N° d'ordre : D.U. : 2084
EDSPIC : 504

Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand II

Ecole Doctorale
Sciences pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

Thèse

Présentée par

Guillaume REY

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

Spécialité : Mécanique du Solide

Approche probabiliste de la sécurité des véhicules légers en zones accidentogènes

Soutenue publiquement le 8 décembre 2010 devant le jury :

M. Laurent Trassoudaine	LASMEA, UBP	Président
M. Claude-Henri Lamarque	ENTPE	Rapporteur
M. Alain Millard	CEA Saclay	Rapporteur
M. Michel Fogli	LaMI, UBP	Directeur de thèse
M. Frédéric Bernardin	LRPC Clermont-Ferrand	Co-encadrant
M. David Clair	LaMI, UBP	Co-encadrant
M. Mohamed Bouteldja	LRPC Lyon	Invité
M. Bernard Jacob	LCPC Paris	Invité

Résumé

Les sorties de route en virage constituent une part importante des accidents de la route en France, causes d'environ 30% des accidents mortels pour l'année 2008. Ces accidents se produisent principalement sur route secondaire ce qui montre le besoin du conducteur d'être assisté dans sa tâche de lecture et de négociation du virage. L'objectif de ce travail est le développement d'une méthodologie d'évaluation du risque encouru par le conducteur lors du franchissement d'un virage afin de mettre en place sur les itinéraires routiers un système d'alertes déclenchées en cas de situation potentiellement dangereuse. La méthodologie menant à l'évaluation du risque est basée sur l'emploi de méthodes probabilistes, permettant de prendre en compte fidèlement les incertitudes inhérentes au conducteur, au véhicule et à l'infrastructure. A l'entrée du virage, un dispositif de mesure renseigne sur la position latérale et la vitesse du véhicule arrivant. Une famille de trajectoires de passage en virage est alors simulée à partir d'un modèle dynamique de véhicule dont certains paramètres d'entrée dépendent de trajectoires mesurées sur le trafic réel. Des indices de risques associés à des critères de sécurité sont ensuite évalués par des méthodes fiabilistes. Les résultats obtenus sont la détermination et la hiérarchisation des paramètres influents sur les critères de sécurité, ainsi que l'évolution des indices de risque en fonction des conditions initiales en entrée de virage. Les applications réalisées dans le dernier chapitre démontrent le potentiel de la méthodologie fiabiliste proposée et son intérêt dans le domaine de la sécurité routière.

Abstract

Roadway departure while cornering constitutes a major part of car accidents in France, accounting for nearly 30% of casualties in 2008. Most of them occur on secondary roads and reveal that drivers need assistance for a safe curve negociation. The subject of this work is the development of a methodology to assess the roadway departure risk in order to implement in the road infrastructure warning devices alarming the driver in case of potentially dangerous situations. The application of probabilistic methods for the risk assessment allows an accurate representation of the uncertainties arising from the driver, the vehicle and the road infrastructures. At the entrance of the curve, speed and position of the approaching vehicle are measured. Then, a family of trajectories is simulated from a dynamic model. Some of the model input depend on experimental trajectories measured on the real traffic. Finally, safety criteria are chosen and associated risk indices are calculated using reliability methods. The influence of various parameters of the model are studied, and the obtained results are the evolutions of the risk indices as a function of the measured initial conditions. The probabilistic methodology elaborated in the road safety domain constitute a valuable decision support tool for the alarm triggering.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ces travaux de thèse. Merci donc à M. Laurent Trassoudaine d'avoir présidé ce jury, et à M. Claude-Henri Lamarque et M. Alain Millard d'avoir rapporté cette thèse.

Je tiens également à remercier mon encadrement pour m'avoir proposé un sujet captivant dans lequel j'ai pu m'épanouir au cours de ces trois années. Merci à Michel Fogli pour sa pédagogie, sa rigueur et sa vision à long terme, également à Frédéric Bernardin pour nous avoir guidé sur l'équilibre entre théorie et résultats. Enfin, un remerciement spécial à David Clair pour la qualité de son encadrement, ainsi que pour tout ce qui s'éloigne du travail.

Merci également à toutes les personnes du LASMEA et du LCPC impliquées dans ce projet, qui ont pu nous fournir des données expérimentales indispensables pour l'avancement de cette thèse, ainsi que pour leurs regards extérieurs sur cette approche que l'on espère originale.

Pour ces belles années passées au labo, j'ai une pensée pour tout ceux que j'ai eu la chance de cotoyer et qui ont rendu ce lieu vivant, que ce soit le midi ou en salle café et j'adresse tout mon courage aux *jeunes*. Egalement je tiens à remercier sportivement les gens du SUAPS de Clermont-Ferrand, notamment Christophe pour tous ces pas tordus réalisés en salle ou dehors, ainsi que Françoise et Marc pour les bouffées d'oxygène en france ou hors frontières.

Indispensablement, un grand merci à tous ceux sans qui tout cela serait moins fort : la famille au grand complet, avec son dernier arrivant.

Et pour conclure, une forte pensée pour celle qui a su me (sup)porter lors de ces derniers mois...

Table des matières

Introduction générale **1**

I Position du problème **5**

I.1 Données d'accidentologie 5

I.2 Systèmes de prévention déterministe 7

I.2.1 Systèmes existants 7

I.2.2 Recherches en cours 8

I.3 Etudes de dynamique stochastique du véhicule 17

I.4 Méthodologie proposée 19

II Modélisation déterministe **23**

II.1 Modèle dynamique de véhicule 23

II.1.1 Paramétrage et hypothèses 23

II.1.2 Modèle de contact et de suspensions 25

II.1.3 Formulation et résolution du problème 30

II.1.4 Validation 32

II.2 Définition d'une trajectoire de référence 33

II.2.1 Mesures de trafic 34

II.2.2 Classes de conducteurs 35

II.2.3 Calcul des commandes 36

II.3 Expression des critères de sécurité 37

III Modélisation probabiliste **43**

III.1 Sources d'incertitude 43

III.1.1 Choix des paramètres aléatoires 43

III.1.2 Relations entre paramètres 46

III.2 Modélisation probabiliste 48

III.2.1 Formulation 48

III.2.2 Choix des lois 49

III.3 Analyse de sensibilité 51

III.3.1 Choix de la méthode 51

III.3.2 Indices de Sobol' . . . 52
III.4 Résultats . . . 56
III.4.1 Analyse du vecteur $\boldsymbol{X}$ . . . 57
III.4.2 Analyse de $\boldsymbol{X}$ et ψ . . . 61
III.5 Approximation de ψ . . . 63
III.6 Formulation finale . . . 65

IV Analyse fiabiliste **67**
IV.1 Formulation fiabiliste . . . 67
IV.1.1 Formulation standard . . . 69
IV.1.2 Indice de Hasofer-Lind . . . 70
IV.1.3 Approximation FORM . . . 70
IV.1.4 Approximation SORM . . . 72
IV.2 Améliorations apportées . . . 75
IV.2.1 Convergence de l'algorithme de détermination de M^* . . . 75
IV.2.2 Stratégie de choix du point initial . . . 76
IV.2.3 Réunification des domaines de défaillance . . . 79
IV.2.4 Enrichissement de *SORM Point Fitting* . . . 80
IV.3 Premiers résultats . . . 83
IV.3.1 Résultats Monte-Carlo . . . 83
IV.3.2 Comparaison des méthodes fiabilistes . . . 85

V Applications **93**
V.1 Application aux critères de sécurité . . . 93
V.1.1 Critère de position latérale . . . 94
V.1.2 Critère d'accélération latérale . . . 97
V.1.3 Critère TLC . . . 98
V.1.4 Combinaison des critères . . . 101
V.2 Analyse paramétrique . . . 102
V.2.1 Critère de position latérale . . . 102
V.2.2 Critère d'accélération latérale . . . 103
V.2.3 Critère de TLC . . . 103
V.3 Trajectoire après alerte . . . 105
V.3.1 Profil du virage étudié . . . 105
V.3.2 Calcul de la trajectoire après alerte . . . 106
V.3.3 Résultats . . . 109

Conclusions et perspectives **113**

A Caractérisations et simulations numériques de variables aléatoires **117**
A.1 Préliminaires : Représentation & Simulation 117
A.2 Variable aléatoire uniforme 119
A.2.1 Caractérisation probabiliste 119
A.2.2 Représentation 119
A.2.3 Algorithme de simulation 120
A.3 Variable aléatoire gaussienne standard 120
A.3.1 Caractérisation probabiliste 120
A.3.2 Représentation 121
A.3.3 Algorithme de simulation 121
A.4 Variable aléatoire gaussienne 122
A.4.1 Caractérisation probabiliste 122
A.4.2 Représentation 123
A.4.3 Algorithme de simulation 123
A.5 Variable aléatoire gaussienne tronquée 124
A.5.1 Caractérisation probabiliste 124
A.5.2 Représentation 125
A.5.3 Algorithme de simulation 125

Bibliographie **127**

Table des figures

I.1 Bandes rugueuses en milieu et bord de voie 8
I.2 Exemples de systèmes de sécurité active : AFIL (Citroën) et Attention Assist (Mercedes) 9
I.3 Système de prévention embarqué (a) et zones d'alerte, selon [ISO07] (b) 9
I.4 Différents algorithmes TLC et points de franchissement associés 15
I.5 Indicateur de risque déduit de logique floue, selon [KO03] 16
I.6 Méthodologie proposée menant à une cartographie du risque 20

II.1 Vue de dessus 24
II.2 Vue de face et de côté 24
II.3 Force latérale en fonction de la dérive, selon [Bro06] 26
II.4 Evolution des forces latérales pour différentes charges normales (a), et avec variables adimensionnées (b) 27
II.5 Construction point par point de la trajectoire 32
II.6 Validation du modèle par comparaison avec Callas/Prosper 33
II.7 Virage étudié (a) et principe du dispositif de mesure (b) 34
II.8 Densité de passage mesurée dans le virage Rd8 35
II.9 Définition des classes de conducteurs (a) et trajectoires de référence (b) 36
II.10 Algorithme de suivi de trajectoire 37
II.11 Braquages de référence selon la classe du conducteur (a) et la vitesse (b) 37
II.12 Calcul du critère de position latérale 38
II.13 Calcul du critère de TLC 39

III.1 Familles de paramètres du modèle mécanique 44
III.2 Hauteurs de l'axe de roulis 47
III.3 A-coups dus aux perturbations des conditions initiales (gauche) et zoom sur le début de simulation (droite) 48
III.4 Densités spectrales de puissance expérimentales (par classe) et identifiées (a) et exemples de perturbation simulée (b) 51
III.5 Influence des lois (uniformes et gaussiennes tronquées) sur les indices de sensibilités 58
III.6 Influence des coefficients de variation ($Cv = 5\%$ à 20%) sur les indices de sensibilités 60

III.7 Influence de la vitesse (de 50 à 70 km.h^{-1}) sur les indices de sensibilités 60
III.8 Analyse de sensibilité du vecteur $\boldsymbol{X}$ et du processus ψ 62
III.9 Evolution de l'approximation de la densité spectrale de ψ en fonction de l'ordre de troncature K 64

IV.1 Illustration de l'indice de Hasofer-Lind, en dimension deux 71
IV.2 Illustration d'un cas avec deux points de conception, en dimension deux 72
IV.3 Méthode SORM Point Fitting, selon [KLH87] 74
IV.4 Coordonnées de M^* selon les itérations (a) et correction de $\boldsymbol{y}^{n+1}$ (b) 76
IV.5 Convergence de l'indice β_{HL}^n, avec et sans correction 77
IV.6 Comparaison vecteur position initial/final pour le cas 1 (a) cas 2 (b) cas 3 (c), et organigramme de calcul associé (d) 78
IV.7 Allure des états-limites dans les cas X_5 uniforme sur $[0, 1]$ (a) et X_5 uniforme sur $[-0.5, 0.5]$ (b) 79
IV.8 Raffinements apportés à la méthode *SORM PF* 80
IV.9 Quelques exemples de surfaces d'état-limite (courbes bleues), leurs approximations SORM (courbes vertes), les points de contrôle (points noirs), les points de conceptions initiaux (triangle rouge) et corrigés (carrés verts). 82
IV.10 Séparation des cas de sortie intérieure et extérieure 83
IV.11 Points de conception associées aux sorties extérieure et intérieure 84
IV.12 Comparaison des méthodes fiabilistes, échelle linéaire 86
IV.13 Comparaison des méthodes fiabilistes, échelle logarithmique 86
IV.14 Erreur commise sur la vitesse d'alerte en fonction de la probabilité seuil, pour la classe 2 89

V.1 Evolution de la probabilité P_f^D en fonction des conditions initiales, en échelle linéaire (a) et logarithmique (b) 94
V.2 Définition des vitesses d'alerte en fonction de la probabilité seuil 95
V.3 Vitesses d'alerte en fonction du seuil $\overline{P_f}$ 96
V.4 Probabilité P_f^A en fonction des conditions initiales 97
V.5 Accélérations latérales maximales de 3 m.s^{-2} pour les trajectoires de référence . . 98
V.6 Probabilité P_f^T en fonction des conditions initiales, en échelle linéaire (a) et logarithmique (b) 99
V.7 TLC associés aux sorties intérieures et extérieures pour les trajectoires de référence 100
V.8 Repartition le long du virage des dépassements de critères de sécurité (a) et vitesses d'alerte définies par combinaison des critères de sécurité (b) 101
V.9 Probabilités P_f^D pour les seuils $\overline{d} = 1, 1.5, 2$ m 102
V.10 Probabilités P_f^A pour les seuils $\overline{a}_y = 3, 4, 5$ m.s^{-2} 103
V.11 Probabilités P_f^T pour les seuils $\overline{\text{TLC}} = 0.7, 1, 1.3$ s 104
V.12 Probabilités P_f^T pour les seuils $\overline{\text{TLC}} = 0.1, 0.3, 0.5$ s 104

V.13 Profil du virage Rd8, et emplacements des dispositifs de mesure 106
V.14 Définition du profil de vitesse après alerte 107
V.15 Limitation de l'accélération latérale après alerte 108
V.16 Accélérations latérales de référence (noir) et modifiée après alerte (vert) dans chaque classe de conducteur pour $V^{ref} = 80$ km.h^{-1} 110
V.17 Ecart par rapport au bord de voie extérieur pour les trajectoire de références (noir) et les trajectoires modifiées après alerte (vert) dans chaque classe de conducteur pour $V^{ref} = 80$ km.h^{-1} 110

Liste des tableaux

I.1 Données 2008 d'accidentologie 6
I.2 Répartition des accidents selon la courbure, en rase campagne 7
I.3 Comparaison des modèles de vitesse longitudinale 13

II.1 Valeurs numériques des caractéristiques du véhicule (Peugeot 406) 31

III.1 Moyenne des variables aléatoires 50
III.2 Valeurs des écarts-types utilisés pour l'analyse de sensibilité 59
III.3 Caractéristiques statistiques des composantes de $\boldsymbol{X}$ 62

IV.1 Gain apporté par la stratégie d'initialisation 78
IV.2 Comparaison des erreurs et du nombre d'appels relatifs aux différentes méthodes fiabilistes 85
IV.3 Valeurs des différentes approximations de P_f pour les classes 1 et 2 87
IV.4 Valeurs des différentes approximations de P_f pour les classes 3 et 4 88

Introduction générale

Le contexte de ce travail de thèse est la prévention des accidents de la route pour la classe des véhicules légers dans les zones dites de rase campagne (i.e. à l'exclusion des zones urbaines et autoroutes). Il s'inscrit dans le cadre du grand projet national SARI (Surveillance Automatisée de la Route pour l'Information des conducteurs et des gestionnaires), qui est une action de recherche du PREDIT (Programme de Recherche et d'Innovation dans les Transports Terrestres). L'ambition du projet SARI est de réduire significativement les accidents liés aux sorties de route ou aux pertes de contrôle de véhicules, en informant mieux les conducteurs des difficultés de conduite auxquelles ils doivent faire face. Les principales actions ciblées partagent le projet SARI en trois thèmes :

- les ruptures physique de la route (ex. virage) causant des accélérations ou décélérations fortes du véhicule (thème RADARR),
- les ruptures de visibilité et de lisibilité de la route pouvant entraîner des trajectoires inappropriées (thème VIZIR),
- les dégradations apportées par la pluie et le vent (thème IRCAD).

L'objectif de cette thèse concerne le premier point, et vise à la mise en place dans certains virages identifiés comme des zones accidentogènes d'un système d'information alertant au moment approprié les conducteurs d'un risque de perte de contrôle de leur véhicule. Pour être efficace, le système doit donc prévenir les conducteurs suffisamment tôt, capter leur attention, et les inciter à modifier leur conduite.

Le coeur de ce travail est l'élaboration d'une méthodologie probabiliste menant à la définition d'un indice de risque de violer un critère de sécurité prédéfini. Le résultat attendu est une cartographie d'évolution du risque en fonction du comportement du conducteur en entrée de virage. Cette cartographie permettra l'identification des trajectoires limites (i.e. potentiellement dangereuses) et constituera ainsi un outil efficace d'aide à la décision pour le déclenchement d'alerte.

Les dispositifs de mesure et d'alerte envisagés dans l'approche proposée sont disposés en bord de voie, intégrés à l'infrastructure. Ceci constitue une particularité de ce travail par rapport aux études connexes, où les équipements sont généralement embarqués dans le véhicule. Lorsqu'un véhicule se présente en entrée de virage, l'estimation du risque encouru par le conducteur est réalisée à partir de trajectoires simulées par le biais d'un modèle dynamique spécifiquement développé dont certains paramètres d'entrée dépendent de trajectoires expérimentales relevées sur le trafic réel.

La méthodologie d'estimation du risque proposée est basée sur des approches probabilistes, dans le but de prendre en compte les incertitudes provenant du conducteur, du véhicule et de l'infrastructure. L'application de ces approches au domaine de la sécurité routière constitue une originalité de ce travail et présente l'avantage majeur de mener directement au calcul d'indices de risque essentiels pour la décision d'un déclenchement d'alerte.

Organisation de la thèse

Après une brève revue des données d'accidentologie permettant de cerner la problématique, dans le **Chapitre I** est réalisé l'état de l'art des études consacrées d'une part aux développements de systèmes de prévention de sortie de route, et d'autre part aux aspects stochastiques de la dynamique du véhicule. Un bilan de ces études conduit à l'élaboration de la méthodologie menant à l'estimation d'indices de risques, dont le cheminement définit l'organisation des chapitres suivants.

Le **Chapitre II** détaille la modélisation mécanique du système. Un modèle dynamique du véhicule est spécifiquement développé pour l'application ciblée, afin de simuler des cas de conduite courants dans un temps de calcul réduit imposé. Ensuite le calcul d'une trajectoire de référence, caractéristique du comportement d'un conducteur standard pendant la négociation du virage, est réalisé à partir de relevés effectués sur le trafic réel. Le choix de critères de sécurité mène enfin à l'identification des trajectoires potentiellement dangereuses.

Afin de prendre en compte l'aléa présent naturellement chez le conducteur, sur le véhicule et l'infrastructure, le **Chapitre III** est consacré à la modélisation probabiliste du système. Une famille minimale de variables et processus aléatoires, identifiée par une analyse de sensibilité, est alors introduite dans le modèle déterministe. La sélection des paramètres aléatoires permet d'obtenir une représentation optimale des incertitudes présentes dans le système, tout en facilitant l'application des méthodes fiabilistes.

Plusieurs indices de risques sont alors proposés dans le **Chapitre IV**, associés à différentes approches fiabilistes. Ces indices sont comparés sur la précision de détection des cas dangereux,

ainsi que sur le temps de calcul nécessaire à leur évaluation. L'adaptation des méthodes fiabilistes existantes aux spécificités du modèle dynamique utilisé aboutit alors à la proposition d'un outil d'aide à la décision efficace et rapide.

Le **Chapitre V** présente les résultats issus de l'approche proposée, ce qui illustre les possibilités d'application de cette méthodologie. La position en bord de voie des dispositifs de mesure et d'alerte est validée vis à vis du temps de réaction du conducteur par rapport au déclenchement d'alerte. La démarche suivie pour cela consiste à vérifier l'existence d'une trajectoire permettant une réduction effective du risque encouru par le conducteur suite au déclenchement d'alerte.

Chapitre I

Position du problème

Ce chapitre présente tout d'abord quelques statistiques et études post-accidentelles, afin de cerner le contexte de ce travail, ainsi que les causes principales de sortie de route. Puis sont évoquées les différentes études entreprises sur la prévention des sorties de route, ainsi que les systèmes actuellement présents sur le marché. Les recherches en cours portent à la fois sur le développement de système d'alarmes, ainsi que sur la définition de critères de sécurité pertinents. Les études concernant la dynamique du véhicule et intégrant des aspects stochastiques sont également rappelées. Un bilan de ces études conduit enfin à l'élaboration de la méthodologie proposée dans ce travail.

I.1 Données d'accidentologie

Les chiffres 2008 de la sécurité routière font état de 4 275 tués et 34 965 blessés hospitalisés en métropole. Selon le bilan dressé par l'Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière [ONI], ceci constitue une forte baisse par rapport à l'année précédente ($-8,2\%$) attribuée entre autres à la baisse des vitesses moyennes, à l'amélioration du taux de port de la ceinture de sécurité ainsi qu'à la baisse du trafic ($-1,4\%$). Malgré cela, la France reste au $11^{\text{ème}}$ rang européen en terme de mortalité, et l'objectif annoncé pour 2012 est de ne pas dépasser le seuil de 3 000 victimes.

On constate dans le tableau I.1 que les accidents de véhicules légers (VL) en rase campagne représentent 44% des accidents mortels et 30% des blessés. La quasi-totalité de ces accidents intervient hors intersection et indifféremment de jour ou de nuit. Contrairement à une idée répandue, les statistiques montrent que dans 75% des cas, les accidents se sont produits avec des conditions météorologiques normales (i.e. chaussée sèche et visibilité correcte). Les dernières

	Tués		Blessés hospitalisés	
	VL	(total)	VL	(total)
Rase Campagne	1898	(3040)	10038	(16583)
Tous réseaux	2205	(4275)	14127	(34965)
En Intersection	142	(445)	2035	(7087)
Hors Intersection	2063	(3830)	12092	(27878)
Jour	1106	(2379)	8219	(22893)
Nuit	1099	(1896)	5908	(12072)
15-29 ans	902	(1577)	5388	(14004)
Autres	1303	(2698)	8739	(20961)

Table I.1 – Données 2008 d'accidentologie

lignes du tableau montrent que les jeunes conducteurs sont une population à risque. Il apparait donc que l'expérience est indispensable pour une conduite correcte sur des routes de rase campagne, c'est à dire principalement les routes nationales ou départementales. Pour ces itinéraires, la répartition des accidents selon le profil de la route est donnée dans le tableau I.2. Les statistiques 2008 montrent qu'environ la moitié des accidents se produit en virage, indifféremment à gauche ou à droite. Selon [MBM+05], ces proportions sont cependant sous-évaluées : le retour aux données de base (procès-verbaux) servant à la constitution des statistiques montre que des accidents à proximité d'une courbe sont souvent codés en section rectiligne, alors que l'accident est directement lié à la courbe.

Dans les accidents du type « sortie de voie en virage », un seul véhicule est impliqué dans l'origine de l'accident, même si plusieurs véhicules peuvent être touchés par la suite. Ils résultent de deux grands types de problème [MBM+05] :

- **problème de 'guidage'** : accident dû à une interruption du contrôle de la trajectoire. Cette catégorie intègre les cas d'endormissement/somnolence, activité annexe, distraction, malaise, ainsi que les cas de contrôle dégradé de la trajectoire (ex. alcoolisation) ;
- **problème 'dynamique'** : perte de contrôle liée à une vitesse élevée relativement aux capacités du conducteur, du véhicule et aux caractéristiques de la chaussée.

De nombreux cas d'accidents de type 'dynamique' se produisent avec des niveaux de sollicitation dynamique théoriquement acceptables. Il faut alors considérer l'importance de la combinaison des accélérations transversale et longitudinale qui génère une forte augmentation de la sollicitation dynamique résultante. Ces sollicitations peuvent être dues à une mauvaise lecture de la trajectoire, ou à des réactions inadaptées (ex. correction de trajectoire ou freinage trop brusque). Il ressort de l'étude des cas de pertes de contrôle en courbe [MBM+05] qu'un seuil de

	Tués	Blessés
Ligne droite	1921	10471
Courbe à gauche	490	2511
Courbe à droite	504	2562
Courbe en S	77	510
Indéterminé	48	529

Table I.2 – Répartition des accidents selon la courbure, en rase campagne

sollicitation maximal admissible ne peut être défini en raison de la diversité des conditions (tracé du virage, trajet habituel, ...) et des systèmes mis en jeux (véhicules, expérience, ...). Assurer la sécurité des usagers imposerait alors de définir un seuil trop faible. Ceci serait perçu comme une nuisance par le conducteur, et induirait une perte de crédibilité du système d'alerte à long terme.

L'identification de trajectoires potentiellement dangereuses ne peut donc pas être déduite directement de la violation de critères de sécurité déterministes, car ils omettent la variabilité naturelle provenant du conducteur, du véhicule et de l'infrastructure. La démarche proposée dans ce travail sera donc basée sur une approche probabiliste intégrant l'aléa présent dans le système, dont le résultat est une estimation du risque encouru par le conducteur.

I.2 Systèmes de prévention déterministe

I.2.1 Systèmes existants

Les premières actions concrètes pour lutter contre les risques liés aux véhicules à moteur ont consisté en des systèmes de prévention passifs, comme par exemple l'obligation du port de la ceinture de sécurité ou l'apparition des Airbags (Buick, 1973). Associés à des prétensionneurs de ceinture (Mercedes, 1981), ces équipements permettent un meilleur maintien des occupants lors du choc, et donc de minimiser les blessures. Les structures de véhicule ont aussi été améliorées avec le concept de zones de déformation programmée (Volvo, 1966), qui absorbent une partie de l'énergie mise en jeu lors de collisions. Côté infrastructure, l'amélioration de l'état des routes autorise un meilleur contrôle du véhicule. De plus, le nombre d'accidents a fortement baissé avec l'apparition des limitations de vitesse et l'installation des radars automatiques (2003). La mise en place de bandes rugueuses sur les bords de voie (Fig. I.1), causant une vibration du véhicule, a réduit d'environ 20% les sorties de route dues à des problèmes de guidage [FHW99], phénomène majeur aux Etats-Unis. Ce système, d'un coût d'installation modique, présente cependant



Figure I.1 – Bandes rugueuses en milieu et bord de voie

deux inconvénients. Premièrement, les bords de route doivent disposer d'un accotement stabilisé relativement large, pour permettre au conducteur de modifier sa trajectoire. Deuxièmement, ce système ne permet aucune anticipation, le conducteur n'étant alerté qu'après la sortie de voie.

Les moyens de sécurité active (i.e. intervenant sur les commandes du véhicule) assistent le conducteur lors de manœuvre entraînant des sollicitations dynamiques élevées, telles qu'un évitement d'accident. Parmi ces moyens on peut citer l'ABS (Anti-lock Braking System, Chrysler, 1971) et l'ESC (Electronic Stability Control, Mercedes, 1995) aujourd'hui de série sur la plupart des véhicules. Ces systèmes assistent le conducteur pour garder le contrôle de son véhicule en cas de sousvirage ou survirage, par exemple, mais sont toujours inefficaces en cas d'inattention, donc d'inaction. Dans ces cas, seuls des systèmes de surveillance permettent d'alerter le conducteur avant une situation dangereuse. Réservés aux véhicules haut de gamme donc encore peu diffusés, on peut citer les systèmes de détection d'inattention du conducteur (Attention Assist, Mercedes, 2007) ainsi que des systèmes de détection de sortie de voie. Ces derniers sont actuellement basés sur des détections des marquages de bord de voie par capteurs infrarouge ou caméras et alertent le conducteur par vibration du siège et du volant lors de leur franchissement. Agissant donc comme des bandes rugueuses électroniques (voir système AFIL Fig. I.2), ces systèmes n'alertent pas non plus le conducteur avant que la sortie de voie ne soit effective. Le déclenchement d'alertes anticipées est l'objet de ce travail de thèse et les recherches en cours sur les systèmes de prévention de sortie de voie, connus sous le nom *Lane Departure Warning Systems* (LDWS), sont abordées dans la section suivante.

I.2.2 Recherches en cours

En l'absence de directives européennes sur les LDWS (la situation est la même aux Etats-Unis), les fabricants d'automobiles et les instituts de recherche ont développé, par le biais de l'*International Organisation for Standardisation* (ISO), des standards pour ces systèmes [ISO07]. Ce document les définit comme des systèmes embarqués alertant le conducteur en cas de sortie

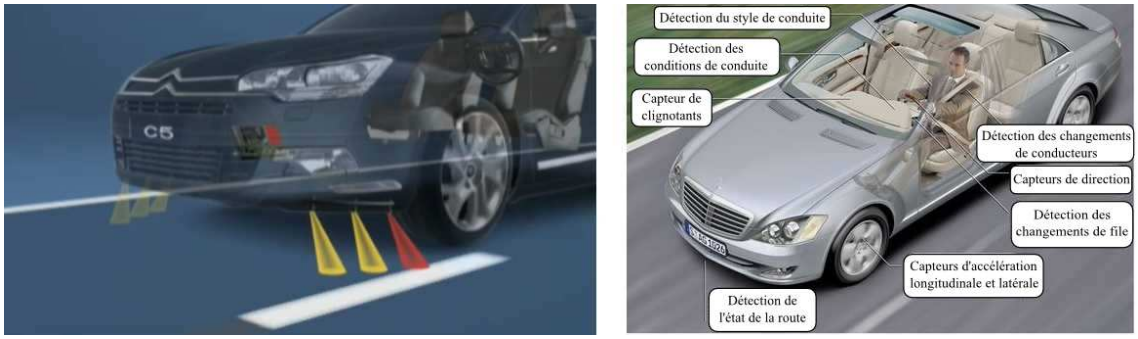
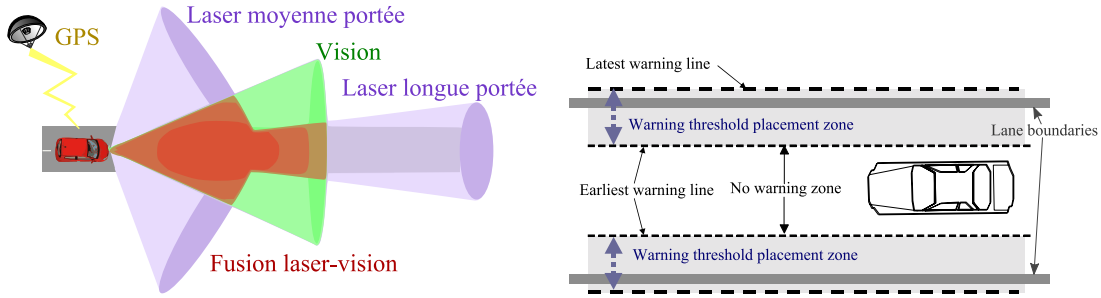


Figure I.2 – Exemples de systèmes de sécurité active : AFIL (Citroën) et Attention Assist (Mercedes)



a) b)

Figure I.3 – Système de prévention embarqué (a) et zones d'alerte, selon [ISO07] (b)

de voie involontaire, mais n'agissant pas sur les commandes du véhicule. Le conducteur reste responsable des actions de sûreté sur le véhicule. Les alertes doivent obligatoirement être basées sur la position latérale du véhicule sur sa voie et peuvent en option prendre en compte la vitesse du véhicule. Le seuil de déclenchement d'alerte peut également être réglable par le conducteur. Il n'existe pas d'exigence sur les technologies de capteurs utilisées. Cette réglementation définit également une zone délimitée par deux lignes dans laquelle l'alerte doit être déclenchée (Fig. I.3b). La ligne de premier avertissement doit être située entre 0.75 et 1.5 m de l'intérieur de la voie (selon la vitesse latérale du véhicule) et la ligne de dernier avertissement à au plus 0.3 m à l'extérieur de la voie (1 m pour les poids lourds et autocars). De par cette standardisation, les études sur les LDWS portent donc sur deux points : les capteurs embarqués dans le véhicule et les critères de sécurité.

1) Capteurs embarqués

Afin d'assister le conducteur dans sa tâche, les capteurs embarqués doivent renseigner les systèmes LDWS sur l'état dynamique du véhicule, son environnement et le profil de la route (Fig I.3a). Parmi les prototypes réalisés [LSW+06, LBCG03, SGM+06, LW09, Rev03, BI06, AFS09], l'équipement se compose de :

- **Bus CAN** : Le bus CAN du véhicule donne accès au relevé des vitesses des roues du véhicule, au rapport engagé, à la position de la pédale d'accélérateur ainsi qu'à l'état des feux et des clignotants.

- **Caméra** : Une caméra est montée à l'avant du véhicule (derrière le rétroviseur ou le bouclier avant) et associée à un algorithme de détection des marquages de bord de voie. Ceci permet d'estimer la position latérale du véhicule sur la chaussée, sa vitesse latérale, ainsi que son orientation par rapport à l'axe de la route. Si les conditions de visibilité sont suffisantes, le profil de la route en amont du véhicule peut être calculé. Des difficultés apparaissent lors des forts contrastes ombre/soleil, sous la pluie, dans le brouillard ou de nuit.

- **(D)-GPS** : Les véhicules d'aujourd'hui sont souvent pourvus de capteurs GPS (Global Positioning System), mais disposent d'une précision insuffisante (de 1 à 5 m) pour estimer directement la position latérale du véhicule sur la chaussée. Il sont utilisés en combinaison avec une carte numérique, qui peut renseigner sur la courbure, le dévers et la pente du virage à venir. Cependant, il n'existe pas encore de standard pour ces cartes, ni de données à grande échelle. Une alternative est l'utilisation de GPS différentiel (D-GPS), procurant une précision centimétrique à une fréquence de 10 Hz. L'étude de trajectoire ainsi que le positionnement précis du véhicule est alors directement possible, mais pour un coût toutefois incompatible avec un équipement de série.

- **Radar** : Un radar longue portée est généralement installé dans l'axe longitudinal du véhicule, ainsi que des radars moyenne portée sur les côtés. Ils permettent une mesure précise de la vitesse et la détection d'obstacles à proximité du véhicule. De plus, une fusion avec les données vision issues des caméras renforce la fiabilité des détections.

- **Gyroscope** : Le gyroscope mesure le taux de lacet (vitesse de rotation du véhicule autour de son axe vertical), qui est une donnée importante de l'état dynamique du véhicule.

- **Accéléromètres** : Les accélérations longitudinales et latérales sont mesurées et renseignent sur les sollicitations dynamiques appliquées au véhicule.

- **Angle de braquage** : Afin de connaître au mieux les actions du conducteur, un codeur installé sur la colonne de direction donne accès à l'angle imposé au volant.

- **Observateurs** : L'intégration de calculateurs et de modèles dynamiques assez simples permet d'évaluer à moindre coût des quantités soit inaccessibles à la mesure, soit nécessitant des capteurs à prix élevé (par exemple : dérive des pneumatiques, dévers de la route, ...).

Il apparait donc que l'intégration à bord du véhicule des systèmes LDWS nécessite de nombreux capteurs, ce qui est un frein majeur à l'implémentation en masse de ces dispositifs.

2) Critères de sécurité

Les critères de sécurité doivent permettre de détecter des situations à risque, i.e. pouvant mener à un accident. Dans notre cas le risque étudié est celui lié à une sortie de voie involontaire. Ceci peut se produire par l'occurrence de plusieurs événements (sollicitation dynamique trop élevée, erreur de guidage, ...) ou de leurs combinaisons. Ainsi de nombreux critères existent dans le domaine de la sécurité routière. Ils sont ici répertoriés par catégorie, selon le type de données auquel ils font appel.

Critères géométriques

Ce sont les critères les plus simples, exprimés directement à partir de la position du véhicule. Ils ont l'inconvénient de ne considérer ni la trajectoire du véhicule ni le profil du virage.

- **Position latérale** : La connaissance de la position latérale d du centre de gravité du véhicule permet de le situer sur la chaussée. On peut ainsi évaluer si le véhicule reste sur sa voie par :

$$d < L_{voie}/2 - b \tag{I.1}$$

  où L_{voie} est la largeur de la voie de circulation et b la demi-largeur du véhicule. De façon analogue aux bandes rugueuses, ce critère ne se déclenche que lorsque la sortie de voie est réalisée, et ne permet donc pas d'anticipation de la part du conducteur. Une alternative, comme indiqué par [Bat99, ISO07, ZXHY08] est de considérer une frontière virtuelle pour avertir le conducteur. Cette frontière peut être située soit à l'intérieur de la voie pour anticiper la sortie de route, mais avec alors un fort risque de fausses alertes, soit à l'extérieur si la présence d'accotements stabilisés et le trafic environnant le permettent.

- **Angle de cap relatif** : Défini par l'angle formé entre l'axe du véhicule et celui de la route, il se réfère donc à une erreur de cap du véhicule possiblement causée par un mauvais guidage du conducteur. Cependant ce critère est peu utilisé dans la littérature, car il ne suffit pas à lui seul à détecter une situation accidentogène. En effet, un couplage entre un angle de cap relatif élevé, une position latérale décentrée et éventuellement une vitesse latérale importante est nécessaire pour une détection robuste des situations dangereuses. Par exemple, [Sen07] propose de déclencher une alerte si l'angle de cap relatif est supérieur à 5° et si le véhicule est excentré de plus de 40 cm.

Critères cinématiques

- **Vitesse longitudinale** : Une importante campagne de mesure a permis au SETRA (Service d'Etudes sur les Transports, les Routes et leurs Aménagements) d'identifier empiriquement des relations entre les vitesses pratiquées et la géométrie de la route [Gam86]. Certaines de ces formules ont récemment fait l'objet de vérifications [LM08]. L'indicateur utilisé est V_{85}, correspondant à la vitesse en dessous de laquelle circulent 85% des VL libres (non gênés par d'autres usagers). Pour un virage de rayon R sur route nationale, on trouve :

$$V_{85} = \frac{102}{1 + 346/R^{1,5}} \tag{I.2}$$

où V_{85} est exprimé en km.h^{-1} et R en m.

En considérant que le contact entre le véhicule et la route suit la loi de frottement de Coulomb, un simple calcul montre que la limite d'adhérence est obtenue pour la vitesse limite V_{adh} donnée par :

$$V_{adh} = \sqrt{Rg\frac{\tan(\delta_r) + \mu}{1 - \mu\tan(\delta_r)}} \tag{I.3}$$

où δ_r désigne l'angle de dévers, μ le coefficient de frottement et g l'accélération de la pesanteur. Cependant, ce modèle simplifié surestime généralement la vitesse admissible, surtout pour les grands rayons de courbure. Ainsi le système d'alerte développé dans [PJT+99] utilise un coefficient de sécurité réglable par le conducteur pour diminuer la vitesse d'alerte.

Un modèle raffiné, considérant la pente i_0 de la route est développé dans [Gla04] :

$$\begin{aligned} V_{max}^2 &= Rg\left((1 - \tfrac{h}{a_f}i_0)\sqrt{1 - \left(\tfrac{i_0}{\lambda_{long}}\right)^2}\lambda_{lat} - \delta_r\right) \text{ , si } i_0 > 0 \\ V_{max}^2 &= Rg\left((1 - \tfrac{h}{a_r}i_0)\sqrt{1 - \left(\tfrac{i_0}{\lambda_{long}}\right)^2}\lambda_{lat} - \delta_r\right) \text{ , si } i_0 < 0 \end{aligned} \tag{I.4}$$

où λ_{long} et λ_{lat} représentent respectivement la quantité d'adhérence mobilisée par le conducteur respectivement en longitudinal et latéral, h est la hauteur du centre de gravité du véhicule et a_f, a_r sont les distances du centre de gravité aux essieux avant et arrière respectivement. Ce modèle nécessite donc des connaissances précises des caractéristiques du véhicule, ainsi qu'une estimation de l'adhérence mobilisée.

Le tableau I.3 compare les vitesses issues des différentes modélisations pour un virage fort (rayon de 150 m) et un virage moyen (rayon de 250 m). La pente i_0 est supposée nulle, la route présente un dévers favorable de 4° conformément aux préconisations SETRA, et le coefficient de frottement est $\mu = 0.9$. On constate que les vitesses issues des modélisations physiques (Eqs. (I.3-I.4)) sont surestimées pour deux raisons. Premièrement, les hypothèses

	V_{85}	V_{adh}	V_{max}
Virage fort ($R = 150$ m)	85.8 km.h^{-1}	140.5 km.h^{-1}	125.9 km.h^{-1}
Virage moyen ($R = 250$ m)	93.8 km.h^{-1}	181.4 km.h^{-1}	162.5 km.h^{-1}

Table I.3 – Comparaison des modèles de vitesse longitudinale

émises dans les modèles (loi de Coulomb, vitesse constante, ...) ne retranscrivent pas la dynamique du véhicule sous des sollicitations élevées. Deuxièmement, un conducteur standard perdra le contrôle de son véhicule avant que les limites de stabilité soient atteintes, donc à des vitesses inférieures. Ces limites doivent donc être implémentées avec un coefficient de sécurité, ce qui complique leur mise en œuvre. A titre de comparaison, les vitesses V_{85} issues de la relation empirique identifiée par le SETRA (Eq. (I.2)) sont largement inférieures à celles issues des modélisations physiques et sont peu dispersées autour de 90 km.h^{-1}. En effet, l'indicateur V_{85} correspond à une vitesse pratiquée et ne reflète pas réellement un risque de perte de contrôle.

- **Accélération latérale** : L'accélération latérale renseigne directement sur les sollicitations dynamiques appliquées au véhicule et donc sur le risque de perte de contrôle. Les véhicules actuels ont généralement des limites de stabilité proches de 7 à 8 m.s^{-2}, cependant 95% des situations de conduite se situent dans l'intervalle [0-3] m.s^{-2} [MBM^{+}05]. Dépasser ces sollicitations correspond alors pour le conducteur à des situations d'inconfort, donc potentiellement dangereuses. Ainsi des valeurs proches de 3 m.s^{-2} sont souvent retenues comme valeurs limites [Sen07, Lec02, Fau97]. Il faut toutefois noter que ces limites sont valables en régime établi, donc que l'effet d'un freinage ou d'une accélération en virage n'est pas pris en compte dans ce critère.

- **Accélération longitudinale** : Une perte de contrôle peut aussi se produire suite à un freinage trop fort en entrée ou milieu de virage, principalement à cause de problèmes de visibilité ou de lecture du virage. Ici aussi, les limites des véhicules actuels sont proches de 10 m.s^{-2}, pourtant le seuil conseillé [PJT^{+}99] est de 1.5 m.s^{-2} afin de conserver des niveaux de sollicitation habituels pour le conducteur.

Critères dynamiques

Cette catégorie de critères porte sur les paramètres régissant directement la dynamique du véhicule. A la différence des critères précédents, les cas potentiels d'instabilité ne sont donc pas déduits de modélisations simplifiées. Par contre ils peuvent nécessiter de nombreux capteurs et les seuils associés sont généralement dépendants de la conception du véhicule.

- **Angle de dérive pneumatique** : Cet angle (voir II.1.2 pour la définition précise et les effets) représente le dérapage du pneumatique, c'est-à-dire l'angle entre l'orientation de la roue et sa vitesse réelle. Un angle de dérive trop important implique des difficultés à maitriser le véhicule, puisque l'on sort alors du domaine linéaire de son comportement. Ce critère est utilisé dans [AFS09] qui propose une limite de 5°. Le prototype utilisé est équipé d'un D-GPS, d'une unité de mesure inertielle, d'une carte numérique et d'un calculateur embarqué. L'angle de dérive est alors estimé à partir des données et d'un modèle simple de véhicule. Le fait de limiter l'angle de dérive à de faibles valeurs garantit la validité du modèle simple de véhicule et permet l'application en temps réel.

- **Gradient de sous-virage** : La maniabilité du véhicule est précisément décrite par le gradient de sous-virage K_{sv}. Il représente l'angle de braquage aux roues β à ajouter selon l'accélération latérale a_y afin de conserver une trajectoire circulaire de rayon R. En effet, lorsque la vitesse (donc l'accélération latérale) augmente, le braquage doit être augmenté pour compenser les différentes flexibilités des pneumatiques et des trains avant et arrière. Il se définit par la formule [Ryu04] :

$$K_{sv} = \frac{\partial \beta}{\partial a_y} = \frac{W_f}{C_f} - \frac{W_r}{C_r}$$

où W_f et W_r représentent les charges verticales appliquées aux essieux avant et arrière respectivement, et C_f et C_r les raideurs de dérive des pneumatiques avant et arrière respectivement. Le gradient K_{sv} s'exprime en $°/g$, et les valeurs usuelles des véhicules légers sont de 2 à $3°/g$. Une valeur positive de K_{sv} représente un comportement sous-vireur du véhicule (le braquage β doit être augmenté pour conserver la même trajectoire) et inversement $K_{sv} < 0$ indique un comportement survireur. Un seuil sur K_{sv} ne peut être directement appliqué pour détecter des situations dangereuses puisque les valeurs nominales de K_{sv} varient d'un véhicule à l'autre. Par contre, une variation trop importante de K_{sv} signifie un changement notable du comportement du véhicule difficile à appréhender par le conducteur standard donc potentiellement dangereux.

Critères combinés

Cette catégorie de critère, mêlant plusieurs critères des catégories précédentes, est généralement implanté dans les LDWS afin de minimiser le taux de fausses alertes.

- **TLC (Time to Lane Crossing)** : Le TLC représente le temps restant avant que le véhicule ne franchisse les limites de sa voie de circulation. De la même manière que pour le critère de position latérale, une frontière virtuelle peut ici aussi être substituée à la frontière réelle de la voie (Fig. I.4). Plusieurs hypothèses peuvent être adoptées sur la nature

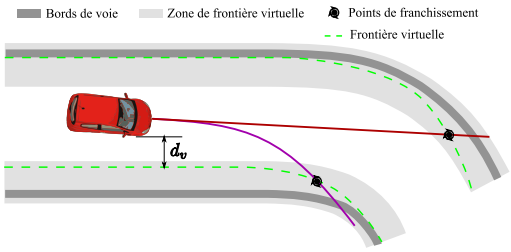


Figure I.4 – Différents algorithmes TLC et points de franchissement associés

de la trajectoire future du véhicule et du profil de la route [PJT+99]. Les plus couramment utilisées sont une trajectoire rectiligne (à vitesse latérale v_y constante) correspondant à un braquage nul, ou une trajectoire circulaire (à accélération latérale a_y constante) correspondant à un braquage constant, sur une route supposée droite. Les TLC ainsi évalués, notés respectivement $\mathrm{TLC^r}$ et $\mathrm{TLC^c}$, sont donnés par :

$$\mathrm{TLC^r} = \frac{d_v}{v_y} \quad , \quad \mathrm{TLC^c} = \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2a_y d_v}}{a_y}$$

où d_v est la distance entre le centre de gravité du véhicule et la ligne frontière la plus proche. Le TLC est donc une fonction de paramètres cinématiques de la trajectoire. Une alerte doit être déclenchée si le TLC évalué est inférieur au temps de réaction du conducteur. Le seuil de 1.5s correspond au temps pour lequel 98% de la population réagit. Ce critère a montré de bons résultats pour les problèmes d'assoupissement sur les autoroutes américaines [LSW+06], pour lesquelles les courbures des virages sont faibles, les voies larges et l'accotement stabilisé important. L'application de ce critère sur des routes secondaires en France avec des virages potentiellement serrés et des accotements stabilisés réduits semble difficile. Il est en effet quasiment impossible sur ce type de route de rester inactif plus d'une seconde sans sortir de sa voie.

- **CSW (Curve Speed Warning)** : Ce critère est basé sur la vitesse maximale V_{max} (calculée par exemple par Eqs. (I.2)-(I.4)) de passage en courbe et l'accélération longitudinale admissible. Etant donnée la vitesse V du véhicule mesurée à une distance d de l'entrée du virage, du temps t_r de réaction du conducteur, pour négocier le virage à la vitesse V_{max} il faudra appliquer au véhicule une décélération a donnée par :

$$a = \frac{V^2 - V_{max}^2}{2(d - t_r V)}$$

Le temps de réaction sera ici aussi pris égal à 1.5 s, et la décélération a comparée au seuil de 1.5 $\mathrm{m.s^{-2}}$. La pertinence des alertes fournies dépendra alors de la pertinence de l'évaluation de la vitesse maximale V_{max}.

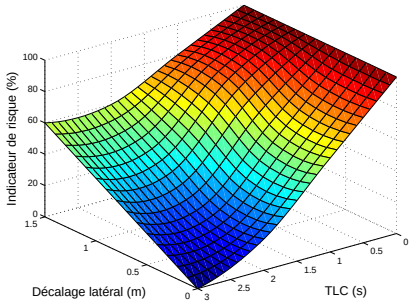


Figure I.5 – Indicateur de risque déduit de logique floue, selon [KO03]

- **Logique floue** : Une des principales causes des fausses alertes provient de l'utilisation de seuils fixes dans les critères de sécurité qui sont inadaptés aux caractéristiques propres de chaque conducteur. Quelques études tentent de contourner ce problème en basant la décision d'alerte sur des algorithmes de logique floue. Börner et Isermann [BI06] proposent d'identifier la situation actuelle de conduite (neutre, sousvirage, survirage, instable), à partir de cinq signaux mesurés : angle de braquage, vitesse, taux de lacet, accélérations longitudinale et latérale. Différentes alarmes peuvent alors être émises pour informer le conducteur. Cependant, le choix des fonctions de transition dans l'algorithme de logique floue est toujours arbitraire. Afin de s'adapter réellement à chaque conducteur, [KO03] propose un indicateur de risque basé à la fois sur le critère de position latérale et le TLC. La valeur de l'indicateur, donc la forme de la surface de la figure I.5 est identifiée pour chaque conducteur sur des sorties de routes intentionnelles sur simulateur. Ceci permet de minimiser les fausses alertes pour des conducteurs conduisant proche du bord de voie, ou oscillant dans leur voie. Cependant, cette approche est aussi basée sur des règles déterministes d'évolution du risque.

Cet aperçu des critères de sécurité couramment utilisés montre les limites d'applicabilité des critères simples ainsi que les difficultés de mise en œuvre des critères plus évolués. De plus, l'utilisation de seuils de sécurité fixes conduit à un nombre élevé de fausses alertes liées à la définition de ce seuil [MBM+05]. L'application de méthodes probabilistes considérant les incertitudes inhérentes au conducteur, au véhicule et à l'infrastructure permet de contourner ces contraintes. Cette approche nécessite alors un couplage entre une approche mécanique déterministe et la théorie des probabilités. Les études de ce type appliquées à la dynamique du véhicule sont recensées dans la section suivante.

I.3 Etudes de dynamique stochastique du véhicule

La modélisation de certains paramètres du modèle dynamique par des variables ou processus aléatoires doit permettre une représentation fidèle de la propagation des incertitudes à travers le modèle. Ce choix de modélisation s'effectue en réalisant une analyse de sensibilité [SCS04, Sob01], qui détermine les paramètres les plus influents sur la variabilité de la sortie du modèle. Les méthodes d'analyse de sensibilité sont détaillées dans le chapitre III. Une application est proposée par [CJS05] sur la tendance au renversement des SUV (Sport Utility Vehicles). L'analyse menée a permis d'identifier parmi 19 paramètres envisagés les 11 prépondérants, et de quantifier leur influence. Ceci constitue un avantage évident pour améliorer la conception des SUV, dont la forte propension au renversement est responsable de 30% des accidents mortels sur autoroute aux Etats-Unis. Cette réduction du nombre de variables aléatoires permet de plus un gain important en termes de temps de calcul pour l'application de méthodes fiabilistes, en vue de calculer un indice de risque.

Un comparatif de méthodes probabilistes (Monte-Carlo, linéarisation stochastique, chaos polonymial) appliqué à un quart de véhicule composé d'une roue, d'un système de suspension et d'une masse suspendue est réalisé dans [SSA06a, SSA06b]. Les incertitudes sont prises en compte par des variables aléatoires (raideurs et coefficient d'amortissement du pneumatique et de la suspension) et un processus aléatoire modélisant les aspérités de la chaussée. Cependant l'étude est axée sur la simulation de systèmes dynamiques complexes avec incertitudes, et l'impact sur la trajectoire du véhicule n'est pas analysé.

Le même modèle de quart de véhicule est utilisé dans [GZD08], considérant aussi aléatoires les caractéristiques des suspensions et le chargement dû à la route. Une méthode de Monte-Carlo est mise en œuvre pour caractériser la variabilité de la réponse dynamique du système aléatoire, en termes de fréquences propres et modes propres. Ensuite, l'effet des paramètres aléatoires sur la réponse en déplacement vertical du véhicule est étudié par *Random Factor Method* (RFM), et comparé à une méthode de Monte-Carlo. Cette méthode consiste à modéliser l'aléa présent sur les paramètres d'entrée et la sortie du modèle par leur valeur moyenne multipliée par un facteur aléatoire. Utilisée sur un simple modèle de quart de véhicule à deux degrés de liberté, cette méthode permet une expression intégrale de la moyenne quadratique du déplacement du véhicule, estimée numériquement. Le temps de calcul est alors fortement réduit par rapport à la méthode de Monte-Carlo.

Une approche fiabiliste a été réalisée dans [SBS07] afin d'estimer la stabilité des véhicules en environnement venteux en Islande, phénomène qui pourrait causer jusqu'à 20% des accidents dans les zones exposées. Le critère de sécurité utilisé vérifie qu'aucune des roues n'est à la limite

du glissement relativement à un modèle de Coulomb :

$$f = \min_{i\in[1,4]} \mu N_i - \sqrt{F_y^2 + (F_x + F_R)^2}$$

où F_y est la force latérale totale, F_x la force aérodynamique longitudinale, F_R la résistance au roulement. La résultante horizontale est alors comparée à l'adhérence disponible sur la roue la moins chargée $\min_{i\in[1,4]} \mu N_i$, avec N_i la force normale sur la roue i. Ainsi le cas $f > 0$ signifie qu'il n'y a pas de glissement, $f = 0$ lorsque la limite de glissement est atteinte, et quand $f < 0$ la roue glisse et le véhicule n'est plus en situation stable. L'indicateur de risque utilisé est l'indice d'Hasofer-Lind β_{HL}, et la probabilité d'accident P_f est évaluée selon une approximation linéaire FORM. Cinq variables aléatoires sont considérées (vitesse et direction du vent, coefficient de frottement, dévers de la route et vitesse du véhicule), mais l'indice de risque est calculé en considérant alternativement deux variables aléatoires, les trois autres étant fixées à leur moyenne. Les couplages pouvant exister entre les cinq paramètres supposés aléatoires ne sont donc pas pris en compte, ce qui conduit potentiellement à une sous-évaluation du risque.

Les travaux les plus proches de notre problématique sont présentés dans [Sel08], et visent à détecter une situation de risque de reversement d'un poids lourd. L'évaluation du risque est fondée sur la prise en compte des incertitudes du système véhicule-conducteur-infrastructure, et l'application de méthodes fiabilistes permet le calcul de la probabilité de violer les critères de sécurité en temps réel. Le critère de sécurité utilisé est le LTR (*Load Transfer Ratio*), exprimé par :

$$LTR = \frac{N_d - N_g}{N_d + N_g}$$

où N_d et N_g représentent la somme des forces verticales appliquées respectivement aux côtés droit et gauche du poids lourd. Ce rapport varie entre -1 et $+1$, et ces valeurs extrêmes indiquent le décollement des roues d'un des côté du véhicule. Le LTR est évalué par le biais d'un modèle dynamique de poids lourd composé de deux corps rigides, comportant 4 degrés de liberté. Trois applications sont envisagées :

- Prédiction à long terme (un passage de virage) : un profil de braquage est imposé en entrée du modèle, la probabilité que le LTR prenne les valeurs ± 1 le long de la trajectoire est évaluée par les méthodes FORM, SORM et surface de réponse. Sept variables aléatoires sont prises en compte : la hauteur du centre de gravité, les raideurs de pneumatiques avant et arrière, le coefficient d'adhérence, la masse suspendue et les vitesses en milieu et sortie de courbe.

- Prédiction à court terme (de 1 à 3 s) : A partir de la valeur de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL}(t)$ à l'instant t, la valeur au pas suivant $\beta_{HL}(t + \Delta t)$ est estimée par un filtre de

type ARMA. Ici, seulement la hauteur du centre de gravité et la masse suspendue sont aléatoires.

- Modélisation empirique du risque : cette démarche consiste à remplacer le modèle dynamique de poids lourd et le calcul de critère de sécurité par un méta-modèle calculant la valeur du LTR en fonction des valeurs des paramètres d'entrée aléatoires et déterministes. Ainsi le calcul fiabiliste, ne faisant plus appel au modèle mécanique complet, est plus rapide. Ce méta-modèle est calculé par SVM, pour deux variables d'entrée (la vitesse et la hauteur du centre de gravité).

En résumé de cet état de l'art des études d'accidentologie, des systèmes de prévention de sortie de route et des études dynamiques stochastiques, les points suivants sont retenus afin d'élaborer la méthodologie de ce travail :

- Les études d'accidentologie révélant différents scénarios menant à des sorties de route, plusieurs critères de sécurité adaptés doivent être utilisés.
- La mise au point de dispositifs embarqués de prévention de sortie de route a conduit à la définition de critères de sécurité de plus en plus évolués, rendant parfois leur mise en œuvre difficile. L'utilisation de trajectoires simulées pour la négociation du virage permet d'implanter facilement plusieurs catégories de critères.
- La définition des seuils de sécurité est rendue délicate par les incertitudes provenant du conducteur, du véhicule te de l'infrastructure. Une méthodologie basée sur une approche probabiliste permet est nécessaire pour compte de ces variabilités.
- Le choix du nombre optimal de paramètres aléatoires dans le modèle mécanique doit être fixé à l'aide d'une analyse de sensibilité afin de garantir la représentativité de la propagation des incertitudes et d'optimiser le temps de calcul.
- Des indices de risque peuvent alors être calculés par des méthodes fiabilistes. Les méthodes de Monte-Carlo, faciles à mettre en œuvre, présentent l'inconvénient d'un coût de calcul incompatible avec l'application à l'échelle nationale d'une telle méthodologie. Des méthodes d'approximation doivent alors être adaptées aux spécificités de cette application.

I.4 Méthodologie proposée

Le domaine d'application de cette étude concerne les virages en rase campagne, considérés dangereux soit par leur tracé, soit par une signalisation inadaptée. L'avancée attendue est le développement d'un système de signalisation dynamique, c'est à dire délivrant des signaux variables

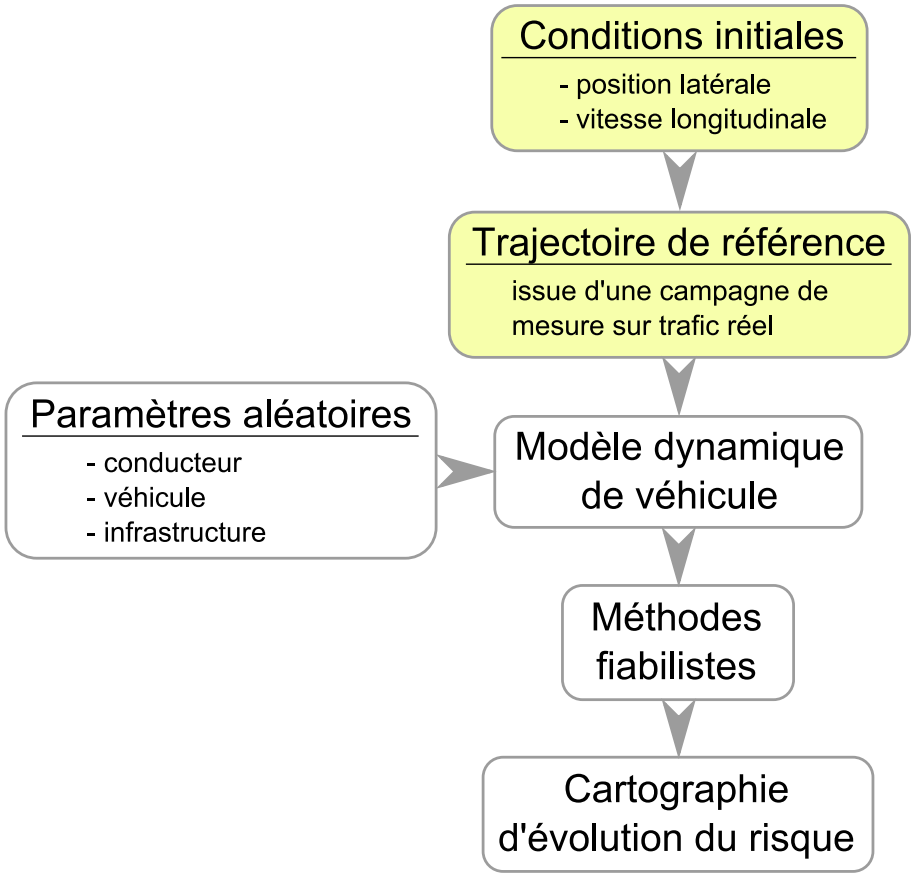


Figure I.6 – Méthodologie proposée menant à une cartographie du risque

en fonction du niveau de risque encouru par le véhicule arrivant. Ce type de message dynamique permet d'éviter un surnombre de panneaux de signalisation routière, dont le caractère permanent entraîne une perte d'efficacité de leur fonction préventive [VSD10]. Les accidents visés sont de type « sortie de voie en virage » pour lesquels un seul véhicule est impliqué dans l'origine de l'accident, même si plusieurs véhicules peuvent être touchés par la suite. L'aspect original de l'approche développée dans le cadre du projet SARI/RADARR consiste à disposer les moyens de mesure et d'alerte en bord de voie. Ainsi, une fois qu'un virage considéré dangereux est équipé, tous les véhicules se présentant à l'entrée de ce virage sont pris en compte.

La méthodologie proposée ici est basée sur les méthodes fiabilistes classiques [DM96] (initialement employées dans le domaine du génie civil) qui permettent le calcul direct d'indices de risque, ce qui constitue un avantage majeur pour la décision du déclenchement d'alertes. Le détail de ces méthodes est donné dans le chapitre IV. Le résultat attendu est une cartographie d'évolution du risque en fonction des conditions initiales du véhicule se présentant à l'entrée du virage. Les étapes menant à cette estimation du risque sont détaillées dans l'organigramme de la figure I.6.

Le caractère dangereux de la trajectoire doit être déterminé dès l'entrée du virage afin de prévenir le conducteur suffisamment tôt pour qu'il puisse réagir. Le dispositif de mesure des conditions initiales, placé en bord de voie, renseigne sur la position latérale et la vitesse longitudinale du véhicule se présentant à l'entrée du virage.

Une trajectoire de référence est associée à ces conditions initiales. Cette trajectoire représente la trajectoire qu'aurait suivi un conducteur standard pour la négociation du virage, et sert d'entrée au modèle dynamique du véhicule. Ces deux premières étapes nécessitent des données expérimentales.

Un modèle dynamique de véhicule est alors spécifiquement développé pour la simulation de trajectoires de passage en virage sur lesquelles sont évaluées des critères de sécurité. Les trajectoires simulées retranscrivant des conditions de conduite usuelles, les sollicitations dynamiques engendrées ne sont donc pas élevées. La modélisation adoptée, basée sur un modèle *lacet-dérive-roulis* amélioré, permet des résultats précis tout en conservant un temps de calcul réduit.

Par une modélisation probabiliste adaptée, des paramètres aléatoires sont ensuite introduits dans le modèle de véhicule. Ces paramètres sont sélectionnés par une analyse de sensibilité, et concernent les actions du conducteur, les caractéristiques du véhicule ainsi que de l'infrastructure. La sortie du modèle dynamique est alors une famille de trajectoires, aléatoirement réparties autour de la trajectoire de référence.

Des indices de risque peuvent être calculés par l'application de méthodes fiabilistes sur cette famille de trajectoires. Ces indices quantifient la probabilité de violer des critères de sécurité prédéfinis et sont donc une représentation du risque encouru par le conducteur en entrée de virage. La répétition de ce calcul pour différentes conditions initiales permet d'établir une cartographie d'évolution du risque, qui constitue un outil d'aide à la décision efficace pour le déclenchement d'alerte.

Dans le domaine de la fiabilité des structures, le risque est combinaison à la fois de la probabilité de l'occurrence d'un évènement et de sa gravité (par ex. conséquence en termes de dommages humains, économiques, environnementaux, ...). Dans cette étude, nous nous restreindrons à l'évaluation de la probabilité d'occurrence des accidents de type sortie de route. Le terme risque sera alors utilisé pour désigner cette probabilité, pour rester cohérent avec la notion d'indice de risque utilisée dans le domaine de la sécurité routière.

Chapitre II

Modélisation déterministe

II.1 Modèle dynamique de véhicule

L'objectif de ce chapitre est de développer un modèle dynamique de véhicule afin de simuler des trajectoires de passage en virage, dont certaines doivent retranscrire des situations de conduite potentiellement dangereuses. La gamme de sollicitations dynamiques simulées correspond aux sollicitations couramment rencontrées dans le trafic réel. En effet, on ne s'intéresse pas ici à la simulation d'accidents, mais à l'évaluation de critères de sécurité dont les seuils se situent loin des limites de stabilité des véhicules. Le recours à des méthodes fiabilistes pour estimer des indices de risque peut nécessiter un nombre conséquent de simulations, ce qui impose un temps de calcul réduit. Pour ces raisons, le modèle proposé est basé sur le modèle *lacet-dérive-roulis* comportant trois degrés de liberté, dont l'expression générale est développé dans [Bro06]. Un tel modèle retranscrit fidèlement les phénomènes dynamiques, pour un coût numérique faible par rapport à un modèle multicorps [BH04]. Nous proposons une forme améliorée de ce modèle permettant de considérer une vitesse variable, ainsi que l'uni réel de l'infrastructure (pente et dévers). Des raffinements sont également apportés sur le modèle d'interaction pneumatique/chaussée et sur le modèle de suspensions.

II.1.1 Paramétrage et hypothèses

Le véhicule est modélisé par un système à 3 degrés de liberté, à savoir l'angle de lacet θ, l'angle de dérive α et l'angle de roulis φ, qui sont définis sur les figures II.1 et II.2. La particularité de ce modèle est le repérage totalement angulaire qui donne accès directement à l'état dynamique du véhicule. Notons qu'avec ce repérage la détermination explicite de la trajectoire suivie par le véhicule nécessite un calcul supplémentaire, détaillé dans la partie II.1.3.

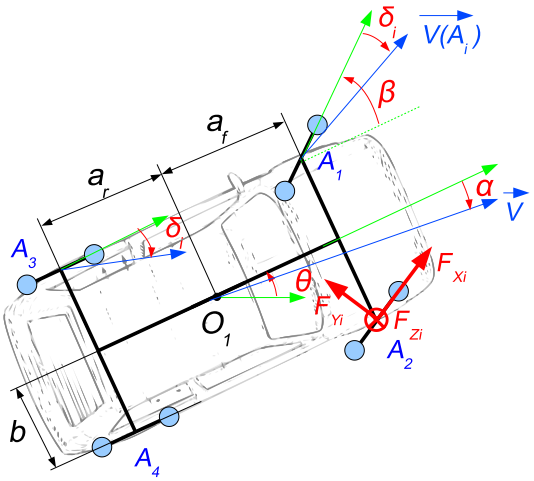


Figure II.1 – Vue de dessus

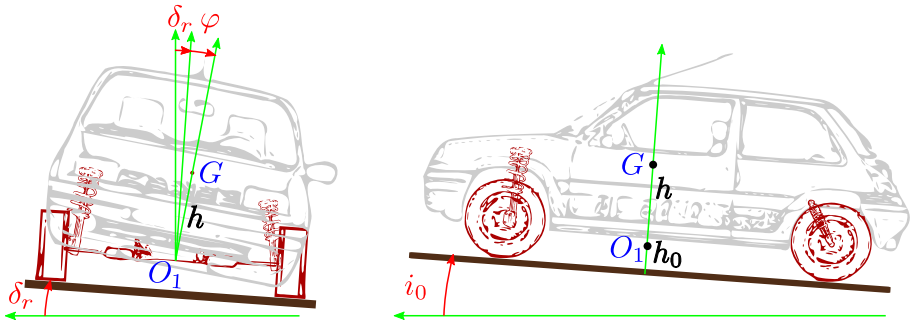


Figure II.2 – Vue de face et de côté

La figure II.1 représente un véhicule vu de dessus. Le conducteur agit sur la trajectoire par le biais du volant, en appliquant l'angle de braquage β, et en actionnant les pédales d'accélérateur et de frein, modifie ainsi les forces tangentielles $F_{Xi,i\in[1,4]}$ appliquées aux roues. Seules les roues avant sont supposées directrices, et on considère que le même braquage est appliqué à la roue droite et à la roue gauche. L'orientation du véhicule est repérée par l'angle θ et sa vitesse par le vecteur $\boldsymbol{V}$. Le point O_1 est défini sur la figure II.2 comme la projection du centre de gravité (CdG) G sur l'axe de roulis, positionné à une distance h_0 du sol et h du point G. Le modèle de suspensions, supposé admettre uniquement un mouvement de roulis, est détaillé dans la section II.1.2. On remarque que la vitesse du véhicule $\boldsymbol{V}$ n'est pas alignée avec son axe longitudinal, mais forme avec ce dernier un angle α, appelé angle de dérive. Cet effet, causé par la déformation des pneumatiques est modélisé dans la section II.1.2. On se place dans le cas où le véhicule est sur une route de pente i_0 et de dévers δ_r. Tous les angles entrant en jeu dans ce modèle, excepté l'angle de lacet θ, sont considérés comme petits et par conséquent toutes les fonctions trigonométriques de ces angles seront linéarisées au premier ordre.

Les forces extérieures considérées sont :

- **Pesanteur** : La masse totale embarquée M est concentrée au centre de gravité G. Les masses des essieux sont supposées négligeables.
- **Aérodynamique** : Seule la composante longitudinale est prise en compte.
- **Contact pneumatique/chaussée** : On ne s'intéresse ici qu'aux efforts transmissibles par le contact, primordiaux dans le guidage du véhicule. Les moments sont négligés, ainsi trois forces F_{Xi}, F_{Yi}, F_{Zi} pour chaque roues $i \in [1,4]$ sont appliquées aux points de contact A_i. Les relations d'évolution entre ces forces sont données par la modélisation du pneumatique. On considère de plus que les systèmes de freinage et de différentiel sont correctement équilibrés, d'où $F_{X1} = F_{X2}$ et $F_{X3} = F_{X4}$.

II.1.2 Modèle de contact et de suspensions

1) Modèle de contact pneumatique/chaussée

Les pneumatiques sont les seuls points de contact du véhicule avec le sol. Ils doivent donc assurer des fonctions essentielles telles que guider le véhicule, supporter la charge, amortir les irrégularités de la route, tout en assurant une durée de vie acceptable. Par conséquent la prise en compte de leur comportement un point clé dans la modélisation de la dynamique du véhicule. De nombreux travaux sont consacrés à la modélisation du comportement des pneumatiques, les plus précis étant basés sur des modèles dynamiques [AdW08], voire couplés à un modèle éléments finis [Gip05]. Ces modèles sont très coûteux en temps de calcul et nécessitent de connaître la valeur de plusieurs centaines de paramètres inaccessibles sans moyen d'essais. L'étude comparative réalisée dans [Nad07] montre que pour la gamme de sollicitations considérée dans notre application, le recours à de tels modèles n'est pas nécessaire. C'est pourquoi nous avons opté pour des formulations statiques tenant compte de trois phénomènes majeurs dans la modélisation des forces de contact.

Phénomène de dérive

Lors de la prise de virage se produit un phénomène de dérive en raison de la déformation de la bande de roulement du pneumatique. La vitesse réelle au point de contact A_i de chaque roue forme un angle δ_i, appelé angle de dérive du pneumatique (voir Fig. II.1). Grâce à cette déformation, le pneumatique exerce des forces latérales sur la chaussée qui permettent le guidage du véhicule. La figure II.3 illustre l'allure d'un relevé expérimental de la force de dérive F_{Yi} en fonction de la dérive δ_i. On observe que cette évolution est rapidement non-linéaire, et comporte

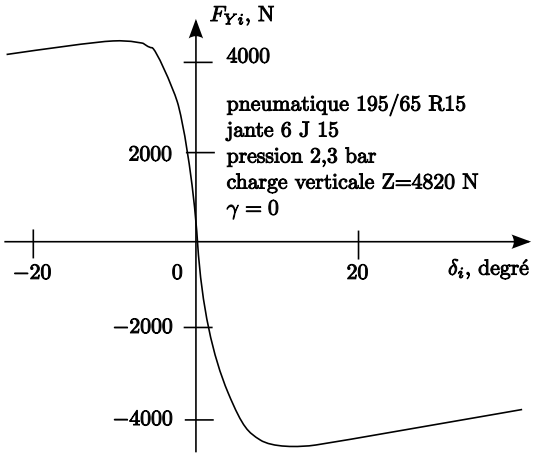


Figure II.3 – Force latérale en fonction de la dérive, selon [Bro06]

un maximum. Les modélisations usuelles considérant que la rigidité de dérive du pneumatique est constante sont donc rapidement inadaptées lorsque les sollicitations dynamiques augmentent.

Pour modéliser ces non-linéarités, nous adoptons ici le modèle de Pacejka [Pac02] fréquemment rencontré dans la littérature qui ne nécessite que peu de paramètres. Les forces latérales F_{Yi} sont exprimées par :

$$F_{Yi} = -D \sin\left[C \arctan\left(B(1-E)\delta_i + E \arctan\left(B\delta_i\right)\right)\right] \tag{II.1}$$

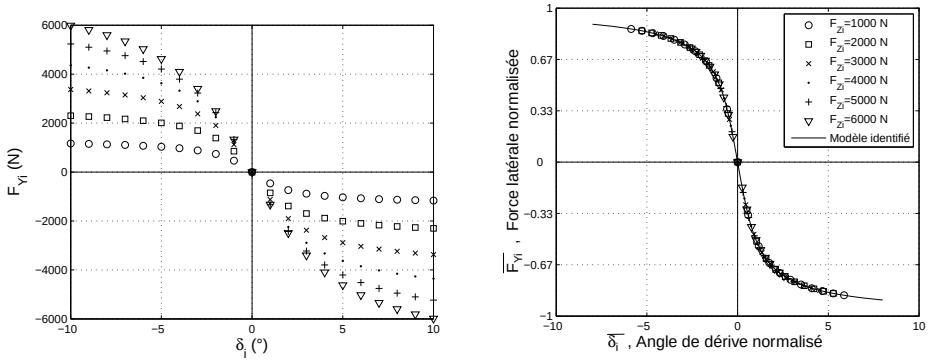
où B, C, D, E sont quatre paramètres à identifier. Un simple calcul cinématique permet de déduire l'angle de dérive du pneumatique à partir des paramètres du modèle :

$$\delta_1 = \delta_2 = \alpha + a_f \dot{\theta}/V - \beta \tag{II.2}$$

$$\delta_3 = \delta_4 = \alpha - a_r \dot{\theta}/V \tag{II.3}$$

Effet des forces normales

La raideur de dérive d'un pneumatique est fortement influencée par la force normale F_{Zi} qui lui est appliquée. Concrètement cela se traduit par la dépendance des paramètres B, C, D et E de (II.1) à la force normale. Lors de la prise de virage, on observe des transferts de masse de l'intérieur vers l'extérieur (par la force centrifuge), ainsi que de l'avant vers l'arrière (lors de phases de freinage ou d'accélération). Il est donc important de tenir compte de ces effets dans notre application.



a) b)

Figure II.4 – Evolution des forces latérales pour différentes charges normales (a), et avec variables adimensionnées (b)

Le modèle choisi ici [RM83] est basé sur une adimensionalisation de δ_i et F_{Yi} par rapport à la force normale F_{Zi}. Ces variables adimensionnées, notées $\overline{\delta}_i$ et $\overline{F}_{Yi}$ sont données par :

$$\overline{\delta}_i = \frac{c_1 c_2 F_{Z0} \sin\left(2 \arctan\left(\frac{F_{Zi}}{c_2 F_{Z0}}\right)\right)}{\mu F_{Zi}} \cdot \tan \delta_i$$

$$\overline{F}_{Yi} = \frac{F_{Yi}}{\mu F_{Zi}}$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne dépend que de trois paramètres, F_{Z0} étant la charge nominale du pneumatique, et c_1, c_2 décrivant l'évolution de la raideur de dérive en foncion de la charge.

Une fois les variables adimensionnalisées, les lois de comportement pour différentes charges F_{Zi} sont confondues (Fig. II.4). On identifie alors les coefficients adimensionnés B', C', D', E' de la formule de Pacejka :

$$\overline{F}_{Yi} = -D' \sin\left[C' \arctan\left(B'(1-E')\overline{\delta_i} + E' \arctan\left(B'\overline{\delta_i}\right)\right)\right]$$

Couplage longitudinal/latéral

L'existence d'une force longitudinale F_{Xi} (par des actions d'accélération ou de freinage) diminue la force latérale transmissible, donc la capacité de guidage du véhicule. Ce phénomène cause des pertes de contrôle lorsqu'un freinage trop important est appliqué en entrée de virage.

Ce couplage entre force longitudinale et force latérale est pris en compte ici par un simple modèle de frottement de Coulomb permettant une représentation correcte du comportement du véhicule jusqu'à la limite de la stabilité [Bro06]. Il s'agit donc ici de vérifier que la résultante

horizontale reste dans le cercle d'adhérence, défini par le coefficient d'adhérence μ. Ceci est assuré par un coefficient multiplicateur par roue φ_{xi}, défini par :

$$\varphi_{xi} = \sqrt{\mu^2 F_{Zi}^2 - F_{Xi}^2}/\mu F_{Zi}$$

Lorsque le freinage appliqué requiert toute l'adhérence ($F_{Xi} = \mu F_{Zi}$), alors le coefficient φ_{xi} est nul. Dans ce cas $F_{Yi} = 0$ et le véhicule est alors en trajectoire rectiligne. Le cas $F_{Zi} = 0$ correspond au cas où la roue est décollée, donc automatiquement la force latérale F_{Yi} est aussi nulle. Ceci ne pose donc pas de problème dans la définition de φ_{xi}.

En tenant compte des trois modèles présentés, l'expression finale de la force latérale s'écrit donc :

$$F_{Yi} = \varphi_{xi}\mu F_{Zi}\overline{F_{Yi}}(\overline{\delta_i}) \tag{II.4}$$

Effets négligés

Le carrossage est l'angle entre la roue et le plan perpendiculaire au sol suivant l'axe longitudinal du véhicule. Il influe donc directement sur la surface de contact entre le pneumatique et la chaussée. Cet effet n'a pas été modélisé ici car les modèles disponibles dans la littérature font intervenir trop de paramètres pour l'application ciblée. Pour les mêmes raisons, les effets de la pression du pneumatique, ainsi que les phénomènes thermiques sont négligés. Ces hypothèses de modélisation sont compatibles avec la gamme de sollicitation dynamique modérée de l'application visée.

2) Modèle de suspensions

De par le choix du modèle à 3 degrés de liberté, le seul mouvement autorisé pour les suspensions est le roulis. C'est à dire que les sollicitations de tangage et de pompage sont négligées, ce qui se justifie par le fait qu'elles interviennent peu dans la dynamique latérale du véhicule. Contrairement à une idée répandue, l'effet des suspensions sur le transfert de charge est assez limité, le déplacement effectif du centre de gravité du véhicule étant faible. L'effet principal de la suspension sur la dynamique du véhicule concerne la modification de sa géométrie lors du débattement, modélisé ici par le phénomène de braquage induit.

Ressorts et amortisseurs

La fonction première de la suspension consiste à assurer la tenue de route et le confort des usagers par le biais de l'action de ressorts, amortisseurs et barres anti-roulis. Ces éléments assurent la liaison entre les trains avant et arrière, et la caisse du véhicule. Les raideurs de roulis des trains avant et arrière $K_{\varphi f}$ et $K_{\varphi r}$ sont alors données par :

$$K_{\varphi f} = 2b^2 k_f + c \ , \ K_{\varphi r} = 2b^2 k_r \tag{II.5}$$

où k_f, k_r et c sont respectivement les raideurs des ressorts avant et arrière et de la barre anti-roulis, b étant la demi-voie du véhicule. De la même façon, les coefficients d'amortissement en roulis avant et arrière $b_{\varphi f}$ et $b_{\varphi r}$ sont donnés par :

$$b_{\varphi f} = 2b^2 b_f \ , \ b_{\varphi r} = 2b^2 b_r \tag{II.6}$$

où b_f et b_r sont les coefficients d'amortissement linéaires. La raideur de roulis équivalente K_φ et l'amortissement de roulis équivalent b_φ sont alors définis comme la somme des valeurs avant et arrière :

$$K_\varphi = K_{\varphi f} + K_{\varphi r} \ , \ b_\varphi = b_{\varphi f} + b_{\varphi r}$$

Parallélisme

Le réglage du parallélisme des trains avant et arrière permet d'optimiser le comportement dynamique du véhicule. Cette opération consiste à introduire un angle entre les roues d'un même train. En général, on introduit un angle de pincement δ_r^0 (les lignes suivant les axes des roues tendent à se croiser devant le train) pour le train arrière afin de limiter le survirage. Au contraire, le train avant présente souvent un angle d'ouverture δ_f^0 (les lignes suivant les axes des roues tendent à se croiser derrière le train), toujours pour améliorer la stabilité et compenser le pincement provoqué par le couple appliqué lors des phases d'accélération.

Braquage induit

Lors de la compression de la suspension, sa cinématique induit une modification des angles de carrossage et de braquage. Etant donné la modélisation choisie pour le pneumatique, on ne considère ici que le braquage induit par le roulis. Là encore, ces effets sont aujourd'hui maîtrisés et recherchés par les constructeurs car ils permettent une meilleure stabilité du véhicule. Les braquages induits sont considérés comme linéaires par rapport à l'angle de roulis φ [Gil02]. Ils sont introduits dans le modèle par un terme supplémentaire dans les angles de dérive des

pneumatiques δ_i, avec deux coefficients ϵ_f et ϵ_r se rapportant respectivement aux trains avant et arrière.

En tenant compte du réglage de parallélisme et des braquages induits, (II.2) et (II.3) deviennent alors :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \alpha + a_f\dot{\theta}/V - (\beta - \epsilon_f\varphi) - \delta_f^0 \\
\delta_2 &= \alpha + a_f\dot{\theta}/V - (\beta - \epsilon_f\varphi) + \delta_f^0 \\
\delta_3 &= \alpha - a_r\dot{\theta}/V - \epsilon_r\varphi + \delta_r^0 \\
\delta_4 &= \alpha - a_r\dot{\theta}/V - \epsilon_r\varphi - \delta_r^0
\end{aligned}$$

II.1.3 Formulation et résolution du problème

1) Equations dynamiques

L'équation du mouvement relie les paramètres du système $\alpha, \theta, \varphi, V$ aux commandes du conducteur notées $\boldsymbol{u} = (\beta, F_{X1}, F_{X2}, F_{X3}, F_{X4})^T$. Le choix du vecteur d'état $\boldsymbol{x_s} = (\alpha, \dot{\theta}, \varphi, \dot{\varphi}, V)^T$ permet de se ramener à un système du premier ordre de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{s}}(t) = A^{-1}(\boldsymbol{x_s}(t))F(\boldsymbol{x_s}(t), \boldsymbol{u}(t)) \ , \ t > 0 \\ \boldsymbol{x_s}(0) = \boldsymbol{x_{s0}} \end{cases} \tag{II.7}$$

avec :

$$A(\boldsymbol{x_s}) = \begin{bmatrix} M\alpha V & 0 & 0 & 0 & M \\ MV & 0 & -Mh & 0 & M\alpha \\ 0 & I_{ZZ} & I_{XZ} & 0 & Mh\varphi \\ -MhV & I_{XZ} & I_{XX}+Mh^2 & 0 & -Mh\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad F(\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} M\alpha V\dot{\theta} + \sum_{i=1}^4 F_{Xi} - \frac{\rho}{2}SC_xV^2 + Mgi_0 \\ -MV\dot{\theta} + \sum_{i=1}^4 F_{Yi} + Mg\delta_r \\ a_f(F_{Y1}+F_{Y2}) - a_r(F_{Y3}+F_{Y4}) \\ MhV\dot{\theta} - (K_\varphi - Mgh)\varphi - b_\varphi\dot{\varphi} - Mgh\delta_r \\ 1000\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

Notons que le terme 1000 sur la dernière ligne de la matrice A est un artifice numérique qui permet d'améliorer son conditionnement. Les valeurs numériques des paramètres, correspondant à une Peugeot 406, sont disponibles dans le tableau II.1. Après la discrétisation temporelle, la résolution pas à pas est effectuée numériquement par une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux avec un pas de temps de 1/40 s. Le modèle a été développé en langage Matlab ainsi qu'en Fortran. Pour une trajectoire de 200 points, l'exécution du modèle nécessite 8 ms sous Matlab et seulement 0.8 ms sous Fortran, sur un PC standard de 2 GHz. Ces temps de calcul extrêmement faibles comparés à des simulateurs complet de véhicule permettent l'analyse fiabiliste du système.

Paramètre	**Symbole**	**Unité**	**Valeur**
Dimensions			
Distance du CdG au train avant	a_f	m	1.167
Distance du CdG au train arrière	a_r	m	1.532
Demie-voie du véhicule	b	m	0.75
Hauteur du CdG	$h + h_0$	m	0.537
Hauteur de l'axe de roulis	h_0	m	0.253
Masses et Inerties			
Masse totale embarquée	M	kg	1610
Moment d'inertie longitudinal	I_{XX}	Kg.m^2	416
Moment d'inertie vertical	I_{ZZ}	Kg.m^2	3015
Produit d'inertie	I_{XZ}	Kg.m^2	-65
Suspensions			
Raideur équivalente	K_φ	Nm.rad^{-1}	175.10^3
Amortissement équivalent	b_φ	$\text{Nm.rad}^{-1}\text{s}^{-1}$	2900
Angle d'ouverture du train avant	δ_f^0	$^\circ$	0.05
Angle de fermeture du train arrière	δ_r^0	$^\circ$	0.35
Coefficient de braquage induit avant	ϵ_f	-	0.13
Coefficient de braquage induit arrière	ϵ_r	-	0.25
Aérodynamique			
Densité de l'air	ρ	Kg.m^{-3}	1.225
Maître-couple	S	m^2	1.90
Coefficient de traînée	C_x	-	0.32
Pneumatique			
Coefficient de frottement	μ	-	0.9
Charge nominale	F_{Z0}	N	4400
$B = 0.816$	$C = 0.7788$		$D = 1.5735$
$E = 0.5358$	$c_1 = 15.549$		$c_2 = 1.159$

Table II.1 – Valeurs numériques des caractéristiques du véhicule (Peugeot 406)

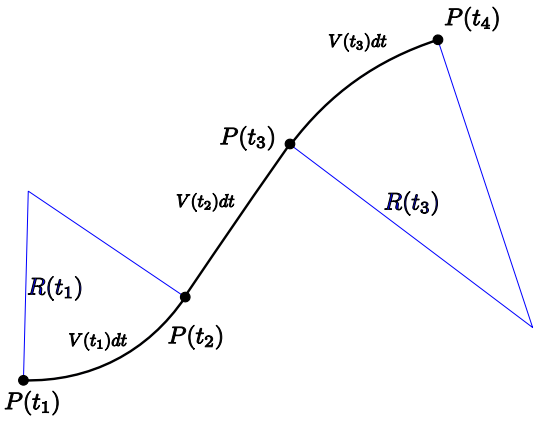


Figure II.5 – Construction point par point de la trajectoire

2) Calcul de la trajectoire

Le paramétrage utilisé dans ce modèle ne fait pas intervenir explicitement la position du véhicule. La détermination de la trajectoire nécessite donc un calcul supplémentaire une fois l'équation dynamique (II.7) résolue, donc le vecteur $\boldsymbol{x_s}$ connu. Le rayon de courbure R de la trajectoire suivie par le véhicule est donné par :

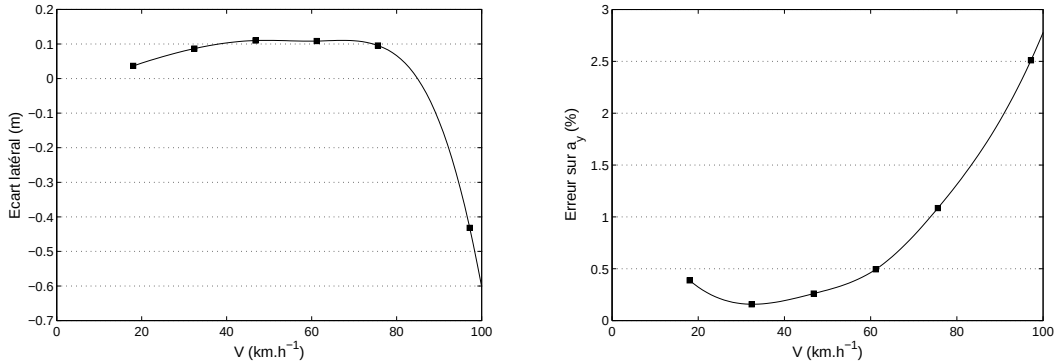
$$R = \frac{V}{\dot{\alpha} + \dot{\theta}} \tag{II.8}$$

Connaissant alors à chaque instant la vitesse du véhicule et la courbure, la trajectoire est construite point par point par raccordement en tangence de cercles de rayon R ou de droites, lorsque la courbure est nulle (Fig. II.5).

II.1.4 Validation

Le modèle a été validé par comparaison avec le simulateur Callas/Prosper, pour lequel un modèle de Peugeot 406 validé expérimentalement [LDSS97] est disponible. La validation est effectuée pour des vitesses allant de 20 à 100 km.h^{-1}. Pour chaque vitesse, l'angle de braquage β augmente linéairement de 0 à 1 degré en 2.5 s puis est maintenu constant jusqu'à la fin de la simulation (temps de simulation total : 10 s).

Les paramètres du modèle du tableau II.1 concernant les dimensions, la masse, les inerties et l'aérodynamique sont directement extraits du fichier de configuration de Callas/Prosper. Concernant les paramètres du pneumatique, la seule donnée accessible sous Callas/Prosper est la loi d'évolution de la raideur de dérive en fonction de la charge normale F_{Zi}. Ceci permet le calcul des paramètres c_1, c_2 et F_{Z0}. Les paramètres de la formule magique de Pacejka (B, C, D, E) sont identifiés sur les forces latérales disponibles en sortie des simulations de Callas/Prosper. Les



a) b)

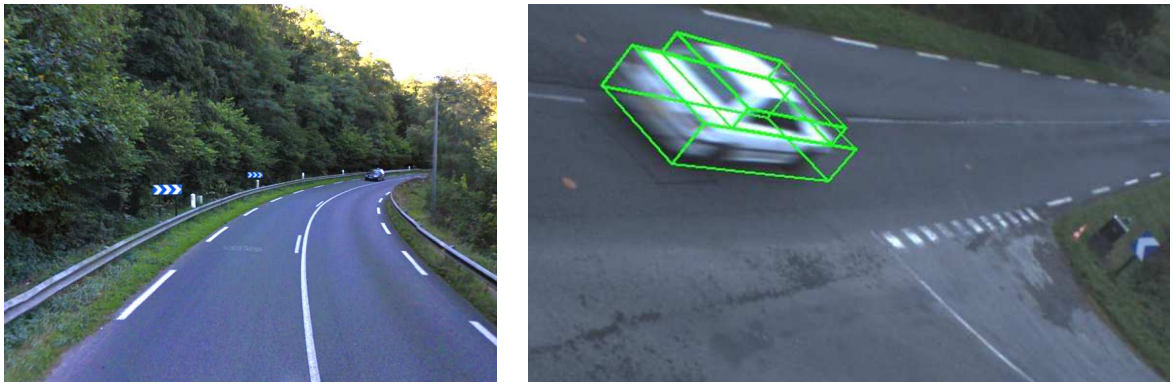
Figure II.6 – Validation du modèle par comparaison avec Callas/Prosper

angles de pince δ_0^f, δ_0^r sont directement disponibles, tandis que les caractéristiques de suspensions sont calculées selon les formules (II.5) et (II.6). Par contre, les coefficients de braquage induits ϵ_f, ϵ_r ne sont pas accessibles. En effet, Callas/Prosper mentionne seulement le type de suspension (Mc Pherson). Ces paramètres sont identifiés en dernier, avec pour critère la minimisation de l'écart latéral entre les trajectoires simulées et les trajectoires de Callas/Prosper.

La figure II.6 montre l'évolution de l'écart latéral maximal entre la trajectoire simulée par Callas/Prosper et la trajectoire du modèle (II.6a) ainsi que l'évolution de l'erreur commise sur l'évaluation de l'accélération latérale a_y par le modèle en fonction de la vitesse (II.6b). L'erreur entre le modèle développé et la simulation Callas/Prosper est inférieure à 20 cm jusqu'à 90 km.h^{-1}. L'accélération latérale maximale est alors de 3 m.s^{-2}, ce qui constitue la valeur limite usuelle pour des cas de conduite standards (cf. I.2). Pour des vitesses supérieures à 90 km.h^{-1}, l'erreur sur l'accélération latérale est toujours satisfaisante. Par contre, le cumul de cette erreur lors de la construction point par point de la trajectoire cause une rapide divergence sur l'écart latéral. En effet, le temps de simulation étant constant, la distance totale de la trajectoire simulée (et donc le cumul d'erreur) augmente avec la vitesse. Les écarts latéraux pour les vitesses les plus élevées, bien que très faibles en comparaison de la distance parcourue, sont toutefois incompatibles avec l'application visée. Le modèle développé possède donc une précision satisfaisante pour évaluer l'état dynamique du véhicule lors de longues sollicitations (7.5 s) à 3 m.s^2.

II.2 Définition d'une trajectoire de référence

La trajectoire de référence représente la trajectoire qu'aurait suivi un conducteur standard pour la négociation du virage. Cette trajectoire est donc nécessairement fonction des conditions initiales, en position et en vitesse, mesurées en entrée de virage. Dépendant de nombreux facteurs humains non contrôlables (style de conduite, habitude du site, conditions de visibilité, enchaînement de



a) b)

Figure II.7 – Virage étudié (a) et principe du dispositif de mesure (b)

virages, ...) une définition théorique d'une telle trajectoire est difficilement réalisable [LBCG03, Ea07, Gab07]. C'est pourquoi nous avons choisi de construire la trajectoire de référence à partir de relevés expérimentaux sur trafic réel.

II.2.1 Mesures de trafic

Le développement de moyens de mesure de la trajectoire d'un véhicule a été réalisé dans une autre tâche du projet SARI [Goy05, GCT09]. Le dispositif utilisé est basé sur l'emploi combiné de deux caméras et d'un télémètre. La trajectoire du véhicule (en position et vitesse) est ensuite estimée par un post-traitement des images et par fusion avec les données du télémètre. Ce système a l'avantage d'être portable, et de ne nécessiter aucun équipement embarqué dans le véhicule. Ce dispositif de mesure a été déployé pendant deux jours sur une courbe située sur la Rd8 entre Guingamp et Bourbriac (Fig. II.7), permettant l'acquisition de 400 trajectoires mesurées sur le trafic réel. De plus, les profils de pente et dévers de la chaussée ont été relevés par le véhicule de mesure VANI (Véhicule d'ANalyse des Itinéraires) du LCPC avec une période d'échantillonnage de 1 m. Le virage est en légère descente (environ $-1°$) et présente en son centre un dévers favorable d'environ $5°$. Ces données sont incluses dans le modèle dynamique par les angles de pente i_0 et de dévers δ_r.

Les relevés de vitesse montrent que 85% des conducteurs abordent le virage avec une vitesse inférieure à 67 km.h^{-1}, bien en deçà de la vitesse réglementaire (90 km.h^{-1}). La signalisation laisse donc une part d'interprétation au conducteur dans le choix de la vitesse adaptée, ce qui peut mener à des situations dangereuses. De plus, la signalisation en place dans ce virage doit être limitée afin de ne pas prévaloir celle du virage suivant, qui est un tournant sévère à angle droit limité à 50 km.h^{-1}. Ce virage constitue donc une application type du projet SARI/RADARR.

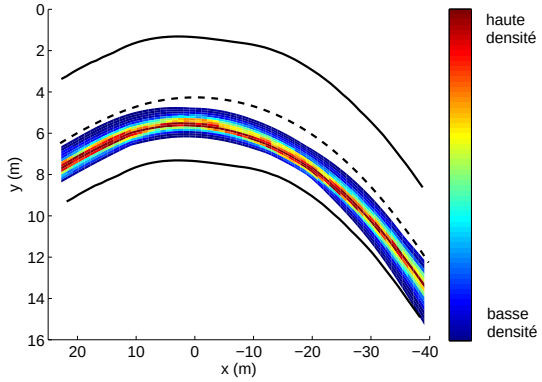


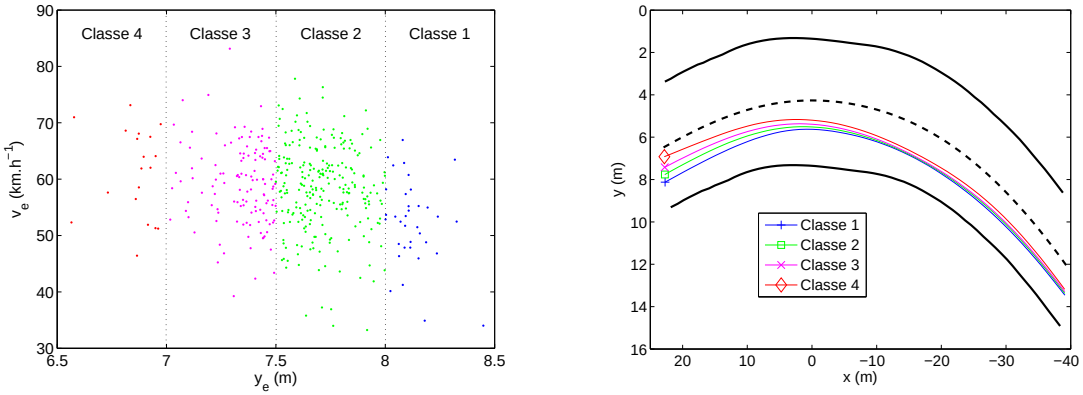
Figure II.8 – Densité de passage mesurée dans le virage Rd8

La densité de passage des 400 trajectoires observées lors de la campagne de mesures est représentée sur la figure II.8. La densité maximale (en rouge sur la figure) représente l'endroit par lequel le plus de véhicules sont passés. On peut remarquer qu'à l'entrée du virage (correspondant à $x = 20$ m), les trajectoires n'occupent pas toute la largeur de la route, mais sont concentrées à l'extérieur du virage. Ceci peut être dû à la présence d'une longue courbe à gauche avant le virage que les conducteurs ont tendance à couper. A la sortie du virage les trajectoires sont réparties sur la totalité de la largeur de la voie. Au cours du virage, on observe que les conducteurs restent principalement à l'extérieur de leur voie. On ne constate pas sur ce virage de tendance à couper la trajectoire, éventuellement à cause de problèmes de visibilité (les arbres cachent la sortie du virage) et de la présence d'obstacles (barrière, poteau électrique) proche du bord de route. La disponibilité de ces mesures apparaît donc comme une nécessité dans la proposition d'une trajectoire de référence précise, puisqu'on constate même, sur un virage a priori simple (pas de discontinuité forte de courbure, de pente, ...), de nombreux effets difficiles à modéliser par les modèles théoriques de conducteur.

II.2.2 Classes de conducteurs

Afin de refléter les différents styles de conduite observables, plusieurs classes de conducteurs sont définies à partir des trajectoires expérimentales, selon les conditions initiales mesurées en position et en vitesse. A chacune de ces classes est ensuite associée une trajectoire de référence.

Il est intuitivement attendu une corrélation entre les vitesses d'entrée observées v_e et la position latérale initiale y_e, puisqu'un conducteur abordant le virage avec une vitesse élevée aura tendance à couper le virage, et donc à se placer à l'extérieur en entrée de virage. En fait, le nuage de points de v_e en fonction de y_e (Fig. II.9a) ne montre pas de corrélation notable ($\rho_{y_e v_e} = -0.23$). Le découpage des classes de conducteurs peut donc être réalisé indépendamment selon la vitesse d'entrée v_e ou la position latérale y_e. Il a été choisi de créer arbitrairement quatre



a) b)

Figure II.9 – Définition des classes de conducteurs (a) et trajectoires de référence (b)

classes de conducteurs, selon des intervalles de 50 cm sur la position latérale indiquées par les différentes couleurs sur le graphe. Les classes sont numérotées de l'intérieur du virage (Classe 1) vers l'extérieur (Classe 4). Dans chaque classe, la trajectoire de référence est alors définie comme la moyenne des trajectoires observées (Fig. II.9b). On observe qu'à partir des points de départ des trajectoires de référence espacés de 50 cm, les trajectoires convergent vers le centre de la voie en sortie de virage.

II.2.3 Calcul des commandes

Une fois la trajectoire de référence connue et un profil de vitesse fixé, les commandes du conducteur sont calculées par inversion du modèle dynamique. Le profil de braquage recherché est celui minimisant à chaque pas n de la simulation l'expression :

$$\sum_{j=1}^{m} d_j^2 = \sum_{j=1}^{m} ||\overrightarrow{P_{n+j}P_{n+j}^{ref}}||^2$$

où d_j est défini sur la figure II.10 comme l'écart entre le $(n+j)^{\text{ème}}$ point simulé P_{n+j} et le point de la trajectoire de référence correspondant P_{n+j}^{ref}. Cette équation est résolue par une méthode de Newton-Raphson. Le choix $m = 1$, ne considérant que le pas suivant de la simulation mène à un braquage présentant des oscillations, à cause d'incompatibilité avec le temps de réponse du modèle dynamique. Il faut donc prendre en compte la trajectoire sur plusieurs points en avant, $m = 5$ fournit de bons résultats. Cette approche par inversion du modèle a été préférée à un asservissement des commandes de conducteur car elle permet un suivi exact de la trajectoire de référence (l'erreur de suivi est inférieure à 10^{-6} m), et l'algorithme d'inversion développé ne génère aucune oscillation dans le braquage de référence obtenu.

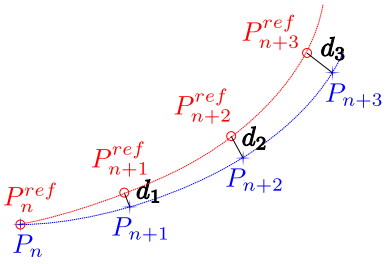
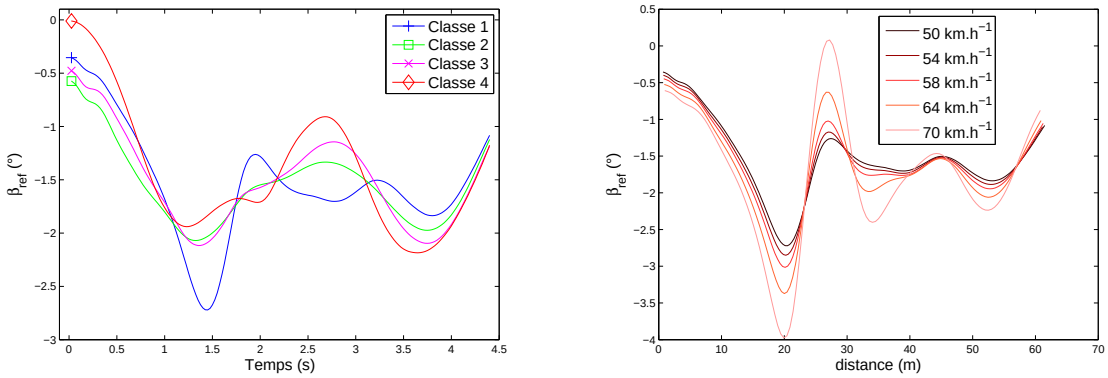


Figure II.10 – Algorithme de suivi de trajectoire



a) b)

Figure II.11 – Braquages de référence selon la classe du conducteur (a) et la vitesse (b)

A cause de la variation de l'angle de dérive, le calcul des commandes de référence doit être effectué pour chaque profil de vitesse étudié. Afin de balayer toutes les conditions initiales possibles, cette opération a été réalisée pour des vitesses allant de 45 à 80 km.h^{-1} et ce pour chaque classe de conducteurs. La figure II.11 présente les braquages obtenus en fonction de la classe du conducteur (a) et de la vitesse (b). On observe sur le graphe (a) de fortes modifications du braquage selon la classe du conducteur, révélatrices de comportements différents (attaque franche en début de virage, correction prononcée en fin de virage, ...) pouvant mener à des situations dangereuses en divers endroits de la courbe. La graphe (b) montre l'évolution du braquage de référence pour plusieurs vitesses de négociation du virage. L'amplitude des actions du conducteur augmente avec la vitesse, pour compenser l'angle de dérive des pneumatiques.

II.3 Expression des critères de sécurité

Parmi les critères définis dans la section I.2.2, trois seront utilisés dans les applications. Leurs expressions en fonction des paramètres du modèle sont précisées ici.

Les critères de sécurité sont évalués sur les trajectoires simulées pour le virage de la Rd8 présenté section II.2. La durée de simulation correspond au temps de passage du véhicule dans le virage, évoluant donc selon la trajectoire empruntée et la vitesse pratiquée. Cette durée appelée temps total d'observation, notée T, est déterminée par le franchissement d'une ligne virtuelle de fin de virage entraînant l'arrêt de la simulation.

Critère de position latérale

Le critère de position latérale compare la position du véhicule par rapport aux bords de sa voie de circulation ou à une frontière virtuelle. Soit d la distance signée entre le milieu de la voie de circulation et le centre de gravité du véhicule et $\overline{d}$ le seuil correspondant au domaine de sécurité choisi, alors le critère de sécurité s'exprime :

$$\overline{d} - \sup_{t\in[0,T]} |d(t)| > 0 \tag{II.9}$$

où T est le temps total d'observation. Pour cette application, $\overline{d}$ est égal à la demi-différence entre la largeur de voie et de la largeur du véhicule. Cependant, dans des cas particuliers (présence de bas-côtés stabilisés, trafic sur la voie opposée, ...) d'autres seuils pourront être choisis.

Afin de vérifier l'inégalité (II.9), la position d doit être calculée à partir de la trajectoire simulée. Le modèle dynamique fournit en sortie l'écart latéral (selon la normale à la trajectoire de référence $\boldsymbol{n}$) entre la trajectoire simulée et la trajectoire de référence, notée d_s sur la figure II.12. La distance d_{ref} de la trajectoire de référence par rapport au centre de la voie étant connue, d est alors donné à chaque pas de temps par :

$$d = d_s - d_{ref}$$

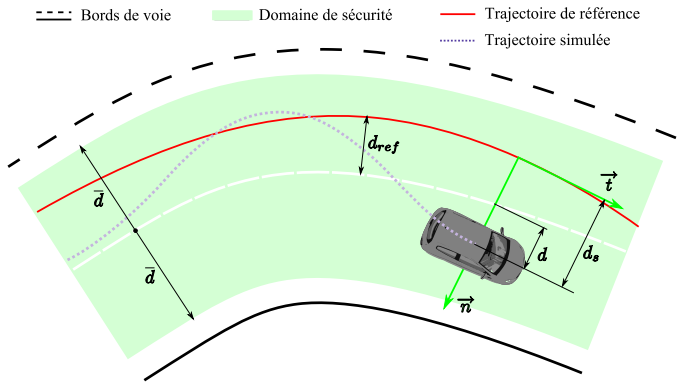


Figure II.12 – Calcul du critère de position latérale

Critère d'accélération latérale

Le critère d'accélération s'exprime de façon analogue à l'inégalité (II.9) par :

$$\overline{a}_y - \sup_{t\in[0,T]} |a_y(t)| > 0 \tag{II.10}$$

où le seuil d'accélération latérale maximale $\overline{a}_y$ est choisi égal à 3 m.s^{-2}.

En tenant compte de (II.8), l'expression de a_y en fonction des paramètres du modèle est :

$$a_y = \frac{V^2}{R} = V(\dot{\theta} + \dot{\alpha})$$

Critère de TLC (Time to Lane Crossing)

L'expression du critère de TLC est :

$$\overline{\text{TLC}} - \sup_{t\in[0,T]} \text{TLC}(t) > 0 \tag{II.11}$$

où le seuil $\overline{\text{TLC}}$ est choisi égal à 1 s.

L'expression du TLC choisie est celle la plus couramment utilisée, supposant une trajectoire à accélération latérale constante et une route rectiligne :

$$\text{TLC} = \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2a_y d_v}}{a_y}$$

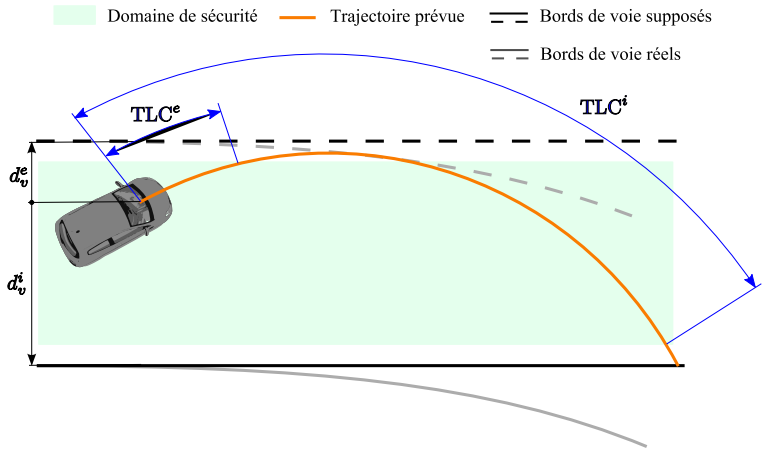


Figure II.13 – Calcul du critère de TLC

où d_v est la distance entre le centre de gravité du véhicule et la frontière du domaine de sécurité la plus proche, la vitesse latérale v_y est évaluée par dérivation numérique de d_v. Dans les cas ou la sortie de voie est impossible ($v_y^2 + 2a_y d_v < 0$), le TLC est pris égal à 3 s. Afin de considérer les franchissements possibles des frontières extérieures et intérieures du domaine de sécurité, deux TLC notés TLC^e et TLC^i associés aux distances d_v^e et d_v^i (voir Fig. II.13) sont calculés, le TLC global est ensuite défini par :

$$\text{TLC} = \inf(\text{TLC}^e, \text{TLC}^i)$$

Une analyse déterministe du phénomène de sortie de route consisterait à évaluer des critères de sécurité directement sur la trajectoire de référence, ce qui est une vision idéale du problème où le conducteur suit exactement cette trajectoire. Or, à cause de l'incertitude présente à la fois dans les actions du conducteur, le véhicule et l'infrastructure, la trajectoire réalisée par le conducteur n'est pas déterministe. La modélisation probabiliste du système est l'objet du chapitre suivant. L'évaluation des critères de sécurité ne sera alors plus binaire (0 si le critère est respecté, 1 sinon), mais présentera une gradation représentative du niveau de risque encouru par le conducteur.

Chapitre III

Modélisation probabiliste

Ce chapitre est consacré à la modélisation probabiliste du système, c'est à dire à la prise en compte des incertitudes provenant du conducteur, du véhicule et de l'infrastructure dans le modèle déterministe développé au chapitre précédent. Cette modélisation doit être basée sur un nombre minimal de paramètres aléatoires afin d'optimiser l'application de méthodes fiabilistes. L'identification de cette famille est réalisée par une analyse de sensibilité globale basée sur les indices de Sobol', détaillée dans la section III.3. Les résultats de l'analyse de sensibilité conduisant à conserver quatre variables aléatoires et un processus stochastique, ce dernier est ensuite approximé pour faciliter l'application de méthodes fiabilistes.

III.1 Sources d'incertitude

III.1.1 Choix des paramètres aléatoires

Une pré-sélection est réalisée parmi les paramètres du système (recensés dans le tableau II.1) et les entrées (commande du conducteur) afin de respecter les contraintes physiques du système. Ces contraintes sont exprimées par des relations fonctionnelles entre ces paramètres (ex. une modification de la masse entraine une modification de l'inertie), afin de choisir une famille minimale de paramètres physiquement indépendants. Les paramètres sont regroupés par catégories, selon le schéma de la figure III.1, pour les quelles le choix des paramètres potentiellement aléatoires est justifié ci-dessous.

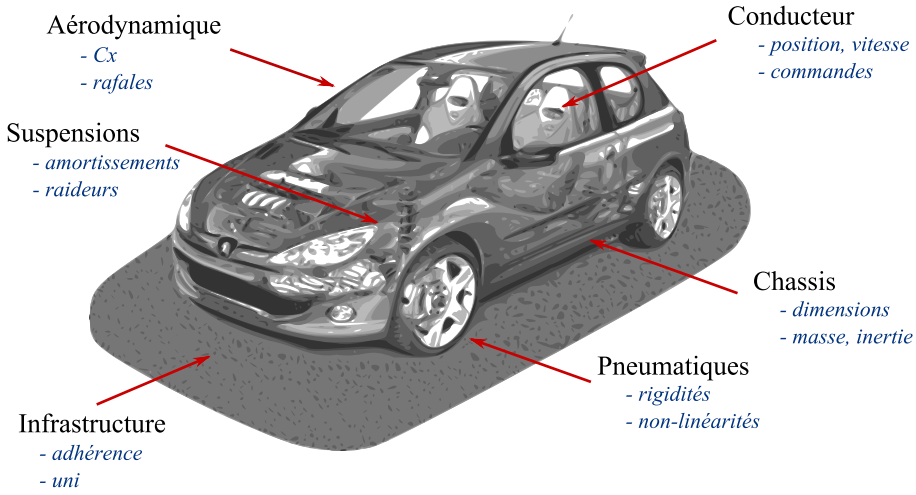


Figure III.1 – Familles de paramètres du modèle mécanique

1) Chassis

Les paramètres liés au chassis sont composés de dimensions, de la masse et d'inerties. Parmi les dimensions, on suppose que celles directement liées à la fabrication du véhicule (empattement L, demi-voie b, hauteur du centre de roulis h_0) présentent peu de variabilité. Ces paramètres sont donc considérés déterministes et fixés à leurs valeurs nominales données dans le tableau II.1. Les termes de masse et d'inerties sont par contre liés non seulement aux caractéristiques du véhicule, mais aussi au chargement embarqué, et influent fortement le comportement dynamique du véhicule. La variabilité de la masse M considérée provient du chargement embarqué. Une variation du chargement embarqué provoque aussi des changements dans la position du centre de gravité longitudinalement (a_f, a_r), verticalement (h), et dans les termes d'inertie (I_{XX}, I_{ZZ}, I_{XZ}). On suppose que le centre de gravité reste dans l'axe de symétrie du véhicule.

Parmi ces paramètres, la masse M et la distance a_r sont supposées aléatoires, les autres étant calculées par des relations fonctionnelles exprimées dans le paragraphe III.1.2.

2) Suspensions

Les caractéristiques des ressorts et amortisseurs sont susceptibles de varier au cours du temps. Pour une analyse plus fine, les caractéristiques des trains avant et arrière sont séparées. Quatre paramètres aléatoires sont donc choisis dans cette catégorie : $K_{\varphi f}, K_{\varphi r}$ les raideurs en roulis avant et arrière, ainsi que $b_{\varphi f}, b_{\varphi r}$ les amortissements en roulis avant et arrière. Ces grandeurs sont définies dans (II.5) et (II.6).

3) Infrastructure

Trois caractéristiques définissent la chaussée : le dévers, la pente et l'uni (variation de la macro et micro-structure). Dans notre approche, les angles de dévers et de pente sont mesurés sur le virage de la Rd8 utilisé pour l'illustration, et implémentés dans le modèle. La variabilité de l'uni provient de la structure de l'enrobé ainsi que de l'usure provoquée par le passage répété de véhicules, et influence le coefficient de frottement μ entre le pneumatique et la chaussée. Les autres paramètres de la loi de contact n'étant pas considérés aléatoires (cf. 6)), la variabilité de l'uni est représentée par le coefficient μ, considéré aléatoire et supposé constant le long du virage. Les variations dues aux phénomènes météorologiques, étudiés dans une autre tâche du projet SARI, ne sont pas considérées ici.

4) Conducteur

Le comportement du conducteur est déterminant dans sa façon d'aborder le virage, et dans le choix de la trajectoire le long du virage.

Les conditions initiales mesurées sont la position latérale et la vitesse longitudinale du véhicule à l'entrée du virage, et déterminent l'attribution d'une classe de conducteur selon la démarche expliquée en II.2.2. Le décalage entre la position effective du véhicule à l'entrée du virage et le centre de la classe associée est modélisé par un décalage D_0 par rapport à la trajectoire de référence. Une perturbation V_0 est également ajoutée à la vitesse de référence V_{ref}.

La trajectoire de référence, associée aux conditions initiales mesurées, représente la trajectoire ciblée par le conducteur à l'entrée du virage. La trajectoire réellement suivie au cours du virage va donc osciller autour de la trajectoire de référence, à cause d'erreurs de suivi du conducteur. Pour modéliser cet effet, des perturbations additives doivent être ajoutées aux commandes du conducteur, c'est à dire à l'angle de braquage et à l'effort de freinage ou d'accélération appliqué. De même que pour le calcul de la trajectoire de référence, les caractéristiques statistiques de ces perturbations sont déduites de mesures expérimentales plutôt que de modèles de comportement de conducteur. Cependant ici, le manque d'information sur le profil de vitesse au cours du virage rend impossible la caractérisation de la variabilité des commandes de freinage/accélération. Ainsi, seule une perturbation sur l'angle de braquage β est considérée, de sorte qu'à chaque pas de temps $t \in [0, T]$ on ait :

$$\beta(t) = \beta_{ref}(t) + \psi(t)$$

où β_{ref} est le braquage de référence, déduites de la trajectoire de référence selon l'algorithme défini dans la section II.2, et ψ un processus stochastique, dont les caractéristiques sont précisées dans la section III.2.

5) Aerodynamique

La variabilité des efforts aérodynamiques due à des incertitudes sur la densité ρ de l'air, la surface frontale S ou sur le coefficient aérodynamique C_x du véhicule est supposée avoir une influence négligeable sur sa trajectoire. Aucun paramètre aléatoire n'est donc retenu dans cette catégorie.

6) Pneumatique

La validation du modèle menée dans le chapitre précédent a souligné l'importance du modèle de contact pneumatique/chaussée afin d'obtenir des résultats précis. Ceci a pour conséquence l'utilisation de 6 paramètres pour décrire les non-linéarités par rapport à l'angle de dérive (B, C, D, E) et par rapport aux forces normales (c_1, c_2). La modélisation de certains de ces paramètres par des variables aléatoires pouvant entraîner des comportements non-physiques, ces paramètres ont été fixés à leur valeur déterministe dans la suite de l'étude. Le coefficient de frottement μ a été pris en compte dans l'infrastructure, comme expliqué dans 3).

III.1.2 Relations entre paramètres

Dix paramètres aléatoires ont été choisis pour représenter les incertitudes provenant du conducteur, du véhicule et de l'infrastructure. Neuf de ces paramètres sont modélisés par des variables aléatoires $(M, a_r, D_0, V_0, K_{\varphi f}, K_{\varphi r}, b_{\varphi f}, b_{\varphi r}, \mu)$, la perturbation du braquage étant modélisée par un processus stochastique ψ. Les réalisations de ces paramètres aléatoires vont, par le biais de relations physiques, modifier les valeurs d'autres paramètres du modèle.

En premier lieu, l'empattement du véhicule L étant constant, a_f et a_r sont liés par :

$$a_f = L - a_r$$

Selon les valeurs de la masse M, des raideurs des suspensions avant et arrière K_f, K_r, et de la position longitudinale du centre de gravité a_r, la hauteur du véhicule est modifiée. On note respectivement h_f, h_r et h_0 (voir Fig. III.2) les hauteurs de l'axe de roulis au niveau des essieux avant, arrière et du centre de gravité. La différence d'écrasement des suspensions par rapport

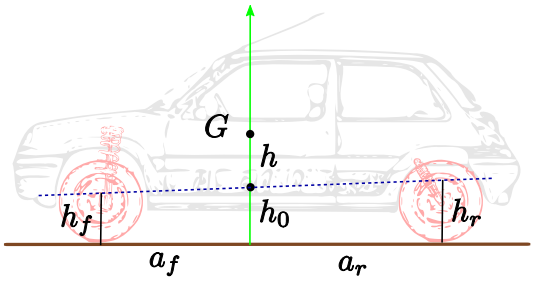


Figure III.2 – Hauteurs de l'axe de roulis

aux caractéristiques nominales est donnée par les relations :

$$h_f = \overline{h}_f + \frac{M - \overline{M}}{K_{\varphi f}} \frac{a_r}{L}$$
$$h_r = \overline{h}_r + \frac{M - \overline{M}}{K_{\varphi r}} \frac{a_f}{L}$$
$$h_0 = \frac{a_r h_f + a_f h_r}{L}$$

où les variables surlignées désignent les valeurs nominales des paramètres. La hauteur h étant supposée constante, la modification de la hauteur du centre de gravité par rapport au sol $h + h_0$ est donnée par la modification de h_0.

Un changement de la masse M a aussi des répercutions sur les termes d'inertie du véhicule. Il est supposé que la répartition de masse n'est pas modifiée, ce qui implique que le rayon de giration est constant pour chacun des termes d'inertie I_{XX}, I_{ZZ}, I_{XZ}. La variation d'inertie est alors liée à la variation de masse par la relation :

$$I_{XX} = \overline{I}_{XX} M/\overline{M} \ , \ I_Z = \overline{I}_Z M/\overline{M} \ , \ I_{XZ} = \overline{I}_{XZ} M/\overline{M}$$

Les perturbations ajoutées sur la vitesse et le braquage provoquent des inadéquations avec les conditions initiales du véhicule aux premiers pas de la simulation. Par exemple, le fait de commencer la simulation avec un braquage non nul crée un à-coup artificiel sur la réponse du modèle et fausse les résultats. Pour remédier à cela, une phase d'initialisation où les commandes sont fixées pendant une seconde à leurs valeurs perturbées au premier pas de la simulation est réalisée. Les valeurs de taux de lacet $\dot{\theta}$, dérive véhicule α et pneumatiques δ_i , roulis φ, forces normales F_{Zi} et latérales F_{Yi} obtenues à la fin de cette simulation sont utilisées comme conditions initiales pour la simulation de la négociation du virage. La figure III.3 montre le résultat d'une simulation avec et sans adaptation des conditions initiales. On observe des oscillations sur l'accélération latérale pendant environ 0.7 s sur le cas sans initialisation, alors que le cas avec initialisation permet de démarrer immédiatement la simulation avec la valeur d'accélération

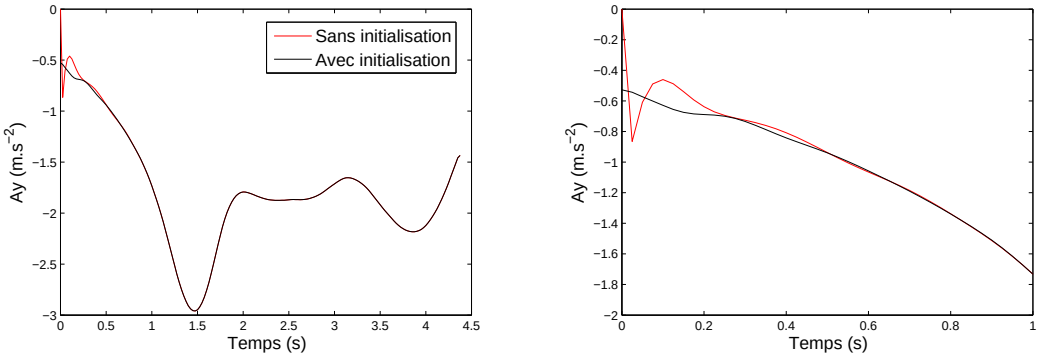


Figure III.3 – A-coups dus aux perturbations des conditions initiales (gauche) et zoom sur le début de simulation (droite)

latérale adéquate. A la fin de la simulation ($t = 4.5$ s) l'écart latéral entre les deux simulations est de 12 cm, ce qui montre la nécessité de cette phase d'initialisation.

La perturbation ajoutée sur la vitesse fait que toutes les simulations ne mettent pas le même temps à franchir le virage, la commande de braquage ne peut donc pas être indicée en temps. Le braquage β appliqué au temps t est alors déduit du braquage de référence β_{ref} par la relation :

$$\beta(t) = \beta_{ref}\left(t \cdot (1 + \frac{V_0}{V_{ref}})\right)$$

Cette relation est déduite par l'égalité de la distance parcourue sur la trajectoire perturbée à la vitesse $V_{ref} + V_0$ et de celle parcourue sur la trajectoire de référence à la vitesse V_{ref}.

III.2 Modélisation probabiliste

III.2.1 Formulation

Dix grandeurs incertaines ont été sélectionnées dans la partie précédente : 9 paramètres du modèle ainsi qu'une perturbation des commandes fonction du temps. Les 9 paramètres sont regroupés dans le vecteur $\boldsymbol{x} = (M, a_r, D_0,\ V_0, K_{\varphi f}, K_{\varphi r}, b_{\varphi f}, b_{\varphi r}, \mu)^T$, modélisé par un vecteur aléatoire noté $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_9)^T$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dont les composantes sont supposées mutuellement indépendantes. La perturbation de l'angle de braquage est modélisée par un processus stochastique ψ, défini sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et supposé indépendant de $\boldsymbol{X}$.

De par leur dépendance en ψ (à travers le vecteur de commande $\boldsymbol{U}$) et en $\boldsymbol{X}$, les fonctions A et F du modèle dynamique (Eq. II.7) sont aussi aléatoires. Par conséquent le vecteur d'état

$\boldsymbol{x_s}$ devient un processus aléatoire noté $\boldsymbol{X_s}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indexé sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^5$, gouverné par l'équation :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{s}} = A^{-1}(\boldsymbol{X_s}; \boldsymbol{X}) F(\boldsymbol{X_s}, \boldsymbol{u_{ref}}; \boldsymbol{X}, \psi) \ , \ t > 0 \\ \boldsymbol{X_s}(0) = \boldsymbol{X}_{s0} \text{ p.s.} \end{cases} \tag{III.1}$$

où $\boldsymbol{u_{ref}} = (\beta_{ref}, F_{X1}, \ldots, F_{X4})^T$ est la part déterministe de la commande $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{X_{s0}}$ associée aux conditions initiales est déduite de $\boldsymbol{X}$ et ψ par la phase d'initialisation expliquée dans la partie précédente. Les notations $A^{-1}(\boldsymbol{X_s}; \boldsymbol{X})$ et $F(\boldsymbol{X_s}, \boldsymbol{u_{ref}}; \boldsymbol{X}, \psi)$ signifient respectivement que la fonction matricielle A^{-1} est vue comme une fonction de $\boldsymbol{X_s}$ paramétrée par $\boldsymbol{X}$ et que la fonction vectorielle F est considérée comme une fonction de $\boldsymbol{X_s}$ et de $\boldsymbol{u_{ref}}$ paramétrée par $\boldsymbol{X}$ et par ψ.

Les critères de sécurité sont ensuite évalués à partir de la solution $\boldsymbol{X_s}$ du système. Deux critères sont utilisés pour l'analyse de sensibilité, le critère de position latérale et le critère d'accélération latérale. L'expression des variables de contrôle (d et a_y) en fonction du vecteur d'état $\boldsymbol{x_s}$ est donnée dans la section II.3, et notée formellement ici :

$$d = \eta_1(\boldsymbol{x_s}) \tag{III.2}$$

$$a_y = \eta_2(\boldsymbol{x_s}) \tag{III.3}$$

Lorsque le vecteur d'état $\boldsymbol{x_s}$ est modélisé par le processus aléatoire $\boldsymbol{X_s}$, ces variables de contrôle deviennent donc aussi des processus aléatoires notés D et A_y, calculées à partir des mêmes fonctions η_1, η_2 définies par (III.2)-(III.3). Dans ce contexte aléatoire, les critères de sécurité (II.9) et (II.10) peuvent alors être réécrits :

$$\overline{d} - \sup_{t \in [0,T]} |D(t)| > 0 \tag{III.4}$$

$$\overline{a}_y - \sup_{t \in [0,T]} |A_y(t)| > 0 \tag{III.5}$$

III.2.2 Choix des lois

Idéalement, le choix des lois de $\boldsymbol{X}$ et ψ doit être déduit de données statistiques. Cependant, les seules données disponibles (400 trajectoires, cf. II.2) ne permettent cette identification que pour le processus ψ. Différentes lois, respectant les contraintes physiques du problème sont donc alternativement testées pour $\boldsymbol{X}$

M	a_r	D_0	V_0	$K_{\varphi f}$	$K_{\varphi r}$	$b_{\varphi f}$	$b_{\varphi r}$	μ
1610	1.532	0	0	87580	87580	1450	1450	0.9

Table III.1 – Moyenne des variables aléatoires

Loi du vecteur $\boldsymbol{X}$

En l'absence de données pour le vecteur $\boldsymbol{X}$ plusieurs lois sont envisagées. Afin de respecter la physique du problème, les paramètres $(M, a_r, K_{\varphi f}, K_{\varphi r}, b_{\varphi f}, b_{\varphi r}, \mu)$ doivent être positifs et ne peuvent pas prendre de valeurs infinies. Les moyennes des perturbations D_0 et V_0 sont nulles, mais ne peuvent prendre de valeurs que sur un support borné. Pour ces raisons, des lois uniformes et gaussiennes tronquées (cf. annexe A) sont alternativement considérées avec les moyennes indiquées dans le tableau III.1, fixées d'après les valeurs nominales de paramètres.

Identification du processus ψ

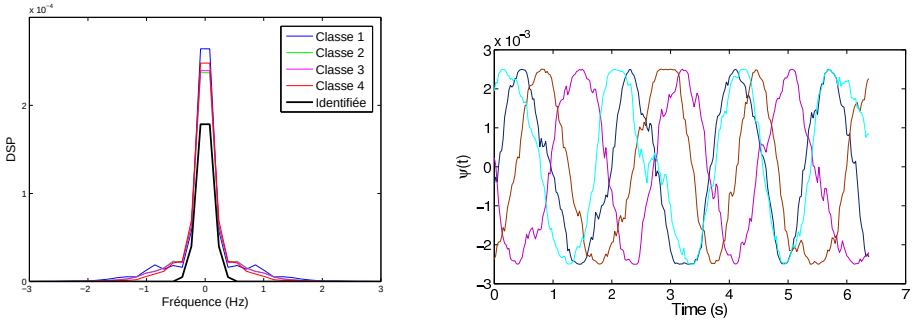
Le processus ψ représente les oscillations induites par le conducteur autour de l'angle de braquage de référence β_{ref}. Défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ψ est choisi comme un processus borné, centré, stationnaire et continu en moyenne d'ordre deux et indépendant de $\boldsymbol{X}$. Ces conditions ont conduit au choix d'un processus $\psi = (\psi(t), t \in \mathbb{R})$ dont l'expression est donnée par, $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$\psi(t) = \epsilon \sin\left(\nu t + \sigma W(t) + 2\pi\Theta\right) \tag{III.6}$$

où ϵ, ν, σ sont des constantes réelles positives, W est un processus de Wiener standard réel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et Θ une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de W et également définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La densité spectrale de puissance (DSP) S_ψ de ce processus a pour expression :

$$S_\psi(\lambda) = \frac{\epsilon^2\sigma^2}{2\pi}\left[\frac{1}{4(\lambda-\nu)^2+\sigma^4} + \frac{1}{4(\lambda+\nu)^2+\sigma^4}\right] \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{III.7}$$

La connaissance de cette expression permet l'identification des constantes ϵ, ν, σ. Pour cette application, ces constantes sont identifiées à partir des trajectoires expérimentales du virage de la Rd8. Les DSP estimées à partir des données expérimentales sont visibles sur la figure III.4a. L'homogénéité des DSP expérimentales a conduit à identifier un seul jeu de paramètres ϵ, ν, σ pour toutes les classes de conducteurs. La procédure d'identification utilisée est basée sur un critère minimax. On observe une rapide décroissance de la DSP en fonction de la fréquence. A cause de l'échantillonnage des données, ceci ne rend l'identification possible que sur quelques points pour des fréquences inférieures à 0.5 Hz. Les trois paramètres ϵ, ν, σ ne peuvent pas être identifiés de façon satisfaisante sur ce nombre restreint de points. L'amplitude ϵ a donc été fixée arbitrairement à $\epsilon = 2.5\ 10^{-3}$, correspondant à des oscillations de $\pm 3°$ au volant. La DSP



a) b)

Figure III.4 – Densités spectrales de puissance expérimentales (par classe) et identifiées (a) et exemples de perturbation simulée (b)

identifiée est alors représentée sur la figure III.4a, pour $\nu = 0.49$; $\sigma = 0.735$. Des exemples de trajectoires de ce processus pour les paramètres identifiés sont présentées sur la figure III.4b.

III.3 Analyse de sensibilité

Le but de l'analyse de sensibilité est de classer les paramètres aléatoires (les 9 composantes de $\boldsymbol{X}$ et le processus ψ) selon leur influence sur la variabilité de la sortie du modèle (les variables de contrôle associées aux critères de sécurité D et A_y). Seuls les paramètres les plus influents seront alors conservés aléatoires pour la suite de l'étude, les autres étant fixés à leur valeur nominale. Cette réduction de la dimension aléatoire du problème permet une application plus rapide et robuste des méthodes fiabilistes, servant à évaluer les indices de risque.

III.3.1 Choix de la méthode

Deux grandes familles de méthodes sont couramment utilisées [SCS04], le choix de la méthode dépendant de l'objectif (analyse fine ou quantitative), et du coût numérique du modèle mécanique.

Méthodes locales

Ces méthodes, basées sur des dérivées partielles de la sortie du modèle par rapport aux paramètres d'entrée, sont peu coûteuses en temps de calcul. Les interactions entre paramètres ne peuvent pas être étudiées, puisque lorsqu'un paramètre est modifié, les autres sont gardés constants. De plus, ces méthodes sont difficilement utilisables pour comparer les influences de

plusieurs facteurs entre eux, à cause de problèmes d'ordres de grandeur et d'unités. Une normalisation souvent utilisée défini l'indice de sensibilité S_i du paramètre x_i sur la sortie y par :

$$S_i = \frac{x_i}{y}\frac{\partial y}{\partial x_i}$$

ceci est impossible quand la sortie y est proche de 0 ou lorsque la sensibilité est cherchée autour de $x_i = 0$, et impose de plus de ne considérer que des petites variations du paramètre x_i. Il est donc conseillé dans le cas de modèles non-linéaires avec plusieurs paramètres de différents ordres de grandeur de recourir à une méthode globale.

Méthodes globales

Les analyses de sensibilité globales quantifient la proportion de variabilité de la sortie y du modèle due à la variabilité du paramètre d'entrée x_i. A la différence des méthodes locales, ou la sensibilité est évaluée autour d'une valeur de x_i, une méthode globale considère entièrement l'intervalle de variation de x_i ainsi que la forme de sa densité de probabilité. Une deuxième propriété essentielle des méthodes globales est que lorsque la sensibilité S_i est évaluée les autres paramètres $x_{j,j\neq i}$ varient aussi, donc la totalité des domaines de variabilité des paramètres d'entrée est parcourue. Un nombre important d'appels au modèle mécanique est alors nécessaire, ce qui constitue le principal inconvénient de ces méthodes.

Le modèle dynamique utilisé étant fortement non-linéaire, et d'un temps de calcul réduit, une méthode d'analyse de sensibilité globale est donc parfaitement adaptée. La plupart de ces méthodes sont basées sur des analyses de variance. Nous avons choisi ici la méthode de Sobol' [Sob01].

III.3.2 Indices de Sobol'

1) Définition

Pour chaque composante X_i de $\boldsymbol{X}$ et chaque variable de contrôle Z (avec $Z = D$ ou A_y ici), un indice de Sobol' S_i^Z est évalué. Le calcul de l'indice S_ψ^Z associé au processus ψ est détaillé ci-après. L'indice S_i^Z est basé sur l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}[Z|X_i]$ de Z sachant X_i :

$$S_i^Z = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{E}[Z|X_i])}{\mathrm{V}(Z)} = \frac{V_i}{\mathrm{V}(Z)} \tag{III.8}$$

où V(.) désigne la variance. Selon sa définition S_i^Z est donc une fonction du temps, et varie entre 0 et 1. Une valeur faible de S_i^Z signifie que l'incertitude sur X_i a peu d'influence sur la variabilité

de Z. Par conséquent, X_i peut être considéré comme un paramètre déterministe. Dans le cas contraire, le paramètre X_i doit être conservé aléatoire pour préserver une modélisation fidèle de la propagation de l'incertitude des paramètres d'entrée sur la sortie.

Les indices d'ordre supérieur permettent d'étudier les interactions entre les paramètres. L'indice du second ordre S_{ij}^Z est défini par :

$$S_{ij}^Z = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{E}[Z|X_iX_j]) - V_i - V_j}{\mathrm{V}(Z)} = \frac{V_{ij}}{\mathrm{V}(Z)}$$

Il retranscrit le poids de la variabilité du couple X_i, X_j sur la variabilité de Z. On définit de la même façon autant d'ordre d'indices que le nombre n de paramètres aléatoires, il existe donc en tout $2^n - 1$ indices de Sobol'. Ces indices vérifient la propriété suivante :

$$\sum_i S_i^Z + \sum_{1\leq i<j\leq n} S_{ij}^Z + \ldots + S_{1,2,\ldots,n}^Z = 1 \tag{III.9}$$

Si on s'intéresse à la contribution globale (à tous les ordres) d'un paramètre X_i, le calcul des indices des effets totaux S_{Ti}^Z permet d'éviter le calcul de tous les termes. Ces indices sont définis par :

$$S_{Ti}^Z = \frac{\mathrm{E}[\mathrm{V}(Z|\boldsymbol{X}_{-i})]}{\mathrm{V}(Z)} = S_i^Z + \sum_{j\neq i} S_{ij}^Z + \sum_{\substack{j\neq i\\ k\neq i}} S_{ijk}^Z + \ldots \tag{III.10}$$

où la notation $.|\boldsymbol{X}_{-i}$ signifie que le conditionnement est relatif à $\boldsymbol{X}$ privé de sa i-ème composante.

2) Déroulement de l'analyse

Le calcul des $2^n - 1$ indices étant rarement nécessaire, le déroulement de l'analyse de sensibilité est organisé comme suit :

- On calcule les indices du premier ordre S_i^Z et leur somme $\sum_i^n S_i^Z$.
- Si cette somme est proche de 1, les termes d'ordre supérieur à 1 dans (III.9) sont négligeables et il n'y a donc pas d'interaction entre les paramètres. L'analyse s'arrête alors à cette étape.
- Si cette somme est significativement inférieure à 1, on évalue les indices totaux S_{Ti}^Z. Les paramètres pour lesquels S_{Ti}^Z est significativement différent de S_i^Z indiquent des interactions avec d'autres paramètres du modèle (i.e. certains des termes d'ordre supérieur $S_{ij,j\neq i}^Z$ sont non nuls).

- Pour ces paramètres, on calcule alors les indices d'ordre supérieur jusqu'à avoir identifié les interactions que l'on souhaite connaître.

Selon la nature des interactions présentes dans le modèle et les informations recherchées, l'analyse peut donc nécessiter le calcul soit des seuls indices du premier ordre S_i^Z, soit des indices d'ordres supérieurs.

3) Estimation numérique

Le calcul des indices de Sobol' est simplement basé sur des évaluations de variances et d'espérances conditionnelles, dont les estimateurs sont connus. Cependant, l'application directe d'une méthode de Monte-Carlo pour évaluer (III.8) nécessite deux boucles imbriquées : une intérieure pour le calcul de l'espérance conditionnelle, et une extérieure pour le calcul de la variance. Ceci implique un nombre important d'évaluations du modèle. Saltelli [Sal02] propose une stratégie pour réduire le nombre d'appels au modèle. Le principe est de réécrire le terme V_i de (III.8) sous la forme :

$$V_i = \mathrm{V}(\mathrm{E}[Z|X_i]) = \mathrm{V}(Z) - \mathrm{E}[\mathrm{V}(Z|X_i)] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}^2(Z|X_i = \widetilde{x}_i) p_i(\widetilde{x}_i) d\widetilde{x}_i - \mathrm{E}^2(Z) \qquad \text{(III.11)}$$

où p_i est la densité de probabilité de la variable X_i. L'équation (III.11) comporte néanmoins toujours l'inconvénient de nécessiter deux boucles imbriquées pour évaluer V_i par une méthode de Monte-Carlo : une boucle intérieure pour le calcul de $\mathrm{E}^2(Z|X_i = \widetilde{x}_i)$, et une boucle extérieure pour calculer l'intégrale sur $d\widetilde{x}_i$. Afin de simplifier les calculs, on peut montrer que l'intégrale de (III.11) peut être réécrite :

$$U_i = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{E}^2(Z|X_i = \widetilde{x}_i) p_i(\widetilde{x}_i) d\widetilde{x}_i = \int_{\mathbb{R}^{2n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) f(x'_1, x'_2, \ldots, x_i, \ldots, x'_n) \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i) dx_i \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i(x'_i) dx'_i \qquad \text{(III.12)}$$

où la notation $z = f(\boldsymbol{x})$ symbolise la formulation du modèle dynamique. L'indice du premier ordre S_i^Z est alors donné par :

$$S_i^Z = \frac{U_i - \mathrm{E}^2(Z)}{\mathrm{V}(Z)} \qquad \text{(III.13)}$$

Pour estimer numériquement S_i^Z, deux m-échantillons $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x}'$ sont tirés, et rangés dans les matrices M_1 et M_2 :

$$M_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad M_2 = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x'_{m1} & x'_{m2} & \cdots & x'_{mn} \end{bmatrix}$$

Pour chaque $i \in [1, n]$, la matrice N_i est alors construite à partir de la matrice M_2 dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est remplacée par celle de la matrice M_1 :

$$N_i = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x_{2i} & \cdots & x'_{2n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x'_{m1} & x'_{m2} & \cdots & x_{mi} & \cdots & x'_{mn} \end{bmatrix}$$

L'estimée $\widehat{u}_i$ de U_i est alors obtenue à partir des échantillons contenus dans les matrice M_1 et N_i :

$$\widehat{u}_i = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{m} f(x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}) f(x'_{r1}, x'_{r2}, \ldots, x_{ri}, \ldots, x'_{rn})$$

Le terme $\mathrm{V}(Z)$ est calculé en utilisant l'estimateur sans biais de la variance et les échantillons contenus dans la matrice M_1. La moyenne quadratique $\mathrm{E}^2(Z)$ est quant à elle estimée par :

$$\widehat{e}^2(Z) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{m} f(x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}) f(x'_{r1}, x'_{r2}, \ldots, x'_{rn})$$

au lieu de la formule classique $\left(\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{m} f(x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn})\right)^2$. Ce choix se justifie si l'on considère l'estimée de V_i :

$$\begin{aligned} \widehat{u}_i - \widehat{e}^2(Z) = & \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{m} f(x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}) f(x'_{r1}, x'_{r2}, \ldots, x_{ri}, \ldots, x'_{rn}) \\ & - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{m} f(x_{r1}, x_{r2}, \ldots, x_{rn}) f(x'_{r1}, x'_{r2}, \ldots, x'_{rn}) \end{aligned}$$

qui doit tendre vers 0 lorsque le paramètre x_i n'a aucune influence.

Au total, l'estimation des n indices de sensibilité du premier ordre S_i^Z nécessite $m(n+2)$ appels au modèle. L'estimation des deux variables de contrôle ($Z = D$ et $Z = A_y$) étant réalisée simultanément lors de l'appel au modèle, étudier la sensibilité par rapport à plusieurs critères ne nécessite donc pas de simulations supplémentaires.

4) Cas du processus ψ

L'expression des indices de Sobol' (de même que pour les autres méthodes de sensibilité globale) n'est pas directement applicable aux processus stochastiques. Une possibilité est de substituer au processus ψ la famille finie de variables aléatoires $(\psi(t_k), 1 \leq k \leq N)$ constituée des N observations du processus ψ au noeuds $(t_k, \leq n \leq N)$ d'une partition de $[0, T]$ préalablement choisie. Les N variables aléatoires $\psi(t_k)$ étant corrélées, la décomposition dont est issue (III.9) et qui est à la base des propriétés des indices de Sobol', n'est plus unique. Le calcul des indices de sensibilité associés à chacune des variables de la famille $(\psi(t_n), 1 \leq n \leq N)$ peut toutefois toujours être réalisé selon (III.8), mais l'interprétation de la valeur de l'indice n'est plus la même. En effet, la sensibilité d'une variable prend aussi en compte, du moins partiellement, la sensibilité aux autres variables avec lesquelles elle est corrélée. Bien que des propositions de définition de sensibilité existent dans ce cas [ST02, IR08, VWG09], nous avons ici appliqué la méthode proposée par Jacques et al. [JLD06], qui permet de conserver le cadre des indices de Sobol'.

L'idée est de calculer la sensibilité par rapport au groupe de variables dépendantes, et l'indice de sensibilité alors calculé correspond à l'indice de sensibilité multidimensionnel classique :

$$S_{\psi}^{Z} = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{E}[Z|\psi(t_1)\dots\psi(t_n)])}{\mathrm{V}(Z)} = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{E}[Z|\psi])}{\mathrm{V}(Z)} = \frac{V_{\psi}}{\mathrm{V}(Z)} \tag{III.14}$$

Le processus ψ est alors traité de façon totalement analogue à chacune des composantes X_i de $\boldsymbol{X}$. Par exemple, le calcul du terme d'interaction entre X_i et ψ sera réalisé par l'indice du second ordre :

$$S_{i\psi}^{Z} = \frac{\mathrm{V}(\mathrm{E}[Z|X_i\psi]) - V_i - V_{\psi}}{\mathrm{V}(Z)} = \frac{V_{i\psi}}{\mathrm{V}(Z)}$$

Le même shéma numérique que celui proposé dans la section 3) est alors appliqué pour le calcul des indices associés à ψ.

III.4 Résultats

Les résultats présentés dans cette section sont obtenus à partir des données issues de la campagne de mesures réalisée sur le virage de la Rd8. Comme évoqué lors du choix des lois (section III.2), nous ne disposons de paramètres identifiés que pour les caractéristiques du processus ψ. Les lois et les moyennes des composantes de $\boldsymbol{X}$ ont été choisies d'après des contraintes physiques mais, en l'absence de données, les variances sont inconnues. Pour ces raisons, l'analyse de sensibilité est menée en deux temps. Premièrement, seul le vecteur $\boldsymbol{X}$ est supposé aléatoire, afin de sélectionner

les composantes les plus influentes. Ensuite, une analyse combinant ces composantes sélectionnées et le processus ψ est réalisée.

III.4.1 Analyse du vecteur $\boldsymbol{X}$

Dans cette section seul le vecteur $\boldsymbol{X}$ est aléatoire, le processus ψ est considéré nul. En l'absence de connaissances statistiques sur $\boldsymbol{X}$, l'analyse de sensibilité est réalisée pour plusieurs lois, plusieurs coefficients de variation et pour plusieurs vitesses afin de conclure sur les composantes les plus influentes.

1) Effets des lois

Deux lois différentes sont attribuées alternativement à toutes les composantes de $\boldsymbol{X}$: uniformes et gaussiennes tronquées (cf. annexe A). Les lois gaussiennes sont tronquées à ± 3 écarts-types, afin de s'assurer que les tirages des variables ne puissent pas prendre de valeurs infinies. Afin de se placer dans des situations comparables, les coefficients de variation sont conservés pour les deux lois, sauf pour les variables D_0 et V_0 qui ont des moyennes nulles. Le support de la loi de D_0 correspond à la largeur d'une classe de conducteur (50 cm), ce qui conduit aux écarts-types :

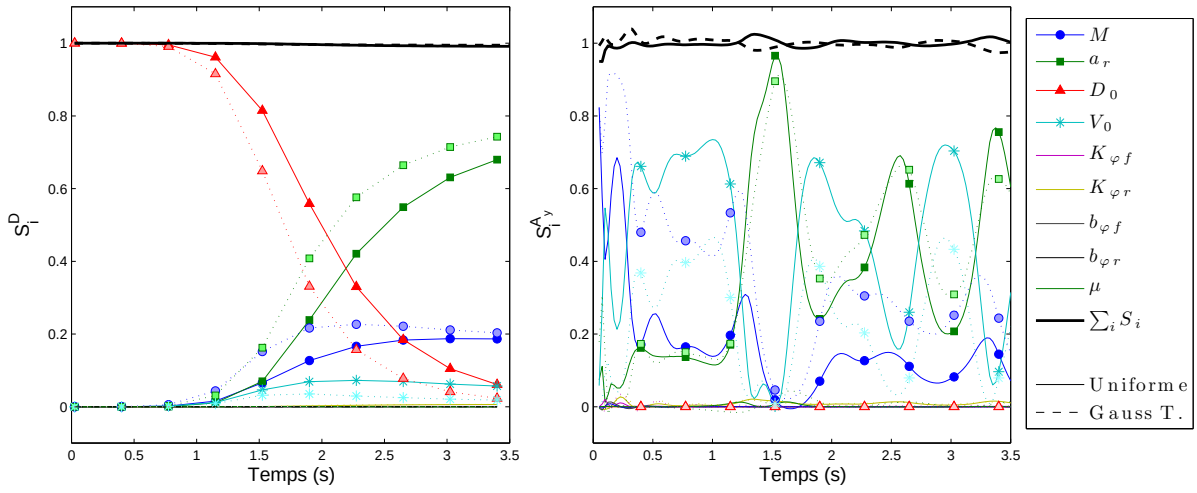
$$\sigma_{D_0}^{\text{unif}} = \frac{0.5}{2\sqrt{3}} \approx 0.144$$
$$\sigma_{D_0}^{\text{GaussT}} = \frac{0.5}{6} \approx 0.083$$

pour la loi uniforme et Gaussienne tronquée respectivement. Concernant la perturbation sur la vitesse V_0, un support correspondant à 4 km.h^{-1} est choisi. Les écarts-types associés sont alors :

$$\sigma_{V_0}^{\text{unif}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} \approx 1.155$$
$$\sigma_{V_0}^{\text{GaussT}} = \frac{4}{6} \approx 0.667$$

Pour toutes les autres composantes, le coefficient de variation est pris égal à 5%.

La figure III.5 représente l'évolution le long de la trajectoire des indices de sensibilité associés aux 9 composantes du vecteur $\boldsymbol{X}$, pour des commandes de conducteur correspondant à la classe 1 et à la vitesse de 60 km.h^{-1}. Sur le graphe III.5a concernant la position latérale (S_i^D), on observe peu de différences entre le cas uniforme et gaussien tronqué. Dans les deux cas, quatre paramètres (M, a_r, D_0, V_0) ont des indices de sensibilité importants, les autres étant négligeables. En début de simulation, le paramètre le plus influent est D_0, puisque les dispersions sur les autres paramètres ne créent pas encore de variation significative de la trajectoire. En fin de trajectoire,



a) b)

Figure III.5 – Influence des lois (uniformes et gaussiennes tronquées) sur les indices de sensibilités

a_r, M ainsi que dans une moindre mesure V_0 deviennent les paramètres prépondérants. Le cas gaussien tronqué tend à diminuer légèrement l'influence de D_0 et V_0, ce qui par conséquent créé une augmentation des autres indices. La courbe en gras représente la somme des 9 indices du premier ordre, et on remarque qu'elle est très proche de 1 tout au long de la simulation. Selon (III.9), ceci montre que les indices d'ordre supérieur sont négligeables.

Sur le graphe concernant l'accélération latérale $S_i^{A_y}$, l'évolution de la valeur des indices est plus rapide que pour la position latérale. Ceci est dû au fait que l'accélération latérale est une grandeur pouvant évoluer rapidement d'un pas de simulation au suivant, en fonction de la configuration du véhicule et des commandes du conducteur. Au contraire, plusieurs pas de simulation sont nécessaires pour observer une modification notable de la trajectoire. Toutefois on retrouve sur ce graphe une influence importante de M, a_r et V_0 tout au long de la simulation. Le paramètre le plus influent évolue en fonction des configurations (établissement du roulis, braquage quasi-constant, braquage maximal, ...). Le cas gaussien tronqué tend ici à diminuer l'influence de V_0, ce qui augmente celle de M. Le changement de loi ne fait donc pas apparaitre de nouveaux paramètres ayant une influence sur le critère d'accélération latérale ou de position latérale.

2) Effet du coefficient de variation

Plusieurs coefficients de variation (Cv) sont testés, toujours sur le cas à 60 km.h^{-1} de la classe 1 pour la loi uniforme, afin de vérifier si la famille de paramètres a priori les plus influents (M, a_r, D_0, V_0) identifiée dans la section précédente est modifiée. Des coefficients de variations

Cas	σ_M	σ_{a_r}	σ_{D_0}	σ_{V_0}	$\sigma_{K_{\varphi f}}$	$\sigma_{K_{\varphi r}}$	$\sigma_{b_{\varphi f}}$	$\sigma_{b_{\varphi r}}$	σ_μ
$Cv = 5\%$	80.5	0.076	0.144	1.155	4380	4380	72.5	72.5	0.045
$Cv = 10\%$	161	0.153	0.144	1.155	8758	8758	145	145	0.09
$Cv = 20\%$	322	0.306	0.144	1.155	17516	17516	290	290	0.18

Table III.2 – Valeurs des écarts-types utilisés pour l'analyse de sensibilité

$Cv = 5\%, 10\%$ et 20% sont affectés à chacune des composantes du vecteur $\boldsymbol{X}$, exceptés pour les variables D_0 et V_0 pour lesquelles les écarts-types sont fixés. Les écarts-types correspondant à chacun des trois cas testés sont répertoriés dans le tableau III.2.

La figure III.6 montre les résultats de l'analyse de sensibilité. Une vision générale des graphes montre que les paramètres les plus influents restent toujours M, a_r, D_0 et V_0, quel que soit le degré d'incertitude introduit dans le modèle. Les écarts-types des perturbations D_0 et V_0 étant fixes dans les trois cas, il est donc logique d'observer une diminution de leur indice de sensibilité associé lorsque l'écart-type des autres paramètres augmente. Ceci est vérifié à la fois sur la position latérale D et sur l'accélération latérale A_y. Les cas $Cv = 5\%$ et $Cv = 10\%$ vérifient toujours que la somme des indices du premier ordre est égale à 1, par contre on observe une baisse en fin de simulation dans le cas $Cv = 20\%$ (jusqu'à environ 0.9). Ceci semble indiquer l'apparition de couplages entre les paramètres lorsque les variabilités introduites dans les paramètres deviennent importantes. En effet, un coefficient de variation de 20% pour une loi uniforme correspond à des variations de $\pm 35\%$ du paramètre autour de sa valeur moyenne. Cette plage de variation étendue sollicite donc davantage les non-linéarités du modèle dynamique.

Pour les 5 autres paramètres $(K_{\varphi f}, K_{\varphi r}, b_{\varphi f}, b_{\varphi r}, \mu)$, les indices de sensibilité sont dans tous les cas inférieurs à 0.03. Il faut en effet leur attribuer un coefficient de variation égal à 30% (ceux de M et a_r étant alors pris égaux à 5%) pour atteindre un maximum de sensibilité égal à au moins 0.1 en un point de la simulation. Ces cas extrêmes étant peu représentatifs de la situation réelle, nous pouvons raisonnablement écarter ces 5 paramètres de la modélisation probabiliste.

3) Effet de la vitesse

Certains phénomènes dynamiques n'apparaissent que pour des sollicitations élevées et par conséquent les indices de sensibilité peuvent être fonction de la vitesse. Dans tous les cas précédents, la vitesse de référence V_{ref} était imposée à 60 km.h^{-1}. Afin de valider les résultats de l'analyse de sensibilité quel que soit le niveau de sollicitations, trois vitesses de référence de 50, 60 et 70 km.h^{-1} sont considérées, toujours pour la classe de conducteur numéro 1. La loi uniforme est conservée pour chacune des composantes du vecteur $\boldsymbol{X}$ et les écarts-types imposés correspondent à la ligne $Cv = 5\%$ du tableau III.2.

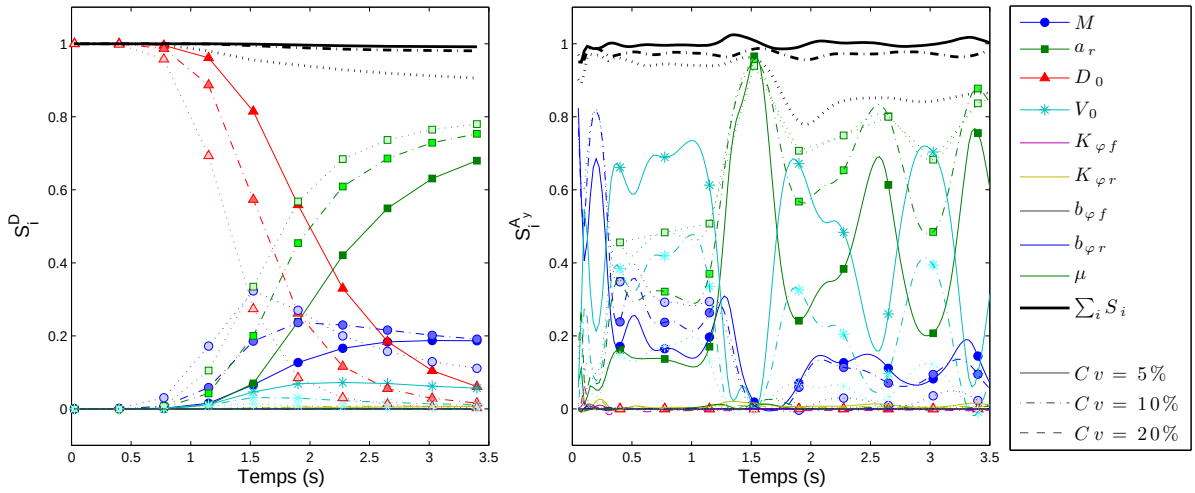


Figure III.6 – Influence des coefficients de variation ($Cv = 5\%$ à 20%) sur les indices de sensibilités

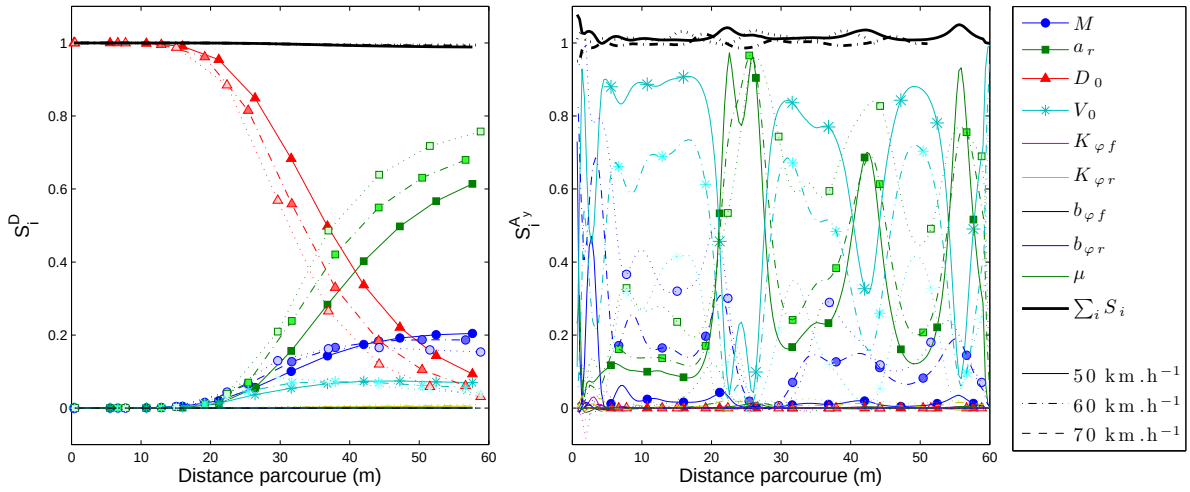


Figure III.7 – Influence de la vitesse (de 50 à 70 km.h^{-1}) sur les indices de sensibilités

Les résultats (Fig. III.7) sont similaires aux résultats obtenus précédemment. Le fait d'augmenter la vitesse ne fait pas apparaitre de nouveaux paramètres influents, mais modifie la part d'influence des quatre paramètres M, a_r, D_0, V_0 pour la position latérale et l'accélération latérale. L'augmentation de la vitesse, donc des sollicitations dynamiques, tend à augmenter essentiellement l'influence du paramètres a_r sur la position latérale D. En effet la position du centre de gravité est un paramètre prépondérant de la directivité (i.e. réponse à une modification du braquage) du véhicule. En conséquence, l'influence de D_0 diminue d'environ 20%. Concernant l'accélération latérale, l'influence de la perturbation V_0 diminue fortement lorsque la vitesse de référence augmente, et est reportée sur l'influence de M et a_r. Cette diminution est expliquée par le fait que l'écart-type de V_0 étant fixé, la perturbation associée est de plus en plus faible lorsque V_{ref} augmente de 50 à 70 km.h^{-1}. Sur les deux graphes, la somme des indices est toujours égale à 1 et par conséquent l'analyse au premier ordre est suffisante.

En conclusion de cette première analyse de sensibilité, il apparait que parmi les 9 composantes de $\boldsymbol{X}$ a priori sélectionnées, seulement 4 ont une influence significative sur la variabilité de la sortie du modèle. En l'absence de données statistiques sur ces paramètres, cette tendance a été validée sur plusieurs choix de lois, d'écarts-types et de vitesses. Pour la suite de l'étude, le vecteur $\boldsymbol{X}$ est réduit à ses 4 premières composantes $\boldsymbol{X} = (M, a_r, D_0, V_0)^T = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$. Les 5 autres paramètres sont considérés déterministes, et pris égaux à leurs valeurs nominales fournies dans le tableau II.1. Il est important de noter ici que, le fait qu'un paramètre ait un indice de sensibilité négligeable ne signifie pas que la modélisation mécanique associée puisse être retirée. Par exemple, le fait que les paramètres de suspension aient des sensibilités faibles ne signifie pas qu'un modèle dynamique sans suspensions réagirait de façon analogue au modèle développé. La sensibilité quantifie seulement le transfert des variabilités à travers le modèle, elle est donc associée au modèle probabiliste, et ne remet pas en cause le modèle déterministe.

III.4.2 Analyse de $\boldsymbol{X}$ et ψ

Le but de cette deuxième analyse est d'étudier simultanément l'importance des 4 composantes de $\boldsymbol{X}$ (i.e. des variables $X_1 = M, X_2 = a_r, X_3 = D_0, X_4 = V_0$) et du processus de perturbation de braquage ψ. Il s'agit de mieux appréhender le rôle de chacun des paramètres sur les critères de sécurité. Les caractéristiques du processus ψ étant identifiées sur le trafic réel, il convient donc ici de choisir soigneusement les lois des composantes de $\boldsymbol{X}$ afin de se placer dans un cas réaliste. Les paramètres M et a_r étant des paramètres physiques, des lois gaussiennes tronquées sont choisies, les valeurs extrêmes étant a priori peu probables. A l'opposé, les perturbations D_0 et V_0 pouvant prendre indifféremment toutes les valeurs de leur plage de variation, des lois uniformes sont donc choisies pour ces variables. Les caractéristiques statistiques considérées pour ces quatre paramètres sont résumées dans le tableau III.3.

Paramètre	$\boldsymbol{X}$	Loi	Moyenne	Ecart-type	Support
M	X_1	Gauss T.	1610	16	$[1562; 1658]$
a_r	X_2	Gauss T.	1.532	0.04	$[1.412 : 1.652]$
D_0	X_3	Uniforme	0	0.144	$[-0.25; 0.25]$
V_0	X_4	Uniforme	0	1.155	$[-2; 2]$

Table III.3 – Caractéristiques statistiques des composantes de $\boldsymbol{X}$

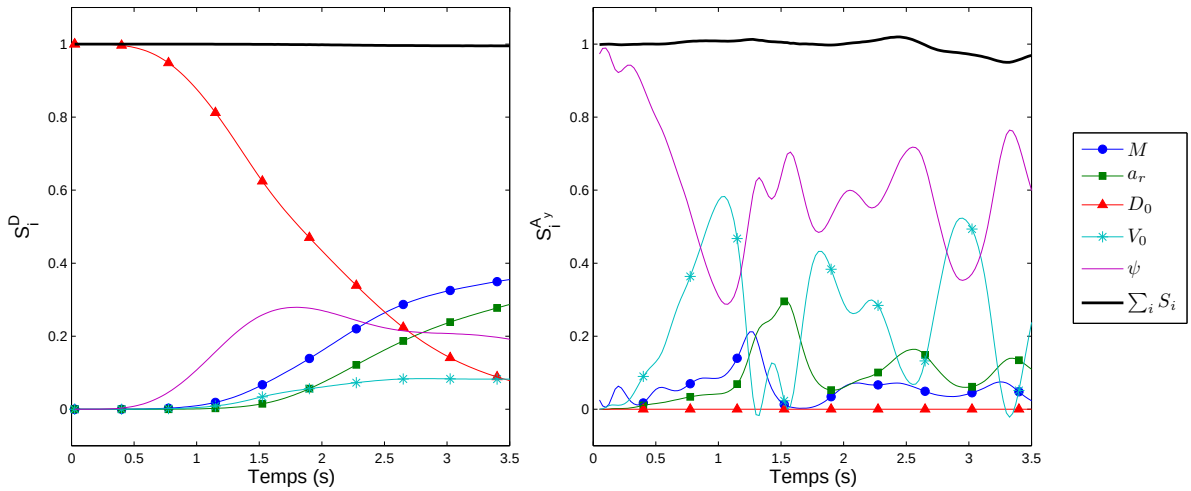


Figure III.8 – Analyse de sensibilité du vecteur $\boldsymbol{X}$ et du processus ψ

La figure III.8 présente les indices de sensibilité des 4 composantes du vecteur $\boldsymbol{X}$ et du processus ψ. Sur le critère de position latérale, les indices de sensibilité associées à $\boldsymbol{X}$ présentent des allures similaires à celles obtenues précédemment. Le processus ψ a une influence négligeable pendant environ 0.5 s, puis S_ψ^D se stabilise rapidement autour de 20%. Concernant l'accélération latérale, le processus ψ et la perturbation V_0 se partagent la majorité de l'influence tout au long de la simulation. La position du centre de gravité reste influente autour de 1.5 s, lorsque le braquage de référence β_{ref} est maximal. Le rôle de la masse M est fortement réduit avec l'introduction du processus. Cependant, puisqu'il possède encore une influence forte sur la position latérale, le vecteur $\boldsymbol{X}$ ne peut donc pas être réduit davantage. L'introduction du processus ψ n'a pas perturbé l'additivité du modèle, puisque la somme des indices vaut toujours 1.

L'analyse de sensibilité nous a ainsi permis de ramener le vecteur $\boldsymbol{X}$ de 9 à 4 composantes. Les incertitudes inhérentes au conducteur, au véhicule et à l'infrastructure sont donc représentées par 4 variables aléatoires et 1 processus stochastique. Cette réduction de la dimension aléatoire du système va nous permettre une application optimale des méthodes fiabilistes, en vue d'évaluer des indices de risque.

III.5 Approximation de ψ

L'analyse de sensibilité précédente a conduit à conserver le paramètre ψ qui, de par son statut de processus, est mal adapté à l'analyse fiabiliste qui est la prochaine étape de notre travail. En effet par définition, ψ équivaut à la donnée d'une famille infinie $(\psi(t), t \in \mathbb{R}_+)$ de variables aléatoires et, par construction, les méthodes de l'analyse fiabiliste de n'appliquent que dans des situations où les variables aléatoires sont en nombre fini. Nous allons donc nous ramener à une telle situation en construisant une approximation de ψ ne faisant intervenir qu'un nombre fini de variables aléatoires. Rappelons que ce processus est borné et a pour expression :

$$\psi(t) = \epsilon \sin\left(\nu t + \sigma W(t) + 2\pi\Theta\right) \ , \ t \in \mathbb{R}_+$$

où ϵ, ν, σ sont des constantes réelles positives, W est un processus de Wiener standard réel et Θ une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ et indépendante de W.

Nous allons utiliser une approximation de ψ par un processus $\psi_K = (\psi_K(t), t \in \mathbb{R}_+)$ tel que :

$$\psi_K(t) = \epsilon \sin\left(\nu t + \sigma W_K(t) + 2\pi\Theta\right) \ , \ t \in \mathbb{R}_+ \tag{III.15}$$

où W_K est une K-approximation de Karhunen-Loève du processus de Wiener W, c'est-à-dire une approximation de W de la forme :

$$W_K = \sum_{k=1}^{K} \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t)\xi_k \tag{III.16}$$

où les $(\xi_k)_{k=1,K}$ sont des variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes dans leur ensemble et les couples $(\lambda_k, \phi_k)_{k=1,K}$ sont les K premières valeurs propres et fonctions propres associées de l'opérateur de covariance du processus de Wiener standard W. Ces grandeurs sont données par [GS03] :

$$\phi_k(t) = \sqrt{2}\sin((k - \frac{1}{2})\pi t) \ , \ \lambda_k = \frac{1}{(k - \frac{1}{2})^2\pi^2}$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons que le processus de Wiener standard W est défini comme suit : c'est un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indexé sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, du second ordre, non stationnaire, centré, gaussien, à accroissements gaussiens indépendants et de fonction de covariance :

$$C_W(s,t) = \mathrm{E}[W(s)W(t)] = \min(s,t)$$

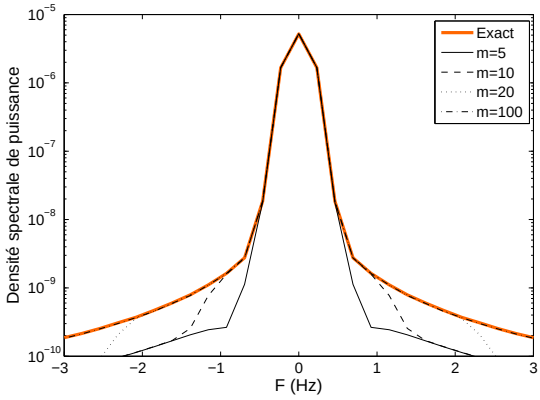


Figure III.9 – Evolution de l'approximation de la densité spectrale de ψ en fonction de l'ordre de troncature K

De plus, la famille dénombrable $(\lambda_k, \phi_k)_{k=1,\mathbb{N}^*}$ est solution du problème spectral :

$$\int_{\mathbb{R}_+} C_W(s,t)\phi(s)ds = \lambda\phi(t)$$

Portant (III.16) dans (III.15), il vient :

$$\psi_K(t) = \epsilon \sin\left(\nu t + \sigma \sum_{k=1}^{K} \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t)\xi_k + 2\pi\Theta\right) \ , \ t \in \mathbb{R}_+$$

et on obtient ainsi un processus approximant entièrement déterminé par un nombre fini de variables aléatoires : les K variables gaussiennes standards indépendantes $(\xi_k)_{k=1,K}$ et la variable Θ, uniforme sur $[0,1]$ et indépendante de la famille $(\xi_k)_{k=1,K}$.

Pour le choix de l'ordre de troncature K, nous avons utilisé un critère d'approximation basé sur la minimisation de l'écart (au sens L^2) entre la densité spectrale de puissance (DSP) S_{ψ_K} de ψ_K et la DSP cible S_ψ de ψ, donnée par (III.7). Des études réalisées sur des simulateurs de conduite [CU01] montrent que les actions de braquage du conducteur sont généralement à des fréquences inférieures à 0.5 Hz. Il a donc été choisi de réaliser l'identification sur la plage de fréquence $[0,1]$ Hz.

La figure III.9 représente le graphe de la DSP théorique S_ψ calculée par (III.7), et ceux des DSP calculées pour divers choix d'ordre de troncature $K = 5, 10, 20, 100$. Il apparaît que le choix $K = 10$ est suffisant pour l'application visée. Par cette méthode, la simulation du processus ψ ne requiert donc que la simulation de dix variables gaussiennes standard ξ_k et une variable uniforme Θ.

III.6 Formulation finale

L'approximation du processus ψ réalisée permet de réécrire (III.1) uniquement en fonction de variables aléatoires. En redéfinissant le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ par $\boldsymbol{X} = (M, a_r, D_0, V_0, \Theta, \xi_1, \ldots, \xi_{10})^T$, cette équation prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{s}} = A^{-1}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}; \boldsymbol{X}) F(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ref}}; \boldsymbol{X}) \ , \ t > 0 \\ \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}(0) = \boldsymbol{X}_{s0} \text{ p.s.} \end{cases} \tag{III.17}$$

La dimension du problème stochastique (i.e. la dimension de $\boldsymbol{X}$) est ainsi $n = 15$. On notera que dans cette formulation, le vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$ est à composantes mutuellement indépendantes.

Chapitre IV

Analyse fiabiliste

L'analyse fiabiliste du système a pour but d'évaluer des indices de risque associés aux critères de sécurité, à partir de la modélisation probabiliste proposée. Par soucis de simplicité, la démarche est ici explicitée seulement dans le cas du critère de position latérale sur le virage de référence de la Rd8. La méthodologie reste identique pour les critères d'accélération latérale ou de TLC présentés en section II.3. Plusieurs indices de risque sont proposés dans ce chapitre, puis comparés par rapport au temps de calcul nécessaire à leur évaluation. Les résultats attendus sont l'évolution des indices de risques en fonction des conditions initiales, dans le but d'obtenir une cartographie du risque encouru par le conducteur en entrée de virage.

IV.1 Formulation fiabiliste

L'analyse de sensibilité et l'approximation du processus ψ présentées au chapitre précédent nous ont permis d'écrire le modèle dynamique sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{s}} = A^{-1}(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}; \boldsymbol{X}) F(\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{ref}}; \boldsymbol{X}) \ , \ t > 0 \\ \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}(0) = \boldsymbol{X}_{s0} \text{ p.s.} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{X}$ est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $n = 15$, défini sur l'espace de probabilité de base $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La solution $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}$ de ce système est un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et indexé par t. On peut donc la voir comme une fonction de t et de l'aléa $\omega \in \Omega$. Mais la dépendance en ω vient ici de ce que $\boldsymbol{X}_s$ dépend en fait de $\boldsymbol{X}$ et donc de ω à travers $\boldsymbol{X}$. On peut en effet écrire formellement, $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{s}}(t) = f(t, \boldsymbol{X}) \tag{IV.1}$$

et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall \omega \in \Omega$:

$$\boldsymbol{X_s}(t;\omega) = f(t, \boldsymbol{X}(\omega))$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{15}$ dans $\mathbb{R}^5$ représentant la réponse du système.

Compte tenu de la relation (III.2) et du fait que $\boldsymbol{x}_s$ est maintenant un processus $\boldsymbol{X}_s$, la variable de contrôle du critère de position latérale est également un processus, noté D, tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+$:

$$D(t) = \eta_1(\boldsymbol{X_s}(t))$$

Ce que l'on peut encore écrire, d'après (IV.1)

$$D(t) = \eta_1 \circ f(t, \boldsymbol{X})$$

relation qui montre que le processus D dépend également de t et de $\boldsymbol{X}$. Posant $\mathcal{D} = \eta_1 \circ f$, on peut écrire formellement :

$$D(t) = \mathcal{D}(t, \boldsymbol{X})$$

où $\mathcal{D}$ est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{15}$ dans $\mathbb{R}$.

A partir du critère de position latérale (III.4), introduisons la fonction d'état-limite G définie $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ par :

$$G(\boldsymbol{x}) = \overline{d} - \sup_{t \in [0,T]} |\mathcal{D}(t, \boldsymbol{x})|$$

Cette fonction définit deux sous-ensembles complémentaires de $\mathbb{R}^n$, D_s et D_f, tels que :

$$D_s = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : G(\boldsymbol{x}) > 0\} \ , \ D_f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : G(\boldsymbol{x}) < 0\}$$

appelés respectivement *domaine de sécurité* et *domaine de défaillance*, et qui représentent, pour D_s, le domaine où le critère de position latérale est respecté et, pour D_f, le domaine ou ce critère est violé. A ces deux sous-ensembles sont associés les événements de sécurité $\mathrm{E}_s \in \mathcal{F}$ et de défaillance $\mathrm{E}_f \in \mathcal{F}$ définis comme suit :

$$E_s = \{\omega \in \Omega : G(\boldsymbol{X}(\omega)) > 0\} \ , \ E_f = \{\omega \in \Omega : G(\boldsymbol{X}(\omega)) < 0\}$$

et vérifiant :

$$E_s \cup E_f = \Omega \ , \ E_s \cap E_f = \varnothing \tag{IV.2}$$

Une fois connue la densité de probabilité $p_{\boldsymbol{X}}$ de $\boldsymbol{X}$, l'objectif fondamental de l'analyse de fiabilité est d'évaluer les probabilités $P(E_s)$ et $P(E_f)$, appelées respectivement *probabilité de sécurité* et *probabilité de défaillance*. Ces probabilités sont données par :

$$P(E_s) = \int_{D_s} p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \ , \ P(E_f) = \int_{D_f} p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{IV.3}$$

et sont telles que, d'après (IV.2) :

$$P(E_s) = 1 - P(E_f)$$

Il résulte de cette dernière relation que la connaissance de l'une de ces deux probabilités détermine complètement l'autre. C'est pourquoi dans la pratique fiabiliste on ne s'intéresse en général qu'à l'une de ces deux, et principalement à $P(E_f)$. C'est ce que nous ferins ici en notant comme habituellement P_f cette probabilité qui peut être réécrite :

$$P_f = P(E_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{D_f}(\boldsymbol{x}) p_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{IV.4}$$

où $\mathbb{1}_{D_f}$ est la fonction indicatrice du domaine D_f telle que $\mathbb{1}_{D_f}(\boldsymbol{x}) = 1$ si $\boldsymbol{x} \in D_f$ et $\mathbb{1}_{D_f}(\boldsymbol{x}) = 0$ si $\boldsymbol{x} \notin D_f$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ est l'élément générique de $\mathbb{R}^n$ et $d\boldsymbol{x} = dx_1 \ldots dx_n$ la mesure de Lebesgue associée. Le calcul exact de cette intégrale étant généralement impossible, des méthodes de Monte-Carlo [RK07, Rip06] et des approximations fiabilistes [DM96] sont utilisées pour estimer P_f.

IV.1.1 Formulation standard

Dans la démarche fiabiliste classique, il est d'usage de transformer la formulation initiale du problème (Eq. (IV.4) en une formulation standard dans laquelle le vecteur des paramètres aléatoires suit une loi gaussienne standard. Cela implique de construire une transformation régulière $\boldsymbol{T}$ [Ros52, DM96] (opération supposée possible ici) telle qu'on puisse écrire :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$$

où $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ est un vecteur aléatoire gaussien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. En introduisant alors le changement de variable $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ dans (IV.4), on obtient :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{y}) \varphi_n(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

où l'ensemble Δ_f est l'image par $\boldsymbol{T}$ de D_f :

$$\Delta_f = \boldsymbol{T}(D_f) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \Gamma(\boldsymbol{y}) < 0\}$$

avec :

$$\Gamma = G \circ \boldsymbol{T}^{-1}$$

et où φ_n est la densité de la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}^n$, telle que $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\varphi_n(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle_n}{2}\right) \tag{IV.5}$$

où $\langle ., . \rangle_n$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$.

IV.1.2 Indice de Hasofer-Lind

L'indice de Hasofer-Lind β_{HL} est un indice de fiabilité dont le calcul est plus aisé que celui de la probabilité de défaillance. Il est défini dans la formulation standard par :

$$\beta_{HL} = \delta(O, \Delta_f)$$

où O est l'origine de l'espace standard et $\delta(O, \Delta_f)$ la distance euclidienne entre O et le domaine de défaillance Δ_f (Fig. IV.1). Donc, β_{HL} est solution (non nécessairement unique) du problème d'optimisation sous contrainte :

$$\beta_{HL} = \min_{M \in \Delta_f} \|\overrightarrow{OM}\|_n \tag{IV.6}$$

où $\|.\|_n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle ., . \rangle_n$. De nombreux algorithmes sont disponibles dans la littérature [Rac76, ZK94] pour la résolution de ce problème. Le point solution M^*, tel que $\beta_{HL} = \|\overrightarrow{OM^*}\|_n$ est appelé point de conception.

IV.1.3 Approximation FORM

Cette approximation (FORM signifie *First Order Reliability Method*) consiste à remplacer le domaine de défaillance Δ_f par le demi-espace Δ_f^L tangent à Δ_f en M^* (voir Fig. IV.1). Ce demi-espace est défini par :

$$\Delta_f^L = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \Gamma^L(\boldsymbol{y}) < 0\right\}$$

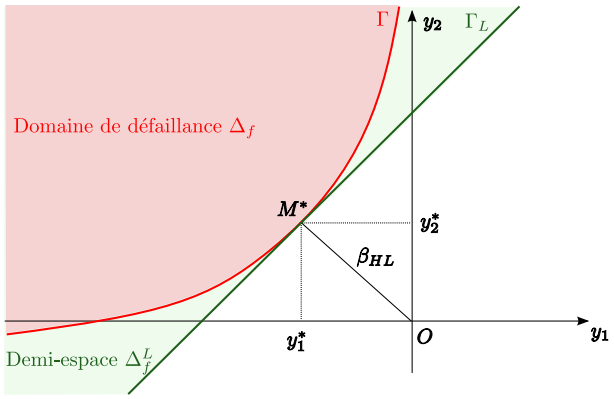


Figure IV.1 – Illustration de l'indice de Hasofer-Lind, en dimension deux

avec :

$$\Gamma^L(\boldsymbol{y}) = \Gamma(\boldsymbol{y}^*) + \langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^* \rangle_n \ , \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \tag{IV.7}$$

où $\boldsymbol{y^*} = (y_1^*, \ldots, y_n^*)^T$ est le vecteur des coordonnées de M^* (i.e. le vecteur position de M^*), $\nabla\Gamma$ est le gradient de Γ et $\Gamma(y^*) = 0$ ici. L'équation (IV.7) est le développement de Taylor au premier ordre de Γ en M^*. En utilisant cette approximation, la probabilité de défaillance P_f peut être approximée par :

$$P_f^L = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Delta_f^L}(\boldsymbol{y}) \varphi_n(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

et on peut alors montrer que :

$$P_f^L = \Phi\left(-\frac{\Gamma(\boldsymbol{y}^*) - \langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{y}^* \rangle_n}{\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{y}^*)\|_n} \right) = \Phi(-\beta_{HL}) \tag{IV.8}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}$. La probabilité P_f^L est appelée l'approximation FORM de P_f et n'est une approximation convenable de P_f que si la fonction d'état-limite Γ est quasi-linéaire et le point de conception unique.

Dans le cas où le point de conception n'est pas unique, l'approximation donnée par (IV.8) doit être modifiée. Par exemple, considérons deux points de conception M_1^* et M_2^* d'indices de Hasofer-Lind correspondants $\beta_{HL}^1 = \|OM_1^*\|_n$ et $\beta_{HL}^2 = \|OM_2^*\|_n$ (Fig. IV.2). On peut alors montrer [DM96] que l'approximation FORM P_f^L de P_f s'écrit :

$$P_f^L = 1 - \mathcal{G}_2(\beta_{HL}^1, \beta_{HL}^2, \rho_{12})$$

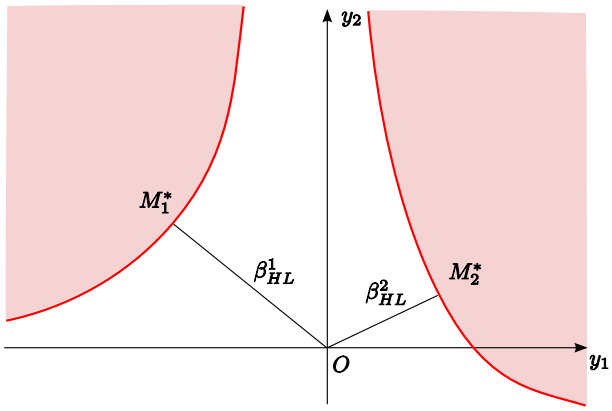


Figure IV.2 – Illustration d'un cas avec deux points de conception, en dimension deux

où $\rho_{12} = \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle_n$ est le produit scalaire des vecteurs normaux unitaires sortant $\boldsymbol{n}_1$ et $\boldsymbol{n}_2$ donnés par :

$$\boldsymbol{n_1} = -\frac{\nabla\Gamma(\boldsymbol{y_1^*})}{\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{y_1^*})\|_n} \ , \ \boldsymbol{n_2} = -\frac{\nabla\Gamma(\boldsymbol{y_2^*})}{\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{y_2^*})\|_n}$$

et $\mathcal{G}_2(x_1, x_2; \rho)$ est la fonction de répartition de la loi gaussienne sur $\mathbb{R}^2$, centrée et de matrice de covariance :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

soit :

$$\mathcal{G}_2(x_1, x_2; \rho) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) du_1 du_2$$

IV.1.4 Approximation SORM

La méthode SORM (*Second Order Reliability Method*) est un raffinement de l'approximation FORM consistant à remplacer la fonction d'état-limite Γ par son approximation quadratique Γ^Q en M^*, donnée par :

$$\Gamma^Q(\boldsymbol{y}) = \Gamma(\boldsymbol{y}^*) + \langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^* \rangle_n + \frac{1}{2}\langle \nabla^2\Gamma(\boldsymbol{y}^*)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^*), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^* \rangle_n \ , \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(IV.9)}$$

puis à substituer au domaine de défaillance Δ_f le domaine :

$$\Delta_f^Q = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \Gamma^Q(\boldsymbol{y}) \leq 0 \right\}$$

La probabilité de défaillance P_f^Q associée à Δ_f^Q est alors donnée par :

$$P_f^Q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\Delta_f^Q}(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

intégrale qui peut ensuite être approximée par la formule asymptotique de Hohenbichler [HR88] :

$$P_f^Q \sim \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})}\kappa_i\right)^{-1/2} \quad (1 \leq \beta_{HL} \to +\infty) \tag{IV.10}$$

où κ_i, $1 \leq i \leq n-1$ sont les courbures principales de la surface d'état-limite en M^*, considérées positives si le domaine de défaillance est convexe en M^*, et supposées vérifier $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$: $\kappa_i > -\Phi(-\beta_{HL})/\varphi(\beta_{HL})$. Dans (IV.9), $\nabla^2\Gamma(\boldsymbol{y}^*)$ désigne la matrice hessienne de Γ en M^* et on a toujours $\Gamma(\boldsymbol{y}^*) = 0$.

L'enjeu de la méthode SORM, une fois calculé l'indice de Hasofer-Lind, est donc d'évaluer les courbures principales κ_i. Plusieurs méthodes existent dans la littérature, basées pour la plupart sur le calcul des valeurs propres de la hessienne $\nabla^2\Gamma(\boldsymbol{y}^*)$. Les inconvénients de ces méthodes tiennent principalement à trois causes :

1. la fonction d'état-limite doit être deux fois continûment différentiable au voisinage de M^* ;
2. l'estimation numérique de la hessienne $\nabla^2\Gamma(\boldsymbol{y}^*)$ est coûteuse lorsque n est grand ;
3. le calcul des κ_i à partir de la hessienne est très sensible aux bruits numériques, et peut conduire à des valeurs très imprécises.

La méthode dite du « *Point Fitting* »[KLH87] permet en général d'éviter ces inconvénients. C'est pourquoi nous l'avons utilisée dans ce travail. Nous en donnons une brêve description ci-après.

La première étape de cette méthode consiste à réaliser un changement de variables $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y'}$ dans l'espace standard afin que le point de conception M^* soit situé sur l'axe relatif à $\boldsymbol{y'_n}$. Cette transformation correspond à une rotation, définie par :

$$\boldsymbol{y'} = R\boldsymbol{y}$$

où la n-ième ligne de la matrice R est égale à $\boldsymbol{y}^*/\|\boldsymbol{y}^*\|$ et les $(n-1)$ lignes restantes sont déterminées par un algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Puis, dans chaque plan (y'_i, y'_n), $1 \leq i < n$, deux points de contrôle P_{-i} et P_{+i} (voir Fig. IV.3) sont choisis tels que :

- leurs coordonnées dans le plan (y'_i, y'_n) sont $(-\beta_{HL}, \eta_{-i})$ et (β_{HL}, η_{+i}) respectivement,

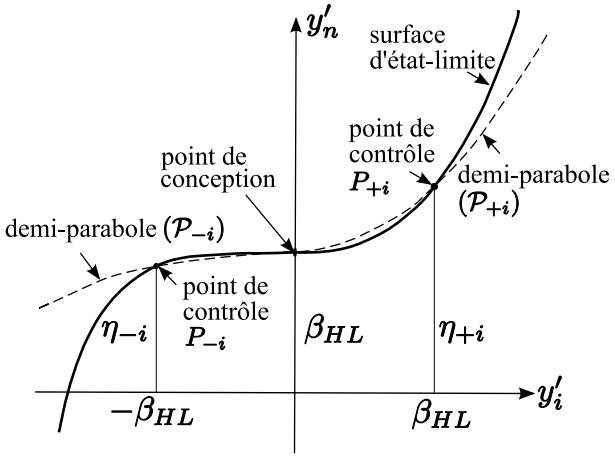


Figure IV.3 – Méthode SORM Point Fitting, selon [KLH87]

- les ordonnées η_{-i} et η_{+i} sont solutions des équations non linéaires :

$$\Gamma(R^{-1}\boldsymbol{y'}_{-i}) = 0 \ , \ \Gamma(R^{-1}\boldsymbol{y'}_{+i}) = 0$$

avec $\boldsymbol{y'}_{-i} = (0, \ldots, 0, -\beta_{HL}, 0, \ldots, \eta)^T$ et $\boldsymbol{y'}_{+i} = (0, \ldots, 0, \beta_{HL}, 0, \ldots, \eta)^T$. Ces deux équations sont résolues en utilisant un algorithme de Newton-Raphson.

Deux demi-paraboles $\mathcal{P}_{-i}$ et $\mathcal{P}_{+i}$ sont ensuite construites sous les contraintes d'être tangentes à la surface d'état-limite en M^* et de passer par P_{-i} et P_{+i} respectivement. Une telle construction permet d'approximer des surfaces d'état-limite non-symétriques, comme montré sur la figure IV.3. Les courbures $\overline{\kappa}_{-i}$ et $\overline{\kappa}_{+i}$ des demi-paraboles $\mathcal{P}_{-i}$ et $\mathcal{P}_{+i}$ sont données respectivement par :

$$\overline{\kappa}_{\pm i} = \frac{2(\eta_{\pm i} - \beta_{HL})}{\beta_{HL}^2}$$

Les courbures principales de la surface d'état-limite en M^* peuvent alors être approximées par les courbures équivalentes κ_i^{eq}, $1 \leq i < n$, définies par les égalités :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})}\kappa_i^{eq}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})}\overline{\kappa}_{-i}}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})}\overline{\kappa}_{+i}}}\right) \ , \ i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{(IV.11)}$$

En remplaçant dans (IV.10) les κ_i par les κ_i^{eq} on obtient finalement la nouvelle approximation cherchée de P_f^Q :

$$P_f^Q \approx \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})}\kappa_i^{eq}\right)^{-1/2}$$

IV.2 Améliorations apportées

Plusieurs améliorations ont été apportées aux algorithmes standards présentés ci-dessus, afin de s'adapter au mieux aux spécificités du modèle et de réduire les calculs nécessaires.

IV.2.1 Convergence de l'algorithme de détermination de M^*

La recherche du point de conception, étape fondamentale du calcul de β_{HL}, est le préliminaire à l'application des méthodes FORM et SORM. Deux algorithmes de résolution du système d'optimisation (Eq. IV.6) ont été testés : l'algorithme de Rackwitz-Fiessler [Rac76], programmé en Matlab, et l'algorithme iHLRF [ZK94] implémenté dans FERUM [BMD09]. En choisissant comme point de départ le point origine O, aucun de ces deux algorithmes ne parvient à converger. On peut voir sur la figure IV.4a les composantes du vecteur position $\boldsymbol{y}^*$ du point de conception pour les trois premières itérations de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler, pour la classe de conducteurs 1 avec une vitesse de 45 km.h^{-1}. On remarque que la 5-ème composante y_5^n de $\boldsymbol{y}^n$, correspondant à la variable aléatoire $X_5 = \Theta$ (Eq. (III.6)), change totalement de valeur d'une itération à la suivante. Ceci résulte des non-linéarités associées à cette variable, qui provoquent de fortes variations du gradient. Afin de contrôler ces divergences, un seuil de variation maximale ϵ a été introduit entre deux itérations successives n et $n+1$, traduit par l'inégalité :

$$\left|y_5^{n+1} - y_5^n\right| < \epsilon \tag{IV.12}$$

La valeur de ϵ a été choisie égale à 0.05, ce qui assure au gradient de Γ de rester quasiment constant d'un pas de l'algorithme au suivant. Si l'inégalité (IV.12) n'est pas vérifiée, le vecteur normal unitaire $\boldsymbol{n}$ est modifié en $\widehat{\boldsymbol{n}}$ selon :

$$\lambda = \epsilon / |y_5^{n+1}| \tag{IV.13}$$

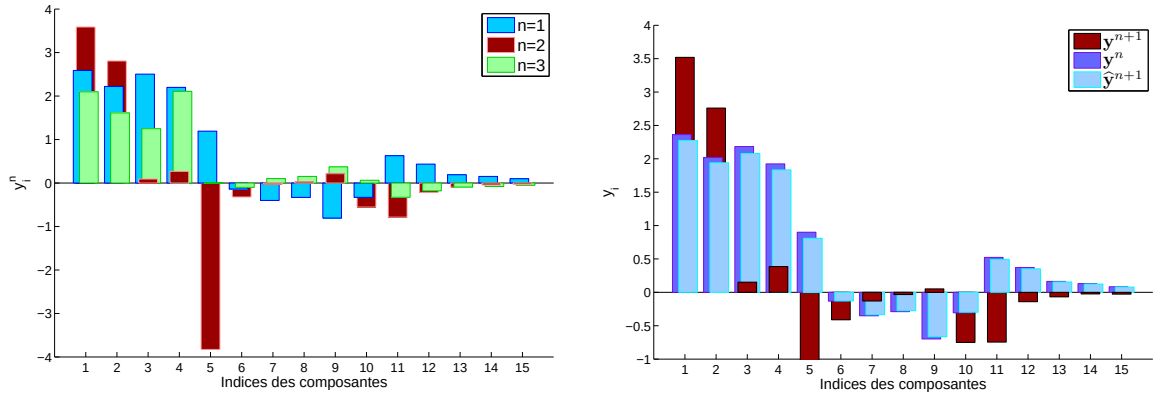
$$\widehat{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{y}^n + \lambda \boldsymbol{y}^{n+1}}{||\boldsymbol{y}^n + \lambda \boldsymbol{y}^{n+1}||} \tag{IV.14}$$

la nouvelle estimation du point de conception à la $(n+1)$-ième itération $\widehat{\boldsymbol{y}}^{n+1}$ est alors donnée par :

$$\widehat{\boldsymbol{y}}^{n+1} = \beta \widehat{\boldsymbol{n}} \quad | \quad \Gamma(\beta \widehat{\boldsymbol{n}}) = 0 \tag{IV.15}$$

où β est déterminé par une méthode de Newton-Raphson.

La figure IV.4b illustre graphiquement les valeurs des composantes de $\boldsymbol{y}^n, \boldsymbol{y}^{n+1}$ et $\widehat{\boldsymbol{y}}^{n+1}$ pour $n = 2$. Dans ce cas la différence $y_5^{n+1} - y_5^n$ est largement supérieure à ϵ, par conséquent l'inégalité



a) b)

Figure IV.4 – Coordonnées de M^* selon les itérations (a) et correction de $\boldsymbol{y}^{n+1}$ (b)

(IV.12) n'est pas vérifiée. Le vecteur corrigé $\widehat{\boldsymbol{y}}^{n+1}$ est alors calculé selon (IV.13)-(IV.15). Il est construit de telle façon que $\widehat{y}_5^{n+1}$ soit à une distance $\epsilon = 0.05$ de y_5^n et situé au plus proche de y_5^{n+1}. Les autres composantes du vecteur corrigé $\widehat{\boldsymbol{y}}^{n+1}$ intègrent une proportion λ de $\boldsymbol{y}^{n+1}$ selon (IV.14). Les vecteurs $\boldsymbol{y}^n$ et $\widehat{\boldsymbol{y}}^{n+1}$ sont relativement proches d'une itération à l'autre, ce qui assure la convergence vers le vecteur position solution $\boldsymbol{y}^*$. L'évolution de $\beta_{HL}^n = \|\boldsymbol{y}^n\|$ en fonction de n est visible sur la figure IV.5 avec et sans la correction (IV.13)-(IV.15). On observe que le cas sans correction présente une évolution chaotique, et il a été vérifié que la convergence n'est toujours pas atteinte au bout de 300 itérations. Au contraire, l'application de la correction permet de contrôler l'évolution β_{HL}^n et de converger en 28 itérations. Le critère de convergence retenu est :

$$\begin{aligned} \left|\beta_{HL}^{n+1} - \beta_{HL}^n\right| &< 10^{-3} \\ \left|\Gamma(\boldsymbol{y}^{n+1})\right| &< 10^{-4} \end{aligned}$$

Les carrés noirs sur la figure IV.5 désignent les itérations ou la correction a été appliquée. On remarque que la correction est systématique dans toute l'approche du point de conception, et est également appliquée à certaines itérations (22, 24 et 25) proches de la convergence. Il apparait donc que les non-linéarités contenues dans le modèle rendent la correction obligatoire et la convergence lente. Il est par conséquent important, afin de minimiser le nombre d'itérations nécessaires, d'initialiser l'algorithme au plus près du point de conception.

IV.2.2 Stratégie de choix du point initial

Sans information a priori sur le point de conception, le point d'initialisation généralement choisi est l'origine O de l'espace standard. Les calculs précédents ont montré que la convergence nécessitait alors un grand nombre d'itérations. Il est donc important de choisir judicieusement le

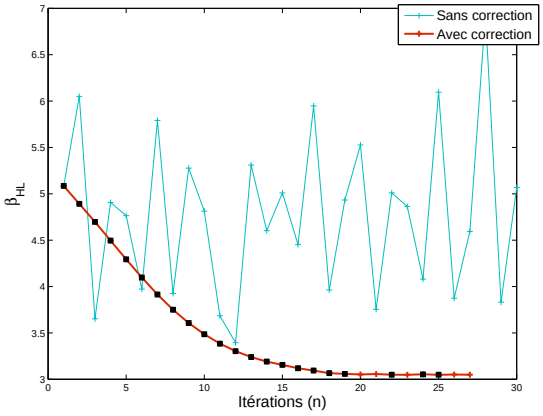


Figure IV.5 – Convergence de l'indice β_{HL}^n, avec et sans correction

vecteur position initial $\boldsymbol{y}^0$ en fonction des informations disponibles au moment du calcul. Le calcul d'indicateurs de risque est effectué pour la plage de vitesse $[45, 80]$ km.h^{-1} dans chaque classe de conducteurs afin de couvrir toutes les conditions initiales possiblement rencontrées. Trois différents cas sont à considérer selon que l'on considère le premier calcul (cas 1 : 45 km.h^{-1}, Classe 1), les premiers calculs des autres classes de conducteurs (cas 1 : 45 km.h^{-1}, Classe 2,3, ou 4), ou tous les autres calculs (cas 3).

- cas 1 : Pour ce calcul, aucune information n'est connue concernant d'autres vitesses ou classes de conducteurs. Par contre, l'analyse de sensibilité sur le critère de position latérale a montré que les quatre variables aléatoires (M, a_r, D_0, V_0) représentent environ 75% de l'influence totale, le processus ψ représentant les 25% restant. On peut donc supposer que le point de conception M^* est proche du point de conception $\widetilde{M}^*$ du système pour lequel le vecteur aléatoire $\widetilde{\boldsymbol{X}} = (M, a_r, D_0, V_0)^T$ est réduit aux quatre premières composantes de $\boldsymbol{X}$ et où le processus ψ est ignoré. Comportant seulement quatre variables aléatoires, le vecteur position $\widetilde{\boldsymbol{y}}^* = (\widetilde{y}_1^*, \widetilde{y}_2^*, \widetilde{y}_3^*, \widetilde{y}_4^*)^T$ de $\widetilde{M}^*$ est rapidement estimé, et le vecteur $\boldsymbol{y}^*$ choisi est :

$$\boldsymbol{y}^0 = (\widetilde{y}_1^*, \widetilde{y}_2^* \widetilde{y}_3^* \widetilde{y}_4^*, 0, \ldots, 0)^T$$

  La comparaison entre le vecteur position initial $\boldsymbol{y}^0$ et le vecteur position $\boldsymbol{y}^*$ de M^* est présentée sur la figure IV.6a. On remarque que l'ordre de grandeur des quatre premières composantes de $\boldsymbol{y}^0$ est satisfaisant. Ce choix permet de réduire le nombre d'itérations nécessaires pour converger de 28 à 9, ce qui correspond à une réduction de 789 à 241 appels au modèle mécanique.

- cas 2 : Lors du premier calcul d'une nouvelle classe de conducteurs, le point initial choisi est le point de conception de la classe de conducteurs précédente, préalablement calculé. Par

	Itérations	Appels
Sans initialisation	1 836	54 168
Avec initialisation	207	6 033

Table IV.1 – Gain apporté par la stratégie d'initialisation

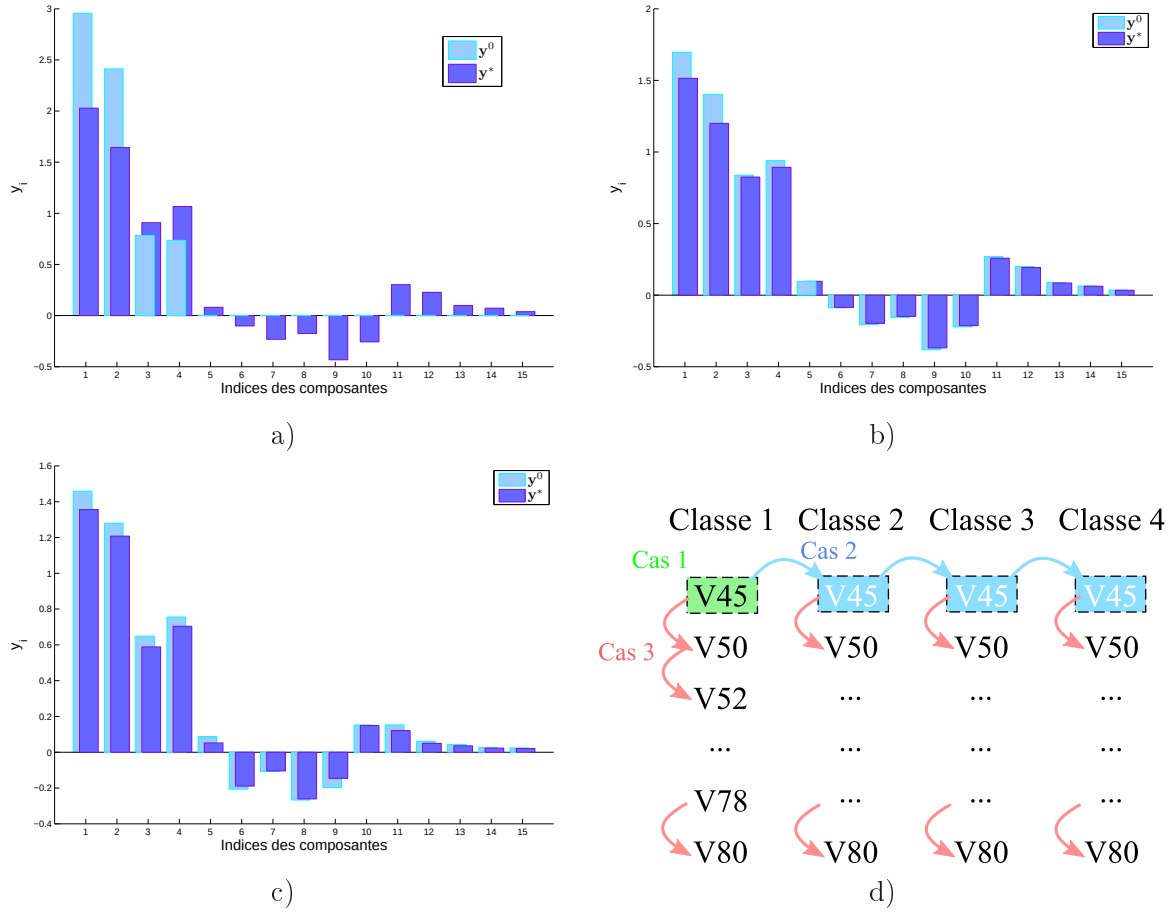
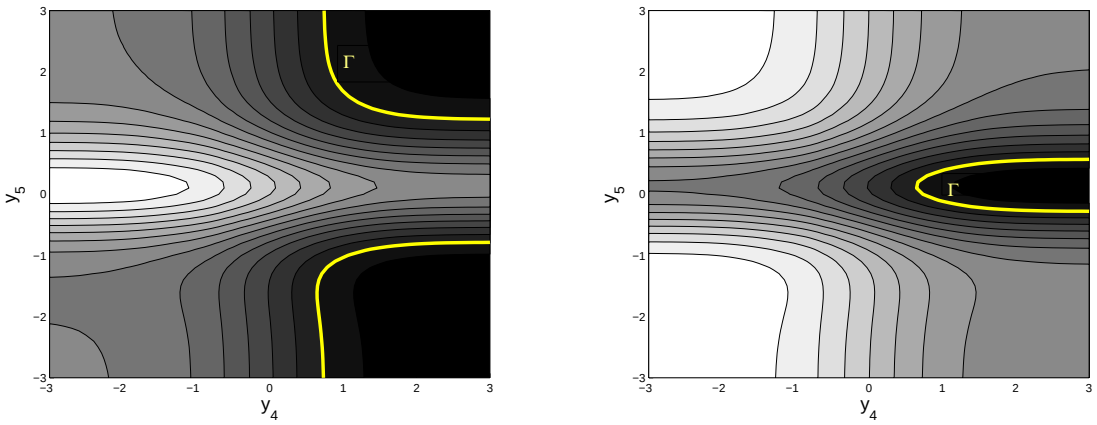


Figure IV.6 – Comparaison vecteur position initial/final pour le cas 1 (a) cas 2 (b) cas 3 (c), et organigramme de calcul associé (d)



a) b)

Figure IV.7 – Allure des états-limites dans les cas X_5 uniforme sur $[0, 1]$ (a) et X_5 uniforme sur $[-0.5, 0.5]$ (b)

exemple, le point de conception du cas (45 km.h^{-1}, Classe 2) est choisi comme point initial du cas (45 km.h^{-1}, Classe 3). Comme on peut le voir sur la figure IV.6b les coordonnées de $\boldsymbol{y}^0$ et $\boldsymbol{y}^*$ sont alors assez proches, et la convergence est alors obtenue en moyenne en 5 itérations (140 appels au modèle).

- cas 3 : Dans tous les autres cas, le point initial choisi est la solution du cas à la vitesse immédiatement inférieure dans la même classe de conducteurs. Dans ce cas le vecteur position $\boldsymbol{y}^0$ est très proche du vecteur position de M^* (Fig. IV.6c) et le calcul ne nécessite que 2 itérations, soit moins de 70 appels au modèle. Cette catégorie concerne 64 des 68 calculs de probabilité.

Cette stratégie d'initialisation conduit alors à la séquence de calcul résumée sur la figure IV.6d. Le gain en nombre d'itérations et d'appels au modèle qu'elle procure est résumée dans le tableau IV.1. On observe un facteur de réduction proche de 9 en termes de coût de calcul.

IV.2.3 Réunification des domaines de défaillance

Une fois le point de conception déterminé, l'approximation FORM de la probabilité de défaillance n'est fonction que de l'indice de Hasofer-Lind $\beta_{HL} = \|\boldsymbol{y}^*\|$ selon (IV.8). Cette approximation n'est valable que dans le cas ou le point de conception est unique, et ne fournit de bons résultats que si la surface d'état-limite est quasi-linéaire. Or, on remarque sur la figure IV.7a que dans le plan (y_4, y_5), le domaine de défaillance est formé de deux parties disjointes. Dans ce cas, la solution classique consiste à déterminer le point de conception relatif à chacune de ces parties. Il est alors possible de déterminer une approximation FORM de la probabilité de défaillance dans

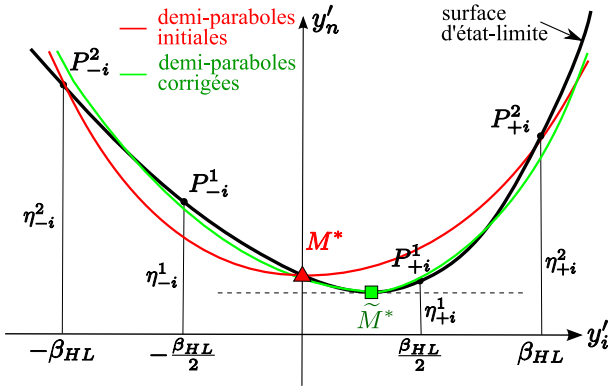


Figure IV.8 – Raffinements apportés à la méthode *SORM PF*

le cas ou deux points de conception existent selon les formules détaillées dans la section IV.1.3 [DM96, KD98].

Dans notre cas, la variable aléatoire à l'origine de ce fractionnement du domaine de défaillance est la variable $X_5 = \Theta$ qui apparaît dans l'expression du processus ψ :

$$\psi(t) = \epsilon \sin\left(\nu t + \sigma W(t) + 2\pi\Theta\right)$$

Cette variable, initialement supposée uniforme sur $[0, 1]$, peut en fait être choisie uniforme sur tout intervalle de longueur 1 sans modifier les propriétés statistiques du processus ψ. Or, il est apparu qu'en la choisissant uniforme sur $[-0.5, 0.5]$, le domaine de défaillance ne comportait plus qu'une seule partie comme le montre la figure Fig. IV.7b. Nous avons donc opté pour ce choix qui permet d'obtenir un domaine de défaillance formé d'un unique sous-ensemble de $\mathbb{R}^{15}$ et donc de simplifier l'application de la méthode FORM.

IV.2.4 Enrichissement de *SORM Point Fitting*

L'application de la méthode *SORM Point Fitting*, telle que détaillée dans la section IV.1.4, n'a pas fourni de résultats satisfaisants. Or la représentation de la surface d'état-limite par une surface quadrique est généralement suffisamment précise pour les applications d'ingénierie, à condition que le point de conception soit rigoureusement identifié et unique [KD98]. Etant donné les problèmes de convergence rencontrés avec ce modèle, une meilleure identification du point de conception ne peut être obtenue qu'en diminuant le seuil ϵ de (IV.12). Ceci a alors pour conséquence d'augmenter fortement le nombre d'itérations pour atteindre la convergence. Pour éviter cet inconvénient, l'idée suivie ici consiste à utiliser les points de contrôle $P_{\pm i}$ afin de relocaliser précisément le point de conception.

Le principe proposé est d'utiliser le maximum d'information connue sur la surface d'état-limite (le point de conception estimé M^* et les points de contrôle $P_{\pm i}$) pour y faire passer une surface polynomiale ($\mathcal{P}$). Le point de conception corrigé $\widetilde{M}^*$ se situe alors au minimum de ($\mathcal{P}$) (voir Fig. IV.8). La méthode *SORM Point Fitting* classique utilise deux points de contrôle, la surface polynomiale ($\mathcal{P}$) est donc de degré 2. Cependant, ce degré ne permet pas de correction efficace pour les surfaces d'état-limite non-symétriques, ce qui est un des avantages majeurs de la méthode *SORM Point Fitting*. Il a donc été choisi d'ajouter des points de contrôle afin d'augmenter le degré de la surface ($\mathcal{P}$). Ces points doivent être ajoutés par paire pour ne pas privilégier un côté. Un total de 4 points de contrôle s'est avéré être un bon compromis. Ces points $P^1_{\pm i}$ et $P^2_{\pm i}$ sont placés aux abscisses $\pm\beta_{HL}/2$ et $\pm\beta_{HL}$ de l'axe y'_i respectivement. En effet, il est important de disposer d'une bonne représentation de la surface d'état-limite dans l'intervalle $[-\beta_{HL}, \beta_{HL}]$ sur lequel sont estimées les courbures principales. Une fois identifié le point de conception corrigé $\widetilde{M}^*$ (et donc son vecteur position $\widetilde{\boldsymbol{y}}'^*$), les courbures $\overline{\kappa}_{\pm i}$ des demi-paraboles ($\mathcal{P}_{\pm i}$) sont évaluées par les formules :

$$\overline{\kappa}_{+i} = \frac{1}{2}\left(\frac{2(\eta^1_{+i} - \widetilde{y}'^*_n)}{(\beta_{HL}/2 - \widetilde{y}'^*_i)^2} + \frac{2(\eta^2_{+i} - \widetilde{y}'^*_n)}{(\beta_{HL} - \widetilde{y}'^*_i)^2}\right)$$
$$\overline{\kappa}_{-i} = \frac{1}{2}\left(\frac{2(\eta^1_{-i} - \widetilde{y}'^*_n)}{(-\beta_{HL}/2 - \widetilde{y}'^*_i)^2} + \frac{2(\eta^2_{-i} - \widetilde{y}'^*_n)}{(-\beta_{HL} - \widetilde{y}'^*_i)^2}\right)$$

dans le cas ou le point corrigé $\widetilde{M}^*$ se situe entre P^1_{-i} et P^1_{+i}. Ce calcul correspond à la moyenne des courbures des demi-paraboles reliant $\widetilde{M}^*$ à P^1_{+i} et $\widetilde{M}^*$ à P^2_{+i} pour la partie droite, et des demi-paraboles reliant $\widetilde{M}^*$ à P^1_{-i} et $\widetilde{M}^*$ à P^2_{-i} pour la partie gauche. Lorsqu'une correction plus forte est appliquée, par exemple si le point $\widetilde{M}^*$ se situe à droite de P^1_{+i}, les courbures sont évaluées par :

$$\overline{\kappa}_{+i} = \frac{2(\eta^2_{+i} - \widetilde{y}'^*_n)}{(\beta_{HL} - \widetilde{y}'^*_i)^2}$$
$$\overline{\kappa}_{-i} = \frac{1}{2}\left(\frac{2(y'^*_n - \widetilde{y}'^*_n)}{(y'^*_i - \widetilde{y}'^*_i)^2} + \frac{2(\eta^1_{-i} - \widetilde{y}'^*_n)}{(-\beta_{HL}/2 - \widetilde{y}'^*_i)^2}\right)$$

Dans ce cas les demi-paraboles considérées relient $\widetilde{M}^*$ à M^* et $\widetilde{M}^*$ à P^1_{-i} pour la partie gauche, et seulement une demi-parabole est considérée pour la partie droite reliant $\widetilde{M}^*$ à P^2_{+i}. On procède de façon analogue lorsque le point corrigé se situe à gauche de P^1_{-i}. Si le minimum de la surface ($\mathcal{P}$) se trouve à l'extérieur du segment formé par les points P^2_{-i} et P^2_{+i}, il y a alors probablement un problème de convergence et aucune correction n'est apportée. Enfin, la courbure équivalente κ^{eq} est toujours calculée selon (IV.11) et l'approximation SORM de P_f selon (IV.10).

En pratique, les ordonnées $\eta^{1,2}_{\pm i}$ des points additionnels $P^{1,2}_{\pm i}$ sont calculées selon l'algorithme proposé dans la méthode *SORM Point Fitting* par [KLH87]. Le calcul de l'approximation SORM de P_f nécessite alors au total 196 appels au modèle mécanique.

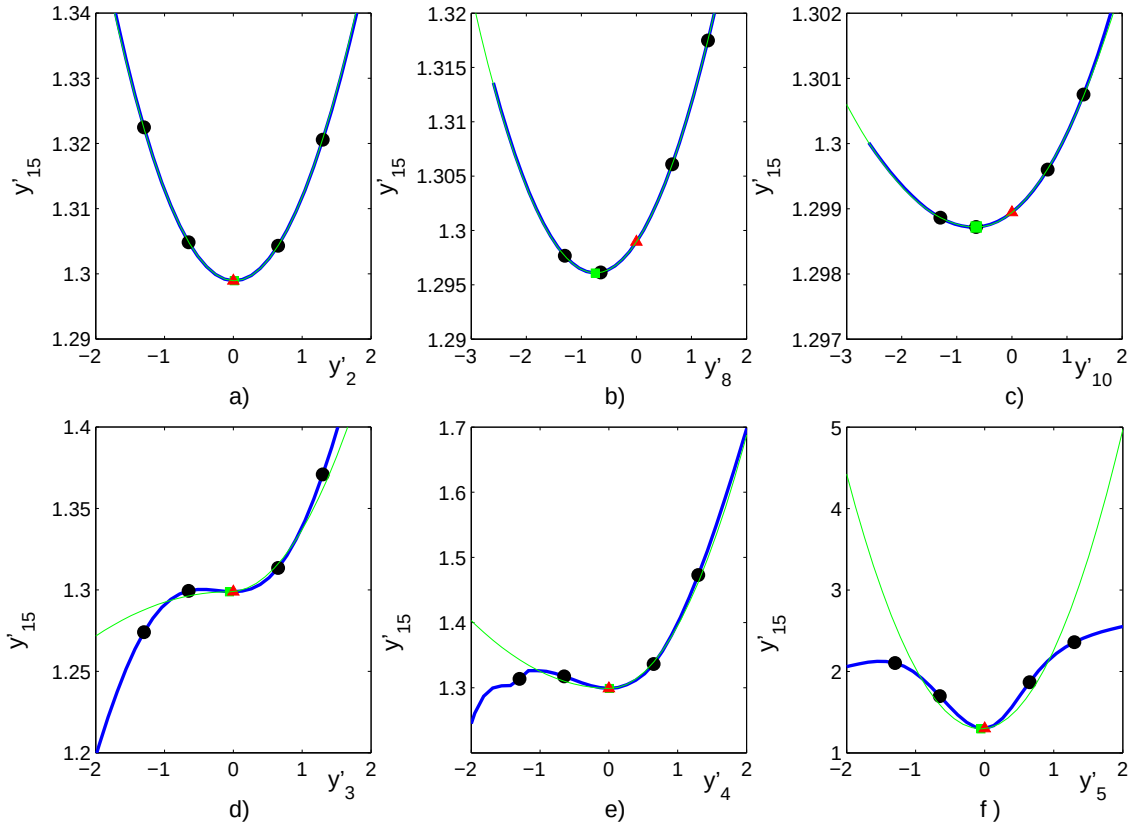
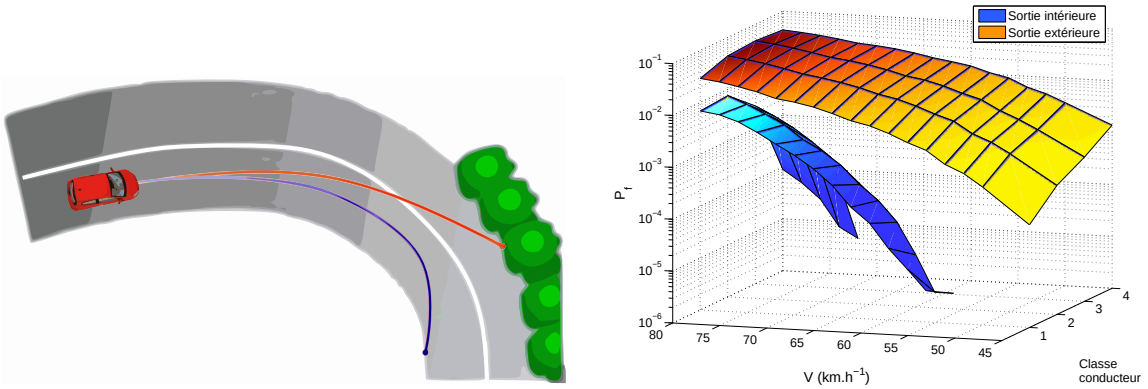


Figure IV.9 – Quelques exemples de surfaces d'état-limite (courbes bleues), leurs approximations SORM (courbes vertes), les points de contrôle (points noirs), les points de conceptions initiaux (triangle rouge) et corrigés (carrés verts)

Les demi-paraboles rouges sur la figure IV.8 montrent l'erreur importante pouvant être commise si le point de conception est mal identifié. En effet, si le point M^* ne se situe pas sur la tangente horizontale de la surface d'état-limite dans le plan (y'_i, y'_n), l'approximation par demi-paraboles n'est alors pas correcte. Par contre, une fois estimé le point de conception corrigé $\widetilde{M}^*$ les demi-paraboles vertes identifiées reproduisent fidèlement la surface d'état-limite. La figure IV.9 montre les corrections effectuées par la méthode *SORM Point Fitting* telle que modifiée ci-dessus. Le graphe a) correspond à un cas idéal où l'état-limite est symétrique et le point de conception parfaitement identifié. Les graphes b) et c) représentent deux cas ou le point de conception est mal identifié et nécessite une correction. On observe alors que le point après correction (carré vert) est correctement placé. Les graphes de la dernière ligne d) e) et f) illustrent des cas avec des fortes non-linéarités. On observe alors que la courbe approximée (courbe verte) restitue une bonne approximation de la surface d'état-limite au voisinage du point de conception, qui influence majoritairement la valeur de la probabilité de défaillance.



a) b)

Figure IV.10 – Séparation des cas de sortie intérieure et extérieure

IV.3 Premiers résultats

Les méthodes exposées ci-dessus ont été implémentées en langage Matlab ainsi qu'en Fortran. Les résultats sont présentés ici pour le seul critère de position latérale, des applications plus complètes étant réalisées dans le chapitre suivant. Dans cette section, le but est d'évaluer les différentes méthodes de fiabilité mises en œuvre sur ce problème. Dans chaque classe de conducteurs, les probabilités de défaillance sont calculées pour des vitesses allant de 45 à 80 km.h^{-1}. Selon la vitesse, le nombre de points de la trajectoire à simuler varie de 109 à 197 et les temps de calcul de 0.5 à 0.8 ms en Fortran (resp. 5 à 8 ms en Matlab). La rapidité du programme Fortran permet de réaliser des simulations de Monte-Carlo, afin de disposer de valeurs de référence de la probabilité de défaillance. Les méthodes FORM et SORM ont été codées en Matlab afin de permettre un développement et une visualisation des résultats plus rapides.

IV.3.1 Résultats Monte-Carlo

Dans un premier temps, les probabilités de défaillance ont été évaluées par une méthode de Monte-Carlo. Les calculs ont été effectués en parallèle sur un cluster de 54 processeurs. Chaque probabilité de défaillance est évaluée avec $N = 10^7$ simulations, ce qui nécessite moins de deux heures de calcul sur un des processeurs 2 GHz du cluster. Les 68 conditions initiales envisagées (17 vitesses dans 4 classes de conducteurs) sont alors calculées en moins de 4 heures grâce au cluster, mais nécessiteraient plus de 4 jours sur un seul ordinateur.

Rappelons que le critère de position latérale (III.4) s'écrit :

$$\overline{d} - \sup_{t\in[0,T]} |D(t)| > 0$$

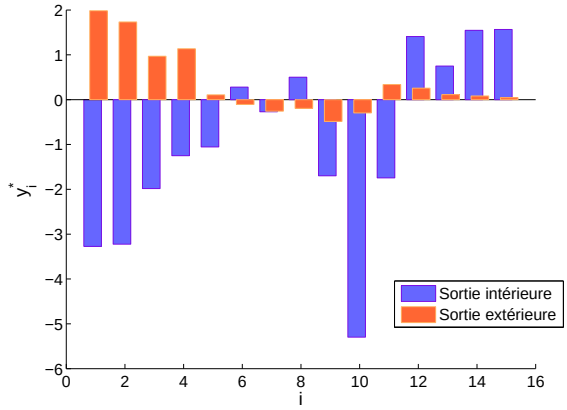


Figure IV.11 – Points de conception associées aux sorties extérieure et intérieure

Ce critère peut donc être violé si $\sup_{t\in[0,T]} D(t) \geq \overline{d}$ ou si $\inf_{t\in[0,T]} D(t) = -\overline{d}$, situations correspondant aux cas de sorties intérieure et extérieure illustrées sur la figure IV.10a. Les probabilités associées à chacun de ces événements sont présentées figure IV.10b en échelle logarithmique, en bleu pour la sortie intérieure et en rouge pour la sortie extérieure. On constate une forte différence des valeurs des probabilités, d'une part à cause de la tendance des véhicules au sous-virage (qui favorise la sortie extérieure) et d'autre part en raison des trajectoires de référence situées à l'extérieur de la voie de circulation. Aucune sortie intérieure n'a été observée pour des vitesses inférieures à 60 km.h^{-1}. De plus, la probabilité d'occurrence de la sortie intérieure est toujours négligeable par rapport à la sortie extérieure, sauf pour les vitesses supérieures à 70 km.h^{-1} pour la classe 1. Ces cas, pour lesquels l'accélération latérale maximale est supérieure à 5 m.s^{-2} excèdent donc fortement la limite de sécurité usuelle de 3 m.s^{-2}. Pour ces raisons, on ne considérera que la sortie extérieure dans le critère de position latérale, qui se simplifie alors en l'inégalité :

$$\overline{d} - \sup_{t\in[0,T]} D(t) > 0 \tag{IV.16}$$

Ceci permet de ne considérer qu'un seul mode de défaillance, et donc de n'avoir qu'un seul point de conception grâce à la modification apportée section IV.2.3. Notons toutefois que le point de conception associé à la sortie intérieure peut facilement être trouvé avec la méthodologie proposée. La figure IV.11 compare les coordonnées des points de conception pour les sorties extérieure et intérieure, les indices de Hasofer-Lind associés ont pour valeurs respectivement 3.13 et 8.33. On retrouve donc bien le fait que la sortie extérieure est le mode de défaillance prépondérant.

	FORM	SORM PF	SORM PF 4
Appels	8 704	16 320	22 032
Erreur moyenne	280%	62%	24%
Erreur maximale	805%	138%	70%

Table IV.2 – Comparaison des erreurs et du nombre d'appels relatifs aux différentes méthodes fiabilistes

IV.3.2 Comparaison des méthodes fiabilistes

Les méthodes de Monte-Carlo, FORM, SORM Point Fitting, ainsi que les adaptations apportées ont été appliquées au critère de position latérale tel que modifié dans (IV.16) :

$$\overline{d} - \sup_{t\in[0,T]} D(t) > 0$$

L'objectif de cette section est de comparer les estimations de la probabilité de défaillance associées aux différentes méthodes, en termes de précision et de coût de calcul. Les résultats des estimations sont présentés par classe de conducteurs sur les figure IV.12 et IV.13 en échelles linéaire et logarithmique respectivement. Les intervalles de confiance de l'estimation par Monte-Carlo n'ont pas pu être ajoutés à ces figures, car étant donné le grand nombre $N = 10^7$ de simulations effectuées et les valeurs de probabilité entre 10^{-4} et 10^{-1}, la longueur des intervalles est inférieure à 0.1% de P_f.

On peut remarquer que l'approximation FORM mène à une forte sur-évaluation de la probabilité de défaillance. Ceci indique que la surface d'état-limite présente une courbure importante au voisinage du point de conception, et confirme ce qui avait déjà été observé sur les figures IV.7 et IV.9. L'application de la méthode SORM Point Fitting permet de se rapprocher de la valeur obtenue par Monte-Carlo. Cependant une différence existe toujours, autant à basse vitesse qu'à haute vitesse. Cette méthode n'est donc pas assez précise pour l'application visée. Les raffinements apportés à la méthode SORM, nommée SORM PF 4 sur les figures par référence aux 4 points de contrôle, apportent un gain en précision sur toute la plage de vitesse. L'erreur maximale se situe alors sur les faibles probabilités (vitesses inférieures à 55 km.h^{-1}) qui sont des cas qui ne nécessiteront certainement pas d'alerte. Par contre l'accord des résultats est très satisfaisant sur les vitesses supérieures à 55 km.h^{-1}, correspondant à la majorité des vitesses mesurées sur le trafic lors de la campagne de mesure.

Le tableau IV.2 résume le nombre d'appels au modèle mécanique nécessaire à chacune des méthodes fiabilistes pour évaluer la totalité des probabilités de défaillance (68 cas). La méthode FORM ne nécessite que 8704 appels, mais les résultats qu'elle fournit sont inexploitables à cause des erreurs d'approximation commises. Les erreurs maximales se situent toujours au niveau des

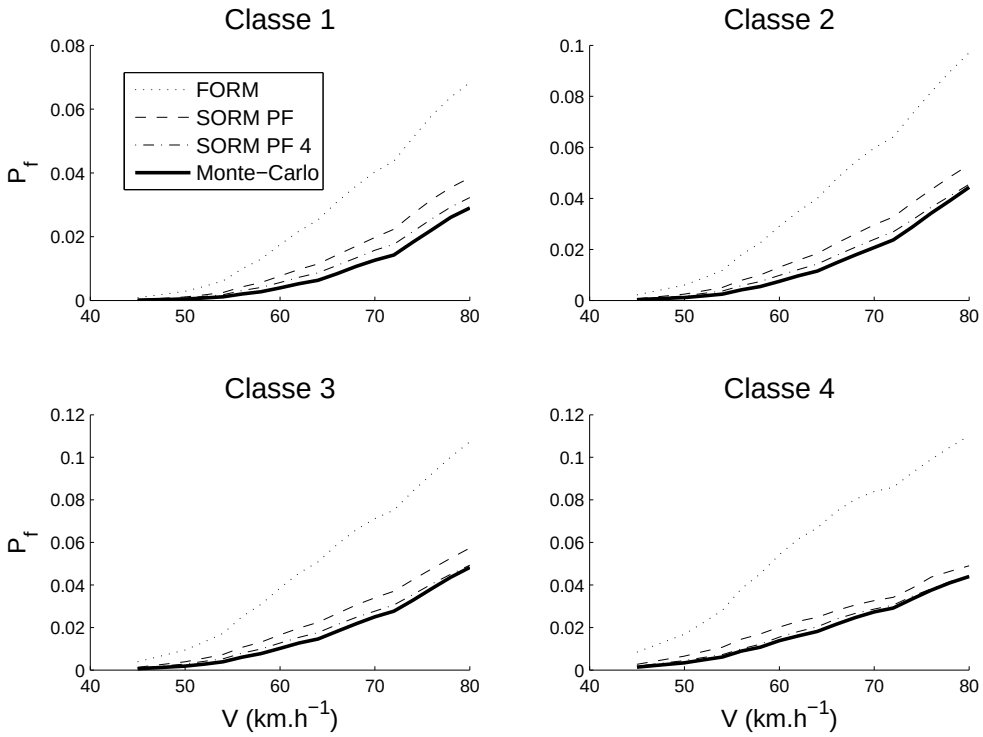


Figure IV.12 – Comparaison des méthodes fiabilistes, échelle linéaire

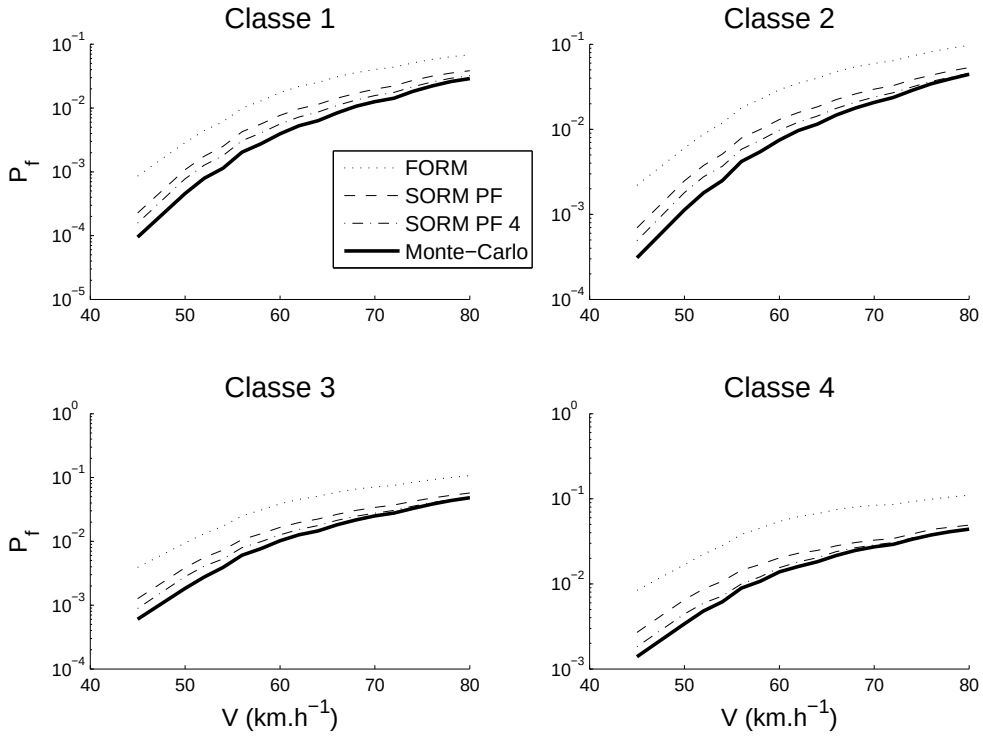


Figure IV.13 – Comparaison des méthodes fiabilistes, échelle logarithmique

	FORM	SORM PF	SORM PF 4	Monte-Carlo
Classe 1 V 45	$8,60 \cdot 10^{-4}$	$2,26 \cdot 10^{-4}$	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$9,50 \cdot 10^{-5}$
Classe 1 V 50	$2,87 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{7,80 \cdot 10^{-4}}$	$4,57 \cdot 10^{-4}$
Classe 1 V 52	$4,43 \cdot 10^{-3}$	$1,76 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{1,27 \cdot 10^{-3}}$	$7,92 \cdot 10^{-4}$
Classe 1 V 54	$6,15 \cdot 10^{-3}$	$2,51 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{1,80 \cdot 10^{-3}}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 56	$9,93 \cdot 10^{-3}$	$4,26 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{3,08 \cdot 10^{-3}}$	$2,03 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 58	$1,29 \cdot 10^{-2}$	$5,61 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{4,08 \cdot 10^{-3}}$	$2,75 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 60	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$7,69 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{5,63 \cdot 10^{-3}}$	$3,95 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 62	$2,17 \cdot 10^{-2}$	$9,72 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{7,25 \cdot 10^{-3}}$	$5,27 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 64	$2,53 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{8,64 \cdot 10^{-3}}$	$6,34 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 66	$3,09 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,10 \cdot 10^{-2}}$	$8,37 \cdot 10^{-3}$
Classe 1 V 68	$3,59 \cdot 10^{-2}$	$1,70 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,33 \cdot 10^{-2}}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
Classe 1 V 70	$4,03 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,57 \cdot 10^{-2}}$	$1,26 \cdot 10^{-2}$
Classe 1 V 72	$4,37 \cdot 10^{-2}$	$2,23 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,76 \cdot 10^{-2}}$	$1,43 \cdot 10^{-2}$
Classe 1 V 74	$5,10 \cdot 10^{-2}$	$2,71 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,16 \cdot 10^{-2}}$	$1,83 \cdot 10^{-2}$
Classe 1 V 76	$5,80 \cdot 10^{-2}$	$3,17 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,56 \cdot 10^{-2}}$	$2,21 \cdot 10^{-2}$
Classe 1 V 78	$6,38 \cdot 10^{-2}$	$3,54 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,93 \cdot 10^{-2}}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$
Classe 1 V 80	$6,83 \cdot 10^{-2}$	$3,85 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,23 \cdot 10^{-2}}$	$2,90 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 45	$2,19 \cdot 10^{-3}$	$6,94 \cdot 10^{-4}$	$4,90 \cdot 10^{-4}$	$3,08 \cdot 10^{-4}$
Classe 2 V 50	$6,03 \cdot 10^{-3}$	$2,47 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{1,80 \cdot 10^{-3}}$	$1,13 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 52	$8,76 \cdot 10^{-3}$	$3,75 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{2,76 \cdot 10^{-3}}$	$1,79 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 54	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$5,11 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{3,68 \cdot 10^{-3}}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 56	$1,79 \cdot 10^{-2}$	$7,90 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{5,83 \cdot 10^{-3}}$	$4,19 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 58	$2,26 \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{7,45 \cdot 10^{-3}}$	$5,45 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 60	$2,92 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{9,81 \cdot 10^{-3}}$	$7,48 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 62	$3,49 \cdot 10^{-2}$	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,21 \cdot 10^{-2}}$	$9,68 \cdot 10^{-3}$
Classe 2 V 64	$4,00 \cdot 10^{-2}$	$1,84 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,43 \cdot 10^{-2}}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 66	$4,76 \cdot 10^{-2}$	$2,24 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,76 \cdot 10^{-2}}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 68	$5,43 \cdot 10^{-2}$	$2,61 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,08 \cdot 10^{-2}}$	$1,78 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 70	$5,97 \cdot 10^{-2}$	$2,97 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,39 \cdot 10^{-2}}$	$2,07 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 72	$6,41 \cdot 10^{-2}$	$3,27 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,69 \cdot 10^{-2}}$	$2,37 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 74	$7,30 \cdot 10^{-2}$	$3,83 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,16 \cdot 10^{-2}}$	$2,87 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 76	$8,17 \cdot 10^{-2}$	$4,34 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,65 \cdot 10^{-2}}$	$3,42 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 78	$8,97 \cdot 10^{-2}$	$4,85 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,10 \cdot 10^{-2}}$	$3,92 \cdot 10^{-2}$
Classe 2 V 80	$9,71 \cdot 10^{-2}$	$5,32 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,55 \cdot 10^{-2}}$	$4,44 \cdot 10^{-2}$

Table IV.3 – Valeurs des différentes approximations de P_f pour les classes 1 et 2

	FORM	SORM PF	SORM PF 4	Monte-Carlo
Classe 3 V 45	$3,91 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{8,89 \cdot 10^{-4}}$	$6,03 \cdot 10^{-4}$
Classe 3 V 50	$9,44 \cdot 10^{-3}$	$3,87 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{2,81 \cdot 10^{-3}}$	$1,83 \cdot 10^{-3}$
Classe 3 V 52	$1,32 \cdot 10^{-2}$	$5,57 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{4,08 \cdot 10^{-3}}$	$2,76 \cdot 10^{-3}$
Classe 3 V 54	$1,73 \cdot 10^{-2}$	$7,31 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{5,29 \cdot 10^{-3}}$	$3,90 \cdot 10^{-3}$
Classe 3 V 56	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{7,97 \cdot 10^{-3}}$	$6,07 \cdot 10^{-3}$
Classe 3 V 58	$3,09 \cdot 10^{-2}$	$1,31 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{9,90 \cdot 10^{-3}}$	$7,70 \cdot 10^{-3}$
Classe 3 V 60	$3,86 \cdot 10^{-2}$	$1,65 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,27 \cdot 10^{-2}}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 62	$4,55 \cdot 10^{-2}$	$1,97 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,53 \cdot 10^{-2}}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 64	$5,09 \cdot 10^{-2}$	$2,24 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,76 \cdot 10^{-2}}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 66	$5,89 \cdot 10^{-2}$	$2,65 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,13 \cdot 10^{-2}}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 68	$6,59 \cdot 10^{-2}$	$3,06 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,48 \cdot 10^{-2}}$	$2,17 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 70	$7,12 \cdot 10^{-2}$	$3,40 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,76 \cdot 10^{-2}}$	$2,50 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 72	$7,52 \cdot 10^{-2}$	$3,71 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,06 \cdot 10^{-2}}$	$2,77 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 74	$8,40 \cdot 10^{-2}$	$4,24 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,55 \cdot 10^{-2}}$	$3,28 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 76	$9,23 \cdot 10^{-2}$	$4,76 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,05 \cdot 10^{-2}}$	$3,83 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 78	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$5,26 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,50 \cdot 10^{-2}}$	$4,37 \cdot 10^{-2}$
Classe 3 V 80	$1,07 \cdot 10^{-1}$	$5,73 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,93 \cdot 10^{-2}}$	$4,83 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 45	$8,40 \cdot 10^{-3}$	$2,69 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{1,82 \cdot 10^{-3}}$	$1,39 \cdot 10^{-3}$
Classe 4 V 50	$1,68 \cdot 10^{-2}$	$6,52 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{4,42 \cdot 10^{-3}}$	$3,39 \cdot 10^{-3}$
Classe 4 V 52	$2,24 \cdot 10^{-2}$	$8,72 \cdot 10^{-3}$	$\mathbf{5,94 \cdot 10^{-3}}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$
Classe 4 V 54	$2,81 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{7,22 \cdot 10^{-3}}$	$6,15 \cdot 10^{-3}$
Classe 4 V 56	$3,83 \cdot 10^{-2}$	$1,45 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,00 \cdot 10^{-2}}$	$8,93 \cdot 10^{-3}$
Classe 4 V 58	$4,52 \cdot 10^{-2}$	$1,69 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,21 \cdot 10^{-2}}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 60	$5,43 \cdot 10^{-2}$	$2,02 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,55 \cdot 10^{-2}}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 62	$6,16 \cdot 10^{-2}$	$2,29 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{1,81 \cdot 10^{-2}}$	$1,60 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 64	$6,68 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,03 \cdot 10^{-2}}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 66	$7,45 \cdot 10^{-2}$	$2,80 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,40 \cdot 10^{-2}}$	$2,15 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 68	$8,03 \cdot 10^{-2}$	$3,06 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,66 \cdot 10^{-2}}$	$2,47 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 70	$8,39 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{2,87 \cdot 10^{-2}}$	$2,73 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 72	$8,59 \cdot 10^{-2}$	$3,42 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,06 \cdot 10^{-2}}$	$2,91 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 74	$9,28 \cdot 10^{-2}$	$3,85 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,47 \cdot 10^{-2}}$	$3,34 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 76	$9,90 \cdot 10^{-2}$	$4,37 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{3,82 \cdot 10^{-2}}$	$3,76 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 78	$1,05 \cdot 10^{-1}$	$4,64 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,16 \cdot 10^{-2}}$	$4,10 \cdot 10^{-2}$
Classe 4 V 80	$1,10 \cdot 10^{-1}$	$4,90 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{4,42 \cdot 10^{-2}}$	$4,40 \cdot 10^{-2}$

Table IV.4 – Valeurs des différentes approximations de P_f pour les classes 3 et 4

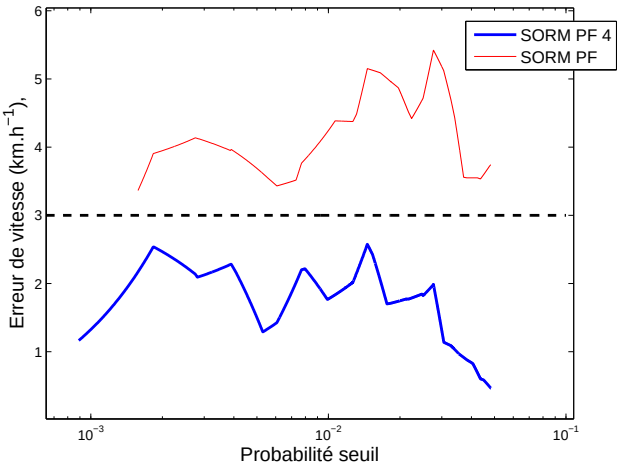


Figure IV.14 – Erreur commise sur la vitesse d'alerte en fonction de la probabilité seuil, pour la classe 2

faibles vitesses. L'application de la méthode SORM PF permet une forte réduction des erreurs moyennes et maximales, mais au prix d'un coût numérique doublé. Les erreurs résiduelles sont cependant trop fortes pour l'application visée. Avec les points de contrôle supplémentaires, la méthode SORM PF 4 nécessite 35% de temps de calcul supplémentaire (14 s en Fortran et 2′20" en Matlab) mais l'erreur moyenne diminue à 24%. L'erreur maximale est toujours importante et concerne toujours les faibles vitesses.

Les tableaux IV.3 et IV.4 permettent d'analyser plus finement l'impact des erreurs de chacune des méthodes par rapport à l'application visée. Les cases colorées en vert, jaune et orange représentent respectivement les cas où l'erreur est inférieure à 10, 20 et 30% par rapport aux simulations de Monte-Carlo. On remarque que peu de cas concernent des erreurs inférieures à 30% pour la méthode SORM PF, dans les vitesses les plus élevées. La précision supplémentaire apportée par la méthode SORM PF 4 conduit à une erreur inférieure à 30% pour des vitesses généralement supérieures à 65 km.h^{-1}, et même inférieure à 10% pour les vitesses les plus élevées. Ces erreurs semblent néanmoins élevées. L'important, en vue de déclencher une alerte si un seuil de probabilité est dépassé, est en fait l'erreur induite sur la vitesse d'alerte. Afin d'évaluer cette erreur, il a été estimé pour chaque probabilité entre 10^{-4} et 10^{-1} la différence entre la vitesse d'alerte fournie par les simulations de Monte-Carlo et celle fournie par les simulations SORM PF et SORM PF 4. Cette erreur est présentée sur la figure IV.14 pour la classe 2. Les cas ou cette différence est inférieure à 3 km.h^{-1} sont reportées en gras dans les tableaux IV.3 et IV.4 pour toutes les classes de conducteur. Ceci concerne tous les résultats issus de SORM PF 4 pour des vitesses supérieures à 50 km.h^{-1}, Donc, même pour les cas où l'erreur est supérieure à 30%. Par contre, les résultats issus de SORM PF ne permettent pas cette précision, l'écart induit sur la vitesse étant au minimum égal à 3.5 km.h^{-1}. En effet, les cas où la précision de la méthode SORM PF est de 20% correspondent aux vitesses élevées, et donc aux probabilités également

élevées. Même un pourcentage d'erreur à priori faible peut engendrer une erreur conséquente sur la valeur de la vitesse d'alerte. Par effet inverse, ceci implique que même pour des erreurs supérieures à 30% (situées à des probabilités alors très faibles), la méthode SORM PF 4 permet une évaluation correcte de la vitesse d'alerte.

En conclusion, l'adaptation des méthodes fiabilistes existantes aux spécificités du modèle utilisé a permis d'atteindre un niveau de précision compatible avec l'application visée. Le coût numérique, de l'ordre de 15 s sur un ordinateur standard, a été fortement réduit puisque plusieurs jours sont nécessaires en utilisant une méthode de Monte-Carlo. Ceci permet, d'une part de réaliser facilement des études paramétriques (objet du chapitre suivant) puisque les simulations sont alors rapides, et d'autre part d'envisager une application à grande échelle sur les nombreux points noirs du réseau routier actuel.

Chapitre V

Applications

L'analyse fiabiliste a permis de construire un outil d'aide à la décision pour le déclenchement d'alertes en entrée de virage. L'objet de ce chapitre est d'étudier l'applicabilité de cet outil pour chacun des critères de sécurité retenus ainsi que pour différentes valeurs des paramètres contrôlant ces critères. On étudie également, dans les cas potentiellement dangereux, le comportement après alerte afin de déterminer si le dispositif envisagé permet effectivement une réduction du risque encouru par le conducteur.

V.1 Application aux critères de sécurité

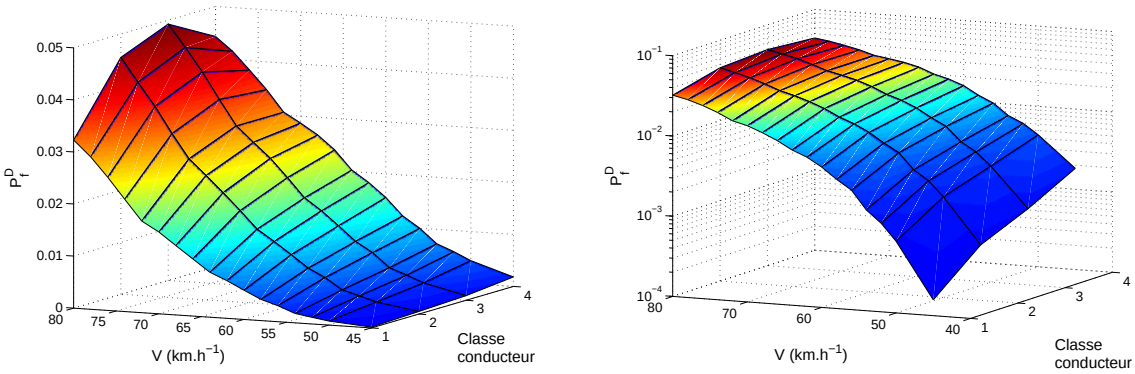
Trois critères de sécurité ont été sélectionnés parmi ceux présentés dans la section I.2. Deux de ces critères (position latérale et accélération latérale) ont été choisis pour leur simplicité, puisqu'ils reflètent directement les scénarios de sortie de route par problème de guidage ou dynamique identifiés dans [MBM+05]. Le troisième critère considéré est le *Time to Lane Crossing* (TLC), évaluant le temps disponible avant que le véhicule ne sorte de sa voie de circulation. Le TLC a été choisi car il est implanté dans la majorité des systèmes LDWS développés actuellement. Le calcul de ces critères de sécurité (II.9)-(II.11), explicité dans la section II.3, est rappelé ici :

$$\overline{d} - \sup_{t\in[0,T]} |d(t)| > 0$$

$$\overline{a}_y - \sup_{t\in[0,T]} |a_y(t)| > 0$$

$$\overline{\mathrm{TLC}} - \sup_{t\in[0,T]} \mathrm{TLC}(t) > 0$$

A chacun de ces critères est associée une probabilité de défaillance selon la méthodologie détaillée au chapitre précédent. Ces probabilités sont notées respectivement P_f^D, P_f^A et P_f^T pour la position



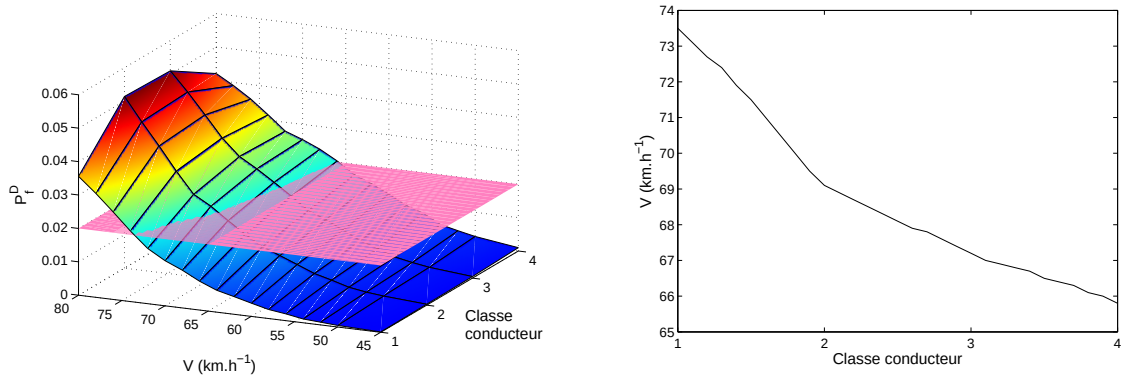
a) b)

Figure V.1 – Evolution de la probabilité P_f^D en fonction des conditions initiales, en échelle linéaire (a) et logarithmique (b)

latérale, l'accélération latérale et le TLC. Les résultats présentés dans ce chapitre sont obtenus à partir des données issues de la campagne de mesures réalisée sur le virage de la Rd8 (cf. II.2).

V.1.1 Critère de position latérale

la figure V.1 donne la représentation graphique de l'évolution de la probabilité P_f^D en fonction des conditions initiales (vitesse, classe de conducteurs). Cette représentation est une surface, et on peut y observer que P_f^D varie de 10^{-4} à 0.05. Pour plus de clarté les graphes sont tracés à la fois en échelle linéaire (V.1a) et logarithmique (V.1b). On observe une influence à la fois de la vitesse et de la classe de conducteur sur la probabilité P_f^D. La classe 1 apparaît être la plus sûre. Ceci correspond au fait que la trajectoire correspondante est le plus à l'intérieur de la voie alors que, comme il a été remarqué au chapitre précédent, le mode de défaillance prépondérant est la sortie extérieure. La probabilité P_f^D évolue rapidement avec la vitesse, et de façon similaire dans chacune des classes de conducteur. Par contre, on peut voir que pour les vitesses proches de 80 km.h^{-1} de la classe 4 les valeurs de la probabilité sont localement inférieures à celles de la classe 3, ce qui ne se produit pas pour d'autres conditions initiales. De même, les probabilités de la classe 1 évoluent plus lentement que les classes voisines pour les vitesses très élevées. Ces phénomènes a priori inattendus peuvent être attribués à l'insuffisance de la modélisation mécanique pour les niveaux de sollicitations engendrés par ces vitesses élevées. En effet, le calcul des commandes de référence (selon la méthode décrite en section II.2.3) diverge pour des vitesses supérieures à 85 km.h^{-1}. Cependant ces vitesses correspondant déjà évidemment à des situations à risque, cette portion de la courbe n'est pas significative pour l'application visée. Il n'a, en effet, été mesuré aucune vitesse supérieure à 75 km.h^{-1} sur les deux jours de la campagne réalisée sur la Rd8.



a) b)

Figure V.2 – Définition des vitesses d'alerte en fonction de la probabilité seuil

La probabilité P_f^D est influencée à la fois par la classe de conducteur et la vitesse. Cette dernière variable apparaît déjà clairement accidentogène dans les statistiques de la sécurité routière [MBM+05]. Par contre, l'intérêt majeur de l'application des méthodes probabilistes à ce problème est d'obtenir une gradation du niveau de risque encouru lors de la négociation du virage. Ceci permet de définir rigoureusement les conditions initiales menant à un même niveau de risque encouru par le conducteur. La méthodologie d'évaluation du risque proposée ici constitue donc un outil d'aide à la décision efficace pour la définition des cas à alerter. Une fois choisie une probabilité seuil $\overline{P_f}$, les vitesses d'alerte par classe de conducteurs sont en effet directement définies par les courbes iso-probabilité des surfaces de la figure V.1. Une illustration pour le choix de probabilité $\overline{P_f} = 2 \cdot 10^{-2}$ est présentée sur la figure V.2. Toutes les conditions initiales pour lesquelles la probabilité est située au-dessus du plan rose dans la figure (a) nécessitent le déclenchement d'une alerte. Les vitesses limites correspondant aux déclenchements d'alerte en fonction des classes de conducteurs sont reportées sur le graphe (b). On observe une évolution non linéaire de la vitesse d'alerte, qui aurait été difficilement mise en évidence avec une étude déterministe.

Les vitesses d'alerte vont de 66 km.h^{-1} pour la classe 4 à 74 km.h^{-1} pour la classe 1. Cette plage étendue de vitesses justifie de différencier les classes de conducteurs dans le but de générer des alertes pertinentes. Ces résultats ont été obtenus en utilisant un critère de sécurité simple et sans modélisation de caractéristiques de « pilotage » (trajectoire coupant le virage, freinage, ...) puisque les trajectoires de référence sont obtenues à partir de relevés sur le trafic réel. En fait, les résultats montrent même une tendance inverse, puisque la trajectoire de référence de la classe 4, correspondant à une entrée de virage en position extérieure sur la chaussée, ne montre pas significativement de tendance à couper le virage (voir figure II.9) et mène donc à une vitesse d'alerte inférieure à celles des autres classes en raison de sa proximité avec le bord de voie. Au contraire, la classe 1, correspondant à des positions distantes au maximum de 35 cm du milieu de la voie, permet une plus grande tolérance aux erreurs du conducteur, et la vitesse d'alerte

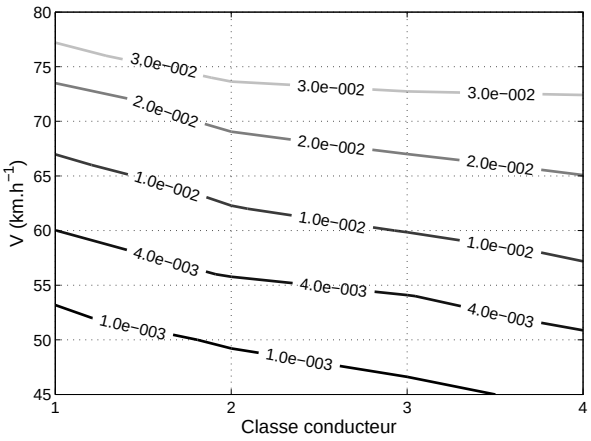


Figure V.3 – Vitesses d'alerte en fonction du seuil $\overline{P_f}$

qui lui est associée est donc supérieure. Ces comportements de conduite ont déjà été mis en évidence [GM92] : les conducteurs pratiquant les vitesses les plus élevées (souvent dénommés « expérimentés » dans les études) ont des réactions relevant de la faute technique (classiquement un freinage combiné à un coup de volant augmentant les sollicitations) telles qu'observées chez les conducteurs « ordinaires ». Ceci souligne encore l'importance de la crédibilité de la trajectoire de référence pour obtenir des résultats sensés, et donc la nécessité de disposer de mesures du trafic réel.

Le choix définitif des vitesses d'alerte est donné par la valeur de $\overline{P_f}$. Cependant il est important de noter que cette probabilité $\overline{P_f}$ ne représente pas directement un risque d'accident, mais un risque de dépasser les critères de sécurité. Il se produit en effet de nombreuses situations ou un véhicule sort légèrement de sa voie de circulation sans générer d'accident. La probabilité réelle d'accident P_A est donnée par :

$$P_A = P_f \cdot P(A|E_f)$$

où A est l'événement « accident », $P_f = P(E_f)$ est la probabilité de défaillance estimée ici, et $P(A|E_f)$ est la probabilité d'occurence de l'accident A sachant que l'événement de défaillance E_f s'est réalisé (i.e. que le critère de sécurité soit violé). Cette probabilité conditionnelle pourrait être évaluée sur des analyses de trafic, et permettrait de définir le seuil $\overline{P_f}$ à partir d'un choix de probabilité d'accident P_A. Ce choix est une décision politique et d'experts et dépasse donc largement le cadre de cette étude. Il est cependant intéressant d'étudier l'impact de la valeur de ce seuil sur les vitesses d'alerte. La figure V.3 présente l'évolution des vitesses d'alerte en fonction de la classe de conducteurs pour les probabilités $\overline{P_f} = (10^{-3}, 4 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2}, 3 \cdot 10^{-2})$. On remarque que les trois courbes correspondant aux valeurs intermédiaires $\overline{P_f} = (4 \cdot 10^{-3}, 10^{-2}, 2 \cdot 10^{-2})$ présentent des évolutions similaires, et sont séparées d'environ 6 km.h^{-1}. Chacune de ces courbes est associée à une amplitude de vitesse d'alerte de l'ordre de 8 km.h^{-1}, comme constaté

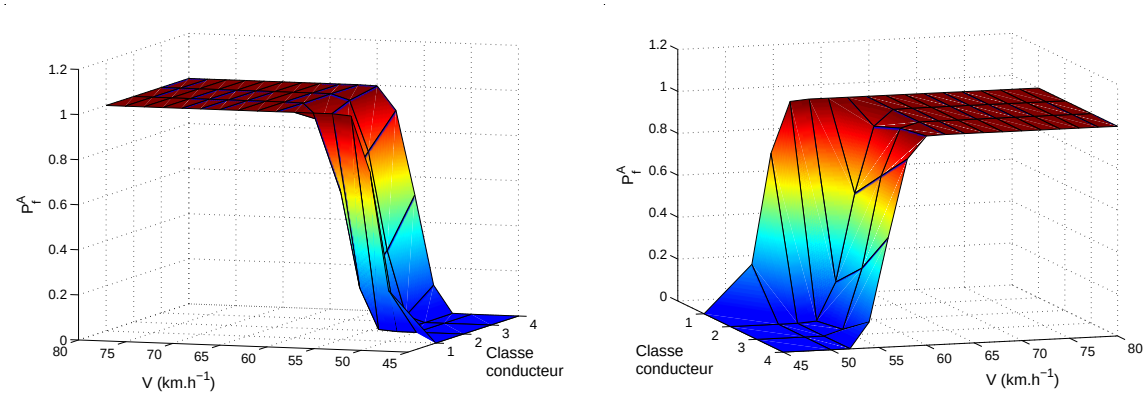


Figure V.4 – Probabilité P_f^A en fonction des conditions initiales

précédemment. La courbe inférieure ($\overline{P_f} = 10^{-3}$) présente aussi une évolution similaire sur les trois premières classes, mais conduit à alerter tous les conducteurs de la classe 4 se présentant avec une vitesse supérieure à 45 km.h^{-1}. Ce choix de seuil de probabilité est alors évidemment trop faible, puisque moins de 5% des trajectoires mesurées correspondent à une vitesse inférieure à 45 km.h^{-1}. La courbe supérieure présente, quant à elle, une pente plus faible que les autres. Les vitesses d'alerte sont alors proches de 75 km.h^{-1}, ce qui implique des sollicitations dynamiques excessives pour des situations de conduite standards.

V.1.2 Critère d'accélération latérale

La figure V.4 présente l'évolution de la probabilité P_f^A de violer le critère d'accélération en fonction des conditions initiales. Le seuil $\overline{a}_y$ a été choisi à 3 m.s^{-2}, comme mentionné dans la section II.3. Bien que l'expression du critère de sécurité (Eq. (II.10)) contienne aussi une valeur absolue, à cause de la courbure du virage ce critère ne peut être violé que pour les valeurs négatives de l'accélération. Le cas des valeurs positives, correspondant à une accélération latérale dans le sens contraire du virage, ne pouvant pas se produire, il n'existe donc pas avec ce critère de problèmes de domaines de défaillance multiples.

Pour les classes 2 à 4, on observe une évolution brutale de la probabilité de 0 à 1 pour des vitesses proches de 60 km.h^{-1}. La classe 1, quant à elle, présente une évolution similaire, mais pour des vitesses inférieures (environ 50 km.h^{-1}). Il apparaît donc que le critère d'accélération latérale est principalement gouverné par la vitesse d'entrée dans le virage. Il est peu influencé par l'aléa introduit dans le système puisque l'évolution de la probabilité de 0 (évènement impossible) à 1 (évènement certain) se produit brusquement. On est donc dans une situation similaire à une situation déterministe classique du type « accélération maximale admissible ». En effet, quel que soit le niveau de probabilité maximale admis $\overline{P}_f$, les vitesses d'alerte seront peu modifiées. Ces

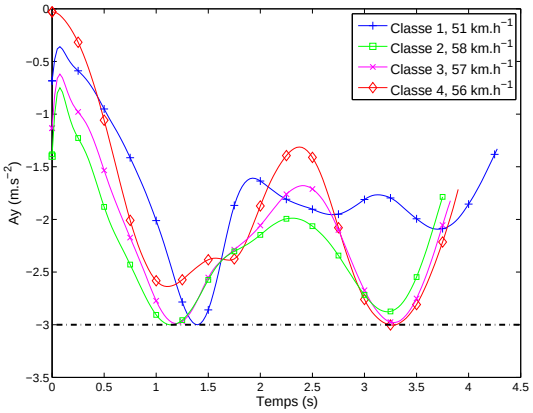


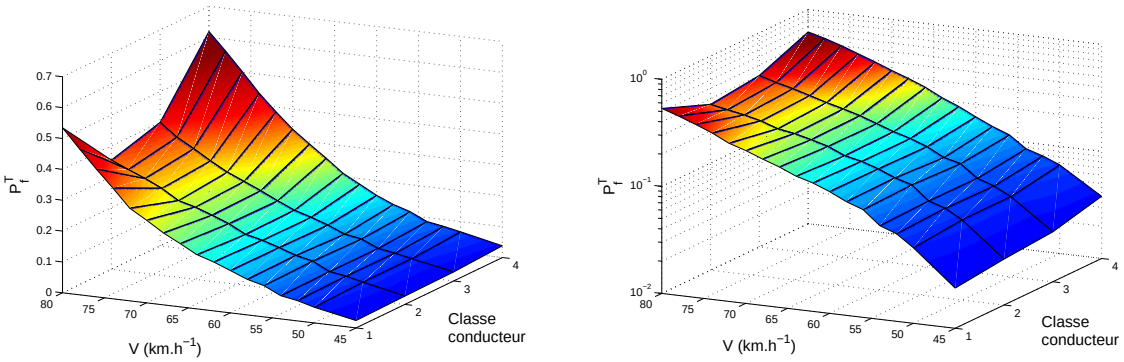
Figure V.5 – Accélérations latérales maximales de 3 m.s^{-2} pour les trajectoires de référence

vitesses d'alerte sont donc proches des vitesses pour lesquelles les trajectoires de référence franchissent le seuil d'accélération latérale de 3 m.s^{-2}, comme montré sur la figure V.5. Ces vitesses sont de 51 km.h^{-1} pour la classe 1, 58 km.h^{-1} pour la classe 2, 57 km.h^{-1} pour la classe 3 et 56 km.h^{-1} pour la classe 4. Les vitesses des classes 2 à 4 sont proches car les comportements dans le virage sont similaires et consistent en deux pics d'accélération d'amplitudes égales correspondant à des braquages marqués en entrée et sortie de virage. La classe 1 présente seulement un pic en début de virage, puis une accélération quasi constante au cours du virage. Ainsi le braquage à l'entrée du virage est plus fort pour cette classe (visible sur la figure II.11), ce qui explique que la vitesse d'alerte associée soit plus faible.

Il se dégage de ces résultats que ce critère ne met pas en avant l'intérêt de l'approche probabiliste menée ici. En effet contrairement au critère de position latérale qui mène à une gradation progressive du niveau de risque, on obtient ici seulement une évaluation binaire du risque (0 : sécurité - 1 : défaillance). Cependant, combiné aux relevés effectués sur le trafic réel pour définir les trajectoires de référence, ce critère permet de mettre en avant les comportements dangereux. Les conducteurs de la classe 1 se présentant plutôt à l'intérieur du virage et ne voulant pas dériver vers l'extérieur du virage sont conduits à devoir braquer fortement pour suivre la courbure prononcée à l'entrée du virage, ce qui implique des sollicitations dynamiques élevées, même à des vitesses relativement faibles. Une fois de plus, ce critère est donc intéressant lorsqu'il est lié à des trajectoires de référence réalistes et permet une étude plus fine que la simple évaluation d'une vitesse maximale, étant donné un profil de courbure du virage.

V.1.3 Critère TLC

Le critère TLC représente le temps restant avant que le véhicule ne franchisse un des bords de sa voie de circulation, lorsqu'aucune modification n'est appliquée aux commandes. Ce critère



a) b)

Figure V.6 – Probabilité P_f^T en fonction des conditions initiales, en échelle linéaire (a) et logarithmique (b)

est fréquemment utilisé dans les systèmes LDWS car il permet la détection anticipée des cas dangereux pour le déclenchement d'alertes efficaces. La probabilité de défaillance associée P_f^T est tracée sur la figure V.6, pour un seuil fixé arbitrairement à $\overline{\text{TLC}} = 1$ s. En effet la valeur de 1.5 s couramment utilisée dans la littérature correspond à des études réalisées sur les autoroutes américaines aux courbures nettement moins importantes que celles des routes départementales françaises. Les résultats montrent que, même avec ce seuil inférieur aux valeurs usuelles, les probabilités restent importantes, variant de 10^{-2} à 0.6. Ce critère est influencé à la fois par la vitesse et la classe de conducteurs. On retrouve cette fois-ci une évolution graduelle du risque, à l'image des résultats obtenus avec le critère de position latérale. Les probabilités augmentent fortement avec les vitesses élevées, puisqu'à distance égale, le temps disponible avant de franchir les bords de voie sera inférieur. On remarque également d'importantes variations d'une classe de conducteur à l'autre. Les classes les plus dangereuses sont ici les classes 1 et 4, puisqu'elles sont les plus proches des bords de voie. Cette différence semble moins importante pour les vitesses plus faibles, comme indiqué sur le graphique en échelle logarithmique (V.6b).

Les TLC associés aux sorties intérieures (TLC^i) et extérieures (TLC^e) sont tracés sur la figure V.7 pour les trajectoires de référence, à la vitesse de 60 km.h^{-1}. Les valeurs maximales sont tronquées à 5 s afin d'avoir une meilleure lisibilité des minima locaux. Les probabilités P_f^T indiquent un risque quasi-équivalent sur la classe 1 et sur la classe 4, ce qui laisse supposer que la classe 1 soit susceptible d'engendrer des sorties intérieures, contrairement à ce qui avait été détecté avec le critère de position latérale. On observe en effet sur la trajectoire de la classe 1 en début de virage deux minima de TLC^i et TLC^e, celui associé à la sortie intérieure présentant une valeur légèrement inférieure. Ces minima ont des valeurs supérieures à 1 s, puisqu'ils sont évalués sur la trajectoire de référence qui est sécuritaire. Lorsque les perturbations aléatoires sont introduites dans le modèle, les valeurs de ces minima se modifient et ils peuvent alors franchir le seuil $\overline{\text{TLC}} = 1$ s. Le minimum global des classes 2 et 3 se situe en fin de virage et correspond

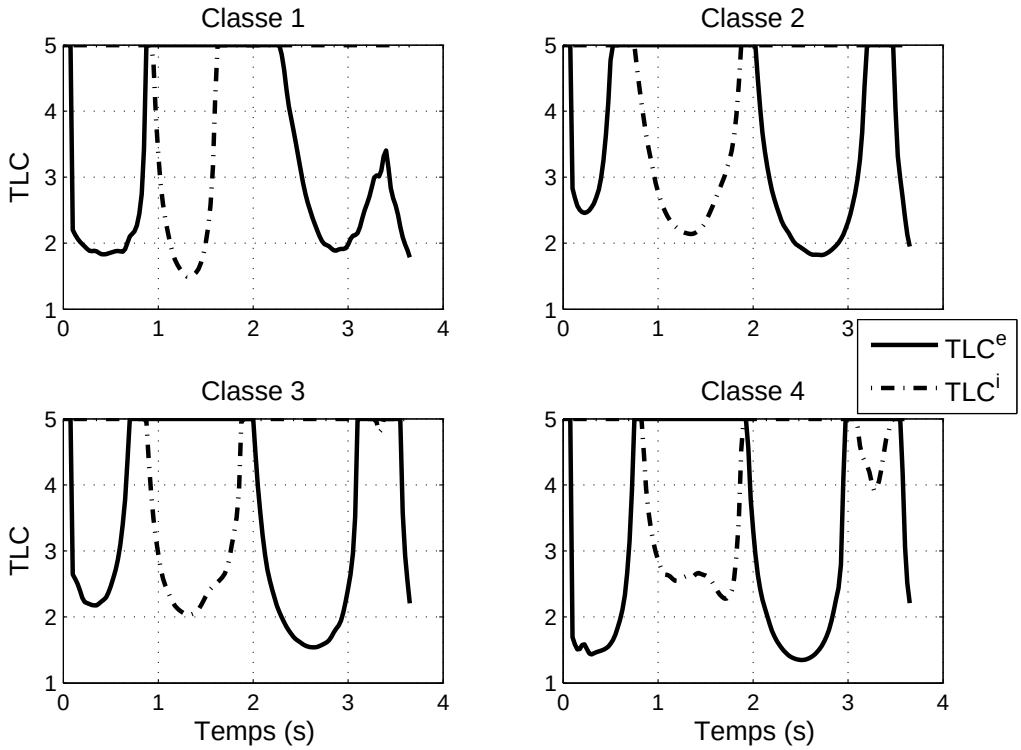
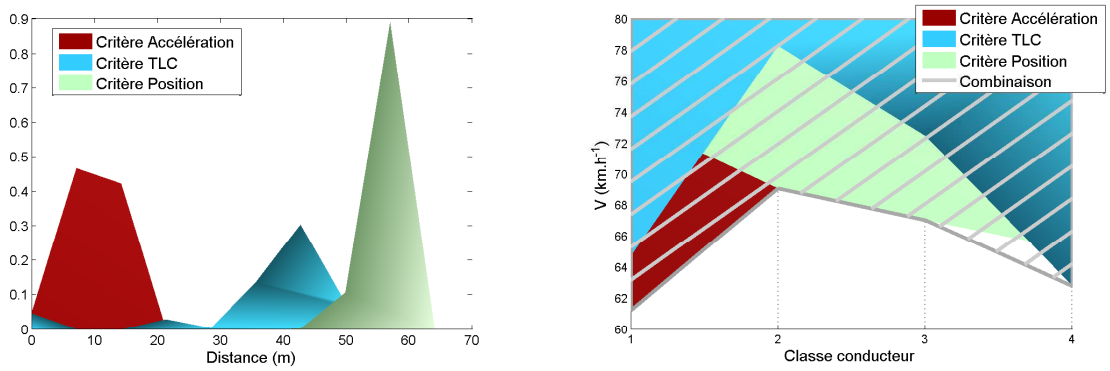


Figure V.7 – TLC associés aux sorties intérieures et extérieures pour les trajectoires de référence

à une sortie extérieure. Le TLC associé à la sortie intérieure TLC^i présente aussi un minimum en milieu de virage pour ces deux classes, mais de valeur supérieure d'environ 0.5 s. On retrouve par contre sur la classe 4 une influence unique de la sortie extérieure avec des valeurs de TLC^e faibles en début et en fin de virage. En comparant la localisation de ces minimums avec les allures des accélérations latérales (Fig. V.5) et des braquages (Fig. II.11) de ces trajectoires, on remarque que les pics de TLC se situent généralement de part et d'autre d'un maximum de braquage (et donc d'accélération latérale également). En effet, avant d'appliquer le braquage le véhicule se déporte vers l'extérieur et le TLC^e diminue. Inversement, après application du braquage le véhicule se rapproche de l'intérieur et le TLC^i diminue. Comme il a été observé précédemment que les conducteurs de la classe 1 braquent plus fort en entrée de virage, il est logique d'y retrouver plus d'influence du TLC^i que dans les autres classes.

Le critère TLC semble donc indiquer un possible risque de sortie intérieure, non détecté par le critère de position latérale (Fig. IV.10b). Les critères étant évalués sur la même famille de trajectoires simulées de l'entrée à la sortie du virage, ceci implique donc des fausses détections de la part du critère TLC. En effet, les conducteurs de la classe 1, qui ont une forte probabilité de violer le critère de TLC, ont parallèlement une faible probabilité de violer le critère de position latérale. C'est-à-dire que peu de trajectoires présentant des TLC inférieurs au seuil $\overline{TLC}$ conduisent réellement à une sortie de route. Ces fausses détections proviennent d'une part d'un



a) b)

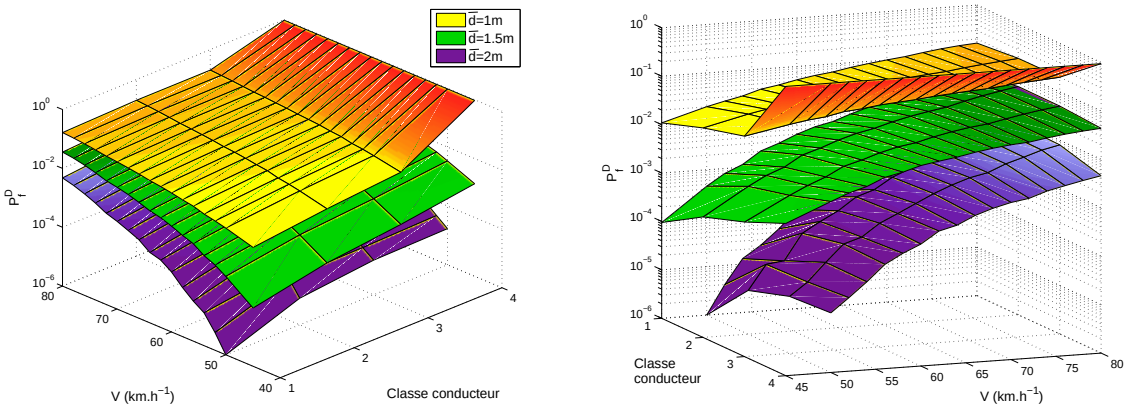
Figure V.8 – Repartition le long du virage des dépassements de critères de sécurité (a) et vitesses d'alerte définies par combinaison des critères de sécurité (b)

seuil $\overline{\text{TLC}}$ trop élevé (il est en effet peu probable de considérer qu'une inattention d'une seconde dans un virage de route départementale soit possible), d'autre part des hypothèses à la base de l'expression du TLC couramment utilisée dans la littérature (voir section II.3). Il est en effet supposé que les actions du conducteur sont constantes jusqu'à la sortie de route. Or on observe de grandes variations dans les braquages de référence sur une période d'une seconde. De plus, à chaque pas de calcul du TLC les bords de voie sont supposés rectilignes, le profil réel de la route n'est pas pris en compte. Ceci explique que lorsque les conducteurs appliquent un fort braquage, en vue de suivre la courbure de la route, ils se rapprochent très rapidement des frontières virtuelles supposées rectilignes (voir Fig. II.13) et provoquent de fausses alertes. L'utilisation de critères raffinés implique donc plus de paramètres à calibrer pour obtenir des résultats réalistes.

V.1.4 Combinaison des critères

Les premières applications de la méthodologie proposée dans la partie précédente ont montré des résultats assez différents. On constate en fait que chacun des critères détecte un scénario différent pouvant mener à une sortie de route, ce qui est confirmé par la figure V.8a montrant la répartition des déclenchements des critères en fonction de la distance parcourue dans le virage. Cette répartition est calculée sur l'ensemble des trajectoires simulées. Le critère d'accélération latérale tend à être dépassé en entrée de virage, lorsque le braquage maximal est appliqué, alors que le critère de position latérale se déclenche en majorité en fin de trajectoire, lorsque les incertitudes introduites dans le modèle créent une dispersion maximale des trajectoires. Entre les deux, le critère TLC réagit régulièrement tout au long du virage, avec un pic correspondant à l'anticipation des sorties de route constatées en fin de virage.

Chacun de ces critères mène à des vitesses d'alerte différentes une fois choisis les seuils $\overline{d}, \overline{a}_y, \overline{\text{TLC}}$ ainsi que la probabilité $\overline{P_f}$ à ne pas dépasser (cf. Fig. V.8b). Les vitesses d'alerte



a) b)

Figure V.9 – Probabilités P_f^D pour les seuils $\overline{d} = 1, 1.5, 2$ m

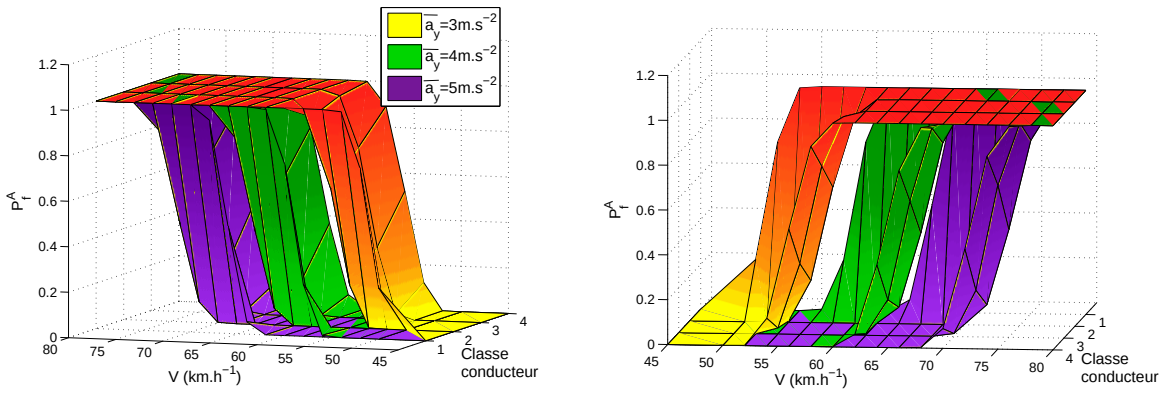
obtenues en combinant tous les critères (zone hachurée grise sur la figure) sont alors égales au minimum des vitesses d'alerte pour chaque classe de conducteur. Pour être correctement positionnées entre elles, les zones d'alertes doivent donc être définies par des seuils $\overline{d}, \overline{a}_y, \overline{\text{TLC}}$ réglés convenablement, ce qui est l'objet du paragraphe suivant.

V.2 Analyse paramétrique

V.2.1 Critère de position latérale

La figure V.9 présente l'évolution de la valeur de P_f^D lorsque le seuil $\overline{d}$ est successivement pris égal à $1, 1.5$ et 2 m. Modifier le seuil $\overline{d}$ revient à alerter lors du franchissement de frontières virtuelles placées de l'intérieur à l'extérieur des bords de voie réels (Fig. I.3). On peut observer que la valeur de probabilité diminue lorsque $\overline{d}$ augmente. On constate cependant une évolution comparable pour les valeurs $\overline{d} = 1.5$ m et $\overline{d} = 2$ m. Par contre, lorsque la valeur $\overline{d}$ est prise trop faible, on peut voir, d'une part que P_f^D présente une très faible variation pour les classes 1 à 3, et d'autre part qu'elle est quasiment constante pour la classe 4 quelle que soit la vitesse. Ceci provient du fait que le domaine de sécurité ne contient plus entièrement le couloir de 50 cm de large définissant la classe 4. Donc, selon les valeurs prises par la perturbation D_0 de la position initiale, une part des conducteurs de cette classe sort du domaine de sécurité dès l'entrée du virage.

Il semble donc que la définition de frontières virtuelles, utilisées dans les systèmes de prévention de sortie de route pour minimiser le taux de fausses alertes, ne soit pas nécessaire avec l'approche proposée ici. En effet, un seuil $\overline{d}$ trop faible mène rapidement à des résultats irréa-



a) b)

Figure V.10 – Probabilités P_f^A pour les seuils $\overline{a}_y = 3, 4, 5$ m.s^{-2}

listes, tandis qu'à l'opposé un seuil $\overline{d}$ plus grand revient à modifier la valeur $\overline{P_f}$ de la probabilité d'alerte. Le seuil $\overline{d}$ est donc fixé à la demi-différence entre la largeur de voie et la largeur du véhicule. Ceci permet de minimiser le nombre de paramètres à ajuster pour en déduire les vitesses d'alerte.

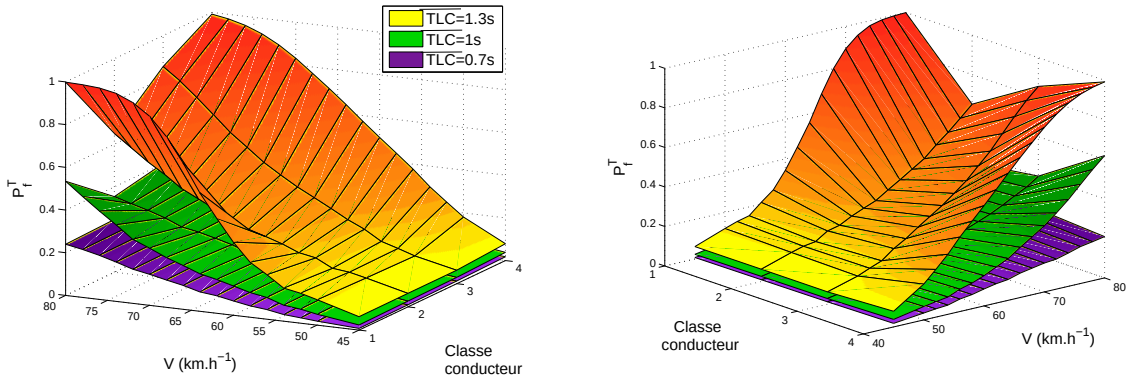
V.2.2 Critère d'accélération latérale

La modification du seuil $\overline{a}_y$ n'affecte pas l'allure de l'évolution de la probabilité P_f^A, comme le montre la figure V.10. En effet la probabilité passe toujours brusquement de 0 à 1. Par contre les vitesses associées augmentent avec le seuil $\overline{a}_y$. Comme mentionné dans la partie V.1, la brusque variation des valeurs de P_f^A se produit toujours aux vitesses pour lesquelles les trajectoires de référence franchissent le seuil $\overline{a}_y$. Ces vitesses sont de l'ordre de 57 km.h^{-1} pour $\overline{a}_y = 3$ m.s^{-2}, 66 km.h^{-1} pour $\overline{a}_y = 4$ m.s^{-2} et 74 km.h^{-1} pour $\overline{a}_y = 5$ m.s^{-2}. On observe toujours une vitesse inférieure d'environ 7 km.h^{-1} pour la classe 1.

Le choix du seuil d'accélération latérale usuel $\overline{a}_y = 3$ m.s^{-2} conduit à des vitesses d'alerte faible par rapport aux vitesses réellement pratiquées dans ce virage. Il semble donc que ce seuil soit à reconsidérer, compte tenu des performances accrues des véhicules actuels. Imposer un seuil d'accélération trop faible reviendrait à alerter de trop nombreux conducteurs et à créer ainsi une accoutumance néfaste à ce nouveau dispositif d'alerte.

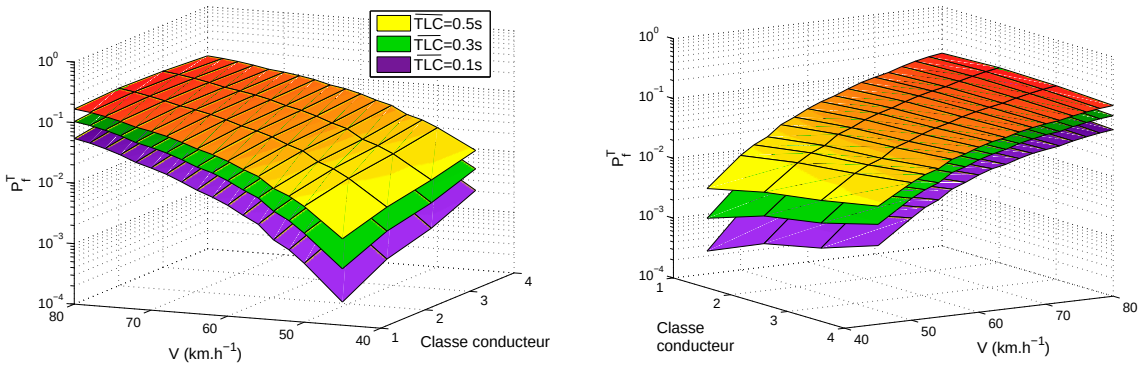
V.2.3 Critère de TLC

Comme nous venons de la voir dans la partie précédente, le seuil $\overline{\text{TLC}}$ fixé arbitrairement à 1 s est a priori trop faible, et mène à des détections erronées de risque de sortie intérieure dans la classe



a) b)

FIGURE V.11 – Probabilités P_f^T pour les seuils $\overline{\text{TLC}} = 0.7, 1, 1.3$ s



a) b)

FIGURE V.12 – Probabilités P_f^T pour les seuils $\overline{\text{TLC}} = 0.1, 0.3, 0.5$ s

de conducteurs 1. Ce comportement est confirmé par les résultats de la figure V.11 pour les seuils $\overline{\text{TLC}} = 0.7, 1, 1.3$ s. Les deux premières surfaces, associées aux seuils les plus élevés, présentent des maxima pour les classes 1 et 4. On constate qu'en diminuant le seuil ($\overline{\text{TLC}} = 0.7$ s) ces fausses détections semblent diminuer, bien que les valeurs de P_f^T restent largement supérieures à celles obtenues pour P_f^D.

En diminuant encore le seuil $\overline{\text{TLC}}$, on constate que les probabilités diminuent, et l'allure de l'évolution de P_f^T se modifie (Fig. V.12). En fait, plus $\overline{\text{TLC}}$ est faible, plus les valeurs de P_f^T se rapprochent de celles de P_f^D. En effet, sur des périodes très courtes (quelques dixièmes de secondes) les approximations utilisées pour le calcul du TLC sur le profil de route et les actions du conducteur sont alors acceptables.

Les trajectoires de passage en virage étant simulées de l'entrée à la sortie de la courbe pour notre application, le critère de TLC n'a alors que peu d'intérêt. En effet, en imposant un seuil

$\overline{\text{TLC}}$ trop élevé on risque d'introduire de fausses détections de sortie de route. A l'opposé, lorsque le TLC est faible, on retrouve les résultats issus du critère de position latérale. Ce critère est donc intéressant dans le cadre de détermination en temps réel du risque de sortie de route. Dans ce cas, la prévision de la trajectoire en aval est réalisée sur un laps de temps court selon les hypothèses détaillées dans la section I.2.2. L'approche probabiliste proposée ici permet donc d'obtenir des résultats réalistes en conservant des critères simples (position latérale et accélération latérale), ce qui réduit le nombre de paramètres à calibrer pour déterminer les conditions initiales nécessitant un déclenchement d'alerte.

V.3 Trajectoire après alerte

A la différence d'un système embarqué permettant la mesure et l'évaluation en continu de critères de sécurité, l'approche proposée dans le projet SARI est basée sur une mesure à l'entrée du virage réalisée par un dispositif placé en bord de voie. Dans ce cas se pose la question de savoir si l'alerte est déclenchée suffisamment tôt pour permettre au conducteur de corriger sa trajectoire. La position du dispositif d'alerte résulte d'un compromis entre les données mesurées et le temps de réaction du conducteur. En effet, si le point de mesure est placé trop en amont du virage, les conditions initiales mesurées ne seront pas corrélées avec les trajectoires de passage en virage rendant impossible la définition de trajectoires de référence réalistes. Au contraire, plus les conditions initiales seront mesurées proches du virage, plus elles seront représentatives du comportement de conduite en virage. Dans ce cas, le nombre de fausses alertes sera minimum, mais ne laissera peut-être pas le temps de réaction nécessaire au conducteur.

V.3.1 Profil du virage étudié

Le profil du virage étudié ainsi que l'emplacement des dispositifs de mesure sont présentés sur la figure V.13. La longueur développée du virage est d'environ 100 m et son rayon de courbure a été borné à 600 m sur le graphe pour des raisons de lisibilité. Le dispositif de mesure des trajectoires (voir section II.2) mis en place pendant deux jours a permis la définition des trajectoires de référence sur la zone grisée. Le virage est également équipé de points de mesure des conditions initiales (constituées de boucles d'impédance implantées dans la chaussée) en entrée de virage et 50 m avant, indiqués par les traits pointillés rouges sur la figure. La méthodologie proposée ici ne prend pas en compte la mesure réalisée 50 m avant le virage. Le dispositif d'alerte, constitué de panneaux à chevrons surmontés de feux à éclats pilotés, est situé à 44 m de l'entrée du virage et visible depuis l'entrée. A cause de la distance réduite entre l'entrée du virage et le point de courbure maximale, il est important de déterminer si le dispositif permet effectivement à un

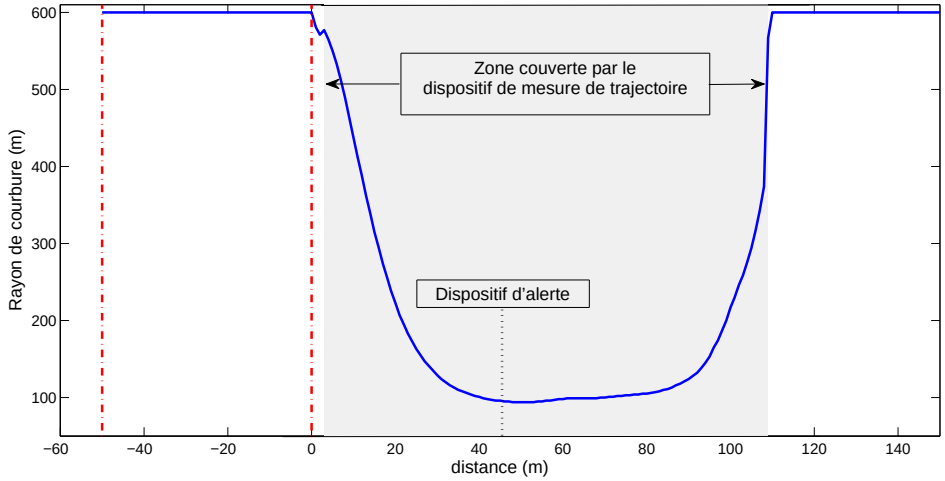


Figure V.13 – Profil du virage Rd8, et emplacements des dispositifs de mesure

conducteur alerté de réduire les sollicitations dynamiques imposées au véhicule et de rester sur sa voie de circulation.

V.3.2 Calcul de la trajectoire après alerte

La démarche adoptée est de rechercher par simulation une trajectoire compatible avec les réactions du conducteur, en termes de temps de réaction, minimisant les sollicitations dynamiques. Cette étude est réalisée pour les conditions initiales correspondant aux vitesses les plus élevées dans chaque classe de conducteurs. Au moment de l'alerte à l'entrée du virage, le conducteur continue de suivre la trajectoire de référence pendant son temps de réaction. A l'issue de ce temps de réaction, il est attendu que le conducteur applique une correction de freinage. Etant à l'entrée du virage dans une phase d'attention, le temps de réaction moyen est alors de 0.54 s et la décélération généralement appliquée de 3 $m.s^{-2}$ [Kho05]. Ce temps est donc diminué par rapport à la moyenne de 1.3 s dans le cas général. Cette réduction de vitesse va permettre une première diminution des sollicitations dynamiques. Pour plus de flexibilité, il est également permis au conducteur de se déporter vers l'extérieur de sa voie de circulation, sans toutefois en dépasser la frontière.

La détermination de la trajectoire après alerte est réalisée en deux temps. Premièrement, un profil de vitesse le long du virage est calculé à partir des valeurs de la décélération et du temps de réaction disponibles dans [Kho05]. Ensuite, la courbure de la trajectoire est optimisée afin de réduire les sollicitations dynamiques.

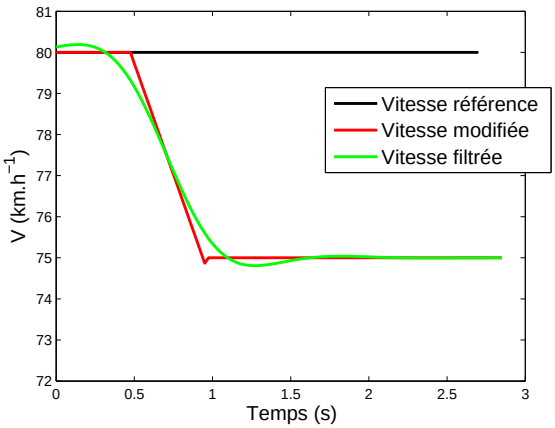


Figure V.14 – Définition du profil de vitesse après alerte

1) Profil de vitesse

Une décélération de 3 m.s^{-2} est appliquée après le temps de réaction du conducteur à partir de la vitesse de référence. Cette décélération est gardée constante jusqu'à obtenir une diminution de la vitesse de 5 km.h^{-1} et mène au profil de vitesse modifié représenté par la courbe rouge sur le graphique V.14. Afin de ne pas introduire de discontinuités dans les accélérations au début et à la fin du freinage et de reconstituer l'application progressive de la pression sur la pédale de frein, le profil de vitesse est filtré (courbe verte). Ce filtrage est réalisé par un filtre passe-bas de Butterworth du troisième ordre, dont la fréquence de coupure est choisie à 1 Hz. Ce profil filtré constitue la vitesse imposée pour la trajectoire après alerte notée V^f dans la suite.

Les trajectoires n'étant alors plus parcourues à la même vitesse, le temps de parcours n'est plus le même. C'est pourquoi, dans la suite, les grandeurs physiques sont indicées par la distance parcourue le long du virage et non par le temps.

2) Trace de la trajectoire

Tout d'abord en chaque point $M(s)$ de coordonnées $(x(s), y(s))$ de la trajectoire, est calculé le rayon de courbure R de la trajectoire de référence par la relation classique :

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

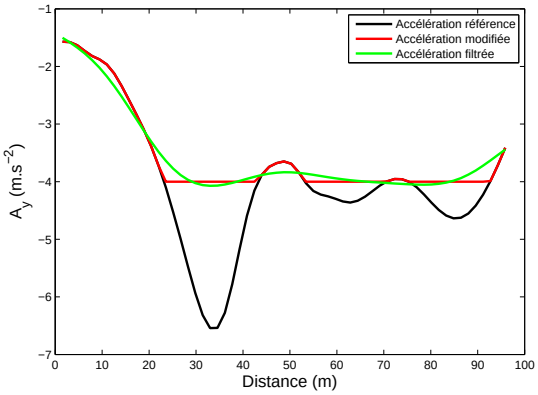


Figure V.15 – Limitation de l'accélération latérale après alerte

où s est l'abscisse curviligne. A partir du rayon de courbure, l'accélération latérale A_y associée au profil de vitesse V^f déterminé précédemment peut être calculée par :

$$A_y = \frac{{V^f}^2}{R}$$

La vitesse V^f étant inférieure à la vitesse de référence V^{ref} grâce à la phase de freinage, l'accélération latérale A_y est donc inférieure à l'accélération A_y^{ref} associée au profil de vitesse de référence V^{ref}. Cependant cette seule phase de freinage ne permet pas une réduction suffisante des sollicitations dynamiques. Afin de diminuer encore l'accélération latérale subie pendant le virage, il a été choisi de construire une trajectoire à accélération maximale imposée. Ainsi en connaissant le profil de vitesse après alerte V^f, le rayon de courbure modifié R^f peut être calculé et la trajectoire reconstruite selon le schéma utilisé dans la section II.1.3.

Un exemple d'accélération latérale de référence est montré sur la figure V.15. Ce profil est obtenu si le conducteur ne présente aucune réaction face à l'alerte déclenchée. On cherche à construire ici une trajectoire dont le profil d'accélération n'excède pas 4 m.s^{-2}, seuil qui serait ressenti comme un inconfort par un conducteur standard. L'accélération standard est donc bornée à cette valeur (courbe rouge sur le graphe). Afin que la trajectoire associée soit réalisable physiquement, l'accélération latérale est ici aussi filtrée (courbe verte). La fréquence de coupure est choisie à 4 Hz, ce qui correspond aux fréquences maximales de la dynamique latérale des véhicules [Gil02].

A partir de l'accélération latérale filtrée A_y^f et du profil de vitesse imposé V^f, le rayon de courbure modifié R^f est donné par :

$$R^f = \frac{{V^f}^2}{A_y^f}$$

et la trajectoire associée peut être calculée. Afin de vérifier si la trajectoire ainsi obtenue peut effectivement être réalisée par un véhicule, le modèle inverse (voir section II.2.3) est utilisé afin de remonter aux commandes du conducteur. Si cette inversion se déroule sans erreurs, alors la trajectoire après alerte est validée.

Cette démarche reproduit les actions du conducteur dont le premier reflexe, une fois alerté, sera de freiner. Ensuite, se rendant compte que le virage est plus serré que ce qu'il avait évalué le conducteur se laisse déporter vers l'extérieur de sa voie dans la première partie du virage, évitant ainsi le premier pic important d'accélération latérale. Sur la deuxième moitié du virage l'accélération latérale A_y^f est du même ordre que A_y^{ref}, mais, la vitesse V_f étant inférieure à la vitesse de référence, le rayon de courbure associé est plus fort. Cela compense le déport effectué dans la première moitié du virage et peut ainsi permettre au conducteur de rester sur sa voie de circulation sans dépasser l'accélération latérale de 4 m.s^{-2}.

V.3.3 Résultats

Le calcul des trajectoires après alerte a été réalisé pour les vitesses les plus élevées dans chacune des classes de conducteurs. Par construction, ces trajectoires correspondent à des sollicitations dynamiques élevées pour un conducteur standard, mais respectent les capacités des véhicules actuels. Il s'agit donc d'évaluer si cette trajectoire modifiée permet au conducteur de rester sur sa voie de circulation. Dans le cas contraire cela implique que le conducteur doive modifier plus radicalement son comportement dans le virage, et donc que l'alerte est déclenchée trop tard.

Les figures V.16 et V.17 représentent les évolutions temporelles de l'accélération latérale et de la distance par rapport au bord de voie extérieur dans chaque classe de conducteurs, pour le cas $V^{ref} = 80$ km.h^{-1}. Les courbes noires correspondent aux trajectoires de référence, les courbes vertes aux trajectoires modifiées. Dans chaque classe de conducteurs, après le temps de réaction du conducteur l'accélération est bornée à 4 m.s^{-2} ce qui permet d'éviter les pics importants d'accélération à l'entrée et à la sortie du virage. Pour les classes 1 et 2, l'accélération latérale est maintenue constante jusqu'à la sortie du virage tandis que pour les classes 3 et 4, une légère baisse des sollicitations apparaît en milieu de virage conformément à ce qui était observé sur la trajectoire de référence. Les filtrages réalisés sur les profils de vitesse et d'accélération permettent aux trajectoires obtenues d'être réalistes puisque l'inversion du modèle se déroule sans erreurs.

La distance d^{ext} représente l'écart par rapport à la frontière extérieure de la voie de circulation et doit donc rester positive pour que le critère de position latérale ne soit pas violé. Les distances associées aux trajectoires de référence vont de 2 m à environ 50 cm en entrée de virage puis convergent toutes approximativement vers le milieu de voie en sortie de virage. Les courbes associées aux trajectoires après alerte ont des valeurs de d^{ext} inférieures puisque, du fait de la

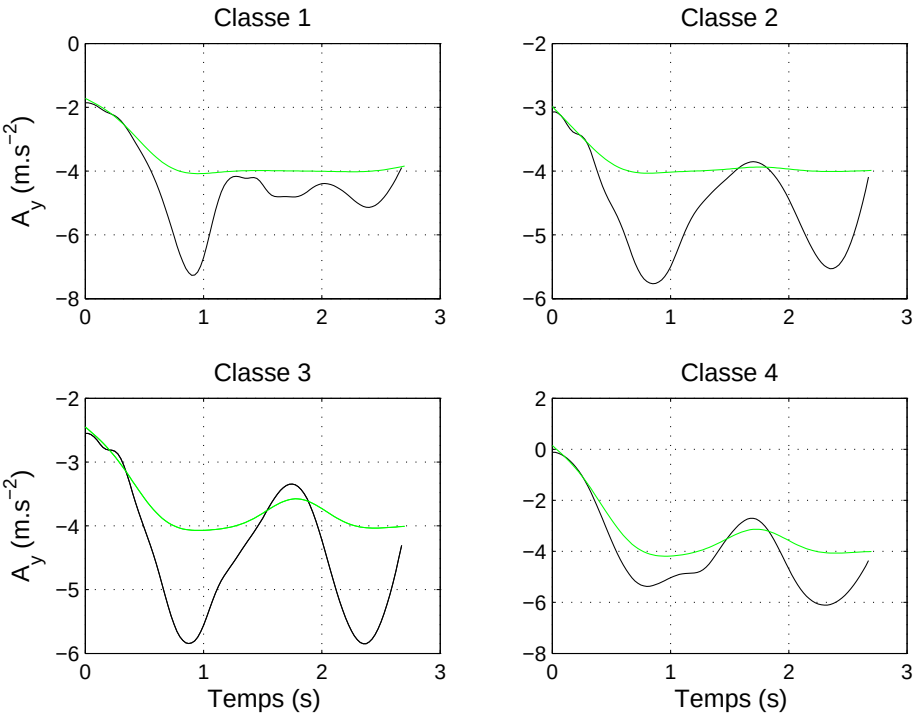


Figure V.16 – Accélérations latérales de référence (noir) et modifiée après alerte (vert) dans chaque classe de conducteur pour $V^{ref} = 80$ km.h^{-1}

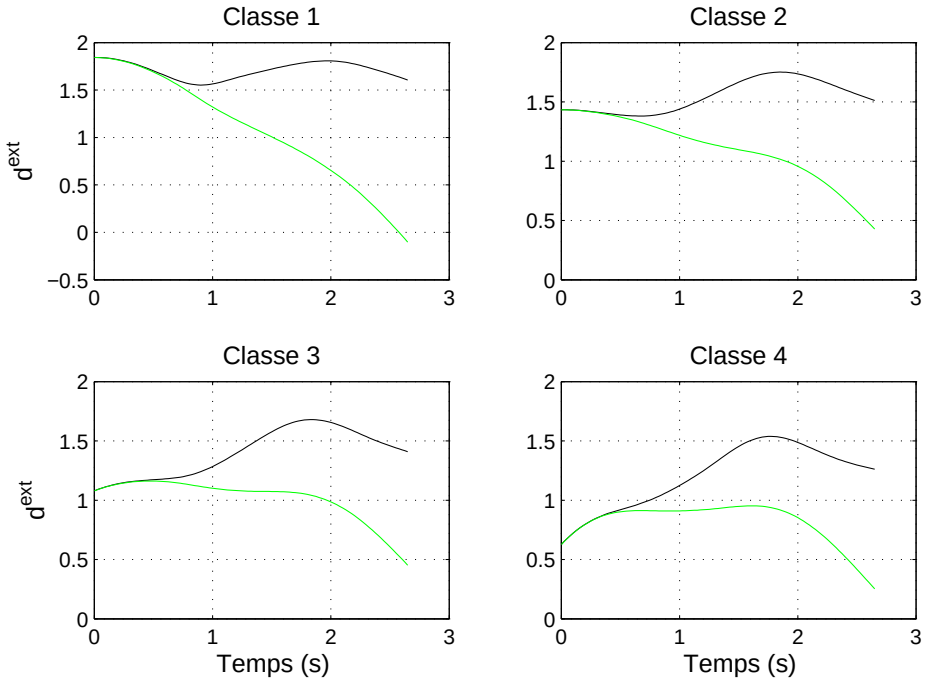


Figure V.17 – Ecart par rapport au bord de voie extérieur pour les trajectoire de références (noir) et les trajectoires modifiées après alerte (vert) dans chaque classe de conducteur pour $V^{ref} = 80$ km.h^{-1}

limitation de l'accélération latérale, le véhicule se déporte vers l'extérieur de la chaussée. A la sortie du virage, les classes de conducteurs 2 et 3 disposent encore d'une marge de 50 cm par rapport au bord de voie. Par contre, les conducteurs de la classe 4 ne disposent plus que de 20 cm tandis que ceux de la classe 1 dépassent la ligne médiane de 15 cm. L'alerte semble donc suffisante pour les conducteurs des classes 2 et 3. Les conducteurs de la classe 4, bien que disposant des accélérations les moins élevées sur la trajectoire de référence, finissent très proches de la sortie de voie car ils ne possèdent que peu de marge pour se déporter vers l'extérieur. Il apparaît que la classe la plus critique est la classe 1, bien qu'elle dispose a priori du maximum d'écart par rapport au bord de voie en début de simulation. La trajectoire de référence de cette classe génère un pic très élevé d'accélération latérale en début de virage. Lorsque ce pic est écrêté à 4 $m.s^{-2}$, la trajectoire modifiée se déporte donc très fortement vers l'extérieur. Alors que dans les autres classes la distance entre la trajectoire de référence et la trajectoire modifiée atteint 1 m en fin de simulation, elle atteint 1.70 m pour la classe 1.

Ce type d'alerte semble donc suffisant vis-à-vis des vitesses pratiquées dans le virage. Les conducteurs alertés subiront en effet lors de leur négociation du virage des accélérations relativement fortes et sortiront proches de leur bord de voie. Ces conditions créent donc une situation de conduite inconfortable et le conducteur trouvera alors l'alerte justifiée. Ces résultats, obtenus par la simulation d'un comportement de conducteur vraisemblable restent toutefois à confirmer par des expérimentations sur le terrain. Les conducteurs abordant le virage à une vitesse incompatible avec la position du point d'alerte ne peuvent pas être traités par cette méthodologie. En effet, anticiper le point d'alerte conduirait à des trajectoires de référence moins réalistes et donc à un risque plus élevé d'alertes injustifiées. Cependant, comme indiqué sur la figure V.13, le virage est équipé en amont (50 m) de mesures de conditions initiales supplémentaires. Ces points peuvent être utilisés pour des alertes anticipées en cas de vitesses très excessives. Les 50 m de réaction supplémentaires permettent alors au conducteur d'appliquer un freinage plus conséquent. A son passage à l'entrée du virage, la nouvelle trajectoire du conducteur sera alors prise en compte selon la méthodologie adoptée dans ce travail, avec une vitesse compatible avec la position du point d'alerte.

Conclusion et perspectives

Inscrite dans le cadre de la composante RADARR (Recherche des Attributs pour le Diagnostic Avancé des Ruptures de la Route) du projet national SARI (Surveillance Automatisée de la Route pour l'Information des conducteurs et des gestionnaires) et centrée sur la sécurité des véhicules automobiles légers en virages, l'étude présentée dans ce travail de thèse est une contribution à la mise en place d'une procédure d'alerte destinée à prévenir les conducteurs de l'éventuelle dangerosité de leur conduite en entrée de virage et concerne plus particulièrement la mise en œuvre d'une méthodologie probabiliste basée sur la définition d'un indice de risque fiabiliste et orientée vers la prédiction des trajectoires potentiellement dangereuses.

La trajectoire d'un véhicule lors de la négociation d'un virage est déterminée par le conducteur mais est également très dépendante de l'environnement du véhicule (i.e. l'infrastructure) et de son comportement. Compte tenu du caractère aléatoire très marqué des paramètres régissant le fonctionnement du triptyque véhicule-infrastructure-conducteur, une démarche probabiliste s'est naturellement imposée pour évaluer le risque encouru par le conducteur lors de la négociation du virage. L'apport de l'approche probabiliste dans ce contexte de sécurité routière permet d'une part d'intégrer rationnellement dans la stratégie d'évaluation du risque le caractère aléatoire des paramètres, et d'autre par de définir le risque au travers d'indicateurs (indice de Hasofer-Lind, probabilité de défaillance) pouvant facilement être utilisés dans une stratégie d'aide à la décision pour le déclenchement d'alertes. La procédure d'alerte proposée est basée sur la mesure de la trajectoire à l'entrée du virage par des dispositifs placés en bord de voie, ce qui lui confère son originalité par rapport aux systèmes embarqués généralement utilisés. L'estimation du risque de sortie de route en virage est alors effectuée à partir de la simulation numérique de trajectoires via un modèle dynamique spécifiquement développé dont certains paramètres d'entrée dépendent de trajectoires mesurées sur le trafic réel.

La première étape de la méthodologie est la modélisation déterministe du système. Un modèle dynamique de véhicule a été spécifiquement développé afin de combiner les exigences de précision pour des sollicitations dynamiques correspondant à la conduite courante et celles de la minimisation du temps de calcul en vue de l'emploi de méthodes probabilistes. Les commandes

du conducteur appliquées pour la simulation de la négociation du virage doivent être représentatives du comportement moyen des conducteurs. Pour cela, elles ont été déduites de trajectoires relevées expérimentalement sur site lors d'une campagne de mesures de deux jours sur trafic réel. L'utilisation de ces trajectoires expérimentales a permis d'obtenir des résultats réalistes par rapport aux comportements des conducteurs, qui auraient pu être biaisés par une approche basée entièrement sur la modélisation.

Ensuite, la modélisation de certains paramètres du système par des variables et processus aléatoires a permis d'introduire dans le modèle déterministe les incertitudes inhérentes au conducteur, au véhicule et à l'infrastructure. Les paramètres aléatoires ont été sélectionnés par une analyse de sensibilité globale afin de garantir la représentativité des incertitudes et de réduire la dimension aléatoire du problème. Il a ainsi été retenu quatre variables aléatoires et un processus stochastique, ce dernier étant approximé par un développement de Karhunen-Loève tronqué en vue de son emploi dans une méthode fiabiliste. Plusieurs indices de risque associés à la probabilité de dépasser les seuils de critères de sécurité ont été calculés. Le faible temps de calcul requis par un appel au modèle mécanique développé a rendu possible l'emploi d'une méthode de Monte-Carlo et ainsi l'obtention des valeurs cibles de référence. Cependant, bien qu'utilisable dans ce contexte, l'approche de Monte-Carlo n'en est pas moins chronophage et s'est révélée inadaptée à la méthodologie proposée. Nous nous sommes alors orientés vers des méthodes fiabilistes qui nous ont permis de réduire fortement le nombre d'appels au modèle mécanique et par suite d'élaborer un outil d'aide à la décision pertinent pour le déclenchement d'alertes.

Les applications réalisées dans le dernier chapitre démontrent le potentiel de la méthodologie fiabiliste proposée et l'intérêt de son emploi dans le domaine de la sécurité routière. En effet cette démarche permet entre autre de déterminer rigoureusement les conditions d'entrée dans le virage menant au même niveau de risque encouru par le conducteur. Ceci permet d'éviter d'avoir recours à des critères de sécurité évolués pour la définition des cas d'alerte, et diminue ainsi le nombre de seuils associés à déterminer. Le risque de déclencher de fausses alertes est par conséquent aussi réduit. Les critères de sécurité retenus à la suite de ces applications sont simplement le critère d'accélération latérale, et le critère de position latérale. Les vitesses d'alerte dans chaque classe de conducteur sont alors simplement déduites de la donnée d'un seuil de probabilité à ne pas dépasser qui pourra être déduit d'analyses du trafic. Une fois l'alerte déclenchée, il a été montré que la procédure envisagée constituée de dispositifs de mesure et de prévention placés en entrée de virage permet effectivement une réduction des sollicitations dynamique lors de la négociation du virage. En effet une trajectoire n'excédant pas 4 $m.s^{-2}$ d'accélération latérale et respectant le critère de position latérale a pu être construite dans chaque classe de conducteurs pour des vitesses allant jusqu'à 80 $km.h^{-1}$. Cette plage de vitesses est compatible avec la quasi-totalité des vitesses pratiquées. Pour les vitesses supérieures, il est alors nécessaire d'utiliser les points de mesure situés 50 m avant le virage afin de déclencher une alerte anticipée. Cette alerte sera seulement liée à la vitesse, puisque la position latérale mesurée trop tôt en amont n'aura pas de

corrélation avec la trajectoire de passage en virage. Le conducteur disposera ainsi d'une distance supplémentaire pour réduire sa vitesse.

Les perspectives de ce travail concernent d'une part le modèle probabiliste, et d'autre part le modèle mécanique. Leur concrétisation est conditionnée par la disponibilité de données expérimentales supplémentaires. Le point clé permettant l'application de la méthodologie concerne la définition de la probabilité seuil $\overline{P_f}$. Cette probabilité ne reflétant pas directement un risque d'accident mortel ou corporel, un seuil acceptable ne peut être prescrit. La définition de ce seuil nécessite donc une expertise qui doit être réalisée à partir d'études sur le trafic réel. Le deuxième point concerne la caractérisation statistique du vecteur aléatoire $\boldsymbol{X}$. Les paramètres associés au processus de perturbation du braquage ont pu être identifiés grâce aux trajectoires expérimentales mais des valeurs arbitraires ont été attribuées aux autres composantes. La caractérisation complète nécessiterait donc ici aussi des données supplémentaires. Le dernier point est associé à la représentativité du modèle mécanique. En effet dans cette étude un seul modèle de véhicule a été considéré (Peugeot 406). La généralisation des résultats obtenus doit donc être étudiée. Cependant, compte tenu du caractère modéré des sollicitations dynamiques, un modèle dynamique unique est peut-être suffisant. Dans le cas contraire plusieurs modèles devront être adoptés (correspondant par exemple aux types monospace, berline, citadine) et couplés à un dispositif de reconnaissance du type de véhicule.

Annexe A

Caractérisations, représentations et simulations numériques de variables aléatoires scalaires : uniformes, gaussiennes standards, gaussiennes, gaussiennes tronquées

A.1 Préliminaires : Représentation & Simulation

Rappelons que par simuler une variable aléatoire ($v.a.$) Y (scalaire ici, mais tout ce qui suit se généralise sans difficulté à la dimension vectorielle) on entend classiquement construire un N-échantillon numérique $\{y^1, \cdots, y^N\}$ de réalisations indépendantes de cette $v.a.$. Pour cela, on procède en trois étapes :

1. On cherche un entier $p \geq 1$ et une application $t : [0,1]^p \to \mathbb{R}$, tels que l'on puisse écrire :

$$Y = t(\boldsymbol{U}) \tag{A.1}$$

où $\boldsymbol{U} = (U_1, \cdots, U_p)^T$ est une *v.a.* p-dimensionnelle uniforme sur $[0,1]^p$ (i.e. ses composantes $U_1, \cdots, U_p$ sont uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes dans leur ensemble).

2. On construit un N-échantillon numérique $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1,N}$ de réalisations indépendantes de $\boldsymbol{U}$.

3. On en déduit l'échantillon numérique cherché $\{y^j\}_{j=1,N}$ de Y en appliquant (A.1) à chaque réalisation $\boldsymbol{u}^j (1 \leq j \leq N)$ de $\boldsymbol{U}$ issue de l'étape précédente :

$$y^j = t\left(\boldsymbol{u}^j\right) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{A.2}$$

L'échantillon numérique $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1,N}$ de l'étape 2 s'obtient en utilisant un générateur de nombres "pseudo-aléatoires". Il en existe de nombreux dans la littérature. L'un des plus récents, et probablement des plus utilisés à l'heure actuelle, est le Mersenne Twister [MN98] qui est un générateur de type "registre à décalage à rétroaction" particulièrement réputé pour l'ensemble de ses qualités statistiques, sa rapidité d'exécution et la grandeur de sa période (égale au nombre premier de Mersenne : $2^{19937} - 1$).

Disposant d'un bon générateur de nombres pseudo-aléatoires, l'étape fondamentale de la méthode devient alors l'étape 1. En effet, si le générateur est de qualité, c'est du choix du couple (p,t) que va dépendre la qualité de l'échantillon simulé $\{y^j\}_{j=1,N}$. Bien entendu, ce choix n'est pas unique. Par exemple, dans tous les cas (c'est-à-dire, quelle que soit la loi de Y), on peut prendre $p = 1$ et $t = F_Y^-$, où F_Y^- est l'inverse généralisée de la fonction de répartition F_Y de Y, telle que, $\forall u \in [0,1]$:

$$F_Y^-(u) = \sup\{y : F_Y(y) \leq u\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq u\} \tag{A.3}$$

et donc :

$$Y = F_Y^-(U) \tag{A.4}$$

avec U uniforme sur $[0,1]$.

Mais si Y est gaussienne, F_Y^- (qui coïncide alors avec l'inverse classique F_Y^{-1} de F_Y) n'admet pas une expression analytique explicite et il est alors préférable dans ce cas d'utiliser la relation de Box et Muller [DM96] :

$$Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \cos 2\pi U_2 \quad (\text{ou } Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \sin 2\pi U_2) \tag{A.5}$$

où U_1 et U_2 sont deux *v.a.* indépendantes et uniformes sur $[0,1]$, et m_Y, σ_Y sont la moyenne et l'écart-type de Y.

Donc, dans ce cas $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ et t est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall \boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T \in [0,1]^2, t(\boldsymbol{u}) = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2$ (ou $t(\boldsymbol{u}) = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln u_1} \sin 2\pi u_2$).

Il n'est pas toujours possible, toutefois, de trouver une application t possédant une expression analytique explicite. Dans ce cas, on peut toujours utiliser la relation (A.4) en calculant l'inverse numériquement (il existe de très bons algorithmes pour cela, notamment dans le cas gaussien [Wic88]). On peut également, comme nous le verrons dans le cas gaussien tronqué, avoir recours à une méthode indirecte basée sur une technique d'acceptation-rejet.

Sur le plan de la terminologie, la relation (A.1) porte le nom de ***représentation* de** Y, d'où le nom d'***étape de représentation*** attribué à l'étape 1. On notera que, d'après ce qui précède, une *v.a.* peut posséder plusieurs représentations (par exemple les relations (A.4) et (A.5) pour une *v.a.* gaussienne). L'étape 3 est, quant à elle, l'étape dite d'***échantillonnage numérique***. C'est cette dernière qui porte généralement le nom d'***algorithme de simulation***.

A.2 Variable aléatoire uniforme

A.2.1 Caractérisation probabiliste

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une *v.a.* Y uniforme sur $[a, b]$ est une *v.a.* dont la densité de probabilité, la fonction de répartition, la moyenne et l'écart-type s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.6}$$

$$F_Y(y) = \frac{y-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.7}$$

$$m_Y = \frac{b+a}{2} \tag{A.8}$$

$$\sigma_Y = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{A.9}$$

A.2.2 Représentation

Soit U une *v.a.* uniforme sur $[0, 1]$. Alors Y admet la représentation :

$$Y = a + (b-a)U \tag{A.10}$$

A.2.3 Algorithme de simulation

D'après (A.10), l'algorithme s'écrit :

$$y^j = a + (b-a)u^j \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{A.11}$$

où $\{u^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de U.

Remarque
Comme le montrent (A.6) et (A.7), une *v.a.* uniforme est complètement déterminée par la donnée de son support $[a, b]$. Or, comme on peut le voir sur (A.8) et (A.9), la donnée de ce support détermine de manière unique la moyenne et l'écart-type de la *v.a.*. Une telle *v.a.* est donc aussi entièrement caractérisée par la donnée de sa moyenne et de son écart-type. Ainsi, une *v.a.* uniforme Y de moyenne m_Y et d'écart-type σ_Y est une *v.a.* uniforme de support $[a, b]$, avec a et b donnés par :

$$a = m_Y - \sqrt{3}\sigma_Y \tag{A.12}$$

$$b = m_Y + \sqrt{3}\sigma_Y \tag{A.13}$$

relations tirées de (A.8) et (A.9) en résolvant ce système en le couple (a, b). En d'autres termes, il est équivalent de se donner une *v.a.* uniforme par son support ou par sa moyenne et son écart-type : la donnée du premier fixe les deux autres et réciproquement.

A.3 Variable aléatoire gaussienne standard

A.3.1 Caractérisation probabiliste

Une *v.a.* X gaussienne standard est une *v.a.* dont la densité de probabilité et la fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \ ; \ x \in \mathbb{R} \tag{A.14}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \ ; \ x \in \mathbb{R} \tag{A.15}$$

Une telle *v.a.* a une moyenne nulle et un écart-type unité :

$$m_X = 0 \tag{A.16}$$

$$\sigma_X = 1 \tag{A.17}$$

A.3.2 Représentation

Soit $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ une *v.a.* uniforme sur $[0,1]^2$; donc U_1 et U_2 sont indépendantes et uniformes sur $[0,1]$. Alors, X admet la représentation :

$$X = \sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2 \tag{A.18}$$

A.3.3 Algorithme de simulation

D'après (A.18), l'algorithme s'écrit :

$$x^j = \sqrt{-2\ln u_1^j}\cos 2\pi u_2^j \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{A.19}$$

où $\{\boldsymbol{u}^j = (u_1^j, u_2^j)^T\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la *v.a.* $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ uniforme sur $[0,1]^2$.

Remarque
La relation (A.18) résulte d'un résultat bien connu dû à Box et Muller [DM96], stipulant que si U_1 et U_2 sont deux *v.a.* uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes, alors les *v.a.* :

$$\begin{cases} \sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2 \\ \sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2 \end{cases} \tag{A.20}$$

sont gaussiennes standards et indépendantes.

On déduit de ce résultat que la *v.a.* $\sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2$ peut également être choisie comme représentation de X, et dans ce cas l'algorithme de simulation s'écrit :

$$x^j = \sqrt{-2\ln u_1^j}\sin 2\pi u_2^j \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{A.21}$$

Mais on peut exploiter plus judicieusement un tel résultat pour la simulation. En effet, comme les deux *v.a.* définies pas (A.20) sont deux représentations indépendantes de X, et comme U_1 et U_2, qui sont isonomes et indépendantes, peuvent être considérées comme des copies indépendantes d'une même *v.a.* V uniforme sur $[0,1]$, en passant aux réalisations dans (A.20) et en supposant N pair (hypothèse ne nuisant aucunement à la généralité car on peut toujours se ramener à cette situation), il vient :

$$\begin{cases} x^{2k-1} &= \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\cos 2\pi v^{2k} \\ x^{2k} &= \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\sin 2\pi v^{2k} \end{cases} \ ; \ k = 1, \cdots, \tfrac{N}{2} \tag{A.22}$$

(A.23)

où $\{v^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la *v.a.* V. L'intérêt d'un tel algorithme sur les algorithmes (A.19) et (A.21) est évident. En effet, ces derniers peuvent se réécrire, respectivement :

$$x^k = \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\cos 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{A.24}$$

$$x^k = \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\sin 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{A.25}$$

où $\{v^j\}_{j=1,2N}$ est une $2N$-famille de réalisations indépendantes de la *v.a.* uniforme V précédente. Par conséquent, pour simuler N réalisations indépendantes de X, on voit qu'avec l'algorithme (A.23) il faudra simuler N réalisations indépendantes d'une *v.a.* uniforme sur $[0,1]$, donc faire appel N fois au générateur de nombres pseudo-aléatoires, alors qu'avec les algorithmes (A.24) et (A.25) il faudra en simuler $2N$, donc faire appel $2N$ fois au générateur.

Rappelons, pour terminer, une représentation toujours possible de X, à savoir sa représentation standard :

$$X = \Phi^{-1}(V) \tag{A.26}$$

avec V uniforme sur $[0,1]$ et Φ donnée par (A.15), qui conduit à l'algorithme de simulation :

$$x^j = \Phi^{-1}(v^j) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{A.27}$$

où $\{v^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de V. Bien entendu, un tel algorithme ne sera efficace que si l'on dispose d'une procédure numérique performante (*i.e.* précise et rapide) pour le calcul de Φ^{-1}.

A.4 Variable aléatoire gaussienne

A.4.1 Caractérisation probabiliste

Une *v.a.* Y gaussienne de moyenne m_Y et d'écart-type σ_Y est une *v.a.* dont la densité de probabilité et la fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right) = \frac{1}{\sigma_Y}\varphi\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.28}$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}\exp\left(-\frac{(u-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right)du = \Phi\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.29}$$

avec φ et Φ données par (A.14) et (A.15). Une telle *v.a.* peut s'écrire :

$$Y = m_Y + \sigma_Y X \tag{A.30}$$

où X est une *v.a.* gaussienne standard.

A.4.2 Représentation

Compte tenu de (A.30) et des résultats du paragraphe A.3, Y admet les représentations suivantes, qui ne sont pas uniques bien entendu :

$$Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \cos 2\pi U_2 \tag{A.31}$$

$$Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \sin 2\pi U_2 \tag{A.32}$$

$$Y = m_Y + \sigma_Y \Phi^{-1}(V) \tag{A.33}$$

où $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ est une *v.a.* uniforme sur $[0,1]^2$ et V une *v.a.* uniforme sur $[0,1]$.

A.4.3 Algorithme de simulation

De (A.31), (A.32), (A.33) et des résultats du paragraphe précédent, on tire les quatre algorithmes suivants :

$$y^k = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \cos 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{A.34}$$

$$y^k = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \sin 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{A.35}$$

$$\begin{cases} y^{2k-1} = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \cos 2\pi v^{2k} \\ y^{2k} = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \sin 2\pi v^{2k} \end{cases} ; k = 1, \cdots, \tfrac{N}{2} \tag{A.36}$$

$$y^k = m_Y + \sigma_Y \Phi^{-1}(v^k) \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{A.37}$$

Dans les algorithme (A.34) et (A.35), $\left\{v^j\right\}_{j=1,2N}$ est une $2N$-famille de réalisations indépendantes d'une *v.a.* V uniforme sur $[0,1]$. Dans les algorithmes (A.36) et (A.37), $\left\{v^j\right\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la même *v.a.*. Dans l'algorithme (A.36), N est supposé pair.

Remarque
Comme habituellement, on notera : $Y \sim \mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ une *v.a.* Y gaussienne de moyenne m_Y et de variance σ_Y^2. Une *v.a.* X gaussienne standard sera alors naturellement notée : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

A.5 Variable aléatoire gaussienne tronquée

A.5.1 Caractérisation probabiliste

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit S une *v.a.* gaussienne de moyenne m et d'écart-type σ : $S \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Une *v.a.* Y est dite suivre une loi gaussienne tronquée de souche S et de support $[a, b]$ si sa densité de probabilité et sa fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{p_S(y)}{F_S(b) - F_S(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.38}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_S(y) - F_S(a)}{F_S(b) - F_S(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.39}$$

où p_S et F_S sont respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de S :

$$p_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z-m}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{A.40}$$

$$F_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right) du = \Phi\left(\frac{z-m}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{A.41}$$

où φ et Φ sont données par (A.14) et (A.15). Une telle *v.a.* Y a pour moyenne et écart-type :

$$m_Y = m\left(1 - \frac{\frac{\sigma}{m}\left(\varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}\right) \tag{A.42}$$

$$\sigma_Y = \sigma\left(1 - \frac{\frac{b-m}{\sigma}\varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \frac{a-m}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}\right)^2\right)^{1/2} \tag{A.43}$$

Observons que si X est une *v.a.* gaussienne standard, donc de fonction de répartition Φ, alors on a l'égalité en loi :

$$F_Y(Y) = \Phi(X) \tag{A.44}$$

avec Φ donnée par l'équation (A.15) et F_Y par l'équation (A.39). De l'équation (A.44) on tire :

$$Y = F_Y^{-}(\Phi(X)) \tag{A.45}$$

où F_Y^{-} est l'inverse généralisé de F_Y, défini par :

$$F_Y^{-}(u) = \sup\{y : F_Y(y) \leq u\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq u\} \ ; \ u \in [0, 1] \tag{A.46}$$

et qui vérifie, en particulier :

$$F_Y^-(1) = \sup\{y : F_Y(y) \leq 1\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq 1\} = b \tag{A.47}$$

$$F_Y^-(0) = \sup\{y : F_Y(y) \leq 0\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq 0\} = a \tag{A.48}$$

Compte tenu des relations (A.39) et (A.41), (A.45) se réécrit alors, tous calculs faits :

$$Y = m + \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)\Phi(X)\right) \tag{A.49}$$

A.5.2 Représentation

La *v.a.* X étant gaussienne standard, $\Phi(X)$ est une *v.a.* uniforme sur $[0,1]$. Par suite, d'après l'équation (A.49), une représentation possible de Y est :

$$Y = m + \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)U\right) \tag{A.50}$$

avec U uniforme sur $[0,1]$.

A.5.3 Algorithme de simulation

L'algorithme le plus direct est celui basé sur l'équation (A.50) :

$$y^j = m + \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)u^j\right) \;;\; j = 1, \cdots, N \tag{A.51}$$

Une autre possibilité, et qui évite le calcul de Φ^{-1}, est d'utiliser l'algorithme d'acceptation-rejet suivant.

Soient U et Z deux *v.a.* scalaires continues possédant les propriétés suivantes :
(a) elles sont indépendantes ;
(b) U est uniforme sur $[0,1]$;
(c) Z est facile à simuler ;
(d) le support de la densité de probabilité p_Z de Z contient celui $[a,b]$ de p_Y ;
(e) il existe un réel $M \geq 1$ tel que, $\forall y \in \mathbb{R}$: $p_Y(y) \leq M p_Z(y)$.

L'algorithme est alors organisé comme suit :
(1) soient z^k une réalisation de Z et u^k une réalisation de U ;
(2) on forme $\frac{p_Y(z^k)}{M p_Z(z^k)}$ et on fait le test : $u^k \leq \frac{p_Y(z^k)}{M p_Z(z^k)}$;

(3) si l'inégalité est vérifiée(acceptation), on pose : $y^k = z^k$;
(4) si l'inégalité n'est pas vérifiée (rejet), on retourne à l'étape (1).

L'algorithme est stoppé lorsque les N réalisations cherchées $\left\{y^j\right\}_{j=1,N}$ de Y sont obtenues.

On montre que la probabilité d'acceptation est de $1/M$. Par conséquent, lors du choix de la *v.a.* Z, il faut veiller non seulement à ce que ses propriétés (c), (d) et (e) soient satisfaites, mais également à ce qu'elle soit telle que la valeur du rapport $1/M$ soit le plus proche possible de 1. Un choix possible ici est le suivant : $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, donc $p_Z = p_S$, où p_S est la densité de probabilité gaussienne donnée par (A.40). Avec un tel choix, la condition (e) conduit à : $M \geq \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)^{-1}$ et on peut alors prendre :

$$M = \frac{1}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)} \tag{A.52}$$

avec une probabilité d'acceptation de $\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$ et donc une probabilité de rejet de $1 - \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)$.

L'algorithme se réduit alors à :
(1) soit z^k une réalisation de Z ;
(2) on fait le test : $z^k \in [a, b]$;
(3) si le test est positif, on pose $y^k = z^k$;
(4) si le test est négatif, on retourne à l'étape (1).

Il ne nécessite ainsi que de savoir simuler une *v.a.* gaussienne de moyenne et écart-type donnés (la *v.a.* $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), ce que l'on sait faire sans difficulté (*cf.* §A.4.3).

Remarque
Un cas particulier important est celui où :

$$m = 0, \quad b > 0, \quad a = -b \tag{A.53}$$

Dans ce cas, les relations (A.38) à (A.41), (A.42), (A.43) et (A.49) à (A.51) deviennent :

$$p_Y(y) = \frac{p_S(y)}{F_S(b) - F_S(-b)} \mathbb{1}_{[-b,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.54}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_S(y) - F_S(-b)}{F_S(b) - F_S(-b)} \mathbb{1}_{[-b,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{A.55}$$

$$p_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{A.56}$$

$$F_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{A.57}$$

$$m_Y = 0 \tag{A.58}$$

$$\sigma_Y = \sigma\left(1 - \frac{2\frac{b}{\sigma}\varphi\left(\frac{b}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)}\right)^{1/2} \tag{A.59}$$

$$Y = \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right)\Phi(X)\right) \tag{A.60}$$

$$Y = \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right)U\right) \tag{A.61}$$

$$y^j = \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right)u^j\right) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{A.62}$$

La *v.a.* Y est alors dite gaussienne tronquée centrée, d'écart-type σ_Y et de support $[-b, b]$.

Bibliographie

[AdW08] K.J. Astrom and C. Canudas de Wit. Revisiting the lugre model. *IEEE Control Systems Magazine*, 28 :101–114, 2008.

[AFS09] M. Ali, P. Falcone, and J. Sjöberg. A predictive approach to roadway departure prevention. In *21st IAVSD symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, Stockholm*, 17-21 August 2009.

[Bat99] P.H. Batavia. *Driver-adaptive lane departure warning systems*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 1999.

[BH04] M. Blundell and D. Harty. *The Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. SAE International, 2004.

[BI06] M. Börner and R. Isermann. Model-based detection of critical driving situations with fuzzy logic decision making. *Control Engineering Practice*, 14 :527–536, 2006.

[BMD09] J.M. Bourinet, C. Mattrand, and V. Dubourg. A review of recent features and improvements added to ferum software. In *Proc. of the 10th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'09)*, 2009.

[Bro06] J.P. Brossard. *Dynamique du véhicule : modélisation des systèmes complexes*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

[CJS05] W. Chan, R. Jin, and A. Sudjianto. Analytical variance-based global sensitivity analysis is simulation-based design under uncertainty. *Journal of Mechanical Design*, 127 :875–886, 2005.

[CU01] L.K. Chen and L.G Ulsoy. Identification of a driver steering model, and model uncertainty, from driving simulator data. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 123 :623–629, 2001.

[DM96] O. Ditlevsen and H.O. Madsen. *Structural Reliability Methods*. Wiley, 1996.

[Ea07] J. Edelmann and al. A passenger car driver model for higher lateral accelerations. *Vehicle System Dynamics*, 45 :1117–1129, 2007.

[Fau97] G. Faure. *Routes (tome 1)*. Eyrolles, 1997.

[FHW99] FHWA. Safety evaluation of rolled-in continuous shoulder rumble strips installed on freeways. Report, 1999.

[Gab07] M. Gabibulayev. A stochastic form of a human driver steering dynamics model. *Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control*, 129 :322–336, 2007.

[Gam86] J.M. Gambard. Vitesses pratiquées et géométrie de la route. Note d'information, SETRA, 1986.

[GCT09] Y. Goyat, T. Chateau, and L. Trassoudaine. Tracking of vehicle trajectory by combining a camera and a laser rangefinder. *Springer MVA : Machine Vision and Application*, March, 2009.

[Gil02] T.D. Gillepsie. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Warrendale SAE, 2002.

[Gip05] M. Gipser. Ftire : a physically based application-oriented tyre model for use with detailed mbs and finite-element suspension models. *Vehicle System Dynamics*, 43 :76–91, 2005.

[Gla04] S. Glaser. *Modélisation et analyse d'un véhicule en trajectoire limite. Application au développement de systèmes d'aide à la conduite.* PhD thesis, Université d'Evry Val d'Essonne, 2004.

[GM92] Y. Girard and J.E. Michel. *L'accidentologie des petits véhicules légers rapides.* DSCR/INRETS, 92.

[Goy05] Y. Goyat. *Evaluation des trajectoires des véhicules par capteurs vidéo fixes.* PhD thesis, Université Blaise Pascal, 2005.

[GS03] R.G. Ghanem and P.D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach.* Dover Publications, 2003.

[GZD08] W. Gao, N. Zhang, and J. Dai. A stochastic quarter-car model for dynamic analysis of vehicles with uncertain parameters. *Vehicle System Dynamics*, 46 :1159–1169, 2008.

[HR88] M. Hohenbichler and R. Rackwitz. Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling. *Journal of Engineering Mechanics*, 114 :2195–2199, 1988.

[IR08] B. Iooss and M. Ribatet. Global sensitivity analysis of computer models with functional inputs. *Reliability Engineering and System Safety*, 94 :1194–1204, 2008.

[ISO07] ISO. Intelligent transport systems - lane departure warning systems - performance requirements and test procedures. Technical report, ISO/DIS 17361, 2007.

[JLD06] J. Jacques, C. Lavergne, and N. Devictor. Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs. *Reliab Eng Syst Safety*, 91 :1241 :51, 2006.

[KD98] A. Der Kiureghian and T. Dakessian. Multiple design points in first and second-order reliability. *Structural Safety*, 20 :37–49, 1998.

[Kho05] J. El Khoury. *Accounting for Risk and Level of Service in the Design of Passing Sight Distances*. PhD thesis, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005.

[KLH87] A. Der Kiureghian, H.Z. Lin, and S.J. Hwang. Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics*, 113 :1208–1225, 1987.

[KO03] S.Y. Kim and S.Y. Oh. A driver adaptative lane departure warning system based on image processing and a fuzzy evolutionary technique. In *IEEE Intelligent Vehicle Symposium*, 2003.

[LBCG03] J.P. Lauffenburger, M. Basset, F. Coffin, and G.L. Gissinger. Driver-aid system using path-planning for lateral vehicle control. *Control Engineering Practice*, 11 :217–231, 2003.

[LDSS97] D. Lechner, Y. Delanne, G. Schaefer, and V. Schmitt. Méthodologie de validation du logiciel de dynamique automobile callas. *Ingénieurs de l'automobile*, 713 :42–48, 1997.

[Lec02] D. Lechner. *Analyse du comportement dynamique des véhicules routiers légers : Développement d'une méthodologie appliquée à la sécurité primaire*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2002.

[LM08] G. Louah and O. Menacer. La vitesse pratiquée ou v85. formules de calcul. Note d'information, SETRA, 2008.

[LSW+06] D. LeBlanc, J. Sayer, C. Winkler, R. Ervin, S. Bogard, J. Devonshire, M. Mefford, M. Hagan, Z. Bareket, R. Goodsell, and T. Gordon. Road departure crash warning system field operational test : methodology and results. Report, UMTRI, 2006.

[LW09] Philipp Lindner and Gerd Wanielik. 3d lidar processing for vehicle safety and environment recognition. In *IEEE SSCI*, 2009.

[MBM+05] J.E. Michel, T. Brenac, J. Magnin, C. Naude, and C. Perrin. *Les pertes de contrôle en courbe*. INRETS, 2005.

[MN98] M. Matsumoto and T. Nishimura. Mersenne twister : a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8 :3–30, 1998.

[Nad07] M. Nadji. *Adéquation de la dynamique de véhicule à la géométrie des virages routiers. Apport à la sécurité routière.* PhD thesis, INSA de Lyon, 2007.

[ONI] ONISR. http ://www2.securiteroutiere.gouv.fr/infos-ref/observatoire.

[Pac02] H.B. Pacejka. *Tyre and Vehicle Dynamics.* Warrendale SAE, 2002.

[PJT+99] D. Pomerleau, T. Jochem, C. Thorpe, P.H. Batavia, D. Pape, J. Hadden, N. McMillan, N. Brown, and J. Everson. Run-off-road collision avoidance using ivhs countermeasures. Report, NHTSA, 1999.

[Rac76] R. Rackwitz. Practical probabilistic approach to design first order reliability concepts for design codes. *CEB, Bulletin d'information*, 112, 1976.

[Rev03] Alexandre Revue. *Contribution des systèmes d'informations géographiques à la sécurité routière : approche multicapteurs pour l'évaluation de configurations à risques.* PhD thesis, Ecole des Mines de Paris, 2003.

[Rip06] B.D. Ripley. *Stochastic simulation.* Wiley, 2006.

[RK07] R.Y. Rubinstein and D.P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method.* Wiley, 2007.

[RM83] H.S. Radt and W.F. Milliken. Non-dimensionalizing tyre data for vehicle simulation. In *Road Vehicle Handling, Inst. of Mech. Engnrs*, 1983.

[Ros52] M. Rosenblatt. Remarks on a multivariante transformation. *Annals of Mathematical Statistics*, 23 :470–472, 1952.

[Ryu04] J. Ryu. *State and parameter estimation for vehicle dynamics control using GPS.* PhD thesis, Standford University, 2004.

[Sal02] A. Saltelli. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 145 :280–297, 2002.

[SBS07] J.T. Snaebjörsson, C.J. Baker, and R. Sigbjörsson. Probabilistic assessment of road vehicle safety in windy environments. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 95 :1445–1462, 2007.

[SCS04] A. Saltelli, K. Chan, and E.M. Scott. *Sensitivity Analysis.* Wiley, 2004.

[Sel08] Y. Sellami. *Approche Fiabiliste et Mécanique pour la Prédiction de Risques d'Accident de Poids Lourds.* PhD thesis, Institut de Recherche en Communication et Cybernetique de Nantes, 2008.

[Sen07] Chouki Sentouh. *Analyse du risque et détection des situations limites. Application au développement des systèmes d'alerte au conducteur.* PhD thesis, Université d'Evry Val d'Essonne, 2007.

[SGM+06] C. Sentouh, S. Glaser, S. Mammar, Y. Bestaoui, and B. Lusetti. Adaptative lane departure and curve negotiation warning system. In *AVEC*, 2006.

[Sob01] I.M. Sobol'. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte-carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55 :271–280, 2001.

[SSA06a] A. Sandu, C. Sandu, and M. Ahmadian. Modeling multibody dynamic systems with uncertainties. part i : Theoritical and computational aspects. *Multibody System Dynamics*, 15 :369–391, 2006.

[SSA06b] A. Sandu, C. Sandu, and M. Ahmadian. Modeling multibody dynamics systems with uncertainties. part ii : Numerical applications. *Multibody System Dynamics*, 15 :241–262, 2006.

[ST02] A. Saltelli and S. Tarantola. On the relative importance of input factor in mathematical models. *Journal of the American Statistical Association*, 97 :702–709, 2002.

[VSD10] E. Violette, P. Subirats, and D. Doucet. Evaluation de l'impact de systèmes d'information en virage sur le comportement des usagers. In *PRAC, Paris 4-5 Mai*, 2010.

[VWG09] S. Da Veiga, F. Wahl, and F. Gamboa. Local polynomial estimation for sensitivity analysis on models with correlated inputs. *Technometrics*, 51 :452–463, 2009.

[Wic88] M.J. Wichura. Algorithm as241 : The percentage points of the normal distribution. *Applied Statistics*, 37 :477–484, 1988.

[ZK94] Y. Zhang and A. Der Kiureghian. Two improved algorithms for reliability analysis. In *Proc. 6th IFIP WG 7.5 working conference on reliability and optimization of structural systems, pp. 297-304*, 1994.

[ZXHY08] Y. Zhou, R. Xu, X.F. Hu, and Q.T. Ye. A lane departure warning system based on virtual lane boundary. *Journal of Information Science and Engineering*, 24 :293–305, 2008.