N° d'ordre : D.U. 2098

E.D.S.P.I.C : 512

UNIVERSITE BLAISE PASCAL – CLERMONT II

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES POUR L'INGENIEUR DE CLERMONT-FERRAND

THESE

Présentée par

ANDRIAMANAMPISOA *Lala Bakonirina*

Pour Obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

SPECIALITE : ELECTROMAGNETISME

SIMULATION DE LA DIFFRACTION PAR DES RESEAUX LAMELLAIRES 1D PAR LA METHODE MODALE EN DIFFERENCES FINIES ET LA METHODE DES MOMENTS EN COORDONNEES PARAMETRIQUES

Soutenue publiquement le 17 Décembre 2010 devant le jury :

M.ou Mme	**Richard DUSSEAUX**	**Rapporteur et examinateur**
	RANDRIAMANANTANY Zely Arivelo	**Rapporteur et Président**
	Gérard GRANET	**Directeur de thèse**
	RANIRIHARINOSY Karyl Danielson	**Directeur de thèse**

Table des matières

1 Outils théoriques sur les réseaux de diffraction unidimensionnels en incidence classique 17

1.1 Position du problème sur l'étude du réseau lamellaire 17

1.1.1 Description du réseau lamellaire 18

1.1.2 Onde plane incidente 24

1.1.3 Développement de Rayleigh 25

1.2 Équations de Maxwell appliquées aux réseaux périodiques 28

1.2.1 Polarisations TE et TM 29

1.2.2 Équations de propagation 30

1.2.3 Conditions aux limites 32

1.2.4 Flux du vecteur Poynting 34

1.2.4.1 Définition 34

1.2.4.2 Vecteur Poynting 34

1.2.5 Efficacités de diffraction 35

1.3 Les outils de simulations 36

1.3.1 Introduction 36

1.3.2 Méthode modale de Fourier MMFE 37

1.3.3 Méthode Modale en Différences Finies MMDF 38

1.3.3.1 Historique 38

1.3.3.2 Principe de la méthode 38
1.3.3.3 Discrétisation des équations de Maxwell 39
1.3.3.4 Équations aux valeurs propres 43
1.3.3.5 Critère de stabilité et domaine de validité 44
1.3.4 Méthode des Moments 45
1.3.4.1 Introduction 45
1.3.4.2 Principe de la Méthode des Moments 46
1.3.4.3 Représentation de base 48
1.3.4.4 Hypothèse de Galerkin 50

2 Domaine d'application numérique 52

2.1 Introduction 52
2.2 Technique de Résolution Spatiale Adaptative RSA 52
2.2.1 Changement des coordonnées 52
2.2.2 Intérêt de la Technique de la RSA 54
2.3 MMDF avec la technique RSA 56
2.4 Méthode des Moments avec la Technique de RSA 57
2.4.1 Pas de discrétisation uniforme avec la MM 57
2.4.2 Pas de discrétisation non uniforme avec la MM 58
2.4.3 Équation aux valeurs propres 59
2.5 Résultats numériques et discussions 61
2.5.1 Principe de test de convergence 61
2.5.2 Importance du choix de la base de représentation 62
2.5.3 Pas de discrétisations uniforme et non uniforme 64
2.5.4 Importance de la position des discontinuités du réseau 65
2.5.5 MMDF avec la technique de RSA dans le cas d'un réseau parfaitement conducteur 70
2.5.6 Comparaison des résultats numériques de la MMDF et TTMM avec la MMFE 71

2.5.6.1 Cas d'un réseau diélectrique 72
2.5.6.2 Cas d'un réseau métallique 74

3 Réseau lamellaire à une dimension en incidence conique en utilisant la Méthode des Moments(MM). 81

3.1 Introduction 81
3.2 Description générale de la structure étudiée. 81
3.3 Résolution des équations de Maxwell 83
3.3.1 Équations de Maxwell 83
3.3.2 Milieu inhomogène 87
3.3.3 Milieux homogènes 91
3.4 Conditions aux limites 93
3.5 Calcul des efficacités 95
3.6 Domaine d'application numérique de la TTMM 96
3.6.1 Influences des paramètres physiques 96
3.6.2 Influence de l'angle d'incidence 97
3.6.3 Conclusion et discussion 100

A Matrice de scattering S 103

A.1 Définition 103
A.2 Matrice d'interface 104
A.3 Matrice de passage S 105

B Matrices des équations aux valeurs propres 107

B.1 Matrices D_g et D_d 107
B.2 Méthode de Gauss 109
B.3 Exemple de calcul 110

Table des figures

1.1 Géometrie du problème de diffraction par un réseau lamellaire 1D. 18

1.2 Réseau lamellaire 1D dans un coupe d'un GMRF à deux couches 19

1.3 Réseau lamellaire 1D dans un cristal photonique bidimensionnel constitué dŠun ensemble de tiges cylindriques de constante ε_t et de rayon R, noyées dans un matériau diélectrique de constante ε_ν 20

1.4 Réseau de tiges cylindriques 21

1.5 Subdivision de la couche réseau 21

1.6 Schéma d'un masque EUV 22

1.7 Schéma d'un défaut enterré au sein d'une multicouche [Mo/Si] 23

1.8 Schéma de la déformation d'un empilement multicouche en présence de défaut 23

1.9 Découpage en tranches de la structure à simuler en une série du réseau lamellaire 24

1.10 Onde plane incidente sur le milieu superstrat 25

1.11 Relation de continuité aux deux interfaces 32

1.12 Principe de discrétisation d'une fonction propre $\psi_q(x, y)$ 39

1.13 Construction de maillage pour la représentation des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ 40

1.14 Exemple de projection f sur une fonction porte P(x-x_n) 49

1.15 Exemple de projection f sur une base triangulaire 50

2.1 Schéma montrant la fonction paramétrique $x = h(u)$ avec différentes valeurs de η 54
2.2 Courbe de convergence des erreurs des valeurs propres en polarisation TE . 55
2.3 Courbe de convergence des erreurs des valeurs propres en polarisation TM 55
2.4 Discrétisation uniforme 58
2.5 Discrétisation non uniforme 58
2.6 Efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas simple du réseau diélectrique : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 20, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 2.25$. 62
2.7 Tests de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TE avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 30, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 0.22 - 6.71i$. 63
2.8 Tests de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TM avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 30, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 0.22 - 6.71i$. 64
2.9 Courbes de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 en fonction de M pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TE avec trois différentes valeurs de η 65
2.10 Courbes de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 en fonction de M pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TM avec trois différentes valeurs de η 65
2.11 DS1 : Discontinuités situées à l'intersection de deux fonctions triangles . . 66
2.12 DS2 : L'une des discontinuités est placée à l'intersection de deux triangles et l'autre est au sommet d'un triangle. 66
2.13 DS3 : Discontinuités situées au sommet de chacun des triangles 67
2.14 Polarisation TE sans paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle 67

2.15 Polarisation TE avec paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle 68
2.16 Polarisation TM sans paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle 68
2.17 Polarisation TM avec paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle 69
2.18 Polarisation TE avec paramétrique : Courbes de convergence des efficacités réfléchies d'ordre 0 avec des paramètres : $\theta = arcsin(\frac{\lambda d}{2}), f = 0.57, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (1 - 40i)^2, \frac{\lambda}{d} = 0.8090, h = 0.4d$ 70
2.19 Polarisation TM avec paramétrique : Courbes de convergence des efficacités réfléchies d'ordre 0 avec des paramètres : $\theta = arcsin(\frac{\lambda d}{2}), f = 0.57, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (1 - 40i)^2, \frac{\lambda}{d} = 0.8090, h = 0.4d$ 71
2.20 Courbes des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas simple du réseau diélectrique dans le cas de polarisation TE avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 20, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 2.25$. 73
2.21 Courbes des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas simple du réseau diélectrique dans le cas de polarisation TM avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 20, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 2.25$. 73
2.22 Polarisation TE sans paramétrique :Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMFE avec des paramètres typiques :f=0.5, d=1 ; $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2$ 75
2.23 Polarisation TE avec paramétrique : Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMDF avec des paramètres typiques : f=0.5, d=1, $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2, \eta = 0.999$ 76

2.24 Polarisation TM sans paramétrique :Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMFE et MMDF de Lalanne avec des paramètres typiques : f=0.5, d=1, $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2$ 77

2.25 Polarisation TM avec paramétrique :Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMDF avec des paramètres typiques : f=0.5, d=1, $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2, \eta = 0.999$ 78

3.1 Réseau lamellaire eclairé par une onde plane monochromatique en incidence conique. 82

3.2 Courbe de convergence de somme des efficacités diffractés dans le cas du réseau diélectrique sans perte 96

A.1 Principe de l'algorithme de la matrice S 103

A.2 Description des matrices S^1 et S^2 104

B.1 Décompositions des champs **E** et **H** sur les fonctions triangles 108

Liste des tableaux

2.1 Polarisation TE : Efficacités d'ordre 0 en fonction de nombre de troncature M comparées avec la MMFE [31] et MMDF [36], des données numériques : $\nu_{21} = 1$, $\nu_3 = \nu_{22} = .22 - i6.71$, $\theta = 30$, $d = 1$, $\lambda = 1$ 79

2.2 Polarisation TM : Efficacités d'ordre 0 en fonction de nombre M de troncature comparées avec la MMFE [31] et MMDF [36], des données numériques : $\nu_{21} = 1$, $\nu_3 = \nu_{22} = .22 - i6.71$, $\theta = 30$, $d = 1$, $\lambda = 1$ 79

3.1 Efficacités réfléchies d'ordres 0 et 1. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 20$, $\phi = 10$, $\delta = 0$, $f = 0.5$. 97

3.2 Efficacités réfléchies et transmises dans le cas d'incidence normale avec M=28. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 0$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$. 98

3.3 Efficacités transmises sous incidence quelconque. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 10$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$. 98

3.4 Efficacités transmises sous incidence quelconque. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 20$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$. 99

3.5 Efficacités transmises sous incidence quelconque. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 30$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$. 99

Remerciements

Au terme de mon travail, j'arrive maintenant au moment de relever mes remerciements qui débordent notamment à **Dieu Tout Puissant** qui me conserve dans la santé et dans la joie.

Cette thèse a été effectuée au sein des laboratoires LAPAUF (Laboratoire de Physique Appliquée de l'Université de Fianarantsoa) et LASMEA (Laboratoire des Sciences des Matériaux pour l'Électronique et d'Automatique) de l'Université Blaise Pascal. Il est la concrétisation de la convention pour la préparation d'une thèse en cotutelle entre l'Université Blaise Pascal et l'Université de Fianarantsoa. A ce titre, je souhaiterais remercier M. RANDRIANIRINA Benjamin d'avoir signé cette présente convention en tant que président de l'Université de Fianarantsoa à l'époque.
Elle a été partiellement co-financée par le gouvernement français dans le cadre du programme boursier du projet MADES, le projet de l'Agence National de la Recherche pour le Logiciel d'Optimisation Robuste et Rapide pour la Scattérométrie (ANR LORS et POEM) et la ressource propre du LASMEA. Je présente également toute ma reconnaissance aux efforts consentis par la coopération française et ces projets.

Je souhaiterais remercier M. RATOLONJANAHARY Faniry Emilson, responsable du LAPAUF et M. MICHEL Dôme, directeur du LASMEA, pour m'y avoir accueilli et m'avoir permis de travailler dans les conditions les plus favorables.

Gérard GRANET, Professeur à l'Université Blaise Pascal, directeur de thèse : je voudrais sincèrement le remercier pour la confiance qu'il a su m'accorder, ainsi que la nécessaire autonomie dont j'ai pu jouir pour mener à terme ce travail, et pour m'avoir conseillé et encadré tout au long de mon travail.

Je tiens ensuite à adresser mes profonds remerciements à RANIRIHARINOSY Karyl Danielson, Professeur à l'Université de Fianarantsoa, pour avoir encadré mes recherches pendant la durée de cette thèse, pour sa grande disponibilité malgré son emploi du temps très chargé, pour la confiance qu'il m'a accordé et l'autonomie dont j'ai disposé pour accomplir ces travaux.

Je remercie à monsieur Richard DUSSEAUX, Professeur à l'Université de Versailles, pour avoir accepté d'être examinateur et rapporteur de cette thèse et pour avoir effectué le déplacement depuis la France pour assister à ma soutenance.
Je remercie également à monsieur RANDRIAMANANTANY Zely Arivelo, Professeur Titulaire à l'Université d'Antananarivo, pour avoir accepté d'être président du jury et rapporteur de ce travail.

Je remercie en particulier mes collègues thésard au LASMEA, pour des moments excellents, inoubliables et pour les discussions fructueuses avec bonnes humeur. Je remercie également l'ensemble du personnel du Laboratoire.

Enfin, mes pensées vont également à tous les chercheurs du groupe de recherche électronique et énergétique du LAPAUF qui, de près ou de loin, ont influencé de manière positive mes travaux.

Nous tenons aussi à adresser nos vifs remerciements à mes frères et soeurs en Christ, et à toutes ma famille qui nous ont soutenu moralement et matériellement, surtout spiri-

tuellement sans relâche durant ces longues années des études.

Enfin, nous sommes très heureux de pouvoir exprimer nos vifs sentiments de gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, directement ou indirectement, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Introduction générale

Généralité sur l'application du réseau lamellaire

Tout a commencé dans la fin des années 80 avec le mécanisme de déréglementation du marché des Télécommunications [1], et l'utilisation des phénomènes de résonance électromagnétique dans les réseaux qui a d'abord touché les États-Unis, puis s'est propagé en Europe et partout dans le monde. Ce mouvement a, en effet, rendu possible l'émergence de nouveaux acteurs industriels et la remise en question des modes de pensée des opérateurs traditionnels.

Dans le même temps, le développement rapide de l'informatique individuelle a conduit à une véritable explosion de l'internet. La conjonction de ces deux éléments a conduit à l'émergence brutale des techniques optiques (fibres optiques). Pour répondre aux spécifications du domaine des télécommunications, de gros efforts ont été faits comme des investissements très lourds pour réaliser des systèmes permettant d'augmenter le débit d'information, et pour transmettre plusieurs informations en parallèles.

L'usage de plus en plus important des fibres optiques dans les systèmes de télécommunication a rendu possible pour des millions d'utilisateurs l'accès et la transmission des quantités d'informations très importantes. Pour répondre à la demande sans cesse croissante de

la quantité et du débit de ces informations, les solutions actuelles consistent à multiplexer et à demultiplexer optique ment les informations. C'est-à-dire que l'on injecte plusieurs longueurs d'ondes dans un même fibre optique (multiplexage) et on sépare ces informations en sortie de la fibre (demultiplexage). La fibre optique constitue un excellent mode de transmission de l'information car elle permet de multiplexer des longueurs d'ondes à des débits de plusieurs dizaines de gigabits par seconde. Les pièces maîtresses de ces opérations sont le WDM(Wavelength Division Multiplexing), et DWDM(Dense Wavelength Division Multiplexing). Parmi les applications des filtres, ceux-ci occupent actuellement une place importante autour des activités concernant la réalisation des filtres. Le DWDM est un composant optique permettant de faire du démultiplexage à très haut débit.

Tandis que le marché des télécommunications se familiarisait rapidement avec ce DWDM (Dense Wavelength Division Multipexing), la répartition des tâches entre les différents intervenants se modifiait elle aussi, quelques grands groupes se spécialisaient dans la fourniture de services et systèmes complets (CISCO, CIENA, ...), tandis que des compagnies de taille plus réduite et de haute technologie se spécialisaient dans le développement et la réalisation des composants ou des sous systèmes utilisés à l'intérieur du réseau de transmission.

Il y a quelques années, l'utilisation de l'optique restait encore confinée au secteur des télécommunications à haut débit et grande distance (les liaisons intercontinentales, par exemple). Depuis peu, elle commence à se déployer vers les réseaux locaux. Cette tendance a eu évidement un effet majeur sur des composants à produire, pour réaliser de telles installations.

Le groupe d'électromagnétisme du LAboratoire des Sciences des Matériaux pour l'Électronique et d'Automatique (LASMEA) de l'Université Blaise Pascal de Clermont Ferrand, Unités Mixtes de Recherche 6602 du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) avec qui le LAboratoire de Physique Appliquée de l'Université de Fianarantsoa

(LAPAUF) entretient une relation de coopération, travaille à la conception et à la simulation de composants optiques tels les cristaux photoniques, les guides d'ondes, les réseaux de diffraction, les fibres interférentiels multicouches. Les réseaux de diffraction peuvent être soit en relief, soit à variation périodique d'indice optique comme le réseau lamellaire. Ce dernier est un des composants associés aux techniques DWDM(Dense Wavelength Division Multiplexing) [2, 3].

Généralité sur les méthodes employées

Le travail de thèse présenté ici porte sur l'amélioration des méthodes de calcul numérique des ondes diffractées par des réseaux lamellaires 1D utilisant la méthode MMDF et à la Méthode des Moments. Cette amélioration doit être appliquée pour surmonter les difficultés de la convergence du calcul.

Pour notre cas présent, nous proposons la combinaison de ces méthodes avec la résolution spatiale adaptative (RSA). De plus, pour la Méthode des Moments, nous montrerons qu'un choix judicieux de la base de représentation des champs électromagnétiques peut améliorer les résultats. Ces deux méthodes sont basées sur l'écriture des équations de Maxwell dans un système des coordonnées cartésiennes et un nouveau système des coordonnées adaptatives. La résolution des équations de propagation et les conditions aux interfaces permettent de calculer les valeurs propres, les modes associés, les amplitudes de chacune des ondes et les efficacités dans les deux directions. Nous nous intéressons aux deux cas fondamentaux de polarisation TE et TM avec différents types de milieux électromagnétiques comme le diélectrique, le métal, etc .....

Les méthodes que nous allons utiliser, sont des méthodes numériques permettant de résoudre de façon rigoureuse des problèmes électromagnétiques. Le choix des ces méthodes rigoureuses s'impose naturellement puisque la période est voisine de la longueur d'onde($\lambda = .85nm$ ou $\lambda = 1nm$). Quant au choix de ces méthodes plutôt que d'une autre, il

s'explique par la structure particulière de la surface étudiée. La structure étudiée peut éventuellement présenter des variations de l'indice optique sur une distance très petite par rapport à la période.
Bien que la formulation de notre méthode soit très facile à mettre en oeuvre, les difficultés se situent au niveau de l'écriture des conditions aux limites aux interfaces et aux points de discontinuités de la couche réseau. De plus, la formulation cartésienne de la méthode des différences finies et la méthode des moments pose des problèmes dans le cas de l'étude d'un objet à forme complexe. C'est la raison pour la quelle nous introduisons un nouveau système de coordonnées adaptatives. Ce manuscrit, composé de trois chapitres expose les détails de nos contributions introduites ci-dessus :

Le premier chapitre est consacré à l'étude théorique des modes fondamentaux des réseaux lamellaires et à la présentation des outils numériques employés au cours de la thèse. Nous présentons d'abord la description détaillée de la structure étudiée ainsi que les différentes notations et les propriétés physiques que doivent respecter les champs électromagnétiques. Les méthodes MMDF et Méthode des Moments avec le choix de la base de représentation sont abordées. Puis nous les appliquons aux réseaux lamellaires.

Le deuxième chapitre concerne les résultats numériques en appliquant les deux méthodes avec le cas classique et avec la technique de la RSA. Les codes de ces méthodes sont décrits en détail pour calculer l'ensemble des résultats numériques. Cette partie numérique aborde également le problème de la convergence et de la stabilité des méthodes numériques utilisés pour résoudre les équations de Maxwell.

Dans le dernier chapitre, nous analysons le problèmes de la diffraction par des réseaux lamellaires, éclairés sous incidence conique. Nous assimilons dans un premier temps l'étude théorique des ondes incidentes et des ondes diffractées en appliquant seulement la Méthode des Moments. Nous établissons par la suite le domaine d'application numérique en validant notre méthode. Nous comparons dans le dernier temps la Méthode des Moments

avec la méthode MMFE (Modal Method by Fourier with Expansion).

Nous verrons en conclusion que ce travail ouvre des perspectives intéressantes, notamment sur le problème des discontinuités de la permittivité diélectrique et le choix de la base de représentation, qui reste un problème ouvert aujourd'hui.

Chapitre 1

Outils théoriques sur les réseaux de diffraction unidimensionnels en incidence classique

1.1 Position du problème sur l'étude du réseau lamellaire

Le premier chapitre nous permet de résoudre les problèmes de diffraction par des réseaux périodiques, plus précisément, des réseaux lamellaires en faisant appel à différentes méthodes comme MMDF et MM. On appelle réseau périodique, une déformation périodique infinie dans une direction donnée. Le principe des réseaux de diffraction a été découvert par un astronome David Rittenhouse en 1785 et cette découverte a été faite dans le cadre d'une optique ondulatoire non encore électromagnétique. En 1907, Lord Rayleigh [4] apporte une explication sur la phénoménologie des réseaux grâce à un développement du champ en onde plane, comme indique le nom du développement de Rayleigh.
Dans les années 1950-1960, ce développement a permis de dépasser la théorie ondulatoire scalaire en expliquant et en prévoyant des effets de réseaux purement électromagnétiques. L'étude des problèmes de diffraction par des réseaux peut être introduite par Huygens-Fresnel [**?**, 6, 7, 8] grâce à la théorie scalaire de la diffraction.
Nous abordons au début la description générale des réseaux de diffraction qui peuvent être soit en relief, soit à variation périodique d'indice optique comme les réseaux binaires ou les réseaux lamellaires. Puis nous étudions le comportement du réseau lamellaire. En

suite nous résolvons analytiquement les équations de Maxwell et les efficacités diffractées dans les deux cas fondamentaux de polarisation.

1.1.1 Description du réseau lamellaire

Nous considérons un réseau lamellaire comme indiqué sur la figure suivante :

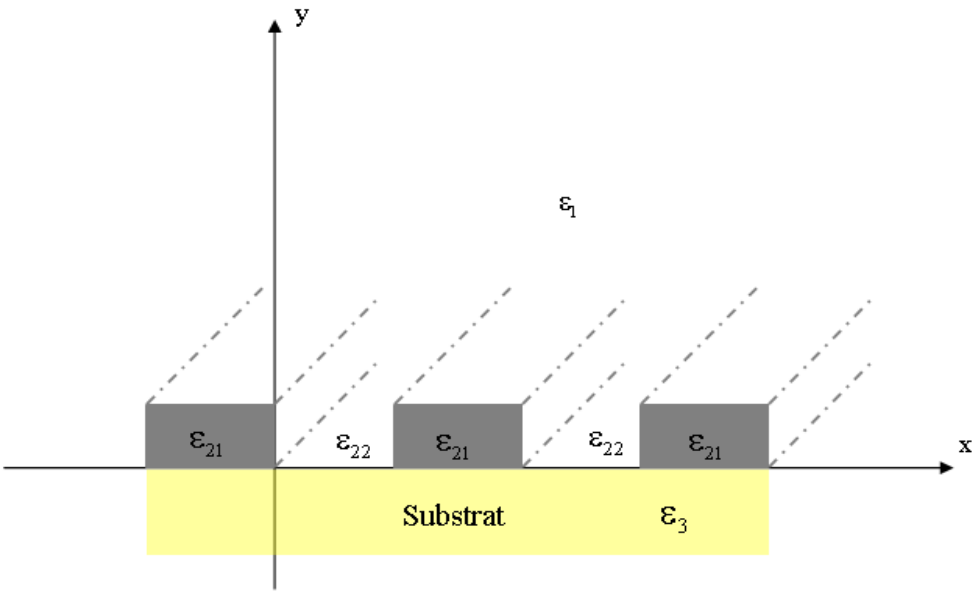


FIGURE 1.1 – Géometrie du problème de diffraction par un réseau lamellaire 1D.

Le réseau lamellaire 1D de la figure 1.1, infiniment long, périodique suivant l'axe x, de période spatiale d, et invariant suivant z, est constitué de deux matériaux de permittivités relatives $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$. Les milieux (I) et (III) entourant ce réseau sont des milieux homogènes non-magnétiques de permittivités ε_1 et ε_3. Le superstrat est toujours constitué d'air.
L'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des réseaux périodiques devient très cruciale depuis plusieurs années [années 70-80]. Parmi les applications des filtres, le filtre DWDM pour les applications "Telecom" occupe actuellement une place importante. Le réseau lamellaire est un des composants associés aux techniques DWDM(Dense Wavelength Division Multiplexing)[9, 2] :
*Les multiplexeurs/démultiplexeurs ou MUX/DEMUX en longueur d'onde, sont chargés

d'injecter dans une seule et même fibre de liaison des porteuses optiques indépendantes (fonction MUX) et de séparer ces mêmes porteuses à l'issue de leur propagation dans cette fibre de liaison (fonction DEMUX) [10], ces deux opérations devant pouvoir être effectuées avec des pertes minimales sur des canaux optiques toujours plus resserrés.

*Les techniques de séparation des canaux utilisent des filtres sélectifs en longueurs d'onde. On peut soit utiliser le principe de déviation géométrique pour disperser les longueurs d'onde du signal selon différentes directions avec par exemple un réseau, soit utiliser le principe de la réflexion sélective avec un réseau de Bragg(cristaux photoniques) ou un GMRF(Filtre Résonnant à Modes Guidés).

Les GMRF sont des filtres en espace libre utilisant le principe de réflexion sélective. Ils sont constitués d'une couche homogène dans laquelle le mode est confiné et d'un réseau permettant le couplage de l'onde incidente avec ce mode de la structure . La structure est représentée par la figure 1.2

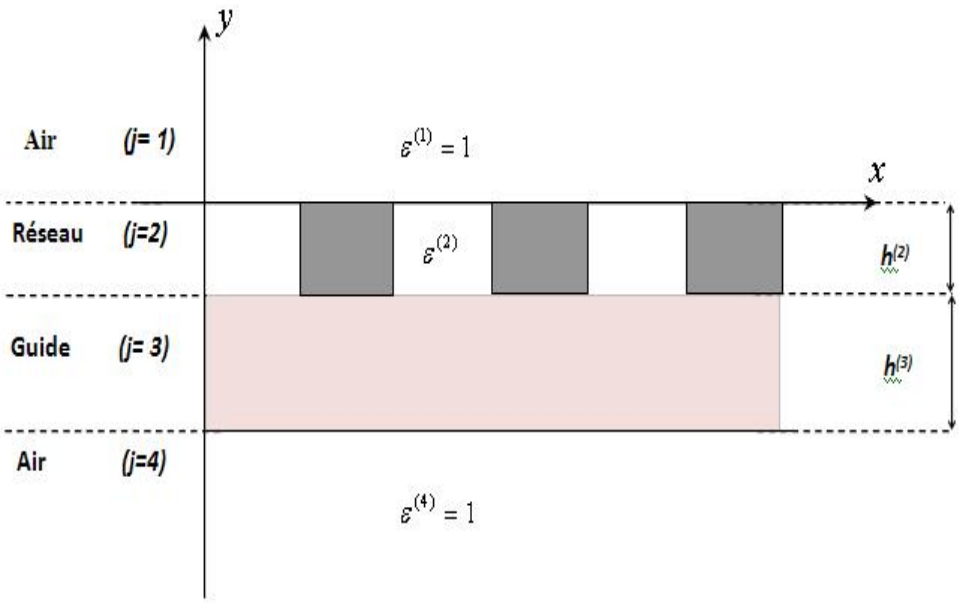


FIGURE 1.2 – Réseau lamellaire 1D dans un coupe d'un GMRF à deux couches

Comme on peut le voir sur cette figure, la structure est constituée de l'empilement de deux couches invariantes en y et infiniment longues en x. La première est un réseau lamellaire de hauteur $h^{(2)}$ de permittivité $\varepsilon^{(2)}$, de période d. Au dessous se trouve une couche

homogène, de hauteur $h^{(3)}$ et de permittivité ε^3 faisant office de guide d'onde, la structure est entourée d'air,$\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(4)} = 1$ [10].

Le réseau lamellaire sur le GMRF peut être soit de taille finie qui occupe une portion d'un guide, soit infiniment long comme notre exemple (cf figure). Quand un mode est excité en vérifiant la condition de couplage, il se propage dans la structure dans le cas où le réseau est de taille finie. Dans le cas infiniment long, le mode va à son tour rayonner et se propager à l'intérieur du slab. L'étude sur le GMRF met en évidence le couplage de l'onde incidente avec un mode guidé, le réseau lamellaire est assimilé à un coupleur à réseau [11].

En outre, les techniques de résolution de la diffraction par les réseaux lamellaires sont utiles pour étudier le comportement du champ électromagnétique à l'intérieur d'un cristal photonique comme celui présenté dans la figure 1.3. Ce cristal consiste en un ensemble de tiges de section circulaire, infiniment longues et parallèles, caractérisées par une constante diélectrique ε_t et noyées dans un matériau diélectrique de constante ε_ν [3, 12, 13]

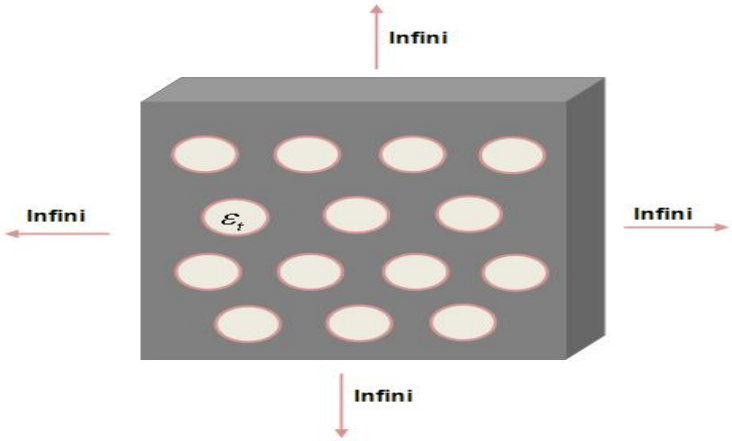


FIGURE 1.3 – Réseau lamellaire 1D dans un cristal photonique bidimensionnel constitué dŠun ensemble de tiges cylindriques de constante ε_t et de rayon R, noyées dans un matériau diélectrique de constante ε_ν

La théorie de la diffraction d'une onde plane par un réseau de tiges cylindriques (figure 1.4), espacées périodiquement aboutira à la résolution de cette structure.

La région (2), dite couche réseau est subdivisée en N couches minces ; chacune d'elle est

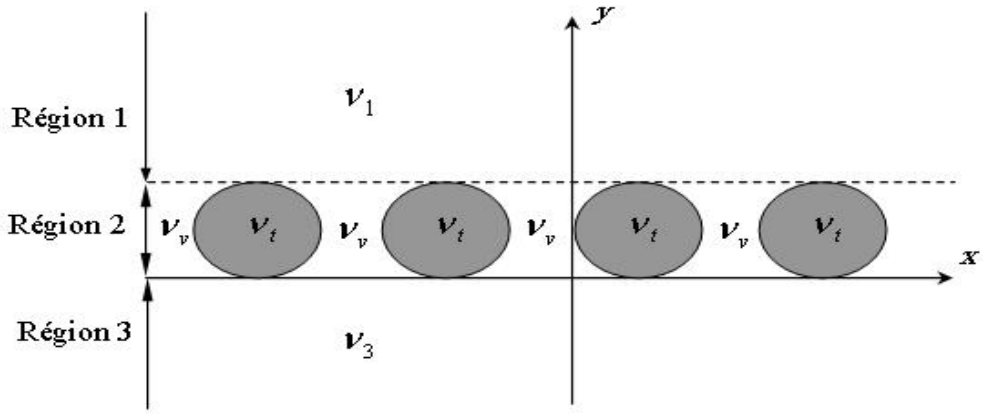


FIGURE 1.4 – Réseau de tiges cylindriques

assimilée à un réseau lamellaire dans lequel l'indice optique ne varie qu' avec x comme on peut le voir sur la figure 1.5.

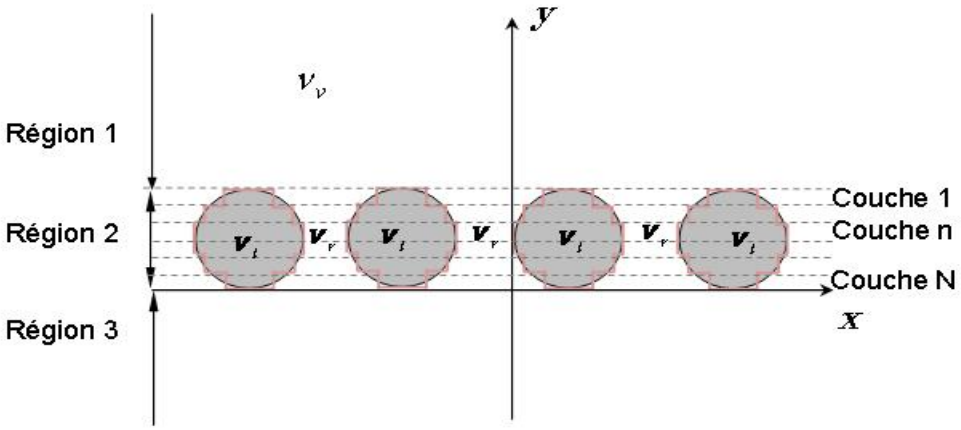


FIGURE 1.5 – Subdivision de la couche réseau

Enfin, nous parlons aussi, de l'utilisation du réseau lamellaire pour la lithographie EUV(Extrême-Ultrat-Violet) ; son premier nom fut lithographie à rayons "X mous" (Soft X ray lithography) car elle fonctionne dans une gamme de rayonnement proche de rayon X, qui correspond à l'énergie $92eV$.

La technique utilisant un rayonnement dans l'EUV présente un potentiel très intéressant pour une utilisation industrielle (Technique retenue par Intel pour ses futures générations de microprocesseur) [14]. Cette technique nécessite un véritable saut technologique par

rapport aux autres techniques optiques (son fonctionnement avec la longueur d'onde d'exposition de $13,5nm$ lui impose un fonctionnement avec des optiques et des masques en réflexion dans un environnement sous vide). Alors, il est nécessaire de trouver des optiques qui permettent de mettre en forme le rayonnement EUV, ainsi qu'un masque capable de reproduire les motifs désirés.

Les masques EUV sont composés de plusieurs parties et les différents étapes de cette réalisation sont à l'heure actuelle bien maitrisées même s'il y a des deux difficultés comme le phénomène d'ombrage et le problème du défaut au sein même de l'empilement $[M_0/S_i]$ ou $[Molybdne - Silicium]$.

La problématique dans le masque nécessite alors des approches rigoureuses car la présence de défaut dans le masque peut être un point bloquant pour le futur de la lithographie EUV.

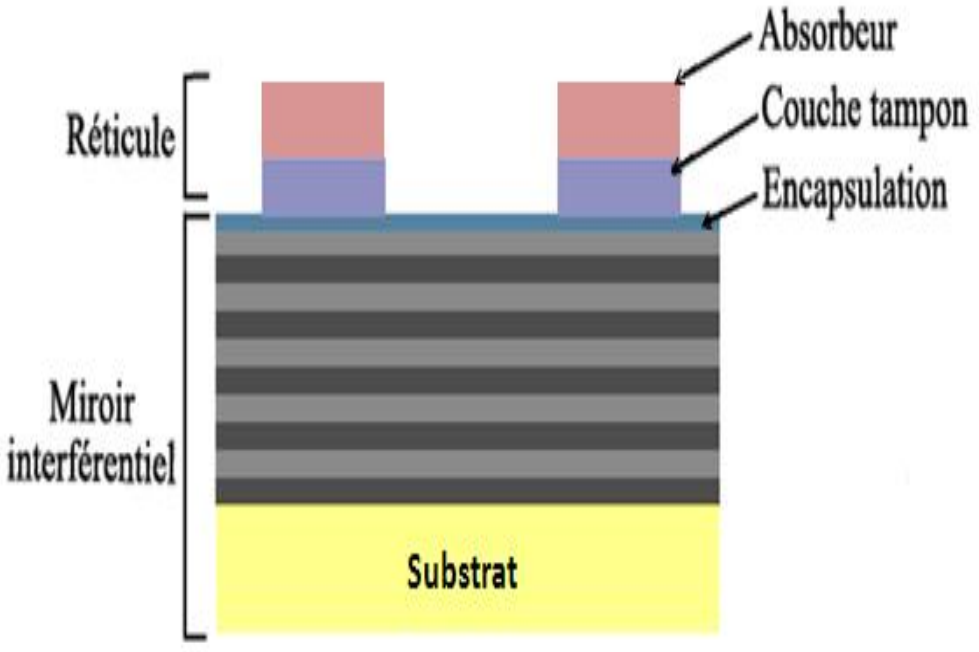


FIGURE 1.6 – Schéma d'un masque EUV

On appelle défaut, toute perturbation qui peut modifier l'intégrité des motifs désirés. Ce

problème de défaut perturbe l'empilement de multicouche comme nous pourrons le voir dans les figures suivantes :

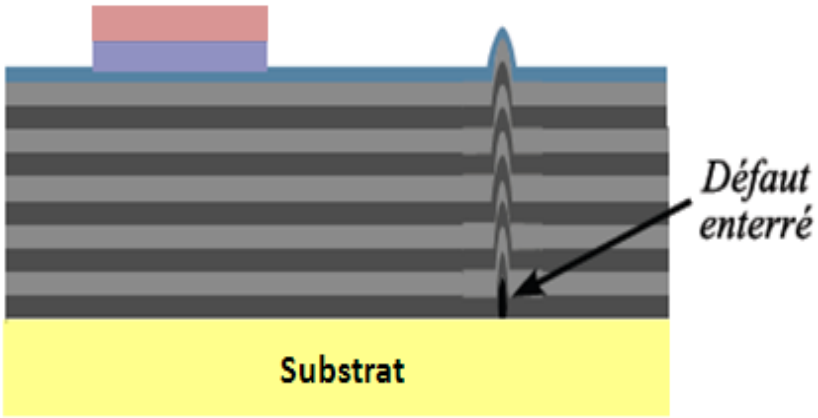


FIGURE 1.7 – Schéma d'un défaut enterré au sein d'une multicouche [Mo/Si]

Cette perturbation est appelée nodule [14]. L'ensemble de cette perturbation est considéré comme des défauts,

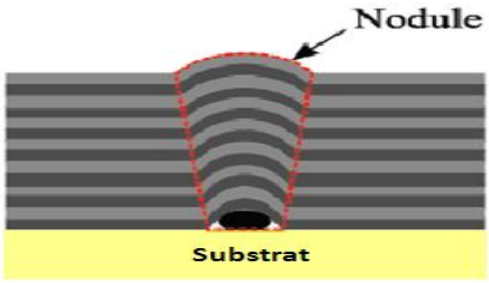


FIGURE 1.8 – Schéma de la déformation d'un empilement multicouche en présence de défaut

Pour aborder la problématique de ces défauts, nous nous basons sur des simulations électromagnétiques. Cette simulation consiste à découper la structure en tranches que l'on considère comme un réseau lamellaire surtout dans le cas d'une géométrie complexe. Son principe consiste à décomposer la structure à étudier en une série de réseaux lamellaires et d'y résoudre les équations de Maxwell en utilisant différentes méthodes comme représenté sur la figure 1.9

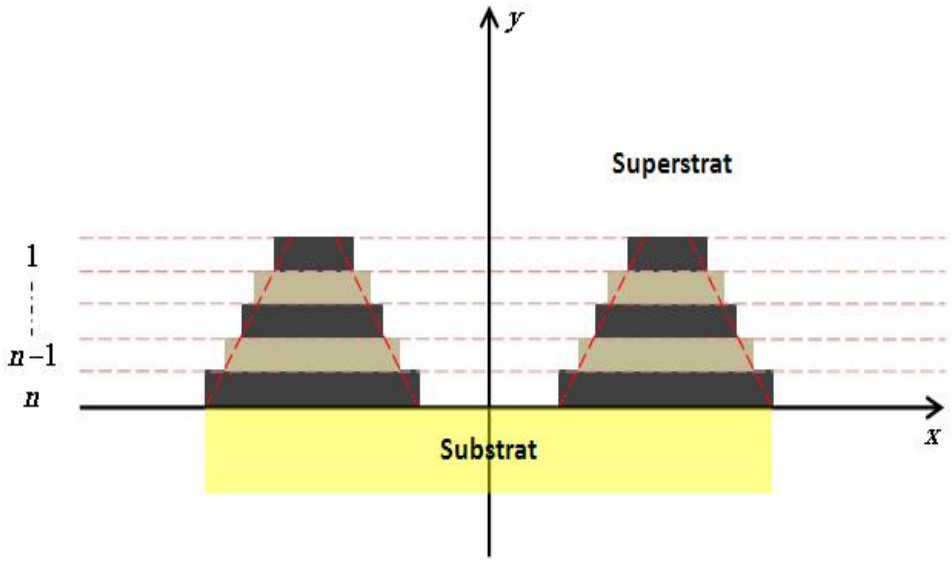


FIGURE 1.9 – Découpage en tranches de la structure à simuler en une série du réseau lamellaire

1.1.2 Onde plane incidente

L'onde incidente est une onde plane harmonique, de dépendance temporelle $exp(i\omega t)$. Dans le cas de l'incidence classique, le vecteur d'onde incident $\overrightarrow{k}_i$ se trouve dans le plan xoy, faisant l'angle θ avec oy. Le champ incident $\psi^i(x,y)$ dépend de l'excitation avec $\psi^i(x,y)$ désigne n'importe quelle composante du champ électromagnétique $\vec{E}$ ou $\vec{H}$. Supposons que l'onde incidente soit d'amplitude unité, le champ incident s'écrit :

$$\psi^i(x,y) = exp(-i\overrightarrow{k}_i\overrightarrow{r}) \tag{1.1}$$

$$ou \quad \overrightarrow{r} = x\overrightarrow{e}_x + y\overrightarrow{e}_y \quad et \quad \overrightarrow{k}_i = k_x\overrightarrow{e}_x + k_y\overrightarrow{e}_y \quad \forall x \in]-\infty,+\infty[$$

$$et \quad k_x = \nu_1 k\sin\theta \quad k_y = -\nu_1 k\cos\theta \quad avec \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}[$$

$\overrightarrow{k}_i$ fait un angle θ par rapport à l'axe oy. Alors :

$$\psi^i(x,y) = exp(-ik\sin\theta x)exp(ik\cos\theta y) \tag{1.2}$$

ν_1 est l'indice optique du milieu superstrat supposé homogène et constitué d'air représenté par la figure 1.10 :

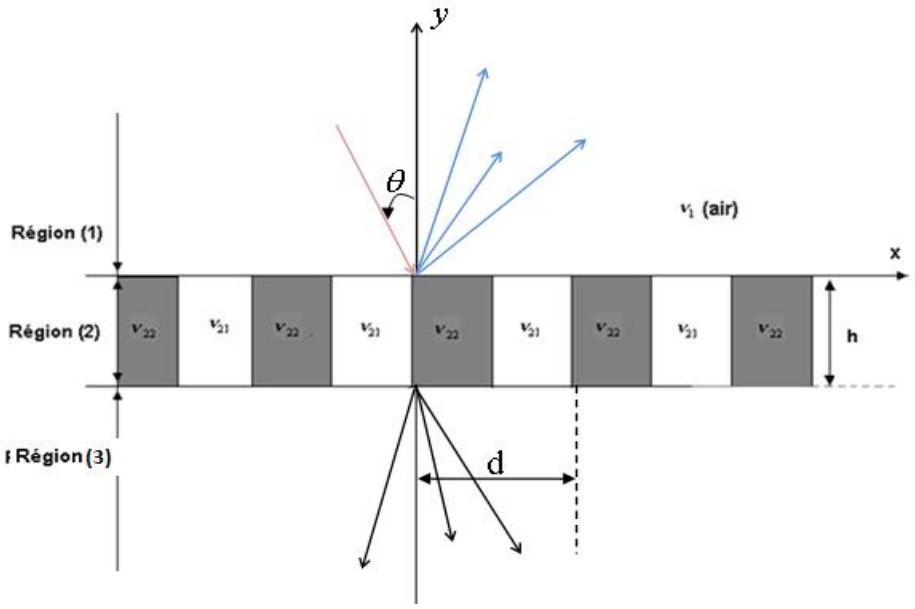


FIGURE 1.10 – Onde plane incidente sur le milieu superstrat

Nous nous intéressons au cas de la diffraction normale, cas où le vecteur d'onde incident est inclu dans le plan d'incidence xoy et où le champ est perpendiculaire au plan d'incidence. Nous montrons par la suite qu'il est possible d'écrire les différentes composantes du champ électromagnétique par l'intermédiaire du développement de Rayleigh.

1.1.3 Développement de Rayleigh

Lord Rayleigh a établi la théorie électromagnétique permettant de calculer les efficacités de diffraction d'un réseau [4] au début du siècle dernier. Cette théorie a pour but d'expliquer les anomalies de Wood [15] en 1902 caractérisés par une variation notable du coefficient de réflexion et transmission lors d'une faible modification des paramètres caractéristiques de l'onde incidente. Ces effets dépendent fortement de la polarisation de l'onde incidente. Ainsi, le développement d'une théorie vectorielle de la diffraction est nécessaire. Le développement de Rayleigh est une somme infinie d'ondes planes pour les milieux homogènes. Le champ électromagnétique est exprimé par une série d'ondes planes montantes et descendantes. Ces ondes pouvant être soit propagatives soit évanescentes. Pour chaque onde, une partie est connue : c'est le vecteur d'onde déterminé par une

équation scalaire bien connue des opticiens, la formule de réseau et une autre partie, l'amplitude de l'onde est déterminée par les différentes méthodes.

Lorsqu' une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ excite le dispositif (cf figure 1.1), différentes types d'ondes $\psi(x, y)$ se propagent dans les différents milieux de la manière suivante :

*les ondes évanescentes décroissent exponentiellement lorsque on s'éloigne de la surface.

*les ondes propagatives qui sont constituées de l'onde incidente et des ondes diffractées, se propagent.

La structure $\psi(x, y)$ est périodique suivant l'axe x, le déplacement d'un point x à $x + d$ se traduit par une variation de phase φ pour l'onde telle que :

$$\psi(x + d, y) = \psi(x, y)exp(-i\varphi) \tag{1.3}$$

On peut vérifier que la fonction $\psi(x, y)exp(-i\varphi)\frac{x}{d}$ est périodique, elle peut donc être exprimée par la série de Fourier. On obtient :

$$\psi(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m(y)exp(-ik\alpha_m x) \tag{1.4}$$

avec

$$\alpha_m = \frac{\varphi}{kd} + m\frac{\lambda}{d}$$

φ dépend de l'excitation et on dit que l'onde est développée en somme harmonique de Floquet. Dans le cas où l'amplitude de l'onde incidente est l'unité, nous avons l'expression :

$$\psi(x + d, y) = \psi(x, y)exp(-iksin\theta d)$$

Par identification, $\varphi = kdsin\theta$, alors :

$$\alpha_m = sin\theta + m\frac{\lambda}{d} \tag{1.5}$$

C'est la formule du réseau avec $m \in]-\infty; +\infty[$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$. Le dispositif à étudier est le réseau de diffraction, la longueur d'onde λ sera alors de l'ordre ou plus petite que la période. Il faut que $-1 \leq sin\theta_m \leq +1$. En fonction de $sin\theta$, nous connaissons le nombre

des ondes diffractées. Le développement de Rayleigh s'écrit :

$$\psi(x,y) = \psi^i(x,y) + \sum_{m \in U^d} r_m exp(-ik\alpha_m x) exp(-ik\beta_m y) + \sum_{m \in U^{dev}} r_m exp(-ik\alpha_m x) exp(-ik\beta_m y) \tag{1.6}$$

avec

$$\begin{cases} U^d = (m \in Z / \beta_m \geq 0) & \beta_m \quad est \quad réel \\ U^{dev} = (m \in Z / i\beta_m \geq 0) & \beta_m \quad est \quad imaginaire \quad pur \end{cases}$$

Dans le milieu de transmission, le champ est constitué des champ transmis propagatifs et de champs évanescents d'expression :

$$\psi(x,y) = \sum_{m \in U^t} t_m exp(-ik\alpha_m x) exp(ik\beta_m y) + \sum_{m \in U^{tev}} t_m exp(-ik\alpha_m x) exp(ik\beta_m y) \tag{1.7}$$

avec

$$\begin{cases} U^t = (m \in Z / \beta_m \geq 0) & \beta_m \quad est \quad réel \\ U^{tev} = (m \in Z / i\beta_m \geq 0) & \beta_m \quad est \quad imaginaire \quad pur \end{cases}$$

avec r_m et t_m sont les coefficients de réflexion et de transmission.

Dans la zone des sillons où $0 \leq y \leq h$, le développement de Rayleigh n'est pas valide à l'exception des structures en relief faiblement modulés. On injecte dans l'equation d'Helhmoltz, le développement de Floquet et on a comme solution générale de cette équation l'expression suivante :

$$\psi_m(y) = A_m exp(ik\beta_m y) + B_m exp(-ik\beta_m y) \tag{1.8}$$

avec A_m et B_m sont les coefficients d'amplitude des ondes et β_m vérifient les conditions d'ondes sortantes $(C.O.S)$.

Il est bien noté que le développement de Rayleigh est lié au caractère périodique du système suivant des directions données. Puisque le système est invariant suivant la direction z, les différentes composantes sont indépendantes de cette variable. Enfin, le développement de Rayleigh introduit la notion d'onde évanescente qui est un phénomène purement électromagnétique.

1.2 Équations de Maxwell appliquées aux réseaux périodiques

Tous les calculs du champ électromagnétique diffracté, des valeurs propres associées aux vecteurs propres et des efficacités diffractées par le réseau lamellaire passent par la résolution des équations de Maxwell. Avant de résoudre les équations de Maxwell, nous définissons d'abord le système de coordonnées, les notations importantes et le domaine d'étude qui seront utilisés tout au long de cet ouvrage.

Nous utilisons d'une part le système de coordonnées cartésiennes défini par (x, y, z), les directions de trois axes sont repérées par leurs vecteurs unitaires. Nous introduisons, d'autre part, le système de coordonnées paramétriques des coordonnées (u, y, z) que nous appelons **coordonnées adaptatives** . Le changement de variable concerne uniquement de la variable x. Nous considérons une dépendance temporelle harmonique du champ en $exp(i\omega t)$. Nous nous limitons dans le premier et deuxième chapitres au cas de la diffraction normale, c'est-à- dire, la direction de l'onde incidente appartient au plan perpendiculaire au plan d'incidence. Nous supposons que les différents milieux des structures étudiées sont linéaires et isotropes.

Nous notons respectivement les champs électrique et magnétique par $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{H}$, ω est la pulsation.$\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{D}$ désignent respectivement la densité de flux magnétique et la densité de déplacement électrique, μ_0 et ε_0, les permittivités magnétique et électrique dans le vide. Les équations de Maxwell dans le milieu, de permittivités magnétique μ et diélectrique ε_r, relative au milieu s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{D} = 0 \\ \overrightarrow{J} = \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{1.9}$$

et

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{H} = \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} \end{cases} \tag{1.10}$$

Soit,

$$\begin{cases} rot\overrightarrow{E} = -i\omega\overrightarrow{B} \\ rot\overrightarrow{H} = i\omega\overrightarrow{D} \end{cases} \tag{1.11}$$

En projetant les équations de Maxwell selon les axes des coordonnées cartésiennes (x, y, z), nous obtenons les deux systèmes d' équations différentielles partielles ci- après :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega B_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega B_z \end{cases} \tag{1.12}$$

avec $B_{(x,y,z)} = \mu_0\mu H_{(x,y,z)}$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega D_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega D_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega D_z \end{cases} \tag{1.13}$$

et $D_{(x,y,z)} = \varepsilon_0\varepsilon_r E_{(x,y,z)}$

1.2.1 Polarisations TE et TM

L'onde plane incidente et la surface du système sont invariantes suivant la direction oz, les équations (1.12) et (1.13) se réduisent alors à deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -i\omega B_x \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega B_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega B_z \end{cases} \tag{1.14}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} = i\omega D_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega D_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega D_z \end{cases} \tag{1.15}$$

Compte tenu de cette hypothèse, les composantes (E_z, H_x, H_y) et (H_z, E_x, E_y) vérifient deux systèmes d'équations différentielles indépendantes. A chaque système d'équation correspond une polarisation de l'onde. Toute onde polarisée dans une direction quelconque peut être étudiée en résolvant les deux cas de polarisations indépendantes dites polarisations fondamentales TE et TM.

En polarisation TE :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -i\omega\mu H_x \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon(x) E_z \end{cases} \tag{1.16}$$

En polarisation TM :

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} = i\omega\varepsilon(x) E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon(x) E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \end{cases} \tag{1.17}$$

1.2.2 Équations de propagation

L'équation de propagation pour chaque polarisation est obtenue en exprimant la composante du champ suivant y selon les deux autres composantes. En polarisation TE, nous obtenons alors un système de deux équations à deux inconnues (Ez, Hx) :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = i\omega\mu H_x \\ -k^2(x) E_z - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = i\omega\mu \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{cases} \tag{1.18}$$

$$k^2(x) = \omega^2 \mu \varepsilon(x),$$

De plus, en substituant la première équation de ce système dans la deuxième, nous obtenons l'équation de propagation suivante :

$$\triangle E_z(x,y) + k^2(x) E_z(x,y) = 0 \tag{1.19}$$

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

En polarisation TM, une procédure analogue nous donne l'équation de propagation d'expression :

$$\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right) H_z(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_z(x,y) + k^2(x) H_z(x,y) = 0 \tag{1.20}$$

Afin de résoudre les systèmes d'équations (1.19) et (1.20), nous allons maintenant énumérer les différentes propriétés des composantes du champ électromagnétique. C'est- à- dire que :

* Nous supposons que la solution au problème de diffraction existe et elle est unique [16].

* Puisque la constante diélectrique liée au réseau est périodique, le champ incident $\psi^i(x,y)$ et le champ total $\psi(x,y)$ sont pseudo-périodiques en x avec la période du réseau d [17], où $\psi(x,y)$ dénote n'importe quelle composante de $\vec{E}$ ou de $\vec{H}$. La pseudo-périodicité du champ s'écrit :

$$\psi(x+d,y) = \psi(x,y) exp(-ik\alpha_0 d) \qquad \alpha_0 = \nu_1 \sin(\theta) \tag{1.21}$$

Dans les deux milieux homogènes, les deux équations de propagation précédentes peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\triangle \psi(x,y) + k_l^2 \psi(x,y) = 0 \tag{1.22}$$

$l \in [1,3]$, et $\psi(x,y)$ est la seule composante non nulle du champ selon z et dépendant de la polarisation. C'est-à-dire, $\psi(x,y) = E_z(x,y)$ en polarisation TE, et $\psi(x,y) = H_z(x,y)$ en polarisation TM.

La dépendance en y étant de la forme $exp(-ik\beta_q y)$, les équations de propagation (1.19) et (1.20) se transforment en équation aux valeurs propres. La solution générale peut être obtenue par la combinaison linéaire des solutions particulières de ce système de la forme :

$$\psi(x,y) = \sum_{q=1}^{M} \left[A_q^+ exp(-ik\beta_q y) + A_q^- exp(ik\beta_q y)\right] \psi_q(x,y) \tag{1.23}$$

ψ_q est le vecteur propre associé à la valeur propre β_q, A_q^+ et A_q^- sont des coefficients constants inconnus qui seront déterminés à l'aide des conditions aux limites.

1.2.3 Conditions aux limites

Puisque nous connaissons l'expression finale du champ dans les trois régions, il reste à déterminer les coefficients A_q^+ et A_q^- de l'equation (1.23). Nous allons maintenant étudier la propagation des ondes entrantes, les ondes à l'intérieur du réseau et les ondes sortantes. Ces différentes ondes sont illustrées par la figure 1.11. Nous allons expliciter l'algorithme dans sa forme la plus générale dans notre structure car nous n'avons qu'une seule couche de réseau. Nous montrons dans cet algorithme que les conditions aux limites aux deux interfaces sont un principe permettant de déterminer les différentes valeurs des amplitudes des ondes montantes et descendantes.

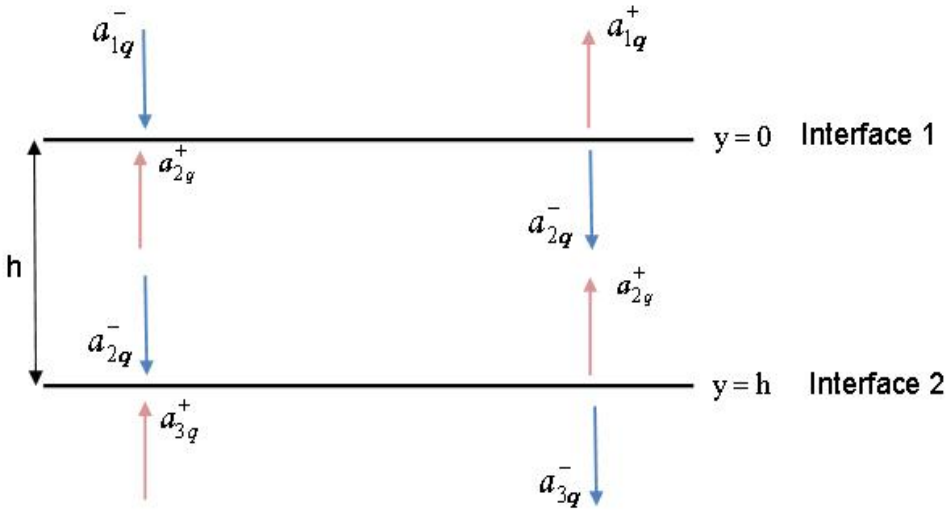


FIGURE 1.11 – Relation de continuité aux deux interfaces

En $y = 0$ ou en $y = h$, les composantes tangentielles du champ $\vec{E}$ et $\vec{H}$ ainsi que leurs

dérivées premières sont continues. Nous écrirons pour ce faire les relations de continuité du champ aux deux interfaces.

* Continuité à l'interface $y = 0$:

$$\begin{cases} \psi^1(x, y = 0) = \psi^2(x, y = 0) \\ \\ \chi_k^1 \frac{\partial}{\partial y}\psi^1(x, y = 0) = \chi_k^2 \frac{\partial}{\partial y}\psi^2(x, y = 0) \end{cases} \tag{1.24}$$

*Continuité à l'interface $y = h$:

$$\begin{cases} \psi^2(x, y = h) = \psi^3(x, y = h) \\ \\ \chi_k^2 \frac{\partial}{\partial y}\psi^2(x, y = h) = \chi_k^3 \frac{\partial}{\partial y}\psi^3(x, y = h) \end{cases} \tag{1.25}$$

$$\textit{En polarisation TE} \quad \begin{cases} \psi(x, y) = E_z(x, y) \\ \\ \chi_k = \frac{k}{\omega\mu_0\mu} \end{cases}$$

$$\textit{En polarisation TM} \quad \begin{cases} \psi(x, y) = H_z(x, y) \\ \\ \chi_k = \frac{k}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \end{cases}$$

Grâce aux conditions de continuité, nous pouvons déterminer toutes les amplitudes des ondes en réflexion et en transmission. De plus, au sujet de l'étude de problème de diffraction, il est également important de chercher à définir les amplitudes des ondes entrantes et sortantes. Nous utilisons le formalisme de la matrice de diffraction qui est connu pour sa stabilité [18, 19]. La matrice de diffraction que nous appelons par la suite matrice S (S correspond matrice scattering)[18] établit le lien entre ces amplitudes. La meilleure démarche à faire est de déterminer les matrices des interfaces notées $S^{(1)}$ et $S^{(2)}$, la matrice de couche réseau $S^{(c)}$ et de les combiner afin de connaitre la matrice S [voir dans l'annexe]. C'est-à-dire que le calcul des matrices S^1, S^2 et $S^{(c)}$ de chaque interface se fait par la résolution d'un système linéaire. Ensuite, les différentes matrices sont concaténées pour obtenir la matrice globale S.

$$S = S^1 \otimes S^c \otimes S^2 \tag{1.26}$$

Le produit $\otimes$ de deux matrices n'est pas le produit habituel de deux matrice [18], il contient en particulier des inversions de matrices.
On a bien remarqué que tous les coefficients des différentes matrices ne sont autres que les valeurs propres et les vecteurs propres du champ électromagnétique. Le formalisme de la matrice S peut être étudié directement par la propagation du champ électromagnétique à travers une couche à condition que l'épaisseur de la couche réseau ne soit pas trop importante ($h \leq \lambda$). Il existe plusieurs formalismes pour relier linéairement les amplitudes entre elles, mais tous ne sont pas stables surtout lorsque l'épaisseur de la couche devient grande comme c'est le cas de la matrice de transfert T. Pour la matrice S, outre sa stabilité numérique, elle présente le fait d'avoir une signification physique importante puisqu'elle représente les échanges d'énergies qui ont lieu à chaque interface entre les différents modes.

1.2.4 Flux du vecteur Poynting

1.2.4.1 Définition

Le flux du champ électromagnétique à travers une surface fermée de la couche étudiée représente la quantité d'énergie traversant celle-ci par unité de temps et par unité de surface σ. Il peut se calculer en intégrant le vecteur Poynting $\overrightarrow{P}$, de dimension $J.m^{-2}.s^{-1}$ selon :

$$\Phi = \int_{\sigma} \overrightarrow{P} \vec{n} d\sigma \tag{1.27}$$

$\vec{n}$ est le vecteur normale à la surface σ.

1.2.4.2 Vecteur Poynting

Le vecteur Poynting complexe $\overrightarrow{P}$ est définit par la relation :

$$\overrightarrow{P} = \frac{1}{2} \overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{H^*} \tag{1.28}$$

Puisque nous savons que le champ électromagnétique est quasi-périodique, le vecteur Poynting est alors périodique.

$$\begin{cases} P_x = \frac{1}{2}\left(E_y H_z^* - E_z H_y^*\right) \\ P_y = \frac{1}{2}\left(E_z H_x^* - E_x H_z^*\right) \\ P_z = \frac{1}{2}\left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) \end{cases} \tag{1.29}$$

De plus, le réseau est infiniment long, périodique en x, et invariant suivant z. La variation de flux dans ces directions est par conséquent nulle. La variation de flux suivant y à travers la surface σ est donnée par la relation :

$$* \, En \;\; polarisation \;\; TE : \quad \Phi_y = \frac{1}{2}\int_\sigma \Re_e\left(E_z H_x^*\right) d\sigma \tag{1.30}$$

et

$$* \, En \;\; polarisation \;\; TM : \quad \Phi_y = -\frac{1}{2}\int_\sigma \Re_e\left(H_z E_x^*\right) d\sigma \tag{1.31}$$

Grâce aux termes conjugués et le champ électromagnétique indépendant de la surface σ, nous pouvons calculer facilement le flux. Ceci nous permet de calculer les coefficients de réflexion et de transmission, puis de déduire les pertes éventuelles d'énergie dans les différents milieux électromagnétiques.

1.2.5 Efficacités de diffraction

Les efficacités de diffraction sont définies comme le rapport de flux du vecteur de Poynting transporté par une onde diffractée (qu'il soit onde réfléchie ou onde transmise) au flux du vecteur de Pointing de l'onde incidente. Les ondes évanescentes étant exclues, nous avons les expressions suivantes :

$$\xi_r^{(q)} = \Re_e\left[\frac{R_q R_q^* \cos\theta_q^r}{\cos\theta^i}\right] \tag{1.32}$$

$$\xi_t^{(q)} = \Re_e\left[\chi_0 \frac{T_q T_q^* \cos\theta_q^t}{\cos\theta^i}\right] \tag{1.33}$$

où, $\xi_r^{(q)}$ et $\xi_t^{(q)}$ sont respectivement les efficacités réfléchie et transmise et,

$$\chi_0 = \begin{cases} 1 & en \;\; polarisation \;\; TE \\ \frac{\nu_1^2}{\nu_3^2} & en \;\; polarisation \;\; TM \end{cases} \tag{1.34}$$

R_q et T_q, de conjugués respectifs R_q^* et T_q^* sont les coefficients de réflexion et de transmission. Il est bien noté que :

* Dans le cas d'un diélectrique sans perte :

$$\sum_{q \in U^d} \left(\xi_r^{(q)} + \xi_t^{(q)} \right) = 1$$

* Dans le cas d'un métal :

$$\sum_{q \in U^d} \left(\xi_r^{(q)} + \xi_t^{(q)} \right) \prec 1$$

1.3 Les outils de simulations

1.3.1 Introduction

Nous présentons dans ce paragraphe quelques méthodes différentielles de simulations disponibles, destinées aux problèmes du réseau de diffraction. Nous décrivons en détail les principales méthodes qui nous permettent de résoudre notre problème et qui nous mènent aux nombreuses discussions et conclusions entre ces différentes méthodes ainsi que l'amélioration sur le domaine d'application. Nous commençons à définir la méthode modale, la méthode modale en Fourier (MMFE), la méthode modale en différences finies (MMDF) et la méthode des moments (MM). Dans toutes les méthodes disponibles dans cet ouvrage, le principe de simulation est basé sur :

1. La résolution des équations de Maxwell dans les deux cas fondamentaux de polarisation (TE et TM) sur les trois régions. Les équations de Maxwell sous forme différentielles sont transformées en équations aux valeurs propres.

2. L'écriture des conditions aux limites aux interfaces afin de déterminer les coefficients des amplitudes du champ électromagnétique grâce au système linéaire établi par ces conditions.

3. Le calcul des efficacités de diffraction dans les milieux superstrat et substrat.

4. La détermination des erreurs des différents résultats des valeurs propres et des efficacités diffractées afin de faire la comparaison et la discussion entre les différentes méthodes. La résolution des équations de Maxwell conduit à exprimer les solutions générales sous forme de modes de propagation de la structure étudiée [20, 21] : d'où l'appellation de **méthode modale**. Chacun de ces modes est alors la solution de ces équations et le champ global est obtenu par la combinaison linéaire de chacun de ces modes. Pour toutes ces méthodes, la résolution numérique nécessite un nombre fini d'équations, il doit donc tronquer les nombres normalement infinis qui apparaissent. Ainsi, nous pouvons déterminer facilement les solutions propres. La méthode modale est une méthode assez générale qui ne pose pas de problème au niveau de la mémoire de l'ordinateur et ne change rien au niveau des équations de Maxwell et de la structure à étudier.Cette méthode est donc adéquate pour le problème du réseau de diffraction comme le réseau lamellaire. Nous appliquons cette méthode dans différentes outils de simulation.

1.3.2 Méthode modale de Fourier MMFE

Lorsqu'il s'agit de parler en premier de la MMFE, connue sous le nom méthode rigoureuse des ondes couplés ou RCWA(Rigourous Coupled Wave Analysis), mise au point par par M.G. Moharam et T.K. Gaylord [22],ce n'est pas un outil de simulation de notre travail. Nous l'avons utilisé tout simplement pour comparer ses résultats avec notre méthode. Quant au choix de cette méthode pour la raison de comparaison plutôt qu' une autre, elle est l'une des approches originales pour étudier les phénomènes de diffraction d'une part et permet d'introduire une amélioration de façon spectaculaire quant à la vitesse de convergence et à la stabilité des résultats sur le domaine d'application de la méthode modale d'autre part. Elle est aussi l'une des méthodes les plus utilisées pour l'analyse rigoureuse du réseau de diffraction, notamment le réseau lamellaire.
Cette méthode a été développée vers la fin des années 1970 pour l'analyse électromagnétique des réseaux de diffraction [**?**, 23, **?**]. Elle permet de résoudre le problème de diffraction par une structure périodique en calculant les modes de la structure. C'est-à-dire que, les modes sont calculés en décomposant en série de Fourier les champs électromagnétiques

ainsi que la permittivité et la perméabilité de la structure. L'opérateur est projeté sur la base de Fourier.

1.3.3 Méthode Modale en Différences Finies MMDF

1.3.3.1 Historique

C'est l'une des méthodes que nous employons dans notre travail, nous allons consacrer ce paragraphe à la description détaillée de la MMDF. Dans la littérature, cette méthode porte le nom FDTD (Finite Difference Time Domaine), selon la première version publiée par Yee en 1966 [25]. En 1975, Taflove [26] quant à lui travaille dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel FDFD (Finite Difference Frequency Domain). Les travaux de Yee et les grilles entrelacées des champs électriques et magnétiques restent une référence pour l'approche par différences finies des équations de Maxwell.
La FDFD reste peu employée bien qu'elle présente des avantages non négligeables comme la possibilité d'utiliser un maillage variable. La résolution approchée des équations de Maxwell commence par l'écriture du passage de l'espace du temps continu à un espace du temps discret, étape que les mathématiciens appellent simplement **discrétisation**. De façon analogue, pour le cas spatial, nous représentons le temps discret par des nombres entiers.

1.3.3.2 Principe de la méthode

La MMDF est l'une des méthodes les plus couramment utilisées pour résoudre le problème de diffraction. Cette méthode, simple à mettre en oeuvre, est basée sur la discrétisation des équations différentielles en remplaçant les dérivées partielles par des différences finies. La figure 1.12 illustre le principe de discrétisation.

Le domaine de calcul est défini et discrétisé avec un maillage spatial de pas de discrétisation Δ_x pour un réseau de diffraction 1D. La discrétisation spatiale s'effectue dans un domaine nécessairement fini. La construction d'un maillage peut être régulière ou irrégulière et le calcul de dérivées spatiales se fait grâce à l'approximation pour des différences finies centrées. Soulignons que l'utilisation de cette méthode est en pleine expansion ces

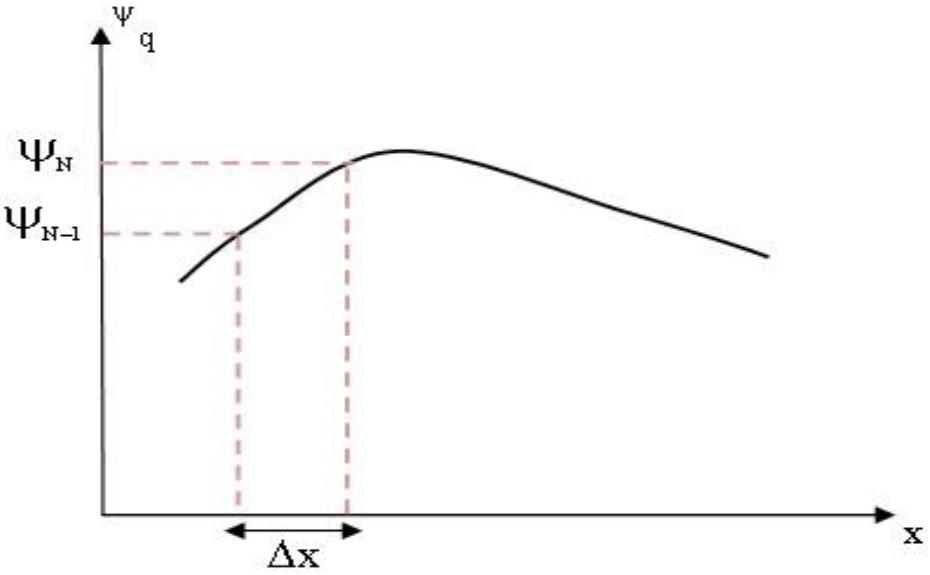


FIGURE 1.12 – Principe de discrétisation d'une fonction propre $\psi_q(x, y)$

dernières années notamment sur le développement de technique basée sur les maillages variables(non uniformes).

1.3.3.3 Discrétisation des équations de Maxwell

Nous abordons les principales étapes de la méthode de différence finies : c'est la discrétisation des équations de Maxwell au sens de différences finies centrées et le critère de stabilité due au maillage spatial. Cette méthode est basée sur la discrétisation des champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{H}$ sur un maillage cartésien à une dimension.
En effet, nous allons discrétiser les fonctions propres $\psi_q(x, y)(E_z$ pour la polarisation TE et H_z pour la polarisation TM) en différence finie. Puisque la structure est variable en x, nous remplaçons les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x}$ par de différences finies centrées et les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial y}$ par $-ik\beta$. Nous cherchons à approcher la solution des équations de Maxwell en un nombre fini de points M dans un intervalle $[0, d]$ *où* M est le nombre de troncature. Le principe de cette méthode consiste à discrétiser cet intervalle en M sous intervalle de longueur égal à $\Delta x = \frac{d}{M}$. Pour bien représenter le déroulement du calcul et pour décrire correctement la structure, il est nécessaire d'avoir un maillage très fin. La figure suivante

nous montre la construction du maillage de la structure :

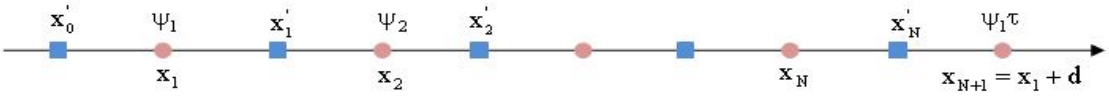


FIGURE 1.13 – Construction de maillage pour la représentation des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$

En fait, dans les deux cas fondamentaux de polarisation, les équations de Maxwell sont exprimées de façon suivantes :

* En polarisation TE : (E_z, H_x, H_y)

les points sont relatifs aux composantes électriques E_z et *les carrés* sont relatifs aux composantes magnétiques H_y. Le développement analytique de ces équations s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -i\omega\mu H_x \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon(x) E_z \end{cases} \tag{1.35}$$

Nous appliquons le principe de cette méthode pour discrétiser les dérivées partielles $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ et $\frac{\partial H_y}{\partial x}$, présentées dans l'équation ci-dessus. Compte tenu de la figure 1.12, les dérivées partielles s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_j = \frac{(E_z)_{(j+1)} - (E_z)_j}{\Delta x} \qquad et \qquad \left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_i = \frac{(H_y)_{(i+1)} - (H_y)_i}{\Delta x} \tag{1.36}$$

avec, $1 \leq j \leq M+1$ et $0 \leq i \leq M$

En effet,

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_1 = \frac{(E_z)_2 - (E_z)_1}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_2 = \frac{(E_z)_3 - (E_z)_2}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_{M-1} = \frac{(E_z)_M - (E_z)_{M-1}}{\Delta x}$$
$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_{M} = \frac{(E_z)_{M+1} - (E_z)_M}{\Delta x}$$

En tenant compte de la pseudo-périodicité du champ, nous pouvons écrire :

$$(E_z)_{(M+1)} = (E_z)_1 \, exp(-ik\alpha_0 d) = (E_z)_1 \, \tau$$

alors,

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_{M} = \frac{(E_z)_1 \, \tau - (E_z)_M}{\Delta x}$$

Nous obtenons l'équation matricielle :

$$\left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)_j\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[D_d\right]\left[(E_z)_j\right] \tag{1.37}$$

De même, pour la discrétisation de $\frac{\partial H_y}{\partial x}$,

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_1 = \frac{(H_y)_1 - (H_y)_0}{\Delta x}$$
$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_2 = \frac{(H_y)_2 - (H_y)_1}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_{M-1} = \frac{(H_y)_{M-1} - (H_y)_{M-2}}{\Delta x}$$
$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_{M} = \frac{(H_y)_M - (H_y)_{M-1}}{\Delta x}$$

En tenant compte la pseudo-périodicité du champ, nous pouvons écrire :

$$(H_y)_0 = (H_y)_M \, exp(ik\alpha_0 d) = (H_y)_1 \, \tau^*$$

τ est le conjugué de τ, alors

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_1 = \frac{(H_y)_1 - (H_y)_M \, \tau^*}{\Delta x}$$

Explicitement, nous avons :

$$\left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}\right)_i\right] = \frac{1}{\Delta x}\,[D_g]\left[(H_y)_i\right] \tag{1.38}$$

Les matrices D_d et D_g sont définies comme suit :

$$[D_d] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & -1 & 1 & & \\ & & & & -1 & 1 & \\ \tau & & & & & -1 & \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

et,

$$[D_g] = \begin{bmatrix} 1 & & \cdots & & & -\tau^* \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

* En polarisation TM : (H_z, E_x, E_y)

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} = i\omega\varepsilon(x)E_x \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon(x)E_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu H_z \end{cases} \tag{1.41}$$

Une démarche analogue au cas TE se réalise sur la discrétisation de dérivées partielles $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ et $\frac{\partial E_y}{\partial x}$, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_j = \frac{(H_z)_{(j+1)} - (H_z)_j}{\Delta x} \qquad et \qquad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)_i = \frac{(E_y)_{(i+1)} - (E_y)_i}{\Delta x} \tag{1.42}$$

Nous obtenons les mêmes équations matricielles que celles du cas TE :

$$\left[\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_j\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[D_d\right]\left[\left(H_z\right)_j\right] \tag{1.43}$$

et,

$$\left[\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)_i\right] = \frac{1}{\Delta x}\left[D_g\right]\left[\left(E_y\right)_i\right] \tag{1.44}$$

Nous soulignons dans le calcul que les valeurs du champ électrique et du champ magnétique sont calculées en des points différents du maillage. Ils sont respectivement appelés points du maillage électrique et points du maillage magnétique. Quant aux points du maillage magnétique (resp électrique), nous les trouvons toujours entre deux points du maillage électrique (resp magnétique).

1.3.3.4 Équations aux valeurs propres

D'après les six équations de Maxwell dans l'équation (1.16) et (1.17) et en appliquant le principe de la MMDF dans le paragraphe (1.3.3.3), nous obtenons les expressions des équations aux valeurs propres dans les deux cas et nous pouvons écrire de manière suivante :

* En polarisation TE : nous avons des matrices réduites,

$$\begin{cases} \left[Z_0 H_{xq}\right] = -\beta_q \left[E_{zq}\right] \\ \left(\left[\langle\varepsilon\rangle\right] + \frac{1}{k_0^2}\left[D_g\right]\left[D_d\right]\right)\left[E_{zq}\right] = \beta_q^2 \left[E_{zq}\right] \end{cases} \tag{1.45}$$

où, $Z_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ est l'impédance dans le vide et $q \in [-M : +M]$,
$[\langle\varepsilon\rangle]$ est la matrice diagonale de la valeur moyenne de ε, d'expression :

$$\left[\langle\varepsilon\rangle\right] = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_j - \varepsilon_{(j-1)}\right)$$

avec $1 \leq j \leq n$, n est le nombre de subdivision de ε.

* En polarisation TM, nous avons,

$$\begin{cases} [E_{xq}] = -\frac{\beta_q}{[\langle\varepsilon_1\rangle]}\,[Z_0 H_{zq}] \\ [\langle\varepsilon_1\rangle]\left([I] + \frac{1}{k_0^2}\,[D_g]\,[\langle\overline{\varepsilon_2}\rangle]\,[D_d]\right)[Z_0 H_{zq}] = \beta_q^2\,[Z_0 H_{zq}] \end{cases} \tag{1.46}$$

avec $[I]$ est la matrice identité et la moyenne $[\langle\overline{\varepsilon_2}\rangle] = \left[\langle\frac{1}{\varepsilon_2}\rangle\right]$ telles que :

$$\begin{cases} \langle\varepsilon_1\rangle = \langle\varepsilon_1(x)\rangle_{\left[x'_{(i-1)};x'_i\right]} \\ \langle\varepsilon_2\rangle = \langle\varepsilon_2(x)\rangle_{\left[x_i;x_{(i+1)}\right]} \end{cases} \tag{1.47}$$

Notons bien que la détermination des équations aux valeurs propres des équations de Maxwell est réalisée sur la globalité de la structure maillée. Les valeurs propres β_q sont en générale des valeurs complexes, nous allons trier donc, $\Re_e(\beta_q) \leq 0$ et $\Im_m(\beta_q) \leq 0$ de façon que :

- $exp(-ik\beta_q y)$ correspond à une onde qui se propage vers les y croissants ($y \longrightarrow +\infty$)
- $exp(ik\beta_q y)$ correspond à une onde qui se propage vers les y décroissants ($y \longrightarrow -\infty$)

1.3.3.5 Critère de stabilité et domaine de validité

A partir des équations (1.46) et (1.47), nous avons calculé les champs électromagnétiques en chacun des noeuds du maillage. La MMDF permet de résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles, la formulation analytique des problèmes traités est alors remplacée par une formulation discrète. Elle peut aussi simuler le comportement d'une onde électromagnétique dans tout type de milieu (métal, diélectrique, ...) tout en tenant compte des formes géométriques les plus complexes des objets pouvant constituer le système. Elle ne fait intervenir aucune inversion de matrice. Sa formulation théorique extrêmement simple [27] fournit des prédictions d'une grande précision pour une large éventail de problèmes dans le domaine de l'électromagnétisme.

L'avantage de cette méthode est son caractère général. Elle permet de visualiser la propagation des champs en chaque point de la structure simulée.

Or, en utilisant, cette méthode, il est important de noter que l'approximation des dérivées partielles par des différences finies à gauches et à droites provoque des erreurs d'arrondies. Les valeurs arbitraires de pas de discrétisation spatiale peuvent mener vers des solutions

sans fin du champ électromagnétique. Il est alors nécessaire de minimiser ce phénomène afin de rendre le processus stable. Le critère de stabilité de MMDF est connu surtout dans un système de coordonnées cartésiennes. Il est nécessaire de prendre en compte le pas de discrétisation $\triangle x$. C'est-à-dire qu' il est nécessaire de décomposer la structure en cellules élémentaires, avec des résolutions très inférieures à la longueur d'onde du système. En effet, pour assurer une bonne convergence des résultats, la grille de discrétisation spatiale appliquée au modèle doit avoir des tailles de cellules de l'ordre de $\triangle x \leq \frac{\lambda}{20}$.

1.3.4 Méthode des Moments

1.3.4.1 Introduction

Historiquement, la Méthode des Moments a été développée par R. Harrington en 1968 [28] pour l'étude des antennes filaires. Cette méthode est tirée sur la théorie des probabilités. Or cette méthode peut être adaptée pour la résolution numérique de toute équation linéaire de type :

$$\mathcal{L}(f) = g \tag{1.48}$$

où, f est la fonction inconnue et représente d'une manière globale, la réponse du système que nous voulons caractériser, g est une fonction connue et représente le terme lié à la source ou à l'excitation, $\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire agissant sur la fonction f. Cet opérateur peut être intégral ou différentiel.

Théoriquement, la solution de f est donnée directement par relation $f = \mathcal{L}^{-1}(g)$, mais pratiquement, même si $\mathcal{L}^{-1}$ existe, il n'est pas possible de déterminer son expression analytique notamment dans notre cas d'une structure de diffraction périodique. L'inverse de l'opérateur $\mathcal{L}$ n'est possible que dans l'approche numérique. Dans les années 1950, l'essor de l'informatique a permis de mettre au point plusieurs variantes de cette méthode dans le domaine électromagnétique [29].

Supposons que, l'expression analytique de f existe et est unique, celle-ci est par conséquent représentable sur une base discrète $(f_n)_n \in N$ tronquée pour la modélisation numérique,

soit :

$$f \equiv \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \tag{1.49}$$

f dépend alors d'une suite finie de coefficients $(a_1, a_2, ..., a_N)$. La résolution numérique de ce système permet de remonter aux coefficients $(a_1, a_2, ..., a_N)$. Cette méthode est simple et robuste numériquement, il suffit de citer les trois étapes suivantes pour résoudre le problème de diffraction :

- $\mathcal{L}$ est linéaire et la solution est unique,

- L'opérateur $\mathcal{L}$, non inversible en général est remplacé par une matrice de taille finie, dont l'inversion est possible et directe.

- L'erreur entre la solution approchée et la solution exacte tend vers zéro lorsque la taille du système matriciel tend vers l'infini.

En résumé, la Méthode des Moments (MM) est une technique numérique permettant de résoudre efficacement le système d'équation différentielle ou intégral en le transformant en un système matriciel résolu par [28, 30].

Dans la suite, nous allons introduire dans un premier temps le principe de cette méthode, nous verrons aussi le choix de la représentation de base. Nous montrons dans ce paragraphe une deuxième base sur laquelle nous projetterons l'équation (1.51) afin d'obtenir un système matriciel. Dans le choix de la base de projection, nous citons les cas dont les deux bases sont différentes ou les deux bases sont identiques, connus sous le nom **"hypothèse de Galerkin"**. L'identification de deux bases minimise l'erreur du système et représente la meilleure approche dans notre cas. Sur la Méthode des Moments, le choix judicieux de ces deux bases est important et nous amène aussi au sujet de discussion.

1.3.4.2 Principe de la Méthode des Moments

Reprenons l'équation $\mathcal{L}(f) = g$ (1.51). Dans la résolution du problème de diffraction, $\mathcal{L}$ représente l'opérateur linéaire, f et g sont les composantes du champ électromagnétique (E ou H). Notre objectif est de transformer cette relation en une équation matricielle. Nous pouvons alors chercher à définir une représentation numérique discrète de la fonction f. Le plus simple est de représenter f par une somme des fonctions données $(f_n)_{(n\in N)}$,

c'est-à-dire :

$$f = \sum_{n=0}^{n=N} a_n f_n \tag{1.50}$$

f_n étant connus et définis dans un domaine d'application de f. Il reste à déterminer les coefficients a_n. En effet, en substituant l'équation (1.50) par l'équation (1.48) et en utilisant la linéarité de $\mathcal{L}$, nous avons l'expression :

$$\sum_{n=0}^{n=N} a_n \mathcal{L}(f_n) = g \tag{1.51}$$

a_n sont de nombres scalaires et la suite de $(a_n)_{n\in N}$ est directement déterminée par l'application du produit scalaire :

$$\sum_{n=0}^{n=N} a_n \langle \omega_m, \mathcal{L} f_n \rangle = \langle \omega_m, g \rangle \tag{1.52}$$

où, ω_m et f_n qui sont des fonctions choisies respectivement les fonctions tests et les fonctions de base, $[a_n]$ est un vecteur dont les composantes sont a_1, a_2, a_3, ..., a_n, $[g_m]$ est un vecteur des composantes $g_m = \langle \omega_m, g \rangle$. Nous obtenons alors une équation matricielle de forme :

$$[l_{mn}]\,[a_n] = [g_m] \tag{1.53}$$

où, l_{mn}, l'élément mième ligne et nième colonne d'une matrice L et donnée par :

$$l_{mn} = \langle \omega_m, \mathcal{L}(f_n) \rangle$$

c'est - à - dire ,

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, \mathcal{L} f_1 \rangle & \langle w_1, \mathcal{L} f_2 \rangle & \cdots \\ \langle w_2, \mathcal{L} f_1 \rangle & \langle w_2, \mathcal{L} f_2 \rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \tag{1.54}$$

et,

$$[a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad [g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{1.55}$$

la solution exacte est approchée par une combinaison linéaire de l'élément f_n. En résumé, la résolution de notre problème est réalisée numériquement, ce qui n'est possible qu'avec des équations scalaires. Il est nécessaire de mettre le problème sous forme matricielle. Le choix des fonctions de base et tests dépend du problème électromagnétique , et de la précision souhaitée. Tout d'abord, elles doivent être dérivables et intégrables en fonction de l'opérateur de l'équation formelle.

1.3.4.3 Représentation de base

Le choix dans la présentation des fonctions de base f est crucial car le temps et le calcul numérique dépendent de ce choix. Pour atteindre l'objectif, notre choix consiste à mettre point :

- une représentation numérique pertinente de cette base ;
- un respect des contraintes physiques du problème étudié ;
- un minimum d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée ;
- un temps de calcul souhaité ;
- un convergence rapide de la courbe de convergence.

Nous allons présenter deux formes de base unidimensionnelles à valeur réelle afin d'étudier et de comparer leurs différences au niveau du temps du calcul, convergence et stabilité des résultats.

*** Fonction Porte**

La fonction utilisée comme fonction de base est définie sur un sous domaine du domaine de définition, d'expression :

$$P(x-x_n) = \begin{cases} 1 & si \quad x_n - \frac{\Delta x}{2} \leq x \leq x_n + \frac{\Delta x}{2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{1.56}$$

Cette fonction est illustrée par la figure 1.14

Chaque élément de base est défini comme une constante réelle de valeur unité sur un sous domaine du domaine de f. La projection de l'équation $\mathcal{L}(f) = g$ se fait alors sur des

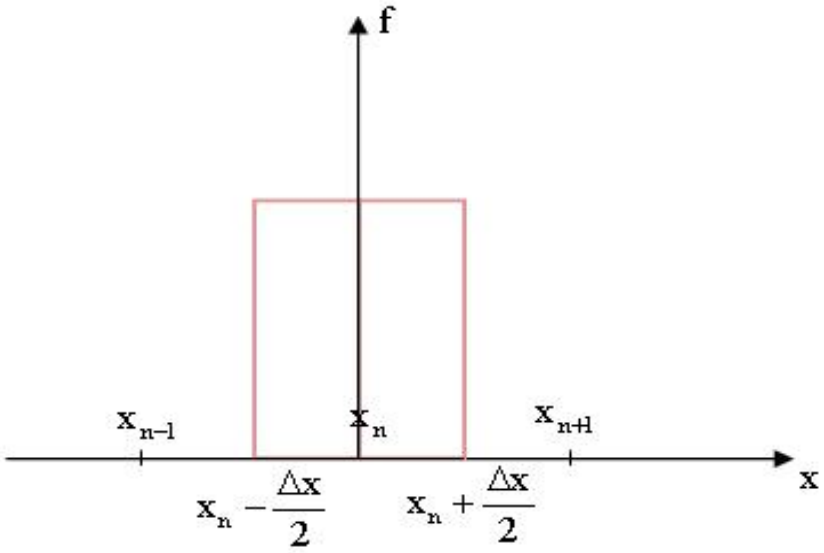


FIGURE 1.14 – Exemple de projection f sur une fonction porte P(x-x_n)

fonctions constantes par morceau. La fonction f est alors représentée comme une fonction constante et continue par morceau. Les expressions de l'intégration et leur calcul ne sont pas très compliqués.

Cependant, au point de vu du temps du calcul et les propriétés adéquates de convergence, ce choix n'optimise pas le temps de résolution du système matriciel. En outre, cette base n'est pas dérivable au sens des fonctions, cette représentation est constante par morceau et ne nous permet pas de calculer des valeurs de la fonction en dehors des sous domaines pris pour résoudre l'équation. Cela nous amène à adopter une autre base un peu plus complexe mais différentiable.

* Fonction Triangle

C'est une fonction définie aussi sur un sous domaine du domaine de définition, et dérivable une fois au sens des fonctions. Chaque élément de base est défini comme une droite croissante puis décroissante sur ce sous domaine comme la figure 1.15 nous le montre.

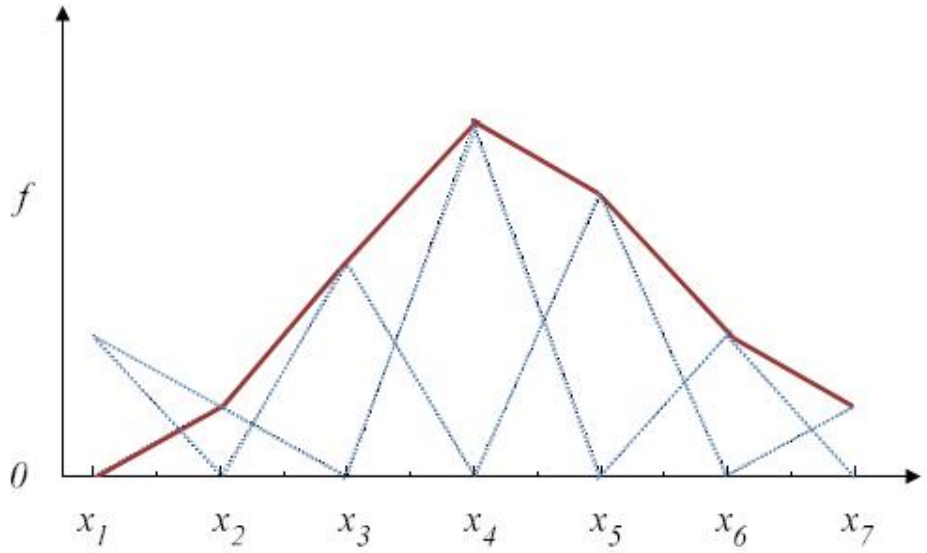


FIGURE 1.15 – Exemple de projection f sur une base triangulaire

Supposons que l'intervalle [0,1] supporte N triangles, alors,

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{N} \qquad et \qquad T(x - x_n) = f_n(x)$$

$T(x - x_n)$ désigne la fonction triangle définie par :

$$T(x - x_n) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & si \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \\ \frac{x_{n+1} - x}{x_{n+1} - x_n} & si \quad x_n \leq x \leq x_{n+1} \end{cases} \tag{1.57}$$

Cette représentation de base est continue et leur combinaison linéaire permet de restituer la continuité de f surtout dans son domaine de définition. Dans notre cas, nous choisissons cette fonction en appliquant l'hypothèse de Galerkin afin d'optimiser la résolution du système matriciel et l'erreur de convergence.

1.3.4.4 Hypothèse de Galerkin

L'hypothèse de Galerkin consiste à identifier la fonction de base f_n et la fonction de projection ou fonction test ω_n. Pour bien étudier cette hypothèse, il nous faut au préalable

vérifier que le domaine d'application de l'opérateur $\mathcal{L}$ soit compatible, c'est - à - dire, dans notre travail, que la fonction test est dans le même espace que la fonction inconnue. Les deux bases pouvant se définir l'un comme dans l'autre. L'hypothèse de Galerkin a l'avantage de minimiser les erreurs entre la solution exacte et la solution approchée.

Chapitre 2

Domaine d'application numérique

2.1 Introduction

Ce chapitre nous mène à établir le domaine de validité générale des méthodes employées pour l'étude des problèmes de diffraction dans différents types de milieux électromagnétiques. Notre domaine d'application numérique s'appuie sur des tests de convergences portant sur les valeurs propres et les efficacités diffractées. De plus, nous étudions aussi le calcul des modes et la comparaison des nos résultats avec ceux de la MMFE est effectuée.L'application numérique se fait avec les coordonnées classiques, c'est-à-dire, le système des coordonnées cartésiennes puis avec la technique de résolution spatiale adaptative (RSA), c'est-à-dire, le système des coordonnées paramétriques.Nous commençons d'abord par présenter cette technique et son intérêt pour nos problèmes de diffraction.

2.2 Technique de Résolution Spatiale Adaptative RSA

2.2.1 Changement des coordonnées

Cette technique consiste à introduire un nouveau système des coordonnées paramétriques (u, y, z) déduit à partir du système des coordonnées cartésiennes (x, y, z). Puisque la structure du réseau ne varie que suivant x(réseau unidimensionnel), le changement de coordonnées paramétriques ne porte que sur cette variable x.

$$\begin{cases} x = h(u) \\ \\ y = y \\ \\ z = z \\ \end{cases}$$

$h(u)$ est la nouvelle coordonnée paramétrique d'expression :

$$x(u) = h(u) = \begin{cases} \frac{f}{u_1}\left(u - \frac{\eta}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi u}{u_1}\right)\right) & pour \quad u < u_1 \\ \\ f + \frac{d-f}{d-u_1}(u - u_1) - \frac{\eta}{2\pi} sin\left(\frac{2\pi(u-u_1)}{d-u_1}\right) & pour \quad u_1 < u < d \end{cases} \tag{2.1}$$

où, η est un paramètre numérique de valeur comprise entre 0 et 1, qui augmente la résolution spatiale au voisinage des points discontinuités du profil. f est le facteur de forme ($fillfactor$)

Nous choisissons cette fonction paramétrique $x = h(u)$ de telle manière que la résolution spatiale augmente beaucoup au voisinage de $x = 0$ et $x = fd$, où la constante diélectrique est discontinue. Autour de ces points, une variation Δu de u doit avoir une conséquence très accentuée sur la variation Δx de x.

Dans ce nouveau système des coordonnées, la permittivité du profil s'écrit en fonction de cette nouvelle variable :

$$\epsilon_2(u) = \begin{cases} \epsilon_{21} & si \quad 0 \leq u \leq u_1 \\ \\ \epsilon_{22} & si \quad u_1 \leq u \leq d \end{cases} \tag{2.2}$$

La relation $x = h(u)$ définit un nouveau système des coordonnées (u, y, z). La figure suivante nous montre l'effet du changement de variable pour différentes valeurs de η.

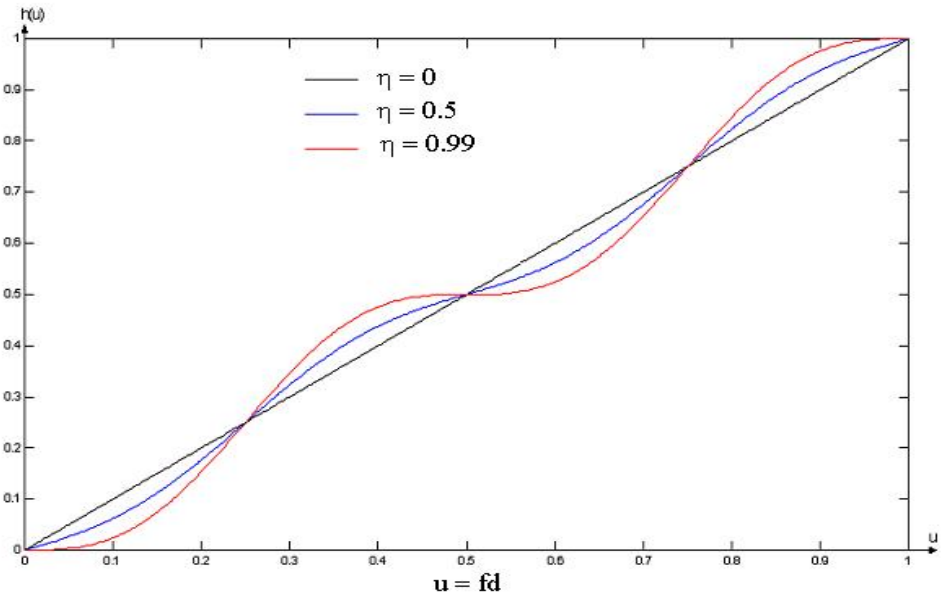


FIGURE 2.1 – Schéma montrant la fonction paramétrique $x = h(u)$ avec différentes valeurs de η

La valeur de $\eta = 0$ revient à nous dire que il n'y a pas de changement de variable, nous gardons le système des coordonnées cartésiennes. Cette figure nous montre que pour les valeurs $\eta = 0.5$ et $\eta = 0.99$, nous obtenons des point plus resserrés au point $x = fd$. La variation Δu de u à ce point entraine une variation Δx de x infiniment plus petite. Nous en déduisons ainsi que les pas de discrétisation ne sont plus uniformes, contrairement au cas des coordonnées cartésiennes. Nous disons aussi pas de discrétisation non uniforme ou pas de discrétisation variable.
La nouvelle fonction définie par u est périodique avec la même période que la permittivité diélectrique. Sa dérivée est minimum aux points de discontinuité.

2.2.2 Intérêt de la Technique de la RSA

On a déjà montré dans l'article [31] que la technique de RSA améliore beaucoup le taux de convergence des résultats en MMFE. Quelques résultats tirés de cet article illustrent le grand intérêt de cette technique :

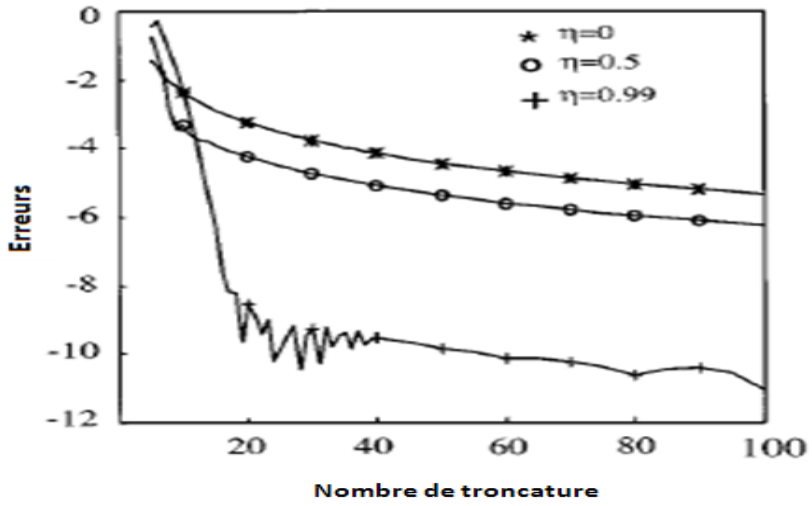


FIGURE 2.2 – Courbe de convergence des erreurs des valeurs propres en polarisation TE

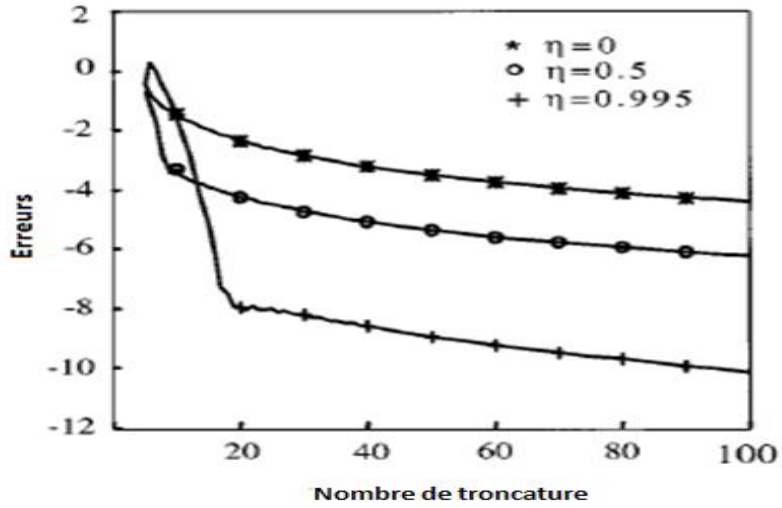


FIGURE 2.3 – Courbe de convergence des erreurs des valeurs propres en polarisation TM

Cet article a souligné le rôle important de paramètre η sur le changement de variable. En comparant avec la résolution classique $\eta = 0$, les résultats nous montrent une grande amélioration au niveau de vitesse de la convergence et de la stabilité des résultats.
Grâce à la technique de RSA, les calculs analytiques sont poussés plus loin, ce qui conduit à des codes numériques plus rapides et efficaces en mémoire. Les problèmes de discontinuités dans le milieu inhomogène ne sont jamais négligeables dans les problèmes de

diffraction, cette nouvelle formulation est un grand recours pour y remédier et elle présente des avantages notamment pour la méthode modale. C'est la raison pour laquelle, nous l'appliquons à la MMDF et MM.

2.3 MMDF avec la technique RSA

Nous allons déjà présenter dans le chapitre précédent les procédures de la résolution des équations de Maxwell dans les coordonnées cartésiennes. Il reste à introduire le nouveau système des coordonnées en fonction de u.
En tenant compte du changement de variable, $x = h(u)$, le champ électrique devient :

$$\begin{cases} E_x = \dot{h}^{-1}(u) E_u \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\dot{h}(u)} \frac{\partial}{\partial u} \end{cases} \tag{2.3}$$

Ainsi, la dérivée de cette nouvelle fonction intervient dans les six équations de Maxwell (eq.(1.16) et (1.17)) et l'équation de propagation s'écrit :
* En polarisation TE :

$$\begin{cases} [Z_0 H_{uq}] = -\beta_q \left[\dot{h}(u)\right] [E_{zq}] \\ \left([\langle\varepsilon\rangle] + \frac{1}{k_0^2} \left[D_g^u\right] [D_d^u]\right) [E_{zq}] = \beta_q^2 [E_{zq}] \end{cases} \tag{2.4}$$

*En polarisation TM :

$$\begin{cases} [E_{uq}] = -\frac{\beta_q}{[\langle\varepsilon_1\rangle]} \left[\dot{h}(u)\right] [Z_0 H_{zq}] \\ [\langle\varepsilon_1\rangle] \left([I] + \frac{1}{k_0^2} \left[D_g^u\right] [\langle\overline{\varepsilon_2}\rangle] [D_d^u]\right) [Z_0 H_{zq}] = \beta_q^2 [Z_0 H_{zq}] \end{cases} \tag{2.5}$$

avec, $\left[\frac{1}{\dot{h}(u)}\right]$ est une matrice diagonale et,

$$\left[D_g^u\right] = \left[\frac{1}{\dot{h}(u)}\right] [D_g] \qquad et \qquad [D_d^u] = \left[\frac{1}{\dot{h}(u)}\right] [D_d]$$

2.4 Méthode des Moments avec la Technique de RSA

Dans ce manuscrit, sur l'application de la Méthode des Moments, les éléments de projection sont bornés et espacés entre eux d'une longueur Δu qui n'est autre que le pas de discrétisation.Dans notre cas, la Méthode des Moments est adaptée pour traiter numériquement la diffraction des ondes par différents types de réseau. L'hypothèse de Galerkin apporte plus d'avantages pour les propriétés adéquates de la structure, nous le choisissons pour résoudre le problème de la structure étudiée en garantissant une bonne représentation de l'équation approchée et tout en optimisant la résolution du système matriciel dans le chapitre précédent. La base triangulaire est un meilleur choix par rapport aux fonctions tests dans notre application numérique de cette méthode.

2.4.1 Pas de discrétisation uniforme avec la MM

Ce paragraphe revient à dire que nous traitons le problème avec le système des coordonnées cartésiennes. Dans l'étude du problème de diffraction par un réseau, les relations basées sur les équations de Maxwell peuvent être considérées comme ayant la forme de l'équation (1.51)($\mathcal{L}(f) = g$), f et g sont les composantes du champ $\vec{E}$ ou $\vec{H}$. Notre choix consiste à décomposer les champs électromagnétiques sur les bases des fonctions triangles et à projeter l'équation sur cette même base.
La base de projection est tronquée et possède N éléments f_n. La figure ci-après représente un exemple de ces éléments de base le long de l'axe de propagation.
Nous plaçons un nombre N de point x équi-répartis et indicés de x_1 à x_N. Le point x_1 correspond au début du champ dans le réseau et le point x_N à la fin du champ en une période. Les éléments de base triangulaire T_1, T_2, T_3, ...,T_n....., T_N sont définis à partir des ces points x_1, x_2, x_3, ...,x_n...., x_N, et à chaque point n est associé un élément de base triangulaire T_n.

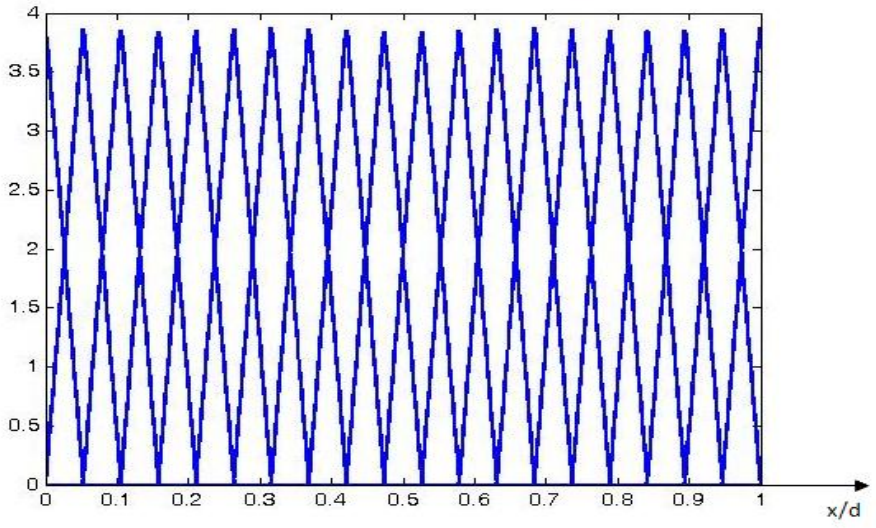


FIGURE 2.4 – Discrétisation uniforme

2.4.2 Pas de discrétisation non uniforme avec la MM

Les pas de discrétisation sont variables. Cette variation se fait de manière que nous obtenons des points plus resserrés autour des discontinuités. Nous augmentons les points autour des discontinuités comme nous voyons dans la figure ci-après :

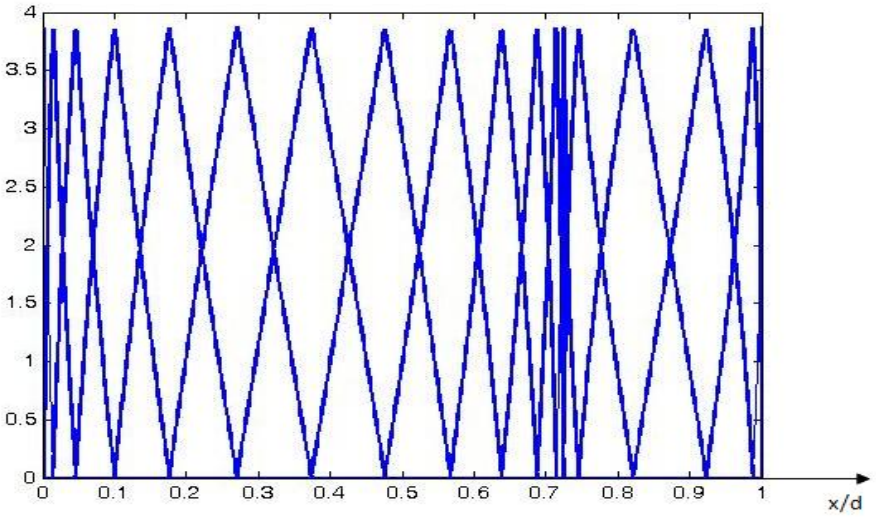


FIGURE 2.5 – Discrétisation non uniforme

Cette adaptation spatiale nous permet d'améliorer les performances numériques avec la méthode modale.

2.4.3 Équation aux valeurs propres

Nous reprenons les équations (1.16) et (1.17). Dans la couche réseau, la permittivité $\epsilon(u)$ est discontinue, elle varie en fonction de u. Les composantes tangentielle de $\vec{E}$ et $\vec{H}$ et les composantes normales de $\vec{D}$ et $\vec{B}$ doivent être continues. Alors, il est nécessaire d'appliquer les règles de factorisation de Lifeng Li [32, 33] . Ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu^{uu}H_u \\ -\frac{\partial E_z}{\partial u} = -i\omega\mu_0\mu^{yy}H_y \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial u} - \frac{\partial H_u}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{zz}E_z \tag{2.7}$$

Et,

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{uu}E_u \\ -\frac{\partial H_z}{\partial u} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon^{yy}E_y \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial u} - \frac{\partial E_u}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu^{zz}H_z \tag{2.9}$$

avec

$$\varepsilon^{zz} = \varepsilon^{yy} = \varepsilon(u)\dot{x}(u) \quad ; \quad \mu^{zz} = \mu^{yy} = \dot{x}(u)$$
$$\varepsilon^{uu} = \left[\frac{\dot{x}(u)}{\varepsilon(u)}\right]^{-1} \quad ; \quad \mu^{uu} = [\dot{x}(u)]^{-1}$$

Par la relation $\frac{\partial}{\partial y} = -ik\beta$, et en tenant compte l'hypothèse de Galerkin avec la RSA, nous allons décomposer les champs électromagnétiques par la fonction triangle puis nous allons projeter avec la même fonction de base. Nous avons des équations sous forme matricielle de la forme :

$$\begin{cases} \left[H_{uq}\right] = \beta_q \frac{k}{\omega\mu_0}\left[\frac{1}{\mu^{uu}}\right]\left[E_{zq}\right] \\ \left[H_{yq}\right] = \frac{-i}{\omega\mu_0}\left[\mu^{yy}\right]^{-1}\left[D_d\right]\left[E_{zq}\right] \end{cases} \tag{2.10}$$

En introduisant l'équation (2.10) dans l'équation (2.7), nous obtenons les équations aux valeurs propres dans le cas de la polarisation TE :

$$\left[\frac{1}{\mu^{uu}}\right]^{-1}\left(\left[\varepsilon^{zz}\right] + \frac{1}{k^2}\left[D_g\right]\left[\mu^{yy}\right]^{-1}\left[D_d\right]\right)\left[E_{zq}\right] = \beta_q^2\left[E_{zq}\right] \tag{2.11}$$

De même pour l'équation (2.8), elle devient :

$$\begin{cases} \left[E_{uq}\right] = \beta_q \frac{k}{\omega\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}}\right] \left[H_{zq}\right] \\ \left[E_{yq}\right] = \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \left[\varepsilon^{yy}\right]^{-1} \left[D_d\right] \left[H_{zq}\right] \end{cases} \tag{2.12}$$

En introduisant l'équation (2.12) dans l'équation (2.9), nous obtenons les équations aux valeurs propres dans le cas de la polarisation TM :

$$\left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}}\right]^{-1} \left(\left[\mu^{zz}\right] + \frac{1}{k^2} \left[D_g\right] \left[\varepsilon^{yy}\right]^{-1} \left[D_d\right] \right) \left[H_{zq}\right] = \beta_q^2 \left[H_{zq}\right] \tag{2.13}$$

Nous allons détailler toutes les expressions matricielles dans les équations (2.11) et (2.13) dans la suite et dans les annexes en utilisant la méthode de Gauss [34]

$$\left[\mu^{yy}\right]_{mq} = \left[\mu^{zz}\right]_{mq} = \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u) \rangle$$

$$\left[\varepsilon^{yy}\right]_{mq} = \left[\varepsilon^{zz}\right]_{mq} = \langle T_m(u), \dot{x}(u) \varepsilon(u) T_q(u) \rangle$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}}\right]_{mq} = \langle T_m(u), \frac{\dot{x}(u)}{\varepsilon(u)} T_q(u) \rangle \qquad \left[\frac{1}{\mu^{uu}}\right]_{mq} = \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u) \rangle$$

D_d et D_g pour expressions :

$$\left[D_g\right]_{mq} = \langle T_m(u - u_{m-1}), \frac{d}{du} T_q(u) \rangle$$

et,

$$\left[D_d\right]_{mq} = \langle T_m(u_{m+1} - u), \frac{d}{du} T_q(u) \rangle$$

avec des composantes :

$$\left[D_g\right] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \tau & 5\tau \\ -5 & 5 & 1 & & & & & \tau \\ -1 & -5 & . & . & & & & \\ & -1 & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & . & \\ & & & & . & . & 5 & 1 \\ -\tau & & & & & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

et,

$$[D_d] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 1 & & & & \tau \\ -1 & -5 & 5 & . & & & \\ & -1 & . & . & . & & \\ & & . & . & . & . & \\ & & & . & . & . & 1 \\ & & & & . & . & . & 1 \\ -\tau & & & & & -5 & 5 \\ -5\tau & -\tau & & & & -1 & -5 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

τ désigne le facteur de pseudo-périodicité d'expression $\tau = exp(-ik\alpha_0 d$. Les valeurs propres β_q dans chaque milieu vérifient les condition des ondes sortantes $(C.O.S)$, c'est-à-dire :

$$\beta_q = \begin{cases} \sqrt{\beta_q^2} & si \quad \beta_q^2 \in R^+ \\ -i\sqrt{-\beta_q^2} & si \quad \beta_q^2 \in R^- \\ \Im_m(\beta_q) < 0 & si \quad \beta_q^2 \in C \end{cases} \tag{2.16}$$

2.5 Résultats numériques et discussions

2.5.1 Principe de test de convergence

Pour étudier la convergence du calcul numérique de notre méthode, nous travaillons sur deux types de milieux électromagnétiques : cas simple d'un réseau diélectrique et cas d'un réseau métallique. Notre étude s'appuie sur les tests de convergence portant sur les valeurs propres, sur les efficacités diffractées et sur la comparaison de notre méthode avec la MMFE. Nous nous intéressons à l'évolution de calcul de ces valeurs propres et ces efficacités en fonction de l'ordre de troncature M. C'est pourquoi, nous avons mis en place le test de convergence en fonction de M. Puis, en faisant ce test, nous définissons des erreurs relatives notées Δ_r pour chaque M :

$$\Delta_r = \log|\frac{R^{(M)} - R_{ref}}{R_{ref}}| \tag{2.17}$$

$R^{(M)}$ désigne les résultats de notre méthode pour chaque M et R_{ref} présente les valeurs de référence. Nous admettons cette formule pour tous les tests de convergence de valeurs propres et des efficacités.

Nous choisissons cette formulation afin d'expliquer clairement le principe du test et afin de trouver l' écart même en petite différence des valeurs. Notre méthode est numériquement stable en fonction de M de façon que les erreurs relatives diminuent quand le nombre de troncature augmente.

2.5.2 Importance du choix de la base de représentation

Nous prouvons dans ce paragraphe que le choix des fonctions de base et de test a une grande influence sur l'étude de la vitesse de convergence. Durant notre travail, nous employons les fonctions triangles comme fonctions de base et les fonctions triangles et portes comme fonctions tests. Les deux réalisations portent le nom de **TTMM** pour la méthode des moments basée sur le "$Triangle - Triangle$" ou méthode de Galerkin basée sur le triangle et le nom de **TPMM** pour la méthode de moments basée sur le "$Triangle - Porte$".

Nous présentons dans les courbes suivantes les erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies dans le cas du réseau métallique et les courbes de convergence des efficacités réfléchies en fonction de M dans le cas du réseau diélectrique.

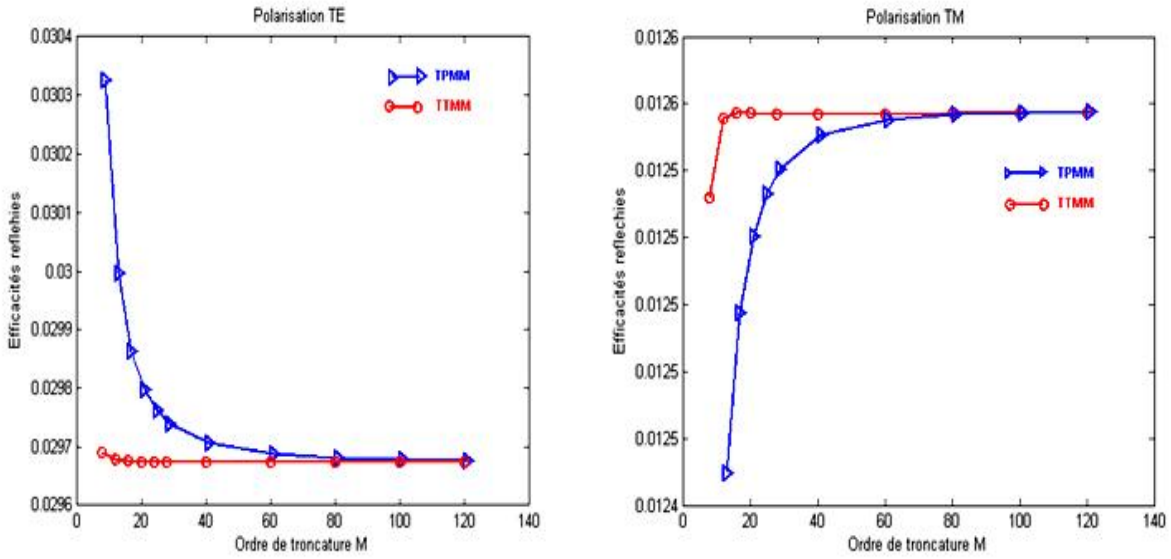


FIGURE 2.6 – Efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas simple du réseau diélectrique : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 20, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 2.25$.

D'après les deux réalisations, dans le cas simple d'un réseau diélectrique, nous voyons que les deux courbes dans les deux cas de polarisation convergent vers une même valeur lorsque le nombre de troncature est grand. Cependant, il est bien de préciser que la méthode TTMM converge rapidement. La convergence se réalise déjà à partir de $M = 10$. Dans le cas d'un réseau métallique, en analysant les courbes obtenues, pour les petits

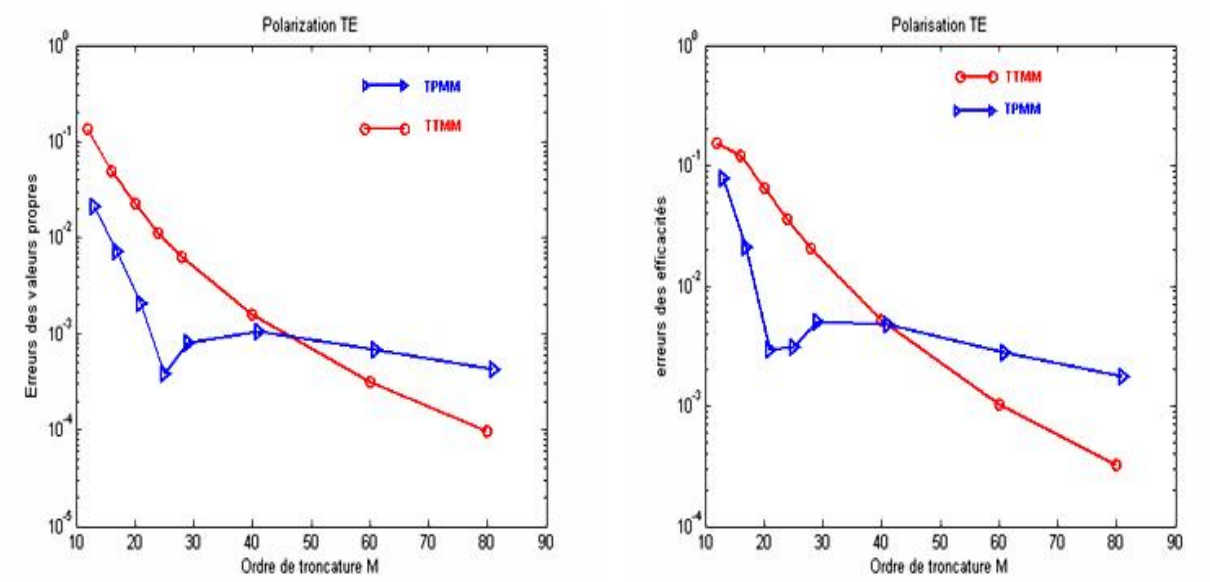


FIGURE 2.7 – Tests de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TE avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 30, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 0.22 - 6.71i$.

ordres de troncature ($M \leq 40$), les courbes de TPMM sont meilleures, il y a cependant un léger de rebond au tour de $M = 20$. Quand l' ordre de troncature augmente, les courbes TTMM deviennent meilleures et les erreurs relatives tendent rapidement vers zéro. Cela nous permet de déduire que la méthode de TPMM n'est pas stable et converge lentement par rapport à la méthode TTMM.

Les résultats de TPMM sont déjà analysés dans l'article [35]. Nous avons encore obtenu des meilleurs résultats pour la méthode TTMM grâce à la fonction test plus optimisée. Cette méthode est réputée du point de vue mathématique, pour donner des résultats plus précis. Nous pouvons conclure que nous obtenons des résultats plus précis et de convergence plus rapide si la fonction test est plus élaborée. Dans ce qui suit, notre idée

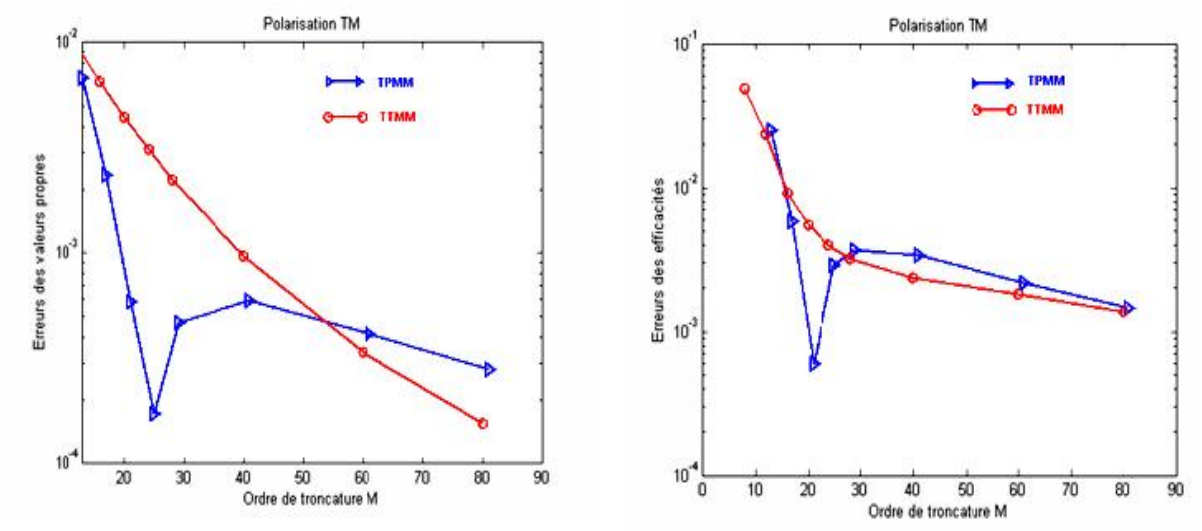


FIGURE 2.8 – Tests de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TM avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 30, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 0.22 - 6.71i$.

est d'utiliser des fonctions de base et de test plus raffinées afin d'améliorer la vitesse de convergence. C'est pourquoi, dans toutes les exécutions numériques qui suivent, nous n'utilisons que les approches numériques de TTMM.

2.5.3 Pas de discrétisations uniforme et non uniforme

Nous concentrons seulement notre attention sur la plus grande différence entre l'utilisation du pas de discrétisation variable et le pas de discrétisation constant notamment dans le cas du réseau métallique et infiniment conducteur(voir paragraphe 2.4.4.5). Les figures ci-contre montrent la grande amélioration apportée par cette nouvelle technique (RSA).

Les trois différentes courbes dans chacune des figures sont toutes obtenues en utilisant la méthode des moments basée sur "$Triangle - Triangle$" (TTMM). La valeur de $\eta = 0$ signifie que le pas de discrétisation est uniforme. Ensuite, nous prenons $\eta = 0.5$, juste pour voir l'évolution de la courbe en fonction de η. Quand la valeur de η est plus proche de 1, les courbes des erreurs relatives convergent rapidement. Cette convergence est très

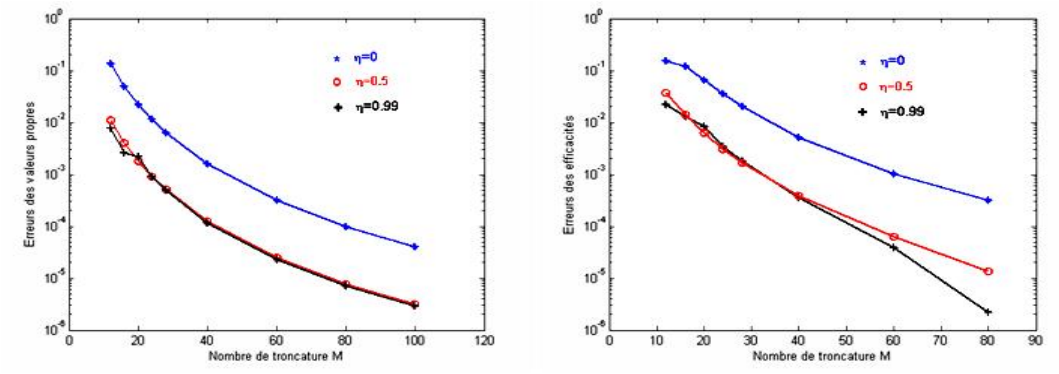


FIGURE 2.9 – Courbes de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 en fonction de M pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TE avec trois différentes valeurs de η

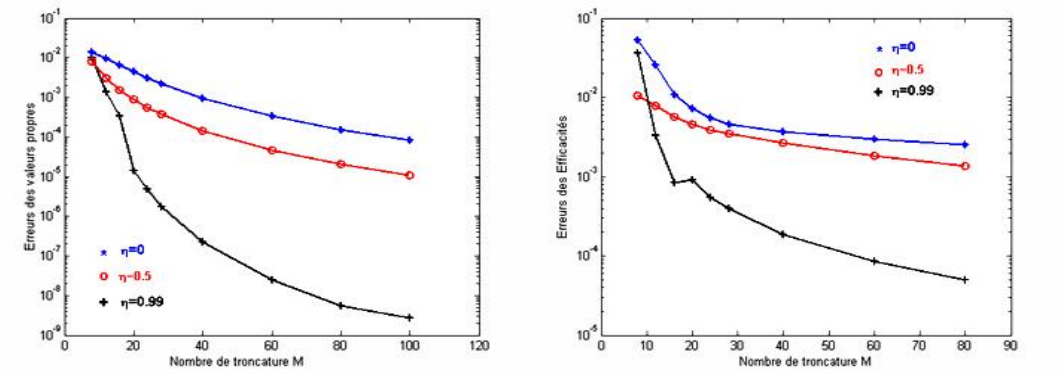


FIGURE 2.10 – Courbes de convergence des erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies d'ordre 0 en fonction de M pour le cas du réseau métallique dans le cas de polarisation TM avec trois différentes valeurs de η

accentuée sur les erreurs relatives des valeurs propres dans le cas de la polarisation TM. L'application de la technique de la RSA, c'est à dire l'augmentation de la résolution spatiale au voisinage du point discontinuité augmente la vitesse de convergence.

2.5.4 Importance de la position des discontinuités du réseau

En appliquant notre méthode TTMM, la convergence dépend fortement de la position des discontinuités de la constante de permittivité du réseau par rapport à la disposition des fonctions triangles le long de l'axe de propagation (0x). Dans notre profil périodique, nous considérons trois positions des discontinuités de la constante diélectrique du réseau

en une période afin de préciser leur importance.

Nous adoptons les notations suivantes pour distinguer les trois différentes positions : pour la première position, on note **DS1** le cas où les discontinuités sont tous situées à l'intersection de deux fonctions triangles. Pour la seconde position, notée **DS2**, l'une des discontinuités est placée à l'intersection de deux triangles et l'autre est au sommet d'un triangle. Pour la dernière position, notée **DS3**, les deux discontinuités se situent au sommet de chacun des triangles. Nous illustrons ces notations par les figures suivantes en désignant chacune par la figure 2.11, figure 2.12 et figure 2.13.

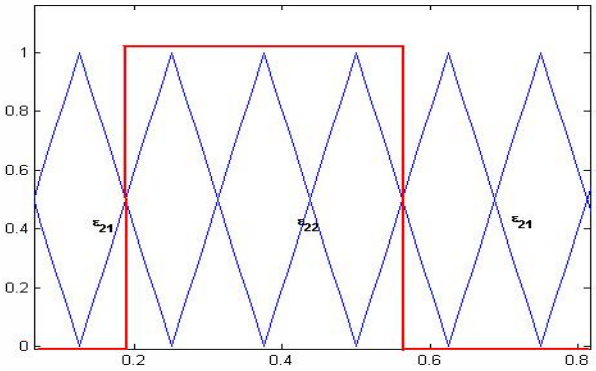


FIGURE 2.11 – DS1 : Discontinuités situées à l'intersection de deux fonctions triangles

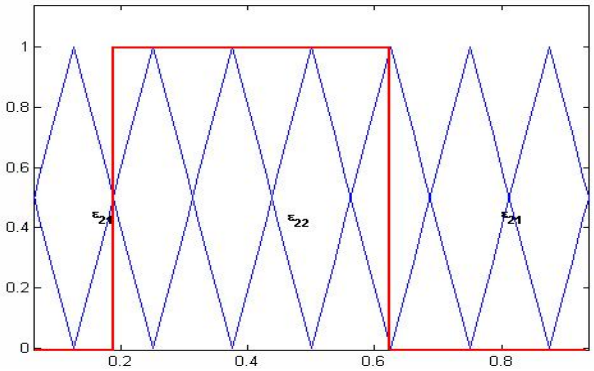


FIGURE 2.12 – DS2 : L'une des discontinuités est placée à l'intersection de deux triangles et l'autre est au sommet d'un triangle.

En outre, dans nos contributions, en faisant la discrétisation du champ électromagnétique, nous employons des grilles décalées. C'est à dire, Les champs E_z et H_u pour la

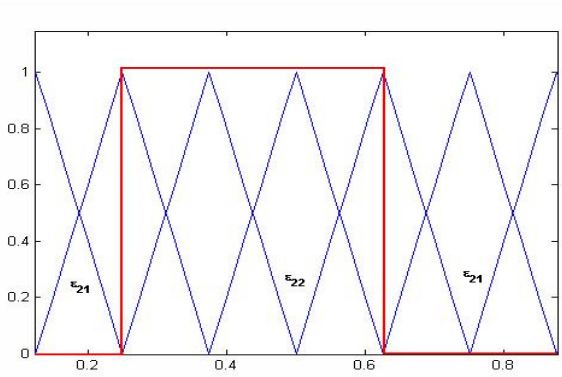


FIGURE 2.13 – DS3 : Discontinuités situées au sommet de chacun des triangles

polarisation TE et H_z et E_u pour la polarisation TM sont décalés de $\frac{\Delta_u}{2}$ où Δ_u est le pas de discrétisation spatiale. L'exemple numérique que nous avons pris est toujours l'exemple du cas du réseau métallique. Les figures suivantes nous montrent la meilleure position des discontinuités de la constante diélectrique avec la TTMM.

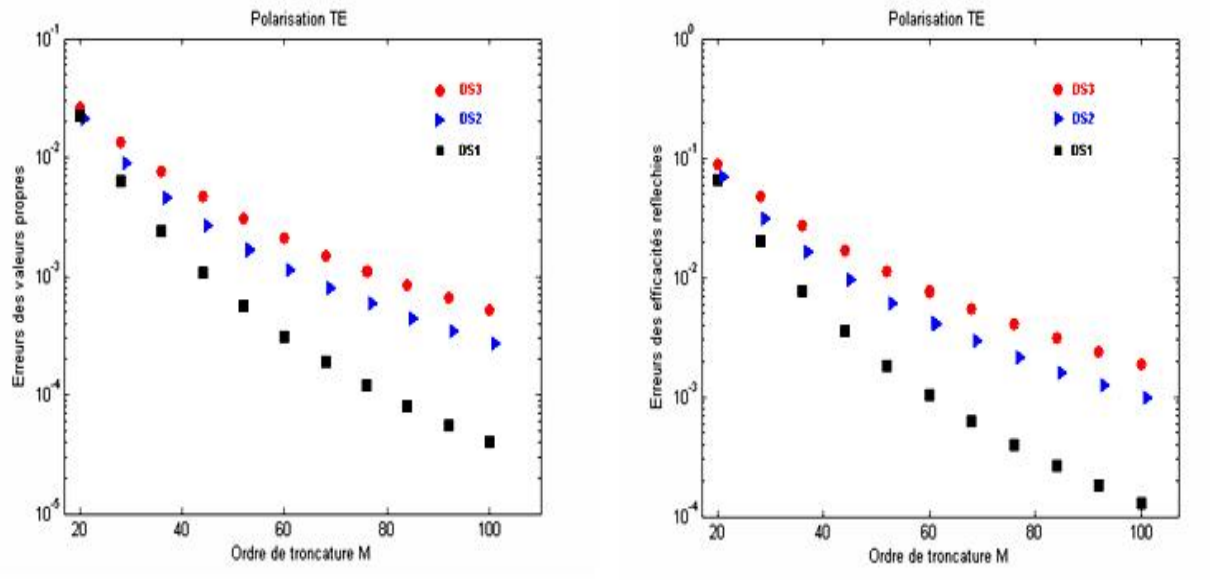


FIGURE 2.14 – Polarisation TE sans paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle

En comparant DS1, DS2 et DS3, nous voyons que pour la polarisation TE la hiérarchie des courbes de convergence est bien respectée. C'est à dire que, les pourcentages des erreurs relatives des valeurs propres sont en accord avec les pourcentages des erreurs

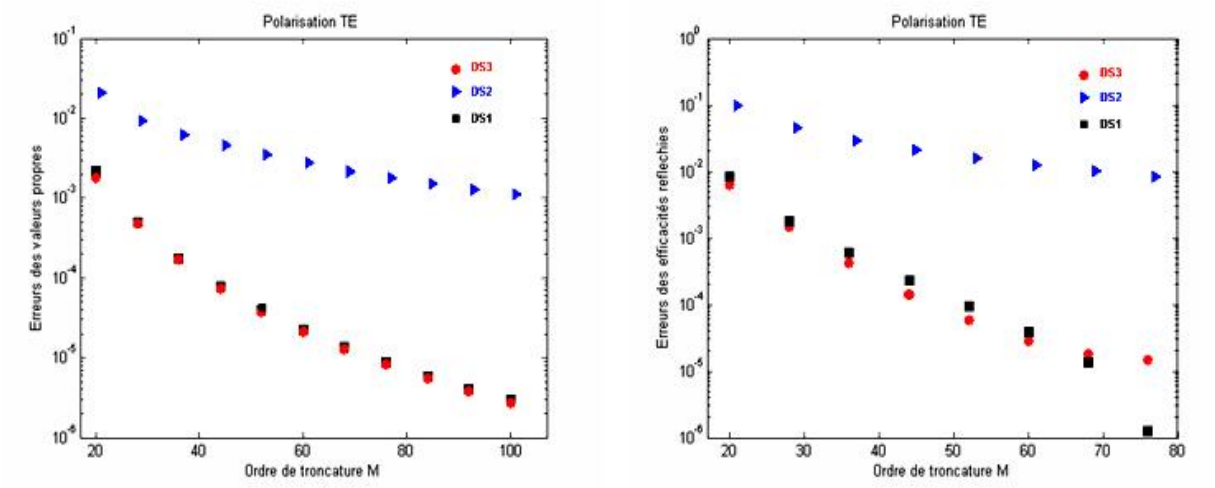


FIGURE 2.15 – Polarisation TE avec paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle

relatives des efficacités. Mais il est bien de noter que l'utilisation de la technique de la RSA n'a pas d'influence significative sur les résultats obtenus avec la discrétisation DS2. Les courbes de convergences restent mauvaises et ne s'améliorent pas.

Pour la polarisation TM sans changement des coordonnées (pas uniforme), une améliora-

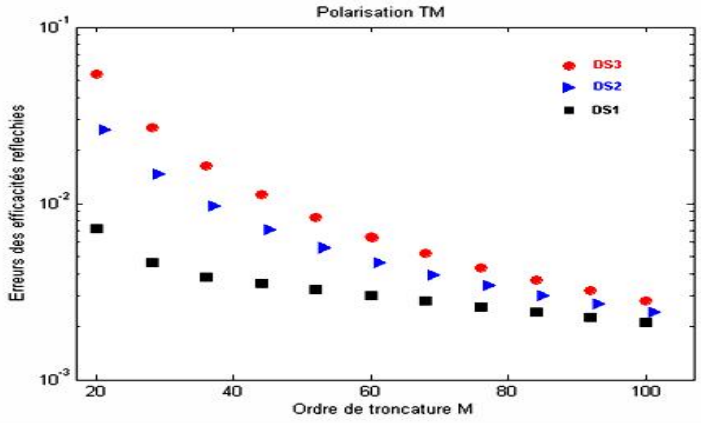


FIGURE 2.16 – Polarisation TM sans paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle

tion est obtenue pour la discrétisation DS1 même si le nombre de troncature M est petit ($M \leq 35$). Mais à partir de $M = 70$, les trois courbes commencent à converger vers la

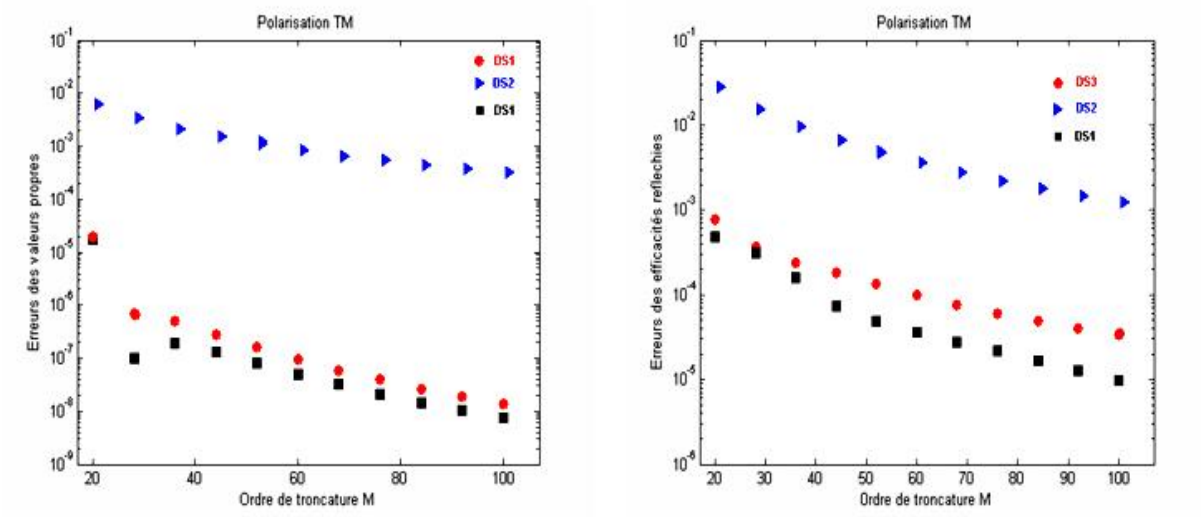


FIGURE 2.17 – Polarisation TM avec paramétrique : Comparaison des courbes de convergence pour les trois positions des discontinuités avec les décompositions en triangle

même valeur. L'écart de la convergence entre **SD1** , **SD2** , et **SD3** n'est pas assez grand. Avec la RSA, pareillement à la polarisation TE, pour la discrétisation DS2, l'amélioration n'est pas trop importante. Par contre, les discrétisations DS1 et DS3 deviennent optimales pour tout nombre de troncature M.

En général, après l'analyse des résultats obtenus, le cas hybride où la position des discontinuité de la constante diélectrique est mixte (DS2), n'est pas optimal pour notre méthode surtout avec la RSA. Pour les discrétisations avec DS1 et DS3, nous avons des meilleurs résultats et l'ordre de convergence est bien respecté dans les deux cas de polarisations avec la RSA. Pour aller pus loin, nous pouvons comparer les deux arrangements DS1 et DS3. Il est très remarquable que l'amélioration est très considérable pour la discrétisation DS1, les résultats sont optimales et ils sont tous meilleurs pour les deux cas de polarisations. Alors, nous pouvons déduire que le bon traitement de la position des discontinuités de la constante diélectrique avec la méthode TTMM est une manière optimale pour accélérer la vitesse de convergence et pour avoir des résultats stables. C'est pourquoi dans ce qui suit, nous validons les résultats de la discrétisations **DS1**.

2.5.5 MMDF avec la technique de RSA dans le cas d'un réseau parfaitement conducteur

Dans la suite de notre travail, nous appliquons la RSA à la MMDF afin de comparer nos résultats avec la Méthode des différences finies utilisée par Lalanne et al dans son article [36] . Notre présente méthode est la même que celle de Lalanne : c'est la méthode modale des différences finies. Cependant, la différence entre eux se situe dans les approches numériques. C'est à dire, Lalanne et al ont utilisé le développement de Rayleigh dans les milieux homogènes de la structure étudiée tandis que nous employons la même approche numérique dans chacun des milieux.

Pour cela, nous prenons le même exemple numérique que l'article de Lalanne et nous ne

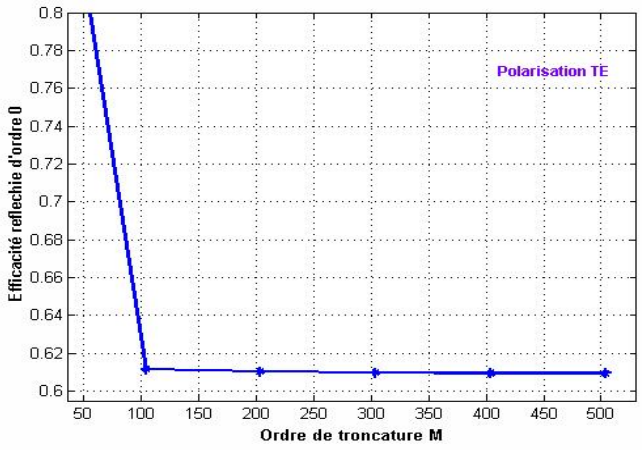


FIGURE 2.18 – Polarisation TE avec paramétrique : Courbes de convergence des efficacités réfléchies d'ordre 0 avec des paramètres : $\theta = arcsin(\frac{\lambda d}{2}), f = 0.57, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (1 - 40i)^2, \frac{\lambda}{d} = 0.8090, h = 0.4d$

prenons que le cas du réseau infiniment conducteur. La performance de cette méthode est déjà prouvée dans son article pour le cas du réseau considéré. Ainsi, la comparaison porte sur les approches numérique au niveau du problème de raccordement aux deux interfaces. Dans notre méthode actuelle, les calculs des matrices qui expriment les conditions de raccordement aux deux interfaces se font de manière identique à la méthode de TTMM et autre (TPMM). Un autre calcul de matrice comme la matrice de passage n'intervient pas. C'est un avantage de notre méthode au point de vue calcul d'intégration des conditions

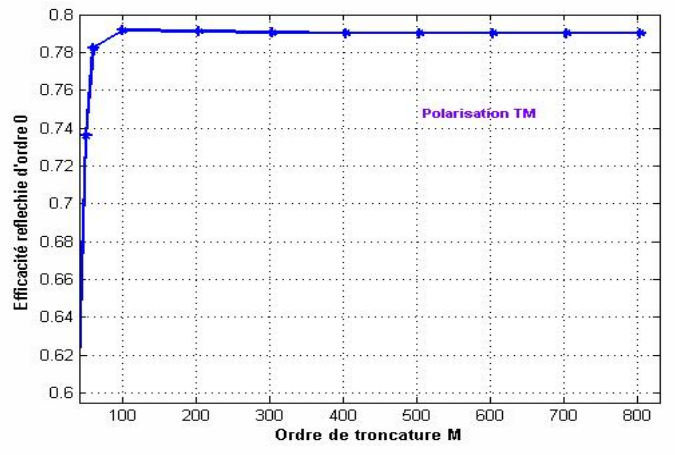


FIGURE 2.19 – Polarisation TM avec paramétrique : Courbes de convergence des efficacités réfléchies d'ordre 0 avec des paramètres : $\theta = arcsin(\frac{\lambda d}{2}), f = 0.57, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (1 - 40i)^2, \frac{\lambda}{d} = 0.8090, h = 0.4d$

aux limites.

La courbe ci-dessus nous montrent que avec la MMDF en coordonnées paramétriques, la convergence est obtenue à un ordre de troncature $M = 100$. "Lalanne et al" ont dans son article [36] obtenu à peu près le même résultats mais avec une petite oscillation jusqu'à $M = 800$

De plus, nous avons constaté que pendant l'exécution numérique, nous obtenons des résultats stables avec moins d'effort de calcul et le temps de calcul est réellement amélioré. Nous remarquons alors que la courbe de l'efficacité est légèrement meilleure que celle de Lalanne.

En résumé, dans le cas du réseau infiniment conducteur, il est nécessaire de disposer d'une discrétisation spatiale non régulière pour que la méthode MMDF s'avère redoutablement simple et efficace.

2.5.6 Comparaison des résultats numériques de la MMDF et TTMM avec la MMFE

Nous avons vu l'importance du choix de la base de représentation. Nous avons illustré l'amélioration de la vitesse de convergence apportée par l'utilisation de la technique de RSA et nous avons aussi montré l'optimisation de la position des discontinuités de la

constante diélectrique de la structure étudiée. Enfin, nous mettons en évidence la performance de notre méthode afin d'examiner sa robustesse, son point fort et sa pertinence. Pour cela, nous comparons nos résultats avec ceux de Lalanne et G.Granet dans leurs articles. Nous mentionnerons aussi leur point faible en citant leur limitation.
La méthode MMDF et TTMM ont été détaillées dans le chapitre précédent, il nous suffit de présenter successivement les résultats numériques que nous avons obtenus avec des cas typiques des réseaux métallique et diélectrique comme dans les deux articles.
L'idée de notre travail est d'améliorer la vitesse de convergence avec un temps de calcul réduit et de minimum effort de calcul afin de ne pas occuper la capacité mémoire de l'ordinateur. Nous utilisons des fonctions de base plus raffinées. Pour visualiser très clairement la vitesse de convergence, nous affichons les erreurs relatives en fonction de nombre de troncature M. Cela nous permet de prouver facilement la performance numérique de la convergence car l'existence de la stabilité des résultats avec un petit nombre de troncature signifie la convergence rapide de notre méthode.
En outre, nous examinons en même temps les erreurs relatives des valeurs propres et des efficacités réfléchies afin d'expliquer les résolutions numériques liées directement aux valeurs propres et aux efficacités. Les valeurs propres jouent un rôle important dans la propagation de l'onde d'après l'équation 2.16. C'est pourquoi nous étudions leur convergence car l'évaluation précise des valeurs propres constitue un bon indicateur de la robustesse des méthodes employées. C'est la raison principale pour laquelle nous étudions la convergence des valeurs propres comme celle des efficacités.

2.5.6.1 Cas d'un réseau diélectrique

En analysant les figures 2.21 et 2.22, nous trouvons clairement que la convergence de notre MMDF (courbe bleue) est beaucoup plus mauvaise que celles de TTMM et MMFE. Par contre, la TTMM, donne des résultats similaires à ceux de la MMFE pour le cas de la polarisation TE. Les courbes convergent rapidement à partir d'un petit nombre de troncature (M=15).

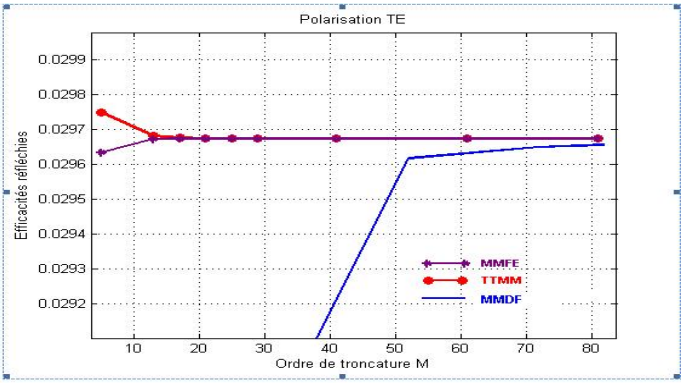


FIGURE 2.20 – Courbes des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas simple du réseau diélectrique dans le cas de polarisation TE avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 20, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 2.25$.

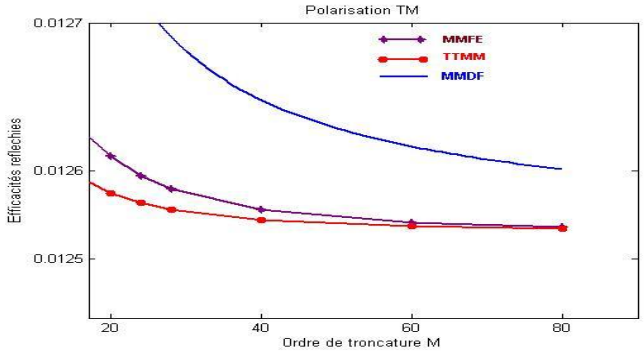


FIGURE 2.21 – Courbes des efficacités réfléchies d'ordre 0 pour le cas simple du réseau diélectrique dans le cas de polarisation TM avec des paramètres : h=1, d=1, $\lambda = 1, f = 0.5, \theta = 20, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = 2.25$.

Pour la polarisation TM, la methode TTMM est légèrement meilleure que la MMFE, elle converge à partir de M=40.

Nous pouvons conclure que l'application de notre méthode (MMDF) sur le réseau diélectrique lamellaire n'est pas recommandée. Même si nous envisageons de mettre une discrétisation plus raffinée, nous pensons que la mauvais résultat la figure ci dessus est dû à la qualité intrinsèque de la méthode des différences finies.

En fait, il est fortement recommandé d'utiliser une base de Fourier ou de la TTMM plutôt que la MMDF dans le cas du réseau diélectrique.

2.5.6.2 Cas d'un réseau métallique

Nous faisons des comparaisons entre les différentes méthodes modales que nous avons traitées durant notre travail de thèse pour illustrer la performance de leur convergence. Le premier test dans notre cas d'exemple est déjà analysé dans les articles [31], [36] et [37]. C'est pourquoi nous faisons intervenir les méthodes utilisées dans ces articles : Méthode des différences finies et MMFE. Nous attachons toujours dans les notations les "MM" pour dire "**Méthode Modale**" et pour montrer aussi que la comparaison se fait dans la même méthode d'approche en essayant une autre base pour la méthode des moments. Nous confirmons durant la comparaison que nous appliquons la Méthode de moments basée sur "Triangle-Triangle (Galerkin) avec la discrétisation **DS1** que l'on désigne TTMM. Les exemples numériques consistent à normaliser les grandeurs importante dans les réseaux de diffraction comme $\frac{\lambda}{d}$ et $\frac{h}{\lambda}$. Ainsi nous prenons $\frac{\lambda}{d} = 1$ et $\frac{h}{\lambda} = 1$ avec le facteur de forme $f = 0.5$. Les indices optiques du réseau sont respectivement $\varepsilon_{21} = 0.22 - 6.71i$ et $\varepsilon_{22} = 1$, l'angle d'incidence est égal à $\theta = 30$. Nous examinons les deux cas de polarisation avec les deux cas de discrétisations.

Avant de présenter tous nos résultats, il est nécessaire de mentionner les valeurs de référence des valeurs propres et des efficacités réfléchies. Cela éclaircit nos discussions au niveau des résultats obtenus. En fait, pour les valeurs propres, nous considérons comme valeurs de référence, les valeurs obtenues à partir de la méthode modale exacte utilisée par L.C Botten et al [38] dans son article :

$$r_{TE} = 0.40565997728692 - 0.00570953767335i \qquad \textit{pour la polarisation } TE$$

$$r_{TM} = 1.05070585861225 - 0.00180066465604i \qquad \textit{pour la polarisation } TM$$

Pour les efficacités diffractées, nous considérons comme valeurs de référence les valeurs obtenues à partir de la méthode MMFE publié par G.Granet [31] avec l'ordre de troncature M=201.

$$R_{ref} = 0.73428 \qquad \textit{pour la polarisation } TE$$

$$R_{ref} = 0.84848 \qquad \textit{pour la polarisation } TM$$

Les expressions des erreurs relatives que nous avons définies avant restent valables pour les valeurs propres et les efficacités diffractées. Premièrement, nous illustrons à partir des courbes de convergence successives la pertinence de nos approches dans le cas de polarisation TE :

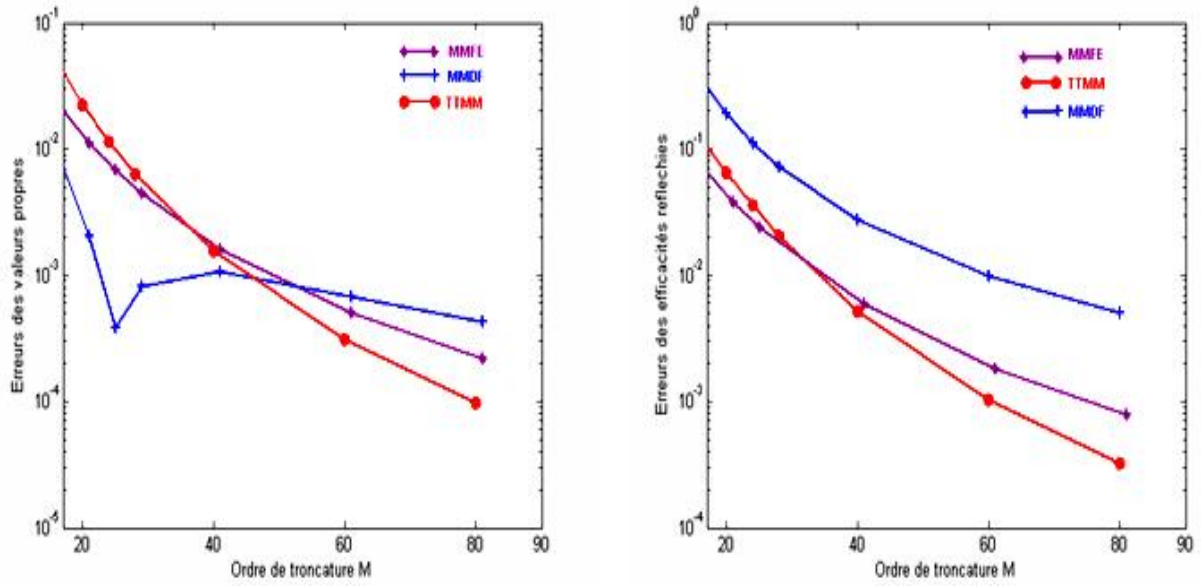


FIGURE 2.22 – Polarisation TE sans paramétrique :Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMFE avec des paramètres typiques :f=0.5, d=1 ; $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2$

Dans la figure 2.22 avec les erreurs relatives des valeurs propres, avec un petit nombre de troncature $M \leq 25$, la courbe de MMDF est meilleure mais elle remonte et n'obtient l'exactitude de troisième ordre qu'à partir de M=80. Par contre, les deux courbes MMFE et TTMM convergent rapidement. Dans toutes les figures, la convergence rapide des courbes de TTMM est très remarquable et est plutôt meilleure que la MMDF. L'exactitude des erreurs est atteint jusqu'au'au'au quatrième ordre pour les efficacités et au cinquième ordre pour les valeurs propres. Dans ce cas, nous n'avons pas présenté les courbes de notre MMDF dans le cas de la discrétisation régulière, les résultats étant manifestement mauvais.

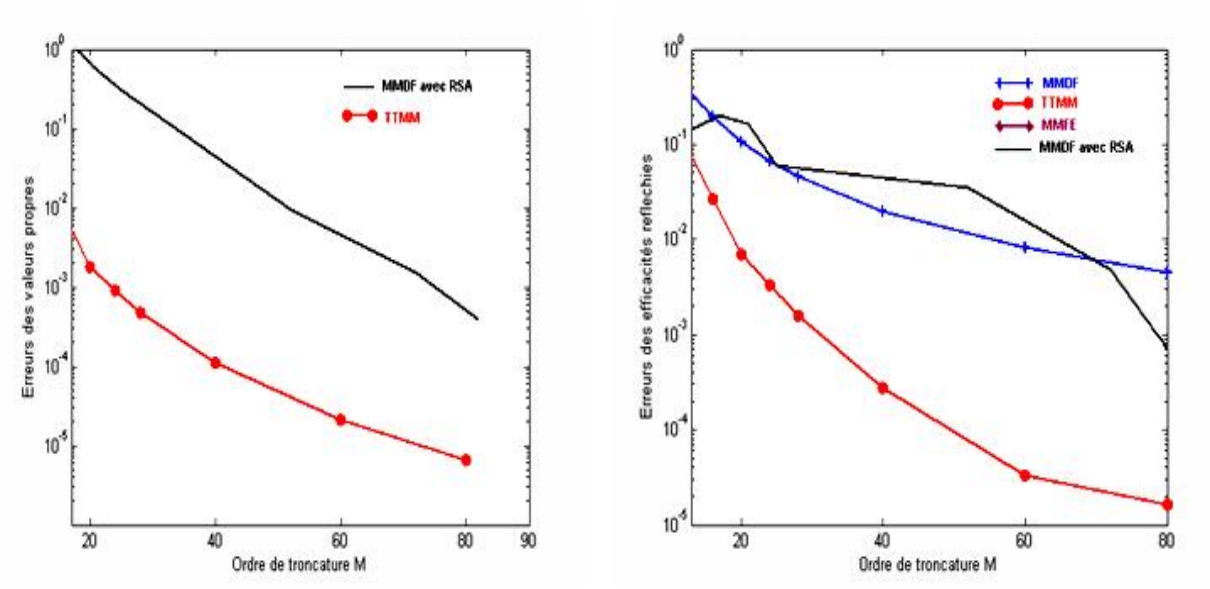


FIGURE 2.23 – Polarisation TE avec paramétrique : Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMDF avec des paramètres typiques : f=0.5, d=1, $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2, \eta = 0.999$

Quand la technique de RSA intervient, l'amélioration de la convergence est obtenue et elle est légèrement meilleure que la MMDF en mettant un grand nombre de troncature ($M \geq 70$). Cependant, en analysant l' allure de ces courbes, nous pouvons voir que les résultats ne sont pas stables. En général, l'ordre de convergence des courbes est bien respecté. La meilleure approximation dans les courbes des erreurs des valeurs propres reste la meilleure pour celles des efficacités. De plus, nous pouvons confirmer que le concept de la RSA améliore la vitesse de convergence dans toutes méthodes employées. Pour conclure, la méthode TTMM surmonte le problème de la convergence. Elle converge très rapidement et les résultats restent stables sans qu'il soit nécessaire d'augmenter l'ordre de troncature.

Deuxièmement, nous testons la convergences des différentes courbes des méthodes MMDF avec RSA, TTMM, MMFE et MMDF de Lalanne dans le cas de la polarisation TM pour le cas du réseau métallique.

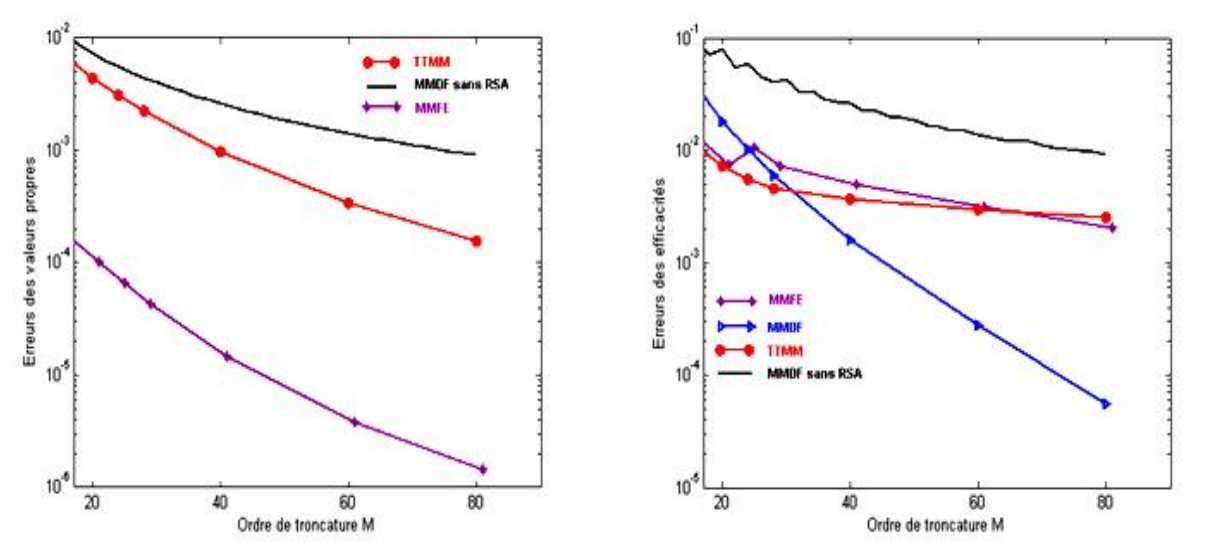


FIGURE 2.24 – Polarisation TM sans paramétrique :Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMFE et MMDF de Lalanne avec des paramètres typiques : f=0.5, d=1, $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2$

Dans toutes les figures (Fig2.24 et Fig2.25), nous observons que la méthode MMDF de Lalanne est presque meilleure. Toutefois, pour un nombre de troncature petit, la méthode TTMM semble meilleure ($M \leq 35$ pour le pas de discrétisation uniforme et $M \leq 45$ pour le pas de discrétisation non uniforme).

Pour notre méthode MMDF sur la figure 2.25, nous avons des résultats améliorés avec la technique de RSA. Il est légèrement meilleur que la MMDF de lalanne car avec un petit nombre de troncature ($M \leq 25$), nous obtenons une précision jusqu'à 10^{-3} et pour M grand, elle converge vers la même valeur que la MMDF.

Grace à la RSA, l'écart des erreurs relatives des efficacités entre les deux méthodes (MMDF de Lalanne et TTMM) n'est plus trop important contrairement au cas de la discrétisation uniforme.

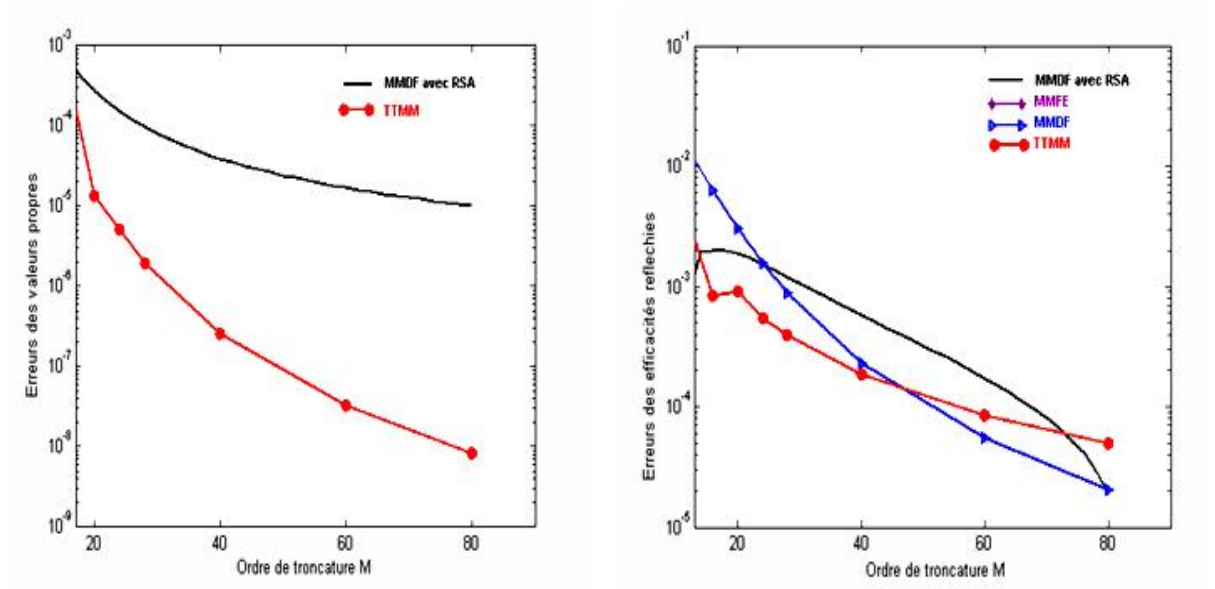


FIGURE 2.25 – Polarisation TM avec paramétrique :Comparaison des erreurs relatives des valeurs propres et efficacités avec la méthode MMDF avec des paramètres typiques : f=0.5, d=1, $\lambda = 1, \frac{h}{\lambda} = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_{21} = 1, \theta = 30, \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = (0.22 - 6.71i)^2, \eta = 0.999$

Nous voyons aussi que, avec la RSA, les valeurs propres convergent de façon spectaculaire. Cela signifie que l'amélioration de la courbe de convergence des valeurs propres est meilleure que celle des efficacités. Cela nous entraine à penser que nous pouvons surmonter le problème des équations aux valeurs propres tandis que l'optimisation du problème des conditions de raccordement aux interfaces reste un problème ouvert.

Dans les deux cas de la polarisation, nous récapitulons quelques résultats d'échantillonnage illustrant la particularité de chacune des méthodes modales. Nous montrons aussi dans le tableau 2.1 et le tableau 2.2 le temps de calcul numérique réduit qui prouve l'autre point fort de notre méthode.

	TTMM			MMDF		MMFE	
M	R_0	erreur (%)	temps (s)	R_0	erreur (%)	R_0	erreur(%)
13	0.84806	15.49	0.26	0.23815	67.37	0.81879	11,6
17	0.82188	11.93	0.25	0.47834	34.65	0.78196	6.49
21	0.78217	6.52	0.25	0.59588	18.65	0.76227	3.81
25	0.76041	3.55	0.30	0.65193	11.01	0.75181	2.39
29	0.74927	2.04	0.40	0.68109	7.04	0.73427	1.58
41	0.73809	0.51	0.64	0.71425	2.73	0.73857	0.58
61	0.73503	0.10	1.39	0.72711	0.98	0.73561	0.18
81	0.73451	0.03	2.81	0.73063	0.5	0.73485	0.08

TABLE 2.1 – Polarisation TE : Efficacités d'ordre 0 en fonction de nombre de troncature M comparées avec la MMFE [31] et MMDF [36], des données numériques : $\nu_{21} = 1$, $\nu_3 = \nu_{22} = .22 - i6.71$, $\theta = 30$, $d = 1$, $\lambda = 1$

	TTMM			MMDF		MMFE	
M	R_0	erreur (%)	temps (s)	R_0	erreur (%)	R_0	erreur(%)
13	0.82692	2.54	0.65	0.78284	7.73	0.83485	1.6
17	0.83921	1.09	0.68	0.81855	3.53	0.83838	1.2
21	0.84241	0.71	0.71	0.83300	1.82	0.84211	0.7
25	0.84383	0.54	0.75	0.83980	1.0	0.83960	1.0
29	0.84459	0.45	0.79	0.84339	0.6	0.84241	0.7
41	0.84537	0.36	1.03	0.84712	0.16	0.84425	0.5
61	0.84592	0.30	1.79	0.84825	0.03	0.84579	0.3
81	0.84636	0.25	3.45	0.84844	0.01	0.84677	0.2

TABLE 2.2 – Polarisation TM : Efficacités d'ordre 0 en fonction de nombre M de troncature comparées avec la MMFE [31] et MMDF [36], des données numériques : $\nu_{21} = 1$, $\nu_3 = \nu_{22} = .22 - i6.71$, $\theta = 30$, $d = 1$, $\lambda = 1$

Nous avons nos résultats pour différentes valeurs de M. Nous exécutons le calcul numérique en appuyant sur l'évolution de la taille de matrice. L'objectif est de pouvoir détailler l'évolution du temps de calcul et la diminution des pourcentages des erreurs relatives qui signifient l'amélioration des valeurs des efficacités.
En fait, la comparaison se fait avec la même taille des matrices pour les trois méthodes modales. Nos résultats utilisant la TTMM avec la discrétisation DS1 sont meilleurs que ceux des MMFE et MMDF pour le cas de la polarisation TE aussi bien au point du vue de temps de calcul que du point de vue des pourcentages des erreurs. Or, pour la polarisation TM, notre méthode est légèrement mauvaise que la méthode MMDF pour les grandes tailles des matrices, tandis que pour les petites tailles des matrices, les pourcentages des erreurs sont plus petits que ceux de MMDF. En comparant avec MMFE, les pourcentages des erreurs de notre approche restent légèrement inférieurs pour les petites tailles des matrices. Ils diminuent très rapidement que ceux de MMFE. Ainsi, en analysant ces résultats, au point de vue de calcul, nous avons des avantages sur les comportements des matrices de notre méthode. C'est à dire, les matrices ne sont pas pleines et sont symétriques. Cela réduit la saturation de la mémoire de l'ordinateur et diminue le temps de l'exécution numérique. Alors, le perfectionnement au niveau de calcul sur les efficacités peut être réalisé avec notre méthode pour les réseaux 2D ou 3D.

En résumé, nous choisissons des fonctions de base plus élaborées afin d'améliorer la vitesse de convergence. Ces fonctions sont réputées de fournir une convergence plus rapide et des résultats d'une manière encourageante. Il est bien connu que la technique de RSA est indiscutable pour l'accélération de la vitesse de convergence. Enfin, en extrapolant notre méthode, nous obtenons des résultats plus précis avec des temps de calcul réduit au minimum.

Chapitre 3

Réseau lamellaire à une dimension en incidence conique en utilisant la Méthode des Moments(MM).

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons traité les problèmes de diffraction unidimensionnel en incidence classique. Nous avons employé deux méthodes différentes, la Méthode Modale en Différences Finies (MMDF) et la Méthode des Moments (MM) pour comparer les résultats dans différents milieux électromagnétiques avec la Méthode de Fourier(MMFE).

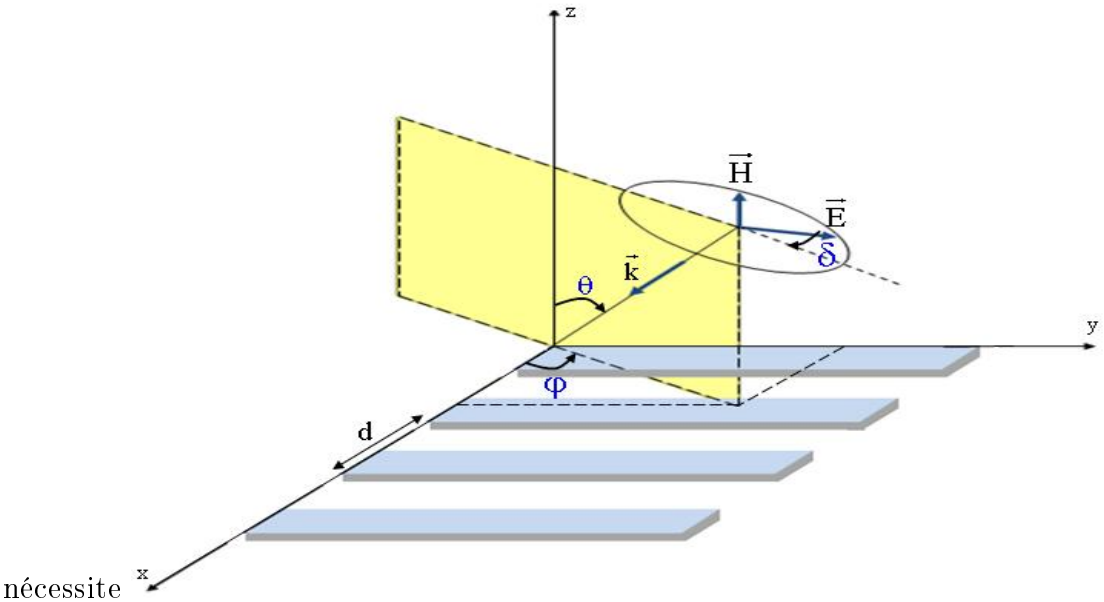
Dans ce chapitre, nous considérons toujours le réseau lamellaire 1D mais nous étudions ces problèmes en incidence conique en utilisant seulement la Méthode des Moments. Nous allons dans un premier temps, faire une description générale du problème. Dans un second temps, nous allons résoudre les équation de Maxwell dans les couches homogènes et dans les couches non homogènes. Nous terminons ce chapitre par l'analyse et la discussion des résultats numériques avant de conclure.

3.2 Description générale de la structure étudiée.

Notre travail porte sur l'étude d'un réseau lamellaire infiniment longue en y, périodique suivant l'axe x, de période spatiale d, constitué de deux matériaux de permittivités

relatives $\varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}$.Ce réseau est entouré par deux milieux homogènes, superstrat et substrat de permittivités ε_1 et ε_3.Le superstrat est toujours constitué d'air.

On illumine la structure étudiée par une onde plane monochromatique en incidence conique de longueur d'onde λ et de vecteur d'onde incident $\vec{k}_{inc}$ comme le montre la figure 3.1



nécessite

FIGURE 3.1 – Réseau lamellaire eclairé par une onde plane monochromatique en incidence conique.

Le vecteur d'onde a pour l'expression :

$$k_{inc} = \begin{cases} k_0\alpha_0 \\ k_0\beta_0 \\ k_0\gamma_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\nu_1 \sin\theta\cos\phi \\ \beta_0 = -\nu_1 \sin\theta\sin\phi \\ \gamma_0 = -\nu_1 \cos\theta \end{cases} \tag{3.2}$$

où $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ représente le vecteur d'onde dans le superstrat. θ_0 et ϕ sont respectivement l'angle de conicité et de précession. ε_0 et μ_0 désignent respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide .

En incidence conique, nous introduisons un troisième angle noté δ, qui définit la polarisation de l'onde plane incidente. Lorsque δ =0, nous parlons de polarisation TM où le champ magnétique $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan $z0y$(transverse magnétique). Si $\delta = \frac{\pi}{2}$, nous avons la polarisation TE où le champ électrique $\vec{E}$ est perpendiculaire au plan $z0y$(transverse électrique).

3.3 Résolution des équations de Maxwell

Nous allons résoudre les équations de Maxwell en utilisant la Méthode des Moments. Plus précisément, la résolution des équations de Maxwell se fait à l'aide de la méthode de Galerkin (cf chapitre 1).Puis, nous allons résoudre matriciellement les équations de Maxwell en prenant les fonctions triangles à la fois comme base de développement et fonctions test.

3.3.1 Équations de Maxwell

Les deux systèmes d'équations de Maxwell et les équations constitutives du milieu s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_y}E_z - \frac{\partial}{\partial_z}E_y = -i\omega B^u \\ \frac{\partial}{\partial_z}E_u - \frac{\partial}{\partial_u}E_z = -i\omega B^y \\ \frac{\partial}{\partial_u}H_y - \frac{\partial}{\partial_y}H_u = i\omega D^z \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} B^u = \mu_0 \mu^{uu} H_u \\ B^y = \mu_0 \mu^{yy} H_y \\ D^z = \epsilon_0 \epsilon^{zz} E_z \end{cases} \tag{3.4}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_y} H_z - \frac{\partial}{\partial_z} H_y = i\omega D^u \\ \frac{\partial}{\partial_z} H_u - \frac{\partial}{\partial_u} H_z = i\omega D^y \\ \frac{\partial}{\partial_u} E_y - \frac{\partial}{\partial_y} E_u = -i\omega B^z \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} D^u = \epsilon_0 \epsilon^{uu} E_u \\ D^y = \epsilon_0 \epsilon^{yy} E_y \\ B^z = \mu_0 \mu^{zz} H_z \end{cases} \tag{3.6}$$

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement le champ électrique et le champ magnétique, $\vec{H}$ et $\vec{D}$ désignent respectivement la densité de flux magnétique et la densité de déplacement électrique. μ_0 et ϵ_0 sont la perméabilité et la permittivité dans le vide.

$$\varepsilon^{zz} = \varepsilon^{yy} = \varepsilon(u)\dot{x} \qquad ; \qquad \mu^{zz} = \mu^{yy} = \dot{x}$$

$$\varepsilon^{uu} = \frac{\varepsilon(u)}{\dot{x}} \qquad ; \qquad \mu^{uu} = \frac{1}{\dot{x}}$$

ou $\dot{x}(u)$ est la dérivée première de la fonction paramétrique $x(u)$.

Dans la couche réseau, la permittivité $\epsilon(u)$ est discontinue, elle varie en fonction de u.Il est toujours nécessaire d'appliquer les règles de factorisation, les équations constitutives du milieux deviennent :

$$\begin{cases} B^u = \mu_0 \tilde{\mu}^{uu} H_u \\ D^u = \epsilon_0 \tilde{\epsilon}^{uu} E_u \end{cases} \tag{3.7}$$

avec

$$\tilde{\epsilon}^{uu} = \left[\frac{\dot{x}}{\epsilon(u)}\right]^{-1} \qquad ; \qquad \tilde{\mu}^{uu} = [\dot{x}]^{-1} \tag{3.8}$$

La dépendance temporelle est de la forme $\exp(i\omega t)$. Nous posons :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Z_0 est l'impédance d'onde dans le vide. Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_y} E_z - \frac{\partial}{\partial_z} E_y = -ik_0 \tilde{\mu}^{uu} Z_0 H_u \\ \frac{\partial}{\partial_z} E_u - \frac{\partial}{\partial_u} E_z = -ik_0 \mu^{yy} Z_0 H_y \\ \frac{\partial}{\partial_u} Z_0 H_y - \frac{\partial}{\partial_y} Z_0 H_u = ik_0 \varepsilon^{zz} E_z \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_y} Z_0 H_z - \frac{\partial}{\partial_z} Z_0 H_y = ik_0 \tilde{\varepsilon}^{uu} E_u \\ \frac{\partial}{\partial_z} Z_0 H_u - \frac{\partial}{\partial_u} Z_0 H_z = ik_0 \varepsilon^{yy} E_y \\ \frac{\partial}{\partial_u} E_y - \frac{\partial}{\partial_y} E_u = -ik_0 \mu^{zz} Z_0 H_z \end{cases} \tag{3.10}$$

Dans chacune des régions, nous cherchons les solutions générales des équations de Maxwell. En effet, les équations (3.9) et (3.10) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_z} E_u = -ik_0 \mu^{yy} Z_0 H_y + \frac{\partial}{\partial_u} E_z \\ \frac{\partial}{\partial_z} E_y = ik_0 \tilde{\mu}^{uu} Z_0 H_u + \frac{\partial}{\partial_y} E_z \end{cases} \tag{3.11}$$

et

$$E_z = \frac{i}{k_0} \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial_y} Z_0 H_u - \frac{\partial}{\partial_u} Z_0 H_y \right) \tag{3.12}$$

De même

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial_z} Z_0 H_u = ik_0 \varepsilon^{yy} E_y + \frac{\partial}{\partial_u} Z_0 H_z \\ \frac{\partial}{\partial_z} Z_0 H_y = -ik_0 \tilde{\varepsilon}^{uu} E_u + \frac{\partial}{\partial_y} Z_0 H_z \end{cases} \tag{3.13}$$

et

$$Z_0 H_z = \frac{i}{k_0} \left[\mu^{zz}\right]^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial_u} E_y - \frac{\partial}{\partial_y} E_u \right) \tag{3.14}$$

En tenant compte de $\frac{\partial}{\partial_y} = -ik_0\beta_0$ et en introduisant d'une part l'équation (3.12) dans (3.11) et d'autre part l'équation (3.14) dans (3.13), nous obtenons deux équations sous

forme matricielle telles que :

$$\frac{\partial}{\partial_z}\begin{bmatrix} E_u \\ \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \frac{\partial}{\partial_u}\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} & -ik_0\mu^{yy} - \frac{i}{k_0}\frac{\partial}{\partial_u}\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u} \\ \\ ik_0\tilde{\mu}^{uu} - ik_0\beta_0^2\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} & \beta_0\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} Z_0H_u \\ \\ Z_0H_y \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial_z}\begin{bmatrix} Z_0H_u \\ \\ Z_0H_y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_0 \frac{\partial}{\partial_u}\left[\mu^{zz}\right]^{-1} & ik_0\varepsilon^{yy} + \frac{i}{k_0}\frac{\partial}{\partial_u}\left[\mu^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u} \\ \\ -ik_0\tilde{\varepsilon}^{uu} + ik_0\beta_0^2\left[\mu^{zz}\right]^{-1} & \beta_0\left[\mu^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} E_u \\ \\ E_y \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

Nous dérivons les deux équations par rapport à z puis nous substituons l'équation (3.15), respectivement l'équation (3.16), dans cette nouvelle équation, nous avons :

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2}\begin{bmatrix} E_u \\ \\ E_y \end{bmatrix} = L_{EH}L_{HE}\begin{bmatrix} E_u \\ \\ E_y \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2}\begin{bmatrix} Z_0H_u \\ \\ Z_0H_y \end{bmatrix} = L_{HE}L_{EH}\begin{bmatrix} Z_0H_u \\ \\ Z_0H_y \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

avec

$$L_{EH}L_{HE} = \begin{pmatrix} k_0^2\beta_0^2 - k_0^2\mu^{yy}\tilde{\varepsilon}^{uu} - \frac{\partial}{\partial_u}\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u}\tilde{\varepsilon}^{uu} & 0 \\ \\ -ik_0\beta_0\tilde{\mu}^{uu}\frac{\partial}{\partial_u}\left[\mu^{zz}\right]^{-1} + ik_0\beta_0\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u}\tilde{\varepsilon}^{uu} & k_0^2\beta_0^2 - k_0^2\tilde{\mu}^{uu}\varepsilon^{yy} - \tilde{\mu}^{uu}\frac{\partial}{\partial_u}\left[\mu^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

$$L_{HE}L_{EH} = \begin{pmatrix} k_0^2\beta_0^2 - k_0^2\varepsilon^{yy}\tilde{\mu}^{uu} - \frac{\partial}{\partial_u}\left[\mu^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u}\tilde{\mu}^{uu} & 0 \\ -ik_0\beta_0\tilde{\varepsilon}^{uu}\frac{\partial}{\partial_u}\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} + ik_0\beta_0\left[\mu^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u}\tilde{\mu}^{uu} & k_0^2\beta_0^2 - k_0^2\tilde{\varepsilon}^{uu}\mu^{yy} - \tilde{\varepsilon}^{uu}\frac{\partial}{\partial_u}\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

3.3.2 Milieu inhomogène

La permittivité du milieu s'exprime en fonction de u. Les équations (3.19) et (3.20) nous montrent que nous obtenons une composante en u, indépendamment de la composante en y. Nous avons alors deux équations différentielles à résoudre :

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2}E_u = \left[k_0^2\beta_0^2 - k_0^2\mu^{yy}\tilde{\varepsilon}^{uu} - \frac{\partial}{\partial_u}\left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u}\tilde{\varepsilon}^{uu}\right]E_u \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial_z^2}H_u = \left[k_0^2\beta_0^2 - k_0^2\varepsilon^{yy}\tilde{\mu}^{uu} - \frac{\partial}{\partial_u}\left[\mu^{zz}\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial_u}\tilde{\mu}^{uu}\right]H_u \tag{3.22}$$

En tenant compte $\frac{\partial}{\partial_z} = -ik_0\gamma_q$, nous obtenons les deux équations aux valeurs propres :

$$L_H E_{uq}(x(u)) = -k_0^2\left(\gamma_q^H\right)^2 E_{uq}(x(u)) \tag{3.23}$$

$$L_E H_{uq}(x(u)) = -k_0^2\left(\gamma_q^H\right)^2 H_{uq}(x(u)) \tag{3.24}$$

Pour chaque mode d'indice q, la solution de cette équation est :

$$\begin{cases} E_{uq}(u,y,z) = a_q^- exp(ik_0\gamma_q^H z) + a_q^+ exp(-ik_0\gamma_q^H z) \\ H_{uq}(u,y,z) = b_q^- exp(ik_0\gamma_q^E z) + b_q^+ exp(-ik_0\gamma_q^E z) \end{cases} \tag{3.25}$$

E_{uq} est le vecteur propre associé à la valeur propres γ_q. La résolution de deux équations (3.23) et (3.24)aboutit à l'obtention des valeurs propres γ_q^H, γ_q^E et des vecteurs propres E_{uq}, H_{uq} des opérateurs L_H, L_E. Nous développons les vecteurs propres sur une base de fonction connue $B_m[x(u)]$ puis nous déterminons les coefficients inconnues par la projection sur une base identique à la première (méthode de Galerkin).

$$\psi_q[x(u)] = \sum_{m=0}^{m=\infty} \psi_{mq}(u) B_m[x(u)] \tag{3.26}$$

ou $\psi_q[x(u)]$ peut être le champ électrique ou le champ magnétique. Dans notre travail, nous choisissons comme fonction de base, la fonction triangle $T_m[x(u)]$, nous projetons le champ sur la même fonction et nous obtenons :

$$\langle T_q(u), \psi_q(u) \rangle = \langle T_q(u), \sum_{m=0}^{m=\infty} \psi_{mq}(u) T_m(u) \rangle \tag{3.27}$$

avec

$$\psi_{mq}(u) = \psi_{mq} exp(-ik_0 \alpha_m u_q) \tag{3.28}$$

Notons $\langle f, g \rangle$, le produit scalaire de deux fonctions tel que :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{d} \int_0^d f(u) g^*(u) du \tag{3.29}$$

ou $g^*(u)$ est le conjugué de $g(u)$. Ainsi, L_H et L_E de l'équation (1.27) et (1.28) deviennent :

$$\left(\beta_0^2 I - \left[[\mu^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\varepsilon^{zz} \right]^{-1} D_d \right] \left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}} \right]^{-1} \right) E_{uq} = - \left(\gamma_q^H \right)^2 E_{uq} \tag{3.30}$$

$$\left(\beta_0^2 I - \left[[\varepsilon^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\mu^{zz} \right]^{-1} D_d \right] \left[\frac{1}{\mu^{uu}} \right]^{-1} \right) H_{uq} = - \left(\gamma_q^E \right)^2 H_{uq} \tag{3.31}$$

avec des composantes :

$$[D_g] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \tau & 5\tau \\ -5 & 5 & 1 & & & & & \tau \\ -1 & -5 & . & . & & & & \\ & -1 & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & . & \\ & & & & . & . & 5 & 1 \\ -\tau & & & & & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

et,

$$[D_d] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 1 & & & & & \tau \\ -1 & -5 & 5 & . & & & & \\ & -1 & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & 1 & \\ & & & & . & . & . & 1 \\ -\tau & & & & & & -5 & 5 \\ -5\tau & -\tau & & & & & -1 & -5 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

τ désigne le facteur de pseudo-périodicité d'expression $\tau = exp(-ik\alpha_0 d.$ et,

$$[\mu^{yy}]_{mq} = \sum_{m,q} \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u) \rangle \qquad [\varepsilon^{zz}]_{mq} = \sum_{m,q} \langle T_m(u), \dot{x}(u) \varepsilon(u) T_q(u) \rangle$$

$$[\varepsilon^{yy}]_{mq} = \sum_{m,q} \langle T_m(u), \dot{x}(u) \varepsilon(u) T_q(u) \rangle \qquad [\mu^{zz}]_{mq} = \sum_{m,q} \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u) \rangle$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}}\right]_{mq} = \sum_{m,q} \langle T_m(u), \frac{\dot{x}(u)}{\varepsilon(u)} T_q(u) \rangle \qquad \left[\frac{1}{\mu^{uu}}\right]_{mq} = \sum_{m,q} \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u) \rangle$$

Les valeurs propres $\gamma_q(\gamma_q^E$ et $\gamma_q^H)$ dans chaque milieu vérifient les condition des ondes sortantes $(C.O.S)$, c'est-à-dire :

$$\gamma_q = \begin{cases} \sqrt{\gamma_q^2} & si \quad \gamma_q^2 \in R^+ \\ -i\sqrt{-\gamma_q^2} & si \quad \gamma_q^2 \in R^- \\ \Im_m(\gamma_q) < 0 & si \quad \gamma_q^2 \in C \end{cases} \tag{3.34}$$

Les expressions du champ électromagnétique dans chaque milieu sont données par :

$$E_u^{(2)}(u,y,z) = \sum_q \left[a_{2q}^+ exp(-ik_0 \gamma_{2q}^H z) + a_{2q}^- exp(ik_0 \gamma_{2q}^H z) \right] E_{uq}^{(2)}(x(u)) \tag{3.35}$$

$$H_u^{(2)}(u,y,z) = \sum_q \left[b_{2q}^+ exp(-ik_0 \gamma_{2q}^E z) + b_{2q}^- exp(ik_0 \gamma_{2q}^E z) \right] H_{uq}^{(2)}(x(u)) \tag{3.36}$$

avec

$$\begin{cases} E_{uq}^{(2)}(x(u)) = \sum\limits_m E_{umq}^{(2)} T_m(u) \\ \\ H_{uq}^{(2)}(x(u)) = \sum\limits_m E_{ymq}^{(2)} T_m(u) \\ \end{cases}$$

et a_{2q}^{-}, a_{2q}^{+}, b_{2q}^{-},et b_{2q}^{+} sont respectivement les coefficients d'amplitude des ondes qui se propagent dans les sens des z décroissants et des z croissants. Ces expressions vérifient aussi la pseudo périodicité du champ avec :

$$\psi_q(u+d) = exp(-ik_0\alpha_0 d)\psi_q(u) \tag{3.37}$$

Les autre composantes de champ sont obtenues par la combinaison linéaire de deux solutions élémentaires de $E_u = 0$ et de $Z_0 H_u = 0$, que l'on désigne TE_x et TM_x et ces composantes sont définies par :

$$E_y = E_y^{TE_x} + E_y^{TM_x} \tag{3.38}$$

$$Z_0 H_y = Z_0 H_y^{TE_x} + Z_0 H_y^{TM_x} \tag{3.39}$$

*Pour $TE_x(E_u = 0, E_y, E_z, Z_0 H_u, Z_0 H_y, Z_0 H_z)$, $E_y^{TE_x}$ et $H_y^{TE_x}$ s'obtiennent en recombinant les deux équations (3.15) et (3.16) telles que :

$$\left([\varepsilon^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d\right) E_y^{TE_x} = -\gamma_q^H \left[T^{uu}\right] Z_0 H_u \tag{3.40}$$

$$\left([\mu^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} D_d\right) H_y^{TE_x} = \frac{1}{k_0^2}\beta_0 D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} Z_0 H_u \tag{3.41}$$

*Pour $TM_x(E_u, E_y, E_z, Z_0 H_u = 0, Z_0 H_y, Z_0 H_z)$, De même, nous obtenons $E_y^{TM_x}$ et $H_y^{TM_x}$

$$\left([\varepsilon^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d\right) E_y^{TM_x} = \frac{1}{k_0^2}\beta_0 D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} E_u \tag{3.42}$$

$$\left([\mu^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} D_d\right) H_y^{TM_x} = \gamma_q^E \left[T^{uu}\right] E_u \tag{3.43}$$

avec

$$[T^{uu}] = \langle T_m(u), T_q(u) \rangle$$

L'expression analytique de cette matrice est détaillée dans les annexes. Ainsi l' expression de la composante du champ suivant y est donnée par :

$$E_y^{(2)}(u,y,z) = \sum_m \sum_q \left[a_{2q}^{+} T_m(x(u)) exp(-ik_0\gamma_{2q}^H z) + a_{2q}^{-} T_m(x(u)) exp(ik_0\gamma_{2q}^H z)\right] \left[Q_{hTE_x}^{(2)}\right]_{mq}$$

$$+ \sum_m \sum_q \left[b_{2q}^{+} T_m(x(u)) exp(-ik_0\gamma_{2q}^E z) + b_{2q}^{-} T_m(x(u)) exp(ik_0\gamma_{2q}^E z)\right] \left[P_{eTM_x}^{(2)}\right]_{mq} \tag{3.44}$$

et

$$H_y^{(2)}(u,y,z) = \sum_m \sum_q \left[a_{2q}^+ T_m(x(u)) exp(-ik_0\gamma_{2q}^H z) + a_{2q}^- T_m(x(u)) exp(ik_0\gamma_{2q}^H z)\right] \left[Q_{hTE_x}^{'(2)}\right]_{mq}$$

$$+ \sum_m \sum_q \left[b_{2q}^+ T_m(x(u)) exp(-ik_0\gamma_{2q}^E z) + b_{2q}^- T_m(x(u)) exp(ik_0\gamma_{2q}^E z)\right] \left[P_{eTM_x}^{'(2)}\right]_{mq} \tag{3.45}$$

avec, $\left[Q_{hTE_x}^{(2)}\right]_{mq}$, $\left[P_{eTM_x}^{(2)}\right]_{mq}$, $\left[Q_{hTE_x}^{'(2)}\right]_{mq}$, et $\left[P_{eTM_x}^{'(2)}\right]_{mq}$ ont d'expressions :

$$\begin{cases} \left[Q_{hTE_x}^{(2)}\right]_{mq} = -\left[[\varepsilon^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d\right]^{-1} [T^{uu}] Z_0 H_{umq}^{(2)} \gamma_{2q}^H \\ \left[P_{eTM_x}^{(2)}\right]_{mq} = \frac{1}{k_0^2}\beta_0 \left[[\mu^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d\right]^{-1} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} E_{umq}^{(2)} \\ \left[Q_{hTE_x}^{'(2)}\right]_{mq} = \frac{1}{k_0^2}\beta_0 \left[[\mu^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} D_d\right]^{-1} D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} Z_0 H_{umq}^{(2)} \\ \left[P_{eTM_x}^{'(2)}\right]_{mq} = \left[[\mu^{yy}] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} D_d\right]^{-1} [T^{uu}] E_{umq}^{(2)} \gamma_{2q}^E \end{cases} \tag{3.46}$$

3.3.3 Milieux homogènes

L'indice optique des deux milieux est constant. Dans notre travail, le milieu superstrat est toujours constitué d'air ($\nu_1 = 1$) et le substrat peut être, soit un diélectrique, soit un métal. Cette hypothèse entraîne que les coefficients anti-diagonaux de matrices de l'équation (3.22) et (3.23) deviennent nuls. Cela nous permet de résoudre séparément les équations différentielles suivantes :

$$L_H E_{uq}^{(l)}(x(u)) = \left(\gamma_q^H\right)^2 E_{uq}^{(l)}(x(u)) \tag{3.47}$$

$$L_E E_{yq}^{(l)}(x(u)) = \left(\gamma_q^H\right)^2 E_{yq}^{(l)}(x(u)) \tag{3.48}$$

avec

$$\begin{cases} L_H^{(l)} = -\left(\beta_0^2 - \nu_l^2\right)[I] + \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\varepsilon^{zz}\right]^{-1} D_d \left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}}\right]^{-1} \\ L_E^{(l)} = -\left(\beta_0^2 - \nu_l^2\right)[I] + \frac{1}{k_0^2} \left[\frac{1}{\mu^{uu}}\right]^{-1} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d \end{cases} \tag{3.49}$$

où $l \in [1,3]$ et $[I]$ est la matrice identité . Nous obtenons les valeurs propres γ_{lq}^H, γ_{lq}^E et les vecteurs propres $E_{uq}^{(l)}$, $E_{yq}^{(l)}$ en résolvant les deux équations. Les deux autres vecteurs

propres $H_{uq}^{(l)}$ et $H_{yq}^{(l)}$ sont déterminés par la combinaison linéaire des deux solutions :

$$\gamma_q^E Z_0 H_u = L_H e_{11} E_u + L_H e_{12} E_y \tag{3.50}$$

$$\gamma_q^H Z_0 H_y = L_H e_{21} E_u + L_H e_{22} E_y \tag{3.51}$$

avec

$$\begin{cases} L_H e_{11}^{(l)} = \frac{-i}{k_0} \beta_0 D_g \left[\mu_{zz}\right]^{-1} \left[T^{uu}\right] \\ L_H e_{12}^{(l)} = -\left[\varepsilon^{yy}\right] - \frac{1}{k_0^2} D_g \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d \\ L_H e_{21}^{(l)} = \left[\varepsilon^{uu}\right]^{-1} - \beta_0^2 \left[\mu^{zz}\right]^{-1} \left[T^{uu}\right] \\ L_H e_{22}^{(l)} = i\beta_0 \left[\mu^{zz}\right]^{-1} D_d \end{cases} \tag{3.52}$$

$$Z_0 H_u^{(l)}(u,y,z) = \sum_m \sum_q \left[a_{lq}^+ T_m(u) exp(-ik_0\gamma_{lq}^H z) + a_{lq}^- T_m(u) exp(ik_0\gamma_{lq}^H z)\right] {H_{11}}_{muq}^{(l)}(x(u))$$

$$+ \sum_m \sum_q \left[b_{lq}^+ T_m(u) exp(-ik_0\gamma_{lq}^E z) + b_{lq}^- T_m(u) exp(ik_0\gamma_{lq}^E z)\right] {H_{12}}_{myq}^{(l)}(x(u)) \tag{3.53}$$

et

$$Z_0 H_y^{(l)}(u,y,z) = \sum_m \sum_q \left[a_{lq}^+ T_m(u) exp(-ik_0\gamma_{lq}^H z) + a_{lq}^- T_m(u) exp(ik_0\gamma_{lq}^H z)\right] {H_{21}}_{muq}^{(l)}(x(u))$$

$$+ \sum_m \sum_q \left[b_{lq}^+ T_m(u) exp(-ik_0\gamma_{lq}^E z) + b_{lq}^- T_m(u) exp(ik_0\gamma_{lq}^E z)\right] {H_{22}}_{myq}^{(l)}(x(u)) \tag{3.54}$$

avec

$$\begin{cases} {H_{11}}_{muq}^{(l)} = LH e_{11}^{(l)} E_{muq}^{(l)} \left[\gamma_{lq}^E\right]^{-1} \\ {H_{12}}_{myq}^{(l)} = LH e_{12}^{(l)} E_{myq}^{(l)} \left[\gamma_{lq}^E\right]^{-1} \\ {H_{21}}_{muq}^{(l)} = LH e_{21}^{(l)} E_{muq}^{(l)} \left[\gamma_{lq}^H\right]^{-1} \\ {H_{22}}_{myq}^{(l)} = LH e_{22}^{(l)} E_{myq}^{(l)} \left[\gamma_{lq}^H\right]^{-1} \end{cases} \tag{3.55}$$

Dans le milieu sperstrat, il n'y a que deux ondes incidentes des coefficients a_{1q}^{-} et b_{1q}^{-} d'expressions :

$$\begin{cases} a_{1q}^{-} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\cos(\delta) - \sin(\varphi)\sin(\delta) \\ b_{1q}^{-} = \cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\delta) + \cos(\varphi)\sin(\delta) \end{cases} \tag{3.56}$$

Dans le milieu substrat, Les ondes à l'infini n'existent pas. Cela entraine que les coefficients d'ondes a_{3q}^{+} et b_{3q}^{+} sont nuls.

3.4 Conditions aux limites

Afin de déterminer les coefficients des amplitudes de champs diffractés, nous allons écrire les conditions de raccordement aux interfaces $z = 0$ et $z = h$ où h est l'épaisseur de la couche réseau. Les composantes tangentielles des champs $(E_u, E_y, Z_0 H_u, Z_0 H_y)$ doivent être continues et les relations suivantes vérifient cette continuité de la surface

* Continuité des composantes tangentielles des champs sur l'interface (1) (cf fig) :

$$\begin{cases} E_u^{(1)}(u, y, z = 0) = E_u^{(2)}(u, y, z = 0) \\ E_y^{(1)}(u, y, z = 0) = E_y^{(2)}(u, y, z = 0) \\ H_u^{(1)}(u, y, z = 0) = H_u^{(2)}(u, y, z = 0) \\ H_y^{(1)}(u, y, z = 0) = H_y^{(2)}(u, y, z = 0) \end{cases} \tag{3.57}$$

* Continuité des composantes tangentielles des champs sur l'interface (2) :

$$\begin{cases} E_u^{(2)}(u, y, z = h) = E_u^{(3)}(u, y, z = h) \\ E_y^{(2)}(u, y, z = h) = E_y^{(3)}(u, y, z = h) \\ H_u^{(2)}(u, y, z = h) = H_u^{(3)}(u, y, z = h) \\ H_y^{(2)}(u, y, z = h) = H_y^{(3)}(u, y, z = h) \end{cases} \tag{3.58}$$

Les deux systèmes d'équations peuvent s'écrire sous forme matricielle,en faisant apparaître les matrices S^1 et S^2, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} a_{1q}^{+} \\ b_{1q}^{+} \\ a_{2q}^{-} \\ b_{2q}^{-} \end{bmatrix} = S^1 \begin{bmatrix} a_{1q}^{-} \\ b_{1q}^{-} \\ a_{2q}^{+} \\ b_{2q}^{+} \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

;

$$\begin{bmatrix} a_{2q}^{+} \\ b_{2q}^{+} \\ a_{3q}^{-} \\ b_{3q}^{-} \end{bmatrix} = S^2 \begin{bmatrix} a_{2q}^{-} \\ b_{2q}^{-} \\ a_{3q}^{+} \\ b_{3q}^{+} \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

avec $a_{3q}^{+} = b_{3q}^{+} = 0$. Les coefficients d' amplitude des ondes dans la couche réseau sont reliés par la relation de phase $\phi_q^{TE_x}$ et $\phi_q^{TM_x}$:

$$\begin{cases} a_{2q}^{+1} = \phi_q^{TE_x} a_{2q}^{+2} \\ a_{2q}^{-2} = \phi_q^{TE_x} a_{2q}^{-1} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b_{2q}^{+1} = \phi_q^{TM_x} b_{2q}^{+2} \\ b_{2q}^{-2} = \phi_q^{TM_x} b_{2q}^{-1} \end{cases} \quad avec$$

$\phi_q^{TE_x} = exp(-ik_0\gamma_q^H h)$ et $\phi_q^{TM_x} = exp(-ik_0\gamma_q^E h)$. Ainsi, les deux interfaces sont reliés par une matrice que l'on désigne matrice de couche S^c :

$$\begin{bmatrix} a_{2q}^{+1} \\ b_{2q}^{+1} \\ a_{2q}^{-2} \\ b_{2q}^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \phi_q^{TE_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_q^{TM_x} \\ \phi_q^{TE_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_q^{TM_x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2q}^{-1} \\ b_{2q}^{-1} \\ a_{2q}^{+2} \\ b_{2q}^{+2} \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

Grâce à la matrice S(cf annexe), nous pouvons exprimer les ondes sortantes en fonction des ondes entrantes :

$$\begin{bmatrix} a_{1q}^{+} \\ b_{1q}^{+} \\ a_{3q}^{-} \\ b_{3q}^{-} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} a_{1q}^{-} \\ b_{1q}^{-} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

Tous les coefficients des amplitudes des ondes sont alors déterminés.

3.5 Calcul des efficacités

La valeur des efficacités de chaque onde s'obtient en faisant le rapport du flux d'énergie réfléchie ou transmise de cette onde avec le flux d'énergie de l'onde incidente. La partie réelle de ce flux du vecteur Poynting à travers une surface fermée σ de la structure est défini par :

$$\Phi = \Re_e \int_\sigma \frac{1}{2}(E \wedge H^*)\vec{n}d\sigma \tag{3.63}$$

ou H^* désigne le conjugué de H. Le réseau étant infiniment long suivant y et périodique suivant x, la variation de flux suivant dans des directions est nulle. Le flux suivant z à travers de la surface σ est donné par :

$$\Phi_z = \int_\sigma \frac{1}{2}\Re_e \left(E_x H_y^* - E_y H_x^*\right) \vec{n}d\sigma. \tag{3.64}$$

Puisque, les champs ne dépendent pas de la surface σ, et les efficacités réfléchies et transmises de l'ordre (q) sont données par :

$$\xi_r^{(q)} = \frac{\Phi_{zr}^{(q)}}{\Phi_{zinc}} \qquad et \qquad \xi_t^{(q)} = \frac{\Phi_{zt}^{(q)}}{\Phi_{zinc}} \tag{3.65}$$

3.6 Domaine d'application numérique de la TTMM

En général, nous présentons quelques résultats numériques montrant le traitement numérique du problème de la diffraction par un réseau lamellaire sous incidence conique. Dans ce cas, la résolution numérique est très délicate car le comportement électromagnétique de l'onde dépend fortement de l'état de polarisation et des paramètres physiques.L'idée de ce paragraphe est de citer quelques impacts de ces paramètres physiques et de permettre l'excitation simultanée des deux modes TE et TM. Cela nous permet d'avoir une plus grande possibilité d'éclairement de la surface diffractante. De plus, le problème de diffraction étudié en incidence conique nous mène à approcher l'utilisation réelle de la polarisation de l'onde incidente.
En effet, le principe de traitement ne s'éloigne pas de celui du cas de l'incidence classique. C'est à dire, nous récapitulons quelques valeurs des efficacités diffractées dans les tableaux suivants comparées avec celles de la MMFE. Nous présentons aussi quelques influences des paramètres physiques.

3.6.1 Influences des paramètres physiques

Nous prenons l'exemple numérique d'un cas simple du réseau diélectrique sans perte que nous avons vu dans le cas d'incidence classique.

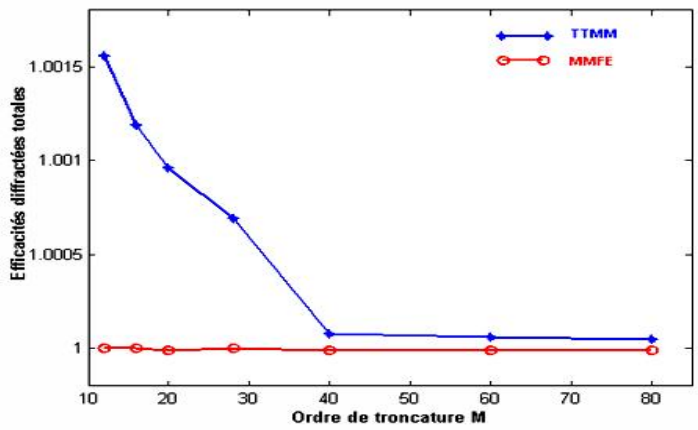


FIGURE 3.2 – Courbe de convergence de somme des efficacités diffractés dans le cas du réseau diélectrique sans perte

	TTMM		MMFE	
M	R_0	R_1	R_0	R_1
12	0.01246	0.00028	0.01288	0.00032
16	0.01243	0.00028	0.01287	0.00032
20	0.01241	0.00028	0.01287	0.00032
28	0.01239	0.00028	0.01287	0.00032
40	0.01240	0.00028	0.01287	0.00032
60	0.01238	0.00028	0.01287	0.00032
80	0.01239	0.00028	0.01287	0.00032

TABLE 3.1 – Efficacités réfléchies d'ordres 0 et 1. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 20$, $\phi = 10$, $\delta = 0$, $f = 0.5$.

L'angle ϕ intervient dans notre exemple et $\delta = 0$. Cela signifie qu'on travaille en incidence conique en polarisation TM. Même si ϕ n'est pas grand ($\phi = 10$), nous voyons que, les valeurs des efficacités réfléchies de TTMM ne sont pas en bon accord avec celles de MMFE. Par contre, le critère de stabilité est toujours vérifié notamment pour les efficacités réfléchies d'ordre 1 même si les résultats n'ont pas convergé. De plus, la courbe de convergence donnée par la figure 3.2 nous montre une convergence de la totalité des efficacités diffractées. Nous obtenons que la somme des efficacités diffractées tend vers 1.
Il est alors plus prudent d'analyser les résultats à partir de la méthode des Moments basée sur le Triangle-Triangle.

3.6.2 Influence de l'angle d'incidence

Les tableaux 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5 donnent les valeurs des efficacités pour différents ordres transmis avec différents angles d'incidence ($\theta = 0$,$\theta = 10$, $\theta = 20$, et $\theta = 30$), en angle de précession ($\phi = 30$) et pour deux polarisations simultanées ($\delta = 30$).
Pour le tableau 3.2 montre que nos valeurs des efficacités transmises sont en accord avec

Ordre des efficacités	TTMM	MMFE
Ordre 0 (R_0)	0.01445	0.01446
Ordre -1 (T_{-1})	0.18849	0.18856
Ordre 0 (T_0)	0.60855	0.60856
Ordre 1 (T_1)	0.18849	0.18835

TABLE 3.2 – Efficacités réfléchies et transmises dans le cas d'incidence normale avec M=28. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 0$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$.

	TTMM			MMFE		
M	T_{-1}	T_0	T_1	T_{-1}	T_0	T_1
16	0.05095	0.56773	0.36850	0.05213	0.56512	0.37017
20	0.05135	0.56635	0.36943	0.05213	0.56512	0.37017
28	0.05020	0.567676	0.36987	0.05213	0.56512	0.37017
40	0.05159	0.56607	0.36978	0.05213	0.56512	0.37017
60	0.05162	0.56604	0.36986	0.05213	0.56512	0.37017
80	0.05164	0.56606	0.36939	0.05213	0.56512	0.37017

TABLE 3.3 – Efficacités transmises sous incidence quelconque. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 10$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$.

celles de MMFE même à un ordre de troncature pas trop grand ($M = 28$).

De plus, ces valeurs sont symétriques. Pour les trois autre tableaux, seuls les trois chiffres après virgule sont en accord avec les résultats de MMFE lorsque si l'ordre de troncature est grand. Les résultats ne sont plus symétriques notamment l'angle d'incidence augmente.

Dans le cas de l'incidence normale (tableau 3.2), les résultats sont meilleurs que dans le cas des incidences quelconques. Les valeurs obtenues sont plus proches de celle de MMFE. Nous pouvons conclure aussi que, plus l'onde incidente est inclinée, plus la répartition des

	TTMM			MMFE		
M	T_{-1}	T_0	T_1	T_{-1}	T_0	T_1
16	0.01875	0.49477	0.47433	0.01954	0.49332	0.47351
20	0.01873	0.49464	0.47454	0.01954	0.49333	0.47351
28	0.01870	0.49465	0.47463	0.01954	0.49333	0.47350
40	0.01868	0.49474	0.47463	0.01954	0.49333	0.47350
60	0.01867	0.49485	0.47460	0.01954	0.49333	0.47350
80	0.01864	0.49484	0.47466	0.01954	0.49334	0.47350

TABLE 3.4 – Efficacités transmises sous incidence quelconque. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 20$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$.

	TTMM			MMFE		
M	T_0	T_{-1}	T_1	T_0	T_{-1}	T_1
16	0.01124	0.44320	0.52952	0.01171	0.44100	0.52619
20	0.01125	0.44313	0.52969	0.01172	0.44100	0.52618
28	0.01126	0.44321	0.52976	0.01172	0.44101	0.52617
40	0.01139	0.44259	0.52791	0.01172	0.44101	0.52617
60	0.01136	0.44308	0.52868	0.01172	0.44101	0.52617
80	0.01140	0.44308	0.52938	0.01172	0.44101	0.52617

TABLE 3.5 – Efficacités transmises sous incidence quelconque. Paramètres : $\frac{\lambda}{d} = 1$, $\frac{h}{\lambda} = 1$, $\nu_1 = \nu_{21} = 1$, $\nu_{22} = \nu_2 = 1.5$, $\theta = 30$, $\phi = 30$, $\delta = 30$, $f = 0.5$.

ondes diffractées est dissymétrique.

3.6.3 Conclusion et discussion

Dans le cas de l'incidence conique, les résultats sont très sensibles aux paramètres physiques. Les résultats obtenus en incidence conique ne sont pas en général satisfaisants. Nous estimons qu'il faudrait essayer d'autres bases pour la méthode des moments et repenser les positions des noeuds électriques et magnétiques le long de l'axe de propagation.

Conclusion générale

Nous avons présenté dans ce manuscrit, le problème de la diffraction par des réseaux lamellaires périodiques 1D et quelques améliorations sur les deux méthodes numériques employées au cours de la thèse.

Dans le premier chapitre, nous avons considéré le problème de la diffraction par ces réseaux, éclairé par une onde plane monochromatique sous incidence classique. En effet, nous avons étudié en détail le problème des équations aux valeurs propres et des ondes diffractées. Nous avons introduit sur les méthodes employées (MMDF et TTMM) la technique de la RSA. Nous avons cité quelques fonctions de base et tests afin de faire un choix judicieux de la base de représentation pour la Méthode des Moments.

Une application numérique et une comparaison de nos résultats avec ceux de la méthode MMFE ont été faites dans le deuxième chapitre. D'une part, nous avons obtenus des résultats encourageants pour la méthode MMDF avec la RSA. Nous avons montré que la Méthode des Moments n'est réellement efficace que moyennement un bon choix de la base de représentation. Il apparait aussi que la TTMM combinée avec la RSA et avec bon positionnement des discontinuités de la permittivité converge mieux que les autres méthodes.

Pour la MMDF, bien que l'amélioration soit optimale avec la RSA, nous avons constaté que cette méthode est limitée dans le cas du réseau diélectrique, où leur application n'est pas recommandée. Ensuite, pour la TTMM, la convergence de cette méthode sur les résultats des efficacités n'est pas aussi bien que celle des valeurs propres. Cela nous entraine

à déduire que l'optimisation du problème des conditions de raccordement aux interfaces reste un problème ouvert.
Dans le dernier chapitre, nous avons fait l'extension de l'application de la méthode TTMM à l'étude de la structure lamellaire 1D, éclairée par une onde plane sous incidence conique. Nous avons décrit en détail les champs électromagnétiques dans les milieux homogènes et non homogènes en respectant les différentes notations et les propriétés physiques. Nous avons pu traité quelques résultats numériques dans les cas du réseaux diélectriques et métalliques.

Perspectives

Des résultats montrés dans cet ouvrage, nous pouvons dégager différentes orientations de recherche :

** Vu les bon résultats obtenus avec les réseaux métalliques et le réseau infiniment conducteur, nous pouvons envisager d'étendre la MMDF combinée avec RSA à la mise au point des codes numériques pour les réseaux bidimensionnels voire tridimensionnels.

** La TTMM a montré ses limites en incidence conique. Nous pensons que nous pouvons obtenir des résultats réellement meilleurs en choisissant des fonctions de base et de tests de degré supérieur à 1. Les fonction **"Spline-Spline"** en coordonnées paramétriques seraient alors un bon candidat pour les codes numériques en incidence conique, et pour les réseaux 2D et 3D.

Annexe A

Matrice de scattering S

A.1 Définition

Les conditions aux limites des interfaces font intervenir le champ total : c'est la raison pour laquelle il semble naturel d'introduire la matrice de transfert. Cependant, ce n'est pas la seule façon de prendre en compte les effets d'une couche sur une onde ; l'approche par matrice [S] consiste à chercher des relations linéaires entre les coefficients d'amplitudes des ondes sortantes et des ondes entrantes sur une interface. Les ondes entrantes sont les ondes qui se propagent en direction de l'interface et les ondes sortantes sont celles qui s'en éloignent.

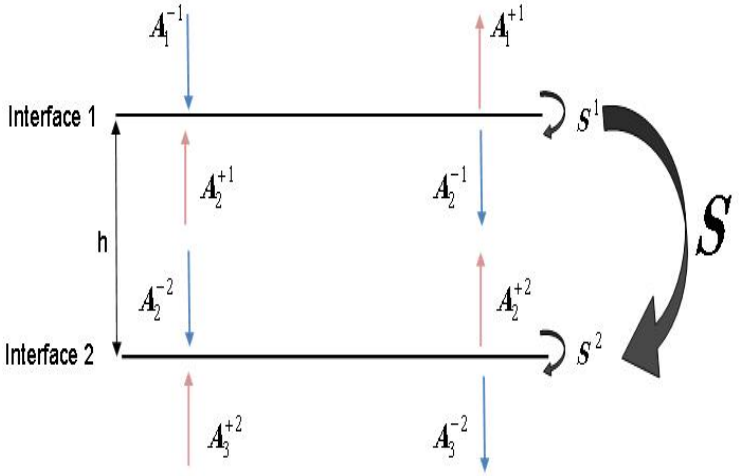


Figure A.1 – Principe de l'algorithme de la matrice S

On va distinguer les matrices **S** d'interface notées S^1

et S^2 et la matrice de couche notée S^c.

A.2 Matrice d'interface

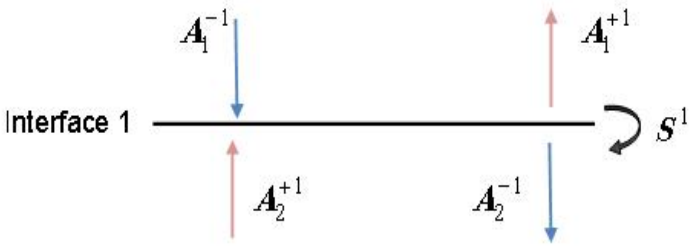


FIGURE A.2 – Description des matrices S^1 et S^2

Pour chaque interface, elle est définie par :

$$\begin{bmatrix} A_1^{+1} \\ \\ A_2^{-1} \end{bmatrix} = S^1 \begin{bmatrix} A_1^{-1} \\ \\ A_2^{+1} \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

et,

$$\begin{bmatrix} A_2^{+2} \\ \\ A_3^{-2} \end{bmatrix} = S^2 \begin{bmatrix} A_2^{-2} \\ \\ A_3^{+2} \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

Pour déterminer S^1 et S^2, nous écrivons les conditions aux limites, puis nous cherchons une relation linéaire entre les coefficients d'amplitude des ondes sortantes et les coefficients d'amplitudes des ondes entrantes. Ces coefficients sont reliés par la relation de phase.

$$\begin{bmatrix} A_2^{+1} \\ \\ A_2^{-2} \end{bmatrix} = S^c \begin{bmatrix} A_2^{-1} \\ \\ A_2^{+2} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

avec

$$S^c = \begin{bmatrix} 0 & \Phi \\ \Phi & 0 \end{bmatrix}$$

$\Phi = exp(-ik\beta h)$, où h désigne la hauteur de la couche réseau.

A.3 Matrice de passage S

La matrice S ne s'obtient pas comme le produit des matrices d'interface S^1, S^2 et S^c. Nous cherchons alors la matrice S telle que :

$$\begin{bmatrix} A_1^{+1} \\ \\ A_3^{-2} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1^{-1} \\ \\ A_3^{+2} \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

On note :

$$S^1 = \begin{bmatrix} S_{11}^1 & S_{12}^1 \\ \\ S_{21}^1 & S_{22}^1 \end{bmatrix}$$

$$S^2 = \begin{bmatrix} S_{11}^2 & S_{12}^2 \\ \\ S_{21}^2 & S_{22}^2 \end{bmatrix}$$

et

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Enfin, la matrice S est donnée par la relation :

$$\begin{cases} S_{11} = S_{11}^1 + S_{12}^1 \Phi D_2 S_{11}^2 \Phi S_{21}^1 \\ \\ S_{12} = S_{12}^1 \Phi D_2 S_{12}^2 \\ \\ S_{21} = S_{21}^2 \Phi D_1 S21^1 \\ \\ S_{22} = S_{22}^2 + S_{21}^2 \Phi D_1 S_{22}^1 \Phi S_{12}^2 \end{cases} \tag{A.5}$$

avec,

$$\begin{cases} D_1 = (I - S_{22}^1 \Phi S_{11}^2 \Phi)^{-1} \\ \\ D_2 = (I - S_{11}^2 \Phi S_{22}^1 \Phi)^{-1} \end{cases}$$

Annexe B

Matrices des équations aux valeurs propres

B.1 Matrices D_g et D_d

Les matrices D_g et D_d sont les produits scalaire entre les fonctions tests et les dérivées des fonctions de base tels que :

$$[D_g]_{mq} = \langle T_m(x - x_{m-1}), \frac{d}{dx} T_q(x) \rangle \qquad et \qquad [D_d]_{mq} = \langle T_m(x_{m+1} - x), \frac{d}{dx} T_q(x) \rangle \quad \text{(B.1)}$$

Puisque nous utilisons la Méthode des Moments basée sur l'hypothèse de Galerkin, les fonctions tests et base sont identiques : c'est les fonctions triangles.
Intégralement, les deux produits scalaires s'écrivent :

$$\langle T_m(x - x_{m-1}), \frac{d}{dx} T_q(x) \rangle = \int T_m(x - x_{m-1}) \frac{d}{dx} T_q(x) dx \quad \text{(B.2)}$$

et,

$$\langle T_m(x_{m+1} - x), \frac{d}{dx} T_q(x) \rangle = \int T_m(x_{m+1} - x) \frac{d}{dx} T_q(x) dx \quad \text{(B.3)}$$

Les figures ci-après illustrent le détail du calcul des coefficients de ces matrices.

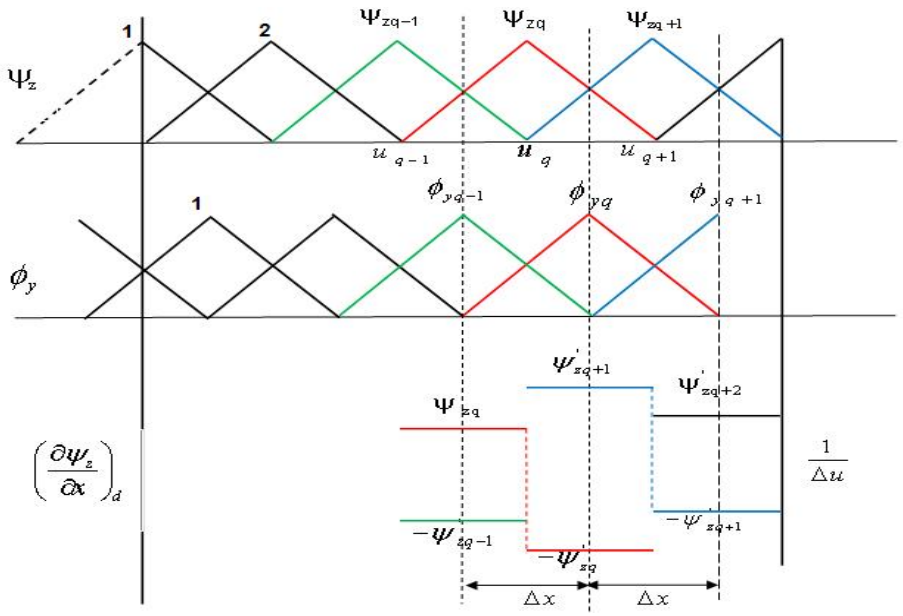


FIGURE B.1 – Décompositions des champs **E** et **H** sur les fonctions triangles

avec,

$$\Psi_z = \begin{cases} E_z & pour \quad TE \\ \\ H_z & pour \quad TM \end{cases}$$

et,

$$\Phi_y = \begin{cases} H_y & pour \quad TE \\ \\ E_y & pour \quad TM \end{cases}$$

Les composantes tangentielles (E_z, H_y) pour la polarisation TE et (H_z, E_y) pour la polarisation TM ne sont pas situées dans une même grille. Elles sont décalées de $\frac{Deltax}{2}$. Alors, d'après les figures, les coefficients non nuls pour chaque valeur de q sont :

$$\langle T_q(x), \frac{d}{dx}T_q(x)\rangle \qquad \langle T_q(x), \frac{d}{dx}T_{q-1}(x)\rangle \qquad \langle T_q(x), \frac{d}{dx}T_{q+1}(x)\rangle \qquad \langle T_q(x), \frac{d}{dx}T_{q+2}(x)\rangle$$

En faisant l'intégration, nous avons :

$$[D_g] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & \tau & 5\tau \\ -5 & 5 & 1 & & & & & \tau \\ -1 & -5 & . & . & & & & \\ & -1 & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & . & \\ & & & & . & . & 5 & 1 \\ -\tau & & & & & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

et,

$$[D_d] = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 1 & & & & & \tau \\ -1 & -5 & 5 & . & & & & \\ & -1 & . & . & . & & & \\ & & . & . & . & . & & \\ & & & . & . & . & 1 & \\ & & & & . & . & . & 1 \\ -\tau & & & & & & -5 & 5 \\ -5\tau & -\tau & & & & & -1 & -5 \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

avec τ est le facteur de pseudo-périodicité.

B.2 Méthode de Gauss

[**Jean-Pierre Nougier** "Méthodes de calcul numérique : Systèmes d'équations, dérivées, interpolations, racines d'équations, diagonalisation des matrices".]

Cette méthode, précise, utilise des points non régulièrement espacés, et convenablement choisis. Elle peut donc s'appliquer lorsque la fonction intégrante $f(x)$ est connue analytiquement, ou lorsque elle est tabulé numériquement en ces points précis.
En développant $f(x)$ sur une base de polynômes, on peut écrire l'intégrale comme combinaison linéaire des valeurs que prend la fonction en différents points.

$$\int_a^b f(x)dx = c\,[w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + ... + w_n f(x_n)] \tag{B.6}$$

où c est proportionnel à $b-a$, et où les facteurs de pondération w_i dépendent de la fonction par laquelle on approche $f(x)$.

On développe $f(x)$ dans une base de polynôme orthogonaux. Les x_i sont alors racines de ces polynômes, et sont donc irrégulièrement espacés. Les polynômes étant définis dans l'intervalle $[-1,+1]$, il faut faire sur x un changement de variable linéaire transformant $x \in [a,b]$ en $\xi \in [-1,+1]$

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi$$

Nous avons alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \tag{B.7}$$

les w_k et les ξ_k sont tabulé [34] avec ξ_k sont deux à deux symétrique par rapport à zéro et sont les racines du polynôme de Legendre d'ordre n.

En effet, pour calculer cette intégrale, on choisit la valeur de n. On prend les valeurs de ξ_k et w_k correspondant à la valeur choisie pour n. On alors x_k et on applique la relation B.7.

La méthode de Gauss est équivalente à une interpolation de la fonction $f(x)$ par un polynôme de degré $2n-1$, ce qui explique la précision de la méthode(ceci signifie entre autres qu'elle est exacte pour l'intégration de polynôme inférieur ou égal à $2n-1$).

Pour notre cas, il suffit de préciser que n=4 car notre équation est de polynôme de degré inférieur à 2.

B.3 Exemple de calcul

Nous pouvons évaluer numériquement tous les coefficient des matrices des équations aux valeurs propres dans l'équation 2.12 et l'équation 2.13.

$$[\mu^{yy}]_{mq} = [\mu^{zz}]_{mq} = \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u)\rangle$$

$$[\varepsilon^{yy}]_{mq} = [\varepsilon^{zz}]_{mq} = \langle T_m(u), \dot{x}(u)\varepsilon(u) T_q(u)\rangle$$

$$\left[\frac{1}{\varepsilon^{uu}}\right]_{mq} = \langle T_m(u), \frac{\dot{x}(u)}{\varepsilon(u)} T_q(u)\rangle \qquad \left[\frac{1}{\mu^{uu}}\right]_{mq} = \langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u)\rangle$$

Nous prenons un exemple pour calculer numériquement des coefficients de ces matrices.

$$\langle T_m(u), \dot{x}(u) T_q(u) \rangle = \int_{u_q}^{u_{q+1}} T_q(u_k) \dot{x}(u_k) T_m(u_k) du$$

D'après la méthode de Gauss, on prend $n = 4$

$$\int_{u_q}^{u_{q+1}} T_q(u_k) \dot{x}(u_k) T_m(u_k) du = \frac{(u_{q+1} - u_q)}{2} \sum_{k=1}^{4} T_q(u_k) \dot{x}(u_k) T_m(u_k) w_k \tag{B.8}$$

avec

$$u_k = \frac{(u_{q+1} + u_q)}{2} + \frac{(u_{q+1} - u_q)}{2} \xi_k$$

w_k et ξ_k sont tabulé. On connait alors tous les coefficients des matrices à partir de cette relation.

Bibliographie

[1] J.J. Clair " Télécommunications optiques : introduction à l'optique integrée," Masson, Paris, 1977

[2] P. Fernand, "Capteurs à fibres optiques et réseaux associés," Lavoisier, (1992).

[3] G. Mahlke, P.Gossing, "Câbles à fibres optiques : principe de base, technique des câbles, planifications de l'installation," Siemens (Berlin 1986).

[4] L. Rayleigh " On the dynamical Théorie of Grating". Procedings of the Royal Society A, Vol.79 :page 399-416, 1907.Reprint in Selected Papers on diffraction Gratings, EditorD. Maystre, SPIE Milestone Seris, Vol. MS83, 1993.

[5] B. Baker, E. Copson, "The mathematical Theory of Huygens Principale," Second Edition, IEEE PRESS.

[6] M. Born, E. Wolf, "Principales of Optics," Pergamon Press 5th Editon, 1975

[7] J.D. Jackson, " Classical Electrodynamics," second Edition, Wiley.

[8] A. Sommerfeld, "Optics," Academic Press inc., Publishers, N.Y. 1954.

[9] J.W. Goodman, " Introduction to Fourier Optics," McGraw-Hill, New York, second Editon 1996.

[10] D.Lacour, "Diffraction d'une onde plane par un guide périodique : application à la conception d'un filtre en longueur d'onde indépendant de la polarisation," Thèse, Université Blaise Pascal, Clermont Ferrand II, Mai 2001.

[11] R.Petit, "Electromagnetic Theory of Grating," Springer-Verlag(Berlin, 1980)

[12] M.Plihal, A.A.Maradudin, "Photonic band structure of two-dimensional system :The triangular lattice," Phys.Rev.B.44, 8565-8571(1991).

[13] P.R. Villeneuve, M.Piché "Photonic Band gaps in two-dimensional square and hexagonal lattices," Phys.Rev.B.46, 4969-4973 (1992).

[14] V. Farys, "Influence des défauts enterrés dans les masques pour la lithographie Extrême Ultrat Violet." Thèse, Université Joseph Fourier de Grenoble, Décembre 2006

[15] R.W. Wood, "On a remarquable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum," Philos.Mag., 4 :pp 396-402 1902

[16] M. Cadilhac, " Some Mathematical aspects of the grating theory," in Electromagnetic Theory of Grating, 1ère Edition, R. Petit ed, Springer-Verlag, Berlin 1980

[17] M. Nevière, G. Cerutti-Maori, and M. Cadilhac, " Sur une nouvelle méthode de résolution du problème de la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur," Opt. Comm. 3 :pp 48-52 1971.

[18] L. Li, "Formulation and comparison of two matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings," J. Opt. Soc. Am. A 13(5), 1024-1035, May 1996.

[19] N. Chateau and J.P Hugonin, " Algorithm for the rigorous coupled wave analysis of grating diffraction," J. Opt. Soc. Am. A 11(4), 1321-1331, 1994.

[20] C. Botten, M.S. Craig, R.C. Mc Phedran, J.L Adams, and J.R. Andrewartha, "The dielectric lamellar diffraction grating," Opt. Acta, 28, 413-428, 1981.

[21] P.Sheng, R.S. Stepleman, and P.N. Sanda, "Exact eigenfunctions for square-wave gratings : application to diffraction and surface-plasmon calculations," Phys. Rev.B, 26(6), 2907-2916, September 1982.

[22] T.K. Gaylord,and M.G. Moharam " Analysis and application of optical diffraction by grating" Procedings IEEE, vol. 73, 894 1985

[23] J. Chandezon, D. Maystre and G. Raoult, " A new theorical méthod for diffraction gratings and its numerical application," J. Opt. (Paris) 11, 235-241 1980

[24] K. Knop, " Rigorous diffraction theory for transmission phase gratings with deep rectangular grooves, J. Opt. Soc. Am. 68, 1206- 1210 1978

[25] K.S Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media," IEEE Transaction Antennas and Propagation, vol 14

pp 302-307, 1966

[26] A. Taflove, M.E. Brodwin, " Numerical solutionof steady-state electromagnetic scattering problems using the time- dependent Maxwell's equation," IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques, vol 23. nř 8 1975

[27] A. Taflove and S.C Hagness, " Computational Electrodynamics, the Finite - Difference Time- Domaine Methode," Artech House, Norwood, MA, Second Edition, 2005

[28] R. Harrington, " Matrix Methods for Field Problems," Proceedings of the IEEE, Vol. 55 (2) : pp 136-149, Fevrier 1967.

[29] A. Peterson, S. Ray, and R. Mittra, "Computational Methods for Electromagnetics," IEEE Press Series on Electromagnetics waves, 1997

[30] J.J Wang, " Generalized moment methods in Electromagnetics," New York John Willey sons, 1991

[31] G. Granet, " Reformulation of the lamellar grating problem through the concept of adaptive spatial resolution," J. Opt.Soc. Am. vol 16, 2510-2516, Octobre 1999.

[32] L. Li, " Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures," J. Opt.Soc. Am. vol 13, No :9, 1870-1876, 1996.

[33] L. Li, " Mathematical modeling in optical science, frontiers in applied mathematics," eds. G. Bao, L. Cowsar and W. Masters, Chapitre 4 (Society for Industrial and

Applied Mathematics, Philadelphia, 2001)

[34] J.P Nougier, "Méthodes de calcul numérique : Systèmes d'équations, dérivées, interpolations, racines d'équations, diagonalisation des matrices," Masson 1983.

[35] G. Granet, L.B Andriamanampisoa, K. Raniriharinosy, A.M Armeanu, K. Edee, "Modal analysis of lamellar gratings using the moment method with subsectional basis and adaptive spatial resolution." J. Opt. Soc. Am.,vol27, No :6, 1303-1310, June 2010.

[36] P. Lalanne, J.P Hugonin, " Numerical performance of finite difference Modal Method for electromagnetic analysis of one-dimensional grating," J. Opt. Soc. Am., Vol. 17, No. 6, 1033-1042, 2000.

[37] P. Bouchon, F. Pardo, R. Haidar, and J.L Pelouard, "Fast modal method for subwavelength gratings based on B-Spline formulation," J. Opt. Soc. Am. A Vol 27, No. 4, 696-702 2010.

[38] L.C Botten, M.C Craig, R.C McPherdran, L.R Adams, and J.R Andrewartha, " The dielectric lamellar diffraction grating," Opt. Acta, Vol. 28, 413-428, 1981.

Simulation de la diffraction par des réseaux lamellaires 1D par la méthode modale en différences finies et la méthode des moments en coordonnées paramétriques.

Par

ANDRIAMANAMPISOA Lala Bakonirina

RÉSUMÉ

Ce manuscrit est consacré à l'amélioration des deux méthodes numériques : MMDF et Méthode des Moments avec la technique de la RSA.
Dans un premier temps, on présente les outils théoriques sur l'étude du problème de la diffraction par des réseaux lamellaires, éclairée sous incidence classique et les outils de simulation pour résoudre les équations de Maxwell. On choisit comme fonctions de base et de test, les fonctions triangles. On introduit par la suite, la technique de la RSA afin d'améliorer la vitesse de convergence de calcul. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode MMFE et la méthode MMDF de "Lalanne et al". Une étude numérique de la stabilité et de la convergence de la méthode est effectuée.
En fin, on présente une extension de la Méthode des Moments basée sur l'hypothèse de Galerkin au cas de l'incidence conique. Le détail de la résolution des équations Maxwell est décrit. L'application numérique est traitée dans le cas du réseau diélectrique pour mettre au point les influences de l'état de la polarisation et les paramètres physiques.

Mots clés : réseau lamellaire, diffraction, MMDF, Méthode des Moments de Galerkin, résolution spatiale adaptative(RSA)

ABSTRACT

This manuscript is devoted to improvement of the two numerical methods : MMDF and Method of the Moments with the technique of the RSA.
In the first part, we present the theoretical tools on study of the problem of diffraction by binary grating, illuminated of classical incidence and the tools for simulation to solve the Maxwell's equations. We choose like basic functions and test, the functions triangles.
In the second part, we introduce the technique of the RSA so to improve the speed of convergence of calculation. The results obtained are compared with those of method MMFE and method MMDF of « Lalanne and al ». A numerical study of the stability and convergence of the method are carried.
The last part, we present the Method of the Moments with triangle functions as expansion and triangle as test functions to the case of conical incidence. We describe the detail of the resolution of the Maxwell equations. Numerical application is treated in the case of the dielectric grating to develop the influences of state of polarization and the physical parameters.

Key words : binary grating, diffraction, MMDF, Moment method of Galerkin, adaptive spatial resolution.