N° d'ordre : 4140

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Vincent PIT**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

Spécialité : **Mathématiques Pures**

****

CODAGE DU FLOT GÉODESIQUE SUR LES SURFACES HYPERBOLIQUES DE VOLUME FINI

****

Soutenue le 3 décembre 2010 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux, après avis de :

F. DAL'BO-MILONET	Professeur, Université Rennes I	**Rapporteur**
F. LEDRAPPIER	Professeur, University of Notre Dame	**Rapporteur**
M. POLLICOTT	Professeur, University of Warwick	**Rapporteur**

et devant la commission d'examen composée de :

C. BAVARD	Professeur, Université Bordeaux I	
F. DAL'BO-MILONET	Professeur, Université Rennes I	**Rapporteur**
E. GARIBALDI	Professeur associé, Universidade de Campinas	
F. LEDRAPPIER	Professeur, University of Notre Dame	**Rapporteur**
M. POLLICOTT	Professeur, University of Warwick	**Rapporteur**
P. THIEULLEN	Professeur, Université Bordeaux I	**Directeur**

- 2010 -

Codage du flot géodésique sur les surfaces hyperboliques de volume fini

VINCENT PIT

3 décembre 2010

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Philippe. Au cours de ces trois années, il aura toujours été disponible pour répondre à mes questions et orienter ma recherche. Au fil des problèmes que nous avons été amenés à rencontrer, j'ai appris à me fier à son excellente intuition mathématique Son optimisme et sa bonne humeur m'ont aidé à garder le cap durant les périodes de doute.

Je remercie Françoise Dal'bo, François Ledrappier et Mark Pollicott d'avoir endossé la lourde tâche de relire ce manuscrit. Françoise pour ses commentaires qui m'ont permis d'éclaircir plusieurs points importants, François pour son enthousiasme vis-à-vis de mes travaux, et Mark pour sa participation en dépit de la barrière linguistique. Je suis très honoré qu'ils aient tous les trois pu trouver le temps de se déplacer à Bordeaux pour ma soutenance. Je remercie aussi Christophe Bavard et Eduardo Garibaldi de bien avoir voulu faire partie du jury.

Lorsque je contemple aujourd'hui la succession d'événements qui m'ont conduit à cette thèse, je prends conscience de combien certaines rencontres ont pu être déterminantes. Je pense à Pierre Pansu qui, par une belle matinée de printemps, a bien gentiment voulu accorder une heure de son temps pour expliquer à un taupin en quoi consistait la recherche en mathématiques. À Serge Cantat qui nous a initié, Mickaël et moi, à la théorie des systèmes dynamiques au cours d'un TER passionnant. À Nessim Sibony qui, au moment où je cherchais une thèse, m'a mis en relation avec Philippe. Je leur suis grandement reconnaissant pour leurs conseils éclairés.

Je veux aussi remercier tous les enseignants qui ont su faire éclore et entretenir ma passion pour les mathématiques, des bancs du primaire à Villeneuve-Saint-Georges jusqu'au master de mathématiques fondamentales à Orsay, en passant par le lycée d'Arsonval de Saint-Maur et les classes préparatoires des lycées Fénelon et Saint-Louis. J'ai une pensée toute particulière pour les enseignants que j'ai pu croiser durant mon passage par l'Antenne de Bretagne de l'École Normale Supérieure de Cachan ; école qui m'a offert un cadre matériel et intellectuel idéal pour me former aux mathématiques, et grâce à laquelle j'ai obtenu mon allocation de recherche. J'espère en avoir été digne.

Tout au long de ces trois années de thèse, j'ai eu la chance de pouvoir participer à de nombreux congrès et rencontres. Je remercie donc les organisateurs, spécifiquement ceux du GDR Platon et de l'ANR Dynamique non hyperbolique, de m'y avoir invité ; ainsi que l'Institut de Mathématiques de Bordeaux pour en avoir financé la plupart des trajets. Enfin, merci au LAMFA pour son papier et ses agraphes.

Merci à ma famille pour son soutien discret mais réel et constant ; soutien qui, dans la plus pure tradition familiale, sait s'exprimer au-delà des mots et des apparences.

Merci aux amis. Ceux de Bordeaux (par distance croissante par rapport au bureau 154) : Tony, Florent (à qui j'ai l'honneur de succéder à la charge de responsable du café du midi), Élie, Guillaume (pour ses imitations), Cédric, Pierre, Nicolas, Fabien & Teresa, Frédéric (quelque part), Bertrand, Claire (la plus belle), Arthur, Delphine & Aubin, Pascal, Sofiane, Marjorie, Rémi (...et demie). Merci à Shrek de m'avoir chaleureusement accueilli au début de ma thèse, moi qui lui était parfaitement inconnu. Mais aussi aux amis de Rennes : Adeline, Alain, Anne, Aurélien, Benjamin (pour avoir incarné l'image taupinale de toute une génération), Cécile, François, Hélène, Jérémie, Jon (à qui je souhaite bonne chance), Lionel, Ludovic (petits ou grands), Marie, Mickaël (désolé de t'avoir chipé tes rapporteurs), Roland, Sébastien, Tiphaine. Enfin, ceux de partout : Anliou, Déborah & Noël, Jérôme, Kevin, Marie & Tommy, Nicolas, Philippe & Estelle, Sébastien, William, Yves. Et je m'excuse d'avance pour ceux que j'ai oublié.

Le code source des dessins figurants dans cette thèse a été généré par un module Perl que j'ai écrit et publié spécialement pour l'occasion. Il a fait l'objet d'un exposé à la conférence `YAPC::Europe 2010`. J'en remercie ses organisateurs pour m'avoir permis de le présenter, ce qui m'a assurément servi d'objectif et de motivation durant son développement.

Table des matières

Remerciements **3**

Table des matières **7**

Introduction **11**

1 Préliminaires de géométrie hyperbolique **15**
1.1 L'espace hyperbolique 16
1.2 Isométries 18
1.3 Domaines fondamentaux 21
1.3.1 Définitions et notations 21
1.3.2 Propriété d'*even corners* 23
1.3.3 Nombre de côtés 25
1.3.4 Ordre des points à l'infini 27
1.4 Tubes géodésiques 29

2 Du flot géodésique au codage de Bowen-Series **37**
2.1 Billard géodésique 39
2.1.1 Billard et billard inverse 39
2.1.2 Exemples 42
2.1.3 Relations avec le flot géodésique 48
2.2 Codage rectifié 53
2.3 Conjugaison entre le billard et le codage droit 63
2.3.1 Description de $B \setminus C$ 66
2.3.2 Description de $C \setminus B$ 70
2.3.3 Description de $B \cap C$ 74
2.3.4 Action des générateurs 75
2.3.5 Conjugaison 83
2.3.6 L'exemple de la surface modulaire 88

3 Autour de la propriété d'orbite-équivalence **93**
3.1 Invariance de familles de relations sur le bord 95
3.2 Dynamique du codage de Bowen-Series 100
3.2.1 Orbite-équivalence 100
3.2.2 Points pré-périodiques 101
3.2.3 Densité des préimages et densité des points périodiques 105
3.2.4 Orbites périodiques et classes de conjugaison d'hyperboliques primitifs 108
3.2.5 Fonction zeta dynamique de Ruelle et fonction zeta de Selberg 111

4 Propriétés dynamiques du codage étendu **117**
4.1 Périodicité des géodésiques de bord 118
4.2 Points périodiques de T_B, T_C, T_L et T_R 121
4.2.1 Bijection entre les points périodiques de T_C, T_L et T_R 121
4.2.2 Description des orbites et densité des points périodiques 122
4.3 Codage symbolique 125
4.3.1 Partitions opposées 125
4.3.2 Densité des partitions opposées 128
4.3.3 Projection sur $\Delta^n(x')$ 131
4.3.4 Le codage étendu comme sous-shift de type fini 132

5 Fonctions et distributions propres de l'opérateur de transfert **141**
5.1 Transformée de Poisson-Helgason et opérateur de transfert 143
5.2 Fonctions propres et distributions propres 148
5.2.1 D'une distribution propre à une fonction propre 148
5.2.2 Injectivité de Ψ_s 148
5.2.3 Extension naturelle d'une fonction propre de $\mathcal{L}_{L,s}$ 150
5.2.4 Formule d'inversion de $\psi_{f,s}$ 157

Bibliographie **163**

Introduction

Le codage de Bowen-Series est un object classique de l'étude du flot géodésique sur des surfaces de courbure négative constante. Il permet de remplacer en grande partie l'étude des propriétés dynamiques de celui-ci par une simple transformation du cercle à l'infini dans lui-même qui respecte une partition de Markov. Cette transformation est de plus connue pour avoir des liens profonds avec la théorie spectrale du laplacien sur la surface.

Dans cette thèse, nous étudierons les objets reliés au codage de Bowen-Series dans le cas de surfaces hyperboliques $\mathcal{H}/\Gamma$ de volume fini et ayant éventuellement des points elliptiques. Les raisonnements exposés y sont en grande majorité de nature combinatoire dans l'espoir de pouvoir les généraliser au cas de la courbure variable ; en particulier, nous prendrons soin de construire des transformations "finies" au sens où elles ne nécessitent qu'un découpage fini de leur espace de base pour pouvoir être définies par morceaux.

Le premier chapitre contient un certain nombre de généralités sur la géométrie hyperbolique. En particulier, on y pose les notations qui seront utilisées tout au cours de cette thèse, et on explicite quelles seront les hypothèses à faire sur le domaine fondamental et comment elles se traduisent en termes du groupe fuchsien sous-jacent.

Le procédé de codage du flot géodésique est décrit dans le second chapitre. On construit d'abord le billard géodésique à partir d'un domaine fondamental fixé en considérant toutes les géodésiques qui coupent l'intérieur du domaine, plus celles qui passent par un des sommets du domaine en le laissant à leur gauche. On y définit alors un système dynamique T_B en envoyant une géodésique sur son image par l'isométrie associée au côté par lequel la géodésique sort du domaine. Ce système dynamique admet une suspension qui est conjuguée au flot géodésique sur la surface modulo, dans le cas volume fini, un ensemble de mesure nulle de géodésiques.

Étant donnée une géodésique dans le billard, l'isométrie qui nous permet de passer à son image dépend à la fois de ses extrémités passées et futures. Ce comportement rend l'étude du billard difficile, et on préférerait que cette isométrie ne dépende que de l'extrémité future de la géodésique. C'est ce qui nous amène à définir le codage rectifié T_C sur une réunion finie de rectangles de l'ensemble des géodésiques de l'espace hyperbolique, à la manière de ce qu'avaient initié Adler et Flatto dans [AF91] pour des groupes cocompacts ; mais sans choix de domaine fondamental particulier et pour Γ de covolume fini. On prouvera qu'il est conjugué au billard géodésique, et que cette conjugaison peut être construite en découpant le billard en un nombre fini de morceaux et en définissant la conjugaison comme agissant par un même élément du groupe sur chacun d'entre eux. Notre approche est purement géométrique et ne se base pas du tout sur le graphe de Cayley de Γ tel que cela a pu être développé dans [Ser81].

Puisque la transformation du codage étendu ne dépend que d'une des composantes, elle induit en restriction à cette composante une transformation du bord à l'infini dans lui-même. Cette nouvelle transformation préserve par construction une partition de Markov finie du bord, et elle est définie sur chaque intervalle de la partition comme agissant par une isométrie du

groupe. Elle ressemble très fortement à la transformation de Bowen-Series tel que défini dans [BS79], mais à la différence de celle-ci elle ne nécessite pas de partition de Markov dénombrable lorsque le domaine fondamental possède des sommets à l'infini. Cette propriété de finitude sera utilisée de manière cruciale dans nombre de démonstrations.

Le troisième chapitre est entièrement consacré à l'étude de cette transformation T du bord, identifié au cercle unité $\mathbb{S}^1$. La propriété phare de [BS79] était que T est orbite-équivalent avec le groupe Γ, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^1, (\exists \gamma \in \Gamma, \gamma(x) = y) \Leftrightarrow (\exists p, q \geq 0, T^p(x) = T^q(y)) .$$

La preuve de cette propriété repose sur le transport de la dynamique combinatoire des intervalles de la partition de Markov aux points de $\mathbb{S}^1$. Nous la généraliserons dans un contexte plus large où la cible du transport peut être librement définie comme un ensemble X sur lequel Γ agit, sous réserve d'avoir des conditions qui lient l'action de Γ sur X et sur les intervalles du bord. Cette meta-proposition nous redonnera la propriété d'orbite-équivalence, mais aussi une propriété plus forte d'orbite-équivalence des mots du codage :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall \gamma \in \Gamma, \exists p, q \geq 0, \gamma^p[x] = \gamma^q[\gamma(x)]\gamma$$

où $\gamma^p[x]$ représente le mot du groupe qui permet de définir $T^p(x)$. Elle s'appliquera aussi dans le dernier chapitre pour étendre le théorème de Pollicott sur les distributions de Helgason à une classe plus large de distributions et pour un groupe Γ de covolume fini.

La suite du troisème chapitre présente un certain nombre de résultats dynamiques concernant cette transformation. On montrera en particulier que les points T-périodiques sont exactement les points fixes d'éléménts non triviaux de Γ, et qu'il existe une bijection entre les points T-périodiques hyperboliques et les classes de conjugaison d'hyperboliques primitifs de Γ. Enfin, la propriété d'orbite-équivalence implique naturellement que les préimages de points périodiques sont denses dans l'ensemble limite, qui est dans notre cas $\mathbb{S}^1$ tout entier. On montrera que cette propriété est en fait vérifiée pour tout point de $\mathbb{S}^1$ (non nécessairement périodique) si et seulement si les points T-périodiques sont denses, et si et seulement si il existe au moins un point périodique dans chaque intervalle de la partition de Markov. Ces propriétés ne pourront être effectivement montrées qu'au chapitre suivant car prouver la densité des points T-périodiques nécessite de considérer le codage étendu.

Dans le quatrième chapitre, on passe de l'étude du facteur T du codage rectifié à l'étude de la transformation complète T_C. On commencera par décrire à quelle condition une géodésique qui borde le domaine est un point périodique du codage étendu, puis on appliquera ce résultat pour obtenir que l'on a bijection entre les points périodiques de T et de T_C. Couplé à une description des T_C-orbites à l'aide de la propriété d'orbite-équivalence forte, cette bijection nous permettra de prouver que les points T-périodiques sont denses, et donc que les conditions équivalentes du chapitre précédent ont bien lieu.

Le résultat le plus intéressant du chapitre reste à venir. Au biais d'arguments similaires à ceux utilisés au chapitre précédent pour prouver l'équivalence entre densité des préimages de tout point et densité des points périodiques, on peut construire une conjugaison entre T_C et un sous-shift de type fini dont les transitions sont données par la propriété de Markov de T, et ce modulo un nombre dénombrable de mots infinis dans le sous-shift. C'est un autre codage qui s'assimile au procédé classique de codage de géodésiques par les séquences coupantes tel qu'explicité par exemple dans [Ser86] ou dans [Ser91], mais notre approche le lie moins étroitement à la géométrie de l'espace hyperbolique.

Le cinquième et dernier chapitre aborde un tout autre aspect du codage de Bowen-Series : l'étude des éléments propres de son opérateur de Ruelle $\mathcal{L}_s$. Depuis les travaux d'Helgason avec [Hel81], on sait que toute solution de l'équation $\Delta f = -s(1-s)f$ dans $\mathcal{H}$ à croissance au plus exponentielle en le rayon hyperbolique peut être vue comme le test d'une distribution sur $\mathbb{S}^1$, dite de Helgason et notée $\mathcal{D}_{f,s}$, contre le noyau de Poisson de paramètre s. Cette distribution était classiquement vue comme agissant sur des espaces de fonctions analytiques sur le bord, et Pollicott a montré dans [Pol91] que lorsque Γ est cocompact, $\mathcal{D}_{f,s}$ est distribution propre pour la valeur propre 1 de $\mathcal{L}_s$ si et seulement si f est Γ-invariante.

Mais Otal a prouvé beaucoup plus tard que la distribution de Helgason pouvait être représentée comme une forme linéaire continue sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le bord et agissant comme la dérivée faible d'une fonction Hölder d'ordre $\Re(s)$. L'opérateur de Ruelle étant naturellement défini sur des espaces de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle de la partition de Markov, Lopes et Thieullen ont prolongé dans [LT08] la distribution de Helgason au sens d'Otal à cette classe de fonctions. Le premier résultat que nous démontrerons dans ce chapitre est donc la version "théorie d'Otal" du théorème de Pollicott, et ce de plus pour un groupe Γ de covolume fini à quelques exceptions près. Cette preuve repose sur la méta-proposition d'orbite-équivalente établie au chapitre 3.

Une fois le cas des distributions propres de $\mathcal{L}_s$ traité, on souhaiterait pouvoir déterminer les fonctions propres de cet opérateur. Lopes et Thieullen, toujours dans [LT08], ont réussi à construire une fonction propre $\psi_{f,s}$ de $\mathcal{L}_s$ à partir de toute distribution de Helgason $\mathcal{D}_{f,s}$ en testant celle-ci contre un noyau à base de distance de Gromov sur le bord dont le rôle est d'échanger les coordonnées passées et futures aux yeux de $\mathcal{L}_s$. Ils ont surtout montré que l'application $\mathcal{D}_{f,s} \to \psi_{f,s}$ était injective. Notre second résultat est l'extension de ce théorème au cas Γ de covolume fini. De plus, on construira un inverse partiel à cette application sur son image, mais uniquement pour Γ cocompact et $\Im(s)$ grand.

Chapitre 1

Préliminaires de géométrie hyperbolique

Ce chapitre rassemble un certain nombre de notations classiques et d'outils qui seront exploités au cours des chapitres suivants.

La première section énonce juste quelques généralités sur l'espace hyperbolique. On décrit ensuite les isométries hyperboliques dans la seconde section. En particulier, on énonce quelques formules qui décrivent comment des quantités à base de cocyle de Busemann telles que la distance de Gromov se comportent vis-à-vis de l'action des isométries. De plus, on y détermine à quelles condition une isométrie et son inverse sont conjuguées dans un groupe fuchsien, ce qui mettra en lumière les résultats du chapitre 3 sur la correspondance entre orbites périodiques hyperboliques du codage et classes de conjugaisons d'isométries hyperboliques primitives du groupe.

La seconde section traite de domaines fondamentaux. On y donnera en particulier toutes les notations sur les extrémités de géodésiques qui seront utilisées tout au long de cette thèse. Nous énoncerons aussi les hypothèses sur le domaine que nous serons amenées à faire pour prouver nos résultats, et nous verrons comment ils se traduisent en termes de groupe.

Enfin, la dernière section est entièrement consacrée aux tubes géodésiques. Il s'agit d'une notion qui englobe tous les sous-ensemble du tore $\mathbb{T}^2$ qui joueront le rôle de briques de base dans le billard et le codage géodésiques définis au chapitre 2. En particulier, on décrit avec la même notation des produits d'intervalles, i.e. toutes les géodésiques qui partent d'un intervalle et qui finissent dans un autre, et les "coins", ces ensembles de géodésiques partant d'un intervalle et traversant un segment ou une demi-géodésique donné. On énoncera plusieurs lemmes techniques qui nous permettront d'identifier les intersections et complémentaires de tubes géodésiques qui appararaitront au cours de la preuve de la conjugaison entre billard et codage au chapitre 2.

1.1 L'espace hyperbolique

L'*espace hyperbolique* est le nom générique pour le revêtement universel de toutes les variétés à courbure constante égale à -1. On le modèlera essentiellement par le disque de Poincaré

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

muni de la métrique $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$. On rappelle que les géodésiques géométriques maximales de ce modèle sont les droites passant par l'origine et les arcs de cercles orthogonaux au cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Ce modèle possède les avantages d'être conforme et de ne privilégier aucun point. Le modèle du demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} \mid \Im(w) > 0\}$$

muni de $\frac{|dw|}{\Im(w)}$ sera parfois utilisé pour certains calculs. On notera $\mathcal{H}$ un modèle de l'espace hyperbolique, et d la distance qui lui est associée.

$\mathcal{H}$ étant une variété riemannienne, on peut définir son fibré tangent $T\mathcal{H}$ et son fibré unitaire tangent $T^1\mathcal{H} = \{(x, v) \in T\mathcal{H} \mid \|v\|_x = 1\}$. Dans le domaine du disque, ils s'identifient respectivement aux fibré triviaux $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$ et $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$. Étant donné un point-vecteur unitaire $(x, v) \in T^1\mathcal{H}$, il existe une unique géodésique passant par x et tangente en x à v. Réciproquement, étant donné une géodésique géométrique passant par un point $x \in \mathcal{H}$, il existe une unique paire de vecteurs tangents unités $v_+, v_- \in T^1_x\mathcal{H}$ qui engendrent la géodésique géométrique ; et on a de plus que $v_- = -v_+$. Une géodésique étant difféomorphe à $\mathbb{R}$, un choix de v_+ ou de v_- en un point x de la géodésique en induit un naturel pour tous les autres points. Ce choix définit une orientation de la géodésique.

On peut définir une relation d'équivalence entre géodésiques orientées en identifiant celles qui restent à distance bornée dans le passé ou dans le futur. L'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation s'appelle le *bord à l'infini de l'espace hyperbolique*, et il est noté $\partial\mathcal{H}$. Chaque fibre du fibré unitaire tangent s'identifie alors canoniquement avec $\partial\mathcal{H}$. Dans le modèle du disque, il est incarné par le cercle $\mathbb{S}^1$ qui est alors nommé *cercle à l'infini*. Dans le modèle du demi-plan, on reconnait la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. De plus, on peut munir $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \sqcup \partial\mathcal{H}$ d'une topologie (par exemple dans le modèle du disque de la trace de la topologie de $\mathbb{C}$) qui rend les inclusions de $\mathcal{H}$ et de $\partial\mathcal{H}$ continues.

Chaque géodésique orientée peut alors être paramétrée de manière unique par un couple de points distincts du bord à l'infini, le premier donné par la classe de l'inverse de la géodésique (l'*extrémité passée*), le second par la classe de la géodésique elle-même (l'*extrémité future*). On représentera donc l'ensemble des géodésiques par $\mathbb{T}^2 \setminus \Delta$ où Δ est la diagonale du tore.

Puisque le bord est difféomorphe au cercle, on peut définir des *intervalles à l'infini* ouverts ou fermés $]a; b[$, $]a; b]$, $[a; b[$, $[a; b]$ en transportant ceux de la droite réelle. Toutes les opérations habituelles sur les intervalles (telles que l'appartenance, la réunion ou l'intersection) restent valides tant que tous les intervalles concernés sont inclus dans un même intervalle du bord différent de $\partial\mathcal{H}$ tout entier.

Étant donné $\xi \in \partial\mathcal{H}$ et $v \in \overline{\mathcal{H}} \setminus \{\xi\}$, il existe une unique géodésique géométrique passant par v et ξ. On note $v \star \xi \in \partial\mathcal{H}$ l'extrémité de cette géodésique qui n'est pas ξ. On prend de plus pour convention que $x \star \xi = \xi$. Lorsque $v \in \mathcal{H}$, cette application est une involution du bord à l'infini ; mais si $v \in \partial\mathcal{H}$ $v \star \xi = v$ est constante pour tout ξ.

Soient z, w deux points de l'espace hyperbolique, et ξ un point du bord à l'infini. On définit le *cocycle de Busemann* de z et w en ξ par

$$b_\xi(z,w) = \lim_{t\to\xi} d(z,t) - d(w,t)$$

pour t un point de l'espace hyperbolique se rapprochant de ξ en restant à distance bornée d'une géodésique orientée se terminant en ξ. Il vérifie une propriété d'additivité :

$$\forall \xi \in \partial\mathcal{H}, \forall x,y,z \in \mathcal{H}, b_\xi(x,z) = b_\xi(x,y) + b_\xi(y,z).$$

Pour tout $p \in \mathcal{H}$, la ligne de niveau $\{z \in \mathcal{H} \mid b_\xi(p,z) = 0\}$ est appelée *horocercle*, et son intérieur $\{z \in \mathcal{H} \mid b_\xi(p,z) \geq 0\}$ est nommée *horoboule*. Dans le modèle du disque, ces horocercles et horoboules sont les cercles et disques euclidiens tangents au disque à l'infini en ξ et passant par p.

Enfin, pour s complexe, le *noyau de Poisson* est la fonction définie par

$$\forall z \in \mathcal{H}, \forall \xi \in \partial\mathcal{H}, P^s(z,\xi) = e^{sb_\xi(p,z)}.$$

Quant à la *distance de Gromov (basée en p)*, elle est donnée par

$$\forall \eta \neq \xi \in \partial\mathcal{H}, d_p(\eta,\xi) = e^{-\frac{1}{2}\left(b_\eta(p,z_{\eta,\xi})+b_\xi(p,z_{\eta,\xi})\right)}$$

pour tout $z_{\eta,\xi}$ sur la géodésique géométrique reliant η et ξ, et cette définition est indépendante du choix de $z_{\eta,\xi}$. C'est bien une distance sur $\mathcal{H}$, et pour $p = 0$ dans le modèle du disque de Poincaré on a la formule supplémentaire

$$\forall \eta \neq \xi \in \mathbb{S}^1, d_0(\eta,\xi) = \frac{|\eta - \xi|}{2}.$$

1.2 Isométries

On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ le groupe des isométries de l'espace hyperbolique préservant l'orientation. Elles peuvent être classées en trois types :
– les *hyperboliques* fixent deux points du bord à l'infini, et laissent la géodésique qui relie ces deux points (que l'on nomme l'*axe* de l'isométrie) invariante ;
– les *paraboliques* fixent un unique point du bord à l'infini ;
– les *elliptiques* fixent un point à l'intérieur de l'espace hyperbolique ;
En considérant le modèle du demi-plan de Poincaré, on peut constater que $\mathrm{Isom}(\mathcal{H})$ est isomorphe au groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

L'action des isométries de $\mathcal{H}$ peut s'étendre naturellement à $T\mathcal{H}$. Comme les isométries envoient dans chaque fibre un vecteur de norme 1 sur un vecteur de même norme, cette action en induit une sur $T^1\mathcal{H}$. Enfin, puisqu'elles envoient une géodésique sur une géodésique, elles agissent aussi sur le bord à l'infini $\partial\mathcal{H}$.

Puisque les isométries conservent les angles, elles préservent les positions respectives des points à l'infini :

$$\forall a,b,c,d \in \partial\mathcal{H}, \forall \gamma \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H}),]a;b[\subset]c;d[\Leftrightarrow]\gamma(a);\gamma(b)[\subset]\gamma(c);\gamma(d)[\,.$$

Ceci implique que l'involution $\star$ définie précedemment préserve l'ordre des points à l'infini :

Lemme 1.2.1. *Soit $v \in \overline{\mathcal{H}}$. Si $]a;b[\subset]c;d[$, alors $]v\star a; v\star b[\subset]v\star c; v\star d[$.*

PREUVE : Si $v \in \partial\mathcal{H}$, alors $]v\star a; v\star b[=]v\star c; v\star d[=]v;v[= \emptyset$.

Si $v \in \mathcal{H}$, l'application $x \mapsto v\star x$ est la symétrie de centre v et agit ainsi sur $\partial\mathcal{H}$ comme une isométrie hyperbolique. Il existe donc une isométrie hyperbolique γ qui fixe v et pour laquelle $v\star x = \gamma(x)$ pour tout $x \in \partial\mathcal{H}$. Puisque γ conserve les angles, $y \in]v\star a; v\star b[=]\gamma(a);\gamma(b)[$ implique que $\gamma^{-1}(y) \in]a;b[\subset]c;d[$ et donc $y \in]\gamma(c);\gamma(d)[=]v\star c; v\star d[$. ■

En particulier, si $v \in \mathcal{H}$ et $x \in]a;b[$, alors $v\star x \in]v\star a; v\star b[$.

Par ailleurs, les isométries préservent aussi la distance donc elles laissent invariant le cocycle de Busemann :

$$\forall \gamma \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H}), \forall z,w \in \mathcal{H}, \forall \xi \in \partial\mathcal{H}, b_{\gamma(\xi)}(\gamma(z),\gamma(w)) = b_\xi(z,w).$$

Si p est un point de $\mathcal{H}$ fixé et γ est une isométrie de $\mathcal{H}$, on définit sa *dérivée basée en p* comme une fonction définie sur le bord à l'infini par

$$\forall \xi \in \partial\mathcal{H}, |\gamma'(\xi)|_p = e^{b_\xi(p,\gamma^{-1}(p))}$$

Cette notion de dérivée se comporte de manière intuitive avec la composition d'isométries :

$$\forall \gamma_1,\gamma_2 \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H}), \forall \xi \in \partial\mathcal{H}, |(\gamma_1\circ\gamma_2)'(\xi)|_p = |\gamma_1'(\gamma_2(\xi))|_p |\gamma_2'(\xi)|_p.$$

On a aussi une intéressante formule d'invariance pour le carré de la distance de Gromov :

$$\forall \gamma \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H}), \forall \eta,\xi \in \partial\mathcal{H}, d_p^2(\gamma(\eta),\gamma(\xi)) = |\gamma'(\eta)|_p |\gamma'(\xi)|_p d_p^2(\eta,\xi).$$

Toujours à p fixé, une isométrie γ ne fixant pas p est caractérisée par la médiatrice du segment $[p;\gamma^{-1}(p)]$, encore appelée *cercle isométrique* :

$$I_\gamma = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid d(p,z) = d(\gamma^{-1}(p),z) \right\}.$$

En effet, γ est hyperbolique, parabolique ou elliptique si et seulement si I_γ et $I_{\gamma^{-1}}$ sont respectivement disjoints (ne s'intersectent pas dans $\overline{\mathcal{H}}$), parallèles (s'intersectent en un unique point de $\partial\mathcal{H}$) ou sécants (dans $\mathcal{H}$). De plus, I_γ délimite l'ensemble des points du bord à l'infini où la dérivée basée en p est plus grande que 1 :

$$|\gamma'(x)|_p \geq 1 \Leftrightarrow x \in \overline{\{z \in \mathcal{H} \mid d(z,p) > d(z,\gamma^{-1}(p))\}} \cap \partial\mathcal{H}.$$

Il nous sera souvent nécessaire d'exprimer la dérivée du conjugué d'une isométrie.

Lemme 1.2.2. *Soient $\gamma, g \in Isom(\mathcal{H})$ et $\tilde{\gamma} = g^{-1}\gamma g$. Si γ fixe $g(x)$, alors $|\tilde{\gamma}'(x)| = |\gamma'(g(x))|$.*

PREUVE : Il vient simplement

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}'(x)| = |(g^{-1}\gamma g)'(x)| &= |g'(x)||\gamma'(g(x))||(g^{-1})'(\gamma g(x))| \\ &= |g'(x)||\gamma'(g(x))||(g^{-1})'(g(x))| \qquad \text{puisque } \gamma \text{ fixe } g(x) \\ &= |\gamma'(g(x))||(g^{-1}\circ g)'(x)| = |\gamma'(g(x))|. \end{aligned}$$ ■

On appelle *groupe fuchsien* tout sous-groupe discret d'isométries de $\mathcal{H}$ préservant l'orientation. Dans toute la suite Γ dénotera toujours un groupe fuchsien.

Γ agit naturellement sur $\mathcal{H}$ et $M = \mathcal{H}/\Gamma$ est une surface de Riemann possédant une structure de variété ou d'orbifold selon que Γ contient des elliptiques ou non. Il sera dit *cocompact* si M est compacte, et *cofini* si M est de volume fini pour la forme volume provenant de $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ s'identifie alors au revêtement universel de M.

Si $z \in \mathcal{H}$, on note $\Lambda(z) \subset \partial\mathcal{H}$ l'ensemble des points du bord à l'infini qui sont atteints comme limite (dans $\overline{\mathcal{H}}$) de $\gamma_n(z)$ pour $\gamma_n \in \Gamma$. C'est par construction un fermé du bord ; et on peut montrer (cf [Bea83], théorème 5.3.9) que si le groupe Γ n'est pas élémentaire, alors $\Lambda(z)$ est indépendant du choix de $z \in \mathcal{H}$. Par conséquent, on peut poser $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(z)$ pour un z quelconque ; ensemble que l'on appelle *ensemble limite de* Γ. $\Lambda(\Gamma)$ est aussi l'adhérence de l'ensemble des points fixes des éléments hyperboliques de Γ, et on a le résultat suivant :

Théorème 1.2.3 ([Bea83], 8.1.2)**.** *$\Lambda(\Gamma)$ est le plus petit fermé non vide Γ-invariant de $\partial\mathcal{H}$. Il est de plus parfait et donc non dénombrable.*

Un groupe fuchsien est dit *du premier type* lorsque son ensemble limite est $\mathbb{S}^1$ tout entier. C'est le cas des groupes fuchsiens cofinis.

Le fait que Γ soit discret impose une condition très forte sur les stabilisateurs de points à l'infini :

Théorème 1.2.4 ([Bea83], 8.1.2)**.** *Si Γ est un groupe fuchsien, le stabilisateur dans Γ de tout point $x \in \mathbb{S}^1$ est cyclique.*

Ceci nous permet maintenant de déterminer à quelle condition une isométrie hyperbolique d'un groupe fuchsien est conjuguée dans le groupe à son inverse.

Proposition 1.2.5. *Soit $\gamma \in \Gamma$ hyperbolique primitif, de points fixes x et y dans $\mathbb{S}^1$. $g \in \Gamma$ conjugue γ et γ^{-1} si et seulement si $y = g(x)$; et dans ce cas g doit être un elliptique d'ordre deux dont le centre est sur la géodésique (x, y).*

PREUVE : Supposons que $\gamma^{-1} = g\gamma g^{-1}$ avec $g \in \Gamma$. Quitte à échanger x et y, on peut supposer qu'ils vérifient :

$$\begin{array}{cc} \gamma(x) = x = \gamma^{-1}(x) & \gamma(y) = y = \gamma^{-1}(y) \\ |\gamma'(x)| = |(\gamma^{-1})'(y)| > 1 & |\gamma'(y)| = |(\gamma^{-1})'(x)| < 1 \end{array}$$

$\gamma^{-1}(g(x)) = g\gamma(x) = g(x)$ et $\gamma^{-1}(g(y)) = g\gamma(y) = g(y)$ donc g préserve $\{x, y\}$. Mais si on suppose que $g(x) = x$, le lemme sur la dérivée d'un conjugué nous dit que :

$$1 > |(\gamma^{-1})'(x)| = |\gamma'(g^{-1}(x))| = |\gamma'(x)| > 1$$

ce qui est absurde. Donc $g(x) = y$ et $g(y) = x$.

Réciproquement, si $g(x) = y$, on note $\tilde{\gamma} = g^{-1}\gamma g$. $\tilde{\gamma}(x) = g^{-1}\gamma(y) = g^{-1}(y) = x$, donc $\tilde{\gamma}$ est dans le stabilisteur de x qui, par le théorème 1.2.4, est cyclique et donc engendré par γ puisque celui-ci est primitif. Il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\gamma} = \gamma^n$. Mais $\tilde{\gamma}$ est un conjugué de γ primitif, donc il est lui aussi primitif et n ne peut donc être égal qu'à 1 ou -1. Or on a vu que $|\tilde{\gamma}'(x)| = |\gamma'(g(x))| = |\gamma'(y)| < 1$. Donc x est un point fixe attracteur pour $\tilde{\gamma}$, ce qui implique nécessairement que $\tilde{\gamma} = \gamma^{-1}$.

Dans ces conditions, g^2 fixe x et y. Puisque γ est primitif, $g^2 = \gamma^n$ pour un certain entier n. Mais alors si $n > 0$,

$$\begin{array}{c} 1 < |(\gamma^n)'(x)| = |(g^2)'(x)| = |g'(x)||g'(g(x))| = |g'(x)||g'(y)| \\ 1 > |(\gamma^n)'(y)| = |(g^2)'(y)| = |g'(y)||g'(g(y))| = |g'(y)||g'(x)| \end{array}$$

ce qui est impossible. De la même manière, n ne peut être strictement négatif, et g^2 doit être égal à l'identité. g est donc un elliptique d'ordre 2 ; comme il préserve $\{x, y\}$, il préserve globalement la géodésique géométrique reliant x à y, et son centre doit donc être sur cette géodésique. ■

Le cas parabolique est plus simple :

Proposition 1.2.6. *Si $\gamma \in Isom(\mathcal{H})$ est parabolique, alors γ et γ^{-1} ne sont pas conjugués dans $Isom(\mathcal{H})$.*

PREUVE : Supposons que $\gamma^{-1} = g\gamma g^{-1}$ avec $g \in \mathrm{Isom}(\mathcal{H})$. Notons x l'unique point fixe de γ. $\gamma^{-1}(g(x)) = g\gamma(x) = g(x)$ donc nécessairement $g(x) = x$.

Quitte à conjuguer γ, on peut supposer que x est le point à l'infini dans le modèle du demi-plan. Alors γ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, g est représenté par $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, et la relation de conjugaison devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \gamma^{-1} = g\gamma g^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b\lambda^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $b = 0$ et $\gamma = \mathrm{id}$, ce qui est absurde. ■

1.3 Domaines fondamentaux

1.3.1 Définitions et notations

Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental de volume fini dans $\mathbb{D}$ d'un groupe fuchsien Γ. On notera E l'ensemble de ses côtés, et V celui de ses sommets dans $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$. On pose aussi $V^\star$ l'ensemble $V \cap \mathbb{D}$ des sommets qui ne sont pas des cusps.

On supposera dans toute la suite que :
(i) $\mathcal{D}$ est un polygone géodésique convexe ;
(ii) $n = \text{card } E$ est fini ;
(iii) pour tout $e \in E$, il existe un unique $f \in E$ et un $\gamma_e \in \Gamma$ tels que $\gamma_e(e) = f$;
(iv) pour tout $e \in E$ tel que $f = \gamma_e(e)$, $\gamma_f = \gamma_e^{-1}$ et alors $\gamma_f(f) = e$;
(v) $\{\gamma_e \mid e \in E\}$ engendre Γ.

Un côté e est autorisé à être envoyé sur lui-même, auquel cas le générateur associé γ_e est une isométrie elliptique d'ordre 2 dont le centre est sur e. Si Γ contient des éléments elliptiques, alors les centres de ceux-ci doivent se trouver sur la frontière du domaine fondamental :
− soit le centre est à l'intérieur d'un côté, et l'elliptique doit nécessairement être d'ordre 2 ;
− soit le centre est un sommet de $V^\star$, et l'elliptique peut être de tout ordre entier.

Soit $v \in V$. Pour tout $p \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$ distinct de v, on définit $g_v(p) \in \partial\mathbb{D}$ comme la géodésique orientée allant de v vers p. Elle découpe naturellement le disque $\mathbb{D}$ en deux demi-espaces gauche et droite.

Il n'y a que deux côtés $e_0, e_1 \in E$ qui peuvent passer par le sommet v, et par convexité le domaine fondamental est inclus dans l'intersection des demi-espaces qui sont bordés par e_0 et e_1. On note $v_0, v_1 \in V$ les sommets du domaine sur respectivement e_0 et e_1 qui ne sont pas v, et on nomme *géodésique droite passant par* v le e_i tel que $g_v(v_i)$ voit le domaine fondamental dans son demi-espace gauche ; l'autre côté étant alors la *géodésique gauche passant par* v. On les note respectivement r_v et l_v.

γ_{r_v} sera communément raccourci en γ_v. On note aussi $r(v)$ et $l(v)$ le sommet de respectivement r_v et l_v qui n'est pas v, ce qui définit deux applications $r : V \to V$ et $l : V \to V$. Avec ces notations, on a aussi que $\gamma_v = \gamma_{r_v} = \gamma_{r(v)}$ et que $\gamma_{l_v} = \gamma_{l(v)}$. On posera communément $w = r(v)$ et $u = l(v)$.

Comme le demi-espace gauche de $g_v(r(v))$ est le demi-espace droit de $g_{r(v)}(v)$, $g_{r(v)}(v)$ est la géodésique gauche passant par $r(v)$, et ainsi $l_{r(v)} = r_v$ et $l(r(v)) = v$. Ceci démontre que r et l sont deux permutations de V telles que $l^{-1} = r$.

Puisque γ_v envoie r_v sur un autre côté du domaine fondamental, l'application

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : & V & \to & V \\ & & v & \mapsto & \gamma_v(v) \end{array}$$

est elle aussi bien définie.

Proposition 1.3.1. *Pour tout* $v \in V$, $\gamma_v(r_v) = l_{\sigma(v)}$.

PREUVE : Puisque γ_v est le générateur associé au côté allant de v vers $r(v)$, $\gamma_v(r_v)$ doit être un côté du domaine fondamental et, comme il passe par $\sigma(v)$, doit être ou bien $r_{\sigma(v)}$, ou bien $l_{\sigma(v)}$.

Supposons que $\gamma_v(r_v) = r_{\sigma(v)}$. Si nous prenons $p \in r_v$ distinct de v et de $r(v)$, alors $\gamma_v(p) \in \gamma_v(r_v) = r_{\sigma(v)}$ et est distinct à la fois de $\sigma(v)$ et de $\gamma_v(r(v))$. Soit $\nu_p \in T^1_p\mathbb{D}$ le vecteur normal à r_v en p, dirigé vers la gauche (relativement à r_v) de sorte qu'il rentre dans le domaine

fondamental. Alors $\gamma_v(\nu_p) \in T^1_{\gamma(p)}\mathbb{D}$ est le vecteur normal à $r_{\sigma(v)}$ en $\gamma_v(p)$ et est aussi dirigé vers la gauche relativement à $r_{\sigma(v)}$, ce qui signifie que $\gamma_v(\nu_p) = \nu_{\gamma_v(p)}$. On peut ainsi trouver t suffisamment petit pour qu'on ait à la fois $z = \exp_p(t\nu_p) \in \mathcal{D}$ et $\gamma_v(z) = \exp_{\gamma_v(p)}(t\nu_{\gamma_v(p)}) \in \mathcal{D}$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental. ■

Ce résultat peut aussi se traduire par le fait que $\gamma_v^{-1}(\mathcal{D})$ est l'unique copie distincte du domaine fondamental original ayant v pour sommet (puisque $\gamma_v(v) = \sigma(v)$ est un sommet de $\mathcal{D}$) et r_v comme côté (puisque $\gamma_v(r_v) = l_{\sigma(v)}$ est un côté de $\mathcal{D}$).

Comme γ_v envoie r_v sur $l_{\sigma(v)}$, le quatrième point des conditions sur $\mathcal{D}$ énoncées ci-dessus assure que :

Corollaire 1.3.2. *Pour tout $v \in V$, $\gamma_v^{-1} = \gamma_{l(\sigma(v))}$.*

De la même manière,

$$\begin{array}{rccc} \tau & : & V & \to & V \\ & & v & \mapsto & \gamma_{l(v)}(v) \end{array}$$

est bien définie, et nous avons une proposition qui est le reflet des deux précédentes :

Proposition 1.3.3. *Pour tout $v \in V$, $\gamma_{l(v)}(l_v) = r_{\tau(v)}$ et $\gamma_{l(v)}^{-1} = \gamma_{\tau(v)}$.*

Ces deux propositions peuvent aussi se traduire en termes de sommets :

Proposition 1.3.4. *Pour tout $v \in V$, $\gamma_v(r(v)) = l(\sigma(v))$ et $\gamma_{l(v)}(l(v)) = r(\tau(v))$.*

Ceci nous permet finalement de décrire comment σ, τ, l et r interagissent :

Proposition 1.3.5. *σ et τ sont deux permutations de V, et $\tau = \sigma^{-1}$. De plus, $l\sigma = \tau r$.*

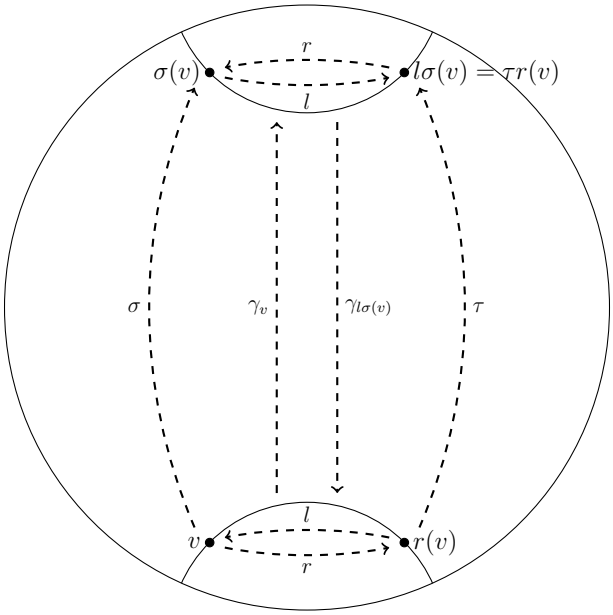


FIGURE 1.1 – Les permutations σ, τ, l et r

PREUVE : Soit $v \in V$.

$$\tau\sigma(v) = \gamma_{l(\sigma(v))}(\sigma(v)) = \gamma_{l(\sigma(v))}\gamma_v(v) = v$$

Un calcul similaire montrerait que $\sigma\tau(v) = v$, prouvant ainsi le premier point. Pour ce qui est de la relation, il suffit de vérifier que

$$l\sigma(v) = l\gamma_v(v) = l\gamma_{lr(v)}(lr(v)) = lr\tau(r(v)) = \tau r(v). \qquad \blacksquare$$

Puisque σ est une permutation, on peut noter p_v l'ordre d'un sommet $v \in V$ sous son action. Si maintenant $v \in V^\star$, on note q_v l'ordre du stabilisateur de v dans Γ. $q_v > 1$ si et seulement si il existe dans Γ un elliptique primitif de centre v et d'ordre q_v. Les q_v paramètrent les relations du groupe, et on peut lire celles-ci en suivant les σ-orbites :

Proposition 1.3.6. *Pour tout $v \in V^\star$,*

$$\left(\gamma_{\sigma^{p_v-1}(v)} \dots \gamma_v\right)^{q_v} = id.$$

PREUVE : Si on note $\gamma = \gamma_{\sigma^{p_v-1}(v)} \dots \gamma_v$, alors $\gamma(v) = \sigma^{p_v}(v) = v$. γ est donc dans le stabilisateur de v, et il existe ainsi $q \geq 1$, $q|q_v$ tel que $\gamma^q = \mathrm{id}$.

Si $q_v = 1$, c'est déjà fini. Sinon, montrons que γ est primitif, ce qui assurera nécessairement que $q = q_v$. Supposons donc que $\gamma = \gamma_0^k$ avec $k \geq 2$ et γ_0 elliptique primitif fixant v (et donc d'ordre q_v). Alors $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$ et $\gamma_0^{-1}(\mathcal{D})$ sont deux copies distinctes du domaine fondamental $\mathcal{D}$ qui le rencontrent en v. Mais, puisque $\gamma_v(r_v) = l_{\sigma(v)}$, les $(\gamma_{\sigma^{l-1}(v)} \dots \gamma_v)^{-1}(\mathcal{D})$ sont exactement les copies de $\mathcal{D}$ situées autour de v, et que l'ont lit pour l croissant en partant de $\mathcal{D}$ et en tournant autour de v dans le sens horaire. En procédant de cette manière, l'hypothèse $\gamma = \gamma_0^k$ implique qu'on tombe sur $\gamma_0^{-1}(\mathcal{D})$ avant de trouver $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$, et il existe ainsi $1 \leq l < p_v$ tel que $\gamma_0^{-1}(\mathcal{D}) = (\gamma_{\sigma^{l-1}(v)} \dots \gamma_v)^{-1}(\mathcal{D})$, i.e. que $\gamma_0 = \gamma_{\sigma^{l-1}(v)} \dots \gamma_v$. Comme γ_0 fixe v, $\sigma^l(v) = v$ avec $l < p_v$. Cela contredit la minimalité de p_v. $\blacksquare$

1.3.2 Propriété d'*even corners*

Pour tout groupe fuchsien cofini Γ, un exemple de domaine fondamental vérifiant les propriétés de la sous-section précédente est donné par son *domaine de Dirichlet basé en* $p \in \mathbb{D}$:

$$\mathcal{D}_\Gamma(p) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}} \left\{ z \in \mathbb{D} \mid d(p,w) < d(\gamma^{-1}(p), w) \right\}.$$

Pour peu que p ne soit pas un point fixe d'un elliptique de Γ, chaque côté de ce domaine est clairement le cercle isométrique d'un élément non trivial de Γ. On associe donc à ce côté l'élément du groupe dont il est le cercle isométrique, et le domaine ainsi constitué vérifie toutes les hypothèses formulées. De plus, le théorème 9.4.5 de [Bea83] nous assure que, quitte à prendre p hors d'un ensemble de mesure nulle de $\mathbb{D}$, on peut supposer que :
− si un sommet $v \in V^\star$ est tel que $\gamma_{\sigma^{p_v-1}(v)} \dots \gamma_v = \mathrm{id}$ (i.e. v n'est pas fixé par un elliptique du groupe), alors $p_v = 3$;
− si un sommet $v \in V^\star$ est centre d'un elliptique primitif du groupe, alors les deux côtés qui se rencontrent en ce point sont associés par cet elliptique ;
− les côtés successifs du domaine de Dirichlet se rejoignant à l'infini sont associés par un parabolique fixant ledit point.

Pour tout $v \in V^\star$, posons $N_v = \{g \text{ géodésiques géométriques} \mid v \in g \text{ et } \exists \gamma \in \Gamma, \gamma(g) \in E\}$ ainsi que $n_v = \text{card } N_v$ et $m_v = 2n_v$. Puisque $g \in N_v \mapsto \gamma_v(g) \in N_{\sigma(v)}$ est une bijection, $v \mapsto n_v$ est constante sur les orbites de σ.

Intervient alors une hypothèse cruciale que l'on fera sur tous les domaine fondamentaux que l'on sera amené à étudier : on suppose qu'aucune géodésique de N_v ne coupe l'intérieur du domaine fondamental. Cette hypothèse s'appelle *hypothèse d'even corners* et a été introduite pour la première fois dans [BS79].

Avant de pouvoir les utiliser, il faut déjà se demander si de tels domaines existent. Un domaine $\mathcal{D}$ n'est pas even corners lorsqu'il possède un sommet v qui n'est fixé par aucun elliptique d'ordre pair et pour lequel sa σ-orbite est de longueur p_v impaire. Les remarques qui précèdent sur les domaines de Dirichlet montrent alors qu'ils sont génériquement non even corners dès que le groupe contient un elliptique d'ordre impair ou aucun elliptique d'ordre pair. Ils ne constituent donc pas de bons exemples en général. Toutefois, étant donnée une signature de groupe fuchsien, on peut construire un groupe ayant cette signature ainsi qu'un domaine fondamental pour ce groupe qui soit even corners et dont les côtés soient les cercles isométriques des générateurs qui leurs sont associés. Cette construction est explicitée en appendice de [BS79].

On note $(a_v^0, \dots, a_v^{m_v-1})$ les extrémités des éléments de N_v. Elles sont numérotées dans le sens trigonométrique, en partant par l'extrémité de l_v dirigée vers $l(v)$. Cette notation peut être étendue à a_v^k pour tout $k \in \mathbb{Z}$ en réduisant k modulo m_v.

Pour tout k, $(a_v^k, v \star a_v^k) \in N_v$. De plus, si $a_v^j \in \left]a_v^k; v \star a_v^k\right[$, $v \star a_v^j \in \left]v \star a_v^k; a_v^k\right[$, donc l'application $x \mapsto v \star x$ induit une bijection des $a_v^j \in \left]a_v^k; v \star a_v^k\right[$ vers ceux de $\left]v \star a_v^k; a_v^k\right[$. Ainsi, il doit exister $n_v - 1$ de ces a_v^j dans $\left]a_v^k; v \star a_v^k\right[$ et $n_v - 1$ dans $\left]v \star a_v^k; a_v^k\right[$; et ceci prouve que $v \star a_v^k = a_v^{k+n_v}$.

Grâce à l'hypothèse d'even corners, on sait de plus que le triangle $(a_v^{n_v-1}, v, a_v^{n_v})$ est opposé par le sommet au domaine fondamental, ce qui nous assure donc que $a_v^{n_v-1} = a_{r(v)}^0$ et que $a_v^{n_v} = a_{l(v)}^{m_{l(v)}-1}$.

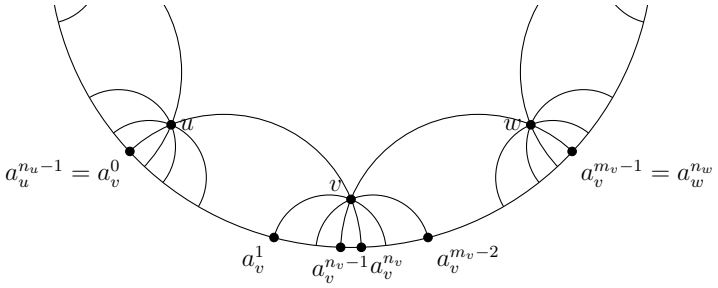


FIGURE 1.2 – Position des extrémités a_v^k autour d'un sommet v intérieur au disque

Comme γ_v conserve les angles, son action sur les a_v^k doit préserver leur ordre, i.e.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \gamma_v(a_v^k) = a_{\sigma(v)}^{k+1} \text{ et } \gamma_v(a_{r(v)}^k) = a_{l(\sigma(v))}^{k-1},$$

ce qui implique naturellement que $\gamma_v\left(\left]a_v^j; a_v^k\right[\right) = \left]a_{\sigma(v)}^{j+1}; a_{\sigma(v)}^{k+1}\right[$ pour tous j, k.

Lorsque v est un cusp, on pose artificiellement $n_v = 3$, de sorte que $a_v^1 = a_v^2 = a_v^3 = a_v^4 = v$. Il est important de noter que dans ce cas la relation $\gamma_v(a_v^k) = a_{\sigma(v)}^{k+1}$ n'est pas vérifiée, mais les positions relatives des a_v^k sont toujours compatibles avec ce que l'on a pour les $v \in V^\star$.

1.3.3 Nombre de côtés

On peut minorer le nombre de côtés d'un domaine fondamental en fonction des paramètres de la signature du groupe fuchsien associé.

Proposition 1.3.7. *Soit Γ un groupe fuchsien du premier type de signature $(g; m_1, \ldots, m_r; s; 0)$. On note e le nombre d'elliptiques d'ordre 2 à conjugaison près, i.e. le nombre de i tels que $m_i = 2$. Alors le nombre N de côtés d'un domaine fondamental convexe pour Γ vérifie*

$$N \geq \begin{cases} \max(8, 4g) & \text{si } r + s = 0 \\ \max(4, 4g + 2(r + s - 1)) - e & \text{si } r + s \geq 1 \end{cases}$$

PREUVE : D'après le théorème 10.4.2 de [Bea83],

$$0 < 2g - 2 + s + 0 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \leq 2g - 2 + s + r.$$

Ainsi, $r + s > 2 - 2g$, i.e. $r + s \geq 3 - 2g$.

Prenons maintenant un domaine fondamental convexe pour Γ, et notons N son nombre de côtés. Le théorème 10.5.1 du même ouvrage assure que si le domaine ne possède pas de côté associé avec lui-même :
$-$ si $r + s = 0$, alors $N \geq 4g$. Mais dans ce cas $2g \geq 3$ et donc $g \geq 2$. Par conséquent, $N \geq 8$. On a aussi que $e = 0$ puisque $r = 0$.
$-$ si $r + s > 0$, $N \geq 4g + 2(r + s) - 2$; et on a alors

$$N \geq 4g + 2(r + s) - 2 \geq 4g + 6 - 4g - 2 = 4.$$

Finalement, chaque côté associé à lui-même est le fruit d'un elliptique d'ordre 2. On peut toutefois appliquer le théorème l'on vient de citer en considérant que de tels côtés sont divisés en deux par le centre de l'elliptique, auquel cas les deux moitiés ne sont bien pas envoyées l'une sur l'autre. Il suffit alors de constater que ces deux moitiés correspondent en fait à un unique côté dans le sens qu'on lui a donné dans notre étude. ■

En particulier, le domaine fondamental d'un groupe sans hyperboliques ou paraboliques possède au moins 8 côtés, et au moins 4 côtés s'il ne contient juste pas d'elliptiques d'ordre 2.

Rappelons un lemme de géométrie du triangle hyperbolique démontré dans [BS79] :

Lemme 1.3.8 ([BS79], 2.2)**.** *Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental convexe d'un groupe fuchsien du premier type. Si les géodésiques supportant deux côtés de $\mathcal{D}$ s'intersectent dans $\overline{\mathbb{D}}$, ils sont nécessairement consécutifs.*

Il est possible de reformuler le lemme de cette manière en notant que deux côtés quelconques d'un domaine fondamental triangulaire sont toujours consécutifs. D'autre part, on peut aussi autoriser les côtés à s'intersecter à l'infini car l'argument principal est qu'un triangle hyperbolique est d'aire finie, ce qui est encore vrai si un de ses sommets est sur le bord.

On peut déduire de ces deux résultats les conditions pour lesquelles le domaine fondamental est triangulaire.

Proposition 1.3.9. *Soit Γ un groupe fuchsien du premier type. Si Γ possède un domaine fondamental triangulaire, alors il a l'une des signatures suivantes*

$(0;2,3,m_3;0)$	*avec* $7 \leq m_3 < \infty$	*et ses trois sommets sont dans* $\mathbb{D}$
$(0;2,m_2,m_3;0)$	*avec* $4 \leq m_2 \leq m_3$ *et* $5 \leq m_3 < \infty$	*et ses trois sommets sont dans* $\mathbb{D}$
$(0;2,m_2;1)$	*avec* $3 \leq m_2 < \infty$	*et il a un ou deux sommets à l'infini*
$(0;2;2)$		*et ses trois sommets sont à l'infini*

PREUVE : On note $(g;m_1,\ldots,m_r;s;0)$ la signature de Γ. La proposition 1.3.7 nous dit que le nombre de côtés du domaine fondamental doit vérifier

$$\max(4, 4g + 2(r+s-1)) - e = 3$$

avec nécessairement $r+s \geq 1$ (sinon on a toujours au moins 8 côtés). La seule possibilité pour obtenir un nombre impair de côtés est d'en avoir un nombre impair de fixés par des elliptiques d'ordre 2, c'est-à-dire de prendre e impair (en particulier $e \geq 1$). Mais dans ce cas la permutation σ transpose les deux sommets aux extrémités d'au moins un des côtés, et doit par conséquent fixer le troisième sommet. Ainsi e ne peut qu'être égal à 1, et le générateur qui associe les deux côtés non fixés par l'elliptique d'ordre 2 laisse le troisième sommet invariant. Cela doit donc être un parabolique ou un elliptique, impliquant $g = 0$ et $r + s \geq 2$. On est alors amenés à résoudre le système d'inégalités suivant :

$$\begin{cases} 0 + 2r + 2s - 2 - 1 & \leq 3 \\ r + s & \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq r + s \leq 3$$

En particulier, $r \geq e = 1$ impose que $s \leq 2$. On distingue alors trois cas :
$-$ Si $s = 0$, les trois sommets sont nécessairement dans $\mathbb{D}$, et on doit soit avoir $r = 2$, soit $r = 3$. Si $r = 2$, l'inégalité de contrainte sur la signature s'écrit

$$0 < 0 - 2 + 0 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{m_2} < 0$$

ce qui est impossible. Donc $r = 3$ et

$$0 < 0 - 2 + 0 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{m_2} + 1 - \frac{1}{m_3} \Leftrightarrow \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} < \frac{1}{2}$$

ce qui impose à m_2 et m_3 d'être finis ($s = 0$) et supérieurs ou égaux à 3. Si $m_2 = 3$, on voit aisément qu'il faut avoir $m_3 \geq 7$ pour que la condition soit vérifiée ; tandis que pour $m_2 \geq 4$ on doit prendre $m_3 \geq 5$.
$-$ Si $s = 1$, on doit soit avoir $r = 1$, soit $r = 2$. Si $r = 1$,

$$0 > 0 - 2 + 1 + 1 - \frac{1}{2}$$

et l'inégalité de contrainte n'est pas vérifiée. Donc $r = 2$ et

$$0 < 0 - 2 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{m_2} \Leftrightarrow \frac{1}{m_2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow m_2 \geq 3.$$

– Si $s = 2$, on doit forcément avoir $r = 1$. On vérifie alors qu'on a bien

$$0 < 0 - 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2}.$$

Dans cette situation, on a au moins deux cusps non congruents, mais les deux extrémités du côté fixé par l'hyperbolique d'ordre 2 sont nécessairement de même type. Par conséquent, les trois sommets du domaine fondamental sont repoussés à l'infini. ■

On dira qu'un domaine fondamental triangulaire *est de classe* 0*,* 1 *ou* 2 suivant que la signature du groupe qui lui est associé tombe dans les deux premières, la troisième ou la quatrième catégorie ; ou encore lorsque ses sommets sont tous dans $\mathbb{D}$, à la fois dans $\mathbb{D}$ et dans $\partial\mathbb{D}$, ou tous sur le bord.

Dans la suite, nous serons amenés à écarter les domaines triangulaires de classe 0.

1.3.4 Ordre des points à l'infini

Rappelons que $w = r(v)$. On a déjà remarqué que $a_w^1 \in]a_w^0; a_w^{n_w}] =]a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}]$. Mais plus précisément, et sauf cas exceptionnels, $a_w^1 \in]a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}]$.

Proposition 1.3.10. *Il existe $v \in V$ tel que $a_{r(v)}^1 \in]a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-2}]$ si et seulement si le domaine fondamental est triangulaire et possède au moins deux sommets intérieurs à $\mathbb{D}$.*

PREUVE : Supposons que $a_w^1 \in]a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-2}]$. Si v (respectivement w) est un cusp, et en particulier si le domaine est triangulaire de classe 2, alors $a_v^{n_v-1} = a_v^{m_v-2} = v = a_w^0$ (respectivement $a_w^1 = w = a_v^{m_v-1}$) ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, $v, w \in \mathbb{D}$.

Les géodésiques (a_w^1, w) et $(a_v^{m_v-2}, v)$ s'intersectent en $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Mais puisque ni v ni w ne sont des cusps,

$$\gamma_v(a_v^{m_v-2}, v) = (a_{\sigma(v)}^{m_v-1}, \sigma(v)) = (r\sigma(v), \sigma(v))$$
$$\gamma_v(a_w^1, w) = (a_{\tau(w)}^0, \tau(w)) = (a_{l\sigma(v)}^0, l\sigma(v)) = (l^2\sigma(v), l\sigma(v))$$

s'intersectent en $\gamma_v(z) \in \overline{\mathbb{D}}$. D'après la proposition 1.3.9, ceci signifie qu'ils sont consécutifs et donc que $r\sigma(v) = l^2\sigma(v)$ (toute autre relation impliquerait que le domaine a deux côtés ou moins). Le domaine fondamental est ainsi un triangle dont au moins deux des trois sommets sont intérieurs à $\mathbb{D}$.

Réciproquement, si l'on se donne un domaine fondamental triangulaire avec deux côtés intérieurs, on constate que l'on a bien $a_w^1 \in]a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-2}]$ dans tous les cas décrits par la discussion de la proposition 1.3.9. ■

On en déduit un résultat qui nous dit que les extrémités des réseaux de géodésiques passants par deux points voisins sont "séparés", et qui sera fondamental pour la preuve de la conjugaison entre le billard géodésique et le codage étendu.

Proposition 1.3.11. *Supposons que le domaine fondamental ne soit pas triangulaire de classe* 0*. Alors :*

$$\forall v \in V, \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right] \subset \left[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}\right] \subset \left[a_v^{n_v-1} = a_w^0; a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}\right].$$

De plus, $a_v^{m_v-2} = a_w^1$ si et seulement si le domaine est triangulaire de classe 1 et que ni v ni w ne sont des cusps.

Si le domaine n'est pas triangulaire ou que soit v soit w est un cusp, il ne peut être triangulaire de classe 0 et les deux parties combinées donnent que

$$\left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right] \subset \left[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}\right]$$

On en déduit aussi un ingrédient de la preuve de conjugaison entre le billard et le codage étendu.

Proposition 1.3.12. *Supposons que le domaine fondamental ne soit pas triangulaire de classe* 0*. Alors :*

$$\forall v \in V, \left[a_w^{n_w+1}; a_v^{n_v-2}\right] \subset \left[a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}; a_v^{n_v-1} = a_w^0\right].$$

PREUVE : Si v est un cusp, il est clair que

$$\left[a_w^{n_w+1}; v = a_v^{n_v-2}\right] \subset \left[a_w^{n_w}; v = a_v^{n_v-1}\right].$$

Il en va de même lorsque w est un cusp. On peut donc supposer que v et w sont intérieurs à $\mathbb{D}$.

On sait déjà que $a_w^{n_w+1} = w \star a_w^1$ et $a_v^{n_v-2} = v \star a_v^{m_v-2}$ sont situés dans l'intervalle $[a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}; a_v^{n_v-1} = a_w^0]$. Supposons que

$$\left[a_v^{n_v-2}; a_w^{n_w+1}\right] \subset \left[a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}; a_v^{n_v-1} = a_w^0\right].$$

Alors les géodésiques $(v, a_v^{n_v-2})$ et $(w, a_w^{n_w+1})$ se coupent en un point $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Puisque le triangle (v, z, w) est convexe, les géodésiques $(v, a_v^0) = (v, l(v))$ et $(v, a_w^{m_w-1}) = (w, r(w))$ se coupent elles aussi en un point z' et, d'après la proposition 1.3.10, le domaine fondamental doit être triangulaire, de classe 1 ou 2 par hypothèse. Il possède donc au moins un cusp, qui n'est ni v ni w. Alors $(v, a_v^0) \cap (w, a_w^{m_w-1}) = z' \in \partial\mathbb{D}$, ce qui impose que

$$z' = a_v^0 = a_w^{m_w-1} = z = a_v^{n_v-2} = a_w^{n_w+1}.$$

On a donc tout aussi bien que $\{z'\} = [a_w^{n_w+1}; a_v^{n_v-2}] \subset [a_v^{m_v-1}; a_w^0]$. ■

On en déduit enfin un résultat qui conditionnera notre démonstration de la proprété d'orbite-équivalence du codage de Bowen-Series.

Proposition 1.3.13. *Supposons que le domaine fondamental ne soit pas triangulaire de classe* 0*. Alors :*

$$\forall v \in V, a_w^{n_w-1} \in \left]a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w}\right].$$

PREUVE : On remarque tout d'abord que la proposition 1.3.11 donne toujours que

$$a_w^{n_w-1} \in \left[a_w^1; a_w^{n_w}\right] \subset \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w}\right]$$

Si w est un cusp, alors $a_w^{n_w-1} = w \neq a_v^{n_v-2}$; et si v est un cusp, $a_w^{n_w-1} \neq v = a_v^{m_v-2}$. On peut donc supposer qu'aucun des deux n'est un cusp.

Distinguons maintenant deux cas :
– soit le domaine n'est pas triangulaire, auquel cas $a_w^1 \neq a_v^{m_v-2}$ par le second point de la proposition 1.3.11 et donc

$$a_w^{n_w-1} \in \left[a_w^1; a_w^{n_w}\right] \subset \left]a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w}\right];$$

– soit le domaine est triangulaire et a exactement un cusp qui n'est ni v ni w. Dans ce cas, Γ est de signature $(0; 2, m_2; 1)$ avec $m_2 \geq 3$. Mais puisque ni v ni w ne sont des cusps, leur stabilisateur est engendré par un elliptique d'ordre m_2. Ainsi $n_v = n_w = m_2 \geq 3$ et

$$a_w^{n_w-1} \in \left]a_w^1; a_w^{n_w}\right] \subset \left]a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w}\right].$$ ■

1.4 Tubes géodésiques

Pour $a, b \in \partial\mathbb{D}$ et $v, w \in \overline{\mathbb{D}}$, les *tubes géodésiques* $]a;b] \otimes [w;v[$ *et* $]v;w] \otimes [a;b[$ sont définis par :

$$]a;b] \otimes [w;v[= \bigsqcup_{x\in]a;b]} \{x\} \times [w\star x; v\star x[\quad \text{et} \quad]v;w] \otimes [a;b[= \bigsqcup_{y\in[a;b[}]v\star y; w\star y] \times \{y\}\,.$$

Ils représentent l'ensemble de toutes les géodésiques qui partent de $]a;b]$ (respectivement arrivent dans $[a;b[$) et traversent le segment $[w;v[$ (respectivement $]v;w]$). Si $v, w \in \partial\mathbb{D}$, on retrouve $]a;b] \otimes [w;v[=]a;b] \times [w;v[$, ensemble que l'on nommera *rectangle géodésique*.

On supposera dans la suite que $v \neq w$, de sorte que l'on peut noter $\eta, \xi \in \partial\mathbb{D}$ les extrémités de la géodésique passant par v puis w.

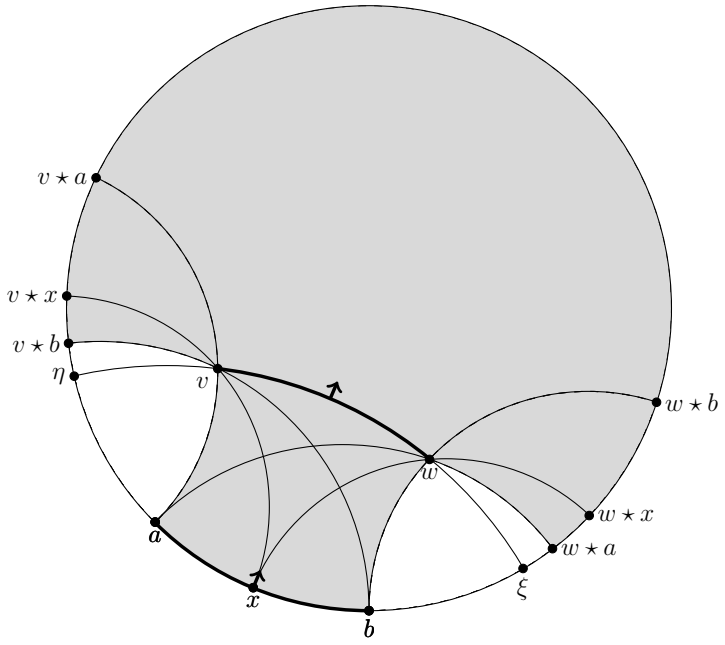


FIGURE 1.3 – Un exemple de tube $]a;b] \otimes [w;v[$

Puisque $]v\star\eta; v\star\xi[= \emptyset$ ou $]\xi;\eta[$, le lemme 1.2.1 implique immédiatement que :

Lemme 1.4.1. *Soit* $v \in \overline{\mathbb{D}}$. *Si* $]a;b[\subset]\eta;\xi[$, *alors* $]v\star a; v\star b[\subset]\xi;\eta[$.

$\star$ échange aussi l'ordre des points intérieurs :

Lemme 1.4.2. $\forall x \in [\eta;\xi]\,,]w\star x; v\star x[\subset]\xi;\eta[$.

PREUVE : Prenons $x \in [\eta;\xi]$. Si v et w sont tous les deux à l'infini, alors $v = \eta$, $w = \xi$ et $]w\star x; v\star x[=]\xi;\eta[$. Si seul v est à l'infini, le lemme 1.2.1 nous donne que

$$w\star x \in]w\star\eta; w\star\xi[=]\xi;\eta[=]\xi; v\star x[\,.$$

De même, si seul $w \in \partial\mathbb{D}$, $v\star x \in]w\star x;\eta[$.

Maintenant supposons $v, w \in \mathbb{D}$, et posons

$$\begin{array}{rccc} \psi & : &]\xi;\eta[& \to & (\xi,\eta) \\ & & y & \mapsto & (x,y)\cap(\xi,\eta) \end{array} .$$

ψ est une bijection continue qui envoie $v \star x$ et $w \star x$ sur respectivement v et w. $(\eta,\xi) \setminus \{w\}$ est constitué de deux composantes connexes W_η et W_ξ qui contiennent respectivement η et ξ dans leur frontière. Comme $]\xi; w \star x[$ est connexe et ψ continue, $\psi(]\xi; w \star x[)$ est aussi connexe donc inclus dans W_ξ, puisque $\psi(y)$ tend vers ξ lorsque y tend vers ξ. Mais l'orientation de (η,ξ) impose à v d'être dans W_η donc $v \star x$ ne peut être dans $]\xi; w \star x[$, ce qui signifie qu'il doit être dans $]\xi;\eta[\setminus]\xi; w \star x[$ qui se trouve être exactement $[w \star x;\eta[$. Ceci démontre que $]w \star x; v \star x[\subset]\xi;\eta[$. ■

On peut toujours majorer un tube par un rectangle géodésique :

Proposition 1.4.3. *Soit* $]a;b[\subset]\eta;\xi[$. *Alors* $]w \star a; v \star b[\subset]\xi;\eta[$ *et*

$$]a;b] \otimes [w;v[\subset]a;b] \times [w \star a; v \star b[\qquad \textit{et} \qquad]w;v] \otimes [a;b[\subset]w \star a; v \star b] \times [a;b[.$$

PREUVE : On sait déjà que $]w \star a; v \star a[$ (par le lemme 1.4.2) et $]v \star a; v \star b[$ (par le lemme 1.4.1) sont inclus dans $]\xi;\eta[$. Donc $]w \star a; v \star b[=]w \star a; v \star a] \sqcup]v \star a; v \star b[\subset]\xi;\eta[$.

Si $a = b$, les tubes géodesiques sont vides et le résultat est trivialement vérifié. Prenons maitenant $x \in]a;b]$, ce qui signifie que $]x;b[\subset]a;b[$ et $x \neq a$ (qui ne nous servira pas ici). Les deux intervalles $]w \star x; v \star x[$ (par le lemme 1.4.2) et $]v \star x; v \star b[\subset]v \star a; v \star b[$ (par le lemme 1.2.1) sont inclus dans $]\xi;\eta[$, donc on peut les recoller de sorte à obtenir :

$$[w \star x; v \star x[\subset [w \star x; v \star x[\sqcup [v \star x; v \star b[= [w \star x; v \star b[.$$

Mais le lemme 1.2.1 donne aussi que $]w \star x; w \star b[\subset]w \star a; w \star b[$, donc on en conclut que $[w \star x; v \star x[\subset [w \star a; w \star b[$.

Le second résultat se prouve d'une manière similaire. ■

On remarquera que l'ouverture ou la fermeture des bornes de l'intervalle gauche du tube n'a aucune incidence sur les bornes de l'intervalle droit du tube majorant.

Sous réserve que le tube n'est pas trop étroit, on peut aussi le minorer par un rectangle :

Proposition 1.4.4. *Soit* $]a;b[\subset]\eta;\xi[$ *tel que* $]w \star b; v \star a[\subset]\xi;\eta[$. *Alors*

$$]a;b] \times [w \star b; v \star a[\subset]a;b] \otimes [w;v[\qquad \textit{et} \qquad]w \star b; v \star a] \times [a;b[\subset]w;v] \otimes [a;b[.$$

PREUVE : Si $a = b$, les tubes géodesiques sont vides et le résultat est trivialement vérifié. Prenons maintenant $x \in]a;b]$. Comme ceci implique que $]x;b[\subset]a;b[$, on a d'après le lemme 1.2.1 que $]w \star x; w \star b[\subset]w \star a; w \star b[\subset]\xi;\eta[$; et de même $]v \star a; v \star x[\subset]\xi;\eta[$. Puisque l'on a supposé que $]w \star b; v \star a[\subset]\xi;\eta[$, il vient

$$[w \star b; v \star a[\subset [w \star x; w \star b[\sqcup [w \star b; v \star a[\sqcup [v \star a; v \star x[= [w \star x; v \star x[\subset [\xi;\eta[.$$

Le second résultat se prouve d'une manière similaire. ■

Lorsque l'on prend l'intersection d'un tube et d'un rectangle de même section, on peut échanger les composantes de la représentation du tube :

Proposition 1.4.5. *Soient* $]a;b[\subset]\eta;\xi[$ *et* $]c;d[\subset]\xi;\eta[$. *Alors*

$$]v;w] \otimes [c;d[\cap]a;b] \times [c;d[=]a;b] \otimes [w;v[\cap]a;b] \times [c;d[\,.$$

PREUVE :

$$]v;w] \otimes [c;d[\cap]a;b] \times [c;d[= \bigsqcup_{y\in[c;d[} (]v\star y;w\star y] \cap]a;b]) \times \{y\}$$
$$]a;b] \otimes [w;v[\cap]a;b] \times [c;d[= \bigsqcup_{x\in]a;b]} \{x\} \times ([w\star x;v\star x[\cap [c;d[)$$

Soit $(x,y) \in]v;w] \otimes [c;d[\cap]a;b] \times [c;d[$. On sait que $y \in [c;d[$ et $x \in]a;b]$. D'après la proposition 1.4.3, on doit avoir $x \in]v\star y;w\star y] \subset]v\star c;w\star d] \subset]\eta;\xi]$, ce qui implique que $v\star y \in [v\star c;x[\subset [\eta;\xi[$ et $w\star y \in [x;w\star d[\subset [\eta;\xi[$. En tirant ces inclusions en arrière, on obtient que $y \in [c;v\star x[\cap [w\star x;d[$ où ces deux intervalles sont inclus dans $[\xi;\eta[$. Puisqu'on a de même $[w\star x;v\star x[\subset [\xi;\eta[$, il vient :

$$y \in [c;v\star x[\cap [w\star x;d[= [w\star x;v\star x[\cap [c;d[\subset [\xi;\eta[\,.$$

La preuve pour l'inclusion réciproque est symétrique. ■

Dans le cas où le rectangle est ajusté au tube, on obtient une nouvelle représentation du tube, dite *en coin*, où trois des quatre paramètres sont sur le bord à l'infini et le quatrième est situé sur la géodésique qui en relie deux d'entre eux :

Proposition 1.4.6. *On suppose que pour tout* $y \in [a;b[\,, v\star y \notin]w\star a;w\star b]$. *Alors*

$$]w;v] \otimes [a;b[\cap]w\star a;w\star b] \times [a;b[=]w;w\star b] \otimes [a;b[\,.$$

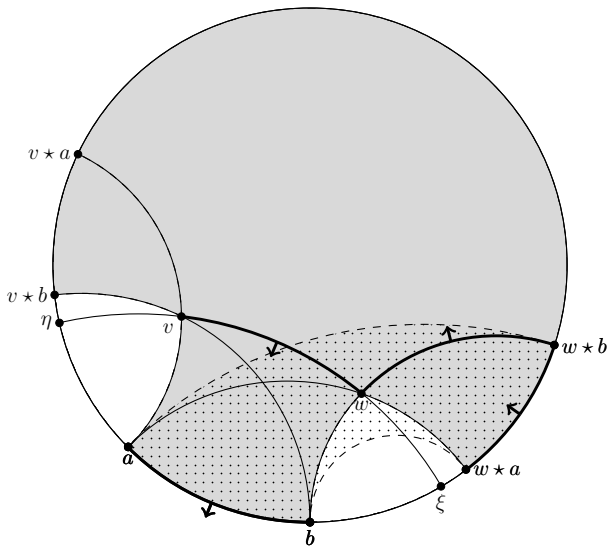


FIGURE 1.4 – Les géodésiques dans l'intersection de $]w;v] \otimes [a;b[$ (gris) et de $]w\star a;w\star b] \times [a;b[$ (points) traversent $]w;w\star b]$

PREUVE :

$$\begin{aligned}]w;v]\otimes[a;b[\cap]w\star a;w\star b]\times[a;b[&= \bigsqcup_{y\in[a;b[}(]w\star y;v\star y]\cap]w\star a;w\star b])\times\{y\}\\ &= \bigsqcup_{y\in]a;b]}]w\star y;w\star b]\times\{y\}\\ &=]w;w\star b]\otimes[a;b[\,.\end{aligned}$$ ■

L'intersection du complémentaire d'un tube et d'un rectangle ajusté peut lui aussi s'exprimer comme un coin :

Proposition 1.4.7. *On suppose que pour tout $y\in[a;b[\,, w\star y\notin]v\star a;v\star b]$. Alors*

$$^c(]w;v]\otimes[a;b[)\cap]v\star a;v\star b]\times[a;b[=]v;v\star b]\otimes[a;b[\,.$$

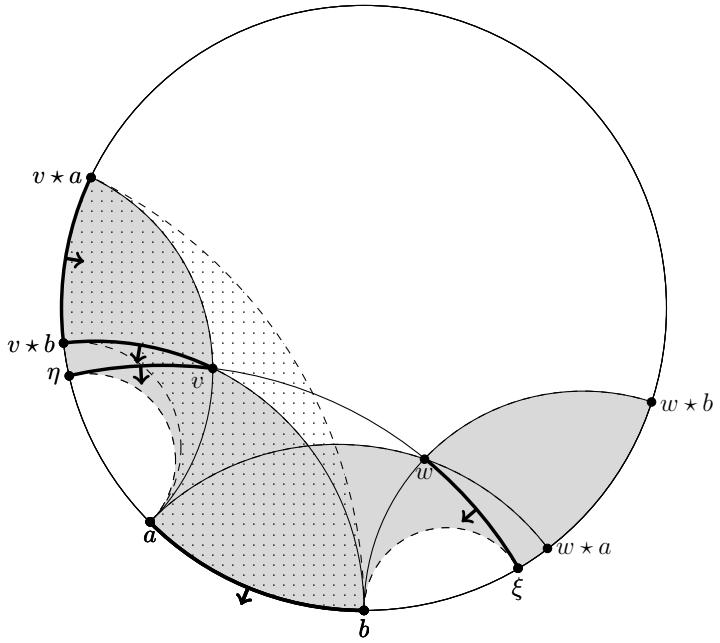


FIGURE 1.5 – Les géodésiques aboutissant dans $[a;b[$ sans être dans $]w;v]\otimes[a;b[$ (gris) mais qui sont dans $]v\star a;v\star b]\times[a;b[$ (points) traversent $]v;v\star b]$

PREUVE : Tout d'abord, vérifions que

$$^c(]w;v]\otimes[a;b[) = \bigsqcup_{y\in[a;b[}(^c]w\star y;v\star y]\times\{y\})\sqcup\partial\mathbb{D}\times(\partial\mathbb{D}\setminus[a;b[).$$

Quand on développe l'expression de $]w;v]\otimes[a;b[$, il vient

$$\begin{aligned}^c(]w;v]\otimes[a;b[) &= {}^c\left(\bigsqcup_{y\in[a;b[}]w\star y;v\star y]\times\{y\}\right) = \left(\bigcap_{y\in[a;b[}{}^c(]w\star y;v\star y]\times\{y\})\right)\\ &= \left(\bigcap_{y\in[a;b[}(\partial\mathbb{D}\times(\partial\mathbb{D}\setminus\{y\})\sqcup{}^c]w\star y;v\star y]\times\{y\})\right).\end{aligned}$$

En distribuant les intersections sur les unions disjointes, on obtient une union de termes dont chacun est d'un des types suivants :

- $\partial\mathbb{D} \times (\partial\mathbb{D} \setminus \{y\}) \cap \partial\mathbb{D} \times (\partial\mathbb{D} \setminus \{y'\}) = \partial\mathbb{D} \times (\partial\mathbb{D} \setminus \{y; y'\})$
- $\complement]w \star y; v \star y] \times \{y\} \cap \complement]w \star y'; v \star y'] \times \{y'\} = \begin{cases} \complement]w \star y; v \star y] \times \{y\} & \text{si } y = y' \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$
- $\complement]w \star y; v \star y] \times \{y\} \cap \partial\mathbb{D} \times (\partial\mathbb{D} \setminus \{y'\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } y = y' \\ \complement]w \star y; v \star y] \times \{y\} & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi, les seuls termes restant sont

$$^c(]w; v] \otimes [a; b[) = \bigsqcup_{y \in [a;b[} (\complement]w \star y; v \star y] \times \{y\}) \sqcup \partial\mathbb{D} \times (\partial\mathbb{D} \setminus [a; b[).$$

On peut maintenant établir la formule attendue :

$$\begin{aligned} ^c(]w; v] \otimes [a; b[) \cap]v \star a; v \star b] \times [a; b[&= \bigsqcup_{y \in [a;b[} (\complement]w \star y; v \star y] \cap]v \star a; v \star b]) \times \{y\} \\ &= \bigsqcup_{y \in [a;b[}]v \star y; v \star b] \times \{y\} \\ &=]v; v \star b] \otimes [a; b[\,. \end{aligned}$$ ■

Il est aussi possible de faire pivoter une représentation en coin d'un tube par rapport au point interne :

Proposition 1.4.8. $]w; w \star b] \otimes [a; b[=]w \star a; w \star b] \otimes [a; w[$.

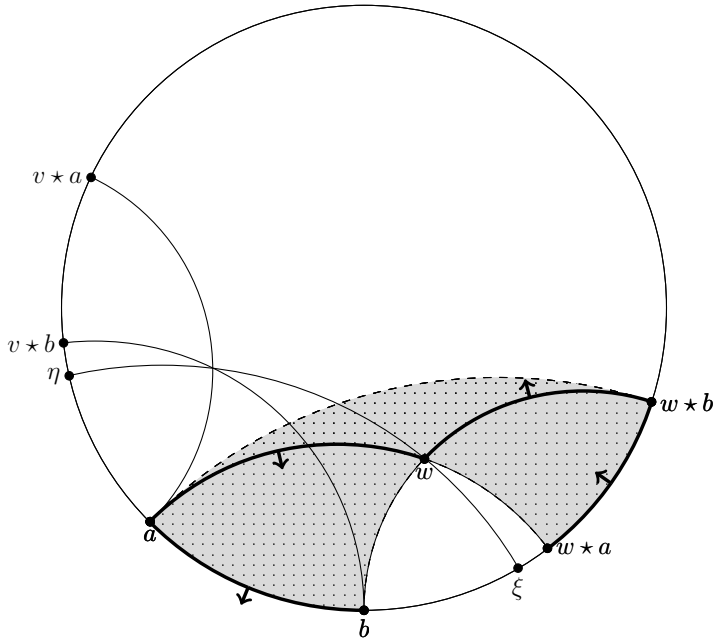


FIGURE 1.6 – Les coins $]w; w \star b] \otimes [a; b[$ (gris) et $]w \star a; w \star b] \otimes [a; w[$ (points) sont identiques

PREUVE :

$$]w;w\star b]\otimes[a;b[=\bigsqcup_{y\in[a;b[}]w\star y;w\star b]\times\{y\}$$
$$]w\star a;w\star b]\otimes[a;w[=\bigsqcup_{x\in]w\star a;w\star b]}\{x\}\times[a;w\star x[$$

Si $w\in\partial\mathbb{D}$ ou $a=b$, les deux tubes géodesiques sont vides et l'égalité est vérifiée. Sinon, prenons $y\in[a;b[$ et $x\in]w\star y;w\star b]$. Comme $w\star y\in[w\star a;w\star b[$, cela signifie que $[w\star y;x[\subset[w\star a;w\star b[$. Tirée en arrière, cette inclusion donne que $[y;w\star x[\subset[a;b[$, donc $y\in[a;w\star x[$ puisque $y\neq a$.

La preuve pour l'inclusion réciproque est symétrique. ■

Enfin, un tube géodésique peut être découpé en se donnant un point dans le demi-espace opposé à la géodésique traversée par le tube.

Proposition 1.4.9. *Soit $z\in\overline{\mathbb{D}}$ dans le demi-espace droit délimité par la géodésique (η,ξ). On note a et b les origines respectives des géodésiques (v,z) et (w,z). Alors $]a;b[\subset]\eta;\xi[$ et :*

$$]\eta;\xi]\otimes[w;v[\subset]\eta;b]\otimes[w;z[\sqcup]a;\xi]\otimes[z;v[\,.$$

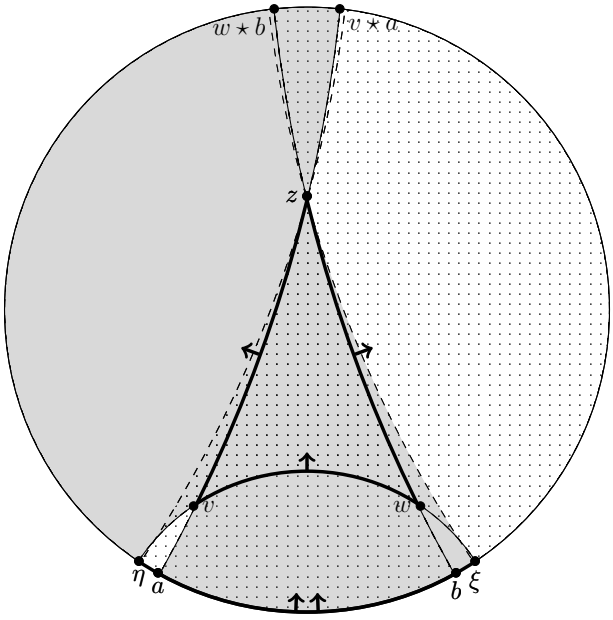


FIGURE 1.7 – $]\eta;b]\otimes[w;z[$ (points) et $]a;\xi]\otimes[z;v[$ (gris) recouvrent $]\eta;\xi]\otimes[w;v[$

PREUVE : Prenons $x\in]\eta;\xi]$ et $y\in[w\star x;v\star x[\subset[\xi;\eta[$. Puisque z et x sont de part et d'autre de la géodésique (η,ξ), nécessairement $z\star x\in]\xi;\eta[$.

Supposons d'abord que $x\in]\eta;a]\subset]z\star a=v\star a;a]$. Comme $]v\star a;a]\otimes[v;z[$ est inclus dans $]v\star a;a]\times[a;v\star a[$, il vient :

$$[v\star x;z\star x[\subset[a;v\star a[\subset[a;\eta[\,.$$

Or on sait que $[w \star x; v \star x[\subset [\xi; \eta[$, donc on en déduit que $z \star x \in [v \star x; \xi[$ et donc que

$$y \in [w \star x; v \star x[\subset [w \star x; v \star x[\sqcup [v \star x; z \star x[= [w \star x; z \star x[.$$

Ainsi, $]\eta; a] \otimes [w; v[\subset]\eta; a] \otimes [w; z[$.

Avec un raisonnement symétrique pour $x \in]b; \xi]$, on peut alors montrer de la même manière que $]b; \xi] \otimes [w; v[\subset]b; \xi] \otimes [z; v[$.

Finalement, on suppose que $x \in]a; b] =]w \star b; b] \cap]a; v \star a]$. Comme

$$]w \star b; b] \otimes [w; z[\subset]w \star b; b] \times [b; w \star b[\quad \text{et} \quad]a; v \star a] \otimes [z; v[\subset]a; v \star a] \times [v \star a; a[,$$

il vient que

$$[w \star x; z \star x[\subset [b; w \star b[\subset [b; a[\qquad \text{et} \qquad [z \star x; v \star x[\subset [v \star a; a[\subset [b; a[.$$

Par conséquent, $z \star x \in [w \star x; v \star x] \subset [\xi; \eta]$ et donc

$$y \in [w \star x; z \star x[\sqcup [z \star x; v \star x[,$$

prouvant bien que $]a; b] \otimes [w; v[\subset]a; b] \otimes [w; z[\sqcup]a; b] \otimes [z; v[$. ■

Chapitre 2

Du flot géodésique au codage de Bowen-Series

Soit, dans toute cette section, un domaine fondamental $\mathcal{D}$ d'un groupe cofini Γ qui satisfait la propriété d'*even corners* et qui n'est pas triangulaire de classe 0. On reprend toutes les notations du chapitre précédent qui lui sont associées.

Nous allons établir dans cette section des liens entre le flot géodésique sur une surface à courbure négative constante (possédant éventuellement des singularités) et une transformation définie sur une partie du tore 2-dimensionnel et possédant une dynamique de type "transformation du boulanger", dont l'action est déterminée par une seule des coordonnées.

Il est possible de construire à partir du flot géodésique un premier système dynamique sur le tore, appelé billard géodésique et noté (B, T_B). Ce billard est défini sur une partie de l'ensemble des géodésiques qui coupent l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{D}$, et agit par le générateur associé au côté du domaine par lequel la géodésique sort. Essentiellement, il envoie une géodésique coupant $\mathcal{D}$ sur le représentant ramené dans $\mathcal{D}$ de la portion de cette même géodésique qui coupe le domaine suivant quand on la parcourt du passé vers le futur. Pour que cette construction ait un sens, il faut se donner une convention pour traiter de manière cohérente les géodésiques qui sortent du domaine par un sommet. Ce billard peut être essentiellement obtenu à partir du flot géodésique au moyen d'une section de Poincaré, et réciproquement on peut construire une suspension du billard qui est conjuguée au flot géodésique.

Le billard est défini par morceaux comme agissant par un générateur du groupe - le même sur chaque composante - mais ce générateur dépend lui-même des deux composantes, c'est-à-dire que

$$T_B(x, y) = (\gamma[x, y](x), \gamma[x, y](y)).$$

On souhaiterait avoir un système dynamique similaire, mais où le générateur appliqué ne dépend que d'une composante, comme avec

$$T_C(x, y) = (\gamma[x](x), \gamma[x](y)) \qquad \text{ou} \qquad T_C(x, y) = (\gamma[y](x), \gamma[y](y)).$$

C'est ce qui nous amènera à définir le codage rectifié (C, T_C), d'une manière semblable à ce qui est fait dans [AF84] pour la surface modulaire ou dans [AF91] pour Γ cocompact. C est constitué d'une réunion finie de rectangles du tore $\mathbb{T}^2$, et l'image de chacun de ces rectangles par T_C donne un rectangle dans la direction opposé, une manière de dire qu'il est dilatant en une coordonnée et contractant en l'autre. En le restreignant à la coordonnée qui le définit (la première ou la seconde, suivant le choix des conventions d'orientation et que l'on regarde T_C

ou T_C^{-1}), on obtient la transformation de Bowen-Series, mais à la différence que notre version n'a besoin d'être définie que sur une partition de Markov finie.

La preuve de la conjugaison entre le billard et le codage occupera la plus grande part de ce chapitre. Elle s'appuiera sur la notion de tubes géodésiques définie au premier chapitre, qui nous permettra de décrire de la même manière des sous-parties du billard et du codage. Le point remarquable de cette conjugaison est qu'elle est intrinsèquement de la même nature que le codage et le billard, i.e. elle agit par des éléments du groupe et de la même manière sur chaque composante, et que de plus il n'est nécessaire de découper B qu'en un nombre fini de morceaux pour pouvoir la définir convenablement.

Cette section comporte un certain nombre de dessins. Les zones à pois correspondent aux points qui sont recouverts par les géodésiques du billard, tandis que les zones grisées sont celles traversées par les géodésiques du codage.

2.1 Billard géodésique

Nous commençons par définir le billard en termes abstraits à l'aide des tubes géodésiques. On montrera d'abord qu'il s'agit bien d'une bijection de B en exhibant son inverse, puis on en donnera une interprétation géométrique. Enfin, on en construira une suspension que l'on reliera au flot géodésique.

2.1.1 Billard et billard inverse

Soit $v \in V$. Dans toute la suite, on notera $u = l(v)$ et $w = r(v)$.

Le *billard (géodésique)* est constitué de la donnée des ensembles B_v^k et de l'application T_B définis par :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n_v - 1 \,;\, m_v - 3]\!], B_v^{k-m_v+2} &=]w; v] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\\
B_v^0 &=]w; v] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\\
\forall k \in [\![1 \,;\, n_w - 1]\!], B_v^k &=]w; v] \otimes \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\\
B_v &=]w; v] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}\right[\\
\forall x \in B_v, T_B(x) &= \gamma_v(x)
\end{aligned}$$

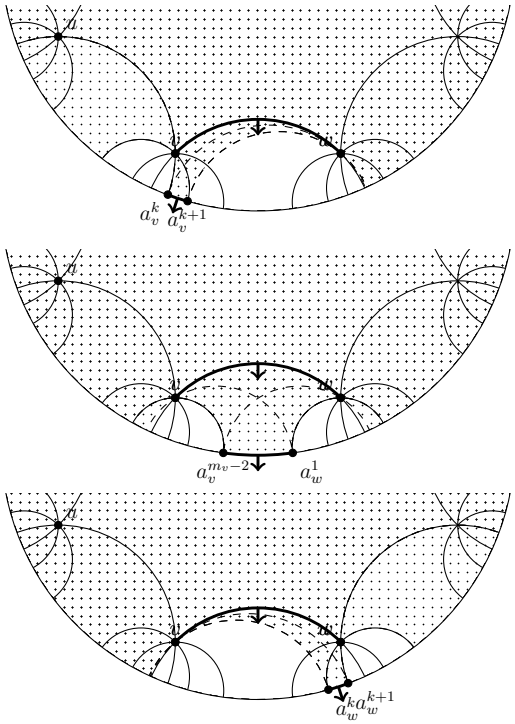


FIGURE 2.1 – De haut en bas : $B_v^{k-m_v+2}$, B_v^0, B_v^k

Il est clair de par leur définition que les (B_v^k) sont disjoints deux à deux et que B_v est l'union disjointe de tous les B_v^k pour $k \in [\![-n_v + 1 \,;\, n_w - 1]\!]$. Nous verrons que B_v représente les géodésiques qui quittent le domaine fondamental par le segment $[v; w[$.

La première chose à vérifier est que les B_v soient eux-mêmes disjoints deux à deux :

Lemme 2.1.1. *Si $v \neq z$, $B_v \cap B_z = \emptyset$.*

PREUVE : Pour que $[a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}[\cap [a_z^{n_z-1}; a_z^{m_z-1}[\neq \emptyset$, nécessairement $z = l(v) = u$ ou bien $z = r(v) = w$. Nous traiterons le premier cas, le second étant symétrique.

Prenons donc $y \in [a_u^{n_u-1}; a_u^{m_u-1}[\cap [a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}[= [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[$. Alors on a à la fois que

$$]v \star y; u \star y] \subset \left]a_v^{n_v}; a_u^{n_u-1}\right] \qquad \text{et que} \qquad]w \star y; v \star y] \subset \left]a_w^{n_w}; a_v^{n_v-1}\right].$$

En particulier,

$$v \star y \in \left[a_v^{n_v}; a_u^{n_u-1}\right] \cap \left[a_w^{n_w}; a_v^{n_v-1}\right] = \left[a_w^{n_w}; a_u^{n_u-1}\right].$$

Ainsi,

$$u \star y \in \left[v \star y; a_u^{n_u-1}\right] \qquad \text{et} \qquad w \star y \in [a_w^{n_w}; v \star y]$$

ce qui prouve bien que

$$]w \star y; v \star y] \cap]v \star y; u \star y] = \emptyset. \qquad \blacksquare$$

De façon similaire, le *billard (géodésique) inverse* est constitué de la donnée des ensembles $\widehat{B}_v^k$ et de l'application $T_{\widehat{B}}$ définis par :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n_v - 1\,;\, m_v - 3]\!], \widehat{B}_v^{k-m_v+2} &= \left]a_v^k; a_v^{k+1}\right] \otimes [w; v[\\
\widehat{B}_v^0 &= \left]a_v^{m_v-2}; a_w^1\right] \otimes [w; v[\\
\forall k \in [\![1\,;\, n_w - 1]\!], \widehat{B}_v^k &= \left]a_w^k; a_w^{k+1}\right] \otimes [w; v[\\
\widehat{B}_v &= \left]a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}\right] \otimes [w; v[\\
\forall x \in \widehat{B}_v, T_{\widehat{B}}(x) &= \gamma_v(x)
\end{aligned}$$

Les $(\widehat{B}_v^k)$ sont eux aussi deux à deux disjoints, et $\widehat{B}_v$ est l'union disjointe de tous les $(\widehat{B}_v^k)$. On pourrait aussi montrer avec un lemme similaire au 2.1.1 que les $\widehat{B}_v$ sont eux-mêmes disjoints deux à deux. Nous verrons que $\widehat{B}_v$ représente les géodésiques qui rentrent dans le domaine fondamental par le segment $]v; w]$.

Nous allons maintenant prouver que les B_v^k et les $\widehat{B}_v^k$ définissent le même billard, i.e. que $\bigsqcup_v B_v = \bigsqcup_v \widehat{B}_v$ et que $T_{\widehat{B}} = T_B^{-1}$.

Proposition 2.1.2. $\displaystyle\bigsqcup_v B_v = \bigsqcup_v \widehat{B}_v$.

PREUVE : Fixons $v \in V$. En appliquant la proposition 1.4.9 successivement pour chaque sommet z du domaine fondamental différent de v et w, on obtient :

$$\widehat{B}_v = \left]a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}\right] \otimes [w; v[\subset \bigcup_{z \in V \setminus \{v\}} \left]a_z^{m_z-1}; a_z^{n_z-1}\right] \otimes [z; r(z)[\,.$$

Mais, par la propostion 1.4.8, chacun de ces tubes peut s'écrire

$$\left]a_z^{m_z-1}; a_z^{n_z-1}\right] \otimes [z; r(z)[=]r(z); z] \otimes \left[a_z^{n_z-1}; a_z^{m_z-1}\right[= B_z$$

Par conséquent, on a bien que $\widehat{B}_v \subset \bigsqcup_z B_z$, ce qui nous donne une des inclusions de la proposition. L'inclusion réciproque se montre de manière symétrique. $\blacksquare$

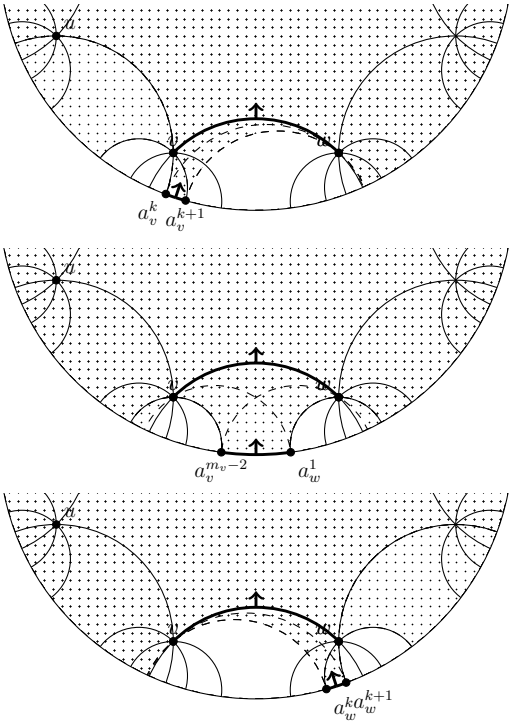


FIGURE 2.2 – De haut en bas : $\widehat{B}_v^{k-m_v+2}$, $\widehat{B}_v^0$, $\widehat{B}_v^k$

On notera dorénavant $B = \bigsqcup_v \bigsqcup_k B_v^k = \bigsqcup_v B_v = \bigsqcup_v \widehat{B}_v = \bigsqcup_v \bigsqcup_k \widehat{B}_v^k$.

L'image par T_B d'un des B_v est en fait naturellement un $\widehat{B}_{v'}$:

Lemme 2.1.3. *Pour tout $v \in V$, $T_B(B_v) = \widehat{B}_{l\sigma(v)}$ et $T_{\widehat{B}}(\widehat{B}_v) = B_{l\sigma(v)}$.*

PREUVE : Lorsque $v \in V$,

$$\begin{aligned} T_B(B_v) &= \gamma_v\left(]w;v] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}\right[\right) \\ &=]\tau(w);\sigma(v)] \otimes \left[a_{\sigma(v)}^{n_v} = a_{\tau(w)}^{m_{\tau(w)}-1}; a_{\sigma(v)}^0 = a_{\tau(w)}^{n_{\tau(w)}-1}\right[\\ &=]z;r(z)] \otimes \left[a_z^{m_z-1}; a_z^{n_z-1}\right[&& \text{avec } z = \tau(w) = l\sigma(v) \\ &= \left]a_z^{n_z-1}; a_z^{m_z-1}\right] \otimes [r(z);z[= \widehat{B}_z && \text{d'après la proposition 1.4.5} \end{aligned}$$

L'autre égalité se montre encore de manière symétrique. ■

Puisque $\bigsqcup_v B_v = \bigsqcup_v \widehat{B}_v$, que $T_{B/B_v} = \gamma_v : B_v \to \widehat{B}_{l\sigma(v)}$ est une bijection et que $\gamma_{l\sigma(v)}^{-1} = \gamma_v$, on en déduit immédiatement que :

Proposition 2.1.4. *$T_B(B) \subset B$, $T_{\widehat{B}}(B) \subset B$, et T_B et $T_{\widehat{B}}$ sont des bijections réciproques.*

2.1.2 Exemples

Nous allons décrire le billard sur trois exemples qui couvrent un large éventail de situations. Ils seront développés dans les section suivantes pour illustrer le codage et sa conjugaison avec le billard.

Le premier domaine que l'on considère est celui d'une surface compacte de genre 2 sans points coniques :

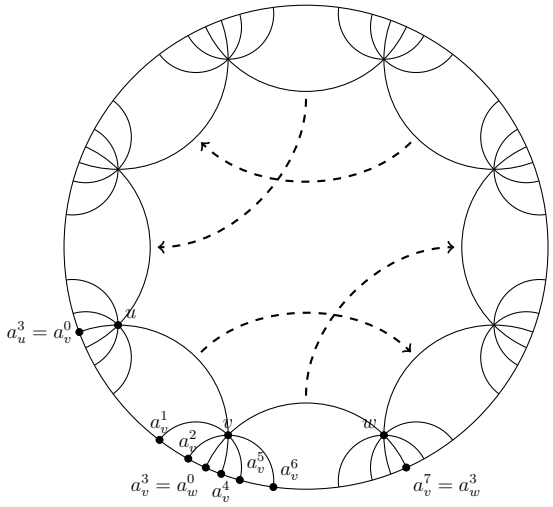


FIGURE 2.3 – Domaine fondamental régulier d'une surface de genre 2

C'est un octogone hyperbolique régulier dont les huit sommets appartiennent à la même σ-orbite. Ils supportent chacun huit secteurs, ce qui induit une partition du cercle à l'infini en 48 intervalles. Le billard est ainsi constitué de 48 tubes.

Les figures 2.6 et 2.7 représentent respectivement le billard et le billard inverse vus comme sous-parties du tore $\mathbb{T}^2$. Les lignes pleines sont incluses dans le billard, tandis que les tirets délimitent les bords non inclus. L'origine du repère est située en un des points $a_v^{n_v-1}$.

Le second domaine considéré est le domaine de Dirichlet de la surface modulaire centré en un point $t \in]-1;0[$ de $\mathbb{D}$:

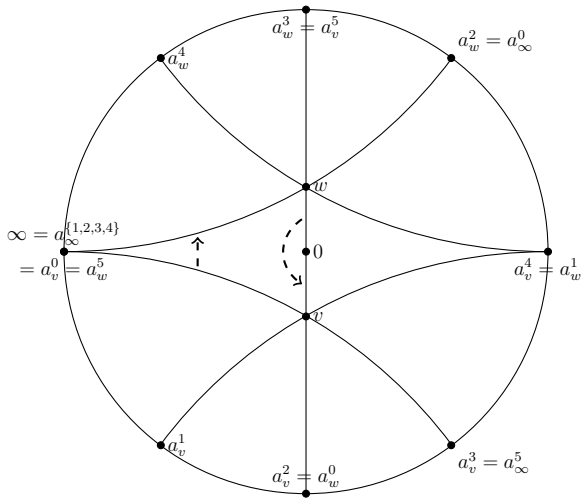


FIGURE 2.4 – Domaine fondamental de la surface modulaire

Il ne possède que trois sommets géométriques car le centre de l'elliptique d'ordre 2 est au milieu d'une des arêtes. Ces trois sommets ont tous un nombre $n_v = n_w = n_\infty = 3$ mais pour des raisons différentes : pour les sommets internes, cela correspond au fait qu'ils sont centre d'un elliptique d'ordre 3 ; tandis que pour le cusp ∞ cela résulte simplement de notre convention. Vis-à-vis de nos descriptions, le cas de ce domaine fondamental peut être qualifié d'extrême, car il comporte à la fois un sommet à l'infini, des éléments elliptiques qui ont pour centre un sommet du domaine et le milieu d'une arête, ainsi qu'un intervalle central vide (car $a_v^4 = a_w^1$). C'est le domaine le plus petit sur lequel notre théorie est applicable.

La figure 2.8 représente dans $\mathbb{T}^2$ le billard et le billard inverse ainsi que leurs images respectives, avec pour origine le sommet à l'infini ∞. À noter que B touche la diagonale en (∞, ∞).

Le dernier domaine illustré est le domaine de Dirichlet de centre 0 associé au groupe de congruence $\Gamma(2)$ de niveau 2, où :

$$\Gamma(2) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) \,\middle|\, a, d \text{ impairs et } b, c \text{ pairs} \right\}.$$

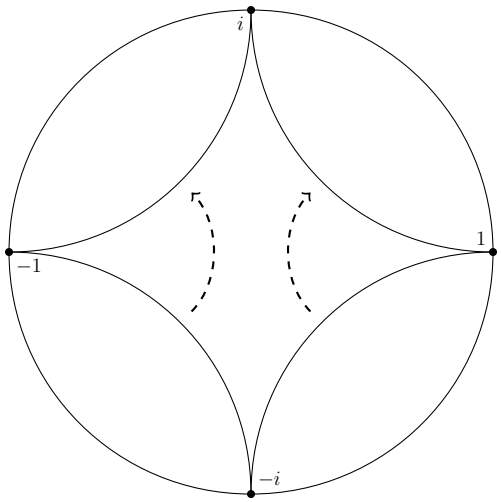


FIGURE 2.5 – Domaine fondamental pour $\Gamma(2)$

Tous ses sommets sont à l'infini. Alors que 1 et -1 sont des points fixes de σ, i et $-i$ sont tous deux sur la même σ-orbite, ce qui traduit le fait qu'ils soient congruents sous l'action du groupe.

La figure 2.9 représente dans $\mathbb{T}^2$ le billard et le billard inverse ainsi que leurs images respectives, avec pour origine le sommet à l'infini -1. B touche la diagonale en $(-1,-1)$, $(-i,-i)$, $(1,1)$ et (i,i).

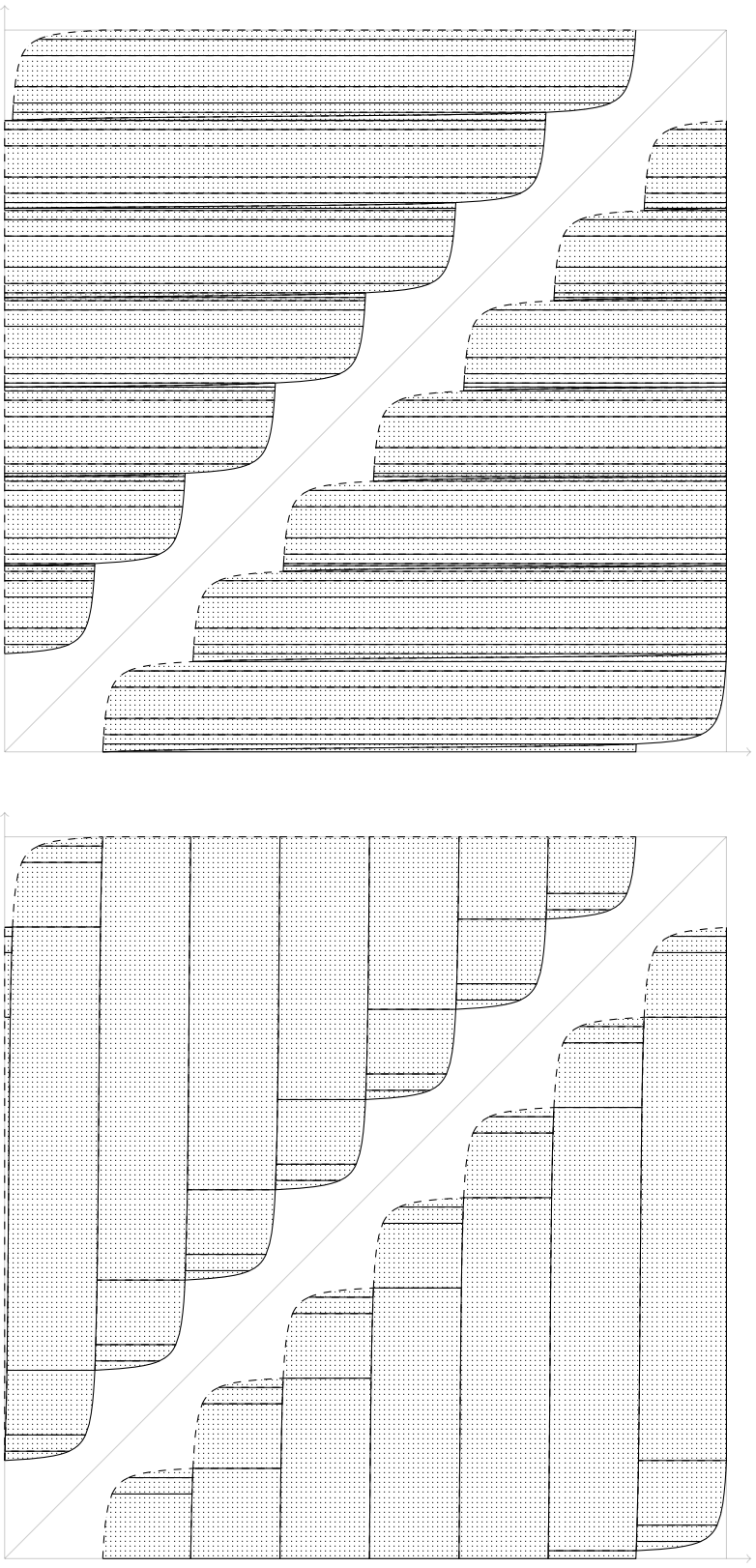


FIGURE 2.6 – Les tubes du billard B et leurs images par T_B pour la surface de genre 2

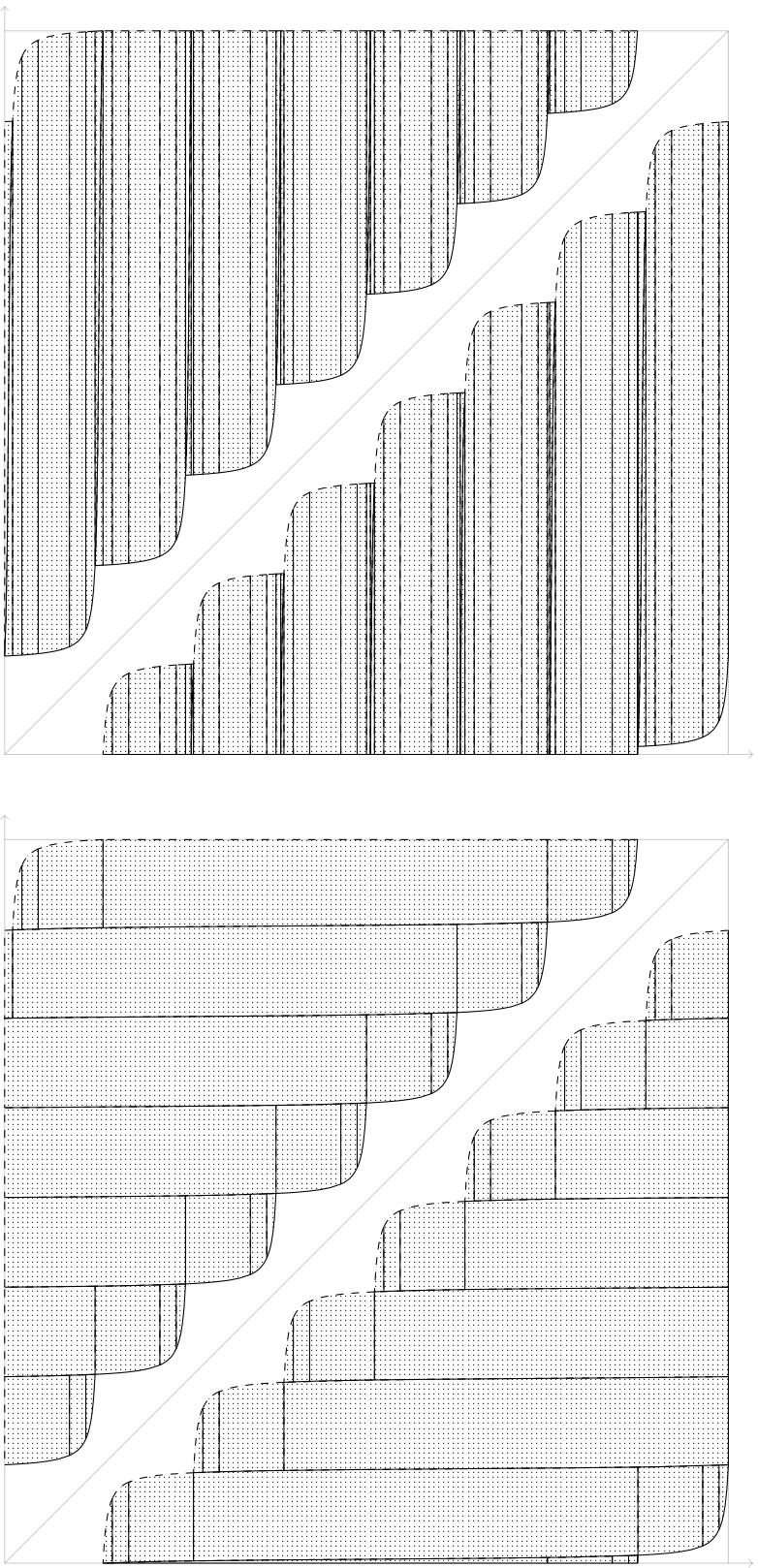


FIGURE 2.7 – Les tubes du billard inverse $\widehat{B} = B$ et leurs images par $T_{\widehat{B}} = T_B^{-1}$ pour la surface de genre 2

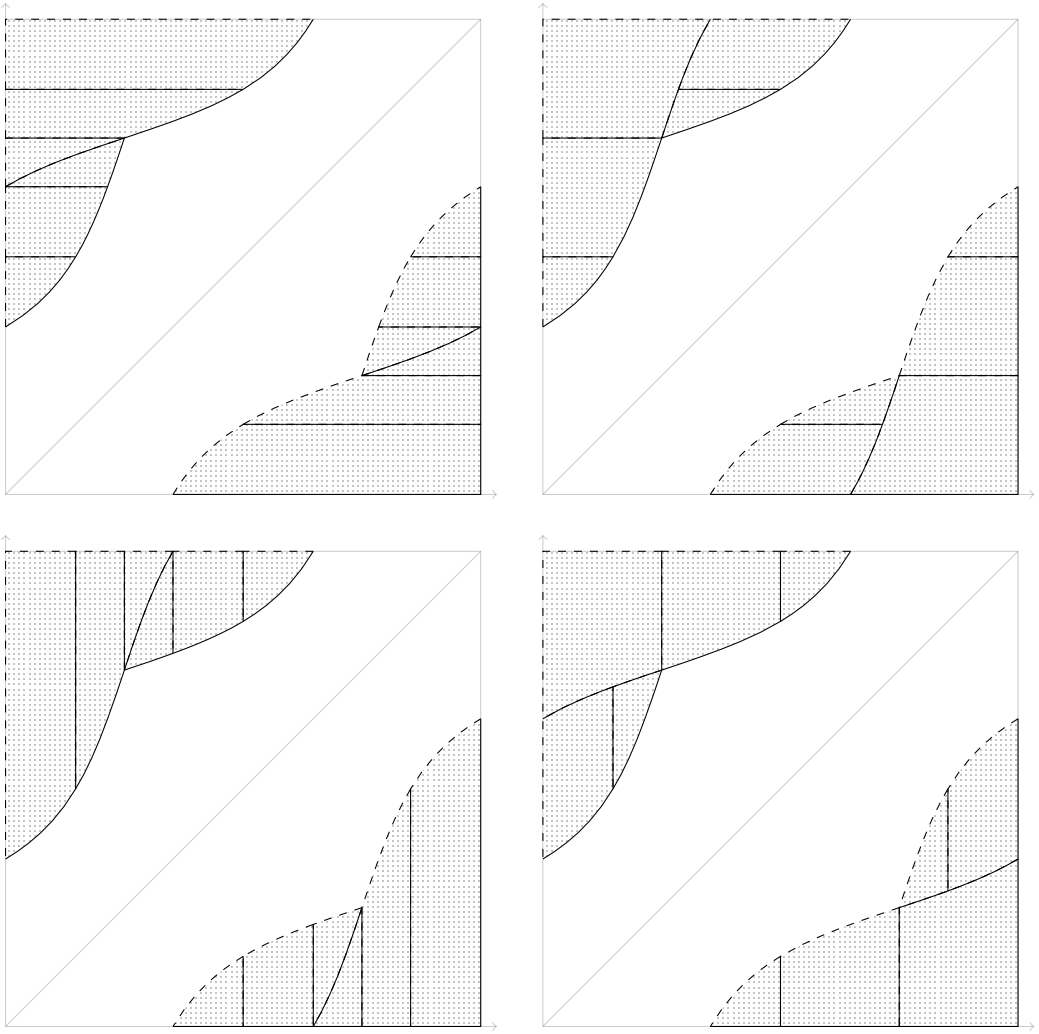


FIGURE 2.8 – Le billard et son image par T_B (en haut), ainsi que le billard inverse et son image par T_B^{-1} (en bas) pour la surface modulaire

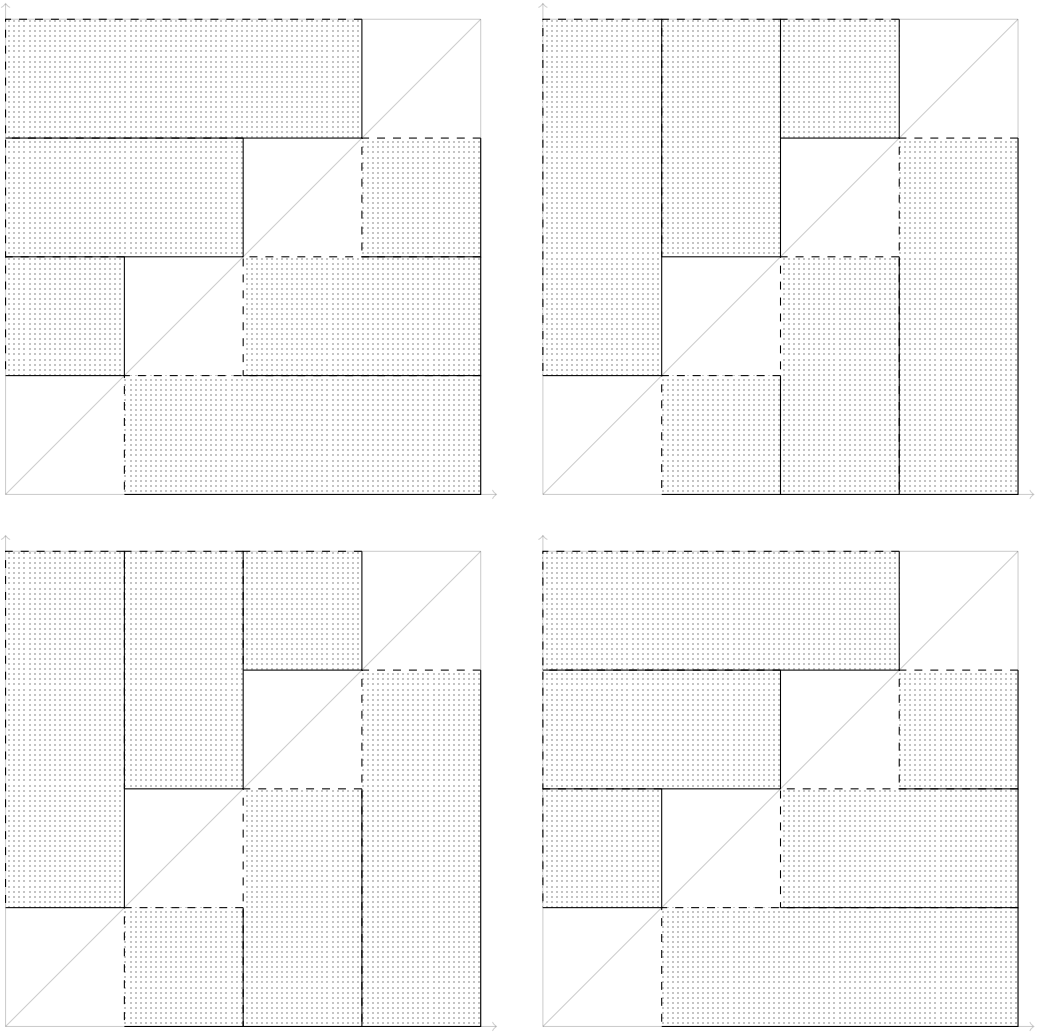


FIGURE 2.9 – Le billard et son image par T_B (en haut), ainsi que le billard inverse et son image par T_B^{-1} (en bas) pour $\mathbb{D}/\Gamma(2)$

2.1.3 Relations avec le flot géodésique

Décrivons en termes géométriques quelles géodésiques sont représentées par notre construction abstraite du billard :

Proposition 2.1.5. *Soit $v \in V$. B_v représente l'ensemble des géodésiques orientées :*
– qui coupent l'intérieur du domaine fondamental et en ressortent transverses au segment $[v; w[$;
– dont l'intersection avec l'adhérence dans $\overline{\mathbb{D}}$ du domaine fondamental est réduite à v, et qui contiennent le domaine fondamental dans le demi-espace gauche qu'elles délimitent ;
– (a_v^0, v), qui borde le domaine fondamental en le contenant dans le demi-espace gauche qu'elle délimite ;
– (v, v), uniquement lorsque v est un sommet à l'infini.

PREUVE : On découpe tout d'abord B_v en trois parties :

$$\begin{aligned} B_v &=]w; v] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\\ &=]w; v] \otimes \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\sqcup]w; v] \otimes \left\{a_v^{n_v-1}\right\} \\ &=]w; v[\otimes \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\sqcup \left\{(v \star y, y) \mid y \in \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\right\} \sqcup]w; v] \otimes \left\{a_v^{n_v-1}\right\} \end{aligned}$$

Prenons $(x, y) \in B_v$ pour un certain sommet v. Si

$$(x, y) \in]w; v[\otimes \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\subset \left]a_w^{n_w}; a_v^{n_v-1}\right[\times \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[,$$

alors (x, y) coupe la géodésique (v, w) quelque part à l'intérieur du segment ouvert $]v; w[$ puisque $x \in]w \star y; v \star y[$. Comme le domaine fondamental est complètement contenu dans le demi-espace gauche délimité par la géodésique orientée (v, w), (x, y) correspond à une géodésique qui coupe l'intérieur du domaine fondamental et qui sort par le segment $[v; w[$.

Supposons maintenant que $(x, y) \in \{(v \star y', y') \mid y' \in]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}[\}$. (x, y) doit alors passer par le sommet v. Si v n'est pas un cusp, on peut encore subdiviser cet ensemble en

$$\left\{(v \star y', y') \mid y' \in \left]a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\right\} \sqcup \left\{(a_v^0, a_v^{n_v})\right\} \sqcup \{(v \star y', y') \mid y' \in]a_v^{n_v}; a_w^{n_w}[\}\,.$$

(x, y) est alors respectivement :
– une géodésique qui coupe l'intérieur du domaine et en sort par le sommet v ;
– la géodésique de bord $(a_v^0, a_v^{n_v})$;
– une géodésique qui coupe l'adhérence du domaine fondamental uniquement au sommet v, et laisse le domaine à sa gauche.
Si par contre v est un cusp,

$$(x, y) \in \left\{(v \star y', y') \mid y' \in \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\right\} = \left\{(v, y') \mid y' \in \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right[\right\}$$

et (x, y) ne peut qu'être une géodésique qui coupe l'adhérence du domaine fondamental uniquement au cusp v et laisse le domaine à sa gauche.

Si v n'est pas un cusp, alors $v \star a_v^{n_v-1} = w \star a_v^{n_v-1}$ et $]w; v] \otimes \{a_v^{n_v-1}\} = \emptyset$. On suppose donc que v est un cusp et que

$$\begin{aligned} (x, y) \in]w; v] \otimes \left\{a_v^{n_v-1}\right\} &=]w; v] \otimes \{v\} \\ &= \left]a_v^{m_v-1}; v\right] \times \{v\} \\ &= \left]a_v^{m_v-1}; a_v^0\right[\times \{v\} \sqcup \left\{(a_v^0, v)\right\} \sqcup \left]a_v^0; v\right[\times \{v\} \sqcup \{(v, v)\} \end{aligned}$$

(x, y) est alors respectivement :

– une géodésique qui coupe l'intérieur du domaine fondamental et a pour extrémité futur le sommet à l'infini v ;
– la géodésique de bord (a_v^0, v) ;
– une géodésique qui coupe l'adhérence du domaine fondamental uniquement au sommet à l'infini v, et laisse le domaine à sa gauche.
– le couple (v, v).

Réciproquement, la discussion que l'on vient de faire prouve que les quatres catégories citées sont complètement couvertes par B. ■

En rassemblant les descriptions obtenues pour tous les B_v, on obtient la description complète de B :

Corollaire 2.1.6. *B représente l'ensemble des géodésiques orientées :*
– qui coupent l'intérieur du domaine fondamental ;
– dont l'intersection avec l'adhérence dans $\overline{\mathbb{D}}$ du domaine fondamental est réduite à un sommet, et qui contiennent le domaine fondamental dans le demi-espace gauche qu'elles délimitent ;
– qui bordent le domaine fondamental en le contenant dans le demi-espace gauche qu'elles délimitent ;
– (v, v) où v est un sommet à l'infini du domaine fondamental.

Remarquons que le support B du billard n'est pas symétrique, puisque l'inverse d'une géodésique passant par un sommet du domaine et le laissant à sa gauche passe toujours par ce même sommet en le laissant à sa droite. Il est toutefois très proche de l'être car son intérieur $\mathring{B}$ (pour la topologie de $\mathbb{T}^2$) est constitué des géodésiques coupant l'intérieur du domaine fondamental, propriété indépendante du sens de parcours. De plus, T_B stabilise $\mathring{B}$ et induit en restriction à cet ensemble une bijection (toujours notée T_B) qui est conjuguée à son inverse par l'involution d'inversion du temps $\iota(x, y) = (y, x)$.

On note Φ le flot géodésique sur $T^1\mathbb{D}$, et π la projection canonique de $T^1\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$. Si une géodésique orientée (x, y) passe par $z \in \mathbb{D}$, il existe un unique $\nu_z \in T^1_z\mathbb{D}$ qui dirige (x, y) en z. Comme $\mathcal{D}$ est convexe, $\overline{\mathcal{D}}$ l'est aussi et toute géodésique qui coupe l'adhérence du domaine fondamental y entre en un point p et en ressort en un point q :

Définition 2.1.7. Si une géodésique géométrique orientée (x, y) coupe l'adhérence dans $\overline{\mathbb{D}}$ du domaine fondamental $\mathcal{D}$ en au moins un point z, on pose

$$p(x, y) = \pi\Phi(z, \nu_z, t^-) \text{ où } t^- = \inf\left\{t \leq 0 \mid \pi\Phi(z, \nu_z, t) \in \overline{\mathcal{D}}\right\}$$
$$q(x, y) = \pi\Phi(z, \nu_z, t^+) \text{ où } t^+ = \sup\left\{t \geq 0 \mid \pi\Phi(z, \nu_z, t) \in \overline{\mathcal{D}}\right\}$$

Ces définitions sont indépendantes du choix du point z dans l'intersection de la géodésique et du domaine.

On peut donner une interprétation plus géométrique de ces points :

Lemme 2.1.8. *Soit $(x, y) \in B \setminus \Delta$.*
(i) Si $(x, y) \in B_v$, alors $q(x, y) = (x, y) \cap r_v$;
(ii) Si $(x, y) \in \widehat{B}_v$, alors $p(x, y) = (x, y) \cap r_v$.

PREUVE : Supposons que $(x,y) \in B_v$. On remarque tout d'abord que $r_v = (v,w) \notin B_v$, bien que $(x,y) \in]a_v^{m_v-1}; a_v^{n_v-1}] \times [a_v^{n_v-1}; a_v^{m_v-1}[$. Par conséquent, r_v et (x,y) sont transverses et leur intersection est bien définie.

Or, d'après la proposition 2.1.5, (x,y) :
– soit coupe l'intérieur du domaine fondamental et en sort par $]v;w[$ ou par v ;
– soit ne coupe l'adhérence du domaine fondamental qu'au point v ;
– soit $(x,y) = (a_v^0, a_v^{n_v})$.
Dans les trois cas, $q(x,y)$ tel qu'on l'a défini est exactement $(x,y) \cap r_v$.

Le second point se traite de manière symétrique. ■

L'image du point de sortie du domaine d'une géodésique est le point d'entrée de son image par T_B, et vice-versa.

Lemme 2.1.9. *Soit* $(x,y) \in B \setminus \Delta$.
(i) Si $(x,y) \in B_v$, *alors* $\gamma_v(q(x,y)) = p(T_B(x,y))$;
(ii) Si $(x,y) \in \widehat{B}_v$, *alors* $\gamma_v(p(x,y)) = q(T_B^{-1}(x,y))$.

PREUVE : D'après le premier point du lemme 2.1.8, $q(x,y) = (x,y) \cap r_v$. Alors :

$$\gamma_v(q(x,y)) = (\gamma_v(x), \gamma_v(y)) \cap \gamma_v(r_v) = T_B(x,y) \cap r_{l\sigma(v)}.$$

Or, d'après le lemme 2.1.3, $T_B(x,y) \in \widehat{B}_{l\sigma(v)}$ donc en appliquant maintenant le second point du lemme 2.1.8 on obtient bien que $\gamma_v(q(x,y)) = p(T_B(x,y))$.

Le second point se démontre de manière symétrique. ■

Soit

$$B^* = \{(x,y) \in B \mid \forall n \in \mathbb{Z}, (x',y') = T_B^n(x,y) \Rightarrow x' \notin V \text{ et } y' \notin V\}$$

l'ensemble des éléments de B dont la T_B-orbite ne contient aucune géodésique qui ne commence ou ne finit en un sommet à l'infini du domaine fondamental. $B^* \subset \mathbb{T}^2$ est de mesure de Lebesgue nulle, $B^* \cap \Delta = \emptyset$, et pour tout $(x,y) \in B^*$ $p(x,y)$ et $q(x,y)$ sont dans $\mathbb{D}$ et on peut donc parler de la longueur du segment qui les relie.

Définition 2.1.10. On définit le *temps de retour* par

$$\begin{array}{rccl} \tau : & B^* & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & (x,y) & \mapsto & \text{longueur}([p(x,y); q(x,y)]) \end{array}$$

ainsi que le *temps de retour d'ordre* n pour $n \in \mathbb{Z}$ par

$$\begin{array}{rccl} \tau_n : & B^* & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \tau(T_B^j(x,y)) & \text{si } n > 0 \\ \displaystyle -\sum_{j=n}^{-1} \tau(T_B^j(x,y)) & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{array}$$

de sorte que $\tau_1 = \tau$ et que $\tau_{-n}(x,y) = -\tau_n(T_B^{-n}(x,y))$.

On note $P(x,y) = (p(x,y), \nu_{p(x,y)})$ et $Q(x,y) = (q(x,y), \nu_{q(x,y)})$. De par les définitions de p, q et τ, il est clair que :

Lemme 2.1.11. *Soit $(x,y) \in B^*$.*
(i) $Q(x,y) = \Phi(P(x,y), \tau(x,y))$;
(ii) $P(x,y) = \Phi(Q(x,y), -\tau(x,y))$.

Soit $(x,y) \in B$. Pour tout i, on note v_i l'unique sommet de V pour lequel $T_B^i(x,y) \in B_{v_i}$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$G(x,y) = \begin{cases} \gamma_{v_{n-1}} \dots \gamma_{v_0} & \text{si } n > 0 \\ \gamma_{v_n}^{-1} \dots \gamma_{v_{-1}}^{-1} & \text{si } n < 0 \\ \text{id} & \text{si } n = 0 \end{cases}.$$

En particulier, $G_{n+p}(x,y) = G_n(T_B^p(x,y))G_p(x,y)$ et $G_{-n}(x,y) = G_n(T_B^{-n}(x,y))^{-1}$.

Cette isométrie va nous permettre de relier $T_B^n(x,y)$ au parcours du flot géodésique depuis (x,y) et pendant un temps $\tau_n(x,y)$.

Lemme 2.1.12. *Soient $(x,y) \in B^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :*
(i) $P(T_B^n(x,y)) = G_n(x,y)\Phi(P(x,y), \tau_n(x,y))$;
(ii) $Q(T_B^n(x,y)) = G_n(x,y)\Phi(Q(x,y), \tau_n(x,y))$.

PREUVE : On va d'abord montrer la première relation par récurrence sur $n \geq 0$. Si $n = 0$, on a bien $P(x,y) = \text{id}\Phi(P(x,y), 0)$. Supposons maintenant le premier point vérifié au rang n, et prenons v tel que $(x,y) \in B_v$. Alors :

$$\begin{aligned} P(T_B^{n+1}(x,y)) &= G_n(T_B(x,y))\Phi\left(P(T_B(x,y)), \tau_n(T_B(x,y))\right) \\ &\qquad \text{par hypothèse de récurrence pour } T_B(x,y) \\ &= G_n(T_B(x,y))\Phi\left(\gamma_v(Q(x,y)), \tau_n(T_B(x,y))\right) \qquad \text{d'après le lemme 2.1.9} \\ &= G_n(T_B(x,y))\gamma_v\Phi\left(Q(x,y), \tau_n(T_B(x,y))\right) \qquad \text{car } \Gamma \text{ commute avec } \Phi \\ &= G_n(T_B(x,y))G_1(x,y)\Phi\left(P(x,y), \tau_n(T_B(x,y)) + \tau(x,y)\right) \\ &\qquad \text{d'après le lemme 2.1.11} \\ &= G_{n+1}(x,y)\Phi(P(x,y), \tau_{n+1}(x,y)) \end{aligned}$$

La preuve que la seconde relation est vérifiée pour $n \geq 0$ est symétrique.

Quant aux preuves pour $n < 0$, elles sont dûes aux faits que $\tau_{-n}(x,y) = -\tau_n(T_B^{-n}(x,y))$ et $G_{-n}(x,y) = G_n(T_B^{-n}(x,y))^{-1}$. ■

On définit l'espace quotient $X = (B^* \times \mathbb{R})_{/\sim}$ où $(x,y,s) \sim (x',y',s')$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(x',y',s') = (T_B^n(x,y), s - \tau_n(x,y))$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} (x,y,\tau(x,y)) &\sim (T_B(x,y), 0) \\ (x,y,0) &\sim (T_B^{-1}(x,y), -\tau_{-1}(T_B^{-1}(x,y))) = (T_B^{-1}(x,y), \tau(T_B^{-1}(x,y))) \end{aligned}$$

On peut alors définir la *suspension du billard par le temps de retour* τ par

$$\begin{array}{rccc} \Psi\ : & X\times\mathbb{R} & \to & X \\ & ((x,y,s),t) & \mapsto & \overline{(x,y,s+t)} \end{array}.$$

Il s'agit d'un flot sur X. On va montrer qu'il est conjugué au flot géodésique sur $M=\mathbb{D}/\Gamma$.

On définit ainsi

$$\begin{array}{rccc} \varphi\ : & B^*\times\mathbb{R} & \to & T^1\mathbb{D} \\ & (x,y,s) & \mapsto & \Phi(P(x,y),s) \end{array}.$$

Le lemme 2.1.12 nous donne immédiatement que φ est compatible avec $\sim$, i.e.

$$(x,y,s)\sim(x',y',s')\Rightarrow\exists\gamma\in\Gamma,\varphi(x,y,s)=\gamma\varphi(x',y',s').$$

φ induit donc une application $\overline{\varphi}:X\to T^1M$ où $T^1M=T^1\mathbb{D}/\Gamma$, et $\overline{\varphi}(X)$ s'identifie au fibré unitaire tangent de la surface auquel on retire dans chaque fibre les directions qui engendrent une géodésique débutant ou finissant en un cusp de M.

D'autre part, le flot géodésique Φ sur $T^1\mathbb{D}$ commute avec l'action de Γ donc induit un flot $\overline{\Phi}:T^1M\times\mathbb{R}\to T^1M$. Ce flot est semi-conjugué par $\overline{\varphi}$ à Ψ sur $\overline{\varphi}(X)$:

Proposition 2.1.13. $\forall x\in X,\forall t\in\mathbb{R},\overline{\varphi}(\Psi(x,t))=\overline{\Phi}(\overline{\varphi}(x),t)$.

On montrera au chapitre 4 que $\overline{\varphi}$ est une bijection, et donc que Ψ et $\overline{\varphi}$ sont conjugués.

2.2 Codage rectifié

Comme le billard, le codage rectifié (ou étendu) est défini à l'aide de tubes géodésiques qui sont ici de vrais rectangles du tore. On démontrera qu'il s'agit bien d'une bijection de C en exhibant son inverse. La preuve de la conjugaison avec le billard est explicitée dans la section suivante.

Le *codage (rectifié) droit* est constitué de la donnée des ensembles (C_v^k) et de l'application T_C définis par :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n_v - 1\,;\, m_v - 3]\!], C_v^{k-m_v+2} &= \left]a_w^{n_w+1}; a_v^{k-n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\\
C_v^0 &= \left]a_w^{n_w+1}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\\
\forall k \in [\![1\,;\, n_w - 2]\!], C_v^k &= \left]a_w^{k+n_w+1}; a_w^0\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\\
\forall x \in C_v^k, T_C(x) &= \gamma_v(x)
\end{aligned}$$

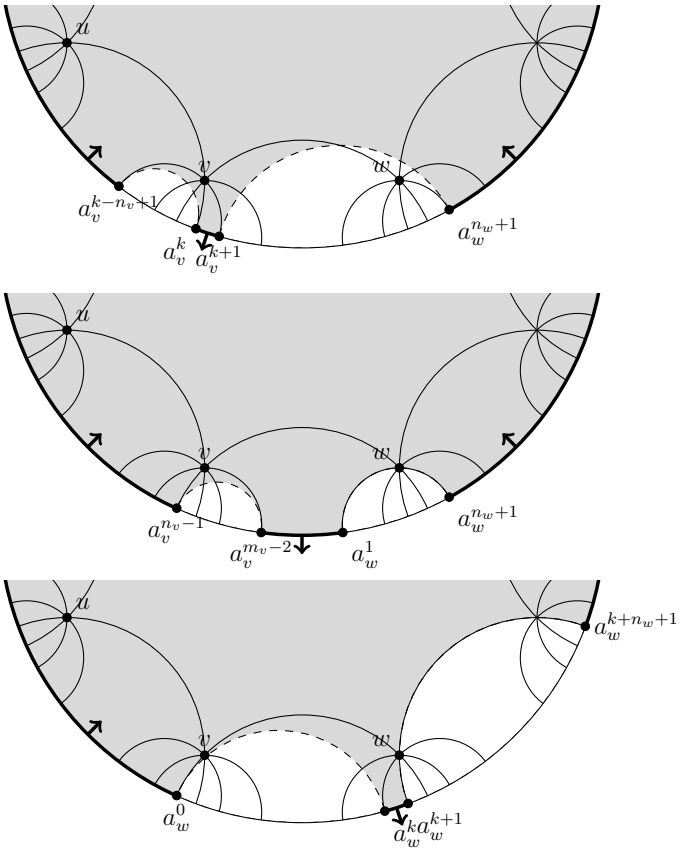


FIGURE 2.10 – De haut en bas : $C_v^{k-m_v+2}, C_v^0, C_v^k$

Les (C_v^k) étant clairement disjoints deux à deux, on peut poser

$$C = \bigsqcup_v \bigsqcup_k C_v^k.$$

On constate que $T_C(x, y) = (\gamma_R[y](x), \gamma_R[y](y))$ où le générateur $\gamma_R[y]$ est bien uniquement déterminé par la position de y sur $\partial\mathbb{D}$. On note aussi $T_C(x, y) = (S_L(x, y), T_R(y))$.

De façon similaire, le *codage (rectifié) gauche* est constitué de la donnée des ensembles $(\widehat{C}_v^k)$ et de l'application $T_{\widehat{C}}$ définis par :

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![n_v\,;\, m_v-3]\!], \widehat{C}_v^{k-m_v+2} &= \left]a_v^k; a_v^{k+1}\right] \times \left[a_v^{m_v-1}; a_v^{k-n_v}\right[\\
\widehat{C}_v^0 &= \left]a_v^{m_v-2}; a_w^1\right] \times \left[a_v^{m_v-1}; a_v^{n_v-2}\right[\\
\forall k \in [\![1\,;\, n_w-1]\!], \widehat{C}_v^k &= \left]a_w^k; a_w^{k+1}\right] \times \left[a_w^{k+n_w}; a_v^{n_v-2}\right[\\
\forall x \in \widehat{C}_v^k, T_{\widehat{C}}(x) &= \gamma_v(x)
\end{aligned}$$

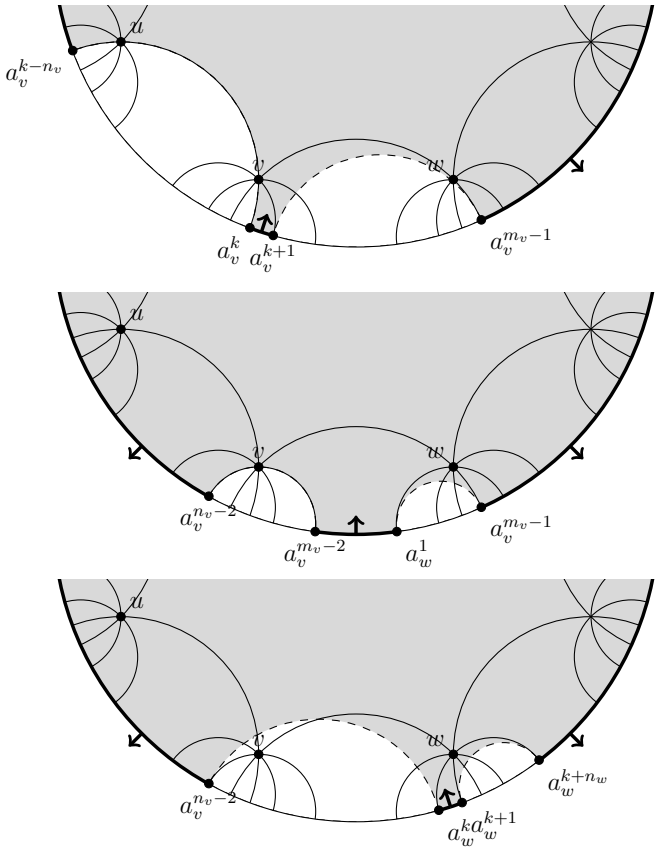


FIGURE 2.11 – De haut en bas : $\widehat{C}_v^{k-m_v+2}, \widehat{C}_v^0, \widehat{C}_v^k$

De la même manière que pour (C, T_C), les $(\widehat{C}_v^k)$ sont disjoints deux à deux et on peut poser

$$\widehat{C} = \bigsqcup_v \bigsqcup_k \widehat{C}_v^k.$$

De plus, $T_{\widehat{C}}(x,y) = (\gamma_L[x](x), \gamma_L[x](y))$ où le générateur $\gamma_L[x]$ est bien déterminé uniquement par la position de x sur $\partial\mathbb{D}$. On note aussi $T_{\widehat{C}}(x,y) = (T_L(x), S_R(x,y))$.

Nous allons maintenant prouver que les C_v^k et les $\widehat{C}_v^k$ définissent le même codage, i.e. que $C = \widehat{C}$ et que $T_{\widehat{C}} = T_C^{-1}$. Une fois ce point vérifié, nous nous restreindrons essentiellement à l'étude du codage à droite. L'étape délicate est de montrer qu'ils définissent le même ensemble de géodésiques.

Proposition 2.2.1. $C = \widehat{C}$.

PREUVE : Au lieu de montrer directement ce résultat, nous allons prouver que les complémentaires dans le tore à deux dimensions de ces deux unions sont égaux. Pour cela, nous allons découper ces complémentaires en une partie presque symétrique, c'est-à-dire dont l'intérieur est invariant par $\iota : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ l'involution d'inversion du temps ($\iota(x,y) = (y,x)$), et une partie exceptionnelle qui sera simple à identifier dans les deux cas.

Commençons par calculer le complémentaire de C dans $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned}
{}^c\mathcal{C} &= \bigsqcup_v \bigsqcup_k \left({}^c\mathcal{C} \cap \mathbb{S}^1 \times I_v^k\right) = \bigsqcup_v \bigsqcup_k \left({}^cC_v^k \cap \mathbb{S}^1 \times I_v^k\right) \\
&= \bigsqcup_v \Bigg(\bigsqcup_{k=n_v-1}^{m_v-3} \left]a_v^{k-n_v+1}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\sqcup \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\\
&\qquad \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \left]a_v^{n_v-1} = a_w^0; a_w^{k+n_w+1}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\Bigg)
\end{aligned}$$

Afin de faire apparaitre le cœur symétrique du codage, on isole l'extrémité droite de chacun de ces rectangles :

$$\begin{aligned}
{}^c\mathcal{C} = \bigsqcup_v \Bigg(\bigsqcup_{k=n_v-1}^{m_v-3} \left]a_v^{k-n_v+1}; a_w^{n_w}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\sqcup \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\\
\sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \left]a_v^{n_v-1} = a_w^0; a_w^{k+n_w}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\Bigg) \\
\sqcup \bigsqcup_v \Bigg(\bigsqcup_{k=n_v-1}^{m_v-3} \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\sqcup \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\\
\sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \left]a_w^{k+n_w}; a_w^{k+n_w+1}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\Bigg)
\end{aligned}$$

On note Σ_1, Σ_2 ces deux termes. Notre but va être de montrer que Σ_1 est symétrique, mais commençons par rassembler les morceaux de Σ_2 :

$$\begin{aligned}
\Sigma_2 &= \bigsqcup_v \left(\left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1} = a_w^0; a_w^1\right[\sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \left]a_w^{k+n_w}; a_w^{k+n_w+1}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\right) \\
&= \bigsqcup_v \bigsqcup_{k=0}^{n_w-2} \left]a_w^{k+n_w}; a_w^{k+n_w+1}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[= \bigsqcup_v \bigsqcup_{k=0}^{n_v-2} \left]a_v^{k+n_v}; a_v^{k+n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[
\end{aligned}$$

Faisons maintenant apparaître les symétries de Σ_1. On remarque tout d'abord que l'intervalle gauche de chacun des rectangles contient $\left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right]$, donc on peut le factoriser :

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 = \bigsqcup_v \left]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}\right[\\
\sqcup \bigsqcup_v \Bigg(\bigsqcup_{k=n_v-1}^{m_v-3} \left]a_v^{k-n_v+1}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \left]a_w^{n_w}; a_w^{k+n_w}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\Bigg)
\end{aligned}$$

Les rectangles correspondant à $k = n_v - 1$ sont les $]a_u^{n_u-1} = a_v^0; a_v^{n_v-1}] \times [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[$. On forme K en les extrayant de la première union et en les réincorporant au premier rectangle :

$$\begin{aligned} K &= \bigsqcup_v \big]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\big] \times \big[a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}\big[\sqcup \bigsqcup_v \big]a_u^{n_u-1}; a_v^{n_v-1}\big] \times \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\\ &= \bigsqcup_v \big]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\big] \times \big[a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}\big[\sqcup \big]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}\big] \times \big[a_w^{n_w-1}; a_w^{n_w}\big[\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en remplaçant } u \text{ par } v \text{ et par invariance de l'union} \\ &= \bigcup_v \big]a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w}\big] \times \big[a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}\big[\qquad\qquad \text{car }]a_w^{n_w-1}; a_w^{n_w}] \times [a_w^{n_w-1}; a_w^{n_w}[\subset K \end{aligned}$$

On a alors

$$\Sigma_1 = K \sqcup \bigsqcup_v \left(\bigsqcup_{k=n_v}^{m_v-3} \big]a_v^{k-n_v+1}; a_v^{n_v-1}\big] \times \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[\sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \big]a_w^{n_w}; a_w^{k+n_w}\big] \times \big[a_w^k; a_w^{k+1}\big[\right)$$

Mais en remarquant que

$$\begin{cases} n_v \le k \le m_v - 3 \\ k - n_v + 1 \le j \le n_v - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_v \le k \le j + n_v - 1 \\ 1 \le j \le n_v - 2 \end{cases}$$

on voit que l'on peut réécrire ces unions en

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{k=n_v}^{m_v-3} \big]a_v^{k-n_v+1}; a_v^{n_v-1}\big] \times \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[&= \bigsqcup_{k=n_v}^{m_v-3} \bigsqcup_{j=k-n_v+1}^{n_v-2} \big]a_v^j; a_v^{j+1}\big] \times \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[\\ &= \bigsqcup_{j=1}^{n_v-2} \bigsqcup_{k=n_v}^{j+n_v-1} \big]a_v^j; a_v^{j+1}\big] \times \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[\\ &= \bigsqcup_{j=1}^{n_v-2} \big]a_v^j; a_v^{j+1}\big] \times \big[a_v^{n_v}; a_v^{j+n_v}\big[\end{aligned}$$

et de même $\bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \big]a_w^{n_w}; a_w^{k+n_w}\big] \times \big[a_w^k; a_w^{k+1}\big[= \bigsqcup_{j=n_v}^{m_v-3} \big]a_v^j; a_v^{j+1}\big] \times \big[a_v^{j-n_v+1}; a_v^{n_v-1}\big[$.

Par un calcul similaire, on montrerait aussi que $\widehat{C} = \widehat{\Sigma}_1 \sqcup \widehat{\Sigma}_2$ où

$$\widehat{\Sigma}_1 = K \sqcup \bigsqcup_v \left(\bigsqcup_{k=n_v}^{m_v-3} \big]a_v^k; a_v^{k+1}\big] \times \big[a_v^{k-n_v+1}; a_v^{n_v-1}\big[\sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-2} \big]a_w^k; a_w^{k+1}\big] \times \big[a_w^{n_w}; a_w^{k+n_w}\big[\right) = \Sigma_1$$

d'une part, et

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_2 = \bigsqcup_v \Big(\bigsqcup_{k=n_v}^{m_v-3} \big]a_v^k; a_v^{k+1}\big] \times \big[a_v^{k-n_v}; a_v^{k-n_v+1}\big[\sqcup \big]a_v^{m_v-2}; a_w^1\big] \times \big[a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\big[\\ \sqcup \bigsqcup_{k=1}^{n_w-1} \big]a_w^k; a_w^{k+1}\big] \times \big[a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\big[\Big) \\ = \bigsqcup_v \bigsqcup_{k=n_v}^{m_v-2} \big]a_v^k; a_v^{k+1}\big] \times \big[a_v^{k-n_v}; a_v^{k-n_v+1}\big[= \bigsqcup_v \bigsqcup_{k=0}^{n_v-2} \big]a_v^{k+n_v}; a_v^{k+n_v+1}\big] \times \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[= \Sigma_2 \end{aligned}$$

d'autre part, ce qui prouve bien que ${}^c C = {}^c\widehat{C}$. ■

T_C est contractante sur sa première coordonnée et dilatante sur sa seconde. De fait, lorsque l'on prend l'image d'une géodésique d'un certain C_v^k, on arrive naturellement dans un $\widehat{C}^j_{l\sigma(v)}$.

Lemme 2.2.2. $T_C\left(\bigsqcup_{k=-n_v+1}^{n_w-2} C_v^k\right) \subset \bigsqcup_{j=-n_w+2}^{n_v-1} \widehat{C}^j_{l\sigma(v)}$.

PREUVE : Tout d'abord, on rappelle que $l\sigma(v) = \tau(w)$, de sorte que $n_w = n_{l\sigma(v)}$.

Si v est un cusp, alors les C_v^k pour $k < 0$ sont vides. Sinon, supposons d'abord que w n'est pas un cusp (et donc $\tau(w)$ non plus). L'image de $C_v^{k-m_v+2}$ pour $k \in [\![n_v - 1\,;\, m_v - 3]\!]$ vaut :

$$\begin{aligned} T_C(C_v^{k-m_v+2}) = \gamma_v(C_v^{k-m_v+2}) &= \gamma_v\left(\left]a_w^{n_w+1}; a_v^{k-n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\right) \\ &= \left]a_{\tau(w)}^{n_w}; a_{\sigma(v)}^{k-n_v+2}\right] \times \left[a_{\sigma(v)}^{k+1}; a_{\sigma(v)}^{k+2}\right[\\ &\subset \left]a_{\tau(w)}^{n_w}; a_{\sigma(v)}^{k-n_v+2}\right] \times \left[a_{\sigma(v)}^{k+1}; a_{\sigma(v)}^{m_v-1}\right[\subset \bigsqcup_{j=-n_w+2}^{k-n_v+1} \widehat{C}^j_{\tau(w)} \end{aligned}$$

car $\left[a_{\sigma(v)}^{k+1}; a_{\sigma(v)}^{m_v-1}\right[\subset \left[a_{\sigma(v)}^{k+1}; a_{\tau(w)}^{0}\right[$ puisque le domaine fondamental n'est pas un triangle dont les trois sommets sont dans $\mathbb{D}$. Si maintenant w est un cusp, on constate que $a_w^{n_w+1} = w$ et $a_{\tau(w)}^{n_w} = \tau(w) = \gamma_v(w)$ donc la première partie du calcul reste vraie. Par ailleurs, la dernière inclusion est justifiée par le fait qu'on a dans ce cas $\left[a_{\sigma(v)}^{k+1}; a_{\sigma(v)}^{m_v-1}\right[\subset \left[a_{\sigma(v)}^{k+1}; \tau(w)\right]$.

Suivons le même schéma pour les C_v^k avec $k > 0$. Si w est un cusp, alors ces ensembles sont vides. Sinon, supposons d'abord que v n'est pas un cusp (et donc $\sigma(v)$ non plus). L'image de C_v^k pour $k \in [\![1\,;\, n_w - 2]\!]$ vaut :

$$\begin{aligned} T_C(C_v^k) = \gamma_v(C_v^k) &= \gamma_v\left(\left]a_w^{k+n_w+1}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[\right) \\ &= \left]a_{\tau(w)}^{k+n_w}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\right] \times \left[a_{\tau(w)}^{k-1}; a_{\tau(w)}^{k}\right[\\ &\subset \left]a_{\tau(w)}^{k+n_w}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\right] \times \left[a_{\tau(w)}^{0}; a_{\tau(w)}^{k}\right[\subset \bigsqcup_{j=k-n_w+2}^{n_v-1} \widehat{C}^j_{\tau(w)} \end{aligned}$$

car $\left[a_{\tau(w)}^{0}; a_{\tau(w)}^{k}\right[\subset \left[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\tau(w)}^{k}\right[$ par l'hypothèse sur le domaine. Le cas v cuspidal se traite de la même façon que précédemment.

Reste à étudier le cas de C_v^0. Son image par T_C est

$$\begin{aligned} T_C(C_v^0) = \gamma_v(C_v^0) &= \gamma_v\left(\left]a_w^{n_w+1}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{1}\right[\right) \\ &= \left]a_{\tau(w)}^{n_w}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\right] \times \left[\gamma_v(a_v^{m_v-2}); \gamma_v(a_w^{1})\right[\end{aligned}$$

et ce que v et w soient des cusps ou non. Par ailleurs,
$-$ $\gamma_v(a_v^{m_v-2})$ est égal à $\sigma(v)$ si v est un cusp, et à $a_{\sigma(v)}^{m_v-1}$ sinon ;
$-$ $\gamma_v(a_w^1)$ est égal à $\tau(w)$ si w est un cusp, et à $a_{\tau(w)}^0$ sinon.
Dans tous les cas, on constate par des arguments usuels que

$$T_C(C_v^0) \subset \bigsqcup_{j=-n_w+2}^{n_v-1} \widehat{C}^j_{\tau(w)}. \qquad \blacksquare$$

On pourrait montrer de manière complètement symétrique le même résultat pour les $\widehat{C}_v^k$:

Lemme 2.2.3. $T_{\widehat{C}}\left(\bigsqcup_{k=-n_v+2}^{n_w-1} \widehat{C}_v^k\right) \subset \bigsqcup_{j=-n_w+1}^{n_v-2} C_{l\sigma(v)}^j$.

Comme on a vu que $C = \widehat{C}$, on en conclut en particulier que :

Proposition 2.2.4. *$T_C(C) \subset C$ et $T_{\widehat{C}}(C) \subset C$.*

Ceci nous permet finalement de prouver que T_C est une bijection de C de réciproque $T_{\widehat{C}}$.

Proposition 2.2.5. *T_C et $T_{\widehat{C}}$ sont des bijections réciproques.*

PREUVE : Prenons $(x, y) \in C$. Il existe un unique v tel que $y \in [a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}[$. Alors, d'après le lemme 2.2.2, on a

$$(x', y') = T_C(x, y) = (\gamma_v(x), \gamma_v(y)) \in \bigsqcup_j \widehat{C}_{l\sigma(v)}^j$$

dont l'image par $T_{\widehat{C}}$ vaut

$$T_{\widehat{C}}(T_C(x, y)) = T_{\widehat{C}}(x', y') = (\gamma_{l\sigma(v)}(x'), \gamma_{l\sigma(v)}(y')) = (\gamma_{l\sigma(v)}\gamma_v(x), \gamma_{l\sigma(v)}\gamma_v(y)) = (x, y)$$

car $\gamma_{l\sigma(v)} = \gamma_v^{-1}$.

De la même manière, $T_C(T_{\widehat{C}}(x, y)) = (x, y)$. ■

Dans les pages qui suivent, nous décrivons les codage à gauche et à droite (ainsi que leurs images par respectivement T_C et T_C^{-1}) pour les domaines fondamentaux introduits à la sous-section 2.1.2. Les figures 2.12 et 2.13 représentent respectivement les codages à droite et à gauche vus comme sous-parties du tore $\mathbb{T}^2$, avec la même origine que précédemment. La figure 2.14 illustre ces mêmes codages pour la surface modulaire, tandis que la figure 2.15 décrit elle le cas de $\mathbb{D}/\Gamma(2)$.

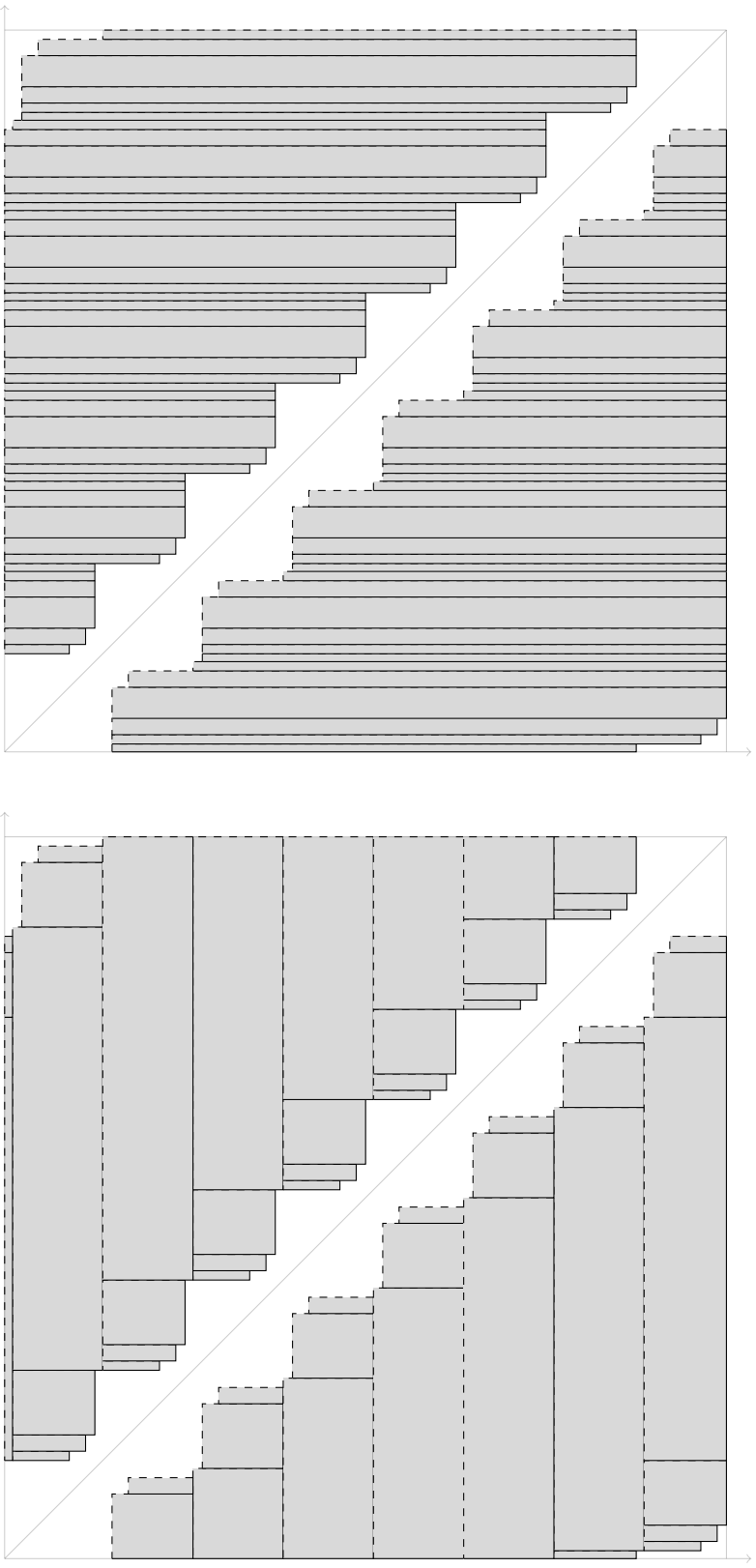


FIGURE 2.12 – Les tubes du codage droit C et leurs images par T_C pour la surface de genre 2

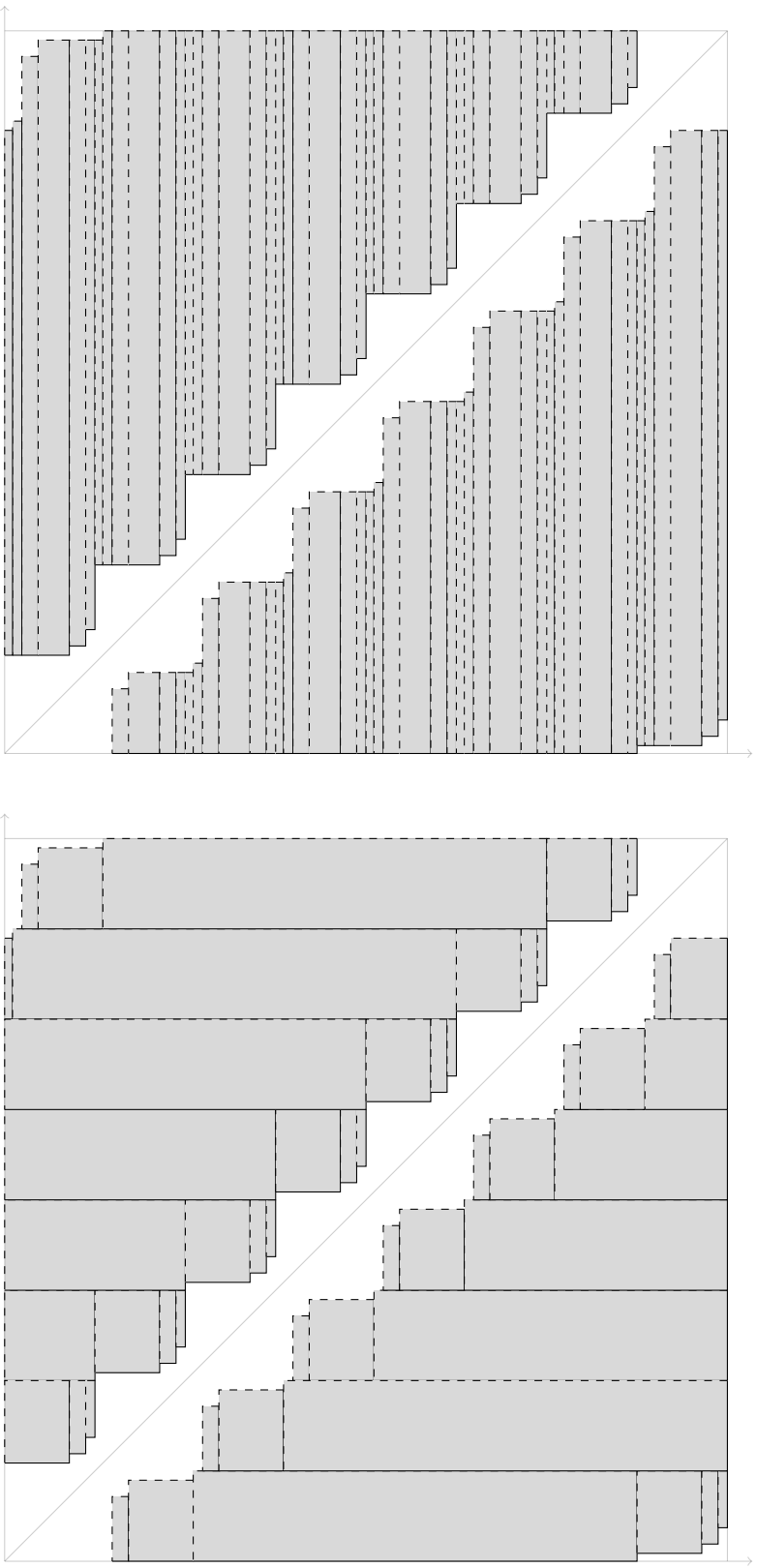


FIGURE 2.13 – Les tubes du codage gauche $\widehat{C} = C$ et leurs images par $T_{\widehat{C}} = T_C^{-1}$ pour la surface de genre 2

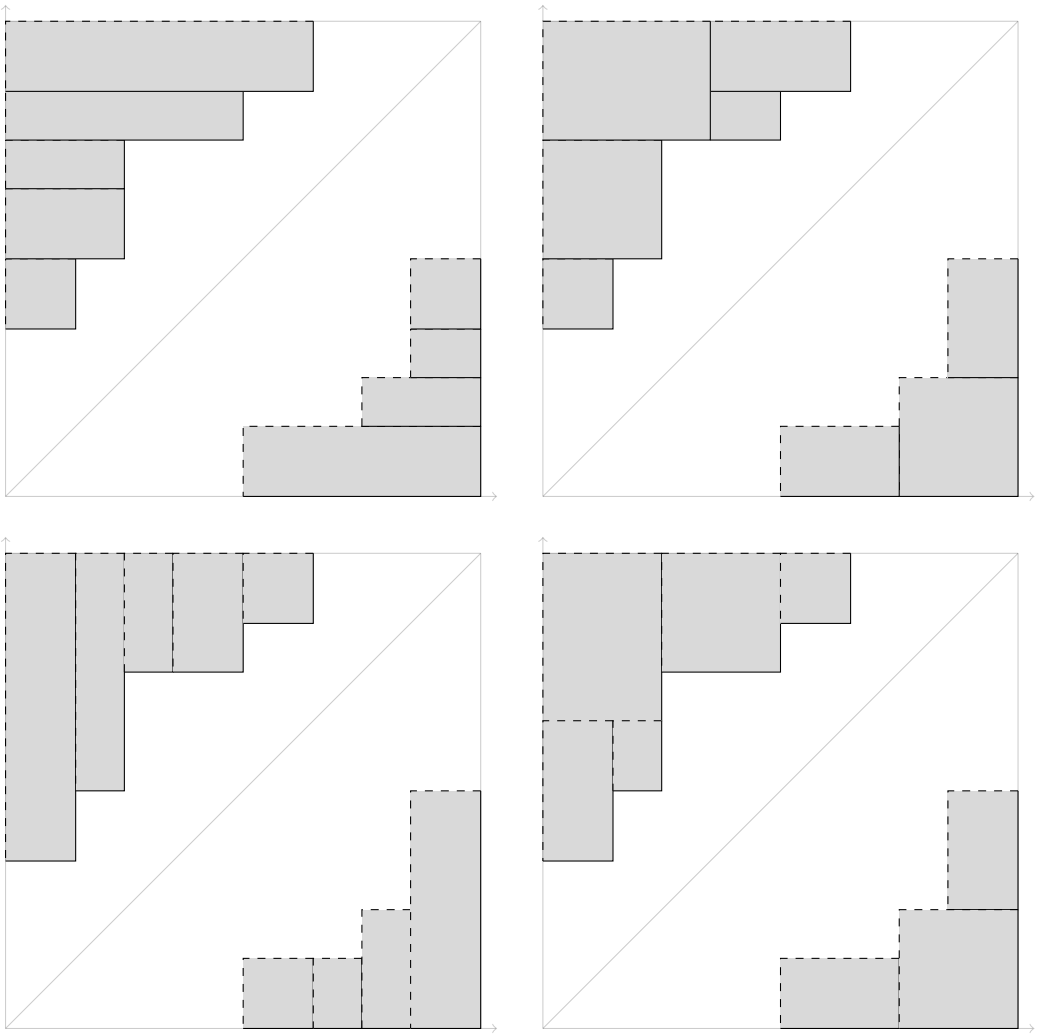


FIGURE 2.14 – Le codage droit et son image par T_C (en haut), ainsi que le codage gauche et son image par T_C^{-1} (en bas) pour la surface modulaire

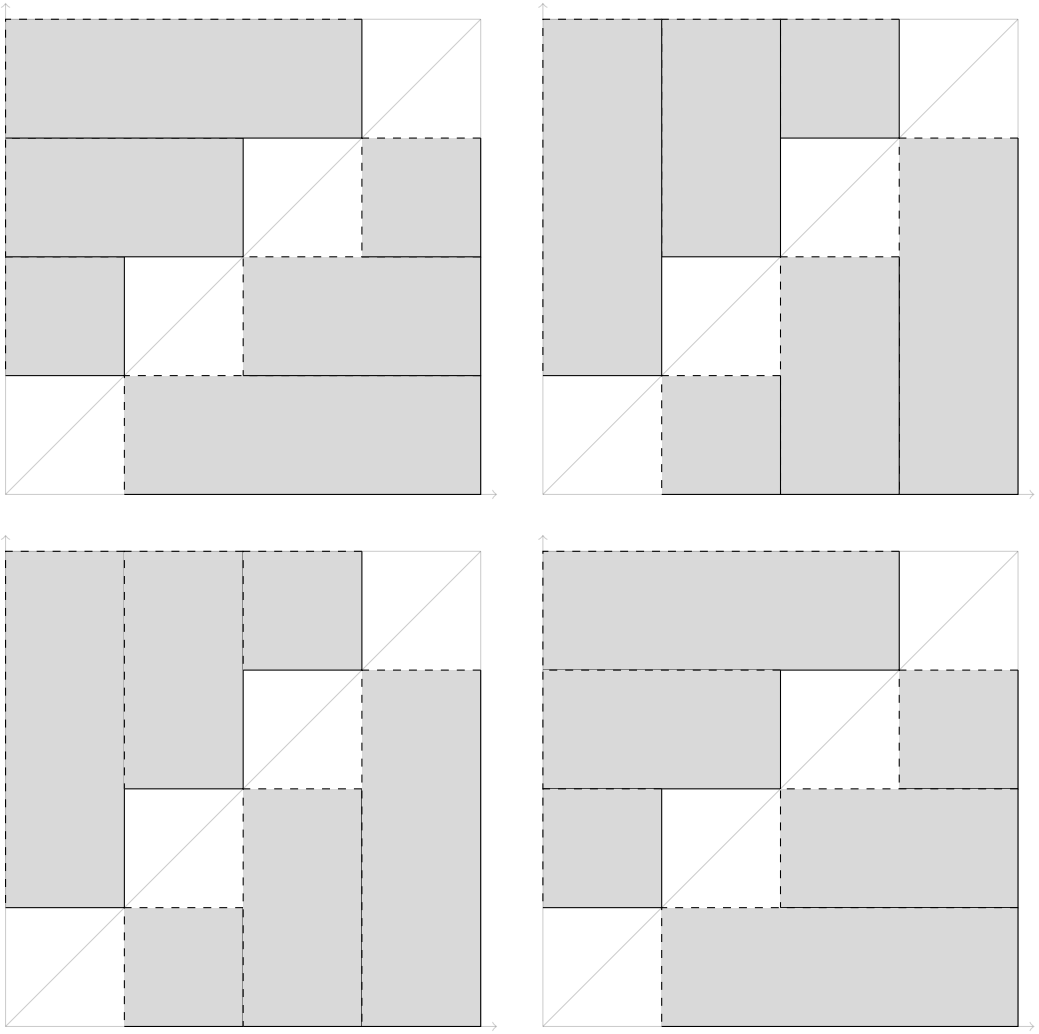


FIGURE 2.15 – Le codage droit et son image par T_C (en haut), ainsi que le codage gauche et son image par T_C^{-1} (en bas) pour $\mathbb{D}/\Gamma(2)$

2.3 Conjugaison entre le billard et le codage droit

Le fil directeur que l'on suivra pour construire la conjugaison entre ces deux systèmes dynamiques sera de la définir comme l'identité sur l'intersection de leurs domaines respectifs, et d'envoyer les parties qui sont dans le billard mais pas dans le codage vers celles qui sont dans le codage mais pas dans le billard.

Pour $v \in V$, on définit les *parties spécifiques* du billard (X_v^k) et du codage (Y_v^k) par :

$$\begin{array}{rll} & X_v^0 & = \bigsqcup_{j=-n_u+1}^{0} B_u^j \setminus C_u^j \\ \forall k \in [\![1\,;\, n_v-2]\!], & X_v^k & = B_u^k \setminus C_u^k \\ & X_v^{n_v-1} & = B_u^{n_v-1} \setminus C_v^{-n_v+1} \\ & Y_v^{-n_v+1} & = C_v^{-n_v+1} \setminus (B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1}) \\ \forall k \in [\![-n_v+2\,;\, -1]\!], & Y_v^k & = C_v^k \setminus B_v^k \\ & Y_v^0 & = \bigsqcup_{j=0}^{n_w-2} C_v^j \setminus B_v^j \end{array}$$

Les ensembles X_v^k correspondent aux géodésiques qui sont dans le billard mais pas dans le codage droit, et qui se terminent dans l'intervalle $\left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[$. Réciproquement, les ensembles Y_v^k correspondent aux géodésiques qui sont dans le codage droit mais pas dans le billard, et qui se terminent dans l'intervalle $\left[a_v^{k+m_v-2}; a_v^{k+m_v-1}\right[$.

Comme on a une et une seule paire d'ensembles X_v^k et Y_v^k pour chaque B_v^k et chaque C_v^k qui composent B et C, on a clairement que :

Proposition 2.3.1.

$$B = (B \cap C) \sqcup \bigsqcup_{v \in V} \bigsqcup_{k=0}^{n_v-2} X_v^k \qquad \textit{et} \qquad C = (B \cap C) \sqcup \bigsqcup_{v \in V} \bigsqcup_{k=-n_v+2}^{0} Y_v^k.$$

On donnera d'abord une description plus précise de ces X_v^k et Y_v^k en termes de tubes géodésiques. À partir de là, on sera en mesure de calculer exactement l'image de ces ensembles par les générateurs du groupe. L'identification de ces ensembles est le cœur de notre preuve de la conjugaison.

Dans les pages qui suivent, on a représenté sur le même diagramme le billard (la zone à pois) et le codage droit (la zone grisée). Les zones qui ne sont recouvertes que par les pois sont les X_v^k, tandis que les zones qui sont uniquement grisées sont les Y_v^k. Les figures 2.16 et 2.17 illustrent respectivement les cas de la surface de genre 2 et de la surface modulaire. Pour ce qui est de $\mathbb{D}/\Gamma(2)$, tous les sommets de son domaine fondamental sont repoussés à l'infini donc le billard et le codage sont identiques.

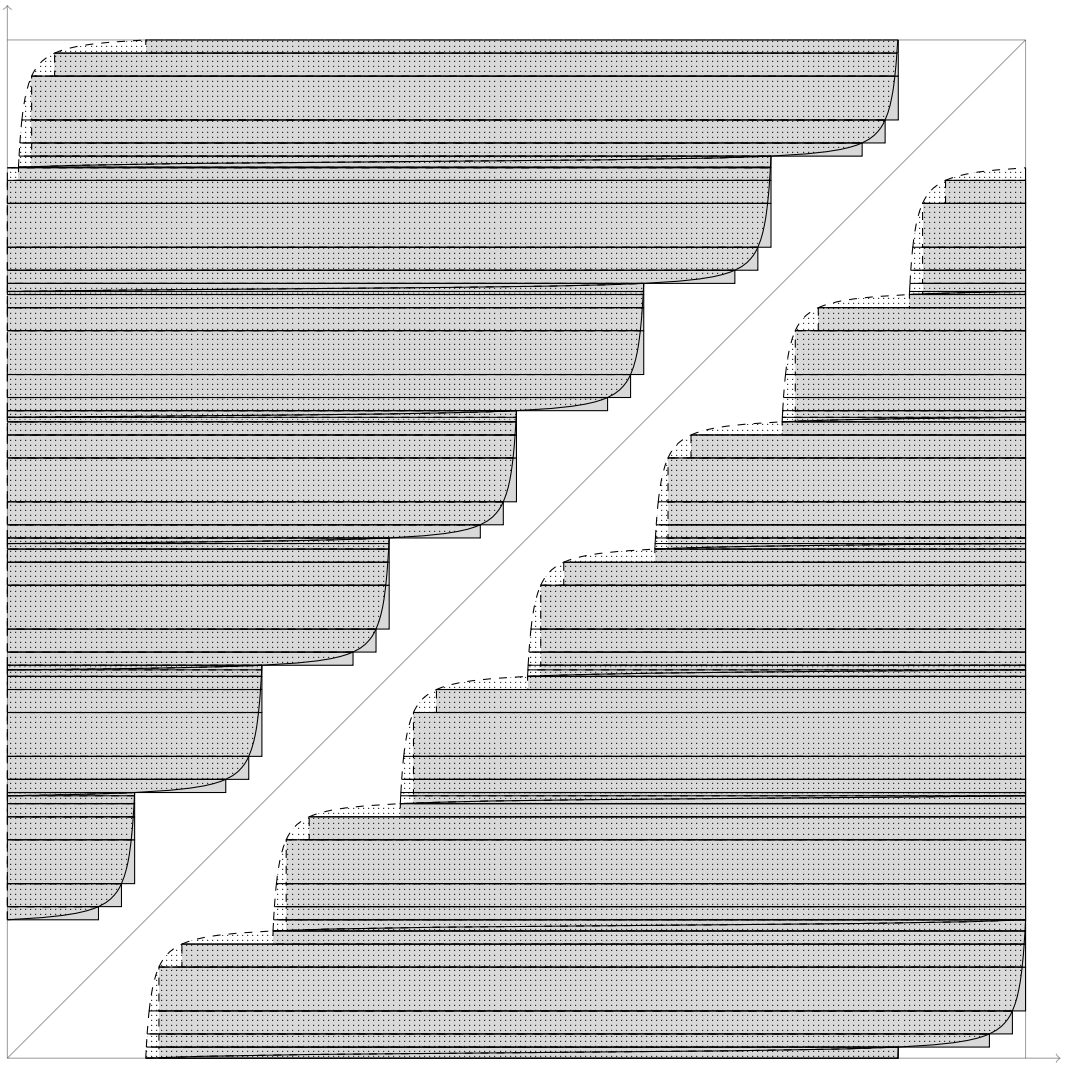


FIGURE 2.16 – Superposition du billard B (pois) et le codage droit C (gris) pour la surface de genre 2

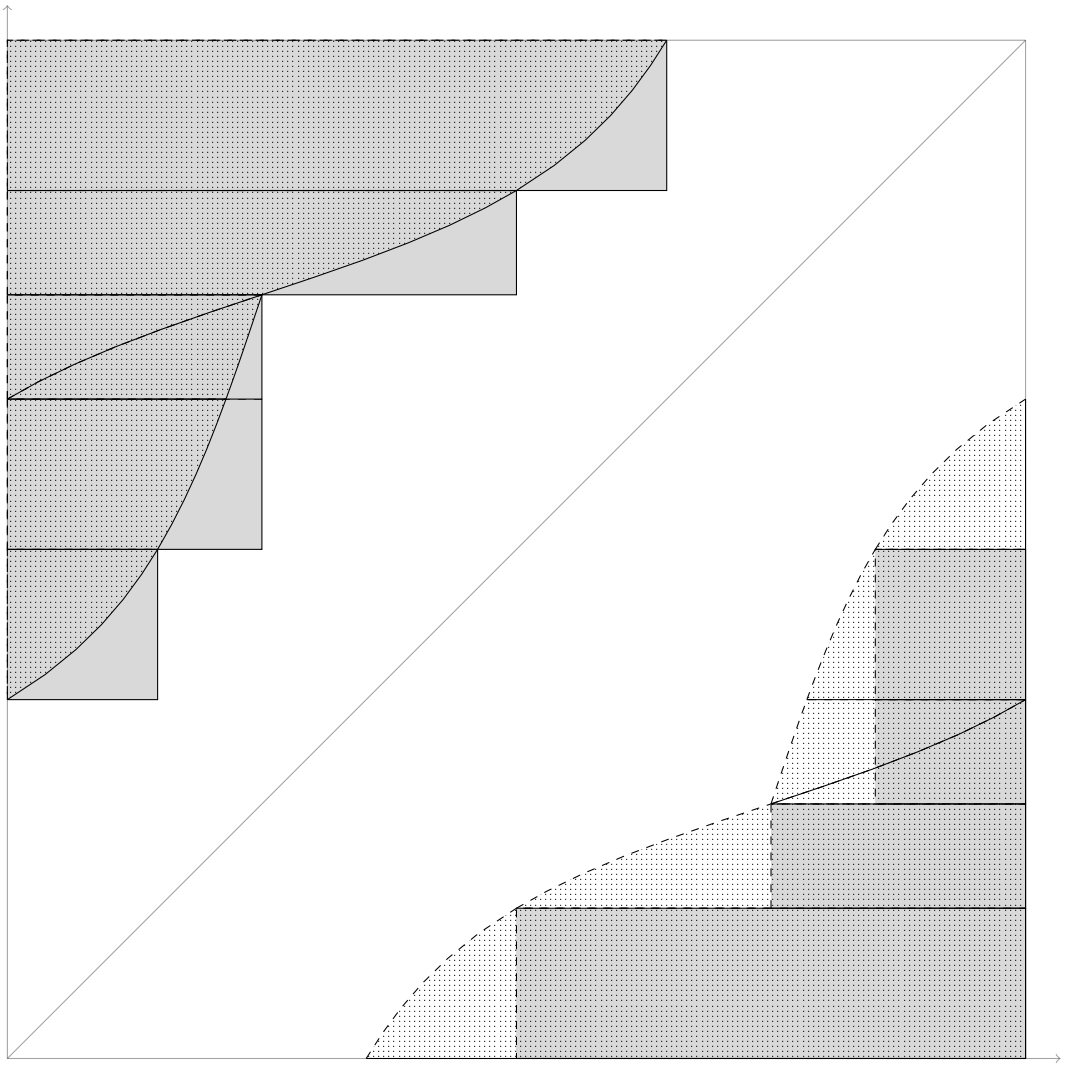


FIGURE 2.17 – Superposition du billard B (pois) et le codage droit C (gris) pour la surface modulaire

2.3.1 Description de $B \setminus C$

Concentrons-nous tout d'abord sur la description des ensembles X_v^k génériques, c'est-à-dire pour lesquels $0 < k < n_v - 1$.

Proposition 2.3.2.

$$\forall k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!], X_v^k = \left]v; a_v^{k+n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[.$$

Ce résultat signifie que les géodésiques qui sont dans le billard mais pas dans le codage et qui aboutissent dans $\left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[$ doivent traverser la demie géodésique allant de v à $a_v^{k+n_v+1}$.

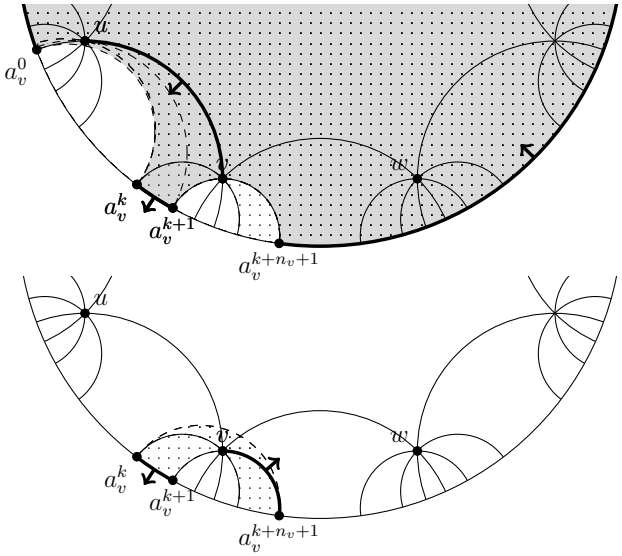


FIGURE 2.18 – Pour un k générique, $B_u^k \setminus C_u^k$ (haut) est décrit par X_v^k (bas)

PREUVE : Soit $k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!]$.

$$B_u^k =]v; u] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\subset \left]v \star a_v^k; u \star a_v^{k+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[.$$

Puisque $a_v^{k+1} \in [a_u^{m_u-2}; a_u^{m_u-1}]$, ceci implique que $u \star a_v^{k+1} \in [a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}] \subset \left[a_v^{k+n_v}; a_v^0\right]$ et donc :

$$B_u^k \subset \left]a_v^{k+n_v}; a_v^0\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[= \left]a_v^{k+n_v}; a_v^{k+n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\sqcup C_u^k.$$

Alors, d'après la proposition 1.4.6 :

$$\begin{aligned} X_v^k = B_u^k \setminus C_u^k &=]v; u] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\cap \left]a_v^{k+n_v}; a_v^{k+n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\\ &= \left]v; a_v^{k+n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[. \end{aligned}$$ ■

Ensuite, nous traitons le cas de X_v^0 qui est légèrement plus compliqué à gérer puisque cet ensemble est défini à partir de plusieurs $B_u^j \setminus C_u^j$.

Proposition 2.3.3.

$$X_v^0 = \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes [u; v[.$$

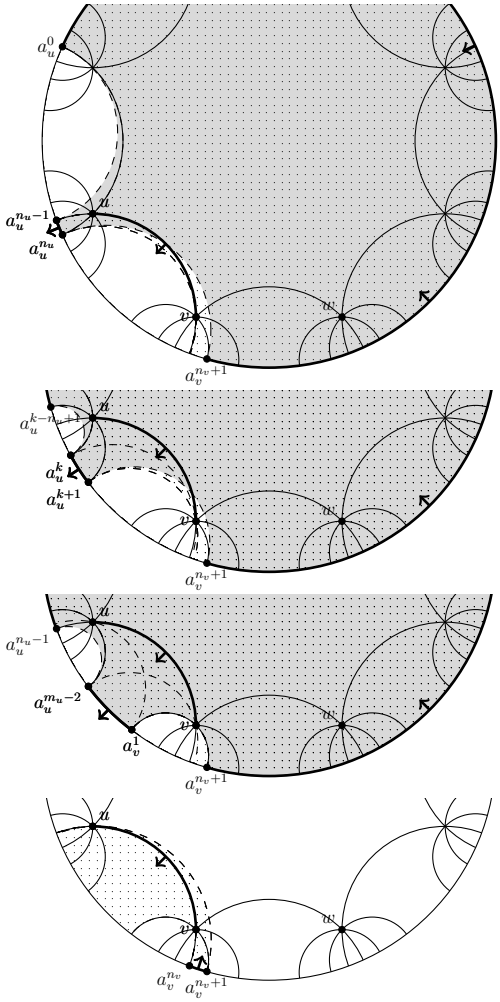


FIGURE 2.19 – L'union de $B_u^{-n_u+1} \setminus C_u^{-n_u+1}$ (haut), des $B_u^j \setminus C_u^j$ génériques (milieu haut) et de $B_u^0 \setminus C_u^0$ (milieu bas) donne X_v^0 (bas)

Cela signifie que les géodésiques qui sont dans le billard mais pas dans le codage et qui se terminent dans $[a_v^0; a_v^1[$ doivent commencer dans $]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}]$ et traverser le segment $[u; v[$.

PREUVE : Si $j \in [\![n_u - 1\,;\, m_u - 3]\!]$,

$$\begin{aligned} B_u^{j-m_u+2} =]v;u] \otimes \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[&\subset \left]v \star a_u^j; u \star a_u^{j+1}\right] \times \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[\\ &\subset \left]a_v^{n_v}; a_u^{j-n_u+1}\right] \times \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[\\ &= \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[\sqcup C_u^{j-m_u+2} \end{aligned}$$

mais on a aussi que

$$\begin{aligned} B_u^0 =]v;u] \otimes \left[a_u^{m_u-2}; a_v^1\right[&\subset \left]v \star a_u^{m_u-2}; u \star a_v^1\right] \times \left[a_u^{m_u-2}; a_v^1\right[\\ &\subset \left]a_v^{n_v}; a_u^{n_u-1}\right] \times \left[a_u^{m_u-2}; a_v^1\right[\\ &= \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^{m_u-2}; a_v^1\right[\sqcup C_u^0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
X_v^0 &= \bigsqcup_{j=n_u-1}^{m_u-2} B_u^{j-m_u+2} \setminus C_u^{j-m_u+2} \\
&= \bigsqcup_{j=n_u-1}^{m_u-3} \left(B_u^{j-m_u+2} \cap \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[\right) \sqcup B_u^0 \cap \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^{m_u-2}; a_v^1\right[\\
&= \bigsqcup_{j=n_u-1}^{m_u-3} \left(]v;u] \otimes \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[\cap \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^j; a_u^{j+1}\right[\right) \\
&\qquad \sqcup]v;u] \otimes [a_u^{m_u-2}; a_v^1[\cap]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}] \times [a_u^{m_u-2}; a_v^1[\\
&=]v;u] \otimes \left[a_u^{n_u-1}; a_v^1\right[\cap \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^{n_u-1}; a_v^1\right[\\
&= \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes [u; v[\cap \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \times \left[a_u^{n_u-1}; a_v^1\right[\qquad \text{par la proposition 1.4.5} \\
&= \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes [u; v[\\
&\qquad \text{car }]a_v^{n_v} = a_u^{m_u-1}; a_v^{n_v+1}] \otimes [u; v[\subset]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}] \otimes [a_u^{n_u-1}; v \star a_v^1[. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Avant de passer à la description de $X_v^{n_v-1}$, nous devons d'abord montrer un lemme technique dont le schéma de la preuve pourra être réutilisé dans la section suivante.

Lemme 2.3.4.

$$B_u^{n_v-1} \cap \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[= \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[.$$

PREUVE : Notons $R =]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}] \times [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[$. Nous commençons par montrer que

$$]v;u] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\cap R = \left]v; a_v^0\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\cap R.$$

Il suffit de vérifier que $]u; a_u^{n_u-1} = a_v^0] \otimes [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[\cap R$ est vide. Lorsque l'on prend un $y \in [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[\subset [a_u^{m_u-2}; a_u^{m_u-1}[$, $u \star y \in [a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}[$ donc $[u \star y; a_u^{n_u-1}[\subset [a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}[$. On conclut en notant que $[a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}[$ et $]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}]$ ne peuvent s'intersecter que si le domaine est triangulaire et que $n_u = 2$ ou $n_w = 2$, ce qui est impossible puisqu'il n'est pas triangulaire de classe 0.

Alors, d'après la proposition 1.4.8,

$$\left]v; a_v^0\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[= \left]a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}; a_u^{n_u-1} = a_v^0\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[,$$

et ainsi

$$\left]v; a_v^0\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\cap R = \left]a_w^{n_w}; a_w^0\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[\cap R.$$

Puisque $a_w^{n_w+1} \in]a_w^{n_w}; a_v^0]$, on peut restreindre la première composante :

$$\left]a_w^{n_w}; a_v^0\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[\cap R = \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[\cap R.$$

Mais $a_w^{n_w+1} \in [a_w^{n_w} = a_v^{m_v-1}; a_v^0]$ implique aussi que $v \star a_w^{n_w+1} \in [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}]$ et donc :

$$\left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[\subset \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; v \star a_w^{n_w+1} = a_v^{n_v}\right[= R. \quad \blacksquare$$

Nous pouvons maintenant décrire $X_v^{n_v-1}$ comme un tube géodésique.

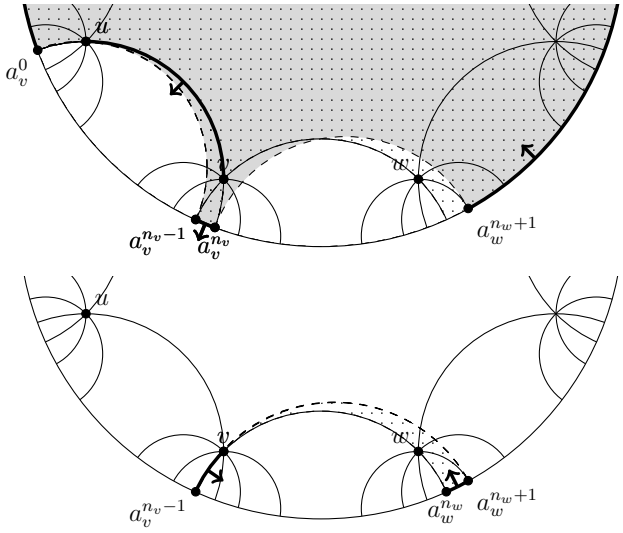


FIGURE 2.20 – $B_u^{n_v-1} \setminus C_v^{-n_v+1}$ (haut) est décrit par $X_v^{n_v-1}$ (bas)

Proposition 2.3.5.

$$X_v^{n_v-1} = \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[.$$

En particulier, les géodésiques qui sont dans le billard mais pas dans le codage et qui aboutissent dans $[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[$ doivent commencer de $]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}]$ et traverser la demie géodésique allant de v à $a_v^{n_v-1}$.

PREUVE : Puisque

$$\begin{aligned} B_u^{n_u-1} =]v;u] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[&\subset \left]v \star a_v^{n_v-1}; u \star a_v^{n_v}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\\ &\subset \left]a_w^{n_w}; a_v^0\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\\ &= \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\sqcup C_v^{-n_v+1}, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} X_v^{n_v-1} &= B_u^{n_u-1} \setminus C_v^{-n_v+1} \\ &=]v;u] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\cap \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\\ &= \left]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; v\right[\qquad \text{par le lemme 2.3.4} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lorsque l'on combine les descriptions de X_v^0 et de $X_u^{n_u-1}$, elles forment un tube géodésique de structure similaire à ceux obtenus pour les X_v^k génériques.

Proposition 2.3.6.

$$X_v^0 \sqcup X_u^{n_u-1} = \left]v; a_v^{n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^0; a_v^1\right[.$$

PREUVE : On peut calculer l'union de ces deux descriptions :

$$\begin{aligned} X_v^0 \sqcup X_u^{n_u-1} &= \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes [u; v[\sqcup \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes \left[a_u^{n_u-1}; u\right[\\ &= \left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes \left[a_u^{n_u-1} = a_v^0; v\right[. \end{aligned}$$

Mais la proposition 1.4.8 donne alors :

$$\left]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^0; v\right[= \left]v; a_v^{n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^0; v \star a_v^{n_v+1} = a_v^1\right[. \quad \blacksquare$$

On peut en particulier déduire de ces descriptions quelles sont les conditions que doivent vérifier v et k pour que X_v^k soit non vide.

Proposition 2.3.7.

$$\begin{aligned} X_v^0 = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \\ \exists k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!], X_v^k = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \\ X_v^{n_v-1} = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \textit{ ou } w \notin V^\star \end{aligned}$$

2.3.2 Description de $C \setminus B$

Nous allons maintenant décrire les ensembles Y_v^k. Les preuves sont similaires à celles de la section 2.3.1, mais il y a toutefois quelques différences car les lemmes sur les tubes géodésiques que nous devons utiliser ici doivent s'appliquer à des complémentaires de tubes.

Nous commençons par décrire les ensembles Y_v^k génériques, c'est-à-dire pour lesquels $-n_v + 1 < k < 0$.

Proposition 2.3.8.

$$\forall k \in [\![-n_v + 2\,;\, -1]\!], Y_v^k = \left]v; a_v^{k+n_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{k+m_v-2}; a_v^{k+m_v-1}\right[.$$

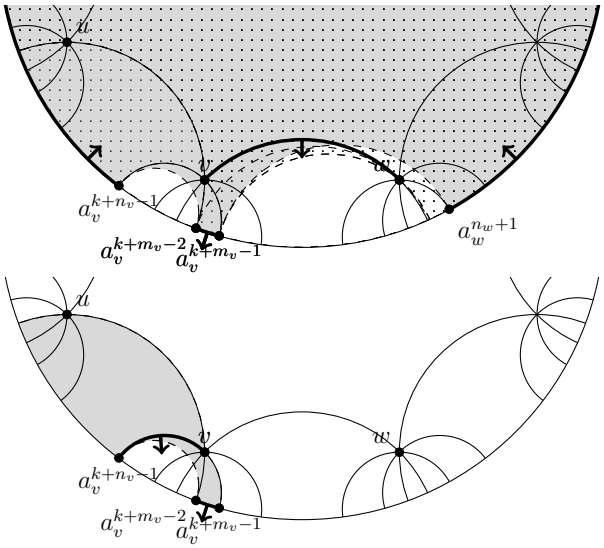


FIGURE 2.21 – Pour un k générique, $C_v^k \setminus B_v^k$ (haut) est décrit par Y_v^k (bas)

PREUVE : Soit $k \in [\![n_v\,;\, m_v - 3]\!]$ et notons $k' = k - m_v + 2$. Alors

$$B_v^{k'} = \left]w; v\right] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\supset \left]w \star a_v^{k+1}; v \star a_v^k\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[.$$

Comme $a_v^{k+1} \in [a_w^0; a_w^1]$, $w \star a_v^{k+1} \in \left[a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\right]$ et ainsi $B_v^{k'} \supset \left]a_w^{n_w+1}; a_v^{k-n_v}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[$. Par conséquent,

$$B_v^{k'} \supset C_v^{k-m_v+2} \setminus \left]a_v^{k-n_v}; a_v^{k-n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[$$

qui, par la proposition 1.4.7, se traduit par :

$$\begin{aligned} Y_v^{k'} = C_v^{k-m_v+2} \setminus B_v^{k-m_v+2} &= {}^c(B_v^{k-m_v+2}) \cap \left]a_v^{k-n_v}; a_v^{k-n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\\ &= {}^c(]w; v]) \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\cap \left]a_v^{k-n_v}; a_v^{k-n_v+1}\right] \times \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\\ &= \left]v; a_v^{k-n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\\ &= \left]v; a_v^{k'+n_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{k'+m_v-2}; a_v^{k'+m_v-1}\right[. \end{aligned}$$ ■

Nous décrivons ensuite Y_v^0 qui, tout comme X_v^0, est constitué de plusieurs $C_v^j \setminus B_v^j$.

Proposition 2.3.9.

$$Y_v^0 = \left]v; a_v^{n_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}\right[.$$

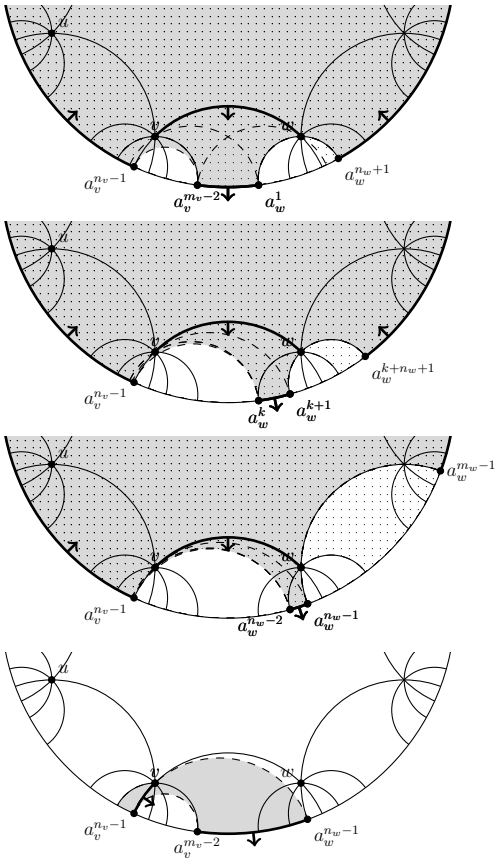


FIGURE 2.22 – L'union de $C_v^0 \setminus B_v^0$ (haut), des $C_v^j \setminus B_v^j$ génériques (milieu haut) et de $C_v^{n_w-2} \setminus B_v^{n_w-2}$ (milieu bas) donne Y_v^0 (bas)

PREUVE : Si $j \in [\![1\,;\, n_w - 2]\!]$, $a_w^j \in]a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}]$ donc $v \star a_w^j \in]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}]$ et :

$$\begin{aligned} B_v^j =]w; v] \otimes \left[a_w^j; a_w^{j+1}\right[&\supset \left]a_w^{j+n_w+1}; v \star a_w^j\right] \times \left[a_w^j; a_w^{j+1}\right[\\ &\supset \left]a_w^{j+n_w+1}; a_v^{n_v-2}\right] \times \left[a_w^j; a_w^{j+1}\right[\\ &= C_v^j \setminus \left]a_v^{n_v-2}; a_w^0\right] \times \left[a_w^j; a_w^{j+1}\right[\end{aligned}$$

mais on a aussi que

$$B_v^0 =]w;v] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\supset \left]a_w^{n_w+1}; a_v^{n_v-2}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\\ = C_v^0 \setminus \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Y_v^0 &= \bigsqcup_{j=0}^{n_w-2} C_v^j \setminus B_v^j \\ &= {}^c(B_v^0) \cap \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^1\right[\sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n_w-2} {}^c(B_v^j) \cap \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_w^j; a_w^{j+1}\right[\\ &= {}^c\left(\bigsqcup_{j=0}^{n_w-2} B_v^j\right) \cap \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}\right[\\ &= {}^c(]w;v] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}\right[) \cap \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}\right[\\ &= {}^c(]w;v] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}\right[) \cap \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}\right[\\ &\qquad \cap]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}] \times [a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}[\\ &= \left]v; a_v^{n_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}\right[\cap \left]a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}\right[\\ &\qquad \text{par la proposition 1.4.7} \\ &= \left]v; a_v^{n_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}\right[\end{aligned}$$

car $]v; a_v^{n_v-1}] \otimes [a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}[\subset]v \star a_v^{m_v-2} = a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}] \times [a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}[$. ■

Pour décrire $Y_v^{-n_v+1}$, nous avons aussi besoin d'un lemme technique qui est l'analogue du lemme 2.3.4 et qui pourrait être prouvé de manière similaire.

Lemme 2.3.10.

$$B_v^{-n_v+1} \cap \left]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[= \left]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}\right] \otimes [v; a_v^{n_v}[.$$

$Y_v^{-n_v+1}$ s'écrit ainsi comme un tube géodésique :

Proposition 2.3.11.

$$Y_v^{-n_v+1} = \left]u; a_u^{n_u-1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[.$$

PREUVE : On a

$$B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1} =]w;u] \otimes \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[\supset \left]w \star a_v^{n_v}; u \star a_v^{n_v-1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[$$

où $u \star a_v^{n_v-1} \in]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}]$ et $w \star a_v^{n_v} \in [a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}[$. Ceci implique nécessairement que $]a_w^{n_w+1}; a_u^{n_u-2}] \subset]w \star a_v^{n_v}; u \star a_v^{n_v-1}]$ et il vient :

$$B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1} \supset C_v^{-n_v+1} \setminus \left]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}\right] \times \left[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right[.$$

Notons $R =]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}] \times [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[$, de sorte que l'inclusion précédente se réécrive

$$B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1} \supset C_v^{-n_v+1} \cap {}^cR$$

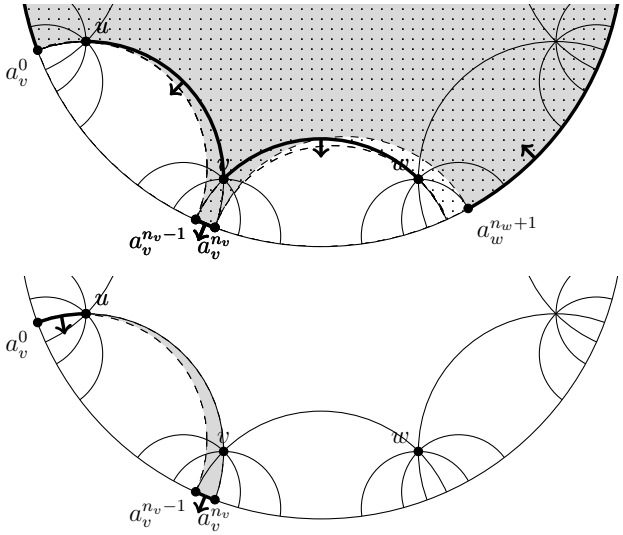


FIGURE 2.23 – $C_v^{-n_v+1} \setminus (B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1})$ (haut) est décrit par $Y_v^{-n_v+1}$ (bas)

où $R \subset C_v^{-n_v+1}$. Quelques manipulations simples sur les ensembles montrent que si $R \subset C$ et $C \cap {}^cR \subset B$, alors ${}^cB \cap C = {}^cB \cap R$. Par conséquent,

$$Y_v^{-n_v+1} = C_v^{-n_v+1} \setminus (B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1}) = {}^c(B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1}) \cap R.$$

Puisque $]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}] \subset]a_u^{m_u-1} = a_v^{n_v}; a_u^{n_u-1} = a_v^0]$ et que u et v sont sur la géodésique reliant $a_u^{n_u-1} = a_v^0$ à $a_u^{m_u-1} = a_v^{n_v}$, on peut découper R en trois parties :

$$\begin{aligned} R = (]a_v^{n_v}; v] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[) \cap R \sqcup (]v; u] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\cap R) \\ \sqcup \big(\big]u; a_u^{n_u-1}\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\cap R). \end{aligned}$$

Le second terme est égal à $B_u^{n_v-1} \cap R$, tandis que le troisième est celui qui nous intéresse. C'est pourquoi notre but est de prouver que le premier terme est $B_v^{-n_v+1} \cap R$. Et, précisément,

$$\begin{aligned}]a_v^{n_v}; v] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\cap R &= \big]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}\big] \otimes [v; a_v^{n_v}[\cap R && \text{par la proposition 1.4.5} \\ &= B_v^{-n_v+1} \cap R && \text{grâce au lemme 2.3.10} \end{aligned}$$

De ceci on déduit la description de $Y_v^{-n_v+1}$:

$$\begin{aligned} Y_v^{-n_v+1} &= {}^c(B_v^{-n_v+1} \sqcup B_u^{n_v-1}) \cap R \\ &= \big]u; a_u^{n_u-1}\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\cap R \\ &= \big]u; a_u^{n_u-1}\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\end{aligned}$$

car lorsque $y \in [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[\subset [a_u^{m_u-2}; a_u^{m_u-1}[$, $u \star y$ vit dans $[a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}[$ et dans ce cas $]u \star y; a_u^{n_u-1}] \subset]a_u^{n_u-2}; a_u^{n_u-1}]$. ■

On peut aussi combiner les descriptions de Y_v^0 et de $Y_w^{-n_w+1}$ pour former un tube géodésique de structure similaire à ceux obtenus pour les Y_v^k génériques.

Proposition 2.3.12.

$$Y_v^0 \sqcup Y_w^{-n_w+1} = \big]v; a_v^{n_v-1}\big] \otimes \big[a_v^{m_v-2}; a_v^{m_v-1}\big[.$$

On peut en particulier déduire de ces descriptions quelles sont les conditions que doivent vérifier v et k pour que Y_v^k soit non vide.

Proposition 2.3.13.

$$\begin{aligned} Y_v^0 = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \\ \exists k \in [\![-n_v+2\,;\,-1]\!], Y_v^k = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \\ Y_v^{-n_v+1} = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \textit{ ou } u \notin V^\star \end{aligned}$$

2.3.3 Description de $B \cap C$

Puisque T_B et T_C ne sont pas égales sur $B \cap C$ tout entier, nous avons aussi besoin de définir quelques sous-ensembles de l'intersection qui vont jouer un rôle dans la preuve de la conjugaison.

Le premier type d'ensembles spécifiques inclus dans $B \cap C$ sont les K_v :

$$\forall v \in V, K_v = \left]a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right] \otimes [w; v[\cap \partial\mathbb{D} \times \left[a_v^{m_v-1}; a_u^{n_u-2}\right[.$$

K_V recouvre toutes les geodesiques qui sont à la fois dans le billard, dans le codage, et qui commencent dans $]a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}]$. Nous verrons qu'ils jouent le rôle de "points de rentrée" dans $B \cap C$ pour la dynamique de la conjugaison.

Il est aisé de vérifier que $K_v \subset B \cap C$. En effet,

$$K_v \subset \left]a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right] \otimes [w; v[= \widehat{B}_v$$

donc $K_v \subset B$. Mais comme on a aussi

$$\left]a_v^{n_v-1} = a_w^0; a_v^{n_v}\right] \otimes [w; v[\subset \left]a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\right] \times \left[a_w^{n_w} = a_v^{m_v-1}; a_v^0 = a_u^{n_u-1}\right[,$$

on obtient, lorsque l'on restreint la seconde composante, que $K_v \subset \widehat{C}_u^{n_v-1} \subset C$.

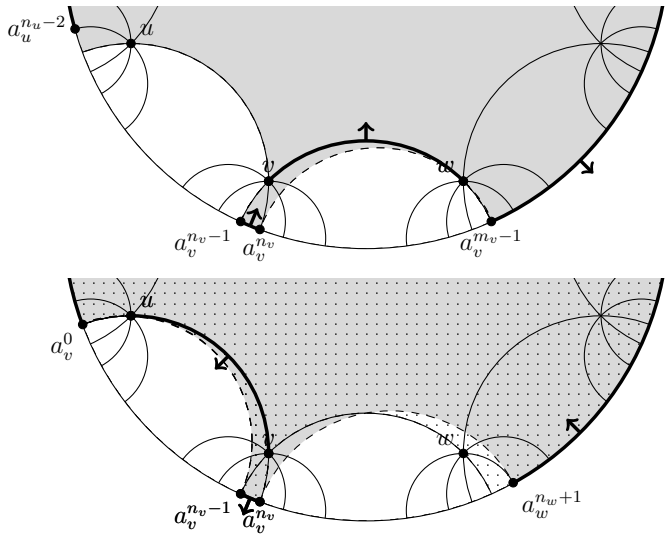


FIGURE 2.24 – K_v (haut) et L_v (bas)

Le second type d'ensembles specifiques inclus dans $B \cap C$ sont les L_v :

$$\forall v \in V, L_v = B_u^{n_v-1} \cap C_v^{-n_v+1}$$
$$\Sigma = (B \cap C) \setminus \bigsqcup_{v \in V^\star} L_v$$

Nous verrons qu'ils jouent le rôle de "points de sortie" de $B \cap C$ pour la dynamique de la conjugaison.

Les ensembles L_v ont été choisis de telle manière que nous sommes assurés qu'ils recouvrent toutes les géodésiques qui ont des images différentes par T_B et T_C :

Lemme 2.3.14. $\Sigma \subset \{x \in B \cap C \mid T_B(x) = T_C(x)\}$.

PREUVE : Prenons $x \in B \cap C_v^k$. Si $k = -n_v + 1$, nécessairement $x \in B_u^{n_v-1} \sqcup B_v^{-n_v+1}$ mais puisque $x \notin L_v$, x ne peut être que dans $B_v^{-n_v+1}$. Dans ce cas, $T_B(x) = \gamma_v(x) = T_C(x)$. Sinon, x doit être dans B_v^k avec $k > -n_v + 1$ et on a aussi $T_B(x) = T_C(x)$. ■

Ces ensembles sont vides si et seulement si ils sont basés en un cusp :

Proposition 2.3.15.

$$K_v = \emptyset \Leftrightarrow v \notin V^\star$$
$$L_v = \emptyset \Leftrightarrow v \notin V^\star$$

En particulier, T_B et T_C sont égales dans un voisinage de tout cusp v puisque L_v y est vide.

2.3.4 Action des générateurs

Nous avons besoin d'une description plus fine de $X_v^{n_v-2}$ car il peut à la fois être atteint par $B \setminus C$ et par $B \cap C$. C'est la raison pour laquelle on introduit les ensembles $X_v^{n_v-2,\{L,R,C\}}$ définis par :

$$X_v^{n_v-2,L} = X_v^{n_v-2} \cap \left]a_v^{m_v-2}; \gamma_{l\sigma(v)}(a_{r\sigma(v)}^{n_{r\sigma(v)}+1})\right] \times \partial\mathbb{D}$$
$$X_v^{n_v-2,R} = \left]w; a_v^{m_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right[\subset X_v^{n_v-2}$$
$$X_v^{n_v-2,C} = X_v^{n_v-2} \setminus \left(X_v^{n_v-2,L} \sqcup X_v^{n_v-2,R}\right)$$

$X_v^{n_v-2,R}$ est bien un sous-ensemble de $X_v^{n_v-2}$ car, w étant sur la géodésique allant de v vers $a_v^{m_v-1} = a_w^{n_w}$, on a :

$$X_v^{n_v-2} = \left]v; a_v^{m_v-1}\right] \otimes \left[a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right[= \left]v; w\right] \otimes \left[a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\right[\sqcup X_v^{n_v-2,R}.$$

Il est facile de déduire de ces définitions quelles sont les conditions pour lesquelles ces ensembles sont vides.

Proposition 2.3.16.

$$X_v^{n_v-2,L} = \emptyset \Leftrightarrow v \notin V^\star \textit{ ou } r\sigma(v) \notin V^\star$$
$$X_v^{n_v-2,R} = \emptyset \Leftrightarrow v \notin V^\star \textit{ ou } w \notin V^\star$$
$$X_v^{n_v-2,C} = \emptyset \Leftrightarrow v \notin V^\star$$

Pour les ensembles X_v^k, le générateur "naturel" est celui donné par T_B i.e. le générateur associé au côté par lequel la géodésique quitte le domaine fondamental. Il s'agit ici de γ_u.

Proposition 2.3.17.

$$\begin{array}{rlcl} & \gamma_u(X_v^{n_v-1}) & = & X_{\tau(v)}^{n_v-2,L} \\ \forall k \in [\![2\,;\, n_v-2]\!], & \gamma_u(X_v^k) & = & X_{\tau(v)}^{k-1} \\ & \gamma_u(X_v^1) & = & X_{\tau(v)}^0 \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1} \\ & \gamma_u(X_v^0) & = & K_{\tau(v)} \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R} \end{array}$$

PREUVE : Si v est un cusp, il en va de même pour $\tau(v)$ donc les deux côtés des quatre égalités sont vides et elles sont toutes vérifiées. On supposera donc dorénavant que $v \in V^\star$, de sorte que $\gamma_u(a_v^k) = a_{\tau(v)}^{k-1}$ pour tout k.

(i) :

$$\begin{aligned} \gamma_u(X_v^{n_v-1}) &= \gamma_u\big(\big]a_w^{n_w} = a_v^{m_v-1}; a_w^{n_w+1}\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; v\big[\big) \\ &= \Big]a_{\tau(v)}^{m_v-2}; \gamma_u(a_w^{n_w+1})\Big] \otimes \Big[a_{\tau(v)}^{n_v-2}; \tau(v)\Big[\\ &= \Big]a_{\tau(v)}^{m_v-2}; a_{\tau(v)}^{m_v-1}\Big] \otimes \Big[a_{\tau(v)}^{n_v-2}; \tau(v)\Big[\cap \Big]a_{\tau(v)}^{m_v-2}; \gamma_u(a_w^{n_w+1})\Big] \times \partial\mathbb{D} \\ &= X_{\tau(v)}^{n_v-2} \cap \Big]a_{\tau(v)}^{m_v-2}; \gamma_u(a_w^{n_w+1})\Big] \times \partial\mathbb{D}. \end{aligned}$$

(ii) : Pour $k \in [\![2\,;\, n_v-2]\!]$,

$$\gamma_u(X_v^k) = \gamma_u\big(\big]v; a_v^{k+n_v+1}\big] \otimes \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[\big) = \Big]\tau(v); a_{\tau(v)}^{k+n_{\tau(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{\tau(v)}^{k-1}; a_{\tau(v)}^k\Big[= X_{\tau(v)}^{k-1}.$$

(iii) :

$$\gamma_u(X_v^1) = \gamma_u\big(\big]v; a_v^{n_v+2}\big] \otimes \big[a_v^1; a_v^2\big[\big) = \Big]\tau(v); a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}+1}\Big] \otimes \big[a_{\tau(v)}^0; a_{\tau(v)}^1\big[= X_{\tau(v)}^0 \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}.$$

(iv) :

$$\begin{aligned} \gamma_u(X_v^0) = \gamma_u\big(\big]a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\big] \otimes [u; v[\big) &= \Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \otimes [\sigma(u) = r\tau(v); \tau(v)[\\ &\subset \Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \times \Big[r\tau(v) \star a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1} = a_{\tau(v)}^{m_v-1}; \tau(v) \star a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}} = a_{\tau(v)}^0\Big[. \end{aligned}$$

On peut ainsi restreindre cette description par l'intervalle à droite :

$$\begin{aligned} \gamma_u(X_v^0) &= \Big(\Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \otimes [r\tau(v); \tau(v)[\cap \partial\mathbb{D} \times \Big[a_{r\tau(v)}^{n_{r\tau(v)}} = a_{\tau(v)}^{m_{\tau(v)}-1}; a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}\Big]\Big) \\ &\quad \sqcup \Big(\Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \otimes [r\tau(v); \tau(v)[\cap \partial\mathbb{D} \times \Big[a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}; a_{\tau(v)}^0 = a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}\Big]\Big) \\ &= K_{\tau(v)} \sqcup \Big(\Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}; \tau(v)\Big[\\ &\qquad \cap \Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \times \Big[a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}; a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}\Big[\Big) \text{ par le lemme 2.3.10} \\ &= K_{\tau(v)} \sqcup \Big(\Big]\tau(v); a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}; a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}\Big[\\ &\qquad \cap \Big]a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}-1}; a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \times \Big[a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}; a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}\Big[\Big) \text{ par la proposition 1.4.5} \\ &= K_{\tau(v)} \sqcup \Big]\tau(v); a_{\tau(v)}^{n_{\tau(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}; a_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}\Big[\\ &= K_{\tau(v)} \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R}. \end{aligned}$$

■

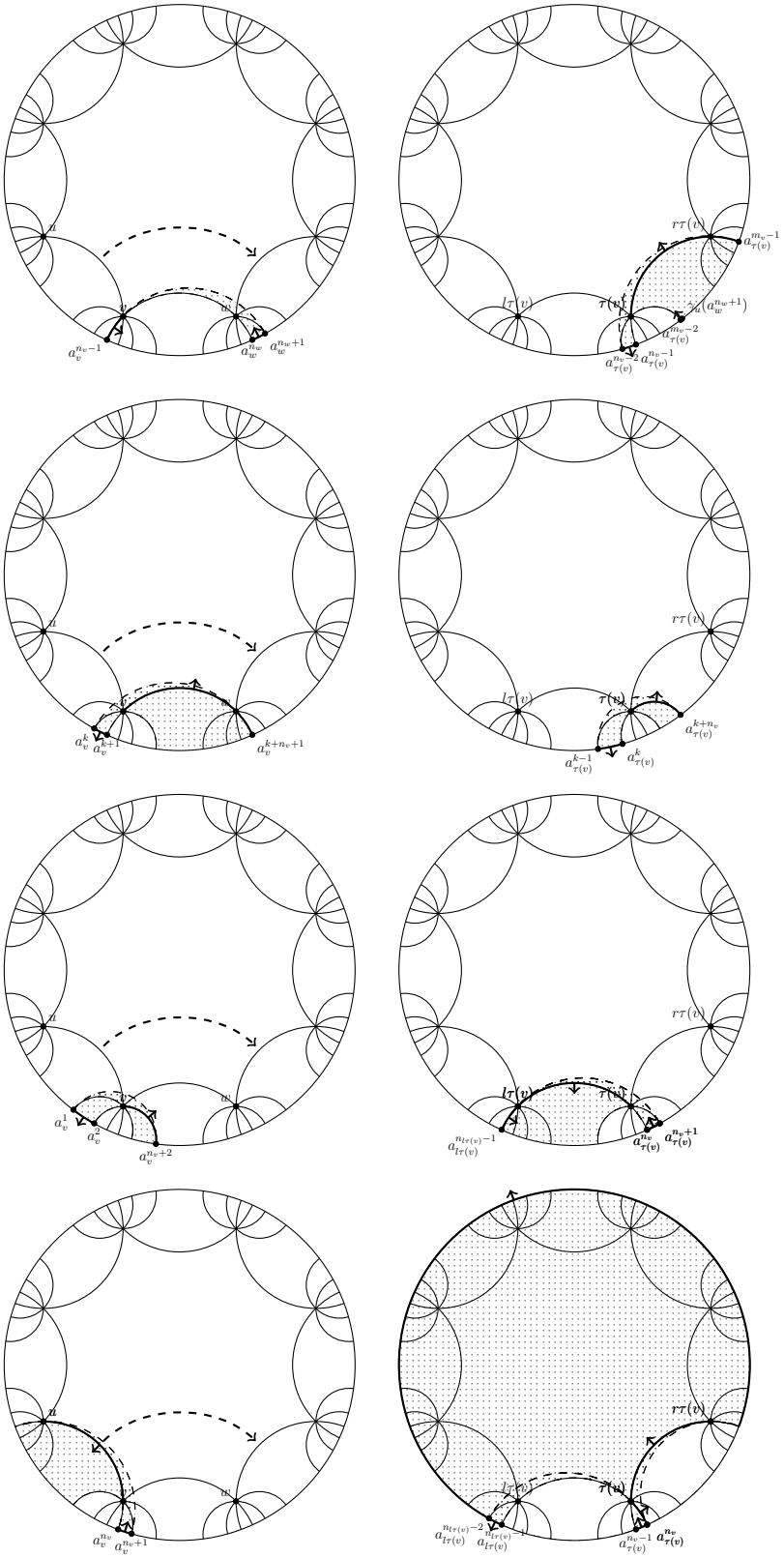


FIGURE 2.25 – De haut en bas : $X_v^{n_v-1}$, X_v^k, X_v^1, X_v^0 (à gauche) et leurs images respectives par γ_u (à droite)

De la même manière, $Y_v^{-n_v+2}$ doit être découpé en trois sous-parties $Y_v^{-n_v+2,\{L,R,C\}}$ définies par :

$$\begin{aligned}
Y_v^{-n_v+2,L} &= Y_v^{-n_v+2} \cap \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \times \partial\mathbb{D} \\
Y_v^{-n_v+2,R} &= \left]\gamma_{\tau(v)}(l\tau(v)); a_v^1\right] \otimes \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[\subset Y_v^{-n_v+2} \\
Y_v^{-n_v+2,C} &= Y_v^{-n_v+2} \setminus \left(Y_v^{-n_v+2,L} \sqcup Y_v^{-n_v+2,R}\right)
\end{aligned}$$

Vérifions tout d'abord que l'on a bien $Y_v^{-n_v+2,R} \subset Y_v^{-n_v+2}$. Comme $l\tau(v)$ est sur la géodésique allant de $\tau(v)$ vers $a^0_{\tau(v)}$, $\gamma_{\tau(v)}(l\tau(v))$ est sur la géodésique allant de v vers a_v^1, et ainsi :

$$Y_v^{-n_v+2} = \left]v; a_v^1\right] \otimes \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[= \left]v; \gamma_{\tau(v)}(l\tau(v))\right] \otimes \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[\sqcup Y_v^{-n_v+2,R}.$$

Quant à $Y_v^{-n_v+2,L}$, il possède une description plus succinte comme tube géodésique :

Lemme 2.3.18.

$$Y_v^{-n_v+2,L} = \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \otimes [a_v^{n_v}; v[\,.$$

PREUVE :

$$\begin{aligned}
Y_v^{-n_v+2,L} &= \left]v; a_v^1\right] \otimes \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[\cap \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \times \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[\\
&= \left]a_v^0; a_v^1\right] \otimes [a_v^{n_v}; v[\cap \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \times \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[\quad \text{grâce à la proposition 1.4.8} \\
&= \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \otimes [a_v^{n_v}; v[\cap \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \times \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[\\
&= \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \otimes [a_v^{n_v}; v[
\end{aligned}$$

car puisque $a_u^{n_u} \in [a_v^0; a_v^1[$, $v \star a_u^{n_u} \in [a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}[$ et ainsi :

$$\left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \otimes [a_v^{n_v}; v[\subset \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \times [a_v^{n_v}; v \star a_u^{n_u}[\subset \left]a_u^{n_u-1}; a_u^{n_u}\right] \times \left[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\right[. \qquad \blacksquare$$

Ici encore, il est aisé d'établir quelles sont les conditions pour lesquelles ces ensembles sont non vides.

Proposition 2.3.19.

$$\begin{aligned}
Y_v^{-n_v+2,L} = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \textit{ ou } u \notin V^\star \\
Y_v^{-n_v+2,R} = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star \textit{ ou } l\tau(v) \notin V^\star \\
Y_v^{-n_v+2,C} = \emptyset &\Leftrightarrow v \notin V^\star
\end{aligned}$$

Pour les ensembles Y_v^k, le générateur "naturel" est celui donné par T_C, qui est ici γ_v.

Proposition 2.3.20.

$$\forall k \in [\![-n_v+2\,;\,-2]\!], \quad \begin{aligned}
\gamma_v(Y_v^{-n_v+1}) &= Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,R} \\
\gamma_v(Y_v^k) &= Y_{\sigma(v)}^{k+1} \\
\gamma_v(Y_v^{-1}) &= Y_{\sigma(v)}^0 \sqcup Y_{r\sigma(v)}^{-n_{r\sigma(v)}+1} \\
\gamma_v(Y_v^0) &= K_{\sigma(v)} \sqcup Y_{r\sigma(v)}^{-n_{r\sigma(v)}+2,L}
\end{aligned}$$

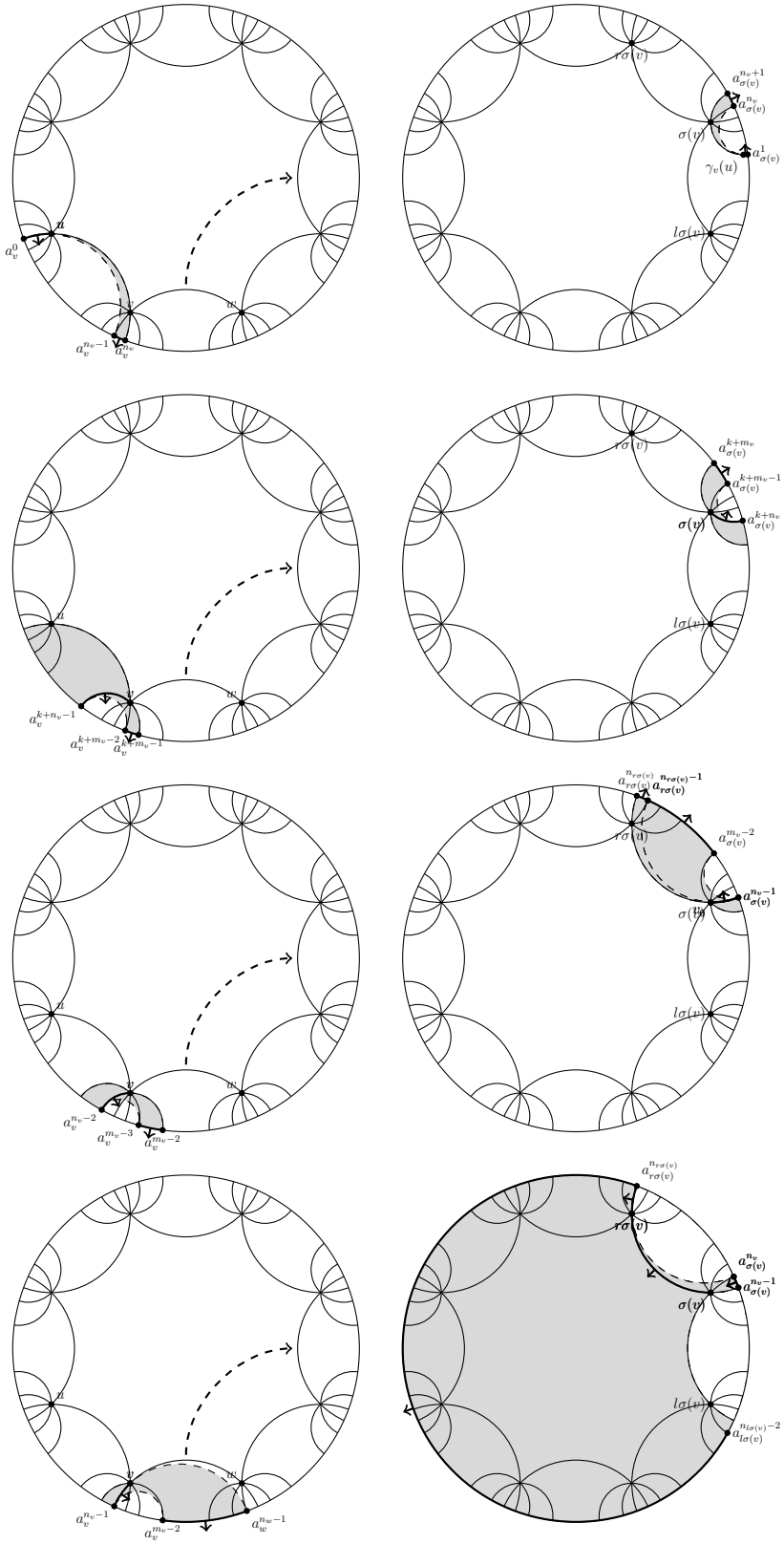


FIGURE 2.26 – De haut en bas : $Y_v^{-n_v+1}$, Y_v^k, Y_v^{-1}, Y_v^0 (à gauche) et leurs images respectives par γ_v (à droite)

PREUVE : Si v est un cusp, il en va de même pour $\sigma(v)$ donc les deux côtés des quatre égalités sont vides et elles sont toutes vérifiées. On supposera donc dorénavant que $v \in V^\star$, de sorte que $\gamma_v(a_v^k) = a_{\sigma(v)}^{k+1}$ pour tout k.
(i) :

$$\gamma_v(Y_v^{-n_v+1}) = \gamma_v\big]u; a_v^0\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[= \big]\gamma_v(u); a_{\sigma(v)}^1\big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{n_v}; a_{\sigma(v)}^{n_v+1}\Big[= Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,R}.$$

(ii) : Pour $k \in [\![-n_v+2\,;\,-2]\!]$,

$$\begin{aligned}\gamma_v(Y_v^k) &= \gamma_v\big]v; a_v^{k+n_v-1}\big] \otimes \big[a_v^{k+m_v-2}; a_v^{k+m_v-1}\big[\\ &= \Big]\sigma(v); a_{\sigma(v)}^{k+n_{\sigma(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{k+m_{\sigma(v)}-1}; a_{\sigma(v)}^{k+m_{\sigma(v)}}\Big[= Y_{\sigma(v)}^{k+1}.\end{aligned}$$

(iii) :

$$\begin{aligned}\gamma_v(Y_v^{-1}) &= \gamma_v\big]v; a_v^{n_v-2}\big] \otimes \big[a_v^{m_v-3}; a_v^{m_v-2}\big[\\ &= \Big]\sigma(v); a_{\sigma(v)}^{n_{\sigma(v)}-1}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{m_{\sigma(v)}-2}; a_{\sigma(v)}^{m_{\sigma(v)}-1}\Big[= Y_{\sigma(v)}^0 \sqcup Y_{r\sigma(v)}^{-n_{r\sigma(v)}+1}.\end{aligned}$$

(iv) : En remarquant que $r\tau(w) = \sigma(v)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\gamma_v(Y_v^0) &= \gamma_v\big]v; a_v^{n_v-1}\big] \otimes \big[a_v^{m_v-2}; a_w^{n_w-1}\big[\\ &= \Big]\sigma(v); a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big[\subset \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\sigma(v)}^0\Big[.\end{aligned}$$

et ce que w soit un cusp ou non (s'il en est un, $\tau(w)$ est aussi un cusp, $n_w = 3$, $a_w^{n_w-1} = w$ et $a_{\tau(w)}^{n_w-2} = \tau(w) = \gamma_v(w)$). On peut ainsi encadrer cette description par ce dernier rectangle :

$$\begin{aligned}\gamma_v(Y_v^0) &= \Big]\sigma(v); a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big[\cap \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\sigma(v)}^0\Big[\\ &= \Big]\sigma(v); a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\sigma(v)}^0\Big[\cap \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big[\\ &= \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; \sigma(v)\Big[\cap \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big[\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{grâce à la proposition 1.4.8}\\ &= \Big(\Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \otimes [r\sigma(v); \sigma(v)[\sqcup \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; r\sigma(v)\Big]\Big)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{\sigma(v)}^{m_v-1}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big[\\ &= K_{\sigma(v)} \sqcup \Big(Y_{r\sigma(v)}^{-n_{r\sigma(v)}+2,L} \cap \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{r\sigma(v)}^{n_{r\sigma(v)}}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big]\Big)\\ &= K_{\sigma(v)} \sqcup Y_{r\sigma(v)}^{-n_{r\sigma(v)}+2,L}\end{aligned}$$

puisque $Y_{r\sigma(v)}^{-n_{r\sigma(v)}+2,L} \subset \Big]a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big] \times \Big[a_{r\sigma(v)}^{n_{r\sigma(v)}}; a_{\tau(w)}^{n_w-2}\Big[$. ■

Lemme 2.3.21. $]v; a_v^0] \otimes [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[= L_v \sqcup X_v^{n_v-1} \sqcup Y_v^{-n_v+1}$.

PREUVE : Comme u est sur la géodésique qui va de v vers a_v^0, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\big]v; a_v^0\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[= \big]v; u\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\sqcup \big]u; a_v^0\big] \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\\ = B_u^{n_v-1} \sqcup Y_v^{-n_v+1}\\ = (B_u^{n_v-1} \cap C_v^{-n_v+1}) \sqcup (B_u^{n_v-1} \setminus C_v^{-n_v+1}) \sqcup Y_v^{-n_v+1}\\ = L_v \sqcup X_v^{n_v-1} \sqcup Y_v^{-n_v+1}.\end{aligned}$$

■

Au cours de la preuve de la conjugaison, on aura besoin de prendre l'image de $X_v^{n_v-2}$ et de $Y_v^{-n_v+2}$ par le générateur qui n'est pas donné par respectivement T_B et T_C.

Lemme 2.3.22.

$$\gamma_v(X_v^{n_v-2}) = L_{\sigma(v)} \sqcup X_{\sigma(v)}^{n_v-1} \sqcup Y_{\sigma(v)}^{-n_v+1}$$
$$\gamma_u(Y_v^{-n_v+2}) = L_{\tau(v)} \sqcup X_{\tau(v)}^{n_v-1} \sqcup Y_{\tau(v)}^{-n_v+1}$$

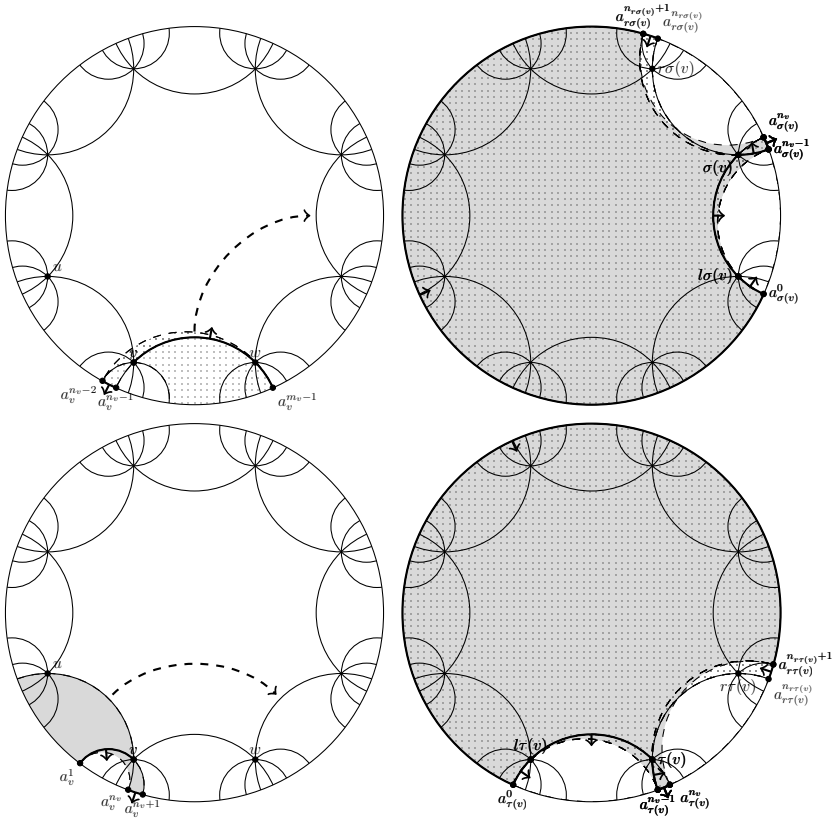


FIGURE 2.27 – En haut, $X_v^{n_v-2}$ et son image par γ_v. En bas, $Y_v^{-n_v+2}$ et son image par γ_u.

PREUVE : Si v est un cusp, $\sigma(v)$ et $\tau(v)$ le sont aussi donc tous les ensembles concernés sont vides et les égalités sont trivialement vérifiées. On supposera donc dorénavant que $v \in V^\star$.
(i) :

$$\begin{aligned}\gamma_v(X_v^{n_v-2}) &= \gamma_v\big(\big]v; a_v^{m_v-1}\big] \otimes \big[a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}\big[\big) \\ &= \big]\sigma(v); a_{\sigma(v)}^0\big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{n_v-1}; a_{\sigma(v)}^{n_v}\Big[= L_{\sigma(v)} \sqcup X_{\sigma(v)}^{n_v-1} \sqcup Y_{\sigma(v)}^{-n_v+1}.\end{aligned}$$

(ii) :

$$\begin{aligned}\gamma_u(Y_v^{-n_v+2}) &= \gamma_u\big(\big]v; a_v^1\big] \otimes \big[a_v^{n_v}; a_v^{n_v+1}\big[\big) \\ &= \big]\tau(v); a_{\tau(v)}^0\big] \otimes \Big[a_{\tau(v)}^{n_v-1}; a_{\tau(v)}^{n_v}\Big[= L_{\tau(v)} \sqcup X_{\tau(v)}^{n_v-1} \sqcup Y_{\tau(v)}^{-n_v+1}.\end{aligned}$$ ■

Nous aurons aussi besoin du même type de renseignement sur $X_v^{n_v-1}$ et sur $Y_v^{-n_v+1}$.

Lemme 2.3.23.

$$\gamma_v(X_v^{n_v-1}) = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,L}$$
$$\gamma_u(Y_v^{-n_v+1}) = X_{\tau(v)}^{n_v-2,R}$$

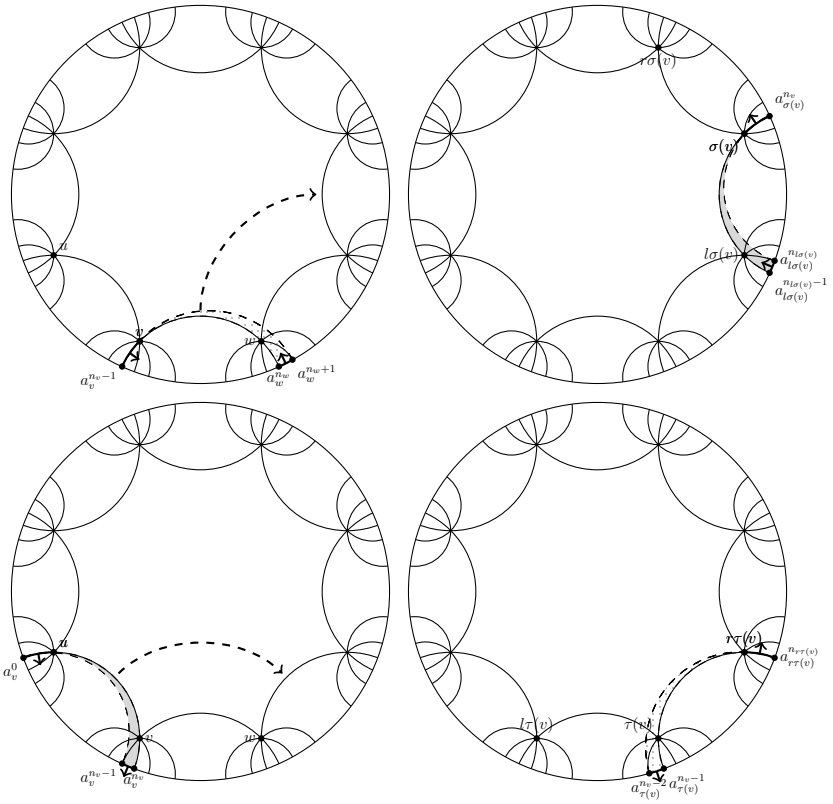


FIGURE 2.28 – En haut, $X_v^{n_v-1}$ et son image par γ_v. En bas, $Y_v^{-n_v+1}$ et son image par γ_u.

PREUVE : Comme au lemme 2.3.22, les égalités sont vérifiées lorsque v est un cusp. On supposera donc dorénavant que $v \in V^\star$.
(i) : Si w est un cusp, il en va de même pour $l\sigma(v) = \tau r(v) = \tau(w)$ et les deux ensembles sont vides. Sinon,

$$\begin{aligned}\gamma_v(X_v^{n_v-1}) &= \gamma_v\big(\big]a_w^{n_w}; a_w^{n_w+1}\big[\big) \otimes \big[a_v^{n_v-1}; v\big[\big) \\ &= \Big]a_{\tau(w)}^{n_w-1} = a_{l\sigma(v)}^{n_{l\sigma(v)}-1}; a_{l\sigma(v)}^{n_{l\sigma(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{\sigma(v)}^{n_v}; \sigma(v)\Big[= Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,L}.\end{aligned}$$

(ii) : Si u est un cusp, il en va de même pour $r\tau(v) = \sigma l(v) = \sigma(u)$ et les deux ensembles sont vides. Sinon,

$$\begin{aligned}\gamma_u(Y_v^{-n_v+1}) &= \gamma_u\big(\big]u; a_u^{n_u-1}\big[\big) \otimes \big[a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}\big[\big) \\ &= \Big]\sigma(u) = r\tau(v); a_{r\tau(v)}^{n_{r\tau(v)}}\Big] \otimes \Big[a_{\tau(v)}^{n_v-2}; a_{\tau(v)}^{n_v-1}\Big[= X_{\tau(v)}^{n_v-2,R}.\end{aligned}$$ ■

En rassemblant ces deux lemmes, on en déduit l'image de L_v par les deux générateurs qui lui sont associés.

Proposition 2.3.24.

$$\gamma_u(L_v) = X_{\tau(v)}^{n_v-2,C}$$
$$\gamma_v(L_v) = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,C}$$

PREUVE : Comme $\gamma_{\tau(v)}(X_{\tau(v)}^{n_v-2}) = L_v \sqcup X_v^{n_v-1} \sqcup Y_v^{-n_v+1}$ et que $\gamma_{\tau(v)}^{-1} = \gamma_{l\sigma\tau(v)} = \gamma_u$, on obtient que

$$X_{\tau(v)}^{n_v-2} = \gamma_u(L_v) \sqcup \gamma_u(X_v^{n_v-1}) \sqcup \gamma_u(Y_v^{-n_v+1}).$$

Mais $\gamma_u(X_v^{n_v-1}) = X_{\tau(v)}^{n_v-2,L}$ et $\gamma_u(Y_v^{-n_v+1}) = X_{\tau(v)}^{n_v-2,R}$, donc on doit nécessairement avoir $\gamma_u(L_v) = X_{\tau(v)}^{n_v-2,C}$.

Le second point se montre de manière similaire. ■

2.3.5 Conjugaison

Nous sommes maintenant en possession de tous les outils nécessaires à la construction de la conjugaison. Elle sera définie sur $B \cap C$ comme sur l'identité, et sur chaque (X_v^k) comme le produit des générateurs qui apparaissent le long de la τ-orbite de v. Ainsi, elle est complètement déterminée par sa donnée sur une partition finie.

Pour tous $v \in V$ et $p \in \mathbb{N}$, on note $\varphi_v^p = \gamma_{l\tau^{p-1}(v)} \dots \gamma_{l\tau(v)}\gamma_{l(v)}$. Commençons par rassembler quelques propriétés sur ces produits de générateurs.

Lemme 2.3.25. $\forall p \in \mathbb{N}, \varphi_v^p(v) = \tau^p(v)$ *; et si* $v \in V^\star$ *alors* $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi_v^p(a_v^k) = a_{\tau^p(v)}^{k-p}$.

PREUVE : Montrons ceci par récurrence sur p. Si $p = 0$, alors $\varphi_v^0(v) = v$ et $\varphi_v^0(a_v^k) = a_v^k$. Supposons maintenant que $\varphi_v^p(v) = \tau^p(v)$ et $\varphi_v^p(a_v^k) = a_{\tau^p(v)}^{k-p}$. Alors

$$\varphi_v^{p+1}(v) = \gamma_{l\tau^p(v)}(\tau^p(v)) = \tau(\tau^p(v)) = \tau^{p+1}(v)$$

et puisque $\tau^p(v) \in V^\star$

$$\varphi_v^{p+1}(a_v^k) = \gamma_{l\tau^p(v)}(a_{\tau^p(v)}^{k-p}) = a_{\tau^{p+1}(v)}^{k-p-1}.$$ ■

En notant que $n_v = n_{\tau^p(v)}$, ce lemme nous permet de calculer la φ_v^p-image des tubes géodésiques apparaissant comme des X_v^k ou des Y_v^{-k}.

Lemme 2.3.26. *Si* $v \in V^\star$*, alors*

$$\varphi_v^p\left(\left]v; a_v^{k+n_v+1}\right] \otimes \left[a_v^k; a_v^{k+1}\right[\right) = \left]\tau^p(v); a_{\tau^p(v)}^{k-p+n_{\tau^p(v)}+1}\right] \otimes \left[a_{\tau^p(v)}^{k-p}; a_{\tau^p(v)}^{k-p+1}\right[.$$

Par ailleurs, le fait que les relations du groupe apparaissent comme mots du codage le long des σ-orbites implique que :

Lemme 2.3.27.
(i) $\varphi_v^{m_v} = id$ *;*
(ii) $\varphi_v^{m_v-p} = \gamma_{\sigma^{p-1}(v)} \dots \gamma_v$.

PREUVE : (i) : Comme $\gamma_{\sigma^{m_v-1}(v)} \dots \gamma_v = \mathrm{id}$ pour tout v,

$$\begin{aligned}(\varphi_v^{m_v})^{-1} = \gamma_{l(v)}^{-1} \dots \gamma_{l\tau^{m_v-1}(v)}^{-1} &= \gamma_{l\sigma^{m_v}(v)}^{-1} \dots \gamma_{l\tau^{m_v-1}\sigma^{m_v}(v)}^{-1} \\ &= \gamma_{l\sigma(\sigma^{m_v-1}(v))}^{-1} \dots \gamma_{l\sigma(v)}^{-1} = \gamma_{\sigma^{m_v-1}(v)} \dots \gamma_v = \mathrm{id}.\end{aligned}$$

(ii) : D'après le premier point,

$$\varphi_v^{m_v-p} = \gamma_{l\tau^{m_v-p}(v)}^{-1} \dots \gamma_{l\tau^{m_v-1}(v)}^{-1} \varphi_v^{m_v} = \gamma_{l\sigma^p(v)}^{-1} \dots \gamma_{l\sigma(v)}^{-1} = \gamma_{\sigma^{p-1}(v)} \dots \gamma_v. \qquad \blacksquare$$

Apparaît alors un des éléments clés de la preuve de la conjugaison : φ_v^p et $\varphi_{\tau(v)}^{p-2}$ conjuguent les actions de $\gamma_{\tau^p(v)}$ et de $\gamma_{l(v)}$.

Lemme 2.3.28. *Si $p \geq 2$, $\gamma_{\tau^p(v)} \varphi_v^p = \varphi_{\tau(v)}^{p-2} \gamma_{l(v)}$.*

PREUVE :

$$\begin{aligned}\gamma_{\tau^p(v)} \varphi_v^p &= \underbrace{\gamma_{\tau^p(v)} \gamma_{l\tau^{p-1}(v)}}_{\mathrm{id}} \gamma_{l\tau^{p-2}(v)} \dots \gamma_{l\tau(v)} \gamma_{l(v)} \\ &= \gamma_{l\tau^{p-3}(\tau(v))} \dots \gamma_{l\tau(v)} \gamma_{l(v)} = \varphi_{\tau(v)}^{p-2} \gamma_{l(v)}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer et prouver le théorème principal de conjugaison.

Théorème 2.3.29. *L'application*

$$\begin{array}{lll}\varphi : B & \to C \\ \quad x \in B \cap C & \mapsto x \\ \quad x \in X_v^k, k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!] & \mapsto \varphi_v^{2k+2}(x) \in Y_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k} \\ \quad x \in X_v^0 \sqcup X_u^{n_u-1} & \mapsto \varphi_v^2(x) \in Y_{\tau^2(v)}^0 \sqcup Y_{r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+1}\end{array}$$

est bien définie et induit une bijection de B dans C telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{T_B} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ C & \xrightarrow{T_C} & C \end{array}$$

soit commutatif.

Nous prouverons ce théorème via une succession de lemmes. Commençons par montrer que φ est bien définie.

Lemme 2.3.30. *$\varphi : B \to C$ est bien définie et bijective.*

PREUVE : Nous devons tout d'abord montrer que φ est bien définie. Si v est un cusp, tous les X_v^k et $X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1}$ sont vides donc il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant que $v \in V^\star$. Puisque $\tau^p(v) \in V^\star$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on obtient pour $k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!] = [\![1\,;\, n_{\tau^{2k+2}(v)} - 2]\!]$ que

$$\begin{aligned}\varphi_v^{2k+2}(X_v^k) &= \varphi_v^{2k+2}\big(\big]v; a_v^{k+n_v+1}\big] \otimes \big[a_v^k; a_v^{k+1}\big[\big) \\ &= \Big]\tau^{2k+2}(v); a_{\tau^{2k+2}(v)}^{k-(2k+2)+n_{\tau^{2k+2}(v)}+1}\Big] \otimes \Big[a_{\tau^{2k+2}(v)}^{k-(2k+2)}; a_{\tau^{2k+2}(v)}^{k-(2k+2)+1}\Big[\\ &= \Big]\tau^{2k+2}(v); a_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k+n_{\tau^{2k+2}(v)}-1}\Big] \otimes \Big[a_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k-2}; a_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k-1}\Big[\\ &= Y_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k}.\end{aligned}$$

Et pour $k = 0$, on constate que

$$\begin{aligned}\varphi_v^2(X_v^0 \sqcup X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1}) &= \varphi_v^2(\big]v; a_v^{n_v+1}\big] \otimes \big[a_v^0; a_v^1\big[) \\ &= \Big]\tau^2(v); a_{\tau^2(v)}^{k+n_{\tau^2(v)}-1}\Big] \otimes \Big[a_{\tau^2(v)}^{-2}; a_{\tau^2(v)}^{-1}\Big[= Y_{\tau^2(v)}^0 \sqcup Y_{r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+1}.\end{aligned}$$

Comme φ est bijective sur chaque X_v^k et que les Y_v^k sont disjoints, φ est globalement injective. Reste à montrer qu'elle est surjective. Lorsque v est un cusp, tous les Y_v^{-k} et $Y_{r(v)}^{-n_{r(v)}+1}$ sont vides, donc ils n'ont pas à être pris en compte. Supposons maintenant que $v \in V^\star$. D'après les calculs qui précèdent, les Y_v^{-k} sont complètement atteints par les $X_{\sigma^{2k+2}(v)}^k$, et les Y_v^0 et $Y_{r(v)}^{-n_{r(v)}+1}$ s'obtiennent exactement comme image des $X_{\sigma^2(v)}^0$ et des $X_{l\sigma^2(v)}^{n_{l\sigma^2(v)}-1}$. Ceci prouve bien que φ est surjective. ■

Montrons maintenant que φ conjugue les X_v^k et Y_v^{-k} génériques.

Lemme 2.3.31. *Si* $k \in [\![2\,;\, n_v - 2]\!]$,
$$\begin{array}{ccc} X_v^k & \xrightarrow{T_B} & X_{\tau(v)}^{k-1} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k} & \xrightarrow{T_C} & Y_{\tau^{2k+1}(v)}^{-k+1} \end{array}.$$

PREUVE : On sait déjà que $\varphi(X_v^k) = Y_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k}$ et $\varphi(X_{\tau(v)}^{k-1}) = Y_{\tau^{2(k-1)}(\tau(v))}^{-k+1} = Y_{\tau^{2k-1}(v)}^{-k+1}$. Puisque $T_B = \gamma_u$ sur X_v^k et que $T_C = \gamma_{\tau^{2k+2}(v)}$ sur $Y_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k}$, on a bien que $T_B(X_v^k) = X_{\tau(v)}^{k-1}$ et que $T_C(Y_{\tau^{2k+2}(v)}^{-k}) = Y_{\sigma\tau^{2k+2}(v)}^{-k+1} = Y_{\tau^{2k+1}(v)}^{-k+1}$. Finalement, le lemme 2.3.28 nous dit que sur X_v^k

$$\varphi T_B = \varphi_{\tau(v)}^{2(k-1)+2}\gamma_u = \gamma_{\tau^{2k+2}(v)}\varphi_v^{2k+2} = T_C\varphi.$$ ■

Traitons ensuite le cas de X_v^1 et de Y_v^{-1}.

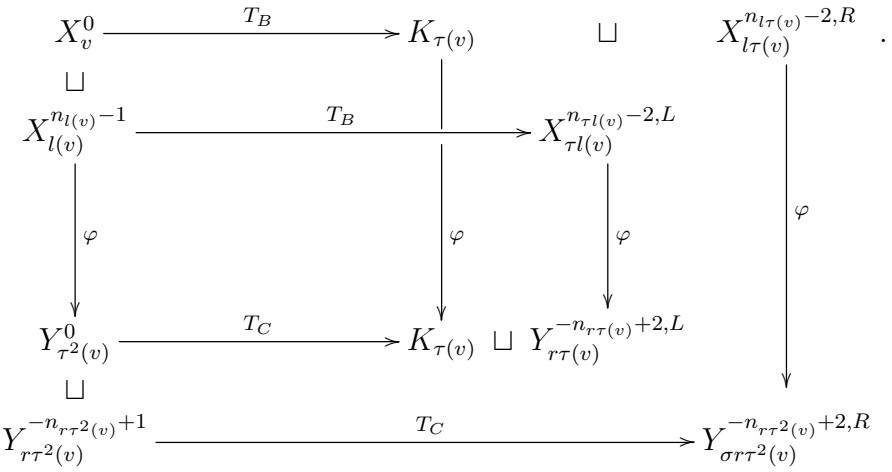
Lemme 2.3.32.
$$\begin{array}{ccc} X_v^1 & \xrightarrow{T_B} & X_{\tau(v)}^0 \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1} \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Y_{\tau^4(v)}^{-1} & \xrightarrow{T_C} & Y_{\tau^3(v)}^0 \sqcup Y_{r\tau^3(v)}^{-n_{r\tau^3(v)}+1} \end{array}.$$

PREUVE : On sait déjà que $\varphi(X_v^1) = Y_{\tau^4(v)}^{-1}$ et que $\varphi(X_{\tau(v)}^0 \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}) = Y_{\tau^3(v)}^0 \sqcup Y_{r\tau^3(v)}^{-n_{r\tau^3(v)}+1}$. Puisque $T_B = \gamma_u$ sur X_v^1 et que $T_C = \gamma_{\tau^4(v)}$ sur $Y_{\tau^4(v)}^{-1}$, on a bien que $T_B(X_v^1) = X_{\tau(v)}^0 \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-1}$ et que $T_C(Y_{\tau^4(v)}^{-1}) = Y_{\sigma\tau^4(v)}^0 \sqcup Y_{r\sigma\tau^4(v)}^{-n_{r\sigma\tau^4(v)}+1} = Y_{\tau^3(v)}^0 \sqcup Y_{r\tau^3(v)}^{-n_{r\tau^3(v)}+1}$. Finalement, le lemme 2.3.28 nous dit que sur X_v^1

$$\varphi T_B = \varphi_{\tau(v)}^2\gamma_u = \gamma_{\tau^4(v)}\varphi_v^4 = T_C\varphi.$$ ■

Nous devons maintenant prouver que φ conjugue les $X_v^0 \sqcup X_{l(v)}^{n_v-1}$ et les $Y_v^0 \sqcup Y_{r(v)}^{-n_{r(v)}+1}$. Il s'agit du cas le plus compliqué à étudier car, en partant de ces ensembles, l'action de T_B et de T_C peut à la fois faire rester dans les parties spécifiques du billard ou du codage, ou bien faire rentrer dans $B \cap C$.

Lemme 2.3.33.



PREUVE : Supposons d'abord que $v \in V^\star$.

On sait déjà décrire les images des ensembles concernés par T_B et T_C :

$$\begin{aligned}
T_B(X_v^0) &= \gamma_{l(v)}(X_v^0) = K_{\tau(v)} \sqcup X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R} \\
T_B(X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1}) &= \gamma_{l^2(v)}(X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1}) = X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2,L} \\
T_C(Y_{\tau^2(v)}^0) &= K_{\sigma\tau^2(v)} \sqcup Y_{r\sigma\tau^2(v)}^{-n_{r\sigma\tau^2(v)}+2} = K_{\tau(v)} \sqcup Y_{r\tau(v)}^{-n_{r\tau(v)}+2,L} \\
T_C(Y_{r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+1}) &= \gamma_{r\tau^2(v)}(Y_{r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+1}) = Y_{\sigma r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+2,R}
\end{aligned}$$

Étudions maintenant leurs images par la conjugaison φ :

– $\varphi(X_v^0 \sqcup X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1}) = Y_{\tau^2(v)}^0 \sqcup Y_{r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+1}$;

– $\varphi(K_{\tau(v)}) = K_{\tau(v)}$ car $K_{\tau(v)} \subset B \cap C$;

– On traite maintenant le cas de $X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}$. Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
\tau^{2(n_{l\tau(v)}-2)+2} l\tau(v) &= \tau^{-2}\tau^{m_{l\tau(v)}}(l\tau(v)) = \tau^{-2}(l\tau(v)) = \sigma^2 l\tau(v) = \sigma(\sigma l)\tau(v) \\
&= \sigma r\tau^2(v).
\end{aligned}$$

Ceci assure que $r\tau^2(v)$ est un cusp si et seulement si $\sigma r\tau^2(v)$ est un cusp, si et seulement si $l\tau(v)$ en est un ; auquel cas les trois ensembles concernés dans le diagramme sont vides, et le diagramme commute trivialement. On suppose maintenant que ces trois sommets sont dans $V^\star$. $n_{l\tau(v)} = n_{\sigma\tau^2(v)}$ donc :

$$\varphi(X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2}) = Y_{\tau^{2(n_{l\tau(v)}-2)+2} l\tau(v)}^{-n_{l\tau(v)}+2} = Y_{\sigma r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+2}.$$

De plus, $\varphi = \varphi_{l\tau(v)}^{m_{l\tau(v)}-2} = \gamma_{\sigma l\tau(v)}\gamma_{l\tau(v)} = \gamma_{r\tau^2(v)}\gamma_{l\tau(v)}$ donc comme $r\tau^2(v) \in V^\star$ il vient :

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\left]\tau(v); a_{\tau(v)}^{n_v}\right[\right) &= \gamma_{r\tau^2(v)}\gamma_{l\tau(v)}\left(\left]\tau(v); a_{\tau(v)}^{n_v}\right[\right) = \gamma_{r\tau^2(v)}\left(\left]\tau^2(v); a_{\tau^2(v)}^{n_v-1} = a_{r\tau^2(v)}^0\right[\right) \\
&= \left]\gamma_{r\tau^2(v)}(l r\tau^2(v)); a_{r\tau^2(v)}^1\right[.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R}) = Y_{\sigma r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+2,R}$.

– Finalement, nous traitons le cas de $X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2}$. Remarquons tout d'abord que

$$\tau^{2(n_{\tau l(v)}-2)+2}\tau l(v) = \tau^{-1}\tau^{m_{l(v)}}(l(v)) = \tau^{-1}l(v) = \sigma l(v) = r\tau(v).$$

Ceci assure que $l(v)$ est un cusp si et seulement si $\tau l(v)$ est un cusp, si et seulement si $r\tau(v)$ en est un ; auquel cas les trois ensembles concernés dans le diagramme sont vides, et le diagramme commute trivialement. On suppose maintenant que ces trois sommets sont dans $V^\star$. Puisque $n_{\tau l(v)} = n_{r\tau(v)}$,

$$\varphi(X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2}) = Y_{\tau^{2(n_{\tau l(v)}-2)+2}\tau l(v)}^{-n_{\tau l(v)}+2} = Y_{r\tau(v)}^{-n_{r\tau(v)}+2}.$$

De plus, $\varphi = \varphi_{\tau l(v)}^{m_{\tau l(v)}-2} = \gamma_{l(v)}\gamma_{\tau l(v)}$ donc comme $l(v) \in V^\star$ il vient :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\left]a_{\tau l(v)}^{m_{\tau l(v)}-2}; \gamma_{l\sigma\tau l(v)}(a_v^{n_v+1})\right]\right) = \gamma_{l(v)}\left(\left]a_{l(v)}^{m_{\tau l(v)}-1}; a_v^{n_v+1}\right]\right) &= \left]a_{\sigma l(v)}^0; a_{\tau(v)}^{n_v}\right] \\ &= \left]a_{r\tau(v)}^0; a_{\tau(v)}^{n_v}\right] = \left]a_{\tau(v)}^{n_v-1}; a_{\tau(v)}^{n_v}\right].\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi(X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2,L}) = Y_{r\tau(v)}^{-n_{r\tau(v)}+2,L}$.

Nous avons encore à vérifier que le diagramme commute. Pour $X_v^0 \to K_{\tau(v)}$, nous avons :

$$\varphi T_B = \gamma_u = (\gamma_{\tau^2(v)}\gamma_{l\sigma\tau^2(v)})\gamma_u = \gamma_{\tau^2(v)}(\gamma_{l\tau(v)}\gamma_{l(v)}) = T_C\varphi.$$

Pour $X_v^0 \to X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R}$, nous avons déjà établi que $\varphi = \gamma_{r\tau^2(v)}\gamma_{l\tau(v)}$ sur ce dernier ensemble, donc :

$$\varphi T_B = (\gamma_{r\tau^2(v)}\gamma_{l\tau(v)})\gamma_u = \gamma_{r\tau^2(v)}\varphi_v^2 = T_C\varphi.$$

Pour $X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1} \to X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2,L}$, nous avons aussi déjà vérifié que $\varphi = \gamma_{l(v)}\gamma_{\tau l(v)}$ sur ce dernier ensemble, donc :

$$\begin{aligned}\varphi T_B = (\gamma_{l(v)}\gamma_{\tau l(v)})\gamma_{l^2(v)} &= \gamma_{l(v)}(\gamma_{\tau l(v)}\gamma_{l\sigma(\tau l(v))}) \\ &= \gamma_{l(v)} = (\gamma_{\tau r(l\tau(v))}\gamma_{l\tau(v)})\gamma_{l(v)} = \gamma_{\tau^2(v)}\varphi_v^2 = T_C\varphi.\end{aligned}$$

Finalement, supposons que v est un cusp. On a vu que dans ce cas $X_{l(v)}^{n_{l(v)}-1} = \emptyset$. De plus, $\tau(v)$ et $\tau^2(v)$ sont aussi des cusps donc $K_{\tau(v)}$ et $Y_{r\tau(v)}^{-n_{r\tau(v)}+2,L}$ sont donc vides eux aussi. $X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2,L}$ est lui vide car $r\sigma(\tau l(v)) = v$ est un cusp. Quant à $X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R}$ et à $Y_{\sigma r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+2,R}$, ils sont tous les deux vides car $r(l\tau(v)) = \tau(v) = l\tau(\sigma r\tau^2(v))$ est un cusp. ■

Il faut noter que $l(v)$ et $r\tau^2(v)$ peuvent très bien être cusps indépendemment l'un de l'autre.

Le cas de Σ est par construction très simple à vérifier :

Lemme 2.3.34.
$$\begin{array}{ccc}\Sigma & \xrightarrow{T_B} & \Sigma \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \Sigma & \xrightarrow{T_C} & \Sigma\end{array}.$$

PREUVE : C'est clair car $\varphi = \mathrm{id}$ et $T_B = T_C$ sur Σ. ■

On termine en prouvant que φ conjugue bien les L_v. Alors que ces ensembles sont dans $B \cap C$, leur image respective par T_B et T_C est ramenée dans les parties spécifiques.

Lemme 2.3.35. $\begin{array}{ccc} L_v & \xrightarrow{T_B} & X_{\tau(v)}^{n_v-2,C} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ L_v & \xrightarrow{T_C} & Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,C} \end{array}$.

PREUVE : On sait déjà que $\varphi(X_{\tau l(v)}^{n_{\tau l(v)}-2,L}) = Y_{r\tau(v)}^{-n_{r\tau(v)}+2,L}$ et $\varphi(X_{l\tau(v)}^{n_{l\tau(v)}-2,R}) = Y_{\sigma r\tau^2(v)}^{-n_{r\tau^2(v)}+2,R}$. En remplaçant v par respectivement $r(v)$ et $\sigma r\tau(v)$, on obtient que $\varphi(X_{\tau(v)}^{n_v-2,L}) = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,L}$, et aussi que $\varphi(X_{\tau(v)}^{n_v-2,R}) = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,R}$. Mais puisque $\varphi(X_{\tau(v)}^{n_v-2}) = Y_{\tau^{2(n_v-2)+2}(\tau(v))}^{-n_v+2} = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2}$, on en déduit que $\varphi(X_{\tau(v)}^{n_v-2,C}) = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,C}$.

D'autre part, $T_B(L_v) = \gamma_u(L_v) = X_{\tau(v)}^{n_v-2,C}$ et $T_C(L_v) = \gamma_v(L_v) = Y_{\sigma(v)}^{-n_v+2,C}$.

Finalement, le diagramme commute car $\varphi_{\tau(v)}^{m_v-2}\gamma_u = \gamma_{\tau^{m_v}(v)}\varphi_v^{m_v} = \gamma_v$. ■

Ce dernier point achève la preuve de la conjugaison.

2.3.6 L'exemple de la surface modulaire

Nous allons expliciter la conjugaison dans le cas du domaine fondamental de la surface modulaire introduit à la sous-section 2.1.2. Rappelons que les trois sommets du domaine sont nommés ∞, v et w lorsque l'on parcourt V dans le sens direct en partant du sommet à l'infini. Le nombre de secteurs en chaque sommet vaut $n_\infty = n_v = n_w = 3$. Les générateurs à droite sont donnés par $\gamma_\infty = T$, $\gamma_v = S$ et $\gamma_w = T^{-1}$. De plus, la permutation σ est simplement la transposition qui échange v et w, et est ainsi égale à son inverse τ.

Commençons par calculer les ensembles spécifiques au billard et au codage :

$X_\infty^k = Y_\infty^{-k} = \emptyset$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n_\infty - 1 = 2]\!]$

$X_v^0 = \left]a_v^3; a_v^4\right] \otimes [\infty; v[$

$X_v^1 = \left]v; a_v^5\right] \otimes \left[a_v^2; a_v^3\right[= X_v^{1,L} \sqcup X_v^{1,C} \sqcup X_v^{1,R}$ où $X_v^{1,L} = \emptyset$ et $X_v^{1,R} =]w; a_v^5] \otimes [a_v^2; a_v^3[$

$X_v^2 = \left]a_w^3; a_w^4\right] \otimes \left[a_v^2; v\right[$

$Y_v^0 = \left]v; a_v^2\right] \otimes \left[a_v^4; a_w^2\right[$

$Y_v^{-1} = \left]v; a_v^1\right] \otimes \left[a_v^3; a_v^4\right[= Y_v^{-1,L} \sqcup Y_v^{-1,C} \sqcup Y_v^{-1,R}$
où $Y_v^{-1,L} = \emptyset$ et $Y_v^{-1,R} =]T^{-1}(v); a_v^1] \otimes [a_v^3; a_v^4[$

$Y_v^{-2} = \emptyset$

$X_w^0 = \left]a_w^3; a_w^4\right] \otimes [v; w[$

$X_w^1 = \left]w; a_w^5 = \infty\right] \otimes \left[a_w^2; a_w^3\right[= X_w^{1,L} \sqcup X_w^{1,C} \sqcup X_w^{1,R}$
où $X_w^{1,L} = X_w^1 \cap]a_w^4; T(a_w^4)] \times \mathbb{S}^1$ et $X_w^{1,R} = \emptyset$

$X_w^2 = \emptyset$

$Y_w^0 = \left]w; a_w^2\right] \otimes \left[a_w^4; \infty\right[$

$Y_w^{-1} = \left]w; a_w^1\right] \otimes \left[a_w^3; a_w^4\right[= Y_w^{-1,L} \sqcup Y_w^{-1,C} \sqcup Y_w^{-1,R}$
où $Y_w^{-1,L} = Y_w^{-1} \cap]a_v^2; a_v^3] \times \mathbb{S}^1$ et $Y_w^{-1,R} = \emptyset$

$Y_w^{-2} = \left]v; a_v^2\right] \otimes \left[a_w^2; a_w^3\right[$

Calculons ensuite les ensembles spécifiques dans l'intersection :

$$\begin{array}{llll} K_\infty & = \emptyset & L_\infty & = \emptyset \\ K_v & =]a_v^2; a_v^3] \otimes [w; v[\cap \mathbb{S}^1 \times [a_v^5; \infty[& L_v & =]v; \infty] \otimes [a_v^2; a_v^3[\cap]a_w^4; \infty] \times [a_v^2; a_v^3[\\ K_w & =]a_w^2; a_w^3] \otimes [\infty; w[\cap \mathbb{S}^1 \times [\infty; a_v^1[& L_w & =]w; v] \otimes [a_w^2; a_w^3[\cap]\infty; a_w^0] \times [a_w^2; a_w^3[\end{array}$$

Puis les isométries définissant la conjugaison (en rappelant que $(ST)^3 = \mathrm{id}$) :

$$\begin{array}{l} \varphi_v^2 = \gamma_{l\tau(v)}\gamma_{l(v)} = ST \\ \varphi_v^4 = \gamma_{l\tau^3(v)}\gamma_{l\tau^2(v)}\gamma_{l\tau(v)}\gamma_{l(v)} = STST = (ST)^{-1} = T^{-1}S \\ \varphi_w^2 = \gamma_{l\tau(w)}\gamma_{l(w)} = TS \\ \varphi_w^4 = \gamma_{l\tau^3(w)}\gamma_{l\tau^2(w)}\gamma_{l\tau(w)}\gamma_{l(w)} = TSTS = TSTS(TST)(TST)^{-1} = T(TST)^{-1} = ST^{-1} \end{array}$$

Alors, d'après le théorème 2.3.29, l'application

$$\begin{array}{rll} \varphi : B & & \to C \\ & x \in B \cap C & \mapsto x \\ & x \in X_v^0 & \mapsto \varphi_v^2(x) = ST(x) \in Y_v^0 \sqcup Y_w^{-2} \\ & x \in X_v^1 & \mapsto \varphi_v^4(x) = T^{-1}S(x) \in Y_v^{-1} \\ & x \in X_w^0 \sqcup X_v^2 & \mapsto \varphi_w^2(x) = TS(x) \in Y_w^0 \\ & x \in X_w^1 & \mapsto \varphi_w^4(x) = ST^{-1}(x) \in Y_w^{-1} \end{array}$$

est bien définie et induit une bijection de B dans C telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{T_B} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ C & \xrightarrow{T_C} & C \end{array}$$

commute.

Vérifions maintenant que les diagrammes individuels commutent eux aussi. Les flèches verticales représentent φ, tandis que les flèches horizontales marquent l'action de T_B ou de T_C selon que la source est un ensemble X ou Y. Les ensembles en gras sont vides.

Tout d'abord,

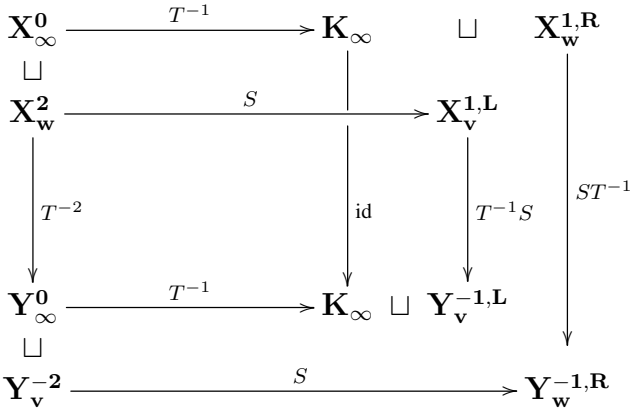
$$\begin{array}{ccc} X_v^1 & \xrightarrow{T} & X_w^0 \sqcup X_v^2 \\ \downarrow{\scriptstyle T^{-1}S} & & \downarrow{\scriptstyle TS} \\ Y_v^{-1} & \xrightarrow{S} & Y_w^0 \sqcup \mathbf{Y_\infty^{-2}} \end{array}$$

commute car $(TS)T = (S^2)TST(ST)(ST)^{-1} = S(ST)^{-1} = ST^{-1}S$. Par ailleurs,

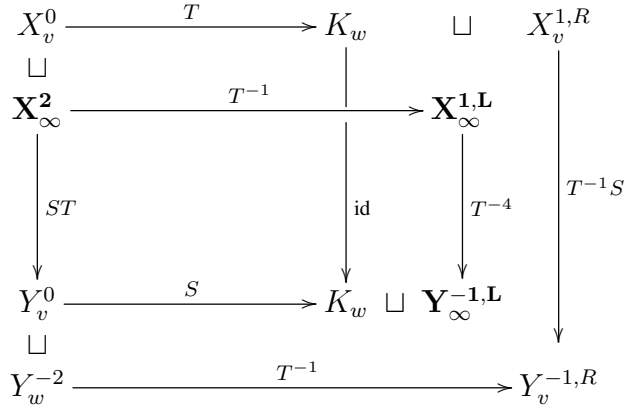
$$\begin{array}{ccc} X_w^1 & \xrightarrow{S} & X_v^0 \sqcup \mathbf{X_\infty^2} \\ \downarrow{\scriptstyle ST^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle ST} \\ Y_w^{-1} & \xrightarrow{T^{-1}} & Y_v^0 \sqcup Y_w^{-2} \end{array}$$

en prenant l'inverse de la relation précédente.

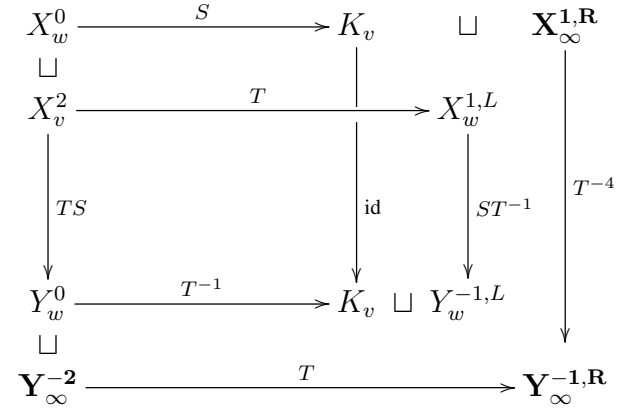
Passons aux trois gros diagrammes. Pour ∞,



où tous les ensembles sont bien vides. Pour v,

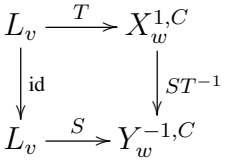


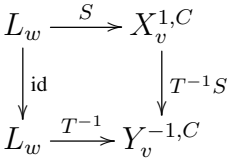
et les branches non triviales commutent. Enfin, pour w,



qui est aussi commutatif.

Enfin, les deux derniers diagrammes





commutent eux aussi.

Chapitre 3

Autour de la propriété d'orbite-équivalence

Nous allons maintenant étudier en détail la transformation du codage de Bowen-Series. Il s'agit de la restriction à sa composante directrice du codage rectifié introduit au chapitre précédent. Suivant que l'on regarde T_C ou T_C^{-1}, on obtient une transformation T_R ou T_L qui respecte une partition du cercle à l'infini $\partial\mathbb{D}$ en intervalles semi-ouverts à gauche ou à droite. Cette partition satisfait à une propriété de Markov qui encode une partie de la dynamique du flot géodésique et donc du groupe. À la différence de la définition classique du codage de Bowen-Series, notre partition de Markov est finie, et ce même si le domaine fondamental possède des sommets à l'infini.

L'une des propriétés remarquables de ce codage est qu'il est *orbite-équivalent* avec le groupe Γ. Cette propriété assure que deux points du cercle à l'infini sont Γ-équivalents si et seulement si ils sont tous les deux préimages d'un même point par le codage. Elle permet de transporter une partie de la structure du groupe et les propriétés de l'ensemble limite aux ensembles de préimages de points. Ce théorème a été montré pour la première fois dans [BS79].

Nous allons démontrer dans la première section un théorème plus général qui capture l'essence de la propriété d'orbite-équivalence, mais qui peut s'appliquer dans des contextes beaucoup plus larges. En le spécialisant, on redémontrera le théorème de Series, mais aussi une remarque plus forte utilisée de manière cruciale dans [Mor97]. Enfin, elle pourra s'appliquer aux distributions s'écrivant comme dérivées faibles de fonctions Hölder, ce qui nous permettra d'étendre le théorème de Pollicott à cette classe d'opérateurs dans le chapitre 5.

La deuxième section liste une série de résultats sur le codage lui-même. Outre le théorème de Series, on montrera aussi que l'ensemble des préimages de tout point est dense si et seulement si les points périodiques sont eux-mêmes denses. Par ailleurs, on mettra en bijection les orbites périodiques hyperboliques du codage et les classes de conjugaison d'éléments hyperboliques primitifs de Γ. Ceci nous permettra enfin de réécrire la fonction ζ de Selberg comme l'évaluation en 1 de la fonction ζ de Ruelle de poids $|T'|^{-s}$.

Les conséquences de l'existence d'une extension sous-jacente à T_L et à T_R seront étudiées au chapitre suivant. En particulier, on y trouvera les outils nécessaires pour démontrer que les points périodiques de T_L et T_R sont denses, et donc que les préimages de tout point sont denses.

La propriété d'orbite-équivalence est de nature combinatoire ; on se basera donc dans tout ce chapitre, et sauf mention contraire, sur un domaine fondamental $\mathcal{D}$ d'un groupe fuchsien cofini Γ (donc du premier type) qui vérifie la propriété d'*even corners* et qui n'est pas triangulaire

de classe 0. L'identification des orbites périodiques hyperboliques et des classes de conjugaison d'hyperboliques nécessitera toutefois de supposer que $\mathcal{D}$ est tel qu'il existe un point p pour lequel $|T'|_p \geq 1$, afin de pouvoir différencier dans le codage les deux points fixes d'un hyperbolique.

Toutes les preuves seront établies pour T_R, celles pour T_L étant parfaitement symétriques. On posera donc $T = T_R$. Sa partition de Markov est donnée par les intervalles

$$I_v^k = \begin{cases} \left[a_v^{k+m_v-2}; a_v^{k+m_v-1}\right[& \text{si } k \in [\![-n_v+1\,;\,-1]\!] \\ [a_v^{m_v-2}; a_w^1[& \text{si } k = 0 \\ \left[a_w^k; a_w^{k+1}\right[& \text{si } k \in [\![1\,;\,n_w-1]\!] \end{cases}$$

de sorte que $I_v = \bigsqcup_{k=-n_v+1}^{n_w-2} I_v^k = [a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}[$. Lorsque $x \in I_v$, $\gamma_R[x] = \gamma_v = T_{/I_v}$.

3.1 Invariance de familles de relations sur le bord

Notons $\mathbb{I}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{S}^1$ semi-ouverts à droite, c'est-à-dire l'image des intervalles semi-ouverts à droite de $[0; 2\pi[$ par $t \mapsto \exp(it)$. $\mathbb{S}^1 \in \mathbb{I}$ puisque $\mathbb{S}^1 = \exp(i\,[0; 2\pi[)$.

Soit X un ensemble sur lequel Γ agit à gauche. Γ agit aussi naturellement à gauche sur $\mathbb{I}$ par $\gamma([a; b[) = [\gamma(a); \gamma(b)[$.

Définition 3.1.1. Soit $I \in \mathbb{I}$ et $\gamma \in \Gamma$. On dit que $F : \mathbb{I} \times X \to \mathbb{C}$ vérifie la proprité $\mathcal{I}(I, \gamma)$ lorsque :

$$\forall x \in X, F(I, x) = F(\gamma(I), \gamma(x)).$$

Dans toute cette section, on prend $F : \mathbb{I} \times X \to \mathbb{C}$ telle que :
– Pour tout (I, γ) tel que F vérifie $\mathcal{I}(I, \gamma)$, F vérifie aussi $\mathcal{I}(J, \gamma)$ pour tout $J \in \mathbb{I}, J \subset I$ (inclusion) ;
– $\forall I, J \in \mathbb{I}, I \sqcup J \in \mathbb{I} \Rightarrow \forall x \in X, F(I \sqcup J, x) = F(I, x) + F(J, x)$ (additivité pour des intervalles contigus) ;
– Si (b_n) est une suite croissante de points de $]a; b[$ qui converge vers b, alors : $\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F([a; b_n[\,, x) = F([a; b[\,, x)$ (continuité).
On dira de $(F(., x))_{x\in X}$ qu'il s'agit d'une *famille de relations*. Ces conditions n'imposent pas que $(F(., x))_{x\in X}$ soit une famille de mesures car elles ne doivent vérifier la propriété d'additivité que pour des intervalles contigus et non disjoints.

Notre but va être de montrer que la connaissance parcellaire de $\mathcal{I}(I, \gamma)$ pour une collection finie de couples (I, γ) bien particulière détermine $\mathcal{I}(I, \gamma)$ pour tout (I, γ). Cette collection finie est donnée par le codage de Bowen-Series (ici supposé à droite) et s'écrit $\{(I_v, \gamma_v) \mid v \in V\}$ avec V l'ensemble des sommets du domaine fondamental à l'origine du codage.

Théorème 3.1.2. *Si F vérifie $\mathcal{I}(I_v, \gamma_v)$ pour tout v, alors elle vérifie $\mathcal{I}(I, \gamma)$ pour tout (I, γ).*

Rappelons que $I_v = \left[a_v^{n_v-1}; a_{r(v)}^{n_{r(v)}-1}\right[$ pour le codage à droite. On notera $A_v = [a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}[$ et $B_v = [a_v^{n_v-2}; a_v^{n_v-1}[$, de sorte que $\gamma_{l(v)}(A_v) = B_{\tau(v)}$. Ces intervalles A_v et B_v sont vides si et seulement si v est un cusp.

Lemme 3.1.3. *Si F vérifie $\mathcal{I}(I_v, \gamma_v)$ pour tout v, alors elle vérifie $\mathcal{I}(A_v, \gamma_{l(v)})$ pour tout v :*

$$\forall v \in V, \forall x \in X, F(A_v, x) = F(B_{\tau(v)}, \gamma_{l(v)}(x)).$$

PREUVE : Soit $\nu(v) = r\sigma^{n_v-1}(v)$. C'est une permutation de V : si $r\sigma^{n_v-1}(v) = r\sigma^{n_w-1}(w)$, alors $v = \sigma^{n_w-1-(n_v-1)}(w)$. v, w sont donc sur la même σ-orbite, d'où $n_v = n_w$ et donc $v = w$.

Posons alors $g_v = \gamma_{\sigma^{n_v-2}(v)} \dots \gamma_v$, de sorte que $g_v(v) = l\nu(v)$. On remarque que $v \in V^\star$,

$$g_v(a_v^{n_v}) = a_{\sigma^{n_v-1}(v)}^{m_v-1} = a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}} \qquad \text{et de même} \qquad g_v(a_v^0) = a_{\nu(v)}^0.$$

On note κ_v le plus petit entier (éventuellement ∞ s'il n'en existe pas) tel que $\nu^{\kappa_v}(v)$ soit un sommet à l'infini du domaine fondamental.

Pour tout v, on définit une suite de points $(x_v^p)_{p\in\mathbb{N}}$ par récurrence croisée :
– $x_v^0 = a_v^{n_v-1}$;
– Si v est un cusp, alors $\forall p, x_v^p = v$;
– Si $v \in V^\star$, alors $\forall p, x_v^{p+1} = g_v^{-1}(x_{\nu(v)}^p)$.

Étape 1. *Si $p \geq \kappa_v$, alors $x_v^p = a_v^{n_v}$.*

Soit $p = q + \kappa_v$ avec $q \geq 0$. Pour simplifier les calculs, on note $\kappa = \kappa_v$ et $v_j = \nu^j(v)$ pour tout entier j. Puisque $v, v_1, \ldots, v_{\kappa-1} \in V^\star$ par minimalité de κ, la définition par récurrence s'applique κ fois à x_v^p et

$$\begin{aligned} x_v^p = x_v^{q+\kappa} = g_v^{-1}(x_{v_1}^{q+\kappa-1}) = \ldots &= g_v^{-1} \ldots g_{v_{\kappa-1}}^{-1}(x_{v_\kappa}^q) \qquad \text{où } x_{v_\kappa}^q = v_\kappa = a_{v_\kappa}^{n_{v_\kappa}} = a_{\nu(v_{\kappa-1})}^{n_{\nu(v_{\kappa-1})}} \\ &= g_v^{-1} \ldots g_{v_{\kappa-2}}^{-1}(a_{v_{\kappa-1}}^{n_{v_{\kappa-1}}}) \qquad \text{où } a_{v_{\kappa-1}}^{n_{v_{\kappa-1}}} = a_{\nu(v_{\kappa-2})}^{n_{\nu(v_{\kappa-2})}} \\ &= \ldots = a_v^{n_v - 1} \end{aligned}$$ □

Étape 2. *Si $1 \leq p < \kappa_v$, alors $x_v^p \in]x_v^{p-1}; a_v^{n_v}[$.*

Montrons ceci par récurrence sur $p \geq 1$:
– Puisque $\kappa_v > 1$, v et $\nu(v)$ sont tous deux dans $V^\star$. Alors, d'après le lemme 1.3.13,

$$x_v^1 = g_v^{-1}\left(a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}-1}\right) \in g_v^{-1}\left(\left]a_{l\nu(v)}^{m_v-2}; a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}} = a_{l\nu(v)}^{m_v-1}\right[\right) = \left]a_v^{n_v-1} = x_v^0; a_v^{n_v}\right[.$$

– Soit maintenant p tel que $2 \leq p+1 < \kappa_v$. Comme $1 \leq p < \kappa_v - 1 = \kappa_{\nu(v)}$, l'hypothèse de récurrence donne que $x_{\nu(v)}^p \in \left]x_{\nu(v)}^{p-1}; a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}}\right[$. Mais $v \in V^\star$ donc

$$x_v^{p+1} = g_v^{-1}(x_{\nu(v)}^p) \in g_v^{-1}\left(\left]x_{\nu(v)}^{p-1}; a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}} = a_{l\nu(v)}^{m_v-1}\right[\right) =]x_v^p; a_v^{n_v}[\,.$$ □

Étape 3. $\lim\limits_{p\to+\infty} x_v^p = a_v^{n_v}$.

Si $\kappa_v < \infty$, alors x_v^p est stationnaire à $a_v^{n_v}$ dès que $p \geq \kappa_v$. On a donc bien convergence vers $a_v^{n_v}$. Supposons maintenant que $\kappa_v = \infty$, c'est-à-dire que $\nu^j(v) \in V^\star$ pour tout j. Le point précédent montre alors que $(x_v^p)_{p\geq 0}$ est une suite monotone bornée qui converge donc vers un $z_v \in]a_v^{n_v-1}; a_v^{n_v}]$. Il reste à montrer que $z_v = a_v^{n_v}$.

Comme ν est une permutation de V, il existe $r_v > 0$ minimal tel que $\nu^{r_v}(v) = v$. Notons alors $G_v = g_{\nu^{r_v-1}} \ldots g_{\nu(v)} g_v$. On a vu que $g_v(a_v^{n_v}) = a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}}$, donc $G_v(a_v^{n_v}) = a_v^{n_v}$. Par un calcul similaire, on peut voir que $G_v(a_v^0) = a_v^0$. Et puisque $g_v(x_v^{p+1}) = x_{\nu(v)}^p$, il vient par passage à la limite que $g_v(z_v) = z_{\nu(v)}$, donc $G_v(z_v) = z_v$. Si $z_v \neq a_v^{n_v}$, G_v fixe trois points distincts de $\mathbb{S}^1$ donc est égal à l'identité. Dans ce cas, $G_v(x_v^0) = x_v^0 = a_v^{n_v-1}$ mais par ailleurs $G_v(x_v^0) = x_v^{r_v} \in]x_v^{r_v-1}; a_v^{n_v}[$ qui ne contient pas $a_v^{n_v-1}$. C'est une contradiction. □

De même, $(y_{\tau(v)}^p)_{p\in\mathbb{N}} = (\gamma_{l(v)}(x_v^p))_p = (\gamma_{\tau(v)}^{-1}(x_v^p))_p$ vérifie :
– $y_v^0 = a_v^{n_v-2}$;
– $\forall p \geq \kappa_v, y_v^p = a_v^{n_v-1}$;
– $\forall p < \kappa_v, y_v^p \in]y_v^{p-1}; a_v^{n_v-1}[$;
– $\lim\limits_{p\to+\infty} y_v^p = a_v^{n_v-1}$.

Pour tout p, on note $A_v^p = [a_v^{n_v-1}; x_v^p[$ et $B_{\tau(v)}^p = \gamma_{l(v)}(A_v^p) = \left]a_{\tau(v)}^{n_v-2}; y_{\tau(v)}^p\right[$.

Étape 4. $\forall v \in V, \forall x \in X, \forall p \geq 0, F(A_v^p, x) = F(B_{\tau(v)}^p, \gamma_{l(v)}(x))$.

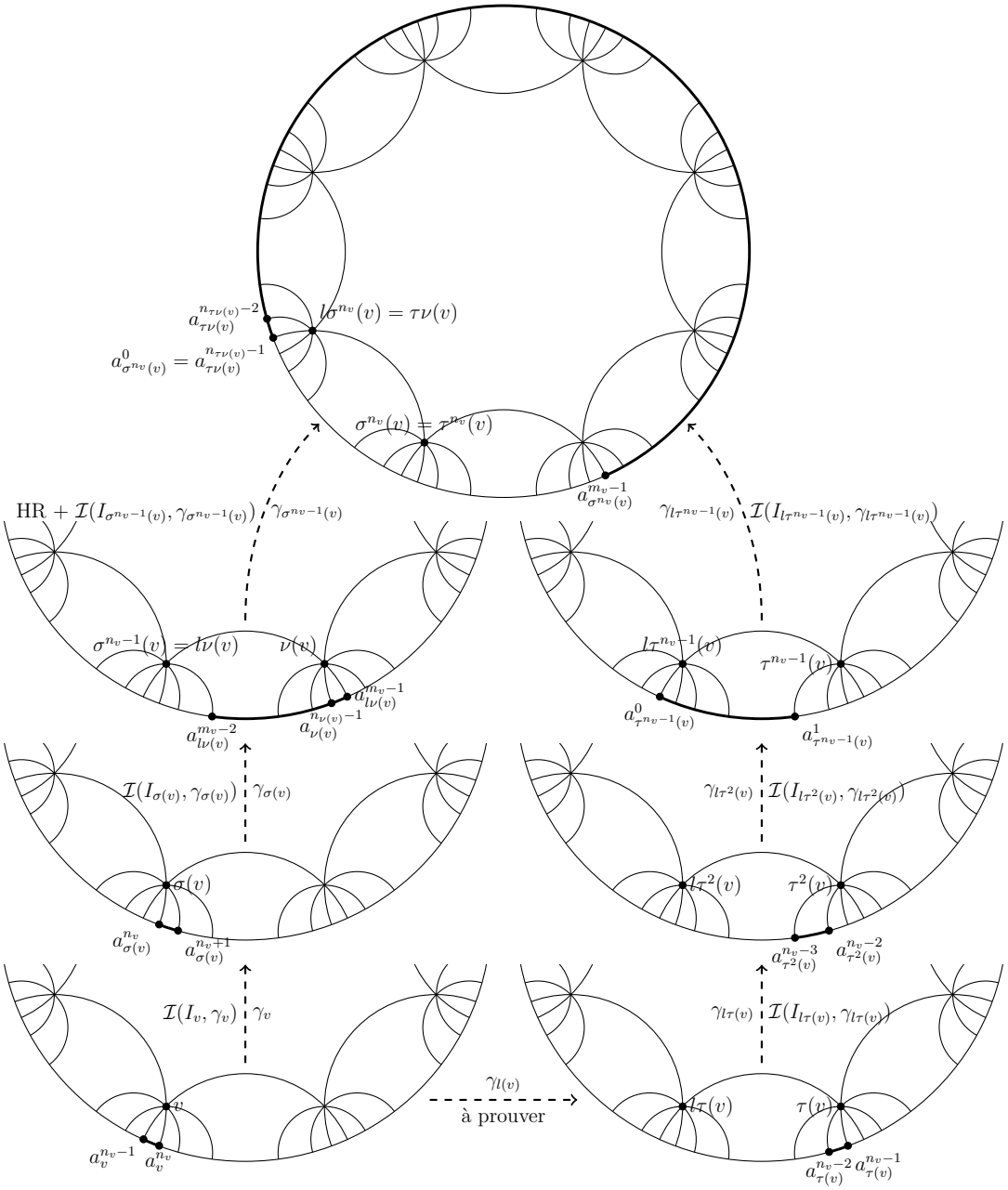


FIGURE 3.1 – Schéma du cœur de la récurrence

Commençons par remarquer que la propriété d'additivité par rapport à des intervalles disjoints implique que

$$\forall x \in X, F(\emptyset, x) = F(\emptyset \sqcup \emptyset, x) = F(\emptyset, x) + F(\emptyset, x)$$

et donc que $F(\emptyset, x) = 0$ pour tout $x \in X$. Ainsi, si v est un cusp, alors $\tau(v)$ aussi, et on a alors $A_v^p = B_{\tau(v)}^p = \emptyset$ pour tout p, ce qui prouve l'égalité.

On prend maintenant $v \in V^\star$. Démontrons l'égalité par récurrence sur $p \geq 0$.

– Si $p = 0$, $B_{\tau(v)}^0 = \emptyset = \gamma_{l(v)}(A_v^0)$ et l'égalité est vérifiée puisque $F(\emptyset, x) = 0$.

– Supposons que la propriété soit vérifiée au rang $p \geq 0$ pour tout $x \in X$ et $v \in V$.

Soit $x \in X$ fixé. Comme $\gamma_{\sigma^j(v)} \dots \gamma_v(A_v^{p+1}) \subset I_{\sigma^{j+1}(v)}$ pour tout $0 \leq j < n_v - 2$,

$$\begin{aligned} F(A_v^{p+1}, x) &= F(\gamma_v(A_v^{p+1}), \gamma_v(x)) = F(\gamma_{\sigma(v)}\gamma_v(A_v^{p+1}), \gamma_{\sigma(v)}\gamma_v(x)) \\ &= \dots \\ &= F(g_v(A_v^{p+1}), g_v(x)). \end{aligned}$$

Or

$$g_v(A_v^{p+1}) = g_v(\left[a_v^{n_v-1}; x_v^{p+1}\right[) = \left[a_{l\nu(v)}^{m_v-2}; x_{\nu(v)}^{p}\right[= \left[a_{l\nu(v)}^{m_v-2}; a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}-1}\right[\sqcup A_{\nu(v)}^{p}.$$

Notons $L_{l\nu(v)}$ ce premier intervalle ; comme lui et $A_{\nu(v)}^p$ sont contigus, il vient :

$$F(A_v^{p+1}, x) = F(L_{l\nu(v)}, g_v(x)) + F(A_{\nu(v)}^p, g_v(x)).$$

Mais puisque $L_{l\nu(v)} \subset I_{l\nu(v)}$ d'une part, et par hypothèse de récurrence d'autre part,

$$F(A_v^{p+1}, x) = F(\gamma_{l\nu(v)}(L_{l\nu(v)}), \gamma_{l\nu(v)}g_v(x)) + F(\gamma_{l\nu(v)}(A_{\nu(v)}^p), \gamma_{l\nu(v)}g_v(x)).$$

On peut alors rassembler ces deux intervalles contigus

$$\gamma_{l\nu(v)}(L_{l\nu(v)}) \sqcup \gamma_{l\nu(v)}(A_{\nu(v)}) = \gamma_{l\nu(v)}g_v(\left[a_v^{n_v-1}; x_v^{p+1}\right[) = \left[a_{\sigma^{n_v}(v)}^{m_v-1}; \gamma_{l\nu(v)}g_v(x_v^{p+1})\right[,$$

de sorte que

$$F(A_v^{p+1}, x) = F\left(\left[a_{\sigma^{n_v}(v)}^{m_v-1}; \gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}g_v(x_v^{p+1})\right[, \gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}g_v(x)\right).$$

Par ailleurs, $\gamma_{l\tau^j(v)} \dots \gamma_{l\tau(v)}(B_{\tau(v)}^{p+1}) \subset I_{l\tau^{j+1}(v)}$ pour tout $0 \leq j < n_v - 2$, donc :

$$\begin{aligned} F(B_{\tau(v)}^{p+1}, \gamma_{l(v)}(x)) &= F(\gamma_{l\tau(v)}\gamma_{l(v)}(B_{\tau(v)}^{p+1}), \gamma_{l\tau(v)}\gamma_{l(v)}(x)) \\ &= \dots \\ &= F(\gamma_{l\tau^{n_v-1}(v)} \dots \gamma_{l\tau(v)}(B_{\tau(v)}^{p+1}), \gamma_{l\tau^{n_v-1}(v)} \dots \gamma_{l(v)}(x)) \end{aligned}$$

Mais comme $\gamma_{l\sigma(v)} = \gamma_v^{-1}$,

$$\gamma_{l\tau^{n_v-1}(v)} \dots \gamma_{l(v)} = \gamma_{l\sigma^{n_v+1}(v)} \dots \gamma_{l\sigma^{m_v}(v)} = \gamma_{\sigma^{n_v}(v)}^{-1} \dots \gamma_{\sigma^{m_v-1}(v)}^{-1} = (\gamma_{\sigma^{m_v-1}(v)} \dots \gamma_{\sigma^{n_v}(v)})^{-1}$$

et la relation du groupe codée dans la σ-orbite de v donne que

$$(\gamma_{l\tau^{n_v-1}(v)} \dots \gamma_{l(v)})^{-1}(\gamma_{\sigma^{n_v-1}}g_v) = \gamma_{\sigma^{m_v-1}(v)} \dots \gamma_{\sigma^{n_v}(v)}\gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}\gamma_{\sigma^{n_v-2}(v)} \dots \gamma_v = 1,$$

c'est-à-dire que $\gamma_{l\tau^{n_v-1}(v)} \dots \gamma_{l(v)} = \gamma_{\sigma^{n_v-1}}g_v$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(B_{\tau(v)}^{p+1}, \gamma_{l(v)}(x)) &= F(\gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}g_v\gamma_{l(v)}^{-1}(B_{\tau(v)}^{p+1}), \gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}g_v(x)) \\ &= F(\gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}g_v(A_v^{p+1}), \gamma_{\sigma^{n_v-1}(v)}g_v(x)) \\ &= F(A_v^{p+1}, x) \end{aligned}$$ □

Puisque $\lim_{p\to+\infty} x_v^p = a_v^{n_v}$ et que $\lim_{p\to+\infty} y_{\tau(v)}^p = a_{\tau(v)}^{n_v-1}$, la continuité de F par rapport aux intervalles montre alors que pour tous $v \in V$ et $x \in X$,

$$F(A_v, x) = \lim_{p\to+\infty} F(A_v^p, x) = \lim_{p\to+\infty} F(B_{\tau(v)}^p, \gamma_{l(v)}(x)) = F(B_{\tau(v)}, \gamma_{l(v)}(x)).$$ ■

Lemme 3.1.4. *Si F vérifie $\mathcal{I}(I_v, \gamma_v)$ pour tout v, alors elle vérifie $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1, \gamma_v)$ pour tout v :*

$$\forall v \in V, \forall x \in X, F(\mathbb{S}^1, x) = F(\mathbb{S}^1, \gamma_v(x)).$$

PREUVE : Soient $x \in X$ et $v \in V$ fixés. On rappelle que $\gamma_{l\sigma(v)} = \gamma_v^{-1}$.

On peut décomposer $\mathbb{S}^1 = I_v \sqcup {}^cI_v$, avec ${}^cI_v = \gamma_v^{-1}(I_{l\sigma(v)}) \sqcup B_v \sqcup A_{r(v)}$, d'où :

$$F(\mathbb{S}^1, x) = F(I_v, x) + F(\gamma_v^{-1}(I_{l\sigma(v)}), x) + F(B_v, x) + F(A_{r(v)}, x).$$

D'autre part, $\mathbb{S}^1 = I_{l\sigma(v)} \sqcup {}^cI_{l\sigma(v)}$, avec ${}^cI_{l\sigma(v)} = \gamma_v(I_v) \sqcup B_{l\sigma(v)} \sqcup A_{\sigma(v)}$, soit :

$$\begin{aligned} F(\mathbb{S}^1, \gamma_v(x)) &= F(I_{l\sigma(v)}, \gamma_v(x)) + F(\gamma_v(I_v), \gamma_v(x)) + F(B_{l\sigma(v)}, \gamma_v(x)) + F(A_{\sigma(v)}, \gamma_v(x)) \\ &= F(\gamma_v^{-1}(I_{l\sigma(v)}), x) + F(I_v, x) + F(B_{l\sigma(v)}, \gamma_v(x)) + F(A_{\sigma(v)}, \gamma_v(x)). \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 3.1.3,

$$\begin{aligned} F(B_{l\sigma(v)}, \gamma_v(x)) &= F(A_{\sigma l\sigma(v)}, x) = F(A_{r(v)}, x) \\ F(A_{\sigma(v)}, \gamma_v(x)) &= F(B_{\tau\sigma(v)}, \gamma_{l\sigma(v)}\gamma_v(x)) = F(B_v, x) \end{aligned}$$

Par conséquent, $F(\mathbb{S}^1, x) = F(\mathbb{S}^1, \gamma_v(x))$. ■

On peut maintenant achever la démonstration du théorème. D'après le lemme 3.1.4, F vérifie $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1, \gamma_v)$ pour tout v Elle vérifie donc $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1, \gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ puisque les $(\gamma_v)_{v\in V}$ engendrent Γ. La propriété d'inclusion termine la preuve.

3.2 Dynamique du codage de Bowen-Series

Nous allons appliquer le théorème 3.1.2 de la section précédente à la transformation de Bowen-Series pour en déduire ses propriétés dynamiques. Elles peuvent principalement se classer en deux catégories :
– celles directement imputées à la propriété d'orbite-équivalence qui sont de natures plutôt algébriques et combinatoires ;
– celles qui nécessitent un argument de contraction-dilatation.
Dans le cas de ces dernières, on devra supposer que les côtés du domaine fondamental sont les cercles isométriques par rapport à un certain point de l'espace hyperbolique des générateurs du groupe qui leurs sont associés.

3.2.1 Orbite-équivalence

Notre premier objectif est démontrer le théorème énoncé par Series dans [BS79]. On constatera au passage qu'il n'y a pas de paires exceptionneles à considérer, comme l'avait remarqué Morita dans [Mor97].

Le moyen d'y parvenir est d'appliquer le théorème 3.1.2 en faisant le choix le plus simple possible de X et $F : \mathbb{S}^1$ et la propriété d'orbite-équivalence restreinte à un intervalle.

Lemme 3.2.1.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \forall \gamma \in \Gamma, (\exists p,q \geq 0, T^p(x) = T^q(y)) \Leftrightarrow (\exists p,q \geq 0, T^p(\gamma(x)) = T^q(y)) \,.$$

PREUVE : Fixons $y \in \mathbb{S}^1$. Pour $x \in \mathbb{S}^1$ et $I \in \mathbb{I}$ posons

$$F(I,x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \text{ et } \exists p,q \geq 0, T^p(x) = T^q(y) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

F satisfait clairement aux propriétés d'inclusion et d'additivité pour des intervalles contigus. Quant à la propriété de continuité, elle est vérifiée car lorsque (b_n) tend vers b en croissant, $x \in [a;b[$ si et seulement si il existe N tel que $x \in [a;b_n[$ pour tout $n \geq N$.

Reste à prouver que $F(\gamma_v(I_v), \gamma_v(x)) = F(I_v, x)$ pour tout v. Soit donc $x \in I_v$ tel que $T^p(x) = T^q(y)$. Alors $\gamma_v(x) \in \gamma_v(I_v)$ et, puisque $\gamma_v(x) = T(x)$,

$$T^p(\gamma_v(x)) = T^{p+1}(x) = T^{q+1}(y).$$

D'autre part, si $\gamma_v(x) \in \gamma_v(I_v)$ vérifie $T^p(\gamma_v(x)) = T^q(y)$, alors $x \in I_v$ et

$$T^{p+1}(x) = T^p\gamma_v(x) = T^q(y).$$

On peut alors appliquer le théorème 3.1.2, et il vient :

$$\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall \gamma \in \Gamma, F(\mathbb{S}^1, \gamma(x)) = F(\mathbb{S}^1, x)$$

ce que l'on traduit par

$$\forall x,y \in \mathbb{S}^1, \forall \gamma \in \Gamma, (\exists p,q \geq 0, T^p(x) = T^q(y)) \Leftrightarrow (\exists p,q \geq 0, T^p(\gamma(x)) = T^q(y)) \,. \qquad \blacksquare$$

Puisque T est donnée sur chaque I_v par un générateur de Γ, on peut s'intéresser à $\gamma^k[x]$ l'élément de Γ qui définit T^k en x :

Définition 3.2.2. Si $x \in \mathbb{S}^1$ et $k \geq 0$, on définit récursivement $\gamma^k[x] \in \Gamma$ par :

$$\gamma^0[x] = \text{id};$$
$$\gamma^{k+1}[x] = \gamma^k[T(x)]\gamma_v \text{ si } x \in I_v.$$

On voit aisément que $\gamma^k[x]$ vérifie ces propriétés :

Proposition 3.2.3. *Si $x \in \mathbb{S}^1$ et $p, q \geq 0$,*
(i) $\gamma^k[x](x) = T^k(x)$;
(ii) $\gamma^{p+q}[x] = \gamma^p[\gamma^q[x](x)]\gamma^q[x]$.

En spécialisant ce lemme, on peut maintenant démontrer l'orbite-équivalence de T et du groupe Γ :

Théorème 3.2.4 (Series)**.** *T est orbite-équivalent avec le groupe Γ, i.e.*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, (\exists \gamma \in \Gamma, y = \gamma(x)) \Leftrightarrow (\exists p, q \geq 0, T^p(x) = T^q(y)) .$$

PREUVE : Si $T^p(x) = T^q(y)$, alors $\gamma^p[x](x) = \gamma^q[y](y)$ donc $y = \gamma(x)$ avec $\gamma = \gamma^q[y]^{-1}\gamma^p[x]$ un élément du groupe Γ.

Réciproquement, s'il existe γ tel que $y = \gamma(x)$, $T^0(\gamma(x)) = T^0(y)$ et le lemme 3.2.1 donne alors l'existence de $p, q \geq 0$ tels que $T^p(x) = T^q(y)$. ■

Le théorème de Series est en fait équivalent au lemme 3.2.1. En effet, prenons x, y dans $\mathbb{S}^1$, $\gamma \in \Gamma$ et supposons qu'il existe $p, q \geq 0$ tels que $T^p(x) = T^q(y)$. Si $x' = \gamma(x)$, le théorème nous dit qu'il existe $p', q' \geq 0$ tels que $T^{p'}(x) = T^{q'}(x')$. Quitte à augmenter p et q ou p' et q', on peut supposer que $p = p'$. Alors $T^{q'}(\gamma(x)) = T^{q'}(x') = T^{p'}(x) = T^p(x) = T^q(y)$.

3.2.2 Points pré-périodiques

Les points pré-périodiques sont les points qui sont préimages d'un point périodique de T. On va montrer que les préimages d'un unique point périodique sont denses dans $\mathbb{S}^1$, et que les points pré-périodiques pris tous ensembles sont exactement les points fixes des éléments de $\Gamma \setminus \{\text{id}\}$. Pour ce second point, on aura d'abord besoin de démontrer une version plus forte du théorème de Series.

Donnons-nous un certain nombre de notations pour les ensembles que nous serons amenés à manipuler :
$-$ $\text{Fix}(\Gamma) = \{x \in \mathbb{S}^1 \mid \exists \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}, \gamma(x) = x\}$ est l'ensemble des points fixes des éléments non triviaux de Γ. C'est un ensemble Γ-invariant et donc dense pour un groupe de premier type.
$-$ $\text{Per}(T) = \left\{x \in \mathbb{S}^1 \mid \exists k \geq 1, T^k(x) = x\right\}$ est l'ensemble des points périodiques pour T.
$-$ $\text{Per}_n(T) = \left\{x \in \mathbb{S}^1 \mid T^n(x) = x \text{ et } T^k(x) \neq x \text{ pour } 0 < k < n\right\}$ est l'ensemble des points T-périodiques de période exactement n.
$-$ $\mathcal{T}(y) = \{x \in \mathbb{S}^1 \mid \exists n \geq 0, T^n(x) = y\}$ est l'ensemble de toutes les préimages de y par T.
$-$ $\{x \in \mathbb{S}^1 \mid \exists p \geq 0, T^p(x) \in \text{Per}(T)\}$ est alors l'ensemble de tous les points pré-périodiques de T.

La propriété d'orbite-équivalence nous permet de décrire parfaitement les préimages d'un point périodique :

Théorème 3.2.5. *Si $y \in Per(T)$, alors $\mathcal{T}(y) = \Gamma y$ et est donc dense dans $\mathbb{S}^1$.*

PREUVE : On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $T^k(y) = y$.

Soit $\gamma \in \Gamma$. D'après le théorème de Series, il existe $p, q \geq 0$ tels que $T^p(\gamma(y)) = T^q(y)$. Quitte à augmenter p et q, on peut supposer que k divise q, de sorte que $T^q(y) = y$. Donc $T^p(\gamma(y)) = y$ et $\gamma(y) \in \mathcal{T}(y)$.

Réciproquement, si $T^p(x) = y$ pour un certain $p \geq 0$, alors $\gamma^p[x](x) = y$ i.e. $x = \gamma(y)$ pour $\gamma = \gamma^p[x]^{-1} \in \Gamma$.

Finalement, l'adhérence de $\mathcal{T}(y) = \Gamma y$ dans $\mathbb{S}^1$ est un fermé non vide Γ-invariant. Par conséquent, elle contient l'ensemble limite de Γ, c'est-à-dire $\mathbb{S}^1$ tout entier pour un groupe du premier type. Donc $\overline{\mathcal{T}(y)} = \mathbb{S}^1$. ■

À noter que ce théorème possède une réciproque partielle : si $\mathcal{T}(y) = \Gamma y$, alors $y \in \text{Per}(T)$. En effet, $T(y) \in \Gamma y = \mathcal{T}(y)$ donc il existe $p \geq 0$ tel que $T^{p+1}(y) = T^p(T(y)) = y$. Par contre, et comme on le verra plus loin, $\mathcal{T}(y)$ peut être dense dans $\mathbb{S}^1$ sans que y soit périodique.

Le fait que les préimages d'un point périodique soient denses impose qu'elles puissent revenir arbitrairement près du point de départ. Ceci a pour conséquence d'interdire aux mots du codage de revenir en l'identité.

Proposition 3.2.6. $\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall k \geq 1, \gamma^k[x] \neq id$.

PREUVE : Si $T^k(x) \neq x$, alors nécessairement $\gamma^k[x] \neq \text{id}$. Soit maintenant x tel que $T^k(x) = x$ avec $k \geq 1$ minimal, et supposons que $\gamma^k[x] = \text{id}$.

Comme les I_v sont tous semi-ouverts (à droite), il existe un demi-voisinage à droite U de x (i.e. de la forme $[x; x + \varepsilon[$) tel que pour tout $j \in [\![1\,;\,k]\!]$, $T^j{}_{/U} = \gamma^j[x]$.

Or, d'après le théorème 3.2.5, les préimages du point T-périodique x sont denses dans $\mathbb{S}^1$. Il existe donc une suite (x_n) de points de U tous distincts de x, convergeant vers x et telle que :

$$\forall n \geq 0, \exists p_n \geq 0, T^{p_n}(x_n) = x.$$

Comme $x_n \in U$ et $\gamma^k[x] = \text{id}$, $T^k(x_n) = \gamma^k[x](x_n) = x_n$. On peut donc supposer que $p_n \leq k - 1$ pour tout n. D'autre part, $x_n \neq x$ donc $1 \leq p_n$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que p_n est constant et égal à $p \in [\![1\,;\,k-1]\!]$. Mais puisque (x_n) converge vers x,

$$T^p(x) = \gamma^p[x](x) = \lim_{n\to+\infty} \gamma^p[x](x_n) = \lim_{n\to+\infty} T^p(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x = x$$

avec $1 \leq p < k$. Cela contredit l'hypothèse de minimalité de k. ■

Une manière de reformuler ce résultat est de dire que pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, l'application qui à $p \in \mathbb{N}$ associe $\gamma^p[x] \in \Gamma$ est injective.

Corollaire 3.2.7. *Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, $\gamma^p[x] = \gamma^q[x]$ si et seulement si $p = q$.*

PREUVE : Quitte à les échanger, on peut supposer $p \geq q$. Il vient alors

$$\gamma^{p-q}[\gamma^q[x](x)]\gamma^q[x] = \gamma^p[x] = \gamma^q[x]$$

donc $\gamma^{p-q}[\gamma^q[x](x)] = \text{id}$. Mais ceci ne peut se produire que si $p = q$. ■

Tous les mots du codage de longueur non nulle ont au plus deux points fixes, ce qui interdit d'avoir beaucoup de points périodiques.

Proposition 3.2.8.
(i) Pour tout $n \geq 1$, $Per_n(T)$ est fini et inclus dans $Fix(\Gamma)$.
(ii) $Per(T) \subset Fix(\Gamma)$ et est dénombrable.

PREUVE : Si $x \in \text{Per}_n(T)$, alors $\gamma^n[x](x) = T^n(x) = x$ où $n \geq 1$ impose que $\gamma^n[x] \neq \text{id}$ par la proposition 3.2.6. Donc x est fixé par un élément non trivial de Γ, ce qui est bien la définition de $x \in \text{Fix}(\Gamma)$.

Tout $x \in \text{Per}_n(T)$ est ainsi point fixe d'un mot du codage non trivial de longueur exactement n. Comme la partition de Markov définissant le codage est finie, il n'existe qu'un nombre fini de tels mots. Or les isométries non triviales possèdent au plus 2 points fixes à l'infini, donc $\text{Per}_n(T)$ doit être fini.

$\text{Per}(T)$ est alors inclus dans $\text{Fix}(\Gamma)$ et dénombrable comme union dénombrable d'ensemble finis eux-mêmes sous-ensembles de $\text{Fix}(\Gamma)$. ■

Ceci nous permet de montrer la première implication du résultat visé par cette section, i.e. que les points pré-périodiques sont des points fixes d'éléments de Γ.

Lemme 3.2.9. $\{x \in \mathbb{S}^1 \mid \exists p \geq 0, T^p(x) \in Per(T)\} \subset Fix(\Gamma)$.

PREUVE : $\{x \in \mathbb{S}^1 \mid \exists p \geq 0, T^p(x) \in \text{Per}(T)\}$ peut aussi se voir comme la réunion des $\mathcal{T}(y)$ pour y parcourant $\text{Per}(T)$. Si $y \in \text{Per}(T)$, $y \in \text{Fix}(\Gamma)$ par la proposition 3.2.8. Mais $\text{Fix}(\Gamma)$ est Γ-invariant donc $\mathcal{T}(y) = \Gamma y \subset \text{Fix}(\Gamma)$. ■

La propriété d'orbite-équivalence est insuffisante pour prouver l'inclusion réciproque, car si γ fixe x alors $T^0(x) = T^0(\gamma(x))$. On ne peut donc pas dire a priori que $p \neq q$ et donc que $T^p(x)$ ou $T^q(x)$ est périodique. Il va nous falloir une propriété d'orbite-équivalence plus forte qui porte sur les mots du codage eux-mêmes et non seulement sur les images de points. On peut trouver cette propriété évoquée dans la remarque 2.2 de [Mor97].

Tout comme dans notre preuve du théorème de Series, il faut trouver le bon espace X soumis à l'action de Γ et la bonne relation F pour pouvoir appliquer judicieusement le théorème 3.1.2. Si on avait fait précédemment le plus simple des choix en prenant $X = \mathbb{S}^1$, il faut ici être un peu plus subtil pour préserver l'information accumulée en appliquant successivement les générateurs du codage. Le bon espace est $X = \mathbb{S}^1 \times \Gamma$.

Lemme 3.2.10. $\forall x \in \mathbb{S}^1, \forall g \in \Gamma$,

$$\forall \gamma \in \Gamma, (\exists p, q \geq 0, \gamma^p[x] = \gamma^q[g(x)]g) \Leftrightarrow \left(\exists p, q \geq 0, \gamma^p[\gamma(x)] = \gamma^q[g(x)]g\gamma^{-1}\right).$$

PREUVE : On munit $X = \mathbb{S}^1 \times \Gamma$ de l'action à gauche de Γ donnée par $\gamma \star (x, g) = (\gamma(x), g\gamma^{-1})$. Pour $(x, g) \in X$ et $I \in \mathcal{I}$, on pose

$$F(I, (x, g)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \text{ et } \exists p, q \geq 0, \gamma^p[x] = \gamma^q[g(x)]g \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

F vérifie clairement les propriétés d'inclusion, d'additivité pour des intervalles contigus et de continuité pour les mêmes raisons qu'au lemme 3.2.1. Pour appliquer le théorème 3.1.2, il reste à prouver que :

$$\forall v \in V, F(\gamma_v(I_v), (\gamma_v(x), g\gamma_v^{-1})) = F(I_v, (x, g)).$$

Supposons d'abord que $F(I_v,(x,g))=1$, c'est-à-dire que $x\in I_v$ et qu'il existe $p,q\geq 0$ tels que $\gamma^p[x]=\gamma^q[g(x)]g$. On note $y=\gamma_v(x)=\gamma^1[x](x)\in\gamma_v(I_v)$ et $\tilde{g}=\gamma_v\star g=g\gamma_v^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}\gamma^p[y]=\gamma^p[\gamma_v(x)]\gamma_v\gamma_v^{-1}&=\gamma^{p+1}[x]\gamma_v^{-1}\\&=\gamma^1[\gamma^p[x](x)]\gamma^p[x]\gamma_v^{-1}\\&=\gamma^1[\gamma^q[g(x)]g(x)]\gamma^q[g(x)]g\gamma_v^{-1}\\&=\gamma^{q+1}[g(x)]g\gamma_v^{-1}=\gamma^{q+1}[\tilde{g}(y)]\tilde{g}.\end{aligned}$$

Donc on a bien que $F(\gamma_v(I_v),\gamma_v\star(x,g))=F(\gamma_v(I_v),(y,\tilde{g}))=1$.

Réciproquement, on suppose que $F(\gamma_v(I_v),\gamma_v\star(x,g))=F(\gamma_v(I_v),(y,\tilde{g}))=1$, c'est-à-dire que $y\in\gamma_v(I_v)$ et qu'il existe $p,q\geq 0$ tels que $\gamma^p[y]=\gamma^q[\tilde{g}(y)]\tilde{g}$. Alors $x=\gamma_v^{-1}(y)\in I_v$, $g=\tilde{g}\gamma_v$, $\tilde{g}(y)=g\gamma_v^{-1}(\gamma_v(x))=g(x)$ et :

$$\gamma^{p+1}[x]=\gamma^p[\gamma^1[x](x)]\gamma^1[x]=\gamma^p[y]\gamma_v=\gamma^q[\tilde{g}(y)]\tilde{g}\gamma_v=\gamma^q[g(x)]g.$$

Donc $F(I_v,(x,g))=1$.

On conclut en appliquant le théorème 3.1.2, tout en remarquant que

$$(\gamma\star g)(\gamma(x))=g\gamma^{-1}\gamma(x)=g(x).$$ ■

On est alors en mesure d'énoncer le théorème d'orbite-équivalence forte.

Théorème 3.2.11. *Pour tous $x\in\mathbb{S}^1$ et $\gamma\in\Gamma$, il existe $p,q\geq 0$ tels que $\gamma^p[x]=\gamma^q[\gamma(x)]\gamma$.*

PREUVE : On a toujours $\gamma^0[x]=\mathrm{id}=\gamma^0[\mathrm{id}(x)]\mathrm{id}$. Le lemme 3.2.10 montre alors qu'il existe $p,q\geq 0$ tels que $\gamma^p[\gamma(x)]=\gamma^q[\mathrm{id}(x)]\mathrm{id}\gamma^{-1}=\gamma^q[x]\gamma^{-1}$. Il suffit alors de faire passer le γ^{-1} de l'autre côté et d'échanger p et q. ■

Nous avons maintenant l'outil nécessaire pour voir que les points pré-périodiques (ou encore de T-orbite finie) sont exactement les points fixes d'éléments non triviaux de Γ.

Théorème 3.2.12. $\{x\in\mathbb{S}^1\mid\exists p\geq 0, T^p(x)\in \mathit{Per}(T)\}=\mathit{Fix}(\Gamma)$.

PREUVE : Une inclusion a déjà été prouvée, il reste à montrer l'autre. Soit donc $x\in\mathbb{S}^1$ tel qu'il existe $\gamma\in\Gamma\setminus\{\mathrm{id}\}$ pour lequel $\gamma(x)=x$. D'après le théorème 3.2.11, il existe $p,q\geq 0$ tels que $\gamma^p[x]=\gamma^q[x]\gamma$. Puisque $\gamma\neq\mathrm{id}$, $p\neq q$; et quitte à remplacer γ par γ^{-1} on peut supposer que $p>q$. Notons $k=p-q>0$ et $y=T^q(x)=\gamma^q[x](x)$. Il vient alors :

$$T^k(y)=\gamma^k[y](y)=\gamma^{p-q}[\gamma^q[x](x)](\gamma^q[x](x))=\gamma^p[x](x)=\gamma^q[x]\gamma(x)=\gamma^q[x](x)=y.$$

Donc y est T-périodique et $x\in\mathcal{T}(y)$. ■

À chaque point pré-périodique, on peut naturellement associer l'orbite périodique sur laquelle il finit par cycler. On démontrera plus loin que les orbites périodiques hyperboliques sont en bijection avec les classes de conjugaison d'isométries hyperboliques primitives de Γ.

3.2.3 Densité des préimages et densité des points périodiques

On vient de démontrer par un argument essentiellement algébrique que les préimages d'un point T-périodiques sont denses dans le cercle. Nous allons déterminer à quelle condition cela est aussi le cas pour tous les autres points de $\mathbb{S}^1$. Dans le cas d'un groupe Γ cocompact, il est élémentaire de vérifier que les préimages de tout point sont denses car T^2 est alors strictement dilatante en tout point, donc les images inverses d'intervalles se contractent rapidement et uniformément. Nous avons cependant choisi de considérer Γ cofini (à quelques exceptions près), donc cette argument n'est plus applicable. On le remplacera par le lemme 3.2.13.

On supposera dans cette sous-section que le domaine fondamental est tel qu'il existe un point p, nécessairement à l'intérieur de $\mathcal{D}$, fixé par aucune isométrie de Γ, et pour lequel $|T'|_p \geq 1$. Pour toute signature de groupe fuchsien, on a vu qu'il existait un groupe et un domaine qui vérifiaient ces propriétés. On munit $\mathbb{S}^1$ de d la distance de Gromov basée en p, et on notera $|\gamma'(x)| = |\gamma'(x)|_p$.

Lemme 3.2.13. *Soit U un sous-ensemble d'un intervalle I_v^k de la partition de Markov respectée par T. Soient $x \in U$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de points de $\mathbb{S}^1$ tels que $x_0 = x$ et $T(x_n) = x_{n-1}$. Posons $\gamma_n = \gamma^1[x_n]$, $U_0 = U$ et $U_n = \gamma_n^{-1}(U_{n-1})$. Alors :*
(i) Pour tout $n \geq 0$, $x_n \in U_n$ et $U_n \subset I_w^l$ l'unique intervalle de la partition contenant x_n ;
(ii) $\forall y \in U_n, \forall k \in [\![0\,;\, n]\!], \gamma^k[y] = \gamma^k[x_n]$ et $T^k(y) \in U_{n-k}$;
(iii) $(\mathrm{diam}(U_n))_{n\geq 0}$ décroit vers 0.

PREUVE : (i) : On sait déjà par hypothèse que $U_0 = U \subset I_v^k$ avec $x_0 = x \in U_0 \cap I_v^k$. Supposons donc la propriété vérifiée au rang n, c'est-à-dire que $x_n \in U_n \subset I_w^l$. Tout d'abord, $x_{n+1} = \gamma^1[x_{n+1}]^{-1}(x_n) = \gamma_n^{-1}(x_n) \in \gamma_n^{-1}(U_n) = U_{n+1}$. Si $x_{n+1} \in I_{w'}^{l'}$, alors :

$$x_n = \gamma_{n+1}(x_{n+1}) \in \gamma_{n+1}(I_{w'}^{l'}) = \gamma^1[x_{n+1}](I_{w'}^{l'}) = T(I_{w'}^{l'}).$$

Donc $T(I_{w'}^{l'}) \cap I_w^l \neq \emptyset$. Par propriété de Markov, $I_w^l \subset T(I_{w'}^{l'}) = \gamma_{n+1}(I_{w'}^{l'})$ et il vient :

$$U_{n+1} = \gamma_{n+1}^{-1}(U_n) \subset \gamma_{n+1}^{-1}(I_w^l) \subset I_{w'}^{l'}.$$

(ii) : Le deuxième point est une conséquence immédiate du premier.

(iii) : Notons $d_n = \mathrm{diam}(U_n)^2$, et $I_{w_n}^{k_n}$ l'intervalle de la partition qui contient U_n. Lorsque $u \in U_{n+1}$, le second point assure que

$$\gamma_{n+1}(u) = \gamma^1[x_{n+1}](u) = \gamma^1[u](u) = T(u),$$

donc $|\gamma'_{n+1}(u)| = |T'(u)| \geq 1$. Ainsi on a pour tout couple de points $u, v \in U_{n+1}$:

$$d_n \geq d^2(\gamma_{n+1}(u), \gamma_{n+1}(v)) = |\gamma'_{n+1}(u)||\gamma'_{n+1}(v)|d^2(u,v) \geq d^2(u,v).$$

On en déduit par passage à la borne supérieure que $d_n \geq d_{n+1} \geq 0$. La suite $(d_n)_{n\geq 0}$ est décroissante minorée par 0 : elle converge vers $\delta \geq 0$.

Supposons par l'absurde que $\delta > 0$, et restreignons-nous d'abord au cas où U est un intervalle semi-ouvert (à droite) $[u_0; v_0[$. Si on construit $(u_n), (v_n)$ par récurrence en posant $u_{n+1} = \gamma_{n+1}^{-1}(u_n)$ et $v_{n+1} = \gamma_{n+1}^{-1}(v_n)$, il est clair que $U_n = [u_n; v_n[$. D'autre part, comme $p \in \mathcal{D}$ est dans le demi-espace gauche délimité par les extrémités de $I_{w_n}^{k_n}$, $\mathrm{diam}(U_n) = d(u_n, v_n)$ et :

$$1 \leq |\gamma'_n(u_n)||\gamma'_n(v_n)| = \frac{d^2(\gamma_n(u_n), \gamma_n(v_n))}{d^2(u_n, v_n)} = \frac{d^2(u_{n-1}, v_{n-1})}{d^2(u_n, v_n)} = \frac{d_{n-1}}{d_n} \to 1$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$1 \leq |\gamma_n'(u_n)||\gamma_n'(v_n)| \leq 1 + \varepsilon.$$

Ainsi $1 \leq |\gamma_n'(u_n)| \leq \dfrac{1+\varepsilon}{|\gamma_n'(v_n)|} \leq 1 + \varepsilon$ et de même $1 \leq |\gamma_n'(v_n)| \leq 1 + \varepsilon$.

On pose $\sigma(\gamma) = \{x \in \mathbb{S}^1 \mid |\gamma'(x)| = 1\}$. Comme γ_n ne peut être un elliptique centré en p, $\sigma(\gamma_n)$ possède exactement deux éléments. De plus, γ_n ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs car il est donné par un des générateurs du groupe associé à un des côtés du domaine fondamental. Par continuité des $|\gamma_v'|$ pour $v \in V$, il existe donc $\alpha(\varepsilon) > 0$ tel que :
(i) $\forall n, \forall s \in \sigma(\gamma_n), \forall x \in B(s, \alpha(\varepsilon)), 1 - \varepsilon \leq |\gamma_n'(x)| \leq 1 + \varepsilon$;
(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = 0$.
Donc pour $n \geq N$, $u_n, v_n \in I_{w_n}^{k_n} \cap \bigcup_{s \in \sigma(\gamma_n)} B(s, \alpha(\varepsilon))$. Quitte à diminuer ε (ce qui augmente N), on peut supposer que :
(i) $2\alpha(\varepsilon) < \sqrt{\delta}$;
(ii) $\forall n \geq N, B(s_1, \alpha(\varepsilon)) \cap B(s_2, \alpha(\varepsilon)) = \emptyset$ avec $s_1, s_2 \in \sigma(\gamma_n)$;
(iii) $\forall n \geq N, B(s, \alpha(\varepsilon)) \cap \overline{I_{w_n}^{k_n}} \neq \emptyset \Leftrightarrow s \in \overline{I_{w_n}^{k_n}}$ avec $s \in \sigma(\gamma_n)$ (il suffit de prendre $\alpha(\varepsilon)$ plus petit que $\min\{d(s, \overline{I_{w_n}^{k_n}}) \mid n \geq N, s \in \sigma(\gamma_n) \cap \overline{{}^c I_{w_n}^{k_n}}\}$ qui se trouve être un ensemble fini puisque la partition de Markov est finie).

Pour tout $n \geq N$, u_n et v_n ne peuvent être dans la même $B(s, \alpha(\varepsilon))$ ($s \in \sigma(\gamma_n)$) puisque

$$d(u_n, v_n) = \sqrt{d_n} \geq \sqrt{\delta} > 2\alpha(\varepsilon) = \text{diam}(B(s, \alpha(\varepsilon))).$$

Mais $u_n, v_n \in \overline{I_{w_n}^{k_n}}$ donc nécessairement les deux éléments de $\sigma(\gamma_n)$ doivent être dans $\overline{I_{w_n}^{k_n}}$. Par construction du codage, ils doivent même être les extrémités de cet intervalle, qui doit alors relier deux cusps du domaine fondamental. Comme de tels intervalles sont en nombre fini, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $I_{w_n}^{k_n} = I_{\hat{w}}^0 = [\hat{w}; r(\hat{w})[$ pour tout $n \geq N$, avec (u_n) et (v_n) convergeant respectivement vers $\hat{w}$ et $r(\hat{w})$.

Notons $\alpha = \text{diam}(I_{\hat{w}}^0) - \delta$. Si $\alpha > 0$, alors par décroissance de d_n on a qu'à partir d'un certain rang soit $d(u_n, \hat{w}) > \frac{\alpha}{2}$, soit $d(v_n, r(\hat{w})) > \frac{\alpha}{2}$, ce qui en contredit la convergence. Donc $\alpha = 0$ et $(u_n, v_n) = (\hat{w}, r(\hat{w}))$ pour tout n. En particulier, ceci implique l'existence d'un mot non trivial du codage γ tel que $\gamma(\hat{w}) = \hat{w}$ et $\gamma(r(\hat{w})) = r(\hat{w})$. C'est une contradiction.

Si maintenant $U \subset I_v^k$ est quelconque, il est inclus dans son enveloppe convexe qui est elle même incluse dans un intervalle de la forme $[u_0; v_0[\subset I_v^k$. Alors U_n est inclus dans $[u_n; v_n[$; et la suite $(\text{diam}(U_n))_{n \geq 0}$ est majorée par $(d(u_n, v_n))_{n \geq 0}$ qui tend vers 0. ■

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer à quelle conditions les préimages de tout point de $\mathbb{S}^1$ sont denses.

Théorème 3.2.14. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) Pour tout y, $\mathcal{T}(y)$ est dense dans $\mathbb{S}^1$.
(ii) Per(T) est dense dans $\mathbb{S}^1$.
(iii) Pour tout $v \in V$ et $k \in [\![-n_v + 1\,;\, n_v - 1]\!]$, il existe un point T-périodique dans I_v^k.

PREUVE : $(i) \Rightarrow (ii)$: Prenons U un ouvert d'un certain intervalle I_v^k de la partition de Markov, et fixons $y \in U$. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que l'on puisse trouver un ouvert V_ε inclus dans U, contenant y, et tel que $0 < \text{diam}(V_\varepsilon) \leq \text{diam}(U) - \varepsilon$ (on peut prendre $\varepsilon < d(y, {}^cU)$ et pour V_ε la boule centrée en y et de rayon $d(y, {}^cU) - \varepsilon$). Puisqu'on a supposé les préimages de tout point de $\mathbb{S}^1$ denses, on peut construire par récurrence une suite (x_n) de points qui vérifient :

$-$ $x_0 = y$;
$-$ Pour tout $n \geq 0$, $x_n \in V_\varepsilon$;
$-$ Pour tout $n > 0$, il existe $p_n > 0$ tel que $T^{p_n}(x_n) = x_{n-1}$.
Posons $\gamma_n = \gamma^{p_n}[x_n]$, $U_0 = U$, $U_n = \gamma_n^{-1}(U_{n-1})$ et $d_n = \text{diam}(U_n)$. D'après le lemme 3.2.13, $(d_n)_{n\geq 0}$ décroit vers 0. Or $d_0 = \text{diam}(U)$ donc il existe $N > 0$ tel que $\text{diam}(U_N) = d_N < \varepsilon$. On note $\gamma = \gamma^1 \dots \gamma^N = \gamma^P[x_N] \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ où $P = \sum_{k=1}^N p_k$, de sorte que $U_N = \gamma^{-1}(U)$. Mais

$$\gamma^{-1}(U) = U_N \subset B(x_N, \delta_N) \subset B(x_N, \varepsilon) \subset U$$

puisque $x_N \in U_N \cap V_\varepsilon$. Ceci nous indique que U contient un point fixe x de γ. Mais x est aussi dans $\gamma^{-1}(U) = U_N$, donc $T^P(x) = \gamma^P[x](x) = \gamma^P[x_N](x) = \gamma(x) = x$ et x est un point périodique de T.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Évident.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Soient $y \in I_v^k$ et U un ouvert de $\mathbb{S}^1$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $y_0 \in I_v^k$ tel que $T^m(y_0) = y_0$, $m > 0$. Notons $\gamma_0 = \gamma^m[y_0]$. Le lemme 3.2.13 nous dit que à $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n \geq 0$ tel que $\text{diam}(\gamma_0^{-n}(I_v^k)) < \varepsilon$. Si on note $y' = \gamma_0^{-n}(y) \in I_v^k$, $T^{nm}(y') = y$ et $d(y_0, y') < \varepsilon$. Soit V_ε un ouvert inclus dans U tel que $\text{diam}(V_\varepsilon) \leq \text{diam}(U) - \varepsilon$. Puisque y_0 est périodique, $\mathcal{T}(y_0)$ est dense et il existe $x_0 \in V_\varepsilon$ et $p \geq 0$ tels que $T^p(x_0) = y_0$. Notons encore $\gamma = \gamma^p[x_0]$ et $x = \gamma^{-1}(y')$; il vient

$$\varepsilon > d(y_0, y') = d(\gamma(x_0), \gamma(x)) = |\gamma'(x_0)||\gamma'(x)|d(x_0, x) = d(x_0, x)$$

puisque le lemme 3.2.13 assure aussi que $\gamma^p[x_0] = \gamma^p[x] = \gamma$. Donc $d(x_0, x) < \varepsilon$ et, puisque $x_0 \in V_\varepsilon$, on en conclut que $x \in U$ où $T^{mn+p}(x) = T^{mn}(y') = y$. ■

Ainsi, il suffit de trouver un point périodique dans chaque intervalle de la partition de Markov pour obtenir la densité des points périodiques et des préimages de tout point. Il n'est cependant pas facile de les exhiber, les candidats naturels (les extrémités des intervalles) n'étant généralement pas des points T-périodiques et ce même si Γ est cocompact. On montrera au prochain chapitre que la densité des points périodiques (et donc des deux autres conditions) est cependant vérifiée grâce à la conjugaison entre T_B et T_C.

Un argument classique nous permet finalement de prouver que si ces conditions sont vérifiées et que les préimages de tout point sont denses, alors le système dynamique est transitif.

Théorème 3.2.15. *On suppose que pour tout $y \in \mathbb{S}^1$, $\mathcal{T}(y)$ est dense. Alors :*
(i) Pour tous couples U, V d'ouverts de $\mathbb{S}^1$, il existe $n \geq 0$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
(ii) Il existe un G_δ-dense de points de $\mathbb{S}^1$ dont la T-orbite est dense.

PREUVE : (i) : Il suffit de prendre $y \in V$ quelconque. Comme $\mathcal{T}(y)$ est dense, il existe $x \in U$ et $n \geq 0$ tels que $T^n(x) = y$. Alors $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(ii) : Cette preuve est inspirée de la proposition 2.2.1 de [BS02]. Prenons V un ouvert de $\mathbb{S}^1$ inclus dans un des I_v^k. Puisque T est Markov et que chaque branche inverse (elles sont en nombre fini) est un homéomorphisme, $T^{-1}(V)$ est ouvert, et par suite $T^{-n}(V)$ est ouvert pour tout n. Alors $\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V)$ est un ouvert, dense car il rencontre tous les ouverts U de $\mathbb{S}^1$ par le point (i). Soit maintenant $(V_{v,k,i})_i$ une base dénombrable d'ouverts pour la topologie sur I_v^k. $G = \bigcap_{v,k} \bigcap_i \bigcup_{n\geq 0} T^{-n}(V_i)$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses de $\mathbb{S}^1$ donc est dense par le théorème de Baire. Si maintenant $x \in G$, alors pour tout v, k, i il existe n tel que $T^n(x) \in V_{v,k,i}$. Ainsi l'orbite de tout point de G rencontre tout ouvert de $\mathbb{S}^1$. ■

3.2.4 Orbites périodiques et classes de conjugaison d'hyperboliques primitifs

Nous allons maintenant montrer que les orbites périodiques hyperboliques de T sont en bijection avec les classes de conjugaison d'hyperboliques primitifs de Γ. Là encore, la propriété d'orbite-équivalence simple est insuffisante pour obtenir ce résultat, et on aura besoin de sa version renforcée du théorème 3.2.11 pour montrer la primitivité des mots du codages engendrés par un point périodique. De plus, même si ce premier point est vrai avec un domaine fondamental convexe quelconque, il sera nécessaire d'en prendre un qui assure que $|T'| \geq 1$ pour prouver que l'on a effectivement la bijection souhaitée.

Rappelons que $g\gamma g^{-1}$ est primitif si et seulement si γ l'est.

Lemme 3.2.16. *Soit $x \in Per(T)$ de période $k > 0$. Alors $\gamma^k[x]$ est primitif.*

PREUVE : Supposons que $T^k(x) = x$ avec $k > 0$ minimal, et que $\gamma^k[x] = \gamma^n$ avec $n \geq 0$. Puisque $\gamma^k[x]$ fixe x, nécessairement γ aussi, et d'après le théorème 3.2.11 il existe $p, q \geq 0$ tels que $\gamma^p[x] = \gamma^q[x]\gamma$. Comme $k > 0$, $\gamma^k[x] \neq \mathrm{id}$ donc $\gamma \neq \mathrm{id}$ et $p \neq q$.

Si $p < q$, alors $\gamma^q[x] = \gamma^p[x]\gamma^{-1}$. Soit $r = q - p > 0$ et $y = T^p(x) = \gamma^p[x](x)$. Alors

$$\gamma^r[y]\gamma^p[x] = \gamma^{q-p}[\gamma^p[x](x)]\gamma^p[x] = \gamma^q[x] = \gamma^p[x]\gamma^{-1},$$

d'où $\gamma^r[y] = \tilde{\gamma}$ avec $\tilde{\gamma} = \gamma^p[x]\gamma^{-1}\gamma^p[x]^{-1}$. Une récurrence immédiate montre que $T^{rj}(y) = y$ et $\gamma^{rj}[y] = \gamma^r[y]^j = \tilde{\gamma}^j$ pour tout $j \geq 0$. Mais alors

$$\begin{aligned}\gamma^{rn}[y]^{-1} = \tilde{\gamma}^{-n} &= \gamma^p[x]\gamma^n\gamma^p[x]^{-1} \\ &= \gamma^p[x]\gamma^k[x]\gamma^p[x]^{-1} \\ &= \gamma^{p+k}[x]\gamma^p[x]^{-1} \\ &= \gamma^k[\gamma^p[x](x)]\gamma^p[x]\gamma^p[x]^{-1} = \gamma^k[y]\end{aligned}$$

donc $\gamma^{rn+k}[y] = \gamma^k[T^{rn}(y)]\gamma^{rn}[y] = \mathrm{id}$ et ainsi $rn + k = 0$. C'est impossible car $r > 0$, $n \geq 0$ et $k > 0$.

Donc $p > q$. Soit $r = p - q > 0$ et $y = T^q(x) = \gamma^q[x](x)$. Alors

$$\gamma^r[y]\gamma^q[x] = \gamma^{p-q}[\gamma^q[x](x)]\gamma^q[x] = \gamma^p[x] = \gamma^q[x]\gamma,$$

d'où $\gamma^r[y] = \tilde{\gamma}$ avec $\tilde{\gamma} = \gamma^q[x]\gamma\gamma^q[x]^{-1}$ primitif et fixant y. Par une récurrence immédiate, on voit que $T^{rj}(y) = y$ et $\gamma^{rj}[y] = \gamma^r[y]^j = \tilde{\gamma}^j$ pour tout $j \geq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\gamma^{rn}[y] = \tilde{\gamma}^n &= \gamma^q[x]\gamma^n\gamma^q[x]^{-1} \\ &= \gamma^q[x]\gamma^k[x]\gamma^q[x]^{-1} \\ &= \gamma^{q+k}[x]\gamma^q[x]^{-1} \\ &= \gamma^k[\gamma^q[x](x)]\gamma^q[x]\gamma^q[x]^{-1} = \gamma^k[y]\end{aligned}$$

et ceci impose par injectivité que $nr = k$. Mais puisque y est une image de x, c'est aussi un point périodique de T de période k. Or on a vu que $T^r(y) = y$. Pour que $r \geq k$, il est donc nécessaire d'avoir $n = 1$. ■

On note $\mathcal{P}(\Gamma)$ l'ensemble des éléments primitifs de Γ, et on pose :

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & \text{Per}(T) & \to & \mathcal{P}(\Gamma) \\ & & x & \mapsto & \gamma^k[x] \text{ où } k>0 \text{ est la période de } x \end{array} .$$

D'après le lemme 3.2.16, Φ est bien définie.

On peut définir deux relations d'équivalence sur $\text{Per}(T)$ et $\mathcal{P}(\Gamma)$:

$$\forall (x,y) \in \text{Per}(T)^2, x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma(x) = y$$
$$\forall (g,h) \in \mathcal{P}(\Gamma)^2, g \sim h \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma g \gamma^{-1} = h$$

Φ est compatible avec ces relations :

Lemme 3.2.17. *Soient $x, y \in$ Per(T). Si $x \sim y$, alors $\Phi(x) \sim \Phi(y)$.*

PREUVE : Supposons que x et y soient périodiques et qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(x) = y$. Comme y est périodique, $x = \gamma^{-1}(y) \in \Gamma y = \mathcal{T}(y)$ et il existe donc un $p \geq 0$ tel que $T^p(x) = y$. y est ainsi une image en avant de x périodique, donc y a même période que x. On note $g = \Phi(x) = \gamma^k[x]$ et $h = \Phi(y) = \gamma^k[y]$. Il vient alors :

$$\gamma^p[x]g = \gamma^p[\gamma^k[x](x)]\gamma^k[x] = \gamma^{p+k}[x] = \gamma^k[\gamma^p[x](x)]\gamma^p[x] = \gamma^k[y]\gamma^p[x] = h\gamma^p[x].$$

Donc g et h sont conjugués par $\gamma^p[x] \in \Gamma$. ■

Soient $\overline{\text{Per}(T)}$ et $\overline{\mathcal{P}(\Gamma)}$ les ensembles des classes d'équivalences pour les relations $\sim$ dans respectivement $\text{Per}(T)$ et $\mathcal{P}(\Gamma)$. En particulier, $\overline{\text{Per}(T)}$ s'interprète comme l'ensemble des orbites périodiques de T. D'après le lemme 3.2.17, Φ passe au quotient et induit une application :

$$\begin{array}{rccl} \overline{\Phi} & : & \overline{\text{Per}(T)} & \to & \overline{\mathcal{P}(\Gamma)} \\ & & \overline{x} & \mapsto & \overline{\Phi(x)} \end{array} .$$

On souhaite maintenant montrer que $\overline{\Phi}$ est injective, puis surjective. C'est à ce moment qu'on doit faire l'hypothèse que le domaine fondamental est tel que $|T'| = |T'|_p \geq 1$ pour un certain $p \in \mathbb{D}$. Ceci interdit à deux points périodiques de T d'être les points fixes d'une même isométrie de Γ.

Lemme 3.2.18. *On suppose que $|T'| \geq 1$. Alors $\overline{\Phi}$ est injective.*

PREUVE : Notons que l'hypothèse implique par une récurrence immédiate que $|\gamma^k[x]'(x)| \geq 1$ pour tous $x \in \mathbb{S}^1$ et $k > 0$. Si de plus $\gamma^k[x]$ est hyperbolique et fixe x, alors $|\gamma^k[x]'(x)| > 1$.

Soient x, y périodiques tels que $\overline{\Phi(x)} = \overline{\Phi(y)}$. Par définition, il existe $k, l \geq 0$ et $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma^k[x] = \gamma^{-1}\gamma^l[y]\gamma$. Alors

$$\gamma^l[y]\gamma(x) = \gamma\gamma^k[x](x) = \gamma(x)$$

donc $\gamma^l[y]$ fixe non seulement y mais aussi $\gamma(x)$. Si $\gamma^l[y]$ est parabolique (et donc $\gamma^k[x]$ puisqu'ils sont conjugués), alors nécessairement $\gamma(x) = y$. Sinon, ils sont tous les deux hyperboliques. L'hypothèse $|T'| \geq 1$ nous assure alors que $|\gamma^k[x]'(x)| > 1$ et $|\gamma^l[y]'(y)| > 1$, mais comme d'autre part $\gamma^k[x] = \gamma^{-1}\gamma^l[y]\gamma$ le lemme 1.2.2 montre que $|\gamma^k[x]'(x)| = |\gamma^l[y]'(\gamma(x))|$. Par conséquent, on doit aussi avoir $\gamma(x) = y$. ■

Telle quelle, $\overline{\Phi}$ n'est pas surjective, et son image n'est aisément calculable que sur un sous-ensemble de $\overline{\text{Per}(T)}$. On est donc amenés à définir l'ensemble des points *périodiques hyperboliques* de T par

$$\text{Per}(T)^+ = \left\{ x \in \text{Per}(T) \mid \exists k > 0, |\gamma^k[x]'(x)| > 1 \right\}.$$

Il est stable pour la relation $\sim$ dans $\text{Per}(T)$.

Lemme 3.2.19. *On suppose que $|T'| \geq 1$. Soient $x, y \in Per(T)$ tels que $x \sim y$. $x \in Per(T)^+$ si et seulement si $y \in Per(T)^+$.*

PREUVE : Supposons que x et y sont périodiques, que $x \sim y$ et qu'il existe $k > 0$ minimal tel que $|\gamma^k[x]'(x)| > 1$. Si on note alors $z = \gamma^{k-1}[x](x)$, on a $\gamma^k[x] = \gamma^1[z]\gamma^{k-1}[x]$. Comme k est minimal, $|\gamma^{k-1}[x]'(x)| = 1$ donc $|\gamma^1[z]'(z)| > 1$. Or z est aussi périodique (de période k) et $z \sim x \sim y$. z et y sont donc sur la même orbite périodique et existe $0 \leq r < k$ tel que $\gamma^r[y](y) = z$. Alors $\gamma^{r+1}[y] = \gamma^1[z]\gamma^r[y]$ et donc $|\gamma^{r+1}[y]'(y)| \geq |\gamma^1[z]'(z)| > 1$. ■

Cette stabilité nous assure que $\overline{\text{Per}(T)^+}$ est bien défini.

On note $\mathcal{H}(\Gamma)$ l'ensemble des éléments hyperboliques primitifs de Γ. Il est lui aussi naturellement stable par $\sim$ dans Γ, et on peut donc parler de $\overline{\mathcal{H}(\Gamma)}$. L'image de $\overline{\text{Per}(T)^+}$ par $\overline{\Phi}$ se trouve être exactement cet ensemble.

Lemme 3.2.20. *On suppose que $|T'| \geq 1$. Alors $\overline{\Phi}(\overline{Per(T)^+}) = \overline{\mathcal{H}(\Gamma)}$.*

PREUVE : Soit $x \in \text{Per}(T)^+$. On sait déjà que $\Phi(x) = \gamma^k[x]$ est primitif. Si $|\gamma^k[x]'(x)| = 1$, l'hypothèse $|T'| \geq 1$ impose $|\gamma^j[x]'(x)| = 1$ pour tout $j \leq k$ et donc aussi pour tout $j \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde. Donc $|\gamma^k[x]'(x)| > 1$ et $\gamma^k[x]$ est hyperbolique, prouvant que $\overline{\Phi}(\overline{x}) \in \overline{\mathcal{H}(\Gamma)}$.

Réciproquement, soit $\gamma \in \mathcal{H}(\Gamma)$. Puisque γ est hyperbolique, il existe $x \in \mathbb{S}^1$ pour lequel $\gamma(x) = x$ et $|\gamma'(x)| > 1$. La propriété d'orbite-équivalence avec le groupe Γ nous donne alors l'existence de $p, q \geq 0$ tels que $\gamma^p[x] = \gamma^q[x]\gamma$. Comme γ est primitif, $\gamma \neq \text{id}$ et donc nécessairement p et q sont différents.

On va montrer que $p > q$: sinon, $\gamma^q[x] = \gamma^p[x]\gamma^{-1}$ avec $q > p$. Comme d'habitude, on note $r = q - p > 0$ et $y = \gamma^p[x](x)$. Il vient alors

$$\gamma^r[y]\gamma^p[x] = \gamma^{q-p}[\gamma^p[x](x)]\gamma^p[x] = \gamma^q[x] = \gamma^p[x]\gamma^{-1}$$

donc $\gamma^r[y] = \tilde{\gamma}$ où $\tilde{\gamma} = \gamma^p[x]\gamma^{-1}\gamma^p[x]^{-1}$. Mais d'une part $|\tilde{\gamma}'(y)| = |\gamma^{-1\prime}(x)| = \frac{1}{|\gamma'(x)|} < 1$, et d'autre part $|\gamma^k[y]'(y)| \geq 1$. C'est impossible.

Donc $p > q$. Si on pose $r = p - q > 0$ et $y = \gamma^q[x](x)$, le même calcul montre que $\gamma^r[y] = \tilde{\gamma}$ avec $\tilde{\gamma} = \gamma^q[x]\gamma\gamma^q[x]^{-1} \in \overline{\gamma}$. $T^r(y) = \tilde{\gamma}(y) = y$ et r est la période de y puisque $\gamma^r[y] = \tilde{\gamma}$ est primitif. Comme $|\gamma^r[y]'(y)| = |\tilde{\gamma}'(y)| = |\gamma'(x)| > 1$, $y \in \text{Per}(T)^+$ et $\overline{\Phi}(\overline{y}) = \overline{\gamma^r[y]} = \overline{\gamma}$. ■

La conclusion de ces deux lemmes est que, si $|T'| \geq 1$, alors les T-orbites périodiques hyperboliques sont en bijection avec les classes d'équivalence d'hyperboliques primitifs de Γ.

Théorème 3.2.21.

$$\begin{array}{rccc} \overline{\Phi} & : & \overline{Per(T)^+} & \to & \overline{\mathcal{H}(\Gamma)} \\ & & \overline{x} & \mapsto & \overline{\Phi(x)} \end{array}$$

est une bijection.

PREUVE : $\overline{\Phi}$ restreinte à $\overline{\mathrm{Per}(T)^+}$ est toujours injective, et d'autre part on vient de voir que l'image de $\overline{\mathrm{Per}(T)^+}$ par $\overline{\Phi}$ est exactement $\overline{\mathcal{H}(\Gamma)}$. ■

Dans le cas de nos codages à gauche et à droite, $\mathrm{Per}(T)^+$ a une expression simple : il suffit pour l'obtenir de retirer les points périodiques de T donnés par les points fixes d'éléments paraboliques de Γ apparaissant dans la description du domaine fondamental.

Proposition 3.2.22. *Pour $T = T_L$ ou $T = T_R$, Per$(T)^+$ = Per$(T) \setminus (V \cap \mathbb{S}^1)$.*

PREUVE : Examinons le cas $T = T_R$, l'autre étant symétrique. Prenons x périodique et tel que $|T'(x)| = 1$. La structure du codage impose alors $x = a_v^{n_v - 1}$ pour un certain v. Supposons que x n'est pas un cusp. Alors $v \in \mathbb{D}$ et $x' = T(x) = a_{\sigma(v)}^{n_v}$ vérifie $|T'(x')| > 1$. Donc $x \in \mathrm{Per}(T)^+$. ■

Notons qu'il n'y a pas de bijection entre $\overline{\mathrm{Per}(T)}$ tout entier et les classes de conjugaison d'isométries non elliptiques primitives de Γ. Cela provient du fait que chaque sommet à l'infini du domaine fondamental est fixé à la fois par un parabolique et son inverse, et que ces deux isométries ne sont jamais conjuguées.

3.2.5 Fonction zeta dynamique de Ruelle et fonction zeta de Selberg

Pour tout $g : X \to \mathbb{C}$, on définit suivant [Rue89] la *fonction zeta de Ruelle de T pondérée par g* comme la série entière

$$\zeta_R[g](z) = \exp \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(T^n)} \prod_{k=0}^{n-1} g(T^k(x))$$

où $\mathrm{Fix}(T^n)$ est l'ensemble des points fixes de T^n. Il est donc constitué des points m périodiques de T pour tout m divisant n, et à ce titre est fini pour tout n.

Si $x \in \mathrm{Fix}(T^n)$ et $g(x) = |T'(x)|$, alors :

$$\prod_{k=0}^{n-1} g(T^k(x)) = |T'(T^{n-1}(x)) \dots T'(x)| = |(T^n)'(x)|.$$

En particulier, si x est un cusp, alors il est p-périodique pour un certain $p > 0$ minimal, et $T^k(x)$ est un cusp pour tout k. x est alors dans tous les $\mathrm{Fix}(T^{np})$ pour $n > 0$, et

$$|(T^{np})'(x)| = \prod_{k=0}^{np-1} |T'(T^k(x))| = 1.$$

Afin d'ignorer les cusps, on pose $\mathrm{Fix}(T^n)^+$ l'ensemble des points fixes hyperboliques de T^n. On déduit facilement de la proposition 3.2.22 que $\mathrm{Fix}(T^n)^+ = \mathrm{Fix}(T^n) \setminus (V \cap \mathbb{S}^1)$, et on note alors pour $s \in \mathbb{C}$ $\eta(s)$ l'évaluation en $z = 1$ de la fonction zeta de Ruelle pour $T = T_L$ ou T_R et $g(x) = |T'(x)|^{-s} \mathbb{1}_{\mathrm{Fix}(T^n)^+}(x)$:

$$\eta(s) = \zeta_R[|T'|^{-s}](1) = \exp \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(T^n)^+} |(T^n)'(x)|^{-s}$$

Si l'on n'avait pas éliminé les cusps en se restreignant à $\mathrm{Fix}(T^n)^+$, cette série serait divergente.

On va montrer que cette fonction η est reliée à la *fonction zeta de Selberg* du groupe fuchsien Γ et qui est définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta_S(s) = \prod_{k\geq 0} \prod_{\gamma \in \overline{\mathcal{H}(\Gamma)}} (1 - \exp(-(s+k)l(\gamma)))$$

où $l(\gamma)$ est la longueur de la géodésique fermée de la surface déterminée par l'axe de l'hyperbolique primitif γ. À l'aide de la formule des traces de Selberg, on peut prouver qu'elle se prolonge méromorphiquement au plan complexe tout entier. Ses zéros déterminent le spectre du laplacien sur la surface.

De manière générale, la quantité $l(\gamma)$ s'exprime comme le logarithme de la dérivée (au sens Busemann) de γ en son point fixe répulsif.

Lemme 3.2.23. *Soit $\gamma \in \Gamma$ hyperbolique primitif d'axe (x, y) où y est le point fixe attractif de γ. Alors*

$$\forall z \in \mathbb{D}, l(\gamma) = \ln |\gamma'(y)|_z.$$

PREUVE : Soit $z \in \mathbb{D}$ fixé. Considérons $H_y(z)$ et $H_y(\gamma(z))$ les horocercles basés en y et passant respectivement par z et $\gamma(z)$. Ils intersectent la géodésique (x, y) de $\mathbb{D}$ en exactement un point chacun, que l'on notera p et q respectivement. Alors

$$\ln |\gamma'(y)|_z = b_y(z, \gamma^{-1}(z)) = b_{\gamma(y)}(\gamma(z), z) = b_y(\gamma(z), q) + b_y(q, p) + b_y(p, z) = b_y(q, p)$$

puisque $b_y(\gamma(z), q) = b_y(p, z) = 0$.

D'autre part, comme p est sur l'axe de γ, $l(\gamma) = d(\gamma(p), p)$. Cependant,

$$\gamma(p) = \gamma(H_y(z) \cap (x, y)) = H_{\gamma(y)}(\gamma(z)) \cap (\gamma(x), \gamma(y)) = H_y(\gamma(z)) \cap (x, y) = q.$$

Ainsi,

$$l(\gamma) = d(\gamma(p), p) = |b_y(q, p)| = |\ln |\gamma'(y)|_z|.$$

Mais puisque y est le point fixe répulsif de γ, $|\gamma'(y)|_z > 1$ et donc $l(\gamma) = \ln |\gamma'(y)|_z$. ■

Notons $\text{Per}(T)_m$ (respectivement $\text{Per}(T)^+_m$) l'ensemble des points périodiques (respectivement périodiques hyperboliques) pour la transformation T ayant exactement $m > 0$ pour période. Cet ensemble est stable par la relation d'équivalence induite par Γ, au sens où

$$\forall x, y \in \text{Per}(T)^+, x \sim y \Rightarrow \left(x \in \text{Per}(T)^+_m \Leftrightarrow y \in \text{Per}(T)^+_m\right)$$

ce qui traduit simplement le fait que deux points sur la même orbite périodique ont même période. On peut donc parler de $\overline{\text{Per}(T)^+_m}$.

Si $x \in \text{Per}(T)^+_m$, la quantité $|(T^m)'(x)| = \prod_{k=0}^{m-1} |T'(T^k(x))|$ ne dépend en fait que de l'orbite périodique $\overline{x} \in \overline{\text{Per}(T)^+_m}$. On peut donc poser

$$\forall \overline{x} \in \overline{\text{Per}(T)^+_m}, |(T^m)'(\overline{x})| = |(T^m)'(x)| \text{ où } x \text{ est un représentant quelconque de } \overline{x}.$$

De même, si γ est une isométrie hyperbolique, alors $l(\gamma)$ ne dépend clairement que de la classe de conjugaison $\overline{\gamma}$. On peut donc définir

$$\forall \overline{\gamma} \in \overline{\mathcal{H}(\Gamma)}, l(\overline{\gamma}) = l(\gamma) \text{ où } \gamma \text{ est un représentant quelconque de } \overline{\gamma}.$$

Rappelons que le théorème 3.2.21 assure que

$$\begin{array}{rccc} \overline{\Phi} & : & \overline{\mathrm{Per}(T)^+} & \to & \overline{\mathcal{H}(\Gamma)} \\ & & \overline{x} & \mapsto & \overline{\Phi(x)} \end{array}$$

est une bijection de l'ensemble des orbites périodiques hyperboliques de T vers celui des classes de conjugaison d'hyperboliques primitifs de Γ.

Lemme 3.2.24. *Soit $z \in \mathbb{D}$ quelconque.*

$$\forall \overline{x} \in \overline{Per(T)^+_m}, l(\overline{\Phi}(\overline{x})) = \ln |(T^m)'(\overline{x})|_z.$$

PREUVE : Soit $x \in \mathrm{Per}(T)^+_m$ un représentant de $\overline{x}$. Alors

$$l(\overline{\Phi}(\overline{x})) = l(\overline{\Phi(x)}) = l(\Phi(x)) = l(\gamma^m[x]) = \ln |\gamma^m[x]'(x)|_z = \ln |(T^m)'(\overline{x})|_z. \qquad \blacksquare$$

On peut alors relier η au prmier terme de ζ_S.

Proposition 3.2.25. *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$. Alors*

$$\eta(s) = \frac{\zeta_S(s)}{\zeta_S(s+1)}.$$

PREUVE :

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \exp \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(T)^+_n} |(T^n)'(x)|^{-s} \\ &= \exp \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{m|n} \sum_{x \in \mathrm{Per}(T)^+_m} |(T^n)'(x)|^{-s} \\ &= \exp \sum_{n>0} \frac{1}{n} \sum_{m|n} m \sum_{\overline{x} \in \overline{\mathrm{Per}(T)^+_m}} |(T^m)'(\overline{x})|^{-\frac{n}{m}s} \\ &\qquad \text{car il y a } m \text{ points périodiques dans chaque orbite de longueur } m \\ &= \exp \sum_{m>0} \sum_{k>0} \frac{1}{k} \sum_{\overline{x} \in \overline{\mathrm{Per}(T)^+_m}} |(T^m)'(\overline{x})|^{-ks} \qquad \text{en posant } k = \tfrac{n}{m} \\ &= \exp \sum_{m>0} \sum_{\overline{x} \in \overline{\mathrm{Per}(T)^+_m}} -\ln\left(1 - |(T^m)'(\overline{x})|^{-s}\right) \qquad \text{puisque } -\ln(1-z) = \sum_{k>0} \frac{z^k}{k} \\ &= \prod_{\overline{x} \in \overline{\mathrm{Per}(T)^+}} \left(1 - \exp\left(-s \ln |(T^{p(\overline{x})})'(\overline{x})|\right)\right)^{-1} \qquad \text{où } p(\overline{x}) \text{ est la longueur de l'orbite } \overline{x} \\ &= \prod_{\overline{\gamma} \in \overline{\mathcal{H}(\Gamma)}} (1 - \exp(-s l(\overline{\gamma})))^{-1} \qquad \text{d'après le théorème 3.2.21 et le lemme 3.2.24} \\ &= \frac{\zeta_S(s)}{\zeta_S(s+1)}. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Puisque $\zeta_S(0) = 1$, on en déduit immédiatement que :

Proposition 3.2.26. *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$. Alors*

$$\zeta_S(s) = \prod_{l \geq 0} \frac{1}{\eta(s+l)}$$

La fonction zeta de Selberg a été écrite comme déterminant de Fredholm de l'opérateur de transfert pour Γ cocompact par Pollicott ([Pol91]). L'idée consiste à construire des ensembles de fonctions analytiques sur des ouverts de $\mathbb{C}$ judicieusement choisis autour de chaque intervalle de la partition de Markov. L'étude de l'opérateur se réduit alors à celle d'une collection d'opérateurs de composition par une transformation de Möbius. Il a alors pu montrer que l'opérateur de transfert est nucléaire, ce qui permet de calculer son déterminant à partir de ses traces. Cet argument ne s'applique pas au cas d'un groupe de covolume fini car il est impossible de trouver des ouverts appropriés contenant les intervalles bordant les cusps.

Mayer a démontré un résultat similaire pour la surface modulaire ([May76] puis [May90], [May91a] et [May91b]), puis en collaboration avec Chang pour des groupes de congruence ([CM00]). Cependant, le cas non compact y est traité en induisant la transformation de Bowen-Series sur un certain intervalle, ce qui donne un opérateur de transfert à priori différent de celui provenant du codage naturel. En particulier, on ne peut pas le relier aussi facilement à la géométrie du groupe, ce que fait l'objet de notre chapitre 5.

Chapitre 4

Propriétés dynamiques du codage étendu

Après avoir étudié individuellement T_L et T_R dans le chapitre précédent, nous allons nous intéresser à la dynamique couplée du codage rectifié étendu.

Dans la première section, nous établirons un critère sur la combinatoire des sommets pour qu'une géodésique qui borde le domaine fondamental soit un point périodique de T_C. Si une géodésique vérifie ce critère, son extrémité passée est un point périodique de T_L mais pas de T_R, et vice-versa pour son extrémité future.

Ce critère nous servira ensuite pour démontrer que les points périodiques de T_C sont en parfaite bijection avec ceux de T_L et de T_R. On déterminera alors les T_C-orbites grâce à la propriété d'orbite-équivalence pour les mots du codage, puis on en déduira une description des T_B-orbites par la conjugaison établie au chapitre 2. Il sera ainsi possible de prouver que les points périodiques sont denses pour T_L et T_R, ce qui nous permettra de valider les conditions du théorème 3.2.14.

Le résultat le plus intéressant est cependant exposé dans la troisième section. On y construit une conjugaison entre (C, T_C) et un sous-shift de type fini modulo un nombre dénombrable de points qui peuvent être codés de deux manières différentes, avec toutefois un des deux mots codants plus naturel que l'autre. C'est un résultat simple lorsque Γ est cocompact, car dans ce cas les applications coordonnées de T_C sont respectivement strictement dilatantes et contractantes. Dans le cas d'un groupe qui n'est que cofini, la dérivée de T_L et T_R vaut 1 aux cusps du domaine fondamental, et cet argument ne tient plus. On le remplacera par un argument de décroissance monotone d'intervalles, couplé à une localisation précise des endroits où la dérivée s'approche de 1.

À noter qu'à partir de ce chapitre on échange T_C et T_C^{-1}, de sorte que pour tout $(x, y) \in C$,

$$T_C(x, y) = (T_L(x), S_R(x, y)) = (\gamma_L^1[x](x), \gamma_L^1[x](y))$$
$$T_C^{-1}(x, y) = (S_L(x, y), T_R(y)) = (\gamma_R^1[y](x), \gamma_R^1[y](y))$$

Ce changement n'a aucune incidence sur les résultats eux-mêmes, les deux conventions étant parfaitement symétriques. Il peut être motivé par l'idée que si l'ancienne convention était plus naturelle (on décide d'où est envoyée une géodésique suivant son extrémité future), la nouvelle est plus simple à manipuler dans les calculs. Pour rester cohérents, on doit aussi échanger T_B et T_B^{-1}.

4.1 Périodicité des géodésiques de bord

Nous allons d'abord déterminer à quelle condition une géodésique qui borde le domaine fondamental $\mathcal{D}$ est un point périodique de T_C. La preuve n'utilise que la propriété d'orbite-équivalence de T et du groupe, c'est-à-dire juste la combinatoire des intervalles. Il suffira donc de supposer que le domaine fondamental $\mathcal{D}$ satisfait à la propriété d'*even corners* et n'est pas triangulaire de classe 0, Γ étant toujours supposé de volume fini.

C ne contient que les géodésiques de bord orientées qui laissent le domaine à leur gauche. Les seules géodésiques qui sont dans C et qui bordent le domaine sont celles paramétrées par $(a_v^{n_v-1} = a_w^0, a_w^{n_w} = a_v^{m_v-1})$ pour $v \in V$ (et $w = r(v)$). Rappelons que T_L est définie par $T_L(x) = \gamma_v(x)$ pour tout $x \in I_v^L =]a_v^{n_v}; a_w^{n_w}]$, tandis que T_R est définie par $T_R(y) = \gamma_v(y)$ pour tout $y \in I_v^R = [a_v^{n_v-1}; a_w^{n_w-1}[$.

Lemme 4.1.1. *Si $v \in V \cap \mathbb{D}$ et $k \in [\![0\,;\, n_v - 1]\!]$, alors :*
(i) $T_L^k(a_v^{n_v-1}) = \gamma_L^k[a_v^{n_v-1}](a_v^{n_v-1}) = a_{\tau^k(v)}^{n_v-1-k}$;
(ii) $T_R^k(a_v^{n_v}) = \gamma_R^k[a_v^{n_v}](a_v^{n_v}) = a_{\sigma^k(v)}^{n_v+k}$.

PREUVE : Montrons par récurrence sur $k \leq n_v - 1$ que $T_L^k(a_v^{n_v-1}) = a_{\tau^k(v)}^{n_v-1-k} \in I_{l\tau^k(v)}^L$.
– Si $k = 0$, on a bien $T_L^0(a_v^{n_v-1}) = a_v^{n_v-1} \in \left]a_{l(v)}^{n_{l(v)}}; a_v^{n_v}\right] = I_{l(v)}^L$.
– Supposons la propriété vérifiée pour $k \leq n_v - 2$. Puisque $a_{\tau^k(v)}^{n_v-1-k} \in I_{l\tau^k(v)}^L$,

$$T_L^{k+1}(a_v^{n_v-1}) = T_L(a_{\tau^k(v)}^{n_v-1-k}) = \gamma_{l\tau^k(v)}(a_{\tau^k(v)}^{n_v-1-k}) = a_{\tau^{k+1}(v)}^{n_v-1-k-1} \in \left[a_{\tau^{k+1}(v)}^1; a_{\tau^{k+1}(v)}^{n_v}\right]$$

où $\left[a_{\tau^{k+1}(v)}^1; a_{\tau^{k+1}(v)}^{n_v}\right] \subset \left]a_{l\tau^{k+1}(v)}^{n_{l\tau^{k+1}(v)}}; a_{\tau^{k+1}(v)}^{n_v}\right] = I_{l\tau^{k+1}(v)}^L$ par un résultat symétrique à celui de la proposition 1.3.13.

De même, $\forall k \in [\![0\,;\, n_v - 1]\!], T_R^k(a_v^{n_v}) = a_{\sigma^k(v)}^{n_v+k} \in I_{\sigma^k(v)}^R$. ■

Un point important est que $\gamma_L^k[a_v^{n_v-1}]$ et $\gamma_R^k[a_v^{n_v}]$ agissent de la même manière sur respectivement $v \star a_v^{n_v-1} = a_v^{m_v-1}$ et $v \star a_v^{n_v} = a_v^0$:

Lemme 4.1.2. *Si $v \in V \cap \mathbb{D}$ et $k \in [\![0\,;\, n_v - 1]\!]$, alors :*
(i) $\gamma_L^k[a_v^{n_v-1}](a_v^{m_v-1}) = a_{\tau^k(v)}^{m_v-1-k}$;
(ii) $\gamma_R^k[a_v^{n_v}](a_v^0) = a_{\sigma^k(v)}^k$.

PREUVE : On a vu que pour tout $k \in [\![0\,;\, n_v - 2]\!]$, $T_L^k(a_v^{n_v-1}) = \gamma_L^k[a_v^{n_v-1}](a_v^{n_v-1}) \in I_{l\tau^k(v)}^L$. Par conséquent, $\gamma_L^{k+1}[a_v^{n_v-1}] = \gamma_{l\tau^k(v)}\gamma_L^k[a_v^{n_v-1}]$ et une récurrence immédiate prouve que

$$\forall k \in [\![0\,;\, n_v - 1]\!], \gamma_L^k[a_v^{n_v}](a_v^{m_v-1}) = a_{\tau^k(v)}^{m_v-1-k}.$$

L'autre point se démontre de manière similaire. ■

Puisque $(a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1})$ et $(a_v^0, a_v^{n_v})$ sont dans C par construction, il s'ensuit que :

Lemme 4.1.3. *Si $v \in V \cap \mathbb{D}$ et $k \in [\![0\,;\, n_v - 1]\!]$, alors :*
(i) $T_C^k(a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1}) = (a_{\tau^k(v)}^{n_v-1-k}, a_{\tau^k(v)}^{m_v-1-k})$;
(ii) $T_C^{-k}(a_v^0, a_v^{n_v}) = (a_{\sigma^k(v)}^k, a_{\sigma^k(v)}^{n_v+k})$.

PREUVE : On applique le lemme 4.1.2 en se rappelant que $T_C^k(x,y) = (\gamma_L^k[x](x), \gamma_L^k[x](y))$ et $T_C^{-k}(x,y) = (\gamma_R^k[y](x), \gamma_R^k[y](y))$. ■

On pose alors :

$$\begin{array}{rccc} \mu\ :\ V & \to & V \\ v & \mapsto & l\tau^{n_v-1}(v) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rccc} \nu\ :\ V & \to & V \\ v & \mapsto & r\sigma^{n_v-1}(v) \end{array} .$$

Le lemme 4.1.3 spécialisé pour $k = n_v - 1$ donne immédiatement :

Lemme 4.1.4. *Si $v \in V \cap \mathbb{D}$, alors :*
(i) $T_C^{n_v-1}(a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1}) = (a_{\mu(v)}^{n_{\mu(v)}-1}, a_{\nu(v)}^{m_{\mu(v)}-1})$ *;*
(ii) $T_C^{-n_v+1}(a_v^0, a_v^{n_v}) = (a_{\nu(v)}^0, a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}})$.

Pour montrer qu'il s'agit de points T_C-périodiques, on aimerait pouvoir dire qu'une certaine itérée de v par μ ou ν revient en v. C'est possible par le lemme qui suit :

Lemme 4.1.5. *$\mu : V \to V$ et $\nu : V \to V$ sont des permutations de V, et $\nu r \mu = r$.*

PREUVE : Il suffit de prouver que μ et ν sont injectives. Si $\mu(v) = \mu(w)$, $\tau^{n_v-1}(v) = \tau^{n_w-1}(w)$ et donc $v = \tau^{n_w-1-(n_v-1)}(w) = \tau^{n_w-n_v}(w)$. v et w sont ainsi sur la même σ-orbite et donc nécessairement $n_v = n_w$ et $v = w$. La preuve pour ν est similaire.

Quant à la relation, il suffit de vérifier que

$$\nu r \mu(v) = \nu\tau^{n_v-1}(v) = r\sigma^{n_{\tau^{n_v-1}(v)}-1}\tau^{n_v-1}(v) = r\sigma^{n_v-1}\tau^{n_v-1}(v) = r(v)$$

où $n_{\tau^{n_v-1}(v)} = n_v$ puisque $\tau^{n_v-1}(v)$ est sur la même σ-orbite que v. ■

Comme μ est une permutation de V, pour tout v il existe $p_v > 0$ minimal tel que $\mu^{p_v}(v) = v$. La relation $\nu r \mu = r$ impliquant que μ et ν^{-1} soient conjugués, p_v est aussi la ν-période de v.

Théorème 4.1.6. *Soit $c = (a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1}) \in C$. On est face à l'alternative suivante :*
(i) soit $\mu^j(v) \in \mathbb{D}$ pour tout j, et $T_C^{q_v}(c) = c$ où $q_v = \sum_{k=0}^{p_v-1} n_{\mu^k(v)} - 1$;
(ii) soit $a_v^{n_v-1}$ et $a_v^{m_v-1}$ sont chacun dans la Γ-orbite d'un cusp.

PREUVE : Supposons que pour tout j, $\mu^j(v)$ n'est pas un cusp. On peut alors appliquer le lemme 4.1.4 en chaque $(a_{\mu^k(v)}^{n_{\mu^k(v)}-1}, a_{\mu^k(v)}^{m_{\mu^k(v)}-1})$, et une récurrence immédiate prouve alors que :

$$T_C^{q_v}(a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1}) = T_C^{n_{\mu^{p_v-1}(v)}-1} \dots T_C^{n_{\mu(v)}-1} T_C^{n_v-1}(a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1}) = (a_v^{n_v-1}, a_v^{m_v-1}).$$

Sinon, il existe un cusp dans la μ-orbite de v. Soient $q \geq 0$ et $s > 0$ minimaux tels que $\mu^q(v), \mu^{-s}(v) \in \mathbb{S}^1$. On note aussi $g_v = \gamma_L^{n_v-1}[a_v^{n_v-1}]$ et $h_v = \gamma_R^{n_v-1}[a_v^{n_v}]$, de sorte que $g_v(a_v^{n_v-1}) = a_{\mu(v)}^{n_{\mu(v)}-1}$ et $h_v(a_v^{n_v}) = a_{\nu(v)}^{n_{\nu(v)}}$ lorsque $v \in V$. Puisque $\mu^j(v) \in \mathbb{D}$ pour tout $j \in [\![-s+1\,;\, q-1]\!]$, il vient :

$$g_{\mu^{q-1}(v)} \dots g_v(a_v^{n_v-1}) = a_{\mu^q(v)}^{n_{\mu^q(v)}-1} = \mu^q(v) \in \mathbb{S}^1$$
$$h_{\nu^{s-2}r(v)} \dots h_{r(v)}(a_v^{m_v-1}) = h_{\nu^{s-2}r(v)} \dots h_{r(v)}(a_{r(v)}^{n_{r(v)}}) = a_{\nu^{s-1}r(v)}^{n_{\nu^{s-1}r(v)}} = \nu^{s-1}r(v) \in \mathbb{S}^1$$

car $\nu^{s-1}r(v) = r\mu^{-s+1}(v) = r\mu\mu^{-s}(v) = \tau^{n_{\mu^{-s}(v)}-1}\mu^{-s}(v)$ est un cusp puisqu'il est sur la même σ-orbite que $\mu^s(v)$. Donc $a_v^{n_v-1}$ et $a_v^{m_v-1}$ sont Γ-équivalents à un cusp. ■

Corollaire 4.1.7. *Soit $c = (a_v^{n_v-1-k}, a_v^{m_v-1-k}) \in C$ avec $k \in [\![0\,;\, n_v - 2]\!]$. On est face à l'alternative suivante :*
(i) soit $\mu^j(\sigma^k(v)) \in \mathbb{D}$ pour tout j, et $T_C^{q_v}(c) = c$;
(ii) soit $a_v^{n_v-1-k}$ et $a_v^{m_v-1-k}$ sont chacun dans la Γ-orbite d'un cusp.

PREUVE : Si $k = 0$, il s'agit du théorème 4.1.6. Supposons donc $k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!]$, de sorte que $n_v - 1 - k \in [\![1\,;\, n_v - 2]\!]$ et $m_v - 1 - k \in [\![n_v + 1\,;\, m_v - 2]\!]$. Si v est un cusp, alors $a_v^{n_v-1-k} = a_v^{m_v-1-k} = v$ et le résultat est montré. Sinon, notons $v' = \sigma^k(v)$. D'après le lemme 4.1.3,

$$T_C^k(a_{v'}^{n_{v'}-1}, a_{v'}^{m_{v'}-1}) = T_C^k(a_{\sigma^k(v)}^{n_v-1}, a_{\sigma^k(v)}^{m_v-1}) = (a_v^{n_v-1-k}, a_v^{m_v-1-k}) = c.$$

Alors, par le théorème 4.1.6 :
(i) soit $\mu^j(v') \in \mathbb{D}$ pour tout j, et c est dans l'orbite du point périodique $(a_{v'}^{n_{v'}-1}, a_{v'}^{m_{v'}-1})$;
(ii) soit $a_{v'}^{n_{v'}-1}, a_{v'}^{m_{v'}-1}$ sont dans la Γ-orbite d'un cusp, et par suite $a_v^{n_v-1-k} = \gamma(a_{v'}^{n_{v'}-1})$ et $a_v^{m_v-1-k} = \gamma(a_{v'}^{m_{v'}-1})$ aussi (où $\gamma = \gamma_L^k[a_{v'}^{n_{v'}-1}] \in \Gamma$). ■

En remplaçant k par $n_v - 1 - k$, on obtient une nouvelle formulation :

Corollaire 4.1.8. *Soit $c = (a_v^k, a_v^{k+n_v}) \in C$ avec $k \in [\![1\,;\, n_v - 1]\!]$. On est face à l'alternative suivante :*
(i) soit $\nu^j(\tau^k(v)) \in \mathbb{D}$ pour tout j, et $T_C^{q_v}(c) = c$;
(ii) soit a_v^k et $a_v^{n_v+k}$ sont chacun dans la Γ-orbite d'un cusp.

PREUVE : La seule chose à vérifier est que

$$\begin{aligned}
\mu^j(\sigma^{n_v-1-k}(v)) &= \mu^{j-1} l \tau^{n_v-1} \sigma^{n_v-1-k}(v) = \mu^{j-1}(l\tau^k(v)) \\
&= lr\mu^{j-1}(l\tau^k(v)) \\
&= l\nu^{-j+1}(\tau^k(v)) \text{ car } r\mu^j l = \nu^{-j} \\
&= lr\sigma^{n_{v'}-1}\nu^{-j}(\tau^k(v)) \text{ où } v' = \nu^{-j}(\tau^k(v)) \\
&= \sigma^{n_{v'}-1}\nu^{-j}(\tau^k(v))
\end{aligned}$$

donc $\mu^j(\sigma^{n_v-1-k}(v))$ est un cusp si et seulement si $\nu^{-j}(\tau^k(v))$ en est un. ■

4.2 Points périodiques de T_B, T_C, T_L et T_R

Dans cette section, on va mettre en relation les points périodiques de toutes les transformations que l'on a été amené à étudier. On utilisera d'abord le résultat de la section précédente pour prouver que les points périodiques de T_C, T_L et T_R sont en bijection, puis on montrera qu'ils sont denses en se ramenant au billard géodésique.

Rappelons que C peut être décrit comme une réunion de rectangles

$$C = \bigsqcup_{k=1}^{K} I_k^L \times J_k^R,$$

c'est-à-dire que si $x \in I_k^L$, alors $\{y \in \mathbb{S}^1 \mid (x,y) \in C\}$ est un intervalle $\left[a_k^R; b_k^R\right[= J_k^R$. Pour $x \in I_k^L$, on notera alors $\left[a^R(x); b^R(x)\right[= \left[a_k^R; b_k^R\right[$. Les fonctions a^R et b^R sont constantes sur chaque intervalle I_k^L de la partition de Markov. On omettra les exposants L et R lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible.

4.2.1 Bijection entre les points périodiques de T_C, T_L et T_R

Tout point périodique de T_C induit naturellement un point périodique de T_L et un de T_R. Pour montrer la réciproque il faut trouver, en partant de x T_L-périodique, la seconde composante à lui accoler pour former un point de C T_C-périodique Le seul candidat possible est, dans le cas d'un point périodique hyperbolique, l'autre point fixe de l'hyperbolique primitif qui fixe x. Il faut cependant montrer qu'il est bien situé en face de x dans le codage.

Lorsque $x \in \text{Per}(T_L)^+$, on pose $\tilde{x}$ l'autre point fixe de l'hyperbolique $\gamma_L^k[x]$ où k est la période de x. La bonne hypothèse sur le domaine fondamental pour manipuler les points périodiques de T_L est de supposer qu'il existe p pour lequel $|T'| = |T'|_p \geq 1$.

Lemme 4.2.1. *Si $x \in Per(T_L)^+ \cap I_k^L$, alors $\tilde{x} \in \left[a^R(x); b^R(x)\right[$.*

PREUVE : On pose $\gamma = \gamma_L^k[x]$ où k est la période de x. Puisque $x \in \text{Per}(T_L)^+$, $|\gamma'(x)| > 1$ et :

$$\forall y \neq x, \lim_{n \to +\infty} \gamma^n(y) = \tilde{x}.$$

Prenons $y \in \left[a^R(x); b^R(x)\right[$, de sorte que $(x,y) \in C$. Comme x est un point périodique hyperbolique, il n'est pas un cusp de $\mathcal{D}$ et donc $(x,x) \notin C$. Ceci impose donc nécessairement que $y \neq x$, et on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_L^{nk}(x,y) = (\gamma_L^{nk}[x](x), \gamma_L^{nk}[x](y)) = (\gamma^n(x), \gamma^n(y)) = (x, \gamma^n(y)) \in C,$$

d'où $\gamma^n(y) \in \left[a^R(x); b^R(x)\right[$ pour tout n. Ainsi, $\tilde{x} = \lim_{n \to +\infty} \gamma^n(y) \in \left[a^R(x); b^R(x)\right]$.

Supposons maintenant que $\tilde{x} = b^R(x)$ où $x \in \left]a_v^{n_v}; a_w^{n_w} = a_v^{m_v - 1}\right]$. Lorsque $x \in \left]a_v^k; a_v^{k+1}\right]$ (avec $k \in [\![n_v\,;\, m_v - 2]\!]$), $b^R(x) = a_v^{k-n_v}$. Or on a vu que :
– soit $a_v^{k-n_v}$ est un point T_L-périodique, et dans ce cas $x = \tilde{\tilde{x}} = \tilde{a_v^{k-n_v}} = a_v^k \notin \left]a_v^k; a_v^{k+1}\right]$;
– soit $a_v^{k-n_v}$ est dans la Γ-orbite d'un cusp, auquel cas son stabilisateur est engendré par un parabolique.
Dans les deux cas on débouche sur une contradiction, et donc $\tilde{x} \in \left[a^R(x); b^R(x)\right[$. ■

Ce lemme est l'ingrédient principal pour prouver que tout point périodique de T_L ou T_R se relève donc en exactement un point périodique de T_C.

Théorème 4.2.2. *On suppose que* $|T'_L| \geq 1$ *et* $|T'_R| \geq 1$. *Alors*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_L \ : & \mathit{Per}(T_C) & \to & \mathit{Per}(T_L) \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{rccc} \Phi_R \ : & \mathit{Per}(T_C) & \to & \mathit{Per}(T_R) \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

sont bien définies et bijectives.

PREUVE : Si $(x,y) \in \mathrm{Per}(T_C)$, alors il existe $n > 0$ tel que :

$$(T_L^n(x), S_R^n(x,y)) = T_C^n(x,y) = (x,y).$$

Donc $T_L^n(x) = x$ et $x \in \mathrm{Per}(T_L)$. Pour ce même n, $(S_L^n(x,y), T_R^n(y)) = T_C^{-n}(x,y) = (x,y)$ donc $T_R^n(y) = y$ et $y \in \mathrm{Per}(T_R)$.

Supposons maintenant que $\Phi_L(x,y) = \Phi_L(x',y')$. Alors $x = x'$, et si $n > 0$ est un multiple commun aux T_C-périodes de (x,y) et (x,y') il vient $(\gamma_L^n[x](x), \gamma_L^n[x](y)) = T_C^n(x,y) = (x,y)$ et $(\gamma_L^n[x](x), \gamma_L^n[x](y')) = T_C^n(x,y') = (x,y')$. Par conséquent, $\gamma_L^n[x]$ fixe x, y et y'. On a alors deux possibilités :
$-$ soit $x \in \mathrm{Per}(T_L)^+$, auquel cas il n'est pas un cusp du domaine fondamental et nécessairement $x \neq y$ et $x \neq y'$. Si $y \neq y'$, $\gamma_L^n[x]$ fixerait trois points distincts de $\mathbb{S}^1$ et serait donc égal à l'identité, ce qui est impossible lorsque $n > 0$. Donc $y = y'$.
$-$ soit $x = v$ est un cusp, et alors $\gamma_L^n[x]$, qui fixe le cusp v, est nécessairement parabolique et ne peut donc avoir d'autre point fixe. Ainsi $y = v = y'$.

Reste à montrer que Φ_L est surjective. Si $x \in \mathrm{Per}(T)^+$, notons $y = \tilde{x}$. D'après le lemme 4.2.1, on sait que $(x,y) \in C$. On a donc bien $\Phi_L(x,y) = x$. Si par contre x est un cusp, alors $(x,x) \in C$ et on a encore $\Phi_L(x,y) = x$.

Les preuves de l'injectivité et de la surjectivité de Φ_R sont symétriques. ■

Les points périodiques hyperboliques de T_C, T_L et T_R sont donc en bijection, et ce par les plus simples des applications : les projections canoniques de $\mathbb{T}^2$ sur ses composantes.

4.2.2 Description des orbites et densité des points périodiques

Nos résultats d'orbite-équivalence entre les transformations de Bowen-Series et le groupe nous permettent de décrire précisement les orbites de l'extension naturelle dont elles sont les facteurs. Nous pouvons ici revenir à supposer que $\mathcal{D}$ est de volume fini, *even corners* et pas triangulaire de classe 0, sans hypothèse sur la dérivée de T.

Théorème 4.2.3. *Soit* $(x,y) \in C$. *Alors*

$$\{T_C^n(x,y) \mid n \in \mathbb{Z}^*\} = \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathit{id}\}\} \cap C$$

et en particulier

$$\{T_C^n(x,y) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap C.$$

La T_C-orbite d'un point de C est donc l'intersection de son orbite sous l'action diagonale de Γ avec C, et le point original est atteint par cette action si et seulement si il est T_C-périodique.

PREUVE : Si $(x', y') = T_C^n(x, y)$ pour un certain $n \in \mathbb{Z}^*$, alors $(x', y') \in C$ puisque T_C est une bijection de C, et :
– si $n > 0$, $(x', y') = (T_L^n(x), S_R^n(x, y)) = (\gamma(x), \gamma(y))$ avec $\gamma = \gamma_L^n[x] \neq \mathrm{id}$;
– si $n < 0$, $(x', y') = (S_L^{-n}(x, y), T_R^{-n}(y)) = (\gamma(x), \gamma(y))$ avec $\gamma = \gamma_R^{-n}[y] \neq \mathrm{id}$.

Réciproquement, supposons que $(x', y') = (\gamma(x), \gamma(y)) \in C$ avec $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Il existe $p, q \geq 0$ tels que $\gamma_L^p[x] = \gamma_L^q[\gamma(x)]\gamma$. Or, comme $(x', y') \in C$, on peut prendre son image par T_C^q et :

$$T_C^q(x', y') = (\gamma_L^q[\gamma(x)](\gamma(x)), \gamma_L^q[\gamma(x)](\gamma(y))) = (\gamma_L^p[x](x), \gamma_L^p[x](y)) = T_C^p(x, y).$$

Donc $(x', y') = T_C^n(x, y)$ avec $n = p - q$.

Supposons maintenant que $n = 0$, i.e. que $p = q$. Alors

$$(\gamma(x), \gamma(y)) = (x', y') = T_C^0(x, y) = (x, y).$$

En particulier, la relation d'orbite-équivalence pour les mots du codage devient

$$\gamma_L^p[x] = \gamma_L^q[\gamma(x)]\gamma = \gamma_L^p[x]\gamma$$

Donc $\gamma = \mathrm{id}$, ce qui contredit notre hypothèse. ■

Ainsi, une géodésique $(x, y) \in C$ est T_C-périodique si et seulement si Γ-orbite ne rencontre C qu'un nombre fini de fois, et si et seulement si $(x, y) \in \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}$. C'est là toute la puissance de la propriété d'orbite-équivalence pour les mots du codage.

À l'aide de la conjugaison $\varphi : B \to C$ entre T_B et T_C construite au chapitre 2, on peut facilement retrouver le même résultat pour T_B.

Corollaire 4.2.4. *Soit $(x, y) \in B$. Alors*

$$\{T_B^n(x, y) \mid n \in \mathbb{Z}^*\} = \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{id\}\} \cap B$$

et en particulier

$$\{T_B^n(x, y) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma\} \cap B.$$

PREUVE : Si $(x', y') = T_B^n(x, y)$, alors il est bien clair par la définition de la bijection T_B que $(x', y') \in B$ et que $(x', y') = (\gamma(x), \gamma(y))$ avec la même isométrie $\gamma \in \Gamma$.

Réciproquement, supposons que $(x', y') = (\gamma(x), \gamma(y)) \in B$ pour un certain $\gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Puisque φ a été construite pour agir comme la même isométrie sur les deux composantes, il existe $g, g' \in \Gamma$ tels que $\varphi(x, y) = (g(x), g(y))$ et $\varphi(x', y') = (g'(x'), g'(y'))$ Mais alors

$$\varphi(x', y') = (g'(x'), g'(y')) = (g'\gamma(x), g'\gamma(y)) = g'\gamma g^{-1}(g(x), g(y)) = g'\gamma g^{-1}\varphi(x, y) \in C$$

avec $\varphi(x, y) \in C$.

Montrons alors que $g'\gamma g^{-1} \neq \mathrm{id}$. Sinon, $g'\gamma = g$ donc

$$\varphi(x, y) = (g(x), g(y)) = (g'\gamma(x), g'\gamma(y)) = (g'(x'), g'(y')) = \varphi(x', y').$$

Or φ est une bijection, donc ceci implique que $(x, y) = (x', y')$ et ainsi que $g = g'$. Il vient alors $\gamma = g'^{-1}g = \mathrm{id}$, ce qui est absurde.

Alors, d'après le théorème 4.2.3, il existe $n \in \mathbb{Z}^\star$ tel que $\varphi(x', y') = T_C^n(\varphi(x, y))$. Ainsi,

$$(x', y') = \varphi^{-1}T_C^n\varphi(x, y) = T_B^n(x, y).$$ ■

De la même manière que pour le théorème 4.2.3, une géodésique $(x, y) \in B$ est T_B-périodique si et seulement si sa Γ-orbite ne rencontre B qu'un nombre fini de fois, et si et seulement si $(x, y) \in \{(\gamma(x), \gamma(y)) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}$. En particulier, on ne revient pas en l'identité par un mot du billard.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver que l'application $\overline{\varphi}$ de la proposition 2.1.13 est injective, et donc qu'elle conjugue bien le flot géodésique $\overline{\Phi}$ sur la surface M et la suspension Ψ du billard géodésique. En effet, s'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que

$$\Phi(P(x, y), s) = \varphi(x, y, s) = \gamma\varphi(x', y', s') = \gamma\Phi(P(x', y'), s') = \Phi(\gamma(P(x', y')), s'),$$

alors $P(x, y) = \Phi(\gamma(P(x', y')), s'-s)$. Or $\gamma(P(x', y'))$ est un point-vecteur du fibré unitaire tangent qui engendre la géodésique $(\gamma(x'), \gamma(y'))$, donc $P(x, y)$ engendre aussi cette géodésique. Mais comme il doit engendrer par définition la géodésique (x, y), on a nécessairement que $(\gamma(x'), \gamma(y')) = (x, y)$. Puisque (x, y) et (x', y') sont dans B, le corollaire 4.2.4 s'applique et il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(x, y) = T_B^n(x', y')$. Le lemme 2.1.12 conclut alors que $s = s' + \tau_n(x, y)$, et on a bien $(x, y, s) \sim (x', y', s')$.

Ce corollaire 4.2.4 pouvait aussi se montrer de manière élémentaire en étudiant en détail la constitution de l'ensemble B, mais la preuve que l'on vient de faire est plus élégante, et on aura de toutes façons aussi besoin de la conjugaison pour prouver que les points périodiques de T_C (et donc de T_L et de T_R) sont denses :

Théorème 4.2.5.
(i) Les points périodiques de T_B sont denses dans B.
(ii) Les points périodiques de T_C sont denses dans C.
(iii) Les points périodiques de T_L et T_R sont denses dans $\mathbb{S}^1$.

PREUVE : Prenons U un ouvert de B. Il contient un rectangle ouvert $I \times J \subset U$ et, quitte à le réduire, on peut supposer que $I \cap J = \emptyset$ puisque l'intérieur de B ne recontre pas la diagonale du tore $\mathbb{T}^2$. Or, d'après le théorème 5.3.8 de [Bea83], et puisque Γ a pour ensemble limite $\mathbb{S}^1$ tout entier, il existe $\gamma \in \Gamma$ hyperbolique (donc non trivial) dont les points fixes x, y sont respectivement dans I et J. Alors $(\gamma(x), \gamma(y)) = (x, y) \in B$ et, d'après le corollaire 4.2.4, il existe $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $T^n(x, y) = (x, y)$. Donc (x, y) est bien T_B-périodique.

Soit maintenant U un ouvert de C. Puisque la conjugaison $\varphi^{-1} : C \to B$ est définie sur une partition finie de C où elle est continue (et même lisse) sur chaque morceau, on peut supposer que U est inclus dans un de ces morceaux. Alors $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert de B qui contient un point (x, y) T_B-périodique d'après le premier point, et $\varphi(x, y) \in U \subset C$ est T_C-périodique.

Enfin, les points périodiques de T_L et T_R sont denses car ils sont l'image des points périodiques de T_C par respectivement la première et la seconde projection. ■

Par conséquent, les hypothèses du théorème 3.2.14 sont vérifiées, et on obtient le théorème synthétique suivant :

Théorème 4.2.6. *Soit Γ un groupe fuchsien du premier. On note $T = T_L$ ou T_R le codage de Bowen-Series associé à un domaine fondamental even corners, qui n'est pas triangulaire de classe 0, et pour lequel $|T'|_p \geq 1$ pour un certain point p à l'intérieur du domaine. Alors :*
(i) Pour tout y, l'ensemble $\mathcal{T}(y)$ des préimages de T est dense dans $\mathbb{S}^1$.
(ii) Per(T) est dense dans $\mathbb{S}^1$.
(iii) Pour tous couples U, V d'ouverts de $\mathbb{S}^1$, il existe $n \geq 0$ tel que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
(iv) Il existe un G_δ-dense de points de $\mathbb{S}^1$ dont la T-orbite est dense.

4.3 Codage symbolique

Finalement, nous allons montrer que le système dynamique (C, T_C) est conjugué - modulo un nombre dénombrable de géodésiques - à un sous-shift de type fini ayant pour alphabet les intervalles de la partition de Markov de T_L, et de transitions celles de T_L. L'idée est que le futur du mot détermine parfaitement le début x d'une géodésique, et qu'une fois x fixé le passé du mot définit la fin y de la géodésique. Une partie des idées dévelopées ici serviront dans le dernier chapitre pour construire une réciproque partielle à l'application qui associe une fonction propre de l'opérateur de transfert à une distribution de Helgason.

Les idées des preuves exposées ici sont similaires à celles de la preuve du lemme 3.2.13. Par conséquent, on est naturellement amenés à faire les mêmes hypothèses que pour ce lemme, i.e. à supposer que le domaine fondamental est de volume fini, *even corners*, non triangulaire de classe 0 et tel qu'il existe p pour lequel $|T'| = |T'|_p \geq 1$.

4.3.1 Partitions opposées

On rappelle que T_C^n et T_C^{-n} peuvent s'écrire

$$T_C^n(x,y) = (\gamma_L^n[x](x), \gamma_L^n[x](y)) \quad \text{et} \quad T_C^{-n}(x,y) = (\gamma_R^n[y](x), \gamma_R^n[y](y))$$

On note S_R^n la seconde composante de T_C^n qui vérifie naturellement $S_R^0(x,y) = y$, $S_R^1 = S_R$ et :

$$\begin{aligned} S_R^{n+1}(x,y) = \pi_2 \circ T_C^{n+1}(x,y) = (\pi_2 \circ T_C) \circ T_C^n(x,y) = S_R(T_C^n(x,y)) = S_R(T_L^n(x), S_R^n(x,y)) \\ = (\pi_2 \circ T_C^n) \circ T_C(x,y) = S_R^n(T_C(x,y)) = S_R^n(T_L(x), S_R(x,y)) \end{aligned}$$

De même, on note S_L^n la première composante de T_C^{-n} qui vérifie des relations similaires.

Si $x \in \mathbb{S}^1$, on note $[a(x); b(x)[= \left[a^R(x); b^R(x)\right[$ l'ensemble des y tels que $(x,y) \in C$. a et b sont des fonctions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{S}^1$ constantes par morceaux.

À x fixé, $y \mapsto S_R(x,y)$ agit par $\gamma_L[x]$ et induit donc une bijection de $[a(x); b(x)[$ dans $[\gamma_L[x](a(x)) = S_R(x, a(x)); \gamma_L[x](b(x))[$. Une récurrence immédiate montre que $y \mapsto S_R^n(x,y)$ induit une bijection de $[a(x); b(x)[$ dans $[\gamma_L^n[x](a(x)) = S_R^n(x, a(x)); \gamma_L^n[x](b(x))[$.

On notera $\tilde{C} = \bigsqcup_{x \in \mathbb{S}^1} [a(x); b(x)] \subsetneq \bar{C}$. T_C se prolonge à $\tilde{C}$ en posant :

$$T_C(x, b(x)) = (T_L(x), S_R(x, b(x))) = (\gamma_L[x](x), \gamma_L[x](b(x))).$$

$y \mapsto S_R(x,y)$ induit alors une bijection de $[a(x); b(x)]$ dans $[S_R(x, a(x)); S_R(x, b(x))]$. De plus,

$$S_R(x, b(x)) = \gamma_L[x](b(x)) = \lim_{y \to b(x)} \gamma_L[x](y) = \lim_{y \to b(x)} S_R(x,y) \in [a(T_L(x)); b(T_L(x))]$$

puisque $S_R(x,y) \in [a(T_L(x)); b(T_L(x))[$. Par conséquent, $T_C(x, b(x)) \in \tilde{C}$ et on peut définir par récurrence $S_R^n(x, b(x))$ de sorte que l'on ait toujours $S_R^n(x, b(x)) = \gamma_L^n[x](b(x))$.

La remarque-clé qui conditionne toute cette section est qu'un intervalle $[a(x'); b(x')[$ est découpé par les images des intervalles $[a(x); b(x)[$ par S_R pour x T_L-préimage de x'. Elle traduit le fait que T_C soit une bijection.

Lemme 4.3.1.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x' \in \mathbb{S}^1, [a(x'); b(x')[= \bigsqcup_{T_L^n(x) = x'} [S_R^n(x, a(x)); S_R^n(x, b(x))[\,.$$

PREUVE : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x' \in \mathbb{S}^1$ fixés.

Prenons $y' \in [a(x'); b(x')[$. Comme T_C est une bijection, il existe $(x, y) \in C$ tel que

$$T_C^n(x, y) = (x', y') = (T_L^n(x), S_R^n(x, y))$$

Or $(x, y) \in C$ implique que $y \in [a(x); b(x)[$, donc $y' = S_R^n(x, y) \in [S_R^n(x, a(x)); S_R^n(x, b(x))[$.

Réciproquement, supposons que $y' \in [S_R^n(x, a(x)); S_R^n(x, b(x))[$ où $T_L^n(x) = x'$. Puisque $S_R^n(x, .)$ est une bijection de $[a(x); b(x)[$ dans $[S_R^n(x, a(x)); S_R^n(x, b(x))[$, il existe un unique $y \in [a(x); b(x)[$ tel que $S_R^n(x, y) = y'$. Mais alors $(x, y) \in C$ et donc :

$$(x', y') = (T_L^n(x), S_R^n(x, y)) = T_C^n(x, y) \in C.$$

y' doit donc être dans $[a(x'); b(x')[$.

Enfin, supposons que $y' \in [S_R^n(x_1, a(x_1)); S_R^n(x_1, b(x_1))[\cap [S_R^n(x_2, a(x_2)); S_R^n(x_2, b(x_2))[$. De même que précédemment, on peut trouver un unique $y_1 \in [a(x_1); b(x_1)[$ (respectivement $y_2 \in [a(x_2); b(x_2)[$) tel que $y' = S_R^n(x_1, y_1)$ (respectivement $y' = S_R^n(x_2, y_2)$). Or

$$T_C^n(x_1, y_1) = (T_L^n(x_1), S_R^n(x_1, y_1)) = (x', y') = (T_L^n(x_2), S_R^n(x_2, y_2)) = T_C^n(x_2, y_2),$$

donc $x_1 = x_2$ puisque T_C est une bijection de C. ■

Lorsque y' est fixé dans $[a(x'); b(x')[$, la préimage de x' qui détermine dans quel sous-intervalle de cette partition vit y' est donnée par $S_L^n(x', y')$:

Proposition 4.3.2. *Pour tout* $(x, y) \in C$,

$$y \in [S_R^n(S_L^n(x, y), a(S_L^n(x, y))); S_R^n(S_L^n(x, y), b(S_L^n(x, y)))[\,.$$

PREUVE : Notons $x_n = S_L^n(x, y)$. Il est clair que $T_L^n(x_n) = \pi_1 T_C^n T_C^{-n}(x, y) = x$. D'autre part, $T_C^{-n}(x, y) = (S_L^n(x, y), T_R^n(y)) \in C$ donc $T_R^n(y) \in [a(x_n); b(x_n)[$ et :

$$\begin{aligned} y = \pi_2 T_C^n T_C^{-n}(x, y) &= S_R^n(S_L^n(x, y), T_R^n(y)) \\ &= S_R^n(x_n, T_R^n(y)) \in [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[\,. \end{aligned}$$

Donc x_n est l'unique w tel que $T_L^n(w) = x$ et $y \in [S_R^n(w, a(w)); S_R^n(w, b(w))[$. ■

Si $x \in \mathbb{S}^1$ est fixé, il existe donc pour tout $n \geq 0$ un unique x_n tel que $T_L^n(x_n) = x$ et $S_R^n(x_n, b(x_n)) = b(x)$. On prolonge ainsi T_C^{-1} à $\tilde{C}$ en posant $S_L(x, b(x)) = x_1$.

Deux images d'intervalles $[a(x); b(x)[$ sont incluses l'une dans l'autre si et seulement si elles sont sur la même branche remontant à x' dans l'arbre de ses préimages.

Lemme 4.3.3. *Soient* $x' \in \mathbb{S}^1$, $n, k \geq 0$, *et* $x_n, x_{n+k} \in \mathbb{S}^1$ *tels que* $T_L^n(x_n) = T_L^{n+k}(x_{n+k}) = x'$.

$$\big[S_R^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k})); S_R^{n+k}(x_{n+k}, b(x_{n+k}))\big[\subset [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[$$

si et seulement si $T_L^k(x_{n+k}) = x_n$.

Ce résultat est vrai avec des intervalles ouverts, semi-ouverts à gauche, à droite, ou fermés.

PREUVE : On a :

$$\begin{aligned}
[S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[&= S_R^n(x_n, [a(x_n); b(x_n)[) \\
&= S_R^n\left(x_n, \bigsqcup_{T_L^k(x)=x_n} \big[S_R^k(x, a(x)); S_R^k(x, b(x))\big[\right) \\
&= \bigsqcup_{T_L^k(x)=x_n} \big[S_R^n(T_L^k(x), S_R^k(x, a(x))); S_R^n(T_L^k(x), S_R^k(x, b(x)))\big[\\
&= \bigsqcup_{T_L^k(x)=x_n} \big[S_R^{n+k}(x, a(x)); S_R^{n+k}(x, b(x))\big[.
\end{aligned}$$

Si $T_L^k(x_{n+k}) = x_n$, il est donc clair que $\big[S_R^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k})); S_R^{n+k}(x_{n+k}, b(x_{n+k}))\big[$ est inclus dans $[S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[$. Réciproquement, si l'inclusion est vérifiée, il existe un x tel que $T_L^k(x) = x_n$ et :

$$\big[S_R^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k})); S_R^{n+k}(x_{n+k}, b(x_{n+k}))\big[= \big[S_R^{n+k}(x, a(x)); S_R^{n+k}(x, b(x))\big[.$$

Comme ces intervalles sont soit confondus soit disjoints, on doit forcément avoir $x_{n+k} = x$. D'où $T_L^k(x_{n+k}) = x_n$. ■

Deux images d'intervalles $[a(x); b(x)[$ s'intersectent si et seulement si la plus lointaine du point de base x' est incluse dans la plus proche.

Lemme 4.3.4. *Soient $x' \in \mathbb{S}^1$, $n, k \geq 0$, et $x_n, x_{n+k} \in \mathbb{S}^1$ tels que $T_L^n(x_n) = T_L^{n+k}(x_{n+k}) = x'$.*

$$\big[S_R^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k})); S_R^{n+k}(x_{n+k}, b(x_{n+k}))\big[\cap [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[\neq \emptyset$$

si et seulement si

$$\big[S_R^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k})); S_R^{n+k}(x_{n+k}, b(x_{n+k}))\big[\subset [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[.$$

Ce résultat est vrai avec des intervalles ouverts, semi-ouverts à gauche ou à droite ; mais il est faux avec des intervalles fermés.

PREUVE : La condition suffisante étant évidente, montrons la condition nécessaire. Soit

$$y \in [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[= \bigsqcup_{T_L^k(x)=x_n} \big[S_R^{n+k}(x, a(x)); S_R^{n+k}(x, b(x))\big[.$$

Il existe un unique x tel que $T_L^k(x) = x_n$ et $y \in \big[S_R^{n+k}(x, a(x)); S_R^{n+k}(x, b(x))\big[$. Mais alors

$$\big[S_R^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k})); S_R^{n+k}(x_{n+k}, b(x_{n+k}))\big[\cap \big[S_R^{n+k}(x, a(x)); S_R^{n+k}(x, b(x))\big[\neq \emptyset,$$

ce qui ne peut se produire que lorsque $x_{n+k} = x$. Donc $T_L^k(x_{n+k}) = T_L^k(x) = x_n$ et on a l'inclusion demandée. ■

4.3.2 Densité des partitions opposées

On va s'intéresser plus particulièrement aux extrémités de ces images d'intervalles opposés. Notre but dans cette sous-section va être de montrer qu'elles sont denses dans l'intervalle de base $[a(x'); b(x')]$. C'est un résultat élémentaire pour Γ cocompact car on a alors contraction stricte de la taille de ces images d'intervalles. Dans notre cas, et de même qu'au chapitre 3 pour prouver le lemme 3.2.13, on devra remplacer ce raisonnement par un argument de monotonie puis utiliser un peu de combinatoire du codage. On en déduira que pour tout $(x, y) \in C$, la suite $|T_L^{n'}(S_L^n(x, y))|$ diverge vers $+\infty$.

Définition 4.3.5. Pour $x' \in \mathbb{S}^1$, on note $\Delta^n(x') = \{a(x')\} \cup \{S_R^n(x, b(x)) \mid T_L^n(x) = x'\}$.

Les $\Delta^n(x')$ forment une suite croissante de sous-ensembles de $[a(x'); b(x')]$.

Proposition 4.3.6. *Pour tout $n \geq 0$ et $x' \in \mathbb{S}^1$,*
(i) $\Delta^n(x')$ est fini ;
(ii) $\Delta^n(x') \subset [a(x'); b(x')]$;
(iii) $\Delta^n(x') = \{S_R^n(x, a(x)) \mid T_L^n(x) = x'\} \cup \{b(x')\}$;
(iv) $\Delta^n(x') \subset \Delta^{n+1}(x')$.

PREUVE : (i) provient du fait que le nombre de préimages par T_L est fini et uniformément borné sur $\mathbb{S}^1$. Les points (ii) et (iii) sont clairs par le lemme 4.3.1. Reste à prouver (iv).

Soit $y' = S_R^n(x, b(x)) \in \Delta^n(x')$, avec donc $T_L^n(x) = x'$. Comme d'après le lemme 4.3.1

$$[a(x); b(x)[= \bigsqcup_{T_L(\tilde{x})=x} [S_R(\tilde{x}, a(\tilde{x})); S_R(\tilde{x}, b(\tilde{x}))[\,,$$

$b(x)$ est réalisé par une et exactement une extrémité droite des sous-intervalles de la partition, i.e. il existe un unique $\tilde{x}$ tel que $T_L(\tilde{x}) = x$ et $S_R(\tilde{x}, b(\tilde{x})) = b(x)$. Alors $T_L^{n+1}(\tilde{x}) = T_L^n(x) = x'$ et :

$$S_R^{n+1}(\tilde{x}, b(\tilde{x})) = S_R^n(T_L(\tilde{x}), S_R(\tilde{x}, b(\tilde{x}))) = S_R^n(x, b(x)) = y'. \qquad \blacksquare$$

Définition 4.3.7. Pour tout $x' \in \mathbb{S}^1$, on note $\Delta(x') = \bigcup_{n\geq 0} \Delta^n(x')$.

Dans toute la suite on supposera qu'il existe $p \in \mathbb{D}$ tel que $|T_L'|_p \geq 1$ et qui ne soit le centre d'aucun elliptique de Γ. Pour alléger les notations, on posera $|\gamma'(x)| = |\gamma'(x)|_p$.

Proposition 4.3.8. *Pour tout $x' \in \mathbb{S}^1$, $\Delta(x')$ est dense dans $[a(x'); b(x')]$.*

PREUVE : Sinon, il existe $]u; v[\cap [a(x'); b(x')]$ ouvert de $[a(x'); b(x')]$ qui ne coupe pas $\Delta(x')$. Puisque $a(x'), b(x') \in \Delta(x)$, on peut supposer que $]u; v[\subset]a(x'); b(x')[$.

Notons $x_0 = x'$, $u_0 = u$, $v_0 = v$, $a_0 = a(x_0)$ et $b_0 = b(x_0)$. On rappelle que

$$[a_0; b_0[= \bigsqcup_{T_L(x)=x_0} [S_R(x, a(x)); S_R(x, b(x))[\,.$$

Comme $\Delta^1(x_0) \cap]u_0; v_0[= \emptyset$, il existe (un unique) $x_1 \in \mathbb{S}^1$ tel que $T_L(x_1) = x_0$ et pour lequel $]u_0; v_0[\subset]S_R(x_1, a(x_1)); S_R(x_1, b(x_1))[$. On pose alors $a_1 = a(x_1)$, $b_1 = b(x_1)$, $\gamma_1 = \gamma_L^1[x_1]$, $u_1 = \gamma_1^{-1}(u_0)$ et $v_1 = \gamma_1^{-1}(v_0)$. Puisque

$$]u_0; v_0[\subset]S_R(x_1, a_1); S_R(x_1, b_1)[=]\gamma_1(a_1); \gamma_1(b_1)[\,,$$

on en déduit que $]u_1; v_1[= \big]\gamma_1^{-1}(u_0); \gamma_1^{-1}(v_0)\big[\subset]a_1; b_1[$.

Mais on sait de plus que $\Delta(x_1) \cap]u_1; v_1[= \emptyset$. En effet, sinon il existe un $y \in \Delta(x_1) \cap]u_1; v_1[$. Comme $]u_1; v_1[\subset]a_1; b_1[$, $y \neq a_1$ et s'écrit donc $S_R^n(w, b(w))$ pour un certain $w \in \mathbb{S}^1$ vérifiant $T_L^n(w) = x_1$. Mais alors :

$$\begin{aligned} T_L^{n+1}(w) &= T_L(x_1) = x_0 \\ S_R^{n+1}(w, b(w)) &= S_R(T_L^n(w), S_R^n(w, b(w))) = S_R(x_1, y) = \gamma_1(y) \in]u_0; b_0[\end{aligned}$$

Donc $\Delta(x_0) \cap]u_0; v_0[\neq \emptyset$. C'est absurde.

On peut ainsi construire par récurrence des suites $(x_n), (u_n), (v_n)$ de points de $\mathbb{S}_1$, et (γ_n) de générateurs de Γ, tels que pour tout n :
(i) $\gamma_{n+1}(x_{n+1}) = x_n$, $\gamma_{n+1}(u_{n+1}) = u_n$ et $\gamma_{n+1}(v_{n+1}) = v_n$;
(ii) $]u_n; v_n[\subset]a_n; b_n[$ où $a_n = a(x_n)$ et $b_n = b(x_n)$;
(iii) $\Delta(x_n) \cap]u_n; v_n[= \emptyset$.
De plus, comme u_n et v_n sont dans $]a_n; b_n[$ qui, par construction de C, se situe à l'extérieur du cercle isométrique de γ_n, on a aussi que $|\gamma_n'(u_n)| \leq 1$ et $|\gamma_n'(v_n)| \leq 1$.

On note $d^2(x, y) = \exp(-b_x(p, z) - b_y(p, z))$ (où $z \in (x, y)$) le carré de la distance de Gromov basée en p. $d(x, y)$ est équivalente à $|x - y|$, et on rappelle la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{S}^1, \forall \gamma \in \Gamma, d^2(\gamma(x), \gamma(y)) = |\gamma'(x)||\gamma'(y)|d^2(x, y).$$

Posons $d_n = d^2(u_n, v_n)$. $d_0 = d^2(u, v) > 0$ par hypothèse. De plus, pour tout n,

$$\begin{aligned} d_n = d^2(u_n, v_n) &= d^2(\gamma_{n+1}(u_{n+1}), \gamma_{n+1}(v_{n+1})) \\ &= |\gamma_{n+1}'(u_{n+1})||\gamma_{n+1}'(v_{n+1})|d^2(u_{n+1}, v_{n+1}) \leq d^2(u_{n+1}, v_{n+1}) = d_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc (d_n) est croissante, majorée par $\max\{d^2(a_k, b_k) \mid k \in [\![1\,;\, K]\!]\}$: elle converge donc vers un certain $\delta \geq d_0 > 0$, et $\dfrac{d_n}{d_{n+1}} = |\gamma_{n+1}'(u_{n+1})||\gamma_{n+1}'(v_{n+1})|$ converge ainsi vers 1.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe donc N tel que :

$$\forall n \geq N + 1, 1 - \varepsilon \leq \frac{d_n}{d_{n+1}} = |\gamma_{n+1}'(u_{n+1})||\gamma_{n+1}'(v_{n+1})| \leq 1.$$

Si $n \geq N$, on obtient donc que

$$1 \geq |\gamma_n'(u_n)| \geq \frac{1 - \varepsilon}{|\gamma_n'(v_n)|} \geq 1 - \varepsilon$$

puisque $0 < |\gamma_n'(v_n)| \leq 1$. De même, $1 \geq |\gamma_n'(v_n)| \geq 1 - \varepsilon$.

On pose $\sigma(\gamma) = \{x \in \mathbb{S}^1 \mid |\gamma'(x)| = 1\}$. Comme γ_n ne peut pas être un elliptique centré en p, $\sigma(\gamma_n)$ possède exactement deux éléments. Or γ_n ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs car il est donné par un des générateurs du groupe associé à un des côtés du domaine fondamental. Donc par continuité des $|\gamma_v'|$ pour $v \in V$, il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ tel que :
(i) $\forall n, \forall s \in \sigma(\gamma_n), \forall x \in B(s, \alpha(\varepsilon)), 1 - \varepsilon \leq |\gamma_n'(x)| \leq 1 + \varepsilon$;
(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon) = 0$.
Donc, pour tout $n \geq N$, on a

$$u_n, v_n \in]a_n; b_n[\cap \bigcup_{s \in \sigma(\gamma_n)} B(s, \alpha(\varepsilon)).$$

Quitte à diminuer ε (ce qui augmente N), on peut supposer que :

(i) $2\alpha(\varepsilon) < \sqrt{d_0}$;
(ii) $\forall n \geq N, B(s_1, \alpha(\varepsilon)) \cap B(s_2, \alpha(\varepsilon)) = \emptyset$ avec $s_1, s_2 \in \sigma(\gamma_n)$;
(iii) $\forall n \geq N, B(s, \alpha(\varepsilon)) \cap [a_n; b_n] \neq \emptyset \Leftrightarrow s \in [a_n; b_n]$ avec $s \in \sigma(\gamma_n)$ (il suffit de prendre $\alpha(\varepsilon)$ plus petit que $\min\{d(s, [a_n; b_n]) \mid n \geq N, s \in \sigma(\gamma_n) \cap {}^c[a_n; b_n]\}$ qui se trouve être un ensemble fini puisque les $[a_n; b_n]$ sont en nombre fini).

Pour tout $n \geq N$, u_n et v_n ne peuvent être dans la même $B(s, \alpha(\varepsilon))$ ($s \in \sigma(\gamma_n)$) puisque

$$d(u_n, v_n) = \sqrt{d_n} \geq \sqrt{d_0} > 2\alpha(\varepsilon) = \text{diam}(B(s, \alpha(\varepsilon))).$$

Mais $u_n, v_n \in]a_n; b_n[$ donc nécessairement les deux éléments de $\sigma(\gamma_n)$ doivent être dans $[a_n; b_n]$. Ceci ne peut se produire que si x_n est toujours dans l'intervalle immédiatement à droite d'un cusp, auquel cas $\sigma(\gamma_n) = \{a_n; b_n\}$.

Si le groupe est cocompact, on a déjà une contradiction et la preuve est terminée.

Sinon, puisque le domaine fondamental n'admet qu'un nombre fini de cusps, au moins l'un d'entre eux - notons le v - est visité un nombre infini de fois. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que $x_n \in I_v^0$ pour tout $n \geq N$. Notons $a = a_n$, $b = b_n$ qui sont maintenant constants pour $n \geq N$. Comme $]u_n; v_n[\subset]a; b[$, nécessairement $u_n \in B(a, \alpha(\varepsilon))$ et $v_n \in B(b, \alpha(\varepsilon))$. Or lorsque ε tend vers 0, $\alpha(\varepsilon)$ tend vers 0. Donc (u_n) converge vers a, (v_n) vers b, et donc d_n converge (en croissant) vers $d^2(a, b)$.

Or, lorsque v est un cusp, il existe $k > 0$ tel que tout $x \in I_v^0$ admette au moins deux préimages par T_L^k. En effet, supposons qu'il n'en ait qu'une pour tout k. La propriété de Markov assurant que le nombre de préimages est constant sur chaque intervalle, il suffit de le montrer pour x_n. Après extraction, x_{n+1} est aussi dans I_v^0, et il existe $k > 0$ tel que $T_L^k(x_{n+1}) = x_n$ et $[a; b[= \left[S_R^k(x_{n+1}, a); S_R^k(x_{n+1}, b)\right[$. $\gamma = \gamma_L^k[x_{n+1}]$ est alors un hyperbolique non trivial de Γ qui fixe le sommet à l'infini $v = a$. C'est absurde.

Si x admet au moins deux préimages à la profondeur k, alors il existe un $z \in]a; b[\cap \Delta^k(x)$. Notons $\mu = \min\{d(a, z), d(z, b)\} > 0$ et $\mu_0 = \min\{\mu, \frac{d(a,b)}{3}\}$. Comme $d(a, u_n)$ et $d(v_n, b)$ tendent vers 0, il existe $N' > N$ tel que pour $n \geq N'$, $d(a, u_n) < \mu_0$ et $d(v_n, b) < \mu_0$. L'intervalle $]u_n; v_n[$ étant d'intersection vide avec $\Delta(x)$, $z \in]a; u_n[\sqcup]v_n; b[$. Si par exemple $z \in]a; u_n[$, alors on a pour $n \geq N'$

$$\mu = \min\{d(a, z), d(z, b)\} \leq d(a, z) \leq d(a, u_n) < \mu_0 \leq \mu.$$

C'est une contradiction. ■

Définition 4.3.9. Si $x' \in \mathbb{S}^1$, on pose

$$\delta_n(x) = \max\left\{d(S_R^n(x, a(x)), S_R^n(x, b(x))) \mid T_L^n(x) = x'\right\}.$$

C'est aussi la distance maximale entre deux éléments successifs de $\Delta^n(x')$.

Corollaire 4.3.10. $(\delta_n(x'))_{n\geq 0}$ *décroit vers* 0.

PREUVE : Comme $\Delta^n(x') \subset \Delta^{n+1}(x')$, $\delta_{n+1}(x') \leq \delta_n(x')$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(u_k)_{k\in[\![1\,;\,K]\!]}$ tel que $[a(x'); b(x')[= \bigsqcup_{k=1}^{K-1} [u_k; u_{k+1}[$ et $d(u_k, u_{k+1}) < \varepsilon$. Or $\Delta(x')$ est dense, donc dans chaque $]u_k; u_{k+1}[$ on peut trouver un $S_R^{n_k}(x_k, b(x_k))$. Posons $N = \max\{n_k \mid k \in [\![1\,;\,K]\!]\}$. Pour tout k,

$$S_R^{n_k}(x_k, b(x_k)) = S_R^N(\tilde{x_k}, b(\tilde{x_k})) = S_R^N(\bar{x_k}, a(\bar{x_k})) \in \Delta^N(x')$$

et la distance entre deux de ces éléments successifs est inférieure à 2ε. Donc $\delta_N(x') < 2\varepsilon$ et la décroissance achève la preuve. ■

Corollaire 4.3.11. *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{S}^1$ tels que pour tout n, $T_L(x_{n+1}) = x_n$. Alors :*
− soit il existe un cusp v tel que $x_n = v$ pour tout n, auquel cas $|(T_L^n)'(x_n)| = 1$;
− soit $\lim_{n\to+\infty} |(T_L^n)'(x_n)| = +\infty$.

PREUVE : On pose $a_n = a(x_n)$ et $b_n = b(x_n)$. Il existe $A > 0$ tel que : $\forall n, d(a_n, b_n) \geq A$. Alors :

$$\begin{aligned}\delta_n(x')^2 \geq d^2(S_R^n(x_n, a_n), S_R^n(x_n, b_n)) &= |\gamma_L^n[x_n]'(a_n)||\gamma_L^n[x_n]'(b_n)|d^2(a_n, b_n)\\ &\geq |\gamma_L^n[x_n]'(a_n)||\gamma_L^n[x_n]'(b_n)|A\end{aligned}$$

Comme $(\delta_n(x'))$ converge vers 0, $\lim_{n\to+\infty} |\gamma_L^n[x_n]'(a_n)||\gamma_L^n[x_n]'(b_n)| = 0$. Or $|\gamma_L^n[x_n]'(a_n)| \leq 1$ et $|\gamma_L^n[x_n]'(b_n)| \leq 1$, donc ces deux suites ne peuvent être simultanément minorées par un nombre strictement positif. Supposons par exemple que $\inf_n |\gamma_L^n[x_n]'(a_n)| = 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lim_{n\to+\infty} |\gamma_L^n[x_n]'(a_n)| = 0$. Alors

$$\begin{aligned}d^2(x', S_R^n(x_n, a_n)) &= d^2(T_L^n(x_n), S_R^n(x_n, a_n))\\ &= |\gamma_L^n[x_n]'(x_n)||\gamma_L^n[x_n]'(a_n)|d^2(x_n, a_n)\\ &\leq |\gamma_L^n[x_n]'(x_n)||\gamma_L^n[x_n]'(a_n)|\text{diam}^2(\mathbb{S}^1)\end{aligned}$$

S'il existe N tel que x_N ne soit pas un cusp, alors pour tout $n \geq N$,

$$0 < d^2(x', S_R^N(x_N, a_N)) \leq d^2(x', S_R^n(x_n, a_n))$$

puisque $S_R^n(x_n, a_n) \in \big[S_R^N(x_N, a_N); S_R^N(x_N, b_N)\big[\subset]a(x'); b(x')[$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} |\gamma_L^n[x_n]'(a_n)| = 0$, la suite $(|\gamma_L^n[x_n]'(x_n)|)_{n\geq 0}$ est nécessairement non bornée. Puisqu'elle est croissante ($|T_L'| \geq 1$), elle diverge vers $+\infty$. ■

4.3.3 Projection sur $\Delta^n(x')$

Puisque $\Delta(x')$ est dense dans $[a(x'); b(x')]$, on peut construire des applications de projection des points de cet intervalle sur les raffinement successifs $\Delta^n(x')$. Ces approximations vont nous servir au prochain chapitre.

Définition 4.3.12. Pour tout $x' \in \mathbb{S}^1$ et $n \geq 0$, on construit $\alpha_n(x', .) : [a(x'); b(x')] \to \Delta^n(x')$:

$$\begin{gathered}\forall y' \in [a(x'); b(x')[\,, \alpha_n(x', y') = S_R^n(S_L^n(x', y'), a(S_L^n(x', y')));\\ \alpha_n(x', b(x')) = b(x').\end{gathered}$$

À noter que $\alpha_n(x', b(x')) \neq S_R^n(S_L^n(x', b(x')), a(S_L^n(x', b(x'))))$ puisque le premier vaut $b(x')$ tandis que le second est un $S_R^n(x, a(x))$.

Lemme 4.3.13. *Pour tout $(x', y') \in \tilde{C}$ et $n \geq 0$, $\alpha_{n+1}(x', y') \in [\alpha_n(x', y'); y']$.*

PREUVE : Pour abréger les notations, on omettra les (x', y').

Si $y' = b(x')$, alors $\alpha_n = \alpha_{n+1} = b(x')$ et le résultat est vrai. Sinon, on note $x_n = S_L^n(x', y')$. Alors

$$y' \in \big[S_R^{n+1}(x_{n+1}, a(x_{n+1})); S_R^{n+1}(x_{n+1}, b(x_{n+1}))\big[\subset [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[$$

puisque $T_L(x_{n+1}) = x_n$. Donc $[\alpha_{n+1}; y'] \subset [\alpha_n; y']$, ce qui implique que $\alpha_{n+1} \in [\alpha_n; y']$. ■

Proposition 4.3.14. *Pour tout* $(x', y') \in \tilde{C}$, $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n(x', y') = y'$.

PREUVE : D'après le lemme 4.3.13, on sait que $(\alpha_n)_n$ est monotone. D'autre part, la densité de $\Delta(x')$ assure que l'on peut trouver des éléments de la suite aussi proches que l'on veut de y'. Par conséquent elle converge vers y'. ■

4.3.4 Le codage étendu comme sous-shift de type fini

Notons $\mathcal{I} = \{I_1 \dots I_K\}$ la partition de Markov associée à T_L, et M^L sa matrice de transition, i.e. la matrice de taille K à les coefficients dans $\{0; 1\}$ vérifiant :

$$\forall j, k, M^L_{j,k} = 1 \Leftrightarrow I_k \subset T_L(I_j).$$

Par abus de notation, on notera $\gamma_L[k] = \gamma_L[x]$ indépendant du choix de $x \in I_k$. Chaque point de $\mathbb{S}^1$ est situé dans un unique intervalle de la partition, ce qui nous amène à poser

$$\begin{array}{rccl} \kappa\ :\ \mathbb{S}^1 & \to & [\![1\,;\,K]\!] & . \\ x & \mapsto & \text{l'unique } k \text{ tel que } x \in I_k & \end{array}$$

Fixons $0 < \theta < 1$. On définit les espaces de mots M^L-admissibles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^+ &= \left\{(k_n)_{n\geq 0} \mid \forall n \geq 0, M^L_{k_n,k_{n+1}} = 1\right\} \text{ muni de } d_\theta((k_n),(l_n)) = \theta^{\sup\{n\geq 0 | \forall i\leq n, k_i = l_i\}} \\ \mathcal{X}^-[k_0] &= \left\{(k_n)_{n\leq 0} \mid \forall n < 0, M^L_{k_n,k_{n+1}} = 1\right\} \text{ muni de } d_\theta((k_n),(l_n)) = \theta^{\sup\{n\geq 0 | \forall i\leq n, k_{-i} = l_{-i}\}} \\ \mathcal{X} &= \left\{(k_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \forall n \in \mathbb{Z}, M^L_{k_n,k_{n+1}} = 1\right\} \text{ muni de } d_\theta((k_n),(l_n)) = \theta^{\sup\{n\geq 0 | \forall |i|\leq n, k_i = l_i\}} \end{aligned}$$

qui sont compacts. De plus, ils naturellement reliés par les projections canoniques

$$\begin{array}{rccl} +\ : & \mathcal{X} & \to & \mathcal{X}^+ \\ & x = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & x^+ = (k_n)_{n\geq 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} -\ : & \mathcal{X} & \to & \sqcup_k \mathcal{X}^-[k] \\ & x = (k_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & x^- = (k_n)_{n\leq 0} \in \mathcal{X}^-[k_0] \end{array} .$$

On peut alors définir les opérateurs de décalage unilatéral et bilatéral

$$\begin{array}{rccl} \sigma^+\ : & \mathcal{X}^+ & \to & \mathcal{X}^+ \\ & (k_n)_{n\geq 0} & \mapsto & (k_{n+1})_{n\geq 0} \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \sigma\ : & \mathcal{X} & \to & \mathcal{X} \\ & (k_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (k_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

ainsi que l'opérateur d'injection de k' à droite

$$\begin{array}{rccl} \sigma^-[k']\ : & \bigsqcup_{k|M^L_{k,k'}=1} \mathcal{X}^-[k] & \to & \mathcal{X}^-[k'] \\ & (k_n)_{n\leq 0} \in \mathcal{X}^-[k] & \mapsto & \begin{cases} k_{n+1} & \text{si } n < 0 \\ k' & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{array} .$$

On va montrer que (C, T_C) est conjugué à une sous-partie de $(\mathcal{X}, \sigma)$.

Lemme 4.3.15. *Soit* $(k_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^+$. *On note* $\gamma_n = \gamma_L[k_n]$. *Alors* $\left(\gamma_0^{-1} \dots \gamma_{n-1}^{-1}(\overline{I_{k_n}})\right)_{n\geq 0}$ *est une suite décroissante de sous-intervalles de* $\overline{I_{k_0}}$ *dont le diamètre tend vers* 0.

PREUVE : Pour tout n, on note $g_n = \gamma_{n-1} \dots \gamma_0 \in \Gamma$ et $U_n = g_n^{-1}(\overline{I_{k_n}})$. Montrons tout d'abord que (U_n) est une suite décroissante d'intervalles fermés. En effet,

$$U_{n+1} = g_n^{-1}(\overline{I_{k_{n+1}}}) = \gamma_0^{-1} \dots \gamma_{n-1}^{-1}\gamma_n^{-1}(\overline{I_{k_{n+1}}}) \subset \gamma_0^{-1} \dots \gamma_{n-1}^{-1}(\overline{I_{k_n}}) = U_n$$

car $M^L_{k_n,k_{n+1}} = 1$ implique que $T(I_{k_n}) = \gamma_n(I_{k_n}) \supset I_{k_{n+1}}$. Ainsi (U_n) forme une suite décroissante de sous-intervalles fermés de $\overline{I_{k_0}}$.

Supposons par l'absurde que la suite des diamètres des (U_n) ne décroisse pas vers 0. Alors $U = \bigcap_{n\geq 0} \gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{k_n}})$ est un intervalle fermé non réduit à un point, donc contient un intervalle ouvert $]u; v[$ avec $u \neq v$. Posons $\overline{I_{k_n}} = [x_n; y_n]$ ainsi que $u_n = g_n(u)$ et $v_n = g_n(v)$, de sorte que $u_{n+1} = \gamma_n(u_n)$ et $v_{n+1} = \gamma_n(v_n)$ pour tout n. Alors

$$d^2(u_{n+1}, v_{n+1}) = |\gamma_n'(u_n)||\gamma_n'(v_n)|d^2(u_n, v_n) \geq 1$$

car $[u_n; v_n] = g_n([u; v]) \subset g_n(U) \subset \overline{I_{k_n}}$. Par conséquent, la suite $(d^2(u_n, v_n))_{n\geq 0}$ est croissante, majorée par le carré du diamètre de $\mathbb{S}^1$: elle converge vers $\delta \geq d^2(u, v) > 0$. Ainsi,

$$|\gamma_n'(u_n)||\gamma_n'(v_n)| = \frac{d^2(u_{n+1}, v_{n+1})}{d^2(u_n, v_n)} \to 1 \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \geq 0$ tel que :

$$\forall n \geq N, 1 \leq |\gamma_n'(u_n)||\gamma_n'(v_n)| < 1 + \varepsilon.$$

Puisque $|\gamma_n'(u_n)|$ et $|\gamma_n'(v_n)|$ sont tous deux supérieurs ou égaux à 1, on en déduit que

$$\forall n \geq N, 1 \leq |\gamma_n'(u_n)| < 1 + \varepsilon \text{ et } 1 \leq |\gamma_n'(v_n)| < 1 + \varepsilon.$$

Avec le même raisonnement qu'à la proposition 4.3.8, on en déduit qu'en faisant tendre ε vers 0 on peut avoir u_n aussi proche que souhaité de x_n et v_n de y_n, et que $|\gamma_n'(x_n)|$ et $|\gamma_n'(y_n)|$ sont arbitrairement proches de 1. Par la structure de la partition de Markov, il doit alors exister un rang n tel que $|\gamma_n'(x_n)| = |\gamma_n'(y_n)| = 1$; et cette situation ne peut se produire que si x_n et y_n sont des sommets à l'infini du domaine fondamental. Comme γ_n ne peut pas être un hyperbolique d'axe (x_n, y_n) qui est un côté du domaine, il ne peut fixer à la fois x_n et y_n. Mais pour peu que u_n et v_n soient suffisamment proches de x_n et y_n, $\gamma_n(u_n)$ et $\gamma_n(v_n)$ seront aussi respectivement proches de $\gamma_n(x_n)$ et de $\gamma_n(y_n)$; et $[u_{n+1}; v_{n+1}] = \gamma_n([u_n; v_n])$ devra dans les deux cas couper au moins deux intervalles de la partition. Ceci contredit le fait que chaque intervalle $[u_n; v_n]$ doit être inclus dans un intervalle de la partition. Le diamètre des (U_n) décroit donc vers 0. ■

On peut donc voir la dynamique en avant de T_L comme un sous-shift de type fini unilatéral.

Proposition 4.3.16. *L'application*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathcal{X}^+ & \to & \mathbb{S}^1 \\ & (k_n)_{n\geq 0} & \mapsto & \displaystyle\bigcap_{n\geq 0} \gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{k_n}}) \end{array}$$

est bien définie, uniformémement continue, envoie la suite $(\kappa(T_L^n(x)))_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^+$ sur x (donc est surjective), et :

(i) si il existe $n \geq 0$ tel que $T_L^n(x) \in \{a_v^j \mid v \in V, j \in [\![1\,;\, m_v - 2]\!]\}$, alors x admet exactement deux préimages par φ ;
(ii) sinon, x admet une unique préimage par φ.
De plus, si $\mathcal{X}_0^+ = \mathcal{X}^+ \setminus \{(k_n) \mid \kappa(T_L^n(\varphi(k))) \neq k\}$ alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \overline{\varphi} \,:\, & \mathcal{X}_0^+ & \to & \mathbb{S}^1 \\ & k & \mapsto & \varphi(k) \end{array}$$

est une bijection de réciproque $x \to (\kappa(T_L^n(x)))_{n\geq 0}$, et

$$\forall k \in \mathcal{X}_0^+, T_L(\overline{\varphi}(k)) = \overline{\varphi}(\sigma^+(k)).$$

PREUVE : D'après le lemme 4.3.15, on peut appliquer le théorème des fermés emboités à $\bigcap_{n\geq 0} \gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{k_n}})$ qui est donc réduit à un unique point. φ est ainsi bien définie. Si $x \in \mathbb{S}^1$, alors pour tout $n \geq 0$ $T_L^n(x) \in I_{\kappa(T_L^n(x))}$ par définition de κ. Comme l'intersection est réduite à un élément, on a donc bien que $\varphi((\kappa(T_L^n(x)))_{n\geq 0}) = x$.

Soient $k \in \mathcal{X}^+$, $x = \varphi(k)$ et $\varepsilon > 0$. Toujours par le lemme 4.3.15, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $\mathrm{diam}(\gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{k_n}})) < \varepsilon$. Alors, pour tout $l \in \mathcal{X}^+$ tel que $d_\theta(k,l) < \theta^{-N}$, $k_n = l_n$ pour tout $n \leq N$ et

$$\bigcap_{n\geq 0} \gamma_L[l_0]^{-1} \dots \gamma_L[l_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{l_n}}) \subset \gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{k_n}}) \subset B(x,\varepsilon)$$

ce qui prouve la continuité de φ. Comme $(\mathcal{X}^+, d_\theta)$ est compact, le théorème de Heine démontre même qu'elle est uniformément continue.

Supposons maintenant que $\varphi((k_n)_{n\geq 0}) = x = \varphi((l_n)_{n\geq 0})$ pour deux suites $k, l \in \mathcal{X}^+$ distinctes. Soit n le plus petit indice tel que $k_n \neq l_n$. Alors

$$x \in \gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{k_n}}) \cap \gamma_L[l_0]^{-1} \dots \gamma_L[l_{n-1}]^{-1}(\overline{I_{l_n}})$$

où $\gamma_L[k_0]^{-1} \dots \gamma_L[k_{n-1}]^{-1} = \gamma_L[l_0]^{-1} \dots \gamma_L[l_{n-1}]^{-1} = \gamma^{-1}$ par minimalité de n. Par conséquent, $\gamma(x) \in \overline{I_{k_n}} \cap \overline{I_{l_n}}$ et ainsi $\overline{I_{k_n}}$ et $\overline{I_{l_n}}$ sont contigus. Quitte à échanger k et l, on peut supposer que $\overline{I_{k_n}}$ est situé juste à gauche de $\overline{I_{l_n}}$; et puisque I_{k_n} et I_{l_n} sont disjoints, leurs adhérences s'intersectent en exactement un point qui doit être de la forme a_v^j pour $v \in V$ et $j \in [\![1\,;\, m_v - 2]\!]$. On a alors $\gamma(x) = a_v^j$.

Dans la situation où $n > 0$, on a des transitions $M^L_{k_{n-1},k_n} = M^L_{l_{n-1},l_n} = 1$ avec $k_{n-1} = l_{n-1}$, donc $I_{k_n} \sqcup I_{l_n} \subset T_L(I_{k_{n-1}})$. En particulier, le point a_v^j où ces deux intervalles se touchent est dans l'intérieur de $T_L(I_{k_{n-1}}) = \gamma_L[k_{n-1}](I_{k_{n-1}})$, et ainsi $\gamma_L[k_{n-1}]^{-1}(a_v^j) \in \overset{\circ}{I}_{k_{n-1}}$. Si un point est dans l'intérieur d'un des intervalles de la partition de Markov, alors ses préimages le sont aussi ; on prouve donc ainsi par une récurrence immédiate que $T_L^p(x) \in \overset{\circ}{I}_{k_p}$ pour tout $p \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ et que $T_L^n(x) = \gamma(x) = a_v^j$.

Reste à montrer qu'une fois la branche de k_n, l_n franchie, il n'y a qu'un seul choix possible pour pouvoir obtenir x. Remarquons que $T_L^n(x) = \gamma(x) = \gamma_L[k_{n-1}] \dots \gamma_L[k_0](x)$ est l'extrémité droite de $\overline{I_{k_n}}$. Alors $\gamma_L[k_n]\gamma(x)$ est nécessairement l'extrémité droite de $\gamma_L[k_n](\overline{I_{k_n}})$. Il ne peut donc exister qu'un seul k_{n+1} tel que $M^L_{k_n,k_{n+1}} = 1$ et que $I_{k_{n+1}}$ contienne $\gamma_L[k_n]\gamma(x)$ dans son adhérence. Comme $\gamma_L[k_n]\gamma(x)$ est alors encore l'extrémité droite de $\overline{I_{k_{n+1}}}$, une récurrence immédiate montre que les $(k_{n+p})_{p\geq 1}$ sont uniquement déterminés. Un raisonnement symétrique s'applique aussi à $(l_{n+p})_{p\geq 1}$. Il y a donc dans ce cas exactement deux préimages par φ à x.

La suite en découle naturellement. Si $x = \varphi(k)$ est tel que $\kappa(T_L^n(x)) \neq k$, alors il existe forcément un p tel que $T_L^p(x) = a_v^j$ pour un certain couple (v, j). $\mathcal{X}_0^+$ est donc exactement l'ensemble des suites $(\kappa(T_L^n(x)))_{n\geq 0}$ pour x variant dans $\mathbb{S}^1$. La fonction $\overline{\varphi}$, qui est φ restreinte à cet ensemble, est donc par construction injective, et elle reste surjective. Finalement, on obtient la conjugaison en constatant que si $x = \overline{\varphi}(k)$ pour $k \in \mathcal{X}_0^+$, alors $k = \kappa(T_L^n(x))$ et donc $\sigma^+(k) = \kappa(T_L^{n+1}(x)) = \kappa(T_L^n(T_L(x)))$. ■

Passons maintenant à l'autre composante. On pose

$$\mathcal{P}^-[x] = \{(x_n)_{n\geq 0} \mid x_0 = x \text{ et } \forall n \geq 0, T_L(x_{n+1}) = x_n\}$$

que l'on munit de la distance $d_\theta((x_n), (y_n)) = \theta^{\sup\{n\geq 0 | \forall i \leq n, x_n = y_n\}}$ et de l'opérateur d'injection de x' à gauche

$$\begin{array}{rccl} \sigma_{x'}^- \ : & \bigsqcup_{T_L(x)=x'} \mathcal{P}^-[x] & \to & \mathcal{P}^-[x'] \\ & (x_n) & \mapsto & \begin{cases} x_{n-1} & \text{si } n > 0 \\ x' & \text{si } n = 0 \end{cases} \end{array} .$$

En particulier, $\sigma_{T_L(x)}^- : \mathcal{P}^-[x] \to \mathcal{P}^-[T_L(x)]$ est injective.

Proposition 4.3.17. *Soit $x \in \mathbb{S}^1$ fixé. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \psi_x \ : & \mathcal{P}^-[x] & \to & [a(x); b(x)] \\ & (x_n) & \mapsto & \bigcap_{n\geq 0} [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))] \end{array}$$

est bien définie, uniformément continue, envoie la suite $(\kappa(S_L^n(x, y)))_{n\geq 0}$ sur y (donc est surjective) et :
(i) tout $y \in [a(x); b(x)] \setminus (\Delta(x) \setminus \{a(x); b(x)\})$ admet une unique préimage ;
(ii) tout $y \in \Delta(x) \setminus \{a(x); b(x)\}$ a exactement deux préimages.
De plus, si $\mathcal{P}_0^-[x] = \mathcal{P}^-[x] \setminus \{(x_n) \mid \exists n, S_L^n(x, \psi_x(x_n)) \neq x_n\}$ alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \overline{\psi_x} \ : & \mathcal{P}_0^-[x] & \to & \mathbb{S}^1 \\ & (x_n) & \mapsto & \psi_x(x_n) \end{array}$$

est une bijection de réciproque $y \to (S_L^n(x, y))_{n\geq 0}$, et

$$\forall (x_n) \in \mathcal{P}_0^-[x], S_R(x, \overline{\psi_x}(x_n)) = \overline{\psi_{T_L(x)}}(\sigma_{T_L(x)}^-(x_n)).$$

PREUVE : Montrons d'abord que ψ_x est bien définie. Si $T_L(x_{n+1}) = x_n$, alors par le lemme 4.3.3 :

$$\left[S_R^{n+1}(x_{n+1}, a(x_{n+1})); S_R^{n+1}(x_{n+1}, b(x_{n+1}))\right] \subset [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))] .$$

On a ainsi une intersection décroissante de fermés dont le diamètre

$$d(S_R^n(x_n, a(x_n)), S_R^n(x_n, b(x_n))) \leq \delta_n(x)$$

tend vers 0 par le corollaire 4.3.10. D'après le théorème des fermés emboités, l'intersection contient un unique point.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons N tel que $\delta_N < \varepsilon$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \theta^N$. Si maintenant $d_\theta((x_n),(x'_n)) < \alpha < \theta^N$, alors $x_n = x'_n$ pour tout $n \leq N$. Si on note $y = \psi_x((x_n)_{n\geq 0})$ et $y' = \psi_x((x'_n)_{n\geq 0})$, alors par définition de ψ_x on a $y, y' \in \left[S_R^N(x_n, a(x_n)); S_R^N(x_n, b(x_n))\right]$. Par conséquent, $d(\psi_x((x_n)), \psi_x((x'_n))) = d(y, y') \leq \delta_N < \varepsilon$. Ceci prouve que ψ_x est uniformément continue.

Montrons maintenant qu'elle est surjective. Soit $y \in [a(x); b(x)]$, et notons $x_n = S_L^n(x, y)$. Il est clair que $T_L(x_{n+1}) = T_L(S_L^{n+1}(x, y)) = S_L^n(x, y) = x_n$ et que $x_0 = S_L^0(x, y) = x$. Lorsque $y = b(x)$, $y = S_R^n(x_n, b(x_n)) \in]S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))]$. Lorsque $y \in [a(x); b(x)[$, $y \in [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[$. Dans tous les cas, y est dans l'intersection des intervalles $[S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))]$ qui contient au plus un élément : on doit donc nécessairement avoir $\psi_x((S_L^n(x, y))_{n\geq 0}) = y$.

Soit $y \in [a(x); b(x)] \setminus (\Delta(x) \setminus \{a(x); b(x)\})$, et supposons que $\psi_x((x_n)_n) = y = \psi_x((x'_n)_n)$. Soit k le plus petit indice tel que $x_k \neq x'_k$. Par définition de ψ_x, on a

$$y \in \left[S_R^k(x_k, a(x_k)); S_R^k(x_k, b(x_k))\right] \cap \left[S_R^k(x'_k, a(x'_k)); S_R^k(x'_k, b(x'_k))\right]$$

avec $T_L^k(x_k) = x = T_L^k(x'_k)$, et donc

$$\begin{aligned}
\text{si } y \notin \Delta(x),\ y \in \big]S_R^k(x_k, a(x_k)); S_R^k(x_k, b(x_k))\big[\cap \big]S_R^k(x'_k, a(x'_k)); S_R^k(x'_k, b(x'_k))\big[\\
\text{si } y = a(x),\ y \in \left[S_R^k(x_k, a(x_k)); S_R^k(x_k, b(x_k))\right[\cap \left[S_R^k(x'_k, a(x'_k)); S_R^k(x'_k, b(x'_k))\right[\\
\text{si } y = b(x),\ y \in \big]S_R^k(x_k, a(x_k)); S_R^k(x_k, b(x_k))\big] \cap \big]S_R^k(x'_k, a(x'_k)); S_R^k(x'_k, b(x'_k))\big]
\end{aligned}$$

ce qui est toujours impossible puisque $x_k \neq x'_k$.

Finalement, soit $y \in \Delta(x) \setminus \{a(x); b(x)\}$. Cherchons les suites (x_n) telles que

$$y \in \bigcap_{n\geq 0} \left[S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))\right].$$

Il existe k minimal tel que $y \in \Delta^k(x)$.
– Lorsque $n < k$, $y \notin \Delta^n(x)$ donc il existe un unique $x_n \in \mathbb{S}^1$ tel que $T_L^n(x_n) = x$ et $y \in]S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))[$. On pose alors $x_n^1 = x_n^2 = x_n$.
– Pour $n \geq k$, $y \in \Delta^k(x) \subset \Delta^n(x)$ donc $y \in [S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))]$ si et seulement si $y = S_R^n(x_n, a(x_n))$ ou $y = S_R^n(x_n, b(x_n))$. Comme $y \neq a(x), b(x)$, il existe exactement deux points $x_n^1 \neq x_n^2$ tels que $T_L^n(x_n^1) = T_L^n(x_n^2) = x$ et $S_R^n(x_n^1, b(x_n^1)) = S_R^n(x_n^2, a(x_n^2)) = y$. On a alors $y \in]S_R^n(x_n^1, a(x_n^1)); S_R^n(x_n^1, b(x_n^1))]$ et $y \in [S_R^n(x_n^2, a(x_n^2)); S_R^n(x_n^2, b(x_n^2))[$.

Par construction,

$$y \in \big]S_R^n(x_n^1, a(x_n^1)); S_R^n(x_n^1, b(x_n^1))\big] \cap \big]S_R^{n+1}(x_{n+1}^1, a(x_{n+1}^1)); S_R^{n+1}(x_{n+1}^1, b(x_{n+1}^1))\big]$$

pour tout n. Donc $T_L(x_{n+1}^1) = x_n^1$; et de même $T_L(x_{n+1}^2) = x_n^2$. Les deux suites $(x_n^1)_{n\geq 0}$ et $(x_n^2)_{n\geq 0}$ sont alors les deux préimages possible de y par ψ_x, et elles diffèrent car $x_k^1 \neq x_k^2$.

Puisqu'on enlève la préimage non canonique de chaque point de $\Delta(x)$, il est clair que $\overline{\psi_x}$ est une bijection de réciproque $y \to (S_L^n(x, y))_{n\geq 0}$. Supposons maintenant que

$$y = \overline{\psi_x}(x_n) \in \bigcap_{n\geq 0} \left[S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))\right].$$

Alors

$$\begin{aligned} S_R(x,y) &\in [a(T_L(x)); b(T_L(x))] \cap \bigcap_{n\geq 0} [S_R(x, S_R^n(x_n, a(x_n))); S_R(x, S_R^n(x_n, b(x_n)))] \\ &= [a(T_L(x)); b(T_L(x))] \cap \bigcap_{n\geq 0} \left[S_R^{n+1}(x_n, a(x_n)); S_R^{n+1}(x_n, b(x_n))\right] \\ &= \bigcap_{n\geq 0} [S_R^n(x'_n, a(x'_n)); S_R^n(x'_n, b(x'_n))] = \overline{\psi_{T_L(x)}}(x'_n) \end{aligned}$$

où $(x'_n) = \sigma^-_{T_L(x)}(x_n)$. On a donc bien que

$$S_R(x, \overline{\psi_x}(x_n)) = S_R(x,y) = \overline{\psi_{T_L(x)}}(\sigma^-_{T_L(x)}(x_n)). \qquad \blacksquare$$

Même si on fait un choix d'une préimage pour les $y \in \Delta(x)$, ψ_x n'est jamais un homéomorphisme. En effet, pour tout N fixé, on peut trouver des points $y, y' \in [a(x); b(x)]$ arbitrairement proches pour la distance de Gromov, mais qui se trouvent de part et d'autre d'un point de $\Delta^N(x)$, imposant que $d_\theta(\psi_x^{-1}(y), \psi_x^{-1}(y')) \geq \theta^N$.

On peut associer à toute suite (x_n) de $\mathcal{P}^-[x]$ une suite de $\mathcal{X}^-[\kappa(x)]$ en prenant l'intervalle de la partition dans lequel chacun des x_n est localisé.

Lemme 4.3.18. *Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \pi_x & : & \mathcal{X}^-[\kappa(x)] & \to & \mathcal{P}^-[x] \\ & & (k_n)_{n\leq 0} & \mapsto & (\gamma_L[k_{-n}]^{-1} \dots \gamma_L[k_{-1}]^{-1}(x))_{n\geq 0} \end{array}$$

est une isométrie de $(\mathcal{X}^-[\kappa(x)], d_\theta)$ dans $(\mathcal{P}^-[x], d_\theta)$.

Comme $[S_R^n(x_n, a(x_n)); S_R^n(x_n, b(x_n))]$ ne dépend en fait que de $\kappa(x_n)$, on en déduit que pour tout couple $x, x' \in I_{k_0}$, $\psi_x \circ \pi_x = \psi_{x'} \circ \pi_{x'}$. Ainsi ψ_x ne dépend en fait que de $\kappa(x)$, et on peut donc définir l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi_{k_0} & : & \mathcal{X}^-[k_0] & \to & \overline{J_{k_0}} \\ & & (k_n)_{n\leq 0} & \mapsto & \psi_x \circ \pi_x(k) \text{ pour } x \in I_{k_0} \text{ quelconque} \end{array}$$

qui est bien définie, uniformément continue, envoie la suite $(\kappa(S_L^{-n}(x,y)))_{n\leq 0}$ sur y pour un $x \in I_{k_0}$ quelconque (donc est surjective) et :
(i) tout $y \in \overline{J_{k_0}} \setminus (\Delta_{k_0} \setminus \{a_{k_0}; b_{k_0}\})$ admet une unique préimage ;
(ii) tout $y \in \Delta_{k_0} \setminus \{a_{k_0}; b_{k_0}\}$ a exactement deux préimages.
De plus, si $\mathcal{X}_0^-[k_0] = \mathcal{X}^-[k_0] \setminus \left\{(k_n) \mid \exists n, \kappa(S_L^{-n}(x, \psi_{k_0}(k))) \neq k_n \text{ pour } x \in I_{k_0} \text{ quelconque}\right\}$ alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \overline{\psi_{k_0}} & : & \mathcal{X}_0^-[k_0] & \to & \overline{J_{k_0}} \\ & & k & \mapsto & \psi_{k_0}(k) \end{array}$$

est une bijection de réciproque $y \to (\kappa(S_L^{-n}(x,y)))_{n\geq 0}$, et

$$\forall k \in \mathcal{X}_0^-[k_0], S_R(x, \overline{\psi_{k_0}}(k)) = \overline{\psi_{\kappa(T_L(x))}}(\sigma^-_{\kappa(T_L(x))}(k)).$$

On peut alors rassembler les deux bouts de la preuve pour traiter T_C dans son entier :

Théorème 4.3.19. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \eta & : & \mathcal{X} & \to & \tilde{C} \\ & & k & \mapsto & (\varphi(k^+), \psi_{k_0}(k^-)) \end{array}$$

est bien définie, uniformément continue, envoie la suite $\kappa(x,y)$ définie par

$$\kappa_n(x,y) = \begin{cases} \kappa(T_L^n(x)) & \textit{si } n \geq 0 \\ \kappa(S_L^n(x,y)) & \textit{si } n < 0 \end{cases}$$

sur (x,y) (donc est surjective), et :
(i) si $y \in \Delta(x) \setminus \{a(x); b(x)\}$ et qu'il existe p tel que $T_L^p(x) = a_v^j$, $v \in V$ et $j \in [\![1\,;\, m_v - 2]\!]$, alors (x,y) possède 4 préimages par η ;
(ii) si $y \notin \Delta(x) \setminus \{a(x); b(x)\}$ et que pour tout p $T_L^p(x) \neq a_v^j$, $v \in V$ et $j \in [\![1\,;\, m_v - 2]\!]$, alors (x,y) possède une unique préimages par η ;
(iii) sinon, (x,y) a 2 préimages par η.
De plus, si $\mathcal{X}_0 = \left\{k \in \mathcal{X} \mid k^+ \in \mathcal{X}_0^+ \text{ et } k^- \in \mathcal{X}_0^-[k_0]\right\}$, alors

$$\begin{array}{rccc} \overline{\eta} & : & \mathcal{X} & \to & \tilde{C} \\ & & k & \mapsto & \eta(k) \end{array}$$

est une bijection de réciproque $(x,y) \to \kappa(x,y)$, et

$$\forall k \in \mathcal{X}_0, T_C(\overline{\eta}(k)) = \overline{\eta}(\sigma(k)).$$

PREUVE : Le seul point qu'on a réellement à monter est la conjugaison elle-même, les autres provenant immédiatement des deux propositions précédentes. Prenons donc $k \in \mathcal{X}_0$. On note $x = \overline{\varphi}(k^+)$. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} [\sigma(k)]^+ &= [(k_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}]^+ = (k_1, k_2, k_3, \ldots) = \sigma^+(k^+) \\ [\sigma(k)]^- &= [(k_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}]^- = (\ldots, k_{-1}, k_0, k_1) = \sigma_{k_1}^-(k^-) \\ \kappa(T_L(x)) &= k_1 = [\sigma(k)]_0^+ = [\sigma(k)]_0^- \end{aligned}$$

Alors

$$T_L(x) = T_L(\overline{\varphi}(k^+)) = \overline{\varphi}(\sigma^+(k^+)) = \overline{\varphi}([\sigma(k)]^+)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} T_C(\overline{\eta}(k)) &= (T_L(\overline{\varphi}(k^+)), S_R(x, \overline{\psi_{\kappa(x)}}(k^-))) \\ &= (\overline{\varphi}(\sigma^+(k^+)), \overline{\psi_{\kappa(T_L(x))}}(\sigma^-_{\kappa(T_L(x))}(k^-))) \\ &= (\overline{\varphi}([\sigma(k)]^+), \overline{\psi_{k_1}}([\sigma(k)]^-)) \\ &= \overline{\eta}(\sigma(k)). \end{aligned}$$

■

Chapitre 5

Fonctions et distributions propres de l'opérateur de transfert

L'opérateur de transfert associé à T_L (ou symétriquement à T_R) est un opérateur de Ruelle avec poids. Il prend la moyenne pondérée sur les T_L-préimages d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{S}^1$, avec comme poids l'inverse du jacobien de T_L élevé à la puissance s :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_{L,s} \ : & \mathcal{C}^{1,\mathrm{pm}}(\mathbb{S}^1) & \to & \mathcal{C}^{1,\mathrm{pm}}(\mathbb{S}^1) \\ & \varphi & \mapsto & y \to \displaystyle\sum_{T_L(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|T_L'(x)|^s} \end{array} .$$

Lorsque s est réel, il s'agit d'un opérateur de type Perron-Frobenius qui a été largement étudié dans [PP90] ou plus tard dans [Nau04]. Notre situation est cependant celle de s complexe, cas où les références sont rares.

Le fait remarquable est que les éléments propres de cet opérateur de transfert sont en étroite relation avec les fonctions propres du laplacien sur la surface. Étant donné une fonction propre du laplacien du disque hyperbolique à croissance au plus exponentielle, Helgason a le premier construit dans [Hel81] une distribution qui lui est associée et qui agit sur des espaces de fonctions analytiques sur le bord. En la testant contre le noyau de Poisson, on réobtient la fonction initiale. Pollicott a montré dans [Pol91] pour un groupe cocompact que la distribution de Helgason est distribution propre de l'opérateur de transfert pour la valeur propre 1 si et seulement si la fonction propre du laplacien sur $\mathbb{D}$ qui lui est naturellement associée est Γ-invariante.

Toutefois, Otal dans [Ota98] a étendu les distributions de Helgason à l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le bord, espace qui est plus naturellement associé à la dynamique de la transformation de Bowen-Series, en montrant qu'elles s'écrivent comme dérivée faible d'un fonction hölder. Ses travaux ne faisaient pas intervenir la notion d'automorphie par rapport à un groupe d'isométries, mais avec [LT08] Lopes et Thieullen ont montré que si une fonction propre du laplacien est Γ-invariante alors sa distribution de Helgason, considérée au sens d'Otal, est distribution propre de l'opérateur de transfert pour la valeur propre 1. Bien que ceci ne constitue que le sens facile du théorème de Pollicott, il était nécessaire de définir proprement comment l'opérateur de transfert était censé agir sur de telles classes d'opérateurs.

Nous allons donc tout d'abord généraliser dans la première section le théorème de Pollicott à nos groupes cofinis et pour des distributions de Helgason prises au sens d'Otal. L'ingrédient principal sera le théorème 3.1.2 dont l'hypothèse d'inclusion prendra alors tout son sens.

Une fois étudié les distributions propres de l'opérateur de transfert, on est tout naturellement amenés à se questionner sur ses fonctions propres. C'est là une question beaucoup plus délicate. Toujours dans [LT08], Lopes et Thieullen ont réussi à construire dans le cas Γ cocompact une injection Ψ_s de l'ensemble des distributions propres de l'opérateur de transfert dans son espace propre (pour la même valeur propre) en testant une distribution de Helgason contre un noyau à base de distance de Gromov. Bien que l'opérateur de transfert soit compact et donc que ses espaces propres soient de dimension finie, on ne sait toujours pas si cette injection est un isomorphisme ou non.

Dans un cadre légèrement différent, Lewis et Zagier ont aussi montré dans [LZ01] que, dans le cas de la surface modulaire, les fonctions propres de l'opérateur de transfert induit (à la Mayer) étaient solution d'une équation fonctionnelle qui contenait l'information arithmétique du groupe. De plus, on peut décrire ces solutions à partir des fonctions propres du laplacien sur la surface via des séries L.

À l'aide des résultats du chapitre précédent sur le codage symbolique, on montrera dans la seconde section que Ψ_s est encore une injection pour Γ cofini. De plus, on en exhibera une réciproque sur son image pour Γ cocompact et $\Im(s)$ grand.

Pour pouvoir utiliser tous les résultats des chapitres précédents, on suppose que le domaine fondamental est de volume fini, *even corners*, non triangulaire de classe 0 et tel qu'il existe p pour lequel $|T'| = |T'|_p \geq 1$.

5.1 Transformée de Poisson-Helgason et opérateur de transfert

Plaçons-nous tout d'abord dans l'espace hyperbolique, sans considérer de groupe fuchsien. On note :
– $\mathcal{E}_\lambda$ l'espace des fonctions propres du laplacien hyperbolique pour la valeur propre λ ;
– $\mathcal{E}^e_\lambda$ celles qui sont à croissance au plus exponentielle en le rayon hyperbolique ;
– $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ l'espace des distributions sur $\mathbb{S}^1$;

À toute $f \in \mathcal{E}_\lambda$ avec $\lambda = -s(1-s)$, [Hel81] nous dit que l'on peut associer les deux *distributions de Helgason* $\mathcal{D}_{f,s}$ et $\mathcal{D}_{f,1-s}$. Il y a deux procédés pour les construire : l'approche classique décompose f en harmoniques sphériques et définit $\mathcal{D}_{f,s}$ comme la série de Fourier ayant ces coefficients, mais Otal a aussi remarqué que cette distribution pouvait s'écrire comme limite de l'intégrale du crochet de Poisson $\{f, P^s\}$ sur des cercles tendant vers le bord à l'infini.

Théorème 5.1.1 (Helgason)**.**

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}^s & : & \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) & \to & \mathcal{E}^e_{-s(1-s)} \\ & & T & \mapsto & z \mapsto \langle T, P^s(z,.)\rangle \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach, de réciproque $f \mapsto \mathcal{D}_f$.

Corollaire 5.1.2. *$\{x \mapsto P^s(z,x) \mid z \in \mathbb{D}\}$ est dense dans les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{S}^1$.*

PREUVE : Soit T une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S}^1)$ (i.e. une distribution puisque $\mathbb{S}^1$ est compact) telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \langle T, x \mapsto P^s(z,x)\rangle = 0.$$

Donc $\mathcal{P}^s(T) = 0$ mais, comme c'est un isomorphisme, $T = 0$. Une forme géométrique du théorème de Hahn-Banach conclut la preuve. ■

Donnons-nous maintenant d'autres notations :
– $\mathcal{E}^b_\lambda$ l'espace des fonctions de $\mathcal{E}_\lambda$ qui sont bornées.
– Λ_α l'espace des fonctions α-hölder sur $[0; 2\pi[$ valant 0 en 0 ;
– Λ^1_α l'espace des dérivées au sens des distributions des fonctions de Λ_α.

Otal a montré dans [Ota98] le résultat suivant :

Théorème 5.1.3 (Otal)**.** *Supposons que $0 < \Re(s) \leq 1$. Alors*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}^s & : & \Lambda^1_{\Re(s)} & \to & \mathcal{E}^b_{-s(1-s)} \\ & & T & \mapsto & z \mapsto \langle T, P^s(z,.)\rangle \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach, de réciproque $f \mapsto \mathcal{D}_f$.

Plus précisément, si T est la dérivée de $D \in \Lambda_\alpha$ avec $\Re(s) \leq \alpha \leq 1$ et si $f = \mathcal{P}^s(T)$, alors

$$\forall z \in \mathbb{D}, |f(z)| \leq C(s)\|D\|_\alpha e^{-(\alpha-\Re(s))d(0,z)}.$$

On supposera dorénavant que $0 < \Re(s) \leq 1$. Notons $D_{f,s}$ la fonction $\Re(s)$-hölder associée à $\mathcal{D}_{f,s}$. Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{S}^1)$, et en identifiant φ à son relevé dans $[0; 2\pi[$, on peut écrire

$$\langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi\rangle = \varphi(2\pi)D_{f,s}(2\pi) - \varphi(0)D_{f,s}(0) - \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)D_{f,s}(x)dx.$$

Si $I = [a; b[$, cette formule nous permet de prolonger $\mathcal{D}_{f,s}$ à $\mathcal{C}^1(\overline{I})$ en posant

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I}), \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \mathbb{1}_I \rangle = \varphi(b) D_{f,s}(b) - \varphi(a) D_{f,s}(a) - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) D_{f,s}(x) dx.$$

Cette nouvelle définition est compatible avec l'union disjointe d'intervalle contigus :

Proposition 5.1.4. *Si $c \in I = [a; b[$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$, alors*

$$\langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \mathbb{1}_I \rangle = \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \mathbb{1}_{[a;c[} \rangle + \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \mathbb{1}_{[c;b[} \rangle.$$

Ceci nous permet de prolonger $\mathcal{D}_{f,s}$ aux fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{S}^1$.

On considère maintenant Γ un groupe fuchsien cofini muni d'un domaine fondamental $\mathcal{D}$ qui n'est pas de classe 0, et on note encore :
– $\mathcal{E}^b_\lambda(\Gamma)$ l'espace des fonctions de $\mathcal{E}^b_\lambda$ qui sont invariantes par l'action de Γ ;
– $\mathcal{C}^{1,pm}_1(\mathbb{S}^1)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{I_v}$ pour tout $v \in V$.

L'estimation du théorème d'Otal implique que la distribution de Helgason associée à une fonction propre Γ-invariante du laplacien hyperbolique pour la valeur propre $-s(1-s)$ ne peut être plus régulière que $\Re(s)$-hölder.

Corollaire 5.1.5. *Si $\mathcal{P}^s(T) \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}(\Gamma)$ avec $T \in \Lambda^1_\alpha$ où $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, alors $T = 0$.*

PREUVE : D'après le théorème d'Otal, $f = \mathcal{P}^s(T)$ tend uniformément vers 0 lorsque z tend vers le bord. Supposons qu'il existe $w \in \mathbb{D}$ tel que $f(w) \neq 0$. Puisque Γ est un groupe fuchsien du premier type, il contient au moins un hyperbolique non trivial γ. Alors $f(\gamma^n(w)) = f(w) \neq 0$ pour tout n, avec $\lim_{n \to +\infty} d(\gamma^n(w), w) = +\infty$. C'est une contradiction. ■

En relisant la preuve de [LT08] en considérant que l'on n'a pas nécessairement $f \circ \gamma = f$, on peut traduire la γ-invariance de f en termes de sa distribution de Helgason :

Proposition 5.1.6. *Si $f \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}$, alors*

$$\forall I \in \mathbb{I}, \forall \gamma \in \mathit{Isom}(\mathcal{H}), \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I}), \left\langle \mathcal{D}_{f,s}, \frac{\varphi \circ \gamma^{-1}}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma(I)} \right\rangle = \langle \mathcal{D}_{f \circ \gamma, s}, \varphi \mathbb{1}_I \rangle.$$

D'autre part, dire que $\mathcal{D}_{f,s}$ est distribution propre de $\mathcal{L}_{R,s}$ pour la valeur propre 1 équivaut à demander que la propriété énoncée à la proposition précédente soit vérifiée, mais uniquement pour les couples (γ_v, I_v).

Proposition 5.1.7. *Soit $f \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}(\Gamma)$. Alors*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^{1,pm}_1(\mathbb{S}^1), \langle \mathcal{D}_{f,s}, \mathcal{L}_{R,s} \varphi \rangle = \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \rangle$$

si, et seulement si

$$\forall v \in V, \forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I_v}), \left\langle \mathcal{D}_{f,s}, \frac{\varphi \circ \gamma_v^{-1}}{|\gamma_v' \circ \gamma_v^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma_v(I_v)} \right\rangle = \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \mathbb{1}_{I_v} \rangle.$$

PREUVE : Puisque $\mathcal{L}_{R,s}(\varphi \mathbb{1}_{I_v}) = \dfrac{\varphi \circ \gamma_v^{-1}}{|\gamma_v' \circ \gamma_v^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma_v(I_v)}$, la condition nécessaire s'obtient facilement en évaluant $\langle \mathcal{D}_{f,s}, \mathcal{L}_{R,s}\varphi \rangle = \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \rangle$ pour $\varphi = \tilde{\varphi} \mathbb{1}_{I_l}$. Quant à la condition suffisante, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \rangle &= \sum_{v \in V} \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \mathbb{1}_{I_v} \rangle = \sum_{v \in V} \langle \mathcal{D}_{f,s}, \frac{\varphi \circ \gamma_v^{-1}}{|\gamma_v' \circ \gamma_v^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma_v(I_v)} \rangle \\ &= \sum_{v \in V} \langle \mathcal{D}_{f,s}, \mathcal{L}_{R,s}(\varphi \mathbb{1}_{I_v}) \rangle = \langle \mathcal{D}_{f,s}, \mathcal{L}_{R,s}(\varphi) \rangle. \end{aligned}$$ ■

En combinant les propositions 5.1.6 et 5.1.7, on obtient le résultat de [LT08] qu'une distribution de Helgason associée à une fonction propre bornée du laplacien sur la surface est nécessairement une distribution propre de l'opérateur de transfert pour la valeur propre 1.

Théorème 5.1.8 (Lopes-Thieullen)**.** *Soit $f \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}(\Gamma)$. Si $\{(I_v, \gamma_v) \mid v \in V\}$ est le codage de Bowen-Series à droite associé à Γ, alors :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_1^{1,pm}(\mathbb{S}^1), \langle \mathcal{D}_{f,s}, \mathcal{L}_{R,s}\varphi \rangle = \langle \mathcal{D}_{f,s}, \varphi \rangle.$$

Pour en démontrer la réciproque, nous allons appliquer le théorème d'orbite-équivalence pour des familles de relations. La seule hypothèse non triviale à vérifier est celle d'inclusion :

Lemme 5.1.9. *Soit $\nu \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ dérivée au sens des distributions d'une fonction continue g. Soient $I \in \mathbb{I}$ intervalle de $\mathbb{S}^1$ et $\gamma \in \Gamma$. Supposons que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I}), \left\langle \nu, \frac{\varphi \circ \gamma^{-1}}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma(I)} \right\rangle = \langle \nu, \varphi \mathbb{1}_I \rangle.$$

Alors pour tout $J \in \mathbb{I}, J \subset I$,

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{J}), \left\langle \nu, \frac{\varphi \circ \gamma^{-1}}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma(J)} \right\rangle = \langle \nu, \varphi \mathbb{1}_J \rangle.$$

PREUVE : Notons $I = [a; b[$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ et $c, d \in I$, $c < d$,

$$\begin{aligned}\langle \nu, \varphi \mathbb{1}_{[c;d[} \rangle &= \varphi(d)g(d) - \varphi(c)g(c) - \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) g(x) dx \\ \left\langle \nu, \frac{\varphi \circ \gamma^{-1}}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma[c;d[} \right\rangle &= \varphi(d) \frac{g(\gamma(d))}{\gamma'(d)^s} - \varphi(c) \frac{g(\gamma(c))}{\gamma'(c)^s} \\ &\qquad - \int_{\gamma(c)}^{\gamma(d)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi \circ \gamma^{-1}(x)}{(\gamma' \circ \gamma^{-1}(x))^s} \right) (x) g(x) dx \\ &= \varphi(d) \frac{g(\gamma(d))}{\gamma'(d)^s} - \varphi(c) \frac{g(\gamma(c))}{\gamma'(c)^s} \\ &\qquad - \int_c^d \gamma'(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi \circ \gamma^{-1}(x)}{(\gamma' \circ \gamma^{-1}(x))^s} \right) (\gamma(x)) g(\gamma(x)) dx \\ &= \varphi(d) \frac{g(\gamma(d))}{\gamma'(d)^s} - \varphi(c) \frac{g(\gamma(c))}{\gamma'(c)^s} - \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varphi(x)}{\gamma'(x)^s} \right) (x) g(\gamma(x)) dx \\ &= \varphi(d) \frac{g(\gamma(d))}{\gamma'(d)^s} - \varphi(c) \frac{g(\gamma(c))}{\gamma'(c)^s} - \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \frac{g(\gamma(x))}{\gamma'(x)^s} dx \\ &\qquad - \int_c^d \varphi(x) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\gamma'(x)^s} \right) (x) g(\gamma(x)) dx.\end{aligned}$$

Notons $\delta(x) = \dfrac{g(\gamma(x))}{\gamma'(x)^s} - g(x)$ et $\lambda(x) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\gamma'(x)^s}\right)(x)g(\gamma(x))$. On peut alors écrire :

$$\left\langle \nu, \frac{\varphi \circ \gamma^{-1}}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma[c;d[} \right\rangle - \langle \nu, \varphi \mathbb{1}_{[c;d[} \rangle$$
$$= \varphi(d)\delta(d) - \varphi(c)\delta(c) - \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\delta(x)dx - \int_c^d \varphi(x)\lambda(x)dx.$$

Pour $c = a$ et $d = b$, on obtient que :

$$\varphi(b)\delta(b) - \varphi(a)\delta(a) - \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\delta(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\lambda(x)dx.$$

Soient $c \in]a;b[$ et $\varepsilon > 0$ On construit une fonction $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ telle que :
$-$ φ_ε est croissante ;
$-$ $\varphi_\varepsilon = 0$ sur $[a; c-\varepsilon]$;
$-$ $\varphi_\varepsilon = 1$ sur $[c;b]$.
En spécialisant la relation qui précède pour ce φ_ε, on obtient pour ε suffisamment petit que :

$$\delta(b) - \int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)\delta(x)dx = \int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\lambda(x)dx.$$

Pour tout $x \in [a;b]$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon(x) = \mathbb{1}_{[c;b]}(x)$ donc, par théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_a^b \varphi_\varepsilon(x)\lambda(x)dx = \int_c^b \lambda(x)dx$.

D'autre part, si $\alpha > 0$, alors puisque δ est continue (car g l'est) il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x-c| < \varepsilon_0$, $|\delta(x) - \delta(c)| < \alpha$. Mais alors pour $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\left| \int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)\delta(x)dx - \delta(c) \right| = \left| \int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)(\delta(x) - \delta(c))dx \right|$$
$$\text{car } \int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)dx = \varphi_\varepsilon(c) - \varphi_\varepsilon(c-\varepsilon) = 1 - 0 = 1$$
$$\leq \int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)|\delta(x) - \delta(c)|dx \text{ car } \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x) \geq 0$$
$$\leq \alpha \int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)dx = \alpha.$$

Donc $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{c-\varepsilon}^c \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x}(x)\delta(x)dx = \delta(c)$.

En passant à la limite dans la relation spécialisée, on obtient finalement que :

$$\delta(b) - \delta(c) = \int_c^b \lambda(x)dx.$$

Donc δ est $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{I}$ et : $\forall x \in I, \delta'(x) = \lambda(x)$.

Reprenons alors notre calcul précédent pour $c < d$:

$$\begin{aligned}\left\langle \nu, \frac{\varphi \circ \gamma^{-1}}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}|^s} \mathbb{1}_{\gamma[c;d[} \right\rangle - \langle \nu, \varphi \mathbb{1}_{[c;d[} \rangle & \\ = \varphi(d)\delta(d) - \varphi(c)\delta(c) - \int_c^d \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\delta(x)dx - \int_c^d \varphi(x)\frac{\partial \delta}{\partial x}(x)dx & \\ = \varphi(d)\delta(d) - \varphi(c)\delta(c) - \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\delta\right)(x)dx = 0. &\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété demandée. ■

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème de Pollicott dans le cas cofini.

Théorème 5.1.10 (Pollicott)**.** *On suppose Γ cofini et $\mathcal{D}$ un domaine fondamental de $\mathbb{D}/\Gamma$ qui n'est pas triangulaire de classe 0. Soit $\mathcal{L}_{R,s}$ l'opérateur de transfert de paramètre s associé à la transformation de Bowen-Series à droite naturellement définie par ce domaine.*

Si $\nu \in \Lambda^1_{\Re(s)}$ est telle que $\forall \varphi \in \mathcal{C}_1^{1,pm}(\mathbb{S}^1), \langle \nu, \mathcal{L}_{R,s}\varphi \rangle = \langle \nu, \varphi \rangle$, alors $\mathcal{P}^s(\nu) \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}(\Gamma)$.

PREUVE : Notons $f = \mathcal{P}^s(\nu)$. On sait déjà que $f \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}$, reste donc à montrer qu'elle est Γ-invariante. Posons $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{I} \times \mathbb{D} & \to & \mathbb{C} \\ (I, z) & \mapsto & \langle \nu, P^s(z, .)\mathbb{1}_I \rangle \end{array}$.

F vérifie les hypothèses du théorème d'orbite-équivalence :

– Ici, $X = \mathbb{D}$ avec l'action canonique de Γ.

– F est continue et additive pour des intervalles contigus car ν s'écrit comme dérivée d'une fonction continue.

– La condition $\mathcal{I}(I, \gamma)$ se traduit par

$$\forall z \in \mathbb{D}, \langle \nu, P^s(z, .)\mathbb{1}_I \rangle = \langle \nu, P^s(\gamma(z), .)\mathbb{1}_{\gamma(I)} \rangle.$$

Mais $P^s(\gamma(z), x) = \dfrac{P^s(z, \gamma^{-1}(x))}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}(x)|^s}$, donc on peut la réécrire

$$\forall z \in \mathbb{D}, \langle \nu, P^s(z, .)\mathbb{1}_I \rangle = \langle \nu, \frac{P^s(z, \gamma^{-1}(.))}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}(.)|^s} \mathbb{1}_{\gamma(I)} \rangle,$$

soit

$$\forall z \in \mathbb{D}, \langle \nu, \frac{\varphi_z \circ \gamma^{-1}(.)}{|\gamma' \circ \gamma^{-1}(.)|^s} \mathbb{1}_{\gamma(I)} \rangle = \langle \nu, \varphi_z \mathbb{1}_I \rangle \text{ pour } \varphi_z = P^s(z, .).$$

– Le lemme 5.1.9 assure alors que si F vérifie $\mathcal{I}(I, \gamma)$ alors elle vérifie $\mathcal{I}(J, \gamma)$ pour tout J intervalle inclus dans I.

– Enfin, l'hypothèse du théorème est suffisante pour avoir $\mathcal{I}(I_v, \gamma_v)$ vérifiée pour tout $v \in V$.

Par conséquent, le théorème s'applique et assure que $\mathcal{I}(\mathbb{S}^1, \gamma)$ est vraie pour tout $\gamma \in \Gamma$, i.e.

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \langle \nu, P^s(z, .) \rangle = \langle \nu, P^s(\gamma(z), .) \rangle = f \circ \gamma(z).$$

f est donc bien Γ-invariante. ■

5.2 Fonctions propres et distributions propres

On rappelle que les distributions de Helgason (de paramètre s) de fonctions propres du laplacien sur la surface $\mathbb{D}/\Gamma$ pour la valeur propre $-s(1-s)$ sont exactement les distributions propres de $\mathcal{L}_{R,s}$ pour la valeur propre 1 quand on définit cet opérateur comme agissant sur l'espace $\Lambda^1_{\Re(s)}$.

5.2.1 D'une distribution propre à une fonction propre

Soit $p \in \mathcal{H}$. Pour $(x,y) \in \mathbb{T}^2 \setminus \Delta$, le *noyau de Gromov basé en p et de paramètre $s \in \mathbb{C}$* est donné par :

$$k_p^s(x,y) = \frac{1}{d_p^{2s}(x,y)} = e^{s(b_x(p,z)+b_y(p,z))} \text{ pour } z \in (x,y) \text{ quelconque.}$$

C'est un noyau symétrique, et $y \in \mathbb{S}^1 \setminus \{x\} \to k_p^s(x,y)$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$. Dans toute la suite, on le notera $k_p^s(x,y) = k^s(x,y)$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, en sous-entendant que p est le même point que celui qui définit les dérivées apparaissant dans la définition des opérateurs de transfert.

Lopes et Thieullen ont montré dans [LT08] qu'on peut associer naturellement à chaque distribution propre de $\mathcal{L}_{R,s}$ une fonction propre de $\mathcal{L}_{L,s}$ grâce au noyau de Gromov.

Proposition 5.2.1. *Soit $f \in \mathcal{E}^b_{-s(1-s)}(\Gamma)$. On note $\mathcal{D}_{f,s}$ la distribution de Helgason de paramètre s qui lui est associée. Alors*

$$\begin{array}{rccl} \psi_{f,s} & : & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \mapsto & \langle \mathcal{D}_{f,s}, k^s(x,.)\mathbb{1}_C(x,.)\rangle \end{array}$$

est une fonction propre de $\mathcal{L}_{L,s}$ pour la valeur propre 1.

À noter que si Γ est cofini, $\psi_{f,s}$ n'est pas bornée au voisinage des cusps, mais cela ne l'empêche pas d'être une fonction propre de $\mathcal{L}_{L,s}$ car, comme cet opérateur agit comme une somme pondérée sur les préimages par T_L (qui sont en nombre fini), il n'aggrave pas les singularités. De plus, si $x \in \mathbb{S}^1$ n'est pas un cusp, alors aucune de ses préimages n'en est un. $\mathcal{L}_{L,s}$ agit donc naturellement sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur l'adhérence de chaque intervalle de la partition et non bornées aux cusps.

On définit alors $\Psi_s : \mathcal{D}_{f,s} \to \psi_{f,s}$ qui à une distribution de Helgason (c'est-à-dire à une distribution propre de $\mathcal{L}_{R,s}$) associe une fonction propre de $\mathcal{L}_{L,s}$ pour la même valeur propre, et qui est à priori éventuellement nulle. Lopes et Thieullen ont aussi montré dans [LT08] que ce n'était pas le cas lorsque Γ est cocompact.

Théorème 5.2.2 (Lopes-Thieullen 2)**.** *Supposons Γ cocompact. Alors Ψ_s est injective.*

Notre premier objectif va être d'étendre ce résultat au cas Γ cofini.

5.2.2 Injectivité de Ψ_s

Dans cette section, on prendra $\psi_{f,s} = \Psi(\mathcal{D}_{f,s})$ où $\mathcal{D}_{f,s}$ est la dérivée au sens des distributions d'une fonction $D : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant $D(0) = 0$.

Traduisons tout d'abord les hypothèses sur $\mathcal{D}_{f,s}$ en terme de $\psi_{f,s}$:

Lemme 5.2.3.

$$\forall\gamma\in\Gamma,\forall x\in\mathbb{S}^1,\frac{\psi_{f,s}(x)}{|\gamma'(x)|^s}=k^s(\gamma(x),\gamma(b(x)))D(\gamma(b(x)))-k^s(\gamma(x),\gamma(a(x)))D(\gamma(a(x)))$$
$$-\int_{\gamma(a(x))}^{\gamma(b(x))}\frac{\partial k^s}{\partial y}(\gamma(x),y)D(y)dy.$$

PREUVE : Tout d'abord, on rappelle que puisque $\mathcal{L}_{R,s}^{\star}\mathcal{D}_{f,s}=\mathcal{D}_{f,s}$, cette distribution est même γ-invariante pour tout $\gamma\in\Gamma$, i.e. :

$$\forall\gamma\in\Gamma,\forall I,\forall\varphi\in\mathcal{C}^1(\bar{I}),\langle\mathcal{D}_{f,s},\varphi\mathbb{1}_I\rangle=\left\langle\mathcal{D}_{f,s},\frac{\varphi\circ\gamma^{-1}}{|\gamma'\circ\gamma^{-1}|^s}\mathbb{1}_{\gamma(I)}\right\rangle.$$

Ainsi, pour $x\in\mathbb{S}^1$ et $\gamma\in\Gamma$ fixés, et en identifiant les quantités à leurs relevés dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\psi_{f,s}(x)&=\langle\mathcal{D}_{f,s},k^s(x,.)\mathbb{1}_C(x,.)\rangle\\
&=\langle\mathcal{D}_{f,s},k^s(x,.)\mathbb{1}_{[a(x);b(x)[}(.)\rangle\\
&=\left\langle\mathcal{D}_{f,s},\frac{k^s(x,\gamma^{-1}(.))}{|\gamma'\circ\gamma^{-1}(.)|^s}\mathbb{1}_{[\gamma(a(x));\gamma(b(x))[}(.)\right\rangle\\
&=\frac{k^s(x,b(x))}{|\gamma'(b(x))|^s}D(\gamma(b(x)))-\frac{k^s(x,a(x))}{|\gamma'(a(x))|^s}D(\gamma(a(x)))\\
&\qquad-\int_{\gamma(a(x))}^{\gamma(b(x))}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{k^s(x,\gamma^{-1}(y))}{|\gamma'\circ\gamma^{-1}(y)|^s}\right]D(y)dy\\
&=|\gamma'(x)|^sk^s(\gamma(x),\gamma(b(x)))D(\gamma(b(x)))-|\gamma'(x)|^sk^s(\gamma(x),\gamma(a(x)))D(\gamma(a(x)))\\
&\qquad-|\gamma'(x)|^s\int_{\gamma(a(x))}^{\gamma(b(x))}\frac{\partial k^s}{\partial y}(\gamma(x),y)D(y)dy
\end{aligned}$$

puisque $k^s(u,v)=|\gamma'(u)|^s|\gamma'(v)|^sk^s(\gamma(u),\gamma(v))$. ■

La preuve de l'injectivité, que ce soit dans le cas cocompact ou cofini, nécessite de savoir que l'ensemble $\Delta(x)$ défini au chapitre 4 est dense dans $[a(x);b(x)]$ pour tout $x\in\mathbb{S}^1$. Si cela est assuré pour Γ cocompact par l'expansivité stricte de T_L^2, on a besoin pour Γ cofini de la proposition 4.3.14 (elle même découlant de la proposition 4.3.8).

Théorème 5.2.4. *Supposons Γ cofini. L'application Ψ_s est injective.*

PREUVE : Supposons que $\psi_{f,s}(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{S}^1$. On fixe $(x',y')\in C$. Que $y'=a(x')$, auquel cas $\alpha_n=\alpha_n(x',y')=a(x')$; ou que $y'\neq a(x')$, de sorte que $\alpha_n=S_R^n(x_n,b(x_n))$ pour un certain x_n vérifiant $T_L^n(x_n)=x'$, on dans les deux cas grâce au lemme 5.2.3 :

$$\begin{aligned}
0&=\sum_{T_L^n(x)=x'}\frac{\psi_{f,s}(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s}\mathbb{1}_{]a(x');\alpha_n]}(S_R^n(x,b(x)))\\
&=\sum_{T_L^n(x)=x'}\mathbb{1}_{]a(x');\alpha_n]}(S_R^n(x,b(x)))\Big(k^s(T_L^n(x),S_R^n(x,b(x)))D(S_R^n(x,b(x)))\\
&\qquad-k^s(T_L^n(x),S_R^n(x,a(x)))D(S_R^n(x,a(x)))-\int_{S_R^n(x,a(x))}^{S_R^n(x,b(x))}\frac{\partial k^s}{\partial y}(T_L^n(x),y)D(y)dy\Big)\\
&=k^s(x',\alpha_n)D(\alpha_n)-k^s(x',a(x'))D(a(x'))-\int_{a(x')}^{\alpha_n}\frac{\partial k^s}{\partial y}(x',y)D(y)dy
\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n(x',y') = y'$ donc par continuité de D on obtient lorsque n tend vers l'infini que :

$$k^s(x',y')D(y') = k^s(x',a(x'))D(a(x')) + \int_{a(x')}^{y'} \frac{\partial k^s}{\partial y}(x',y)D(y)dy.$$

Puisque k^s ne s'annule pas sur C et que $y' \in]a(x');b(x')[\mapsto k^s(x',y')$ est $\mathcal{C}^1$, D est $\mathcal{C}^1$ sur la réunion des intervalles $]a(x');b(x')[$ pour x' dans $\mathbb{S}^1$, qui se trouve être $\mathbb{S}^1$ tout entier. Mais alors on obtient par une intégration par parties que :

$$\begin{aligned}\forall (x',y') \in C, 0 &= k^s(x',y')D(y') - k^s(x',a(x'))D(a(x')) - \int_{a(x')}^{y'} \frac{\partial k^s}{\partial y}(x',y)D(y)dy \\ &= \int_{a(x')}^{y'} k^s(x',y)D'(y)dy,\end{aligned}$$

soit en dérivant par rapport à y' :

$$\forall (x,y) \in C, k^s(x,y)D'(y) = 0.$$

On en déduit que D est constante et donc que $\mathcal{D}_{f,s} = 0$. ■

5.2.3 Extension naturelle d'une fonction propre de $\mathcal{L}_{L,s}$

Maintenant que l'on a démontré l'injectivité dans le cas cofini, on souhaiterait pouvoir reconstruire la distribution propre à partir d'une fonction propre de l'opérateur de transfert. Pour cela, on va étendre la fonction propre à l'aide de la dynamique du codage étendu en construisant une suite de fonctions à partir de sommes partielles de l'opérateur de transfert itéré. Ce procédé est valide pour un groupe cofini quelconque, mais la convergence de cette suite de fonctions dépend de la somme de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{|T_L^n(S_L^n(x,y))|^s}$$

qui n'est estimable efficacement que lorsque Γ est cocompact.

Dans toute cette partie, ψ sera une fonction de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathcal{L}_{L,s}\psi = \psi$.

Définition 5.2.5.

$$\forall (x',y') \in \tilde{C}, g_n(x',y') = \sum_{T_L^n(x)=x'} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(x,b(x))).$$

On constate qu'à x' fixé la fonction $y' \in [a(x');b(x')] \mapsto g_n(x',y')$ est constante par morceaux, et ses discontinuités sont exactement les points de $\Delta^n(x') \setminus \{a(x')\}$. Elle est de plus continue à droite en tout point.

Proposition 5.2.6.
(i) $\forall n \geq 0, \forall x' \in \mathbb{S}^1, g_n(x',a(x')) = 0$;
(ii) $\forall n \geq 0, \forall x' \in \mathbb{S}^1, g_n(x',b(x')) = \psi(x')$;
(iii) Soit $(x',y') \in \tilde{C}$. *Alors* $g_0(x',y') = \begin{cases} \psi(x') & \text{si } y' = b(x') \\ 0 & \text{si } y' \neq b(x') \end{cases}$.

PREUVE : Si $y' = a(x')$, $]a(x'); y'] = \emptyset$ et donc $g_n(x', a(x')) = 0$. Si maintenant $y' = b(x')$, $]a(x'); y']$ contient tous les $S_R^n(x, b(x))$ pour x tel que $T_L^n(x) = x'$, et :

$$g_n(x', b(x')) = \sum_{T_L^n(x)=x'} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} = \mathcal{L}_{L,s}^n \psi(x') = \psi(x').$$

Pour le troisième point, il suffit de constater que $g_0(x', y') = \psi(x') \mathbb{1}_{]a(x');y']}(b(x'))$. ■

On a choisi cette suite de fonctions (g_n) de sorte qu'elle stationne lorsque $y \in \Delta^n(x')$:

Proposition 5.2.7. $\forall n \geq 0, \forall x' \in \mathbb{S}^1, \forall y' \in \Delta^n(x'), g_n(x', y') = g_{n+1}(x', y')$.

PREUVE : Prenons $n \geq 0$ et $x' \in \mathbb{S}^1$. Si $y' = a(x')$, $g_n(x', a(x')) = 0 = g_{n+1}(x', a(x'))$. Sinon, soit $y' \in \Delta^n(x') \setminus \{a(x')\}$. On a :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x', y') &= \sum_{T_L^{n+1}(x)=x'} \frac{\psi(x)}{|(T_L^{n+1})'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^{n+1}(x, b(x))) \\ &= \sum_{T_L^n(w)=x'} \sum_{T_L(x)=w} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n \circ T_L)'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(T_L(x), S_R(x, b(x)))) \\ &= \sum_{T_L^n(w)=x'} \frac{1}{|(T_L^n)'(w)|^s} \sum_{T_L(x)=w} \frac{\psi(x)}{|T_L'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(w, S_R(x, b(x)))) \end{aligned}$$

Or le lemme 4.3.1 nous dit que

$$]a(x'); b(x')] = \bigsqcup_{T_L^n(w)=x'}]S_R^n(w, a(w)); S_R^n(w, b(w))]\,.$$

On peut supposer que l'ensemble $\{w \mid T_L^n(w) = x'\} = \{(w_j)\}$ des n-préimages de x' par T_L est ordonné de sorte que $S_R^n(w_j, b(w_j)) = S_R^n(w_{j+1}, a(w_{j+1}))$. Comme $y' \in \Delta^n(x') \setminus \{a(x')\}$, il existe k tel que $y' = S_R^n(w_k, b(w_k))$, et alors :

$$]a(x'); y'] = \bigsqcup_{j \leq k}]S_R^n(w_j, a(w_j)); S_R^n(w_j, b(w_j))]\,.$$

Regardons maintenant à w fixé : $\{S_R(x, b(x)) \mid T_L(x) = w\} \subset]a(w); b(w)]$. Il y a donc deux possibilités :
− Soit $w = w_j$ avec $j \leq k$, et pour tout x tel que $T_L(x) = w$,

$$S_R^n(w, S_R(x, b(x))) \in]S_R^n(w_j, a(w_j)); S_R^n(w_j, b(w_j))] \subset]a(x'); y']\,;$$

− Soit $w = w_j$ avec $j > k$, et pour tout x tel que $T_L(x) = w$,

$$S_R^n(w, S_R(x, b(x))) \in]S_R^n(w_j, a(w_j)); S_R^n(w_j, b(w_j))] \subset]y'; b(x')]$$

d'intersection vide avec $[a(x'); y']$.

En conclusion, pour tout x tel que $T_L(x) = w$, $S_R^n(w, S_R(x, b(x))) \in]a(x'); y']$ si et seulement si $w = w_j$ avec $j \leq k$, si et seulement si $S_R^n(w, b(w)) \in]a(x'); y']$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x', y') &= \sum_{T_L^n(w)=x'} \frac{1}{|(T_L^n)'(w)|^s} \left(\sum_{T_L(x)=w} \frac{\psi(x)}{|T_L'(x)|^s} \right) \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(w, b(w))) \\ &= \sum_{T_L^n(w)=x'} \frac{\psi(w)}{|(T_L^n)'(w)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(w, b(w))) \\ &= g_n(x', y'). \end{aligned}$$

■

En découpant T_L^{n+1} d'une autre manière, on obtient que la suite des (g_n) vérifie une relation de récurrence.

Proposition 5.2.8.

$$\forall n \geq 0, \forall (x, y) \in \tilde{C}, g_{n+1}(T_C(x, y)) = \frac{g_n(x, y)}{|T_L'(x)|^s} + g_1(T_C(x, a(x))).$$

PREUVE : Soient $(x', y') \in \tilde{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Si $y' = a(x')$, $g_n(x', a(x')) = 0$ mais puisque $S_R(x', a(x')) \in \Delta^1(T_L(x'))$, on a bien

$$g_1(T_C(x', a(x'))) = g_{n+1}(T_C(x', a(x'))).$$

Supposons maintenant $y' \in]a(x'); b(x')]$.

$$\begin{aligned} g_{n+1}(T_C(x', y')) &= g_{n+1}(T_L(x'), S_R(x', y')) \\ &= \sum_{T_L^{n+1}(x)=T_L(x')} \frac{\psi(x)}{|(T_L^{n+1})'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(T_L(x'));S_R(x',y')]}(S_R^{n+1}(x, b(x))) \\ &= \sum_{T_L(w)=T_L(x')} \frac{1}{|T_L'(w)|^s} \\ &\qquad \sum_{T_L^n(x)=w} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(T_L(x'));S_R(x',y')]}(S_R(w, S_R^n(x, b(x)))) \end{aligned}$$

Rappelons que si $\{w_0 \dots w_{p-1}\}$ sont les T_L-préimages de $T_L(x')$,

$$]a(T_L(x')); b(T_L(x'))] = \bigsqcup_{i=0}^{p-1}]S_R(w_i, a(w_i)); S_R(w_i, b(w_i))]$$

et on peut les supposer ordonnées de sorte que $S_R(w_i, b(w_i)) = S_R(w_{i+1}, a(w_{i+1}))$. De plus, il existe un unique k tel que $x' = w_k$. Comme $y' \in]a(x'); b(x')]$,

$$S_R(x', y') \in]S_R(x', a(x')); S_R(x', b(x'))] =]S_R(w_k, a(w_k)); S_R(w_k, b(w_k))]\,.$$

Par conséquent,

$$]a(T_L(x')); S_R(x', y')] = \bigsqcup_{i=0}^{k-1}]S_R(w_i, a(w_i); S_R(w_i, b(w_i))] \sqcup]S_R(x', a(x')); S_R(x', y')]\,.$$

Si maintenant $T_L^n(x) = w_i$ pour un certain i, alors $S_R^n(x, b(x)) \in]a(w_i); b(w_i)]$ donc

$$S_R(w_i, S_R^n(x, b(x))) \in]S_R(w_i, a(w_i)); S_R(w_i, b(w_i))]\,.$$

Ainsi $S_R(w, S_R^n(x, b(x))) \in]a(T_L(x')); S_R(x', y')]$ si et seulement si :
$-$ soit $w = w_j$ avec $j < k$, et dans ce cas on a nécessairement

$$S_R(w, S_R^n(x, b(x))) \in]S_R(w_j, a(w_j)); S_R(w_j, b(w_j))] \subset]a(T_L(x')); S_R(x', y')]\,;$$

$-$ soit $w = w_k = x'$, auquel cas x doit être tel que

$$S_R(x', S_R^n(x, b(x))) \in]S_R(x', a(x')); S_R(x', y')] \Leftrightarrow S_R^n(x, b(x)) \in]a(x'); y']\,.$$

Alors comme $\mathcal{L}_{L,s}\psi = \psi$, il vient :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(T_C(x', y')) &= \frac{1}{|T_L'(x')|^s} \sum_{T_L^n(x)=x'} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x'); y']}(S_R^n(x, b(x))) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{|T_L'(w_i)|^s} \sum_{T_L^n(x)=w_i} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} \\ &= \frac{1}{|T_L'(x')|^s} g_n(x', y') + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\psi(w_i)}{|T_L'(w_i)|^s} \end{aligned}$$

Mais $w = w_j$ avec $j < k$ si et seulement si

$$]S_R(w, a(w)); S_R(w, b(w))] \subset \bigsqcup_{i=0}^{k-1}]S_R(w_i, a(w_i)); S_R(w_i, b(w_i))]$$

si et seulement si

$$S_R(w, b(w)) \in]S_R(w_0, a(w_0)); S_R(w_{k-1}, b(w_{k-1}))] =]a(T_L(x')); S_R(x', a(x'))]\,.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} g_{n+1}(T_C(x', y')) &= \frac{1}{|T_L'(x')|^s} g_n(x', y') \\ &\quad + \sum_{T_L(w)=T_L(x')} \frac{\psi(w)}{|T_L'(w)|^s} \mathbb{1}_{]a(T_L(x')); S_R(x', a(x'))]}(S_R(w, b(w))) \\ &= \frac{1}{|T_L'(x')|^s} g_n(x', y') + g_1(T_C(x', a(x'))) \end{aligned}$$ ■

En itérant cette relation de récurrence, on obtient :

Corollaire 5.2.9.

$$\forall n, k \geq 0, \forall (x, y) \in \tilde{C}, g_{n+k}(T_C^k(x, y)) = \frac{g_n(x, y)}{|(T_L^k)'(x)|^s} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x), a(T_L^i(x))))}{|(T_L^{k-1-i})'(T_L^{i+1}(x))|^s}.$$

PREUVE : Par récurrence sur $k \geq 0$:
– Si $k = 0$, on a bien $g_n(x, y) = g_n(x, y)$.
– Si $k = 1$, c'est exactement la proposition 5.2.8.
– Supposons la formule vérifiée au rang k pour tout n, et montrons-la au rang $k + 1$:

$$\begin{aligned} g_{n+k+1}(T_C^{k+1}(x,y)) &= g_{(n+1)+k}(T_C^k(T_L(x), S_R(x,y))) \\ &= \frac{g_{n+1}(T_C(x,y))}{|(T_L^k)'(T_L(x))|^s} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{g_1(T_C(T_L^{i+1}(x), a(T_L^{i+1}(x))))}{|(T_L^{k-1-i})'(T_L^{i+2}(x))|^s} \\ &= \frac{g_n(x,y)}{|(T_L^k)'(T_L(x))|^s |T_L'(x)|^s} + \frac{g_1(T_C(x, a(x)))}{|(T_L^k)'(T_L(x))|^s} \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{k} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x), a(T_L^i(x))))}{|(T_L^{k-i})'(T_L^{i+1}(x))|^s} \\ &= \frac{g_n(x,y)}{|(T_L^{k+1})'(x)|^s} + \sum_{i=0}^{k} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x), a(T_L^i(x))))}{|(T_L^{k-i})'(T_L^{i+1}(x))|^s} \end{aligned}$$

■

Ainsi, (g_n) s'écrit comme somme d'une série dont la convergence est bien tributaire de celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{|T_L^n(S_L^n(x,y))|^s}$:

Corollaire 5.2.10. *$\forall n \geq 0$, $\forall (x, y) \in \tilde{C}$,*

$$g_n(T_C^n(x,y)) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x), a(T_L^i(x))))}{|(T_L^{n-1-i})'(T_L^i(x))|^s}.$$

PREUVE : Il suffit d'appliquer le corollaire 5.2.9 pour $n = 1$ et $k = n - 1$:

$$\begin{aligned} g_n(T_C^n(x,y)) = g_{1+n-1}(T_C^{n-1}(T_C(x,y))) &= \frac{g_1(T_C(x,y))}{|(T_L^{n-1})'(T_L(x))|^s} \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{n-2} \frac{g_1(T_C(T_L^{i+1}(x), a(T_L^{i+1}(x))))}{|(T_L^{n-2-i})'(T_L^{i+2}(x))|^s} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x), a(T_L^i(x))))}{|(T_L^{n-1-i})'(T_L^{i+1}(x))|^s} \end{aligned}$$

■

Comme le terme complémentaire est indépendant de y, on peut soustraire deux relations de ce type pour deux valeurs de y et ainsi obtenir :

Corollaire 5.2.11. *$\forall n, k \geq 0$, $\forall (x, y), (x, y') \in \tilde{C}$,*

$$g_{n+k}(T_C^k(x,y')) - g_{n+k}(T_C^k(x,y)) = \frac{1}{|(T_L^k)'(x)|^s} \left(g_n(x,y') - g_n(x,y)\right).$$

Ces estimations vont nous permettre de déterminer à quelle conditions et à quelle vitesse la suite des (g_n) converge.

Cette suite de fonctions a aussi été construite de telle sorte que la projection α_n sur $\Delta^n(x)$ permette de les déterminer complètement :

Lemme 5.2.12.

$$\forall (x',y') \in \tilde{C}, g_n(x',y') = g_n(x', \alpha_n(x',y')).$$

PREUVE : Si $y' = b(x')$, c'est clair puisque dans ce cas $\alpha_n(x',y') = y'$. Autrement, il existe un unique x_0 tel que $T_L^n(x_0) = x'$ et $y' \in [S_R^n(x_0, a(x_0)); S_R^n(x_0, b(x_0))[$. Alors par définition $\alpha_n(x',y') = S_R^n(x_0, a(x_0))$ et pour tout x tel que $T_L^n(x) = x'$,

$$\mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(x,b(x))) = \mathbb{1}_{]a(x');\alpha_n(x',y')]}(S_R^n(x,b(x))) + \mathbb{1}_{]\alpha_n(x',y');y']}(S_R^n(x,b(x))).$$

Mais puisque $]\alpha_n(x',y');y'] \subset]S_R^n(x_0,a(x_0)); S_R^n(x_0,b(x_0))[$, il ne peut contenir de point de la forme $S_R^n(x,b(x))$. Ainsi le second terme est nul. ■

On peut alors utiliser ce renseignement pour simplifier l'expression de la série :

Lemme 5.2.13. *Soit $(x,y) \in C$. Alors*

$$\forall n,k \geq 0, g_{n+k}(x,y) - g_n(x,y) = \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{g_1(S_L^i(x,y), S_R(S_L^{i+1}(x,y), a(S_L^{i+1}(x,y))))}{|(T_L^i)'(S_L^i(x,y))|^s}$$

PREUVE : Prenons $n,k \geq 0$. Puisque $y \neq b(x)$, $\alpha_j = S_R^j(x_j, a(x_j))$ avec $x_j = S_L^j(x,y)$. Alors $(x,\alpha_j) = (T_L^j(x_j), S_R^j(x_j,a(x_j))) = T_C^j(x_j,a(x_j))$, $T_L^i(x_j) = x_{j-i}$ et il vient :

$$\begin{aligned}
g_{n+k}(x,y) - g_n(x,y) &= g_{n+k}(x,\alpha_{n+k}) - g_n(x,\alpha_n) \\
&= g_{n+k}(T_C^{n+k}(x_{n+k}, a(x_{n+k}))) - g_n(T_C^n(x_n,a(x_n))) \\
&= \sum_{i=0}^{n+k-1} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x_{n+k}), a(T_L^i(x_{n+k}))))}{|(T_L^{n+k-1-i})'(T_L^i(x_{n+k}))|^s} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_1(T_C(T_L^i(x_n), a(T_L^i(x_n))))}{|(T_L^{n-1-i})'(T_L^i(x_n))|^s} \\
&= \sum_{i=0}^{n+k-1} \frac{g_1(T_C(x_{n+k-i}, a(x_{n+k-i})))}{|(T_L^{n+k-1-i})'(x_{n+k-i})|^s} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_1(T_C(x_{n-i}, a(x_{n-i})))}{|(T_L^{n-1-i})'(x_{n-i})|^s} \\
&= \sum_{i=0}^{n+k-1} \frac{g_1(T_C(x_{i+1}, a(x_{i+1})))}{|(T_L^i)'(x_i)|^s} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_1(T_C(x_{i+1}, a(x_{i+1})))}{|(T_L^i)'(x_i)|^s} \\
&= \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{g_1(T_C(x_{i+1}, a(x_{i+1})))}{|(T_L^i)'(x_i)|^s}.
\end{aligned}$$

■

La convergence de cette série n'est pas simple à étudier lorsque Γ est cofini. Une estimation de $(|(T_L^i)'(x_i)|)_{i\geq 0}$ pour (x_i) une suite de préimages qui s'accumulent au vosinage d'un cusp (ce qui constitue la pire des situations) donne que cette suite croit en n^2, mais puisque la partie réelle de s est généralement $\frac{1}{2}$ on est dans l'incapacité de conclure.

On se restreindra donc dorénavant uniquement au cas cocompact, pour lequel on a alors convergence uniforme de la série.

Proposition 5.2.14. *Supposons Γ cocompact et $\Re(s) > 0$. Il existe $A > 0$ et $\lambda > 1$ tels que :*

$$\forall (x',y') \in \tilde{C}, \forall n,k \geq 0, |g_{n+k}(x',y') - g_n(x',y')| \leq \frac{A}{\lambda^n}.$$

PREUVE : Puisque Γ est cocompact, T_L^2 est strictement dilatante, i.e. il existe $M > 1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{S}^1, |(T_L^2)'(x)| > M$. Alors :

$$|g_{n+k}(x',y') - g_n(x',y')| = \left| \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{g_1(T_C(S_L^{i+1}(x',y'), a(S_L^{i+1}(x',y'))))}{|(T_L^i)'(S_L^i(x',y'))|^s} \right|$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{S}^1} |g_1(T_C(x,a(x)))| \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{1}{|(T_L^i)'(S_L^i(x',y'))|^{\Re(s)}}$$

Or

$$|(T_L^i)'(S_L^i(x',y'))|^{\Re(s)} \geq |(T_L^2)'(S_L^{i-2(\lfloor \frac{i}{2} \rfloor -1)}(x',y')) \dots (T_L^2)'(S_L^{i-2}(x',y'))(T_L^2)'(S_L^i(x',y'))|^{\Re(s)}$$
$$\geq M^{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor \Re(s)} \geq M^{(\frac{i}{2}-1)\Re(s)}$$

donc en posant $\lambda = M^{\frac{1}{2}\Re(s)} > 1$ il vient :

$$|g_{n+k}(x',y') - g_n(x',y')| \leq \sup_{x\in\mathbb{S}^1} |g_1(T_C(x,a(x)))| \sum_{i=n}^{n+k-1} \frac{1}{\lambda^{2(\frac{i}{2}-1)}}$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{S}^1} |g_1(T_C(x,a(x)))| \lambda^2 \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^i} = \sup_{x\in\mathbb{S}^1} |g_1(T_C(x,a(x)))| \frac{\lambda^2}{\lambda^n} \frac{\lambda}{\lambda-1}$$

■

Ceci nous assure que la suite $(g_n(x',y'))_n$ converge uniformément sur $\tilde{C}$. On peut donc librement donner un sens à sa limite.

Définition 5.2.15. Pour $(x',y') \in \tilde{C}$, on pose $g(x',y') = \lim_{n\to+\infty} g_n(x',y')$.

En particulier, $g(x',a(x')) = 0$ et $g(x',b(x')) = \psi(x')$; et on a l'estimation suivante :

Corollaire 5.2.16. $\forall (x',y') \in \tilde{C}, \forall n \geq 0, |g(x',y') - g_n(x',y')| \leq \frac{A}{\lambda^n}$.

g peut aussi s'écrire comme somme d'une série convergente :

Proposition 5.2.17.

$$\forall (x,y) \in C, g(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{g_1(S_L^i(x,y), S_R(S_L^{i+1}(x,y), a(S_L^{i+1}(x,y))))}{|(T_L^i)'(S_L^i(x,y))|^s}.$$

PREUVE : On a vu que dans ce cas

$$g_n(x,y) - g_0(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{g_1(S_L^i(x,y), S_R(S_L^{i+1}(x,y), a(S_L^{i+1}(x,y))))}{|(T_L^i)'(S_L^i(x,y))|^s}.$$

Or puisque $y \neq b(x)$, $g_0(x,y) = 0$ donc on obtient le résultat en faisant tendre n vers l'infini.

■

Étudions maintenant la régularité de g, toujours pour Γ cocompact. Pour remonter à la distribution de Helgason, nous aurons besoin d'intégrabilité par rapport aux deux variables, ainsi que de continuité par rapport à la seconde.

La première de ces exigences est simple à satisfaire :

Proposition 5.2.18. $g : \tilde{C} \to \mathbb{C} \in L^\infty(\tilde{C})$.

PREUVE : C'est clair car les g_n sont bornées, convergent uniformément vers g, et $L^\infty(\tilde{C})$ est complet. ■

La seconde s'appuie sur la convergence uniforme de la suite (g_n), et ce bien que les g_n ne soit elle-même pas continue :

Proposition 5.2.19. *Pour tout $x' \in \mathbb{S}^1$, $y' \in [a(x'); b(x')] \mapsto g(x', y')$ est continue.*

PREUVE : Soient $(x', y') \in \tilde{C}$ et $\varepsilon > 0$. Distinguons deux cas.

Supposons $y' \notin \Delta(x')$. On peut choisir n tel que $\frac{A}{\lambda^n} < \varepsilon$. Puisque $y' \notin \Delta^n(x')$, la fonction $y \mapsto g_n(x', y)$ est continue (car constante) dans un voisinage de y', c'est-à-dire qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|g_n(x', y) - g_n(x', y')| < \varepsilon$ pour tout $y \in]y' - \delta; y' + \delta[$. Alors, pour un y de cet intervalle,

$$|g(x', y) - g(x', y')| \leq |g(x', y) - g_n(x', y)| + |g_n(x', y) - g_n(x', y')| + |g_n(x', y') - g(x', y')| < 3\varepsilon.$$

Sinon, $y' \in \Delta^n(x')$ pour un certain $n \geq 0$. Alors pour tout $k \geq 0$, $y' = \alpha_{n+k}(x', y')$ et $g(x', y') = g_{n+k}(x', y')$. Or $y \mapsto g_{n+k}(x', y)$ est localement constante à droite au voisinage de y', et pour $y < y' = S_R^{n+k}(x_k, b(x_k))$ suffisamment petit :

$$|g_{n+k}(x', y) - g_{n+k}(x', y')| = \left| \frac{\psi(x_k)}{(T_L^{n+k})'(x_k)} \right| \leq \frac{|\psi(x_k)|}{M^{\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor}}.$$

Il existe donc $k \geq 0$ et $\delta = \delta_k > 0$ tels que $|g_{n+k}(x', y) - g_{n+k}(x', y')| < \varepsilon$ pour tout y dans l'intervalle $]y' - \delta; y' + \delta[$. Alors, pour ces mêmes y, et quitte à augmenter k de sorte que $|g - g_{n+k}| < \varepsilon$:

$$|g(x', y) - g(x', y')| \leq |g(x', y) - g_{n+k}(x', y)| + |g_{n+k}(x', y) - g_{n+k}(x', y')| < 2\varepsilon. \quad ■$$

On s'apercevra a posteriori que $y' \in [a(x'); b(x')] \to g(x', y')$ doit en fait être $\Re(s)$-hölder pour tout $x' \in \mathbb{S}^1$.

5.2.4 Formule d'inversion de $\psi_{f,s}$

On reprend $\psi_{f,s} = \Psi(\mathcal{D}_{f,s})$ où $\mathcal{D}_{f,s} = D'$. Nous voilà maintenant en mesure de reconstituer explicitement $\mathcal{D}_{f,s}$ à partir de $\psi_{f,s}$. On suppose toujours Γ cocompact.

Proposition 5.2.20.

$$\forall (x', y') \in \tilde{C}, g(x', y') = k^s(x', y')D(y') - k^s(x', a(x'))D(a(x')) - \int_{a(x')}^{y'} \frac{\partial k^s}{\partial y}(x', y)D(y)dy.$$

PREUVE : Soient $n \geq 0$ et $(x', y') \in \tilde{C}$. Si $\alpha_n = \alpha_n(x', y')$, alors le lemme 5.2.3 donne :

$$\begin{aligned}
g_n(x', y') &= g_n(x', \alpha_n) \\
&= \sum_{T_L^n(x)=x'} \frac{\psi_{f,s}(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');\alpha_n]}(S_R^n(x, b(x))) \\
&= \sum_{T_L^n(x)=x'} \mathbb{1}_{]a(x');\alpha_n]}(S_R^n(x, b(x))) \Big(k^s(T_L^n(x), S_R^n(x, b(x))) D(S_R^n(x, b(x))) \\
&\quad - k^s(T_L^n(x), S_R^n(x, a(x))) D(S_R^n(x, a(x))) - \int_{S_R^n(x,a(x))}^{S_R^n(x,b(x))} \frac{\partial k^s}{\partial y}(T_L^n(x), y) D(y) dy \Big) \\
&= k^s(x', \alpha_n) D(\alpha_n) - k^s(x', a(x')) D(a(x')) - \int_{a(x')}^{\alpha_n} \frac{\partial k^s}{\partial y}(x', y) D(y) dy
\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat attendu en faisant tendre n vers $+\infty$. ■

Notons, pour $y \in \mathbb{S}^1$,

$$G(y) = \int_{x \in \mathbb{S}^1} g(x, y) \mathbb{1}_C(x, y) dx \qquad \text{et} \qquad K^s(y) = \int_{x \in \mathbb{S}^1} k^s(x, y) \mathbb{1}_C(x, y) dx.$$

Ces deux fonctions sont bien définies sur $\mathbb{S}^1$ car g et k^s sont intégrables puisque bornées sur un compact, C restant à une distance non nulle de la diagonale du tore lorsque Γ est cocompact. De plus, G est continue et K^s est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

En intégrant la relation de la proposition 5.2.20 par rapport à x', il vient :

Proposition 5.2.21.

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, G(y') - G(y) = K^s(y') D(y') - K^s(y) D(y) - \int_y^{y'} K^{s\prime}(t) D(t) dt.$$

Moralement, on a donc que $G' = K^s D'$, sauf que ni G ni D ne sont dérivables. On voudrait toutefois pouvoir encore en déduire que $D' = \frac{1}{K^s} G'$, ce qui est possible grâce au lemme qui suit :

Lemme 5.2.22. *Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues et $\varphi : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :*

$$\forall y, y' \in I, g(y') - g(y) = \varphi(y') f(y') - \varphi(y) f(y) - \int_y^{y'} \varphi'(t) f(t) dt.$$

Si φ ne s'annule pas, alors :

$$\forall y, y' \in I, f(y') - f(y) = \frac{g(y')}{\varphi(y')} - \frac{g(y)}{\varphi(y)} - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) g(t) dt.$$

PREUVE : Fixons $y, y' \in I$ et développons

$$\begin{aligned}
\delta(y', y) &= \frac{g(y')}{\varphi(y')} - \frac{g(y)}{\varphi(y)} - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) g(t) dt \\
&= \frac{1}{\varphi(y')} \left(g(y) + \varphi(y') f(y') - \varphi(y) f(y) - \int_y^{y'} \varphi'(t) f(t) dt \right) \\
&\quad - \frac{g(y)}{\varphi(y)} - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\varphi(t)} \right) \left(g(y) + \varphi(t) f(t) - \varphi(y) f(y) - \int_y^t \varphi'(u) f(u) du \right) dt.
\end{aligned}$$

En posant $\lambda(t) = \int_y^t \varphi'(u)f(u)du$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il vient :

$$\begin{aligned}\delta(y',y) = f(y') + g(y)\underbrace{\left(\frac{1}{\varphi(y')} - \frac{1}{\varphi(y)} - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)dt\right)}_{=0} \\ + f(y)\varphi(y)\underbrace{\left(\int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)dt - \frac{1}{\varphi(y')}\right)}_{=-\frac{1}{\varphi(y)}} \\ - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)\varphi(t)f(t)dt - \frac{\lambda(y')}{\varphi(y')} + \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)\lambda(t)dt.\end{aligned}$$

Or, par intégration par parties, et puisque $\lambda(y) = 0$, le dernier terme se réécrit :

$$\int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)\lambda(t)dt = \frac{\lambda(y')}{\varphi(y')} - \frac{\lambda(y)}{\varphi(y)} - \int_y^{y'} \frac{\lambda'(t)}{\varphi(t)}dt = \frac{\lambda(y')}{\varphi(y')} - \int_y^{y'} \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)f(t)dt.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\delta(y',y) &= f(y') - f(y) - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right)\varphi(t)f(t)dt - \int_y^{y'} \frac{1}{\varphi(t)}\varphi'(t)f(t)dt \\ &= f(y') - f(y) - \int_y^{y'} \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{\varphi(t)}\varphi(t)\right)}_{=1} f(t)dt \\ &= f(y') - f(y).\end{aligned}$$

■

Pour l'appliquer, il nous faut cependant vérifier que K^s ne s'annule pas. On n'est malheureusement capable d'établir ce résultat technique que lorsque la partie imagine de s est grande.

Lemme 5.2.23. *Il existe $\omega_0 > 0$ tel que pour tout $s = \frac{1}{2} + i\omega$ avec $|\omega| \geq \omega_0$, K^s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*

PREUVE : Puisque la partition de Markov du codage de Bowen-Series est finie, on peut supposer, quitte à prendre le maximum des ω_0 obtenus à la fin, que y est dans un intervalle I_v^k du codage à droite.

Cherchons un point $p \in \mathcal{D}$ tel que $(p \star y, y) \in \mathring{C}$ pour tout $y \in I_v^k$. Lorsque p est dans l'intérieur du domaine fondamental, $(p \star y, y)$ traverse nécessairement l'intérieur du domaine donc est une géodésique du billard qui aboutit dans I_v^k : autrement dit, $(p \star y, y) \in B_v^k$. Ainsi, $(p\star y, y) \in C$ si et seulement si $(p\star y, y) \notin X_v^k$. Si $A \subset \mathbb{T}^2 \setminus \Delta$ est un ensemble de géodésiques, notons $\pi(A)$ l'ensemble des points de $\mathbb{D}$ atteints par les géodésiques de A. On constate alors que $\pi(X_v^k)$ ne peut pas contenir $\mathcal{D}$ tout entier : en effet, cela impliquerait que la géodésique qui borde le tube X_v^k est un bord du domaine et donc qu'un certain a_v^i avec $i \in [\![n_v\,;\, m_v-2]\!]$ pourrait aussi s'écrire $a_w^{n_w-1}$ ($w = r(v)$), ce qui est impossible. Il suffit donc de prendre $p \in \mathring{\mathcal{D}} \setminus \pi(\overline{X_v^k})$.

Fixons $y \in I_v^k$ et prenons une isométrie γ telle que $\gamma(y) = y$ et $\gamma(0) = p$. Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$,

$$k_p^s(\gamma(x), y) = k_p^s(\gamma(x), \gamma(y)) = e^{s(b_{\gamma(x)}(p,z)+b_{\gamma(y)}(p,z))} = e^{s(b_x(0,\gamma^{-1}(z))+b_y(0,\gamma^{-1}(z)))} = k_0^s(x,y).$$

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} K^s(y) = \int k_p^s(x,y)\mathbb{1}_C(x,y)dx &= \int_{a(y)}^{b(y)} k_p^s(x,y)dx \\ &= \int_{\gamma^{-1}(a(y))}^{\gamma^{-1}(b(y))} k_p^s(\gamma(x),y)|\gamma'(x)|dx \\ &= \int_{\gamma^{-1}(a(y))}^{\gamma^{-1}(b(y))} k_0^s(x,y)|\gamma'(x)|dx. \end{aligned}$$

De plus, puisque $p\star y \in]a(y);b(y)[$, $0\star y = \gamma^{-1}(p\star y) \in]\gamma^{-1}(a(y));\gamma^{-1}(b(y))[$. Par invariance par rotation, on est donc ramené à monter que

$$\forall\, [a;b] \subset \mathbb{S}^1, 1 \in]a;b[\,, -1 \notin [a;b]\,, I_{a,b}^s = \int_a^b k_0^s(x,-1)|\gamma'(x)|dx \neq 0$$

où γ est une isométrie fixant -1 et envoyant 0 sur p, et $s = \frac{1}{2} + i\omega$ avec $|\omega| > \omega_0$ indépendant de a et b.

Transférons-nous maintenant dans le modèle du demi-plan de Poincaré :
$-$ $-1, 0, p, 1, a, b$ sont envoyés respectivement sur $\infty, i, P, 0, A, B$ par $\varphi(z) = i\frac{1-z}{1+z}$;
$-$ l'image de la mesure de Lebesgue sur le cercle est $d\mu = \frac{dx}{1+x^2}$;
$-$ γ est transportée en une isométrie fixant ∞, envoyant i sur P, et dont le jacobien basé en i par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ vaut $|\gamma'(x)| = \gamma'(x)\frac{1+x^2}{1+\gamma(x)^2}$;
$-$ $k_0^s(x,-1)$ est remplacé par $k_i^s(x,\infty) = (1+x^2)^s$.
Alors :

$$I_{a,b}^s = \int_A^B (1+x^2)^s \gamma'(x)\frac{1+x^2}{1+\gamma(x)^2}d\mu(x) = \int_A^B (1+x^2)^s \frac{\gamma'(x)}{1+\gamma(x)^2}dx.$$

Si $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $\gamma(\infty) = \infty$ impose que $c = 0$. Alors $ad = 1$ et $\gamma(z) = a^2 z + ab$. Par ailleurs, $\gamma(i) = a^2 i + ab = P$ donc $ab = \Re(P)$ et $a^2 = \Im(P)$. En posant $P = u + iv$, il vient :

$$I_{a,b}^s = v\int_A^B \frac{(1+x^2)^s}{1+(u+vx)^2}dx = v\int_A^B \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+(u+vx)^2}e^{i\omega\ln(1+x^2)}dx.$$

Rappelons le développement asymptotique de la phase stationnaire Si f, g sont de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, que $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = x_0$, et que $g''(x_0) \neq 0$, alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de f et g telle que pour tout $a < x_0 < b$,

$$\left| \int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)}dx - f(x_0)e^{i\omega g(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{|g''(x_0)|\omega}}e^{i\mathrm{sgn}(g''(x_0))\frac{\pi}{4}} \right| \leq \frac{C}{\omega^{\frac{3}{2}}}.$$

Ici, $f(x) = v\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+(u+vx)^2}$ et $g(x) = \ln(1+x^2)$. $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ s'annule uniquement en $x_0 = 0$ qui est bien dans $]A;B[$ par hypothèse. D'autre part, $g''(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ donc $g''(0) = 2 > 0$. Par conséquent,

$$\left| I_{a,b}^s - \frac{v}{1+u^2}\sqrt{\frac{i\pi}{\omega}} \right| \leq \frac{C}{\omega^{\frac{3}{2}}}.$$

Puisque C ne dépend pas de a et b, le résultat est montré. ■

On peut alors appliquer la formule d'inversion pour $f = D, g = G$ et $\varphi = K^s$, et il vient :

Proposition 5.2.24. *Si $s = \frac{1}{2} + i\omega$ avec $|\omega| > \omega_0$, alors :*

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, D(y') - D(y) = \frac{G(y')}{K^s(y')} - \frac{G(y)}{K^s(y)} - \int_y^{y'} \left(\frac{1}{K^s}\right)'(t)G(t)dt.$$

Quitte à normaliser D de sorte que $D(0) = \frac{G(0)}{K^s(0)}$, on obtient finalement :

Théorème 5.2.25. *Soit Γ cocompact. Il existe $\omega_0 > 0$ tel que pour tout $s = \frac{1}{2} + i\omega$, $|\omega| > \omega_0$, et pour toute $\psi_{f,s} = \Psi(\mathcal{D}_{f,s})$, alors $\mathcal{D}_{f,s} = D'$ avec :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, D(y) = \frac{G(y)}{K^s(y)} - \int_0^{y} \left(\frac{1}{K^s}\right)'(t)G(t)dt$$

où $K^s(y) = \int k^s(x,y)\mathbb{1}_C(x,y)dx$, $G(y) = \int g(x,y)\mathbb{1}_C(x,y)dx$ et :

$$\forall (x', y') \in C, g(x', y') = \lim_{n\to+\infty} \sum_{T_L^n(x)=x'} \frac{\psi(x)}{|(T_L^n)'(x)|^s} \mathbb{1}_{]a(x');y']}(S_R^n(x, b(x))).$$

On peut noter que cette construction de D a un sens même si $\psi_{f,s}$ ne provient pas a priori d'une distribution de Helgason. Cependant, il faut alors montrer que la dérivée faible de D est bien une distribution propre de $\mathcal{L}_{L,s}$ pour la valeur propre 1.

Pour généraliser ce résultat à Γ cofini, il faudrait :
– démontrer la convergence des (g_n) sans l'hypothèse d'expansivité uniforme de T_L. Dans l'état actuel des choses, on sait uniquement dans ce cas que la série $\sum_{n\geq 0} |T_L^n(S_L^n(x,y))|^{-s}$ qui domine les (g_n) ne diverge pas grossièrement.
– prouver la continuité de $y' \to g(x', y')$ si la convergence des (g_n) n'est pas uniforme.

Bibliographie

[AF84] Roy Adler and Leopold Flatto, *Cross Section Map for the Geodesic Flow on the Modular Surface*, Contemporary Mathematics **26** (1984), 9–24.

[AF91] ———, *Geodesic Flows, Interval Maps and Symbolic Dynamics*, Bulletin of the American Mathematical Society **25** (1991), no. 2, 229–334.

[Bea83] Alan F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer Verlag, 1983.

[BS79] Rufus Bowen and Caroline Series, *Markov Maps associated with Fuschians Groups*, Publications de l'IHES **50** (1979), 401–418.

[BS02] Michael Brin and Garrett Stuck, *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[CM00] Cheng-Hung Chang and Dieter H. Mayer, *Thermodynamic Formalism and Selberg's zeta function for modular groups*, Regular and Chaotics Dynamics **5** (2000), no. 3, 281–312.

[Hel81] Sigurdur Helgason, *Topics in Harmonic Analysis on Homogenous Spaces*, Progress in Mathematics, vol. 13, Birkhäuser, 1981.

[LT08] A. O. Lopes and Philippe Thieullen, *Eigenfunctions of the Laplacian and eigenfunctions of the associated Ruelle operator*, Nonlinearity **21** (2008), 2239–2253.

[LZ01] John B. Lewis and Don Zagier, *Period functions for Maass wave forms. I*, Annals of Mathematics **153** (2001), 191–258.

[May76] Dieter H. Mayer, *On a ζ function related to the continued fraction transformation*, Bulletin de la Société Mathematique de France **104** (1976), 195–203.

[May90] ———, *On the Thermodynamic Formalism for the Gauss Map*, Communications in Mathematical Physics **130** (1990), 311–333.

[May91a] ———, *Continued Fractions and related transformations*, Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces (Oxford University Press, ed.), 1991, pp. 175–222.

[May91b] ———, *The Thermodynamic Formalism Approach to Selberg's Zeta Function for $PSL(2,\mathbb{Z})$*, Bulletin of the American Mathematical Society **25** (1991), no. 1, 55–60.

[Mor97] Takehiko Morita, *Markov systems and transfer operators associated with cofinite Fuchsian groups*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **17** (1997), 1147–1181.

[Nau04] Frédéric Naud, *Birkhoff Cones, Symbolic Dynamics and Spectrum of Transfer Operators*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **11** (2004), no. 2&3, 581–598.

[Ota98] Jean-Pierre Otal, *Sur les fonctions propres du Laplacien du disque hyperbolique*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences **327** (1998), no. 1, 161–166.

[Pol91] Mark Pollicott, *Some Applications of Thermodynamic Formalism to Manifolds with Constant Negative Curvature*, Advances in Mathematics **85** (1991), 161–192.

[PP90] William Parry and Mark Pollicott, *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics*, Astérisque, vol. 187-188, Société Mathématique de France, 1990.

[Rue89] David Ruelle, *The Thermodynamic Formalism for Expanding Maps*, Communications in Mathematical Physics **125** (1989), 239–262.

[Ser81] Caroline Series, *The infinite word problem and limit sets in Fuchsian groups*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **1** (1981), 337–360.

[Ser86] _____, *Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **6** (1986), 601–625.

[Ser91] _____, *Geometrical methods of symbolic coding*, Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces (Oxford University Press, ed.), 1991, pp. 125–151.

Résumé

Cette thèse traite de l'étude des objets reliés au codage de Bowen-Series du flot géodésique pour des surfaces hyperboliques de volume fini. On démontre d'abord que le billard géodésique associé à domaine fondamental *even corners* d'un groupe fuchsien cofini est conjugué à une bijection du tore, appelée codage étendu, dont l'un des facteurs est la transformation de Bowen-Series. L'intérêt principal de cette conjugaison est qu'elle ne fait toujours intervenir qu'un nombre fini d'objets. On retrouve ensuite des résultats classiques sur le codage de Bowen-Series : il est orbite-équivalent au groupe, ses points périodiques sont denses, et ses orbites périodiques sont en bijection avec les classes d'équivalence d'hyperboliques primitifs du groupe ; ce qui permet finalement de relier sa fonction zeta de Ruelle à la fonction zeta de Selberg. Les preuves de ces résultats s'appuient sur un lemme combinatoire qui abstrait la propriété d'orbite-équivalence à des familles de relations qui peuvent être définies sur tout ensemble sur lequel agit le groupe. Il est aussi possible de conjuguer le codage étendu à un sous-shift de type fini, sauf pour un ensemble dénombrable de points. Enfin, on prouve que les distributions propres pour la valeur propre 1 de l'opérateur de transfert sont les distributions de Helgason de fonctions propres du laplacien sur la surface, puis que l'on peut associer à toute telle distribution propre une fonction propre non triviale de l'opérateur de transfert et que ce procédé admet un inverse dans certains cas.

MOTS-CLÉS : Géométrie hyperbolique, flot géodésique, billard, codage de Bowen-Series, orbite-équivalence, sous-shift de type fini, fonction zeta de Selberg, opérateur de transfert, laplacien hyperbolique, distribution de Helgason.

Abstract

This thesis focuses on the study of the objects linked to the Bowen-Series coding of the geodesic flow for hyperbolic surfaces of finite volume. It is first proved that the geodesic billiard associated with an *even corners* fundamental domain for a cofinite fuchsian group is conjugated with a bijection of the torus, called extended coding, one factor of which is the Bowen-Series transform. The sharpest property of that conjugacy is that it always only involves a finite number of objects. Some classical results about the Bowen-Series coding are then rediscovered : it is orbit-equivalent with the group, its periodic points are dense, and its periodic orbits are in bijection with conjugacy classes of primitive hyperbolic isometries ; which eventually links its Ruelle zeta function to the Selberg zeta function. The proofs of those results use a combinatorial lemma that abstracts the orbit-equivalence property to families of relations that can be defined on every set on which the group acts. The extended coding is also proved to be conjugated with a subshift of finite type, except for a countable set of points. Finally, it is shown that eigendistributions of the transfer operator for the eigenvalue 1 are the Helgason boundary values of eigenfunction of laplacian on the surface, plus that one can associate to each such eigendistribution a non-trivial eigenfunction of the transfer operator and that this process has a reciprocal in some cases.

KEYWORDS : Hyperbolic geometry, geodesic flow, billiard, Bowen-Series coding, orbit-equivalence, subshift of finite type, Selberg zeta function, transfer operator, hyperbolic laplacian, Helgason boundary value.