Numéro d'ordre : 2010-35 Année 2010

THÈSE

présentée devant
L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le grade de
DOCTEUR

Spécialité : Mécanique

par

Mohamed Amine CHABCHOUB

Méthodes Energétiques Simplifiées Inverses: formulations et applications

Soutenue publiquement le 29 Novembre 2010 devant le jury :

MM.	**B. TROCLET**, Senior expert, EADS ASTRIUM; Professeur, ENS Cachan	Examinateur
	M. HADDAR, Professeur, ENIS, Sfax, Tunisie	Rapporteur
	M. N. ICHCHOU, Professeur, ECL, Ecully	Directeur de thèse
	E. FOLTETE, Maître de conférence HDR, ENSMM, Besançon	Rapporteur
	F. SUI, Professeur, The Institute of Acoustics, China	Examinateur
	S. BESSET, Maître de conférence, ECL, Ecully	Examinateur
	O. BAREILLE, Professeur agrégé, ECL, Ecully	Examinateur

Résumé

Pour élargir le domaine fréquentiel d'analyse vibroacoustique des méthodes éléments finis et de la SEA (Statistical Energy Analysis), la Méthode Énergétique Simplifiée MES utilisant des variables quadratiques permet de considérer aussi bien les moyennes que les hautes fréquences. Cette méthode est basée sur une analyse des ondes propagatives vibratoires et acoustiques.
Dans ce travail, la formulation inverse de la MES est proposée. A partir d'un vecteur de densité d'énergie et intensité vibroacoustique données, la formulation MES inverse permet de remonter aux sources. Elle permet d'identifier les sources de vibration dans des systèmes bidimensionnels (plaque excitée en flexion,...) et les sources acoustiques dans des systèmes tridimensionnels (cavité acoustique excitée,...). La formulation MES inverse est numériquement validée dans plusieurs cas de figures. Une analyse paramétrique est effectuée afin de tester la robustesse et l'efficacité de cette approche. Par exemple, la sensibilité avec les données d'entrée ou à la nature des sources envisagées est traitée.
Une comparaison entre les résultats numériques obtenus par la MES et ceux obtenus par la SEA est abordée permettant de présenter les avantages de la MES au niveau de l'identification des sources. Une application industrielle de la MES inverse est réalisée dans le cadre de ce travail. Elle montre la fiabilité de la méthode pour le cas d'une cabine excitée par un bruit blanc. Finalement, la MES est utilisée pour réduire les nuisances sonores détectées dans les cabines. Un programme d'optimisation est développé permettant de trouver la meilleure répartition des absorbants et de définir leurs caractéristiques.

Mots Clés :
comportement vibroacoustique, MES, plaque, cavité acoustique.

Abstract

To widen the frequency domain of vibroacoustic analysis of finite elements methods and the SEA (Statistical Energy Analysis), Simplified Energy Method MES (french abbreviation) using quadratic variables can cover as well medium as high frequencies. This method is based on an analysis of the vibratory and acoustic propagative waves..
In this work, Inverse MES formulation is proposed. From a vector of energy density and vibroacoustic intensity data, inverse MES formulation can raise sources. It makes it possible to identify vibration sources in two-dimensional systems (excited plate in inflection...) and acoustic sources in three-dimensional systems (excited acoustic cavity...). Inverse MES formulation is numerically validated in several cases. A parametric analysis is carried out in order to test the robustness and the effectiveness of this approach. For example, the sensitivity with the data input or with nature of considered sources is treated.
A comparison between numerical results founded by MES and those founded by SEA are discussed to present MES advantages at identifying sources. An industrial application of the inverse formulation of the method is carried out within the framework of this work. It shows its reliability in the case of a cabin excited by a white noise. Finally, MES shows its utility to reduce harmful sound detected in cabins. An optimization program is developed making it possible to find the best distribution of the poroelastic layers and to define their characteristics.

Keywords :
vibroacoustic behavior, MES, plate, acoustic cavity.

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe Dynamique des Systèmes et des Structures du laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon.

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse, M. Mohamed ICHCHOU, qui m'a accueilli dans son équipe de recherche, pour la qualité de son engagement humain et son encadrement scientifique pour faire aboutir cette thèse. Je suis également très reconnaissant à M. Sébastien BESSET d'avoir accompagné cette thèse au quotidien avec attention et compétence.

Je remercie vivement M. Bernard TROCLET, Professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury. Je remercie sincèrement M. Mohamed HADDAR, Professeur à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax en Tunisie et M. Emmanuel FOLTETE, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques à Besançon pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie également M. Fusheng SUI, Professeur à l'institut d'acoustique en Chine et M. Olivier BAREILLE, Professeur agrégé à l'Ecole Centrale de Lyon, qui ont également accepté de faire partie du jury.

J'adresse un grand merci à tous mes collègues chercheurs, doctorants, techniciens, à la secrétaire Isabelle TIXIER pour la bonne ambiance tout au long de ces années et à tous mes amis à Lyon et en Tunisie.

Enfin, que soient grandement remercié mes parents et mes deux soeurs qui n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager durant tout mon parcourt éducatif et professionnel, et en particulier mon épouse qui a fortement contribué à ma réussite professionnelle par sa bienveillance.

Table des matières

Introduction **1**

1 Bibliographie **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Eléments théoriques sur les problèmes inverses 3

1.2.1 Principe général des problèmes inverses 4

1.2.2 Problématique du conditionnement et de la régularisation 6

1.2.3 Optimisation de la régularisation 10

1.3 Revue des méthodes inverses en vibroacoustique 12

1.3.1 Holographie 12

1.3.2 FEM 15

1.3.3 BEM 17

1.3.4 Comparaison FEM-BEM 18

1.3.5 IFRF 19

1.3.6 RIFF 21

1.3.7 TPA 25

1.3.8 SEA 27

1.4 Conclusion 36

2 Méthode Energétique Simplifiée **39**

2.1 Introduction 39

2.2 Grandeurs énergétiques globales et bilan de puissance global 40

2.2.1 Expressions des énergies globales 40

2.2.2 Bilan de puissance global 41
2.3 Hypothèses 42
2.3.1 Hypothèse sur les systèmes étudiés (H1). 42
2.3.2 Hypothèse du modèle d'amortissement hystérétique (H2). 42
2.3.3 Hypothèse d'ondes propagatives (H3). 43
2.3.4 Hypothèse de non prise en compte des interférences entre les ondes (H4). 43
2.3.5 Hypothèse sur la réflexion (H5). 43
2.4 MES Différentielle 46
2.4.1 Implémentation numérique 48
2.4.2 Résultats numériques 51
2.4.3 Limites de la MES Différentielle 54
2.5 MES Différentielle Mixte 54
2.5.1 Implémentation numérique 56
2.5.2 Résultats numériques 56
2.6 MES Intégrale 58
2.6.1 Formulation directe générale 58
2.6.2 Résultats numériques 62
2.7 Implantation sous Comsol 63
2.7.1 Structure du programme 64
2.7.2 Tests de validation 65
2.8 Conclusion 66

3 MES Inverse 2D **69**
3.1 Introduction 69
3.2 MES Différentielle Inverse 70
3.2.1 Formulation Inverse 70
3.2.2 Résultats numériques 70
3.3 MES Différentielle Mixte Inverse 75
3.3.1 Formulation Inverse 75
3.3.2 Résultats numériques 76

3.4 MES Intégrale Inverse 79
3.4.1 Formulation inverse 79
3.4.2 Problème étudié 81
3.4.3 Résultats 82
3.5 Comparaison MES/SEA 90
3.6 Comparaison MES/RIFF 94
3.7 Conclusion 96

4 MES Inverse 3D **97**
4.1 Introduction 97
4.2 MES Différentielle Inverse 97
4.2.1 Formulation Inverse 97
4.2.2 Résultats numériques 99
4.3 MES Différentielle Mixte Inverse 101
4.3.1 Formulation Inverse 101
4.3.2 Résultats numériques 102
4.4 MES Intégrale Inverse 103
4.4.1 Formulation inverse 103
4.4.2 Problème étudié 105
4.4.3 Faisabilité et robustesse 106
4.4.4 Résultats numériques pour une cavité avec sources surfaciques 109
4.4.5 Résultats numériques pour une cavité avec une source volumique . . . 113
4.5 Application industrielle: bruit de cabine 116
4.6 Conclusion 122

5 Optimisation **123**
5.1 Introduction 123
5.2 Techniques d'optimisation 123
5.2.1 Optimisation multi-objectifs 124
5.2.2 Optimisation locale 125

5.2.3 Optimisation globale 126
5.3 Méthode d'optimisation utilisée: méthode du gradient 128
5.3.1 Rappels et problème de base 128
5.3.2 Equations de Kuhn & Tucker 128
5.3.3 Algorithme SQP 129
5.3.4 Méthode de quasi-Newton BFGS 130
5.4 Optimisation de l'emplacement des revêtements poroélastiques 131
5.4.1 Généralités sur les matériaux poroélastiques 131
5.4.2 Problème à optimiser 132
5.4.3 Résultats d'optimisation 133
5.4.4 Influence du facteur de directivité sur l'optimisation 137
5.4.5 Influence de l'emplacement du point d'écoute 139
5.5 Conclusion 144

Conclusions et perspectives **145**

Bibliographie **147**

Introduction

Ce travail de recherche a été réalisé au sein de l'équipe Dynamique des Structures et des Systèmes du Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes de l'Ecole Centrale de Lyon.
Dans le domaine des basses fréquences, les niveaux vibratoires et acoustiques des systèmes structures et cavités peuvent être correctement prédits en utilisant les méthodes éléments finis classiques. Cependant, lorsque le domaine fréquentiel d'analyse augmente, les résultats deviennent très sensibles aux incertitudes liées aux matériaux et à la géométrie et le coût des calculs devient très élévé à cause de l'augmentation excessive des degrés de liberté.
En hautes fréquences, une description propagatoire de l'énergie peut s'avérer plus adaptée pour comprendre les phénomènes vibroacoustiques. Ainsi, un modèle propagatoire peut décrire les phénomènes avec très peu de paramètres alors qu'une description modale nécessite un nombre rédhibitoire de paramètres. La modélisation sera construite à l'aide de méthodes de type énergétique où les énergies vibratoires et acoustiques peuvent être décrites de manière simplifiée, en décomposant la structure en sous-systèmes.
La SEA, méthode la plus connue des méthodes énergétiques, repose sur des équations d'équilibre énergétique entre les sous-systèmes. Cependant, cette méthode nécessite des hypothèses relativement fortes. Elle permet seulement d'écrire des bilans de puissances globaux et présente dans le domaine des moyennes fréquences un faible recouvrement modal qui la rend non valable.
Plusieurs méthodes ont alors été développées dans le domaine des moyennes fréquences pour résoudre ces problèmes et apporter les avantages de la SEA des hautes aux moyennes fréquences. Parmi ces méthodes, notre base théorique est la *Méthode Energétique Simplifiée* (MES). Cette méthode se décline en plusieurs formulations dont les applications sont différentes et dont de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont déjà cerné le domaine de validité.

Le premier chapitre s'attarde sur les techniques d'analyse des problèmes inverses. Des éléments théoriques de ces problèmes tels que le conditionnement, la régularisation et l'optimisation de la régularisation sont évoqués. Les différentes méthodes inverses en vibroacoustiques sont détaillées par la suite en les distinguant par les variables constituant leurs bases qui peuvent être soit cinématiques pour les méthodes éléments finis soit quadratiques pour les méthodes énergétiques. Elles sont classées aussi par leur domaine fréquentiel de validation balayant soit les basses fréquences soit les hautes et moyennes fréquences.

Le deuxième chapitre présente les formulations directes des différentes versions de la méthode énergétique simplifiée (MES Différentielle, MES Différentielle Mixte et MES Intégrale). Des notions théoriques énergétiques tels que les grandeurs énergétiques globales et le bilan de puissance constituant la base théorique de la méthode ainsi que les hypothèses structurant ses différentes approches sont présentés. Les implémentations et les résultats numériques de chacune des approches de la MES sont détaillés pour les cas de systèmes bidimensionnels et tridimensionnels.

Dans le troisième chapitre, l'utilisation de la MES pour l'identification des sources de vibration dans un système d'une plaque excitée est traitée. Les formulations inverses ainsi que les résultats numériques correspondant aux approches de la MES sont donnés. Une comparaison des résultats d'identification obtenus par la MES inverse avec ceux obtenus par la SEA inverse et d'autres méthodes est abordée permettant de présenter les avantages de la MES au niveau de l'identificationm des sources dans des systèmes bidimensionnels.

Le quatrième chapitre se focalise sur l'utilisation de la MES pour l'identification des sources dans des cavités acoustiques. Les démarches du chapitre précédent sont adoptées en présentant les formulations et les résultats d'identification obtenus par chaque approche. La MES Inverse est mise à profit dans ce chapitre en réalisant une application industrielle dans le cadre du projet européen CREDO. Cette application permet d'identifier un bruit de cabine en alimentant la formulation inverse de la MES par des mesures expérimentales faites par les partenaires industriels du projet.

Finalement, un dernier chapitre présente l'utilisation de la MES pour réduire le niveau du bruit détecté dans les cavités acoustiques. Une étude sur les différentes techniques d'optimisation est abordée permettant de choisir la bonne méthode à utiliser et le développement d'un programme d'optimisation. Ce dernier permet de trouver la meilleure répartition des couches poroélastiques sur les surfaces internes d'une cabine engendrant le minimum de bruit.

Chapitre 1

Bibliographie

1.1 Introduction

Un certain nombre de méthodes sont actuellement disponibles pour traiter les problèmes d'identification de sources. Ces méthodes permettent de remonter aux sources de bruit à partir des mesures ou des calculs de pressions et/ou d'intensités acoustiques.
Afin d'obtenir des résultats de qualité avec minimum d'effort et de coût, le choix de la bonne méthode est très important. Des méthodes numériques bien connues comme la méthode des éléments finis FEM, la méthode des éléments de frontière BEM ou la résolution inverse filtrée et fenetrée IFRF présentent des limites à mesure qu'on augmente la fréquence.
Contrairement à ces méthodes classiques d'analyse qui se basent sur des variables cinématiques (pression, vitesse,...) et qui utilisent la phase et l'amplitude, une deuxième classe de méthodes se base sur des variables énergétiques (densité d'énergie, intensité, puissance,..). Selon l'application, ces méthodes énergétiques présentent quelques avantages tels que l'insensibilité de la relation puissance énergie aux petites variations des paramètres, la facilité de moyenner les quantités énergétiques et le plus souvent le calcul des quantités énergétiques (niveau de pression acoustique).
La méthode la plus reconnue de la classe énergétique est la SEA (Statistical Energy Analysis). Le problème de l'inversion de cette méthode réside dans le mauvais conditionnement des matrices. De nombreuses approches ont tenté de répondre à ces limitations, parmi lesquelles la Méthode Energétique Simplifiée MES.

1.2 Eléments théoriques sur les problèmes inverses

L'identification d'efforts appliqués à une structure en un point se traduit par la résolution d'un problème inverse. Dans cette partie, nous nous intéressons à la théorie. En effet, nous définissons les principes de base des problèmes inverses et nous identifions les différentes méthodes existantes pour les résoudre.

1.2.1 Principe général des problèmes inverses

Par opposition aux résolutions directes, on qualifie de problèmes inverses [15] les problèmes qui nécessitent une démarche inversée pour les résoudre.
La résolution d'un problème direct de mécanique consiste à déterminer les déplacements d'une structure en certains points à partir de la connaissance des efforts externes qui lui sont appliqués (figure 1.2.1).
En acoustique, on peut ainsi chercher à déterminer les pressions réparties dans une cavité à partir de la connaissance d'une ou de plusieurs sollicitations extérieures. C'est une démarche classique, couramment employée dans les problèmes de mécanique en général. Dans le cas d'un problème discrétisé, la résolution directe peut s'exprimer par l'expression matricielle suivante :

$$R = HF \tag{1.1}$$

où R est un vecteur donnant les valeurs qui représentent la réponse du système, H la matrice de transfert du système reliant les excitations aux valeurs recherchées et F le vecteur donnant l'excitation appliquée au système.

L'objectif est alors d'obtenir la réponse R connaissant l'excitation F appliquée au système. Notons qu'en général, la nature des sources du modèle est décrite par les éléments de matrice H. Ainsi, par exemple, si la source du modèle choisi est une combinaison de sources monopole et dipole alors les forces monopole et dipole correspondantes doivent être définies dans le vecteur F tandis que les diagrammes de rayonnement de ces sources doivent être définis par les éléments de la matrice H. Matriciellement, l'équation 1.1 s'écrira alors comme suit :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \dots & H_{mk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{Bmatrix} \tag{1.2}$$

où m est le nombre de microphones et k le nombre de sources.

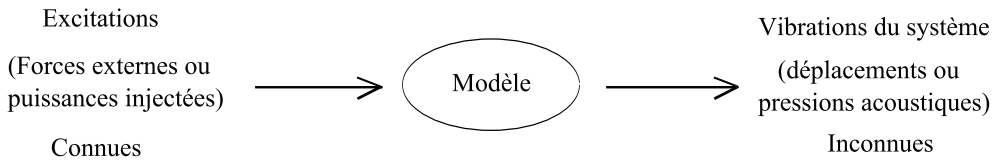


FIGURE 1.2.1 – Schéma de résolution d'un problème direct classique

Au contraire, la résolution d'un problème inverse consiste à retrouver les efforts externes appliqués à la structure à partir de ses déplacements en un certain nombre de points (figure 1.2.2). Pour bien comprendre le principe, une analogie simple peut être faite avec une corde

de musique. En effet, la fréquence de vibration d'une corde dépend de la tension qui lui est appliquée. Inversement, on peut déterminer la tension appliquée à cette corde à partir de l'observation de ses vibrations (ou à partir du son qu'elle émet).

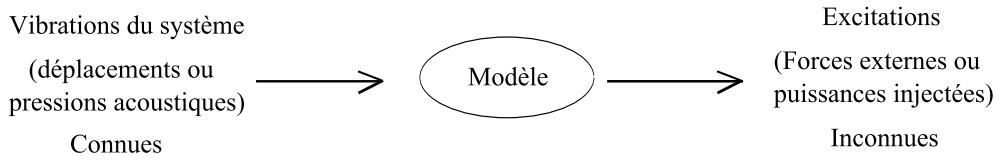


FIGURE 1.2.2 – Schéma de résolution d'un problème inverse

Une telle résolution se ramène à un problème d'inversion. En connaissant la réponse d'un système à tout type de sollicitation, on cherche à obtenir le passage inverse qui permet, à partir de la réponse R du système, de reconstruire les sollicitations F.
Dans le cas général des systèmes linéaires discrétisés, si on connaît la matrice de transfert qui permet de passer des sollicitations aux réponses, alors le problème inverse se résume à l'inversion de cette matrice en utilisant des techniques d'inversion de systèmes linéaires [16]. Cette première technique implique l'égalité du nombre d'efforts recherchés et du nombre de mesures effectuées afin d'avoir une matrice de transfert H carrée et donc potentiellement inversible. Dans certains cas, la matrice de transfert est rectangulaire et donc a priori non inversible.

On peut utiliser la méthode des moindres carrés pour approcher au mieux l'inversion de la matrice H. Cette méthode revient à calculer la matrice pseudo-inverse H^+ de la matrice de transfert qui s'écrit :

$$H^+ = (H^*H)^{-1}H^* \tag{1.3}$$

où H^* désigne la transposée hermitienne de la matrice H.

Dans ce cas, l'équation inversée peut alors s'écrire :

$$F = H^+R \tag{1.4}$$

La matrice pseudo-inverse de H peut être calculée directement à partir de sa définition. Mais pour la calculer numériquement de manière plus efficace et plus stable, il est parfois préférable d'utiliser la décomposition en valeurs singulières [19, 21] . Cette décomposition s'écrit :

$$H = U\Sigma V^T \tag{1.5}$$

où U est une matrice de dimensions $(m \times m)$ dont les colonnes comprennent les vecteurs singuliers gauches de la matrice H, V est une matrice de dimensions $(k \times k)$ dont les colonnes comprennent les vecteurs singuliers droits de la matrice H, Σ est une matrice diagonale de

termes positifs représentant les valeurs singulières de H et enfin U et V deux vecteurs orthonormaux et unitaires.

Le calcul de la matrice pseudo-inverse de H est alors simplifié puisqu'il revient à calculer la pseudo-inverse de la matrice diagonale Σ. Au final, on obtient :

$$H^{+} = V\Sigma^{+}U^{T} \tag{1.6}$$

La solution F obtenue n'est pas exacte, c'est une solution au sens des moindres carrés. De plus, les problèmes inverses appartiennent à la classe des problèmes dits mal posés. Selon la définition de Hadamard rappelée dans [17], un problème bien posé satisfait trois conditions essentielles qui sont l'existance, l'unicité et la stabilité de la solution de ce problème. Un problème mal posé est donc un problème qui ne satisfait pas au moins l'une de ces trois conditions. Cette propriété ne facilite pas la résolution de tels problèmes.

La procédure couramment suivie pour identifier les efforts par mesure inverse passe par la description du comportement de la structure, puis l'acquisition de la réponse vibratoire de la structure soumise aux excitations inconnues et enfin la reconstitution des sollicitations inconnues à partir de la réponse mesurée et du problème inversé.
La description du comportement et l'acquisition des données sont des étapes classiques et déjà utilisées dans la méthode directe. La difficulté se situe essentiellement dans l'inversion du problème pour reconstruire les sollicitations.

1.2.2 Problématique du conditionnement et de la régularisation

1.2.2.1 Conditionnement du problème

Un problème d'inversion n'est pas toujours bien posé. Si la matrice $H^{*}H$ du système est inversible, la solution au sens des moindres carrés existe et est unique. Mais si elle n'est pas inversible, le problème doit être reformulé. Comme la matrice de transfert est souvent obtenue à partir de mesures, il est très rare de tomber réellement sur une matrice expérimentale inversible puisque généralement le nombre de mesures est différent du nombre de sources. Pour savoir si la matrice de transfert est bien conditionnée ou non, on peut calculer son nombre de conditionnement $k(H)$. Ce nombre $k(H)$ qui se présente comme une notion liée à la sensibilité d'un système linéaire aux erreurs de mesures est défini par :

$$k(H) = \|H\| \left\|H^{-1}\right\| \tag{1.7}$$

Ainsi, en termes de décomposition en valeurs singulières, $\|H\|$ et $\left\|H^{-1}\right\|$ peuvent être écrites sous la forme :

$$\|H\| = \delta_{max} \tag{1.8}$$

$$\left\|H^{-1}\right\| = \frac{1}{\delta_{min}} \tag{1.9}$$

où δ_{max} et δ_{min} sont respectivement la valeur singulière maximale et la valeur singulière minimale de la matrice H.

Pour une matrice H carrée, le conditionnement peut être donné par:

$$k(H) = \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_{min}} \right| \tag{1.10}$$

Le nombre de conditionnement est un bon indice pour évaluer la confiance à accorder à la solution. Si ce nombre est très élevé mais fini, le système est soit inversible mais mal conditionné, soit dégénéré et les valeurs singulières les plus faibles sont des valeurs nulles rendues non nulles par les incertitudes de mesure.
Dans le cas de mesures expérimentales de la matrice de transfert, il existe plusieurs raisons provoquant le mauvais conditionnement de la matrice. Par exemple, si deux points de mesure sont très proches sur la structure, les signaux mesurés sont semblables engendrant une dépendance linéaire et ainsi un rang de la matrice inférieur à la dimension: la matrice n'est pas donc inversible. Le même phénomène se présente près des phénomènes de résonnance, puisqu'une déformée modale domine les autres, les différentes mesures sont liées et donc la matrice de transfert n'est pas inversible.

Suite à ces observations, certains travaux [17] ont permis d'établir des critères pour assurer un bon conditionnement de la matrice de transfert expérimentale. Le premier critère est défini par le nombre des points de mesure qui doit être supérieur au nombre des points d'excitation et ces points doivent être uniformément répartis. Le deuxième critère est défini par les excitations recherchées qui doivent être espacées pour produire des réponses différentes.

De nombreux travaux ont également été réalisés pour améliorer le conditionnement de la matrice de transfert de manière numérique. Ainsi, on peut améliorer le conditionnement du transfert en régularisant le problème. Pour cela, il existe plusieurs techniques plus ou moins efficaces et assez dépendantes du type du problème traité. Elles font l'objet du paragraphe suivant.

1.2.2.2 Régularisation du problème

Parmi les travaux réalisés sur le conditionnement, de nombreuses méthodes de régularisation ont été étudiées dans le but de faire baisser l'hypersensibilité de la solution aux variations des données d'entrée [18, 19, 20]. Certaines méthodes consistent à ajouter un critère de choix sur l'ensemble des solutions potentielles afin d'aboutir à une solution plus proche. Ce critère ajouté peut être de deux types [22]. Il peut être physique, comme par exemple une contrainte sur le signe de la solution, ou il peut traduire un compromis, comme un paramètre à minimiser. Cette dernière technique est appliquée dans la méthode de régularisation TSVD (Truncated Singular Value Decomposition) et dans la méthode de tikhonov. Nous verrons que ces deux méthodes semblent être les plus efficaces pour traiter notre problème.

1.2.2.3 Méthode TSVD

Le rang de la matrice de transfert H peut être défini par le nombre de valeurs singulières non nulles qui se présente comme étant le niveau de dépendance linéaire des colonnes. Cependant, lorsque la matrice est relevée expérimentalement, ces valeurs sont souvent non nulles à cause du bruit. La TSVD consiste alors à supprimer les plus petites valeurs singulières en les fixant à zéro. Le seuil sous lequel ces valeurs sont supposées nulles est souvent défini en fonction du niveau d'incertitude sur les mesures. Ceci revient donc à supposer un niveau de dépendance des colonnes de la matrice.
La méthode élimine en fait les premiers termes au dessus du rang k de la matrice H où le rang k doit être choisi pour éliminer les faibles valeurs singulières qui oscillent de manière trop importante [22]. Dans ce cas, la solution peut être réécrite avec un facteur de filtrage qui vaut un pour les valeurs singulières d'indice inférieur au rang de la matrice et zéro ailleurs.
Dans la décomposition en valeurs singulières, la matrice de transfert peut être décomposée comme la forme donnée en [25, 26] comme suit :

$$H = U\Sigma V^T \tag{1.11}$$

La solution matricielle du problème s'écrit alors :

$$F = H^+R = (U\Sigma V^T)^+R = (V\Sigma^+U^T)R \tag{1.12}$$

Soit, en développant le produit matriciel :

$$f^0 = \sum_{i=0}^{k} \frac{u_i^T R}{\delta_i} v_i \tag{1.13}$$

avec k le rang de la matrice.

La méthode TSVD consiste donc à tronquer ces valeurs [23] en considérant une solution approchée f^p de la forme :

$$f^p = \sum_{i=1}^{p} \frac{u_i^T R}{\delta_i} v_i \tag{1.14}$$

où $p \leqslant k$ est le paramètre de régularisation.

En supprimant une partie des valeurs singulières, la méthode TSVD engendre en contrepartie un lissage de la solution et donc une dégradation de la précision surtout au voisinage des discontinuités.

La régularisation TSVD est donc assez sensible à la détermination du paramètre de régularisation p. Des méthodes existent pour déterminer la valeur optimale de ce paramètre de régularisation et cherchent à résoudre les problèmes engendrés par les faibles valeurs singulières de la matrice H. Il est ainsi important de signaler que même lorsqu'un problème

inverse est mal conditionné, une solution peut encore être trouvée en utilisant la régularisation.

1.2.2.4 | Méthode de Tikhonov

Cette méthode est souvent plus efficace que la méthode TSVD mais sa mise en oeuvre est plus délicate. Elle est cependant utilisée fréquemment [18, 19, 20, 24] et consiste à ajouter un paramètre de régularisation qui vient altérer les valeurs singulières de la matrice. Ce paramètre hausse les valeurs singulières d'autant plus qu'elles sont faibles et supprime donc leur effet néfaste sur l'inversion.
L'idée consiste à accepter une norme résiduelle $\|HF - R\|$ non nulle et à pénaliser la solution. Dans le cas général, on cherche à minimiser la fonction coût suivante :

$$J_\beta(F) = \|HF - R\|^2 + \beta \|L(F - R_0)\|^2 \tag{1.15}$$

où L est une application linéaire (souvent l'opérateur dérivée première ou seconde) et R_0 représente une information à priori sur la solution.

Le choix du paramètre β va conditionner l'efficacité de la régularisation. En effet, si on donne un poids trop important à la quantité stabilisatrice $\|L(F - R_0)\|^2$, la solution peut être altérée de façon importante. Par contre, si le poids est faible, on se rapproche de la solution "naïve" au sens des moindres carrés. Il s'agit donc d'un compromis entre la stabilité et la vraisemblance de la solution obtenue.
Quand on ne connaît rien sur la solution recherchée, on fixe souvent $R_0 = 0$ et $L = Id$ pour régulariser le problème. Ainsi, la fonction coût à minimiser s'écrit :

$$J_\beta(F) = \|HF - R\|^2 + \beta \|F\|^2 \tag{1.16}$$

Pour déterminer le minimum de cette fonction, on cherche F_0 tel que

$$\frac{\partial J_\beta}{\partial F}(F_0) = 0 \tag{1.17}$$

En calculant cette expression, on obtient :

$$\frac{\partial J_\beta}{\partial F} = 2H^T HF - 2H^T R + 2\beta F \tag{1.18}$$

On se ramène alors au problème linéaire qui consiste à trouver F_0 tel que :

$$H^T HF_0 + \beta F_0 - H^T R = 0 \tag{1.19}$$

soit :

$$(H^T H + \beta Id)F_0 = H^T R \tag{1.20}$$

que l'on peut résoudre radicalement de la manière suivante :

$$F_0 = (H^T H + \beta Id)^{-1} H^T R \tag{1.21}$$

On peut ainsi voir que le paramètre β permet en quelque sorte de renforcer la diagonale de la matrice $H^T H$ facilitant ainsi son inversion. Si on se ramène à la décomposition en valeurs singulières δ_i, on peut voir qu'avec le paramètre de régularisation β, les valeurs singulières sont remplacées par les termes régularisées :

$$\delta_i^{reg} = \delta_i + \frac{\beta}{\delta_i} \tag{1.22}$$

Soit, en développant le produit matriciel de l'équation (1.21)

$$f^0 = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\delta_i^2}{\delta_i^2 + \beta}\right) \frac{u_i^T R}{\delta_i} v_i \tag{1.23}$$

Ainsi, on ne fait pas le choix des valeurs singulières à prendre en compte comme dans la méthode TSVD, mais on modifie toutes les valeurs singulières et surtout les faibles valeurs qui ont un effet plus important sur la stabilité du système.

1.2.3 Optimisation de la régularisation

La résolution d'un problème inverse nécessite souvent l'utilisation de techniques de régularisation. Elles font intervenir un paramètre de régularisation dont il faut fixer la valeur selon le degré de régularisation souhaité. La détermination de la valeur optimale du paramètre de régularisation est une phase importante et délicate. Certaines techniques existent pour déterminer le paramètre de régularisation optimum. Deux d'entre elles présentées ci-dessous sont utilisées pour déterminer la valeur du paramètre de régularisation dans la méthode de Tikhonov.

1.2.3.1 Méthode GCV (Generalised Cross Validation)

La méthode GCV cherche à trouver un rapport optimal entre les erreurs de perturbation et les erreurs de régularisation pour tous les paramètres de régularisation validés. L'objectif de cette méthode est de trouver la valeur de β_{GCV} [24, 27] adéquate qui minimise la fonction suivante :

$$GCV(\beta) = \frac{1/m \, \|(Id - B(\beta))R\|^2}{((1/m)tr(Id - B(\beta)))^2} \tag{1.24}$$

où m est le nombre de points de mesures, tr la trace d'une matrice et B la matrice donnée par :

$$B(\beta) = H(H^T H + \beta Id)^{-1} H^T \tag{1.25}$$

Le dénominateur de l'équation 1.24 évalue les erreurs de perturbations causées par la régularisation avec l'addition de β au critère d'erreur. Ainsi, le dénominateur deviendra progressivement plus petit que 1 et tend à augmenter le GCV tout en augmentant β. Le numérateur représente à son tour la somme carrée des résidus de la solution régularisée. Par conséquent, la fonction GCV permet d'évaluer aussi bien les erreurs de la solution et les incertitudes introduites dans la matrice H à inverser en incluant le paramètre de

régularisation choisi. Ainsi, le paramètre de régularisation de la solution régularisée de l'équation (1.21) est déterminé en minimisant la fonction GCV. Le paramètre optimisé β permet alors d'obtenir de bons résultats d'inversion du problème.
La Figure 1.2.3 montre une forme typique de la fonction GCV représentant l'évolution de cette fonction en fonction de β. Cependant, de nombreuses précautions sont à prendre pour utiliser cette méthode, notamment concernant la décroissance des valeurs singulières de la matrice de transfert.

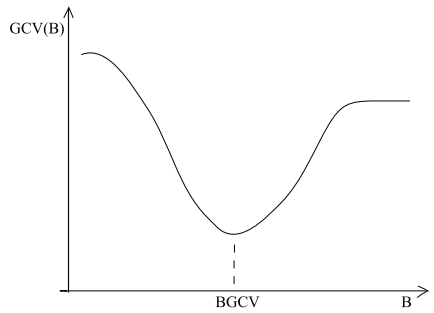


FIGURE 1.2.3 – Forme typique de la fonction GCV

1.2.3.2 Méthode de la courbe en L (L-Curve)

La méthode de la courbe en L est une méthode plus pratique pour déterminer le paramètre de régularisation optimal dans la méthode de Tikhonov. Cette méthode consiste à tracer l'évolution de la norme de la solution régularisée $\|L(F - R_0)\|$ en fonction du résidu $\|HF - R\|$ et pour différentes valeurs du paramètre de régularisation β. Quand cette courbe paramétrée par β est tracée en échelle logarithmique, elle a l'apparence d'un "L" d'où le nom de la méthode (figure 1.2.4).
L'erreur commise sur la solution finale régularisée est la somme d'une erreur due aux imperfections du second membre et d'une erreur de régularisation. La courbe en L, fonction de β, présente deux zones distinctes dont une première zone presque verticale et une seconde zone plutôt horizontale [28]. Dans la partie horizontale de la courbe, on trouve les solutions où l'erreur de régularisation prédomine sur l'erreur due à la perturbation du second membre. Par contre, dans la partie verticale, l'erreur de régularisataion est faible. Elle est dominée par l'erreur due aux imperfections du second membre. Ainsi, pour un second membre donné, il existe une valeur optimale de β qui équilibre les deux types d'erreurs. Cette valeur se situe à l'intersection des parties horizontale et verticale de la courbe en L.

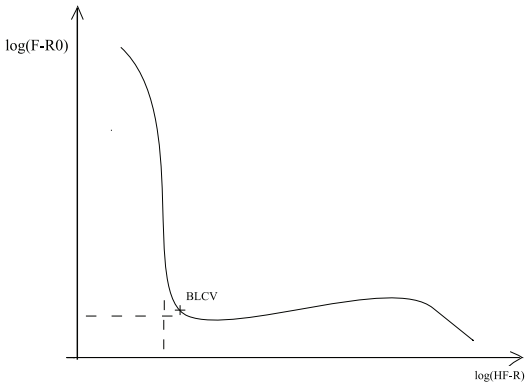


FIGURE 1.2.4 – allure de la courbe en L

1.3 Revue des méthodes inverses en vibroacoustique

Les méthodes inverses permettant l'identification des sources du bruit à partir des mesures de la vibration du système étudié sont évoluées suivant l'étendue de la classe fréquentielle et suivant les variables étudiées.
Parmi ces méthodes, on trouve celles destinées pour les basses fréquences telle que l'holographie, d'autres destinées pour les hautes fréquences telles que la méthode RIFF et la SEA et d'autres pour étendre la classe des hautes fréquences vers les moyennes fréquences telle que la MES.
Pour les variables constituant la base de la méthode, on distingue soit des variables cinématiques utilisées dans les méthodes FEM et BEM par exemple, soit des variables énergétiques utilisées dans les méthodes énergétiques telles que la SEA, la WIA, la EFEM et la MES.
Dans cette partie du chapitre, nous présentons les principales méthodes inverses en donnant les formulations ainsi que les avantages et les inconvénients de chacune d'elles.

1.3.1 Holographie

Le principe de la holographie consiste à utiliser des mesures de pression acoustique, en amplitude et en phase, sur une surface entourant la source (hologramme) tout en rétropropageant vers la source. Considérons un vecteur linéaire comportant les valeurs de pression détectées par les m microphones qui reçoivent les signaux émis par les N sources incohérentes. Les signaux mesurés peuvent être exprimés dans le domaine fréquentiel comme une combinaison linéaire des N signaux auquels s'ajoute le bruit de mesure. La transformée de Fourier du $j^{ème}$ signal de référence f_j est détaillée dans [29] dans laquelle Kang présente la théorie de l'holographie fondée sur la décomposition en champ proche (NAH) :

$$f_j = \sum_{i=1}^{N} g_{ji} s_i + r_j \tag{1.26}$$

où s_i désigne le $i^{ème}$ signal source et g_{ji} désigne la fonction de transfert reliant s_i à f_j définie par:

$$g_{ji} = \frac{e^{-Jkl_{ji}}}{l_{ji}} \tag{1.27}$$

où $J = \sqrt{-1}$ et l_{ji} est la distance entre le $j^{ème}$ microphone et la $i^{ème}$ source. Ici, n_j désigne le bruit gaussien et:

$$E(r_i, r_j) = \sigma_n^2 \delta(i-j) \tag{1.28}$$

où

$$\delta(i-j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

E désigne l'espérance mathématique entre deux signaux de références r_i et r_j et σ_n^2 est la variance du bruit.

L'équation 1.26 s'écrit en formulation matricielle sous la forme :

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1N} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} = Gs + r \tag{1.29}$$

où f est le vecteur représentant la transformée de Fourier des signaux références, G est la matrice de transfert dont ses éléments sont $g_i = [g_{1i} g_{2i} ... g_{mi}]^T$, s est un vecteur qui représente les signaux sources et r est le vecteur des mesures du bruit. La matrice spectrale des références S_{ff} peut être écrite comme suit :

$$S_{ff} = E[ff^H] = GE[ss^H]G^H + E[rr^H] = GS_{ss}G^H + \sigma_n^2 I \tag{1.30}$$

où S_{ss} désigne la matrice spectrale des signaux sources $E[ss^H]$ et G^H est la transposée hermitienne de G.
La décomposition propre de la matrice spectrale des références S_{ff} peut être exprimée par :

$$S_{ff} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nu_i \nu_i^H \tag{1.31}$$

où ν_i est le ième vecteur propre et :

$$\lambda_i = \begin{cases} \mu_i + \sigma_n^2 & (i = 1, 2, ..., N) \\ \sigma_n^2 & (i = N+1, N+2, ..., m) \end{cases}$$

Ici, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant ... \geqslant \mu_N$ désignent les valeurs propres de la matrice spectrale des signaux sources. Ces équations impliquent que les valeurs propres et les vecteurs propres associés à la matrice spectrale de références peuvent être subdivisés en deux groupes. Un premier groupe contient les vecteurs des signaux sources et les composantes du bruit qui sont indistinguées des signaux sources alors que le deuxième contient les composantes restantes du

bruit [30, 31].
Considérons le vecteur $\hat{g}_i$ défini comme suit :

$$\hat{g}_i = [\hat{g}_{1i}\hat{g}_{2i}...\hat{g}_{mi}]^T \tag{1.32}$$

où $\hat{g}_{ji}$ représente la fonction de Green reliant la jème référence microphone et la ième source. Après quelques manipulations algébriques, on peut indiquer que :

$$v_j^H \hat{g}_i = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant N \ , \ N+1 \leqslant j \leqslant m \tag{1.33}$$

où $v_{N+1}, ..., v_m$ sont les vecteurs propres de la matrice spectrale des références correspondant au bruit.
l'équation 1.33 représente les propriétés orthogonales du sous espace du bruit et des signaux sources. Les localisations des sources sont estimées en choisissant les points du champ correspondants aux pics de puissance. Cette puissance est définie à travers les points du domaine par :

$$P_m = \frac{1}{\sum_{n=N+1}^{m} |\hat{a}^H v_n|^2} \tag{1.34}$$

où $\hat{a}$ est le vecteur des fonctions de Green reliant les microphones et les points du domaine.

Un point du domaine représente l'emplacement d'une source estimée. Lorsque le vecteur $\hat{a}$ est égal au vecteur $\hat{g}_i$, les quantités provenant de la sommation de l'équation 1.34 deviennent nulles, et la valeur de la puissance sonore devient infinie.
Dans la pratique et en raison du nombre fini d'échantillons, la valeur de la puissance sonore dans la position de la source reste finie mais reste toujours plus grande que les valeurs de la puissance sonore des points adjacents.

Pour trouver les vecteurs qui mènent aux puissances sonores, une grille de dimensions $(n_g \times n_g)$ est construite dans le plan de source et est utilisée pour calculer les puissances des $(n_g \times n_g)$ points du domaine. Les points obtenus dans ce cas aboutissent aux valeurs de la puissance sonore qui représentent les emplacements des sources. Plus la grille devient fine, plus les crêtes de distribution d'énergie seront claires. Cependant, le temps de calcul requis pour calculer la puissance de tous les vecteurs du domaine augmente aussi lorsqu'on augmente le nombre des points de la grille.

Ainsi, on peut trouver deux types d'holographie: stationnaire et non stationnaire. L'holographie stationnaire a une résolution élevée mais elle reste limitée aux sources stationnaires. Elle est utilisée dans le domaine automobile et pour le calcul de la puissance acoustique. La méthode d'holographie non stationnaire de résolution élevée est utilisable sur des sources stationnaires ou non. Elle fournit une cartographie à chaque instant. Elle est cependant coûteuse et nécessite un nombre important de microphones. Elle est utilisée pour les moteurs sur bancs d'essai.

En résumé, la technique d'holographie acoustique consiste à réaliser un ensemble de mesures sur un plan, effectuer une transformée de Fourier de ces mesures, appliquer une procédure de rétropropagation dans l'espace de Fourier qui distingue les ondes propagatives des ondes évanescentes et enfin effectuer une transformée de Fourier inverse.
Les principaux avantages de cette méthode sont la facilité de son utilisation, la possibilité d'obtenir une résolution élevée et de fournir une cartographie complète.
Les principaux inconvénients de cette méthode sont la limite de l'utilisation aux basses fréquences car sinon le nombre de microphones sera élevé, le risque d'instabilité et la difficulté de pouvoir effectuer des mesures assez proches des sources.

1.3.2 FEM

La méthode FEM inverse repose sur l'équation de Helmholtz et la condition de frontière suivantes :

$$\Delta(p)(\vec{x}) + k^2 p(\vec{x}) = 0 \tag{1.35}$$

$$p_n(\vec{x}) = i\rho_0 ck[v_s(\vec{x}) + Y(\vec{x})p(\vec{x})] \tag{1.36}$$

où Δ est l'opérateur Laplacien, p est la pression acoustique et k est le nombre d'onde défini par :

$$k = \frac{2\pi f}{c} \tag{1.37}$$

La condition de frontière prend en compte la vitesse de surface v_s, l'influence de l'amortissement, de l'élasticité et de la masse de la frontière à travers le coefficient complexe Y appelé admittance de frontière. Les propriétés du fluide sont données par la densité ρ_0 et la vitesse du son c.
Ces deux équations constituent le problème à résoudre. Il est en pratique résolu en utilisant la méthode des éléments finis ce qui donne le problème discrétisé suivant :

$$(K - k^2 M - ikD)p = i\rho_0 ck v_s M_f \tag{1.38}$$

où K est la matrice de raideur, M la matrice de masse et D la matrice d'amortissement. Ces matrices sont toutes de dimension $(N_e \times N_e)$ avec N_e est le nombre d'éléments.

En éléments finis, la structure est subdivisée sur un nombre fini d'éléments et le champ de déplacement de chaque élément est approximé comme suit :

$$w = Nu^e \tag{1.39}$$

où w est le vecteur composé des déplacements déterminés pour les trois directions orthogonales, N la matrice d'interpolation des déplacements en fonction des coordonnées spatiales et u^e le vecteur des déplacements nodaux en fonction du temps.

Pour chaque élément, la relation de transformation des déplacements exprimés en coordonnées locales u^e en déplacements exprimés en coordonnées globales $u^{\hat{e}}$ est donnée par :

$$u^e = A^e u^{\hat{e}} \tag{1.40}$$

où A^e est la matrice de transformation orthogonale formée par les directions cosinus reliant l'axe local à l'axe global.

Les matrices d'assemblage K, M et D sont déterminées respectivement à partir des raideurs élémentaires K^e, les masses élémentaires M^e et les amortissements élémentaires D^e par les équations suivantes. Ces matrices d'assemblage ainsi que les matrices élémentaires correspondantes sont données par :

$$K = \sum_e A^{e^T} K^e A^e \tag{1.41}$$

$$M = \sum_e A^{e^T} M^e A^e \tag{1.42}$$

$$D = \sum_e A^{e^T} D^e A^e \tag{1.43}$$

Les matrices élémentaires sont déterminées à leur tour par les formules suivantes :

$$K^e = \int_{V^e} B^T D B dv \tag{1.44}$$

$$M^e = \int_{V^e} \rho_0 N^T N dv \tag{1.45}$$

$$D^e = \int_{V^e} \mu N^T N dv \tag{1.46}$$

où $B = \Delta N$, V^e est le volume élémentaire et μ le coefficient d'amortissement.
Δ est l'opérateur différentiel de la matrice spatiale liant les déformations ϵ aux déplacements w par l'équation :

$$\epsilon = \Delta w \tag{1.47}$$

L'excitation apparaît dans le second membre de l'égalité 1.38 où M_f est la matrice de masse de frontière.
Après quelques manipulations, le problème peut se mettre sous la forme :

$$A p_u = F \tag{1.48}$$

avec

$$p_u = \begin{bmatrix} p_b \\ p_f \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

p_b est la pression acoustique aux noeuds de frontière et p_f est la pression acoustique aux noeuds internes.

La résolution de ce problème mal conditionné nécessite comme toute méthode inverse des techniques particulières de régularisation comme la régularisation de Tikhonov et la Décomposition en Valeurs Singulières SVD. Pour minimiser les propagations et les amplifications d'erreurs et améliorer la précision de la reconstitution acoustique dans des cas de très mauvais conditionnement, ces techniques agissent directement sur les valeurs singulières de la matrice des fonctions de transfert et réduisent par la suite le nombre de conditionnement.

Les localisations des mesures de pression coincident dans la méthode FEM inverse avec les noeuds du maillage éléments finis. Cela peut présenter un avantage à cette méthode puisque l'emplacement des microphones et le maillage automatisé autorisent des mises en oeuvres faciles des mesures appropriées. Par contre, il est peut être décrit comme un inconvénient pour la FEM en la comparant à la BEM qui autorise un positionnement continu des microphones.

1.3.3 BEM

La méthode BEM inverse est une méthode couplant une modélisation d'éléments de frontière acoustique avec les techniques des méthodes inverses (décrites précédemment) pour résoudre des problèmes de reconstitution acoustique. L'objectif est de résoudre numériquement la distribution de la vitesse de surface d'une source acoustique complexe à partir du champ acoustique mesuré.
L'application de la méthode BEM inverse suppose la résolution d'un problème mal conditionné et la détermination d'une matrice de transfert reliant les vitesses de surfaces normales aux noeuds de frontière aux mesures de pression acoustique.
La détermination de cette matrice de transfert peut être réalisée en utilisant une formulation variationnelle indirecte ou une formulation élément de frontière directe. Après la détermination de cette matrice, il faut donc résoudre un problème mal conditionné.
Le champ acoustique peut être exprimé en terme de distribution sur la surface S :

$$p(P) = \int_S \mu_s(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} dS(Q) \tag{1.50}$$

où $p(P)$ est la pression acoustique au point P, $\mu_s(Q)$ la densité de surface, $G(P,Q)$ la fonction de Green et n_Q le vecteur normal au point Q orienté vers l'extérieur de la région.

Le lien entre les vitesses de surface normales v_n et la densité de surface μ_s est fourni par le calcul de la dérivée de l'équation 1.50 pour un point P de la surface :

$$-j\omega\rho v_n(P) = \int_S \mu_s(Q) \frac{\partial^2 G(P,Q)}{\partial n_P \partial n_Q} dS(Q) \tag{1.51}$$

où ω est la pulsation et ρ la densité du fluide.

En considérant m points de mesures situés dans une région extérieure et n noeuds de frontière de la formulation BEM sur la surface discrétisée, on peut alors discrétiser les équations 1.50 et 1.51 pour obtenir :

$$p = G\mu_s \tag{1.52}$$

$$-j\omega\rho B v_n = Q\mu_s \tag{1.53}$$

Afin de discrétiser l'équation 1.51, un principe variationnel est associé à l'équation afin de traiter la dérivée seconde de la fonction de Green. Les deux matrices B et Q sont symétriques et de dimension $(n \times n)$. En général, G est une matrice complexe rectangulaire de dimension $(m \times n)$, ce qui suppose que le nombre des points de mesure m est plus élevé ou égal au nombre de noeuds de frontière n.
En combinant les expressions des deux équations 1.52 et 1.53, on peut exprimer le champ de pression en fonction des vitesses de surface normales :

$$p = -j\omega\rho G Q^{-1} B v_n = H v_n \tag{1.54}$$

L'équation 1.54 représente un problème mal conditionné ce qui implique que nous ne pouvons pas calculer le vecteur des vitesses de surface par une approche standard car la solution est instable (très sensible aux perturbations). En employant une technique de stabilisation particulière (régularisation), le nombre de conditionnement de la matrice H utilisée permet de mesurer la sensibilité de la solution aux perturbations dans la matrice elle même. La régularisation de Tikhonov utilisée ici consiste à chercher v_n qui minimise l'expression :

$$\|Hv_n - p\|_2^2 + \lambda^2 \|Lv_n\|_2^2 \tag{1.55}$$

Le paramètre de régularisation λ est l'unique entrée lorsqu'une matrice de régularisation L convenable a été définie. Si λ=0, ça sera un problème à moindres carrés.

En pratique, le choix du paramètre λ n'est pas simple. L'idéal consisterait à déterminer le paramètre de régularisation pour que la solution calculée fournie la meilleure estimation possible de la solution exacte qui n'est malheureusement pas disponible. C'est pourquoi, il existe les méthodes de choix de paramètres telles que la méthode GCV et la méthode de la courbe en *L* détaillées dans le sous chapitre précédent.

1.3.4 Comparaison FEM-BEM

Les méthodes FEM et BEM inverses sont une combinaison de méthodes de discrétisation sur le volume ou sur la frontière avec une méthode inverse. Le principe d'inversion du problème est similaire pour les deux méthodes et présente les mêmes contraintes, les mêmes avantages et inconvénients. La grande différence se fait en réalité lors de la détermination du problème à inverser.
La BEM inverse présente des matrices de taille plus faible mais pleines et donc difficile à inverser alors que la FEM inverse considère des matrices de taille plus importante mais

creuses et donc plus facile à inverser.
La méthode BEM fournit également une bonne précision des résultats et présente l'avantage de générer facilement des maillages. De plus, avec cette méthode, les domaines infinis ne posent pas de difficultés. Cependant, le fait que la matrice soit pleine entraîne un coût important de calcul numérique.
La méthode FEM nécessite de mailler tout le domaine entraînant des coûts de calcul supplémentaires. Par conséquent, cela rend la matrice plus peuplée et alors plus facile à inverser. La FEM inverse présente aussi l'inconvénient d'un temps de calcul élevé dû à la nécessité d'avoir un maillage fin pour effectuer des calculs à hautes fréquences.

1.3.5 IFRF

Un problème acoustique inverse consiste à localiser et à déterminer l'intensité des sources acoustiques en mesurant la pression acoustique en certains endroits de l'environnement. La méthode IFRF (Inverse Frequency Response Function) se base sur le passage d'un système d'entrée (localisation des sources) par un filtre linéaire afin de trouver le système de sortie (localisation des mesures). Pour chaque source et capteur de pression, il est possible de déterminer une fonction de transfert reliant l'intensité de la source acoustique à la pression mesurée.

Dans les méthodes IFRF traditionnelles, le problème acoustique consiste à obtenir les vitesses de surface dans les directions normales v_n à partir des mesures de pression acoustique p_f. Cela est en pratique réalisé à partir de l'inversion de l'équation suivante :

$$p_f = H.v_n \tag{1.56}$$

où la matrice de transfert H représente l'équivalent discret de l'équation intégrale d'Helmholtz.

Cette matrice est de dimensions $(m \times k)$ avec m le nombre de points de mesure et k le nombre de sources.
Chaque élément de cette matrice de transfert est calculé en utilisant la formule suivante :

$$H = j\rho\omega \frac{e^{-jk_w r}}{4\pi r} \tag{1.57}$$

où r est la distance entre chaque couple source-microphone, k_w le nombre d'onde et ρ la masse volumique du fluide.

Généralement, on suppose que le nombre de sources k est inférieur ou égal au nombre de microphones m comme indiqué dans [19, 28, 32]. La difficulté présente est que la matrice H est généralement mal conditionnée pour être inversée.
Dans certains cas, la pseudo-inverse classique exprimée par $H^+ = (H^*H)^{-1}H^*$ ne donne pas des résultats satisfaisants et pour y remédier, une procédure de régularisation sera implémentée. Pour cela, on peut utiliser soit la technique de régularisation TSVD ou de Tikhonov. Dans les deux méthodes, H se décompose comme déjà vu dans l'équation 1.5 sous la forme :

$$H = U\Sigma V^T \tag{1.58}$$

avec Σ de dimensions $(k \times k)$ une matrice diagonale contenant les valeurs singulières classées par ordre décroissant, V de dimensions $(k \times k)$ une matrice unitaire et U de dimensions $(m \times k)$ une matrice unitaire tronquée tel que $U^*U = I$.

L'inversion de la matrice H depuis l'équation 1.58 est facilement calculée à cause des propriétés de décomposition des matrices. Le mauvais conditionnement de l'inversion provient des valeurs singulières qui sont très petites et qui sont très amplifiées par le processus d'inversion. L'étude du conditionnement de la matrice à inverser se révèle donc fondamentale dans ce genre de problème.

Le conditionnement du problème inverse dépend en particulier de la géométrie, du nombre de sources, des positions de mesures et de la fréquence. En pratique, on utilise le nombre de conditionnement défini par l'équation 1.10 qui caractérise la matrice des fonctions de transfert liée à la sensibilité d'un système linéaire aux erreurs de mesures.
Ce rapport augmente de façon importante quand la matrice est quasiment singulière, c'est à dire quand une dépendance linéaire apparaît entre les lignes et les colonnes. Théoriquement, si les colonnes ou les lignes sont totalement dépendantes, le nombre de conditionnement est infini. Au contraire, si ces dernières sont indépendantes, le nombre de conditionnement est proche de 1.
Le problème acoustique inverse devient en général mal conditionné pour des basses fréquences quand la longueur d'onde du son est plus grande que la distance entre les sources. Cependant, le conditionnement du problème inverse devient meilleur quand les mesures sont réalisées à des points proches des sources acoustiques et quand la géométrie des points de mesure est similaire à la disposition des sources acoustiques.

La première méthode TSVD consiste à supprimer ces composants instables alors que la deuxième méthode de Tikhonov consiste à l'amplification de ces petites valeurs singulières pour diminuer leur magnitude.

La solution de la TSVD est donnée par :

$$v_n = V_r S_r^{-1} U_r^* p_f \tag{1.59}$$

où V_r de dimensions $(k \times r)$ est une matrice contenant les r premières colonnes gauches de la matrice V, U_r de dimensions $(m \times r)$ est une matrice contenant les r premières colonnes gauches de la matrice U et S_r de dimensions $(r \times r)$ est une matrice diagonale des r plus grandes valeurs singulières.

La solution de Tikhonov est donnée à son tour par :

$$v_n = V(S + \beta^2 S^{-1})^{-1} U^* p_f \tag{1.60}$$

où β est le paramètre de régularisation réel et positif.

Les deux méthodes permettent d'atténuer les effets des petites valeurs singulières. La seule différence est que le filtre de la TSVD a une infinité de coupures de pente tandis que le filtre de Tikhonov a une pente ajustée sur les grandes valeurs singulières.
Ces méthodes présentent des inconvénients tels que le mauvais conditionnement de la matrice à inverser, la rigueur à apporter au protocole expérimental et la réduction de leur utilisation pour les hautes fréquences. Cependant, le principal avantage est la présence d'outils mathématiques pour améliorer les résultats (régularisation).

En la comparant aux autres méthodes, la IFRF présente l'avantage d'avoir une modélisation de l'environnement plus précise puisque les fonctions de transfert sont mesurées expérimentalement, ce qui élimine tout trajet réverbérant entre la source et les endroits de mesure.
Cependant, la IFRF tend aussi à donner des faux résultats à cause de la propagation et de l'amplification des erreurs dans le processus d'inversion dont la précision de la reconstitution acoustique (localisation et quantification des intensités des sources) dépend énormément du conditionnement de la matrice des fonctions de transfert à inverser.
Malheureusement, ce problème inverse est souvent mal conditionné ce qui engendre des petites perturbations aléatoires sur les mesures de pression provoquant d'importantes erreurs.

1.3.6 RIFF

La méthode appelée RIFF (Résolution Inverse Filtrée et Fenêtrée) a pour origine une technique d'analyse de force (FAT) qui est une méthode permettant de calculer la distribution de force excitant une structure [1, 4]. Elle a été présentée la première fois par Pezerat et Guyader dans le cas des poutres [1, 2] et des plaques [3].
Le but principal de cette méthode est de déterminer toutes les causes qui participent à la vibration d'une structure et les exprimer sous forme d'efforts. Ces causes peuvent avoir des caractéristiques bien différentes.
La particularité de cette approche est de rechercher directement les efforts de tous types (ponctuels, surfaciques, avec ou sans transfert d'énergie,...) sous forme d'une distribution sur le domaine spatial de la structure. La formulation mathématique choisie est déterministe pour raison de simplicité.
Le développement d'un problème inverse au sens des mathématiques (inversions de matrices, minimisations de fonctionnelles d'écart,...) n'est pas typique ce qui nécessite une régularisation. Cependant, cette dernière intervient par une voie différente de celle du sous chapitre précédent. Elle est présentée sous forme de l'application d'un filtrage et d'un fenêtrage.
Cette méthode est locale utilisant l'équation du mouvement de la structure. Elle nécessite ainsi une connaissance des données sur une partie du système vibrant pour calculer les efforts qui y sont éventuellement appliqués.

Le principe est alors basé sur une discrétisation de l'équation du mouvement et la for-

mulation du problème s'écrit sous la forme :

$$D\Delta^2 w - \rho\omega^2 h w = F \tag{1.61}$$

où D est la rigidité de la structure, w le vecteur des déplacements, F le vecteur force appliquée, ρ la masse volumique, h la hauteur de la structure et Δ^2 l'opérateur bilaplacien.

Pour les structures minces planes, l'opérateur différentiel classique décrivant le mouvement transversal des plaques est considéré. C'est le mouvement de flexion basé sur l'équation 1.61 et régi par l'équation du quatrième ordre donnée par :

$$D(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}) - \rho\omega^2 h w = F \tag{1.62}$$

La rigidité de la structure plaque D s'exprime dans ce cas comme suit :

$$D = \frac{Eh^3}{(1-\nu^2)} \tag{1.63}$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

Les dérivées spatiales peuvent être déduites suivant deux méthodes que l'on rencontre dans la littérature qui sont la méthode par projection dans la base modale [5] et la méthode par différences finies [7].
Dans l'approche modale, Gavric & al [5] mettent en évidence que les ordres modaux élevés sont très sensibles et difficiles à calculer. Le fait de les négliger permet le calcul d'une solution plus stable mais approchée.
Pour l'approche des différences finies, Hayek & al [8] montrent que l'ordre d'approximation du schéma a une importance primordiale. Si l'ordre est élevé (utilisation d'un plus grand nombre de points de mesures), l'erreur d'approximation est réduite mais l'instabilité de la technique est plus grande. Par contre, si l'ordre est faible, la méthode est plus stable vis à vis des erreurs de mesure mais on s'écarte de la solution exacte. Il existe donc un compromis sur le choix de l'ordre.

Le calcul direct réalisé par l'approche modale consiste à déterminer la valeur w_{ij} du déplacement au point indicé par le couple (i, j).
L'expression du champ de déplacement discrétisé se résume par :

$$w_{ij} = \sum_{n=1}^{2(m_x-1)} \sum_{m=1}^{2(m_y-1)} \frac{4F\cos(\frac{n\pi}{L_x}x_S)\cos(\frac{m\pi}{L_y}y_S)}{[k_{nm}^4 - k^4]Dnm\pi^2} \sin(\frac{n\pi}{L_x}i\Delta_x)\sin(\frac{m\pi}{L_y}j\Delta_y) \tag{1.64}$$

où (x_S, y_S) est le couple représentant les coordonnées du point d'excitation où est appliquée la force F, m_x et m_y sont respectivement les nombres de discrétisation de la plaque suivant l'axe x et y, L_x et L_y sont les dimensions de la plaque, Δ_x et Δ_y correspondent aux écarts entre deux points consécutifs selon les directions x et y.
Notons k_{nm} la quantité définie par :

$$k_{nm}^4 = (\frac{n^4\pi^4}{L_x^4} + \frac{m^4\pi^4}{L_y^4} + 2\frac{n^2m^2\pi^4}{L_x^2L_y^2}) \tag{1.65}$$

k étant le nombre d'onde naturel régi par l'équation de dispersion de la plaque :

$$k = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}}\sqrt{\omega} \tag{1.66}$$

Le champ de déplacement ainsi calculé constitue les données dites "exactes".

L'approche des différences finies appliquée dans le cas des structures bidimensionnelles utilise pour résoudre le problème les schémas centrés correspondant à chaque dérivée spatiale et développés au premier ordre.
Pour un maillage cartésien, les expressions sont de la forme :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Rightarrow \delta_{i,j}^{4x} = \frac{1}{\Delta_x^4}(w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}) \tag{1.67}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Rightarrow \delta_{i,j}^{4y} = \frac{1}{\Delta_y^4}(w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}) \tag{1.68}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} \Rightarrow \delta_{i,j}^{2x2y} = \frac{1}{\Delta_x^2\Delta_y^2}(w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}) \tag{1.69}$$

La distribution de force est alors calculée à partir des déplacements mesurés à 13 points de la structure.

Comme dans tous les problèmes inverses, les difficultés surgissent en raison de la sensibilité des incertitudes de mesure, de sorte que les petites erreurs dans les mesures peuvent présenter un niveau élevé de bruit dans le résultat. Ce problème peut être réduit quand le résultat est régularisé avec l'utilisation d'une fenêtre spatiale et d'un filtre passe bande de nombre d'ondes.

Le fenêtrage a pour but d'adoucir les discontinuités aux limites par une demi fenêtre de Hanning. Pour une structure rectangulaire, on utilise la fenêtre globale 2D suivante :

$$\psi_{2D}(x,y) = \psi(x)\psi(y) \tag{1.70}$$

avec $\psi(x)$ (de même pour $\psi(y)$) la fenêtre définie dans le cas monodimensionnel par :

$$\begin{cases} \psi(x) = 0.5(1-\cos(\frac{\pi x}{\alpha})) & x \in [0,\alpha] \\ \psi(x) = 1 & x \in [\alpha, L_x-\alpha] \\ \psi(x) = 0.5(1-\cos(\frac{\pi(x-L_x+2\alpha)}{\alpha})) & x \in [L_x-\alpha, L_x] \\ \psi(x) = 0 & x \in]-\infty;0[\cup]L_x,+\infty[\end{cases} \tag{1.71}$$

où α correspond à la demi longueur d'onde de coupure du filtre.

Pour éviter les effets néfastes du filtre sur les bords, le fenêtrage est réalisé avant le filtrage. La méthode est rendue stable sur tout le domaine. Par contre, il est évident que le fenêtrage ne permet pas la détermination des efforts aux limites.

Le filtrage constitue l'opération essentielle de la régularisation. Il permet d'éliminer l'effet amplificateur des erreurs associées aux mesures qui caractérisent le problème inverse. En deux dimensions, on utilise deux filtres dans les deux directions x et y. L'opération consiste alors à faire le double produit de convolution :

$$F_{ij}^{filtrée} = \Delta_x \Delta_y \sum_{k=i-\frac{2\pi}{k_c \Delta_x}}^{i+\frac{2\pi}{k_c \Delta_x}} \sum_{l=j-\frac{2\pi}{k_c \Delta_y}}^{j+\frac{2\pi}{k_c \Delta_y}} F_{kl} H((i-k)\Delta_x, (j-l)\Delta_y) \tag{1.72}$$

avec H la fonction mère bidimensionnelle définie par :

(1.73)

$$\begin{cases} H(x,y) = \frac{1}{4\pi^2 xy}(1+\cos(\frac{k_c x}{2}))(1+\cos(\frac{k_c y}{2}))\sin(k_c x)\sin(k_c y) & x,y \in [\frac{-2\pi}{k_c}, \frac{2\pi}{k_c}] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On peut noter d'après cette expression que les deux filtres possèdent le même nombre d'onde de coupure k_c. Ce choix a pour raison que l'optimum de la longueur d'onde de coupure dépend seulement du nombre d'onde libre de la structure qui est indépendant des directions des plaques isotropiques.

Dans ce cas, le paramètre de régularisation est le nombre d'onde de coupure k_c. Sa valeur est choisie pour suivre la valeur du nombre d'onde naturel k avec la loi linéaire $k_c = a.k$. En tenant compte de l'équation de dispersion d'une plaque, le nombre d'onde de coupure dépend de la racine carrée de la fréquence :

$$k_c = a.(\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eh^2})^{1/4}\sqrt{\omega} \tag{1.74}$$

avec a le paramètre de régularisation de la technique FAT [1, 2].

Le problème de la localisation de source de vibration est traité par certains articles [6, 7] en utilisant l'intensité. Cette technique produit des vecteurs d'intensité indiquant le flux de puissance et l'endroit des sources alors que la densité de force appliquée à la structure n'est pas caractérisée. Les articles [10, 11] ont proposé une extension de la méthode RIFF aux coques cylindriques et ont accentué la possibilité de reconstruire la distribution de force à une basse bande de fréquences. Cependant, l'effet significatif de la courbure de la plaque cylindrique ne permet pas des simplifications dans la bande des basses fréquences. Cette technique est commode alors pour le cas des hautes fréquences.

1.3.7 TPA

La méthode TPA (Transfer Path Analysis) est une méthode qui permet de tracer l'écoulement d'énergie vibroacoustique provenant d'une source et utilisant les voies de charge d'air, à un emplacement récepteur bien défini.
Cette méthode se base alors sur l'évaluation de la contribution du flux de chaque voie énergétique reliant la source au récepteur. En fait, cette approche permet d'analyser objectivement et subjectivement la réponse acoustique à travers et à l'intérieur de la structure, et d'identifier les composantes spectrales de distribution.
Les récepteurs (microphones) et les sources sont considérés comme deux différents sous-systèmes. La TPA prend en considération les fonctions des réponses fréquentielles entre le récepteur et les entrées du système (forces ou vitesses) appliquées aux différents emplacements possibles des sources énergétiques. Elle combine aussi ces fonctions avec les entrées qui sont actives à ces endroits pendant le fonctionnement.
Le niveau de pression sonore est déterminé par la superposition des résultats partiels dont chacun est décrit par la contribution des différents voies de transfert :

$$r(\omega) = \sum_{i=1}^{n_{voies}} \frac{R(\omega)}{S_i(\omega)})S_i(\omega) \tag{1.75}$$

où $r(\omega)$ est le vecteur assemblant les données du récepteur en fonction de la fréquence, $\frac{R}{S_i}$ est la FRF entre le récepteur et les entrées appliquées à la ième voie de transfert, S_i est la force opérationnelle ou la vitesse correspondante à la ième voie de transfert et n_{voies} est le nombre des voies de transfert.

Les fonctions de transfert vibroacoustique peuvent être calculées en utilisant une des deux approches pratiques Hammer ou Shaker. Les fonctions de transfert acoustique (en allant des vitesses vers les pressions) sont calculées à partir des techniques d'excitation de source de vitesse. Les entrées opérationnelles (forces ou vitesses) sont disponibles comme des données expérimentales ou à partir de simulations analytiques ou généralement déterminées indirectement. En effet, ces forces sont plutôt calculées par des approches indirectes que directement à cause des difficultées rencontrées lors du calcul des fonctions de transfert.

On peut utiliser comme approche soit la méthode de rigidité complexe soit la méthode de la matrice inversée. Ces deux méthodes sont détaillées dans les deux paragraphes suivantes.
Pour quelques voies de transfert, la méthode de rigidité dynamique complexe est recommandée. Pour d'autres, l'utilisation de cette méthode est impossible à cause des données de rigidité indisponibles ou des valeurs très petites des déplacements opérationnels et différentiels ou bien à cause de la connection rigide.

1.3.7.1 Méthode de rigidité complexe

Pour les voies de transfert où la source est connectée au récepteur par l'intermédiaire du bâti, les forces opérationnelles peuvent être déterminées en connaissant la rigidité dy-

namique et complexe du bâti $K(\omega)$ et le déplacement différentiel au dessus du bâti après l'opération. Les déplacements sont souvent obtenus à partir des mesures d'accélération.

$$f_i(\omega) = K(\omega)(X_s(\omega) - X_t(\omega)) \tag{1.76}$$

avec $f_i(\omega)$ la force opérationnelle correspondant à la ième voie, $K(\omega)$ la rigidité dynamique et complexe en fonction de la fréquence, $X_t(\omega)$ le déplacement opérationnel du point de connexion du côté du récepteur et $X_s(\omega)$ le déplacement opérationnel du point de connexion du bâti du côté de la source.
En appliquant la méthode de rigidité dynamique et complexe, il est important de mesurer le déplacement opérationnel au point source et au point récepteur. Il est donc important de placer l'accéléromètre le plus loin possible des points de connexion du bâti ce qui n'est pas toujours facile. Si les mesures sont prises de plus en plus loin, les signaux d'accélération mesurés ne seront plus représentatifs du problème à hautes fréquences.

Les rigidités dynamiques et complexes du bâti devront être disponibles en tant que données complexes et fonctions fréquentielles. Elles peuvent être supposées positives en traction ou en compression. Les caractéristiques du bâti peuvent être exprimées en termes de force/déplacement, force/vitesse ou force/accélération. En évaluant la rigidité dynamique des bâtis, il est très important de les précharger le plus proche possible des conditions d'exploitation réelle. Ainsi, la température doit être la plus proche possible de la température de travail.

1.3.7.2 Méthode de la matrice inversée

Pour des voies de transfert comprenant des connexions rigides ou une très grande rigidité du bâti par rapport à l'impédance, induire même le minimum sur le déplacement relatif au dessus du bâti n'est pas possible. Ici, une technique basée sur l'inversion de la matrice d'accélération mesurée entre la réponse structurale du côté du récepteur due à l'excitation produite par la force dans toutes les voies de transfert peut être utilisée. Cette matrice doit être mesurée quand la source ne coïncide pas avec le récepteur. Cette matrice est ensuite combinée avec des mesures opérationnelles de la vibration structurale du côté du récepteur dans le but d'obtenir des estimations de la force.
L'utilisation des méthodes de décomposition en valeurs singulières aide à minimiser les problèmes numériques lors de l'inversion de la matrice. Il est recommandé de mesurer une matrice d'accélération pleine, mais il peut dans certains cas être acceptable de négliger quelques effets du couplage mutuel. Pour les accélérations non mesurées, un couplage mutuel égal à zero est supposé. La formulation matricielle permettant de calculer le vecteur force appliqué à partir du vecteur des accélérations est la suivante:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\ddot{X}_{11}}{F_1} & \frac{\ddot{X}_{12}}{F_2} & \cdots & \frac{\ddot{X}_{1N}}{F_N} \\ \frac{\ddot{X}_{21}}{F_1} & \frac{\ddot{X}_{22}}{F_2} & \cdots & \frac{\ddot{X}_{2N}}{F_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\ddot{X}_{m1}}{F_1} & \frac{\ddot{X}_{m2}}{F_2} & \cdots & \frac{\ddot{X}_{mN}}{F_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_m \end{bmatrix} \tag{1.77}$$

f_i est la ième composante du vecteur force, $\ddot{x}_j$ la jème composante du vecteur des accélérations opérationnelles et $\frac{\ddot{X}_{ji}}{F_i}$ la fonction de transfert mesurée entre la ième accélération et la force appliquée à la jème voie de transfert.

En appliquant la méthode d'inversion de la matrice d'accélération, les vibrations côté récepteurs doivent être mesurées (souvent en trois dimensions et pour les conditions de fonctionnement). Pour avoir une solution unique pour les forces opérationnelles, le nombre de réponses m doit être supérieur ou égal au nombre des forces appliquées estimées N. Lorsque les endroits de mesures ne sont pas limités aux endroits des voies de transfert, plusieurs mesures de réponses peuvent être prises du côté du récepteur $(m \geqslant N)$ permettant la détermination de l'ensemble des équations. En utilisant juste le nécessaire d'informations, des moindres carrés des forces opérationnelles estimées sont trouvées et un facteur 2 de surdétermination est souvent utilisé pour donner une confiance vers les résultats trouvés.

1.3.8 SEA

La SEA (Statistical Energy Analysis) se base sur la subdivision de la structure en sous-systèmes couplés et l'analyse des énergies stockées et échangées. Cette méthode modélise un système comme une interaction des groupes de modèles de résonance avec les sous-systèmes associés. Les groupes de modes et leur interaction sont décrits statistiquement (valeur moyenne et variance) et chaque groupe possède un seul degré de liberté qui est la réponse d'énergie moyenne. La distribution de la réponse dynamique dans le système dûe à une certaine excitation est obtenue à partir de la distribution de l'énergie dans les groupes de modes pour une série de plusieurs équations d'équilibre d'énergie.

La SEA a pris son essor à partir de Lyon et Maidanik [12] qui démontrent que le flux d'énergie entre deux oscillateurs est proportionnel à la différence entre les énergies actuelles de ces oscillateurs. Depuis, de nombreuses applications et extensions ont été données à la SEA tel que l'ouvrage de référence en la matière [13] et la récente synthèse proposée en [14]. La pertinence de l'application de la SEA à un système est subordonnée à plusieurs hypothèses :

a. La grandeur recherchée est l'énergie mécanique moyenne dans chaque sous-système.

b. La plage fréquentielle est une bande de fréquence (octave, demi d'octave,..) située autour d'une fréquence centrale.

c. Les sous systèmes sont élastiques linéaires bornés et sont couplés de manière linéaire.

d. Les sous-systèmes sont excités de manière homogène par des sources décorrélées entre elles.

e. La bande de fréquence contient un nombre important de modes uniformément répartis dont l'énergie est équirépartie.

f. Le couplage entre les sous-systèmes est conservatif, faible et constant dans la bande de fréquence.

L'équation générale de la SEA pour un système s'écrira sous une forme matricielle déduite de l'équation 1.78 et dont les inconnues sont les énergies moyennes dans chaque sous-système dans la bande de fréquence considérée. Cette formulation matricielle est donnée par l'équation 1.79.
Notons que les inconnues et les entités géométriques du système ne sont pas en relation bijective (une même entité géométrique peut correspondre à plusieurs sous-systèmes).

$$\Pi_i^{inj} = \eta_i \omega E_i + \sum_j \eta_{ij} \omega E_i - \sum_j \eta_{ji} \omega E_j \tag{1.78}$$

Etant donné le système constitué de N sous-systèmes et notant Π_i^{inj} ($i \in 1...N$) la puissance mécanique injectée dans chaque sous-système, E_i l'énergie de chaque sous-système, η_i les facteurs de dissipation interne et η_{ij} les facteurs de perte par couplage.

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^{inj} \\ \Pi_2^{inj} \\ \vdots \\ \Pi_N^{inj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & -\eta_{i1} & \dots & -\eta_{N1} \\ -\eta_{12} & \eta_{22} & \dots & -\eta_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1N} & -\eta_{2N} & \dots & \eta_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega E_1 \\ \omega E_2 \\ \vdots \\ \omega E_N \end{bmatrix} \tag{1.79}$$

avec $\eta_{ii} = \eta_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \eta_{ik}$.

L'évaluation des facteurs de perte par couplage η_{ij} est l'une des principales difficultés lors de l'application de la SEA.

L'approche principale modale permet d'évaluer les coefficients de perte par couplage [13]. L'approche complémentaire est l'approche ondulatoire. Le caractère hautes fréquences requis par les hypothèses de la SEA rend pertinente une vision propagatoire des ondes. Cette approche est aisée à mettre en oeuvre pour des milieux simples (plaques, poutres, cavité..) où la modélisation des ondes est calculable analytiquement.
Etant donné ses hypothèses assez restrictives, la SEA ne peut être appliquée à n'importe quel type de structure. Les conditions de couplage faible et d'amortissement interne et faible sont nécessaires à l'établissement d'un champ diffus. L'atténuation ne doit ni être trop basse, ni trop haute. L'homogénéité des sous ensembles est nécessaire pour valider le calcul vibratoire de l'énergie. Il n'est souvent pas facile de réunir toutes ces hypothèses dans la pratique. De plus, la SEA ne fournit aucune information sur la distribution locale.

Le problème matriciel de la SEA peut être formulé de manière inverse. Les coefficients de dissipation et les facteurs de perte par couplage sont fonction des puissances injectées et

des énergies moyennes dans les sous-structures.

L'avantage de la SEA est la réduction du nombre de degrés de liberté dans les modes par rapport au mode déterministe. Les modes de résonance du système sont analysés en groupe. Les paramètres modaux valides dans un grand domaine et la non nécessité de les affiner pour les hautes fréquences permettent le calcul des systèmes les plus compliqués et la diminution du temps de calcul.
La SEA peut être utilisée pour déterminer le débit d'énergie à travers le système et identifier le chemin de transmission de l'emplacement de la source à celui de la réponse. De plus, les paramètres de la SEA sont basés sur les propriétés des matériaux et les propriétés géométriques du système rendant possible le développement des modes à partir des spécifications de conception et les prédictions quantitatives du changement de la réponse du système quand les spécificités de conception changent.

1.3.8.1 | Critiques et améliorations de la SEA

L'inconvénient principal de la SEA est que seule l'information statistique sur la réponse du système est obtenue. Le modèle SEA calcule en effet la réponse du sous-système en terme de moyennes et de variances en fréquence et en espace. Il n'est donc pas possible d'obtenir la réponse exacte à partir du modèle SEA (localisation et fréquences précises).
Un avantage associé est que la sensitivité de la réponse du système aux petites variances et incertitudes dans les paramètres physiques du système est intrinsèquement incluse dans les calculs de la réponse statistique.
Pour répondre à ces limitations, plusieurs approches sont développées.

a. Méthode d'intensité ondulatoire WIA

WIA est l'abbréviation en anglais de Wave Intensity Analysis et comme l'indique son nom, elle est basée sur une description purement propagatoire de l'état dynamique des systèmes. Cette méthode vise à s'affranchir de l'hypothèse (f) tout en impliquant l'équirépartition angulaire de l'intensité [47]. Un système est alors discrétisé en sous systèmes pouvant s'exprimer comme le système animé d'ondes se propageant dans une direction donnée. La discrétisation angulaire donne des résultats satisfaisants à partir de 3 à 5 degrés de liberté angulaires.

L'idée de base de cette approche est une description de la réponse dynamique de chaque sous-système par un champ d'ondes aléatoires. En effet, un système soumis à une excitation aléatoire stationnaire, aura une réponse qui peut être décrite par un champ d'ondes aléatoires, stationnaires en temps, mais généralement inhomogène dans l'espace.
Cependant, la réponse d'un système réverbérant, à fort recouvrement modal, et avec un grand nombre de modes résonants tend à devenir homogène quand la fréquence augmente. Dans le cas où on a un champ d'onde homogène et les systèmes sont faiblement amortis, la réponse dynamique du système qui est réverbérant sera alors dominée par les ondes se propageant librement dans le système.

Le mouvement libre est exprimé en fonction des valeurs et des vecteurs propres de l'opérateur différentiel. L'expression de la densité d'énergie totale d'un composant est donnée sous la forme :

$$\langle W \rangle = 2 \langle \tau \rangle = \sum_j \int_\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \left\langle W_j \right\rangle (\theta, \omega) d\theta d\omega \tag{1.80}$$

avec :

$$\left\langle W_j \right\rangle (\theta, \omega) = 2\rho\omega^2 S_j(\theta, \omega) \tag{1.81}$$

j définit l'indice des valeurs et vecteurs propres de l'opérateur différentiel et $S_j(\theta, \omega)$ définit la densité spectrale de l'onde d'indice j.

L'équation 1.80 montre que sous l'hypothèse d'incohérence des ondes libres, les différents types d'ondes contribuent indépendamment à l'énergie totale du système. D'autre part, l'équation 1.81 exprime la densité d'énergie d'une onde plane de pulsation ω qui se propage dans la direction θ à partir du spectre fréquence-onde d'incidence. Pour une telle onde, le vecteur flux de puissance peut être donné sous la forme :

$$\left\langle \vec{I}_j \right\rangle (\theta, \omega) = c_{gj} \left\langle W_j \right\rangle (\theta, \omega) \vec{n}(\theta) \tag{1.82}$$

où c_{gj} désigne la vitesse de groupe de l'onde de type j et $\vec{n}(\theta)$ est le vecteur unitaire dans la direction θ.

La relation 1.82 exprimant la proportionnalité du flux de puissance et de l'énergie totale d'une onde non amortie ou très faiblement amortie est souvent utilisée en physique. L'un des points originaux de cette méthode est qu'elle consiste à déterminer pour chaque système les énergies associées aux ondes libres à partir d'un bilan de conservation traduisant l'équilibre entrée-sortie pour une onde isolée d'orientation θ et d'indice j :

$$\left\langle P^j_{inj} \right\rangle (\theta, \omega) + \left\langle P^j_{ent/i} \right\rangle (\theta, \omega) = \left\langle P^j_{dis} \right\rangle (\theta, \omega) + \left\langle P^j_{sor} \right\rangle (\theta, \omega) \tag{1.83}$$

où $\left\langle P^j_{inj} \right\rangle$ est la puissance injectée par les forces extérieures, $\left\langle P^j_{dis} \right\rangle$ est la puissance dissipée, $\left\langle P^j_{ent/i} \right\rangle$ et $\left\langle P^j_{sor} \right\rangle$ sont respectivement les puissances entrantes et sortantes à et de la frontière du système.

En adoptant un modèle de dissipation similaire à celui utilisé en SEA, la puissance dissipée peut se mettre sous la forme :

$$\left\langle P^j_{diss} \right\rangle (\theta, \omega) = \omega \eta_j A_j \left\langle W_j \right\rangle (\theta, \omega) = \omega \eta_j \left\langle W_j \right\rangle_j (\theta, \omega) \tag{1.84}$$

η_j est le facteur de perte et A_j désigne une longueur, une surface ou un volume selon le système étudié. $\left\langle W_j \right\rangle_j$ est l'énergie totale associée à une direction θ de l'onde j.

La puissance sortante d'une frontière s'écrit en fonction du vecteur intensité :

$$\left\langle P^j_{sor} \right\rangle = \vec{I}_j(\theta,\omega)\vec{n}L \tag{1.85}$$

$\vec{n}$ est la normale sortante à la frontière et L la longueur de la frontière. Seules les frontières où $\vec{n}(\theta) > 0$ sont à considérer.

Pour un système à deux dimensions, l'expression 1.85 peut se mettre sous la forme :

$$\left\langle P^j_{sor} \right\rangle = \omega \frac{L}{2\pi} \frac{\left\langle W_j \right\rangle_j}{\nu_j} \frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \psi)}{c_{pj}} \tag{1.86}$$

ψ est l'orientation de la frontière, c_{pj} la vitesse de phase et ν_j la densité modale associée à l'onde de type j donnée par la relation suivante :

$$\nu_j = \omega \frac{A_j}{2\pi c_{pj} c_{gj}} \tag{1.87}$$

Le deuxième terme qui apparaît dans le bilan de puissance associé à chaque type d'onde est la puissance transmise d'une onde de type i de direction de propagation ϕ se transférant en onde de type j de direction de propagation θ (figure 1.3.1). Il est donné par l'expression suivante :

$$\left\langle P^j_{ent/i} \right\rangle (\theta,\omega) = \omega \frac{L}{2\pi} \frac{\langle W_i \rangle_i (\phi,\omega)}{\nu_i} \frac{\cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \psi)}{c_{pj}} \tau_{ij}(\phi + \frac{\pi}{2} - \psi) \tag{1.88}$$

où τ_{ij} est le coefficient approprié de transmission de l'énergie.

Les relations 1.84, 1.86 et 1.88 fournissent les expressions des puissances qui interviennent dans le bilan d'équilibre donné par l'équation 1.83. Ces relations se combinent alors pour donner :

$$\begin{aligned} \left\langle P^j_{inj} \right\rangle (\theta,\omega) + \frac{\omega}{2\pi c_{pj}} \sum_m \sum_i \frac{\langle W_i \rangle_i (\phi_{mi},\omega)}{\nu_i} L_m \cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \psi_m) \tau^m_{ij}(\phi_{mi} + \frac{\pi}{2} - \psi_m) \\ = \omega \eta_j \left\langle W_j \right\rangle_j (\theta,\omega) + \frac{\omega}{2\pi c_{pj}} \frac{\langle W_i \rangle_i (\theta,\omega)}{\nu_j} \sum_k L_k \cos(\theta + \frac{\pi}{2} - \psi_k) \end{aligned} \tag{1.89}$$

La somme sur m représente la sommation sur les frontières entrantes, celle sur k concerne les frontières sortantes. La somme sur i est la somme sur les types d'ondes (valeurs propres de l'opérateur différentiel de déplacement).
Cette équation est valable pour toutes les formes d'ondes de type j.

En supposant connues les puissances injectées, l'équation 1.89 représente un ensemble d'équations linéaires dont la résolution conduit à la détermination des énergies $\left\langle W_j \right\rangle_j (\theta,\omega)$. Ces dernières sont recherchées dans la pratique à l'aide d'un schéma de Ritz utilisant des fonctions de forme $N_{jp}(\theta)$:

$$\left\langle W_j \right\rangle_j (\theta,\omega) = \sum_p \left\langle W_j \right\rangle_{jp} (\omega) N_{jp}(\theta) \tag{1.90}$$

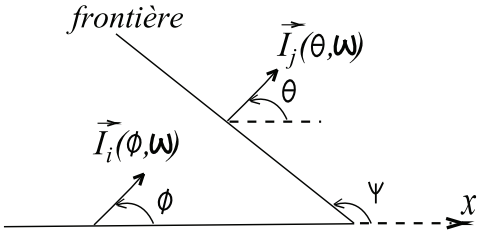


FIGURE 1.3.1 – Modèle de frontière pour la WIA

En introduisant la relation 1.90 dans l'équation 1.89, on aboutit au système matriciel suivant :

$$\left[C_{ip}\right]\left\{\frac{\langle W_i\rangle_{ip}}{n_i}\right\} = P \tag{1.91}$$

Dans cette expression, la matrice [C] et le vecteur P sont donnés par :

$$C_{jp,is} = \delta_{ij}\left\{\omega\eta_j n_j\int_0^{2\pi} N_p^j(\theta)N_s^i(\theta)d\theta + \frac{\omega}{2\pi c_{pj}}\sum_k L_k\int_{\Theta_k} N_p^j(\theta)N_s^i(\theta)\cos(\theta+\frac{\pi}{2}-\psi_k)d\theta\right\}$$
$$-\frac{\omega}{2\pi c_{pj}}\sum_m L_m\int_{\Theta_m} N_p^j(\theta)N_s^i(\phi_{mi})\cos(\theta+\frac{\pi}{2}-\psi_m)\tau_{ij}^m(\phi_{mi}+\frac{\pi}{2}-\psi_m)d\theta \tag{1.92}$$

$$P_{jp} = \int_0^{2\pi} P_{inj}^j(\theta,\omega)N_p^j(\theta)d\theta \tag{1.93}$$

Θ_k et Θ_m représentent les intervalles appropriés d'intégration pour la frontière considérée.

Il est à noter que dans l'expression 1.92, le paramètre ϕ_{mi} est relié à l'angle d'incidence θ par la loi de SNELL. Ainsi, à partir des puissances injectées, le vecteur des énergies peut s'obtenir par inversion du système 1.91.

Dans l'expression 1.91, les énergies $\frac{\langle W_i\rangle_{ip}}{n_i}$ correspondent aux énergies modales telles qu'elles apparaîssent dans la SEA. En particulier, lorsque ces énergies ne dépendent pas de l'angle θ, les équations 1.91 se réduisent aux expressions de la SEA. Ainsi, la méthode WIA apparaît comme une extension naturelle de la SEA lorsque l'hypothèse de champ diffus n'est pas adoptée.
Il est intéressant de noter que d'un point de vue purement modal, l'hypothèse de champ diffus est équivalente à l'hypothèse d'équirépartition de l'énergie des modes.

La WIA est une méthode à variables énergétiques qui s'intéresse à des systèmes réverbérants et faiblement amortis modélisés par un champ d'ondes aléatoires. Cette méthode apparaît comme une version directive de la SEA et son apport essentiel est l'hypothèse d'incohérence des ondes qui garantit une superposition linéaire des énergies.
Par contre, la WIA reste une description discrète des échanges d'énergies et ne fournit pas

de description spatiale de l'état dynamique. Elle ne permet pas non plus de description spatiale continue des phénomènes d'amortissement.
De plus, une analyse détaillée de la validité de l'équation 1.88 décrivant le transfert d'énergie montre qu'elle fait appel implicitement à une moyenne fréquentielle des paramètres employés. La WIA ne peut pas donc être employée dans une analyse à fréquence pure ou à bande étroite. Elle se trouve confrontée aux mêmes problèmes d'analyse expérimentale que la SEA.

b. Méthode d'éléments finis énergétique EFEM

Cette méthode est l'abbréviation en anglais de Energy Finit Element Method. On considère dans cette approche un volume infinitésimal et non pas des sous-systèmes comme la SEA.
La quantité d'énergie vibratoire stockée dans ce volume sera régie par la puissance dissipée P_{diss}, la puissance injectée P_{inj} et le terme de transport d'énergie à travers les frontières du volume $c_g W$. Ainsi, l'équation de continuité d'énergie sera :

$$\frac{\partial}{\partial t} W = -\nabla.(c_g W) + P_{inj} - P_{diss} \tag{1.94}$$

Reformulée en utilisant la densité de puissance I et la densité d'énergie W, en supposant qu'on est dans un état d'équilibre et en remplaçant la puissance dissipée P_{diss} par le facteur de perte par amortissement η, l'équation 1.94 s'écrira alors comme suit :

$$p_{inj} = \nabla.I + \omega\eta W \tag{1.95}$$

Cette équation peut être la base du calcul de la distribution spatiale de la densité d'énergie W à partir de la densité de puissance injectée p_{inj}. On considère dans cette approche que les ondes sont planes. On néglige alors les ondes dites de champ proche, et notamment les ondes évanescentes.
La relation fondamentale qui relie l'intensité et le flux d'énergie s'écrit alors :

$$I = -\frac{c_g^2}{\omega\eta}\nabla W \tag{1.96}$$

Introduisant 1.96 dans 1.95, l'équation résultante sera analogue à l'équation de transfert de chaleur dans une plaque à convection.

$$p_{inj} = -\frac{c_g^2}{\omega\eta}\Delta W + \omega\eta W \tag{1.97}$$

$$p_{inj} = -\lambda\Delta T + \alpha(T - T_B) \tag{1.98}$$

Ainsi, le coefficient de vibration par conduction $\frac{c_g^2}{\omega\eta}$ et le coefficient de vibration par convection $\omega\eta$ doivent être définis. En utilisant ces deux coefficients comme des paramètres d'entrée, les codes éléments finis existants pour la conduction de chaleur doivent être utilisés pour le calcul. Cette méthode possède un sérieux problème du fait qu'elle n'est pas capable

de prendre en compte l'hypothèse d'ondes planes pour les champs dominés par des ondes sphériques.

Une troisième approche développée pour améliorer les résultats de la SEA est la Méthode Energétique Simplifiée. Cette méthode (MES) sera présentée et étudiée dans les prochains chapitres constituant ce rapport.

1.3.8.2 SEA et théorie de Sabine

Le modèle de Sabine est un modèle de prédiction acoustique dans une cavité fermée aux parois réfléchissantes. Ce modèle considère que le champ acoustique est parfaitement diffus, à savoir que l'intensité spécifique est isotrope et uniforme, et que cette décroissance est gouvernée par la dissipation de l'énergie sous forme de l'absorption par les parois.
On considère dans la théorie de Sabine une cavité acoustique fermée de volume V tout en supposant que l'énergie acoustique est uniformément répartie à l'intérieur. Les parois présentent un coefficient d'absorption énergétique α non nécessairement uniforme et supposé très faible devant 1.
On désigne par S l'ensemble de la surface des parois. L'aire d'absorption équivalente notée A est interprétée comme l'aire d'absorption totale qui absorberait autant de puissance qu'il en est absorbé dans le local.
Pour une paroi constituée de plusieurs aires d'absorptions différentes, A résulte alors de la sommation des effets des différentes zones comme suit :

$$A = \sum_i \alpha_i S_i \tag{1.99}$$

En se renvoyant à l'ouvrage [33] et en tenant compte de l'hypothèse de l'uniformité du champ et d'équirépartition angulaire et de décorrélation des ondes, l'intensité I_{sab} dite intensité de Sabine qui traverse une surface élémentaire de la cavité en provenance d'un des demi-espaces délimités par la surface élémentaire est liée à la densité d'énergie moyenne W dans la cavité par la relation suivante :

$$I_{sab} = \frac{c_0}{4} W \tag{1.100}$$

où c_0 désigne la célérité du son dans l'air.

Cette intensité est une intensité efficace. Les hypothèses du champ diffus impliquent que le vecteur intensité est nul en moyenne en tout point de la cavité. L'intensité efficace de Sabine nous permet de quantifier la puissance dissipée π_{diss} au niveau de la surface élémentaire :

$$\pi_{diss} = \alpha I_{sab} \tag{1.101}$$

En absence d'échanges avec d'autres systèmes, le bilan énergétique s'écrit alors :

$$\pi_{inj} = V \frac{dW}{dt} + \frac{A c_0}{4} W \tag{1.102}$$

Une relation très simple liant la densité d'énergie acoustique aux paramètres d'entrée du modèle s'écrit dans le cas stationnaire sous la forme :

$$W_{sab} = \frac{4\pi_{inj}}{c_0 A} \tag{1.103}$$

Si la théorie de Sabine semble inappropriée à l'établissement du champ réverbéré, les résultats obtenus lorsqu'on mesure l'extinction du son dans un local illustrent la grande pertinence.
Supposons que le régime est établi, qu'une densité d'énergie réverbérée W_{sab} donnée par l'équation 1.103 est uniformément répartie dans le volume V et que la source est brusquement arrêtée à l'instant $t = 0$ c'est à dire que π_{inj} passe instantanément à 0, le bilan de puissance s'écrit alors en utilisant la constante de temps de Sabine τ comme suit :

$$\frac{dW}{dt} + \frac{1}{\tau} W = 0 \tag{1.104}$$

L'évolution de la densité d'énergie et de l'intensité est donc régie par :

$$W(t) = W_{sab} e^{-t/\tau} \tag{1.105}$$

$$I = \frac{\pi_{inj}}{A} e^{-t/\tau} \tag{1.106}$$

Plus pratique que la constante de temps τ, on définit le temps de réverbération, et on note T_R le temps nécessaire à la densité d'énergie ou à l'intensité réverbérées pour diminuer de 60dB, soit pour être réduites à un millionième de leur valeur initiale.
Dans les conditions standards de pression et de température, on montre que ce temps T_R ne dépend que de l'aire d'absorption équivalente A et du volume V de la cavité et tout ça se résume dans l'approximation suivante [34, 35, 36], connue sous le nom de formule de Sabine :

$$T_R = 0.16 \frac{V}{A} \tag{1.107}$$

Cette relation est très intéressante en ce sens qu'elle relie directement une grandeur temporelle caractérisant l'évolution de l'énergie à des grandeurs géométriques simples (volume V et surface S), et aux caractéristiques d'absorption des parois.
En effet, le modèle de Sabine qui constitue la base de la plupart des méthodes d'analyse des salles a l'avantage de relier de manière linéaire les principaux paramètres physiques et géométriques caractérisant l'acoustique dans un local.
La simplicité de la formule 1.103 donnant la densité d'énergie en régime stationnaire peut être mise à profit pour identifier une puissance, une absorption ou encore pour prédire une densité d'énergie. La relation 1.107 présente un autre avantage qui est la possibilité de caractériser un coefficient d'absorption sans connaître la puissance de la source acoustique.
Le modèle de Sabine est donc le paradigme du modèle acoustique direct et inverse, auquel se reflète la plupart des méthodes d'acoustique des salles basées sur l'énergie.

Les hypothèses du modèle de Sabine restreignent sa validité au cas d'une cavité très réverbérante et excitée de manière homogène. En réalité, la source de puissance est souvent ponctuelle. Dans ce cas, la formule de Sabine peut être légèrement améliorée en tenant compte du champ direct. Ainsi, la densité d'énergie de Sabine est augmentée d'un terme nouveau directement lié à la distance r à la source :

$$W_{sab}(r) = \frac{4\pi_{inj}}{c_0 A} + \frac{\pi_{inj}}{4\pi r^2 c_0} \tag{1.108}$$

Cette relation permet de définir le rayon acoustique, distance à la source à laquelle les champs directs et réverbérés sont de niveau égal :

$$r_a = \sqrt{\frac{A}{50}} \tag{1.109}$$

Les parois des surfaces posent un problème. En effet, l'absorption au niveau pariétal est incompatible avec l'équirépartition angulaire de l'intensité. Dans la direction normale à la paroi et au niveau des zones les plus absorbantes, l'équirépartition angulaire n'est pas respectée.
En revanche, là où l'absorption est très faible, la réflexion des ondes s'effectue de manière quasi spéculaire sur les parois. Dans ce cas là, les deux ondes incidente et réfléchie sont liées de manière précise. La décorrélation des ondes est donc mise en défaut.

Le principal inconvénient de la formule de Sabine en particulier et de la théorie de Sabine en général réside du fait qu'elle suppose des conditions non respectées en pratique telles que l'hypothèse de diffusion homogène et l'absence d'ondes stationnaires. D'une part, elle sera donc d'autant mieux vérifiée que l'absorption des parois est faible, et d'autre part, elle s'inscrit plutôt dans un contexte hautes fréquences pour lequel la densité modale est importante. On peut d'ailleurs remarquer que ces deux conditions sont en pratique antagonistes puisque les matériaux sont généralement d'autant plus absorbants que la fréquence est élevée.
De plus, de nombreuses incertitudes sont liées à la mesure du temps de réverbération, en raison d'irrégularités sur la courbe de décroissance et la valeur de T_R peut correspondre à des phénomènes d'absorption différents.

On réservera donc l'application de la théorie de Sabine au cas de cavités très réverbérantes munies de diffuseurs et aux parois non parallèles pour éviter l'établissement d'ondes stationnaires. La densité d'énergie devra être évaluée loin de la source à une distance très supérieure au rayon acoustique r_a et loin des parois.

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté au début les principes de base des méthodes inverses ainsi que les éléments théoriques permettant le conditionnement et la régularisation de la solution d'identification obtenue.
Ensuite, nous avons détaillé les différentes classes de ces méthodes, les limites rencontrées

par chacune d'elles ainsi que les améliorations à prévoir et nos attentes sur l'identification dans la classe des moyennes et hautes fréquences.
Comme conclusion, nous avons choisi d'utiliser la Méthode Energétique Simplifiée qui sera la base de notre travail.
Dans les chapitres suivants de ce rapport, cette méthode énergétique sera présentée. Ses résultats d'identification dans les deux cas structure et acoustique seront détaillés et comparés avec d'autres méthodes.

Chapitre 2

Méthode Energétique Simplifiée

2.1 Introduction

Nous avons cité dans le chapitre précédent les différentes méthodes utilisées pour résoudre les problèmes inverses. Les méthodes cinématiques telles que l'Holographie, la FEM et la BEM présentent des limites dans le domaine des hautes fréquences. La IFRF présente l'inconvénient d'avoir un mauvais conditionnement de la matrice à inverser provoquant d'importantes erreurs qui influent sur les résultats trouvés. La RIFF présente à son tour l'inconvénient d'être très sensible aux incertitudes de mesure et nécessite d'être régularisée et filtrée, son utilisation est limitée à la plage des hautes fréquences.

Afin d'élargir le domaine fréquentiel d'analyse pour atteindre la plage des moyennes et hautes fréquences, des méthodes dites énergétiques sont utilisées. La méthode mère de cette classe est la SEA [13, 14]. La seule information obtenue sur la réponse du système est l'information statistique. Pour remédier à cet inconvénient majeur de la SEA, d'autres méthodes sont développées parmi lesquelles la Méthode Energétique Simplifiée (MES). Les différentes approches de la MES sont présentées dans les thèses [33, 46, 48].
Les variables utiles à la description énergétique de la MES prennent la forme de la densité d'énergie W et du vecteur densité de flux ou intensité I. Ces champs sont exprimés à partir de moyennes quadratiques de variables cinématiques, d'où leurs noms de variables quadratiques. L'avantage d'utiliser des variables quadratiques pour les méthodes énergétiques au lieu de variables cinématiques est que ces variables sont linéaires dans le sens où elles sont sommables.

Nous nous focalisons dans cette section sur la présentation des différentes hypothèses structurant la Méthode Energétique Simplifiée ainsi que ses différentes approches. Nous présentons pour chacune de ces approches la formulation ainsi que l'implémentation numérique correspondante. Des résultats de validation pour les deux cas bidimensionnel et tridimensionnel sont donnés pour chaque approche.

2.2 Grandeurs énergétiques globales et bilan de puissance global

Les concepts énergétiques sont fondamentaux lors de la construction des solutions approchées des problèmes de l'élastodynamique. Certains théorèmes basés sur des concepts énergétiques ont été spécialement développés pour calculer la réponse d'un système élastique.
Ainsi, certaines théories de rupture font appel également à ces concepts en associant la rupture à une valeur critique de l'énergie de déformation. Les grandeurs énergétiques jouent par la suite un rôle fondamental en élastodynamique.

2.2.1 Expressions des énergies globales

Définissons ici l'énergie cinétique et l'énergie de déformation instantanées [53] par les expressions suivantes :

$$\mathbf{T} = \iiint_V T \, dV \tag{2.1}$$

$$\mathbf{U} = \iiint_V U \, dV \tag{2.2}$$

T et U désignent respectivement les densités volumiques instantanées des énergies cinétique et de déformation.
Leurs expressions données à un instant t et en un point M du milieu sont :

$$T(M,t) = \frac{1}{2}\rho v_i v_i \tag{2.3}$$

$$U(M,t) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} \tag{2.4}$$

avec v_i le champ des vitesses du milieu considéré, σ_{ij} le tenseur de contrainte et ϵ_{ij} le tenseur de déformation.

L'énergie totale est donnée alors par les deux formulations suivantes en tenant compte si elle est volumique instantanée ou volumique seulement :

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} + \mathbf{U} \tag{2.5}$$

$$W = T + U \tag{2.6}$$

L'intensité vibratoire instantanée représente le flux d'énergie traversant une surface unitaire pendant l'unité de temps. Elle correspond au produit du tenseur de contrainte par le vecteur vitesse.

$$I_i = -\sigma_{ij} v_j \tag{2.7}$$

Le flux instantané de puissance active est alors donné par :

$$P = \iint_S I dS \tag{2.8}$$

Pour un milieu continu de dimension n, les densités d'énergie introduites en équations 2.3 et 2.4 seront données en $Joule/m^n$, alors que l'intensité vibratoire s'exprimera en W/m^{n-1}.

2.2.2 Bilan de puissance global

Le bilan de puissance global traduit le 1^{er} principe de la thermodynamique, il peut être donné comme suit :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V (T+U)dV = \iint_S t_i \dot{u}_i dS + \iiint_V \rho f_i \dot{u}_i dV \tag{2.9}$$

avec $t_i = \sigma_{ij} n_j$ et f_i la $i^{ème}$ composante du vecteur des forces volumiques.

En appliquant le théorème de la divergence, on obtient :

$$\iint_S t_i \dot{u}_i dS = \iiint_V (\sigma_{ij}\dot{u}_i)_j dV \tag{2.10}$$

En introduisant la relation 2.10 dans 2.9, on aboutit donc à la relation :

$$\frac{d}{dt}\iiint_V (T+U)dV = \iiint_V (\sigma_{ij}\dot{u}_i)_j dV + \iiint_V \rho f_i \dot{u}_i dV \tag{2.11}$$

La forme locale de la loi de conservation de l'énergie s'écrira finalement sous la forme :

$$\frac{d}{dt}(T+U) = -\nabla I + I_{inj} \tag{2.12}$$

avec $I_{inj} = \rho f_i \dot{u}_i$.

Dans le paragraphe suivant et pour écrire la loi de conservation en régime harmonique qui sera utilisée dans la construction de la MES, nous introduisons une puissance de déformation dissipée caractérisant les effets de viscosité . Cette puissance sera rattachée d'une façon directe à la partie imaginaire des modules complexes.

En régime harmonique, l'expression de la densité d'énergie cinétique moyenne peut être obtenue grâce à la formule d'identité et à l'équation 2.3.

$$\langle \dot{T} \rangle = \frac{1}{2} i\omega \dot{u}_i \dot{u}_i^* \tag{2.13}$$

De même, la partie réelle qui correspond à des échanges réversibles peut être rattachée à une densité d'énergie en tenant compte de la puissance de déformation moyenne $\left\langle \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^* \right\rangle$ et de l'équation 2.4.

$$\langle \dot{U} \rangle = Re(\langle \sigma_{ij}\epsilon_{ij}^* \rangle) = -\frac{1}{2} i\omega Re(\sigma_{ij}\epsilon_{ij}^*) \tag{2.14}$$

Dans le cas visco-élastique, la puissance de déformation dérive plus d'un potentiel. Il est alors nécessaire d'introduire une puissance de dissipation qui correspond en régime harmonique à la partie imaginaire de la puissance de déformation moyenne :

$$\langle I_{diss} \rangle = \frac{1}{2} \omega Im(\sigma_{ij} \epsilon^*_{ij}) \tag{2.15}$$

2.3 Hypothèses

La Méthode Energétique Simplifiée trouve son origine dans la description des variables énergétiques locales du système. Bien que la MES appartient à la lignée de la SEA en utilisant le même type de quantités énergétiques quadratiques, elle se distingue par contre par l'aspect local de ces quantités.
En se plaçant dans le cas de systèmes linéaires isotropes en régime permanent à la pulsation ω, l'équation de base du modèle MES s'écrit comme étant le bilan de puissance élémentaire d'une portion du système.

2.3.1 Hypothèse sur les systèmes étudiés (H1).

Les systèmes auquels on s'intéresse sont des systèmes linéaires, élastiques et isotropes. Ils sont aussi dissipatifs possédant un facteur de perte par dissipation très faible devant l'unité ($\eta << 1$). Ces systèmes évoluent en régime permanent forcé à la pulsation ω.
Nous nous intéressons ici qu'à la partie active des quantités énergétiques intervenant dans le bilan tels que les puissances, les flux et les énergies.
Le bilan de puissance local s'écrit alors sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{I} + \pi_{diss} = \pi_{inj} \tag{2.16}$$

où π_{diss} désigne la puissance dissipée, π_{inj} désigne la puissance injectée et n est la dimension du système.
Ces grandeurs sont exprimées en W/m^n alors que l'intensité I est exprimée en W/m^{n-1}.

L'hypothèse sur le facteur de dissipation prend une place prépondérante puisqu'elle définit un caractère indispensable des systèmes analysés qui est le caractère de réverbération.

2.3.2 Hypothèse du modèle d'amortissement hystérétique (H2).

La MES adopte le même modèle d'amortissement que la SEA sauf qu'elle présente l'intérêt de permettre une description spatiale de la dissipation.
Le terme π_{diss} du bilan de l'équation 2.16 est considéré proportionnel à l'énergie totale W. En introduisant le coefficient d'amortissement hystérétique η et en le considérant proportionnel aussi à la pulsation ω, ce terme s'écrit alors :

$$\pi_{diss} = \eta \omega W \tag{2.17}$$

Ainsi, le bilan de puissance 2.16 s'écrit comme suit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{I} + \eta \omega W = \pi_{inj} \tag{2.18}$$

Loin des singularités du système, les énergies potentielle et cinétique sont égales. Le modèle de l'équation 2.18 ne sera valide que si les ondes en un point donné sont majoritairement des ondes de champ lointain où la réverbération est importante. En effet, la MES n'a de sens que si l'énergie associée au champ réverbéré est assez importante et si l'amortissement η n'est pas trop élevé.
Dans le cas d'une frontière dissipative, le flux dissipé I^{diss} est proportionnel au flux de puissance incident I^{inc} et au coefficient d'absorption local α de la frontière :

$$I^{diss} = \alpha I^{inc} \tag{2.19}$$

2.3.3 Hypothèse d'ondes propagatives (H3).

Les ondes dites de champ proche et notamment les ondes évanescentes sont négligées. Seules les ondes propagatives sont donc prises en compte. Les ondes évanescentes sont négligées pour reconstruire les champs mais restent nécessaires pour quantifier précisément les transferts énergétiques.
La relation fondamentale permettant pour une onde plane progressive de relier l'intensité I à la densité d'énergie W et à la vitesse de groupe c du milieu est donnée par :

$$I = cWu \tag{2.20}$$

u désigne le vecteur unitaire dans la direction de propagation.

2.3.4 Hypothèse de non prise en compte des interférences entre les ondes (H4).

Cette hypothèse constitue sans doute l'hypothèse la plus importante du modèle MES. L'hypothèse de décorrélation des ondes revient à négliger les effets de phase qui sont responsables du comportement modal des systèmes. Les modèles énergétiques ne donneront par conséquent pas d'information modale, mais cette perte d'information est associée à un gain numérique certain. En plus et sans termes interférentiels, les quantités énergétiques deviennent additives.
Les champs d'énergie peuvent être construits par simple superposition linéaire.
En présentant les différentes approches de la MES et en se focalisant par la suite sur l'approche intégrale [33, 46], cette dernière applique les décorrélations sur les ondes dépendant de la dimension du système. Les champs énergétiques sont construits sur la base d'ondes planes en 1D, cylindriques en 2D et sphériques en 3D.

2.3.5 Hypothèse sur la réflexion (H5).

2.3.5.1 Notion de diffusion homogène

Considérons l'intensité spécifique $i(r, u, t)$ arrivant à l'instant t dans un cylindre de section unitaire et de longueur infinitésimale $dl = cdt$. On désigne par ρ la densité des particules contenues dans ce cylindre.

Notons respectivement β_a, β_d et β_t les coefficients d'absorption, de diffusion et la somme des deux. Chaque particule absorbe une puissance $\beta_a i$ et diffuse une puissance $\beta_d i$. Ainsi, à l'intérieur du cylindre, la perte d'intensité spécifique est estimée à $\rho dl \beta_t i$.
En même temps, un flux d'énergie provenant de toutes les directions de l'espace pénètre dans ce volume élémentaire pour être précisément diffusé dans la direction u. Comme indiqué sur la figure 2.3.1 et en tenant compte de la direction u', un flux $I_i = i(r, u', t)d\Omega'$ arrive sous l'angle solide élémentaire $d\Omega'$.
En considérant que ce flux arrive sur une seule particule, le flux d'énergie diffusé dans la direction u et mesuré à une distance dl est alors exprimé à partir du flux incident I_i, à l'aide de la fonction g appelée amplitude de diffusion dans [55] dépendante des deux directions u et u' et du temps.

$$I_d(r + dl.u, u, t + dl/c) = \frac{\left|g(u, u', t)\right|^2}{l^2} I_i(r, u', t) \tag{2.21}$$

L'intensité spécifique correspondante est donc donnée par :

$$i_d(r + dl.u, t + dl/c) = l^2 I_d(r + dl.u, u, t + dl/c) = \left|g(u, u', t)\right|^2 I_i(r, u', t) = \left|g(u, u', t)\right|^2 i(r, u', t)d\Omega' \tag{2.22}$$

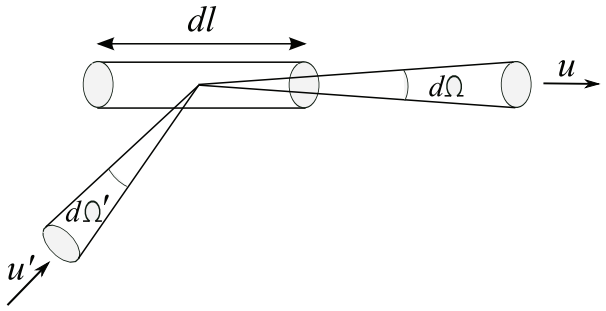


FIGURE 2.3.1 – Diffusion de l'intensité spécifique dans un volume élémentaire

Nous introduisons par la suite la fonction ψ dite de phase, non qu'elle soit relative à la phase des ondes, mais qu'elle est utilisée en astrophysique pour caractériser les phases de la lune et qui vérifie les deux formules suivantes :

$$\psi(u, u', t) = \frac{4\pi}{\beta_t} \left|g(u, u', t)\right|^2 \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_\Omega \psi(u, u', t)d\Omega = \frac{\beta_d}{\beta_t} \tag{2.24}$$

Le rapport β_d/β_t est appelé albédo et concerne ici une seule particule. Il représente la capacité d'un corps à diffuser la lumière qu'il reçoit, et est souvent en rapport direct avec sa composition physique.
Typiquement, la neige a un albédo proche de 1, et un corps paraît noir si son albédo est

inférieur à 3%.
L'hypothèse dite de diffusion homogène revient finalement à considérer que ψ est constant, et coïncide alors avec l'albédo d'après la définition précédente :

$$\psi = \frac{\beta_d}{\beta_t} \tag{2.25}$$

2.3.5.2 Réflexion diffuse et réflexion spéculaire

Nous nous intéressons exclusivement ici au cas où un milieu présente une vitesse de l'énergie finie ou infinie et nous considérons que l'énergie ne se propage au delà de la frontière du système Ω, qui peut cependant en absorber une partie. Autrement dit, nous ne considérons pas les phénomènes de transmission et nous nous intéressons exclusivement aux phénomènes d'absorption et de réflexion.
En ne considérant dans ce qui suit que les directions d'incidence du demi-espace supérieur à la paroi, le volume dV est alors pris de forme quelconque et la limite de ρdV est tout simplement 1 vu que nous considérons qu'il y'a effectivement une diffusion au point de l'interface. Nous avons également $\beta_t = 1$.
Nous pouvons alors directement passer à la limite pour obtenir l'expression de l'intensité spécifique dite réfléchie, à partir des intensités spécifiques incidentes :

$$i(r,u,t) = \int_{H^-} R(u,u',t) i(r,u',t) d\Omega' \tag{2.26}$$

La fonction de phase ψ représente alors les propriétés de réflexion de la surface. Nous préférons alors introduire le coefficient de réflexion énergétique, noté R, relié à ψ par $R = \psi/4\pi$.

Notons θ l'angle entre la direction u et la direction n normale à la surface ($\cos\theta = u.n$), deux modèles de réflexion courants sont exprimés en ces termes :

- le modèle de réflexion spéculaire correspond à la loi de SNELL-DESCARTES avec :

$$R(u,u') = R\delta(u' - u + 2\cos\theta n) \tag{2.27}$$

soit :

$$i(r,u,t) = R i(r,u-2\cos\theta n,t) \tag{2.28}$$

- le modèle de réflexion diffuse est indépendant de la direction d'incidence u' et correspond à la loi de Lambert :

$$R(u,u') = R(u) = R\cos\theta \tag{2.29}$$

soit :

$$i(r,u,t) = R\cos\theta I_- \tag{2.30}$$

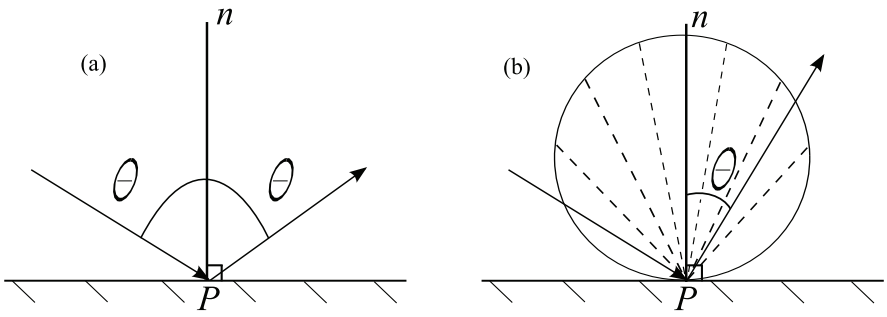


FIGURE 2.3.2 – Réflexions spéculaire (a) et diffuse (b)

Dans les deux cas, nous faisons sortir la fonction de phase ψ de l'intégrale. Ainsi, les deux formules 2.23 et 2.24 nous permettent de faire coïncider R avec β_d. Vu qu'on ne considère pas la transmission, le coefficient d'absorption énergétqiue noté α correspond à β_a et le bilan énergétique local impose :

$$R + \alpha = \beta_d + \beta_a = \beta_t = 1 \tag{2.31}$$

Dans le modèle de réflexion diffuse, la relation entre les coefficients R et $\mathcal{R}$ est obtenue en intégrant les deux relations 2.29 et 2.30, on obtient $\mathcal{R} = R/\pi$ en 3D et $\mathcal{R} = R/2$ en 2D, afin de vérifier :

$$I_+ = RI_- = (1-\alpha)I_- \tag{2.32}$$

Les différentes approches de la Méthode Energétique Simplifiée ont évolué avec la réflexion des ondes aux discontinuités choisie. En fait, la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte utilisent une réflexion spéculaire selon la loi de SNELL-DESCARTES, alors que la MES Intégrale postule une réflexion diffuse selon la loi de LAMBERT. Le modèle de réflexion constitue alors une cinquième hypothèse qui est différente en MES Différentielle et MES Intégrale.

2.4 MES Différentielle

Cette méthode s'intéresse tout d'abord à établir et développer la relation entre le flux de puissance I et la densité d'énergie W donnée par l'équation 2.18. Le champ de densité d'énergie W résulte de la sommation d'ondes planes décorrélées.
Vu que pour chaque direction de propagation u, on a $\nabla u = 0$ et en tenant compte de la décomposition des champs, l'équation 2.20 sera écrite comme suit :

$$\nabla I = \nabla(cWu) = c(\nabla W)u \tag{2.33}$$

En injectant cette relation dans le bilan de puissance homogène défini par l'équation 2.18, on obtient :

$$c\nabla W + \eta\omega W = 0 \tag{2.34}$$

En utilisant une deuxième fois la relation 2.20 et en substituant le terme W du bilan 2.34, on obtient alors pour une direction de propagation donnée, la relation reliant le flux de puissance et la densité d'énergie suivante :

$$c\nabla W + \frac{\eta\omega}{c} I = 0 \tag{2.35}$$

L'hypothèse de décorrélation (H4) impliquant la sommation quadratique des contributions des différentes ondes permet d'obtenir :

$$I = -\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla W \tag{2.36}$$

Le bilan d'énergie 2.18 s'écrit alors en tenant compte de l'expression précédente comme suit :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W + \eta\omega W = \pi_{inj} \tag{2.37}$$

La puissance injectée dans le système se fait en moyennant deux hypothèses qui découlent de l'hypothèse (H4). Ces hypothèses sont le fait de négliger la corrélation entre les sources et le faite de négliger la corrélation entre les sources et le champ réverbéré.
La résolution de l'équation de diffusion 2.37 passe par la connaissance des conditions aux limites. Une description exhaustive des phénomènes de diffusion aux frontières est indispensable dont on se contente à donner une formulation opérationnelle simple.

En renvoyant aux thèses de Moron et Hardy [48, 46] et en se référant à la figure 2.4.1, on peut noter $I^+(P)$ le flux de puissance arrivant au point P et $I^-(P)$ le flux de puissance réfléchi repartant du point P et dû à la réflexion de $I^+(P)$. Les densités d'énergie associées respectivement à $I^+(P)$ et $I^-(P)$ sont $W^+(P)$ et $W^-(P)$.

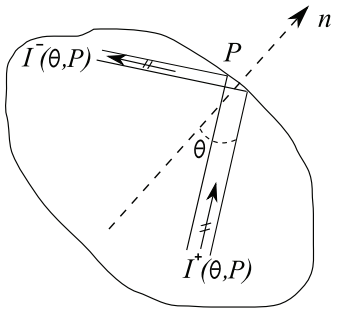


FIGURE 2.4.1 – Réflexion au niveau d'une frontière absorbante pour la MES différentielle

La densité d'énergie et le flux de puissance au niveau de la frontière peuvent se décomposer sous la forme :

$$W = W^+(P) + W^-(P) \quad , \quad I(P) = I^+(P) + I^-(P) \tag{2.38}$$

La relation des ondes planes s'applique autant au champ réfléchi qu'au champ incident :

$$I^+(P) = cW^+(P) \quad , \quad I^-(P) = -cW^-(P) \tag{2.39}$$

On peut exprimer par la suite les flux incidents et réfléchis en fonction des grandeurs totales :

$$I^+(P) = \frac{1}{2}(I(P) + cW(P)n) \quad , \quad I^-(P) = \frac{1}{2}(I(P) - cW(P)n) \tag{2.40}$$

La frontière absorbante est caractérisée par un coefficient de réflexion $\bar{r}$ moyenné sur les angles d'incidences possibles. Le flux réfléchi est proportionnel au flux incident et au coefficient de réflexion :

$$I^-(P).n = -\bar{r}I^+(P).n \tag{2.41}$$

On peut exprimer par la suite le flux de puissance total en fontion de la densité d'énergie totale :

$$I(P).n = \frac{1-\bar{r}}{1+\bar{r}}cW(P) \tag{2.42}$$

La relation 2.36 nous permet d'exprimer cette condition aux limites en fonction de l'énergie uniquement :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla W(P).n = \frac{1-\bar{r}}{1+\bar{r}}cW(P) \tag{2.43}$$

Une frontière parfaitement réfléchissante impose alors la simple condition $\nabla W(P).n = 0$.

2.4.1 Implémentation numérique

La résolution numérique que nous présentons dans ce paragraphe est une résolution par éléments finis de l'équation de diffusion dans le cas bidimensionnel.
Considérons le problème complet comportant un domaine Ω et la frontière $\partial\Omega$ caractérisée par un coefficient de réflexion moyenné sur les angles d'incidence $\bar{r}$.
Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W(M) + \eta\omega W(M) = \pi_{inj}(M) \ , \ \forall M \in \Omega \\ -\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla W(P).n(P) = \frac{1-\bar{r}(P)}{1+\bar{r}(P)}cW(P) \ , \ \forall P \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.44}$$

On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions test. La formulation variationnelle associée au problème complet 2.44 est obtenue en multipliant la première équation par une fonction test ψ :

$$\forall \psi \in H^1(\Omega),$$
$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\int\int_\Omega \psi(M)\Delta W(M)dM + \eta\omega\int\int_\Omega \psi(M)W(M)dM = \int\int_\Omega \psi(M)\pi_{inj}(M)dM \tag{2.45}$$

En appliquant par la suite le théorème de Green, cette équation devient :

$$\forall \psi \in H^1(\Omega),$$
$$\frac{c^2}{\eta\omega}\left[\iint_\Omega \nabla\psi(M)\nabla W(M)dM - \int_{\partial\Omega}\psi(P)\nabla W(P)n dP\right] + \eta\omega\iint_\Omega \psi(M)W(M)dM = \iint_\Omega \psi(M)\pi_{inj}(M)dM \quad (2.46)$$

En utilisant la deuxième équation du problème complet 2.44 donnant une relation entre la densité d'énergie et le gradient de la densité d'énergie à la frontière, l'équation 2.46 sera :

$$\forall \psi \in H^1(\Omega),$$
$$\frac{c^2}{\eta\omega}\iint_\Omega \nabla\psi(M)\nabla W(M)dM + \eta\omega\iint_\Omega \psi(M)W(M)dM + \int_{\partial\Omega}\psi(P)\frac{1-\bar{r}(P)}{1+\bar{r}(P)}cW(P)dP = \iint_\Omega \psi(M)\pi_{inj}(M)dM \quad (2.47)$$

Pour discrétiser le problème et en prenant le cas d'une plaque (2D), nous nous basons sur un élément quadrangulaire dont les degrés de liberté associés sont les énergies aux noeuds (figure 2.4.2). Les fonctions de forme associées à cet élément [46] sont les suivantes :

(2.48)

$$\begin{cases} \psi_1(p,q) = \phi_1(p)\phi_1(q) \\ \psi_2(p,q) = \phi_2(p)\phi_1(q) \\ \psi_3(p,q) = \phi_1(p)\phi_2(q) \\ \psi_4(p,q) = \phi_2(p)\phi_2(q) \end{cases}$$

Les fonctions ϕ_j avec $j = \{1,2\}$ s'expriment sous la forme :

$$\phi_1(z) = \frac{1-z}{L_z} \quad (2.49)$$

$$\phi_2(z) = \frac{z}{L_z} \quad (2.50)$$

avec $z = x, y$

Le déplacement en un point d'un élément est la somme des effets des quatre fonctions de forme élémentaires, pour $(p,q) \in [0,1]^2$:

$$w(p,q) = \sum_{I=1}^{4} w_I\psi_I(p,q) \quad (2.51)$$

En faisant correspondance entre chaque valeur de I avec le doublet (i,j) comme suit :

(2.52)

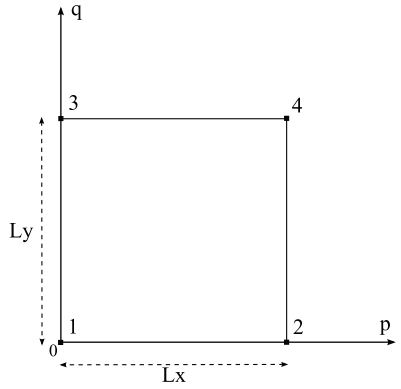


FIGURE 2.4.2 – Elément quadrangulaire utilisé pour la discrétisation des équations de la MES Différentielle

$$\begin{cases} I(1,1) = 1 \\ I(2,1) = 2 \\ I(1,2) = 3 \\ I(2,2) = 4 \end{cases}$$

On note N_n le nombre de noeuds obtenu en discrétisant le système Ω. On note φ_n la fonction de forme construite à partir des fonctions élémentaires et associée au noeud n de Ω.
Le champ dans Ω s'écrit alors sous la forme approchée :

$$\forall\, M \in \Omega \quad , \quad \tilde{W}(M) = \varphi^t(M) W \tag{2.53}$$

En tenant compte de cette équation 2.53 et en prenant pour fonction test une fonction $\varphi_k \in \varphi$, la formulation variationnelle 2.47 sera discrétisée comme suit :

$$\frac{c^2}{\eta\omega}\int\int_\Omega \nabla\varphi_k(M)\sum_{l=1}^{N^n} w_l \nabla\varphi_l(M)\,dM + \eta\omega\int\int_\Omega \varphi_k(M)\sum_{l=1}^{N^n} w_l\varphi_l(M)\,dM + \int_{\partial\Omega}\varphi_k(P)\frac{1-\bar{r}(P)}{1+\bar{r}(P)}c\sum_{l=1}^{N^n} w_l\varphi_l(P)\,dP = \int\int_\Omega \varphi_k(M)\pi_{inj}(M)\,dM \tag{2.54}$$

Pour poser maintenant la formulation matricielle de la MES Différentielle Directe, on définit les deux matrices K et Q respectivement par la matrice de pseudo-raideur énergétique de dimension $(N^n \times N^n)$ et la matrice d'amortissement à la frontière de même dimension. Les termes de ces deux matrices s'écrivent :

$$(K)_{kl} = \int\int_\Omega \left[\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla\varphi_k(M)\nabla\varphi_l(M) + \eta\omega\varphi_k(M)\varphi_l(M)\right] dM, \quad \varphi_k, \varphi_l \in \varphi \tag{2.55}$$

$$(Q)_{kl} = c\int_{\partial\Omega}\frac{1-\bar{r}(P)}{1+\bar{r}(P)}\varphi_k(P)\varphi_l(P)\,dP, \quad \varphi_k, \varphi_l \in \varphi \tag{2.56}$$

Le second membre du problème matriciel doit contenir le vecteur Π décrivant la distribution de la puissance injectée dans le système Ω dont les termes s'écrivent :

$$(\Pi)_k = \int\int_{\Omega} \varphi_k(M)\pi_{inj}(M)dM, \quad \varphi_k \in \varphi \tag{2.57}$$

L'équation du problème discret global sera déterminée par la suite en rassemblant les matrices explicitées précédemment comme suit :

$$(K + Q)W = \Pi \tag{2.58}$$

La résolution de ce système permet de trouver la distribution de la densité d'énergie dans le système en connaissant la répartition de la puissance injectée.

2.4.2 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons des résultats numériques de l'application de la MES Différentielle Directe dans les deux cas 2D et 3D.
Utilisant la formulation matricielle du problème discrétisé 2.58, nous cherchons alors à déterminer le vecteur W caractérisant la distribution de la densité d'énergie sur $\partial\Omega$ ayant comme données d'entrée le vecteur Π décrivant la distribution de la puissance injectée dans le système Ω.
La matrice K est définie par la matrice de pseudo-raideur énergétique dans le domaine Ω et Q la matrice d'amortissement à la frontière $\partial\Omega$.
Les deux applications qui seront présentées par la suite sont relatives à une plaque mince excitée en un point de sa surface et à une cavité acoustique excitée aussi en un point surfacique.

2.4.2.1 Plaque excitée (2D)

Nous nous penchons dans cette partie sur un modèle de plaque mince dont les caractéristiques sont données par le tableau 2.4.1.

Table 2.4.1 – Caractéristiques de la plaque.

paramètre	*unité*	*valeur*
Longueur L	m	1
Largeur l	m	1
Hauteur h	m	$2e-3$
Module d'Young E	Pa	2.1e11
Coefficient de Poisson ν		0.3
Masse volumique ρ_s	Kg/m^3	7800

Cette plaque a les bords simplement supportés et elle est excitée par une source surfacique de coordonnées $(0.55, 0.55)$ (Voir figure 2.4.3).

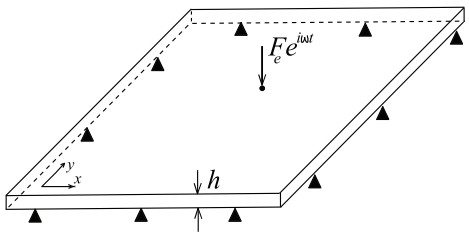


FIGURE 2.4.3 – Modèle cinématique de la plaque mince analysée

La puissance injectée est de $1W/m^2$. L'excitation appliquée correspond à une force harmonique F dont l'amplitude F_e est déterminée en fonction de la puissance injectée par l'équation 2.59.

$$\rho_{inj} = \frac{F_e^2}{16\sqrt{\rho_s h D}} \tag{2.59}$$

D étant la rigidité de la plaque qui se détermine en fonction de E, h et ν par :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.60}$$

Le résultat donnant la répartition de la densité d'énergie sur la plaque est représenté par la figure 2.4.4.

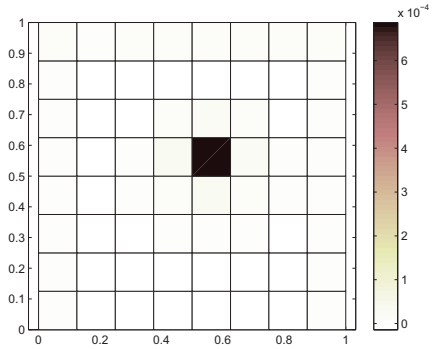


FIGURE 2.4.4 – Répartition de la densité d'énergie sur la plaque utilisant la MES Différentielle

La ditribution de la densité d'énergie *W* sur la plaque discrétisée est parfaite. La valeur maximale de *W* est obtenue pour la petite facette correspondante au point d'excitation considéré ce qui montre la faisabilité de la MES Diff Directe pour le cas structure.

2.4.2.2 | Cavité acoustique excitée (3D)

Nous considérons dans cette deuxième partie du chapitre le cas d'un modèle d'une cavité acoustique de forme cubique remplie d'air avec des frontières absorbantes.
Le tableau 2.4.2 donne une idée sur les dimensions choisies pour cette cavité acoustique ainsi que les caractéristiques du fluide.

paramètre	*unité*	*valeur*
Longueur	m	1.5
Largeur	m	1.2
Hauteur	m	1
Densité du fluide ρ_0	Kg/m^3	1.25
vitesse du son c	m/s	343
Absorption des frontières		0.3

Table 2.4.2 – Dimensions de la cavité et caractéristiques du fluide

Cette cavité est excitée par une source surfacique placée sur le point de coordonnées (0, 0.39, 0.66) dont la puissance injectée est égale à $1W/m^2$ (voir figure 2.4.5).

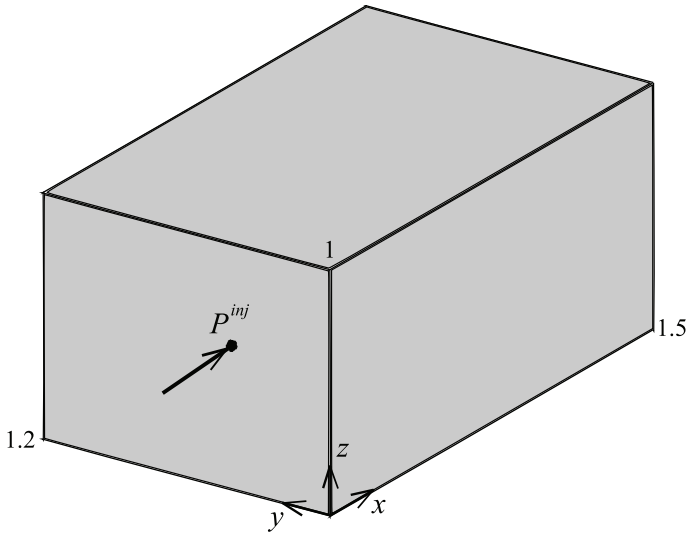


Figure 2.4.5 – Modèle cinématique de la cavité acoustique analysée

Appliquant la MES Différentielle Directe sur le modèle 3D de la cavité acoustique et discrétisant cette cavité surfaciquement, la distribution de la densité d'énergie sur les frontières de la cavité W sera représentée par la figure 2.4.6.

La ditribution de la densité d'énergie W sur la cavité discrétisée surfaciquement est parfaite. La valeur maximale de W est obtenue pour la petite facette correspondante au point d'excitation considéré de coordonnées (0, 0.39, 0.66) ce qui montre la faisabilité de la

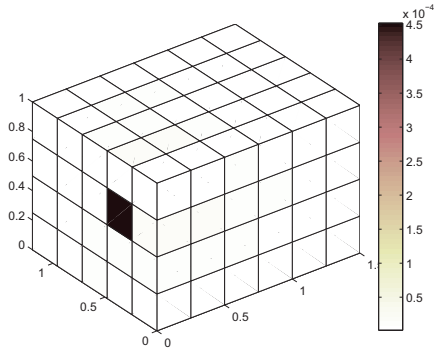


FIGURE 2.4.6 – Répartition de la densité d'énergie sur la cavité utilisant la MES Différentielle

MES Diff Directe pour le cas acoustique (3D).

2.4.3 Limites de la MES Différentielle

La MES Différentielle présente l'intérêt d'autoriser une résolution par méthode des éléments finis. Elle décrit ainsi l'évolution de l'énergie au sein des sous-systèmes tout en développant les conditions aux limites et les conditions de couplage énergétiques ce qui explique sa légère performance par rapport à la SEA.
Cependant, cette équation assimile le champ total au champ réverbéré c'est à dire qu'elle n'est valable que pour le champ lointain et sous l'hypothèse d'ondes planes. Elle présente aussi des limites en l'utilisant pour les systèmes fortement amortis et excités ponctuellement à cause de la perturbation de la décroissance de l'énergie en raison de l'importance du champ direct. Ainsi, cette méthode est mise en défaut au voisinage des singularités et dans le cas des milieux bi et tridimensionnels infinis.

Pour améliorer alors cette méthode et décrire correctement les systèmes où le champ direct n'est pas négligeable devant le champ réverbéré, on va utilisé dans le paragraphe suivant la MES Différentielle Mixte.

2.5 MES Différentielle Mixte

La MES Différentielle Mixte apporte une solution permettant de modéliser différemment les deux champs direct et réverbéré constituant le champ total.
L'équation de diffusion du système sera donc reformuler en tenant compte du fait que les variables énergétiques se décomposent en une partie directe résultante des ondes issues de la source avant qu'elles atteignent les frontières et une partie réverbérée résultante des ondes réparties dans le domaine après les premières réflexions par les frontières [46, 33].

$$W(M) = W^{dir}(M) + W^{rev}(M) \quad , \quad I(M) = I^{dir}(M) + I^{rev}(M) \tag{2.61}$$

Le champ direct est modélisé cette fois sous l'hypothèse d'ondes symétriques c'est à

dire par sa forme réaliste correspondante au champ créé par une source ponctuelle dans le milieu considéré infini. La densité d'énergie directe W^{dir} et la densité de puissance directe I^{dir} seront données en fonction de la puissance injectée π_{inj} :

$$W^{dir}(r) = \frac{\pi_{inj}}{\gamma_n c}\frac{e^{-\frac{\eta\omega}{c}r}}{r^{n-1}} \quad , \quad I^{dir}(r) = \frac{\pi_{inj}}{\gamma_n}\frac{e^{-\frac{\eta\omega}{c}r}}{r^{n-1}}e_r \tag{2.62}$$

où γ_n est l'angle solide pour l'espace de dimension n égale à 2 en dimension 1, 2π en dimension 2 et 4π en dimension 3; r le rayon d'observation et e_r le vecteur radial.

Le champ réverbéré reste à son tour modélisé par la MES Différentielle sous l'hypothèse d'ondes planes. Pour la résoudre, il nous faut connaître les conditions aux limites tout en tenant compte de l'existance du champ direct pour résoudre la formulation développée en MES Différentielle.
Le bilan de puissance au niveau d'une frontière absorbante est augmenté d'un terme lié au champ direct et de l'angle d'incidence β.

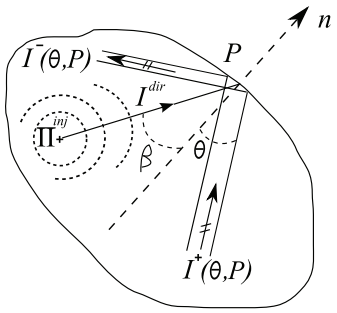


FIGURE 2.5.1 – Réflexion au niveau d'une frontière absorbante pour la MES Différentielle Mixte

En se référant à la figure 2.5.1 et en notant $I^+(\theta, P)$ le flux de puissance arrivant au point P dans la direction θ, $I^-(\theta, P)$ le flux de puissance réfléchi repartant du point P et dû à la réflexion de $I^+(\theta, P)$, I^{dir} le flux de puissance dû au champ direct et enfin $\bar{r}$ le coefficient de réflexion moyenné sur les angles d'incidences possibles, l'intensité réverbérée en un point P de la frontière vaut alors :

$$I^-(\theta, P) = -\bar{r}I^+(\theta, P) - \bar{r}\beta(P)I^{dir}(P).n \tag{2.63}$$

Un terme supplémentaire de champ direct sera ajouté à la condition aux limites déterminée pour la MES Différentielle, et la nouvelle condition pour la MES Différentielle Mixte sera la suivante :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla W_r(P).n = \frac{1-\bar{r}}{1+\bar{r}}cW_r(P) - \frac{2r\beta(P)}{1+\bar{r}}I^{dir}(P).n \tag{2.64}$$

2.5.1 Implémentation numérique

Le problème à résoudre pour déterminer le champ réverbéré pour la MES Différentielle Mixte sera :

(2.65)

$$\begin{cases} -\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W_r(M) + \eta\omega W_r(M) = 0 \ , \ \forall M \in \Omega \\ -\frac{c^2}{\eta\omega}\nabla W_r(P).n(P) = \frac{1-\bar{r}(P)}{1+\bar{r}(P)}cW_r(P) - \frac{2r\beta(P)}{1+\bar{r}}I^{dir}(P).n(P) \ , \ \forall P \in \partial\Omega \end{cases}$$

Il apparaît donc à partir de cette formulation variationnelle que l'excitation est reportée aux frontières. Pour passer à l'implémentation numérique, la seule modification à apporter au système linéaire 2.58 déterminé pour le cas de la MES différentielle apparaît sur le second membre. Les composantes du second membre B s'écrivent :

$$(B)_k = \int_{\partial\Omega} \varphi_k(P)\frac{2r\beta(P)}{1+\bar{r}}I^{dir}(P).n(P)dP \tag{2.66}$$

L'équation du problème discret global pour la MES Différentielle Mixte est donnée par la suite par :

$$(K+Q)W^{rev} = B \tag{2.67}$$

où K et Q sont respectivement la matrice de pseudo-raideur énergétique et la matrice d'amortissement à la frontière définies par les équations 2.55 et 2.56.

Il reste finalement à sommer les deux champs direct et réverbéré pour reconstituer le champ total défini par l'équation 2.61.

2.5.2 Résultats numériques

Comme dans la partie précédente de ce chapitre, nous présentons ici des résultats numériques de l'application de la MES Différentielle Mixte Directe dans les deux cas 2D et 3D.
Le vecteur W caractérisant la distribution de la densité d'énergie sur $\partial\Omega$ sera déterminé comme étant la somme de la composante directe W^{dir} trouvée à partir de l'équation 2.62 et de la composante réverbérée W^{rev} trouvée en utilisant la formulation matricielle du problème discrétisé 2.67.
Les deux applications qui seront présentées par la suite sont déterminées pour une plaque mince excitée en un point de sa surface et pour une cavité acoustique excitée aussi en un point surfacique.

2.5.2.1 Plaque excitée (2D)

Dans cette partie, nous restons sur le modèle développé lors de la MES Différentielle Directe pour le cas de la plaque mince excitée et décrite par la figure 2.4.3. Les caractéristiques matériau et dimensionnelles données par le tableau 2.4.1 sont gardées. La puissance injectée reste égale à la valeur unitaire de $1W/m^2$.

La répartition de la densité d'énergie sur la plaque déterminée en utilisant la MES Différentielle Mixte est représentée par la figure 2.5.2.

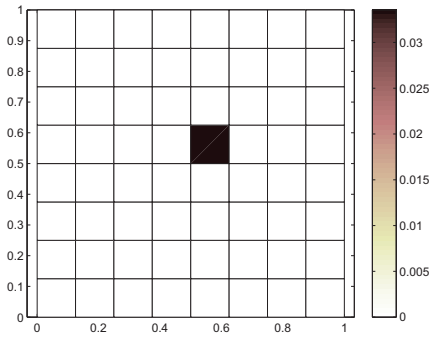


FIGURE 2.5.2 – Répartition de la densité d'énergie sur la plaque utilisant la MES Diff Mixte

La ditribution de la densité d'énergie W sur la plaque discrétisée est parfaite comme pour le cas de la MES Différentielle. Par contre, la valeur maximale de W obtenue pour la petite facette correspondante au point d'excitation est augmentée suite à l'ajout du terme de la densité d'énergie directe W^{dir}. Ce résultat montre aussi la faisabilité de la MES Différentielle Mixte Directe pour le cas structure.

2.5.2.2 | Cavité acoustique excitée (3D)

Dans cette deuxième partie, nous verrons le résultat de la répartition de W pour le cas du modèle de la cavité acoustique. Le même modèle développé pour la MES Différentielle est gardée avec toutes ses caractéristiques données par le tableau 2.4.2.
Cette cavité est excitée par la même source surfacique placée sur le point de coordonnées (0, 0.39, 0.66) dont la puissance injectée est égale à $1W/m^2$.
Discrétisant cette cavité surfaciquement et appliquant la MES Différentielle Mixte Directe sur le modèle 3D de la cavité acoustique, la distribution de la densité d'énergie sur les frontières de la cavité W sera représentée par la figure 2.5.3.

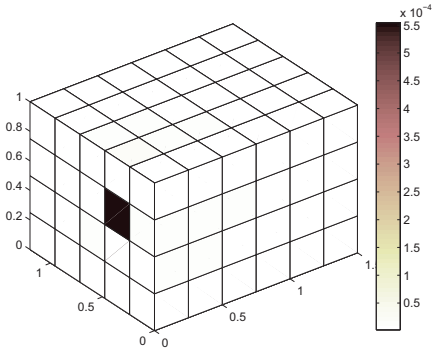


FIGURE 2.5.3 – Répartition de la densité d'énergie sur la cavité utilisant la MES Différentielle Mixte

De même que pour le cas de la MES Différentielle, la répartition de la densité d'énergie W pour le modèle d'une cavité acoustique et en utilisant la MES Différentielle Mixte est parfaite. L'ajout du terme de la densité d'énergie directe W^{dir} reflète aussi sur le cas tridimensionnel de la cavité puisque la valeur maximale est augmentée.
La faisabilité de la MES Différentielle Mixte Directe est une autre fois apparue pour le cas acoustique (3D).

Il est préférable de décrire aussi bien le champ direct que le champ réverbéré par des ondes symétriques et non des ondes planes. Cette démarche fait l'objet de la MES Intégrale qui sera présentée dans le chapitre suivant.

2.6 MES Intégrale

L'approche intégrale de la Méthode Energétique Simplifiée décrit le champ énergétique solution de l'équation 2.18 sous forme d'ondes sphériques décorrélées. Le champ direct et le champ réverbéré sont modélisés par des ondes sphériques tout en les différenciant ces deux champs ainsi que leurs provenances.

2.6.1 Formulation directe générale

Pour la méthode énergétique simplifiée intégrale, les ondes sphériques sont confondues à des ondes planes en 1D, à des ondes cylindriques en 2D et il s'agit d'ondes sphériques au sens habituel du terme pour le cas 3D. Quel que soit l'espace considéré de dimension n, l'onde sphérique exprime l'ensemble des rayons émis par une source ponctuelle de puissance unitaire et de directivité uniforme.
Dans ces conditions, les champs W ne dépendent que de la variable radiale généralisée et les intensités I n'ont que des composantes radiales. Le bilan de puissance de l'équation 2.18 s'écrit alors en coordonnées radiales sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}I\right)+\eta\omega W=0 \tag{2.68}$$

En utilisant l'équation 2.20, le dernier bilan peut être écrit comme suit :

$$-c^2\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}W\right)=\eta\omega I \tag{2.69}$$

En considérant seulement la densité d'énergie W, l'équation 2.68 sera donnée par :

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}W\right)+\frac{\eta\omega}{c}W=0 \tag{2.70}$$

Cette équation est dite équation locale d'énergie pour les ondes symétriques et elle est donnée par Kuttruff [49, 50, 51, 52]. Elle est connue aussi sous le nom de méthode de radiosité.
Une représentation de ces champs est donnée par la figure 2.6.1. Seuls les champs d'intensité sont dessinés. $\vec{I}^{dir}$ correspond au vecteur intensité directe et $\vec{I}^{rev}$ correspond au vecteur intensité réverbérée avec Φ^{inj} est la puissance injectée, Ω est le volume du système et $\partial\Omega$ est

sa frontière.

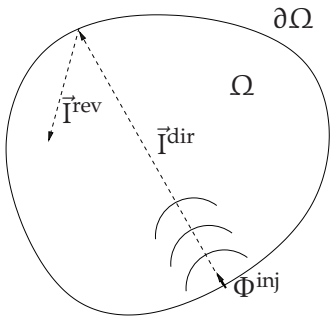


FIGURE 2.6.1 – Système considéré

Les solutions de cette équation sont appelées noyaux de Green énergétiques et on note ainsi G le noyau de densité d'énergie et H le noyau d'intensité.

$$G = \frac{1}{\gamma_n c} \frac{e^{-\eta\omega r}}{r^{n-1}} \qquad \vec{H} = \frac{1}{\gamma_n} \frac{e^{-\eta\omega r}}{r^{n-1}} \vec{u}_r \tag{2.71}$$

avec γ_n l'angle solide de l'espace considéré (2 en dimension 1, 2π en dimension 2 et 4π en dimension 3), r le rayon d'observation et $\vec{u}_r$ le vecteur radial.

En utilisant le principe de superposition, la solution est par la suite exprimée en utilisant la contribution des sources primaires ρ à l'intérieur du système Ω (champ direct) et des sources fictives surfaciques σ localisées à la frontière $\partial\Omega$ (champ réverbéré).

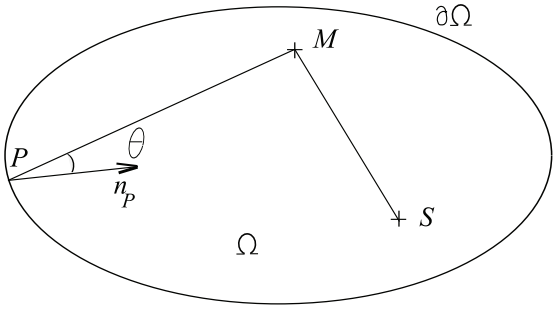


FIGURE 2.6.2 – Domaine Ω avec sources primaire et réverbérées

Avec les notations de la figure 2.6.2 et à l'aide des noyaux des équations 2.71, la densité d'énergie et l'intensité en un point M sont respectivement données par :

$$W(M) = \int_{\Omega} \rho(S, u_{SM})\, G(S, M)\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma(P, u_{PM})\, \vec{u}_{PM}.\vec{n}_P\, G(P, M)\, d\partial\Omega \tag{2.72}$$

$$I(M) = \int_{\Omega} \rho(S, u_{SM})\, H(S, M)\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma(P, u_{PM})\, \vec{u}_{PM}.\vec{n}_P\, H(P, M)\, d\partial\Omega \tag{2.73}$$

Contrairement à la MES Différentielle, on conserve ici l'information de l'incidence du flux. La directivité de Lambert détaillée dans l'hypothèse (H5) n'intervient que sur l'énergie émise.

2.6.1.1 Formulation directe 2D

Nous déterminons dans cette partie la formulation directe de la MES Intégrale dans le cas de plaques bidimensionnelles. Le domaine Ω correspond ici à la surface de la plaque et $\partial\Omega$ correspond aux frontières. Il s'agit de construire alors les champs d'énergie W et d'intensité I générés dans ce domaine par une répartition de sources ρ.
En tout point M de Ω, les champs W et I s'écrivent à l'aide des équations 2.72 et 2.73.
Les champs W et I respectent le bilan de puissance donné par l'équation 2.74. La densité de puissance injectée s'avère être égale à $2\pi c_g \rho$.

$$div I + \eta\omega W = 2\pi c_g \rho \tag{2.74}$$

où c_g est la vitesse de groupe.

La densité des sources fictives σ réparties sur la frontière $\partial\Omega$ est déterminée par les conditions aux limites appliquées sur le bord $\partial\Omega$. Pour une frontière non dissipative, la condition $I.n = 0$ est appliquée.

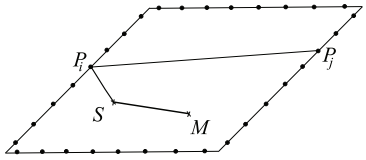


FIGURE 2.6.3 – Interaction élément/élément

En se référant à la figure 2.6.3, nous obtenons alors l'équation de Fredholm de seconde espèce suivante :

$$\sigma(P_i) = \frac{1}{2c_g}\left\{\int_\Omega \rho(S)H(S,P_i)dS + \int_{\partial\Omega} \sigma(P_j)H(P_j,P_i)dP_j\right\} n_P \tag{2.75}$$

Le noyau de densité d'énergie $G(S,M)$ créé au point M par une source ponctuelle située en S est donné par :

$$G(S,M) = \frac{1}{SM} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g}SM} \tag{2.76}$$

Le noyau d'intensité H qui en résulte est donné par :

$$\vec{H}(S,M) = \frac{c_g}{SM} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g}SM} \vec{u}_{SM} \tag{2.77}$$

Le problème matriciel total permettant le développement de la formulation inverse de la MES Intégrale sera donné dans le chapitre MES Inverse 2D.

2.6.1.2 Formulation directe 3D

Nous appliquons dans cette partie la MES Intégrale dans le cas des cavités acoustiques. Le domaine Ω correspond au volume de la cavité et $\partial\Omega$ correspond à ses frontières absorbantes.
Nous définissons par la suite un terme de directivité selon la loi de LAMBERT noté dir qui dépend de l'angle de ré-émission θ. En dimension 3, ce facteur de directivité, même s'il est fonction des angles θ et φ, s'exprime seulement en fonction de θ dans l'équation 2.78.

$$\mathrm{dir}(\theta) = \mathrm{dir}_3(\theta) = \frac{\cos\theta}{\pi} \tag{2.78}$$

tout en assurant le respect de l'égalité suivante :

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{dir}_3(\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1 \tag{2.79}$$

La densité d'énergie W^{dir} et l'intensité I^{dir} peuvent être exprimées en fonction de la puissance injectée ρ^{inj} comme suit :

$$W^{dir}(M) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\rho_i^{inj}}{c_0} \int\int_{S_i} \frac{\mathrm{dir}(\theta_i)}{r^2} dP \tag{2.80}$$

$$\vec{I}^{dir}(M) = \sum_{i=1}^{N_e} \rho_i^{inj} \int\int_{S_i} \frac{\mathrm{dir}(\theta_i)}{r^2} \vec{u}_r dP \tag{2.81}$$

où P est le point situé sur l'élément S_i, N_e le nombre d'éléments, $r = PM$ et $\vec{u}_r = \frac{\vec{MP}}{\|\vec{MP}\|}$.

Par contre, la densité d'énergie W^{rev} et l'intensité I^{rev} s'expriment cette fois en fonction de la puissance réverbérée σ^{inj} comme suit :

$$W^{rev}(M) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{\sigma_i^{inj}}{c_0} \int\int_{S_i} \frac{\mathrm{dir}(\theta_i)}{r^2} dP \tag{2.82}$$

$$\vec{I}^{rev}(M) = \sum_{i=1}^{N_e} \sigma_i^{inj} \int\int_{S_i} \frac{\mathrm{dir}(\theta_i)}{r^2} \vec{u}_r dP \tag{2.83}$$

Les sources de frontières engendrant les champs réverbérés constituent alors les inconnues du problème à résoudre. Elles sont calculées en appliquant le bilan de puissance aux interfaces. Exprimant le flux incident de part et d'autre d'une interface, l'amplitude de la source secondaire correspond à la somme des puissances transmises et réfléchies, chacune décomposée en contributions directe et réverbérée.
Considérant un élément i, le bilan de puissance peut être exprimé comme suit :

$$\sigma_i = \frac{1-\alpha_i}{S_i}\left[\sum_{j=1_{j\neq i}}^{N_e} \rho_j^{inj} \int\int_{S_i}\int\int_{S_j} \frac{\cos\theta_i \mathrm{dir}(\theta_j)}{r_{ij}^2} dP_i dP_j + \sum_{j=1_{j\neq i}}^{N_e} \sigma_j \int\int_{S_i}\int\int_{S_j} \frac{\cos\theta_i \mathrm{dir}(\theta_j)}{r_{ij}^2} dP_i dP_j\right] \tag{2.84}$$

avec α le coefficient d'absorption.

Le problème matriciel total permettant le développement de la formulation inverse de la MES Intégrale sera donné dans le chapitre MES Inverse 3D.

2.6.2 Résultats numériques

Les résultats de l'application de la MES Intégrale Directe pour les cas 2D et 3D seront présentés dans ce chapitre.
En se référant à l'équation 2.72 et en tenant compte du vecteur donnant la contribution des sources primaires ρ, le vecteur W caractérisant la distribution de la densité d'énergie sur Ω sera déterminé et représenté.
Comme pour les deux chapitres précédents, deux applications de plaque mince excitée en un point de sa surface et d'une cavité acoustique excitée aussi en un point surfacique seront présentées par la suite.

2.6.2.1 Plaque excitée (2D)

Le modèle développé lors de la MES Différentielle Directe et la MES Différentielle Mixte Directe pour le cas de la plaque mince excitée et décrite par la figure 2.4.3 est utilisé. Les caractéristiques matériau et dimensionnelles données par le tableau 2.4.1 sont gardées et la puissance injectée reste toujours égale à la valeur unitaire de $1W/m^2$.

La répartition de la densité d'énergie sur la plaque déterminée en utilisant la MES Intégrale est représentée par la figure 2.6.4.

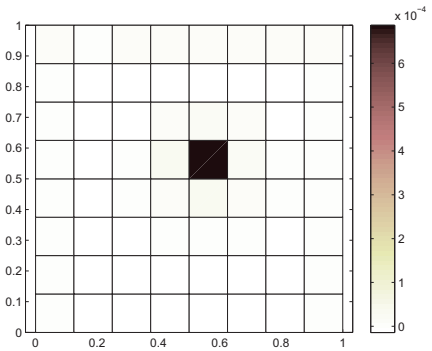


FIGURE 2.6.4 – Répartition de la densité d'énergie sur la plaque utilisant la MES Intégrale

La distribution de la densité d'énergie W sur la plaque discrétisée est parfaite comme pour les deux cas de la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte. La valeur maximale de W obtenue pour la petite facette correspondante au point d'excitation est presque égale à celle trouvée lors de l'application de la MES Différentielle.
Ce résultat montre aussi la faisabilité de la MES Intégrale Directe pour le cas structure.

2.6.2.2 Cavité acoustique excitée (3D)

Dans cette deuxième partie, nous verrons le résultat de la répartition de W pour le modèle de la cavité acoustique développé pour la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte. Ce modèle est gardé avec toutes ses caractéristiques données par le tableau 2.4.2.
La cavité est toujours excitée par la même source surfacique placée sur le point de coordonnées (0, 0.39, 0.66) dont la puissance injectée est égale à $1W/m^2$.
Discrétisant cette cavité surfaciquement et appliquant la MES Intégrale Directe, la distribution de la densité d'énergie W sur les frontières de la cavité sera représentée par la figure 2.6.5.

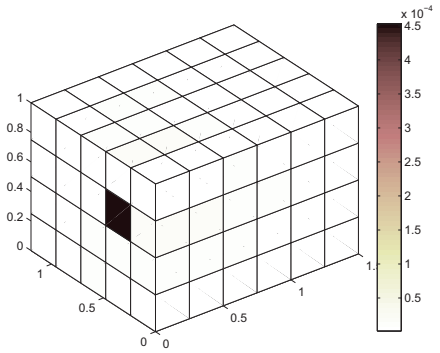


FIGURE 2.6.5 – Répartition de la densité d'énergie sur la cavité utilisant la MES Intégrale

De même que pour les deux cas précédents de la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte, la répartition de la densité d'énergie W pour le modèle d'une cavité acoustique en utilisant la MES Intégrale est parfaite. La valeur maximale de W obtenue pour la petite facette correspondant au point d'excitation est presque égale à celle trouvée lors de l'application de la MES Différentielle.
La faisabilité de la MES Intégrale Directe est encore apparue pour le cas acoustique (3D).

2.7 Implantation sous Comsol

Afin de valider la Méthode Energétique Simplifiée, nous allons comparer les résultats trouvés à partir de simulations MES Directe / MES Inverse avec ceux trouvés à partir de simulations FEM / MES Inverse. Bien que la MESD/MESI est définie par l'alimentation de la formulation inverse avec des données récupérées par le calcul direct, la FEM/MESI est à son tour définie par l'alimentation de la formulation inverse avec des données récupérées par un code éléments finis.
Nous allons justement dans cette section analyser plus en détail le programme de la MES éléments finis développé sur le logiciel COMSOL. Ce logiciel permet en fait de créer le modèle géométrique choisi en 2D ou en 3D, choisir les caractéristiques du matériau, choisir les cri-

tères du maillage, appliquer les conditions aux limites nécessaires, choisir le type d'analyse, appliquer l'excitation tout en choisissant son type et enfin faire les simulations permettant de calculer la densité d'énergie et donnant sa répartition dans le système considéré.
Nous allons dans ce qui suit présenter la structure du programme et faire des tests de validation pour chacun des modèles conçus en 2D et 3D.

2.7.1 Structure du programme

Nous présentons dans cette partie le déroulement de la création des deux modèles utilisés; le modèle structure de la plaque mince excitée par une source surfacique et le modèle acoustique de la cavité cubique excitée par une source surfacique ou volumique.
Dès son ouverture, le logiciel nous permet de choisir tout d'abord la dimension du modèle à développer (2D ou 3D), choisir le mode d'application qui sera soit le module Mécanique des structures sur plaque de Mindlin pour le cas 2D soit le module COMSOL Multiphisics Acoustique pour le cas 3D, choisir l'élément du modèle et donnant les variables dépendantes. La figure2.7.1 présente la fenêtre d'accueil de l'environnement COMSOL résumant ce qu'on a défini.

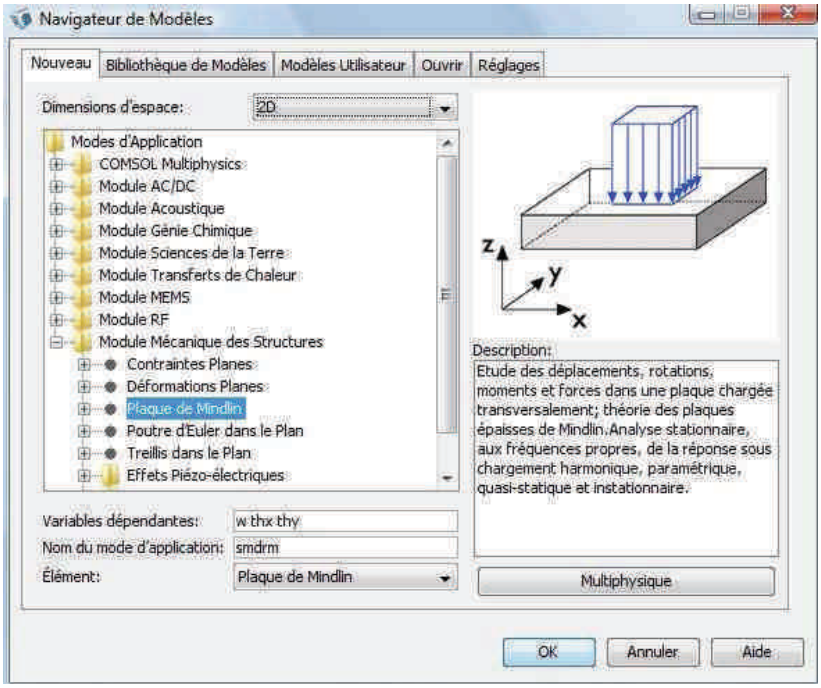


FIGURE 2.7.1 – Schéma de résolution d'un problème inverse

Nous commençons par la suite par la création de notre modèle géométrique. COMSOL est connu comme un logiciel permettant une modélisation facile à l'aide de son interface. Nous utilisons donc l'icône géométrie se trouvant sur la barre des menus pour la construction de la géométrie du modèle. Cette dernière sera soit un carré dans le cas 2D soit un cube surfacique dont nous imposons les dimensions dans le cas 3D.
Ensuite, nous imposons les caractéristiques du matériau utilisé. Pour le cas structure, le

matériau choisi est l'acier et nous introduisons donc dans le sous domaine les valeurs des grandeurs caractéristiques suivantes telles que le module d'Young, le coefficient de poisson, la masse volumique, l'épaisseur de la plaque et l'amortissement. Pour le cas acoustique, le matériau sera alors l'air et les grandeurs introduites seront la vitesse du son et la masse volumique de l'air.
L'étape suivante est de poser les conditions aux limites. Nous posons donc comme limites des bords simplement supportés pour le cas structure ou des surfaces absorbantes dont nous imposons l'impédance correspondante à l'absorption choisie pour le cas acoustique.
Par la suite, nous définissons l'excitation utilisée dans notre modèle. Elle sera définie comme une excitation ponctuelle suivant une force normale à la surface de la plaque mince ou une pression injectée ponctuelle pour le cas de la cavité acoustique.
Nous passons après au choix de notre élément qui sera un élément plaque de Mindlin donnée par défaut pour le cas structure ou un élément linéaire pour le cas 3D et aussi au choix du maillage à faire et de ses paramètres.
Arrivé à cette étape, il nous reste à choisir donc le type d'analyse de réponse sous chargement harmonique pour les deux cas, la plage fréquentielle déterminée par une octave ainsi que le solveur des systèmes linéaires à utiliser.
Enfin, l'utilisateur a la possibilité de visualiser les densités d'énergie aux points qu'il désire et ce pour toutes les fréquences qu'il a préalablement indiquées.

2.7.2 Tests de validation

Dans cette deuxième partie, nous présenterons les résultats trouvés pour les deux modèles structure et acoustique.
La figure 2.7.2 donne la répartition de la densité d'énergie sur la surface de la cavité excitée au point de coordonnées $(0.55, 0.55)$. Ce résultat est obtenu après l'implantation de ce modèle de plaque sur COMSOL et déterminé pour une fréquence centrale $f_c = 950\text{Hz}$ et un amortissement $\eta = 0.001$.

Nous remarquons que La densité d'énergie se concentre sur le point d'excitation de départ et ça traduit que la répartition est parfaite.

Le résultat du deuxième modèle développé par COMSOL et défini par une cavité acoustique excitée surfaciquement par une source ponctuelle au point de coordonnées $(0, 0.39, 0.66)$ est donné par la figure 2.7.3. Cette dernière représente la répartition de la densité d'énergie sur les surfaces absorbantes de la cavité. La fréquence centrale choisie est toujours $f_c = 950\text{Hz}$ et l'amortissement est $\eta = 0.001$.

Nous remarquons aussi la répartition parfaite de la densité d'énergie qui se concentre sur le point d'excitation.

En comparant ces résultats de répartition de la densité d'énergie obtenus par le logiciel d'éléments finis avec les résultats obtenus par la Méthode énergétique simplifiée directe déjà donnés par les figures 2.6.4 et 2.6.5, nous remarquons que les valeurs maximales de W trouvées par COMSOL sont un peu plus grandes que celles trouvées par la MES Directe à cause de la discrétisation qui est plus fine chez COMSOL que chez la MESD dans ces deux

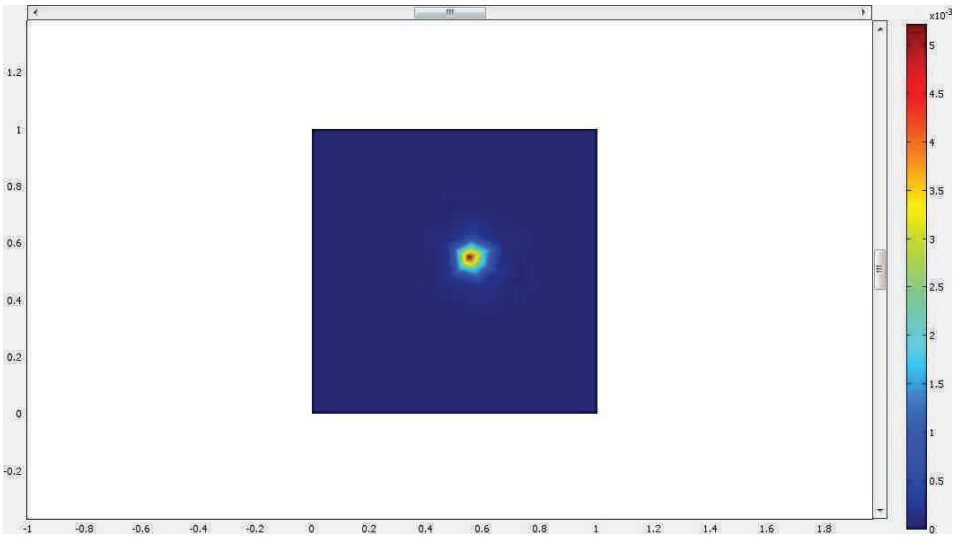


FIGURE 2.7.2 – Schéma de résolution d'un problème inverse

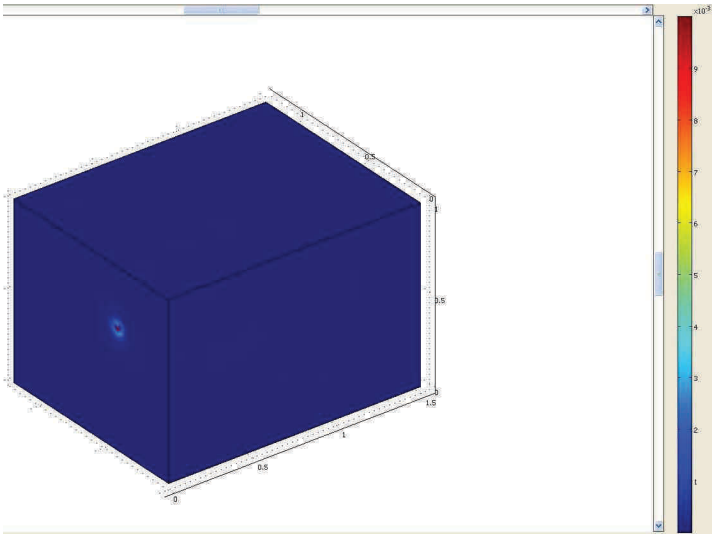


FIGURE 2.7.3 – Schéma de résolution d'un problème inverse

exemples.

Ces résultats sont utilisés dans les chapitres suivants pour valider numériquement la Méthode énergétique simplifiée en les utilisant pour alimenter la formulation inverse.

2.8 Conclusion

Nous avons développé dans ce deuxième chapitre la Méthode Energétique Simplifiée afin de décrire le comportement viboacoustique des systèmes mécaniques dans le domaine

des hautes et des moyennes fréquences. Différentes variantes ont été alors proposées, suivant que les champs sont décomposés en ondes planes ou en rayons, et suivant le modèle de réflexion utilisé.

La MES Différentielle considère un champ d'ondes planes, la MES Intégrale un champ de rayons et la MES Différentielle Mixte un champ direct de rayons et un champ réverbéré d'ondes planes.
Les MES Différentielle et Différentielle Mixte utilisent à leur tour un modèle de réflexion spéculaire alors que la MES Intégrale un modèle de réflexion diffuse.
Les formulations directes de ces différentes approches de la Méthode Energétique Simplifiée sont données dans ce chapitre. En effet, la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte reposent sur une équation de diffusion et la MES Intégrale se révèle comme une méthode de radiosité.

Des résultats de l'identification des sources utilisant chaque approche dans les deux cas 2D et 3D sont donnés pour valider chaque méthode. Une comparaison de ces résultats avec d'autres résultats éléments finis est mise en évidence dans le dernier sous chapitre dans lequel nous avons présenté la structure du programme éléments finis développé par COMSOL ainsi que les tests de validation.

Chapitre 3

MES Inverse 2D

3.1 Introduction

La Méthode Energétique Simplifiée ainsi que toutes les méthodes énergétiques sont destinées pour identifier les sources dans des domaines acoustiques c'est à dire dans des milieux de cavités tridimensionnels. Avant de traiter les cas 3D de l'utilisation de la méthode, nous nous validons dans ce chapitre cette méthode pour l'identification des sources surfaciques dans les plaques minces c'est à dire dans le cas structure.

Les trois approches différentielle, différentielle mixte et intégrale de la Méthode Energétique Simplifiée sont traitées dans ce chapitre. Nous détaillons pour chacune d'elles la formulation inverse permettant de remonter à la source d'excitation en utilisant la répartition de la densité d'énergie sur la structure.
Des comparaisons avec des simulations alimentées par des données énergétiques éléments finis récupérées par COMSOL sont données pour le but de valider chaque approche.
Des études spatiales et fréquentielles sont aussi développées pour voir l'effet de la réduction et de la répartition des points de mesures sur la structure et pour chercher la plage fréquentielle optimale à l'identification pour chaque approche.
Une étude comparative des résultats obtenus par la MES avec ceux obtenus par la SEA qui représente la méthode mère de la classe des méthodes énergétiques est par la suite traitée afin de montrer les améliorations apportées sur les résultats de la MES concernant l'extension de la plage fréquentielle des hautes fréquences vers les hautes et moyennes fréquences.
Enfin, une deuxième étude comparative des résultats d'identification obtenus par la MES est faite cette fois avec les résultats obtenus suite à l'utilisation de la méthode RIFF qui est cinématique cette fois et qui est dédiée pour le cas des plaques minces.

Ces différents études nous permettent de valider l'utilisation de la Méthode Energétique Simplifiée comme méthode inverse pour identifier les sources surfaciques excitant un système structure (2D).

3.2 MES Différentielle Inverse

3.2.1 Formulation Inverse

La formulation directe de la MES Différentielle est décrite dans le deuxième chapitre. En effet, Le problème discret définit par l'équation 2.58 nous permet de trouver à partir des données d'entrée définies par le vecteur Π décrivant la distribution de la puissance injectée dans le système Ω, les données de sortie définies par le vecteur W décrivant la répartition de la densité d'énergie.
Pour la formulation inverse, nous nous sommes appuyés sur le bilan énergétique défini par l'équation 2.37 et donné comme suit

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W(M) + \eta\omega W(M) = \pi(M) \tag{3.1}$$

Les points de mesure sont définis par les points M répartis sur la plaque.
On note (i,j) le couple des indices décrivant l'emplacement du point M sur la plaque suivant l'axe des absisses pour i et l'axe des ordonnées pour j.
En discrétisant le problème, le bilan énergétique donné par l'équation 3.1 sera écrit :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W_{ij} + \eta\omega W_{ij} = \pi_{ij} \tag{3.2}$$

$$1 \leqslant i \leqslant n_X$$
$$0 \leqslant j \leqslant n_Y$$

où n_X et n_Y sont respectivement les nombres de capteurs répartis sur les points de mesure suivant x et suivant y.

Dans le cas bidimensionnel et en coordonnées cartésiennes, la MES Différentielle Inverse s'appuyera sur le bilan 3.3 permettant de trouver le vecteur de la distribution de la puissance injectée Π à partir du vecteur W décrivant la répartition de la densité d'énergie.

$$\pi_{ij} = -\frac{c^2}{\eta\omega}\left[\frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial y^2}\right] + \eta\omega W_{ij} \tag{3.3}$$

3.2.2 Résultats numériques

Dans cette partie du chapitre, nous présentons des résultats numériques de l'application de la MES Différentielle Inverse dans le cas structure.
Nous commençons par l'étude de la simulation MES Différentielle Directe / MES Différentielle Inverse. Cette simulation permet de valider l'inversion de la méthode en utilisant l'équation 2.58. En suite, nous passons à la simulation FEM / MESDI tout en présentant une étude fréquentielle. Cette simulation valide la méthode en l'alimentant par des données éléments finis. En fin, nous évoquons l'influence de la répartition des capteurs autour et loin de la source.

3.2.2.1 MES Différentielle Directe / MES Différentielle Inverse

La simulation appelée MESDD/MESDI est caractérisée par l'alimention du bilan 3.3 de la MESDI par des données récupérées du problème discret global 2.58.
Le même modèle structure défini par une plaque excitée en un point de sa surface et donnée par la figure 2.4.3 est développé. Les caractéristiques et les dimensions données par le tableau 2.4.1 correspondantes à la plaque utilisée dans le chapitre précédent sont maintenues.
La puissance injectée sur le point de coordonnées (0.55 , 0.55) est toujours égale à la valeur unitaire de $1W/m^2$.
Le résultat donné par la figure 3.2.1 déterminé pour une fréquence centrale $f_c = 950Hz$, un coefficient d'amortissement $\eta = 0.001$ et un facteur de réflexion $r = 0.5$ correspond à l'identification de la source appliquée pour une simulation MESDD / MESDI.

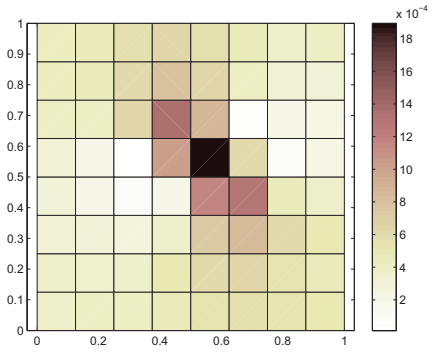


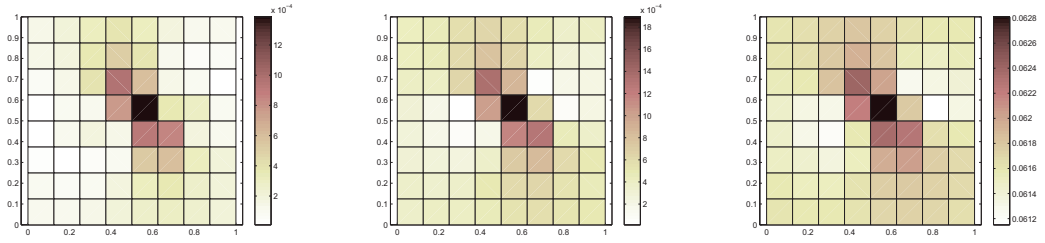
FIGURE 3.2.1 – Simulation MESDD/MESDI

L'emplacement de la source est trouvé. En effet, la figure 3.2.1 permet de localiser notre source mais ce résultat reste incertain de point de vue de la quantification de la valeur de puissance injectée.

En variant la valeur du coefficient de réflexion r, nous trouvons presque la même répartition de la valeur de la puissance injectée sur la plaque. La figure 3.2.2 nous donne les résultats d'identification de la source pour $r = 0$, $r = 0.5$ et $r = 1$.

3.2.2.2 FEM / MES Différentielle Inverse

Nous cherchons dans cette section à valider la méthode énergétique simplifiée différentielle inverse en alimentant sa formulation par des données récupérées par un logiciel éléments finis. En effet, le même modèle de la plaque est modélisé sous COMSOL dont on l'excite sur le même point d'application avec la même valeur de la puissance injectée unitaire. On exporte après les valeurs de densité d'énergie W pour les facettes considérées vers la formulation de la MESDI qui permet par la suite d'identifier la source de départ.
La force F_e appliquée sur le point d'excitation est donnée en fonction de la puissance injectée



(a) (b) (c)

FIGURE 3.2.2 – Simulation MESDD/MESDI pour $r = 0$ (a), $r = 0.5$ (b) et $r = 1$ (c)

ρ_{inj} sur le point considéré par la formule 2.59.

La simulation FEM/MESI en général se base sur un caractère statistique de l'exportation des données de la densité d'énergie et de l'intensité. Ces données appartenant à une bande de fréquence dont le domaine est centré sur la fréquence centrale et le point de calcul. La largeur de la bande de fréquence assure la présence d'un nombre suffisant de modes et doit être assez étroite pour que les propriétés physiques du matériau varient peu dans la plage considérée. Nous prenons une octave comme largeur du domaine de moyennage fréquentiel et une longueur d'onde comme largeur du domaine de moyennage spatial.
l'opérateur de moyenne fréquentielle $\langle . \rangle_\omega$ et l'opérateur de moyenne spatiale $\langle . \rangle_{(x,y)}$ [53] seront par la suite donnés par :

$$\langle H(x,y,\omega_0)\rangle_\omega = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}\int_{\omega_0/\sqrt{2}}^{\omega_0\sqrt{2}} H(x,y,\omega)\,d\omega \tag{3.4}$$

$$\langle H(x_0,y_0,\omega)\rangle_{(x,y)} = \frac{1}{\lambda^2}\int_{x_0-\frac{\lambda}{2}}^{x_0+\frac{\lambda}{2}}\int_{y_0-\frac{\lambda}{2}}^{y_0+\frac{\lambda}{2}} H(x,y,\omega)\,dxdy \tag{3.5}$$

Les données récupérées pour les points de calculs choisis par le logiciel éléments finis seront moyennées autour de la fréquence centrale en utilisant la formule de l'équation 3.4.

La figure 3.2.3 représente le résultat donné suite à la simulation FEM/MESDI pour une fréquence centrale $f_c = 950$Hz. Il apparaît que la source est bien localisée et la valeur de la puissance injectée trouvée à l'endroit de la source est améliorée en la comparant à celle trouvée par la MESDD/MESDI.

3.2.2.3 | Etude fréquentielle

Pour avoir une idée sur la meilleure bande fréquentielle qui nous permet de trouver de bons résultats avec la MES Différentielle, nous avons multiplié les simulations FEM/MESDI pour différentes valeurs de la fréquence centrale f_c. La figure 3.2.4 regroupent les simulations trouvées pour $f_c = 950$Hz, $f_c = 1500$Hz, $f_c = 4000$Hz et $f_c = 6000$Hz.

Il apparaît que l'identification de la source s'améliore tout en augmentant la valeur de la fréquence centrale c'est à dire tout en s'éloignant des moyennes fréquences et se rapprochant

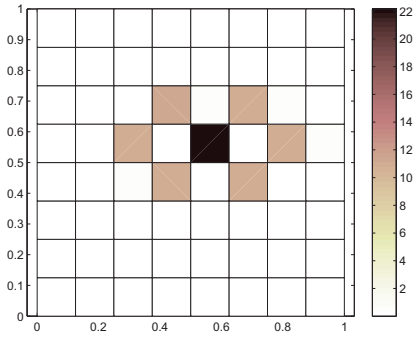


FIGURE 3.2.3 – Simulation FEM/MESDI

des hautes fréquences. L'identification parfaite est obtenue pour $f_c = 6000Hz$.
Il est donc clair que pour identifier une source surfacique sur une plaque mince, la MES Différentielle est fiable dans le cas des hautes fréquences. En se dirigeant vers les moyennes fréquences, on perdera de la précision au niveau de la quantification de la valeur trouvée de la puisance injectée.

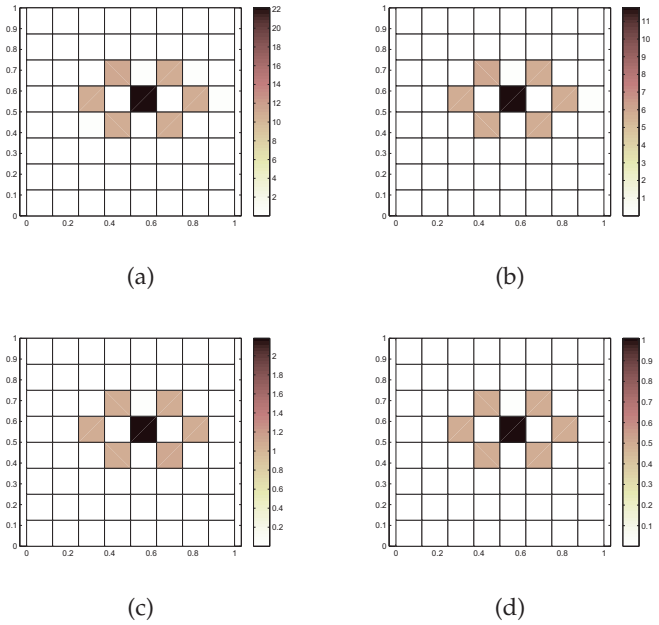
3.2.2.4 | Etude spatiale

Dans cette partie, nous étudions l'influence de la discrétisation spatiale sur les résultats de la MES Différentielle. Pour cela, nous utilisons la simulation FEM/MESDI correspondante à l'identification parfaite trouvée pour $f_c = 6000Hz$ et donnée par la figure 3.2.4 (d) et nous répartissons les capteurs uniformément autour et loin de la source.
Introduisons dans ce qui suit un facteur ξ, défini par l'équation 3.6 caractérisant l'efficacité de la méthode. $\xi = 1$ correspond à une matrice inversée carrée, alors que $\xi < 1$ correspond à un nombre de mesures m plus petit comparé au nombre d'éléments N_e.

$$\xi = \frac{m}{N_e} \tag{3.6}$$

Les résultats trouvés pour des simulations FEM/MESDI ainsi que les répartitions des capteurs correspondantes pour $\xi = 0.86$ et $\xi = 0.6$ sont donnés par la figure 3.2.5.

Le fait de diminuer le nombre de points de mesures m fait dégrader la quantification et influer sur la localisation de la source. En effet, la simulation FEM/MESDI trouvée pour $f_c = 6000Hz$ et $\xi = 0.6$ montre que l'emplacement de la source trouvé est un peu décalé de son origine. La valeur trouvée de la puissance injectée reste loin de la valeur exacte qui est égale à $1W/m^2$.
La quantification s'améliore tout en augmentant le nombre de capteurs et en se rapprochant du nombre de facettes N_e.
Il apparaît alors qu'en répartissant les sources loins de la source, l'information obtenue sur l'emplacement de la source sera perturbée. La quatification est de même touchée et l'identification montre alors une dépendance importante à la répartition des points de mesure sur

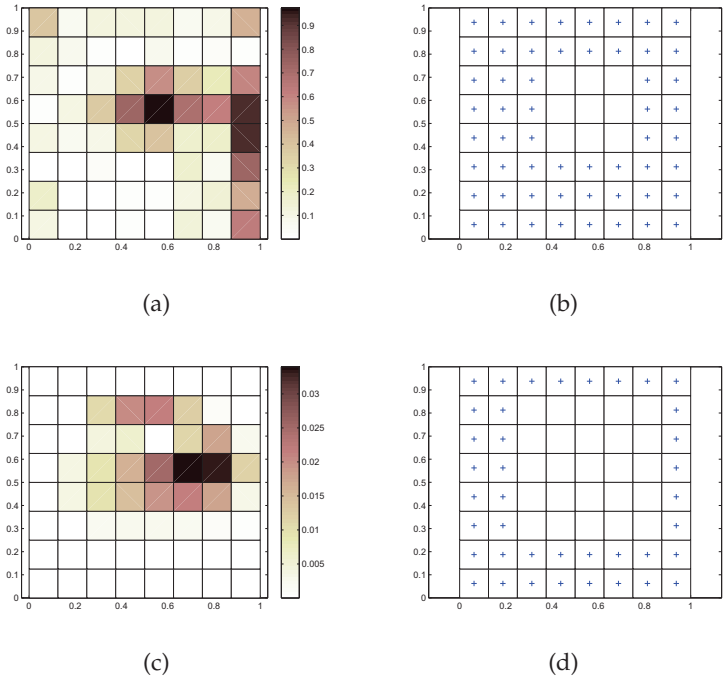


(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.2.4 – Simulations FEM/MESDI pour $f_c = 950$Hz (a), $f_c = 1500$Hz (b), $f_c = 4000$Hz (c) et $f_c = 6000$Hz (d)

le système étudié.
Pour conclure, le manque d'information sur la répartition de la densité d'énergie sur la structure perturbe fortement les résultats de l'identification de source par MES Différentielle.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.2.5 – Simulations FEM/MESDI et distribution des capteurs pour $\xi = 0.86$ ((a) et (b)) et $\xi = 0.6$ ((c) et (d))

3.3 MES Différentielle Mixte Inverse

3.3.1 Formulation Inverse

La MES Différentielle Mixte se base sur la sommation des deux champs réverbéré et direct. Ces deux champs sont déterminés respectivement par l'équation du problème discret 2.67 passant par le problème à résoudre du bilan 2.65 et par l'équation 2.62 redéfinis (en 2D pour 2.62) ci-dessous.

$$(K + Q)W^{rev} = B \tag{3.7}$$

$$W^{dir}(r) = \frac{\pi_{inj}}{2\pi c}\frac{e^{-\frac{\eta\omega}{c}r}}{r} \tag{3.8}$$

Le champ total est par la suite calculé en sommant les densités d'énergie directe et réverbérée :

$$W(M) = W^{dir}(M) + W^{rev}(M) \tag{3.9}$$

Une fois le vecteur champ total avec toutes ses composantes W_{ij} déterminé, nous l'introduisons dans l'équation 3.3 déjà définie pour la MES Différentielle et donnée par :

$$\pi_{ij} = -\frac{c^2}{\eta\omega}\left[\frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial y^2}\right] + \eta\omega W_{ij} \tag{3.10}$$

3.3.2 Résultats numériques

Comme la MES Différentielle Inverse, nous présenterons dans cette partie les résultats de l'utilisation de la MES Différentielle Mixte Inverse pour le cas structure.
Nous commencerons ainsi par la validation de l'inversion de la MES Différentielle Mixte par la simulation MES Différentielle Mixte Directe / MES Différentielle Mixte Inverse. Ensuite, nous passerons à la simulation FEM / MESDMI tout en présentant une étude fréquentielle. Enfin, nous évoquerons l'influence de la répartition des capteurs autour et loin de la source.

3.3.2.1 MES Différentielle Mixte Directe / MES Différentielle Mixte Inverse

La simulation appelée MESDMD/MESDMI est caractérisée par l'alimention du bilan 3.10 de la MESDMI par des données récupérées du champ total 3.9.
Le même modèle de plaque excitée (figure 2.4.3) est toujours utilisé avec la même puissance injectée et le même point d'excitation.
La simulation MESDMD/MESDMI déterminée pour une fréquence centrale $f_c = 950Hz$, un coefficient d'amortissement $\eta = 0.001$ et un facteur de réflexion $r = 0.5$ est représentée par la figure 3.3.1.

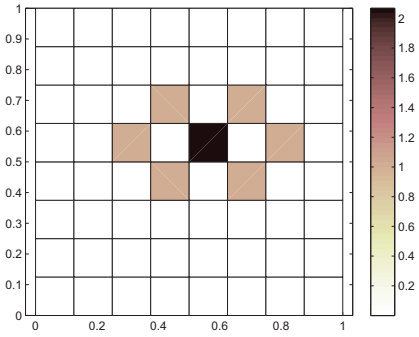


FIGURE 3.3.1 – Simulation MESDMD/MESDMI

En comparant ce résultat avec celui trouvé avec la MES Différentielle (figure 3.2.1), il apparaît que la MESDM est plus fiable que la MESD en terme de localisation et quantification. En effet, l'identification de la source est meilleure en MES Différentielle Mixte qu'en MES Différentielle.

3.3.2.2 FEM / MES Différentielle Mixte Inverse

Dans cette partie du chapitre, nous présenterons la simulation FEM/MESDMI. La formulation inverse de la MES Différentielle Mixte est alors alimentée par les données récupérées du modèle de plaque développé sur le logiciel éléments finis.
La figure 3.3.2 représente le résultat donné suite à la simulation FEM/MESDMI pour une fréquence centrale $f_c = 950Hz$ qui caractérise la gamme des moyennes fréquences.

Il apparaît que la source est bien localisée et la valeur de la puissance injectée trouvée à l'endroit de la source est proche de celle trouvée par la FEM/MESDI (figure 3.2.3). Les

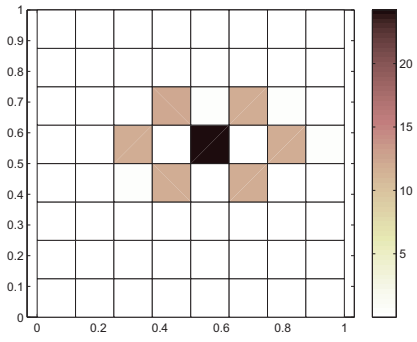


FIGURE 3.3.2 – Simulation FEM/MESDMI

identifications de la source déterminées pour la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte suite à l'alimentation par des données éléments finis sont presque identiques.
L'ajout du terme de champ direct n'apporte pas le plus dans le cas structure concernant la localisation de la source et la répartition de la force excitatrice sur la système.

Il reste à voir dans ce qui suit si nous trouverons une identification parfaite en utilisant la MES Différentielle Mixte et si la fréquence centrale correspondante coincide avec celle trouvée en utilisant la MES Différentielle.

3.3.2.3 | Etude fréquentielle

Nous multiplions dans cette partie les simulations FEM/MESDMI pour différentes valeurs de la fréquence centrale f_c pour trouver la meilleure bande fréquentielle permettant l'identification de la source.

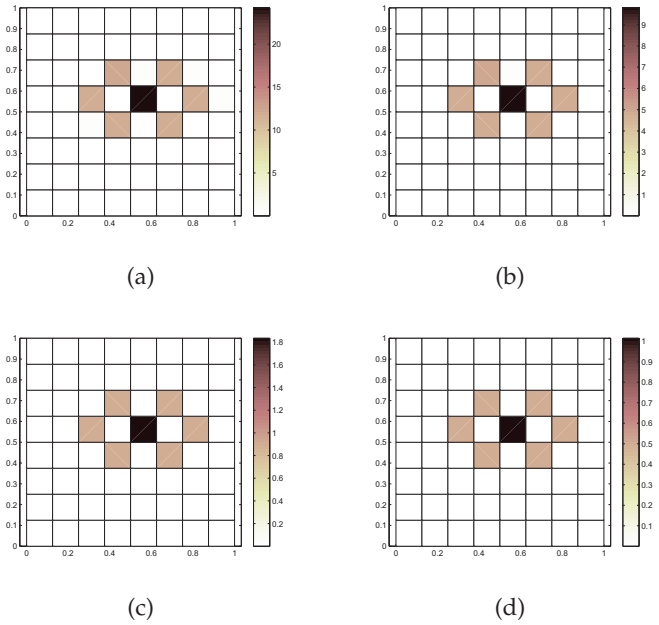
La figure 3.3.3 regroupe les simulations trouvées pour $f_c = 950$Hz, $f_c = 2500$Hz, $f_c = 6000$Hz et $f_c = 10000$Hz.

A partir de ces résultats, nous tirons que l'identification parfaite est obtenue pour $f_c = 10000$Hz.
La fiabilité de la MES Différentielle Mixte s'éloigne encore à l'échelle fréquentielle en la comparant à la MES Différentielle.

L'ajout du terme de champ direct apporte dans le cas structure une augmentation de la quantification ce qui provoque un éloignement de la fréquence optimale permettant l'identification parfaite de la source.

3.3.2.4 | Etude spatiale

Nous étudions ici l'influence de la discrétisation spatiale sur les résultats de la MES Différentielle Mixte. Pour cela, nous utilisons la simulation FEM/MESDMI correspondant à l'identification parfaite trouvée pour $f_c = 10000$Hz et donnée par la figure 3.3.3 (d) et nous



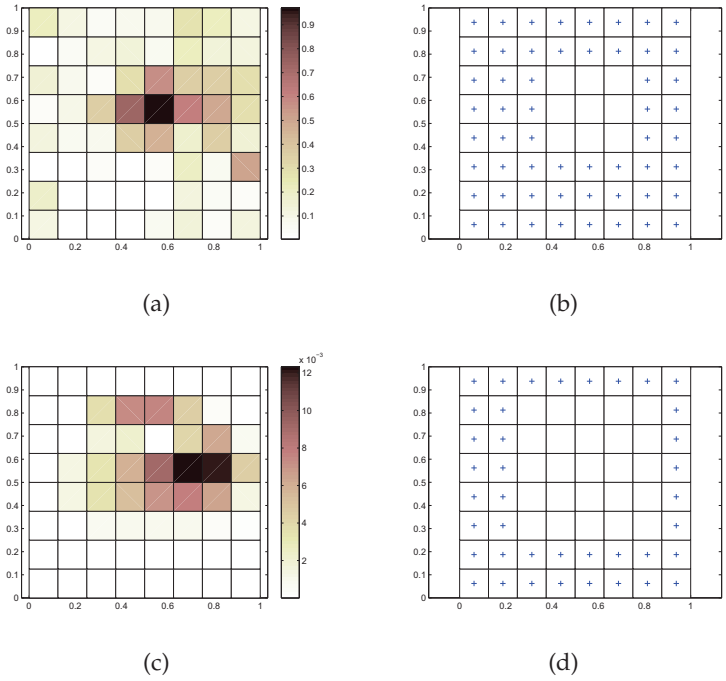
(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.3.3 – Simulations FEM/MESDMI pour $f_c = 950Hz$ (a), $f_c = 2500Hz$ (b), $f_c = 6000Hz$ (c) et $f_c = 10000Hz$ (d)

répartissons les capteurs uniformément autour et loin de la source.
Les résultats trouvés pour des simulations FEM/MESDMI ainsi que les répartitions des capteurs correspondantes pour $\xi = 0.86$ et $\xi = 0.6$ sont donnés par la figure 3.3.4.

La diminution du nombre de points de mesures m dégrade la quantification et influe sur la localisation de la source. En effet, la simulation FEM/MESDMI trouvée pour $f_c = 10000Hz$ et $\xi = 0.6$ montre que l'emplacement trouvé de la source est encore décalé de son origine. La valeur trouvée de la puissance injectée reste loin de la valeur exacte qui est égale à $1W/m^2$.
La quantification s'améliore tout en augmentant le nombre de capteurs et en se rapprochant du nombre de facettes N_e.
Il apparaît pour la MES Différentielle Mixte qu'en répartissant les sources loin de la source, l'information obtenue sur l'emplacement de la source sera perturbée. La quantification est de même touchée et l'identification montre alors une dépendance importante à la répartition des points de mesure sur le système étudié comme pour le cas de la MES Différentielle.
Le manque d'information sur la répartition de la densité d'énergie sur la structure perturbe fortement les résultats de l'identification de source par MES Différentielle Mixte.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.3.4 – Simulations FEM/MESDMI et distribution des capteurs pour $\xi = 0.86$ ((a) et (b)) et $\xi = 0.6$ ((c) et (d))

3.4 MES Intégrale Inverse

3.4.1 Formulation inverse

Dans ce qui suit et pour développer la formulation inverse de la MES Intégrale, nous allons employer des formats discrétisés d'équations énergétiques intégrales. Pour cela, nous définissons tout d'abord la matrice T de dimensions (N_e, N_e) correspondant à l'interaction géométrique entre les N_e éléments de bord. Cet opérateur est donné en se référant à la figure 2.6.3 par :

$$T = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} \frac{1}{P_i P_j} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g} P_i P_j} \vec{u}_{P_i P_j} \vec{n}_P \, d\partial\Omega \tag{3.11}$$

Une autre matrice de dimensions (N_e, k) est définie et nommée ici Q. Cet opérateur représente l'intéraction géométrique entre les N_e éléments et les k sources. Il est exprimé comme suit :

$$Q = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \frac{1}{SP} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g} SP} \vec{u}_{SP} \vec{n}_P \, d\Omega \tag{3.12}$$

Ensuite, nous définissons deux matrices de dimensions (k, m) et intitulées Y^W et Y^I représentant l'intéraction géométrique entre sources et points de mesures. Ces matrices sont déterminées respectivement pour la densité d'énergie W et l'intensité I et données par les équations qui suivent :

$$Y^W = \int_\Omega \frac{1}{SM} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g} SM} d\Omega \tag{3.13}$$

$$Y^I = \int_\Omega \frac{c_g}{SM} e^{-\frac{\eta\omega}{c_g} SM} \vec{u}_{SM} d\Omega \tag{3.14}$$

Finalement, nous définissons M et B comme suit (Id étant la matrice d'identité et ρ le vecteur de puissance injectée) :

$$M = Id - T \tag{3.15}$$

$$B = Q\rho \tag{3.16}$$

Le vecteur de puissance σ peut être par la suite exprimé en fonction du vecteur de puissance injectée ρ par :

$$\sigma = M^{-1}B = M^{-1}Q\rho \tag{3.17}$$

En combinant les équations 2.72, 2.73 et 3.17, le vecteur de densité d'énergie W et le vecteur d'intensité I peuvent être obtenus par :

$$W = S^W\rho = Y^W\rho + Y^W\sigma \tag{3.18}$$

$$I = S^I\rho = Y^I\rho + Y^I\sigma \tag{3.19}$$

où S^W et S^I sont données par :

$$S^W = Y^W[Id + M^{-1}Q] \tag{3.20}$$

$$S^I = Y^I[Id + M^{-1}Q] \tag{3.21}$$

Les deux champs W et $\vec{I}$ peuvent être maintenant exprimés grâce à l'opérateur linéaire noté $\mathcal{F}$.

$$\left(W, \vec{I}\right) = \mathcal{F}(\rho, \sigma) \tag{3.22}$$

La formulation inverse de la MES Intégrale vise à inverser l'opérateur $\mathcal{F}$ proposé par l'équation 3.22. Les sources doivent être détectées à partir des mesures prises sur la plaque.

Ayant généralement un nombre de mesures différent du nombre de sources, le problème n'est pas directement inversible. Pour cela, on cherche un opérateur $\mathcal{G}$ qui permet de donner σ et ρ en fonction de W et $\vec{I}$.

$$(\rho, \sigma) = \mathcal{G}\left(W, \vec{I}\right) \tag{3.23}$$

Nous introduisons maintenant la quantité $R(\mathcal{X})$ définie par l'équation 3.24 et nous cherchons à minimiser cette quantité à travers l'opérateur $\mathcal{X}$.

$$R(\mathcal{X}) = \left\| \left(W, \vec{I}\right) - \mathcal{F}o\mathcal{X}\left(W, \vec{I}\right) \right\| \tag{3.24}$$

3.4.2 Problème étudié

Dans le cas des problèmes à deux dimensions, on ne peut traiter que le cas des sources surfaciques. En effet, l'équation 3.18 sera discrétisée comme suit :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1k} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

avec m le nombre de mesures et k le nombre de sources.

En tenant compte de l'opérateur $\mathcal{G}$ donné par l'équation 3.23, il sera donc nécessaire de diminuer la quantité R donnée par l'équation 3.24 et développée comme suit:

$$R(X) = \left\| \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1k} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \dots & \mathcal{G}_{1m} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \dots & \mathcal{G}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{k1} & \mathcal{G}_{k2} & \dots & \mathcal{G}_{km} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{Bmatrix} \right\| \tag{3.26}$$

$$= \|(I_m - S\mathcal{G})\| \left\| \begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{Bmatrix} \right\| \tag{3.27}$$

En effet, nous choisissons la matrice X comme la pseudo-inverse de la matrice S :

$$X = \left(S^T S\right)^{-1} S^T \tag{3.28}$$

S^T est la transposée de la matrice S qui représente le vecteur collectant les données des vecteurs S^W et S^I calculées par les équations 3.20 et 3.21.

$$S = (S^W, S^I)^T \tag{3.29}$$

Maintenant, la formulation inverse peut être alors effectuée. A partir de l'ensemble des paramètres d'entrée de l'énergie, l'inversion peut être réalisée afin de caractériser les sources d'entrée. Dans ce qui suit, l'efficacité et les limites de la stratégie proposée sont abordées à travers des expériences numériques.

3.4.3 Résultats

La méthode énergétique simplifiée en général est conçue spécialement pour identifier les sources surfaciques ou volumiques dans les parois d'une cavité acoustique c'est à dire dans le cas 3D. Tout d'abord et pour valider l'utilisation de la MES Intégrale Inverse en particulier dans le cas 2D, nous avons développé le modèle de plaque mince en structure dont les caractéristiques sont déjà indiquées dans le tableau 2.4.1. Cette plaque a les bords simplement appuyés et elle est excitée par une source surfacique dont nous choisissons cette fois $(0.25, 0.25)$ comme étant les coordonnées du point d'excitation.

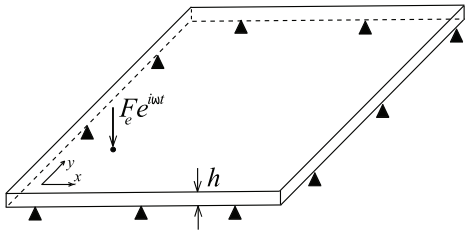


FIGURE 3.4.1 – Modèle cinématique de la plaque mince analysée

L'excitation appliquée correspond à une force harmonique F dont l'amplitude F_e est déterminée en fonction de la puissance injectée par l'équation 2.59. La puissance injectée est égale à la valeur unitaire de $1W/m^2$.

En se plaçant dans le cas du régime harmonique stationnaire, le bilan de puissance décrit par l'équation 2.74 sera donné par :

$$-c_g^2 \Delta W + (\eta\omega)^2 W = 0 \tag{3.30}$$

η étant l'amortissement de la plaque dont la valeur choisie vaut 0.001 et c_g la vitesse de groupe donnée dans le cas des plaques par la formule suivante :

$$c_g = 2\omega \sqrt[4]{\frac{\rho_s h \omega^2}{D}} \tag{3.31}$$

Le problème cinématique à résoudre correspondant à ce bilan énergétique et utilisé lors de l'exportation des données éléments finis (à partir du modèle développé par Comsol) est le suivant :

$$D\Delta^2 v - \rho_s h \omega^2 v = 0 \tag{3.32}$$

avec v est le déplacement de la plaque suivant l'axe vertical.

Les données de la densité d'énergie W exportées sont alors déterminées par l'équation suivante :

$$W = \frac{1}{4}\rho_s h \omega^2 v v^* + \frac{1}{4} D \left[\left| \frac{d^2 v}{dx^2} \right|^2 + \left| \frac{d^2 v}{dy^2} \right|^2 + 2\nu \mathrm{Re}\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2 v^*}{dy^2} \right) + 2(1-\nu) \left| \frac{d^2 v}{dx dy} \right|^2 \right] \tag{3.33}$$

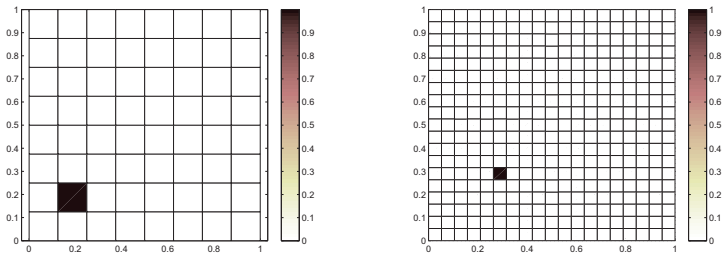
W ici est la densité d'énergie totale qui se présente comme la somme de l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p qui sont calculées dans le cas d'une plaque excitée en flexion par les deux équations suivantes :

$$E_c = \frac{1}{4}\rho_s h\omega^2 v v^* \tag{3.34}$$

$$E_p = \frac{1}{4}D\left[\left|\frac{d^2v}{dx^2}\right|^2 + \left|\frac{d^2v}{dy^2}\right|^2 + 2\nu Re\left(\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2v^*}{dy^2}\right) + 2(1-\nu)\left|\frac{d^2v}{dxdy}\right|^2\right] \tag{3.35}$$

3.4.3.1 | Simulation MES Intégrale Directe/MES Intégrale Inverse

La simulation MESID/MESII a pour but de valider l'inversion de $(S^T S)$. Les résultats de cette simulation trouvés pour différents nombres de facettes N_e égales au nombre de mesures effectuées m sont regroupés dans la figure 3.4.2.



(a) (b)

FIGURE 3.4.2 – Simulation MESID/MESII pour $N_e = 64$ (a) et $N_e = 361$ (b)

Nous identifions parfaitement la source dans les deux cas pour $N_e = 64$ et $N_e = 361$. Le bon endroit de la sources est trouvé tout en augmentant la discrétisation. En effet, aussi bien que la source a été localisée au bon endroit, elle a été parfaitement quantifiée en trouvant la valeur exacte de départ de la puissance injectée qui est égale à $1W/m^2$.
Ces résultats valident bien l'inversion de $(S^T S)$ et par la suite la formulation de la MES Intégrale Inverse.

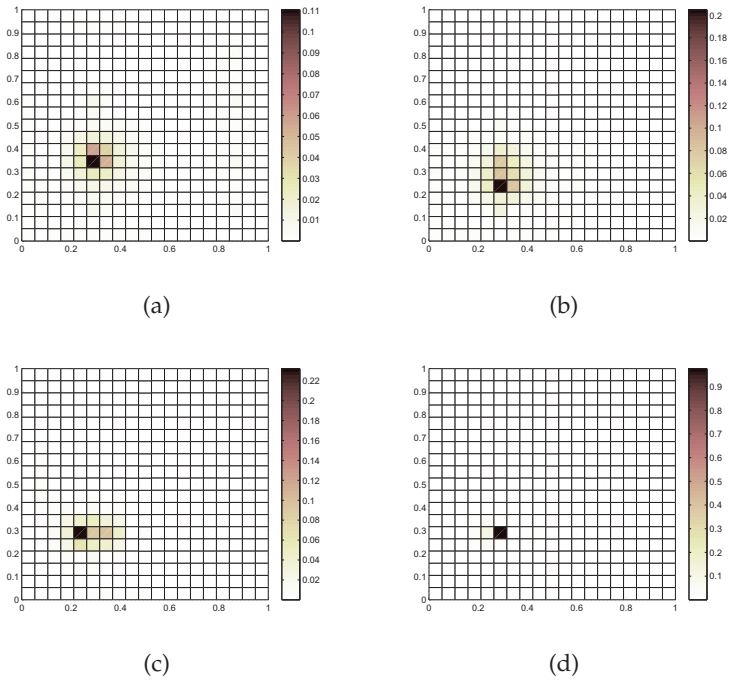
Voyons maintenant l'influence du nombre de mesures m sur le résultat trouvé. Pour cela nous effectuerons des simulations en variant m tout en restant inférieur à N_e; dans un premier lieu en répartissant uniformément les points de mesures sur la plaque, et dans un deuxième lieu en restant loin de la source.

a) Effet de la variation de *m* sur la simulation MESID/MESII en répartissant uniformément les points de mesures sur la plaque

Pour voir l'effet de la variation de m, nous refaisons la simulation MESID/MESII tout en

changeant le nombre des mesures ainsi que la répartition des points de mesures qui restent uniformement répartis sur la surface de la plaque. Utilisons ainsi le facteur ξ, déjà défini par l'équation 3.6 caractérisant l'efficacité de la méthode.

La figure 3.4.3 regroupe les résultats de la MESID/MESII trouvés pour une plaque discrétisé en 361 facettes et pour des capteurs répartis uniformément sur la plaque et dont leur nombre augmente tout en restant inférieur au nombre de facettes N_e.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.4.3 – Simulation MESID/MESII pour $\xi = 0.022$ (a), $\xi = 0.07$ (b), $\xi = 0.5$ (c) et $\xi = 0.75$ (d)

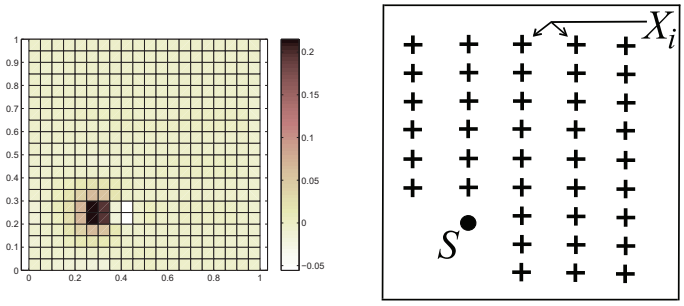
Il apparaît que le fait de diminuer le nombre de points de mesures m n'influe pas sur la localisation de la source. En effet, la simulation MESID/MESII pour $(\xi = 0.022)$ montre que l'emplacement de la source a été bien déterminé. Cependant, la valeur trouvée de la puissance injectée reste loin de la valeur exacte qui est égale à $1W/m^2$. La quantification s'améliore tout en augmentant le nombre de capteurs et en se rapprochant de $m = N_e$.

Ces résultats montrent que la MES Intégrale est beaucoup plus fiable que la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte concernant l'influence de la réduction de l'information sur la répartition de la densité d'énergie dans les structures bidimensionnelles.

b) Effet de la variation de *m* sur la simulation MESID/MESII en répartissant les points de mesures loin de la source

Pour voir l'effet de répartir les capteurs loin de la source tout en diminuant leur nombre, des simulations MESID/MESII ont été faites dont la figure 3.4.4 illustre une parmi elles. Elle

donne simultanément la répartition des capteurs sur la surface de la plaque (figure 3.4.4 (b)) ainsi que le résultat de la simulation (figure 3.4.4 (a)).



(a) (b)

FIGURE 3.4.4 – Simulation MESID/MESII pour $\xi = 0.11$ (a) et répartition des capteurs (b)

X_i présente l'emplacement du capteur i et S est la source appliquée.

Il apparaît donc qu'en éloignant les microphones de la source et en diminuant leur nombre m, nous pourrons bien localiser notre source et que la quantification de la valeur de la puissance injectée s'améliore au fur et à mesure que nous ajoutons des microphones.

Ces résultats montrent que la MES Intégrale est encore plus fiable que la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte concernant l'influence du manque de l'information sur la répartition de la densité d'énergie autour de la source dans les structures bidimensionnelles.

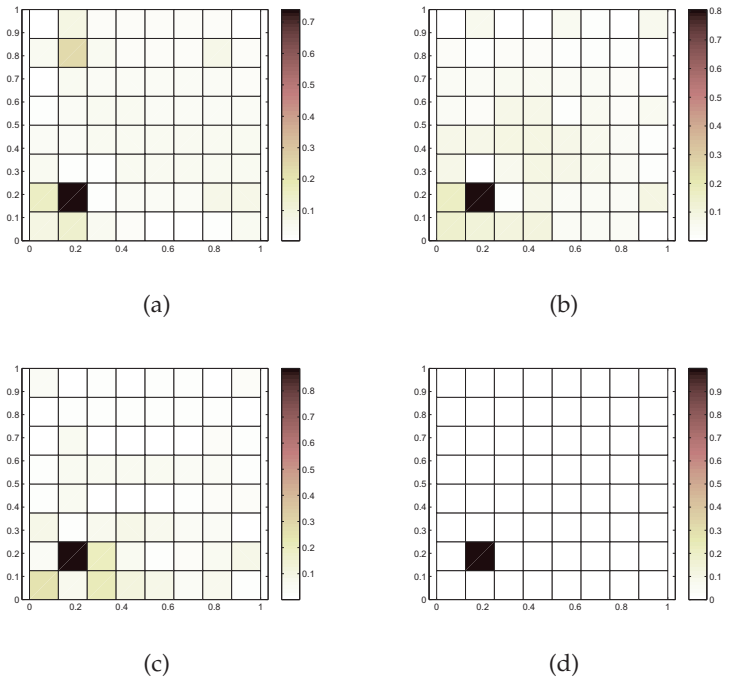
3.4.3.2 | Simulation FEM/MESII

Après la validation de l'inversion de $(S^T S)$ dans la formulation de la MES Intégrale Inverse, nous cherchons dans cette section à valider la méthode énergétique simplifiée inverse en alimentant sa formulation par des données récupérées par un logiciel éléments finis.
En effet, le même modèle de la plaque est modélisé sous COMSOL que l'on excite sur le même point d'application (Voir figure 3.4.1) avec la même valeur de la puissance injectée unitaire.
Nous exportons ainsi les valeurs de la densité d'énergie W données par l'équation 3.33 pour les facettes considérées vers la formulation de la MESII qui permet par la suite d'identifier la source de départ.

Les données récupérées pour les points de calculs choisis par le logiciel éléments finis seront moyennées autour de la fréquence centrale en utilisant la formule de l'équation 3.4.

a) Effet de la variation de *m* sur la simulation FEM/MESII en répartissant uniformément les points de mesures sur la plaque

Plusieurs simulations FEM/MESII réalisées pour $N_e = 64$ et pour différents nombres du facteur ξ avec des points de mesures (capteurs) répartis uniformément sur la surface de la plaque sont données par la figure 3.4.5.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.4.5 – Simulations FEM/MESII pour $\xi = 0.06$ (a), $\xi = 0.14$ (b), $\xi = 0.5$ (c) et $\xi = 1$ (d)

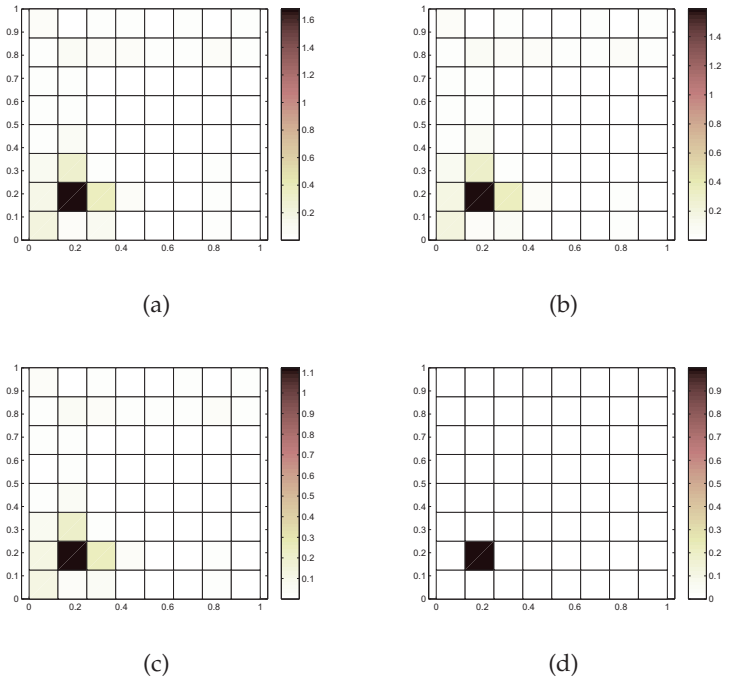
Ces résultats montrent la localisation parfaite de la source quel que soit le nombre de capteurs utilisés et répartis uniformément sur la plaque.
La quantification s'améliore et la valeur de la puissance injectée ρ_{inj} trouvée s'approche de la valeur exacte au fur et à mesure que nous augmentons ξ dans la plage définie par $0 < \xi \leqslant 1$.

Il apparaît d'après ces résultats l'insensibilité de la MES Intégrale Inverse même en cas de grand manque des données d'entrées définies par la répartition uniforme des capteurs dans la surface de la plaque pour une simulation FEM/MESII. La MES Intégrale est alors plus fiable que la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte après une réduction des capteurs.

b) Effet de la variation de la fréquence centrale f_c sur la simulation FEM/MESII

Dans cette partie, nous étudions l'influence de la plage fréquentielle choisie. Pour cela, nous répétons des simulations FEM/MESII en variant cette plage d'étude qui correspond pour chaque résultat à une fréquence centrale bien précise.

Les résultats trouvés pour $\xi = 1$ et pour différentes valeurs de la fréquence centrale f_c sont donnés par la figure 3.4.6.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.4.6 – Simulations FEM/MESII pour $f_c = 800$Hz (a), $f_c = 900$Hz (b), $f_c = 920$Hz (c) et $f_c = 950$Hz (d)

Ces résultats montrent qu'à partir de $f_c = 950$Hz, la MES Intégrale sera efficace pour identifier la source d'où la validation de cette méthode pour les moyennes et hautes fréquences.
En comparant ces résultats avec ceux trouvés pour la MES Différentielle et MES Différentielle Mixte, ils nous montrent que la MES Intégrale est bien meilleure du point de vue identification de la source permettant l'identification parfaite dès les moyennes fréquences.

Pour valider le choix de la fréquence centrale, nous avons utilisé un terme de précision caractérisant la localisation de la source défini par Pr_L et donné par l'équation suivante :

$$Pr_L = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} (\rho_i - \rho_i^{exact})^2}{N_e} \tag{3.36}$$

avec ρ_i est la $i^{ème}$ composante du vecteur de puissance injectée et ρ_i^{exact} est la $i^{ème}$ composante du vecteur de puissance injectée exacte.

La courbe 3.4.7 représente l'évolution de ce terme de précision en fonction de la fréquence centrale f_c. Nous remarquons d'après cette courbe que nous pouvons trouver une bonne identification de la source à partir de $f_c \geqslant 950$Hz.

En effet, à partir de $f_c = 950Hz$, le terme de précision Pr_L se stabilise autour d'une faible valeur d'erreur entre les puissances exactes et les puissances trouvées.

Il apparait clairement que pour les basses fréquences, la méthode proposée n'est capable que de localiser les sources. Nous choisissons dans ce qui suit la valeur de fréquence centrale $f_c = 950Hz$.

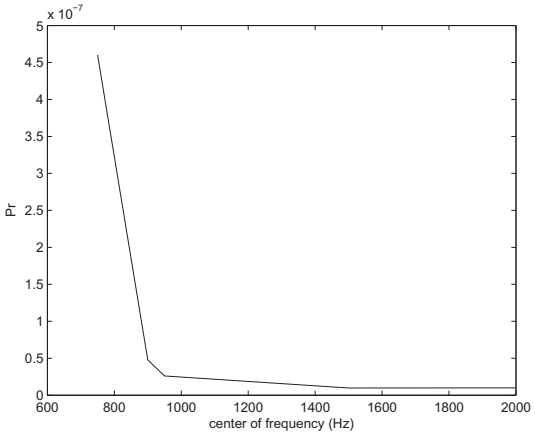


FIGURE 3.4.7 – Sensibilité de la localisation de la source en variant f_c

3.4.3.3 Effet de la discrétisation spatiale (capteurs répartis autour de la source)

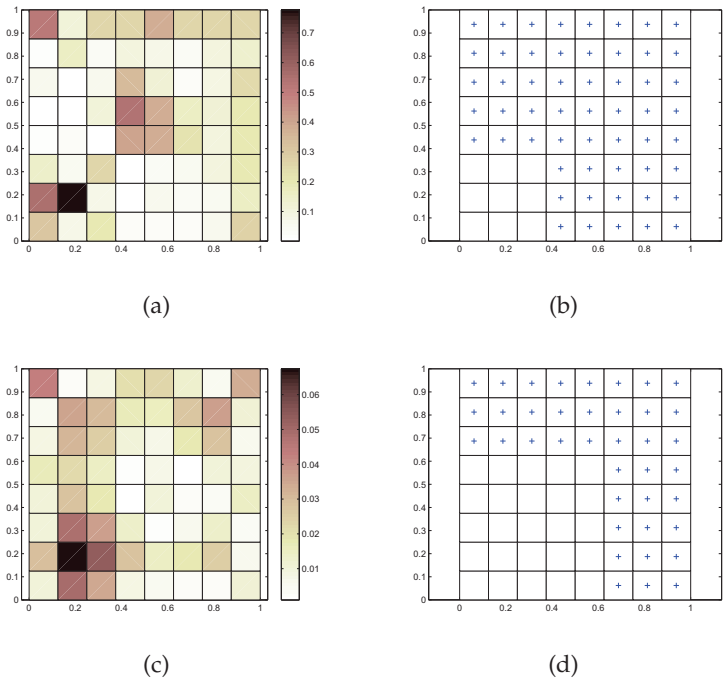
Dans ce sous chapitre, nous cherchons à valider la MES Intégrale lorsque les capteurs sont répartis autour et loin de la source. En effet, ces capteurs sont distribués uniformément autour de la source et les résultats trouvés pour des simulations FEM/MESII ainsi que la répartition correspondante des capteurs sur la plaque pour $m = 55$ et $m = 39$ sont donnés par la figure 3.4.8.

La source est bien localisée mais la valeur obtenue de la puissance injectée est différente de la valeur exacte à cause du manque de capteurs proches de la source.
En utilisant la formulation Intégrale de la MES, nous pouvons alors trouver le bon endroit de la source en limitant le nombre de mesures et en distribuant les capteurs loin de la source.

Enfin, il apparaît que la MES Intégrale est plus fiable pour le cas structure en la comparant avec la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte.

3.4.3.4 Effet des composants constituant la densité d'énergie *W*

La densité d'énergie totale comme décrite dans l'équation 2.5 est calculée par la somme de l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p dite aussi énergie de déformation. Ces deux énergies sont données respectivement par les équations 2.1 et 2.2 ainsi que les équations 2.3 et 2.4.
Jusqu'à maintenant et pour alimenter la MES Inverse par les données FEM de la répartition



(a) (b)

(c) (d)

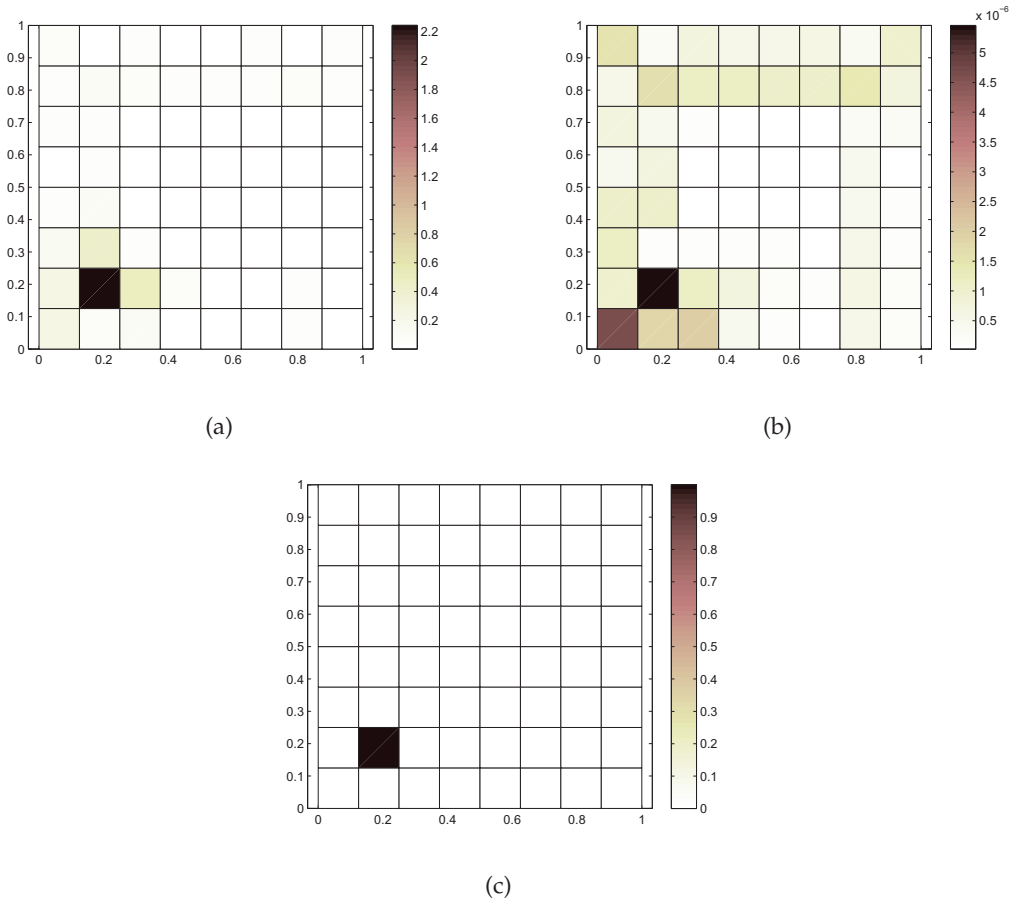
FIGURE 3.4.8 – Simulations FEM/MESII et distribution des capteurs pour $m = 55$ ((a) et (b)) et $m = 39$ ((c) et (d))

de W dans le système utilisé, nous avons constitué classiquement W par la somme de E_c et E_p suivant $W =< E_c + E_p >$.

Nous étudions dans ce qui suit le fait d'utiliser seulement l'énergie cinétique ou l'énergie potentielle pour constituer l'énergie totale. Pour cela, nous alimentons dans deux simulations différentes la densité d'énergie par le double de l'énergie cinétique suivant $W =< 2E_c >$ pour la première ou par le double de l'énergie potentielle suivant $W =< 2E_p >$ pour la deuxième.

La figure 3.4.9 illustre ainsi les trois cas d'alimentation de la densité d'énergie avec E_c et/ou E_p.
Ces résultats permettent de remarquer que E_p est néligeable devant E_c. En effet, le fait d'alimenter MESI Inverse avec $W =< 2E_p >$ (figure 3.4.9 (b)) nous permet de localiser la source mais la valeur de la puissance trouvée reste négligeable devant la valeur unitaire recherchée. Cependant, E_c constitue la part la plus constituante de W, le fait d'alimenter alors MESI Inverse avec $W =< 2E_c >$ (figure 3.4.9 (a)) nous permet de localiser la source et trouver une valeur de puissance injectée égale au double de la valeur unitaire recherchée.

Nous gardons dans ce qui suit l'alimentation de la Méthode Energétique Simplifiée par des données de densité d'énergie déterminées par la somme des deux énergies cinétique et potentielle d'après $W =< E_c + E_p >$



(a) (b)

(c)

FIGURE 3.4.9 – Simulations FEM/MESII pour $W =< 2E_c >$ (a), $W =< 2E_p >$ (b) et $W =< E_c + E_p >$ (c)

3.5 Comparaison MES/SEA

La SEA (Statistical Energy Method) est la méthode mère de la classe des méthodes énergétiques parmi elles se situe notre méthode MES. Une étude comparative des résultats trouvés utilisant séparément ces deux méthodes est faite pour montrer l'efficacité de la MES dans la classe des moyennes et hautes fréquences.

Pour appliquer la SEA, le système à étudier doit être considéré comme formé d'un nombre restreint de sous-systèmes caractérisés par des coefficients d'amortissement et de couplage. La formulation de la SEA déterminée par l'équation 1.78 développe alors le même modèle de la plaque subdivisée en sous-systèmes couplés tout en analysant les énergies stockées et échangées.
L'équation 3.37 représente le bilan des échanges d'énergie entre les sous-systèmes.

$$P_{i,inj} = P_{i,diss} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} P_{ij} \tag{3.37}$$

où $P_{i,inj}$ est la puissance injectée sur le sous-système i, $P_{i,diss}$ est la puissance dissipée par le sous système i et P_{ij} est la puissance transmise du sous-système i vers le sous-système j.

Les grandeurs caractéristiques de la SEA données par les formules 3.38, 3.39 et 3.40 représentent respectivement la puissance transmise, la puissance dissipée et la relation de réciprocité.

$$P_{ij} = \omega\eta_{ij} n_i \left(\frac{E_i}{n_i} - \frac{E_j}{n_j}\right) \tag{3.38}$$

$$P_{diss} = \omega\eta_i E_i \tag{3.39}$$

$$\eta_{ij} n_i = \eta_{ji} n_j \tag{3.40}$$

où η_i est le facteur de perte interne par amortissement du sous-système i, η_{ij} est le facteur de perte par couplage du sous-système i vers le sous-système j, n_i est la densité modale du sous-système i et E_i est l'énergie totale du sous-système i.

En exprimant l'équilibre énergétique des N sous-systèmes, dans une bande fréquentielle Δf, nous obtenons alors le système d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} P_{1,inj} \\ P_{2,inj} \\ \vdots \\ P_{N,inj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{11} & -\eta_{21} & \dots & -\eta_{N1} \\ -\eta_{12} & \eta_{22} & \dots & -\eta_{N2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1N} & -\eta_{N2} & \dots & \eta_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega E_1 \\ \omega E_2 \\ \vdots \\ \omega E_N \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

avec $\eta_{ii} = \eta_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \eta_{ij}$

Pour atteindre notre but de comparer les résultats SEA avec celles de la MES, nous définissons un modèle de $(N \times N)$ plaques couplées horizentalement permettant de trouver le même modèle discrétisé en MES. $(N \times N)$ définit le nombre de facettes en MES et le nombre de plaques couplées en SEA.
Le facteur de perte interne d'une plaque est égal à son coefficient d'amortissement.
Le facteur de perte par couplage entre deux plaques est déterminé par la formule suivante :

$$\eta_{ij} = \frac{c_g L_{ij}}{\pi\omega S_i}\tau_{ij} \tag{3.42}$$

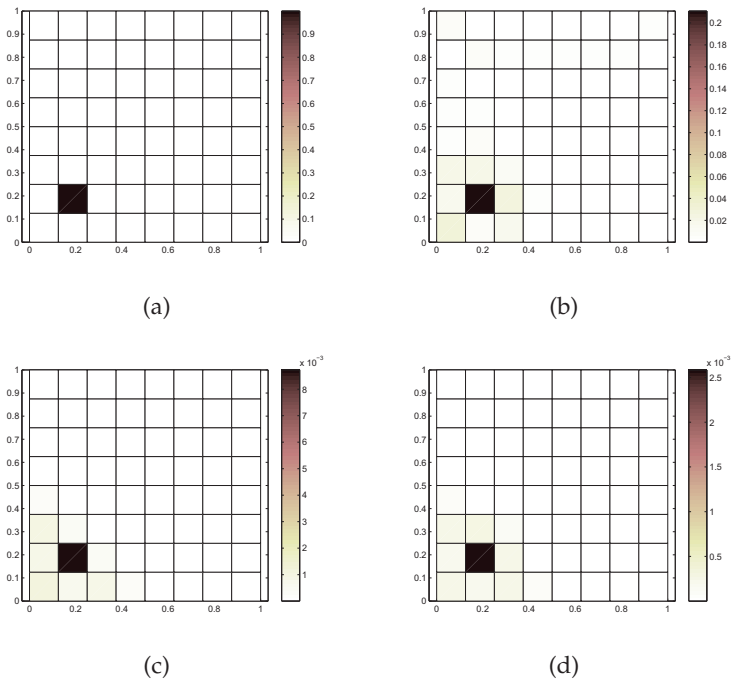
où L_{ij} est la longueur de la jonction séparant les deux plaques, S_i est la surface de la $i^{ème}$ plaque, τ_{ij} est le facteur de rotation entre les deux plaques qui est égale à 1 puisque elles

sont horizontales et c_g est la vitesse de groupe déterminée par :

$$c_g = 2\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{Eh^3}{12\rho h(1-\nu^2)}} \tag{3.43}$$

La SEA Inverse nous permet alors de calculer les puissances injectées à partir des énergies des sous-systèmes, des facteurs de perte interne et par couplage.

Les figures 3.5.1 et 3.5.2 représentent la variation de l'identification de la source en modifiant la valeur de l'amortissement η successivement pour des simulations FEM / MESI et FEM / SEAI.



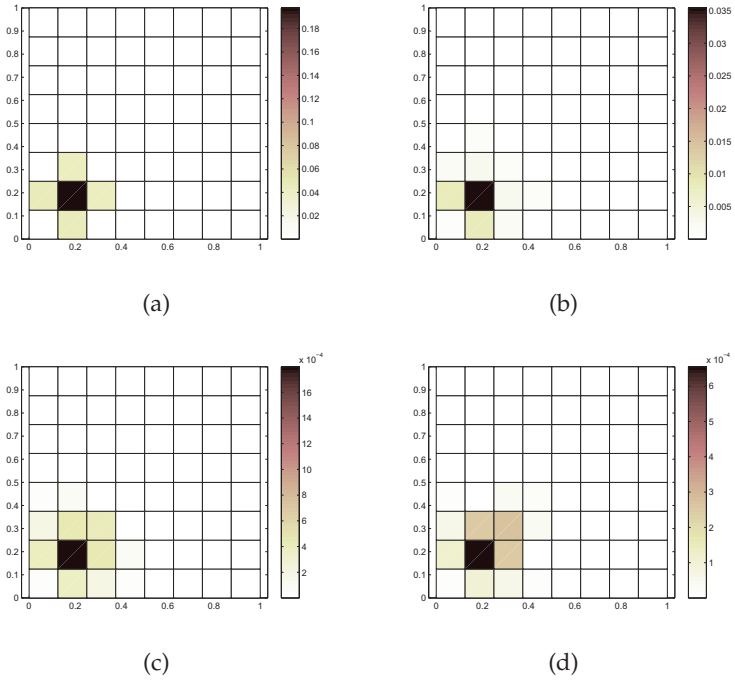
(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.5.1 – Simulations FEM/MESI pour $\eta = 0.001$ (a), $\eta = 0.01$ (b), $\eta = 0.1$ (c) et $\eta = 0.2$ (d)

Pour les deux types de simulations, le bon endroit de la source est très bien trouvé ce qui montre une bonne localisation. Par contre, la valeur obtenue de la puissance injectée ρ^{inj} sera de plus en plus loin de la valeur exact ρ^{exacte} lorsqu'on augmente la valeur de l'amortissement η.
Il apparaît en plus qu'à basses valeurs de l'amortissement η, la quantification de la valeur de la puissance injectée est meilleure en utilisant la MES. En effet, la valeur trouvée de la puissance injectée est plus proche de la valeur réelle pour le cas MES que pour le cas SEA.

Pour caractériser la sensibilité de la localisation, nous utilisons le même terme de localisation donné par l'équation 3.36. Ainsi pour caractériser la sensibilité de la quantification,



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.5.2 – Simulations FEM/SEAI pour $\eta = 0.001$ (a), $\eta = 0.01$ (b), $\eta = 0.1$ (c) et $\eta = 0.2$ (d)

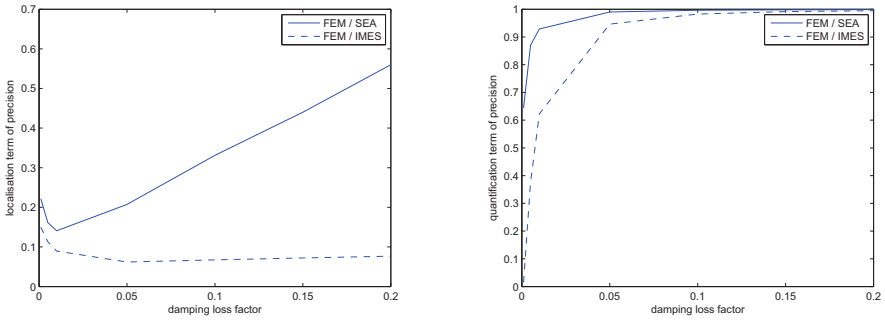
nous utilisons un autre terme défini par Pr_Q et donné par l'équation suivante :

$$Pr_Q = (\rho_{source} - \rho_{source}^{exacte})^2 \tag{3.44}$$

D'après les figures 3.5.3(a) et 3.5.3(b) qui représentent l'évolution de ces deux critères de sensibilité en fonction du facteur d'amortissement pour les deux simulations FEM / MESI et FEM / SEAI, nous pouvons conclure que pour la localisation ainsi que pour la quantification, la courbe représentative de l'évolution pour FEM / MESI est toujours au dessous de celle obtenue pour FEM / SEAI ce qui montre que la MES est plus efficace que la SEA pour l'identification d'une source sur une plaque.

Il apparaît aussi que la courbe d'évolution du terme de localisation pour FEM / MESI est plus stable en variant η que celle obtenue pour FEM / SEAI dans laquelle ce terme de précision augmente en augmentant η.
Pour les courbes représentatives de l'évolution du terme de quantification pour FEM / MESI et FEM / SEAI, nous pouvons noter que les bons résultats sont obtenus pour des faibles valeurs de η.

Finalement et pour résumer, il apparaît que l'utilisation de la MES est plus fiable que l'utilisation de la SEA pour identifier les sources dans le cas 2D et pour des moyennes et hautes fréquences.



(a) (b)

FIGURE 3.5.3 – Evolution des termes de localisation (a) et de quantification (b) en variant l'amortissement pour FEM/MESI et FEM/SEAI

3.6 Comparaison MES/RIFF

La méthode RIFF "Résolution Inverse Filtrée et Fenêtrée" permettant de trouver la distribution de la force d'excitation à travers les données de vibration de la structure est utilisée dans la classe des hautes fréquences. En effet, cette méthode a montré sa performance pour les hautes fréquences et pour le cas des plaques [3].

La même configuration de la plaque donnée par la figure 3.4.1 et utilisée pour la MES est considérée. La plaque est toujours excitée en un point de coordonnées $(x_S, y_S) = (0.25, 0.25)$ par une force ponctuelle notée F_e. La plaque carrée est simplement supportée sur ses quatre bords.

On note $w(x, y)$ le déplacement transversal de la plaque et le problème à résoudre est défini en tenant compte de l'équation 1.61 par :

$$D\Delta^2 w(x, y) - \rho\omega^2 h w(x, y) = F(x, y) \tag{3.45}$$

La distribution de la force F peut être alors trouvée en connaissant le vecteur déplacement $w(x, y)$ et les trois dérivées spatiales $\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}$ et $\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}$ en utilisant l'équation 1.62 redéfinie comme suit :

$$D\left(\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right) - \rho\omega^2 h w(x, y) = F(x, y) \tag{3.46}$$

Les dérivées spatiales sont calculées à leur tour avec des développemments par un schéma aux différences finies puisque la méthode peut être utilisée localement dans des parties de la structure.
Le principe consiste à discrétiser la surface de la plaque par un maillage régulier dont les mesures sont appliquées sur les noeuds.
La méthode des différences finies employée permet l'approximation des dérivées spatiales

du déplacement w par un schéma aux différences finies centrées au points d'indices (i, j).

Les trois dérivées spatiales seront calculées comme suit :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \Rightarrow \delta^{4x}_{i,j} = \frac{1}{\Delta_x^4}(w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}) \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Rightarrow \delta^{4y}_{i,j} = \frac{1}{\Delta_y^4}(w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}) \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \Rightarrow \delta^{2x2y}_{i,j} = \frac{1}{\Delta_x^2 \Delta_y^2}(w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i,j-1} - 2w_{i,j+1} + 4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} + w_{i-1,j+1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j-1}) \tag{3.49}$$

où Δ_x et Δ_y sont les distances séparant deux points de la discrétisation dans les directions x et y, i et j sont les indices des points de discrétisation et $w_{i,j}$ est l'amplitude complexe du déplacement transversal au point d'indices (i, j).

En utilisant les déplacements de la structure, nous pouvons calculer la distribution de la force discrétisée à partir de l'équation 3.46.

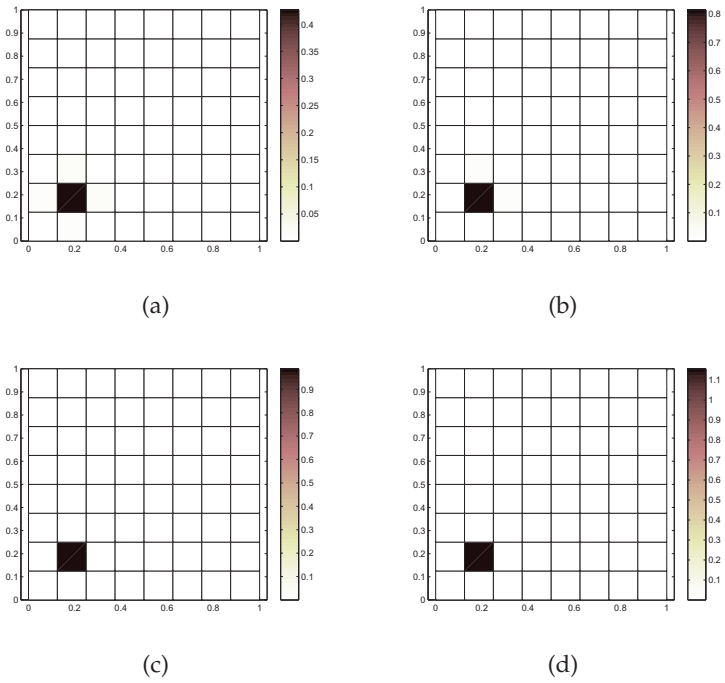
$$F_{i,j} = D(\delta^{4x}_{i,j} + \delta^{4y}_{i,j} + 2\delta^{2x2y}_{i,j}) - \rho\omega^2 h w_{i,j} \tag{3.50}$$

Le calcul de l'amplitude de la force distribuée nécessite la mesure des déplacements vibratoires dans 13 points de la plaque. En effet, lorsque la distribution de la force est calculée en proximité à un autre endroit proche, la plupart des déplacements mesurés peuvent être utilisés à nouveau.

Dans ce qui suit, nous alimentons la RIFF (équation 3.46) par des données de l'évolution du déplacement tranversal dans la plaque récupérées par le logiciel éléments finis avec le même modèle déjà utilisé pour valider la MES, et par les dérivées spatiales données par les formules 3.47, 3.48 et 3.49. C'est une simulation FEM / RIFF basée sur la méthode des différences finies.

La figure 3.6.1 représente la variation de l'identification de la force appliquée par des simulations FEM/RIFF en variant la valeur de la fréquence centrale f_c.

Il apparaît que l'identification s'améliore tout en augmentant f_c, elle est donc optimale pour $f_c = 2500$Hz.
Ces résultats valident l'efficacité de la méthode RIFF pour les hautes fréquences. Par contre, en se référant aux résultats donnés par la figure 3.4.6, la MES est efficace pour la classe des moyennes et hautes fréquences. Elle tend alors à élargir le champ d'efficacité des méthodes RIFF et SEA des hautes fréquences vers les moyennes et hautes fréquences.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 3.6.1 – Simulations FEM/RIFF pour $f_c = 950$Hz (a), $f_c = 2000$Hz (b), $f_c = 2500$Hz (c) et $f_c = 3000$Hz (d)

3.7 Conclusion

La Méthode Energétique Simplifiée Intégrale approuve dans ce chapitre nos attentes de permettre d'élargir la bande fréquentielle favorisant l'identification des sources dans le cas structure des hautes vers les hautes et moyennes fréquences.
En effet, cette approche intégrale a montré ses apports en termes de localisation et de quantification en la comparant aux approches antérieures de la MES telles que les approches différentielle et différentielle mixte. Elle permet en fait de baisser la valeur de la fréquence centrale optimale permettant l'identification parfaite des sources d'excitation.
En la comparant avec d'autres méthodes, elle permet de conclure qu'elle reste plus fiable que la méthode SEA en variant le facteur d'amortissement et qu'elle est plus commode que la méthode RIFF pour être utilisée dans la classe des moyennes et hautes fréquences.

La validation de l'utilisation de la Méthode Energétique Simplifiée et en particulier l'approche intégrale pour l'identification des sources dans le cas des plaques minces nous permet par la suite de passer à la validation de cette méthode dans le cas 3D.

Chapitre 4

MES Inverse 3D

4.1 Introduction

Les exemples de la propagation du bruit par voie aérienne dans des cabines sont multiples en industrie. Les deux cas les plus connus sont rencontrés en automobile et en aéronautique et sont décrits comme étant un bruit rayonné dans la cavité et engendré soit par une excitation surfacique localisée à la frontière soit par une excitation ponctuelle localisée dans le volume.
Nous passons alors dans ce chapitre à l'utilisation de la Méthode Energétique Simplifiée pour l'identification des sources dans les cavités acoustiques.

Les formulations inverses des différentes approches de la Méthode Energétique Simplifiée seront détaillées et représentées matriciellement.
Des résultats d'identification des sources utilisant soit la formulation directe soit les données éléments finis pour alimenter le problème inverse seront représentés pour chaque approche. Ces résultats permettent la validation de l'inversion de chaque méthode ainsi que le degré de fiabilité de chacune d'elle.
Une étude de robustesse de l'approche intégrale de la méthode sera par la suite mise en évidence en définissant les paramètres influants.
Enfin, cette approche intégrale qui nous intéresse le plus sera bien traitée en la validant dans différents cas d'excitations surfaciques et volumique et des études spatiales seront données pour voir l'influence de la diminution et de la répartition des points de mesures sur les résultats.

4.2 MES Différentielle Inverse

4.2.1 Formulation Inverse

La formulation inverse de la MES Différentielle dans le cas d'un système 3D se base sur le même bilan énergétique défini par l'équation 2.37 et donné comme suit :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W(M) + \eta\omega W(M) = \pi(M) \tag{4.1}$$

Comme le phénomène est d'origine visqueux (cavité remplie d'air), la dissipation est à relier à l'énergie cinétique. S'il est dû à l'hystérisie du matériau, c'est l'énergie potentielle qui intervient. En outre, en champ lointain, l'égalité des énergies cinétique et potentielle mène au même modèle 4.1.
Ce modèle est équivalent en acoustique à l'équation de transport suivante :

$$-\frac{c}{m}\Delta W(M) + mcW(M) = \pi(M) \tag{4.2}$$

Cette équation préférable à utiliser en acoustique est déterminée en connaissant le coefficient d'absorption atmosphérique m qui définit la quantité $\rho\beta_a$.
ρ est la masse volumique de l'air et β_a est le coefficient d'absorption.

La relation permettant donc le passage entre ce qu'on appelle l'aspect structure 4.1 du bilan énergétique et l'aspect acoustique 4.2 est définie par :

$$\eta\omega = mc \tag{4.3}$$

Il n'y a aucune différence à travailler avec le bilan 4.1 ou le bilan 4.2 puisque le coefficient d'absorption atmosphérique m dépend entre autres de la fréquence et de l'amortissement.

$$m = \rho\beta_a = \eta k \tag{4.4}$$

où k est le nombre d'ondes.

Suivant des données que nous avons, amortissement ou coefficient d'absorption, nous choisissons alors de travailler soit avec 4.2 ou 4.1.

Dans le cas tridimensionnel et en coordonnées cartésiennes, la MES Différentielle Inverse s'appuie sur le bilan 4.5 permettant de trouver le vecteur de la distribution de la puissance injectée Π à partir du vecteur W décrivant la répartition de la densité d'énergie.

$$\pi_{ijq} = -\frac{c^2}{\eta\omega}\left[\frac{\partial^2 W_{ijq}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ijq}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{ijq}}{\partial z^2}\right] + \eta\omega W_{ijq} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant i \leqslant n_X \\ 0 &\leqslant j \leqslant n_Y \\ 0 &\leqslant q \leqslant n_Z \end{aligned}$$

où n_X, n_Y et n_Z sont respectivement les nombres de capteurs répartis sur les points de mesure suivant x, y et z.

4.2.2 Résultats numériques

Nous présentons dans cette partie du chapitre les résultats numériques de l'application de la MES Différentielle Inverse dans le cas acoustique (tridimensionnel).
Nous commençons par la simulation MES Différentielle Directe / MES Différentielle Inverse pour valider l'inversion de la MES Différentielle et ensuite, nous passons à la simulation FEM / MESDI pour étudier la fiabilité de cette méthode en 3D.

4.2.2.1 MES Différentielle Directe / MES Différentielle Inverse

Le même modèle acoustique défini par une cavité acoustique excitée en un point de sa surface et donnée par la figure 2.4.5 est développé. Les caractéristiques et les dimensions données par le tableau 2.4.2 correspondant à la cavité utilisée dans le chapitre précédent sont maintenues.
La puissance injectée sur le point de coordonnées (0, 0.39 , 0.66) est toujours égale à la valeur unitaire de $1W/m^2$.
Nous choisissons dans ce qui suit une fréquence centrale $f_c = 950Hz$ qui correspond à l'octave fréquentielle caractérisant le domaine des moyennes fréquences. Le résultat donné par la figure 4.2.1 déterminé pour la valeur jugée parfaite dans le cas structure du coefficient d'amortissement $\eta = 0.001$ et calculé à travers l'équation 4.3 correspond à l'identification de la source appliquée pour une simulation MESDD/MESDI.

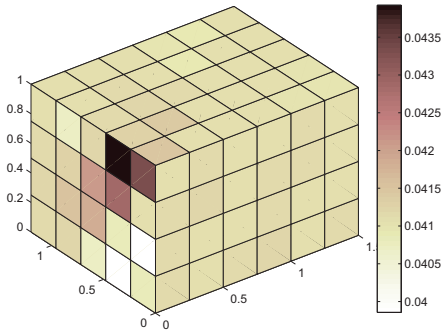
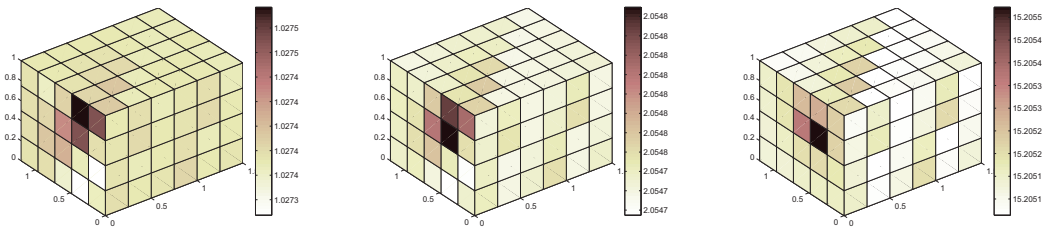


FIGURE 4.2.1 – Simulation MESDD/MESDI pour $\eta = 0.001$

La source trouvée est proche de celle que nous cherchons et la valeur trouvée de la puissance injectée est très inférieure à $1W/m^2$.

Nous cherchons par la suite la valeur de l'amortissement η optimale permettant l'identification de la source pour la MESDD/MESDI. La figure 4.2.2 regroupe différents résultats de la MESDD/MESDI pour différentes valeurs de η.

Nous tirons de ces figures qu'en augmentant la valeur de η, l'identification de la source s'améliore. La localisation de la source commence à être bonne à partir de $\eta = 0.37$.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.2.2 – Simulation MESDD/MESDI pour $\eta = 0.025$ (a), $\eta = 0.05$ (b) et $\eta = 0.37$ (c)

4.2.2.2 FEM / MES Différentielle Inverse

Nous présentons ici la simulation FEM/MESDI. La formulation inverse de la MES Différentielle est alimentée par les données récupérées du modèle de la cavité développé sur le logiciel éléments finis.
Les points de mesures correspondants aux emplacements des capteurs sont répartis uniformément sur la surface d'un petit cube se trouvant à l'intérieur de notre cavité (Voir figure 4.2.3). Chaque surface du cube est distante d'une distance d de la surface correspondante de la cavité. L'écartement entre les microphones est défini par e.

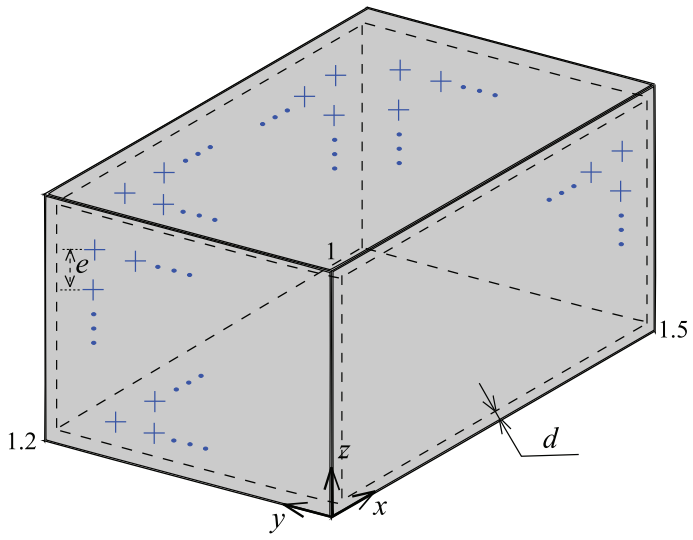
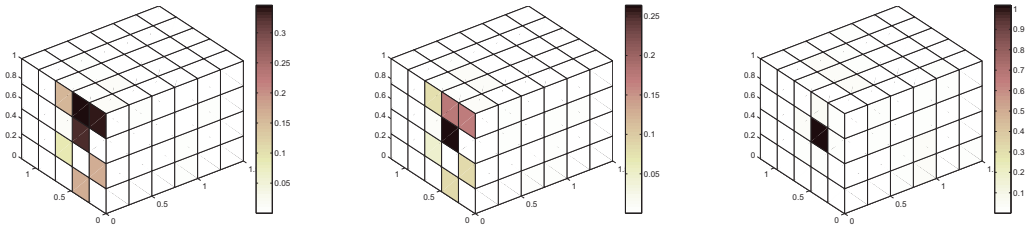


FIGURE 4.2.3 – Répartition des points de mesure dans le volume de la cavité

Nous choisissons dans ce qui suit les valeurs de $d = 10mm$ et $\xi = 1$. Différentes simulations FEM/MESDI sont faites pour différentes valeurs de η et elles sont regroupées dans la figure 4.2.4.

L'identification parfaite de la source en alimentant la MES Différentielle Inverse par des données éléments finis est obtenue pour $\eta = 0.37$.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.2.4 – Simulation FEM/MESDI pour $\eta = 0.025$ (a), $\eta = 0.05$ (b) et $\eta = 0.37$ (c)

Nous tirons alors que la MES Différentielle est fiable pour les grands facteurs d'amortissement dans le cas tridimensionnel.

4.3 MES Différentielle Mixte Inverse

4.3.1 Formulation Inverse

Comme pour le cas structure, la MES Différentielle Mixte se base dans le cas présent de la cavité acoustique injectée sur la sommation des deux champs réverbéré et direct.
Ces deux champs sont déterminés respectivement par l'équation du problème discret 2.67 passant par le problème à résoudre du bilan 2.65 et par l'équation 2.62 redéfinies (en 3D pour 2.62) ci-dessous par :

$$(K + Q)W^{rev} = B \tag{4.6}$$

$$W^{dir}(r) = \frac{\pi_{inj}}{4\pi c}\frac{e^{-\frac{\eta\omega}{c}r}}{r^2} \tag{4.7}$$

Le champ total est par la suite calculé en sommant les densités d'énergie directe et réverbérée :

$$W(M) = W^{dir}(M) + W^{rev}(M) \tag{4.8}$$

Une fois le vecteur champ total avec toutes ses composantes W_{ijq} déterminé, nous l'introduisons dans l'équation 4.5 déjà définie pour la MES Différentielle et redonnée par :

$$\pi_{ijq} = -\frac{c^2}{\eta\omega}\left[\frac{\partial^2 W_{ijq}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_{ijq}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_{ijq}}{\partial z^2}\right] + \eta\omega W_{ijq} \tag{4.9}$$

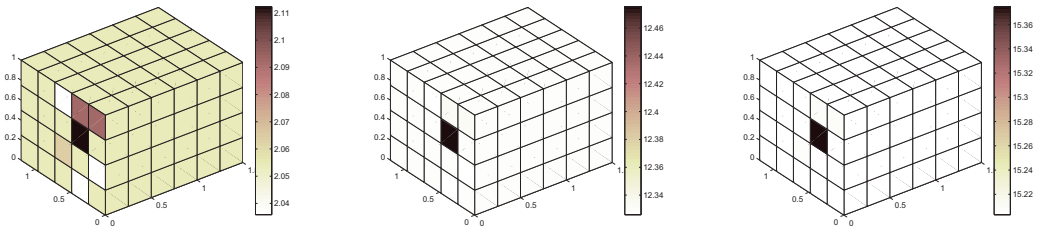
$$\begin{aligned} 1 &\leqslant i \leqslant n_X \\ 0 &\leqslant j \leqslant n_Y \\ 0 &\leqslant q \leqslant n_Z \end{aligned}$$

4.3.2 Résultats numériques

Comme pour la MES Différentielle Inverse, nous présentons dans cette partie les résultats de l'utilisation de la MES Différentielle Mixte Inverse pour le cas 3D.
De même, nous commençons à présenter la simulation MES Différentielle Mixte Directe / MES Différentielle Mixte Inverse et valider l'inversion de la MES Différentielle Mixte. Ensuite, nous passons à la simulation FEM / MESDMI pour étudier la fiabilité de cette méthode en 3D.

4.3.2.1 MES Différentielle Mixte Directe / MES Différentielle Mixte Inverse

La simulation appelée MESDMD/MESDMI est caractérisée par l'alimention du bilan 4.9 de la MES Différentielle Mixte Inverse par des données récupérées du champ total 4.8.
Restons avec la même cavité excitée sur le point de coordonnées (0, 0.39, 0.66), les simulations MESDMD/MESDMI appliquées pour différentes valeurs de η sont données dans la figure 4.3.1.



(a) (b) (c)

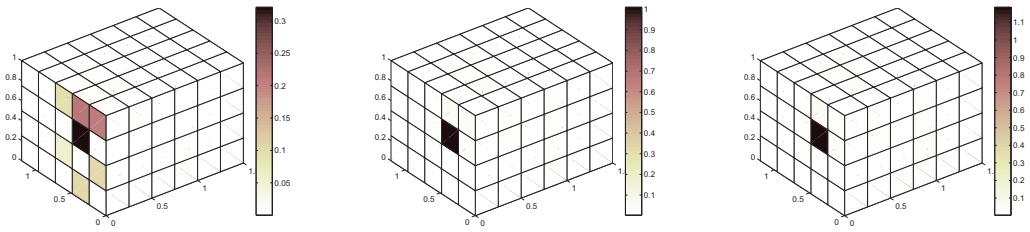
FIGURE 4.3.1 – Simulation MESDMD/MESDMI pour $\eta = 0.05$ (a), $\eta = 0.3$ (b) et $\eta = 0.37$ (c)

Il apparaît qu'en comparant les résultats de la variation de η obtenus pour la MES Différentielle avec ceux de la MES Différentielle Mixte alimentés par des données MES, la valeur de l'amortissement η permettant la localisation de la source a baissé de 0.37 en MES Différentielle à 0.3 en MES Différentielle Mixte. L'identification de la source est légèrement améliorée.

4.3.2.2 FEM / MES Différentielle Mixte Inverse

Nous alimentons dans cette partie la MES Différentielle Mixte Inverse par les données récupérées du modèle de la cavité développé par le logiciel éléments finis. Nous verrons dans ce qui suit si nous obtenons des résultats MES Différentielle Mixte meilleurs que la MES Différentielle dans le cas de la cavité. Pour cela, nous avons multiplié les simulations FEM/MESDMI pour différentes valeurs de η afin de faire la comparaison. Ces résultats sont présentés dans la figure 4.3.2.

Il apparaît que l'identification pour la MES Différentielle Mixte s'améliore pour les différentes valeurs de η par rapport à la MES Différentielle. En plus, la valeur minimale de l'amortissement $\eta = 0.3$ permettant la bonne localisation de la source trouvée dans la partie



(a) (b) (c)

FIGURE 4.3.2 – Simulation FEM/MESDMI pour $\eta = 0.05$ (a), $\eta = 0.3$ (b) et $\eta = 0.37$ (c)

précédente est la même permettant l'identification parfaite de la source en alimentant la MES Différentielle Mixte par les données FEM.
Finalement, la MES Différentielle Mixte apporte une légère amélioration des résultats de l'identification de la source dans le cas d'une cavité acoustique (3D).

4.4 MES Intégrale Inverse

4.4.1 Formulation inverse

Nous définissons la matrice T de taille (N_e, N_e) comme étant la matrice d'interaction géométrique entre différentes facettes de la cavité. Elle est déterminée en se référant à la figure 4.4.1 et en tenant compte de la distance r_{ij} séparant deux facettes par la formule suivante :

$$T_{ij} = \frac{1}{S_j} \int\int_{S_i} \int\int_{S_j} \frac{dir(\theta_i)\cos\theta_j}{r_{ij}^2} dP_i dP_j \tag{4.10}$$

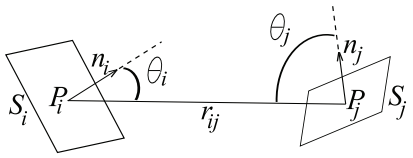


FIGURE 4.4.1 – Interaction facette/facette

Le principe de conservation de l'énergie implique que les termes de la matrice T doivent vérifier les égalités suivantes :

$$\sum_{j=1}^{N_e} T_{ij} = 1 \ \forall \ i \tag{4.11}$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} \frac{S_i}{S_j} T_{ij} = 1 \ \forall \ j \tag{4.12}$$

Nous définissons aussi la matrice diagonale d'absorption $[A]$ par :

$$A_{ij} = \delta_{ij}\alpha_i \tag{4.13}$$

avec δ_{ij} est la matrice identité.

L'équation 2.84 s'écrit par la suite en N_e équations qui peuvent être exprimées matriciellement par :

$$M\sigma = B \tag{4.14}$$

Les matrices M et B sont données par les formules suivantes :

$$M = Id - (Id - A)T \tag{4.15}$$

$$B = (Id - A)T\rho^{inj} \tag{4.16}$$

Nous déterminons par la suite le vecteur des composantes des puissances réverbérées σ en fonction des champs de puissance injectée par :

$$\sigma = M^{-1}B = M^{-1}(Id - A)T\rho^{inj} \tag{4.17}$$

Pour la suite et en se référant à la figure 4.4.2, nous définissons les matrices d'interférence géométrique Y^W et Y^I déterminées respectivement pour la densité d'énergie W et la densité de puissance I entre les m points récepteurs et les N_e facettes.

$$Y^W_{ij} = \frac{1}{c_0}\int\int_{S_j} \frac{dir(\theta_j)}{r^2_{ij}} dP_j \tag{4.18}$$

$$\vec{Y}^I_{ij} = \int\int_{S_j} \frac{dir(\theta_j)}{r^2_{ij}} \vec{u}_r dP_j \tag{4.19}$$

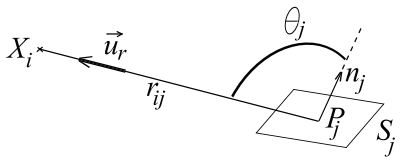


FIGURE 4.4.2 – Interaction point récepteur/facette

avec X_i est la mesure du $i^{ème}$ récepteur.

Considérant les équations 2.80, 2.81, 2.82, 2.83 et 4.17, les matrices W et I sont obtenues par :

$$W = S^W\rho^{inj} = Y^W\rho^{inj} + Y^W\sigma \tag{4.20}$$

$$I = S^I \rho^{inj} = Y^I \rho^{inj} + Y^I \sigma \tag{4.21}$$

où les matrices S^W et S^I sont données par:

$$S^W = Y^W[Id + M^{-1}(Id - A)T] \tag{4.22}$$

$$S^I = Y^I[Id + M^{-1}(Id - A)T] \tag{4.23}$$

Nous notons $y = (W, \vec{I})^T$ le vecteur rassemblant les valeurs de champ et $S = (S^W, S^I)^T$ la matrice de taille $(2.m \times N_e)$ rassemblant les opérateurs de sensibilité et définissant l'opérateur $\mathcal{F}$.

Finalement, W et I peuvent être exprimées en résolvant l'équation suivante :

$$y = \mathcal{F}(\rho^{inj}, \sigma) \tag{4.24}$$

La formulation de la MES Intégrale Inverse a pour but d'inverser l'opérateur $\mathcal{F}$ proposé par l'équation 4.24. Nous cherchons alors à identifier les sources grâce aux mesures effectuées sur le système considéré de la cavité acoustique.
Puisque le nombre de mesures est en général différent du nombre d'éléments, le problème n'est pas directement inversible. Nous cherchons alors à trouver un opérateur $\mathcal{G}$ qui donne les puissances ρ^{inj} et σ en fonction de W et I.

$$(\rho^{inj}, \sigma) = \mathcal{G}\left(W, \vec{I}\right) \tag{4.25}$$

Cet opérateur est choisi comme étant la pseudo-inverse de la matrice S.

$$\mathcal{G} = \left(S^T S\right)^{-1} S^T \tag{4.26}$$

Nous introduisons maintenant la quantité R dont sa minimisation sera notre but. Cette quantité est définie par :

$$R = \left\| \left(W, \vec{I}\right) - \mathcal{F} o \mathcal{G}\left(W, \vec{I}\right) \right\| \tag{4.27}$$

4.4.2 Problème étudié

Dans le cas des problèmes à trois dimensions, les deux types d'excitation utilisant des sources volumiques et/ou des sources surfaciques peuvent être étudiés. L'équation 4.20 sera discrétisée donnant la formulation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1k} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{m1} & V_{m2} & \dots & V_{mk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_q \end{Bmatrix} \tag{4.28}$$

où m est le nombre de mesures, k est le nombre de sources volumiques et q est le nombre de sources surfaciques.

Dans ce qui suit, les deux cas de sources volumiques et de sources surfaciques sont étudiés séparément.
S'il y'a seulement des sources volumiques, le problème peut être inverser en utilisant la matrice de pseudo-inverse suivante :

$$X = \left(V^T V\right)^{-1} V^T \tag{4.29}$$

S'il y'a seulement des sources surfaciques, le problème peut être inversé en utilisant la matrice de pseudo-inverse suivante:

$$X = \left(Z^T Z\right)^{-1} Z^T \tag{4.30}$$

4.4.3 Faisabilité et robustesse

La faisabilité et la robustesse sont deux caractères essentiels pour caractériser une méthode.
Nous étudierons afin de montrer la faisabilité de la MES Intégrale en premier temps l'influence de la variation de la distance d séparant les surfaces absorbantes de la cavité acoustique des surfaces du cube surfacique imaginaire sur les quelles se répartissent les capteurs (figure 4.2.3) et en deuxième temps l'influence de la variation de l'écartement e entre deux microphones voisins.
Pour montrer que la MES Intégrale est robuste, nous introduisons une erreur dans les valeurs de W et I avant l'alimentation de la formulation inverse et nous comparons les résultats trouvés avec ceux obtenus sans intrusion d'erreur.

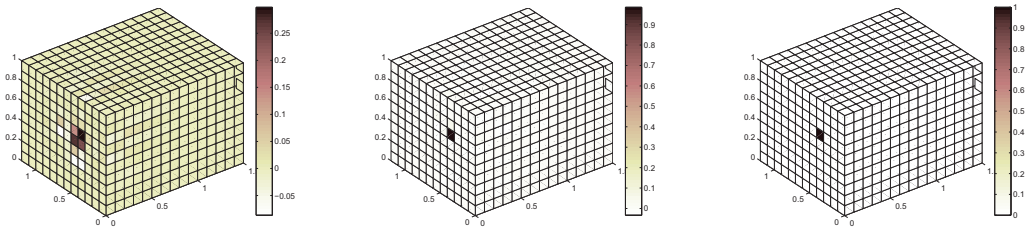
4.4.3.1 Faisabilité de la MES Intégrale

Dans cette section, nous considérons comme pour les cas de la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte une cavité cubique remplie d'air avec des frontières absorbantes. Le tableau 2.4.2 donne les dimensions de cette cavité acoustique ainsi que les caractéristiques du fluide. Cette cavité est excitée par une source surfacique placée sur le point de coordonnées (0, 0.39, 0.66) dont la puissance injectée est égale à $1W/m^2$.

La simulation présentée ici est la MES Intégrale Directe / MES Intégrale Inverse. Nous commençons notre étude par le fait de maintenir fixe la distance d tout en variant l'écartement e. Les résultats trouvés pour cette étude sont résumés dans la figure 4.4.3.

Ces représentations nous assurent l'existence d'une valeur maximale de l'écartement qui permet l'identification de la source. $e_{max} = 13cm$ représente alors l'écartement maximal entre deux capteurs voisins situés sur la même surface permettant l'identification exacte.

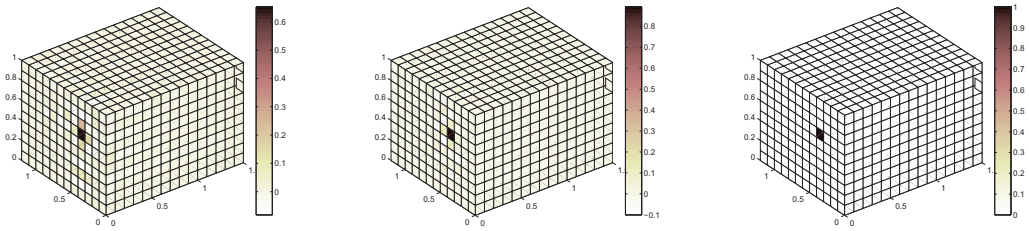
Nous passons par la suite à l'étude de l'influence de la variation de la distance d tout en maintenant fixe l'écartement entre capteurs e. La figure 4.4.4 regoupe les résultats trouvés



(a) (b) (c)

FIGURE 4.4.3 – Identification de la source pour $e = 20cm$ (a), $e = 17cm$ (b) et $e = 13cm$ (c)

en fixant $e = e_{max}$ et pour différentes valeurs de d.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.4.4 – Identification de la source pour $d = 18cm$ (a), $d = 14cm$ (b) et $d = 1cm$ (c)

Ces représentations nous assurent aussi l'existence d'une valeur maximale de la distance d séparant les surfaces de la cavité et celles du cube portant les capteurs. Cette valeur maximale correspondant à la figure 4.4.4(d) et permettant à la fois de bien localiser et quantifier notre source est définie par $d_{max} = 1cm$. Le dépassement de cette valeur ne perturbe pas la localisation de la source mais il entraine la réduction du niveau de localisation.

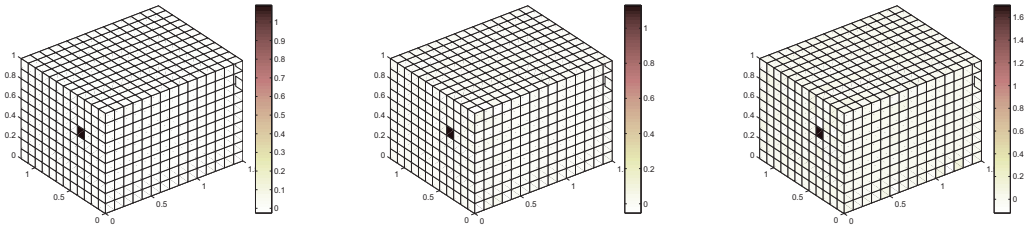
Il apparaît alors l'existence d'un couple de paramètres géométriques (e, d) qui influe sur le résultat de l'identification de la source par la MES Intégrale. Nous devons bien choisir les valeurs de ces deux paramètres permettant à la fois la bonne identification de la source et l'utilisation du minimum de capteurs. C'est un compromis qui nous donne la plage de faisabilité de la méthode.

La MES Intégrale est alors faisable dans notre cas 3D tout en restant au dessous des deux valeurs limites de e et de d déterminées par e_{max} et d_{max}.

4.4.3.2 | Robustesse de la MES Intégrale

Des erreurs ajoutées à des mesures expérimentales qui perturbent les résultats finaux sont très probables et fréquentes. Pour cela, nous étudions dans cette partie le cas d'intrusion d'erreur sur des simulations MESID/MESII et nous comparons par la suite les résultats

des variations des distances e et d avec ceux obtenus sans intrusion d'erreur de mesure.
Nous choisissons en premier lieu deux valeurs de e et de d permettant de rester dans la marge faisable permettant d'identifier parfaitement la source dans le cas sans intrusion d'erreur. Les valeurs choisies sont $e_{max} = 10cm$ et $d_{max} = 1cm$.
Les simulations faites alors pour des intrusions d'erreur différentes sont représentées par la figure 4.4.5.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.4.5 – Identification de la source pour des erreurs de mesure de 10% (a), 30% (b) et 90% (c)

Nous tirons de ces représentations que même avec une erreur introduite de 90%, la source reste parfaitement localisée mais la valeur trouvée de la puissance injectée est évidemment influée par l'erreur introduite. Cette valeur reste très proche de $1W/m^2$ pour 10% d'erreur et atteint $1.7W/m^2$ pour 90%.
Ces résultats montrent ainsi la robustesse de la MES Intégrale.

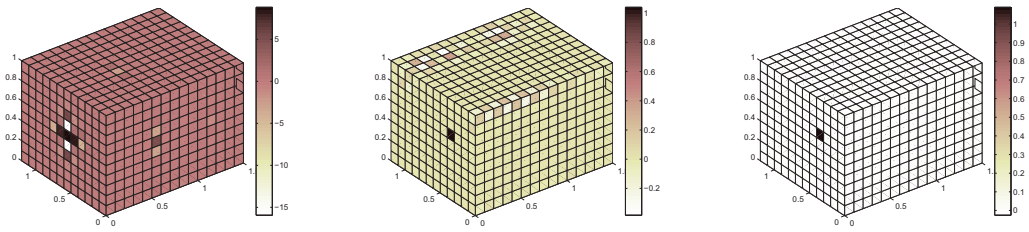
Nous verrons dans ce qui suit l'influence de l'intrusion d'erreur sur la faisabilité de la méthode. Pour cela, nous choisissons le cas d'une erreur introduite de 10% et nous refaisons les deux études de la variation des deux distances e et d.

La première étude présentant l'influence de la variation de l'écartement e sur l'identification de la source pour une erreur introduite sur les résultats de W et de I de 10% est donnée par la figure 4.4.6.

Il apparaît en comparant ces résultats avec ceux présentés par la figure 4.4.3 que la valeur maximale de l'écartement e permettant la localisation de la source est diminuée de $20cm$ (figure 4.4.3 (a)) à $11cm$ (figure 4.4.6 (b)) pour une cavité de dimensions $(1.5, 1.2, 1)$ et pour une fréquence centrale $f_c = 950Hz$.

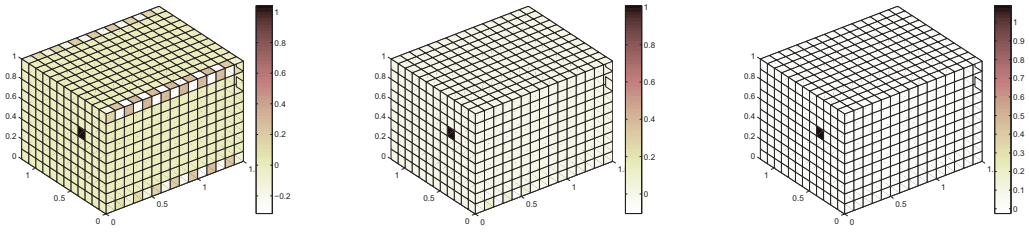
La deuxième étude présentant l'influence de la variation de la distance d sur l'identification de la source pour une erreur introduite sur les résultats de W et de I de 10% est donnée par la figure 4.4.7.

Il apparaît en comparant ces résultats avec ceux présentés par la figure 4.4.4 que la valeur maximale de la distance d permettant la localisation de la source est diminuée de $18cm$ (figure 4.4.4 (a)) à $5cm$ (figure 4.4.7 (a)).



(a) (b) (c)

FIGURE 4.4.6 – Identification de la source après intrusion d'erreur de 10% pour $e = 12cm$ (a), $e = 11cm$ (b) et $e = 10cm$ (c)



(a) (b) (c)

FIGURE 4.4.7 – Identification de la source après intrusion d'erreur de 10% pour $d = 5cm$ (a), $d = 3.5cm$ (b) et $d = 1cm$ (c)

Pour remédier alors à la dégradation de l'identification de la source produite par l'intrusion d'erreur et en tenant compte des remarques tirées par les deux études d'influence de e et de d précédentes, deux solutions sont requises telles que l'augmentation du nombre de capteurs et le rapprochement de ces capteurs aux surfaces de la cavité.
Finalement, nous avons présenté dans cette partie les paramètres influant sur la faisabilité de la méthode ainsi que les conditions à tenir par ces paramètres pour avoir une méthode faisable et robuste à la fois.

4.4.4 Résultats numériques pour une cavité avec sources surfaciques

Pour limiter le temps des calculs rencontré dans le sous chapitre précédent, nous procédons dans cette partie à la diminution du nombre de facettes N_e c'est à dire la réduction de la discrétisation de la cavité. En effet, en réduisant de 84% le nombre de facettes N_e, nous étudions dans ce qui suit les deux cas d'une cavité excitée par une seule source surfacique et d'une cavité excitée par deux sources surfaciques.

4.4.4.1 Cas d'une seule source surfacique

Nous gardons dans cette partie la même excitation placée sur le point de coordonnées (0, 0.39, 0.66) dont la puissance injectée est égale à $1W/m^2$.

Une première simulation MES Intégrale Directe/MES Intégrale Inverse est faite en alimentant les calculs MESII par les données de densité d'énergie W et de densité de puissance I provenantes de la formulation MESID avec $\xi = 1$.
Le résultat trouvé à la fin de cette simulation et présenté par la figure 4.4.8 permet de valider l'inversion de $(Z^T Z)$ puisque nous remarquons une identification parfaite de la source.

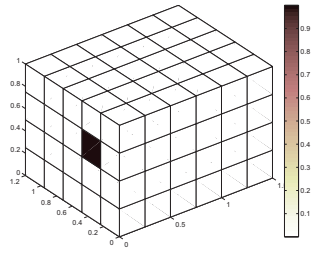


FIGURE 4.4.8 – Simulation MESID/MESII pour une source surfacique

Pour justifier la fiabilité numérique de notre méthode (MES Intégrale), nous effectuerons des simulations FEM / MESII où les calculs MESII sont alimentés par les données W et I provenant de calculs FEM faits sur un logiciel éléments finis (COMSOL).
En effet, le même modèle ayant les mêmes dimensions de la cavité, mêmes caractéristiques du fluide, même coefficient d'absorption des frontières et même excitation (emplacement et valeur) est conçu sur COMSOL permettant d'obtenir la répartition des quantités énergétiques telles que la densité d'énergie W et la densité de puissance I.

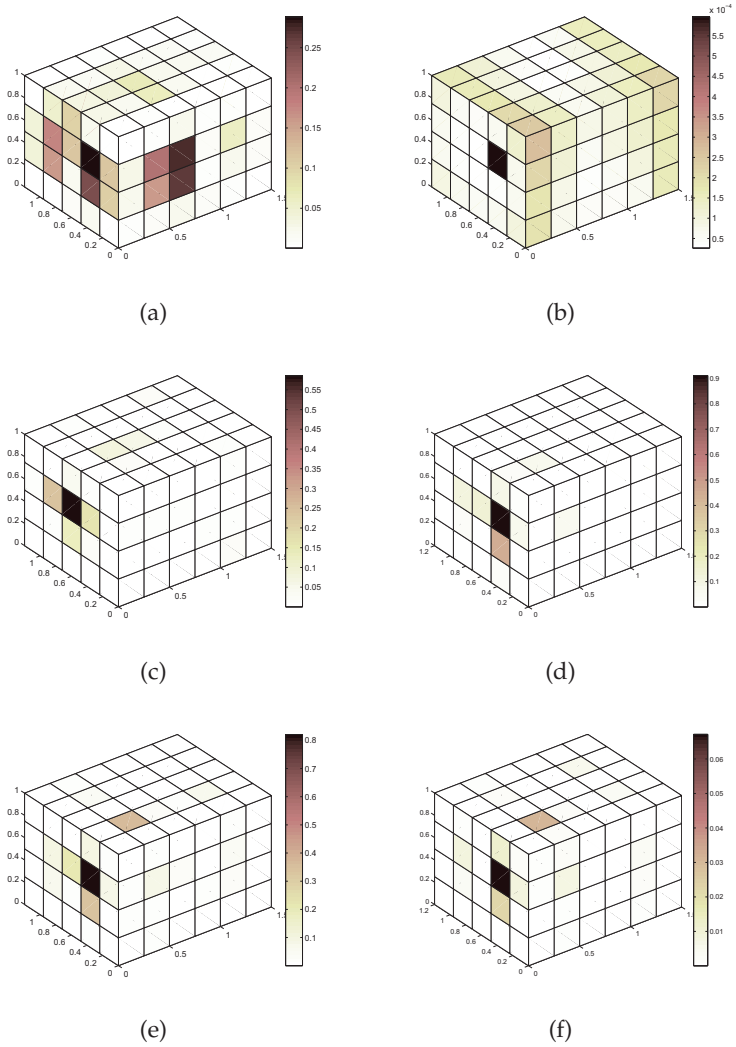
Pour cette simulation, la valeur de la pression appliquée sur le point d'excitation situé sur la surface de la frontière de la cavité est donnée à travers la valeur de la puissance injectée σ par l'équation définie comme suit :

$$\sigma = \frac{p^2}{2\rho_0 c^2} \tag{4.31}$$

Les points de mesures sont répartis uniformément à l'intérieur de la cavité comme illustré par la figure 4.2.3 où les croix en bleu représentent l'emplacement des capteurs (points de mesures).

Les résultats trouvés pour une fréquence centrale $f_c = 950\text{Hz}$, pour un facteur d'amortissement $\eta = 0.001$ calculé à travers l'équation 4.3 dont la valeur de 0.001 était insuffisante pour identifier les sources dans la MES Différentielle et la MES Différentielle Mixte et pour différentes valeurs de ξ, sont postulées par la figure 4.4.9.

Nous remarquons que la localisation de la source exige une valeur de $\xi = 1$ comme valeur minimale. Par la suite, la bonne identification de la source pour une simulation FEM/MESII est obtenue pour $\xi = 1.93$. En effet, pour $\xi = 1.93$, la valeur de puissance injectée trouvée avoisine bien la valeur exacte qui est égale à $1W/m^2$.



(a) (b)

(c) (d)

(e) (f)

FIGURE 4.4.9 – Simulations FEM/MESII pour $\xi = 0.63$ (a), $\xi = 1$ (b), $\xi = 1.59$ (c), $\xi = 1.93$ (d), $\xi = 2$ (e) et $\xi = 2.32$ (f)

Pour représenter l'évolution de l'identification en fonction de la variation de ξ, nous utilisons un terme de précision Pr donnée par l'équation suivante :

$$Pr = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} (\sigma_i - \sigma_i^{exact})^2}{N} \tag{4.32}$$

où σ_i est la $i^{ème}$ composante du vecteur de puissance injectée et σ_i^{exact} est la $i^{ème}$ composante du vecteur de puissance injectée exact.

L'évolution de ce terme de précision en variant ξ est illustrée par la figure 4.4.10.

Il apparaît alors en examinant cette figure que les valeurs trouvées de Pr diminuent pour la plage $\xi \leqslant 1$ mais à partir de $\xi = 1$ on remarque que la courbe d'évolution se stabilise avec $e^{-10} \leqslant Pr \leqslant 4e^{-9}$.

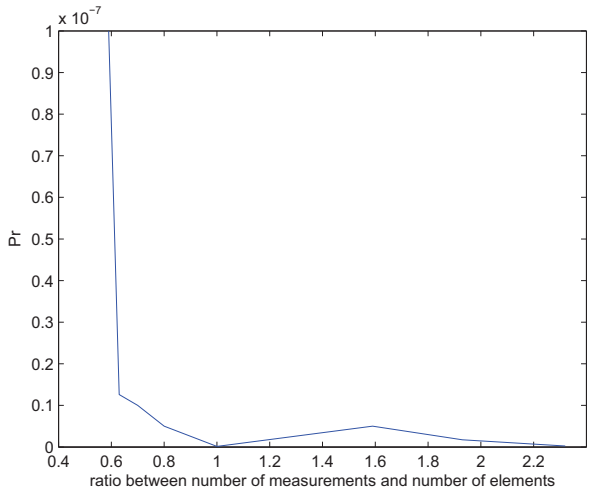


FIGURE 4.4.10 – Sensibilité de l'identification en variant ξ

Alors à partir d'un nombre de points de mesures m égale au nombre d'éléments N_e, la MES Intégrale sera validée dans le cas d'une source surfacique pour $f_c = 950Hz$.

4.4.4.2 Cas de deux sources surfaciques

Nous considérons dans cette deuxième partie la même cavité ayant les mêmes dimensions, le même coefficient d'absorption des frontières et les mêmes caractéristiques du fluide sauf que ce modèle sera cette fois exciter par deux sources surfaciques ($q = 2$). Les sources sont localisées aux points de coordonnées (0, 0.39, 0.66) et (0.8, 0, 0.2) avec une puissance injectée égale à $1\ W/m^2$.

Le résultat trouvé pour une simulation MESID/MESII avec $\xi = 1$ est présenté par la figure 4.4.11.

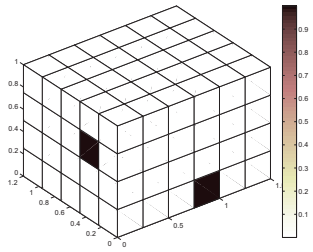
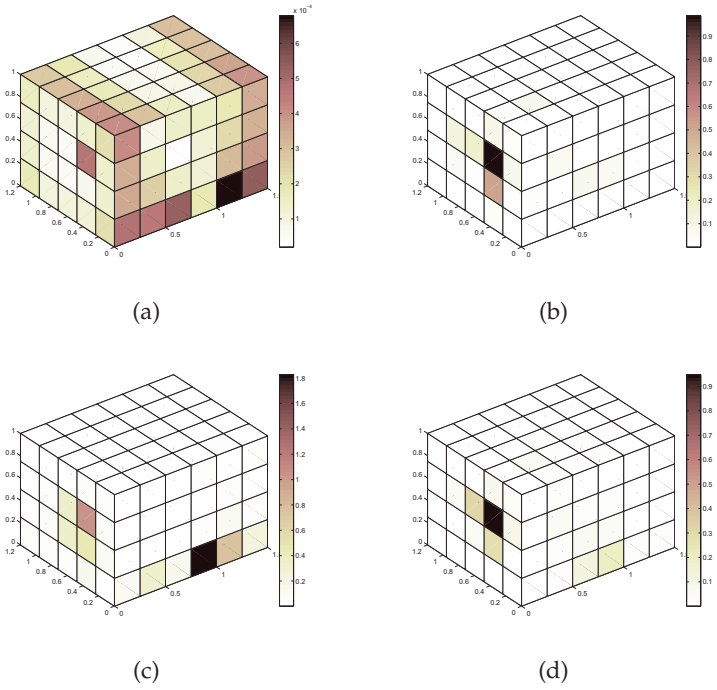


FIGURE 4.4.11 – Simulation MESIDIMESII pour le cas de deux sources surfaciques

Nous remarquons le bon emplacement et le bon niveau pour les deux sources ce qui valide l'inversion de $(Z^T Z)$ pour le cas de plusieurs sources surfaciques excitant notre cavité.

Pour montrer numériquement la fiabilité de notre méthode, nous effectuerons des simulations FEM/MESII. Le même modèle de cavité est excité par la même puissance injectée de 1 W/m^2 dont la pression appliquée est déterminée à partir de l'équation 4.31.

Les résultats trouvés pour une fréquence centrale $f_c = 950Hz$ et pour différentes valeurs de ξ sont postulés par la figure 4.4.12.



(a) (b)

(c) (d)

FIGURE 4.4.12 – Simulations FEM/MESI pour $\xi = 1$ (a), $\xi = 1.72$ (b), $\xi = 4$ (c) et $\xi = 4.25$ (d)

Nous remarquons que dans le cas d'une cavité excitée par deux sources surfaciques localisées sur deux facettes différentes, et en faisant varier ξ, seulement une source sera identifiée avec un niveau proche de la valeur de la puissance injectée exacte ($1W/m^2$). En effet, la première source est identifiée pour $\xi = 1$ et $\xi = 4.25$ et la seconde est localisée pour $\xi = 4$ avec une valeur de puissance injectée égale à $1.8W/m^2$.

4.4.5 Résultats numériques pour une cavité avec une source volumique

Dans cette section, nous considérons une cavité rectangulaire avec des frontières absorbantes. Le tableau 4.4.1 nous donne les caractéristiques du fluide et les dimensions de la cavité ainsi que la valeur de l'absorption des frontières.
Cette cavité est excitée par une source volumique placée au point de coordonnées (6.66, 1, 1) dont la valeur de la puissance injectée est égale à $1W/m^3$.

Pour visualiser et identifier notre source volumique, nous avons opté à une discrétisation surfacique dans le volume de la cavité. En effet, un nombre de surfaces parallèles dans le

TABLE 4.4.1 – dimensions de la cavité et caractéristiques du fluide

paramètre	*unité*	*valeur*
Longueur	m	10
Largeur	m	3
Hauteur	m	3
Densité du fluide ρ_0	Kg/m^3	1.25
Vitesse du son c	m/s	343
Absorption des frontières		0.3

sens de la longueur de la cavité sont discrétisées permettant la visualisation dans le volume de la cavité.
Les points de mesures sont répartis uniformément dans le volume de la cavité.

La simulation MESID/MESII dont le résultat est donné par la figure 4.4.13 nous permet de valider l'inversion de $(V^T V)$.
En effet, pour un nombre de points de mesure m égal au nombre de facettes N_e, la source qui est placée dans le volume de la cavité a été bien localisée et quantifiée (valeur de puissance trouvée identique à celle injectée).

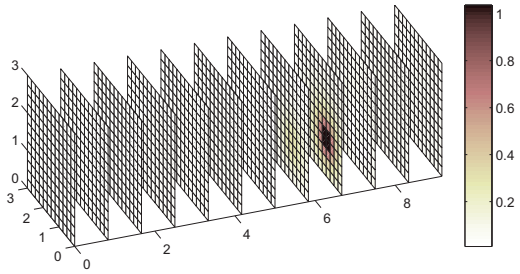


FIGURE 4.4.13 – Simulation MESID/MESII

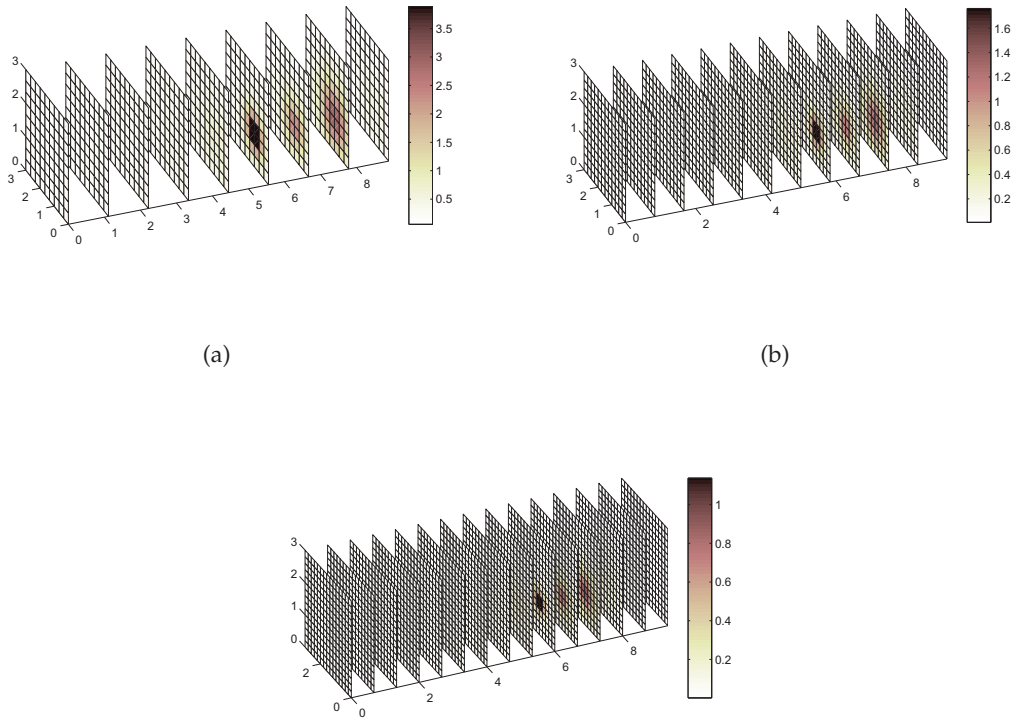
Le même modèle de cavité est par la suite conçu par un logiciel éléments finis. Ce modèle de cavité ayant les mêmes caractéristiques indiquées par le tableau 4.4.1 est excité par la même puissance injectée unitaire placée au même endroit.
La pression appliquée par la source sphérique est donnée en fonction de la puissance injectée par :

$$\rho = 4\pi r^2 \frac{p^2}{2\rho_0 c^2} \tag{4.33}$$

avec r est le rayon de la sphère correspondante à la source.

Les résultats de la simulation FEM/MESII trouvés alors pour $f_c = 950\text{Hz}$ et pour différentes valeurs de N_e sont illustrés par la figure 4.4.14.
Il apparaît que l'identification de la source s'améliore tout en augmentant le nombre de facettes N_e ce qui montre l'influence de la discrétisation sur l'identification.

La validation de la MES Intégrale dans le cas d'une source volumique est alors approuvée. En effet, nous avons pu localiser la source et l'identifier tout en augmentant le nombre de facettes N_e.



(a) (b)

(c)

FIGURE 4.4.14 – Simulations FEM/MESII pour $N_e = 729$ (a), $N_e = 1728$ (b) et $N_e = 3375$ (c)

4.5 Application industrielle: bruit de cabine

Pour évaluer les potentialités de la MES inverse développée par l'ECL dans le cas d'une cavité au comportement moyennes et hautes fréquences, la méthode a été appliquée en l'alimentant par des mesures expérimentales réalisées, dans le cadre du projet européen CREDO regroupant plusieurs sociétés et laboratoires, par les deux partenaires industriels qui sont Dassault, B&K et notre équipe D2S.

Motivé par le grand besoin de l'industrie aéronautique pour valider et calibrer les modèles de prédiction et les outils de conception avancés afin de rentabiliser la conception des cabines à faible bruit, le projet CREDO répond à l'insuffisance critique des données disponibles en développant des procédures expérimentales et des outils analytiques. La puissance sonore injectée dans une cabine d'avion peut être alors déterminée rapidement, avec précision et avec la résolution spatiale nécessaire.
En raison de la nature de réverbération du champ sonore dans une cabine d'avion, les méthodes existantes sont catégoriquement insuffisantes pour cette tache et des méthodes entièrement nouvelles doivent être développées.
Deux approches parallèles sont en fait poursuivies. Dans la première, la puissance sonore injectée dans la cabine est localement extraite à partir de mesures locales du champ total.
Elle ne nécessite pas une modélisation à grande échelle de la cabine et peut être appliquée dans n'importe quel environnement réverbérant. Cependant, elle nécessite un concept difficile à réaliser et de lourdes conditions de traitement universel avancé et d'algorithmes procéduraux.
Dans la deuxième approche, la puissance sonore injectée est déterminée globalement par l'inversion numérique des mesures dans toute la cabine à l'aide de nouveaux outils expérimentaux.
Ce concept sera réalisé en utilisant des implémentations inverses des méthodes éléments finis classiques et de la méthode énergétique simplifiée inverse. Ces méthodes sont développées en étroite collaboration avec une nouvelle technologie de mesure et avec des algorithmes étendus du niveau local au niveau global.

Le banc d'essai de perte de transmission développé par Dassault pour effectuer des mesures d'intensité est composé de deux chambres adjacentes (Voir la figure 4.5.1). la première est anéchoïque isolée de l'extérieur par de la laine de verre ayant les six facettes parfaitement absorbantes ($Z = 0$) alors que la deuxième chambre est parfaitement réverbérante ($Z = \infty$).

Un champ sonore diffus est généré dans la chambre réverbérante avec des hauts parleurs répartis aléatoirement. Ces derniers ont pour but d'émettre dans la plage fréquentielle correspondant à un niveau de conversation normal un bruit blanc qui se propage dans tout le volume de la chambre et qui sera caractérisé par l'importance de sa composante de champ réverbéré.

Les deux chambres sont séparées par un panneau comportant deux hublots de forme circulaire. La structure primaire de ce panneau exposé au champ diffus incident dans la

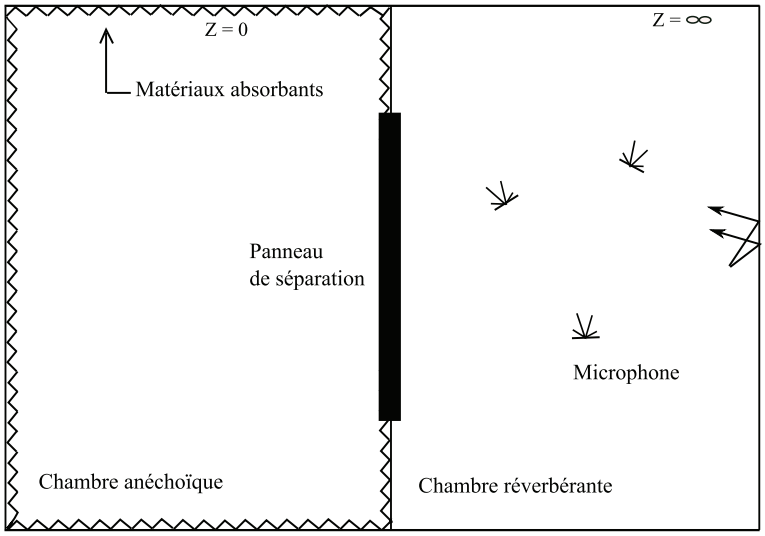


FIGURE 4.5.1 – Schéma du banc d'essai

chambre réverbérante possède les mêmes revêtements et le même bâti qu'un fuselage de l'avion d'affaire Falcon. Le panneau de garniture est isolé du fuselage par des couvertures de laine de verre.
Les fenêtres ne rayonnent pas directement mais à travers une boîte d'ombre permettant de fermer la fenêtre avec un rideau qui reste ouvert pendant les essais. Une image montrant les deux fenêtres centrées sur la surface du panneau est donnée par la figure 4.5.2.
La fenêtre de droite a été couverte dans presque toutes les mesures avec un patch à haute densité viscoélastique pour simplifier ces mesures.



FIGURE 4.5.2 – Panneau de séparation des deux chambres du banc d'essai

L'intensité sonore dans la chambre acoustique de Dassault Aviation a été mesurée avec une raquette comportant des capteurs de mesure de pression p-p. La raquette est constitué de 2×64 capteurs qui sont disposés sur deux plans bidimensionnels parallèles et qui sont répartis de façon à être opposés deux par deux par rapport à la surface médiane de la raquette. Le panneau est de dimensions $21\mathrm{cm} \times 21\mathrm{cm}$ et chaque couche comporte 8×8 capteurs répartis uniformément.
La figure 4.5.3 illustre la raquette utilisée qui parcourt la surface contenant les deux hublots et séparant les deux chambres.

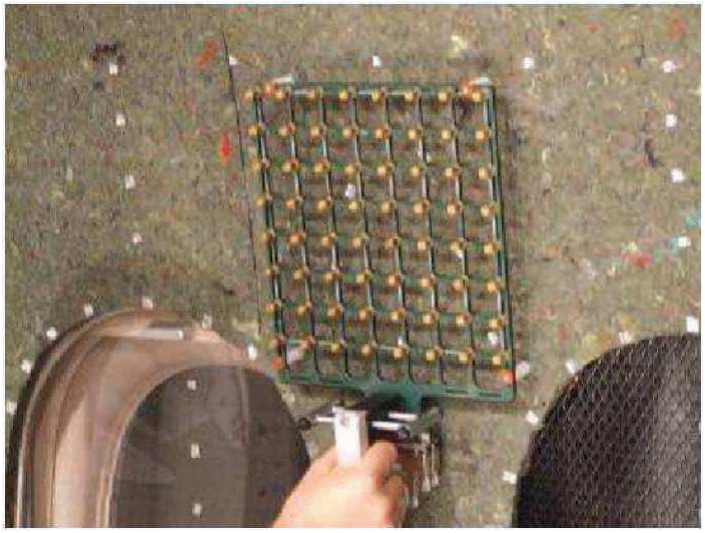


FIGURE 4.5.3 – raquette de mesure d'intensité

Un point de mesure d'intensité est ainsi défini par deux mesures de pression effectuées à proximité l'une de l'autre. Ces deux mesures permettent de calculer le gradient de pression est par la suite l'intensité au point de mesure.

Pour les jets d'affaires de Dassault, l'accent est mis sur la gamme fréquentielle de niveau de conversation normale allant de 700 Hz jusqu'à 5700 Hz. Cette gamme de fréquences est caractérisée par une faible sensibilité du traitement matriciel à l'incompatibilité des erreurs réelles des capteurs.
La raquette à double couche de capteurs a été conçue spécialement par B&K dans le cadre du projet CREDO pour balayer cette bande fréquentielle.
La fréquence limite supérieure de 5700 Hz nécessite un espacement entre les capteurs ne dépassant pas la valeur de 3 cm. Cependant, pour des fréquences inférieures à la fréquence limite inférieure de 700 Hz, l'influence des erreurs de phase sera augmentée rapidement.

Pour effectuer les mesures, la surface séparant les deux chambres a été divisée en vingt sous-surfaces. Ces zones de mesures (z1 jusqu'à z20) réparties autour et à travers les hublots sont définies par la figure 4.5.4.

Pour chaque surface, la raquette nous donne 64 valeurs d'intensité correspondant au nombre d'éléments. Ces valeurs sont moyennées pour trouver la valeur d'intensité moyenne de la surface.
Pour limiter l'influence des erreurs de phase, une série de 50 mesures ont été faites pour chaque sous-surface. Les valeurs d'intensité moyenne trouvées à l'issue de chaque mesure sont utilisées par la suite pour calculer la valeur finale et moyenne de chaque surface.

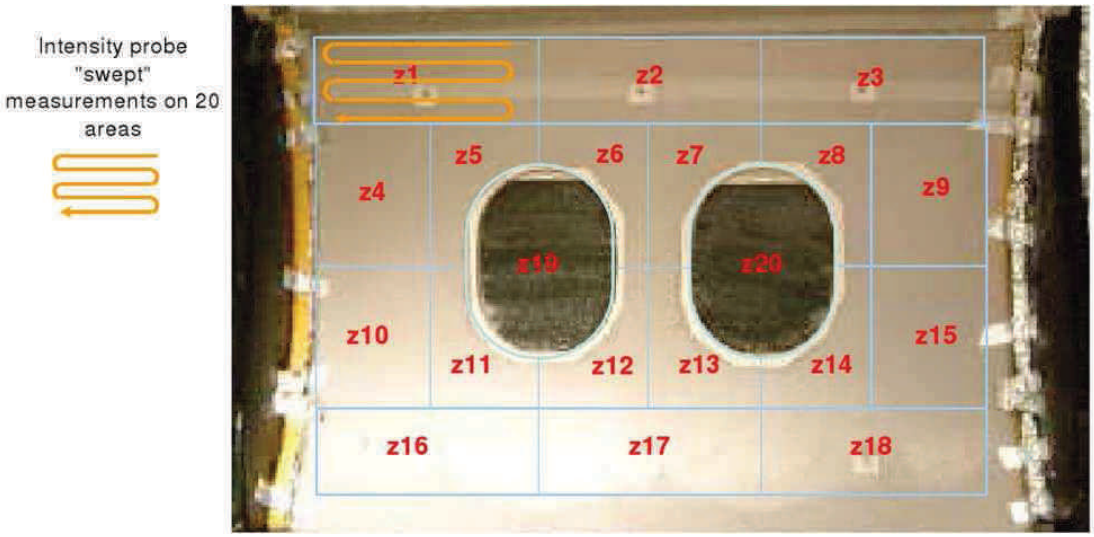


FIGURE 4.5.4 – Répartition des sous-surfaces du panneau

Nous présentons dans ce qui suit les résultats expérimentaux d'intensité liés à une excitation large bande dans la plage moyennes et hautes fréquences [800Hz, 5000Hz]. Le tableau 4.5.1 donne la valeur d'intensité en (W/m^2) trouvée correspondant à chaque couple (fréquence, zone).

En examinant le tableau 4.5.1, nous remarquons que pour chaque colonne correspondant à une fréquence donnée, les valeurs d'intensité les plus grandes sont localisées dans les cases correspondantes aux zones 19 et 20. Les fenêtres représentent alors les sources sonores les plus dominantes.

Les valeurs d'absorption correspondant aux frontières de la chambre acoustique et déterminées expérimentalement pour chaque couple (fréquence,zone) sont données par la suite par le tableau 4.5.2

Devant les fenêtres laissant passer le bruit blanc généré dans la chambre réverbérante, la valeur de l'absorption déterminée est stable et égale à 0.5 quelle que soit la fréquence. Cependant, les mesures d'absorption faites devant les surfaces absorbantes localisées autour des deux fenêtres montrent que la valeur d'absorption augmente avec la fréquence pour les matériaux poroélastiques.

Ces mesures d'intensité et d'absorption provenant des essais Dassault et B&K seront

TABLE 4.5.1 – Mesures d'intensité.

zone	*800 Hz*	*1000 Hz*	*1200 Hz*	*1600 Hz*	*2000 Hz*	*2700 Hz*	*3150 Hz*	*4000 Hz*	*5000 Hz*
z1	1.2E-08	9.2E-10	2.9E-09	4.8E-09	4.4E-09	2.4E-09	1.2E-09	8.6E-10	1.0E-09
z2	1.6E-08	2.9E-09	6.9E-09	9.3E-09	9.5E-09	4.5E-09	2.6E-09	1.9E-09	1.1E-09
z3	1.7E-08	3.1E-09	7.1E-09	7.3E-09	6.2E-09	4.3E-09	2.5E-09	1.8E-10	1.2E-09
z4	5.1E-09	5.0E-10	-2.1E-10	4.9E-10	8.9E-10	1.2E-09	1.7E-09	2.5E-09	4.3E-09
z5	1.4E-08	5.0E-09	3.1E-09	6.2E-09	1.0E-08	8.7E-09	6.5E-09	7.6E-09	1.1E-08
z6	2.3E-08	1.2E-08	4.3E-09	6.9E-09	1.3E-08	7.2E-09	6.5E-09	6.1E-09	9.9E-09
z7	2.5E-08	1.3E-08	3.5E-09	8.3E-09	2.0E-08	1.3E-08	7.1E-09	9.8E-09	1.4E-08
z8	1.7E-08	1.1E-08	2.0E-09	7.4E-09	1.7E-08	8.9E-09	6.6E-09	9.7E-09	1.3E-08
z9	6.6E-10	-8.0E-10	-2.1E-09	-7.1E-10	3.5E-10	1.2E-09	2.4E-09	2.7E-09	3.2E-09
z10	-6.1E-10	-2.4E-10	-5.5E-10	-2.5E-10	2.1E-10	7.3E-10	1.6E-09	2.1E-09	2.7E-09
Z11	7.5E-09	8.8E-09	4.0E-09	5.9E-09	8.7E-09	7.6E-09	7.4E-09	7.5E-09	9.9E-09
z12	8.7E-09	1.2E-08	4.2E-09	7.9E-09	1.2E-08	7.0E-09	7.2E-09	6.0E-09	7.8E-09
z13	1.4E-08	1.7E-08	3.5E-09	6.8E-09	1.4E-08	8.2E-09	6.0E-09	9.6E-09	1.0E-08
z14	1.3E-08	1.2E-08	3.2E-09	6.5E-09	1.3E-08	7.4E-09	5.8E-09	8.0E-09	8.5E-09
z15	-1.3E-09	1.9E-10	-1.0E-09	-4.6E-10	3.2E-10	1.5E-09	3.1E-09	3.2E-09	2.8E-09
z16	4.0E-10	-1.7E-10	1.4E-10	-3.6E-10	-2.6E-11	7.3E-10	1.4E-09	2.8E-09	1.8E-09
z17	2.1E-09	2.4E-09	-2.4E-10	-3.8E-10	-7.5E-10	8.6E-10	1.4E-09	1.7E-09	1.6E-09
z18	2.4E-09	3.7E-10	2.3E-10	-1.1E-09	-1.1E-09	2.1E-10	1.2E-09	9.0E-10	3.0E-10
z19	4.2E-08	3.6E-08	3.4E-08	4.1E-08	8.2E-08	4.9E-08	3.3E-08	2.2E-08	2.9E-08
z20	5.3E-08	5.5E-08	2.4E-08	4.0E-08	1.1E-07	5.8E-08	2.9E-08	3.3E-08	3.7E-08

TABLE 4.5.2 – Mesures d'absorption.

zone	*800 Hz*	*1000 Hz*	*1200 Hz*	*1600 Hz*	*2000 Hz*	*2700 Hz*	*3150 Hz*	*4000 Hz*	*5000 Hz*
z19 et z20	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
z1 à z18	0.36	0.51	0.59	0.7	0.78	0.84	0.89	0.91	0.87

utilisées par la suite pour alimenter la MES Inverse. La figure 4.5.5 regroupe les résultats de la répartition de la puissance injectée ou appelée aussi identification pour les fréquences $f_c = [800, 1000, 1600, 2000]$Hz.

Les résultats obtenus pour des fréquences choisies appartenant à la plage donnée pré-

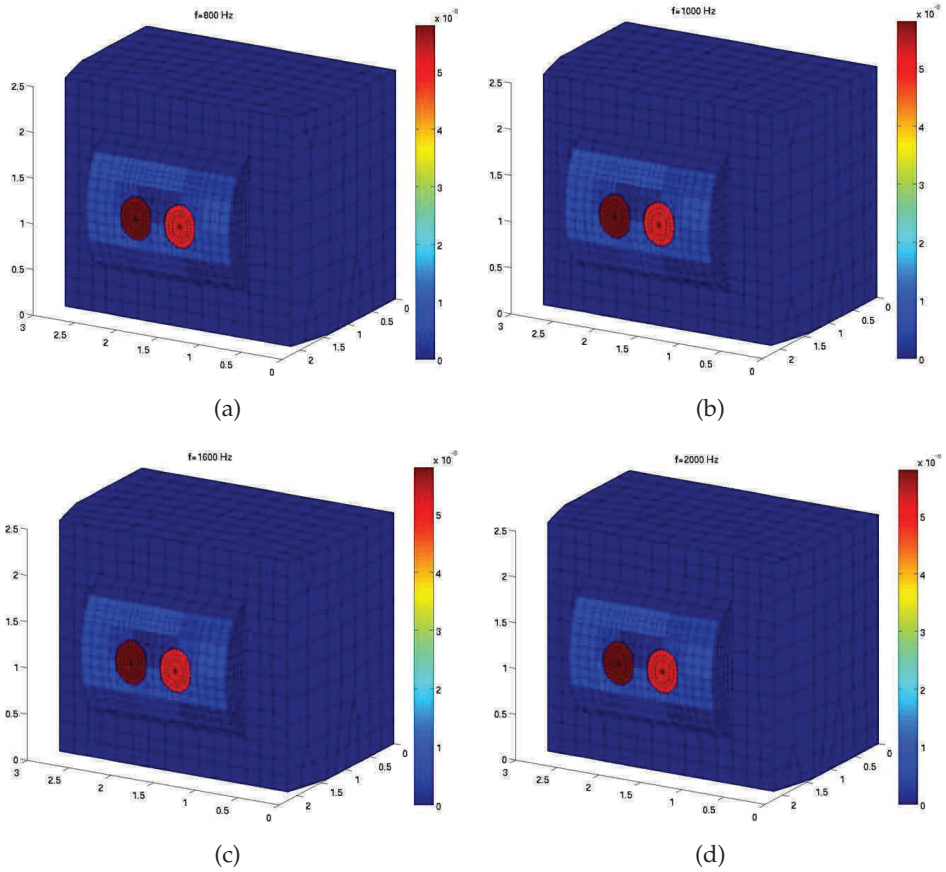


FIGURE 4.5.5 – Identification par MES Inverse pour $f_c = 800Hz$ (a), $f_c = 1000Hz$, $f_c = 1600Hz$ (c) et $f_c = 2000Hz$

cédemment montrent que la puissance injectée est concentrée sur les hublots avec une valeur de $5,8.10^{-8}Wm^{-2}$. Les fenêtres représentent alors la source du bruit entrant dans la chambre anéchoïque avec une valeur maximale de puissance correspondant à la puissance injectée.
Ces résultats sont presque identiques quelle que soit la fréquence étudiée ce qui permet de montrer la stabilité de la MES Intégrale utilisée dans le cas industriel dans la plage des moyennes et hautes fréquences. Nous remarquons ainsi une cohérence entre les résultats décrits par les sous chapitres précédents donnant l'identification des sources dans une cavité acoustique et en alimentant la MES Inverse par des données FEM avec les résultats de cette partie du chapitre où la MES Inverse est alimentée par des mesures effectuées par nos partenaires du projet. L'application industrielle ajoute le caractère de stabilité de la MES Intégrale par rapport aux résultats trouvés numériquement.
Cette cohérence nous permet de juger applicable industriellement la méthode énergétique simplifiée favorisant l'identification des sources de bruit dans tous types de cavités et compartiments.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la fiabilité de l'approche intégrale de la Méthode Energétique Simplifiée est approuvée pour l'identification des sources dans une cavité acoustique.
Cette approche a montré sa performance par rapport aux autres approches de la MES. Elle a montré aussi sa robustesse à l'intrusion d'erreurs de mesures qui sont généralement fréquentes.
L'application industrielle faite à la fin de ce chapitre a montré expérimentalement la faisabilité et la fiabilité de la méthode ainsi que sa stabilité dans la plage des moyennes et hautes fréquences .
Il nous reste à optimiser dans le chapitre suivant l'emplacement des revêtements poroélastiques dans les surfaces absorbantes des milieux acoustiques permettant la réduction du bruit engendrée par les sources acoustiques.

Chapitre 5

Optimisation

5.1 Introduction

Les avancées théoriques et expérimentales de ce travail de thèse, explicitées dans les chapitres précédents, ont pour objectif principal d'approuver la validité, la fiabilité et la robustesse de la Méthode Energétique Simplifiée pour l'identification des sources dans les deux cas bidimensionnel et tri-dimensionnel. Ce dernier cas a été décrit par une chambre acoustique excitée surfaciquement ou ponctuellement.
Une application industrielle a été menée pour justifier l'utilisation de notre méthode dans des cas industriels, elle a permis à l'aide d'essais expérimentaux effectués par nos partenaires de montrer la capacité de la MES à identifier les sources de bruit.

Après l'identification des sources acoustiques, notre méthode va nous servir aussi dans ce chapitre à réduire le bruit émis par les sources à l'aide d'un programme d'optimisation. Le critère d'absorption sera utilisé pour optimiser la répartition des matériaux poroélastiques sur les surfaces des cavités acoustiques. Ainsi, nous prenons en compte la formulation de la MES Intégrale donnant la répartition de la densité d'énergie dans le système cavité étudié et définissant la fonction objectif à minimiser.

Nous commençons en premier lieu par quelques rappels théoriques concernant les méthodes d'optimisation, en particulier les techniques qui nous sont utiles.
Par la suite, la méthode d'optimisation utilisée est donnée tout en rappelant l'approche théorique accompagnée et présentant ses sous-algorithmes de base
Notre problème d'optimisation sera ensuite développé permettant de mener des applications concrètes de la méthode qui sont mise en oeuvre avec le critère d'absorption.

5.2 Techniques d'optimisation

Un problème d'optimisation est souvent formulé pour maximiser la performance structurale d'un coût spécifique ou d'un volume structural. Les caractéristiques des différents types des points critiques des structures optimisées sont étudiées. Des conditions spéciales prises en compte pour ces points critiques sont utilisées.

De nombreux ouvrages traitent les techniques d'optimisation [37, 38] utilisées dans beaucoup de domaines.
On distingue ainsi deux types d'optimisation. Les algorithmes d'optimisation locale partent d'un point de conception nominal pour explorer l'espace de conception. Ces méthodes nécessitent souvent la connaissance d'informations locales tel que le gradient de la fonction objectif. Les algorithmes d'optimisation globale partent d'une population de points répartie sur l'ensemble de l'espace de conception permettant de trouver le ou les sous domaines susceptibles de contenir une ou des solutions. Cette catégorie d'algorithmes s'inspire généralement de la nature tels que les algorithmes évolutionnaires, l'algorithme de recuit simulé et la méthode de recherche aléatoire.

5.2.1 Optimisation multi-objectifs

Le principe d'optimisation se déroule en trois étapes qui sont l'analyse, la synthèse et l'évaluation. Tout d'abord, il convient d'analyser le problème et d'opérer un certain nombre de choix préalables. Pour cela, les n variables du problème, notées $x_1, x_2, ..., x_n$ sont définies. Elles peuvent être réelles, complexes, entières ou même bouléennes. D'un autre côté, il est généralement nécessaire de définir un espace de recherche fini par :

$$x_{imin} \leqslant x_i \leqslant x_{imax} \; \forall \; i \in [1, n] \tag{5.1}$$

où x_{imin} et x_{imax} sont respectivement la borne minimale et la borne maximale de la variable x_i.

Un problème d'optimisation nécessite généralement la définition d'une fonction coût F à minimiser sous un certain nombre de contraintes, rendant compte de la pertinence des solutions potentielles, à partir des grandeurs à optimiser. L'algorithme converge vers un optimum de cette fonction qui doit exprimer le plus fidèlement possible le désir de l'utilisateur sous forme mathématique. Un problème d'optimisation de forme peut généralement être présenté comme suit :

$$\text{Minimiser } F(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_p(x)\} \tag{5.2}$$
$$\begin{cases} H_j(x) = 0 \; \forall \; j = 1, ..., e \\ G_j(x) \leqslant 0 \; \forall \; j = 1, ..., s \\ x_{imin} \leqslant x_i \leqslant x_{imax} \; \forall \; i \in [1, n] \end{cases}$$

où $H_j(x)$ et $G_j(x)$ désignent respectivement les contraintes d'égalité et d'inégalité auquelles est soumis le vecteur des paramètres à optimiser x. e et s désignent respectivement les nombres d'égalité et d'inégalité.

Les problèmes d'optimisation multi-objectifs ont fait l'objet de nombreux travaux dont on trouvera les références en bibliographie [56, 57].
Les minima locaux sont recherchés à partir de la formulation locale :

$$x \; est \; un \; minimum \; local \; \Leftrightarrow \; \exists \; \epsilon > 0 \; telque \forall \; y, \; \|x - y\| < \epsilon \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} F(x) < F(y) H_j(x) = 0 \ \forall \ j = 1, ..., e \\ G_j(x) \leqslant 0 \ \forall \ j = 1, ..., s \\ x_{imin} \leqslant x_i \leqslant x_{imax} \ \forall \ i \in [1, n] \end{cases}$$

avec la notation :

$$F(x) < F(y) \ \Leftrightarrow \ \ \forall \ j \in [1, p] \, , \ f_j(x) < f_j(y) \tag{5.4}$$

Il est possible de traiter un problème d'optimisation multi-objectifs en se ramenant à un problème simple objectif. La difficulté réside dans le choix de la fonction objectif utilisée qui doit englober les différentes contraintes.

5.2.2 Optimisation locale

Les méthodes d'optimisation locale reposent sur l'exploration de l'espace de conception aux alentours d'un point de départ donné dans l'algorithme. Une telle méthode nécessite la connaissance d'informations locales qui permettent de déterminer le sens de recherche du point optimum.
Parmi les méthodes locales les plus connues, on peut citer la méthode de gradient, la méthode de Quasi-Newton et la méthode du simplex [38, 39].
La méthode de gradient ainsi que celle de Quasi-Newton sont la base de l'étude d'optimisation faite dans ce chapitre. Nous détaillons ces deux méthodes dans la section suivante.

Pour la méthode du Simplex, elle suppose que la fonction de coût F possède n paramètres. On définit un simplex comme étant une figure géométrique (polygone, triangle,...) de volume non nul contenant $(n+1)$ sommets.
A chaque itération de l'algorithme du simplex, (n+1) points sont utilisés pour déterminer un pas d'essai. Les points p_i sont ordonnés de manière à avoir $F(p_1) \leqslant F(p_2) \leqslant ... \leqslant F(p_{n+1})$.
Des nouveaux points sont obtenus en utilisant de très simples opérations algébriques qui se traduisent par des transformations géométriques élémentaires (réflexion, contraction et expansion). Ces points sont acceptés ou rejetés en fonction de leur valeur de la fonction objectif.
Le simplex se transforme, s'étend et se contracte à chaque mouvement. Ainsi, il s'adapte à l'allure de la fonction jusqu'à ce qu'il s'approche de l'optimum. A chaque transformation, le plus mauvais point courant x_i est remplacé par le nouveau point déterminé.

La méthode du simplex n'utilise que des valeurs ponctuelles de la fonction coût et ne nécessite pas l'estimation du gradient. Cette méthode peut donc être utilisée pour la recherche du minimum d'une fonction coût non différentielle. Elle semble efficace tant que le nombre de paramètres est petit. Lorsque le nombre de paramètres est supérieur à trois, elle semble mal adaptée du point de vue coût et devient moins intéressante que les méthodes à direction de descente.

5.2.3 Optimisation globale

Les techniques d'optimisation globale permettent d'explorer la quasi-totalité de l'espace de conception à la recherche de points optimaux. Les algorithmes sont dits génétiques et présentent l'avantage de ne pas nécessiter la connaissance du gradient de la fonction coût. Ils reposent essentiellement sur une estimation de cette fonction en certains points judicieusement choisis.

Les algorithmes génétiques permettent de parcourir l'espace de conception à la recherche de solutions optimales sans présenter l'inconvénient d'une recherche aléatoire qui pourrait s'avérer d'une lenteur excessive.
En effet, à partir d'une population de départ raisonnablement dispersée dans l'espace de conception, un algorithme génétique opère une série d'opérations permettant de garder les meilleurs points et d'en générer de nouveaux. Il s'agit donc d'une simulation du processus darwiniste de l'évolution.

Les termes employés pour désigner les points de l'espace de conception et les opérations effectuées dans l'algorithme sont empruntés à la génétique [58]. On parlera de chromosome pour un point de l'espace de conception, et de gènes pour les différents paramètres de conception.
De manière générale, un algorithme génétique suit les étapes suivantes:
- génération d'une population initiale
- sélection d'un certain nombre de points aptes à faire évoluer favorablement cette population
- reproduction
- bouclage et critère de terminaison

L'étape de sélection doit tenir compte des contraintes imposées dans la formulation de l'équation 5.2. L'étape de reproduction repose sur différentes techniques telles que la mutation et le croisement. La mutation consiste à modifier aléatoirement certains gènes d'un chromosome. Le croisement consiste à échanger des gènes entre deux chromosomes.

Les principaux algorithmes génétiques tels que les algorithmes évolutionnaires, l'algorithme de recuit simulé et la méthode de recherche aléatoire seront présentés dans ce qui suit.

5.2.3.1 Algorithmes évolutionnaires

Les algorithmes évolutionnaires constituent une discipline s'appuyant sur des techniques dérivées de la génétique et des mécanismes de la sélection naturelle basés sur la théorie de l'évolution de Darwin. Ils empruntent les paradigmes de l'évolution biologique tels que la sélection, le croisement et la mutation pour chercher la solution du problème. Ces algorithmes utilisent la notion de population d'individus, dans laquelle chaque individu représente une solution potentielle de l'espace de recherche du problème donné [60].
La robustesse et la souplesse de ces méthodes d'optimisation globale permettent d'aborder

les problèmes les plus raides. De plus, leur capacité à travailler sur des espaces de recherche non standards (non continus) ainsi que leur faible besoin d'information sur le problème offrent les perspectives les plus originales et un large champ d'application.
Leur principal inconvénient est leur coût. Ils nécessitent en effet un grand nombre d'évaluations pour aboutir à l'optimum.

5.2.3.2 Méthode du recuit simulé

Cette méthode d'optimisation a été mise au point en 1983 par trois chercheurs de la sociéte IBM. C'est une méthode d'optimisation stochastique tirant son origine d'un processus thermodynamique. Elle est issue d'une analogie avec le phénomène physique de refroidissement lent d'un corps en fusion, qui le conduit à un état solide de basse énergie. Il faut abaisser lentement la température, en marquant des paliers suffisamment longs pour que le corps atteigne l'équilibre thermodynamique à chaque palier de température [59].
Pour les matériaux, cette basse énergie se manifeste par l'obtention d'une structure régulière, comme les cristaux dans l'acier. L'analogie exploitée par le recuit simulé consiste à considérer la fonction F à minimiser comme fonction d'énergie et une solution p peut être considérée comme un état donné de la matière dont $F(p)$ est l'énergie. Le recuit simulé exploite généralement le critère défini par l'algorithme de Metropolis pour l'acceptation d'une solution obtenue par perturbation de la solution courante.
Des études théoriques du recuit simulé ont pu montrer que sous certaines conditions, l'algorithme du recuit convergeait vers un optimum global. Ce résultat est important car il nous assure que le circuit simulé peut trouver la meilleure solution si on le laisse chercher indéfiniment.
Les principaux inconvénients du recuit simulé résident dans le choix de nombreux paramètres tels que la température initiale, la loi de décroissance de la température, les critères d'arrêt ou la longueur des paliers de température. Ces paramètres sont souvent choisis de manière empirique.

5.2.3.3 Méthode de recherche aléatoire

La méthode de recherche aléatoire consiste à tirer aléatoirement, à chaque itération un point dans l'espace de recherche. La valeur de la fonction objectif F est ensuite évaluée en ce point et comparée à celle du point de départ. Si elle est meilleure, cette valeur est enregistrée, ainsi que la solution correspondante et le processus continue. Sinon, on repart du point de départ et on recommence le procédé jusqu'à ce que les conditions d'arrêt soient atteintes [61].
Le grand avantage de cette méthode est sa simplicité alors que le temps de calcul constitue sa grande faiblesse.

5.3 Méthode d'optimisation utilisée: méthode du gradient

5.3.1 Rappels et problème de base

La méthode du gradient appelée aussi méthode à direction de descente comme donné dans le premier chapitre utilise le gradient des fonctions coût pour chercher l'optimum du problème.
L'opérateur gradient qui définit le vecteur gradient de la fonction qui lui est associée est donné comme suit :

$$\nabla F(x^*) = \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_j} \; \forall \, j \in [1, n] \tag{5.5}$$

avec n le nombre des paramètres du problème à optimiser et x le vecteur des paramètres.

Notons $G_i(x)$ la $i^{ème}$ contrainte d'inégalité fonction des paramètres x.
Le problème de base à résoudre est formulé en fonction des données d'optimisation déjà citées par :

$$Minimiser \; F(x) \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} G_i(x) \leqslant 0 & \forall \, i = 1, ..., m \\ x_{jmin} \leqslant x_j \leqslant x_{jmax} & \forall \, j \in [1, n] \end{cases}$$

où $F(x)$ représente la fonction coût et m désigne le nombre des contraintes d'inégalité.

5.3.2 Equations de Kuhn & Tucker

Le principe général des méthodes de minimisation de fonction sous contraintes est de transformer le problème contraint en un sous problème pouvant être résolu plus facilement par un processus itératif.
Une large classe de méthodes consiste à transformer le problème de base en un problème non contraint en utilisant une fonction de pénalisation. Ces méthodes considérées comme relativement inefficaces, ont été dépassées par des méthodes basées sur la résolution des équations de Kuhn & Tucker.

Les conditions d'optimalité de Kuhn & Tucker stipulent que le point x^* est un minimum local du problème de base si et seulement si il existe m scalaires notés λ_i^*, tels que pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on a :

$$\nabla F(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla G_i(x^*) = 0 \tag{5.7}$$

$$\begin{cases} G_i(x^*) \leqslant 0 \\ \lambda_i^* G_i(x^*) = 0 \\ \lambda_i^* \geqslant 0 \end{cases}$$

où les scalaires non négatifs λ_i^* sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Une contrainte G est dite active en u si $G_i(u) = 0$. Cette notion d'activité nous permet de savoir si les multiplicateurs sont nuls ou strictement positifs.
En effet, ces derniers sont nuls lorsque la contrainte correspondante est inactive et sont strictement positifs lorsqu'elle est active.

La première condition de Kuhn & Tucker implique que x^* est un optimum local du problème non contraint de minimisation de la fonction Lagrangienne $L(x, \lambda)$ définie par :

$$L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(x) \tag{5.8}$$

En ajoutant à ce problème de Lagrange les contraintes correspondant aux autres conditions d'optimalité de Kuhn & Tucker, il est possible de formuler un nouveau problème de minimisation équivalent au problème de base appelé problème de Lagrange :

$$\text{Minimiser } L(x, \lambda) = F(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(x) \tag{5.9}$$

$$\begin{cases} G_i(x) \leqslant 0 \\ \lambda_i > 0, \text{ si } \quad G_i(x) = 0 \\ \lambda_i = 0, \text{ si } \quad G_i(x) < 0 \end{cases}$$

5.3.3 | **Algorithme** SQP

Shittowski [54] a comparé plusieurs méthodes de résolution du problème de Lagrange et a montré que la méthode SQP (Sequential Quadratic Programming) est la plus performante en terme de solutions obtenues avec succès sur un large domaine de problèmes. Cela signifie que l'algorithme est rarement mis en défaut et qu'il converge pour un vaste domaine de problèmes.
La méthode SQP est basée sur l'approximation de la matrice Hessienne du Lagrangien de chaque itération en utilisant une méthode quasi-Newton. Un sous-problème QP résolu par une méthode quasi-Newton est alors généré dont la solution est utilisée pour former une direction de recherche. La méthode générale est présentée dans le paragraphe suivant.

Le problème 5.9 est optimisé par résolutions successives du sous problème convexe formé par l'approximation quadratique de la fonction objet et la linéarisation des contraintes au point considéré $(x^{(k)})$ à l'itération k. Le problème de base est donc remplacé par une séquence de sous problèmes convexes quadratiques simples. L'optimum de chacun de ces sous-problèmes sert de point de départ à une nouvelle itération, où une nouvelle approximation convexe sera réalisée. Le sous-problème convexe obtenu à l'itération k a la forme suivante :

$$\text{Minimiser } \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T H (x - x^{(k)}) + b^T (x - x^{(k)}) + c \tag{5.10}$$

$$\left\{ \; G_i((x^{(k)}) + D_i^T(x - x^{(k)}) \leqslant 0$$

où H est la matrice Hessienne définie par :

$$H = \frac{\partial^2 L(x^{(k)})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(x^{(k)})}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial^2 G_i(x^{(k)})}{\partial x^2} \tag{5.11}$$

et

$$b = \frac{\partial F(x^{(k)})}{\partial x} \tag{5.12}$$

$$c = F(x^{(k)}) \tag{5.13}$$

$$D_i = \frac{\partial G_i(x^{(k)})}{\partial x} \tag{5.14}$$

La méthode SQP requiert le calcul des dérivées secondes de la fonction objectif et des contraintes par rapport aux paramètres d'optimisation. Dans la plupart des cas, ces dérivées ne sont pas accessibles pour des raisons de coût de calcul. C'est pourquoi, la méthode SQP est généralement implémentée selon une méthode de quasi-Newton, où la matrice Hessienne du Lagrangien est approximée au cours des itérations par une technique BGFS.

5.3.4 | **Méthode de quasi-Newton** BFGS

Les méthodes de quasi-Newton ont pour but d'obtenir une bonne approximation de la matrice Hessienne sans calculer les dérivées secondes. Considérons le développement en série de Taylor limité au premier ordre du vecteur gradient autour du point $x^{(k)}$:

$$g(x^{(k+1)}) = g(x^{(k)}) + H^{(k)}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \tag{5.15}$$

En posant :

$$y^{(k)} = g(x^{(k+1)}) - g(x^{(k)}) \tag{5.16}$$

$$s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} \tag{5.17}$$

On obtient alors :

$$y^{(k)} = H^{(k)}(x^{(k+1)}) - g(x^{(k)}) = H^{(k)} s^{(k)} \tag{5.18}$$

D'après la première équation de Kuhn & Tucker (5.7), on souhaite déterminer le vecteur de paramètres $x^{(k+1)}$ tel que le gradient $g(x^{(k+1)})$ soit nul au point $x^{(k+1)}$. On en déduit :

$$y^{(k)} = -g(x^{(k)}) \tag{5.19}$$

A partir des deux équations 5.18 et, $s^{(k)}$ sera alors déterminée par :

$$s^{(k)} = (H^{(k)})^{-1} y^{(k)} = -(H^{(k)})^{-1} g(x^{(k)}) \tag{5.20}$$

Le principe des méthodes quasi-Newton consiste alors à remplacer l'inverse de la matrice Hessienne par une matrice $S^{(k)}$, actualisée de manière itérative afin que celle-ci représente une bonne approximation de l'inverse de la matrice Hessienne :

$$S^{(k)} = S^{(k-1)} + C^{(k)} \tag{5.21}$$

où la matrice C est calculée à partir des quantités connues à l'itération k, à savoir $y^{(k-1)}$ et $s^{(k-1)}$. De plus, cette matrice doit être symétrique définie positive afin que la direction $s^{(k)}$ soit une direction de descente. Cette condition s'écrit :

$$S^{-1(k)} y^{(k-1)} = R^{(k)} y^{(k-1)} = s^{(k-1)} \tag{5.22}$$

Il existe différentes méthodes de calcul de $R^{(k)}$, basées sur les équations 5.21 et 5.22. On se contente de donner la formule d'actualisation de Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno (BFGS) qui est, pour de nombreux auteurs, la formulation la plus efficace pour les problèmes de minimisation sous contraintes:

$$R^{(k)} = R^{(k-1)} + \left(\frac{y^{(k-1)}(y^{(k-1)})^T}{(s^{(k-1)})^T y^{(k-1)}}\right) - \left(\frac{(R^{(k-1)} s^{(k-1)})(R^{(k-1)} s^{(k-1)})^T}{(s^{(k-1)})^T R^{(k-1)} s^{(k-1)}}\right) \tag{5.23}$$

5.4 Optimisation de l'emplacement des revêtements poroélastiques

Nous nous intéressons dans cette partie du chapitre à optimiser l'emplacement des mousses sur les surfaces de la cavité pour réduire le bruit genéré dans le volume. Ainsi, le caractère absorbant des surfaces de la cavité acoustique dû aux matériaux poroélastiques (couche de mousse) devient non uniforme sur les frontières.
La répartition de cette couche de mousse dépend dans cette étude d'optimisation du paramètre d'absorption, de l'emplacement de la source et de l'emplacement du point d'écoute du bruit (capteur).

5.4.1 Généralités sur les matériaux poroélastiques

Les milieux poroélastiques sont des milieux hétérogènes composés des deux phases solide et fluide. La phase solide ayant des propriétés élastiques constitue le squelette du matériau alors que la phase fluide sature le réseau de pores. Le fluide généralement utilisée est l'air.
La caractéristique la plus intéressante de ce matériau réside dans sa capacité à dissiper l'énergie mécanique.
Les poroélastiques sont donc susceptibles d'améliorer le comportement vibratoire d'une structure, ainsi que le confort acoustique des habitacles.

L'aspect dissipatif d'énergie des matériaux poreux s'explique si l'on considère les mécanismes suivants:

- La vibration du squelette provoque des déformations irréversibles qui induisent une perte d'énergie par effet structural.

- Le couplage acoustique entre les deux phases constituant le matériau induit des pertes par effet thermique. La conductivité thermique de l'air est plus faible que celle de la phase solide. Les échanges de chaleur conduisent donc à un réchauffement du solide et surtout à une expulsion de l'énergie mécanique sous forme de chaleur vers le milieu extérieur.

- La circulation de l'air dans les pores induit un phénomène de viscosité qui dépend de la taille des pores et des caractéristiques de saturation (des pores) du fluide.

L'absorption d'un matériau poreux dépend de la fréquence de l'onde incidente (plus la fréquence est élevée meilleure est l'absorption) et de l'épaisseur du matériau.

5.4.2 Problème à optimiser

Le cas tridimensionnel est considéré dans ce chapitre. En effet, nous nous basons sur un modèle de cavité acoustique rempli d'air possédant les caractéristiques matériau et les dimensions données par le tableau 5.4.1.

paramètre	*unité*	*valeur*
Longueur L	m	4
Largeur l	m	2
Hauteur h	m	2
Densité du fluide ρ_0	Kg/m^3	1.25
vitesse du son c	m/s	343

TABLE 5.4.1 – Dimensions de la cavité et caractéristiques du fluide du modèle à optimiser

Notre problème d'optimisation se base sur la minimisation d'une fonction coût f. Cette fonction objective à minimiser sera définie alors par le bilan énergétique de la MES Intégrale permettant de trouver la densité d'énergie W répartie sur tout le volume en fonction de l'absorption initiale des frontières A^{init} et la puisssance injectée ρ^{inj}. Le calcul de W se base sur l'équation 4.20 tout en utilisant les équations 4.18 et 4.22.

Le problème spécifique à résoudre sera présenté comme suit :

$$\text{Minimiser } f(A) \tag{5.24}$$

$$\begin{cases} H(A) = 0 \Leftrightarrow \ h1.A = h2 \\ A^{min} \leqslant A_i \leqslant A^{max} \ \forall \ i \in [1, N_e] \end{cases}$$

A^{min} et A^{max} représentent respectivement la valeur minimale et la valeur maximale du vecteur paramètre défini par les absorptions des éléments de frontière A_i.
H définit la contrainte d'égalité qui dépend du vecteur d'absorption A.
Les deux quantités $h1$ et $h2$ correspondant à la contrainte H représentent respectivement le transposé du vecteur des facettes de discrétisation et la valeur de l'absorption optimale à chercher.

Plusieurs optimisations faites seront par la suite présentées dont l'objectif est de réduire le bruit engendré par une source appliquée sur la surface de la cavité en répartissant une couche de mousse non uniforme sur les surfaces. Ces optimisations dépendent de l'emplacement de la source surfacique à appliquer et de l'absorption initiale et uniforme des surfaces A^{init}.
Le vecteur A donnant la répartition de l'absorption sur les facettes de discrétisation est choisi variable et borné entre $[0\ 0.6]$. La valeur optimale choisie de l'absorption de toute la surface de la cavité notée $h2$ et définie comme étant la somme des absorptions des facettes est $h2 = 0.3$. La quantité $h1$ qui définit le transposé du vecteur des facettes de dicrétisation est représentée par :

$$h1 = \frac{1}{N_e} \overbrace{[1, 1, \ldots 1]}^{N_e} \tag{5.25}$$

Pour conclure, cette optimisation nous permet de réduire le bruit détecté en un point d'écoute bien défini du volume de la cavité en utilisant une répartition non uniforme de l'absorption à la surface. En effet, cette absorption est variable ayant une valeur pour chaque facette. Pour cela, nous devons soit varier la hauteur du matériau poreux soit changer ses caractéristiques d'absorption.

5.4.3 Résultats d'optimisation

Les résultats qui vont être présentés ici sont obtenus pour un point d'écoute dans le volume de la cavité dont l'emplacement est défini par le point E de coordonnées $(\frac{L}{3}, \frac{l}{3}, \frac{h}{3})$.

5.4.3.1 Résultats d'optimisation pour un point d'excitation de coordonnées (1.66, 0, 1)

Commençons par une optimisation faite pour une puissance injectée au point de coordonnées (1.66, 0, 1) dont la valeur est toujours unitaire (figure 5.4.1).

Les résultats d'optimisation obtenus pour différentes valeurs de l'absorption initiale et déterminés pour cet emplacement de la puissance injectée sont regroupés dans la figure 5.4.2.

La première remarque tirée d'après ces résultats est que nous obtenons presque la même répartition quelle que soit la valeur de l'absorption initiale. Cette remarque nous montre la

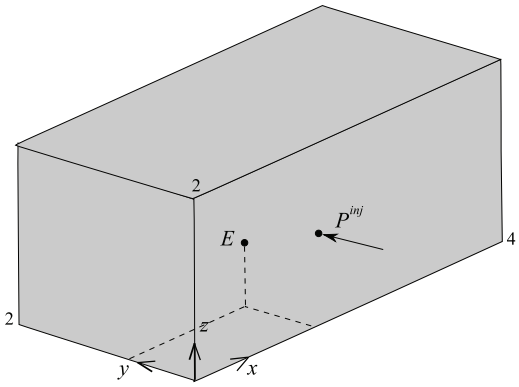


FIGURE 5.4.1 – Modèle cinématique de la cavité acoustique à optimiser pour un point d'excitation de coordonnées $(1.66, 0, 1)$

stabilité de la méthode d'optimisation utilisée.

Le degré d'intensité de la couleur dégradée du blanc vers le noir montre en premier lieu l'endroit où nous devons mettre la mousse et en deuxième lieu la valeur de l'absorption de la mousse dont la valeur maximale $A_{max}^{opt} = 0.6$ correspond à la couleur noire.
Les mousses sont donc réparties autour de la source et sur les zones les plus proches des surfaces adjacentes à la surface excitée. Cette couche entoure en fait notre point d'écoute pour réduire le maximum d'intensité du bruit écouté.

D'après les valeurs calculées de la densité d'énergie W au point d'écoute avant et après l'optimisation, nous notons que cette dernière nous permet de réduire de 22% le bruit engendré par la source.

5.4.3.2 Résultats d'optimisation pour un point d'excitation de coordonnées (0, 0.39, 0.66)

Une deuxième optimisation est faite cette fois pour une puissance injectée au point de coordonnées (0, 0.39, 0.66) dont la valeur est toujours unitaire. Ce modèle est représenté par la figure 5.4.3.

Les résultats d'optimisation obtenus en variant les valeurs de l'absorption initiale et déterminés pour cet emplacement de la puissance injectée sont regroupés dans la figure 5.4.4.

La stabilité de notre méthode d'optimisation est prouvée une autre fois en trouvant la même répartition des mousses pour des valeurs d'absorption initiale différentes.
D'après ces résultats qui correspondent à une source proche du bord de la petite surface de la cavité, la couche de mousse sera répartie essentiellement sur les surfaces adjacentes à la surface d'injection.

Dans l'application suivante, nous choisissons un point d'injection de la puissance loin du point d'écoute et de l'autre côté de la cavité.

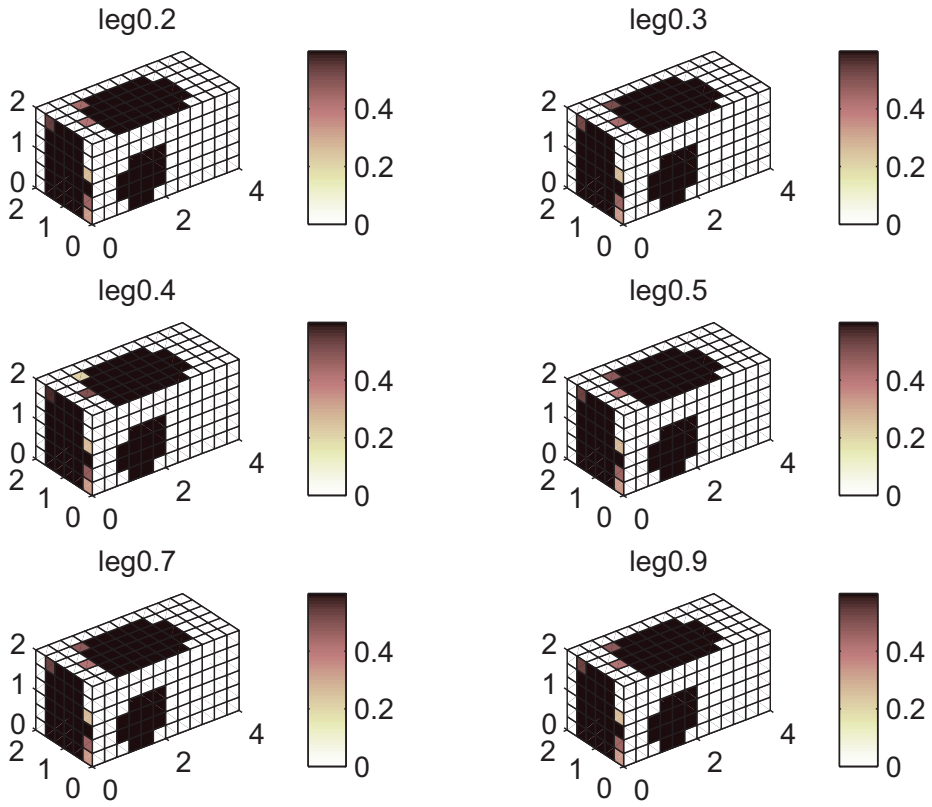


FIGURE 5.4.2 – Optimisations pour absorption initiale $A^{init} = [0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9]$ obtenues pour un point d'excitation de coordonnées $(1.66, 0, 1)$

5.4.3.3 | Résultats d'optimisation pour un point d'excitation de coordonnées (2.83, 1, 2)

Cette troisième optimisation est réalisée pour voir l'effet d'avoir une puissance injectée sur un point de la surface de coordonnées (2.83, 1, 2) qui est loin du point d'écoute. La figure 5.4.5 représente ce modèle d'application.

En variant les valeurs de l'absorption initiale A^{init}, les résultats d'optimisation obtenus pour cet emplacement de la puissance injectée sont illustrés par la figure 5.4.6.

A part la stabilité de la méthode qui est toujours vérifiée, il nous reste à indiquer que si on injecte une puissance sur un point surfacique un peu loin du point d'écoute, il faudra alors répartir la couche du poroélastique essentiellement autour de ce point d'écoute et pas obligatoirement proche de la source.

Ensuite et pour voir l'effet d'injecter plusieurs puissances sur différents points d'excitation, nous étudions dans l'exemple suivant l'optimisation avec trois sources.

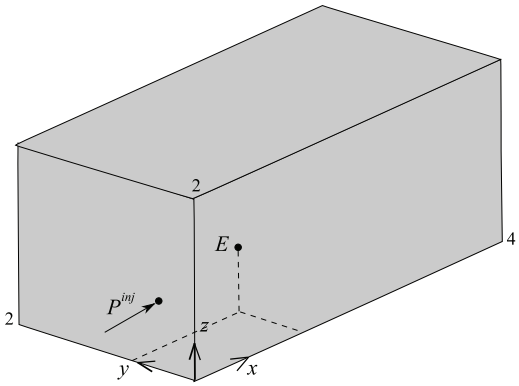


FIGURE 5.4.3 – Modèle cinématique de la cavité acoustique à optimiser pour un point d'excitation de coordonnées $(0, 0.39, 0.66)$

5.4.3.4 Résultats d'optimisation pour trois points d'excitation

Dans cet exemple, nous choisissons un modèle de cavité excitée en trois endroits différents de sa surface par la même puissance injectée unitaire. Les sources sont les mêmes utilisées dans les exemples précédents localisées sur les points de coordonnées $(1.66, 0, 1)$, $(0, 0.39, 0.66)$ et $(2.83, 1, 2)$. Le modèle ainsi que les sources appliquées sont représentés par la figure 5.4.7.

Comme pour les cas des optimisations avec une seule source excitante le modèle, nous varions ici dans le cas de trois sources ponctuelles, la valeur de l'absorption initiale A^{init} et nous faisons à chaque fois l'optimisation correspondante. Ces résultats sont résumés dans la figure 5.4.8.

La stabilité de la méthode est maintenue en utilisant plusieurs excitations et en variant l'absorption initiale. Concernant la répartition de la couche de mousse, il apparaît que cette dernière dépend surtout de l'emplacement du point d'écoute et présente moins de dépendance à l'emplacement des sources. En effet, la couche est localisée autour du point d'écoute.

D'après les valeurs calculées de la densité d'énergie W au point d'écoute avant et après l'optimisation et comme pour le cas d'une seule source excitant le modèle, nous notons ici que l'optimisation nous permet de réduire de 23% le bruit engendré par les sources. Nous constatons que presque le même niveau de bruit est réduit pour une optimisation à une seule source ainsi qu'à plusieurs sources excitant le modèle.

Finalement, pour réduire le bruit engendré dans une cavité acoustique suite à l'excitation par des sources surfaciques, l'optimisation faite dans les exemples précédents nous montre la nécessité de placer des couches de mousses là où nous estimons avoir l'écoute dans le volume et ensuite là où nous estimons avoir des sources de bruit. Dans le domaine automobile par exemple, nous placerons les couches essentiellement sur le plafond et aux côtés des

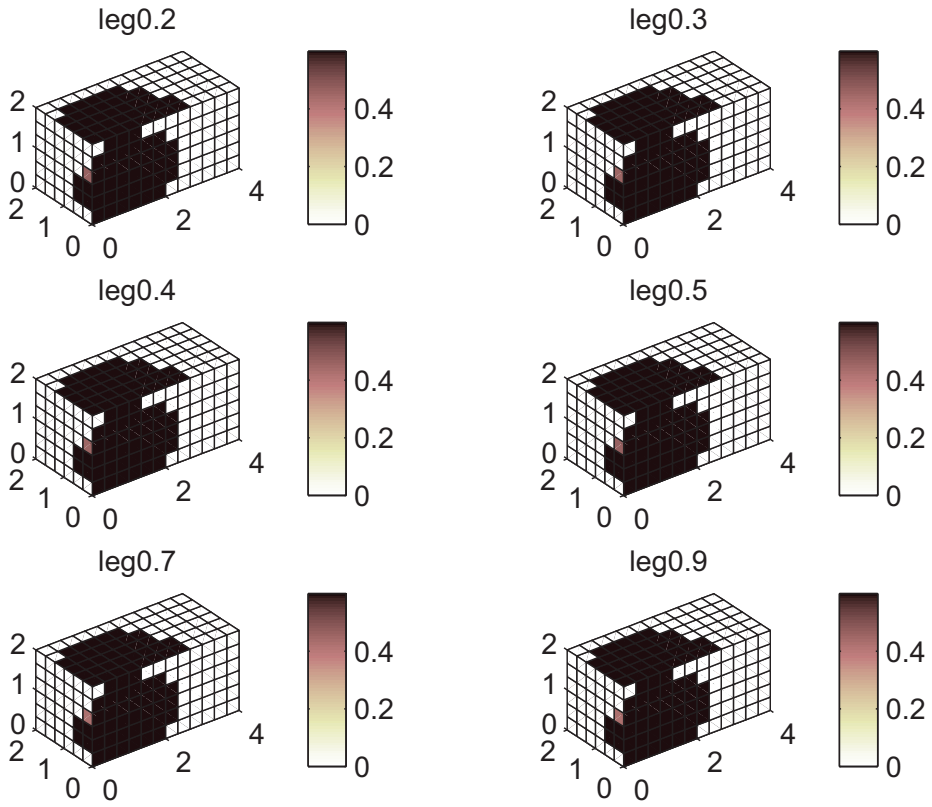


FIGURE 5.4.4 – Optimisations pour absorption initiale $A^{init} = [0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9]$ obtenues pour un point d'excitation de coordonnées $(0, 0.39, 0.66)$

passagers ainsi qu'à la surface limitant la cabine des passagers et le compartiment moteur.

5.4.4 Influence du facteur de directivité sur l'optimisation

5.4.4.1 Notion de directivité

Pour la MES Intégrale que nous utilisons ici dans le chapitre optimisation, la réflexion des ondes aux discontinuités se fait selon une loi de diffusion lambertienne. En d'autres termes, un rayon incident est réfléchi dans toutes les directions (figure 2.3.2 (b)) et cette hypothèse implique le caractère diffusant de la paroi.
Cette diffusion n'est pas uniforme, elle est proportionnelle au cosinus de l'angle de ré-émission.
En dimension 3 qui nous intéresse dans ce chapitre, le facteur de directivité noté dir s'exprime en fonction de l'angle de ré-émission θ et s'écrit par l'équation 2.78 comme suit :

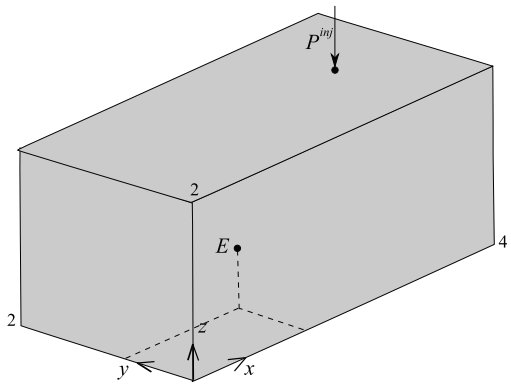


FIGURE 5.4.5 – Modèle cinématique de la cavité acoustique à optimiser pour un point d'excitation de coordonnées $(2.83, 1, 2)$

$$dir_3(\theta) = \frac{\cos\theta}{\pi} \tag{5.26}$$

où le dénominateur π assure l'égalité

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dir_3(\theta)\sin\theta d\theta d\varphi = 1 \tag{5.27}$$

Nous comparons dans ce qui suit les résultats d'optimisation déjà faits pour la directivité issue de la diffusion lambertienne avec ceux trouvés pour un cas particulier de cette directivité correspondant à un champ réfléchi qui peut se propager dans tout le demi espace du système considéré.
Le facteur de directivité s'écrira dans ce cas particulier comme suit:

$$dir_3 = \frac{1}{\pi} \tag{5.28}$$

Les représentations illustrant ces deux types de directivité sont données par la figure 5.4.9

5.4.4.2 Comparaison des résultats de l'optimisation pour différentes directivités

Nous étudions ici l'effet du changement du facteur de directivité suivant les deux types déjà présentés. Les résultats d'optimisation faits alors pour ces deux directivités en prenant une absorption initiale des parois $A^{init} = 0.3$ et en excitant la cavité par la source localisée au point de coordonnées (1.66, 0, 1) sont représentés par la figure 5.4.10.

Nous remarquons ainsi une forte ressemblance entre ces deux résultats (figures 5.4.10(a) et 5.4.10 (b)). Nous trouvons presque la même répartition des mousses sur la surface de la cavité.
Il apparaît donc que l'utilisation de ce type particulier de directivité (figure 5.4.9(a)) des ondes réfléchies ne change pas grande chose au niveau de l'optimisation.

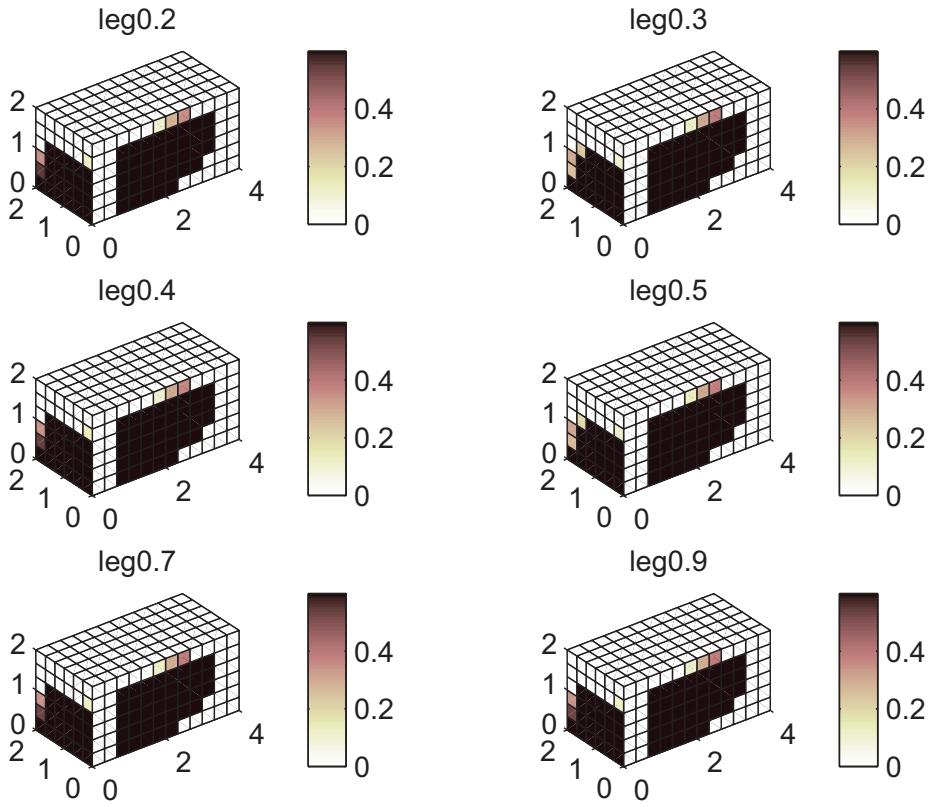


FIGURE 5.4.6 – Optimisations pour absorption initiale $A^{init} = [0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9]$ obtenues pour un point d'excitation de coordonnées $(2.83, 1, 2)$

5.4.5 Influence de l'emplacement du point d'écoute

Dans ce paragraphe, nous étudions l'effet de l'emplacement du point d'écoute sur le résultat d'optimisation. Nous gardons ici le même modèle de cavité excitée au point de coordonnées $(1.66, 0, 1)$ ayant $dir_3(\theta) = \frac{cos\theta}{\pi}$ comme directivité. Le résultat d'optimisation de ce modèle pour une absorption initiale $A^{init} = 0.3$ est déjà présenté par la figure 5.4.2.

La seule modification à apporter à ce modèle est le changement du point d'écoute. En effet, nous choisissons un capteur placé encore plus loin de la source d'excitation que le modèle précédent. Les coordonnées de ce nouveau point d'écoute E' choisi sont $(\frac{L}{3}, 2\frac{l}{3}, \frac{h}{3})$ (figure 5.4.11).

Le résultat de la répartition de la mousse obtenu après l'optimisation de ce modèle avec ce nouveau point d'écoute est présenté par la figure 5.4.12.

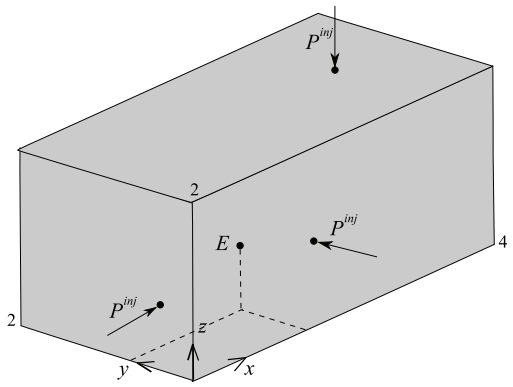


FIGURE 5.4.7 – Modèle cinématique de la cavité acoustique à optimiser pour trois points d'excitation

Il apparait que la répartition de la mousse change en la comparant au cas du point d'écoute qui est proche de la source. La mousse ne sera plus déposée sur la surface contenant la source d'excitation (figure 5.4.12(a)). Par contre, elle sera déposée sur la surface opposée à la source et qui est plus proche du point d'écoute (figure 5.4.12(b)).
Pour conclure, nous pourrons remarquer que l'optimisation de la répartition de la mousse dépend essentiellement de l'emplacement du point d'écoute. En industrie et pour plus de confort acoustique, on doit étudier parfaitement l'emplacement des sources d'excitation et aussi l'emplacement des points succeptibles de recevoir le bruit engendré par ces sources pour bien répartir les couches poroélastiques sur les surfaces de la cabine.

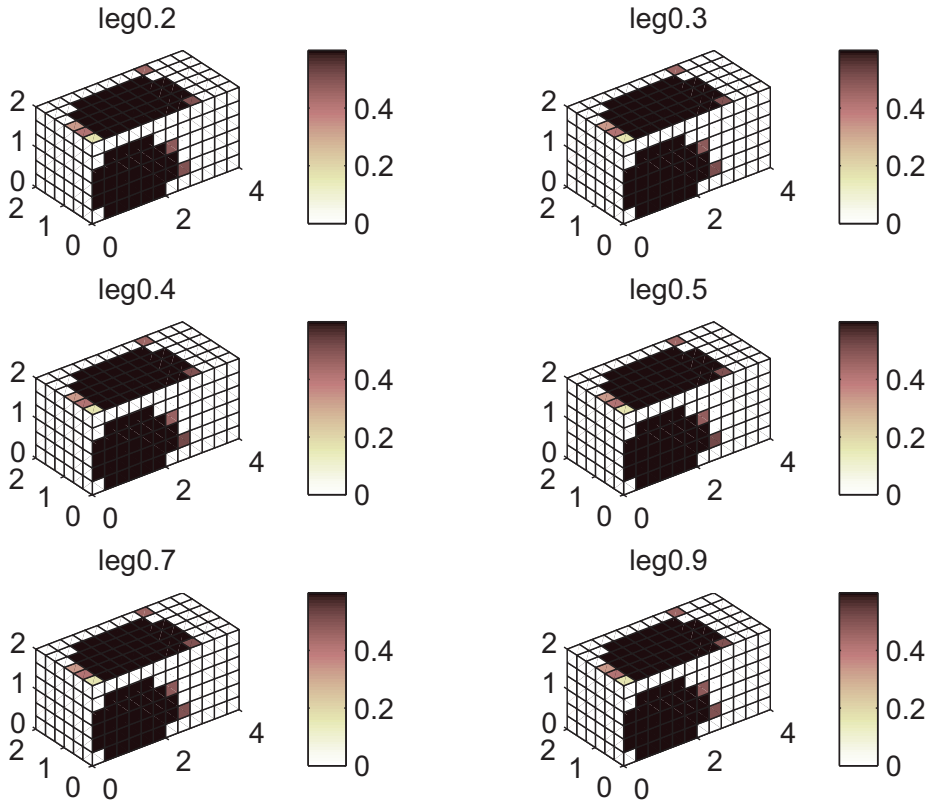


FIGURE 5.4.8 – Optimisations pour absorption initiale $A^{init} = [0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9]$ obtenues pour trois points d'excitation

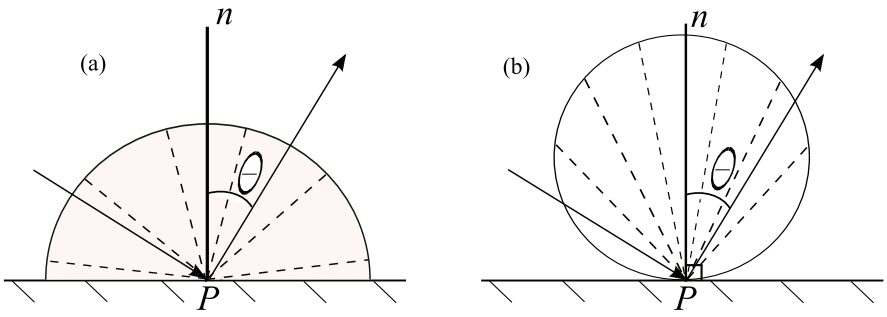
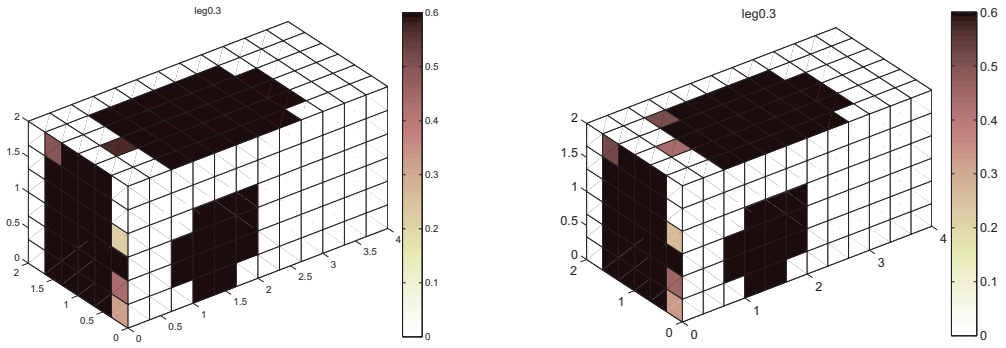


FIGURE 5.4.9 – Réflexion des ondes pour un facteur de directivité $\mathrm{dir}_3 = \frac{1}{\pi}$ (a) et pour $\mathrm{dir}_3(\theta) = \frac{\cos\theta}{\pi}$



(a) (b)

FIGURE 5.4.10 – Optimisations pour absorption initiale $A^{init} = 0.3$ et un point d'excitation de coordonnées $(1.66, 0, 1)$ obtenues respectivement suite à un facteur de directivité $dir_3 = \frac{1}{\pi}$ (a) et $dir_3(\theta) = \frac{cos\theta}{\pi}$

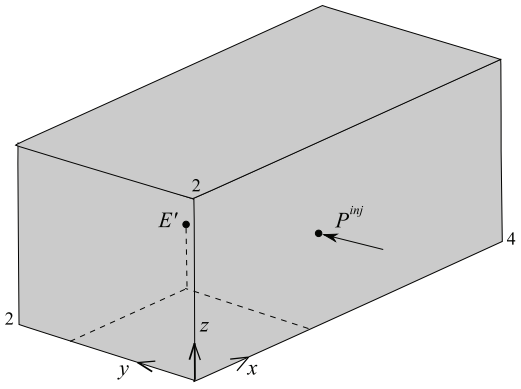
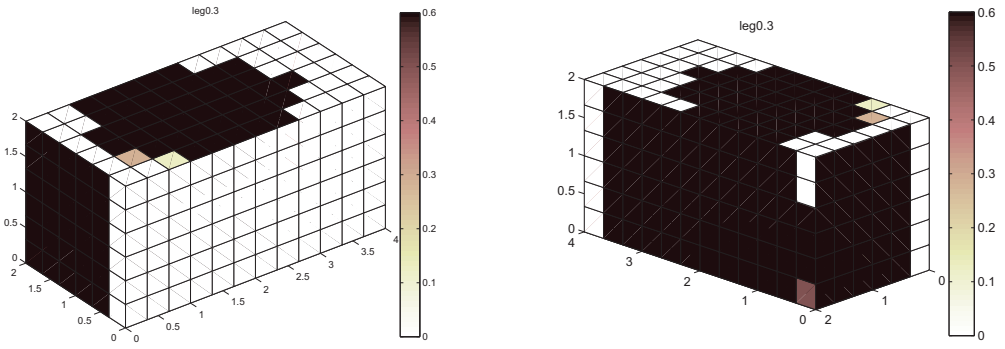


FIGURE 5.4.11 – Modèle cinématique de la cavité acoustique à optimiser pour un point d'écoute de coordonnées $(\frac{L}{3}, 2\frac{l}{3}, \frac{h}{3})$



(a) (b)

FIGURE 5.4.12 – Optimisations pour un point d'écoute de coordonnées $(\frac{L}{3}, 2\frac{l}{3}, \frac{h}{3})$ pour une absorption initiale $A^{init} = 0.3$ et un point d'excitation de coordonnées $(1.66, 0, 1)$ et un facteur de directivité $dir_3(\theta) = \frac{cos\theta}{\pi}$: vue de droite (a) et vue de gauche (b)

5.5 Conclusion

L'étude d'optimisation faite dans ce chapitre a permis de trouver des solutions de répartition non uniforme des matériaux poroélastiques sur les facettes de discrétisation des surfaces des cavités acoustiques.
En effet, pour réduire le bruit engendré par les sources d'excitation surfaciques ou volumiques et entendu dans des points d'écoute bien définis dans le volume de la cavité, les résultats d'optimisation nous ont donné des solutions définies par la répartition d'une couche de mousse ayant des caractéristiques absorbantes différentes d'une facette à une autre ou bien la variation de la hauteur de la même couche poroélastique ayant les mêmes caractéristiques absorbantes d'une facette à une autre.
Nous avons montré aussi que le facteur de directivité des ondes réfléchies par les frontières n'a pas d'influence sur l'optimisation proposée et enfin nous avons remarqué que nos résultats d'optimisation dépendent énormément de l'emplacement du point d'écoute dans la cavité.

L'application d'une méthode d'optimisation à un système de cavité acoustique comportant des éléments poroélastiques répartis surfaciquement a également permis de valider la démarche dans un cadre proche du contexte industriel. Certes, les cavités présentées ici ne sont pas assez complexes comme dans des cas rencontrés chez les professionnels de l'automobile, mais il s'agissait essentiellement de montrer la faisabilité des méthodes, ce qui a pu être effectué.

Conclusions et perspectives

La Méthode Énergétique Simplifiée est une méthode de radiosité dédiée au domaine des moyennes et hautes fréquences où les méthodes éléments finis classiques sont mises en défaut. Cette méthode appartenant à la classe énergétique a montré ses capacités d'identification dans de nombreuses applications ainsi que sa fiabilité par rapport à d'autres méthodes énergétiques. En effet, la théorie du champ diffus de Sabine et la SEA traitent l'énergie globale des systèmes éventuellement décomposés en sous-systèmes. L'écriture de l'équation de diffusion se trouve confrontée à l'écriture des conditions aux limites inadaptées dans les cas ouverts et nécessite des hypothèses relativement fortes. Par contre, la MES présente l'avantage de résoudre le système dans son ensemble sans avoir à imposer un nombre maximal de réflexions.

La Méthode Énergétique Simplifiée a connu des évolutions suivant différentes approches. L'approche différentielle de la MES se base sur l'hypothèse d'ondes planes et présente l'intérêt d'autoriser une résolution par méthode des éléments finis. Cependant, elle ne reste valable que sous l'hypothèse d'ondes planes et pour le champ lointain. Elle est mise en défaut au voisinage des singularités et dans le cas des milieux bi et tridimensionnels. L'approche différentielle mixte a permis à son tour de décrire correctement les systèmes où le champ direct n'est pas négligeable devant le champ réverbéré. Le champ direct est modélisé sous l'hypothèse d'ondes symétriques alors que le champ réverbéré reste bien modélisé sous l'hypothèse d'ondes planes ce qui a nécessité de développer la MES Intégrale permettant de modéliser à la fois le champ direct et le champ réverbéré sous l'hypothèse d'ondes symétriques.

Le premier objectif de ce mémoire était de montrer l'applicabilité de la MES, d'une part en point de vue expérimental donnant lieu à un travail d'expérimentation sous forme d'une application industrielle menée dans le cadre du projet européen CREDO, et d'autre part en point de vue numérique aboutissant à un premier programme implémenté sous MATLAB ainsi qu'un deuxième implémenté dans l'environnement COMSOL Multiphysics pour l'alimenter.
Les résultats numériques obtenus pour la MES ont permis tout d'abord de valider l'utilisation de cette méthode pour le cas structure. Une comparaison des résultats obtenus par la MES ainsi que ceux obtenus par la méthode SEA montre une légère avance pour notre méthode au niveau de l'identification des sources dans les systèmes bidimensionnels. Une deuxième comparaison avec la méthode cinématique RIFF permet d'élargir le champ d'effi-

cacité des hautes vers les moyennes fréquences.
Les systèmes définis par des cavités excitées ont été analysés suivant le type d'excitation, surfacique ou volumique. Une série de résultats numériques utilisant la MES pour ce type de systèmes 3D a montré la performance de cette méthode pour l'identification des sources. L'application industrielle menée par nos partenaires du projet CREDO permet de montrer la performance de la MES en alimentant la formulation inverse par des données expérimentales récupérées des mesures faites sur une cavité excitée par un bruit blanc.
Un deuxième objectif est présenté dans ce travail par l'utilisation de la MES pour réduire le bruit dans les cavités acoustiques. Pour cela, un programme d'optimisation est développé afin de proposer des solutions se basant sur la répartition des matériaux poroélastiques sur les facettes intérieures des cavités. Ce programme localise enfin l'endroit où nous devons mettre la mousse ainsi que le facteur d'absorption associé pour réduire le bruit engendré par les sources déjà identifiées par la MES.

Le travail consigné dans ce mémoire ouvre la porte à un certain nombre de perspectives qu'il nous semble intéressant de mentionner.
Une première perspective se base sur le fait que les modèles considérés dans cette étude, bien qu'ils comportent effectivement des éléments représentatifs des systèmes utilisés dans l'industrie, restent des modèles génériques. Ces modèles ne vérifient pas un certain nombre de caractéristiques spécifiques aux modèles industriels tels que la complexité des géométries au niveau des coques et des corps creux ainsi que les caractéristiques des matériaux en présence. Il sera donc important de se pencher dans le futur sur l'application de la méthode dans des systèmes industriels de géométrie complexe en tenant compte des caractéristiques des matériaux utilisés.
La deuxième perspective repose sur le type d'excitation des systèmes utilisés. En effet, les sources d'excitation détectées dans l'industrie sont variées. Il est essentiel alors d'étudier numériquement comme dans le cas de l'application industrielle une excitation du système à l'aide d'un bruit blanc.
La MES Intégrale pourra aussi être utilisée pour la détection de défauts. Une étude sera alors faite dans le cas d'un modèle de coque présentant des trous pour conclure si la MES est capable d'identifier ces trous comme étant des points d'excitation.
Enfin, il est important d'étudier l'application de la méthode pour des systèmes continus basés sur le couplage tels que le cas d'un système comportant plusieurs plaques couplés et le cas d'un système composé d'une cavité acoustique couplée par une de ses surfaces avec une plaque. Ce type d'étude présente un grand intérêt industriel et la validation de l'utilisation de la MES pour ces systèmes sera appréciée.

Bibliographie

[1] C. Pezerat and J. L. Guyader, *Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam*, Acta Acustica 3 1 , pp. 1-10. 1995.

[2] C. Pezerat and J. L. Guyader, *Localization of mechanical sources exciting a beam using an inverse method*, Proceeding of Vibration and Noise, Venice Italy, 25-27. Stafford (UK): Staffordshire University, p. 190-202. 1995.

[3] C. Pezerat and J. L. Guyader, *Vibroacoustic source identification from measured structure response and resolution of the inverse problem*, In: Symposium on Fluid-Structure Interaction, ASME DEsign Engineering Technical Conferences, Sacramento, CA, [Ref. VIB-3917 (CDROM)] 1997.

[4] C. Pezerat and J. L. Guyader, *Force analysis technique: reconstruction of force distribution on plates*, Acta United with Acta Acustica 86 , pp. 322-332. 2000.

[5] L. Gavric and G. Pavic, *A finite element method for computation of structural intensity by the normal mode approach*, Journal of Sound and Vibration, 164(1):29-43, 1993.

[6] D. U. Noiseux, *Measurement of power flow in uniform beams and plates*, J. Acoust. Soc. Am. 47, pp. 238-247 1970.

[7] G. Pavic, *Measurement of structure borne wave intensity, part I: Formulation of the methods*, Journal of Sound and Vibration 49 2, pp. 221-230. 1976.

[8] S. I. Hayek, M. J. Perchesky and B. C. Suen, *Measurement and analysis of near and far field structural intensity by scanning laser vibrometry*, In: Intensité vibratoire dans les structures, $3^{ème}$ congrès international sur l'intensimétrie, Senlis, France, CETIM, p. 281-288, 1990.

[9] R. Langley, *A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibration*, Journal of Sound and Vibration, 159(3):482-502, 1992.

[10] M. C. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pezerat, J. L. Guyader, *Identification of external forces exciting finite thin cylindrical baffled shell*, International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2002), Leuven, Belgium, 2002.

[11] M. C. Djamaa, N. Ouelaa, C. Pezerat, J. L. Guyader, *Reconstruction of a distributed force applied on a thin cylindrical shell by an inverse method and spatial filtering*, Journal of Sound and Vibration 301, pp 560-575 2007.

[12] R. H. Lyon et G. Maidanick, *Power flow between lineary coupled oscillators*,Journal of the Acoustical Society of America 34(5) 623-639, 1962.

[13] R. H. Lyon et R. G. Dejong, *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann, USA, 1995.

[14] L. Maxit, *Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales*, Thèse de doctorat, INSA.

[15] M. L. Gladwell, *Inverse problems in vibration*, Dordrecht, The Netherlands:Martinus Nijhoff Publishers, 1986, p.263. ISBN 90-247-3408-8..

[16] M. H. A. Anssens, J. W. Verheij, D. J. Thompson, *The use of an equivalent forces method for the experimental quantification of structural sound transmission in ships*, Journal of Sound and Vibration 226(2) 305-328, 1999.

[17] Q. Leclere, *Etude et développement de la mesure indirecte d'efforts, application à l'identification des sources internes d'un moteur Diesel*, Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France 2003.

[18] A. T. Moorhouse, *ompensation for discraded singular values in vibro-acoustic inverse methods*, Journal of Sound and Vibration 267 pp. 245-252, 2003.

[19] P. A. Nelson and S. H. Yoon., *Estimation of acoustic source strength by inverse methods: Part 1, conditioning of the inverse problem*, Journal of Sound and Vibration 233(4) pp. 643-668, 2000.

[20] P. A. Nelson and S. H. Yoon, *Estimation of acoustic source strength by inverse methods: Part 2, experimental investigation of methods for choosing regularization parameters*, Journal of Sound and Vibration 233(4) pp. 643-668, 2000.

[21] X. Chiementin, F. Bolaers, L. Rasolofondraibe and J. P. Dron., *Localisation and quantification of vibratory sources: Application to the predictive maintenance of rolling bearing*, Journal of Sound and Vibration 316 pp. 331-347, 2008.

[22] E. Facquelin, A. Bennani and P. Hamelin, *Force reconstruction and regularization of a deconvolution problem*, Journal of Sound and Vibration 265 pp. 81-107 2003.

[23] B. Jin and Y. Zheng, *A meshles method for some inverse problems associated with the Helmholtz equation. Comput Methods Appl*. Mech. Engrg. 195 pp. 2270-2288, 2006.

[24] Y. Kim and P. A. Nelson, *Spatial resolution limits for the reconstruction of acoustic source strength by inverse methods*, Journal of Sound and Vibration 265 pp. 583-608 2003.

[25] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*, Baithimore: The John Hopkins University Press, second edition 1989.

[26] F. Daprettere, *SVD and signal processing*, Amsterdam. North Holland 1988.

[27] S. H. Yoon, *Reconstruction of Acoustic Source Strength Distributions and their Interactions by Inverse Techniques*, PhD Thesis. University of Southampton. 1998.

[28] Y. Kim and P. A. Nelson, *Optimal regularisation for acoustic source reconstruction by inverse methods*, Journal of Sound and Vibration 275 pp. 463-487, 2004.

[29] Y. J. Kang and E. S. Hwang, *Beamforming-based partial field decomposition in NAH*, Journal of Sound and Vibration 314 pp. 867-884, 2008.

[30] H. S. Kwon and J. S. Bolton, *Partial field decomposition in nearfield acoustical holographie by the use of singular value decomposition and partial coherence procedures*, Proceedings of Noise Conf. 649-654, 1998.

[31] S. U. Pillai, *Array Signal Proceeding*, Springer, New York 1989.

[32] K. R. Holland and P. A. Nelson, *Sound source characterisation:the focussed beamformer vs the inverse method*, Proceedings of ICSV 10, Stockholm, Sweden 2003.

[33] T. Schmitt, *Modélisation des transferts acoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthode énergétique: Application à l'encapsulage des compartiments moteurs*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2004.

[34] W. B. Joyce, *Sabine's reverberation time and ergodic auditoriums*, Journal of the Acoustical Society of America 58 pp. 643-655, 1975.

[35] M. M. Carroll and C. F. Chien, *Decay of reverberant sound in a spherical enclosure*, Journal of the Acoustical Society of America 62 pp. 1442-1446, 1977.

[36] H. Kuttruff, *A simple iteration scheme for the computation of decay constants in enclosures with diffusely reflecting boundaries*, Journal of the Acoustical Society of America 98 (1) pp. 288-293, 1995.

[37] M. Ohsaki and K. Ikeda, *Stability and optimization of structures: Generalized sensitivity analysis*, Springer, 2007.

[38] P. G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Dunod, 1998.

[39] E. Walter and L. Pronzato, *Identification de modèles paramétriques*, Masson, 1994.

[40] P. Lemerle, *Optimisation des structures selon des critères imposés par la discrétion acoustique des navires*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1994.

[41] I. W. Suweca, *Contrôle vibratoire des structures*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2000.

[42] R. R. Barton, D. J. Watson, E. F. Carson and J. S. Manivannan, *Simulation metamodels*, Proceedings of the Winter Simulation Conference. IEEE, pp. 167-174, 1998.

[43] R. W. Blanning, *The construction andimplementation of metamodels*, Simulation pp. 177-183, 1975.

[44] J. P. C. Kleijnen, *A comment on blanning's metamodel for sensitivity analysis: The regression metamodel in simulation*, Interfaces 5 (3) pp. 21-23, 1975.

[45] J. F. Allard, *Propagation of Sound in Porous Media: Modelling Sound Absorbing Mateirials*, Chapman and Hall, 1993.

[46] P. Hardy, *Méthodes énergétiques simplifiées en moyennes et hautes fréquences: Théorie et Applications Industrielles*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2005.

[47] R. S. Langley, *On the vibrational conductivity approach to high frequency dynamics for the dimensional structural components*, Journal of Sound and Vibration, 182(4), 637-657, 1995.

[48] P. Moron, *Mise en oeuvre de méthodes énergétiques dans l'étude de comportement vibratoire de structures complexes dans le domaine des moyennes et hautes fréquences*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1998.

[49] H. Kuttruff, *Simulierte Nachhallkurven in Rechteckräumen mit diffusem Schallfeldn*. Acoustica, 333-342, 25, 1971.

[50] H. Kuttruff, *A simple iteration scheme for the computation of decay constants in enclosures with diffusely reflecting boundaries*, Journal of Acoustical Society of America, 288-293, 98(1), 1995.

[51] H. Kuttruff, *Room acoustics*, Elsevier, 3, 1991.

[52] H. Kuttruff, *Energetic Sound Propagation in Rooms*, Acoustica with Acta Acoustica, 622-628, 83, 1997.

[53] M. N. Ichchou, *Formulation énergétique pour l'étude moyennes et hautes fréquences des systèmes*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1996.

[54] K. Shittowski, *NLQPL: A Fortran-Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems*, Annals of Operations Research, Vol 5, pp.485-500, 1985.

[55] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random Media*, Academic Press, 1978.

[56] W. Chen, A. Sahai, A. Messac and G. J. Sundarraraj, *Exploration of the effectiveness of physical programming in robust design*, Journal of Mechanical Design, 122, 155-163, 2000.

[57] A. Kunjur and S. Krishnamurty, *A robust multi-criteria optimisation approach*, Mechanical Machine Theory, 32, 797-810, 1997.

[58] S. Besset, *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l'aide d'une synthèse modale généralisée*, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 2006.

[59] M. Salomon, *Etude de la parallésation de méthodes heuristiques d'optimisation combinatoire*, Thèse de doctorat, Université Luis Pasteur Strasbourg 1, 2001.

[60] A. Tiwari, R. Roy, G. Jared, O. Munaux, *Evolutionary-based techniques for real-life optimisation: development and testing*, Applied Soft Computing, Volume 1(4), 301-329, 2002.

[61] M. H. Alrefaei, A. J. Alawneh, *Solution quality of random search methods for discrete stochastic optimization*, Mathematics and computers in simulation, 68(2), 115-125, 2005.

Table des figures

1.2.1 Schéma de résolution d'un problème direct classique 4
1.2.2 Schéma de résolution d'un problème inverse 5
1.2.3 Forme typique de la fonction GCV 11
1.2.4 allure de la courbe en L 12
1.3.1 Modèle de frontière pour la WIA 32

2.3.1 Diffusion de l'intensité spécifique dans un volume élémentaire 44
2.3.2 Réflexions spéculaire (a) et diffuse (b) 46
2.4.1 Réflexion au niveau d'une frontière absorbante pour la MES différentielle . . . 47
2.4.2 Elément quadrangulaire utilisé pour la discrétisation de la MES Diff 50
2.4.3 Modèle cinématique de la plaque mince analysée 52
2.4.4 Répartition de la densité d'énergie sur la plaque utilisant la MES Diff 52
2.4.5 Modèle cinématique de la cavité acoustique analysée 53
2.4.6 Répartition de la densité d'énergie sur la cavité utilisant la MES Diff 54
2.5.1 Réflexion au niveau d'une frontière absorbante pour la MES Diff Mixte 55
2.5.2 Répartition de la densité d'énergie sur la plaque utilisant la MES Diff Mixte . 57
2.5.3 Répartition de la densité d'énergie sur la cavité utilisant la MES Diff Mixte . . 57
2.6.1 Système considéré 59
2.6.2 Domaine Ω avec sources primaire et réverbérées 59
2.6.3 Interaction élément/élément 60
2.6.4 Répartition de la densité d'énergie sur la plaque utilisant la MES Intégrale . . 62
2.6.5 Répartition de la densité d'énergie sur la cavité utilisant la MES Intégrale . . . 63
2.7.1 Schéma de résolution d'un problème inverse 64
2.7.2 Schéma de résolution d'un problème inverse 66
2.7.3 Schéma de résolution d'un problème inverse 66

3.2.1 Simulation MESDD/MESDI 71
3.2.2 Simulation MESDD/MESDI pour $r = 0$ (a), $r = 0.5$ (b) et $r = 1$ (c) 72
3.2.3 Simulation FEM/MESDI 73
3.2.4 Simulations FEM/MESDI pour différentes valeurs de f_c 74
3.2.5 Simulations FEM/MESDI et distribution des capteurs en variant ξ 75
3.3.1 Simulation MESDMD/MESDMI 76
3.3.2 Simulation FEM/MESDMI 77
3.3.3 Simulations FEM/MESDMI pour différentes valeurs de f_c 78

3.3.4 Simulations FEM/MESDMI et distribution des capteurs en variant ξ 79
3.4.1 Modèle cinématique de la plaque mince analysée 82
3.4.2 Simulation MESID/MESII pour $N_e = 64$ (a) et $N_e = 361$ (b) 83
3.4.3 Simulation MESID/MESII en variant ξ 84
3.4.4 Simulation MESID/MESII pour $\xi = 0.11$ (a) et répartition des capteurs (b) . . 85
3.4.5 Simulations FEM/MESII pour $\xi = 0.06$ (a), $\xi = 0.14$ (b), $\xi = 0.5$ (c) et $\xi = 1$ (d) 86
3.4.6 Simulations FEM/MESII pour différentes valeurs de f_c 87
3.4.7 Sensibilité de la localisation de la source en variant f_c 88
3.4.8 Simulations FEM/MESII et distribution des capteurs en variant m 89
3.4.9 Simulations FEM/MESII pour différentes valeurs de W 90
3.5.1 Simulations FEM/MESI pour $\eta = 0.001$ (a), $\eta = 0.01$ (b), $\eta = 0.1$ (c) et $\eta = 0.2$ (d) 92
3.5.2 Simulations FEM/SEAI pour $\eta = 0.001$ (a), $\eta = 0.01$ (b), $\eta = 0.1$ (c) et $\eta = 0.2$ (d) 93
3.5.3 Evolution des termes de localisation et de quantification 94
3.6.1 Simulations FEM/RIFF pour différentes valeurs de f_c 96

4.2.1 Simulation MESDD/MESDI pour $\eta = 0.001$ 99
4.2.2 Simulation MESDD/MESDI pour $\eta = 0.025$ (a), $\eta = 0.05$ (b) et $\eta = 0.37$ (c) . . . 100
4.2.3 Répartition des points de mesure dans le volume de la cavité 100
4.2.4 Simulation FEM/MESDI pour $\eta = 0.025$ (a), $\eta = 0.05$ (b) et $\eta = 0.37$ (c) 101
4.3.1 Simulation MESDMD/MESDMI pour $\eta = 0.05$ (a), $\eta = 0.3$ (b) et $\eta = 0.37$ (c) . 102
4.3.2 Simulation FEM/MESDMI pour $\eta = 0.05$ (a), $\eta = 0.3$ (b) et $\eta = 0.37$ (c) 103
4.4.1 Interaction facette/facette 103
4.4.2 Interaction point récepteur/facette 104
4.4.3 Identification de la source pour $e = 20cm$ (a), $e = 17cm$ (b) et $e = 13cm$ (c) . . 107
4.4.4 Identification de la source pour $d = 18cm$ (a), $d = 14cm$ (b) et $d = 1cm$ (c) . . 107
4.4.5 Identification de la source pour différentes erreurs de mesure 108
4.4.6 Identification de la source avec une erreur de 10% en variant e 109
4.4.7 Identification de la source avec une erreur de 10% en variant d 109
4.4.8 Simulation MESID/MESII pour une source surfacique 110
4.4.9 Simulations FEM/MESII pour différentes valeurs de ξ 111
4.4.10 Sensibilité de l'identification en variant ξ 112
4.4.11 Simulation MESIDIMESII pour le cas de deux sources surfaciques 112
4.4.12 Simulations FEM/MESI pour différentes valeurs de ξ 113
4.4.13 Simulation MESID/MESII 114
4.4.14 Simulations FEM/MESII pour $N_e = 729$ (a), $N_e = 1728$ (b) et $N_e = 3375$ (c) . 115
4.5.1 Schéma du banc d'essai 117
4.5.2 Panneau de séparation des deux chambres du banc d'essai 117
4.5.3 raquette de mesure d'intensité 118
4.5.4 Répartition des sous-surfaces du panneau 119
4.5.5 Identification par MES Inverse pour différentes valeurs de f_c 121

5.4.1 Modèle cinématique pour un point d'excitation de coordonnées $(1.66, 0, 1)$ . . 134
5.4.2 Optimisations pour différentes valeurs d'absorption A^{init} 135
5.4.3 Modèle cinématique pour un point d'excitation de coordonnées $(0, 0.39, 0.66)$. 136

5.4.4 Optimisations pour différentes valeurs d'absorption A^{init} 137
5.4.5 Modèle cinématique pour un point d'excitation de coordonnées $(2.83, 1, 2)$ . . 138
5.4.6 Optimisations pour différentes valeurs d'absorption A^{init} 139
5.4.7 Modèle cinématique pour trois points d'excitation 140
5.4.8 Optimisations pour différentes valeurs d'absorption A^{init} 141
5.4.9 Réflexion des ondes pour différents facteurs de directivité 141
5.4.10 Optimisations pour $A^{init} = 0.3$, une excitation en $(1.66, 0, 1)$ et en variant dir_3 142
5.4.11 Modèle cinématique pour un point d'écoute de coordonnées $(\frac{L}{3}, 2\frac{l}{3}, \frac{h}{3})$ 142
5.4.12 Optimisations pour un point d'écoute de coordonnées $(\frac{L}{3}, 2\frac{l}{3}, \frac{h}{3})$ 143

Liste des tableaux

2.4.1 Caractéristiques de la plaque. 51
2.4.2 Dimensions de la cavité et caractéristiques du fluide 53

4.4.1 dimensions de la cavité et caractéristiques du fluide 114
4.5.1 Mesures d'intensité. 120
4.5.2 Mesures d'absorption. 120

5.4.1 Dimensions de la cavité et caractéristiques du fluide du modèle à optimiser . . 132