N° d'ordre : D.U. : 2065
EDSPIC : 495

Universite Blaise Pascal - Clermont II

Ecole Doctorale
Sciences pour l'Ingenieur de Clermont-Ferrand

Thèse

Présentée par

XiaoSu HU

pour obtenir le grade de

Docteur d'Université

SPECIALITE : Génie Mécanique

Approche probabiliste de la propagation des incertitudes dans le modèle mécano-numérique du système couplé « fémur-prothèse non cimentée »

Soutenue publiquement le 15 novembre 2010 devant le jury :

M. Michel-Henri Fessy	Président
Mme. Laurence Chèze	Rapporteuse
M. Ahmed Mébarki	Rapporteur
M. Tarik Aït Si Selmi	Examinateur
M. Christophe Saint-Pierre	Examinateur
M. Michel Fogli	Directeur de thèse
M. David Clair	Co-encadrant de thèse
Mme. Florence Labesse-Jied	Co-encadrante de thèse

Avant-propos

Je souhaiterais d'abord présenter ma reconnaissance aux membres du jury, particulièrement au Docteur Michel-Henry FESSY [1] qui m'a fait l'honneur de présider le jury, à Madame Laurence CHÈZE [2] et à Messieurs Ahmed MÉBARKI [3] qui ont accepté de relire mon manuscrit. Leurs remarques constructives m'ont permis de clarifier et compléter ce travail.

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique et Ingénieries de l'Université Blaise Pascal et de l'Institut Français de Mécanique Avancée, financée par le Conseil Général de l'Allier.

C'est dans ce cadre que je tiens en premier lieu à exprimer tous mes sincères remerciements à mon directeur de thèse, Monsieur Michel FOGLI [4], pour la qualité de son encadrement ainsi que l'aide précieuse qu'il m'a apportée lors de la phase de rédaction de cette thèse. Ses nombreux conseils, sa rigueur scientifique, son soutien et ses qualités humaines m'ont permis de mener à bien ce travail de thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur David CLAIR [5], co-encadrant de cette thèse, de m'avoir fait partager ses compétences scientifiques ainsi que de m'avoir encouragé et de m'avoir guidé pendant les moments difficiles.

Je voudrais adresser également mon remerciement à Madame Florence LABESSE-JIED [6], co-encadrante de cette thèse, sans son aide, je n'aurais pas eu ce financement de thèse.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur Tarik Aït Si Selmi [7], partenaire clinique de ce travail, qui m'a accordé le privilège d'assister à l'arthroplastie de la hanche dans son bloc opératoire à Lyon. Son professionnalisme et sa sincérité ainsi que sa grande gentillesse sont absolument inoubliables.

1. Chirurgien orthopédique et traumatologique, Centre Hospitalier Lyon Sud.
2. Professeur des universités, Laboratoire de Biomécanique et de Mécanique des Chocs, Université Claude Bernard-Lyon I.
3. Professeur des universités, Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Échelle, Université Paris Est-Marne la Vallée.
4. Professeur des universités, Polytech'Clermont-Ferrand, **LaMI/IFMA-UBP**.
5. Maître de conférences, **LaMI/IFMA-UBP**.
6. Maître de conférences, IUT de Montluçon, **LaMI/IFMA-UBP**.
7. Chirurgien orthopédique et traumatologique, Centre Livet-Hôpitaux de Lyon.

Je manifeste, entre autres, toute ma gratitude envers Monsieur Christophe SAINT-PIERRE [8], partenaire industriel de cette thèse, qui m'a fait bénéficier de ses compétences en biomécanique de la prothèse de hanche. Un grand merci supplémentaire est réservé pour sa recommandation chez *Johnson & Johnson*.

Je n'oublie pas non plus que la réalisation de cette thèse de doctorat n'aurait pas été possible sans l'aide directe ou indirecte de nombreuses personnes, $\cdots$, Jean-Marc BOURINET [9], Grigore GOGU [10], $\cdots$. Je pense en particulier à Monsieur Thierry BOURDIER [11], il a eu la générosité de nous prêter la licence de logiciel pendant un temps considérable. Je suis également très reconnaissant à Madame Pierrette BLONDEAU, elle m'a appris beaucoup de tournures au moment de la rédaction.

Les personnes suivantes ont contribué par des suggestions et des corrections à l'amélioration de cette thèse. Je tiens à remercier vivement chacun d'entre eux. Naturellement, toutes les erreurs que vous trouverez dans ce mémoire sont les miennes. Si jamais vous trouvez un mot qui a la bonne orthographe, sans aucun doute, il le doit à l'une des personnes ci-après :

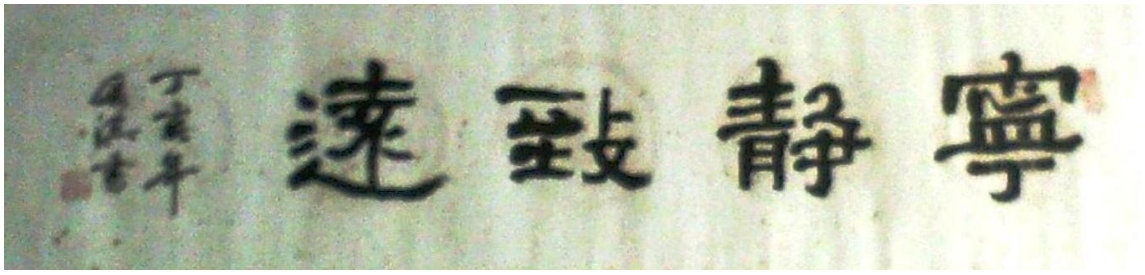
Guy Barbarat	Vicky Bodiment	Thomas Bonnemains	Miguel Cano
Grégory Chardon	Pierre Debout	Vincent Dubourg	Samuel Gidel
Pierre Grange	Grégory Guire	Carole Martin	Cécile Mattrand
Sylvain Pateloup	Guillaume Rey	Agnès Roudier	Benoit Rougeron

Je pense de même à tous mes amis ici ou là-bas, plus ou moins proches, $\cdots$, Céline, Ruiz, Jean-Paul, Laure, JianXiao, Li, Ge, RongJie, $\cdots$, qui ont créé autour de moi une atmosphère sympathique et propice au travail.

Un grand remerciement spécial à ma famille française. Je suis très largement redevable à Madame Marie-Thérèse ORGIAZZI et sa famille pour leur soutien constant.

En dernier lieu, qu'il me soit enfin permis de remercier mes parents pour leur amour et leur patience, je leur dédie cette thèse.

8. Docteur-Ingénieur, Directeur de Recherche & Développement, DePuy France.
9. Maître de conférences, **LaMI/IFMA-UBP**.
10. Professeur des universités, **LaMI/IFMA-UBP**.
11. Gérant de la société SIGMEO.



Il faut être calme pour aller plus loin ! - Proverbe chinois

Résumé

L'arthroplastie de la hanche par prothèse non cimentée est une solution couramment employée pour les patients rencontrant des problèmes du système locomoteur. Une telle solution présente toutefois un inconvénient majeur, souligné par tous les utilisateurs : le manque de stabilité primaire de la prothèse. Or, cette faiblesse peut provoquer des complications graves, voire l'échec de l'opération chirurgicale. Par conséquent, parvenir à une bonne fixation primaire est un point crucial de ce type d'opération chirurgicale pour assurer cliniquement une satisfaction à court et long terme.

Dans le but de mieux appréhender cette problématique centrale, une piste préopératoire a été adoptée. Un modèle éléments finis permettant de décrire le comportement mécanique du système couplé « os-prothèse non cimentée : DePuy Corail® » a été développé et validé par des expérimentations *in vitro*. Puis, pour tenir compte de la forte variabilité des paramètres du modèle, inhérente à la nature même du problème, une modélisation stochastique de ces derniers a été introduite et une stratégie mécano-probabiliste proposée, destinée d'une part à quantifier en termes probabilistes l'effet sur la réponse des incertitudes affectant les paramètres du modèle, et d'autre part à évaluer la stabilité primaire du système os-prothèse en contexte fiabiliste. La mise en œuvre pratique de cette approche a été réalisée à l'aide d'outils numériques basés sur la méthode de Monte-Carlo standard et une procédure de collocation stochastique.

L'originalité du travail présenté réside avant tout dans la proposition d'une méthodologie probabiliste capable de prendre en compte les incertitudes dans la problématique de la stabilité primaire des prothèses de hanche non cimentées. Elle tient également dans la potentialité de cette méthodologie à être facilement transplantable en contexte industriel.

Mots-clés : Stabilité primaire, Prothèse de hanche non cimentée, Modèle éléments finis, Propagation des incertitudes, Fiabilité, Approche probabiliste

Abstract

The hip arthroplasty with cementless hip prosthesis is a solution usually used for the patients suffering the problems of the musculoskeletal system. However, such a solution has a major disadvantage, pointed by all users : the lack of primary stability of the prosthesis. This weakness can cause serious complications or failure of the surgery. Therefore, to achieve a good primary fixation is a crucial point of this type of surgery to ensure a short and a long term clinical satisfaction.

In order to better understand this central issue, a preoperative track is adopted. A finite element model to describe the mechanical behavior of the coupled system "femur-cementless prosthesis : DePuy Corail®" has been created and validated by the experiments *in vitro*. Then, in order to take into account the high variability of model parameters, inherent to the nature of the problem, the stochastic modeling of random input parameters has been introduced and a mechanical-probabilistic strategy has been proposed, on the one hand to quantify, in probabilistic terms, the effect, on the response, of the uncertainties affecting the input parameters of the model, and on the other hand to evaluate the primary stability of the bone-prosthesis system in reliability context. The practical implementation of this approach is realized by using the numerical tools based on the standard Monte Carlo method and the stochastic collocation procedure.

The originality of the work presented is primarily in the proposition of a probabilistic methodology capable of taking into account the uncertainties in the problem of primary stability of cementless hip prostheses. It also lies in the potentiality of this methodology to be transplantable easily in industrial context.

Keywords : Primary stability, Cementless hip prosthesis, Finite element model, Propagation of uncertainties, Reliability, Probabilistic approach

Sommaire

Sommaire **i**

Table des figures **vii**

Liste des tableaux **xi**

Introduction **1**

1 État de l'art **5**

1.1 Biomécanique de la prothèse de hanche 6

1.1.1 Hanche (Articulation coxo-fémorale) 6

1.1.2 **P**rothèse **T**otale de **H**anche (**PTH**) & Opération 7

1.1.3 **PTH** cimentée & **PTH** non-cimentée et leur comparaison . . 10

1.1.4 Stabilité primaire 15

1.1.5 Prévision & Évaluation de la stabilité primaire 16

1.1.5.1 Approche préopératoire 17

1.1.5.2 Approche peropératoire 24

1.1.5.3 Méthodes postopératoires pour évaluer l'enfoncement de la prothèse de hanche 28

1.2 Application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche 31

1.2.1 Application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche cimentée 33

1.2.2 Application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche non cimentée 36

1.3 Constat de l'étude bibliographique 40

2 Modèle déterministe du système couplé fémur-prothèse non cimentée 43

2.1 Présentation du problème mécanique 44

2.2 Formulation mécanique et modèle numérique associé 45

2.3 Paramètres incertains du modèle 50

2.4 Variable de contrôle et critère de défaillance associé 50

2.5 Implémentation du modèle 53

2.5.1 Contact os spongieux - tige fémorale 53

2.5.2 Propriétés mécaniques des matériaux 54

2.5.3 Conditions aux limites et chargement 56

2.6 Applications numériques 57

2.6.1 Validation du modèle 57

2.6.2 Étude paramétrique 60

3 Modélisation stochastique et méthode d'analyse probabiliste proposée **63**

3.1 Modélisation stochastique des paramètres incertains 64

3.2 Événements de défaillance et de sécurité 66

3.3 Méthode d'analyse probabiliste proposée 67

3.3.1 Objectif fondamental 67

3.3.2 Formulation standard 69

3.3.3 Indice de Hasofer-Lind 72

3.3.4 Approximation FORM 73

3.3.5 Approximation SORM 74

3.3.6 Caractérisation de la variable de contrôle W 75

4 Applications numériques **79**

4.1 Analyse probabiliste de la propagation des incertitudes 80

4.2 Analyse fiabiliste 84

4.2.1 Influence des lois et des dispersions 84

4.2.2 Influence des longueurs de troncature 86

4.2.3 Influence du seuil de défaillance 88

4.2.4 Comparaison des diverses approximations préconisées de P_f . 90

4.3 Analyse de sensibilité fiabiliste locale 92

4.3.1 Facteurs d'importance des paramètres aléatoires 92

4.3.2 Sensibilité de β_{HL} aux caractéristiques des lois de Y_1 et Y_2 . . 96

Conclusions & Perspectives **101**

A Expérimentations *in vitro* **105**

A.1 Spécimens d'expérimentation 105

A.1.1 Pièces anatomiques 105

A.1.2 Implants prothétiques 106

A.1.3 Implantations 107

A.2 Équipement d'expérimentation 109

A.3 Procédure d'expérimentation 109

B Caractérisations, représentations et simulations numériques de variables aléatoires scalaires **115**

B.1 Préliminaires : Représentation & Simulation 115

B.2 Variable aléatoire uniforme 118

B.2.1 Caractérisation probabiliste 118

B.2.2 Représentation 119

B.2.3 Algorithme de simulation 119

B.3 Variable aléatoire gaussienne standard 120

B.3.1 Caractérisation probabiliste 120

B.3.2 Représentation 120

B.3.3 Algorithme de simulation 121

B.4 Variable aléatoire gaussienne 123

B.4.1 Caractérisation probabiliste . . . 123
B.4.2 Représentation . . . 124
B.4.3 Algorithme de simulation . . . 124
B.5 Variable aléatoire gaussienne tronquée . . . 125
B.5.1 Caractérisation probabiliste . . . 125
B.5.2 Représentation . . . 127
B.5.3 Algorithme de simulation . . . 127
B.6 Variable aléatoire lognormale . . . 130
B.6.1 Caractérisation probabiliste . . . 130
B.6.2 Représentation . . . 131
B.6.3 Algorithme de simulation . . . 132
B.7 Variable aléatoire lognormale tronquée . . . 133
B.7.1 Caractérisation probabiliste . . . 133
B.7.2 Représentation . . . 135
B.7.3 Algorithme de simulation . . . 135

C Méthodes de Monte-Carlo utilisées pour le calcul de la probabilité de défaillance 139

C.1 Méthode standard (ou brute) . . . 140
C.2 Méthode basée sur l'échantillonnage d'importance . . . 143
C.3 Méthode basée sur la simulation directionnelle . . . 146

D Calcul des moments de la variable aléatoire de contrôle par collocation stochastique **151**

E Estimations de *pdf* et de *cdf* à partir d'un échantillon numérique **155**

E.1 Position du problème 155

E.2 Subdivision du domaine d'estimation 156

E.3 Estimations de p_Y et F_Y 157

E.4 Représentations graphiques des estimées p_Y^N et F_Y^N 157

E.5 Autres estimations de p_Y 159

E.5.1 Estimation de Rosenblatt 159

E.5.2 Estimation à noyau de Parzen 160

Bibliographie **163**

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Table des figures

1.1 Coupe longitudinale de l'articulation coxo-fémorale 7

1.2 Surfaces articulaires de la hanche comprenant l'acétabulum et la tête fémorale 7

1.3 Aspect intérieur de la hanche vu par désarticulation après section des ligaments et de la capsule 8

1.4 Composants d'une prothèse totale de hanche 9

1.5 Arthroplastie de la prothèse totale de hanche 10

1.6 Dégradation du ciment à l'origine d'un descellement de tiges cimentées [Mohler 95] 12

1.7 Coupe de l'interface os-prothèse non cimentée 14

1.8 Modèle éléments finis sollicité par deux types de chargement physiologique [Biegler 95] 18

1.9 Déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse [Biegler 95] . . . 19

1.10 Modèle éléments finis (8383 nœuds, 6389 éléments) [Viceconti 00] 20

1.11 Déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse [Viceconti 00] . . 21

1.12 Neuf activités, récapitulations des patients et des essais [Bergmann 01] . . 22

1.13 Déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse [Pancanti 03] . . 23

1.14 Prototype de la clé dynamométrique [Cristofolini 06] 24

1.15 Corrélation entre la torsion appliquée et l'angle mesuré et celle entre l'angle mesuré et le déplacement [Cristofolini 06] 25

1.16 Corrélation entre le paramètre de la râpe et celui de la tige fémorale [Varini 08] 26

1.17 Prototype d'instrument basé sur l'analyse des vibrations [Lannocca 07] . . 27

1.18 Corrélation entre la fréquence et le déplacement [Lannocca 07] 27

1.19 Évolution de la probabilité de défaillance en fonction des variabilités de trois paramètres [Grasa 05] 33

1.20 Évolution de la probabilité de défaillance selon les différentes conditions combinées [Pérez 06b] 34

1.21 Impact de l'optimisation géométrique sur les réponses et les probabilités de défaillance du système [Nicolella 06] 35

1.22 Cinq *v.a.* retenues et ses caractéristiques probabilistes [Viceconti 06] . . . 37

1.23 Représentation fréquentielle de 4 variables de sortie du modèle [Viceconti 06] 37

1.24 Modèle éléments finis (18191 nœuds, 12218 éléments) et quatre variables aléatoires [González 09] 38

1.25 Convergence des deux méthodes de simulation [González 09] 39

1.26 Résultats probabilistes et analyse de sensibilité [González 09] 39

2.1 Modèle éléments finis du système couplé « fémur-prothèse non cimentée » . 54

2.2 Conditions aux limites et positionnement du fémur 57

2.3 **Enfoncement du point témoin sur la tête fémorale** 58

2.4 **Récapitulation des résultats expérimentaux** 58

2.5 **Comparaison des résultats expérimentaux et numérique** 59

2.6 **Étude paramétrique de l'influence des paramètres incertains $E_{spongieux}$ et $f_{tige-spongieux}$** 60

3.1 Représentation géométrique du point de fonctionnement et des domaines . 71

3.2 Couplage mécano-probabiliste du système couplé 77

4.1 Estimées de la densité de probabilité et de la fonction de répartition (1) . 81

4.2 Estimées de la densité de probabilité et de la fonction de répartition (2) . 82

4.3 Estimées de la densité de probabilité et de la fonction de répartition (3) . 82

4.4 Évolution de β_{HL} en fonction de w_0 89

A.1 Tige fémorale DePuy Corail® standard sans collerette (Taille 12) 107

A.2 Macrostructure ZTT transforme les forces de cisaillement en forces de compression 107

A.3 Implantation de la prothèse de hanche non cimentée 108

A.4 Spécimens d'expérimentation 108

A.5 Clichés radiographiques à l'amplificateur de brillance (face et profil du spécimen) 109

A.6 Fixation du fémur dans l'embase cylindrique 110

A.7 Positionnement du fémur dans l'embase cylindrique 110

A.8 Expérimentation en compression 111

A.9 Données techniques de la machine d'essai - I 112

A.10 Données techniques de la machine d'essai - II 113

E.1 Les deux représentations graphiques de la densité de probabilité estimée . 158

E.2 Les deux représentations graphiques de la fonction de répartition estimée . 158

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Liste des tableaux

2.1 Caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la prothèse 55

2.2 Caractéristiques mécaniques des matériaux constituant le fémur 56

4.1 Estimées de m_W, $I_{m_W}(95\%)$, c_W, S_W, K_W 82

4.2 Approximations par la méthode de collocation stochastique 83

4.3 Influence des lois et des coefficients de variation sur β_{HL} 86

4.4 Influence des longueurs de troncature sur β_{HL} 88

4.5 Influence du seuil de défaillance sur β_{HL} 89

4.6 Approximations de P_f pour des différents seuils de défaillance w_0 90

4.7 Comparaison entre les trois méthodes de Monte-Carlo utilisées 91

4.8 Facteurs d'importance des paramètres aléatoires Y_1 et Y_2 95

4.9 Facteurs d'importance des *v.a.* gaussiennes standards X_1 et X_2 96

4.10 Sensibilité de β_{HL} aux caractéristiques statistiques de la loi 100

A.1 Récapitulation des spécimens utilisés dans nos expérimentations 106

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Introduction

Depuis de nombreuses années, grâce notamment aux progrès de la médecine, l'espérance de vie à la naissance ne cesse de s'allonger. En janvier de cette année, l'**INSEE** [12] a publié son bilan démographique 2009. L'espérance de vie est désormais de $77,8$ ans pour les français et de $84,5$ ans pour les françaises et 29.4% de la population française est âgée de 55 ans et plus.

Par conséquent, l'arthrose et les dégradations de l'articulation coxo-fémorale qui touchent majoritairement les personnes âgées sont devenues un problème de santé publique majeur. L'usure du cartilage, ce précieux revêtement qui permet le glissement harmonieux de la tête du fémur à l'intérieur de la cavité cotyloïdienne entraîne un dysfonctionnement de l'articulation. De plus, ce symptôme est souvent combiné avec d'autres complications comme des douleurs intenses. Pour le traiter, les médicaments ne sont pas toujours suffisants et le recours à une arthroplastie de la hanche est régulièrement nécessaire. Les plus jeunes sont également concernés. Leurs pathologies se multiplient en raison des nouveaux modes de vie et de travail, elles s'aggravent aussi par certaines pratiques sportives désastreuses. Beaucoup de sports, comme par exemple, le football, le basket-ball, le ski, voire tout simplement le jogging, sollicitent vivement les hanches. Dans ce cas, ce sont les mouvements brutaux, les changements de direction, les aller et retour rapides, les blocages à la réception d'un saut *et cetera*, qui font porter aux hanches une charge pouvant atteindre dix fois le poids du corps.

En l'absence de traitement conservateur satisfaisant, la prothèse de hanche est généralement proposée aux patients dans le but de retrouver toute leur mobilité et d'améliorer leur qualité de vie.

12. **INSEE** : **I**nstitut **N**ational de la **S**tatistique et des **É**tudes **É**conomiques (www.insee.fr)

Ainsi, le marché des implants orthopédiques est en pleine expansion. En france, un peu plus de 138000 arthroplasties de hanche ont été réalisées en 2005 [Pibouleau 07].

Les **P**rothèses **T**otales de **H**anche (**PTH**) peuvent être classées en fonction de la technique de fixation de l'implant. On distingue alors les **PTH** cimentées et les **PTH** non cimentées.

Le travail présenté dans ce mémoire est consacré aux **PTH** non cimentées qui présentent l'avantage d'une fixation biologique entre l'os et l'implant. En contrepartie, le manque de stabilité primaire, en d'autres termes, le manque de fixité caractérisé par des déplacements relatifs irréversibles de la tige fémorale à l'intérieur du fémur pendant les jours suivant l'opération, peut engendrer plusieurs effets néfastes : perturbation des processus de formation de l'os autour de l'implant ; formation d'une couche de tissu fibreux périprothétique, apparition de la douleur de cuisse. Une conséquence possible est alors le descellement aseptique de la prothèse et donc l'échec de l'opération chirurgicale.

La problématique centrale de ce travail concerne l'étude mécano-probabiliste de la stabilité primaire d'une prothèse de hanche non cimentée.

Le chapitre 1 présente une étude bibliographique approfondie de la biomécanique des prothèses de hanche et décrit la notion de stabilité primaire. Il présente également un état de l'art des applications de la mécanique probabiliste aux prothèses de hanche.

Le modèle éléments finis déterministe permettant de décrire le comportement mécanique du système couplé « fémur-prothèse non cimentée » est présenté dans le chapitre 2. La prothèse modélisée est la prothèse Corail®, sans appui développée et fabriquée par notre partenaire industriel DePuy Orthopaedics. Des essais *in-vitro* réalisés sur huit couples « fémur humains-prothèse non cimentée » ont été effectués à Lyon par Guillaume Demaey, étudiant en médecine, en collaboration avec DePuy et avec les précieux conseils du Dr. Tarik Aït Si Selmi, chirurgien orthopédiste spécialiste de la hanche (*cf.* Annexe A). Les résultats de ces essais sont utilisés afin de valider le modèle mécano-numérique déterministe proposé. Enfin, à partir de la définition du problème de stabilité primaire et des informations concernant la variabilité de certains paramètres du modèle exposées au chapitre 1, nous définissons les paramètres incertains du modèle puis la variable de contrôle et le critère de défaillance associé à prendre en compte pour mettre en œuvre une approche fiabiliste de la stabilité primaire de la prothèse.

Dans le chapitre 3, nous détaillons les modèles stochastiques retenus pour décrire la variabilité aléatoire des paramètres incertains du modèle mécanique, puis, après avoir défini les événements de défaillance et de sécurité destinés à caractériser la stabilité primaire de l'implant, nous exposons la méthodologie probabiliste proposée pour évaluer cette dernière.

Le chapitre 4 évalue la méthodologie proposée au travers de quelques applications numériques destinées à illustrer les possibilités des méthodes exposées dans le chapitre 3. Ces applications sont toutes relatives au modèle mécano-numérique du système couplé « fémur-prothèse non cimentée : DePuy Corail® » décrit dans le chapitre 2 et leur présentation est subdivisée en trois parties. La première est centrée sur l'analyse de la propagation des incertitudes. On y quantifie l'influence de la variabilité aléatoire des paramètres incertains sur les premiers moments et sur la loi (densité de probabilité, fonction de répartition) de la variable aléatoire de contrôle W. Ces divers calculs sont réalisés à l'aide de la méthode de Monte-Carlo standard (pour les moments et pour la loi) et de la méthode de collocation stochastique (pour les moments). La deuxième partie concerne l'analyse fiabiliste du système couplé os-prothèse. Plusieurs situations sont considérées, orientées vers l'étude de l'influence de certaines caractéristiques des paramètres aléatoires sur la fiabilité, évaluée soit au travers de l'indice de Hasofer-Lind, soit au travers de la probabilité de défaillance. Les trois méthodes de Monte-Carlo préconisées pour le calcul de la probabilité de défaillance font également l'objet d'une étude comparative dans cette partie. La troisième partie est consacrée à une analyse de sensibilité locale destinée à évaluer, par le biais des facteurs d'importance, le poids de chaque paramètre aléatoire sur la valeur estimée de l'indice de Hasofer-Lind.

Enfin, nous dressons les conclusions et perspectives de ce travail.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Chapitre 1

État de l'art

Ce chapitre rassemble un certain nombre d'éléments bibliographiques se rapportant à la biomécanique de la prothèse de hanche.

La première partie est consacrée à l'anatomie de l'articulation de la hanche, et à la prothèse totale de hanche ainsi qu'à l'arthroplastie. Une comparaison entre les deux types de prothèses de hanche est ensuite proposée pour mieux cibler le sujet à étudier. Ainsi, sera présentée la problématique importante de la stabilité primaire liée à la prothèse de hanche non cimentée. La prévision et l'évaluation de la stabilité primaire d'une prothèse de hanche non cimentée seront détaillées, cette étude nous conduira à une piste préventive, en utilisant le modèle numérique destiné à atteindre une meilleure compréhension de cette problématique.

Étant donné que le domaine de la biomécanique est par essence un domaine de variabilités, la deuxième partie se focalise sur l'application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche. Un état de l'art de ce type d'application sera décrit synthétiquement.

Pour compléter cette étude bibliographique, un constat concis se trouvera à la fin de ce chapitre.

1.1 Biomécanique de la prothèse de hanche

1.1.1 Hanche (Articulation coxo-fémorale)

La hanche, ou plus précisément, l'articulation coxo-fémorale est l'une des plus importantes articulations humaines. En effet une seule articulation assure la liaison du membre inférieur avec le tronc. Cette articulation de calibre important a une double fonction de stabilité et de mobilité [Bonnel 03]. Elle doit être très stable, supporter le poids du corps et être profondément emboîtée. Il lui faut, de plus, permettre des mouvements dans toutes les directions : la flexion, l'extension, l'abduction (mouvement qui écarte un membre du plan sagittal du corps), l'adduction (mouvement qui rapproche un membre du plan sagittal du corps), les rotations latérale et médiale, et la circumduction (mouvement de rotation autour d'un axe ou d'un point central). Concrètement il faut pouvoir marcher, courir, s'asseoir, s'accroupir *et cetera*. En anatomie descriptive, nous devons dire que la hanche assure la jonction entre le bassin et le membre inférieur [Castaing 84].

Pour respecter les impératifs de stabilité et de mobilité, un seul type articulaire est utilisable : la rotule. Chez l'homme, la hanche (*cf.* **Figure** 1.1) est la plus parfaite des articulations du type rotule : elle est constituée d'une sphère, la tête fémorale (extrémité hémisphérique du fémur), solidement emboîtée dans une cavité sphérique, appelée l'acétabulum. Cette cavité articulaire de l'os iliaque, située de chaque côté du bassin, s'appelle aussi le cotyle. Les mouvements articulaires se font par glissement entre ces composants osseux.

Dans cette jointure synoviale et sphéroïdale, la tête fémorale est recouverte de cartilage hyalin qui facilite le glissement des différentes parties osseuses et leur mouvement. Elle représente deux tiers de sphère, avec une dépression centrale où s'insère le ligament rond [Gosling 03].

Cette tête surmonte le col fémoral dont la base aboutit au côté médial du grand trochanter. L'acétabulum est une profonde cavité avec une surface articulaire en forme de **C** (*cf.* **Figure** 1.2), également encroûtée de cartilage hyalin, entourant une partie non articulaire, remplie de graisse, dont le pourtour donne attache à la base du ligament de la tête fémorale (*cf.* **Figure** 1.3). L'acétabulum s'ouvre vers le bas, au niveau de l'incisure acétabulaire, où les vaisseaux, surmontés par le ligament transverse de l'acétabulum, entrent dans l'articulation. Un bourrelet fibro-cartilagineux, adhérant au pourtour de l'acétabulum et au ligament transverse, contribue à augmenter la profondeur de la cavité.

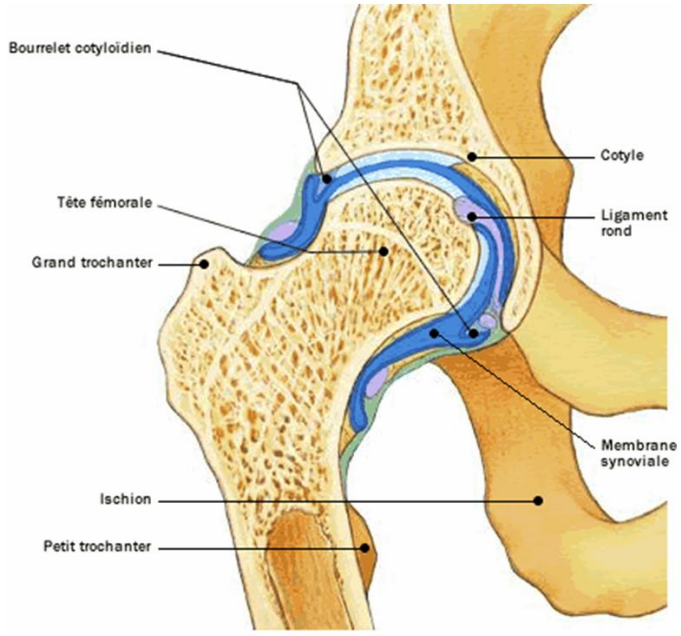


Figure 1.1 – Coupe longitudinale de l'articulation coxo-fémorale

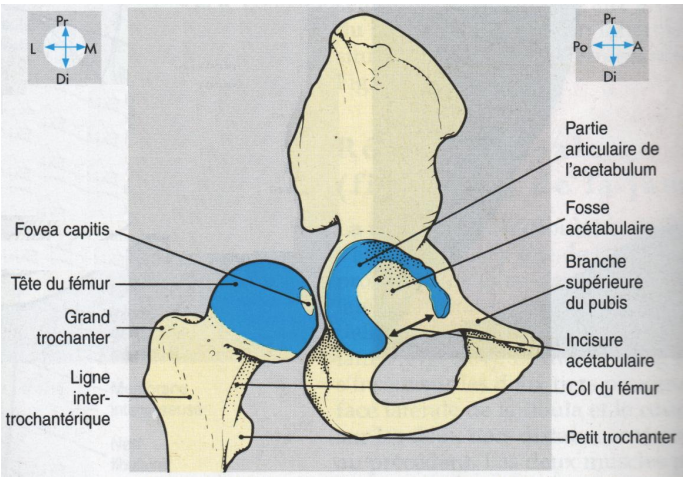


Figure 1.2 – Surfaces articulaires de la hanche comprenant l'acétabulum et la tête fémorale

1.1.2 Prothèse Totale de Hanche (PTH) & Opération

L'arthroplastie de hanche a connu durant ces trente dernières années un essor prodigieux. Elle est ainsi devenue l'une des interventions orthopédiques les plus cou-

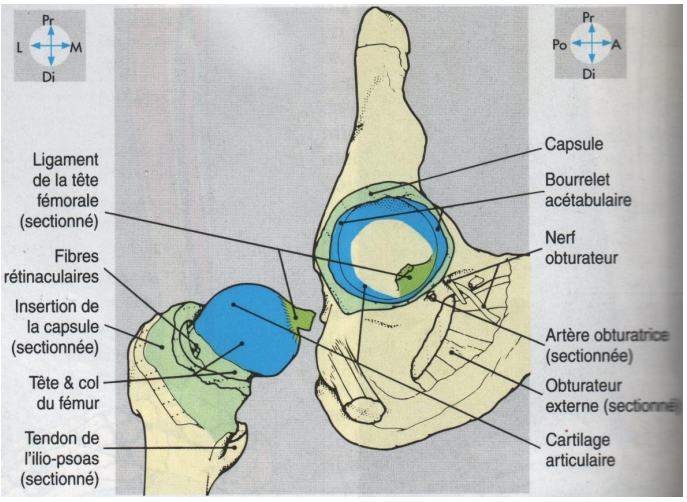


Figure 1.3 – Aspect intérieur de la hanche vu par désarticulation après section des ligaments et de la capsule

ramment pratiquées. En 2005, un peu plus de 138000 arthroplasties de hanche ont été réalisées en France, dont 120000 arthroplasties de première intention et 18000 de reprise. Parmi les 120000 actes de première intention, 97400 ont été réalisés avec des **P**rothèses **T**otales de **H**anche (**PTH**), et 22600 avec des prothèses fémorales [Pibouleau 07]. À la suite du vieillissement de la population et d'une espérance de vie plus élevée, ce chiffre ira certainement en augmentation.

Les prothèses de hanche sont destinées à prendre en charge les pathologies suivantes :

- Les coxopathies symptomatiques, parmi lesquelles figurent au premier rang par le nombre, les coxarthroses, primitive ou secondaire, suivies des autres atteintes articulaires, rhumatismales, vasculaires métaboliques ou tumorales, notamment lorsque les médicaments sont devenus inefficaces ;
- Les fractures de l'extrémité proximale du fémur. Elles se classent en fractures cervicales vraies *versus* fractures de la région trochantérienne. Il est important de rappeler et de différencier les deux grands types de pathologies dans les fractures de l'extrémité supérieure du fémur, qui sont les fractures du col fémoral et les fractures de la région trochantérienne (appelées communément fractures pertrochantériennes, c'est-à-dire passant par le trochanter, dans ces derniers cas, l'ostéosynthèse est parfois privilégiée selon la situation).

Dans le cas des coxopathies, seules sont utilisées les **PTH**. En traumatologie, le choix s'effectue entre les **PTH** et les prothèses fémorales, ne remplaçant que le versant fémoral de l'articulation.

Compte tenu de la gravité des conséquences des coxopathies symptomatiques et des fractures du col fémoral, de leur incidence élevée dans la population âgée, et de l'absence de traitement conservateur satisfaisant, les prothèses de hanche ont un intérêt de santé publique.

Une **PTH** (*cf.* **Figure** 1.4) est constituée par l'association d'une tige fémorale, implantée dans le canal médullaire du fémur, à l'extrémité de laquelle est emboîtée via un cône morse une tête fémorale, et d'une cupule fixée dans l'acétabulum par l'intermédiaire d'un insert articulaire amovible.

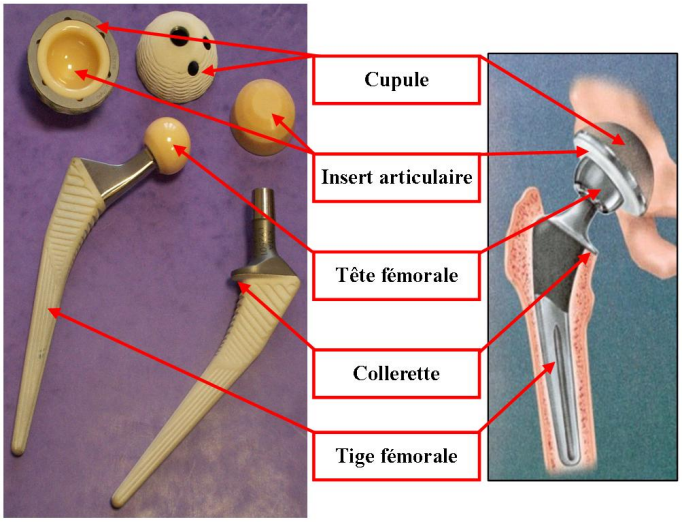


Figure 1.4 – Composants d'une prothèse totale de hanche

L'intervention chirurgicale a pour but de remplacer l'articulation défectueuse de la hanche par ce dispositif articulaire interne : la **PTH**. Cet appareillage permet un fonctionnement quasi normal, et, en tout cas de pratiquer la marche.

De façon un peu schématique, l'opération orthopédique est illustrée sur la figure 1.5. Elle commence par la séparation de l'articulation de la hanche. La tête fémorale endommagée est excisée, et le cartilage nécrotique est aussi enlevé. Puis une cupule est fixée dans le cotyle. En vue d'améliorer le frottement entre la tête fémorale et la cupule, un insert articulaire est ensuite positionné dans cette capsule. Selon la taille

prédéfinie de la tige fémorale, l'étape suivante consiste à préparer la cavité médullaire dans le fémur. Des râpes adéquates de dimensions croissantes sont successivement introduites dans la diaphyse fémorale. La dernière râpe, se bloquant dans le fémur, désigne la taille définitive de la tige fémorale. La tige fémorale est donc insérée dans cette cavité, puis la tête est assemblée. Enfin, l'articulation artificielle de la hanche est reconstruite.

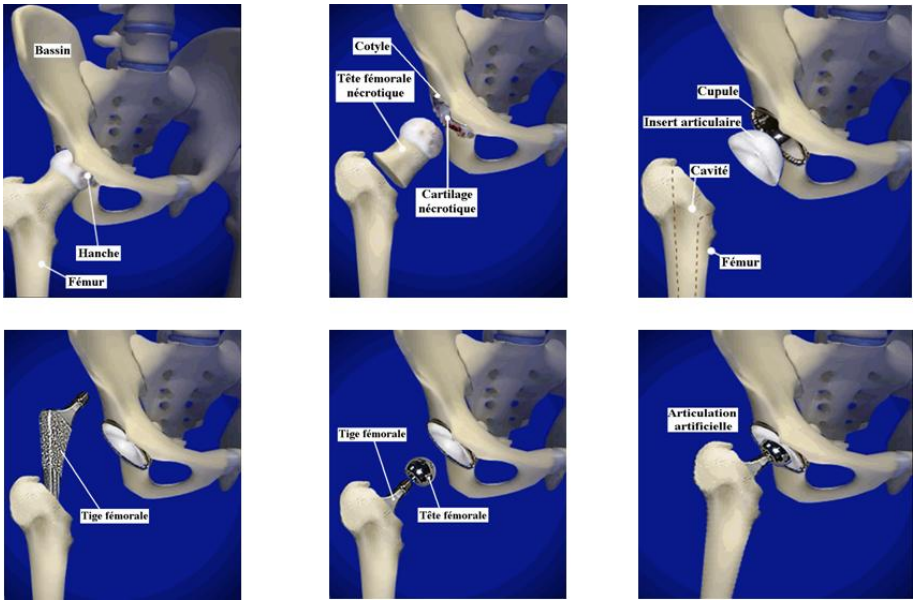


Figure 1.5 – Arthroplastie de la prothèse totale de hanche

1.1.3 PTH cimentée & PTH non-cimentée et leur comparaison

Les prothèses totales de hanche peuvent être classées en plusieurs catégories suivant différents critères, comme par exemple, selon leur mode de fixation, les matériaux constitutifs, le couple de frottement prothétique, la forme des implants, *et cetera*. Actuellement, si nous adoptons le critère le plus courant, c'est-à-dire, en fonction de la technique de fixation de l'implant, les prothèses totales de hanche se différencient en deux types : **PTH** cimentée et **PTH** non cimentée.

Historiquement, ce sont les frères Judet [1] qui conçurent, en 1946 en France, la

1. Jean Judet et Robert Judet.

première prothèse fémorale [Vayre 09]. En 1951, le chirurgien Mac Kee implanta pour la première fois une prothèse totale de hanche non cimentée. Ensuite, en 1958, c'est le professeur John Charnley qui est à l'origine d'une véritable révolution dans le monde de la **PTH**. C'est en novembre 1962, à la suite de multiples travaux sur la fixation cimentée des implants dans l'os et sur les couples de friction, et en outre, fort de l'expérience malheureuse des cupules en téflon (1959 1962), que John Charnley implantait sa première prothèse totale de hanche cimentée à faible friction. Ainsi, pour la première fois, il cimentait dans la cavité acétabulaire une cupule en polyéthylène de haute densité dans laquelle venait s'articuler une bille d'acier de calibre 22.25 *mm* (7/8 de pouce), définissant de ce fait la « *Low Friction Arthroplasty* » que nous connaissons aujourd'hui [Delaunay 99].

Bien entendu, le ciment dont il est question ici n'a évidemment rien à voir avec celui employé pour construire les maisons, il s'agit de la résine acrylique (polyméthacrylate de méthyle, PMMA), également connu sous la marque brevetée Plexiglas®). C'est une colle particulièrement efficace qui permet de maintenir les éléments constituant de la prothèse [Kühn 03].

Un certain nombre d'études a déjà démontré que la prothèse cimentée possède une performance clinique, en terme de la survie de prothèse, assez remarquable [Kay 95, Katz 97, Chiron 00, Rousseau 04, Eugene 05]. De plus, d'une manière générale, la **PTH** cimentée est relativement moins coûteuse que la **PTH** non cimentée dans de nombreux cas [Bourne 94a, Yates 06].

En revanche, cinq inconvénients sont identifiés :

1. Le ciment joue un rôle important sur la nécrose thermique de l'os et il endommage la circulation sanguine locale [Wang 95, Hansen 03].
2. Des rétrécissements du ciment au cours de la polymérisation [Lewis 97] peuvent provoquer l'affaiblissement de l'interface ciment-prothèse [Breusch 03].
3. On constate souvent une incohérence sur le plan de la rigidité entre le ciment et les tissus osseux contiguës [Harrigan 92], rendant la liaison entre l'os et le ciment peu fiable.
4. Le manteau de ciment, l'interface os-ciment et l'interface ciment-implant, ces sont les trois zones faibles. La défaillance locale, dans ces trois zones, par fracture conduit à une réaction inflammatoire qui peut se généraliser et entraîner le descellement de la prothèse [Gardiner 94, Waide 04]

5. Les particules de ciment peuvent interagir avec les tissus environnants, peuvent provoquer des tissus périprothétiques inflammatoires et augmenter la destruction osseuse [Bauer 99, Jacobs 01, Agarwal 04].

Disons que, à long terme, le ciment se dégrade sous l'effet du mouvement et de l'usure entraînant une modification de ses caractéristiques mécaniques (*cf.* **Figure** 1.6). L'un ou la combinaison des inconvénients présentés peuvent provoquer un descellement aseptique de la prothèse cimentée. En l'occurrence, ce descellement aboutit très probablement à l'échec de l'opération et à une reprise chirurgicale compliquée parfois très délicate [Cartillier 00, Issack 03, Pérez 06a].

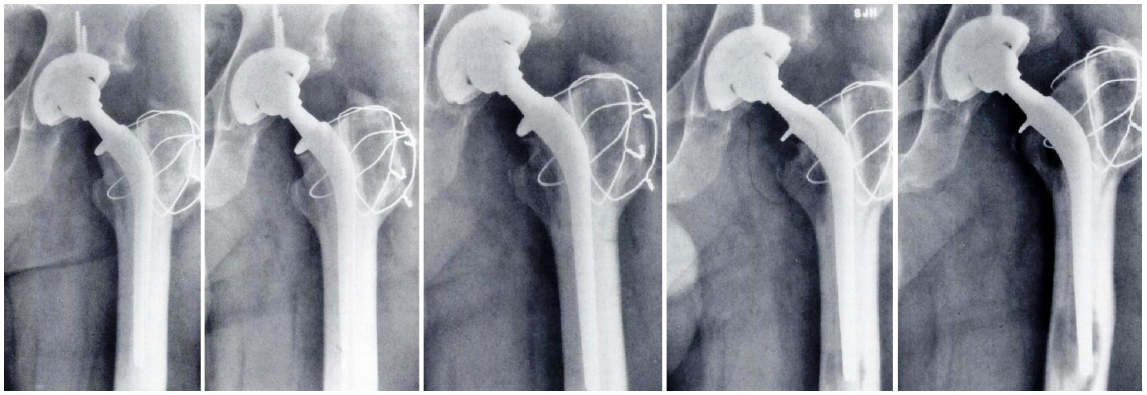


Figure 1.6 – Dégradation du ciment à l'origine d'un descellement de tiges cimentées [Mohler 95] (Radiographies de 0-18-21-33-45 mois après l'arthroplastie de la hanche)

La fixation par ciment biologique résout le problème de stabilité des prothèses de hanche. L'expérience de la communauté chirurgicale et des physiothérapeutes contribue au succès global de l'arthroplastie de la hanche [Wroblewski 93]. Cependant certains éléments, comme l'âge des patients et leur pathologie, vont progressivement modifier l'utilisation systématique du ciment.

Auparavant, la durée de vie d'une prothèse était de 5 voire 10 ans, ce qui la réservait particulièrement aux personnes les plus âgées. Au fur et à mesure des changements de situation, il devient de moins en moins admissible de souffrir d'une maladie de la hanche, aussi les patients, dont l'âge est inférieur à 50 ans, voire 60 ans, constituent-ils un sous-groupe aux caractéristiques et spécificités particulières [Sarmiento 90, Delaunay 05, Petsatodes 05, Archibeck 06, Ha 07].

En effet, ces patients ont habituellement une activité physique encore soutenue au moment de l'implantation de la prothèse, et l'usure des surfaces de frottement est

de ce fait augmentée. De plus, leur espérance de vie importante les rend d'autant plus susceptibles d'avoir à subir une reprise de leurs implants [Kerboull 04, Wettstein 05].

La durée de vie de la prothèse est un critère de choix important pour la majorité des patients de plus en plus jeunes [Pourreyron 08a]. Le travail demandé à l'articulation artificielle est de plus en plus proche d'une articulation normale avec une reprise d'activité rapide et parfois intense [Lavigne 08, Pourreyron 08b]. L'os humain, surtout chez le jeune sujet, est une structure évolutive en perpétuelle activité de remodelage en fonction des contraintes biomécaniques liées à la marche et à l'effort [Epinette 04, Eskelinen 05].

Le ciment acrylique, et *a fortiori* les inconvénients évoqués précédemment liés au ciment, se trouve donc peu adapté à ces nouvelles conditions. Par conséquent, la **PTH** cimentée est de moins en moins utilisée.

Entre 1970 et 1980, différentes propositions de fixation de la tige fémorale sans ciment voient le jour : Judet en France (1971) ; Lord en Angleterre (1974) ; Engh aux États-Unis (1977) ; Zweimüller en Autriche (1979). Les **PTH** non cimentées ont été implantées et se sont répandues depuis le choix de H. Wagner en 1987 [2] [Epinette 94].

La **PTH** non cimentée possède de nombreux avantages [Dirksmeier 00, Tanzer 01, Emerson 02, Laupacis 02, Lyu 03, Cimbrelo 03, Butler 05, Grant 05, Swanson 05, Ström 06, Epinette 08, Cohen 09] :

1. La conservation du capital osseux grâce à une meilleure transmission des contraintes ;
2. La disparition du risque du choc au ciment lors de la pose de prothèse ;
3. Le repositionnement de l'implant en peropératoire ;
4. La possibilité d'appui immédiat en postopératoire ;
5. L'extraction aisée de la prothèse pendant les quatre premiers mois d'implantation en cas d'infection précoce ou de luxation récidivante ;
6. La durée de vie beaucoup plus longue par rapport à la **PTH** cimentée chez le sujet jeune.

2. H. Wagner, 1987, Revision prosthesis for the hip joint in severe bone loss, Der Orthopäde (in German) 16 (1987), pp. 295-300.

En fait, la technique de fixation sans ciment, encore appelée pose par *press-fit*, est un procédé d'assemblage communément utilisé dans le domaine industriel. L'exemple le plus connu provient de la liaison de deux éléments par un système de cône morse. C'est aussi le moyen retenu pour assurer la stabilité primaire d'une tige fémorale sans ciment [Green 99].

En effet, le volume de la prothèse non cimentée est légèrement supérieur à celui de la dernière râpe utilisée. Concrètement, dans la technique chirurgicale courante, la surface de la section transversale de la râpe est environ 3% plus petite que celle de l'implant, la valeur de *press-fit* varie donc entre 0.02 mm et 0.5 mm [Otani 95, Ramamurti 97]. Il a été démontré récemment qu'il suffit d'avoir 0.05 mm de *press-fit* pour obtenir une fixation primaire optimale [Abdul-Kadir 08].

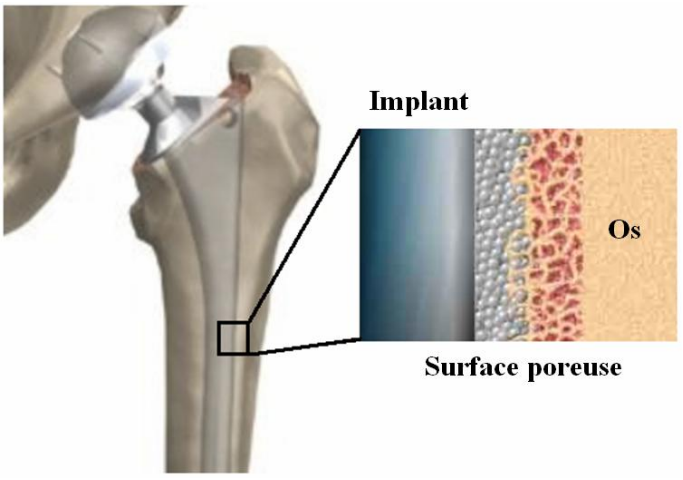


Figure 1.7 – Coupe de l'interface os-prothèse non cimentée

Dans l'univers de la **PTH** non cimentée, la tige fémorale est souvent revêtue d'une surface poreuse qui permet une intégration aisée à l'os (*cf.* **Figure** 1.7) [Kang 00, Svehla 00, Kawamura 01].

De plus, avec un fin revêtement (0.155 ± 0.035 mm) de biomatériau particulièrement performant qu'est l'hydroxyapatite. Cette ostéoconductrice favorise une bonne ostéointégration prothétique afin d'améliorer la stabilité primaire et secondaire [Geesink 95, Onsten 98, Hayashi 99, Tonino 00, Palm 02, Bodén 06, Panisello 09].

1.1.4 Stabilité primaire

La stabilité primaire de la prothèse de hanche correspond à la stabilité de la tige fémorale dans l'os receveur lors de la phase biologique d'ostéogenèse. Cette phase d'ostéointégration au cours de laquelle l'os s'approprie petit à petit la tige dure approximativement 45 jours après l'opération.

Tous les chirurgiens s'accordent à dire que parvenir à une bonne fixation primaire est un point crucial en arthroplastie de la hanche non cimentée pour assurer un résultat clinique satisfaisant à court et long terme [Malchau 00].

Théoriquement, la stabilité primaire est définie comme la limitation à une valeur critique du déplacement dans les trois dimensions au niveau de l'interface os-prothèse mais dans la réalité, les choses sont beaucoup plus compliquées.

En effet, pour que le processus d'ostéogenèse se mette en place, le tissu osseux doit être sollicité faute de quoi l'os ne se régénère pas. Les micromouvements sont donc indispensables entre la tige et l'os. Néanmoins, lorsque ces mouvements relatifs deviennent trop importants donc irréversibles, ils entraînent la migration de la tige dans le fémur provoquant ainsi des dysfonctionnements mécaniques de l'articulation de la hanche et des conséquences telles que la perturbation du processus d'ostéointégration par la formation d'une couche de tissu fibreux périprothétique provoquant des douleurs de cuisse. Alors, les sujets compensent et il n'est pas rare d'observer des conséquences fonctionnelles au niveau d'autres articulations comme le genou par exemple ou des descellements aseptiques de la tige amenant à une reprise chirurgicale inévitable [Pilliar 86, Phillips 90, Burke 91, Engh 92, Otani 92, Søballe 92, Bourne 94b, Harris 95, Bert 96, Huo 97, Jasty 97, Petersilge 97, Mont 99, Kim 99, Stea 02, Marshall 04, Herberts 04, Christensen 08].

Deux types de déplacements sont donc définis [Schneider 89] :

- « *Dynamic motion (dM)* » : correspond au déplacement réversible de la tige fémorale dans l'os en réponse aux cycles de la vie courante imprimés sur la prothèse donc à des micromouvements dynamiques de l'implant utiles à l'ostéogenèse.
- « *Total motion (tM)* » : est le terme consacré lorsque l'on parle du déplacement irréversible de la tige fémorale entraînant l'enfoncement de l'implant dans le fémur.

Dans la littérature, la stabilité primaire des prothèses de hanche non cimentées est définie comme étant la norme du déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse sous chargement physiologique [Hua 94, Bühler 97]. Au-delà d'un certain seuil [Cristofolini 06], le déplacement est considéré comme irréversible et la tige fémorale comme instable.

À l'occasion de la **SOFCOT**[3] 1997, la survie de 1206 **PTH** primaires (révisions exclues, période de 1975 à 1994), dont 55% d'implants non cimentés, était de 88% à 10 ans pour l'événement « révision pour défaillance mécanique » (fracture, usure et descellement aseptique) de la prothèse de hanche non cimentée.

Concernant les 1419 **PTH** primaires des séries du symposium **SFHG**[4] 2004 (période de 1975 à 2003), dont 78% d'implants non cimentés, les survies à 10 ans était environ 90% pour l'événement « révision pour descellement aseptique » de la prothèse non cimentée.

Dans le registre suédois[5] 2003, sur 5163 **PTH** primaires (période de 1992 à 2002), dont 53% d'implants non cimentés, la survie à 10 ans était de 88% pour l'événement « révision pour descellement aseptique » de l'implant non cimentée.

La pose non cimentée présente, comme nous l'avons vu précédemment, l'immense avantage d'une fixation biologique et écarte les risques liés au ciment. En revanche, la réussite de l'opération réside dans le fait d'obtenir très rapidement après l'opération la stabilité de la tige prothétique dans l'os receveur, stabilité mesurée à travers la quantification du déplacement relatif de l'implant dans le fémur. C'est pourquoi, nous choisissons la mesure du déplacement relatif de la tige dans l'os comme variable de contrôle de notre modèle.

Dans la suite de la thèse, les termes *total motion (tM)* et déplacement relatif irréversible au niveau de l'interface os-prothèse seront employés indifféremment.

1.1.5 Prévision & Évaluation de la stabilité primaire

De tous les éléments évoqués précédemment, la prévision et l'évaluation de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée sont donc les points essen-

3. **SOFCOT** : **S**ociété **F**rançaise de **C**hirurgie **O**rthopédique et **T**raumatologique. (www.sofcot.fr)
4. **SFHG** : **S**ociété **F**rançaise de Chirurgie de la **H**anche et du **G**enou. (www.sfhg.fr)
5. www.jru.orthop.gu.se

tiels pour aboutir à une intervention chirurgicale réussie.

En revanche, la prédiction ou l'estimation du déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse est extrêmement délicate.

En effet, les géométries des implants et des structures osseuses sont très complexes. Les tissus biologiques sont par définition variables et leur comportement biomécanique est encore mal connu.

Malgré toutes ces difficultés, deux approches, l'une préopératoire et l'autre peropératoire, sont abordées dans la littérature pour la prévision et l'évaluation de cette stabilité primaire.

1.1.5.1 Approche préopératoire

Dans ce type d'approche, des modèles numériques sont développés pour prévoir la stabilité primaire de la prothèse ciblée en l'occurrence positionnée dans son environnement physiologique et sollicitée par les chargements de la vie quotidienne.

Aujourd'hui, la méthode des éléments finis est devenue un outil standard largement utilisé dans tous les domaines et en particulier en biomécanique pour évaluer précisément la distribution des contraintes et des déformations dans des structures complexes [Duda 98, El'Sheikh 03, Schileo 08]. Les résultats peuvent être obtenus une fois que la géométrie, les propriétés des matériaux, les conditions aux limites et les chargements sont soigneusement fournis [Weinans 92, Genda 01, Shultz 06].

Bien entendu, ce type de modèle numérique a logiquement besoin d'être validé par des expérimentations adéquates. Et réciproquement, basés sur des essais *in vitro*, d'autres modèles éléments finis ont également été développés.

En 1995, F. B. Biegler *et al.* ont construit un modèle éléments finis tridimensionnel (*cf.* **Figure** 1.8) pour étudier la stabilité primaire de deux types de **PTH** non cimentée : *Mallory Head*[6] et *Harris-Galante*[7] (surface polie et surface poreuse) sous deux chargements physiologiques différents (appui monopodal et torsion lors d'une montée d'escaliers).

6. Biomet, Warsaw, IN.
7. Zimmer, Warsaw, IN.

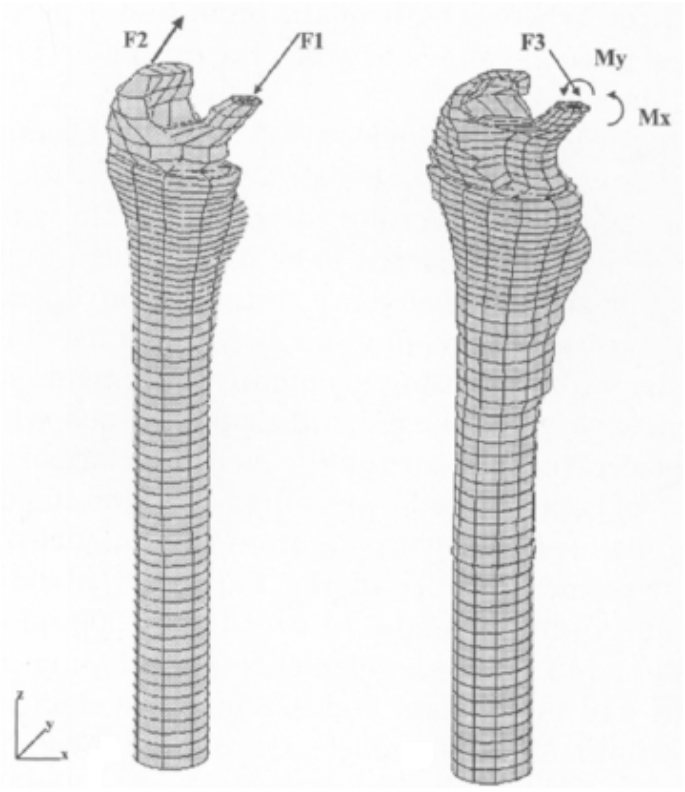


Figure 1.8 – Modèle éléments finis sollicité par deux types de chargement physiologique [Biegler 95]. Gauche : Chargé en appui monopodal ; Droite : Chargé en montée d'escaliers. F1 (N) : (-417.87, 0, -1401.71) ; F2 (N) : (417.84, 0, 1148) ; F3 (N) : (-709.2, 600.8, -1553.2) ; Mx (Nm) : -123.9 ; My (Nm) : 25

Deux fémurs artificiels ont été fabriqués selon un véritable fémur prélevé sur un corps féminin de 55 ans. Les deux prothèses ont été implantées dans ces deux répliques du fémur. La géométrie du modèle éléments finis a été déterminée à l'aide de la tomodensitométrie. En raison de deux surfaces prothétiques différentes, deux coefficients de frottement (0.42 et 0.61) ont été attribués pour simuler l'effet de frottement (nœud contre nœud). En ce qui concerne les caractéristiques des matériaux, l'os spongieux et l'os cortical ont été modélisés séparément comme des matériaux homogènes et isotropes avec des valeurs de modules d'Young respectives de 500 MPa et 14 GPa.

Les calculs ont été réalisés sur **ABAQUS**[8]. Dans la simulation de l'appui mo-

8. Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Pawtucket, RI.

nopodal, sous les chargements de F1 et F2, ce modèle éléments finis a permis de trouver un déplacement relatif maximal de 32 μm suivant l'axe du fémur. Dans le sens transversal, le maximum du déplacement relatif de 18 μm a été obtenu.

La simulation de la montée d'escaliers a été modélisée sous les effets de combinaisons de $F3$ avec Mx et My (*cf.* **Figure** 1.8). Dans ces conditions, le déplacement relatif suivant la direction transversale est de 58 μm et de 26 μm suivant l'axe longitudinal du fémur.

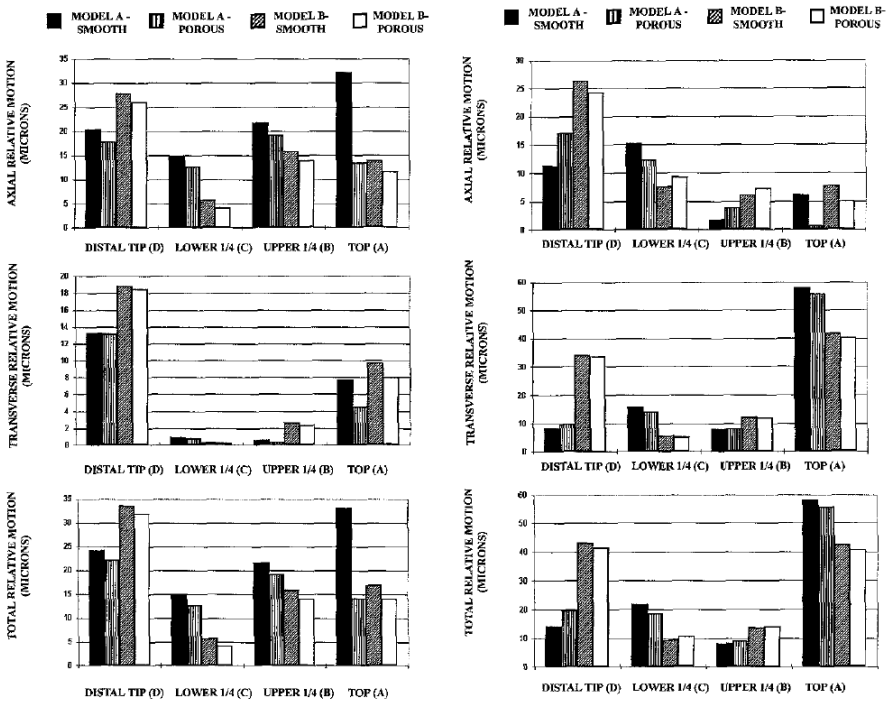


Figure 1.9 – Déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse [Biegler 95]. Gauche : Chargé en appui monopodal ; Droite : Chargé en montée d'escaliers

Les résultats numériques (*cf.* **Figure** 1.9) ont montré que les implants *Harris-Galante* (surface polie et surface poreuse) ainsi que l'implant *Mallory Head* (surface polie) ont des déplacements relatifs supérieurs à 30 μm dans les régions distale et proximale quand ils sont chargés en appui monopodal.

En revanche, quand les implants sont chargés en montée d'escaliers, c'est la région proximale qui est la zone critique pour la stabilité primaire de la prothèse

de hanche. Les déplacements relatifs ont alors dépassé 40 μm pour les deux types d'implant (*Harris-Galante* et *Mallory Head* : surface polie et surface poreuse).

Les auteurs ont également conclu que le déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse est davantage dépendant du type de chargement que de la géométrie de l'implant ou bien de la surface prothétique.

En 2000, M. Viceconti *et al.* ont réalisé un modèle éléments finis (*cf.* **Figure** 1.10) pour comparer la précision de prévision de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée en modélisant trois types d'éléments de contact (nœud contre nœud, nœud contre surface, surface contre surface) associés à trois catégories de contact (sans frottement, avec frottement et avec frottement combiné *press-fit*) [Viceconti 00].

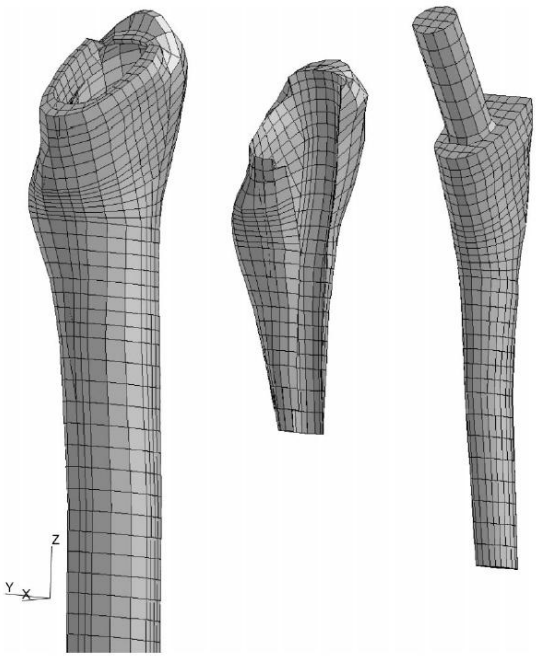


Figure 1.10 – Modèle éléments finis (8383 nœuds, 6389 éléments) [Viceconti 00]

Six fémurs synthétiques [9] ont été utilisés. L'implant utilisé dans cette étude est une prothèse de hanche non cimentée [10]. L'implantation a été réalisée par un expert orthopédique.

9. Mod. 3103, Pacific Research Labs. Inc., Vashon Island, WA, USA.
10. ANCAFit, Cremascoli Ortho, Italy.

La géométrie du modèle, obtenue via la tomodensitométrie, a été importée dans PATRAN [11]. Et puis, basé sur laquelle, le modèle éléments finis, consisté en 8383 nœuds et 6389 éléments hexaèdres, a été généré (*cf.* **Figure** 1.10).

Une torsion de 18.9 Nm, par rapport à l'axe d'implant (Axe Z), a été appliquée sur la tige fémorale de manière similaire aux essais *in vitro* menés.

Pour caractériser les fémurs synthétiques utilisés dans les expérimentations, les valeurs des modules d'Young choisies se sont égalées aux 69 MPa et 14.2 GPa pour l'os spongieux et l'os cortical respectivement. Le coefficient de Poisson est fixé à 0.3 pour les deux.

En ce qui concerne les essais *in vitro*, cinq senseurs, avec une précision de 5 μm, ont été fixés afin de mesurer les déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse.

Les calculs numériques sont effectués sur **ANSYS** 5.5 [12]. Parmi les différentes combinaisons étudiées, en comparant avec les résultats expérimentaux *in vitro*, la meilleure précision de déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse a été obtenue avec des éléments de contact surface contre surface associés à un coefficient de frottement de 0.3 combinés avec une pénétration initiale de 7 μm (*cf.* **Figure** 1.11).

Dans ce cas là, entre les résultats numériques et les déplacements relatifs mesurés expérimentalement, la moyenne d'erreur est seulement 10 μm, le maximum d'erreur n'est que 14 μm.

n2n = node-to-node n2f = node-to-face f2f = face-to-face	Experim	Frictionless			Friction			Press-fit		
	ave ± SD	n2n	n2f	f2f	n2n	n2f	f2f	n2n	n2f	f2f
Coeff of friction		0	0	0	0.2	0.1	0.4	—	0.2	0.3
Medial proximal (μm)	45 ± 3	93	56	168	14	7	46	—	25	49
Medial middle (μm)	31 ± 9	76	38	101	11	5	26	—	17	28
Medial tip (μm)	29 ± 8	44	28	91	10	11	17	—	8	20
Anterior proximal (μm)	3 ± 1	53	− 31	− 60	12	12	30	—	17	17
Axial (μm)	− 10 ± 2	− 12	− 132	− 529	− 6	− 32	− 16	—	− 19	− 24
RMS error (μm)		38	57	244	19	25	14	—	16	10
Peak error (μm)		50	122	519	31	38	27	—	21	14

Figure 1.11 – Déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse [Viceconti 00]

11. MacNeal-Schwendler Corp., Los Angeles, USA.
12. ANSYS, Inc., USA.

En 2003, A. Pancanti *et al.* ont amélioré le modèle éléments finis réalisé au sein de l'équipe italienne dirigée par L. Cristofolini et M. Viceconti [Pancanti 03]. Ce modèle a été utilisé pour évaluer la stabilité primaire d'une prothèse de hanche non cimentée [13].

Les résultats expérimentaux *in vivo* de quatre patients [Bergmann 01] ont été cités pour valider ce modèle numérique en simulant neuf activités quotidiennes (marche lente, marche normale, marche rapide, montée d'escaliers, descente d'escaliers, actions de se lever, de s'asseoir, de s'accroupir, position orthostatique avec 2-1-2 jambes) (*cf.* **Figure** 1.12).

Investigated activities

Activity	Abbreviation	Description
Slow walking	WS	Walking at slow speed on level ground, average speed of all patients $v = 3.5$ km/h (0.98 m/s).
Normal walking	WN	Walking at normal speed on level ground, average speed of all patients $v = 3.9$ km/h (1.09 m/s).
Fast walking	WF	Walking at fast speed on level ground, average speed of all patients $v = 5.3$ km/h (1.46 m/s).
Up stairs	SU	Walking upstairs, stair height 17 cm, no support at hand rail.
Down stairs	SD	Walking downstairs, stair height 17 cm, no support at hand rail.
Standing up	CU	Standing up, chair height 50 cm, arms hold at chest height.
Sitting down	CD	Sitting down, chair height 50 cm, arms hold at chest height.
Standing on 2–1–2 legs	ST	Two–legged stance–One-legged stance–Two-legged stance
Knee bend	KB	Two-legged stance–Bending knees–Two-legged stance.

Personal data and anatomical parameters of patients

Patient	HSR	PFL	KWR	IBL
Gender	Male	Male	Male	Female
Age at implantation (years)	55	51	61	76
Operated joint	Right	Left	Right	Left
Measurement (months postoperatively)	14	11	12	31
Weights at measurement (N)				
Total body (BW)	860	980	702	800
Thigh	75.7	80.2	62.2	98.4
Shank	39.1	53.9	36.5	43.0
Foot	9.2	12.3	9.9	7.2
Lengths (cm)				
Body height	174	175.0	165.0	170
Thigh	43.3	41.0	39.3	47.5
Shank	38.1	41.0	40.0	40.9
Foot	30.0	27.5	29.0	26
Angles (degree)				
AV = Anteversion	4	23	−2	14
S = Femur shaft—implant shaft	10	7	9	9

Numbers of averaged trials and patients[a]

Patient	HSR	PFL	KWR	IBL	NPA
Slow walking	1	5	5	—	HSR + PFL + KWR
Normal walking	8	5	8	5	HSR + PFL + KWR + IBL
Fast walking	5	4	5	—	HSR + PFL + KWR
Up stairs	6	2	6	6	HSR + PFL + KWR
Down stairs	4	1	6	—	HSR + PFL + KWR
Standing up	4	4	4	4	HSR + PFL + KWR + IBL
Sitting down	4	4	4	4	HSR + PFL + KWR
Standing on 2–1–2 legs	4	4	4	—	HSR + PFL
Knee bend	4	4	4	—	HSR + PFL + KWR

[a]The 'typical' patient NPA was calculated from the averages of 2 to 4 individual trials. Trials in parentheses were not used for NPA.

Figure 1.12 – Neuf activités, récapitulations des patients et des essais [Bergmann 01]

Le maillage de ce modèle éléments finis a été généré à partir des données de la tomodensitométrie. Il contient 9349 éléments hexaèdres. Le contact de l'os-prothèse

13. ANCAFit, Cremascoli-Wright, Italy.

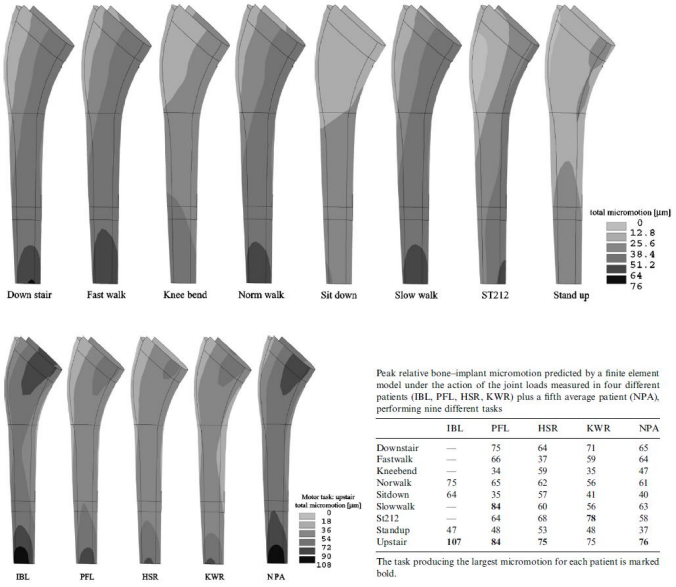
a été modélisé par les éléments de contact, type surface contre surface associée à un coefficient de frottement de 0.3.

L'os spongieux et l'os cortical ont été considérés comme des matériaux homogènes et isotopiques. La relation, entre la densité apparente de l'os et le module d'élasticité, trouvée par D. C. Wirtz *et al.* en 2000, a été adoptée pour modéliser séparément les deux tissus ($E_{spongieux} = 1094\rho^{1.64}$, $E_{cortical} = 2065\rho^{3.09}$), où ρ est la densité apparente de l'os (g/cm^3) [Wirtz 00].

Le plus grand déplacement relatif de 107 μm a été constaté après les simulations de la montée d'escaliers pour l'un des quatre patients (*cf.* **Figure** 1.13).

Les auteurs ont démontré que l'activité de la montée d'escaliers provoque un déplacement relatif plus important au niveau de l'interface os-prothèse, et ce, par rapport aux autres tâches quotidiennes.

Les résultats numériques révèlent aussi que l'influence de la variabilité entre les sujets est plus considérable que celle concernant la variété entre les différentes tâches dans le cadre de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée.



Peak relative bone–implant micromotion predicted by a finite element model under the action of the joint loads measured in four different patients (IBL, PFL, HSR, KWR) plus a fifth average patient (NPA), performing nine different tasks

	IBL	PFL	HSR	KWR	NPA
Downstair	—	75	64	71	65
Fastwalk	—	66	37	59	64
Kneebend	—	34	59	35	47
Norwalk	75	65	62	56	61
Sitdown	64	35	57	41	40
Slowwalk	—	**84**	60	56	63
St212	—	64	68	**78**	58
Standup	47	48	53	48	37
Upstair	**107**	**84**	75	75	**76**

The task producing the largest micromotion for each patient is marked bold.

Figure 1.13 – Déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse [Pancanti 03]

1.1.5.2 Approche peropératoire

Dans cette approche, autrement dit pendant l'intervention, les chirurgiens utilisent des instruments spéciaux qui sont capable d'évaluer la stabilité primaire de la prothèse située à la position planifiée à travers les mesures de certains paramètres biomécaniques.

S'inspirant des travaux de W. H. Harris *et al.* en 1991, dans l'année 2006, L. Cristofolini *et al.* ont conçu et fabriqué une clé dynamométrique capable de contrôler le moment de torsion appliqué par l'orthopédiste ainsi que l'angle de torsion entre la tige fémorale et le fémur en utilisant deux transducteurs haute précision.

La stabilité primaire de la **PTH** non cimentée a été ensuite évaluée en se basant sur la comparaison de ces données mesurées avec des seuils critiques prédéfinis [Cristofolini 06].

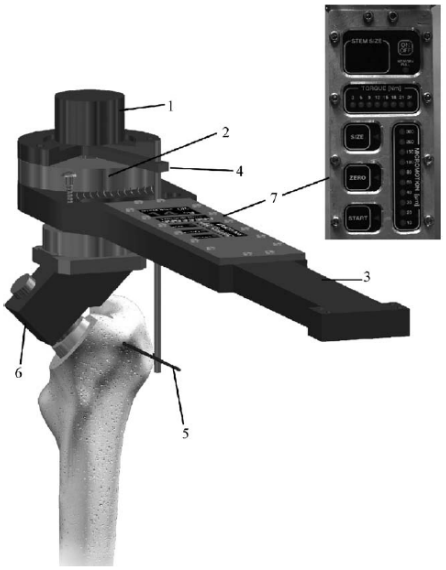


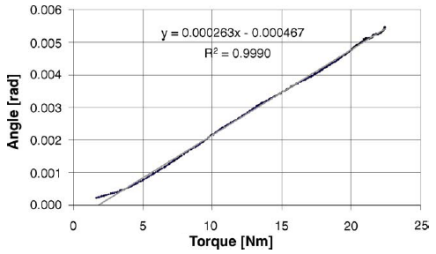
Figure 1.14 – Prototype de la clé dynamométrique [Cristofolini 06]. 1. RVDT capteur ; 2. Cellule de charge ; 3. Poignée ; 4. Senseur angulaire ; 5. Kirschner clou ; 6. Connecteur conique ; 7. Interface pour le chirurgien

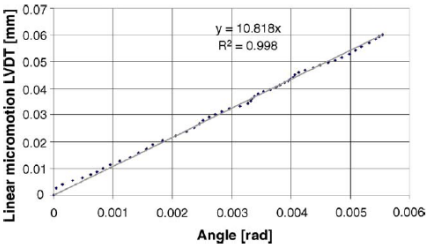
Ce prototype (*cf.* **Figure** 1.14) a été validé par les essais *in vitro* sur quatre fémurs anatomiques et trois fémurs artificiels [14] avec trois tailles différentes de prothèse

14. Mod. 3103, Pacific Res. Labs. Inc., S. 14.

de hanche non cimentée [15].

Dans cette étude, la **PTH** non cimentée a été considérée stable lorsque le déplacement relatif reste inférieur à 100 μm sous une torsion de 20 Nm.





Stem size	Calibration coefficient (mean ± S.D.) (mm/rad)	CoV% composite femurs	CoV% cadaveric femurs	CoV% total
13	11.96 ± 2.73	–	23	23
14	14.29 ± 2.95	20	0.5	21
16	17.83 ± 4.09	–	23	23

Figure 1.15 – Corrélation entre la torsion appliquée et l'angle mesuré et celle entre l'angle mesuré et le déplacement [Cristofolini 06]. Trois coefficients de calibration

Le déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse est conventionnellement considéré comme la variable de contrôle de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée.

Pour cette raison, il faut convertir l'angle mesuré en déplacement relatif. Un coefficient de calibration a donc été introduit. Pour les trois différentes tailles, les coefficients de variation de ce paramètre (21% à 23%) ont été calculés dans le but de garantir une précision acceptable de ce prototype (*cf.* **Figure** 1.15).

E. Varini *et al.* ont récemment employé cette clé dynamométrique au cours de deux interventions chirurgicales *in vivo*, et les résultats sont satisfaisants (*cf.* **Figure** 1.16). Ils en ont conclu que les mesures de la stabilité primaire de la râpe, pendant l'opération, peuvent augurer du déplacement relatif maximal engendré par la prothèse utilisée en définitive [Varini 08].

S'inspirant des travaux de [Li 96, Georgiou 01, Qi 03, Jaecques 04], en 2007, M. Lannocca *et al.* ont inventé et concrétisé un autre type d'instrument, basé sur l'analyse des vibrations, toujours dans le but d'estimer la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée pendant l'opération chirurgicale.

15. ANCAFit, S. 13-14-16, Cremascoli-Wright, Italy.

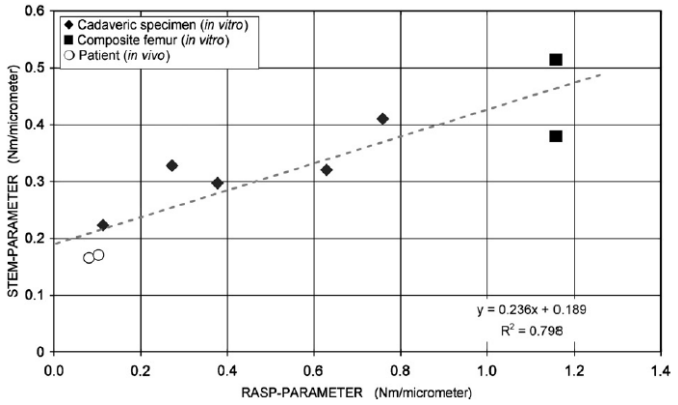


Figure 1.16 – Corrélation entre le paramètre de la râpe et celui de la tige fémorale [Varini 08]

Cet instrument (*cf.* **Figure** 1.17) est facile à manipuler, plus léger et moins coûteux que la clé dynamométrique issue de la même équipe.

Il est composé d'un excitateur piézoélectrique [16] connecté à la tige fémorale et d'un accéléromètre [17] attaché au grand trochanter du fémur.

Il mesure et calcule la fonction de réponse en fréquence du système os-implant tout en appliquant un moment de torsion de 15 Nm à la prothèse.

En utilisant quatre fémurs synthétiques [18], dans lesquels des tiges non cimentées [19] ont été implantées, des expérimentations *in vitro* ont été effectuées pour tester cet instrument.

En analysant les résultats expérimentaux, une forte corrélation a été observée entre la fréquence de résonance et le déplacement relatif (*cf.* **Figure** 1.18). Mais les auteurs ont également conclu que des essais supplémentaires sur des pièces anatomiques doivent absolument être menés pour confirmer la précision de cet instrument. Ce dernier n'est pour le moment pas utilisable pendant les opérations chirurgicales. Des améliorations sont encore nécessaires avant une utilisation clinique fiable.

16. CMB, standard part no. B3, Noliac, Denmark, tension maximale de fonctionnement $\pm$ 100 V, course $\pm$ 85 μm, force de blocage 7 N, fréquence de résonance 2350 Hz, température maximale de fonctionnement 125 °C.
17. ADXL210, Analog Devices, champ de mesure $\pm$ 10 g.
18. Mod. 3103, Pacific Res. Labs. Inc., Vashon Island, WA.
19. ANCAFit S. 14, Wright Medical Technology, Arlington, TN, USA.

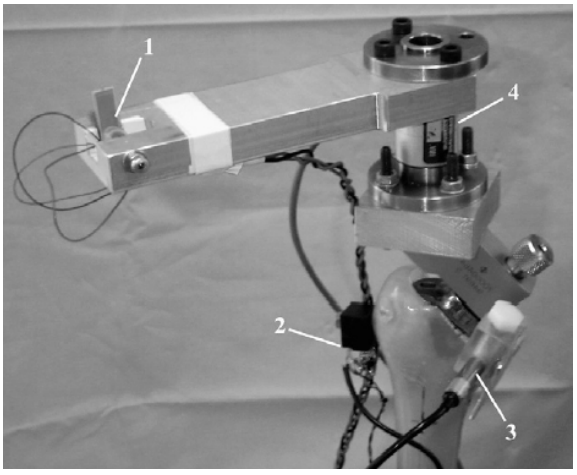
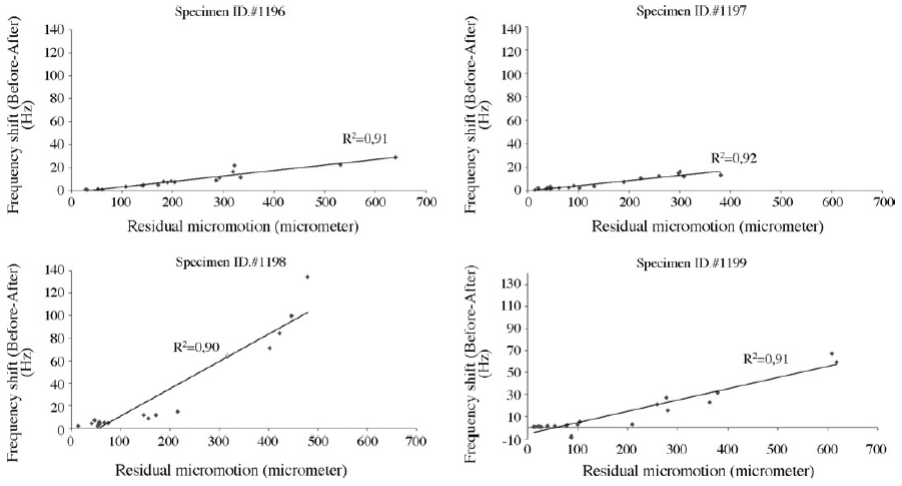


Figure 1.17 – Prototype d'instrument basé sur l'analyse des vibrations [Lannocca 07]. 1. Vibrateur système (CMB) ; 2. Accéléromètre ; 3. Capteur de déplacement ; 4. Cellule de charge



Graphs of the resonance frequency shift vs. residual interface micromotion for the four specimens tested.
A regression line was computed for each specimen.

Figure 1.18 – Corrélation entre la fréquence de résonance et le déplacement relatif [Lannocca 07]

1.1.5.3 Méthodes postopératoires pour évaluer l'enfoncement de la prothèse de hanche

En ce qui concerne la phase de postopératoire, en faisant appel à des méthodes un peu plus sophistiquées que la radiographie classique, le résultat clinique d'une prothèse de hanche non cimentée sera minutieusement évalué.

En pratique, à l'aide de la méthode **EBRA** (***E**in **B**ild **R**oentgen **A**nalyse*) ou la méthode **RSA** (***R**oentgen **S**tereophotogrammetric **A**nalysis, **R**adio **S**tereometric **A**nalysis*), la mesure fiable (précise et reproductible) de cet enfoncement de la prothèse non cimentée dans le fémur à plus ou moins long terme est tout à fait réalisable.

La méthode **EBRA** a été décrite par l'équipe de l'Université d'Innsbruck dès 1995 sous la direction de M. Krismer. Il s'agit d'une méthode informatique basée sur la numérisation de radiographies du bassin de face centrées sur la symphyse pubienne à l'aide d'un scanner dédié avec une résolution minimale de 75 dpi (*dot per inch*) et relié à un ordinateur compatible IBM [Krismer 95].

Il faut disposer d'une radiographie initiale, pratiquée dans les 6 semaines suivant la mise en place de l'implant, servant de référence, et de radiographies successives prises avec différents reculs. Il est important d'insister sur le fait qu'il est absolument indispensable avec cette méthode que les clichés radiographiques soient réalisés, pour un patient donné, strictement dans les mêmes conditions.

En effet, le principe de la méthode **EBRA** repose sur la comparabilité des radiographies successives. Cette comparabilité est vérifiée à l'aide de lignes dites « de référence » repérées sur le bassin de face. Ces lignes permettent par le biais d'un algorithme de superposer les radiographies et d'exclure celles considérées comme non comparables en raison d'une bascule du bassin dans le plan transversal ou sagittal (incidence ou position du patient sur la table d'examen).

En pratique, la majorité des études publiées rapportent un taux d'exclusion des radiographies de 10 à 15% [Krismer 96, Hamadouche 01], d'où l'importance de réaliser les radiographies pour un patient donné dans le même centre avec une technique identique, et d'obtenir les radiographies pratiquées à chacune des consultations. Un minimum de 4 radiographies utilisables par patient est nécessaire pour que la méthode **EBRA** puisse être employée.

Il existe un module dans le logiciel **EBRA** pour ce qui concerne la pièce fémorale (**EBRA-FCA**). Il consiste à repérer 19 points sur le fémur et la tête fémorale et 4

points sur la tige fémorale pour définir son axe par rapport au fémur. Pour le calcul de l'enfoncement de la tige fémorale, la distance à utiliser est celle entre l'épaule de la prothèse et le grand trochanter.

La précision de la méthode **EBRA-FCA** est de $\pm$ 1.5 mm avec un coefficient alpha de Cronbach de 0.84 pour l'homogénéité inter-observateurs. Par ailleurs, cette méthode a une sensibilité de 78% pour détecter une migration supérieure ou égale à 1 mm par rapport à la **RSA** [Biedermann 99].

La méthode **RSA** a été développée dans les années 90 par G. Selvik pour mesurer précisément les déplacements de segments squelettiques ou d'implants prothétiques *in vivo* [Selvik 89, Kärrholm 97, Kärrholm 02].

L'analyse radiostéréométrique est basée sur l'utilisation de marqueurs radio-opaques, habituellement en tantale, fixés dans l'os au moment de l'intervention.

Les marqueurs à la périphérie de l'implant prothétique peuvent également être mis en place lors de la fabrication de la prothèse pour éviter toute dégradation du matériau. Ces marqueurs de 0.8 à 1 mm de diamètre doivent maintenir leur position dans le temps [Nivbrant 97].

Il est important de disposer d'un nombre élevé de marqueurs (8 à 10) car certains peuvent se déplacer ou être difficiles à visualiser de façon précise sur certaines incidences radiologiques.

Les radiographies sont pratiquées par le biais de deux tubes d'émission pour une exposition quasi-simultanée. Les rayons émis par chacun des deux tubes se croisent à 40 degrés. Une cage de calibration comportant également des marqueurs en tantale est placée sous la table d'examen de manière à disposer d'un référentiel dans les trois plans de l'espace. Un voltage élevé et un faible ampérage sont utilisés pour rendre les marqueurs en tantale visibles.

Il est à noter qu'avec cette technique l'irradiation du patient est 10 fois moindre que lors d'une radiographie conventionnelle.

Il faut souligner que l'analyse radiostéréométrique nécessite un équipement lourd et coûteux. Ce type d'analyse, réalisable uniquement de façon prospective, n'est actuellement pas disponible en France. Elle demeure néanmoins la référence avec une précision variant de 7 à 86 μm suivant la direction étudiée [Börlin 02, Bragdon 02].

En pratique, deux logiciels de **RSA** sont commercialisés : **UmRSA** system [20]

20. Biomedical Innovations AB, Umeä, Suède.

[Bragdon 04] et **RSA-CMS** [21] [Vrooman 98].

A la fin de ce paragraphe, il est nécessaire de rappeler qu'il existe tout de même des nuances pour l'objectif central pendant ces trois phases : préopératoire, peropératoire et postopératoire.

Avant l'opération, la prévision de la stabilité primaire est la question primordiale à aborder pour une prothèse de hanche donnée.

Pendant l'opération, l'enjeu de l'intervention est plutôt dépendant des connaissances et des expériences de l'orthopédiste. L'utilisation de certains instruments spéciaux permet seulement d'apporter des informations complémentaires au chirurgien, et de l'aider à réussir son opération dans les meilleures conditions possibles.

Après l'opération, quelle que soit la technique utilisée, les mesures postopératoires sont souvent concentrées sur l'évaluation du résultat obtenu au sens de la stabilité secondaire de l'implant. Le patient et le médecin sont tous relativement rentrés dans un état passif car l'intervention chirurgicale est déjà finie. L'appréciation du résultat clinique est énoncée alors pour distinguer s'il y a l'ostéolyse et/ou le descellement, et puis, pour décider si une reprise doit être imposée.

Il faut absolument tenir compte de ces nuances et ainsi pour résumer cette première section, en supposant que nous adoptions la valeur limite, donnée dans la littérature pour le déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse, qui garantit une stabilité primaire minimale de la prothèse non cimentée, afin d'être judicieux, toute méthode utilisée pour évaluer cette stabilité primaire devra au moins avoir une précision d'un dixième de cette valeur critique. En outre, une telle méthode devrait également être capable de prévoir le déplacement relatif de chaque point au niveau de l'interface os-prothèse.

Il n'existe pour le moment aucune méthode expérimentale disponible pour satisfaire à ces deux exigences simultanément. Afin de pallier à ce déficit, il semble raisonnable de s'appuyer sur un moyen numérique pour accomplir la mission de prévision et d'évaluation de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée.

En l'occurrence, pour mieux appréhender la problématique de stabilité primaire de la prothèse non cimentée, nous avons décidé de l'appréhender dans la phase préopératoire. Concrètement, un modèle éléments finis permettant de décrire le comportement mécanique du système couplé « fémur-prothèse non cimentée : *DePuy*

21. RSA Clinical Measurement Solution, DIRSA Version 2.01-Digital Interactive Roentgen Stereophotogrammetric Analysis, University of Leiden, Pays Bas.

Corail® » sera développé. Des essais expérimentaux *in vitro* sur huit fémurs humains seront utilisés pour valider notre modèle mécano-numérique. Les détails seront développés dans le chapitre 2 et l'annexe A.

1.2 Application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche

Traditionnellement, dans la littérature, les modèles numériques développés en vue d'étudier le comportement mécanique du système couplé « fémur-prothèse » sont majoritairement des modèles déterministes [Biegler 95, Verdonschot 96, Viceconti 00, Stolk 02, Pancanti 03, Reggiani 07, Abdul-Kadir 08, Pettersen 09].

Pourtant, le domaine de la biomécanique est par essence un domaine de variabilités.

Intrinsèquement, les propriétés, y compris ses géométries, des tissus biologiques varient d'un sujet à l'autre et les différences sont parfois très importantes. L'os humain est d'ailleurs un matériau vivant dont les caractéristiques évoluent tout au long de la vie du sujet. De plus, les propriétés de ce matériau anisotrope et hétérogène varient logiquement selon la localisation du prélèvement et le procédé de prélèvement utilisé mais également suivant le mode de traitement et de conservation de l'échantillon ainsi que la technique de mesure *et cetera*.

Extrinsèquement, la gamme élargie de prothèse de hanche, ainsi que dans la vie quotidienne, les différentes sollicitations physiologiques appliquées alourdissent implicitement la complexité dans la mesure de prévision et d'évaluation de la performance des prothèses de hanche. Cette réalité est aussi liée aux lacunes des connaissances malgré l'épanouissement de la biomécanique pendant toutes ces dernières années. L'incohérence entre le résultat réalisé et l'idée prédéfinie au niveau de la position de la prothèse est pareillement un facteur qui est souvent négligé plus ou moins sans intention.

La stabilité primaire d'une prothèse de hanche est donc systématiquement et dramatiquement infectée par les incertitudes ou leurs combinaisons évoquées ci-dessus.

De tout temps, comment propager ces incertitudes et quel est l'impacte de ces variabilités sur la performance d'une prothèse de hanche non cimentée, ces sont des problématiques très intéressantes et peu exploitées, quelques pionniers sont fascinés par ces questions.

En 2002, C. Götze *et al.* ont mesuré *in vitro* les déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse engendrés par une prothèse sur mesure et une autre conventionnelle. En 2006, R. Sakai *et al.* ont comparé les distributions de contraintes entraînées par trois types de prothèses différents [22]. D'où l'incidence de la géométrie de la prothèse sur sa stabilité primaire a été révélée [Götze 02, Sakai 06a].

En utilisant les modèles éléments finis, A. Pancanti *et al.* en 2003 ont estimé les impactes de différents sujets et de différentes charges physiologiques sur la stabilité primaire d'une prothèse de hanche non cimentée [23] [Pancanti 03]. En 2005, A. S. Wong *et al.* ont évalué les effets de la variabilité des propriétés mécaniques de l'os spongieux et de l'os cortical sur la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée [Wong 05]. En 2008, B. Reggiani *et al.* ont étudié la conséquence de l'imprécision de la position de la prothèse dans l'os receveur par rapport à la position prédéfinie avant l'opération [Reggiani 08].

Il est important de rappeler que le principe des études citées ci-dessus consiste à effectuer différentes valeurs aux paramètres d'entrée et à comparer les résultats obtenus en terme de déplacements relatifs au niveau de l'interface os-prothèse ou de distribution des contraintes et des déformations dans les différentes parties en jeu. Néanmoins, toutes ces études réalisées, dans le but d'étudier l'influence de ces variabilités sur la performance mécanique de la prothèse, n'ont pas encore surmonté la fragilisation de la conception déterministe.

Récemment, pour appréhender la propagation des incertitudes dans le modèle en tenant compte de la variabilité des données d'entrée, la modélisation stochastique combinée à la méthode des éléments finis a été introduite dans le domaine biomécanique de la prothèse de hanche. Depuis un certain temps, cette technique a été déjà largement utilisée dans les différents domaines d'ingénierie comme le génie civil, la mécanique et l'aéronautique *et cetera*.

22. PerFix SV Total Hip System 910 series®, Intra-Medullary cruciate stem®, Japan Medical Materials, Japan, VerSys Fiber Metal Taper®, Zimmer, USA.
23. ANCAFit, Cremascoli-Wright, Milano, Italy.

1.2.1 Application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche cimentée

Basé sur la théorie de la chaîne de Markov, en 2005, J. Grasa *et al.* ont développé un modèle des dommages cumulatifs et un modèle éléments finis probabiliste pour estimer la fiabilité d'une prothèse de hanche cimentée [24] à l'aide de la prédiction de la durée de vie en fatigue du ciment [Grasa 05].

Les variabilités dues au chargement et à là limite de fatigue du ciment sont prises en compte. En comparant avec les résultats expérimentaux, ces modèles montrent des capacités de prévision assez comparables malgré les simplifications au niveau de la modélisation du chargement et du précalibrage de la propriété mécanique du ciment (*cf.* **Figure** 1.19).

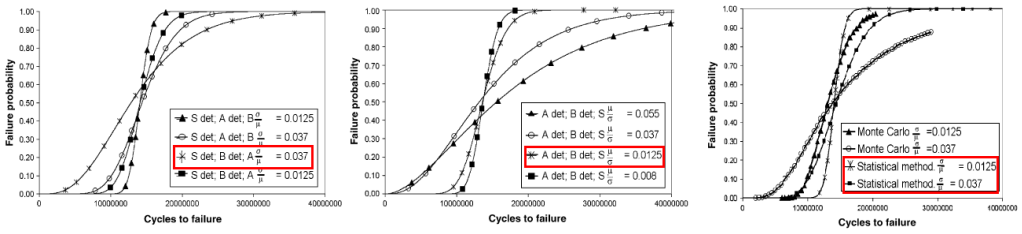


Figure 1.19 – Évolution de la probabilité de défaillance en fonction des variabilités de trois paramètres [Grasa 05]. Gauche : S et A déterministes, B aléatoire ; Centre : A et B déterministes, S aléatoire ; Droite : Comparaison avec les résultats des simulations de Monte-Carlo

Au sein de la même équipe espagnole dirigée par M. Doblaré, en 2006, M. A. Pérez *et al.* ont approfondi les travaux de J. Grasa. Cette fois-ci, deux types de modélisations du contact entre l'implant et le ciment ont été aussi inclus dans les analyses [Pérez 06b]. Le premier consiste à coller entièrement la tige fémorale au ciment. Pour la seconde modélisation, 463 gaps éléments (type de contact : nœud contre nœud) associés à un coefficient de frottement de 0.25 sont utilisés pour simuler les comportements de frottement entre la prothèse et le ciment. La distribution des contraintes ainsi que ses deux premiers moments statistiques ont été calculés en utilisant le modèle éléments finis probabiliste. Les probabilités de défaillance du système ont été estimées pour ces deux différentes conditions de contact au niveau de l'interface ciment-prothèse de même que pour les deux chargements physiologiques (marche et montée d'escaliers) (*cf.* **Figure** 1.20).

24. Exeter® system.

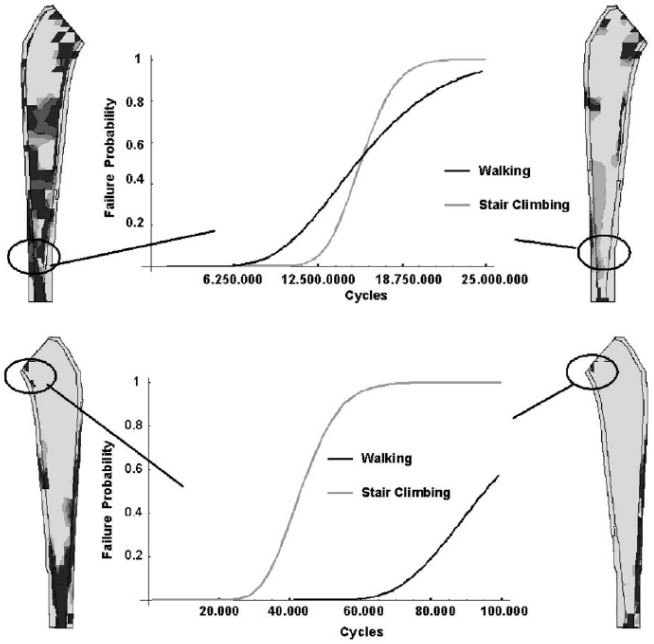


Figure 1.20 – Évolution de la probabilité de défaillance selon les différentes conditions combinées [Pérez 06b]. Haut : Tige fémorale vs. Ciment collées (marche et montée d'escaliers, région distale) ; Bas : Tige fémorale vs. Ciment $f = 0.25$ (marche et montée d'escaliers, région proximale)

Les auteurs ont observé que la probabilité de défaillance de ce système fémur-prothèse cimentée est fortement affectée par les hypothèses de contact faites au niveau de l'interface ciment-prothèse.

Quantitativement, il semble que dans les deux états de chargements (marche et montée d'escaliers), l'interface ciment-prothèse complètement collée conduit à une probabilité de défaillance plus élevée par rapport à celle provoquée par l'interface avec des frottements. Les résultats montrent en outre que l'activité de montée d'escaliers est plus critique que la marche du point de vue des contraintes engendrées dans le ciment. Dans tous les cas, après 25 millions de cycles de chargement, la région distale est toujours la partie défaillante la plus probable.

Suite aux travaux de H. Katoozian et D. T. Davy en 2000 [Katoozian 00], D. P. Nicolella *et al.* en 2006 ont étudié l'impact de l'optimisation de la forme prothétique sur la réponse probabiliste d'un système fémur-prothèse cimentée et sa probabilité de défaillance selon les différentes fonctions de performance [Nicolella 06].

Les modélisations stochastiques des paramètres d'entrée concernent les modules d'élasticité (os cortical, os spongieux, ciment) et les chargements (articulations, muscles). Ils supposent que les distributions probabilistes sont lognormales pour ces neuf variables aléatoires.

En ce qui concerne les fonctions de performance, deux catégories (six types) de critères de défaillance ont été choisies. La catégorie concernée par la résistance du ciment comprend quatre types de critères (défaillance en compression, défaillance par cisaillement, défaillance par fatigue, fracture basée sur la densité d'énergie de déformation). Les deux autres désignent la catégorie de la défaillance au niveau de l'interface ciment-prothèse (défaillance par traction, défaillance par cisaillement).

L'optimisation de la forme prothétique a entraîné une diminution remarquable pour à la fois la valeur moyenne et l'écart-type de chaque réponse structurelle. Le même effet a été également observé sur la probabilité de défaillance (*cf.* **Figure** 1.21). Après une analyse de sensibilité, les auteurs ont découvert que l'influence de la résistance en fatigue du ciment et l'influence du chargement sont les plus marquantes quant à la probabilité de défaillance de ce système.

Shape optimization results

		Initial design		Optimized design		% change	
		Mean	S.D.	Mean	S.D.	Mean (%)	S.D. (%)
Bulk cement	Min. princp. stress (MPa)	−8.7	2.63	−5.68	1.89	34.68	28.28
	Max. princp. stress (MPa))	6.19	2.51	3.23	1.38	47.82	45.02
	Tresca stress (MPa)	7.48	2.23	5.64	1.78	24.56	19.96
	Strain eng. den. (kJ/m^3)	16.63	10.6	7.18	4.42	56.83	58.38
Interface	Max. princp. stress (MPa)	19.42	6.81	9.63	3.04	50.40	55.45
	Von mises stress (MPa)	27.04	8.2	18.27	4.85	32.42	40.83

Performance function results

Performance function	Failure mode	Failure criteria		Deterministic evaluation	Initial p_f (%)	Optimized p_f (%)	% change
1	Bulk cement failure	Compressive failure		72.7 (safe)	6.06E−10	2.69E−10	55.7
2		Shear failure		22.52 (safe)	0.0015	6.53E-06	99.6
3		Fatigue failure	Simplex P	4.62 (safe)	15.64	1.66	89.38
3			Zimmer LVC	3.98 (safe)	17.25	1.75	89.85
3			Zimmer Reg.	1.79 (safe)	36.55	9.05	75.25
4		SED		59.7 (safe)	0.4	0.009	97.5
5	Interface failure	Tensile failure	2min. mixing	−7.72 (fail)	84.58	31.52	62.73
5		Tensile failure	3min. mixing	−11.63 (fail)	97.99	66.92	31.71
6		Interface shear failure		6.26 (safe)	40.8	18.1	55.7

Figure 1.21 – Impact de l'optimisation géométrique sur les réponses et les probabilités de défaillance du système [Nicolella 06]

En faisant référence aux travaux de D. P. Nicolella *et al.* , en 2008, O. Kayabasi et B. Ekici se sont également intéressés aux incidences des variabilités immanentes

aux propriétés de l'os, de la prothèse et du ciment ainsi qu'aux impactes de variation des chargements physiologiques et des conditions au niveau de l'interface ciment-prothèse, et ce, sur la performance probabiliste d'une prothèse de hanche cimentée avec l'optimisation de dix paramètres géométriques de la tige fémorale [Kayabasi 08].

En 2007, S. K. Easley *et al.* ont fourni une mesure quantitative de la probabilité de défaillance basée sur un critère de résistance en fatigue de la tige fémorale en tenant compte des incertitudes inhérentes aux tolérances de fabrication et propriétés du matériau [Easley 07].

Dans le but d'estimer la distribution des contraintes et le risque de fracture fémorale, en 2007, P. J. Laz *et al.* ont effectué des analyses probabilistes en utilisant des modèles éléments finis de cinq pièces anatomiques fémorales prenant en compte les incertitudes de la relation entre les données issues d'images tomographiques data (HU : Hounsfield Unit) et la densité structurelle de l'os [Laz 07].

1.2.2 Application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche non cimentée

A l'échelon de l'application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche non cimentée, la recherche bibliographique montre que cette branche est très peu exploitée jusqu'à l'heure présent. Ce sujet a été abordé, à notre connaissance, seulement dans deux articles [Viceconti 06, González 09].

M. Viceconti *et al.* ont introduit la modélisation stochastique dans le modèle éléments finis déterministe du système fémur-prothèse (*cf.* **Figure** 1.10), développé, validé et largement utilisé au sein de leur équipe italienne. Ce modèle probabiliste a pour objectif d'étudier la stabilité primaire d'une prothèse de hanche non cimentée [25] pendant la phase d'une montée d'escaliers [Viceconti 06].

Les cinq paramètres d'entrée du modèle sont représentés par des variables aléatoires. Il s'agit des densités de l'os cortical et de l'os spongieux, du poids du sujet, et à travers lui, de la norme du chargement appliqué, ainsi que de la taille du fémur et de l'écart entre la prothèse et le fémur. L'hypothèse de la loi normale tronquée a été retenue pour caractériser les trois premières variables aléatoires, et la loi uniforme a été attribuée aux deux dernières (*cf.* **Figure** 1.22).

25. ANCAFit, Cremascoli-Wright, Milano, Italy.

Input variables, their nominal statistical distribution, and their actual distribution generated by the random sampling strategy over 1005 sample values

Input variable	Probability distribution	Nominal distribution	Actual distribution
CORT_DENS	Normal (truncated)	1.9 ± 0.05 g/cm^3, truncated above 2 g/cm^3 and below 1.5 g/cm^3	1.897 ± 0.047
SPONG_DENS	Normal (truncated)	0.64 ± 0.05 g/cm^3, truncated above 0.7 g/cm^3 and below 0.1 g/cm^3	0.629 ± 0.042
BW	Normal (truncated)	690 ± 160 N truncated above 1200 N and below 410 N	703 ± 145
SIZE	Constant	From 1 to 9	From 1 to 9
REGION	Constant	From 1 to 4096	From 5 to 4094

Figure 1.22 – Cinq variables aléatoires retenues et ses caractéristiques probabilistes [Viceconti 06]

En recourant à la méthode de simulation classique, méthode du pavé (*hyper cube latin*), le temps de calcul s'est élevé à 350 heures pour 1005 tirages.

Le maximum du déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse est considéré comme la variable de contrôle de la stabilité primaire d'une prothèse de hanche non cimentée. Cette valeur a été calculée et le maximum de la contrainte de cisaillement a été également enregistré. Les deux autres variables de sortie sont deux partie au niveau de l'interface os-prothèse, dans lesquelles le déplacement relatif est respectivement inférieur à 20 μm et supérieur à 150 μm (*cf.* **Figure** 1.23).

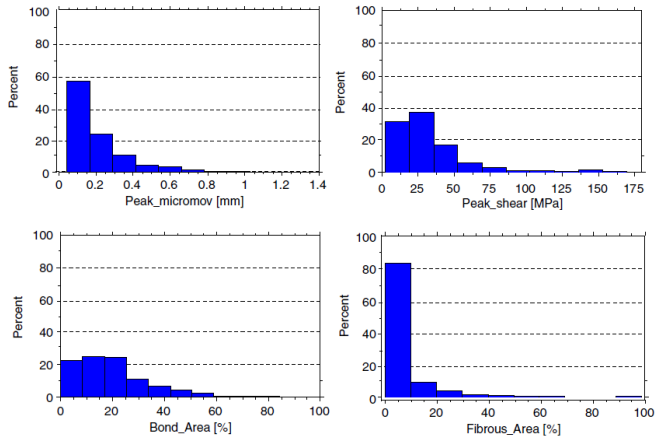
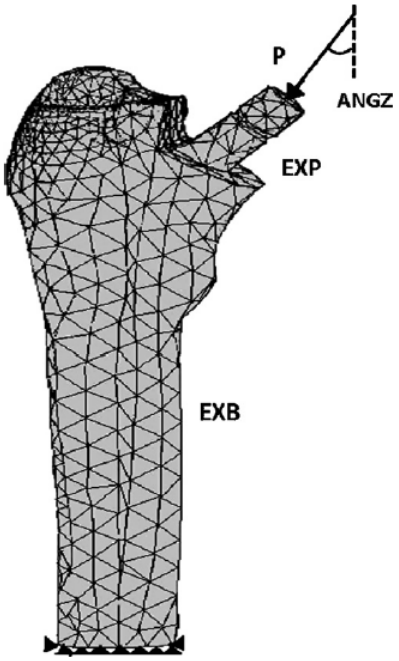


Figure 1.23 – Représentation fréquentielle de quatre variables de sortie du modèle [Viceconti 06]

Les résultats numériques indiquent aussi que toutes les variables de sortie sont fortement affectées par les trois derniers paramètres d'entrée qui sont le poids du sujet, la taille du fémur et l'écart entre la prothèse et le fémur.

Très récemment, une analyse du comportement d'une tige fémorale non cimentée[26], implantée dans un fémur proximal, a été réalisée par C. D. González *et al.* en utilisant la méthode des éléments finis combinée avec une méthode probabiliste [González 09].

Les paramètres d'entrée aléatoires concernent la charge articulaire, l'angle du chargement appliqué et les propriétés mécaniques du fémur et de l'implant. Les lois normales et lognormales sont adoptées respectivement pour simuler les distributions probabilistes de ces quatre paramètres aléatoires (*cf.* **Figure** 1.24).



Random variables and their distributions.

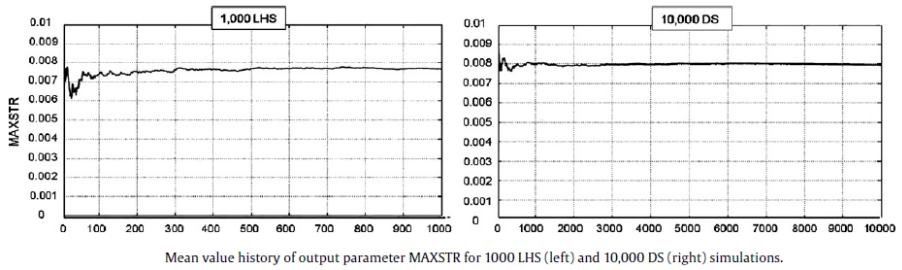
Name	Distribution function	Mean	S.D.
P	Normal	1773.5 N	259.00 N
ANGZ	Normal	31.500°	3.5000°
EXB	Log normal	12,000 MPa	3500 MPa
EXP	Log normal	2.1E+05 MPa	38,000 MPa

Figure 1.24 – Modèle éléments finis (18191 nœuds, 12218 éléments) et quatre variables aléatoires [González 09]. p : Norme du chargement appliqué ; ANGZ : Angle entre la charge appliquée et l'axe longitudinal du fémur ; EXB : Module d'Young du fémur ; EXP : Module d'Young de l'implant

La déformation maximale dans l'os a été choisie comme la variable de contrôle

26. Proxima, DePuy, Warsaw, USA.

de performance du système. La méthode de simulation de Monte-Carlo et la méthode du pavé (*hyper cube latin*) ont été employées. Les résultats numériques obtenus par les deux méthodes sont convergents (*cf.* **Figure** 1.25).

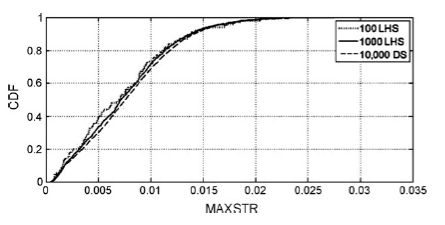


Mean value history of output parameter MAXSTR for 1000 LHS (left) and 10,000 DS (right) simulations.

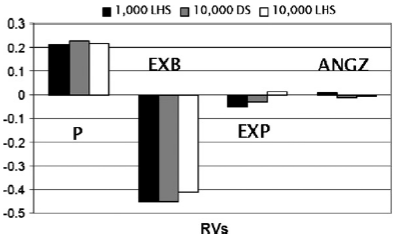
Figure 1.25 – Convergence des deux méthodes de simulation pour la contrainte maximale [González 09]. Gauche : Méthode du pavé ; Droite : Méthode de Monte-Carlo

D'après les auteurs, l'efficacité de la méthode du pavé (le temps de calcul : 1 heure 37 minutes pour 1000 simulations) est considérable par rapport à la méthode de Monte-Carlo (le temps de calcul : 3 jours pour 10000 simulations).

Le résultat fourni par la méthode du pavé a été comparé avec celui fourni par la méthode de Monte-Carlo qui est souvent considérée comme la méthode de référence (*cf.* **Figure** 1.26 Gauche).



Empirical cumulative distribution function of the output parameter MAXSTR for 100 LHS, 1000 LHS and 10,000 DS simulations.



Sensitivity results for 1000 LHS, 10,000 DS and 10,000 LHS simulations.

Figure 1.26 – Résultats probabilistes et analyse de sensibilité [González 09]. Gauche : Corrélation des fonctions de répartition de la déformation maximale. Droite : Influences de quatre variables aléatoires sur la réponse du modèle

Une étude de sensibilité a été également menée. Les auteurs constatent qu'au regard de la réponse du système, la variabilité du module d'Young du fémur et du chargement appliqué sont prépondérantes. En revanche, le module d'Young de la prothèse et l'angle d'inclinaison du chargement sont deux paramètres très peu influentes sur le résultat du modèle (*cf.* **Figure** 1.26 Droite).

1.3 Constat de l'étude bibliographique

Au cours de ce chapitre, nous avons rappelé certains éléments préliminaires : l'anatomie de l'articulation de la hanche, la prothèse de hanche et l'arthroplastie. Ainsi la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée est notre problématique centrale.

A l'issu de l'étude de la prévision et de l'évaluation de la stabilité primaire, une piste préventive, en utilisant le modèle mécano-numérique, a été choisie dans le but d'atteindre une meilleure compréhension de cette problématique. Notre modèle déterministe du système couplé fémur-prothèse non cimentée sera juste détaillé dans le chapitre 2.

Parmi les travaux cités dans le paragraphe 1.2.1, il est important de noter que le comportement de frottement entre l'os et l'implant via le ciment ainsi que les propriétés mécaniques des matériaux ont joué des rôles cruciaux dans la performance du système os-prothèse.

Au niveaux de l'application de la mécanique probabiliste en biomécanique de la prothèse de hanche non cimentée (*cf.* §1.2.2), M. Viceconti *et al.* ont reconnu que l'absence de modélisation stochastique destinée au comportement de contact entre la tige fémorale et l'os spongieux était l'un des principaux défauts de leur étude [Viceconti 06].

Dans l'étude de C. D. González *et al.* [González 09], il est primordial de souligner que, même si nous faisons abstraction de la qualité du maillage, le fémur a été considéré comme un seul matériau homogène, autrement dit, aucune différence n'apparaît entre l'os spongieux et l'os cortical. De façon un peu dogmatique, il est pratiquement possible d'affirmer que cette hypothèse ou bien cette simplification est très loin de la réalité et, par conséquent, inappropriée.

Nous pouvons donc remarquer que, premièrement, le comportement de frottement entre la tige fémorale non cimentée et le fémur n'a pas été considéré, jusqu'à présent, comme une variable aléatoire.

Pourtant il semble évident, de par la nature des deux matériaux en contact, que ce phénomène est intrinsèquement aléatoire, existentiel et non négligeable quelle que soit la fonction de performance choisie. Ce comportement de frottement sera donc

considéré comme un des paramètres incertains et ensuite modélisé dans notre modèle mécano-probabiliste associé, détaillé dans les chapitres 2 et 3.

Deuxièmement, étant donné que les variabilités intrinsèque et extrinsèque de l'os ainsi que la complexité du système os-prothèse, il est essentiel de prendre en compte de ces incertitudes dans notre étude biomécanique de la prothèse de hanche non cimentée.

Concrètement, le fémur humain sera subdivisé en deux tissus osseuses distinctes qui correspondent respectivement à l'os spongieux et l'os cortical, puis le module d'Young de l'os spongieux sera également considéré comme un paramètre incertain dans notre approche proposée (*cf.* Chapitres 2 et 3).

Et puis, parmi les méthodes de simulation utilisées, la méthode du pavé a été recourue par M. Viceconti *et al.* et C. D. González *et al.* [Viceconti 06, González 09], mais cette méthode de l'*hyper-cube latin* est réputée peu efficace pour ce qui concerne les faibles probabilités.

Dans l'approche que nous proposons, la méthode de Monte-Carlo standard sera considérée comme la méthode référentielle (*cf.* Annexe C). Ensuite une méthode de collocation stochastique sera élaborée pour caractériser la propagation des incertitudes (*cf.* Annexe D). L'efficacité de cette méthode sera exposée dans le prolongement de la thèse.

Nous constatons aussi que dans ces deux études, l'analyse fiabiliste et l'analyse de sensibilité sont insuffisamment circonstanciées, d'où une certaine frustration. Nous tenterons de remédier à cet état dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Modèle déterministe du système couplé fémur-prothèse non cimentée

Ce chapitre est consacré au développement et à la mise en œuvre du modèle mécano-numérique déterministe du système couplé os-prothèse.

Premièrement, la présentation succincte du problème mécanique à étudier et des résultats expérimentaux disponibles permet de fixer le cahier des charges du modèle mécano-numérique déterministe.

Deuxièmement, les différentes étapes du développement du modèle déterministe du système couplé os-prothèse c'est-à-dire sa formulation mécanique et la définition du modèle numérique associé sont détaillées.

Troisièmement, partant du constat issu de l'analyse bibliographique du chapitre 1 concernant la variabilité de certains paramètres du modèle et de la définition du problème de stabilité primaire, nous définissons les paramètres incertains du modèle puis la variable de contrôle et le critère de défaillance associé à prendre en compte pour mettre en œuvre une approche fiabiliste de la stabilité primaire de la prothèse.

Ensuite, nous présentons l'implémentation pratique du modèle numérique.

Enfin, des applications numériques sont réalisées dans le but de valider le modèle par rapport aux résultats expérimentaux disponibles puis de quantifier rapidement l'influence des deux paramètres d'entrée incertains, le module d'Young de l'os spongieux et le coefficient de frottement à l'interface os-prothèse, sur les résultats obtenus.

2.1 Présentation du problème mécanique

L'objectif de ce chapitre est de développer un modèle mécano-numérique déterministe du système couplé os-prothèse suffisamment performant pour être utiliser dans une approche probabiliste de la stabilité primaire.

Les données expérimentales *in vivo* concernant les mouvements relatifs os-prothèse lors de la marche sont très rares et peu précises. Les seuls résultats expérimentaux exploitables pour la validation d'un modèle mécano-numérique du système os-prothèses proviennent d'expérimentations *in vitro*.

Dans le cas de la prothèse de hanche non cimentée : DePuy Corail® qui est l'objet de ce travail de thèse nous disposons de résultats d'essais réalisés à Lyon par Guillaume Demey sous la direction du Docteur Tarik Aït Si Selmi [Demey 06].

Ces essais, présentés en détails dans l'annexe A, consistent à enfoncer la tige fémorale dans le fémur par l'application d'une charge de compression. Les paramètres mesurés sont la force de compression et le déplacement de la tête fémorale.

Nous allons donc développer un modèle mécano-numérique de ce modèle d'expérimentation *in vitro* qui servira d'exemple d'application à chaque étape de la méthodologie d'étude proposée dans cette thèse.

Du point de vue mécanique, le modèle non linéaire à développer est complexe. En effet il s'agit de résoudre le problème du contact tridimensionnel avec frottement entre deux corps déformables : la tige fémorale et le fémur, lui-même constitué de deux matériaux, l'os cortical et l'os spongieux, de propriétés mécaniques très différentes. La géométrie des corps en contact est complexe et doit être représentée au mieux. Par conséquent, le recours à des méthodes numériques de discrétisation et de résolution est indispensable.

Les paragraphes suivants présentent la modélisation mécanique retenue et l'implémentation pratique par la méthode des éléments finis du modèle mécano-numérique qui en résulte. Ce modèle mécano-numérique permettra de décrire le comportement mécanique du système couplé « os-prothèse non cimentée » qui représente la prothèse DePuy Corail® dans son environnement, particulièrement en appui monopodal.

2.2 Formulation mécanique et modèle numérique associé

Le problème mécanique à résoudre est celui du contact avec frottement entre deux corps déformables tridimensionnels, la tige fémoral B^1 et le fémur B^2, qui occupent respectivement les domaines V^1 et V^2 de $\mathbb{R}^3$ délimités par les frontières ∂V^1 et ∂V^2.

On note S_c la surface de contact entre les corps B^1 et B^2. Compte tenu du principe des travaux virtuels, ce problème peut être formulé de la façon suivante (formulation variationnelle) :

$$\sum_{L=1}^{2} \int_{V^L} \boldsymbol{\sigma}^T \delta\boldsymbol{\epsilon} dV = \sum_{L=1}^{2} \left\{ \int_{V^L} \boldsymbol{e_V}^T \boldsymbol{\delta u} dV + \int_{\partial V^L} \boldsymbol{e_S}^T \boldsymbol{\delta u} dS \right\} + \int_{S_c} \boldsymbol{e_c}^T \boldsymbol{\delta u} dS \qquad (2.1)$$

où dV et dS sont les mesures de volume et de surface respectivement ; $\boldsymbol{\sigma}$ est le vecteur regroupant les contraintes de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T$; $\boldsymbol{\delta\epsilon} = (\delta\epsilon_{11}, \delta\epsilon_{22}, \delta\epsilon_{33}, \delta\epsilon_{12}, \delta\epsilon_{13}, \delta\epsilon_{23})^T$ est le vecteur des déformations virtuelles associées correspondant au vecteur des déplacements virtuels imposés $\boldsymbol{\delta u} = (\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)^T$; $\boldsymbol{e_V} = (e_{V_1}, e_{V_2}, e_{V_3})^T$ est le vecteur des forces volumiques extérieures appliquées ; $\boldsymbol{e_S} = (e_{S_1}, e_{S_2}, e_{S_3})^T$ est le vecteur des contraintes surfaciques exterieures appliquées ($\boldsymbol{e_V}$ et $\boldsymbol{e_S}$ sont connues a priori) et $\boldsymbol{e_c} = (e_{c_1}, e_{c_2}, e_{c_3})^T$ est le vecteur des contraintes inconnues de contact appliquées au corps 2 (le fémur) par le corps 1 (la tige fémorale).

Par conséquent, le travail virtuel des contraintes de contact apparaissant dans l'équation (2.1) peut être réécrit :

$$\int_{S_c} \boldsymbol{e_c}^T \boldsymbol{\delta u} dS = \int_{S_c} \boldsymbol{e_c}^T \boldsymbol{\delta u^{21}} dS \qquad (2.2)$$

où $\boldsymbol{\delta u^{21}} = \boldsymbol{\delta u^2} - \boldsymbol{\delta u^1}$ représente le vecteur des déplacements virtuels relatifs des deux corps dans la zone de contact.

Le terme de droite de l'équation (2.2) représente le travail virtuel engendré par les contraintes de contact lors d'un déplacement relatif virtuel au sein de la surface de contact.

Les contraintes de contact agissant sur la surface de contact S_c peuvent être décomposées en composantes normales et tangentielles comme suit :

$$\boldsymbol{e_c} = \lambda \boldsymbol{n^{12}} + t\boldsymbol{s^{12}} \tag{2.3}$$

où λ et t sont les contraintes normales et tangentielles de contact, et $\boldsymbol{n^{12}}$ et $\boldsymbol{s^{12}}$ sont les vecteurs normal et tangentiel unitaires associés à S_c.

Rappelons que, à cette étape, tous les paramètres utilisés sont des champs définis en fonction des coordonnées spatiales (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Soit g la *fonction jeu* pour la paire de surface de contact. Il s'agit d'une fonction scalaire définie comme suit.

Soient $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1)^T$ le vecteur des coordonnées du point P^1 appartenant à ∂V^1 et $\xi^2 = (\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2)^T$ le vecteur des coordonnées du point P^2 appartenant à ∂V^2 tels que :

$$||\overrightarrow{P^1P^2}||_3 = \underset{\boldsymbol{P}\in\partial V^2}{min}||\overrightarrow{P^1P}||_3 \tag{2.4}$$

où $\|\cdot\|_3$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, $||\overrightarrow{P^1P^2}||_3$ est la distance euclidienne usuelle de P^1 à P^2 et ξ^2 est une fonction de ξ^1. Alors $g(\boldsymbol{\xi^1})$ est définie comme :

$$g(\boldsymbol{\xi^1}) = (\boldsymbol{\xi^1} - \boldsymbol{\xi^2})^T \boldsymbol{n^{12}} \tag{2.5}$$

où $\boldsymbol{n^{12}}$ est le vecteur normal unitaire sortant de ∂V^2 au point P^2.

Avec cette définition, la condition de contact normal s'exprime :

$$g \geq 0 \ ; \ \lambda \geq 0 \ ; \ g\lambda = 0 \tag{2.6}$$

où la dernière équation exprime que la contrainte normale de contact est de compression et qu'elle n'existe que si le contact est effectif, c'est-à-dire si $g = 0$.

Les conditions de contact tangentiel sont prises en compte en considérant une loi de frottement locale de Coulomb de coefficient de frottement μ au sein de la surface de contact.

La loi de frottement de Coulomb est habituellement formulée en fonction de la vitesse tangentielle relative locale dans le contact. Néanmoins, dans le cas d'une approche statique ou quasi-statique, elle peut facilement être reformulée en introduisant le déplacement tangentiel relatif $v(\boldsymbol{\xi^1}, \boldsymbol{e})$ causé par un incrément de chargement extérieur $\boldsymbol{\Delta e}$ de $\boldsymbol{e_V}$ et $\boldsymbol{e_S}$:

$$v(\boldsymbol{\xi^1}, \boldsymbol{e}) = \left[\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi^2}, \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi^2}, \boldsymbol{e} - \boldsymbol{\Delta e})\right) - \left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi^1}, \boldsymbol{e}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi^1}, \boldsymbol{e} - \boldsymbol{\Delta e})\right)\right]^T \boldsymbol{s^{12}} \tag{2.7}$$

où $\boldsymbol{s^{12}}$ est le vecteur tangentiel unitaire au point P^2.

Définissons également la variable adimensionnelle τ telle que :

$$\tau = \frac{t}{\mu\lambda} \quad ; \quad \lambda > 0 \tag{2.8}$$

A partir des définitions précédentes, la loi de frottement de Coulomb peut être formulée de la manière suivante :

$$\begin{gathered} |\tau| \leq 1 \\ |\tau| < 1 \Rightarrow v = 0 \\ |\tau| = 1 \Rightarrow sign(v) = sign(\tau) \end{gathered} \tag{2.9}$$

Pour imposer les conditions de contact normales et tangentielles, nous utilisons la « méthode de fonction contrainte » (*constraint function method*) proposée par K. J. Bathe et P. A. Bouzinov [Bathe 97].

Soit w_n une fonction à valeur réelle de g et λ telle que la solution de $w_n(g,\lambda)=0$ satisfait les conditions de contact normal et w_s une fonction à valeur réelle de v et t telle que ma solution de $w_s(v,t)=0$ satisfait les conditions de contact tangentiel.

Alors le problème initial (2.1) prend la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{L=1}^{2}\int_{V^L}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\delta\epsilon}dV & = & \displaystyle\sum_{L=1}^{2}\left\{\int_{V^L}\boldsymbol{e_V}^T\boldsymbol{\delta u}dV+\int_{\partial V^L}\boldsymbol{e_S}^T\boldsymbol{\delta u}dS\right\} \\ & & \displaystyle+\int_{S_c}(\lambda\boldsymbol{n^{12}}+t\boldsymbol{s^{12}})^T\boldsymbol{\delta u}dS \\ w_n(g,\lambda)=0 & ; & w_s(v,t)=0 \end{array}\right. \tag{2.10}$$

La formulation éléments finis de ce problème est obtenue en utilisant les procédure standard détaillée dans la référence [Bathe 95].

Le champ de déplacements $\boldsymbol{u}$ est approximé à l'aide d'une procédure d'interpolation formulée à partir des déplacements nodaux en tous points du maillage. Elle conduit à l'expression classique suivante : $\boldsymbol{u}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\approx H(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\boldsymbol{U}$, où H est la matrice d'interpolation des déplacements et $\boldsymbol{U}$ est le vecteur des déplacements nodaux.

La discrétisation des conditions de contact est réalisée selon la méthode proposée K. J. Bathe et P. A. Bouzinov [Bathe 97]. Elle conduit à l'ajout d'un terme non linéaire dans le problème initial dont la valeur dépend de celle du vecteur inconnu des forces de contact aux nœuds du corps B^2 appartenant à la surface de contact.

En notant $\boldsymbol{f_c}$ ce terme, $\boldsymbol{d}\in\mathbb{R}^l$ le vecteur global des inconnues regroupant $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{f_c}$ et $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^l$ le vecteur des conditions imposées regroupant les efforts extérieurs nodaux imposés et les conditions de contact nodales imposées, la formulation éléments finis du problème initial prend alors la forme :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{d})=\boldsymbol{f} \tag{2.11}$$

où la fonction non linéaire $\boldsymbol{K}$ de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^l$ est l'opérateur mécanique associé au problème et l'entier l est la dimension du problème discrétisé, c'est-à-dire la dimension du modèle éléments finis.

L'équation (2.11) est résolue à l'aide d'une procédure incrémentale couplée à une méthode de Newton-Raphson. Ceci conduit à calculer le vecteur des inconnues $\boldsymbol{d}_{n+1}$ à l'incrément de chargement $n+1$ à partir de la solution $\boldsymbol{d}_n$ obtenue à l'incrément n.

A chaque étape de cette procédure, l'équation incrémentale est obtenue en linéarisant l'équation (2.11) au voisinage du dernier état calculé. En suivant la procédure détaillée dans [Bathe 95], l'équation matricielle incrémentale obtenue à l'itération i est la suivante :

$$\boldsymbol{K}_{T,n+1}^{(i)} \boldsymbol{\Delta d}^{(i)} = \boldsymbol{f}_{n+1}^{(i)} - \boldsymbol{K}_{n+1}^{(i)} \left(\boldsymbol{d}_{n+1}^{(i)} \right) \tag{2.12}$$

où $\boldsymbol{\Delta d}^{(i)}$ est l'incrément des inconnues $\boldsymbol{d}$ à l'itération (i) et $\boldsymbol{K}_{T,n+1}^{(i)}$ est donné par :

$$K_{T,n+1}^{(i)} = \nabla_{\boldsymbol{d}_{n+1}^{(i)}} \boldsymbol{f}_{n+1}^{(i)} \tag{2.13}$$

où $\nabla_{\boldsymbol{a}}$ désigne le gradient par rapport à $\boldsymbol{a}$.

La résolution de l'équation (2.12) donne l'incrément $\Delta \boldsymbol{d}^{(i)}$ et détermine par conséquent la valeur du vecteur des inconnues $\boldsymbol{d}_{n+1}$ à l'itération $(i+1)$ qui est :

$$\boldsymbol{d}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{d}_{n+1}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{d}^{(i)} \tag{2.14}$$

Les itérations sont poursuivies jusqu'à ce qu'un critère de convergence spécifié soit satisfait.

2.3 Paramètres incertains du modèle

Jusqu'à présent, toutes les quantités apparaissant dans l'équation (2.11) (*i.e.* l'opérateur $\boldsymbol{K}$ et les vecteurs $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{f}$) ont été supposées déterministes, c'est-à-dire non entachées d'incertitudes.

On suppose maintenant que le vecteur des conditions imposées $\boldsymbol{f}$ est déterministe et que deux des paramètres de l'opérateur mécanique $\boldsymbol{K}$ sont incertains : le module d'Young de l'os spongieux et le coefficient de frottement à l'interface entre l'os spongieux et la tige fémorale que l'on note respectivement y_1 et y_2.

Ce choix résulte d'une part de l'analyse bibliographique du chapitre 1 qui a permis de mettre en évidence la variabilité de ces deux paramètres et d'autre part du problème expérimental à simuler dans lequel le chargement mécanique et les conditions aux limites géométriques sont bien maîtrisées.

Ainsi, $\boldsymbol{K}$ est incertain à travers ces deux paramètres. Soit $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ les regroupant. Par hypothèse, $\boldsymbol{K}$ dépend de $\boldsymbol{y}$. Par conséquent, à partir de l'équation (2.11), le vecteur inconnu $\boldsymbol{d}$ dépend aussi de $\boldsymbol{y}$ et est donc incertain.

2.4 Variable de contrôle et critère de défaillance associé

Formellement, la solution de l'équation (2.11) peut s'écrire :

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{f}) \tag{2.15}$$

où $\boldsymbol{S}$ est un opérateur non linéaire de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}^l$ tel que :

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{K}^{-1} \tag{2.16}$$

Une variable de contrôle est une variable à valeur réelle, par exemple un déplacement scalaire (ou une contrainte, ou une déformation) en un point particulier

du système mécanique étudié, dont la valeur doit être contrôlée dans le contexte de l'analyse fiabiliste du système.

Concernant le problème de la stabilité primaire de la prothèse, l'analyse bibliographique du chapitre 1 nous conduit à choisir pour variable de contrôle la norme euclidienne du déplacement relatif maximal entre la tige fémorale et l'os spongieux.

Soit w une telle variable. Elle dépend des inconnues $\boldsymbol{d}$ à travers une relation de la forme :

$$w = C(\boldsymbol{d}) \tag{2.17}$$

où C est une fonction inconnue de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}_+$ appelée *opérateur d'observation*. En insérant l'équation (2.15) dans l'équation (2.17), on obtient :

$$w = C\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{f})\right) = D(\boldsymbol{f}) \tag{2.18}$$

où $D = C \circ S$ est aussi une fonction connue de $\mathbb{R}^l$ dans $\mathbb{R}_+$.

Il en résulte que w peut aussi être vu comme une fonction de $\boldsymbol{f}$. Notons que les fonctions C et D sont connues dans le sens où elles sont décrites par des modèles numériques connus.

Comme vu dans le paragraphe 2.3, l'opérateur mécanique $\boldsymbol{K}$ dépend du paramètre vectoriel incertain $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$. Il en résulte que son inverse $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{K}^{-1}$ dépend aussi de $\boldsymbol{y}$ et, d'après l'équation (2.18), la fonction D aussi.

Indiquant ce fait par la nouvelle notation $\boldsymbol{S_y}$ et $D_{\boldsymbol{y}}$ à la place de $\boldsymbol{S}$ et D, les équations (2.15) et (2.18) deviennent :

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{S_y}(\boldsymbol{f}) \quad , \quad w = D_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}) \tag{2.19}$$

et peuvent être réécrites, puisque $\boldsymbol{f}$ est un vecteur constant de $\mathbb{R}^l$:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}) \quad , \quad w = H(\boldsymbol{y}) \tag{2.20}$$

où $\boldsymbol{L}$ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^l$ et H une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$:

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}) \quad , \quad H(\boldsymbol{y}) = D_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{f}) \tag{2.21}$$

Soit w_0 une valeur admissible donnée de w, appelée le *seuil de défaillance*, et soit u la variable réelle telle que :

$$u = w_0 - w \tag{2.22}$$

Une telle variable est nommée la *marge de sécurité* associée à la variable de contrôle w, et son signe défini deux états fondamentaux pour le modèle mécanique : l'état sûr si $u > 0$ et l'état défaillant si $u \leq 0$. La valeur $u = 0$ caractérise une situation limite appelée l'*état limite de défaillance*.

Conformément à l'équation (2.20), u peut être réexprimée sous la forme :

$$u = F(\boldsymbol{y}) = w_0 - H(\boldsymbol{y}) \tag{2.23}$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ appelée la *fonction d'état limite* du modèle mécanique.

Cette fonction définit trois sous-ensembles spécifiques de $\mathbb{R}^2$:

$$D_s = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \ : \ F(\boldsymbol{y}) > 0 \right\} \tag{2.24}$$

$$D_f = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \ : \ F(\boldsymbol{y}) \leq 0 \right\} \tag{2.25}$$

$$C = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \ : \ F(\boldsymbol{y}) = 0 \right\} \tag{2.26}$$

qui vérifient :

$$D_s \cup D_f = \mathbb{R}^2 \quad , \quad D_s \cap D_f = \emptyset \tag{2.27}$$

et qui sont respectivement appelés le *domaine de sûreté*, le *domaine de défaillance* et la *courbe d'état limite*.

La condition $u \leq 0$ définissant l'état de défaillance associé à la variable de contrôle w et à sa valeur seuil w_0. Le domaine de défaillance D_f est la représentation géométrique de ce critère.

Notons que, puisque la fonction F est seulement connue numériquement (à partir du modèle éléments finis décrit dans le paragraphe 2.2), les domaines D_s, D_f et C ne peuvent être déterminés que numériquement.

2.5 Implémentation du modèle

L'implémentation du problème est réalisée à l'aide du logiciel de calcul **FEMAP** (***F**inite **E**lement **M**odeling **A**nd **P**ostprocessing*) - **NX Nastran** [1] [UGSCorp. 07b] pour un couple fémur-prothèse de taille 12.

La tige fémorale et le fémur sont discrétisés à l'aide d'éléments finis tétraédriques linéaires à quatre nœuds et trois dégrés de liberté par nœud. Le maillage de l'ensemble est formé de 79067 éléments et 18701 nœuds (*cf.* **Figure** 2.1).

2.5.1 Contact os spongieux - tige fémorale

Une paire de surfaces de contact est définie entre la tige fémorale et l'os spongieux du fémur afin de prendre en compte le contact avec frottement entre ces deux corps (*cf.* région rouge, **Figure** 2.1).

1. *Siemens PLM Software.*

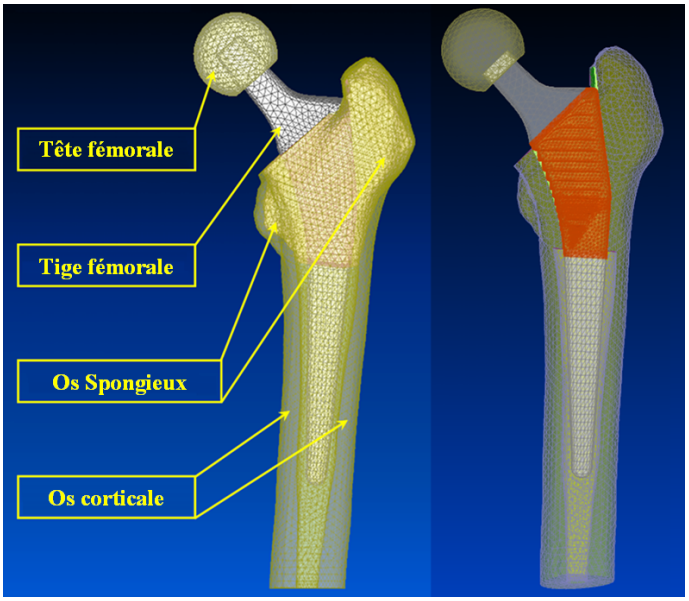


Figure 2.1 – Modèle éléments finis du système couplé « fémur-prothèse non cimentée »

La valeur du coefficient de frottement entre l'os spongieux du fémur humain et la tige fémorale est mal connue. Les valeurs des coefficients de frottement utilisées dans la littérature pour modéliser ce problème de contact sont très dispersées (typiquement entre 0 et $1,73$) [Rubin 93, Keaveny 93, Kuiper 96].

Compte tenu de l'environnement physiologique *in vivo* de ce contact et du fait que l'interface entre la tige fémorale et l'os spongieux fémoral est lubrifiée d'un mélange de sang et de moelle osseuse, nous avons adopté $0,3$ comme valeur nominale de ce paramètre [Booser 97, Viceconti 00].

2.5.2 Propriétés mécaniques des matériaux

La tête fémorale est constituée de céramique alumine et la tige fémorale réalisée en alliage de titane Ti Al6 V4. Les caractéristiques mécaniques de ces matériaux, récapitulées dans le tableau 2.1, sont fournies par DePuy France.

Le fémur est subdivisé en deux zones de propriétés mécaniques différentes correspondant respectivement aux parties spongieuse et corticale de cet os (*cf.* **Figure** 2.1).

	(Tête fémorale) céramique alumine	(Tige fémorale) alliage de titane
Module d'élasticité (GPa)	350	115
Coefficient de Poisson	$0,23$	$0,31$

Tableau 2.1 – Caractéristiques mécaniques des matériaux constituant la prothèse

Comme nous l'avons précisé plusieurs fois au cours de ce mémoire, les propriétés mécaniques du fémur humain et les données, trouvées dans la littérature, sont très dispersées. En effet, les propriétés de l'os varient d'un sujet à l'autre mais aussi selon la localisation du prélèvement, la procédure de prélèvement utilisée, le mode de traitement et de conservation de l'échantillon ou encore la technique de caractérisation mécanique employée.

Par conséquent, la modélisation de l'os est théoriquement très complexe. Néanmoins, les modèles de comportement mécanique adoptés dans la littérature sont relativement simples. Le fémur est le plus souvent subdivisé en deux parties osseuses distinctes (l'os spongieux et l'os cortical). En raison du manque de consensus sur son comportement réel, l'os spongieux et l'os cortical sont modélisés comme des matériaux élastiques linéaires homogènes et isotropes de modules d'Young et de coefficients de Poisson très différents. Nous adoptons également ces hypothèses.

L'étude bibliographique a montré une forte dispersion concernant le module d'élasticité de l'os spongieux du fémur humain.

Les valeurs trouvées varient de 31 MPa à $18,14$ GPa [Goldstein 87, Ashman 88, Lotz 90, Cody 96, Ulrich 97, Augat 98, Turner 99, Zysset 99, Wirtz 00, Wachter 01, Beillas 01, Homminga 02, Morgan 03, Bayraktar 04, Kaneko 04, Chevalier 07, Nazarian 07].

L'os cortical du fémur humain a, de son côté, une valeur du module d'Young relativement moins dispersée avec des données se situant entre des valeurs extrêmes de $5,47 \sim 26,4$ GPa. [Reilly 75, Lotz 91, Turner 99, Zysset 99, Wirtz 00, Beillas 01, Kaneko 03, Bayraktar 04, Dong 04, Duchemin 08].

Après analyse de tous ces travaux, nous avons adopté les valeurs $E_{spongieux} = 1000$ MPa et $E_{cortical} = 20$ GPa pour la validation du modèle déterministe développé.

Concernant le coefficient de Poisson du fémur, les valeurs rapportées dans la littérature sont également très dispersées, entre $0,2$ et $0,5$ pour l'os cortical et entre $0,01$ et $0,35$ pour l'os spongieux. Nous avons adopté la valeur de $0,3$ pour caractériser ces deux coefficients de Poisson ($\upsilon_{spongieux} = \upsilon_{cortical} = 0,3$) [Goldstein 87, Lotz 91, Turner 99, Wirtz 00, Pancanti 03, Dong 04].

Les caractéristiques mécaniques adoptées pour le fémur sont récapitulées dans le tableau 2.2.

	Os spongieux	Os cortical
Module d'élasticité (MPa)	1000	20000
Coefficient de Poisson	$0,3$	$0,3$

Tableau 2.2 – Caractéristiques mécaniques des matériaux constituant le fémur

2.5.3 Conditions aux limites et chargement

La figure 2.2 détaille les conditions aux limites du problème modélisé.

On définit un encastrement parfait entre la tête fémorale et la tige fémorale. Le fémur est encastré sur sa partie distale.

Le positionnement du fémur correspond à une posture debout. La force appliquée est verticale et elle est incrémentée jusqu'à une valeur maximale de 3000 N correspondant à la charge maximale appliquée lors d'un cycle de marche d'une personne de 75 kg en position de compression unilatérale.

Toutes ces conditions reproduisent les conditions appliquées lors des essais *in vitro* réalisés par Guillaume Demey qui servent de référence pour la validation du modèle.

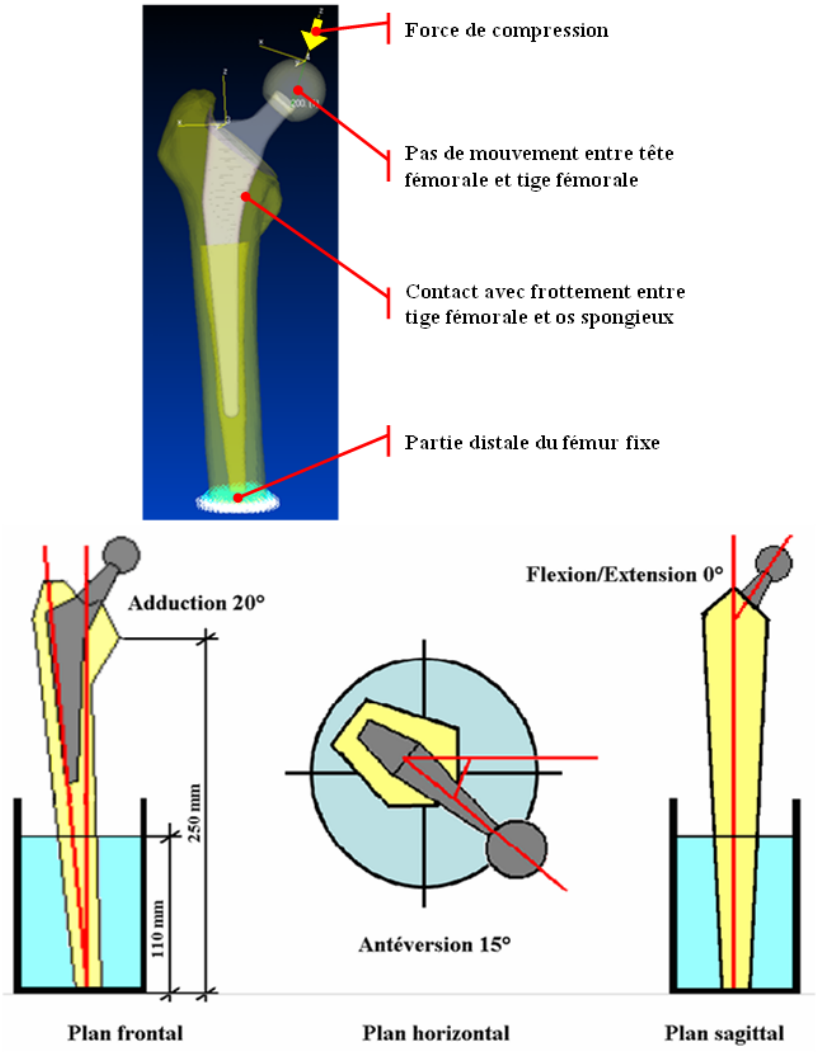


Figure 2.2 – Conditions aux limites et positionnement du fémur

2.6 Applications numériques

2.6.1 Validation du modèle

Les données enregistrées lors des essais expérimentaux sont la force appliquée en un point de la tête fémorale appelé « point témoin » et le déplacement engendré

en ce point par ce chargement. Par conséquent, la valeur de l'enfoncement du point témoin de la tête fémorale (*cf.* **Figure** 2.3) est la grandeur retenue pour valider le modèle numérique déterministe.

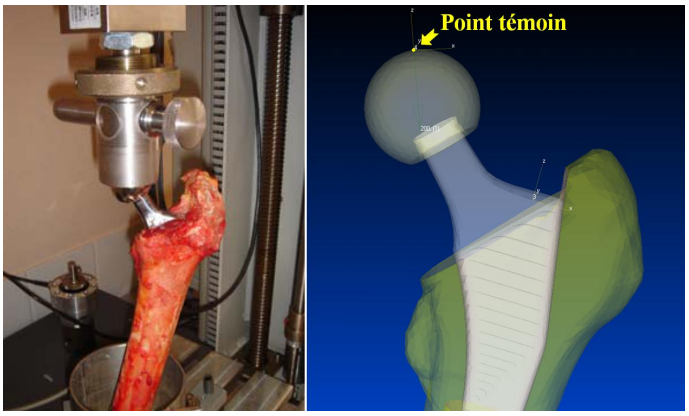


Figure 2.3 – **Enfoncement du point témoin sur la tête fémorale**

Les résultats expérimentaux sont présentés en détail dans le mémoire de Guillaume Demey [Demey 06]. Les courbes représentant l'évolution du déplacement du point témoin en fonction de la charge appliquée obtenues lors d'essais menés sur huit spécimens de tailles variables sont représentées sur la figure 2.4.

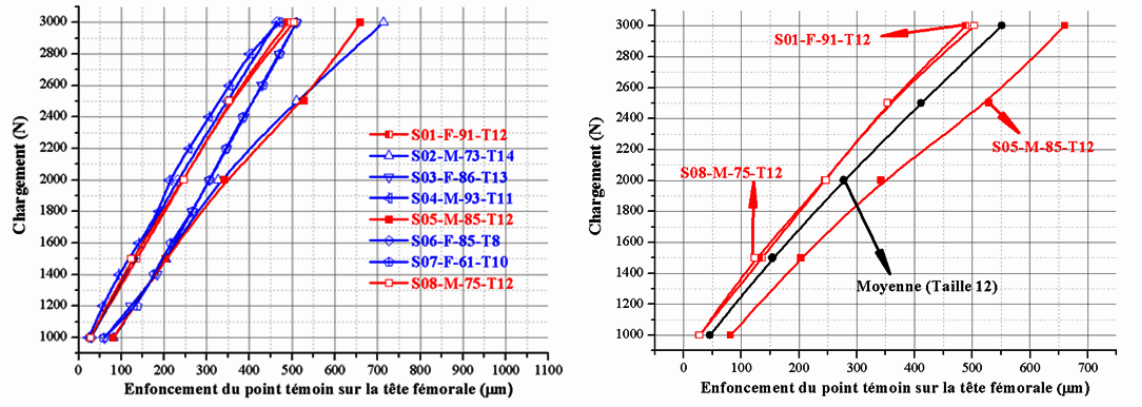


Figure 2.4 – **Récapitulation des résultats expérimentaux**

Compte tenu de la prothèse modélisée par notre modèle éléments finis, les courbes les plus intéressantes sont celles qui correspondent à des essais menés sur des spécimens de taille 12 (*cf.* **Figure** 2.4 Droite).

La plupart des enfoncements du point témoin sur la tête fémorale sont inférieurs à 550 micromètres sous le chargement de 3000 N. La moyenne de l'enfoncement maximal du point témoin obtenue à partir des huit essais est égale à 540 μm (*cf.* **Figure** 2.5).

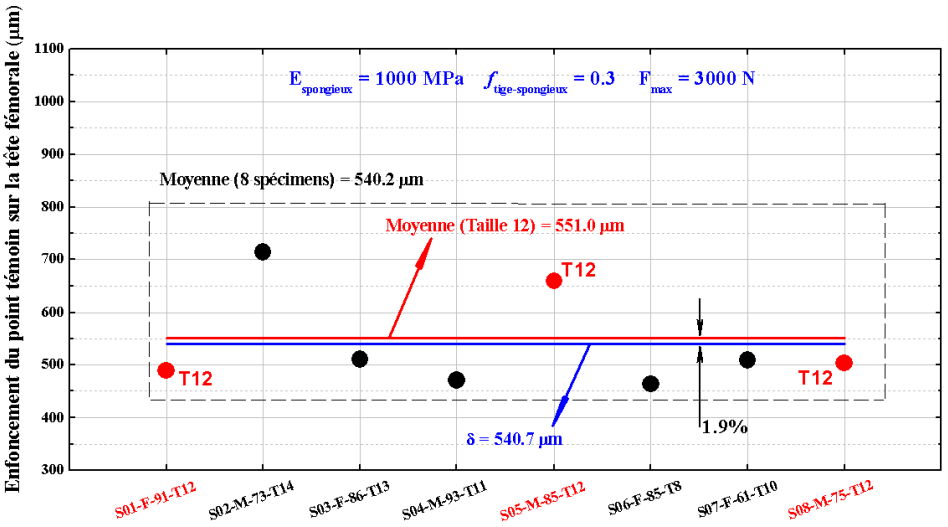


Figure 2.5 – **Comparaison des résultats expérimentaux et numérique**

Ces résultats permettent de comparer l'enfoncement maximal du point témoin fourni par notre modèle éléments finis avec les résultats expérimentaux.

Il est à noter qu'un écart de moins de 2% sépare le résultat du modèle numérique de la moyenne des résultats expérimentaux concernant les spécimens de taille 12.

Ce bon accord entre modèle et expérimentation constitue une validation du modèle éléments finis développé. Par conséquent, ce modèle peut être utilisé pour étudier le comportement mécanique du système couplé « fémur-prothèse non cimentée : DePuy Corail® » et en particulier pour déterminer la valeur de l'enfoncement de l'implant dans le fémur ainsi que le déplacement relatif au niveau de l'interface os-prothèse qui constitue la variable de contrôle associée au problème de la stabilité primaire.

2.6.2 Étude paramétrique

Le maximum des déplacements relatifs entre l'os spongieux et l'implant est souvent considéré comme la variable de contrôle de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée.

Nous avons donc mené une étude paramétrique pour estimer rapidement l'impact de la variabilité de ces deux paramètres ($E_{spongieux}$ et $f_{tige-spongieux}$) sur cette variable de contrôle indiquant la stabilité de la prothèse afin d'établir numériquement la pertinence et l'utilité de considérer ces paramètres comme incertains dans la modélisation proposée.

L'amplitude du déplacement relatif maximal diminue logiquement avec l'augmentation de la valeur du module d'élasticité de l'os spongieux (*cf.* **Figure** 2.6 Gauche). Par rapport à la valeur de référence (1000 MPa), nous avons noté une augmentation de $46,18\%$ et une diminution de $23,50\%$ lorsque le $E_{spongieux}$ varie de 500 à 2000 MPa.

Le module d'Young a ensuite été fixé permettant d'étudier l'influence de la variation du coefficient de frottement entre la tige fémorale et l'os spongieux sur le déplacement relatif de la tige fémorale. Les résultats obtenus montrent un accroissement de $77,62\%$ et un décroissement de 23.41% lorsque le $f_{tige-spongieux}$ varie de $0,1$ à $0,6$ et ce par rapport à la valeur de référence $f_{tige-spongieux} = 0,3$ (*cf.* **Figure** 2.6 Droite).

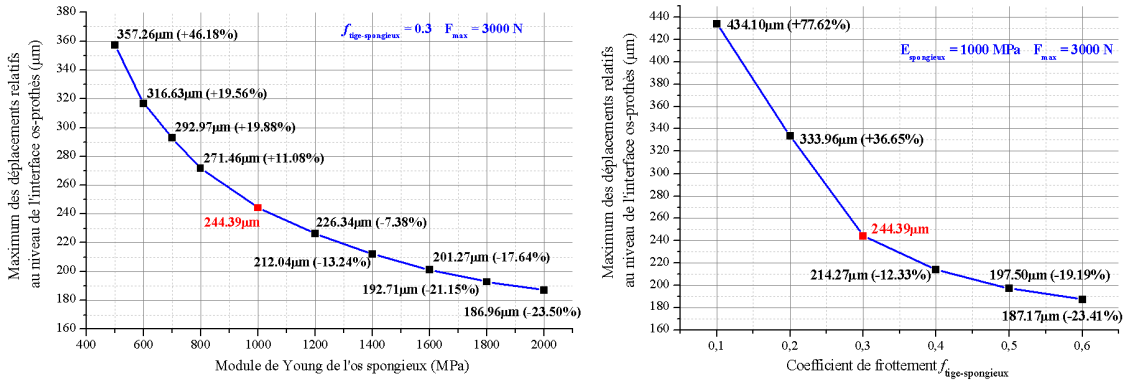


Figure 2.6 – **Étude paramétrique de l'influence des paramètres incertains** $E_{spongieux}$ **et** $f_{tige-spongieux}$

Ces quelques résultats numériques mettent en évidence l'influence des deux paramètres incertains du modèle ($E_{spongieux}$ et $f_{tige-spongieux}$) sur la valeur de la variable de contrôle de la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée.

Il apparaît donc utile et même nécessaire d'introduire une modélisation stochastique de ces paramètres d'entrée incertains afin de proposer une méthodologie capable de définir et estimer la stabilité primaire au sens probabiliste.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Chapitre 3

Modélisation stochastique et méthode d'analyse probabiliste proposée

Dans ce chapitre, nous détaillons les modèles stochastiques retenus pour décrire la variabilité aléatoire des paramètres incertains du modèle mécanique, puis, après avoir défini les événements de défaillance et de sécurité destinés à caractériser la stabilité primaire de l'implant, nous exposons la méthodologie probabiliste proposée pour évaluer cette dernière.

La méthodologie retenue est basée sur l'approche fiabiliste classiquement utilisée en mécanique structurale et nous n'en rappelons ici que les principales étapes, renvoyant en annexe les détails des méthodes sur lesquelles elle s'appuie.

On notera que dans le contexte statique qui est celui de cette étude, et conformément à la terminologie biomécanique, le vocable « stabilité primaire » doit être compris ici comme le maximum du déplacement relatif de la tige fémorale au niveau de l'interface os-prothèse à ne pas dépasser une valeur prédéterminée.

Dans tout ce qui suit, toutes les variables aléatoires (v.a.) considérées seront supposées définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où Ω est un ensemble

abstrait quelconque (i.e. l'ensemble des épreuves), $\mathcal{F}$ est une tribu de parties de Ω et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$.

3.1 Modélisation stochastique des paramètres incertains

Afin de prendre en compte la variabilité aléatoire des paramètres incertains y_1 (module d'Young de l'os spongieux) et y_2 (coefficient de frottement entre l'os spongieux et la tige fémorale), ces deux paramètres sont modélisés par des *v.a.* continues notées respectivement Y_1 et Y_2.

Le vecteur aléatoire bidimensionnel $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ regroupant ce deux *v.a.* scalaires est le modèle probabiliste du paramètres incertain vectoriel $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ et nous supposons dans ce travail qu'il satisfait les hypothèses suivantes :

(H1) ses composantes Y_1 et Y_2 sont indépendantes,

(H2) elles suivent le même type de loi,

(H3) trois types de loi sont admissibles pour ces dernières : la loi uniforme, la loi gaussienne tronquée, la loi lognormale tronquée.

A propos de ces hypothèses, nous pouvons faire les remarques suivantes :

(R1) Soient p_{Y_1}, p_{Y_2} et $p_{\boldsymbol{Y}}$ les densités des lois de Y_1, Y_2 et $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ respectivement. Alors, d'après (H1) : $p_{\boldsymbol{Y}} = p_{Y_1} \otimes p_{Y_2}$, c'est-à-dire, $\forall \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$:

$$p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = p_{Y_1}(y_1) p_{Y_2}(y_2) \tag{3.1}$$

(R2) D'après (H2) et (H3) les densités p_{Y_1} et p_{Y_2} sont toutes les deux, soit uniformes, soit gaussiennes tronquées, soit lognormales tronquées.

(R3) Soit Y_j une *v.a.* scalaire continue de densité de probabilité p_{Y_j}. Alors (*cf.* Annexe B), Y_j est dite suivre une loi :

(a) **uniforme** de support $[a_j, b_j]$, $-\infty < a_j < b_j < +\infty$, si :

$$p_{Y_j}(y_j) = \frac{1}{b_j - a_j} \mathbb{1}_{[a_j, b_j]}(y_j) \quad , \quad y_j \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

(b) **gaussienne tronquée** de moyenne m_{Y_j}, d'écart-type σ_{Y_j} et de support $[a_j, b_j]$, $-\infty \leq a_j < m_{Y_j} < b_j \leq +\infty$, si :

$$p_{Y_j}(y_j) = \frac{\varphi(\frac{y_j - m_j}{\sigma_j})}{\sigma_j (B_j - A_j)} \mathbb{1}_{S_j}(y_j) \quad , \quad y_j \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

où $\mathbb{1}_{S_j}$ est la fonction indicatrice de S_j (*i.e.* $\mathbb{1}_{S_j}(y_j) = 1$ si $y_j \in S_j$ et $\mathbb{1}_{S_j}(y_j) = 0$ si $y_j \notin S_j$), S_j est l'intervalle (a_j, b_j), $-\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty$, et m_j, σ_j sont solutions du système non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\sigma_j(\beta_j - \alpha_j)}{B_j - A_j} + m_{Y_j} - m_j & = & 0 \\ \frac{\sigma_j(b_j\beta_j - a_j\alpha_j)}{B_j - A_j} + \sigma_{Y_j}^2 - \sigma_j^2 + m_{Y_j}(m_{Y_j} - m_j) & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.4}$$

dans lequel :

$$A_j = \Phi\left(\frac{a_j - m_j}{\sigma_j}\right) \quad , \quad B_j = \Phi\left(\frac{b_j - m_j}{\sigma_j}\right) \tag{3.5}$$

$$\alpha_j = \varphi\left(\frac{a_j - m_j}{\sigma_j}\right) \quad , \quad \beta_j = \varphi\left(\frac{b_j - m_j}{\sigma_j}\right) \tag{3.6}$$

où φ et Φ sont respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad , \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(z) dz \quad , \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

(c) **lognormale tronquée** de moyenne m_{Y_j}, d'écart-type σ_{Y_j} et de support $[a_j, b_j]$, $0 \leq a_j < m_{Y_j} < b_j \leq +\infty$, si :

$$p_{Y_j}(y_j) = \frac{\frac{1}{y_j}\varphi(\frac{lny_j - m_j}{\sigma_j})}{\sigma_j(B_{0j} - A_{0j})} \mathbb{1}_{S_j}(y_j) \quad , \quad y_j \in \mathbb{R} \tag{3.8}$$

où $S_j = (a_j, b_j)$, $0 \leq a_j < b_j \leq +\infty$, et m_j, σ_j sont solutions du système non linéaire :

$$\begin{cases} m_{Y_j}(B_{0j} - A_{0j}) - e^{m_j + \frac{\sigma_j^2}{2}}(B_{1j} - A_{1j}) & = & 0 \\ m_{Y_j}(1 + \frac{\sigma_{Y_j}^2}{m_{Y_j}^2})(B_{1j} - A_{1j}) - e^{m_j + \frac{3\sigma_j^2}{2}}(B_{2j} - A_{2j}) & = & 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

dans lequel :

$$A_{0j} = \Phi\left(\frac{lna_j - m_j}{\sigma_j}\right) \quad , \quad B_{0j} = \Phi\left(\frac{lnb_j - m_j}{\sigma_j}\right) \tag{3.10}$$

$$A_{1j} = \Phi\left(\frac{lna_j - m_j}{\sigma_j} - \sigma_j\right) \quad , \quad B_{1j} = \Phi\left(\frac{lnb_j - m_j}{\sigma_j} - \sigma_j\right) \tag{3.11}$$

$$A_{2j} = \Phi\left(\frac{lna_j - m_j}{\sigma_j} - 2\sigma_j\right) \quad , \quad B_{2j} = \Phi\left(\frac{lnb_j - m_j}{\sigma_j} - 2\sigma_j\right) \tag{3.12}$$

3.2 Événements de défaillance et de sécurité

Les relations (2.20) et (2.23) montre que, lorsque le paramètre incertain vectoriel $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ est modélisé par un vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$, la variable de contrôle w et la marge de sécurité u, qui dépendent toutes deux de $\boldsymbol{y}$, deviennent

des *v.a.* comme fonctions de $\boldsymbol{Y}$. Soient, respectivement, W et U ces *v.a.*. Elles sont telles que :

$$W = H(\boldsymbol{Y}) \quad , \quad U = F(\boldsymbol{Y}) \tag{3.13}$$

et sont toutes les deux définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Nous supposons bien entendu ici que les domaines de définition des fonctions H et F contiennent le support de la loi de $\boldsymbol{Y}$ (on remarquera au passage que ces domaines coïncident, d'après (2.23)).

Dans ce contexte aléatoire, l'état de sécurité et l'état de défaillance du système mécanique sont définis par deux événements : l'événement de sécurité $E_s \in \mathcal{F}$ et l'événement de défaillance $E_f \in \mathcal{F}$ tels que :

$$E_s = \{\omega \in \Omega \ : \ U(\omega) > 0\} = \{\omega \in \Omega \ : \ F\left(\boldsymbol{Y}(\omega)\right) > 0\} \tag{3.14}$$

$$E_f = \{\omega \in \Omega \ : \ U(\omega) \leq 0\} = \{\omega \in \Omega \ : \ F\left(\boldsymbol{Y}(\omega)\right) \leq 0\} \tag{3.15}$$

et qui vérifient :

$$E_s \cup E_f = \Omega \quad , \quad E_s \cap E_f = \emptyset \tag{3.16}$$

E_s est l'événement associé au domaine de sécurité D_s et E_f celui associé au domaine de défaillance D_f (*cf.* formules (2.24) et (2.25)).

3.3 Méthode d'analyse probabiliste proposée

3.3.1 Objectif fondamental

Dans le contexte probabiliste que nous venons de définir, pour estimer la stabilité primaire du système couplé os-prothèse, nous avons opté pour une démarche fiabiliste

basée sur le choix des événements de sécurité et de défaillance définis au paragraphe précédent.

Dans une telle démarche l'objectif fondamental est alors l'évaluation des probabilités d'occurrence de ces événements, c'est-à-dire des probabilités $\mathbb{P}(E_s)$ et $\mathbb{P}(E_f)$ telles que :

$$\mathbb{P}(E_s) = \int_{D_s} p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \quad , \quad \mathbb{P}(E_f) = \int_{D_f} p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{3.17}$$

lesquelles vérifient, d'après (3.16) :

$$\mathbb{P}(E_s) = 1 - \mathbb{P}(E_f) \tag{3.18}$$

où $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)^T$ et $d\boldsymbol{y} = dy_1 dy_2$.

On voit, d'après (3.18) que $\mathbb{P}(E_s)$ est connue dès que $\mathbb{P}(E_f)$ l'est, et réciproquement, de sorte que l'on peut se contenter du calcul d'une seule de ces probabilités pour quantifier la fiabilité du système vis-à-vis du critère de défaillance retenu.

Dans toute la suite, nous ne nous intéresserons qu'à $\mathbb{P}(E_f)$, appelée probabilité de défaillance et que nous noterons désormais P_f. Cette probabilité peut être réécrite :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{D_f}(\boldsymbol{y}) p_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{3.19}$$

avec D_f défini par (2.25).

Son calcul nécessitant l'emploi d'une procédure numérique, nous avons opté pour une méthode de Monte-Carlo. En fait, nous avons eu recours à trois méthodes de ce type [Ditlevsen 96, Fishman 96, Rubinstein 08] que nous avons comparées dans le cadre des applications numériques traitées (*cf.* Chapitre 4) : la méthode standard (ou brute), la méthode basée sur la technique d'échantillonnage d'importance (*importance sampling technique*) et celle basée sur la technique de simulation directionnelle (*directional simulation technique*). Leur principe est rappelé dans l'annexe C.

3.3.2 Formulation standard

La démarche fiabiliste proposée est basée sur l'approche fiabiliste utilisée en mécanique des structures, qui requiert de réécrire le problème en termes de variables aléatoires gaussiennes standards indépendantes. Ceci nous amène dans notre cas à construire une transformation régulière $\boldsymbol{T}$, d'inverse $\boldsymbol{T}^{-1}$, telle que le vecteur aléatoire de base $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ puisse s'écrire :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) \tag{3.20}$$

où $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ est un vecteur aléatoire gaussien standard défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Une fois cette transformation construite, l'événement de défaillance E_f peut s'exprimer en fonction de $\boldsymbol{X}$ comme suit :

$$E_f = \{\omega \in \Omega \ : \ \Gamma\left(\boldsymbol{X}(\omega)\right) \leq 0\} \tag{3.21}$$

où Γ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = F\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\right) \tag{3.22}$$

D'après (3.21), la probabilité de défaillance peut alors s'écrire :

$$P_f = \mathbb{P}(E_f) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{x}) \varphi_2(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{3.23}$$

où $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, $d\boldsymbol{x} = dx_1 dx_2$, Δ_f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\Delta_f = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \Gamma(\boldsymbol{x}) \leq 0\right\} \tag{3.24}$$

et φ_2 est la densité de la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}^2$, telle que :

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \quad , \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \tag{3.25}$$

On notera que la relation (3.23) aurait pu aussi être obtenue en procédant dans (3.19) au changement de variable $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$.

L'ensemble Δ_f est l'image de D_f dans la transformation $\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{y})$, soit $\Delta_f = \boldsymbol{T}^{-1}(D_f)$. Son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'ensemble $\Delta_s = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \Gamma(\boldsymbol{x}) > 0\}$, et le bord commun entre Δ_f et Δ_s, c'est-à-dire la courbe $\Sigma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \Gamma(\boldsymbol{x}) = 0\}$, sont tels que : $\Delta_s = \boldsymbol{T}^{-1}(D_s)$, $\Sigma = \boldsymbol{T}^{-1}(C)$.

Les trois ensemble Δ_f, Δ_s et Σ sont donc respectivement le domaine de défaillance, le domaine de sécurité et la courbe d'état limite du système dans l'espace image (*cf.* **Figure** 3.1).

La relation (3.23) représente la formulation standard du problème fiabiliste. Comme mentionné plus haut, le calcul de cette intégrale (de valeur très faible par définition) a été effectué en utilisant trois méthodes de Monte-Carlo : la méthode standard, celle basée sur l'échantillonnage d'importance et celle fondée sur la simulation directionnelle (*cf.* Annexe C).

Une telle formulation est complètement définie dès que la transformation $\boldsymbol{T}$ est connue et l'expression de cette dernière dépend bien évidemment de la loi du vecteur aléatoire de base $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$. Comme les composantes Y_1 et Y_2 de $\boldsymbol{Y}$ ont été supposées indépendantes, cette transformation est de la forme :

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} Y_1 & = & T_1(\boldsymbol{X}) & = & t_1(X_1) \\ Y_2 & = & T_2(\boldsymbol{X}) & = & t_2(X_2) \end{array} \right. \tag{3.26}$$

où T_j, $j \in \{1, 2\}$, est la j-ème coordonnée de $\boldsymbol{T}$ et t_j, $j \in \{1, 2\}$, est une application de $\mathbb{R}$ dans $S_j \subseteq \mathbb{R}$, où S_j est le support de la densité de probabilité p_{Y_j} de Y_j.

Nous rappelons ci-dessous l'expression de la transformation $Y_j = t_j(X_j)$ pour chacune des trois lois considérées pour les Y_j (*cf.* §3.1). On gardera bien à l'esprit que les *v.a.* Y_1 et Y_2 sont supposées suivre toutes les deux le même type de loi.

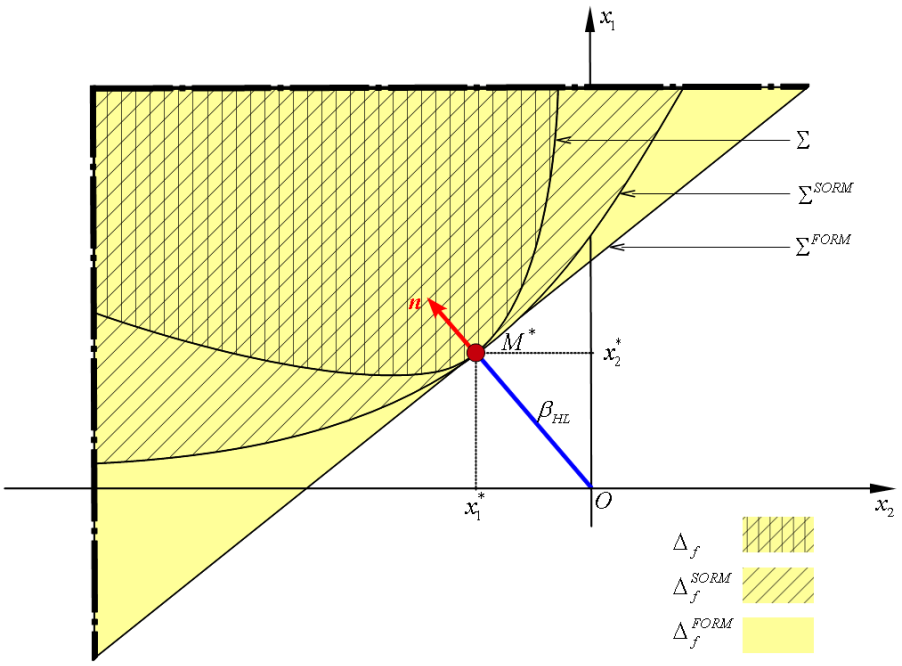


Figure 3.1 – Représentation géométrique du point de fonctionnement M^*, des domaines de défaillance $\Delta_f, \Delta_f^{SORM}, \Delta_f^{FORM}$ et des courbes d'état limite $\Sigma, \Sigma^{SORM}, \Sigma^{FORM}$ dans l'espace image

(a) Y_j, $j \in \{1,2\}$, suit une **loi uniforme** de support $[a_j, b_j]$, $-\infty < a_j < b_j < +\infty$:

$$Y_j = t_j(X_j) = a_j + (b_j - a_j)\Phi(X_j) \tag{3.27}$$

(b) Y_j, $j \in \{1,2\}$, suit une **loi gaussienne tronquée** de moyenne m_{Y_j}, d'écart-type σ_{Y_j} et de support $[a_j, b_j]$, $-\infty < a_j < m_{Y_j} < b_j < +\infty$:

$$Y_j = t_j(X_j) = m_j + \sigma_j \Phi^{-1}\left(A_j + (B_j - A_j)\Phi(X_j)\right) \tag{3.28}$$

où A_j and B_j sont donnés par (3.5) et m_j, σ_j sont solutions du système (3.4).

(c) Y_j, $j \in \{1,2\}$, suit une **loi lognormale tronquée** de moyenne m_{Y_j}, d'écart-type σ_{Y_j} et de support $[a_j, b_j]$, $0 < a_j < m_{Y_j} < b_j < +\infty$:

$$Y_j = t_j(X_j) = exp\left(m_j + \sigma_j \Phi^{-1}\left(A_{0j} + (B_{0j} - A_{0j})\Phi(Y_j)\right)\right) \tag{3.29}$$

où A_{0j} et B_{0j} sont donnés par (3.10) et m_j, σ_j sont solutions du système (3.9).

On notera que le fait que les *v.a.* Y_1 et Y_2 soient supposées suivre le même type de loi n'est pas une perte de généralité. C'est une simple hypothèse de travail qui pourrait très bien être changée sans mettre en péril la méthodologie proposée.

3.3.3 Indice de Hasofer-Lind

L'indice de Hasofer-Lind β_{HL} [Ditlevsen 96, Hasofer 74] est un indicateur fiabiliste dont le calcul est plus aisé que celui de la probabilité de défaillance P_f et que l'on utilise de ce fait comme substitut de cette dernière. Il est défini dans l'espace image comme suit :

$$\beta_{HL} = \delta(O, \Delta_f) \tag{3.30}$$

où $\delta(O, \Delta_f)$ est la distance euclidienne entre le point origine O et le domaine de défaillance Δ_f. En explicitant cette distance (3.30) se réécrit :

$$\beta_{HL} = \min_{M \in \Delta_f} ||\overrightarrow{OM}||_2 \tag{3.31}$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$.

L'algorithme Rackwitz-Fiessler [Rackwitz 76, Fiessler 79] est bien adapté à la résolution du problème d'optimisation non linéaire (3.31) et c'est cet algorithme que nous avons utilisé pour traiter les applications numériques du chapitre 4. On notera que pour ces applications, nous avons pu vérifier que le problème (3.31) avait une unique solution.

Le point solution :

$$M^* = Arg\left(\min_{M\in\Delta_f} ||\overrightarrow{OM}||_2\right) \tag{3.32}$$

tel que $\beta_{HL} = ||\overrightarrow{OM^*}||_2$, est appelé le point de fonctionnement. Il est situé sur le bord Σ de Δ_f (*cf.* **Figure** 3.1).

Si $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^2$ dont les composantes x_1^* et x_2^* sont les coordonnés de M^* ($\boldsymbol{x}^*$ est le vecteur-position de M^*), alors β_{HL} est donné par :

$$\beta_{HL} = -\frac{\langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{x}^*\rangle_2}{\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)\|_2} \tag{3.33}$$

où Γ est la fonction d'état limite définie par (3.22), $\nabla\Gamma$ est le gradient de Γ (supposé exister au point M^*), et $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ est le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.4 Approximation FORM

Cette approximation (FORM signifie *First Order Reliability Method*) [Ditlevsen 96, Hasofer 74, Rackwitz 76] consiste à remplacer le domaine de défaillance Δ_f par le demi-espace :

$$\Delta_f^{FORM} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \Gamma^{AT1}(\boldsymbol{x}) \leq 0\right\} \tag{3.34}$$

où Γ^{AT1} est l'approximation de Taylor du première ordre de Γ en M^*, telle que :

$$\Gamma^{AT1}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*) \ , \ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\rangle_2 \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.35}$$

et dont le graphe Σ^{FORM} est une droite tangente à Σ en M^* (*cf.* **Figure** 3.1).

En utilisant cette approximation de Δ_f, la probabilité de défaillance (3.23) est alors approximée par :

$$P_f^{FORM} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\Delta_f^{FORM}}(\boldsymbol{x})\varphi_2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{3.36}$$

et un simple calcul montre que :

$$P_f^{FORM} = \Phi(-\beta_{HL}) \tag{3.37}$$

où β_{HL} est donné par (3.33).

3.3.5 Approximation SORM

Raffinement de la précédente, (SORM signifie *Second Order Reliability Method*) [Ditlevsen 96, Fiessler 79], cette approximation est basée sur le remplacement du domaine de défaillance Δ_f par l'ensemble :

$$\Delta_f^{SORM} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \Gamma^{AT2}(\boldsymbol{x}) \leq 0\right\} \tag{3.38}$$

où Γ^{AT2} est l'approximation de Taylor du second ordre de Γ en M^*, telle que :

$$\Gamma^{AT2}(\boldsymbol{x}) = \left\langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*) + \frac{1}{2}\nabla^2\Gamma(\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*) \ , \ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^* \right\rangle_2 \quad , \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.39}$$

dont le graphe Σ^{SORM} est une courbe du second ordre tangente à Σ en M^* (*cf.* **Figure** 3.1). Dans (3.39)), $\nabla^2\Gamma$ est la hessienne de Γ et elle est supposée exister au point M^*.

En utilisant cette substitution, la probabilité de défaillance (3.23) est alors approximée par :

$$P_f^{SORM} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\Delta_f^{SORM}}(\boldsymbol{x})\varphi_2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{3.40}$$

et cette intégrale peut être évaluée en utilisant la formule approchée asymptotique de Breitung [Breitung 84] :

$$P_f^{SORM} \approx \Phi(-\beta_{HL})\,(1-\chi\beta_{HL})^{-1/2} \quad , \quad (\beta_{HL} \to +\infty) \tag{3.41}$$

ou celle de Hohenbichler [Hohenbichler 87] :

$$P_f^{SORM} \approx \Phi(-\beta_{HL})\left(1-\chi\frac{\varphi(\beta_{HL})}{\Phi(-\beta_{HL})}\right)^{-1/2} \quad , \quad (\beta_{HL} \to +\infty) \tag{3.42}$$

qui est une amélioration de la précédente.

Dans ces deux formules, χ est la courbure de la courbe d'état limite Σ en M^*, φ et Φ sont les fonctions données par (3.7) et les deux conditions suivantes sont supposées vérifiées : $\chi\beta_{HL} < 1$ et $\chi\varphi(\beta_{HL})/\Phi(-\beta_{HL}) < 1$.

3.3.6 Caractérisation de la variable de contrôle W

D'après (3.13), cette *v.a.* est définie par :

$$W = H(\boldsymbol{Y}) \tag{3.43}$$

et peut se réécrire, en fonction de $\boldsymbol{X}$:

$$W = \Psi\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{3.44}$$

où Ψ est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$:

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})) \tag{3.45}$$

Si l'on cible l'étude sur l'analyse fiabiliste du système, il est nécessaire de disposer d'un maximum d'information sur cette *v.a.* et si possible de l'information maximale constituée par sa densité de probabilité p_W.

Par contre, si l'on s'intéresse à la propagation des incertitudes dans le modèle mécano-numérique, on peut être moins ambitieux et se contenter de la connaissance de quelques moments de W, par exemple de ses $K \geq 2$ premiers moments centrés $\mu_{W,k}$, $2 \leq k \leq K$, donnés par :

$$\mu_{W,k} = \mathbb{E}\left[(W - m_W)^k\right] = \mathbb{E}\left[(\Psi(\boldsymbol{X}) - m_W)^k\right] = \int_{\mathbb{R}^2} (\Psi(\boldsymbol{x}) - m_W)^k \varphi_2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{3.46}$$

avec m_W la moyenne de W, telle que :

$$m_W = \mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[\Psi(\boldsymbol{X})] = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{3.47}$$

et φ_2 la densité gaussienne donnée par (3.25).

Ainsi, si l'analyse de propagation ne met en jeu que le coefficient de variation c_W, le coefficient d'asymétrie S_W et le coefficient d'aplatissement K_W de W, grandeurs définies par :

$$c_W = \frac{\mu_{W,2}^{1/2}}{m_W} \tag{3.48}$$

$$S_W = \frac{\mu_{W,3}}{\sigma_W^3} = \frac{\mu_{W,3}}{\mu_{W,2}^{3/2}} \tag{3.49}$$

$$K_W = \frac{\mu_{W,4}}{\sigma_W^4} - 3 = \frac{\mu_{W,4}}{\mu_{W,2}^2} - 3 \tag{3.50}$$

alors on voit que l'on peut se limiter à la connaissance de la moyenne et des moments centrés jusqu'à l'ordre 4 de W.

Pour calculer ces moments, on peut bien entendu utiliser une méthode de Monte-Carlo. Mais dans le cas présent, compte tenu de la faible dimension du problème probabiliste (*i.e.* du vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y}$, et donc de $\boldsymbol{X}$), on peut également employer une méthode de collocation stochastique [Bressolette 10], tout aussi précise, mais beaucoup moins chronophage qu'une méthode de Monte-Carlo. C'est la solution que nous avons retenue et dont nous exposons le principe et quelques points de détail dans l'annexe D.

La figure 3.2 schématise l'ordonnancement des opérations liées à la méthodologie fiabiliste proposée. Le couplage mécano-probabiliste a été développé sous **VB** (***V**isual **B**asic*) via l'application **API** (***A**pplication **P**rogramming **I**nterface*) de **FEMAP** [UGSCorp. 07a].

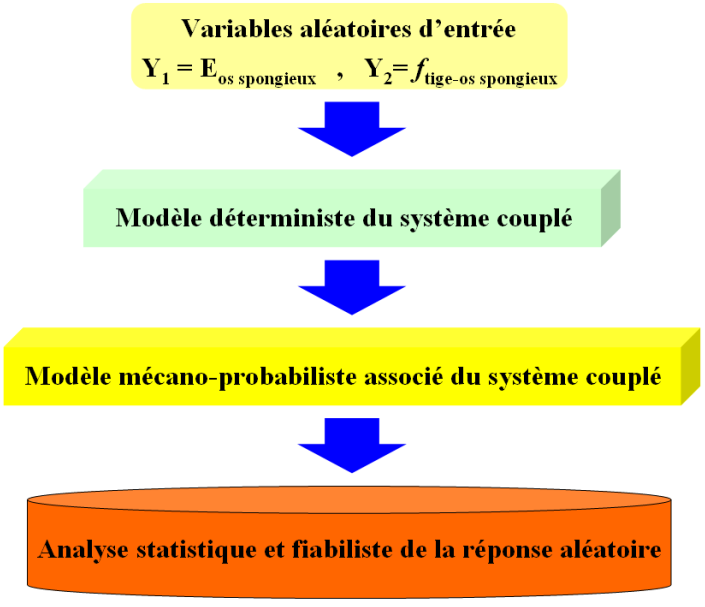


Figure 3.2 – Couplage mécano-probabiliste du système couplé

Chapitre 4

Applications numériques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications numériques destinées à illustrer les possibilités des méthodes exposées dans le chapitre 3. Ces applications sont toutes relatives au modèle mécano-numérique du système couplé « fémur-prothèse non cimentée : DePuy® Corail » décrit dans le chapitre 2 et leur présentation est subdivisée en trois parties.

La première est centrée sur l'analyse de la propagation des incertitudes. On y quantifie l'influence de la variabilité aléatoire des paramètres incertains sur les premiers moments et sur la loi (densité de probabilité, fonction de répartition) de la variable aléatoire de contrôle W. Ces divers calculs sont réalisés à l'aide de la méthode de Monte-Carlo standard (pour les moments et pour la loi) et de la méthode de collocation stochastique (pour les moments).

La deuxième partie concerne l'analyse fiabiliste du système couplé os-prothèse. Plusieurs situations sont considérées, orientées vers l'étude de l'influence de certaines caractéristiques des paramètres aléatoires sur la fiabilité, évaluée soit au travers de l'indice de Hasofer-Lind, soit au travers de la probabilité de défaillance. Les trois méthodes de Monte-Carlo préconisées pour le calcul de la probabilité de défaillance font également l'objet d'une étude comparative dans cette partie.

Enfin, la troisième partie est consacrée à une analyse de sensibilité locale destinée à évaluer, par le biais des facteurs d'importance, le poids de chaque paramètre

aléatoire sur la valeur estimée de l'indice de Hasofer-Lind.

4.1 Analyse probabiliste de la propagation des incertitudes

Il s'agit ici de quantifier l'influence de la variabilité aléatoire des paramètres incertains Y_1 (module d'Young de l'os spongieux) et Y_2 (coefficient de frottement entre la tige fémorale et l'os spongieux) sur la variable aléatoire de contrôle W (norme euclidienne du déplacement relatif maximal entre la tige fémorale et l'os spongieux).

Cette influence est mesurée au travers, d'une part de la moyenne m_W et des coefficients de variation c_W, d'asymétrie S_W et d'aplatissement K_W de W (*cf.* formules (3.48), (3.49), (3.50)), et d'autre part de la loi de W, représentée par sa densité de probabilité p_W et sa fonction de répartition F_W.

Toutes ces caractéristiques sont estimées en utilisant la méthode de Monte-Carlo standard. Les deux premières m_W et c_W sont également évaluées à l'aide de la méthode de collocation stochastique (*cf.* Annexe D).

Les moyennes (m_{Y_1} , m_{Y_2}) et les écarts-types (σ_{Y_1} , σ_{Y_2}) des *v.a.* Y_1 et Y_2 sont fixés aux valeurs suivantes :

$$m_{Y_1} = 1000\ MPa\ ,\ \sigma_{Y_1} = 100\ MPa \quad ; \quad m_{Y_2} = 0.3\ ,\ \sigma_{Y_2} = 0.03 \tag{4.1}$$

On a donc pour les coefficients de variation :

$$c_{Y_1} = c_{Y_2} = 0.10 \tag{4.2}$$

Ces valeurs sont représentatives de celles trouvées dans la littérature pour les mêmes paramètres mécaniques.

Les *v.a.* Y_1 et Y_2 sont indépendantes et trois cas sont considérés concernant leur loi :

(C1) Y_1 et Y_2 sont uniformes ;

(C2) Y_1 et Y_2 sont gaussiennes tronquées, de supports respectifs $[a_1\ ,\ b_1]$, $[a_2\ ,\ b_2]$, avec $a_j = m_{Y_j} - 3\sigma_{Y_j}$, $b_j = m_{Y_j} + 3\sigma_{Y_j}$, pour $j \in \{1, 2\}$;

(C3) Y_1 et Y_2 sont lognormales tronquées, de supports respectifs $[a_1\ ,\ b_1]$, $[a_2\ ,\ b_2]$, avec $a_j = m_{Y_j} - 3\sigma_{Y_j}$, $b_j = m_{Y_j} + 3\sigma_{Y_j}$, pour $j \in \{1, 2\}$.

On notera que dans le cas (C1), le support $[a_j\ ,\ b_j]$ des *v.a.* Y_j est fixé par la donné de la moyenne et de l'écart-type de ces *v.a.*. On a en effet :

$$a_j = m_{Y_j} - \sqrt{3}\sigma_{Y_j} \quad , \quad b_j = m_{Y_j} + \sqrt{3}\sigma_{Y_j} \quad , \quad j = 1, 2 \tag{4.3}$$

Les estimées de la moyenne m_W, de son intervalle de confiance au niveau de confiance 95% : $I_{m_W}(95\%)$, des coefficients c_W, S_W, K_W, de la densité de probabilité p_W et de la fonction de répartition F_W obtenues à partir de la méthode de Monte-Carlo standard sont résumées dans le tableau 4.1 et sur les figures 4.1 à 4.3. $N = 10000$ réalisations simulées du paramètre aléatoire vectoriel $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ ont été utilisées pour obtenir ces estimées. La méthode employée pour l'estimation des fonctions p_W et F_W est détaillée dans l'annexe E.

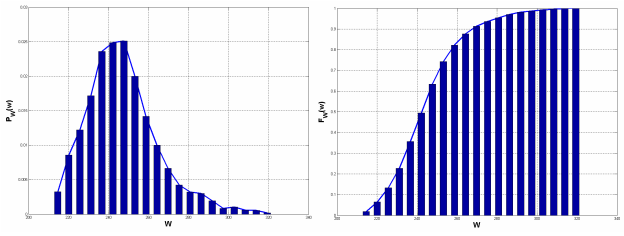


Figure 4.1 – Estimées de la densité de probabilité p_W et de la fonction de répartition F_W dans le cas (C1) : Y_1 et Y_2 uniformes

Le tableau 4.2 répertorie les approximations de m_W et c_W fournies par la méthode de collocation stochastique. Ces approximations ont été calculées successivement pour $n = 2 \times 2 = 4$, $n = 4 \times 4 = 16$ et $n = 6 \times 6 = 36$ points de collocation (*cf.* Annexe D).

L'examen de ces résultats appelle les remarques suivantes :

Lois de probabilité	Y_1 et Y_2 uniformes	Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées	Y_1 et Y_2 lognormales tronquées
m_W	247.1	247.3	247.0
$I_{m_W}(95\%)$	[246.7 , 247.5]	[246.9 , 247.6]	[246.7 , 247.4]
c_W	7.2%	7.6%	7.2%
S_W	0.86	1.34	1.08
K_W	1.13	4.06	2.86

Tableau 4.1 – Estimées, via la méthode de Monte-Carlo standard, de m_W, de son intervalle de confiance à 95% : $I_{m_W}(95\%)$, et des coefficients c_W, S_W et K_W, obtenues en utilisant $N = 10000$ réalisation simulées de $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$

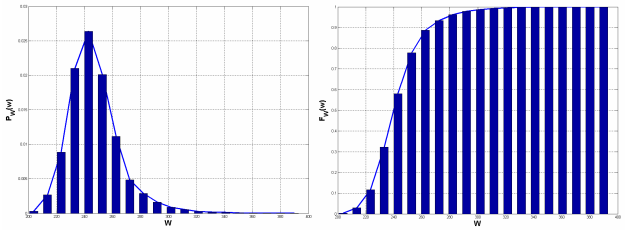


Figure 4.2 – Estimées de la densité de probabilité p_W et de la fonction de répartition F_W dans le cas (C2) : Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées

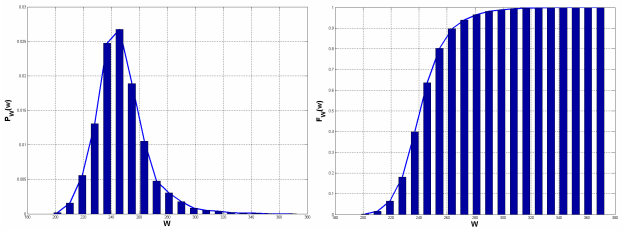


Figure 4.3 – Estimées de la densité de probabilité p_W et de la fonction de répartition F_W dans le cas (C3) : Y_1 et Y_2 lognormales tronquées

– La variabilité aléatoire des paramètres Y_1 et Y_2 impacte effectivement la variable de contrôle W. Cela se lit notamment sur le coefficient de variation de

Lois de probabilité	Y_1 et Y_2 uniformes			Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées			Y_1 et Y_2 lognormales tronquées		
Nombre de points de collocation	4	16	36	4	16	36	4	16	36
m_W	248.6	246.9	247.0	247.5	247.5	247.5	247.4	247.3	247.4
c_W	8.7%	7.1%	7.2%	7.0%	7.4%	7.5%	6.9%	7.1%	7.1%

Tableau 4.2 – Approximations de m_W et c_W fournies par la méthode de collocation stochastique pour $n = 2 \times 2 = 4$, $n = 4 \times 4 = 16$ et $n = 6 \times 6 = 36$ points de collocation

W, de l'ordre de 7%, qui n'est pas négligeable (les coefficients de variation de Y_1 et Y_2 étant de 10%).

– Les lois des paramètres aléatoires Y_1 et Y_2 ont très peu d'influence au second ordre sur la variable de contrôle W, c'est-à-dire sur la moyenne m_W et le coefficient de variation c_W de W.

– Elles ont par contre un impact significatif sur les coefficients d'asymétrie S_W et d'aplatissement K_W de W, donc sur la loi de W, ce que l'on peut voir sur les figures 4.1 à 4.3. Il est clair par ailleurs, à la vue de ces résultats, que quelle que soit la loi de ces paramètres, la loi de W ne peut être gaussienne (car si tel était le cas, S_W et K_W seraient nuls) ce que confirment visuellement les figures 4.1 à 4.3.

– La méthode de collocation stochastique fournit de très bonnes approximations de la moyenne m_W et du coefficient de variation c_W de W dès que le nombre de points de collocation, n, dépasse 4. Le choix $n = 16$ apparaît comme un bon compromis pour ce problème. Gardant à l'esprit que le nombre de points de collocation correspond au nombre d'appels au modèle éléments finis, on voit tout l'intérêt de cette méthode pour le calcul des moments, comparativement à la méthode de Monte-Carlo standard qui nécessite un nombre N d'appels au modèle éléments finis beaucoup plus important ($N = 10000$ ici).

4.2 Analyse fiabiliste

Les applications numériques présentées dans ce paragraphe visent à quantifier l'influence de certaines caractéristiques des paramètres aléatoires Y_1 et Y_2 sur la fiabilité du système os-prothèse, mesurée soit par l'indice de Hasofer-Lind, soit par la probabilité de défaillance.

Les caractéristiques considérées sont les lois de probabilité, les dispersions, les longueur de troncature des lois et le seuil de défaillance. Une application est également consacrée à la comparaison des diverses méthodes d'approximation préconisées dans le chapitre 3 pour le calcul de la probabilité de défaillance.

Rappelons que la fiabilité du système est définie par rapport à la norme euclidienne du déplacement relatif maximal entre la tige fémorale et l'os spongieux : c'est l'aptitude du système os-prothèse à maintenir ce déplacement maximal en deçà d'une valeur admissible limite (le seuil de défaillance w_0).

4.2.1 Influence des lois et des dispersions

L'objectif de cette application est de quantifier l'influence des lois et des dispersions (*i.e.* des coefficients de variation) des paramètres aléatoires sur la fiabilité du système os-prothèse exprimée au travers de l'indice de Hasofer-Lind β_{HL}.

A cette fin, les *v.a.* Y_1 et Y_2 (indépendantes par hypothèse) sont supposées de moyennes (m_{Y_1}, m_{Y_2}) fixes, d'écarts-types $(\sigma_{Y_1}, \sigma_{Y_2})$ variables, et trois cas sont considérés concernant leur loi :

(C1) Y_1 et Y_2 sont uniformes, de supports $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$, respectivement,

(C2) Y_1 et Y_2 sont gaussiennes tronquées, de supports $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$, respectivement,

(C3) Y_1 et Y_2 sont lognormales tronquées, de supports $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$, respectivement,

avec dans chaque cas :

$$a_j = m_{Y_j}\left(1 - \sqrt{3}c_{Y_j}\right) \quad , \quad b_j = m_{Y_j}\left(1 + \sqrt{3}c_{Y_j}\right) \quad , \quad j \in \{1, 2\} \tag{4.4}$$

Les valeurs choisies pour les moyennes fixes m_{Y_1} , m_{Y_2} et le seuil de défaillance w_0 sont :

$$m_{Y_1} = 1000\ MPa \quad , \quad m_{Y_2} = 0.3 \quad , \quad w_0 = 280\ \mu m \tag{4.5}$$

Pour les coefficients de variation variables c_{Y_1} , c_{Y_2}, qui quantifient la dispersion de Y_1 et Y_2 respectivement, trois valeurs sont considérées dans chaque cas (C_j) selon la stratégie suivante :

(1) c_{Y_1} est fixé à sa valeur de référence 0.10 et c_{Y_2} prend successivement les valeurs 0.03, 0.10, 0.30 ;

(2) c_{Y_2} est fixé à sa valeur de référence 0.10 et c_{Y_1} prend successivement les valeurs 0.03, 0.10, 0.30.

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.3. Nous pouvons voir que dans chaque cas la dispersion des *v.a.* Y_1 et Y_2 a une influence significative sur l'indice β_{HL}.

Nous pouvons également observer que l'effet de c_{Y_2} (coefficient de variation du coefficient de frottement entre la tige fémorale et l'os spongieux) est plus important que celui de c_{Y_1} (coefficient de variation du module d'Young de l'os spongieux).

Nous retrouvons en outre un résultat bien connu, à savoir que la fiabilité du système (*i.e.* β_{HL} ici) diminue lorsque la dispersion des paramètres aléatoires augmente. Notons au passage que des valeurs de coefficient de variation de 0.10 et 0.30 comme celles utilisées dans cette application sont considérées comme représentatives d'une forte dispersion en Statistique Expérimentale.

Concernant les lois de probabilité, nous pouvons constater qu'elles n'ont pas une grande influence sur la fiabilité du système, notamment pour les grandes dispersions

Lois de probabilité		Y_1 et Y_2 uniformes	Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées	Y_1 et Y_2 lognormales tronquées
$c_{Y_1} = 0.10$	$c_{Y_2} = 0.03$	3.96	3.54	4.56
	$c_{Y_2} = 0.10$	1.44	1.37	1.45
	$c_{Y_2} = 0.30$	0.51	0.51	0.49
$c_{Y_2} = 0.10$	$c_{Y_1} = 0.03$	1.97	2.51	2.34
	$c_{Y_1} = 0.10$	1.44	1.37	1.45
	$c_{Y_1} = 0.30$	0.57	0.52	0.55

Tableau 4.3 – Influence des lois et des coefficients de variation de Y_1 et Y_2 sur l'indice de Hasofer-Lind β_{HL}

des paramètres aléatoires. Il n'est par ailleurs pas possible, à la vue des résultats obtenus, de dégager une règle de classement hiérarchique de ces lois en fonction de leur nocivité vis-à-vis de la fiabilité du système.

Enfin, concernant les aspects calculatoires, rappelons que l'indice β_{HL} a été calculé à l'aide de l'algorithme de Rackwitz-Fiessler (*cf.* Chapitre 3, §3.3.3). Nous avons utilisé à cet effet l'algorithme implanté dans le logiciel **FERUM** (***F****inite* ***E****lement and* ***R****eliability* ***U****sing* ***M****atlab*) crée par Armen Der Kiureghian et Terje Haukaas à l'université de Berkeley (Californie) et développé en France par J. M. Bourinet *et al.* en 2009 [Bourinet 09]. A titre indicatif, pour l'ensemble des applications traitées, le nombre d'appels au modèle éléments finis requis par cet algorithme n'a jamais excédé 30.

4.2.2 Influence des longueurs de troncature

Dans cette application, les *v.a.* indépendantes Y_1 et Y_2 sont supposées distribuées suivant des lois tronquées de supports variables et de moyennes et écarts-types fixés. Sous cette hypothèse, l'objectif est alors d'évaluer l'influence de la longueur du support de chaque loi (appelée longueur de troncature) sur la fiabilité du système os-prothèse exprimée au travers de l'indice de Hasofer-Lind β_{HL}.

Les supports $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ des lois de Y_1 et Y_2 sont choisis de la forme :

$$a_j = m_{Y_j} - \alpha_j \sigma_{Y_j} \quad , \quad b_j = m_{Y_j} + \alpha_j \sigma_{Y_j} \quad , \quad j = 1, 2 \tag{4.6}$$

où α_1 et α_2 sont des coefficients adimensionnels strictement positifs contrôlant la longueur des supports. Afin de juger de leur impact sur β_{HL}, quatre situations sont considérées :

(GT1) Y_1 et Y_2 sont gaussiennes tronquées, $\alpha_1 = 2.5$ et α_2 prend successivement les valeurs 2, 2.5 et 3,

(GT2) Y_1 et Y_2 sont gaussiennes tronquées, $\alpha_2 = 2.5$ et α_1 prend successivement les valeurs 2, 2.5 et 3,

(LNT1) Y_1 et Y_2 sont lognormales tronquées, $\alpha_1 = 2.5$ et α_2 prend successivement les valeurs 2, 2.5 et 3,

(LNT2) Y_1 et Y_2 sont lognormales tronquées, $\alpha_2 = 2.5$ et α_1 prend successivement les valeurs 2, 2.5 et 3,

Enfin, pour les statistiques (m_{Y_j}, σ_{Y_j}), $j = 1, 2$, et le seuil de défaillance w_0, les valeurs choisies sont :

$$\begin{gathered} m_{Y_1} = 1000 \ MPa \quad , \quad \sigma_{Y_1} = 100 \ MPa \\ m_{Y_2} = 0.3 \quad , \quad \sigma_{Y_2} = 0.03 \\ w_0 = 280 \ \mu m \end{gathered} \tag{4.7}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.4

Nous pouvons constater que le comportement de β_{HL} vis-à-vis des longueurs de troncature dépend de la nature des lois considérées. En effet, dans le cas gaussien tronqué, ce comportement est non monotone (β_{HL} décroît puis croît) dans chacune des situations considérées (GT1 et GT2), alors que dans le cas lognormal tronqué, il

Cas gaussien tronqué	Situation (GT1)	$\alpha_1 = 2.5$ $\alpha_2 = 2$	$\alpha_1 = 2.5$ $\alpha_2 = 2.5$	$\alpha_1 = 2.5$ $\alpha_2 = 3$
	β_{HL}	1.73	1.46	1.59
	Situation (GT2)	$\alpha_2 = 2.5$ $\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 2.5$ $\alpha_1 = 2.5$	$\alpha_2 = 2.5$ $\alpha_1 = 3$
	β_{HL}	1.51	1.46	1.57
Cas lognormal tronqué	Situation (LNT1)	$\alpha_1 = 2.5$ $\alpha_2 = 2$	$\alpha_1 = 2.5$ $\alpha_2 = 2.5$	$\alpha_1 = 2.5$ $\alpha_2 = 3$
	β_{HL}	1.48	1.59	1.62
	Situation (LNT2)	$\alpha_2 = 2.5$ $\alpha_1 = 2$	$\alpha_2 = 2.5$ $\alpha_1 = 2.5$	$\alpha_2 = 2.5$ $\alpha_1 = 3$
	β_{HL}	1.62	1.59	1.56

Tableau 4.4 – Influence des longueurs de troncature sur β_{HL} dans le cas gaussien tronqué (*i.e.* Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées) et dans le cas lognormal tronqué (*i.e.* Y_1 et Y_2 lognormales tronquées)

est soit monotone croissant (situation LNT1) soit monotone décroissant (situation LNT2).

Dans tous les cas, toutefois, l'impact des longueurs de troncature sur β_{HL} n'est pas vraiment significatif. Le tableau 4.4 met également en évidence un résultat déjà observé dans l'application précédente, à savoir que les lois considérées ont peu d'influence sur la fiabilité du système.

4.2.3 Influence du seuil de défaillance

Nous cherchons ici à quantifier l'influence du seuil de défaillance w_0 sur la fiabilité du système en utilisant à nouveau l'indice β_{HL} comme indicateur fiabiliste.

A cette fin, les paramètres aléatoires Y_1 et Y_2 (indépendants par hypothèse) sont

supposés uniformes, de moyennes et écarts-types donnés par (4.7), et cinq valeurs sont successivement considérées pour w_0 (en μm) : 270, 275, 280, 285, 290.

Les valeurs obtenues de β_{HL} sont répertoriées dans le tableau 4.5 et représentées graphiquement sur la figure 4.4). Dans le tableau 4.5 figurent également, à titre indicatif, les valeurs de l'approximation P_f^{FORM} de P_f, calculées à partir de la formule (3.37).

w_0 (μm)	270	275	280	285	290
β_{HL}	1.10	1.25	1.44	1.61	1.75
$P_f^{FORM} \times 10^2$	13.47	10.61	7.53	5.33	3.97

Tableau 4.5 – Influence du seuil de défaillance w_0 sur l'indice β_{HL} et sur l'approximation associée $P_f^{FORM} = \Phi(-\beta_{HL})$ de P_f

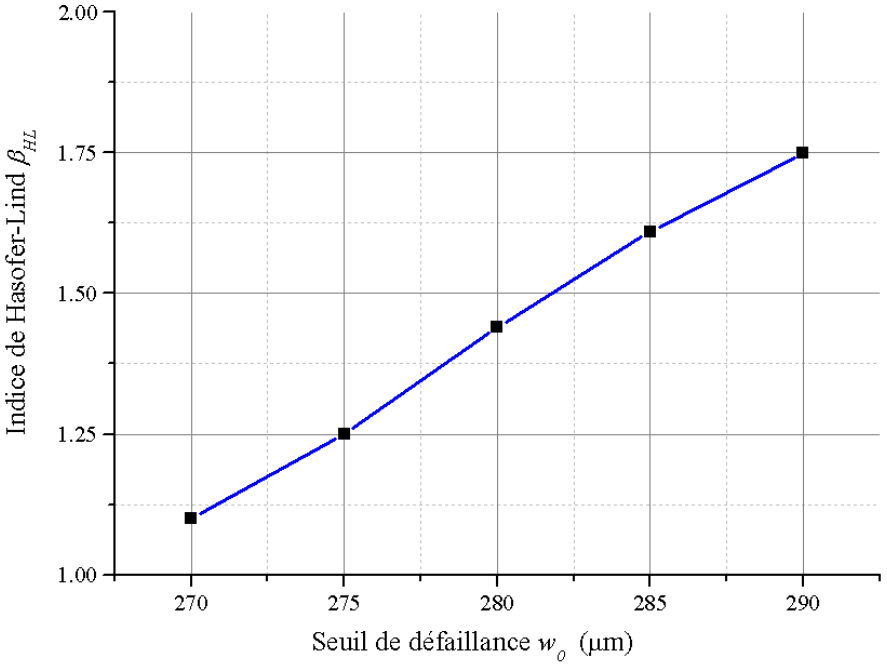


Figure 4.4 – Évolution de β_{HL} en fonction de w_0

Nous pouvons tout d'abord remarquer que les valeurs de β_{HL} sont faibles pour toutes les valeurs considérées de w_0. Ceci résulte à n'en pas douter des valeurs des

coefficients de variation de Y_1 et Y_2 qui sont relativement élevées ($c_{Y_1} = c_{Y_2} = 0.10$). Nous pouvons ensuite observer que ces résultats sont logiques dans la mesure où β_{HL} croît avec w_0. Il est par ailleurs intéressant de noter que cette variation est quasi-linéaire sur la plage des valeurs considérées de w_0 (*cf.* **Figure** 4.4).

4.2.4 Comparaison des diverses approximations préconisées de P_f

Dans cette application, nous considérons le même exemple d'étude que celui utilisé dans l'application précédente (*cf.* §4.2.3) et, pour chaque valeur du seuil de défaillance w_0, nous comparons les approximations FORM : P_f^{FORM} et SORM : P_f^{SORM} de P_f (données par (3.37) et (3.42) respectivement) à la valeur cible de cette probabilité, obtenue en appliquant à l'expression (3.23) de P_f la méthode de Monte-Carlo standard, prise comme méthode de référence (*cf.* Annexe C, §C.1).

w_0 (μm)	270	275	280	285	290
$P_f^{FORM} \times 10^2$	13.47	10.61	7.53	5.33	3.97
$P_f^{SORM} \times 10^2$	13.44	10.46	7.48	5.02	3.72
$P_f^{S} \times 10^2$	10.27	7.59	5.52	3.93	2.69

Tableau 4.6 – Valeurs de P_f^{FORM}, P_f^{SORM} et P_f^{S} pour chacune des valeurs choisies du seuil de défaillance w_0

L'estimation de P_f à l'aide de cette méthode de référence a été effectuée en utilisant $N = 10^4$ réalisations simulées $\boldsymbol{x}^j = \boldsymbol{X}(w_j)$, $w_j \in \Omega$, $1 \leq j \leq 10^4$, du vecteur $\boldsymbol{X}$, et a donc nécessité $N = 10^4$ appels au modèle éléments finis (dans cette méthode la fonction d'état limite Γ doit en effet être évaluée en chaque point simulé $\boldsymbol{x}^j$). D'où une procédure très coûteuse en temps calcul (plusieurs jours pour une estimation !).

C'est pourquoi nous avons également eu recours à deux méthodes de Monte-Carlo plus performantes, toutes deux très utilisées au plan international. L'une est basée sur une technique d'échantillonnage d'importance, l'autre sur une technique de simulation directionnelle (*cf.* Annexe C, §C.2, §C.3). Testées sur cet exemple, elles se sont effectivement révélées très efficaces. A titre illustratif, le tableau 4.7 compare,

dans la cas $w_0 = 280\ \mu m$, le nombre d'appels au modèle éléments finis nécessaire à chacune d'elles pour fournir la même probabilité de défaillance que celle donnée par la méthode de Monte-Carlo standard utilisée avec 10^4 appels au modèle éléments finis.

Méthode de Monte-Carlo utilisée	Nombre d'appels au modèle *EF*
Méthode standard	10000
Méthode basée sur l'échantillonnage d'importance	1000
Méthode basée sur la simulation directionnelle	297

Tableau 4.7 – Nombres d'appels au modèle éléments finis (*EF*) nécessaires aux méthodes de Monte-Carlo basées sur l'échantillonnage d'importance et la simulation directionnelle pour fournir la même valeur de P_f que la valeur cible donnée par la méthode de Monte-Carlo standard et obtenue avec 10^4 appels au modèle *EF* (exemple correspondant à la valeur $w_0 = 280\ \mu m$ du seuil de défaillance)

Nous pouvons voir que le gain est très appréciable, avec un net avantage pour la méthode basée sur la simulation directionnelle, respectivement trente fois et trois fois plus rapide que la méthode standard et celle basée sur l'échantillonnage d'importance.

Le tableau 4.6 compare quant à lui, pour les différentes valeurs considérées du seuil w_0, les probabilités P_f^{FORM} et P_f^{SORM} à la probabilité cible fournie par la méthode de Monte-Carlo standard, notée P_f^S par référence à son qualificatif de « standard ». Il est clair, à la vue de ces résultats, que ni P_f^{FORM}, ni P_f^{SORM} ne constitue une bonne approximation de P_f. Ceci tient à l'évidence à l'incapacité des approximations locales Σ^{FORM} et Σ^{SORM} de la courbe d'état limite Σ (*cf.* **Figure** 3.1) à représenter convenablement cette dernière dans un voisinage suffisamment grand du point de fonctionnement M^*. On peut également constater que, en toute logique, l'approximation P_f^{SORM} est meilleure que l'approximation P_f^{FORM}, mais de très peu ici.

4.3 Analyse de sensibilité fiabiliste locale

4.3.1 Facteurs d'importance des paramètres aléatoires

L'objet de cette application est de quantifier, via leurs facteurs d'importance $\alpha^2_{Y_1}$ et $\alpha^2_{Y_2}$, l'impact des paramètres aléatoires Y_1 et Y_2 sur la marge de sécurité aléatoire du système et d'en déduire ainsi le plus influent sur la fiabilité de ce dernier.

A cette fin, la situation considérée est celle du paragraphe 4.2.1, avec les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{gathered} m_{Y_1} = 1000\ MPa \quad , \quad c_{Y_1} = 0.10 \\ m_{Y_2} = 0.3 \quad , \quad c_{Y_2} = 0.10 \\ w_0 = 280\ \mu m \end{gathered} \tag{4.8}$$

Avant d'exposer les résultats numériques obtenus, rappelons la signification des facteurs d'importance α_{Y_1} et α_{Y_2}. Par cela, introduisons la *v.a.* réelle U telle que :

$$U = F\left(\boldsymbol{Y}\right) \tag{4.9}$$

où F est la fonction d'état limite définie par (2.23). Cette *v.a.* est le modèle probabiliste de la marge de sécurité déterministe u définie par (2.22) et est appelée, pour cette raison, *marge de sécurité aléatoire*. D'après (3.20), elle se réécrit :

$$U = \Gamma\left(\boldsymbol{X}\right) \tag{4.10}$$

avec, d'après (3.22) :

$$\Gamma = F \circ \boldsymbol{T} \tag{4.11}$$

Soit U^{FORM} la *v.a.* réelle telle que :

$$U^{FORM} = \Gamma^{AT1}(\boldsymbol{X}) \tag{4.12}$$

où Γ^{AT1} est l'approximation de Taylor du premier ordre de Γ au point de fonctionnement M^*, telle que, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$:

$$\Gamma^{AT1}(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)\ ,\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \rangle_2 = -\langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)\ ,\ \boldsymbol{x}^* \rangle_2 + \langle \nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)\ ,\ \boldsymbol{x} \rangle_2 \tag{4.13}$$

et qui se réécrit, d'après (3.33) :

$$\Gamma^{AT1}(\boldsymbol{x}) = a\,(\beta_{HL} - \langle \boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{x} \rangle_2) \tag{4.14}$$

avec :

$$a = \|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)\|_2 \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{n} = -\frac{\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)}{\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)\|_2} = -\frac{\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*)}{a} \tag{4.16}$$

où $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)^T$ est la normale unitaire rentrante en M^* à la frontière Σ du domaine de défaillance Δ_f (*cf.* **Figure** 3.1).

On a donc :

$$U^{FORM} = a\,(\beta_{HL} - \langle \boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{X} \rangle_2) = a\,(\beta_{HL} - n_1 X_1 - n_2 X_2) \tag{4.17}$$

et cette *v.a.* est appelée *approximation FORM de U* (d'où la notation utilisée).

Un calcul élémentaire montre que sa moyenne $m_{U^{FORM}} = \mathbb{E}[U^{FORM}]$ et sa variance $\sigma^2_{U^{FORM}} = \mathbb{E}[(U^{FORM} - m_{U^{FORM}})^2]$ ont pour expressions :

$$m_{U^{FORM}} = a\beta_{HL} \tag{4.18}$$

$$\sigma^2_{U^{FORM}} = a^2 \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle_2 = a^2 \|\boldsymbol{n}\|_2^2 = a^2 \left(n_1^2 + n_2^2\right) = a^2 \tag{4.19}$$

desquelles on tire :

$$\frac{m_{U^{FORM}}}{\sigma_{U^{FORM}}} = \beta_{HL} \tag{4.20}$$

D'où au passage une autre définition possible de l'indice β_{HL} : c'est le rapport entre la moyenne et l'écart-type de l'approximation FORM de la marge de sécurité aléatoire U.

Les coefficients $\alpha_{X_1} = n_1^2$ et $\alpha_{X_2} = n_2^2$, tels que $\alpha_{X_1} + \alpha_{X_2} = 1$, sont appelés les *coefficients d'importance* de X_1 et X_2 respectivement. Ils quantifient la proportion de l'impact de chacune de ces *v.a.* sur la variance de l'approximation U^{FORM} de U et donc sur la fiabilité du système mesurée par β_{HL}.

D'après (3.20) et (3.26), la relation (4.17) peut se réécrire :

$$U^{FORM} = a\left(\beta_{HL} - \left\langle \boldsymbol{n}\ ,\ \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{Y}) \right\rangle_2\right) = a\left(\beta_{HL} - n_1 t_1^{-1}(Y_1) - n_2 t_2^{-1}(Y_2)\right) \tag{4.21}$$

et on peut retrouver sans difficulté les relations (4.18) et (4.19) à partir de cette nouvelle expression de U^{FORM}.

Considérons à nouveau la relation (4.19). Celle-ci peut se réécrire :

$$\sigma^2_{U^{FORM}} = a^2\lambda^2\left(v_1^2\sigma^2_{Y_1} + v_2^2\sigma^2_{Y_2}\right) \tag{4.22}$$

avec :

$$\lambda^2 = \frac{n_1^2}{\sigma_{Y_1}^2} + \frac{n_2^2}{\sigma_{Y_2}^2} \tag{4.23}$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{n_1^2}{\lambda^2 \sigma_{Y_1}^2} \quad , \quad \upsilon_2^2 = \frac{n_2^2}{\lambda^2 \sigma_{Y_2}^2} \tag{4.24}$$

$$\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = 1 \tag{4.25}$$

Les coefficients $\alpha_{Y_1} = \upsilon_1^2$ et $\alpha_{Y_2} = \upsilon_2^2$, tels que $\alpha_{Y_1} + \alpha_{Y_2} = 1$, sont appelés les *coefficients d'importance* de Y_1 et Y_2 respectivement. Ils quantifient la proportion de l'impact de chacune de ces *v.a.* sur la variance de l'approximation U^{FORM} de U et par conséquent sur la fiabilité du système mesurée à travers l'indice β_{HL}.

Le tableau 4.8 répertorie les valeurs obtenues pour ces coefficients dans les trois situations considérées (Y_1 et Y_2 uniformes et indépendantes, puis gaussiennes tronquées et indépendantes, puis lognormales tronquées et indépendantes).

Facteurs d'importance	Y_1 et Y_2 uniformes	Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées	Y_1 et Y_2 lognormales tronquées
α_{Y_1}	$\approx 0\%$	$\approx 0\%$	$\approx 0\%$
α_{Y_2}	$\approx 100\%$	$\approx 100\%$	$\approx 100\%$

Tableau 4.8 – Facteurs d'importance des paramètres aléatoires Y_1 et Y_2 pour les trois cas de loi considérés : uniformes, gaussiennes tronquées, lognormales tronquées

Nous pouvons constater que dans chacune de ces situations, le paramètre dominant quant à son impact sur la fiabilité du système est la *v.a.* Y_2, c'est-à-dire le coefficient de frottement entre la tige fémorale et l'os spongieux. Et cette prédominance est très importante puisqu'elle atteint quasiment 100% dans les trois cas. Ce résultat corrobore ceux observés dans les applications précédentes.

A titre d'indication, nous avons fait figurer dans le tableau 4.9 les valeurs des coefficients d'importance α_{X_1} et α_{X_2} relatif aux *v.a.* gaussiennes standards X_1 et X_2 liées aux *v.a.* Y_1 et Y_2 par les relations (*cf.* formule (3.26)) :

$$Y_1 = t_1(X_1) \;\Leftrightarrow\; X_1 = t_1^{-1}(Y_1) \tag{4.26}$$

$$Y_2 = t_2(X_2) \;\Leftrightarrow\; X_2 = t_2^{-1}(Y_2) \tag{4.27}$$

Facteurs d'importance	Y_1 et Y_2 uniformes	Y_1 et Y_2 gaussiennes tronquées	Y_1 et Y_2 lognormales tronquées
α_{X_1}	26.9%	43.2%	27%
α_{X_2}	73.1%	56.8%	73%

Tableau 4.9 – Facteurs d'importance des *v.a.* gaussiennes standards X_1 et X_2 pour les trois lois considérées de Y_1 et Y_2 : uniformes, gaussiennes tronquées, lognormales tronquées

Nous pouvons observer que la *v.a.* X_2 liée à Y_2 a un impact plus important sur la fiabilité que la *v.a.* X_1 liée à Y_1, ce qui est un résultat logique. Cette prédominance de X_2 sur X_1, que l'on observe comme dans le cas précédent pour les trois lois considérées, est toutefois moins importante que dans ce dernier cas, bien qu'assez marquée, notamment pour les lois uniformes et lognormales tronquées où elle atteint plus de 70%.

4.3.2 Sensibilité de β_{HL} aux caractéristiques des lois de Y_1 et Y_2

Du fait que la transformation $\boldsymbol{T}$ dépend de la loi du vecteur aléatoire $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$, la fonction d'état limite Γ, qui est définie à partir de cette transformation (*cf.* formule (3.22)), dépend des lois des *v.a.* Y_1 et Y_2, et notamment des caractéristiques statistiques de ces lois (moyennes, variances, supports).

Soit θ une telle caractéristique, supposée scalaire ici (donc θ sera l'une des caractéristiques : $m_{Y_j},\ \sigma_{Y_j},\ a_j,\ b_j,\ j \in 1, 2$).

On notera $\Gamma(\bullet;\theta)$ la dépendance de Γ par rapport à θ. On a :

$$\Gamma\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right)=0 \tag{4.28}$$

et du fait que la normale unitaire rentrante en M^* à la courbe d'état limite Σ est définie par :

$$\boldsymbol{n}=-\frac{\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*;\theta)}{\left\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*;\theta)\right\|_2} \tag{4.29}$$

on voit qu'elle dépend aussi de θ, comme en dépendent également le vecteur position $\boldsymbol{x}^*$ associé à M^* et l'indice de Hasofer-Lind β_{HL}, tel que :

$$\boldsymbol{x}^*=\beta_{HL}\boldsymbol{n} \tag{4.30}$$

et donc tel que :

$$\beta_{HL}=\left\langle\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{n}\right\rangle_2 \tag{4.31}$$

L'objet de cette application est alors de montrer comment se répercute sur β_{HL} une petite variation de θ autour de sa valeur initiale. Pour cela, nous nous placerons dans le cas où les *v.a.* (indépendantes) Y_1 et Y_2 sont uniformes, de caractéristiques respectives :

$$m_{Y_1}=1000\ MPa\ ,\ \sigma_{Y_1}=100\ MPa\quad ;\quad m_{Y_2}=0.3\ ,\ \sigma_{Y_2}=0.03 \tag{4.32}$$

et nous considèrerons successivement pour θ :

$$\theta=m_{Y_1}\ ,\ \theta=\sigma_{Y_1}\ ,\ \theta=m_{Y_2}\ ,\ \theta=\sigma_{Y_2} \tag{4.33}$$

Avant de donner les résultats de cette application, notons que la variation $\delta\beta_{HL}$ de β_{HL} due à une variation $\delta\theta$ de la caractéristique θ autour de sa valeur initiale, encore notée θ pour simplifier, est donnée par :

$$\delta\beta_{HL} = \frac{d\beta_{HL}}{d\theta}(\theta)\,\delta\theta \tag{4.34}$$

Pratiquement, le calcul de la dérivée $\frac{d\beta_{HL}}{d\theta}(\theta)$ est effectué en utilisant un schéma aux différences finies centrées :

$$\frac{d\beta_{HL}}{d\theta}(\theta) \approx \frac{\beta_{HL}(\theta+\Delta\theta) - \beta_{HL}(\theta-\Delta\theta)}{2\Delta\theta} \tag{4.35}$$

D'où l'approximation numérique correspondante de $\delta\beta_{HL}$:

$$\delta\beta_{HL} \approx \frac{\delta\theta}{2\Delta\theta}\left(\beta_{HL}(\theta+\Delta\theta) - \beta_{HL}(\theta-\Delta\theta)\right) \tag{4.36}$$

On voit ainsi que l'évaluation de cette grandeur nécessite deux calculs de l'indice de Hasofer-Lind.

Donnons deux autre formules permettant de calculer $\delta\beta_{HL}$. Pour les établir, partons de la relation (4.31) de laquelle nous tirons, par dérivation :

$$\frac{d\beta_{HL}}{d\theta} = \left\langle \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta}, \boldsymbol{n} \right\rangle_2 + \left\langle \boldsymbol{x}^*, \frac{d\boldsymbol{n}}{d\theta} \right\rangle_2 \tag{4.37}$$

soit,d'après (4.30) :

$$\frac{d\beta_{HL}}{d\theta} = \left\langle \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta}, \boldsymbol{n} \right\rangle_2 + \beta_{HL}\left\langle \boldsymbol{n}, \frac{d\boldsymbol{n}}{d\theta} \right\rangle_2 \tag{4.38}$$

Or, en dérivant l'égalité $\|\boldsymbol{n}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}\rangle_2 = 1$ par rapport à θ, il vient :

$$2\left\langle \boldsymbol{n}, \frac{d\boldsymbol{n}}{d\theta} \right\rangle_2 = 0 \tag{4.39}$$

D'où :

$$\frac{d\beta_{HL}}{d\theta} = \left\langle \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta}, \boldsymbol{n} \right\rangle_2 \tag{4.40}$$

Considérons maintenant la relation (4.28) et dérivons-la par rapport à θ. Il vient :

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = \left\langle \nabla\Gamma\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right), \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta} \right\rangle_2 + \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right) \tag{4.41}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right) = -\left\langle \nabla\Gamma\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right), \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta} \right\rangle_2 \tag{4.42}$$

soit, d'après (4.29) :

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right) = \left\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*;\theta)\right\|_2 \left\langle \boldsymbol{n}, \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta} \right\rangle_2 \tag{4.43}$$

En éliminant $\left\langle \boldsymbol{n}, \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta} \right\rangle_2$ $\left(= \left\langle \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta}, \boldsymbol{n} \right\rangle_2\right)$ entre (4.40) et (4.43), il vient alors :

$$\frac{d\beta_{HL}}{d\theta} = \frac{1}{\left\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*;\theta)\right\|_2} \frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{x}^*;\theta\right) \tag{4.44}$$

Portées dans (4.34), les expressions (4.40) et (4.44) de la dérivée $\frac{d\beta_{HL}}{d\theta}$ conduisent ainsi à deux nouvelles expressions de la variation $\delta\beta_{HL}$ de β_{HL} :

$$\delta\beta_{HL} = \left\langle \frac{d\boldsymbol{x}^*}{d\theta}, \boldsymbol{n} \right\rangle_2 \delta\theta \tag{4.45}$$

$$\delta\beta_{HL} = \frac{1}{\|\nabla\Gamma(\boldsymbol{x}^*;\theta)\|_2}\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}(\boldsymbol{x}^*;\theta)\,\delta\theta \tag{4.46}$$

où $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*(\theta)$ et $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\theta)$.

Dans (4.45) et (4.46), les dérivées doivent être calculées à l'aide d'un schéma aux différences finies (centrées ou décentrées).

Pour l'application considérée ici, nous avons utilisé l'approximation (4.36) de β_{HL}, avec $\delta\theta = 2\Delta\theta$. D'où :

$$\delta\beta_{HL} = \beta_{HL}(\theta + \Delta\theta) - \beta_{HL}(\theta - \Delta\theta) \tag{4.47}$$

Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 4.10.

θ	m_{Y_1} $(1000\ MPa)$	σ_{Y_1} $(100\ MPa)$	m_{Y_2} (0.3)	σ_{Y_2} (0.03)
$\Delta\theta$	$(100\ MPa)$	$(10\ MPa)$	(0.03)	(0.003)
$\delta\beta_{HL}$	0.7722	-0.0759	0.9434	-0.0995

Tableau 4.10 – Sensibilité de β_{HL} aux moyennes et aux écarts-types des paramètres incertains du système

Nous pouvons noter que l'indice β_{HL} est plus sensible à la moyenne et à l'écart-type de Y_2 qu'aux caractéristiques correspondantes de Y_1, ce qui confirme les résultats de toutes les applications précédentes. On peut également observer que pour chacune des *v.a.* Y_1 et Y_2 une variation positive de l'écart-type produit une variation négative de l'indice β_{HL}, résultat tout à fait conforme à la logique fiabiliste : lorsque la dispersion des paramètres incertains augmente, la fiabilité diminue.

Conclusions & Perspectives

Comme nous l'avons exposé au cours de ce mémoire, la modélisation mécano-probabiliste de la stabilité primaire des prothèses de hanches non cimentées nécessite la prise en compte de phénomènes complexes. Du point de vue mécanique, le problème à résoudre est celui du contact tridimensionnel avec frottement entre deux corps déformables : la tige fémorale et le fémur, lui-même constitué de deux matériaux, l'os cortical et l'os spongieux, de propriétés mécaniques très différentes. Du point de vue probabiliste, il s'agit de proposer une modélisation adaptée à la variabilité naturelle des caractéristiques des matériaux biologiques.

Confrontés à ce double problème, nous avons développé une méthodologie permettant de conduire une étude probabiliste et fiabiliste du système couplé « fémur-prothèse non cimentée ».

Tout d'abord, un modèle éléments finis suffisamment performant pour décrire le comportement mécanique du système couplé « os-prothèse non cimentée » a été développé et validé par comparaison avec des résultats expérimentaux issus d'expérimentations *in vitro*. Ce modèle mécano-numérique représente la prothèse DePuy Corail® dans les conditions d'expérimentations *in vitro* qui constituent le problème modèle étudié dans ce travail.

Ensuite, une analyse bibliographique nous a conduit à identifier les paramètres incertains, le coefficient de frottement à l'interface os-prothèse et le module d'Young de l'os spongieux fémoral, à prendre en compte dans la modélisation probabiliste. Une modélisation probabiliste par variables aléatoires de ces paramètres couplée au modèle éléments finis déterministe nous a permis de définir un modèle mécano-probabiliste complet.

Après avoir défini le déplacement relatif os-prothèse comme variable de contrôle de la stabilité primaire, nous avons proposé une analyse probabiliste de la propagation des incertitudes à travers ce modèle. Cette analyse s'appuie sur des outils de simulation numérique tels que la méthode de Monte-Carlo standard et la méthode de collocation stochastique. Les moments statistiques, densité de probabilité et fonction de répartition de la variable de contrôle ont été évalués à l'aide de ces outils montrant la supériorité de la méthode de collocation stochastique par rapport à la méthode Monte-Carlo standard pour ce type de calcul.

Nous avons ensuite utilisé le modèle mécano-probabiliste développé afin de mener des analyses fiabilistes du système couplé « fémur-prothèse non cimentée ». Cette partie a été complétée par une analyse de sensibilité fiabiliste dans le but de déterminer l'influence de la modélisation stochastique des paramètres d'entrée sur la réponse stochastique du modèle. Nous avons étudié les sensibilités de l'indice fiabiliste par rapport aux paramètres d'entrée et par rapport aux paramètres des lois, ainsi que celles de l'indice d'Hasofer-Lind β_{HL} par rapport au paramètre de la fonction de performance.

La méthodologie proposée a une double utilité. Elle permet d'une part, de quantifier en termes probabilistes l'effet des incertitudes sur la réponse du système via l'analyse probabiliste de la propagation des incertitudes et, d'autre part, sur le plan de la stabilité primaire, d'évaluer la fiabilité du système os-prothèse non cimentée par l'analyse fiabiliste et l'analyse de sensibilité fiabiliste.

De ce point de vue l'objectif initial du travail est atteint. Cependant, en l'état actuel, la modélisation développée présente plusieurs limites qui conduisent naturellement à dresser les perspectives de ce travail.

Premièrement, ce travail étant novateur dans le domaine, nous avons été amenés à faire plusieurs hypothèses importantes. Elles concernent tout d'abord les lois de comportement linéaires élastiques et isotropes utilisées pour décrire les propriétés mécaniques de l'os cortical et de l'os spongieux. De plus nous avons considérer l'invariance spatiale de ces lois de comportement au sein de chacune des deux parties de l'os. On peut imaginer améliorer le modèle déterministe en introduisant l'orthotropie dans les lois de comportement ainsi que la variation spatiale des propriétés élastiques. Ces deux points permettraient sans doute d'affiner les prédictions locales données par le modèle mais leur intégration se heurte à plusieurs difficultés majeures.

Tout d'abord il faudrait pouvoir exploiter les données issues des mesures par CT [1] qui permettent de déterminer la topologie géométrique de l'os et donnent indirectement une estimation des ses propriétés mécanique locales. Du point de vue probabiliste une telle modélisation nécessite de modéliser les propriétés mécaniques de l'os cortical comme un champ stochastique ce qui aurait pour conséquences d'augmenter énormément le temps de calcul nécessaire. De plus cela nécessiterait d'être capable d'identifier les caractéristiques probabilistes de champ à l'aide de mesures expérimentales ce qui semble très difficilement réalisable à l'heure actuelle.

En outre nous avons développé et illustré la méthodologie proposée dans le cas du problème modèle représentant les expérimentations *in vitro* de référence. L'application à un cas réel de prothèse *in vivo* requiert plusieurs modifications.

Concernant le chargement mécanique subi par la prothèse, certaines études ont révélé que, pour la plupart de patients, la montée des escaliers est un des gestes les plus critiques [Spears 00, Bergmann 01, Mann 02, Pancanti 03, Kassi 05]. Il est donc important d'étudier la stabilité primaire sous un chargement de torsion. En revanche, comment modéliser précisément ce chargement est une question ouverte [Bergmann 04]. La base de données **OrthoLoad** [2] mise en ligne par le Professeur Georg Bergmann qui permet d'analyser minutieusement des résultats expérimentaux *in vivo* concernant les chargements de l'articulation de hanche sera un outil important pour répondre à cette question.

D'après la théorie de la balance de Pauwels [Pauwels 77], la marche est constituée d'une activité alternée des membres inférieurs, caractérisée par une succession de doubles appuis et d'appuis unilatéraux et un maintien de l'équilibre dynamique. C'est la raison pour laquelle, les problèmes de charges-décharges, mais aussi les analyses de fatigue seront aussi essentielles pour mieux comprendre la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée [Westphal 06, Ploeg 09].

Nous avons choisi le déplacement relatif os-prothèse comme variable de contrôle de la stabilité primaire en référence à de nombreux travaux de la littérature comme ceux de Viceconti *et al.* 2000, Götze *et al.* 2002 ou encore Pancanti *et al.* 2003. [Viceconti 00, Götze 02, Pancanti 03]. D'autre choix comme par exemple la raideur de fixation proposée par Sakai [Sakai 06b] sont à envisager et à comparer.

1. *Computed Tomography*, en français, la tomodensitométrie (TDM) dite aussi tomographie axiale calculée par ordinateur (TACO), CT-scan ou simplement scanner, mis au point par la firme anglaise : EMI-Musical Industries.
2. www.orthoload.com

Enfin, le modèle développé dans cette étude a décrit une réalisation idéale respectant parfaitement l'implantation prédéfinie qui n'est pas toujours possible dans la pratique clinique.

Pour terminer il est important de souligner que la méthodologie appliquée au modèle mécano-probabiliste du système couplé « fémur-prothèse non cimentée » permet facilement la prise en compte d'un plus grand nombre de paramètres aléatoires d'entrée. Par exemple, l'influence des muscles et des ligaments au niveau de la hanche [Cristofolini 95, Duda 97, Duda 98, Bergmann 01, Stolk 01, Heller 05], de la dimension de la prothèse ainsi que celle du chargement mécanique peuvent d'ores et déjà être étudiées à l'aide des outils développés. La validité et la capacité opérationnelle de l'approche proposée ne sera pas compromise par l'augmentation du nombre de paramètres incertains, et elle reste applicable lorsque ces paramètres sont modélisés comme des processus aléatoires ou des champs aléatoires.

Annexe A

Expérimentations *in vitro*

Des essais expérimentaux ont été réalisés pour étudier la stabilité primaire de la prothèse de hanche non cimentée et disposer ainsi d'une dimension expérimentale permettant de valider le modèle éléments finis déterministe envisagé. Pour cela, Guillaume Demey, sous la direction du Docteur Tarik Aït Si Selmi, a mis en place ces expériences *in vitro*.

A.1 Spécimens d'expérimentation

A.1.1 Pièces anatomiques

Les corps humains frais soumis à un examen *post mortem* ont été sélectionnés suivant les disponibilités des pièces anatomiques, sans tenir compte ni du sexe, ni de l'âge, ni de la taille et ni du poids. L'âge moyen des donneurs était d'environ 81 ans (*cf.* **Tableau** A.1). Les critères d'exclusion étaient un antécédent chirurgical ou traumatologique de la hanche ou de la cuisse, les fractures du fémur lors de l'implantation de la prothèse et les défauts d'implantation de la tige.

Huit fémurs ont été prélevés selon une technique chirurgicale standardisée : Un abord latéral a été adopté en permettant la libération du fémur de toutes ses

Numéro de spécimen	Sexe	Âge	Taille d'implant
1	F	91	12
2	M	73	14
3	F	86	13
4	M	93	11
5	M	85	12
6	F	85	8
7	F	61	10
8	M	75	12
Âge moyen		81.125	

Tableau A.1 – Récapitulation des spécimens utilisés dans nos expérimentations

insertions musculaires. La capsule coxo-fémorale a été ensuite ouverte causant notamment la luxation de la hanche. Les muscles et les tissus mous ont été enlevés. La longueur de fémur, mesurée à partir du petit trochanter jusqu'à la partie distale de la diaphyse fémorale a été fixée à 250 mm, longueur suffisante pour permettre une bonne fixation du fémur dans les expérimentations suivantes.

A.1.2 Implants prothétiques

La tige fémorale DePuy Corail® [1] (*cf.* **Figure** A.1) standard sans collerette est un implant sans ciment à revêtement hydroxyapatite posé depuis vingt ans et de ce fait, un des implants non cimentés le plus posé à travers le monde [Vidalain 99].

Le revêtement en matériel poreux augmente la stabilité et les probabilités d'ostéointégration d'une prothèse [Kang 00, Svehla 00, Kawamura 01]. La macrostructure ZTT (*cf.* **Figure** A.2) accroît cette stabilité, car il transforme les forces de

1. DePuy Orthopaedics Inc., Johnson & Johnson Group, le deuxième fabricant mondial des prothèses, www.depuy.com



Figure A.1 – Tige fémorale DePuy Corail® standard sans collerette (Taille 12)

cisaillement en forces de compression [Lombardi 02]. Ainsi, une macrostructure associée à un revêtement d'hydroxyapatite favorise la stabilité primaire et secondaire [Tonino 00, Palm 02] en permettant une sollicitation de la structure osseuse environnante et, par conséquent, aidant à une bonne ostéointégration prothétique [Geesink 95, Onsten 98, Hayashi 99, Bodén 06, Panisello 09].



Figure A.2 – Macrostructure ZTT transforme les forces de cisaillement en forces de compression

A.1.3 Implantations

L'implantation des tiges fémorales est réalisée selon une technique chirurgicale habituellement utilisée *in vivo* et reproductible (*cf.* **Figure** A.3) :

- La hauteur de coupe du col fémoral, à compter du petit trochanter, est fixée à 10 *mm* (il s'agit de la hauteur habituelle pour une prothèse de hanche) mesurée en l'occurrence avec la règle millimétrique.
- La préparation de la cavité dans le fémur se fait avec les râpes adéquates, de taille progressivement croissante jusqu'à la taille de la prothèse prévue. La

râpe doit se bloquer en rotation et en enfoncement et, dès lors, s'effectue le fraisage du calcar avec la fraise appropriée.

– La mise en place de l'implant définitif DePuy Corail® standard (*cf.* **Figure** A.4) vient finaliser l'implantation.



Figure A.3 – Implantation de la prothèse de hanche non cimentée



Figure A.4 – Spécimens d'expérimentation

Des radiographies de face et de profil (*cf.* **Figure** A.5) pour chaque fémur implanté sont réalisées avant et après les manipulations. Elles permettent de vérifier la bonne mise en place des implants (mesure du valgus ou varus de la prothèse, de la hauteur de coupe du col fémoral).

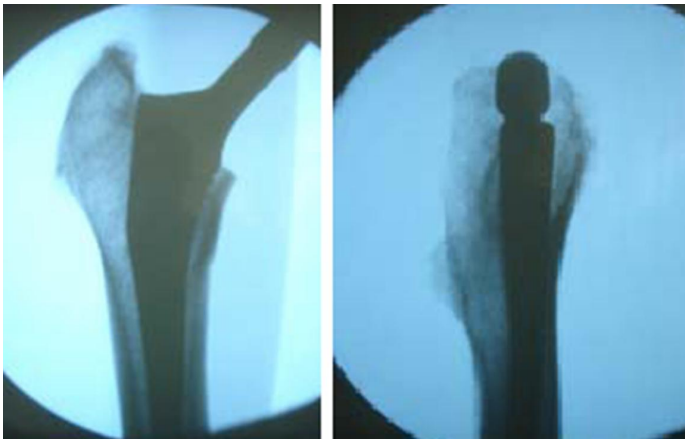


Figure A.5 – Clichés radiographiques à l'amplificateur de brillance (face et profil du spécimen)

A.2 Équipement d'expérimentation

La machine d'essai utilisée est une presse mécanique à direction de force verticale, de marque Zwick Roell® [2], de type ProLine®, couplée avec le logiciel **testXpert®**. Ce logiciel d'essai universel est proposé par la société Zwick dans le but de tester des matériaux, composants ou pièces fines. Sa plage d'utilisation couvre les machines d'essais traditionnelles de la gamme Zwick [3]. Les données techniques de la machine se trouvent à la fin de cette annexe (*cf.* **Figure** A.9 et **Figure** A.10).

A.3 Procédure d'expérimentation

La fixation du fémur (*cf.* **Figure** A.6) est réalisée dans une embase métallique cylindrique fixée elle même au socle de la presse par plusieurs cales. Un alliage de métal chauffé à 70 °C et se solidifiant par refroidissement est coulé dans l'embase métallique avec le fémur en place. Ce dernier est posé au fond du cylindre, la hauteur immergée étant de 110 mm.

2. Zwick Roell Group.
3. Machines de traction, compression, flexion et machines universelles.

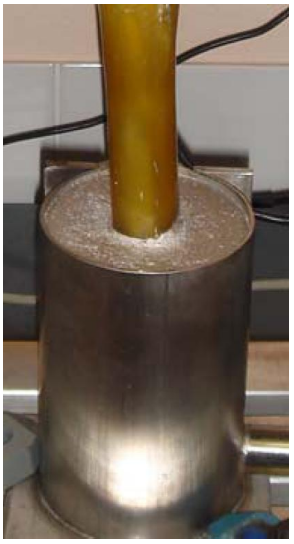


Figure A.6 – Fixation du fémur dans l'embase cylindrique

La position du fémur dans l'embase cylindrique reproduit la position *in vivo* du fémur en station debout avec une adduction de 20 degrés sur le plan frontal, une antéversion de 15 degrés sur le plan horizontal et une flexion/extension nulle sur le plan sagittal [Bühler 97] (*cf.* **Figure** A.7).

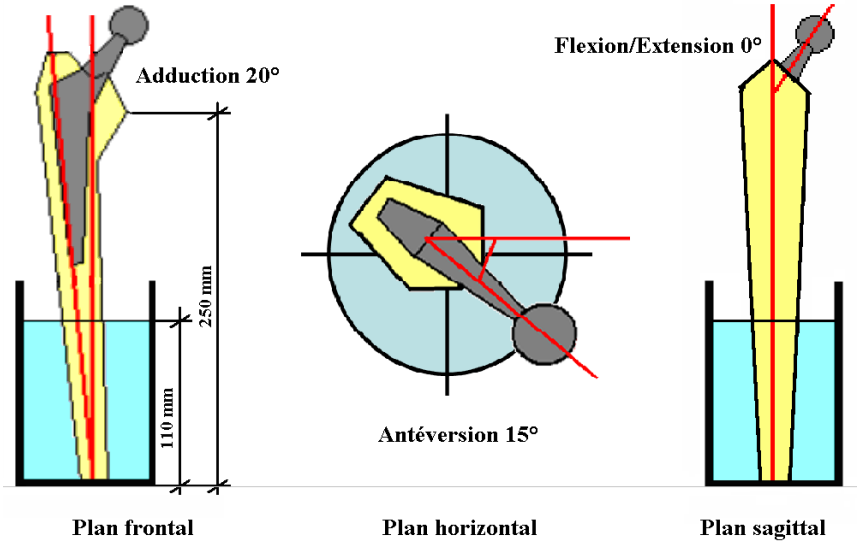


Figure A.7 – Positionnement du fémur dans l'embase cylindrique



Figure A.8 – Expérimentation en compression

La direction de la force appliquée par la machine d'essai est verticale pure (en compression) (*cf.* **Figure** A.8). L'expérimentation se conçoit en statique : la force débute à 200 N et devient croissante de façon linéaire de 20 N/s. La procédure du test est interrompue dès que se produit une fracture du fémur ou un descellement de la tige fémorale.

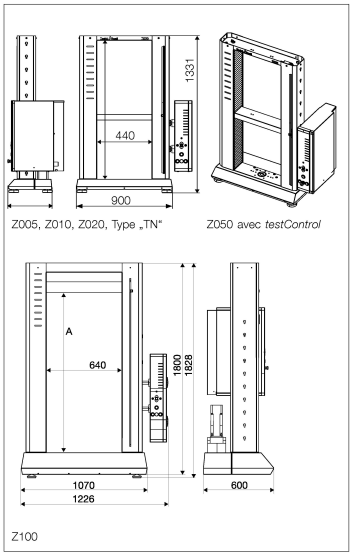
En l'absence de tels incidents, la force maximale appliquée est de 15000 N. Des capteurs électroniques situés sur la machine ProLine et reliés à un ordinateur permettent de relever la force exercée. Les données sont traitées par le logiciel **testXpert®** sous forme de graphe.

Zwick / Roell Systèmes d'essais

Information Produit

ProLine - Machine d'essais en version de table Z005 à Z100





Domaines d'application

Essais de fonctionnalités sur composants et essais simples de matériaux

Avantages / Caractéristiques

- Bâtis bi colonnes
- Robustesse de l'entraînement, également utilisable en production
- Guidage précis de la traverse, grâce à un axe linéaire rectifié, guidé par vis à billes
- Adaptation de la machine à de nombreuses applications, grâce à sa très large plage de mesure et de force
- Alternative avantageuse à des essais en grandes séries et pour des applications standards
- Simplicité d'utilisation
- Utilisée avec le logiciel testXpert®, *la ProLine offre une convivialité accrue et plus de fonctionnalités (cyclage, ...)*
- *Les Programmes Standard* testXpert® *pour la ProLine garantissent une utilisation intuitive, adaptée à l'application correspondante*
- Sur les machines d'essais Z005 à Z050, le branchement électrique est commutable sur 6 gammes de tension différentes
- Taux d'enregistrement interne 500 Hz
- Conforme CE
- Réglage en hauteur de l'espace de travail selon la table support (non inclue ou optionnelle) pour un plus grand confort de l'opérateur
- Délai de livraison : 2 à 3 semaines

PI 375 1.0107

Figure A.9 – Données techniques de la machine d'essai - I

Zwick / Roell Systèmes d'essais

Information Produit

ProLine - Machine d'essais en version de table Z005 à Z100

Type / Article										
										kN
Bâti de charge										
Force d'essai F_N en traction / compression	5	10	20	30	50	50	100	kN
Largeur de l'espace de travail	440	440	440	440	440	440	640	mm
Hauteur de l'espace de travail (dim. A) [2]	570	1070	1050	1370	1370	1370	1360	mm
Course maximale de la traverse mobile [2]	500	1000	980	1285	1285	1285	1275	mm
Hauteur	831	1331	1331	1744	1744	1744	1828	mm
Largeur	770	770	770	850	850	850	1070	mm
Largeur avec unité électronique	930	930	930	1010	1010	1021	1226	mm
Profondeur	356	356	356	433	433	433	600	mm
Profondeur avec unité électronique	437	437	437	495	495	516	600	mm
Poids total avec unité électronique	95	110	135	325	325	325	530	kg
Tenon de raccordement inférieur Ø (livré)	20	20	36	36	36	36	60	mm
Entraînement										
Vitesse de la traverse	0,001 ... 500	0,001 ...1000	0,001 ... 500	0,001 ... 300	0,001 180	0,0005 ... 600	0,0005 ... 300	mm/min
V_{min} ... V_{Nom}								
Précision de la vitesse sélectionnée	<0,0125	<0,0125	<0,0125	<0,0125	<0,0125	<0,0125	<0,0125	% dev_{Nom}
Résolution de l'entraînement	0,039	0,039	0,018	0,012	0,007	0,016	0,0081	µm
Reproductibilité de positionnement	± 2	± 2	± 2	± 2	±2	±2	± 2	µm
Alimentation électrique										
Branchement électrique réglable	100...109	100...109	100...109	100...109	100...109	100...109	230	V (PH,N,PE)
	110...119	110...119	110...119	110...119	110...119	110...119		V (PH,N,PE)
	120...129	120...129	120...129	120...129	120...129	120...129		V (PH,N,PE)
	200...219	200...219	200...219	200...219	200...219	200...219		V (PH,N,PE)
	220...239	220...239	220...239	220...239	220...239	220...239		V (PH,N,PE)
	240...250	240...250	240...250	240...250	240...250	240...250		V (PH,N,PE)
Fréquence réseau	50/60	50/60	50/60	50/60	50/60	50/60	50/60	50/60	Hz
Puissance installée	0,44	0,44	0,8	0,8	0,8	0,8	3	3	kVA
Électronique de mesure et commande *testControl* : plage de mesure jusqu'à 165 % de F_N, pour capteur de force Fmax 2,5 kN jusqu'à 130 % de F_N, résolution réelle en traction/compression 162.000 ... 912.000 points, taux d'enregistrement interne 500 Hz, taux de transmission des valeurs sur PC 100 Hz										

[2] sans outillage

Données générales relatives aux bâtis de charge

Couleur : RAL 7011 gris acier, RAL 3031 rouge orient

Température ambiante : + 10 ... + 35 °C, humidité de l'air (sans condensation) 20 ... 90 %

Electronique de mesure et de pilotage

Mesure de la force classe 0,5 / 1 selon capteur de force, conformément DIN EN ISO 7500-1 (DIN 51220, DIN 51302), ISO R147, ASTM E4, BS 1610 degré A, NF A 03-50. Correction automatique sélectionnable du point zéro en début mesure, signal de mesure en temps réel pour tous les canaux, Interface de sortie RS232, branchement du PC (mode PC): COM1

Données à température ambiante — Sous réserve de modifications techniques.

Figure A.10 – Données techniques de la machine d'essai - II

Annexe B

Caractérisations, représentations et simulations numériques de variables aléatoires scalaires : uniformes, gaussiennes standards, gaussiennes, gaussiennes tronquées, lognormales, lognormales tronquées

B.1 Préliminaires : Représentation & Simulation

Rappelons que par simuler une variable aléatoire ($v.a.$) Y (scalaire ici, mais tout ce qui suit se généralise sans difficulté à la dimension vectorielle) on entend classiquement construire un N-échantillon numérique $\{y^1, \cdots, y^N\}$ de réalisations

indépendantes de cette $v.a.$. Pour cela, on procède en trois étapes :

1) On cherche un entier $p \geq 1$ et une application $t : [0,1]^p \to \mathbb{R}$, tels que l'on puisse écrire :

$$Y = t(\boldsymbol{U}) \tag{B.1}$$

où $\boldsymbol{U} = (U_1, \cdots, U_p)^T$ est une $v.a.$ p-dimensionnelle uniforme sur $[0,1]^p$ (i.e. ses composantes $U_1, \cdots, U_p$ sont uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes dans leur ensemble).

2) On construit un N-échantillon numérique $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1,N}$ de réalisations indépendantes de $\boldsymbol{U}$.

3) On en déduit l'échantillon numérique cherché $\{y^j\}_{j=1,N}$ de Y en appliquant (B.1) à chaque réalisation $\boldsymbol{u}^j (1 \leq j \leq N)$ de $\boldsymbol{U}$ issue de l'étape précédente :

$$y^j = t\left(\boldsymbol{u}^j\right) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.2}$$

L'échantillon numérique $\{\boldsymbol{u}^j\}_{j=1,N}$ de l'étape 2 s'obtient en utilisant un générateur de nombres "pseudo-aléatoires". Il en existe de nombreux dans la littérature. L'un des plus récents, et probablement des plus utilisés à l'heure actuelle, est le Mersenne Twister [Matsumoto 98] qui est un générateur de type "registre à décalage à rétroaction" particulièrement réputé pour l'ensemble de ses qualités statistiques, sa rapidité d'exécution et la grandeur de sa période (égale au nombre premier de Mersenne : $2^{19937} - 1$).

Disposant d'un bon générateur de nombres pseudo-aléatoires, l'étape fondamentale de la méthode devient alors l'étape 1. En effet, si le générateur est de qualité, c'est du choix du couple (p, t) que va dépendre la qualité de l'échantillon simulé $\{y^j\}_{j=1,N}$. Bien entendu, ce choix n'est pas unique. Par exemple, dans tous les cas

(c'est-à-dire, quelle que soit la loi de Y), on peut prendre $p = 1$ et $t = F_Y^-$, où F_Y^- est l'inverse généralisée de la fonction de répartition F_Y de Y, telle que, $\forall u \in [0,1]$:

$$F_Y^-(u) = \sup\{y : F_Y(y) \leq u\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq u\} \tag{B.3}$$

et donc :

$$Y = F_Y^-(U) \tag{B.4}$$

avec U uniforme sur $[0,1]$.

Mais si Y est gaussienne, F_Y^- (qui coïncide alors avec l'inverse classique F_Y^{-1} de F_Y) n'admet pas une expression analytique explicite et il est alors préférable dans ce cas d'utiliser la relation de Box et Muller [Ditlevsen 96] :

$$Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \cos 2\pi U_2 \quad (\text{ou } Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \sin 2\pi U_2) \tag{B.5}$$

où U_1 et U_2 sont deux $v.a.$ indépendantes et uniformes sur $[0,1]$, et m_Y, σ_Y sont la moyenne et l'écart-type de Y.

Donc, dans ce cas $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ et t est l'application de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, $\forall \boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T \in [0,1]^2, t(\boldsymbol{u}) = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln u_1} \cos 2\pi u_2$ (ou $t(\boldsymbol{u}) = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln u_1} \sin 2\pi u_2$).

Il n'est pas toujours possible, toutefois, de trouver une application t possédant une expression analytique explicite. Dans ce cas, on peut toujours utiliser la relation (B.4) en calculant l'inverse numériquement (il existe de très bons algorithmes pour cela, notamment dans le cas gaussien [Wichura 88]).

On peut également, comme nous le verrons dans le cas gaussien tronqué, avoir recours à une méthode indirecte basée sur une technique d'acceptation-rejet.

Sur le plan de la terminologie, la relation (B.1) porte le nom de ***représentation*** **de** Y, d'où le nom d'***étape de représentation*** attribué à l'étape 1.

On notera que, d'après ce qui précède, une $v.a.$ peut posséder plusieurs représentations (par exemple les relations (B.4) et (B.5) pour une $v.a.$ gaussienne). L'étape 3 est, quant à elle, l'étape dite d'***échantillonnage numérique***. C'est cette dernière qui porte généralement le nom d'***algorithme de simulation***.

B.2 Variable aléatoire uniforme

B.2.1 Caractérisation probabiliste

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une $v.a.$ Y uniforme sur $[a, b]$ est une $v.a.$ dont la densité de probabilité, la fonction de répartition, la moyenne et l'écart-type s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(y) \;\; ; \;\; y \in \mathbb{R} \tag{B.6}$$

$$F_Y(y) = \frac{y-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \;\; ; \;\; y \in \mathbb{R} \tag{B.7}$$

$$m_Y = \frac{b+a}{2} \tag{B.8}$$

$$\sigma_Y = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \tag{B.9}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

B.2.2 Représentation

Soit U une $v.a.$ uniforme sur $[0,1]$. Alors Y admet la représentation :

$$Y = a + (b-a)U \tag{B.10}$$

B.2.3 Algorithme de simulation

D'après (B.10), l'algorithme s'écrit :

$$y^j = a + (b-a)u^j \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.11}$$

où $\{u^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de U.

Remarque

Comme le montrent (B.6) et (B.7), une $v.a.$ uniforme est complètement déterminée par la donnée de son support $[a,b]$.

Or, comme on peut le voir sur (B.8) et (B.9), la donnée de ce support détermine de manière unique la moyenne et l'écart-type de la $v.a.$. Une telle $v.a.$ est donc aussi entièrement caractérisée par la donnée de sa moyenne et de son écart-type. Ainsi, une $v.a.$ uniforme Y de moyenne m_Y et d'écart-type σ_Y est une $v.a.$ uniforme de support $[a,b]$, avec a et b donnés par :

$$a = m_Y - \sqrt{3}\sigma_Y \tag{B.12}$$

$$b = m_Y + \sqrt{3}\sigma_Y \tag{B.13}$$

relations tirées de (B.8) et (B.9) en résolvant ce système en le couple (a, b). En d'autres termes, il est équivalent de se donner une $v.a.$ uniforme par son support ou par sa moyenne et son écart-type : la donnée du premier fixe les deux autres et réciproquement.

B.3 Variable aléatoire gaussienne standard

B.3.1 Caractérisation probabiliste

Une $v.a.$ X gaussienne standard est une $v.a.$ dont la densité de probabilité et la fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) ; \ x \in \mathbb{R} \tag{B.14}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \ ; \ x \in \mathbb{R} \tag{B.15}$$

Une telle $v.a.$ a une moyenne nulle et un écart-type unité :

$$m_X = 0 \tag{B.16}$$

$$\sigma_X = 1 \tag{B.17}$$

B.3.2 Représentation

Soit $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ une $v.a.$ uniforme sur $[0, 1]^2$; donc U_1 et U_2 sont indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$. Alors, X admet la représentation :

$$X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos 2\pi U_2 \tag{B.18}$$

B.3.3 Algorithme de simulation

D'après (B.18), l'algorithme s'écrit :

$$x^j = \sqrt{-2\ln u_1^j}\cos 2\pi u_2^j \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.19}$$

où $\{\boldsymbol{u}^j = (u_1^j, u_2^j)^T\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la $v.a.$ $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ uniforme sur $[0,1]^2$.

Remarque

La relation (B.18) résulte d'un résultat bien connu dû à Box et Muller [Ditlevsen 96], stipulant que si U_1 et U_2 sont deux $v.a.$ uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes, alors les $v.a.$:

$$\begin{cases} \sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2 \\ \sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2 \end{cases} \tag{B.20}$$

sont gaussiennes standards et indépendantes.

On déduit de ce résultat que la $v.a.$ $\sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2$ peut également être choisie comme représentation de X, et dans ce cas l'algorithme de simulation s'écrit :

$$x^j = \sqrt{-2\ln u_1^j}\sin 2\pi u_2^j \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.21}$$

Mais on peut exploiter plus judicieusement un tel résultat pour la simulation. En effet, comme les deux $v.a.$ définies pas (B.20) sont deux représentations indépendantes de X, et comme U_1 et U_2, qui sont isonomes et indépendantes, peuvent être considérées comme des copies indépendantes d'une même $v.a.$ V uniforme sur $[0,1]$,

en passant aux réalisations dans (B.20) et en supposant N pair (hypothèse ne nuisant aucunement à la généralité car on peut toujours se ramener à cette situation), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x^{2k-1} & = & \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\cos 2\pi v^{2k} \\ x^{2k} & = & \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\sin 2\pi v^{2k} \end{array} \right. ; \ k = 1, \cdots, \tfrac{N}{2} \tag{B.22}$$

où $\{v^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la $v.a.$ V. L'intérêt d'un tel algorithme sur les algorithmes (B.19) et (B.21) est évident. En effet, ces derniers peuvent se réécrire, respectivement :

$$x^k = \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\cos 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{B.23}$$

$$x^k = \sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\sin 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{B.24}$$

où $\{v^j\}_{j=1,2N}$ est une $2N$-famille de réalisations indépendantes de la $v.a.$ uniforme V précédente.

Par conséquent, pour simuler N réalisations indépendantes de X, on voit qu'avec l'algorithme (B.22) il faudra simuler N réalisations indépendantes d'une $v.a.$ uniforme sur $[0,1]$, donc faire appel N fois au générateur de nombres pseudo-aléatoires, alors qu'avec les algorithmes (B.23) et (B.24) il faudra en simuler $2N$, donc faire appel $2N$ fois au générateur.

Rappelons, pour terminer, une représentation toujours possible de X, à savoir sa représentation standard :

$$X = \Phi^{-1}(V) \tag{B.25}$$

avec V uniforme sur $[0,1]$ et Φ donnée par (B.15), qui conduit à l'algorithme de simulation :

$$x^j = \Phi^{-1}(v^j) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.26}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

où $\{v^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de V.

Bien entendu, un tel algorithme ne sera efficace que si l'on dispose d'une procédure numérique performante (*i.e.* précise et rapide) pour le calcul de Φ^{-1}.

B.4 Variable aléatoire gaussienne

B.4.1 Caractérisation probabiliste

Une *v.a.* Y gaussienne de moyenne m_Y et d'écart-type σ_Y est une *v.a.* dont la densité de probabilité et la fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right) = \frac{1}{\sigma_Y}\varphi\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right);\ y \in \mathbb{R} \tag{B.27}$$

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(u-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right) du = \Phi\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right);\ y \in \mathbb{R} \tag{B.28}$$

avec φ et Φ données par (B.14) et (B.15).

Une telle *v.a.* peut s'écrire :

$$Y = m_Y + \sigma_Y X \tag{B.29}$$

où X est une *v.a.* gaussienne standard.

B.4.2 Représentation

Compte tenu de (B.29) et des résultats du paragraphe B.3, Y admet les représentations suivantes, qui ne sont pas uniques bien entendu :

$$Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \cos 2\pi U_2 \tag{B.30}$$

$$Y = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln U_1} \sin 2\pi U_2 \tag{B.31}$$

$$Y = m_Y + \sigma_Y \Phi^{-1}(V) \tag{B.32}$$

où $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ est une $v.a.$ uniforme sur $[0,1]^2$ et V une $v.a.$ uniforme sur $[0,1]$.

B.4.3 Algorithme de simulation

De (B.30), (B.31), (B.32) et des résultats du paragraphe précédent, on tire les quatre algorithmes suivants :

$$y^k = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \cos 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{B.33}$$

$$y^k = m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \sin 2\pi v^{2k} \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{B.34}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^{2k-1} & = & m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \cos 2\pi v^{2k} \\ y^{2k} & = & m_Y + \sigma_Y \sqrt{-2 \ln v^{2k-1}} \sin 2\pi v^{2k} \end{array} \right. ; k = 1, \cdots, \tfrac{N}{2} \tag{B.35}$$

$$y^k = m_Y + \sigma_Y \Phi^{-1}(v^k) \ ; \ k = 1, \cdots, N \tag{B.36}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Dans l'algorithme (B.35), N est supposé pair. Dans les algorithme (B.33) et (B.34), $\{v^j\}_{j=1,2N}$ est une $2N$-famille de réalisations indépendantes d'une $v.a.$ V uniforme sur $[0,1]$. Dans les algorithmes (B.35) et (B.36), $\{v^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la même $v.a.$.

Remarque

Comme habituellement, on notera : $Y \sim \mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ une $v.a.$ Y gaussienne de moyenne m_Y et de variance σ_Y^2. Une $v.a.$ X gaussienne standard sera alors naturellement notée : $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

B.5 Variable aléatoire gaussienne tronquée

B.5.1 Caractérisation probabiliste

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit S une $v.a.$ gaussienne de moyenne m et d'écart-type σ : $S \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Une $v.a.$ Y est dite suivre une loi gaussienne tronquée de souche S et de support $[a,b]$ si sa densité de probabilité et sa fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{p_S(y)}{F_S(b) - F_S(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.37}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_S(y) - F_S(a)}{F_S(b) - F_S(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.38}$$

où p_S et F_S sont respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de S :

$$p_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z-m}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{B.39}$$

$$F_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}\right) du = \Phi\left(\frac{z-m}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{B.40}$$

où φ et Φ sont données par (B.14) et (B.15).

Une telle $v.a.$ Y a pour moyenne et écart-type :

$$m_Y = m\left(1 - \frac{\frac{\sigma}{m}\left(\varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}\right) \tag{B.41}$$

$$\sigma_Y = \sigma\left(1 - \frac{\frac{b-m}{\sigma}\varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \frac{a-m}{\sigma}\varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)} - \left(\frac{\varphi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)}\right)^2\right)^{1/2} \tag{B.42}$$

Observons que si X est une $v.a.$ gaussienne standard, donc de fonction de répartition Φ, alors on a l'égalité en loi :

$$F_Y(Y) = \Phi(X) \tag{B.43}$$

avec Φ donnée par l'équation (B.15) et F_Y par l'équation (B.38).

De l'équation (B.43) on tire :

$$Y = F_Y^{-}\left(\Phi(X)\right) \tag{B.44}$$

où F_Y^{-} est l'inverse généralisé de F_Y, défini par :

$$F_Y^{-}(u) = \sup\left\{y : F_Y(y) \leq u\right\} = \inf\left\{y : F_Y(y) \geq u\right\} \ ; \ u \in [0,1] \tag{B.45}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

et qui vérifie, en particulier :

$$F_Y^-(1) = \sup\{y : F_Y(y) \leq 1\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq 1\} = b \tag{B.46}$$

$$F_Y^-(0) = \sup\{y : F_Y(y) \leq 0\} = \inf\{y : F_Y(y) \geq 0\} = a \tag{B.47}$$

Compte tenu des relations (B.38) et (B.40), (B.44) se réécrit alors, tous calculs faits :

$$Y = m + \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)\Phi(X)\right) \tag{B.48}$$

B.5.2 Représentation

La *v.a.* X étant gaussienne standard, $\Phi(X)$ est une *v.a.* uniforme sur $[0,1]$. Par suite, d'après l'équation (B.48), une représentation possible de Y est :

$$Y = m + \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)U\right) \tag{B.49}$$

avec U uniforme sur $[0,1]$.

B.5.3 Algorithme de simulation

L'algorithme le plus direct est celui basé sur l'équation (B.49) :

$$y^j = m + \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)u^j\right) \;;\; j = 1, \cdots, N \tag{B.50}$$

Une autre possibilité, et qui évite le calcul de Φ^{-1}, est d'utiliser l'algorithme d'acceptation-rejet suivant.

Soient U et Z deux $v.a.$ scalaires continues possédant les propriétés suivantes :

(a) elles sont indépendantes ;
(b) U est uniforme sur $[0,1]$;
(c) Z est facile à simuler ;
(d) le support de la densité de probabilité p_Z de Z contient celui $[a,b]$ de p_Y ;
(e) il existe un réel $M \geq 1$ tel que, $\forall y \in \mathbb{R}$: $p_Y(y) \leq M p_Z(y)$.

L'algorithme est alors organisé comme suit :

(1) soient z^k une réalisation de Z et u^k une réalisation de U ;
(2) on forme $\frac{p_Y(z^k)}{M p_Z(z^k)}$ et on fait le test : $u^k \leq \frac{p_Y(z^k)}{M p_Z(z^k)}$;
(3) si l'inégalité est vérifiée(acceptation), on pose : $y^k = z^k$;
(4) si l'inégalité n'est pas vérifiée (rejet), on retourne à l'étape (1).

L'algorithme est stoppé lorsque les N réalisations cherchées $\{y^j\}_{j=1,N}$ de Y sont obtenues.

On montre que la probabilité d'acceptation est de $1/M$. Par conséquent, lors du choix de la $v.a.$ Z, il faut veiller non seulement à ce que ses propriétés (c), (d) et (e) soient satisfaites, mais également à ce qu'elle soit telle que la valeur du rapport $1/M$ soit le plus proche possible de 1.

Un choix possible ici est le suivant : $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, donc $p_Z = p_S$, où p_S est la densité de probabilité gaussienne donnée par (B.39).

Avec un tel choix, la condition (e) conduit à : $M \geq \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)^{-1}$ et on peut alors prendre :

$$M = \frac{1}{\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)} \tag{B.51}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

avec une probabilité d'acceptation de $\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$ et donc de rejet de $1 - \left(\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right)$.

L'algorithme se réduit alors à :

(1) soit z^k une réalisation de Z ;
(2) on fait le test : $z^k \in [a, b]$;
(3) si le test est positif, on pose $y^k = z^k$;
(4) si le test est négatif, on retourne à l'étape (1).

Il ne nécessite ainsi que de savoir simuler une *v.a.* gaussienne de moyenne et écart-type donnés (la *v.a.* $Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$), ce que l'on sait faire sans difficulté (*cf.* §B.4.3).

Remarque

Un cas particulier important est celui où :

$$m = 0, \quad b > 0, \quad a = -b \tag{B.52}$$

Dans ce cas, les relations (B.37) à (B.40), (B.41), (B.42) et (B.48) à (B.50) deviennent :

$$p_Y(y) = \frac{p_S(y)}{F_S(b) - F_S(-b)} \mathbb{1}_{[-b,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.53}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_S(y) - F_S(-b)}{F_S(b) - F_S(-b)} \mathbb{1}_{[-b,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.54}$$

$$p_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{B.55}$$

$$F_S(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du = \Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{B.56}$$

$$m_Y = 0 \tag{B.57}$$

$$\sigma_Y = \sigma \left(1 - \frac{2\frac{b}{\sigma}\varphi\left(\frac{b}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)}\right)^{1/2} \tag{B.58}$$

$$Y = \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right)\Phi(X)\right) \tag{B.59}$$

$$Y = \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right)U\right) \tag{B.60}$$

$$y^j = \sigma\Phi^{-1}\left(\Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right) + \left(\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{b}{\sigma}\right)\right)u^j\right) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.61}$$

La *v.a.* Y est alors dite gaussienne tronquée centrée, d'écart-type σ_Y et de support $[-b, b]$.

B.6 Variable aléatoire lognormale

B.6.1 Caractérisation probabiliste

Une *v.a.* Y lognormale de moyenne m_Y et d'écart-type σ_Y est une *v.a.* dont la densité de probabilité et la fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) = \frac{1}{y\sigma}\varphi\left(\frac{\ln y - m}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.62}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} p_Y(u)du = \Phi\left(\frac{\ln y - m}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)\,;\ y \in \mathbb{R} \tag{B.63}$$

avec :

$$m = \ln\left(\frac{m_Y}{\sqrt{1+v_Y^2}}\right);\quad \sigma = \sqrt{\ln(1+v_Y^2)};\quad v_Y = \frac{\sigma_Y}{m_Y} \tag{B.64}$$

et où les fonctions φ et Φ sont données par (B.14) et (B.15). De plus, si X est une *v.a.* gaussienne standard (*i.e.* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$), alors Y satisfait l'égalité en loi :

$$Y = \exp(m + \sigma X) \tag{B.65}$$

avec m et σ donnés par (B.64).

B.6.2 Représentation

D'après (B.65) et en utilisant les résultats du paragraphe B.3, plusieurs représentations sont possibles. Citons les trois plus courantes :

$$Y = \exp(m + \sigma\sqrt{-2\ln U_1}\cos 2\pi U_2) \tag{B.66}$$

$$Y = \exp(m + \sigma\sqrt{-2\ln U_1}\sin 2\pi U_2) \tag{B.67}$$

$$Y = \exp(m + \sigma\Phi^{-1}(U)) \tag{B.68}$$

où dans (B.68), la *v.a.* U est uniforme sur $[0,1]$ et dans (B.66) et (B.67) les *v.a.* U_1 et U_2 sont uniformes sur $[0,1]$ et indépendantes.

B.6.3 Algorithme de simulation

En nous appuyant à nouveau sur les résultats du paragraphe B.3 et en tenant compte de (B.66), (B.67) et (B.68), nous pouvons exhiber quatre algorithmes :

$$y^k = \exp\left(m + \sigma\sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\cos 2\pi v^{2k}\right);\ k = 1, \cdots, N \tag{B.69}$$

$$y^k = \exp\left(m + \sigma\sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\sin 2\pi v^{2k}\right);\ k = 1, \cdots, N \tag{B.70}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^{2k-1} & = & \exp\left(m + \sigma\sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\cos 2\pi v^{2k}\right) \\ y^{2k} & = & \exp\left(m + \sigma\sqrt{-2\ln v^{2k-1}}\sin 2\pi v^{2k}\right) \end{array}\right. ;\ k = 1, \cdots, \tfrac{N}{2} \tag{B.71}$$

$$y^k = \exp\left(m + \sigma\Phi^{-1}(v^k)\right);\ k = 1, \cdots, N \tag{B.72}$$

où dans (B.71), N est pair, dans (B.69) et (B.70), $\{v^j\}_{j=1,2N}$ est une $2N$-famille de réalisations indépendantes d'une *v.a.* V uniforme sur $[0,1]$ et dans (B.71) et (B.72), $\{v^j\}_{j=1,N}$ est une N-famille de réalisations indépendantes de la même *v.a.*.

Remarque

Comme habituellement, on notera : $Y \sim \mathcal{LN}(m_Y, \sigma_Y^2)$, une *v.a.* Y lognormale de moyenne m_Y et de variance σ_Y^2.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

B.7 Variable aléatoire lognormale tronquée

B.7.1 Caractérisation probabiliste

Soient a et b deux réels positifs tels que $a < b$ et soit $\mathcal{L}$ une $v.a.$ lognormale de moyenne μ et d'écart-type s : $\mathcal{L} \sim \mathcal{LN}(\mu, s^2)$. Une telle $v.a.$ a donc pour densité de probabilité et fonction de répartition, respectivement :

$$p_{\mathcal{L}}(z) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln z - m)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) = \frac{1}{z\sigma}\varphi\left(\frac{\ln z - m}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{B.73}$$

$$F_{\mathcal{L}}(z) = \int_{-\infty}^{z} p_{\mathcal{L}}(u)du = \Phi\left(\frac{\ln z - m}{\sigma}\right) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z) \ ; \ z \in \mathbb{R} \tag{B.74}$$

avec φ et Φ données par (B.14) et (B.15), et m et σ par :

$$m = \ln\left(\frac{\mu}{\sqrt{1+v^2}}\right) \ ; \ \sigma = \sqrt{\ln(1+v^2)} \ ; \ v = \frac{s}{\mu} \tag{B.75}$$

De plus, elle vérifie l'égalité en loi :

$$\mathcal{L} = \exp(m + \sigma X) \tag{B.76}$$

où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Une $v.a.$ Y est alors dite suivre une loi lognormale tronquée de souche $\mathcal{L}$ et de support $[a,b]$ si sa densité de probabilité et sa fonction de répartition s'écrivent, respectivement :

$$p_Y(y) = \frac{p_{\mathcal{L}}(y)}{F_{\mathcal{L}}(b) - F_{\mathcal{L}}(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.77}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_{\mathcal{L}}(y) - F_{\mathcal{L}}(a)}{F_{\mathcal{L}}(b) - F_{\mathcal{L}}(a)} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.78}$$

avec $p_{\mathcal{L}}$ et $F_{\mathcal{L}}$ données par (B.73) et (B.74).

Une telle $v.a.$ a pour moyenne et coefficient de variation :

$$m_Y = \mu(B_1 - A_1)(B_0 - A_0)^{-1} \tag{B.79}$$

$$v_Y = \sqrt{(1+v^2)(B_0 - A_0)(B_2 - A_2)(B_1 - A_1)^{-2} - 1} \tag{B.80}$$

avec :

$$A_0 = \Phi\left(\frac{\ln a - m}{\sigma}\right), \quad B_0 = \Phi\left(\frac{\ln b - m}{\sigma}\right) \tag{B.81}$$

$$A_1 = \Phi\left(\frac{\ln a - m}{\sigma} - \sigma\right), \quad B_1 = \Phi\left(\frac{\ln b - m}{\sigma} - \sigma\right) \tag{B.82}$$

$$A_2 = \Phi\left(\frac{\ln a - m}{\sigma} - 2\sigma\right), \quad B_2 = \Phi\left(\frac{\ln b - m}{\sigma} - 2\sigma\right) \tag{B.83}$$

où m, σ et v sont donnés par (B.75).

De plus, de l'égalité en loi :

$$F_Y(Y) = \Phi(X) \tag{B.84}$$

avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et F_X donnée par (B.78), on tire :

$$Y = \exp\left(m + \sigma\Phi^{-1}\left(A_0 + (B_0 - A_0)\,\Phi\left(X\right)\right)\right) \tag{B.85}$$

avec A_0 et B_0 donnés par (B.81).

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

B.7.2 Représentation

La *v.a.* X dans (B.85) étant gaussienne standard, $\Phi(X)$ est uniforme sur $[0,1]$. Par suite, d'après la relation (B.85), une représentation possible de Y est :

$$Y = \exp\left(m + \sigma\Phi^{-1}\left(A_0 + (B_0 - A_0)\,U\right)\right) \tag{B.86}$$

avec U uniforme sur $[0,1]$.

B.7.3 Algorithme de simulation

L'algorithme le plus direct est celui basé sur la représentation (B.86) :

$$y^j = \exp\left(m + \sigma\Phi^{-1}\left(A_0 + (B_0 - A_0)\,u^j\right)\right) \;;\; j = 1, \cdots, N \tag{B.87}$$

avec $\{u^j\}_{j=1,N}$, un N-échantillon de réalisations simulées de U.

Mais on peut également, comme au paragraphe (B.5.3), utiliser un algorithme de type acceptation-rejet.

Soient U et Z deux *v.a.* scalaires, vérifiant les propriétés suivantes :

(a) elles sont indépendantes ;
(b) U est uniforme sur $[0,1]$;
(c) Z est facile à simuler ;
(d) le support de la densité de probabilité p_Z de Z contient celui $[a,b]$ de p_Y ;
(e) il existe un réel $M \geq 1$ tel que, $\forall y \in \mathbb{R}$: $p_Y(y) \leq M p_Z(y)$.

L'algorithme fonctionne alors comme suit :

(1) soient z^k une réalisation de Z et u^k une réalisation de U ;
(2) on forme $\frac{p_Y(z^k)}{Mp_Z(z^k)}$ et on fait le test : $u^k \leq \frac{p_Y(z^k)}{Mp_Z(z^k)}$;
(3) si l'inégalité est vérifiée (acceptation), on pose : $y^k = z^k$;
(4) si l'inégalité n'est pas vérifiée (rejet), on retourne à l'étape (1).

L'algorithme est stoppé lorsque les N réalisations cherchées $\{y^j\}_{j=1,N}$ de Y ont été obtenues.

La probabilité d'acceptation est de $1/M$. Par conséquent, le choix de la *v.a.* Z doit être guidé non seulement par la vérification des propriétés (c), (d) et (e), mais également par la nécessité d'obtenir un rapport $1/M$ proche de 1.

Un choix possible ici est le suivant : $Z \sim \mathcal{LN}(\mu, s^2)$, donc $p_Z = p_{\mathcal{L}}$, où $p_{\mathcal{L}}$ est la densité de probabilité lognormale donnée par (B.73).

Avec ce choix, la condition (e) conduit à : $M \geq (B_0 - A_0)^{-1}$, avec A_0 et B_0 donnés par (B.81). On peut alors prendre :

$$M = \frac{1}{B_0 - A_0} \tag{B.88}$$

avec une probabilité d'acceptation de $B_0 - A_0$, et donc de rejet de $1 - (B_0 - A_0)$. Par suite, l'algorithme se ramène à :

(1) soit z^k une réalisation de Z ;
(2) on fait le test : $z^k \in [a, b]$;
(3) si le test est positif, on pose $y^k = z^k$;
(4) si le test est négatif, on retourne à l'étape (1).

Il nécessite donc seulement de savoir simuler une *v.a.* lognormale de moyenne et écart-type donnés (la *v.a.* $Z \sim \mathcal{LN}(\mu, s^2)$), ce que l'on sait faire sans difficulté (*cf.* §B.6.3).

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Remarque

Un cas particulier important est celui où :

$$a = 0 \tag{B.89}$$

Dans ce cas :

$$A_0 = A_1 = A_2 = 0 \tag{B.90}$$

et les relations (B.77) à (B.80) et (B.85) à (B.87) deviennent :

$$p_Y(y) = B_0^{-1} p_{\mathcal{L}}(y) \mathbb{1}_{[0,b]}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.91}$$

$$F_Y(y) = B_0^{-1} F_{\mathcal{L}}(y) \mathbb{1}_{[0,b]}(y) + \mathbb{1}_{]b,+\infty[}(y) \ ; \ y \in \mathbb{R} \tag{B.92}$$

$$m_Y = \mu B_1 B_0^{-1} \tag{B.93}$$

$$\upsilon_Y = \sqrt{(1+\upsilon^2) B_0 B_2 B_1^{-2} - 1} \tag{B.94}$$

$$Y = \exp\left(m + \sigma \Phi^{-1}\left(B_0 \Phi\left(X\right)\right)\right) \tag{B.95}$$

$$Y = \exp\left(m + \sigma \Phi^{-1}\left(B_0 U\right)\right) \tag{B.96}$$

$$y^j = \exp\left(m + \sigma \Phi^{-1}\left(B_0 u^j\right)\right) \ ; \ j = 1, \cdots, N \tag{B.97}$$

avec B_0,B_1 et B_2 donnés par (B.81), (B.82) et (B.83) respectivement.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Annexe C

Méthodes de Monte-Carlo utilisées pour le calcul de la probabilité de défaillance

Rappelons qu'il s'agit de calculer la probabilité :

$$P_f = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in \Delta_f\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\Delta_f}\left(\boldsymbol{x}\right) \varphi_2\left(\boldsymbol{x}\right) d\boldsymbol{x} \tag{C.1}$$

où $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ est un vecteur aléatoire gaussien standard bidimensionnel, φ_2 est sa densité de probabilité, telle que, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_2\left(\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \tag{C.2}$$

et Δ_f est le domaine défaillance défini par :

$$\Delta_f = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \Gamma(\boldsymbol{x}) \leq 0\right\} \tag{C.3}$$

avec Γ la fonction d'état-limite telle que $\Gamma(O) > 0$ (i.e. le point origine O n'appartient pas à Δ_f).

Pour cela, nous avons utilisé trois méthodes de Monte-Carlo dont nous allons brièvement rappeler le principe : la méthode standard (ou brute), la méthode basée sur l'échantillonnage d'importance et la méthode basée sur la simulation directionnelle [Ditlevsen 96, Fishman 96, Rubinstein 08].

C.1 Méthode standard (ou brute)

Cette méthode est basée sur le fait que (C.1) n'est autre que l'écriture explicite de la relation :

$$P_f = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X})\right] \tag{C.4}$$

où $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ est un vecteur aléatoire gaussien standard bidimensionnel.

Par suite, un N-estimateur non biaisé $\hat{P}_f^N$ de P_f est obtenu par :

$$\hat{P}_f^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f}\left(\boldsymbol{X}^j\right) \tag{C.5}$$

où $(\boldsymbol{X}^j,\ 1 \leq j \leq N)$ est un N-échantillon de copies indépendantes de $\boldsymbol{X}$.

Pour obtenir une N-approximation P_f^N de P_f, il suffit alors de construire une réalisation de $\hat{P}_f^N$, laquelle s'obtient par :

$$P_f^N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f}\left(\boldsymbol{x}^j\right) \tag{C.6}$$

où $(\boldsymbol{x}^j,\ 1 \leq j \leq N)$ est une N-famille de réalisations indépendantes simulées du vecteur gaussien standard $\boldsymbol{X}$.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Soient, respectivement, m_N et σ_N^2 la moyenne et la variance de la *v.a.* $\hat{P}_f^N$. Un simple calcul montre que :

$$\begin{cases} m_N &= \mathbb{E}\left[\hat{P}_f^N\right] = P_f \\ \sigma_N^2 &= \mathbb{E}\left[\left(\hat{P}_f^N - m_N\right)^2\right] = \sigma^2/N \end{cases} \tag{C.7}$$

où σ^2 est la variance de la *v.a.* $\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X})$, qui a pour moyenne P_f d'après (C.4) :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X}) - P_f\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X})\right)^2\right] - P_f^2 \tag{C.8}$$

Or, $\mathbb{E}[\left(\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X})\right)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X})] = P_f$. D'où :

$$\sigma^2 = P_f\left(1 - P_f\right) \tag{C.9}$$

Cette variance n'est pas connue mais peut être estimée par :

$$S_N^2 = P_f^N\left(1 - P_f^N\right) \tag{C.10}$$

avec P_f^N donnée par (C.6).

Cette estimée n'est autre qu'une réalisation de l'estimateur $\hat{S}_N^2 = \hat{P}_f^N(1 - \hat{P}_f^N)$, où $\hat{P}_f^N$ est l'estimateur donné par (C.5).

Comme la *v.a.* $\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X})$ est de carré intégrable, sa variance σ^2 est finie et donc, d'après (C.7), $\sigma_N^2 \to 0$ quand $N \to +\infty$.

On peut alors montrer à partir de ce résultat que la suite de *v.a.* $(\hat{P}_f^N)_N$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}[\hat{P}_f^N] = P_f$.

On a donc, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(|\hat{P}_f^N - P_f| \geq \epsilon \right) = 0 \tag{C.11}$$

Par ailleurs, d'après le théorème central limite, puisque les *v.a.* $\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X}^1), \cdots, \mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{X}^N)$ sont mutuellement indépendantes et de même loi, la *v.a.* $\hat{P}_f^N$ définie par (C.5) suit approximativement, pour N suffisamment grand, une loi gaussienne de moyenne m_N et de variance σ_N^2 données par (C.7).

Par conséquent, la *v.a.* $(\hat{P}_f^N - P_f)/\sigma_N = \sqrt{N}(\hat{P}_f^N - P_f)/\sigma$ est approximativement distribuée suivant la loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit η_γ le γ-quantile de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, c'est-à-dire le réel tel que $\Phi(\eta_\gamma) = \gamma$, où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (par exemple, $\eta_\gamma = 1.645$ pour $\gamma = 0.95$). D'après ce qui précède, on a, pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\mathbb{P}\left(\hat{P}_f^N - \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq P_f \leq \hat{P}_f^N + \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right) \approx 1 - \alpha \tag{C.12}$$

Cette relation définit l'intervalle de confiance de P_f au niveau de confiance $P_c = 1 - \alpha$. Il est aléatoire et s'écrit :

$$\hat{I}_{1-\alpha}^N = \left[\hat{P}_f^N - \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \ , \ \hat{P}_f^N + \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right] \tag{C.13}$$

En remplaçant dans (C.13) l'estimateur $\hat{P}_f^N$ par sa réalisation P_f^N donnée par (C.6), on obtient la réalisation $I_{1-\alpha}^N$ de $\hat{I}_{1-\alpha}^N$ associée à la réalisation $(\boldsymbol{x}^j, 1 \leq j \leq N)$ de l'échantillon $(\boldsymbol{X}^j, 1 \leq j \leq N)$ de $\boldsymbol{X}$:

$$I_{1-\alpha}^N = \left[P_f^N - \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \ , \ P_f^N + \eta_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right] \tag{C.14}$$

Dans (C.13) et (C.14) l'écart-type σ, qui n'est pas connu, doit être remplacé par son estimée S_N donnée par (C.10).

L'erreur d'estimation est mesurée par l'écart-type d'échantillonnage σ_N donnée par (C.7). On peut donc voir qu'elle est en $O(1/\sqrt{N})$.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

C.2 Méthode basée sur l'échantillonnage d'importance

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$ dont le support contient le domaine de défaillance Δ_f. Elle ne s'annule donc pas sur Δ_f.

On peut alors écrire P_f sous la forme :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{x}) \frac{\varphi_2(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{C.15}$$

et par conséquent on a :

$$P_f = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{Y}) \frac{\varphi_2(\boldsymbol{Y})}{g(\boldsymbol{Y})}\right] \tag{C.16}$$

où $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ est un vecteur aléatoire bidimensionnel de densité de probabilité g.

Par suite, un N-estimateur non biaisé $\hat{P}_f^N$ de P_f est obtenu par :

$$\hat{P}_f^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f}\left(\boldsymbol{Y}^j\right) \frac{\varphi_2(\boldsymbol{Y}^j)}{g(\boldsymbol{Y}^j)} \tag{C.17}$$

où $(\boldsymbol{Y}^j, 1 \leq j \leq N)$ est un N-échantillon de copies indépendantes de $\boldsymbol{Y}$.

Une N-approximation P_f^N de P_f s'obtient alors en construisant une réalisation de la *v.a.* $\hat{P}_f^N$, laquelle est obtenue par :

$$P_f^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f}\left(\boldsymbol{y}^j\right) \frac{\varphi_2(\boldsymbol{y}^j)}{g(\boldsymbol{y}^j)} \tag{C.18}$$

où $(\boldsymbol{y}^j, 1 \leq j \leq N)$ est une N-famille de réalisations indépendantes de $\boldsymbol{Y}$.

Le rapport :

$$W(\boldsymbol{y}) = \frac{\varphi_2(\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y})} \tag{C.19}$$

est appelé le taux de vraisemblance. En introduisant ce rapport dans (C.16) il vient :

$$P_f = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{Y})W(\boldsymbol{Y})\right] \tag{C.20}$$

Par ailleurs, en remarquant que :

$$\mathbb{E}\left[W(\boldsymbol{Y})\right] = \int_{\mathbb{R}^2} W(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi_2(\boldsymbol{y})}{g(\boldsymbol{y})}g(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_2(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = 1$$

(C.20) peut se réécrire :

$$P_f = \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{Y})W(\boldsymbol{Y})\right]}{\mathbb{E}\left[W(\boldsymbol{Y})\right]} \tag{C.21}$$

Cette formule permet d'introduire un nouvel N-estimateur pour P_f :

$$\hat{\mathcal{P}}_f^N = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{Y}^j)W(\boldsymbol{Y}^j)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} W(\boldsymbol{Y}^j)} \tag{C.22}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

et par suite une nouvelle N-approximation $\mathcal{P}_f^N$ de cette probabilité :

$$\mathcal{P}_f^N = \frac{\sum_{j=1}^{N} w_j \mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{y}^j)}{\sum_{j=1}^{N} w_j} \tag{C.23}$$

où nous avons posé :

$$w_j = W(\boldsymbol{y}^j) = \frac{\varphi_2(\boldsymbol{y}^j)}{g(\boldsymbol{y}^j)} \tag{C.24}$$

et où $(\boldsymbol{y}^j, 1 \leq j \leq N)$ est une N-famille de réalisations indépendantes de $\boldsymbol{Y}$.

Si la densité g est bien choisie, on montre que les approximations (C.18) et (C.23) sont de meilleure qualité que l'approximation (C.6) (car alors les variances des estimateurs (C.17) et (C.22) sont plus petites que la variance de l'estimateur (C.5)).

Par ailleurs, en général (mais ce n'est pas une règle absolue) l'approximation pondérée (C.23) est meilleure que l'approximation (C.18).

On notera en outre que, contrairement à l'estimateur (C.17), l'estimateur (C.22) est biaisé. Toutefois ce biais, qui dépend de N, s'évanouit très vite lorsque N croît.

Notons enfin que le choix de la densité g doit obéir à un critère fondamental : celui de minimiser la variance de l'estimateur. Un choix courant dans notre cas est d'opter pour une densité de probabilité gaussienne de matrice de covariance unité et centrée au point de fonctionnement M^*. Mais, bien entendu, bien d'autres choix sont possibles en fonction de la forme géométrique de Δ_f.

C.3 Méthode basée sur la simulation directionnelle

Cette méthode est fondée sur l'idée de factoriser la probabilité de défaillance comme suit :

$$P_f = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in \Delta_f\right) = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in \Delta_f / \boldsymbol{X} \in D^c\right) \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in D^c\right) \tag{C.25}$$

où D^c est le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ du disque D de $\mathbb{R}^2$, d'origine O et de rayon β_{HL} (donc D est tangent à Δ_f en M^*) :

$$D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||\boldsymbol{x}||_2 \leq \beta_{HL}\right\} \quad , \quad D^c = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||\boldsymbol{x}||_2 > \beta_{HL}\right\} = \mathbb{R}^2 \backslash D \tag{C.26}$$

On est ainsi conduit à calculer deux probabilités :

$$P_1 = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in \Delta_f / \boldsymbol{X} \in D^c\right) \tag{C.27}$$

$$P_2 = \mathbb{P}\left(\boldsymbol{X} \in D^c\right) \tag{C.28}$$

dont on remarquera que chacune est nécessairement plus grande que P_f, puisque leur produit est égal à P_f : c'est la première raison du choix de la factorisation (C.25).

Or, comme $\boldsymbol{X}$ est gaussien standard sur $\mathbb{R}^2$, P_2 n'est autre que la mesure gaussienne canonique de D^c et on sait calculer exactement cette probabilité : c'est la deuxième raison du choix de la factorisation (C.25).

On montre en effet que :

$$P_2 = e^{-\beta_{HL}^2/2} \tag{C.29}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Pour le calcul de P_1, on utilise une méthode de Monte-Carlo conditionnelle dont le principe est le suivant.

Remarquons d'abord que cette probabilité peut se réécrire :

$$P_1 = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Delta_f}(\boldsymbol{Z})\right] \tag{C.30}$$

où $\boldsymbol{Z}$ est un vecteur aléatoire bidimensionnel distribué suivant la loi gaussienne standard conditionnée par l'appartenance à D^c. Soit $\gamma_2^{D_c}$ cette loi. On a alors le résultat remarquable suivant, qui est la troisième raison du choix de la factorisation (C.25) :

$$\gamma_2^{D_c} = \sigma_1 \otimes \mathcal{R}_2^{\{r>\beta_{HL}\}} \tag{C.31}$$

où σ_1 est la loi uniforme sur le cercle unité $C_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ ||\boldsymbol{x}||_2 = 1\}$ et $\mathcal{R}_2^{\{r>\beta_{HL}\}}$ la loi de Rayleigh d'ordre 2 sur $\mathbb{R}_+^*$ conditionnée par l'appartenance au borélien $\{r > \beta_{HL}\} =]\beta_{HL}, +\infty[$ (rappelons que (C.31) signifie que si $\mathcal{A}_1$ désigne la tribu borélienne de C_1 et $\mathcal{B}_1^+$ celle de $\mathbb{R}_+^*$, alors, pour tout pavé $A \times B$ de l'espace produit $(C_1 \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1^+) : \gamma_2^{D_c}(A \times B) = \sigma_1(A)\mathcal{R}_2^{\{r>\beta_{HL}\}}(B)$). Par conséquent, $\gamma_2^{D_c}$ peut être considérée comme la loi sur $(C_1 \times \mathbb{R}_+^*, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{B}_1^+)$ d'un couple de variables aléatoires indépendantes dont l'une suit la loi σ_1 sur $(C_1, \mathcal{A}_1)$ et l'autre la loi $\mathcal{R}_2^{\{r>\beta_{HL}\}}$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_1^+)$.

De ce résultat, il résulte que $\boldsymbol{Z}$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{Z} = R\boldsymbol{D} \tag{C.32}$$

où $\boldsymbol{D}$ est une *v.a.* vectorielle bidimensionnelle uniformément distribuée sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et R est une *v.a.* scalaire indépendante de $\boldsymbol{D}$ et distribuée suivant la loi de Rayleigh d'ordre 2 conditionnée par l'appartenance au borélien $]\beta_{HL}, +\infty[$.

Par suite, P_1 prend la forme :

$$P_1 = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Delta_f}(R\boldsymbol{D})\right] \tag{C.33}$$

et le calcul Monte-Carlo de cette probabilité va être basé sur cette formule.

Soient $(R^j, 1 \leq j \leq N)$ et $(\boldsymbol{D}^j, 1 \leq j \leq N)$ des N-échantillons de copies indépendantes de R et $\boldsymbol{D}$, respectivement, et soit $\hat{P}_1^N$ le N-estimateur naturel non biaisé de P_1 issu de (C.33), associé à ces échantillons. Il s'écrit :

$$\hat{P}_1^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f} \left(R^j \boldsymbol{D}^j \right) \tag{C.34}$$

Une N-approximation P_1^N de P_1 s'en déduit en construisant une réalisation de cet estimateur, laquelle s'obtient par :

$$P_1^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f} \left(r^j \boldsymbol{d}^j \right) \tag{C.35}$$

où $(r^j, 1 \leq j \leq N)$ et $(\boldsymbol{d}^j, 1 \leq j \leq N)$ sont deux N-familles indépendantes de réalisations indépendantes simulées de R et $\boldsymbol{D}$, respectivement.

Tout le problème est donc de savoir simuler R et $\boldsymbol{D}$. Pour cela on s'appuie sur les deux résultats suivants :

R1 - Soit U_1 une *v.a.* uniforme sur $[0, 1]$. Alors la *v.a.* :

$$R = \left(\beta_{HL}^2 - 2 \ln U_1 \right)^{1/2} \tag{C.36}$$

est distribuée suivant une loi de Rayleigh d'ordre 2 conditionnée par l'appartenance au borélien $]\beta_{HL}, +\infty[$.

R2 - Soit U_2 une *v.a.* uniforme sur $[0, 1]$. Alors la *v.a.* vectorielle :

$$\boldsymbol{D} = (\cos 2\pi U_2 \ , \ \sin 2\pi U_2)^T \tag{C.37}$$

est uniformément distribuée sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Compte tenu de ces résultats, l'approximation (C.35) prend alors la forme :

$$P_1^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_f} \left(\boldsymbol{z}^j \right) \tag{C.38}$$

avec, $\forall j \in \{1, \cdots, N\}$:

$$\boldsymbol{z}^j = \left(\left(\beta_{HL}^2 - 2 \ln u_1^j \right)^{1/2} \cos 2\pi u_2^j \ , \ \left(\beta_{HL}^2 - 2 \ln u_1^j \right)^{1/2} \sin 2\pi u_2^j \right)^T \tag{C.39}$$

où $(u^j = (u_1^j, u_2^j)^T, \ 1 \leq j \leq N)$ est une N-famille de réalisations indépendantes simulées d'une *v.a.* vectorielle $\boldsymbol{U} = (U_1, U_2)^T$ uniforme sur $[0, 1]^2$.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Annexe D

Calcul des moments de la variable aléatoire de contrôle par collocation stochastique

Le calcul de la moyenne : $m_W = \mathbb{E}[W]$ et des moments centrés d'ordre $k \geq 2$: $\mu_{W,k} = \mathbb{E}[(W - m_W)^k]$ de la variable aléatoire de contrôle $W = \Psi(\boldsymbol{X})$, conduit à des calculs d'intégrales de la forme :

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} G(\boldsymbol{x})\, \varphi_2(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{D.1}$$

avec $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$, $d\boldsymbol{x} = dx_1 dx_2$, φ_2 la densité de la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}^2$, telle que :

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) \tag{D.2}$$

et G une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$G(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \Psi(\boldsymbol{x}) & \text{si} \quad I = m_W \\ (\Psi(\boldsymbol{x}) - m_W)^k & \text{si} \quad I = \mu_{W,k} \end{cases} \tag{D.3}$$

où $\Psi = H \circ \boldsymbol{T}$, avec H et $\boldsymbol{T}$ les applications définies par (2.21) et (3.20).

Tenant compte de ce que φ_2 vérifie : $\varphi_2 = \varphi \otimes \varphi$, c'est-à-dire, est telle que, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi_2(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \tag{D.4}$$

avec φ la densité de la loi gaussienne standard sur $\mathbb{R}$, donnée par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \tag{D.5}$$

nous avons choisi de calculer l'intégrale (D.1) en utilisant la méthode de collocation stochastique. Cette méthode est complètement détaillée dans la référence [Bressolette 10] et nous nous contenterons ici de rappeler la formule d'approximation numérique à laquelle elle conduit, ainsi que les principales étapes de la démarche sur laquelle elle est fondée.

La formule d'approximation est la suivante :

$$I \approx I_{n_1,n_2} = \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \omega_{j_1} \omega_{j_2} G(x_{1,j_1}\ ,\ x_{2,j_2}) \tag{D.6}$$

où, $\forall k \in \{1,2\}$, $(x_{k,j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ sont les points de collocation dans la direction de la coordonnée x_k de $\boldsymbol{x}$ et $(\omega_{j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ sont les poids associés à ces points.

Les points $(x_{k,j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ sont les racines du polynôme d'Hermite $\mathbb{H}_{n_k+1}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Les poids associés $(\omega_{j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ sont solutions du système linéaire :

$$\sum_{j_k=0}^{n_k} \omega_{j_k} \mathbb{H}_{i_k}(x_{j_k}) = \delta_{i_k 0} \quad , \quad i_k = 0, \cdots, n_k \tag{D.7}$$

où δ_{pq} est le symbole de Kronecker (*i.e.* $\delta_{pq} = 1$ si $p = q$ et $\delta_{pq} = 0$ si $p \neq q$).

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

La qualité de l'approximation dépend bien évidemment du choix des entiers n_1 et n_2, c'est-à-dire du nombre de points de collocation dans les directions des coordonnées x_1 et x_2 de $\boldsymbol{x}$.

De très bonne approximations sont généralement obtenues pour des valeurs de n_1 et n_2 n'excédant pas 6, soit pour un nombre d'appels au modèle éléments finis n'excédant pas $7 \times 7 = 49$ (le nombre d'appels au modèle éléments finis correspond au nombre de points $((x_{1,j_1}\ ,\ x_{2,j_2})\ ;\ 0 \leq j_1 \leq n_1,\ 0 \leq j_2 \leq n_2)$ en lesquels il faut évaluer la fonction G, soit, d'après (D.6) : $(n_1+1)(n_2+1)$).

Sachant que pour obtenir des approximations comparables à l'aide de la méthode de Monte-Carlo standard, il faut environ 10000 appels au modèle éléments finis, on comprend dès lors tout l'intérêt d'utiliser la méthode de collation stochastique dans notre cas.

A titre d'indication, rappelons la démarche à suivre pour obtenir l'approximation (D.6).

(a) On se donne un couple d'entiers (n_1, n_2) et on calcule les racines des polynômes d'Hermite $\mathbb{H}_{n_1+1}(\xi)$ et $\mathbb{H}_{n_2+1}(\xi)$. Soient $(x_{1,j_1}\ ;\ 0 \leq j_1 \leq n_1)$ et $(x_{2,j_2}\ ;\ 0 \leq j_2 \leq n_2)$ ces racines. Ce sont les points de collocation dans les directions des cordonnées x_1 et x_2 de $\boldsymbol{x}$, respectivement.

(b) On approxime la fonction G de (D.1) par la fonction G_{n_1,n_2} telle que, $\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$,

$$G_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x}) = \sum_{j_1=0}^{n_1} \sum_{j_2=0}^{n_2} \lambda_{j_1 j_2} L_{n_1,j_1}(x_1)\, L_{n_2,j_2}(x_2) \tag{D.8}$$

où, $\forall k \in \{1,2\}$, $L_{n_k,j_k}(\xi)$ est le polynôme de Lagrange d'ordre n_k associé à l'élément x_{k,j_k} de la n_k-famille $(x_{k,j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ des points de collocation relatifs à la coordonnées x_k de $\boldsymbol{x}$:

$$L_{n_k,j_k}(\xi) = \prod_{\substack{i_k=0 \\ i_k \neq j_k}}^{n_k} \frac{\xi - x_{k,i_k}}{x_{k,j_k} - x_{k,i_k}} \quad , \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{D.9}$$

(c) On impose à l'approximation G_{n_1,n_2} de coïncider avec G aux points de collocation $((x_{1,l_1}, x_{2,l_2})\ ; 0 \leq l_1 \leq n_1,\ 0 \leq l_2 \leq n_2)$. D'où les égalités :

$$\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2} \lambda_{j_1 j_2} L_{n_1,j_1}\left(x_{1,l_1}\right) L_{n_2,j_2}\left(x_{2,l_2}\right) = G\left(x_{1,l_1}\ ,\ x_{2,l_2}\right)\ ;\ 0 \leq l_1 \leq n_1\ ,\ 0 \leq l_2 \leq n_2 \tag{D.10}$$

desquelles on tire, en tenant compte de la propriété remarquable : $L_{n_k,j_k}(x_{k,l_k}) = \delta_{j_k l_k}$ des polynômes de Lagrange :

$$\lambda_{l_1 l_2} = G\left(x_{1,l_1}\ ,\ x_{2,l_2}\right) \quad ; \quad 0 \leq l_1 \leq n_1\ ,\ 0 \leq l_2 \leq n_2 \tag{D.11}$$

D'où la nouvelle expression de G_{n_1,n_2} :

$$G_{n_1,n_2}\left(\boldsymbol{x}\right) = \sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2} G\left(x_{1,j_1}\ ,\ x_{2,j_2}\right) L_{n_1,j_1}\left(x_1\right) L_{n_2,j_2}\left(x_2\right) \tag{D.12}$$

(d) On remplace $G(\boldsymbol{x})$ par $G_{n_1,n_2}(\boldsymbol{x})$ dans (D.1) et on tient compte de (D.4). L'intégrale I peut alors être approximée par :

$$I \approx I_{n_1,n_2} = \sum_{j_1=0}^{n_1}\sum_{j_2=0}^{n_2} G\left(x_{1,j_1}\ ,\ x_{2,j_2}\right) \int_{\mathbb{R}} L_{n_1,j_1}(x_1)\varphi(x_1)dx_1 \int_{\mathbb{R}} L_{n_2,j_2}(x_2)\varphi(x_2)dx_2 \tag{D.13}$$

Or, par l'intégration de Gauss, on a exactement, $\forall k \in \{1,2\}$:

$$\int_{\mathbb{R}} L_{n_k,j_k}(x_k)\varphi(x_k)dx_k = \sum_{i_k=0}^{n_k} \omega_{i_k} L_{n_k,j_k}\left(x_{i_k}\right) = \omega_{j_k} \tag{D.14}$$

où $(\omega_{j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ est la n_k-famille des poids de Gauss associée à la n_k-famille $(x_{k,j_k}\ ;\ 0 \leq j_k \leq n_k)$ des points de collocation relatifs à la cordonnée x_k de $\boldsymbol{x}$, ces poids étant solution du système linéaire (D.7). En portant cette dernière relation dans la précédente, on retrouve bien l'approximation (D.6).

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Annexe E

Estimations d'une densité de probabilité et d'une fonction de répartition à partir d'un échantillon numérique

E.1 Position du problème

a) On dispose d'un N-échantillon numérique ordonné $\varepsilon_N = \{y_1, \cdots, y_N\}$ de réalisations d'une variable aléatoire réelle Y absolument continue.

b) On veut construire à partir de ε_N une estimée de la densité de probabilité p_Y et de la fonction de répartition F_Y de Y.

Bien entendu, le cardinal N de ε_N est supposé suffisant pour rendre raisonnable la construction de ces estimées.

E.2 Subdivision du domaine d'estimation

Le domaine d'estimation est l'intervalle fermé D de $\mathbb{R}$ tel que :

$$D = [y_1 \ , \ y_N] \tag{E.1}$$

On se donne un entier strictement positif M petit devant N (*i.e.* $M << N$) et on subdivise D en M intervalles $D_1, \cdots, D_M$ de même longueur δ, tels que, $\forall j \in J_M = \{1, \cdots, M\}$:

$$D_j^\delta = \begin{cases} [y_1 + (j-1)\delta \ , \ y_1 + j\delta \,[& \text{si } j \in J_{M-1} = \{1, \cdots, M-1\} \\ [y_1 + (M-1)\delta \ , \ y_1 + M\delta] = [y_N - \delta \ , \ y_N] & \text{si } j = M \end{cases} \tag{E.2}$$

On a donc :

$$D = \bigcup_{j \in J_M} D_j^\delta \quad , \quad D_i^\delta \bigcap_{\substack{i,j \in J_M \\ i \neq j}} D_j^\delta = \varnothing \tag{E.3}$$

et, $\forall j \in J_M$:

$$\delta = |D_j^\delta| = \frac{y_N - y_1}{M} \tag{E.4}$$

Notons que le choix d'une partition régulière de D n'est pas impératif ici. Il n'a en fait d'autre raison que de simplifier la mise en œuvre informatique des estimées. Si l'échantillon ε_N présente une forte irrégularité dans la répartition de ses éléments, il est d'ailleurs préférable d'avoir recours à un fractionnement non régulier de D (*i.e.* formé de M intervalles $D_1^{\delta_1}, \cdots, D_M^{\delta_M}$ de longueurs différentes $\delta_1, \cdots, \delta_M$) adapté à cette irrégularité. Les expressions des estimées seront alors modifiées par rapport au cas régulier, mais de façon minime comme nous le verrons plus loin.

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

E.3 Estimations de p_Y et F_Y

À chaque intervalle D_j^δ de la partition choisie de D, on associe le nombre N_j^δ d'éléments de ε_N lui appartenant. On obtient ainsi M entiers $N_1^\delta, \cdots, N_M^\delta$ vérifiant :

$$\sum_{j \in J_M} N_j^\delta = N \tag{E.5}$$

Les estimées cherchées de la densité de probabilité p_Y et de la fonction de répartition F_Y sont alors définies respectivement par :

$$p_Y^N(y) = \sum_{j \in J_M} \frac{N_j^\delta}{N\delta} \mathbb{1}_{D_j^\delta}(y) \quad , \quad y \in D \tag{E.6}$$

$$F_Y^N(y) = \sum_{j \in J_M} \frac{\sum_{k=1}^{j} N_k^\delta}{N} \mathbb{1}_{D_j^\delta}(y) \quad , \quad y \in D \tag{E.7}$$

où $\mathbb{1}_{D_j^\delta}$ est la fonction indicatrice de D_j^δ.

Notons que dans le cas où la partition de D n'est pas régulière, mais est constituée de M intervalles $D_1^{\delta_1}, \cdots, D_M^{\delta_M}$ de longueurs distinctes $\delta_1, \cdots, \delta_M$, les formules (E.6) et (E.7) doivent être modifiées en remplaçant N_j^δ, D_j^δ par $N_j^{\delta_j}$, $D_j^{\delta_j}$ dans (E.6) et N_k^δ, D_j^δ par $N_k^{\delta_k}$, $D_j^{\delta_j}$ dans (E.7).

E.4 Représentations graphiques des estimées p_Y^N et F_Y^N

À chacune de ces estimées, on peut associer deux types de représentation graphique relativement à un repère orthogonal du plan affine (*cf.* Figures E.1 et E.2) :

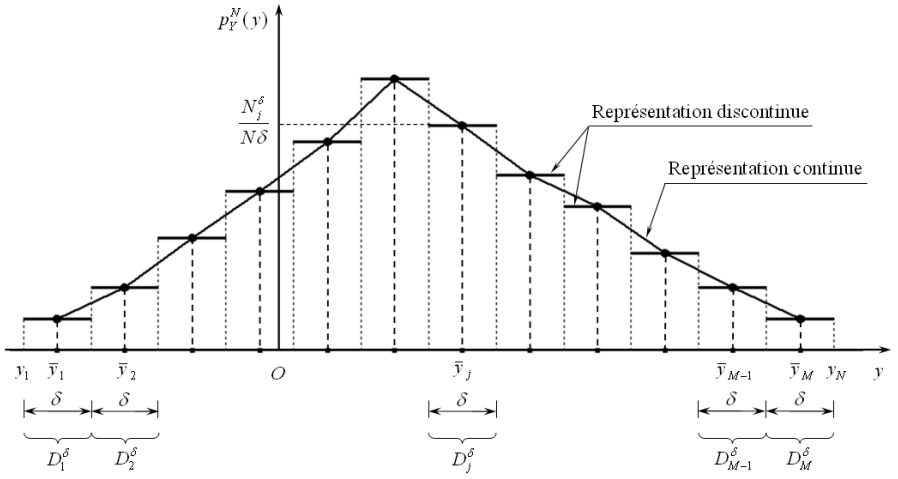


Figure E.1 – Les deux représentations graphiques de la densité de probabilité estimée

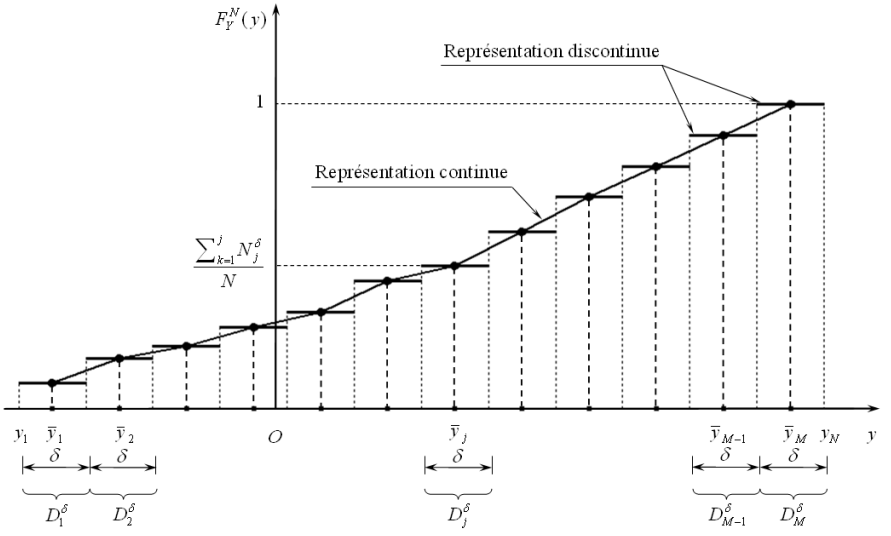


Figure E.2 – Les deux représentations graphiques de la fonction de répartition estimée

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

a) la représentation discontinue, qui n'est autre que son graphe (graphe d'une fonction en escalier),

b) la représentation continue, obtenue en formant la ligne polygonale de sommets :

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \left(\overline{y}_j \ , \ p_Y^N(\overline{y}_j)\right), \quad j \in J_M, \quad \text{pour } p_Y^N \\ &\bullet \quad \left(\overline{y}_j \ , \ F_Y^N(\overline{y}_j)\right), \quad j \in J_M, \quad \text{pour } F_Y^N \end{aligned} \tag{E.8}$$

où, $\forall j \in J_M$, $\overline{y}_j$ est l'abscisse du milieu de D_j^δ, telle que :

$$\overline{y}_j = y_1 + (j - \frac{1}{2})\delta \tag{E.9}$$

E.5 Autres estimations de p_Y

L'estimation (E.6) de p_Y n'est bien entendu pas unique. On peut en définir bien d'autres qui sont d'ailleurs, en général, de meilleure qualité. Rappelons-en deux importantes.

E.5.1 Estimation de Rosenblatt

Basée sur le principe de la fenêtre mobile, cette estimation est construite comme suit. A tout y dans $D = [y_1, y_N]$, on associe la classe $D^\delta(y)$ centrée sur y, de longueur δ, telle que :

$$D^\delta(y) = \left[y - \frac{\delta}{2} \ , \ y + \frac{\delta}{2}\right] \tag{E.10}$$

et on note $N^\delta(y)$ le nombre d'éléments de $\varepsilon_N = \{y_1, \cdots, y_N\}$ appartenant à $D^\delta(y)$.

L'estimée de Rosenblatt de p_Y relative à l'échantillon ε_N est alors définie par :

$$p_Y^N(y) = \frac{N^\delta(y)}{N\delta} \ , \ y \in \mathbb{R} \tag{E.11}$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$p_Y^N(y) = \frac{1}{N\delta} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta_{1/2}} \left(\frac{y - y_i}{\delta} \right) \ , \ y \in \mathbb{R} \tag{E.12}$$

avec $\Delta_{1/2}$ l'intervalle :

$$\Delta_{1/2} = \left[-\frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} \right] \tag{E.13}$$

Bien entendu, la qualité de l'estimation est fortement dépendante de la longueur δ de la fenêtre glissante $D^\delta(y)$. En pratique, δ est choisie dans les limites suivantes :

$$1\% \leq \frac{\delta}{|D|} \leq 30\% \tag{E.14}$$

où $|D| = y_N - y_1$.

E.5.2 Estimation à noyau de Parzen

Également basée sur le principe de la fenêtre mobile, cette estimation est définie par :

$$p_Y^N(y) = \frac{1}{N\delta} \sum_{i=1}^{N} K \left(\frac{y - y_i}{\delta} \right) \ , \ y \in \mathbb{R} \tag{E.15}$$

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

où K, appelé noyau de l'estimation, est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ de support :

$$\Delta_1 = [-1\ ,\ 1] \tag{E.16}$$

et δ est un réel > 0 à choisir, appelé paramètre de lissage.

Les noyaux les plus couramment utilisés sont les suivants :

– le noyau triangulaire :

$$K(u) = (1 - |u|)\, \mathbb{1}_{\Delta_1}(u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \tag{E.17}$$

– le noyau d'Epanechnikov :

$$K(u) = \frac{3}{4}\left(1 - u^2\right) \mathbb{1}_{\Delta_1}(u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \tag{E.18}$$

– le noyau de Turkey :

$$K(u) = \frac{15}{16}\left(1 - u^2\right)^2 \mathbb{1}_{\Delta_1}(u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \tag{E.19}$$

– le noyau sinusoidal :

$$K(u) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2} u\right) \mathbb{1}_{\Delta_1}(u) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \tag{E.20}$$

On peut également utiliser des noyaux portés par $\mathbb{R}$, comme par exemple le noyau gaussien :

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad , \quad u \in \mathbb{R} \tag{E.21}$$

La constante de lissage δ détermine la régularité de l'estimée p_Y^N : un δ trop grand lisse trop, alors qu'un δ trop petit conduit à une estimation très chaotique. Le choix du noyau est quant à lui moins crucial.

Le gros avantage de l'estimée (E.15) sur l'estimée (E.12) est qu'elle est continue (car le noyau K est continu), ce qui n'est bien évidemment pas le cas de (E.12) du fait de la présence de la fonction indicatrice. L'estimée (E.12) peut toujours être vue, toutefois, comme un cas particulier (irrégulier) de (E.15).

XiaoSu HU
Laboratoire de Mécanique et Ingénieries
Université Blaise Pascal & Institut Français de Mécanique Avancée

Bibliographie

[Abdul-Kadir 08] M. R. Abdul-Kadir, U. Hansen, R. Klabunde, D. Lucas et A. Amis. *Finite element modelling of primary hip stem stability : The effect of interference fit.* Journal of Biomechanics, vol. 41, pages 587–594, 2008.

[Agarwal 04] S. Agarwal. *Osteolysis basic science, incidence and diagnosis.* Current Orthopaedics, vol. 18, pages 220–231, 2004.

[Archibeck 06] M. J. Archibeck, J. W. Surdam, S. C. Schultz Jr., D. W. Junick et R. E. White. *Cementless Total Hip Arthroplasty in Patients 50 Years or Younger.* The Journal of Arthroplasty, vol. 21-4, pages 476–483, 2006.

[Ashman 88] R. B. Ashman et J. Y. Rho. *Elastic modulus of trabecular bone material.* Journal of Biomechanics, vol. 21, no. 3, pages 177–181, 1988.

[Augat 98] P. Augat, T. Link, T. F. Lang, J. C. Lin, S. Majumdar et H. K. Genant. *Anisotropy of the elastic modulus of trabecular bone specimens from different anatomical locations.* Medical Engineering & Physics, vol. 20, no. 2, pages 124 – 131, 1998.

[Bathe 95] K. J. Bathe. Finite element procedures. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[Bathe 97] K. J. Bathe et P. A. Bouzinov. *On the constraint function method for contact problems.* Computers & Structures, vol. 64, pages 1069–1085, 1997.

[Bauer 99] T. W. Bauer et J. Schils. *The pathology of total joint arthroplasty II. Mechanisms of implant failure.* Skeletal Radio, vol. 28, pages 483–497, 1999.

[Bayraktar 04] H. H. Bayraktar, E. F. Morgan, G. L. Niebur, G. E. Morris, E. K. Wong et T. M. Keaveny. *Comparison of the elastic and yield*

properties of human femoral trabecular and cortical bone tissue. Journal of Biomechanics, vol. 37, pages 27–35, 2004.

[Beillas 01] P. Beillas, P. C. Begeman, K. H. Yang, A. I. King, P. J. Arnoux, H. S. Kang, K. Kayvantash, C. Brunet, C. Cavallero et P. Prasad. *Lower Limb : Advanced FE Model and New Experimental Data.* The Stapp Car Crash Journal, vol. 45, pages 375–402, 2001.

[Bergmann 01] G. Bergmann, G. Deuretzbacher, M. Heller, F. Graichen, A. Rohlmann, J. Strauss et G.N. Duda. *Hip contact forces and gait patterns from routine activities.* Journal of Biomechanics, vol. 34, pages 859–871, 2001.

[Bergmann 04] G. Bergmann, F. Graichen et A. Rohlmann. *Hip joint contact forces during stumbling.* Langenbeck's Archives of Surgery, vol. 389-1, pages 53–59, 2004.

[Bert 96] J. M. Bert. *Custom total hip arthroplasty.* The Journal of Arthroplasty, vol. 11-8, pages 905–915, 1996.

[Bühler 97] D. W. Bühler, U. Berlemann, K. Lippuner, P. Jaeger et L. P. Nolte. *Three-dimensional primary stability of cementless femoral stems.* Clinical Biomechanics, vol. 12 No.2, pages 75–86, 1997.

[Biedermann 99] R. Biedermann, M. Krismer, B. Stöckl, P. Mayrhofer, E. Ornstein et H. Franzén. *Accuracy of EBRA-FCA in the measurement of migration of femoral components of total hip replacement. Einzel-Bild-Röntgen-Analyse-femoral component analysis.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 81-2, pages 266–272, 1999.

[Biegler 95] F. B. Biegler, J. D. Reuben, T. P. Harrigan, F. J. Hou et J. E. Akin. *Effect of Porous Coating and Loading Conditions on Total Hip Femoral Stem Stability.* The Journal of Arthroplasty, vol. 10, page 6, 1995.

[Bodén 06] H. Bodén, M. Salemyr, O. Sköldenberg, T. Ahl et P. Adolphson. *Total hip arthroplasty with an uncemented hydroxyapatite-coated tapered titanium stem : results at a minimum of 10 years' follow-up in 104 hips.* Journal of orthopaedic science, vol. 11, pages 175–179, 2006.

[Bonnel 03] F. Bonnel, A. Dimeglio, F. Canovas, G. Capitier, J. M. Saint-André, P. Faure et C. Bonnel. Abrégé d'anatomie fonctionnelle et biomécanique, volume 3. Sauramps médicale, 2003.

[Booser 97] E. R. Booser. Tribology data handbook : An excellent friction, lubrication and wear resource. Numeéro ISBN : 9780849339042 in ISBN 10 : 0849339049. Taylor & Francis, Inc., 1 edition, September 26, 1997 1997.

[Bourinet 09] J. M. Bourinet, C. Mattrand et V. Dubourg. *A Review of Recent Features and Improvements Added to FERUM Software.* In Proc. of the 10th International Conference on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR'09), 2009.

[Bourne 94a] R. B. Bourne, C. H. Rorabeck, M. E. Ghazal et M. H. Lee. *Pain in the thigh following total hip replacement with a porous-coated anatomic prosthesis for osteoarthrosis. A five-year follow-up study.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 76-10, pages 1464–1470, 1994.

[Bourne 94b] R. B. Bourne, C. H. Rorabeck, A. Laupacis, D. Feeny, C. Wong, P. Tugwell, K. Leslie et R. Bullas. *A randomized clinical trial comparing cemented to cementless total hip replacement in 250 osteoarthritic patients the impact on health related quality of life and cost effectiveness.* The Iowa Orthopaedic Journal, vol. 14, pages 108–114, 1994.

[Bragdon 02] C. R. Bragdon, H. Malchau, X. H. Yuan, R. Perinchief, J. Kärrholm, N. Börlin, D. M. Estok et W. H. Harris. *Experimental assessment of precision and accuracy of radiostereometric analysis for the determination of polyethylene wear in a total hip replacement model.* Journal of Orthopaedic Research, vol. 20-4, pages 688–695, 2002.

[Bragdon 04] C. R. Bragdon, D. M. Estok, H. Malchau, J. Kärrholm, X. H. Yuan, R. Bourne, J. Veldhoven et W. H. Harris. *Comparison of two digital radiostereometric analysis methods in the determination of femoral head penetration in a total hip replacement phantom.* Journal of Orthopaedic Research, vol. 22-3, pages 659–694, 2004.

[Breitung 84] K. Breitung. *Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals.* Journal of Engineering Mechanics, vol. 110-3, pages 357–366, 1984.

[Bressolette 10] Ph. Bressolette, M. Fogli et C. Chauvière. *A stochastic collocation method for large classes of mechanical problems with uncertain*

parameters. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 25, pages 255–270, 2010.

[Breusch 03] S. Breusch. *Les conditions de la bonne cimentation pour les PTH*. Maîtrise Orthopédique, vol. 126, pages 61–87, 2003.

[Börlin 02] N. Börlin, T. Thien et J. Kärrholm. *The precision of radiostereometric measurements. Manual vs. digital measurements*. Journal of Biomechanics, vol. 35-1, pages 69–79, 2002.

[Burke 91] D. W. Burke, D. O. O'Connor, E. B. Zalenski, M. Jasty et W. H. Harris. *Micromotion of cemented and uncemented femoral components*. Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 73-B, pages 33–42, 1991.

[Butler 05] J. B. V. Butler, D. Lansky et P. J. Duwelius. *Prospective Evaluation of Total Hip Arthroplasty With a Cementless, Anatomically Designed, Porous-Coated Femoral Implant : Mean 11-Year Follow-up*. The Journal of Arthroplasty, vol. 20-6, pages 709–716, 2005.

[Cartillier 00] J. C. Cartillier. *Les reprises de hanche : réflexions stratégiques pour la reprise fémorale*. Maîtrise Orthopédique, vol. 90, page 6, 2000.

[Castaing 84] J. Castaing et Ph. Burdin. Anatomie fonctionnelle de l'appareil locomoteur, volume 4. Vigot, 1984.

[Chevalier 07] Y. Chevalier, D. Pahr, H. Allmer, M. Charlebois et P. Zysset. *Validation of a voxel-based FE method for prediction of the uniaxial apparent modulus of human trabecular bone using macroscopic mechanical tests and nanoindentation*. Journal of Biomechanics, vol. 40, no. 15, pages 3333 – 3340, 2007.

[Chiron 00] P. Chiron. *Faut-il cimenter les tiges standards des PTH ? Les tiges, cimentées et non cimentées, doivent-elles être courbes dans le plan sagittal ?* Maîtrise Orthopédique, vol. 97, no. Octobre, page 18, 2000.

[Christensen 08] C. P. Christensen et C. A. Jacobs. *Progressive Subsidence After Total Hip Arthroplasty Using a Tapered, Proximally Coated Femoral Stem with Immediate Postoperative Weight-Bearing*. The Journal of Arthroplasty, vol. 23-2, page 326, 2008.

[Cimbrelo 03] E. G. Cimbrelo, A. C. Pardos, R. Madero et M. O. Andreu. *Total Hip Arthroplasty with Use of the Cementless Zweymüller Alloclassic System A Ten to Thirteen-Year Follow-up Study*. Journal

of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 85, pages 296–303, 2003.

[Cody 96] D. D. Cody, D. A. McCubbrey, G. W. Divine, G. J. Gross et S. A. Goldstein. *Predictive value of proximal femoral bone densitometry in determining local orthogonal material properties.* Journal of Biomechanics, vol. 29, no. 6, pages 753 – 761, 1996.

[Cohen 09] G. Cohen et P. Rosset. *Seventy-six uncemented fully hydroxyapatite-coated total hip arthroplasties. Results at 5-year minimum follow-up.* Revue de chirurgie orthopédique et traumatologique, vol. 95, pages 74–84, 2009.

[Cristofolini 95] L. Cristofolini, M. Viceconti, A. Toni et A. Giunti. *Influence of thigh muscles on the axial strains in a proximal femur during early stance in gait.* Jounal of Biomechanics, vol. 28-5, pages 617–624, 1995.

[Cristofolini 06] L. Cristofolini, E. Varini, I. Pelgreffi, A. Cappello et A. Toni. *Device to measure intra-operatively the primary stability of cementless hip stems.* Medical Engineering & Physics, vol. 28, pages 475–482, 2006.

[Delaunay 99] C. Delaunay. *Prothèse totale de Charnley : où en est aujourd'hui le "gold standard" de l'arthroplastie primaire de hanche ?* Maîtrise Orthopédique, vol. 83, page 22, Avril 1999.

[Delaunay 05] C. Delaunay et H. Migaud. *Primary total hip replacement in active patients younger than 50 years of age.* Revue de chirurgie orthopédique, vol. 91, pages 351–374, 2005.

[Demey 06] Guillaume Demey. Etude biomécanique sur cadavre de l'apport d'une collerette dans une tige fémorale sans ciment. Mémoir du Master Recherche, Université Claude Bernard, Lyon, France, 2006.

[Dirksmeier 00] P. Dirksmeier et R. K. Sinha. *Double-Tapered cementless stems for total hip arthroplasty.* Operative Techniques in Orthopaedics, vol. 10, pages 120–122, 2000.

[Ditlevsen 96] O. Ditlevsen et H. O. Madsen. Structural reliability methods. John Wiley & Sons, 1996.

[Dong 04] X. N. Dong et X. E. Guo. *The dependence of transverselyisotropic elasticityof human femoral cortical bone on porosity.* Journal of Biomechanics, vol. 37, pages 1281–1287, 2004.

[Duchemin 08] L. Duchemin, V. Bousson, C. Raossanaly, C. Bergot, J.D. Laredo, W. Skalli et D. Mitton. *Prediction of mechanical properties of cortical bone by quantitative computed tomography.* Medical Engineering & Physics, vol. 30, pages 321–328, 2008.

[Duda 97] G. N. Duda, E. Schneider et E. Y. S. Chao. *Internal forces and moments in the femur during walking.* Journal of Biomechanics, vol. 30-9, pages 933–941, 1997.

[Duda 98] G. N. Duda, M. Heller, J. Albinger, O. Schulz, E. Schneider et L. Claes. *Influence of muscle forces on femoral strain distribution.* Journal of Biomechanics, vol. 31, pages 841–846, 1998.

[Easley 07] S. K. Easley, S. Pal, P. R. Tomaszewski, A. J. Petrella, P. J. Rullkoetter et P. J. Laz. *Finite element-based probabilistic analysis tool for orthopaedic applications.* Computer Methods and Programs in Biomedicine, vol. 85, pages 32–40, 2007.

[El'Sheikh 03] H. F. El'Sheikh, B. J. MacDonald et M. S. J. Hashmi. *Finite element simulation of the hip joint during stumbling : a comparison between static and dynamic loading.* Journal of Materials Processing Technology, vol. 143-144, pages 249–255, 2003.

[Emerson 02] R. H. Emerson, W. C. Head, C. B. Emerson, W. Rosenfeldt et L. L. Higgins. *A Comparison of Cemented and Cementless Titanium Femoral Components Used for Primary Total Hip Arthroplasty : A Radiographic and Survivorship Study.* The Journal of Arthroplasty, vol. Vol. 17 No. 5, pages 581–594, 2002.

[Engh 92] C. A. Engh, D. O'Connor, M. Jasty, T. F. McGovern, J. D. Bobyn et W. H. Harris. *Quantification of implant micromotion, strain shielding, and bone resorption with porous-coated anatomic medullary locking femoral prostheses.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 285, pages 13–29, 1992.

[Epinette 94] J. A. Epinette, R. G. T. Geesink, J. Adrey, E. Aguedo et J. V. Vainvel. Hydroxyapatite et prothèses articulaires, volume Cahiers d'enseignement de la SOFCOT 50 of *2-7046-1458-X (rel.).* Paris : Expansion scientifique française, Elsevier, 1994. SOFCOT = Société française de chirurgie orthopédique et traumatologique.

[Epinette 04] J. A. Epinette et M. T. Manley. Fifteen years of clinical experience with hydroxyapatite coatings in joint arthroplasty. ISBN : 2-287-00508-0. Springer-Verlag, 2004.

[Epinette 08] J. A. Epinette. *Bilan à long terme des PTH HA pour nécrose idiopathique chez le sujet jeune : à propos d'une série prospective à 21 ans de la tige HA OMNIFIT et cupule HA ARC2F.* Journée lyonnaises de chirurgie de la hanche, vol. 1, pages 13–16, 2008.

[Eskelinen 05] A. Eskelinen, V. Remes, I. Helenius, P. Pulkkinen, J. Nevalainen et P. Paavolainen. *Total hip arthroplasty for primary osteoarthrosis in younger patients in the Finnish arthroplasty register : 4661 primary replacements followed for 0-22 years.* Acta Orthopaedica, vol. 76-1, pages 28–41, 2005.

[Eugene 05] T. E. Eugene et P. F. M. Choong. *Comparison Between Triple-Tapered and Double-Tapered Cemented Femoral Stems in Total Hip Arthroplasty : A Prospective Study Comparing the C-Stem Versus the Exeter Universal Early Results After 5 Years of Clinical Experience.* The Journal of Arthroplasty, vol. 20-1, pages 94–100, 2005.

[Fiessler 79] B. Fiessler, H. J. Neumann et R. Rackwitz. *Quadratic limit states in structural reliability.* Journal of Engineering Mechanics, vol. 105, pages 661–678, 1979.

[Fishman 96] G. S. Fishman. Monte-carlo : Concepts, algorithms, and applications. Springer-Verlag, 1996.

[Gardiner 94] R. C. Gardiner et W. J. Hozack. *Failure of the cement-bone interface. A consequence of strengthening the cement-prosthesis interface ?* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 76-B, Issue 1, pages 49–52, 1994.

[Geesink 95] R. G. T. Geesink et N. H. M. Hoefnagels and. *Six-year results of hydroxyapatite-coated total hip remplacement.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 77-B, pages 534–547, 1995.

[Genda 01] E. Genda, N. Iwasaki, G. A. Li, B. A. MacWilliams, P. J. Barrance et E. Y. S. Chao. *Normal hip joint contact pressure distribution in single leg standing - effect of gender and anatomic parameters.* Journal of Biomechanics, vol. 34, pages 895–905, 2001.

[Georgiou 01] A. P. Georgiou et J. L. Cunningham. *Accurate diagnosis of hip prosthesis loosening using a vibrational technique.* Clinical Biomechanics, vol. 16, pages 315–323, 2001.

[Goldstein 87] S. A. Goldstein. *The mechanical properties of trabecular bone : Dependence on anatomic location and function.* Journal of Bio-

mechanics, vol. 20, no. 11-12, pages 1055 – 1061, 1987. F. Gaynor Evans Anniversary Issue on Bone Biomechanics.

[González 09] C. D. González, A. M. New et M. Browne. *Probabilistic analysis of an uncemented total hip replacement.* Medical Engineering & Physics, vol. 31, pages 470–476, 2009.

[Gosling 03] J. A. Gosling, P. F. Harris, I. Whitmore et P. L. T. Willan. Anatomie humaine atlas en couleurs et texte. De Boeck & Larcier, 2ème édition française edition, 2003.

[Grant 05] P. Grant, A. Aamodt, J. A. Falch et L. Nordsletten. *Differences in stability and bone remodeling between a customized uncemented hydroxyapatite coated and a standard cemented femoral stem A randomized study with use of radiostereometry and bone densitometry.* Journal of Orthopaedic Research, vol. 23, pages 1280–1285, 2005.

[Grasa 05] J. Grasa, M.A. Pérez, J.A. Bea, J.M. Garcia-Aznar et M. Doblaré. *A probabilistic damage model for acrylic cements. Application to the life prediction of cemented hip implants.* International Journal of Fatigue, vol. 27, pages 891–904, 2005.

[Green 99] J. R. Green, J. A. Nemzek, S. P. Arnoczky, L. L. Johnson et M. S. Balas. *The effect of bone compaction on early fixation of porous-coated implants.* The Journal of Arthroplasty, vol. 14-1, pages 91–97, 1999.

[Götze 02] C. Götze, W. Steens, V. Vieth, C. Poremba, L. Claes et J. Steinbeck. *Primary stability in cementless femoral stems : custom-made versus conventional femoral prosthesis.* Clinical Biomechanics, vol. 17, pages 267–273, 2002.

[Ha 07] Y. C. Ha, K. H. Koo, S. T. Jeong, J. J. Yoo, Y. M. Kim et H. J. Kim. *Cementless Alumina-on-Alumina Total Hip Arthroplasty in Patients Younger Than 50 Years : A 5-year Minimum Follow-Up Study.* The Journal of Arthroplasty, vol. 22-2, pages 184–188, 2007.

[Hamadouche 01] M. Hamadouche, J. Witvoet, R. Porcher, A. Meunier, L. Sedel et R. Nizard. *Hydroxyapatite-coated versus grit-blasted femoral stems : A prospective, randomized study using EBRA-FCA.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 83-B Issue 7, pages 979–987, 2001.

[Hansen 03] E. Hansen. *Modelling heat transfer in a bone cement prosthesis system.* Journal of Biomechanics, vol. 36, pages 787–795, 2003.

[Harrigan 92] T. P. Harrigan, J. A. Kareh, D. O. O'Connor, D. W. Burke et W. H. Harris. *A finite element study of the initiation of failure of fixation in cemented femoral total hip components.* Journal of Orthopaedic Research, vol. Volume 10 Issue 1, pages 134–144, 1992.

[Harris 95] W. H. Harris. *The Problem Is Osteolysis.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 311, pages 46–53, 1995.

[Hasofer 74] A. M. Hasofer et M. C. Lind. *An Exact Invariant First-Order Reliability Format.* Journal of Engineering Mechanics,, vol. 100, pages 111–121, 1974.

[Hayashi 99] K. Hayashi, T. Mashima et K. Uenoyama. *The effect of hydroxyapatite coating on bony ingrowth into grooved titanium implants.* Biomaterials, vol. 20, pages 111–119, 1999.

[Heller 05] M.O. Heller, G. Bergmann, J. P. Kassi, L. Claes, N.P. Haas et G.N. Duda. *Determination of muscle loading at the hip joint for use in pre-clinical testing.* Journal of Biomechanics, vol. 38, pages 1155–1163, 2005.

[Herberts 04] P. Herberts, H. Malchau et G. Garellick. *The Swedish National Hip Arthroplasty Register : Annual Report 2003.* Department of Orthopaedics Sahlgrenska University Hospital, vol. 1, page 70, 2004.

[Hohenbichler 87] M. Hohenbichler, S. Gollwitzer, W. Kruse et R. Rackwitz. *New light on first- and second-order reliability methods.* Structural safety, vol. 4-4, pages 267–284, 1987.

[Homminga 02] J. Homminga, B. R. McCreadie, T. E. Ciarelli, H. Weinans, S. A. Goldstein et R. Huiskes. *Cancellous Bone Mechanical Properties From Normals and Patients With Hip Fractures Differ on the Structure Level, Not on the Bone Hard Tissue Level.* Bone, vol. 30-5, pages 759–764, 2002.

[Hua 94] J. Hua et P. S. Walker. *Relative motion of hip stems under load. An in vitro study of symmetrical, asymmetrical, and custom asymmetrical designs.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 76, pages 95–103, 1994.

[Huo 97] M. H. Huo, M. A. Fye, R. P. Martin, L. E. Zatorski et K. J. Keggi. *Unsatisfactory results of a first-generation modular femoral stem*

implanted without cement : A 4- to 9-year follow-up study. The Journal of Arthroplasty, vol. 12-5, pages 490–496, 1997.

[Issack 03] P. S. Issack, H. G. Botero, R. N. Hiebert, M. R. Bong, S. A. Stuchin, J. D. Zuckerman et P. E. Di Cesare. *Sixteen-Year Follow-Up of the Cemented Spectron Femoral Stem for Hip Arthroplasty.* The Journal of Arthroplasty, vol. 18 No. 7, pages 925–930, 2003.

[Jacobs 01] J. J. Jacobs, K. A. Roebuck, M. Archibeck, N. J. Hallab et T. T. Glant. *Osteolysis : basic science.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 393, pages 71–77, 2001.

[Jaecques 04] S. V. N. Jaecques, C. Pastrav, A. Zahariuc et G. Van der Perre. *Analysis of the fixation quality of cementless hip prostheses using a vibrational technique.* Proceedings International Conference on Noise andVibration Engineering, vol. 1, pages 443–456, 2004.

[Jasty 97] M. Jasty, C. Bragdon, D. Burke, D. O'Connor, J. Lowenstein et W. H. Harris. *In Vivo Skeletal Responses to Porous-Surfaced Implants Subjected to Small Induced Motions.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 79, pages 707–714, 1997.

[Kaneko 03] T. S. Kaneko, M. R. Pejcic, J. Tehranzadeh et J. H. Keyak. *Relationships between material properties and CT scan data of cortical bone with and without metastatic lesions.* Medical Engineering & Physics, vol. 25, pages 445–454, 2003.

[Kaneko 04] T. S. Kaneko, J. S. Bell, M. R. Pejcic, J. Tehranzadeh et J. H. Keyak. *Mechanical properties, density and quantitative CT scan data of trabecular bone with and without metastases.* Journal of Biomechanics, vol. 37, no. 4, pages 523 – 530, 2004.

[Kang 00] J. S. Kang, L. D. Dorr et Z. N. Wan. *The Effect of Diaphyseal Biologic Fixation on Clinical Results and Fixation of the APR-II Stem.* The Journal of Arthroplasty, vol. 15, page 6, 2000.

[Kassi 05] J. P. Kassi, M. O. Heller, U. Stoeckle, C. Perka et G. N. Duda. *Stair climbing is more critical than walking in pre-clinical assessment of primary stability in cementless THA in vitro.* Journal of Biomechanics, vol. 38, pages 1143–1154, 2005.

[Katoozian 00] H. Katoozian et D. T. Davy. *Effects of loading conditions and objective function on threedimensional shape optimization of femoral components of hip endoprostheses.* Medical Engineering & Physics, vol. 22, pages 243–251, 2000.

[Katz 97] R. P. Katz, J. J. Callaghan, P. M. Sullivan et R. C. Johnston. *Long-term results of revision total hip arthroplasty with improved cementing technique.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 79-B, pages 322–6, 1997.

[Kawamura 01] H. Kawamura, M. J. Dunbar, P. Murray, R. B. Bourne et C. H. Rorabeck. *The Porous Coated Anatomic Total Hip Replacement : A Ten to Fourteen-Year Follow-up Study of a Cementless Total Hip Arthroplasty.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 83, pages 1333–1338, 2001.

[Kay 95] R. M. Kay, F. J. Dorey, K. Johnston-Jones, A. Cracchiolo III, H. C. Amstutz et G. A. M. Finerman. *Long-term durability of cemented primary total hip arthroplasty.* The Journal of Arthroplasty, vol. 10-1, pages 29–38, 1995.

[Kayabasi 08] O. Kayabasi et B. Ekici. *Probabilistic design of a newly designed cemented hip prosthesis using finite element method.* Materials and Design, vol. 29, pages 963–971, 2008.

[Keaveny 93] T. M. Keaveny et W. C. Hayes. *A 20-year perspective on the mechanical properties of trabecular bone.* Journal of biomechanical engineering, vol. 115(4B), pages 534–542, 1993.

[Kerboull 04] L. Kerboull, M. Hamadouche, J. P. Courpied et M. Kerboull. *Long-term results of Charnley-Kerboull hip arthroplasty in patients younger than 50 years.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 418, pages 112–118, 2004.

[Kühn 03] K. D. Kühn et R. Specht. *Le ciment acrylique osseux : historique, caractéristiques et propriétés physiques.* Maîtrise Orthopédique, vol. 126, page 25, août 2003.

[Kim 99] Y. H. Kim, J. S. Kim et S. H. Cho. *Primary total hip arthroplasty with a cementless porous-coated anatomic total hip prosthesis : 10- to 12-Year results of prospective andconsecutive series.* The Journal of Arthroplasty, vol. 14-5, pages 538–548, 1999.

[Krismer 95] M. Krismer, R. Bauer, J. Tschupik et P. Mayrhofer. *EBRA : A method to measure migration of acetabular components.* Journal of Biomechanics, vol. 28-10, pages 1225–1236, 1995.

[Krismer 96] M. Krismer, B. Stöckl, M. Fischer, R. Bauer, P. Mayrhofer et M. Ogon. *Early migration predicts late aseptic failure of hip sockets.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 78-3, pages 422–428, 1996.

[Kärrholm 97] J. Kärrholm, P. Herberts, P. Hultmark, H. Malchau, B. Nivbrant et J. Thanner. *Radiostereometry of Hip Prostheses : Review of Methodology and Clinical Results.* Clinical Orthopaedics and Related Research., vol. 344, pages 94–110, 1997.

[Kärrholm 02] J. Kärrholm, C. Anderber, F. Snorrason, J. Thanner, N. Langeland, H. Malchau et P. Herberts. *Evaluation of a Femoral Stem with Reduced Stiffness A Randomized Study with Use of Radiostereometry and Bone Densitometry.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 84, pages 1651–1658, 2002.

[Kuiper 96] J. H. Kuiper et R. Huiskes. *Friction and Stem Stiffness Affect Dynamic Interface Motion in Total Hip Replacement.* Journal of Orrhopaedic Resrarch, vol. 14-1, pages 36–43, 1996.

[Lannocca 07] M. Lannocca, E. Varini, A. Cappello, L. Cristofolini et E. Bialoblocka. *Intra-operative evaluation of cementless hip implant stability : A prototype device based on vibration analysis.* Medical Engineering & Physics, vol. 29, pages 886–894, 2007.

[Laupacis 02] A. Laupacis, R. Bourne, C. Rorabeck, D. Feeny, P. Tugwell et C. Wong. *Comparison of total hip arthroplasty performed with and without cement :a randomized trial.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 84, pages 1823–1828, 2002.

[Lavigne 08] M. Lavigne, V. Masse, J. Girard, A.G. Roy et P.A. Vendittoli. *Return to sport after hip resurfacing or total hip arthroplasty : A randomized study.* Revue de chirurgie orthopédique et réparatrice de l'appareil moteur, vol. 94, pages 361–367, 2008.

[Laz 07] P. J. Laz, J. Q. Stowe, M. A. Baldwin, A. J. Petrella et P. J. Rullkoetter. *Incorporating uncertainty in mechanical properties for finite element-based evaluation of bone mechanics.* Journal of Biomechanics, vol. 40, pages 2831–2836, 2007.

[Lewis 97] G. Lewis. *Properties of Acrylic Bone Cement : State of the Art Review.* Journal of Biomedical Materials Research, vol. 38, pages 155–182, 1997.

[Li 96] P. L. S. Li, N. B. Jones et P. J. Gregg. *Vibration analysis in the detection of total hip prosthetic loosening.* Medical Engineering & Physics, vol. 18, pages 596–600, 1996.

[Lombardi 02] A. V. Lombardi, T. H. Mallory, R. A. Fada et J. B. Adams. *Stem modularity : Rarely necessary in primary total hip arthroplasty.* Orthopedics, vol. 25, pages 1385–1357, 2002.

[Lotz 90] J. C. Lotz, T. N. Gerhart et W. C. Hayes. *Mechanical properties of trabecular bone from the proximal femur : a quantitative CT study.* Journal of computer assisted tomography, vol. 14-1, pages 107–114, 1990.

[Lotz 91] J. C. Lotz, T. N. Gerhart et W. C. Hayes. *Mechanical properties of metaphyseal bone in the proximal femur.* Journal of Biomechanics, vol. 24, no. 5, pages 317 – 325, 327–329, 1991.

[Lyu 03] S. R. Lyu. *Use of Wagner cementless self-locking stems for massive bone loss in hip arthroplasty.* Journal of Orthopaedic Surgery, vol. 11(1), pages 43–47, 2003.

[Malchau 00] H. Malchau, P. Herberts, P. Söderman et A. Odén. *Prognosis of total hip replacement : Update and validation of results from the Swedish national hip arthroplasty registry 1979-1998.* 67th Annual Meeting of the American Academy of Orthopaedic Surgeons, vol. 1, page 18, March 15-19 2000.

[Mann 02] R. W. Mann. *Letter to the editor : Comment on : Hip contact forces and gait patterns from routine activities.* Journal of Biomechanics, vol. 35, pages 719–720, 2002.

[Marshall 04] A. D. Marshall, J. G. Mokris, R. D. Reitman, A. Dandar et D. R. Mauerhan. *Cementless Titanium Tapered-Wedge Femoral Stem 10- to 15-Year Follow-Up.* The Journal of Arthroplasty, vol. 19-5, pages 546–552, 2004.

[Matsumoto 98] M. Matsumoto et T. Nishimura. *Mersenne Twister : a 623-dimensionally equidistributed uniform pesudorandom number generator.* ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, vol. 8-1, pages 3–30, 1998.

[Mohler 95] C. G. Mohler, J. J. Callaghan, D. K. Collis et R. C. Johnston. *Early loosening of the femoral component at the cement-prosthesis interface after total hip replacement.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 77, Issue 9, pages 1315–1322, 1995.

[Mont 99] M. A. Mont, T. R. Yoon, K. A. Krackow et D. S. Hungerford. *Clinical experience with a proximally porous-coated second-generation cementless total hip prosthesis : Minimum 5-year follow-up.* The Journal of Arthroplasty, vol. 14-8, pages 930–939, 1999.

[Morgan 03] E. F. Morgan, H. H. Bayraktar et T. M. Keaveny. *Trabecular bone modulus-density relationships depend on anatomic site.* Journal of Biomechanics, vol. 36, no. 7, pages 897 – 904, 2003.

[Nazarian 07] A. Nazarian, J. Muller, D. Zurakowski, R. Müller et B. D. Snyder. *Densitometric, morphometric and mechanical distributions in the human proximal femur.* Journal of Biomechanics, vol. 40, pages 2573–2579, 2007.

[Nicolella 06] D. P. Nicolella, B. H. Thacker, H. Katoozian et D. T. Davy. *The effect of three-dimensional shape optimization on the probabilistic response of a cemented femoral hip prosthesis.* Jounal of Biomaterials, vol. 39, pages 1265–1278, 2006.

[Nivbrant 97] B. Nivbrant et J. Kärrholm. *Migration and wear of hydroxyapatite-coated press-fit cups in revision hip arthroplasty : A radiostereometric study.* The Journal of Arthroplasty, vol. 12-8, pages 904–912, 1997.

[Onsten 98] I. Onsten, A. Nordqvist, A. S. Carlsson, J. Besjakov et S. Shott. *Hydroxyapatite augmentation of the porous coating improves fixation of tibial components A RANDOMISED RSA STUDY IN 116 PATIENTS.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 80-D, pages 417–425, 1998.

[Otani 92] T. Otani et L. A. Whiteside. *Failure of cementless fixation of the femoral component in total hip arthroplasty.* The Orthopedic clinics of North America, vol. 23-2, pages 335–346, 1992.

[Otani 95] T. Otani, L. A. Whiteside, S. E. White et D. S. McCarthy. *Reaming technique of the femoral diaphysis in cementless total hip arthroplasty.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 311, pages 210–211, 1995.

[Palm 02] L. Palm, S. A. Jacobsson et I. Ivarsson. *Hydroxyapatite Coating Improves 8- to 10-Year Performance of the Link RS Cementless Femoral Stem.* The Journal of Arthroplasty, vol. 17, page 2, 2002.

[Pancanti 03] A. Pancanti, M. Bernakiewicz et M. Viceconti. *The primary stability of a cementless stem varies between subjects as much as between activities.* Journal of Biomechanics, vol. 36, pages 777–785, 2003.

[Panisello 09] J. J. Panisello, L. Herrero, V. Canales, A. Herrera, A. A. Martínez et J. Mateo. *Long-Term Remodeling in Proximal Femur Around a*

Hydroxyapatite-Coated Anatomic Stem : Ten Years Densitometric Follow-Up. The Journal of Arthroplasty, vol. 24-1, pages 56–64, 2009.

[Pauwels 77] F. Pauwels. Biomécanique de la hanche saine et pathologique. ISBN-10 : 3540083707 ISBN-13 : 978-3540083702. Sringer-Verlag, 1977.

[Petersilge 97] W. J. Petersilge, D. D. D'Lima, R. H. Walker et C. W. Colwell. *Prospective Study of 100 Consecutive Harris-Galante Porous Total Hip Arthroplasties 4- to 8-Year Follow-up Study.* The Journal of Arthroplasty, vol. 12-2, pages 185–193, 1997.

[Petsatodes 05] G. E. Petsatodes, J. E. Christoforides, P. P. Papadopoulos, A. G. Christodoulou, D. Karataglis et J. D. Pournaras. *Primary Total-Hip Arthroplasty With the Autophor 900-S Fully Porous Coated Stem in Young Patients : Seven to Seventeen Years of Follow-Up.* The Journal of Arthroplasty, vol. 20-4, pages 436–442, 2005.

[Pettersen 09] S. H. Pettersen, T. S. Wik et B. Skallerud. *Subject specific finite element analysis of implant stability for a cementless femoral stem.* Clinical Biomechanics, vol. 24-6, pages 480–487, 2009.

[Phillips 90] T. W. Phillips, S. S. Messieh et P. D. Mcdonald. *Femoral stem fixation in hip replacement : A biomechanical comparison of cementless and cemented prostheses.* Journal of Bone and Joint Surgery - British Volume, vol. 72-B, pages 431–434, 1990.

[Pibouleau 07] L. Pibouleau, D. Biau, C. Devaud, R. Cardoso, S. Prunier, C. Denis, A. Josseran et F. Pages. *Évaluation des prothèses de hanche : Révision des descriptions génériques de la liste de produits et prestations remboursables "Implants articulaires de hanche".* Haute Autorité de santé (HAS) : Service évaluation des dispositifs : Rapport de la Haute Autorité de Santé :, vol. 1, page 169, Septembre 2007.

[Pilliar 86] R. Pilliar, J. Lee et C. Maniatopoulos. *Observations on the Effect of Movement on Bone Ingrowth into Porous-Surfaced Implants.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 208, pages 108–113, 1986.

[Ploeg 09] H. L. Ploeg, M. Bürgi et U. P. Wyss. *Hip stem fatigue test prediction.* International Journal of Fatigue, vol. 31, pages 894–905, 2009.

[Pourreyron 08a] D. Pourreyron, H. Ayadi et F. Bonnomet. *Total hip arthroplasty in patients younger than 30 years old : Presentation of the series and analysis method.* Revue de chirurgie orthopédique et réparatrice de l'appareil moteur, vol. 94, pages 135–137, 2008.

[Pourreyron 08b] D. Pourreyron, F Zadegan, A Raould, R Nizard et L Sedel. *Prothèse totale de hanche chez le patient jeune(Total hip replacement in young age population).* e-mémoires de l'Académie Nationale de Chirurgie, vol. 7 (4), pages 42–46, 2008.

[Pérez 06a] M. A. Pérez, J. M. Garcia-Aznar, M. Doblaré, B. Seral et F. Seral. *A comparative FEA of the debonding process in different concepts of cemented hip implants.* Medical Engineering & Physics, vol. 28, pages 525–533, 2006.

[Pérez 06b] M. A. Pérez, J. Grasa, J. M. Garcia-Aznar, J. A. Bea et M. Doblaré. *Probabilistic analysis of the influence of the bonding degree of the stem cement interface in the performance of cemented hip prostheses.* Journal of Biomechanics, vol. 39, pages 1859–1872, 2006.

[Qi 03] G. Qi, W. P. Mouchon et T. E. Tan. *How much can a vibrational diagnostic tool reveal in total hip arthroplasty loosening ?* Clinical Biomechanics, vol. 18, pages 444–458, 2003.

[Rackwitz 76] R. Rackwitz. *Practical probabilistic approach to design first order reliability concepts for design codes.* Bulletin d'Information de CEB, vol. 112, 1976.

[Ramamurti 97] B. S. Ramamurti, T. E. Orr, C. R. Bragdon, J. D. Lowenstein, M. Jasty et W. H. Harris. *Factors influencing stability at the interface between a porous surface and cancellous bone : a finite element analysis of a canine in vivo micromotion experiment.* Journal of Biomedical Materials Research, vol. 36, pages 274–280, 1997.

[Reggiani 07] B. Reggiani, L. Cristofolini, E. Varini et M. Viceconti. *Predicting the subject-specific primary stability of cementless implants during pre-operative planning : Preliminary validation of subject-specific finite-element models.* Journal of Biomechanics, vol. 40-11, pages 2552–2558, 2007.

[Reggiani 08] B. Reggiani, L. Cristofolini, F. Taddei et M. Viceconti. *Sensitivity of the Primary Stability of a Cementless Hip Stem to Its Position and Orientation.* Artificial Organs, vol. 32-7, pages 555–560, 2008.

[Reilly 75] D. T. Reilly et A. H. Burstein. *The elastic and ultimate properties of compact bone tissue.* Journal of Biomechanics, vol. 8, no. 6, pages 393 – 396, IN9–IN11, 397–405, 1975.

[Rousseau 04] M. A. Rousseau, S. Le Mouel, D. Goutallier et S. Van Driessche. *Long-term results of alumina-on-alumina total hip arthroplasty.* Revue de chirurgie orthopédique, vol. 90, pages 741–748, 2004.

[Rubin 93] P. J. Rubin, R. L. Rakotomanana, P. F. Leyvraz, P. K. Zysset, A. Curnier et J. H. Heegaard. *Frictional interface micromotions and anisotropic stress distribution in a femoral total hip component.* Journal of Biomechanics, vol. 26-6, pages 725–735, 737–739, 1993.

[Rubinstein 08] R. Y. Rubinstein et D. P. Kroese. Simulation and the monte carlo method. Wiley, deuxième edition, 2008.

[Sakai 06a] R. Sakai, M. Itoman et K. Mabuchi. *Assessments of different kinds of stems by experiments and FEM analysis : Appropriate stress distribution on a hip prosthesis.* Clinical Biomechanics, vol. 21, pages 826–833, 2006.

[Sakai 06b] R. Sakai, N. Kanai, M. Itoman et K. Mabuchi. *Assessment of the fixation stiffness of some femoral stems of different designs.* Clinical Biomechanics, vol. 21, pages 370–378, 2006.

[Sarmiento 90] A. Sarmiento, E. Ebramzadeh, W. J. Gogan et H. A. McKellop. *Total hip arthroplasty with cement. A long-term radiographic analysis in patients who are older than fifty and younger than fifty years.* Journal of Bone and Joint Surgery - American Volume, vol. 72, pages 1470–1476, 1990.

[Søballe 92] K. Søballe, E. S. Hansen, H. B. Rasmussen, P. H. Jørgensen et C. Bünger. *Tissue ingrowth into titanium and hydroxyapatite-coated implants during stable and unstable mechanical conditions.* Journal of Orthopaedic Research, vol. 10-2, pages 285–299, 1992. Received : 21 November 1990 ; Accepted : 1 October 1991.

[Schileo 08] E. Schileo, F. Taddei, L. Cristofolini et M. Viceconti. *Subject-specific finite element models implementing a maximum principal strain criterion are able to estimate failure risk and fracture location on human femurs tested in vitro.* Journal of Biomechanics, vol. 41, pages 356–367, 2008.

[Schneider 89] E. Schneider, C. Kinast, J. Eulenberger, D. Wyder, G. Eskilsson et S. M. Perren. *A comparative study of the initial stability*

of cementless hip prostheses. Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 1, pages 200–209, 1989.

[Selvik 89] G. Selvik. *Roentgen stereophotogrammetry. A method for the study of the kinematics of the skeletal system.* Acta Orthop Scand, vol. 232, pages 1–51, 1989. Suppl.

[Shultz 06] T. R. Shultz, J. D. Blaha, T. A. Gruen et T. L. Norman. *Cortical Bone Viscoelasticity and Fixation Strength of Press-Fit Femoral Stems : A Finite Element Model.* Journal of Biomechanical Engineering, vol. 128, pages 7–12, 2006.

[Spears 00] I. R. Spears, M. Pfleiderer, E. Schneider, E. Hille, G. Bergmann et M. M. Morlock. *Interfacial conditions between a press-"t acetabular cup and bone during daily activities : implications for achieving bone in-growth.* Journal of Biomechanics, vol. 33, pages 1471–1477, 2000.

[Stea 02] S. Stea, B. Bordini, A. Sudanese et A. Toni. *Registration of hip prostheses at the Rizzoli institute 11 years' experience.* Acta Orthop Scand, vol. 73, pages 40–44, 2002. (Suppl 305).

[Stolk 01] J. Stolk, N. Verdonschot et R. Huiskes. *Hip-joint and abductor-muscle forces adequately represent in vivo loading of a cemented total hip reconstruction.* Journal of Biomechanics, vol. 34, pages 917–926, 2001.

[Stolk 02] J. Stolk, N. Verdonschot, L. Cristofolini, A. Toni et R. Huiskes. *Finite element and experimental models of cemented hip joint reconstructions can produce similar bone and cement strains in preclinical tests.* Journal of Biomechanics, vol. 35-4, pages 499–510, 2002.

[Ström 06] H. Ström, K. Kolstad, H. Mallmin, B. Sahlstedt et J. Milbrink. *Comparison of the uncemented Cone and the cemented Bimetric hip prosthesis in young patients with osteoarthritis An RSA, clinical and radiographic study.* Acta Orthopaedica, vol. 77(1), pages 71–78, 2006.

[Svehla 00] M. Svehla, P. Morberg, B. Zicat, W. Bruce, D. Sonnabend et W. R. Walsh. *Morphometric and mechanical evaluation of titanium implant integration : Comparison of five surface structures.* Journal of Biomedical Materials Research, vol. Volume 51 Issue 1, pages 15–22, 2000. Part B : Applied Biomaterials.

[Swanson 05] T. V. Swanson. *The Tapered Press Fit Total Hip Arthroplasty.* The Journal of Arthroplasty, vol. 20 No. 4, page Suppl. 2, 2005.

[Tanzer 01] M. Tanzer, S. Chan, C. E. Brooks et J. D. Bobyn. *Primary Cementless Total Hip Arthroplasty Using a Modular Femoral Component A Minimum 6-Year Follow-Up.* The Journal of Arthroplasty, vol. Vol. 16 No. 8 Suppl. 1, page 7, 2001.

[Tonino 00] A. J. Tonino et A. I. A. Rahmy. *The Hydroxyapatite-ABG Hip System 5- to 7-Year Results From an International Multicentre Study.* The Journal of Arthroplasty, vol. 15, page 3, 2000.

[Turner 99] C. H. Turner, J. Rho, Y. Takano, T. Y. Tsui et G. M. Pharr. *The elastic properties of trabecular and cortical bone tissues are similar : results from two microscopic measurement techniques.* Journal of Biomechanics, vol. 32, pages 437–441, 1999.

[UGSCorp. 07a] UGSCorp. *FEMAP API Reference V9.3.1.* National Aeronautics and Space Administration., 2007.

[UGSCorp. 07b] UGSCorp. *NX Nastran Advanced Nonlinear Theory and Modeling Guide.* National Aeronautics and Space Administration., 2007.

[Ulrich 97] D. Ulrich, T. Hildebrand, B. Van Rietbergen, R. Müller et P. Rüegsegger. *The quality of trabecular bone evaluated with micro-computed tomography, FEA and mechanical testing.* Studies in health technology and informatics, vol. 40, pages 97–112, 1997.

[Varini 08] E. Varini, L. Cristofolini, F. Traina, M. Viceconti et A. Toni. *Can the rasp be used to predict intra-operatively the primary stability that can be achieved by press-fitting the stem in cementless hip arthroplasty ?* Clinical Biomechanics, vol. 23, pages 408–414, 2008.

[Vayre 09] P. Vayre. *L'arbre de Judet : les racines en Creuse et le faîte à Paris.* e-mémoires de l'Académie Nationale de Chirurgie, vol. 8-1, pages 64–72, 2009.

[Verdonschot 96] N. Verdonschot et R. Huiskes. *Mechanical effects of stem cement interface characteristics in total hip replacement.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 329, pages 326–336, 1996.

[Viceconti 00] M. Viceconti, R. Muccini, M. Bernakiewicz, M. Baleani et L. Cristofolini. *Large-sliding contact elements accurately predict levels of bone-implant micromotion relevant to osseointegration.* Journal of Biomechanics, vol. 33, pages 1611–1618, 2000.

[Viceconti 06] M. Viceconti, G. Brusi, A. Pancanti et L. Cristofolini. *Primary stability of an anatomical cementless hip stem : A statistical analysis.* Journal of Biomechanics, vol. 39, pages 1169–1179, 2006.

[Vidalain 99] J. P. Vidalain et ARTRO Group. *The corail system in primary THA : results, lessons and eomments from the series performed by the ARTRO Group (12-year experience).* European Journal of Orthopaedic Surgery and Traumatology, vol. 9, pages 87–90, 1999.

[Vrooman 98] H. A. Vrooman, E. R. Valstar, G. J. Brand, D. R. Admiraal, P. M. Rozing et J. H. C. Reiber. *Fast and accurate automated measurements in digitized stereophotogrammetric radiographs.* Journal of Biomechanics, vol. 31-5, pages 491–498, 1998.

[Wachter 01] N. J. Wachter, P. Augat, I. P. Hokellen, G. D. Krischak, M. R. Sarkar, M. Mentzel, L. Kinzl et L. Claes. *Predictive value of Singh index and bone mineral density measured by quantitative computed tomography in determining the local cancellous bone quality of the proximal femur.* Clinical Biomechanics, vol. 16, pages 257–262, 2001.

[Waide 04] V. Waide, L. Cristofolini, J. Stolk, N. Verdonschot, G.J. Boogaard et A. Toni. *Modelling the fibrous tissue layer in cemented hip replacements : experimental and finite element methods.* Journal of Biomechanics, vol. 37, pages 13–26, 2004.

[Wang 95] J. S. Wang, H. Franzén, S. Toksvig-Larsen et L. Lidgren. *Does vacuum mixing of bone cement affect heat generation ? Analysis of four cement brands.* Journal of Applied Biomaterials, vol. Volume 6 Issue 2, pages 105 – 108, Received : 25 April 1994 ; Accepted : 30 January 1995 1995.

[Weinans 92] H. Weinans, R. Huiskes et H. J. Grootenboer. *Effects of Material Properties of Femoral Hip Components on Bone Remodeling.* Journal of Orthopaedic Research, vol. 10, pages 845–853, 1992.

[Westphal 06] F.M. Westphal, N. Bishop, M. Honl, E. Hille, K. Püschel et M.M. Morlock. *Migration and cyclic motion of a new short-stemmed hip prosthesis - a biomechanical in vitro study.* Clinical Biomechanics, vol. 21, pages 834–840, 2006.

[Wettstein 05] M. Wettstein, E. Mouhsine, J. N. Argenson, P. J. Rubin, J. M. Aubaniac et P. F. Leyvraz. *Three-dimensional computed cementless custom femoral stems in young patients : midterm followup.*

Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 437, pages 169–175, 2005.

[Wichura 88] M. J. Wichura. *Algorithm AS241 : The percentage points of the normal distribution.* Applied Statistics, vol. 37, pages 477–484, 1988.

[Wirtz 00] D. C. Wirtz, N. Schiffers, T. Pandorf, K. Radermacher, D. Weichert et R. Forst. *Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur.* Journal of Biomechanics, vol. 33, pages 1325–1330, 2000.

[Wong 05] A. S. Wong, A. M. R. New, G. Isaacs et M. Taylor. *Effect of bone material properties on the initial stability of a cementless hip stem : a finite element study.* Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H : Journal of Engineering in Medicine, vol. 219-4, pages 265–275, 2005.

[Wroblewski 93] B. Wroblewski et P. Siney. *Charnley Low-Friction Arthroplasty of the Hip : Long-Term Results.* Clinical Orthopaedics and Related Research, vol. 292, pages 191–201, 1993.

[Yates 06] P. Yates, S. Serjeant, G. Rushforth et R. Middleton. *The Relative Cost of Cemented and Uncemented Total Hip Arthroplasties.* The Journal of Arthroplasty, vol. 21-1, pages 102–105, 2006.

[Zysset 99] P. K. Zysset, X. E. Guo, C. E. Hoffler, K. E. Moore et S. A. Goldstein. *Elastic modulus and hardness of cortical and trabecular bone lamellae measured by nanoindentation in the human femur.* Journal of Biomechanics, vol. 32, pages 1005–1012, 1999.