THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)
Discipline ou spécialité : Dynamique des fluides

Présentée et soutenue par : Serge ADJOUA
Le 13 Juillet 2010

Titre : *Développement d'une méthode de simulation de films liquides cisaillés par un courant gazeux*

JURY

Jean Paul CALTAGIRONE	Rapporteur
Frédéric PLOURDE	Rapporteur
Gérard LAVERGNE	Membre
Christian RUYER–QUIL	Membre
Guillaume MOUGIN	Responsable de thèse Air Liquide
Jacques MAGNAUDET	Directeur des travaux de recherche

Ecole doctorale : Mécanique, Energétique, Génie civil et procédés (MEGeP)
Unité de recherche : Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)
Directeur(s) de Thèse : Jacques MAGNAUDET

Table des matières

Remerciements **6**

Résumé - Abstract **7**

Introduction **8**

1 Méthodes de suivi d'interface **11**
1.1 Introduction . . . 13
1.2 Méthodes eulériennes de suivi d'interface . . . 13
1.2.1 Méthodes de suivi de front . . . 13
1.2.2 Méthodes de suivi en volume . . . 14
1.2.3 Méthode retenue . . . 16
1.3 Modèle à un fluide . . . 16
1.3.1 Équations du milieu diphasique . . . 16
1.3.2 Bilans et filtrage des équations . . . 18
1.3.3 Hypothèses simplificatrices . . . 20
1.3.4 Fraction volumique et densité . . . 22
1.3.5 Contraintes visqueuses . . . 22
1.3.6 Effets capillaires . . . 23
1.4 Résolution numérique . . . 24
1.4.1 Discrétisation spatiale . . . 24
1.4.2 Discrétion temporelle . . . 24
1.4.3 Transport du taux de présence . . . 25
1.5 Conclusion . . . 25

2 Dynamique d'un film tombant non cisaillé **27**
2.1 Introduction . . . 29
2.2 Équations et caractéristiques d'équilibre . . . 29
2.2.1 Mise en équation . . . 29
2.2.2 Nombres sans dimension . . . 30
2.2.3 Écoulement d'équilibre . . . 30
2.3 Stabilité linéaire . . . 31
2.3.1 Courtes longueurs d'onde . . . 32
2.3.2 Grandes longueurs d'onde . . . 32
2.4 Effets non-linéaires . . . 34
2.4.1 Faibles nombres de Reynolds $Re = O(1)$ . . . 34
2.4.2 Nombres de Reynolds élevés $Re = O(\epsilon^{-1})$ . . . 36
2.5 Caractérisation des ondes . . . 37
2.5.1 Stabilité et caractère convectif des ondes . . . 37

2.5.2 Nature des ondes . . . 38
2.6 Bilan . . . 39
2.7 Simulation d'un film tombant non cisaillé . . . 39
2.7.1 Conditions initiales et aux limites . . . 40
2.7.2 Paramètres et résultats des simulations . . . 41
2.7.3 Bilan des simulations . . . 44
2.8 Conclusion . . . 45

3 Méthode de simulation de la turbulence diphasique 47
3.1 Introduction . . . 49
3.2 Simulation de la turbulence . . . 49
3.2.1 Simulation numérique directe . . . 49
3.2.2 Approche statistique . . . 49
3.3 Simulation des grandes échelles . . . 50
3.3.1 Filtrage des équations . . . 50
3.3.2 Contraintes de sous-maille . . . 51
3.4 Modélisation des contraintes de sous-maille . . . 52
3.4.1 Modèle de Smagorinsky . . . 52
3.4.2 Modèle de Bardina . . . 52
3.4.3 Modèle mixte . . . 53
3.4.4 Remarques sur les modèles classiques . . . 53
3.4.5 Approche dynamique . . . 53
3.4.6 Modèle dynamique mixte . . . 55
3.5 Modèle à un fluide turbulent . . . 56
3.5.1 Modélisation de la turbulence diphasique . . . 56
3.5.2 Modèle à un fluide . . . 57
3.5.3 Hypothèses . . . 57
3.5.4 Contraintes de sous-maille . . . 58
3.5.5 Terme de diffusion et terme capillaire . . . 59
3.6 Conclusion . . . 60

4 Simulation d'un écoulement à phases séparées turbulent-turbulent 63
4.1 Introduction . . . 65
4.2 Configuration étudiée . . . 65
4.2.1 Présentation . . . 65
4.2.2 Paramètres d'écoulement . . . 66
4.2.3 Domaine de calcul et discrétisation spatiale . . . 67
4.3 Structure de l'interface . . . 68
4.4 Caractéristiques statistiques de la turbulence . . . 68
4.4.1 Particularité des méthodes à interface diffuse . . . 69
4.4.2 Vitesse moyenne . . . 70
4.4.3 Intensités turbulentes de vitesse . . . 72
4.4.4 Cisaillement turbulent . . . 73
4.4.5 Bilan d'énergie cinétique turbulente . . . 75
4.5 Conclusion . . . 79

5 Simulation de film cisaillé par un courant gazeux turbulent **81**
5.1 Introduction . . . 83
5.2 Configuration . . . 83
5.2.1 Présentation . . . 83
5.2.2 Conditions périodiques . . . 84
5.2.3 Conditions initiales . . . 85
5.2.4 Conditions de simulation . . . 86
5.3 Écoulement turbulent-laminaire . . . 87
5.3.1 Interface moyenne . . . 87
5.3.2 Vitesse moyenne . . . 89
5.3.3 Intensités turbulentes résolues . . . 90
5.3.4 Cisaillement turbulent . . . 92
5.3.5 Termes de sous-maille . . . 94
5.3.6 Bilan d'énergie cinétique turbulente . . . 96
5.4 Conclusion . . . 103

Conclusion **105**

Bibliographie **108**

Appendices **I**

Annexe A **I**

Annexe B **VII**

Table des figures

1.1.1 Exemple de maillage utilisé par Blanco [12] . . . 13
1.1.2 Exemple de maillage eulérien . . . 13
1.2.1 Principe de la méthode de suivi en volume . . . 14
1.2.2 Exemple de maillage utilisé par Unverti et Tryggvason [69] . . . 14
1.2.3 Principe de la méthode MAC . . . 15
1.2.4 Principe de la méthode VOF . . . 15
1.4.1 Maillage décalé . . . 25

2.2.1 Écoulement d'un film liquide sur un plan incliné . . . 29
2.3.1 Stabilité linéaire d'écoulement de film tombant . . . 33
2.5.1 Ondes observées à la surface d'un film tombant (Scheid [62]) . . . 38
2.7.1 Épaisseur du film à l'instant initial . . . 40
2.7.2 Conditions de simulation . . . 41
2.7.3 Réponse à une courte longueur d'onde . . . 41
2.7.4 Onde solitaire . . . 42
2.7.5 Ondes solitaires . . . 43
2.7.6 Onde quasi-sinusoïdale . . . 43
2.7.7 Ondes périodiques . . . 44

4.2.1 Configuration d'écoulement Fulgosi et *al.* [23] . . . 65
4.3.1 Isocontour instantané $C = 0.5$ . . . 68
4.3.2 Structure de l'interface . . . 69
4.4.1 Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_G$ dans tout le domaine . . . 70
4.4.2 Vitesse $| < \overline{U} >^+ | = | < \overline{U} > - < \overline{U} >_I |/u^*$ au voisinage de l'interface . . . 71
4.4.3 Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_G$ dans le gaz . . . 71
4.4.4 Intensités turbulentes résolues normalisées par u^* . . . 72
4.4.5 Fluctuations de vitesse dans le gaz normalisées par u^*_G . . . 73
4.4.6 Cisaillement turbulent moyen normalisé par u^{*^2} . . . 74
4.4.7 Cisaillement turbulent dans le gaz normalisé par $u^{*^2}_G$ . . . 74
4.4.8 Bilan d'énergie cinétique normalisé par u^{*^4}/ν . . . 75
4.4.9 Bilan d'énergie cinétique dans le gaz extrait de Fulgosi et *al.* [23] . . . 77
4.4.10 Diffusion visqueuse $D\nu/u^{*^4}$ . . . 77
4.4.11 Terme $(\partial^2 < \overline{u}'_i \overline{u}'_i > /\partial z^2)(\nu^2/u^{*^4})$ . . . 78

5.2.1 Configuration d'écoulement étudiée par Jurman et McCready [35] . . . 83
5.2.2 Cartographie extraite de Jurman et McCready [35] . . . 84
5.2.3 Conditions de type entrée sortie . . . 84
5.2.4 Conditions périodiques . . . 84
5.2.5 Domaine de calcul . . . 86

5.3.1 Évolution de l'interface $f(x = L_x/2, t)$ au cours du temps 88
5.3.2 Onde de surface du cas *Ref II* à l'instant $tu^*_{L,Mono}/h_L = 8.2$ 88
5.3.3 Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_{G,Mono}$ dans le domaine 89
5.3.4 Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_{L,Mono}$ dans le liquide 90
5.3.5 Intensités turbulentes $\sqrt{< \overline{u}_i'^2 >}/u^*_{G,Mono}$ dans le gaz 90
5.3.6 Intensités turbulentes résolues aux voisinages des frontières dans le gaz 91
5.3.7 Intensités turbulentes $\sqrt{< \overline{u}_i'^2 >}/u^*_{L,Mono}$ dans la phase liquide 91
5.3.8 Intensités turbulentes $\sqrt{< \overline{u}_i'^2 >}/u^*_{L,Mono}$ au voisinage de l'interface moyenne . . 92
5.3.9 Cisaillement turbulent moyen normalisé par $u^{*^2}_{L,Mono}$ dans le liquide 93
5.3.10 Cisaillement turbulent normalisé par $u^{*^2}_{G,Mono}$ dans le gaz 93
5.3.11 Cisaillement turbulent dans le gaz normalisé par $u^{*^2}_{G,Mono}$ proche des frontières . . 94
5.3.12 Profil moyen de la viscosité de sous-maille $< \overline{\rho} >< \nu_{sm} > / < \overline{\mu} >$ 95
5.3.13 Termes de Léonard $< L_{ij} > /u^{*^2}_{L,Mono}$ dans le liquide 95
5.3.14 Termes de Léonard $< L_{ij} > /u^{*^2}_{G,Mono}$ dans le gaz 96
5.3.15 Bilan d'énergie cinétique turbulente dans le gaz au voisinage de la paroi 97
5.3.16 Bilan d'énergie cinétique turbulente dans le gaz au voisinage de l'interface 98
5.3.17 Caractéristiques de la viscosité dynamique 99
5.3.18 $(\partial < \overline{u}_i'\overline{u}_i' > /\partial z)(\nu_G/u^{*^3}_{G,Mono})$ aux voisinages des frontières 99
5.3.19 $(\partial^2 < \overline{u}_i'\overline{u}_i' > /\partial z^2)(\nu_G^2/u^{*^4}_{G,Mono})$ aux voisinages des frontières 100
5.3.20 Diffusion visqueuse $D\nu_G/u^{*^4}_{G,Mono}$ au voisinage de l'interface 101
5.3.21 Bilan d'énergie cinétique turbulente dans le liquide 102
5.3.22 Bilan de $D < \overline{W} > /Dt$ normalisé par ν/u^{*^3} 102
A-1 Domaine d'écoulement I
A-2 Domaine périodique pour un écoulement turbulent entre deux plaques II
A-3 Domaine périodique pour un écoulement turbulent avec un plan de symétrie . . . III
A-4 Domaine périodique pour un écoulement laminaire IV
A-5 Domaine périodique pour un écoulement à phases séparées VI

Remerciements

Je remercie Messieurs Gerard Lavergne, Christian Ruyer-Quil d'avoir accepté d'être des membres de mon jury de thèse et d'évaluer mes travaux de recherche. Je remercie également Messieurs Jean-Pierre Caltagirone et Frédéric Plourde pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de mon document.

Je remercie mon responsable industriel Guillaume Mougin pour l'intérêt et l'enthousiasme qu'il a manifesté envers ce travail. Je le remercie également d'avoir défendu ce projet devant les instances dirigeantes et décisionnaires d'Air Liquide. Je remercie aussi Monsieur Frédéric Camy-Peret, chef du groupe Modélisation au CRCD et Monsieur Marc Thil, responsable scientifique au CRCD pour leurs remarques avisées lors des différentes rencontres.

Je tiens à manifester mes sincères remerciements à mon directeur de thèse Jacques Magnaudet pour son encadrement professionnel et exemplaire.

Je tiens à remercier Annaïg Pedrono, membre de l'équipe Cosinus qui a toujours été disponible pour m'éclairer sur les rouages de la programmation en général et du code Jadim en particulier.

Je remercie tout le personnel de l'IMFT pour leur participation au bon déroulement de ce travail et notamment tout le service informatique, Muriel Sabater et Gwenaëlle Hareau du service Reprographie et Marie-Hélène Manzato sécrétaire du groupe Interface. Merci beaucoup Marie-Hélène pour ta disponibilité et ton soutien dans les moments difficiles (nous savons tous les deux comment fonctionne le système).

J'adresse un merci à tous les permanents, doctorants, postdoctorants et stagiaires du groupe Interface pour l'ambiance agréable qui règne dans les locaux de l'IMFT. Une pensée particulière pour les personnes ayant partagé mon quotidien à savoir ma jumelle Irène Renaud et l'intrus expérimentateur Cédric Besnaci (message personnel : "on ne balance pas"). Je remercie la grande famille Michel.

Je veux rendre un hommage à tous les membres de mes familles officielle et officieuse. Je ne sais pas comment mon séjour toulousain se serait déroulé sans votre présence à mes côtés. May God keep blessing you ! To Jesus the glory !

Résumé - Abstract

Résumé

La distillation est un procédé industriel de séparation de phases qui fait typiquement intervenir un écoulement diphasique caractérisé par un film liquide laminaire ou faiblement turbulent s'écoulant par gravité et cisaillé à contre-courant par un courant gazeux turbulent. Afin de comprendre la dynamique de ce genre d'écoulements, nous avons développé un modèle numérique de simulation d'écoulements diphasiques prenant en compte la présence éventuelle des structures turbulentes. Ce modèle s'appuie sur un couplage entre les méthodologies Volume of Fluid sans étape de reconstruction pour le suivi d'interface et la simulation des grandes échelles pour le traitement de la turbulence. Les contraintes de sous-maille sont évaluées par une approche dynamique mixte, ce qui permet au modèle de s'adapter aux caractéristiques locales de la turbulence et de fonctionner même dans des zones laminaires. Le modèle développé est ensuite testé en simulant différentes configuration d'écoulements de films liquides cisaillés ou non par un courant gazeux.

Mots clés : dynamique des fluides, écoulements diphasiques, équations de Navier-Stokes, simulation numérique, suivi d'interface, turbulence, simulation des grandes échelles, volume of fluid

Abstract

Distillation is an industrial process of phase separation which involves a two-phase flow characterized by a laminar or weakly turbulent gravity-driven liquid film sheared by a countercurrent turbulent gas stream. To understand the dynamics of such flows, we developed a numerical technique aimed at computing incompressible turbulent two-phase flows. A large eddy simulation (LES) approach based on a dynamic mixed model is used to compute turbulence while the two-phase nature of the flow is described through a Volume of Fluid (VOF) approach with no interface reconstruction step. The use of a dynamic mixed approach for modelling the subgrid stresses allows the developed model to self-adapt to local characteristics of turbulence, so that it also works in laminar flows. The whole methodology is then applied to the computation of different configurations of liquid films sheared or not by a gas stream.

Key words : fluid dynamics, two-phase flow, Navier-Stokes equations, numerical simulation, interface tracking, turbulence, large eddy simulation, volume of fluid

Introduction

Les écoulements diphasiques sont présents dans de très nombreuses situations environnementales et applications industrielles telles que le transport du pétrole ou les opérations de génie chimique comme la distillation ou la condensation. Ces écoulements sont le plus souvent turbulents, au moins dans l'une des deux phases. La compréhension de leur dynamique passe donc par celle de la turbulence diphasique et notamment par l'analyse des interactions entre les structures turbulentes et les interfaces qui peuvent se déplacer, évoluer à différentes échelles, se déformer, se rompre ou se reconnecter entre elles.

Dans le cadre de cette thèse, l'accent est mis sur les écoulements de films liquides en régime laminaire, cisaillés par un courant gazeux turbulent. Il s'agit typiquement des configurations d'écoulements rencontrées dans les colonnes de distillation qui intéressent particulièrement le producteur de gaz industriels et médicaux qu'est le groupe Air Liquide. Ce travail de recherche a ainsi été effectué dans le cadre d'une convent1ion CIFRE entre le Centre de Recherche Claude Delorme (CRCD) du groupe Air Liquide et l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.

L'objectif de ce travail est d'apporter des éléments de compréhension de la dynamique de ces écoulements diphasiques par la voie de la simulation numérique. Il s'agit concrètement d'élaborer une méthodologie numérique susceptible de reproduire des écoulements turbulents à phases séparées. Cet outil, le plus générique possible, doit être capable de suivre convenablement les déplacements des interfaces tout en prenant en compte la présence éventuelle des structures turbulentes.

Pour répondre à cette problématique, le caractère diphasique de l'écoulement est traité par un modèle à un fluide au travers d'une approche de type Volume of Fluid (VoF) sans reconstruction explicite de l'interface. On ne considère donc plus individuellement les phases en présence mais le fluide unique de propriétés variables qu'elles constituent. Cette approche eulérienne utilisant un maillage fixe permet de traiter les écoulements à topologie évolutive allant jusqu'à la rupture ou à la coalescence des interfaces. La méthodologie choisie pour traiter la turbulence est la Simulation des Grandes Echelles (SGE). Cette approche offre la possibilité de simuler directement les grandes structures du champ turbulent qui sont les plus sensibles à la géométrie de l'écoulement sans toutefois nécessiter des maillages excessivement lourds. Elle constitue ainsi un bon compromis entre les approches statistiques classiques et la simulation numérique directe fortement limitée par la taille des maillages requis pour résoudre les échelles dissipatives. Dans le cadre de la combinaison de ces deux approches, la restitution correcte de la dynamique des écoulements passe par un couplage soigneux prenant en compte les conséquences inhérentes aux hypothèses de base de chacune.

Le mémoire s'articule autour de cinq chapitres. Le premier énumère brièvement les méthodes numériques de suivi d'interfaces déformables et présente le modèle à un fluide classiquement utilisé pour la simulation directe ou pour des écoulements diphasiques laminaires. Dans le deuxième chapitre, après une revue de la caractérisation théorique des écoulements de films liquides non

cisaillés et ruisselant le long d'un plan incliné, le modèle à un fluide est utilisé et validé pour la simulation de configurations connues de ce type d'écoulements. Le troisième chapitre, quant à lui, est consacré à la prise en compte de la turbulence. Après une revue rapide des outils de simulation de la turbulence monophasique, le modèle à un fluide pour la turbulence diphasique ainsi que ses hypothèses de base y sont décrits. Ce modèle est ensuite utilisé dans le quatrième chapitre pour simuler un écoulement à phases séparés gaz-liquide caractérisé par deux phases en régime turbulent et une interface faiblement déformable. Les résultats obtenus sont confrontés à ceux fournis par une simulation numérique directe et utilisant une approche lagrangienne pour le suivi d'interfaces. Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, des écoulements de films liquides laminaires cisaillés par un courant gazeux turbulent sont simulés et analysés.

Chapitre 1

Méthodes de suivi d'interface

Sommaire

1.1 Introduction 13
1.2 Méthodes eulériennes de suivi d'interface 13
1.2.1 Méthodes de suivi de front 13
1.2.2 Méthodes de suivi en volume 14
1.2.3 Méthode retenue 16
1.3 Modèle à un fluide 16
1.3.1 Équations du milieu diphasique 16
1.3.2 Bilans et filtrage des équations 18
1.3.3 Hypothèses simplificatrices 20
1.3.4 Fraction volumique et densité 22
1.3.5 Contraintes visqueuses 22
1.3.6 Effets capillaires 23
1.4 Résolution numérique 24
1.4.1 Discrétisation spatiale 24
1.4.2 Discrétion temporelle 24
1.4.3 Transport du taux de présence 25
1.5 Conclusion 25

1.1 Introduction

Les approches numériques de suivi d'interfaces peuvent être classés en deux grandes catégories : les méthodes lagrangiennes et les méthodes eulériennes.

Les méthodes lagrangiennes sont caractérisées par l'utilisation d'un maillage mobile dont des frontières représentent les interfaces (figure 1.1.1). Ce maillage est remis à jour à chaque pas de temps. Cette approche offre les possibilités d'accéder à tous les détails de l'hydrodynamique de l'écoulement, d'appliquer facilement et rigoureusement les conditions à la traversée des interfaces et de suivre de façon précise l'évolution des interfaces. Cependant, l'utilisation de ce type de méthodes est compromise quand il s'agit de traiter des écoulements à interfaces fortement déformables pouvant conduire à des phénomènes de rupture ou de reconnexion d'interfaces. Dans de telles configurations, il faut reconstruire le maillage en tenant compte des nouvelles interfaces qui sont apparues à la suite des ruptures et de celles qui ont disparu du fait des reconnexions. La tâche est rendue encore plus difficile par la large gamme dans laquelle peut varier la taille des interfaces. Dans ces situations, on se trouve dans l'obligation de s'orienter vers les méthodes qualifiées d'eulériennes utilisant un maillage fixe sur lequel les interfaces se déplacent librement. Nous présentons dans la suite une liste non exhaustive des méthodes eulériennes.

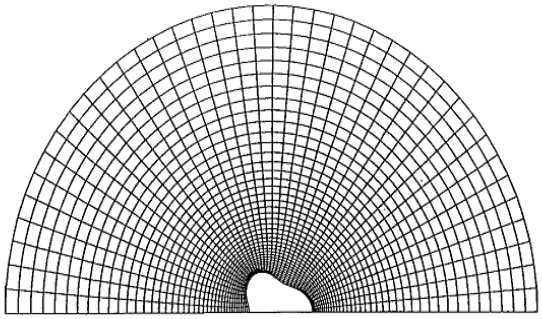


FIGURE 1.1.1 – Exemple de maillage utilisé par Blanco [12]

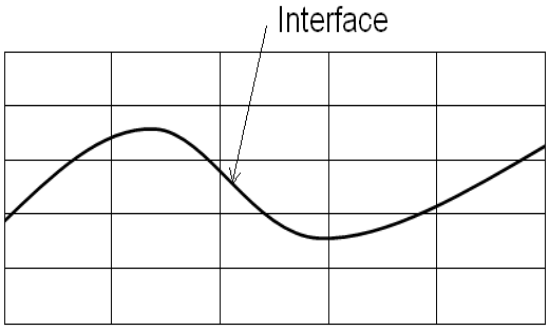


FIGURE 1.1.2 – Exemple de maillage eulérien

1.2 Méthodes eulériennes de suivi d'interface

Dans les méthodes eulériennes, le maillage n'assure plus explicitement la séparation entre les fluides (figure 1.1.2). Des cellules de calcul peuvent être traversées par les interfaces. Ces cellules sont ainsi occupées par un écoulement multiphasique composé par les différents fluides en présence. Dans ces conditions, comment modéliser le milieu diphasique ? Et comment matérialiser les interfaces ? Les réponses apportées pour la caractérisation des interfaces permettent de classer les méthodes eulériennes en deux catégories, à savoir les méthodes de suivi de front et les méthodes de suivi en volume.

1.2.1 Méthodes de suivi de front

Une méthode de suivi de front consiste à utiliser un ensemble de points liés entre eux par des segments fictifs pour représenter l'interface (figure 1.2.1). Ces points également appelés marqueurs sont situés exactement sur l'interface. À chaque pas de temps, une équation d'évolution est résolue

afin de déterminer les nouvelles positions des marqueurs. Cela permet de connaître avec précision la position et l'orientation de l'interface et donc d'évaluer rigoureusement les contraintes et les efforts au niveau de celle-ci. L'efficacité de ce type de méthodes est étroitement liée à la gestion et à la distribution des marqueurs. En effet, dans certains cas, les marqueurs peuvent se concentrer sur une partie de l'interface au détriment d'une autre. Il est donc nécessaire de contrôler leur distribution en imposant par exemple des distances minimale et maximale entre deux marqueurs voisins. Dans d'autres cas, il faudra ajouter des nouveaux marqueurs pour améliorer la résolution d'une partie de l'interface. À cela s'ajoute la difficulté pour traiter à l'aide de marqueurs des problèmes de rupture et de reconnexion d'interface.

Des améliorations ont été apportées aux méthodes de suivi de front. Hirt et Nichols [32] repèrent désormais l'interface par l'intermédiaire d'une fonction distance calculée en reliant les marqueurs présents sur l'interface à des points situés sur un plan de référence. Unverdi et Tryggvason [69] ont, quant à eux utilisé un maillage interfacial. En plus du maillage fixe sur lequel évolue l'écoulement, ils introduisent un nouveau maillage non structuré mobile qui épouse l'interface (figure 1.2.2). Le transport du maillage interfacial se fait alors par voie lagrangienne. Leur approche se distingue des autres méthodes de suivi de front par l'attribution d'une épaisseur à l'interface, généralement de l'ordre de 2 à 3 mailles et constante durant les simulations. Cette épaisseur artificielle permet d'éliminer de nombreux problèmes numériques dont la diffusion et les risques d'oscillation liés à la variation brutale des propriétés physiques à la traversée de l'interface.

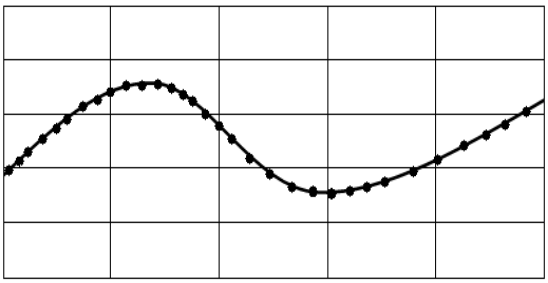


FIGURE 1.2.1 – Principe de la méthode de suivi en volume

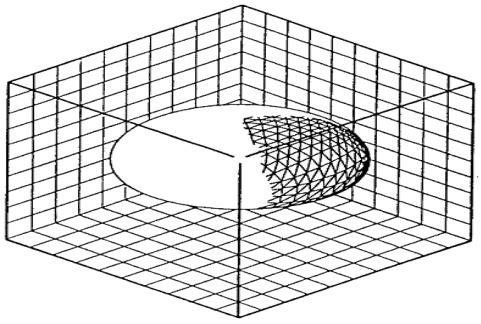


FIGURE 1.2.2 – Exemple de maillage utilisé par Unverti et Tryggvason [69]

1.2.2 Méthodes de suivi en volume

Dans une méthode de suivi en volume, on ne s'attache plus à suivre explicitement l'interface mais plutôt les phases continues par le biais d'une fonction indicatrice de phase.

Méthodes MAC

Le premier travail réalisé dans le domaine de suivi en volume a conduit à la méthode Marker And Cell (MAC) mise au point par Harlow et Welch [31] en vue de traiter des problèmes de surface libre. Cette méthode est basée sur l'utilisation des marqueurs à l'intérieur du fluide pour déterminer les régions occupées par celui-ci. Ainsi une cellule contenant des marqueurs et ayant une cellule voisine n'en contenant aucun est forcement traversée par l'interface (figure 1.2.3). Cette approche est coûteuse car elle nécessite de connaître à chaque instant la position de tous les marqueurs et requiert l'utilisation d'un nombre important de marqueurs (un nombre

nettement supérieur au nombre de mailles occupés par le fluide) pour fournir une approximation acceptable de l'interface.

Méthodes VoF

DeBar [22] et Hirt et Nichols [32] ont simplifié les méthodes de suivi en volume. En effet, ils ne repèrent plus le fluide par la quantité des marqueurs présents dans une cellule mais plutôt par la fraction volumique C ou le taux de présence de l'un des fluides en présence. Cette approche appelée méthode Volume of Fluid (VoF) offre l'avantage par rapport à la méthode MAC de réduire considérablement la quantité d'informations à stocker dans chaque cellule. Ainsi, au lieu d'enregistrer une information par marqueur, il suffit désormais de mémoriser le taux de présence par cellule. L'évolution du taux de présence C est assurée par l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla.(C\mathbf{V}) = 0 \tag{1.2.1}$$

Le taux de présence varie entre 0 et 1. Il vaut $C = 1$ si la cellule est remplie et $C = 0$ si elle est vide. L'interface est alors comprise dans les cellules où $0 < C < 1$ (figure 1.2.4).

Les méthodes VoF se scindent en deux catégories selon qu'elles intègrent ou pas une étape de reconstruction de l'interface. La reconstruction consiste à localiser l'interface en la définissant maille par maille à partir de la valeur du taux de présence C et du vecteur normal à l'interface ∇C tout en assurant la conservation de la masse de chaque fluide. Dans les méthodes VoF sans reconstruction de l'interface, on se contente de résoudre l'équation de transport du taux de présence. La position précise de l'interface demeure inconnue.

Ces méthodes VoF avec ou sans reconstruction, permettent de traiter de façon plus souple les écoulements à topologie complexe et variable. Elles nécessitent cependant un schéma numérique conservatif pour le transport du taux de présence (1.2.1) qui limite la diffusion numérique et empêche les oscillations liées à la variation brutale du taux de présence à la traversée des interfaces.

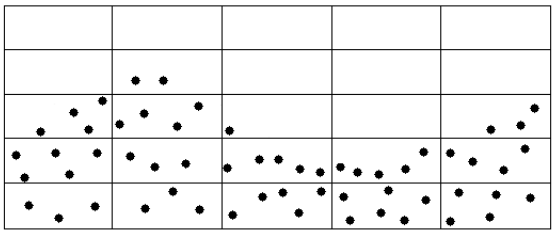


FIGURE 1.2.3 – Principe de la méthode MAC

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.12	0.41	0.00	0.00	0.05
0.55	0.97	0.28	0.01	0.65
0.99	1.00	0.82	0.77	1.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

FIGURE 1.2.4 – Principe de la méthode VOF

Méthode Level Set

La méthode Level Set utilise une fonction distance signée afin de repérer l'interface. Cette fonction est positive dans une phase, négative dans l'autre et nulle sur l'interface. L'évolution de cette fonction obéit à une équation de transport identique à (1.2.1) afin de prédire les mouvements de l'interface. La méthode Level Set présente d'énormes avantages. Elle offre entre autres une connaissance exacte de la position de l'interface (courbe de niveau zéro de la fonction Level Set) et se caractérise par une absence de diffusion numérique car une épaisseur fixe est explicitement

imposée à l'interface. Cependant, la conservation de la masse n'est pas naturellement assurée au cours du temps. L'algorithme de réinitialisation de Sussman [66] a permis d'améliorer cet aspect sans toutefois le résoudre complètement.

1.2.3 Méthode retenue

L'approche choisie dans le code JADIM que nous utiliserons durant cette étude est une méthode VoF sans reconstruction de l'interface. Ce choix a été guidé par les objectifs visés dont la possibilité de traiter un maximum de classes de problèmes physiques, de prendre en considération toutes les structures diphasiques quelle que soit leur taille et de réduire les difficultés liées au passage entre les cas bidimensionnels et tridimensionnels. Dans la section suivante, nous décrivons la modélisation diphasique implémentée dans le code JADIM.

1.3 Modèle à un fluide

JADIM est un code de calcul développé depuis une vingtaine d'années au sein du groupe Interface de l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Ce code est constitué d'un noyau central permettant la résolution des équations tridimensionnelles, instationnaires et incompressibles de Navier-Stokes en coordonnées curvilignes orthogonales. À ce noyau se sont greffés plusieurs modules dont le suivi d'interfaces mobiles réalisé par une méthode VoF sans reconstruction de l'interface.

Le choix d'une méthode eulérienne dans le code JADIM ne permet pas d'utiliser directement les équations de bilan locales issues de la mécanique des milieux continus. En effet, des cellules de calcul peuvent contenir simultanément les différents fluides en présence. Il s'agit donc de représenter localement un milieu diphasique et non plus une juxtaposition de deux écoulements monophasiques. Il est alors indispensable d'utiliser des équations de conservation modifiées. Le code JADIM utilise ainsi une formulation qualifiée de modèle à un fluide qui ne considère plus individuellement les phases en présence mais le mélange diphasique qu'elles constituent.

Nous exposons dans la suite la procédure d'établissement des équations de ce modèle décrite par Benkenida [9]. Il est fondamental de garder à l'esprit les hypothèses faites lors de cette dérivation pour connaître le domaine d'application du modèle et ses limites. Cela est d'autant plus important dans notre étude que ce modèle servira de point de départ à la prise en compte de la turbulence dans des écoulements diphasiques.

1.3.1 Équations du milieu diphasique

On considère l'écoulement de deux fluides incompressibles, newtoniens et non-miscibles. La dynamique de chaque phase k est déterminée par les équations de Navier-Stokes :

$$\nabla.\mathbf{V}_k = 0 \tag{1.3.1}$$

$$\frac{\partial\left(\rho_k\mathbf{V}_k\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho_k\mathbf{V}_k\mathbf{V}_k\right) = \rho_k\mathbf{g} - \nabla p_k + \nabla.\left(2\mu_k\mathbf{S}_k\right) \tag{1.3.2}$$

où ρ_k, μ_k, p_k, $\mathbf{V}_k$ et $\mathbf{S}_k = (1/2)\left(\nabla\mathbf{V}_k + {}^T\nabla\mathbf{V}_k\right)$ représentent respectivement la masse volumique, la viscosité dynamique, la pression, le vecteur vitesse et le tenseur des taux de déformation dans le fluide k.

Il faut ajouter à ces équations, les conditions aux limites au niveau de l'interface. Si on considère une interface entre deux fluides newtoniens, sans source de masse et possédant une tension

interfaciale σ constante, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement à la traversée de celle-ci s'écrivent :

$$\sum_k \rho_k \left(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_k\right).\mathbf{n}_k = 0 \tag{1.3.3}$$

$$\sum_k \left[\rho_k \mathbf{V}_k \left(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_k\right) - p_k \mathbf{I} + 2\mu_k \mathbf{S}_k\right].\mathbf{n}_k = -\sigma \left(\nabla_s.\mathbf{n}\right)\mathbf{n} \tag{1.3.4}$$

où $\mathbf{V}_I$ est la vitesse de l'interface, $\mathbf{n}$ désigne l'une des normales sortantes $\mathbf{n}_k$, $\nabla_s.$ l'opérateur de divergence surfacique et $\nabla_s.\mathbf{n}$ la courbure moyenne locale de l'interface. Le choix d'une tension de surface constante élimine les effets Marangoni.

Afin de repérer chacune des deux phases à tout instant t et en tout point $\mathbf{x}$ de l'espace, une fonction indicatrice de phase $\chi_k\left(\mathbf{x},t\right)$ est définie par :

$$\begin{cases} \chi_k\left(\mathbf{x},t\right) = 1 \text{ si la phase } k \text{ est présente} \\ \chi_k\left(\mathbf{x},t\right) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Cette fonction indicatrice χ_k vérifie plusieurs propriétés dont :

$$\sum_k \chi_k\left(\mathbf{x},t\right) = 1 \quad , \quad \chi_k\left(\mathbf{x},t\right)\chi_m\left(\mathbf{x},t\right) = \delta_{km}\chi_k\left(\mathbf{x},t\right) \quad \text{et} \quad \nabla\chi_k = -\mathbf{n}_k\delta_I \tag{1.3.6}$$

où δ_{km} est le symbole de Kronecker ($\delta_{km} = 1$ si $k = m$ et 0 sinon) et δ_I la distribution de Dirac attachée à l'interface.

La fonction indicatrice $\chi_k\left(\mathbf{x},t\right)$ étant liée à la phase k, elle est transportée au cours du temps par la vitesse à l'interface $\mathbf{V}_I$ suivant l'équation :

$$\frac{\partial\chi_k}{\partial t} + \mathbf{V}_I.\nabla\chi_k = 0 \tag{1.3.7}$$

La multiplication de (1.3.1) par la fonction χ_k couplée aux propriétés (1.3.6) conduit à :

$$\nabla.\left(\chi_k\mathbf{V}_k\right) = -\mathbf{V}_k.\mathbf{n}_k\delta_I \tag{1.3.8}$$

La combinaison des équations (1.3.6), (1.3.7) et (1.3.8) aboutit à :

$$\frac{\partial\chi_k}{\partial t} + \nabla.\left(\chi_k\mathbf{V}_k\right) = \left(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_k\right).\mathbf{n}_k\delta_I \tag{1.3.9}$$

En supposant que l'écoulement s'effectue sans changement de phase, l'équation de transport (1.3.9) se simplifie pour devenir :

$$\frac{\partial\chi_k}{\partial t} + \nabla.\left(\chi_k\mathbf{V}_k\right) = 0 \tag{1.3.10}$$

Dans le cas général, en multipliant l'équation (1.3.9) par la masse volumique ρ_k constante, on obtient une équation de bilan de masse diphasique pour la phase k :

$$\frac{\partial\left(\chi_k\rho_k\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\chi_k\rho_k\mathbf{V}_k\right) = \rho_k\left(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_k\right).\mathbf{n}_k\delta_I \tag{1.3.11}$$

La même procédure appliquée à l'équation (1.3.2) aboutit à une équation de bilan de quantité de mouvement diphasique pour la phase k :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\chi_k\rho_k\mathbf{V}_k\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\chi_k\rho_k\mathbf{V}_k\mathbf{V}_k\right) = {} & \chi_k\rho_k\mathbf{g} - \nabla\left(\chi_k p_k\right) + \nabla.\left(2\chi_k\mu_k\mathbf{S}_k\right) \\ & + \left[\rho_k\mathbf{V}_k\left(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_k\right) - p_k\mathbf{I} + 2\mu_k\mathbf{S}_k\right].\mathbf{n}_k \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Les nouvelles équations (1.3.8), (1.3.11) et (1.3.12) sont valables dans tout le domaine contrairement aux équations (1.3.1) et (1.3.2) qui n'ont de sens que si la phase k est présente.

Il faut désormais choisir le type de modélisation que l'on désire entreprendre. Ce choix est fait en fonction de la nature des écoulements auxquels on s'intéresse. S'il s'agit d'écoulements ayant une topologie fixe de type phases séparées ou dispersées, il est mieux de traiter les deux phases de façon distincte. Cette approche qualifiée de modèle à deux fluides, consiste à résoudre l'évolution dans chacune des phases en modélisant les transferts interfaciaux afin de tenir compte des conditions aux interfaces. Par contre, si l'écoulement se caractérise par une topologie qui évolue au cours du temps, il n'est plus possible de modéliser de façon convenable les transferts interfaciaux. L'ensemble des informations physiques est désormais contenu dans le mélange formé par les deux phases. Cette démarche conduit au modèle à un fluide. Les phases ne sont plus considérées de façon individuelle et l'écoulement apparaît comme un mélange diphasique possédant des propriétés physiques (masse volumique, viscosité) variables. Cette approche permet de traiter une plus large gamme d'écoulements diphasiques. C'est ce choix qui a été fait dans le code de calcul JADIM puisqu'il a pour but de simuler des écoulements à topologie évolutive.

1.3.2 Bilans et filtrage des équations

Dans le modèle à un fluide, les phases en présence ne sont pas traitées de façon distincte. On s'intéresse au mélange diphasique qu'elles constituent. Ce mélange diphasique est vu comme un fluide unique dont il faut définir non seulement les propriétés physiques variables mais aussi les nouvelles formulations des bilans de masse et de quantité de mouvement. La dérivation de ce modèle passe par la sommation sur les différentes phases des équations (1.3.8), (1.3.11) et (1.3.12). Si l'on suppose en plus des conditions à la traversée des interfaces (1.3.3) et (1.3.4), que l'écoulement se fait sans changement de phase $\mathbf{V}_k.\mathbf{n}_k = \mathbf{V}_I.\mathbf{n}_k$, les bilans globaux deviennent :

$$\nabla.\left(\sum_k \chi_k \mathbf{V}_k\right) = 0 \tag{1.3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_k \chi_k \rho_k\right) + \nabla.\left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{V}_k\right) = 0 \tag{1.3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{V}_k\right) + \nabla.\left(\sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k\right) &= \left(\sum_k \chi_k \rho_k\right)\mathbf{g} - \nabla\left(\sum_k \chi_k p_k\right) \\ &\quad + \nabla.\left(\sum_k 2\chi_k \mu_k \mathbf{S}_k\right) - \sigma\left(\nabla_s.\mathbf{n}\right)\mathbf{n}\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Dans cette formulation, on définit la masse volumique $\phi = \rho$, la vitesse $\phi = \mathbf{V}$ et la pression $\phi = p$ du fluide unique sous la forme générique :

$$\phi = \sum_k \chi_k \phi_k \tag{1.3.16}$$

Les variables du mélange diphasique sont en réalité les sommes des variables des phases pondérées par l'indicateur de phase. En utilisant les variables du fluide unique et les propriétés des fonctions

indicatrices, les équations (1.3.13), (1.3.14) et (1.3.15) se mettent sous la forme :

$$\nabla.\mathbf{V} = 0 \tag{1.3.17}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.\left(\rho \mathbf{V}\right) = 0 \tag{1.3.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \mathbf{V}\right) + \nabla.\left(\rho \mathbf{V}\mathbf{V}\right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla.\mathbf{T} + \mathbf{F}_c \tag{1.3.19}$$

où le tenseur des contraintes visqueuses $\mathbf{T}$ et la force capillaire $\mathbf{F}_c$ sont donnés par :

$$\mathbf{T} = 2\sum_k \chi_k \mu_k \mathbf{S}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_c = -\sigma\left(\nabla_s.\mathbf{n}\right)\mathbf{n} \tag{1.3.20}$$

La résolution numérique des équations du milieu diphasique nécessite leur interpolation en des points discrets du maillage. Cette discrétisation spatiale induit une épaisseur numérique de l'interface à l'intérieur de laquelle les grandeurs physiques varient de façon continue. Le formalisme classiquement adopté pour mettre en évidence l'épaississement de l'interface est celui du filtrage spatial. On introduit ainsi un opérateur G de filtrage spatial vérifiant les conditions :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \quad G\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{x}, \quad \int_\Delta G\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' = 1 \tag{1.3.21}$$

où Δ est le volume caractéristique du filtre dont la taille est de l'ordre de celle des cellules de calcul. L'opération de filtrage spatial permet de définir la fraction volumique $C_k\left(\mathbf{x}, t\right)$ occupée par la phase k à l'instant t autour du point $\mathbf{x}$ comme étant le resultat du filtrage de la fonction indicatrice $\chi_k\left(\mathbf{x}, t\right)$:

$$C_k\left(\mathbf{x}, t\right) = \overline{\chi_k} = \int_\Delta G\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \chi_k\left(\mathbf{x}', t\right) d\mathbf{x}' \tag{1.3.22}$$

La connaissance en tout point du domaine de la fraction volumique C_k également appelée taux de présence de la phase k permet d'introduire pour toute variable ϕ_k, la moyenne phasique locale $< \phi_k >$ donnée par :

$$C_k\left(\mathbf{x}, t\right) < \phi_k > \left(\mathbf{x}, t\right) = \overline{\chi_k \phi_k} = \int_\Delta G\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \chi_k\left(\mathbf{x}', t\right) \phi_k\left(\mathbf{x}', t\right) d\mathbf{x}' \tag{1.3.23}$$

On peut désormais définir les variables filtrées $(\overline{\rho}, \overline{\mathbf{V}}, \overline{p})$ du fluide unique par :

$$\overline{\phi} = \sum_k \overline{\chi_k \ \phi_k} = \sum_k C_k < \phi_k > \tag{1.3.24}$$

Cette définition se simplifie pour la masse volumique $\overline{\rho}$ puisque la densité ρ_k est constante dans chaque phase :

$$\overline{\rho} = \sum_k C_k \rho_k \tag{1.3.25}$$

Les variables filtrées du fluide qui sont des grandeurs barycentriques locales, sont continues dans l'épaisseur numérique de l'interface. Le filtrage du système composé des équations (1.3.17), (1.3.18) et (1.3.19) aboutit, avec l'hypothèse de commutation entre les opérations de filtrage et de dérivation à :

$$\nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \tag{1.3.26}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho \ \mathbf{V}}\right) = 0 \tag{1.3.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\rho \mathbf{V}}\right) + \nabla.\left(\overline{\rho \mathbf{V}\mathbf{V}}\right) = \ \overline{\rho} \ \mathbf{g} - \nabla \overline{p} + \nabla.\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{F}}_c \tag{1.3.28}$$

où le tenseur filtré des contraintes visqueuses $\overline{\mathbf{T}}$ et la force capillaire $\overline{\mathbf{F}}_c$ sont donnés par :

$$\overline{\mathbf{T}} = 2\overline{\sum_k \chi_k \mu_k \mathbf{S}_k} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{F}}_c = -\overline{\sigma\left(\nabla_s.\mathbf{n}\right)\mathbf{n}} \tag{1.3.29}$$

Les expressions de $\overline{\mathbf{T}}$ et $\overline{\mathbf{F}}_c$ seront précisées par la suite.

Le modèle à un fluide décrit ci-dessus a été obtenu entre autres par Benkenida et Magnaudet [10], Labourasse et *al.* [39] et Liovic et Lakehal ([47] et [48]). On note que le mélange diphasique formé par des écoulements monophasiques incompressibles est également incompressible (1.3.26). Au système ci-dessus s'ajoute l'équation du transport de la fraction volumique de la phase k qui s'écrit, en absence de changement de phase, sous la forme :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k < \mathbf{V}_k >\right) = 0 \tag{1.3.30}$$

Compte tenu de la définition (1.3.25) de la masse volumique $\overline{\rho}$, le bilan de masse (1.3.27) n'est qu'une conséquence de l'équation (1.3.30). En effet, l'équation (1.3.27) peut être obtenue en multipliant l'équation (1.3.30) par la masse volumique ρ_k puis en sommant le résultat sur les différentes phases.

Le système composé des équations (1.3.26), (1.3.27), (1.3.28) et (1.3.30) n'est pas encore utilisable en l'état car d'une part, il dépend de variables liées aux différentes phases $< \mathbf{V}_k >$ et d'autre part, il contient des termes inconnus $\overline{\rho\mathbf{V}}$ et $\overline{\rho\mathbf{V}\mathbf{V}}$ qui nécessitent une attention particulière. Afin d'aboutir à un système générique seulement fonction des variables du fluide unique, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires.

1.3.3 Hypothèses simplificatrices

Pour l'étude de l'équation (1.3.30) de transport du taux de présence C_k, on introduit la décomposition suivante :

$$< \mathbf{V}_k > = \overline{\mathbf{V}} + < \mathbf{u}_k > \tag{1.3.31}$$

La vitesse $< \mathbf{u}_k >$ représente la vitesse de dérive de la phase k par rapport à la vitesse filtrée $\overline{\mathbf{V}}$ du mélange. Avec cette décomposition, l'équation (1.3.30) devient :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k\overline{\mathbf{V}}\right) = -\nabla.\mathbf{j}_k \quad \text{avec} \quad \mathbf{j}_k = C_k < \mathbf{u}_k > \tag{1.3.32}$$

Le terme $\mathbf{j}_k = C_k < \mathbf{u}_k >$ désigne le flux volumique de dérive de la phase k. Puisque la somme des fractions volumiques est constante et égale à 1 ($\sum_k C_k = 1$), le flux total de dérive sur les deux phases est nul :

$$\sum_k \mathbf{j}_k = 0 \tag{1.3.33}$$

Avec l'introduction de la vitesse de dérive $< \mathbf{u}_k >$, le produit $\overline{\rho\mathbf{V}}$ peut s'écrire :

$$\overline{\rho\mathbf{V}} = \overline{\sum_k \rho_k \chi_k \mathbf{V}_k} = \sum_k \rho_k C_k < \mathbf{V}_k > = \overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{J} \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \sum_k \rho_k \mathbf{j}_k \tag{1.3.34}$$

La grandeur $\mathbf{J}$ représente le flux massique total de dérive des phases par rapport au fluide unique. Le bilan de la masse (1.3.27) devient :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = -\nabla.\mathbf{J} \tag{1.3.35}$$

De même pour l'étude du bilan de quantité de mouvement (1.3.28), on décompose la vitesse locale de la phase k suivant :

$$\mathbf{V}_k = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{v}_k^{'} \tag{1.3.36}$$

La vitesse $\mathbf{v}_k^{'}$ désigne la fluctuation de vitesse de la phase k par rapport à la vitesse filtrée du mélange. Cette décomposition permet d'écrire la vitesse locale du fluide unique sous la forme :

$$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{v}^{'} \quad \text{avec} \quad \mathbf{v}^{'} = \sum_k \chi_k \mathbf{v}_k^{'} \tag{1.3.37}$$

Les vitesses $< \mathbf{u}_k >$ et $\mathbf{v}_k^{'}$ sont liées entre elles par la relation :

$$< \mathbf{v}_k^{'} >=< \mathbf{u}_k > + \overline{\mathbf{V}} - \overline{\chi_k \overline{\mathbf{V}}} \tag{1.3.38}$$

Injecter les décompositions (1.3.31) et (1.3.36) dans l'équation (1.3.28) conduit au bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = \ \overline{\rho}\ \mathbf{g} - \nabla\overline{p} + \nabla.\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{F}}_c - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \nabla.\mathbf{\Gamma}^{sm} \tag{1.3.39}$$

où le tenseur $\mathbf{\Gamma}^{sm}$ est donné par :

$$\mathbf{\Gamma}^{sm} = \overline{\rho\ \mathbf{V}\ \mathbf{V}} - \overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}} = \overline{\rho\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}} - \overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}} + \overline{\sum_k \rho_k \chi_k \left(\mathbf{v}_k^{'}\mathbf{v}_k^{'} + \overline{\mathbf{V}}\ \mathbf{v}_k^{'} + \mathbf{v}_k^{'}\overline{\mathbf{V}}\right)} \tag{1.3.40}$$

Les termes $\mathbf{j}_k$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{\Gamma}^{sm}$ obtenus ci-dessus sont des termes ouverts. En toute généralité, ils doivent être modélisés. Ils caractérisent les contributions des effets microscopiques de chacune des phases sur le milieu diphasique qu'elles constituent. De façon pratique dans un modèle à un fluide, on n'a plus accès à la vitesse de la phase k et encore moins aux écarts des vitesses. Il est également très difficile d'établir des relations convenables de fermeture dans la mesure où il n'existe pas de mécanisme universel permettant de prendre en compte l'effet de ces fluctuations diphasiques. Ce problème démeure à ce jour ouvert [39]. Afin de simplifier les équations du modèle, on utilise classiquement les hypothèses suivantes :

$$< \mathbf{u}_k > = 0 \tag{1.3.41}$$

$$\mathbf{v}_k^{'} = 0 \tag{1.3.42}$$

Ces hypothèses traduisent le fait que l'on néglige les fluctuations microscopiques liées aux écarts de vitesses locales et filtrées entre les phases et le mélange diphasique. L'approximation (1.3.41) qui s'écrit également $< \mathbf{V}_k >= \overline{\mathbf{V}}$ élimine la possibilité d'étudier non seulement les problèmes de changement de phase mais aussi les problèmes faisant intervenir un glissement local entre les phases. De ce fait, aucune phase ne présente de dérive vis-à-vis du milieu diphasique à l'échelle de la cellule de calcul. Quant à l'hypothèse (1.3.42), elle annule le tenseur $\mathbf{\Gamma}^{sm}$. On néglige ainsi les effets des différentes fluctuations sur l'évolution du mélange. Avec ces hypothèses, le modèle à un fluide simplifié est gouverné par les équations suivantes :

$$\nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \tag{1.3.43}$$

$$\frac{\partial \left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = \ \overline{\rho}\ \mathbf{g} - \nabla\overline{p} + \nabla.\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{F}}_c \tag{1.3.44}$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k\overline{\mathbf{V}}\right) = 0 \tag{1.3.45}$$

Le modèle à un fluide apparaît comme une variante de la simulation des grandes échelles dans laquelle on a négligé les effets des petites échelles qui sont sensés être modélisés. Les hypothèses ($< \mathbf{u}_k >= 0 = \mathbf{v}_k^{'}$) ont permis d'une part, de simplifier le modèle et d'autre part, de le rendre indépendant de l'opérateur de filtrage. L'étape du filtrage est ainsi transparent pour l'utilisateur du modèle. Cette propriété n'est plus vérifiée si l'on relaxe l'hypothèse $\mathbf{v}_k^{'} = 0$.

Dans cet état, le modèle à un fluide ne peut être directement utilisé pour traiter les écoulements diphasiques turbulents sans nécessiter une lourde discrétisation spatiale (simulation directe). Il sert principalement à la simulation d'écoulements diphasiques laminaires. Pour traiter la turbulence diphasique, on peut penser à alléger les restrictions du modèle en éliminant l'hypothèse $\mathbf{v}_k^{'} = 0$ au moyen de modèles permettant de représenter les effets du tenseur $\mathbf{\Gamma}^{sm}$. Il est cependant assez difficile d'élaborer de tels modèles car contrairement à la turbulence monophasique, les sources de fluctuations peuvent être multiples. Nous y reviendrons dans le chapitre consacré à la simulation d'écoulements diphasiques turbulents.

Afin de terminer la dérivation du modèle à un fluide, il faut préciser la fraction volumique des phases, les propriétés physiques ainsi que les expressions du tenseur des contraintes visqueuses et des efforts capillaires.

1.3.4 Fraction volumique et densité

L'état du mélange est caractérisé par la fraction volumique occupée par les différentes phases. Le taux de présence C_k vaut 1 dans la phase k, 0 dans l'autre et prend des valeurs intermédiaires $0 < C_k < 1$ dans la région interfaciale. Il est transporté par la vitesse $\overline{\mathbf{V}}$ du mélange selon l'équation :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k \overline{\mathbf{V}}\right) = 0 \tag{1.3.46}$$

Puisque l'écoulement décrit par le modèle à un fluide est isovolume (1.3.43), l'équation de transport (1.3.46) du taux de présence se met également sous la forme :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}}.\nabla C_k = 0 \tag{1.3.47}$$

La masse volumique du mélange est donnée par la relation :

$$\overline{\rho} = \sum_k C_k \rho_k \tag{1.3.48}$$

1.3.5 Contraintes visqueuses

Le tenseur des contraintes visqueuses est donné par :

$$\mathbf{T} = 2 \sum_k \chi_k \mu_k \mathbf{S}_k \tag{1.3.49}$$

À l'aide des propriétés des fonctions indicatrices $\chi_k \chi_m = \delta_{km} \chi_k = \delta_{km} \chi_m$, le tenseur des contraintes visqueuses $\mathbf{T}$ se met sous la forme :

$$\mathbf{T} = 2 \left(\sum_k \chi_k \mu_k \right) \left(\sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \right) = 2 \ \mu \ \boldsymbol{\tau} \tag{1.3.50}$$

$$\text{avec} \quad \mu = \sum_k \chi_k \mu_k \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_k \chi_k \mathbf{S}_k \tag{1.3.51}$$

Le tenseur filtré des contraintes visqueuses est donné par :

$$\overline{\mathbf{T}} = 2\ \overline{\mu\boldsymbol{\tau}} \tag{1.3.52}$$

Le modèle le plus simple et qui est le plus couramment employé pour évaluer les contraintes visqueuses, s'appuie sur l'idée que le tenseur $\boldsymbol{\tau}$ peut convenablement approcher le tenseur de déformations $\mathbf{S}$ du fluide :

$$\boldsymbol{\tau} \approx \mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{V} + {}^{T}\nabla\mathbf{V}\right) \tag{1.3.53}$$

Cette approximation conduit à un tenseur filtré des contraintes visqueuses de la forme :

$$\overline{\mathbf{T}} = 2\ \overline{\mu\boldsymbol{\tau}} \approx 2\ \overline{\mu\mathbf{S}} \tag{1.3.54}$$

Ce tenseur $\overline{\mathbf{T}}$ peut être vu comme la somme d'une composante résolue c'est-à-dire connue à l'échelle du volume de contrôle élémentaire et une composante non résolue donc inconnue qu'il faut modéliser :

$$\overline{\mathbf{T}} \approx 2\ \overline{\mu}\ \overline{\mathbf{S}} + 2\ \left(\overline{\mu\ \mathbf{S}} - \overline{\mu}\ \overline{\mathbf{S}}\right) \tag{1.3.55}$$

$$\text{avec} \quad \overline{\mu} = \sum_k C_k\mu_k \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\overline{\mathbf{V}} + {}^{T}\nabla\overline{\mathbf{V}}\right) \tag{1.3.56}$$

La composante non résolue $2\left(\overline{\mu\ \mathbf{S}} - \overline{\mu}\ \overline{\mathbf{S}}\right)$, également appelée composante de petite échelle, doit être normalement modélisée. Vu la difficulté pratique à trouver des modèles de fermeture pouvant traduire convenablement les effets de petites échelles des contraintes visqueuses, cette composante est en première approximation négligée. Le tenseur filtré des contraintes visqueuses est donc approché par la composante résolue :

$$\overline{\mathbf{T}} \approx 2\ \overline{\mu}\ \overline{\mathbf{S}} \tag{1.3.57}$$

Ce modèle est appelé modèle à une viscosité parce qu'il s'appuie sur un seul coefficient de viscosité $\overline{\mu} = \sum_k C_k\mu_k$ construit de façon analogue à la densité $\overline{\rho}$.

1.3.6 Effets capillaires

Les effets capillaires sont représentés par la force $\overline{\mathbf{F}}_c$ estimée par :

$$\overline{\mathbf{F}}_c = -\sigma\overline{(\nabla_s.\mathbf{n})\,\mathbf{n}} \tag{1.3.58}$$

Pour l'établissement du modèle à un fluide, nous avons supposé une tension superficielle σ constante. Il n'y a donc pas d'effet Marangoni lié à la variation de la tension interfaciale. La force capillaire filtrée peut s'exprimer sous forme d'une somme d'une composante résolue (connue à l'échelle de la maille) et d'une composante de petite échelle à modéliser :

$$\overline{\mathbf{F}}_c = -\sigma\overline{(\nabla_s.\mathbf{n})}\ \overline{\mathbf{n}} - \sigma\left(\overline{(\nabla_s.\mathbf{n})\,\mathbf{n}} - \overline{(\nabla_s.\mathbf{n})}\ \overline{\mathbf{n}}\right) \tag{1.3.59}$$

Une méthode couramment utilisée pour estimer la force capillaire est le modèle Continuum Surface Force (CSF) développé par Brackbill et *al.* [15]. Ce modèle évalue la composante résolue de la force capillaire à partir de la connaissance de la fraction volumique selon :

$$-\sigma\overline{(\nabla_s.\mathbf{n})}\ \overline{\mathbf{n}} = -\sigma\nabla.\left(\frac{\nabla C}{||\nabla C||}\right)\nabla C \tag{1.3.60}$$

Dans ce qui suit, la composante de petite échelle $-\sigma\left(\overline{(\nabla_s.\mathbf{n})\,\mathbf{n}} - \overline{(\nabla_s.\mathbf{n})}\;\overline{\mathbf{n}}\right)$ est négligée. Ce choix se justifie sur le plan pratique parce que les effets capillaires à l'échelle résolue sont déjà mal évalués par la plupart des schémas numériques actuels. En effet, les calculs des courbures et de la normale à l'interface sont pollués par des erreurs de discrétisation, qui injectées dans le bilan de quantité de mouvement conduisent généralement à l'apparition de courants parasites. Introduire une modélisation de petite échelle est donc en partie illusoire. La force capillaire utilisée s'écrit :

$$\overline{\mathbf{F}}_c \approx -\sigma\nabla.\left(\frac{\nabla C}{||\nabla C||}\right)\nabla C \tag{1.3.61}$$

Pour atténuer les courants parasites et réduire les fluctuations des gradients du taux de présence, on procède dans le calcul du terme capillaire à un lissage de ce dernier. Ce lissage peut être obtenu par une moyenne pondérée des taux de présence voisins. Le taux de présence est alors remplacé, uniquement dans le calcul de la force capillaire, par un taux de présence lissé $\hat{C}$. Par exemple, dans le cas bidimensionnel avec un maillage cartésien uniforme, $\hat{C}$ est donné par :

$$\hat{C}_{i,j} = \frac{3}{4}C_{i,j} + \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} + C_{i+1,j} + C_{i-1,j}}{4} \tag{1.3.62}$$

Les estimations du tenseur des contraintes visqueuses $\overline{\mathbf{T}}$ (1.3.57) et de la force capillaire $\overline{\mathbf{F}}_c$ (1.3.61) permettent de finaliser la dérivation du modèle à un fluide simplifié sous la forme :

$$\nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \tag{1.3.63}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\;\overline{\mathbf{V}}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\;\overline{\mathbf{V}}\;\overline{\mathbf{V}}\right) = \;\overline{\rho}\;\mathbf{g} - \nabla\overline{p} + 2\;\nabla.\left(\overline{\mu}\;\overline{\mathbf{S}}\right) + \overline{\mathbf{F}}_c \tag{1.3.64}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla.\left(C\;\overline{\mathbf{V}}\right) = 0 \tag{1.3.65}$$

1.4 Résolution numérique

Nous présentons brièvement les méthodes de résolution implementées dans le code JADIM. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter aux travaux de Calmet [16], Benkenida [9] et Bonometti [13].

1.4.1 Discrétisation spatiale

Les équations sont écrites en variables vitesse - pression - fraction volumique et sont discrétisées sur un maillage décalé par une méthode de type volumes finis du second ordre. L'avantage de ce type de maillage est la facilité et la précision des calculs de flux sur les facettes des volumes d'intégration, qui sont différents selon la variable, ainsi que la qualité du couplage vitesse - pression.

1.4.2 Discrétion temporelle

Les termes advectifs et les termes sources sont traités par un schéma de Runge-Kutta du troisième ordre tandis que le terme visqueux est traité par un schéma semi-implicite de Crank Nicolson. Une méthode de projection assure l'incompressibilité du mélange. La pression est obtenue par inversion d'une pseudo-équation de Poisson (inversion directe pour le cas bidimensionnel et itérative pour le cas tridimensionnel en utilisant un préconditionneur de type Jacobi).

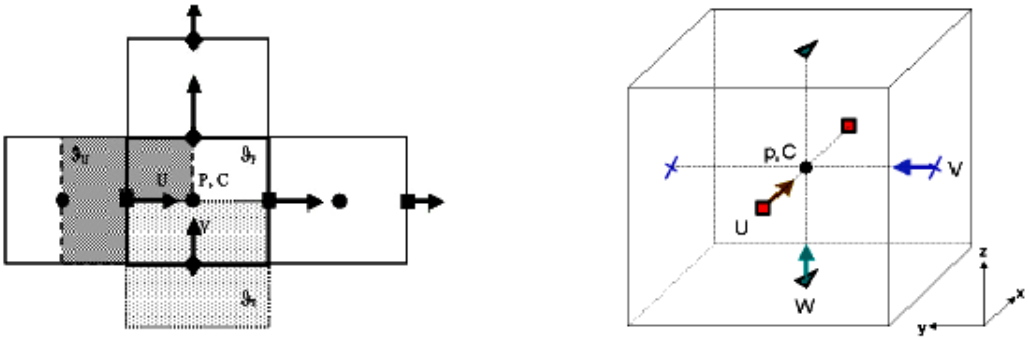


FIGURE 1.4.1 – Maillage décalé

1.4.3 Transport du taux de présence

L'équation de transport du taux de présence est résolue par un schéma inspiré de celui développé par Zalesak [72] qui fait partie de la famille Flux Corrected Transport (FCT). Cet algorithme contient une étape de prédiction diffusive réalisée à l'aide d'un schéma d'ordre faible (1er ordre) et une étape de correction anti-diffusive basée sur un schéma d'ordre élévé (5ème au 8ème ordre). De plus, pour minimiser la distorsion des fronts, on utilise une approche à directions découplées, c'est-à-dire que l'équation est décomposée en sous-étapes unidimensionnelles. L'ordre de résolution varie à chaque pas de temps selon une permutation circulaire ; ce qui évite de privilégier une direction. Enfin un traitement particulier développé par Bonometti et Magnaudet [14] est appliqué à l'intérieur des régions d'interface pour limiter leur étalement dans les zones soumises à des étirements. L'ensemble est du premier ordre en temps et du second ordre en espace sauf à l'intérieur des fronts.

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés de façon succincte aux méthodes de suivi d'interface et à la description du modèle à un fluide. La méthode VoF sans reconstruction d'interface a été retenue pour pouvoir traiter un maximum de classes de configurations. Cette approche étant eulérienne, les bilans locaux de la mécanique des milieux continus sont reformulés jusqu'à l'obtention du modèle à un fluide. Les hypothèses faites pour la dérivation de ce modèle limitent son application aux écoulements diphasiques ne présentant pas de glissement local significatif entre les phases. La turbulence de petite échelle n'est également pas traitée par ce modèle puisque les fluctuations de vitesses aux échelles inférieures à la taille des cellules de calcul sont négligées. Dans cet état, ce modèle est utilisé pour la simulation d'écoulements laminaires. Afin de traiter des écoulements turbulents, cette méthodologie doit être couplée avec une méthode permettant de prendre en compte les structures turbulentes. Nous y reviendrons plus loin dans ce mémoire.

Le modèle à un fluide étant la base de la solution que nous développerons durant ce travail, nous nous intéressons dans un premier temps à la validation de cette approche. En effet, le chapitre suivant est consacré à l'étude des films liquides laminaires ruisselant le long d'un plan incliné. Cela nous permettra d'une part d'effectuer une caractérisation théorique de ces configurations et d'autre part d'évaluer la pertinence et la précision du modèle à un fluide et de la méthodologie VoF sans reconstruction des interfaces pour le suivi et la reproduction d'ondes apparaissant à la surface des films tombants.

Chapitre 2

Dynamique d'un film tombant non cisaillé

Sommaire

2.1 Introduction 29
2.2 Équations et caractéristiques d'équilibre 29
2.2.1 Mise en équation 29
2.2.2 Nombres sans dimension 30
2.2.3 Écoulement d'équilibre 30
2.3 Stabilité linéaire 31
2.3.1 Courtes longueurs d'onde 32
2.3.2 Grandes longueurs d'onde 32
2.4 Effets non-linéaires 34
2.4.1 Faibles nombres de Reynolds $Re = O(1)$ 34
2.4.2 Nombres de Reynolds élevés $Re = O(\epsilon^{-1})$ 36
2.5 Caractérisation des ondes 37
2.5.1 Stabilité et caractère convectif des ondes 37
2.5.2 Nature des ondes 38
2.6 Bilan 39
2.7 Simulation d'un film tombant non cisaillé 39
2.7.1 Conditions initiales et aux limites 40
2.7.2 Paramètres et résultats des simulations 41
2.7.3 Bilan des simulations 44
2.8 Conclusion 45

2.1 Introduction

Les écoulements auxquels nous nous intéressons font intervenir un film liquide laminaire ou faiblement turbulent cisaillé par un courant gazeux turbulent. Cependant, le modèle à un fluide décrit au chapitre précédent est classiquement utilisé pour les écoulements diphasiques laminaires. Il ne peut servir en l'état à des simulations d'écoulements turbulents. Ce modèle constituera toutefois le point de départ à la prise en compte de la turbulence dans la suite. Il nous faut donc dans un premier temps vérifier que le choix du modèle à un fluide et de la méthode VoF sans reconstruction d'interface permet de reproduire les caractéristiques des écoulements de film en situation laminaire. Pour cela, nous testons le modèle pour simuler des films liquides laminaires ruisselant le long d'un plan incliné dans des régimes connus et décrits dans la littérature.

Ce chapitre est donc consacré à la caractérisation théorique et numérique d'un film liquide laminaire tombant le long d'un plan incliné en l'absence de cisaillement de la part de la phase gazeuse. Nous présentons tout d'abord une rapide étude bibliographique. Le modèle à un fluide est ensuite utilisé pour simuler ces écoulements. Par comparaison avec les résultats fournis par la littérature, on analyse le comportement du modèle pour le suivi d'interfaces fortement déformées.

2.2 Équations et caractéristiques d'équilibre

2.2.1 Mise en équation

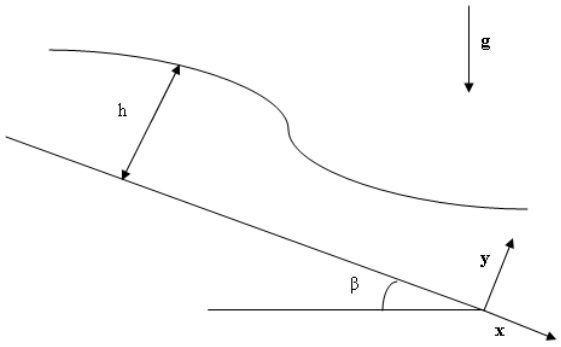


FIGURE 2.2.1 – Écoulement d'un film liquide sur un plan incliné

On considère un film liquide incompressible de densité ρ, de viscosité dynamique μ et d'épaisseur h tombant le long d'un plan incliné faisant un angle β avec l'horizontale (figure 2.2.1). La tension superficielle du liquide est notée σ et l'écoulement est supposé bidimensionnel. Le liquide n'étant pas cisaillé, la pression au niveau de la surface est uniforme et notée p_0. Les équations qui régissent la dynamique du film s'écrivent :

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla.(\mathbf{V}\mathbf{V})\right] = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mu\Delta\mathbf{V} \tag{2.2.1}$$

$$\nabla.\mathbf{V} = 0 \tag{2.2.2}$$

où $\mathbf{V} = (u, v)$ est le vecteur vitesse, p la pression et $\mathbf{g}$ le vecteur gravité.

Pour étudier l'évolution du film, il faut ajouter à ces bilans les différentes conditions aux limites.

Le liquide s'écoule sur la paroi avec une condition classique d'adhérence :

$$\mathbf{V} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{2.2.3}$$

À la surface du film, deux conditions doivent être satisfaites :
– La condition cinématique traduit l'imperméabilité de l'interface. Elle exprime le fait que le fluide et l'interface ont la même vitesse normale, d'où :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} - v = 0 \quad \text{en} \quad y = h(x,t) \tag{2.2.4}$$

– La condition de raccordement des contraintes traduit la continuité de la contrainte tangentielle et le saut de la contrainte normale dû à la tension superficielle. Le cisaillement étant nul dans le cas d'un film à surface libre, ces équations s'écrivent :

$$(\mathbf{Tn}).\mathbf{t} = 0 \tag{2.2.5}$$

$$(\mathbf{Tn}).\mathbf{n} - (-p_0\mathbf{n}).\mathbf{n} = \sigma\mathfrak{R}\mathbf{n} \tag{2.2.6}$$

où $\mathbf{n}$ et $\mathbf{t}$ sont les vecteurs unitaires normal et tangent à l'interface, $\mathfrak{R}$ la courbure moyenne de l'interface et $\mathbf{T}$ le tenseur des contraintes dans le liquide.

2.2.2 Nombres sans dimension

La dynamique des films tombants est gouvernée par la compétition ou la complémentarité entre les effets inertiels, capillaires, gravitationnels et visqueux. Les grandeurs sans dimension qui caractérisent ces écoulements sont les nombres de Reynolds Re, Froude Fr et Weber We. À l'un de ceux-ci, on peut substituer le nombre de Kapitza γ qui a la particularité de ne dépendre que des propriétés physiques du fluide. Ces nombres sont définis par :

$$Re = \frac{\rho U_0 h_0}{\mu} \quad , \quad Fr^2 = \frac{U_0^2}{g h_0} \quad , \quad We = \frac{\rho U_0^2 h_0}{\sigma} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho\nu^{4/3} g^{1/3}} = \frac{Fr^{2/3} Re^{4/3}}{We} \tag{2.2.7}$$

où U_0 et h_0 désignent une vitesse et une longueur caractéristiques de l'écoulement et $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique du fluide.

Pour les films non cisaillés, la vitesse caractéristique est classiquement choisie égale soit à la vitesse moyenne $U_m = (1/h)\int_0^h u(y)$, soit à la vitesse à la surface du film $U_s = u(y = h)$. Ces deux vitesses étant proportionnelles ($U_s = (3/2)U_m$ pour un écoulement laminaire à interface plane), la convention adoptée n'a aucune incidence sur l'interprétation qualitative des résultats. Nous choisissons ici de baser les nombres sans dimension sur la vitesse moyenne de l'écoulement.

2.2.3 Écoulement d'équilibre

Un écoulement laminaire permanent est caractérisé par une interface plane $h(x) = h_0$ et une vitesse dirigée suivant le plan d'inclinaison ($v = 0$). Grâce à l'équation de continuité (2.2.2), on déduit que la vitesse ne dépend que de l'ordonnée y ($u = u(y)$). La résolution du système d'équations aboutit à la solution de Nusselt donnée par :

$$v = 0 \quad , \quad u(y) = \frac{\rho g \sin\beta}{\mu}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad p(y) = p_0 - \rho g(y-h)cos\beta \tag{2.2.8}$$

La définition du profil de vitesse permet d'évaluer le débit linéique q, la vitesse moyenne U_m et la vitesse à la surface du film U_s :

$$q = \int_0^h u(y)dy = \frac{\rho g h^3 \sin\beta}{3\mu} \quad , \quad U_m = \frac{q}{h} = \frac{\rho g h^2 \sin\beta}{3\mu} \quad \text{et} \quad U_s = u(h) = \frac{3}{2}U_m \tag{2.2.9}$$

Caractérisation expérimentale

L'étude des films minces tombant est un sujet abordé depuis plus d'un siècle. De nombreux travaux expérimentaux ont été et sont menés en vue de caractériser ces écoulements. Ces expériences ont été réalisées dans différentes configurations (conduites, plans inclinés, ...) et pour différents régimes d'écoulements. Les travaux expérimentaux s'intéressent principalement à des caractérisations statistiques de la surface du film et visent à identifier les paramètres pertinents pouvant expliquer les comportements observés. Parmi les très nombreuses références sur ce sujet, on peut citer les travaux de Takahama et Kato [67], Chu et Duckler [20], Karapantsios et *al.* [37], Ambrosini et *al.* [4] et Karimi et Kawaji [38].

Les différentes études expérimentales montrent que pour des régimes laminaires ($Re \leq 2000$), le film se comporte comme le prédit la solution de Nusselt. Cela se vérifie au niveau de la vitesse à la surface, du cisaillement à la paroi et de l'épaisseur moyenne du film qui est donnée par :

$$h = \left(\frac{3\nu^2}{g\sin\beta}\right)^{1/3} Re^{1/3} \tag{2.2.10}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du liquide et $Re = q/\nu$ le nombre de Reynolds.

Quand on augmente le nombre de Reynolds (régimes transitionnel et turbulent), l'écoulement n'est plus prédit par la théorie de Nusselt. Dans ces régimes, il existe différentes approximations de l'épaisseur moyenne du film basées sur des relations empiriques de la forme :

$$h = \alpha\left(\frac{\nu^2}{g\sin\beta}\right)^{1/3} Re^{\zeta} \tag{2.2.11}$$

où α et ζ sont des paramètres empiriques.

Parmi les corrélations présentes dans la littérature, on peut citer :

$$\text{Takahama et Kato [67]} \quad h = 0.473\left(\frac{\nu^2}{g\sin\beta}\right)^{1/3} Re^{0.526} \tag{2.2.12}$$

$$\text{Karapantsios et } \textit{al.} \text{ [37]} \quad h = 0.451\left(\frac{\nu^2}{g\sin\beta}\right)^{1/3} Re^{0.538} \tag{2.2.13}$$

L'un des intérêts des films tombants est l'apparition d'ondes de surface plus ou moins favorables aux transferts interfaciaux recherchés dans de nombreux procédés industriels (échangeurs, condenseurs,...). Ces ondes sont la résultante d'une instabilité. Pour mieux en comprendre les mécanismes, nous nous intéressons à l'étude de stabilité d'un film tombant sur un plan incliné.

2.3 Stabilité linéaire

De nombreux auteurs ont analysé la stabilité d'un film tombant. Les premières études sont à mettre à l'actif de Kapitza et Kapitza [36], Benjamin [8] et Yih [71].

On considère un liquide incompressible de densité ρ, de viscosité dynamique μ et d'épaisseur à l'équilibre h_0 tombant le long d'un plan faisant un angle β avec l'horizontale (figure 2.2.1). On considère également une perturbation de longueur d'onde λ dans le plan de la surface libre et de nombre d'onde sans dimension $k = 2\pi h_0/\lambda$. L'écoulement de base $\overline{u}$ est la solution de Nusselt (2.2.8). Les variables du système sont rendues sans dimension à l'aide de l'épaisseur à l'équilibre h_0 et de la vitesse moyenne $U_0 = U_m$ en posant :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}/U_0 \ , \ \mathbf{x} = \mathbf{x}/h_0 \ , \ t = tU_0/h_0 \text{ et } p = p/\rho U_0^2 \tag{2.3.1}$$

L'écoulement étant bidimensionnel, la fonction de courant ψ du champ de perturbation est définie par $u' = \psi_y$ et $v' = -\psi_x$. Les composantes de la perturbation sont choisies sous la forme d'ondes élémentaires périodiques et sinusoïdales (modes propres du problème linéaire) :

$$\psi = A(y)e^{i(kx-wt)} \quad \text{où} \quad i^2 = -1 \tag{2.3.2}$$

La linéarisation des équations autour de l'écoulement d'équilibre conduit classiquement à l'équation d'Orr-Sommerfeld :

$$\psi_{yyyy} - 2k^2\psi_{yy} + k^4\psi = ikRe\left[(\overline{u} - c)\left(\psi_{yy} - k^2\psi\right) - \overline{u}_{yy}\psi\right] \tag{2.3.3}$$

où $c = w/k = c_r + ic_i$ est la célérité complexe des ondes.

À cette équation d'Orr-Sommerfeld s'ajoutent quatre conditions aux limites :
– à la paroi

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \psi_y = 0 \tag{2.3.4}$$

– à l'interface

$$\psi_{yy} + \left(k^2 - \frac{3}{c - 3/2}\right)\psi = 0 \tag{2.3.5}$$

$$\frac{k}{c - 3/2}\left(3\cot\beta + k^2\frac{Re}{We}\right)\psi + k\left[(c - 3/2)\,Re + 3ik\right]\psi_y - i\psi_{yyy} = 0 \tag{2.3.6}$$

L'intégration analytique de ce système d'équations est impossible dans le cas général. Elle peut toutefois être effectuée dans des situations asymptotiques. Yih [71] a ainsi obtenu des équations de dispersion dans les cas des courtes ($k >> 1$) et grandes ($k << 1$) longueurs d'onde.

2.3.1 Courtes longueurs d'onde

Dans le cas des courtes longueurs d'onde, Yih [71] aboutit à une célérité donnée par :

$$c_r = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad c_i = -\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\mu U_0} \tag{2.3.7}$$

où σ est la tension de surface.

Les modes de courte longueur d'onde sont stables ($c_i \leq 0$) et ce d'autant plus que la tension de surface σ est importante.

2.3.2 Grandes longueurs d'onde

En utilisant l'approximation $k << 1$, Yih [71] aboutit à une célérité donnée par :

$$c_r = 3 \quad \text{et} \quad c_i = k\left[\frac{6}{5}Re - \cot\beta - \frac{k^2}{3}\frac{Re}{We}\right] \tag{2.3.8}$$

La composante réelle $c_r = 3$ de la célérité est positive. Les ondes se propagent dans le sens des x croissants. De la composante imaginaire c_i, on déduit l'existence d'un nombre de Reynolds critique Re_c au-dessus duquel des perturbations ne sont pas attenuées :

$$Re_c = \frac{5}{6}\cot\beta \tag{2.3.9}$$

L'estimation du nombre de Reynolds critique Re_c montre qu'un film tombant sur un plan vertical peut être instable pour de faibles valeurs de Reynolds puisque $Re_c = 0$ pour $\beta = 90^\circ$.

La relation obtenue par Yih peut également se mettre sous la forme :

$$c_i = \frac{Re}{3We} k \left(k_c^2 - k^2\right) \quad \text{avec} \quad k_c = \sqrt{\frac{18}{5} We \left(1 - \frac{Re_c}{Re}\right)} \tag{2.3.10}$$

À nombres de Reynolds et de Weber fixés, il existe un nombre d'onde critique k_c en-dessous duquel les perturbations ne sont pas atténuées au cours du temps. Ce nombre d'onde critique n'a de sens physique que pour des nombres de Reynolds supérieurs au nombre de Reynolds critique Re_c. La stabilité marginale ($c_i = 0$) est obtenue pour les nombres d'onde $k = 0$ et $k = k_c$. L'expression de la composante c_i permet de définir le nombre d'onde k_m correspondant aux perturbations les plus amplifiées ($d(kc_i)/dk = 0$) :

$$k_m = \frac{1}{\sqrt{2}} k_c \tag{2.3.11}$$

La cartographie de stabilité linéaire est résumée sur la figure 2.3.1.

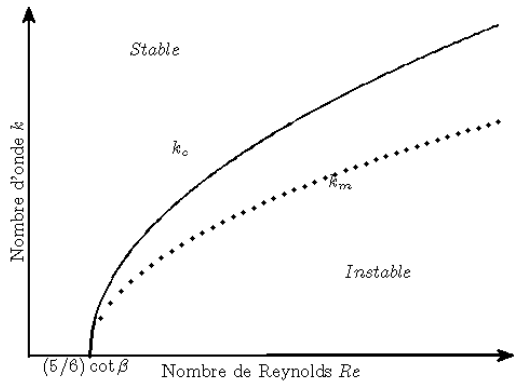


FIGURE 2.3.1 – Stabilité linéaire d'écoulement de film tombant

Le résultat obtenu par Yih a été confirmé par d'autres auteurs. La valeur critique du nombre de Reynolds avait ainsi été obtenue par Benjamin [8] en utilisant un développement en série de puissances de kRe. Elle a aussi été validée de façon expérimentale par Liu et *al.* [49] pour des angles d'inclinaison inférieurs à 10°.

L'étude de stabilité résumée ici considère un écoulement isotherme sur un plan incliné. Certains auteurs se sont intéressés à des configurations différentes. On peut citer notamment Bankoff [6] qui traite avec une approche semblable à celle de Yih [71], de la stabilité linéaire de films sur un plan incliné à différentes températures. On peut également citer Wierschem et Askel [70] qui s'intéressent à la stabilité sur un plan ondulé. De même, Ali et *al.* [3] étudient la stabilité des films nanométriques le long d'un plan incliné en tenant compte des interactions de Van der Waals et de la possibilité de rupture du film.

L'étude linéaire fournit une cartographie de stabilité des films tombants. Elle n'est en revanche pas capable de décrire complètement l'évolution spatiale et de préciser la nature des ondes de surface gouvernée par les effets non-linéaires.

2.4 Effets non-linéaires

En complément de l'étude linéaire, des équations non-linéaires d'évolution sont nécessaires pour déterminer l'amplitude des ondes et les effets des interactions entre les différents modes instables. Ces équations concernent les grandes longueurs d'onde qui sont les seules à déstabiliser les films tombants.

On considère un écoulement de film tombant d'épaisseur h_0 soumis à une perturbation de grande longueur d'onde λ dans la direction longitudinale. On introduit le paramètre $\epsilon = h_0/\lambda$ définissant le rapport entre la hauteur du film à l'équilibre h_0 et la longueur d'onde de perturbation λ. Pour le cas qui nous intéresse à savoir les grandes longueurs d'onde, ϵ est petit ($\epsilon << 1$).

Dans les études non-linéaires, deux régimes ont été distingués : les écoulements à faible nombre de Reynolds $Re = O(1)$ où les effets d'inertie sont négligeables et les écoulements à grand nombre de Reynolds $Re = O(\epsilon^{-1}) >> 1$.

2.4.1 Faibles nombres de Reynolds $Re = O(1)$

Pour les petites valeurs du nombre de Reynolds, les effets visqueux dominent les effets d'inertie. La faible importance de l'inertie autorise les auteurs tels que Roskes [60], Gjevik [30] et Nakaya [54] à utiliser l'hypothèse de lubrification qui consiste à chercher la réponse aux perturbations sous forme d'un dévelopement en puissances du paramètre $\epsilon = h_0/\lambda << 1$.

Les variables de position (x, y) sont rendues sans dimension par l'intermédiaire de la longueur d'onde de la perturbation λ pour la direction longitudinale et l'épaisseur à l'équilibre h_0 du film pour la direction normale. L'inertie ρU_0^2 étant faible, la pression est rendue sans dimension par le terme $\rho g h_0 \sin\beta$. Les variables sans dimension sont données par :

$$\begin{aligned} (x, y) = (x/\lambda, y/h_0) \quad , \quad (u, v) = (u/U_0, v\lambda/U_0 h_0) \\ t = tU_0/\lambda \quad \text{et} \quad p = p/\rho g h_0 \sin\beta \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Le choix fait pour l'adimensionnalisation de la pression implique l'introduction du nombre de Bond Bo définissant le rapport entre les effets de gravité et la tension de surface qui peut s'exprimer en fonction des nombres de Reynolds Re, Weber We et Froude Fr sous la forme :

$$Bo = \frac{\rho g h_0^2}{\sigma} = \frac{We}{Fr^2} = \frac{3We}{Re}\sin\beta \tag{2.4.2}$$

L'écoulement étant supposé bidimensionnel, on introduit à nouveau la fonction de courant ψ. Les équations de Navier-Stokes pour la pertubation ψ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} =& \epsilon Re\left[\psi_{yyt} + \left(\overline{\psi}_y + \psi_y\right)\psi_{xyy} - \left(\overline{\psi}_{yyy} + \psi_{yyy}\right)\psi_x\right] - 2\epsilon^2\psi_{xxyy} \\ &+ \epsilon^3 Re\left[\psi_{xxt} + \left(\overline{\psi}_y + \psi_y\right)\psi_{xxx} - \psi_x\psi_{xxy}\right] - \epsilon^4\psi_{xxxx} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

L'équation (2.4.3) accompagnée des conditions aux limites à la paroi et sur la surface libre est résolue par ordre successif des puissances de ϵ. La solution du système est cherchée sous la forme d'un développement en puissances de ϵ :

$$\psi = \psi^{(0)} + \epsilon\psi^{(1)} + \epsilon^2\psi^{(2)} + ... \tag{2.4.4}$$

avec $\psi^{(n)}$ le terme à l'ordre n de la décomposition.

Ordre zéro en ϵ

À l'ordre zéro ($\epsilon = 0$), le système d'équations à résoudre est :

$$\psi^{(0)}_{yyyy} = 0 \quad , \quad \forall (x,y) \tag{2.4.5}$$

$$\psi^{(0)}_{x} = \psi^{(0)}_{y} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{2.4.6}$$

$$\psi^{(0)}_{yy} + \overline{\psi}_{yy} = 0 \text{ et } \psi^{(0)}_{yyy} = 0 \quad \text{en} \quad y = h \tag{2.4.7}$$

$$\left[\psi(h) + \overline{\psi}(h)\right]_x = 0 \tag{2.4.8}$$

La solution à l'ordre zéro est donnée par :

$$\psi^{(0)} = -\frac{3}{2}(1-h)y^2 \tag{2.4.9}$$

En introduisant cette solution dans la condition cinématique (2.4.8), on obtient l'équation décrivant l'évolution de l'épaisseur du film à l'ordre zéro en ϵ :

$$h_t + 3h^2 h_x = 0 \tag{2.4.10}$$

Cette équation montre que l'onde de surface se propage avec une célérité égale à $3h^2$. Ainsi, plus la hauteur de film est importante, plus la célérité est grande.

Ordres supérieurs en ϵ

L'une des premières études sur l'évolution des ondes pour un nombre de Reynolds $Re = O(1)$ est à mettre à l'actif de Benney [11] qui est à l'origine du développement progressif de la solution. Cependant son étude ne prend pas en compte la tension de surface. Les études des chercheurs comme Lin [46], Roskes [60], Gjevik [30], Nakaya [54], ont permis d'avancer sur cette voie. Lin [46] et Gjevik [30] introduisent la tension de surface et aboutissent à une expression analytique à l'ordre $O(\epsilon^2)$ en supposant que le fluide a une tension superficielle suffisamment forte pour que le nombre de Bond Bo soit de l'ordre de $O(\epsilon^2)$. Nakaya [54] augmente l'ordre de précision jusqu'à $O(\epsilon^4)$ et fournit une équation valable pour des faibles tensions de surface ($Bo = O(\epsilon)$). En deux dimensions, cette équation peut se mettre sous la forme :

$$h_t + \left[h^3 + A(h)h_x + B(h)h_{xx} + C(h)h_{xxx} + D(h)h_x^2 + E(h)h_x h_{xx} + F(h)h_x^3\right]_x = O(\epsilon^3) \tag{2.4.11}$$

Les coefficients A à F dépendent des nombres de Reynolds Re et de Bond Bo et de l'inclinaison β du plan. À l'ordre $O(\epsilon^2)$, une réduction de la solution de Nakaya [54] donne pour fonction de courant au niveau de la surface libre, l'expression suivante :

$$\psi(h) = -\frac{3}{2}(1-h)h^2 + \epsilon\left(-h^3\cot\beta + \frac{4}{5}Reh^6\right)h_x + \frac{\epsilon^3}{Bo\sin\beta}h^3 h_{xxx} \tag{2.4.12}$$

Lin [46] et Roskes [60] ont étendu cette étude en trois dimensions.

Les équations d'évolution de la surface du film tombant peuvent être simplifiées à l'aide d'hypothèses sur l'amplitude des ondes. Cet apport est l'oeuvre de Lin [45] et Sivashinsky et Michelson [63]. Ces derniers supposent que la variation d'amplitude est faible devant la hauteur du film à l'équilibre. En d'autres termes, l'épaisseur du film peut se mettre sous la forme $h = 1 + \eta$ avec $|\eta| << 1$. Dans la limite des grandes tensions de surface, Sivashinsky et Michelson [63] aboutissent à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky :

$$\eta_\tau + 4\chi\chi_\xi + \chi_{\xi\xi} + \chi_{\xi\xi\xi\xi} = 0 \tag{2.4.13}$$

Dans cette équation d'évolution dans le référentiel de l'onde, les nombres de Reynolds et Weber sont directement intégrés dans les variables ξ, χ et τ. Cette équation correspond à une extension faiblement non-linéaire puisqu'elle ne retient que la non-linéarité convective $\chi\chi_\xi$. Son application reste limitée aux fortes tensions de surface ($We = O(\epsilon^2)$). L'équation de Kuramoto-Sivashinsky est plus restrictive que les équations de Nakaya et de Gjevik puisqu'elle suppose une variation d'amplitude faible.

Les équations issues de l'étude non-linéaire sont simplifiées par rapport à celles de Navier-Stokes. Elles peuvent servir à caractériser la dynamique des films en remplacement des équations complètes, mais cela, bien étendu, uniquement dans leur domaine de validité. L'approche de lubrification et les équations présentées ci-dessus sont uniquement valables pour de faibles nombres de Reynolds. Dès l'instant où l'on s'intéresse à des écoulements correspondant à des nombres de Reynolds importants $Re >> 1$, de nouvelles équations sont nécessaires.

2.4.2 Nombres de Reynolds élevés $Re = O(\epsilon^{-1})$

Le cas des nombres de Reynolds élevés a été abordé entre autres par Alekseenko et *al.* [2], Prokopiou et *al.* [56], Trifonov et Tsvelodub [68] et Lee et Mee [43] en utilisant une méthode intégrale de Karman-Pohlhausen qui consiste à intégrer les différents bilans dans la section du film entre la paroi inférieure $y = 0$ et la surface $y = h$. L'idée est de définir un système d'équations liant la hauteur d'interface $h(x,t)$ et le débit linéique $q(x,t)$ évalué par :

$$q(x,t) = \int_{y=0}^{h(x,t)} u(x,y)dy \tag{2.4.14}$$

La dynamique du film est régie par les équations de Navier-Stokes (2.2.1) et (2.2.2). Dans l'approximation de couche limite, la projection verticale de l'équation de Navier-Stokes se résume au premier ordre à l'équilibre hydrostatique :

$$0 = -p_y - \frac{1}{Fr^2}\cos\beta + O(\epsilon) \tag{2.4.15}$$

Bien qu'annulant certains termes d'ordre 2 en ϵ, cette hypothèse est la plus répandue. Elle est notamment utilisée par Prokopiou et *al.* [56] et Trifonov et Tsvelodub [68].

L'intégration entre $y = 0$ et $y = h$ de l'équation de continuité (2.2.2) avec la condition de non-glissement sur la paroi inférieure et la condition cinématique à l'interface aboutit à l'équation :

$$h_t + q_x = 0 \tag{2.4.16}$$

Une distribution de pression $p(x,y)$ est fournie par l'intégration de la projection verticale des équations de Navier-Stokes (2.4.15) et la prise en compte de la contrainte normale. Cela offre une évaluation du gradient de pression p_x dont l'utilisation lors de l'intégration de la composante longitudinale des équations de Navier-Stokes conduit au bilan :

$$\begin{aligned} q_t + \left[\frac{\Gamma q^2}{h}\right]_x &= \frac{1}{We}\left[hh_{xxx} - \frac{2}{3}hh_x^2h_{xxx} - 3hh_xh_{xx}^2\right] \\ &+ \frac{1}{Fr^2}\left[h\sin\beta - hh_x\cos\beta\right] + \frac{2}{Re}\int_0^h u_{xx}dy - \tau_w + \frac{4}{Re}h_xu_x(h) \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

où le facteur de forme Γ et le frottement à la paroi τ_w sont donnés par :

$$\Gamma = \frac{h}{q^2}\int_0^h u^2dy \quad \text{et} \quad \tau_w = \frac{1}{Re}\frac{\partial u}{\partial y}(0) \tag{2.4.18}$$

Pour évaluer Γ et τ_w, il faut imposer un profil de vitesse a priori. Pour des écoulements turbulents, un profil de vitesse uniforme est généralement utilisé, ce qui implique un facteur de forme $\Gamma = 1$ et un cisaillement à la paroi $\tau_w = 0$. Pour des écoulements laminaires, un profil parabolique est plus approprié. Cette hypothèse a été vérifiée expérimentalement par Alekseenko et *al.* [2]. Le profil de vitesse est choisi de façon analogue à celui de Nusselt avec une épaisseur $h = h(x,t)$ fonction de la position x et du temps t :

$$u = \frac{3q}{h}\left[\left(\frac{y}{h}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \tag{2.4.19}$$

Cette hypothèse de vitesse se traduit par un frottement à la paroi $\tau_w = 3q/Reh^2$ et un facteur de forme $\Gamma = 6/5$. Le bilan (2.4.17) devient finalement :

$$\begin{aligned} q_t + 1.2\left[\frac{q^2}{h}\right]_x = {} & \frac{5}{Re}q_{xx} + \frac{1}{We}\left[hh_{xxx} - \frac{2}{3}hh_x^2h_{xxx} - 3hh_xh_{xx}^2\right] \\ & + \frac{1}{Fr^2}\left[h\sin\beta - hh_x\cos\beta\right] + \frac{3}{Re}\left[\frac{2qh_x^2}{h^2} - \frac{2q_xh_x}{h} - \frac{2qh_{xx}}{h} - \frac{q}{h^2}\right] \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Cette équation est tronquée à l'ordre $O(\epsilon^2)$ et est valable pour un nombre de Weber $We = O(\epsilon^2)$. Les équations (2.4.16) et (2.4.20) définissent la dynamique du film. En les linéarisant autour du profil de Nusselt normalisé $(\overline{h}, \overline{q}) = (1,1)$ et avec une épaisseur de la forme $h = 1 + \eta$, Prokopiou et *al.* [56] aboutissent à l'équation suivante :

$$\eta_{tt} + 2.4\eta_{xt} + 1.2\eta_{xx} + \frac{3}{Re}\left(-\frac{5}{3}\eta_{txx} + 3\eta_x + \eta_t - \cot\beta - 2\eta_{xxx}\right) + \frac{1}{We}\eta_{xxxx} = 0 \tag{2.4.21}$$

Les études linéaire et non-linéaire conduisent à des équations gouvernant la dynamique liée à la perturbation d'un film initialement à l'équilibre. Leurs solutions permettent de déterminer la nature et l'amplitude des ondes pouvant apparaître à la surface du film et de les caractériser.

2.5 Caractérisation des ondes

2.5.1 Stabilité et caractère convectif des ondes

Les équations issues des études linéaires (2.3.3) et non-linéaires (2.4.21) déterminent l'évolution de l'épaisseur d'un film résultant d'une perturbation de grande longueur d'onde. L'étude linéaire a montré l'existence d'un nombre de Reynolds critique $Re_c = 5/6\cot\beta$ et d'un nombre d'onde k_c marquant le début de la région instable. En supposant une épaisseur de la forme $\eta \approx e^{i(kx-wt)}$, l'équation non-linéaire (2.4.21) conduit à un nombre de Reynolds $Re_c = \cot\beta$ et un nombre d'onde $k_c = \left[3W_e\left(1 - Re_c/Re\right)\right]^{1/2}$ supérieurs à ceux prédits par l'étude linéaire. Ces écarts proviennent évidemment des approximations faites dans l'établissement des équations d'évolution. La cartographie de stabilité conserve la forme de la figure 2.3.1.

L'ensemble des études fournissent une célérité $c_r = w_r/k = 3$ positive. Cela signifie que les ondes se propagent de l'amont (source) vers l'aval. L'instabilité correspondante est donc convective puisqu'elle se déplace en s'éloignant de la source. Elle se comporte comme un amplificateur de bruit et est sensible aux bruits et perturbations du milieu environnant, notamment près de la source. Liu et *al.* [49] ont confirmé ce caractère convectif des instabilités de film tombant.

2.5.2 Nature des ondes

Différentes expériences et simulations numériques ont permis d'établir l'existence de quatre régions se distinguant par leur éloignement à la source. Cette classification est en particulier l'œuvre de Chang et *al.* [19] et Liu et *al.* [50].

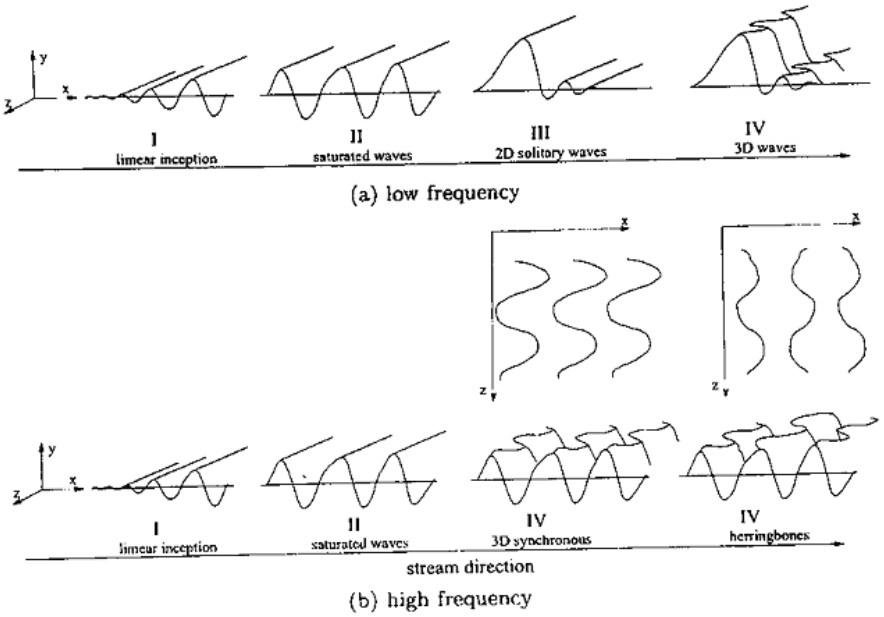


FIGURE 2.5.1 – Ondes observées à la surface d'un film tombant (Scheid [62])

Région I - Zone d'entrée

La permière région ou zone d'entrée est la plus proche de la source. Elle correspond à la croissance exponentielle de l'amplitude de l'onde prédite par la théorie linéaire. Si la perturbation est un bruit, cette zone d'entrée joue un rôle de filtre en ne laissant passer que l'onde correspondant à l'amplification maximale.

Région II - Zone de saturation

L'onde monochromatique issue de la région I, voit son amplitude se stabiliser et saturer et sa forme demeure inchangée sur une distance de quelques longueurs d'onde. Cette saturation est due aux premiers effets non-linéaires. Les ondes présentent une crête aplatie et un creux pointu. La suite des observations dépend de la perturbation imposée.

Régions III et IV

À faible fréquence ou nombre d'onde k faible devant le nombre d'onde critique k_c, les ondes saturées de la zone II subissent une nouvelle instabilité qui se traduit par une coalescence avec les ondes voisines. Ce phénomène aboutit à la formation d'ondes dites solitaires qui présentent un agglomérat (forte "bosse") en forme de goutte précédé par des ondes capillaires (Région III).

L'onde solitaire a la même longueur d'onde que la perturbation. En se propageant, ces ondes deviennent instables vis-à-vis des perturbations transversales et laissent apparaître des effets instationnaires et tridimensionnels (Région IV). À très faible fréquence, la région II est écourtée. Les ondes saturées n'ont pas le temps d'apparaître et on assiste assez tôt à la formation des ondes solitaires.

À haute fréquence, les ondes saturées évoluent vers une forme quasi-sinusoïdale avec un déphasage entre deux crêtes successives. Plus loin, comme pour le cas des ondes solitaires, les effets tridimensionnels se manifestent. À très haute fréquence, les effets tridimensionnels deviennent prédominants devant les effets bidimensionnels. Les régions III et IV se confondent.

À partir de ces observations, on note l'existence d'une fréquence au-dessus de laquelle apparaissent des ondes sinusoïdales et en-dessous de laquelle se forment des ondes solitaires. La valeur de cette fréquence n'est pas rigoureusement établie. Son évaluation diffère selon les méthodes et les hypothèses utilisées.

2.6 Bilan

Les études linéaires et non-linéaires aboutissent à des équations d'évolution de la surface des films tombants. Ces équations considérablement simplifiées par rapport aux équations locales de Navier-Stokes, peuvent éventuellement remplacer ces dernières mais cela uniquement dans leur domaine de validité.

Des expériences et des simulations numériques effectuées à l'aide soit de ces équations simplifiées, soit directement de celles de Navier-Stokes fournissent des résultats cohérents sur la nature et les caractéristiques des ondes. L'analyse de stabilité détermine les zones d'instabilité et indique que ces instabilités sont de nature convective. Selon la perturbation, ces instabilités se traduisent par la formation d'ondes solitaires ou d'ondes sinusoïdales. Ces ondes évoluent en s'éloignant de la source de perturbation et leur évolution spatiale présente quatre régions principales.

2.7 Simulation d'un film tombant non cisaillé

La théorie montre qu'un film ruisselant le long d'un plan incliné est uniquement déstabilisé par les grandes longueurs d'onde et que selon la fréquence de perturbation, différents types d'ondes peuvent apparaître. Cette section a pour but d'évaluer la capacité du code Jadim et du modèle à un fluide décrits précédemment à s'appliquer aux écoulements de films minces. Nous validerons ainsi l'approche de suivi d'interface adoptée en l'utilisant pour la simulation numérique de cas de référence documentés dans la littérature.

Les configurations auxquelles nous nous intéressons sont celles des expériences menées par Kapitza et Kapitza [36]. Il s'agit des expériences pionnières de l'étude des films ruisselants. Ces configurations ont déjà été simulées à l'aide de différentes méthodes numériques ([33], [61], [57]). Reproduire ces expériences permet de confronter les résultats que nous obtiendrons à la fois à des résultats expérimentaux et numériques.

L'outil Jadim n'étant pas un code à surface libre, étudier la dynamique de film non cisaillé nécessite de simuler un écoulement diphasique (gaz-liquide) en prenant soin de réduire l'effet du gaz sur l'écoulement liquide. Cela passe par un choix de contrastes de viscosités μ_l/μ_g et de masses volumiques ρ_l/ρ_g importants. De plus, comme dans notre approche, la position précise de l'interface est inconnue, nous choisissons par convention de repérer l'interface moyenne par l'isocontour de taux de présence $C = 0.5$.

2.7.1 Conditions initiales et aux limites

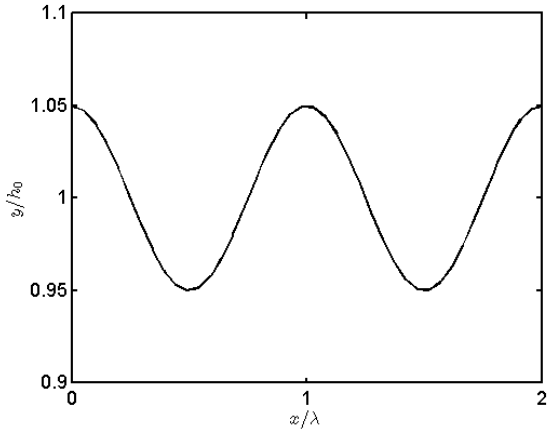


FIGURE 2.7.1 – Épaisseur du film à l'instant initial

Les expériences telles que celles menées par Kapitza et Kapitza [36] imposent une perturbation périodique à l'entrée du film et suivent l'évolution des ondes le long du domaine. Elles permettent ainsi d'observer loin de la zone d'entrée des ondes de célérité et de longueurs d'onde constantes. Ces expériences sont effectuées dans une configuration verticale ($\beta = 90^{\circ}$).

Numériquement les caractéristiques des ondes de surface peuvent être obtenues par une étude temporelle. En effet, les ondes peuvent être vues comme les réponses du système à des perturbations. Ainsi, une perturbation de type sinusoïdal est imposée à l'instant initial sur toute la longueur du domaine (figure 2.7.1) :

$$h(x,0) = (1 + \delta \cos kx)\, h_0 \tag{2.7.1}$$

où h_0 est l'épaisseur d'équilibre du film, $k = 2\pi h_0/\lambda$ le nombre d'onde sans dimension, λ la longueur d'onde et δ l'amplitude relative de la perturbation choisie égale à $\delta = 0.05$.

Le champ de vitesse dans le film est un profil de Nusselt avec une épaisseur $h(x,0)$ variable :

$$u(x,y,0) = (\rho_l g/\mu_l)\left(h(x,0)y - y^2/2\right) \quad \text{et} \quad v(x,y,0) = 0 \tag{2.7.2}$$

Notons que ce champ de vitesse initial qui n'est pas à divergence nulle vérifie la condition d'adhérence ($u = v = 0$) imposée à la paroi inférieure. Pour assurer un cisaillement nul à l'interface, la vitesse du gaz au-dessus du film est choisie constante dans chaque section du domaine et égale à la vitesse à l'interface :

$$u(x,y,0) = \frac{\rho_l g}{2\mu_l} h(x,0)^2 \quad \text{et} \quad v(x,y,0) = 0 \tag{2.7.3}$$

Une condition de glissement (symétrie) ($v = 0$ et $\partial u/\partial y = 0$) est imposée au niveau de la paroi supérieure c'est-à-dire dans le gaz, afin d'annuler les éventuels effets de couche limite du gaz et d'éviter le confinement de l'écoulement.

On suit l'évolution de cet écoulement au cours du temps en imposant des conditions périodiques dans la direction longitudinale. Les conditions de simulation sont représentées sur la figure 2.7.2. Le domaine de calcul est discrétisé par un maillage 128 x 128 régulier dans les deux directions.

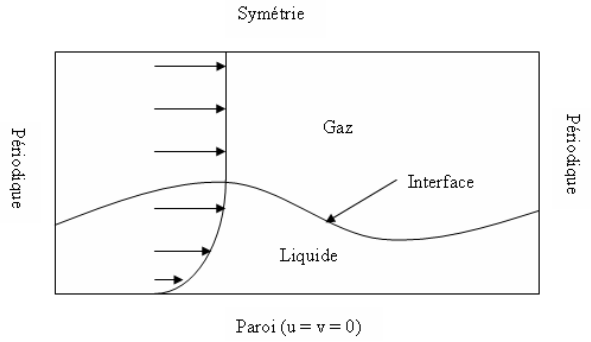


FIGURE 2.7.2 – Conditions de simulation

	Masse volumique $\rho\ (kg.m^{-3})$	Viscosité $\mu\ (Pas)$	Reynolds Re	Weber We	Froude Fr^2	Nombre d'onde $k = 2\pi h_0/\lambda$
Courte longueur d'onde	10^3	10^{-3}	25	$4.4\ 10^{-2}$	8.33	62.83
Onde solitaire	789	$1.6\ 10^{-3}$	6	$2.7\ 10^{-2}$	2.03	0.07
Onde sinusoïdale	10^3	10^{-3}	20	$3.0\ 10^{-2}$	6.68	0.14

TABLE 2.7.1 – Données de simulation de films tombants

2.7.2 Paramètres et résultats des simulations

Pour valider le code de calcul, les réponses du système à différentes perturbations sont analysées. Les courtes longueurs d'onde ne déstabilisent pas les films ruisselants alors que, selon la fréquence de perturbation, les grandes longueurs d'onde conduisent à l'apparition d'ondes solitaires ou d'ondes sinusoïdales. Les simulations de réponse à une excitation par de grandes longueurs d'onde sont réalisées dans les conditions expérimentales de Kapitza et Kapitza [36]. Les différents paramètres de simulation sont résumés dans le tableau 2.7.1. Dans tous les cas, le gaz situé au-dessus du film est de l'air ($\rho = 1.3\ kgm^{-3}$ et $\mu = 1.85\ 10^{-5}\ Pas$).

Courtes longueurs d'onde

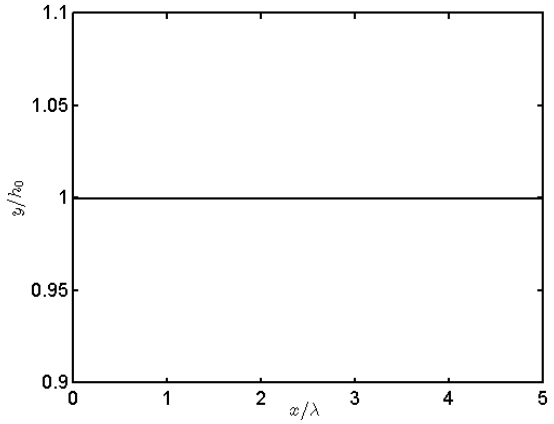


FIGURE 2.7.3 – Réponse à une courte longueur d'onde

	Kapitza et Kapitza [36]	Ho et Patera [33]	Salamon et *al.* [61]	Ramaswamy et *al.* [57]	Jadim
Célérité c/U_0	3.1	3.9	3.8	3.7	3.7

TABLE 2.7.2 – Célérités de l'onde solitaire

Le film tombant n'est pas destabilisé par les petites longueurs d'onde. Une perturbation de courte longueur d'onde s'atténue et le film reprend sa position d'équilibre (figure 2.7.3).

Excitation par de grandes longueurs d'onde : génération d'ondes solitaires

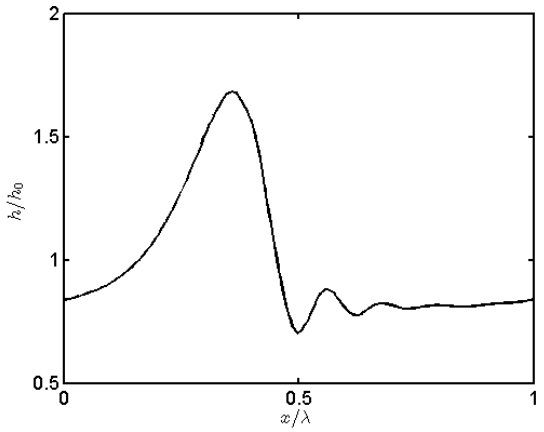
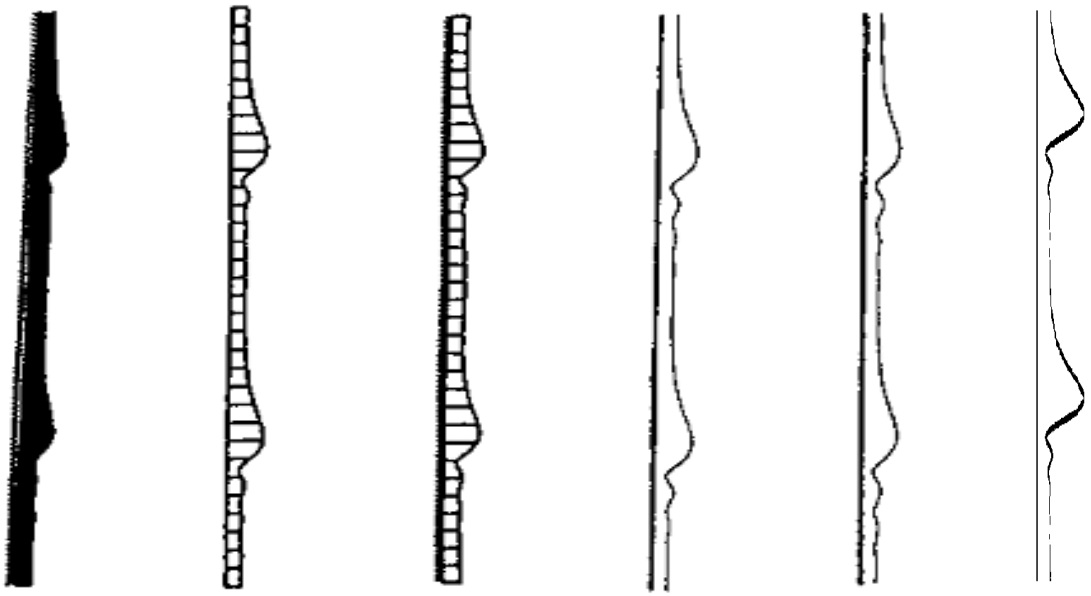


FIGURE 2.7.4 – Onde solitaire

Les simulations effectuées à partir de perturbations de grande longueur vont permettre de tester la précision du code vis-à-vis de la prédiction des caractéristiques des ondes qui résultent en régime permanent. La première perturbation imposée correspond à un nombre d'onde $k = 0.07$ nettement plus faible que le nombre d'onde critique $k_c = 0.29$. L'onde permanente (figure 2.7.4) est bien évidemment une onde solitaire reconnaissable à sa forte bosse précédée de petites ondes capillaires. Elle a la même allure que celles observées dans les expériences de Kapitza et Kapitza [36] et dans les simulations numériques utilisant soit directement des méthodes lagrangiennes, soit une étape de reconstruction de l'interface à chaque pas de temps.

La célérité de l'onde est mesurée en suivant au cours du temps la position de la crête de l'isocontour $C = 0.5$. Les imprécisions sur la célérité sont liées à ce choix particulier mais aussi à la diffusion numérique. On obtient ainsi dans cette simulation une célérité moyenne $c/U_0 = 3.7$ proche des résultats disponibles dans la littérature bien qu'un peu inférieure à ces derniers (table 2.7.2). Notons que tous les résultats numériques prédisent une célérité supérieure à la valeur expérimentale de Kapitza et Kapitza [36]. Cette différence des comportements entre l'expérience et le calcul numérique trouve son explication dans le fait que lors des simulations, le débit du fluide est uniquement imposé en conditions initiales. Il n'est pas maintenu et contrôlé au cours du temps contrairement aux expériences. Ainsi, la formation des ondes s'accompagne d'une augmentation du débit liquide qui entraîne une accélération de l'onde de surface.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIGURE 2.7.5 – Ondes solitaires
(a) - Kapitza et Kapitza [36], (b) - Salamon et *al.* [61] , (c) - Ho et Patera [33], (d) - Ramaswamy et *al.* [57], (e) - Ramaswamy et *al.* [57] Integral Boundary layer theory et (f) - Jadim

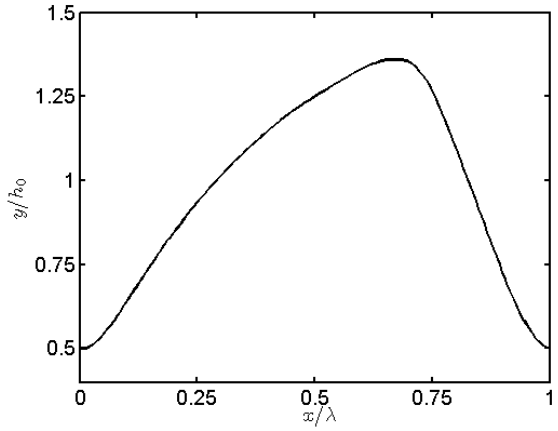


FIGURE 2.7.6 – Onde quasi-sinusoïdale

	Kapitza et Katpitza [36]	Ho et Patera [33]	Gao [24]	Jadim
Célérité c/U_0	2.0	2.0	2.2	2.2

TABLE 2.7.3 – Célérités de l'onde sinusoïdale

Excitation par de grandes longueurs d'onde : génération d'ondes sinusoïdales

La perturbation correspond cette fois à un nombre d'onde $k = 0.14$ deux fois plus grand que précédemment mais qui demeure inférieur au nombre d'onde critique $k_c = 0.30$ et à celui correspondant à l'amplification maximale $k_m = 0.21$. L'onde obtenue a une forme quasi-sinusoïdale comme l'atteste la figure 2.7.6. Elle a la même allure que celles obtenues par Kapitza et Kapitza [36] et les différentes simulations numériques présentes dans la littérature (figure 2.7.7).

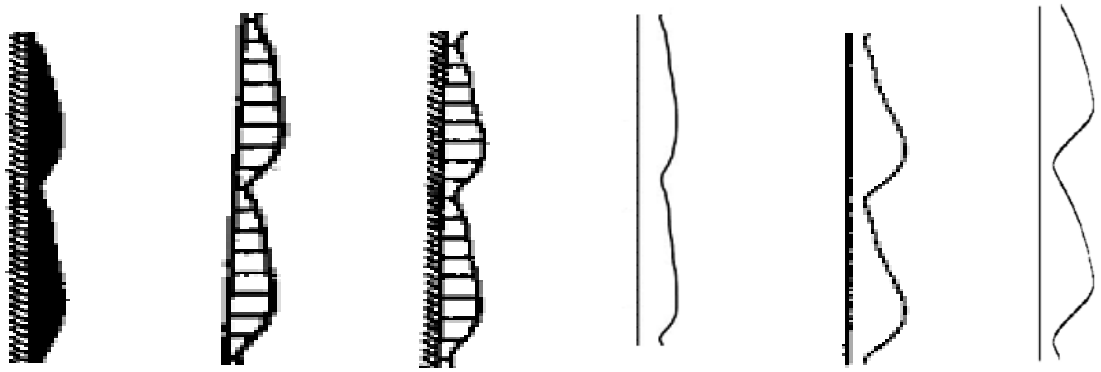


FIGURE 2.7.7 – Ondes périodiques
(a) - Kapitza et Kapitza [36], (b) - Salamon et *al.* [61] , (c) - Ho et Patera [33], (d) - Gao et *al.* [25], (e) - Ramaswamy et *al.* [57] et (f) - Jadim

Quant à la célérité, elle est estimée en suivant dans le temps la position de la crête de l'isocontour $C = 0.5$. Cela conduit à une valeur $c/U_0 = 2.2$ qui est satisfaisante en comparaison des résultats présents dans la littérature (table 2.7.3). Il est évident que l'étalement de l'interface sur plusieurs cellules peut engendrer des imprécisions dans le calcul de la célérité. Les célérités fournies par les simulations numériques sont supérieures à la valeur expérimentale. L'explication est la même que dans le cas précédent. Vu que le débit liquide n'est pas fixé et maintenu constant au cours des simulations, le développement des ondes de surface s'accompagne d'une augmentation du débit et par conséquent d'une accélération de la vitesse de propagation des ondes.

2.7.3 Bilan des simulations

À partir des différentes simulations réalisées et discutées ci-dessus, nous pouvons affirmer que notre code basé sur le modèle à un fluide décrit précédemment est capable de reproduire de façon fiable et satisfaisante les écoulements de films tombant sous l'effet de la gravité. Les différents régimes d'ondes obtenus en fonction de la longueur d'onde de la perturbation ont été retrouvés et leurs caractéristiques ont des valeurs proches de celles rapportées dans la littérature.

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord mené une étude bibliographique succincte du comportement d'un film liquide s'écoulant le long d'un plan incliné. Les différentes analyses de stabilité disponibles fournissent la carte des régions stables (ou instables) en fonction des paramètres d'écoulement (nombres de Reynolds, Weber, Froude). Les équations d'évolution obtenues par les études non-linéaires permettent de caractériser dans le temps et dans l'espace les ondes qui apparaissent à la surface de ces films.

Le modèle à un fluide décrit au chapitre précédent et implémenté dans le code Jadim a été utilisé pour simuler des écoulements de films tombants dans des configurations connues. Il a fourni des résultats physiques qualitativement cohérents avec la théorie et satisfaisants en comparaison des résultats numériques existant dans la littérature. Ce chapitre a donc permis de valider l'approche de suivi d'interface que nous avons adoptée.

Les écoulements qui nous intéressent plus particulièrement dans ce travail font intervenir un film liquide laminaire ou faiblement turbulent et un courant gazeux turbulent. La représentation numérique de ce type d'écoulements passe par le développement d'un outil susceptible d'assurer convenablement le suivi d'interface tout en tenant compte de la présence éventuelle de structures turbulentes de petite échelle, non résolue par le maillage de calcul. Nous sommes donc amenés à définir un tel modèle qui en plus de pouvoir traiter à la fois des écoulements laminaires et turbulents, doit être générique.

Chapitre 3

Méthode de simulation de la turbulence diphasique

Sommaire

3.1 Introduction 49
3.2 Simulation de la turbulence 49
3.2.1 Simulation numérique directe 49
3.2.2 Approche statistique 49
3.3 Simulation des grandes échelles 50
3.3.1 Filtrage des équations 50
3.3.2 Contraintes de sous-maille 51
3.4 Modélisation des contraintes de sous-maille 52
3.4.1 Modèle de Smagorinsky 52
3.4.2 Modèle de Bardina 52
3.4.3 Modèle mixte 53
3.4.4 Remarques sur les modèles classiques 53
3.4.5 Approche dynamique 53
3.4.6 Modèle dynamique mixte 55
3.5 Modèle à un fluide turbulent 56
3.5.1 Modélisation de la turbulence diphasique 56
3.5.2 Modèle à un fluide 57
3.5.3 Hypothèses 57
3.5.4 Contraintes de sous-maille 58
3.5.5 Terme de diffusion et terme capillaire 59
3.6 Conclusion 60

3.1 Introduction

Dans cette étude, nous nous intéressons à la simulation d'écoulements diphasiques caractérisés par une phase gazeuse turbulente qui cisaille un film liquide laminaire ou faiblement turbulent. La topologie de l'écoulement diphasique ainsi que les structures turbulentes doivent être reproduites. Le caractère diphasique de l'écoulement est traité par le modèle à un fluide avec une approche VoF. On ne considère plus individuellement les phases en présence mais le mélange qu'elles constituent. La méthodologie choisie pour traiter la turbulence est la simulation des grandes échelles (SGE). Elle offre la possibilité de simuler directement les grandes structures du champ turbulent qui sont les plus sensibles à la géométrie de l'écoulement sans toutefois nécessiter des maillages extrêmement lourds. Dans le cadre de cette approche, la représentation correcte de la dynamique des écoulements passe par un couplage entre VoF et SGE. Il nous faut donc définir sur les bases les plus rationnelles possibles un modèle à un fluide qui tienne compte de la turbulence.

Nous présentons dans ce chapitre, différentes modélisations possibles de la turbulence monophasique avec un accent particulier mis sur la simulation des grandes échelles. Nous définissons ensuite le modèle qui servira dans le cadre de notre travail pour les simulations d'écoulements diphasiques turbulents.

3.2 Simulation de la turbulence

Les modèles de prise en compte de la turbulence vont de la résolution de toutes les échelles turbulentes par Simulation Numérique Directe (SND) aux approches statistiques quasi-stationnaires Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) fournissant des quantités moyennes en passant par la Simulation des Grandes Échelles (SGE).

3.2.1 Simulation numérique directe

La simulation numérique directe est la plus précise mais la plus coûteuse des méthodes de simulation de la turbulence. Elle est la seule méthodologie capable de résoudre toutes les échelles turbulentes. Si l'on veut traiter toutes ces échelles, il est nécessaire d'utiliser un maillage de $Re^{3/4}$ points par direction, donc $Re^{9/4}$ points pour une simulation tridimensionnelle. Cette contrainte numérique rend encore impossible l'utilisation de la simulation directe à des nombres de Reynolds d'intérêt industriel. L'utilisation de la simulation numérique directe étant encore limitée, l'approche statistique a longtemps constitué la voie privilégiée pour modéliser la turbulence et est encore la plus utilisée dans la plupart des applications.

3.2.2 Approche statistique

Les méthodes RANS consistent à moyenner l'écoulement sur un ensemble de réalisations ou sur un large intervalle de temps ou d'espace les différentes variables du système. Les équations portent désormais sur les champs moyens. Le coût de calcul est de ce fait, considérablement réduit. Dans cette approche, toute variable Φ est décomposée selon l'idée de Reynolds sous la forme :

$$\Phi = < \Phi > + \phi^{'} \tag{3.2.1}$$

où $< \Phi >$ est le champ moyen et $\phi^{'}$ la fluctuation par rapport à la moyenne. Avec cette décomposition et les hypothèses de Reynolds ($<< \Phi >> = < \Phi >$ et $< \phi^{'} >= 0$), les équations

de Navier-Stokes pour un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ constantes, s'écrivent pour un écoulement incompressible :

$$\nabla . < \mathbf{V} > = 0 \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial < \mathbf{V} >}{\partial t} + \nabla . (< \mathbf{V} >< \mathbf{V} >) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla < p > + \frac{1}{\rho}\nabla . (2\mu < \mathbf{S} >) - \nabla . \mathbf{R} \tag{3.2.3}$$

où $< \mathbf{S} >= (1/2)\left(\nabla < \mathbf{V} > + {}^{T}\nabla < \mathbf{V} >\right)$ est le tenseur de déformations et $\mathbf{R} =< \mathbf{v}'\mathbf{v}' >$ le tenseur des contraintes de Reynolds qui traduit les effets des fluctuations turbulentes sur le champ moyen. Le tenseur $\mathbf{R}$ doit être modélisé c'est-à-dire estimé à partir des champs moyens $< \mathbf{V} >$ qui eux, sont connus afin de fermer le système. L'approche statistique présente un inconvénient majeur puisqu'elle ramène toute la turbulence à une grandeur statistique. Il est de ce fait impossible d'avoir accès aux champs instantanés et donc à la dynamique de l'écoulement.

3.3 Simulation des grandes échelles

La simulation des grandes échelles repose sur une séparation des échelles de la turbulence. Elle consiste à résoudre toutes les structures dont la taille est supérieure à une échelle de longueur arbitraire, qualifiée de longueur de coupure. Les petites structures associées aux mouvements ayant une taille inférieure à la longueur de coupure ne sont pas résolues mais leurs effets sur les grandes structures sont modélisés. La séparation des échelles se fait par un filtre passe-haut dont la taille caractéristique définit la longueur de coupure. Cette longueur est généralement choisie de l'ordre de la taille des mailles du calcul. L'efficacité de la méthode de simulation des grandes échelles est donc étroitement liée au maillage utilisé. Pour capter l'essentiel de la turbulence, il faut utiliser un maillage fin.

On présentera de façon succincte les outils de la simulation des grandes échelles. Pour plus de détails sur l'approche utilisée dans le code JADIM, le lecteur peut se reporter aux travaux de Calmet [16].

3.3.1 Filtrage des équations

Soit G un opérateur de filtrage de taille caractéristique Δ. Cet opérateur vérifie la condition de normalisation :

$$\int_{\Delta} G\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) d\mathbf{x}' = 1 \tag{3.3.1}$$

En appliquant cet opérateur à tout champ Φ, on définit les composantes de grande échelle $\overline{\Phi}$ et de petite échelle ϕ' :

$$\overline{\Phi} = G * \Phi \quad \text{et} \quad \phi' = \Phi - \overline{\Phi} \tag{3.3.2}$$

La composante de petite échelle ϕ', également appelée composante de sous-maille, est l'écart entre le champ Φ et sa composante résolue $\overline{\Phi}$.

Il existe de nombreuses fonctions de filtrage possibles. Le choix du filtre est fait en fonction des caractéristiques de l'écoulement, de la méthode numérique et du maillage. Celui qui est généralement utilisé avec une méthode de volumes finis est le filtre "top-hat" défini par :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 1/\Delta(\mathbf{x}') & \text{si} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \Delta(\mathbf{x}')/2 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{3.3.3}$$

C'est ce filtre qui est utilisé pour nos simulations. La longueur de coupure $\Delta(\mathbf{x})$ est définie localement. Elle s'adapte ainsi au maillage.

Les opérations de filtrage et de dérivation spatiale et temporelle commutent sur un maillage uniforme et régulier. Cette propriété n'est plus vérifiée si le maillage est irrégulier. Ghosal [29] a montré que l'erreur commise en commutant ces opérations est d'ordre deux en espace. L'hypothèse de commutation de ces opérations peut donc être faite si l'on utilise un schéma du second ordre pour représenter les dérivées spatiales. Avec cette hypothèse de commutation des opérations, le filtrage des équations de Navier-Stokes fournit le système d'équations suivant :

$$\nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \tag{3.3.4}$$

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla\overline{p} + \frac{1}{\rho}\nabla.\left(2\mu\overline{\mathbf{S}}\right) - \nabla.\boldsymbol{\tau}^{sm} \tag{3.3.5}$$

où $\overline{\mathbf{S}} = (1/2)\left(\nabla\overline{\mathbf{V}} + {}^{T}\nabla\overline{\mathbf{V}}\right)$ est le tenseur de déformation et $\boldsymbol{\tau}^{sm}$ le tenseur des contraintes de sous-maille qui s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}^{sm}_{ij} = \overline{V_i\ V_j} - \overline{V_i}\ \overline{V_j} \tag{3.3.6}$$

3.3.2 Contraintes de sous-maille

Le tenseur $\boldsymbol{\tau}^{sm}$ tient compte des interactions entre les différentes échelles de turbulence. Il doit être estimé afin de fermer le système. Il peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau}^{sm}_{ij} = \mathbf{L}_{ij} + \mathbf{C}_{ij} + \mathbf{R}_{ij} \tag{3.3.7}$$

$$\text{où} \quad \mathbf{L}_{ij} = \overline{\overline{V}_i\ \overline{V}_j} - \overline{V}_i\ \overline{V}_j \tag{3.3.8}$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \overline{\overline{V}_i\ v'_j} - \overline{\overline{V}_j\ v'_i} \tag{3.3.9}$$

$$\mathbf{R}_{ij} = \overline{v'_i\ v'_j} \tag{3.3.10}$$

Cette décomposition fut la première à être employée. Chaque composante représente une contribution spécifique des structures turbulentes :

- Le tenseur de Leonard $\mathbf{L}$ fait apparaître uniquement les échelles résolues (en réalité les plus petites des grandes échelles). Il ne nécessite aucune modélisation puisqu'il peut être calculé de façon explicite.
- Le tenseur croisé $\mathbf{C}$ traduit les interactions entre les grandes et les petites échelles. Il contient des composantes non résolues et doit donc être modélisé.
- Le tenseur de Reynolds $\mathbf{R}$ traduit les effets des interactions entre les petites échelles sur les grandes échelles. Il doit aussi être modélisé.

Bien que les termes $\mathbf{L}_{ij}+\mathbf{C}_{ij}$ et $\mathbf{R}_{ij}$ soient invariants par changement de repère galiléen, Speziale [65] a montré que ce n'est pas le cas des termes $\mathbf{L}_{ij}$ et $\mathbf{C}_{ij}$ pris séparément. Afin d'y remédier, Germano [26] a introduit la décomposition suivante :

$$\boldsymbol{\tau}^{sm}_{ij} = \mathbf{L}^{sm}_{ij} + \mathbf{C}^{sm}_{ij} + \mathbf{R}^{sm}_{ij} \tag{3.3.11}$$

$$\text{où} \quad \mathbf{L}^{sm}_{ij} = \overline{\overline{V}_i\ \overline{V}_j} - \overline{\overline{V}}_i\ \overline{\overline{V}}_j \tag{3.3.12}$$

$$\mathbf{C}^{sm}_{ij} = \overline{\overline{V}_i\ v'_j} - \overline{\overline{V}}_i\ \overline{v'_j} + \overline{\overline{V}_j\ v'_i} - \overline{\overline{V}}_j\ \overline{v'_i} \tag{3.3.13}$$

$$\mathbf{R}^{sm}_{ij} = \overline{v'_i\ v'_j} - \overline{v'_i}\ \overline{v'_j} \tag{3.3.14}$$

dans laquelle les termes $\mathbf{L}^{sm}$, $\mathbf{C}^{sm}$ et $\mathbf{R}^{sm}$ sont chacun invariants par changement de repère galiléen [65]. Quelle que soit la décomposition adoptée, le terme de Léonard ($\mathbf{L}_{ij}$ ou $\mathbf{L}_{ij}^{sm}$) peut être calculé de façon explicite. Il ne nécessite aucune modélisation tandis que les termes de tenseurs croisés ($\mathbf{C}_{ij}$ ou $\mathbf{C}_{ij}^{sm}$) et de Reynolds ($\mathbf{R}_{ij}$ ou $\mathbf{R}_{ij}^{sm}$) demandent une modélisation en vue de fermer le système.

3.4 Modélisation des contraintes de sous-maille

La modélisation des contraintes de sous-maille permet la fermeture du système d'équations filtrées. Elle consiste à estimer en fonction des grandeurs résolues les tenseurs croisé et de Reynolds. Depuis le modèle de Smagorinsky [64], de nombreuses modélisations ont été proposées. Le modèle implémenté dans le module SGE du code JADIM est un modèle dynamique mixte basé sur celui de Zang et *al.* [73] que nous présenterons de façon succincte. Les informations sont détaillées dans les travaux de Calmet [16] et Merle [53].

3.4.1 Modèle de Smagorinsky

Smagorinsky [64] utilise la décomposition (3.3.7). Il suggère qu'il y a équilibre entre la production d'énergie aux grandes échelles et sa dissipation au niveau des petites échelles pour une turbulence homogène et isotrope et que les effets du tenseur croisé $\mathbf{C}$ sont faibles à grand nombre de Reynolds. Il fournit uniquement une modélisation pour la partie non diagonale du tenseur $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}_{ij} - \frac{1}{3}\mathbf{R}_{kk}\delta_{ij} = -2\nu_T \overline{\mathbf{S}}_{ij} \tag{3.4.1}$$

$$\text{avec} \quad \nu_T = (C_s\Delta)^2 \left(2\overline{\mathbf{S}}_{ij}\ \overline{\mathbf{S}}_{ij}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbf{S}}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j}\right) \tag{3.4.2}$$

où $\overline{\mathbf{S}}$ est le tenseur des taux de déformation de grande échelle, Δ la longueur de coupure du filtre et ν_T la viscosité de sous-maille. Le concept de viscosité de sous-maille est introduit pour traduire un rôle crucial des petites échelles à savoir la dissipation d'énergie. Le paramètre C_s appelé constante de Smagorinsky est fixe et identique dans tout le domaine. Le modèle de Smagorinsky est purement dissipatif et ne prend pas en compte l'éventuel transfert d'énergie des petites échelles vers les échelles résolues ($C_s \geq 0$).

3.4.2 Modèle de Bardina

Bardina et *al.* [7] font l'hypothèse que les principales interactions entre les structures résolues et les structures de petite échelle se déroulent entre les plus petites structures résolues et les plus grandes structures de sous-maille. À l'aide des approximations $\overline{\overline{\mathbf{V}}} \approx \overline{\mathbf{V}}$ et $v' \approx \overline{\mathbf{V}} - \overline{\overline{\mathbf{V}}}$, ils obtiennent à partir des identités (3.3.9) et (3.3.10) les expressions suivantes :

$$\mathbf{C}_{ij} = \overline{\overline{V}_i}\left(\overline{V}_j - \overline{\overline{V}}_j\right) + \overline{\overline{V}}_j\left(\overline{V}_i - \overline{\overline{V}}_i\right) \quad , \quad \mathbf{R}_{ij} = \left(\overline{V}_i - \overline{\overline{V}}_i\right)\left(\overline{V}_j - \overline{\overline{V}}_j\right) \tag{3.4.3}$$

$$\mathbf{C}_{ij} + \mathbf{R}_{ij} = \overline{V}_i\ \overline{V}_j - \overline{\overline{V}}_i\ \overline{\overline{V}}_j \tag{3.4.4}$$

Le modèle de Bardina traduit principalement le transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes. N'étant pas dissipatif, ce modèle doit être utilisé avec une modélisation supplémentaire de type viscosité de sous-maille.

3.4.3 Modèle mixte

L'idée du modèle mixte est de combiner les modèles de Smagorinsky et Bardina. Cela aboutit pour les tenseurs $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ aux expressions suivantes :

$$\mathbf{C}_{ij} + \mathbf{R}_{ij} - \frac{1}{3}\left(\mathbf{C}_{kk} + \mathbf{R}_{kk}\right)\delta_{ij} = \overline{V}_i\,\overline{V}_j - \overline{\overline{V}}_i\,\overline{\overline{V}}_j - 2\nu_T\overline{\mathbf{S}}_{ij} \tag{3.4.5}$$

Si on ajoute à cette modélisation le terme de Léonard (3.3.8), on retrouve la décomposition (3.3.11) dans laquelle la somme $\mathbf{C}_{ij}^{sm}+\mathbf{R}_{ij}^{sm}$ serait modélisée par le modèle de Smagorinsky. Ainsi, si le terme de Léonard est calculé de façon explicite, le modèle mixte conserve l'invariance par changement de repère galiléen. De plus, le modèle mixte tient compte d'une part de la dissipation d'énergie des grandes échelles par les petites (Smagorinsky) et d'autre part des transferts d'énergie des petites vers les grandes échelles (Bardina).

3.4.4 Remarques sur les modèles classiques

La simulation des grandes échelles a été mise en œuvre et utilisée avec succès dans le cas d'écoulements de turbulence homogène isotrope. Son application à des écoulements présentant des inhomogénéités, comme l'écoulement en canal, a permis d'identifier les défauts des modèles employés. En effet, les effets des petites structures sur les grandes diffèrent suivant que l'on se trouve près d'une paroi ou au cœur de l'écoulement. De plus, les contraintes de sous-maille et par déduction la viscosité de sous-maille doivent s'annuler près des parois. La turbulence inhomogène ne peut donc être traitée correctement par un modèle utilisant un paramètre constant (exemple : C_s pour le modèle de Smagorinsky). Afin de pallier cette limitation, certains auteurs ont modifié le modèle de Smagorinsky en multipliant la constante C_s par une fonction d'amortissement dépendant de la distance aux parois.

Le paramètre du modèle doit varier d'une région de l'écoulement à l'autre et d'un type d'écoulement à l'autre. Aucune modélisation des contraintes de sous-maille à paramètre constant (avec ou sans loi de paroi) ne possède un caractère universel. Les progrès réalisés dans la connaissance de la structure locale de la turbulence de petite échelle ont favorisé le développement de la modélisation dynamique qui permet de prendre en compte la turbulence à un niveau local et non plus de façon globale à l'aide d'une unique constante.

3.4.5 Approche dynamique

L'idée de l'approche dynamique est due à Germano [28]. Elle consiste à utiliser et à relier les différentes informations présentes dans les petites échelles du champ résolu à l'aide de deux filtres spatiaux de tailles différentes. La constante d'un modèle classique au lieu d'être figée tout au long et en tout point de la simulation, devient un paramètre qui est calculé à chaque instant et en chaque point de l'espace. La modélisation dynamique offre ainsi l'avantage de s'adapter automatiquement aux conditions de l'écoulement et au comportement local des phénomènes physiques. Par exemple, dans cette approche, la viscosité de sous-maille tend vers zéro près d'une paroi et faiblit pour un écoulement laminaire.

Présentation générale

L'idée de la méthode dynamique est d'obtenir des équations de Navier-Stokes filtrées à deux niveaux de filtrage spatial. On considère deux filtres G et $\widetilde{G}$ de tailles caractéristiques respectives Δ et $\widetilde{\Delta}$. Les équations de Navier-Stokes filtrées successivement par les opérateurs G et $\widetilde{G}$

fournissent respectivement les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \\ \partial\overline{\mathbf{V}}/\partial t + \nabla.\left(\overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = \mathbf{g} - (1/\rho)\,\nabla\overline{P} + (1/\rho)\,\nabla.\left(2\mu\overline{\mathbf{S}}\right) - \nabla.\boldsymbol{\tau}^{sm} \end{cases} \tag{3.4.6}$$

$$\begin{cases} \nabla.\widetilde{\overline{\mathbf{V}}} = 0 \\ \partial\widetilde{\overline{\mathbf{V}}}/\partial t + \nabla.\left(\widetilde{\overline{\mathbf{V}}}\ \widetilde{\overline{\mathbf{V}}}\right) = \mathbf{g} - (1/\rho)\,\nabla\widetilde{\overline{P}} + (1/\rho)\,\nabla.\left(2\mu\widetilde{\overline{\mathbf{S}}}\right) - \nabla.\mathbf{T}^{sm} \end{cases} \tag{3.4.7}$$

où $\overline{\mathbf{S}} = (1/2)(\nabla\overline{\mathbf{V}} + {}^{T}\nabla\overline{\mathbf{V}})$ et $\widetilde{\overline{\mathbf{S}}} = (1/2)(\nabla\widetilde{\overline{\mathbf{V}}} + {}^{T}\nabla\widetilde{\overline{\mathbf{V}}})$ sont les tenseurs de déformations aux niveaux de l'échelle de filtrage Δ et $\widetilde{\Delta}$. Le système d'équations (3.4.7) peut être vu comme résultant du filtrage des équations de Navier-Stokes par le filtre $\widetilde{\overline{G}} = \widetilde{G}\,\overline{G}$. Le champ résolu $\overline{\mathbf{V}}$ (respectivement $\widetilde{\overline{\mathbf{V}}}$) tient compte des structures turbulentes dont la taille est supérieure à Δ (resp. $\widetilde{\Delta}$). Cette composition d'opérations a un sens si l'échelle $\widetilde{\Delta}$ est supérieure à Δ. Les contraintes de sous-maille respectives sont données par :

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^{sm} = \overline{V_i\ V_j} - \overline{V}_i\ \overline{V}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{T}_{ij}^{sm} = \widetilde{\overline{V_i\ V_j}} - \widetilde{\overline{V}}_i\ \widetilde{\overline{V}}_j \tag{3.4.8}$$

Les contraintes $\boldsymbol{\tau}^{sm}$ et $\mathbf{T}^{sm}$ ne peuvent être calculées directement puisque le produit $\overline{V_i\ V_j}$ est inconnu. Par contre, leur différence peut être évaluée, puisqu'elle est donnée par :

$$\pounds_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^{sm} - \widetilde{\boldsymbol{\tau}_{ij}^{sm}} = \widetilde{\overline{V}_i\ \overline{V}_j} - \widetilde{\overline{V}}_i\ \widetilde{\overline{V}}_j \tag{3.4.9}$$

L'hypothèse fondamentale de l'approche dynamique est de supposer que les contraintes de sous-maille $\mathbf{T}^{sm}$ et $\boldsymbol{\tau}^{sm}$ suivent une loi d'auto-similarité. Cela signifie que les expressions de $\mathbf{T}^{sm}$ et de $\boldsymbol{\tau}^{sm}$ en fonction respectivement de $\widetilde{\overline{\mathbf{V}}}$ et de $\overline{\mathbf{V}}$ obéissent au même modèle avec la même valeur de paramètre. Cette hypothèse se traduit pour un modèle de sous-maille générique noté MSM et caractérisé par le paramètre C_T sous la forme :

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^{sm} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\tau}_{kk}^{sm}\delta_{ij} = MSM(C_T, \Delta, \overline{\mathbf{V}}) \tag{3.4.10}$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{sm} - \frac{1}{3}\mathbf{T}_{kk}^{sm}\delta_{ij} = MSM(C_T, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\overline{\mathbf{V}}}) \tag{3.4.11}$$

La combinaison des équations (3.4.9), (3.4.10) et (3.4.11) conduit à l'équation algébrique servant à déterminer le paramètre C_T :

$$\pounds_{ij} - \frac{1}{3}\pounds_{kk}\delta_{ij} = MSM(C_T, \widetilde{\Delta}, \widetilde{\overline{\mathbf{V}}}) - \widetilde{MSM(C_T, \Delta, \overline{\mathbf{V}})} \tag{3.4.12}$$

Cette identité algébrique fournit cinq équations indépendantes pour une seule inconnue C_T. Le système est donc surdéterminé. Il existe deux façons possibles pour résoudre le problème. La première employée par Germano [28], consiste à contracter chaque membre de l'équation (3.4.12) par un tenseur significatif de manière à obtenir une équation unique pour C_T. Cependant, la signification physique de l'équation obtenue par cette procédure n'est pas claire. L'autre voie utilisée par Lilly [44], vise à minimiser par une méthode des moindres carrés, l'erreur commise en égalant les deux membres de l'identité (3.4.12). C'est cette méthode que nous utilisons par la suite puisqu'elle a été suivie dans les travaux postérieurs à ceux de Lilly. La valeur de C_T trouvée est alors injectée dans la modélisation de $\boldsymbol{\tau}_{ij}^{sm}$.

Application au modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky fournit pour les contraintes de sous-maille les expressions suivantes :

$$\boldsymbol{\tau}_{ij}^{sm} - \frac{1}{3}\boldsymbol{\tau}_{kk}^{sm}\delta_{ij} = -2\nu_T\overline{\mathbf{S}}_{ij} = -2C_T\Delta^2\left|\overline{\mathbf{S}}\right|\overline{\mathbf{S}}_{ij} \tag{3.4.13}$$

$$\mathbf{T}_{ij}^{sm} - \frac{1}{3}\mathbf{T}_{kk}^{sm}\delta_{ij} = -2C_T\widetilde{\Delta}^2\left|\widetilde{\overline{\mathbf{S}}}\right|\widetilde{\overline{\mathbf{S}}}_{ij} \tag{3.4.14}$$

La variable C_T est le carré du paramètre habituel C_s de Smagorinsky. Les équations (3.4.13) et (3.4.14) fournissent pour le calcul du paramètre C_T l'équation algébrique suivante :

$$Q = \pounds_{ij} - \frac{1}{3}\pounds_{kk}\delta_{ij} + 2C_T M_{ij} = 0 \tag{3.4.15}$$

$$\text{avec} \quad M_{ij} = \widetilde{\Delta}^2\left|\widetilde{\overline{\mathbf{S}}}\right|\widetilde{\overline{\mathbf{S}}}_{ij} - \Delta^2\widetilde{\left|\overline{\mathbf{S}}\right|\overline{\mathbf{S}}_{ij}} \tag{3.4.16}$$

La valeur de C_T qui minimise Q est obtenue après la résolution de l'équation $\partial Q^2/\partial C_T = 0$ et est donc donnée par :

$$C_T = -\frac{\pounds_{ij}M_{ij}}{2M_{ij}M_{ij}} \tag{3.4.17}$$

On note que l'approche dynamique appliquée au modèle de Smagorinsky prend en compte les retours d'énergie vers les échelles résolues car la viscosité de sous-maille ν_T n'est plus nécessairement positive.

3.4.6 Modèle dynamique mixte

L'approche dynamique fait appel à deux filtrages de tailles différentes Δ et $\widetilde{\Delta}$. Le paramètre à définir est le rapport $\alpha = \widetilde{\Delta}/\Delta$ qui est supérieur à 1. D'une part, une valeur trop proche de 1 entraîne une contamination par des erreurs numériques des contraintes de sous-maille. D'autre part, une valeur trop importante conduit à l'utilisation de grosses structures dans l'estimation des effets de sous-maille. Le rapport $\alpha = 2$ fournit des résultats convenables et est choisi dans la plupart des simulations menées avec une approche dynamique.

Le modèle dynamique mixte utilisé dans le code JADIM est basé sur celui de Zang et *al.* [73]. Il s'appuie sur une approche mixte dans laquelle la somme $\mathbf{C}_{ij}^{sm} + \mathbf{R}_{ij}^{sm}$ est fermée par un modèle de Smagorinsky. À cela, il faut rajouter le terme de Léonard $\mathbf{L}_{ij}^{sm}$ (3.3.12) calculé de façon explicite, de sorte que le modèle de sous-maille complet est un modèle mixte de type Bardina-Smagorinsky. Les contraintes de sous-maille se mettent sous la forme :

$$\mathbf{L}_{ij}^{sm} = \overline{\overline{V}_i\,\overline{V}_j} - \overline{\overline{V}}_i\,\overline{\overline{V}}_j \tag{3.4.18}$$

$$\mathbf{C}_{ij}^{sm} + \mathbf{R}_{ij}^{sm} - \frac{1}{3}\left(\mathbf{C}_{kk}^{sm} + \mathbf{R}_{kk}^{sm}\right)\delta_{ij} = -2\nu_T\overline{\mathbf{S}}_{ij} \tag{3.4.19}$$

$$\nu_T = C_T\Delta^2\left|\overline{\mathbf{S}}\right| \tag{3.4.20}$$

Dans l'approche dynamique, le paramètre C_T est une grandeur instantanée et locale. Il peut varier rapidement dans l'espace et dans le temps et peut prendre de grandes valeurs négatives. Pour réduire ces phénomènes qui peuvent déstabiliser le calcul, une opération de filtrage spatial basée sur le schéma du filtre $\widetilde{G}$ est effectuée sur le paramètre C_T après son estimation par une méthode des moindres carrés. On s'assure également qu'à chaque instant la viscosité cinématique totale reste positive ($\nu+\nu_T \geq 0$). Pour cela, s'il demeure après le filtrage, des zones où la viscosité totale est négative, cette dernière est simplement annulée ($\nu + \nu_T = 0$).

3.5 Modèle à un fluide turbulent

3.5.1 Modélisation de la turbulence diphasique

Les écoulements diphasiques turbulents à phases séparées sont présents dans de nombreuses applications industrielles telles que la distillation, la condensation et le transport du pétrole. La compréhension de leur dynamique passe par celle de la turbulence diphasique. Des travaux expérimentaux comme ceux de Lorencez et *al.* [52] et Rashidi et *al.* [58] ont apporté des éléments de compréhension de ce type d'écoulements. Ces auteurs s'intéressent à la fois au comportement hydrodynamique de chaque phase (hauteur de film, profils de vitesses,...), à la présence des structures turbulentes, aux interactions entre les structures turbulentes et les parois solides et également aux interactions entre les structures turbulentes et les interfaces.

Lorencez et *al.* [52] ont complété leurs expériences par une étude numérique basée sur une approche statistique de type RANS comme la plupart des travaux dans ce domaine. La modélisation de type RANS demeure à ce jour l'option privilégiée pour étudier par voie numérique les écoulements turbulents à phases séparées ([25], [55]). La prise en compte des effets des structures turbulentes se fait en déconnectant la turbulence de la topologie multiphasique des écoulements. Des modèles de turbulence monophasique du type $k - \epsilon$ sont ainsi directement utilisés dans les phases qui le nécessitent.

Toujours dans un souci de compréhension, quelques simulations directes ont été menées. Fulgosi et *al.* [23] étudient des écoulements air-eau cisaillés et s'attachent aux interactions entre la turbulence et les interfaces. Ils observent une influence de l'interface mobile sur le comportement de la turbulence. La simulation directe a l'avantage de traiter toutes les échelles de turbulence et de tenir compte du caractère diphasique de l'écoulement. Elle reste toutefois très coûteuse et souvent limitée à de faibles déformations des interfaces.

Entre ces deux visions de modélisation numérique se situe la simulation des grandes échelles qui commence à se développer. Lacanette et *al.* ([40] et [41]) se sont intéressés à l'interaction entre un jet turbulent et un film liquide par l'intermédiaire soit du modèle de Smagorinsky, soit d'une modélisation d'échelle mixte couplant le modèle de Smagorinsky et un modèle d'énergie cinétique turbulente (TKE). Ces travaux ne tiennent cependant pas compte de l'impact du caractère diphasique de l'écoulement sur les caractéristiques de la turbulence et la modélisation des termes de fermeture est basée sur des considérations analytiques. Cela s'explique principalement par la difficulté à définir des modèles de sous-maille multiphasiques. Afin de remédier à cette limitation, Labourasse et *al.* [39] se sont attachés à formuler les bases théoriques du filtrage des équations des écoulements multiphasiques et à fournir une description des contributions de petite échelle. Liovic et Lakehal ([47] et [48]) ont quant à eux analysé l'application de la simulation des grandes échelles aux écoulements diphasiques et discuté la formulation d'une modélisation spécifique de termes de sous-maille directement liés à la topologie diphasique de l'écoulement. Ils utilisent une forme conservative des équations et évaluent les contraintes de sous-maille par le modèle de Smagorinsky corrigé d'une fonction dépendant de la distance à l'interface. Cette fonction correctrice vise à traduire le comportement des structures turbulentes dans le voisinage des interfaces. Ce type d'approche a été également utilisé par Reboux et *al.* [59].

L'approche adoptée dans nos travaux s'appuie sur un couplage des méthodologies VoF et SGE où l'évaluation des termes de sous-maille se fait à partir des caractéristiques locales de l'écoulement. Les détails de cette modélisation sont présentés dans la suite de ce chapitre.

3.5.2 Modèle à un fluide

On considère un écoulement formé de deux fluides non-miscibles, incompressibles et newtoniens. Cet écoulement est représenté par un modèle à un fluide qui dans sa forme complète s'écrit :

$$\nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \tag{3.5.1}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho\ \mathbf{V}}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho\ \mathbf{V}\ \mathbf{V}}\right) = \ \overline{\rho}\ \mathbf{g} - \nabla\overline{P} + \nabla.\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{F}}_c \tag{3.5.2}$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k\ <\mathbf{V}_k>\right) = 0 \tag{3.5.3}$$

où C_k est le taux de présence de la phase k, $<\mathbf{V}_k>$ la vitesse de phase locale, $\overline{\mathbf{V}}$ la vitesse filtrée du fluide unique, $\overline{\mathbf{F}}_c$ la contribution des effets capillaires et $\overline{\mathbf{T}}$ le tenseur des contraintes visqueuses. La dérivation de ce modèle à un fluide détaillée précédemment, est basée sur un filtrage spatial à l'échelle de la maille. L'opérateur de filtrage utilisé est un filtre "top-hat". Les décompositions suivantes sont introduites :

$$<\mathbf{V}_k>=\overline{\mathbf{V}}+<\mathbf{u}_k> \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_k = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{v}_k^{'} \tag{3.5.4}$$

Avec ces décompositions, le modèle à un fluide se met sous la forme :

$$\nabla.\overline{\mathbf{V}} = 0 \tag{3.5.5}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\right)}{\partial t} + \nabla.\left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = \ \overline{\rho}\ \mathbf{g} - \nabla\overline{P} + \nabla.\overline{\mathbf{T}} + \overline{\mathbf{F}}_c - \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + \nabla.\mathbf{\Gamma}^{sm} \tag{3.5.6}$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k\overline{\mathbf{V}}\right) = -\nabla.\mathbf{j}_k \tag{3.5.7}$$

où les termes ouverts $\mathbf{j}_k$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{\Gamma}^{sm}$ sont donnés par :

$$\mathbf{j}_k = C_k <\mathbf{u}_k> \quad , \quad \mathbf{J} = \sum_k \rho_k\mathbf{j}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{\Gamma}^{sm} = \overline{\rho\ \mathbf{V}\ \mathbf{V}} - \overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}} \tag{3.5.8}$$

Afin de simplifier ce modèle, on néglige les effets de glissement entre les phases $<\mathbf{u}_k>=0$ et les fluctuations de vitesse $\mathbf{v}_k^{'}=0$. En choisissant cette modélisation, le fluide est supposé parfaitement mélangé à l'échelle de la maille de calcul et sans fluctuation dans le mélange à cette échelle. La prise en compte de la turbulence par cette approche de simulation des grandes échelles nécessite de relâcher ces hypothèses et d'élaborer des moyens de fermeture du système.

La fermeture du système issu du filtrage précédent est de manière générale un problème complètement ouvert à cause de l'origine et de la nature des fluctuations liées d'une part à la turbulence et d'autre part au mouvement des interfaces. Il n'existe pas à ce jour de modèle diphasique de sous-maille prenant en compte de manière rationnelle ces deux contributions et leurs interactions. Afin de traiter les écoulements turbulents qui nous intéressent, nous sommes donc amenés à simplifier ce cadre général.

3.5.3 Hypothèses

Vitesse de dérive

La première hypothèse employée a été vue précédemment. On suppose qu'il n'y a aucune dérive de vitesse entre les phases $<\mathbf{u}_k>=0$. Ce choix qui annule les différents flux de dérive $\mathbf{j}_k$ et $\mathbf{J}$,

implique l'absence de changement de phase et de glissement local entre les phases en présence. L'équation de transport du taux de présence (3.5.7) se simplifie pour devenir :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \nabla.\left(C_k \overline{\mathbf{V}}\right) = 0 \tag{3.5.9}$$

En utilisant la condition d'incompressibilité (3.5.5), l'équation (3.5.9) se met sous la forme :

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}}.\nabla C_k = 0 \tag{3.5.10}$$

Cette hypothèse d'annulation des vitesses de dérive peut s'appliquer dans notre cadre d'étude de fluides non-miscibles. Il n'y a dans ce cas aucune diffusion et aucune dérive à petite échelle d'une phase dans les autres. Elle n'a cependant plus de raison d'être dans le cas de la diffusion d'un constituant miscible dans un fluide. Il faudrait alors définir un modèle de fermeture de ces flux de dérive. Dans cette situation, Calmet et Magnaudet ([16] et [17]) ont utilisé le concept de diffusivité de sous-maille par analogie à la viscosité de sous-maille pour traduire les effets des petites échelles sur la diffusion du scalaire.

Annuler la vitesse de dérive $< \mathbf{u}_k >$ simplifie le terme $\overline{\rho\ \mathbf{V}}$:

$$\overline{\rho\ \mathbf{V}} = \overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}} \quad \text{avec} \quad \overline{\rho} = \sum_k C_k \rho_k \tag{3.5.11}$$

On choisit pour la suite de noter C le taux de présence de la phase 1 ($C = C_1 = 1 - C_2$). Son évolution se fait via l'équation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}}.\nabla C = 0 \tag{3.5.12}$$

Fluctuations interfaciales

Puisque nous souhaitons prendre en compte la turbulence diphasique, il n'est plus possible d'annuler les fluctuations de vitesse $\mathbf{v}_k^{'}$ comme fait classiquement dans la méthodologie VoF. L'hypothèse principale dans notre approche consiste à supposer que les échelles de déformation de l'interface sont entièrement résolues c'est-à-dire que les interfaces n'induisent pas de fluctuations de petite échelle. Les différents phénomènes liés aux mouvements interfaciaux sont alors gouvernés par les composantes résolues du mouvement. Ainsi par exemple, les fluctuations de sous-maille de la densité ρ sont considérées comme négligeables. Cette hypothèse, qui implique bien sûr que la longueur capillaire est grande devant l'échelle de coupure du maillage et a fortiori devant l'échelle de Kolmogorov, permet de considérer que seule la turbulence contribue à créer des petites échelles dans l'écoulement. Elle permet d'approcher le terme inertiel $\overline{\rho\ \mathbf{V}\ \mathbf{V}}$ par :

$$\overline{\rho\ \mathbf{V}\ \mathbf{V}} \approx \overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}\ \mathbf{V}} \tag{3.5.13}$$

Cette approximation offre la possibilité d'utiliser dans notre cadre, des modèles de sous-maille dérivés pour les écoulements monophasiques.

3.5.4 Contraintes de sous-maille

L'approximation (3.5.13) entraîne une séparation au premier ordre entre la prise en compte du caractère diphasique ($\overline{\rho}$) et les corrélations de vitesses qui vont traduire les effets de la turbulence ($\overline{\mathbf{V}\ \mathbf{V}}$). Le terme $\overline{\mathbf{V}\mathbf{V}}$ peut ainsi être traité par une approche directement dérivée de celle utilisée

en turbulence monophasique. Le tenseur des contraintes de sous-maille $\mathbf{\Gamma}^{sm}$ se décompose alors sous la forme :

$$\mathbf{\Gamma}^{sm} \approx \overline{\rho}\left(\overline{\mathbf{V}\ \mathbf{V}} - \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}\right) = \overline{\rho}\left(\mathbf{L} + \mathbf{R}\right) \tag{3.5.14}$$

$$\text{avec } \mathbf{L} = \overline{\overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}}} - \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \overline{\overline{\mathbf{V}}} \quad \text{et} \quad \mathbf{R} = \overline{\overline{\mathbf{V}}\ v'} - \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \overline{v'} + \overline{\overline{\mathbf{V}}\ v'} - \overline{\overline{\mathbf{V}}}\ \overline{v'} + \overline{v'\ v'} - \overline{v'}\ \overline{v'} \tag{3.5.15}$$

Les contraintes de sous-maille sont évaluées par un modèle dynamique mixte de type Bardina-Smagorinsky. En effet, le terme de Léonard $\mathbf{L}$ ne nécessite aucune modélisation puisqu'il est obtenu par filtrage du champ de vitesses résolu. Le tenseur $\mathbf{R}$ faisant intervenir des composantes de petite échelle est quant à lui, fermé à l'aide du modèle de Smagorinsky :

$$\mathbf{R} - \frac{1}{3}Tr\left(\mathbf{R}\right)\mathbf{I} = -2\nu_{sm}\overline{\mathbf{S}} \quad \text{et} \quad \nu_{sm} = C_{sm}\Delta^2\left|\overline{\mathbf{S}}\right| \tag{3.5.16}$$

où ν_{sm} désigne la viscosité de sous-maille, Δ la longueur de coupure imposée par le maillage et $\mathbf{I}$ le tenseur identité.

Le paramètre C_{sm} est calculé de façon dynamique (3.4.17) en utilisant les informations présentes dans les petites échelles du champ résolu à l'aide d'un filtre spatial explicite de taille $\widetilde{\Delta} = 2\ \Delta$. C'est une grandeur instantanée et sa valeur dépend des caractéristiques locales de la turbulence. Ce paramètre peut rapidement varier dans le temps et dans l'espace et peut prendre des valeurs négatives. Pour réduire l'effet déstabilisateur de ces phénomènes, une opération de filtrage spatial est effectuée sur le paramètre C_{sm} après son estimation. De plus, à tout instant et en tout point de l'espace, la viscosité totale est maintenue positive ($\overline{\mu} + \overline{\rho}\ \nu_{sm} \geq 0$). Par conséquent, s'il existe des zones de l'espace où $\overline{\mu} + \overline{\rho}\ \nu_{sm} < 0$, la viscosité de sous-maille est annulée ($\nu_{sm} = 0$).

Une précaution supplémentaire est prise dans les zones interfaciales où les valeurs négatives de ν_{sm} sont systématiquement mises à zéro car elles ont tendance à générer des aberrations dans le raccordement des cisaillements. Ainsi dans les zones interfaciales caractérisées par un taux de présence variable ($0 < C < 1$), la viscosité totale est strictement positive $\overline{\mu} + \overline{\rho}\ \nu_{sm} > 0$.

La fermeture des contraintes de sous-maille par ce modèle dynamique mixte offre contrairement au modèle classique avec un paramètre constant, l'énorme avantage de s'adapter aux structures locales de la turbulence. On peut donc traiter avec le même outil à la fois des situations de turbulence homogène et inhomogène et des écoulements laminaires. Dans les zones laminaires de l'écoulement, la modélisation dynamique ne génère pas de perturbation turbulente significative. Le modèle à un fluide turbulent ainsi développé pourra donc en principe nous permettre de simuler le cisaillement de films liquides laminaires ou faiblement turbulents par un courant gazeux turbulent. Afin de finaliser le modèle à un fluide turbulent, il nous reste à préciser l'expression des termes de diffusion et de la force capillaire.

3.5.5 Terme de diffusion et terme capillaire

Les termes de diffusion et le terme capillaire ont déjà été discutés. Vue la difficulté pratique à formuler des modélisations convenables et génériques des effets de sous-maille des contraintes visqueuses et de la force capillaire, les composantes de petite échelle de ces deux termes sont négligées. Ces approximations sont largement employées dans les différentes tentatives de prise en compte de la turbulence par le couplage entre les méthodologies VoF et SGE ([40], [41], [47] et [48]).

Terme de diffusion

Le tenseur des contraintes visqueuses est évalué à partir du modèle à un coefficient de viscosité :

$$\overline{\mathbf{T}} \approx 2\ \overline{\mu}\ \overline{\mathbf{S}} \quad \text{avec} \quad \overline{\mu} = C\mu_1 + (1-C)\mu_2 \tag{3.5.17}$$

Cette approximation des contraintes visqueuses néglige les effets des petites échelles.

Terme capillaire

La force capillaire $\overline{\mathbf{F}}_c$ utilisée dans le modèle à un fluide est approchée par :

$$\overline{\mathbf{F}}_c \approx -\sigma \nabla . \left(\frac{\nabla C}{||\nabla C||} \right) \nabla C \tag{3.5.18}$$

Cette force capillaire est une estimation de la normale et de la courbure données par le taux de présence. Cette expression est obtenue en négligeant la composante de petite échelle de la force capillaire qui ne peut être évaluée correctement dans la pratique. Pour réduire les courants parasites, un lissage du taux de présence est effectué pour le calcul des efforts capillaires.

Avec les approximations adoptées, le bilan de quantité de mouvement (3.5.6) du modèle à un fluide turbulent s'écrit :

$$\frac{\partial \left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}} \right)}{\partial t} + \nabla . \left(\overline{\rho}\ \overline{\mathbf{V}}\ \overline{\mathbf{V}} \right) = \overline{\rho}\ \mathbf{g} - \nabla \left[\overline{p} + \frac{1}{3} \overline{\rho} Tr\left(\mathbf{R} \right) \right] + 2\ \nabla . \left[\left(\overline{\mu} + \overline{\rho}\ \nu_{sm} \right) \overline{\mathbf{S}}\ \right] - \nabla . \left(\overline{\rho}\ \mathbf{L} \right) + \overline{\mathbf{F}}_c \tag{3.5.19}$$

Cette équation fait intervenir une pseudo-pression :

$$\mathrm{P} = \overline{p} + \frac{1}{3} \overline{\rho} Tr\left(\mathbf{R} \right) \tag{3.5.20}$$

Le terme $\frac{1}{3} \overline{\rho} Tr\left(\mathbf{R} \right)$ représentant l'énergie de sous-maille, ne peut être ni calculé, ni modélisé. Il est combiné à la pression résolue $\overline{p}$ pour former la pseudo-pression P.

Multiplier l'équation (3.5.12) par $\rho_2 - \rho_1$ fournit l'équation de transport de la masse volumique $\overline{\rho}$. L'introduction de cette équation dans (3.5.19) aboutit à la mise sous forme non conservative de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}} . \nabla \overline{\mathbf{V}} = \ \mathbf{g} - \frac{1}{\overline{\rho}} \nabla \mathrm{P} + \frac{2}{\overline{\rho}}\ \nabla . \left[\left(\overline{\mu} + \overline{\rho}\ \nu_{sm} \right) \overline{\mathbf{S}}\ \right] - \frac{1}{\overline{\rho}} \nabla . \left(\overline{\rho}\ \mathbf{L} \right) + \frac{1}{\overline{\rho}} \overline{\mathbf{F}}_c \tag{3.5.21}$$

Finalement, le modèle à un fluide turbulent qui sera utilisé par la suite pour la simulation des écoulements diphasiques turbulents est composé des équations (3.5.5), (3.5.12) et (3.5.21).

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la définition d'un modèle susceptible de représenter et de reproduire les écoulements diphasiques turbulents. Ce modèle est basé sur le couplage entre l'approche volume of fluid classiquement utilisé pour les écoulements diphasiques laminaires et la simulation des grandes échelles servant habituellement à l'étude de la turbulence monophasique. Il s'agit en réalité de relâcher certaines hypothèses servant à la dérivation du modèle à un fluide afin de faire intervenir les fluctuations turbulentes de petite échelle et

d'assurer une fermeture convenable du système. Les contraintes de sous-maille qui en découlent sont évaluées par un modèle dynamique mixte. Ce choix permet de tenir compte des deux sens possibles de transfert d'énergie (des grandes échelles vers les petites et réciproquement) par le biais du modèle mixte. De plus, la modélisation dynamique offre l'avantage de s'adapter automatiquement aux conditions d'écoulement et au comportement local de la turbulence. Celle-ci n'est donc plus caractérisée par une constante fixée dans tout le domaine mais par un paramètre qui varie dans l'espace et dans le temps.

Le modèle à un fluide turbulent présenté ici sera validé par le biais de simulations de diverses situations. Des simulations d'écoulements diphasiques caractérisés par la présence de structures turbulentes dans au moins l'une des phases seront effectuées. Cela permettra d'apporter des éléments de caractérisation des interactions entre les structures turbulentes et les interfaces. On vérifiera également que la simulation d'écoulements laminaires ne fait pas apparaître d'effets de sous-maille significatif.

Chapitre 4

Simulation d'un écoulement à phases séparées turbulent-turbulent

Sommaire

4.1 Introduction 65
4.2 Configuration étudiée 65
4.2.1 Présentation 65
4.2.2 Paramètres d'écoulement 66
4.2.3 Domaine de calcul et discrétisation spatiale 67
4.3 Structure de l'interface 68
4.4 Caractéristiques statistiques de la turbulence 68
4.4.1 Particularité des méthodes à interface diffuse 69
4.4.2 Vitesse moyenne 70
4.4.3 Intensités turbulentes de vitesse 72
4.4.4 Cisaillement turbulent 73
4.4.5 Bilan d'énergie cinétique turbulente 75
4.5 Conclusion 79

4.1 Introduction

Au chapitre précédent, nous avons défini un modèle à un fluide tenant compte de la présence éventuelle de structures turbulentes. Ce modèle, construit à partir d'un couplage entre les approches VoF et SGE, s'appuie sur une modélisation dynamique mixte pour le traitement de la turbulence. Ce choix offre l'avantage de s'adapter automatiquement aux conditions d'écoulement et aux comportements locaux des phénomènes turbulents. Ce modèle constitue, à notre connaissance, l'un des premiers à traiter la turbulence avec une méthode d'interface diffuse. Il ne comporte ni étape de reconstruction de l'interface ni condition imposée de façon explicite à la traversée de l'interface, contrairement aux méthodes lagrangiennes. La pertinence et la précision d'une telle approche doivent être correctement évaluées par un processus de validation détaillé. Ce modèle doit être capable de décrire et de reproduire convenablement à la fois l'évolution des interfaces et le champ turbulent. Son évaluation sera effectuée dans des configurations décrites dans la littérature.

Nous nous intéresserons spécifiquement dans ce chapitre aux travaux de Fulgosi et *al.* [23] portant sur l'étude d'un écoulement gaz-liquide turbulent-turbulent. Ces auteurs ont décrit de façon exhaustive la turbulence dans le gaz et les interactions entre les structures turbulentes et l'interface dans une configuration d'interface faiblement déformée.

4.2 Configuration étudiée

4.2.1 Présentation

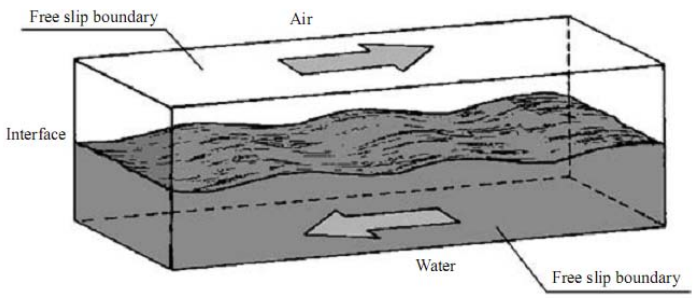


FIGURE 4.2.1 – Configuration d'écoulement Fulgosi et *al.* [23]

Nous nous intéressons à un écoulement diphasique comportant une interface gaz-liquide quasi-plane (figure 4.2.1). Les deux phases sont turbulentes et s'écoulent à contre-courant avec des débits assurés par un gradient de pression. Cette configuration a été étudiée par Lombardi et *al.* [51] par le biais de la simulation numérique directe. Ces auteurs ont analysé le cas d'une interface non déformable. Pour cela, ils tiennent uniquement compte de la continuité des contraintes tangentielles. Fulgosi et *al.* [23] ont ensuite étendu ces travaux afin de prendre en compte les déformations de l'interface en raccordant en plus des contraintes tangentielles, les contraintes normales à la traversée de l'interface. Pour ces deux types d'étude, les auteurs utilisent une méthode lagrangienne (boundary fitted method) pour assurer le suivi de l'interface. Ce choix limite le domaine d'application de leur travaux aux cas d'interfaces faiblement déformables, ce qui les amène à choisir avec soin les régimes d'écoulements.

Les travaux [23] et [51] visent à décrire et à comprendre le comportement de la turbulence dans

le gaz au voisinage d'une interface. Les auteurs remarquent que dans un écoulement diphasique dominé par un rapport des densités, le fluide léger voit l'interface comme une paroi mobile c'est-à-dire qu'il existe une analogie entre les structures turbulentes obtenues près d'une paroi rigide et celles observées au-dessus d'une interface.

Lombardi et *al.* [51] et Fulgosi et *al.* [23] utilisent la simulation numérique directe (SND) qui fournit toutes les informations sur l'écoulement mais à un coût de calcul très élevé. La majorité des écoulements diphasiques turbulents sont traités par des approches statistiques de type RANS. La voie RANS est certes beaucoup moins coûteuse mais ne donne pas accès à la dynamique de la turbulence puisque l'essentiel des informations est resumé à des grandeurs statistiques. Le compromis entre les deux approches RANS et SND est constitué par la simulation des grandes échelles (SGE). Les premières tentatives de traitement d'écoulements diphasiques turbulents à l'aide de la SGE ont récemment vu le jour. Ainsi, Labourasse et *al.* [39] ont formulé les bases du filtrage des équations d'écoulements diphasiques. Lakehal et Liovic [42] ont proposé une modélisation des termes de sous-maille directement liée à la topologie diphasique de l'écoulement. Leur formulation s'appuie sur l'analogie du comportement de la turbulence au voisinage d'une paroi solide et d'une interface. Ils estiment les contraintes de sous-maille par un modèle de Smagorinsky corrigé par une fonction d'amortissement de type Van Driest dépendant de la distance à l'interface. La viscosité de sous-maille s'écrit dans leur approche sous la forme :

$$\nu_{sm} = l^2|\overline{\mathbf{S}}| = f_{\mu int}\left(C_s\Delta\right)\left(2\ \overline{\mathbf{S}}_{ij}\ \overline{\mathbf{S}}_{ij}\right)^{1/2} \tag{4.2.1}$$

$$f_{\mu int} = 1 - exp\left[-0.00013\left(y^+_{int}\right) - 0.00036\left(y^+_{int}\right)^2 - 1.08\ 10^{-5}\left(y^+_{int}\right)^3\right] \tag{4.2.2}$$

où C_s est la constante de Smagorinsky et y^+_{int} la distance normalisée à l'interface. Ils testent cette approche dans les configurations d'interface plane et faiblement déformée.

Nous nous intéressons dans ce qui suit à la configuration d'interface gaz-liquide faiblement déformée traitée par Fulgosi et *al.* [23]. Il sera en particulier intéressant d'analyser comment le comportement de la turbulence au voisinage de l'interface est reproduit suivant l'approche (eulerienne ou lagrangienne) choisie.

4.2.2 Paramètres d'écoulement

Les fluides s'écoulent à contre-courant, chacun dans un canal tridimensionnel d'épaisseur h_G pour le gaz et h_L pour le liquide, avec un débit assuré par un gradient de pression. Des conditions de symétrie (cisaillement nul) sont imposées aux frontières supérieure pour le gaz et inférieure pour le liquide. Pour quantifier les cisaillements à l'interface pour chaque phase τ_G^{int} et τ_L^{int}, on définit les vitesses de frottement u_G^* et u_L^* selon :

$$u_G^* = \sqrt{\frac{\tau_G^{int}}{\rho_G}} \quad \text{et} \quad u_L^* = \sqrt{\frac{\tau_L^{int}}{\rho_L}} \tag{4.2.3}$$

Dès l'instant où les phases sont en contact, l'égalité des contraintes tangentielles impose :

$$\tau^{int} = \tau_G^{int} = \tau_L^{int} \tag{4.2.4}$$

On introduit les nombres de Reynolds Re_G^* et Re_L^* basés sur les vitesses de cisaillement :

$$Re_G^* = \frac{u_G^* h_G}{\nu_G} \quad \text{et} \quad Re_L^* = \frac{u_L^* h_L}{\nu_L} \tag{4.2.5}$$

où ν_G et ν_L sont respectivement les viscosités cinématiques du gaz et du liquide.

Pour la configuration étudiée, les hauteurs de fluide h_G et h_L ainsi que les nombres de Reynolds Re_G^* et Re_L^* sont choisis identiques et égaux à :

$$h_G = h_L = h \quad \text{et} \quad Re_G^* = Re_L^* = Re^* = 171 \tag{4.2.6}$$

Ce nombre de Reynolds $Re^* = 171$ correspond approximativement à un nombre de Reynolds global Re basé sur la vitesse moyenne U_{moy} et sur la hauteur h_G de l'ordre de :

$$Re_G = \frac{U_G^{moy} h}{\nu_G} \approx 2.5\,(1 + ln(Re^*))\,Re^* \approx 2600 \tag{4.2.7}$$

Choisir le même nombre de Reynolds dans les deux phases conditionne le contraste des propriétés physiques des fluides. En effet, pour respecter la continuité du cisaillement à la traversée de l'interface, les densités et les viscosités des fluides doivent vérifier l'équation :

$$R_\mu = \frac{\mu_L}{\mu_G} = \left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right)^{1/2} = R_\rho \tag{4.2.8}$$

Les fluides en présence ont un rapport de masses volumiques donné par :

$$R_\rho = \left(\frac{\rho_L}{\rho_G}\right)^{1/2} = 29.9 \tag{4.2.9}$$

Cette valeur correspond au contraste des densités entre l'eau et l'air. Les nombres de Weber et de Froude qui caractérisent la configuration étudiée sont :

$$W_e = \frac{\rho_L h u_L^{*^2}}{2\sigma} = 4.8\ 10^{-3} \quad \text{et} \quad F_r = \frac{2\rho_L u_L^{*^2}}{gh(\rho_L - \rho_G)} = 8.7\ 10^{-5} \tag{4.2.10}$$

Ce choix permet de limiter les déformations de l'interface à de faibles valeurs avec des pentes typiquement inférieures à 1%.

À l'instant initial ($t = 0$), l'interface est plane et le champ de vitesses des deux phases correspond à un écoulement turbulent qu'aurait atteint le fluide seul dans un canal ouvert (condition de paroi à une frontière et de glissement à l'autre) au nombre de Reynolds $Re^* = 171$. Les deux phases sont établies indépendamment (condiguration monophasique) avant d'être raccordées pour la simulation de l'écoulement diphasique. Le choix des propriétés physiques $R_\mu = R_\rho$ assure un cisaillement moyen identique de part et d'autre de l'interface ($\tau^{int}(t = 0) = \rho_L u_L^{*^2} = \rho_G u_G^{*^2}$) et une continuité des vitesses ($U^{int}(t = 0) = U_G^{int}(t = 0) = U_L^{int}(t = 0) = 0$) au niveau de l'interface à l'instant initial $t = 0$.

4.2.3 Domaine de calcul et discrétisation spatiale

Les résultats seront comparés avec ceux obtenus par Fulgosi et *al.* [23] par la simulation directe et une méthode lagrangienne. Lakehal et *al.* [42] utilisent quant à eux la simulation des grandes échelles avec une fermeture des équations réalisée soit par un modèle de Smagorinsky à paramètre constant, soit par un modèle de Smagorinsky corrigé par une fonction d'amortissement au voisinage de l'interface.

Fulgosi et *al.* [23] utilisent un maillage 64 x 64 x 65 et Lakehal et *al.* [42] une discrétisation 32 x 32 x 32 sur un domaine de calcul pour chaque phase de dimensions $2\pi h$ x πh x h. Puisque nous

utilisons une méthode eulérienne, le domaine de calcul global de dimensions $2\pi h$ x πh x $2h$ choisi résulte de la juxtaposition de deux domaines de dimension $2\pi h$ x πh x h et discrétisé chacun avec un maillage 32 x 32 x 32. La discrétisation est uniforme dans les directions homogènes x et y et raffinée aux niveaux de l'interface $z = 0$ et des frontières $z = \pm h$ dans la direction z à l'aide de la transformation :

$$z_j = \frac{1}{a} \tanh\left[\eta_j \arg\tanh(a)\right] \quad \text{avec} \quad \eta_j = -1 + 2\left(j-1\right)/\left(N_z - 1\right), \forall j = 1, N_z \qquad (4.2.11)$$

où N_z est le nombre de points dans la direction z et a un paramètre d'ajustement compris entre 0 et 1 servant à resserer suffisamment le maillage près des limites. Ce type de discrétisation a pour but de résoudre convenablement les sous-couches visqueuses au voisinage des frontières. Par exemple, pour un écoulement proche d'une paroi, la valeur du paramètre a est choisie afin d'avoir au minimum 3 points de discrétisaton dans la sous-couche visqueuse dont l'épaisseur est de l'ordre de $5\nu/u^*$.

4.3 Structure de l'interface

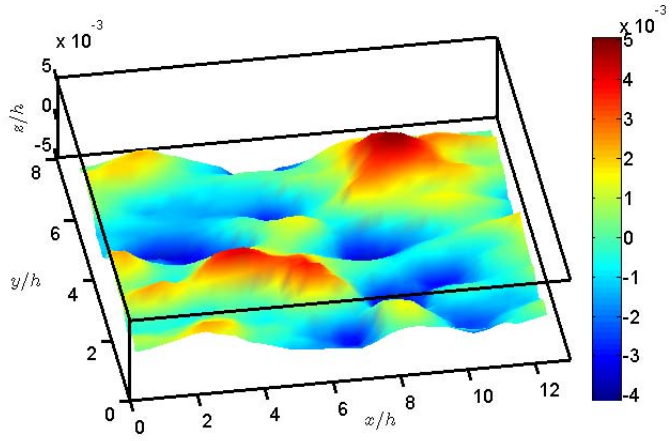


FIGURE 4.3.1 – Isocontour instantané $C = 0.5$

La structure de l'interface est déterminée par la compétition entre les effets déstabilisant du cisaillement du gaz et les forces stabilisatrices liées à la gravité et à la tension de surface. On vérifie bien qu'au cours de la simulation, l'interface gaz-liquide est faiblement déformée ($ak << 1$). L'isocontour $C = 0.5$ obtenu à un instant donné est représenté sur la figure 4.3.1.

Afin de caractériser la structure de l'interface, on suit au cours du temps sa position $f\left(x_0, y_0, t\right)$ en des points quelconques de coordonnées $x = x_0$ et $y = y_0$. On représente ainsi sur la figure 4.3.2 l'évolution au cours du temps $t_{ls} = tU_G^{moy}/h$ la position $f(x_0, y_0, t)/h$ de l'interface au point $x_0 = 2\pi h$ et $y_0 = \pi h$ et sa transformée de Fourier. La fréquence du mode dominant est égale à $t_{ls}^{-1} = 0.04$ et plusieurs modes sont présents dans la plage de fréquence. La valeur de la fréquence du mode dominant est proche de celle $t_{ls,SND}^{-1} = 0.05$ obtenue par Fulgosi et *al.* [23].

4.4 Caractéristiques statistiques de la turbulence

L'analyse du champ turbulent se fait via l'étude de grandeurs statistiques. Les équations du mouvement sont intégrées pendant un temps suffisamment long afin d'obtenir des solutions sta-

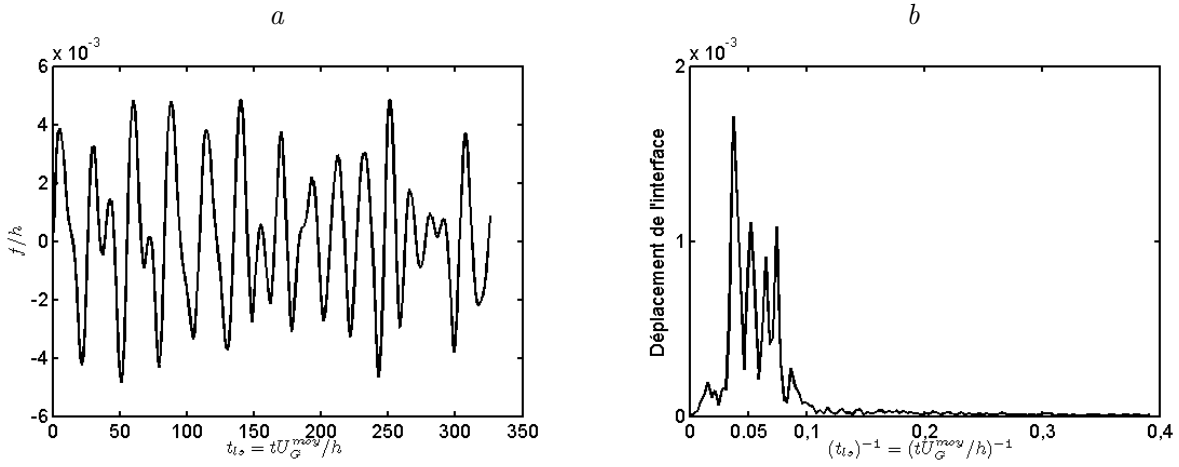


FIGURE 4.3.2 – Structure de l'interface
(a) - Évolution au cours du temps de la position de l'interface
(b) - Spectre temporel du déplacement de l'interface

tistiquement stationnaires. À partir de cet instant, les quantités résolues sont moyennées dans le temps et dans les directions homogènes de l'écoulement (x et y). Les moyennes statistiques sont donc sur des plans $z = constante$. Elles sont ainsi réalisées sans tenir compte de la présence de la zone interfaciale. Ce choix se comprend assez bien dans les situations d'interfaces faiblements déformées (interfaces planes).

On note dans la suite pour une variable Φ, la quantité résolue (filtrée) $\overline{\Phi}$, la grandeur moyennée $< \Phi >$ et la fluctuation par rapport à la moyenne Φ'. Par exemple, pour la vitesse résolue $\overline{U}$ par la simulation des grandeurs échelles, la vitesse moyenne est notée $< \overline{U} >$ et la fluctuation turbulente est définie par $\overline{u}' = \overline{U} - < \overline{U} >$. Cette fluctuation est bien entendu différente de la composante de sous-maille $u' = U - \overline{U}$.

Les grandeurs statistiques ne dépendent que de la coordonnée z. L'interface étant faiblement déformée, sa position moyenne est proche de la coordonnée $z = z_I \approx 0$. On définit pour chaque phase les variables réduites z_G^+ et z_L^+ par :

$$z_G^+ = \frac{(z - z_I)u_G^*}{\nu_G} \quad \text{et} \quad z_L^+ = \frac{(z - z_I)u_L^*}{\nu_L} \tag{4.4.1}$$

Puisque $h_G = h_L = h$ et $Re_G^* = Re_L^*$, les deux variables z_G^+ et z_L^+ sont identiques pour une distance $|z - z_I|$ donnée à l'interface. On pose donc :

$$z^+ = z_G^+ = z_L^+ \tag{4.4.2}$$

Dans la suite, les différentes grandeurs statistiques sont présentées en fonction de la position z^+.

4.4.1 Particularité des méthodes à interface diffuse

Pour une méthode à interface diffuse la séparation des phases n'est par définition pas aussi nette qu'avec une méthode comprenant une étape de reconstruction de l'interface. Si dans une approche lagrangienne, les domaines délimités par l'interface correspondent à des zones ayant une masse volumique et une viscosité constantes, dans le cas d'une méthode à interface diffuse, il existe par construction dans ces domaines, des zones ou points ayant des propriétés physiques

comprises entre celles des deux phases en présence. Dans la suite, l'interface moyenne est repérée par l'isocontour $< C >= 0.5$.

4.4.2 Vitesse moyenne

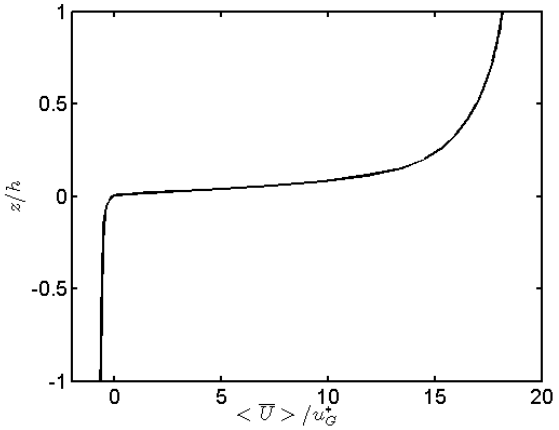


FIGURE 4.4.1 – Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_G$ dans tout le domaine

La vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} >$ (figure 4.4.1) est continue avec un changement de pente à la traversée de l'interface dû au contraste des viscosités. Au-dessus de l'interface, le profil de vitesse est typique d'un écoulement rencontré près d'une paroi (figure 4.4.2). Il apparaît une sous-couche logarithmique correspondant à des positions $z^+ \geq 30$ dans laquelle le profil de vitesse moyenne suit la loi $< \overline{U} >^+_G = 2.5\ ln\ z^+ + 5.8$. On note également l'existence près de l'interface ($z^+ \leq 5$), d'une sous-couche visqueuse. Le fait que cette sous-couche visqueuse soit incluse dans la zone interfaciale ne permet pas de vérifier de façon rigoureuse le profil théorique de vitesse $< \overline{U} >^+_G = (< \overline{U} > - < \overline{U} >_I)/u^*_G = z^+_G$ où $< \overline{U} >_I$ est la vitesse moyenne à l'interface. En fait, la vitesse dans la zone interfaciale est un peu plus faible que la vitesse théorique. Cela s'explique par le fait que l'étalement numérique de l'interface amoindrit localement les contraintes tangentielles.
Quant au liquide, le profil de vitesse longitudinale $< \overline{U} >^+_L = (< \overline{U} >_I - < \overline{U} >)/ < u^*_L >$ présente en partant de l'interface une sous-couche visqueuse correspondant aux positions $|z^+| \leq 3$, puis une zone tampon et une sous-couche logarithmique dans laquelle le profil de vitesse suit la loi $< \overline{U} >^+_L = (< \overline{U} >_I - < \overline{U} >)/u^*_L = 2.5\ ln\ |z^+_L| + 3.7$ avant de s'adapter plus loin à la condition de symétrie imposée sur la frontière inférieure. Le comportement de la couche limite turbulente du côté liquide correspond ainsi à celui observé sous une interface cisaillée avec une épaisseur caractéristique de sous-couche visqueuse de l'ordre de 3 unités de parois. De plus, le coefficient pour la loi de vitesse dans la zone logarithmique est bien inférieur à celui observé au voisinage d'une paroi. Ce constat est directement lié à la plus faible épaisseur de la sous-couche visqueuse. Dans leurs études de la turbulence monophasique sous une interface cisaillée, Calmet et Magnaudet ([17] et [18]) ont obtenu pour le profil de vitesse dans la zone logarithmique un coefficient à l'origine d'environ 0.9 ($< \overline{U} >^+ = < \overline{U} > /u^* = 2.5\ ln\ |z^+| + 0.9$) et une épaisseur de sous-couche visqueuse d'environ 3 unités de paroi. Les valeurs numériques supérieures obtenues dans nos simulations sont directement liées à l'étalement de la zone interfaciale sur quasiment 4 unités de paroi. Cette dernière augmente l'épaisseur de la sous-couche visqueuse et par conséquent le coefficient à l'origine du profil de vitesse dans la zone logarithmique.

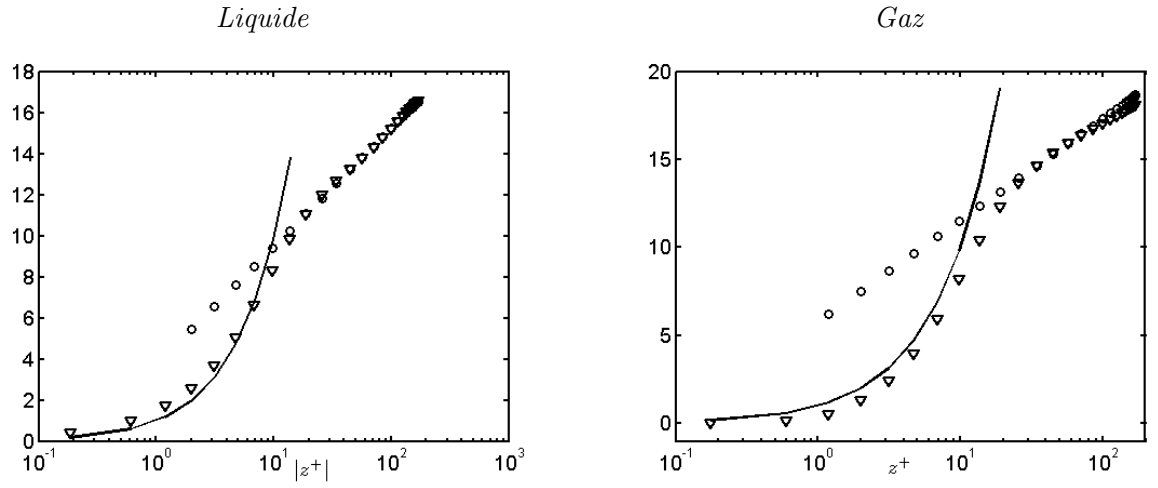


FIGURE 4.4.2 – Vitesse $| < \overline{U} >^+ | = | < \overline{U} > - < \overline{U} >_I |/u^*$ au voisinage de l'interface
Liquide : $(\triangledown)$ $| < \overline{U} >_L^+ |$, $(-)$ $| < \overline{U} >_L^+ | = |z_L^+|$, $(\circ)$ $| < \overline{U} >_L^+ | = 2.5\ ln\ |z^+| + 3.7$
Gaz : $(\triangledown)$ $< \overline{U} >_G^+$, $(-)$ $< \overline{U} >_G^+ = z^+$, $(\circ)$ $< \overline{U} >_G^+ = 2.5\ ln\ z^+ + 5.8$

La figure 4.4.3 (a) représentant la vitesse longitudinale moyenne du gaz normalisée par la vitesse de frottement u_G^* montre que notre modèle fournit une bonne estimation de la vitesse moyenne en comparaison des résultats de la simulation directe. Les écarts observés dans la couche logarithmique $z^+ > 20$ s'expliquent probablement par la grande sensibilité du profil de vitesse dans cette région vis-à-vis de la discrétisation spatiale. De plus, le modèle à un fluide amoindrit la vitesse longitudinale du gaz dans la zone interfaciale.

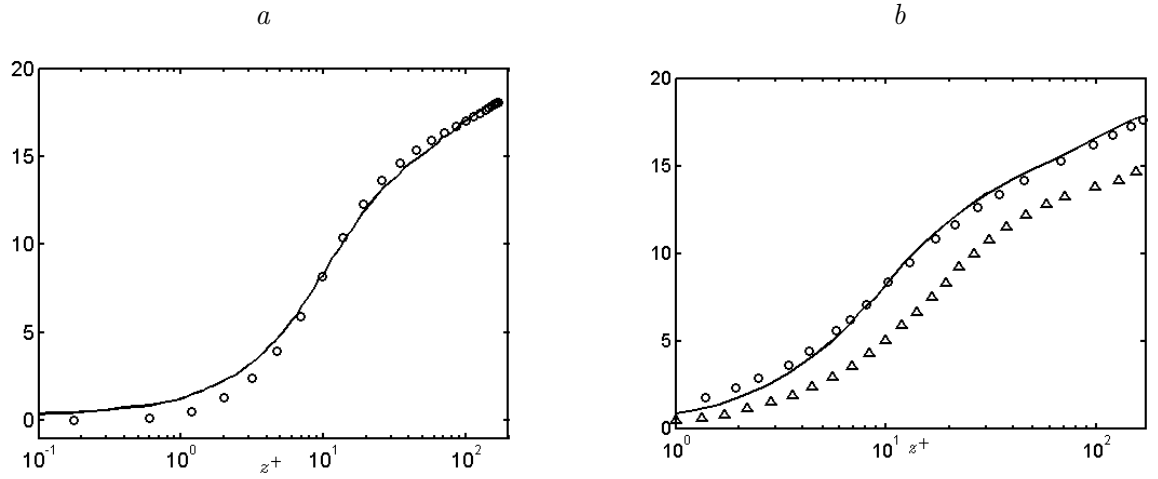


FIGURE 4.4.3 – Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u_G^*$ dans le gaz
a : $(-)$ SND et $(\circ)$ nos résultats
b (Lakehal et *al.* [42]) : $(-)$ SND
$(\triangle)$ Modèle de Smagorinsky, $(\circ)$ Modèle de Smagorinsky corrigé

Dans leur travaux concernant une interface quasi-plane, Lakehal et *al.* [42] notent que le modèle de Smagorinsky prédit et sous-estime grossièrement la vitesse de l'écoulement. En le corrigeant

grâce à une fonction d'attenuation, ils obtiennent une meilleure estimation de cette vitesse (figure 4.4.3 (*b*)). On constate en comparant ces figures 4.4.3 l'apport du modèle dynamique qui évite l'introduction d'une fonction d'atténuation ad hoc. La méthode d'estimation des contraintes de sous-maille introduite par Lakehal et *al.* [42] nécessite d'évaluer la distance à l'interface. Ce calcul est délicat dans le cas général et la difficulté s'accroît considérablement pour les écoulements tridimensionnels. De plus, cette approche est adaptée à des écoulements présentant un fort contraste de densité puisqu'elle s'appuie sur l'analogie entre une interface et une paroi mobile. Dans le cas où les fluides en présence n'offrent pas un contraste de densité important, par exemple dans une configuration liquide-liquide, cette approche tombe certainement en défaut tandis que celle que nous utilisons reste applicable sans modification.

4.4.3 Intensités turbulentes de vitesse

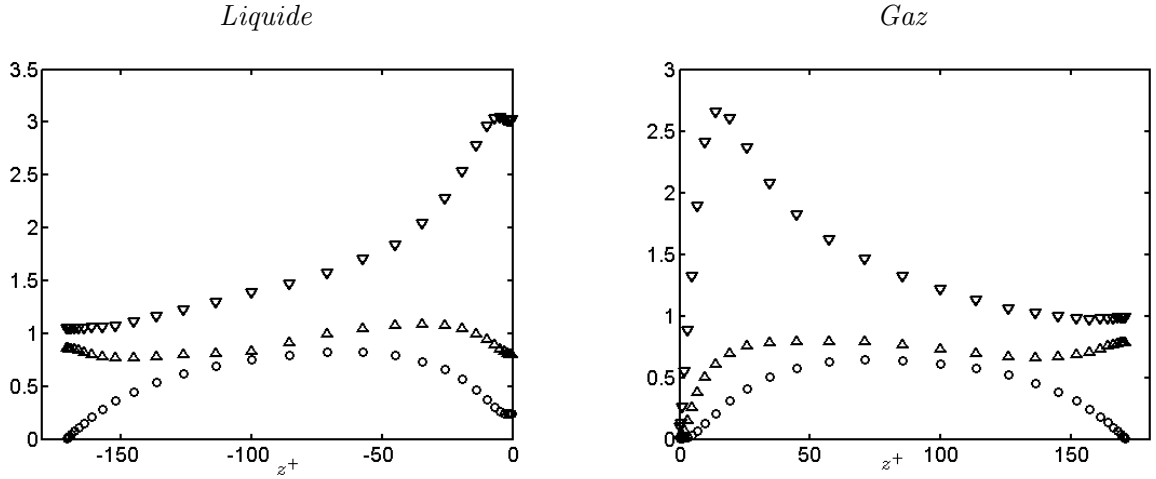


FIGURE 4.4.4 – Intensités turbulentes résolues normalisées par u^*
$(\triangledown)\ \sqrt{<\overline{u}'^2>}$, $(\triangle)\ \sqrt{<\overline{v}'^2>}$, $(\circ)\ \sqrt{<\overline{w}'^2>}$

Les figures 4.4.4 montrent l'évolution des fluctuations de vitesses normalisées par la vitesse de cisaillement u^* en fonction de la coordonnée z^+ dans les deux phases. Les fluctuations normales sont nulles aux frontières supérieure du côté gaz et inférieure du côté liquide à cause de la condition de symétrie qui y est imposée. On note de plus, une redistribution de l'énergie des fluctuations normales vers les composantes tangentielles typique d'une surface libre ([17] et [18]). Les différences entre les deux phases apparaissent près de l'interface. En effet, au niveau de l'interface côté gaz, les fluctuations turbulentes sont très faibles et présentent une très forte anisotropie caractéristique de la turbulence de paroi. La présence de l'interface a donc considérablement réduit la turbulence. Ces fluctuations turbulentes ne sont toutefois pas rigoureusement nulles du fait du caractère déformable et mobile de l'interface. L'analogie entre une paroi solide et l'interface gaz-liquide se retrouve cependant dans la position du maximum de l'intensité turbulente qui est identique dans les deux cas et se situe environ à $z^+ \approx 13$.

Quant au liquide, les intensités turbulentes ont un comportement typique de la turbulence observée sous une interface cisaillée. En effet, la fluctuation normale est faible mais non rigoureusement nulle. Cela s'explique par le déplacement vertical de l'interface. Dans le cas d'une interface cisaillée non déformable, cette composante est nulle du fait de la condition d'imperméabilité $\overline{v}' = 0$ ([16], [17] et [18]). Les composantes tangentielles quant à elles, subsistent sous l'interface. La

composante longitudinale atteint même son maximum sur l'interface. La valeur de ce maximum $max(\sqrt{\overline{u}'^2}/u_L^*) \approx 3$ est plus importante qu'au voisinage d'une paroi rigide puisque dans ce cas la fluctuation longitudinale n'a pas à décroître pour s'annuler à la frontière. On remarque que les dérivées normales à l'interface des fluctuations tangentielles sont quasi-nulles ($\partial\overline{u}'/\partial z \approx 0$) du fait du raccordement du cisaillement à l'interface conditionné par un fort constraste de viscosité ($R_\mu = 29.9$).

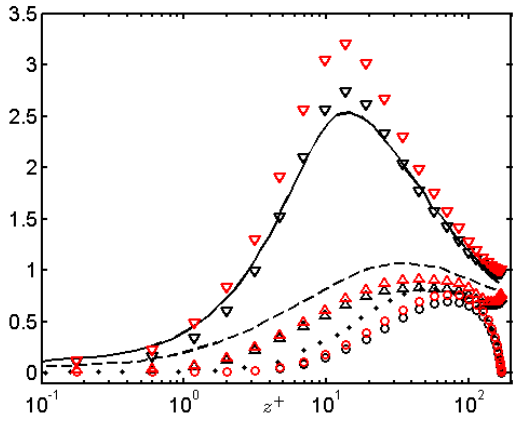


FIGURE 4.4.5 – Fluctuations de vitesse dans le gaz normalisées par u_G^*
SND : $(-)$ $\sqrt{<\overline{u}'^2>}$, $(--)$ $\sqrt{<\overline{v}'^2>}$, $(...)\sqrt{<\overline{w}'^2>}$
Nos travaux : $(\triangledown)$ $\sqrt{<\overline{u}'^2>}$, $(\triangle)$ $\sqrt{<\overline{v}'^2>}$, $(\circ)$ $\sqrt{<\overline{w}'^2>}$
Nos travaux : $(\triangledown)$ $\sqrt{\Gamma_1}$, $(\triangle)$ $\sqrt{\Gamma_2}$, $(\circ)$ $\sqrt{<\Gamma_3}$

Les intensités turbulentes résolues (figure 4.4.5) fournies par notre modèle sont globalement en accord avec celles de la simulation directe. Les positions des maxima sont respectées dans les trois directions. L'accord concernant la composante longitudinale est bon. L'intensité maximale est voisine de $3u^*$, ce qui est plus conforme à la moyenne des résultats de paroi que la valeur 2.5 rapportée dans [42]. En revanche, les composantes transversale $\overline{v}'$ et normale $\overline{w}'$ apparaissent sous-estimées. Dans une modélisation dynamique mixte, la composante de Léonard est évaluée à partir du champ résolu et l'on peut donc obtenir une estimation améliorée de l'intensité turbulente dans la direction i sous la forme :

$$\Gamma_i =< \overline{u}_i'^2 > + < \mathbf{L}_{ii} > \qquad \text{avec} \qquad \mathbf{L}_{ii} = \overline{\overline{U}_i\,\overline{U}_i} - \overline{\overline{U}}_i\,\overline{\overline{U}}_i \tag{4.4.3}$$

En tenant compte de la contribution de Léonard, les résultats revèlent une augmentation de la composante longitudinale autour de la position du maximum tandis que les composantes transversale et normale restent sous-estimées (figure 4.4.5).

4.4.4 Cisaillement turbulent

Les cisaillements turbulents normalisés par les vitesses de frottement u^{*^2} dans chaque phase sont représentés sur la figure 4.4.6. Comme précédemment, le cisaillement turbulent Σ ne se réduit pas au seul terme $- < \overline{u}'\,\overline{w}' >$, mais s'obtient par la somme de trois contributions :

$$\Sigma = - < \overline{u}'\,\overline{w}' > - < L_{13} > - < R_{13} > \tag{4.4.4}$$

$$\text{avec} \quad < L_{13} > =< \overline{\overline{U}\,\overline{W}} - \overline{\overline{U}}\,\overline{\overline{W}} > \qquad \text{et} \qquad < R_{13} > =< \nu_{sm}\left(\frac{\partial\overline{U}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial x}\right) > \tag{4.4.5}$$

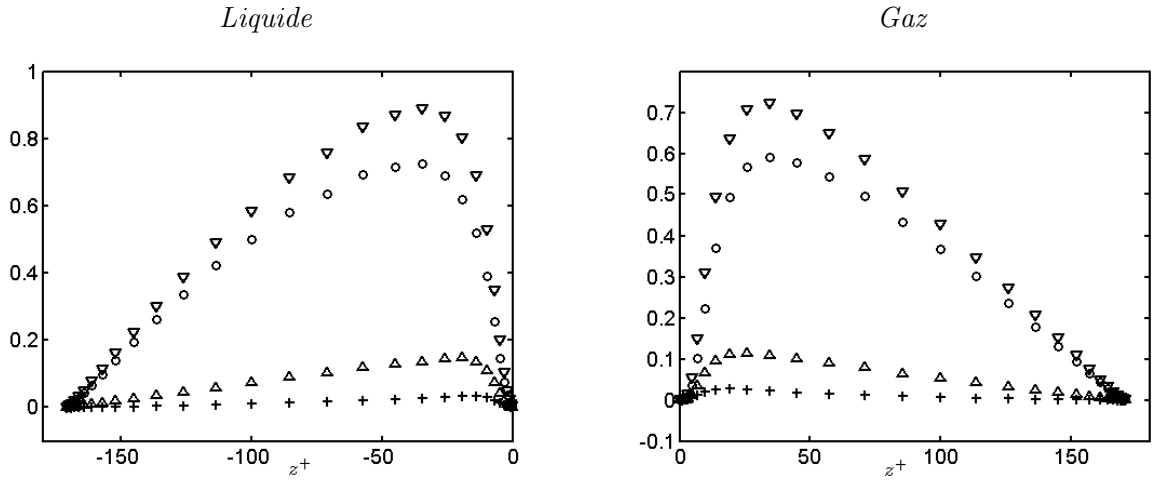


FIGURE 4.4.6 – Cisaillement turbulent moyen normalisé par u^{*^2}
$(\circ) - < \overline{u}' \ \overline{w}' >$, $(\triangle) - < L_{13} >$, $(+) \quad - < R_{13} >$,
$(\triangledown)\ \Sigma = -(< \overline{u}' \ \overline{w}' > + < L_{13} > + < R_{13} >)$

Les composantes de Léonard $< L_{13} >$ et de sous-maille $< R_{13} >$ traduisent la contribution des petites échelles. Cette dernière n'est significative que dans les régions de fort cisaillement c'est-à-dire au voisinage de l'interface. La contribution directement modélisée $< R_{13} >$ est négligeable devant les deux autres termes. Les cisaillements turbulents exhibent dans les deux phases, en dehors des régions où les contraintes visqueuses sont significatives, le comportement linéaire attendu.

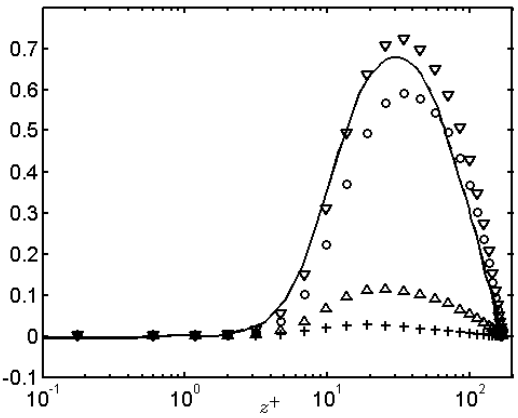


FIGURE 4.4.7 – Cisaillement turbulent dans le gaz normalisé par $u_G^{*^2}$
$(-)$ Cisaillement turbulent prédit par la SND
$(\circ) - < \overline{u}' \ \overline{w}' >$, $(\triangle) - < L_{13} >$, $(+) \quad - < R_{13} >$,
$(\triangledown)\ \Sigma = -(< \overline{u}' \ \overline{w}' > + < L_{13} > + < R_{13} >)$

Le résulat fourni par le modèle dynamique mixte est en bon accord avec la simulation directe et ceci parce qu'il tient compte de la contribution des petites échelles comme le montre la figure 4.4.7. Le modèle respecte la position et l'intensité du maximum de cisaillement. Fulgosi et *al.*

[23] ont observé un maximum de cisaillement proche d'une interface gaz-liquide inférieur à celui obtenu au-dessus d'une paroi solide. Cela s'explique par la mobilité du fluide autorisée par les déformations de l'interface y compris dans les directions tangentielles.

4.4.5 Bilan d'énergie cinétique turbulente

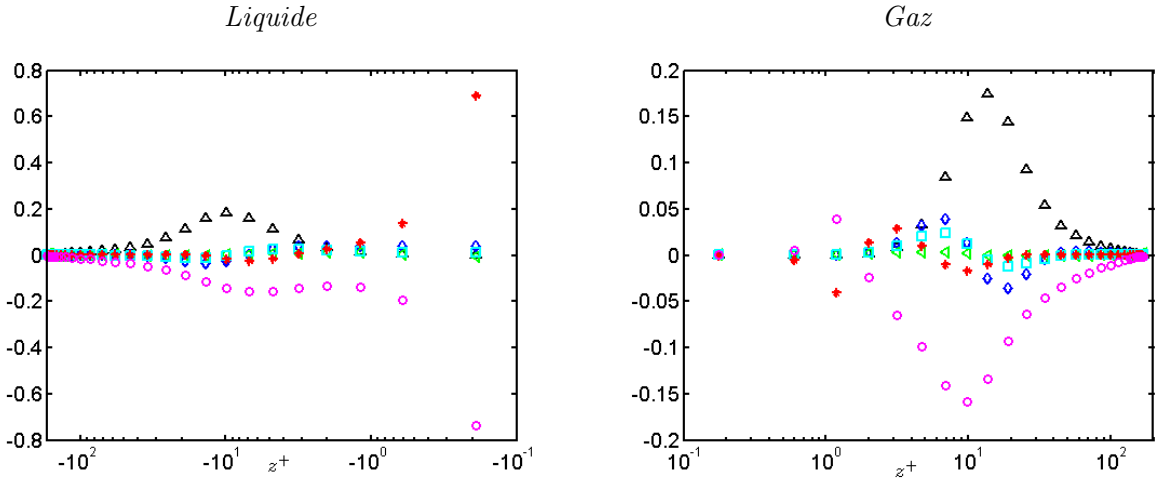


FIGURE 4.4.8 – Bilan d'énergie cinétique normalisé par u^{*4}/ν
$(\triangle)P$, $(\triangleleft)\Pi$, $(\diamond)T$, $(\square)TL$, $(*)D$, $(\circ)\epsilon$

On s'intéresse maintenant aux mécanismes contribuant au bilan d'énergie cinétique turbulente $k = \left(< \overline{u}'^2 > + < \overline{v}'^2 > + < \overline{w}'^2 >\right)/2$. Pour un écoulement monophasique incompressible pleinement développé, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k qui se déduit des équations de Navier-Stokes peut se mettre sous la forme :

$$\frac{Dk}{Dt} = 0 = P + \Pi + T + D + \epsilon \tag{4.4.6}$$

avec

$$P = - < \overline{u}'_i \overline{w}' > \frac{\partial < \overline{U}_i >}{\partial z}, \quad \text{production par les gradients de vitesse} \tag{4.4.7}$$

$$\Pi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z} < \overline{p}' \overline{w}' >, \quad \text{diffusion par la pression} \tag{4.4.8}$$

$$T = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z} < \overline{u}'_i \overline{u}'_i \overline{w}' >, \quad \text{transport turbulent} \tag{4.4.9}$$

$$D = \frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2}{\partial z^2} < \overline{u}'_i \overline{u}'_i >, \quad \text{diffusion visqueuse} \tag{4.4.10}$$

$$\epsilon = -\nu < \frac{\partial \overline{u}'_i}{\partial z}\frac{\partial \overline{u}'_i}{\partial z} >, \quad \text{pseudo-dissipation} \tag{4.4.11}$$

Dans le cas où la masse volumique et la viscosité sont variables dans l'espace et où l'écoulement

est simulé par SGE les termes Π, D et ϵ s'écrivent :

$$0 = P + \Pi + T + TL + D + \epsilon \tag{4.4.12}$$

$$\Pi = -\frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial}{\partial z} <\overline{p}'\overline{w}'> \tag{4.4.13}$$

$$D = \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial}{\partial z}\left[<\overline{\mu} + \overline{\rho}\nu_{sm}> \frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'>\right] \tag{4.4.14}$$

$$\epsilon = -\frac{<\overline{\mu} + \overline{\rho}\nu_{sm}>}{<\overline{\rho}>} <\frac{\partial \overline{u}_i'}{\partial z}\frac{\partial \overline{u}_i'}{\partial z}> \tag{4.4.15}$$

De plus, il apparaît une contribution supplémentaire TL au transport provenant du calcul explicite des termes de Léonard, dite "terme de cascade" et qui s'exprime par :

$$TL = -\frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i' L_{i3}'> \tag{4.4.16}$$

Le terme de diffusion visqueuse D tient désormais compte de la diffusion par la viscosité du fluide et la viscosité de sous-maille qui ne sont plus constantes mais variables dans l'espace. Il faut également garder à l'esprit que le terme de diffusion par la pression Π contient la contribution de l'énergie cinétique de sous-maille ($\overline{p} = \overline{p} + 1/3\overline{\rho}Tr(\mathbf{R})$). De plus, dans le terme Π, la masse volumique n'est plus constante. Le taux de dissipation ϵ fait intervenir plusieurs contributions liées aux variations de la densité $\overline{\rho}$ et de la viscosité $\overline{\mu}$ et seul le terme dominant est explicité ci-dessus. Dans notre analyse, le terme de pseudo-dissipation est évalué par différence des autres termes constituant le bilan d'énergie cinétique :

$$\epsilon = -P - \Pi - T - TL - D \tag{4.4.17}$$

Les différentes contributions normalisées par ${u^*}^4/\nu$ sont représentées sur la figure 4.4.8. Dans le gaz, ces contributions présentent les mêmes tendances que dans le cas d'un écoulement au-dessus d'une paroi solide. Dans la zone logarithmique $z^+ \geq 30$, il y a équilibre entre la production P et la dissipation ϵ. On note ensuite la présence d'une zone tampon $5 \leq z^+ \leq 30$ dans laquelle les termes de transport turbulent T et de cascade TL interviennent significativement dans le bilan. Enfin dans la sous-couche $z^+ \leq 3$, le taux de dissipation compense entièrement la diffusion visqueuse. Le pic de production se trouve à l'abscisse $z^+ = 13$, ce qui correspond à la position du maximum de $<\overline{u}'^2>$.

Fulgosi et *al.* [23] (figure 4.4.9) ont observé que pour un cisaillement donné, la dissipation et la diffusion visqueuse sont plus faibles près d'une interface déformable que d'une paroi solide, ce qui est cohérent avec la relaxation de la condition d'adhérence permise par les mouvements de l'interface.
On peut observer sur le profil de la diffusion visqueuse (figure 4.4.10) l'impact de l'épaisseur numérique de l'interface. En effet, les résultats de nos simulations diffèrent des résultats de la simulation directe lagrangienne au voisinage de l'interface car la diffusion visqueuse n'est pas maximale à l'interface. Il apparait un changement de comportement de ce terme dans le cas d'une méthode d'interface diffuse. Au lieu d'atteindre son maximum sur l'interface moyenne $z^+ \approx 0$, le terme de diffusion visqueuse chûte brutalement. Les points concernés par ce phénomène dans la phase gazeuse appartiennent bien à la région interfaciale (figure 4.4.10) puisqu'ils correspondent tous à un taux de présence compris entre $0 < C < 1$. La densité et surtout la viscosité y sont variables et non plus constantes comme dans le cas d'une méthode lagrangienne. Cette zone proche de l'interface est en fait polluée par les variations des propriétés physiques. L'analogie

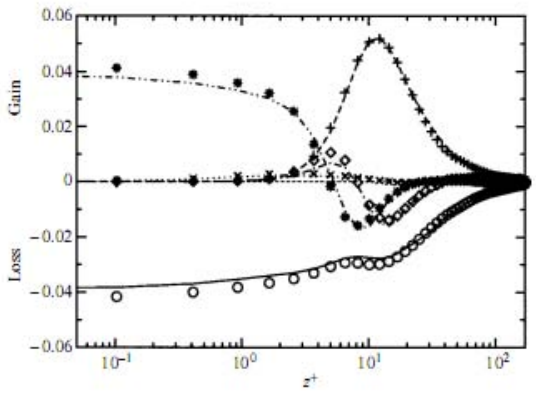


FIGURE 4.4.9 – Bilan d'énergie cinétique dans le gaz extrait de Fulgosi et *al.* [23]
Les traits représentent les résultats pour une interface faiblement déformée et les symboles pour une paroi plane
(−) et (∘) : dissipation, (−−) et (+) : production, (...) et (x) : diffusion par la pression,
(−.−) et (⋄) : transport turbulent, (−..−) et (∗) : diffusion visqueuse

entre l'interface et une paroi mobile se rétrouve en dehors de la zone interfaciale. Pour comprendre ce phénomène, il faut s'intéresser à l'expression de la diffusion visqueuse D donnée par :

$$D = \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(\frac{\partial <\overline{\mu}>}{\partial z} + \frac{\partial <\overline{\rho}\nu_{sm}>}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> + \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(<\overline{\mu}> + <\overline{\rho}\nu_{sm}>\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> \tag{4.4.18}$$

La zone interfaciale correspond aux transitions des propriétés physiques du fluide équivalent

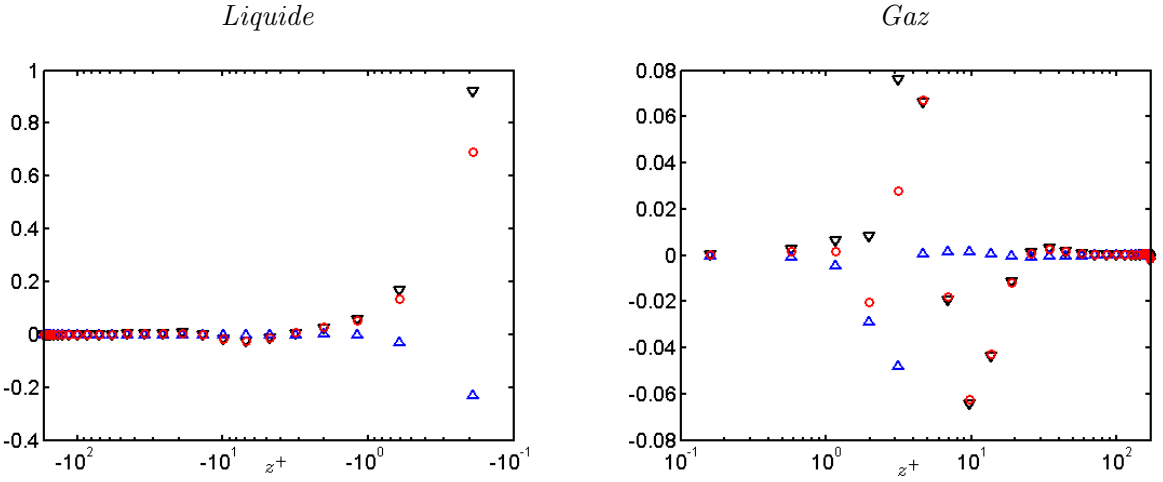


FIGURE 4.4.10 – Diffusion visqueuse $D\nu/u^{*4}$
(∇) $D_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(<\overline{\mu}> + <\overline{\rho}\nu_{sm}>\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'>$,
$(\triangle) D_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(\frac{\partial <\overline{\mu}>}{\partial z} + \frac{\partial <\overline{\rho}\nu_{sm}>}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'>$, $(\circ)$ $D = D_1 + D_2$

entre les valeurs du gaz et celles du liquide. La viscosité dynamique $<\overline{\mu}>$ n'est plus constante et évolue sous la forme d'une fonction de Heaviside entre les viscosités du gaz et du liquide $\mu_G \leq \overline{\mu} \leq \mu_L$ et sa dérivée $\partial <\overline{\mu}> /\partial z$ est proche d'une fonction de Dirac. Cette propriété particulière $\partial <\overline{\mu}> /\partial z \neq 0$ vient polluer et modifier l'évolution de la diffusion visqueuse dans la zone interfaciale au travers de la contribution :

$$D_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(\frac{\partial <\overline{\mu}>}{\partial z} + \frac{\partial <\overline{\rho}\nu_{sm}>}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> \tag{4.4.19}$$

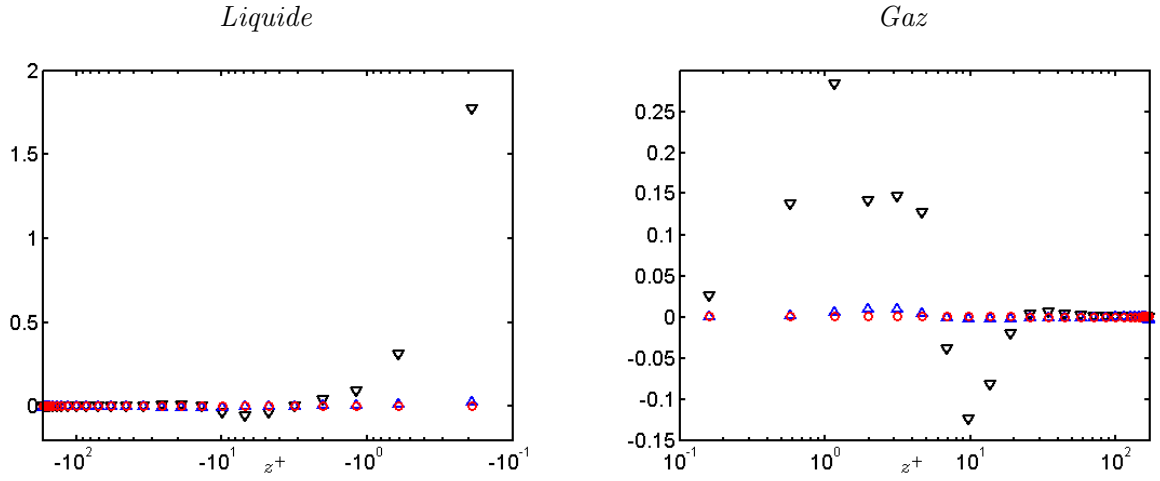


FIGURE 4.4.11 – Terme $(\partial^2 <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> /\partial z^2)(\nu^2/u^{*^4})$
$(\triangledown)$ $\partial^2 <\overline{u}'\overline{u}'> /\partial z^2$, $(\triangle)$ $\partial^2 <\overline{v}'\overline{v}'> /\partial z^2$, $(\circ)$ $\partial^2 <\overline{w}'\overline{w}'> /\partial z^2$

À cela, s'ajoutent les effets implicites de la variation de la viscosité dynamique dans la zone interfaciale. En fait, la dérivée seconde $\partial^2 <\overline{u}'\overline{u}'> /\partial z^2$ qui correspond à des petites fluctuations, est directement modifiée par la modélisation adoptée (cf. chapitre suivant). L'augmentation de la viscosité dynamique entre μ_G et μ_L entraîne une réduction de la dérivée $\partial^2 <\overline{u}'\overline{u}'> /\partial z^2$. Ce terme, qui subirait un saut brutal à la traversée de l'interface dans une approche lagrangienne évolue et diminue progressivement dans le cadre d'une méthode d'interface diffuse (figure 4.4.11). Cette décroissance du terme $\partial^2 <\overline{u}'\overline{u}'> /\partial z^2$ est ensuite amplifiée dans le calcul de la diffusion visqueuse D par la diminution de la viscosité cinématique du fluide ($\nu_G \geq <\overline{\nu}> \geq \nu_L$). Finalement, les modifications du terme de diffusion visqueuse D se répercutent immédiatement sur le terme de pseudo-dissipation ϵ.

Du côté liquide (figure 4.4.8), le comportement des termes intervenant dans le bilan d'énergie cinétique turbulente est bien différent de celui observé au-dessus de l'interface. Dans la zone interfaciale, la diffusion visqueuse D est prédominante et compensée par la dissipation ϵ. Ce résultat diffère de celui qui était pressenti puisque le liquide est sensé percevoir l'interface comme une surface cisaillée. Ainsi, Calmet et Magnaudet ([17] et [18]) dans leur analyse de la turbulence monophasique sous une interface cisaillée, ont observé un équilibre entre la dissipation ϵ et les termes de transport turbulent T et de cascade TL sur l'interface et non entre ϵ et la diffusion D. La diffusion visqueuse y était négligeable. La différence de comportement avec nos résultats est liée à l'étalement numérique de la zone interfaciale. La variation continue de la viscosité dynamique dans cette zone entraîne une diminution progressive de la diffusion visqueuse en lieu et place d'un saut à la traversée de l'interface dans une configuration lagrangienne (figure 4.4.11).

L'épaisseur numérique accordée à l'interface a donc modifié et masqué l'équilibre physique qui était attendu.

En dehors de cette modification de la diffusion visqueuse par le caractère diphasique du modèle, on observe dans la couche $6 \leq |z^+| \leq 30$ des termes de transport turbulent T et de cascade TL négatifs. Ces termes contribuent à ôter une partie de l'énergie cinétique de cette région de l'écoulement pour alimenter la zone plus proche de l'interface $|z^+| \leq 5$ où ils sont positifs. De ce fait, contrairement au cas d'une paroi, ces termes ne s'annulent pas à l'interface et y atteignent même leur maximum. En revanche, loin de l'interface, au-delà de $|z^+| > 30$, la dissipation ϵ compense la production P par le mouvement moyen. De plus, le pic de production est atteint pour une position $|z^+| \approx 10$ situé légèrement plus près de l'interface que celle observée au voisinage d'une paroi. Cette variation est directement liée à la plus faible épaisseur de la sous-couche visqueuse. Ces résultats sont en accord avec ceux de Calmet et Magnaudet [17] et [18]. Dans ces études, le maximum de production est localisé à une position $|z^+| \approx 6$. La différence avec notre étude provient certainement de l'étalement numérique de la zone interfaciale jusqu'à $|z^+| \approx 4$ qui augmente artificiellement la zone d'influence des effets visqueux sous l'interface. Ce résultat est cohérent avec les écarts également observés sur le profil de vitesse longitudinale dans le liquide.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé le modèle à un fluide turbulent que nous avons développé pour simuler un écoulement à phases séparées turbulent-turbulent avec une interface gaz-liquide faiblement déformée. Cette configuration a été préalablement étudiée par Fulgosi et *al.* [23] à l'aide de la simulation numérique directe couplée à une méthode lagrangienne pour le suivi de l'interface. Le choix de l'approche lagrangienne limite le domaine d'application à des écoulements caractérisés par une interface faiblement déformée, tandis que notre approche ne souffre pas de cette limitation.

Le modèle que nous avons développé constitue à notre connaissance l'un des premiers à traiter la turbulence avec une méthodologie d'interface diffuse. Il ne contient aucune étape de reconstruction de l'interface et peut servir à la simulation d'une plus large gamme d'écoulements diphasiques (interfaces faiblement et fortement déformées). Les résultats fournis par ce modèle sont globalement en bon accord avec ceux obtenus par Fulgosi et *al.* [23] dont la méthodologie est plus coûteuse mais aussi plus précise. Il apparaît que dans un écoulement à phases séparées dominé par un rapport de densité important, le fluide léger (gaz) voit l'interface comme une paroi mobile tandis que le fluide lourd (liquide) la perçoit comme une surface à cisaillement imposé. La structure de l'interface et les caractéristiques de la turbulence près de celle-ci montrent toutefois l'existence d'une couche interfaciale où les résultats peuvent être pollués par les variations de densité et de viscosité. Il s'agit notamment des termes de diffusion visqueuse, ce qui influence les épaisseurs des sous-couches visqueuses.

La configuration analysée ici se caractérise par deux phases turbulentes. Nous allons maintenant nous intéresser à des écoulements diphasiques caractérisés par un film liquide laminaire cisaillé par un courant gazeux turbulent. Cela nous permettra de confronter le modèle à des situations où cohabitent des zones évoluant dans des régimes différents.

Chapitre 5

Simulation de film cisaillé par un courant gazeux turbulent

Sommaire

5.1 Introduction 83
5.2 Configuration 83
5.2.1 Présentation 83
5.2.2 Conditions périodiques 84
5.2.3 Conditions initiales 85
5.2.4 Conditions de simulation 86
5.3 Écoulement turbulent-laminaire 87
5.3.1 Interface moyenne 87
5.3.2 Vitesse moyenne 89
5.3.3 Intensités turbulentes résolues 90
5.3.4 Cisaillement turbulent 92
5.3.5 Termes de sous-maille 94
5.3.6 Bilan d'énergie cinétique turbulente 96
5.4 Conclusion 103

5.1 Introduction

Nous avons analysé au chapitre précédent le comportement du modèle à un fluide turbulent dans le cas d'un écoulement diphasique caractérisé par deux phases turbulentes. Cette situation a été choisie puisqu'elle offrait la possibilité de comparer à la fois qualitativement et quantitativement les résultats de nos simulations avec les observations faites par Fulgosi et *al.* [23]. Les écoulements auxquels nous allons désormais nous intéresser sont caractérisés par un film liquide laminaire cisaillé par un courant gazeux turbulent. L'accent sera mis sur le comportement du modèle en présence de zones ayant des régimes d'écoulements différents (laminaire, turbulent), les interactions entre les structures turbulentes et l'interface gaz-liquide et la capacité à capter les mécanismes de génération des déformations de l'interface.

5.2 Configuration

5.2.1 Présentation

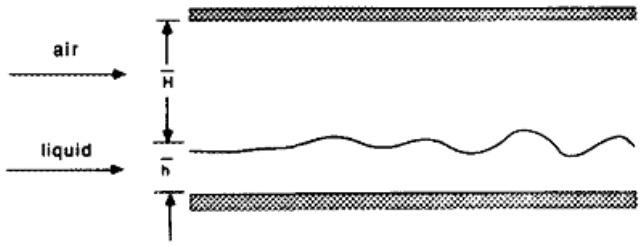


FIGURE 5.2.1 – Configuration d'écoulement étudiée par Jurman et McCready [35]

Les écoulements à phases séparées caractérisés par un film mince cisaillé par un écoulement gazeux turbulent ont été notamment étudiés théoriquement par Craik [21] et expérimentalement par Jurman et McCready ([34] et [35]) et Asali et Hanratty [5]. Ces auteurs s'intéressent particulièrement à la formation des ondes à la surface du liquide sous l'action du courant gazeux. Ils s'attachent notamment à établir des relations de dispersion caractérisant les ondes se propageant à la surface du liquide en fonction des nombres caractéristiques pertinents à savoir les nombres de Reynolds, de Weber et de Froude. L'idée principale à retenir est l'existence d'une compétition entre les effets déstabilisants (cisaillement, turbulence) et les effets stabilisants (tension de surface, gravité). La surface du film présente des instabilités s'il y a un déséquilibre entre ces différentes contributions.

Les configurations que nous allons étudier sont calquées sur les travaux de Jurman et McCready [35]. Ces auteurs s'intéressent à des écoulements gaz-liquide dans un canal rectangulaire horizontal. En conservant les propriétés physiques des fluides et en faisant varier les régimes d'écoulements des deux phases, Jurman et McCready ([34] et [35]) obtiennent une cartographie simplifiée de l'état de l'interface en fonction des nombres de Reynolds des deux phases. Cette cartographie représentée sur la figure 5.2.2 est bien entendu, conditionnée en plus des nombres de Reynolds par les nombres de Weber (effets capillaires) et de Froude (effets gravitationnels), les contrastes des propriétés physiques et le rapport des épaisseurs des phases. Il apparaît que pour un nombre de Reynolds liquide Re_L fixé, augmenter progressivement le débit gazeux (Re_G) favorise logiquement la déstabilisation de la surface du film.

La reproduction numérique de telles expériences doit nous permettre d'évaluer la capacité du modèle à respecter les différents régimes d'écoulements. Le modèle employé ne doit pas générer de structures turbulentes significatives dans les zones laminaires de l'écoulement. Il est censé s'adapter automatiquement aux conditions d'écoulement du fait de l'approche dynamique adoptée. Ce modèle peut également être utilisé pour reproduire numériquement des ondes apparaissant à la surface des films liquides grâce au suivi des interfaces.

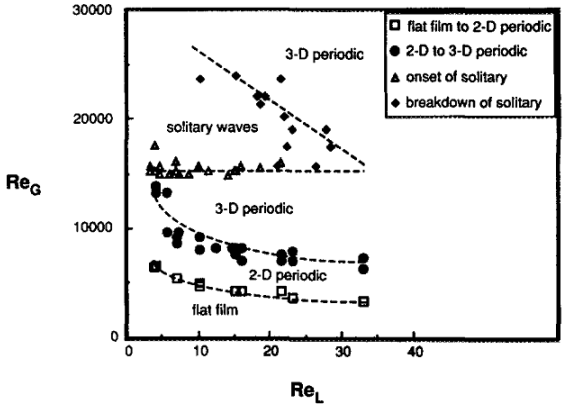


FIGURE 5.2.2 – Cartographie extraite de Jurman et McCready [35]

5.2.2 Conditions périodiques

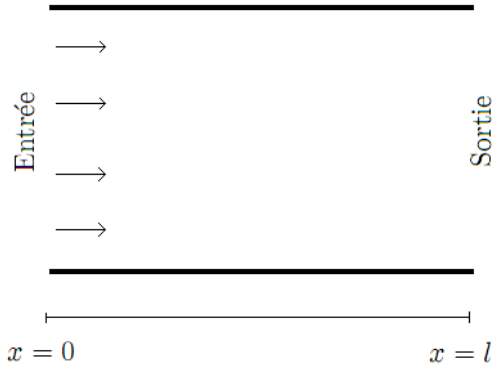


FIGURE 5.2.3 – Conditions de type entrée sortie

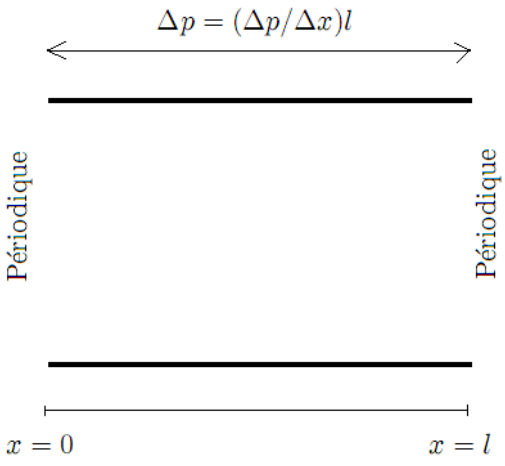


FIGURE 5.2.4 – Conditions périodiques

Jurman et McCready s'intéressent à des écoulements à phases séparées évoluant à co-courant (figure 5.2.1). Dans leurs expériences, ils imposent directement les débits des phases. Du point de vue numérique, ceci revient à utiliser des conditions de type entrée/sortie, la zone d'entrée servant à injecter les flux et la sortie à les évacuer. Les conditions de type entrée/sortie (figure

5.2.3) assurent un contrôle précis des débits des phases. Les approximations utilisées à la sortie ne doivent ni générer de reflux ni perturber l'écoulement amont. Il est toutefois difficile de trouver une solution générique capable de traiter efficacement la sortie, qui est en réalité une troncature du domaine physique, pour les écoulements incompressibles. La complexité s'accroît s'il s'agit en plus d'évacuer des structures turbulentes. Pour ces raisons, nous utilisons dans nos simulations des conditions périodiques (figure 5.2.4) qui assurent automatiquement la conservation de la masse. Le flux de l'écoulement est généré et entretenu par une perte de charge Δp imposée dans la direction périodique. Néanmoins, les quantités de matière ne sont pas rigoureusement maîtrisées. Elles sont en réalité évaluées a posteriori. Il est toutefois possible à l'aide de considérations analytiques d'estimer le débit de l'écoulement à partir de la valeur du gradient de pression. Nous montrerons dans l'annexe A comment sont choisis les gradients de pression pour des écoulements particuliers en régimes turbulent et laminaire.

5.2.3 Conditions initiales

Le champ de vitesse turbulent est d'abord établi seul (configuration monophasique) au nombre de Reynolds Re_G^* souhaité, le courant gazeux s'écoulant au-dessus d'une paroi rigide. Notons $\mathbf{u}_{G,Mono} = (u_{G,Mono}(x,y,z), v_{G,Mono}(x,y,z), w_{G,Mono}(x,y,z))$ le champ turbulent obtenu et $u^*_{G,Mono}$ la vitesse de frottement à la paroi. Cette vitesse $u^*_{G,Mono}$ servira à la normalisation des grandeurs statistiques dans la phase gazeuse. On aura donc :

$$u^*_{G,Mono} = \frac{\nu_G Re^*_G}{h_G} \tag{5.2.1}$$

où $h_G = (\delta_2 - \delta_I)/2$ dans une configuration canal et $h_G = \delta_2 - \delta_I$ dans le cas d'un demi-canal.

À l'instant initial, l'interface est plane et se situe à l'ordonnée $z = \delta_I = h_L$. Lorsque les deux phases sont en contact, il y a continuité des contraintes tangentielles à la traversée de l'interface. Ainsi, le cisaillement à l'interface est égal à l'instant $t = 0$, au cisaillement de l'écoulement gazeux monophasique :

$$|\tau_I| = \rho_G u^{*^2}_{G,Mono} \tag{5.2.2}$$

On introduit la vitesse de frottement $u^*_{L,Mono}$ du côté liquide assurant la continuité du cisaillement à l'interface :

$$|\tau_I| = \rho_G u^{*^2}_{G,Mono} = \rho_L u^{*^2}_{L,Mono} \tag{5.2.3}$$

Le profil de vitesse dans la phase liquide est une parabole (A-30) conditionnée par une vitesse nulle à la paroi inférieure et un cisaillement à l'interface τ_I imposé par le courant gazeux :

$$U(z) = a\left(z^2 - \delta_1^2\right) + \left(\frac{\tau_I}{\mu_L} - 2a\delta_I\right)(z - \delta_1) \tag{5.2.4}$$

$$a = \frac{3}{4}\frac{\tau_I}{\mu_L\left(\delta_I - \delta_1\right)} - \frac{3\mu_L Re_L}{2\rho_L\left(\delta_I - \delta_1\right)^3} \tag{5.2.5}$$

Afin d'assurer la continuité de la vitesse à la traversée de l'interface, nous supposons que la vitesse de l'interface est communiquée par le liquide au gaz. Finalement, à l'instant initial, l'interface est plane et se trouve à l'ordonnée δ_I et le champ de vitesse dans le domaine est :

$$\mathbf{u}_L(x,y,z,t=0) = (U(z), 0, 0) \tag{5.2.6}$$

$$\mathbf{u}_G(x,y,z,t=0) = (U(z=\delta_I) + u_{G,Mono}(x,y,z), v_{G,Mono}(x,y,z), w_{G,Mono}(x,y,z)) \tag{5.2.7}$$

La procédure d'initialisation adoptée assure à la fois, à l'instant initial, la continuité de la vitesse et du cisaillement au niveau de l'interface. Elle suppose que le cisaillement est imposé par le gaz tandis que la vitesse est donnée par le liquide.

5.2.4 Conditions de simulation

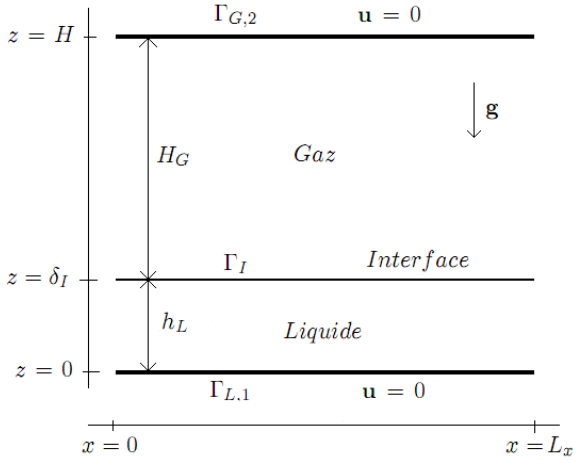


FIGURE 5.2.5 – Domaine de calcul

La configuration analysée s'appuie sur les expériences de Jurman et McCready ([34] et [35]). Il s'agit d'un canal horizontal (figure 5.2.5) dont l'épaisseur totale H est égale à la somme des épaisseurs des phases liquide h_L et gazeuse H_G. On introduit la variable $h_G = H_G/2$ représentant la demi-hauteur de la phase gazeuse. Les frontières inférieure ($z = 0$) et supérieure ($z = H$) sont des parois rigides ($\mathbf{u} = 0$). Nous avons fait le choix de simuler le canal complet car d'une part le rapport des hauteurs $h_L/h_G \approx 0.3$ n'est pas suffisamment faible pour considérer que la zone d'interaction entre les structures turbulentes du courant gazeux et l'interface se situe dans la moitié inférieure de l'écoulement du gaz. Il n'est donc pas pertinent de limiter cette étude à un demi-canal avec une condition de symétrie (cisaillement nul) à la frontière supérieure Γ_2. De plus, simuler le canal complet nous fournit directement des éléments de comparaison entre les comportements des structures turbulentes au voisinage de la paroi rigide supérieure et de l'interface gaz-liquide.

En ce qui concerne les dimensions du canal, puisque des conditions périodiques sont utilisées dans les directions longitudinale x et transversale y, il est nécessaire que les longueurs du domaine dans ces directions soient supérieures aux distances de corrélation des vitesses. Le domaine de calcul est ainsi choisi avec une longueur $L_x \geq 2\pi h_G$ et une largeur $L_y = L_x/2 \geq \pi h_G$. Il se décompose en une partie destinée à l'écoulement gazeux de dimensions L_x x L_y x $2h_G$ et une autre pour le liquide de dimensions L_x x L_y x h_L. La discrétisation spatiale est homogène dans les directions x et y avec respectivement $N_x = 64$ et $N_y = 32$ cellules de calcul. Dans le domaine gazeux, le maillage est raffiné à l'interface et à la paroi supérieure à l'aide de la transformation :

$$z_j = \frac{1}{a}\tanh\left[\eta_j \arg\tanh(a)\right] \quad \text{et} \quad \eta_j = -1 + 2\left(j-1\right)/\left(N_z^G - 1\right), \forall j = 1, N_z^G \tag{5.2.8}$$

où $N_z^G = 64$ est le nombre de points dans la direction z dans le domaine gazeux. Le paramètre a ($0 \leq a \leq 1$) sert à resserrer le maillage près des frontières. Ce type de discrétisation vise à résoudre convenablement les sous-couches visqueuses au voisinage des frontières. Du côté liquide, le nombre de points de discrétisation est également fixé à $N_z^L = 64$ repartis de façon régulière avec un pas d'espace lié à la taille de la plus petite cellule du domaine gazeux (celle située juste

au-dessus de l'interface). Finalement, le domaine de calcul est discrétisé avec un maillage de 64 x 32 x 128 nœuds.

Notons également que les écoulements évoluant à co-courant et en moyenne dans la direction longitudinale x, le gradient de pression est choisi nul dans la direction transversale tandis que dans la direction longitudinale, il est fixé à $(\Delta p/\Delta x)_G$ dans le gaz et $(\Delta p/\Delta x)_L$ dans le liquide, afin de respecter au mieux les régimes d'écoulements souhaités (Re_L et Re^*_G).

5.3 Écoulement turbulent-laminaire

En se référant aux travaux de Jurman et McCready [35], nous fixons un nombre de Reynolds liquide $Re_L = Q_L/\nu_L$ et faisons évoluer progressivement le nombre de Reynolds gazeux Re^*_G ou $Re_G \approx 5\,(1 + ln(Re^*_G))\,Re^*_G$. Ces études dont les paramètres pertinents sont rassemblés dans le tableau 5.3.1 permettent d'analyser simplement les effets de la turbulence présente dans le gaz sur la surface du film liquide. Entre les configurations simulées, seul le nombre de Reynolds gazeux varie, tous les autres nombres sans dimension sont maintenus constants. Le domaine de calcul et la discrétisation spatiale 64 x 32 x 128 sont identiques dans les deux cas.

$(\rho_L/\rho_G)^{1/2}$	μ_L/μ_G	h_L/h_G	$Re_L = U_L h_L/\nu_L$	$We = \rho_L U_L^2 h_L/\sigma$	$Fr^2 = U_L^2/g h_L$
28.9	64.86	0.27	5	$1.67\ 10^{-4}$	$1.36\ 10^{-4}$

	$Re^*_G = u^*_{G,Mono} h_G/\nu_G$	$Re_G \approx 5\,(1 + ln(Re^*_G))\,Re^*_G$
Ref I	100	2800
Ref II	161	4900

TABLE 5.3.1 – Données de simulation des écoulements turbulent-laminaire

Les grandeurs servant pour l'estimation des paramètres sans dimension sont les vitesses longitudinales moyennes du liquide $U_L = Q_L/h_L$, la vitesse de frottement $u^*_{G,Mono}$, la tension interfaciale σ entre les fluides et la gravité g.

Les résultats des simulations sont présentés sur la base d'étude de grandeurs statistiques. Les quantités résolues sont moyennées dans le temps et dans les plans $z = constante$. Dans le cas d'une interface plane, le plan (x, y) est homogène et orthogonal à la normale z à l'interface. Cela n'est plus le cas en présence d'ondes de surface qui introduisent des nouvelles directions locales d'anisotropie suivant les normales locales à l'interface. Il est important de garder à l'esprit que les simulations sont faites sans étape de reconstruction de l'interface. De ce fait, les résultats obtenus dans la zone interfaciale où le taux de présence et les propriétés physiques sont variables sont à prendre avec précaution. Les différentes grandeurs statistiques sont présentées en fonction de la position z.

5.3.1 Interface moyenne

L'interface moyenne est représentée par l'isocontour moyenne $< C >= 0.5$. La configuration *Ref I* se caractérise par une interface moyenne plane (figure 5.3.1) se situant à la position $z = z_I$. Le cisaillement imposé par le courant gazeux turbulent n'est pas suffisant pour déstabiliser la surface du liquide. En augmentant le nombre de Reynolds de l'écoulement gazeux, l'interface se déforme comme l'atteste la figure 5.3.1 représentant l'évolution au cours du temps de l'isocontour $C = 0.5$ à la position $x = x_1 = L_x/2$. L'interface qui est initialement plane se déstabilise progressivement pour aboutir à un système d'ondes de surface essentiellement bidimensionnel (figure 5.3.2). Ces

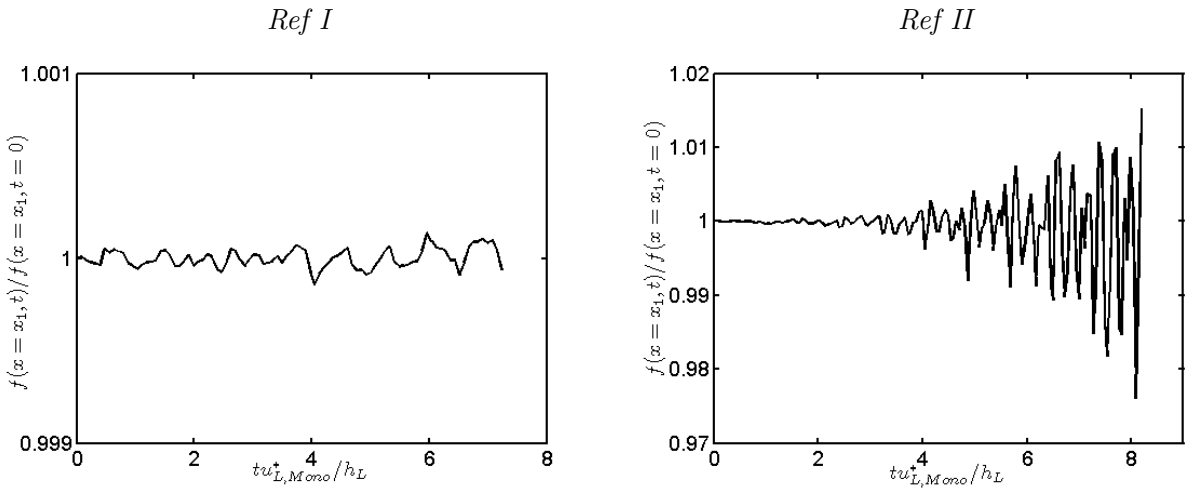


FIGURE 5.3.1 – Évolution de l'interface $f(x = L_x/2, t)$ au cours du temps

ondes ont une amplitude inférieure à 5% de la hauteur du liquide. L'interface moyennée $f(x,t)/h_L$ obtenue à l'instant $tu^*_{L,Mono}/h_L = 8.2$ révèle une longueur d'onde $\lambda/h_L \approx 6.6$.

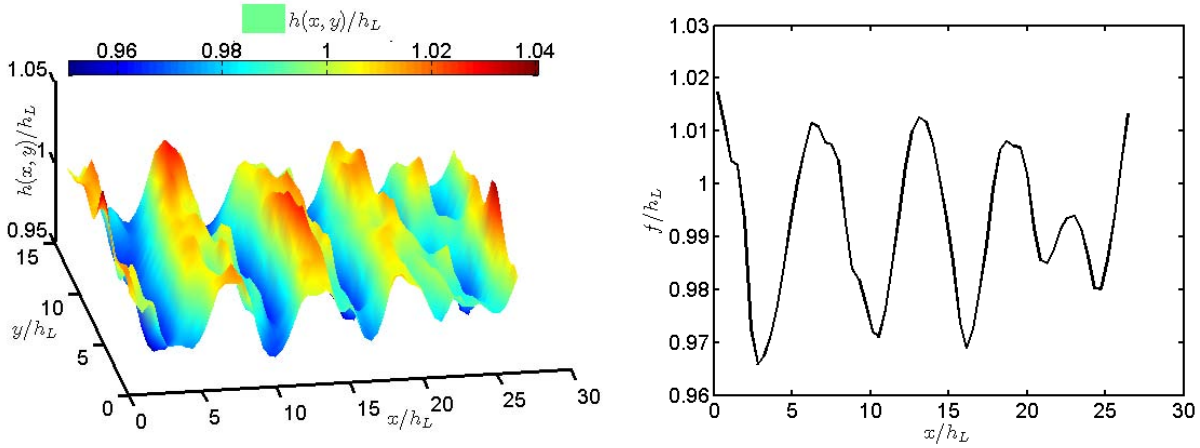


FIGURE 5.3.2 – Onde de surface du cas *Ref II* à l'instant $tu^*_{L,Mono}/h_L = 8.2$

Selon la cartographie fournie par Jurman et McCready [35] (figure 5.2.2), les deux configurations étudiées ici aboutissent à une interface plane avec une configuration *Ref II* proche de la transition (surface plane - onde périodique). Si le cas *Ref I* respecte cette cartographie, il n'en est pas de même pour la configuration *Ref II*, ce qui signifie que la frontière entre les régimes stable et instable obtenue par la simulation diffère de celle déterminée expérimentalement. Nous avons également essayé de reproduire une configuration avec un nombre de Reynolds gazeux $Re^*_G = 295$ ou $Re_G \approx 9850$. Ces tentatives présentent des ondes de surface mais des instabilités numériques liées certainement au transport du taux de présence et à l'évaluation du terme capillaire ne nous ont pas permis d'obtenir un régime permanent.

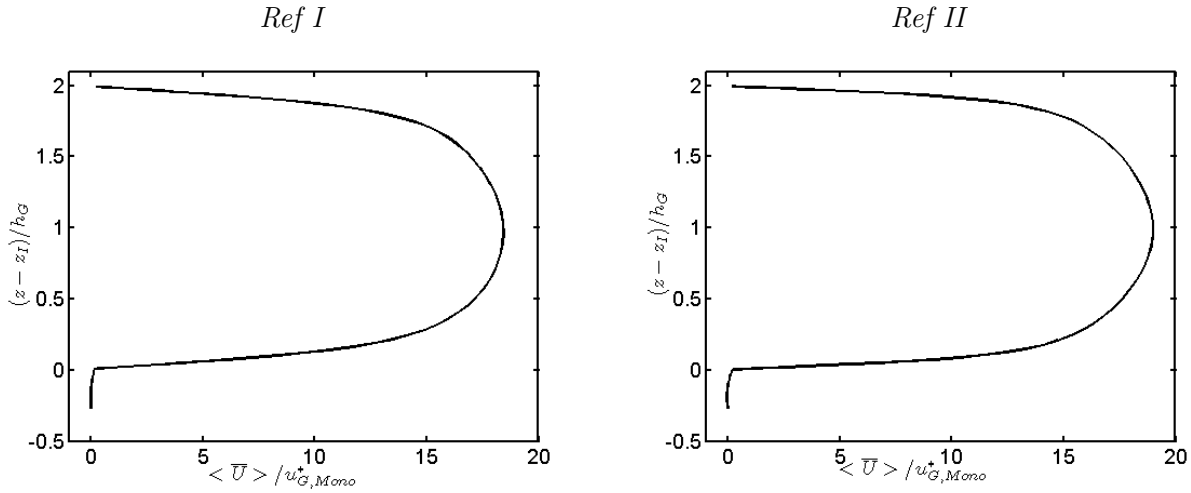


FIGURE 5.3.3 – Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_{G,Mono}$ dans le domaine

5.3.2 Vitesse moyenne

La vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} >$ normalisée par la vitesse de frottement $u^*_{G,Mono}$ est représentée dans l'ensemble du domaine sur la figure 5.3.3. Elle est continue à la traversée de l'interface. Le changement de pente observé à l'interface est lié à la continuité des contraintes tangentielles et au contraste des viscosités dynamiques μ_G/μ_L. La vitesse longitudinale moyenne est positive à l'interface puisque le courant gazeux entraîne le liquide. De plus, le profil de vitesse moyenne du gaz de la configuration *Ref II* est logiquement plus aplati que celui de *Ref I* puisque le cisaillement et le gradient de vitesse sont plus importants.

Dans la phase liquide, le profil de vitesse obtenu (figure 5.3.4) est quasi-parabolique, ce qui confirme les hypothèses adoptées à l'initialisation. Ce profil permanent est en effet proche du profil défini à l'instant initial basé sur une approximation polynomiale et une continuité des contraintes tangentielles à l'interface.

Afin d'analyser le comportement de la turbulence du courant gazeux au voisinage de la paroi supérieure et de l'interface, on définit les distances aux frontières selon :

$$d_{int} = (z - z_I)\frac{u^*_{G,Mono}}{\nu_G} \text{ pour l'interface} \quad \text{et} \quad d_{paroi} = (H - z)\frac{u^*_{G,Mono}}{\nu_G} \text{ pour la paroi} \quad (5.3.1)$$

Il faut préciser que la distance d_{int} est bien définie par rapport à l'interface moyenne donnée par l'isocontour $< C >= 0.5$ et se trouvant à la position z_I. Nous choisissons d'utiliser la vitesse $u^*_{G,Mono}$ pour évaluer ces distances aux frontières à cause de la difficulté à obtenir la véritable vitesse de frottement à l'interface du fait de l'épaisseur numérique de la zone interfaciale et des déplacements de l'interface. Ce choix permet également de garder une valeur identique au niveau des frontières et une certaine cohérence dans l'interprétation des résultats notamment dans la zone interfaciale. On pourra ainsi comparer de façon absolue les amplitudes des grandeurs observées au niveau des frontières de l'écoulement gazeux. Du côté liquide, on définit également une distance relative à l'interface d_L en utilisant la vitesse de frottement $u^*_{L,Mono}$ assurant la continuité du cisaillement à l'interface :

$$u^*_{L,Mono} = \sqrt{\frac{\rho_G}{\rho_L}}u^*_{G,Mono} \quad \text{et} \quad d_L = (z_I - z)\frac{u^*_{L,Mono}}{\nu_L} \quad (5.3.2)$$

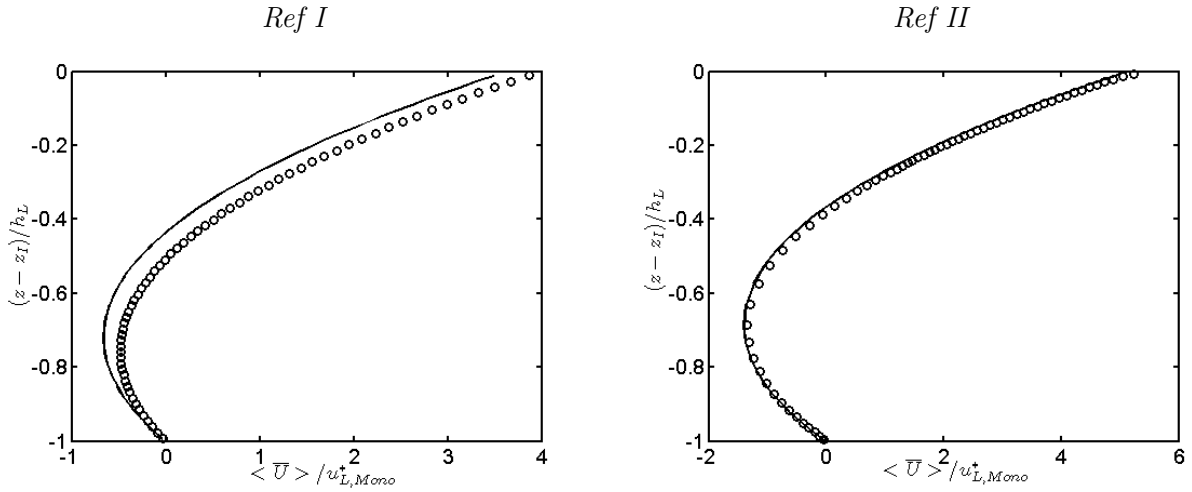


FIGURE 5.3.4 – Vitesse longitudinale moyenne $< \overline{U} > /u^*_{L,Mono}$ dans le liquide
$(-)\ U(z, t = 0)$, $(\circ)\ < \overline{U} >$

5.3.3 Intensités turbulentes résolues

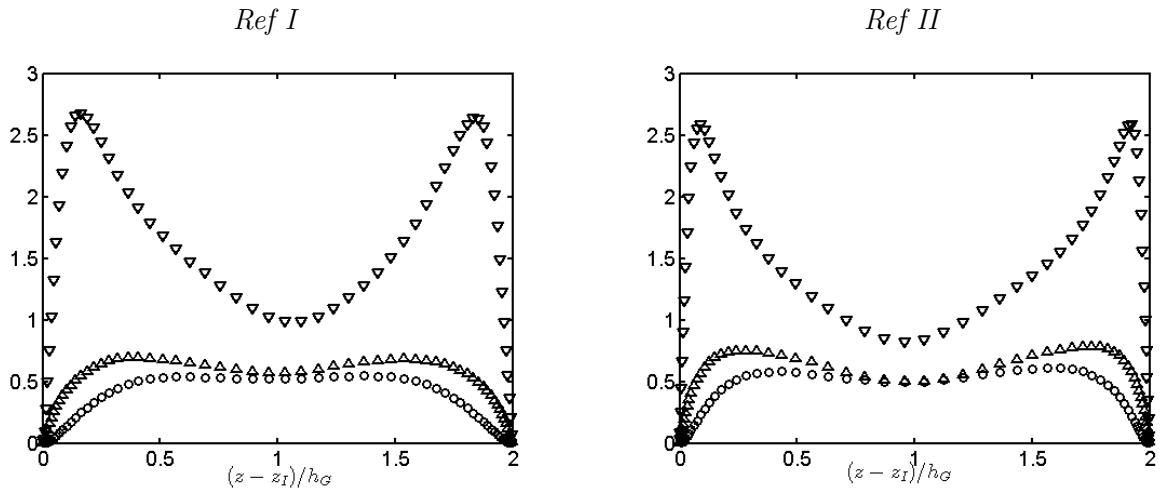


FIGURE 5.3.5 – Intensités turbulentes $\sqrt{< \overline{u}_i'^2 >}/u^*_{G,Mono}$ dans le gaz
$(\triangledown)\ \sqrt{< \overline{u}'^2 >}$, $(\triangle)\ \sqrt{< \overline{v}'^2 >}$, $(\circ)\ \sqrt{< \overline{w}'^2 >}$

Les écart-types de fluctuations de vitesses $\sqrt{< \overline{u}_i'^2 >} = \sqrt{< (\overline{U}_i - < \overline{U}_i >)^2 >}$ dans le gaz normalisés par la vitesse $u^*_{G,Mono}$ sont représentés sur la figure 5.3.5. Les profils des fluctuations sont typiquement ceux observés pour un écoulement turbulent entre deux plaques. Ils sont symétriques autour du cœur et le comportement du champ turbulent au voisinage de l'interface est très similaire à celui observé près de la paroi supérieure. En effet, les fluctuations des vitesses sont nulles au niveau de la paroi supérieure et faibles sur l'interface. Ainsi comme une paroi rigide, l'interface réduit considérablement les intensités turbulentes.

Cette similitude se retrouve également au niveau de la position des maxima locaux des intensités

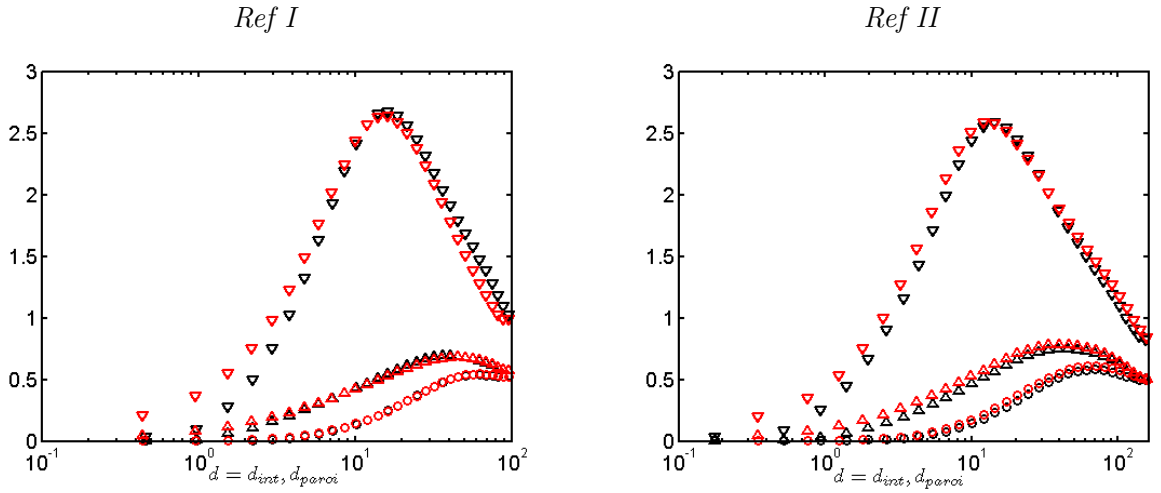


FIGURE 5.3.6 – Intensités turbulentes résolues aux voisinages des frontières dans le gaz
Interface : $(\nabla)\ \sqrt{<\overline{u}'^2>}$, $(\triangle)\ \sqrt{<\overline{v}'^2>}$, $(\circ)\ \sqrt{<\overline{w}'^2>}$
Paroi : $(\nabla)\ \sqrt{<\overline{u}'^2>}$, $(\triangle)\ \sqrt{<\overline{v}'^2>}$, $(\circ)\ \sqrt{<\overline{w}'^2>}$

turbulentes comme le montre la figure 5.3.6 représentant les évolutions des intensités turbulentes en fonction des distances relatives d_{int} et d_{paroi} aux frontières. Les maxima locaux des intensités turbulentes de vitesses ont des amplitudes et des positions relatives par rapport à l'interface et à la paroi $d_{int} \approx d_{paroi} \approx 13$ proches. À égale distance des frontières $d = d_{int} = d_{paroi}$, les intensités turbulentes sont légèrement plus importantes au voisinage de la paroi que de l'interface. Cela s'explique par le cisaillement légèrement plus fort à la paroi compte tenu de la condition de non-glissement.

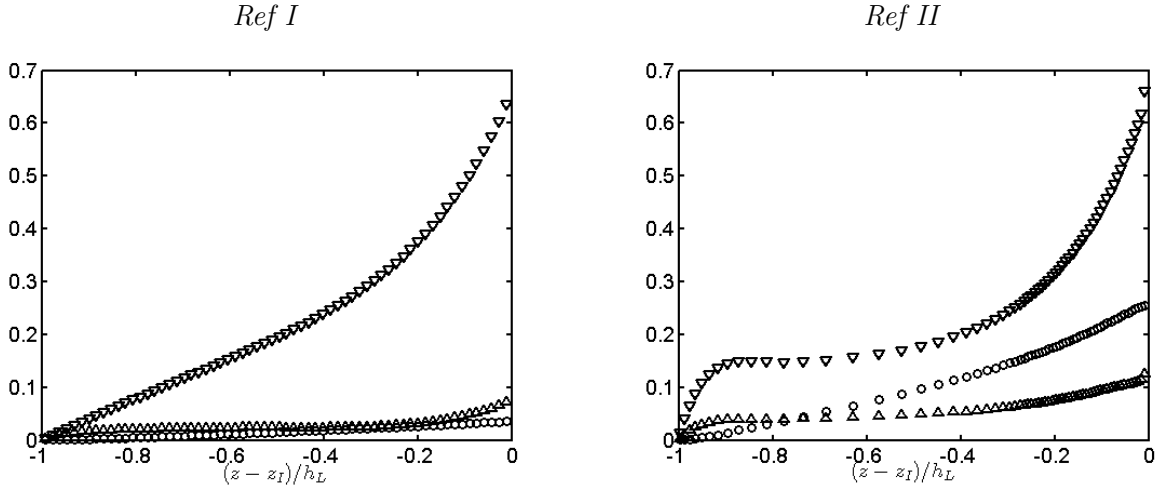


FIGURE 5.3.7 – Intensités turbulentes $\sqrt{<\overline{u}_i'^2>}/u^*_{L,Mono}$ dans la phase liquide
$(\nabla)\ \sqrt{<\overline{u}'^2>}$, $(\triangle)\ \sqrt{<\overline{v}'^2>}$, $(\circ)\ \sqrt{<\overline{w}'^2>}$

Du côté liquide, on note que la zone interfaciale réalise une séparation entre une région de forte turbulence que constitue la couche limite située dans le gaz et le film liquide laminaire

(figure 5.3.7). Dans le cas *Ref I* où l'interface est plane, l'inertie du liquide et le caractère quasi-unidirectionnel de l'écoulement liquide limitent de façon drastique la pénétration de la turbulence en provenance du gaz. En effet, les fluctuations normale $\sqrt{<\overline{w}'^2>}$ et transversale $\sqrt{<\overline{v}'^2>}$ sont négligeables dans le liquide et cela dès l'interface $z = z_I$. La composante longitudinale $\sqrt{<\overline{u}'^2>}$ quant à elle subsiste sur une certaine profondeur avant de s'adapter plus loin à la condition d'adhérence imposée sur la paroi inférieure.

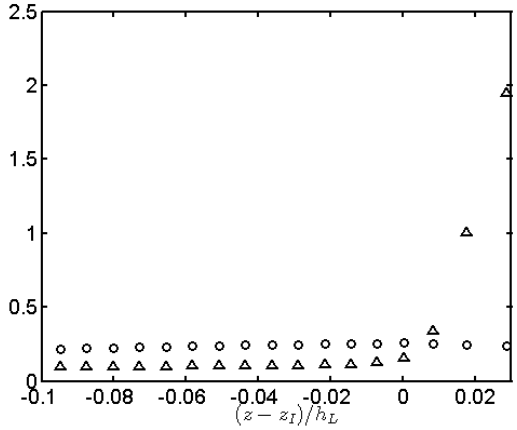


FIGURE 5.3.8 – Intensités turbulentes $\sqrt{<\overline{u}_i'^2>}/u^*_{L,Mono}$ au voisinage de l'interface moyenne (△) $\sqrt{<\overline{v}'^2>}$, (○) $\sqrt{<\overline{w}'^2>}$

Dans le cas *Ref II*, les déformations verticales de l'interface autorisent un écoulement bidimensionnel dans le liquide. Les fluctuations verticales $\sqrt{<\overline{w}'^2>}$ ne sont plus négligeables sous l'interface. Elles sont même plus importantes que les fluctuations dans la troisième direction $\sqrt{<\overline{v}'^2>}$. Le déplacement vertical et le caractère bidimensionnel de l'écoulement priment sur les effets de turbulence. De plus, dans le gaz où règne une forte turbulence, la composante transversale $\sqrt{<\overline{v}'^2>}$ est plus importante que la verticale $\sqrt{<\overline{w}'^2>}$. Cette tendance s'inverse au voisinage immédiat de l'interface moyenne comme le montre la figure 5.3.8. La composante longitudinale quant à elle est comme dans le cas *Ref I*, maximale sur l'interface moyenne et subsiste sous celle-ci. Elle s'attenue progressivement en s'adaptant à la condition d'adhérence imposée sur la paroi inférieure.

5.3.4 Cisaillement turbulent

Le cisaillement turbulent moyen $<\Sigma>$ s'écrit sous la forme d'une somme d'une partie résolue $<\overline{u}'\overline{w}'>$ et des contributions de petites échelles liées au terme de Léonard $<L_{13}>=<\overline{\overline{U}\,\overline{W}} - \overline{\overline{U}}\,\overline{\overline{W}}>$ et à la viscosité de sous-maille $<R_{13}>=<\nu_{sm}\left(\partial\overline{U}/\partial z + \partial\overline{W}/\partial x\right)>$:

$$<\Sigma> = -<\overline{u}'\overline{w}'> - <L_{13}> - <R_{13}> \tag{5.3.3}$$

La figure 5.3.9 montre un cisaillement turbulent négligeable ($< 10^{-3}\ u^{*2}_{L,Mono}$) dans le liquide. La modélisation dynamique de la turbulence n'y a créée aucune structure turbulente significative. Cependant comme pour les intensités turbulentes, il y a pénétration de la turbulence sous l'interface en provenance du courant gazeux. Les effets de la turbulence subsistent sur une certaine profondeur en-dessous de l'interface avant de progressivement disparaître. Les termes du cisaillement turbulent décroissent sous l'interface jusqu'à atteindre des minima locaux avant de

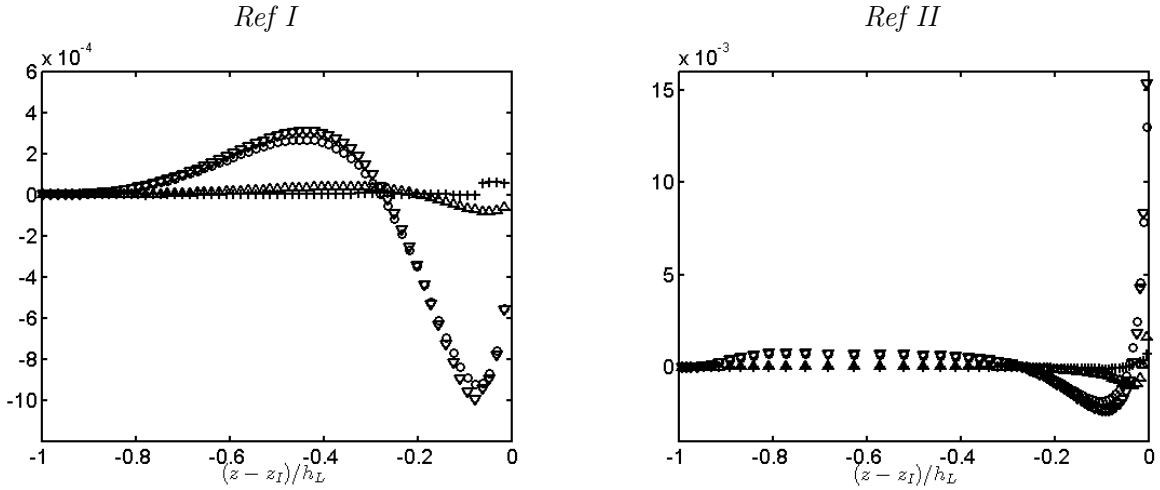


FIGURE 5.3.9 – Cisaillement turbulent moyen normalisé par $u^{*2}_{L,Mono}$ dans le liquide
$(\nabla)\ <\Sigma>$, $(\circ) - <\overline{u}'\overline{w}'>$, $(\triangle) - <L_{13}>$, $(+) - <R_{13}>$

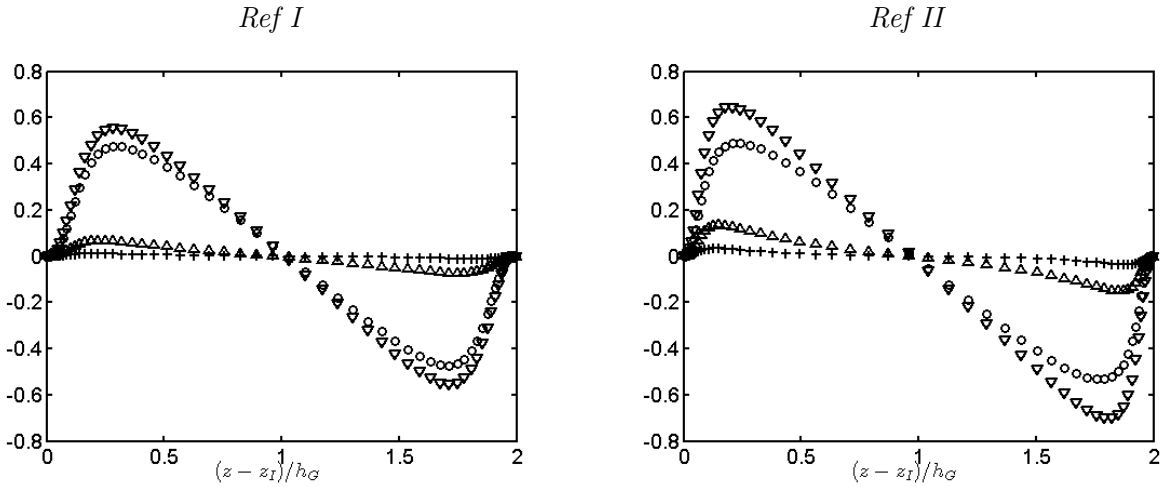


FIGURE 5.3.10 – Cisaillement turbulent normalisé par $u^{*2}_{G,Mono}$ dans le gaz
$(\nabla)\ <\Sigma>$, $(\circ) - <\overline{u}'\overline{w}'>$, $(\triangle) - <L_{13}>$, $(+) - <R_{13}>$

croître pour s'annuler plus loin dans le domaine.

Dans la phase gazeuse (figure 5.3.10), le cisaillement augmente logiquement avec le nombre de Reynolds de l'écoulement. Les composantes du cisaillement turbulent ont un comportement semblable à celui observé pour un écoulement monophasique entre deux plaques. L'antisymétrie du profil par rapport au cœur du domaine gazeux est respectée. De plus, le cisaillement turbulent total exhibe le comportement linéaire attendu loin des régions où les contraintes visqueuses sont significatives c'est-à-dire ici loin de l'interface et de la paroi. La contribution des petites échelles traduite par les termes $< L_{13} >$ et $< R_{13} >$ n'est significative que dans les zones de fort cisaillement à savoir proches de l'interface et de la paroi rigide. L'analogie entre l'interface gaz-liquide et une paroi mobile est une nouvelle fois confirmée. De plus, comme au chapitre précédent et dans les travaux de Fulgosi et *al.* [23], le cisaillement turbulent est plus important au niveau d'une paroi rigide que d'une interface (figure 5.3.11). En effet, les mouvements de l'interface autorisent le fluide à être moins contraint et par conséquent réduisent le cisaillement. L'atténuation de la turbulence est d'autant plus importante que l'interface présente des ondes de surface : $max(| < \overline{u}'\overline{w}' > |_{int})/max(| < \overline{u}'\overline{w}' > |_{paroi}) \approx 1.0$ pour *Ref I* et $max(| < \overline{u}'\overline{w}' > |_{int})/max(| < \overline{u}'\overline{w}' > |_{paroi}) \approx 0.9$ pour *Ref II*.

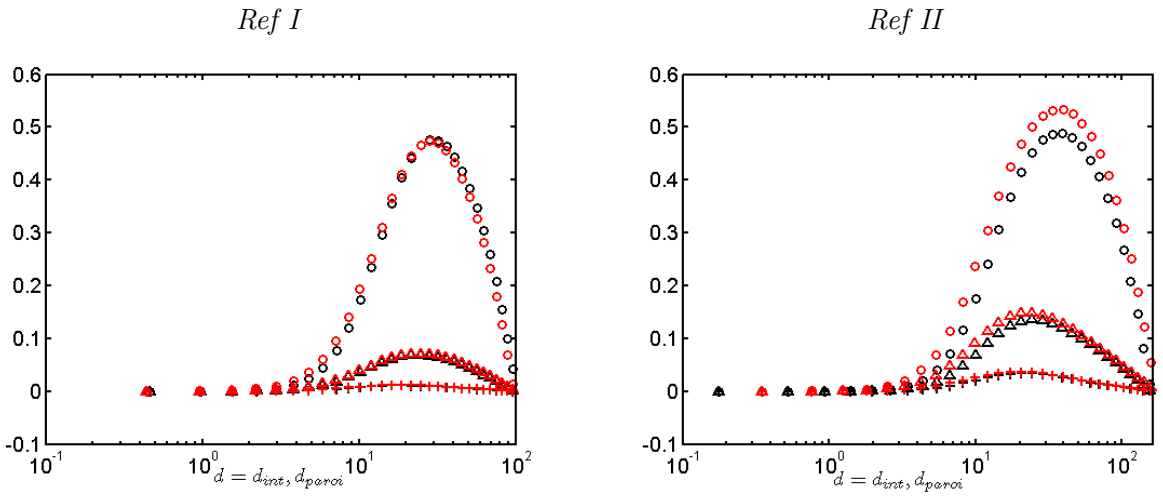


FIGURE 5.3.11 – Cisaillement turbulent dans le gaz normalisé par $u^{*2}_{G,Mono}$ proche des frontières
Interface : $(\circ) - < \overline{u}'\overline{w}' >$, $(\triangle) - < L_{13} >$, $(+) - < R_{13} >$
Paroi : $(\circ) < \overline{u}'\overline{w}' >$, $(\triangle) < L_{13} >$, $(+) < R_{13} >$

5.3.5 Termes de sous-maille

La modélisation dynamique mixte des contraintes de sous-maille utilise les informations locales pour estimer la viscosité de sous-maille ν_{sm} et les termes de Léonard $L_{ij} =< \overline{\overline{U}_i\overline{U}_j} - \overline{\overline{U}}_i\overline{\overline{U}}_j >$. La viscosité de sous-maille est négligeabe devant la viscosité cinématique dans le liquide alors qu'elle est significative dans le gaz (figure 5.3.12). Le modèle de turbulence n'a pas de répercussion directe sur l'écoulement liquide essentiellement laminaire. L'approche dynamique a ainsi assuré l'adaptation automatique du modèle aux conditions d'écoulement. Du côté gazeux, le profil moyen de viscosité de sous-maille révèle la présence d'effets des petites échelles, ce qui n'est pas surprenant étant donné le nombre de Reynolds élevé et le maillage extrêmement modeste. En comparant les configurations *Ref I* et *Ref II* simulés avec une discrétisation spatiale identique, on note logiquement une augmentation des effets de petites échelles directement liée à

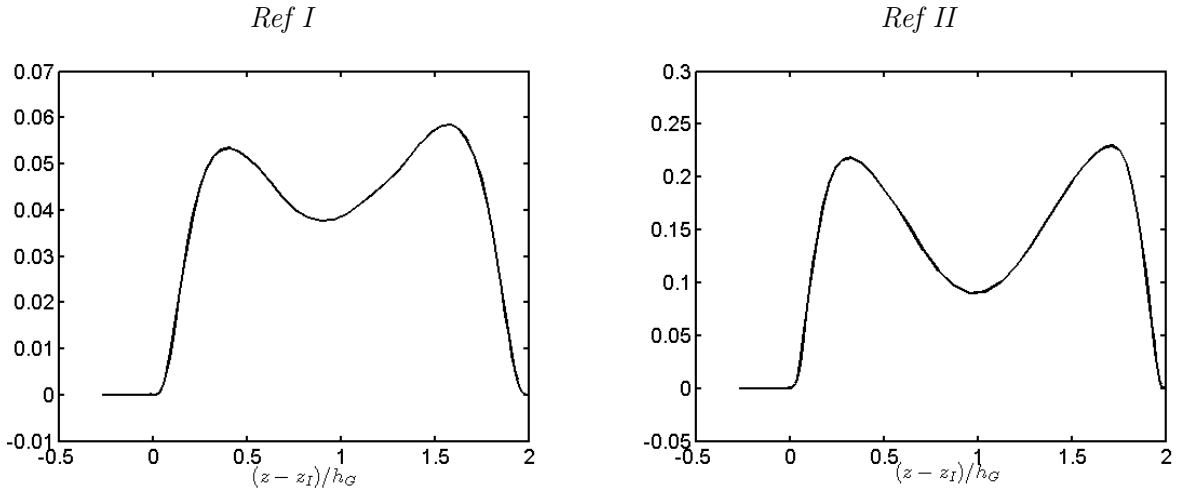


FIGURE 5.3.12 – Profil moyen de la viscosité de sous-maille $< \overline{\rho} >< \nu_{sm} > / < \overline{\mu} >$

celle du nombre de Reynolds dans le gaz. Dans les deux cas, le comportement de la viscosité de sous-maille est similaire aux voisinages de la paroi supérieure et de l'interface. La viscosité de sous-maille croît en partant de la paroi et de l'interface pour atteindre des maxima locaux avant de décroître sensiblement dans le cœur de l'écoulement.

Quant aux termes de Léonard $< L_{ij} >$, ils sont représentés sur les figures 5.3.13 pour le liquide et 5.3.14 pour le gaz. Les termes de Léonard qui dépendent de l'opérateur de filtrage, traduisent

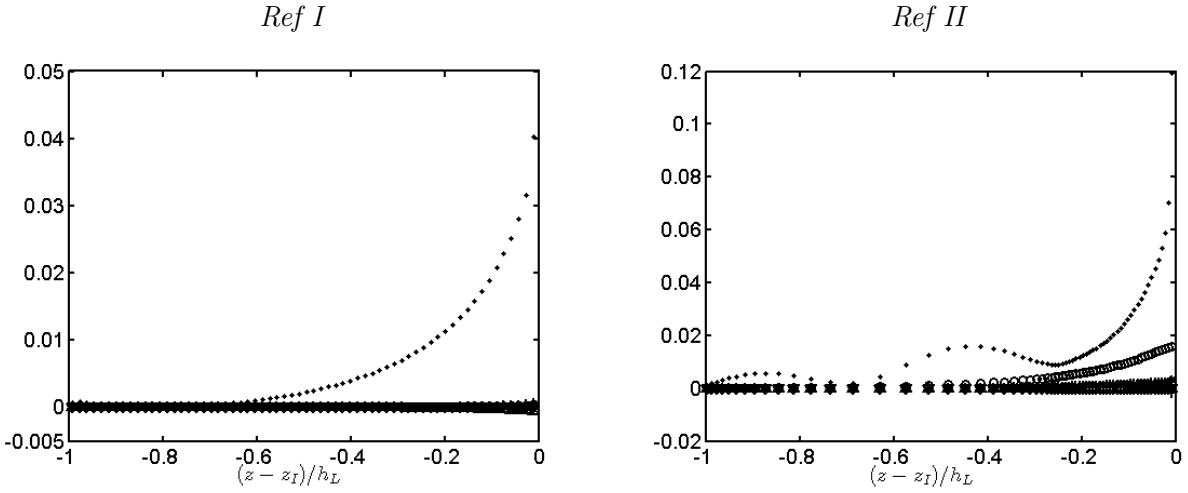


FIGURE 5.3.13 – Termes de Léonard $< L_{ij} > /u^{*2}_{L,Mono}$ dans le liquide
$(.)\ < L_{11} >$, $(*)\ < L_{22} >$, $(\circ)\ < L_{33} >$, $(\triangle)\ < L_{12} >$, $(+)\ < L_{13} >$, $(\triangledown)\ < L_{23} >$

l'effet des plus grandes échelles non résolues sur les grandes échelles qui elles sont résolues. Ils apparaissent négligeables dans le liquide avec toutefois une contribution mesurable pour L_{11} et importants dans le gaz. De même que pour la viscosité de sous-maille, les comportements proches de la paroi supérieure et de l'interface sont similaires. On note également une quasi-symétrie des profils des termes diagonaux L_{ii} et une antisymétrie du terme non diagonal L_{13} qui est directement liée au comportement antisymétrique de la vitesse normale $< \overline{W} >$ ($< \overline{W} > \geq 0$ proche

de l'interface et $< \overline{W} > \leq 0$ au niveau de la paroi supérieure). Notons que dans le cas *Ref II*, la

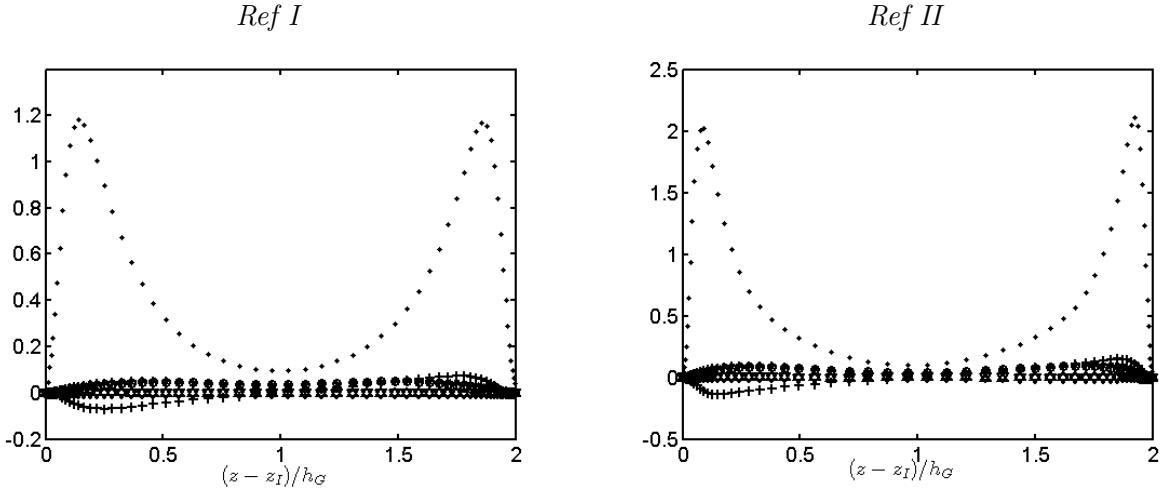


FIGURE 5.3.14 – Termes de Léonard $< L_{ij} > /u^{*^2}_{G,Mono}$ dans le gaz
$(.)\ < L_{11} >$, $(*)\ < L_{22} >$ $(\circ)\ < L_{33} >$, $(\triangle)\ < L_{12} >$, $(+)\ < L_{13} >$, $(\triangledown)\ < L_{23} >$

déformation de l'interface autorise l'existence dans le liquide de la composante verticale L_{33}.

Ces résultats sur les effets de petites échelles montrent tout l'intérêt de l'approche dynamique pour la simulation d'écoulements se caractérisant par des phases évoluant dans des régimes différents. Une telle simulation n'aurait pas été possible à partir d'une modélisation de la turbulence basée sur un paramètre constant. Il aurait alors fallu dans un premier temps séparer les deux phases et estimer un paramètre caractéristique de l'état de turbulence dans chacune d'elles.

5.3.6 Bilan d'énergie cinétique turbulente

Analysons maintenant les mécanismes contribuant au bilan d'énergie cinétique turbulente $k = (< \overline{u}'^2 > + < \overline{v}'^2 > + < \overline{w}'^2 >)/2$ qui s'écrit dans une approche de SGE sous la forme :

$$0 = P + \Pi + T + TL + D + \epsilon \tag{5.3.4}$$

$$P = - < \overline{u}'_i \overline{w}' > \frac{\partial}{\partial z} < \overline{U}_i > \ , \ \Pi = -\frac{1}{< \overline{\rho} >} \frac{\partial}{\partial z} < \overline{p}' \overline{w}' > \ , \ T = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} < \overline{u}'_i \overline{u}'_i \overline{w}' >$$
$$TL = -\frac{\partial}{\partial z} < \overline{u}'_i L'_{i3} > \ , \ D = \frac{1}{2} \frac{1}{< \overline{\rho} >} \frac{\partial}{\partial z} \left[< \overline{\mu} + \overline{\rho} \nu_{sm} > \frac{\partial}{\partial z} < \overline{u}'_i \overline{u}'_i > \right]$$
$$\epsilon = -P - \Pi - T - TL - D \tag{5.3.5}$$

Sur les figures 5.3.15 et 5.3.16, les contributions au bilan d'énergie cinétique turbulente sont normalisées par $u^{*^4}_{G,Mono}/\nu_G$. Au voisinage de la paroi supérieure, les tendances sont identiques dans les cas *Ref I* et *Ref II*. Il s'agit des évolutions typiques près d'une paroi rigide. On observe ainsi au-delà d'une distance $d_{paroi} \geq 40$, un équilibre entre la production P et la dissipation ϵ. En se rapprochant de la paroi, pour une distance $10 \leq d_{paroi} \leq 40$, une part de l'énergie cinétique turbulente est prélevée par les termes de transport turbulent T ($T \leq 0$) et de cascade TL ($TL \leq 0$). Cette part d'énergie est ensuite restituée au voisinage immédiat de la paroi $d_{paroi} \leq 10$ ($T \geq 0$ et $TL \geq 0$). On note également que les termes de diffusion visqueuse et de pseudo-dissipation qui sont négatifs entre $4 \leq d_{paroi} \leq 10$ compensent dans cette zone la production d'énergie par le mouvement moyen P et le transport turbulent $T + TL$. Le maximum

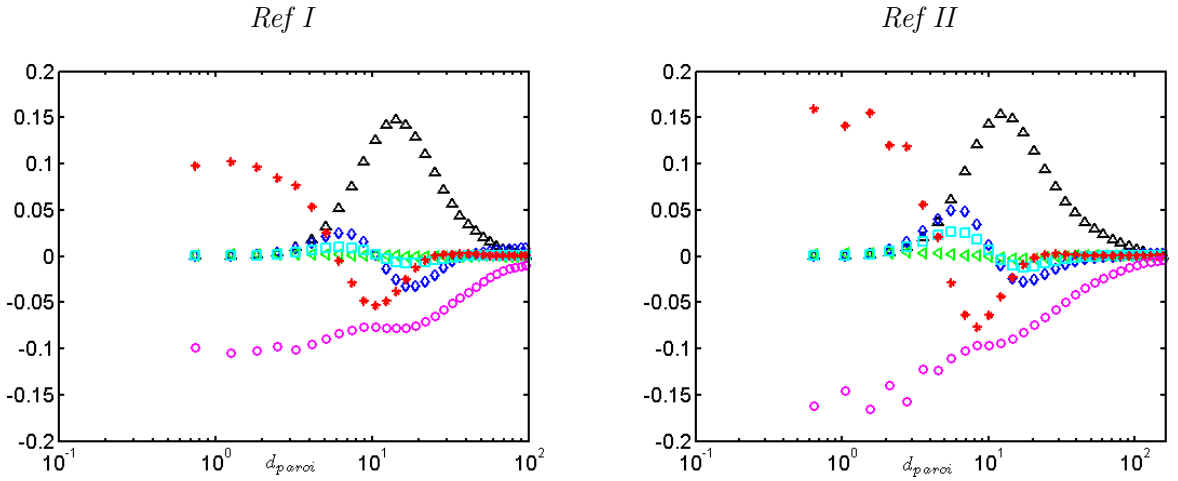


FIGURE 5.3.15 – Bilan d'énergie cinétique turbulente dans le gaz au voisinage de la paroi $(\triangle)P$, $(\triangleleft)\Pi$, $(\diamond)T$, $(\square)TL$, $(*)D$, $(\circ)\epsilon$

de la production d'énergie P se situe à une distance $d_{paroi} \approx 13$, ce qui correspond à la position du maximum de l'intensité turbulente longitudinale $\sqrt{\overline{u}'^2}$. Sur la paroi, les termes de production P, de transport turbulent T et de cascade TL sont nuls. Seuls les termes de diffusion visqueuse D et de dissipation ϵ subsistent et s'équilibrent entre eux ($d_{paroi} \leq 2$).

Au voisinage de l'interface, les tendances observées pour les mêmes mécanismes se retrouvent à une distance $d_{int} \geq 5$. Ainsi, le maximum de production est atteint à une position $d_{int} \approx 13$. Pour une distance $d_{int} \geq 40$, il y a équilibre entre la production P et la dissipation ϵ. Dans la zone intermédiaire $10 \leq d_{int} \leq 40$, les termes de transport turbulent T et de cascade TL interviennent dans le bilan d'énergie cinétique turbulente en jouant successivement le rôle de puits et de sources. Au voisinage immédiat de l'interface $d_{int} \leq 5$, les termes de production P, de transport turbulent T et de cascade TL décroissent pour s'annuler sur l'interface. La présence de l'interface n'influence pas significativement ces contributions. Ce constat ne tient plus pour les termes de diffusion visqueuse D et de dissipation ϵ qui subissent les effets de la présence de l'interface gaz-liquide dans la zone $d_{int} \leq 4$. Dans cette couche, on observe toujours un équilibre entre la diffusion visqueuse et la pseudo-dissipation mais le comportement de ces termes est bien différent de la situation de paroi. Pour expliquer cette différence, décomposons l'expression de la diffusion visqueuse :

$$D = \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(\frac{\partial <\overline{\mu}>}{\partial z} + \frac{\partial <\overline{\rho}\nu_{sm}>}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> + \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\left(<\overline{\mu}> + <\overline{\rho}\nu_{sm}>\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> \tag{5.3.6}$$

Avec une méthode lagrangienne, les propriétés physiques sont constantes dans chaque phase et le terme de diffusion se simplifie pour devenir :

$$D = \frac{1}{2}\frac{\partial <\nu_{sm}>}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> + \frac{1}{2}\left(\nu + <\nu_{sm}>\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2} <\overline{u}_i'\overline{u}_i'> \tag{5.3.7}$$

Cette approximation s'applique également dans le cas d'une approche d'interface diffuse dans les zones monophasiques comme au voisinage de la paroi. Elle n'est pas valable au voisinage de l'interface dans la mesure où la méthodologie employée autorise une épaisseur numérique à

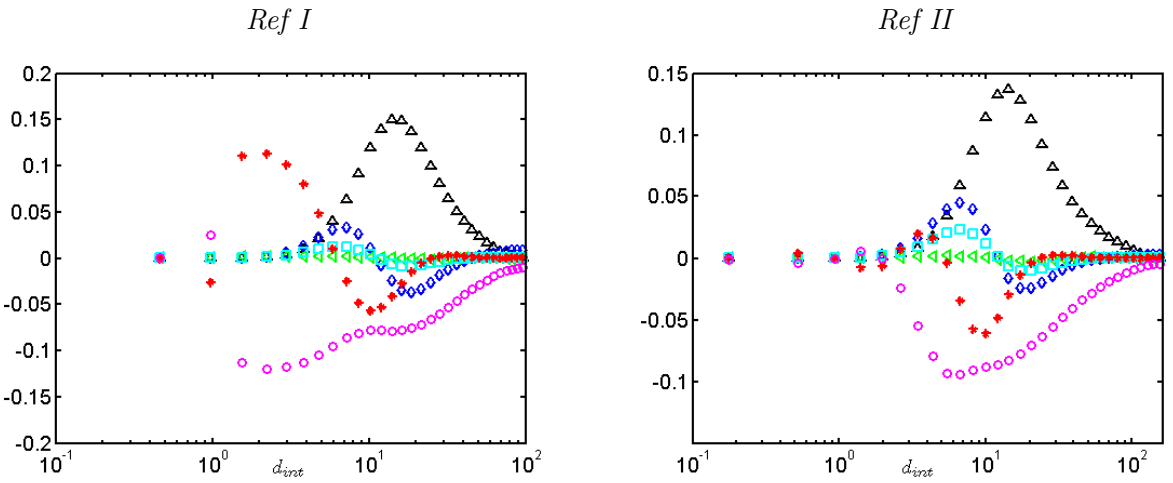


FIGURE 5.3.16 – Bilan d'énergie cinétique turbulente dans le gaz au voisinage de l'interface $(\triangle)P$, $(\triangleleft)\Pi$, $(\diamond)T$, $(\square)TL$, $(*)D$, $(\circ)\epsilon$

l'interface. Le terme de diffusion conserve alors la forme générale (5.3.6). Cependant la viscosité de sous-maille $< \nu_{sm} >$ est négligeable devant la viscosité cinématique moyenne $< \overline{\nu} >$ du fluide dans la zone interfaciale. Cela simplifie localement l'expression de la diffusion visqueuse :

$$D \approx \frac{1}{2}\frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial <\overline{\mu}>}{\partial z}\frac{\partial <\overline{u}_i'\overline{u}_i'>}{\partial z} + \frac{1}{2}<\overline{\nu}>\frac{\partial^2 <\overline{u}_i'\overline{u}_i'>}{\partial z^2} \tag{5.3.8}$$

L'expression de la diffusion visqueuse fait clairement apparaître au premier ordre les effets liés au caractère diphasique du modèle au travers des termes :

$$\frac{\partial}{\partial z}<\overline{\mu}> \quad \text{et} \quad <\overline{\nu}> = \frac{<\overline{\mu}>}{<\overline{\rho}>} \tag{5.3.9}$$

La zone interfaciale correspond aux transitions des propriétés physiques du fluide équivalent entre les valeurs correspondant au gaz et celles correspondant au liquide ($\rho : \rho_G \rightarrow \rho_L$ et $\mu : \mu_G \rightarrow \mu_L$). Ces variations sont brutales si l'interface est plane (*Ref I*). Dans ce cas, la viscosité dynamique $< \overline{\mu} >$ évolue sous la forme d'une fonction Heaviside et sa dérivée $\partial < \overline{\mu} > /\partial z$ a une allure de fonction de Dirac (figure 5.3.17). C'est principalement cette propriété particulière de $\partial < \overline{\mu} > /\partial z$ qui pollue et modifie les tendances de la diffusion visqueuse au voisinage de l'interface. Dans le cas d'une interface déformée (*Ref II*), les variations des propriétés physiques sont progressives dans la zone interfaciale. De plus, les moyennes statistiques étant effectuées dans les directions x et y sans tenir compte de la présence des ondes de surface, la zone interfaciale est étalée dans l'espace sur plusieurs cellules et les propriétés physiques moyennes $< \overline{\mu} >$ et $< \overline{\rho} >$ apparaissent lissées, ce qui assouplit les transitions et diminue la dérivée $\partial < \overline{\mu} > /\partial z$ (figure 5.3.17).
Quant à la viscosité cinématique moyenne $< \overline{\nu} >$, elle évolue de façon monotone entre les viscosités cinématiques des deux fluides en présence ($\nu_G \geq < \overline{\nu} > \geq \nu_L$). Ainsi en partant du côté gazeux, la traversée de la zone interfaciale s'accompagne de la décroissance de la viscosité cinématique $< \overline{\nu} >$.

Après l'analyse des termes diphasiques reste désormais à étudier dans l'expression de la diffusion visqueuse, les termes existant en situation monophasique :

$$\frac{\partial}{\partial z}<\overline{u}_i'\overline{u}_i'> \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}<\overline{u}_i'\overline{u}_i'> \tag{5.3.10}$$

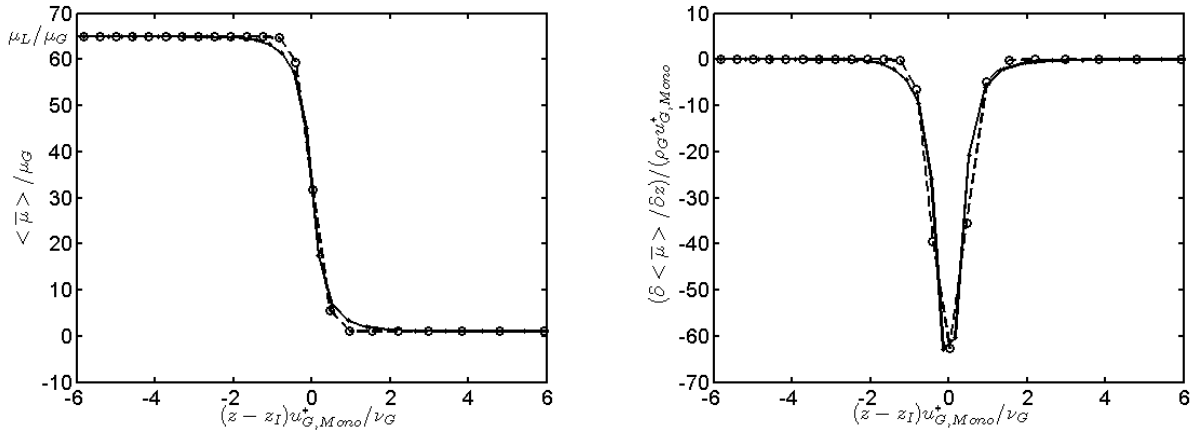


FIGURE 5.3.17 – Caractéristiques de la viscosité dynamique
$(-\circ-)$ *Ref I* et $(-.-)$ *Ref II*

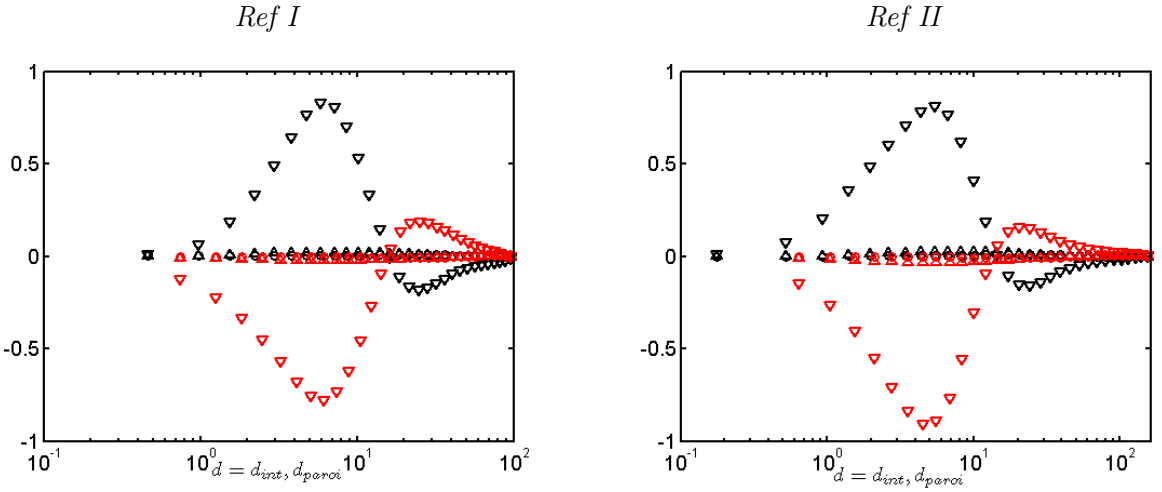


FIGURE 5.3.18 – $(\partial <\overline{u}_i'\overline{u}_i'>/\partial z)(\nu_G/u^{*3}_{G,Mono})$ aux voisinages des frontières
Interface : $(\triangledown)$ $\partial <\overline{u}'\overline{u}'>/\partial z$, $(\triangle)$ $\partial <\overline{v}'\overline{v}'>/\partial z$, $(\circ)$ $\partial <\overline{w}'\overline{w}'>/\partial z$
Paroi : $(\triangledown)$ $\partial <\overline{u}'\overline{u}'>/\partial z$, $(\triangle)$ $\partial <\overline{v}'\overline{v}'>/\partial z$, $(\circ)$ $\partial <\overline{w}'\overline{w}'>/\partial z$

Les dérivées $\partial < \overline{u}_i'\overline{u}_i' > /\partial z$ se comportent qualitativement de façon identique aux voisinages de la paroi rigide et de l'interface (figures 5.3.18 et 5.3.19). Elles ne semblent pas perturbées par les variations des propriétés physiques dans la zone interfaciale. Cela n'est pas le cas de la dérivée seconde $\partial^2 < \overline{u}'\overline{u}' > /\partial z^2$ qui ressent des effets significatifs du caractère diphasique. Ce terme qui correspond à des fluctuations de très petite échelle, est directement lié à la modélisation adoptée. En effet, du côté gazeux, la zone interfaciale est associée à une augmentation de la viscosité dynamique ($\mu_G \rightarrow \mu_L$) qui impose une atténuation de la dérivée seconde $\partial^2 < \overline{u}'\overline{u}' > /\partial z^2$. Ce terme évolue dans le sens inverse de la viscosité dynamique du fait de la continuité des contraintes tangentielles. La décroissance du terme $\partial^2 < \overline{u}'\overline{u}' > /\partial z^2$ est ensuite amplifiée dans le calcul de la diffusion visqueuse D par la diminution de la viscosité cinématique du fluide équivalent ($\nu_G \geq < \overline{\nu} > \geq \nu_L$).

Finalement, les termes constituant la diffusion visqueuse au voisinage de l'interface sont représentés sur la figure 5.3.20. Les perturbations apportées par la variation des propriétés physiques dans la zone interfaciale ($d_{int} \leq 2$) sur le comportement de la diffusion visqueuse D se répercutent immédiatement sur le terme de pseudo-dissipation ϵ. On assiste dans cette zone à une compétition entre d'un côté un apport d'énergie lié à la contribution $(1/2 < \overline{\rho} >)(< \overline{\mu} > + < \overline{\rho}\nu_{sm} >)\left(\partial^2 < \overline{u}_i'\overline{u}_i' > /\partial z^2\right)$ au voisinage de l'interface qui est vue par le gaz comme une paroi mobile et de l'autre une perte d'énergie induite par la variation brutale de la viscosité dynamique $(1/2 < \overline{\rho} >)\,\partial\,(< \overline{\mu} > + < \overline{\rho}\nu_{sm} >)/\partial z\left(\partial^2 < \overline{u}_i'\overline{u}_i' > /\partial z^2\right)$ à la traversée de la zone interfaciale et autorisée par la modélisation adoptée.

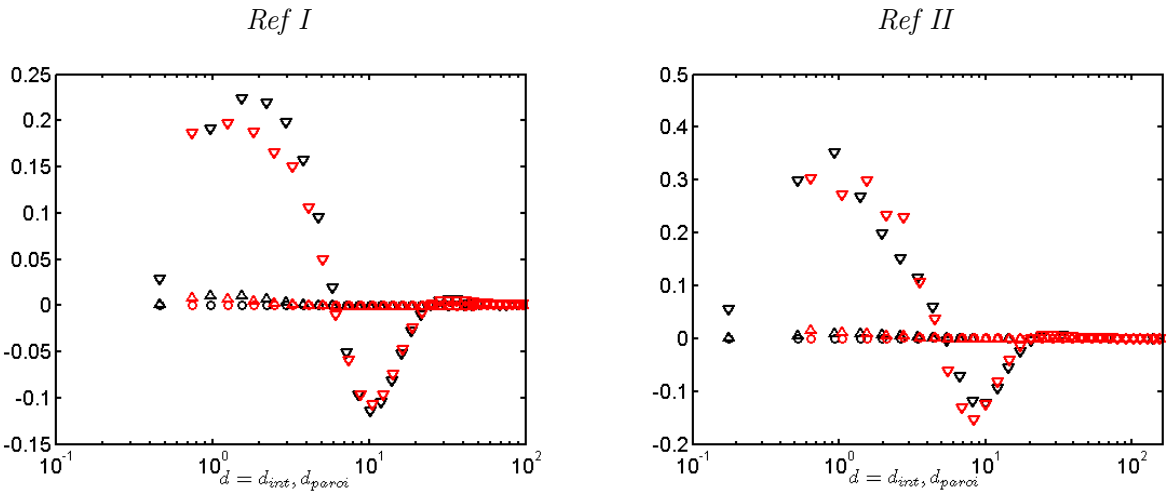


FIGURE 5.3.19 – $(\partial^2 < \overline{u}_i'\overline{u}_i' > /\partial z^2)(\nu_G^2/u_{G,Mono}^{*4})$ aux voisinages des frontières
Interface : $(\triangledown)$ $\partial^2 < \overline{u}'\overline{u}' > /\partial z^2$, $(\triangle)$ $\partial^2 < \overline{v}'\overline{v}' > /\partial z^2$, $(\circ)$ $\partial^2 < \overline{w}'\overline{w}' > /\partial z^2$
Paroi : $(\triangledown)$ $\partial^2 < \overline{u}'\overline{u}' > /\partial z^2$, $(\triangle)$ $\partial^2 < \overline{v}'\overline{v}' > /\partial z^2$, $(\circ)$ $\partial^2 < \overline{w}'\overline{w}' > /\partial z^2$

Le bilan d'énergie cinétique turbulente dans le gaz (figures 5.3.15 et 5.3.16) montre que le niveau de turbulence est plus faible près de l'interface gaz-liquide que près de la paroi. La production, la diffusion visqueuse et la pseudo-dissipation sont plus faibles en valeur absolue au voisinage de l'interface. En effet, la possibilité laissée à l'interface de se mouvoir réduit le cisaillement et donc la production turbulente. On observe par contre que les positions relatives des maxima de production se trouvent à des distances relatives aux frontières identiques $d_{int} \approx d_{paroi} \approx 13$. L'analogie entre interface et paroi se vérifie sur ce point.

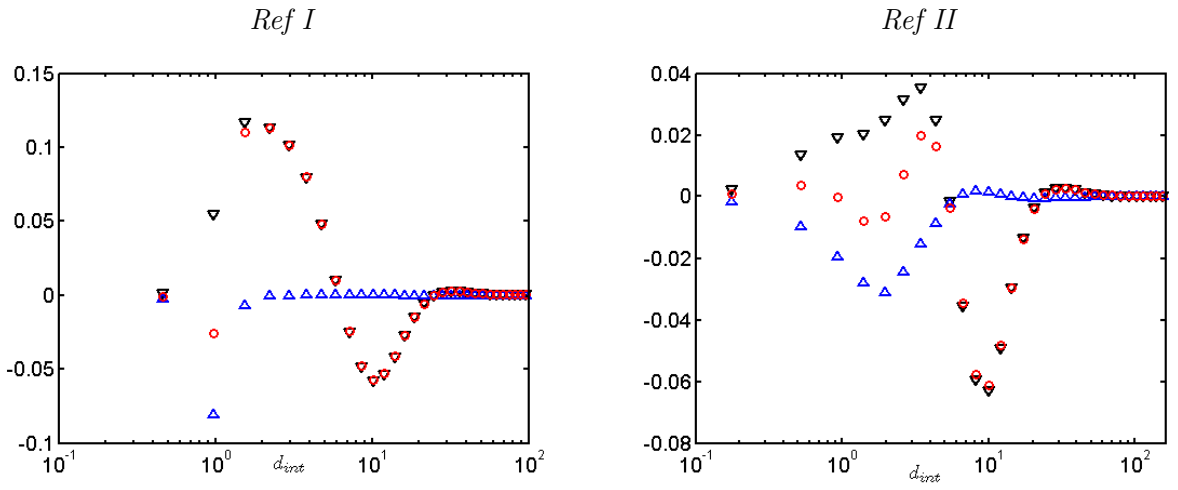


FIGURE 5.3.20 – Diffusion visqueuse $D\nu_G/u^{*4}_{G,Mono}$ au voisinage de l'interface (○) D, (▽) $\frac{1}{2<\overline{\rho}>}(<\overline{\mu}>+<\overline{\rho}\nu_{sm}>)\frac{\partial^2<\overline{u}_i'\overline{u}_i'>}{\partial z^2}$, (△) $\frac{1}{2<\overline{\rho}>}\frac{\partial(<\overline{\mu}>+<\overline{\rho}\nu_{sm}>)}{\partial z}\frac{\partial^2<\overline{u}_i'\overline{u}_i'>}{\partial z^2}$

Dans la configuration *Ref I*, les termes contribuant au bilan d'énergie cinétique turbulente sont entièrement négligeables dans le liquide puisque celui-ci s'écoule dans un régime essentiellement laminaire (figure 5.3.21). En fait, toutes les contributions au bilan d'énergie autres que les termes de diffusion visqueuse et de dissipation sont nulles dès l'interface et demeurent nulles sous celle-ci. L'équilibre entre la diffusion visqueuse D et la dissipation ϵ qui prévaut dans la sous-couche visqueuse de l'écoulement gazeux se prolonge donc sous l'interface. On note que les deux premiers points du domaine liquide subissent encore l'influence de la variation brutale ($\partial < \overline{\mu} > /\partial z$) de la viscosité dynamique à la traversée de l'interface. Les termes de diffusion et de dissipation subsistent sur une certaine épaisseur avant de devenir négligeables plus loin dans le liquide.

La configuration *Ref II* qui se caractérise par une interface déformée offre un bilan d'énergie cinétique turbulente dans le liquide bien différent. En effet, l'équilibre entre la diffusion visqueuse D et la pseudo-dissipation ϵ est rapidement rompu par les effets de la diffusion par la pression Π qui jusqu'à présent n'intervenaient pas véritablement dans le bilan d'énergie cinétique turbulente. Ce terme devient significatif dans le liquide avec l'apparition des ondes de surface. Dans cette zone correspondant à la partie basse des ondes (creux), le terme Π est négatif, c'est-à-dire qu'il prélève de l'energie au système pour le restituer dans le voisinage de l'interface où il est positif. Dans ce cas (figure 5.3.21), si le bilan d'énergie cinétique turbulente est équilibré ($Dk/Dt = 0$), la pseudo - dissipation $\epsilon = -P - T - TL - \Pi - D$ qui viendrait compenser entièrement Π serait positive. Cette situation est impossible d'un point de vue physique puisque la dissipation est "construite" pour être négative, sa contribution dominante étant donnée par :

$$\epsilon \approx - < \nu + \nu_{sm} >< \left(\partial \overline{u}_i'/\partial x_j\right)^2 > \tag{5.3.11}$$

Pour tenter de comprendre cette observation paradoxale, il faut s'intéresser aux écritures des bilans statistiques dans le cadre du modèle à un fluide turbulent (Annexe B). Soit $\overline{l}_{ij} = \overline{\rho} L_{ij}$ le terme de Léonard diphasique et $\overline{\alpha} = \overline{\mu} + \overline{\rho}\nu_{sm}$ la viscosité dynamique effective, le bilan de

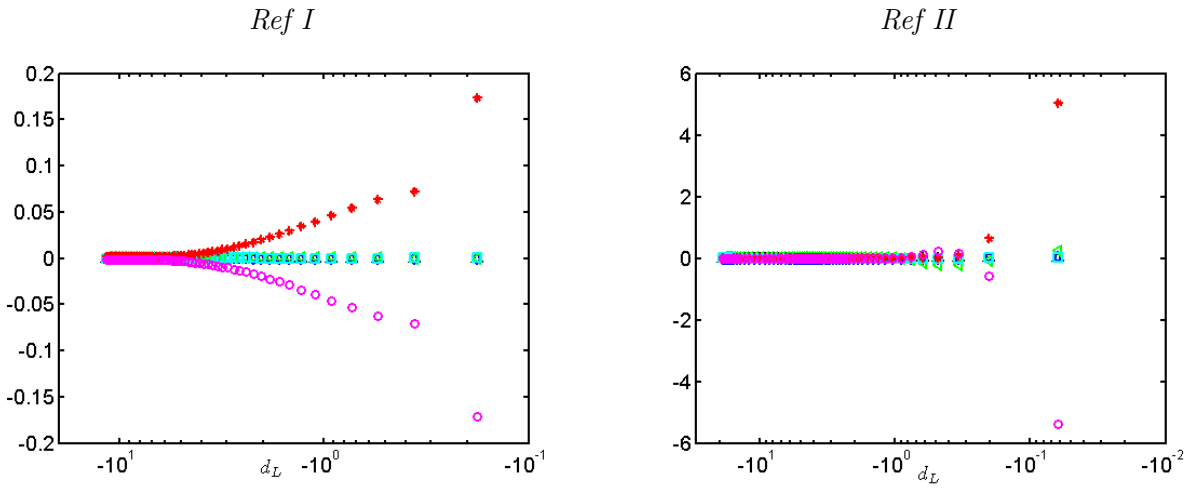


FIGURE 5.3.21 – Bilan d'énergie cinétique turbulente dans le liquide
$(\triangle)P$, $(\triangleleft)\Pi$, $(\diamond)T$, $(\square)TL$, $(*)D$, $(\circ)\epsilon$

l'écoulement moyen s'écrit :

$$\frac{D<\overline{V_i}>}{Dt} = -\sum_j \frac{\partial <\overline{V}'_i\overline{V}'_j>}{\partial x_j} + g_i - \frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial <\overline{p}>}{\partial x_i} + \frac{<F_{ci}>}{<\overline{\rho}>} - \frac{1}{<\overline{\rho}>}\sum_j \frac{\partial <l_{ij}>}{\partial x_j} + \frac{2}{<\overline{\rho}>}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(<\overline{\alpha}><\overline{S}_{ij}> + <\overline{\alpha}'\,\overline{S}'_{ij}>\right) \quad (5.3.12)$$

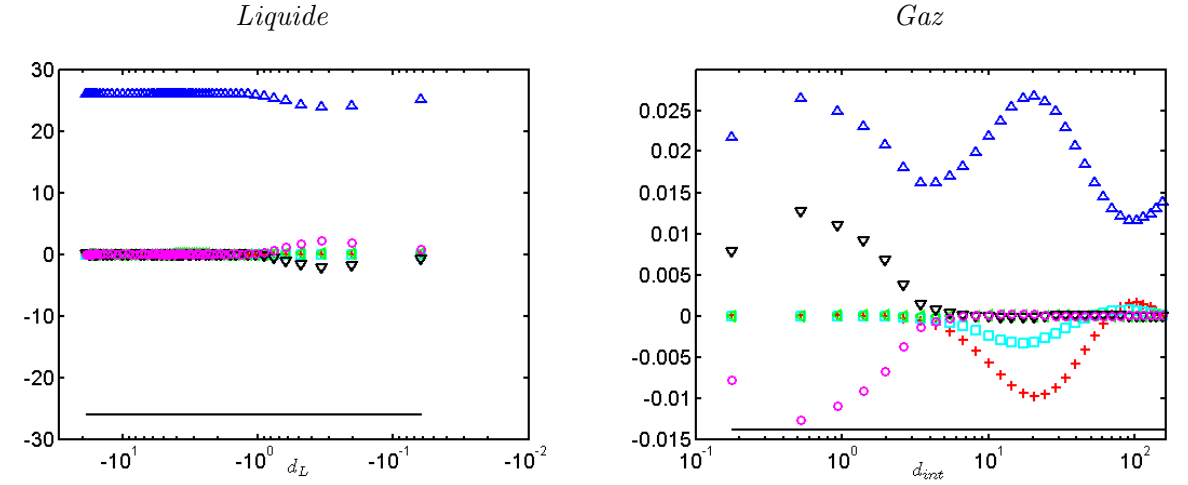


FIGURE 5.3.22 – Bilan de $D<\overline{W}>/Dt$ normalisé par ν/u^{*3}
$(+)\frac{\partial<\overline{w}'\overline{w}'>}{\partial z}$, $(\triangle) -\frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial<\overline{p}>}{\partial z}$, $(-)g_y$, $(\triangleleft)\frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial}{\partial z}\left(<\overline{\alpha}><\overline{S}_{22}> + <\overline{\alpha}'\,\overline{S}'_{22}>\right)$, $(\square) -\frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial\overline{l}_{22}}{\partial z}$
$(\triangledown)\frac{\partial<\overline{w}'\overline{w}'>}{\partial z} - \frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial<\overline{p}>}{\partial z} + \frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial}{\partial z}\left(<\overline{\alpha}><\overline{S}_{22}> + <\overline{\alpha}'\,\overline{S}'_{22}>\right) - \frac{1}{<\overline{\rho}>}\frac{\partial\overline{l}_{22}}{\partial z}$, $(\circ)\frac{<Fc_3^{ideal}>}{<\overline{\rho}>}$

La figure 5.3.22 représentant le bilan de l'écoulement moyen dans la direction verticale z montre qu'au voisinage de l'interface dans les phases liquide et gazeuse, le terme prédominant est celui

lié au gradient de la pression $\partial < \overline{p} > /\partial z$. Les estimations des forces capillaires n'ont pas révélé des tendances nettes. Ces forces semblaient mal évaluées et n'assuraient pas clairement l'équilibre du bilan de l'écoulement moyen vertical. Un bilan d'écoulement parfaitement développé ($D < \overline{W} > /Dt = 0$) avec une prise en compte exacte du terme capillaire devrait présenter un équilibre dans la zone interfaciale entre la pression et les effets capillaires. Cette idée est renforcée par le fait que le bilan est déséquilibré uniquement au niveau de la zone interfaciale.

Cette remarque montre que des améliorations des schémas numériques pour la prise en compte des effets capillaires doivent encore être apportées pour la bonne représentation des ondes de surface. Elles pourraient en particulier favoriser la reproduction numérique de la configuration expérimentale de Jurman et McCready [35] caractérisée par un nombre de Reynolds gazeux de l'ordre de 10^4 et une interface fortement déformée. Cette situation n'a pu être simulée avec les différents schémas testés durant cette thèse.

Revenons au bilan d'énergie cinétique turbulente de la configuration *Ref II*. Dans une approche diphasique (Annexe B), le terme de pseudo-dissipation ϵ est modifié et peut se mettre sous la forme :

$$\epsilon = TC + \Theta + DS \tag{5.3.13}$$

où

$$TC = \frac{1}{<\overline{\rho}>} \sum_i < \overline{F}'_{c_i}\ \overline{u}'_i > \tag{5.3.14}$$

$$\Theta = \frac{2}{<\overline{\rho}>} \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(< \overline{\alpha}'\ \overline{u}'_i >< \overline{S}_{ij} > \right) - < \overline{\alpha}'\ \frac{\partial \overline{u}'_i}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \right\} \tag{5.3.15}$$

$$DS = \frac{1}{<\overline{\rho}>} \sum_{ij} \left\{ - < \overline{\alpha} >< \left(\frac{\partial \overline{u}'_i}{\partial x_j} \right)^2 > + < \overline{l}'_{ij} \frac{\partial \overline{u}'_i}{\partial x_j} > + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(< \overline{\alpha} >< \overline{u}'_i\ \frac{\partial \overline{u}'_j}{\partial x_i} > \right) - < \overline{\alpha} >< \frac{\partial \overline{u}'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u}'_j}{\partial x_i} > \right\} \tag{5.3.16}$$

La contribution DS représente la dissipation réelle classiquement obtenue pour les écoulements turbulents monophasiques tandis que Θ qui apparait avec la prise en compte du caractère diphasique ($\overline{\mu}$) et de la modélisation (ν_{sm}) des contraintes de sous-maille, traduit les corrélations entre les fluctuations de la viscosité dynamique totale $\overline{\alpha}' = (\overline{\mu} + \overline{\rho}\nu_{sm})' \neq 0$ et l'écoulement moyen. Enfin, le terme TC traduit la corrélation entre les fluctuations de la force capillaire et de la vitesse. Comme vu plus haut pour l'écoulement moyen, les effets liés au gradient de pression sont compensés par les effets capillaires dans la zone interfaciale. De ce fait, un équilibre s'établit entre la diffusion par la pression Π et les corrélations entre la force capillaire et les fluctuations de vitesses TC. Ainsi, le bilan a priori incohérent observé sur la figure 5.3.21 trouve son explication au travers de la contribution des effets capillaires. La zone interfaciale liée aux ondes de surface est avant tout le siège d'un équilibre non visqueux entre les forces capillaires et les gradients de pression. Les termes corresponants dominent donc le bilan d'énergie cinétique et l'évaluation des autres termes notamment ceux qui font intervenir la viscosité est délicate à cause de leur ordre de grandeur sécondaire.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simulé un écoulement à phases séparées caractérisé par un film liquide laminaire cisaillé par un courant gazeux turbulent. Cette étude nous a permis de tester le

comportement du modèle et du code dans une configuration d'écoulement turbulent-laminaire. Comme attendu, le modèle dynamique ne génère aucune structure turbulente significative dans la phase laminaire. De plus, les configurations analysées ont permis de confirmer l'idée selon laquelle dans un écoulement à phases séparées dominé par un rapport de densité important, le fluide léger voit l'interface comme une paroi mobile. Toutefois, en diminuant localement le cisaillement, les déplacements de l'interface affaiblissent localement le niveau de la turbulence par rapport au cas d'une paroi. Du côté liquide, la très forte inertie limite la pénétration de la turbulence en provenance du courant gazeux. Enfin, nous avons montré que l'utilisation d'une méthode sans reconstruction et donc la présence d'une zone interfaciale diffuse affecte le comportement des termes visqueux du bilan d'energie cinétique à cause de la variation locale des propriétés physiques.

Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse intervenait dans une collaboration entre le groupe Air Liquide et l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Son objectif était de développer une méthodologie numérique permettant d'apporter des éléments de compréhension de la dynamique des films liquides cisaillés par un courant gazeux turbulent. Pour cela, nous avons mis au point un outil numérique capable de simuler des écoulements diphasiques qui tient compte de la présence éventuelle des structures turbulentes.

Les interfaces ont une topologie variable et peuvent être faiblement ou fortement déformées. De ce fait, nous avons choisi pour les suivre, une approche eulérienne de type Volume of Fluid (VoF) sans étape de reconstruction de l'interface. Dans ce modèle à un fluide, les phases en présence ne sont plus considérées de façon individuelle mais elles sont remplacées par un fluide unique ayant des propriétés physiques variables. Ce modèle dérivé en annulant les différentes fluctuations de vitesses, est classiquement utilisé pour la simulation d'écoulements diphasiques laminaires. Afin de prendre en compte la turbulence, nous avons relâché l'hypothèse négligeant les fluctuations de vitesses et avons tenu compte des effets des petites échelles sur les échelles résolues qui sont de l'ordre du pas de la discrétisation spatiale. Cela revient à utiliser une approche de simulation des grandes échelles (SGE) qui constitue un bon compromis entre les approches statistiques (RANS) et la simulation directe. Le système ainsi obtenu est fermé par un modèle dynamique mixte des contraintes de sous-maille, ce qui lui permet de s'adapter automatiquement aux caractéristiques locales de la turbulence et de fonctionner correctement si l'une des phases est partiellement ou complètement laminaire. Le modèle développé durant ce travail constitue à notre connaissance l'un des premiers permettant le traitement de la turbulence dans une méthodologie à interface diffuse.

Le modèle à un fluide dans sa version de base nous a tout d'abord permis de simuler des configurations connues d'écoulements de films liquides ruisselant sur un plan incliné. Les grandes lignes de la carte de stabilité ainsi que les différentes natures et les caractéristiques des ondes de surface ont été retrouvées. En particulier, seules les grandes longueurs déstabilisent les films liquides tombant sous l'effet de la gravité et selon la fréquence de perturbation, il se forme des ondes quasi-périodiques ou des ondes solitaires.

Quant au modèle à un fluide turbulent, nous l'avons utilisé pour simuler des écoulements à phases séparés dans différents régimes. La reproduction d'un écoulement gaz-liquide turbulent-turbulent avec une interface faiblement déformée nous a permis de valider le modèle développé. L'essentiel des résultats obtenus par ce dernier se sont avérés en bon accord avec ceux fournis par Fulgosi et *al.* [23] résultant d'une simulation directe et d'une approche lagrangienne pour le suivi de l'interface. Il est apparu en revanche que certaines grandeurs statistiques sont polluées dans l'épaisseur numérique de la zone interfaciale du fait de la variation des propriétés physiques (masse volumique et surtout viscosité).

D'un point de vue qualitatif, nous avons noté que dans un écoulement caractérisé par un fort

rapport de densité, le fluide léger voit essentiellement l'interface comme une paroi mobile. La position des maxima des intensités turbulentes et de production d'énergie cinétique turbulente sont identiques au voisinage d'une interface et d'une paroi. Cependant, la liberté de mouvement laissée à l'interface réduit logiquement le cisaillement et la dissipation près de l'interface.

Du côté liquide en régime turbulent, le comportement noté en-dessous de l'interface est typiquement celui observé sous une interface cisaillée. La turbulence est générée dans la couche limite juste sous l'interface et se propage vers le cœur du film. En résumé, tant que les déformations d'interface restent faibles, le gaz voit l'interface comme une condition de vitesse imposée alors que liquide la voit comme une condition de cisaillement imposé.

Les simulations d'écoulements de films liquides laminaires cisaillés par un courant gazeux turbulent ont confirmé que le modèle s'adapte automatiquement au régime local d'écoulement. En effet, aucune structure turbulente artificielle n'a été observée dans la phase liquide. L'interface constitue une zone de séparation entre une région de forte turbulence constituée par la couche limite du côté gazeux et une zone essentiellement laminaire que représente le liquide. L'analogie pour le gaz entre une interface et une paroi mobile a été confirmée. Côté liquide, l'inertie limite très fortement la pénétration de la turbulence. Les déformations de l'interface modifient localement le comportement de la turbulence. En fait, sous l'interface moyenne, les fluctuations verticales de vitesse priment sur les fluctuations dans la direction transverse du fait du déplacement vertical de l'interface et du caractère essentiellement bidimensionnel de l'écoulement dans le liquide.

De nombreuses perspectives à ce travail peuvent être envisagées. La première réflexion découle du comportement des termes visqueux dans la zone interfaciale. En fait, le modèle à un fluide qui a servi dans ces simulations utilise une estimation des contraintes visqueuses basée sur un seul coefficient de viscosité pondéré linéairement par le taux de présence de chaque phase. Benkenida et Magnaudet ([9] et [10]) ont montré que ce modèle raccorde correctement les contraintes normales mais n'assure pas de façon naturelle la continuité des cisaillements. Ils ont établi que pour raccorder l'intégralité des contraintes visqueuses, le modèle le plus simple met en jeu deux coefficients de viscosité au lieu d'un seul usuel. Ce deuxième modèle mérite d'être testé et comparé dans le cas d'un écoulement turbulent diphasique.

Un deuxième point à explorer concerne les méthodes de suivi d'interface. En effet, les schémas numériques utilisés dans ce travail pour le suivi d'interface et l'évaluation de la force capillaire n'ont pas permis d'aboutir à un régime permanent lorsque nous avons cherché à reproduire les résultats de Jurman et McCready [35] correspondant à des nombres de Reynolds $Re_L = 5$ et $Re_G = 9850$. Les schémas de type FCT ne conservent pas strictement la raideur des fronts aux temps longs. Une procédure de raidissement artificiel des fronts de l'interface a été introduite durant ce travail, ce qui a permis de retarder mais non annuler l'apparition d'instabilités numériques au niveau de l'interface. Ce constat a été également fait en développant et en utilisant un schéma de type WENO. Des questions restent ouvertes. S'agit-il d'un effet de l'approximation des forces capillaires tendant à sous-estimer cette force dans les zones de forte courbure et donc à fragiliser l'interface ? Au contraire, les résultats sont-ils physiquement acceptables dans la mesure où les transitions numériques semblent survenir plus tôt que ne l'indiquent les résultats expérimentaux ? Les bilans statistiques de la configuration $Re_L = 5$ et $Re_G^* = 161$ ayant révélé l'importance des effets capillaires dans l'équilibre physique et "numérique" de l'écoulement, indique un axe privilegié de recherche. Il faudrait ainsi s'intéresser de plus près à la prise en compte par des schémas numériques des effets capillaires.

En se plaçant enfin dans une perspective d'exploitation de l'outil que nous avons développé, il faut noter que les simulations de films cisaillés ont été effectuées dans une configuration co-courant.

La suite logique à ce travail notamment dans l'optique d'une étude systématique des écoulements rencontrés en distillation, consiste à simuler des écoulements évoluant à contre-courant. Une fois rassuré sur les limitations du schéma de capture d'interface et sur les déformations des contraintes visqueuses dans les régions interfaciales, ces écoulements à contre-courant pourront être simulés dans le régime le plus intéressant pour les applications : celui où l'on s'approche du point d'engorgement c'est-à-dire du régime où le cisaillement par le gaz contrebalance quasiment l'entraînement gravitaire du film.

Bibliographie

[1] S. Alekseenko : Instabilities and transport phenomena in liquid thin films. *Wave dynamics and stability of thin film flow systems, Narosa Publishing House*, 2006.

[2] S. V. Alekseenko, V. E. Nakoryakov et B. G. Pokusaev : Wave formation on vertical falling liquid films. *AIChE*, 31:1446–1460, 1985.

[3] M. A. Ali, A. T. Jameel et F. R. Ahmadun : Stability and rupture of nano-liquid film flowing down an heated inclined plane. *Computers and Chemical Engineering*, 29:2144–2154, 2005.

[4] W. Ambrosini, N. Forgione et F. Oriolo : Statistical characteristics of a water film falling down a falt plate at different inclinations and temperatures. *Int. J. Multiphase Flow*, 28:1521–1540, 2002.

[5] J. C. Asali et T. J. Hanratty : Ripples generated on a liquid film at high gas velocities. *Int. J. Multiphase Flow*, 19:229–243, 1993.

[6] S. G. Bankoff : Stability of liquid flow down an heated inclined plane. *Int. J. Heat Mass Transfert*, 14:377–385, 1971.

[7] J. Bardina, J. H. Ferziger et W. C. Reynolds : Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Rapport technique TF-19, Stanford Univ., 1983.

[8] T. B. Benjamin : Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluide Mech.*, 2, 1957.

[9] A. Benkenida : *Développement et validation d'une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interfaces.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1999.

[10] A. Benkenida et J. Magnaudet : Une méthode de simulation d'écoulements diphasiques sans reconstruction d'interface. *C.R. Acad. Sci. Paris, t.328, Série IIb*, pages 25–32, 2000.

[11] D. J. Benney : Long wave on liquid films. *J. Math. Phys.*, 45:150 – 155, 1966.

[12] A. Blanco : *Quelques aspects de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une bulle déformable : une analyse par simulation directe.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1995.

[13] T. Bonometti : *Développement d'une méthode de simulation d'écoulements à bulles et à gouttes.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.

[14] T. Bonometti et J. Magnaudet : An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. validation and application to bubble dynamics. *Int. J. Multiphase Flow*, 33:109–133, 2007.

[15] J. U. Brackbill, D. B. Kothe et C. Zemach : A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.*, 100:335–354, 1992.

[16] I. Calmet : *Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane.* Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1995.

[17] I. Calmet et J. Magnaudet : Large eddy simulation of high schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 9:438–455, 1997.

[18] I. Calmet et J. Magnaudet : Statistical structure of high reynolds number turbulence close to the free surface of an open-channel flow. *J. Fluid Mech*, 474:355–378, 2003.

[19] H-C. Chang : Wave evolution on a falling film. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26:103–136, 1994.

[20] K. J. Chu et A. E. Duckler : Statistical characteristics of thin, wavy films : Part ii. studies of the substate and its wave structure. *AIChE J.*, 20(4):695–706, 1974.

[21] Alex D. D. Craik : Wind-generated waves in thin liquid films. *J. Fluid Mech.*, 26:369–392, 1966.

[22] R. DeBar : Fundamentals of the kraken code. Rapport technique, Lawrence Livemore Nat. Lab., 1974.

[23] M. Fulgosi, D. Lakehal, S. Banerjee et V. De Angelis : Direct numerical simulation of turbulence in a sheared air-water flow with a deformable interface. *J. Fluid Mech.*, 482:319–345, 2003.

[24] D. Gao, N. B. Morley et V. Dhir : Numerical simulation of wavy falling film flow using vof method. *J. Comput. Phys.*, 192:624–642, 2003.

[25] H. Gao, H.-Y. Gu et L.-J. Guo : Numerical study of stratified oil-water two phase turbulent flow in a horizontal tube. *Int. J. of Heat and Mass transfer*, 46:749–754, 2003.

[26] M. Germano : A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered navier-stokes equations. *Phys. Fluids*, 29:2323 – 2324, 1986.

[27] M. Germano : Turbulence : the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, 238:325 – 336, 1992.

[28] M. Germano, M. Piomelli, P. Moin et W. Cabot : A dynamic mixed subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, A 3:1760 – 1765, 1991.

[29] S. Ghosal : On the large eddy simulation of turbulent flows in complex geometry. *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research, Stanford Univ./NASA Ames, 111 - 128*, 1993.

[30] B. Gjevik : Occurence of finite-amplitude surface waves on falling liquid film. *Phys. Fluids*, 13(8), 1970.

[31] F. H. Harlow et J. E. Welch : Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8(12):2182–2189, 1981.

[32] C. W. Hirt et B. D. Nichols : Volume of fluid method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, 39:201–225, 1981.

[33] L.-W. Ho et A. T. Patera : A legendre spectral element method for simulation of unsteady incompressible viscous free-surface flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 80:355–366, 1990.

[34] L. A. Jurman, K. Bruno et M. J. McCready : Periodic and solitary waves on thin horizontal, gas-sheared liquid films. *Int. J. Multiphase FLow*, 15(3):371–384, 1989.

[35] L. A. Jurman et M. J. McCready : Study of waves on thin liquid films sheared by turbulent gas flows. *Phys. Fluids*, 3, 1989.

[36] P. L. Kapitza et S. P. Kapitza : Wave flow of thin layers of a viscous fluid : Iii. experimental study of undulatory flow conditions. *Zh. Exp. teor. Fiz.*, 19(105), 1949.

[37] T. D. Karapantsios et A. J. Karabelas : Longitudinal characteristics of wavy falling films. *Int. J. Multiphase Flow*, 16:835–852, 1995.

[38] G. Karimi et M. Kawaji : An experimental study of freely falling films in a vertical tube. *Chemical Engineering Science*, 53(20):3501–3512, 1998.

[39] E. Labourasse, D. Lacanette, A. Toutant, P. Lubin, S. Vincent, O. Lebaigue, J.-P. Caltagirone et P. Sagaut : Toward large eddy simulation of isothermal two-phase flows : Governing equations and a priori tests. *Int. J. Multiphase Flow*, 33:1–39, 2007.

[40] D. Lacanette, A. Gosset, S. Vincent, J.-M. Buchlin et E. Arquis : Macroscopic analysis of gas-jet wiping : Numerical simulation and experimental approach. *Phys. Fluids*, 18, 2006.

[41] D. Lacanette, S. Vincent et E. Arquis : A numerical experiment on the interaction between a film and a turbulent jet. *C. R. Mecanique*, 333:343–349, 2005.

[42] D. Lakehal, S. Reboux et P. Liovic : Sub-grid scale modelling for the les of interfacial gas-liquid flows. *La houille blanche*, 6, 2005.

[43] J.-J. Lee et C. C. Mei : Stationary waves on an inclined sheet of viscous fluid at high reynolds and moderate weber numbers. *J. Fluid Mech.*, 307:191–229, 1996.

[44] D. K. Lilly : A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids*, A 4:633 – 635, 1992.

[45] S. P. Lin : Finite-amplitude side-band stability of a viscous film. *J. Fluid Mech.*, 63:417–429, 1974.

[46] S.P. Lin : Finite-amplitude stability of a parallel flow with a free surface. *J. Fluid Mech.*, 36:113–126, 1969.

[47] P. Liovic et D. Lakehal : Interface-turbulence interactions in large-scale bubbling processes. *Int. J. of Heat and Fluid*, 28:127–144, 2007.

[48] P. Liovic et D. Lakehal : Multi-physics treatment in the vicinity of arbitrarily deformable gas-liquid interfaces. *J. Comput. Phys.*, 222:504–535, 2007.

[49] J. Liu, J. D. Paul et J. P. Gollub : Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.*, 250:69–101, 1993.

[50] J. Liu, J. B. Schneider et J. P. Gollub : Three-dimensional instabilities of film flows. *Phys. Fluids*, 7(1), 1995.

[51] P. Lombardi, V. De Angelis et S. Banerjee : Direct numerical simulation of near-interface turbulence in coupled gas-liquid flow. *Phys. Fluids*, 8, 1996.

[52] C. Lorencez, M. Nasr-Esfahany, M. Kawaji et M. Ojha : Liquid turbulence structure at a sheared and wavy gas-liquid interface. *Int. J. Multiphase Flow*, 23:205–226, 1997.

[53] A. Merle : *Interaction d'une bulle sphérique avec un écoulement turbulent ou tourbillonnaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.

[54] C. Nakaya : Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 18(11), 1975.

[55] C. H. Newton et M. Behnia : Numerical calculation of turbulent stratified gas-liquid pipe flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 26:327–337, 2000.

[56] Th. Prokopiou, M. Cheng et H-C. Chang : Long waves on inclined films at high reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 222:665–691, 1991.

[57] B. Ramaswamy, S. Chippada et S. Joo : A full scale numerical study of interfacial instabilities in thin film flows. *J. Fluid Mech.*, 325:163–194, 1996.

[58] M. Rashidi, G. Hetsroni et S. Banerjee : Wave-turbulence interaction in free-surface channel flows. *Phys. Fluids*, A 4:2727–2739, 1992.

[59] S. Reboux, P. Sagaut et D. Lakehal : Large-eddy simulation of sheared interfacial flow. *Phys. Fluids*, 18, 2006.

[60] G. J. Roskes : Three-dimensional long waves on a liquid film. *Phys. Fluids*, 13(6), 1970.

[61] T. R. Salamon, R. C. Armstrong et R. A. Brown : Travelling waves on vertical films : Numerical analysis using the finite element method. *Phys. Fluids*, 6:2202–2220, 1994.

[62] B. Scheid : Initial effects in falling liquid films. *Wave dynamics and stability of thin film flow systems, Narosa Publishing House*, 2006.

[63] G. I. Sivashinsky et D. M. Michelson : On the irregular wavy flow of liquid film down a vertical plane. *Prog. Theor. Phys.*, 63:2112, 1980.

[64] J. Smagorinsky : General circulation experiments with the primitive equations. *Month. Weath. Rev.*, 93:99–165, 1963.

[65] C. G. Speziale : Galilean invariance of subgrid-scale stress models in the large-eddy simulation of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 156:55 – 62, 1985.

[66] M. Sussman, P. Smereka et S. Osher : A level set approach for computing solutions to incompressible two phase flow. *J. Comput. Phys.*, 62:3–34, 1994.

[67] H. Takahama et S. Kato : Longitudinal flow characteristics of vertically falling liquid films without concurrent gas flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 6:203–215, 1980.

[68] Yu. Ya. Trifonov et O. Yu. Tsvelodub : Nonlinear waves on the surface of a falling liquid film. part 1. waves of the first family and their stability. *J. Fluid Mech.*, 229:531–554, 1991.

[69] S. O. Unverti et G. Tryggvason : A front-tracking method for viscous, incompressible, multifluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100:25–37, 1992.

[70] A. Wierschem et N. Aksel : Instability of a liquid film flowing down an inclined wavy plane. *Physica D*, 186, 2003.

[71] C-S. Yih : Stability of liquid flow down an inclined plane. *Phys. Fluids*, 6(3), 1963.

[72] S. T. Zalesak : Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, 100:335–354, 1992.

[73] Y. Zang, R. L. Street et J. R. Koseff : A dynamic mixed subgrid scale model and its application to turbulent recirculating flows. *Phys. Fluids*, A 5:3186 – 3196, 1993.

Appendices

Annexe A
Choix des gradients de pression

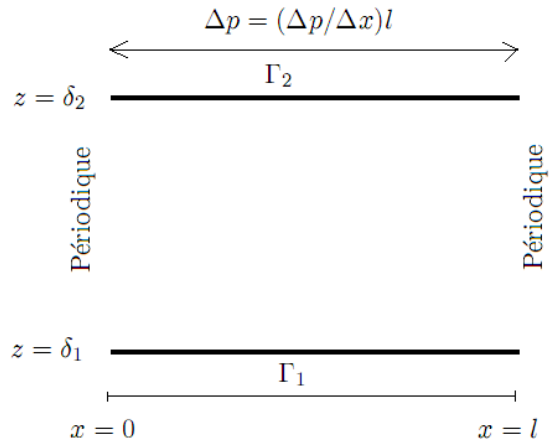


FIGURE A-1 – Domaine d'écoulement

On considère un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ évoluant dans un domaine de longueur l et délimité par les frontières Γ_1 et Γ_2 (figure A-1). On suppose que ce fluide s'écoule dans la direction x sous l'effet d'un gradient de pression moyen $\Delta p/\Delta x$.

Écoulement turbulent

On considère un écoulement turbulent homogène s'écoulant entre les frontières Γ_1 et Γ_2 sous l'effet d'un gradient de pression $\Delta p/\Delta x$. En régime établi, le bilan de quantité de mouvement impose un gradient de pression qui compense le cisaillement total :

$$\tau(\delta_2) - \tau(\delta_1) = \frac{\Delta p}{\Delta x}(\delta_2 - \delta_1) \tag{A-1}$$

Afin de caractériser le cisaillement aux frontières, on introduit la vitesse de frottement u^* :

$$u^* = \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} \tag{A-2}$$

En utilisant les vitesses de frottement aux frontières Γ_1 et Γ_2 et en tenant compte du fait que le cisaillement à la frontière Γ_2 est négatif (vitesse décroissante), on en déduit une estimation du

gradient de pression :

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{\rho\left(u_2^{*^2} + u_1^{*^2}\right)}{\delta_2 - \delta_1} \tag{A-3}$$

Il ne reste plus qu'à définir un lien entre les vitesses de frottement et le débit de l'écoulement. Les relations sont précisées dans les cas particuliers d'écoulements entre deux plaques (canal) ou avec une surface libre (demi-canal).

Écoulement turbulent entre deux plaques

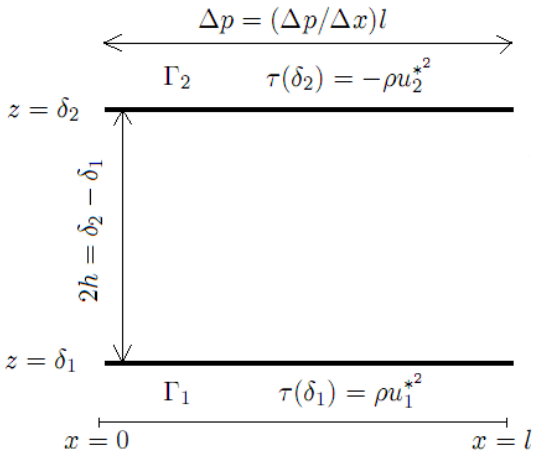


FIGURE A-2 – Domaine périodique pour un écoulement turbulent entre deux plaques

Dans le cas d'un écoulement entre deux plaques (figure A-2), les frontières Γ_1 et Γ_2 sont identiques. Par conséquent, les valeurs absolues des cisaillements et les vitesses de frottement aux frontières sont égales :

$$\tau = |\tau(\delta_1)| = |\tau(\delta_2)| \quad \text{et} \quad u^* = u_1^* = u_2^* = \sqrt{\tau/\rho} \tag{A-4}$$

L'équation (A-3) devient :

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{2\rho u^{*^2}}{\delta_2 - \delta_1} = -\frac{\rho u^{*^2}}{h} \tag{A-5}$$

où $h = (\delta_2 - \delta_1)/2$ est la demi-hauteur du domaine.

On définit un nombre de Reynolds Re^* basé sur la vitesse de frottement u^* et la demi-hauteur h du domaine :

$$Re^* = \frac{\rho u^*}{\mu}\frac{\delta_2 - \delta_1}{2} = \frac{\rho u^* h}{\mu} \tag{A-6}$$

La loi logarithmique vérifiée par le profil de vitesse moyen dans la couche limite turbulente offre une estimation de la vitesse débitante U_0 de l'écoulement à partir de la vitesse de frottement u^* :

$$U_0 \approx 2.5\,(1 + ln(Re^*))\,u^* \tag{A-7}$$

La connaissance de la vitesse U_0 permet d'évaluer le débit volumique Q de l'écoulement et un nombre de Reynolds global Re :

$$Q = U_0 \left(\delta_2 - \delta_1\right) = 2U_0 h \quad \text{et} \quad Re = \frac{\rho Q}{\mu} = \frac{2\rho U_0 h}{\mu} \tag{A-8}$$

On en déduit que les nombres de Reynolds global Re et de cisaillement Re^* sont liés par :

$$Re \approx 5\left(1 + ln(Re^*)\right) Re^* \tag{A-9}$$

Il est possible de définir des nombres de Reynolds en utilisant comme longueur caractéristique la demi-hauteur h ou le diamètre hydraulique $D = 4h$:

$$Re_h = \frac{\rho U_0 h}{\mu} = \frac{Re}{2} \quad \text{ou} \quad Re_D = \frac{\rho U_0 D}{\mu} = \frac{4\rho U_0 h}{\mu} = 2Re \tag{A-10}$$

Nous choisissons comme convention d'utiliser le nombre de Reynolds basé sur le débit volumique. Dans la suite, sauf précision de notre part, le nombre de Reynolds d'un écoulement turbulent entre deux plaques est donné par :

$$Re = Re_Q = \frac{\rho Q}{\mu} = \frac{2\rho U_0 h}{\mu} \tag{A-11}$$

Écoulement turbulent dans un demi-canal

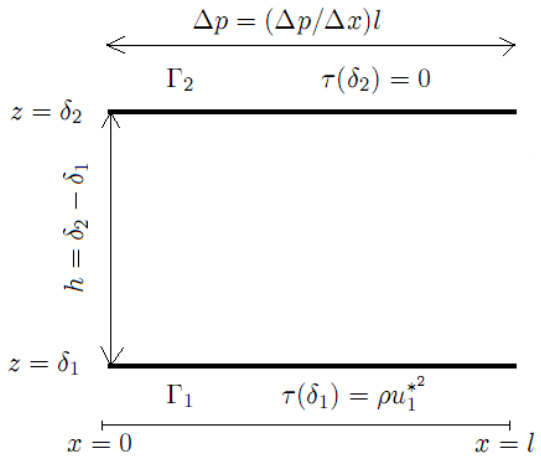


FIGURE A-3 – Domaine périodique pour un écoulement turbulent avec un plan de symétrie

On considère un écoulement dans un demi-canal (figure A-3). Dans ce cas, la frontière Γ_2 est remplacée par un plan de symétrie. Le cisaillement y est donc nul $\tau(\delta_2) = 0$ et l'équilibre des contraintes se fait uniquement entre le gradient de pression et le cisaillement à la frontière Γ_1 :

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{\rho {u^*}^2}{\delta_2 - \delta_1} = -\frac{\rho {u^*}^2}{h} \tag{A-12}$$

avec $h = \delta_2 - \delta_1$ et $u^* = u_1^*$.

Les nombres de Reynolds Re^* et Re basés respectivement sur le frottement à la paroi et le débit volumique s'écrivent :

$$Re^* = \frac{\rho u^* h}{\mu} \quad \text{et} \quad Re = \frac{\rho Q}{\mu} = \frac{\rho U_0 h}{\mu} \approx 2.5\,(1 + ln(Re^*))\,Re^* \tag{A-13}$$

Finalement, pour simuler avec des conditions périodiques un écoulement turbulent à un nombre de Reynolds Re donné, on estime d'abord le nombre de Reynolds Re^* lié au frottement aux parois, puis la vitesse de frottement u^* et enfin le gradient de pression ((A-5), (A-12)). Selon les conventions que nous avons adoptées pour les nombres de Reynolds, les écoulements turbulents entre deux plaques et en demi-canal sont équivalents s'ils sont caractérisés par le même nombre de Reynolds Re^* lié au frottement et non pas par une valeur identique du nombre de Reynolds global Re. On remarque également que l'expression du gradient de pression se met sous la même forme dans les deux cas :

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{\rho {u^*}^2}{h} \tag{A-14}$$

où $h = (\delta_2 - \delta_1)/2$ dans la configuration entre plaques et $h = \delta_2 - \delta_1$ en demi-canal.

Après le cas des écoulements turbulents, nous présentons brièvement la méthodologie conduisant au choix du gradient de pression pour la simulation d'écoulements laminaires.

Écoulement laminaire

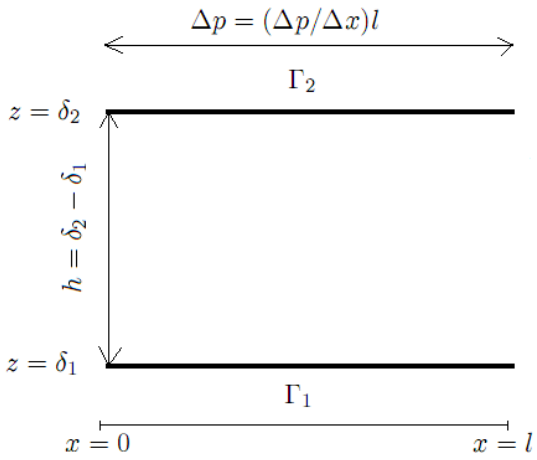


FIGURE A-4 – Domaine périodique pour un écoulement laminaire

On considère un écoulement laminaire évoluant sous l'effet d'un gradient de pression $\Delta p/\Delta x$ dans la direction homogène (périodique). Le fluide s'écoule dans le domaine délimité par les frontières Γ_1 et Γ_2 (figure 5.4). La direction de l'écoulement moyen est confondue avec la direction périodique x et la vitesse dépend uniquement de la coordonnée verticale z ($\mathbf{u} = U(z)\mathbf{x}$). En régime permanent et en supposant un gradient de pression moyen constant, la projection dans la direction longitudinale des équations de Navier-Stokes se réduit à l'égalité :

$$0 = -\frac{\Delta p}{\Delta x} + \mu \frac{d^2 U}{dz^2} \tag{A-15}$$

L'équation (A-15) suppose un profil de vitesse polynômial de degré 2 (parabolique). Il existe donc des coefficients réels a, b et c tels que :

$$U(z) = az^2 + bz + c \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} \tag{A-16}$$

Le débit volumique Q et la vitesse moyenne U_0 se mettent sous la forme :

$$Q = \int_{\delta_1}^{\delta_2} U(z)dz \quad \text{et} \quad U_0 = \frac{Q}{\delta_2 - \delta_1} = \frac{Q}{h} \tag{A-17}$$

avec $h = \delta_2 - \delta_1$ l'épaisseur du fluide.

Pour caractériser cet écoulement, le nombre de Reynolds Re est défini selon :

$$Re = \frac{\rho Q}{\mu} = \frac{\rho U_0 h}{\mu} \tag{A-18}$$

La connaissance complète du profil de vitesse passe par celle des coefficients b et c qui sont entièrement déterminés par les conditions aux limites imposées aux frontières Γ_1 et Γ_2.

Écoulement entre plaques

Pour un écoulement entre plaques, les vitesses aux frontières sont nulles ($U(\delta_1) = U(\delta_2) = 0$) et les coefficients b et c, le profil de vitesse $U(z)$ et le débit volumique Q sont donnés par :

$$a = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} \quad , \quad b = -a\left(\delta_2 + \delta_1\right) \quad \text{et} \quad c = -a\delta_1^2 - b\delta_1 \tag{A-19}$$

$$U(z) = a\left[\left(z^2 - \delta_1^2\right) - \left(\delta_2 + \delta_1\right)\left(z - \delta_1\right)\right] \quad \text{et} \quad Q = -\frac{a}{3}\left(\delta_2 - \delta_1\right)^3 \tag{A-20}$$

On retrouve le profil bien connu de Poiseuille-Couette.

Écoulement dans un demi-canal ou avec une surface libre

Dans le cas d'un écoulement dans un demi-canal, la frontière Γ_1 est une paroi rigide ($U(\delta_1) = 0$) tandis que la frontière Γ_2 est une surface libre ($dU/dz(z = \delta_2) = 0$). Les coefficients b et c, la vitesse $U(z)$ et le débit volumique Q sont alors donnés par :

$$a = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta p}{\Delta x} \quad , \quad b = -2a\delta_2 \quad \text{et} \quad c = -a\delta_1^2 - b\delta_1 \tag{A-21}$$

$$U(z) = a\left[\left(z^2 - \delta_1^2\right) - 2\delta_2\left(z - \delta_1\right)\right] \quad \text{et} \quad Q = -\frac{2a}{3}\left(\delta_2 - \delta_1\right)^3 \tag{A-22}$$

La connaissance du nombre de Reynolds Re entraîne celle du débit volumique Q et par conséquent celle du gradient de pression ($a \Longrightarrow \Delta p/\Delta x$).

Après ces considérations générales sur les écoulements monophasiques, intéressons nous désormais au choix des paramètres pour la simulation d'écoulements à phases séparées composés d'un courant gazeux turbulent et d'une phase liquide laminaire.

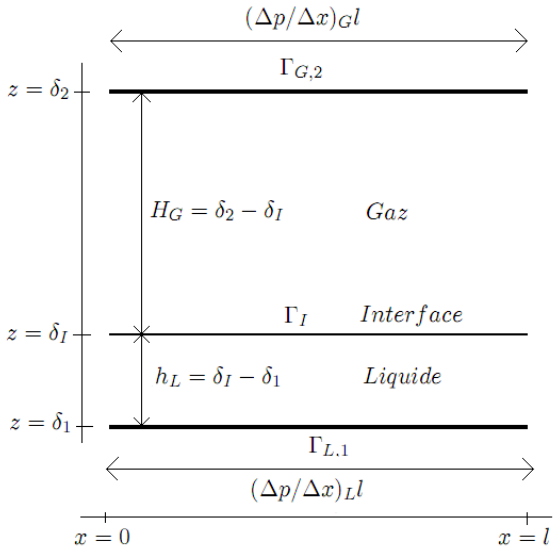


FIGURE A-5 – Domaine périodique pour un écoulement à phases séparées

Écoulement à phases séparées turbulent - laminaire

Considérons un écoulement à phases séparées caractérisé par une phase liquide laminaire et une phase gazeuse turbulente (figure 5.4). Les propriétés physiques et autres grandeurs relatives à la phase gazeuse (respectivement à la phase liquide) sont signalées par l'indice G (resp. L). L'écoulement turbulent dans le gaz est caractérisé par le nombre de Reynolds Re^*_G basé sur la vitesse de frottement aux parois. Ce choix permet de traiter de façon identique les cas d'écoulement en canal et en demi-canal. De plus, le nombre de Reynolds global $Re_G = \rho_G Q_G/\mu_G$ peut être estimé à partir de Re^*_G ((A-9), (A-13)). La phase liquide est quant à elle caractérisée par le nombre de Reynolds $Re_L = \rho_L Q_L/\mu_L$.

L'écoulement gazeux a désormais pour frontières d'une part l'interface gaz-liquide Γ_I et d'autre part la surface $\Gamma_{G,2}$ qui est soit une paroi rigide (canal) soit une surface libre (demi-canal). Quant au liquide, il est confiné entre une paroi rigide $\Gamma_{L,1}$ et l'interface Γ_I. Nous avons vu et confirmé au chapitre 4 que dans un écoulement dominé par un rapport de densités important, le fluide léger (le gaz) voit l'interface comme une paroi mobile. L'interface gaz-liquide peut donc être traitée comme une paroi. On définit ainsi à l'interface un cisaillement moyen τ_I et des vitesses moyennes de frottement $u^*_{G,I}$ côté gazeux et $u^*_{L,I}$ côté liquide selon :

$$|\tau_I| = \rho_G u^{*2}_{G,I} = \rho_L u^{*2}_{L,I} \tag{A-23}$$

La relation (A-23) traduit la continuité du cisaillement à la traversée de l'interface. On suppose en première approximation qu'une interface plane fournit le même niveau de cisaillement qu'une paroi rigide. En d'autres termes, la vitesse de frottement à l'interface $u^*_{G,I}$ est identique à la valeur de frottement $u^*_{G,Mono}$ qu'aurait ressenti le gaz s'il s'évoluait seul au-dessus d'une paroi rigide. Cette hypothèse se traduit par les équations :

$$u^*_{G,I} \approx u^*_{G,Mono} \quad \text{et} \quad Re^*_G = \frac{\rho_G u^*_{G,Mono} h_G}{\mu_G} \tag{A-24}$$

où $h_G = (\delta_G - \delta_I)/2$ est la demi-hauteur si l'on considère une condition d'adhérence à la frontière $\Gamma_{G,2}$ et $h_G = (\delta_G - \delta_I)$ si $\Gamma_{G,2}$ représente une surface libre.

De ces approximations, on déduit le gradient de pression permettant de compenser le cisaillement ressenti par le gaz :

$$(\Delta p/\Delta x)_G = -\frac{\rho_G u^{*^2}_{G,Mono}}{h_G} \tag{A-25}$$

En réalité, les cisaillements à l'interface et à la frontière supérieure $\Gamma_{G,2}$ n'ont aucune raison d'être rigoureusement identiques au cisaillement sur une paroi rigide. En fait, le gradient de pression $(\Delta p/\Delta x)_G$ compense les cisaillements subis par le gaz à la frontière $\Gamma_{G,2}$ et à l'interface Γ_I. Si on note $u^*_{G,2}$ la vitesse de frottement à la frontière $\Gamma_{G,2}$, l'équation (A-3) devient :

$$(\Delta p/\Delta x)_G = -\frac{\rho_G \left(u^{*^2}_{G,2} + u^{*^2}_{G,I}\right)}{\delta_G - \delta_I} \tag{A-26}$$

Quant au liquide, la projection dans la direction longitudinale des équations de Navier-Stokes conduit à un profil de vitesse parabolique avec des coefficients réels a, b et c à estimer :

$$U(z) = az^2 + bz + c \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2\mu_L}(\Delta p/\Delta x)_L \tag{A-27}$$

Les coefficients b et c sont déterminés par les conditions à la frontière $\Gamma_{L,1}$ et à l'interface Γ_I. À la surface $\Gamma_{L,1}$, la condition d'adhérence se traduit par :

$$U(\delta_1) = 0 \iff a\delta_1^2 + b\delta_1 + c = 0 \tag{A-28}$$

Pour le liquide, l'interface avec la phase gazeuse n'est pas une paroi à vitesse imposée mais une surface à cisaillement imposé. De ce fait, il subit à l'interface le cisaillement τ_I imposé par le courant gazeux. La condition aux limites vue par le liquide à l'interface Γ_I peut donc se traduire par :

$$\mu_L \frac{dU}{dz}(\delta_I) = \tau_I \iff \mu_L \left(2a\delta_I + b\right) = \tau_I \tag{A-29}$$

Le cisaillement τ_I est estimé en supposant qu'il est égal au cisaillement ressenti par l'écoulement gazeux au dessus d'une paroi rigide ($|\tau_I| = \rho_G u^{*^2}_{G,Mono}$). Selon le sens relatif d'écoulement des deux phases, le cisaillement τ_I est positif ou négatif. En utilisant les conditions (A-28) et (A-29), la vitesse dans la phase liquide s'écrit :

$$U(z) = a\left(z^2 - \delta_1^2\right) + \left(\frac{\tau_I}{\mu_L} - 2a\delta_I\right)(z - \delta_1) \tag{A-30}$$

On en déduit le débit volumique Q_L et le nombre de Reynolds liquide Re_L :

$$Q_L = \int_{\delta_1}^{\delta_I} U(z)dz = -\frac{2a}{3}\left(\delta_I - \delta_1\right)^3 + \frac{\tau_I}{2\mu_L}\left(\delta_I - \delta_1\right)^2 \quad \text{et} \quad Re_L = \frac{\rho_L Q_L}{\mu_L} \tag{A-31}$$

avec $a = (1/2\mu_L)(\Delta p/\Delta x)_L$.

Finalement, le gradient de pression correspond à ce régime d'écoulement est donné par :

$$(\Delta p/\Delta x)_L = \frac{3}{2}\frac{\tau_I}{\delta_I - \delta_1} - \frac{3\mu_L Q_L}{\left(\delta_I - \delta_1\right)^3} \tag{A-32}$$

Annexe B
Grandeurs statistiques turbulentes

Cette annexe est consacrée à l'étude des grandeurs statistiques de la turbulence. Elle s'appuie sur la décomposition des variables $\overline{\phi}$ sous forme de la somme d'une moyenne spatio-temporelle $<\overline{\phi}>$ et d'une partie caractéristique des fluctuations $\overline{\phi}'$:

$$\overline{\phi} =<\overline{\phi}> +\overline{\phi}' \tag{A-33}$$

Le modèle à un fluide s'écrit :

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}}.\nabla\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{g} - \frac{1}{\overline{\rho}}\nabla \mathrm{P} + \frac{2}{\overline{\rho}}\,\nabla.\left[(\overline{\mu} + \overline{\rho}\,\nu_{sm})\,\overline{\mathbf{S}}\,\right] - \frac{1}{\overline{\rho}}\nabla.\,(\overline{\rho}\,\mathbf{L}) + \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\mathbf{F}}_c \tag{A-34}$$

Posons $\overline{\alpha} = \overline{\mu} + \overline{\rho}\,\nu_{sm}$ la viscosité dynamique totale et $\mathbf{l} = \overline{\rho}\mathbf{L}$ le terme de Léonard diphasique. L'équation du modèle à un fluide se met sous la forme :

$$\frac{\partial\overline{\mathbf{V}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}}.\nabla\overline{\mathbf{V}} = \mathbf{g} - \frac{1}{\overline{\rho}}\nabla \mathrm{P} + \frac{2}{\overline{\rho}}\,\nabla.\left[\overline{\alpha}\,\overline{\mathbf{S}}\right] - \frac{1}{\overline{\rho}}\nabla.\bar{\mathbf{l}} + \frac{1}{\overline{\rho}}\overline{\mathbf{F}}_c \tag{A-35}$$

Écoulement moyen

Pour obtenir l'écoulement moyen, l'équation du modèle à un fluide est moyennée dans l'espace et dans le temps.

Évolution temporelle

$$\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial t} = \frac{\partial <\overline{V}_i>}{\partial t} + \frac{\partial\overline{V}'_i}{\partial t} \quad \text{et} \quad <\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial t}>= \frac{\partial <\overline{V}_i>}{\partial t} \tag{A-36}$$

Terme d'advection

$$\overline{V}_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j} = \overline{V}'_j\frac{\partial <\overline{V}_i>}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{V}'_i\overline{V}'_j)}{\partial x_j} - \overline{V}'_i\frac{\partial\overline{V}'_j}{\partial x_j} + <\overline{V}_j>\frac{\partial\overline{V}'_i}{\partial x_j} + <\overline{V}_j>\frac{\partial <\overline{V}_i>}{\partial x_j} \tag{A-37}$$

$$<\sum_j \overline{V}_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j}> = \sum_j <\overline{V}_j>\frac{\partial <\overline{V}_i>}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial <\overline{V}'_i\overline{V}'_j>}{\partial x_j} \tag{A-38}$$

Termes de gauche

$$< \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} > + < \sum_j \overline{V}_j \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} >= \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial t} + \sum_j < \overline{V}_j > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} + \sum_j \frac{\partial < \overline{V}'_i \overline{V}'_j >}{\partial x_j} \quad \text{(A-39)}$$

On introduit l'opérateur de dérivée particulaire D/Dt défini pour toute variable ϕ par :

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_j < \overline{V}_j > \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \quad \text{(A-40)}$$

La somme des termes de gauche peut se mettre sous la forme :

$$< \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} > + < \sum_j \overline{V}_j \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} >= \frac{D < \overline{V}_i >}{Dt} + \sum_j \frac{\partial < \overline{V}'_i \overline{V}'_j >}{\partial x_j} \quad \text{(A-41)}$$

Hypothèse

L'hypothèse utilisée pour estimer la moyenne des contributions ϕ faisant intervenir la masse volumique est la suivante :

$$< \frac{\phi}{\overline{\rho}} > \approx \frac{< \phi >}{< \overline{\rho} >} \quad \text{(A-42)}$$

Cette approximation se comprend parfaitement dans le cas d'un écoulement monophasique où la masse volumique est constante. Elle s'applique aisément également dans le cas d'écoulements à phases séparées caractérisés par une interface faiblement déformée. Dans ce cas, l'opération de moyenne spatiale est réalisée dans les plans parallèles à l'interface moyenne et la masse volumique prise dans ces plans peut être approchée par la masse volumique moyenne :

$$\overline{\rho} \approx < \overline{\rho} > \quad \text{(A-43)}$$

On utilisera cette hypothèse (A-42) également pour des écoulements présentant une interface déformable même si elle paraît moins évidente dans ces cas. Elle permet de simplifier l'écriture des bilans et de se rapprocher des contributions intervenant dans l'étude de la turbulence monophasique.

Terme de pression et terme capillaire

$$\overline{p} = < \overline{p} > + \overline{p}' \quad \text{et} \quad < \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} > \approx \frac{1}{< \overline{\rho} >} \frac{\partial < \overline{p} >}{\partial x_i} \quad \text{(A-44)}$$

$$\overline{\mathbf{F}}_c = < \overline{\mathbf{F}}_c > + \overline{\mathbf{F}}'_c \quad \text{et} \quad < \frac{\overline{\mathbf{F}}_c}{\overline{\rho}} > \approx \frac{< \overline{\mathbf{F}}_c >}{< \overline{\rho} >} \quad \text{(A-45)}$$

Terme de Léonard

$$\bar{l}_{ij} = < l_{ij} > + l'_{ij} \quad \text{et} \quad < \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial \bar{l}_{ij}}{\partial x_j} > \approx \frac{1}{< \overline{\rho} >} \frac{\partial < l_{ij} >}{\partial x_j} \quad \text{(A-46)}$$

Terme des contraintes visqueuses

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} + \frac{\partial < \overline{V}_j >}{\partial x_i}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i}\right]$$
$$\overline{S}_{ij} =< \overline{S}_{ij} > + \overline{S}'_{ij} \tag{A-47}$$

$$< \overline{\alpha}\overline{S}_{ij} > =< \overline{\alpha} >< \overline{S}_{ij} > + < \overline{\alpha}'\ \overline{S}'_{ij} > \tag{A-48}$$

Écoulement moyen

Finalement, l'écoulement moyen est approximativement décrit par l'équation :

$$\frac{D < \overline{V}_i >}{Dt} = -\sum_j \frac{\partial < \overline{V}'_i \overline{V}'_j >}{\partial x_j} + g_i - \frac{1}{< \overline{\rho} >}\frac{\partial < \overline{p} >}{\partial x_i} + \frac{< Fc_i >}{< \overline{\rho} >} - \frac{1}{< \overline{\rho} >}\sum_j \frac{\partial < l_{ij} >}{\partial x_j}$$
$$+ \frac{2}{< \overline{\rho} >}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(< \overline{\alpha} >< \overline{S}_{ij} >\right) + \frac{2}{< \overline{\rho} >}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha}'\ \overline{S}'_{ij} > \tag{A-49}$$

$$\frac{D < \overline{\mathbf{V}} >}{Dt} = -\nabla . < \overline{\mathbf{V}}'\ \overline{\mathbf{V}}' > + \mathbf{g} - \frac{1}{< \overline{\rho} >}\nabla < \overline{p} > + \frac{< \overline{\mathbf{F}}_c >}{< \overline{\rho} >} - \frac{1}{< \overline{\rho} >}\nabla . < \overline{\mathbf{l}} >$$
$$+ \frac{2}{< \overline{\rho} >}\nabla .(< \overline{\alpha} >< \overline{\mathbf{S}} >) + \frac{2}{< \overline{\rho} >}\nabla . < \overline{\alpha}'\ \overline{\mathbf{S}}' > \tag{A-50}$$

Dans une configuration monophasique ou dans le cas d'un écoulement caractérisé par une interface faiblement déformée et où les moyennes statistiques sont réalisées dans le plan parallèle à l'interface, l'équation de l'écoulement moyen se simplifie pour se mettre sous la forme :

$$\frac{D < \overline{\mathbf{V}} >}{Dt} \approx -\nabla . < \overline{\mathbf{V}}'\ \overline{\mathbf{V}}' > + \mathbf{g} - \frac{1}{< \overline{\rho} >}\nabla < \overline{p} > - \frac{1}{< \overline{\rho} >}\nabla . < \overline{\mathbf{l}} > + \frac{2}{< \overline{\rho} >}\nabla .(< \overline{\alpha} >< \overline{\mathbf{S}} >) \tag{A-51}$$

Dans une configuration avec une interface fortement déformée, il n'est pas possible de négliger les effets liés aux fluctuations de la viscosité dynamique totale $< \overline{\alpha}'\ \overline{\mathbf{S}}' >$ qui tiennent compte des fluctuations de la viscosité variable du fluide $\overline{\mu} = C_1\mu_1 + C_2\mu_2$ et de la viscosité de sous-maille $\overline{\rho}\nu_{sm}$.

Bilan d'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente s'écrit $k = \sum_i < \overline{V}'_i\ \overline{V}'_i > /2$. Pour obtenir son équation d'évolution, l'équation du modèle à un fluide (A-35) est multipliée par la fluctuation de vitesse $\overline{\mathbf{V}}'$. Cette procédure aboutir aux contributions que nous présentons dans la suite.

Évolution temporelle

$$\overline{V}'_i \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\overline{V}'_i \overline{V}'_i)}{\partial t} + \overline{V}'_i \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial t} \quad \text{et} \quad < \overline{V}'_i \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} >= \frac{1}{2}\frac{\partial < \overline{V}'_i \overline{V}'_i >}{\partial t} \tag{A-52}$$

Terme d'advection

$$\overline{V}'_i\overline{V}_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} < \overline{V}_j > \frac{\partial(\overline{V}'_i\overline{V}'_i)}{\partial x_j} + \overline{V}'_i\overline{V}'_j\frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\overline{V}'_i\overline{V}'_i\overline{V}'_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\overline{V}'_i\overline{V}'_i\frac{\partial\overline{V}'_j}{\partial x_j} + \overline{V}'_i < \overline{V}_j > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} \tag{A-53}$$

$$< \sum_j \overline{V}'_i\overline{V}_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j} > = \sum_j \frac{1}{2} < \overline{V}_j > \frac{\partial < \overline{V}'_i\overline{V}'_i >}{\partial x_j} + \sum_j < \overline{V}'_i\overline{V}'_j > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} + \sum_j \frac{1}{2}\frac{\partial < \overline{V}'_i\overline{V}'_i\overline{V}'_j >}{\partial x_j} \tag{A-54}$$

Termes de gauche

$$< \overline{V}'_i\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial t} > + < \sum_j \overline{V}'_i\overline{V}_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j} > = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial < \overline{V}'_i\overline{V}'_i >}{\partial t} + \sum_j < \overline{V}_j > \frac{\partial < \overline{V}'_i\overline{V}'_i >}{\partial x_j}\right\} + \sum_j < \overline{V}'_i\overline{V}'_j > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} + \sum_j \frac{1}{2}\frac{\partial < \overline{V}'_i\overline{V}'_i\overline{V}'_j >}{\partial x_j} \tag{A-55}$$

En utilisant l'opérateur de dérivée particulaire D/Dt, ce terme se met sous la forme :

$$< \overline{V}'_i\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial t} + \sum_j \overline{V}'_i\overline{V}_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j} > = \frac{1}{2}\frac{D < \overline{V}'_i\overline{V}'_i >}{Dt} + \sum_j < \overline{V}'_i\overline{V}'_j > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} + \sum_j \frac{1}{2}\frac{\partial < \overline{V}'_i\overline{V}'_i\overline{V}'_j >}{\partial x_j} \tag{A-56}$$

Terme de pression

$$\overline{V}'_i\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} = \overline{V}'_i\frac{\partial < \overline{p} >}{\partial x_i} + \overline{V}'_i\frac{\partial\overline{p}'}{\partial x_i} = \overline{V}'_i\frac{\partial < \overline{p} >}{\partial x_i} + \frac{\partial(\overline{p}'\ \overline{V}'_i)}{\partial x_i} - \overline{p}'\frac{\partial\overline{V}'_i}{\partial x_i}$$

$$< \overline{V}'_i\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} > = \frac{\partial < \overline{p}'\ \overline{V}'_i >}{\partial x_i} - < \overline{p}'\frac{\partial\overline{V}'_i}{\partial x_i} > \tag{A-57}$$

Terme capillaire

$$\overline{F}_c\overline{V}'_i = \left(< \overline{F}_c > + \overline{F}'_c\right)\overline{V}'_i \quad \text{et} \quad < \overline{F}_c\overline{V}'_i > = < \overline{F}'_c\overline{V}'_i > \tag{A-58}$$

Terme de Léonard

$$\frac{\partial \bar{l}_{ij}}{\partial x_j}\overline{V}'_i = \frac{\partial < \bar{l}_{ij} >}{\partial x_j}\overline{V}'_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{l}'_{ij}\overline{V}'_i\right) - \bar{l}'_{ij}\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}$$
$$< \frac{\partial \bar{l}_{ij}}{\partial x_j}\overline{V}'_i > = \frac{\partial < \bar{l}'_{ij}\overline{V}'_i >}{\partial x_j} - < \bar{l}'_{ij}\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} > \tag{A-59}$$

Terme des contraintes visqueuses

$$\frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{S}_{ij}\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i = \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ < \overline{S}_{ij} >\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i + \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{S}'_{ij}\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i$$
$$= \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ < \overline{S}_{ij} >\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i + \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{S}'_{ij}\ \overline{V}'_i\right)}{\partial x_j} - \overline{\alpha}\ \overline{S}'_{ij}\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} \tag{A-60}$$

$$\frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ < \overline{S}_{ij} >\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i = \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{V}'_i\ < \overline{S}_{ij} >\right)}{\partial x_j} - \overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\ < \overline{S}_{ij} > \tag{A-61}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\alpha}\ \overline{S}'_{ij}\ \overline{V}'_i\right) = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'^2_i}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\alpha}\ \overline{V}'_i\ \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i}\right) \tag{A-62}$$

$$\overline{\alpha}\ \overline{S}'_{ij}\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\overline{\alpha}\ \left(\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{1}{2}\overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} \tag{A-63}$$

$$2\ \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{S}_{ij}\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i = 2\ \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{V}'_i\ < \overline{S}_{ij} >\right)}{\partial x_j} - 2\ \overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\ < \overline{S}_{ij} > + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'^2_i}{\partial x_j}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\alpha}\ \overline{V}'_i\ \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i}\right) - \overline{\alpha}\ \left(\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\right)^2 - \overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} \tag{A-64}$$

$$< 2\ \frac{\partial\left(\overline{\alpha}\ \overline{S}_{ij}\right)}{\partial x_j}\overline{V}'_i > = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'^2_i}{\partial x_j} > - < \overline{\alpha}\ \left(\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\right)^2 > + 2\ \frac{\partial\left(< \overline{\alpha}'\ \overline{V}'_i >< \overline{S}_{ij} >\right)}{\partial x_j}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha}\ \overline{V}'_i\ \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} > - < \overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j}\frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} > - 2\ < \overline{\alpha}\ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \tag{A-65}$$

Évolution de la contribution $< \overline{V}_i' \ \overline{V}_i' >$

L'évolution de la contribution $< \overline{V}_i' \ \overline{V}_i' >$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{D < \overline{V}_i' \overline{V}_i' >}{Dt} = & - \sum_j < \overline{V}_i' \overline{V}_j' > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} - \sum_j \frac{1}{2} \frac{\partial < \overline{V}_i' \overline{V}_i' \overline{V}_j' >}{\partial x_j} \\
& - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \frac{\partial (\overline{p}' \ \overline{V}_i')}{\partial x_i} - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial < \overline{l}_{ij}' \overline{V}_i' >}{\partial x_j} \\
& + \frac{1}{2 < \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'^2}{\partial x_j} > - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j < \overline{\alpha} \ \left(\frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} \right)^2 > + \frac{1}{< \overline{\rho} >} < \overline{F}_c' \overline{V}_i' > \\
& + \frac{2}{< \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial \left(< \overline{\alpha}' \ \overline{V}_i' >< \overline{S}_{ij} > \right)}{\partial x_j} + \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j < \overline{l}_{ij}' \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} > + \frac{1}{< \overline{\rho} >} < \overline{p}' \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_i} > \\
& + \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \overline{V}_i' \ \frac{\partial \overline{V}_j'}{\partial x_i} > - < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V}_j'}{\partial x_i} > - 2 \ < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \right\}
\end{aligned} \tag{A-66}$$

Ce bilan se met sous la forme :

$$\frac{1}{2}\frac{D < \overline{V}_i' \overline{V}_i' >}{Dt} = P_i + T_i + \Pi_i + TL_i + D_i + \epsilon_i \tag{A-67}$$

où

$$P_i = - \sum_j < \overline{V}_i' \overline{V}_j' > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} \text{ terme de production} \tag{A-68}$$

$$T_i = - \sum_j \frac{1}{2} \frac{\partial < \overline{V}_i' \overline{V}_i' \overline{V}_j' >}{\partial x_j} \text{ terme de transport turbulent} \tag{A-69}$$

$$\Pi_i = - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \frac{\partial (\overline{p}' \ \overline{V}_i')}{\partial x_i} \text{ terme de "diffusion" par la pression} \tag{A-70}$$

$$TL_i = - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial < \overline{l}_{ij}' \overline{V}_i' >}{\partial x_j} \text{ terme de cascade} \tag{A-71}$$

$$D_i = \frac{1}{2 < \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'^2}{\partial x_j} > \text{ terme de "diffusion"' visqueuse} \tag{A-72}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_i = & \frac{1}{< \overline{\rho} >} < \overline{F}_c' \overline{V}_i' > + \frac{2}{< \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial \left(< \overline{\alpha}' \ \overline{V}_i' >< \overline{S}_{ij} > \right)}{\partial x_j} - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j < \overline{\alpha} \ \left(\frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} \right)^2 > \\
& + \frac{1}{< \overline{\rho} >} < \overline{p}' \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_i} > + \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j < \overline{l}_{ij}' \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} > \\
& + \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \overline{V}_i' \ \frac{\partial \overline{V}_j'}{\partial x_i} > - < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V}_j'}{\partial x_i} > - 2 \ < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \right\}
\end{aligned} \tag{A-73}$$

Il apparaît que le terme qualifié de "dissipation" dans une configuration monophasique ϵ_i est modifié dans une configuration diphasique. Il ne représente plus seulement la dissipation du système. Il se décompose désormais sous la forme :

$$\epsilon_i = TC_i + \Theta_i + DS_i \tag{A-74}$$

$$TC_i = \frac{1}{<\overline{\rho}>} <\overline{F}_c' \overline{V}_i'> \tag{A-75}$$

$$\Theta_i = \frac{2}{<\overline{\rho}>} \sum_j \frac{\partial \left(<\overline{\alpha}' \ \overline{V}_i' >< \overline{S}_{ij} > \right)}{\partial x_j} \tag{A-76}$$

$$\begin{aligned} DS_i = & -\frac{1}{<\overline{\rho}>} \sum_j <\overline{\alpha} \ \left(\frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} \right)^2 > + \frac{1}{<\overline{\rho}>} <\overline{p}' \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_i} > + \frac{1}{<\overline{\rho}>} \sum_j <\overline{l}_{ij}' \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} > \\ & + \frac{1}{<\overline{\rho}>} \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} <\overline{\alpha} \ \overline{V}_i' \ \frac{\partial \overline{V}_j'}{\partial x_i} > - <\overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V}_j'}{\partial x_i} > -2 \ <\overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}_i'}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \right\} \end{aligned} \tag{A-77}$$

Les termes TC_i et Θ_i représentent les corrélations entre la vitesse et respectivement les effets capillaires et la viscosité dynamique totale du fluide. Ces contributions ne sont pertinentes que dans le cas d'interface déformée dans la mesure où l'on ne peut plus négliger les fluctuations des efforts capillaires $\overline{\mathbf{F}}_c'$ et celles de la viscosité dynamique $\overline{\alpha}' = (\overline{\mu} + \overline{\rho}\nu_{sm})'$. La dissipation réelle du système est désormais donnée par DS_i et non plus par ϵ_i.

Bilan d'énergie cinétique turbulente

L'énergie cinétique turbulente s'écrit $k = \sum_i <\overline{V}_i' \overline{V}_i'> /2$. À partir des remarques ci-dessus, son équation d'évolution est donnée par :

$$\frac{Dk}{Dt} = P + T + \Pi + TL + D + \epsilon \tag{A-78}$$

avec

$$P = \sum_i P_i = -\sum_{i,j} < \overline{V}'_i \overline{V}'_j > \frac{\partial < \overline{V}_i >}{\partial x_j} \tag{A-79}$$

$$T = \sum_i T_i = -\sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial < \overline{V}'_i \overline{V}'_i \overline{V}'_j >}{\partial x_j} \tag{A-80}$$

$$\Pi = \sum_i \Pi_i = -\frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_i \frac{\partial (\overline{p}' \ \overline{V}'_i)}{\partial x_i} \tag{A-81}$$

$$TL = \sum_i TL_i = -\frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} \frac{\partial < \overline{l}'_{ij} \overline{V}'_i >}{\partial x_j} \tag{A-82}$$

$$D = \sum_i D_i = \frac{1}{2 < \overline{\rho} >} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}'^2_i}{\partial x_j} > \tag{A-83}$$

$$\epsilon = \sum_i \epsilon_i = \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_i < \overline{F}'_c \overline{V}'_i > + \frac{2}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} \frac{\partial \left(< \overline{\alpha}' \ \overline{V}'_i >< \overline{S}_{ij} > \right)}{\partial x_j} - \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} < \overline{\alpha} \ \left(\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} \right)^2 >$$
$$+ \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} \left\{ < \overline{l}'_{ij} \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} > + \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \overline{V}'_i \ \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} > - < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} > -2 \ < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \right\} \tag{A-84}$$

Comme précédemment, le terme de dissipation ϵ est modifié pour se mettre dans le cadre diphasique sous la forme :

$$\epsilon = TC + \Theta + DS \tag{A-85}$$

$$TC = \sum_i TC_i = \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_i < \overline{F}'_c \overline{V}'_i > \tag{A-86}$$

$$\Theta = \sum_i \Theta_i = \frac{2}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} \frac{\partial \left(< \overline{\alpha}' \ \overline{V}'_i >< \overline{S}_{ij} > \right)}{\partial x_j} \tag{A-87}$$

$$DS = \sum_i DS_i = -\frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} < \overline{\alpha} \ \left(\frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} \right)^2 > \tag{A-88}$$

$$+ \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_{i,j} \left\{ < \overline{l}'_{ij} \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} > + \frac{1}{< \overline{\rho} >} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} < \overline{\alpha} \ \overline{V}'_i \ \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} > - < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{V}'_j}{\partial x_i} > -2 \ < \overline{\alpha} \ \frac{\partial \overline{V}'_i}{\partial x_j} >< \overline{S}_{ij} > \right.$$
(A-89)