

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

Spécialité : Dynamique des structures

École Doctorale de Mécanique de Lyon

par

Marie de ROCHAMBEAU

**ANALYSE DES INTERACTIONS FLUIDE-STRUCTURE
EN MOYENNES FRÉQUENCES
SOUS CHARGEMENT AÉRODYNAMIQUE**

Soutenue publiquement le 11 janvier 2010 devant le jury

MM.	M. BEN-TAHAR, Professeur, UTC	Rapporteur
	J.F. DEU, Professeur, CNAM	Rapporteur
	M. ICHCHOU, Professeur, ECL	Directeur
	L. JEZEQUEL, Professeur, ECL	Co-directeur
	P. LADEVEZE, Professeur, LMT Cachan	Président
	B. TROCLET, Senior expert, EADS Astrium	Encadrant



ECOLE CENTRALE DE LYON

DIRECTION DE LA RECHERCHE

Liste des personnes Habilitées à Diriger des Recherches en poste à l'Ecole Centrale de Lyon

Nom-Prénom	Corps grade	Laboratoire ou à défaut département ECL	Etablissement
AURIOL Philippe	professeur	AMPERE	ECL
BEROUAL Abderrahmane	professeur	AMPERE	ECL
BURET François	maître de conférences	AMPERE	ECL
JAFFREZIC-RENAULT Nicole	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
KRÄHENBÜHL Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
MARTELET Claude	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Alain	professeur	AMPERE	ECL
NICOLAS Laurent	directeur de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
SIMONET Pascal	chargé de recherche	AMPERE	CNRS/ECL
THOMAS Gérard	professeur	AMPERE	ECL
VOLLAIRE Christian	maître de conférences	AMPERE	ECL

Nbre Ampère 11

HELLOUIN Yves	maître de conférences	DER EEA	ECL
LE HELLEY Michel	professeur	DER EEA	ECL

Nbre DER EEA 2

GUIRALDENQ Pierre	professeur émérite	DER STMS	ECL
VINCENT Léo	professeur	DER STMS	ECL

Nbre DER STMS 2

LOHEAC Jean-Pierre	maître de conférences	ICJ	ECL
MAITRE Jean-François	professeur émérite	ICJ	ECL
MARION Martine	professeur	ICJ	ECL
MOUSSAOUI Mohand	professeur	ICJ	ECL
MUSY François	maître de conférences	ICJ	ECL
ROUY MIRONESCU Elisabeth	professeur	ICJ	ECL
ZINE Abdel-Malek	maître de conférences	ICJ	ECL

Nbre ICJ 7

DAVID Bertrand	professeur	ICTT	ECL
----------------	------------	------	-----

Nbre ICTT 1

CALLARD Anne-Ségolène	maître de conférences	INL	ECL
CLOAREC Jean-Pierre	maître de conférences	INL	ECL
GAFFIOT Frédéric	professeur	INL	ECL
GAGNAIRE Alain	maître de conférences	INL	ECL
GARRIGUES Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GENDRY Michel	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
GRENET Geneviève	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
HOLLINGER Guy	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

JOSEPH Jacques	professeur	INL	ECL
KRAWCZYK Stanislas	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
LETARTRE Xavier	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
MARTIN Jean-René	professeur émérite	INL	ECL
O'CONNOR Ian	maître de conférences	INL	ECL
PHANER-GOUTORBE Magali	professeur	INL	ECL
ROBACH Yves	professeur	INL	ECL
SAINT-GIRONS Guillaume	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SEASSAL Christian	chargé de recherche	INL	CNRS/ECL
SOUTEYRAND Eliane	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
TARDY Jacques	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL
VIKTOROVITCH Pierre	directeur de recherche	INL	CNRS/ECL

Nbre INL 20

CHEN Liming	professeur	LIRIS	ECL
-------------	------------	-------	-----

Nbre LIRIS 1

BAILLY Christophe	professeur	LMFA	ECL
BERTOGLIO Jean-Pierre	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BLANC-BENON Philippe	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
BOGEY Christophe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CAMBON Claude	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CARRIERE Philippe	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
CHAMPOUSSIN J-Claude	professeur émérite	LMFA	ECL
COMTE-BELLOT geneviève	professeur émérite	LMFA	ECL
FERRAND Pascal	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GALLAND Marie-Annick	maître de conférences	LMFA	ECL
GODEFERD Fabien	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
GOROKHOVSKI Mikhail	professeur	LMFA	ECL
HENRY Daniel	directeur de recherche	LMFA	CNRS/ECL
JEANDEL Denis	professeur	LMFA	ECL
JUVE Daniel	professeur	LMFA	ECL
LE RIBAUT Catherine	chargée de recherche	LMFA	CNRS/ECL
LEBOEUF Francis	professeur	LMFA	ECL
PERKINS Richard	professeur	LMFA	ECL
ROGER Michel	professeur	LMFA	ECL
SCOTT Julian	professeur	LMFA	ECL
SHAO Liang	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
SIMOENS Serge	chargé de recherche	LMFA	CNRS/ECL
TREBINJAC Isabelle	maître de conférences	LMFA	ECL

Nbre LMFA 23

BENAYOUN Stéphane	professeur	LTDS	ECL
CAMBOU Bernard	professeur	LTDS	ECL
COQUILLET Bernard	maître de conférences	LTDS	ECL
DANESCU Alexandre	maître de conférences	LTDS	ECL
FOUVRY Siegfried	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
GEORGES Jean-Marie	professeur émérite	LTDS	ECL
GUERRET Chrystelle	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL
HERTZ Dominique	past	LTDS	ECL
ICHCHOU Mohamed	maître de conférences	LTDS	ECL
JEZEQUEL Louis	professeur	LTDS	ECL
JUVE Denyse	ingénieur de recherche	LTDS	ECL
KAPSA Philippe	directeur de recherche	LTDS	CNRS/ECL
LE BOT Alain	chargé de recherche	LTDS	CNRS/ECL

<i>LOUBET Jean-Luc</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
<i>MARTIN Jean-Michel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>MATHIA Thomas</i>	<i>directeur de recherche</i>	LTDS	CNRS/ECL
<i>MAZUYER Denis</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>PERRET-LIAUDET Joël</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>SALVIA Michelle</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>SIDOROFF François</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>SINOUE Jean-Jacques</i>	<i>maître de conférences</i>	LTDS	ECL
<i>STREMSDOERFER Guy</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>THOUVEREZ Fabrice</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>TREHEUX Daniel</i>	<i>professeur</i>	LTDS	ECL
<i>VANNES André-Bernard</i>	<i>professeur émérite</i>	LTDS	ECL

Nbre LTDS 25

Total HdR ECL

91

Remerciements

Je voudrais remercier tout d'abord mes directeurs de thèse, Mohamed Ichchou et Louis Jézéquel, et mon encadrant chez EADS Astrium, Bernard Troclet, pour m'avoir proposé ce travail de thèse et encadré pendant ces trois années. Je les remercie également pour leur écoute et leur soutien qui m'ont permis de surmonter les difficultés rencontrées.

Je remercie également MM. Jean-François Deu et Mabrouk Ben-Tahar pour avoir bien voulu rapporter mon mémoire de thèse, et M. Pierre Ladevèze qui a présidé mon jury.

Je voudrais ensuite remercier Olivier Bareille, Sébastien Besset et Gilles Robert pour leur disponibilité et leur patience pour répondre à mes — innombrables — questions. Un grand merci également à Bastien Hiverniau, dont j'ai repris les travaux de thèse et qui a beaucoup apporté à mes travaux, que ce soit par son rapport de thèse très clair ou ses conseils avisés.

Un grand merci à l'équipe D2S, pour les sorties au stade — que ce soit foot ou rugby — pour les barbecues et les 'Waffle Day', et sans qui le Buffet International n'aurait jamais vu le jour. Je remercie tout particulièrement Isabelle pour sa gentillesse et ses encouragements.

Finalement, je tiens à remercier ma famille, et tout particulièrement mes parents et ma soeur, qui ont su me soutenir et m'encourager pendant ces trois années.

Résumé

L'objectif industriel de cette thèse est d'étudier l'impact de l'environnement moyennes et hautes fréquences sur les lanceurs de missiles et de fusées. Ce champ acoustique est aléatoire et large bande et génère des vibrations à l'intérieur des lanceurs, qui peuvent détériorer les structures et les équipements fragiles, notamment les composants électroniques des équipements embarqués (premiers modes de vibration à 200-500 Hz, situés dans la zone des moyennes fréquences des lanceurs). Il est nécessaire de réaliser un modèle numérique du lanceur, afin de déterminer les niveaux de vibrations se propageant dans les structures internes des lanceurs sur l'ensemble du spectre fréquentiel.

Dans le domaine des moyennes fréquences, les méthodes par éléments-finis ou énergétiques — comme la SEA (Analyse Énergétique Statistique) — ne sont ni efficaces ni précises. Une nouvelle méthode est alors introduite : la méthode SEA-like. Cette méthode est déterministe et énergétique - pour prendre en compte le caractère aléatoire de l'excitation et les incertitudes des paramètres de la structure - mais s'appuie également sur des analyses basses fréquences, comme l'analyse modale ou par élément fini. Cette méthode est donc valable sur des domaines fréquentielles où la méthode SEA ne peut plus être utilisée.

Dans une première partie, un système couplé plaque-cavité soumis à une excitation *rain-on-the-roof* est étudié. Ce système a été modélisé avec trois méthodes : la méthode SEA-like basée sur une méthode par couplage modal - qui permet l'étude des échanges énergétiques en interaction fluide-structure dans le domaine des moyennes fréquences - la méthode SEA - qui permet de valider le modèle SEA-like dans le domaine des hautes fréquences, - et enfin une méthode SEA-like basée sur une modélisation par éléments-finis du système couplé et qui permet la validation dans le domaine des moyennes fréquences.

Dans une deuxième partie, la méthode SEA-like est étendue à des cas de charges aéroacoustiques. En effet, deux types d'excitations sont fréquemment rencontrés dans le domaine de l'aérospatial et notamment dans l'étude des lanceurs : l'excitation par bruit diffus, qui intervient lors de la première phase de décollage du lanceur et une excitation par couche limite turbulente, qui intervient lors du vol atmosphérique. Ces excitations sont appliqués au système couplé plaque-cavité et modélisés avec la méthode SEA-like. Pour ce faire, les différentes excitations aéroacoustiques sont assimilées à des excitations delta-corrélées équivalentes. Les caractéristiques de l'excitation apparaissent alors dans le vecteur de puissance injectée et la modélisation SEA-like du système proprement dit est indépendante du type d'excitation. La méthode SEA-like est ainsi directement généralisable à différentes excitations. Ces modèles sont validés par comparaison avec des modèles connus d'excitations aéroacoustiques.

Mots clés : Moyennes fréquences, Interactions fluide-structure, Excitations aléatoires large bande, Excitation par couche limite turbulente, Bruit diffus, SEA, SEA-like, Excitation *rain-on-the-roof*

Abstract

The objective of this work is the analysis of spatial launchers behaviour in the mid-high frequency domain. The acoustical excitation of such system is random and broadband. Vibrations propagating inside the spatial system can damage embedded electronic components, which first modes are located in the 200-500 Hz frequency range, i.e. the mid-frequency range of spatial launchers. A numerical modeling of spatial systems must be calculated, in order to predict vibrations inside the systems and avoid such damages.

The Finite Element Method (FEM) and the Statistical Energy Analysis (SEA) are not accurate or efficient enough in the mid-frequency domain. A new method is thus introduced : the SEA-like method. This method is deterministic and energetic — the random excitation and the uncertainties on the geometric description of the system are considered. This method is based on low-frequency modeling, as modal analysis or FEM. Unlike SEA, SEA-like can be used for mid-frequency analysis.

First, a panel-cavity coupled system with *rain-on-the-roof* excitation is considered. This system is modeled with an SEA-like method based on a modal coupling analysis, with an SEA-like method based on FEM (for mid-frequency validation) and with SEA (for high-frequency validation). The modal coupling analysis of the coupled system leads to an analysis of fluid-structure interaction in the mid-frequency domain.

The random acoustical field is then considered. Two aerodynamic loads are studied : diffuse field, which is present during lift-off of the launcher, and turbulent boundary layer excitation, which is present during the aerodynamic flight. Modeling of aerodynamic loads with SEA-like is performed by introducing equivalent delta-correlated excitations. Considering the SEA-like equation, the information on the excitation is located in the injected power vector. The modeling of the system becomes independent of the excitation. One SEA-like modeling can thus be applied to several aerodynamic loads.

Key-words : Mid-frequency domain, Fluid-structure interaction, Random and broadband loads, Turbulent boundary layer excitation, Diffuse field, SEA, SEA-like, *Rain-on-the-roof* excitation

Table des matières

Introduction	1
1 Méthodologies moyennes et hautes fréquences	3
1.1 Introduction	4
1.2 Interaction fluide-structure en basses fréquences	4
1.3 Approches moyennes et hautes fréquences	5
1.3.1 Approches à variables primales	6
1.3.2 Approches énergétiques	6
1.4 Méthode SEA	7
1.4.1 Présentation de la SEA	7
1.4.2 Interaction fluide/structure en SEA	12
1.5 Méthodes énergétiques en moyennes fréquences	17
1.5.1 Méthode énergétique simplifiée	19
1.5.2 Méthode d'intensité ondulatoire (WIA)	22
1.5.3 Analyse modale asymptotique	24
1.5.4 Méthode de la puissance injectée (PIM)	27
1.5.5 Méthode des coefficients d'influence énergétiques	29
1.5.6 Modélisation des interactions fluide-structure et limites d'application	30
1.6 Méthode SEA-like	31
1.6.1 Présentation de la SEA-like	31
1.6.2 Caractérisation de l'excitation	33
1.6.3 Projection sur les modes du système couplé	34
1.6.4 Méthode de couplage modal	38
1.7 Excitations aérodynamiques	38
1.7.1 Excitation par couche limite turbulente	39
1.7.2 Excitation par bruit diffus	40
1.8 Présentation de la démarche	41
2 Analyse du couplage vibroacoustique en moyennes fréquences	45

2.1	Présentation	46
2.2	Présentation du système	46
2.3	Cas de la plaque excitée	48
2.3.1	Équation de la plaque	48
2.3.2	Équation de la cavité	49
2.3.3	Equation matricielle du système	50
2.4	Cas de la cavité excitée	50
2.5	Quelques aspects du couplage entre modes de plaque et de cavité	51
2.5.1	Couplage entre un mode de cavité et un mode de plaque	51
2.5.2	Modes du système couplé	52
2.5.3	Particularité des moyennes fréquences	53
2.6	Modification des conditions aux limites de la plaque	60
2.6.1	Fonctions hiérarchiques	62
2.6.2	Mise en oeuvre	63
2.6.3	Pertinence de la méthode	66
2.7	Conclusion	69
2.7.1	Bilan	69
2.7.2	Vers la SEA-like	71
3	SEA-like par couplage modal et validation en hautes fréquences	73
3.1	Présentation	74
3.1.1	Notion de domaines fréquentiels	74
3.1.2	Présentation du calcul SEA-like	75
3.2	Calcul des énergies	76
3.2.1	Énergie moyenne de la structure	76
3.2.2	Énergie moyenne de la cavité	77
3.3	structure excitée	79
3.3.1	Calcul des vitesses modales	80
3.3.2	Calcul des pressions modales	81
3.3.3	Puissance injectée dans la structure	81
3.4	Cavité excitée	82
3.4.1	Calcul des vitesses modales	83
3.4.2	Calcul des pressions modales	84
3.4.3	Puissance injectée dans la cavité	85
3.5	Calcul des coefficients de la matrice SEA-like	86
3.5.1	Coefficients correspondant à une excitation de la structure	86
3.5.2	Coefficients correspondant à une excitation de la cavité	89

3.6	Validation en Hautes Fréquences	89
3.6.1	Traitement matriciel	89
3.6.2	Calcul de la matrice SEA	90
3.6.3	Etude de la convergence	92
3.7	Conclusion	94
3.7.1	Bilan	94
3.7.2	Extension de la méthode SEA-like	94
4	Approche SEA-like par éléments finis et étude paramétrique	97
4.1	Validation en basses et moyennes fréquences	98
4.1.1	Calcul SEA-like - Méthode par éléments-finis	98
4.1.2	Comparaison des approches par couplage modale et éléments-finis	98
4.2	Quelques simplifications de la matrice SEA-like	100
4.2.1	Réduction de la base modale du système couplé	100
4.2.2	Étude de l'influence des modes de plaque rayonnants	104
4.2.3	Couplage modal et <i>cross-coupling</i>	105
4.3	Influence des conditions aux limites de la structure	115
4.4	Influence du couplage	115
4.5	Conclusion	118
4.5.1	Bilan	118
4.5.2	De l'excitation <i>rain-on-the-roof</i> vers les excitations aérodynamiques	119
5	Traitement des excitations aérodynamiques	121
5.1	Présentation	122
5.2	Introduction de l'excitation équivalente	122
5.3	Excitation par couche limite turbulente	124
5.3.1	Choix du modèle de Corcos	124
5.3.2	Approche <i>spatial extent</i>	125
5.3.3	Approche moyenne en espace k	129
5.4	Excitation par bruit diffus	131
5.4.1	Approche <i>spatial extent</i>	131
5.4.2	Approche par efficacité de rayonnement	133
5.5	Études paramétriques : influence de la force de couplage	134
5.5.1	Excitation par couche limite turbulente	134
5.5.2	Excitation par bruit diffus	135
5.6	Études paramétriques : influence des conditions limites de la structure	136
5.6.1	Mise en œuvre	136
5.6.2	Excitation par couche limite turbulente	136

5.6.3	Excitation par bruit diffus	137
5.7	Mise en œuvre de la méthode	139
	Conclusion	145
	Bibliographie	151

Introduction

Contexte industriel

Les lanceurs de missiles et de fusées sont soumis à un environnement aérodynamique moyennes et hautes fréquences, aléatoire et large bande. Cette excitation génère du bruit et des vibrations à l'intérieur des lanceurs, qui peuvent détériorer les structures et les équipements fragiles, notamment les composants électroniques des équipements embarqués. Il s'avère alors nécessaire de réaliser un modèle prédictif du lanceur, afin de déterminer les niveaux de vibration des structures et équipements internes sur l'ensemble du spectre fréquentiel.

Travaux antérieurs

Des travaux antérieurs, notamment une thèse effectuée au sein d'EADS Astrium [32], ont étudié le couplage entre deux structures solides en moyennes fréquences à l'aide d'une méthode énergétique basée sur des modélisations basses fréquences : la méthode SEA-like. Dans ces travaux, Hiverniau a étudié le comportement dynamique et énergétique de plaques couplées, avec les méthodes SEA-like et PIM. Il a également abordé la modélisation des excitations aérodynamiques en SEA-like, en utilisant une approche équivalente. Ici, on abordera la modélisation des interactions fluide-structure au moyen de la méthode SEA-like et on appliquera les modélisations développées par Hiverniau à des systèmes couplés fluide-structure.

Contexte scientifique

Dans le domaine des basses fréquences, des méthodes comme la méthode par éléments finis ou l'analyse modale peuvent être utilisées pour modéliser les interactions fluide-structure : en effet, dans ce domaine fréquentiel, les modes du système à modéliser sont peu nombreux et ce type de modélisation est réalisable lorsque des réductions comme la sous-structuration sont effectuées. Mais, dans un domaine plus élevé en fréquences, la modélisation éléments finis devient complexe pour plusieurs raisons. D'abord le comportement modal d'un système couplé fluide-structure devient hétérogène : tandis qu'une partie du système — généralement la structure — est caractérisé par un faible recouvrement modal, l'autre partie du système — la partie fluide — présente un fort recouvrement modal ; de plus, il existe des incertitudes dans les paramètres descriptifs du système, qui doivent être de plus en plus précis au fur et à mesure que les fréquences augmentent.

Ainsi, dans le domaine des hautes fréquences, la modélisation sera construite à l'aide de méthodes de type énergétique, qui ne sont pas limitées par le nombre de modes et qui — par leur nature statistique — ne tiennent pas compte des incertitudes paramétriques de la structure. La méthode énergétique la plus commune est la méthode SEA. Cependant, ce type de méthode n'est

utilisable que si les modes sont en nombre suffisant pour pouvoir être traités comme une population statistique. Or, dans le domaine des moyennes fréquences, le recouvrement modal peut devenir faible dans certaines parties du système et la méthode SEA n'est plus valable.

Plusieurs méthodes ont alors été développées dans le domaine des moyennes fréquences pour résoudre ce type de problème. L'une de ces méthodes, la méthode SEA-like, est une méthode de type énergétique — qui prend en compte le caractère aléatoire de l'excitation et les incertitudes des paramètres de la structure — mais utilise également des méthodes basses fréquences. Ainsi, cette méthode peut être étendue à des domaines fréquentiels où la méthode SEA ne peut plus être utilisée.

Plan de l'étude

Dans le chapitre 1 est présenté un bref état de l'art sur les méthodes de modélisation utilisées en moyennes et hautes fréquences. On introduit également les différents phénomènes entrant en jeu dans l'interaction fluide-structure en moyennes fréquences. Dans la suite du rapport, un système couplé plaque-cavité est introduit : de géométrie simple, il permet entre autres d'avoir accès à une modélisation analytique et de mieux appréhender le comportement modal des systèmes couplés fluide-structure.

Plusieurs modélisations sont alors envisagées pour construire le modèle SEA-like d'un système couplé plaque-cavité. Dans le chapitre 2, on présente une méthode de couplage modal, qui permet de traiter de manière analytique les phénomènes d'interaction fluide-structure. Cette modélisation est appliquée à plusieurs conditions aux limites de la structure, ce qui permet l'étude de l'influence de ces dernières sur la modélisation SEA-like.

Le modèle par couplage modal est utilisé dans le chapitre 3 pour calculer les coefficients SEA-like du système couplé plaque-cavité. Une comparaison avec une modélisation SEA de ce même système permet de valider le modèle SEA-like dans le domaine des hautes fréquences.

Dans le chapitre 4, une deuxième modélisation SEA-like basée sur une approche par éléments finis est proposée. Cette modélisation permet d'une part de valider l'utilisation de l'approche par couplage modal pour construire le modèle SEA-like, et d'autre part de proposer une mise en œuvre de la méthode SEA-like pour des systèmes plus complexes, dont on ne peut pas décrire les modes de manière analytique. La modélisation SEA-like basée sur l'approche par couplage modal est alors reprise pour étudier et valider quelques réductions de la base modale du système appliquées au modèle SEA-like. Enfin, différentes configurations du système sont modélisées pour étudier l'influence des conditions aux limites de la plaque et de l'intensité du couplage entre la plaque et la cavité sur la modélisation SEA-like.

Le chapitre 5 reprend la modélisation équivalente présentée par Hiverniau dans la référence [32] et l'applique au système couplé plaque-cavité. Deux excitations aéro-acoustiques sont traitées : une excitation par couche limite turbulente et une excitation par bruit diffus. Plusieurs modélisations sont présentées. Les avantages et inconvénients de ces modélisations sont analysés et aboutissent à l'application de ces modélisations sur les différentes configurations du système couplé présenté précédemment.

Chapitre 1

Méthodologies moyennes et hautes fréquences

1.1	Introduction	4
1.2	Interaction fluide-structure en basses fréquences	4
1.3	Approches moyennes et hautes fréquences	5
1.3.1	Approches à variables primales	6
1.3.2	Approches énergétiques	6
1.4	Méthode SEA	7
1.4.1	Présentation de la SEA	7
1.4.2	Interaction fluide/structure en SEA	12
1.5	Méthodes énergétiques en moyennes fréquences	17
1.5.1	Méthode énergétique simplifiée	19
1.5.2	Méthode d'intensité ondulatoire (WIA)	22
1.5.3	Analyse modale asymptotique	24
1.5.4	Méthode de la puissance injectée (PIM)	27
1.5.5	Méthode des coefficients d'influence énergétiques	29
1.5.6	Modélisation des interactions fluide-structure et limites d'application	30
1.6	Méthode SEA-like	31
1.6.1	Présentation de la SEA-like	31
1.6.2	Caractérisation de l'excitation	33
1.6.3	Projection sur les modes du système couplé	34
1.6.4	Méthode de couplage modal	38
1.7	Excitations aérodynamiques	38
1.7.1	Excitation par couche limite turbulente	39
1.7.2	Excitation par bruit diffus	40
1.8	Présentation de la démarche	41

1.1 Introduction

La modélisation d'un système présentant une problématique d'interaction fluide-structure est complexe. En effet, le recouvrement modal du fluide étant important par rapport à celui de la structure, le fluide et la structure ne présentent souvent pas le même type de comportement fréquentiel. Tandis que le milieu fluide a un comportement modal de type moyennes et hautes fréquences, ses modes devenant très vite indissociables quand la fréquence de l'excitation augmente, la structure garde un comportement de type basses fréquences.

Le comportement particulier des systèmes couplés en fluide-structure soulève, entre autres, deux problématiques. Tout d'abord, la partie fluide des systèmes couplés devient assez complexe à modéliser en termes de densité modale ou de degrés de libertés dans les domaines des moyennes-hautes fréquences : ils ne peuvent pas être modélisés à l'aide d'une simple modélisation par éléments finis, qui serait trop lourde à calculer ; différentes méthodes de réductions doivent être alors introduites, comme les méthodes de sous-structuration, de condensation dynamique ou les méthodes énergétiques. De plus, les comportements respectifs de la partie structure et de la partie fluide présentent des caractéristiques très différentes. Les méthodes employées pour modéliser les systèmes couplés doivent donc pouvoir traiter les deux comportements.

Cette partie bibliographique présentera quelques méthodes utilisées pour modéliser les interactions fluide-structure dans les domaines des basses fréquences, des hautes fréquences et des moyennes fréquences. Dans le domaine des basses fréquences, les modes du système sont bien séparés. Des méthodes de sous-structuration ou de couplage modal permettent la réduction des systèmes couplés. Dans la partie suivante, consacrée au domaine des hautes fréquences, c'est la méthode SEA qui sera présentée. Enfin, les parties suivantes développeront la problématique du domaine des moyennes fréquences, où le phénomène d'interactions fluide-structure doit être traité avec attention. On étudiera enfin, dans une dernière partie, quelques outils pour modéliser les excitations aérodynamiques.

1.2 Interaction fluide-structure en basses fréquences

Dans le domaine des basses fréquences, les analyses modales des systèmes couplés fluide-structure entraînent l'utilisation d'un grand nombre de modes, nécessaires pour modéliser l'élément fluide. Pour réduire la complexité de ces modèles, des méthodes réduites sont utilisées, comme la sous-structuration. En plus de réduire la complexité des modélisations, la sous-structuration permet d'effectuer des vérifications sur différents sous-systèmes sans modéliser nécessairement le système complet [16].

Les méthodes de sous-structuration s'effectuent en trois étapes : tout d'abord la division de la structure en différentes sous-structures, puis la modélisation de chacune des sous-structures indépendamment les unes des autres, et enfin le couplage des différentes sous-structures pour aboutir à un modèle complet de la structure.

Dans la référence [14] puis les références [15, 16], Craig introduit une méthode de sous-structuration qui s'appuie sur les modes statiques de frontière (déformées statiques de la structure pour des excitations unitaires sur la frontière du système) et les modes de vibrations internes (modes encastrés de la structure) :

$$u^c \equiv \begin{Bmatrix} u_i \\ u_b \end{Bmatrix}^c = \begin{bmatrix} \Phi_{ik} & \Psi_{ib} \\ 0 & I_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_k \\ p_b \end{Bmatrix}^c \quad (1.1)$$

où u_c est le vecteur des coordonnées de déplacement de la sous-structure c , u_i et u_b correspondent respectivement aux déplacements internes et aux interfaces. Φ_{ik} est le mode de vibrations internes k

et Ψ_{ib} est le mode statique b de frontière. p_k et p_b sont les coordonnées généralisées correspondantes. Les coordonnées généralisées et les coordonnées physiques sont reliées par la matrice de Craig et Bampton.

En supposant que les modes de vibrations internes sont normalisées par rapport à la masse, l'équation (1.1) permet d'introduire les matrices de masse et de raideur pour chacune des sous-structures c dans le système de coordonnées généralisées correspondant :

$$\bar{M}^c = \begin{bmatrix} I_{kk} & \bar{M}_{kb} \\ \bar{M}_{bk} & \bar{M}_{bb} \end{bmatrix} \quad \bar{K}^c = \begin{bmatrix} \Gamma_{kk} & O_{kb} \\ O_{bk} & \bar{K}_{bb} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Ces matrices peuvent alors être assemblées à l'aide de la matrice d'assemblage S reliant le vecteur des coordonnées généralisées de la structure complète au vecteur des coordonnées généralisées de chacune des sous-structures. Pour deux sous-structures α et β , cette matrice s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} p_k^\alpha \\ p_b^\alpha \\ p_k^\beta \\ p_b^\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_k^\alpha \\ q_k^\beta \\ u_b \end{Bmatrix} \quad (1.3)$$

La matrice S permet ainsi de calculer les matrices de masse et de raideur de la structure complète en fonction des matrices de masse et de raideur de chacun des sous-systèmes. Les sous-structures développées dans cette méthode sont vues comme des super-éléments, dont les degrés de liberté aux interfaces donnent directement les coordonnées généralisées de la structure complète et simplifient grandement le couplage des sous-structures.

La méthode de Craig et Bampton est reprise par Gérardin dans la référence [27]. Dans la référence [42], J.F. Imbert présente cette méthode dans le cadre des éléments finis. R. Ohayon applique la sous-structuration sur un système présentant une interaction fluide-structure en utilisant une projection de Ritz-Galerkin [68]. La pression dans le fluide est ici projetée sur des modes acoustiques de paroi rigide et les réponses acoustiques statiques pour un déplacement donné de la frontière.

Pour la modélisation de systèmes simples, une autre méthode, qui s'appuie sur une projection modale sur les modes de chacun des sous-systèmes découplés, est utilisée. Initialement appliquée à une cavité rectangulaire couplée avec une plaque flexible, la méthode du couplage modal a été introduite par Lyon [59] et Dowell et Voss [23]. Dowell applique cette méthode de manière détaillée sur un système couplé plaque-cavité ainsi que sur d'autres configurations dans la référence [20].

Cette méthode a également été utilisée pour étudier le couplage entre les modes de structure et les modes de fluide : Pan [71, 79, 80] et Hong [33, 34] ont étudié différentes configurations du système couplé plaque-cavité présentant des couplages forts et faibles de la structure. Hong montre notamment la pertinence de l'utilisation des modes découplés pour calculer la réponse d'un système fluide-structure pour différents systèmes et différentes configurations de couplage.

La méthode de couplage modal appliquée à une plaque flexible couplée à une cavité est présentée de manière plus détaillée dans le chapitre 2.

1.3 Approches moyennes et hautes fréquences

Comme il a été écrit dans le paragraphe 1.1, les méthodes de type basses fréquences sont difficiles à mettre en œuvre dans les domaines des moyennes et hautes fréquences. Plusieurs approches, simplifiées par rapport aux approches basses fréquences, sont alors envisageables. Ces approches

s'appuient sur deux types de variables : les variables primales complexes vectorielles (déplacements, forces, ...) et les variables quadratiques et énergétiques réelles, qui peuvent être vectorielles ou non vectorielles (énergie, intensité active, ...).

1.3.1 Approches à variables primales

Différentes approches à variables primales sont utilisées en moyennes fréquences. La méthode du flou structural, développée par Soize [78], s'applique à des systèmes dont le comportement global peut être modélisé à l'aide de méthodes modales. Les sous-structures du système à comportements non-déterministes sont vues comme des impédances par la structure maîtresse. Les impédances sont alors déterminées par des méthodes moyennes et hautes fréquences.

Une autre méthode, la théorie variationnelle des rayons complexes, a été développée par Ladevèze [48, 49]. Cette approche permet de déterminer la réponse de structures élastiques faiblement amorties dans le domaine des moyennes fréquences. Elle repose sur la construction des champs admissibles puis sur une formulation variationnelle qui permet de prendre en compte les conditions aux limites aux interfaces de chacune des sous-structures.

Le comportement dynamique d'une sous-structure est d'abord considérée comme la superposition de modes (ou rayons complexes) de vecteur caractéristique \mathbf{P} au voisinage d'un point \mathbf{x} donné par :

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = e^{i\sqrt{\omega}\mathbf{x}\cdot\mathbf{P}} \cdot U_l(\mathbf{x}, \mathbf{P}) \quad (1.4)$$

L'expression de w peut alors se décomposer en une partie rapide, donnée par l'exponentielle, et une partie lente, U_l . La partie lente est le produit d'un terme dépendant de l'amortissement et d'un terme polynomial, dont les coefficients représentent l'inconnue du problème.

Ces inconnues, dans la partie lente de la solution, peuvent alors être déterminées par une formulation variationnelle qui prend en compte les conditions aux limites de la sous-structure. La résolution de ce système d'équations dans le domaine complexe conduit alors à l'évaluation de quantités effectives comme l'énergie cinétique ou de déformation.

Ainsi, seule l'échelle lente du comportement dynamique est traitée numériquement, ce qui permet de diminuer les coûts de calculs par comparaison avec une modélisation par éléments finis. Cependant, l'utilisation de la TVRC suppose la connaissance des paramètres ondulatoires de la sous-structure. Son application à des cas de géométrie complexe passe alors par l'établissement de structures de géométrie simple équivalentes.

1.3.2 Approches énergétiques

Les approches énergétiques comme la SEA (Analyse Énergétique Statistique) sont majoritairement non déterministes et permettent de prédire le comportement vibratoire d'un système lorsque son dimensionnement n'est pas entièrement connu — par exemple en phase de préconception, lorsque les incertitudes qui existent sur les paramètres du système ne permettent pas une modélisation numérique déterministe. Ces méthodes s'appuient alors sur des grandeurs moyennées aussi bien en espace et en fréquence que sur des paramètres du système. Une modélisation SEA donne ainsi une description énergétique par sous-système. Cependant, certaines conditions doivent être vérifiées pour sa validation, qui reste limitée à l'analyse hautes fréquences. Ces conditions sont précisées dans le paragraphe 1.4 de ce rapport. La relaxation des limitations de la SEA conduit à des approches dont la validité peut s'étendre au domaine des moyennes fréquences. C'est le cas de la MES (méthode énergétique simplifiée) et de la WIA (wave intensity analysis).

La méthode SEA-like est également dérivée de la méthode SEA mais, contrairement à cette dernière, la SEA-like ne s'applique pas à un ensemble moyenné de systèmes mais à un système en particulier (voir paragraphe 1.6). La méthode SEA-like, qui s'appuie sur des méthodes de type basses fréquences, s'étend sur un domaine fréquentiel plus large que la SEA, tout en donnant une description énergétique du système.

1.4 Méthode SEA

1.4.1 Présentation de la SEA

1.4.1.1 Introduction

La méthode SEA (voir référence [60]), ou Statistical Energy Analysis, est une méthode qualitative (*Analyse*) et énergétique communément utilisée dans le domaine des hautes fréquences. Contrairement aux méthodes utilisées dans les domaines des basses fréquences, ce n'est pas une méthode déterministe, qui donne une modélisation d'un système particulier, mais une méthode *statistique* : la SEA s'applique à un échantillon de systèmes dont les paramètres, moyennés, alimentent le modèle. Les systèmes ne sont pas décrits par le déplacement ou la vitesse, qui deviennent complexes à gérer en hautes fréquences. C'est l'*énergie* – grandeur scalaire et non vectorielle – qui est utilisée.

Dans l'ouvrage référencé en [60], R.H. Lyon fait un exposé exhaustif de la méthode SEA, en commençant par les équations énergétiques entre deux systèmes couplés à un degré de liberté et qui constituent la base de la SEA, pour conclure par l'application industrielle.

Dans le domaine des basses fréquences, les premiers modes d'un système suffisent à décrire son comportement dynamique. Pendant longtemps, les études des systèmes mécaniques se sont attachées à décrire les comportements basses fréquences de ces systèmes. Ainsi, les systèmes étaient modélisés avec une analyse modale ou par éléments-finis.

La méthode SEA a été développée au début des années 60 lorsque des structures de grandes tailles soumises à des excitations aléatoires en hautes fréquences ont commencées à être étudiées, dans le domaine aéronautique essentiellement. En effet, en hautes fréquences, les modes deviennent très sensibles aux incertitudes paramétriques (géométrie, propriétés des matériaux). De plus, le grand nombre de degrés de liberté à prendre en compte dans la modélisation de ce type de système rend les temps de calculs prohibitifs. Ainsi, une nouvelle méthode est introduite, et dont les caractéristiques permettent de palier aux inconvénients cités ci-dessus : elle est statistique - elle prend en compte les incertitudes dans les paramètres de structure - et énergétique - ce qui permet d'étudier non pas des grandeurs vectorielles comme les déplacements mais des grandeurs scalaires.

La SEA repose sur un principe simple : la puissance échangée entre deux oscillateurs à un degré de liberté est proportionnelle à la différence d'énergie entre les deux sous-systèmes. Ce principe est établi par Lyon dans la référence [60], et se démontre lorsque certaines conditions bien précises sont établies.

1.4.1.2 Théorie

Pour démontrer ce principe, deux oscillateurs de masse m_i , de raideur k_i et d'amortissement r_i sont considérés (voir figure 1.1). Ces deux oscillateurs sont couplés par une masse m_c , une raideur k_c et un élément de couplage gyroscopique g_c . Les équations d'équilibre des deux sous-systèmes

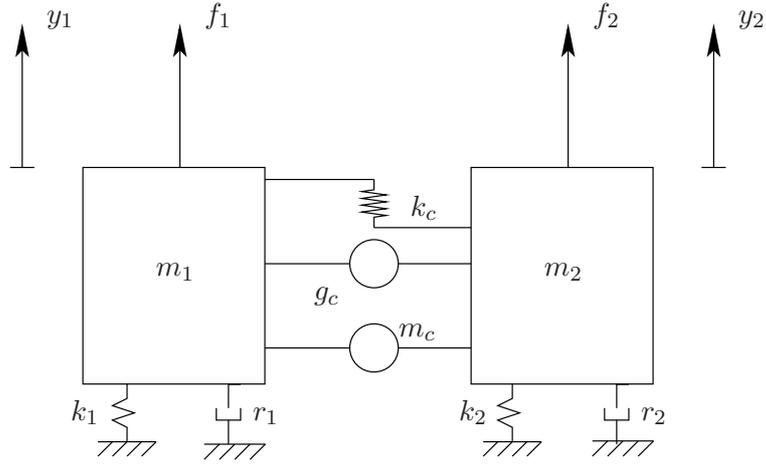


FIGURE 1.1 – Schéma de deux oscillateurs linéaires

couplés s'expriment :

$$(m_1 + \frac{m_c}{4})\ddot{y}_1 + r_1\dot{y}_1 + (k_1 + k_c)y_1 = f_1 + k_c y_2 + g_c \dot{y}_2 - \frac{m_c}{4}\ddot{y}_2 \quad (1.5)$$

$$(m_2 + \frac{m_c}{4})\ddot{y}_2 + r_2\dot{y}_2 + (k_2 + k_c)y_2 = f_2 + k_c y_1 - g_c \dot{y}_1 - \frac{m_c}{4}\ddot{y}_1 \quad (1.6)$$

Ces deux oscillateurs sont excités par des forces f_i supposées en régime harmonique de pulsation ω . Ainsi, la somme des puissances injectées dans les deux oscillateurs montre que l'énergie du système est uniquement dissipée par l'amortissement interne de chacun des sous-systèmes :

$$\langle f_1 \dot{y}_1^2 \rangle + \langle f_2 \dot{y}_2^2 \rangle = r_1 \langle \dot{y}_1^2 \rangle + r_2 \langle \dot{y}_2^2 \rangle \quad (1.7)$$

Le couplage entre les sous-systèmes 1 et 2 est donc non-dissipatif. Le flux de puissance Π_{12} entre les deux oscillateurs s'écrit :

$$\Pi_{12} = \langle f_1 \dot{y}_1 \rangle - r_1 \langle \dot{y}_1^2 \rangle = -k_c \langle y_2 \dot{y}_1 \rangle - g_c \langle \dot{y}_2 \dot{y}_1 \rangle + \frac{m_c}{4} \langle \ddot{y}_2 \dot{y}_1 \rangle \quad (1.8)$$

L'introduction des amortissements η_1 et η_2 et des pulsations propres ω_1 et ω_2 de chaque sous-système découplé permet de calculer les déplacements $\langle y_1 \rangle$ et $\langle y_2 \rangle$ de chaque oscillateur (pour le détail des calculs, voir [60]). L'équation 1.8 devient alors :

$$\Pi_{12} = A \left[\frac{\pi S_{l_1}}{\omega_1 \eta_1 (m_1 + \frac{m_c}{4})} - \frac{\pi S_{l_2}}{\omega_2 \eta_2 (m_2 + \frac{m_c}{4})} \right] \quad (1.9)$$

où A est un coefficient qui s'écrit en fonction des paramètres du système et S_{l_1} et S_{l_2} sont les densités spectrales des sources 1 et 2. Or, si on appelle E_i^b l'énergie dans le sous-système i découplé - c'est-à-dire l'énergie dans un des sous-systèmes soumis à un chargement f_i lorsque l'autre sous-système est bloqué, la densité spectrale dans le sous-système i peut s'écrire :

$$S_{l_i} = \frac{2}{\pi} \omega_i \eta_i (m_i + \frac{m_c}{4})^2 \langle \dot{y}_i^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \omega_i \eta_i (m_i + \frac{m_c}{4}) E_i^b \quad (1.10)$$

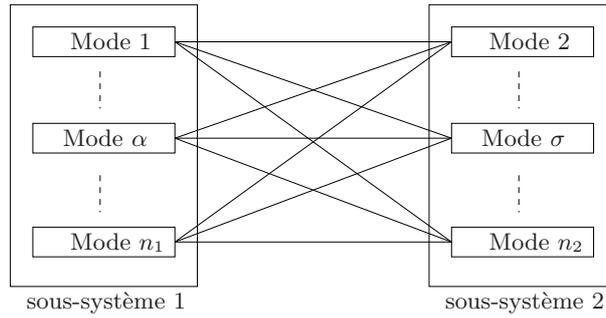


FIGURE 1.2 – Couplage modal entre deux sous-systèmes

Ainsi, on peut exprimer le flux de puissance entre les deux sous-systèmes en fonction des énergies internes dans chaque sous-système :

$$\Pi_{12} = A(E_1^b - E_2^b) \quad (1.11)$$

Or, il est montré que la différence d'énergie entre les deux oscillateurs ($E_1 - E_2$) est proportionnelle à $(E_1^b - E_2^b)$ (voir référence [60]). L'équation (1.11) devient donc :

$$\Pi_{12} = B(E_1 - E_2) \quad (1.12)$$

Cette dernière équation est fondamentale dans l'analyse SEA car elle permet de quantifier la puissance échangée entre deux modes en fonction de l'énergie contenue dans les deux modes.

On considère maintenant deux sous-systèmes présentant plusieurs modes dans une bande de fréquence donnée. La relation (1.12) peut être utilisée pour évaluer la puissance échangée entre ces deux sous-systèmes si les modes des sous-systèmes vérifient certaines conditions :

1. chaque mode est équiprobable dans la bande de fréquence considérée,
2. l'énergie du sous-système est équirépartie sur ses modes,
3. les amplitudes modales sont supposées incohérentes entre elles,
4. l'amortissement est le même pour chaque mode. Ceci n'est pas une hypothèse indispensable à l'application de la méthode mais permet de simplifier sa mise en œuvre.

Ces hypothèses sont vérifiées sous certaines conditions d'application : la première hypothèse correspond au fait que, dans chaque sous-système, les modes présentent des caractéristiques similaires notamment sur leurs déformées, mais que leurs caractéristiques sont distribuées de manière aléatoire sur la bande de fréquence. L'hypothèse 2 est vérifiée en hautes fréquence car les sous-systèmes sont choisis de telle sorte que les propriétés modales d'un sous-système sont similaires. L'hypothèse 3 implique que les excitations modales ont des propriétés équivalentes mais sont incohérentes entre elles.

Soient deux sous-systèmes 1 et 2 présentant n_1 et n_2 modes. Les indices des modes de chaque sous-système sont respectivement α pour le premier et σ pour le second (voir figure 1.2). Chaque mode du sous-système 1 est couplé de la même manière que dans le système étudié précédemment avec les modes du sous-système 2. Ainsi, les équations du mouvement pour chaque sous-système s'expriment :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_i(x_i) + \frac{r_i}{\rho_i} \dot{y}_i(x_i) + \Lambda_i y_i(x_i) &= \frac{1}{\rho_i} (p_i(x_i) + \mu_{ij}(x_i, x_j) \ddot{y}_j(x_j)) \\ &+ \frac{1}{\rho_i} ((-1)^j \gamma_{ij}(x_i, x_j) \dot{y}_j(x_j) + \kappa_{ij}(x_i, x_j) y_j(x_j)) \end{aligned} \quad (1.13)$$

où $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$. x_i est la variable d'espace parcourant le sous-système i , p_i est l'excitation du sous-système i , et μ_{ij} , γ_{ij} et κ_{ij} représentent les interactions entre les sous-systèmes 1 et 2.

On appelle $\Psi_{1\alpha}$ le mode α du sous-système 1 et $\Psi_{2\sigma}$ le mode σ du sous-système 2. Les équations de chaque sous-système sont projetées sur sa base modale. L'introduction des paramètres de couplages $\mu_{\alpha\sigma}$, $\gamma_{\alpha\sigma}$ et $\kappa_{\alpha\sigma}$ permet d'obtenir les équations modales pour chaque sous-système :

$$M_1 \left(\ddot{Y}_\alpha + \Delta_1 \dot{Y}_\alpha + \omega_\alpha^2 Y_\alpha \right) = F_\alpha + \sum_\sigma \left(\mu_{\alpha\sigma} \ddot{Y}_\sigma + \gamma_{\alpha\sigma} \dot{Y}_\sigma + \kappa_{\alpha\sigma} Y_\sigma \right) \quad (1.14)$$

$$M_2 \left(\ddot{Y}_\sigma + \Delta_2 \dot{Y}_\sigma + \omega_\sigma^2 Y_\sigma \right) = F_\sigma + \sum_\alpha \left(\mu_{\sigma\alpha} \ddot{Y}_\alpha + \gamma_{\sigma\alpha} \dot{Y}_\alpha + \kappa_{\sigma\alpha} Y_\alpha \right) \quad (1.15)$$

où on réserve l'indice α pour le sous-système 1 et l'indice σ pour le sous-système 2.

Or, dans l'équation (1.14), l'interaction entre le mode α du sous-système 1 et tous les modes σ du sous-système 2 peut-être considéré comme une excitation aléatoire. Donc, si un mode σ est isolé, l'équation (1.14) peut être considéré comme une équation de couplage entre un des modes du sous-système 1 et un des modes du sous-système 2. Elle est donc équivalente à l'équation (1.5). De plus, l'énergie est équirépartie sur les modes et ne dépend pas du numéro du mode considéré mais uniquement du sous-système correspondant. Ainsi, si $E_1 = E_\alpha$ est l'énergie modale dans le sous-système 1 et $E_2 = E_\sigma$ est l'énergie modale dans le sous-système 2, le flux d'énergie entre les deux modes $\Psi_{1\alpha}$ et $\Psi_{2\sigma}$ s'exprime à partir de l'équation (1.12) :

$$P_{\alpha\sigma} = \langle B_{\alpha\sigma} \rangle (e_1 - e_2) \quad (1.16)$$

Les modes étant supposés incohérents entre eux, l'échange d'énergie entre le mode α du sous-système 1 et tous les modes du sous-système 2 est la somme des $P_{\alpha\sigma}$ sur tous les modes σ . De même, l'échange d'énergie entre les deux sous-systèmes, c'est-à-dire entre tous les modes α et σ , est la somme sur α et σ des $P_{\alpha\sigma}$:

$$P_{12} = \sum_{\alpha, \sigma} P_{\alpha\sigma} = \langle B_{\alpha\sigma} \rangle N_1 N_2 (e_1 - e_2) \quad (1.17)$$

N_1 et N_2 étant respectivement le nombre de modes dans la bande de fréquence considérée dans les sous-systèmes 1 et 2.

Si on appelle $E_1 = N_1 e_1$ et $E_2 = N_2 e_2$ les énergies totales dans chaque sous-système, et si l'on introduit les facteurs de perte par couplage suivants :

$$\eta_{12} = \frac{\langle B_{\alpha\sigma} \rangle N_2}{\omega} \quad (1.18)$$

$$\eta_{21} = \frac{N_1 \eta_{12}}{N_2} \quad (1.19)$$

l'équation (1.17) peut être reformulée de la façon suivante :

$$P_{12} = \omega (\eta_{12} E_1 - \eta_{21} E_2) \quad (1.20)$$

L'équation (1.20), qui donne l'expression de la puissance échangée entre les deux sous-systèmes, permet d'écrire un système d'équation donnant l'énergie totale dans chaque sous-système en fonction de la puissance injectée dans les sous-systèmes.

La puissance dissipée au sein de chaque sous-système s'exprime en fonction du facteur de perte par dissipation η_i qui caractérise la dissipation d'énergie au sein du sous-système i :

$$P_{i,diss} = \omega \eta_i E_i \quad (1.21)$$

Le bilan énergétique sur chaque sous-système s'écrit alors :

$$P_{i,inj} = P_{ij,i \neq j} + P_{i,diss} = \omega (\eta_i E_i + \eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) \quad (1.22)$$

ce qui conduit à la matrice SEA du système étudié :

$$\begin{pmatrix} P_{1,inj} \\ P_{2,inj} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Cette expression peut-être étendue à un système comportant plusieurs sous-systèmes lorsque ceux-ci vérifient les hypothèses montrées plus haut.

1.4.1.3 Mise en œuvre

La matrice SEA exprime la puissance injectée moyennée dans chacun des sous-systèmes en fonction des puissances injectées. Le calcul des coefficients SEA peut s'effectuer de différentes manières, aussi bien expérimentalement que numériquement.

Les facteurs de perte interne η_i caractérisent la dissipation énergétique au sein de chaque sous-système, que ce soit par amortissement structural, rayonnement vers l'extérieur ou friction interne. Ce facteur peut être obtenu de manière expérimentale par plusieurs méthodes comme l'estimation de la largeur à mi-hauteur de la réponse fréquentielle, l'expression de l'équilibre énergétique du sous-système isolé ou la mesure du temps de réverbération dans le sous-système. Cependant, ces mesures peuvent ne pas être pertinentes. Par exemple, dans le cas de la mesure du temps de réverbération, la mesure n'est pertinente que si le système est isolé : en effet, l'amortissement du sous-système considéré ne doit pas être du à l'interaction avec d'autres sous-systèmes.

Les facteurs de perte par couplage η_{ij} sont déterminés soit par l'expérience, soit par un calcul. De même que pour les facteurs de perte interne, la mesure par l'expérience des facteurs de perte par couplage doit se faire avec attention pour ne pas interférer avec la mesure des facteurs de perte interne.

Les méthodes de calcul utilisées pour obtenir le facteur de perte par couplage peuvent utiliser soit des approches modales soit des approches ondulatoires. Les approches ondulatoires sont généralement les plus utilisées car elles ne nécessitent pas une description de chacun des sous-systèmes considérés, mais uniquement de la jonction entre les deux sous-systèmes. Les approches ondulatoires permettent, sous l'hypothèse de champ diffus, de calculer le coefficient de transmission moyen entre deux sous-systèmes supposés infinis. L'hypothèse de champ diffus permet alors de moyenniser les angles des ondes incidentes considérées. Le coefficient de transmission est alors calculé en considérant le rapport entre la puissance transmise à travers la jonction et la puissance incidente.

1.4.1.4 Limites d'application

Les hypothèses de la méthode SEA ne sont vérifiées que sous certaines conditions. Ces conditions dépendent fortement de deux paramètres : le caractère de champ diffus au sein de chaque sous-système (recouvrement modal spatial) et le nombre de modes dans la bande de fréquence considérée (recouvrement fréquentiel). Un recouvrement modal élevé permet de valider l'hypothèse d'équiprobabilité des fréquences propres des modes sur la bande de fréquence considérée.

Une autre hypothèse importante à considérer lors de l'application de la méthode SEA, et qui dépend également du recouvrement modal, est l'hypothèse de couplage faible. Plusieurs critères ont été présentés pour qualifier le couplage entre les sous-systèmes :

- Chandiramani [8] considère que le couplage est faible si le facteur de perte interne est bien plus important que le facteur de perte par couplage
- Mace [87] introduit deux paramètres qui dépendent des coefficients de réflexion et de transmission à la jonction entre les deux sous-systèmes et des facteurs de recouvrement modal, et qui permettent de déterminer la force de couplage entre deux sous-systèmes
- Fahy indique que le couplage est faible entre deux sous-systèmes si les modes des sous-systèmes couplés présentent des caractéristiques proches des modes des sous-systèmes découplés
- Le couplage est également considéré comme faible si le couplage de deux modes d'un même sous-système via un mode de l'autre sous-système est négligeable par rapport au couplage direct entre les modes de chaque sous-système.

Lorsque le couplage est fort, il convient d'étudier le couplage indirect (entre deux sous-systèmes non physiquement liés) ainsi que la prise en compte ou non du couplage indirect dans le modèle. Lors de l'application de la modélisation SEA, le couplage indirect est négligé (sauf pour quelques cas particuliers comme l'étude du couplage entre deux cavités séparés par une plaque) : Langley [50,51] montre que, pour des systèmes faiblement couplés et réverbérants, le couplage indirect peut-être négligé. Dans la référence [24], Finnveden arrive au même résultat pour un système composé de trois sous-systèmes.

Mais nous verrons dans les paragraphes suivants que, en modifiant la méthode SEA de manière à prendre en compte le couplage indirect, il est possible d'introduire d'autres méthodes énergétiques qui prennent en compte des couplages plus forts.

Lors de l'expression de la matrice SEA, on considère que l'échange d'énergie entre deux sous-systèmes est conservatif, ce qui permet d'écrire que le flux d'énergie échangé du sous-système i vers le sous-système j est égal à l'opposé du flux d'énergie du sous-système j vers le sous-système i . Cette hypothèse permet d'obtenir la loi de réciprocité entre les facteurs η_{ij} et η_{ji} . En étudiant le cas où la liaison n'est plus conservative et présente un amortissement, Fahy a réécrit les facteurs de perte interne et les facteurs de perte par couplage de manière à prendre en compte l'amortissement dans la liaison.

Dans le cas d'un recouvrement modal faible, les facteurs de perte par couplage dépendent fortement des irrégularités géométriques présentes dans le système. Dans ce cas, l'hypothèse d'équiprobabilité des modes n'est plus valable.

1.4.2 Interaction fluide/structure en SEA

Pour appliquer la méthode SEA à un système présentant une problématique de couplage fluide/structure, il convient d'étudier tout spécialement les phénomènes qui régissent le couplage entre un fluide et une structure dans le domaine des hautes fréquences. On rencontre principalement deux phénomènes de transfert énergétique : le phénomène de rayonnement qui décrit l'échange

d'énergie entre un fluide et une structure et le phénomène de transparence, qui caractérise les échanges énergétiques entre deux fluides séparés par une structure.

1.4.2.1 Rayonnement

Le rayonnement d'une plaque infinie dans un fluide est un phénomène qui dépend de la fréquence de l'onde incidente sur la plaque et qui fait intervenir la fréquence critique de la plaque. Cette fréquence critique dépend des propriétés de la plaque et du fluide environnant.

Considérons une plaque infinie située sur le plan d'équation $z = 0$, de masse surfacique ρ_s et de rigidité en flexion D , recouverte d'un baffle rigide du côté $z < 0$, et baignant dans un fluide de célérité c_0 du côté $z > 0$. La plaque est soumise à une excitation harmonique de pulsation $\omega = \frac{f}{2\pi}$.

Le déplacement normal de la plaque est soumis à l'équation de mouvement en flexion :

$$D\Delta^4 w + \rho_s \omega^2 w = 0 \quad (1.24)$$

ce qui nous donne le nombre d'onde k_s dans la plaque en fonction de ω :

$$k_s^4 = \frac{\rho_s \omega^2}{D} \quad (1.25)$$

La pression dans le fluide est décrite par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1.26)$$

où $k = \omega/c_0$. La condition aux limites en $z = 0$ est :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \omega^2 w \quad (1.27)$$

Le déplacement normal dans la plaque est écrit sous la forme $w = w_0 \exp(ik_x x + ik_y y)$ donc l'onde de déplacement dans la plaque vérifie $k_x^2 + k_y^2 = k_s^2$. Ainsi, d'après (1.26) et (1.27), la pression dans la cavité s'écrit :

$$p = \frac{i\omega^2}{\gamma} w_0 e^i (k_x x + k_y y + \gamma z) \quad (1.28)$$

γ est le nombre d'onde suivant l'axe z dans la cavité et est donné par l'équation suivante :

$$\gamma = \begin{cases} (k^2 - k_s^2)^{1/2} & \text{si } k > k_s \\ i(k_s^2 - k^2)^{1/2} & \text{si } k < k_s \end{cases} \quad (1.29)$$

Trois cas se présentent en fonction de la valeur de k_s :

- lorsque $k > k_s$, p est décrit par une onde plane suivant z et la plaque infinie rayonne,
- lorsque $k < k_s$, p est décrit par une onde évanescente suivant z , la plaque ne rayonne pas,
- lorsque $k = k_s$, la pression est infinie et on observe un pic de rayonnement.

Or, le nombre d'onde acoustique est égal au nombre d'onde de la plaque lorsque la fréquence d'excitation f est égale à la fréquence critique. D'après (1.25), on en déduit la valeur de la fréquence critique :

$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_s}{D}} \quad (1.30)$$

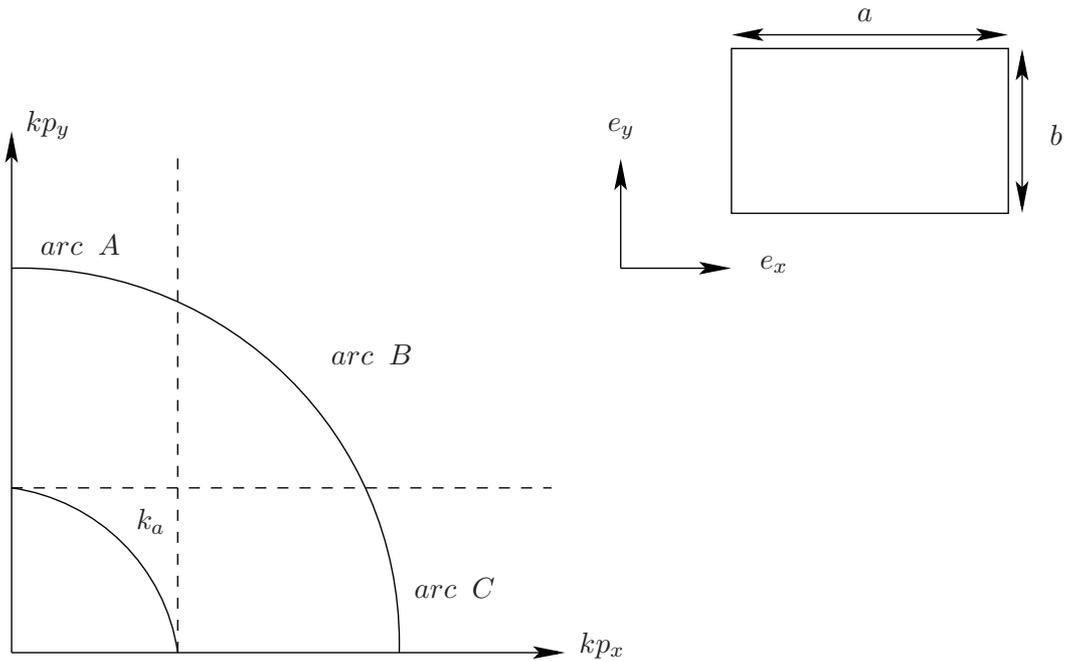


FIGURE 1.3 – Calcul de la puissance rayonnée par une plaque rectangulaire par G. Maidanik

Dans le cas des plaques finies, lorsque la fréquence d'excitation est en dessous de la fréquence critique, on observe un rayonnement au niveau des bords de la plaque. D'un point de vue modal, cela s'explique par le fait que les modes de la plaque rayonnent au-delà d'une fréquence critique dont la valeur dépend de leur fréquence propre. Ainsi, même si l'on se situe en dessous de la fréquence critique de la plaque infinie, certains modes possédant une fréquence critique inférieure à la fréquence d'excitation vont rayonner.

La puissance de rayonnement d'une structure se calcule grâce au coefficient d'efficacité de rayonnement, qui prend en compte le rayonnement de chaque mode de la structure :

$$\sigma = \frac{P_{rad}}{\rho_0 c_0 A_s \langle v^2 \rangle} \quad (1.31)$$

où P_{rad} est la puissance rayonnée, A_s est la surface de rayonnement et $\langle v^2 \rangle$ est la moyenne spatiale de la vitesse quadratique de la structure.

G. Maidanik [66] et F. G. Leppington [56] se sont attachés à calculer l'efficacité de rayonnement d'une plaque finie rayonnant dans l'air. Ces deux auteurs calculent de manière différente l'efficacité de rayonnement.

Maidanik utilise un calcul modal pour calculer l'efficacité de rayonnement d'une plaque finie. Il considère que chaque mode rayonne et est caractérisé par une efficacité de rayonnement, avec une fréquence de coïncidence qui dépend des dimensions de la plaque, des caractéristiques du matériau et des indices modaux.

Ainsi, le caractère rayonnant ou non du mode pour une pulsation donnée va dépendre de la comparaison du nombre d'onde acoustique avec son nombre d'onde mais également avec la projection de son nombre d'onde sur les bords de la plaque.

Pour calculer la puissance rayonnée ainsi que l'efficacité de rayonnement de la plaque, Maidanik somme les puissances rayonnées des modes dont la fréquence propre est égale à la fréquence

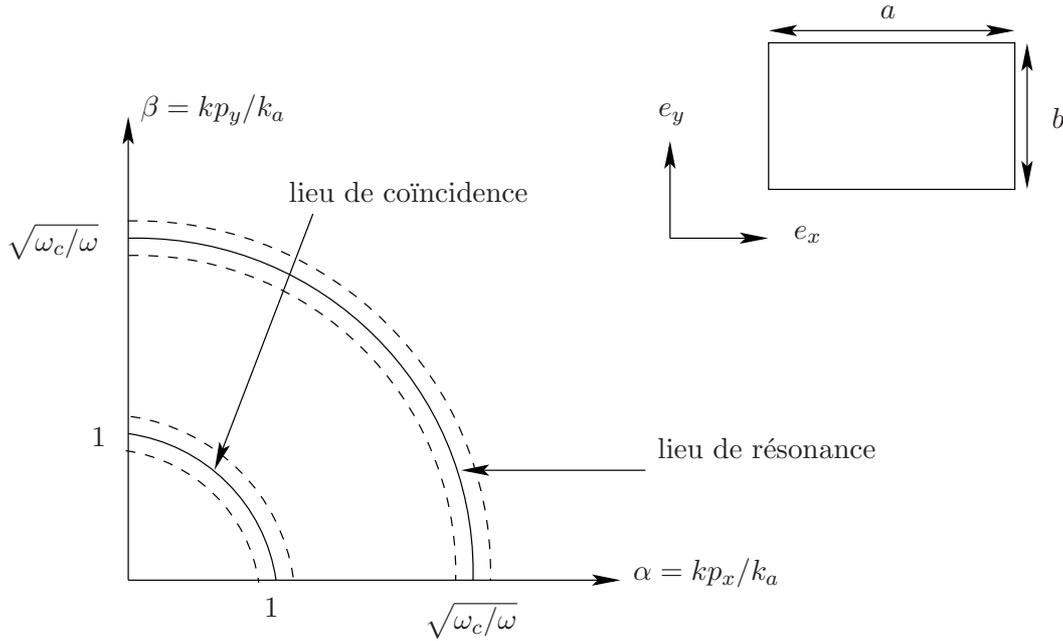


FIGURE 1.4 – Calcul de la puissance rayonnée par une plaque rectangulaire par F.G. Leppington

d'excitation de la plaque, où dont l'une des composantes du nombre d'onde est égal au nombre d'onde acoustique.

Si l'on considère une plaque de dimension $a \times b$ suivant les axes e_x et e_y , la puissance rayonnée par la plaque sera :

$$P_{rad} = \sum_A \langle v_p^2 \rangle_A R_{rad}^x(A) + \sum_B \langle v_p^2 \rangle_B R_{rad}(B) + \sum_C \langle v_p^2 \rangle_C R_{rad}^y(C) \quad (1.32)$$

La puissance rayonnée est alors maximale quand les modes excités rayonnent, c'est-à-dire quand leur fréquence propre est égale à leur fréquence de coïncidence. Ceci se produit pour les modes dont la fréquence propre est égale à la fréquence de coïncidence de la plaque infinie. L'efficacité de rayonnement de la plaque est donc maximale lorsque la fréquence d'excitation est égale à la fréquence de coïncidence de la plaque infinie.

Leppington utilise également un calcul modal pour calculer l'efficacité de rayonnement d'une plaque finie. Il considère que l'énergie rayonnée par une plaque dépend de l'énergie rayonnée par les modes excités - dont la fréquence propre coïncide ou est proche de la fréquence d'excitation (lieu de résonance) - mais aussi de l'énergie rayonnée des modes à la coïncidence, c'est-à-dire dont les nombres d'ondes sont proches du nombre d'onde acoustique (lieu de coïncidence).

Ainsi, Leppington diffère de Maidanik car il augmente le nombre de modes pris en compte dans le calcul de l'énergie rayonnée : il prend en compte d'avantage de modes excités et il considère également les modes rayonnants non excités.

Si l'on considère une plaque de dimension $a \times b$ suivant les axes e_x et e_y , la puissance rayonnée par la plaque sera :

$$P_{rad} = \int_{LR} P_{res} + \int_{LC} P_{nres} \quad (1.33)$$

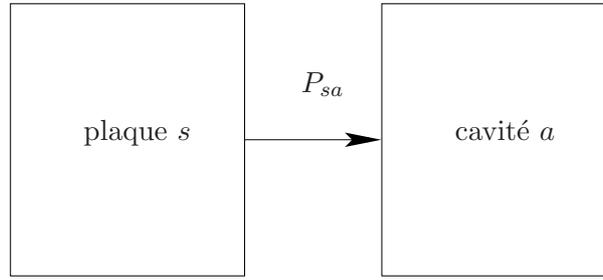


FIGURE 1.5 – Modélisation SEA du système couplé plaque-cavité

où P_{res} est la contribution des modes résonnants de la structure et P_{nres} , la contribution des modes non-résonnants.

Dans la référence [56], Leppington étudie le cas de plaques anisotropiques. Dans ce cas, il existe une fréquence de coïncidence pour chaque direction d'anisotropie, et le lieu de coïncidence croise le lieu de résonance lorsque la fréquence d'excitation est comprise entre les deux fréquences de coïncidence. L'efficacité de rayonnement de la plaque est alors maximale.

La matrice SEA du système couplé s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} P_{s,inj} \\ P_{a,inj} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \eta_s + \eta_{sa} & -\eta_{as} \\ -\eta_{sa} & \eta_a + \eta_{as} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_s \\ E_a \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

où les indices s et a décrivent respectivement la partie structure et la partie acoustique (voir schéma 1.5). Le coefficient de perte par couplage η_{sa} s'exprime en fonction du coefficient de rayonnement de la structure :

$$\eta_{sa} = \frac{\rho_0 c_0}{\omega \rho_s h_s} \sigma \quad (1.35)$$

où ρ_0 et c_0 sont la masse volumique et la célérité dans l'air, ρ_s et h_s sont la masse volumique et l'épaisseur de la structure et ω est la pulsation centrale de la bande de fréquence étudiée.

1.4.2.2 Transparence

Considérons le système suivant, constitué de deux cavités séparées par une plaque. Une des cavités est excitée. L'objectif est de calculer la puissance transmise à l'autre cavité à travers la plaque. Pour ce faire, le système est modélisé avec la méthode SEA et est divisé de la manière suivante : la cavité excitée est le sous-système 1, la plaque, le sous-système 2 et la deuxième cavité, le sous-système 3. Le schéma 1.6 décrit les trois sous-systèmes et les flux d'énergie auquel est soumis le système.

La transmission de l'énergie entre les deux cavités fait intervenir le phénomène de transparence. Il existe deux phénomènes de transparence : la transparence résonnante et la transparence non résonnante.

La transparence résonnante fait intervenir les modes résonnants de la plaque. Dans ce cas, la plaque emmagasine l'énergie provenant de la cavité excitée puis elle rayonne cette énergie dans l'autre cavité. Ce phénomène dépend des caractéristiques de la plaque. Sur le schéma de la modélisation SEA du système, la transparence résonnante est caractérisée par les puissances échangées P_{12} et P_{23} .

La transparence non-résonnante fait intervenir des modes non résonnants de la plaque. L'échange d'énergie entre les deux cavités se fait à travers la plaque, mais les modes de la plaque n'emma-

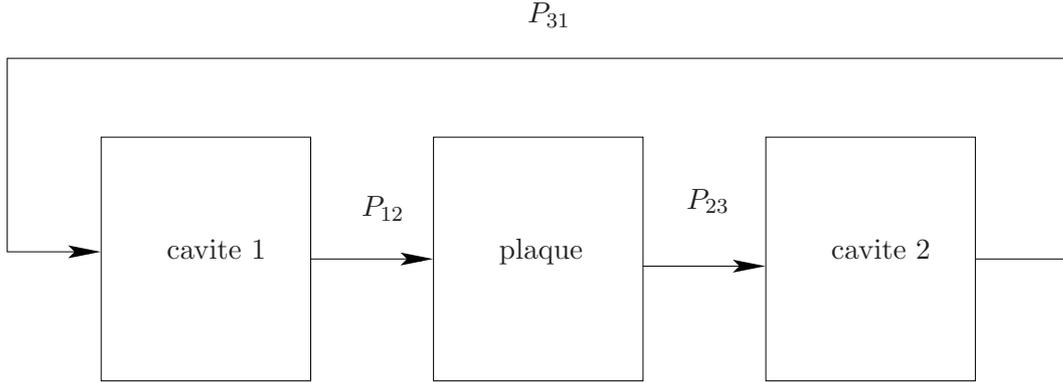


FIGURE 1.6 – Modélisation SEA du système cavité-plaque-cavité

gasinent pas d'énergie. Ainsi, dans la modélisation SEA du système, la plaque n'intervient pas dans l'échange d'énergie entre les deux cavités. La transparence non résonnante intervient dans la puissance échangée P_{13} .

Dans la référence [57], F. G. Leppington utilise une méthode modale pour calculer l'échange d'énergie entre deux cavités séparées par une plaque. En intégrant sur l'espace des nombres d'ondes une expression qui dépend de l'efficacité de rayonnement des modes, il montre que le coefficient de transmission $\epsilon_t = \langle P \rangle / \langle P_{inc} \rangle$, où $\langle P \rangle$ est la puissance transmise et $\langle P_{inc} \rangle$ est la puissance injectée.

Si la fréquence d'excitation est supérieure à la fréquence de coïncidence de la plaque infinie, la contribution dominante dans le calcul du coefficient de transmission sera celle des modes résonants (pour lesquels la fréquence propre est proche de la fréquence d'excitation) car ces modes auront une efficacité de rayonnement non négligeable. Il s'agit du phénomène de transmission résonante.

Par contre, si la fréquence d'excitation est inférieure à la fréquence critique, l'efficacité de rayonnement des modes résonants est négligeable. On ne prend en compte, dans le calcul du coefficient de transmission, que la contribution des modes rayonnants (dont la fréquence critique est inférieure à la fréquence d'excitation). Ainsi la transmission s'effectue par des modes non résonants. Il s'agit du phénomène de transmission non résonante.

La matrice SEA du système cavité-plaque-cavité s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \langle P_{1,inj} \rangle \\ \langle P_{2,inj} \rangle \\ \langle P_{3,inj} \rangle \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} & -\eta_{31} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} \\ -\eta_{13} & -\eta_{23} & \eta_3 + \eta_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle E_1 \rangle \\ \langle E_2 \rangle \\ \langle E_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

η_{12} et η_{23} correspondent à la transmission résonante entre les cavités 1 et 3 par la plaque 2 et η_{13} correspond à la transmission non-résonnante.

1.5 Méthodes énergétiques en moyennes fréquences

Le domaine des moyennes fréquences correspond à plusieurs définitions dans la littérature. La plus communément admise se base sur les limitations des méthodes utilisées dans les domaines des basses et des hautes fréquences, comme, respectivement, la méthode par éléments finis ou la SEA.

Les méthodes par éléments finis, dont la complexité et la taille de calcul varient avec le maillage utilisé, sont de plus en plus coûteuses lorsque la fréquence d'analyse augmente. Pour modéliser de manière pertinente un système dans un domaine fréquentiel donné, il faut que le maillage puisse

reproduire la longueur d'onde se propageant dans le système. Ainsi plus la fréquence augmente, plus le nombre de degrés de liberté que doit traiter le modèle est important. Un autre facteur limite l'utilisation des méthodes par éléments-finis avec des fréquences élevées. En effet, l'incertitude sur les paramètres décrivant les systèmes augmente avec la fréquence, ce qui implique que la dispersion sur les calculs par éléments-finis devient importante.

La méthode SEA, présentée dans le paragraphe 1.4, est donc utilisée dans le domaine des hautes fréquences. Elle permet de palier aux limitations rencontrées en basses fréquences. Les grandeurs utilisées sont de type énergétique, ce qui diminue le nombre de degrés de liberté à prendre en compte. De plus, la SEA n'est pas une méthode déterministe mais statistique : les résultats donnés par cette méthode s'appliquent à un ensemble de systèmes dont les paramètres sont moyennés. Les incertitudes paramétriques sur un seul système sont donc éliminées par la moyennisation sur l'ensemble des systèmes considérés.

Cependant, comme cela a été présenté dans le paragraphe 1.4, la SEA ne s'applique que dans un domaine fréquentiel bien défini, car le comportement dynamique des systèmes doit vérifier certaines hypothèses pour que la modélisation SEA soit pertinente : entre autres, le recouvrement modal doit être suffisamment élevé pour que l'hypothèse d'équirépartition de l'énergie soit vérifiée. Ainsi, lorsque le recouvrement modal dans un système est trop faible, le comportement modal du système est trop marqué pour que la SEA puisse être appliquée. En effet, lorsque le recouvrement modal est faible, les caractéristiques géométriques ont une influence sur le comportement énergétique des systèmes et ne peut plus être négligé, comme c'est le cas en SEA, où les modes sont moyennés en fréquence. Mace montre dans la référence [63], que en moyennes fréquences, les caractéristiques géométriques des systèmes ont une influence sur leur modélisation énergétique en comparant le couplage entre deux plaques irrégulières et celui entre une plaque rectangulaire et irrégulière.

Dans la référence [80], J. Pan donne une définition des domaines des basses, des moyennes et des hautes fréquences en se basant sur le recouvrement modal dans chaque sous-système :

$$M = \Delta f_{3dB} \cdot n(f) \quad (1.37)$$

où Δf_{3dB} est la largeur de bande à mi-hauteur d'un mode et n , la densité modale dans le sous-système considéré.

Le domaine des basses fréquences est déterminé par le fait que la largeur de bande à mi-hauteur Δf_{3dB} d'un mode est inférieur à l'écart moyen entre deux modes. Dans ce cas, on considère qu'aucun mode ne se recouvre, chacun des modes est ainsi bien séparé et identifiable. Cela correspond à un recouvrement modal inférieur à 0.3 pour une plaque en flexion et inférieur à 0.55 pour une cavité.

Le domaine des hautes fréquences commence lorsque 5 ou 6 modes se recouvrent. Dans ce cas, on ne peut plus décrire le comportement dynamique des systèmes avec les modes car, d'une part, les modes ne sont plus clairement identifiables, et d'autre part, ils sont trop sensibles aux incertitudes paramétriques. Cette description du domaine des hautes fréquences conduit à l'hypothèse de champ diffus, nécessaire à l'utilisation des méthodes statistiques. Ces méthodes donnent alors des résultats pertinents. Pour une plaque, cela correspond à un recouvrement modal supérieur à 1, et pour une cavité, supérieur à 3.

Le domaine des moyennes fréquences est défini par la zone fréquentielle non recouverte par les domaines des basses et des hautes fréquences. Plus de détails sur la définition des fréquences séparant les différents domaines fréquentiels sont donnés au chapitre 4.

Une deuxième approche peut être utilisée pour déterminer le domaine des moyennes fréquences : l'aspect couplage entre un système souple ou flexible et un système rigide. Ce type de couplage est souvent rencontré dans les problématiques industrielles, notamment lorsque des phénomènes d'interaction fluide-structure entrent en jeu. Le système flexible, avec un recouvrement modal

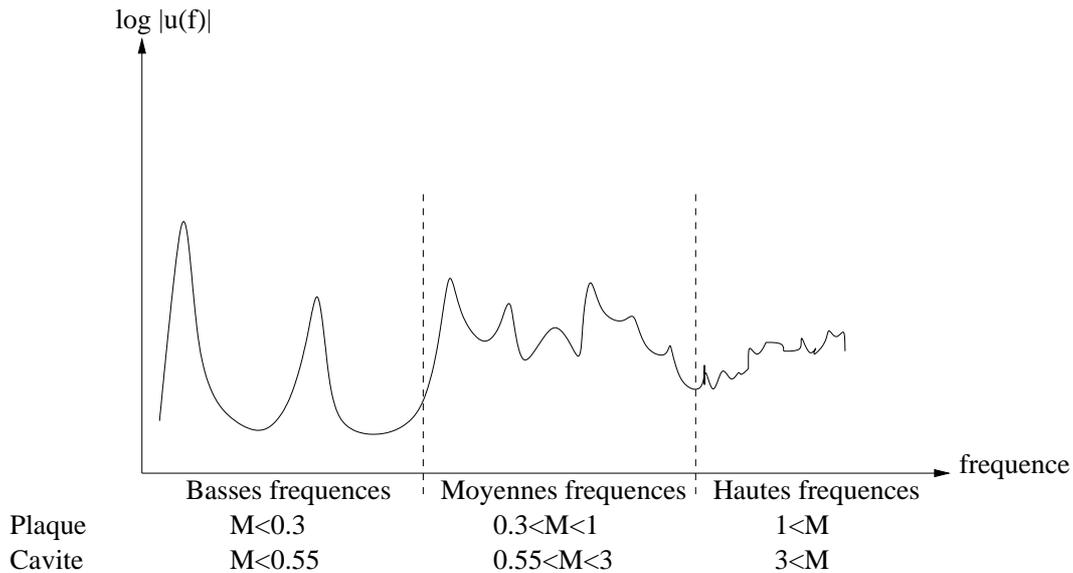


FIGURE 1.7 – Régions des basses, moyennes et hautes fréquences

élevé, présente un comportement de type hautes fréquences et peut être décrit par des approches statistiques. Par contre, le système rigide, présentant un comportement de type basses fréquences, sera plutôt décrit par des approches déterministes et basses fréquences. La modélisation de tels systèmes pose la problématique du couplage entre des méthodes déterministes et statistiques. Bremner et Langley proposent une méthode permettant de coupler des modes locaux et globaux [53]. Les modes globaux y sont traités par des approches déterministes et les modes locaux sont décrits par des méthodes statistiques comme la SEA.

Dans les paragraphes suivants, quelques méthodes utilisées en moyennes fréquences sont présentées. Ces méthodes énergétiques peuvent être construites à partir de deux approches très différentes. Certaines approches, comme la méthode des coefficients d'influence énergétiques ou l'Analyse Modale Asymptotique sont basées sur une analyse modale ou par éléments-finis et sont donc inspirées des méthodes basses fréquences. D'autres approches, comme la méthode d'intensité ondulatoire où la méthode énergétique simplifiée, s'inspirent de la SEA en relaxant certaines hypothèses comme l'hypothèse de champ diffus. Elles sont basées sur des descriptions ondulatoires.

1.5.1 Méthode énergétique simplifiée

La méthode énergétique simplifiée (MES) diffère de la SEA par le fait qu'elle est basée sur un bilan local de puissance, ce qui permet d'élargir son domaine de validité par rapport à la SEA. La MES utilise une description ondulatoire simplifiée des variables cinématiques du système. En moyennes et hautes fréquences, il n'est pas nécessaire de conserver l'information relative à la phase des ondes. En effet, les incertitudes au niveau des paramètres géométriques des systèmes se traduisent par une incertitude au niveau de la phase des ondes du champ cinématique. Le bilan de puissance s'effectue donc sur les amplitudes des ondes, de manière indépendante de la phase, et les interférences entre les ondes propagatives sont négligées. Cette hypothèse, équivalente à la moyennisation spatiale en SEA, permet de sommer les champs ondulatoires constituant la réponse du système. Une autre hypothèse est effectuée, s'appuyant sur le fait que l'influence du champ proche (constitué d'ondes évanescentes) diminue lorsque la fréquence augmente. Le champ proche, qui est alors principalement présent au voisinage des discontinuités, est négligé dans la réponse du

système. Ces deux hypothèses permettent de décrire les systèmes à l'aide de variables quadratiques, qui sont, dans le cadre de la MES, la densité d'énergie totale et l'intensité active.

Suivant le type d'ondes composant le champ ondulatoire et le modèle de réflexion utilisé, plusieurs MES sont introduites. La MES différentielle est basée sur un champ ondulatoire décrit par des ondes planes. La MES différentielle mixte est basée sur un champ direct décrit par des rayons et un champ réverbéré décrit par des ondes planes. Enfin, les MES fonctionnelles et intégrales s'appuient sur une description basée sur des rayons et diffèrent par le modèle de réflexion utilisé.

En reprenant le formalisme des références [76] et [39,40,55], considérons un système linéaire et isotrope, en régime stationnaire de pulsation ω . Le bilan de puissance local s'écrit en fonction du vecteur de densité de flux d'énergie \mathbf{I} et des densités Π_{inj} et Π_{diss} de puissance injectée et dissipée par unité de volume :

$$\Pi_{inj} = \nabla \cdot \mathbf{I} + \Pi_{diss} \quad (1.38)$$

La densité de puissance dissipée est supposée ici proportionnelle à la densité d'énergie totale W et à la pulsation ω :

$$\Pi_{diss} = \eta\omega W \quad (1.39)$$

où η est le coefficient d'amortissement considéré. Deux types d'amortissement peuvent entrer en jeu : l'amortissement visqueux si la dissipation est liée à l'énergie cinétique et l'amortissement hystérétique si la dissipation est liée à l'énergie potentielle. L'égalité des énergies (cinétique et potentielle) en hautes fréquences permet d'écrire l'équation ci-dessus quel que soit le type d'amortissement considéré. Le bilan de puissance local s'écrit alors :

$$\Pi_{inj} = \nabla \cdot \mathbf{I} + \eta\omega W \quad (1.40)$$

Les ondes de champ proche étant négligées, l'intensité \mathbf{I} peut s'exprimer en fonction de la densité d'énergie :

$$\mathbf{I} = cW \mathbf{u} \quad (1.41)$$

où \mathbf{u} est la direction de propagation de \mathbf{I} .

Comme il est dit précédemment, les différentes approches de la MES diffèrent par le type d'onde et le mécanisme de réflexion utilisé. La *MES différentielle* considère que le champ ondulatoire est composé d'ondes planes. L'intensité \mathbf{I}_i liée à une direction u_i peut alors s'exprimer en fonction de l'énergie partielle W_i de la façon suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{I}_i = c(\nabla W_i)u_i = c \frac{\partial W_i}{\partial u_i} \quad (1.42)$$

L'équation (1.40) appliquée à l'énergie partielle W_i permet d'obtenir un bilan de puissance partiel :

$$c \frac{\partial W_i}{\partial u_i} + \eta\omega W_i = 0 \quad (1.43)$$

ce qui peut également s'exprimer de manière vectorielle :

$$c\nabla W_i + \frac{\eta\omega}{c} \mathbf{I}_i = 0 \quad (1.44)$$

Les interférences entre les différents champs ondulatoires étant négligeables, les intensités \mathbf{I}_i sont sommées, ce qui conduit à l'expression de l'intensité totale \mathbf{I} en fonction de la densité d'énergie totale W :

$$\nabla W + \frac{\eta\omega}{c^2}\mathbf{I} = 0 \quad (1.45)$$

Cette équation, associée à l'équation (1.40) permet d'obtenir le bilan de puissance sur l'énergie totale :

$$-\frac{c^2}{\eta\omega}\Delta W + \eta\omega W = \Pi_{inj} \quad (1.46)$$

Cette équation peut être mise en œuvre avec une méthode par éléments-finis. Cependant, elle est pertinente dans la mesure où l'on suppose que le champ ondulatoire peut être décrit par des ondes planes. Or, cette hypothèse est difficilement vérifiable lorsque le champ direct n'est pas négligeable devant le champ réverbéré. En effet, dans des milieux bi- ou tridimensionnels, le champ direct pour une excitation ponctuelle est décrit par des ondes cylindriques ou sphériques.

Une deuxième MES est donc introduite : la *MES différentielle mixte*. Ici, le champ ondulatoire est donné par la somme du champ direct et du champ réverbéré. Le champ ondulatoire direct est composé de rayons créés par une source ponctuelle, qui sont des ondes planes, cylindriques ou sphériques suivant que le milieu est uni-, bi- ou tridimensionnel :

$$W_d(r) = \frac{\Pi_{inj}}{\gamma_n c} e^{mr} r^{n-1} \quad (1.47)$$

où γ_n est l'angle solide de la source d'excitation, m est le coefficient d'absorption atmosphérique, équivalent à η_k , et n est la dimension du milieu étudié.

Le champ réverbéré W_r est décrit par la MES différentielle, où l'on considère que la puissance injectée donnée dans l'équation (1.46) provient de la réflexion aux frontières du champ ondulatoire total. Un bilan de puissance sur un élément de frontière permet d'obtenir le flux d'énergie réverbéré par la frontière en fonction du champ direct et du champ réverbéré.

La *MES Intégrale* et la *MES Fonctionnelle* décrivent également le champ ondulatoire comme la somme du champ direct et du champ indirect, mais ici, le champ indirect est décrit par des rayons correspondant à des sources surfaciques localisées sur les frontières. La densité d'énergie s'écrit alors à l'aide des noyaux de Green énergétiques :

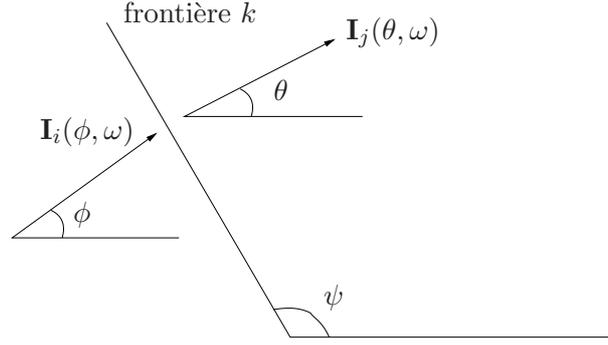
$$G(r) = \frac{1}{\gamma_n} \frac{e^{-mr}}{r^{n-1}} \quad (1.48)$$

où r représente la distance entre le point d'observation et la source. La densité d'énergie en un point M , somme de champ direct, du aux sources primaires, et du champ réverbéré, du aux réflexions, s'écrit :

$$W(M) = \int_{\Omega} \epsilon(S, \mathbf{u}_{SM}) G(S, M) dS + \int_{\partial\Omega} i(P, \mathbf{u}_{PM}) G(P, M) dP \quad (1.49)$$

$\epsilon(S, \mathbf{u}_{SM})$ désigne la puissance de la source primaire située en un point S et vue depuis le point M . $i(P, \mathbf{u}_{PM})$ est l'intensité spécifique due aux réflexions sur la frontière au point M , vu par le point P .

Les deux approches MES traitent de manière différente la réflexion sur les parois, qui permet de déterminer les sources secondaires i . La MES intégrale utilise un modèle de *réflexion diffuse* régie par la loi de Lambert — la directivité de l'énergie réfléchie est proportionnelle au cosinus de l'angle avec la normale à la frontière — la MES fonctionnelle utilise un modèle de *réflexion spéculaire*, régie par la loi de Snell-Descartes. Les modèles de réflexions permettent de déterminer

FIGURE 1.8 – Puissance transmise entre les ondes de type i et j à travers la frontière k

la directivité des intensités spécifiques i . L'amplitude, ou radiosité, de i peut être déterminée à l'aide d'un bilan de puissance à la frontière.

1.5.2 Méthode d'intensité ondulatoire (WIA)

La méthode WIA (Wave Intensity Analysis), introduite par R.S. Langley (voir [52]), est une méthode énergétique inspirée de la SEA, où l'hypothèse de champ diffus n'est plus vérifiée. En effet, la SEA ne décrit pas toujours de manière pertinente le comportement énergétique des systèmes : comme on l'a vu dans le paragraphe 1.5.5, une modélisation SEA de deux plaques couplées en L surestime les niveaux vibratoires dans les systèmes.

La WIA considère que le champ ondulatoire n'est pas diffus dans le système. Ainsi, si le système étudié est soumis à une excitation stationnaire aléatoire, le champ ondulatoire généré dans le système est également aléatoire, stationnaire en fréquence, mais inhomogène dans l'espace. La densité d'énergie d'un système peut alors s'exprimer comme la somme d'énergies portées par des ondes de longueurs d'onde μ_j , se propageant dans la direction θ :

$$\langle E_{tot} \rangle = 2\langle E_c \rangle = \sum_j \int_{\Theta} \int_0^{\infty} e_j(\theta, \omega) d\theta d\omega \quad (1.50)$$

L'excitation étant aléatoire, les différents types d'ondes contribuent de manière indépendante à l'énergie totale et leurs densités d'énergie $e_j(\theta, \omega)$ peuvent être sommées. Ces densités d'énergies sont calculées par des équations énergétiques sur une onde de type j et de direction de propagation θ , similaires aux équations SEA :

$$P_{inj,j}(\theta, \omega) = P_{diss,j}(\theta, \omega) + \sum_i P_{in,i,j}(\theta, \omega) + P_{out,j}(\theta, \omega) \quad (1.51)$$

Comme en SEA, $P_{inj,j}$ est définie comme la puissance injectée dans le sous-système considéré par une excitation externe. De même, $P_{diss,j}$ est la puissance dissipée par le sous-système et s'exprime en fonction du facteur de perte η_j et de l'énergie totale E_j portée par l'onde de type j et de direction θ :

$$P_{diss,j}(\theta, \omega) = \omega \eta_j E_j(\theta, \omega) \quad (1.52)$$

$P_{in,i,j}$ et $P_{out,j}$ traduisent les puissances échangées aux frontières du sous-système entre l'onde de type j et les autres ondes de type i . La puissance entrante dans le sous-système et transmise à l'onde de type j par une onde de type i s'exprime de la manière suivante :

$$P_{in,i,j}(\theta, \omega) d\theta = L \mathbf{I}_i(\phi, \omega) \cdot \mathbf{n} \tau_{ij}(\phi, \mathbf{n}) d\phi \quad (1.53)$$

où L est la longueur de la frontière, \mathbf{n} décrit la normale à la frontière, \mathbf{I}_i est l'intensité associée à l'onde de type i et de direction ϕ , et τ_{ij} est le coefficient de transmission d'énergie entre les deux ondes. Si l'on considère le cas bidimensionnel représenté figure 1.8, la puissance entrante peut s'écrire :

$$P_{in,i,j}(\theta, \omega) = \sum_k P_{k,i,j}(\theta, \omega) \quad (1.54)$$

où $P_{k,i,j}$ est la puissance transmise de l'onde i à l'onde j à travers la frontière k :

$$P_{k,i,j}(\theta, \omega) = \frac{\omega L_k}{2\pi} \frac{E_i(\phi_i, \omega)}{\nu_i} \frac{\cos(\theta + \pi/2 - \psi_k)}{c_j} \tau_{ij}(\phi_i + \pi/2 - \psi_k) \quad (1.55)$$

Finalement, la puissance sortante du sous-système portée par l'onde de type j est :

$$P_{out,j}(\theta, \omega) = \mathbf{I}_j(\theta, \omega) \mathbf{n} \quad (1.56)$$

Dans le cas bi-dimensionnelle, cette équation se réécrit :

$$P_{out,j}(\theta, \omega) = \sum_m \frac{\omega L_m}{2\pi} \frac{E_j(\theta, \omega)}{\nu_j} \frac{\cos(\theta + \pi/2 - \psi_m)}{c_j} \quad (1.57)$$

L'équation (1.51) devient alors :

$$P_{inj,j}(\theta, \omega) = \omega \eta_j E_j(\theta, \omega) + \frac{E_j(\theta, \omega)}{\nu_j} \frac{\omega}{2\pi c_j} \sum_l \frac{L_l \cos(\theta + \pi/2 - \psi_l)}{c_j} \\ - \frac{\omega}{2\pi c_j} \sum_{i,k} \frac{E_i(\phi_i, \omega)}{\nu_i} L_k \cos(\theta + \pi/2 - \psi_k) \tau_{ij}(\phi_i + \pi/2 - \psi_k) \quad (1.58)$$

Pour résoudre le système d'équation formé par l'équation (1.58) pour chaque type d'onde j , une méthode de Galerkin est utilisée. L'inconnue du problème E_j est exprimée par une somme de fonctions de forme :

$$E_j(\theta, \omega) = \sum_p E_{jp}(\omega) N_{jp}(\theta) \quad (1.59)$$

La projection des équations issues de (1.58) sur les fonctions de formes conduit à une équation matricielle exprimant le vecteur des densités d'énergies des différents types d'ondes en fonction du vecteur des puissances injectées :

$$P_{inj} = CE \quad (1.60)$$

où les coefficients de la matrice C sont donnés par :

$$C_{jp, is} = \delta_{i,j} \left(\omega \eta_j \nu_j \int_0^{2\pi} N_{jp}(\theta) N_{is}(\theta) d\theta \right. \\ \left. + \frac{\omega}{2\pi c_j} \sum_m L_m \int_{\Theta_m} N_{jp}(\theta) N_{is}(\theta) \cos(\theta + \pi/2 - \psi_m) d\theta \right) \\ - \frac{\omega}{2\pi c_j} \sum_k L_k \int_{\Theta_k} N_{pj}(\theta) N_{is}(\phi_{ki}) \cos(\theta + \pi - \psi_k) \tau_{ij}^k(\phi_{ki} + \pi/2 - \psi_k) d\theta \quad (1.61)$$

Et le vecteur des puissances injectées est donné par :

$$P_{inj,jp} = \int_0^{2\pi} P_{inj,j}(\theta, \omega) N_{jp}(\theta) d\theta \quad (1.62)$$

Θ_k et Θ_m correspondent à l'intégration angulaire sur les frontières k (puissance sortante) et m (puissance entrante). Si l'on considère que la dépendance en θ des énergies associées à une onde en particulier est nulle, on retrouve les équations de la SEA. Cette présente méthode est une extension de la SEA lorsque l'énergie n'est plus équirépartie entre les modes d'un sous-système donné. En effet, un mode peut être décrit ici par un type d'onde selon une direction donnée. Si l'on considère que l'énergie associée à l'onde de type j ne dépend plus de θ , alors l'onde j peut être considérée comme un sous-système au sens SEA, où l'énergie est équirépartie entre les modes.

L'application de la WIA à des systèmes de plaques couplées montre que, contrairement à la SEA, la WIA ne surestime pas les énergies dans les sous-systèmes et donne des résultats plus précis, surtout en hautes fréquences. Cette méthode prend aussi en compte les conditions aux limites du système. En effet, les conditions aux limites ont une influence sur le comportement énergétique du système sur tout le domaine fréquentiel, y compris en hautes fréquences même si cette influence y est moins importante qu'en basses et moyennes fréquences. Ainsi, la SEA, qui ne prend pas en compte les conditions aux limites, est moins précise que la méthode WIA.

Cependant, la WIA est une méthode énergétique et ne permet pas de décrire spatialement la répartition énergétique dans le sous-système. La méthode AMA, décrite ci-dessous, est une méthode asymptotique s'appuyant sur l'analyse modale, qui donne une description spatiale du mouvement en hautes fréquences.

1.5.3 Analyse modale asymptotique

L'analyse modale asymptotique (AMA) est introduite par Dowell dans la référence [21] pour retrouver les résultats SEA établis par Lyon [60] à partir de méthodes modales.

La méthode AMA est une analyse modale poussée en fréquence et moyennée sur les domaines spatial et fréquentiel et sur les modes du système modélisé. La méthode AMA peut ainsi être utilisée sur des domaines fréquents plus étendus qu'une analyse modale classique. Dowell *et al.* [22] montre que cette méthode donne des résultats satisfaisants en hautes fréquences, notamment dans le cas d'une plaque rectangulaire [18, 46] et celui d'une cavité couplée avec une plaque [22, 73]. Voici ci-dessous un exposé de la démarche utilisée.

1.5.3.1 Présentation

Une plaque flexible est couplée avec une cavité et excitée par une excitation de type *rain-on-the-roof*. Les équations modales décrivant le comportement du système couplé sont établies de la façon suivante : une plaque découplée est excitée par une excitation δ -corrélée ; puis la réponse de la plaque découplée est utilisée pour exciter la cavité. Ainsi il s'agit moins d'un *couplage* plaque-cavité que d'un *chaînage* entre les différentes équations, où la plaque, découplée est d'abord considérée comme un système excité, puis comme excitation de la cavité.

En écrivant les équations modales de la plaque et de la cavité, on obtient la densité spectrale de puissance S_f de la pression adimensionnée $f = p/(\rho_0 c_0^2)$ dans la cavité en fonction de la densité spectrale de puissance de l'excitation :

$$\begin{aligned}
S_f(\omega; x, y, z) &= \frac{1}{V_0^2} \sum_{r,s} \sum_{m,n} \frac{\Phi_r^a(x, y, z)}{M_r^a} \frac{\Phi_s^a(x, y, z)}{M_s^a} H_r^a(\omega) H_s^a(-\omega) \\
&\iint_{A_s} \Phi_r^a(x, y, z_0) \Phi_s^a(x^*, y^*, z_0) \Phi_m^s(x, y) \Phi_n^s(x^*, y^*) ds ds^* \omega^2 H_m^s(\omega) \omega^2 H_n^s(-\omega) \\
&\sum_{i,j} \Phi_m^s(x_i, y_i) \Phi_n^s(x_i^*, y_i^*) S_{F_{ij}}(\omega) \quad (1.63)
\end{aligned}$$

où Φ_r^a et Φ_r^s sont les modes de la cavité et de la plaque non couplées, H_r^a et H_r^s , les fonctions de transfert modales de la cavité et de la plaque, M_r^a , la masse modale du r -ième mode de cavité et ω , la pulsation considérée.

Une hypothèse sur les couplages modaux, effectuée fréquemment dans les études moyennes et hautes fréquences des systèmes couplés plaque-cavité (voir entre autres [56,80]), est alors introduite. Le *cross-coupling* - couplage entre deux modes de plaques *via* un mode de cavité et réciproquement - est négligé. Cela revient à dire que les termes pour lesquels $r = s$, $m = n$ et $i = j$ sont dominants. On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned}
S_f(\omega; x, y, z) &= \frac{1}{V_0^2} \sum_r \sum_m \sum_i \frac{\Phi_r^{a2}(x, y, z)}{M_r^{a2}} \|H_r^a(\omega)\|^2 \\
&\omega^4 \|H_m^s(\omega)\|^2 S_{F_{ij}}(\omega) \Phi_m^{s2}(x_i, y_i) B_{rm}^2 \quad (1.64)
\end{aligned}$$

où B_{rm} est le terme de couplage spatial entre les modes de plaque et de cavité :

$$B_{rm} = \int_{A_s} \Phi_r^a(x, y, z_0) \Phi_m^s(x, y) dx dy \quad (1.65)$$

En considérant que la DSP de l'excitation varie peu sur la bande de fréquence considérée et que les modes de plaque et de cavité sont bien séparés, la pression adimensionnée est moyennée en fréquence sur la bande $\Delta\omega$:

$$\bar{f}^2 \simeq \frac{\pi}{4} \frac{1}{V_0^2} \sum_{r,m,i} \frac{\alpha_{rm}}{\beta_{rm}} \frac{\omega_m^4 \Phi_r^{a2}(x, y, z)}{M_m^2 M_r^{a2} \omega_m^3 \omega_m^a \zeta_m \xi_r^a} \Phi_m^{s2}(x_i, y_i) B_{rm}^2 S_{F_{ii}}(\omega) \quad (1.66)$$

α_{rm} et β_{rm} sont fonctions des propriétés modales de la plaque et la cavité et traduisent le couplage fréquentiel entre les modes de plaque et de cavité.

Lorsque le nombre de modes de plaque ΔM et de cavité ΔN_A excités sur la bande de fréquence $\Delta\omega$ est suffisamment élevé, les caractéristiques modales varient peu sur $\Delta\omega$. Elles sont donc considérées comme constante sur la bande de fréquence, ce qui permet d'exprimer de la façon suivante la moyenne spatiale de la pression adimensionnée dans la cavité :

$$\langle \bar{f}^2 \rangle \simeq \frac{\pi}{4} \frac{1}{V_0^2} \frac{\alpha_c \langle \Phi_c^{a2} \rangle}{M_c^2 M_c^{a2} \omega_c^3 \omega_c^a \zeta_c \xi_c^a} \sum_i S_{F_{ii}}(\omega_c) \sum_{r,m} \frac{1}{\beta_{rm}} \Phi_m^{s2}(x_i, y_i) B_{rm}^2 \quad (1.67)$$

Un terme fréquentiel n'a pas été moyenné dans l'équation (1.67). Il s'agit du dénominateur des fonctions de transfert β_{rm} . En effet, le calcul de β_c n'est pas immédiat et permet d'introduire le terme $\Delta\omega$ dans l'expression de la pression adimensionnée.

$$\sum_{r,m} \frac{1}{\beta_{rm}} \Phi_m^2 B_{rm}^2 \simeq \frac{1}{\beta_c} \sum_{r,m} \Phi_m^2 B_{rm}^2 \quad (1.68)$$

où :

$$\frac{1}{\beta_c} \simeq \frac{4}{\pi} \frac{1}{\Delta\omega\alpha_c} \quad (1.69)$$

Considérons maintenant la double somme dans l'équation (1.68), qui décrit le couplage spatial entre la plaque et la cavité :

$$\sum_{r,m} \Phi_m^2 B_{rm}^2 = \sum_r \iint_{A_S} \Phi_r^a(x, y, z_0) \Phi_r^a(x^*, y^*, z_0) \sum_m \Phi_m^{s^2}(x_i, y_i) \Phi_m^s(x, y) \Phi_m^s(x^*, y^*) ds ds^* \quad (1.70)$$

Lorsque ΔM et ΔN_A sont grands, les termes dominants sont les termes pour lesquels $x = x^*$ et $y = y^*$. De plus on a :

$$\sum_m \Phi_m^{s^2}(x_i, y_i) \Phi_m^s(x, y) \Phi_m^s(x^*, y^*) \xrightarrow{\Delta M \rightarrow \infty} \Delta M [\langle \Phi_c^{s^2} \rangle]^2 \quad (1.71)$$

ce qui permet de réécrire la double somme :

$$\sum_{r,m} \Phi_m^{s^2}(x_i, y_i) B_{rm}^2 \simeq \Delta M [\langle \Phi_c^{s^2} \rangle]^2 \sum_r \int_{A_s} \Phi_r^{a^2}(x, y, z_0) ds \quad (1.72)$$

$$\simeq \Delta M \Delta N_A A_s^2 [\langle \Phi_c^{s^2} \rangle]^2 \frac{\langle \Phi_c^{a^2} \rangle}{\langle Z_c^2 \rangle} \quad (1.73)$$

où :

$$\langle Z_c^2 \rangle = \frac{\langle \Phi_c^{a^2} \rangle}{\langle \Phi_c^{a^2} \rangle_{A_s}} \quad (1.74)$$

Dans l'équation (1.73), les termes de la matrice de couplage B sont moyennés sur la bande de fréquence $\Delta\omega$. Les modes du système ne sont alors plus considérés individuellement, mais moyennés sur $\Delta\omega$.

En remarquant que les masses généralisées moyennées sur les modes de la plaque et de la cavité peuvent s'exprimer de la manière suivante :

$$M_c \simeq M_p \langle \Phi_c^{s^2} \rangle \quad (1.75)$$

et

$$M_c^a \simeq \langle \Phi_c^{a^2} \rangle \quad (1.76)$$

et que la densité spectrale de l'excitation peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\sum_i S_{F_{ii}}(\omega_c) = \frac{\langle \bar{F}^2 \rangle_{\Delta\omega}}{\Delta\omega} \quad (1.77)$$

on obtient, d'après les équations (1.67), (1.69) et (1.73), l'expression asymptotique de la pression quadratique moyenne dans la cavité :

$$\frac{\langle \bar{p}^2 \rangle}{(\rho_0 c_0^2)^2} \simeq \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \frac{\Delta M}{\Delta\omega} \frac{\Delta N_a}{\Delta\omega} \left(\frac{A_s}{V_0} \right)^2 \frac{\langle \bar{F}^2 \rangle_{\Delta\omega}}{M_p^2 \omega_c^2 \zeta_c \xi_c^a} \frac{1}{\langle Z_c^2 \rangle} \quad (1.78)$$

1.5.3.2 Convergence de l'AMA

Dans la référence [21], Dowell montre la convergence de l'AMA vers la SEA.

Pour valider l'analyse modale asymptotique, Dowell compare deux modélisations du système couplé plaque-cavité : une modélisation par analyse modale classique et une modélisation par analyse modale asymptotique.

De manière générale, l'analyse modale asymptotique converge vers l'analyse modale classique quand le nombre de modes excités dans la plaque et la cavité (dans la bande de fréquence $\Delta\omega$) augmentent. La largeur de la bande de fréquence utilisée pour la moyenne fréquentielle a une influence sur la convergence. Deux arguments contradictoires viennent justifier cette influence :

- plus la bande de fréquence est large, plus le nombre de modes pris en compte dans les calculs AMA augmente, la méthode AMA est alors plus précise,
- Cependant, plus la bande de fréquence est large, plus les propriétés modales sont dispersées sur la bande de fréquence et plus la moyenne modale est approchée.

Ce deuxième argument est prédominant dans l'étude de la convergence de la méthode AMA vers l'analyse modale classique. En effet, l'élargissement des bandes de fréquence dans le calcul AMA ralentit la convergence de la méthode AMA vers l'analyse modale classique.

On peut également étudier cette convergence de manière spatiale dans la cavité. La convergence est validée presque partout sauf sur les bords de la cavité. Là, l'AMA sous-estime l'analyse modale classique. Le rapport CMA/AMA peut être caractérisé à l'aide de la position d'observation dans la cavité :

- à l'intérieur de la cavité : $AMA/CMA \rightarrow 1$
- sur les faces de la cavité : $AMA/CMA \rightarrow 2$
- sur les arêtes de la cavité : $AMA/CMA \rightarrow 4$
- aux coins de la cavité : $AMA/CMA \rightarrow 8$

Malgré ces divergences locales, on constate que l'analyse modale asymptotique permet une approche satisfaisante de l'analyse modale classique en hautes fréquences et est bien moins coûteuse que cette dernière.

1.5.4 Méthode de la puissance injectée (PIM)

Les coefficients SEA sont généralement calculés à l'aide d'approches ondulatoires, qui ne peuvent s'appliquer que sur des systèmes simples et pour des recouvrements modaux élevés. Pour des systèmes plus complexes, des méthodes basées sur des modélisations par éléments-finis des systèmes étudiés ou des mesures expérimentales peuvent être utilisées pour calculer les coefficients SEA [2, 13, 64, 77].

La méthode de la puissance injectée (ou *Power Injected Method*) permet de calculer les coefficients SEA, soit par une modélisation basses fréquences, de type éléments finis, soit par des mesures expérimentales. Dans tous les cas, le système est soumis à des excitations de type *rain-on-the-roof*, c'est-à-dire à un ensemble de forces ponctuelles de type bruit blanc, placées aléatoirement sur le système et déphasées les unes par rapport aux autres. Dans la référence [2], il est montré que 5 forces suffisent pour exciter une plaque. Dans la référence [32], 10 points sont utilisés pour exciter la plaque, bien qu'il soit noté que l'utilisation de 5 points d'excitation induit une faible variation dans les estimations des niveaux énergétiques dans la plaque. Le choix du nombre et de la localisation des points pour simuler une excitation de type *rain-on-the-roof* doit donc être effectué avec attention. Cette excitation permet entre autre de décorréler les modes du système

excité, condition nécessaire à l'application de la SEA. L'excitation *rain-on-the-roof* est décrite plus en détail dans le paragraphe 1.6.2.

Le domaine fréquentiel d'étude est également limité aux hautes fréquences : il faut en effet que le nombre de modes dans une bande de fréquence donnée soit suffisamment élevé pour permettre l'application de la SEA. Pour l'étude d'une plaque, le nombre minimal de modes dans une bande fréquentielle est de 4.

A partir de là, si l'on suppose que les modes sont équivalents, plusieurs méthodes permettent de déterminer les coefficients de perte interne et de perte par couplage. Dans le cas de deux plaques couplées et pour le coefficient de perte interne du sous-système i , trois méthodes ont été utilisées dans la référence [2] :

La méthode de la puissance injectée appliquée à une plaque seule : la plaque est excitée en régime harmonique, puis l'énergie et la puissance injectée sont mesurées, ce qui permet de calculer le coefficient de perte interne en utilisant l'équation énergétique suivante :

$$P_{inj,i} = \omega \eta_i E_i \quad (1.79)$$

La méthode de mesure du temps de réverbération : l'excitation de la plaque découplée est coupée, ce qui permet de mesurer le temps de réverbération à 60 dB et le calcul de facteur de perte interne :

$$\eta_i = \frac{2.2}{fT_{60}} \quad (1.80)$$

Dans le cas des deux plaques couplées, cette mesure donne un facteur de perte interne inférieur aux deux autres mesures, car l'équi-répartition d'énergie n'est pas maintenue lors de l'arrêt de l'excitation.

La méthode de la puissance injectée appliquée au système couplé : les équations d'équilibre relatives aux deux systèmes sont écrites pour plusieurs excitations du système (si l'on ne prend pas en compte la condition de réciprocité qui relie les coefficients η_{ij} et η_{ji} , il faut étudier au moins autant de cas d'excitations qu'il y a de sous-systèmes). Le système d'équation est alors inversé, ce qui permet d'obtenir à la fois les coefficients de perte interne et de perte par couplage.

Les coefficients de perte par couplage sont déterminés par la méthode de la puissance injectée, en inversant le système des équations énergétiques issues des différentes mesures et des différentes excitations du système.

Hiverniau [32] a également mesuré les coefficients SEA de deux plaques couplées avec la méthode de la puissance injectée. Comme Bies *et al.* la mesure du coefficient de perte interne d'une plaque a été effectuée sur la plaque découplée avec la méthode de la puissance injectée et la méthode du temps de réverbération, qui ont donné des résultats proches. Hiverniau a aussi étudié l'influence du nombre de points d'excitation et du nombre de points de mesure.

Le facteur de perte par couplage est ensuite calculé par trois méthodes différentes : la méthode de la puissance injectée appliquée à des mesures expérimentales, la même méthode appliquée à une modélisation par éléments finis, et une approche ondulatoire. La valeur du coefficient issu des mesures expérimentales est alors très éloignée de l'approche par éléments finis et de l'approche ondulatoire. Hiverniau explique cette dissemblance par les différences entre les facteurs de perte interne mesurés d'une part et introduits dans les modélisations d'autre part. Lorsque, par contre, les amortissements mesurés sont introduits dans la modélisation par éléments finis et dans l'approche ondulatoire, les facteurs de perte par couplage issues des deux approches par la méthode de la puissance injectée concordent, contrairement à l'approche ondulatoire.

La méthode de la puissance injectée, qui est une méthode énergétique inverse et conduit aux calculs des coefficients SEA, s'avère ainsi plus précise que les approches ondulatoires lorsque les hypothèses de la SEA ne sont plus strictement vérifiées — par exemple dans le cas de faibles recouvrement modaux [32]. Cependant, en dehors du domaine de validité de la SEA, les coefficients obtenus par cette méthode peuvent présenter des incohérences, comme par exemple la dépendance des facteurs de perte par couplage à l'amortissement des sous-systèmes.

La méthode SEA-like, présentée dans le paragraphe suivant, est également basée sur des méthodes basses fréquences. Mais contrairement à la méthode de la puissance injectée, la méthode SEA-like n'est pas une méthode énergétique inverse et se rapproche de la méthode des coefficients d'influence énergétique. De plus, comme on le verra plus tard, la méthode SEA-like n'est pas assujettie aux excitations de type *rain-on-the-roof*.

1.5.5 Méthode des coefficients d'influence énergétiques

La méthode des coefficients d'influence énergétique (CIE) est introduite par C. Lesueur [58]. Il s'agit d'une méthode énergétique déterministe, basée sur une analyse modale du système étudié. La SEA a tendance à surestimer le couplage structural dans les domaines des basses et des moyennes fréquences. La méthode des CIE a donc été développée pour donner une modélisation plus précise des systèmes couplés structure-structure dans ces domaines fréquentiels. L'utilisation de l'analyse modale permet de limiter les temps de calcul par rapport à une modélisation par éléments finis. Cependant, les données modales sont difficiles à obtenir pour certaines structures complexes, ce qui limite l'utilisation de cette méthode.

On considère plusieurs systèmes vibrants couplés, linéaires, et dont les caractéristiques sont indépendantes du temps. Aucune hypothèse n'est faite sur la nature ou le couplage de ses systèmes, qui peuvent être structuraux ou acoustiques. Ces systèmes sont soumis à des excitations supposées :

- décorréelées sur deux systèmes différents,
- séparables en espace et en temps,
- en régime permanent.

Le coefficient d'influence énergétique C_{ij} donne l'énergie cinétique dans le système i lorsque le système j est excité avec une excitation de densité spectrale de puissance $S_j(\omega)$. Ce coefficient s'exprime en fonction de la fonction de dépendance spatiale $\beta_j(M'_j, M''_j)$ des forces excitant le système j et de la fonction de réponse en fréquence $H_{ij}(M_i, M'_j, \omega)$ entre le point M_i du système i et le point M'_j du système j . H_{ij} est la transformée de Fourier de la réponse en vitesse au point M_i pour une force impulsionnelle unité au point M'_j . Le coefficient C_{ij} correspondant à la bande de fréquence $\Delta\omega$ est donné par :

$$C_{ij}(\Delta\omega) = \frac{1}{2} \int_{\Delta\omega} \int_{\Omega_i} \iint_{\Omega_j} \rho_i(M_i) H_{ij}(M_i, M'_j, \omega) H_{ij}^*(M_i, M''_j, \omega) \beta_j(M'_j, M''_j) dM'_j dM''_j dM_i d\omega \quad (1.81)$$

où ρ_i est la densité du système i . Si le système j est soumis à une excitation de densité spectrale de puissance S_j constante sur $\Delta\omega$, l'énergie du système i moyennée sur $\Delta\omega$ s'écrit alors :

$$\langle E_{ci} \rangle = C_{ij} S_j \quad (1.82)$$

A cause de la présence du terme β_j dans l'expression de C_{ij} , le coefficient d'influence énergétique dépend du type d'excitation appliqué au système j . Pour une excitation δ -corrélée du système j ,

la fonction de corrélation spatiale de l'excitation s'écrit :

$$\beta_j(M'_j, M''_j) = \delta(M'_j - M''_j) \quad (1.83)$$

L'expression du coefficient d'influence énergétique est simplifiée :

$$C_{ij}(\Delta\omega) = \int_{\Delta\omega} \int_{\omega_i} \int_{\omega_j} \rho_i |H_{ij}(M_i, M_j, \omega)|^2 dM_i dM_j d\omega \quad (1.84)$$

Une relation de symétrie relie alors les coefficients C_{ij} et C_{ji} , en supposant que les densités ρ_i et ρ_j sont constantes sur les systèmes i et j :

$$\frac{C_{ij}}{\rho_i} = \frac{C_{ji}}{\rho_j} \quad (1.85)$$

Les fonctions de réponse en fréquence H_{ij} sont calculées à l'aide d'une analyse modale sur l'ensemble des systèmes couplés. Avec l'introduction de ω_k , Φ_k et m_k , respectivement la pulsation, la déformée et la masse généralisée du mode k , les coefficients d'influence énergétique s'expriment :

$$C_{ij} = \sum_{k,p} \Psi_{kp}^{(i)} \frac{B_{kp}}{m_k m_p} G_{kp}^{(j)} \quad (1.86)$$

$\Psi_{k,p}^{(i)}$ s'exprime en fonction des déformées modales k et p sur le système i et représente le couplage spatial entre les modes k et p dans le système i . B_{kp} s'exprime en fonction des pulsations et des amortissements des modes k et p et représente le couplage fréquentiel entre les modes k et p . Enfin $G_{kp}^{(j)}$ représente le couplage spatial entre les modes k et p dans le système j et dépend de l'excitation. Cette formulation permet de séparer les différents mécanismes de transfert énergétiques. Ces mécanismes sont étudiés plus en détails dans le cas de la SEA-like au paragraphe 1.6.3.

Dans les références [4], [5] et [30], la méthode des coefficients d'influence énergétique est appliquée à différentes configurations de plaque. Dans la référence [5], notamment, la méthode des CIE est appliquée à deux plaques couplées en L dont l'une est soumise à une excitation δ -corrélée. Le modèle est ensuite comparé avec la SEA. On retrouve le fait que la SEA surestime la transmission d'énergie entre les deux plaques par rapport à la méthode des CIE. Ce décalage apparaît lorsque les deux plaques sont différentes. Dans ce cas, le décalage diminue lorsque les fréquences augmentent et la modélisation SEA est correcte dans le domaine des hautes fréquences.

1.5.6 Modélisation des interactions fluide-structure et limites d'application

Quelques unes des méthodes présentées ci-dessus ont également été appliquées à des systèmes couplés fluide-structure, que ce soit pour étudier les phénomènes de rayonnement ou de transparence des structures. Dans la référence [58], la méthode des CIE est appliquée à un système couplé plaque-cavité, ainsi qu'à deux plaques séparées par une cavité. C'est également le cas de la MES dans la référence [12]. Comme on l'a présenté dans le paragraphe 1.5.3, l'analyse modale asymptotique a été appliquée à un système couplé plaque-cavité.

Ces méthodes donnent une description énergétique pertinente des systèmes couplés fluide-structure sur un domaine fréquentiel plus étendu que la SEA. Deux approches prédominent dans ces différentes méthodes. Les méthodes MES et WIA reposent sur une description ondulatoire des

systèmes. L'approche ondulatoire permet en effet d'étudier les phénomènes d'échange énergétique de manière locale et se prête bien à l'analyse des moyennes et hautes fréquences.

La méthode des CIE, la PIM et l'analyse modale asymptotique reposent sur des approches de type modales, et permettent notamment d'avoir accès au comportement asymptotique de l'analyse modale en hautes fréquences. Elles peuvent donc être appliquées à des structures plus complexes que les méthodes basées sur une approche ondulatoire. Cependant, comme cela a été souligné, les méthodes PIM et AMA s'appliquent dans un domaine relativement restreint des moyennes et hautes fréquences. La PIM reprend les hypothèses de la SEA et permet de déterminer les coefficients SEA pour des systèmes complexes lorsque les approches ondulatoires ne peuvent être utilisées. L'AMA, quand à elle, a été introduite pour comparer les résultats de la SEA et ceux de l'analyse modale en hautes fréquences. Les hypothèses effectuées sur la modélisation modale originale en limitent donc le domaine de validité.

La méthode SEA-like présentée ci-dessous s'appuie également sur des approches de type basses fréquences. Comme on le verra dans la suite du rapport, la méthode SEA-like peut recourir à des méthodes modales ou éléments-finis, ce qui rend possible, d'une part, son extension à des systèmes complexes et, d'autre part, son application à des modèles réduits, comme c'est souvent le cas lorsque des systèmes couplés fluide-structure sont traités.

1.6 Méthode SEA-like

La méthode SEA-like est une méthode énergétique par approche modale, comme la méthode des coefficients d'influence énergétiques présentée au paragraphe 1.5.5, et qui relie le vecteur des énergies au vecteur des puissances injectées (voir l'approche proposée par Mace [61, 62]).

Ici, deux approches de la méthode sont présentées : celle de C.R. Frédo et celle de B.R. Mace. Les deux approches présentent la méthode SEA-like comme un assouplissement de la méthode SEA, où des hypothèses sont relaxées. Ensuite, des expressions analytiques des coefficients SEA-like de systèmes quelconques sont calculées à partir de deux types d'analyse modale : une analyse modale sur les modes du système couplé et une analyse par couplage modal. Ces expressions permettent d'effectuer une brève analyse des mécanismes de couplage spatial et fréquentiel.

1.6.1 Présentation de la SEA-like

La SEA propose une modélisation statistique des systèmes, pertinente dans le domaine des hautes fréquences, lorsque le recouvrement modal est élevé dans les différents sous-systèmes et lorsque le couplage est faible entre les sous-systèmes. Or, les hypothèses de la SEA - notamment le couplage faible - ne sont plus vérifiées pour des fréquences moins élevées. Dans ce cas, le système a un comportement sensible aux caractéristiques de chaque mode. Ce n'est alors plus pertinent de modéliser un système particulier avec une méthode statistique.

C.R. Frédo (voir référence [26]) introduit une méthode énergétique applicable à des cas particuliers et donc pour des conditions moins restrictives que la SEA : la SEA-Like. Les hypothèses utilisées en SEA ne sont plus vérifiées lors de l'application de la SEA-like. En SEA, l'énergie modale est supposée équirépartie sur les modes et contenue entièrement dans la bande de fréquence considérée. Les modes non-résonants sont négligés. Les différentes énergies modales des modes résonants sont de plus considérées comme incohérentes entre elles et de densité homogène sur le sous-système.

Ces hypothèses conviennent pour décrire un ensemble moyen de systèmes en haute fréquence.

Mais lorsque le recouvrement modal dans un système est faible, le système a un comportement modal plus marqué. Il ne peut alors plus être décrit comme une somme de modes équii-énergétiques. La méthode SEA-like, construite à partir d'une analyse modale ou par éléments-finis du système, permet de décrire ce comportement modal particulier au système.

En appliquant la SEA-like à un système de plaques couplées en L, Frédo étudie l'influence du couplage modal entre les sous-systèmes sur les coefficients de perte par couplage (SEA) et les coefficients de flux d'énergie (SEA-like). Il montre que les coefficients de flux énergétiques diffèrent des coefficients de perte par couplage en basses fréquences. Les coefficients de flux d'énergie peuvent ainsi être négatifs, indiquant que le flux de puissance se dirige d'un système à faible énergie à un système fortement énergétique. C'est le cas par exemple si le sous-système excité a un comportement non-résonnant, tandis que l'autre sous-système contient un mode résonant : l'énergie est alors transmise au sous-système non-excité. En SEA, seul le comportement résonnant des sous-systèmes est pris en compte et un tel phénomène ne peut pas être modélisé. Frédo présente finalement un critère de validité de l'utilisation de la SEA sur des systèmes particuliers : les densités modales doivent vérifier la condition de réciprocité, qui relie les densités modales aux facteurs de perte par couplage :

$$n_1\eta_{12} = n_2\eta_{21} \quad (1.87)$$

B. R. Mace (voir référence [62]) utilise une approche similaire pour aborder la méthode SEA-like.

Il introduit l'équation de la SEA, qui exprime le vecteur des puissances injectées en fonction des énergies dans chacun des sous-systèmes :

$$P_{inj} = LE \quad (1.88)$$

où les coefficients de la matrice SEA peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$L_{ii} = \omega(\eta_i + \sum_{j \neq i} \eta_{ij}) \quad (1.89)$$

$$L_{ij, i \neq j} = -\omega\eta_{ji} \quad (1.90)$$

η_i et η_{ij} sont les facteurs de perte interne et de perte par couplage du système.

La matrice L est une matrice SEA si elle vérifie deux conditions :

1. La condition de conservation de l'énergie : $\sum_i L_{ij} = \omega\eta_j$
2. La condition de réciprocité : $n_i\eta_{ij} = n_j\eta_{ji}$

Il existe une troisième condition, qui est validée dans la plupart des cas, mais qui n'est pas obligatoire pour que la matrice soit considérée comme SEA : le coefficient de perte par couplage est positif et indépendant de l'amortissement des sous-systèmes, et il est nul entre deux sous-systèmes non physiquement liés.

Il existe certains cas où cette dernière hypothèse n'est pas vérifiée, notamment lorsque le recouvrement modal devient faible.

Si les trois conditions sont vérifiées, on dira que la matrice $X = A^{-1}$ est une matrice SEA. On peut alors écrire la relation de proportionnalité donnée par Lyon [60] qui relie le flux d'énergie entre deux sous-systèmes et la différence des énergies de chaque sous-système.

Si seulement les deux premières conditions sont vérifiées mais qu'on ne peut pas négliger les facteurs de perte par couplage indirects - entre deux sous-systèmes non physiquement liés - la matrice est dite 'matrice quasi-SEA'. Le système est modélisé avec une approche SEA-like. Le flux d'énergie entre deux sous-systèmes ne dépend plus uniquement des énergies dans les deux sous-systèmes considérés mais peut dépendre de l'énergie d'un troisième sous-système. Les coefficients de la matrice SEA-like se calculent donc de la même manière qu'avec la méthode de la puissance injectée, en utilisant l'expression ci-dessous :

$$A_{rs} = \frac{\langle E_r \rangle}{\langle P_{inj,s} \rangle} \quad (1.91)$$

Le symbole $\langle \rangle$ désigne la moyenne fréquentielle. Le calcul des énergies et des puissances injectées est effectué avec des méthodes d'analyse basses fréquences, comme l'analyse modale ou l'analyse par éléments finis. Comme il a été dit au début de ce chapitre, on peut modéliser un problème couplé de deux manières différentes : soit en utilisant les modes du système entier, soit en utilisant les modes de chaque sous-système découplé. Les deux méthodes seront présentées ci-dessous.

1.6.2 Caractérisation de l'excitation

Pour simplifier les calculs, on suppose que le système est soumis à un certain type d'excitation, que l'on appelle excitation *rain-on-the-roof*. Cette excitation est de type aléatoire ergodique large bande et spatialement décorrélée. Pour caractériser cette excitation, il est nécessaire d'introduire le terme de *joint acceptance*.

Considérons un système soumis à une excitation aléatoire p de densité spectrale S_{pp} . On appelle Φ_p la p -ième déformée du système et α_p la fonction de transfert associée. La vitesse au point de coordonnées \mathbf{x} de la structure s'écrit alors :

$$v(\mathbf{x}; \omega) = i\omega \sum_p \Phi_p(\mathbf{x}) \alpha_p(\omega) \int_{sys} \Phi_p(\mathbf{x}') p(\mathbf{x}'; \omega) d\mathbf{x}' \quad (1.92)$$

On peut donc écrire la densité spectrale de vitesse de la façon suivante :

$$S_{vv}(\mathbf{x}; \omega) = \omega^2 \sum_p \sum_q \Phi_p(\mathbf{x}) \Phi_q(\mathbf{x}) \Re(\alpha_p(\omega) \alpha_q(\omega)^*) \iint_{sys} \Phi_p(\mathbf{x}') \Phi_q(\mathbf{x}'') S_{pp'}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''; \omega) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \quad (1.93)$$

Le terme $S_{pp'}$ dans l'équation (1.93) est la densité interspectrale de l'excitation et est communément utilisé pour décrire les excitations aéroacoustiques. Elle peut se décomposer en un terme fréquentiel S_p - densité spectrale de puissance de l'excitation - et un terme spatial C , appelé fonction de corrélation, qui dépend de la pulsation ω et de la distance entre les points de coordonnées \mathbf{x} et \mathbf{x}' .

$$S_{pp'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \omega) = S_p(\omega) C(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; \omega) \quad (1.94)$$

La double intégrale de l'équation (1.93) peut alors s'exprimer en fonction du spectre de la pression et d'un terme qui décrit la répartition spatiale en fonction des modes du système et que l'on appelle *joint acceptance*. Ce dernier terme se définit de la façon suivante :

$$j_{pq}(\omega) = \iint_{sys} \Phi_p(\mathbf{x}') \Phi_q(\mathbf{x}'') C(\mathbf{x}' - \mathbf{x}''; \omega) d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' \quad (1.95)$$

La densité spectrale de vitesse s'écrit alors :

$$S_{vv}(\mathbf{x}; \omega) = \omega^2 \sum_p \sum_q \Phi_p(\mathbf{x}) \Phi_q(\mathbf{x}) \Re(\alpha_p(\omega) \alpha_q(\omega)^*) j_{pq}(\omega) S_p(\omega) \quad (1.96)$$

Le coefficient SEA-like A_{rs} est généralement calculé sous excitation *rain-on-the-roof* du sous-système s . Dans ce cas, la fonction *joint acceptance* devient indépendante de ω et s'exprime de la façon suivante :

$$j_{pq}^{(s)} = \int_{V_s} \rho(\mathbf{x}_s) \Phi_p(\mathbf{x}_s) \Phi_q(\mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_s \quad (1.97)$$

$j_{pq}^{(s)}$ ne dépendant pas de ω , l'excitation *rain-on-the-roof* est ergodique. De plus, l'intégrale dans l'équation (1.97) ne dépend plus que d'une variable spatiale. La fonction de corrélation spatiale $C(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ est donc nulle si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$. L'excitation *rain-on-the-roof* est donc spatialement décorrélée.

1.6.3 Projection sur les modes du système couplé

Ici, le coefficient SEA-like entre un sous-système r et un sous-système s est calculé en fonction des modes du système couplé. Ce calcul, présenté par B.R. Mace dans les références [61, 62], permet de mettre en évidence deux phénomènes de couplage modal : le couplage spatial et le couplage fréquentiel. Après une présentation des calculs menant à l'expression du coefficient SEA-like dans une première partie, l'influence de ces phénomènes de couplage sur les coefficients SEA-like seront étudiés.

1.6.3.1 Calcul des CIE

Considérons un système divisé en différents sous-systèmes et dont le sous-système s est excité par un champ de pression p_{ext} de type *rain-on-the-roof*. On appelle Φ_j le j -ème mode du système complet. La fonction de transfert associée α_j est donnée par l'expression suivante :

$$\alpha_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2(1 + i\eta) - \omega^2} \quad (1.98)$$

Le champ de vitesse dans le sous-système r est alors décrit de la manière suivante :

$$v(\mathbf{x}_r; \omega) = i\omega \sum_j \Phi_j(\mathbf{x}_r) \alpha_j(\omega) \int_{V_s} \Phi_j(\mathbf{x}_s) p_{ext}(\mathbf{x}_s; \omega) d\mathbf{x}_s \quad (1.99)$$

ce qui permet d'exprimer la densité d'énergie totale au point de coordonnées \mathbf{x}_r du sous-système r :

$$\delta E(\mathbf{x}_r; \omega) = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}_r) v(\mathbf{x}_r; \omega) v^*(\mathbf{x}_r; \omega) \quad (1.100)$$

soit :

$$\delta E(\mathbf{x}_r; \omega) = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}_r) \omega^2 \sum_j \sum_k \Phi_j(\mathbf{x}_r) \Phi_k(\mathbf{x}_r) \alpha_j(\omega) \alpha_k^*(\omega) \int \int_{V_s} \Phi_j(\mathbf{x}_s) p_{ext}(\mathbf{x}_s; \omega) \Phi_j(\mathbf{x}'_s) p_{ext}^*(\mathbf{x}'_s; \omega) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}'_s \quad (1.101)$$

La fonction de *joint acceptance* est alors introduite dans l'expression de la densité d'énergie du sous-système r :

$$\delta E(\mathbf{x}_r; \omega) = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{x}_r) \omega^2 \sum_j \sum_k \Phi_j(\mathbf{x}_r) \Phi_k(\mathbf{x}_r) \alpha_j(\omega) \alpha_k^*(\omega) S_{p_{ext}}(\omega) j_{jk}^{(s)}(\omega) \quad (1.102)$$

On pose :

$$\Psi_{jk}^{(r)} = \int_{V_r} \rho(\mathbf{x}_r) \Phi_j(\mathbf{x}_r) \Phi_k(\mathbf{x}_r) d\mathbf{x}_r \quad (1.103)$$

L'énergie du sous-système r moyennée sur la fréquence s'écrit alors :

$$\langle E_r \rangle = \int_{V_r} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \delta E(\mathbf{x}_r; \omega) d\omega d_{mathbf{x}_r} \quad (1.104)$$

soit :

$$\langle E_r \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_j \sum_k \Psi_{jk}^{(r)} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \alpha_j(\omega) \alpha_k^*(\omega) S_{p_{ext}}(\omega) j_{jk}^{(s)}(\omega) d\omega \quad (1.105)$$

L'excitation étant *rain-on-the-roof* la fonction *joint acceptance* vérifie l'égalité (1.97) donc en posant :

$$\Gamma_{jk} = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \omega^2 \alpha_j(\omega) \alpha_k^*(\omega) S_{p_{ext}}(\omega) d\omega \quad (1.106)$$

on peut finalement écrire que :

$$\langle E_r \rangle = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \Gamma_{jk} \Psi_{jk}^{(r)} \Psi_{jk}^{(s)} \quad (1.107)$$

Calculons maintenant la puissance injectée dans le sous-système s :

$$P_{inj,s}(\omega) = \Re \left(\frac{1}{2} \int_{V_s} p_{ext}(\mathbf{x}_s; \omega) v^*(\mathbf{x}_s; \omega) d\mathbf{x}_s \right) \quad (1.108)$$

soit :

$$P_{inj,s}(\omega) = \Re \left(\frac{1}{2} i\omega \int_{V_s} p_{ext}(\mathbf{x}_s; \omega) \int_{V_s} \sum_j \Phi_j(\mathbf{x}_s) \alpha_j(\omega) \Phi_j(\mathbf{x}'_s) p_{ext}^*(\mathbf{x}'_s; \omega) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}'_s \right) \quad (1.109)$$

Les modes suivant la loi de masse ou de raideur sont négligés. En supposant que l'amortissement est constant sur tous les modes, on peut alors écrire :

$$P_{inj,s}(\omega) = \frac{1}{2} \omega \sum_j \eta \omega_j^2 \|\alpha_j(\omega)\|^2 \iint_{V_s} \Phi_j(\mathbf{x}_s) \Phi_j(\mathbf{x}'_s) p_{ext}(\mathbf{x}_s; \omega) p_{ext}^*(\mathbf{x}'_s; \omega) d\mathbf{x}_s d\mathbf{x}'_s \quad (1.110)$$

ce qui permet, comme précédemment, de faire apparaître les fonctions *joint acceptance* :

$$P_{inj,s}(\omega) = \frac{1}{2} \omega \sum_j \eta \omega_j^2 \|\alpha_j(\omega)\|^2 S_{p_{ext}}(\omega) j_{jj}^{(s)}(\omega) \quad (1.111)$$

Finalement, la moyenne fréquentielle de la puissance injectée dans le sous-système s s'écrit :

$$P_{inj,s}(\omega) = \frac{1}{2} \sum_j \eta \omega_j^2 \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \omega \|\alpha_j(\omega)\|^2 S_{p_{ext}}(\omega) j_{jj}^{(s)}(\omega) d\omega \quad (1.112)$$

On suppose que, lors du calcul de la moyenne fréquentielle, les pulsations peuvent être ramenées à la pulsation centrale de la bande de fréquence considérée ω_c :

$$P_{inj,s}(\omega) = \frac{1}{2}\eta\omega_c \sum_j \Gamma_{jj} \Psi_{jj}^{(s)} \quad (1.113)$$

Les équations (1.107) et (1.113) donnent l'expression des coefficients de la matrice SEA-like en fonction des modes du système :

$$A_{rs} = \frac{1}{\eta\omega_c} \frac{\sum_j \sum_k \Gamma_{jk} \Psi_{jk}^{(r)} \Psi_{jk}^{(s)}}{\sum_j \Gamma_{jj} \Psi_{jj}^{(s)}} \quad (1.114)$$

1.6.3.2 Analyse

Terme de couplage fréquentiel Γ_{jk}

Le terme Γ_{jk} décrit le couplage fréquentiel entre le mode j et le mode k du système complet. L'expression de Γ_{jk} est donné par la formule (1.106). Elle dépend des fonctions de transfert des modes j et k , donc des fréquences propres ainsi que des amortissements des deux modes, et renseigne sur le caractère résonnant ainsi que sur le recouvrement entre deux modes.

Ainsi, si l'un des modes j ou k n'est pas résonnant - c'est-à-dire que sa fréquence propre n'est pas comprise dans la bande de fréquence considérée - le terme Γ_{jk} est négligeable.

Si les deux modes sont résonnants, alors Γ_{jk} est élevé lorsque les deux modes se superposent, c'est-à-dire lorsque leurs fréquences propres sont proches. Les deux modes ont alors un couplage fréquentiel élevé.

Terme de corrélation spatiale $\Psi_{jk}^{(r)}$

Le terme $\Psi_{jk}^{(r)}$ indique la corrélation spatiale entre les modes j et k , c'est-à-dire le couplage spatial entre les modes j et k dans le sous système r . Si l'on reprend l'expression de A_{rs} donné par l'équation (1.114), on remarque que lorsque les termes $\Psi_{jj}^{(r)}$ et $\Psi_{jj}^{(s)}$ sont importants, les modes sont bien couplés sur les sous-systèmes r et s . Le coefficient A_{rs} est alors important.

Plus précisément, le terme $\Psi_{jj}^{(r)}$ indique la proportion d'énergie cinétique portée par le mode j dans le sous-système r .

On peut ainsi définir deux types de modes : les modes globaux et les modes locaux.

- Le mode j est un mode *global* si le terme $\Psi_{jj}^{(r)}$ est équivalent dans chaque sous-système. L'énergie cinétique est alors distribuée dans tout le système.
- Le mode j est un mode *local* du sous-système r si le terme $\Psi_{jj}^{(r)}$ est très important dans le sous-système r et négligeable dans les autres. Dans ce cas, l'énergie cinétique est localisée dans le sous-système r et ses voisins.

Influence du recouvrement modal sur les CIE

Le facteur de recouvrement modal M dépend de la densité modale et de l'amortissement dans chaque sous-système.

Pour étudier l'influence de M sur les CIE, quelques hypothèses sont effectuées : tout d'abord, seuls les modes excités sont pris en comptes ; les amortissements sont supposés égaux sur tous les modes considérés. Ainsi, si l'on considère qu'il y a suffisamment de modes dans la bande de fréquence considérée et que les déformées propres d'un sous-système sont semblables en terme d'énergie cinétique aux déformées sur tout le système, on peut écrire que :

$$\bar{\Psi}_{jj}^{(s)} = E[\Psi_{jj}^{(s)}] \quad (1.115)$$

où $\bar{\Psi}_{jj}^{(s)}$ désigne la moyenne fréquentielle du terme de corrélation spatiale et $E[\Psi_{jj}^{(s)}]$ désigne la moyenne sur tous les modes considérés.

$\bar{\Psi}_{jj}^{(s)}$ est donc constant pour tous les modes considérés et on peut écrire que :

$$\bar{\Psi}_{jj}^{(s)} = \nu_s = \frac{n_s}{n_{tot}} \quad (1.116)$$

où n_s désigne la densité modale asymptotique du sous-système s , et n_{tot} est la densité modale totale du système.

Faible recouvrement modal

Lorsque $j \neq k$, Γ_{jk} est négligeable devant Γ_{jj} , ce qui permet d'écrire, en prenant en compte les hypothèses ci-dessus :

$$A_{rs} = \frac{1}{\omega\eta} \frac{E[\Psi_{jj}^{(r)}\Psi_{jj}^{(s)}]}{\nu_s} \quad (1.117)$$

Ces hypothèses permettent de faire quelques remarques, et tout d'abord de vérifier le caractère quasi-SEA de la matrice $X = A^{-1}$.

Ainsi, si on inverse la matrice A , on obtient bien une matrice quasi-SEA, car les coefficients de perte par couplage sont proportionnels à l'amortissement et il peut exister des coefficients de perte par couplage indirects.

Si les modes sont tous locaux, on peut calculer le coefficient de perte par couplage entre deux sous-systèmes directement liés :

$$\eta_{rs} = \eta \frac{E[\Psi_{jj}^{(r)}\Psi_{jj}^{(s)}]}{\nu_r} \quad (1.118)$$

Les coefficients de perte par couplage entre deux sous-systèmes physiquement liés sont négligeables. La matrice X est très proche d'une matrice SEA.

Augmentation du recouvrement modal

On néglige les termes Γ_{jk} pour lesquels le mode j et le mode k ne se recouvrent pas. On pose alors :

$$\Gamma_{jk} = \mu_{jk} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu_{jk} = 1 & \text{si les modes } j \text{ et } k \text{ se recouvrent} \\ \mu_{jk} = 0 & \text{si les modes } j \text{ et } k \text{ ne se recouvrent pas} \end{cases} \quad (1.119)$$

Cela permet d'écrire :

$$A_{rs} = \frac{1}{\omega\eta} \frac{E[\sum_j \sum_k \mu_{jk} \Psi_{jk}^{(r)} \Psi_{jk}^{(s)}]}{\nu_s} \quad (1.120)$$

Or, les produits de deux termes de corrélation spatiale pour deux modes et deux sous-systèmes différents sont généralement négatifs. Ainsi, plus le recouvrement modal augmente, plus le couplage entre les modes est pris en compte, donc plus les termes A_{rs} avec $r \neq s$ diminuent. Dans le même temps, les termes diagonaux A_{ss} augmentent. En particulier, le couplage entre deux sous-systèmes non liés physiquement devient négligeable devant le couplage entre deux sous-systèmes liés.

Fort recouvrement modal

Les termes diagonaux de la matrice A sont de plus en plus importants par rapport aux termes extra-diagonaux. Il en va de même pour la matrice SEA, où les facteurs de perte par couplage entre systèmes non physiquement liés deviennent négligeables.

1.6.4 Méthode de couplage modal

La méthode utilisant les modes du système complet permet de donner une expression simple des coefficients de la matrice SEA-like. Cependant, lorsque le système étudié est complexe, ces modes peuvent être coûteux à trouver. Il est alors plus judicieux d'utiliser une approche plus locale et de décomposer les équations du système sur les modes des sous-systèmes découplés.

La condition d'excitation *rain-on-the-roof* associée au sous-système s s'écrit alors :

$$j_{pq}^{(s)} = \int_{V_s} \rho(\mathbf{x}_s) \Phi_p^{(s)}(\mathbf{x}_s) \Phi_q^{(s)}(\mathbf{x}_s) d\mathbf{x}_s \quad (1.121)$$

où Φ_p^s est le mode p du sous-système s .

Cette condition permet d'écrire les énergies moyennes dans chaque sous-système ainsi que la puissance injectée moyenne, puis de calculer les coefficients de la matrice SEA-like, d'après l'égalité suivante :

$$A_{rs} = \frac{\langle E_r \rangle}{\langle P_{inj,s} \rangle} \quad (1.122)$$

Le calcul des coefficients SEA-like dépend des caractéristiques du système étudié et ne sera donc pas explicité ici. Le lecteur est renvoyé au chapitre 3 pour le calcul des coefficients SEA-like d'un système couplé plaque-cavité par une méthode de couplage modal.

1.7 Excitations aérodynamiques

Les lanceurs sont soumis à des excitations aérodynamiques de nature aléatoire large bande lors du décollage et du vol atmosphérique du lanceur. On distingue principalement trois types d'excitations aérodynamiques [83, 84] :

- un bruit de jet, qui est créé lorsque l'énergie cinétique du jet est transformée en énergie sonore dans la zone de mélange avec l'air ambiant et se propage le long du lanceur,

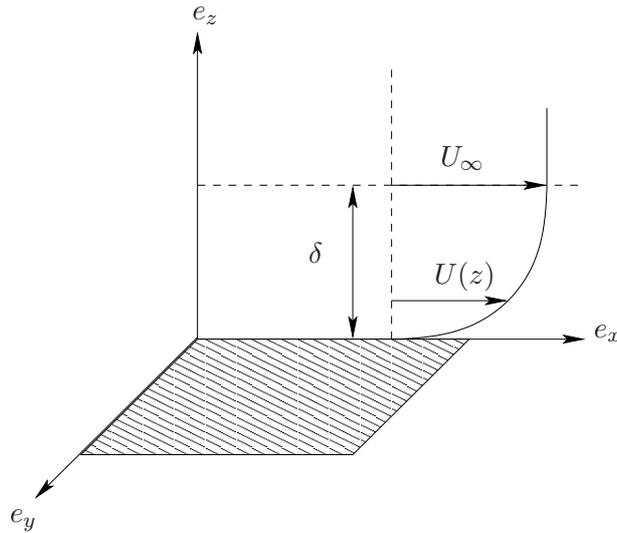


FIGURE 1.9 – Excitation par couche limite turbulente

- un bruit diffus, du à la réverbération sur la table de lancement des ondes sonores créées par le jet,
- un bruit aérodynamique qui se produit lors de la phase atmosphérique du vol. Ces bruits proviennent de turbulences dans les couches limites au voisinage du lanceur : en phase transsonique, les discontinuités dans les structures externes des lanceurs induisent des décollements dans les couches limites, où la turbulence est forte. Cette turbulence produit de fortes fluctuations de pression perçues comme du bruit par les lanceurs.

Ici, deux excitations aérodynamiques aléatoires supposées stationnaires ergodiques seront étudiées : l'excitation par bruit de jet et l'excitation par couche limite turbulente.

Ces excitations étant aléatoires et large-bande, elles sont modélisées de manière statistique par le produit d'une fonction de corrélation spatiale, qui décrit la répartition spatiale de l'excitation, et un spectre de densité spectrale, qui décrit l'intensité de l'excitation en fonction de la fréquence. Les fonctions de corrélation spatiale sont généralement obtenues de manière semi-empirique.

1.7.1 Excitation par couche limite turbulente

Ce type d'excitation est du à l'écoulement de l'air le long du lanceur lors du vol atmosphérique. Le fluide forme une couche limite au voisinage de la structure, où la vitesse du fluide varie et induit un champ de pression qui excite la structure.

La vitesse du fluide dans la couche limite turbulente présente un profil de variation qui dépend des caractéristiques du fluide. Cette vitesse est nulle au voisinage de la structure et est égale à la vitesse libre U_∞ du flux à l'extérieur de la couche limite (voir figure 1.9). La couche limite turbulente est caractérisée par l'épaisseur de la couche limite δ et la vitesse de convection U_c , qui est la moyenne de la vitesse du fluide dans la couche limite.

Le modèle le plus communément utilisé pour décrire le champ de pression induit par une couche limite turbulente est le modèle de Corcos [11]. Corcos donne la fonction de corrélation spatiale du champ de pression sous la forme d'un produit de deux fonctions séparant les variables spatiales x

et y décrivant la structure :

$$C(\zeta, \eta; \omega) = e^{-\alpha_x \omega \frac{|\zeta|}{U_c}} e^{-\alpha_y \omega \frac{|\eta|}{U_c}} e^{i\omega \frac{\zeta}{U_c}} \quad (1.123)$$

où α_x et α_y sont les coefficients de corrélation suivant les directions e_x et e_y , et $\zeta = x - x'$ et $\eta = y - y'$ sont les distances séparant les deux points dans la direction du flux et la direction perpendiculaire. Les valeurs de α_x et α_y peuvent être trouvées dans la littérature. Dans le chapitre 5, on utilisera les valeurs données par Blake dans la référence [3].

Cette fonction peut également s'exprimer dans l'espace des nombres d'onde en utilisant la transformée de Fourier \mathcal{F} donnée par :

$$\mathcal{F}(k_x, k_y; \omega) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \eta; \omega) e^{-ik_x \zeta - ik_y \eta} d\zeta d\eta \quad (1.124)$$

La fonction de corrélation spatiale exprimée dans l'espace des nombres d'onde devient alors :

$$C(k_x, k_y; \omega) = \frac{4\alpha_x \alpha_y}{(\alpha_x^2 + (k_x/k_c - 1)^2)(\alpha_y^2 + k_y^2/k_c^2)} \quad (1.125)$$

où $k_c = \omega/U_c$ est le nombre d'onde convectif.

La courbe représentant la fonction de corrélation en fonction de k_x présente un maximum, indiquant la coïncidence aérodynamique. La coïncidence aérodynamique correspond à l'égalité de la vitesse des ondes de flexion dans la structure et de la vitesse de convection dans le fluide et se produit à la fréquence :

$$f_c = \frac{U_c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_s}{D}} \quad (1.126)$$

Le domaine des faibles nombres d'onde, appelé région sous-convective (voir figure 1.10), est caractérisé par des interactions de surfaces entre la structure et le milieu acoustique. Dans le domaine des grands nombres d'onde, ou domaine visqueux, les échanges énergétiques entre le fluide et la structure sont effectués par des interactions de bords. Dans le domaine visqueux, la fonction d'acceptance modale, qui caractérise les échanges énergétiques entre la plaque et la cavité, dépend donc fortement des conditions aux limites [31].

1.7.2 Excitation par bruit diffus

Le bruit diffus est un champ de pression où, en un point donné, les ondes de pression ont une direction d'incidence équiprobable. Dans un système de coordonnées cartésiennes, la fonction de corrélation spatiale correspondant au bruit diffus aura la fonction de corrélation spatiale suivante :

$$C(\zeta, \eta; \omega) = \frac{\sin(k_0 \zeta)}{k_0 \zeta} \frac{\sin(k_0 \eta)}{k_0 \eta} \quad (1.127)$$

où les notations de l'équation (1.123) sont conservées et où k_0 est le nombre d'onde acoustique défini par l'excitation.

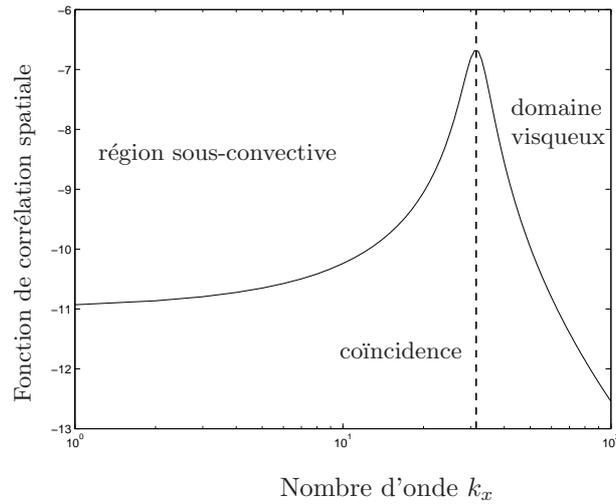


FIGURE 1.10 – Fonction de corrélation spatiale en fonction du nombre d'onde k_x

La transformée de cette fonction dans le domaine des nombres d'ondes est donnée par une fonction passe-bas :

$$C(k_x, k_y) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{k_0^2}, & \text{si } \|k_x\| < k_0 \text{ et } \|k_y\| < k_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.128)$$

où k_0 est le nombre d'onde acoustique. L'égalité des longueurs d'onde dans l'air et dans la structure correspond à la coïncidence acoustique, qui se produit à la fréquence :

$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_s}{D}} \quad (1.129)$$

L'équation (1.128) permet de déduire que les modes qui répondront bien à l'excitation par bruit diffus sont les modes dont le nombre d'onde est inférieur à k_0 , c'est à dire les *modes rapides*, dont la zone de rayonnement occupe toute la surface de la structure. Les modes dont le nombre d'onde est supérieur à k_0 , les *modes lents*, répondent moins bien à ce type d'excitation.

En étudiant une plaque rectangulaire excitée par un bruit diffus, Maidanik classe les modes en trois catégories [66] : les modes rapides, les modes de bord et les modes de coin. Les modes lents dont une composante du nombre d'onde est supérieur à k_0 sont appelés *modes de bord*. Ces modes rayonnent par les bords de la structure. Les modes dont les deux composantes du nombre d'onde sont inférieurs à k_0 ne rayonnent qu'aux coins de la structure et répondent très peu à l'excitation. On les appelle aussi *modes de coin* (voir figure 1.11).

1.8 Présentation de la démarche

L'objectif est de modéliser les interactions fluide-structure dans le domaine des moyennes fréquences tout en assurant la continuité entre les modélisations basses fréquences et les modélisations hautes fréquences.

De nombreux auteurs se sont attachés à décrire les interactions fluide-structure dans le domaine des moyennes fréquences. Le système le plus fréquemment rencontré dans ces études est le système

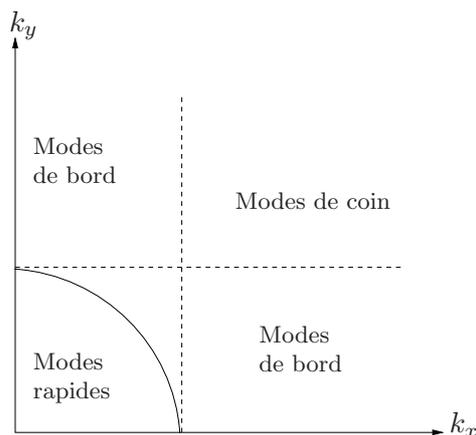


FIGURE 1.11 – Classification des modes d'une plaque rectangulaire excitée par un bruit diffus en fonction de leur réponse à l'excitation

couplé plaque-cavité. Ce système permet en effet de décrire la propagation du son dans un habitacle fermé à travers une paroi flexible, ce qui peut s'étendre à beaucoup d'applications industrielles, que ce soit dans les domaines du bâtiment, du transport ou - comme c'est le cas ici - de l'aéronautique. La modélisation d'un système couplé plaque-cavité a été introduite par Lyon [59] et Dowell *et al.* [23], qui le modélisent avec une méthode par couplage modal. Cette méthode a été reprise par Dowell dans [20]. Plusieurs auteurs ont ensuite repris ce système pour en étudier différents aspects. L'analyse modale asymptotique, présentée au paragraphe 1.5.3, permet de relier la méthode de couplage modal à la SEA [22,73]. Les mécanismes du couplage modal entre la structure et la cavité, validé sous certaines conditions par Hong *et al.* [33], sont étudiés dans le domaine des moyennes fréquences par Pan *et al.* [69–72, 79–81]. Ryu [75] et Kim *et al.* [45] ont étudié la méthode des mobilités énergétiques sur un système couplé plaque-cavité. Dowell [19] et Guy [29] entre autres ont effectués quelques études sur une plaque couplée à une cavité et excitée par des excitations aérodynamiques. Dernièrement, Langley *et al.* [54] ont développés une méthode permettant de coupler un modèle éléments-finis de cavité avec un modèle statistique de plaque.

Dans le chapitre 2, la méthode de couplage modal est appliquée au système plaque-cavité. Cette modélisation s'appuie sur les travaux de Pan [72] et de Lacour [47] et a été présentée au paragraphe 1.6.4. Une méthode permettant de modifier les conditions aux limites de la plaque sera également présentée dans ce chapitre. La méthode de couplage modal permet de construire le modèle SEA-like par couplage modal. La modélisation SEA-like est détaillée au chapitre 3. Dans ce même chapitre, la modélisation SEA-like est comparée à une modélisation SEA du système couplé en hautes fréquences.

Dans le chapitre 4, cette modélisation SEA-like, appliquée à un système faiblement couplé, est comparée à une modélisation SEA-like par éléments-finis, équivalente à l'approche proposée par Mace. Diverses simplifications sont ensuite apportées au modèle SEA-like par couplage modal, pour améliorer les performances de calcul, déjà importantes par rapport à l'approche SEA-like par éléments-finis. Finalement, une étude paramétrique sur le système couplé permet de discuter de la validité des deux modélisations SEA-like selon la nature du couplage entre la plaque et la cavité. Une étude de l'influence des conditions aux limites sur les coefficients SEA-like est également présentée.

Le chapitre 5 reprend les excitations aérodynamiques présentées au paragraphe 1.7 et présente une modélisation avec la méthode SEA-like d'une plaque couplée avec une cavité et soumise à des

excitations aérodynamiques, déjà en partie présentée dans les références [32, 41]. Finalement, une démarche générale pour la mise en œuvre de la méthode présente les avantages de la modélisation SEA-like dans les domaines des moyennes et hautes fréquences.

Chapitre 2

Analyse du couplage vibroacoustique en moyennes fréquences

2.1	Présentation	46
2.2	Présentation du système	46
2.3	Cas de la plaque excitée	48
2.3.1	Équation de la plaque	48
2.3.2	Équation de la cavité	49
2.3.3	Equation matricielle du système	50
2.4	Cas de la cavité excitée	50
2.5	Quelques aspects du couplage entre modes de plaque et de cavité	51
2.5.1	Couplage entre un mode de cavité et un mode de plaque	51
2.5.2	Modes du système couplé	52
2.5.3	Particularité des moyennes fréquences	53
2.6	Modification des conditions aux limites de la plaque	60
2.6.1	Fonctions hiérarchiques	62
2.6.2	Mise en oeuvre	63
2.6.3	Pertinence de la méthode	66
2.7	Conclusion	69
2.7.1	Bilan	69
2.7.2	Vers la SEA-like	71

2.1 Présentation

On considère une cavité parallélépipédique délimitée par 5 parois rigides et une paroi flexible, où seul le déplacement en flexion est pris en compte. Dans ce chapitre, le système couplé est modélisé avec une méthode de couplage modal. Les équations du système sont projetées sur les modes de chacun des sous-systèmes découplés : les modes rigides de la cavité et les modes de la plaque *in vacuo*.

Cette approche étant moins coûteuse qu'une analyse modale sur le système complet, il convient de se poser la question de la convergence de cette approche. Les formulations de Rayleigh-Ritz utilisées en éléments-finis sont projetées sur des fonctions cinématiquement admissibles, qui vérifient les conditions aux limites du système étudié. Ces formulations convergent alors vers la solution exacte, plus ou moins rapidement selon les fonctions choisies. Ici, le champ de déplacement de la plaque est projeté sur des fonctions cinématiquement admissibles - les conditions aux limites de la plaque sont respectées par les modes *in vacuo*. Par contre, ce n'est pas le cas du champ de pression dans la cavité, car les modes de cavité rigides ne vérifient pas la condition de continuité de gradient de pression au niveau de la paroi flexible.

Le chapitre 4 propose une étude de l'influence du couplage entre la plaque et la cavité sur la pertinence de la méthode du couplage modal. Dans ce chapitre-ci, les modélisations de Pan [72] et de Lacour [47] d'un système couplé plaque-cavité avec une méthode de couplage modal sont présentées. Ces calculs seront supposés valides sur le premier exemple présenté dans le chapitre 4, où la plaque et la cavité sont faiblement couplées. Cette approche par couplage modale sera validée par comparaison avec une modélisation par éléments finis.

En effet, malgré la question de la pertinence de la méthode, la modélisation par couplage modal présente quelques avantages pour la modélisation SEA-like d'un système couplé fluide-structure : outre le fait que la méthode de couplage modal est moins lourde qu'une modélisation par éléments finis, les avantages de cette méthode pour la modélisation SEA-like résident dans la possibilité de simplifier la modélisation SEA-like en partant de l'étude du couplage entre les modes de plaque et de cavité. Ces simplifications seront présentées au chapitre 4 de ce rapport.

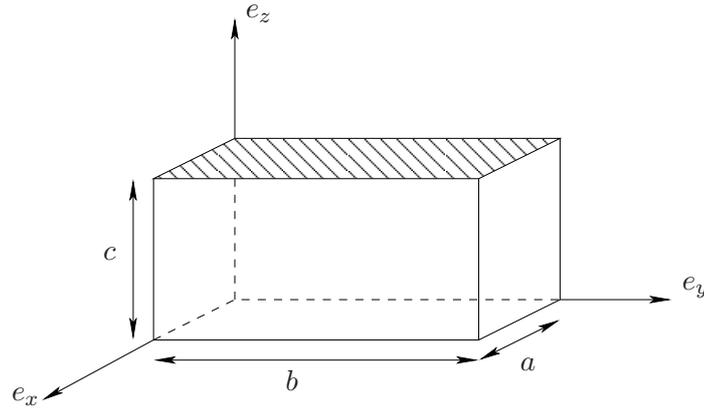
Dans ce chapitre, la méthode de couplage modal est développée d'une manière générale pour rendre possible la prise en compte de plusieurs conditions aux limites de la plaque. Dans une première partie, les équations du système couplé sont développées pour une plaque simplement appuyée couplée avec une cavité. Dans une deuxième partie, une méthode permettant de faire varier les conditions aux limites de la plaque est présentée.

2.2 Présentation du système

Considérons le système suivant, constitué d'une cavité parallélépipédique de dimensions $(a \times b \times c)$ couplée avec une plaque de dimensions $(a \times b)$ (voir figure 2.1).

Les équations du système sont écrites en fonction des paramètres suivants : la plaque est décrite par son champ de vitesse normale $v(x, y)$ et la cavité est décrite par son champ de pression $p(x, y, z)$.

Pour effectuer l'analyse modale sur le système couplé plaque-cavité, il faut projeter les équations du système sur une base modale. La base modale utilisée ici est une base composée des modes des sous-systèmes découplés, c'est-à-dire d'une part des modes de la cavité quand on considère que les six parois sont rigides, et d'autre part - dans un premier temps - des modes de la plaque supposée simplement appuyée.

FIGURE 2.1 – *Système couplé plaque/cavité*

Le mode de cavité de paroi rigide n d'indices (r, s, t) s'exprime de la façon suivante :

$$\Phi_n^a(x, y, z) = \cos\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{t\pi z}{c}\right) \quad (2.1)$$

La fréquence propre correspondante est :

$$f_{an} = \frac{c_0}{2\pi} \left(\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{c}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

où c_0 est la célérité du son dans l'air.

Ainsi la projection de la pression sur cette base modale s'écrit :

$$p(x, y, z; \omega) = \sum_n P_n(\omega) \Phi_n^a(x, y, z) \quad (2.3)$$

Le mode de la plaque simplement appuyée m d'indices (p, q) est le suivant :

$$\Phi_m^s(x, y) = \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (2.4)$$

La fréquence propre correspondante est :

$$f_{sm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{\rho_p h_p}} \left(\left(\frac{p\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b}\right)^2 \right) \quad (2.5)$$

où D est la rigidité en flexion de la plaque, ρ_p est la masse volumique et h_p l'épaisseur de la plaque.

De même que pour la pression, on projette la vitesse sur sa base modale :

$$v(x, y, z; \omega) = \sum_m V_m(\omega) \Phi_m^s(x, y, z) \quad (2.6)$$

La modélisation SEA-like du système couplé plaque-cavité nécessite l'étude de deux cas d'excitation (voir chapitre 4.1.1). Le premier cas consiste à exciter la plaque avec une excitation *rain-on-the-roof* et à calculer l'énergie dans la plaque et dans la cavité pour étudier le transfert d'énergie entre les deux sous-systèmes. Dans le deuxième cas, on excite la cavité puis, de même que pour le premier cas, on calcule les énergies dans les deux sous-systèmes.

2.3 Cas de la plaque excitée

2.3.1 Équation de la plaque

On suppose que la plaque est excitée par un champ de pression $p_{ext}(x, y, \omega)$.

Pour écrire l'équation de la plaque, la théorie des plaques minces de Kirchhoff est utilisée :

$$Lw(x, y, z; \omega) - \rho_s h_s \omega^2 w(x, y, z, \omega) = p(x, y, z = 1, \omega) - p_{ext}(x, y, \omega) \quad (2.7)$$

où L est l'opérateur différentiel linéaire d'élasticité et w est le déplacement normal dans la structure.

Si on remplace le déplacement normal de la plaque par la vitesse normale dans l'équation (2.7), on obtient l'expression suivante :

$$Lv(x, y, z; \omega) - \rho_s h_s \omega^2 v(x, y, z, \omega) = j\omega (p(x, y, z = 1, \omega) - p_{ext}(x, y, \omega)) \quad (2.8)$$

Or les modes de la plaque simplement appuyée vérifient l'équation suivante :

$$L\Phi_m^s - \rho_s h_s \omega_{sm}^2 \Phi_m^s = 0 \quad (2.9)$$

Ainsi, si on remplace dans l'équation (2.8) la vitesse normale par sa projection modale, que l'on multiplie l'équation (2.9) par la vitesse modale correspondante V_m , et que l'on soustrait les deux expressions obtenues, on obtient :

$$L \left(\sum_m V_m \Phi_m^s \right) - \rho_s h_s \omega^2 \left(\sum_m V_m \Phi_m^s \right) = j\omega \left(\sum_n P_n \Phi_n^a - p_{ext} \right) \quad (2.10)$$

En prenant en compte l'expression de L et de la pulsation du mode m , l'équation (2.10) donne :

$$\rho_s h_s (\omega_{sm}^2 - \omega^2) \sum_m V_m \Phi_m^s = j\omega \left(\sum_n P_n \Phi_n^a - p_{ext} \right) \quad (2.11)$$

Cette équation est projetée sur le mode Φ_r^s :

$$\sum_m \rho_s h_s (\omega_{sm}^2 - \omega^2) V_m \int_{A_s} \Phi_m^s \Phi_r^s ds - j\omega \sum_n P_n \int_{A_s} \Phi_n^a \Phi_r^s ds = -j\omega \int_{A_s} p_{ext} \Phi_r^s ds \quad (2.12)$$

On introduit la matrice de couplage B :

$$B_{n,m} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} \Phi_m^s \Phi_n^a ds \quad (2.13)$$

En prenant en compte l'orthogonalité des modes d'une plaque simplement appuyée et en introduisant la masse modale $M_m^s = \rho_s h_s \int_{A_s} \Phi_m^s \Phi_m^s ds = \rho_s h_s A_s / 4$, on a :

$$M_m^s (\omega^2 - \omega_{sm}^2) V_m + j\omega A_s \sum_n B_{n,m} P_n = j\omega \int_{A_s} p_{ext} \Phi_m^s ds \quad (2.14)$$

La prise en compte de l'amortissement dans la plaque peut être introduite de deux manières différentes : sous la forme d'un amortissement de type visqueux ou d'un amortissement de type structural. L'amortissement de type visqueux se traduit par l'ajout d'un terme proportionnel à la vitesse dans la plaque. L'amortissement de type structural, par contre, se traduit par l'ajout d'un terme complexe à la raideur, qui devient elle-même complexe. C'est cette dernière approche qui est utilisée, afin de garder le même formalisme que Pan, dans la référence [79]. L'introduction d'un amortissement modal de type structural η_{sm} dans l'équation (2.14) permet finalement d'obtenir l'équation modale de la plaque :

$$\frac{jM_m^s}{A_s\rho_0c_0\omega}(\omega_{sm}^2 + j\eta_{sm}\omega_{sm}^2 - \omega^2)V_m + \frac{1}{\rho_0c_0} \sum_n B_{n,m}P_n = \frac{1}{A_s\rho_0c_0} \int_{A_s} p_{ext}\Phi_m^s ds \quad (2.15)$$

Dans ce paragraphe, l'interaction entre la plaque et le champ extérieur n'a pas été considéré, en dehors de l'excitation p_{ext} . En toute rigueur, il faudrait rajouter un terme de rayonnement à l'équation modal, qui traduirait le rayonnement de la plaque vers le milieu extérieur, qui est infini. Les hypothèses de Pan [72] sur ce point seront utilisées. Ce facteur de rayonnement est donc négligé dans les équations modales.

2.3.2 Équation de la cavité

La pression dans la cavité est décrite par l'équation de Helmholtz :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c_0^2}p = 0 \quad (2.16)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

– aux bords rigides :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (2.17)$$

– sur la paroi flexible :

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -j\rho_0\omega v \quad (2.18)$$

Les modes de cavité vérifient également l'équation de Helmholtz :

$$\Delta\Phi_n^a + \frac{\omega^2}{c_0^2}\Phi_n^a = 0 \quad (2.19)$$

avec la condition aux limites de bord rigide sur toute la frontière :

$$\frac{\partial\Phi_n^a}{\partial n} = 0 \quad (2.20)$$

En intégrant les équations (2.16) et (2.19) sur le volume V de la cavité et en utilisant le théorème de Green, on obtient :

$$\int_A p \frac{\partial\Phi_n^a}{\partial n} - \Phi_n^a \frac{\partial p}{\partial n} ds = \left(\frac{\omega^2 - \omega_{an}^2}{c_0^2} \right) \int_V p\Phi_n^a dV \quad (2.21)$$

ce qui donne, en utilisant les conditions aux limites des équations (2.17), (2.18) et (2.20) :

$$\left(\frac{\omega^2 - \omega_{an}^2}{c_0^2} \right) \int_V p\Phi_n^a dV - j \int_{A_s} \Phi_n^a \rho_0 \omega v ds = 0 \quad (2.22)$$

En remplaçant la pression dans la cavité et la vitesse normale par leurs projections modales et en utilisant l'orthogonalité des modes et la masse modale de la cavité $M_n^a = \rho_0 \int_V \Phi_n^a \Phi_n^a dV = \rho_0 V \left(\frac{1}{2}\right)^{(3-\delta(r,0)-\delta(s,0)-\delta(t,0))}$, où (r, s, t) sont les indices du mode de cavité n , l'équation (2.22) devient :

$$\left(\frac{\omega^2 - \omega_{an}^2}{c_0^2}\right) \frac{M_n^a}{\rho_0} P_n - j\rho_0 \omega A_s \sum_m B_{n,m} V_m = 0 \quad (2.23)$$

De même que pour la plaque, on introduit l'amortissement modal de la cavité η_{an} dans l'équation (2.23), ce qui permet finalement d'obtenir l'équation modale de la cavité :

$$\frac{jM_n^a}{\omega\rho_0 c_0 A_s} (\omega_{an}^2 + j\eta_{an}\omega_{an}^2 - \omega^2) P_n - \rho_0 c_0 \sum_m B_{n,m} V_m = 0 \quad (2.24)$$

2.3.3 Equation matricielle du système

D'après les équations (2.15) et (2.24), qui régissent la pression dans la cavité et la vitesse normale dans la plaque, on peut écrire l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \chi_s & \frac{1}{\rho_0 c_0} {}^t B \\ -\rho_0 c_0 B & \chi_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_s Q_s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Ici, χ_s est une matrice diagonale correspondant à la matrice de transfert de la plaque :

$$\chi_{sm} = \frac{jM_m^s}{A_s \rho_0 c_0 \omega} (\omega_{sm}^2 + j\eta_{sm}\omega_{sm}^2 - \omega^2) \quad (2.26)$$

χ_a est une matrice diagonale correspondant à la matrice de transfert de la cavité :

$$\chi_{an} = \frac{jM_n^a}{A_s \rho_0 c_0 \omega} (\omega_{an}^2 + j\eta_{an}\omega_{an}^2 - \omega^2) \quad (2.27)$$

et Q_s est le vecteur des forces généralisées de la plaque :

$$Q_{sm} = \frac{1}{A_s \rho_0 c_0 \chi_{sm}} \int_{A_s} p_{ext} \Phi_m^s ds \quad (2.28)$$

2.4 Cas de la cavité excitée

On suppose maintenant que la cavité par une distribution de sources acoustiques q .

En reprenant les mêmes notations que précédemment et en introduisant le terme de force généralisée acoustique :

$$Q_{an} = \frac{-\rho_0 c_0}{A_s \chi_{an}} \int_V q(x, y, z) \Phi_n^a(x, y, z) dx dy dz \quad (2.29)$$

On obtient l'équation matricielle du système couplé plaque/cavité :

$$\begin{pmatrix} \chi_s & \frac{1}{\rho_0 c_0} {}^t B \\ -\rho_0 c_0 B & \chi_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_a Q_a \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

2.5 Quelques aspects du couplage entre modes de plaque et de cavité

2.5.1 Couplage entre un mode de cavité et un mode de plaque

Ici, deux types de modes sont présentés, qui peuvent chacun fournir une base modale pour décrire le comportement dynamique du système plaque-cavité : les modes de chacun des sous-systèmes découplés - utilisés dans le paragraphe précédent pour calculer les équations modales du système - et les modes du système complet - appelés aussi *modes couplés*. Ici les modes couplés sont calculés à partir d'une analyse aux valeurs propres du système sur la base des modes de chacun des sous-systèmes découplés. Cela permet de relier les deux bases modales.

2.5.1.1 Couplage spatial

Deux mécanismes contribuent au couplage entre deux modes de chacun des sous-systèmes découplés : le couplage spatial et le couplage fréquentiel. Le couplage spatial entre un mode de plaque et un mode de cavité est déterminé par la matrice de couplage B , calculée au paragraphe 2.3 par l'intégrale des produits des déformées modales correspondantes. Le couplage spatial dépend donc des conditions aux limites de la plaque.

Dans le cas d'une plaque simplement appuyée couplée avec une cavité, si l'on reprend les notations des indices modaux du paragraphe précédent, les coefficients de la matrice de couplage s'expriment :

$$B_{m,n} = \begin{cases} (-1)^t \frac{pq}{\pi^2} \frac{(1-(-1)^{p-r})(1-(-1)^{q-s})}{(p^2-r^2)(q^2-s^2)} & \text{si } r \neq p \quad \text{et} \quad s \neq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.31)$$

Le couplage ou non d'un mode de plaque et d'un mode de cavité dépend de la parité des indices modaux, comme le montre le tableau ci-dessous :

Modes de plaque	Modes de cavité			
	(i,i)	(p,p)	(i,p)	(p,i)
(i,i)		×		
(p,p)	×			
(i,p)				×
(p,i)			×	

2.5.1.2 Couplage fréquentiel

Le couplage fréquentiel traduit la distance qui sépare les fréquences propres de chacun des modes. Le mode de plaque m et le mode de cavité n sont bien couplés fréquentiellement si la condition suivante est vérifiée [79] :

$$2|\omega_{an} - \omega_{pm}| < \Delta\omega_{an} + \Delta\omega_{pm} \quad (2.32)$$

où ω_{an} et ω_{pm} sont les pulsations propres, et $\Delta\omega_{an}$ et $\Delta\omega_{pm}$ les largeurs de bande à mi-hauteur des n -ième mode de cavité et m -ième mode de plaque.

Le couplage entre un mode de plaque et un mode de cavité dépend donc à la fois du couplage fréquentiel et du couplage spatial : si les déformées modales de deux modes impliquent un couplage

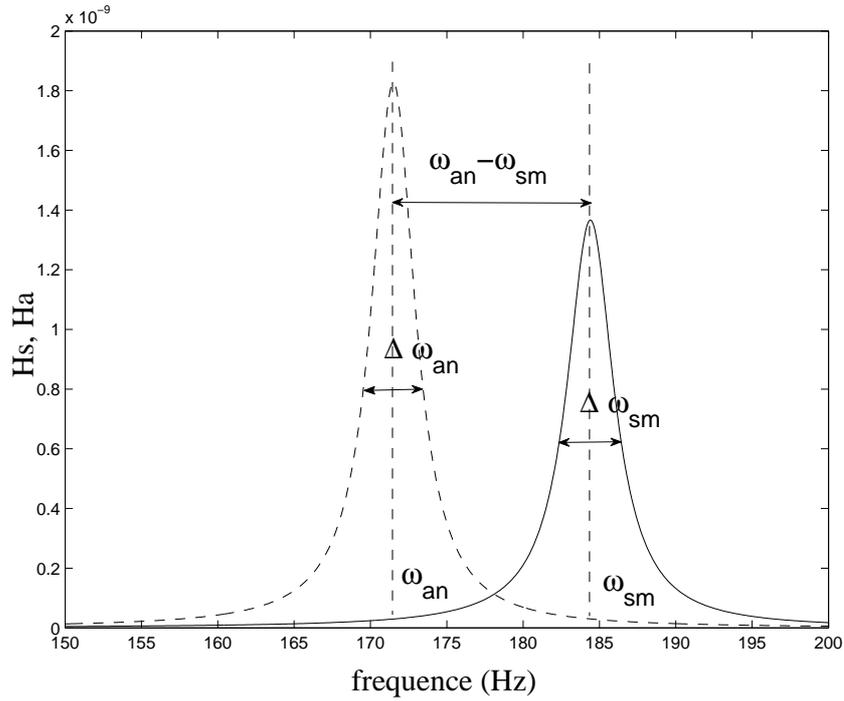


FIGURE 2.2 – Fonctions de transfert des modes de plaque et de cavité découplés – (–) : fonction de transfert du mode (3,1) de la plaque / (---) : fonction de transfert du mode (0,0,1) de la cavité

spatial nul entre ces deux modes, alors il n'y aura pas de couplage entre ces deux modes, mêmes si leurs fréquences de résonances sont très proches : c'est le cas des modes (2,3) et (0,0,1), dont les fréquences propres sont respectivement 176 Hz et 172 Hz et dont le couplage est pourtant nul.

Pan introduit alors un facteur qui permet de rendre compte à la fois du couplage fréquentiel et du couplage spatial :

$$F_{m,n} = \frac{1}{1 + [(\omega_{an} - \omega_{pm})/2]^2 \cdot [M_n^a M_m^s / (\rho_0^2 c_0^2 B_{m,n}^2)]} \quad (2.33)$$

Si $F_{m,n} \simeq 1$, le couplage entre les modes est fort, et si $F_{m,n} \ll 1$, le couplage est faible.

2.5.2 Modes du système couplé

Le flux de puissance entre deux oscillateurs augmente lorsque leurs fréquences de résonance se rapprochent. Ainsi l'échange d'énergie entre deux modes de plaque et de cavité dépend de la différence entre leurs fréquences de résonance, mais également de la densité modale à ces fréquences, car l'interaction entre deux modes dépend également des modes dont la fréquence de résonance est proche de la fréquence d'excitation.

Pan, dans la référence [72], met en évidence que la méthode de couplage modal permet de modéliser de manière satisfaisante le comportement modal du système couplé quel que soit la force de couplage entre les modes de plaque et de cavité pris en compte dans le modèle. Pour un système fortement couplé - c'est-à-dire, lorsque les modes du système complet ne permettent plus d'identifier clairement les modes des sous-systèmes découplés, alors le nombre de modes de plaque

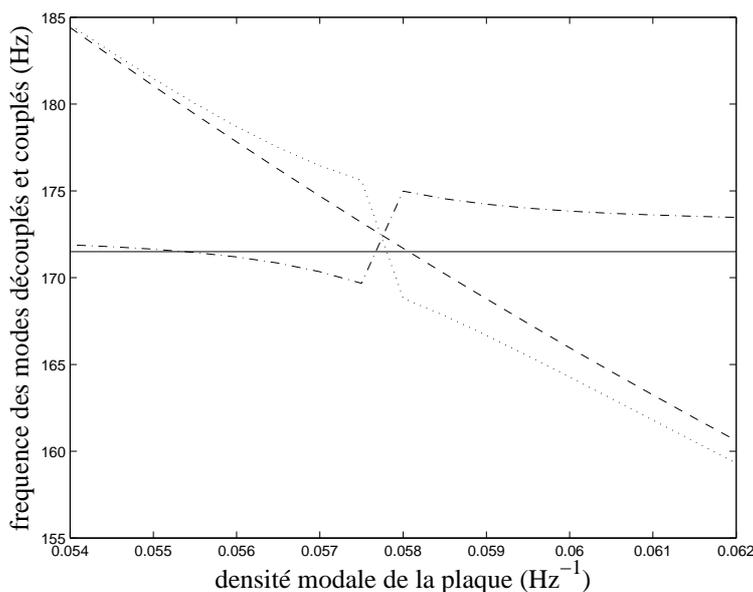


FIGURE 2.3 – Fréquences des modes couplés et découplés de plaque et de cavité en fonction de la densité modale de la plaque – (–) : mode (0,0,1) de la cavité découplée / (–.–) : mode du système couplé dominé par le mode de cavité (0,0,1) / (– –) : mode (3,1) de la plaque découplée / (..) : mode du système couplé dominé par le mode de plaque (3,1)

et de cavité à prendre en compte dans le modèle doit être important. En effet, si un mode d'un des sous-systèmes découplés est couplé avec un mode de l'autre sous-système qui n'est pas pris en compte dans le modèle, alors la méthode de couplage modal ne donne pas un comportement correct du système couplé.

Le couplage fréquentiel d'un mode de plaque avec un mode de cavité implique un échange d'énergie important entre la plaque et la cavité. Ce fort couplage implique également un couplage entre deux modes du système entier : l'un de type *panel-controlled* (dont l'énergie est plutôt localisée dans la plaque) et l'autre de type *cavity-controlled* (dont l'énergie est plutôt localisée dans la cavité). Ce phénomène est illustré par la figure 2.3, qui montre le couplage entre le mode de plaque (3,1) et le mode de cavité (0,0,1). Les modes du système entier correspondant présentent alors un *saut fréquentiel* lorsque le couplage est le plus fort. Le couplage des deux modes couplés peut également être détecté lors de l'étude énergétique de ces modes : lorsque le couplage entre les deux modes est le plus fort, l'énergie, qui est normalement localisé principalement dans la plaque ou dans la cavité, est alors répartie dans les deux sous-systèmes (voir figure 2.4).

2.5.3 Particularité des moyennes fréquences

Dans le domaine des basses fréquences, le recouvrement modal dans la cavité est suffisamment bas pour que le couplage d'un mode de cavité avec un mode de plaque ne soit pas affecté par les autres modes de cavité. En hautes fréquences, par contre, on ne peut plus parler de modes individuels et le couplage plaque-cavité fait intervenir un grand nombre de modes de cavité et de plaque. En moyennes fréquences, la densité modale dans la cavité est telle que le couplage peut faire intervenir un ou plusieurs modes de cavité et un ou plusieurs modes de plaque.

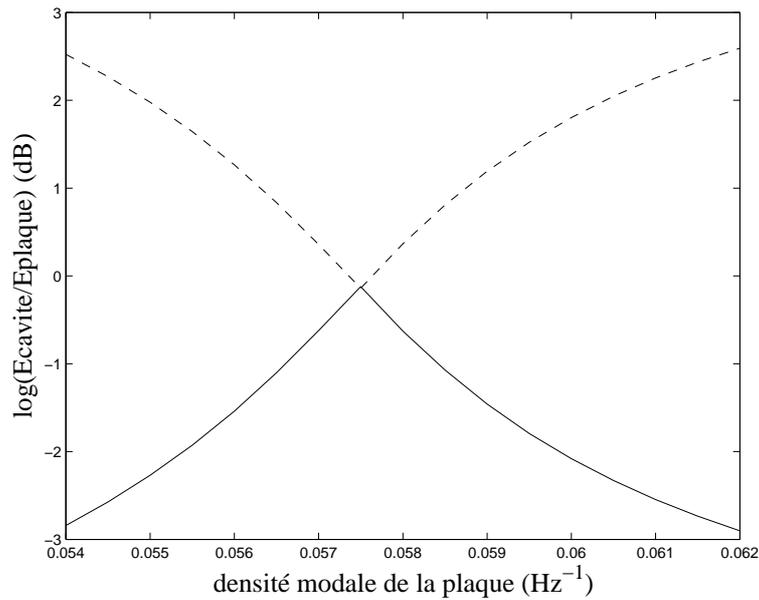


FIGURE 2.4 – Rapport des énergies modales pour deux modes du système entier en fonction de la densité modale de la plaque – (---) : mode du système couplé dominé par le mode de cavité (0,0,1) / (—) : mode du système couplé dominé par le mode de plaque (3,1)

TABLE 2.1 – Mode (8,6) d'une plaque découplée lorsque son épaisseur varie

Épaisseur	5.77 mm	5.78 mm	5.79 mm	5.80 mm	5.81 mm	5.82 mm
Fréquence propre	1525.2	1527.8	1530.5	1533.1	1535.8	1538.4

2.5.3.1 Couplage de type basses fréquences entre un mode de plaque et un mode de cavité

On distingue principalement trois types de couplages modaux dans le domaine des moyennes fréquences. Le premier est similaire à celui qui se produit en basses fréquences : le couplage fait intervenir un mode de plaque et un mode de cavité.

La figure 2.5 présente l'énergie totale dans la cavité pour 6 épaisseurs de plaque. Le fait de varier l'épaisseur de la plaque permet de modifier les fréquences propres de la plaque et ainsi de mieux appréhender le couplage entre les modes de plaque et de cavité.

A la fréquence 1531 Hz, l'énergie dans la cavité présente de fortes variations en fonction de l'épaisseur de la plaque. L'énergie est minimale pour une épaisseur de 5.79 mm, qui correspond alors à un maximum d'échange énergétique entre la plaque et la cavité. La figure 2.6 représente les amplitudes modales en fonction de l'épaisseur de la plaque pour les trois modes de cavité excités à 1531 Hz. Principalement trois modes de cavité sont excités à cette fréquence : le mode (3,2,8) à 1528.5 Hz, le mode (6,6,2) à 1528.8 Hz et le mode (5,7,3) à 1531 Hz. Le mode de plaque excité dans cette bande de fréquence est le mode (8,6), dont la fréquence est présentée dans le tableau 2.1.

Le mode de cavité dominant est le mode (5,7,3). La pression modale correspondante présente

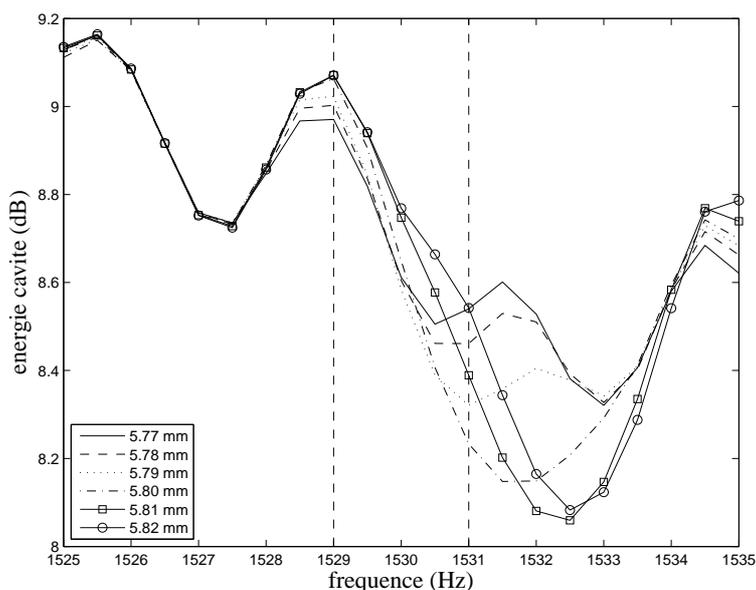


FIGURE 2.5 – *Energie dans la cavite pour une excitation de la cavite en fonction de l'épaisseur de la plaque - exemple de couplage entre un mode de plaque et un mode de cavité*

un minimum lorsque l'épaisseur de la plaque est de 5.79 mm. Ce mode est alors fortement couplé avec le mode de plaque (8,6). Ce couplage modal est visible dans la réponse totale de la cavité en fonction de la fréquence (figure 2.5) : à la fréquence 1531 Hz, les 6 courbes présentent des niveaux d'énergie disparates suivant l'épaisseur de la plaque. Le niveau d'énergie le plus bas correspond bien à l'épaisseur de plaque 5.79 mm, c'est-à-dire au maximum de couplage entre les modes (5,7,3) et (8,6). L'effet du couplage des modes de plaque avec les deux autres modes de cavité présentés sur la figure 2.6 se traduit par un léger décalage entre les amplitudes des modes couplés et découplés.

A la fréquence 1529 Hz, par contre, l'épaisseur de la plaque a peu d'influence sur la réponse énergétique de la cavité. Pourtant, le mode (5,7,3) est fortement couplé avec le mode (8,6) de la plaque, comme le montre la figure 2.6. Mais pour cette fréquence, ce mode de cavité n'est pas dominant par rapport aux deux autres modes excités à 1529 Hz, qui ne présentent pas de couplage avec un mode de plaque. Ainsi, le couplage entre le mode de plaque et le mode de cavité n'apparaît pas dans la réponse énergétique de la cavité.

Cette analyse montre que l'étude du couplage d'un mode de cavité avec un mode de plaque - ici les modes (5,7,3) et (8,6) - ne suffit pas pour étudier le couplage entre la plaque et la cavité. Pan introduit deux mécanismes de couplage. Le premier est le mécanisme de *domination modale*, où un mode dominant détermine le comportement énergétique du système, qui a alors un comportement modal marqué. Ce mécanisme est prédominant en basses fréquences. Cependant la contribution des autres modes ne pouvant pas être négligée, la réponse modale est qualifiée de *faible*. C'est le cas par exemple pour la fréquence 1531 Hz avec une épaisseur de plaque de 5.77 mm. Lorsque l'épaisseur de la plaque augmente, le couplage entre le mode (5,7,3) et le mode (8,6) augmente et l'amplitude du mode (5,7,3) est alors comparable à celle des autres modes de cavité excités. Il s'agit du mécanisme de *superposition modale*, prédominant en hautes fréquences (c'est le cas pour la fréquence 1531 Hz avec une épaisseur de plaque de 5.79 mm).

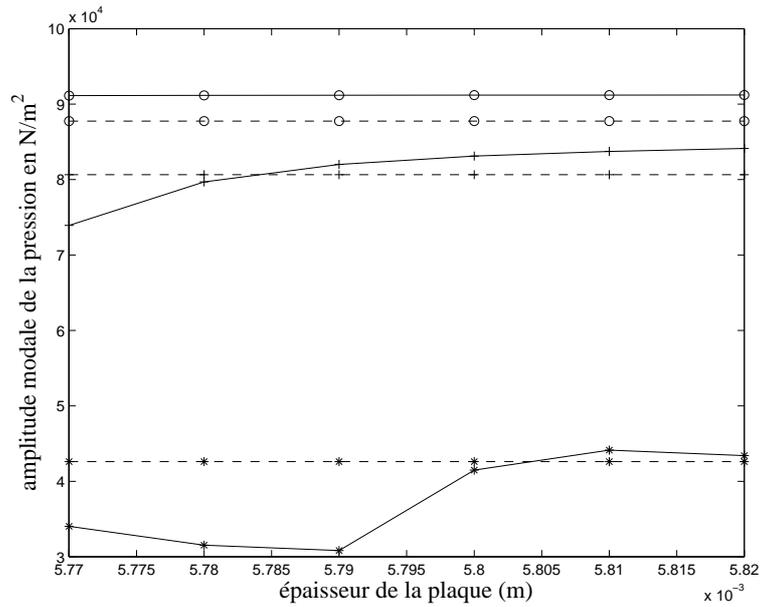


FIGURE 2.6 – Amplitudes quadratiques des pressions modales de la cavité couplée et découplée pour une excitation ponctuelle de la cavité à 1529 Hz : (- - + - -) mode (3,2,8) découplé / (- + -) mode (3,2,8) couplé / (- - o - -) mode (6,6,2) découplé / (- o -) mode (6,6,2) couplé / (- - * - -) mode (5,7,3) découplé / (- * -) mode (5,7,3) couplé

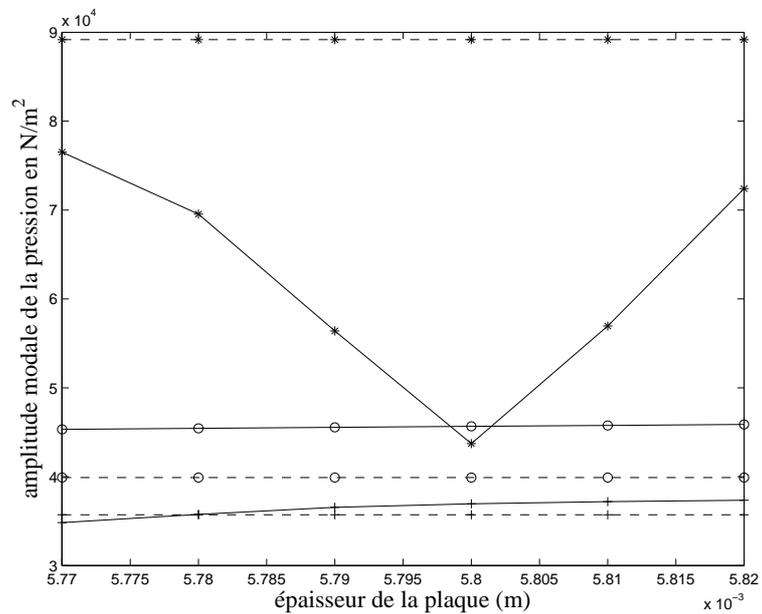


FIGURE 2.7 – Amplitudes quadratiques des pressions modales de la cavité couplée et découplée pour une excitation ponctuelle de la cavité à 1531 Hz : (- - + - -) mode (3,2,8) découplé / (- + -) mode (3,2,8) couplé / (- - o - -) mode (6,6,2) découplé / (- o -) mode (6,6,2) couplé / (- - * - -) mode (5,7,3) découplé / (- * -) mode (5,7,3) couplé

TABLE 2.2 – Modes de cavité dominants entre 1010 Hz et 1020 Hz

Mode	(3,3,4)	(3,5,2)	(0,5,4)	(5,1,1)
Fréquence propre (Hz)	820.4	821.4	823.2	824.8

TABLE 2.3 – Mode de plaque (6,6), dominant entre 1010 Hz et 1020 Hz

Épaisseur (mm)	5.72	5.73	5.74	5.75	5.76	5.77
Fréquence propre (Hz)	1011.0	1012.8	1014.5	1016.3	1018.1	1019.8

2.5.3.2 Couplage de type moyennes fréquences entre un mode de plaque et plusieurs modes de cavité

Le deuxième mécanisme de couplage fait intervenir un mode de plaque et plusieurs modes de cavité. Dans ce cas, c'est le mécanisme de superposition modale qui régit le comportement de la cavité. L'énergie de la cavité présente un minimum lorsque le couplage - l'échange énergétique - entre la plaque et la cavité est élevé. Ce n'est plus le fait d'un seul mode mais de plusieurs modes, tous fortement couplés avec un mode de plaque. La cavité n'a alors pas de comportement modal marqué (mécanisme de superposition modale).

La figure 2.11 montre les pressions modales pour les quatre modes de cavité dominants entre 1010 Hz et 1020 Hz, lorsque la cavité est excitée à la fréquence 1014 Hz. Les modes (3,3,4) et (3,5,2) présentent un minimum à l'épaisseur 5.75 mm, correspondant à un fort couplage avec le mode de plaque (6,6). Le mode (0,5,4), qui n'est pas couplé spatialement avec le mode (6,6), est inchangé quand l'épaisseur de plaque varie. Un quatrième mode, le mode (5,1,1), couplé spatialement avec le mode de plaque, présente un maximum à l'épaisseur 5.75 mm. Le mode de plaque, excité par son couplage avec les modes (3,3,4) et (3,5,2), excite alors le mode (0,5,4) qui présente un maximum d'énergie.

Lorsque la plaque est excitée (figures 2.8 et 2.9), les trois modes de cavité présentent un maximum pour l'épaisseur de plaque 5.76 mm — ici, le couplage est établi entre le mode de plaque (6,6) et les modes de cavité (3,3,4), (3,5,2) et (0,5,2).

2.5.3.3 Couplage de type hautes fréquences entre plusieurs modes de plaque et plusieurs modes de cavité

Enfin, pour le troisième mécanisme de couplage, plusieurs modes de plaque et plusieurs modes de cavité sont couplés sur une même bande de fréquence. La figure 2.12 représente l'énergie de la cavité couplée lorsque la cavité est excitée entre 815 et 835 Hz. Les modes de cavité dominants et les modes de plaque dominants sont donnés dans les tableaux 2.4 et 2.5.

Les figures 2.13 et 2.15 montrent les pressions modales des modes de cavité excités entre 810 et 830 Hz. A 810 Hz (figure 2.13), les quatre amplitudes modales présentent des minimums pour trois épaisseurs de plaque différentes. Les modes de plaque présentés dans le tableau 2.5 sont tous trois couplés avec les modes de cavité (figure 2.14). Le couplage entre la plaque et la cavité est alors effectué à travers plusieurs modes de plaque et de cavité. Ce type de couplage est caractéristique des hautes fréquences.

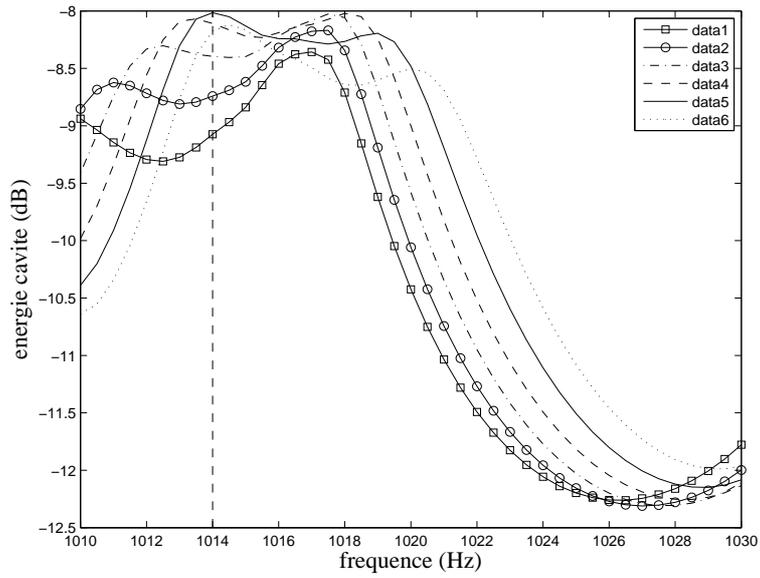


FIGURE 2.8 – *Energie dans la cavite pour une excitation de la plaque en fonction de l'épaisseur de la plaque - exemple de couplage entre un mode de plaque et plusieurs modes de cavité*

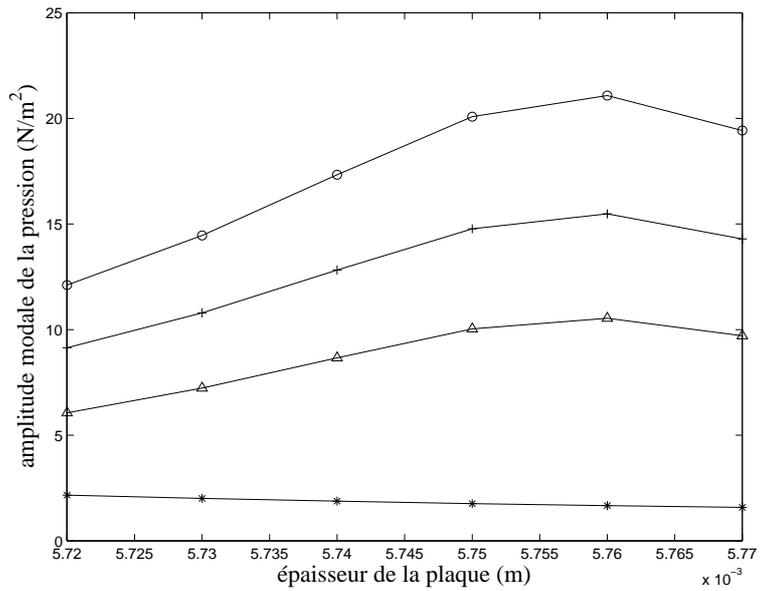


FIGURE 2.9 – *Amplitudes quadratiques des pressions modales de la cavité couplée pour une excitation de la plaque à 1014 Hz Hz : (- + -) mode (3,3,4) couplé / (- o -) mode (3,5,2) couplé / (- * -) mode (0,5,4) couplé / (- Δ -) mode (5,1,1) couplé*

TABLE 2.4 – *Modes de cavité dominants entre 810 Hz et 830 Hz*

Mode	(3,3,2)	(0,3,4)	(0,5,2)	(4,1,1)
Fréquence propre (Hz)	820.4	821.4	823.2	824.8

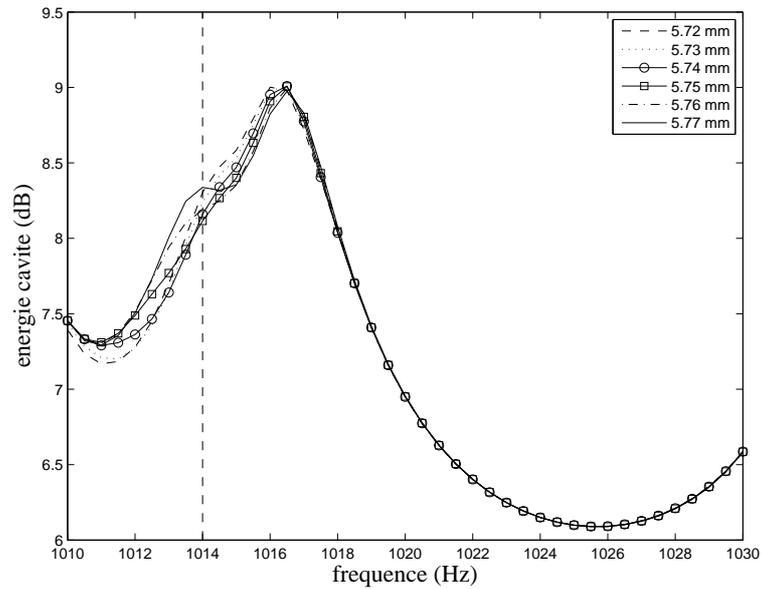


FIGURE 2.10 – *Energie dans la cavite pour une excitation de la cavite en fonction de l'épaisseur de la plaque - exemple de couplage entre un mode de plaque et plusieurs modes de cavité*

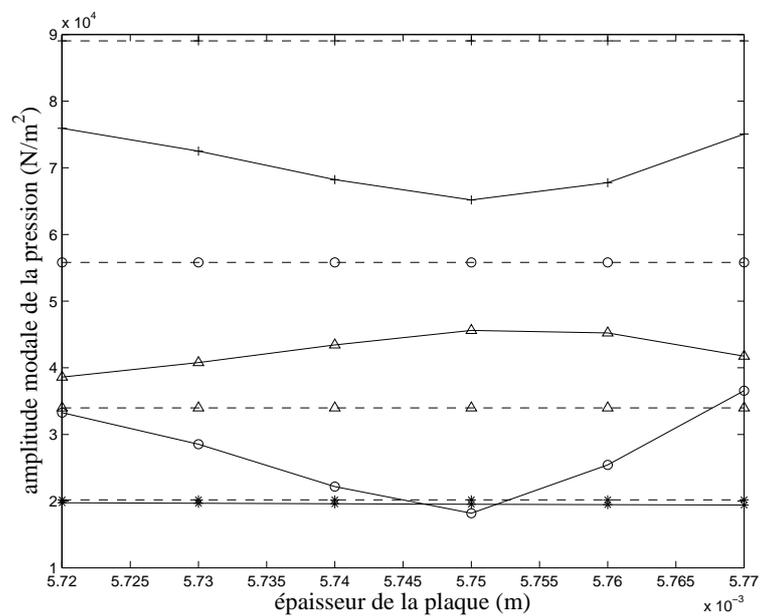
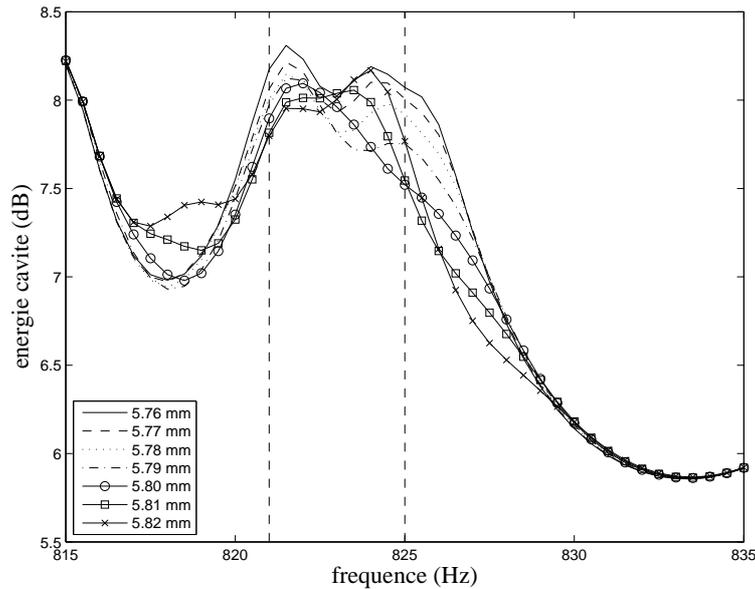


FIGURE 2.11 – *Amplitudes quadratiques des pressions modales de la cavité couplée pour une excitation ponctuelle de la cavité à 1014 Hz Hz : (- + -) mode (3,3,4) couplé / (- o -) mode (3,5,2) couplé / (- * -) mode (0,5,4) couplé / (- Δ -) mode (5,1,1) couplé*

TABLE 2.5 – Modes de plaque dominants (Hz) entre 810 Hz et 830 Hz

Épaisseur	5.76 mm	5.78 mm	5.80 mm	5.82 mm
mode (6,4)	812.8	815.6	818.4	821.3
mode (3,8)	819.0	821.9	824.7	827.6
mode (5,6)	821.3	822.7	825.6	828.4

FIGURE 2.12 – *Energie dans la cavité pour une excitation de la cavité en fonction de l'épaisseur de la plaque - exemple de couplage entre plusieurs modes de plaque et plusieurs modes de cavité*

Pour certaines épaisseurs de plaque, le comportement de la cavité n'a pas de caractéristiques modales et est déterminé par la superposition de plusieurs modes (voir par exemple les pressions modales pour une fréquence de 821 Hz et une épaisseur de plaque de 5.82 m). Pour d'autres, un mode détermine le comportement de la cavité. Ce passage d'un mécanisme de superposition modale à un mécanisme de domination modale est caractéristique des moyennes fréquences.

La réponse énergétique de la cavité est alors extrêmement sensible à l'épaisseur de la plaque et à la fréquence : une variation de ses paramètres peut modifier la participation relative des différents modes de plaque et de cavité qui interviennent dans le mécanisme de couplage.

2.6 Modification des conditions aux limites de la plaque

Dans le paragraphe précédent, la plaque est considérée comme simplement appuyée, afin de simplifier l'analyse modale : en effet, les modes d'une plaque simplement appuyée peuvent s'exprimer de manière analytique.

Ici, les conditions aux limites de la plaque sont modifiées : il peut être en effet intéressant d'étudier l'influence des conditions aux limites de la plaque sur la modélisation SEA-like du système couplé. En effet, la méthode SEA-like, contrairement à la méthode SEA, est une méthode déter-

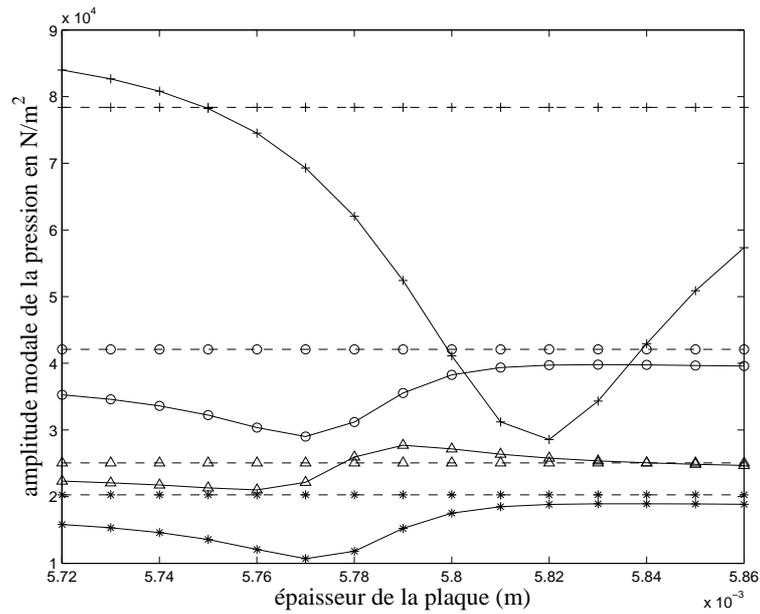


FIGURE 2.13 – Amplitudes quadratiques des pressions modales de la cavité couplée et découplée pour une excitation ponctuelle de la cavité à 821 Hz : (---+---) mode (3,3,2) découplé / (-+-) mode (3,3,2) couplé / (---o---) mode (0,3,4) découplé / (-o-) mode (0,3,4) couplé / (---*---) mode (0,5,2) découplé / (-*-) mode (0,5,2) couplé / (---Δ---) mode (4,1,1) découplé / (-Δ-) mode (4,1,1) couplé

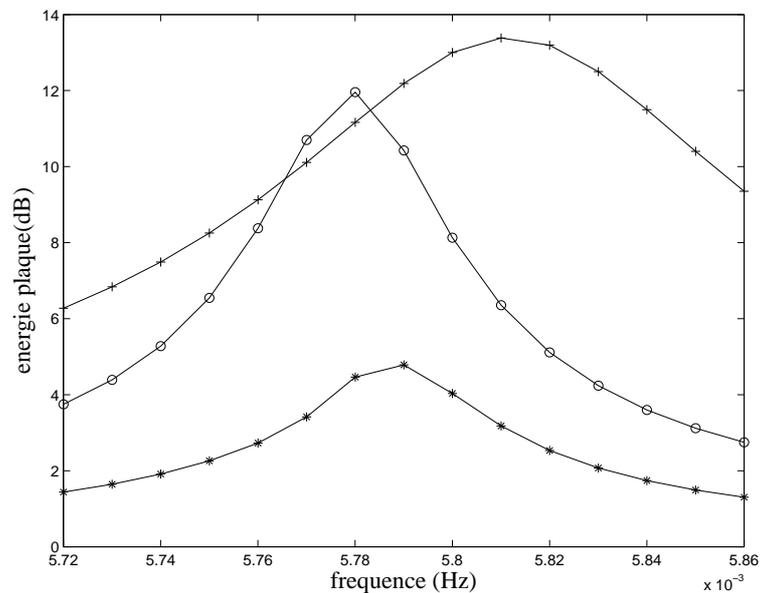


FIGURE 2.14 – Amplitudes quadratiques des pressions modales de la plaque couplée et découplée pour une excitation ponctuelle de la cavité à 821 Hz : (-+-) mode (6,4) découplé / (-o-) mode (3,8) couplé / (-*-) mode (5,6) couplé

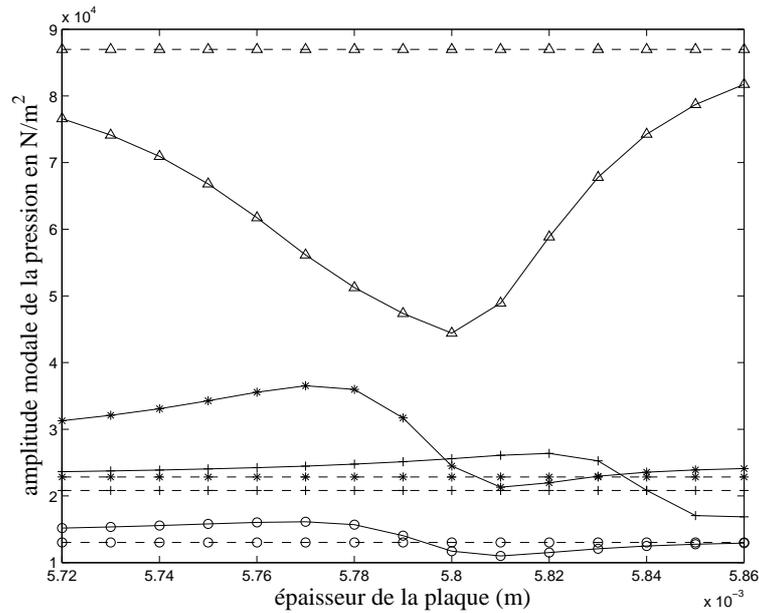


FIGURE 2.15 – Amplitudes quadratiques des pressions modales de la cavité couplée et découplée pour une excitation ponctuelle de la cavité à 825 Hz : (---+---) mode (3,3,2) découplé / (-+-) mode (3,3,2) couplé / (---o---) mode (0,3,4) découplé / (-o-) mode (0,3,4) couplé / (---*---) mode (0,5,2) découplé / (-*-) mode (0,5,2) couplé / (---Δ---) mode (4,1,1) découplé / (-Δ-) mode (4,1,1) couplé

ministe et prend en compte les conditions aux limites des systèmes. Dans le domaine des basses et des moyennes fréquences, la modélisation SEA-like doit dépendre fortement des conditions aux limites sur la plaque, et ce malgré la description énergétique du système couplé. Par contre, en hautes fréquences, la modélisation SEA-like sera très semblable à la modélisation SEA, et donc peu influencée par les modifications de conditions aux limites.

2.6.1 Fonctions hiérarchiques

Une méthode de couplage modal est utilisée pour modéliser les différentes conditions aux limites de la plaque couplée avec la cavité : cela permet de conserver les expressions analytiques utilisées pour décrire le comportement dynamique de la cavité. De plus, une telle modélisation du système couplé est plus efficace qu'une modélisation par éléments finis en termes de temps de calcul. Il est alors nécessaire de modéliser le comportement modal de la plaque pour différentes conditions aux limites. Pour cela, une méthode basée sur des fonctions hiérarchiques est utilisée.

Pour améliorer la précision d'une modélisation par éléments finis, plusieurs méthodes peuvent être utilisées. La plus courante consiste à raffiner la taille du maillage : il s'agit de la *version h* de la méthode par éléments finis. Cependant, une autre méthode peut être utilisée, que l'on appelle *version p* [67]. La description d'un élément est basée sur la méthode de Rayleigh-Ritz : le comportement dynamique d'un élément est projeté sur des fonctions admissibles locales. Dans la version h de la méthode par éléments finis, le nombre de fonctions de forme est fixe. Dans la version p en revanche, le maillage du système est fixe et c'est le nombre de fonctions de formes qui permet d'améliorer la pertinence de la modélisation. Les fonctions de formes utilisées sont alors les suivantes : les fonctions admissibles traditionnellement utilisées dans la version h, qui décrivent les

degrés de liberté externes de l'élément, ainsi que des fonctions *hiérarchiques*, qui ont de l'influence non pas sur les degrés de liberté externes mais sur le comportement interne de l'élément. Cette méthode permet ainsi de garder un maillage constant, et le raffinement du modèle s'effectue par imbrication de matrices dans le modèle existant et ne nécessite pas de modifications importantes de la structure du modèle. Par ailleurs, si les fonctions hiérarchiques sont correctement choisies, la convergence de la version p de la méthode par éléments finis est alors plus rapide que celle de la version h.

La méthode par éléments finis hiérarchiques (HFEM : Hierarchical Finite Element Method) a été étudiée par de nombreux auteurs. La modélisation de la plaque s'appuie principalement sur les références [1, 35–37]. Comme pour la méthode de Rayleigh-Ritz, les fonctions de forme utilisées pour décrire le comportement de l'élément sont déterminées de manière à se rapprocher le plus possible du comportement dynamique de l'élément étudié. Deux types de fonctions de forme sont principalement utilisées dans le cas d'un élément plaque rectangulaire : des fonctions polynomiales, dérivées des polynômes de Legendre [1, 36] et des fonctions trigonométriques [35].

Dans le cas d'une méthode par éléments finis classique, l'utilisation de fonctions de formes trigonométriques et polygonales améliore la convergence par rapport à des fonctions de formes uniquement polygonales (voir Chakrabarti [6]). Les fonctions de formes trigonométriques n'interviennent pas sur les degrés de liberté externes des éléments. Ils ont seulement pour fonction d'améliorer la modélisation de l'intérieur de l'élément. En revanche, l'utilisation de fonctions trigonométriques uniquement empêche la convergence du modèle par éléments finis.

Dans la référence [1], Bardell modélise une plaque rectangulaire avec une HFEM basée sur des fonctions polynomiales, dérivées des polynômes de Legendre pour différentes conditions aux limites. Houmat [36] effectue le même calcul, puis compare les résultats avec une modélisation basée, cette fois, sur des fonctions polynomiales pour les degrés de libertés externes et trigonométriques pour la description interne de l'élément [35]. La modélisation basée sur des fonctions trigonométriques converge plus rapidement que la modélisation basée sur des fonctions polygonales, confirmant en cela les résultats de Chakrabarti.

Dans le paragraphe suivant, les modes d'une plaque rectangulaire sont calculés pour trois conditions aux limites : simplement appuyé, encasté et semi-encasté (encasté sur deux côtés opposés et simplement appuyé sur les deux autres côtés). Les deux méthodes hiérarchiques présentées précédemment sont utilisées. Dans le paragraphe 2.6.3, les deux modélisations sont comparées à une solution analytique pour le cas de la plaque simplement appuyée et à un modèle par éléments finis dans les deux autres cas de conditions aux limites.

2.6.2 Mise en oeuvre

2.6.2.1 Méthode hiérarchique basée sur les fonctions polynomiales

La mise en oeuvre de la méthode est inspirée des travaux de Bardell [1] repris par Houmat [36]. La plaque rectangulaire est considérée comme un seul élément, afin de simplifier les calculs en évitant d'avoir à raccorder les éléments entre eux. Les notations de la première partie de ce chapitre sont reprises.

Les fonctions de forme utilisées pour écrire les formulations de Rayleigh-Ritz, données par Bardell, sont les suivantes : les 4 premières fonctions de forme considérées sont les fonctions traditionnellement utilisées dans la méthode par éléments finis classique. f_1 et f_3 décrivent les déplacements au bord de la plaque, et f_2 et f_4 les vitesses :

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 \quad (2.34)$$

$$f_2(\xi) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \quad (2.35)$$

$$f_3(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 \quad (2.36)$$

$$f_4(\xi) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 \quad (2.37)$$

où ξ est une variable adimensionnée variant entre 1 et -1 et décrivant la coordonnée x : $\xi = 2x/a - 1$. Les mêmes fonctions peuvent être écrites pour $\eta = 2y/b - 1$.

Les fonctions hiérarchiques sont dérivées des polynômes de Legendre et s'expriment de la façon suivante :

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{r/2} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1} \quad (2.38)$$

pour $r > 4$, où r désigne l'indice de la fonction hiérarchique.

Le déplacement en flexion de la plaque s'écrit alors :

$$w(\xi, \eta) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N q_{r,s} f_r(\xi) f_s(\eta) \quad (2.39)$$

Les énergies cinétique et potentielle de la plaque en fonction des variables adimensionnées sont celles de la théorie de Kirchhoff :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_s h_s \frac{ab}{4} \iint_{-1}^1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\xi d\eta \quad (2.40)$$

$$E_p = \frac{1}{2} 4 Dab \iint_{-1}^1 \left[\frac{1}{a^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 + \frac{1}{b^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + \frac{2\nu_s}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)^2 + \frac{2(1 - \nu_s)}{a^2 b^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta \quad (2.41)$$

La substitution de w par son expression en fonction des fonctions de forme dans l'équation précédente permet d'exprimer l'énergie cinétique sous une forme matricielle :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_s h_s \frac{ab}{4} \{ \dot{q}_{r,s} \} [M] \{ \dot{q}_{r,s} \} \quad (2.42)$$

où $[M]$ est une matrice de taille N^2 et a pour coefficients :

$$M(r, j; s, k) = I_{r,j}^{0,0} I_{s,k}^{0,0} \quad (2.43)$$

De même, l'énergie potentielle s'exprime :

$$E_p = \frac{1}{2} 4 Dab \{ q_{r,s} \} K \{ q_{r,s} \} \quad (2.44)$$

où K est une matrice de taille N^2 et a pour coefficients :

$$K = \frac{1}{a^4} I_{r,j}^{2,2} I_{s,k}^{0,0} + \frac{1}{b^4} I_{r,j}^{0,0} I_{s,k}^{2,2} + \frac{2\nu_s}{a^2 b^2} \left(\frac{1}{2} I_{r,j}^{2,0} I_{s,k}^{0,2} + \frac{1}{2} I_{r,j}^{0,2} I_{s,k}^{2,0} \right) + \frac{2(1-\nu_s)}{a^2 b^2} I_{r,j}^{1,1} I_{s,k}^{1,1} \quad (2.45)$$

$I_{r,j}^{\alpha,\beta}$ contient les fonctions de forme f_r :

$$I_{r,j}^{\alpha,\beta} = \int_{-1}^1 \frac{d^\alpha f(\xi)}{d\xi^\alpha} \frac{d^\beta f(\xi)}{d\xi^\beta} d\xi \quad (2.46)$$

Les équations de Lagrange appliquées à E_c et E_p permettent alors d'obtenir le système matriciel reliant la matrice de raideur K et la matrice de masse M :

$$[K - \Omega^2 M] \{q_{r,s}\} = 0 \quad (2.47)$$

où $\Omega^2 = \rho_s h_s \omega^2 / D$ contient les pulsations propres du système et $\{q_{r,s}\}$, les déformées modales de la plaque.

Avant de résoudre le système donné par l'équation (2.47), les conditions aux limites de la plaque sont intégrées dans l'équation matricielle en enlevant les lignes et les colonnes des matrices $[M]$ et $[K]$ correspondant aux degrés de liberté annulés. Cette méthode permet de modifier de manière directe les conditions aux limites de la plaque et convient donc à notre étude.

2.6.2.2 Méthode hiérarchique basée sur les fonctions trigonométriques

Cette méthode revient à modifier les fonctions de forme utilisées dans les équations (2.43) et (2.45). Six fonctions correspondent aux degrés de liberté extérieurs, qui décrivent les déplacements, vitesses et moments aux bords de la plaque [35] :

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{15}{16}x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{3}{16}x^5 \quad (2.48)$$

$$f_2(\xi) = \frac{5}{32} - \frac{7}{32}x - \frac{3}{16}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{32}x^5 \quad (2.49)$$

$$f_3(\xi) = \frac{1}{64} - \frac{1}{64}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{64}x^5 \quad (2.50)$$

$$f_4(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{15}{16}x - \frac{5}{8}x^3 + \frac{3}{16}x^5 \quad (2.51)$$

$$f_5(\xi) = -\frac{5}{32} - \frac{7}{32}x + \frac{3}{16}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{32}x^5 \quad (2.52)$$

$$f_6(\xi) = \frac{1}{64} + \frac{1}{64}x - \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{32}x^3 + \frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{64}x^5 \quad (2.53)$$

Les fonctions hiérarchiques trigonométriques sont données par :

$$f_{r+6}(\xi) = r\pi[-\xi + (6 + 4(-1)^r)\xi^3 - (8 + 7(-1)^r)\xi^4 + 3(1 + (-1)^r)\xi^5] + \sin(r\pi\xi) \quad (2.54)$$

La dérivée seconde des fonctions hiérarchiques trigonométriques est nulle aux bords, contrairement aux fonctions polynomiales. C'est pourquoi il est nécessaire d'introduire les fonctions f_3 et f_6 dans les degrés de libertés extérieurs, qui permettent de décrire les moments aux bords des plaques.

Les modes de plaque ainsi calculés peuvent alors être introduits dans les équations couplées du système plaque-cavité données par (2.15) et (2.24).

TABLE 2.6 – 16 premiers modes d'une plaque simplement appuyée calculés avec deux méthodes hiérarchiques développées sur 6 polynômes de Legendre ou 4 fonctions trigonométriques

n° de mode	m	n	calcul analytique	polynômes de Legendre	fonctions trigonométriques
mode 1	1	1	29.037	29.037	29.037
mode 2	1	2	60.653	60.653	60.653
mode 3	2	1	84.533	84.533	84.533
mode 4	1	3	113.346	113.367	113.346
mode 5	2	2	116.149	116.149	116.149
mode 6	2	3	168.842	168.858	168.842
mode 7	3	1	177.026	177.065	177.026
mode 8	1	4	187.116	187.328	187.116
mode 9	3	2	208.642	208.677	208.642
mode 10	2	4	242.612	242.794	242.612
mode 11	3	3	261.335	261.377	261.335
mode 12	1	5	281.964	302.875	293.477
mode 13	4	1	306.517	306.905	306.517
mode 14	3	4	335.106	335.283	335.106
mode 15	2	5	337.460	356.942	348.144
mode 16	4	2	338.133	338.498	338.133

2.6.3 Pertinence de la méthode

Comme il a été dit dans le paragraphe précédent, la pertinence de la HFEM dépend des fonctions hiérarchiques utilisées pour décrire la plaque. Ici, on compare les valeurs propres obtenues pour différentes modélisations d'une plaque non couplée : une modélisation analytique ou par éléments finis, qui servira de modélisation de référence, et deux modélisations par méthode hiérarchique, basées d'une part sur des fonctions issues des polynômes de Legendre (données en paragraphe 2.6.2.1) et d'autre part sur des fonctions trigonométriques (données en paragraphe 2.6.2.2).

En premier lieu, on considère les modes d'une plaque simplement appuyée, pour lesquels il est possible d'obtenir un résultat de référence analytique. Le tableau 2.6 récapitule les fréquences propres obtenues par le calcul de référence et les méthodes hiérarchiques basées sur 6 polynômes de Legendre et 4 fonctions trigonométriques, soit au total 10 fonctions de forme pour les deux méthodes hiérarchiques. La première divergence significative entre les modèles hiérarchiques et le modèle de référence intervient pour le mode de plaque (1,5). En effet, les 6 fonctions hiérarchiques polynomiales ou les 4 fonctions hiérarchiques trigonométriques ne permettent pas d'approcher un mode dont un indice est égal ou supérieur à 5. On observe alors une erreur de 4.1 % sur la fréquence propre calculée par fonctions hiérarchiques trigonométriques et une erreur de 7.4 % sur la fréquence propre calculée par polynômes de Legendre. La modélisation par fonctions trigonométriques, bien qu'erronée, donne une meilleure approximation que la modélisation par fonctions polynomiales lorsque le même nombre de fonctions de forme est utilisé.

La figure 2.16 montre deux déformées modales de la plaque. Le graphe représentant la déformée du mode (1,5) montre clairement que 4 fonctions trigonométriques ne sont pas suffisantes pour modéliser le comportement de la plaque au-delà de 260 Hz. Le nombre de fonctions hiérarchiques est donc augmenté dans les deux méthodes.

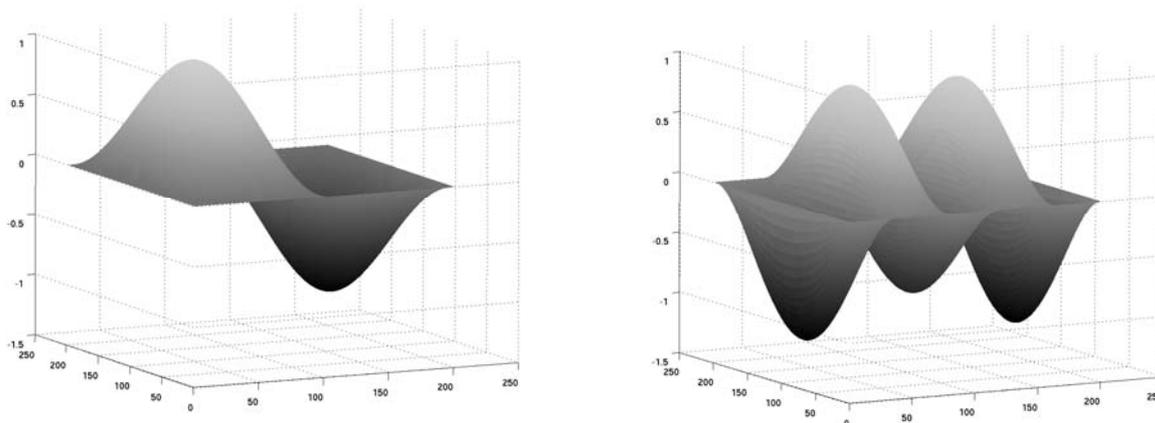


FIGURE 2.16 – Mode $(1,2)$ et $(1,5)$ d'une plaque simplement appuyée calculé avec une méthode hiérarchique développée sur 4 fonctions trigonométriques

Le tableau 2.7 donne les fréquences propres d'une plaque simplement appuyée pour les deux modèles hiérarchiques, calculées avec 21 fonctions polynomiales ou 10 fonctions trigonométriques. On a vu précédemment que, lorsque le même nombre de fonctions de forme est utilisé dans les deux modèles hiérarchiques, le modèle basé sur les fonctions trigonométriques donne des résultats plus proches du modèle de référence que le modèle basé sur les fonctions polynomiales. Cependant, au delà de 10 fonctions hiérarchiques trigonométriques, la méthode hiérarchique devient mal conditionnée et le calcul matriciel ne peut plus être résolu. On ne rencontre pas ce problème dans le cas des fonctions polynomiales et beaucoup plus de fonctions hiérarchiques polynomiales peuvent être utilisées dans le modèle. Ici, 21 polynômes de Legendre sont utilisés. Si l'on observe le mode $(1,11)$ de la plaque, les fonctions hiérarchiques trigonométriques ne permettent pas de le modéliser correctement : on trouve une erreur de 12.4 % sur la fréquence propre, et la déformée modale est mal approchée (voir figure 2.17). Les mêmes remarques peuvent être faites sur les modes $(2,11)$ et $(3,11)$ (voir figure 2.18). Par contre, les 21 fonctions polynomiales donnent une modélisation quasiment identique au modèle analytique.

La plaque est maintenant considérée comme encadrée. Le modèle de référence considéré est un modèle par éléments finis, modélisé sur le logiciel Comsol. L'élément de plaque utilisé est un élément de plaque de Mindlin, où le cisaillement est pris en compte. En basses fréquences, la plaque étant mince, le cisaillement peut être négligé, par contre, en hautes fréquences, l'influence du cisaillement sur le comportement dynamique de la plaque doit être pris en compte. Le modèle par éléments finis ne peut donc pas servir de référence en hautes fréquences. On effectuera alors une étude de convergence sur les fonctions hiérarchiques pour valider les calculs.

Le tableau 2.8 donne les 9 premiers modes d'une plaque encadrée calculés par un modèle éléments finis et les deux modèles hiérarchiques présentés. Les trois modélisations concordent dans le domaine des basses fréquences. Les deux modèles hiérarchiques sont ensuite comparés en hautes fréquences, autour de 2000 Hz (voir tableau 2.9). Deux modèles basés sur des polynômes de Legendre sont développées sur respectivement 21 et 31 fonctions hiérarchiques, tandis qu'un modèle est développé sur 10 fonctions trigonométriques, c'est-à-dire le nombre maximum qui peut être utilisé sans problème de conditionnement. Pour la plupart des modes autour de cette fréquence, la modélisation hiérarchique avec 21 ou 31 polynômes de Legendre donne les mêmes fréquences propres - les modes développés sur 21 polynômes de Legendre et dont un des indices est supérieur ou égal à 13 sont mal définis. La modélisation basée sur 10 fonctions trigonométriques donne une erreur inférieure à 2 % pour les modes dont les indices sont inférieurs à 11. Les modes d'indices su-

TABLE 2.7 – Premières différences significatives sur les modes d'une plaque simplement appuyée calculés avec une méthode hiérarchique développée sur 21 polynômes de Legendre 10 fonctions trigonométriques

n° de mode	m	n	calcul analytique	polynômes de Legendre	fonctions trigonométriques
mode 62	8	3	1278.760	1278.760	1278.760
mode 63	7	6	1285.823	1285.823	1285.823
mode 64	1	11	1293.671	1293.679	1455.144
mode 65	5	9	1316.094	1316.094	1316.094
mode 66	6	8	1340.422	1340.422	1340.422
mode 67	2	11	1349.167	1349.175	1508.848
mode 68	4	10	1349.840	1349.841	1349.840
mode 69	8	4	1352.531	1352.531	1352.531
mode 70	7	7	1422.825	1422.825	1422.825
mode 71	3	11	1441.660	1441.668	1598.599

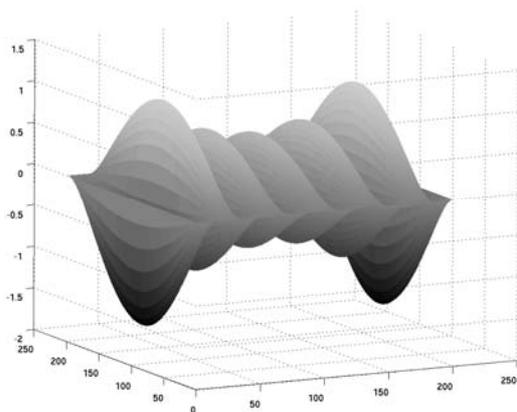


FIGURE 2.17 – Mode (1,11) d'une plaque simplement appuyée calculé avec une méthode hiérarchique développée sur 10 fonctions trigonométriques - fréquence propre analytique : 1293 Hz / fréquence propre calculée par méthode hiérarchique : 1455 Hz

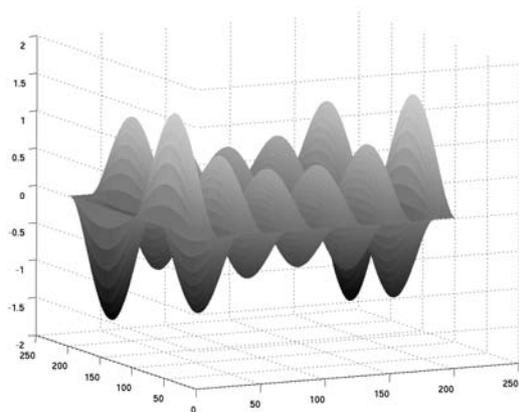


FIGURE 2.18 – Mode (2,11) d'une plaque simplement appuyée calculé avec une méthode hiérarchique développée sur 10 fonctions trigonométriques - fréquence propre analytique : 1349 Hz / fréquence propre calculée par méthode hiérarchique : 1508 Hz

TABLE 2.8 – Premiers modes d'une plaque encastrée calculés avec un modèle éléments-finis et deux modèles hiérarchiques développés sur 21 polynômes de Legendre ou 10 fonctions trigonométriques

n° de mode	m	n	calcul élément-fini	polynômes de Legendre	fonctions trigonométriques
mode 1	1	1	53.975	53.996	53.996
mode 2	1	2	90.967	91.015	91.015
mode 3	2	1	126.664	126.753	126.753
mode 4	1	3	151.759	151.870	151.870
mode 5	2	2	160.767	160.903	160.903
mode 6	2	3	218.322	218.549	218.549
mode 7	1	4	234.741	234.972	234.972
mode 8	3	1	237.207	237.464	237.464
mode 9	3	2	270.096	270.427	270.427

périeurs à 11 sont décalés car les fonctions trigonométriques modélisent mal ces modes : la fonction trigonométrique de plus haut degré possède 10 minima et maxima locaux. La modélisation autour de 2000 Hz d'une plaque encastrée sera alors effectuée avec 21 polynômes de Legendre, en plus des quatre fonctions de forme utilisées en éléments-finis et décrivant les déplacements et vitesses extérieurs de l'élément : les fréquences obtenues avec 21 polynômes de Legendre sont quasiment identiques à celles obtenues avec 31 polynômes de Legendre.

La même étude est effectuée avec une plaque encastrée en $x = 0$ et $x = a$ et simplement appuyée en $y = 0$ et $y = b$. Les premiers modes sont donnés dans le tableau 2.10. La modélisation de la plaque autour de 2000 Hz avec 21 polynômes de Legendre en donne une modélisation pertinente. De même que pour la plaque simplement appuyée et encastrée, c'est cette dernière modélisation qui sera utilisée.

2.7 Conclusion

2.7.1 Bilan

Dans ce chapitre, quelques aspects du couplage modal entre une plaque et une cavité ont été présentés. Ce couplage peut être étudié avec la projection des équations modales sur les modes de la plaque et de la cavité découplées. Cela permet notamment d'observer directement les modifications apportées par le couplage sur le comportement modal des deux sous-systèmes.

Le couplage entre la plaque et la cavité montre alors des caractéristiques particulières dans le domaine des moyennes fréquences : en basses fréquences, le comportement modal de la cavité couplée est très marqué. Ce comportement est régi par ce que Pan qualifie de mécanisme de domination modale [80] ; en hautes fréquences - comme il a été souligné dans le chapitre précédent - le recouvrement modal est important dans la cavité couplée, dont le comportement est alors régi par un mécanisme de superposition modale. Par contre, dans le domaine des moyennes fréquences, les deux mécanismes coexistent et la domination d'un mécanisme par rapport à l'autre est déterminée par le couplage de la cavité avec la plaque. Le mécanisme de domination modale est par contre plus faible qu'en basses fréquences car la contribution des modes non-dominants à la réponse de la cavité n'est pas négligeable. Le comportement modal du système couplé est donc moins marqué

TABLE 2.9 – *modes autour de 2000 Hz d'une plaque encastree calculés avec une méthode hiérarchique développée sur 10 fonctions trigonométriques*

n° de mode	m	n	21 polynômes de Legendre	31 polynômes de Legendre	10 fonctions trigonométriques
mode 84	9	4	1839.687	1839.686	1842.691
mode 85	8	7	1861.484	1861.484	1861.990
mode 86	6	10	1866.922	1866.917	1868.676
mode 87	5	11	1881.296	1881.270	2184.253
mode 88	7	9	1914.326	1914.325	1915.268
mode 89	9	5	1935.798	1935.794	1938.795
mode 90	1	13	1945.367	1940.008	1929.642
mode 91	4	12	1959.252	1957.377	2379.774
mode 92	2	13	2003.227	1998.019	
mode 93	8	8	2023.205	2023.204	2023.693
mode 94	10	1	2050.087	2050.070	2054.737
mode 95	9	6	2053.479	2053.479	2056.264
mode 96	10	2	2081.898	2081.882	2086.456
mode 97	6	11	2095.445	2094.751	2374.635
mode 98	3	13	2099.724	2095.422	
mode 99	7	10	2120.304	2120.293	2122.204
mode 100	5	12	2133.887	2132.172	2528.831
mode 101	10	3	2134.978	2134.963	2139.452
mode 102	9	7	2192.894	2192.894	2195.953
mode 103	8	9	2206.675	2206.672	2208.260
mode 104	10	4	2209.409	2209.395	2213.702
mode 105	4	13	2234.899	2230.216	

TABLE 2.10 – *Premiers modes d'une plaque semi-encastree calculés avec une méthode hiérarchique développée sur 21 polynômes de Legendre et 10 fonctions trigonométriques*

n° de mode	m	n	calcul éléments-finis	polynômes de Legendre	fonctions trigonométriques
mode 1	1	1	37.277	37.285	37.285
mode 2	1	2	80.501	80.533	80.533
mode 3	2	1	88.811	88.834	88.834
mode 4	2	2	130.043	130.105	130.105
mode 5	1	3	144.512	144.602	144.602
mode 6	3	1	179.705	179.783	179.783
mode 7	2	3	193.931	194.070	194.071
mode 8	3	2	218.500	218.636	218.636
mode 9	1	4	229.270	229.476	229.476

qu'en basses fréquences.

Une méthode de modélisation de la structure basée sur des fonctions de forme a également été présentée : cette méthode permet notamment de modifier de manière simple les conditions limites de la structure. Cette méthode a été validée par des modes analytiques d'une plaque rectangulaire simplement appuyée et des modèles éléments finis de plaques avec d'autres conditions aux limites.

2.7.2 Vers la SEA-like

Le comportement de la cavité est déterminé non pas par les caractéristiques modales d'un mode individuel, mais d'un ensemble de modes. L'étude énergétique du système couplé plaque-cavité est alors pertinente dans le domaine des moyennes fréquences. Mais cette étude ne peut pas être statistique comme en hautes fréquences : les modifications des paramètres du système peuvent entraîner des modifications non négligeables dans le couplage entre la plaque et la cavité. Le système couplé plaque-cavité est donc modélisé avec une méthode SEA-like, qui donne une description énergétique du système couplé tout en conservant le caractère particulier des paramètres du système étudié. C'est pourquoi cette modélisation énergétique sera étudiée pour différentes conditions aux limites de la structure, car on ne peut pas négliger leur influence sur le comportement énergétique de la cavité.

La méthode SEA-like est une méthode énergétique, calculée à partir des énergies et des puissances injectées dans chacun des systèmes. Dans le chapitre suivant, les équations modales sont utilisées pour calculer ces énergies et ses puissances injectées pour des excitations particulières de la plaque et de la cavité, déjà présentées au chapitre 1 : les excitations *rain-on-the-roof*.

Chapitre 3

Approche SEA-like par couplage modal et validation dans le domaine des hautes fréquences

3.1	Présentation	74
3.1.1	Notion de domaines fréquentiels	74
3.1.2	Présentation du calcul SEA-like	75
3.2	Calcul des énergies	76
3.2.1	Énergie moyenne de la structure	76
3.2.2	Énergie moyenne de la cavité	77
3.3	structure excitée	79
3.3.1	Calcul des vitesses modales	80
3.3.2	Calcul des pressions modales	81
3.3.3	Puissance injectée dans la structure	81
3.4	Cavité excitée	82
3.4.1	Calcul des vitesses modales	83
3.4.2	Calcul des pressions modales	84
3.4.3	Puissance injectée dans la cavité	85
3.5	Calcul des coefficients de la matrice SEA-like	86
3.5.1	Coefficients correspondant à une excitation de la structure	86
3.5.2	Coefficients correspondant à une excitation de la cavité	89
3.6	Validation en Hautes Fréquences	89
3.6.1	Traitement matriciel	89
3.6.2	Calcul de la matrice SEA	90
3.6.3	Etude de la convergence	92
3.7	Conclusion	94
3.7.1	Bilan	94
3.7.2	Extension de la méthode SEA-like	94

3.1 Présentation

3.1.1 Domaines des basses fréquences, moyennes fréquences et hautes fréquences

On distingue trois domaines fréquentiels : les domaines des basses fréquences, moyennes fréquences et hautes fréquences. J. Pan (voir [79]) caractérise les fréquences limites de ces trois domaines pour une cavité couplée avec une plaque en considérant le recouvrement modal de la cavité.

Comme on l'a écrit dans le paragraphe 1.5, le recouvrement modal s'exprime de la manière suivante :

$$M = \Delta f_{3dB} \cdot n(f) \quad (3.1)$$

où Δf_{3dB} est la largeur de bande à mi-hauteur d'un mode et $n(f)$, la densité modale dans le sous-système considéré en fonction de la fréquence.

Dans la référence [79], le domaine des moyennes fréquences est défini par deux critères :

- Dans le domaine MF, on observe un recouvrement spatial ou fréquentiel d'au moins deux modes
- Le recouvrement modal n'est pas encore assez élevé pour que la méthode SEA puisse être appliquée

Les deux paragraphes suivants donnent quelques critères qui permettent le calcul des fréquences limites séparant les domaines des basses, des moyennes et des hautes fréquences.

3.1.1.1 Limite BF/MF

On considère qu'il y a recouvrement fréquentiel si l'espace moyen entre deux modes dans la cavité est inférieur à la largeur de bande à mi-hauteur d'un mode. Le recouvrement spatial, quand à lui, apparaît dès lors que la bande fréquentielle d'excitation contient deux modes. En s'appuyant sur ces deux constats, Morse a calculé une fréquence à partir de laquelle on observe un recouvrement spatial ou fréquentiel qui sépare le domaine des moyennes fréquences du domaine des basses fréquences :

$$f_{BM} = \frac{c_0 S_a}{16 V_a} \left(\sqrt{1 + \frac{64 c_0 T_{60} V_a}{\pi S_a^2 (T_{60} \Delta f + 4)}} - 1 \right) \quad (3.2)$$

où S_a est la surface totale des parois de la cavité, T_{60} est le temps de réverbération et Δf est la largeur de la bande fréquentielle d'excitation. Si $\Delta f = 0$, le facteur de recouvrement dans la cavité M_a est alors égal à 0,55.

Pour les dimensions du système couplé plaque-cavité qui sera étudié à la fin de ce chapitre, la limite entre les basses et les moyennes fréquences est de 800 Hz environ.

3.1.1.2 Limite MF/HF

Si l'on considère que la méthode SEA peut être appliquée dès que 5 à 6 modes de cavité se recouvrent (ce qui correspond à un facteur de recouvrement modal $M_a = 3$), la fréquence qui délimite les domaines des moyennes et hautes fréquences s'écrit :

$$f_{MH} = 4000 \sqrt{\frac{T_{60}}{V_a (T_{60} \Delta f + 4)}} \quad (3.3)$$

où Δf est la largeur de la bande fréquentielle d'excitation. Pour une excitation harmonique, on a alors $\Delta f = 0$. f_{MH} est alors égale à la fréquence de Schroeder :

$$f_{Sch} = 2000 \sqrt{\frac{T_{60}}{V_a}} \quad (3.4)$$

Pour les dimensions du système couplé plaque-cavité qui sera étudié à la fin de ce chapitre, la fréquence de Schroeder est de 2000 Hz environ.

3.1.2 Présentation du calcul SEA-like

La méthode de couplage modal est utilisée ici pour le calcul de la matrice SEA-like du système couplé plaque-cavité. Un second calcul, basé sur les modes du système complet, sera présenté dans le chapitre 4. La méthode de couplage modal, en plus de mettre en valeur l'influence du couplage entre la structure et la cavité sur le comportement du système, est bien moins complexe en terme de temps de calcul et de mémoire que le calcul basé sur les modes du système complet.

Les notations utilisées dans ce chapitre sont les mêmes que celles utilisées dans le chapitre 2. Les deux sous-systèmes décrits par la méthode SEA-like - la structure, c'est-à-dire la plaque, et la cavité - sont donc décrits respectivement par les indices s et a . La matrice SEA-like du sous-système s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \langle E_s \rangle \\ \langle E_a \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{ss} & A_{sa} \\ A_{as} & A_{aa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle P_{inj,s} \rangle \\ \langle P_{inj,a} \rangle \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Le signe $\langle \rangle$ fait référence à la moyenne fréquentielle. Il faut noter que les énergies et les puissances injectées sont calculées sur les sous-systèmes entiers et sont donc égaux à la moyenne spatiale multipliée par le volume ou la surface du sous-système considéré.

Pour calculer les coefficients de la matrice SEA-like, on considère les deux cas d'excitations étudiés dans le chapitre 2. Le cas où seulement la structure est excitée permet de calculer les coefficients A_{ss} et A_{as} :

$$A_{ss} = \frac{\langle E_{s,s} \rangle}{\langle P_{inj,s} \rangle} \quad (3.6)$$

$$A_{as} = \frac{\langle E_{a,s} \rangle}{\langle P_{inj,s} \rangle} \quad (3.7)$$

où $\langle E_{s,s} \rangle$ et $\langle E_{a,s} \rangle$ sont les énergies moyennées dans la structure et la cavité lorsque seule la structure est excitée.

Le cas de la cavité excitée permet de calculer les coefficients A_{sa} et A_{aa} :

$$A_{sa} = \frac{\langle E_{s,a} \rangle}{\langle P_{inj,a} \rangle} \quad (3.8)$$

$$A_{aa} = \frac{\langle E_{a,a} \rangle}{\langle P_{inj,a} \rangle} \quad (3.9)$$

Les notations utilisées sont équivalentes à celles des équations 3.6 et 3.7

Dans le chapitre 2, nous avons calculé les vitesses et les pressions modales pour chaque cas d'excitation (voir équations (2.25) et (2.30)). Dans ce chapitre nous allons d'abord exprimer les

énergies moyennées dans chaque sous-système en fonction des vitesses et des pressions modales, puis, après avoir exprimé les pressions et vitesses modales pour chaque cas d'excitation ainsi que les puissances injectées dans les sous-systèmes, nous pourrions calculer les coefficients de la matrice SEA-like.

3.2 Calcul des énergies

3.2.1 Énergie moyenne de la structure

L'énergie totale de la structure est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle. En hautes fréquences (hypothèses d'application de la SEA), on considère que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales. Ce n'est pas le cas dans les fréquences basses du domaine d'application de la SEA-like. Nous allons donc calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la structure.

3.2.1.1 Énergie cinétique de la structure

Si on considère que la densité surfacique de la structure est constante, l'énergie de la structure peut s'exprimer de la façon suivante :

$$E_{cs} = \frac{1}{2} h_s \rho_s \int_{A_s} \frac{|v(\mathbf{s})|^2}{2} d\mathbf{s} \quad (3.10)$$

où v est la vitesse complexe de la structure.

On exprime la vitesse normal de la structure en fonction de sa décomposition modale :

$$E_{cs} = \frac{1}{4} h_s \rho_s \int_{A_s} \left| \sum_{m=1}^M V_m(\omega) \Phi_m^s(\mathbf{s}) \right|^2 d\mathbf{s} \quad (3.11)$$

$$E_{cs} = \frac{1}{4} h_s \rho_s \sum_{p,q} V_p V_q^* \int_{A_s} \Phi_p^s \Phi_q^s d\mathbf{s} \quad (3.12)$$

Or d'après l'expression des masses modales de la structure, (voir chapitre 2) l'équation 3.12 devient :

$$E_{cs} = \frac{1}{4} M_m^s \sum_m |V_m|^2 \quad (3.13)$$

On obtient ainsi la moyenne fréquentielle de l'énergie cinétique de la structure :

$$\langle E_{cs} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \sum_m M_m^s \int_{\Delta\omega} |V_m|^2 d\omega \quad (3.14)$$

3.2.1.2 Énergie potentielle de la structure

D'après la théorie de Kirchhoff, l'énergie potentielle de la structure s'exprime de la façon suivante :

$$E_{ps} = \frac{1}{4} D \int_{A_s} [|w, xx|^2 + |w, yy|^2 + 2\nu_s(w, xx)(w, yy)^* + 2(1 - \nu_s)|w, xy|^2] d\mathbf{s} \quad (3.15)$$

En constatant que $w(x, y; \omega) = -\frac{i}{\omega} \sum_m V_m(\omega) \Phi_m^s(x, y; \omega)$, on écrit :

$$E_{ps} = \frac{1}{4} \frac{D}{\omega^2} \sum_{m,n} E_{ps(m,n)}(x, y) V_m^* V_n \quad (3.16)$$

où

$$\begin{aligned} E_{ps(m,n)} &= \delta_{(m,n)} \int_{A_s} |\Phi_m^s, xx|^2 + |\Phi_m^s, yy|^2 + 2\nu_s (\Phi_m^s, xx)(\Phi_m^s, yy)^* + 2(1 - \nu_s) |\Phi_m^s, xy|^2 ds \\ &= \delta_{(m,n)} (k_m^s)^4 \int_{A_s} (\Phi_m^s)^2 ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$= \delta_{(m,n)} (k_m^s)^4 \frac{M_m^s}{\rho_s h_s} \quad (3.18)$$

où k_m^s est le nombre d'onde de flexion associé au mode m de la structure. L'équation (3.16) devient :

$$E_{ps} = \frac{1}{4} \frac{D}{\rho_s h_s \omega^2} \sum_m (k_m^s)^4 M_m^s |V_m|^2 \quad (3.19)$$

L'expression de l'énergie potentielle de la structure moyennée sur l'espace fréquentiel s'exprime donc :

$$\langle E_{ps} \rangle = \frac{1}{4} \frac{D}{\rho_s h_s} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \frac{1}{\omega^2} \sum_m (k_m^s)^4 M_m^s |V_m|^2 d\omega \quad (3.20)$$

Les équations (3.14) et (3.20) donnent l'énergie totale de la structure moyennée sur les fréquences :

$$\begin{aligned} \langle E_s \rangle &= \langle E_{cs} \rangle + \langle E_{ps} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_m M_m^s |V_m|^2 \left(1 + \frac{D}{\rho_s h_s} \frac{(k_m^s)^4}{\omega^2} \right) d\omega \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dans le cas particulier d'une structure simplement appuyée, le nombre d'onde de flexion k_m^s et la masse modale M_m^s s'expriment :

$$k_m^s = \pi \sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}} \quad (3.22)$$

$$M_m^s = \rho_s h_s \frac{A_s}{4} \quad (3.23)$$

L'énergie totale s'écrit alors :

$$\langle E_s \rangle = \frac{A_s}{16} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_m |V_m|^2 \left(\rho_s h_s + \frac{D\pi^4}{\omega^2} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)^2 \right) d\omega \quad (3.24)$$

3.2.2 Énergie moyenne de la cavité

3.2.2.1 Énergie cinétique de la cavité

Appelons ϕ le potentiel acoustique dans la cavité et \vec{v}_a la vitesse particulière dans la cavité. En supposant que la masse volumique de l'air est constante, l'énergie cinétique dans la cavité s'écrit :

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \rho_0 \int_V |\vec{v}_a|^2 dV \quad (3.25)$$

On peut relier la vitesse particulière et la pression au potentiel acoustique grâce aux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \vec{v}_a = -\text{grad}\phi \\ p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\rho_0 j \omega \phi \end{cases} \quad (3.26)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\vec{v}_a = \frac{-j}{\rho_0 \omega} \text{grad}(p) \quad (3.27)$$

L'équation (3.25) devient alors :

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \iiint_V |\text{grad}(p)|^2 dV \quad (3.28)$$

En exprimant la pression en fonction de sa décomposition modale on obtient :

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \iiint_V \left(\text{grad} \left(\sum_n P_n \Phi_n^a \right) \right) \left(\text{grad} \left(\sum_n P_n \Phi_n^a \right) \right)^* dV \quad (3.29)$$

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \sum_{i,j} P_i P_j^* \iiint_V \left(\text{grad}(\Phi_i^a) \right) \left(\text{grad}(\Phi_j^a) \right)^* dV \quad (3.30)$$

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \sum_n |P_n|^2 \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \Phi_n^a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n^a}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n^a}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad (3.31)$$

où :

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial \Phi_n^a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n^a}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_n^a}{\partial z} \right)^2 \right] dV = M_n^a (k_n^a)^2 \quad (3.32)$$

k_n^a est le nombre d'onde acoustique associé au mode n de la cavité et s'exprime de la façon suivante :

$$k_n^a = \pi \sqrt{\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2}} \quad (3.33)$$

(r, s, t) sont les indices du n -ième mode de cavité.

Cela donne finalement :

$$E_{ca} = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0^2 \omega^2} \sum_n M_n^a (k_n^a)^2 |P_n|^2 \quad (3.34)$$

La moyenne fréquentielle de l'énergie cinétique dans la cavité est alors :

$$\langle E_{ca} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0^2} \frac{1}{\Delta \omega} \int_{\Delta \omega} \frac{1}{\omega^2} \sum_n M_n^a (k_n^a)^2 |P_n|^2 d\omega \quad (3.35)$$

En remplaçant k_n^a par son expression en fonction des paramètres décrivant la cavité, l'énergie cinétique moyennée devient :

$$\langle E_{ca} \rangle = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{\rho_0^2} \frac{1}{\Delta \omega} \int_{\Delta \omega} \frac{1}{\omega^2} \sum_n M_n^a |P_n|^2 \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \right) d\omega \quad (3.36)$$

3.2.2.2 Énergie potentielle de la cavité

On procède de la même manière pour obtenir l'énergie cinétique :

$$E_{pa} = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \iiint_V p p^* dV \quad (3.37)$$

$$E_{pa} = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \iiint_V \left(\sum_n P_n \Phi_n^a \right) \left(\sum_n P_n \Phi_n^a \right)^* dV \quad (3.38)$$

$$E_{pa} = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \sum_{i,j} P_i P_j^* \iiint_V \Phi_i^a \Phi_j^a dV \quad (3.39)$$

$$E_{pa} = \frac{1}{4\rho_0 c_0^2} \sum_n M_n^a |P_n|^2 \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

L'énergie potentielle de la cavité moyennée sur l'espace fréquentiel s'exprime de la façon suivante :

$$\langle E_{pa} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_n M_n^a |P_n|^2 d\omega \quad (3.42)$$

Finalement, l'énergie totale de la cavité moyennée sur l'espace fréquentiel est :

$$\langle E_a \rangle = \langle E_{ca} \rangle + \langle E_{pa} \rangle \quad (3.43)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_n \frac{M_n^a}{\rho_0^2 c_0^2} |P_n|^2 \left(\frac{c_0^2}{\omega^2} (k_n^a)^2 + 1 \right) d\omega \quad (3.44)$$

ce qui devient :

$$\langle E_a \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \sum_n \frac{M_n^a}{\rho_0^2} |P_n|^2 \left(\frac{\pi^2}{\omega^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c_0^2} \right) d\omega \quad (3.45)$$

où la masse modale du n -ième mode de cavité est donnée par :

$$M_n^a = \rho_0 V \left(\frac{1}{2} \right)^{3-\delta_{r,0}-\delta_{s,0}-\delta_{t,0}} \quad (3.46)$$

3.3 structure excitée

Le système d'équations correspondant au cas de la structure excitée est donné par l'équation (2.25) :

$$\begin{cases} \chi_s V + \frac{1}{\rho_0 c_0} {}^t B P = \chi_s Q_s \\ -\rho_0 c_0 B V + \chi_a P = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

La structure est excitée par une excitation $p_{ext}(x, y, \omega)$ de type *rain-on-the-roof*, spatialement et fréquentiellement décorrélée. Cette excitation a été définie dans le chapitre 1 dans l'expression de la densité interspectrale de l'excitation, et, plus spécialement, dans le terme de corrélation spatiale. Ici, ce terme apparaît dans le terme de *joint-acceptance* de la structure, qui s'écrit en fonction des modes propres de la structure :

$$j_{pq}^s(\omega) = \iint_{A_s} h_s \rho_s(x, y) \Phi_p^s(x, y) \Phi_q^s(x', y') C(x - x', y - y'; \omega) dx dx' dy dy' \quad (3.48)$$

ce qui s'écrit, dans le cas d'une excitation *rain-on-the-roof* et compte tenu du fait que les modes Φ_m^s sont orthogonaux sur la structure :

$$j_{pq}^s = \iint_{A_s} h_s \rho_s(x, y) \Phi_p^s(x, y) \Phi_q^s(x', y') \delta(x - x') \delta(y - y') dx dx' dy dy' \quad (3.49)$$

$$= \delta_{p,q} h_s \rho_s \int_{A_s} (\Phi_p^s(x, y))^2 dx dy \quad (3.50)$$

L'équation précédente permet alors de caractériser le terme de force généralisée de l'équation (3.47) :

$$Q_{s,p} Q_{s,q}^* = \frac{1}{(\rho_0 c_0 A_s)^2 \chi_{s,p} \chi_{s,q}^*} \iint_{A_s} p_{ext}(x, y; \omega) \Phi_p^s(x, y) p_{ext}^*(x', y'; \omega) \Phi_q^s(x', y') dx dy dx' dy' \quad (3.51)$$

avec :

$$\iint_{A_s} p_{ext}(x, y; \omega) \Phi_p^s(x, y) p_{ext}^*(x', y'; \omega) \Phi_q^s(x', y') dx dy dx' dy' = S_{p_{ext}}(\omega) j_{pq}^s(\omega) \quad (3.52)$$

L'injection de l'équation (3.50) dans l'équation (3.51) conduit à l'expression du terme de force généralisée suivante :

$$Q_{s,p} Q_{s,q}^* = \delta_{p,q} \frac{\rho_s h_s S_{p_{ext}}(\omega)}{\rho_0^2 c_0^2 A_s^2 |\chi_{s,p}|^2} \int_{A_s} (\Phi_p^s(x, y))^2 dx dy \quad (3.53)$$

3.3.1 Calcul des vitesses modales

D'après l'équation précédente, le vecteur des vitesses modales s'écrit :

$$V = (\chi_s + {}^t B \chi_a^{-1} B)^{-1} \chi_s Q_s \quad (3.54)$$

Donc, en posant $H_{ss} = (\chi_s + {}^t B \chi_a^{-1} B)^{-1} \chi_s$, on peut écrire que :

$$|V_m|^2 = V_m V_m^* = (H_{ss} Q_s)_m (H_{ss} Q_s)_m^* \quad (3.55)$$

$$|V_m|^2 = \left[\sum_p (H_{ss})_{m,p} (Q_s)_p \right] \left[\sum_q (H_{ss})_{m,q}^* (Q_s)_q^* \right] \quad (3.56)$$

$$|V_m|^2 = \sum_{p,q} (H_{ss})_{m,p} (H_{ss})_{m,q}^* (Q_s)_p (Q_s)_q^* \quad (3.57)$$

En utilisant l'expression de $(Q_s)_p (Q_s)_q^*$ donné par l'équation (3.53), la vitesse modale quadratique s'exprime :

$$|V_m|^2 = \frac{\rho_s h_s}{\rho_0^2 c_0^2 A_s^2} S_{p_{ext}}(\omega) \sum_p \frac{|(H_{ss})_{m,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \int_{A_s} (\Phi_p^s(x, y))^2 dx dy \quad (3.58)$$

En exprimant l'intégrale spatiale en fonction des dimensions de la structure, l'expression (3.58) devient :

$$|V_m|^2 = \frac{1}{4} \frac{\rho_s h_s}{\rho_0^2 c_0^2 A_s} S_{p_{ext}}(\omega) \sum_p \frac{|(H_{ss})_{m,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \quad (3.59)$$

3.3.2 Calcul des pressions modales

D'après l'équation (3.47), on écrit les pressions modales de la façon suivante :

$$P = \rho_0 c_0 (I + \chi_a^{-1} B \chi_s^{-1t} B)^{-1} \chi_a^{-1} B Q_s \quad (3.60)$$

En posant $H_{as} = (I + \chi_a^{-1} B \chi_s^{-1t} B)^{-1} \chi_a^{-1} B$, on peut écrire que :

$$|P_n|^2 = P_n P_n^* = \rho_0^2 c_0^2 (H_{as} Q_s)_n (H_{as} Q_s)_n^* \quad (3.61)$$

$$|P_n|^2 = \rho_0^2 c_0^2 \sum_{p,q} (H_{as})_{n,p} (H_{as})_{n,q}^* Q_{s,p} Q_{s,q}^* \quad (3.62)$$

L'équation (3.51) conduit alors à l'expression suivante :

$$|P_n|^2 = \frac{\rho_s h_s}{A_s^2} S_{p_{ext}}(\omega) \sum_p \frac{|(H_{as})_{n,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \int_{A_s} (\Phi_p^s(x, y))^2 dx dy \quad (3.63)$$

En exprimant l'intégrale spatiale en fonction des dimensions de la structure, l'expression (3.63) devient :

$$|P_n|^2 = \frac{1}{4} \frac{\rho_s h_s}{A_s} S_{p_{ext}}(\omega) \sum_p \frac{|(H_{as})_{n,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \quad (3.64)$$

3.3.3 Puissance injectée dans la structure

La puissance injectée dans la structure s'écrit :

$$P_{inj,s} = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{A_s} p_{ext}^*(x, y; \omega) v(x, y; \omega) dx dy \right) \quad (3.65)$$

$$P_{inj,s} = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{A_s} p_{ext}^* \sum_m V_m \Phi_m^s dx dy \right) \quad (3.66)$$

D'après l'équation (3.54), on peut écrire :

$$P_{inj,s} = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{A_s} p_{ext}^* \sum_{p,q} H_{ss(p,q)} Q_{s,q} \Phi_p^s dx dy \right) \quad (3.67)$$

En remplaçant $Q_{s,q}$ par son expression, on obtient :

$$P_{inj,s} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 c_0 A_s} \Re \left(\sum_{p,q} \frac{H_{ss(p,q)}}{\chi_{s,q}} \iint_{A_s} p_{ext}(x, y; \omega) \Phi_p^s(x, y) p_{ext}^*(x', y'; \omega) \Phi_p^s(x', y') dx dy dx' dy' \right) \quad (3.68)$$

Les expressions (3.50) et (3.52) permettent de simplifier cette dernière équation :

$$P_{inj,s} = \frac{1}{2} \frac{\rho_s h_s}{\rho_0 c_0 A_s} \Re \left(S_{p_{ext}}(\omega) \sum_m \frac{H_{ss(m,m)}}{\chi_{s,m}} \int_{A_s} (\Phi_m^s)^2 ds \right) \quad (3.69)$$

On obtient donc :

$$\langle P_{inj,s} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\rho_s h_s}{\rho_0 c_0 A_s} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \Re \left(S_{p_{ext}}(\omega) \sum_m \frac{H_{ss(m,m)}}{\chi_{s,m}} \int_{A_s} (\Phi_m^s)^2 ds \right) d\omega \quad (3.70)$$

ce qui donne, en exprimant l'intégrale spatiale en fonction des dimensions de la structure :

$$\langle P_{inj,s} \rangle = \frac{1}{8} \frac{\rho_s h_s}{\rho_0 c_0} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} \Re \left(S_{p_{ext}}(\omega) \sum_m \frac{H_{ss(m,m)}}{\chi_{s,m}} \right) d\omega \quad (3.71)$$

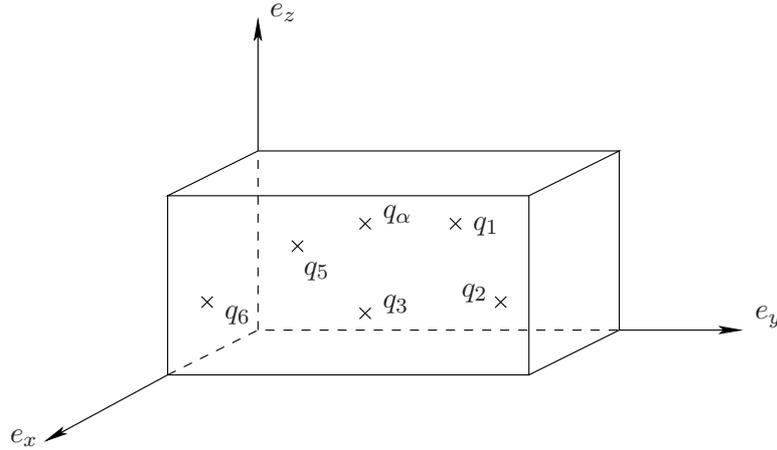


FIGURE 3.1 – Calcul de la puissance injectée dans la cavité

3.4 Cavité excitée

La modélisation de l'excitation *rain-on-the-roof* d'une plaque peut se faire soit — comme c'est le cas dans le paragraphe précédent — de manière analytique, en utilisant l'expression donnée dans l'équation (1.97) de la corrélation spatiale, soit en superposant un certain nombre d'excitations ponctuelles aléatoires. Dans la référence [58], il est spécifié que 5 excitations ponctuelles au moins doivent être considérées pour simuler une excitation de type δ -corrélée.

Le cas de l'excitation δ -corrélée de la cavité est plus complexe. L'expression de la corrélation spatiale utilisée dans le cas d'excitation de la structure ne peut plus être utilisée. En effet, le calcul de la puissance injectée nécessite une modélisation physique du point d'excitation. Ainsi, la deuxième solution est utilisée : le système couplé plaque-cavité est modélisé pour plusieurs cas d'excitations ponctuelles de la cavité, puis les différents comportements énergétiques sont moyennés pour obtenir une simulation d'excitation δ -corrélée.

La question se pose alors du nombre de points d'excitation de la cavité à utiliser pour que la moyenne converge. La figure 3.2 montre l'évolution du comportement énergétique du système couplé pour un nombre croissant de points d'excitation. Ces points sont répartis aléatoirement dans la cavité et recouvrent le plus d'espace possible dans la cavité (voir figure 3.1). On remarque que, à partir de 6 points d'excitation, l'ajout d'un point à la simulation d'une excitation *rain-on-the-roof* ne modifie pas sensiblement le comportement énergétique de la cavité. 6 points répartis aléatoirement dans la cavité seront donc utilisés ici pour modéliser une excitation *rain-on-the-roof* de la cavité.

Le système d'équation vérifié par les vitesses modales et les pressions modales est le suivant :

$$\begin{cases} \chi_s V + \frac{1}{\rho_0 c_0} {}^t B P = 0 \\ -\rho_0 c_0 B V + \chi_a P = \chi_a Q_a \end{cases} \quad (3.72)$$

Ce système d'équation permet de calculer les énergies dans la structure et dans la cavité ainsi que la puissance injectée dans la cavité pour chaque cas d'excitation. Ces énergies et puissances injectées sont alors moyennées, puis utilisées pour obtenir les coefficients SEA-like.

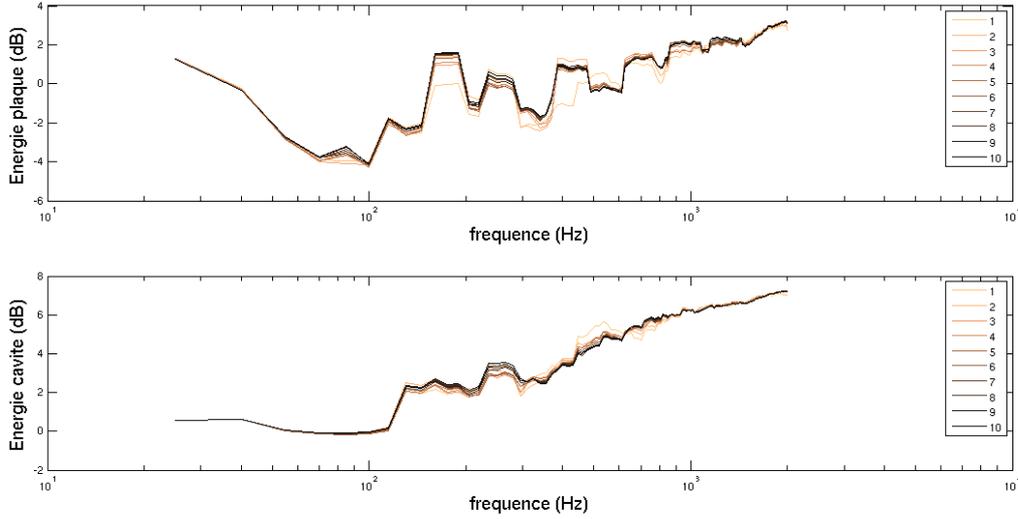


FIGURE 3.2 – *Energie dans la structure et la cavité en fonction du nombre de points d'excitation pris en compte dans la cavité*

3.4.1 Calcul des vitesses modales

L'équation (3.72) donne le vecteur des vitesses modales :

$$V = -\frac{1}{\rho_0 c_0} (\chi_s + {}^t B \chi_a^{-1} B)^{-1t} B Q_a \quad (3.73)$$

En posant $H_{sa} = (\chi_s + {}^t B \chi_a^{-1} B)^{-1t} B$, on peut écrire, comme précédemment, que :

$$|V_m|^2 = V_m V_m^* \quad (3.74)$$

$$|V_m|^2 = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2} (H_{sa} Q_a)_m (H_{sa} Q_a)_m^* \quad (3.75)$$

$$|V_m|^2 = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2} \sum_{p,q} (H_{sa})_{m,p} (H_{sa})_{m,q}^* Q_{a,p} Q_{a,q}^* \quad (3.76)$$

Or le produit des forces généralisées peut s'écrire comme suit :

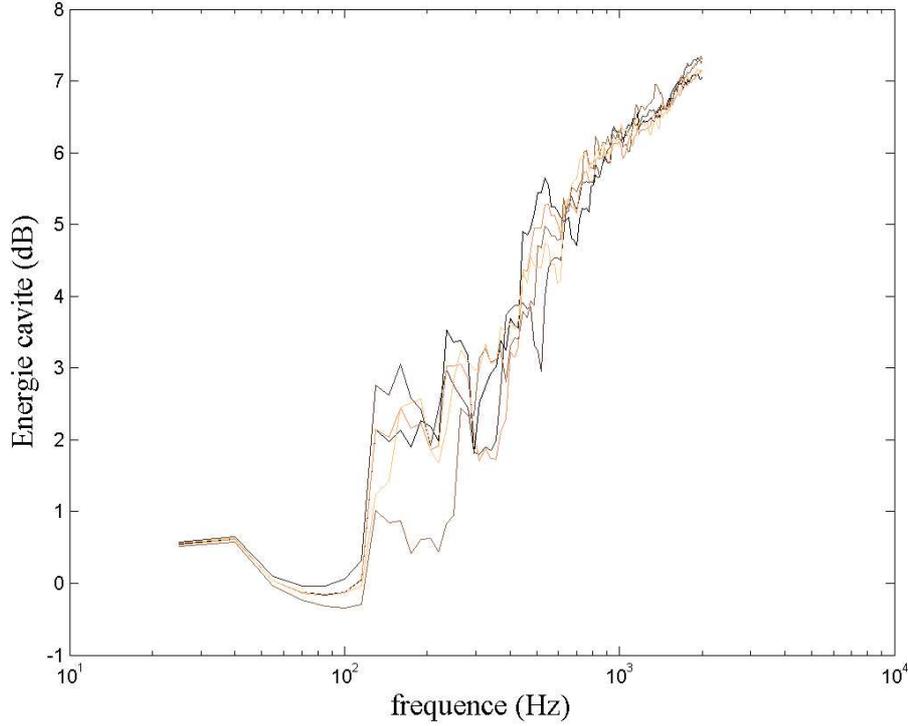
$$Q_{a,p} Q_{a,q}^* = \frac{\rho_0^2 c_0^2}{A_s^2 \chi_{a,p} \chi_{a,q}^*} \iint_V q_{ext}(x, y, z; \omega) \Phi_p^a(x, y, z) q_{ext}^*(x', y', z'; \omega) \Phi_q^a(x', y', z') dv dv' \quad (3.77)$$

L'excitation de la cavité est une excitation ponctuelle située au point (x_a, y_a, z_a) , de débit volumique $q_{ext}(x, y, z) = q_a \delta(x_a) \delta(y_a) \delta(z_a)$. L'intégrale du terme de droite de l'équation (3.77) peut alors se réécrire de la manière suivante :

$$\int_V q_{ext}(x, y, z; \omega) \Phi_p^a(x, y, z) q_{ext}^*(x', y', z'; \omega) \Phi_q^a(x', y', z') dv dv' = \delta_{p,q} q_a^2 (\Phi_p^a(x_a, y_a, z_a))^2 \quad (3.78)$$

L'équation (3.76) devient finalement :

$$|V_m|^2 = \frac{1}{A_s^2} q_a^2 \sum_p \frac{|(H_{sa})_{m,p}|^2}{|\chi_{a,p}|^2} (\Phi_p^a(x_a, y_a, z_a))^2 \quad (3.79)$$

FIGURE 3.3 – *Energie dans la cavité pour plusieurs points d'excitations dans la cavité*

3.4.2 Calcul des pressions modales

D'après l'équation (3.72), on peut écrire que :

$$P = (I + \chi_a^{-1} B \chi_s^{-1} t B)^{-1} Q_a \quad (3.80)$$

En posant : $H_{aa} = (I + \chi_a^{-1} B \chi_s^{-1} t B)^{-1}$ on peut exprimer le produit des pressions modales :

$$|P_n|^2 = P_n P_n^* \quad (3.81)$$

$$|P_n|^2 = (H_{aa} Q_a)_n (H_{aa} Q_a)_n^* \quad (3.82)$$

$$|P_n|^2 = \sum_{p,q} (H_{aa})_{n,p} (H_{aa})_{n,q}^* Q_{a,p} Q_{a,q}^* \quad (3.83)$$

En utilisant l'équation (3.78), l'équation précédente devient :

$$|P_n|^2 = \frac{\rho_0^2 c_0^2}{A_s^2} q_a^2 \sum_p \frac{|(H_{aa})_{n,p}|^2}{|\chi_{a,p}|^2} (\Phi_p^a(x_a, y_a, z_a))^2 \quad (3.84)$$

La figure 3.3 présente l'énergie moyennée en fréquence dans la cavité couplée pour plusieurs positions du point d'excitation de la cavité. En basses fréquences (en dessous de 800 Hz), la position du point d'excitation a une influence sur l'énergie dans la cavité (le couplage avec la structure diffère suivant la position du point d'excitation). Dans les domaines des moyennes et hautes fréquences, par contre, cette position a de moins en moins d'influence sur l'énergie, car le comportement modal — et donc la dépendance spatiale du comportement énergétique de la cavité — est de moins en moins marqué.

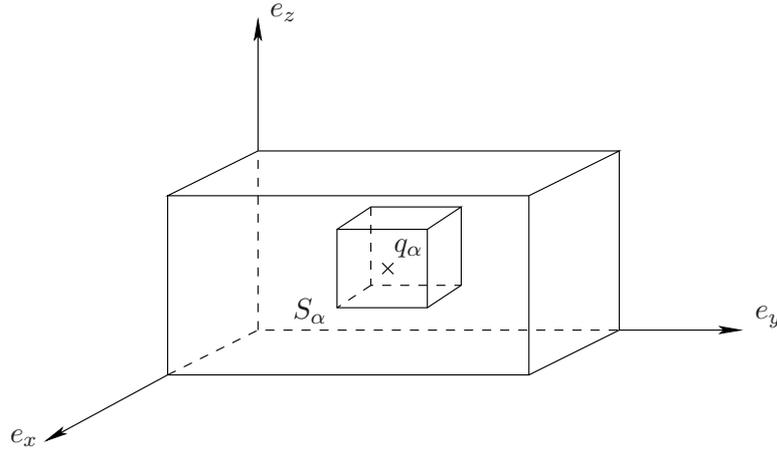


FIGURE 3.4 – Calcul de la puissance injectée dans la cavité pour une source ponctuelle

3.4.3 Puissance injectée dans la cavité

La puissance injectée dans la cavité ne peut pas s'exprimer de la même manière que dans le cas de la structure. En effet, la cavité est excitée par des sources ponctuelles avec un débit volumique q_e fixe, cas limite de la sphère pulsante. Ainsi, la pression rencontre autant de points de singularité qu'il y a de sources dans la cavité. Pour contourner ce problème, la puissance injectée est assimilée au flux de puissance traversant une surface entourant chaque source de la cavité. C'est pourquoi l'excitation de la cavité doit être considérée physiquement et ne peut pas être introduite directement à l'aide d'une fonction de corrélation spatiale, comme c'est le cas pour la structure.

La puissance injectée dans la cavité pour une source acoustique q_α est calculée par l'intégration du flux acoustique sur une surface quelconque entourant la source. Le système étant décrit par des coordonnées cartésiennes, la surface utilisée est un cube afin de faciliter le calcul de l'intégrale.

Si l'on considère une source ponctuelle de débit volumique q_α , la puissance acoustique traversant une surface S_α de normale extérieure \mathbf{n} s'exprime de la manière suivante :

$$P_{inj,\alpha} = \int_{S_\alpha} \frac{1}{2} |p(\mathbf{s}) \mathbf{u}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}| \, \mathbf{s} \quad (3.85)$$

où \mathbf{u} est la vitesse particulaire de la pression p .

La surface S_α considérée ici est un cube de côté $r \times r \times r$ centré sur la source de coordonnées $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$ (voir figure 3.4). On considère maintenant la face de normale extérieure \mathbf{e}_x . La vitesse particulaire projetée sur \mathbf{e}_x s'écrit alors :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{-j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.86)$$

La pression p est remplacée par sa projection modale :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{-j}{\rho_0 \omega} \sum_n P_n \frac{\partial \Phi_n^a}{\partial x} \quad (3.87)$$

Le flux de puissance à travers la surface de normale extérieure \mathbf{e}_x s'écrit alors :

$$P_{e_x} = \int_{y_\alpha-r}^{y_\alpha+r} \int_{z_\alpha-r}^{z_\alpha+r} \frac{-j}{\rho_0 \omega} \left(\sum_n P_n \Phi_n^a(x = x_\alpha + r, y, z) \right) \left(\sum_n P_n \frac{\partial \Phi_n^a}{\partial x}(x = x_\alpha + r, y, z) \right) dy dz \quad (3.88)$$

L'expression de P_{e_x} est calculée à l'aide d'une intégrale de Riemann. La puissance totale injectée dans la cavité par la source ponctuelle est donnée par la somme des puissances acoustiques traversant les 6 faces du cube.

Cette expression de la puissance injectée dans la cavité est alors vérifiée par comparaison avec celle de la puissance injectée en milieu infini, utilisée en SEA :

$$\langle P_{inj,a} \rangle = \int_V \rho_0 \frac{\omega^2}{c_0^2} \frac{1}{8\pi} |Q|^2 dv \quad (3.89)$$

La puissance injectée calculée précédemment converge bien vers la puissance en milieu infini en hautes fréquences (voir figure 3.5).

La figure 3.6 montre la puissance injectée pour différentes valeurs de r . On remarque que la puissance injectée calculée dépend de la surface d'intégration utilisée et que la variation en fonction de r est sinusoïdale. En effet, la puissance au point d'excitation est infinie, et le calcul modal ne peut en donner qu'une valeur finie. Au voisinage du point d'excitation, la pression calculée de manière modale est approximative. Cette approximation diminue quand on s'éloigne du point d'excitation.

Ainsi, la variation de la puissance injectée calculée s'atténue quand r augmente. Cependant, comme il faut prendre en compte la présence des parois de la cavité, on ne peut pas calculer la puissance injectée avec une valeur de r trop grande. La puissance injectée dans la cavité est donc calculée en effectuant la moyenne des intégrales de la puissance acoustique sur S_α pour plusieurs valeurs de r .

La figure 3.7 montre la puissance injectée pour différentes positions du point d'excitation dans la cavité. On remarque que, par rapport à l'énergie dans la cavité présentée figure 3.3, la dépendance spatiale est légèrement plus importante en basses fréquences. En effet, la pression n'est pas intégrée sur toute la cavité mais uniquement sur le cercle d'intégration de la puissance injectée. Comme pour l'énergie, la dépendance spatiale est moins importante dans les domaines des moyennes et hautes fréquences.

3.5 Calcul des coefficients de la matrice SEA-like

3.5.1 Coefficients correspondant à une excitation de la structure

3.5.1.1 Coefficient structure/structure

D'après les équations (3.21) et (3.59), on peut écrire l'équation totale moyennée de la structure lorsque la structure est excitée :

$$\langle E_{s,s} \rangle = \frac{1}{32} \frac{\rho_s h_s}{\rho_0^2 c_0^2} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} S_{p_{ext}} \sum_{m,p} \frac{|(H_{ss})_{m,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \left(\rho_s h_s + \frac{D\pi^4}{\omega^2} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \right) \quad (3.90)$$

D'après l'équation (3.71), qui donne la puissance injectée dans la structure, on peut donc écrire le premier coefficient de la matrice SEA-like :

$$A_{ss} = \frac{1}{4\rho_0 c_0} \frac{\int_{\Delta\omega} \sum_{m,p} \frac{|(H_{ss})_{m,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \left(\rho_s h_s + \frac{D\pi^4}{\omega^2} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right) \right) d\omega}{\int_{\Delta\omega} \Re \left(\sum_m \frac{H_{ss(m,m)}}{\chi_{s,m}} \right) d\omega} \quad (3.91)$$

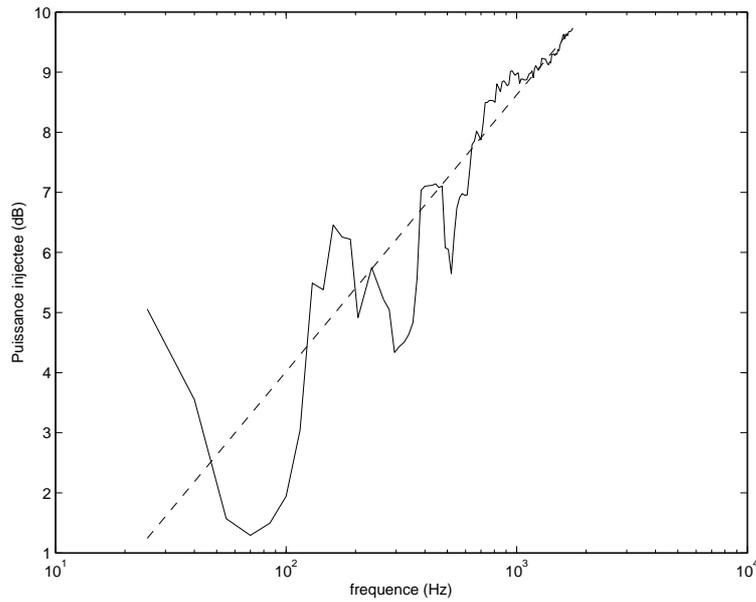


FIGURE 3.5 – *Puissance injectée par une force ponctuelle unitaire située au point de coordonnées $(0, 52, 0, 92, 0, 20)$ comparée avec une puissance injectée par la même source acoustique en milieu infini : (—) Analyse modal / (---) Puissance infinie*

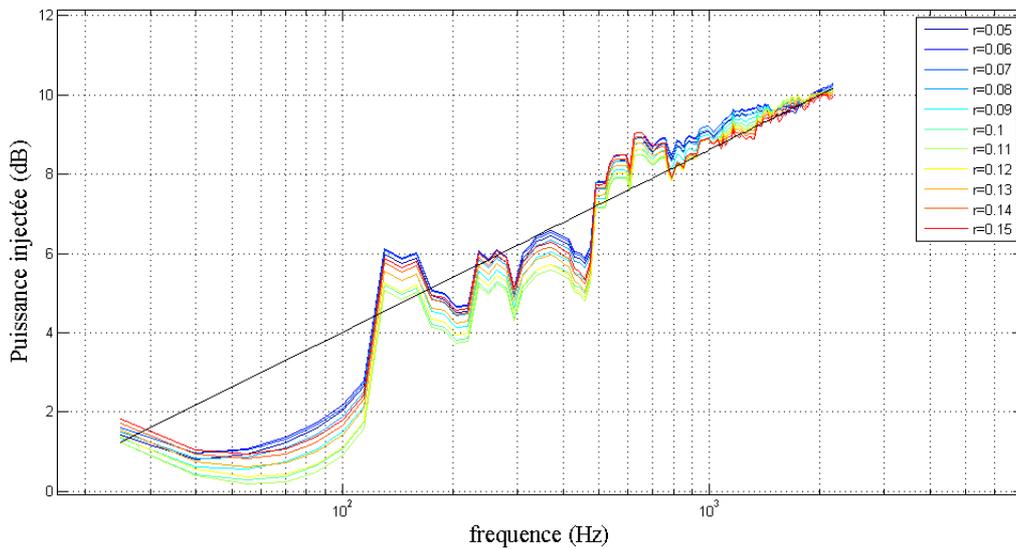


FIGURE 3.6 – *Puissance injectée par une force ponctuelle unitaire calculée pour différentes valeurs du côté r de la surface d'intégration*

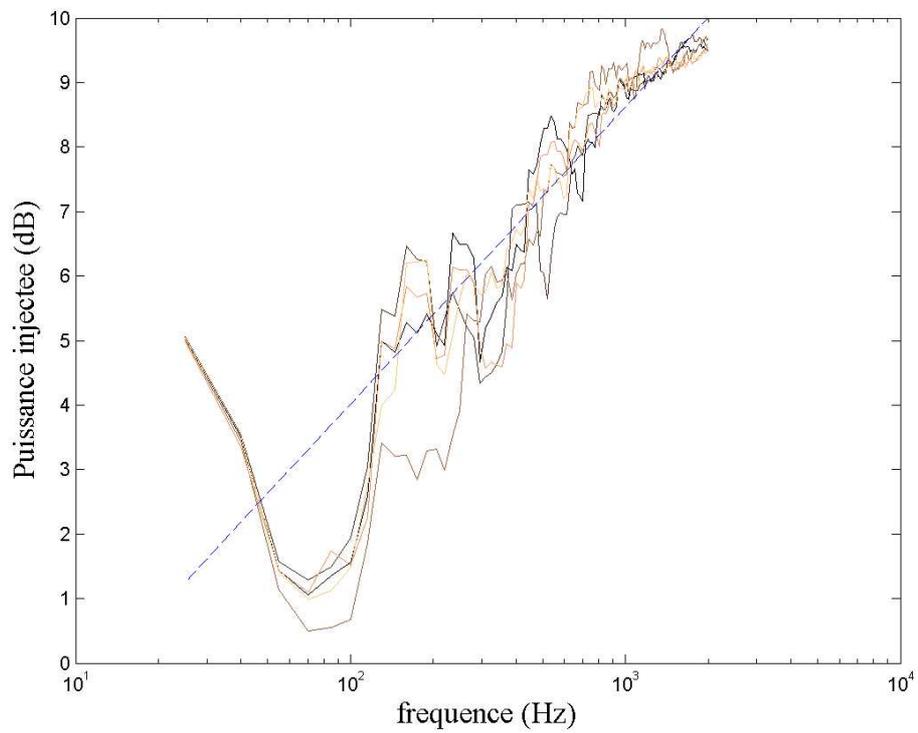


FIGURE 3.7 – *Puissance injectée pour plusieurs points d'excitations de la cavité comparée avec une puissance injectée par la même source acoustique en milieu infini : (—) Analyse modal / (---) Puissance infinie*

On considère que l'excitation correspond à un bruit blanc donc que $S_{q_{ext}}(\omega) = 1$ sur la bande de fréquence considérée.

3.5.1.2 Coefficient fluide/structure

Les équations (3.44) et (3.64) donnent l'énergie totale moyenne dans la cavité quand la structure est excitée :

$$\langle E_{a,s} \rangle = \frac{\rho_s h_s}{64} \frac{V}{A_s} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\Delta\omega} S_{p_{ext}} \sum_{n,p} \frac{|(H_{as})_{n,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \left(\frac{\pi^2}{\rho_0 \omega^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right) d\omega \quad (3.92)$$

D'après l'équation (3.71), on peut en déduire le deuxième coefficient de la matrice SEA-like :

$$A_{as} = \frac{1}{8\rho_0 c_0} \frac{V}{A_s} \frac{\int_{\Delta\omega} \sum_{n,p} \frac{|(H_{as})_{n,p}|^2}{|\chi_{s,p}|^2} \left(\frac{\pi^2}{\rho_0 \omega^2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} + \frac{t^2}{c^2} \right) + \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \right) d\omega}{\int_{\Delta\omega} \Re \left(\sum_m \frac{H_{ss}(m,m)}{\chi_{s,m}} \right) d\omega} \quad (3.93)$$

3.5.2 Coefficients correspondant à une excitation de la cavité

Comme il a été dit dans le paragraphe 3.4, l'excitation δ -corrélée de la cavité n'est pas décrite directement par une expression analytique de la fonction de corrélation spatiale. L'excitation de la cavité est modélisée par une superposition de 6 excitations ponctuelles, réparties de manière aléatoire dans la cavité. L'énergie dans la structure pour une excitation δ -corrélée de la cavité est alors obtenue par la moyenne des énergies dans la structure calculées pour les 6 excitation ponctuelles de la cavité. L'énergie et la puissance injectée dans la cavité sont calculées de la même manière. Les formules 3.8 et 3.9 donnent alors les coefficients SEA-like.

3.6 Validation de la méthode SEA-like dans le domaine des hautes fréquences

Il s'agit maintenant de valider avec la méthode SEA la modélisation du système couplé plaque-cavité étudié plus haut. La méthode SEA n'est valable que sous certaines conditions d'application, plus exclusives que les conditions d'application de la méthode SEA-like. Il faut donc traiter la matrice SEA-like obtenue avant de pouvoir la comparer à la matrice SEA.

3.6.1 Traitement matriciel

La modélisation de la méthode SEA doit vérifier, entre autres conditions, la condition de couplage faible. Cette dernière condition est vérifiée lorsque le système est étudié dans le domaine des hautes fréquences. Une autre condition est également vérifiée : le couplage entre deux sous-systèmes ne dépend pas de l'amortissement d'un des sous-systèmes et le couplage indirect - entre deux sous-systèmes non-physiquement liés - est négligé dans la plupart des cas (il y a des exceptions, comme le cas de deux cavités séparées par une plaque). Pour un système à trois sous-systèmes, la

matrice SEA peut alors être écrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \langle P_{1,inj} \rangle \\ \langle P_{2,inj} \rangle \\ \langle P_{3,inj} \rangle \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} & 0 \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} + \eta_{23} & -\eta_{32} \\ 0 & -\eta_{23} & \eta_3 + \eta_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle E_1 \rangle \\ \langle E_2 \rangle \\ \langle E_3 \rangle \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Pour le système couplé plaque-cavité étudié dans ce chapitre, la matrice SEA devient la suivante :

$$\begin{pmatrix} \langle P_{s,inj} \rangle \\ \langle P_{a,inj} \rangle \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \eta_{ss} + \eta_{sa} & -\eta_{sa} \\ -\eta_{as} & \eta_{aa} + \eta_{as} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle E_s \rangle \\ \langle E_a \rangle \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Dans le domaine des moyennes fréquences, cette condition de couplage faible n'est plus vérifiée. Entre autres, on ne peut plus négliger le couplage indirect et les coefficients de perte par couplage dépendent des amortissements internes des sous-systèmes. Cela entraîne un problème de conditionnement matriciel, qui empêche l'inversion de la matrice de coefficients d'influence énergétique et l'écriture de la matrice L. La matrice SEA-like s'écrit alors, de manière simplifiée :

$$E = A P_{inj} \quad (3.96)$$

où E est le vecteur des énergies moyennées et P_{inj} est le vecteur des puissances injectées.

Ainsi, si l'on veut comparer les modélisations SEA-like et SEA, il faut, dans un premier temps, calculer la matrice SEA-like dans le domaine des hautes fréquences, et, dans un deuxième temps, inverser la matrice SEA pour la rendre homogène à une matrice de coefficients d'influence énergétique.

$$\begin{pmatrix} A_{ss} & A_{sa} \\ A_{as} & A_{aa} \end{pmatrix} \xrightarrow{f \rightarrow HF} \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \eta_{ss} + \eta_{sa} & -\eta_{sa} \\ -\eta_{as} & \eta_{aa} + \eta_{as} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.97)$$

3.6.2 Calcul de la matrice SEA

Pour déterminer la matrice SEA du système couplé plaque-cavité, trois coefficients doivent être déterminés : les deux coefficients de perte interne η_s et η_a , et le facteur de perte par couplage η_{sa} . η_{as} est alors calculé grâce à la relation de réciprocité qui relie les deux facteurs de perte par couplage et la densité modale des deux sous-systèmes.

Les formulations du logiciel SEA-Lascar, développé au sein d'EADS, sont utilisées pour le calcul des facteurs de perte par couplage. Il s'agit des formulations de Maidanik [66], corrigées par Price et Crocker [74] et reprises dans la référence [82], qui donnent le coefficient de rayonnement σ d'une plaque rectangulaire en milieu infini selon que la fréquence est inférieure ou supérieure à la fréquence de coïncidence. Le facteur de perte par couplage est donné par :

$$\eta_{sa} = \frac{\rho_0 c_0}{\omega \rho_s} \sigma \quad (3.98)$$

Les facteurs η_s et η_a sont calculés d'après les temps de réverbérations de la structure et la cavité :

$$\eta_i = \frac{2.2}{f T_{r,i}} \quad (3.99)$$

l'indice i désignant la structure ou la cavité.

Le système considéré est constitué d'une plaque d'aluminium couplée avec une cavité. La plaque est de dimensions $(0.868m, 1.15m, 5.8mm)$. La cavité est de dimensions $(0.868m, 1.15m, 1m)$. L'amortissement de la plaque et de la cavité est donné par leurs temps de réverbération : $T_s = 0.4 s$ pour la plaque et $T_a = 1 s$ pour la cavité.

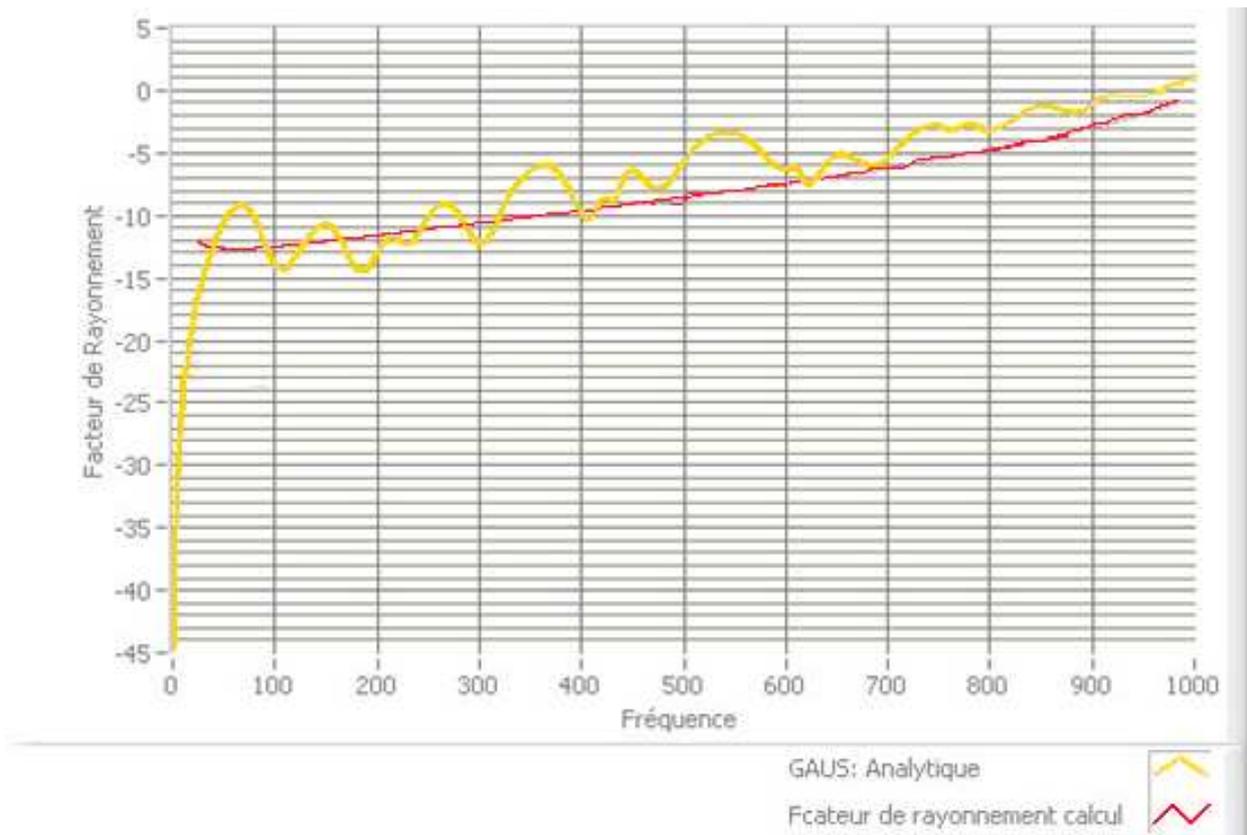


FIGURE 3.8 – Facteur de rayonnement d'une plaque rectangulaire de $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ et de 10 mm d'épaisseur, calculée avec la formulation de G. Maidanik et comparée avec des résultats issus de calculs effectués au sein du laboratoire GAUS de Sherbrooke et présentés dans la référence [43]

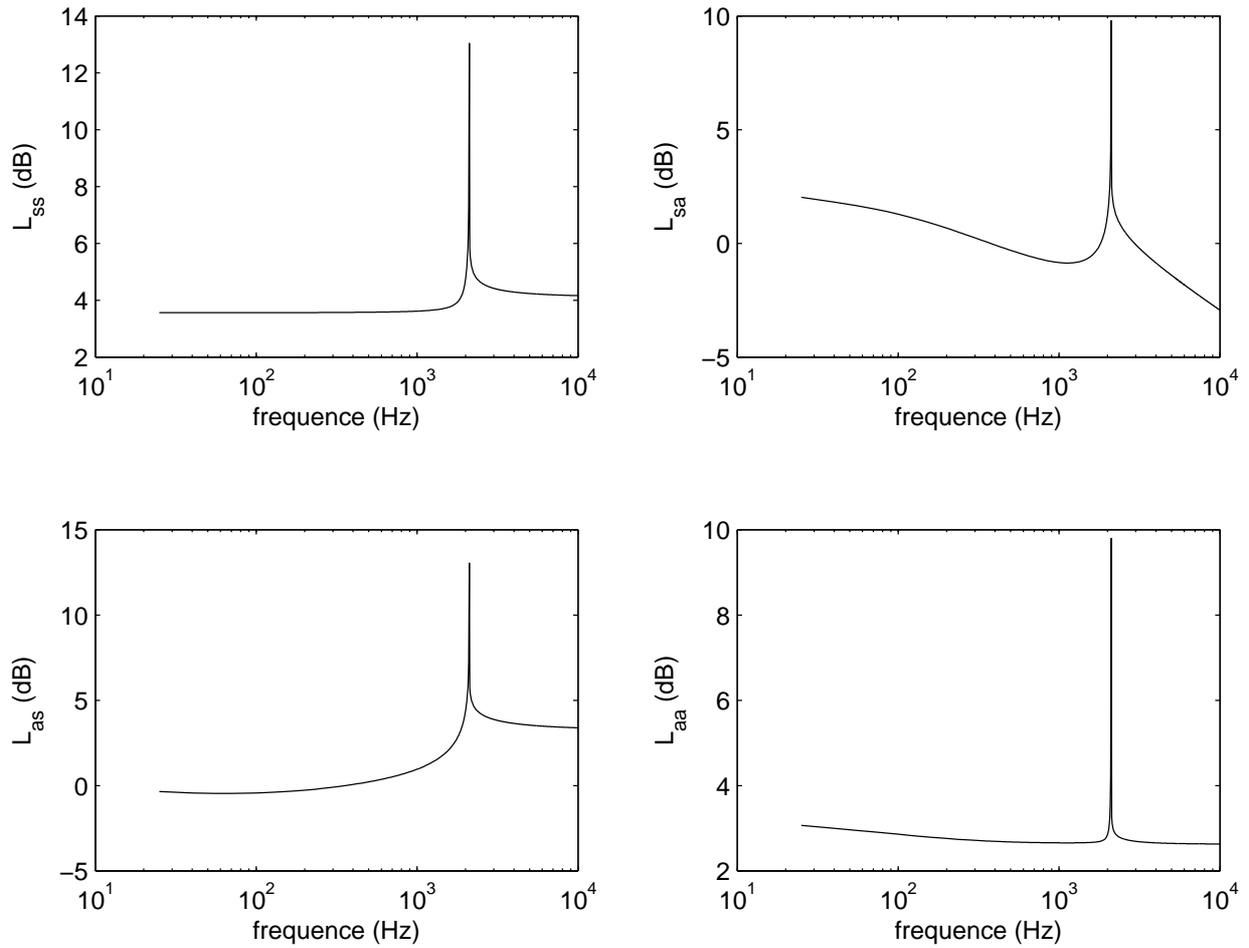


FIGURE 3.9 – Coefficients de la matrice SEA du système couplé plaque-cavité

La figure 3.9 présente les coefficients SEA du système couplé plaque-cavité. Les quatre coefficients présentent des pics à la fréquence de coïncidence $f_c = 2110 \text{ Hz}$. A cette fréquence, la fréquence de coïncidence des modes de plaque excités est égale à leur fréquence de résonance : les modes excités rayonnent. Les pics correspondant à la coïncidence de la plaque sont très marqués car la cavité est considérée comme un milieu infini.

3.6.3 Etude de la convergence

Comme il est indiqué dans le paragraphe 3.1.1, le domaine des moyennes fréquences commence à $f_{LM} = 800 \text{ Hz}$ et le domaine des hautes fréquences commence à $f_{MH} = 2000 \text{ Hz}$ pour le système couplé plaque-cavité, dont les dimensions sont indiquées dans le paragraphe précédent.

Les énergies moyennées en SEA-like ont été calculées à partir de résultats pour des fréquences pures discrètes puis moyennées par bande de tiers d'octave.

Sur la figure 3.10, on a tracé les coefficients d'influence énergétique obtenus par la modélisation SEA-like du système couplé plaque-cavité et sa modélisation SEA.

Dans le domaine des hautes fréquences, les coefficients SEA-like sont très proches des coefficients SEA. Par contre, on n'observe pas de pic de rayonnement sur les coefficients SEA-like. En effet, le

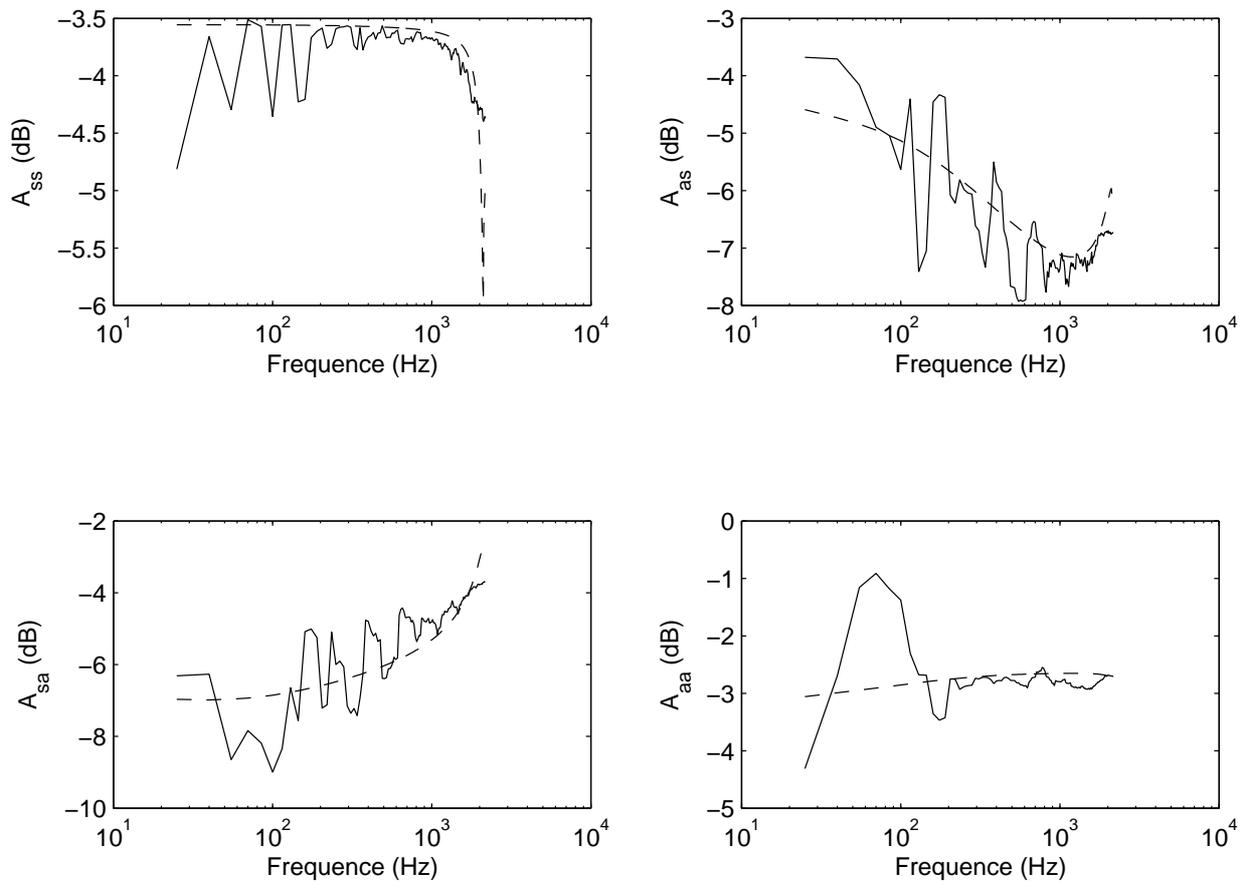


FIGURE 3.10 – CIE calculés avec la méthode SEA-like (—) et la méthode SEA (---)

calcul SEA-like considère que la cavité est un milieu fini. Par conséquence, le couplage énergétique entre la plaque et la cavité ne présente pas de maximum à la fréquence critique, comme on peut l'observer sur le modèle SEA, où la cavité est traitée comme un milieu infini du point de vue de la plaque.

Dans le domaine des basses fréquences, on observe des oscillations importantes sur les courbes correspondant à la modélisation SEA-like, contrairement à ce que l'on peut observer sur la courbe SEA. En effet, le recouvrement modal est peu important dans ce domaine fréquentiel. Le comportement énergétique du système couplé plaque-cavité présente alors un caractère modal marqué, contrairement aux hautes fréquences. L'hypothèse d'équiprobabilité modale utilisée lors de l'application de la méthode SEA n'est plus valable dans ce domaine fréquentiel, et la méthode SEA n'est alors pas valide. Les méthodes SEA et SEA-like ne sont donc pas comparables dans le domaine des basses fréquences.

Ces oscillations s'atténuent dans le domaine des moyennes fréquences, entre 800 et 2000 Hz, quand le recouvrement modal augmente. Le comportement modal de la cavité est alors moins important. Finalement, dans le domaine des hautes fréquences, les courbes SEA-like convergent vers les courbes SEA.

3.7 Conclusion

3.7.1 Bilan

Dans ce chapitre, une démarche basée sur l'analyse par couplage modal a été utilisée pour calculer la matrice SEA-like du système couplé plaque-cavité à partir de son comportement énergétique. Le cas présenté ici, bien que particulier, peut être étendu à différents type de structures ou de cavités si les modes de la structure et la cavité découplés sont calculés.

La matrice SEA-like du système plaque-cavité a ensuite été comparée à la matrice des coefficients d'influence énergétique calculée avec la méthode SEA. La SEA donne un modèle pertinent du système couplé en hautes fréquences, ce qui permet d'estimer son comportement énergétique dans ce domaine fréquentiel.

Le modèle SEA-like converge vers la modélisation SEA en hautes fréquences. Par contre, le pic correspondant à la fréquence de coïncidence observé sur le modèle SEA n'est pas observable sur le modèle SEA-like, car la cavité, décrite par une analyse modale, est considérée comme un milieu fini dans la modélisation SEA-like. Ce phénomène de coïncidence, particulier aux modélisations hautes fréquences qui font l'hypothèse de milieux semi-infinis ou infinis, ne se retrouve donc pas dans la modélisation SEA-like, basée sur une analyse modale du système.

3.7.2 Extension de la méthode SEA-like

Or le comportement énergétique du système couplé peut se calculer en utilisant d'autres méthodes ou en simplifiant l'analyse par couplage modal, qui peut devenir coûteuse quand la fréquence augmente, à cause du fort recouvrement modal dans la cavité. Dans le chapitre 4, une méthode basée sur un modèle élément-fini et proche de la démarche utilisée par Mace dans les références [61,62] est présentée pour donner une autre modélisation SEA-like du système couplé.

Différentes méthodes, basées sur l'analyse par couplage modal, sont également présentées pour réduire la mémoire et le temps nécessaires au calcul de la matrice SEA-like. Finalement, une étude paramétrique est effectuée sur le modèle couplé afin d'étudier l'influence de la force de couplage

et des conditions aux limites de la plaque. Cette dernière étude, qui est effectuée à partir de la méthode de fonctions hiérarchiques étudiée au chapitre précédent, permet d'étendre la modélisation SEA-like à différents types de structures.

Chapitre 4

Approche SEA-like par éléments finis et étude paramétrique

4.1	Validation en basses et moyennes fréquences	98
4.1.1	Calcul SEA-like - Méthode par éléments-finis	98
4.1.2	Comparaison des approches par couplage modale et éléments-finis	98
4.2	Quelques simplifications de la matrice SEA-like	100
4.2.1	Réduction de la base modale du système couplé	100
4.2.2	Étude de l'influence des modes de plaque rayonnants	104
4.2.3	Couplage modal et <i>cross-coupling</i>	105
4.3	Influence des conditions aux limites de la structure	115
4.4	Influence du couplage	115
4.5	Conclusion	118
4.5.1	Bilan	118
4.5.2	De l'excitation <i>rain-on-the-roof</i> vers les excitations aérodynamiques	119

4.1 Validation en basses et moyennes fréquences

4.1.1 Calcul SEA-like - Méthode par éléments-finis

Dans les chapitres 2 et 3, le système couplé a été modélisé par une méthode de couplage modal. Mace, dans les références [61] et [62], propose une expression des coefficients SEA-like en fonction des modes du système complet. Dans ce chapitre, plutôt que d'utiliser directement les formules de B.R. Mace, nous allons modéliser le système couplé plaque-cavité par une méthode par éléments-finis, puis exciter la structure et la cavité avec une excitation de type *rain-on-the-roof*. Ce calcul servira de référence pour valider le calcul dans le domaine des basses et des moyennes fréquences développé dans le chapitre 3.

Pour cela, le système couplé plaque-cavité est modélisé à l'aide du logiciel par éléments finis COMSOL. L'amortissement dans la cavité, qui ne peut pas être traité de manière volumique, est remplacé par une impédance équivalente sur la surface des 5 parois fixes, en reprenant les formulations de la référence [44]. Les coefficients de la matrice SEA-like sont ensuite calculés directement à partir des énergies et des puissances injectées moyennées dans chacun des sous-systèmes.

L'approche est sensiblement la même que celle de la méthode locale : deux cas d'excitation sont étudiés, le cas d'excitation où seule la structure est excitée et le cas d'excitation où seule la cavité est excitée. L'excitation *rain-on-the-roof* de la structure et la cavité est modélisée par la superposition de plusieurs cas d'excitations ponctuelles, qui vérifient les conditions suivantes :

- les cas d'excitation sont indépendants les uns des autres, ce qui permet d'assurer la décorrélation fréquentielle de l'excitation *rain-on-the-roof*
- les différentes excitations ponctuelles sont réparties de manière aléatoires sur la structure et dans la cavité, ce qui assure la décorrélation spatiale de l'excitation.

Comme pour l'excitation de la cavité présentée dans le paragraphe 3.4, une étude de convergence est effectuée sur la structure et la cavité pour déterminer le nombre de points d'excitations à utiliser pour modéliser l'excitation *rain-on-the-roof*. 6 points sont utilisés pour exciter la structure et la cavité.

Pour chacun des cas d'excitations ponctuelles, les énergies dans les deux sous-systèmes ainsi que la puissance injectée dans le système couplé sont calculées. Les énergies sont ensuite moyennées en fréquence et sur les différents cas d'excitation. Les coefficients de la matrice SEA-like sont obtenus par division des moyennes des énergies et des puissances injectées.

4.1.2 Comparaison entre les approches par couplage modale et éléments-finis de calcul de la matrice SEA-like

La figure 4.1 compare les coefficients d'influence énergétique calculés par les deux approches de la méthode SEA-like : l'approche locale, calculée à partir de la méthode de couplage modale et l'approche globale, calculée à partir du modèle par éléments finis, qui constitue le modèle de référence. Les deux méthodes donnent des résultats proches, voir même très proches dans le cas de l'excitation de la structure (coefficients A_{ss} et A_{as}).

On remarque cependant quelques différences entre les deux méthodes. En effet, le modèle par couplage modal du système couplé plaque-cavité, basé sur les modes de chacun des sous-systèmes découplés, ne modélise pas de manière exacte le couplage entre la structure et la cavité. La pression dans la cavité est décrite comme une somme des modes de cavité de paroi rigide. Ainsi, la vitesse du fluide calculée par la pression dans la cavité est inexacte au niveau de la structure : elle est décrite comme la limite d'une somme de vitesses nulles au voisinage de la structure.

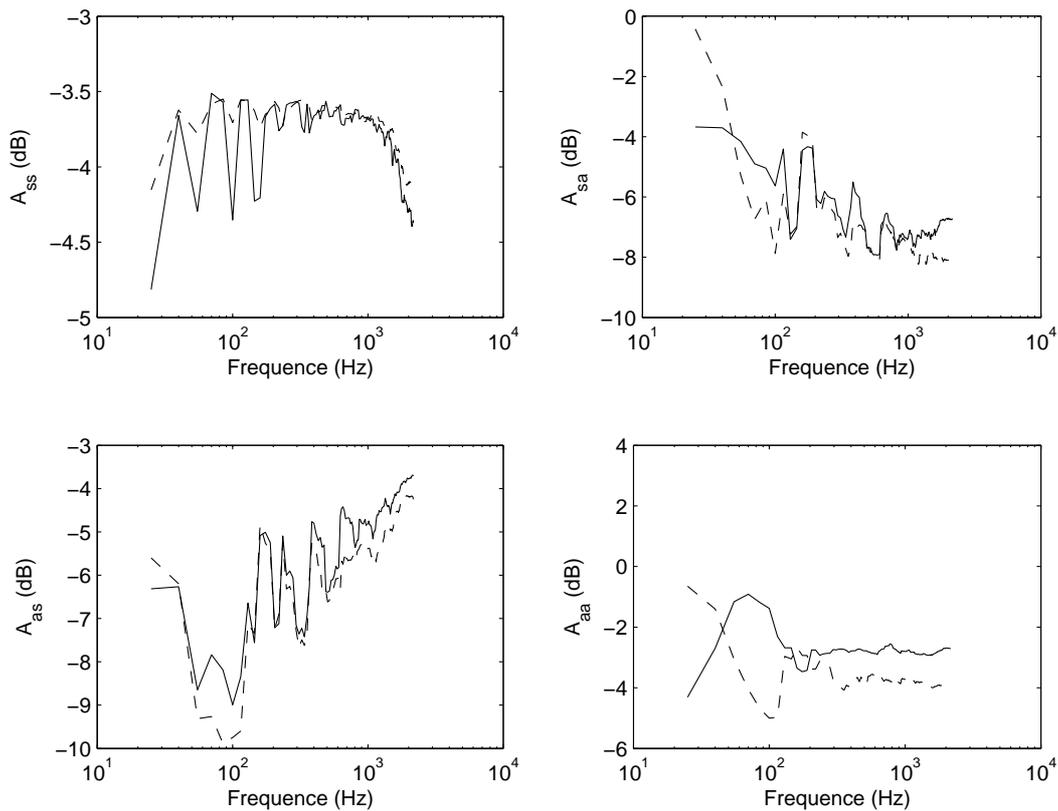


FIGURE 4.1 – Coefficients d’influence énergétique calculés avec la méthode SEA-like par approche par couplage modal (—) et par approche éléments-finis (---)

La similitude des deux calculs permet de valider l’utilisation de la modélisation réduite pour calculer la matrice SEA-like du système couplé.

Hong et Kim ont montré que, dans le cas d’un système couplé fluide-structure unidimensionnel (fluide dans un tube couplé à un système masse-ressort), une infinité de modes *in vacuo* de la structure et de la cavité découplées permettent de modéliser de manière exacte le système [33]. Dans le cas de systèmes bi- et tridimensionnels [34], il est montré que plus le couplage entre la structure et le fluide est fort, plus les modes du système couplé sont différents des modes de chacun des sous-systèmes découplés. Si le couplage entre la structure et le fluide est fort, la base modale décrivant le système doit être constituée d’un grand nombre de modes découplés pour que la réponse converge.

Ici, le couplage entre la structure et la cavité est faible. Le modèle par couplage modal a donc besoin de moins de modes pour converger vers le modèle par éléments-finis, comme il est montré dans le paragraphe suivant.

TABLE 4.1 – Temps de calcul de la modélisation du système couplé en fonction de la largeur de bande autour de l'excitation dans laquelle les modes de plaque sont pris en compte

Largeur de bande	modèle complet	100 Hz	50 Hz	25 Hz	12 Hz
Temps de calcul	865 s	96 s	86 s	70 s	46 s

4.2 Quelques simplifications de la matrice SEA-like

4.2.1 Réduction de la base modale du système couplé

4.2.1.1 Excitation de la structure

Dans le domaine des hautes fréquences, seuls les modes excités - dont la fréquence propre est dans la bande d'excitation - sont pris en compte dans la modélisation des différents sous-systèmes. Afin d'étudier l'influence des modes non-excités sur le comportement énergétique du système couplé plaque-cavité, la modélisation SEA-like du système est modifiée de telle manière que, pour une fréquence d'excitation donnée, seuls les modes situés dans une bande fréquentielle entourant cette fréquence sont considérés.

La taille du système matriciel est de ce fait nettement réduite et permet de diminuer les temps de calcul de la matrice SEA-like. On calcule alors les coefficients SEA-like en prenant en compte tous les modes de cavité et de plaque dont les fréquences sont situées dans un intervalle de 100 Hz, 50 Hz, 25 Hz ou 12 Hz autour des fréquences de résonance (voir figures 4.2 à 4.5). En basses fréquences, ces bandes de tiers d'octave sont trop étroites pour y assurer la présence d'un mode, ce qui entraîne des perturbations dans le calcul du coefficient SEA-like.

Le tableau 4.1 donne les temps nécessaires aux calculs des quatre modélisations ci-dessus, comparées au modèle complet, c'est-à-dire à une modélisation utilisant 189 modes de plaque et 2563 modes de cavité, suffisamment pour que le calcul converge.

On remarque bien évidemment que, moins on prend en compte de modes de plaque, plus les différences entre le modèle réduit et le modèle de référence sont importantes. Cependant, les différences sont plus marquées sur les niveaux énergétiques dans la cavité. Cette différence ne peut venir que du couplage entre la structure et la cavité, car, dans les quatre modélisations, le nombre de modes de cavité considérés est le même. Cela peut s'expliquer par le fait que certains modes de plaque, qui ne sont pas dominants dans la réponse énergétique de la structure, sont par contre mieux couplés avec la cavité que les modes dominants. Ainsi, lorsque ces premiers modes ne sont plus pris en compte dans le modèle, le couplage entre la structure et la cavité est sous-estimé, et il en va de même pour l'énergie dans la cavité.

Les figures 4.6 et 4.7 montrent les niveaux énergétiques dans le système couplé pour des modélisations prenant en compte tous les modes de plaque et - comme dans le cas précédent - les modes de cavité situés dans une certaine bande de fréquence autour de la fréquence d'excitation. On constate alors que, lorsque la structure est excitée, la réduction des modes de cavité a beaucoup moins d'influence que la réduction des modes de plaque : la prise en compte des modes de cavité jusqu'à 25 Hz autour de la fréquence d'excitation ne modifie pas de manière notable les niveaux énergétiques du système couplé. De plus, à cause de la densité modale élevée dans la cavité, le fait de réduire le nombre de modes de cavité implique une diminution du temps de calcul plus importante que le fait de réduire le nombre de modes de plaque (voir tableau 4.2).

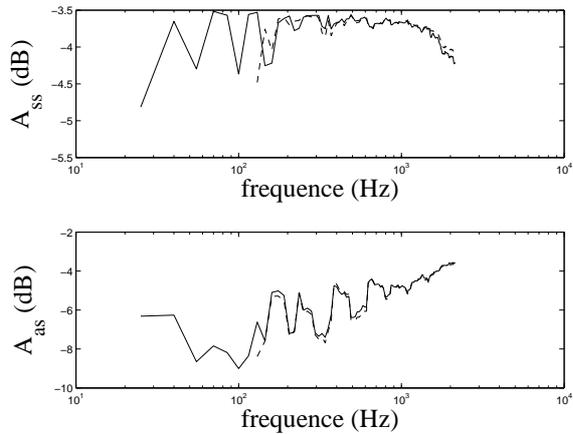


FIGURE 4.2 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de plaque dans une bande de fréquence de 100 Hz autour de la fréquence d’excitation : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de plaque / (–) coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque excités uniquement

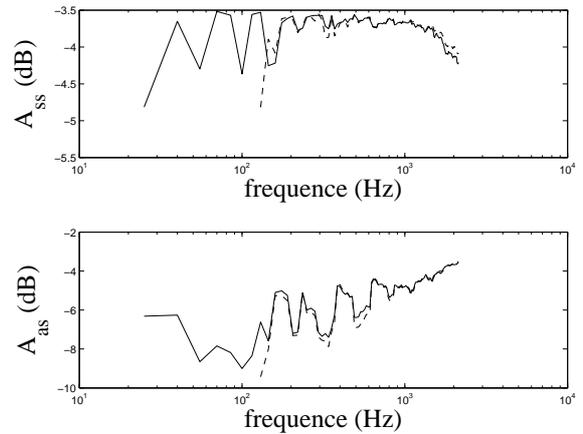


FIGURE 4.3 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de plaque dans une bande de fréquence de 50 Hz autour de la fréquence d’excitation : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de plaque / (–) coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque excités uniquement

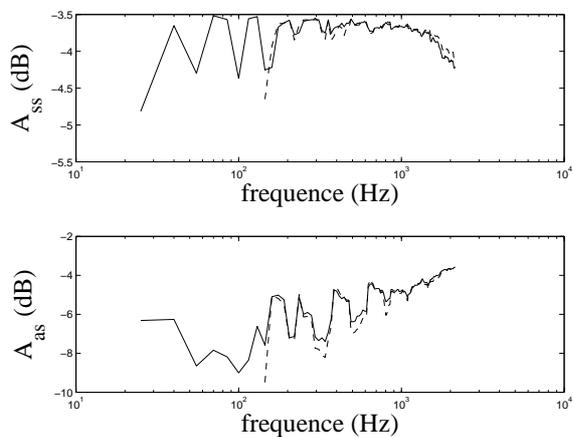


FIGURE 4.4 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de plaque dans une bande de fréquence de 25 Hz autour de la fréquence d’excitation : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de plaque / (–) coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque excités uniquement

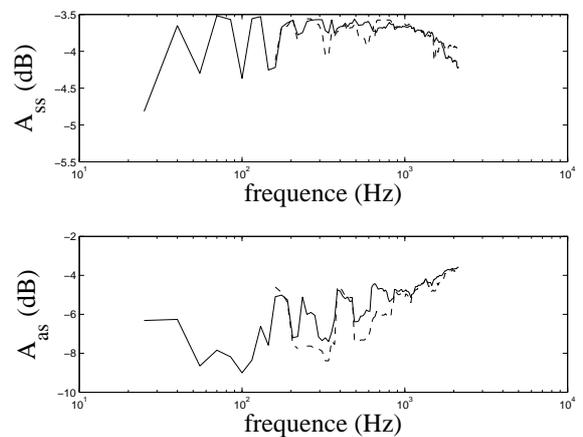


FIGURE 4.5 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de plaque dans une bande de fréquence de 12 Hz autour de la fréquence d’excitation : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de plaque / (–) coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque excités uniquement

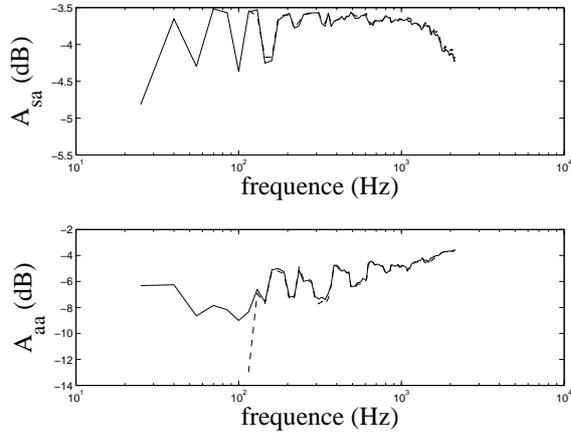


FIGURE 4.6 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de cavité dans une bande de fréquence de 25 Hz autour de la fréquence d'excitation : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de cavité / (– –) coefficients SEA-like calculés avec les modes de cavité proches de la fréquence d'excitation

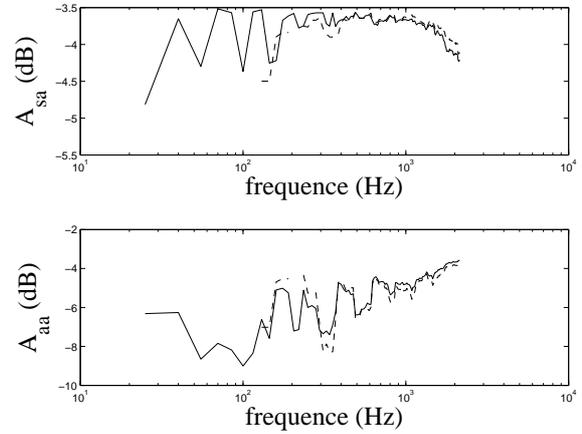


FIGURE 4.7 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de cavité dans une bande de fréquence de 12 Hz autour de la fréquence d'excitation : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de cavité / (– –) coefficients SEA-like calculés avec les modes de cavité proches de la fréquence d'excitation

TABLE 4.2 – Temps de calcul de la modélisation du système couplé en fonction de la largeur de bande autour de l'excitation dans laquelle les modes de cavité sont pris en compte

Largeur de bande	modèle complet	200 Hz	100 Hz	50 Hz	25 Hz	12 Hz
Temps de calcul	865 s	18 s	14 s	12 s	11 s	10 s

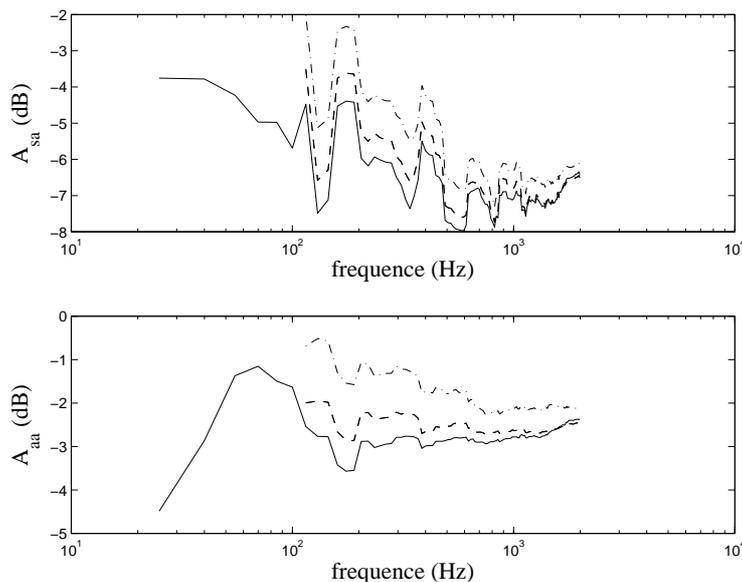


FIGURE 4.8 – Coefficients SEA-like A_{sa} et A_{aa} : coefficients SEA-like calculés avec les modes de cavité dans une bande de fréquence de 400 Hz (---) et 800 Hz (-.-) autour de la fréquence d'excitation et coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de cavité (-)

4.2.1.2 Excitation de la cavité

La même simplification que précédemment est appliquée à la modélisation SEA-like lorsque la cavité est excitée. Dans un premier temps, seuls les modes résonants de la cavité, situés dans une certaine bande fréquentielle autour de la fréquence de résonance, sont considérés. La figure 4.8 présente les coefficients A_{sa} et A_{aa} pour des modes de cavité compris dans des bandes de 400 Hz et 800 Hz autour de chaque fréquence de résonance.

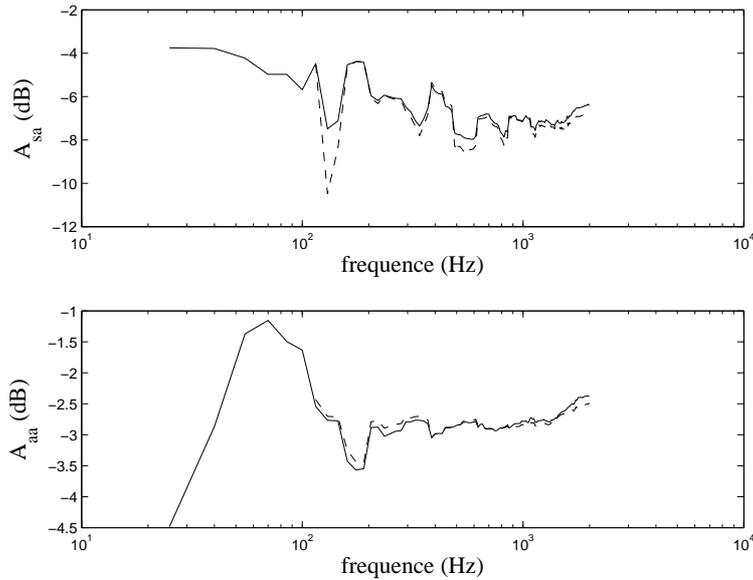
Contrairement au cas d'excitation de la structure, cette simplification modifie de manière importante la modélisation du système et n'est plus du tout pertinente, malgré l'importance de la plage fréquentielle prise en compte. Cela est dû au fait que le couplage direct entre modes de cavité est important (le cas du couplage indirect est différent, comme on le verra plus tard). En basses fréquences, la densité modale est peu importante. La négligence d'un mode a donc une influence importante sur le comportement dynamique. La densité modale augmente avec la fréquence et suffisamment de modes sont excités pour que la négligence des modes dont la fréquence de résonance est loin de la fréquence d'excitation soit négligeable. Ainsi, sur la figure 4.8, la différence entre le modèle réduit et le modèle de référence diminue quand la fréquence augmente.

Si l'on compare ce cas d'excitation avec le cas d'excitation de la structure (figure 4.7), on remarque que le couplage fréquentiel des modes de cavité a peu d'influence sur le comportement du système dans le cas d'excitation de la structure. En effet, les modes de cavité sont alors excités par les modes de structure, et c'est le mécanisme de couplage intermodal, ou *cross-coupling* qui est prédominant par rapport au couplage fréquentiel direct entre modes de cavité. La négligence des modes de cavité a donc moins d'importance lorsque les modes de cavité ne sont pas directement excités.

La figure 4.9 présente une modélisation prenant en compte tous les modes de cavité et les modes de structure situés dans une bande fréquentielle de 25 Hz autour de la fréquence d'excitation. Ici,

TABLE 4.3 – Temps de calcul de la modélisation du système couplé en fonction de la largeur de bande autour de l'excitation dans laquelle les modes de plaque sont pris en compte

Largeur de bande	modèle complet	100 Hz	25 Hz
Temps de calcul	4689 s	3602 s	3515 s

FIGURE 4.9 – Coefficients SEA-like A_{sa} et A_{aa} : coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque dans une bande de fréquence de 25 Hz (---) autour de la fréquence d'excitation et coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de cavité (—)

le modèle réduit donne une modélisation très pertinente du système. Deux faits viennent expliquer cette pertinence : comme l'a montré le cas de l'excitation de la structure, la négligence des modes de structure éloignés de la fréquence d'excitation n'a que peu d'influence sur le comportement dynamique du système. De plus, ici, les modes de plaque sont excités indirectement, donc l'influence des modes de plaque non excités est encore plus faible. Cependant, comme la taille de la base modale de la cavité est prépondérante devant celle de la structure, la réduction de la base modale de la structure entraîne une faible diminution des temps de calcul (voir tableau 4.2).

4.2.2 Étude de l'influence des modes de plaque rayonnants

Une structure couplée à un espace infini rayonne dans cet espace. Ce rayonnement est maximum lorsque la fréquence d'excitation est égale à la fréquence critique de la plaque. Ce rayonnement est observable sur le modèle SEA du système couplé plaque-cavité (voir figure 3.9). Lorsque la plaque est de dimensions finies, on peut alors calculer un coefficient de rayonnement modal, qui présentera un maximum lorsque la projection de la longueur d'onde acoustique sur la plaque est égale à la longueur d'onde du mode considéré. Des expressions du coefficient de rayonnement modal ont été calculées notamment par Leppington [56] et Wallace [86].

La figure 4.10 compare l'efficacité de rayonnement du mode (7,8) de la plaque couplée avec

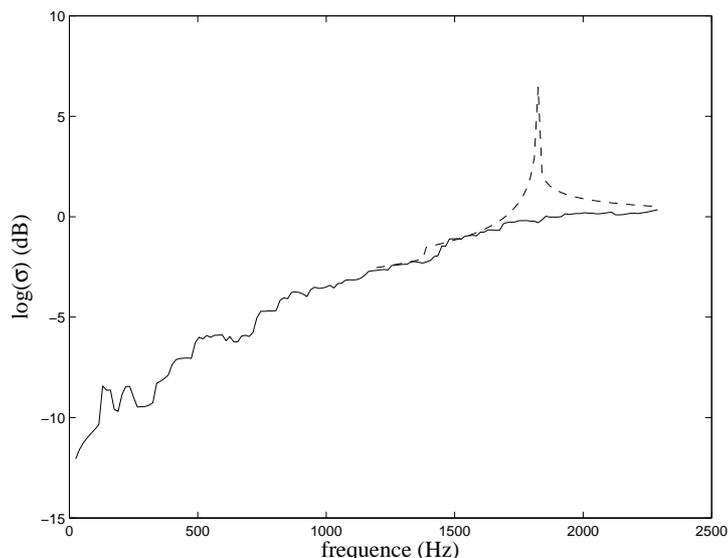


FIGURE 4.10 – Comparaison de l’efficacité de rayonnement du mode (7,8) de la plaque couplée avec un milieu infini (---) et du terme équivalent de la plaque couplée avec la cavité (—)

un milieu infini et l’expression équivalente lorsque la plaque est couplée avec la cavité. Le système couplé est modélisé par couplage modal. L’efficacité de rayonnement de la plaque en milieu infini a été calculée avec les expressions de la référence [56]. Lorsque la plaque est couplée avec un milieu fini, on n’observe pas de maximum sur l’efficacité de rayonnement, comme c’est le cas pour le couplage avec un milieu infini. C’est également le cas pour le modèle par éléments finis présenté en début de ce chapitre. On retrouve ici l’absence de pic de rayonnement sur les modélisations SEA-like de la plaque couplée avec la cavité, notamment sur les coefficients SEA-like du système couplé comparés avec un calcul SEA de la figure 3.10.

La figure 4.11 compare le calcul de référence des coefficients SEA-like, avec un calcul ne prenant en compte que les modes de plaque excités et un calcul prenant en compte en plus les modes de plaque dont le rayonnement en milieu infini est maximum. On constate que, par rapport au calcul ne contenant que les modes excités, le calcul prenant en compte les modes excités et rayonnants donne les mêmes niveaux énergétiques. Ainsi, les modes dont la longueur d’onde est égale à la longueur d’onde acoustique, qui rayonnent en milieu acoustique infini et participent de manière importante à l’échange énergétique entre la structure et le milieu infini, n’ont pas un rôle prépondérant dans le cas d’une plaque couplée avec une cavité.

4.2.3 Couplage modal et *cross-coupling*

Le mécanisme de *cross-coupling*, décrit par Pan dans la référence [81], peut être structural ou acoustique : on parle de *cross-coupling* structural pour le couplage entre modes de plaque *via* les modes de cavité, et de *cross-coupling* acoustique pour le couplage entre modes de cavité *via* les modes de plaque.

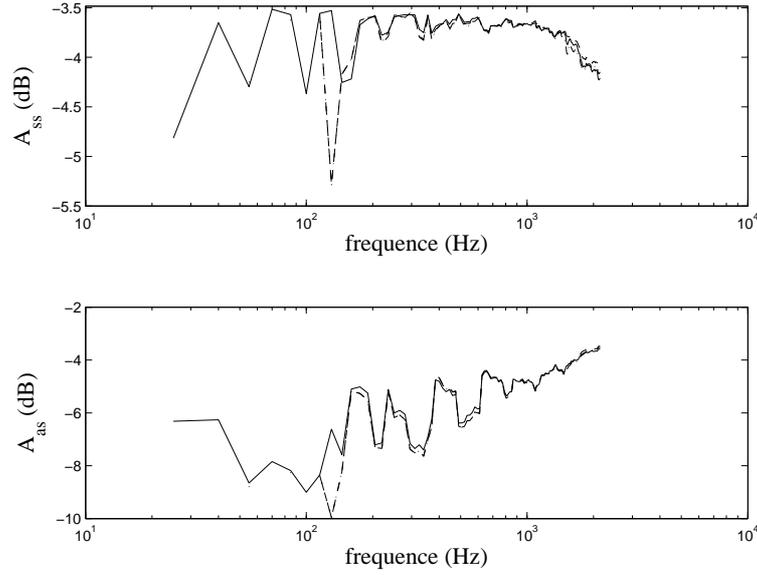


FIGURE 4.11 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} calculés avec les modes de plaque excités et rayonnants : (—) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes de plaque / (---) coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque excités / (-.-) coefficients SEA-like calculés avec les modes de plaque excités et rayonnants

4.2.3.1 Expressions analytiques

Afin d'étudier l'influence du *cross-coupling* structural ou acoustique sur le comportement du système couplé, considérons le système couplé plaque-cavité, où la plaque est excitée. Les équations modales du système sont données par le système matriciel (2.25), qui peut s'exprimer de la façon suivante pour le j -ième mode de plaque et le i -ième mode de cavité :

$$V_j = Q_{sj} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \chi_{sj}^{-1} \sum_i B_{i,j} P_i \quad (4.1)$$

$$P_i = \rho_0 c_0 \chi_{ai}^{-1} \sum_k B_{i,k} V_k \quad (4.2)$$

Les vitesses et les pressions modales peuvent alors être exprimées en fonction des seules vitesses modales. L'injection de l'équation (4.2) dans l'équation (4.1) permet d'exprimer la vitesse modale V_j en fonction du terme de force généralisée Q_{sj} et des vitesses V_k ($k \neq j$) :

$$V_j = V_j|_{scc}^d + V_j|_{scc}^c \quad (4.3)$$

où $V_j|_{scc}^d$ est la contribution du terme de force généralisée :

$$V_j|_{scc}^d = \frac{\chi_{sj} Q_{sj}}{\chi_{sj} + \sum_i B_{i,j}^2 \chi_{ai}^{-1}} \quad (4.4)$$

et $V_j|_{scc}^c$ est la contribution des autres modes de plaque :

$$V_j|_{scc}^c = - \sum_{k \neq j} V_k \frac{\sum_i B_{i,j} B_{i,k} \chi_{ai}^{-1}}{\chi_{sj} + \sum_i B_{i,j}^2 \chi_{ai}^{-1}} \quad (4.5)$$

On peut écrire de même les expressions de $P_i|_{scc}^d$ et $P_i|_{scc}^c$, qui sont obtenues à partir des injections respectives des expressions de $V_j|_{scc}^d$ et $V_j|_{scc}^c$ dans l'équation (4.2). Les termes correspondant à l'excitation directe - d'exposant d - correspondent aux expressions que l'on obtiendrait si les modes de plaque n'étaient pas couplés entre eux, tandis que les termes correspondant à l'excitation indirect - d'exposant c - contiennent la contribution du couplage entre les modes de plaque. Ces expressions permettent d'étudier l'influence du mécanisme de *cross-coupling* structural.

Le mécanisme de *cross-coupling* acoustique est décrit de la même manière que ci-dessus, en exprimant cette fois-ci les vitesses et les pressions modales en fonction des seules pressions modales : cela permet de séparer les termes d'excitation directe des termes excités par les modes de cavité. Ces termes sont obtenus en injectant l'équation (4.1) dans l'équation (4.2). On obtient alors :

$$P_i|_{acc}^d = \rho_0 c_0 \frac{\sum_j Q_{s,j} B_{i,j}}{\chi_{ai} + \sum_j B_{i,j}^2 \chi_{sj}^{-1}} \quad (4.6)$$

$$P_i|_{acc}^c = - \sum_{k \neq i} P_k \frac{\sum_j B_{i,j} B_{k,j} \chi_{sj}^{-1}}{\chi_{ai} + \sum_j B_{i,j}^2 \chi_{sj}^{-1}} \quad (4.7)$$

Les termes $V_j|_{acc}^d$ et $V_j|_{acc}^c$ s'expriment alors de la façon suivante :

$$V_j|_{acc}^d = Q_{sj} - \frac{1}{\rho_0 c_0} \chi_{sj}^{-1} \sum_i B_{i,j} P_i|_{acc}^d \quad (4.8)$$

$$V_j|_{acc}^c = - \frac{1}{\rho_0 c_0} \chi_{sj}^{-1} \sum_i B_{i,j} P_i|_{acc}^c \quad (4.9)$$

Pour une excitation de la structure, les contributions des différents termes en fonction du mécanisme de *cross-coupling* considéré sont résumées dans le tableau suivant :

	Vitesse modale	Pression modale
SCC direct	excitation directe	excitation par les modes de plaque directement excités
SCC couplé	excitation par les autres modes de plaque	excitation par les modes de plaque indirectement excités
ACC direct	excitation directe et excitation par les modes de cavité directement excités	excitation directe
ACC couplé	excitation par les modes de cavité indirectement excités	excitation par les autres modes de cavité

La description des mécanismes de *cross-coupling* structural et acoustique pour une excitation de la cavité s'effectue de la même manière que pour l'excitation de la plaque. D'après l'équation matricielle (2.30), le j -ième mode de plaque et le i -ième mode de cavité s'expriment :

$$V_j = - \frac{1}{\rho_0 c_0} \chi_{sj}^{-1} \sum_i B_{i,j} P_i \quad (4.10)$$

$$P_i = Q_{ai} + \rho_0 c_0 \chi_{ai}^{-1} \sum_k B_{i,k} V_k \quad (4.11)$$

De même que pour l'excitation de la plaque, le mécanisme de *cross-coupling* structural est décrit en exprimant les vitesses et les expressions modales en fonction des seules vitesses modales. On obtient alors :

$$V_j|_{scc}^d = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \frac{\sum_i B_{i,j} Q_{ai}}{\chi_{sj} + \sum_i B_{i,j}^2 \chi_{ai}^{-1}} \quad (4.12)$$

$P_i|_{scc}^d$, qui décrit le comportement de la pression modale lorsque le couplage entre modes de plaque est négligé, s'écrit alors :

$$P_i|_{scc}^d = Q_{ai} + \rho_0 c_0 \chi_{ai}^{-1} \sum_j B_{i,j} V_j|_{scc}^d \quad (4.13)$$

Pour le mécanisme de *cross-coupling* acoustique, on obtient :

$$P_i|_{acc}^d = \frac{\chi_{ai} Q_{ai}}{\chi_{ai} + \sum_j B_{i,j}^2 \chi_{sj}^{-1}} \quad (4.14)$$

L'expression de $V_j|_{acc}^d$ est donnée par l'injection de $P_i|_{acc}^d$ dans l'équation (4.10).

Les termes $V_j|_{scc}^c$, $P_i|_{scc}^c$, $V_j|_{acc}^c$ et $P_i|_{acc}^c$, qui expriment les vitesses et les pressions modales en fonction du couplage intermodal structural ou acoustique, sont identiques à ceux calculés pour l'excitation de la structure. En effet, les termes de forces généralisées n'interviennent pas dans leurs expressions.

4.2.3.2 Influence des temps de réverbération sur les mécanismes de *cross-coupling*

Les figures 4.22 à 4.25 montrent les coefficients SEA-like obtenus pour différentes configurations et pour différentes modélisations du système couplé plaque-cavité : des modélisations sans *cross-coupling* structural et des modélisations sans *cross-coupling* acoustique.

L'effet de la négligence ou non des différents mécanismes de *cross-coupling* sur le comportement énergétique du système peut s'estimer en regardant le comportement des contributions indirectes des vitesses et des pressions modales ($V_j|_{scc}^d$ et $P_i|_{scc}^d$) par rapport aux contributions directes ($V_j|_{scc}^c$ et $P_i|_{scc}^c$). Pour le mécanisme de *cross-coupling* structural, le rapport des différentes contributions à la vitesse modale lorsque la structure est excitée peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{V_j|_{scc}^c}{V_j|_{scc}^d} = \frac{-\sum_{k \neq j} V_k \sum_i B_{i,j} B_{i,k} \chi_{ai}^{-1}}{\chi_{sj} Q_{sj}} \quad (4.15)$$

On constate que l'influence du *cross-coupling* structural sur la vitesse modale dépend des caractéristiques modales de la cavité données par χ_{ai} et du couplage spatial entre les modes de plaque et de cavité, données par $B_{i,j}$ et $B_{i,k}$. De plus, comme les expressions de $P_i|_{scc}^c$ et $P_i|_{scc}^d$ dépendent de $V_j|_{scc}^c$ et $V_j|_{scc}^d$, il en va de même pour la pression modale dans la cavité. Ainsi, l'erreur due à la négligence du mécanisme de *cross-coupling* structural sur la modélisation du système plaque-cavité dépendra fortement des propriétés de la cavité.

Pour le mécanisme de *cross-coupling* acoustique, le rapport de $P_i|_{acc}^c$ et $P_i|_{acc}^d$ donne une expression similaire à celle donnée par l'équation (4.15) :

$$\frac{P_i|_{acc}^c}{P_i|_{acc}^d} = \frac{1 - \sum_{k \neq i} P_k \sum_j B_{i,j} B_{k,j} \chi_{sj}^{-1}}{\rho_0 c_0 \sum_j Q_{s,j} B_{i,j}} \quad (4.16)$$

Dans ce cas, la contribution du *cross-coupling* acoustique à la pression modale dépendra des propriétés modales de la plaque et du couplage spatial entre modes de plaque et modes de cavité. Il en

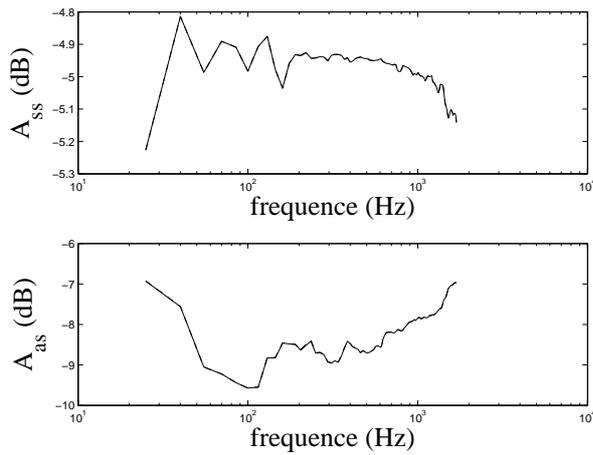


FIGURE 4.12 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=0.1$ s et $T_p=0.1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling structural

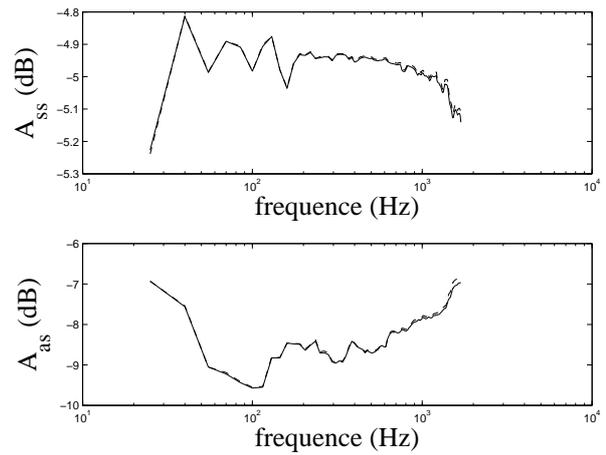


FIGURE 4.13 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=0.1$ s et $T_p=0.1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

va de même pour la vitesse modale. L'erreur due à la négligence du mécanisme de *cross-coupling* acoustique sur la modélisation du système plaque-cavité dépendra alors fortement des propriétés de la plaque.

Pour illustrer ce phénomène, on étudie l'influence des temps de réverbérations de la plaque et la cavité sur les différents mécanismes de *cross-coupling*. Les figures 4.12, 4.14, 4.16 et 4.18 montrent l'influence du *cross-coupling* structural sur les coefficients SEA-like du système couplé plaque-cavité pour deux valeurs de T_a différentes et deux valeurs de T_p différentes. Lorsque $T_a=0.1$ s et $T_p=0.1$ s, la modélisation de référence et la modélisation sans *cross-coupling* structural ne montrent pas de différences remarquables sur les CIE du système couplé. C'est également le cas lorsque $T_p=1$ s, T_a restant égal à 0.1 s. Par contre, lorsque $T_a=1$ s, on observe une légère différence entre les deux modélisations sur le coefficient A_{as} , qui décrit le comportement énergétique dans la cavité. Cette différence reste sensiblement la même lorsque T_p varie (figures 4.14 et 4.18).

Les figures 4.13, 4.15, 4.17 et 4.19 montrent l'influence du *cross-coupling* acoustique sur les coefficients SEA-like du système couplé pour les deux valeurs de T_p et T_a étudiées précédemment. On remarque cette fois-ci, que la variation de T_a n'entraîne pas de différences notables sur l'erreur produite lorsque le *cross-coupling* acoustique est négligé (figures 4.13 et 4.15). Par contre, lorsque T_p varie, la négligence du *cross-coupling* acoustique influe beaucoup sur la réponse énergétique du système couplé. Cette erreur est d'ailleurs bien plus importante que dans le cas de la négligence du *cross-coupling* structural (voir les figures 4.18 et 4.19 pour $T_p=1$ s et $T_a=1$ s). L'erreur due à la négligence du *cross-coupling* structural ne devient significative que pour de hautes valeurs de T_a (voir figure 4.20).

Les mécanismes de *cross-coupling* structuraux et acoustiques dépendent donc des temps de réverbération de la plaque et la cavité. Lorsque T_a est faible, le *cross-coupling* structural a peu d'influence sur la modélisation du système, et lorsque T_p est faible, c'est le *cross-coupling* acoustique qui a peu d'influence. On remarque également que le *cross-coupling* acoustique a plus d'effet sur le comportement énergétique de la structure, et que le *cross-coupling* structural a plus d'effet sur le comportement énergétique de la cavité.

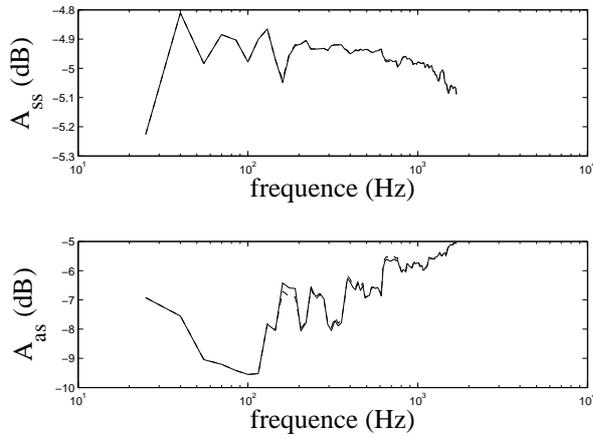


FIGURE 4.14 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=1$ s et $T_p=0.1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling structural

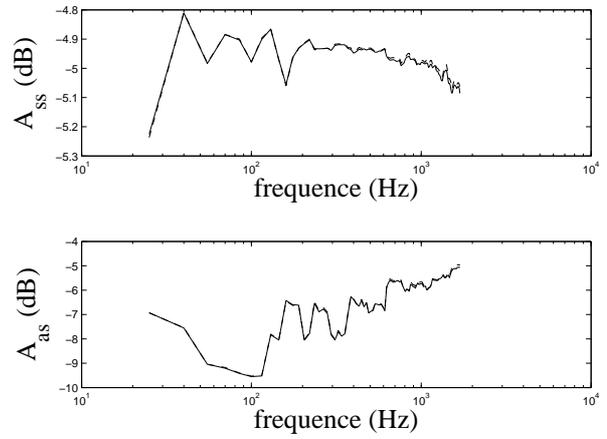


FIGURE 4.15 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=1$ s et $T_p=0.1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

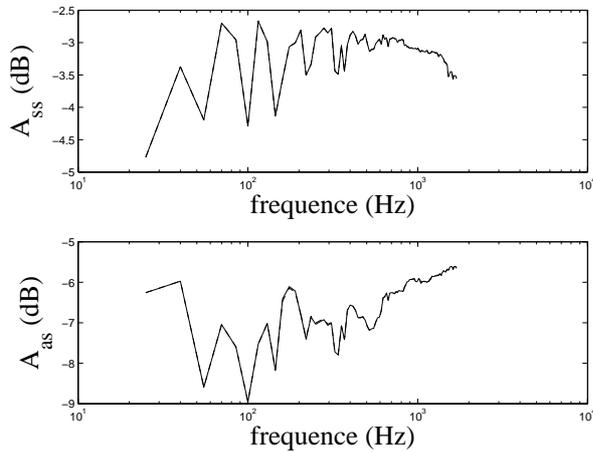


FIGURE 4.16 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=0.1$ s et $T_p=1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling structural

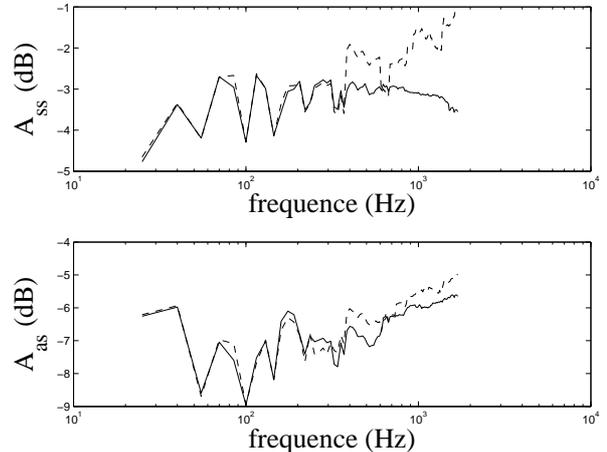


FIGURE 4.17 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=0.1$ s et $T_p=1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

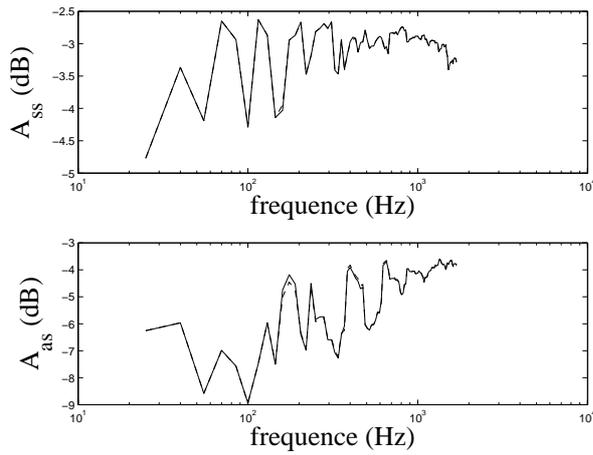


FIGURE 4.18 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=1$ s et $T_p=1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling structural

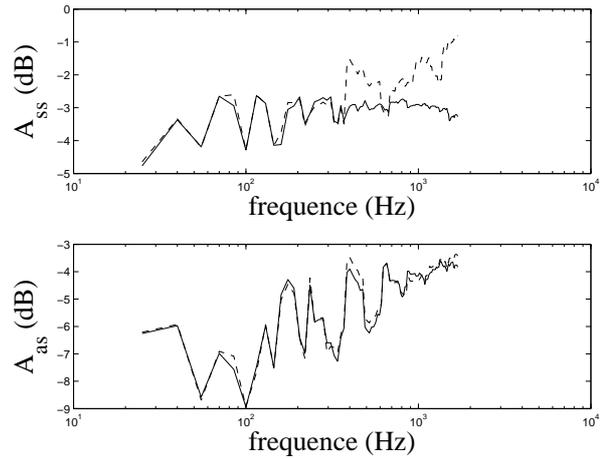


FIGURE 4.19 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=1$ s et $T_p=1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

Les figures 4.22 et 4.23 montrent les coefficients SEA-like lorsque les *cross-coupling* structural et acoustique sont négligés. La négligence du *cross-coupling* structural n'est pas significative, par contre la négligence du *cross-coupling* acoustique a une grande influence sur le comportement énergétique de la structure.

La mise en œuvre des mécanismes de *cross-coupling* acoustique et structural n'est pas identique selon que la plaque ou la cavité est excitée : lorsque la plaque est excitée, le calcul de $V|_{acc}^d$ nécessite un grand nombre d'opérations, ce qui se répercute sur le temps de calcul (voir tableau 4.4). Il en va de même pour le calcul de $P|_{scc}^d$ lorsque la cavité est excitée.

Or, comme il est dit dans les paragraphes précédents, l'influence des *cross-coupling* dépend des valeurs de T_a et T_p . Ainsi, pour des valeurs de T_a suffisamment basses, une modélisation sans *cross-coupling* structural donne des niveaux énergétiques pertinents. Par contre, lorsque T_a est important et T_p n'est pas trop élevé, la modélisation sans *cross-coupling* acoustique donne des résultats plus précis (voir figure 4.20). Cependant, cette modélisation est moins efficace en termes de temps de calcul que le calcul de référence.

Il devient alors intéressant d'introduire la modélisation suivante : les vitesses modales sont calculées sans *cross-coupling* structural (équation (4.4)) et les pressions modales sont calculées sans *cross-coupling* acoustique (équation (4.6)). Cette modélisation est valable pour un domaine de variation de T_p et T_a plus large que la modélisation sans *cross-coupling* structural ou acoustique et offre également un temps de calcul réduit par rapport au calcul de référence.

Les figures 4.24 et 4.25 montrent les quatre coefficients SEA-like calculés avec la modélisation négligeant le *cross-coupling* structural pour le calcul des vitesses et le *cross-coupling* acoustique pour le calcul des pressions. Cette modélisation est pertinente et diminue les temps de calcul, aussi bien pour l'excitation structural que pour l'excitation acoustique (voir tableau 4.5). Néanmoins, pour les valeurs de T_p et T_a qui permettent des modélisations pertinentes, il est plus intéressant en terme de temps de calcul d'utiliser une modélisation sans *cross-coupling* structural pour l'excitation de la plaque et sans *cross-coupling* acoustique pour l'excitation de la cavité (voir figure 4.26).

TABLE 4.4 – Temps de calcul des coefficients SEA-like du système couplé pour une excitation de la plaque et pour différents mécanismes de cross-coupling

modèle de référence	145 s
sans <i>cross-coupling</i> structural	42 s
sans <i>cross-coupling</i> acoustique	310 s
sans <i>cross-coupling</i> structural et acoustique	127 s

TABLE 4.5 – Temps de calcul des coefficients SEA-like du système couplé pour une excitation de la cavité

modèle de référence	4603 s
sans <i>cross-coupling</i> acoustique	3780 s
sans <i>cross-coupling</i> structural et acoustique	4005 s

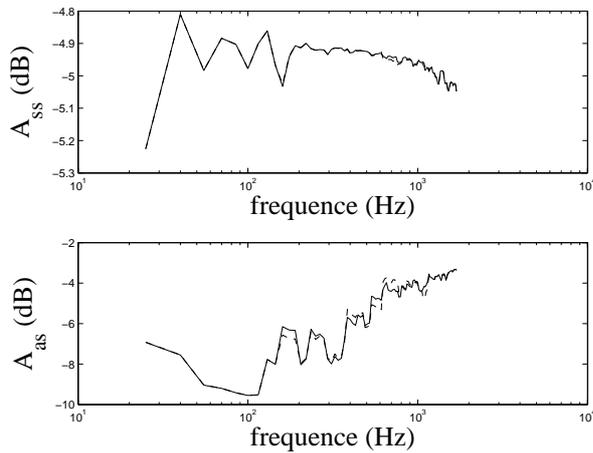


FIGURE 4.20 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=10$ s et $T_p=0.1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling structural

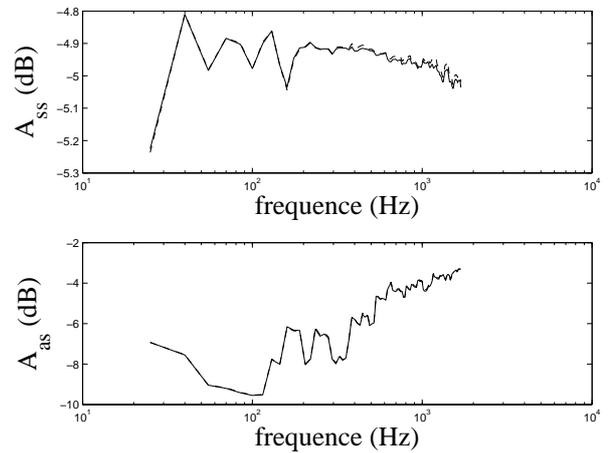


FIGURE 4.21 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $T_a=10$ s et $T_p=0.1$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

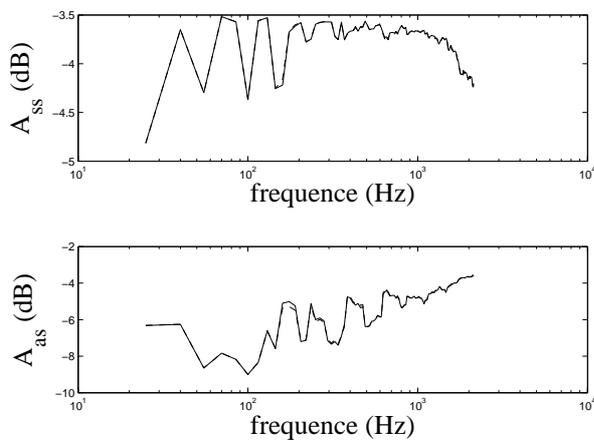


FIGURE 4.22 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $Ta=1$ s et $Tp=0.4$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling structural

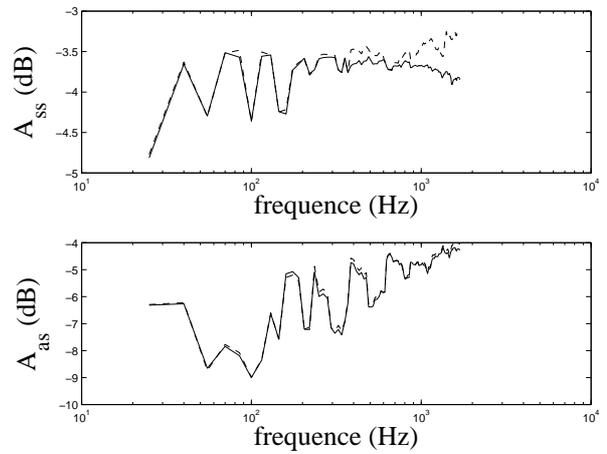


FIGURE 4.23 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $Ta=1$ s et $Tp=0.4$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

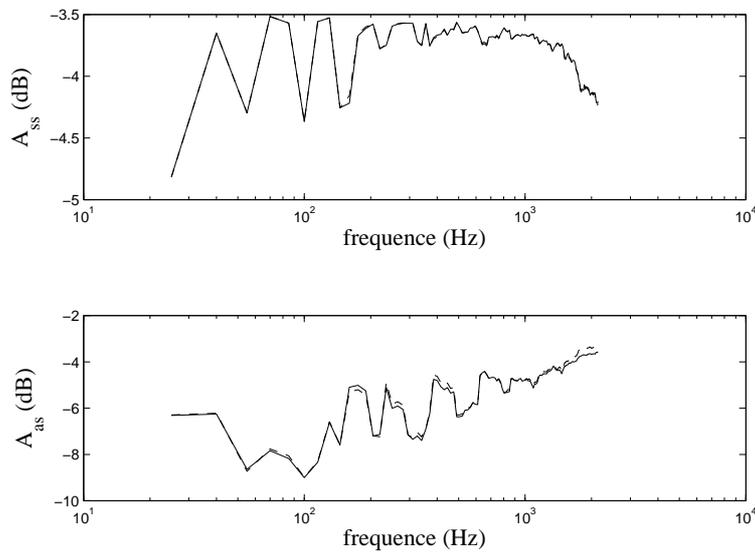


FIGURE 4.24 – Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} pour $Ta=1$ s et $Tp=0.4$ s : (–) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (– –) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling

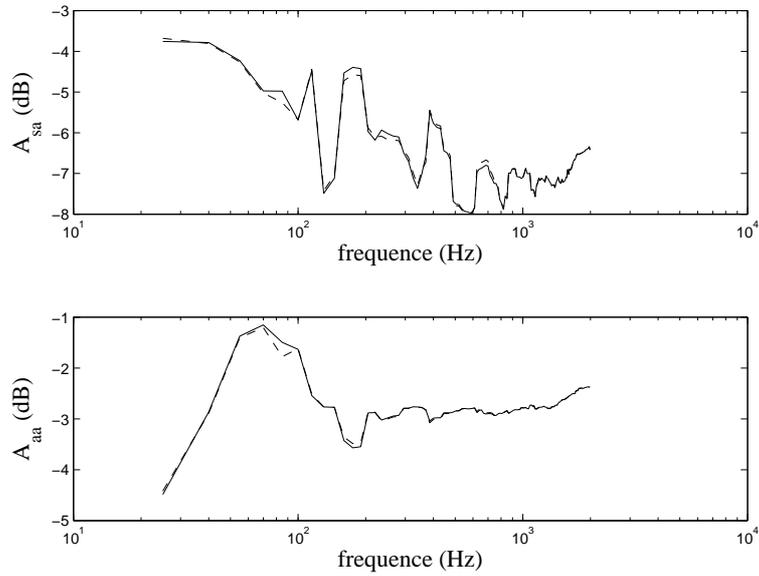


FIGURE 4.25 – Coefficients SEA-like A_{sa} et A_{aa} pour $T_a=1$ s et $T_p=0.4$ s (—) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (---) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling

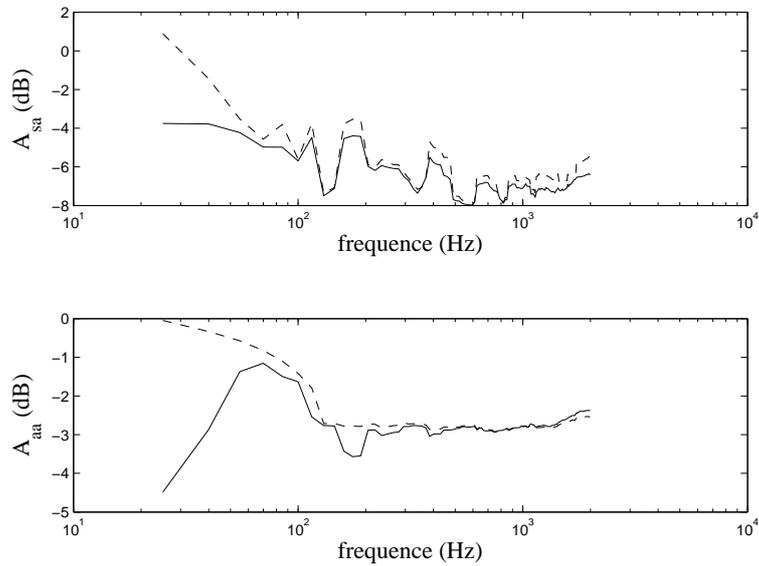


FIGURE 4.26 – Coefficients SEA-like A_{sa} et A_{aa} pour $T_a=1$ s et $T_p=0.4$ s : (—) coefficients SEA-like calculés avec tous les modes / (---) coefficients SEA-like calculés sans cross-coupling acoustique

4.3 Influence des conditions aux limites de la structure

Dans les chapitres précédents et la première moitié de ce chapitre, la plaque couplée avec la cavité est simplement appuyée. Ces conditions aux limites permettent l'utilisation d'expressions analytiques pour écrire les équations modales et facilitent l'analyse des coefficients SEA-like. Il peut être pourtant intéressant de faire varier ces conditions aux limites afin d'étudier leur influence sur la modélisation SEA-like du système couplé.

Dans le chapitre 2, la notion de fonctions hiérarchiques a été introduite. La projection des équations de la plaque sur les fonctions hiérarchiques permet de donner une expression des modes propres de la plaque facilement utilisable pour le calcul des coefficients SEA-like. Les figures 4.27 et 4.28 présentent les coefficients A_{ss} et A_{as} pour trois conditions aux limites différentes de la plaque : simplement appuyée sur les quatre côtés, encadrée sur les quatre côtés, et finalement simplement appuyée sur les côtés $x = 0$ et $x = a$ et encadrée sur les côtés $y = 0$ et $y = b$ (appelée ici *plaque semi-encadrée*).

En hautes fréquences, lorsque le recouvrement modal est important, les conditions aux limites de la plaque ont peu d'influence sur les coefficients SEA-like. En effet, ces coefficients SEA-like se rapprochent des coefficients SEA, qui sont calculés indépendamment des conditions aux limites. Les méthodes ondulatoires utilisées pour calculer des coefficients de transmission en hautes fréquences s'appuient souvent sur l'hypothèse que les milieux où se propagent les ondes sont semi-infinis, et donc négligent les conditions aux limites (par exemple, le calcul du coefficient de transmission entre deux plaques par Lyon [60]).

En basses fréquences, par contre, le recouvrement modal est faible. Le système a donc un comportement modal marqué. En particulier, les premiers modes de plaque sont différents selon les conditions aux limites considérées : pour une plaque simplement appuyée, le premier mode de plaque est à 29 Hz, tandis qu'il se décale à 54 Hz pour une plaque encadrée. Cela entraîne des différences sur les deux coefficients SEA-like.

4.4 Influence de la force de couplage fluide-structure sur la méthode SEA-like

Le tableau 4.6 compare les modes *in vacuo* de la plaque et de la cavité avec les modes couplés du système complet étudié dans les paragraphes 3.6 et 4.1.1, calculés avec le logiciel COMSOL. Le couplage entre la plaque et la cavité est faible. En effet, les modes du système couplé sont très semblables aux modes de chacun des sous-systèmes découplés. Comme il est expliqué au paragraphe 4.1.1, la modélisation SEA-like par couplage modal donne alors une bonne approximation de la réponse du système, si l'on prend la modélisation par approche éléments-finis comme modèle de référence.

Pour étudier l'influence du couplage sur la précision de la modélisation SEA-like par couplage modal, un deuxième système couplé plaque-cavité est étudié. Il s'agit d'une plaque d'aluminium de dimensions $1m \times 0.5m \times 2mm$ couplé avec une cavité de dimensions $1m \times 0.5m \times 0.66m$ rempli d'un fluide de masse volumique $\rho_0 = 6.04kg/m^3$ et de célérité $c_0 = 163.9m.s^{-1}$. Il s'agit du système plaque-cavité de la référence [34], qui présente entre autres la modélisation par couplage modal d'un système présentant un fort couplage fluide-structure.

Dans ce système, la cavité est moins profonde que celle du système étudié dans les paragraphes 3.6 et 4.1.1 et le fluide est plus lourd. Le couplage entre la plaque et la cavité est donc plus important. Comme pour le système précédent, le tableau 4.7 compare les modes découplés de

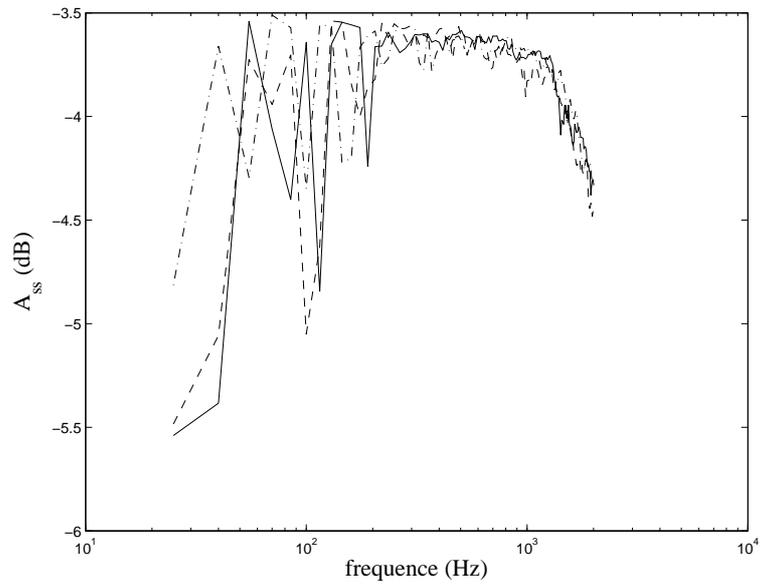


FIGURE 4.27 – Coefficient d’Influence Energétique A_{ss} du système couplé calculé par approche modale pour une plaque simplement appuyée (---), pour une plaque encastree (—) et pour une plaque semi-encastree (—)

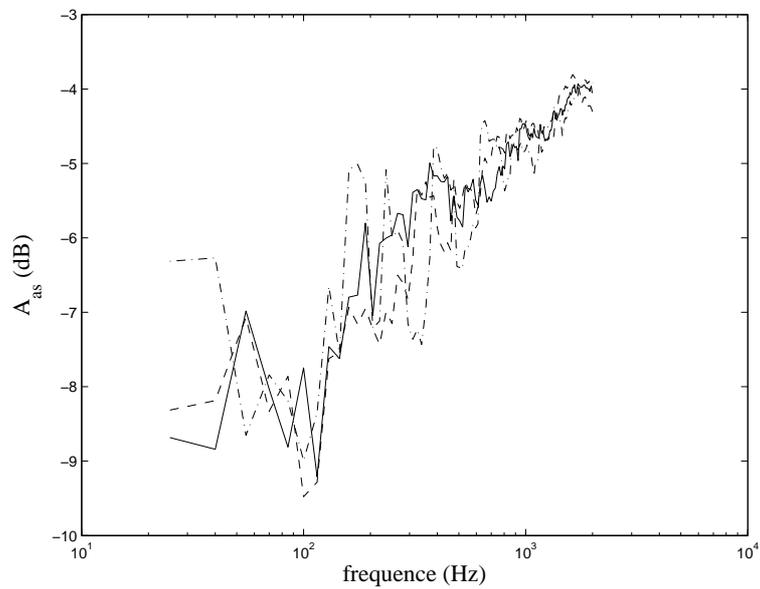


FIGURE 4.28 – Coefficient d’Influence Energétique A_{sa} du système couplé calculé par approche modale pour une plaque simplement appuyée (---), pour une plaque encastree (—) et pour une plaque semi-encastree (—)

TABLE 4.6 – Premiers modes couplés et découplés du système faiblement couplé (Hz)

Modes de plaque			Modes de cavité		
Modes de plaque	Découplés	Couplés	Modes de cavité	Découplés	Couplés
(1,1)	29.05	31.22	(0,0,0)	0	0
(1,2)	60.71	60.05	(0,1,0)	149.13	149.47
(2,1)	84.64	83.92	(0,0,1)	171.50	171.50
(1,3)	113.55	112.87	(1,0,0)	197.58	196.07
(2,2)	116.36	115.58	(0,1,1)	227.27	228.24
(2,3)	169.29	168.31	(1,1,0)	247.54	248.57
(3,1)	177.51	178.23	(1,0,1)	261.63	262.03
(1,4)	187.67	186.81	(0,2,0)	298.26	298.86
(3,2)	209.32	208.14	(1,1,1)	301.15	301.51
(2,4)	243.54	241.72	(0,0,2)	343.00	343.60

TABLE 4.7 – Premiers modes couplés et découplés du système fortement couplé (Hz)

Modes de plaque			Modes de cavité		
Modes de plaque	Découplés	Couplés	Modes de cavité	Découplés	Couplés
(1,1)	24.21	32.78	(0,0,0)	0	0
(2,1)	38.73	34.20	(1,0,0)	81.45	83.12
(3,1)	62.94	59.40	(0,0,1)	122.18	126.17
(1,2)	82.32	76.70	(1,0,1)	146.84	150.86
(2,2)	96.85	91.05	(0,1,0)	162.90	165.08
(4,1)	96.85	94.19	(2,0,0)	162.90	164.78
(3,2)	121.07	114.87	(1,1,0)	182.13	184.25
(5,1)	140.45	136.12	(0,1,1)	203.63	207.96
(4,2)	154.99	147.99	(2,0,1)	203.63	203.52
(1,3)	179.22	176.39	(1,1,1)	219.32	221.80

chacun des sous-systèmes avec les modes du système couplé. Dans ce cas, on remarque qu'il existe une différence notable entre les modes découplés et les modes couplés.

On peut notamment parler des deux modes (6,1) et (2,3) de la plaque. Lorsqu'ils sont découplés ces deux modes ont une fréquence propre respective de $195.71Hz$ et $195.76Hz$. Lorsque la plaque est couplée avec la cavité, ces deux modes de plaque sont couplés et donnent deux modes du système couplé dont les déformées sur la plaque ont les caractéristiques des deux modes (6,1) et (2,3) (voir figures 4.29 et 4.30) et qui ont des fréquences plus séparées : $188.18Hz$ et $190.49Hz$. Ce phénomène n'est pas visible sur les premiers modes du système faiblement couplé.

La figure 4.31 compare les modèles SEA-like par éléments-finis, SEA-like par couplage modal et SEA du système plaque-cavité fortement couplé. Deux coefficients d'influence énergétique y sont tracés : A_{ss} et A_{as} . On remarque que les modélisations SEA-like par éléments-finis, SEA-like par couplage modal et SEA donnent des résultats relativement proches (moins de 2dB de différence entre les trois modèles). Ainsi, l'approche SEA-like par couplage modal demeure valable dans le cas d'un couplage fort.

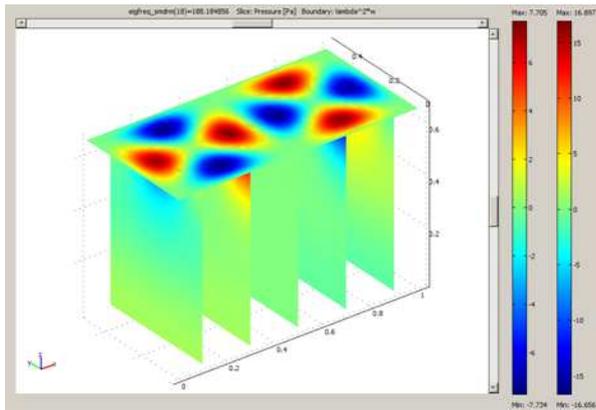


FIGURE 4.29 – Mode du système complet de fréquence 188.18 Hz

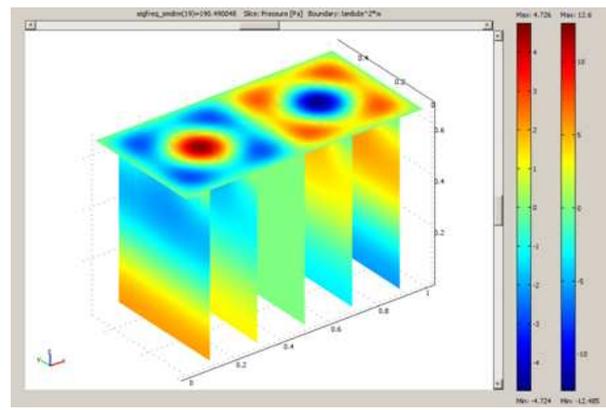


FIGURE 4.30 – Mode du système complet de fréquence 190.49 Hz

Par contre la convergence est beaucoup plus longue : dans le cas d'un système faiblement couplé, une modélisation par couplage modal dont la fréquence maximale d'analyse est de 1000 Hz converge si l'on prend en compte dans la base modale des modes de plaque et de cavité jusqu'à 2000 Hz. Ici, où le système est fortement couplé, on a pris en compte des modes jusqu'à 3000 Hz dans la base modale. En ce qui concerne le modèle par éléments-finis, le temps de calcul est également plus long : la célérité du fluide est plus faible dans le système fortement couplé, les longueurs d'onde acoustiques sont donc plus petites et le système doit être maillé plus finement.

4.5 Conclusion

4.5.1 Bilan

Dans ce chapitre, une deuxième méthode de modélisation SEA-like a été présentée. Cette méthode est basée sur un calcul par éléments-finis. Elle n'est donc pas basée sur les mêmes approximations que le calcul par couplage modal et sert de référence dans les domaines des basses et des moyennes fréquences pour la validation de l'approche SEA-like par couplage modal. Cette validation est effectuée sur deux configurations du système couplé plaque-cavité : une configuration où la structure est faiblement couplée avec la cavité et une configuration où la structure est fortement couplée avec la cavité.

L'approche par couplage modal permet d'étudier les mécanismes de couplage entre la structure et le fluide. Quelques mécanismes de couplage sont présentés ici. Ces mécanismes permettent de simplifier la base modale utilisée pour la modélisation du système couplé, ce qui conduit à une modélisation SEA-like simplifiée et à une diminution du temps de calcul. Ainsi, la base modale de la plaque, puis de la cavité, est réduite autour de la fréquence d'excitation, ce qui permet de diminuer les temps de calcul, surtout dans le cas de l'excitation de la plaque. Les mécanismes de *cross-coupling* structural et acoustique sont également explicités et utilisés pour réduire la modélisation SEA-like.

Finalement, en utilisant une projection sur les fonctions hiérarchiques présentées dans le chapitre 2, on modifie les conditions aux limites de la plaque. Les coefficients SEA-like pour différentes conditions aux limites sont comparés dans les trois domaines fréquentiels : alors que les conditions aux limites ont peu d'influence en hautes fréquences, elles ont plus d'influence en basses et en

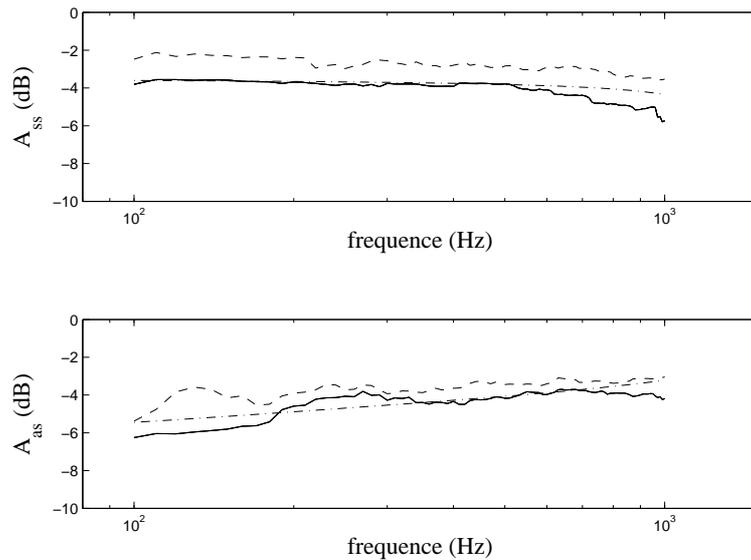


FIGURE 4.31 – Coefficients SEA-like calculés avec les méthodes SEA-like par couplage modal et éléments-finis dans un cas de couplage fort, (—) : SEA-like (approche par couplage modal) / (---) SEA-like (approche par éléments-finis) / (-.-) SEA

moyennes fréquences et ne peuvent donc pas être négligées dans ces domaines fréquentiels, comme elles le sont souvent en hautes fréquences. Cette remarque souligne un des avantages de la SEA-like par rapport à la SEA : les conditions aux limites sont prises en compte, ce qui n'est pas le cas en SEA. La méthode SEA-like est donc bien valable dans un domaine fréquentiel plus large que celui de la SEA.

4.5.2 De l'excitation *rain-on-the-roof* vers les excitations aérodynamiques

Ce chapitre a permis d'aborder quelques études paramétriques sur le système lui-même. Cette étude a permis de d'étendre l'application de la méthode SEA-like à d'autres structures qu'une plaque simplement appuyée. Cependant, la question de l'excitation n'a pas été abordée : dans ce chapitre, les sous-systèmes sont soumis à des excitations *rain-on-the-roof*. Le chapitre 5 traite de la modélisation de différentes excitations aérodynamiques avec la méthode SEA-like et applique cette méthode au système couplé plaque-cavité.

Chapitre 5

Traitement des excitations aérodynamiques

5.1	Présentation	122
5.2	Introduction de l'excitation équivalente	122
5.3	Excitation par couche limite turbulente	124
5.3.1	Choix du modèle de Corcos	124
5.3.2	Approche <i>spatial extent</i>	125
5.3.3	Approche moyenne en espace k	129
5.4	Excitation par bruit diffus	131
5.4.1	Approche <i>spatial extent</i>	131
5.4.2	Approche par efficacité de rayonnement	133
5.5	Études paramétriques : influence de la force de couplage	134
5.5.1	Excitation par couche limite turbulente	134
5.5.2	Excitation par bruit diffus	135
5.6	Études paramétriques : influence des conditions limites de la structure	136
5.6.1	Mise en œuvre	136
5.6.2	Excitation par couche limite turbulente	136
5.6.3	Excitation par bruit diffus	137
5.7	Mise en œuvre de la méthode	139

5.1 Présentation

La matrice SEA-like du système couplé est calculée avec une excitation de type *rain-on-the-roof* appliquée séparément à la plaque et à la cavité. Or, dans l'industrie spatiale, ce type d'excitation, qui ne correspond pas à un cas d'excitation réel, n'est pas exploitable. La méthode SEA-like doit être appliquée à des cas d'excitation aérodynamiques réelles, comme les excitations par couche limite turbulente ou par bruit diffus, qui ont été présentés dans le chapitre 1.

Une méthode pour appliquer la méthode SEA-like à un cas d'excitation aéroacoustique réel serait de procéder comme pour l'excitation *rain-on-the-roof* c'est-à-dire de calculer les énergies et puissances injectées correspondant aux chargements réels. Cependant, cette méthode impliquerait de calculer une matrice SEA-like pour chaque cas d'excitation, ce qui en limite l'intérêt. Ce chapitre présente une méthode équivalente, qui permet l'utilisation de la matrice SEA-like calculée avec l'excitation *rain-on-the-roof* pour modéliser un cas d'excitation réel. Cette méthode permet de calculer un vecteur des puissances injectées, où sont contenues les informations relatives au chargement, et qui sera multipliée à la matrice SEA-like calculée dans le chapitre 3, contenant les informations relatives au système.

5.2 Introduction de l'excitation équivalente

Les excitations aérodynamiques sont de type aléatoire large-bande et spatialement corrélées. Comme il a été dit dans le paragraphe 1.7, une grandeur communément utilisée pour les décrire est le terme de densité spectrale, qui s'écrit, pour un champ de pression $p(x, y; \omega)$:

$$S_{pp}(x - x', y - y'; \omega) = S_p(\omega)C(x - x', y - y'; \omega) \quad (5.1)$$

où S_p est le spectre fréquentiel de l'excitation et C un terme spatial décrivant la corrélation de l'excitation entre les points de coordonnées (x, y) et (x', y') .

Dans ce chapitre, on utilisera la formulation SEA-like basée sur les modes de chacun des sous-systèmes découplés, développée dans le chapitre 3, ainsi que les notations qui y sont introduites. Les excitations aérodynamiques, appliquées à la plaque, modifient les équations modales décrivant le système, et notamment le terme de *joint acceptance*, qui décrit l'interaction entre l'excitation et les modes de plaque. On rappelle que l'expression générale du terme de *joint acceptance* correspondant aux modes m et n de la plaque s'écrit :

$$j_{m,n}(\omega) = \iint_{A_s} \Phi_m^s(x, y) \Phi_n^s(x', y') C(x - x', y - y'; \omega) dx dx' dy dy' \quad (5.2)$$

Pour une excitation de type *rain-on-the-roof*, qui est δ -corrélée, l'expression de *joint acceptance* est simplifiée :

$$j_{m,n}^{ror} = \iint_{A_s} \rho_s h_s \Phi_m^s(x, y) \Phi_n^s(x', y') \delta(x - x') \delta(y - y') dx dx' dy dy' \quad (5.3)$$

Cette expression entraîne des simplifications dans le calcul des énergies et puissances injectées moyennées, ce qui allège les calculs des coefficients SEA-like. Dans le cas d'excitations aérodynamiques, l'expression de *joint acceptance* n'est pas aussi simple. Le calcul des énergies moyennées dans le système doit alors être allégé, d'où l'intérêt de développer un modèle d'excitations équivalentes.

Une fonction de corrélation spatiale équivalente C_{eq} est alors introduite. Elle vérifie l'expression suivante :

$$C(x - x', y - y'; \omega) \approx C_{eq}(\omega) \delta(x - x') \delta(y - y') \quad (5.4)$$

L'expression du terme de *joint acceptance* équivalent $j_{m,n}^{aero}$ est alors similaire de son expression *rain-on-the-roof* :

$$j_{m,n}^{aero} = \delta_{m,n} \frac{C_{eq}(\omega)}{h_s \rho_s} j_{m,n}^{ror} \quad (5.5)$$

Le calcul des coefficients SEA-like correspondant à une excitation aérodynamique peut ainsi être simplifié. L'expression de la vitesse quadratique dans la plaque en fonction du terme de *joint acceptance* s'écrit (voir équation (3.57)) :

$$|V_m|^2 = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2 A_s^2} \sum_{p,q} \frac{(H_{s,s})_{m,p} (H_{s,s})_{m,p}^*}{\chi_{s,p} \chi_{s,q}^*} S_p j_{p,q} \quad (5.6)$$

Si l'on remplace le terme de *joint acceptance* par son expression équivalente donnée par l'équation (5.5), on peut exprimer la vitesse quadratique pour une excitation aérodynamique en fonction de l'expression de la vitesse quadratique correspondante à une excitation de type *rain-on-the-roof* :

$$|V_m|_{aero}^2 \approx \frac{C_{eq}(\omega)}{\rho_s h_s} |V_m|_{ror}^2 \quad (5.7)$$

Ainsi, si $C_{eq}(\omega)$ est approché par sa moyenne sur la bande de fréquence considérée, l'énergie moyennée en fréquence dans la plaque devient :

$$\langle E_{s,s} \rangle_{aero} \approx \frac{\langle C_{eq}(\omega) \rangle}{\rho_s h_s} \langle E_{s,s} \rangle_{ror} \quad (5.8)$$

On calcule de la même manière l'énergie moyennée dans la cavité et la puissance injectée dans la plaque correspondant à une excitation aérodynamique :

$$\langle E_{a,s} \rangle_{aero} \approx \frac{\langle C_{eq}(\omega) \rangle}{\rho_s h_s} \langle E_{s,s} \rangle_{ror} \quad (5.9)$$

$$\langle P_{inj,s} \rangle_{aero} \approx \frac{\langle C_{eq}(\omega) \rangle}{\rho_s h_s} \langle P_{inj,s} \rangle_{ror} \quad (5.10)$$

Les coefficients SEA-like $A_{s,s}^{aero}$ and $A_{a,s}^{aero}$, correspondant à une excitation aérodynamique de la plaque, deviennent alors équivalents aux coefficients SEA-like calculés pour une excitation de type *rain-on-the-roof* :

$$A_{s,s}^{aero} \approx \frac{\langle E_{s,s} \rangle_{aero}}{\langle P_{inj,s} \rangle_{aero}} = \frac{\langle E_{s,s} \rangle_{ror}}{\langle P_{inj,s} \rangle_{ror}} = A_{s,s}^{ror} \quad (5.11)$$

$$A_{a,s}^{aero} \approx \frac{\langle E_{a,s} \rangle_{aero}}{\langle P_{inj,s} \rangle_{aero}} = \frac{\langle E_{a,s} \rangle_{ror}}{\langle P_{inj,s} \rangle_{ror}} = A_{a,s}^{ror} \quad (5.12)$$

Dans le cas d'une excitation aérodynamique de la plaque, les énergies moyennées dans la plaque et la cavité peuvent s'exprimer en fonction du produit de la matrice SEA-like comme elle a été calculée dans les chapitres précédents et d'un vecteur de puissances injectées équivalentes :

$$\begin{pmatrix} \langle E_s \rangle \\ \langle E_a \rangle \end{pmatrix}_{aero} = \begin{pmatrix} A_{ss} & A_{sa} \\ A_{as} & A_{aa} \end{pmatrix}_{ror} \begin{pmatrix} \langle P_{inj,s} \rangle \\ \langle P_{inj,a} \rangle \end{pmatrix}_{eq,aero} \quad (5.13)$$

Le vecteur des puissances injectées équivalentes se calcule avec l'équation (5.10), où la fonction de cohérence équivalente $C_{eq}(\omega)$ est déterminée par l'excitation aérodynamique considérée. Cette expression permet de souligner l'un des intérêts de la formulation équivalente : si plusieurs excitations sont appliquées au même système, il suffit de modifier la fonction équivalente pour obtenir le comportement énergétique du système.

La difficulté de la mise en œuvre de cette méthode réside donc dans le calcul de la fonction équivalente $C_{eq}(\omega)$. Ici, plusieurs méthodes sont présentées pour calculer cette fonction équivalente, qui doit reproduire le comportement spatial de la plaque en ne jouant que sur le paramètre fréquentiel. Ces méthodes, basées sur une description modale du système, doivent permettre de décrire le comportement des modes du système à une fréquence donnée. Pour ce faire, le système excité n'est plus décrit dans le domaine spatial mais dans le domaine des nombres d'onde. Cette transformation permet d'éliminer les paramètres spatiaux des équations du système et donne accès plus facilement au comportement des modes d'un système pour une excitation aérodynamique donnée.

5.3 Excitation par couche limite turbulente

5.3.1 Choix du modèle de Corcos

Dans le paragraphe 1.7, la description d'une excitation par couche limite turbulente est basée sur la modélisation de Corcos. Cependant, on trouve plusieurs expressions de la fonction de corrélation spatiale dans la littérature.

En effet, le modèle de Corcos modélise de manière satisfaisante le champ de pression induit par la couche limite turbulente autour de la coïncidence aérodynamique. Mais au-dessus de cette coïncidence, dans la région sous-convective, le modèle de Corcos surestime le spectre de l'excitation [25]. D'autres modèles sont alors proposés, parmi lesquels les modèles d'Efimstov (1982) et Chase [9], comparés par Graham dans [28]. Le modèle d'Efimstov, où les longueurs de corrélation dépendent de l'épaisseur de la couche limite, permet une modélisation pertinente autour de la fréquence de coïncidence, mais surestime également le spectre dans la région des faibles nombres d'onde. C'est le modèle de Chase, donné dans la référence [10], qui donne la réponse structurale la plus pertinente pour la région sous-convective, car il décrit également les phénomènes acoustiques, qui interviennent sur la couche limite turbulente lorsque la vitesse de convection se rapproche de la célérité du son. La figure 5.1 présente les modèles de Corcos, Efimstov et Chase d'après les expressions trouvées dans la référence [28]. Le modèle de Chase y est incomplet, car les constantes décrivant la région acoustique ($k_x \approx \omega/c_0$) sont inconnues.

Dans ce chapitre, cependant, l'objectif n'est pas d'étudier les différentes fonctions de corrélation existantes, mais de proposer une méthode pour calculer une fonction de corrélation spatiale permettant d'étendre la SEA-like à des excitations aérodynamiques réelles. Or, le modèle de Corcos, à cause de son expression simple, a souvent été repris dans la littérature : Finnveden *et al.* le comparent avec des résultats expérimentaux [25], De Rosa *et al.* modélisent une excitation par couche limite turbulente basée sur le modèle de Corcos avec une approche dérivée des éléments-finis [17], Hambric *et al.* dérivent différentes expressions de la fonction de corrélation à partir de l'expression de Corcos [31].

De plus, la référence [85], qui traite de manière expérimentale et numérique de la réponse d'un modèle réduit du lanceur Ariane 5 à diverses excitations aérodynamiques, montre que le modèle de Corcos, avec des coefficients appropriés, modélise de manière satisfaisante l'excitation par couche limite turbulente

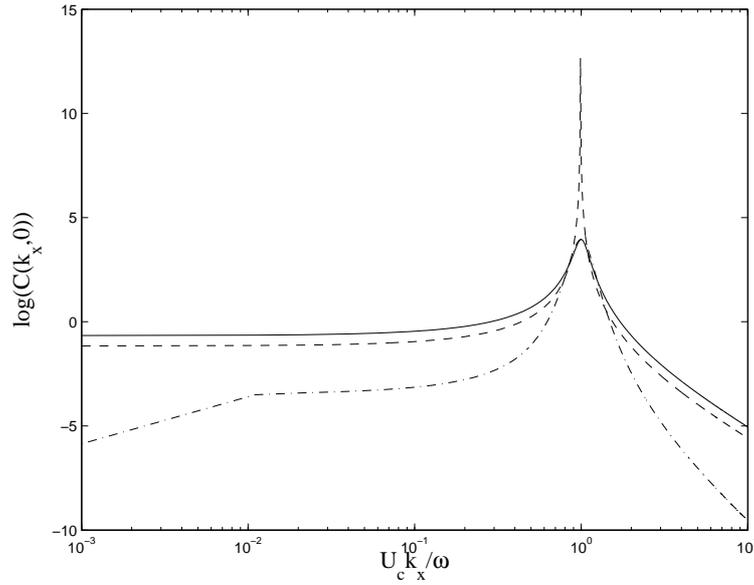


FIGURE 5.1 – Fonctions de corrélation spatiale telles qu’exprimées dans la référence [28] pour une fréquence de 500 Hz et une vitesse de convection de 200 m.s⁻¹, (–) : modélisation de Corcos / (– –) : modélisation d’Efimstov / (– . –) : modélisation de Chase révisée dans la référence [10]

C’est donc l’expression de Corcos [11], qui aboutit à un modèle simple, qui est utilisée ici.

5.3.2 Approche *spatial extent*

La fonction de corrélation spatiale formulée par Corcos dans la référence [11] est rappelée ici :

$$C_{tbl}(\zeta, \eta; \omega) = e^{-\alpha_x \frac{\omega|\zeta|}{U_c}} e^{-\alpha_y \frac{\omega|\eta|}{U_c}} e^{\frac{i\omega\zeta}{U_c}} \quad (5.14)$$

où $\zeta = x - x'$ et $\eta = y - y'$, U_c est la vitesse de convection, et α_x et α_y décrivent la corrélation spatiale dans la direction du flux et la direction perpendiculaire.

L’excitation d’une plaque rectangulaire par couche limite turbulente a été étudiée par de nombreux auteurs, qui se sont attachés à développer des expressions simples pour décrire l’interaction entre la couche limite et la plaque. Dans la référence [65], Maidanik développe une approche équivalente basée sur la fonction de corrélation spatiale de l’excitation par couche limite turbulente. Cette approche est basée sur l’égalité des intégrales sur le domaine spatial de la fonction de cohérence de l’excitation et la fonction équivalente correspondante :

$$\iint_{\infty} C_{eq,tbl}(\zeta, \eta; \omega) d\zeta d\eta = \iint_{\infty} C_{tbl}(\zeta, \eta; \omega) d\zeta d\eta \quad (5.15)$$

Comme la fonction de corrélation équivalente est spatialement δ -corrélée, l’équation précédente peut se réécrire ainsi :

$$C_{eq,tbl}(\omega) = \iint_{\infty} C_{tbl}(\zeta, \eta; \omega) d\zeta d\eta \quad (5.16)$$

La fonction de corrélation spatiale équivalente pour une excitation par couche limite turbulente est alors donnée par :

$$C_{eq,tbl}(\omega) = \frac{4U_c^2 \alpha_x}{\omega^2 \alpha_y (\alpha_x^2 + 1)} \quad (5.17)$$

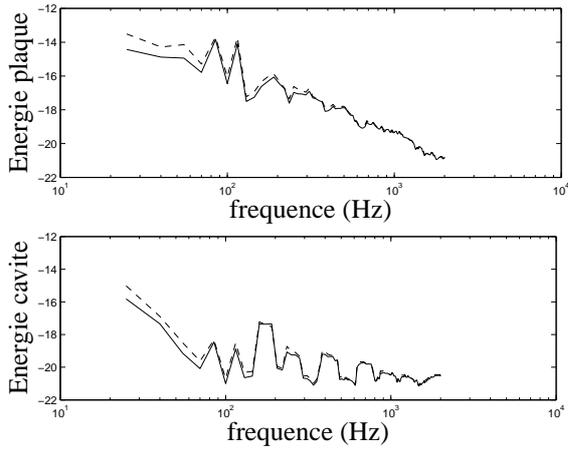


FIGURE 5.2 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 75 \text{ m.s}^{-1}$, (–) : modèle de référence / (—) : modélisation spatial extent

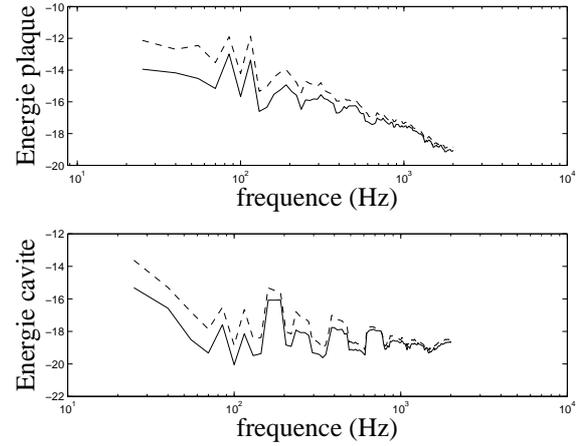


FIGURE 5.3 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$, (–) : modèle de référence / (—) : modélisation spatial extent

La fonction équivalente présentée ci-dessus est introduite dans l'équation (5.13) pour calculer le comportement énergétique du système couplé plaque-cavité lorsque la plaque est excitée par une couche limite turbulente.

Les figures 5.2 et 5.3 présentent l'énergie dans le système couplée pour deux vitesses de la couche limite excitant la plaque : une vitesse de 75 m.s^{-1} et une vitesse de 200 m.s^{-1} . Le modèle de référence est calculé par une approche par couplage modale reprenant, pour l'excitation de la plaque, les fonctions de *joint acceptance* données par l'équation (5.2) et la fonction de corrélation spatiale donnée par l'équation (5.14). On trouve les expressions des fonctions de *joint acceptance* dans la référence [83]. La plaque est supposée simplement appuyée.

L'approche *spatial extent* donne de bons résultats lorsque la vitesse de convection est faible ($U_c = 75 \text{ m.s}^{-1}$). Par contre, lorsque la vitesse de convection augmente, la modélisation *spatial extent* surestime les niveaux énergétiques en basses fréquences.

On peut comprendre la différence entre les deux méthodes lorsque l'on exprime la fonction de corrélation spatiale de l'excitation dans l'espace des nombres d'onde, en utilisant une transformée de Fourier :

$$C_{tbl}(k_x, k_y; \omega) = \frac{\alpha_x \alpha_y k_c^2}{\pi^2 (\alpha_x^2 k_c^2 + (k_x - k_c)^2) (\alpha_y^2 k_c^2 + k_y^2)} \quad (5.18)$$

Cette équation permet d'exprimer la densité spectrale de force généralisée, qui décrit l'acceptation d'énergie par le mode de plaque m de la part de la couche limite :

$$\Phi_m(\mathbf{k}, \omega) = S_p(\omega) \iint_{\infty} C_{tbl}(\mathbf{k}, \omega) |F_m(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad (5.19)$$

où F_m est la transformée dans l'espace des nombres d'onde de la déformée modale Φ_m^s du mode m . $|F_m|^2$ est souvent appelée *fonction de sensibilité* [31, 38]. Le terme de *joint acceptance* que l'on a exprimé jusqu'à présent comme une intégrale sur le domaine spatial du produit de la fonction de corrélation spatiale et des modes de plaque considérés, peut également s'exprimer comme une

intégrale sur le domaine des nombres d'onde :

$$j_{m,m}(\omega) = \frac{1}{A_s^2} \iint_{\infty} C_{tbl}(\mathbf{k}, \omega) |F_m(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} \quad (5.20)$$

$j_{m,m}$ est ainsi directement relié à la force de densité spectrale généralisée :

$$j_{m,m}(\omega) = \frac{1}{A_s^2 S_p(\omega)} \Phi_m(\mathbf{k}, \omega) \quad (5.21)$$

Pour étudier le comportement des modes de la plaque soumis à une excitation par couche limite turbulente, il convient d'étudier le comportement des deux fonctions de l'intégrande de l'équation 5.20 : la fonction $C_{tbl}(\mathbf{k}, \omega)$ et la fonction de sensibilité des modes de plaque.

Les figures 5.4 et 5.5 montrent ces deux fonctions pour deux fréquences différentes d'excitation. La transformée de C_{tbl} dans l'espace des nombres d'onde fait apparaître un pic lorsque k_x est égal au nombre d'onde convectif, donné par :

$$k_c = \frac{\omega}{U_c} \quad (5.22)$$

Il existe donc une fréquence de coïncidence en deçà de laquelle le nombre d'onde suivant e_x des modes résonants peut être supérieur ou égal à k_c . Cette fréquence de coïncidence est donnée par :

$$f_c = \frac{U_c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_s h_s}{D}} \quad (5.23)$$

Les modes de plaque peuvent alors être classés en deux catégories : les modes rapides et les modes lents. Les modes rapides sont les modes dont la vitesse de propagation suivant la direction du flux est supérieure à la vitesse de convection. Dans ce cas, leur nombre d'onde suivant e_x est inférieur au nombre d'onde convectif (voir figure 5.4) et leur fonction de sensibilité présente un pic dans la région sous-convective de l'excitation. L'échange d'énergie entre la couche limite turbulente et ces modes rapides s'effectue essentiellement à travers des interactions de surface.

La deuxième catégorie de modes de plaque est constituée des modes lents, dont la vitesse de propagation suivant la direction du flux est inférieure ou égale à la vitesse de convection. Leur nombre d'onde suivant e_x est inférieur au nombre d'onde convectif (voir figure 5.5) et leur fonction de sensibilité présente un pic dans la région visqueuse ou convective de l'excitation. L'échange d'énergie entre la couche limite turbulente et ces modes lents, bien moins importante que dans le cas des modes rapide, s'effectue à travers des interactions de bords.

Les modes lents sont résonnants lorsque la fréquence d'excitation est en-dessous de la fréquence critique. Or la modélisation *spatial extent* ne prend pas en compte cette fréquence critique et considère que tous les modes répondent comme des modes rapides, dont l'acceptation énergétique est plus importante que pour les modes lents. Les niveaux énergétiques du système couplé sont ainsi surestimés pour la modélisation *spatial extent* lorsque la fréquence d'excitation se situe en-dessous de la fréquence critique.

Hiverniau [32], qui a étudié la problématique de l'excitation pour une plaque seule, a alors introduit une deuxième méthode : cette méthode consiste à diviser l'espace des nombres d'onde en deux régions distinctes : la région des faibles nombres d'ondes et la région des grands nombres d'onde. La fonction de corrélation spatiale est approchée sur ces deux espaces de manière asymptotique. Le cas où $k_x < k_c$ a été étudié dans la littérature (entre autres Chandiramini [7], Hwang *et al.* [38], et Hambric *et al.* [31]). Dans la référence [31], Hambric présente une méthode pour approcher la fonction de corrélation spatiale dans le domaine des faibles nombres d'onde en faisant tendre k_x vers 0. Cependant Hiverniau montre que, en dessous de la fréquence critique, cette méthode n'est pas pertinente pour des valeurs élevées de la vitesse de convection.

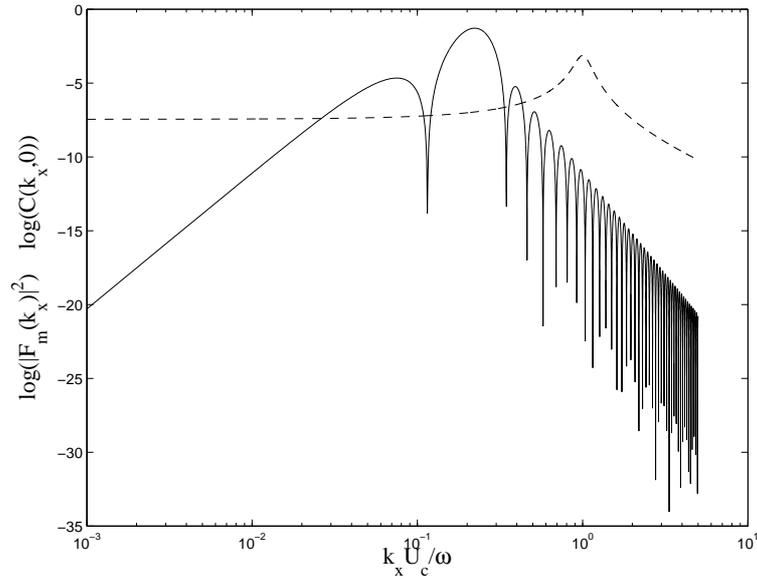


FIGURE 5.4 – (–) fonction de sensibilité d’un mode rapide (mode d’indice selon $e_x : 4$) / (---) fonction de corrélation spatiale d’une excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ à la fréquence 2000 Hz en fonction du nombre d’onde k_x selon la direction e_x

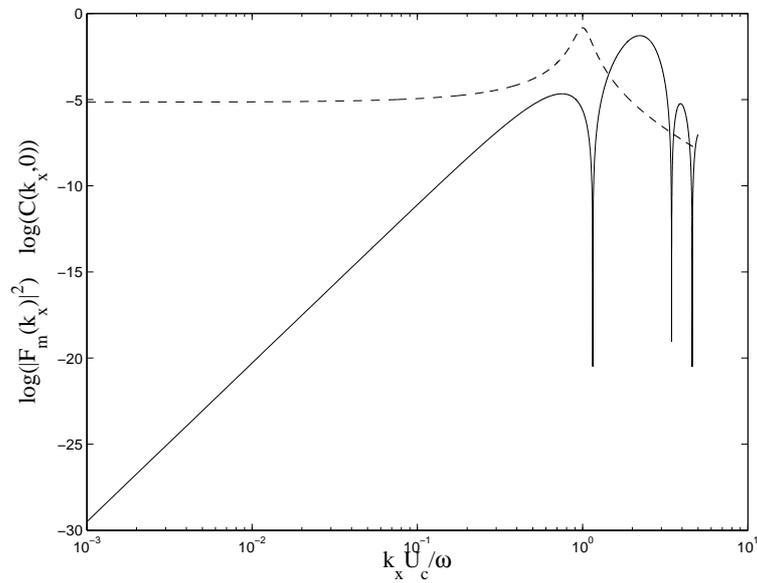


FIGURE 5.5 – (–) fonction de sensibilité d’un mode lent (mode d’indice selon $e_x : 4$) / (---) fonction de corrélation spatiale d’une excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ à la fréquence 200 Hz en fonction du nombre d’onde k_x selon la direction e_x

TABLE 5.1 – Temps de calcul de différentes modélisations du système couplé excité par une couche limite turbulente

Modèle de référence	740 s
Calcul SEA-like sous excitation <i>rain-on-the-roof</i>	502 s
Calcul de la puissance injectée équivalente	2 s

5.3.3 Approche moyenne en espace k

Dans la référence [41], les auteurs introduisent une autre méthode qui permet de prendre en compte les différentes natures des modes de plaque. Contrairement à la méthode *spatial extent*, cette méthode n'est pas basée sur une intégration sur tout l'espace. La fonction de corrélation spatiale, exprimée dans l'espace des nombres d'onde et le calcul de la fonction équivalente s'appuie sur l'égalité des intégrations sur un domaine fini de l'espace des nombres d'onde de la fonction de corrélation spatiale et de la fonction équivalente :

$$\int_{k_1}^{k_2} \int_0^{2\pi} C_{eq,tbl}(k \cos(\theta), k \sin(\theta), \omega) dk d\omega = \int_{k_1}^{k_2} \int_0^{2\pi} C_{tbl}(k \cos(\theta), k \sin(\theta), \omega) dk d\omega \quad (5.24)$$

$C_{eq,tbl}$ étant spatialement δ -corrélée, l'équation précédente devient :

$$C_{eq,tbl}(\omega) = \frac{4\pi}{k_2^2 - k_1^2} \int_{k_1}^{k_2} \int_0^{2\pi} C_{tbl}(k \cos(\theta), k \sin(\theta), \omega) dk d\omega \quad (5.25)$$

Cette nouvelle fonction équivalente traite ainsi de manière différente les régions des faibles nombres d'onde et les régions des grands nombres d'onde.

Les figures 5.6, 5.7 et 5.8 montrent le comportement énergétique du système pour trois vitesses de convection différentes de la couche limite turbulente. Pour une vitesse de convection de 650 m.s^{-1} , on retrouve bien le fait que la modélisation *spatial extent* surestime les échanges énergétiques entre les modes de la plaque et la couche limite en-dessous de la fréquence critique, qui est de 7587 Hz et qui n'est pas atteinte sur la figure 5.8. En effet, plus la vitesse de convection est élevée, plus la fréquence critique est élevée et plus les différences entre le modèle de référence et le modèle *spatial extent* sont importantes.

La modélisation moyenne en espace k, par contre, donne une très bonne estimation des niveaux énergétiques dans la plaque et dans la cavité, même pour des vitesses de convection élevées. On retrouve bien les mêmes résultats établis par Hiverniau pour une plaque rectangulaire découplée dans les références [32] et [41].

Si l'on observe les temps de calcul du modèle de référence et du modèle SEA-like, on constate que le modèle SEA-like est moins coûteux : en effet, la différence est essentiellement due au calcul des coefficients de *joint acceptance* correspondant à une excitation par couche limite turbulente (voir tableau 5.1).

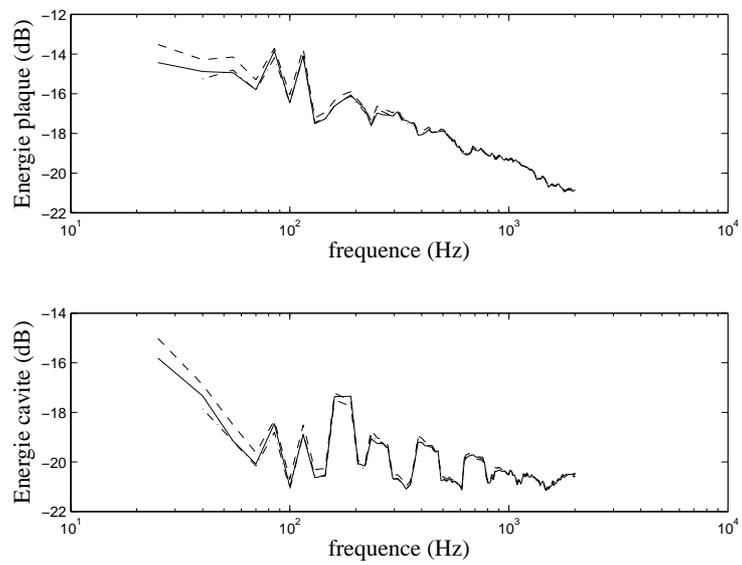


FIGURE 5.6 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 75 \text{ m.s}^{-1}$: (—) modèle de référence / (---) modélisation spatial extent / (-.-) modélisation moyenne en espace k

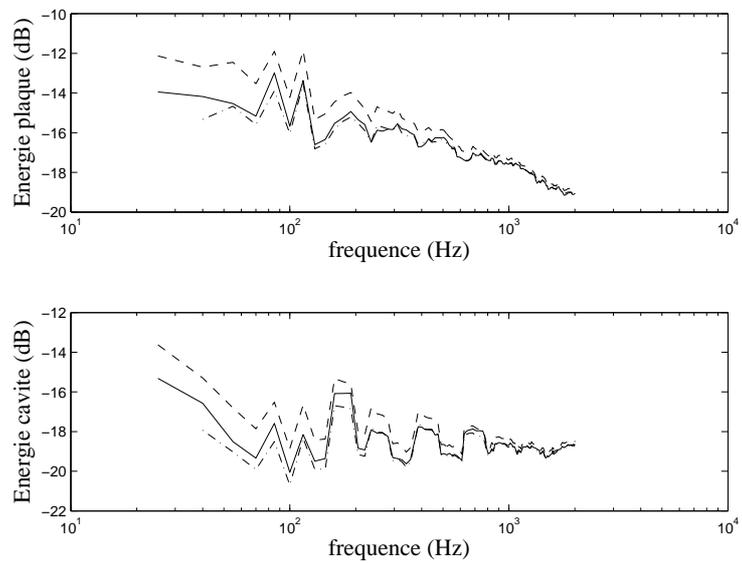


FIGURE 5.7 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$: (—) modèle de référence / (---) modélisation spatial extent / (-.-) modélisation moyenne en espace k

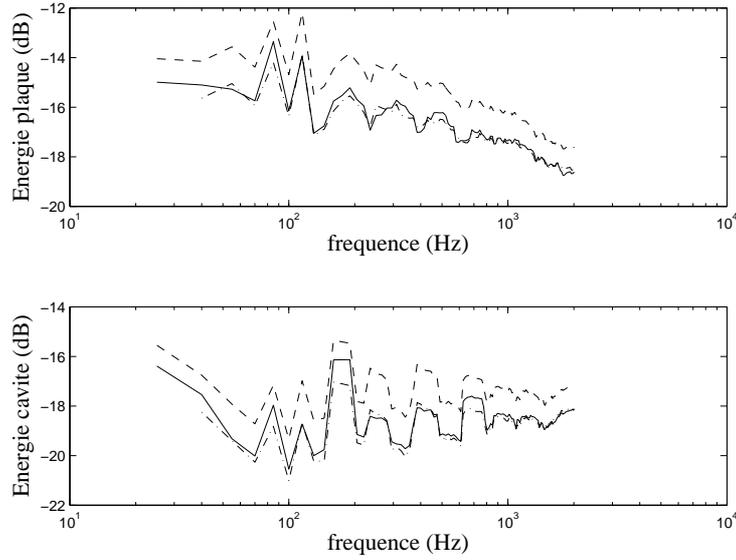


FIGURE 5.8 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 650 \text{ m.s}^{-1}$: (—) modèle de référence / (---) modélisation spatial extent / (-.-) modélisation moyenne en espace k

5.4 Excitation par bruit diffus

5.4.1 Approche *spatial extent*

Comme cela a été rappelé au paragraphe 1.7, la fonction de corrélation spatiale d'une excitation par bruit diffus est :

$$C_{diffus}(\zeta, \eta; \omega) = \frac{\sin(k_0 \zeta)}{k_0 \zeta} \frac{\sin(k_0 \eta)}{k_0 \eta} \quad (5.26)$$

où $\zeta = x - x'$, $\eta = y - y'$ et $k_0 = \omega/c_0$ est le nombre d'onde acoustique.

L'approche équivalente, donnée par l'équation 5.16, conduit à la fonction de corrélation équivalente suivante :

$$C_{eq,diffus}(\omega) = \frac{\pi^2}{k_0^2} \quad (5.27)$$

La figure 5.9 présente le comportement énergétique du système couplé plaque-cavité modélisée par une approche par couplage modal — qui constitue le modèle de référence — et par une approche *spatial extent* calculée avec la fonction de corrélation équivalente ci-dessus. On remarque que, comme dans le cas de l'excitation par une couche limite turbulente, la modélisation *spatial extent* surestime les niveaux énergétiques dans la cavité en dessous de la fréquence critique de la plaque, qui est de 2110 Hz pour la configuration étudiée.

De même que pour le cas d'excitation par couche limite turbulente, l'expression de C_{diffus} dans l'espace des nombres d'onde permet de décrire le comportement des modes de plaque excités :

$$C_{diffus}(k_x, k_y) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{k_0^2}, & \text{si } \|k_x\| < k_0 \text{ et } \|k_y\| < k_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.28)$$

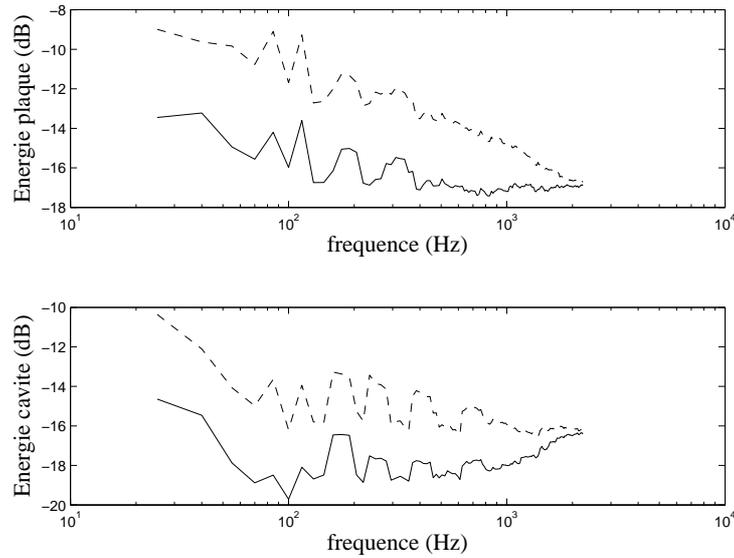


FIGURE 5.9 – Comparaison des énergies dans le système couplé plaque-cavité, la plaque étant soumise à une excitation par bruit diffus, (—) : modèle de référence / (---) : modélisation spatial extent

Il existe deux types de modes : les modes rapides dont le nombre d'onde est inférieur au nombre d'onde acoustique, et les modes lents. Les modes lents sont séparés en modes de bords — dont le nombre d'onde suivant e_x ou e_y est inférieur au nombre d'onde acoustique, et les modes de coin dont les deux composantes du nombre d'onde sont supérieures au nombre d'onde acoustique. Les modes rapides sont bien mieux couplés avec l'air extérieur que les modes lents.

Or, les modes lents ne peuvent être excités que si la fréquence d'excitation est inférieure à la fréquence critique de la plaque. Au-dessus de la fréquence critique, seuls les modes rapides sont excités. En-dessous, les modes lents, qui sont moins bien couplés avec l'air extérieur que les modes rapides, sont aussi excités. L'approche *spatial extent* ne traite pas séparément les modes lents et les modes rapides, ce qui explique que l'acceptation de l'énergie par la plaque en-dessous de la fréquence critique soit surestimée par la modélisation *spatial extent*.

Si une approche asymptotique (voir paragraphe 5.3) est utilisée pour calculer la fonction de corrélation spatiale équivalente, elle ne donne pas de résultats satisfaisants. En effet, dans le cas de l'approche asymptotique, la fonction de cohérence spatiale équivalente devient :

$$C_{eq,diffus}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{pour } \omega < \omega_c \\ \frac{\pi^2 c_0^2}{\omega_0^2}, & \text{pour } \omega > \omega_c \end{cases} \quad (5.29)$$

En dessous de la fréquence critique, la plaque n'est pas du tout excitée par l'air extérieur, ce qui n'est pas le cas sur le modèle de référence. En effet, certains modes de la plaque sont excités par des interactions de bords ou de coin avec l'air extérieur en-dessous de la fréquence critique, ce qui n'est pas pris en compte dans la modélisation asymptotique. La modélisation moyenne en espace k est basée sur les mêmes mécanismes que la modélisation asymptotique et donnerait les mêmes résultats.

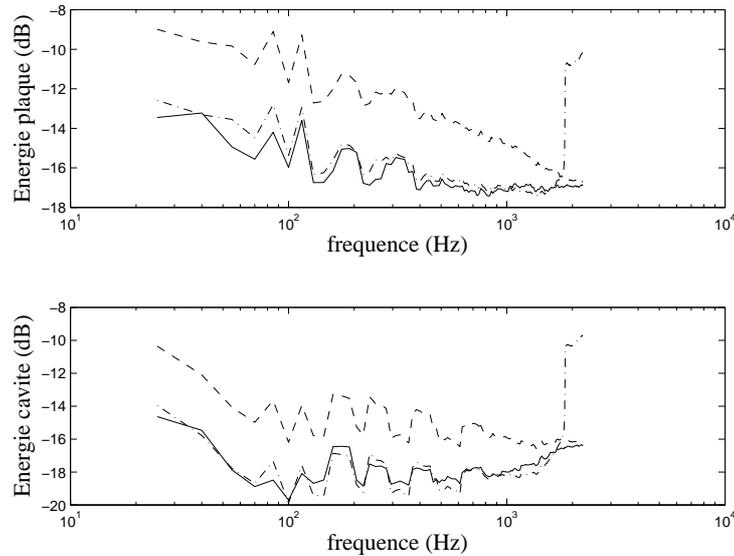


FIGURE 5.10 – Comparaison des énergies dans le système couplé plaque-cavité, la plaque étant soumise à une excitation par bruit diffus, (—) : modèle de référence / (---) : modélisation spatial extent / (-.-) : modélisation par approche par efficacité de rayonnement

5.4.2 Approche par efficacité de rayonnement

Une autre méthode est alors introduite, basée sur le coefficient d'efficacité de rayonnement de la plaque. Ce coefficient décrit l'échange énergétique entre une plaque décollée et l'air extérieur, et, plus précisément, le rayonnement de la plaque vers l'air extérieur, mais aussi l'influence de l'excitation extérieure sur la plaque.

La fonction de corrélation spatiale équivalente est alors exprimée en fonction du coefficient de rayonnement de la plaque σ , tel qu'il est donné par Maidanik dans la référence [66] :

$$C_{eq,diffus}(\omega) = \frac{\pi^2}{k_0^2} \sigma(\omega) \quad (5.30)$$

Les niveaux énergétiques obtenus par une telle modélisation sont présentés sur la figure 5.10.

En dessous de la fréquence critique, les niveaux énergétiques donnés par cette dernière modélisation sont bien plus proches de la modélisation de référence que les niveaux énergétiques obtenus par la modélisation *spatial extent*. Par contre, sur la modélisation utilisant le coefficient de rayonnement de la plaque, on observe un pic d'énergie à la fréquence critique, qui n'est pas présent dans le modèle de référence utilisé ici. En effet, en dehors de l'excitation par bruit diffus, l'interaction entre la plaque et le milieu extérieur — c'est-à-dire le rayonnement de la plaque vers l'extérieur — n'est pas pris en compte dans le modèle de référence.

Cependant, contrairement au modèle *spatial extent*, cette nouvelle modélisation donne une estimation correcte des niveaux énergétiques dans la structure. Cette modélisation peut donc être utilisée en-dessous de la fréquence critique, tandis que la modélisation *spatial extent* peut corriger la modélisation au voisinage et au-dessus de la fréquence critique.

Comme pour le cas de l'excitation par couche limite turbulente, le temps de calcul de la modélisation SEA-like — c'est-à-dire le calcul de la matrice SEA-like et celui du vecteur des puissances

TABLE 5.2 – Temps de calcul de différentes modélisations du système couplé excité par un bruit diffus

Modèle de référence	763 s
Calcul SEA-like sous excitation <i>rain-on-the-roof</i>	502 s
Calcul de la puissance injectée équivalente	2/100 s

TABLE 5.3 – Temps de calcul de différentes modélisations du système fortement couplé excité par une couche limite turbulente

Modèle de référence	3430 s
Calcul SEA-like sous excitation <i>rain-on-the-roof</i>	2295 s
Calcul de la puissance injectée équivalente	2 s

injectées — est inférieur au temps de calcul du modèle de référence (voir tableau 5.2).

5.5 Études paramétriques : influence de la force de couplage

5.5.1 Excitation par couche limite turbulente

La figure 5.11 présente les niveaux énergétiques dans un système plaque-cavité fortement couplé, où la plaque est excitée par une couche limite turbulente. Les caractéristiques du système sont reprises du chapitre 4. La densité modale de la plaque devient plus élevée que précédemment et le nombre d'onde en flexion dans la plaque diminue.

Or, dans une modélisation par approche moyenne, la fonction de corrélation spatiale est moyennée dans l'espace des nombres d'onde, dont la discrétisation dépend de la discrétisation en fréquence. Ainsi, plus les fréquences sont discrétisées finement, plus la discrétisation de l'espace des nombres d'onde est fine. Pour calculer la puissance injectée équivalente, l'intervalle séparant deux fréquences discrètes a donc été diminuée : cela permet de raffiner le calcul de la moyenne de $C_{eq,tbl}$ et donc d'augmenter la pertinence du calcul SEA-like. Ainsi, lors du calcul de la fonction de corrélation équivalente, il faut prendre en compte le comportement dynamique du système excité, dont dépendent les approximations issues de l'approche équivalente.

Cette observation mise à part, on remarque que la modélisation SEA-like reste pertinente par rapport à la modélisation basée sur une approche par couplage modal.

De même que pour le cas faiblement couplé, on remarque que la modélisation SEA-like permet de diminuer le temps de calcul par rapport à une approche par couplage modale classique (voir tableau 5.3). Ici, la différence est encore plus forte car, la densité modale de la plaque étant plus élevée, la matrice des coefficients *joint acceptance* utilisée dans le modèle de référence est plus importante et donc, plus longue à calculer.

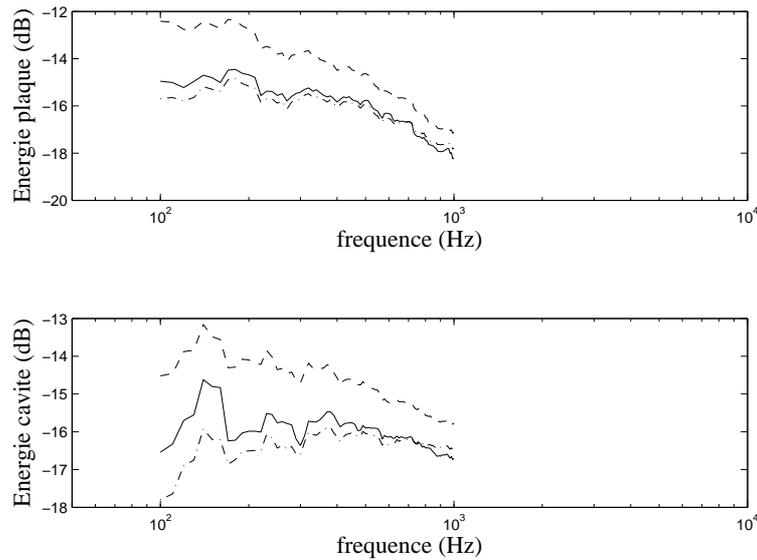


FIGURE 5.11 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ et pour un système fortement couplé : (—) modèle de référence / (---) modélisation par approche spatial extent / (-.-) modélisation moyenne en espace k

TABLE 5.4 – Temps de calcul de différentes modélisations du système fortement couplé excité par un bruit diffus

Modèle de référence	3438 s
Calcul SEA-like sous excitation <i>rain-on-the-roof</i>	2296 s
Calcul de la puissance injectée équivalente	2/100 s

5.5.2 Excitation par bruit diffus

La figure 5.12 présente les niveaux énergétiques dans un système plaque-cavité fortement couplé, où la plaque est excitée par un bruit diffus. Comme pour le cas de la couche limite turbulente, la modélisation SEA-like reste pertinente par rapport à la modélisation par approche modale.

Le tableau 5.4 récapitule les temps de calcul pour les différentes modélisations. La modélisation SEA-like est moins coûteuse en calcul que la modélisation de référence.

Ainsi, les méthodes présentées pour modéliser les excitations aérodynamiques avec la modélisation SEA-like peuvent également être appliquées à des systèmes fortement couplés. Comme on l'a remarqué dans le chapitre 4, Cette application permet de souligner un des avantages de la méthode SEA-like par rapport à la méthode SEA : contrairement à cette dernière, la méthode SEA-like reste pertinente lorsque le couplage entre les sous-systèmes devient élevé. On montre donc que la modélisation de l'excitation — c'est-à-dire, le calcul de la fonction de corrélation équivalente — est indépendante de la nature du couplage entre les sous-systèmes.

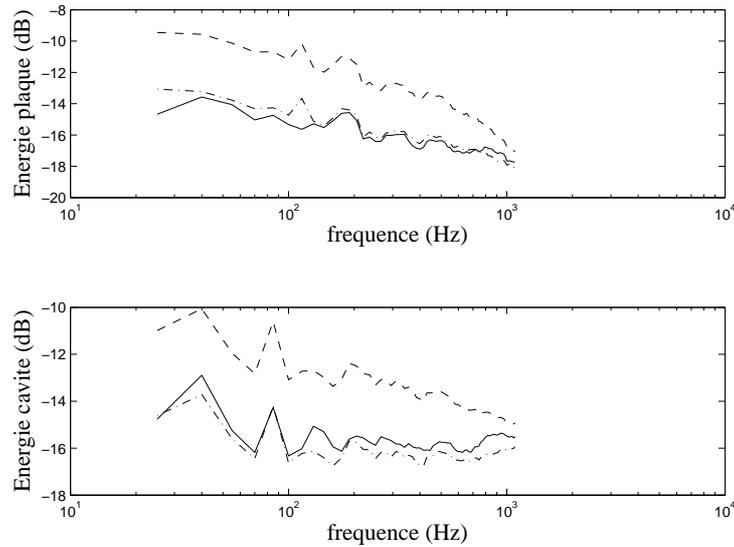


FIGURE 5.12 – Énergie moyennée (en dB) dans la plaque et la cavité pour une excitation par bruit diffus et pour un système fortement couplé : (—) modèle de référence / (---) modélisation par approche spatial extent / (-.-) modélisation par approche efficacité de rayonnement

5.6 Études paramétriques : influence des conditions limites de la structure

5.6.1 Mise en œuvre

Les modélisations SEA-like des différentes excitations présentées précédemment sont étendues à différentes conditions aux limites de la structure, afin d'étudier l'influence de modifications dans les paramètres structuraux.

Pour cela, des modèles de références sont développés dans un premier temps. Ces modèles de références sont basés sur une analyse par couplage modale utilisant les fonctions hiérarchiques, présentées au paragraphe 2.6. Puis des modélisations SEA-like correspondant aux différentes configurations de conditions aux limites sont calculées sous l'hypothèse d'excitation de type *rain-on-the-roof*, pour suivre la procédure introduite au paragraphe 5.2. Finalement, les fonctions de corrélations spatiales équivalentes, calculées dans les paragraphes précédents sont utilisées pour calculer le vecteur des puissances injectées SEA-like correspondant à l'excitation considérée. La mise en œuvre de la modélisation SEA-like pour des systèmes quelconques soumis à des excitations aérodynamiques est présentée dans le paragraphe suivant.

5.6.2 Excitation par couche limite turbulente

Les figures 5.13 et 5.14 présentent le comportement énergétique du système couplé lorsque la plaque est excitée par une couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$. La figure 5.13 présente le cas d'une plaque encastree en $x = 0$ et $x = a$ et simplement appuyée en $y = 0$ et $y = a$ (ou *semi-encastree*), tandis que la figure 5.14 présente le cas d'une plaque encastree sur les quatre côtés. Les mêmes remarques que pour une plaque simplement appuyée peuvent être faites : la modélisation

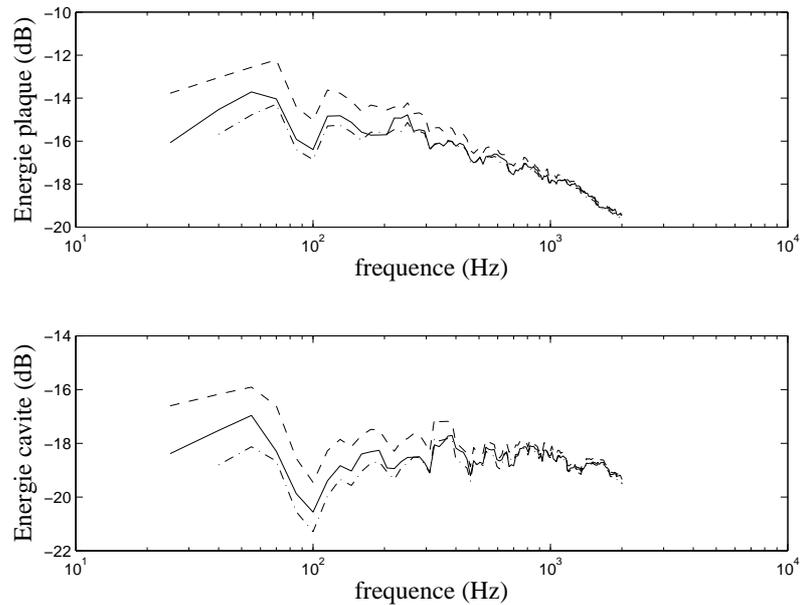


FIGURE 5.13 – Énergie moyennée (en dB) dans le système couplé plaque-cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$, la plaque étant encastrée en $x = 0$ et $x = a$ et simplement appuyée en $y = 0$ et $y = a$: (—) modèle de référence / (---) modélisation spatial extent / (-.-) modélisation moyenne en espace k

spatial extent est pertinente au-dessus de la fréquence critique mais surestime l'énergie en-dessous de la fréquence critique. La modélisation moyenne en espace k , par contre, est pertinente sur tout le domaine fréquentiel.

L'analyse des différents modèles montre que le modèle équivalent développé ici pour une excitation par couche limite turbulente ne dépend pas des conditions aux limites de la structure. Ce fait est confirmé par la figure 5.15, qui montre les différences entre les modélisations de références et les modélisations par approche moyenne en espace k , pour les trois conditions aux limites étudiées. On voit que ces erreurs sont très proches pour les trois conditions aux limites.

5.6.3 Excitation par bruit diffus

Les deux systèmes couplés plaque-cavité sont excités cette fois-ci par un bruit diffus. Les figures 5.16 et 5.17 présentent le comportement énergétique du système couplé pour un chargement diffus de la plaque. La figure 5.16 présente le cas d'une plaque semi-encastrée, et la figure 5.17 présente le cas d'une plaque encastrée.

Comme pour le cas de l'excitation par couche limite turbulente, les erreurs entre les deux modélisations suivant les conditions aux limites, présentées figure 5.18, sont du même ordre de grandeur, bien que le coefficient d'efficacité de rayonnement soit calculé avec les modes d'une plaque simplement appuyée. En basses et moyennes fréquences, l'influence des conditions aux limites est visible sur les courbes, notamment la présence du premier mode de plaque, qui est plus marqué sur le modèle de référence que sur le modèle par approche par efficacité de rayonnement.

En moyennes et hautes fréquences, par contre, les erreurs sont comparables pour les trois conditions aux limites. Comme cela a été expliqué dans le paragraphe 5.4, l'erreur de la modélisation

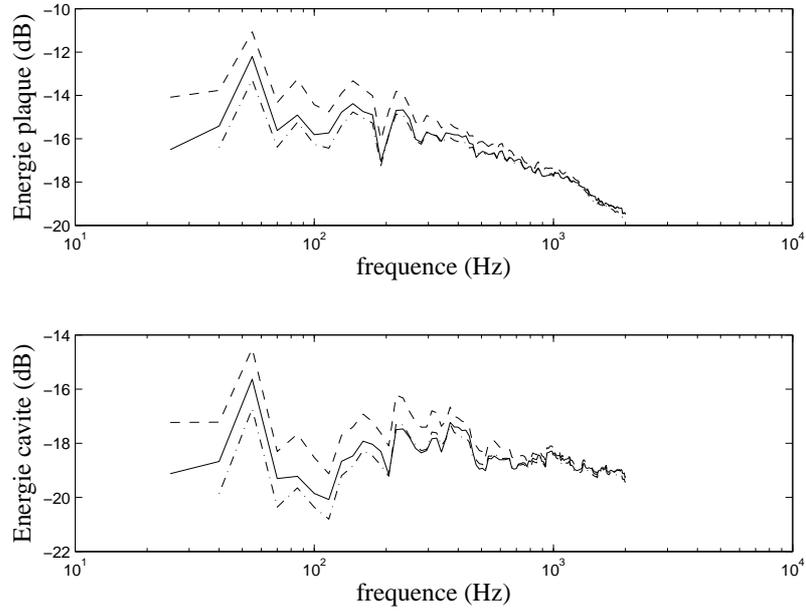


FIGURE 5.14 – Énergie moyennée (en dB) dans le système couplé plaque-cavité pour une excitation par couche limite turbulente de vitesse $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$, la plaque étant encastrée : (–) modèle de référence / (– –) modélisation spatial extent / (– . –) modélisation moyenne en espace k

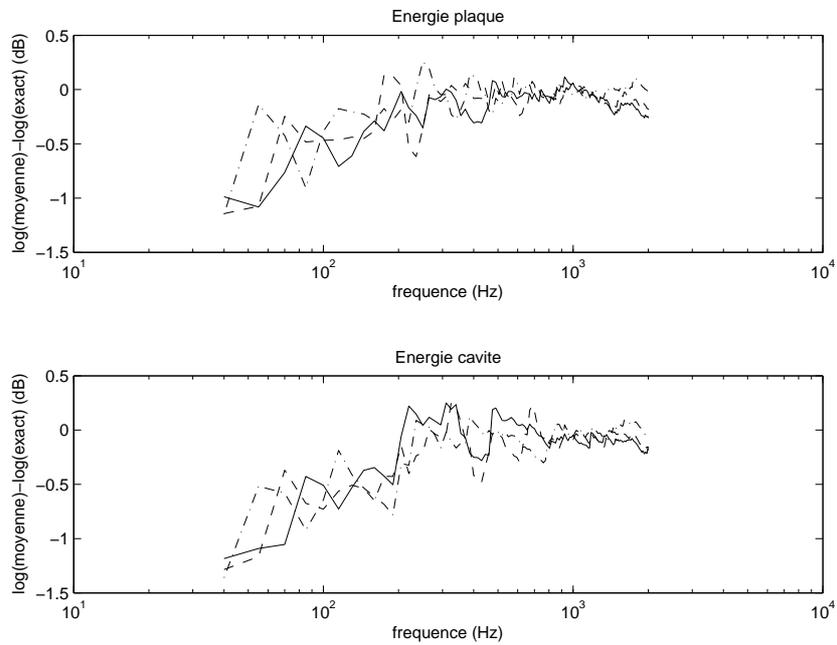


FIGURE 5.15 – Erreur entre les modélisations exacte et par approche moyenne en espace k de l'excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ appliquée à trois systèmes couplés plaque-cavité, la plaque étant simplement appuyée (– . –), encastrée (–) ou semi-encastrée (– –)

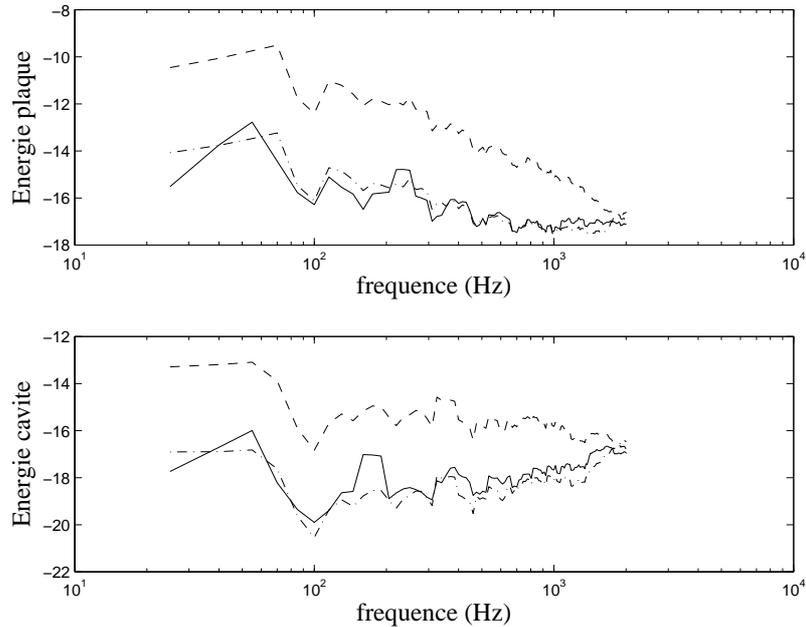


FIGURE 5.16 – Énergie moyennée (en dB) dans le système couplé plaque-cavité pour une excitation par bruit diffus, la plaque étant encastree : (—) modèle de référence / (---) modélisation spatial extent / (-.-) modélisation moyenne en espace k

basée sur l’approche par efficacité de rayonnement par rapport à la modélisation de référence augmente au voisinage de la fréquence critique. Le modèle de fonction de corrélation équivalente peut donc être utilisé indifféremment pour les trois conditions aux limites présentées ici.

5.7 Mise en œuvre de la méthode

Dans ce mémoire, la méthode SEA-like a été appliquée à un système couplé plaque-cavité, de géométrie simple, ce qui a permis de faire quelques études sur les particularités des interactions fluide-structure dans le domaine des moyennes fréquences. Cependant, pour permettre l’extension de la méthode à des systèmes plus complexes, une modélisation SEA-like basée sur une approche par éléments finis a également été présentée. Cette démarche permet d’étendre la SEA-like à des géométries plus complexes.

La mise en œuvre de la méthode SEA-like est introduite ici pour un système plus général que le système couplé plaque-cavité. La modélisation des excitations aérodynamiques est également intégrée à la méthode.

La méthode de couplage modale a été appliquée avec succès sur le système couplé plaque-cavité. Elle peut également être étendue à des systèmes plus complexes, à partir d’une modélisation modale ou d’une modélisation par éléments-finis. La division en éléments simples, qui est importante pour la pertinence de la méthode SEA-like, peut être reprise de modèles SEA existants.

Le schéma 5.20 montre la démarche qui a été suivie pour modéliser le système couplé plaque-cavité sous excitation aérodynamique. Cette démarche permet entre autre de décorrélérer la modélisation de l’excitation et la modélisation du système proprement dit. En effet, l’approche utilisée

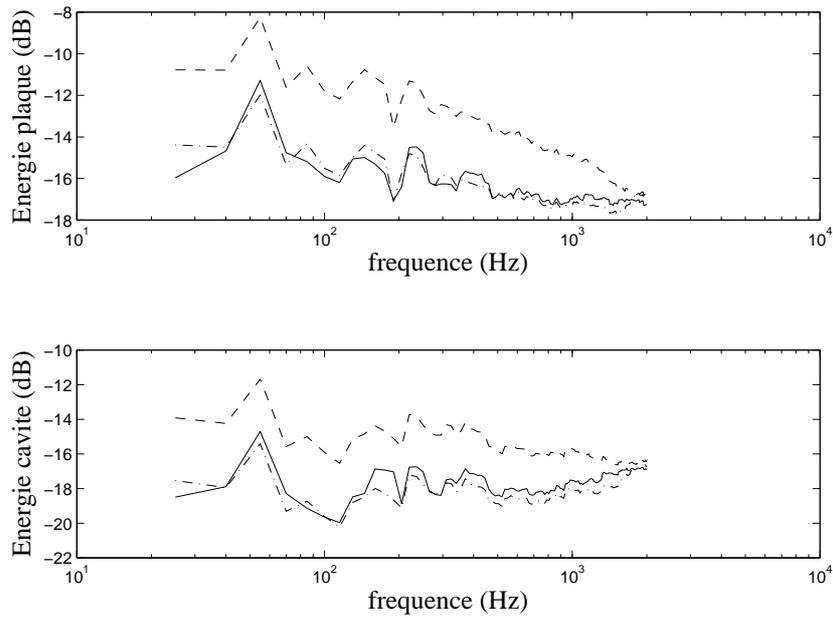


FIGURE 5.17 – Énergie moyennée (en dB) dans le système couplé plaque-cavité pour une excitation par bruit diffus, la plaque étant encastrée en $x = 0$ et $x = a$ et simplement appuyée en $y = 0$ et $y = a$: (–) modèle de référence / (– –) modélisation spatial extnt / (– . –) modélisation moyenne en espace k

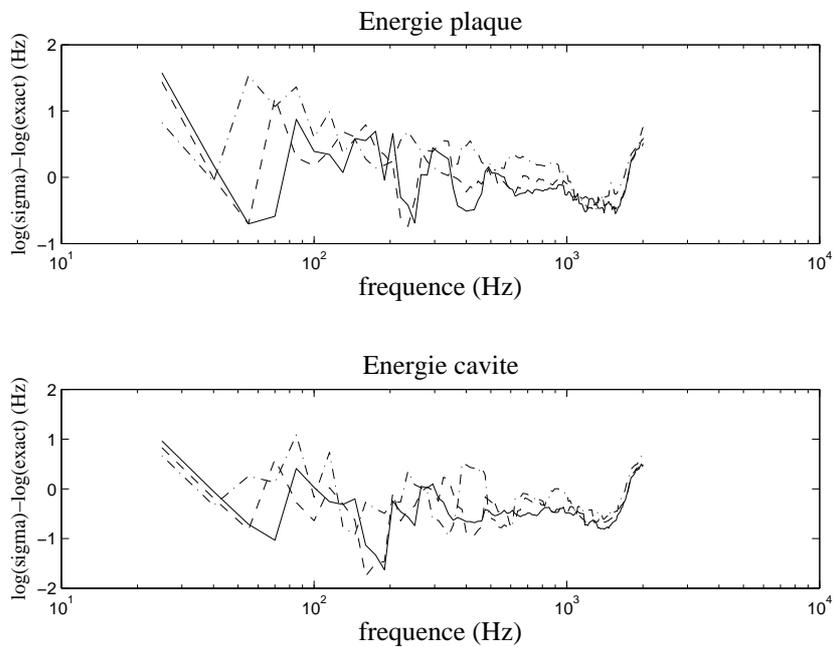


FIGURE 5.18 – Erreur entre les modélisations exacte et par approche moyenne en espace k de l'excitation par bruit diffus appliquée à trois systèmes couplés plaque-cavité, la plaque étant simplement appuyée (–), encastrée (– –) ou semi-encastrée (– . –)

pour modéliser le système suppose que l'excitation est de type *rain-on-the-roof*, qui est indépendant de l'excitation aérodynamique que l'on veut modéliser.

De plus, il est possible de trouver une démarche qui permette de calculer la fonction de corrélation spatiale équivalente à l'excitation aérodynamique, soit par approche *spatial extent* si celle-ci le permet, soit par une autre méthode — on a montré, en effet, que les approches utilisées pour la modélisation des excitations par bruit diffus et par couche limite étaient indépendants des conditions aux limites de la structure et du couplage entre la structure et la cavité. Cependant, le comportement dynamique du système excité peut entraîner la nécessité d'une précision plus ou moins importante dans le calcul de l'excitation équivalente, comme on l'a vu dans le cas du système fortement couplé.

Ainsi, si on veut modéliser un même système soumis à plusieurs excitations aérodynamiques, il suffit de calculer un modèle SEA-like du système sous excitation *rain-on-the-roof*, qui est la modélisation la plus coûteuse, puis d'appliquer plusieurs excitations équivalentes à ce modèle. De la même manière, il devient possible de construire une bibliothèque d'excitations, qui pourrait être appliquée à un grand nombre de systèmes différents.

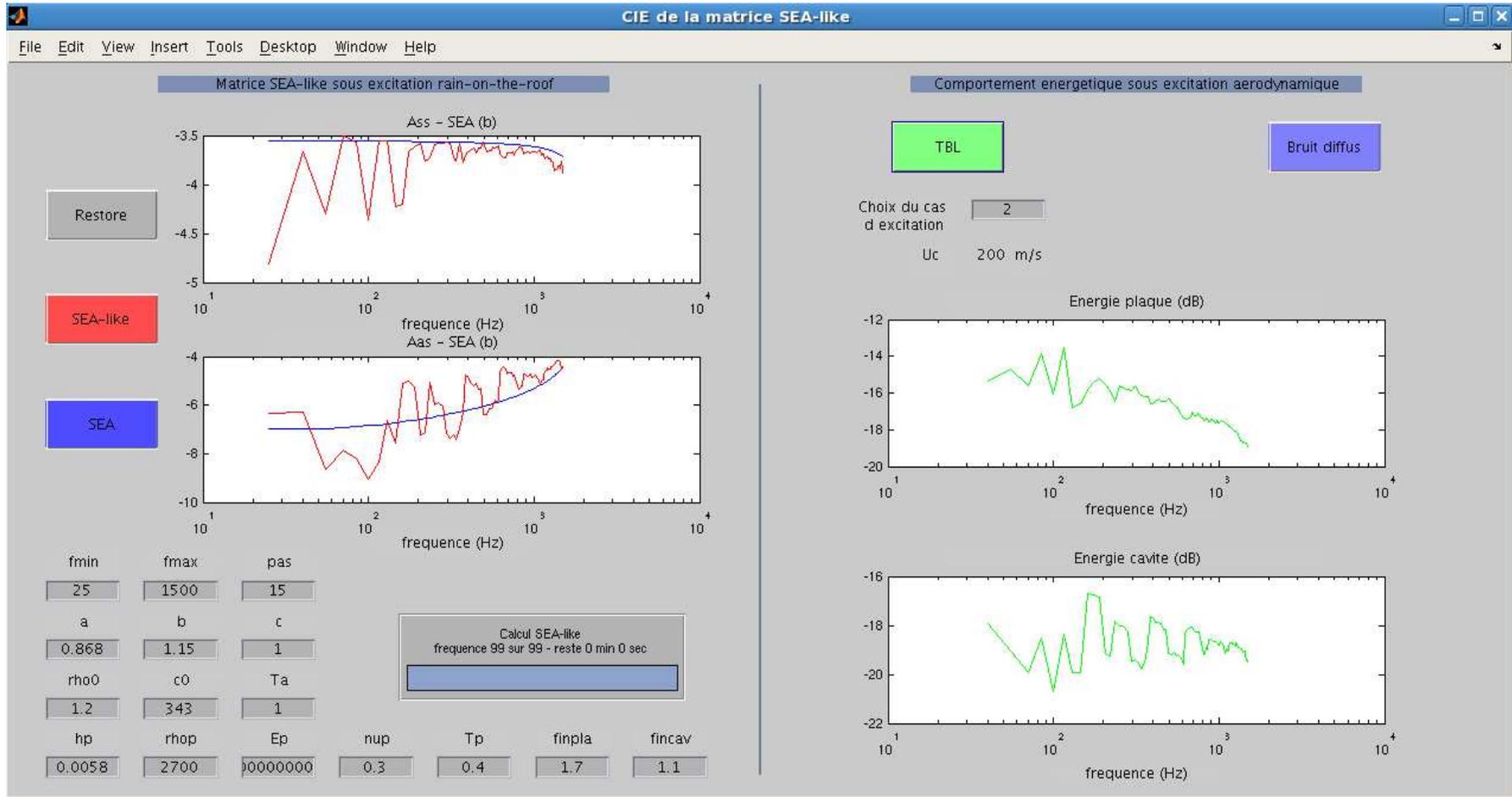


FIGURE 5.19 – Interface graphique Matlab de modélisation SEA-like d'un système couplé plaque-cavité excité par une couche limite turbulente ou un bruit diffus

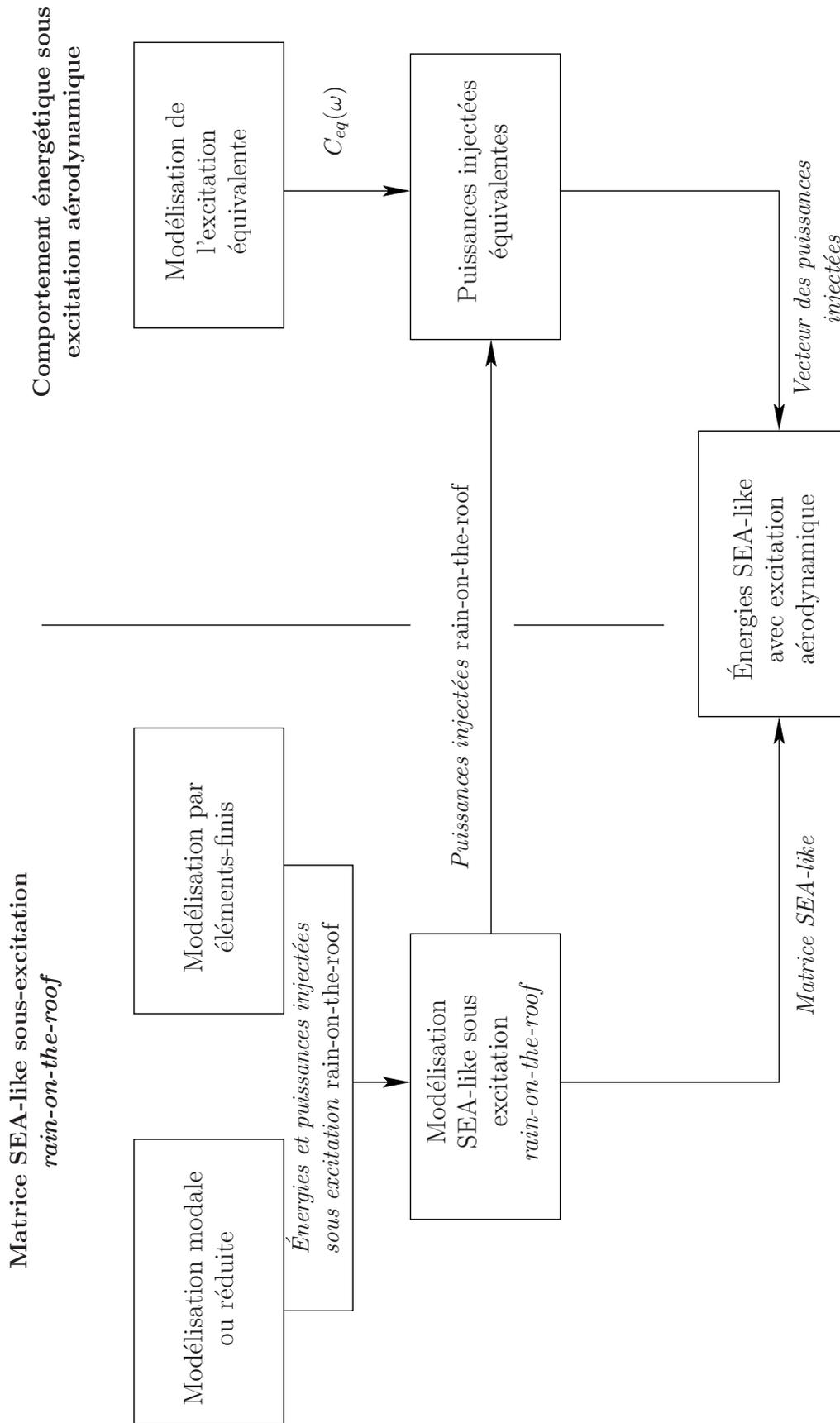


FIGURE 5.20 – Schéma sur la mise en œuvre de la méthode SEA-like pour un système quelconque soumis à une excitation aérodynamique

Conclusion

Bilan

La méthode SEA-like a été appliquée à un système présentant une problématique d'interaction fluide-structure dans le domaine des moyennes fréquences. Cette méthode énergétique, qui est calculée à partir de méthodes basses fréquences comme la méthode par éléments-finis ou l'analyse modale, permet de décrire à la fois la structure, qui présente un comportement de type basses fréquences dans cette région fréquentielle, et le fluide, qui présente un comportement de type plutôt hautes fréquences. Ce type de système est alors délicat à modéliser dans le domaine des moyennes fréquences. En effet, les méthodes utilisées traditionnellement dans les domaines des basses et des hautes fréquences ne donnent pas une modélisation pertinente du système.

Un système couplé plaque-cavité a été modélisé avec la méthode SEA-like basée sur une modélisation par couplage modal. Ce modèle a d'abord été comparé à une modélisation SEA, pour validation dans le domaine des hautes fréquences, puis une deuxième modélisation SEA-like, basée cette fois sur une approche par éléments-finis, a permis de valider le modèle SEA-like par couplage modal dans le domaine des moyennes fréquences. En effet, l'introduction de la méthode SEA-like par couplage modal se révèle intéressante pour la modélisation des interactions fluide-structure, car les avantages de l'utilisation d'une telle méthode pour modéliser le système couplé sont importants, notamment en terme de temps et de mémoire de calcul.

Différentes configurations sont alors étudiées pour déterminer l'influence de plusieurs paramètres sur la modélisation SEA-like, en vue de l'extension de la modélisation SEA-like à des systèmes plus complexes. La modification des conditions aux limites de la structure permet de souligner l'un des avantages de la méthode SEA-like par rapport à une méthode comme la SEA : on remarque en effet que, dans les domaines des moyennes et des basses fréquences, les conditions aux limites ont une influence sur les coefficients SEA-like et permettent ainsi de rendre compte des différents comportements énergétiques lorsque les conditions aux limites sont modifiées.

L'intensité du couplage est également modifiée entre la plaque et la cavité. Jusqu'à présent, les dimensions du système couplé étaient fixées de telle sorte que la plaque et la cavité étaient faiblement couplées : les modes de chacun des sous-systèmes découplés pouvaient se retrouver dans les modes du système couplé. Une autre configuration est alors introduite, où la plaque et la cavité sont fortement couplées. La démarche SEA-like par couplage modal est également validée dans ce cas là. Ce résultat permet d'étendre ce type de modélisation à des systèmes fortement couplés, ce que la méthode SEA ne permettait pas.

Le calcul des coefficients SEA-like, effectué avec une excitation *rain-on-the-roof* lors de la validation présentée ci-dessus, peut également être étendu à des excitations aéroacoustiques. Une approche équivalente présentée dans des travaux précédents est reprise ici et appliquée au système couplé plaque-cavité. Les différentes configurations étudiées précédemment sont étudiées pour chaque cas d'excitation, ce qui permet de conclure que les approches équivalentes proposées per-

mettent d'étendre la modélisation SEA-like à des excitations aéroacoustiques, tout en gardant la modélisation issue des calculs du cas *rain-on-the-roof*.

Perspectives

L'extension de la méthode SEA-like à des systèmes de géométries complexes peut alors être envisagée, en particulier lorsque le système présente plusieurs comportements vibratoires différents dans un domaine fréquentiel donné, comme par exemple, dans le cas de couplage entre un système plus souple et un système plus rigide. En effet, une démarche de modélisation SEA-like à partir d'un modèle par éléments finis a été présentée ici. Une modélisation réduite peut également être utilisée, ce qui permet de diminuer les coûts de calcul.

L'utilisation d'excitations δ -corrélées équivalentes pour modéliser le système simplifie également la mise en œuvre de la modélisation des systèmes dans le domaine des moyennes fréquences. En effet, pour la modélisation du système proprement dit, un seul cas d'excitation est utilisé — une excitation de type *rain-on-the-roof*. Cette méthode a pour avantage de simplifier les modélisations par rapport à un cas d'excitation aéroacoustique et permet de séparer la modélisation du système et la modélisation des excitations. Ceci permet d'une part de minimiser les calculs si plusieurs excitations sont appliquées à un même système. D'autre part, il est possible d'effectuer une première modélisation du système lorsque le type d'excitation est encore inconnu, puis d'appliquer le modèle d'excitations δ -corrélées équivalentes à la modélisation *rain-on-the-roof*.

Finalement, une extension de la méthode SEA-like pourrait porter sur la modélisation de matériaux plus complexes. Dans ce rapport, les matériaux sont définis comme homogènes et isotropes. Or les systèmes aéronautiques peuvent présenter des caractéristiques plus complexes (matériaux en nids d'abeille, sandwichs, ...). La modélisation SEA-like de tels types de matériaux a déjà été abordée dans la référence [32]. Il serait alors intéressant de continuer cette étude et d'étendre la méthode SEA-like à d'autres types de matériaux.

Table des figures

1.1	Schéma de deux oscillateurs linéaires	8
1.2	Couplage modal entre deux sous-systèmes	9
1.3	Puissance rayonnée par G. Maidanik	14
1.4	Puissance rayonnée par F.G. Leppington	15
1.5	Modélisation SEA du système couplé plaque-cavité	16
1.6	Modélisation SEA du système cavité-plaque-cavité	17
1.7	Régions des basses, moyennes et hautes fréquences	19
1.8	WIA : puissance transmise	22
1.9	Excitation par couche limite turbulente	39
1.10	Fonction de corrélation spatiale en fonction du nombre d'onde k_x	41
1.11	Modes d'une plaque sous bruit diffus	42
2.1	Système couplé plaque/cavité	47
2.2	Fonctions de transfert des modes de plaque et de cavité découplés	52
2.3	Fréquences des modes couplés et découplés	53
2.4	Rapport des énergies modales des modes couplés	54
2.5	Energie dans la cavite en fonction de l'épaisseur de la plaque	55
2.6	Pression modale d'une cavité couplée et découplée à 1529 Hz	56
2.7	Pression modale d'une cavité couplée et découplée à 1531 Hz	56
2.8	Energie dans la cavite en fonction de l'épaisseur de la plaque	58
2.9	Pression modale d'une cavité à 1018 Hz	58
2.10	Energie dans la cavite en fonction de l'épaisseur de la plaque	59
2.11	Pression modale d'une cavité à 1018 Hz	59
2.12	Energie dans la cavite en fonction de l'épaisseur de la plaque	60
2.13	Pression modale d'une cavité couplée et découplée à 821 Hz	61
2.14	Pression modale d'une plaque couplée et découplée à 821 Hz	61
2.15	Pression modale d'une cavité couplée et découplée à 825 Hz	62
2.16	Modes (1,2) et (1,5) d'une plaque simplement appuyée calculé par méthode hiérar- chique	67

2.17	Mode (1,11) d'une plaque simplement appuyée calculé par méthode hiérarchique	68
2.18	Mode (2,11) d'une plaque simplement appuyée calculé par méthode hiérarchique	68
3.1	Calcul de la puissance injectée dans la cavité	82
3.2	Energie dans la structure et la cavité en fonction du nombre de points d'excitation dans la cavité	83
3.3	Energie dans la cavité pour plusieurs points d'excitation	84
3.4	Calcul de la puissance injectée par une source ponctuelle	85
3.5	Comparaison avec une source ponctuelle en milieu infini	87
3.6	Puissance injectée pour différents rayons de la surface d'intégration	87
3.7	Puissances injectées pour plusieurs points d'excitation	88
3.8	Facteur de rayonnement théorique et expérimental	91
3.9	Coefficients de la matrice SEA du système couplé plaque-cavité	92
3.10	Comparaison SEA-like/SEA	93
4.1	Comparaison SEA-like méthode par couplage modal/méthode éléments-finis	99
4.2	Coefficients SEA-like avec modes de plaque dans une bande de fréquence de 100 Hz autour de la fréquence d'excitation	101
4.3	Coefficients SEA-like avec modes de plaque dans une bande de fréquence de 50 Hz autour de la fréquence d'excitation	101
4.4	Coefficients SEA-like avec modes de plaque dans une bande de fréquence de 25 Hz autour de la fréquence d'excitation	101
4.5	Coefficients SEA-like avec modes de plaque dans une bande de fréquence de 12 Hz autour de la fréquence d'excitation	101
4.6	Coefficients SEA-like avec modes de cavité dans une bande de fréquence de 25 Hz autour de la fréquence d'excitation	102
4.7	Coefficients SEA-like avec modes de cavité dans une bande de fréquence de 12 Hz autour de la fréquence d'excitation	102
4.8	Coefficients SEA-like avec modes de cavité dans une bande de fréquence de 400 Hz et 800 Hz autour de la fréquence d'excitation	103
4.9	Coefficients SEA-like avec modes de plaque dans une bande de fréquence de 25 Hz autour de la fréquence d'excitation	104
4.10	Efficacité de rayonnement modal d'une plaque couplée avec un milieu fini ou infini	105
4.11	Coefficients SEA-like avec modes de plaque excités et rayonnants	106
4.12	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> structural	109
4.13	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	109
4.14	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> structural	110
4.15	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	110
4.16	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> structural	110
4.17	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	110

Table des figures

4.18	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> structural	111
4.19	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	111
4.20	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> structural	112
4.21	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	112
4.22	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> structural	113
4.23	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	113
4.24	Coefficients SEA-like A_{ss} et A_{as} sans <i>cross-coupling</i>	113
4.25	Coefficients SEA-like A_{sa} et A_{aa} sans <i>cross-coupling</i>	114
4.26	Coefficients SEA-like A_{sa} et A_{aa} sans <i>cross-coupling</i> acoustique	114
4.27	Coefficient A_{ss} pour plusieurs conditions aux limites de la plaque	116
4.28	Coefficient A_{sa} pour plusieurs conditions aux limites de la plaque	116
4.29	Mode du système complet de fréquence 188.18 Hz	118
4.30	Mode du système complet de fréquence 190.49 Hz	118
4.31	Comparaison des approches par couplage modal et éléments-finis en cas de couplage fort	119
5.1	Différents modèles de fonction de corrélation spatiale	125
5.2	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 75 \text{ m.s}^{-1}$ - modélisation <i>spatial extent</i>	126
5.3	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ - modélisation <i>spatial extent</i>	126
5.4	Fonction de sensibilité d'un mode rapide et fonction de corrélation spatiale	128
5.5	Fonction de sensibilité d'un mode lent et fonction de corrélation spatiale	128
5.6	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 75 \text{ m.s}^{-1}$ - modélisation moyenne en espace k	130
5.7	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ - modélisation moyenne en espace k	130
5.8	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 650 \text{ m.s}^{-1}$ - modélisation moyenne en espace k	131
5.9	Excitation par bruit diffus	132
5.10	Excitation par bruit diffus	133
5.11	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ - Système fortement couplé	135
5.12	Excitation par bruit diffus - Système fortement couplé	136
5.13	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 200 \text{ m.s}^{-1}$ - système couplé cavité/plaque semi-encastrée	137
5.14	Excitation par couche limite turbulente avec $U_c = 75 \text{ m.s}^{-1}$ - système couplé cavité/plaque encastrée	138
5.15	Erreur entre modèles exact et approché pour différentes conditions aux limites avec une excitation TBL	138

5.16	Excitation par bruit diffus - système couplé cavité/plaque semi-encastrée	139
5.17	Excitation par bruit diffus - système couplé cavité/plaque encastrée	140
5.18	Erreur entre modèles exact et approché pour différentes conditions aux limites avec excitation par bruit diffus	140
5.19	Interface graphique de modélisation SEA-like	142
5.20	Mise en œuvre de la méthode SEA-like	143

Bibliographie

- [1] N.S. Bardell. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 151(2) :263 – 289, 1991.
- [2] D.A. Bies and S. Hamid. In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method. *Journal of Sound and Vibration*, 70(2) :187 – 204, 1980.
- [3] W.K. Blake. *Mechanics of flow-induced sound and vibration 2*. Academic Press.
- [4] C. Boisson, J.L. Guyader, and C. Lesueur. Etude numérique de la transmission d'énergie vibratoire entre structures assemblées : cas d'assemblages en L, T et +. *Acustica*, 58 :221–233, 1985.
- [5] C. Boisson, J.L. Guyader, P. Millot, and C. Lesueur. Energy transmission in finite coupled plates, part II : Application to an L shaped structure. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1) :93 – 105, 1982.
- [6] S. Chakrabarti. Trigonometric function representations for rectangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3(2) :261–273, 1971.
- [7] K.L. Chandiramini. Vibration response of fluid-loaded structures to low-speed flow noise. *Journal of the Acoustical Society of America*, 61(6) :1460–1470, 1977.
- [8] K.L. Chandiramini. Some simple models describing the transition from weak to strong coupling in statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(4) :1081–1083, 1978.
- [9] D.M. Chase. Modeling the wavevector-frequency spectrum of turbulent boundary layer wall pressure. *Journal of Sound and Vibration*, 70(1) :29–67, 1980.
- [10] D.M. Chase. The character of the turbulent wall pressure spectrum at subconvective wavenumbers and a suggested comprehensive model. *Journal of Sound and Vibration*, 112(1) :125 – 147, 1987.
- [11] G.M. Corcos. The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer-flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(3) :353–378, 1964.
- [12] V. Cotoni. *Modélisation de phénomènes vibroacoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthode énergétique locale*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2001.
- [13] V. Cotoni, R.S. Langley, and P.J. Shorter. A statistical energy analysis subsystem formulation using finite element and periodic structure theory. *Journal of Sound and Vibration*, 318 :1077–1108, 2008.
- [14] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [15] R. R. Craig and M. C. C. Bampton. A review of time-domain and frequency-domain component-mode synthesis methods. *Int. J. Analytical and Experimental Modal Analysis*, 2(2) :56–72, 1987.

-
- [16] R.R. Craig. Coupling of substructures for dynamic analyses : an overview. In *Structures, Structural Dynamics and Material Conference, 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC*, Atlanta, États-Unis, Avril 2000.
- [17] S. De Rosa and F. Franco. Exact and numerical responses of a plate under a turbulent boundary layer excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 24(2) :212–230, 2008.
- [18] S.M. Doherty and E.H. Dowell. Experimental study of asymptotic modal analysis applied to a rectangular plate with concentrated masses. *Journal of Sound and Vibration*, 170(5) :671–681, 1994.
- [19] E.H. Dowell. Transmission of noise from a turbulent boundary layer through a flexible plate into a closed cavity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 46(1B) :238–252, 1969.
- [20] E.H. Dowell, G.H. Gorman, and D.A. Smith. Acoustoelasticity : general theory, acoustic natural modes and forced response to sinusoidal excitation, including comparisons with experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 52(4) :519–542, 1977.
- [21] E.H. Dowell and Y. Kubota. Asymptotic modal analysis and statistical energy analysis of dynamical systems. *Journal of applied mechanics*, 52(4) :949–956, 1985.
- [22] E.H. Dowell and Y. Kubota. Asymptotic modal analysis and statistical energy analysis of an acoustic cavity. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 110 :371–376, 1988.
- [23] E.H. Dowell and H.M. Voss. The effect of a cavity on panel vibrations. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1(2) :476–477, 1963.
- [24] S. Finnveden. Ensemble averaged vibration energy flows in a three-element structure. *Journal of Sound and Vibration*, 187(3) :495 – 529, 1995.
- [25] S. Finnveden, F. Birgersson, U. Ross, and T. Kremer. A model of wall pressure correlation for prediction of turbulence-induced vibration. *Journal of Fluids and Structures*, 20(8) :1127 – 1143, 2005.
- [26] C.R. Fredö. A SEA-like approach for the derivation of energy flow coefficients with a finite element model. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4) :645–666, 1997.
- [27] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des Vibrations - Application à la dynamique des structures*. Masson, 1992.
- [28] W.R. Graham. A comparison of models for the wavenumber-frequency spectrum of turbulent boundary layer pressures. *Journal of Sound and Vibration*, 206(4) :541–565, 1997.
- [29] R.W. Guy. The response of a cavity backed panel to external airborne excitation : A general analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 65(3) :719–731, 1979.
- [30] J.L. Guyader, C. Boisson, and C. Lesueur. Energy transmission in finite coupled plates, part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1) :81–92, 1982.
- [31] S.A. Hambric, Y.F. Hwang, and W.K. Bonness. Vibrations of plates with clamped and free edges excited by low-speed turbulent boundary layer flow. *Journal of Fluids and Structures*, 19 :93–110, 2004.
- [32] B. Hiverniau. *Transmissions solidiennes : méthodologie de prévision vibroacoustique moyennes et hautes fréquences sous excitations aéroacoustiques*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2006.
- [33] K.L. Hong and J. Kim. Analysis of free vibration of structural-acoustic coupled systems, part I : development and verification of the procedure. *Journal of Vibration*, 188(3) :561–575, 1995.
- [34] K.L. Hong and J. Kim. Analysis of free vibration of structural-acoustic coupled systems, part II : two- and three dimensional examples. *Journal of Vibration*, 188(4) :577–600, 1995.
-

- [35] A. Houmat. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 206(2) :201 – 215, 1997.
- [36] A. Houmat. Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 201(4) :465 – 472, 1997.
- [37] A. Houmat. A triangular fourier p -element for the analysis of membrane vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 230(1) :31 – 43, 2000.
- [38] Y.F. Hwang and G. Maidanik. A wavenumber analysis of the coupling of a structural mode and flow turbulence. *Journal of Sound and Vibration*, 142(1) :135–152, 1990.
- [39] M. Ichchou. *Formulations énergétiques pour l'étude moyennes et hautes fréquences des systèmes : théorie et applications*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 1996.
- [40] M. N. Ichchou and L. Jezequel. Letter to the editor : Comments on simple models of the energy flow in vibrating membranes and on simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 195(4) :679 – 685, 1996.
- [41] M.N. Ichchou, B. Hiverniau, and B. Troclet. Equivalent ‘rain on the roof’ loads for random spatially correlated excitations in the mid-high frequency range. *Journal of Sound and Vibration*, 322(4-5) :926 – 940, 2009.
- [42] J.F. Imbert. *Analyse des structures par Éléments Finis*. Butterworth-Heinemann, 1995.
- [43] INRS. Cdvalor, une référence vibro-acoustique pour structures simples. CD-Rom, 2006.
- [44] J. Jouhaneau. *Acoustique des salles et sonorisation*. Tec et Doc, 1997.
- [45] S.M. Kim and M.J. Brennan. A compact matrix formulation using the impedance and mobility approach for the analysis of structural-acoustic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 223(1) :97–113, 1999.
- [46] Y. Kubota and E.H. Dowell. Experimental investigation of asymptotic modal analysis for a rectangular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 106(2) :203–216, 1986.
- [47] O. Lacour. *Réduction du bruit par contrôle actif d'impédance. Application à des problèmes vibroacoustiques internes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - Lyon 1, 1998.
- [48] P. Ladeveze and L. Arnaud. A new computational method for structural vibrations in the medium-frequency range. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 7(2) :219–226, 2000.
- [49] P. Ladeveze, L. Arnaud, P. Rouch, and C. Blanze. The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18(1/2) :193–214, 2001.
- [50] R.S. Langley. A general derivation of the statistical energy analysis equations for coupled dynamic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 135(3) :499–508, 1989.
- [51] R.S. Langley. A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 141(2) :207–219, 1990.
- [52] R.S. Langley. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 159(3) :483–502, 1992.
- [53] R.S. Langley and P. Bremner. A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 105(3) :1657–1671, 1999.
- [54] R.S. Langley and J.A. Cordioli. Hybrid deterministic-statistical analysis of vibro-acoustic systems with domain couplings on statistical components. *Journal of Sound and Vibration*, 321(3-5) :893 – 912, 2009.

-
- [55] Y. Lase, M. N. Ichchou, and L. Jezequel. Energy flow analysis of bars and beams : Theoretical formulations. *Journal of Sound and Vibration*, 192(1) :281 – 305, 1996.
- [56] F.G. Leppington. The transmission of sound through anisotropic rectangular plates. *Proc. R. Soc. Lond.*, 416 :199–215, 1988.
- [57] F.G. Leppington. Resonant and non-resonant transmission of random noise through complex plates. *Proc. R. Soc. Lond.*, 458 :683–704, 2002.
- [58] C. Lesueur, M. Heckl, and J. Delcambre. *Rayonnement acoustique des structures*. Ed. Eyrolles, 1988.
- [59] R.H. Lyon. Noise reduction of rectangular enclosures with one flexible wall. *Journal of the Acoustical Society of America*, 35(11) :1791–1797, 1963.
- [60] R.H. Lyon and R.G. DeJong. *Theory and application of Statistical Energy Analysis*. Butterworth-Heinemann, 1995.
- [61] B.R. Mace. Statistical energy analysis, energy distribution models and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 264(2) :391–409, 2003.
- [62] B.R. Mace. Statistical energy analysis : coupling loss factor, indirect coupling and system modes. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2) :141–170, 2005.
- [63] B.R. Mace and J. Rosenberg. The SEA of two coupled plates : an investigation into the effects of subsystem irregularity. *Journal of Sound and Vibration*, 212(3) :395–415, 1998.
- [64] B.R. Mace and P.J. Shorter. Energy flow models from finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 233(3) :369–389, 2000.
- [65] G. Maidanik. Use of delta function for the correlations of pressure fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 33(11) :1598–1609, 1961.
- [66] G. Maidanik. Response of ribbed panels to the reverberant acoustic fields. *Journal of the Acoustical Society of America*, 34(6) :809–826, 1962.
- [67] L. Meirovitch. *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill International Ed., 1986.
- [68] R. Ohayon. Reduced models for fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 :139–152, 2004.
- [69] J. Pan and D.A. Bies. An experimental investigation into the interaction between a sound field and its boundaries. *Journal of the Acoustical Society of America*, 83(4) :1436–1444, 1988.
- [70] J. Pan and D.A. Bies. The effect of fluid-structural coupling on acoustical decays in a reverberation room in the high-frequency range. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(2) :718–727, 1990.
- [71] J. Pan and D.A. Bies. The effects of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure - experimental part. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(2) :708–717, 1990.
- [72] J. Pan and D.A. Bies. The effects of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure - theoretical part. *Journal of the Acoustical Society of America*, 87(2) :691–707, 1990.
- [73] L.F. Peretti and E.H. Dowell. Asymptotic modal analysis of a rectangular acoustic cavity excited by wall vibration. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 30(5) :1191–1198, 1992.
- [74] A.J. Price and M.J. Crocker. Sound transmission through double panels using statistical energy analysis. *Journal of the Acoustical Society of America*, 47(3) :683–693, 1970.
- [75] M.S. Ryu. *Application des mobilités énergétiques au couplage fluide-structure*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002.
-

- [76] T. Schmitt. *Modélisation des transferts acoustiques en moyennes et hautes fréquences par méthode énergétique : Application à l'encapsulage des compartiments moteurs*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2004.
- [77] P.J. Shorter and B.R. Mace. Stochastic energy flow models. In *proceedings Internoise98*, Christchurch, Nouvelle-Zélande, Novembre 1998.
- [78] C. Soize. A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94(2) :849–865, 1993.
- [79] K.S. Sum and J. Pan. An analytical model for bandlimited response of acoustical-structural coupled systems. I. direct sound field excitation. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(2) :911–923, 1998.
- [80] K.S. Sum and J. Pan. A study of the medium frequency response of sound field in a panel-cavity system. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(3) :1510–1519, 1998.
- [81] K.S. Sum and J. Pan. On acoustic and structural modal cross-coupling in plate-cavity systems. *Journal of the Acoustical Society of America*, 107(4) :2021–2038, 2000.
- [82] B. Troclet. Logiciel sealascar - prévision de la réponse vibroacoustique haute fréquence des structures à un bruit diffus - manuel théorique. Note EADS ST TE35 n° 145305, 2006.
- [83] B. Troclet. Logiciel sealascar - prévision de la réponse vibroacoustique haute fréquence des structures au bruit aérodynamique et au bruit rasant - manuel théorique. Note EADS ST TE35 n° 145225, 2006.
- [84] B. Troclet. Analyse énergétique des vibrations sous sollicitations aéroacoustiques et validation dans l'industrie spatiale. Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches, 2007.
- [85] B. Troclet, S. Vanpeperstraete, and M. O. Schott. Experimental analysis of lift-off and aerodynamic noise on the ariane 5 launch vehicle. In *Proceedings of First Joint CEAS/AIAA Aeroacoustics Conference*, Munich, Allemagne, Juin 1995.
- [86] C.E. Wallace. Radiation resistance of a rectangular panel. *Journal of the Acoustical Society of America*, 51(3) :946–952, 1972.
- [87] E.C.N. Wester and B.R. Mace. Statistical energy analysis of two edge-coupled rectangular plates : ensemble averages. *Journal of Sound and Vibration*, 193(4) :793–822, 1996.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 7 août 2006,

Vu la demande des Directeurs de Thèse

Monsieur M. ICHCHOU et Monsieur L. JEZEQUEL

et les rapports de

Monsieur J-F. DEU
Professeur- Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés
Conservatoire National des Arts et Métiers - 292 rue Saint-Martin - 75141 PARIS cedex 03

et de

Monsieur M. BENTAHAR
Professeur - Laboratoire Roberval - Université de Technologie de Compiègne
Centre de Recherches de Royallieu - BP 20529 - 60205 COMPIEGNE cedex

Mademoiselle DE ROCHAMBEAU Marie

est autorisée à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL ET ACOUSTIQUE (MEGA)

Fait à Ecully, le 8 janvier 2010

P/Le Directeur de l'E.C.L.
La Directrice des Etudes



M-A. GALLAND