne peut pas être évaluée dans cette étude qui se focalise sur le champ très proche (jusqu'à huit envergures).

La comparaison de l'évolution du rayon moyen dans le sillage avec le calcul de référence est intéressante (Figure 6.21[b]). Globalement les points suivent la même pente que ceux du calcul de référence mais ces derniers sont décalés vers des valeurs de rayon moyen plus faibles, ce qui était raisonnable de penser. Néanmoins, la valeur du rayon moyen à trois envergures fait exception. Il est d'ailleurs plus élevé que lorque l'humidité relative de l'air ambiant est plus élevée, $r_{mean} = 110\ nm$ contre $r_{mean} = 80\ nm$. Cette valeur plus élevée s'explique au regard de la distribution en taille des particules à trois envergures commentée ci-dessus (les particules appartenant aux classes comprises entre $110\ nm < r < 130\ nm$ représentent à elles seules 75% de la population contre 45% pour le calcul de référence).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La présente étude a porté sur la mise en place d'un outil numérique et sur les premières simulations spatiales permettant la résolution, à la fois de l'aérodynamique dans le sillage proche d'un avion en vol de croisière, mais également des processus microphysiques de croissance des cristaux de glace qui y prennent place. Pour cela, la première partie de ce travail a été consacrée à la description des différents processus physiques opérants dans le champ proche de l'avion. Il s'agit d'une part de phénomènes aérodynamiques. Les jets chauds et humides, issus des moteurs, se mélangent avec l'atmosphère froide et sèche. Dans un premier temps, l'écoulement est de type jet. Une couche de cisaillement se développe à sa périphérie et favorise le transport des propriétés du jet vers l'atmosphère et inversement. La température baisse. La vapeur d'eau se diffuse. Ce jet subit ensuite l'influence du tourbillon marginal qui s'est développé le long du saumon de l'aile. Il est étiré, puis totalement enroulé. D'autre part, le refroidissement du jet humide dans le sillage permet la condensation de la vapeur d'eau sur des particules préexistantes. Il s'agit notamment de suies mais également d'aérosols qui se forment dans le sillage. Les nombreux processus chimiques et microphysiques qui se produisent lors du mélange du jet avec l'atmosphère ont été abordés.

La deuxième partie de ce travail a présenté la modélisation des phénomènes physiques qui nous ont apparus importants pour l'étude de la formation d'une traînée de condensation. Il s'agit, bien évidemment, de la modélisation de l'écoulement, régi par les équations de Navier Stokes avec une approche de la turbulence de type RANS, mais également de la modélisation de la microphysique. Concernant ce dernier point, on a considéré que le mélange gazeux, issu de la combustion, était composé uniquement d'air, d'eau et de particules de suie. Un modèle de condensation et d'évaporation de l'eau sur ces particules a été ajouté au code CEDRE. Ce dernier permet de prendre en compte les transferts de masse d'eau entre l'air ambient et les suies qui sont nonométriques. Tous les autres processus de croissance et de création de nouvelles particules ont été négligés. Le transport des suies a été modélisé par une équation de convection diffusion. Leur temps caractéristique de mise à l'équilibre thermique et dynamique avec l'écoulement étant très faible (de l'ordre de $1,5.10^{-07} s$ pour une particule de $100\ nm$ de rayon), on a considéré qu'elles possédaient les mêmes caractéristiques que l'écoulement porteur (vitesses et température).

Les méthodes numériques, utilisées pour la résolution du modèle complet (aérodynamique et microphysique), ont ensuite été présentées. Il s'agit de la résolution des équations de Navier Stokes sur des maillages non structurés généraux. Les méthodes numériques ont été optimisées afin de déterminer plus efficacement (en terme de temps de restitution du calcul) la solution stationnaire du sillage. Ainsi, le modèle microphysique peut être utilisé indifféremment pour l'obtention d'une solution instationnaire avec l'utilisation de schémas explicites que pour l'obtention d'une solution stationnaire, avec l'utilisation de schémas implicites. Sa validation sur des études plus académiques

a fait l'objet du chapitre suivant. Des résultats 0D ont été comparés à ceux existants dans la littérature. Ces premiers résultats ont également permis de montrer l'importance du préconditionnement de la matrice Jacobienne représentant les échanges de masse entre l'eau vapeur et l'eau condensée, lorsque l'on souhaite déterminer efficacement la solution stationnaire stable de la condensation de la vapeur sur des particules. Puis, la croissance des cristaux de glace dans un jet plan bidimensionnel a été étudiée afin de confronter les résultats obtenus avec l'utilisation de schémas explicites ou implicites et ainsi valider l'optimisation pour la recherche de solutions stationnaires.

La nouvelle stratégie de calcul spatial du sillage, si elle permet de palier à certains problèmes évoqués en introduction, n'a pas été sans difficultés. La première a été la nécessité de mener des simulations sur des domaines de calcul spatialement importants. L'enroulement du jet autour du tourbillon marginal n'est complet que plusieurs envergures en aval de l'avion. Cette distance dépend principalement des caractéristiques de l'avion : force du tourbillon et position des turboréacteurs principalement. Le nombre de mailles élémentaires pour la discrétisation du domaine peut alors très vite devenir rédhibitoire pour la puissance de calcul dont nous disposons actuellement. L'utilisation d'un code résolvant les écoulements sur des maillages non structurés n'est pas le plus favorable à la résolution de l'aérodynamique externe, puisque l'ordre des schémas est moins élevé et peut générer une diffusion numérique excessive des grandeurs caractéristiques de la physique. Ainsi, pour étudier la faisabilité d'un tel calcul, notamment du point de vue aérodynamique, l'outil a été utilisé pour le calcul du sillage, non pas d'un avion commercial, mais d'une maquette composée d'un profil NACA0012 et de deux injecteurs d'air chaud. En effet, pour une telle configuration, des résultats expérimentaux existent (projet FARWAKE). Cet écoulement est représentatif de celui généré par un avion de transport civil puisqu'il respecte le rapport de similitude proposé par Long, cf. paragraphe 5.1.1.3. Seul le champ moyen stationnaire des grandeurs aérothermodynamiques (vitesses, température, turbulence) a été calculé. Comme il a été évoqué au paragraphe 1.3.1, l'écoulement possède de fortes instationnarités, et une telle approche a tendance à diffuser anormalement certaines grandeurs dérivées de l'aérodynamique, notamment le rayon visqueux du tourbillon marginal. Néanmoins, elle a permis d'obtenir correctement les tendances de l'écoulement comme la position du tourbillon, celle du jet ainsi que la dilution du panache. Ce calcul a été mené sur deux maillages différents. Le premier, en augmentant la densité des points autour du saumon, a privilégié la description du tourbillon marginal. Les caractéristiques du deuxième maillage étaient plus favorables à la résolution du sillage, au détriment de celle du saumon. Il a été très difficile de concevoir un maillage alliant ces deux qualités en même temps sans augmenter de manière considérable le nombre de mailles du domaine et ainsi le temps de restitution des calculs. Si le premier maillage a permis une meilleure caractérisation du tourbillon notamment jusqu'à une demi-envergure, à huit envergures, la diffusion numérique du tourbillon a été aussi importante qu'avec le deuxième maillage. Ces premiers calculs ont permis néanmoins de confirmer le potentiel de l'outil dans des conditions où, on le sait, ses capacités peuvent être amoindries. La dilution du panache dans le sillage a ainsi été en accord avec celle observée lors de l'expérience. De même, l'enroulement du jet à huit envergures a été satisfaisant, puisque le calcul a donné un enroulement de trois quart tandis que l'étude expérimentale montre un enroulement complet. L'aérodynamique pourra être nettement améliorée, d'une part, par l'utilisation de

nouveaux maillages plus fins, et par le développement dans CEDRE de nouveaux schémas numériques plus performants, et d'autre part, par l'utilisation de modèles de turbulence plus adaptés aux écoulements rotationnels. A titre d'exemple, un nouveau schéma d'interpolation sera disponible prochainement dans le code CEDRE. Le développement de ce schéma a fait l'objet d'une thèse (Haider, 2009). L'idée principale a été d'améliorer la précision des schémas par une interpolation des grandeurs aux interfaces, non plus linéaire (méthode MUSCL) mais à l'aide de polynômes de degré élevé, cf. Chapitre 3 . De même, en s'équipant d'un nouveau supercalculateur nommé Stelvio en fin d'année 2009, l'ONERA est passé d'une capacité de calcul de 528 cœurs à 4 Go de mémoire par cœur à 3072 cœurs à $4{,}5$ Go par coeur. L'utilisation de maillages plus ambitieux sera désormais possible tout en conservant des temps de restitution de calculs raisonnables.

La dernière partie de ce travail de thèse a alors porté sur l'étude des processus microphysiques dans le sillage de la maquette pour laquelle nos résultats aérodynamiques ont été jugés satisfaisants. Un calcul de référence a été effectué. Afin de permettre la condensation sur les particules de suie, certaines conditions initiales du calcul ont été changées par rapport à l'étude expérimentale. La pression et la température de l'écoulement ont été fixées à des grandeurs représentatives de l'altitude de vol de croisière d'un avion soit, $T = 220\ K$ et $P = 22000\ Pa$. De même dans l'expérience, les injecteurs rejetaient uniquement de l'air chaud. Dans notre étude numérique, ont été ajoutées de la vapeur d'eau ainsi que des particules représentatives des suies à des concentrations caractéristiques d'un turboréacteur d'avion. Ce premier calcul a permis de constater que, dans ces conditions précises, la pression de vapeur d'eau et la température pouvaient être utilisées pour représenter la concentration des particules dans le sillage, puisque ces deux grandeurs se comportaient comme un scalaire passif. Ce calul a permis de préciser où les particules de glace se formaient dans le sillage mais également de connaitre leur concentration ainsi que leur taille. On a ainsi constaté que ces dernières se formaient principalement dans la zone de mélange du jet jusqu'à environ une envergure, puis que les plus grosses particules se situaient au centre du jet pendant toute la phase de l'enroulement. De même, la distribution en taille des particules n'a pas la même tendance suivant la position dans le sillage (trois, cinq et huit envergures) et donc suivant la phase de l'enroulement. Le rayon moyen des cristaux de glace à huit envergures est resté faible ($r = 230\ nm$) et s'explique notamment par le temps de séjour des particules, c'est-à-dire du temps mis par ces dernières pour atteindre huit envergures à partir de leur éjection dans le sillage par le moteur. Ce temps est de $0{,}2\ s$ dans le cadre de notre étude contre $2\ s$ environ dans les conditions réelles de vol d'un avion de type A340. Ainsi, si le nombre de Long (Cf. Chap. 5.1.1.3) reste pertinent lorsque l'on s'intéresse à la dynamique du sillage, caractéristique d'un gros porteur à partir d'une maquette placée dans une soufflerie, il est insuffisant lorsque l'on s'intéresse aux processus microphysiques intervenant dans le sillage. Il sera donc très intéressant d'utiliser l'outil numérique sur un maillage de gros porteur afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec des données expérimentales acquises en vol. Le nouveau défi, sera alors d'être capable de poursuivre le calcul jusqu'à environ une trentaine d'envergures, puisque les données expérimentales n'existent, à ma connaissance, qu'à partir de cette distance (Schröder *et al.*, 2000). Néanmoins, un tel calcul est à priori tout à fait envisageable. En effet, dans le sillage, la taille caractéristique des mailles est conditionnée par celle du noyau visqueux du tourbillon de sillage. Or, le tourbillon généré par la

maquette possèdait un rayon visqueux de l'ordre de $r_c \approx 1.10^{-3} m$, tandis qu'il est, pour un gros porteur, plutôt de l'ordre de $r_c \approx 1\ m$. Soit des tailles de maille qui peuvent être mille fois plus importantes dans le cas de l'étude du sillage d'un gros porteur, pour un domaine de calcul de longueur seulement environ cent fois plus grand. En effet, si l'on souhaite mener une simulation numérique jusqu'à huit envergures, la longueur du domaine de calcul pour la maquette est $L = 8 * 0{,}5 = 4\ m$, celle pour un gros porteur de $50\ m$ d'envergure est $L = 8 * 50 = 400\ m$. Il faudra néanmoins veiller au nombre de Mach du jet qui sera bien supérieur. Les effets de compressibilité seront donc bien plus importants avec pour conséquence, par exemple, des tailles de cristaux de glace dans la zone de cisaillement du jet plus faibles (Maglaras, 2007) mais également une dilution qui ne pourra, a priori, plus être calculée à partir de la température ou de la pression de vapeur.

Enfin, l'effet de la taille des suies en sortie moteur ainsi que celui de l'humidité relative de l'atmosphère, sur les caractéristiques microphysiques du sillage, a été étudié. Dans le premier cas, le rayon des suies a été multiplié par dix par rapport au calcul de référence, passant d'un rayon $r_s = 10\ nm$ à un rayon $r_s = 100\ nm$. On a retrouvé une évolution du rayon moyen dans le sillage possèdant les mêmes caractéristiques que celles du calcul de référence mais décalée vers des tailles de rayon plus importantes. Ainsi, à huit envergures, le rayon moyen des particules est de $300\ nm$ contre $230\ nm$ lorsque le rayon des suies est $r_s = 10\ nm$. Dans le deuxième cas, l'humidité relative de l'atmosphère a été fixée à $RH = 30\%$ contre $RH = 60\%$ pour le cas de référence. L'atmosphère est désormais, très nettement sous-saturée par rapport à la glace. L'évaporation des cristaux en périphérie du jet a engendré des modifications sur la distribution en taille des cristaux dans le sillage. Le rayon moyen des cristaux de glace, à huit envergures, a été modifié mais pas de manière très importante, puisque l'écoulement est encore dominé par celui du jet. Il est de $180\ nm$ contre $230\ nm$ pour le cas de référence où $RH = 60\%$.

Dans le travail à venir, il sera important de mettre en place des stratégies de calcul qui permettent non seulement de prendre en compte la géométrie de l'avion, qui perturbe fortement l'atmosphère en terme de vitesses et de types d'écoulement (nappe tourbillonnaire, jets) mais également qui permettent de mieux décrire les phénomènes de turbulence, à la fois ceux du tourbillon marginal mais également du jet. En effet, la turbulence accélère les processus de diffusion et donc la prédominance des effets de l'atmosphère sur la dynamique du sillage. La turbulence atmosphérique peut ensuite rapidement étendre la répartition spatiale des cristaux de glace diminuant ainsi l'épaisseur optique de la traînée, phénomène qui peut être amplifié lorsque les conditions atmosphériques sont favorables à l'évaporation des cristaux. De même, plus le turboréacteur sera proche de l'extrémité de l'aile, plus la turbulence du jet va pénétrer le centre du tourbillon et favoriser le développement d'instabilités (Margaris, Marles et Gursul, 2008). Il pourra être envisagé de mener un calcul autour de la structure de l'avion et dans son champ très proche en utilisant une approche RANS. Puis, lorsque la quantité de mouvement axial du jet a suffisamment diffusé pour que ce dernier subisse l'écoulement rotationel du tourbillon, mener un calcul de type LES, à partir des données obtenues par le premier calcul RANS.

Annexes

Instabilité convective et instabilité absolue

Parmi les ondes instables qui peuvent se développer en temps et en espace dans un écoulement, on peut distinguer celles qui sont absolument instables de celles qui sont convectivement instables (Huerre et Monkewitz, 1990). Cette distinction fait référence à l'évolution locale, à long terme, de la réponse impulsionnelle de l'écoulement : une instabilité sera dite « convective » si l'écoulement transporte suffisamment les ondes vers l'aval pour que localement la réponse impulsionnelle décroisse finalement. Au contraire, l'instabilité sera dite « absolue » si les ondes instables envahissent progressivement tout le domaine.

Circulation

En analyse vectorielle, on définit la circulation $\mathcal{C}$ d'un vecteur $\vec{v}$ le long d'un contour fermé Ω par l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{C}\left(\vec{v}\right) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \tag{5.19}$$

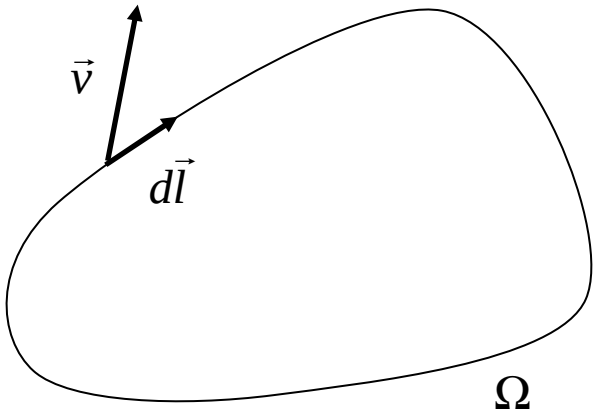

Figure 6.22 : Schéma du contour fermé Ω pour le calcul de la circulation $\mathcal{C}$ du vecteur $\vec{v}$

La circulation est une grandeur mathématique pertinente pour caractériser la « force » d'un tourbillon et d'un fluide en rotation en général. Pour une particule fluide en rotation, distante de r du centre de rotation et de vitesse u_θ (Figure 6.23), la circulation est définie dans par :

$$\Gamma = \oint_{\Omega} u_\theta ds = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta \tag{5.20}$$

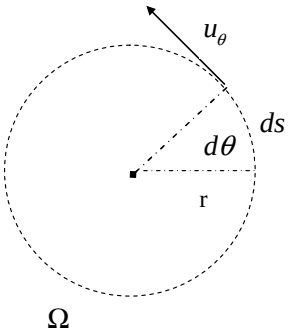

Figure 6.23 : Représentation géométrique du calcul de la circulation d'un tourbillon

La circulation est au mouvement rotationnel ce qu'est la quantité de mouvement pour un mouvement rectiligne.

Equations régissant un écoulement incompressible en rotation autour d'un axe : tourbillon de Lamb Oseen.

Un écoulement incompressible en rotation autour d'un axe est un écoulement particulier régit donc pas les équations de Navier Stokes. Ces dernières, peuvent dans ce cas, être simplifiées. Pour cela, il existe différentes méthodes. Utiliser une transformée de Laplace en temps ou une transformée de Fourier en espace ou bien encore présupposer une forme fonctionnelle appropriée, sont toutes trois des méthodes performantes. L'utilisation d'une forme fonctionnelle est développée ici.

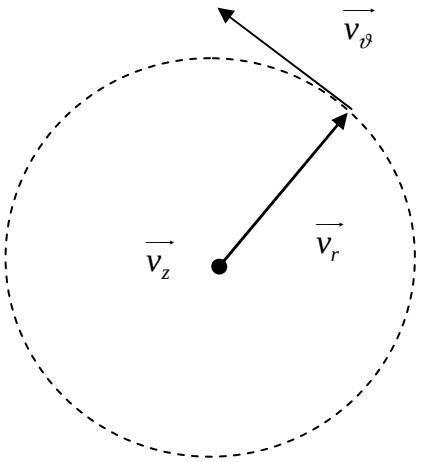

Figure 6.24 : Schéma des vitesses de l'écoulemennt en coordonnées cylindriques

Les hypothèses utilisées sont les suivantes :

- La composante axiale de la vitesse est nulle : $\vec{v}_z = \vec{0}$
- La composante radiale de la vitesse est nulle : $\vec{v}_r = \vec{0}$
- La masse volumique du fluide ρ ne dépend ni du temps ni de l'espace
- L'écoulement est purement tangentiel

Dans ces conditions, les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \tag{1.21}$$

$$\frac{v_\theta^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} \tag{1.22}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\theta\right)\right)\right] \tag{1.23}$$

La solution stationnaire de (1.23) vérifie :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_s\right)\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_s\right) = c_1 \\ \Leftrightarrow \quad & v_s\left(r\right) = \frac{c_1}{2} r + \frac{c_2}{r} \end{aligned}$$

On considère le deuxième terme uniquement, soit :

$$v_s\left(r\right) = \frac{c_2}{r}$$

La circulation des vitesses autour de z est facilement calculée sur le cercle de rayon r

$$\begin{aligned} & \Gamma = \int_0^{2\pi} v_s\left(r\right) r d\theta = 2\pi c_2 \\ \Leftrightarrow \quad & v_s\left(r\right) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned}$$

Une solution instationnaire peut donc être cherchée sous la forme :

$$v_\theta\left(r,t\right) = \frac{\Gamma}{2\pi r} f\left(r,t\right)$$

Avec $\quad v_\theta\left(r, t=0\right) = \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \qquad$ pour $\; r \neq 0$

$\qquad \lim\limits_{t\to\infty} v_\theta\left(r,t\right) = 0$

Par substitution dans (1.23) il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma}{2\pi r}\frac{\partial f}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma}{2\pi} f\right)\right)\right] \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\partial f}{\partial t} = \nu r\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right] \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\partial f}{\partial t} = \nu r\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right] \end{aligned}$$

Soit

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right] \tag{1.24}$$

La fonction f doit être telle que : $\begin{array}{l} f\left(r,0\right) = 1 \\ \lim\limits_{t\to\infty} f\left(r,t\right) = 0 \end{array}$

Il reste alors à déterminer la solution de l'équation (1.24) qui vérifie les deux conditions précédentes.

Une solution self similaire (auto semblable ou de similitude) de la forme $f = f\left(\eta\right)$ peut être trouvée, avec $\eta = \dfrac{r^2}{4\nu t}$. Ceci transforme le problème aux dérivées partielles en un problème différentiel ordinaire.

Ainsi, si $f = f\left(\eta\right)$

Alors ,
$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial t} = -f'\left(\eta\right)\dfrac{r^2}{4\nu t^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial r} = f'\left(\eta\right)\dfrac{r}{2\nu t} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} = f''\left(\eta\right)\left(\dfrac{r}{2\nu t}\right)^2 + f'\left(\eta\right)\dfrac{1}{2\nu t} \end{array}$$

En utilisant ces expressions dans (1.24) , il vient :

$$\begin{array}{rl} & f''\left(\eta\right) + f'\left(\eta\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & f'\left(\eta\right) + f\left(\eta\right) = c_1 \\ \Leftrightarrow & f\left(\eta\right) = c_1 + c_2 e^{-\eta} \end{array}$$

Or , $\begin{array}{l} f\left(r,0\right) = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ \lim\limits_{t\to\infty} f\left(r,t\right) = 0 \Rightarrow c_2 = -1 \end{array}$

Ainsi, $f\left(\eta\right) = 1 - e^{-\eta}$

Le champ de vitesse a finalement pour expression :

$$v_\theta\left(r,t\right) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left\{1 - \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]\right\} \tag{5.25}$$

Ce profil de vitesse représente l'évolution sous l'effet de la viscosité d'un tourbillon axisymétrique dont la circulation initiale est Γ_0

Modèle de tourbillon de Lamb Oseen

Le modèle de Lamb consiste à écrire la solution analytique (5.25) sous la forme :

$$u_\theta(r,t) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}\left\{1 - \exp\left[-\alpha\left(\frac{r}{r_c}\right)^2\right]\right\} \tag{1.26}$$

α est introduit afin d'assurer que la vitesse tangentielle soit maximale pour $r = r_c$

$$\begin{aligned} & \frac{dv_\theta(r,t)}{dr} = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - e^{-\alpha}(1 + 2\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \approx 1.2564 \end{aligned}$$

Par identification entre les équations (5.25) et (1.26), il vient :

$$r_c(t) = \sqrt{4\alpha\nu t} = 2.24\sqrt{\nu t} \tag{5.27}$$

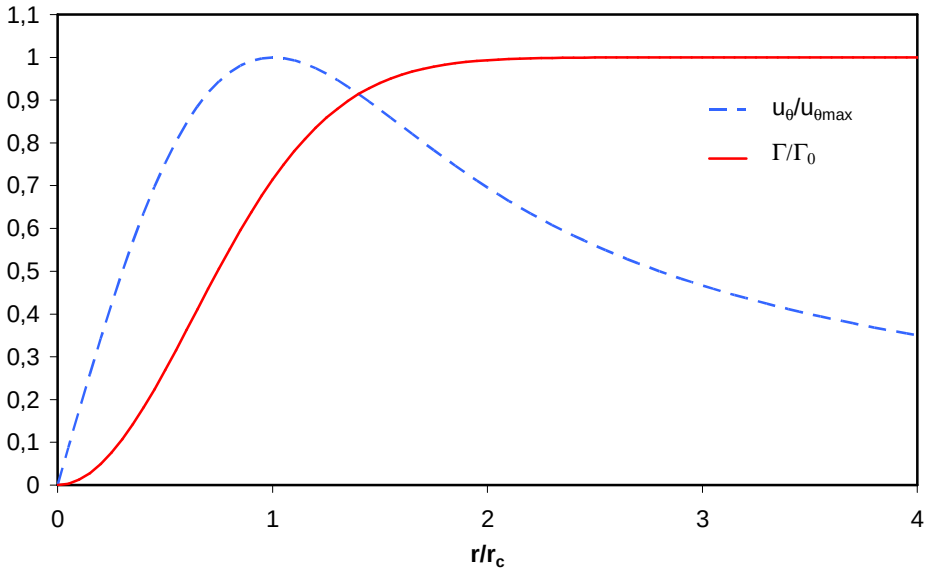

Figure 6.25 : Distribution radiale de la vitesse tangentielle et de la circulation d'un tourbillon de Lamb Oseen

La Figure 6.25 permet de mettre en évidence deux grandeurs caractéristiques du tourbillon : le rayon visqueux et le rayon de vorticité.

- Le rayon visqueux r_c est défini à partir du maximum de vitesse tangentielle. A l'intérieur du noyau visqueux ($r/r_c < 1$), le fluide est en rotation solide. A l'extérieur, le profil de vitesse tend vers la solution d'un fluide parfait i.e. de viscosité nulle ($u_\vartheta \propto 1/r$). Il est à noter que le rayon visqueux contient un peu plus de 70% de la circulation.
- Le rayon de vorticité r_v correspond à la région où la circulation atteint son maximum, $r_v = 2r_c$. A l'intérieur de la région définie par $r/r_c < 2$, l'écoulement est fortement rotationnel alors qu'à l'extérieur l'écoulement est quasiment irrotationel.

Equations aux dérivées partielles et équations différentielles ordinaires

En mathématiques, une équation différentielle, de manière générale est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

Plus particulièrement, on parle d'équations aux dérivées partielles lorsque la ou les fonctions dépendent de plusieurs variables. L'équation aux dérivées partielles relie donc la ou les fonctions à leurs dérivées partielles.

On parle d'équations différentielles ordinaires lorsque la fonction (et donc la solution recherchée) ne dépend que d'une seule variable

Evaluation de la valeur de la circulation du tourbillon de bout d'aile généré par un avion en vol de croisière

Un avion volant à la vitesse V, ayant un coefficient de portance C_L, une envergure b, une surface allaire A, possède une portance qui est égale au flux de quantité de mouvement de l'enroulement de la nappe tourbillonnaire issue de l'aile:

$$\frac{\rho C_L A V^2}{2} = \rho V b_0 \Gamma_0. \tag{5.28}$$

où ρ est la masse volumique de l'air, Γ_0 la circulation du tourbillon marginal et b_0 la distance initiale entre les deux tourbillons marginaux.

Ainsi, la circulation du tourbillon peut s'exprimer sous la forme :

$$\Gamma_0 = \frac{C_L V A}{2b_0}. \tag{5.29}$$

En vol de croisière, la portance est égale au poids de l'avion soit :

$$\frac{\rho C_L A V^2}{2} = \rho V b_0 \Gamma_0 = Mg. \tag{5.30}$$

Et la circulation du tourbillon peut s'exprimer sous la forme :

$$\Gamma_0 = \frac{Mg}{\rho V b_0}. \tag{5.31}$$

Schémas numériques

- Consistant: un schéma numérique est dit consistant si et seulement si la solution exacte des équations aux dérivées partielles discrétisées tend vers la solution exacte des équations

continues lorsque tous les pas de discrétisation (temporel : Δt , spatial : Δx), à la fois, tendent vers la valeur nulle.

- Diffusif : un schéma numérique est dit diffusif lorsque certaines composantes de la solution sont anormalement amorties, c'est-à-dire que leur amplitude est plus faible que celle de la solution exacte.
- Dispersif : un schéma numérique est dit dispersif lorsque certaines composantes de la solution ne sont pas convectées à la bonne vitesse et sont en déphasage avec la solution exacte. Ceci a pour conséquence d'engendrer des oscillations au niveau des discontinuités de la solution.

Ecoulement stationnaire et instationnaire

- Ecoulement stationnaire : Un écoulement de fluide est dit stationnaire ou permanent lorsque toutes ses propriétés (vitesse, température …) sont indépendantes du temps.
- Ecoulement instationnaire : Un écoulement de fluide est dit instationnaire ou non-permanent lorsque toutes ses propriétés (vitesse, température …) dépendent du temps.

Bibliographie

Report on the meso-scale aircraft wakes simulations and the implications for effective emission indices. QUANTIFY.

Abramovich, G. N. (1963). The theory of turbulent jets. The MIT press. Cambridge, Massachussets

Airbus (2009). Global Market Forecast 2009-2028

Appleman, H. 1953. «The formation of exhaust condensation trails by jet aircraft». *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, vol. 34, p. 14-20.

Barth, T. J., et P. Frederickson. 1990. «Higher order solution of the Euler equation on unstructured grids using quadratic reconstruction». In *28 th Aerospace Science Meeting* (January 8-11): AIAA paper No 90-0013.

Baschin, O. 1919. «Fluzeuge als Wolkenbildner und Wolkenfresser». *Deutsche Luftfahrer Z*, vol. 6, no 6, p. 13-14.

Batchelor, G. K. 1964. «Axial flow in trailing line vortices». *J. Fluid Mech.*, vol. 20, p. 645-658.

Batchelor, G. K., et A. E. Gill. 1962. «Analysis of the stability of axisymmetric jets». *J. Fluid Mech.*, vol. 14, p. 529-551.

Bertier, N. 2006. «Simulation des Grandes Echelles en Aérothermique sur des Maillages Non-Structurés Généraux». Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6.

Birch, D., et T. Lee. 2003. «Rollup and Near Field Behavior of a Tip Vortex». *J. Aircraft*, vol. 40, no 3, p. 603-607.

Boris, J. P., F. F. Grinstein
E. S. Oran et R. L Kolbe. 1992. «New insightsinto Large Eddy Simulation». *Fluid Dyn. Res.*, vol. 10, p. 199-228.

Brancher, P. 1996. «Etude numérique des instabilités secondaires de jets». Palaiseau, Thèse de Doctorat de l'Ecole Polytechnique.

Brown, G. L., et A. Roshko. 1974. «On density effects and large structures in turbulent mixing layer». *J Fluid Mech*, vol. 64, p. 775-816.

Cago, C. Ferreira, S. Brunet et F. Garnier. 2002. «Numerical investigation of turbulent mixing in jet/vortex interaction». *AIAA Journal*, vol. 10, no 2, p. 276-284.

Candel, S. (1974). Champ aérodynamique d'un jet chaud subsonique et structure cohérente, Rapport ONERA NT 33/1751 PH.

Crow, Steven C. 1970. «Stability theory for a pair of trailing vortices». In *AIAA*.

Delhaye, D. 2007. «Détermination expérimentale des caractéristiques physiques et chimiques de particules de suie émises par des turboréacteurs d'avion». Marseille, Thèse de Doctorat de l'Université de la méditerranée Aix-Marseille II.

Devenport, WJ., MC. Rife, SI. Liapis et GJ. Follin. 1996. «The structure and development of a wing-tip vortex». *J Fluid Mech*, vol. 312, p. 67-106.

Dörnback, A., et T. Dürbeck. 1998. «Turbulent Dispersion of Aircraft Exhausts in Regions of Breaking Gravity Wave». *Atmospheric Environment*, vol. 32, p. 3105-3112.

Dürbeck, T., et T. Gerz. 1996. «Dispersion of aircraft exhausts in the free atmosphere». *Journal of Geophysical Research*, vol. 101, p. 26007-26016.

Dutoya, D., et M. P. Errera. 1992. «Une décomposition formelle du jacobien des equations d'euler. Application à des schémas numériques décentrés». In *La recherche aérospatiale*.

Garnier, F., C. Baudoin, P. Woods et N. Louisnard. 1997. «Engine emission alteration in the near field of an aircraft». *Atmospheric Environment*, vol. 31, no 12, p. 1767-1781.

Garnier, F., S. Brunet et L. Jacquin. 1997. *Ann. Geophysicae*. p. 1468-1477

Gerz, T., T. Dübeck et P. Konopka. 1998. «Transport and effective diffusion of aircraft emissions». *J. Geophys. Res.*, vol. 103, p. 25905-25914.

Ghias, R., R. Mittal et H. Dong. 2005. «Study of Tip-Vortex Formation Using Large-eddy Simulation». *AIAA*.

Hahn, W. 1963. *Theory and application of lyapunov's direct method*. Coll. «Prentice-Hall».

Haider, F. 2009. «Discrétisation en maillage non structuré général et applications LES». Paris, Ecole doctorale de Sciences Mécanisues, Acoustique et Electronique, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.

Hall, W. D., et H. R. Pruppacher. 1976. «The survival of ice particles falling from cirrus clouds in subsaturated air». *J. Atmos. Sci.*, vol. 33, p. 1995-2006.

Hinze, J. O., et B. C. Van der Hegge Zijnen. 1949. «Transfer of heat and matter in he turbulent mixing zone of an axially symetrical jet». *Applied science research*, vol. 1, p. 435-461.

Hirsh, C. 1988. «Numerical computations of internal and external flows». John Wiley & sons.

Hofmann, D. J., et J. M. Rosen. 1978. «Ballon observations of a particle layer injected by stratospheric aircraft at 23 km». *Geophys. Res. Let.*, vol. 5, p. 511-514.

Huerre, P., et P.A. Monkewitz. 1990. «Local and global instabilities in spatially developing flows». *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, vol. 22, p. 473-537.

Huet, M., F. Vuillot et G. Rahier. 2008. *14th AIAA/CEAS, Aeroacoustics Conference* (Vancouver, Canada).

ICAO. 1993. «International standards and recommended practices, Envrironmental protection».

IPCC (1999). Aviation and the global atmosphere - A special report of IPCC working groups I and III. Intergovernmental Panel on Climate Change. Cambridge, UK and New York.

IPCC (2007). Climate Change, Synthesis report, An assesment of the intergovernmental Panel on Climate Change.

Jacquin, L., D. Fabre et P. Geffroy. 2001. «The Properties of a Transport Aircraft Wake in the Extended Near Field: An Experimental Study». In *39th AIAA Aerospace Sciences* (8-11-January 2001).

Jacquin, L., et F. Garnier (1996). On the dynamics of engine jets behind a transport aircraft. Office national d'études et de recherches aérospatiales.

Jacquin, L., P. Molton, P. Loiret et E. Coustols. 2007. *37th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit* (Miami (FL), USA). p. 43-63.

Jensen, E., A. S. Ackerman, D. E. Stevens, O. B. Tonn et P. Minnis. 1998. «Spreading and growth of contrails in a sheared environment». *J. Geophys. Res.*, vol. 24, p. 31557-31567.

Kärcher, B. 1994. «Transport of exhaust products in the near trail of a jet engine under atmospheric conditions». *Journal of Geophysical Research*, vol. 99, no D7, p. 14509-14517.

Kärcher, B. 1996. «The initial Composition of Jet Condensation Trails». *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 53, p. 3066-3083.

Kärcher, B. 1998. «Physicochemistry of aircraft-generated liquid aerosols, soot, and ice particles». *Journal of Geophysical Research*, vol. 103, no D14, p. 17111-17128.

Labbé, O., E. Maglaras et F. Garnier. 2007. «Large-eddy simulation of a turbulent jet and wake vortex interaction». *Computers and Fluids*, vol. 36, no 4, p. 772-785.

Labbé, O., et P. Sagaut. 2003. «reconstruction of initial field from experimental data for numerical simulations of realistic aircraft wakes». *Progress in Computational Fluid Dynamics*, vol. 3, no 1, p. 1-12.

Lau, J. C. 1981. «Effects of exit Mach number of temperature on mean flow and turbulence characteristics in round jets». *J. Fluid Mech.*, vol. 105, p. 193-218.

Lee, David. S., David. W. Fahey, Piers. M. Foster, Peter. J. Newton, Ron C.N. Wit, Ling L. Lim, Bethan Owen et Robert Sausen. 2009. «Aviation and global climate change in the 21st century». *Atmospheric Environment*, vol. 43, p. 3520-3537.

Leterrier, N. 2003. «Discrétisation spatiale en maillage non structuré de type général». Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.

Leweke, T. (2009). FAR-Wake Fundamental Research on Aircraft Wake Phenomena. Rapport technique.

Lewellen, D.C., et W.S. Lewellen. 2001. «The Effect of Aircraft Wake Dynamics on Contrails Development». *J. Atmos. Sci.*, vol. 58, p. 390-406.

Long, Robert R. 1961. «A vortex in an infinite viscous fluid». *J. Fluid Mech.*, vol. 11, p. 611-626.

Maglaras, E. 2007. «Application de la Simulation Numérique des Grandes Echelles à la Formation des Traînées de Condensation dans le Sillage d'un Avion». Ecole doctorale des sciences physiques et de l'ingénieur, Thèse de Doctorat de l'Université Bordeaux 1.

Margaris, P., D. Marles et I. Gursul. 2008. «Experiments on jet/vortex interaction». *Exp Fluids*, vol. 44, p. 261-278.

Mattingly, G. E., et C. C. Chang. 1974. «Unstable waves on an axisymmetric jet column». *J. Fluid Mech.*, vol. 65, p. 541-560.

Michalke, A., et G. Herman. 1982. «On the inviscid instability of a circular jet with external flow». *J. Fluid Mech.*, vol. 114, p. 343-359.

Mirabel, Ph., et J. L. Katz. 1974. «Binary homogeneous nucleation as a mechanism for the formation of aerosols». *J. Chem. Phys.*, vol. 60, no 3, p. 1138-1144.

Moens, F. (2005). Caractérisation du tourbillon marginal de l'aile AFV82 par calculs Navier Stokes 3D; Comparaison avec les données expérimentales, ONERA.

Morris, P. J. 1976. «The spatial viscous instability of axisymmetric jets». *J. Fluid Mech.*, vol. 77, p. 511-529.

Mozurkewich, M. 1986. «Aerosol growth and the condensation coefficient for water. A review». *Aerosol Science and Technology*, vol. 5, p. 223-236.

Murphy, D. M, et T. Koop. 2005. «Review of the vapour pressures of ice and supercooled water for atmospheric applications». *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, vol. 131, no 608, p. 1539-1565.

Murrone, A., et D. Scherrer. 2005. *1st INCA Workshop* (Villaroche, France).

Paoli, R., X. Vancassel, F. Garnier et P. Mirabel. 2008. «Large-eddy simulation of a turbulent jet and a vortex sheet interaction: particle formation and evolution in the near field of an aircraft». *Meteorol. Zeitschrift*, vol. 17, no 2, p. 131-144.

Paoli, Roberto, et François Garnier. 2005. «Interaction of exhaust jets and aircraft wake vortices: small-scale dynamics and potential microphysical-chemical transformations». *C. R. Physique*, vol. 6, p. 525-547.

Paoli, Roberto, Jerome Hélie et Thierry poinsot. 2004. «Contrail formation in aircraft wakes». *J. Fluid Mech*, vol. 502, no 361-373.

Paugam, Ronan G. M. 2008. «Simulation numérique de l'évolution d'une traînée de condensation et de son interaction avec la turbulence atmosphérique». Thèse de Doctorat de l'Ecole Centrale Paris.

Pruppacher, H. R., et J. D. Klett. 1978. *Microphysics of clouds and Precipitation*: D. Reidel.

Reiner, T., et F. Arnold. 1993. «Laboratory flow reactor measurements of the reaction $SO_3+H_2O+M \rightarrow H_2SO_4+M$: Implications for gaseous H_2SO_4 and aerosol formation in plumes of jet aircraft». *Geophys. Res. Let.*, vol. 20, p. 2659-2662.

Reynolds, O. 1883. «An experimental investigation of circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels». *Royal Society Phil. Trans.*

Rossow, V. J., et K. D. James. 1999. *AIAA*. 6 t., p. 960-975.

Saad, Y., et Martin. H. Schultz. 1986. «GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems». *SIAM J. Sci. and Stat. Comput*, vol. 7, no 3, p. pp. 856-869.

Sausen, Robert, Ivar Isaksen, Volver Grewe, Didier Hauglustaine, David S. Lee, Gunnar Myhre, Marcus O. Köhler, Giovanni Pitari, Ulrich Schumann, Frode Stordal et Christos Zerefos. 2005. «Aviation radiative forcing in 2000: An update on IPCC (1999)». *Meteorologische Zeitschrift*, vol. 14, no 4, p. 555-561.

Schmidt, E. 1941. «Die Entstehung von Eisnebel aus den Auspuffgasen von Flugmotoren». *Schriften der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung*, vol. 44, p. 1-15.

Schröder, F., B. Kärcher, C. Duroure, J. Ström, A. Petzold, J.-F. Gayet, B. Strauss, P. Wendling et S. Borrmann. 2000. «On the transition of Contrails into Cirrus Clouds». *Journal of the atmospheric sciences*, vol. 57, p. 464-480.

Schuman, U. 1996. «On conditions for contrail formation from aircraft exhausts». *Meteorol. Zeitschrift*, vol. 5, p. 4-23.

Schumann, U. 2000. «Influence of propulsion efficiency on contrail formation». *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 4, p. 391-401.

Sedunov, Y. S. 1974. «Physics of Drop Formation in the Atmosphere». John Wiley, p. 234.

Seinfeld, John H., et Spyros N. Pandis (2006). Atmospheric Chemestry and Physics, John Wiley & Sons, inc.

Slotine, J. J. E., et W. Li (1991). Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, New Jersey.

Spalart, P. R. 1996. «On the motion of laminar wing wakes in a stratified fluid». *J. Fluid Mech.*, vol. 327, p. 139-160.

Spalart, P. R. 1998. «Airplane trailing vortices». *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 30, p. 107-138.

Stumpf, Eike, Jochen Wild, Adil A. Dafa'Alla et Ernst A. Meese. 2004. «Numerical Simulations of the wake vortex near field of high-lift configurations». In *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering.*

Sussmann, R., et K. M. Gierens. 1999. «Lidar and numerical studies on the different evolution of vortex pair and secondary wake in young contrails». *J. Geophys. Res.*, vol. 104, p. 2131-2142.

Tabazadeh, A., S. T. Martin et J. S. Lin. 2000. «The effect of particle size and nitric acid uptake on the homogeneous freezing of aqueous sulphuric acid particles». *Geophys. Res. Let.*, vol. 27, p. 1111-1114.

Tesse, L., S. Avila, F. Dupoirieux et J. Taine. 2006. *13rd International Heat Transfer Conference* (Sydney, Australie).

Van Leer, B. 1977. «Towards the ultimate conservative scheme. A new approach to numerical convection.». *J. Com. Phys.*, vol. 23, p. pp276-299.

Varney, B. M. 1921. «The Argonne battle cloud». *Mon. Wea. Rev.*, vol. 49, p. 348-349.

Verzicco, R., et P. Orlandi. 1994. «Direct simulations of the transitional regime of a circular jet». *Phys. Fluids*, vol. 6, p. 751-759.

Villedieu, Ph. (1996). Méthodes de volumes finis sur maillages non structurés quelconques pour l'équation de convection diffusion, rapport technique 1/350.00/DERI.

Wang, F. Y., et K. M. Q. Zaman. 2002. «Aerodynamics of a Jet in the Vortex Wake of a Wing». *AIAA Journal*, vol. 40, p. 401-407.

Warren, S. G. 1984. «Optical constants of ice from the ultraviolet to the microwave». *Appl. Opt.*, vol. 23, p. 1206-1225.

Weickmann, L. 1919. «Wolkenbildung durch ein Flugzeug». *Naturwissenschaften*, vol. 7, p. 625.

Widnall, S. E., D. Bliss et A. Zalay. 1971. «Theoritical and experimental study of the stablility of a vortex pair». In *Aircraft Wake Turbulence and its detection,* J. H. Olsen, p. 305. New York: Plenum.

Wyslouzil, B. E., K. L Carleton, D. M. Sonnenfroh, W. T. Rawlins et S. Arnold. 1994. «Observation of hydration of single, modified carbon aerosols». *Geophys. Res. Let.*, vol. 21, p. 2107-2110.

Yule, A. J. 1978. «large-scale structure in the mixing layer of a round jet». *J. Fluid Mech.*, vol. 89, p. 413-432.

Mécanismes microphysiques intervenant dans le sillage proche d'un avion en maillage non structuré

La présente étude porte sur la simulation numérique de la croissance des cristaux de glace dans le sillage proche d'une aile rectangulaire munie de deux injecteurs qui modélisent les deux moteurs. Dans cette configuration, les phénomènes microphysiques interviennent lors de l'interaction du jet, issu du moteur, et du tourbillon marginal qui se développe à chaque bout d'aile. Cet écoulement, très turbulent, perturbe fortement l'air environnant. Les jets diffusent dans l'atmosphère et s'enroulent autour des deux tourbillons de bout d'aile. Ces jets contiennent de la vapeur d'eau, des suies, des gaz mais également des aérosols et particules chargées. Le modèle microphysique utilisé dans cette étude repose sur l'hypothèse que la vapeur d'eau condense uniquement sur les particules de suie. Les simulations numériques sont effectuées à l'aide du code CEDRE développé à l'ONERA. Les méthodes numériques sont basées sur une approche volume finie pour des maillages non structurés généralisés. La résolution des équations de Navier stokes compressibles pour des fluides multi-espèces se fait selon une approche de type RANS et seul le champ stationnaire, jusqu'à huit envergures en aval de la maquette, est calculé. La turbulence de l'écoulement est modélisée au moyen du système de fermeture à deux équations $k-l$. Cette approche permet d'obtenir une description spatiale plus réaliste de l'interaction entre le jet et le tourbillon marginal. Le champ aérodynamique du sillage est ainsi comparé aux données expérimentales existantes. Le jet est correctement enroulé autour du tourbillon à huit envergures, et la dilution du panache est bien décrite par les simulations. Le modèle microphysique est ensuite couplé au modèle aérodynamique. Une première simulation porte sur les phénomènes microphysiques intervenant dans le sillage de la maquette dans des conditions particulières, représentatives d'un avion commercial en vol de croisière dans une atmosphère saturée par rapport à la glace. L'influence de la taille initiale des particules de suies émises par les moteurs ainsi que l'humidité relative de l'atmosphère, sur les propriétés de la traînée de condensation, sont ensuite étudiées et discutées. Ce travail, de part la stratégie de calcul mise en place et notamment l'utilisation de maillages non structurés généralisés, permettra d'appréhender le rôle de certains paramètres clés liés à l'avion comme la géométrie des ailes ou bien encore la position des nacelles sur les propriétés microphysiques de la traînée de condensation.

Mots clés : Microphysique, Aerodynamique, Pollution, Traînée de condensation, Cirrus, Jet turbulent, Particules, RANS

Microphysical processes occuring in the near wake of an aircraft using unstructured grids

Numerical simulations of ice particles growth, in the near wake of a rectangular wing with two injectors, are presented in this study. In this configuration, microphysical processes occur during the interaction between the engines jets and the marginal vortices developping at each wing tip. This strong turbulent flow disturbs highly the environmental flow. The jets diffuse in the atmosphere and are wrapped around the two wing tip vortices. They contain water vapour, soots, gas, aerosols and charged particles as well. One of the hypothesis of the microphysical modeling, used in this study, is that water vapour condenses on soot particles only. Numerical simulations are performed with the code CEDRE developed at ONERA. The numerical methods are based on a cell-centered finite volume approach for general unstructured grids. A Navier-Stokes solver for turbulent, compressible and multi-species flows with a RANS approach, based on the $k-l$ turbulence model, is used. Only stationary states of the flow, until eight spans downstream the setup, are computed. This approach enables to get a better spatial description of the interaction between the jet and the marginal vortex. The numerical flow field is then compared to existing experimental data. The jet is correctly wrapped around the wing tip vortex at eight spans and the dilution of the effluents is well described by our simulations. The microphysical model is then coupled to the aerodynamics. The microphysical processes occurring in the wake of the setup in specific conditions, representative of a cruising civil aircraft in an ice-saturated atmosphere, are firstly simulated. The role, on the contrail's properties, of soot particles initial size and of the atmospheric humidity is studied and discussed. This work, through its computational strategy, with the use of unstructured grids, will enable to understand the potential role of some key parameters such as the wings geometry or the engines position on the contrail properties.

Key Words : Microphysics, Aerodynamics, Pollution, Contrails, Cirrus, turbulent Jet, Particles, RANS

Les travaux de recherhce ont été effectués au
Département Mesures Physiques – Unité Environnement de l'ONERA
BP72 – 29, avenue de la Division Leclerc FR-92322 Châtillon Cedex