

N° d'ordre : 4113

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par Benoît RECUR

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : Informatique

Précision et Qualité en Reconstruction Tomographique : Algorithmes et Applications

Soutenue le : 29 novembre 2010

Après avis de :

M. Jean-Pierre Guédon	Professeur	Rapporteur
M. Thomas Boudier	Maître de Conférences (HDR)	Rapporteur

Devant la Commission d'Examen composée de :

M. Achille Braquelaire	..	Professeur	Président
M. Jean-Pierre Guédon	..	Professeur	Rapporteur
M. Thomas Boudier	...	Maître de Conférences (HDR)	Rapporteur
M. Jean-Philippe Domenger		Professeur	Directeur de thèse
M. Pascal Desbarats	...	Maître de Conférences ...	Co-directeur de thèse
M. Michel Montaudon	..	Professeur	Examineur invité

Précision et Qualité en Reconstruction Tomographique : Algorithmes et Applications

Benoît RECUR

Remerciements

Précision et Qualité en Reconstruction Tomographique : Algorithmes et Applications

Résumé : Il existe un grand nombre de modalités permettant l'acquisition d'un objet de manière non destructrice (Scanner à Rayons X, micro-scanner, Ondes Téraherz, Microscopie Électronique de Transmission, *etc*). Ces outils acquièrent un ensemble de projections autour de l'objet et une étape de reconstruction aboutit à une représentation de l'espace acquis. La principale limitation de ces méthodes est qu'elles s'appuient sur une modélisation continue de l'espace alors qu'elles sont exploitées dans un domaine fini. L'étape de discrétisation qui en résulte est une source d'erreurs sur les images produites. De plus, la phase d'acquisition ne s'effectue pas de manière idéale et peut donc être entachée d'artéfacts et de bruits. Un grand nombre de méthodes, directes ou itératives, ont été développées pour tenter de réduire les erreurs et reproduire une image la plus représentative possible de la réalité. Un panorama de ces reconstructions est proposé ici et est coloré par une étude de la qualité, de la précision et de la résistances aux bruits d'acquisition.

Puisque la discrétisation constitue l'une des principales limitations, nous cherchons ensuite à adapter des méthodes discrètes pour la reconstruction de données réelles. Ces méthodes sont exactes dans un domaine fini mais ne sont pas adaptées à une acquisition réelle, notamment à cause de leur sensibilité aux erreurs. Nous proposons donc un lien entre les deux mondes et développons de nouvelles méthodes discrètes plus robustes aux bruits. Enfin, nous nous intéressons au problème des données manquantes, i.e. lorsque l'acquisition n'est pas uniforme autour de l'objet, à l'origine de déformations dans les images reconstruites. Comme les méthodes discrètes sont insensibles à cet effet nous proposons une amorce de solution utilisant les outils développés dans nos travaux.

Mots-clé : Reconstruction Tomographique, Qualité, Précision, Bruits d'acquisition, Transformée de Radon, Transformée Mojette, Implémentation sur GPU, Effet de l'angle manquant

Discipline : Informatique

Precision and Quality in Computerized Tomography : Algorithms and Applications

Abstract : A large kind of methods are available now to acquire an object in a non-destructive way (X-Ray scanner, micro-scanner, Tera-hertz waves, Transmission Electron Microscopy, *etc*). These tools acquire a projection set around the object and a reconstruction step leads to a representation of the acquired domain. The main limitation of these methods is that they rely on a continuous domain modeling whereas they compute in a finite domain. The resulting discretization step sparks off errors in obtained images. Moreover, the acquisition step is not performed ideally and may be corrupted by artifacts and noises. Many direct or iterative methods have been developed to try to reduce errors and to give a better representative image of reality. An overview of these reconstructions is proposed and it is enriched with a study on quality, precision and noise robustness.

Since the discretization is one of the major limitations, we try to adjust discrete methods for the reconstruction of real data. These methods are accurate in a finite domain but are not suitable for real acquisition, especially because of their error sensitivity. Therefore, we propose a link between the two worlds and we develop new discrete and noise robust methods. Finally, we are interesting in the missing data problem, i.e. when the acquisition is not uniform around the object, giving deformations into reconstructed images. Since discrete reconstructions are insensitive to this effect, we propose a primer solution using the tools developed previously.

Keywords : Computerized Tomography, Quality, Precision, Radon Transform, Mojette Transform, GPU Implementation, Missing Wedge

Field : Computer Science

Table des matières

Résumé / Abstract	iii
Table des matières	v
I Tomographie : Algorithmes, Qualité et Précision	3
Introduction de la première partie	5
1 Introduction à la tomographie	7
1.1 Définition et modélisation	8
1.1.1 Du Phénomène physique d'acquisition à la reconstruction	8
1.1.2 Modélisation mathématique par Transformée de Radon	9
1.1.3 Théorème de la Tranche Centrale	10
1.2 Discrétisation des modèles	11
1.2.1 Propriétés d'une acquisition Scanner	11
1.2.2 De la transformée de Radon continue à la transformée de Radon discrète	12
1.2.3 Discrétisation du Théorème de la tranche centrale	13
1.2.4 Exemples de Reconstruction	13
1.3 Limitations	15
1.3.1 Limitations liées à l'échantillonnage dans le domaine spatial	15
1.3.2 Limitations liées à l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel	15
1.3.3 Géométrie d'acquisition	16
1.3.4 Différentes sources de bruits en tomographie	17
1.4 Problématique	18
2 Qualité et précision en tomographie	19
2.1 Mesures de la qualité d'une reconstruction	19
2.1.1 Similarité Structurale (SSIM)	19
2.1.2 Étude de la Fonction d'étalement du point (PSF)	22
2.2 Mesures de la résistance aux bruits d'acquisition	24
2.2.1 Modélisation du Bruit d'Acquisition	24
2.3 Etude comparative	26
2.3.1 Influence du taux d'échantillonnage et du nombre de projections	26

2.3.2	Comportement de la PSF en fonction des paramètres	29
2.3.3	Analyse de la résistance aux bruits d'acquisition	30
2.4	Conclusion	32
3	Méthodes directes	35
3.1	Optimisation de la rétroprojection par les noyaux de pixels	35
3.1.1	Noyau de pixel Dirac	36
3.1.2	Noyau de pixel B-Spline	36
3.1.3	Interpolation linéaire	37
3.1.4	Noyau de Pixel basé sur l'aire	38
3.1.5	Comparatif des différents noyaux de pixels	40
3.2	Reconstructions dans l'espace de Fourier	41
3.2.1	Quelques méthodes d'interpolations	42
3.2.2	Résultats et comparatifs des reconstructions de Fourier	44
3.2.3	Bilan sur les reconstructions de Fourier	50
3.3	Rétroprojection des projections filtrées	51
3.3.1	Lien entre la BFP et le Théorème de la tranche centrale	51
3.3.2	Filtre Rampe et Optimisations	53
3.3.3	Algorithme de BFP	53
3.3.4	Qualité et précision de la reconstruction BFP	54
3.3.5	Résistance aux bruits de la reconstruction BFP	57
3.3.6	Bilan sur la BFP	58
3.4	Conclusion sur la précision et la qualité des méthodes directes	59
4	Reconstructions itératives	61
4.1	Méthodes algébriques	61
4.1.1	De l'algorithme de Kaczmarz à...	61
4.1.2	... la méthode de reconstruction algébrique ART	62
4.1.3	Schéma d'Accès aux Projections	63
4.1.4	Méthode SIRT (ou <i>Simultaneous Iterative Reconstruction Technique</i>)	64
4.1.5	Méthode SART (ou <i>Simultaneous ART</i>)	64
4.2	Méthodes statistiques	65
4.2.1	Interprétation probabiliste du problème de reconstruction	65
4.2.2	Du théorème de Bayes à la reconstruction MLEM	66
4.2.3	Sous ensembles ordonnés (OS : Ordered Subsets) avec la méthode MLEM	67
4.2.4	Régularisation des méthodes	68
4.3	Qualité et précision des méthodes itératives	69
4.3.1	Importance du schéma d'accès aux projections pour la méthode SART	70
4.3.2	Convergence de la méthode MLEM avec ou sans sous-ensemble ordonnés	73
4.3.3	Qualité et Précision de SART et OSEM	75
4.3.4	Étude du SNR des méthodes SART et OSEM	79
4.3.5	Régularisation de la méthode OSEM	80
4.4	Conclusion sur la précision et la qualité des méthodes itératives	83

Conclusion de la première partie	85
II Tomographie Discrète à Partir de Données Bruitées et/ou Incomplètes	87
Introduction de la deuxième partie	89
5 Reconstruction tomographique par transformée discrète	91
5.1 Transformée Mojette : définition et inversion exacte	92
5.1.1 De Radon à Mojette	92
5.1.2 Algorithme Dirac-Mojette	94
5.1.3 Obtenir l'ensemble des directions de projections	94
5.1.4 Reconstruction exacte Mojette par l'algorithme CBI (Corner Based Inversion)	95
5.1.5 Exemple de Reconstruction par CBI	97
5.1.6 Transformée Spline-Mojette	97
5.1.7 Vers une inversion Spline-Mojette	99
5.1.8 Algorithme CBI Spline-Mojette	100
5.2 État de l'art de la reconstruction tomographique Mojette	102
5.2.1 Limitations des inversions Mojette	102
5.2.2 Tomographie Mojette	103
5.2.3 Reconstruction Tomographique Mojette à partir de données réelles	105
5.3 Qualité et précision en tomographie Mojette	106
5.3.1 SSIM en fonction de N_θ et $d\rho$	107
5.3.2 Étude de la PSF	110
5.3.3 Résistance aux bruits d'acquisition	111
5.4 Conclusion sur la tomographie Mojette	113
6 Reconstruction Mojette CBI à partir de données bruitées	115
6.1 Algorithme CBI-Dirac robuste aux bruits	116
6.1.1 Outils et méthodes utilisés pour contenir la propagation de l'erreur	116
6.1.2 Nouvel algorithme CBI	118
6.1.3 Qualité et Précision de la reconstruction NRCBI-Dirac	119
6.2 Reconstruction CBI à partir de données Spline-Mojette bruitées	120
6.2.1 Adaptation de l'algorithme NRCBI à la géométrie Spline-Mojette et limitations	120
6.2.2 D'un sinogramme Spline-Mojette bruité aux bins Mojette	121
6.2.3 Quelques résultats de reconstruction	122
6.3 Application à la reconstruction à partir de données incomplètes	123
6.3.1 Le problème de l'angle manquant	123
6.3.2 Robustesse de la transformée Mojette au problème du missing wedge	125
6.4 Conclusion et Perspectives	128
Conclusion de la deuxième partie	129

Conclusion et Perspectives	131
Annexes	137
A Reconstruction tomographique sur GPU avec CUDA	137
A.1 Fonctionnalité des GPU : présentation de CUDA	138
A.1.1 Généralités sur les GPU	138
A.1.2 Utilisation de la mémoire globale	138
A.1.3 Utilisation de la mémoire Texture	140
A.1.4 Librairie de calculs des transformées de Fourier : la CUFFT	140
A.2 Implémentation des algorithmes sur GPU	140
A.2.1 Implémentation de la BFP sur GPU	140
A.2.2 Implémentation de FR bilinéaire sur GPU	141
A.2.3 Implémentation de SART sur GPU	141
A.3 Remarques et discussion	142
A.3.1 Comparaisons des temps de calculs GPU vs CPU	143
A.3.2 A Propos de la mémoire globale	143
A.4 Perspective de la tomographie sur GPU avec CUDA	144
Table des figures	147
Liste des tableaux	153
Bibliographie	155

Introduction

Nous disposons de nos jours d'une grande variété de matériels d'acquisition permettant d'obtenir des images $2D$ ou $3D$ de l'intérieur d'un objet. Ce type d'acquisition a d'abord été mis en oeuvre pour l'imagerie médicale afin d'observer le fonctionnement du corps humain de manière non invasive. Depuis l'utilisation des rayons X par Röntgen pour la radiographie en 1895 et l'invention du scanner à rayons X par Hounsfield et Cormack dans les années 70, de nombreuses techniques ont été mises en place. L'une d'elle, l'imagerie tomographique, permet une visualisation spatiale des tissus ou du métabolisme. La combinaison des atténuations des rayons traversant le corps selon différentes directions permet de reconstituer l'image représentant l'intérieur de l'échantillon observé. Avec une modalité utilisant les rayons X, cette mesure fournit une image structurelle du corps humain (position et distinction des différents organes). Avec d'autres modalités, comme la tomographie par émission de positons, l'information déduite est métabolique (activité des organes).

L'usage de ces modalités s'est depuis étendu à bien des domaines comme l'analyse des matériaux ou de structures biologiques. De plus, on trouve maintenant des outils d'acquisition utilisant les électrons (microscopie électronique de transmission) ou les ondes TéraHertz. Bien que ces modalités permettent d'observer des données différentes par leur taille ou leur composition, toutes utilisent le principe de la tomographie pour recouvrer une image modélisant la réalité. Elles utilisent donc des méthodes de reconstructions tomographiques, dont les principales ont été développées et optimisées depuis la création du scanner à rayons X.

Une reconstruction tomographique est un procédé permettant de retrouver l'intérieur d'un objet à partir d'une série de mesures. Cette série de mesures, appelées projections, est acquise autour de l'objet et correspond à l'atténuation des rayons traversant la matière. Mathématiquement, cette phase d'acquisition est modélisée par la transformée de Radon [73]. La transformée inverse permet de reconstruire l'objet à partir des projections. Un équivalent dans l'espace des fréquences est donné par le théorème de la tranche centrale. Comme ces modèles sont définis et exacts en continu, ils ne sont pas applicables directement. L'étape de discrétisation qui en résulte aboutit à des reconstructions approximatives qui ne sont plus équivalentes. De surcroît, les acquisitions peuvent être détériorées par des erreurs qui ne sont pas prises en compte dans les modèles mathématiques.

Des reconstructions optimisées ont été proposées pour tenter de minimiser ces erreurs et obtenir des images toujours plus précises et représentatives de la réalité. Ainsi, dans une première partie, nous nous intéressons à la qualité, à la précision et à la résistance aux erreurs d'acquisition des principales reconstructions tomographiques. Nous proposons une confrontation entre les résultats des différentes méthodes. Cette confrontation s'appuie sur une série de critères permettant de mesurer la conservation des caractéristiques de l'image et tient compte de différents contextes d'acquisition. De cette comparaison nous tirons une classification des reconstructions qui constitue la principale contribution de notre première partie.

Dans une deuxième partie, nous nous intéressons à l'adaptation de la tomographie discrète pour reconstruire à partir d'une acquisition réelle. Habituellement en tomographie discrète, le domaine acquis n'est pas un espace réel, mais un espace discret composé d'un nombre fini d'éléments (des pixels). Il existe alors des méthodes spécifiques, comme la transformée Mojetta [38], qui permettent une reconstruction absolument exacte du domaine acquis, i.e. l'image obtenue est équivalente à

l'image initiale. Ce type de méthodes a été largement déployé dans les domaines de la cryptologie, des réseaux ou, plus récemment, des jeux. Mais il propose assez peu d'opportunité en tomographie usuelle car la forme des acquisitions (géométrie, erreurs) diffère de celle utilisée dans les modalités existantes. Certaines optimisations, comme la transformée Spline-Mojette et l'interpolation depuis une acquisition réelle permettent d'utiliser des inversions Mojette dérivées de la tomographie classique pour reconstruire l'image. Une étude de ces méthodes est proposée pour compléter la classification établie en première partie.

A côté de ces méthodes, des algorithmes spécifiques à la transformée Mojette lient fortement les données des projections et de l'image au cours de la reconstruction. Cette propriété leur confère des perspectives pour résoudre ou atténuer certaines problématiques de la tomographie classique. Par exemple, contrairement aux images obtenues par les méthodes usuelles, les images reconstruites avec ces algorithmes ne sont pas déformées lorsqu'il manque des projections (dans le cas d'une acquisition incomplète). En revanche, ils sont difficilement compatibles avec une acquisition réelle, en particulier parce qu'ils sont fortement sensibles aux erreurs dans les projections. Nous contribuons donc au développement d'un ensemble d'outils pour adapter ces méthodes discrètes aux erreurs d'acquisition et aux méthodes usuelles de la première partie. Une perspective d'application à la tomographie usuelle à partir de données incomplètes est par ailleurs envisagée.

Première partie

**Tomographie : Algorithmes, Qualité et
Précision**

Introduction de la première partie

Le théorème de Radon ou son équivalent dans l'espace de Fourier ne sont pas exacts dans un domaine échantillonné car l'étape de discrétisation aboutit à des reconstructions approximatives. De plus, les acquisitions peuvent être détériorées par des erreurs qui ne sont pas prises en compte dans ces modèles. Des reconstructions optimisées ont été définies pour tenter de minimiser ces erreurs. D'une part, les méthodes directes, basées sur l'inversion de Radon ou son équivalent fréquentiel, ont été proposées et ont notamment aboutit à la méthode BFP (*Backprojection of Filtered Projections*). D'autre part, les méthodes itératives ont été développées pour réduire l'erreur transmise à l'image par une projection grâce aux informations sur les autres projections. Notons par exemple la méthode SART (*Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique*) ou encore l'*Expectation Maximization* (EM).

Ces différentes méthodes s'appuient sur des modélisations différentes du problème de reconstruction. Aussi, nous proposons dans cette première partie un état de l'art des grands types de reconstructions tomographiques et établissons une classification des méthodes de reconstruction.

Cette partie est organisée en quatre chapitres.

Dans un premier temps, nous introduisons la transformée de Radon et son équivalent dans l'espace de Fourier. Comme ces modèles sont définis en continu, nous présentons l'étape de discrétisation qui aboutit aux algorithmes de reconstruction et mettons en évidence les approximations liées à la discrétisation et aux erreurs dans les projections.

Nous développons dans le chapitre 2, un protocole de comparaison des résultats. Ce dernier s'appuie sur une étude de la qualité, de la précision et de la résistance aux bruits d'acquisition. Il sera utilisé pour confronter les résultats obtenus par les différentes reconstructions.

Dans le chapitre 3, nous abordons les principales optimisations des méthodes directes. D'abord, nous parlons des problèmes et optimisations d'échantillonnages dans les domaines spatial et fréquentiel. Ensuite, nous présentons la reconstruction BFP, compromis entre les deux modèles.

Enfin, dans le chapitre 4, nous étudions les méthodes itératives et leurs principales optimisations.

Chapitre 1

Introduction à la tomographie

La tomographie est une technique d'imagerie qui consiste à reconstruire le volume d'un objet à partir d'une série de mesures effectuée depuis l'extérieur de l'objet. Bien que la possibilité théorique d'observer l'intérieur d'un objet de manière non destructive soit connue dès le début du vingtième siècle grâce aux travaux de Johann Radon [73, 94], la tomographie ne se développe réellement que dans les années 1970 avec la mise au point du premier scanner médical par G.N. Hounsfield et A. Cormack [46].

La tomographie devient alors le protocole standard d'imagerie médicale pour obtenir une représentation précise d'un plan de coupe d'un organe ou d'un organisme. Cependant, nous la retrouvons de plus en plus dans d'autres domaines comme la géophysique (étude de l'hétérogénéité des terrains par mesure des atténuations d'ondes sismiques provoquées), l'astrophysique (cartographie des champs magnétiques à la surface des étoiles), et, dans une version haute résolution, en science des matériaux.

La première modalité d'acquisition mise au point est le scanner à rayons X [46], appelée plus communément CT-scan ou scanner. Cet appareil est constitué d'un émetteur de rayons X diamétralement opposé à un ensemble de récepteurs. En soumettant le patient au balayage des rayons X selon différents points de vue, on récupère une série de mesures correspondant à l'atténuation des rayons dans les tissus traversés. Les données obtenues sont alors traitées par ordinateur pour reconstruire des vues en coupe ou en trois dimensions. Ce principe s'appelle la tomodensitométrie. Les images obtenues fournissent des informations spatiales.

Parmi les autres modalités d'acquisition, on distingue la Tomographie par Émission de Positons [92, 93] (TEP, ou PET-scan pour *Positron Emission Tomography* scanner) et la Tomographie par Émission Mono Photonique (TEMP, dite aussi SPECT de l'anglais *Single Photon Emission Computed Tomography*). La TEP repose sur le principe de la scintigraphie qui consiste à injecter un traceur radioactif par voie intraveineuse au patient. Ce traceur, semblable au glucose, va se fixer sur les tissus consommateurs de sucre (tumeurs, coeur, cerveau). Chaque positon qu'il génère s'annihile avec un électron du milieu et émet alors deux photons partant en directions opposées. C'est la coïncidence de deux photons arrivant simultanément sur les capteurs situés tout autour du patient qui est mesurée. L'ensemble des coïncidences permet de reconstruire une image 2D ou 3D représentant une information quantitative, à savoir la concentration du traceur en chaque point de l'organe étudié. Le principe de la TEMP est assez proche de celui de la TEP, à la différence qu'elle ne détecte qu'un seul photon obtenu par rayonnement gamma. Les images TEMP sont donc spatialement moins précises mais ne nécessitent pas que le traceur émettent des positons. Si le principe de reconstruction des données obtenues par TEP ou TEMP est proche de la tomodensitométrie, ces deux modalités permettent de visualiser les activités et le métabolisme des organes (on parle alors d'imagerie fonctionnelle) alors que la tomographie à rayons X réalise des images de l'anatomie (imagerie structurelle).

En biologie, la microscopie électronique en transmission (ou TEM, de l'anglais *Transmission Electron Microscopy*) est utilisée pour l'imagerie des cellules ou des molécules. Un canon à électrons fournit un faisceau transmis à travers un échantillon disposé sur un porte objet. La rotation du porte objet permet d'acquérir une série de mesures correspondant à l'atténuation des électrons dans l'échantillon. La reconstruction du volume est alors basée sur le principe de la tomographie. Enfin, la technologie laser permet maintenant d'utiliser les rayonnements électromagnétiques dans la bande de fréquences TéraHertz (entre les micro-ondes et l'infrarouge) pour voir à travers la matière. Encore peu exploité, ce domaine est aujourd'hui en plein essor et trouve un intérêt en tomographie car ces ondes ont un fort pouvoir pénétrant dans les matériaux non conducteurs, sont peu énergétiques et, contrairement aux rayons X, ne sont pas ionisants.

Quelle que soit la modalité d'imagerie utilisée, la tomographie se décompose mathématiquement en deux phases distinctes. La première décrit le modèle d'acquisition (modèle direct), c'est-à-dire comment obtenir la série de mesures à partir des phénomènes physiques utilisés (comme par exemple l'atténuation des rayons X dans les tissus). Le modèle inverse, appelé aussi reconstruction ou rétroprojection, définit la manière de reconstruire le volume de départ en utilisant les données obtenues à l'acquisition.

Une première motivation de notre travail de recherche est de parcourir l'éventail des méthodes de reconstruction (et leurs principales variantes) permettant l'obtention d'une image structurale des objets observés. De plus, nous recherchons à maîtriser la précision des images reconstruites, aussi bien dans un cas d'étude médicale qu'en science des matériaux. Nous basons donc nos propos sur la tomodensitométrie bien que la plupart des concepts énoncés par la suite soient applicables à l'analyse métabolique ou à la microscopie électronique.

Aussi, nous définirons dans un premier temps les propriétés permettant de modéliser la phase d'acquisition et l'étape de reconstruction. Pour cela, nous partirons du phénomène physique d'atténuation des rayons X dans la matière pour acquérir un ensemble de mesures exploitables à la reconstruction. Ensuite, le modèle théorique sera donné par la transformée de Radon [73]. Son équivalent dans l'espace des fréquences sera précisé par le théorème de la tranche centrale [85]. Nous développerons les limites de ces modèles et détaillerons les capacités des méthodes à reconstruire une image modélisant un objet. Les exemples illustrés permettront d'introduire les objectifs et la méthodologie d'étude de cette première partie.

1.1 Définition et modélisation

Dans cette section, nous abordons le principe d'acquisition et reconstruction en tomodensitométrie. Nous commençons par une observation du phénomène physique d'acquisition, à savoir l'atténuation des rayons dans la matière. En récupérant cette atténuation selon différents angles, nous mesurons des valeurs de projections, c'est-à-dire une série de mesures exploitable à la reconstruction. La modélisation des deux étapes est ensuite définie, d'une part dans le domaine spatial par la transformée de Radon, d'autre part dans le domaine fréquentiel par le théorème de la tranche centrale.

1.1.1 Du Phénomène physique d'acquisition à la reconstruction

Un rayon X forme une onde électromagnétique dont la longueur d'onde est plus importante que celle de la lumière visible. Cette propriété lui permet de passer au travers de la matière. Pendant cette traversée, le rayon X subit une atténuation proportionnelle à la densité et à l'épaisseur de la matière rencontrée. La radiographie à rayons X est basée sur ce principe et l'image obtenue représente une superposition des tissus traversés.

Dans un scanner à rayons X, une coupe $2D$ de l'objet est acquise en mesurant l'atténuation des rayons selon différents angles. Pour chaque angle, cette atténuation représente une projection de

l'objet, c'est-à-dire une radiographie 1D de la matière traversée. Une méthode de rétroprojection combinant l'ensemble de toutes les radiographies permet de reconstruire la coupe 2D modélisant l'objet [44, 39, 51].

Pour visualiser ce concept de rétroprojection, considérons l'exemple suivant. Soit un domaine 2D orthonormal centré (à gauche sur la figure 1.1). Chaque projection 1D est définie le long d'un angle θ . Une droite de projection suivant θ dépend de sa position donnée par un module ρ . Une telle droite est alors notée (θ, ρ) . La valeur $\mathcal{R}_\theta(\rho)$ dépend des données traversées par la droite (θ, ρ) (en bleue sur le schéma 1.1) et correspond à l'atténuation subie par les rayons X traversant la matière le long de cette droite.

Pour un angle θ donné, un ensemble de modules ρ_i et leurs valeurs $\mathcal{R}_\theta(\rho_i)$ définissent la θ -projection, notée \mathcal{R}_θ (à gauche sur la figure 1.1). On note \mathcal{S} et on appelle sinogramme l'ensemble des projections acquises autour d'un objet le long d'angles distincts. Les valeurs de projections contenues dans un sinogramme sont utilisées pour reconstruire, par rétroprojection, le modèle acquis. Sur le schéma de droite de la figure 1.1, la projection d'angle θ est rétroprojetée sur le domaine à reconstruire. Comme on peut le constater, une seule projection ne suffit pas pour retrouver le domaine original (la forme de ce dernier n'est pas récupérée). En revanche, lorsque l'acquisition est effectuée sur plusieurs angles (figure 1.2(a)), le domaine original est reconstruit plus précisément (sur la figure 1.2(b), on constate une meilleure reconstruction de la géométrie de la forme acquise).

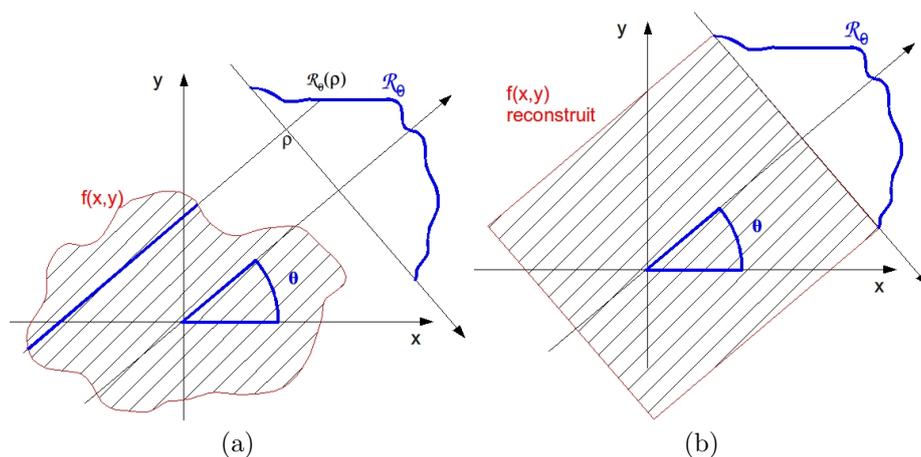


FIGURE 1.1: (a) Une droite de projection est définie par un angle θ et un module ρ . Sa valeur dépend des données $f(x, y)$ traversées et correspond à l'atténuation subie par les rayons X traversant la matière le long de la droite bleue. (b) L'information contenue dans une seule projection n'est pas suffisante pour reconstruire le domaine initial f .

1.1.2 Modélisation mathématique par Transformée de Radon

Le processus d'acquisition/reconstruction se modélise par la transformée de Radon [73], définie par Johann Radon en 1919. La transformée directe, notée \mathcal{R} , décrit l'acquisition d'une droite de projection. Elle transforme une fonction 2D définie par $f(x, y)$ en une projection 1D suivant un angle θ et un module ρ donnés [73, 94]. Elle est définie par la formule suivante :

$$\mathcal{R}_\theta(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \quad (1.1)$$

où θ et ρ sont respectivement les coordonnées angulaire et radiale de la droite de projection (θ, ρ) , et $\delta(\cdot)$ l'impulsion de Dirac. Ainsi, la valeur de $\mathcal{R}_\theta(\rho)$ est la somme de l'intensité de tous les points traversés par la droite dans le milieu.

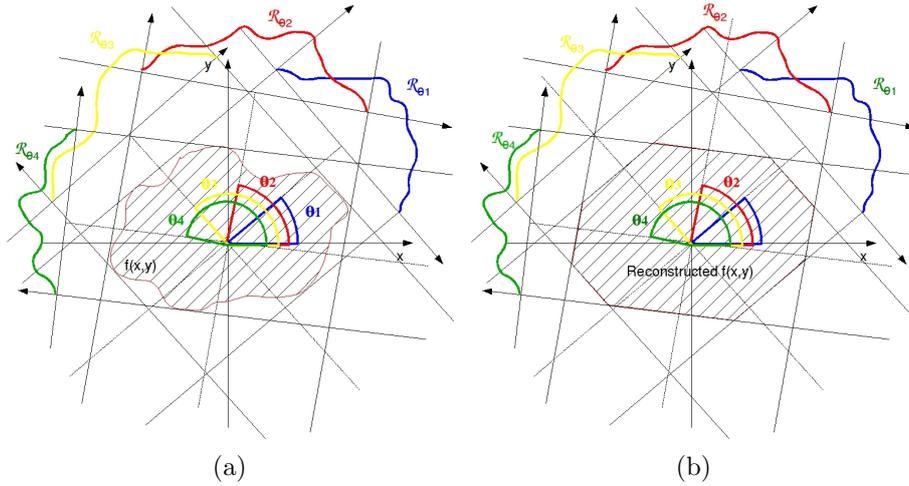


FIGURE 1.2: (a) Représentation de l'acquisition du modèle suivant plusieurs angles. (b) L'intersection des informations contenues sur les différentes projections permet de reconstruire plus précisément le domaine initial f .

La transformée inverse de Radon, quant à elle, retrouve un domaine à partir de ses projections. Soit un sinogramme \mathcal{S} contenant une infinité de valeurs de projections $\mathcal{R}_\theta(\rho)$ telle que $\theta \in [0, \pi[$ et $\rho \in \mathbb{R}$. La transformée inverse est donnée par :

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\theta(\rho) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) d\rho d\theta \quad (1.2)$$

Cette inversion définit la valeur $f(x, y)$ comme la somme infinie des valeurs de projections traversant le point (x, y) . Elle modélise le processus de reconstruction qui consiste à retrouver la densité du milieu à partir de l'intersection des informations contenues sur toutes les projections.

1.1.3 Théorème de la Tranche Centrale

Une autre approche consiste à reconstruire l'espace de Fourier du domaine initial en combinant l'information contenue dans les espaces de Fourier des projections. Le théorème de la tranche centrale (noté FST pour Fourier Slice Theorem) précise que [85, 64] :

Théorème 1 La transformée de Fourier 1D d'une projection \mathcal{R}_θ (notée $\mathcal{F}_{1D}(\mathcal{R}_\theta)$) d'un domaine défini par $f(x, y)$ le long d'un angle θ correspond à une ligne de l'espace de Fourier (noté $\mathcal{F}_{2D}(X, Y)$) de f le long de ce même angle θ .

Ce théorème permet de retrouver f à partir de ses projections. En effet, si nous considérons la fonction f en coordonnées polaires, avec $x = r \cos \phi$ et $y = r \sin \phi$, l'équation (1.1) devient :

$$\mathcal{R}_\theta(\rho) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \phi, r \sin \phi) \delta(\rho - r \cos(\phi - \theta)) |r| dr d\phi \quad (1.3)$$

La transformée de Fourier \mathcal{F}_{1D} de la projection $\mathcal{R}_\theta(\rho)$ est :

$$\mathcal{F}_\theta(\nu) = \mathcal{F}_{1D}(\mathcal{R}_\theta(\rho)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_\theta(\rho) e^{-2i\pi\nu\rho} d\rho \quad (1.4)$$

et devient, en la combinant avec (1.3) :

$$\mathcal{F}_\theta(\nu) = \int_0^{2\pi} \iint f(r \cos \phi, r \sin \phi) \delta(\rho - r \cos(\phi - \theta)) |r| e^{-2i\pi\nu\rho} d\rho dr d\phi \quad (1.5)$$

Comme l'impulsion de Dirac est non nulle pour $\rho = r \cos(\phi - \theta)$, l'équation (1.5) peut être simplifiée par :

$$\mathcal{F}_\theta(\nu) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \phi, r \sin \phi) |r| e^{-2i\pi\nu r \cos(\phi - \theta)} dr d\phi \quad (1.6)$$

Soit maintenant la transformée $2D$ de Fourier $\overline{\mathcal{F}}_{2D}(\psi, \nu)$ de f en coordonnées polaires, avec $X = \nu \cos \psi$ et $Y = \nu \sin \psi$:

$$\overline{\mathcal{F}}_{2D}(\psi, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \phi, r \sin \phi) |r| e^{-2i\pi\nu r \cos(\phi - \psi)} dr d\phi \quad (1.7)$$

Des équations (1.6) et (1.7), on obtient l'équation (1.8) correspondant au FST [85]. Ce théorème définit donc que la transformée \mathcal{F}_{1D} de la projection \mathcal{R}_θ est égale à la ligne centrée d'angle θ dans l'espace de Fourier \mathcal{F}_{2D} du domaine original.

$$\mathcal{F}_\theta(\nu) = \mathcal{F}_{1D}(\mathcal{R}_\theta(\rho)) = \mathcal{F}_{2D}(f(r \cos \phi, r \sin \phi)) = \overline{\mathcal{F}}_{2D}(\psi, \nu)_{\psi=\theta} \quad (1.8)$$

On peut ainsi reconstruire l'espace de Fourier $2D$ du domaine original à partir des transformées de Fourier $1D$ de chaque projection, puis obtenir le domaine initial par transformée de Fourier $2D$ inverse.

1.2 Discrétisation des modèles

Les théorèmes de Radon et de la tranche centrale sont exacts dans un domaine continu, c'est-à-dire pour une infinité de droites de projections. En tomographie, nous sommes limités à un domaine discret. D'une part, le processus d'acquisition est discrétisé car il est effectué avec un nombre fini de projections et de droites par projection. D'autre part, le domaine reconstruit est une image discrète composée d'un nombre fini de pixels. Cette discrétisation entraîne un certain nombre de propriétés que nous énoncerons au début de cette section.

Nous introduirons ensuite la transformée de Radon discrète, qui modélise la reconstruction d'une image J à partir des projections d'une image d'origine I . Nous verrons comment elle est utilisée depuis une acquisition scanner. De manière similaire, nous définirons comment le théorème de la tranche centrale est exploité de manière discrète pour retrouver l'espace fréquentiel de l'objet à modéliser. Des résultats de reconstruction utilisant ces méthodes seront présentés et discutés en fin de section.

1.2.1 Propriétés d'une acquisition Scanner

Contrairement à une acquisition idéale (infinité de projections et d'échantillons par projection), une acquisition scanner est composée d'un nombre N_θ fini de projections uniformément réparties entre 0 et π . Le nombre de modules par projection, noté N_ρ est lui aussi fini et reste constant au cours d'une acquisition. Le pas angulaire entre deux projections successives est notée $d\theta = \frac{\pi}{N_\theta}$. De même, on appelle $d\rho$ le pas d'échantillonnage sur une projection, c'est-à-dire la distance entre deux droites d'acquisitions successives. Lors de la reconstruction d'une image discrète I , de largeur W et de hauteur H pixels, le taux d'échantillonnage est $d\rho = \frac{\max(W, H)}{N_\rho}$.

Une acquisition scanner avec N_θ projections de N_ρ échantillons permet d'obtenir le sinogramme \mathcal{S}^* , qui est un sous-sinogramme du sinogramme idéal \mathcal{S} . Il se représente sous la forme d'une image $2D$, de taille $N_\rho \times N_\theta$ où chaque ligne représente les valeurs d'acquisition pour une projection. En notant i_θ et i_ρ les index d'une projection et d'un module tels que $0 \leq i_\theta < N_\theta$ et $0 \leq i_\rho < N_\rho$, le pixel (i_θ, i_ρ) représente la valeur $\mathcal{R}_\theta(\rho)$.

Un tel sinogramme discret peut être utilisé pour reconstruire une image I discrète modélisant l'espace acquis. Cette reconstruction « discrète » doit être effectuée en utilisant une version discrète de la transformée de Radon ou du théorème de la tranche centrale.

1.2.2 De la transformée de Radon continue à la transformée de Radon discrète

Soit un domaine discret $2D$ noté I dans lequel la fonction continue f est échantillonnée. f est plongée dans une grille régulière discrète (à gauche sur la figure 1.3). L'équation (1.9) définit l'étape d'échantillonnage [94]. Chaque point $f(x, y)$ a la valeur du pixel (i, j) qui le contient. Autrement dit, tous les points (x, y) d'un même pixel ont la même valeur. L'image à droite sur la figure 1.3 illustre ce processus.

$$f(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(i, j) \Delta(x - j) \Delta(y - i) \quad (1.9)$$

où $\Delta(\cdot)$ est l'impulsion de Dirac discrète.

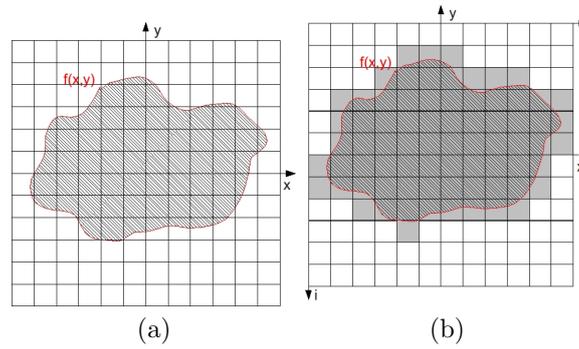


FIGURE 1.3: Si le domaine f est plongé dans une grille discrète (a), tous les points (x, y) contenus dans un pixel (i, j) ont la même intensité calculée par l'équation (1.9).

Les équations (1.1) et (1.9) permettent de définir la transformée de Radon discrète comme la somme des valeurs de pixels traversés par la droite dans l'image. Cette valeur est notée $R_\theta(\rho)$ et est donnée par la formule suivante :

$$R_\theta(\rho) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} I(i, j) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x - j) \Delta(y - i) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy \right) \quad (1.10)$$

La double intégrale entre parenthèse définit la contribution d'un pixel dans la projection. Elle peut être simplifiée sachant que $\Delta(x - j)$ et $\Delta(y - i)$ sont non nuls pour $x = j$ et $y = i$, $x, y, i, j \in \mathbb{N}$. On en déduit la transformée de Radon discrète (équation (1.11)) qui calcule la valeur de projection $R_\theta(\rho)$ depuis une image I :

$$R_\theta(\rho) = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} I(i, j) \Delta(\rho - j \cos \theta - i \sin \theta) \quad (1.11)$$

où $\Delta(\cdot)$ est l'impulsion de Dirac discrète qui vaut 1 si la droite (θ, ρ) traverse le pixel (i, j) et 0 sinon.

De manière similaire, la transformée discrète inverse, notée R^{-1} , reconstruit une image I à partir d'une acquisition R par la formule (1.12) ci-dessous.

$$R^{-1}(i, j) = I(i, j) = \sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} R_\theta(\rho) \Delta(\rho - j \cos \theta - i \sin \theta) \quad (1.12)$$

En utilisant la transformée inverse de Radon discrète, il est possible de reconstruire une image J de taille $W \times H$ représentant une image I dont l'acquisition est donnée par un sinogramme S de $N_\rho \times N_\theta$ valeurs. De manière similaire, elle peut servir à retrouver une image J modélisant un domaine f depuis un sinogramme S^* . Cette reconstruction se déroule comme présentée dans l'algorithme 1.

Algorithme 1 : R^{-1}

Entrées: $R \wedge W \wedge H \wedge N_\theta \wedge N_\rho$

pour tout $I(i, j)$ tels que $0 \leq i < H$ et $0 \leq j < W$ **faire**

pour tout $\mathcal{R}_\theta^*(\rho) = S(i_\theta, i_\rho)$ tels que $0 \leq i_\theta < N_\theta$ et $0 \leq i_\rho < N_\rho$ **faire**

$I(i, j) \leftarrow I(i, j) + S(i_\theta, i_\rho) \times \Delta\left(\rho - \left(j - \frac{H}{2}\right) \cos \theta - \left(i - \frac{W}{2}\right) \sin \theta\right)$

fin pour

fin pour

retourner I

Soit $W \times H = N$. La complexité de cette reconstruction est $\mathcal{O}(NN_\theta N_\rho)$. Habituellement, on choisit $N_\theta = s\sqrt{N}$ et $N_\rho = t\sqrt{N}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, la complexité globale est $\mathcal{O}(N^2)$. Toutefois, un mappage entre chaque pixel et les droites de projection permet de sélectionner automatiquement les ρ_i contribuant à leur reconstruction. La complexité est alors $\mathcal{O}(N \log(N))$.

1.2.3 Discrétisation du Théorème de la tranche centrale

Comme pour la transformée de Radon, il faut discrétiser le théorème de la tranche centrale pour reconstruire une image à partir des espaces fréquentiels des projections. Si nous considérons ce théorème dans une grille discrète, la simplification effectuée dans l'équation (1.5) est impossible car chaque point de la grille polaire n'est pas exactement localisé au centre d'un pixel [94]. Par conséquent, la version discrète du théorème est la suivante :

$$\begin{aligned} F_\theta(\nu) &= \overline{F}_{2D}(\psi, \nu)_{\psi=\theta} \\ &= \sum_{\phi=0}^{N_\theta} \sum_{\rho=0}^{N_\rho} \left[\sum_{r=0}^{N_\rho} I(r \cos \phi, r \sin \phi) |r| e^{-2i\pi\nu r \cos(\phi-\theta)} \right] \times \Delta(\rho - r \cos(\phi - \theta)) \end{aligned} \quad (1.13)$$

La somme entre crochets correspond à la transformée de Fourier 1D. La double-somme à l'extérieur détermine le(s) point(s) polaire(s) utilisé(s) pour calculer le pixel $\overline{F}_{2D}(\psi, \nu)$. Cette discrétisation consiste donc à interpoler la grille polaire obtenue par les espaces fréquentiels de chaque projection dans une grille cartésienne des fréquences de l'image à reconstruire. Cette interpolation est schématisée sur la figure 1.4. Dans sa version la plus élémentaire, la valeur d'un pixel reconstruit est celle du point polaire le plus proche. L'algorithme complet de reconstruction de Fourier (noté par la suite FR, de l'anglais *Fourier Reconstruction*) est exposé sur le schéma de la figure 1.5.

Pour reconstruire la grille cartésienne, il suffit de parcourir l'ensemble des points (θ_i, ρ_i) , de rechercher le point (i, j) le plus proche et de le mettre à jour si nécessaire. L'espace de Fourier est reconstruit en $N_\theta N_\rho = \mathcal{O}(N)$ étapes. Comme la FFT retrouve l'image en $\mathcal{O}(N \log N)$, la complexité globale de la reconstruction de Fourier est $\mathcal{O}(N \log N)$. FR est donc équivalent en complexité à R^{-1} .

1.2.4 Exemples de Reconstruction

Voyons maintenant des exemples de reconstructions utilisant les versions discrètes de la transformée de Radon et du théorème de la tranche centrale. Une acquisition est effectuée dans les

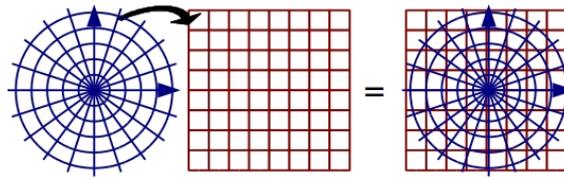


FIGURE 1.4: Les valeurs des espaces fréquentiels des projections discrètes se répartissent sur une grille polaire. Cette dernière est introduite dans une grille cartésienne représentant l'espace de Fourier de l'image à reconstruire. Une étape d'interpolation est nécessaire pour basculer d'une grille à l'autre.

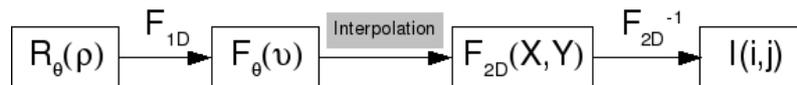


FIGURE 1.5: Étapes de l'algorithme de reconstruction de Fourier.

conditions d'une acquisition scanner. Soit un domaine continu représentant le fantôme de Shepp-Logan [85]. La modélisation continue de ce modèle utilise une définition analytique des objets définie dans [94]. L'image à gauche sur la figure 1.6 représente ce domaine dans une image de taille 512×512 .

Ce fantôme est assez représentatif des problématiques rencontrées en reconstruction tomographique. D'abord, il contient des changements de fréquences importants (sur l'extérieur du crâne). Ces derniers permettent de vérifier qu'une reconstruction retrouve les hautes fréquences et conserve un contraste important. Les zones d'intensité uniforme sont utilisées pour vérifier que l'inversion retrouve l'homogénéité des régions. C'est aussi dans ces régions que nous voyons apparaître les effets du bruit lorsqu'une acquisition est détériorée. Enfin, la taille des régions permet d'observer la qualité de la reconstruction (en fonction des données présentes sur l'acquisition) à différentes échelles.

Une acquisition de ce fantôme est effectuée suivant 180 angles équirépartis entre 0 et π , avec 512 échantillons par projection. Le sinogramme résultant de cette acquisition est présenté sur l'image (b) de la figure 1.6. La première ligne de ce sinogramme représente les 512 valeurs de la θ_0 -projection, la deuxième ligne contient les valeurs de la θ_1 -projection et ainsi de suite. En utilisant ce sinogramme dans l'algorithme 1 ou dans la reconstruction de Fourier 1.13, on reconstruit des images modélisant le domaine initial.

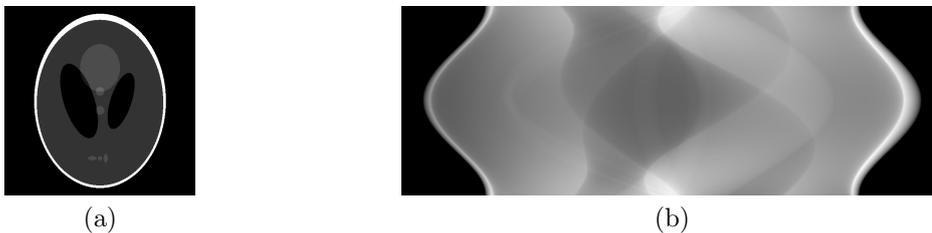


FIGURE 1.6: (a) Représentation du fantôme de Shepp-Logan continu dans une image de taille 512×512 . (b) sinogramme acquis autour du domaine suivant 180 projections de 512 échantillons.

L'image (a) de la figure 1.7 est obtenue en utilisant la transformée inverse de Radon (algorithme 1). L'image (b) est obtenue par la reconstruction de Fourier. La rétroprojection perd les

contours et la dynamique de l'image de manière non négligeable. Les petites régions sont entièrement perdues. Cette reconstruction agit comme un filtre passe-bas sur le domaine. La reconstruction de Fourier conserve les détails, toutes les régions sont visibles et les contours sont nets. Cependant, elle crée de faux contours résiduels. Globalement, la discrétisation conduit donc à des approximations provoquant des modifications et/ou des pertes d'informations qui dépendent de la méthode employée.



FIGURE 1.7: (a) Résultat de la reconstruction utilisant la transformée de Radon inverse. (b) Reconstruction de Fourier en utilisant le théorème de la tranche centrale.

1.3 Limitations

La discrétisation des modèles mathématiques entraîne des approximations observées sur les images résultats. Les reconstructions ne sont pas exactes et diffèrent selon qu'on utilise l'inversion de Radon ou la reconstruction de Fourier. Dans cette section, nous présenterons dans un premier temps l'origine de ces limitations en abordant les problèmes d'échantillonnages irréguliers dans les domaines spatial et fréquentiel.

De plus, la reconstruction peut être pénalisée par des imprécisions de l'acquisition, comme la géométrie des rayons ou les bruits dans les projections. Bien qu'ils n'apparaissent qu'à l'acquisition, ces problèmes pénalisent la reconstruction. Nous détaillerons donc ensuite les approximations liées aux bruits ou à la géométrie.

1.3.1 Limitations liées à l'échantillonnage dans le domaine spatial

L'échantillonnage sur les projections aboutit dans le domaine spatial à une irrégularité des traversés de pixels. En cas de sur-échantillonnage ($d\rho < 1$) ou d'échantillonnage standard ($d\rho = 1$), un pixel peut être traversé par une ou plusieurs droites. L'exemple de la figure 1.8 montre effectivement que les pixels hachurés (resp. grisés) sont traversés par une seule droite (resp. plusieurs droites). Toutes ces droites ont la même contribution (donnée par l'impulsion de Dirac). Or, il apparaît qu'elles n'ont pas toutes la même influence car ne traversent pas toutes la même distance dans les pixels. Ainsi, la distance rouge traversée par l'une des droites intersectant le pixel central (image (a), figure 1.8) n'est pas égale à la distance bleue traversée par l'autre droite. En cas de sous-échantillonnage ($d\rho > 1$), certains pixels ne sont pas traversés. Par exemple sur la figure 1.8(b), la contribution de la projection n'est pas prise en compte pour les pixels hachurés. La discrétisation des données implique donc une irrégularité selon $d\rho$.

1.3.2 Limitations liées à l'échantillonnage dans le domaine fréquentiel

La discrétisation du FST nécessite l'interpolation de la grille polaire dans une grille cartésienne. On peut envisager différentes manières d'intégrer la première dans la seconde, comme le détaille la figure 1.9.

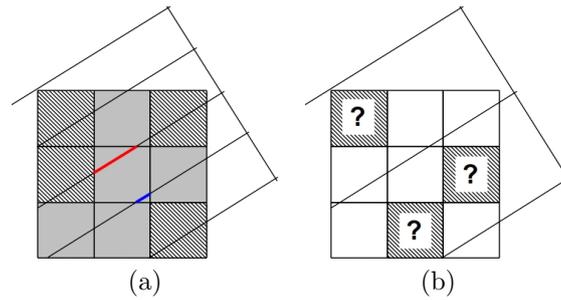


FIGURE 1.8: L'échantillonnage régulier des projections amène à une irrégularité de leur rétro-projection dans l'image. (a) Certains pixels sont traversés par une seule droite, d'autres par plusieurs. Tous les pixels ne sont pas traversés de manière identique par la (les) droite(s) traversante(s). Certains pixels ne sont pas traversés (b) : la projection n'est pas utilisable pour leur reconstruction.

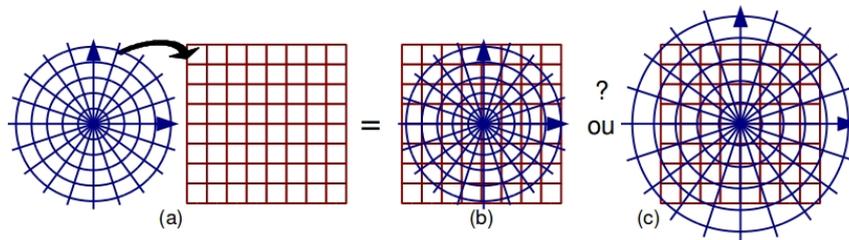


FIGURE 1.9: (a) Interpolation d'une grille polaire à une grille cartésienne - (b) Couverture partielle (les hautes fréquences de la grille cartésienne ne sont pas récupérées) - (c) Couverture trop importante (les hautes fréquences de la grille polaire ne sont pas utilisées pour calculer les valeurs de l'espace de Fourier).

Le changement de repère entraîne une perte d'information sur les hautes fréquences. Dans le cas (b) sur la figure 1.9 les hautes fréquences de l'image de ne sont pas reconstruites car la grille polaire ne recouvre pas ces points. Le cas (c) résout ce problème mais certaines fréquences ne sont plus utilisées [94]. De plus, le changement d'échelle de la grille polaire génère un changement d'échelle spatial et donc un phénomène de repliement. Étant donnés les inconvénients du cas (c), c'est le cas (b) qui est majoritairement utilisé. Aussi, nous ne considérerons que ce dernier par la suite.

Indépendamment du type d'intégration, le changement de repère provoque une irrégularité de la résolution de l'interpolation, qui dépend à la fois du nombre de projections et de la taille de l'image. L'exemple avec trois projections de la figure 1.10(a) montre des pixels gris (pour une image 4×4) non couverts par la grille polaire. Lorsque la résolution de l'image augmente (et donc le nombre d'échantillons, pour conserver $d\rho = 1$), l'aire non couverte par la grille polaire augmente. En effet, l'aire totale des pixels gris non recouverts sur l'image 1.10(b) est plus importante que celle de la figure 1.10(a). Augmenter le nombre d'échantillons ne permet pas de réduire la zone non couverte. La seule manière de couvrir plus d'espace est de rajouter des projections. La possibilité de reconstruire une image est donc fonction du rapport entre le nombre de projections N_θ et la taille de l'image.

1.3.3 Géométrie d'acquisition

Le modèle de Radon s'appuie sur une géométrie parallèle, c'est-à-dire que tous les rayons traversant la matière sont envoyés parallèlement depuis une barrette d'émetteurs vers une barrette de récepteurs (comme représenté sur le schéma (a) de la figure 1.11). Bien qu'une telle géométrie existe

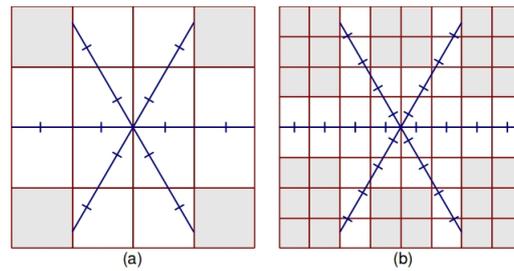


FIGURE 1.10: (a) Les pixels gris ne sont pas recouverts - (b) Si on change la taille de l'image, plus de pixels ne sont pas couverts par la grille polaire alors que le taux d'échantillonnage reste le même. Augmenter le nombre d'échantillons par projection n'augmente pas la couverture de l'espace cartésien.

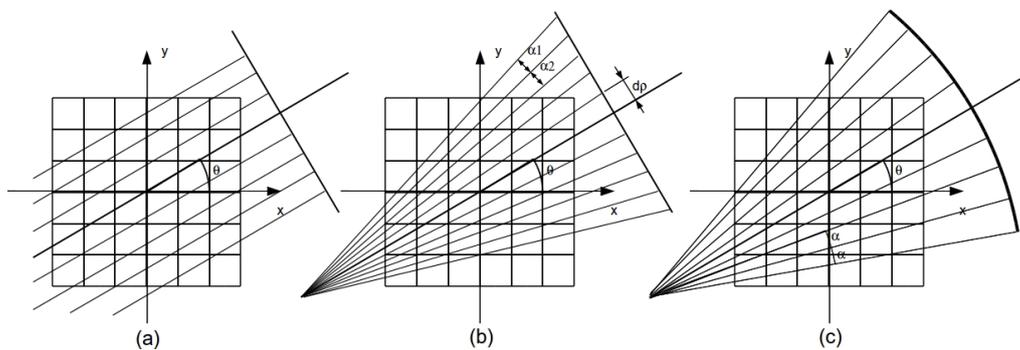


FIGURE 1.11: Géométrie d'acquisition parallèle (a), cone beam (b), fan beam (c)

dans certaines modalités d'acquisitions (microscopie électronique, ou laser par exemple), il en existe de plus complexes, comme la géométrie cone beam (figure 1.11(b)) ou fan beam (figure 1.11(c)). Ces deux dernières utilisent une source ponctuelle de rayons, ce qui fait que les droites de projections ne sont plus parallèles. Dans l'acquisition cone beam, l'intervalle radial $d\rho$ est constant (l'intervalle angulaire entre chaque droite d'une projection est donc irrégulier). Dans la géométrie fan beam, l'intervalle angulaire est régulier et les récepteurs sont positionnés en arc de cercle pour conserver $d\rho$ constant. La géométrie fan beam et cone beam s'étend sur la troisième dimension lorsque plusieurs barrettes d'émetteurs/récepteurs acquièrent simultanément plusieurs coupes. Les problèmes associés sont alors plus délicats en $3D$ car dans ce cas, on observe des détections de rayons en réalité émis par les émetteurs des barrettes voisines (anomalie de comptage des rayons).

Ces différentes géométries peuvent être modélisées pour être prises en compte dans les reconstructions. Le lecteur intéressé trouvera dans les références des versions fan beam [61, 45, 65, 18] et/ou cone beam [31, 103, 58, 102, 80] des algorithmes que nous aborderons dans le présent document. Comme elles sont indépendantes des méthodes de reconstructions, nous ne les détaillerons pas plus. Dans la suite, nous ne considérerons que la géométrie parallèle, qui n'est pas une limitation dans notre cadre d'étude.

1.3.4 Différentes sources de bruits en tomographie

Dans les données acquises, on peut observer du bruit d'acquisition, directement induit par le processus utilisé et/ou par une altération du signal de départ. De manière non exhaustive, on peut citer les sources de bruits suivantes :

- **Le bruit biologique** : directement induit par le fonctionnement du corps (mouvement du sang, battements cardiaques, respiration),
- **Le bruit de mouvement** : la partie mobile de la modalité (banc sur lequel est allongé le patient, paire émetteur/récepteurs en rotation autour de l'objet) a une inertie en mouvement qui est source de bruit,
- **Le bruit électronique** : le plus répandu et non spécifique aux modalités médicales. Il est principalement thermique (bruit dans les circuits électroniques), mais il peut aussi être lié à la réponse impulsionnelle d'un capteur par exemple.
- **Le bruit ambiant** : produit par la modalité d'acquisition utilisée. Par exemple, une méthode basée sur la radioactivité sera sensible à la radioactivité ambiante.
- **Les artéfacts de matières** : dépendant des matériaux dont on fait l'acquisition. Par exemple en microscopie électronique, les électrons arrivant avec un faible angle d'incidence sur des matériaux denses ne les traversent pas mais sont déviés de leur trajectoire et peuvent être comptabilisés sur des récepteurs ou ils ne sont pas attendus. On observe alors une anomalie de comptage des rayons, comme lors de l'usage de certaines géométries d'acquisition.

1.4 Problématique

La reconstruction tomographique est basée sur le théorème de Radon ou son équivalent dans l'espace de Fourier (théorème de la tranche centrale). Ces théorèmes sont définis et exacts en continu. La discrétisation directe de ces théorèmes rend les reconstructions approximatives car elle entraîne des irrégularités dans l'échantillonnage. Irrégularités que nous avons observées dans le domaine spatial et dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine spatial, la transformée inverse de Radon ne peut reconstruire chaque pixel avec la même quantité d'information. Dans le domaine fréquentiel, la couverture de l'espace de Fourier dépend à la fois du nombre de projections et de la taille de l'image reconstruite.

De plus, nous avons cité un ensemble de problèmes liés à la phase d'acquisition, qui rendent cette dernière non équivalente au modèle théorique de Radon. D'une part, il existe différentes géométries d'acquisitions. D'autre part, on relève un grand nombre de source de « bruits d'acquisition », parmi lesquels on peut citer les bruits biologique, de mouvement, ou électronique par exemple.

Ainsi, depuis la mise au point du premier scanner médical, l'un des objectifs de la recherche en tomographie a été de concevoir des méthodes et des algorithmes permettant d'obtenir une image la plus représentative de la réalité et la plus précise possible ; i.e. offrant le meilleur compromis en fonction des paramètres d'acquisition, de reconstruction et le bruit.

Notre objectif est de définir les grands types de méthodes qui ont été développées afin d'établir un état de l'art de la reconstruction tomographique. De plus, nous souhaitons étudier en détails le comportement de chaque méthode en fonction des limitations que nous venons d'observer. Cette étude nous permettra d'établir une classification des méthodes et une carte d'identité des algorithmes de reconstructions. Ainsi, nous commencerons par détailler dans le chapitre suivant un ensemble de critères que nous utiliserons pour mesurer la qualité, la précision et la résistance aux bruits d'acquisition d'une méthode.

Ensuite, nous présenterons des reconstructions optimisées basées sur le théorème de la tranche centrale et/ou sur la transformée de Radon inverse. Nous aborderons alors les principes permettant d'améliorer les résultats de ces méthodes *directes*, en nous appuyant sur des aspects liés à la discrétisation des théorèmes et à la distribution des données.

Enfin, dans le chapitre 4, nous développerons une autre catégorie d'algorithmes, dits *itératifs*, qui s'appuient sur un système linéaire entre les projections et les pixels à reconstruire. L'étude complète des méthodes directes et itératives aboutira sur une synthèse de la maîtrise de la qualité et de la précision en reconstruction tomographique.

Chapitre 2

Qualité et précision en tomographie

Dans ce chapitre, nous définissons un ensemble de critères permettant d'étudier la qualité et la précision d'une reconstruction. La qualité d'une reconstruction se mesure par sa faculté à retrouver le domaine initial. Nous détaillerons donc dans un premier temps les outils permettant de mesurer un taux d'équivalence entre le signal initial et l'image reconstruite. La précision, qui détermine la netteté que l'on peut espérer d'une reconstruction sera ensuite abordée. Puis, en considérant une acquisition bruitée, nous définirons le SNR, mesure caractérisant la robustesse des méthodes de reconstructions aux bruits présents dans le sinogramme. Enfin, comme les reconstructions sont paramétrées, nous étudierons l'évolution de la qualité, de la précision et de la robustesse aux bruits d'acquisitions en fonction de la variation de ces paramètres. Cette étude globale nous permettra d'établir une carte d'identité de la rétroprojection et de la reconstruction de Fourier.

2.1 Mesures de la qualité d'une reconstruction

Notre objectif est de déterminer la capacité d'une méthode à reconstruire correctement le domaine initial. Dans cette section, nous cherchons donc à définir un ensemble de critères estimant la qualité d'une reconstruction. Nous détaillerons le critère de similarité structurelle (SSIM). Il permet de vérifier la conservation de l'intensité, du contraste et de la géométrie en comparant l'image reconstruite à l'image initiale. Ensuite, nous aborderons la fonction d'étalement du point (PSF) qui mesure la netteté d'une image. Ces critères nous permettront d'estimer la qualité et la précision d'une méthode et de comparer les différentes reconstructions.

2.1.1 Similarité Structurelle (SSIM)

La qualité d'une reconstruction se mesure sur données synthétiques par comparaison du signal obtenu (image reconstruite, notée J) avec le signal d'origine (noté I). Ce dernier est modifié par le maillon acquisition/reconstruction (voir figure 2.1), qu'il est impossible de dissocier. Ainsi, la comparaison de l'image résultat J avec le signal initial I détermine l'influence du maillon entier. Cependant, le processus d'acquisition est toujours le même (quelle que soit la reconstruction). La comparaison des résultats obtenus par différentes méthodes permet alors de classer ces dernières indépendamment de la qualité et de la précision d'acquisition.

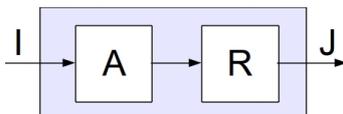


FIGURE 2.1: Schéma du processus étudié. L'image initiale I est modifiée en J par un bloc indissociable composé des étapes d'acquisition et reconstruction.

En tomographie, il y a principalement trois critères que nous souhaitons conserver sur le signal : l'intensité, le contraste et la géométrie. L'intensité du signal caractérise la nature des tissus traversés. Par exemple, les rayons X sont fortement atténués lorsqu'ils traversent des matières de fortes densités comme l'os. Ce dernier peut donc être caractérisé par un signal de forte intensité. Inversement, un tissu mou (peu dense) atténue peu les rayons. Il est donc remarquable par un signal de faible intensité. De la même manière, le contraste d'un signal ou d'une image définit la possibilité de distinguer deux régions voisines mais distinctes, c'est-à-dire en tomographie, deux tissus de natures différentes. Enfin, la préservation de la géométrie est aussi un critère essentiel car la reconstruction doit reproduire le plus précisément possible la disposition spatiale des régions.

Nous définissons donc dans un premier temps les trois critères de comparaison en intensité, contraste et géométrie. Nous les schématiserons ensuite globalement sous la forme d'une mesure de similarité structurelle. Nous appliquerons ces critères sur les images obtenues par R^{-1} et FR (figure 1.7) pour discuter de la qualité de ces méthodes.

2.1.1.1 Luminosité et comparaison d'images en luminosité

La luminosité d'une image détermine la valeur moyenne de son intensité, c'est-à-dire de la lumière qu'elle délivre. Cette intensité moyenne, notée \bar{I} , correspond à la valeur moyenne des pixels de l'image. La corrélation en luminosité de deux images I et J , notée $l(I, J)$, permet de calculer le taux d'équivalence de ces images en luminosité. Elle se calcule à l'aide de la formule suivante :

$$l(I, J) = \frac{2\bar{I}\bar{J} + C_1}{\bar{I}^2 + \bar{J}^2 + C_1} \quad (2.14)$$

où la constante C_1 est introduite pour supprimer l'instabilité si $\bar{I}^2 + \bar{J}^2$ est proche de zéro. De manière générale, on choisit $C_1 = 1$.

Le critère de comparaison en luminosité $l(I, J)$ donne un résultat borné entre 0 et 1 correspondant au pourcentage d'équivalence en intensité entre les images I et J . Plus $l(I, J)$ est proche de 1, plus les deux images ont la même intensité moyenne. Notons de plus que son maximum est unique : $l(I, J) = 1$ si et seulement si $I = J$. Comme la conservation de l'intensité est primordiale en tomographie, la qualité d'une reconstruction se caractérisera par un résultat le plus proche possible de 1.

2.1.1.2 Contraste d'une image et comparaison d'images en contraste

L'écart type en intensité est un moyen d'estimer le contraste d'une image. En effet, plus l'écart type d'intensité est élevé, plus la dynamique de l'image est importante, et donc plus elle est contrastée. Inversement, un faible écart type d'intensité - et à fortiori un écart type nul - dénote une image peu ou pas contrastée, c'est-à-dire d'intensité (quasi-)uniforme. Le contraste d'une image I est défini par :

$$\sigma(I) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{p=1}^N (I(p) - \bar{I})^2} \quad (2.15)$$

où $I(p)$ est l'intensité du pixel p . Comme nous avons défini le coefficient de corrélation en intensité, nous pouvons calculer la corrélation de deux images en contraste par la formule suivante :

$$c(I, J) = \frac{2\sigma(I)\sigma(J) + C_2}{\sigma(I)^2 + \sigma(J)^2 + C_2} \quad (2.16)$$

où $C_2 = 1$ en général. Notons que cette fonction est symétrique, bornée entre 0 et 1 et admet un maximum unique $c(I, J) = 1$ si et seulement si $I = J$. Comme pour l'intensité, la préservation du contraste est essentielle en tomographie. Par conséquent, une reconstruction est d'autant plus fiable que $c(I, J)$ est proche de 1.

2.1.1.3 Comparaison géométrique (Coefficient de Corrélation)

La structure d'une image est une donnée indépendante de la luminosité et du contraste [101]. Par conséquent, elle représente le signal auquel on soustrait la luminosité moyenne normalisé par le contraste. Elle est donnée par la formule suivante :

$$s(I) = \sum_{p=1}^N \frac{I(p) - \bar{I}}{\sigma(I)} \quad (2.17)$$

La comparaison structurelle de deux images est donnée par le coefficient de corrélation défini par $r(I, J) = s(I)s(J)$. Ce coefficient peut être vu comme une mesure de la force du lien entre deux images. Par définition, $-1 \leq r(I, J) \leq 1$. Plus $r(I, J)$ est proche de 1 ou -1 , plus les images I et J sont équivalentes (ou inversement équivalentes) d'un point de vue géométrique. Inversement, si $r(I, J)$ est proche de 0, alors les deux images sont structurellement différentes. En tomographie, ce coefficient de corrélation permet surtout de quantifier la déformation subie par le signal initial au cours du processus d'acquisition/reconstruction. Généralement, on calcule le coefficient $r(I, J)$ directement par la formule suivante :

$$r(I, J) = \frac{\sum_{p=1}^N (I(p) - \bar{I}) \cdot (J(p) - \bar{J})}{\sqrt{\sum_{p=1}^N (I(p) - \bar{I})^2} \cdot \sqrt{\sum_{p=1}^N (J(p) - \bar{J})^2}} \quad (2.18)$$

2.1.1.4 Mesure de similarité et évaluation de la qualité d'une reconstruction

Comme la qualité d'une reconstruction détermine sa faculté à conserver le signal initial, elle doit reproduire le plus fidèlement possible son intensité, son contraste, et sa géométrie. Le coefficient de corrélation global, autrement appelé coefficient de *Similarité Structurelle* [101] (noté SSIM, de l'anglais *Structural Similarity*), est un élément comparatif de deux signaux qui s'appuie sur la comparaison de ces trois critères. Il est défini par :

$$SSIM(I, J) = l(I, J) \cdot c(I, J) \cdot r(I, J) \quad (2.19)$$

Le résultat obtenu est compris entre -1 et 1 . Plus le résultat est proche des extrema, plus l'image reconstruite J est proche de l'image représentant le signal initial I .

Le tableau ci-dessous présente les relations d'intensité, de contraste et de géométrie des images obtenues par la rétroprojection et la reconstruction de Fourier (figure 1.7). Elles sont comparées à l'image représentant le signal idéal acquis (image (a) de la figure 1.6). Le SSIM combine ces mesures qualitatives et fournit donc un taux de précision global de chaque reconstruction.

	$l(I, J)$	$c(I, J)$	$r(I, J)$	$SSIM$
Rétroprojection	0.461	0.996	0.527	0.242
Reconstruction Fourier	0.997	0.831	0.724	0.600

TABLE 2.1: Comparatif des critères de qualité en intensité, en contraste et en géométrie, des images obtenues par transformée inverse de Radon et reconstruction de Fourier. SSIM donnant la qualité globale de chaque reconstruction.

D'après le tableau 2.1, la similarité structurelle de la rétroprojection avec le signal initial est faible. En découpant l'observation, on constate que cette perte de signal est principalement due à une perte de luminance l et de corrélation géométrique r . En effet, le résultat présenté sur la figure 1.7 montre que l'image est devenue plus claire et plus « floue ». En revanche, le contraste global est correctement préservé avec la rétroprojection. Le SSIM obtenu avec la reconstruction de Fourier est supérieur, notamment car la luminosité et la géométrie sont mieux préservées. La conservation de contraste est en revanche inférieure à celle obtenue par R^{-1} .



FIGURE 2.2: Source ponctuelle modélisée par une impulsion de Dirac (en discret : un seul pixel d'intensité non nulle apparaît). Acquisition 180×512 de cette impulsion.

2.1.2 Étude de la Fonction d'étalement du point (PSF)

La fonction d'étalement du point, notée PSF (de l'anglais *Point Spread Function*) est la fonction mathématique décrivant la réponse d'un système d'imagerie à une source ponctuelle [19]. Autrement dit, elle permet d'estimer la netteté que l'on peut obtenir sur des images calculées par le système (ici, le maillon acquisition/reconstruction). Après l'avoir définie, nous détaillerons la méthodologie d'étude de la PSF pour estimer la précision d'une reconstruction.

2.1.2.1 Mesure de la PSF en un point de l'image

Pour étudier la PSF, on soumet à une acquisition standard un modèle continu contenant un pulse de Dirac (à une position donnée). Par exemple, l'image (a) de la figure 2.2 représente un pulse de Dirac centré (seuls les 32×32 pixels centraux sont représentés). L'impulsion de Dirac se traduit de manière discrète par un seul pixel d'intensité maximale. L'acquisition 180×512 de ce pulse est donnée sur la figure 2.2(b).

Les images de la figure 2.3 montrent les réponses de la chaîne d'acquisition/reconstruction à une impulsion de Dirac respectivement obtenues par rétroprojection (a) et reconstruction de Fourier (b). On constate, quelle que soit la méthode utilisée, un étalement de l'impulsion. Cet étalement peut globalement être modélisé par une fonction gaussienne [20, 21], à laquelle on associe une fonction circulaire de type cosinus pour tenir compte des valeurs négatives :

$$PSF(x, y) = F_{max} e^{-\frac{(x-t_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cos(d_x(x-t_x)) e^{-\frac{(y-t_y)^2}{2\sigma_y^2}} \cos(d_y(y-t_y)) + B \quad (2.20)$$

où (t_x, t_y) sont les coordonnées du pulse de Dirac, $F_{max} = f(t_x, t_y)$ est l'intensité maximale dans l'image, σ_x et σ_y sont les paramètres définissant la forme de l'étalement, B est l'intensité du fond (background) et d_x et d_y les coefficients de fréquences de passage de valeurs positives à négatives et inversement. Les profils présentés sur la figure 2.4 montrent les valeurs des intensités de pixels selon l'axe des abscisses autour de la position centrale. On constate effectivement que la forme de ces profils s'approche d'une gaussienne (pour R^{-1}) auquel on peut associer une fonction cosinus pour tenir compte des valeurs négatives (cas de la reconstruction de Fourier).

Dans la suite, on suppose l'approximation de la PSF à une gaussienne. Son comportement se détermine par les écarts types σ_x et σ_y . Une estimation est réalisée à partir des images reconstruites en mesurant la largeur à mi-hauteur. On évalue ainsi $\sigma_x = \frac{H_x}{2\sqrt{2\ln(2)}}$ et $\sigma_y = \frac{H_y}{2\sqrt{2\ln(2)}}$ à partir des largeurs à mi-hauteurs horizontale H_x et verticale H_y [20]. Ces données sont ensuite affinées par un algorithme itératif des moindres carrés non linéaires à données séparées de type Newton-Gauss [19].

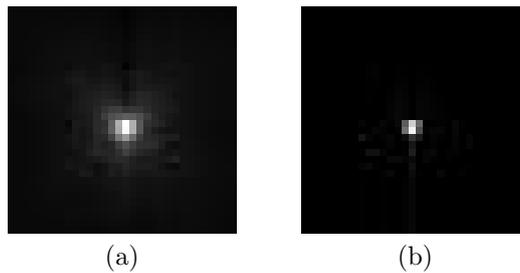


FIGURE 2.3: Reconstruction par transformée inverse de Radon (a) et de Fourier (b) à partir de l'acquisition d'une source ponctuelle centrée.

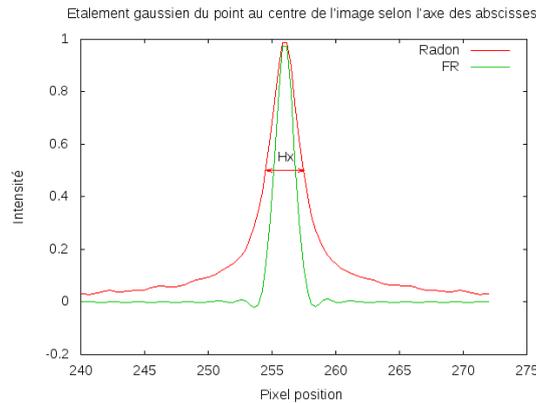


FIGURE 2.4: Profils PSF obtenus au centre de l'image de taille 512^2 pour la rétroprojection de Radon et la reconstruction de Fourier.

Soit $\sigma_x(x, y)$ et $\sigma_y(x, y)$ les fonctions donnant les écarts types dans les deux directions au point (x, y) . Le gain de la gaussienne en (x, y) est noté :

$$G(x, y) = \frac{1}{\sigma_x(x, y)\sigma_y(x, y)} \quad (2.21)$$

Il évalue la netteté au point considéré. Plus le gain est important, plus les écarts types sont petits, plus l'étalement du point est faible et par conséquent, plus l'image est nette. Les gains obtenus pour les images 2.3(a) et (b) sont respectivement 5.01 pour la rétroprojection et de 8.39 pour la reconstruction de Fourier au centre de l'image. Sur les profils de la figure 2.4, on observe bien que l'étalement est plus important (et donc le gain, plus faible) avec R^{-1} qu'avec la reconstruction de Fourier.

2.1.2.2 Comportement de la PSF en fonction de la position dans l'image

La PSF n'est pas constante selon la position dans l'image [19]. Pour déterminer comment chaque transformée déforme globalement la netteté d'une image, il faut étudier la PSF en plusieurs points.

Soient les acquisitions d'une impulsion de Dirac se déplaçant horizontalement et verticalement par pas de 5 depuis le centre de l'image (position $(0, 0)$) jusqu'au bord (position $(250, 250)$ pour image de taille 512^2). Les images par R^{-1} et FR sont reconstruites et les gains sont calculés. Les courbes de la figure 2.5 montrent le gain moyen des PSF obtenu par R^{-1} et FR selon la position dans l'image.

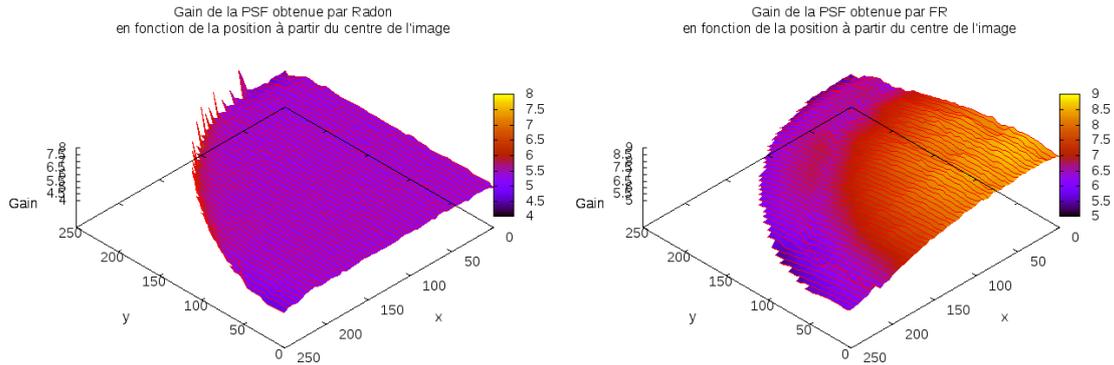


FIGURE 2.5: Gain de la PSF obtenue par R^{-1} (à gauche) et FR (à droite) en fonction de la position dans l'image, depuis la position centrale, d'indice 0 à l'extrémité de l'image (d'indice 250).

On constate que les deux méthodes n'ont pas le même comportement. Par exemple, la transformée de Radon a un gain quasi-uniforme dans tout le cercle d'intérêt. La netteté est donc constante quelle que soit la position dans l'image. Toutefois, le gain n'est compris qu'entre 5 et 6. L'image calculée par R^{-1} est donc globalement floue. Le gain obtenu par la reconstruction de Fourier est supérieur à 8 au centre de l'image, mais il diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche des bords du cercle d'intérêt. Il devient équivalent au gain obtenu par R^{-1} aux extrémités.

La netteté d'une image peut être améliorée aux moyens de déconvolutions basées sur la gaussienne de la PSF. Ce type de traitement est facilement réalisable lorsque la PSF est quasi-constante sur l'image mais devient difficile à mettre en oeuvre lorsqu'elle est variable. La précision d'une reconstruction correspond donc aussi au meilleur compromis entre la valeur moyenne du gain observé (le plus grand possible) et sa variation en fonction de la position (la plus faible possible).

2.2 Mesures de la résistance aux bruits d'acquisition

Comme tout système d'imagerie, une modalité d'acquisition tomographique est assujettie à de nombreuses sources de bruits. Ces bruits peuvent à la fois se retrouver sur le signal d'origine, mais aussi sur les données acquises. Par conséquent, la qualité d'une reconstruction se détermine aussi par sa résistance aux bruits. Nous allons donc analyser l'influence du bruit sur les reconstructions en utilisant le SNR (de l'anglais *Signal to Noise Ratio*). Il définit la faculté à distinguer le signal par dessus le bruit.

2.2.1 Modélisation du Bruit d'Acquisition

Dans notre étude, l'ensemble des bruits (biologique, de mouvement, électronique et/ou ambiant) affectant le signal de départ ou l'acquisition est modélisé sous la forme d'un bruit directement appliqué sur le sinogramme. Soit le sinogramme précédent 1.6(b). Ce dernier a été acquis idéalement (pas de bruit ambiant, électronique) depuis un domaine continu non bruité (pas de mouvements, pas de bruit biologique). Globalement, le bruit peut être modélisé par un bruit blanc gaussien [45, 87], que l'on peut obtenir en appliquant sur chaque valeur $R_\theta(\rho)$ un bruit aléatoire dont les valeurs sont comprises entre $-(A/2)R_\theta(\rho)$ et $+(A/2)R_\theta(\rho)$. Ici, on choisit $A = 10\%$.



FIGURE 2.6: Reconstruction à partir d'un sinogramme bruité. (a) Résultat de la reconstruction utilisant la transformée de Radon inverse. (b) Reconstruction de Fourier.

	$l(I, J)$	$c(I, J)$	$r(I, J)$	$SSIM$
Rétroprojection	0.462	0.996	0.527	0.242
Reconstruction Fourier	0.999	0.825	0.693	0.572

TABLE 2.2: Comparatif des critères de précision et évaluation SSIM de la qualité globale d'une reconstruction à partir de projections bruitées.

En utilisant la rétroprojection et la reconstruction de Fourier à partir du sinogramme bruité, nous obtenons les images présentées sur la figure 2.6. Les SSIM correspondants sont détaillés sur le tableau 2.2. Ces résultats ne sont que légèrement différents de ceux mesurés à partir des reconstructions non bruitées. On peut vérifier sur la figure 2.6(a) que la rétroprojection à partir de données bruitées ne diffère pas de celle obtenue à partir de données saines (figure 1.7). En revanche, on observe une forte variation visuelle entre les deux images obtenues par reconstruction de Fourier : l'image reconstruite à partir de données bruitées contient elle-même du bruit.

Comme le SSIM ne permet pas de qualifier la résistance au bruit d'une reconstruction, nous définissons le rapport signal sur bruit, noté SNR (de l'anglais *Signal to Noise Ratio*) et nous voyons comment il mesure la robustesse d'une méthode de reconstruction aux bruits d'acquisition.

2.2.1.1 Définition du SNR et utilisation en tomographie

Le rapport signal sur bruit, noté SNR, permet de mesurer la force du signal par rapport au bruit qu'il contient. Autrement dit, il permet de quantifier l'information pertinente de l'information parasite. En général, le SNR se mesure en deux étapes. La première consiste à comparer le signal d'entrée avec le signal de sortie afin de quantifier le bruit. La seconde donne le ratio entre le signal d'entrée et le bruit calculé à la première étape.

L'erreur quadratique moyenne, notée couramment MSE (de l'anglais *Mean Squared Error*) donne la différence entre deux signaux. Elle peut être utilisée pour estimer le niveau de bruit entre une image d'entrée et une image de sortie bruitée. Soient une image d'entrée I_{in} (signal idéal) et une image de sortie I_{out} (signal bruité), l'erreur quadratique moyenne est donnée par la formule suivante :

$$mse(I_{in}, I_{out}) = \frac{\sum_{p=1}^N (I_{in}(p) - I_{out}(p))^2}{N} \quad (2.22)$$

Le ratio entre l'intensité moyenne de l'image I_{in} (signal idéal) et l'erreur quadratique moyenne donne le SNR. Ce ratio prenant souvent des valeurs extrêmes, on l'exprime en décibel sur une échelle logarithmique. Il estime alors la puissance moyenne du signal par dessus le bruit causé par le traitement (formule 2.23).

$$snr(I_{in}, I_{out}) = \log \left(\frac{\bar{I}_{in}}{mse(I_{in}, I_{out})} \right) \quad (2.23)$$

En tomographie, le calcul du SNR s’effectue en comparant une image reconstruite à partir d’un sinogramme sain avec celle obtenue à partir d’un sinogramme bruité. Cette mesure donne alors la robustesse de la reconstruction face aux bruits d’acquisitions, indépendamment du bruit induit par la reconstruction elle-même.

Ainsi, soit l’image J reconstruite à partir d’un sinogramme sain et soit J_B l’image reconstruite à partir du sinogramme bruité. $snr(J, J_B)$ mesure la robustesse de la reconstruction aux bruits d’acquisition. Plus il est faible, plus la reconstruction est sensible aux bruits.

2.2.1.2 Robustesses aux bruits d’acquisition

Le tableau ci-dessous donne les SNR obtenus par la rétroprojection et la reconstruction de Fourier.

	$SNR(J, J_B)$
Rétroprojection	6.33
Reconstruction Fourier	-0.44

TABLE 2.3: Comparatifs SNR

Le SNR obtenu par rétroprojection montre qu’elle est peu sensible aux bruits d’acquisitions. En revanche, la reconstruction de Fourier perd $-0.44dB$ en signal. Par conséquent, ces deux méthodes présentent une robustesse très différente aux bruits. On peut admettre que la première y est peu sensible, mais que la seconde transmet le bruit d’acquisition à l’image reconstruite.

2.3 Etude comparative

Nous avons défini un ensemble de critères pour mesurer la qualité, la précision et la robustesse aux bruits des méthodes. Nous allons maintenant les exploiter pour étudier les variations de SSIM, PSF et SNR en fonction des paramètres utilisés. En effet, une acquisition est définie par deux paramètres, le nombre d’angles N_θ et le nombre d’échantillons par angle N_ρ . De plus, l’image reconstruite est paramétrée par sa taille $N = W \times H$. Comme la quantité d’information disponible pour reconstruire chaque pixel dépend de la taille de l’image et du nombre d’échantillons acquis, la qualité, la précision et la robustesse aux bruits d’une reconstruction sont fonctions de l’échantillonnage radial $d\rho = \frac{\max(W,H)}{N_\rho}$ et de l’échantillonnage angulaire $d\theta = \frac{\pi}{N_\theta}$. Nous établissons donc une étude comparative de R^{-1} et de FR en fonction des paramètres. Cette étude est basée sur le SSIM, la PSF et le SNR.

2.3.1 Influence du taux d’échantillonnage et du nombre de projections

Dans cette section, nous nous intéressons à l’influence du taux d’échantillonnage et du nombre de projections sur le SSIM. Nous fixons la taille de l’image à reconstruire $N = 512^2$ pixels. Pour étudier la variation du SSIM en fonction de N_θ , nous faisons varier le nombre de projections entre 10 à 180. Pour chaque échantillonnage angulaire, nous générons différents sinogrammes dont les échantillonnages radiaux varient de $\frac{1}{4}$ (sur-échantillonnage ou super-résolution) à 4 (sous échantillonnage), i.e. le nombre d’échantillons N_ρ varie de 2048 à 128. Les images résultats en fonction de $d\rho$ et N_θ sont présentées sur les figures 2.4 et 2.5. Les variations de luminosité, de contraste et de corrélation géométrique sont respectivement données pour R^{-1} et FR sur les tableaux 2.6, 2.7 et 2.8. Les SSIM en résultant sont comparés sur les courbes de la figure 2.7.

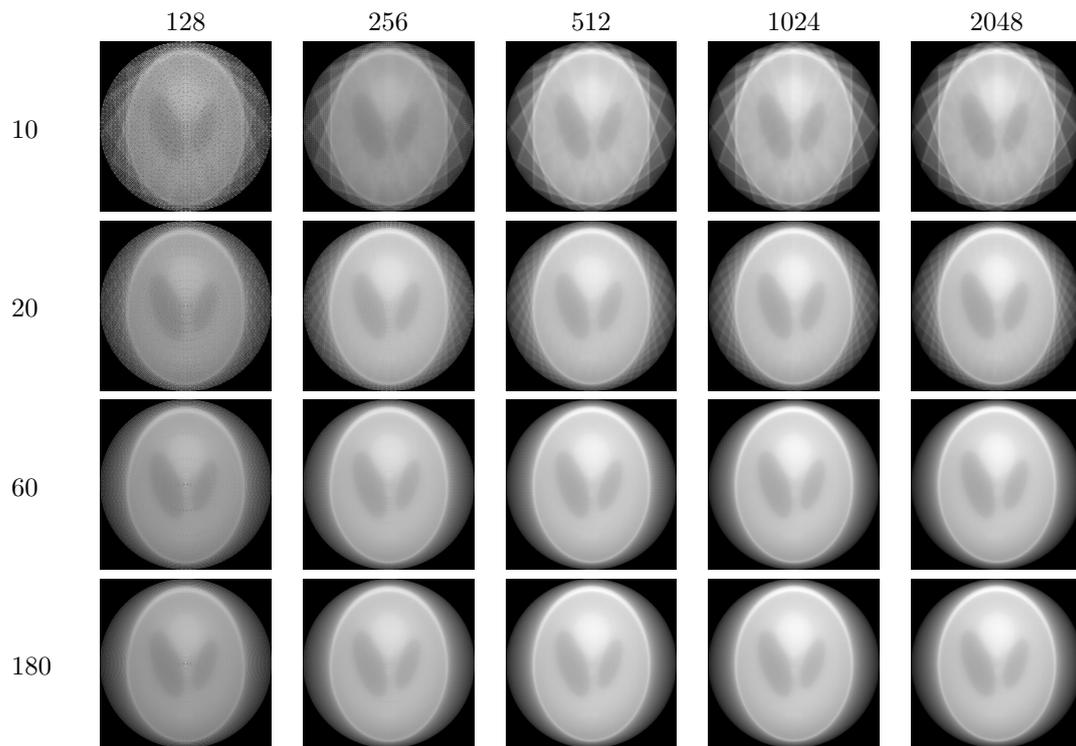
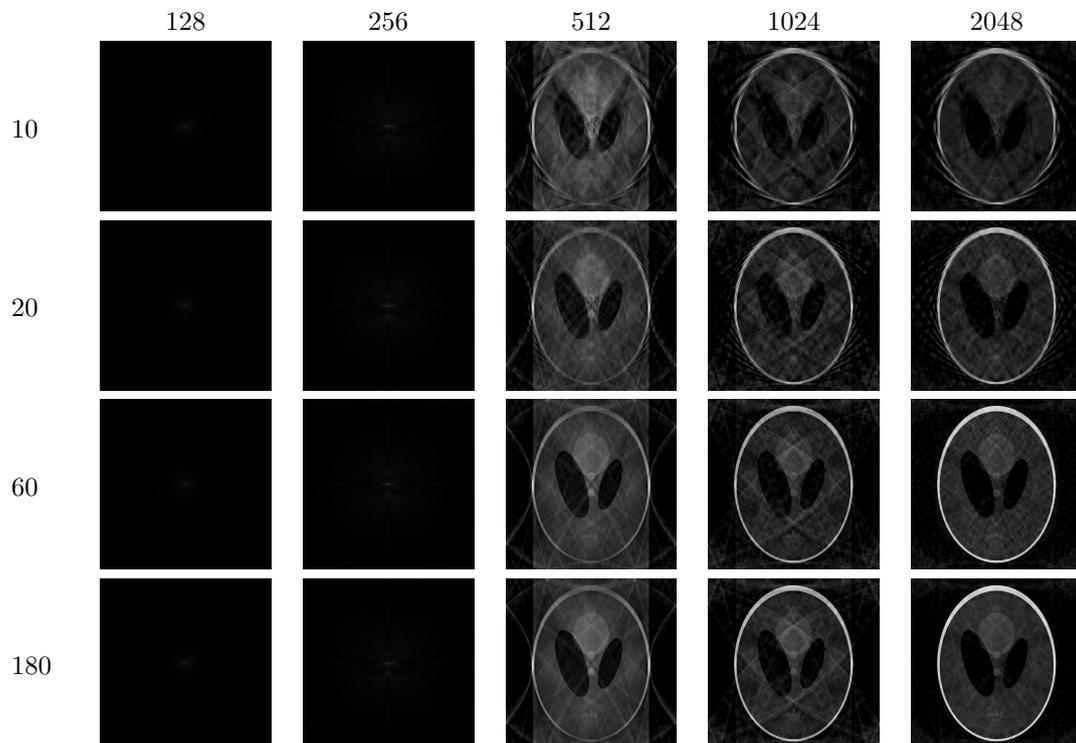
TABLE 2.4: Images résultats de R^{-1} en fonction du nombre de projections et d'échantillons.

TABLE 2.5: Images résultats de FR en fonction du nombre de projections et d'échantillons.

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	0.567	0.566	0.479	0.487	0.493
20	0.563	0.475	0.466	0.467	0.473
30	0.553	0.485	0.466	0.467	0.470
40	0.552	0.485	0.463	0.467	0.473
60	0.561	0.489	0.465	0.468	0.470
90	0.560	0.488	0.461	0.465	0.468
120	0.558	0.484	0.451	0.454	0.459
180	0.562	0.490	0.461	0.465	0.466

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	0.019	0.110	0.987	0.943	0.918
20	0.019	0.111	0.999	0.967	0.962
30	0.019	0.111	0.994	0.982	0.977
40	0.019	0.111	0.993	0.988	0.983
60	0.019	0.111	0.999	0.967	0.988
90	0.019	0.111	0.996	0.980	0.992
120	0.019	0.111	0.997	0.980	0.992
180	0.019	0.111	0.999	0.982	0.986

TABLE 2.6: Conservation de la luminosité en fonction de N_θ et $d\rho$ pour R^{-1} (à gauche) et FR (à droite).

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	0.976	0.915	0.986	0.992	0.995
20	0.924	0.975	0.989	0.995	0.999
30	0.922	0.975	0.994	0.997	0.999
40	0.918	0.974	0.994	0.998	1.000
60	0.920	0.977	0.996	0.999	1.000
90	0.917	0.975	0.994	0.998	0.999
120	0.913	0.972	0.992	0.996	0.998
180	0.917	0.976	0.996	0.999	1.000

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	0.067	0.147	0.853	0.786	0.788
20	0.067	0.147	0.805	0.853	0.881
30	0.067	0.147	0.841	0.899	0.925
40	0.067	0.147	0.850	0.923	0.946
60	0.067	0.147	0.814	0.891	0.963
90	0.067	0.147	0.838	0.917	0.974
120	0.067	0.147	0.832	0.921	0.977
180	0.067	0.147	0.824	0.927	0.971

TABLE 2.7: Conservation du contraste en fonction de N_θ et $d\rho$ pour R^{-1} (à gauche) et FR (à droite).

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	0.350	0.478	0.517	0.520	0.522
20	0.444	0.504	0.523	0.525	0.527
30	0.467	0.512	0.525	0.526	0.527
40	0.483	0.515	0.525	0.527	0.528
60	0.494	0.518	0.526	0.527	0.528
90	0.502	0.520	0.526	0.527	0.528
120	0.505	0.521	0.526	0.527	0.528
180	0.506	0.522	0.527	0.528	0.528

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	-0.002	0.022	0.606	0.728	0.763
20	-0.001	0.023	0.680	0.844	0.878
30	-0.001	0.023	0.700	0.876	0.911
40	-0.001	0.022	0.714	0.891	0.924
60	-0.001	0.023	0.719	0.897	0.931
90	-0.001	0.023	0.721	0.900	0.934
120	-0.001	0.022	0.723	0.901	0.935
180	-0.001	0.022	0.724	0.901	0.934

TABLE 2.8: Conservation de la géométrie en fonction de N_θ et $d\rho$ pour R^{-1} (à gauche) et FR (à droite).

L'étude de la conservation en luminosité est présentée sur le tableau 2.6. Avec la transformée de Radon, l'ajout d'information, que ce soit par le nombre de projections ou d'échantillons par projections a tendance à faire diminuer la corrélation lumineuse. Comme les données s'ajoutent dans la formule de l'inversion de Radon, elles génèrent une augmentation des intensités malgré les normalisations. Elle atteint un maximum de 0.56 lorsque N_θ et N_ρ sont tous deux très petits. Mais ces résultats sont faussés par la présence de pixels non reconstruits (problème d'échantillonnage dans le domaine spatial vu à la section 1.3.1). La corrélation lumineuse se stabilise autour de 0.47 dès que $N_\theta = 20$ et $N_\rho = 256$ et est globalement invariante en N_θ et $d\rho$. Il en va de même pour la reconstruction de Fourier dès que $d\rho = 1$. En revanche en sous échantillonnage, cette reconstruction échoue (c.f résultats figure 2.5). Par conséquent, la luminosité n'est absolument pas conservée.

L'étude de la conservation du contraste donnée pour chaque méthode sur le tableau 2.7 montre que la reconstruction de Radon est très efficace. La conservation du contraste global est très importante (> 0.92) et est quasiment invariante pour tout N_θ et N_ρ . Avec FR, on remarque une légère amélioration, à la fois lorsque N_θ et/ou N_ρ augmente. On passe ainsi de 0.80 quand $N_\theta = 20$ et $N_\rho = 512$ à 0.97 quand $N_\theta = 180$ et $N_\rho = 2048$.

De même que pour les précédents critères, la corrélation géométrique est invariante en N_θ et $d\rho$ avec la reconstruction de Radon et est stabilisée autour de 0.52. En revanche, la reconstruction de Fourier est géométriquement sensible aux nombres de projections et à l'échantillonnage. On gagne ainsi +0.18 environ lorsque N_θ passe de 10 à 180 et environ +0.20 lorsqu'on passe de l'échantillonnage standard à un sur-échantillonnage $\times 4$.

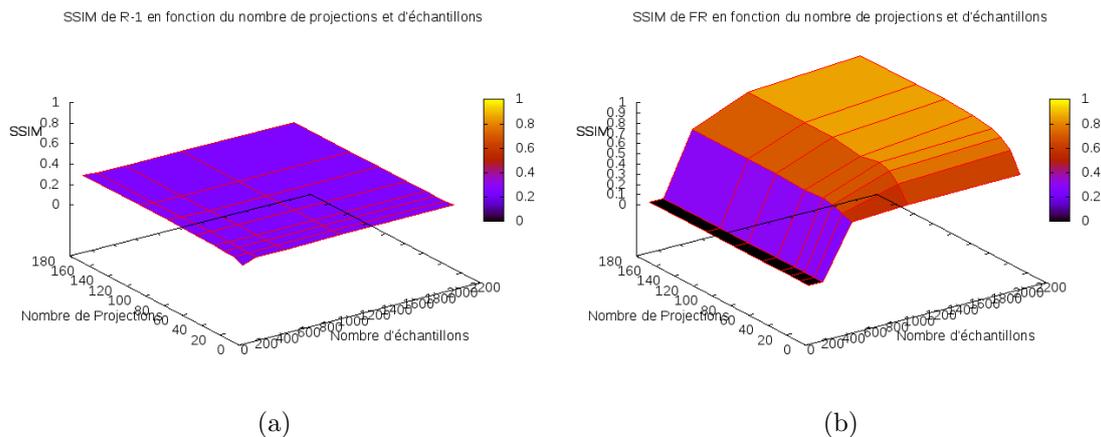


FIGURE 2.7: SSIM global obtenu par R^{-1} (a) et FR (b) en fonction du nombre de projections et d'échantillons pour une image reconstruite de taille $N = 512^2$ pixels.

De l'analyse séparée des conservations de luminosité, de contraste et géométrique résulte un SSIM présenté pour chaque méthode sur les courbes de la figure 2.7. Étant donné que les critères sont quasiment invariants pour R^{-1} , le SSIM obtenu est stabilisé autour de 0.25 pour tout N_θ et N_ρ . On peut remarquer que malgré la très bonne conservation de contraste, le SSIM est largement pénalisé par la conservation moyenne en intensité et géométrique. Avec FR, seule la conservation lumineuse est stable. Cependant, elle est déjà très élevée. Ensuite, la conservation de contraste et géométrique augmente avec l'échantillonnage radial et/ou angulaire. Il en résulte donc un SSIM croissant avec N_θ et N_ρ . La reconstruction de Fourier donne donc un SSIM maximal supérieur à 0.85 lorsque $N_\theta = 180$ et $N_\rho = 2048$ alors que R^{-1} ne fournit qu'un SSIM de 0.25 dans les mêmes conditions. Toutefois, rappelons que la méthode FR échoue, et donc fournit un SSIM nul, lorsqu'on se place dans un cas de sous échantillonnage.

L'échec de la reconstruction de Fourier en sous-échantillonnage est directement lié à la théorie d'échantillonnage de Shannon [84]. En échantillonnage standard, on observe des artefacts de repliement du spectre sur le résultat de la méthode FR. Ces derniers sont aussi dû au problème d'échantillonnage. Si le théorème de Shannon est vérifié, c'est-à-dire dans notre cas si $\Delta p > 2\delta\rho$, les artefacts de repliement disparaissent (comme par exemple sur les images reconstruites à partir d'un sinogramme avec 2048 échantillons par projection).

2.3.2 Comportement de la PSF en fonction des paramètres

Dans cette section, nous regardons le comportement de la PSF en fonction des paramètres. Nous ne nous intéressons qu'à la PSF au centre de l'image car, comme nous l'avons vu à la section 2.1.2.2, elle est quasi-constante sur l'image (resp. maximale au centre) avec la transformée de Radon (resp. la reconstruction de Fourier). Comme pour l'étude du SSIM, nous étudions ses variations en fonction du taux d'échantillonnage $d\rho$ et du nombre de projections. Nous acquérons l'impulsion de Dirac au centre avec $N_\theta \in \{10, 20, 30, 40, 60, 90, 120, 180\}$ et $N_\rho \in \{128, 256, 512, 1024, 2048\}$. Nous reconstruisons alors par R^{-1} et FR des images de taille 512^2 et calculons la PSF sur les résultats obtenus. Les courbes de la figure 2.8 donnent respectivement les valeurs de la PSF au centre en fonction du taux d'échantillonnage pour la rétroprojection de Radon (en rouge) et la reconstruction de Fourier (en vert).

La PSF obtenue avec la rétroprojection et la reconstruction de Fourier est quasiment invariante en fonction du nombre de Projections pour un taux d'échantillonnage fixe. La rétroprojection

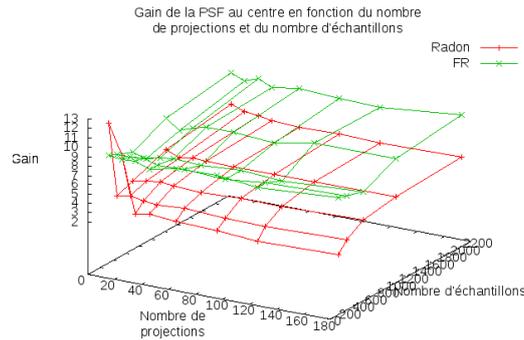


FIGURE 2.8: Étalement du point au centre de l'image en fonction du nombre de projections et d'échantillons (image de taille $N = 512^2$).

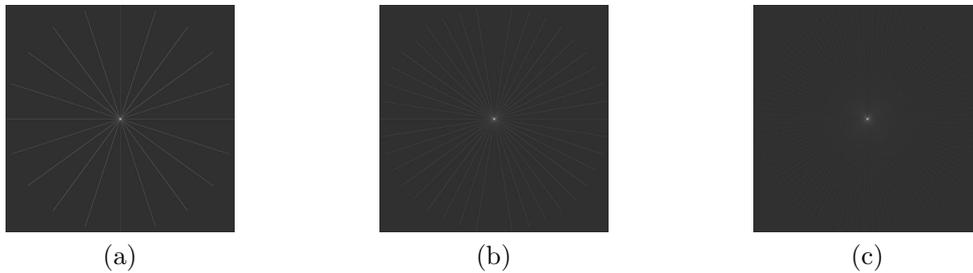


FIGURE 2.9: Reconstruction par transformée inverse de Radon de la source ponctuelle en fonction du nombre de projections. (a) N_θ trop petit pour atténuer la trace de l'impulsion sur chaque projection. (b) Lorsque le nombre de projections augmente (ici $N_\theta = 20$), chaque trace laissée par une projection est atténuée par toutes les autres. (c) A partir de 60 projections, il y en a suffisamment pour atténuer complètement la trainée laissée selon chaque angle. La PSF devient cohérente.

présente des aberrations lorsque $N_\theta \leq 20$. Cette erreur est liée au fait que le nombre de projections n'est pas suffisant pour reconstruire l'impulsion au centre sans laisser des traces sur toute l'image. Par exemple, on peut observer sur l'image de gauche de la figure 2.9 la trace laissée par la source ponctuelle selon les 10 angles de projection. N_θ n'est pas assez important pour que chaque projection atténue les traces laissées par les autres. Dès 30 projections, ce phénomène disparaît et on retrouve une PSF cohérente.

En revanche, le gain de la PSF dépend du taux d'échantillonnage. Quelle que soit la méthode de reconstruction, plus $d\rho$ est petit, plus le gain en PSF est grand. On peut le constater sur les résultats de la rétroprojection (en haut sur la figure 2.10). Lorsque le nombre d'échantillons est faible, l'étalement est très important et le gain de la PSF est faible. Plus on ajoute d'échantillons, plus on affine la position du point, plus le gain de la PSF est grand. On peut faire le même constat pour la méthode FR (en bas sur la figure 2.10), mais dans une moindre mesure. Globalement, la reconstruction de Fourier fournit une PSF beaucoup plus fine et précise. Les images obtenues sont donc plus nettes quels que soient N_θ et $d\rho$.

2.3.3 Analyse de la résistance aux bruits d'acquisition

Pour compléter l'analyse de la qualité et de la précision des reconstructions, nous regardons maintenant comment elles réagissent aux bruits d'acquisition. Dans un premier temps, nous verrons

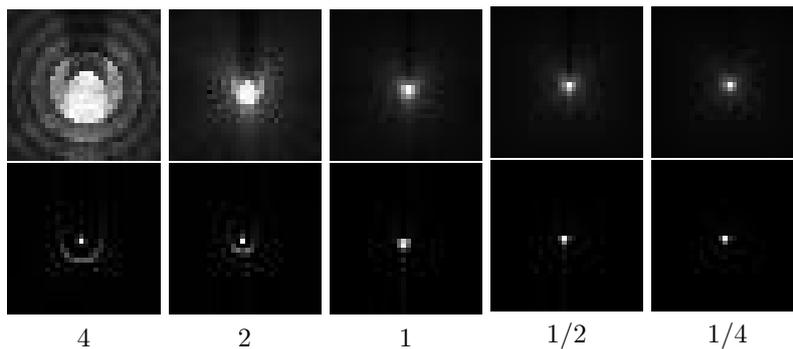


FIGURE 2.10: Séries représentant l'étalement du point au centre de l'image reconstruite par transformée inverse de Radon (en haut) et reconstruction de Fourier (en bas), pour un taux d'échantillonnage $d\rho$ allant de $\frac{1}{4}$ à 4.

si le taux d'échantillonnage et le nombre de projections ont une influence sur la quantité de bruit transmise au résultat. Ensuite, nous verrons comment le bruit se propage dans les résultats en mesurant la présence de bruits dans les reconstructions en fonction de la quantité de bruit appliqué à l'acquisition. Cette étude est basée sur la mesure du SNR (voir section 2.2).

2.3.3.1 Influence du taux d'échantillonnage sur le SNR

Soit une image de taille $N = 512^2$ pixels. Les images sont reconstruites à partir de sinogrammes bruités. Les sinogrammes sont acquis avec $N_\theta \in \{10, 20, 30, 40, 60, 90, 120, 180\}$ et $N_\rho \in \{128, 256, 512, 1024, 2048\}$. On y applique ensuite un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type 10%. Les résultats de SNR sont présentés sur le tableau 2.9. Étant donné que la méthode FR échoue en sous échantillonnage, seuls les cas pour lesquels $d\rho \leq 1$ sont présentés.

$N_\theta \backslash N_\rho$	128	256	512	1024	2048
10	3.71	4.67	5.33	4.83	6.03
20	3.39	4.35	5.92	6.42	5.50
30	5.50	5.90	6.23	6.65	6.63
40	5.56	5.46	6.22	6.57	7.00
60	5.20	6.34	6.67	6.49	7.02
90	4.84	5.61	6.82	7.18	7.46
120	4.83	6.64	6.98	5.12	5.91
180	5.97	6.57	6.83	6.83	5.68

$N_\theta \backslash N_\rho$	512	1024	2048
10	-0.77	0.40	1.13
20	-0.69	0.29	1.12
30	-0.50	0.23	0.95
40	-0.49	0.18	0.90
60	-0.45	0.25	0.94
90	-0.47	0.20	0.86
120	-0.47	0.17	0.88
180	-0.49	0.20	0.92

TABLE 2.9: SNR obtenu par R^{-1} (à gauche) et FR (à droite) sur données bruitées en fonction du nombre d'échantillons et de projections, pour une image de taille $N = 512^2$.

Le fait d'ajouter des échantillons, aussi bien angulaires que radiaux, a tendance à augmenter le SNR de R^{-1} . Ce dernier est toutefois très élevé même quand N_θ ou N_ρ est faible. Cette méthode est donc peu sensible aux bruits et n'est pas pénalisée par l'ajout d'échantillons bruités. En contrepartie, ajouter des échantillons ou des projections ne diminuera pas l'effet du bruit.

En revanche avec FR, plus il y a d'échantillons (bruités), plus il est possible de mutuellement corriger leur erreur, et donc d'atténuer globalement leur effet. Le SNR augmente de façon remarquable lorsque N_ρ augmente. De plus, le SNR augmente légèrement avec N_θ en échantillonnage standard, et diminue légèrement en sur-échantillonnage. Mais, il se stabilise dès $N_\theta = 20$ à -0.5 (échantillonnage standard), à 0.2 (sur échantillonnage) et à 0.95 (très fort sur-échantillonnage). On ne peut donc pas atténuer l'effet du bruit en augmentant le nombre de projections avec FR.

Ainsi, le SNR de R^{-1} augmente légèrement avec $d\rho$ et N_θ . Mais cette amélioration n'est pas significative étant donné les SNR déjà élevés obtenus. En revanche, le SNR de FR, invariable en N_θ , peut être largement amélioré lorsque N_ρ augmente.

2.3.3.2 Influence de l'amplitude du bruit sur la robustesse aux bruits

Pour terminer l'étude de l'influence du bruit sur la reconstruction, nous allons regarder l'évolution du bruit dans l'image reconstruite en fonction du bruit appliqué au sinogramme. Soient $N_\theta = 180$ et un échantillonnage standard $d\rho = 1$ utilisé pour reconstruire une image de taille $N = 512^2$. On applique au sinogramme un bruit de moyenne nulle et d'écart type allant de $A = 0.1\%S_{max}$ à $A = 200\%S_{max}$. Le SNR des reconstructions en fonction du bruit appliqué est présenté sur la figure 2.11.

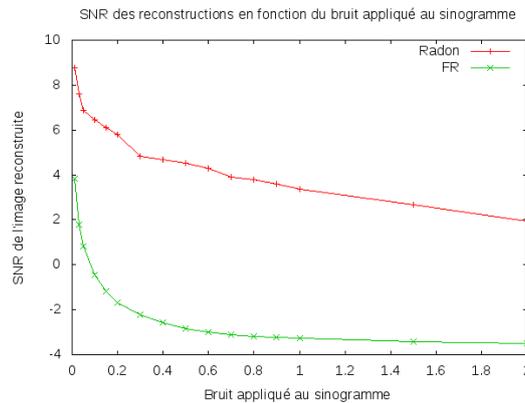


FIGURE 2.11: SNR des reconstructions en fonction de l'amplitude du bruit appliqué au sinogramme.

La rétroprojection résiste au bruit d'acquisition même lorsque celui augmente (le SNR reste important). En revanche, la reconstruction de Fourier est très sensible au bruit et le SNR diminue très rapidement lorsque le bruit appliqué augmente. Ainsi, comme on peut le constater sur les résultats de la figure 2.12, les images obtenues par reconstruction de Fourier sont très bruitées dès un écart type de 20% et inexploitables à partir de 80%. En revanche, le fantôme de Shepp-Logan est encore visible sur les images de la rétroprojection alors que l'écart type du bruit est supérieur à 150%.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini dans un premier temps des critères permettant de mesurer la qualité, la précision et la résistance aux bruits d'acquisition d'une méthode de reconstruction tomographique. La qualité de reconstruction, c'est-à-dire la faculté à retrouver le domaine initial, a été mesurée à partir du coefficient de similarité structurelle, qui s'appuie sur la conservation de l'intensité, du contraste et de la géométrie. La précision a été définie par la mesure de la fonction d'étalement du point, dont le gain permet d'estimer la netteté optimale de la reconstruction. Enfin, la résistance aux bruits d'acquisition a été mesurée en utilisant le rapport signal sur bruit.

Comme l'acquisition et la reconstruction sont paramétrées par un ensemble de variables tels que le nombre de projections, d'échantillons par projection ou la taille de l'image, nous avons ensuite présenté une étude de l'évolution du SSIM, de la PSF et du SNR en fonction des paramètres. De cette étude, nous avons extrait des comportements différents entre la méthode de Radon et

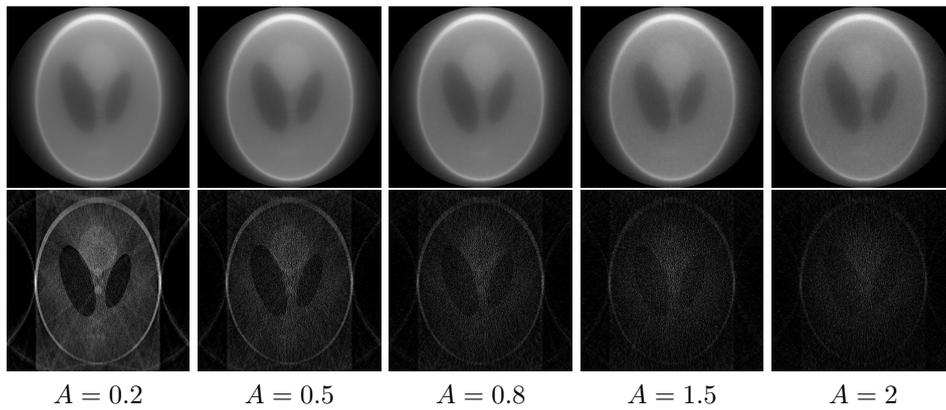


FIGURE 2.12: Images reconstruites par R^{-1} et FR à partir d'un sinogramme bruité par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type A

la reconstruction de Fourier. La première par exemple est peu précise (fort étalement du point), mais sa qualité est invariante en N_θ ou $d\rho$ et elle résiste bien aux bruits d'acquisitions. La seconde donne des résultats de bien meilleure qualité (SSIM et gain de la PSF plus élevé), mais elle résiste assez mal aux bruits d'acquisition et échoue en sous échantillonnage.

Chapitre 3

Méthodes directes

Les chapitres précédents nous ont permis d'introduire la tomographie et deux approches de reconstruction. La première dans le domaine spatial par la transformée de Radon et la seconde dans le domaine fréquentiel par la reconstruction de Fourier. Nous avons vu que ces deux méthodes sont définies et exactes dans un domaine continu et que leur discrétisation provoque des erreurs dans les images reconstruites. Nous avons alors déterminé un ensemble de critères, tels le SSIM et la PSF afin d'analyser ces erreurs et avons étudié les variations des résultats en fonction des paramètres. L'ensemble nous a permis de définir les limites, en terme de qualité et de précision, de ces deux méthodes. L'un des axes de la recherche en tomographie a consisté à améliorer les étapes de discrétisation et de reconstruction afin d'optimiser la répartition des données discrètes du sinogramme dans les domaines reconstruits.

Dans ce chapitre, nous effectuons un tour d'horizon des principales optimisations. Dans le domaine spatial, nous détaillerons dans un premier temps les différentes manières de calculer la contribution d'une droite de projection dans un pixel à reconstruire. Nous partirons du même constat dans le domaine fréquentiel, avec la contrainte supplémentaire de superposer l'espace de Fourier polaire des projections dans l'espace de Fourier cartésien du domaine à reconstruire. De là, nous étudierons quelques méthodes d'interpolations classiques et verrons si elles sont adaptées au double problème de discrétisation et de changement de domaine. Enfin, nous introduirons la rétro-projection des projections filtrées (ou BFP, de l'anglais *Backprojection of Filtered Projections*), méthode standard à la croisée de la transformée de Radon et de la reconstruction de Fourier. Une étude complète, telle qu'elle a été faite pour R^{-1} et FR dans le chapitre précédent sera proposée pour synthétiser la maîtrise de la qualité et de la précision en tomographie à l'aide des transformées directes.

3.1 Optimisation de la rétroprojection par les noyaux de pixels

La discrétisation dans le domaine spatial implique qu'il faut déterminer la contribution d'une projection dans un pixel. Cette contribution est calculée par un noyau de pixel (noté pk pour *pixel kernel*) qui définit l'importance de chaque valeur $R_{\theta_t}(\rho_r)$ pour chaque pixel (i, j) . Le noyau Dirac est le plus utilisé car il est directement déduit de l'équation (1.10). Mais, il ne résout pas les problèmes d'échantillonnages sur les projections [34]. Par conséquent, différents noyaux de pixels ont été expérimentés pour réduire l'erreur induite par la discrétisation. Après avoir redéfini l'interpolateur de Dirac, nous détaillerons le noyau B-Spline, qui tient compte de la distance traversée dans chaque pixel. Ce dernier étant encore limité par l'échantillonnage radial, nous définirons l'interpolateur basé sur l'aire et son implémentation. Enfin, lorsqu'on se place dans un échantillonnage standard, nous verrons comment l'interpolateur linéaire s'avère d'une grande efficacité.

3.1.1 Noyau de pixel Dirac

Couramment employé, le noyau de Dirac indique que tous les pixels traversés par une droite lors d'une acquisition discrète sont considérés de la même manière. Inversement, toutes les droites de projections traversant un pixel contribuent avec la même importance à sa reconstruction.

Concrètement, l'impulsion de Dirac est vraie pour tout point (x, y) inclus dans le pixel (i, j) . C'est-à-dire qu'elle vérifie, pour un point (x, y) donné, si $i - \frac{\Delta p}{2} < x < i + \frac{\Delta p}{2}$ et $j - \frac{\Delta p}{2} < y < j + \frac{\Delta p}{2}$, où Δp est la taille d'un pixel.

On note $e = \rho - j \cos \theta - i \sin \theta$ (sur la figure 3.1) la distance entre le centre du pixel (i, j) et la droite de projection (θ, ρ) . La droite (θ, ρ) appartient au pixel (i, j) si e est entre les lignes pointillées, c'est à dire si $e < \frac{L+L'}{2}$.

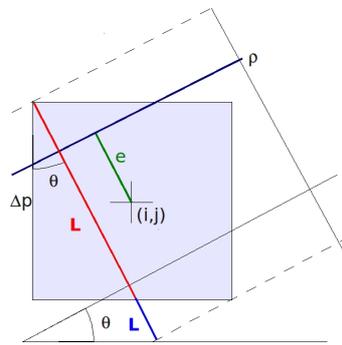


FIGURE 3.1: Déterminer si la droite (θ, ρ) traverse le pixel (i, j)

$L + L' = \Delta_p (|\sin \theta| + |\cos \theta|)$. La droite (θ, ρ) traverse donc le pixel (i, j) si $-\frac{\Delta_p (|\cos \theta| + |\sin \theta|)}{2} < e < \frac{\Delta_p (|\cos \theta| + |\sin \theta|)}{2}$. L'équation (3.24) définit le noyau de pixel Dirac :

$$\Delta(\theta, \rho, i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\Delta_p (|\cos \theta| + |\sin \theta|)}{2} < e < \frac{\Delta_p (|\cos \theta| + |\sin \theta|)}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.24)$$

3.1.2 Noyau de pixel B-Spline

Nous définissons maintenant un noyau tenant compte de la distance traversée par une droite dans un pixel. Soit la fonction boîte définie par l'équation (3.25). En remplaçant les fonctions $\Delta(\cdot)$ par celle-ci dans l'équation (1.10), on obtient un interpolateur de pixel différent, appelé noyau de pixel B-Spline, défini pour la première fois en 1993 par Unser *et al.* dans [97, 98].

$$\Phi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 1/2 & \text{si } |x| = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.25)$$

Chaque droite de projection est maintenant considérée proportionnellement à la distance qu'elle traverse dans un pixel. Sur la figure 3.2, la ligne noire représente la projection (θ, ρ) . Le trapèze bleu définit les valeurs du noyau B-Spline, noté \mathcal{B}^0 , en tenant compte de la distance traversée [97, 98]. Si e est dans le segment vert, la droite traverse entièrement le pixel et la valeur du noyau est 1. Si e est sur l'un des segments oranges, nous devons interpoler la valeur du noyau entre 1 et 0, proportionnellement à la distance traversée.

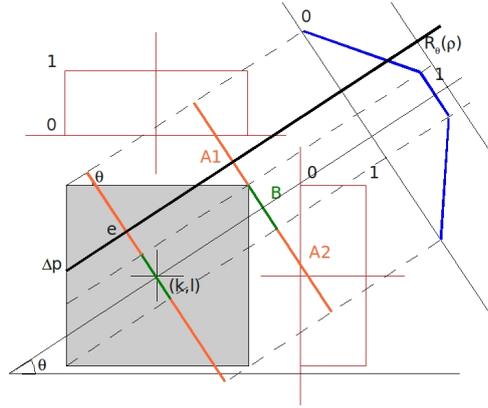


FIGURE 3.2: La fonction boîte (B-Spline d'ordre 0) sur les axes X et Y permet d'obtenir, par convolution, le trapèze définissant le noyau B-Spline.

$A1 = A2 = \Delta_p |\sin\theta|$. Nous savons que $A1 + A2 + B = \Delta_p (|\cos\theta| + |\sin\theta|)$. Donc, $B = \Delta_p (|\cos\theta| - |\sin\theta|)$ et par conséquent :

$$\mathcal{B}^0(\theta, \rho, i, j) = 1 \text{ si } |e| \leq \frac{\Delta_p (|\cos\theta| - |\sin\theta|)}{2}$$

Si e est sur un segment orange, on peut définir la valeur du noyau par interpolation. La démonstration est effectuée sur $[0, \frac{\pi}{4}[$. A la position $|e| = \frac{\Delta_p (|\cos\theta| - |\sin\theta|)}{2}$, $\mathcal{B}^0(\theta, \rho, i, j) = 1$ et à la position $|e| = \frac{\Delta_p (|\cos\theta| + |\sin\theta|)}{2}$, $\mathcal{B}^0(\theta, \rho, i, j) = 0$. On obtient donc, pour $\frac{\Delta_p (\cos\theta - \sin\theta)}{2} < |e| \leq \frac{\Delta_p (\cos\theta + \sin\theta)}{2}$:

$$\mathcal{B}^0(\theta, \rho, i, j) = \frac{-2|e| + (|\cos\theta| + |\sin\theta|)\Delta_p}{2\Delta_p |\sin\theta|} \quad (3.26)$$

Sur l'intervalle $[0, \pi[$ le dénominateur devient $2\Delta_p \min(\cos\theta, \sin\theta)$ et on obtient alors le noyau de pixel B-Spline décrit par la formule suivante :

$$\mathcal{B}^0(\theta, \rho, i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |e| \leq \frac{\Delta_p (|\cos\theta| - |\sin\theta|)}{2} \\ \frac{-2|e| + (|\cos\theta| + |\sin\theta|)\Delta_p}{2\Delta_p \min(|\cos\theta|, |\sin\theta|)} & \text{si } \frac{\Delta_p (|\cos\theta| - |\sin\theta|)}{2} < |e| \leq \frac{\Delta_p (|\cos\theta| + |\sin\theta|)}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En remplaçant le noyau de Dirac par le noyau B-Spline dans l'équation (1.12), on obtient une rétroprojection au cours de laquelle chaque droite (θ, ρ) contribue à la valeur du pixel (i, j) proportionnellement à la distance traversée.

3.1.3 Interpolation linéaire

Les noyaux vus précédemment reconstruisent uniquement, pour une projection donnée, les pixels qui sont traversés par au moins une droite. Or, étant donné un échantillonnage, il est possible que des pixels ne soient pas traversés. C'est le cas sur certaines projections dès que $d\rho > \Delta p$ et cela se vérifie globalement pour $d\rho > \sqrt{2}\Delta p$, comme on peut le constater sur le schéma (a) de la figure 3.3).

Dans ce cas et en échantillonnage standard, on peut utiliser une interpolation linéaire (schéma (b) sur la figure 3.3). Cette dernière définit la contribution de la projection θ sur le pixel (i, j) comme étant :

$$\text{Contrib}_{\theta \rightarrow (i,j)} = \frac{\rho(i,j) - \rho_r}{d\rho} R_\theta(\rho_r) + \frac{\rho_{r+1} - \rho(i,j)}{d\rho} R_\theta(\rho_{r+1}) \quad (3.27)$$

avec :

- $\rho(i, j) = (i - \frac{H}{2}) \cos \theta - (j - \frac{W}{2}) \sin \theta$,
- $\rho_r \leq \rho(i, j) \leq \rho_{r+1}$ où ρ_r et ρ_{r+1} sont deux droites successives de la θ -projection.

La contribution des deux droites de projections étant inversement proportionnelle à la distance au centre du pixel, on peut avoir une droite à l'extérieur à très faible contribution et une droite à l'intérieur à très forte contribution. Le cas le plus opportun est celui du schéma (b), où lorsque $d\rho$ devient plus petit que Δp (sur-échantillonnage), on obtient deux droites de projections par pixel.

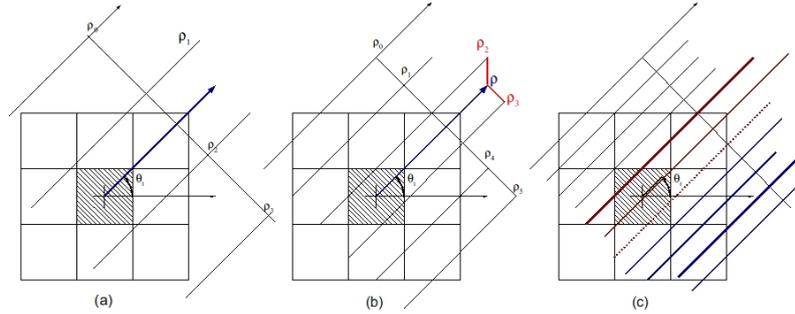


FIGURE 3.3: Noyau d'interpolation linéaire. (a) Permet de définir la contribution de la projection θ pour tous les pixels de l'image, y compris ceux qui ne sont traversés par aucune droite. Dans le cas d'usage $d\rho = \Delta p$, au moins une droite traverse chaque pixel. Interpolation optimale dès que $d\rho < \Delta p$ (deux droites de projections par pixel) (b). Fort échantillonnage (c) on exploite pas toutes les données disponibles. Seules les deux droites les plus proches du centre sont utilisées.

En revanche, lorsque le sur-échantillonnage devient plus important ($d\rho \ll \Delta p$), bien plus de deux droites traversent les pixels, et pourtant seules les deux plus proches du centre sont utilisées pour le reconstruire. L'intégralité des données disponibles n'est alors pas exploitée. C'est le cas sur l'exemple (c) de la figure 3.3 où seules les deux droites rouges sont utilisées pour reconstruire le pixel alors qu'une troisième (en pointillés) est valide.

3.1.4 Noyau de Pixel basé sur l'aire

Les noyaux Dirac et B-Spline ne permettent pas de reconstruire certains pixels en sous échantillonnage. Le noyau linéaire reconstruit tous les pixels, mais n'exploite pas toute l'information disponible en cas de sur-échantillonnage. Ces trois méthodes ne sont donc théoriquement pas optimales pour calculer la contribution des projections dans les pixels. Leur principale limitation est de considérer les droites de projections sans épaisseur.

Une droite de projection (θ, ρ) peut être interprétée comme une droite épaisse (d'épaisseur $d\rho$), bornée par les droites $(\theta, \rho - \frac{d\rho}{2})$ et $(\theta, \rho + \frac{d\rho}{2})$. Dans ce cas, et quel que soit le ratio entre Δp et $d\rho$, tous les pixels sont traversés par des morceaux de droites épaisses. Le pixel central sur la figure 3.4(a) est reconstruit à partir des projections ρ_2 et ρ_3 , qui sont les seules dont l'épaisseur intersecte le pixel. Pour la même raison, la droite ρ_3 est aussi utilisée (à plus faible coefficient) pour reconstruire le pixel en bas à droite.

Le noyau de pixel correspondant, noté $\Lambda(\theta, \rho, i, j)$, affecte la contribution de chaque droite proportionnellement à l'aire commune au pixel et à l'épaisseur de la droite. Cette aire est caractérisée par les zones à la fois colorées et hachurées sur le schéma 3.4.

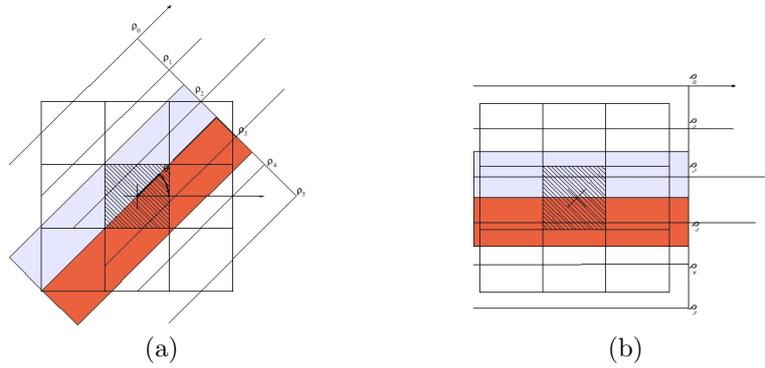


FIGURE 3.4: Noyau d'interpolation sur l'aire des pixels. (a) Le cas standard consiste à regarder l'aire commune au pixel et aux zones de validités le traversant. Ce cas est difficile à mettre en oeuvre. L'approximation (b) consiste à calculer les contributions par aire sur l'axe, puis à effectuer une rotation de la rétroprojection.

Une telle contribution est difficile à calculer car la mesure de l'aire commune est difficile à mettre en oeuvre. En effet, l'intersection de la droite épaisse et du pixel peut générer des formes complexes dont la mesure de l'aire implique un découpage non trivial en formes simples. Seuls les cas des projections horizontale et verticale permettent de calculer facilement cette aire (schéma de la figure 3.4(b)). Une approximation de ce noyau consiste donc à rétroprojeter chaque θ -projection selon un angle $\phi = 0$ dans une image temporaire notée I_θ . Une fois calculée, l'image I_θ est tournée d'un angle $-\theta$ et est additionnée à l'image résultat I .

Dans le cas $\phi = 0$, pour tout pixel (i, j) , le noyau $\Lambda(\phi = 0, \rho, i, j)$ est défini par la formule suivante :

$$\Lambda(\phi = 0, \rho, i, j) = \begin{cases} d\rho & \text{si } [\rho - \frac{d\rho}{2}] = [\rho + \frac{d\rho}{2}] = [\rho] = i \text{ (fig. 3.5(a))} \\ \frac{d\rho + d\rho}{2} + |\rho - i| & \text{si } \begin{cases} [\rho - \frac{d\rho}{2}] < i \wedge [\rho + \frac{d\rho}{2}] = i \\ [\rho - \frac{d\rho}{2}] = i \wedge [\rho + \frac{d\rho}{2}] > i \end{cases} \text{ (fig. 3.5(b))} \\ 1 & \text{si } [\rho - \frac{d\rho}{2}] < i \wedge [\rho + \frac{d\rho}{2}] > i \text{ (fig. 3.5(c))} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

où $[\cdot]$ correspond à la fonction *round* retournant l'entier le plus proche du réel passé en paramètre. Les différents cas de ce noyau sont illustrés sur la figure 3.5. Notons que pour une ligne i donnée, la valeur $\Lambda(\phi = 0, \rho, i, j)$ est toujours la même. Autrement dit, la contribution ne dépend que de la position ρ et de la ligne i en cours de reconstruction.

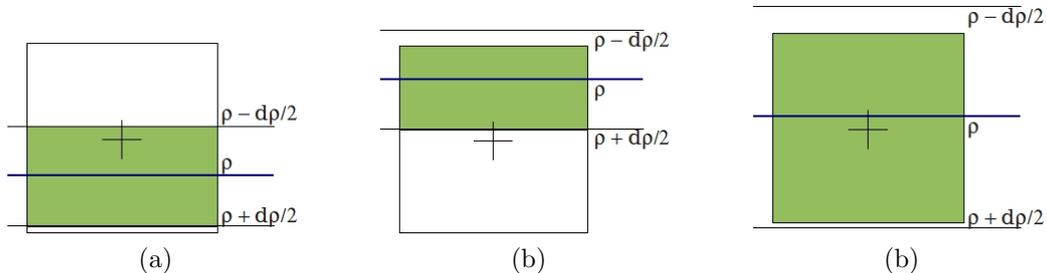


FIGURE 3.5: Noyau d'interpolation sur l'aire des pixels. (a) L'épaisseur de la droite est entièrement comprise dans le pixel, la valeur du noyau de pixel est $d\rho$. (b) L'épaisseur déborde sur l'un des côtés du pixel, l'aire commune est $\frac{d\rho + \Delta\rho}{2} + |\rho - i|$. (c) L'épaisseur est supérieure à la taille du pixel, le noyau vaut 1.

3.1.5 Comparatif des différents noyaux de pixels

Nous proposons un comparatif des résultats obtenus avec la rétroprojection, en utilisant les différents interpolateurs. Nous regardons dans un premier temps l'évolution de la qualité des résultats en fonction de $d\rho$ et de N_θ . Soient les acquisitions du fantôme de Shepp-Logan avec $N_\theta \in [10, \dots, 180]$ et $d\rho = [\frac{1}{4}, \dots, 4]$ utilisées pour reconstruire une image de taille $N = 512^2$. Les résultats obtenus à partir de l'acquisition de taille 180×512 sont présentés sur la figure 3.6.

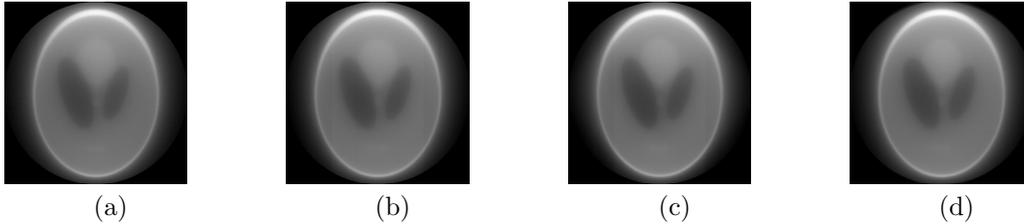


FIGURE 3.6: Résultats (images 512^2) des rétroprojections à partir du sinogramme 180×512 en utilisant les noyaux de Dirac (a), B-Spline (b), linéaire (c) et l'aire (d).

Le schéma 3.7 compare le SSIM obtenu pour chaque rétroprojection en fonction du nombre de projections et du nombre d'échantillons. On constate que la manière d'interpréter les droites de projections dans les pixels ne change quasiment pas la qualité des images. En effet, pour tout N_θ , $d\rho$, et pk , le SSIM est compris entre 0.25 et 0.3. Notons toutefois que le SSIM obtenu avec les noyaux Dirac et B-Spline est plus faible (environ 0.25) lorsque $N_\theta < 30$ ou $d\rho > 1$. Pour déterminer d'où provient cette différence, nous détaillons dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 chaque composante du SSIM pour chaque noyau utilisé.

La luminosité est comparable pour tous les noyaux. Il en est de même pour le contraste, sauf pour le noyau linéaire où l'on observe une perte d'environ 0.2 pour tout N_θ et N_ρ . En revanche, ce noyau fournit une conservation géométrique supérieure aux trois autres. Donc, malgré une équivalence globale, les critères du SSIM varient différemment.

Enfin, le faible SSIM obtenu par les noyaux Dirac et B-Spline vient d'une perte de corrélation géométrique. Comme ces noyaux ne reconstruisent que les pixels traversés par les droites de projections, certains d'entre eux ne sont jamais reconstruits, même par intersection de plusieurs projections (pixels noirs sur le zoom de la figure 3.8). Cette information non reconstruite est à l'origine de la perte en corrélation géométrique. Ce problème n'existe pas avec les interpolateurs linéaire et d'aire puisqu'ils étirent les contributions des droites sur les pixels quel que soit l'échantillonnage.

Nous comparons maintenant (toujours en fonction de N_θ et N_ρ) les PSF obtenues au centre en rétroprojetant avec les différents noyaux. La comparaison des PSF obtenues est présentée sur le schéma 3.9. Comme nous l'avons vu au chapitre précédent pour l'interpolateur de Dirac, la PSF est invariante en fonction des projections et du taux d'échantillonnage. La PSF est aussi quasiment stable au centre quel que soit le noyau utilisé, et le gain observé se situe entre 4.8 et 5.2.

Pour terminer, regardons les temps obtenus pour reconstruire les images avec un échantillonnage standard (c.f. tableau 3.4). Si la rétroprojection linéaire est effectivement la plus rapide, elle gagne moins d'une seconde par rapport aux noyaux Dirac et B-Spline. En revanche, le temps obtenu avec le noyau d'aire explose. Ce dernier n'est donc absolument pas compétitif, malgré l'implémentation approximative proposée.

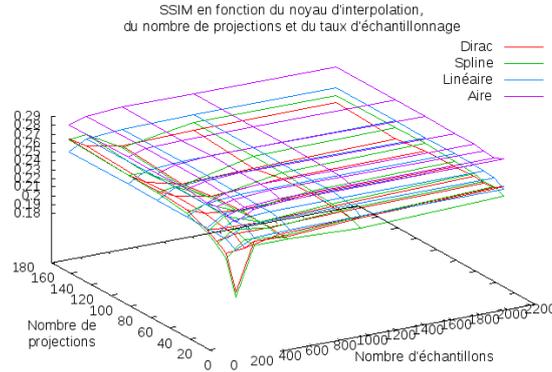


FIGURE 3.7: Comparaison des SSIM obtenus avec les différents noyaux d'interpolation en fonction du nombre de projections et du nombre d'échantillons pour reconstruire une image de taille 512^2 .

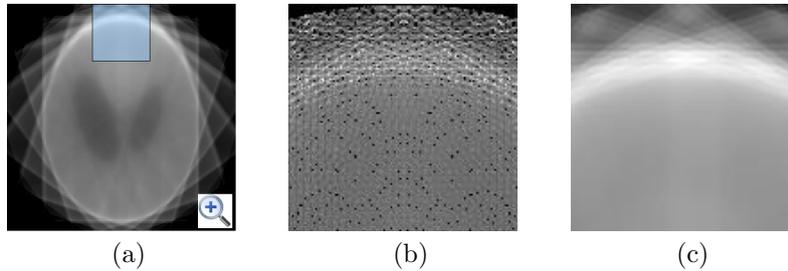


FIGURE 3.8: Résultats (zoom de (a)) des rétroprojections à partir du sinogramme 10×128 en utilisant les noyaux B-Spline (b) et d'aire (c). Des trous apparaissent avec B-Spline car certains pixels ne sont jamais reconstruits.

	128	256	512		128	256	512		128	256	512		128	256	512
10	0.565	0.565	0.470	10	0.565	0.565	0.470	10	0.543	0.585	0.507	10	0.522	0.533	0.535
20	0.562	0.511	0.456	20	0.562	0.511	0.456	20	0.522	0.535	0.498	20	0.517	0.517	0.518
30	0.552	0.513	0.462	30	0.552	0.513	0.462	30	0.511	0.523	0.499	30	0.526	0.522	0.524
40	0.553	0.523	0.461	40	0.553	0.523	0.461	40	0.511	0.519	0.498	40	0.522	0.524	0.525

TABLE 3.1: Comparaison de la corrélation lumineuse en fonction de N_θ et N_ρ obtenue par R^{-1} en utilisant le noyau Dirac (a), spline (b), linéaire (c) et d'aire (d).

	128	256	512		128	256	512		128	256	512		128	256	512
10	0.981	0.923	0.986	10	0.981	0.923	0.986	10	0.796	0.774	0.789	10	0.998	0.997	0.997
20	0.931	0.953	0.993	20	0.931	0.953	0.993	20	0.778	0.770	0.789	20	1.000	1.000	1.000
30	0.928	0.954	0.996	30	0.928	0.954	0.996	30	0.783	0.774	0.790	30	0.999	0.999	0.999
40	0.920	0.956	0.997	40	0.920	0.956	0.997	40	0.781	0.776	0.793	40	0.999	0.999	0.999

TABLE 3.2: Comparaison de la corrélation en contraste en fonction de N_θ et N_ρ obtenue par R^{-1} en utilisant le noyau Dirac (a), spline (b), linéaire (c) et d'aire (d).

3.2 Reconstructions dans l'espace de Fourier

Nous abordons dans cette section les méthodes basées sur le théorème de la tranche centrale. Ce type de reconstruction utilise le domaine de Fourier de chaque projection pour retrouver l'espace de Fourier de l'image à reconstruire. Comme nous l'avons vu au chapitre 1, ce théorème est défini

	128	256	512		128	256	512		128	256	512		128	256	512
10	0.338	0.463	0.522	10	0.338	0.463	0.522	10	0.557	0.552	0.629	10	0.521	0.532	0.536
20	0.430	0.496	0.526	20	0.430	0.496	0.526	20	0.607	0.625	0.657	20	0.527	0.538	0.542
30	0.457	0.507	0.526	30	0.457	0.507	0.526	30	0.616	0.638	0.659	30	0.528	0.539	0.543
40	0.475	0.512	0.527	40	0.475	0.512	0.527	40	0.620	0.643	0.658	40	0.528	0.539	0.543
	(a)				(b)				(c)				(d)		

TABLE 3.3: Comparaison de la corrélation géométrique en fonction de N_θ et N_ρ obtenue par R^{-1} en utilisant le noyau Dirac (a), spline (b), linéaire (c) et d'aire (d).

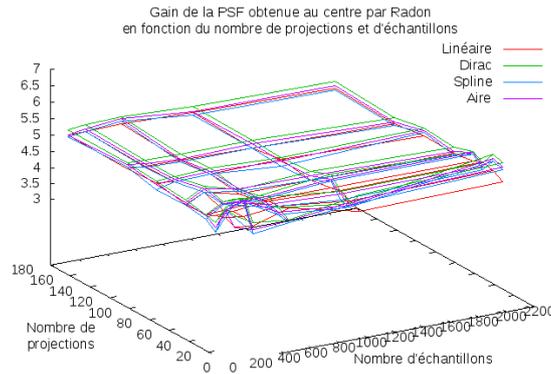


FIGURE 3.9: Comparaison des PSF au centre obtenus avec les différents noyaux d'interpolation en fonction de N_θ et N_ρ .

	Linéaire	Dirac	B-Spline	Aire
T(s)	1.48	2.11	2.47	7.53

TABLE 3.4: Temps de calcul en seconde pour reconstruire en échantillonnage standard à partir de 180 projections.

et exact en continu. Son implémentation discrète implique une interpolation de la grille polaire des projections vers la grille cartésienne de l'image.

Nous présenterons donc quelques méthodes permettant de calculer l'espace fréquentiel cartésien à partir des transformées de Fourier des projections. Tout particulièrement, nous détaillerons la bi-interpolation et l'interpolation barycentrique, sous leurs formes linéaire et radiale/angularaire. Nous verrons alors comment retrouver le plus précisément possible le domaine de Fourier en limitant les erreurs induites par l'interpolation elle-même. L'analyse de ces différents algorithmes sera accompagnée d'une étude comparative basée sur le SSIM, la PSF et le SNR.

3.2.1 Quelques méthodes d'interpolations

Dans cette section, nous présentons quelques méthodes d'interpolations standards. Nous allons étudier leur robustesse au double problème de la discrétisation des données dans l'espace de Fourier polaire et d'interprétation de ces dernières dans la grille cartésienne. L'interpolation au plus proche abordée au chapitre 1 n'est pas réétudiée ici.

Nous nous focalisons sur la bi-interpolation, dont l'usage est très répandu (en dehors de la tomographie) et sur l'interpolation barycentrique [64, 89]. La première retrouve la valeur d'un point de la grille à partir des quatre points polaires les plus proches. Tous les points du cercle d'intérêt sont alors reconstruits. La seconde ne reconstruit que les pixels pour lesquels l'information

est disponible. Chaque interpolation peut être effectuée en fonction de la distance euclidienne des points (interpolation linéaire) ou en fonction de la distance polaire (interpolation radiale/angularaire).

3.2.1.1 Bi-interpolation linéaire et radiale/angularaire

La bi-interpolation [94] retrouve chaque $F_{2D}(i, j)$ par combinaison linéaire (ou radiale/angularaire) des quatre points polaires les plus proches. L'implémentation se déroule comme suit et est résumé sur la figure 3.10.

- La position du pixel (i, j) est, en coordonnées polaires $\theta = \arctan \frac{j}{i}$ et $\rho = \sqrt{i^2 + j^2}$,
- On extrait de la grille polaire les quatre points (θ_t, ρ_r) , (θ_t, ρ_{r+1}) , (θ_{t+1}, ρ_r) , $(\theta_{t+1}, \rho_{r+1})$ tels que $\theta_t \leq \theta \leq \theta_{t+1}$ et $\rho_r \leq \rho \leq \rho_{r+1}$,
- On calcule $F_{2D}(i, j)$ avec la formule (3.29).

$$F_{2D}(i, j) = \frac{\alpha_{t,r} \mathcal{R}_{\theta_t}(\rho_r) + \alpha_{t+1,r} \mathcal{R}_{\theta_{t+1}}(\rho_r) + \alpha_{t,r+1} \mathcal{R}_{\theta_t}(\rho_{r+1}) + \alpha_{t+1,r+1} \mathcal{R}_{\theta_{t+1}}(\rho_{r+1})}{\alpha_{t,r} + \alpha_{t+1,r} + \alpha_{t,r+1} + \alpha_{t+1,r+1}} \quad (3.29)$$

où les coefficients $\alpha_{t,r}$ sont inversement proportionnels à la distance entre le pixel (i, j) et le point. Dans l'interpolation bilinéaire, la distance considérée est euclidienne. On a donc :

$$\alpha_{t,r} = |xv - |\rho_r \cos \theta_t - \rho \cos \theta|| \times |yv - |\rho_r \sin \theta_t - \rho \sin \theta|| \quad (3.30)$$

où $xv = (\max\{\rho_{r'} \cos \theta_{t'}\} - \min\{\rho_{r'} \cos \theta_{t'}\})$ et $yv = (\max\{\rho_{r'} \sin \theta_{t'}\} - \min\{\rho_{r'} \sin \theta_{t'}\})$ sont la taille des intervalles d'interpolation selon l'axe des abscisses et des ordonnées. La reconstruction de Fourier basée sur la bi-interpolation linéaire est ensuite notée FR_{BiLin} .

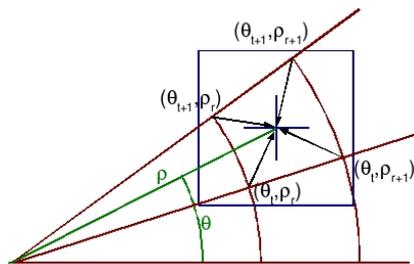


FIGURE 3.10: Reconstruction de l'espace de Fourier par bi-interpolation.

Dans la bi-interpolation radiale/angularaire [82, 89], on tient compte de la distance angulaire en fonction du déplacement sur l'arc de cercle séparant chaque θ_t de θ et de la distance radiale (séparant chaque ρ_r de ρ). Ainsi, le coefficient radial-angularaire $\alpha_{t,r}^\circ$ peut s'exprimer comme suit :

$$\alpha_{t,r}^\circ = |d\theta - |\theta_t - \theta|| \times |d\rho - |\rho_r - \rho|| \quad (3.31)$$

La reconstruction de Fourier associée est notée FR_{BiRA} .

L'usage de la bi-interpolation ne modifie pas la complexité de l'algorithme. Les points polaires sont retrouvés directement à partir des coordonnées polaires du pixel à reconstruire. La reconstruction de la grille cartésienne est donc en $\mathcal{O}(N)$. La complexité globale reste celle de la FFT.

La principale limitation de la bi-interpolation est directement liée au passage de la grille polaire à la grille cartésienne. Comme nous l'avons déjà vu, cette disposition fait qu'il y a plus d'informations pour reconstruire les basses fréquences que les hautes fréquences. Or, on utilise toujours quatre points pour reconstruire un pixel. Si un pixel contient plus de quatre points polaires, ceux en supplément ne sont pas utilisés (par exemple, les points gris sur la figure 3.11). Inversement, certaines valeurs utilisées pour reconstruire un pixel au bord de l'image ne sont pas géométriquement inclus dans son aire.

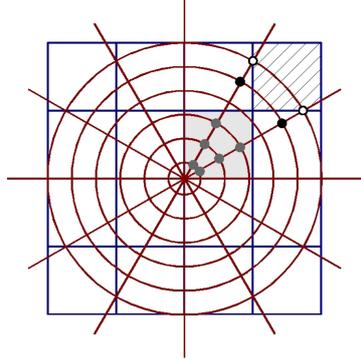


FIGURE 3.11: La bi-interpolation n'utilise que quatre des points polaires en gris pour retrouver le pixel gris. Toute l'information disponible n'est pas exploitée. Inversement, les points en noir sont utilisés pour reconstruire le pixel au bord de l'image alors qu'ils sont à l'extérieur.

3.2.1.2 Interpolation barycentrique

Nous nous intéressons maintenant à l'interpolation barycentrique. Elle considère tous les points polaires qui sont inclus dans l'aire de l'échantillon à reconstruire. Sa valeur est alors une combinaison linéaire (ou radiale/angularaire) des valeurs de ces points. Par exemple, les six points gris sur la figure 3.11 sont exploités pour retrouver le pixel. La valeur de Fourier n'est pas reconstruite si aucun point n'est inclus dans l'aire du pixel.

Chaque point polaire $F_{1D}(\mathcal{R}_\theta(\rho))$ est inclus dans un et un seul pixel. Ses coordonnées cartésiennes sont $i = \lfloor \rho \cos \theta \rfloor$, $j = \lfloor \rho \sin \theta \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ donne l'entier le plus proche. La contribution linéaire du point polaire est :

$$\alpha_{t,r} = \frac{\max(0, \frac{1}{2}\Delta p - |\rho_r \cos \theta_t - i|)}{\frac{1}{2}\Delta p} \times \frac{\max(\frac{1}{2}\Delta p - |\rho_r \sin \theta_t - j|)}{\frac{1}{2}\Delta p} \quad (3.32)$$

si l'interpolation est linéaire et :

$$\alpha_{t,r}^\circ = \begin{cases} |d\theta - |\theta_t - \theta|| \times |d\rho - |\rho_r - \rho|| & \text{si } \alpha_{t,r} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.33)$$

si l'interpolation est radiale/angularaire. La valeur du point (i, j) est alors obtenue par (remplacer $\alpha_{t,r}$ par $\alpha_{t,r}^\circ$ pour utiliser la contribution radiale/angularaire) :

$$F(i, j) = \frac{\sum_{t=0}^{N_\theta-1} \sum_{r=0}^{N_\rho-1} F_{1D}(\mathcal{R}_{\theta_t}(\rho_r)) \alpha_{t,r}}{W(i, j)} \quad (3.34)$$

où $W(i, j) = \sum_{t=0}^{N_\theta-1} \sum_{r=0}^{N_\rho-1} \alpha_{t,r}$. La complexité globale de la reconstruction reste $\mathcal{O}(N \log N)$.

On note respectivement FR_{BaLin} et FR_{BaRA} les reconstructions de Fourier basée sur l'interpolation barycentrique linéaire et radiale-angularaire.

3.2.2 Résultats et comparatifs des reconstructions de Fourier

Dans cette section, nous présentons un comparatif des différentes reconstructions de Fourier. Dans un premier temps, nous étudierons le SSIM en fonction de la variation en N_θ et N_ρ , puis nous

regarderons l'évolution de la PSF selon les mêmes variations. Enfin, nous détaillerons la résistance aux bruits des différentes interpolations.

3.2.2.1 Etude du SSIM

Nous comparons le SSIM obtenu pour chaque méthode d'interpolation en fonction de N_θ et N_ρ . Comme la reconstruction de Fourier échoue sous échantillonnage, les cas $N_\rho = 128$ et $N_\rho = 256$ ne sont pas abordés pour reconstruire l'image de taille $N = 512^2$. Une comparaison des images obtenues pour chaque type d'acquisition en échantillonnage standard et en fonction de N_θ est présentée sur la figure 3.12. Un comparatif des SSIM correspondants est disponible sur les schémas de la figure 3.13.

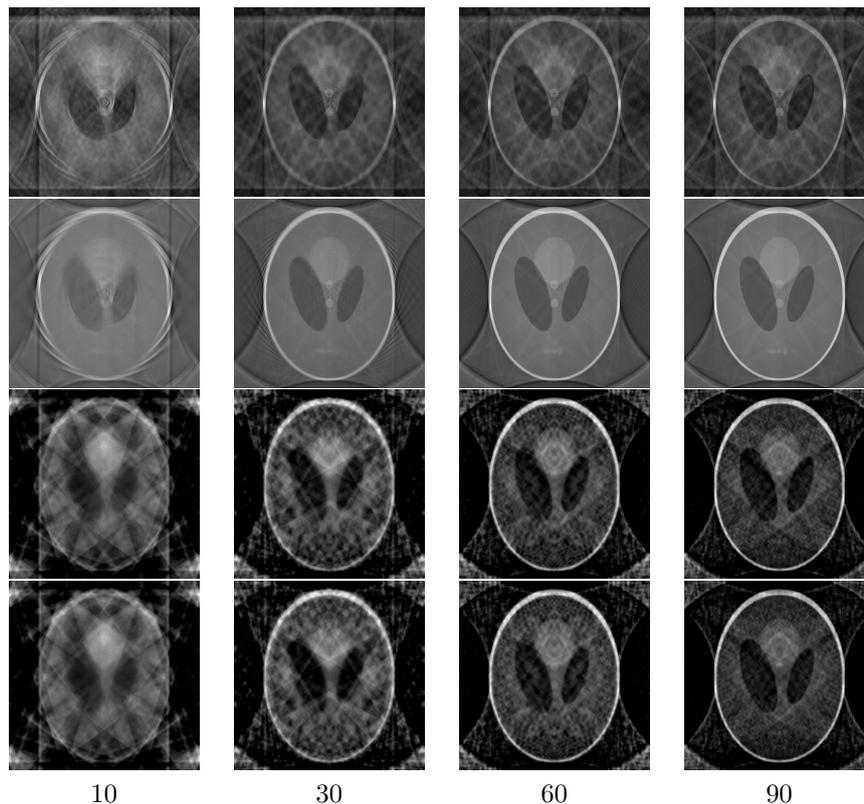


FIGURE 3.12: De haut en bas : Images reconstruites avec FR_{BiLin} , FR_{BiRA} , FR_{BaLin} , FR_{BaRA} . De gauche à droite, à partir d'une acquisition de 10, 30, 60 et 90 projections. Échantillonnage standard.

Analyse globale :

Le comportement global de la reconstruction de Fourier est indépendant de l'interpolation utilisée. En effet, on constate (comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.3) que la qualité de la reconstruction est fonction de N_θ et de l'échantillonnage. Lorsque N_θ est inférieur à 30 projections, nous observons des déformations des régions sur les images (c.f. images de figure 3.12 pour 10 projections). A partir de $N_\theta = 60$ on atteint une limite asymptotique. De même, lorsque $N_\rho < \max(W, H)$, le sous échantillonnage entraîne l'échec de la reconstruction. L'échantillonnage standard permet de reconstruire et on obtient de meilleurs résultats lorsqu'on est en sur-échantillonnage.

Les schémas (a) et (b) de la figure 3.13 comparent les SSIM des versions linéaire et radiale/angularaire de chaque interpolation. On ne remarque qu'une faible amélioration/détérioration

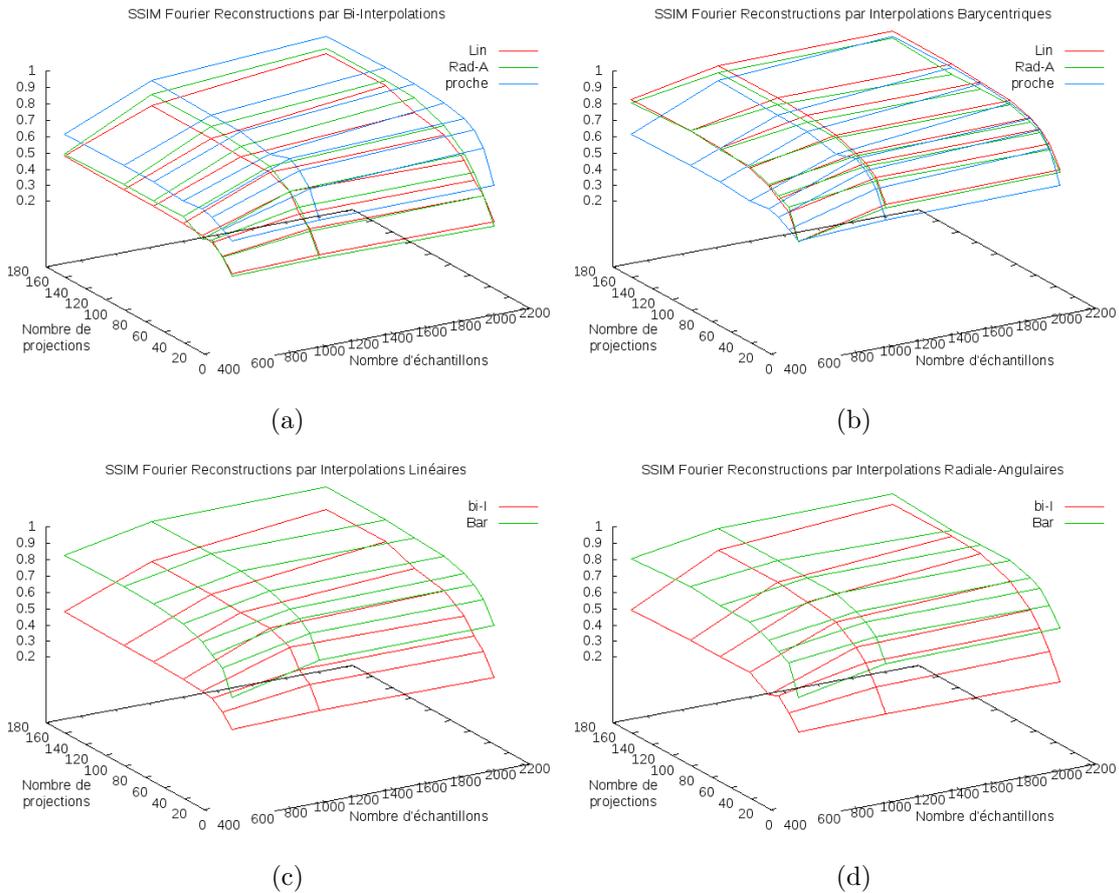


FIGURE 3.13: Comparaison des SSIM obtenus entre FR_{BiLin} et FR_{BiRA} (a), FR_{BaLin} et FR_{BaRA} (b), FR_{BiLin} et FR_{BaLin} (c), FR_{BiRA} et FR_{BaRA} (d) en fonction du nombre de projections et du nombre d'échantillons (taille d'image fixe).

	512	1024	2048
10	0.775	0.823	0.807
20	0.844	0.769	0.751
30	0.918	0.789	0.752
40	0.935	0.901	0.814
60	0.911	0.916	0.841
90	0.898	0.937	0.865
120	0.872	0.959	0.920
180	0.883	0.955	0.919

(a)

	512	1024	2048
10	0.642	0.644	0.644
20	0.659	0.696	0.710
30	0.711	0.749	0.750
40	0.655	0.769	0.795
60	0.701	0.819	0.860
90	0.708	0.827	0.899
120	0.716	0.843	0.906
180	0.707	0.841	0.901

(b)

	512	1024	2048
10	0.826	0.925	0.925
20	0.927	0.988	0.981
30	0.952	0.995	0.997
40	0.990	1.000	0.999
60	0.984	1.000	1.000
90	0.996	0.999	0.999
120	0.999	0.998	1.000
180	1.000	0.995	0.999

(c)

	512	1024	2048
10	0.831	0.934	0.909
20	0.934	0.985	0.983
30	0.951	0.996	1.000
40	0.987	1.000	1.000
60	0.982	1.000	1.000
90	0.999	0.994	0.991
120	0.999	0.992	0.985
180	0.997	0.988	0.989

(d)

TABLE 3.5: Évolution de la corrélation lumineuse pour FR_{BiLin} (a), FR_{BiRA} (b), FR_{BaLin} (c) et FR_{BaRA} (d) en fonction de N_θ et N_ρ pour une image de taille $N = 512^2$.

des résultats. Pour la bi-interpolation, la contribution radiale/angularaire donne un meilleur SSIM que l'interprétation linéaire. C'est l'inverse pour l'interpolation barycentrique. Toutefois, la différence de SSIM est dans chaque cas inférieure à 0.05 et n'est donc pas significative. L'usage d'une contribution linéaire ou radiale/angularaire n'a pas d'incidence sur la qualité de la reconstruction.

Le schéma (c) (resp. (d)) de la figure 3.13 compare le SSIM de la bi-interpolation et de l'interpolation barycentrique linéaire (resp. radiale/angularaire). On constate une amélioration de la qualité des résultats avec l'interpolation barycentrique. Cette amélioration est nettement visible lorsque le nombre de projections est faible. Les images obtenues par bi-interpolation à partir de 10 projections (figure 3.12) présentent des déformations, notamment sur le contour du crâne du

	512	1024	2048
10	0.786	0.654	0.652
20	0.695	0.732	0.737
30	0.727	0.764	0.787
40	0.710	0.782	0.832
60	0.718	0.826	0.900
90	0.711	0.835	0.911
120	0.706	0.841	0.931
180	0.707	0.843	0.931

(a)

	512	1024	2048
10	0.659	0.644	0.645
20	0.705	0.710	0.721
30	0.743	0.804	0.815
40	0.746	0.858	0.869
60	0.814	0.910	0.928
90	0.819	0.924	0.964
120	0.822	0.933	0.967
180	0.816	0.932	0.967

(b)

	512	1024	2048
10	0.997	0.963	0.967
20	0.982	0.951	0.959
30	0.979	0.960	0.954
40	0.948	0.947	0.962
60	0.971	0.965	0.973
90	0.959	0.974	0.976
120	0.954	0.976	0.984
180	0.936	0.974	0.984

(c)

	512	1024	2048
10	0.996	0.954	0.985
20	0.979	0.951	0.956
30	0.981	0.956	0.947
40	0.953	0.946	0.956
60	0.975	0.966	0.972
90	0.941	0.951	0.952
120	0.951	0.951	0.943
180	0.914	0.949	0.961

(d)

TABLE 3.6: Évolution de la corrélation en contraste pour FR_{BiLin} (a), FR_{BiRA} (b), FR_{BaLin} (c) et FR_{BaRA} (d) en fonction de N_θ et N_ρ pour une image de taille $N = 512^2$.

	512	1024	2048
10	0.529	0.603	0.631
20	0.661	0.796	0.824
30	0.703	0.845	0.873
40	0.716	0.867	0.898
60	0.731	0.884	0.915
90	0.737	0.893	0.923
120	0.739	0.894	0.925
180	0.739	0.893	0.923

(a)

	512	1024	2048
10	0.685	0.731	0.732
20	0.810	0.880	0.883
30	0.842	0.917	0.921
40	0.854	0.929	0.933
60	0.863	0.939	0.943
90	0.866	0.942	0.946
120	0.867	0.942	0.946
180	0.867	0.940	0.944

(b)

	512	1024	2048
10	0.572	0.707	0.724
20	0.713	0.813	0.823
30	0.749	0.860	0.873
40	0.791	0.892	0.899
60	0.824	0.921	0.927
90	0.848	0.937	0.940
120	0.855	0.943	0.945
180	0.859	0.945	0.945

(c)

	512	1024	2048
10	0.574	0.685	0.703
20	0.743	0.795	0.783
30	0.770	0.837	0.852
40	0.800	0.876	0.877
60	0.831	0.905	0.904
90	0.848	0.921	0.923
120	0.855	0.927	0.927
180	0.862	0.928	0.932

(d)

TABLE 3.7: Évolution de la corrélation géométrique pour FR_{BiLin} (a), FR_{BiRA} (b), FR_{BaLin} (c) et FR_{BaRA} (d) en fonction de N_θ et N_ρ pour une image de taille $N = 512^2$.

fantôme de Shepp-Logan. Ce type de déformation n'apparaît pas dans les images reconstruites par interpolation barycentrique, même si de nombreux artéfacts sont encore visibles.

Analyse détaillée des composantes du SSIM :

La décomposition des critères du SSIM est présentée sur les tableaux 3.5, 3.6 et 3.7. La corrélation lumineuse de FR_{BiRA} est globalement plus faible que celle de FR_{BiLin} (tableaux 3.5(a) et (b)). Inversement, la corrélation géométrique est mieux conservée avec la bi-interpolation radiale/angularaire. Comme le contraste est similaire pour les deux types d'interpolations, c'est la compensation des deux autres critères qui donne un SSIM globalement identique pour FR_{BiLin} , FR_{BiRA} . En observant la décomposition de la méthode barycentrique, on constate en revanche une évolution assez similaire des critères en fonction des paramètres. L'interpolation linéaire ou radiale/angularaire n'a donc quasiment pas d'influence particulière sur un ou plusieurs éléments du SSIM.

En comparant maintenant, critère par critère, en fonction du type (bi-interpolation ou barycentrique), on constate que le choix de l'interpolation influence fortement la conservation d'intensité. Ainsi, on gagne globalement +0.2 en luminosité avec l'interpolation barycentrique (qu'elle soit linéaire ou radiale/angularaire). Il en va de même pour le contraste, notamment à échantillonnage standard. En revanche, la différence de corrélation géométrique est moins prononcée, notamment en version radiale/angularaire. Toutefois, la très forte corrélation lumineuse et en contraste suffit à rendre l'interpolation barycentrique meilleure que la bi-interpolation.

Analyse de l'erreur causée par la bi-interpolation :

La bi-interpolation reconstruit chaque pixel du cercle d'intérêt. Cet espace de Fourier entièrement défini est présenté sur la figure 3.14(a). A l'inverse, la reconstruction barycentrique ne calcule que les pixels pour lesquels il y a de l'information. Un tel espace de Fourier est présenté sur la figure 3.14(b).

Nous souhaitons visualiser l'erreur causée par le traitement de tous les pixels dans la bi-interpolation. Nous calculons la différence entre les espaces fréquentiels obtenus par bi-interpolation et interpolation barycentrique. Puis, nous exécutons la transformée de Fourier inverse. Ce protocole est appliqué à partir d'une acquisition avec $N_\theta = 30$. L'image obtenue (figure 3.14(c), et zoom (d)) correspond à l'erreur générée par la bi-interpolation des pixels qui sont ignorés dans l'interpolation

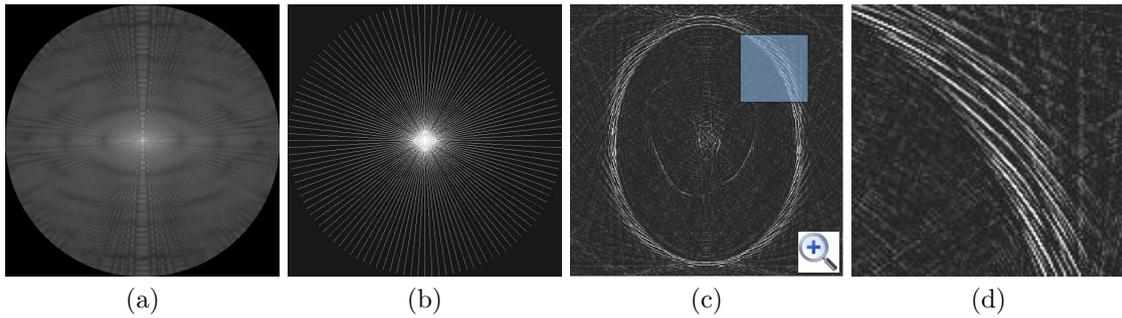


FIGURE 3.14: Espace fréquentiel entièrement interprété par la bi-interpolation (a), ou partiellement reconstruit par l'interpolation barycentrique (b). Image d'erreur obtenue par différence des espaces fréquentiels caractérisant les déformations provoquées par la bi-interpolation (c) et zoom (d).

barycentrique. Cette image d'erreur montre bien que la déformation du crâne du fantôme de Shepp-Logal est liée à une mauvaise interprétation des données dans l'espace fréquentiel. Cela confirme les résultats présentés sur les courbes (c) et (d) de la figure 3.13.

3.2.2.2 Etude de la PSF

Dans cette section, nous nous intéressons à la PSF des images obtenues pour chaque méthode d'interpolation. Dans un premier temps, nous regardons la PSF en fonction de la position dans l'image pour une acquisition de 180×512 et une image de taille $N = 512^2$. Les résultats sont présentés sur les courbes de la figure 3.15. Ensuite, nous observerons l'évolution de la PSF au centre en fonction de N_θ et $d\rho$ (figure 3.16).

La bi-interpolation agit (c.f. figure 3.15), aussi bien dans la version linéaire que radiale/angularaire, comme l'interpolation au plus proche : le gain est très fort au centre, mais n'est pas uniforme sur l'image. Un post-traitement pour améliorer la netteté de l'image est alors difficile à mettre en oeuvre. L'interpolation barycentrique donne un résultat différent. Le gain maximal est plus faible, mais il est quasi-constant sur toute l'image (post-traitement envisageable).

Les courbes (a) et (b) de la figure 3.16 présentent respectivement l'évolution du gain de la PSF de la bi-interpolation et de l'interpolation barycentrique en fonction du nombre de projections et d'échantillons. On remarque une fois de plus qu'il n'y a quasiment pas de différence entre les versions linéaire et radiale/angularaire. Avec la bi-interpolation, on constate une amélioration de la PSF au centre en fonction de $d\rho$, mais une invariance avec N_θ . En revanche, comme on peut le remarquer sur la courbe (b), la PSF obtenue par l'interpolation barycentrique augmente aussi avec N_θ .

3.2.2.3 Etude de la résistance aux bruits

Nous étudions maintenant la résistance aux bruits des différentes reconstructions de Fourier, d'abord en fonction de N_θ et $d\rho$, puis en fonction du bruit appliqué. Seules les reconstructions FR_{BiRA} et FR_{BaLin} sont étudiées. Les courbes (a) et (b) de la figure 3.17 montrent respectivement le SNR de FR_{BiRA} et FR_{BaLin} en fonction de N_θ et N_ρ . Le SNR augmente légèrement lorsque $d\rho$ augmente, mais il diminue surtout fortement lorsqu'on rajoute des projections bruitées.

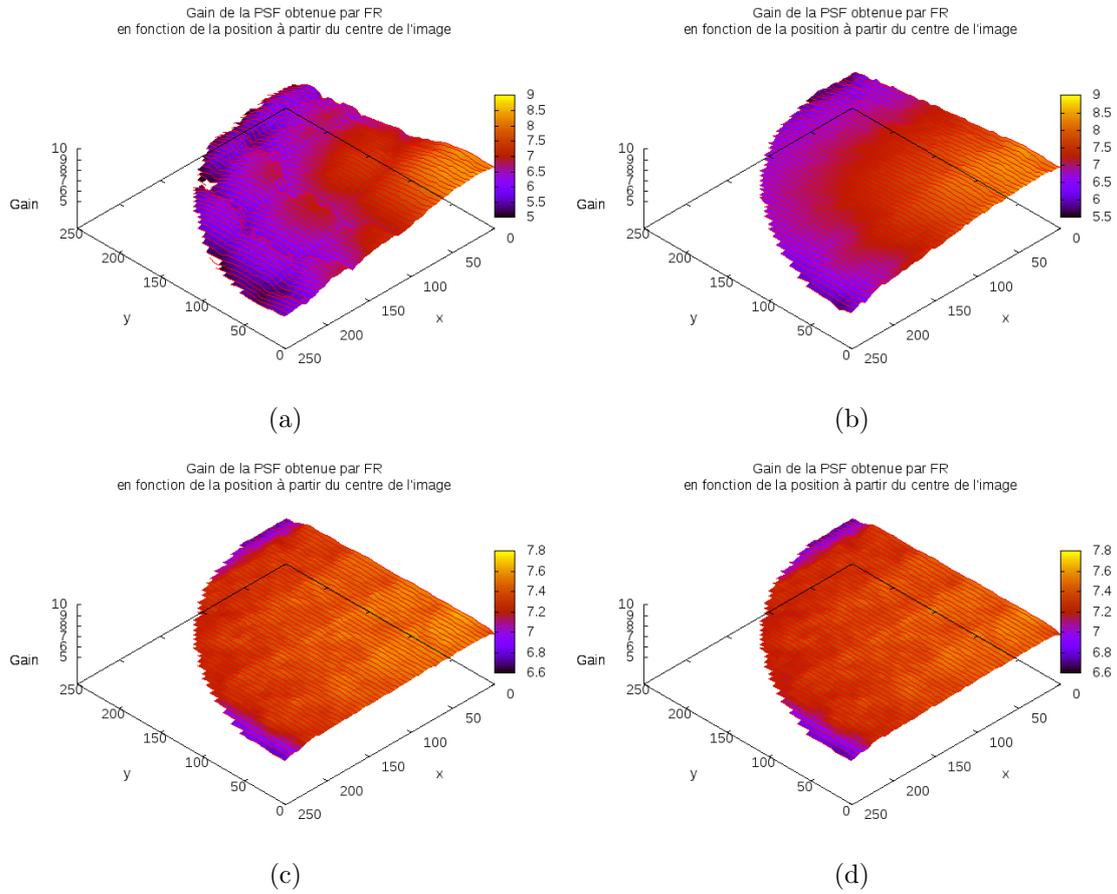


FIGURE 3.15: Comparaison des PSF obtenues par les différentes méthodes de Fourier en fonction de la position dans l'image. Bi-interpolation linéaire (a) et radiale/angulaire (b). Interpolation barycentrique linéaire (a) et radiale/angulaire (b).

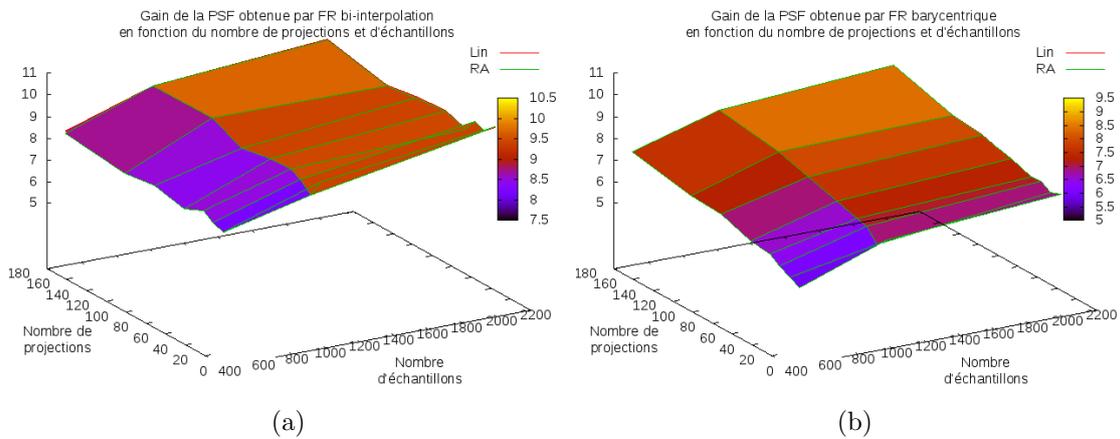


FIGURE 3.16: Comparaison des PSF obtenues par les différentes méthodes de Fourier en fonction du nombre de projections et d'échantillons (image reconstruite de taille 512^2).

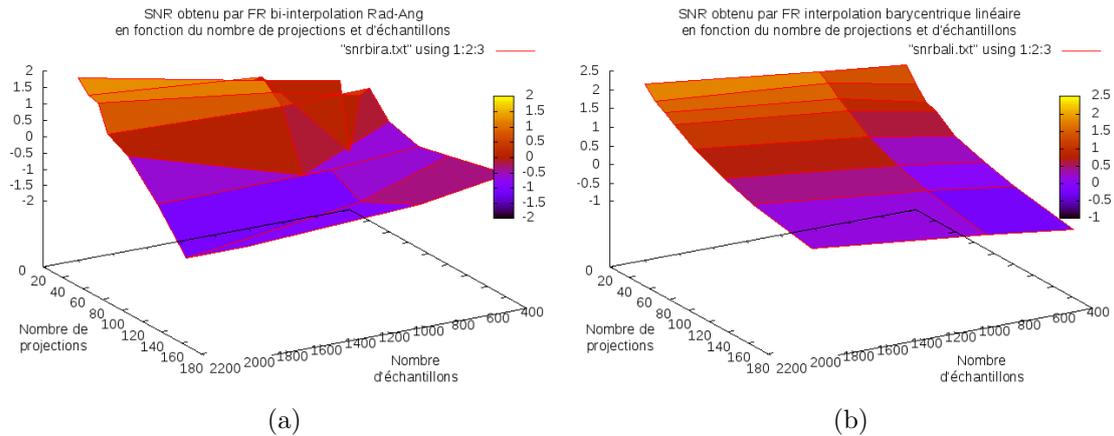


FIGURE 3.17: SNR obtenues par FR_{BiRA} (a) et FR_{BaLin} (b) en fonction du nombre de projections et d'échantillons (image reconstruite de taille 512^2), pour un bruit impulsionnel d'amplitude 10% appliqué au sinogramme.

Le schéma de la figure 3.18 montre l'évolution du SNR en fonction du bruit appliqué sur le sinogramme. Même s'il est légèrement meilleur à celui de l'interpolation au plus proche, le SNR diminue très rapidement lorsque le bruit augmente (quelle que soit l'interpolation).

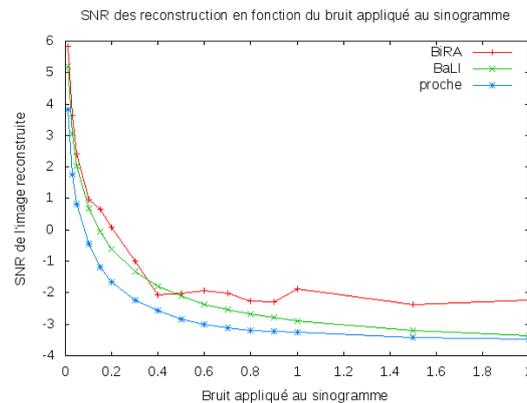


FIGURE 3.18: SNR obtenu par FR_{BiRA} (a) et FR_{BaLin} (b) en fonction du bruit appliqué sur le sinogramme.

3.2.3 Bilan sur les reconstructions de Fourier

L'étude des différentes interpolations a montré qu'il vaut mieux ne pas approximer et laisser à zéro l'information manquante (interpolation barycentrique) plutôt que de remplir l'espace de Fourier avec des valeurs trop imprécises (bi-interpolation). En particulier lorsque N_θ est faible, nous avons constaté que cela nuit à la corrélation géométrique. D'autre part, contrairement à l'interpolation barycentrique, la bi-interpolation ne fournit pas de PSF homogène sur l'image. Malgré des interpolations différentes, la reconstruction échoue toujours en sous-échantillonnage et l'image n'est plus artéfactée qu'en sur-échantillonnage. Enfin, plus N_θ augmente, plus le bruit sur les projections détériore le SNR.

L'implémentation accessible et la complexité en $\mathcal{O}(N \log N)$ sont les principaux atouts des méthodes de Fourier. Nous proposons d'ailleurs en annexe A une implémentation sur carte graphique de la méthode FR par bi-interpolation linéaire. En dehors des interpolations étudiées, il existe des interpolations de grilles plus complexes, telles que l'interpolation bicubique ou la contribution gaussienne [80, 7]. La première s'appuie toujours sur un voisinage local et nous savons que cela peut conduire à des aberrations lorsque le nombre de projections est faible. Une version barycentrique est envisageable, mais il est peu probable d'avoir le nombre suffisant de points polaires par pixel. Une distribution gaussienne peut à la fois atténuer les points extérieurs au pixel et lisser la contribution. Mais la difficulté réside alors dans son paramétrage.

Lors de la reconstruction, ces méthodes exploitent la transformée de Fourier rapide qui utilise le même nombre de pixels, à la même position (cartésienne) dans les domaines spatial et fréquentiel. D'où la nécessité d'interpoler entre les deux grilles. En utilisant la transformée de Fourier avec des coordonnées réelles, on s'affranchit de l'étape d'interpolation : la grille polaire est directement utilisée dans la transformée de Fourier inverse [5, 23, 6]. Dans ce cas, l'implémentation ne peut être optimisée. La complexité de l'algorithme devient $\mathcal{O}(N^2)$.

Pour répondre à ce problème de complexité, la transformée de Fourier pseudo-polaire a été développée [50, 5, 71]. Elle se note communément NFFT (de l'anglais *Non-Equispaced Fast Fourier transform*) et est basée sur des espaces qui ne contiennent pas de données équidistantes. Les données de la grille polaire obtenue à partir des projections sont mappées dans une grille pseudo-polaire appelée *linogramme* dont la configuration minimise les interpolations. Une transformée de Fourier destinée à ce genre de grille est appliquée pour retrouver l'image. La complexité des algorithmes basés sur la NFFT redevient $\mathcal{O}(N \log N)$. Mais des limitations liées à l'interpolation réapparaissent. On comprend donc que la conception d'une interpolation efficace a toujours été le problème majeur des reconstructions de Fourier. Pour cette raison, ce type de méthode reste peu employé dans les applications tomographiques. Notons toutefois que la grille cartésienne ou pseudo-polaire peut être acquise directement par certaines modalités comme l'IRM ; d'où l'usage plus répandu des reconstructions de Fourier en imagerie par résonance magnétique [14].

3.3 Rétroprojection des projections filtrées

La rétroprojection des projections filtrées [94], notée BFP (de l'anglais *Backprojection of Filtered Projections*), est l'une des plus populaires reconstructions utilisées en tomographie. Il s'agit d'une inversion basée sur la transformée de Radon qui effectue un pré-filtrage passe-haut dans l'espace de Fourier avant la reconstruction. Ce processus compense alors le filtrage passe-bas induit par la transformée inverse de Radon. Habituellement, il correspond à un filtre rampe qui entraîne un rehaussement des contours sur les projections. La projection filtrée, notée $\mathcal{R}_\theta^{BFP}(\rho)$, est donnée par la formule suivante :

$$\mathcal{R}_\theta^{BFP}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\nu| \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_\theta(\rho_s) e^{-i2\pi\rho_s\nu} d\rho_s \right) e^{i2\pi\rho\nu} d\nu. \quad (3.35)$$

La valeur entre parenthèse correspond à la transformée de Fourier 1D de la projection. Chaque point de l'espace de Fourier est multiplié par le filtre rampe $|\nu|$. La valeur de $|\nu|$ est proportionnelle à la distance entre le centre de la projection et la position ρ . Ce processus est résumé sur la figure 3.19.

3.3.1 Lien entre la BFP et le Théorème de la tranche centrale

Comme nous allons le voir maintenant, la BFP est issue de l'expression de la transformée de Radon en fréquentiel, c'est-à-dire du théorème de la tranche centrale. Soit la transformée de

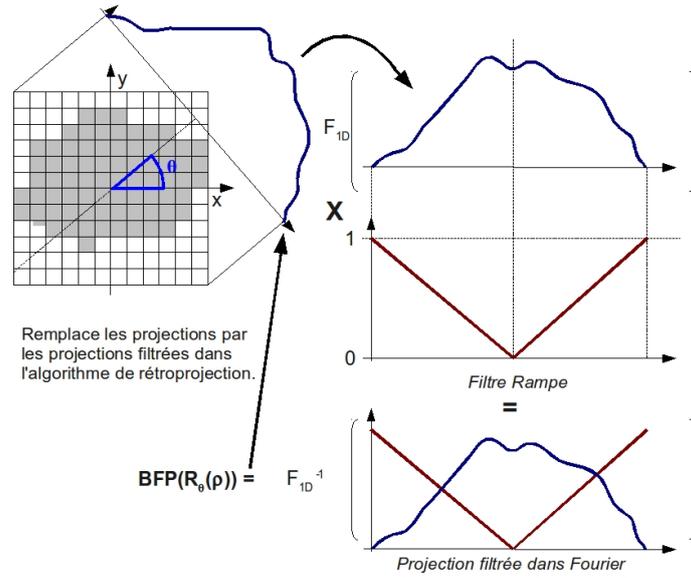


FIGURE 3.19: La rétroprojection des projections filtrées (BFP) calcule la transformée de Fourier 1D de chaque projection (en bleu). Ce domaine est multiplié par le filtre rampe (en rouge) et la transformée de Fourier inverse est appliquée. La rétroprojection avec la transformée inverse de Radon est ensuite effectuée à partir des projections filtrées.

Fourier 2D dont on rappelle la formule (équation (3.36)) et la transformée inverse donnée par l'équation (3.37).

$$\mathcal{F}(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2i\pi(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.36)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k_x, k_y) e^{2i\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (3.37)$$

Soient les coordonnées polaires $x = \nu \cos \theta$ et $y = \nu \sin \theta$. L'équation (3.37) devient :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nu \mathcal{F}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) e^{2i\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \mathcal{F}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) e^{2i\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nu| \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{\theta}(\rho_s) e^{-2i\pi\nu\rho_s} \right] \times e^{2i\pi\nu(x \cos \theta + y \sin \theta)} d\nu \right) d\theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

La valeur $\mathcal{F}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta)$ considère uniquement les droites sur la projection θ et correspond donc à la transformée de Fourier 1D de \mathcal{R}_{θ} . Ce résultat provient du théorème de la tranche centrale vu à la section 1.1.3 [94, 85]. L'expression entre parenthèses est équivalente à l'équation de la BFP (formule (3.35)) en remplaçant $x \cos \theta + y \sin \theta$ par le module ρ correspondant. C'est ainsi qu'on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^{\pi} \mathcal{R}_{\theta}^{BFP}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_{\theta}^{BFP}(\rho) \delta(\rho - x \cos \theta - y \sin \theta) d\rho d\theta \end{aligned} \quad (3.39)$$

Cette formule définit la transformée inverse de Radon (équivalente à la formule (1.2)) pour des projections filtrées.

3.3.2 Filtre Rampe et Optimisations

Le filtre rampe utilisé dans la BFP amplifie les hautes fréquences, c'est-à-dire les détails de l'image. L'échantillonnage limite l'accès aux hautes fréquences à la fréquence de Nyquist. La fréquence de Nyquist dépend du pas d'échantillonnage $d\rho$ utilisé sur la projection. Il est donné par la formule suivante :

$$\nu_{Nyquist} = \frac{1}{2d\rho} \quad (3.40)$$

Par conséquent, le filtre rampe peut être tronqué aux fréquences entre $-\nu_{Nyquist}$ et $\nu_{Nyquist}$. On obtient alors le filtre Ram-Lak, dont l'appellation provient du nom de ses deux inventeurs : Ramachandran et Lakshiminarayanan.

De plus, les très hautes fréquences sont en général sources de bruits. Les fenêtres de Hann ou de Hamming sont alors multipliées au filtre utilisé pour atténuer les artefacts induits par ces fréquences. Ces fenêtres augmentent en effet les hautes fréquences (les détails) mais diminuent aussi les très hautes fréquences, c'est-à-dire le bruit. Elles sont données par l'équation (3.41) suivante. La fenêtre de Hamming est obtenue pour $a = 0.54$. La fenêtre de Hann utilise $a = 0.5$.

$$H(\nu) = \begin{cases} a + (1 - a) \cos \frac{\pi\nu}{\nu_{Nyquist}} & \text{si } |\nu| < \nu_{Nyquist} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.41)$$

La courbe (a) sur le schéma 3.20 représente le filtre rampe. Les courbes (b) correspondent aux fenêtres de Hann (en vert) et de Hamming (en rouge). Le filtrage obtenu en combinant les filtres utilisés avec l'une de ses fenêtres H est donné sur la courbe (c).

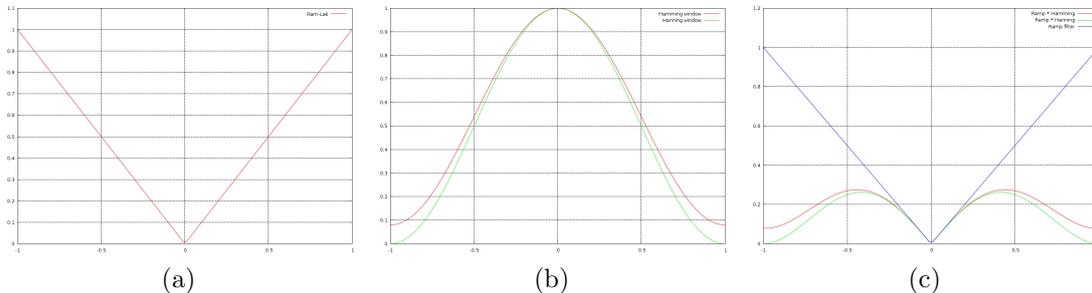


FIGURE 3.20: (a) Exemple du filtre rampe. (b) Fenêtres de Hann et de Hamming. (c) Multiplication du filtre rampe avec les fenêtres H .

D'autres fenêtres, non exposées ici, peuvent être utilisées. Par exemple, la fenêtre de Shepp-Logan multiplie le filtre par la fonction sinus cardinal [85]. La fonction cosinus est elle aussi exploitée en tant que fenêtre. Enfin, le terme « Hanning » est parfois utilisé pour faire référence à la fenêtre de Hann par analogie à la fenêtre de Hamming. Cette désignation est bien sûr incorrecte car ces deux fenêtres sont nommées d'après les noms de leurs inventeurs respectifs, Julius von Hann et Richard Hamming.

3.3.3 Algorithme de BFP

La reconstruction BFP applique le filtre rampe $|\nu|$ (ou le filtre de Ram-Lak) et éventuellement une fenêtre $H(\nu)$ sur chaque projection pour rehausser les détails. La rétroprojection est ensuite appliquée sur les projections filtrées. Ce processus est résumé par l'algorithme suivant :

Algorithme 2 : Algorithme BFP

Entrées: $R \wedge W \wedge H \wedge N_\theta \wedge N_\rho$
pour tout \mathcal{R}_θ **faire**
 $f\mathcal{R}_\theta \leftarrow \mathcal{F}_{1D}(\mathcal{R}_\theta)$
 pour tout ν **faire**
 $f\mathcal{R}_\theta(\nu) \leftarrow f\mathcal{R}_\theta(\nu) \times |\nu|H(\nu)$
 fin pour
 $\mathcal{R}_\theta^{BFP} \leftarrow \mathcal{F}_{1D}^{-1}(f\mathcal{R}_\theta)$
fin pour
 $I \leftarrow R^{-1}(\{\mathcal{R}_\theta^{BFP}\})$
retourner I

3.3.4 Qualité et précision de la reconstruction BFP

Nous détaillons dans cette section la précision et la qualité de la reconstruction BFP. Dans un premier temps, nous nous concentrerons sur les variations de SSIM en fonction du nombre de projections et du taux d'échantillonnage. Nous verrons si le choix du noyau de pixel et du type de filtre a une influence sur le SSIM. De manière similaire, nous étudierons les variations de la PSF.

3.3.4.1 SSIM en fonction de N_θ , $d\rho$ et du noyau de pixel utilisé

Dans un premier temps, nous regardons si les différents noyaux de pixels ont une influence sur les résultats. Nous comparons donc les SSIM en fonction des noyaux, du nombre de projections et du pas d'échantillonnage. Pour cette étude, nous utilisons le filtre de Hann. Les SSIM obtenus sont présentés sur les courbes de la figure 3.21.

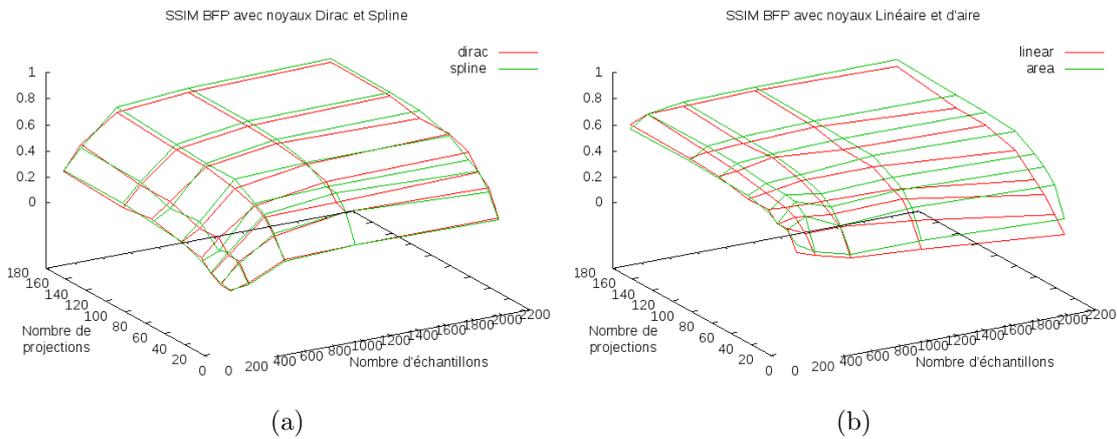


FIGURE 3.21: Comparaison des SSIM obtenus avec les noyaux de Dirac et Spline (a), linéaire et d'aire (b) en fonction du nombre de projections et de l'échantillonnage.

Contrairement à R^{-1} , on obtient des SSIM supérieurs à 0.8 dans la plupart des cas. Le pré-filtrage des projections permet donc de conserver les détails dans l'image. Afin d'observer quels éléments du SSIM sont favorisés par cette reconstruction, nous détaillons dans le tableau 3.8 l'évolution des critères en fonction des paramètres. Étant donnée la forte similitude observée entre les différents noyaux de pixels, nous ne conservons que les résultats obtenus avec le noyau d'aire (qui fournit les meilleurs résultats).

	128	256	512	1024	2048		128	256	512	1024	2048		128	256	512	1024	2048
10	0.835	0.748	0.610	0.599	0.581	10	0.858	0.798	0.692	0.680	0.668	10	0.549	0.562	0.529	0.540	0.531
20	0.879	0.851	0.783	0.770	0.758	20	0.884	0.868	0.817	0.803	0.793	20	0.761	0.797	0.769	0.793	0.788
30	0.898	0.881	0.826	0.822	0.794	30	0.922	0.914	0.867	0.863	0.837	30	0.825	0.880	0.871	0.892	0.888
40	0.909	0.880	0.868	0.876	0.844	40	0.944	0.930	0.920	0.927	0.900	40	0.847	0.906	0.915	0.935	0.935
60	0.908	0.908	0.857	0.910	0.890	60	0.950	0.964	0.929	0.967	0.953	60	0.852	0.922	0.943	0.960	0.962
90	0.911	0.912	0.909	0.930	0.925	90	0.954	0.968	0.971	0.983	0.981	90	0.854	0.925	0.953	0.968	0.971
120	0.918	0.916	0.916	0.935	0.934	120	0.958	0.971	0.977	0.987	0.987	120	0.854	0.925	0.955	0.970	0.973
180	0.911	0.915	0.923	0.939	0.941	180	0.953	0.970	0.981	0.989	0.990	180	0.855	0.925	0.956	0.970	0.974

TABLE 3.8: Évolution de la corrélation en luminosité (a), en contraste (b) et géométrique (c) de la BFP avec noyau d'aire et filtre de Ram-Lak + Hann.

Si l'on observe globalement l'évolution du SSIM sur les courbes de la figure 3.21, on constate qu'il augmente en fonction de $d\rho > 1$ et devient constant lorsque $d\rho \leq 1$. Le SSIM augmente aussi en fonction de $N_\theta < 40$ et devient constant ensuite. L'amélioration du SSIM lorsque $d\rho$ diminue est surtout visible pour les noyaux Dirac et B-Spline, qui ne fournissent des résultats convenables qu'à partir de l'échantillonnage standard. Ce comportement est similaire à celui des méthodes de Fourier.

Avec les noyaux linéaire et d'aire, l'évolution est différente. Le SSIM est quasiment uniforme en fonction de $d\rho$ (comme avec l'inversion de Radon). Contrairement à la rétroprojection, le choix du noyau de pixel a donc une influence sur les résultats : on constate une différence d'environ 0.1 entre le noyau Dirac et le noyau d'aire, là où la différence n'était que de 0.02 avec R^{-1} .

Observons maintenant l'évolution détaillée des éléments du SSIM. La corrélation géométrique est, dans le pire des cas, constante en $d\rho$ (pour $N_\theta = 10$). Sinon elle augmente quand $d\rho$ diminue. De plus, elle augmente en N_θ , pour tout $d\rho$. Le comportement de la corrélation géométrique correspond donc à l'évolution à laquelle on s'attend.

L'évolution du contraste et de la luminosité est plus complexe. Lorsque $N_\theta < 40$, la BFP perd en contraste et luminosité lorsque N_ρ augmente. Ce comportement est lié à un déséquilibre entre la résolution angulaire (faible) et la résolution radiale importante. Cette dernière affine trop les détails sur les projections alors que N_θ n'est pas suffisant pour couvrir toute l'image (compte tenue sa taille). Les images de la figure 3.22 montrent les reconstructions BFP lorsque $N_\theta = 10$. Elles perdent effectivement complètement le contraste et la luminosité comparées à R^{-1} et cette perte globale est d'autant plus forte qu'on affine les détails sur les projections en augmentant N_ρ . Toutefois, dès que le nombre de projections est suffisant pour couvrir une image de taille donnée (ici $N_\theta > 40$ pour $N = 512^2$), la tendance s'inverse. Il y a suffisamment de couverture angulaire pour profiter de la résolution radiale. La qualité augmente alors à la fois avec N_θ et N_ρ .

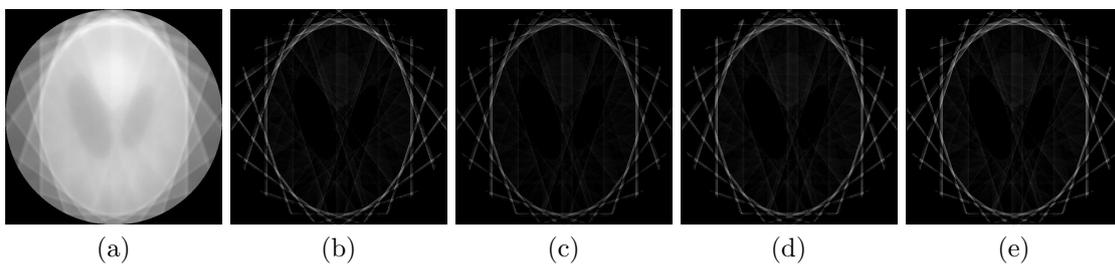


FIGURE 3.22: Comparaison de la reconstruction avec 10 projections par rétroprojection (a) avec BFP Dirac(b), Spline (c), linéaire (d) et d'aire (e).

3.3.4.2 SSIM en fonction de N_θ , $d\rho$ et de la fenêtre utilisée

Nous recommençons le processus précédent. Nous regardons l'évolution du SSIM en fonction de N_θ , $d\rho$ et du filtre utilisé. Les trois filtres comparés sont les filtres de Ram-Lak, Ram-Lak +

Hann et Ram-Lak + Hamming. Les SSIM sont présentés sur la figure 3.23.

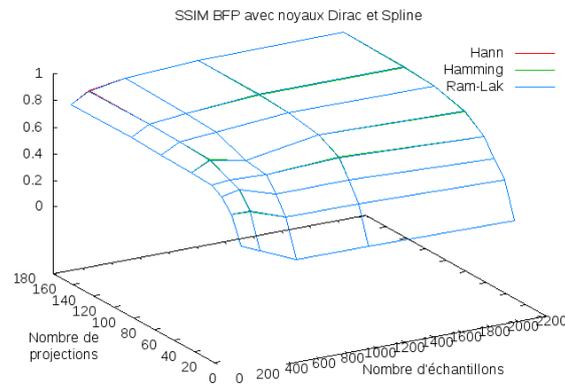


FIGURE 3.23: SSIM en fonction du filtre utilisé, de N_θ et $d\rho$.

Les trois filtres donnent un SSIM équivalent pour tout N_θ et $d\rho$. La différence entre ces filtres étant leur action sur les très hautes fréquences (c'est à dire le bruit), nous ne verrons leur efficacité et leur influence qu'à l'étude du SNR (voir section 3.3.5).

3.3.4.3 PSF en fonction de la position dans l'image

Nous étudions maintenant la variation de la PSF par rapport à la position dans l'image. Étant donné que le SSIM est quasiment similaire quel que soit le noyau de pixel utilisé pour une acquisition 180×512 , nous n'observons la PSF que pour le noyau d'aire. De même, le filtre appliqué n'ayant pas d'influence lorsqu'on travaille avec une image non bruitée, nous pré-filtrons les projections avec le filtre Hann. La PSF en fonction de la position dans l'image est présentée sur la figure 3.24. On observe un gain d'environ 8.5, quasiment invariant selon la position. La BFP permet donc d'obtenir un gain de PSF très performant, supérieur au maximum observé sur les reconstructions de Fourier.

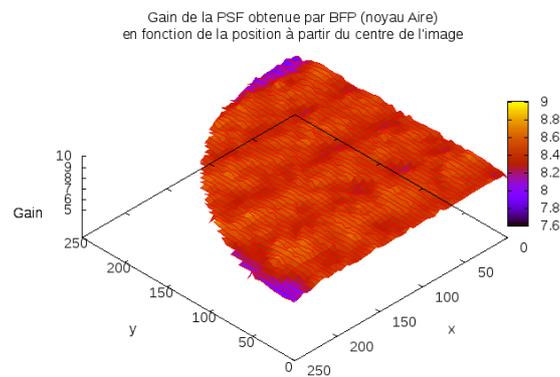


FIGURE 3.24: PSF obtenue par la BFP avec le noyau d'aire et le filtre de Hann en fonction de la position dans l'image.

3.3.5 Résistance aux bruits de la reconstruction BFP

L'étude du SNR en fonction des paramètres a été présentée au chapitre 2 pour la rétroprojection. Toutefois, comme l'évolution du SSIM est différente suite aux pré-traitements effectués sur le sinogramme, on s'attend à un comportement différent du SNR en fonction des paramètres.

De plus, l'étape de pré-filtrage consiste à augmenter les hautes fréquences. Or, le bruit dans un sinogramme est principalement caractérisé par des hautes fréquences. Une deuxième phase de l'étude consistera donc à déterminer les filtres qui permettent d'extraire correctement les détails sans subir le bruit. Comme les filtres de Hann et de Hamming suppriment les très hautes fréquences, ils devraient obtenir de meilleurs résultats que le filtre Ram-Lak.

Enfin, après avoir déterminé la configuration fournissant le meilleur SNR en fonction des paramètres et du filtre choisi, nous l'utiliserons pour étudier l'évolution du SNR sur les images reconstruites en fonction du bruit appliqué au sinogramme.

3.3.5.1 SNR en fonction de N_θ , $d\rho$ et du filtre sur les projections

Le SNR de la BFP en fonction de N_θ , $d\rho$ et du filtre sur les projections est présenté sur la figure 3.25. Nous pouvons constater que le filtre utilisé n'a en réalité aucune influence sur le SNR ; même les filtres de Hann et de Hamming, supposés réduire l'importance des très hautes fréquences, n'isolent pas en réalité le bruit du signal, et obtiennent des résultats similaires au filtre Ram-Lak. On peut en effet remarquer que les images de la figure 3.26 sont quasiment identiques quel que soit le filtre appliqué.

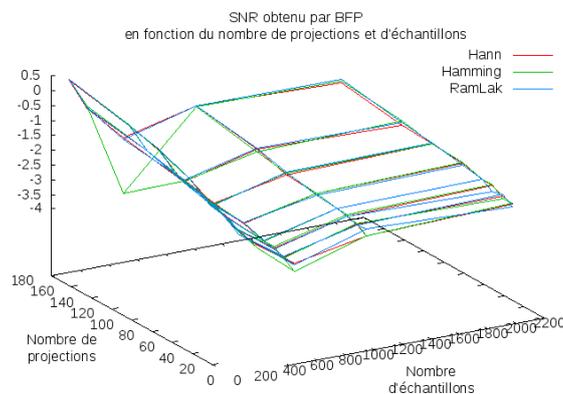


FIGURE 3.25: SNR de la BFP en fonction de N_θ , $d\rho$ et du filtre sur les projections.

Ensuite, on constate que le SNR augmente lorsque le nombre de projections augmente. Ce résultat est directement induit par la rétroprojection. Plus il y a de projections, plus l'inversion peut atténuer l'erreur causée par le bruit sur une projection grâce à l'information contenue dans les autres projections. Si l'on regarde l'évolution en fonction de $d\rho$, on constate une diminution du SNR lorsque le nombre d'échantillons augmente. Lorsqu'on est en sous échantillonnage, le SNR est maximal. L'utilisation du noyau d'aire permet d'étaler le bruit d'une valeur de projection sur plusieurs pixels. Cet étalement est lié à celui observé pour la rétroprojection en sous échantillonnage. Le fait que l'image soit moins nette explique que le SNR soit meilleur. Il n'en demeure pas moins que l'image est difficilement exploitable, comme nous en avons convenu section 2.3.2. En échantillonnage standard, le SNR est au plus bas, et dès que l'on passe en sur-échantillonnage, il augmente à nouveau vers une limite asymptotique.

La variation du SNR de la BFP en fonction de N_θ et $d\rho$ est donc globalement comparable à celui des reconstructions de Fourier : il augmente quand N_θ augmente et/ou $d\rho$ diminue. Par conséquent, bien que cette méthode soit basée sur l'inversion de Radon (dont le SNR est invariant en N_θ) le pré-filtrage dans l'espace fréquentiel donne à la BFP des propriétés des reconstructions de Fourier.

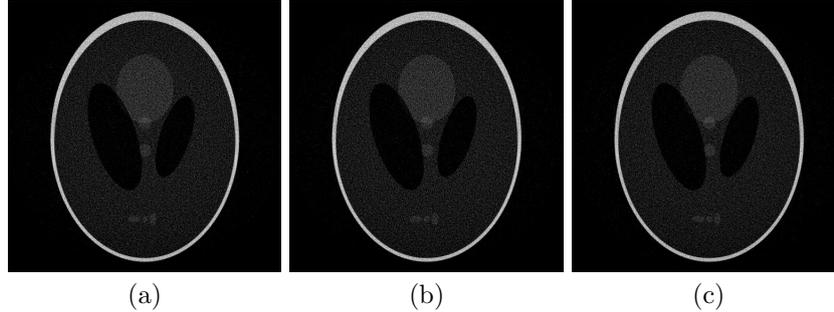


FIGURE 3.26: Comparaison des résultats de la BFP (image 512^2 , acquisition 180×512 bruitée) utilisant le filtre de Hann (a), Hamming (b) et Ram-Lak (c).

3.3.5.2 SNR en fonction du bruit sur les projections

Le SNR de la BFP en fonction du bruit sur les projections est présenté sur la figure 3.27. Les résultats obtenus sont inférieurs et ont le même comportement que ceux des méthodes de Fourier : le SNR décroît très rapidement lorsque le bruit augmente sur les projections.

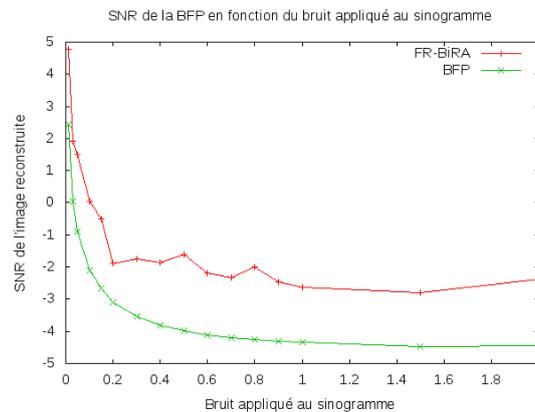


FIGURE 3.27: SNR de la BFP en fonction du bruit sur les projections. Comparaison avec le SNR obtenu par la reconstruction de Fourier avec bi-interpolation radiale angulaire.

3.3.6 Bilan sur la BFP

La reconstruction BFP est une reconstruction standard, à la croisée de la rétroprojection et des méthodes de Fourier. Ses propriétés sont donc communes à ces deux types d'inversion. Tout particulièrement, elle propose une excellente conservation du contraste et une très bonne homogénéité de la PSF sur l'image ; comme la reconstruction de Radon. De plus, les conservations d'intensité et géométrique, ainsi qu'une PSF élevée, sont des propriétés directement issues du filtrage dans Fourier. On notera toutefois que ce filtrage induit une perte du SNR. La BFP est donc moins robuste aux bruits que les méthodes de Fourier. Des optimisations consistant à utiliser des fenêtres pour réduire le bruit existant, mais les améliorations observées ne sont pas significatives. Enfin, l'usage d'un noyau particulier dans l'inversion améliore les résultats de manière peu remarquable.

Par ailleurs, notons que la BFP est compétitive en temps par rapport aux méthodes de Fourier car sa complexité est en $O(N \log(N))$. De plus, comme les données reconstruites sont indépendantes, cette méthode admet une parallélisation efficace, dont une version sur carte graphique est présentée en annexe A.

3.4 Conclusion sur la précision et la qualité des méthodes directes

Dans ce chapitre, nous avons abordé les principales optimisations des méthodes directes, c'est-à-dire des méthodes adaptées du théorème de Radon ou du théorème de la tranche centrale.

Dans un premier temps, nous avons étudié les différentes façons de considérer une droite de projection dans un pixel en abordant plusieurs noyaux de pixels. Du noyau de Dirac, le plus conventionnel, au noyau d'aire (le plus optimisé), nous avons tenté de minimiser les approximations liées à la discrétisation des traitements dans le domaine spatial. Ces optimisations n'ont pas mené à des améliorations significatives des résultats. De manière similaire, nous avons abordé le problème d'interpolation dans le domaine fréquentiel. Si les différentes méthodes se distinguent peu en qualité, nous avons toutefois mis en évidence qu'il vaut mieux ne pas reconstruire l'information fréquentielle en l'absence de données, que de reconstruire des valeurs approximatives.

Enfin, nous avons étudié la qualité et la précision de la BFP, l'une des méthodes les plus utilisées en tomographie. Cette dernière est apparue comme un bon compromis entre l'inversion de Radon et le théorème de la tranche centrale. En effet, sa qualité est comparable à celle d'une reconstruction de Fourier, sa précision est uniforme et élevée. En revanche, sa robustesse aux bruits d'acquisition n'est pas aussi forte que celle de l'inversion classique, et ce, malgré les optimisations utilisant les fenêtres de Hann ou Hamming.

Chapitre 4

Reconstructions itératives

Comme les méthodes directes reconstruisent chaque pixel en tenant compte des projections de manière indépendante, elles montrent une limite en qualité et en précision. Ces limites, principalement liées à la discrétisation et à la transmission des erreurs dans le sinogramme, ont été mises en évidence dans le chapitre précédent. Nous concentrons maintenant notre étude sur les méthodes itératives. Elles permettent de corriger l'erreur induite par une ou un ensemble de projections en fonction de l'image en cours de reconstruction et des données présentes sur les autres projections.

Dans un premier temps, nous aborderons les méthodes algébriques, basées sur la résolution itérative d'un système d'équations linéaires. Puis nous détaillerons les méthodes basées sur un processus probabiliste. Une étude qualité et précision sera fournie en parallèle pour montrer l'efficacité de ces méthodes en comparaison des méthodes directes vues au chapitre précédent.

4.1 Méthodes algébriques

Les méthodes algébriques sont des méthodes itératives introduites dans les années 1970 par Gordon *et al.* [29, 28] avec la reconstruction ART (*Algebraic Reconstruction Technique*). Basée sur le théorème de Kaczmarz, cet algorithme itératif approche la solution d'un système d'équation linéaire grâce aux mises à jour des valeurs de chaque pixel. La correction des pixels s'effectue en fonction de l'erreur mesurée entre le sinogramme initial et celui recalculé à partir de l'image obtenue à l'itération précédente.

Certaines optimisations de ART, telle que MART (*Multiplicative ART*) et AART (*Adaptive ART*) ont par la suite été développées. Comme ces méthodes utilisent séquentiellement les différentes projections, l'ordre dans lequel les sélectionner peut avoir une influence sur le résultat. Nous verrons donc différents schémas d'accès permettant d'améliorer la qualité de la reconstruction.

Enfin, nous étudierons les méthodes de reconstruction globale SIRT (*Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*) et semi-globale SART (*Simultaneous ART*). SIRT est une reconstruction algébrique où chaque mise à jour tient compte de toutes les droites de projections. La seconde est un compromis entre ART et SIRT. Elle met à jour l'image projection par projection, l'ordre des projections étant donné par un schéma d'accès.

4.1.1 De l'algorithme de Kaczmarz à...

En géométrie discrète, la valeur d'une droite de projection $R_\theta(\rho)$ est une combinaison linéaire de valeurs de pixels (i, j) pondérées par un noyau de pixel pk . Elle est donc définie par la formule

suivante :

$$R_\theta(\rho) = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} pk(\theta, \rho, i, j) I(i, j) \quad (4.42)$$

Soient le sinogramme R représenté comme un vecteur de taille $N_\theta \times N_\rho$ et l'image à reconstruire I définie par un vecteur de taille $W \times H$. Soit la matrice de projections \mathcal{A} de $N_\theta \times N_\rho$ lignes et $W \times H$ colonnes incluant tous les coefficients $pk(\theta, \rho, i, j)$. Le système d'équations linéaires suivant donne toutes les contributions de pixels dans les droites de projections :

$$R = \mathcal{A}I \quad (4.43)$$

L'inversion de ce système (formule (4.44)) permet de retrouver le domaine original à partir des projections :

$$I = \mathcal{A}^T R \quad (4.44)$$

La résolution de ce système d'équations est l'objectif principal des méthodes algébriques. Étant donnée la taille des images et des acquisitions, ce système d'équation linéaire est trop volumineux pour être résolu avec les outils de résolution de systèmes classiques. De plus, les approximations linéaires et le bruit dans les projections n'assurent pas une solution exacte. La méthode développée par le mathématicien Karzmarz, puis redécouverte par Richard Gordon, Robert Bender, et Gabor Herman en 1970, permet d'approcher la solution par estimation successive du vecteur I^k à l'itération k en comparant les valeurs originales $R_\theta(\rho)$ avec les valeurs recalculées $R_\theta^k(\rho)$ (par l'équation (4.42)) depuis l'image I^{k-1} . Itérativement, le résultat converge vers une solution qui minimise l'erreur entre R et R^k et approche la solution idéale I .

4.1.2 ... la méthode de reconstruction algébrique ART

La mise à jour du pixel $I^k(i, j)$ à l'itération k s'effectue en comparant la valeur de la droite de projection mesurée $R_\theta(\rho)$ avec la droite de projection $R_\theta^k(\rho)$ calculée depuis I^{k-1} (avec l'équation 4.42). Cette étape de mise à jour est formalisée par l'équation suivante :

$$I^k(i, j) = I^{k-1}(i, j) + \lambda pk(\theta, \rho, i, j) \frac{R_\theta(\rho) - R_\theta^{k-1}(\rho)}{D_\theta(\rho)} \quad (4.45)$$

où $D_\theta(\rho) = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} pk(\theta, \rho, i, j)$ est la norme du segment de la droite (θ, ρ) traversant l'image et

λ est un paramètre de relaxation qui affecte la vitesse de convergence de la solution. Cette dernière est d'autant plus longue que λ est petit, mais la solution est alors plus précise. Inversement, la convergence est plus rapide si λ est grand, au détriment de sa qualité. Usuellement, $\lambda = 1$.

Cette méthode nécessite une image initiale I^0 . L'initialisation peut être le résultat d'une méthode directe, mais la convergence peut ensuite souffrir des artéfacts présents dans cette solution [42, 52]. Habituellement, I^0 est une image uniforme [43] où chaque pixel prend par exemple la valeur moyenne \bar{R} du sinogramme initial.

L'algorithme de la reconstruction algébrique ART est présenté ci-dessous.

Algorithme 3 : Algorithme ART

Entrées: $R \wedge W \wedge H \wedge N_\theta \wedge N_\rho$
 Calculer D
 $I = \bar{R}$
pour $iter \leftarrow 0$ à N_{iter} **faire**
 pour tout $l = (\theta, \rho)$ **faire**
 pour tout $p = (i, j)$ **faire**
 $R_\theta^k(\rho)_+ = pk(\theta, \rho, i, j)I(i, j)$
 fin pour
 pour tout $= (i, j)$ **faire**
 $I(i, j) \leftarrow I(i, j) + \lambda pk(\theta, \rho, i, j) \frac{R_\theta(\rho) - R_\theta^k(\rho)}{D_\theta(\rho)}$
 fin pour
fin pour
fin pour
retourner I

4.1.2.1 Multiplicative ART

Dans la méthode algébrique multiplicative MART (*Multiplicative Algebraic Reconstruction Technique*), la correction de l'image I^k est calculée en fonction du ratio entre R et R^k . Elle est définie par l'équation (4.46) ci-dessous [56]. Le paramètre de relaxation est en général choisi entre 0 et 2. L'algorithme de reconstruction est similaire à celui de ART en remplaçant l'équation (4.45) par la formule de MART à l'étape de mise à jour.

$$I^k(i, j) = I^{k-1}(i, j) \left(\frac{R_\theta(\rho)}{R_\theta^{k-1}(\rho)} \right)^{\lambda pk(\theta, \rho, i, j)} \quad (4.46)$$

4.1.2.2 Adaptative ART

La méthode ART adaptative utilise un ajustement adaptatif du paramètre de relaxation λ à chaque étape de la reconstruction [57]. Dans ART, ce paramètre est constant au long d'une itération donnée. Dans la méthode adaptative (notée AART pour *Adaptative ART*), il est ajusté pour chaque pixel proportionnellement à sa contribution. Les pixels qui ont une contribution en intensité plus importante reçoivent une correction plus grande. Cette correction est calculée par le ratio entre la contribution du pixel $y(i, j) = pk(\theta, \rho, i, j)I(i, j)$ sur la droite de projection (θ, ρ) et

la contribution totale des pixels sur cette même droite $Y_\theta(\rho) = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} pk(\theta, \rho, i, j)y(i, j)$.

Le paramètre de relaxation, pour un pixel et une droite de projection donnés, est défini par la formule suivante :

$$\lambda^k(\theta, \rho, i, j) = \frac{y(i, j)}{Y_\theta(\rho)} \quad (4.47)$$

4.1.3 Schéma d'Accès aux Projections

La méthode ART parcourt chaque projection l'une après l'autre à chaque itération. L'ordre dans lequel les projections sont sélectionnées a une incidence sur le résultat. Un schéma d'accès aux projections est un ordonnanceur qui choisit la prochaine projection à considérer pour la reconstruction. L'ordre par défaut est l'ordre séquentiel qui sélectionne les projections les unes à la suite des autres. L'ordonnanceur associé s'appelle Sequential Access Scheme (SAS). Gordon et Guan ont démontré [32] que ce type d'accès n'est pas optimisé pour la mise à jour de l'image car

une projection d'angle $\theta_i = i_\theta d\theta$ est fortement corrélée à la précédente d'angle $\theta_{i-1} = i_{\theta-1} d\theta$. Elle est donc peu porteuse de nouvelles informations. Un schéma d'accès aléatoire (appelée RPS pour *Random Permutation Scheme*) augmente la convergence et la qualité de ART en sélectionnant de manière aléatoire la prochaine projection parmi celles non encore utilisées à l'itération k .

Le schéma d'accès optimisé MLS (*Multi-Level Scheme*) [32] sélectionne la prochaine projection comme étant celle la moins corrélée avec l'ensemble des projections déjà utilisées. Une telle sélection permet de mettre à jour l'image en utilisant toujours la projection la plus porteuse de nouvelles informations.

La figure 4.1 montre l'ordre d'utilisation de 10 projections au cours d'une itération en fonction du schéma d'accès utilisé (dans l'ordre de la plus sombre à la plus claire).

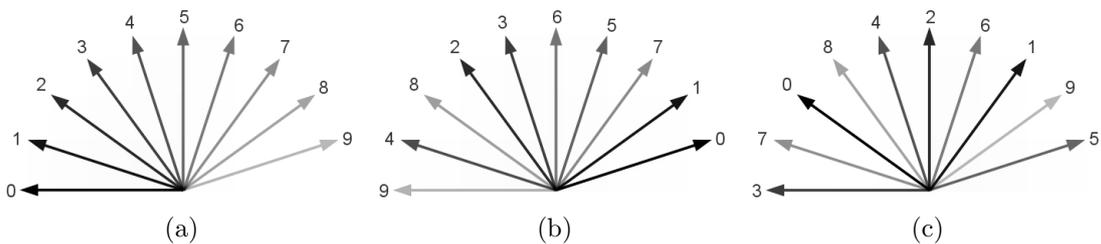


FIGURE 4.1: Ordre de 10 projections au cours d'une itération en fonction du schéma d'accès utilisé. (a) Les projections sont sélectionnées les unes à la suite des autres. (b) Les projections sont sélectionnées de manière aléatoire. (c) La projection suivante est choisie comme étant celle la moins corrélée avec l'ensemble des projections déjà utilisées.

4.1.4 Méthode SIRT (ou *Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*)

La méthode de reconstruction itérative simultanée SIRT (pour *Simultaneous Iterative Reconstruction Technique*) est elle aussi une méthode dérivant de l'algorithme ART [27]. Cette fois ci, chaque pixel n'est plus mis à jour à partir d'une droite de projection mais depuis toutes les droites (sur toutes les projections) qui le traversent. SIRT calcule la valeur du pixel (i, j) à l'itération k comme le définit la formule (4.48) suivante :

$$I^k(i, j) = I^{k-1}(i, j) + \lambda \frac{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j) \left[\frac{\mathcal{R}_\theta(\rho) - R_\theta^{k-1}(\rho)}{D_\theta(\rho)} \right]}{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j)} \quad (4.48)$$

Chaque itération k calcule le sinogramme complet R^k depuis I^{k-1} , puis met à jour chaque pixel de I^k depuis R^k grâce à l'équation (4.48).

4.1.5 Méthode SART (ou *Simultaneous ART*)

La reconstruction ART simultanée, notée SART pour *Simultaneous ART* est un compromis entre la méthode ART (indépendance des droites de projections sélectionnées, ordre des projections optimisé) et de la méthode SIRT (mise à jour à partir de plusieurs droites de projections). Elle utilise toutes les droites d'une et une seule projection pour mettre à jour l'image et l'ordre des projections est choisi par un ordonnanceur. L'erreur d'un pixel est donc moyennée par l'utilisation

de plusieurs valeurs dans le sinogramme et la mise à jour est optimisée par un schéma d'accès aux projections comme MLS.

Par définition, SART [1] est une méthode itérative de reconstruction en k itérations, $k \in [0 \dots N_{iter}]$. Chaque sous itération s , $0 \leq s < N_\theta$, met à jour chaque pixel de l'image $I^{k,s}$ en comparant la projection originale \mathcal{R}_{θ_s} avec $R_{\theta_s}^k$ (mesurée depuis $I^{k,s-1}$). Une super itération k est terminée quand toutes les projections ont été traitées. Par conséquent, la mise à jour d'un pixel par la méthode SART est effectué comme suit :

$$I^{k,s}(i,j) = I^{k,s-1}(i,j) + \lambda \frac{\sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta_s, \rho, i, j) \left[\frac{\mathcal{R}_{\theta_s}(\rho) - R_{\theta_s}^k(\rho)}{D_{\theta_s}(\rho)} \right]}{\sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta_s, \rho, i, j)} \quad (4.49)$$

SART reconstruit l'image comme le présente l'algorithme 4.2 où le schéma d'accès au projection est noté PAS (*Projection Accès Scheme*) et $\theta_s = PAS(s)$ est la fonction retournant la prochaine projection en fonction du schéma utilisé. Une étude de l'implémentation en parallèle sur carte graphique de cette méthode est fournie en annexe A.

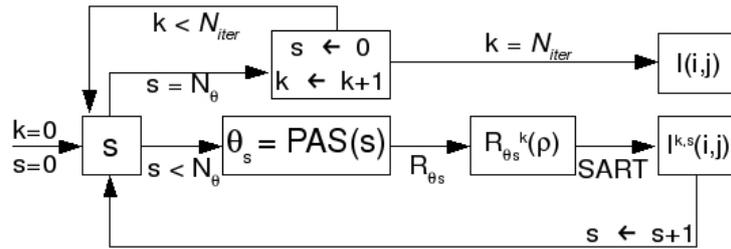


FIGURE 4.2: Algorithme de reconstruction SART.

4.2 Méthodes statistiques

Nous présentons maintenant les méthodes basées sur une interprétation statistique. Le problème de reconstruction est d'abord modélisé de manière probabiliste en s'appuyant sur le théorème de Bayes. En découlent les différentes interprétations et les algorithmes associés. Cette étude s'appuiera sur l'une des méthodes standards, appelée *Maximum Likelihood Expectation Maximization*, introduite à partir du théorème de Bayes. Nous aborderons ses principales optimisations comme la méthode OSEM (Ordered Subsets MLEM) qui permet d'accélérer la convergence vers le résultat. Nous parlerons aussi de la méthode MAP-EM, version régularisée minimisant l'erreur liée aux bruits d'acquisition. Nous mentionnerons au fur et à mesure de l'étude les méthodes similaires s'appuyant sur des modélisations différentes des données. Nous verrons aussi dans quelle mesure ces méthodes sont équivalentes aux méthodes algébriques.

4.2.1 Interprétation probabiliste du problème de reconstruction

Le problème de reconstruction est formalisé de la manière suivante : *Rechercher l'image I la plus probable étant données les projections R observées*. Comme il s'agit d'une interprétation probabiliste, les algorithmes itératifs qui en découlent cherchent à maximiser la probabilité $p(I|R)$,

c'est-à-dire la probabilité d'avoir l'image I lorsqu'on a les projections R . Le théorème de Bayes décrit que :

$$p(I|R) = p(R|I) \cdot \frac{p(I)}{p(R)} \quad (4.50)$$

où $p(I|R)$ est la valeur que l'on cherche à optimiser, $p(R|I)$ est la probabilité de mesurer les projections R lorsqu'on a l'image I . Cette probabilité s'appelle la *vraisemblance* des projections. $p(I)$ est appelée *probabilité à priori* de l'image I et $p(R)$ est la probabilité à priori des projections.

Comme les projections sont connues, on a toujours $p(R) = 1$. Il y a en revanche deux manières d'interpréter la probabilité $p(I)$. Sans hypothèse sur l'image à obtenir, $p(I) = 1$. Si $p(I) \neq 1$, on régularise la solution en s'appuyant sur un modèle d'image à obtenir *à priori*. Quand il n'y a pas d'information à priori, on obtient la formule suivante :

$$p(I|R) = p(R|I) \quad (4.51)$$

Pour maximiser la probabilité d'avoir l'image I connaissant les projections R , il suffit de maximiser la vraisemblance des projections sachant une image I . Cette maximisation s'obtient en minimisant l'écart entre les projections calculées et celles observées. On retrouve donc un procédé similaire aux méthodes algébriques car la minimisation de cet écart s'obtient par des mises à jours itératives en k de I .

4.2.2 Du théorème de Bayes à la reconstruction MLEM

En s'appuyant sur le théorème de Bayes, Shepp et Vardi [86] proposent en 1982 la méthode MLEM (*Maximum Likelihood Expectation Maximization*). Ils définissent l'expression de la vraisemblance $p(R|I)$ en modélisant les projections R^k comme des variables aléatoires de Poisson. Dans ce cas, la probabilité $p(R|I)$ s'écrit :

$$p(R|I) = \prod_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \prod_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} \frac{e^{-R_\theta^k(\rho)} (R_\theta^k(\rho))^{R_\theta(\rho)}}{R_\theta(\rho)!} \quad (4.52)$$

Pour l'exploiter, on utilise la version logarithmique (à l'origine de l'appellation *Maximum Log-Likelihood EM* parfois rencontrée) donnée par la formule ci-dessous :

$$\log p(R|I) = \sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} (-R_\theta^k(\rho) + R_\theta(\rho) \log(R_\theta^k(\rho)) - R_\theta(\rho)!) \quad (4.53)$$

L'objectif est de maximiser la valeur entre parenthèse. Ce maximum est obtenu lorsque la dérivée partielle selon I est nulle. Maximiser la vraisemblance des projections consiste donc à minimiser la dérivée partielle :

$$\frac{\partial \log p(R|I)}{\partial I} = \sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} \left[- \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} p^k(\theta, \rho, i, j) + \frac{\sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} p^k(\theta, \rho, i, j) R_\theta(\rho)}{R_\theta^k(\rho)} \right] = 0 \quad (4.54)$$

où $(R_\theta^k(\rho))' = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} pk(\theta, \rho, i, j)$. On obtient alors :

$$\sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} \left[\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j) \right] = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} \left[\frac{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j) R_\theta(\rho)}{R_\theta^k(\rho)} \right] \quad (4.55)$$

La minimisation de la dérivée partielle consiste à s'approcher de l'égalité ci-dessus pour l'ensemble des pixels. La valeur de chaque pixel est indépendante des autres. Pour minimiser globalement la dérivée partielle, il suffit donc d'approcher l'égalité en considérant indépendamment chaque pixel. Pour un pixel (i, j) de l'image I , on obtient alors (en conservant les valeurs entre crochets) l'étape de mise à jour définie par la formule ci-dessous :

$$I(i, j)^{k+1} = I(i, j)^k \frac{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j) \frac{R_\theta(\rho)}{R_\theta^k(\rho)}}{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j)} \quad (4.56)$$

L'algorithme MLEM procède donc en deux étapes. La première consiste à calculer l'espérance de la vraisemblance (ou de la log-vraisemblance) en tenant compte de l'ensemble des projections de l'image courante. La deuxième étape calcule la maximisation de l'espérance en annulant les dérivées partielles par rapport à I . Cette maximisation est obtenue par le processus itératif de correction des pixels (formule 4.56).

Cette mise à jour est multiplicative comme la méthode algébrique MART. De plus, l'étape de maximisation tient compte de l'ensemble des projections comme la méthode algébrique SIRT. La méthode MLEM équivaut donc à une version simultanée de la méthode MART. Elle est d'ailleurs dénommée parfois SMIRT (pour *Simultaneous Multiplicative Iterative Reconstruction Technique*). Une autre modélisation probabiliste basée sur une loi gaussienne (au lieu de la loi de Poisson) a aussi été proposée. Elle aboutit aux méthodes de gradient conjugué [62] (notée CG de l'anglais *Conjugate Gradient*). Très répandues, elle sont semblables à la méthode MLEM mais sont de forme additive. Enfin, on trouve aussi des formulations additives de MLEM [53].

4.2.3 Sous ensembles ordonnés (OS : Ordered Subsets) avec la méthode MLEM

Comme la méthode MLEM met à jour l'image en utilisant globalement le sinogramme, elle a une convergence lente comparable à celle de la méthode SIRT. Nous avons vu dans la section précédente que le découpage des projections (comme la méthode SART où chaque sous-ensemble est une projection) permet d'utiliser à chaque sous-itération l'information la moins corrélée avec celle déjà utilisée.

Conscients du problème de convergence de la méthode MLEM, Hudson *et al.* ont donc proposé [48] une méthode appelée Ordered Subsets MLEM (notée ensuite OSEM). L'idée s'appuie sur celle des sous-itérations de la méthode SART. Le sinogramme est découpé en plusieurs ensembles. Chaque ensemble contient une série de projections choisies comme étant les moins corrélées entres-elles. C'est en ce sens qu'on parle d'ensembles ordonnés (notés OS par la suite). Par exemple

l'ensemble des quatre projections $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\}$ peut être découpé en deux sous-ensembles de deux projections $S_1 = \{0, \frac{\pi}{2}\}$ et $S_2 = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$. Chaque itération principale k est alors composée de 2 sous-itérations s , la première utilisant uniquement les projections de S_1 et la seconde celles de S_2 .

Les sous ensembles sont ordonnés en fonction de la position de l'ensemble des projections. Si le nombre de sous ensemble est égal au nombre de projections, on utilise une projection par sous itération, et l'ordre des projections est défini par le schéma d'accès *MLS*. La méthode OSEM devient alors une méthode simultanée équivalente à SART, mais de forme multiplicative. On la nomme parfois SMART (*Simultaneous MART*). Grâce à l'accélération de sa convergence, la méthode OSEM s'est imposée comme un standard en tomographie et est particulièrement utilisée en tomographie d'émission [72] et de transmission [90, 47, 8, 22]. Le découpage en ensembles ordonnés a aussi été transposé aux méthodes algébriques avec, par exemple, la méthode OS-SART [99].

4.2.4 Régularisation des méthodes

Lors des première itérations, seules les régions homogènes sont reconstruites. Plus il y a d'itérations, plus on reconstruit les hautes fréquences. C'est ainsi que la solution converge au fur et à mesure des itérations. Mais elle peut aussi diverger lorsqu'on reconstruit les très hautes fréquences liées au bruit dans le sinogramme. L'idéal est alors de s'arrêter avant, mais il est difficile d'évaluer le nombre d'itérations exactement nécessaire. Une solution naïve consiste à arrêter les itérations suffisamment tôt pour éviter la divergence.

Une autre méthode consiste à définir une information a priori sur l'image à reconstruire. Cette information a priori peut être introduite dans la formule 4.50 en utilisant une probabilité d'image $p(I) \neq 1$ [41]. Cette dernière fait office de régularisation, c'est-à-dire qu'elle maintient le résultat au lieu de le faire diverger lorsqu'on commence à reconstruire les très hautes fréquences. En repartant du théorème de Bayes, on obtient la formule suivante :

$$p(I|R) = p(R|I) \cdot p(I) \quad (4.57)$$

dans laquelle $p(I) \neq 1$.

L'ajout de cet information a permis de mettre au point une série d'algorithmes régularisés, appelés méthodes MAP (pour *Maximum a Posteriori*) [79, 55, 96, 25]. On peut citer MAP-EM (version régularisée de l'algorithme MLEM), ou encore MAP-GC (version régularisée du gradient conjugué).

Dans les versions régularisées, on ne cherche plus l'image I qui maximise $\log p(R|I)$ mais celle maximisant $\log p(R|I) + \log p(I)$ où $p(I)$ est donné par un modèle d'image [54]. Ce dernier permet d'influencer la valeur d'un pixel en fonction de son voisinage. Généralement, on choisit un modèle gaussien pour conserver la cohérence des pixels voisins et réduire les artéfacts. Toutefois, on peut définir des modèles spécifiques à des cas d'utilisations particuliers. Par exemple Bouman *et al.* [11] ont proposé des modèles adaptés à la conservation des contours dans l'image. La notion de voisinage s'appuie sur les champs de Markov aléatoires (notés ensuite MRF de l'anglais *Markov Random Fields*). Une distribution de Gibbs permet de définir la distribution d'un champ de Markov. Une distribution de Gibbs est une distribution qui peut s'écrire sous la forme [11] :

$$p(I) = \frac{1}{Z} e^{-\beta U(I)} \quad (4.58)$$

où Z est une constante de normalisation et $U(I)$ est la fonction d'énergie définie comme la somme des potentiels de chaque pixel en fonction de son voisinage. β est un paramètre contrôlant la souplesse de la reconstruction. Lorsque β est faible, les images reconstruites sont bruitées mais les contours sont nets. Plus β augmente, moins les images sont bruitées, mais plus les contours sont flous. Quand $\beta = 0$, il n'y a pas de régularisation, on obtient l'algorithme MLEM précédent.

	$\Phi(x)$	$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial I}$
Geman and McClure[26]	$\frac{x^2}{1+x^2}$	$\frac{2x}{(1+x^2)^2}$
Hebert and Leahy[41]	$\log(1+x^2)$	$\frac{2x}{1+x^2}$
Blake and Zisserman[10]	$\begin{cases} \frac{x^2}{2} \text{ si } x \leq \alpha \\ \alpha x - \frac{\alpha^2}{2} \text{ sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x \text{ si } x \leq \alpha \\ \alpha \text{ sinon} \end{cases}$

TABLE 4.1: Quelques régularisations usuelles.

Il s'agit donc de minimiser la dérivée partielle suivante :

$$\frac{\partial \log p(I|R)}{\partial I} = \frac{\partial \log p(R|I)}{\partial I} - \frac{\partial U(I)}{\partial I} \quad (4.59)$$

où $\frac{\partial \log p(R|I)}{\partial I}$ est définie par la formule 4.54.

Usuellement, $U(I)$ est de la forme suivante :

$$U(I) = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} \left[\sum_{(i_v, j_v) \in V(i, j)} \Phi(I(i, j) - I(i_v, j_v)) \right] \quad (4.60)$$

où $V(i, j)$ est la clique définissant les pixels voisins de (i, j) . La fonction $\Phi(I(i, j) - I(i_v, j_v))$ détermine la contribution des pixels voisins de (i, j) pour la régularisation. Plusieurs types de voisinages ont été proposés, dont certains sont présentés sur le tableau 4.1 [13, 41]. D'autres régularisations sont répertoriées dans [79].

On obtient alors la formule de mise à jour régularisée suivante (régularisation entre crochets) :

$$I(i, j)^{k+1} = I(i, j)^k \frac{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j) \frac{R_\theta(\rho)}{R_\theta^k(\rho)}}{\sum_{i_\theta=0}^{N_\theta-1} \sum_{i_\rho=0}^{N_\rho-1} pk(\theta, \rho, i, j) + \left[\beta \sum_{(i_v, j_v) \in V(i, j)} \frac{\partial \Phi(I(i, j) - I(i_v, j_v))}{\partial I} \right]} \quad (4.61)$$

où $\frac{\partial \Phi(I(i, j) - I(i_v, j_v))}{\partial I}$ est sélectionné parmi les régularisations présentées dans le tableau 4.1.

Notons enfin que les champs de Markov ont depuis été utilisés pour régulariser les méthodes algébriques [42].

4.3 Qualité et précision des méthodes itératives

Nous nous intéressons dans cette section à la qualité et à la précision des reconstructions algébriques et statistiques. Bien que ces deux grands types de méthodes soient basés sur des modélisations différentes du problème de reconstruction, nous avons vu qu'ils aboutissent à des algorithmes similaires (par exemple, MLEM est une version multiplicative de SIRT). De plus, les outils de régularisation, mis en évidence par les méthodes statistiques, ont été adaptés aux méthodes algébriques. Notre objectif n'est donc pas d'établir un comparatif complet de toutes les méthodes algébriques et probabilistes, mais de nous concentrer sur les grandes différences entre les méthodes

itératives, quelles qu'elles soient. Dans un premier temps, nous regarderons l'importance de l'ordre d'usage des projections pendant la reconstruction en étudiant les effets des schémas d'accès aux projections de la méthode SART. De manière similaire, nous comparerons les méthodes MLEM et OSEM pour étudier l'influence des ensembles ordonnés sur la reconstruction.

Cette étude nous permettra d'établir les meilleures conditions d'usage pour les méthodes SART et OSEM. En utilisant ces conditions, nous comparerons ces deux méthodes (par une étude du SSIM et de la PSF). Ce comparatif permettra d'établir les différences entre une méthode additive et une méthode multiplicative. Enfin, nous étudierons la propagation du bruit d'acquisition dans l'image. Nous comparerons alors les méthodes SART et MLEM (non régularisées) à la méthode MAP-EM (régularisée). Ainsi, nous pourrions voir les différences de résistance aux bruits entre une méthode additive et multiplicative d'une part, et une méthode régularisée et non régularisée d'autre part. Enfin, nous verrons que les régularisations permettent de contenir le bruit et éviter la divergence des solutions.

4.3.1 Importance du schéma d'accès aux projections pour la méthode SART

Nous nous intéressons dans un premier temps à la convergence des résultats obtenus par SART, méthode additive non régularisée, en l'absence de bruit sur les projections. Pour observer la convergence vers la solution idéale, nous utilisons le SSIM. Les images de taille 512^2 sont reconstruites à partir du sinogramme de 40 projections de 256 échantillons (nous utilisons des données éparées pour mieux observer la convergence). Dans un premier temps, nous effectuons la reconstruction SART avec 10 itérations en utilisant les trois schémas d'accès aux projections et en étudions la convergence. Ensuite, nous regardons l'évolution de la convergence au cours de la première itération en fonction du schéma d'accès.

4.3.1.1 Convergence de SART sur 10 itérations en fonction du schéma d'accès

Nous effectuons la reconstruction SART jusqu'à 10 itérations en utilisant les schémas SAS, RPS et MLS. Le schéma 4.3 présente le SSIM des solutions au fur et à mesure des itérations. Plus le SSIM augmente, plus la solution converge vers l'image idéale I . Dès que le SSIM diminue, la solution commence à diverger.

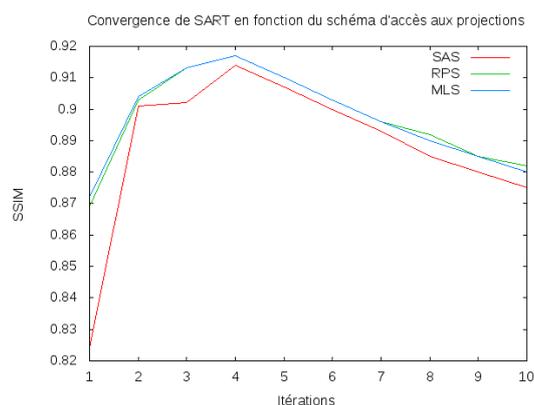


FIGURE 4.3: Convergence de la méthode SART au cours des itérations en fonction du schéma d'accès aux projections.

L'ordre d'accès séquentiel met à jour l'image en utilisant les projections les unes à la suite des autres. Comme la nouvelle projection est fortement corrélée à la précédente, elle n'optimise

pas significativement la correction de l'image. A la fin de la première itération, le SSIM est de 0.82. Le schéma d'accès RPS utilise une projection souvent moins corrélée à la précédente (sauf sélection aléatoire d'une projection voisine). Le schéma MLS utilise toujours la projection la moins corrélée avec celles déjà utilisées et propose donc une mise à jour optimale de l'image. Avec ces deux schémas, on obtient donc, dès la fin de la première itération un SSIM supérieur à 0.87. Les trois schémas d'accès arrivent au maximum de convergence à la fin de la quatrième itération. Les reconstructions utilisant RPS et MLS convergent vers une solution plus exacte (SSIM de 0.917) que celle obtenue par SAS (0.914). Toutefois, cette différence est peu significative.

Nous étudions maintenant la convergence en regardant l'évolution de la luminosité, du contraste et de la géométrie en fonction du schéma d'accès et du nombre d'itérations. Les tableaux 4.2 présentent les résultats obtenus. Quel que soit le schéma d'accès utilisé, nous constatons une convergence très rapide en intensité : le maximum est atteint dès la première ou deuxième itération. La solution diverge lentement dès la troisième itération. Le maximum de convergence en contraste est atteint à la quatrième itération, et est comparable pour tous les schémas d'accès. A ce moment là, l'intensité n'est descendue que de 0.005 au maximum pour la méthode SAS. Le maximum de convergence en géométrie est atteint à la cinquième itération pour tout schéma d'accès. Sa convergence est lente car la corrélation géométrique est déjà très élevée à la première itération. Son évolution la plus remarquable s'observe pour le schéma SAS ou elle passe de 0.871 à 0.938. Elle n'est donc pas optimale à la quatrième itération, mais la différence observée n'est que de 0.001 pour tout schéma. Ainsi, même si les maxima de convergence en luminosité, contraste et géométrie ne sont pas observés à la même itération, la faible divergence en intensité et la rapide convergence en géométrie permettent d'obtenir un compromis efficace qui survient à l'itération 4. Enfin, notons que la faiblesse de la méthode SAS à la première itération est principalement liée à un défaut de convergence en contraste (-0.024 par rapport à MLS) et géométrique (-0.029).

	$l(I, I^k)$	$c(I, I^k)$	$s(I, I^k)$
1	1.000	0.947	0.871
2	1.000	0.976	0.923
3	0.993	0.973	0.933
4	0.995	0.981	0.937
5	0.989	0.977	0.938
6	0.985	0.973	0.938
7	0.982	0.971	0.938
8	0.977	0.966	0.937
9	0.974	0.964	0.937
10	0.971	0.962	0.936

(a)

	$l(I, I^k)$	$c(I, I^k)$	$s(I, I^k)$
1	0.998	0.966	0.902
2	0.999	0.975	0.928
3	0.996	0.980	0.935
4	0.995	0.983	0.938
5	0.991	0.979	0.939
6	0.986	0.975	0.939
7	0.983	0.972	0.938
8	0.980	0.970	0.938
9	0.976	0.967	0.937
10	0.975	0.966	0.937

(b)

	$l(I, I^k)$	$c(I, I^k)$	$s(I, I^k)$
1	0.997	0.971	0.900
2	0.999	0.975	0.928
3	0.996	0.979	0.935
4	0.995	0.982	0.938
5	0.991	0.979	0.939
6	0.986	0.975	0.939
7	0.983	0.972	0.939
8	0.979	0.969	0.938
9	0.976	0.967	0.937
10	0.974	0.965	0.937

(c)

TABLE 4.2: Évolution de la corrélation en luminosité $l(I, I^k)$, en contraste $c(I, I^k)$ et géométrique $s(I, I^k)$ de l'image I^k par rapport à l'image référence I obtenue par la méthode SART en fonction du schéma d'accès SAS (a), RPS (b) et MLS (c) et du nombre d'itérations.

4.3.1.2 Convergence de SART au cours de la première itération en fonction du schéma d'accès

Les schémas de la figure 4.4 montrent respectivement les convergences en luminosité, contraste, géométrique et du SSIM au cours la première itération (de 40 sous-itérations car il y a 40 projections dans le sinogramme utilisé).

Il y a peu de différences en luminosité et en contraste entre les méthodes. La convergence en luminosité augmente rapidement au cours de la première itération avec le schéma SAS (et est légèrement supérieure à celle de RPS et MLS jusqu'à la sous-itération 30). De même, le contraste converge très rapidement pour tous les schémas d'accès. La principale distinction entre les

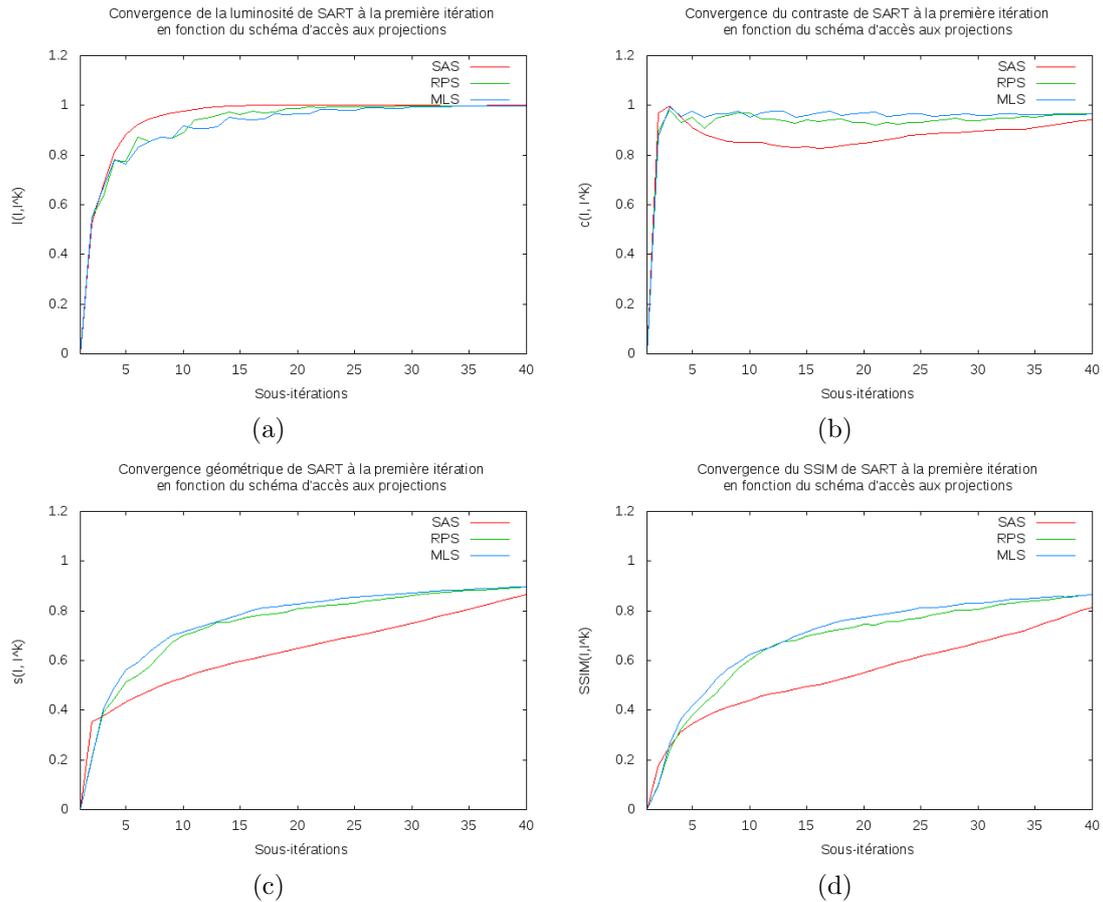


FIGURE 4.4: Convergence de la luminosité (a), du contraste (b), de la géométrie (c) et du SSIM (d) de SART à la première itération en fonction du schéma d'accès aux projections.

méthodes est donc géométrique comme le montre le schéma 4.4(c). Les méthodes RPS et MLS convergent géométriquement beaucoup plus rapidement que SAS. Comme les projections voisines sont porteuses d'une information très proche, elles ne permettent pas de corriger uniformément les contours des régions dans l'image. Comme on utilise des projections faiblement corrélées avec RPS et MLS, on reconstruit plus rapidement les contours dans toutes les directions, et on converge donc plus vite vers la géométrie de l'image. Les séries d'images présentées sur la figure 4.5 montrent effectivement que la reconstruction est déjà géométriquement correcte dès qu'on a utilisé 9 projections avec MLS alors qu'elle est encore complètement déformée avec SAS. Avec cette dernière, lors des 10 premières sous itérations, on utilise uniquement les projections entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Il manque $\frac{3}{4}$ des directions des contours présentes sur les autres projections. Ce problème n'apparaît plus avec les méthodes MLS et RPS car même au bout de 10 sous-itérations, on a couvert de manière quasi-homogène l'ensemble des directions. Sans être précis, les contours sont globalement définis. La géométrie, et par conséquent le SSIM, convergent donc plus rapidement.

Enfin, avec SAS, le SSIM atteint son maximum à la dernière sous-itération 40 et ce maximum vaut 0.814. On atteint cette valeur à la sous itération 26 avec MLS. Ainsi, sous contrainte de temps par exemple, il est possible de reconstruire à qualité équivalente en une itération avec 26 des 40 projections en utilisant MLS au lieu de SAS. D'autre part, il est aussi possible de ne pas utiliser toutes les projections à chaque itération pour accélérer la reconstruction. L'image 4.6(a) a été reconstruite par SART avec le schéma d'accès SAS en 4 itérations avec le sinogramme complet de 40 projections. L'image 4.6(b) a été reconstruite par SART avec MLS en 4 itérations et en

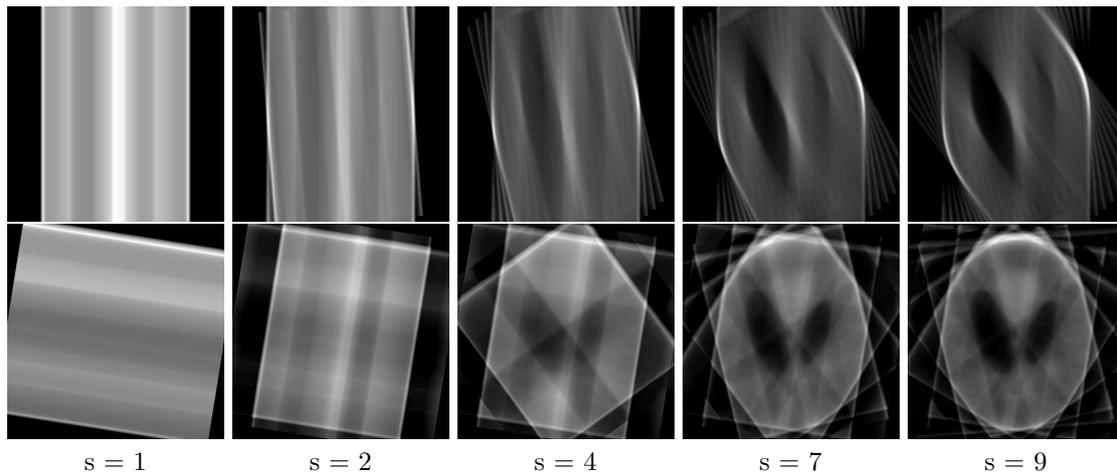
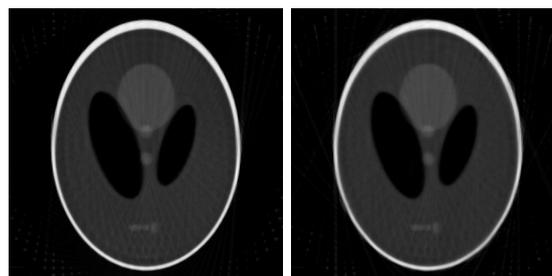


FIGURE 4.5: Différence de la convergence géométrique entre SAS et MLS au cours de la première itération.

utilisant 26 des 40 projections à chaque itération. Le sous-ensemble de 26 projections est construit aléatoirement à partir des 40 disponibles et est différent à chaque itération. Enfin, bien sûr, on peut accélérer l'acquisition en diminuant volontairement le nombre de projection sans descendre en dessous d'un seuil limite de qualité.



(b)	(b)
$l(I, I^k) = 0.995$	$l(I, I^k) = 0.997$
$c(I, I^k) = 0.981$	$c(I, I^k) = 0.974$
$r(I, I^k) = 0.937$	$r(I, I^k) = 0.930$
$SSIM(I, I^k) = 0.914$	$SSIM(I, I^k) = 0.903$

FIGURE 4.6: (a) Reconstruction SART avec SAS et 40 projections. (b) Reconstruction SART avec MLS et 26 projections choisies aléatoirement parmi les 40 disponibles à chaque itération.

4.3.2 Convergence de la méthode MLEM avec ou sans sous-ensemble ordonnés

Dans la section précédente, nous avons vu que la manière de sélectionner les projections durant les sous-itérations de la méthode SART permet d'améliorer et d'accélérer la qualité de la reconstruction. Nous avons aussi vu qu'il était possible de reconstruire, à qualité équivalente au bout de plusieurs itérations, en utilisant un sous-ensemble différent des projections à chaque itération. Ce principe s'apparente à celui des sous-ensembles ordonnés lorsqu'on utilise la méthode MLEM. Dans cette section, nous nous intéressons donc au problème inverse. Nous regardons la qualité obtenue pour 20 itérations avec MLEM, méthode multiplicative globale. Ensuite, nous découpons les projections en plusieurs sous-ensembles ordonnés et regardons comment leur usage permet d'accélérer

la convergence de la solution. Nous verrons alors que la qualité et la vitesse de convergence est un compromis entre le nombre de sous-ensembles, et le nombre de projections par sous-ensemble.

4.3.2.1 Reconstruction en fonction du nombre d'ensemble ordonnés

Le schéma 4.7(a) présente le SSIM de la méthode MLEM en fonction du nombre d'itérations et du nombre d'OS. Ces mesures ont été établies pour la reconstruction d'une image 512^2 à partir de données éparées (même sinogramme 40×256 que celui utilisé dans l'étude de SART). Dans ces conditions, si on utilise qu'un seul ensemble (la méthode OSEM est alors équivalente à MLEM), on obtient une convergence à l'itération 14. Le maximum de convergence obtenu est 0.837. Au delà, la solution commence à diverger. Si on utilise 2 OS, le temps de calcul peut être divisé par 2 puisque le maximum de convergence (0.835) est atteint à la 7^{ème} itération. Dès la 8^{ème} itération, la solution commence à s'éloigner de l'image I , et la baisse du SSIM est plus nette que lorsqu'on n'utilise pas d'ensembles ordonnés. Avec 4 sous-ensembles, la solution optimale est atteinte dès l'itération 3, et avec 8 OS, le maximum est obtenu dès la première itération.

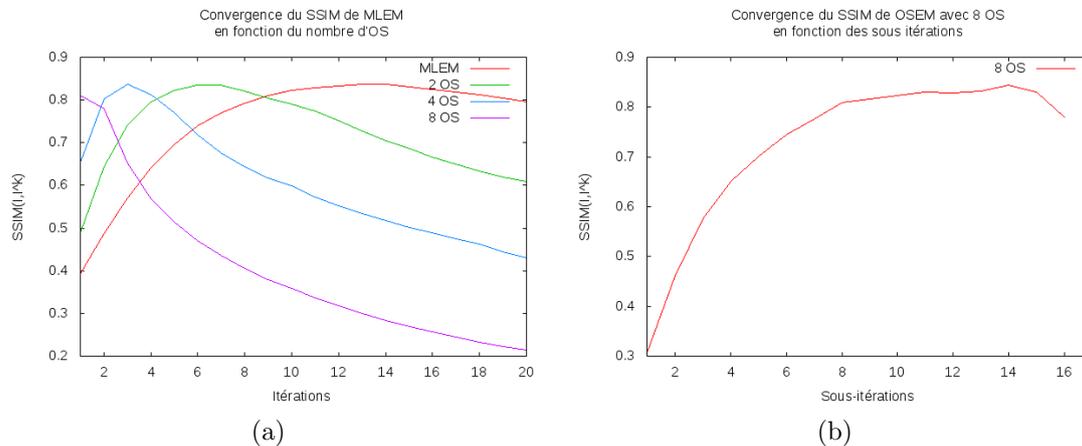


FIGURE 4.7: (a) Convergence au cours des itérations du SSIM de MLEM en fonction du nombre de sous-ensembles ordonnés. (b) Convergence du SSIM au cours des deux premières itérations avec 8 OS : la solution commence à diverger avant la fin de la deuxième itération.

Le schéma 4.7(b) présente la convergence avec 8 OS au cours des deux premières itérations. Les sous-itérations 1 à 8 correspondent à la première itération, et celles de 9 à 16 à la seconde. On constate que le maximum n'est pas atteint à la fin de la première super-itération, mais à la 6^{ème} sous-itération de l'itération 2. Ce maximum est 0.835, ce qui correspond au maximum obtenu avec les autres OS. Ensuite, à l'intérieur même de la 2^{ème} itération, la solution commence à diverger. Cette divergence est suffisamment rapide pour avoir, à la fin de l'itération 2, un SSIM inférieur à celui obtenu à l'itération 1.

Par conséquent, nous constatons que découper les projections en sous-ensembles permet d'accélérer la convergence et donc la reconstruction de l'image. Toutefois, plus le nombre d'OS est important, plus la vitesse de la divergence est grande. Si elle est vraiment extrême, on arrive au maximum à l'intérieur même d'une itération sans pouvoir en bénéficier car la solution diverge aussitôt avec l'utilisation de l'OS suivant. Avant reconstruction, il faut donc déterminer un nombre d'OS qui évite à la solution de diverger trop vite (c'est-à-dire pendant les sous-itérations).

4.3.2.2 Reconstruction en fonction du nombre de projections par OS

Le résultat précédent stipule que si on utilise 8 OS ou plus, la solution diverge trop rapidement pour être récupérée. Nous regardons maintenant si le nombre total de projections a lui aussi une influence sur le nombre d'OS à utiliser ; et par conséquent sur le nombre de projections par OS. Pour cela, nous effectuons une reconstruction à partir d'un sinogramme avec 180 projections et étudions la convergence en fonction de plusieurs tailles d'OS. Le schéma 4.8 montre la convergence avec 10 OS (en vert). Le maximum est atteint à la 3^{ème} itération et vaut 0.919. De plus, il est maintenu jusqu'à la 7^{ème} itération avant divergence. Ce n'est donc pas le nombre d'OS qui détermine la vitesse de convergence et de divergence de la solution puisqu'ici, avec 10 OS, on obtient une convergence plus longue qu'avec 8 OS dans le cas précédent. C'est donc le nombre de projections par OS qui détermine la vitesse de convergence/divergence de la solution.

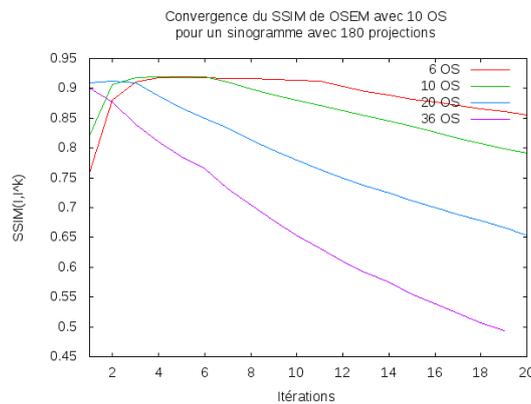


FIGURE 4.8: Convergence de la solution en fonction du nombre de projections par OS.

En effet, lorsqu'on utilise 20 OS (9 projections par OS), la convergence est obtenue à la 2^{ème} itération, et elle n'est pas aussi bonne qu'avec 10 OS. Cela laisse supposer que le maximum est atteint entre la deuxième et troisième itération. Le maximum ne s'étale plus sur plusieurs itérations et la divergence devient rapide. Avec 36 OS (5 projections par OS) on diverge dès la première itération. On se retrouve dans le même cas que 8 OS pour 40 projections (où il y a, là aussi, 5 projections par OS). Un bon compromis (avec un sinogramme de 180 projections) est entre 6 et 10 OS, c'est-à-dire entre 18 et 30 projections par OS. Dans ce cas, on obtient une convergence stable entre la 4^{ème} et la 6^{ème} projection. Avec le sinogramme de 40 projections, on obtenait aussi le meilleur résultat avec 20 projections par OS environ en 6 itérations. Par conséquent, dans la suite, nous choisirons un nombre d'OS tel que le nombre de projections par OS soit égal à 20 (ou le plus proche de 20 entre 18 et 30 si ce n'est pas possible) et nous arrêterons la reconstruction au bout de la 5^{ème} itération.

4.3.3 Qualité et Précision de SART et OSEM

Dans cette section, nous nous intéressons à la qualité et à la précision de SART et OSEM dans les conditions d'utilisations établies précédemment. Pour la méthode SART, nous reconstruisons en utilisant le schéma d'accès MLS et 4 itérations. Avec la méthode OSEM, nous reconstruisons avec 20 (ou au plus proche) projections par OS et 5 itérations. Dans un premier temps, nous effectuerons une analyse de la qualité en regardant les variations du SSIM en fonction du nombre de projections et du pas d'échantillonnage sur les projections. Ensuite, nous regarderons l'évolution de la PSF en fonction des paramètres. Enfin, nous étudierons les variations de la PSF en fonction de la position sur l'image.

4.3.3.1 Etude du SSIM en fonction de N_θ et $d\rho$

Les courbes de la figure 4.9 comparent le SSIM obtenu pour la méthode SART et OSEM, en fonction du nombre de projections et d'échantillons. Les tableaux 4.3 et 4.4 récapitulent les corrélations lumineuse, de contraste et géométrique obtenues.

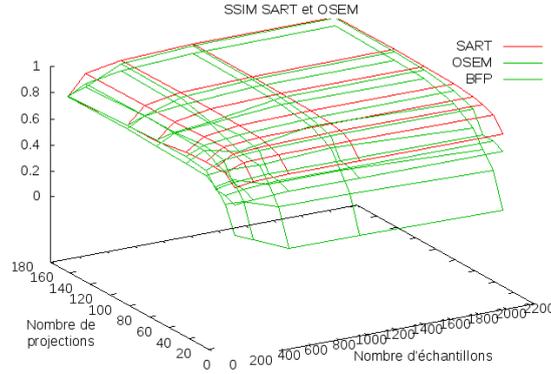


FIGURE 4.9: SSIM de SART et OSEM en fonction du nombre de projections et d'échantillons.

	128	256	512	1024	2048
10	0.993	0.998	0.999	0.999	0.999
20	0.998	0.998	0.996	0.996	0.996
30	0.990	0.996	0.993	0.995	0.995
40	0.988	0.995	0.994	0.994	0.994
60	0.981	0.990	0.994	0.997	0.997
90	0.959	0.985	0.994	0.996	0.997
120	0.959	0.984	0.994	0.996	0.997
180	0.941	0.983	0.991	0.994	0.996

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.958	0.942	0.941	0.936	0.938
20	0.960	0.965	0.958	0.959	0.959
30	0.960	0.977	0.973	0.976	0.976
40	0.965	0.983	0.982	0.982	0.983
60	0.962	0.980	0.987	0.992	0.992
90	0.941	0.978	0.990	0.993	0.995
120	0.945	0.978	0.990	0.994	0.995
180	0.926	0.979	0.988	0.992	0.995

(b)

	128	256	512	1024	2048
10	0.797	0.828	0.839	0.841	0.842
20	0.863	0.915	0.933	0.938	0.939
30	0.871	0.933	0.955	0.961	0.962
40	0.874	0.938	0.962	0.969	0.971
60	0.869	0.940	0.968	0.976	0.979
90	0.863	0.940	0.970	0.980	0.983
120	0.857	0.938	0.971	0.982	0.985
180	0.853	0.935	0.970	0.984	0.987

(c)

TABLE 4.3: Évolution de la corrélation en luminosité (a), en contraste (b) et géométrique (c) de SART avec MLS et 4 itérations.

	128	256	512	1024	2048
10	0.929	0.938	0.959	0.953	0.958
20	0.929	0.923	0.942	0.915	0.918
30	0.930	0.939	0.930	0.914	0.911
40	1.000	0.999	0.999	0.995	0.995
60	0.993	0.995	0.997	1.000	1.000
90	0.976	0.965	0.964	0.997	0.999
120	0.968	0.959	0.987	0.997	0.999
180	0.948	0.933	0.983	0.995	0.999

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.919	0.912	0.890	0.902	0.896
20	0.930	0.940	0.923	0.950	0.949
30	0.937	0.929	0.941	0.956	0.959
40	0.915	0.938	0.938	0.954	0.956
60	0.926	0.941	0.948	0.963	0.971
90	0.933	0.925	0.925	0.979	0.985
120	0.932	0.927	0.966	0.984	0.989
180	0.922	0.913	0.971	0.987	0.994

(b)

	128	256	512	1024	2048
10	0.730	0.745	0.769	0.759	0.769
20	0.758	0.785	0.799	0.795	0.800
30	0.762	0.793	0.804	0.803	0.807
40	0.835	0.878	0.899	0.901	0.905
60	0.856	0.908	0.932	0.939	0.942
90	0.864	0.924	0.953	0.963	0.966
120	0.863	0.927	0.956	0.968	0.971
180	0.859	0.928	0.961	0.975	0.978

(c)

TABLE 4.4: Évolution de la corrélation en luminosité (a), en contraste (b) et géométrique (c) de OSEM avec 5 itérations.

Comme le montre le schéma 4.9, SART et OSEM ont un comportement similaire en fonction de N_θ et $d\rho$. Le SSIM est légèrement inférieur à 0.8 lorsque $N_\theta \leq 20$ ou $d\rho = 4$. Dès 30 projections ou $d\rho = 2$, le SSIM est supérieur à 0.9. Avec l'échantillonnage standard, il passe à 0.95. Il atteint 0.97 en sur-échantillonnage.

La comparaison avec la méthode directe BFP montre que les méthodes itératives sont efficaces lorsque le nombre de projections est faible. En effet, la méthode BFP a un SSIM de 0.3 environ lorsque $N_\theta = 10$. Le SSIM augmente lentement avec le nombre de projections, mais ne dépasse 0.8 que lorsque $N_\theta = 90$. Avec 180 projections et un échantillonnage standard, la BFP atteint environ

0.9 (figure 4.10(a)). En comparaison, les méthodes itératives fournissent un résultat similaire avec 60 projections (figure 4.10(b)). Le SSIM de la BFP avec 60 projections (figure 4.10(c)) est de 0.75. On remarque notamment de nombreux artéfacts résiduels, qui n'apparaissent pas sur les résultats des méthodes itératives.

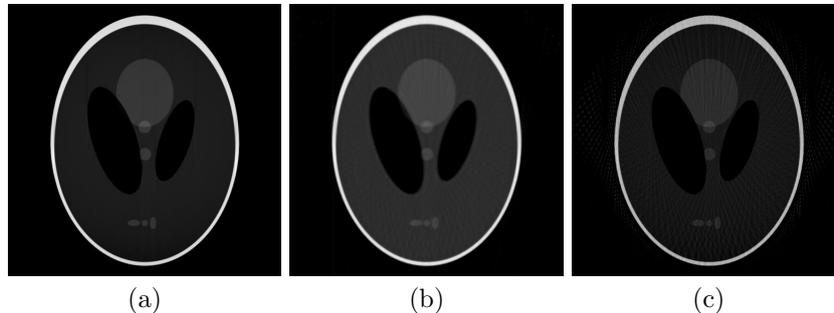


FIGURE 4.10: La BFP avec 180 projections (a) obtient un SSIM équivalent à celui de SART avec 60 projections (b). En comparaison, la BFP à 60 projections (c) est encore artéfactée.

Les détails du SSIM pour les méthodes SART et OSEM sont donnés respectivement sur les tableaux 4.3 et 4.4. Les deux méthodes ont une forte corrélation en luminosité et en contraste quels que soient N_θ et N_ρ . On retrouve donc une propriété de la méthode BFP, mais les méthodes itératives les recouvrent plus précisément. OSEM est légèrement en dessous en corrélation de luminosité (-0.08 environ) et géométrique (0.12 environ) lorsque $N_\theta < 40$. Au delà, les méthodes sont équivalentes. Pour les deux méthodes, c'est la corrélation géométrique qui est faible et qui pénalise le SSIM lorsque N_θ ou N_ρ est petit. Cette propriété était aussi vérifiée avec la BFP. Là encore, les méthodes itératives définissent plus précisément les régions que les méthodes directes. Donc, bien qu'elles aient un comportement similaire à ces dernières, SART et OSEM retrouvent plus précisément la luminosité, le contraste et la géométrie dans l'image pour tout N_θ et $d\rho$.

4.3.3.2 Etude de la PSF au centre en fonction de N_θ et $d\rho$

La comparaison de la PSF de SART et OSEM en fonction de N_θ et $d\rho$ est présentée sur la figure 4.11. La méthode SART présente un SSIM relativement stable en fonction de N_θ et $d\rho$. Le gain se situe entre 4 lorsque le taux d'échantillonnage est de 4, et monte 10.5 en super-résolution. En échantillonnage standard, le gain est supérieur à 7 et est comparable à celui observé pour la BFP. De plus, le gain augmente sensiblement avec le nombre de projections.

En sous échantillonnage ou échantillonnage standard, OSEM donne les mêmes résultats. En revanche, en sur-échantillonnage, le gain de la PSF augmente de façon considérable. Il devient supérieur à 12 en moyenne lorsque $N_\rho = 1024$, et dépasse 20 lorsque $N_\rho = 2048$. L'étalement du point est donc très faible avec la méthode MLEM. Un zoom sur le pulse de Dirac lorsque $N_\theta = 180$ et $N_\rho = 2048$ est proposé sur la figure 4.12. La luminosité des images a été augmentée pour mieux discerner les différences de niveaux de gris. Les pixels aux bords des images définissent le noir de référence. Avec la méthode SART (à gauche), on constate encore quelques pixels grisés, témoins d'un léger étalement du point. Avec la méthode MLEM, tous les pixels autour de l'impulsion apparaissent noirs.

4.3.3.3 Étude de la PSF en fonction de la position sur l'image

La figure 4.13 présente le gain de la PSF obtenu par SART et OSEM en fonction de la position sur l'image. Les deux méthodes présentent un gain quasiment uniforme sur l'image. Le gain obtenu

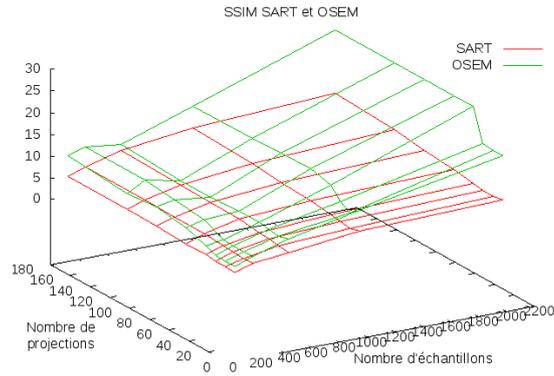


FIGURE 4.11: Comparaison du gain de la PSF au centre obtenue par les méthodes SART et OSEM en fonction de N_θ et N_ρ .

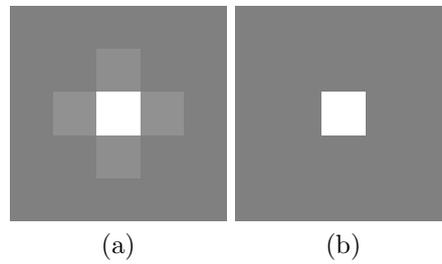


FIGURE 4.12: Avec la méthode SART (a), quelques pixels sont grisés autour de l'impulsion. Il y a donc étalement du point. Avec la méthode OSEM (b), il n'y a plus d'étalement. Pour des questions de visibilité, la luminosité des images a été augmentée. Les pixels gris autour des images correspondent au noir obtenu sur les images initiales.

par la méthode OSEM est compris entre 10.5 et 11.5. Celui de la méthode SART est compris entre 8 et 9 et est équivalent à celui de la méthode BFP. La précision de la méthode OSEM est donc supérieure à celle de SART et des méthodes directes.

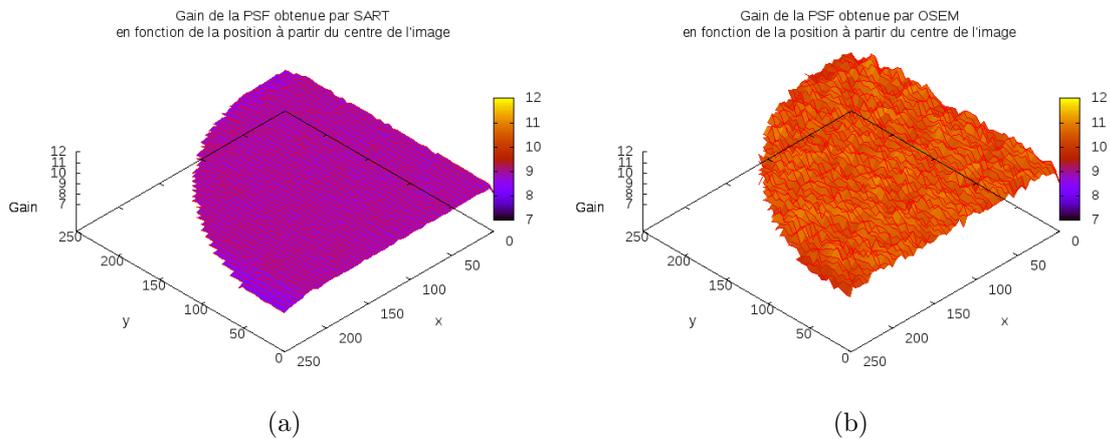


FIGURE 4.13: Gain de la PSF obtenu pour SART (a) et OSEM (b) en fonction de la position sur l'image.

4.3.4 Étude du SNR des méthodes SART et OSEM

Nous regardons maintenant l'influence du bruit sur les méthodes non régularisées SART et OSEM. Dans un premier temps nous étudions l'évolution du SNR en fonction des paramètres. Ensuite, nous regardons le SNR en fonction du bruit sur les projections. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode directe BFP.

4.3.4.1 SNR en fonction de N_θ et N_ρ

Les courbes de la figure 4.14 montrent l'évolution du SNR en fonction N_θ et N_ρ . Avec la méthode SART, le SNR augmente légèrement avec le taux d'échantillonnage. Il présente toutefois un minimum à l'échantillonnage standard. Il y a donc moins de répercussions du bruit sur l'image lorsque $d\rho$ est soit très petit, soit très grand. Ainsi, avec $N_\theta = 120$ par exemple, le SNR oscille entre -0.12 (échantillonnage standard) et 0.95 (sur-échantillonnage). Cependant, la variation la plus remarquable est celle observée en N_θ . En effet, plus le nombre de projections augmente, plus le SNR diminue. Ainsi, avec SART, l'ajout de projections ne permet pas de diminuer globalement l'effet du bruit. Au contraire, ce dernier s'accroît. Ainsi, en échantillonnage standard, le SNR est de 0.5 avec 60 projections et de -0.38 avec 180 projections. Comme nous savons que cette reconstruction est efficace avec peu de projections (étude du SSIM faite précédemment), il est préférable de reconstruire avec moins de projections lorsque celles-ci sont bruitées. En effet, les images de la figure 4.15 montrent que la reconstruction avec 60 projections est moins bruitée que celle avec 180 projections.

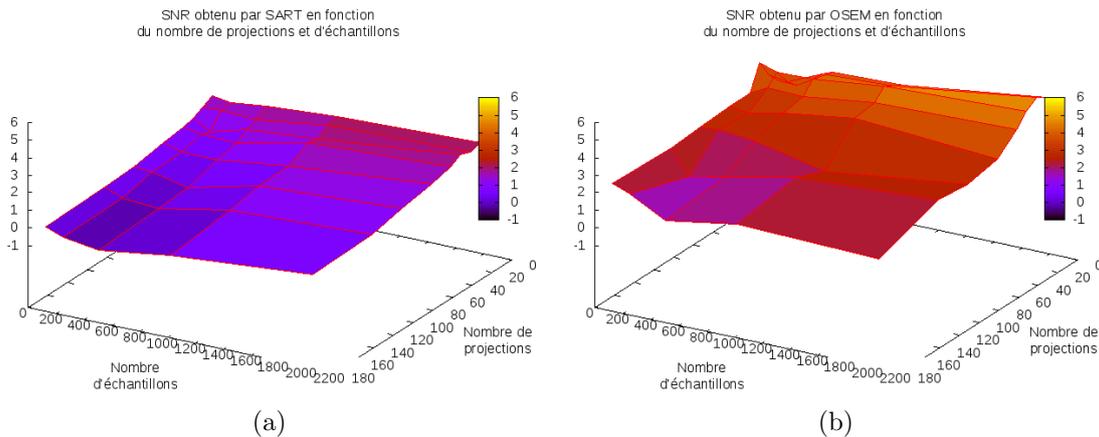


FIGURE 4.14: Comparaison du SNR obtenu par les méthodes SART (a) et OSEM (b) en fonction de N_θ et N_ρ .

Avec OSEM, on constate une évolution similaire : le SNR augmente légèrement avec le nombre d'échantillons, et diminue avec le nombre de projections. Contrairement à SART, l'évolution avec $d\rho$ est plus atténuée. Par exemple à 120 projections en sous-échantillonnage, le SNR est de 2.66 . Il est encore élevé (1.62) en échantillonnage standard, et remonte à 2.93 en sur-échantillonnage. L'évolution avec N_θ est comparable à celle de SART. On passe ainsi de 3.67 à 1.32 lorsqu'on va de 10 à 180 projections. Cependant, le SNR de OSEM est globalement bien au dessus de celui de SART ($+1.70$ en moyenne). OSEM est donc beaucoup plus robuste aux bruits que SART.

4.3.4.2 SNR en fonction du bruit sur les projections

La figure 4.16 présente l'évolution du SNR en fonction de la quantité de bruit appliqué au sinogramme. On constate une fois de plus la supériorité des méthodes itératives par rapport aux

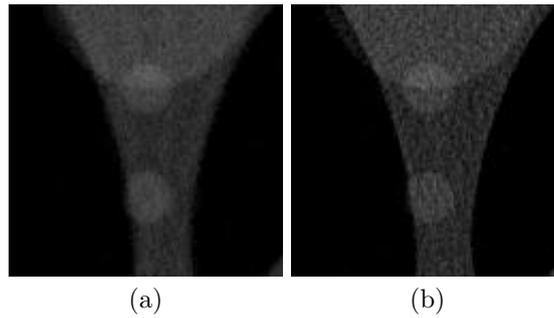


FIGURE 4.15: Pour une qualité de reconstruction équivalente (d'après l'étude du SSIM), la reconstruction SART avec 60 projections (a) est moins bruitée que celle avec 180 projections (b).

méthodes directes, et de la méthode OSEM par rapport à la méthode SART. Les images de la figure 4.17 présentent respectivement la reconstruction obtenue avec les méthodes OSEM, SART et BFP lorsque le bruit appliqué sur le sinogramme est de 0.2. Avec OSEM, l'image est peu bruitée, toutes les régions sont distinctes même si certains contours sont atténués. Avec SART, le résultat est déjà beaucoup plus bruité. Il devient difficile de distinguer toutes les régions. Cependant, les zones représentant l'air (en noir) sont encore saines. Avec la BFP, on ne distingue plus la plupart des contours et les régions vides sont bruitées.

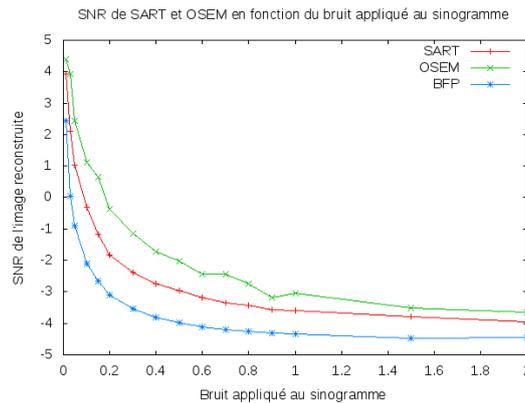


FIGURE 4.16: Comparaison du SNR obtenu par les méthodes SART et OSEM en fonction du bruit sur les projections.

4.3.5 Régularisation de la méthode OSEM

Comme nous l'avons observé dans les sections précédentes, la méthode OSEM est particulièrement efficace : elle donne une très bonne qualité de reconstruction, même lorsque le nombre de projections est faible. De plus, sa PSF est uniforme et très élevée, ce qui en fait une méthode de reconstruction particulièrement précise. Toutefois, nous savons que cette méthode peut diverger très rapidement. Le nombre d'itérations est donc le paramètre fautif de cette méthode, ce qui la rend difficilement exploitable. Aussi, des méthodes de régularisations ont été proposées pour atténuer l'effet du bruit (hautes fréquences) qui sont à l'origine de cette divergence.

Dans cette section, nous nous intéressons donc à l'effet de ces régularisations. Dans un premier temps, nous allons regarder l'évolution de la convergence de la solution avec OSEM régularisée

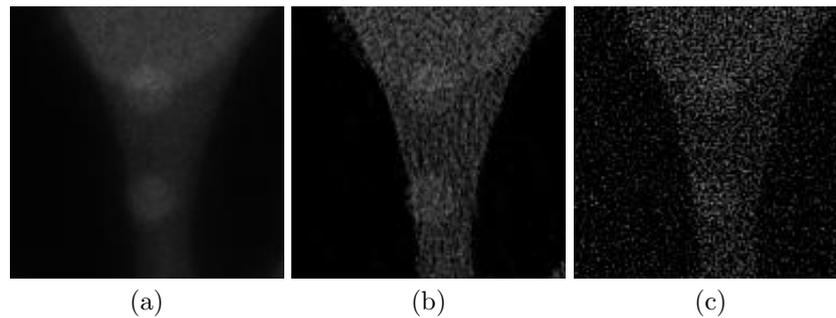


FIGURE 4.17: Avec un bruit de 0.2 sur le sinogramme, la reconstruction OSEM (a) est exploitable car peu affectée. La méthode SART (b) est bruitée mais on distingue encore les contours et les régions représentant l'air (en noir) sont saines. Avec la BFP (c), même les régions vides sont bruitées et on ne distingue plus certains contours.

en fonction des itérations. Les résultats seront comparés à ceux étudiés à la section 4.3.2. Ensuite nous verrons si ces régularisations ont une influence sur la qualité du résultat (SSIM) et sur la précision (PSF). Enfin, nous regarderons comment la régularisation réduit l'effet du bruit par une comparaison du SNR en fonction des paramètres d'acquisition.

4.3.5.1 Convergence des méthodes régularisées

Le schéma 4.18 présente la convergence de la méthode MLEM (a) et OSEM (b) en fonction des régularisations utilisées (présentées sur le tableau 4.1). MLEM sans régularisation atteint le maximum de convergence à l'itération 13, puis diverge dès l'itération suivante. Avec la régularisation de Geman et McClure [26], notée *REG1*, la convergence est conservée pendant 2 itérations, puis commence à diverger. L'erreur liée à la divergence devient plus importante que la reconstruction sans régularisation à partir de l'itération 17. Cette régularisation offre donc une marge de 4 itérations. Pendant ces itérations, il est aisé de détecter la fin de la convergence (différence entre I^k et I^{k-1} très faible). La régularisation *REG2*, proposée par Hebert et Leahy [41] maintient le maximum de convergence entre l'itération 13 et 17. Ensuite, la solution commence à diverger. La régularisation permet donc de contenir durant quelques itérations la divergence de la solution. En revanche, dès que la solution commence à diverger, l'erreur augmente plus rapidement.

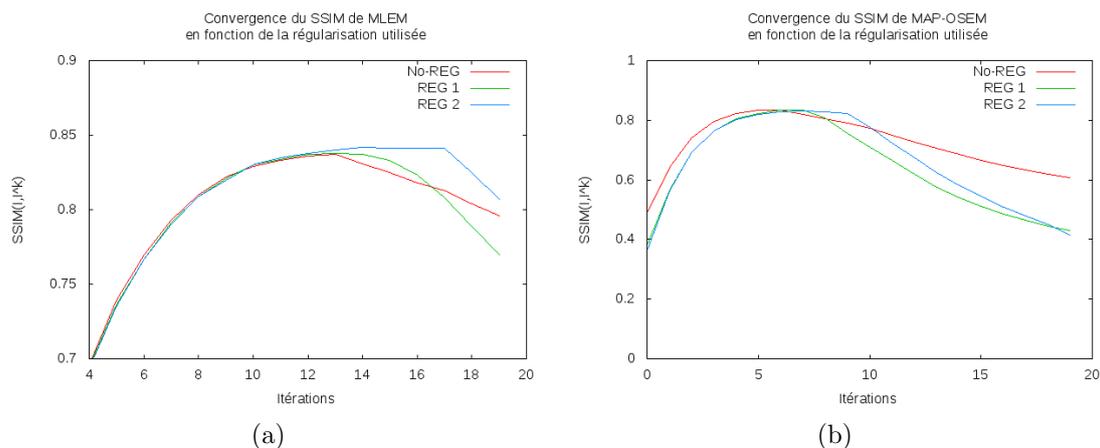


FIGURE 4.18: (a) Convergence de la méthode MLEM avec les régularisations de Geman et McClure (*REG1*) et de Hebert et Leahy (*REG2*). (b) Convergence de la méthode OSEM (avec le nombre d'OS défini précédemment) en fonction des mêmes régularisations.

Avec OSEM, on constate un maintien sur 2 itérations avec la régularisation de Geman et McClure. La régularisation de Hebert et Leahy maintient la convergence sur 4 itérations (entre les itérations 5 et 9). En revanche, elle diverge très rapidement et l'erreur est déjà supérieure à la reconstruction classique dès l'itération 10. Avec les sous-ensembles ordonnés, il faut donc utiliser les régularisations avec prudence : soit en maîtrisant parfaitement les itérations (détecter la fin de la convergence par l'erreur $\epsilon = I^k - I^{k-1} \approx 0$), soit en choisissant des coefficients de régularisations assez faibles pour ralentir la divergence.

4.3.5.2 Influence de la régularisation sur le SSIM et la PSF

Nous observons maintenant l'influence de la régularisation sur le SSIM et la PSF. Nous utilisons la méthode OSEM, paramétrée comme précédemment, et la régularisation de Hebert et Leahy. Les schémas 4.19(a) et 4.19(b) illustrent respectivement le SSIM et la PSF de MAP-OSEM en fonction de N_θ et N_ρ . On peut constater que la régularisation n'a quasiment pas d'influence sur la qualité et la précision du résultat.

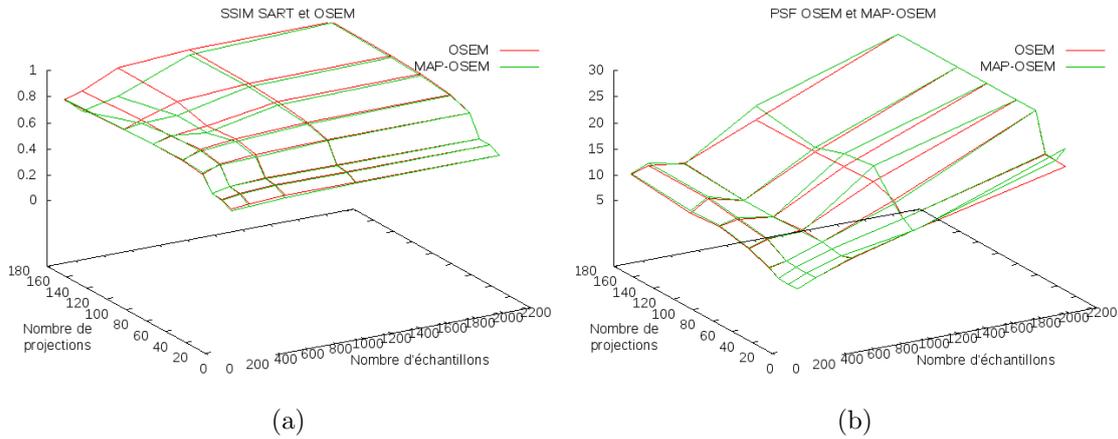


FIGURE 4.19: (a) SSIM de la méthode MAP-OSEM avec la régularisation de Hebert et Leahy. (b) PSF de la méthode MAP-OSEM.

4.3.5.3 Influence de la régularisation sur le SNR

Le schéma 4.20(a) présente le SNR obtenu par la reconstruction MAP-OSEM utilisant la régularisation de Hebert et Leahy en fonction des paramètres. Le SNR est comparé à celui obtenu sans optimisation. Le SNR de MAP-OSEM est inférieur à celui de OSEM pour tout N_θ et N_ρ . En échantillonnage standard, ou en sur-échantillonnage, le SNR est de 2 environ, alors qu'il est de 3 avec OSEM. Toutefois, le gain est encore suffisant et les images obtenues sont peu bruitées. En sous échantillonnage en revanche, le gain du SNR diminue fortement et devient même négatif lorsque $N_\theta \geq 90$. Globalement, la régularisation de Hebert et Leahy est donc plus sensible au bruit.

Le schéma 4.20(b) montre le SNR de la méthode MAP-OSEM en fonction du bruit sur les projections. Le gain du SNR observé lorsque le bruit est assez faible (inférieur à 0.5) n'est pas compétitif comparé à la méthode non régularisée. Mais on constate que la méthode MAP-OSEM maintient le bruit lorsque celui-ci augmente. On obtient donc un SNR stabilisé à -3 dès que le bruit est supérieur à 0.9.

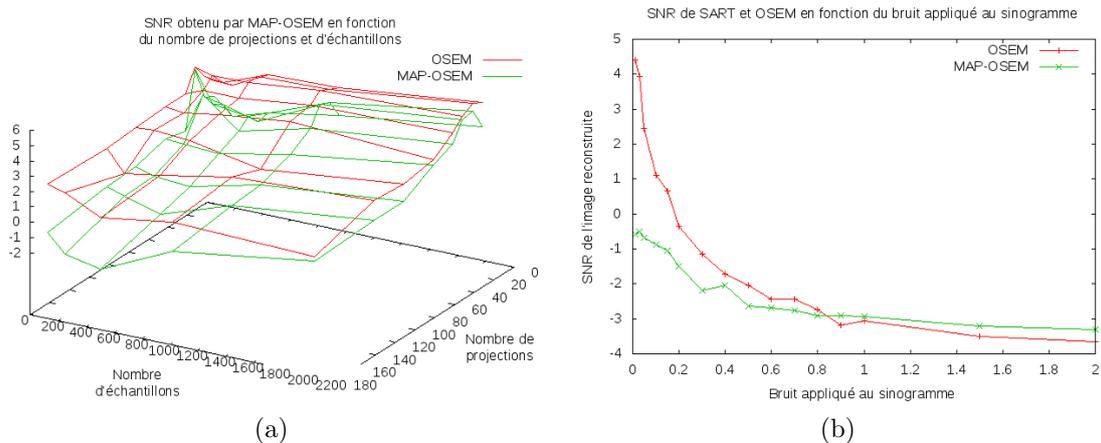


FIGURE 4.20: (a) SNR de la méthode MAP-OSEM avec régularisation de Hebert et Leahy en fonction des paramètres. Comparaison avec le SNR de la méthode OSEM non régularisée. (b) SNR de la méthode MAP-OSEM en fonction du bruit sur les projections.

4.3.5.4 Remarques

L'usage d'une régularisation est un élément essentiel pour maîtriser les itérations. En effet, elle permet de maintenir la solution au maximum de convergence et de détecter à quelle itération s'arrêter sans détériorer le résultat. En revanche, le type de régularisation utilisé peut nuire aux performances de la reconstruction. Ainsi, le noyau de Hebert et Leahy ne modifie pas le SSIM et la PSF. La reconstruction est donc d'aussi bonne qualité et aussi nette qu'avec OSEM non régularisée. En revanche, la perte de SNR n'est pas négligeable. Si celui-ci est compétitif lorsque les acquisitions sont extrêmement bruitées, il n'en demeure pas moins inférieur dans la majorité des cas (avec un bruit standard inférieur à 0.5). La reconstruction régularisée consiste donc en un subtil compromis entre le paramétrage du nombre d'itérations (détecter la fin de la convergence), le SNR (plus faible), la qualité et précision souhaitées.

4.4 Conclusion sur la précision et la qualité des méthodes itératives

Dans ce chapitre, nous avons abordé les méthodes itératives. Ces méthodes s'appuient sur une correction de l'erreur dans l'image au fur et à mesure de la reconstruction. Cette correction s'effectue par des mises à jours successives de l'image au cours des itérations. Pendant les itérations, c'est la considération d'une ou de plusieurs projections qui permet d'atténuer l'erreur engendrée par le bruit ou les effets de la discrétisation sur les autres projections. Il en résulte globalement une qualité, une précision et une résistance aux bruits d'acquisition supérieures à celles des méthodes directes.

Parmi les méthodes itératives, nous avons distingué celles basées sur une résolution itérative d'un système linéaire (méthodes algébriques) et celles s'appuyant sur une modélisation probabiliste. Nous avons détaillé des méthodes de formes additives et multiplicatives. De plus, nous avons abordé des optimisations comme le découpage en sous-ensembles et les régularisations. Le premier a amené à une convergence plus rapide vers la solution ; optimisant ainsi les temps de calculs. La seconde a permis de constater un maintien de la convergence autorisant un arrêt des itérations au moment le plus opportun. Ces régularisations ont toutefois généré une perte sur le SNR ; en conservant la PSF et le SSIM. Au delà de la complexité de mise en pratique de ces méthodes, retenons qu'une bonne maîtrise de leur paramétrage permet d'obtenir des images supérieures en qualité et en précision que celles obtenues avec les méthodes directes.

Conclusion de la première partie

Dans cette partie, nous avons étudié la qualité, la précision et la robustesse aux bruits dans les projections des principales méthodes directes ou itératives développées pour la reconstruction tomographique.

D'abord, nous nous sommes intéressés aux méthodes directes et avons étudié différents noyaux de pixels pour minimiser les effets de la discrétisation dans le domaine spatial. Nous avons constaté que le noyau d'aire est efficace lorsque le taux d'échantillonnage est très grand. Mais il est apparu peu compétitif en temps de calcul dans le cas standard ou en sur-échantillonnage. Les autres noyaux n'ont pas montré de différences significatives.

Ensuite, nous avons abordé le problème de la discrétisation dans l'espace fréquentiel, associé au problème d'interpolation de la grille polaire vers la grille cartésienne. Nous avons constaté des déformations lorsque le nombre de projections est faible. Celles-ci sont dues aux fortes approximations de la bi-interpolation pour « retrouver » l'espace fréquentiel vide entre les projections. L'interpolation barycentrique a montré qu'il était préférable de ne pas reconstruire l'information manquante. Toutefois, ces méthodes génèrent des erreurs géométriques liés à l'échantillonnage, qui nous ont amené à restreindre leur l'usage au cas de sur-échantillonnage ou à l'imagerie par résonance magnétique.

La méthode BFP, à la fois basée sur l'inversion de Radon et sur le théorème de la tranche centrale, possède des propriétés de chacune de ces inversions. Comme l'inversion de Radon, elle conserve le contraste et la PSF est homogène en fonction de la position sur l'image. De plus, elle reproduit l'intensité, retrouve la géométrie et propose un gain en PSF important, comme la reconstruction de Fourier. En revanche, nous avons constaté une perte du SNR plus importante (liée au rehaussement des hautes fréquences). L'usage de fenêtres de Hann ou de Hamming, utilisées pour minimiser l'effet des très hautes fréquences, n'a pas abouti à des améliorations significatives du SNR.

Nous avons ensuite étudié les méthodes itératives et certaines de leurs optimisations. Globalement, la qualité, la précision et la résistance aux bruits de ces méthodes sont supérieures à la méthode BFP, même lorsque le nombre de projections ou d'échantillons est très faible. Le découpage en sous-ensembles de projections a permis d'accélérer la convergence de ces algorithmes sans détériorer les résultats, à condition qu'il y ait au minimum une vingtaine de projections par OS. De même, nous avons constaté que la régularisation permet de contenir temporairement la convergence et de faciliter l'estimation de l'itération d'arrêt. Toutefois, leur étude a mis en évidence une perte importante du SNR. Ce constat nous contraint donc, une fois encore, à un compromis entre les problèmes d'échantillonnage, de correction des erreurs et de qualité/précision souhaitées.

Le tableau 4.21 est un récapitulatif de la classification des méthodes. Les critères sont évalués par une note comprise entre 0 et 10. La sensibilité au nombre de projections et d'échantillons est une note inversée. Plus elle est élevée, plus la méthode est sensible aux paramètres. Nous rappelons aussi la qualité (conservation en intensité, en contraste et géométrique) et la précision globale. La précision en fonction de la position dans l'image est inversée (plus la note est importante, plus la

précision est fonction de la position). Enfin, le tableau rappelle la résistance aux bruits en fonction des paramètres et de la quantité. La note globale correspond à la somme des notes données (les sensibilités en N_θ , $d\rho$ et de la PSF en fonction de la position sont soustraites). La comparaison de ces notes globales détermine la classification des méthodes.

		Sensibilité globale aux paramètres		Qualité standard			Précision Standard		Résistance aux bruits		Note Globale	Commentaires
		N_θ	N_p	Cons. Int.	Cons. Cont.	Cons. Géo.	Centre	Sensibilité à la position dans l	par rapport à (N_θ et $d\rho$)	Quantité		
BFP	Dirac	7	7	6	9	5	7	1	4	3	19	
	B-Spline	3	3	7	7	6	7	1	4	3	27	
	Linéaire	2	2	8	9	6	7	1	4	3	32	
	Aire											
<hr/>												
	FR	5	2	9	9	8	7	7	2	6	27	Sensible aux problème d'échantillonnage (Shannon).
<hr/>												
	SART	2	3	9	9	9	8	1	7	6	42	Ordre des projections déterminant
<hr/>												
EM	OSEM	1	2	9	9	9	10	1	6	7	46	De préférence, le nombre de projection par OS ne doit pas être inférieur à 20.
	MAP	1	2	9	9	9	10	1	5	3	41	Plus facile pour déterminer l'itération d'arrêt mais moins robuste aux bruits

FIGURE 4.21: Comparatif récapitulatif et classification des méthodes de reconstruction. En rouge, les critères qui pénalisent fortement les reconstructions. En bleu, les critères qui privilégient les reconstructions.

Deuxième partie

Tomographie Discrète à Partir de Données Bruitées et/ou Incomplètes

Introduction de la deuxième partie

La plupart des méthodes exposées dans la première partie aboutit à de bons résultats mais aucune ne retrouve exactement le domaine initial (même lorsque les projections sont saines). Cette limitation est la conséquence de l'étape de discrétisation qui entraîne un échantillonnage irrégulier sur les projections. L'information nécessaire à la reconstruction d'un pixel n'est pas uniformément distribuée sur les projections.

En tomographie discrète (lorsque l'acquisition est effectuée depuis une image), il existe une transformée discrète exacte appelée la transformée Mojette, introduite par Guédon *et al.* [38] en 1995. Elle est exacte dans le sens où l'image reconstruite est équivalente à l'image initiale en l'absence de bruit sur les projections. Nous introduisons cette transformée et son inversion exacte (*Corner Based Inversion* notée ensuite CBI) dans le chapitre 5. La transformée Spline-Mojette, plus représentative d'une acquisition continue, est ensuite exposée [38]. Nous présenterons deux inversions à partir d'une telle acquisition. En particulier, nous verrons l'inversion CBI-Spline qui est une contribution de notre travail de recherche.

D'autre part, la géométrie d'acquisition de la transformée Mojette est différente de celle des modalités d'acquisitions usuelles. Ainsi, à partir d'un sinogramme classique, une interpolation vers un sinogramme Spline-Mojette est nécessaire avant de reconstruire avec les méthodes Mojette. Ces interpolations génèrent des erreurs sur les projections qui s'ajoutent à celles de la phase d'acquisition. Comme les algorithmes CBI ne sont pas robustes aux erreurs, des méthodes adaptées des reconstructions tomographiques usuelles ont été développées. Nous verrons en particulier les méthodes BFP-Mojette et SART-Mojette introduites par Servieres en 2005 [83] et dérivées des méthodes BFP et SART. Comme elles permettent une reconstruction à partir d'un sinogramme réel, nous en étudierons la qualité, la précision et la robustesse aux bruits.

Contrairement à ces méthodes dérivées, les algorithmes CBI lient fortement les données reconstruites aux données du sinogramme. Cette propriété confère à ce type d'algorithme bon nombre de perspectives d'applications, notamment en tomographie locale ou en reconstruction à partir de données incomplètes. Toutefois, l'inversion CBI n'est pas utilisable directement car elle n'est pas robuste aux bruits dans les projections.

Dans le chapitre 6, nous développerons donc de nouveaux algorithmes CBI plus robustes aux bruits d'acquisition et aux approximations dans les projections. De même, nous proposerons une méthode pour retrouver des projections Mojette à partir d'un sinogramme Spline-Mojette bruité. Ainsi, nous envisagerons la reconstruction à partir de données réelles en utilisant ces nouveaux algorithmes. Notamment, nous proposerons une amorce de solution pour résoudre le problème des déformations lorsque l'acquisition est incomplète. L'ensemble de l'étude menée dans ce chapitre représente la principale contribution de cette deuxième partie.

Chapitre 5

Reconstruction tomographique par transformée discrète

En tomographie discrète, c'est-à-dire lorsque l'acquisition est effectuée à partir d'une image, les reconstructions basées sur la transformée de Radon ne sont pas exactes. L'image obtenue après reconstruction n'est pas identique (même en l'absence de bruits sur les projections) à celle de départ. Cette limitation est due aux problèmes d'échantillonnages que nous avons évoqués dans la première partie. Il n'y a pas une représentation uniforme des pixels dans les projections car l'échantillonnage est irrégulier. Cette irrégularité est causée par l'uniformité de la géométrie des projections ($d\theta$ et $d\rho$ fixes). Si on définit une acquisition pour laquelle chaque angle de projection et chaque taux d'échantillonnage est déterminé en fonction des propriétés de la grille discrète, on peut mettre en place une acquisition de Radon discrète spécifique ayant un échantillonnage uniforme. Ce dernier permet de couvrir uniformément les pixels sur les projections. Autrement dit, chaque pixel contribue avec la même importance que les autres sur chaque projection.

Conscients des problèmes d'échantillonnages dans les projections depuis le début des années 1990 [34], Guédon *et al.* [38, 35] ont développé une transformée de Radon discrète à géométrie spécifique sur les projections. Cette méthode, appelée transformée *Mojette* propose en particulier une inversion exacte en l'absence de bruit sur les projections, appelée CBI (de l'anglais *Corner Based Inversion*). Toutefois, la géométrie des projections de la transformée *Mojette* diffère de celle de la tomographie usuelle. En particulier, les droites de projections ne sont pas des droites discrètes (ensemble de pixels connexes). En utilisant des interpolateurs B-Spline [97, 98] sur les projections, la transformée Spline-*Mojette* [37] (en comparaison avec la transformée Dirac-*Mojette* précédente) a pu être introduite. Ses projections sont bien définies par des droites discrètes. La reconstruction Spline-*Mojette* est ensuite établie [76] et constitue l'une des contributions de ce document. D'abord, une inversion basée sur la résolution d'un système triangulaire est proposée. Ensuite, une solution alternative basée sur une version Spline de l'algorithme CBI est exposée.

Les limitations des algorithmes CBI seront ensuite exposées. Nous verrons que ces inversions ne sont pas robustes aux bruits dans le sinogramme et que l'acquisition doit vérifier un critère de faisabilité pour assurer une reconstruction complète. Pour contourner ces limitations, des méthodes issues de la tomographie usuelle (BFP et SART notamment) ont été ajustées à la transformée *Mojette* [82]. Ces dernières ne sont plus exactes en l'absence de bruit sur les projections. Mais elles ne sont pas assujetties aux limitations des algorithmes CBI. Ainsi, à partir d'une interpolation depuis un sinogramme réel vers un sinogramme Spline-*Mojette*, on peut envisager de reconstruire une image (depuis une acquisition réelle) en utilisant les méthodes BFP-*Mojette* ou SART-*Mojette*. Soucieux de la précision et de la qualité en tomographie, nous effectuerons un comparatif en SSIM, PSF et SNR entre ces reconstructions et celles vues en première partie.

5.1 Transformée Mojette : définition et inversion exacte

La transformée discrète de Radon évoquée à la section 1.2 permet l'acquisition de projections à partir d'une image. Cependant, lors du calcul des projections, nous ne tenons pas compte des propriétés de la grille. Les valeurs θ et ρ utilisées impliquent des approximations à l'intersection des pixels avec les droites de projections.

Connaissant les propriétés géométriques de la grille discrète, il est possible de définir des angles spécifiques et de s'affranchir des approximations liées à l'échantillonnage angulaire et radial dans la transformée de Radon. On obtient alors un échantillonnage régulier des pixels dans les projections. La transformée Mojette a été proposée comme solution par Jean Pierre Guédon en 1995 [38, 35]. La principale caractéristique de cette transformée est qu'elle admet une reconstruction discrète exacte à partir de projections non bruitées. Cette reconstruction exacte, appelée CBI (de l'anglais *Corner Based Inversion*) est définie dans la suite de cette section.

Toutefois, cette transformée n'est géométriquement plus compatible avec la transformée de Radon. En effet, les droites de projections ne sont plus composées de droites discrètes mais d'une série de pixels non connexes. Nous définissons alors la transformée Spline-Mojette, dont les droites sont plus représentatives d'une acquisition classique. Nous verrons comment le sinogramme Spline-Mojette peut être calculé à partir d'un sinogramme Mojette ou mesuré par une acquisition discrète spécifique. Une inversion exacte en l'absence de bruit sur les projections permet de retrouver les bins Mojette à partir du sinogramme Spline-Mojette. Cette inversion est basée sur une résolution de système triangulaire. Il est alors possible d'appliquer l'algorithme CBI et d'obtenir une reconstruction exacte. Une solution alternative, appelée méthode CBI-Spline, est d'autre part proposée. Elle est basée sur l'algorithme CBI mais retrouve directement l'image à partir des projections Spline-Mojette.

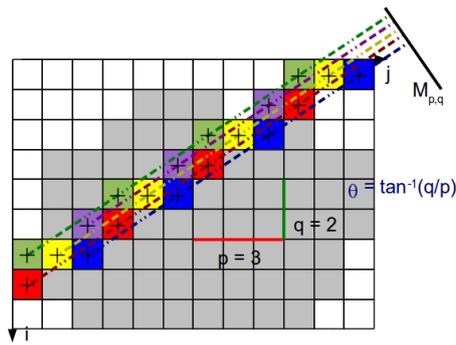
5.1.1 De Radon à Mojette

Pour définir la transformée Mojette, nous reprenons l'équation de la transformée de Radon Dirac discrète vue au chapitre 1. Elle est rappelée par la formule (5.62) suivante :

$$R_{\theta}(\rho) = \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} I(i, j) \Delta(\rho - j \cos\theta + i \sin\theta) \quad (5.62)$$

Dans cette équation, les valeurs retournées par $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont réelles pures. Par conséquent, $e = -j \cos\theta + i \sin\theta$ donne généralement un résultat réel. De plus, la différence $\rho - e$ interprète l'impulsion de Dirac comme étant vraie si elle est non nulle sans pour autant tenir compte de sa valeur.

Soient la variable p définissant le nombre de pixels de déplacement choisis horizontalement (axe x) et q le nombre de pixels choisis verticalement (axe y). Le couple (p, q) définit un angle spécifique $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$. Le schéma 5.1 montre par exemple l'angle défini par $p = 3$ et $q = 2$. Sur cette projection, on ne garde que les échantillons non nuls, c'est-à-dire ceux parallèles au vecteur $(3, 2)$ et intersectant le centre d'un ou plusieurs pixels. L'échantillonnage obtenu est régulier et dépend des variables (p, q) . Le schéma 5.1 montre quels pixels sont considérés (pour quelques échantillons) selon la projection d'angle $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$. Par exemple, seuls les pixels verts contribuent à la valeur de la droite de projection verte, que l'on appelle communément un bin de projection.

FIGURE 5.1: Pixels considérés sur les bins de projections selon l'angle $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$

Avec de telles conditions, $\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ et $\sin\theta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ dans l'équation de Radon Dirac. Posons $h = \sqrt{p^2+q^2}$. On peut remplacer dans l'équation de Radon Dirac, la variable ρ par $b = \rho * h$. On s'affranchit ainsi de la variable h introduite et on obtient l'équation de la transformée directe Dirac-Mojette donnée par la formule 5.63 ci-dessous :

$$M_{p,q}(b) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} I(i,j) \Delta(b - ip + jq) \quad (5.63)$$

Différents choix pour les valeurs du couple (p, q) peuvent donner des angles égaux. Par exemple, les couples $(p, q) = (1, 1)$ et $(p, q) = (2, 2)$ donnent le même angle $\theta = 45^\circ$. Choisir des couples (p, q) tels que $PGCD(p, q) = 1$, permet d'éviter les projections similaires. Enfin, comme les projections d'angles θ et $\theta + \pi$ sont symétriques, on pose $q > 0$ (sauf pour le cas de la projection horizontale où $p = 1$ et $q = 0$). Le choix de p et q entiers implique que $-ip + jq$ est entier. Dans ce cas $b = ip - jq$ indique la correspondance entre le pixel (i, j) et l'échantillon d'indice b .

La géométrie du sinogramme Mojette dépend des couples (p, q) . En particulier, une projection est échantillonnée uniformément pour un angle donné et le nombre de bins de projection dépend du couple (p, q) . Soit une image de taille $W \times H$. Le nombre de bins sur la projection (p, q) est donné par l'équation 5.64 suivante [66, 83].

$$N_{bins}(p, q, W, H) = (W - 1)|p| + (H - 1)|q| + 1 \quad (5.64)$$

Dans ce cas, le pas d'échantillonnage entre chaque bin de projection est :

$$d\rho_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad (5.65)$$

Voyons maintenant un exemple d'acquisition. Soit par exemple une image de taille 3×3 . Nous choisissons trois couples (p, q) vérifiant les conditions citées précédemment : $(-1, 1)$, $(1, 1)$ et $(1, 0)$. Nous calculons ces projections en utilisant la définition de la transformée Mojette donnée par l'équation 5.63. Le schéma 5.2 illustre le résultat des bins sur les projections choisies.

Soit maintenant une image, dite « unitaire » de taille similaire à l'image originale où chaque pixel a la valeur 1. Nous calculons de la même manière la somme des valeurs des pixels traversés sur chaque bins de projections. Le résultat obtenu, que l'on appellera ensuite « sinogramme unitaire » contient, pour chaque bin de projection, le nombre de pixels traversés lors du calcul. Ce résultat est présenté sur le schéma de droite de la figure 5.2. Il sera utilisé lors de la reconstruction.

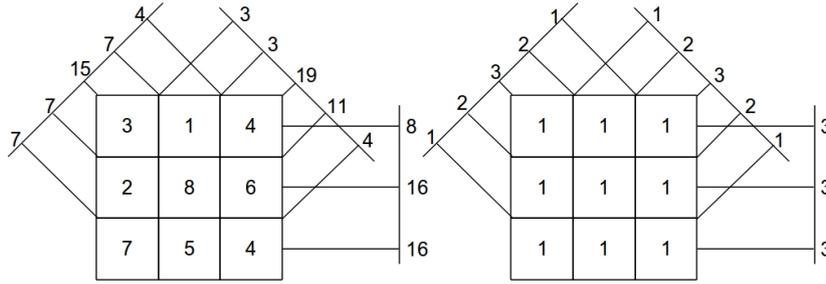


FIGURE 5.2: Calculs des bins de projections sur l'image et l'image unitaire

5.1.2 Algorithme Dirac-Mojette

Nous détaillons dans cette section l'algorithme d'acquisition Mojette. Pour chaque direction de projections définies par un couple (p, q) , on parcourt tous les pixels de l'image. La valeur de chaque pixel est ajoutée au bin de projection correspondant. Sur chaque projection, un pixel n'est considéré que sur un et un seul bin d'indice $b = ip - jq$.

Soient N_θ le nombre de projections et i_θ l'indice d'une projection définie par un couple (p, q) . Soient les fonctions $p(i_\theta)$ et $q(i_\theta)$ donnant respectivement les valeurs p et q de la projection i_θ . Soit $R_{i_\theta}(b)$ la valeur du bin b de la i_θ -ème projection. L'algorithme 4 calcule l'acquisition Dirac-Mojette. Soit N le nombre de pixels de l'image. La complexité de l'algorithme est $O(NN_\theta)$.

Algorithme 4 : Algorithme de calcul de la transformée Mojette Dirac

Entrées: $image \wedge width \wedge height \wedge N_p \wedge N_\theta$
pour $i_\theta \leftarrow 1$ à N_θ **faire**
 pour $i \leftarrow 1$ à $height$ **faire**
 pour $j \leftarrow 1$ à $width$ **faire**
 $b = (i - width/2) * p(i_\theta) - (j - height/2) * q(i_\theta)$
 $R_{i_\theta}(b) \leftarrow R_{i_\theta}(b) + image(i, j)$
 fin pour
 fin pour
fin pour
retourner R

5.1.3 Obtenir l'ensemble des directions de projections

Les angles de projections sont définis par des couples (p, q) tels que $PGCD(p, q) = 1$ avec $q > 0$ sauf pour le cas $p = 1$ et $q = 0$. Les angles sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ peuvent être calculés par les suites de Farey [91] et un arc de projection sur $[0, \pi]$ peut ensuite être obtenu par symétrie par rapport à la première bissectrice et l'axe des ordonnées. La suite de Farey d'ordre N , notée F_N est la suite en ordre croissant des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égal à N . F_{N+1} s'obtient à partir de F_N en insérant entre chaque fraction successive $\frac{m_i}{n_i}$ et $\frac{m_{i+1}}{n_{i+1}}$ de F_N une fraction médiane $\frac{m_j}{n_j}$ telle que $m_j = m_i + m_{i+1}$ et $n_j = n_i + n_{i+1}$ si $m_j < N + 1$ et $n_j \leq N + 1$ [30].

Par exemple, la suite de Farey d'ordre 1 est $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$. On peut en déduire F_2 en insérant $\frac{1}{2}$ entre les deux fractions de F_1 : $F_2 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\}$. De la même manière, on déduit F_3 à partir de F_2 en insérant les nouvelles fractions vérifiant les propriétés des suites de Farey : $F_3 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\}$. La suite de Farey d'ordre 4 est $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$, et ainsi de suite.

Les suites de Farey donnent des angles (p, q) discrets par l'intermédiaire des fractions de la forme $\frac{q}{p}$. Ces angles sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$. Par symétries, nous obtenons les angles de projections sur $[0, \pi[$. L'exemple 5.3 montre la représentation angulaire de la suite de Farey d'ordre 10 et de ses symétries.

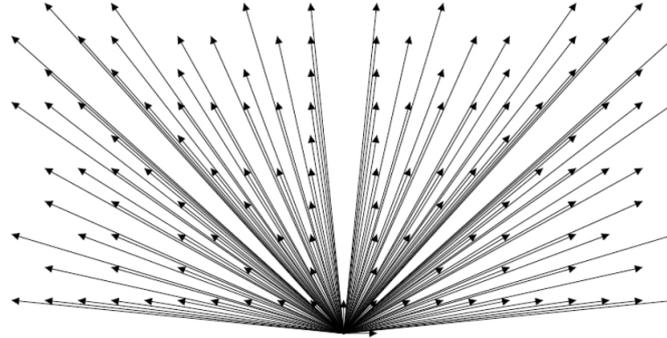


FIGURE 5.3: Représentation angulaire de la suite de Farey d'ordre 10 et symétries

5.1.4 Reconstruction exacte Mojette par l'algorithme CBI (Corner Based Inversion)

La reconstruction Mojette exacte a été mise en place et optimisée par Nicolas Normand en 1997 [66]. Elle assure la transformation inverse exacte en l'absence de bruit sur les projections. Elle nécessite deux sinogrammes. Le premier correspond au résultat du calcul de la transformée directe Mojette sur l'image originale. Le second correspond au résultat de la transformée directe sur l'image unitaire équivalente (voir figure 5.2).

Sur le sinogramme unitaire, si un bin de projection est à 1, un seul pixel a été traversé lors de l'acquisition. On appelle cela une « correspondance univoque ». Dans le sinogramme normal, la valeur positionnée sur ce même bin correspond donc à l'intensité de l'unique pixel traversé. Connaissant la projection sur laquelle il est situé, il est possible de retrouver le pixel (i, j) et de le reconstruire. Une étape de reconstruction est présentée sur la figure 5.4.

Le pixel reconstruit est aussi associé aux autres projections (et plus exactement à un et un seul bin de chaque projection). En parcourant l'ensemble des projections, nous pouvons retrouver les bins dans lesquels le pixel intervient et mettre à jour leurs valeurs. La mise à jour d'un bin consiste à soustraire l'intensité du pixel reconstruit à sa valeur dans le sinogramme normal et à décrémenter le même bin dans le sinogramme unitaire. En appliquant le même procédé itérativement, on fait apparaître de nouvelles correspondances univoques. On reconstruit ainsi l'image pixel par pixel.

Comme on reconstruit un et un seul pixel à la fois, une image de taille N est reconstruite en N étapes. Pour reconstruire entièrement l'image, il faut trouver une correspondance univoque à chaque itération. Une image de taille $N = W \times H$ est reconstructible par un ensemble de projections $P_{N_\theta} = \{(p_i, q_i), i \in \{1 \dots N_\theta\}\}$ si celui-ci vérifie le critère de Katz [51] défini par la formule 5.66.

$$W \leq \sum_{i=1}^{N_\theta} |p_i| \text{ ou } H \leq \sum_{i=1}^{N_\theta} |q_i| \quad (5.66)$$

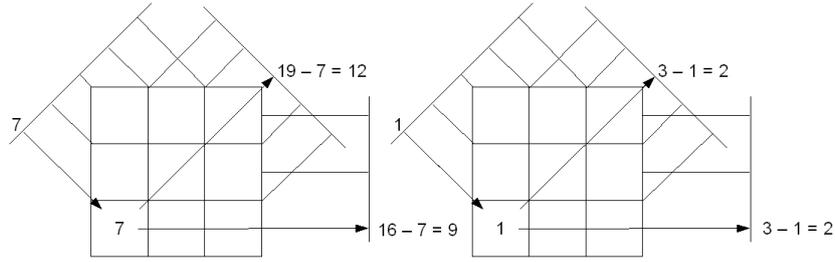


FIGURE 5.4: Reconstruction de l'image de départ à l'aide d'un sinogramme unitaire

Soit M le sinogramme obtenu par Dirac-Mojette depuis une image et M^t le sinogramme obtenu depuis l'image unitaire correspondante. Soient les fonctions $p(i_\theta)$ et $q(i_\theta)$ donnant respectivement les valeurs p et q de la i_θ -ème projection. La reconstruction Mojette exacte est donnée par l'algorithme 5. Au début de la reconstruction, tous les pixels de l'image sont définis à -1 .

Algorithme 5 : Algorithme de reconstruction Mojette exacte

Entrées: $M \wedge M^t \wedge W \wedge H \wedge N_\theta$

variables : $found$: *bool*, p, q, bin, mi, mj : *int*

```

pour  $phase \leftarrow 1$  à  $W \times H$  /*pixels à reconstruire*/ faire
  /* Étape 1 : recherche correspondance univoque et pixel correspondant */
   $found \leftarrow false$ 
  pour  $p = (i, j) \in I$ , tel que  $I(p) = -1$  faire
    pour  $i_\theta \leftarrow 1$  à  $N_\theta$  faire
      si  $M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}^t(b = ip(i_\theta) - jq(i_\theta)) = 1$  /* Correspondance trouvée */ alors
         $found \leftarrow true$ ,  $p \leftarrow p(i_\theta)$ ,  $q \leftarrow q(i_\theta)$ ,  $bin \leftarrow b$ ,  $mi \leftarrow i$ ,  $mj \leftarrow j$ 
        break;
      finsi
    fin pour
  fin pour
  si  $found = false$  /* Image non restructurable */ alors
    exit
  sinon
     $I(mi, mj) \leftarrow M_{p, q}(bin)$ 
    pour  $i_\theta \leftarrow 1$  à  $N_\theta$  faire
       $upbin \leftarrow mi \cdot p(i_\theta) - mj \cdot q(i_\theta)$ 
       $M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}(upbin) \leftarrow M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}(upbin) - I(mi, mj)$ 
       $M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}^t(upbin) \leftarrow M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}^t(upbin) - 1$ 
    fin pour
  finsi
fin pour
retourner  $I$ 

```

Soit l'image à reconstruire de N pixels. La recherche d'un pixel restructurable s'effectue par un parcours de l'image. Au début de la reconstruction, on parcourt au maximum N pixels. Au fur et à mesure de la reconstruction on parcourt de moins en moins de pixels, et au maximum à l'itération k (c'est-à-dire à la reconstruction du k -ième pixel), on parcourt $N - k + 1$ pixels. Globalement, la recherche de tous les pixels à reconstruire s'effectue donc en $O(\frac{N(N+1)}{2}) \Leftrightarrow O(N^2)$. Une fois un pixel trouvé, il faut chercher une correspondance univoque. Ce parcours prend au maximum

$O(N_\theta)$. La reconstruction du pixel est instantanée et la mise à jour des bins associés s'effectue en $O(N_\theta)$. La complexité globale de l'algorithme CBI est donc $O(N^2 N_\theta)$.

5.1.5 Exemple de Reconstruction par CBI

La reconstruction Mojette est exacte car elle reconstruit exactement chaque pixel de l'image. Chaque valeur de pixel est retrouvée grâce aux soustractions successives faites sur les bins de projections. Ces opérations sont rendues possibles par l'échantillonnage régulier entre les bins et les pixels et l'usage des correspondances univoques. Remarquons que ces correspondances apparaissent en premier sur les bords de l'image. Cette dernière est donc reconstruite des pixels au bord vers les pixels au centre; d'où son appellation *Corner Based Inversion*. Le seul critère de faisabilité est le critère de Katz précisé dans la section précédente. Nous devons chercher, avant calcul, la plus petite suite de Farey correspondante, c'est-à-dire la première donnant un ensemble de couple (p, q) vérifiant le critère de Katz. Dans le cas contraire, l'image n'est que partiellement reconstruite car il n'y a plus de correspondances univoques qui apparaissent avant la fin de la reconstruction.

Soit par exemple l'image Lena 5.5(a), de taille 512^2 . Nous calculons les couples (p, q) issus des suites de Farey à partir de l'ordre 6. Le tableau 5.1 ci-dessous récapitule le critère de Katz de ces ensembles de projections en fonction de l'image.

	F_6	F_7	F_8	F_9
N_θ	48	72	88	112
$\sum_{i=1}^{N_\theta} p_i $	147	273	369	531
$\sum_{i=1}^{N_\theta} q_i $	147	273	369	531
Critère de Katz	NV	NV	NV	V

TABLE 5.1: Vérification du critère de Katz en fonction de la suite de Farey utilisée (NV (Non Vérifié), V (Vérifié)). Pour chaque acquisition, le nombre de projections et la somme des p_i et des q_i sont donnés.

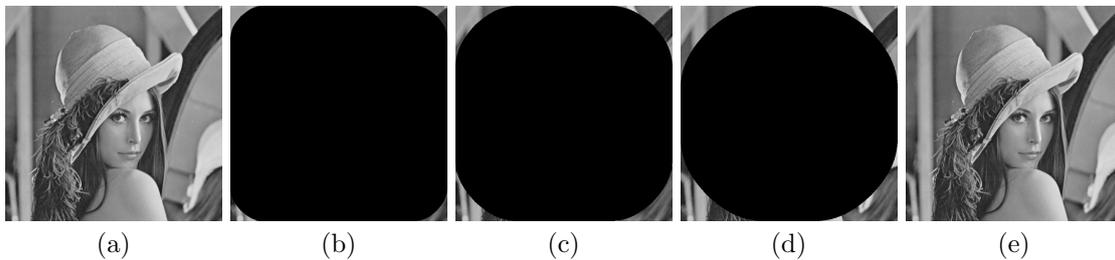


FIGURE 5.5: Image originale de taille 512^2 (a). Image reconstruite à partir de l'acquisition suivant la suite de Farey d'ordre 6 (b), 7 (c), 8 (d) et 9 (e).

Le critère de Katz n'est pas vérifié pour reconstruire l'image de taille 512^2 lorsque les projections sont obtenues par les suites de Farey d'ordres 6 à 8. Les images sont donc partiellement reconstruites. On peut noter au passage que les pixels sont retrouvés depuis les bords (où il y a le moins de pixels traversés, et donc le plus de correspondances univoques qui apparaissent) jusqu'au centre de l'image. Les couples (p, q) obtenus par la suite de Farey d'ordre 9 vérifient le critère de Katz. L'image est alors entièrement reconstruite (résultat présenté sur la figure 5.5(e)).

5.1.6 Transformée Spline-Mojette

La transformée Mojette vue précédemment utilise l'interpolateur de Dirac pour sélectionner sur chaque bin les pixels traversés en leur centre. Cette propriété confère une géométrie particulière aux

lignes de projections. Il ne s'agit plus de ligne discrète composée d'une suite de pixels connexes mais d'une série de pixels disparates. Par exemple, la ligne de projection des pixels gris sur la figure 5.6 n'est pas une ligne discrète car les pixels qui la composent ne sont pas voisins deux-à-deux.

La transformée Spline-Mojette [35] a donc été développée pour permettre aux bins de définir des lignes discrètes, et donc proposer une géométrie d'acquisition plus représentative de la réalité. Dans ce cas, tous les pixels traversant une ligne de projection sont considérés, même s'ils ne sont pas centrés.

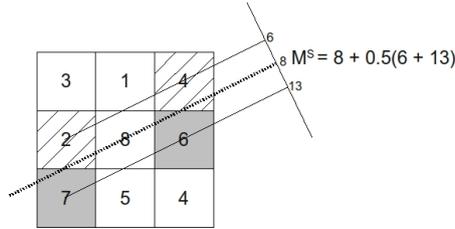


FIGURE 5.6: D'un bin Dirac-Mojette à un bin Spline-Mojette.

En effet, sur la figure 5.6, le bin de projection central (de valeur 8) est uniquement composé du pixel central de l'image. Pourtant, la ligne correspondante traverse aussi les pixels hachurés et grisés. Ces derniers définissent respectivement le bin précédent et le bin suivant. Par conséquent, la valeur d'un échantillon Spline-Mojette, noté $M_{p,q}^s(b)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de bins Dirac-Mojette [76] :

$$M_{p,q}^s(b) = \sum_{b_i=1}^{N_p(p,q)} \mathcal{B}_{p,q}^0(b, b_i) M_{p,q}(b_i) \quad (5.67)$$

où $\mathcal{B}_{p,q}^0(b, b_i)$ est le coefficient B-Spline dépendant de la distance entre b et b_i [97]. Il est équivalent à l'interpolateur \mathcal{B}^0 utilisé dans la transformée de Radon lorsqu'on calcule la contribution d'un pixel pour une projection. Avec un tel interpolateur, la valeur du bin central Spline-Mojette sur la figure 5.6 est la somme du bin Dirac-Mojette correspondant (avec la contribution maximale 1) et des bins voisins (avec la contribution 0.5 sur l'exemple).

La décomposition des valeurs $M_{p,q}^s(b)$ est identique pour toutes les droites de la projection. On peut donc simplifier le noyau $\mathcal{B}_{p,q}^0(b, b_i)$ et définir un noyau de convolution par projection [83], noté $\mathcal{B}_{p,q}(d)$ où d est la distance relative. Elle est négative si on traite les bins à gauche et positive sinon. Sur notre exemple précédent, ce noyau est de taille $|\mathcal{B}_{2,1}| = 3$ et vaut $(0.5, 1, 0.5)$ car la contribution du bin Dirac-Mojette central est $\mathcal{B}_{p,q}(0) = 1$ et celle des deux bins voisins est $\mathcal{B}_{p,q}(-1) = \mathcal{B}_{p,q}(1) = 0.5$. Notons que ce noyau est symétrique ($\mathcal{B}_{p,q}(-i) = \mathcal{B}_{p,q}(i)$).

Par ailleurs, l'acquisition Spline-Mojette fait apparaître de nouveaux bins sur les bords de l'image qui n'existent pas parmi les $N_{bins}(p, q, W, H)$ bins Dirac-Mojette. En effet sur le schéma 5.7, la projection $(p, q) = (2, 1)$ fait apparaître une ligne supplémentaire à chaque extrémité (droites en pointillées). Ces droites ne traversent aucun pixel en leur centre, mais leur valeur se mesure toujours à partir de bins Dirac-Mojette existant (et dans notre exemple, cette valeur est $0.5 \times$ la valeur du bin le plus proche). Le nombre de ligne à ajouter de chaque côté dépend de (p, q) et s'obtient directement à partir de la taille du noyau de convolution : $N_{add} = \lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor$. Par conséquent une projection Spline-Mojette contient au total $N_{bins}^s(p, q, W, H) = N_{bins}(p, q, W, H) + 2N_{add}$ éléments.

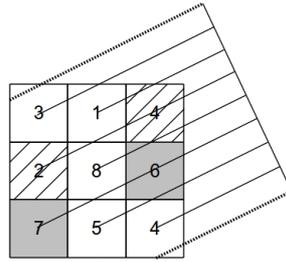


FIGURE 5.7: Contribution des bins Dirac-Mojette aux extrémités de l'image.

L'acquisition Spline-Mojette est équivalente à une acquisition de Radon discrète (équation 1.1), utilisant le noyau de pixel B-Spline vu à la section 3.1 et suivant une géométrie d'acquisition définie par une suite de Farey donnée [83]. En effet, soit l'acquisition de Radon discrète d'une projection d'angle $\theta = \tan^{-1} \frac{p}{q}$ avec un taux d'échantillonnage sur $d\rho = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$. L'angle est alors identique à celui utilisé dans Spline-Mojette. De même, la position b des bins est équivalente à la position des échantillons $\frac{\rho}{d\rho}$. On a alors $R_\theta(\rho) = M_{p,q}^s(b)$ si $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$ et $d\rho = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$ et R utilise le noyau \mathcal{B}^0 .

Il y a donc deux manières d'acquérir des projections Spline-Mojette. La première consiste à les calculer à partir des projections Dirac-Mojette en utilisant un noyau de convolution $\mathcal{B}_{p,q}(d)$. La seconde consiste à piloter une acquisition de Radon discrète avec une suite de Farey, et à utiliser le noyau de pixel B-Spline $\mathcal{B}(i, j, \theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}, \rho = \frac{b}{d\rho})$ vu au chapitre 3.

5.1.7 Vers une inversion Spline-Mojette

Les valeurs des bins Spline-Mojette sur une projection peuvent se représenter sous la forme d'un système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{p,q}^s(1) = \sum_{i=-\lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor} \mathcal{B}_{p,q}(i) M_{p,q}(1+i) \\ M_{p,q}^s(2) = \sum_{i=-\lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor} \mathcal{B}_{p,q}(i) M_{p,q}(2+i) \\ \dots \quad \dots \\ M_{p,q}^s(k) = \sum_{i=-\lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{|\mathcal{B}_{p,q}|}{2} \rfloor} \mathcal{B}_{p,q}(i) M_{p,q}(k+i) \\ \dots \quad \dots \end{array} \right. \quad (5.68)$$

Comme les projections Spline-Mojette contiennent plus de bins que les projections Dirac-Mojette, ce système est sur-évalué car il y a plus d'équations que d'inconnues. En utilisant des algorithmes de résolution de système d'équations linéaires tels que le pivot de Gauss ou encore Gauss-Seidel, on peut théoriquement retrouver les bins d'une projection Dirac-Mojette à partir des projections Spline-Mojette. Toutefois, le nombre d'inconnues peut être rapidement important ; affectant ainsi le temps de calcul. Par exemple, la projection (9, 8) utilisée à la reconstruction de l'image Lena de taille 512^2 contient 8688 bins (et donc d'inconnues) à retrouver.

Nous avons donc proposé dans [76] une résolution basée sur la triangularisation de ce système. Comme la première ligne Spline-Mojette d'une projection correspond à la dernière ligne traversant un pixel lorsqu'on s'éloigne des bins aux extrémités, sa valeur dépend du premier bin Dirac-Mojette et de la contribution $\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})$ (car N_{add} est la distance séparant la première ligne Spline-Mojette du premier bin à retrouver). On peut donc recalculer le premier bin $M_{p,q}(0) = \frac{M_{p,q}^s(-N_{add})}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})}$. En se décalant de 1 vers la droite, on retrouve de manière similaire le bin $M_{p,q}(1)$, à partir des projections Spline-Mojette, mais aussi du bin précédemment reconstruit. On obtient donc le système triangulaire ci-dessous, dont la résolution s'effectue séquentiellement ligne par ligne :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{p,q}(0) = \frac{M_{p,q}^s(-N_{add})}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})} \\ M_{p,q}(1) = \frac{M_{p,q}^s(-N_{add} + 1) - M_{p,q}(0) \cdot \mathcal{B}_{p,q}(-N_{add} + 1)}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})} \\ \dots \quad \dots \\ M_{p,q}(j) = \frac{M_{p,q}^s(j - N_{add}) - \sum_{\substack{k < j \\ k = j - 2N_{add} \geq 0}} M_{p,q}(k) \cdot \mathcal{B}_{p,q}(j - k)}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})} \\ \dots \quad \dots \end{array} \right. \quad (5.69)$$

En l'absence de bruit sur les projections, la résolution de ce système permet de retrouver exactement les bins Mojette à partir des valeurs des projections Spline-Mojette. Comme ces bins sont retrouvés de manière exacte (i.e. ils ne sont pas « bruités ») on peut appliquer l'algorithme CBI. La transformée Spline-Mojette est donc, tout comme la transformée Dirac-Mojette, exacte en l'absence de bruit sur les projections.

5.1.8 Algorithme CBI Spline-Mojette

Dans une approche alternative, on peut reconstruire une image à partir d'un sinogramme Spline-Mojette en adaptant l'inversion CBI à la géométrie Spline. Comme pour l'algorithme précédent, nous utilisons un sinogramme unitaire qui correspond à la somme des pixels traversés en géométrie Spline-Mojette. Le schéma 5.8(a) montre les valeurs Spline de la projection (2, 1) et les valeurs du sinogramme unitaire. A partir de celui-ci, on trouve une correspondance univoque reliant un bin à un pixel. En revanche, il ne s'agit pas forcément d'un bin traversant le pixel par le centre mais d'une droite qui traverse le pixel avec une contribution correspondant au coefficient Spline. Par exemple sur la figure 5.8(a), le bin bleu est le seul à traverser le pixel hachuré. Il y a donc correspondance. Comme nous sommes en géométrie Spline-Mojette, la contribution de cette droite est 0.5 (minimum non nul pour la projection (2, 1)) pour ce pixel. Il est alors reconstruit comme le montre le schéma 5.8(b).

Il suffit ensuite de mettre à jour les projections Spline-Mojette et de décrémenter les valeurs associées dans le sinogramme unitaire (en pensant à tous les bins et non seulement ceux qui traversent le pixel par le centre). Ainsi, les trois droites en rouge de la projection (2, 1) sur le schéma 5.8(c) sont mises à jours. On soustrait la valeur du pixel à la droite centrale et on décrémente le bin correspondant dans le sinogramme unitaire. On soustrait la moitié de la valeur (car $\mathcal{B}_{2,1}(-1) = \mathcal{B}_{2,1}(1) = 0.5$) aux deux autres droites et on décrémente les valeurs associées du sinogramme unitaire. Cette mise à jour fait apparaître une nouvelle correspondance univoque. Ainsi de suite, comme pour l'algorithme CBI précédent, on reconstruit l'image, pixel par pixel, directement à partir d'un sinogramme Spline-Mojette. Nous distinguerons par la suite les algorithmes CBI-Dirac et CBI-Spline.

Soit M^{tS} le sinogramme unitaire contenant le nombre de pixels traversés (en leur centre ou non) par toutes les droites de projections Spline-Mojette. L'algorithme 6 montre la reconstruction de

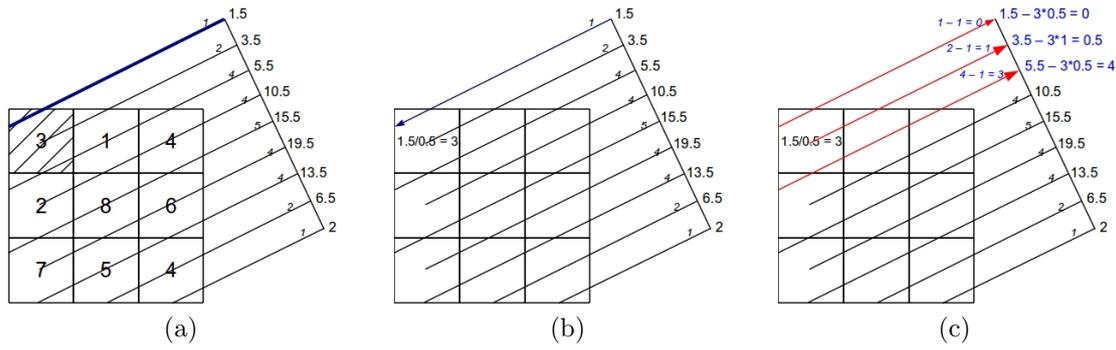


FIGURE 5.8: (a) Acquisition Spline-Mojette de la projection (2,1) avec les valeurs du sinogramme unitaire (lui aussi en géométrie Spline) associé. (b) Correspondance entre un bin et un pixel. Reconstruction du pixel en fonction de la contribution (minimale non nulle) de la projection. (c) Mise à jour des projections et des valeurs dans le sinogramme unitaire.

l'image, directement à partir du sinogramme Spline-Mojette, en utilisant l'inversion CBI-Spline exacte.

Algorithme 6 : Algorithme de reconstruction CBI-Spline

Entrées : $M \wedge M^t \wedge W \wedge H \wedge N_\theta$

variables : $found$: *bool*, p, q, bin, mi, mj : *int*

pour $phase \leftarrow 1$ à $W \times H$ **faire**

/* Étape 1 : recherche correspondance univoque et pixel correspondant */

$found \leftarrow false$

pour $p = (i, j) \in I$, tel que $I(p) = -1$ **faire**

pour $i_\theta \leftarrow 1$ à N_θ **faire**

$b = ip(i_\theta) - jq(i_\theta)$

/* Parcours de tous les bins Spline-Mojette traversant le pixel */

pour $b_i \leftarrow b - \frac{|E_{p,q}|}{2}$ à $b + \frac{|E_{p,q}|}{2}$ **faire**

si $M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}^{tS}(b_i) = 1$ /* Correspondance trouvée */ **alors**

$found \leftarrow true$, $p \leftarrow p(i_\theta)$, $q \leftarrow q(i_\theta)$, $bin \leftarrow b_i$, $mi \leftarrow i$, $mj \leftarrow j$

break ;

fin **si**

fin **pour**

fin **pour**

fin **pour**

si $found = false$ /* Image non reconstituable */ **alors**

exit

sinon

$I(mi, mj) \leftarrow M_{p,q}(bin)$

pour $i_\theta \leftarrow 1$ à N_θ **faire**

$upbin \leftarrow mi \cdot p(i_\theta) - mj \cdot q(i_\theta)$

/* Mise à jour de tous les bins Spline-Mojette traversant le pixel reconstruit */

pour $b_i \leftarrow upbin - \frac{|E_{p,q}|}{2}$ à $upbin + \frac{|E_{p,q}|}{2}$ **faire**

/* Mise en jour en fonction de la contribution Spline du pixel reconstruit dans le bin considéré */

$M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}(b_i) \leftarrow M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}(b_i) - \frac{I(mi, mj)}{B_{p,q}(b_i - upbin)}$

$M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}^{tS}(b_i) \leftarrow M_{p(i_\theta), q(i_\theta)}^{tS}(b_i) - 1$

fin **pour**

fin **pour**

fin **si**

fin **pour**

retourner I

5.2 État de l'art de la reconstruction tomographique Mojette

Nous venons de définir la transformée Dirac-Mojette et la transformée Spline-Mojette dont la reconstruction discrète exacte en l'absence de bruits sur les projections est un atout majeur. Pourtant, de part leur définition discrète, ces méthodes ont, en l'état, un usage limité en tomographie usuelle. D'une part, rien ne permet d'assurer une reconstruction complète (i.e. que l'ensemble des projections vérifie le critère de Katz). D'autre part, les données sont majoritairement bruitées. Or, comme nous allons le voir dans un premier temps, l'inversion Mojette échoue en présence de bruits sur les projections.

Par conséquent, des méthodes plus robustes aux bruits et non limitées par le critères de Katz ont été développés [82]. Elles ne sont plus exactes en l'absence de bruit, mais assurent une reconstruction complète même si le critère de Katz n'est pas vérifié et/ou si les bins sont bruités. Comme nous le verrons, ces méthodes sont dérivées des algorithmes de la tomographie classique et sont compatibles avec une acquisition Dirac-Mojette ou une acquisition Spline-Mojette.

5.2.1 Limitations des inversions Mojette

L'exemple de reconstruction Mojette par l'algorithme CBI présenté à la section 5.1.5 nous a permis de montrer l'importance du critère de Katz pour assurer une reconstruction complète. Ce critère détermine si l'ensemble des projections, défini par une suite de Farey, est suffisant pour reconstruire l'image. Dans notre exemple, la suite de Farey d'ordre 9 est la plus petite suite permettant la reconstruction d'une image de taille 512^2 . Ce minimum constitue une limitation car il dépend de la taille de l'image. En effet, une image de taille 128^2 peut être reconstruite à partir de la suite de Farey d'ordre 6 par exemple.

Mais la principale limitation des inversions est liée à la présence de bruit dans les projections. En effet, considérons la reconstruction CBI de l'image de taille 3×3 donnée précédemment en exemple. Cette fois, les projections sont bruitées comme sur l'exemple du schéma 5.9 ci-dessous.

Lors de la première étape, le pixel en bas à gauche est reconstruit à partir du bin de valeur $7 + e_1$ où e_1 représente l'erreur liée au bruit sur le bin. Cette erreur se répercute bien sûr sur le pixel reconstruit. La mise à jour des bins de projections s'effectue par la soustraction de la valeur du pixel dans tous les bins associés. Ainsi, les valeurs des bins de la projection $(1, 1)$ et $(1, 0)$ deviennent respectivement $12 - e_1$ et $9 - e_1$ (pour simplifier, nous supposons que ces derniers sont sains à l'origine). L'erreur d'un bin se propage à l'image lors de la reconstruction du pixel, mais s'ajoute aussi sur tous les bins mis à jours ensuite. Considérons maintenant le bin de valeur $4 + e_2$ utilisé pour reconstruire le pixel en bas à droite. Comme précédemment, son erreur est répercutée sur l'image et sur les bins mis à jours. Un bin de la projection $(1, 0)$ est maintenant affecté des erreurs e_1 et e_2 . Si on l'utilise pour reconstruire le pixel en bas au centre, ce dernier ainsi que tous les bins associés seront affectés par l'erreur $e_1 + e_2$. Globalement, le bruit sur les projections fait augmenter l'erreur sur les pixels au fur et à mesure des itérations. Cette erreur fait elle-même augmenter les erreurs sur les bins mis à jours.

Ainsi, plus une projection est mise à jour, plus elle devient fautive par addition des erreurs transmises depuis les autres bins. De même, plus un pixel est reconstruit tardivement, plus il est reconstruit depuis un bin ayant subi des mises à jours, et donc plus il est faux. Comme la reconstruction CBI reconstruit les pixels des bords vers le centre, les pixels aux extrémités sont correctement reconstruits tandis qu'ils sont de plus en plus faux lorsqu'on se rapproche du centre de l'image. Comme l'erreur n'est pas contenue, la reconstruction échoue (même constat avec l'algorithme CBI-Spline).

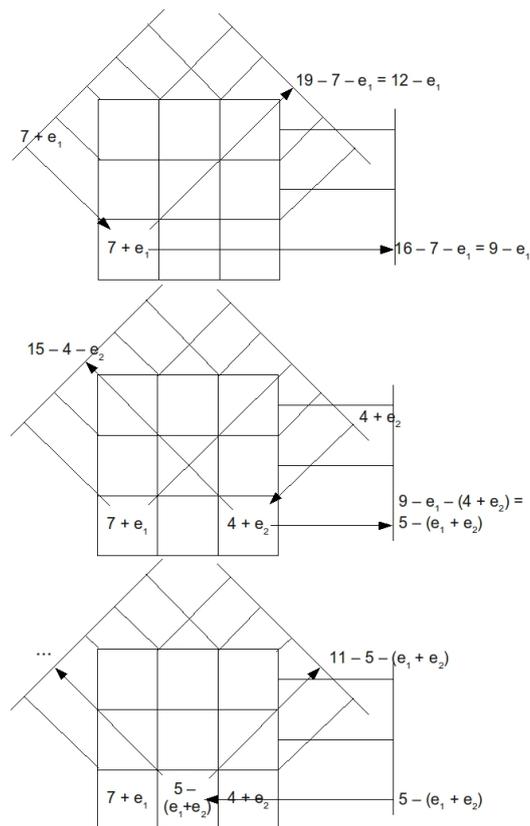


FIGURE 5.9: Propagation du bruit dans les projections et les pixels pendant l'inversion CBI.

De même, la résolution par système triangulaire que nous avons proposé dans [76] pour retrouver les bins Mojette à partir des projections Spline-Mojette ne peut aboutir. Par exemple considérons le système triangulaire 5.69 dans lequel les valeurs $M_{p,q}^s(i)$ sont affectées par un bruit $e(i)$. Le premier bin Mojette reconstruit vaut ainsi $\frac{M_{p,q}^s(-N_{add})+e(-N_{add})}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})}$ et est affecté de l'erreur $\frac{e(-N_{add})}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})}$. Comme la deuxième droite Spline-Mojette utilisée est affectée d'une erreur $e(-N_{add}+1)$, le deuxième bin Mojette reconstruit sera bruité par $\frac{-e(N_{add})+e(N_{add}+1)}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})}$. Comme $\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})$ correspond à la dernière valeur non nulle sur le trapèze du noyau B-Spline (avant de sortir du pixel), sa valeur peut être très inférieure à 1. Ainsi, l'erreur $\frac{\sum e(i)}{\mathcal{B}_{p,q}(N_{add})}$ affectant le i -ème bin reconstruit peut être très grande. Comme les bins recalculés sont erronés, l'inversion CBI-Dirac exécutée ensuite échoue.

5.2.2 Tomographie Mojette

Comme les algorithmes optimisés pour une reconstruction discrète exacte ne peuvent aboutir lorsque les projections sont bruitées ou ne vérifient pas le critère de Katz, plusieurs méthodes alternatives ont été proposées. Ces dernières proviennent d'une adaptation des algorithmes de la tomographie classique [82]. Dans cette section, nous présentons notamment la BFP-Mojette, qui consiste à appliquer un filtre passe haut avant de procéder à une rétroprojection. Le processus est similaire à celui de la BFP utilisée en tomographie usuelle. De la même manière, nous présenterons la méthode SART-Mojette.

5.2.2.1 Rétroprojection Mojette

La rétroprojection Mojette rétroprojète la valeur de chaque bin de projection dans les pixels la traversant comme le présente l'exemple 5.10 ci-dessous. Lorsqu'il s'agit de projection Dirac-Mojette, seuls les pixels traversés en leur centre sont reconstruits. En géométrie Spline-Mojette, tous les pixels traversés sont reconstruits avec une pondération fixée par le noyau B-Spline. Autrement dit, la rétroprojection Spline-Mojette est équivalente à la rétroprojection par transformée inverse de Radon discrète utilisant le noyau B-Spline et une géométrie d'acquisition pilotée par une suite de Farey. Elle est donc duale à l'acquisition de Radon discrète spécifique évoquée à la section 5.1.6. Les images résultats présentées sur la figure 5.11 montrent respectivement la reconstruction de l'image Lena acquise par la suite de Farey d'ordre 6 à 9 à partir d'un sinogramme Dirac-Mojette et d'un sinogramme Spline-Mojette. On remarque que ces reconstructions, comme l'inversion de Radon, souffrent d'une forte atténuation et agissent comme un filtre passe bas sur l'image. Cependant, contrairement à l'inversion CBI, la reconstruction est complète même si le critère de Katz n'est pas vérifié.

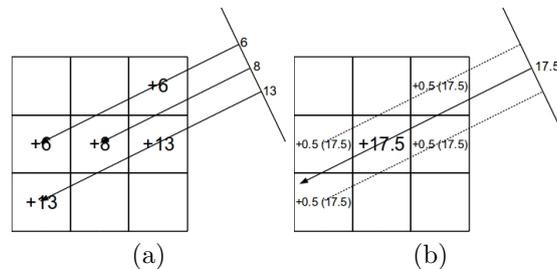


FIGURE 5.10: (a) Rétroprojection des bins Mojette dans les pixels de l'image. (b) Rétroprojection d'une projection Spline-Mojette dans les pixels centrés mais aussi sur les pixels des bins voisins avec une contribution dépendante de l'interpolateur B-Spline.

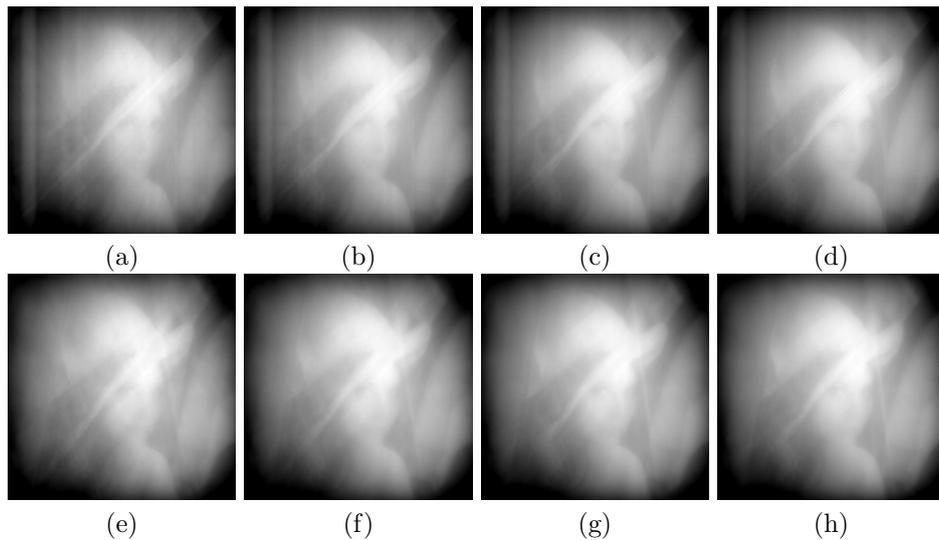


FIGURE 5.11: (a-d) Rétroprojection Dirac-Mojette à partir de la suite de Farey d'ordre 6 à 9. (e-h) Rétroprojection Spline-Mojette à partir de la suite de Farey d'ordre 6 à 9.

5.2.2.2 BFP-Mojette

Comme la rétroprojection, la BFP-Mojette, définie dans [82], est une adaptation de la rétroprojection filtrée vue au chapitre 3. Cette reconstruction applique un filtre passe haut (Rampe, RamLak) avec éventuellement une fenêtre (de Hann ou Hamming) sur chaque projection avant d'effectuer la rétroprojection Mojette. Par exemple, les images de la figure 5.12 ci-dessous sont le résultat des reconstructions BFP-Mojette à partir de sinogrammes Spline-Mojette.

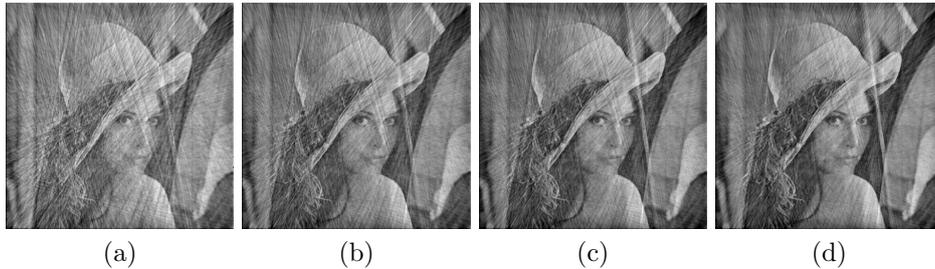


FIGURE 5.12: BFP-Mojette à partir d'un sinogramme Spline-Mojette acquis avec la suite de Farey d'ordre 6 (a) à 9 (d).

5.2.2.3 SART-Mojette

Les méthodes itératives que nous avons étudié au chapitre 4 sont elles aussi adaptables à la tomographie Mojette. Par exemple avec l'algorithme SART, chaque itération est composée de N_θ sous-itérations pendant lesquelles les pixels sont mis à jours en comparant les bins Mojette recalculés avec les bins originaux. Les images présentées sur la figure 5.13 sont obtenues par la reconstruction SART-Mojette depuis des sinogrammes Spline-Mojette.



FIGURE 5.13: SART-Mojette à partir d'un sinogramme Spline-Mojette acquis avec la suite de Farey d'ordre 6 (a) à 9 (d).

5.2.3 Reconstruction Tomographique Mojette à partir de données réelles

Nous avons déjà vu qu'une acquisition Spline-Mojette est équivalente à une acquisition de Radon discrète spécifique pilotée par une suite de Farey. Cependant, ce lien entre Radon et Mojette ne permet pas de reconstruire une image à partir d'une acquisition réelle. En effet, une acquisition scanner est uniforme car ses projections sont mesurées avec un pas angulaire et radial réguliers. On ne peut pas reproduire dans un scanner une acquisition avec une géométrie Spline-Mojette.

Pourtant, une interpolation entre un sinogramme Radon et un sinogramme Spline-Mojette est envisageable pour permettre l'usage des reconstructions Mojette en reconstruction tomographique

classique. Comme nous établissons une comparaison en qualité et précision des reconstructions, nous devons donc considérer l'usage des méthodes Mojette dans notre étude. Ainsi, nous introduisons l'interpolation entre une acquisition de Radon réelle et un sinogramme Spline-Mojette, puis nous observons quelques résultats. L'étude comparative est présentée dans la section suivante.

5.2.3.1 Interpolation radiale et angulaire Radon vers Spline-Mojette

Le sinogramme utilisé au départ est mesuré à partir d'un domaine continu. Il comprend N_θ projections uniformément réparties et un nombre fixe N_ρ d'échantillons par projection. Nous souhaitons le transformer en sinogramme Spline-Mojette, dont la géométrie d'acquisition dépend d'une suite de Farey. La suite de Farey utilisée est celle dont le nombre de couple (p, q) est supérieur et le plus proche de N_θ . Par exemple, la suite de Farey d'ordre 12 donne 184 projections. Elle peut être utilisée pour interpoler un sinogramme Radon contenant 180 projections. Une fois la suite déterminée, connaissant la taille de l'image, on procède à une interpolation radiale et angulaire. Angulairement, l'interpolation est calculée en utilisant les deux projections successives englobantes : $\theta_i < \tan^{-1} \frac{q}{p} < \theta_{i+1}$. De même radialement, chaque bin est calculé à partir des deux échantillons englobant. Ce qui se traduit par :

$$M_{p,q}^s(b) = \sum_{i_\theta=\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sum_{i_\rho=\rho_j}^{\rho_{j+1}} \frac{d\theta - |\theta_{i_\theta} - \theta_{p,q}|}{d\theta} \cdot \frac{d\rho - |\rho_{i_\rho} - b|}{d\rho} \cdot R_{\theta_{i_\theta}}(\rho_{i_\rho}) \quad (5.70)$$

où $d\theta$ et $d\rho$ sont les pas angulaire et radial de l'acquisition de Radon et $\theta_{p,q} = \tan^{-1} \frac{q}{p}$.

5.2.3.2 Exemple de Reconstructions

Soit un sinogramme de 180 projections de 512 échantillons acquis sur le modèle continu du fantôme de Shepp-Logan. Il s'agit du même type de sinogramme que ceux utilisés dans la première partie. A partir de ce sinogramme, nous calculons le sinogramme Spline-Mojette en utilisant l'interpolation radiale/angulaire. Elle sélectionne la suite de Farey d'ordre 12 (donnant 184 projections) et calcule les bins Spline-Mojette. Les images de la figure 5.14 présentent les résultats obtenus par les algorithmes BFP-Mojette et SART-Mojette en utilisant le sinogramme Spline-Mojette interpolé.

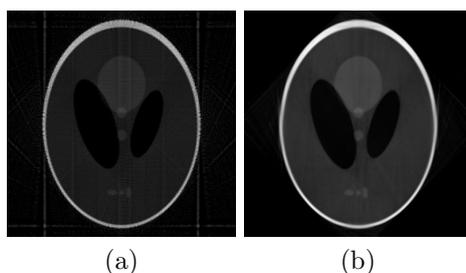


FIGURE 5.14: Résultat BFP-Mojette (a) et SART-Mojette (b) à partir du sinogramme Spline-Mojette interpolé.

5.3 Qualité et précision en tomographie Mojette

Dans cette section nous étudions la qualité et la précision des reconstructions BFP-Mojette et SART-Mojette. Le protocole est identique à celui utilisé en première partie. Nous utilisons des sinogrammes issus d'acquisitions continues. Nous les interpolons en géométrie Spline-Mojette, puis nous effectuons les reconstructions. Nous utilisons le SSIM pour mesurer la qualité et la PSF pour déterminer la netteté. Ensuite une étude du SNR illustre la résistance aux bruits d'acquisition des méthodes. Les résultats obtenus sont comparés à ceux des méthodes BFP et SART usuelles.

N_θ (Radon)	10	20	30	40	60	90	120	180
Farey ordre	3	4	5	5	7	9	10	12
N_θ (Spline-Mojette)	16	24	40	40	72	112	128	184

TABLE 5.2: Détails des suites de Farey (et du nombre de projections Spline-Mojette associées) utilisées en fonction du nombre de projection N_θ dans le sinogramme Radon.

Notons que la transformation d'un sinogramme Radon en sinogramme Spline-Mojette provoque une super-résolution sur les projections dans la plupart des cas. En effet, le nombre de bins générés pour une image de taille $W \times H$ est au minimum W (sur la projection $(0, 1)$ par exemple) ou H . Les autres couples engendrent un nombre de bins strictement supérieur. D'autre part, nous savons aussi que l'interpolation modifie les angles, puisque les angles discrets sont mesurés les angles de Radon englobant. L'objectif de cette section, en comparant les résultats entre les méthodes usuelles et les méthodes Mojette, est de déterminer si la super-résolution à priori bénéfique et l'interpolation angulaire à priori néfaste ont réellement une influence notable sur la qualité et la précision des algorithmes BFP et SART.

5.3.1 SSIM en fonction de N_θ et $d\rho$

Dans cette section, nous nous intéressons au SSIM des images obtenues par les algorithmes BFP-Mojette et SART-Mojette. Ils sont comparés au SSIM des méthodes BFP et SART classiques. Les sinogrammes utilisés sont ceux calculés dans la première partie. Le tableau 5.2 récapitule, pour chaque acquisition, la suite de Farey utilisée pour transformer le sinogramme de Radon en sinogramme Spline-Mojette.

Les tableaux 5.3, 5.4 et 5.5 résument la corrélation lumineuse, en contraste et géométrique de la BFP-Mojette en fonction des caractéristiques du sinogramme. Les résultats obtenus avec la BFP classique dans les mêmes conditions sont rappelés. La comparaison du SSIM entre les deux méthodes est présentée sur la figure 5.15. De même, les tableaux 5.6, 5.7 et 5.8 comparent les critères obtenus par SART-Mojette et SART classique. Le SSIM obtenu par SART-Mojette est présenté sur la figure 5.16.

	128	256	512	1024	2048
10	0.855	0.762	0.783	0.826	0.812
20	0.881	0.870	0.877	0.854	0.845
30	0.927	0.896	0.883	0.908	0.908
40	0.914	0.901	0.843	0.876	0.895
60	0.912	0.916	0.905	0.918	0.929
90	0.902	0.924	0.911	0.878	0.944
120	0.911	0.924	0.896	0.901	0.947
180	0.920	0.926	0.905	0.866	0.944

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.835	0.748	0.610	0.599	0.581
20	0.879	0.851	0.783	0.770	0.758
30	0.898	0.881	0.826	0.822	0.794
40	0.909	0.880	0.868	0.876	0.844
60	0.908	0.908	0.857	0.910	0.890
90	0.911	0.912	0.909	0.930	0.925
120	0.918	0.916	0.916	0.935	0.934
180	0.911	0.915	0.923	0.939	0.941

(b)

TABLE 5.3: Évolution de la corrélation en luminosité de BFP-Mojette (a) et BFP usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$.

Les tableaux 5.3 montrent qu'il y a une forte similarité en conservation lumineuse entre la BFP-Mojette et la BFP classique. On dénote une différence inférieure 0.05 dans la plupart des cas; ce qui n'est pas significatif. On peut toutefois remarquer que la BFP-Mojette conserve mieux la luminosité lorsque le nombre de projection est faible (+0.23 avec $N_\theta = 10$ et $N_\rho = 2048$ par exemple). L'adaptation du sinogramme Radon à la géométrie Mojette crée des échantillons sur les projections. Ces derniers agissent uniformément sur l'image et permettent ainsi une meilleure interprétation des valeurs de projections dans les pixels. Ils contribuent par ailleurs à une super-résolution qui aboutit à reproduction plus fidèle de l'intensité. Ce phénomène s'amenuise lorsque

	128	256	512	1024	2048
10	0.727	0.683	0.715	0.770	0.765
20	0.780	0.807	0.824	0.808	0.805
30	0.823	0.816	0.807	0.842	0.847
40	0.812	0.831	0.775	0.819	0.846
60	0.815	0.850	0.848	0.870	0.889
90	0.810	0.866	0.862	0.833	0.915
120	0.825	0.871	0.850	0.864	0.923
180	0.839	0.876	0.864	0.832	0.925

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.858	0.798	0.692	0.680	0.668
20	0.884	0.868	0.817	0.803	0.793
30	0.922	0.914	0.867	0.863	0.837
40	0.944	0.930	0.920	0.927	0.900
60	0.950	0.964	0.929	0.967	0.953
90	0.954	0.968	0.971	0.983	0.981
120	0.958	0.971	0.977	0.987	0.987
180	0.953	0.970	0.981	0.989	0.990

(b)

TABLE 5.4: Évolution de la corrélation en contraste de BFP-Mojette (a) et BFP usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$.

	128	256	512	1024	2048
10	0.580	0.523	0.510	0.503	0.493
20	0.724	0.718	0.715	0.718	0.715
30	0.787	0.803	0.807	0.805	0.812
40	0.789	0.805	0.812	0.818	0.826
60	0.829	0.863	0.875	0.887	0.899
90	0.848	0.891	0.907	0.917	0.931
120	0.852	0.897	0.913	0.923	0.935
180	0.861	0.909	0.926	0.935	0.947

(a)

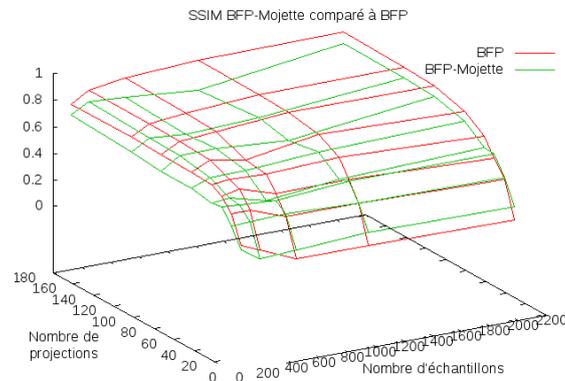
	128	256	512	1024	2048
10	0.549	0.562	0.529	0.540	0.531
20	0.761	0.797	0.769	0.793	0.788
30	0.825	0.880	0.871	0.892	0.888
40	0.847	0.906	0.915	0.935	0.935
60	0.852	0.922	0.943	0.960	0.962
90	0.854	0.925	0.953	0.968	0.971
120	0.854	0.925	0.955	0.970	0.973
180	0.855	0.925	0.956	0.970	0.974

(b)

TABLE 5.5: Évolution de la corrélation géométrique de BFP-Mojette (a) et BFP usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$.

N_ρ augmente (car dans ce cas, la BFP classique profite aussi de la super-résolution) et quand N_θ augmente (atténuation de l'impact d'une projection grâce aux autres projections).

Le contraste obtenu par BFP-Mojette est meilleur lorsque N_θ est très faible et N_ρ très élevé. Ce résultat est complémentaire à l'évolution de l'intensité. Dès que $N_\theta > 20$, on constate toutefois que la BFP classique conserve mieux le contraste (de +0.1 environ par rapport à BFP-Mojette). Il en va de même pour la corrélation géométrique où l'on constate globalement une perte de -0.05 lorsqu'on utilise la BFP-Mojette. Cette perte est la conséquence des interpolations des projections Mojette depuis les projections de Radon. Elle s'amenuise lorsque N_θ augmente car l'angle d'erreur possible entre les projections diminue avec $d\theta$. Étant donnée sa valeur moyenne, on peut considérer que cette perte est négligeable.

FIGURE 5.15: SSIM de la BFP-Mojette en fonction de N_θ et $d\rho$.

De l'évolution des critères ci-dessus, on en déduit le SSIM présenté sur la figure 5.15. Comme on peut le remarquer, il a une évolution comparable au SSIM obtenu par la BFP classique. Il est cependant légèrement inférieur étant donné que la BFP-Mojette conserve moins bien la luminosité, le contraste et la géométrie. Cette perte est d'environ 0.05 (non significatif) lorsqu'il y a peu de projections. Mais il peut être plus important (environ 0.15) lorsque $N_\theta > 60$.

	128	256	512	1024	2048
10	0.950	0.970	0.970	0.925	0.980
20	0.999	1.000	1.000	1.000	0.999
30	1.000	0.986	0.990	0.991	0.989
40	0.997	1.000	0.994	0.997	0.999
60	0.994	0.996	0.986	0.975	0.988
90	0.990	0.998	0.998	0.975	0.979
120	1.000	0.981	0.991	0.982	0.998
180	0.994	0.999	0.986	0.995	0.985

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.961	0.974	0.976	0.975	0.977
20	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999
30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
40	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999
60	0.994	0.999	0.999	0.999	0.999
90	0.993	0.997	0.999	0.999	0.999
120	0.986	0.992	0.997	0.999	0.999
180	0.970	0.985	0.996	0.997	0.999

(b)

TABLE 5.6: Évolution de la corrélation en luminosité de SART-Mojette (a) et SART usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$.

	128	256	512	1024	2048
10	0.969	0.960	0.958	0.955	0.953
20	0.924	0.931	0.919	0.905	0.923
30	0.939	0.917	0.928	0.926	0.907
40	0.936	0.932	0.935	0.922	0.920
60	0.921	0.939	0.943	0.937	0.946
90	0.946	0.949	0.960	0.956	0.960
120	0.949	0.957	0.964	0.964	0.965
180	0.954	0.962	0.967	0.967	0.970

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.967	0.954	0.949	0.952	0.950
20	0.965	0.966	0.964	0.965	0.961
30	0.961	0.973	0.973	0.973	0.972
40	0.966	0.976	0.978	0.978	0.977
60	0.968	0.986	0.988	0.987	0.987
90	0.974	0.987	0.993	0.994	0.994
120	0.967	0.981	0.991	0.995	0.996
180	0.951	0.976	0.992	0.994	0.996

(b)

TABLE 5.7: Évolution de la corrélation en contraste de SART-Mojette (a) et SART usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$.

	128	256	512	1024	2048
10	0.725	0.737	0.746	0.730	0.742
20	0.797	0.840	0.849	0.854	0.857
30	0.825	0.869	0.888	0.888	0.888
40	0.823	0.870	0.893	0.898	0.900
60	0.848	0.899	0.925	0.934	0.937
90	0.859	0.915	0.939	0.951	0.955
120	0.857	0.922	0.942	0.955	0.957
180	0.864	0.923	0.949	0.960	0.966

(a)

	128	256	512	1024	2048
10	0.764	0.790	0.797	0.801	0.800
20	0.846	0.889	0.903	0.906	0.908
30	0.864	0.917	0.935	0.939	0.941
40	0.872	0.928	0.948	0.953	0.955
60	0.874	0.936	0.959	0.966	0.967
90	0.873	0.940	0.966	0.973	0.976
120	0.868	0.941	0.969	0.977	0.980
180	0.864	0.940	0.970	0.980	0.983

(b)

TABLE 5.8: Évolution de la corrélation géométrique de SART-Mojette (a) et SART usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$.

On peut globalement tirer les mêmes remarques des comparatifs en luminosité, contraste et géométrie des méthodes SART-Mojette et SART (tableaux 5.6, 5.7 et 5.8). On constate une différence en corrélation lumineuse quasiment nulle ($\pm 0.01 \forall (N_\theta, N_\rho)$). Il en est de même pour la corrélation en contraste et géométrique. La différence entre les SSIM obtenus n'excède alors pas ± 0.05 (figure 5.16) quels que soient les paramètres et n'est donc pas significative.

La création d'échantillons supplémentaires sur les projections (en créant des bins dont la position est ajustée à la géométrie discrète de l'image) provoque une super-résolution. Toutefois, comme cette super-résolution est obtenue par interpolation du sinogramme Radon, elle n'est pas porteuse d'information supplémentaire. Les résultats BFP-Mojette et SART-Mojette ne sont pas améliorés. Inversement, l'interpolation angulaire, qui laissait présupposer des déformations, ne détériore pas les résultats. Comme les projections Mojette sont choisies en fonction des projections réelles, les

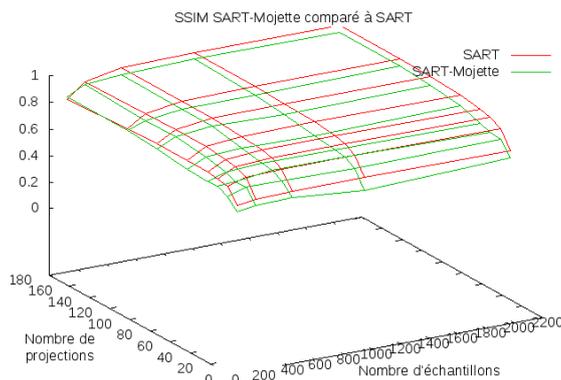


FIGURE 5.16: SSIM de la SART-Mojette en fonction de N_θ et $d\rho$.

distances angulaires sont suffisamment petites pour ne pas générer d'aberrations dans l'interpolation.

Globalement, on constate une perte maximale de 0.15 (ce qui n'est pas négligeable) avec la BFP-Mojette. Cette méthode n'est donc pas idéale comparée à la version usuelle. En revanche, l'algorithme SART-Mojette ne provoque qu'une perte maximale de 0.05. SART et SART-Mojette sont donc quasiment équivalentes en qualité.

5.3.2 Étude de la PSF

Dans cette section, nous étudions l'évolution de la PSF, d'une part au centre de l'image en fonction des paramètres, d'autre part en fonction de la position sur l'image en échantillonnage standard. Les résultats obtenus par la BFP-Mojette et par SART-Mojette sont comparés avec les résultats obtenus par BFP et SART usuelles.

5.3.2.1 PSF au centre en fonction de N_θ et $d\rho$

Les courbes de la figure 5.17 présentent la PSF au centre de l'image obtenue par les méthodes BFP-Mojette et SART-Mojette. La PSF des méthodes BFP et SART usuelles sont fournies à titre comparatif.

Si l'on constate une évolution similaire selon N_θ pour les méthodes usuelles et Mojette, l'évolution en N_ρ est en revanche nettement à l'avantage des méthodes usuelles. En effet, les algorithmes BFP-Mojette et SART-Mojette obtiennent des gains de la PSF au centre bien inférieurs à ceux de leurs homologues usuels. L'étalement du point plus important en géométrie Spline-Mojette est directement lié à l'étalement des valeurs des échantillons (du sinogramme Radon) dans les bins Spline-Mojette pendant l'interpolation.

5.3.2.2 PSF en fonction de la position sur l'image

Nous regardons maintenant la PSF en fonction de la position sur l'image. Les résultats sont présentés sur la figure 5.18. Comme les méthodes usuelles, les algorithmes BFP-Mojette et SART-Mojette fournissent une PSF quasiment uniforme selon la position sur l'image. En revanche, comme nous venons de le constater, elle est inférieure pour chaque méthode. Ainsi, le gain de la PSF vaut

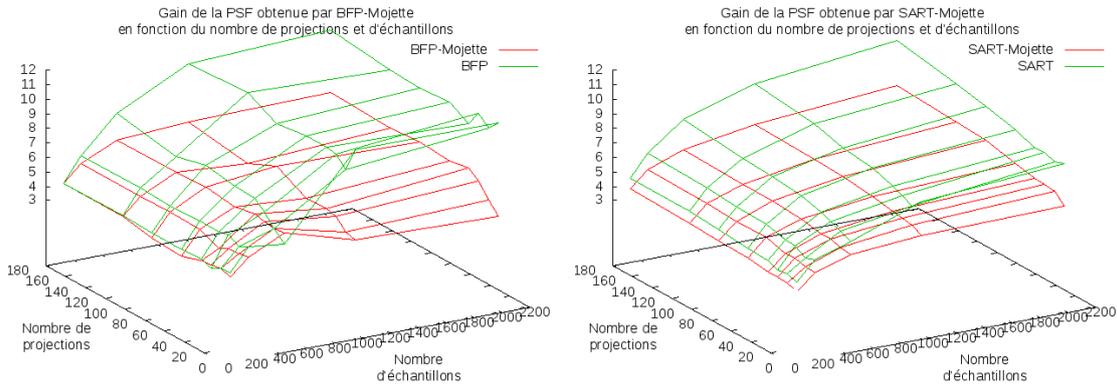


FIGURE 5.17: PSF au centre de l'image obtenue avec BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite) en fonction de N_θ et $d\rho$. Comparaison avec la PSF obtenue par BFP et SART usuelles.

globalement 6.2 avec BFP-Mojette au lieu de 8.5 avec l'algorithme classique. De même, SART-Mojette obtient un gain moyen de 5.9 au lieu de 8.1.

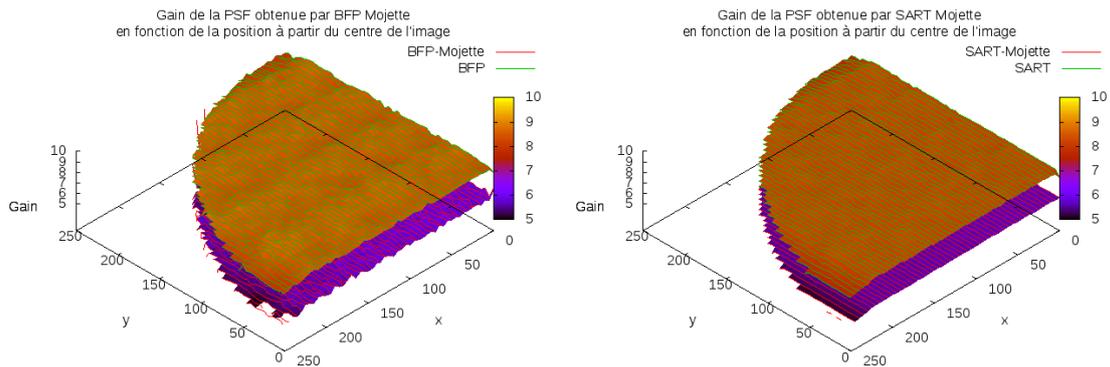


FIGURE 5.18: PSF en fonction de la position sur l'image avec BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite). Comparaison avec la PSF obtenue par BFP et SART usuelles.

5.3.3 Résistance aux bruits d'acquisition

Nous regardons maintenant la résistance aux bruits d'acquisitions par une étude du SNR en fonction des paramètres, puis en fonction de la quantité de bruit appliquée aux projections.

5.3.3.1 SNR en fonction de N_θ et $d\rho$

Les courbes de la figure 5.19 comparent les SNR en fonction de N_θ et $d\rho$ des méthodes BFP-Mojette et SART-Mojette avec leurs homologues usuelles. Le comportement de l'algorithme BFP-Mojette est quasiment similaire à celui de la BFP classique. On remarque toutefois un meilleur SNR en échantillonnage standard : le sur-échantillonnage engendré par les interpolations sur les projections permet de diminuer le bruit global. Dès que l'on passe en sur-échantillonnage à l'acquisition, l'atténuation provoquée par les interpolations diminue et on retrouve ainsi un SNR similaire avec les deux méthodes.

L'algorithme SART-Mojette fournit des résultats différents. Le SNR est moins élevé en sous-échantillonnage. Le bruit d'acquisition s'étend sur les projections Mojette pendant l'interpolation. Toutefois, dès l'échantillonnage standard, cet effet diminue. De plus, lorsque le nombre de projections augmente, on observe une atténuation du bruit. Le SNR de SART-Mojette augmente donc avec N_θ et N_ρ . Globalement, les algorithmes Mojette atténuent donc le bruit grâce aux interpolations et on obtient un SNR similaire, voire supérieur, à celui obtenu par les méthodes usuelles.

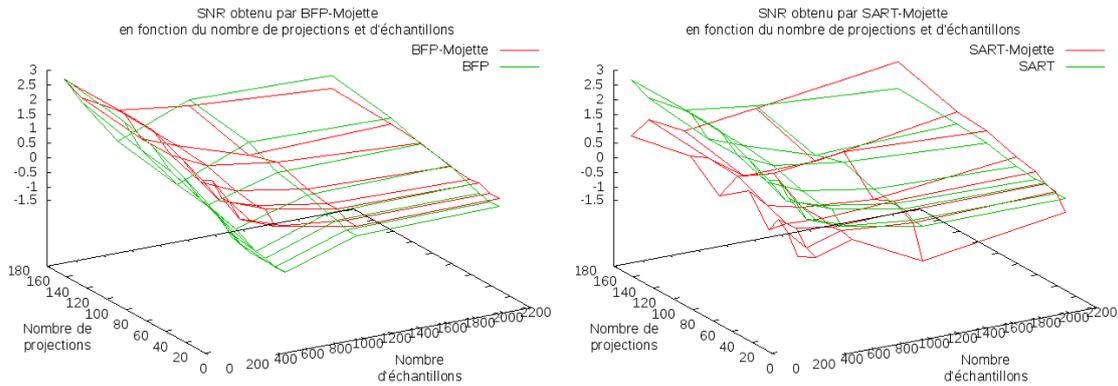


FIGURE 5.19: SNR en fonction de N_θ et d_ρ pour un bruit de 10% appliqué au sinogramme avec BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite). Comparaison avec le SNR obtenu par BFP et SART usuelles.

5.3.3.2 SNR en fonction du bruit sur les projections

Nous regardons maintenant l'évolution du SNR en fonction du bruit sur les projections. Les courbes résultats sont présentées sur la figure 5.20. Comme on peut s'y attendre, le bruit sur les projections est atténué par les interpolations pour passer du sinogramme Radon au sinogramme Spline-Mojette. Cette atténuation est d'autant plus caractéristique lorsque la quantité de bruit appliqué augmente. Ainsi, pour les deux méthodes Mojette, on observe une baisse du SNR plus douce qu'avec les versions usuelles.

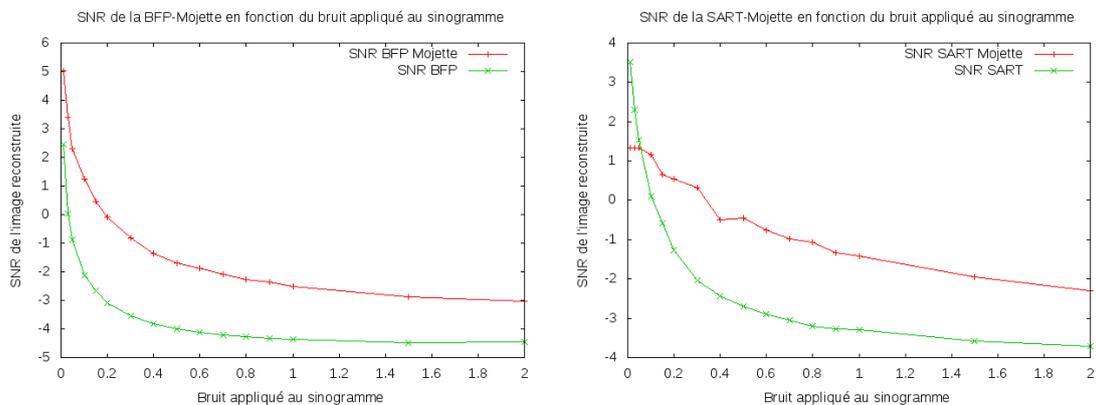


FIGURE 5.20: SNR obtenu par BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite) en fonction du bruit appliqué au sinogramme.

5.4 Conclusion sur la tomographie Mojette

L'adaptation des méthodes usuelles à la tomographie Mojette consiste principalement en une étape d'interpolation. Cette dernière crée une redondance de l'information contenue dans le sinogramme d'origine. Cette redondance ne permet pas d'améliorer la qualité des résultats obtenus puisqu'elle ne génère pas de données complémentaires. Inversement, elle a tendance à détériorer l'image reconstruite. C'est ainsi que nous avons observé une qualité de reconstruction plus faible avec les méthodes Mojette qu'avec les méthodes usuelles (entre -0.5 et -0.15). De plus, comme les interpolations étalent l'information sur la projection, les images résultats ont perdu en netteté. Toutefois, cette dernière reste uniforme selon la position dans l'image et suffisamment élevée pour obtenir des images précises. D'autre part, l'interpolation éclate le bruit sur les projections. On constate donc un meilleur SNR lorsque le bruit augmente, même si on observe une variation assez similaire de sa propagation dans l'image.

Globalement, le passage en géométrie Mojette ne permet pas d'améliorer les résultats (sauf le SNR en présence d'une quantité de bruit importante). De plus, ces algorithmes ne sont pas compétitifs en temps par rapport aux algorithmes usuels (puisque'ils ont plus de données sur les projections à traiter). Leur usage en tomographie usuelle se limitera donc à des cas d'usages spécifiques, qu'il s'agira de justifier.

Chapitre 6

Reconstruction Mojette CBI à partir de données bruitées

Nous avons distingué deux comportements différents parmi les reconstructions Mojette détaillés au chapitre précédent. D'un côté les algorithmes CBI-Dirac et CBI-Spline (ou l'inversion triangulaire + CBI-Dirac) mettent en relation le contenu du sinogramme avec l'image en cours de reconstruction. De l'autre, les algorithmes adaptés de la tomographie usuelle, ne modifient pas le sinogramme au cours de l'inversion. Comme nous l'avons vu, les premiers ne sont pas robustes aux bruits (échec de la reconstruction), mais exacts en l'absence de bruit sur les projections. Les seconds ne sont pas exacts, dans le sens où ils ne retrouvent pas exactement l'image de départ, mais ils n'échouent pas lorsque les données sont bruitées. Enfin, les algorithmes CBI doivent vérifier le critère de Katz (dépendant de la taille de l'image et de l'ensemble des projections) alors que les autres reconstruisent entièrement l'image en toutes circonstances.

Pourtant, par leur nature, les algorithmes CBI présentent deux caractéristiques intéressantes. D'abord, ils proposent un lien fort entre le sinogramme et l'image puisqu'il est mis-à-jour au cours de la reconstruction. Ce type de calcul n'existe pas dans les reconstructions usuelles car le sinogramme est, pour ces méthodes, une donnée invariable au cours du processus d'inversion. Dans les algorithmes CBI, il n'est pas constant puisqu'il est mis-à-jour à chaque pixel reconstruit. De plus, il évolue localement car chaque mise-à-jour agit localement sur les projections en fonction de la position du pixel. Il en découle alors la deuxième propriété de ce type d'algorithme : à chaque itération k du processus de reconstruction, le sinogramme contient uniquement l'information pour les pixels restant à reconstruire.

Du constat de ces deux caractéristiques, nous pouvons envisager un certain nombre d'applications en tomographie usuelle. On peut envisager que ce type de reconstruction soit utilisé pour traiter par exemple les reconstructions locales. En reconstruisant d'abord les données hors du champ de vue, on met à jour et on obtient un nouveau sinogramme qui ne contient que les données correspondant à la région d'intérêt. Par ailleurs, puisque le sinogramme ne contient que les données restantes, il peut être une solution au problème de l'angle manquant, c'est-à-dire lorsque l'acquisition se fait autour de l'objet avec une couverture inférieure à 180° .

Toutefois, leur utilisation est pour l'instant impossible puisqu'ils échouent lorsque les données sont erronées. Dans l'optique d'utiliser ces algorithmes à partir de données réelles, nous avons donc développé de nouvelles solutions moins sensibles aux bruits ou aux erreurs dans les projections. Ces dernières constituent la principale contribution de cette deuxième partie. Dans un premier temps, en nous appuyant sur la redondance des informations et en observant la propagation du bruit dans les projections, nous avons mis en place un nouvel algorithme CBI-Dirac robuste au bruit, appelé NRCBI-Dirac (pour *Noise Robust CBI-Dirac*). Nous avons ensuite développé son équivalent

en géométrie Spline-Mojette (algorithme NRCBI-Spline). Nous avons aussi proposé un algorithme de résolution de système linéaire basé sur le recuit simulé pour retrouver des bins Dirac-Mojette à partir de projections Spline-Mojette bruitées. Ces algorithmes sont présentés dans la suite de chapitre et une étude de leur qualité et de leur précision est proposée. Enfin, nous fournissons une perspective d'utilisation en tomographie usuelle pour réduire l'effet des déformations pendant la reconstruction à partir de données incomplètes.

6.1 Algorithme CBI-Dirac robuste aux bruits

Nous avons observé la propagation de l'erreur pendant les mises à jours des pixels et des projections dans l'algorithme CBI (section 5.2.1). Nous avons aussi abordé la notion de redondance de l'information dans les projections. En combinant l'usage de cette redondance et des propriétés des mises à jours, nous avons développé un nouvel algorithme CBI-Dirac plus robuste aux bruits, que nous présentons dans la suite de cette section [78].

6.1.1 Outils et méthodes utilisés pour contenir la propagation de l'erreur

6.1.1.1 Reconstruction d'un pixel à partir de correspondances multiples

Nous avons observé que plus la suite de Farey est grande, plus il y a de projections. Cette redondance de l'information augmente donc le nombre de correspondances univoques éventuellement disponibles pour reconstruire chaque pixel.

Notons P^k l'ensemble des pixels non reconstruits à l'itération k de l'algorithme CBI. Notons de plus $M_c(i, j)$ l'ensemble des valeurs ordonnées des bins $M_{p,q}(b) \geq 0$ tel que le pixel (i, j) est traversé par la ligne de bin (b, p, q) (i.e. $(i, j) \subset (b, p, q)$). On ne sélectionne que les bins $M_{p,q}(b) \geq 0$ car la valeur d'un pixel est positive. Par conséquent, un bin dont la valeur est négative n'est pas significatif, même si un ou plusieurs pixels associés ne sont pas reconstruits. L'ensemble des bins disponibles pour reconstruire un pixel à l'itération k est donc définie par :

$$M_c(i, j) = \{M_{p_l, q_l}(b_l) \geq 0 / (i, j) \in P^k \wedge (i, j) \subset (b_l, p_l, q_l)\} \quad (6.71)$$

Nous notons $|M_c(i, j)|$ la taille de cet ensemble. La valeur du pixel reconstruit dépend alors de la distribution utilisée pour exploiter les valeurs des bins en correspondance univoque. Nous pourrions choisir la valeur moyenne, ou la médiane. Toutefois, nous préférons utiliser une distribution gaussienne car elle est un bon estimateur de la valeur du pixel, non influencée par les extrema.

Ainsi, soit $G(l, i, j) = e^{-\left(\frac{l - \frac{|M_c(i, j)|}{2} + \gamma}{\frac{|M_c(i, j)|}{2}}\right)^2}$ la pondération du l -ième bin de l'ensemble $M_c(i, j)$ des bins en correspondance univoque avec le pixel (i, j) . La valeur reconstruite est définie par :

$$I(i, j) = P(i, j, M) = \sum_{l=1}^{|M_c(i, j)|} \frac{G(l, i, j)}{\sum_{l_i=1}^{|M_c(i, j)|} G(l_i, i, j)} M_{p_l, q_l}(b_l) \quad (6.72)$$

où γ est un coefficient de centrage, initialisé à 0 par défaut.

Si tous les bins sont négatifs alors qu'il reste des pixels à reconstruire, l'inversion échoue même si le critère de Katz est vérifié. C'est la conséquence de ne conserver que les bins positifs lorsqu'on regarde les correspondances univoques au pixel à reconstruire. Les valeurs des bins sont toutes négatives si elles ont diminué trop rapidement au cours des mises à jours. Par conséquent, les pixels déjà reconstruits ont une intensité trop importante. Dans ce cas, la reconstruction peut être recommencé avec une valuation des pixels plus douce. Le coefficient γ est utilisé à cet effet.

6.1.1.2 Reconstruction d'un pixel à partir d'un ensemble avec erreur minimale

L'observation de la propagation de l'erreur dans l'algorithme CBI nous a aussi révélé que plus un bin est mis à jour, plus sa valeur est altérée. Nous définissons donc $N_{p,q}^{up}(b)$ le nombre de mises à jours subies par le bin (p, q, b) (par défaut, $N_{p,q}^{up}(b)$ est initialisé à 0). Comme un bin est mis à jour chaque fois qu'un pixel associé est reconstruit, $N_{p,q}^{up}(b)$ correspond au nombre de pixels déjà reconstruit sur le bin. Autrement dit, il s'agit du complément de la valeur correspondante dans le sinogramme unitaire. L'erreur globale pour un pixel à reconstruire (i, j) est notée $E(i, j)$ et est définie par :

$$E(i, j) = \sum_{l=1}^{|M_c(i,j)|} N_{p_l, q_l}^{up}(b_l) \quad (6.73)$$

6.1.1.3 Sélection du pixel à reconstruire à l'itération k

La probabilité que la valeur d'un pixel soit reconstruite de manière précise est proportionnelle au nombre de correspondances univoques et dépend de l'erreur $E(i, j)$. Par conséquent, nous sélectionnons le pixel (i_k, j_k) à reconstruire à l'itération k comme étant celui qui a le plus grand nombre de correspondances univoques et la plus petite erreur, c'est-à-dire :

$$(i_k, j_k) \in P^k / \begin{cases} |M_c(i_k, j_k)| = \max\{|M_c(i, j)|, (i, j) \in P^k\} \\ E(i_k, j_k) = \min\{E(i, j), (i, j) \in P^k\} \end{cases} \quad (6.74)$$

6.1.1.4 Correspondance bin-pixel adaptative

Maintenant que l'erreur sur un bin a été définie, nous pouvons introduire la probabilité d'exactitude d'un bin utilisé pour reconstruire un pixel à l'itération k comme :

$$p_{p,q}^k(b) = e^{-\frac{N_{p,q}^{up}(b)}{D_{p,q}(b)}} \quad (6.75)$$

où $D_{p,q}(b) = M_{p,q}^t(b)_{k=0}$ est la distance (en pixel) traversée par la droite de projection dans l'image. Il correspond à la valeur initiale $M_{p,q}^t(b)$ du sinogramme unitaire. Cette probabilité est introduite dans l'équation 6.72 afin d'adapter l'importance d'un bin pour reconstruire un pixel en fonction de son exactitude. Par conséquent, le calcul de la valeur d'un pixel devient :

$$I(i, j) = \frac{\sum_{l=1}^{|M_c(i,j)|} \frac{p_{p_l, q_l}^k(b_l) G(l, i, j)}{|M_c(i,j)|} M_{p_l, q_l}(b_l)}{\sum_{l_i=1} p_{p_{l_i}, q_{l_i}}^k(b_{l_i}) G(l_i, i, j)} \quad (6.76)$$

6.1.1.5 Mise à jour adaptative des bins

Dans l'algorithme CBI d'origine, la valeur d'un bin $M_{p,q}(b)$ est mise à jour par $M_{p,q}(b) - I(i_k, j_k)$ quand l'un de ses pixels associés (i_k, j_k) a été reconstruit. Dans le nouvel algorithme, cette mise à jour peut être adoucie pour réduire l'effet du bruit et le risque que la reconstruction ne termine pas (si tous les bins deviennent négatifs). Ainsi, la mise à jour d'un bin devient :

$$M_{p,q}(b) = M_{p,q}(b) - \frac{I(i_k, j_k)}{Z(\gamma)} \quad (6.77)$$

où $Z(\gamma)$ est un coefficient d'atténuation dépendant de γ . Si la reconstruction ne peut être achevée malgré cette précaution, le coefficient γ est incrémenté et le processus de reconstruction est réinitialisé. Bien sûr par défaut, $\gamma = 0$ et $Z(\gamma) = 1$. Dans la suite, nous avons utilisé (choix empirique) $Z(\gamma) = \sqrt{1 + \gamma}$. Ainsi, on assure bien une diminution de la mise à jour de chaque bin si on a redémarré l'algorithme (car $Z(\cdot)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+). Toutefois, le pas d'atténuation entre chaque redémarrage diminue au fur et à mesure que γ augmente, évitant ainsi (lorsque γ est très grand) d'avoir des mises à jours nulles.

6.1.1.6 Mise à jour des pixels reconstruits à partir des valeurs finales des bins

Dans l'algorithme CBI original, lorsqu'un bin a fini d'être utilisé (tous les pixels associés sont reconstruits), sa valeur devient nulle. Cette propriété n'est bien sûr pas vérifiée en présence de bruits sur les projections. Par conséquent, la valeur non nulle peut être réinjectée dans les pixels de l'image. Par défaut, nous pourrions corriger chaque pixel uniformément en lui réinjectant une partie de la valeur finale du bin. Toutefois, nous pouvons remarquer que plus un pixel a été reconstruit tôt, plus sa valeur est précise. Ainsi, comme nous l'avons fait pour la probabilité d'exactitude des bins, nous définissons maintenant la probabilité qu'un pixel reconstruit est correct. Elle dépend du rang k de la reconstruction du pixel et est définie par :

$$p^k(i, j) = e^{-\frac{k}{N}} \quad (6.78)$$

Ainsi, étant donnée la valeur finale d'un bin $M_{p,q}^k(b)$ (lorsque $M_{p,q}^t(b)_k$ devient nul) à l'itération k , la valeur des pixels associés est mise à jour avec :

$$I(i, j) = I(i, j) - \frac{p^k(i, j)}{\sum_{(i,j) \subset (b,p,q)} p^k(i, j)} M_{p,q}^k(b), \forall (i, j) \subset (b, p, q) \quad (6.79)$$

6.1.2 Nouvel algorithme CBI

En considérant l'ensemble des définitions précédentes, et en nous appuyant sur l'algorithme CBI original, nous avons mis en place une nouvelle méthode plus robuste aux bruits dans le sinogramme. Elle est détaillée par l'algorithme 7.

Algorithme 7 : Algorithme de reconstruction NRCBI-Dirac robuste aux bruits

```

 $\gamma \leftarrow 0$ 
 $k \leftarrow 0$ 
 $P^k = \{(i, j) / (i, j) \in I\}$ 
 $\forall (b_l, p_l, q_l) \in M, N_{p_l, q_l}^{up}(b_l) \leftarrow 0$ 
tantque  $P^k \neq \emptyset$  faire
  /* Étape 1 : recherche et reconstruction du pixel, si possible */
  Trouver  $(i_k, j_k)$  (critère 6.74)
  si  $(i_k, j_k) \neq NULL$  alors
     $I(i_k, j_k) = P(i, j, M)$  (formule 6.76)
     $P^k \leftarrow P^k - (i_k, j_k)$ 
  sinon
     $\gamma \leftarrow \gamma + 1$ 
    Redémarrer le processus à partir de la ligne 2
  fin
  /* Étape 2 : Mise à jour des projections, des probabilités et des pixels déjà reconstruits */
  pour tout  $(b_l, p_l, q_l) \in M_c(i_k, j_k)$  faire
    mettre à jour  $M_{p_l, q_l}(b_l)$  (équation 6.77)
    incrémenter  $N_{p_l, q_l}^{up}(b_l)$  et décrémenter  $M_{p_l, q_l}^t(b_l)$ 
    si  $N_{p_l, q_l}(b_l) = 0 \wedge M_{p_l, q_l}(b_l) \neq 0$  alors
      mettre à jour tous les pixels  $(i, j) \subset (b_l, p_l, q_l)$  (formule 6.79)
    fin
  fin pour
fin tantque
retourner  $I$ 

```

6.1.3 Qualité et Précision de la reconstruction NRCBI-Dirac

Nous regardons maintenant quelques résultats de reconstruction obtenus avec le nouvel algorithme. Nous utilisons les images tests de Lena et du fantôme de Shepp-Logan. Nous sommes limité sur la taille des images reconstruites. En effet, l'algorithme CBI atteint une limite pour maîtriser l'erreur qui est d'autant plus difficile à contenir que l'image à reconstruire est grande. D'autre part, nous avons constaté des temps de calcul importants.

A partir d'une image originale de taille 64×64 , Le sinogramme Mojette M est acquis en utilisant différentes suites de Farey, à partir de l'ordre 5 (minimum qui vérifie le critère de Katz). Chaque sinogramme est biaisé avec un bruit additif uniforme dont la valeur $B_{p,q}(b)$ sur un bin est choisie aléatoirement dans l'intervalle $[-5\%M_{max}, 5\%M_{max}]$, où $M_{max} = \max\{M_{p,q}(b), (b, p, q) \in M\}$. Les images reconstruites sont comparées aux originales en utilisant le SSIM et le SNR. Les images résultats et les critères de comparaisons sont détaillés sur le tableau 6.1. \overline{CBI} correspond au nombre moyen de correspondances univoques qui ont été utilisées pour reconstruire chaque pixel. Les résultats sont comparés avec la méthode SART-Mojette étudiée au chapitre précédent.

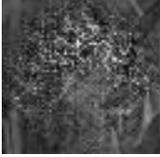
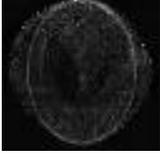
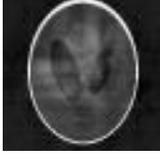
Farey order Projections \overline{CBI}	5 40 1.71	7 72 5.88	9 112 11.86	10 128 14.83
				
SSIM	0.259	0.504	0.994	0.996
SNR	-3.49	-3.12	1.39	1.68
Dirac SART-Mojette				
SSIM	0.963	0.993	0.993	0.993
SNR	-0.47	1.19	1.27	1.01
				
SSIM	0.446	0.841	0.992	0.998
SNR	-3.87	-2.77	0.49	1.27
Dirac SART-Mojette				
SSIM	0.993	0.999	0.999	0.999
SNR	0.44	2.67	2.93	2.40

TABLE 6.1: Images reconstruite avec l'algorithme CBI robuste aux bruits et SART-Mojette à partir d'un sinogramme Dirac-Mojette altéré par un bruit additif. Acquisition utilisant différent ordre de Farey (à partir de l'ordre 5). Le nombre de correspondance univoque utilisées en moyenne pour reconstruire un pixel est fourni (\overline{CBI}). SSIM et SNR.

Comme l'algorithme CBI original diverge en présence de bruits sur les bins, l'étape finale de reconstruction n'est jamais atteinte. Avec le nouvel algorithme, la reconstruction se termine lorsque le critère de Katz est vérifié. Globalement, on constate que la qualité de la reconstruction augmente avec l'ordre de la suite de Farey, c'est-à-dire avec le nombre de projections. La différence entre la suite de Farey d'ordre 5 et celle d'ordre 7 montre l'importance de la redondance des données pour aboutir à une reconstruction de bonne qualité. En effet, le SSIM obtenu pour le fantôme de Shepp-Logan est important (supérieur à 0.8). En revanche, celui de Lena n'est que de 0.6. A partir de la suite d'ordre 7, l'acquisition est suffisamment dense, i.e. il y a suffisamment de correspondances univoques pour reconstruire chaque pixel de manière précise. Ainsi, la qualité de l'image Lena devient supérieure à 0.8. Celle du fantôme de Shepp-Logan devient supérieure à 0.95 quand le nombre de projections devient très grand (à partir de la suite de Farey d'ordre 9).

Le SNR du fantôme de Shepp-Logan augmente de manière significative avec l'ordre de la suite de Farey. Comme ce fantôme contient un grand nombre de régions uniformes, leurs intensités sont correctement moyennées grâce à la grande densité d'informations disponibles sur les projections. C'est pour cette raison que la perte en signal remonte de -2.25 à -0.78 quand l'ordre de la suite de Farey va de 5 à 10. En revanche, même si le SNR de l'image Lena augmente lui aussi au début, sa valeur est quasiment stabilisée dès l'ordre 7. Globalement, nous concluons que le SNR reste constant quel que soit le nombre de projections. Ces résultats montrent que la reconstruction n'est pas compétitive avec l'algorithme SART-Mojette.

6.2 Reconstruction CBI à partir de données Spline-Mojette bruitées

La résolution de système triangulaire pour retrouver les bins Mojette depuis les projections Spline-Mojette échoue en présence de bruit sur les projections. Après avoir observé les difficultés pour adapter l'algorithme CBI-Spline aux données bruitées, nous proposons une solution basée sur le recuit simulé pour retrouver les bins Dirac à partir de projections Spline-Mojette bruitée.

6.2.1 Adaptation de l'algorithme NRCBI à la géométrie Spline-Mojette et limitations

Pour adapter l'algorithme NRCBI-Dirac à la géométrie Spline-Mojette, on procède comme l'adaptation de CBI-Dirac vue au chapitre précédent. La recherche du maximum de correspondance univoque s'effectue de manière similaire. Pour reconstruire le pixel, il faut tenir compte de la pondération (coefficient Spline) de chaque bin de l'ensemble utilisé. De même, la mise à jour des projections ne se limite pas aux bins passant par le centre du pixel, mais à tous les bins Spline-Mojette le traversant (avec une contribution Spline du pixel dans le bin).

Lorsqu'une projection arrive en fin d'utilisation, sa valeur résiduelle est reportée sur tous les pixels traversés, en tenant compte encore de la contribution. Notons $t(p, q)$ la somme des coefficients du noyau Spline de la projection. Par exemple pour la projection $(2, 1)$, $t(2, 1) = 0.5 + 1 + 0.5 = 2$. Lorsque l'utilisation d'un bin l est terminée sur la projection $(2, 1)$, on reporte $\frac{0.5}{t(2,1)} M_{2,1}^s(l)$ sur les pixels traversés par les bins $l - 1$ et $l + 1$ (car ils sont traversés par l avec la contribution 0.5). Enfin, on reporte $\frac{1}{t(2,1)} M_{2,1}^s(l)$ sur le bin l .

Notons toutefois que dans cette méthode, le nombre de mises à jours de bins est bien plus important qu'avec l'algorithme NRCBI-Dirac. Il est donc d'autant plus difficile de contenir l'erreur, sauf sur de très petites images. Par exemple, les images de la figure 6.1, de taille 32^2 sont reconstruites avec NRCBI-Spline depuis un sinogramme bruité à 10%. Ces résultats montrent l'échec de cet algorithme. Une étude de faisabilité et d'optimisation de cette méthode est donc à prévoir.

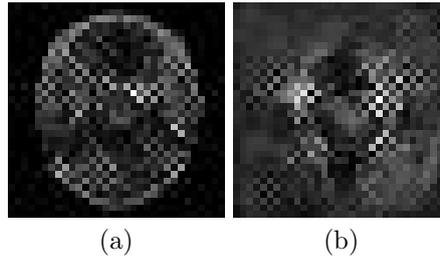


FIGURE 6.1: Image 32^2 du fantôme de Shepp-Logan (a) et de Lena (b) reconstruites à partir d'un sinogramme Spline-Mojette bruité en utilisant NRCBI-Spline.

6.2.2 D'un sinogramme Spline-Mojette bruité aux bins Mojette

Comme l'algorithme NRCBI-Spline n'est pas exploitable en l'état, nous nous sommes intéressés à une solution alternative consistant à retrouver des bins Mojette à partir de projections Spline-Mojette. Dans l'analyse de la propagation d'erreur, nous avons vu que le bruit sur des projections Spline-Mojette empêchent de retrouver les bins Mojette lorsqu'on utilise la résolution triangulaire. Nous présentons donc dans la suite un algorithme alternatif plus robuste aux bruits. Le processus est basé sur une résolution itérative en h du système d'équation linéaire entre les bins et les projections Spline-Mojette. Cette méthode itérative, dérivée de l'algorithme de Kaczmarz (que nous avons abordé lors de l'étude des méthodes itératives au chapitre 4), estime la valeur d'un bin $M_{p,q}^{h+1}(b)$ à l'itération $h+1$ par une succession de comparaisons entre les valeurs originales $M_{p,q}^s(b)$ du sinogramme Spline-Mojette et les valeurs recalculées à partir du résultat obtenu à l'itération précédente (notées $M_{p,q}^{s,h}(b)$). On y ajoute une pénalisation basée sur le recuit simulé. Ainsi, on autorise (avec une probabilité qui dépend du rang de l'itération) qu'une valeur donnant une erreur plus importante soit toutefois prise en compte. La mise à jour d'un bin à l'itération h est donc calculée comme suit :

$$M_{p,q}^{h+1}(b) = M_{p,q}^h(b) + Esp_{p,q}^h(b) \quad (6.80)$$

où $Esp_{p,q}^h(b)$ est défini par une étape de recuit simulé. Dans l'algorithme de Kaczmarz, la valeur utilisée n'est pas pénalisée, et vaut habituellement :

$$Esp_{p,q}^{h,0}(b) = \frac{\sum_{b_i=1}^{N_\rho(p,q)} \mathcal{B}_{p,q}(b-b_i) (M_{p,q}^s(b_i) - M_{p,q}^{s,h}(b_i))}{\sum_{b_i=1}^{N_\rho(p,q)} \mathcal{B}_{p,q}(b-b_i)} \quad (6.81)$$

où $M_{p,q}^{s,h}(b_i) = \sum_{b_j=1}^{N_\rho(p,q)} \mathcal{B}_{p,q}(b_i-b_j) M_{p,q}^h(b_j)$ est la projection Spline-Mojette recalculée à partir des bins obtenus à l'itération précédente.

Nous calculons la valeur pénalisée comme suit :

$$Esp_{p,q}^{h,N}(b) = Esp_{p,q}^{h,0}(b) + \frac{P(Esp_{p,q}^{h,0}(b))}{F(h+1)} \quad (6.82)$$

où $P(x)$ donne une valeur aléatoire entre $[-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}]$, et $F(x)$ est une fonction croissante qui assure que l'erreur maximale appliquée décroît quand le rang h de l'itération augmente. Ainsi, d'après la procédure basée sur le recuit simulé, la mise à jour complète est définie par la formule :

$$Esp_{p,q}^h(b) = \begin{cases} Esp_{p,q}^{h,0}(b) & \text{si } Esp_{p,q}^{h,0}(b) < Esp_{p,q}^{h,N}(b) \\ Esp_{p,q}^{h,N}(b) & \text{si } \begin{cases} Esp_{p,q}^{h,0}(b) > Esp_{p,q}^{h,N}(b) \\ p < e^{-\frac{h}{h_{max}}} \end{cases} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.83)$$

où p est choisi aléatoirement entre $[0, 1]$, et h_{max} est définie comme une *Température* maximale.

Nous notons $E^h = \sum_b |M_{p,q}^s(b) - M_{p,q}^{s,h}(b)|$ l'erreur entre le sinogramme Spline-Mojette original et celui reconstruit à l'itération h . Le processus itératif est arrêté lorsque $E^h - E^{h+1} \leq \epsilon$, où ϵ est un paramètre donné. Ce processus itératif calcule donc chaque valeur de bin et donne une approximation des projections Dirac-Mojette. Une fois les bins calculés, l'algorithme CBI robuste aux bruits peut être appliqué. L'erreur finale E^h obtenue sur chaque projection peut être utilisée comme valeur initiale des erreurs des bins $N_{p,q}^{up}(b)$ dans l'algorithme CBI. Bien sûr, on peut aussi utiliser SART-Mojette Dirac (par exemple) pour reconstruire l'image à partir des bins obtenus par recuit simulé. Dans la suite, nous notons cette résolution SA (de l'anglais *Simulated Annealing*).

6.2.3 Quelques résultats de reconstruction

Observons maintenant les résultats de calculs obtenus à partir d'un sinogramme Spline-Mojette bruité. Les bins Dirac-Mojette sont calculés à partir de ce dernier en utilisant l'algorithme de recuit simulé. Puis, l'inversion NRCBI-Dirac est appliquée. Ainsi, le bruit présent sur les bins Mojette est maintenant une combinaison du bruit sur les projections Spline et des approximations induites par l'algorithme SA. Les images résultats et les critères de comparaisons correspondants sont fournis dans le tableau 6.2.

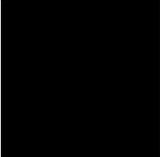
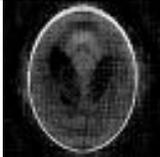
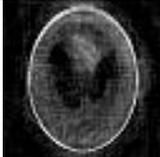
Farey ordre	5	7	9	10
				
SSIM	0.371	0.693	0.656	0.651
SNR	-3.56	-2.48	-2.70	-2.65
				
Splines SART-Mojette				
SSIM	0.950	0.979	0.988	0.991
SNR	-0.68	-0.16	-0.64	-0.77
				
SSIM	0.000	0.892	0.839	0.821
SNR	-4.38	-2.29	-2.76	-2.60
				
Splines SART-Mojette				
SSIM	0.994	0.999	0.999	0.999
SNR	0.53	2.43	3.05	2.66

TABLE 6.2: Images reconstruites à partir du sinogramme Spline-Mojette. Les bins Mojette sont retrouvés par l'algorithme SA, puis l'algorithme NRCBI est appliqué. Le SSIM et le SNR sont détaillés pour estimer la qualité globale de reconstruction.

Comme pour les résultats de reconstruction NRCBI-Dirac, on remarque que la qualité des images augmente avec le nombre de projections et converge lorsque l'ordre de la suite de Farey utilisée est supérieur à 9. De même, le SNR augmente pour le fantôme de Shepp-Logan alors qu'il reste constant avec l'image Lena.

6.3 Application à la reconstruction à partir de données incomplètes

En tomographie, le terme « données incomplètes » regroupe un ensemble de problèmes concernant la disposition et la quantité d'information disponible sur les projections. Il peut faire référence au sous échantillonnage ou à un nombre de projections très faible. Dans ce cas, nous avons étudié chaque reconstruction lorsque $d\rho > 1$ ou $N_\theta \ll 180$ et avons constaté une perte de la qualité et de la précision. Toutefois, nous pouvons rappeler que nous avons observé une meilleure préservation du SSIM et de la PSF avec les méthodes itératives.

Enfin, le « données incomplètes », concerne aussi une acquisition qui n'est pas effectuée entièrement autour de l'objet. Autrement dit, il manque un ensemble de projections successives. Ces dernières ne couvrent pas les 180° minimum nécessaires autour de l'objet. Ce type de données manquantes est notamment une tare de la microscopie électronique de transmission. L'échantillon à acquérir est positionné entre deux plaques de verres. Lorsque celles-ci ont un angle d'incidence très important par rapport à l'axe des électrons, ces derniers sont réfléchis. Les projections acquises ne sont pas exploitables sur toute un angle. Cet angle manquant provoque des déformations sur l'image. Ces déformations sont l'*effet de l'angle manquant* (noté MWE, de l'anglais *Missing Wedge Effect*).

Dans cette section, nous détaillons d'abord le problème de l'angle manquant et ses répercussions sur les reconstructions usuelles. En particulier, nous étudions les méthodes BFP et SART lorsque l'acquisition est inférieure à 180° . Ensuite, nous transposerons le problème des données incomplètes à la transformée Mojette. Plus précisément, nous verrons que l'inversion CBI est particulièrement robuste au MWE contrairement aux méthodes dérivées de la tomographie usuelle. Nous regarderons si les nouveaux algorithmes NRCBI sont eux-aussi insensibles à ce problème. Nous présenterons les résultats obtenus depuis une acquisition réelle et tirerons les perspectives de l'usage de la transformée Mojette pour tenter de résoudre le problème des données incomplètes.

6.3.1 Le problème de l'angle manquant

Lorsqu'une acquisition ne peut être effectuée autour de l'objet avec un angle de couverture d'au moins 180° , l'ensemble des projections n'est pas suffisant pour déterminer avec exactitude la forme des objets. Soit par exemple le sinogramme initial de 180 projections avec 512 échantillons par projection. Supprimons 60 projections successives. Il reste alors 120 projections assurant une couverture partielle de $\frac{2}{3}\pi$. Le sinogramme initial est rappelé sur la figure 6.2(a). Le sinogramme tronqué est présenté sur la figure 6.2(b). Les projections manquantes correspondent aux lignes entièrement noires.

Regardons l'effet des projections manquantes sur les reconstructions usuelles BFP et SART. Comme nous pouvons le constater sur les images de la figure 6.3, ces méthodes échouent car même si l'image est reconstruite, les contours sont déformés. Cette déformation est liée au manque de données contenues sur les projections supprimées. Elle se traduit dans l'espace de Fourier par un angle manquant, c'est-à-dire une portion non reconstruite du domaine fréquentiel. La figure 6.3(c) montre un tel espace incomplet.

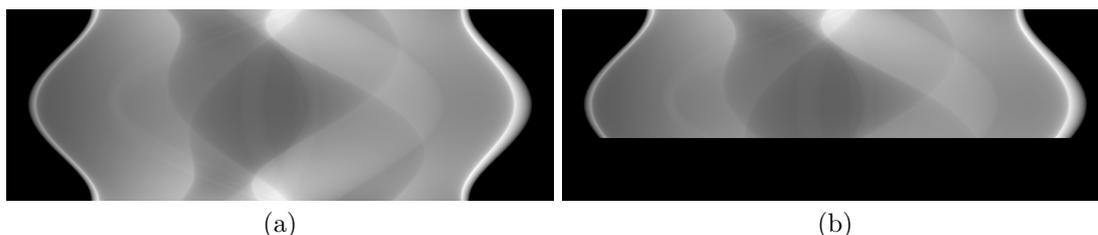


FIGURE 6.2: (a) Sinogramme initial avec 180 projections de 512 échantillons. (b) Sinogramme tronqué dans lequel nous avons supprimé 60 projections successives.

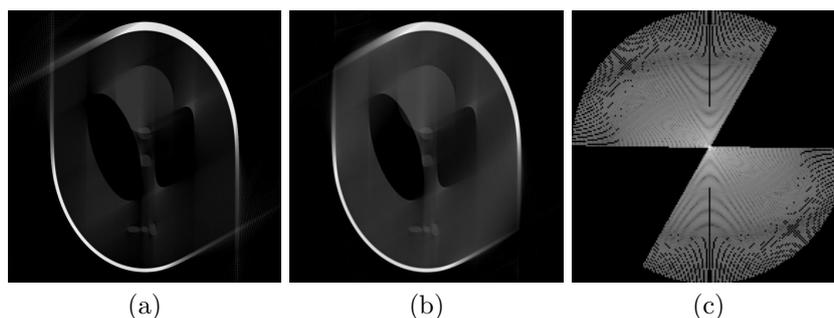


FIGURE 6.3: Reconstruction BFP (a) et SART (b) à partir d'un sinogramme tronqué offrant une couverture de 120° . (c) Espace de Fourier d'une image reconstruite à partir d'un sinogramme incomplet : correspond à un angle de données manquantes dans l'espace fréquentiel.

Même si elles échouent, nous constatons l'efficacité des méthodes itératives comparées aux méthodes directes. En effet, l'image obtenue par SART conserve bien l'intensité et le contraste, et crée moins de faux contours. Notons notamment l'artefact de durcissement de rayon que l'on observe sur le pourtour du crâne avec la BFP et qui n'apparaît pas sur l'image SART. Des études et des comparaisons des méthodes usuelles (notamment pour la tomosynthèse mammaire) ont été proposées par Zhang *et al.* [102] ou Van de Sompel [17, 16]. Anderson a démontré dans [3] les limites des méthodes itératives, mais aussi leur supériorité par rapport aux méthodes directes.

Un certain nombre d'optimisations et d'algorithmes ont été développés pour tenter de réduire le MWE. Notons notamment les analyses multi-échelles. Une image de petite taille est d'abord reconstruite. Elle est moins déformée qu'une image de grande taille. Une acquisition de cette image est effectuée pour combler les projections manquantes dans le sinogramme initial. En appliquant itérativement ce processus à l'aide de reconstructions basées sur les ondelettes, on reconstruit une image de plus en plus grande. La principale limite de cette méthode est qu'elle génère une perte importante de la précision. Une méthode basée sur les ondelettes et utilisant une information a priori à par exemple été proposée par Rantala *et al.* dans [74].

Différemment, Nassi *et al.* ont proposé dans [63] un algorithme qui consiste à estimer des projections manquantes. Ces estimations sont basées sur une extrapolation des données dans le sinogramme. Un domaine intermédiaire au sinogramme, appelé stackgramme, a aussi été proposé. Une étude comparative des extrapolations dans le sinogramme ou le stackgramme a été détaillée par Haponen et Ruotsalainen dans [40]. Enfin, notons le travail récent de Jenna Tong *et al.* [95, 4] qui suggère une double-acquisition selon deux axes perpendiculaires permettant une reconstruction 3D alternant les itérations suivant ces deux axes. La déformation créée par l'angle manquant sur un axe est diminuée par la couverture partielle de cet angle selon l'autre axe d'acquisition (et inversement).

6.3.2 Robustesse de la transformée Mojette au problème du missing wedge

Dans la suite, nous proposons à notre tour une amorce de solution basée sur la transformée Mojette. Nous regardons comment les reconstructions CBI, BFP-Mojette ou SART-Mojette sont robustes au MWE en expliquons l'origine de cette robustesse (les géométries Dirac et Spline sont toutes deux considérées).

6.3.2.1 Reconstructions Dirac-Mojette robustes aux missing wedge ?

L'algorithme CBI-Dirac est bien sûr robuste à l'effet du missing wedge. Prenons le cas extrême de la projection $(H, 1)$ pour une image de taille $W \times H$. Alors, le nombre de bins sur cette projection est $(W - 1) * H + (H - 1) * 1 + 1 = W \times H$. La projection contient autant de bins que de pixels à reconstruire. Chaque bin porte l'information d'un seul pixel. Dans ce cas, la reconstruction est exacte et n'a pourtant utilisé qu'une seule projection.

Un exemple est présenté sur la figure 6.4 avec 4 projections réparties sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. La première image en haut à gauche illustre l'acquisition. Depuis la projection (1, 2), on reconstruit 4 pixels (en haut à droite). Les mises à jours font apparaître 2 nouvelles correspondances univoques (en bas à gauche). Enfin, on reconstruit les 3 derniers pixels (en bas à droite).

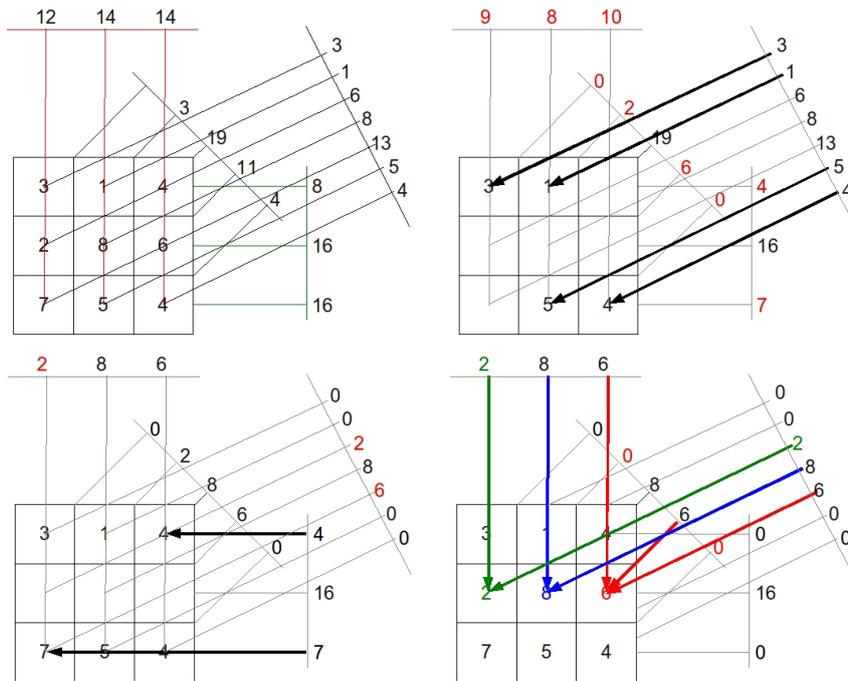


FIGURE 6.4: Reconstruction CBI-Dirac exacte avec 4 projections autour de $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit par exemple la suite de Farey d'ordre 10 et sa représentation angulaire (introduite au chapitre 5 sur l'image 5.3). Lorsqu'on supprime un tiers des angles de projections, nous obtenons la représentation angulaire avec angle manquant présentée sur l'image 6.5.

Nous utilisons cette représentation angulaire incomplète dans les acquisitions/reconstructions qui suivent. Comme des projections ont été supprimées, le critère de Katz a été modifié. Ainsi, la suite de Farey d'ordre 10 fournit à l'origine 128 projections permettant de reconstruire une image

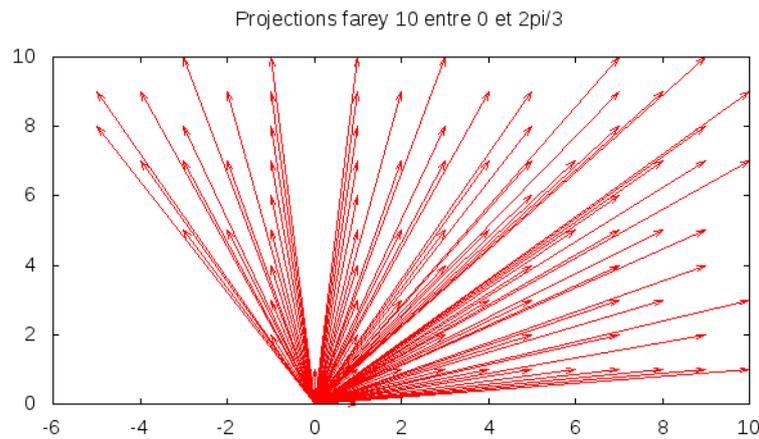


FIGURE 6.5: Représentation angulaire de la suite de Farey d'ordre 10 sur laquelle on a supprimé un tiers des projections.

de taille 651^2 pixels au maximum. L'ensemble tronqué des projections issue de cette même suite contient 85 projections permettant de reconstruire une image de taille 371×464 . Dans la suite, les images reconstruites sont de taille 256^2 pour vérifier le critère de Katz.

La reconstruction CBI-Dirac de l'image Lena (image (a) de la figure 6.6) est exacte en utilisant les 85 projections restantes. Nous pouvons aussi constater que les algorithmes BFP-Mojette et SART-Mojette aboutissent à des reconstructions non déformées (bien qu'elles ne soient pas exactes). Comme chaque pixel est représenté une et une seule fois par projection (échantillonnage uniforme), toutes ces inversions rétro-projetent l'information uniformément sur l'image.

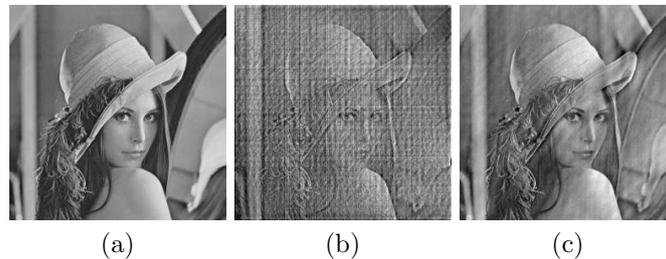


FIGURE 6.6: Reconstructions Dirac-Mojette à partir de données incomplètes en utilisant l'algorithme CBI-Dirac (a), BFP-Mojette (b) et SART-Mojette (c).

6.3.2.2 Reconstructions Spline-Mojette robustes aux Missing Wedge ?

Nous observons maintenant la robustesse des algorithmes pour reconstruire une image à partir d'une acquisition Spline-Mojette. La résolution du système triangulaire pour passer des projections Spline aux bins Mojette étant exacte, on peut appliquer l'algorithme CBI-Dirac (que l'on sait robuste au MWE). Par ailleurs, l'algorithme CBI-Spline permet, tout comme l'algorithme CBI-Dirac, de reconstruire sans déformation une image. Le résultat de la reconstruction CBI-Spline avec 85 projections est donné sur la figure 6.7(a).

En revanche, comme on peut le constater sur les images résultats 6.7(b) et 6.7(c), les méthodes dérivées de la tomographie classique ne sont plus robustes au MWE en géométrie Spline. Dans un sinogramme Spline-Mojette, chaque pixel est représenté plusieurs fois par projection et avec

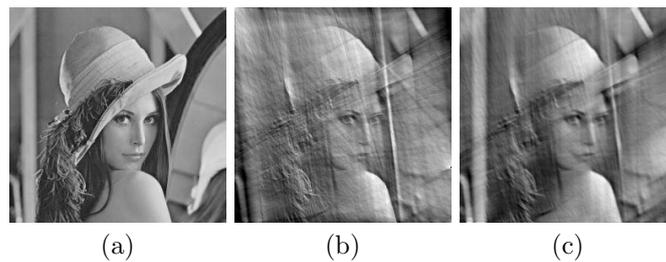


FIGURE 6.7: Reconstructions Spline-Mojette à partir de données incomplètes en utilisant l'algorithme CBI-Spline (a), BFP-Mojette (b) et SART-Mojette (c).

une contribution totale qui dépend de la projection. Par exemple, sur la projection $(1, 1)$ chaque pixel est représenté 1 fois sur un bin Spline-Mojette. En revanche, sur la projection $(2, 1)$, un pixel est représenté sur trois bins (un bin avec la contribution 1 et deux bins avec la contribution 0.5). La contribution totale d'un pixel est alors 2. Comme l'algorithme CBI arrive à déterminer et à déduire la contribution d'un pixel sur un bin de projection, il sait extraire la valeur du pixel pour le reconstruire. Ce n'est pas le cas des algorithmes BFP-Mojette ou SART-Mojette. L'étalement de la contribution des pixels sur les projections est la raison pour laquelle ces reconstructions échouent lorsque les données sont incomplètes.

6.3.2.3 Perspective d'utilisation de la transformée Mojette pour la tomographie à partir de données incomplètes

Comme nous venons de l'exposer, les reconstructions Mojette sont robustes au MWE, à condition d'être en géométrie Dirac, ou d'utiliser l'algorithme CBI. La géométrie Dirac-Mojette est spécifique à une acquisition depuis une image discrète, et ne correspond pas à la géométrie d'une acquisition standard. Toutefois, nous savons qu'il est possible d'interpoler une acquisition réelle vers un sinogramme Spline-Mojette. Les reconstructions BFP-Mojette ou SART-Mojette depuis un tel sinogramme ne sont pas robustes au MWE. La reconstruction CBI-Spline permet de retrouver l'image sans déformation, mais elle n'est pas suffisamment robuste aux bruits pour être appliquée directement. Retrouver les bins Mojette à partir des projections Spline-Mojette (par l'algorithme de recuit simulé), puis appliquer l'algorithme CBI-Dirac reste donc la seule solution envisageable pour essayer de reconstruire une image par transformée Mojette à partir d'une acquisition réelle incomplète.

Nous regardons dans un premier temps la reconstruction incomplète à partir d'une acquisition discrète. Soit une image de 64^2 pixels. Nous effectuons son acquisition (bruitée) suivant la suite de Farey d'ordre 10 à laquelle on a supprimé $1/3$ des projections. La reconstruction en utilisant l'algorithme de recuit simulé et l'inversion NRCBI-Dirac est présentée sur la figure 6.8(b). Malgré le bruit, on observe bien que les régions sont moins déformées qu'avec l'inversion SART-Mojette (figure 6.8(a)). D'un point de vue géométrique l'image est plus précise, en particulier les contours de la tête du fantôme.

Regardons maintenant le résultat de la même reconstruction à partir d'une acquisition réelle (180 projections de 512 échantillons) interpolée dans un sinogramme Spline-Mojette (figure 6.8(c)). Cette fois-ci, on observe des déformations semblables à celles dues aux projections manquantes. L'étape d'interpolation (entre acquisition réelle et sinogramme Spline-Mojette) fait apparaître une problématique alternative au problème du MWE. Les déformations ne sont plus liées aux projections manquantes mais à un étalement des données sur les projections existantes pendant l'interpolation.

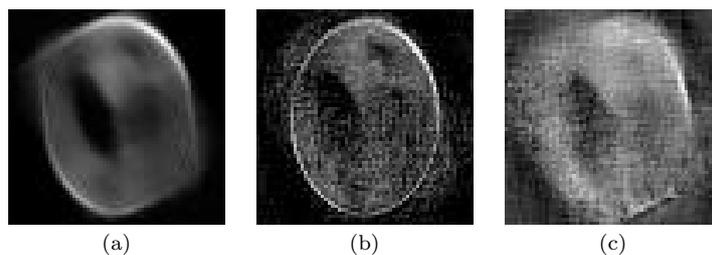


FIGURE 6.8: Image reconstruite en utilisant SART-Mojette (a) SA + NRCBI (b) depuis une acquisition Spline-Mojette bruitée avec angle manquant. Reconstruction SA + NRCBI à partir d'un sinogramme de Radon interpolé avec projections manquantes (c).

6.4 Conclusion et Perspectives

Nous avons développé dans ce chapitre une méthode CBI robuste aux bruits. Cette dernière s'est alors présentée comme une solution alternative (bien que non compétitive) aux reconstructions Mojette dérivées de la tomographie usuelle. Nous avons aussi proposé un algorithme de recuit simulé pour retrouver les bins Mojette à partir de projections Spline-Mojette. Les résultats obtenus ont montré l'efficacité de ces méthodes sous certaines conditions. D'abord, la taille de l'image reconstruite ne doit pas être trop grande, sinon il est difficile de contenir le bruit malgré les outils d'atténuation mis en place. De plus, l'efficacité de ces nouvelles méthodes dépend du nombre de projections, et donc de la suite de Farey utilisée. Celle-ci doit être suffisamment sur-proportionnée par rapport à la taille de l'image.

Ensuite, nous avons mis en évidence l'efficacité des méthodes Mojette pour la reconstruction à partir de données incomplètes. En géométrie Dirac, toutes les méthodes sont robustes au MWE, tandis qu'en géométrie Spline, seul l'algorithme CBI reconstruit correctement l'image. Comme l'algorithme CBI-Spline est difficile à exploiter lorsque les projections sont bruitées, nous avons utilisé une résolution basée sur le recuit simulé et CBI-Dirac. Sur une acquisition Spline-Mojette discrète bruitée, nous avons constaté une reconstruction sans déformation. En revanche, depuis une acquisition réelle, l'étape d'interpolation (entre sinogramme acquis et sinogramme Spline-Mojette) a de nouveau fait apparaître des déformations dans l'image. Ces dernières ne sont plus liées aux projections manquantes mais à une perte de précision (induites par l'interpolation) sur les projections existantes.

Nous pouvons dégager deux perspectives de ce travail. D'abord, la méthode NRCBI-Spline est difficile à mettre en œuvre étant donné qu'elle ne contient pas le bruit aussi efficacement que NRCBI-Dirac. La solution alternative consistant à utiliser l'algorithme de recuit simulé aboutit à une reconstruction, mais la qualité des résultats limite leur exploitation. Nous avons donc introduit deux manières de reconstruire une image par l'algorithme CBI depuis une acquisition Spline-Mojette bruitée, mais l'une et l'autre doivent être optimisées.

En particulier, l'inversion CBI se présente comme une solution pour résoudre le problème de l'angle manquant. Nous avons en effet constaté que ces inversions pouvaient reconstruire une image sans déformation depuis une acquisition discrète bruitée. En revanche, nous avons mis en évidence une problématique alternative lorsque la reconstruction s'effectue depuis une acquisition réelle. L'interpolation vers un sinogramme Spline-Mojette génère de nouveau un MWE. La séparation des données sur le sinogramme est une étape importante qui doit donc être explorée pour envisager l'utilisation des algorithmes CBI en tomographie avec des données manquantes.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à la reconstruction tomographique à partir de données réelles en utilisant des algorithmes de la tomographie discrète. Dans un premier temps, nous avons introduit la transformée Mojette et la modélisation Spline-Mojette. Elle autorise une reconstruction exacte en l'absence de bruit sur les projections par l'inversion CBI. L'une de nos contributions ici a concerné le développement d'un algorithme CBI-Spline directement adapté au modèle Spline-Mojette.

Comme ces méthodes de reconstructions sont particulièrement sensibles aux erreurs dans les projections, des méthodes dérivées de la tomographie classique ont été développées. Ces dernières sont robustes aux approximations dans le sinogramme. Elles peuvent être utilisées pour reconstruire une image à partir d'une acquisition réelle (au travers d'une interpolation préalable du sinogramme acquis vers un sinogramme Spline-Mojette). Aussi, nous nous sommes intéressés à la qualité et à la précision de ces méthodes. Nous avons constaté globalement une légère perte en SSIM et PSF, mais une meilleure résistance aux bruits.

Ensuite, nous avons mis en évidence la faculté des algorithmes CBI à reconstruire sans déformation une image lorsque l'acquisition est incomplète. Nous avons donc essayé d'adapter ces algorithmes à une acquisition classique pour tenter de réduire les effets de l'angle manquant. D'abord, nous nous sommes intéressés à la propagation des erreurs dans les projections. Ainsi, nous avons conçus de nouveaux outils pour surveiller cette propagation et mis en place un nouvel algorithme CBI plus résistant aux bruits. De même, nous avons mis au point une résolution basée sur le recuit simulé pour retrouver des bins Mojette à partir d'un sinogramme Spline-Mojette. Nous avons montré que ces nouvelles inversions aboutissent, mais sous certaines conditions. D'abord, il faut un nombre de projections suffisant pour avoir plusieurs correspondances univoques à chaque itération. Ensuite, l'image reconstruite ne doit pas être trop grande pour arriver à contenir l'erreur et terminer en un temps raisonnable. Nous avons ainsi convenu d'une nécessité d'optimiser ces nouvelles méthodes.

Enfin, nous les avons confronté à une reconstruction à partir d'un sinogramme Spline-Mojette interpolé depuis un sinogramme réel. Nous avons vérifié si la robustesse aux données incomplètes était toujours validé. Nous avons alors constaté une nouvelle limitation, non pas liée aux projections manquantes, mais causée par une mauvaise répartition des données sur les projections existantes. Une étude de cette répartition est donc à développer. De là pourra découler l'utilisation des inversions CBI pour tenter de réduire les déformations liées à l'angle manquant en tomographie usuelle.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la qualité, à la précision et à la résistance aux bruits des reconstructions tomographiques. Dans une première partie, nous avons introduit les théorèmes de Radon et de la tranche centrale ; modélisations mathématiques exactes en continu du processus d'acquisition/reconstruction. Nous avons vu que la discrétisation des données provoque des approximations, renforcées par les bruits d'acquisition. Nous avons alors proposé un protocole de comparaison basé sur le SSIM, la PSF et le SNR pour confronter les résultats et établir une classification des différentes méthodes usuelles.

Dans l'étude des méthodes directes, nous avons vu que les différentes interprétations des projections dans les pixels n'aboutissent pas à une amélioration des résultats, sauf en sous-échantillonnage avec le noyau d'aire. De même, les différentes interpolations dans l'espace de Fourier n'augmentent pas la qualité ou la précision. Toutefois, lorsque les données sont éparées, nous préférons ne pas reconstruire le domaine de Fourier plutôt que d'interpréter de façon imprécise les données. La méthode BFP est un bon compromis entre l'inversion de Radon et la transformée de Fourier. Mais le rehaussement des hautes fréquences, qui atténue les effets de la discrétisation, augmente les erreurs liées aux bruits dans les projections. Les différents fenêtrages existant ne diminuent pas significativement ces erreurs.

Les méthodes itératives sont plus robustes à l'effet de la discrétisation et du bruit que les méthodes directes. Nous observons une meilleure qualité avec la méthode SART et une très grande précision avec la reconstruction EM (notamment en sur-échantillonnage). Toutefois, nous avons vu que la principale limite de ces méthodes réside dans le processus itératif lui-même. D'une part, les temps de calculs sont plus importants. D'autre part, la solution diverge si le nombre d'itérations n'est pas contrôlé. Des optimisations basées sur une séparation des données du sinogramme (sous-ensembles ordonnées par exemple) réduisent les temps de calculs sans détériorer les résultats. Mais cela accélère la divergence de la solution. Les régularisations des méthodes permettent effectivement de détecter l'itération à laquelle s'arrêter (stabilisation de la solution). Mais elles réduisent la résistance aux bruits dans les projections.

Ainsi, quelle qu'elle soit, la précision et la qualité d'une reconstruction est un compromis entre les approximations liées à l'échantillonnage et les outils cherchant à minimiser les effets du bruit.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés aux méthodes discrètes, et notamment à la transformée Mojette. Cette dernière n'est pas assujettie au problème d'échantillonnage irrégulier car elle utilise une géométrie d'acquisition particulière. Nous avons introduit les acquisitions Dirac-Mojette et Spline-Mojette. En particulier, l'acquisition Dirac-Mojette admet une reconstruction discrète exacte en l'absence de bruit sur les projections (algorithme CBI-Dirac). Nous avons étendu son principe à la géométrie Spline et avons développé une inversion CBI-Spline. Cette dernière retrouve de manière exacte l'image depuis un sinogramme Spline-Mojette sain.

En revanche, les inversions CBI ne peuvent être utilisées en tomographie usuelle car elles doivent vérifier le critère de Katz (dépendant de la taille des données acquises et reconstruites) et ne sont pas robustes aux bruits. Les méthodes BFP-Mojette et SART-Mojette, dérivées de la tomographie classique, ne sont plus exactes en l'absence de bruit sur les projections. Mais elles permettent une reconstruction quelles que soient la taille des données et les erreurs sur les projections. Elles peuvent alors être utilisées en tomographie usuelle pour reconstruire une image à partir d'une

acquisition réelle (avec interpolation préalable du sinogramme acquis vers un sinogramme Spline-Mojette). Ainsi, nous les avons prises en compte dans l'étude de la qualité et de la précision pour compléter le comparatif établi dans la première partie. Il en a résulté que ces méthodes n'avaient pas d'intérêts particuliers : temps de calculs plus long, qualité des résultats légèrement en dessous des méthodes usuelles.

Pourtant, la résistance à l'effet de l'angle manquant est l'un des atouts de la transformée Mojette. Nous avons montré dans le chapitre 6 que les inversions CBI ne déforment pas les images lorsqu'il manque un angle de projections dans le sinogramme. Comme ces algorithmes ne sont pas robustes aux erreurs dans les projections, les algorithmes NRCBI-Dirac et NRCBI-Spline ont été développés. Ils reposent sur la redondance des données et la mesure de la propagation de l'erreur. L'observation de ces deux critères permet de reconstruire malgré le bruit, sous certaines conditions. D'une part, la redondance exploitée demande une grande quantité de données dans les projections par rapport à la taille de l'image reconstruite. De plus, les temps de calculs sont très importants sur de grandes images. Ces inversions aboutissent donc uniquement sur des images de petites tailles. L'échec de la reconstruction NRCBI-Spline a par ailleurs montré les limites de ces nouveaux algorithmes (difficulté de contenir la propagation de l'erreur). Une résolution par recuit simulé a été proposée pour retrouver les bins Mojette à partir d'une acquisition Spline-Mojette bruitée. La reconstruction combinant l'algorithme SA et CBI-Dirac aboutit, mais les images obtenues sont fortement bruitées.

Ces algorithmes doivent donc être améliorés pour les rendre compétitifs, notamment car ils apparaissent comme une amorce de solution au problème des projections manquantes. Ils sont robustes à l'effet de l'angle manquant depuis une acquisition Spline-Mojette bruitée. En revanche, une reconstruction à partir d'un sinogramme réel interpolé fait de nouveau apparaître des déformations. Ces déformations ne sont plus liées aux projections manquantes mais à une mauvaise répartition des données (causée par l'interpolation) sur les projections existantes. Une étude de la séparation des données sur les échantillons pendant la phase d'interpolation doit être mise en oeuvre pour atténuer ces déformations.

Si le protocole d'étude établi dans nos travaux permet une classification des méthodes de reconstructions, il peut aussi être utilisé pour analyser la qualité et la précision d'une modalité d'acquisition. En effet, supposons un modèle synthétique continu dont nous connaissons parfaitement les propriétés physiques et géométriques. Nous effectuons l'acquisition simulée depuis le modèle synthétique et la reconstruction avec une méthode \mathcal{R} depuis le sinogramme obtenu. Le protocole établi en chapitre 2 donne la qualité, la précision et la robustesse aux bruits du maillon « acquisition/reconstruction \mathcal{R} ». Soit maintenant le modèle réel issu de ce modèle synthétique (objet construit à l'aide d'une imprimante 3D par exemple). Nous effectuons une acquisition réelle, dans les mêmes conditions que l'acquisition simulée, en utilisant une modalité d'acquisition \mathcal{M} . Depuis le sinogramme obtenu, nous reconstruisons l'image en utilisant la même méthode \mathcal{R} . On applique le protocole d'étude des résultats et on obtient la qualité, la précision et la robustesse aux bruits du maillon « acquisition \mathcal{M} /reconstruction \mathcal{R} ». La confrontation des résultats du maillon « acquisition/reconstruction \mathcal{R} » et du maillon « acquisition \mathcal{M} /reconstruction \mathcal{R} » permet de déterminer la qualité, la précision et la nature des bruits générés par la modalité d'acquisition \mathcal{M} . Cette perspective d'étude est résumée sur le schéma 6.9.

La technologie laser permet maintenant d'utiliser les rayonnements électromagnétiques dans la bande de fréquences TéraHertz (entre les micro-ondes et l'infrarouge) pour voir à travers la matière. Elle trouve un intérêt en tomographie car les ondes TéraHertz ont un fort pouvoir pénétrant dans les matériaux non conducteurs, sont peu énergétiques et ne sont pas ionisantes. Une rotation autour de l'objet est effectuée, et chaque projection est acquise par balayage (les échantillons sont donc récupérés les uns après les autres). Une méthode de reconstruction (en général, la méthode BFP) est ensuite utilisée pour reconstruire les images à partir de ces projections [24]. Des problématiques liées aux propriétés optiques limitent la qualité et la précision des résultats. Notamment, les acquisitions TéraHertz sont sensibles aux effets de réfractions. Comme l'acquisition est effectuée

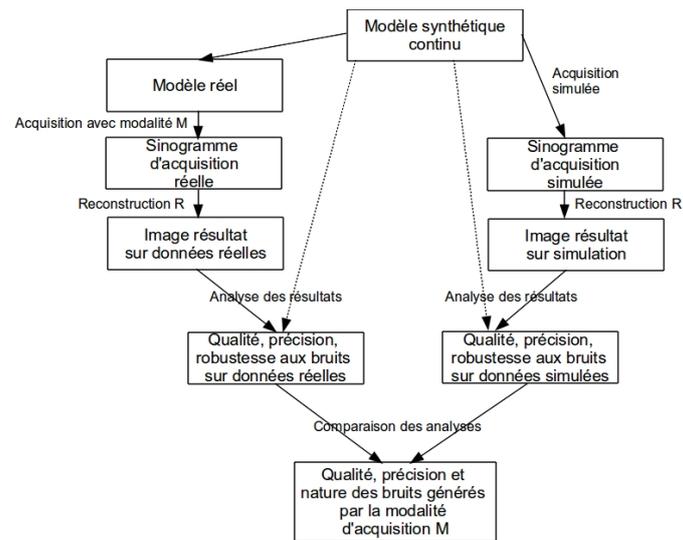


FIGURE 6.9: Analyse de la qualité et de la précision d'une modalité d'acquisition par comparaison de données réelles et synthétiques.

par balayage, l'onde réfractée est quasiment perdue. Seul un signal résiduel peut être interprété dans le sinogramme [2].

L'analyse de cette modalité d'acquisition récente, en utilisant le protocole défini sur le schéma 6.9, va être mise en oeuvre pour extraire des propriétés particulières d'acquisition. Nous nous baserons alors sur ces dernières pour mettre en place de nouvelles méthodes de reconstructions adaptées aux propriétés physiques spécifiques à cette technologie.

Annexes

Annexe A

Reconstruction tomographique sur GPU avec CUDA

Les méthodes vues en première partie, et notamment les méthodes itératives, sont gourmandes en temps de calculs. Elles sont donc peu exploitées dans des applications temps réels ou pour des reconstructions partir de grandes tailles de données. Une façon de diminuer la durée des traitements consiste à paralléliser l'implémentation des méthodes. La BFP peut être parallélisée car chaque pixel est reconstruit indépendamment des autres. De la même manière, les interpolations dans l'espace de Fourier sont parallélisables. Enfin, chaque itération d'une méthode itérative peut mesurer l'erreur et corriger les pixels en parallèle. Globalement, l'implémentation parallèle de ces méthodes est efficace car les données traitées sont indépendantes les unes des autres. Par conséquent, leur implémentation parallèle sur CPU est maintenant standardisée.

Une API récente, appelée CUDA (*Compute Unified Device Architecture*) [68] est développée depuis 2007 par NVIDIA et est optimisée pour la parallélisation d'algorithmes sur GPU (*Graphic Process Unit*). Dans cette annexe, nous détaillons le développement de certaines méthodes sur ce type de carte et observons le gain en temps de calculs comparé à une implémentation en parallèle sur CPU. L'exploitation de la puissance de calcul des cartes graphiques grand public pour ces algorithmes est une voie exploratoire qui se développe depuis quelques années. Notons par exemple les travaux de H. Scherl *et al*, paramétrant les cartes graphiques avec GLSL pour implémenter la BFP [81]. D'une manière plus théorique, K. Mueller *et al* ont démontré pourquoi les GPU sont efficaces pour la reconstruction tomographique [60]. Dans cette annexe, nous ne cherchons donc pas à démontrer l'efficacité des calculs sur GPU [59] mais à aborder l'aspect implémentation en utilisant le nouvel outil CUDA [77].

Une comparaison de trois méthodes usuelles est proposée sur le tableau A.1. La taille d'acquisition $N_\theta \times N_\rho$ et la taille de l'image $W \times H$ reconstruite influencent le temps de calcul. La complexité de la méthode BFP ou de la méthode SART dépend de la taille du sinogramme et des données reconstruites. En revanche, le temps de calcul de FR ne dépend que de la taille du sinogramme. Les résultats en temps de calcul correspondent à la reconstruction parallèle d'une image de 512^2 pixels à partir d'un sinogramme de 180 projections de 512 échantillons sur un CPU 4 coeurs à 3GHz..

Ces méthodes diffèrent en qualité, en précision et en robustesse aux bruits d'acquisition. Toutefois, nous ne souhaitons pas nous focaliser sur un type de méthode particulier et proposons donc une implémentation sur GPU de ces trois méthodes. D'abord, nous regardons les fonctionnalités des cartes graphiques utilisées et présentons l'API CUDA. Ensuite, nous proposons une implémentation des méthodes sur GPU en utilisant cette API. Enfin, nous verrons comment ces cartes

	BFP	FR	SART
$N_\theta \times N_\rho$	↗	↗	↗
$W \times H$	↗	≈	↗
$T(sec)$	4.081	7.51	7.156

TABLE A.1: Temps de calcul en secondes obtenus pour reconstruire en parallèle une image de 512^2 pixels à partir d'un sinogramme de taille 180×512 sur un processeur 4 coeurs à 3GHz. Le temps de calcul dépend significativement (↗) ou non (≈) de la taille d'acquisition $N_\theta \times N_\rho$ ou de la taille de l'image reconstruite $W \times H$.

graphiques grand public permettent un gain sur le temps de calculs. Nous détaillerons aussi les astuces et les cas limites d'utilisation de ce matériel pour ces algorithmes.

A.1 Fonctionnalité des GPU : présentation de CUDA

Nous présentons dans cette section les fonctionnalités des GPU utilisées pour implémenter les méthodes de reconstruction.

A.1.1 Généralités sur les GPU

L'implémentation des méthodes s'effectue sur GPU en utilisant CUDA [68]. Via cette API, le GPU est vu comme une unité de calculs utilisant des threads pour l'exécution en parallèle. Chaque thread exécute le même code défini par un *kernel*. Lorsqu'il est lancé, le kernel est organisé en bloc et grilles de threads (voir schéma A.1). Un ensemble de threads compose un bloc. Chaque thread du bloc a un identifiant unique noté *threadIdx*. La taille des blocs est défini par l'utilisateur. Un ensemble de blocs compose la grille d'exécution du kernel. Chaque bloc de la grille est accessible via un identifiant noté *blockIdx*. Les tailles des blocs et de la grille sont choisies par le programmeur. Un moyen efficace d'utiliser cette grille de threads dans les algorithmes d'images est de considérer un pixel par thread. La position du thread dans la grille est alors la coordonnées du pixel dans l'image, comme le montre l'exemple sur la figure A.1.

La carte graphique utilisée pour nos traitement est une NVIDIA GeForce 9800 GT. L'architecture de cette carte est représentée sur la figure A.2. Comme cette architecture est unifiée, elle est commune à toutes les cartes graphiques NVIDIA depuis la génération 8 (voir [69]). Plus spécifiquement, la carte utilisée est composée de 112 processeurs organisés en 14 multiprocesseurs de 8 processeurs. Chaque processeur est cadencé à 1500MHz et peut accéder à 4 types de mémoires embarquées sur la carte et détaillées dans [69]. Entre autre, ce matériel gère une mémoire globale (GPU RAM) de 512MB interfacée sur 256-bits. Cette dernière permet l'accès simultané à des zones de 32, 64 (ou plus) bits et permet donc d'augmenter la bande passante. Cependant, le temps d'accès à cette mémoire en lecture/écriture n'est pas négligeable et l'utilisation d'un schéma d'accès optimisé aux données est essentiel pour améliorer le temps de calcul. Toutefois, les données stockées sur la mémoire globale ont un accès optimisé en lecture si elles sont mises en cache via la mémoire de textures [69].

A.1.2 Utilisation de la mémoire globale

La valeur d'un noyau de pixel $pk(\theta, \rho, i, j)$ est constant pour une droite de projection et un pixel donnés. Par conséquent, on peut les calculer ou charger les noyaux pré-calculés et les stocker dans une matrice de coefficients \mathcal{A} . Toutefois, en supposant une acquisition de 180 projections de 512 échantillons utilisée pour retrouver une image de 512^2 pixels, la taille totale nécessaire pour stocker \mathcal{A} est $N_\theta \times N_\rho \times W \times H \times 4 = 19.136\text{GB}$ (en précision flottante de 4 octets par valeur). Cette mémoire n'est pas disponible, aussi bien sur la RAM que la GPU-RAM. Mais comme un grand

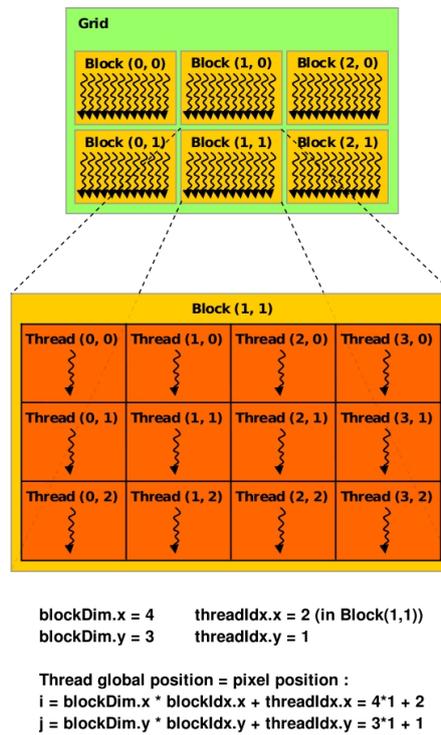


FIGURE A.1: Organisation du kernel lancé sur le GPU en blocs et grilles de threads. Chaque thread d'un bloc a un identifiant (coordonnées 2D par exemple) unique au bloc. De même, chaque bloc de la grille a un identifiant unique. On peut accéder à un thread particulier connaissant la taille des blocs et de la grille. Dans les algorithmes d'images, un pixel est calculé par un thread. La position du thread dans la grille est la coordonnées du pixel dans l'image. Schéma issu de [69].

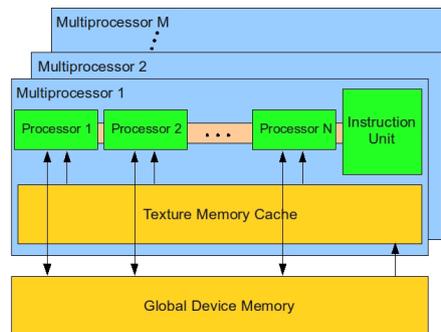


FIGURE A.2: Architecture de la carte graphique utilisée.

nombre de valeurs sont nulles, elles peuvent être stockées dans une structure de matrice creuse où seules les valeurs non nulles et leur index sont conservés. Par exemple, la matrice suivante :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix} \text{ devient : } \{(0, 0.8), (5, 1), (8, 0.4)\}$$

\mathcal{A} est alors stockée dans un tableau de couples (a, α) où a est la position 1D de ces coordonnées et α est le coefficient non nul. Avec cette disposition, la mémoire nécessaire pour stocker \mathcal{A} dans

l'exemple précédent n'est plus que de 380MB (50× moins coûteux). Il est alors possible de charger cette matrice sur la carte graphique pour l'exploiter lors de la reconstruction.

Notons de plus que ces valeurs ne sont lues qu'une et une seule fois avec la BFP et une seule fois par itération avec la reconstruction SART. Il n'est donc pas nécessaire de mettre en cache cette matrice en utilisant la mémoire Texture. Cela pénaliserait les autres données utilisées par les algorithmes et lues plus fréquemment. Enfin, d'un point de vue matériel, l'interface de la mémoire globale est plus grande que la taille d'une valeur de \mathcal{A} . Par conséquent, on peut lire plusieurs coefficients d'un seul coup pour diminuer le temps de calcul. Par exemple sur la GeForce 9800 GT, l'interface disponible permet de lire jusqu'à quatre valeurs de \mathcal{A} d'un coup.

A.1.3 Utilisation de la mémoire Texture

La reconstruction tomographique SART accède en lecture seule un grand nombre de fois aux données de la matrice de distance D et au sinogramme original \mathcal{R} . Ces données sont stockées dans la mémoire globale, mais elles peuvent aussi être mises en cache dans la mémoire Texture pour améliorer le temps d'accès.

De plus, le calcul de $R_{\theta_s}^k$ nécessite des accès multiples en lecture aux pixels de l'image $I^{k,s-1}$. De même, la mise à jour de $I^{k,s}$ nécessite de multiples lectures des valeurs de $R_{\theta_s}^k$. Il est donc indispensable de mettre en cache $I^{k,s-1}$ (resp. $R_{\theta_s}^k$) dans la mémoire Texture pendant le calcul de $R_{\theta_s}^k$ (resp. $I^{k,s}$).

Une interpolation bilinéaire est nécessaire entre la grille polaire et la grille cartésienne lors de la reconstruction de Fourier. La mémoire Texture permet un accès à des index réels. Dans ce cas, la valeur retournée est une interpolation linéaire des deux (pour une texture 1D), quatre (texture 2D) ou huit (texture 3D) valeurs les plus proches du point d'index à coordonnées réelles [69]. Par conséquent, l'interpolation nécessaire à la méthode FR est directement fournie en texturant la grille polaire dans la grille cartésienne.

A.1.4 Librairie de calculs des transformées de Fourier : la CUFFT

L'API CUDA contient une librairie appelée CUFFT (*CUDA Fast Fourier Transform Library*). Elle fournit une implémentation parallèle efficace des transformées de Fourier sur le GPU. Plus particulièrement, elle supporte les transformées 2D et 1D sur données multiples nécessaires aux reconstructions BFP et FR.

A.2 Implémentation des algorithmes sur GPU

A.2.1 Implémentation de la BFP sur GPU

Le kernel calculant la transformée inverse de Radon sur GPU est présenté par l'algorithme 8. Chaque exécution du kernel reconstruit un pixel. Le pixel à traiter est obtenu à partir des identifiants *threadIdx*, *blockDim* et *blockIdx*. On note $T \rightarrow X$ les données X lues à partir de la mémoire Texture.

En supposant que *GPU_F* est le kernel calculant le filtre passe haut sur l'espace de Fourier de chaque projection, la reconstruction BFP reconstruit l'image comme le montre l'algorithme 9. Les valeurs entre crochets définissent le nombre d'exécutions du kernel, c'est-à-dire ici le nombre de threads lancés (au total, il y en a $W \times H$). Les fonctions *cufft* sont les primitives de la librairie CUFFT pour effectuer les transformées de Fourier sur GPU.

Algorithme 8 : $GPU_R^{-1}(\mathcal{R})$

```

 $p = (i, j) \leftarrow p(\text{threadIdx}, \text{blockDim}, \text{blockIdx})$ 
pour tout  $l = (\theta, \rho)$  telles que  $l$  traverse  $p$  faire
   $I(i, j) \leftarrow I(i, j) + \alpha_{pl} T \rightarrow \mathcal{R}_\theta(\rho)$ 
fin pour

```

Algorithme 9 : $GPU_BFP(\mathcal{R})$

```

Charger  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{A}$  sur la mémoire globale
pour tout  $\theta$  faire
   $\mathcal{R}_\theta \leftarrow \text{cufft}_{1D}^{-1}(\text{GPU\_F}[N_\rho](\text{cufft}_{1D}(\mathcal{R}_\theta)))$ 
fin pour
 $GPU\_R^{-1}[W \times H](\mathcal{R})$ 

```

Les contributions des pixels peuvent être calculées si nécessaire en utilisant un noyau de pixel ou peuvent être pré-calculées et stockées dans la mémoire globale. Si la matrice \mathcal{A} est utilisée, plusieurs de ses valeurs peuvent être lues d'un coup dans l'algorithme 8 car l'interface est plus grande que la taille d'une donnée (en octets).

A.2.2 Implémentation de FR bilinéaire sur GPU

L'implémentation de FR bilinéaire avec CUDA consiste à calculer les transformées de Fourier 1D de chaque projection (avec les primitives de CUFFT) et à les stocker dans un tableau 2D de la mémoire Texture. L'interpolation bilinéaire est directement effectuée en utilisant l'accès aux données d'index réels permis par cette mémoire. La transformée de Fourier inverse 2D fournie par la CUFFT donne ensuite l'image résultat. L'algorithme correspondant est détaillé sur la figure A.3 suivante :

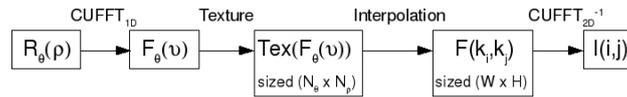


FIGURE A.3: Algorithme de reconstruction de Fourier avec interpolation bilinéaire sur GPU avec CUDA.

A.2.3 Implémentation de SART sur GPU

Deux kernels sont nécessaires pour calculer SART sur le GPU. Le premier, GPU_SinoK (voir algorithme 10) est utilisé pour calculer $R_{\theta_s}^k$ depuis $I^{k,s-1}$. Chaque exécution du kernel mesure une seule droite de projection. Il doit donc être lancé N_ρ fois. Le deuxième algorithme 11 est noté GPU_ImageK et reconstruit un pixel de $I^{k,s}$ depuis $R_{\theta_s}^k$. Dans ces deux algorithmes, la droite de projection l ou le pixel p à traiter est obtenu à partir des identifiants du threads courant. L'itération principale de l'algorithme est gérée par le CPU qui lance alternativement sur le GPU les kernels décrits par les algorithmes 10 et 11. Elle est illustrée par l'algorithme 12.

La taille de la mémoire sur la Geforce 9800 GT utilisée est suffisante pour stocker la matrice \mathcal{A} de l'exemple précédent. Si nécessaire, on peut augmenter la taille de la mémoire globale jusqu'à 2GB en utilisant plusieurs cartes en parallèle (SLI). Toutefois, on peut envisager une implémentation sans limitation de mémoire en sous-itérant les kernels. Chaque sous-itération utilise un sous-ensemble

Algorithme 10 : *GPU_SinoK*(θ_s)

```

 $l = (\theta_s, \rho) \leftarrow l(\text{threadIdx}, \text{blockDim}, \text{blockIdx})$ 
 $R_{\theta_s}(\rho) \leftarrow 0$ 
Charger plusieurs valeurs de  $\mathcal{A}$  d'un coup
pour tout  $p$  tel que  $p$  est traversé par  $l$  faire
   $R_{\theta_s}^k(\rho) \leftarrow R_{\theta_s}^k(\rho) + T \rightarrow I^{k,s-1}(p)\alpha_{pl}$ 
fin pour

```

Algorithme 11 : *GPU_ImageK*(θ_s)

```

 $p \leftarrow p(\text{threadIdx}, \text{blockDim}, \text{blockIdx})$ 
 $up \leftarrow 0, \text{norm} \leftarrow 0$ 
Charger plusieurs valeurs de  $\mathcal{A}$  d'un coup
pour tout  $l = (\theta_s, \rho)$  tel que  $l$  traverse  $p$  faire
   $up \leftarrow up + \alpha_{pl} \times \frac{T \rightarrow \mathcal{R}_{\theta_s}(\rho) - T \rightarrow R_{\theta_s}^k(\rho)}{T \rightarrow D_{\theta_s}(\rho)}$ 
   $\text{norm} \leftarrow \text{norm} + \alpha_{pl}$ 
fin pour
 $I^{k,s}(p) \leftarrow \max\{I^{k,s-1}(p) + \lambda \frac{up}{\text{norm}}, 0\}$ 

```

Algorithme 12 : *GPU_SART*

```

Charger  $\mathcal{R}$ ,  $D$  et  $\mathcal{A}$  sur la mémoire globale
Texturer( $D$ ) et Texturer( $\mathcal{R}$ )
 $I \leftarrow \mathcal{R}$  et charger  $I$  en mémoire globale
pour  $iter = 0$  à  $N_{iter} - 1$  faire
  pour  $s = 0$  à  $N_\theta - 1$  faire
     $\theta_s \leftarrow PAS(s)$ 
    Texturer( $I^{k,s-1}$ )
     $GPU\_SinoK[N_\rho](\theta_s)$ 
    Détexturer( $I^{k,s-1}$ ), Texturer( $R^{k,s}$ )
     $GPU\_ImageK[H \times W](\theta_s)$ 
    Détexturer( $R$ )
  fin pour
fin pour

```

de la matrice \mathcal{A} chargé quand nécessaire en mémoire globale. Par exemple, en utilisant quatre sous-ensembles, l'algorithme 11 ne calcule pas entièrement l'image d'un coup mais en quatre itérations basées sur quatre sous-ensembles de \mathcal{A} . Cela permet de calculer SART sur GPU en utilisant les matrices de coefficients sans limitation de mémoire. Mais cette méthode est peut-être moins efficace car elle implique de recharger chaque sous-matrice dans la GPU-RAM à chaque itération.

A.3 Remarques et discussion

Nous détaillons maintenant les temps de calcul obtenus sur GPU. De plus, nous nous intéressons au problème de stockage des matrices sur la GPU-RAM. En effet, connaissant le problème de latence de la mémoire globale, le temps de transfert depuis la RAM et l'efficacité des GPU pour les opérations arithmétiques, nous nous demanderons s'il n'est pas plus efficace de recalculer chaque valeur plutôt que d'utiliser des coefficients pré-calculés et stockés en mémoire.

A.3.1 Comparaisons des temps de calculs GPU vs CPU

Les temps de calcul GPU présentés sur le tableau A.2 suivant montrent l'efficacité de l'implémentation sur carte graphique avec CUDA quelle que soit la méthode.

	BFP	FST	SART
$T(sec)$ CPU	4.081	7.51	7.156
$T(sec)$ GPU	0.0289	0.076	0.691
<i>gain</i>	141.21×	98.81×	10.35×

TABLE A.2: Temps de calcul en secondes des algorithmes exécutés en parallèle sur le GPU. Comparaison avec les temps de calcul obtenus sur CPU. Gain entre l'exécution CPU et GPU.

Avec la BFP, chaque pixel est reconstruit indépendamment des autres. Comme une parallélisation de traitements sur données indépendantes classique, la parallélisation de la BFP sur GPU est très efficace grâce au nombre important d'unités de calculs disponibles sur la carte graphique. Grâce à elles, la BFP s'exécute 141× plus vite que sur le CPU. De manière similaire, FR effectue des traitements sur des données indépendantes en grande quantité. Elle est donc, elle aussi, compatible avec l'architecture proposée par la carte. Enfin, le gain obtenu avec SART montre l'efficacité du GPU pour les calculs de méthodes itératives. De manière globale, on constate que la méthode la plus coûteuse sur GPU avec CUDA (SART) est encore plus rapide que la méthode la plus efficace (BFP) sur le CPU.

A.3.2 A Propos de la mémoire globale

Nous avons abordé deux approches pour le traitement de SART. Compte tenu des itérations, les coefficients (matrice \mathcal{A}) sont utilisés plusieurs fois (une fois par itération). Nous avons aussi vu que le noyau de pixel utilisé agit sur le temps de calcul global d'une méthode (chapitre 3). Notamment pour une méthode itérative car elle a besoin de chaque coefficient N_{iter} fois.

Si l'approche la plus facile à implémenter consiste à recalculer chaque noyau à chaque itération, elle ne paraît pas optimisée. Mieux vaut en effet calculer chaque coefficient une fois pour toute puis les stocker dans une matrice. Si cette méthode fonctionne convenablement sur CPU, elle peut souffrir de la latence et de la quantité limitée de mémoire sur le GPU. Par conséquent, nous abordons maintenant la stratégie à utiliser en fonction des données et de la taille de la mémoire globale GPU. Le graphe de la figure A.4 montre le temps de calcul nécessaire pour effectuer chaque itération pendant dix itérations de la méthode SART sur carte graphique.

Nous comparons trois types d'implémentation de SART sur le GPU. La méthode notée « SART » (courbe en rouge sur la figure A.4) n'utilise pas de matrice de coefficients : elle recalcule chaque valeur quand nécessaire. La méthode représentée par la courbe verte et notée « SART Matrix » utilise la matrice \mathcal{A} stockée dans un tableau de couples de $(index, valeur)$. Enfin, la méthode « SART Sub-Matrices » reconstruit l'image en utilisant la matrice de coefficients et en supposant que la place mémoire disponible n'est pas suffisante pour stocker toute la matrice. Les sous-matrices sont donc rechargées sur la carte graphique quand nécessaire à chaque itération.

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer que le temps de calcul d'une itération ne dépend pas de l'index de l'itération. Chaque itération de chaque algorithme est quasi-constante en temps. Par conséquent, comme sur CPU, le temps global de calcul est proportionnel au nombre k de super-itérations.

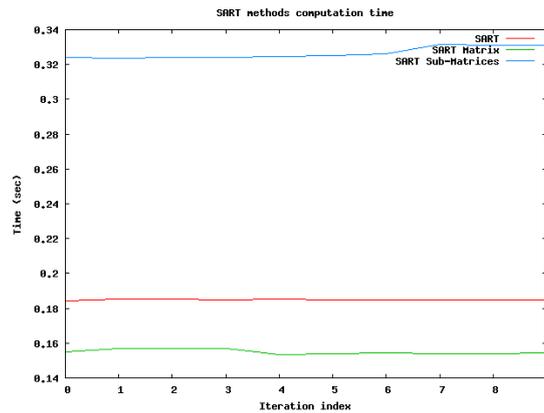


FIGURE A.4: Temps de calcul d’une itération pour dix itérations successives de la méthode SART sur GPU.

La méthode « SART Matrix » obtient le meilleur temps par itération (et par conséquent le meilleur temps global). La différence entre « SART » et « SART Matrix » montre qu’un accès efficace aux données en mémoire globale, grâce à l’interface sur 256 bits, aboutit à un bon temps de calcul et atténue les problèmes de temps d’accès. Donc, même si le temps d’accès mémoire correspond à un goulot d’étranglement sur le GPU, il offre une meilleure performance que la méthode recalculant les coefficients.

Inversement, la méthode « SART Sub-Matrices » souffre du temps de chargement nécessaire pour recopier chaque sous-matrice à chaque itération. Ce temps de chargement correspond d’ailleurs à la différence entre le temps de calcul de « SART Matrix » et celui de « SART Sub-Matrices ». Comme ce chargement est répété à chaque itération, il est additionné itérativement au temps de calcul global. Par conséquent, s’il n’est pas possible de stocker toute la matrice de coefficients sur la carte graphique, il est préférable d’utiliser la méthode SART qui recalcule les noyaux de pixels.

De plus, le kernel 10 a besoin d’un grand nombre de valeurs de la matrice car une droite de projection est mesurée à partir d’un grand nombre de pixels. Inversement, le kernel 11 calcule un pixel à partir de peu de droites sur une projection θ donnée. Le premier peut donc tirer avantage de la bande passante disponible, mais pas le second. Ainsi, le meilleur temps de calcul obtenu pour SART et donné sur le tableau A.2 est en fait celui d’une méthode SART hybride qui utilise la matrice pour calculer le kernel 10 et qui recalcule les noyaux de pixels dans l’algorithme 11.

A.4 Perspective de la tomographie sur GPU avec CUDA

Les travaux de cette annexe ont été effectués entre novembre 2008 et avril 2009 [77]. A ce moment, la principale limitation des cartes graphiques résidait dans sa mémoire. Elle ne permettait pas, par exemple, de stocker une matrice de coefficients pour une reconstruction de grande taille. Faisant fit de cette dernière, nous constatons aussi que cette mémoire était insuffisante pour calculer directement un volume à reconstruire (tomographie 3D). Le découpage des calculs en sous-ensembles indépendants permettait d’exécuter l’algorithme sans limitation de mémoire, mais au détriment du temps de calcul pénalisé par les transferts de données entre la carte et la RAM. Enfin, nous remarquons une évolution de l’API CUDA pas toujours rétro-compatible et nuisant donc à la pérennité des applications développées.

Depuis, l’API CUDA s’est stabilisée à une version 3 avec une rétro-compatibilité efficace. De plus, la capacité mémoire des cartes grand public est de 1Go, certaines cartes haut de gamme proposant

1.5Go. En utilisant la technologie SLI, il est maintenant possible de monter une grappe de cartes proposant une puissance de calcul et une capacité mémoire suffisante pour reconstruire des volumes de grande taille. Depuis la vulgarisation de la programmation sur carte graphique, nous avons donc assisté à un double effet de mode. D'une part, l'intérêt de la communauté scientifique à développer des outils sur ce matériel. D'autre part, l'intérêt des fabricants à proposer un matériel de plus en plus puissant et ergonomique. Notons donc la technologie CrossFire, du concurrent direct ATI, ou l'API OpenCL, qui permet maintenant de programmer en parallèle indépendamment du matériel utilisé. Le choix de la technologie pour les calculs (CPU ou carte graphique NVIDIA ou ATI) est alors défini à la compilation en fonction du matériel disponible dans la machine.

Table des figures

1.1	(a) Une droite de projection est définie par un angle θ et un module ρ . Sa valeur dépend des données $f(x, y)$ traversées et correspond à l'atténuation subie par les rayons X traversant la matière le long de la droite bleue. (b) L'information contenue dans une seule projection n'est pas suffisante pour reconstruire le domaine initial f	9
1.2	(a) Représentation de l'acquisition du modèle suivant plusieurs angles. (b) L'intersection des informations contenues sur les différentes projections permet de reconstruire plus précisément le domaine initial f	10
1.3	Si le domaine f est plongé dans une grille discrète (a), tous les points (x, y) contenus dans un pixel (i, j) ont la même intensité calculée par l'équation (1.9).	12
1.4	Les valeurs des espaces fréquentiels des projections discrètes se répartissent sur une grille polaire. Cette dernière est introduite dans une grille cartésienne représentant l'espace de Fourier de l'image à reconstruire. Une étape d'interpolation est nécessaire pour basculer d'une grille à l'autre.	14
1.5	Étapes de l'algorithme de reconstruction de Fourier.	14
1.6	(a) Représentation du fantôme de Shepp-Logan continu dans une image de taille 512×512 . (b) sinogramme acquis autour du domaine suivant 180 projections de 512 échantillons.	14
1.7	(a) Résultat de la reconstruction utilisant la transformée de Radon inverse. (b) Reconstruction de Fourier en utilisant le théorème de la tranche centrale.	15
1.8	L'échantillonnage régulier des projections amène à une irrégularité de leur rétroprojection dans l'image. (a) Certains pixels sont traversés par une seule droite, d'autres par plusieurs. Tous les pixels ne sont pas traversés de manière identique par la (les) droite(s) traversante(s). Certains pixels ne sont pas traversés (b) : la projection n'est pas utilisable pour leur reconstruction.	16
1.9	(a) Interpolation d'une grille polaire à une grille cartésienne - (b) Couverture partielle (les hautes fréquences de la grille cartésienne ne sont pas récupérées) - (c) Couverture trop importante (les hautes fréquences de la grille polaire ne sont pas utilisées pour calculer les valeurs de l'espace de Fourier).	16
1.10	(a) Les pixels gris ne sont pas recouverts - (b) Si on change la taille de l'image, plus de pixels ne sont pas couverts par la grille polaire alors que le taux d'échantillonnage reste le même. Augmenter le nombre d'échantillons par projection n'augmente pas la couverture de l'espace cartésien.	17
1.11	Géométrie d'acquisition parallèle (a), cone beam (b), fan beam (c)	17
2.1	Schéma du processus étudié. L'image initiale I est modifiée en J par un bloc indissociable composé des étapes d'acquisition et reconstruction.	19
2.2	Source ponctuelle modélisée par une impulsion de Dirac (en discret : un seul pixel d'intensité non nulle apparaît). Acquisition 180×512 de cette impulsion.	22
2.3	Reconstruction par transformée inverse de Radon (a) et de Fourier (b) à partir de l'acquisition d'une source ponctuelle centrée.	23

2.4	Profils PSF obtenus au centre de l'image de taille 512^2 pour la rétroprojection de Radon et la reconstruction de Fourier.	23
2.5	Gain de la PSF obtenue par R^{-1} (à gauche) et FR (à droite) en fonction de la position dans l'image, depuis la position centrale, d'indice 0 à l'extrémité de l'image (d'indice 250).	24
2.6	Reconstruction à partir d'un sinogramme bruité. (a) Résultat de la reconstruction utilisant la transformée de Radon inverse. (b) Reconstruction de Fourier.	25
2.7	SSIM global obtenu par R^{-1} (a) et FR (b) en fonction du nombre de projections et d'échantillons pour une image reconstruite de taille $N = 512^2$ pixels.	29
2.8	Étalement du point au centre de l'image en fonction du nombre de projections et d'échantillons (image de taille $N = 512^2$).	30
2.9	Reconstruction par transformée inverse de Radon de la source ponctuelle en fonction du nombre de projections. (a) N_θ trop petit pour atténuer la trace de l'impulsion sur chaque projection. (b) Lorsque le nombre de projections augmente (ici $N_\theta = 20$), chaque trace laissée par une projection est atténuée par toutes les autres. (c) A partir de 60 projections, il y en a suffisamment pour atténuer complètement la trainée laissée selon chaque angle. La PSF devient cohérente.	30
2.10	Séries représentant l'étalement du point au centre de l'image reconstruite par transformée inverse de Radon (en haut) et reconstruction de Fourier (en bas), pour un taux d'échantillonnage $d\rho$ allant de $\frac{1}{4}$ à 4.	31
2.11	SNR des reconstructions en fonction de l'amplitude du bruit appliqué au sinogramme.	32
2.12	Images reconstruites par R^{-1} et FR à partir d'un sinogramme bruité par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type A	33
3.1	Déterminer si la droite (θ, ρ) traverse le pixel (i, j)	36
3.2	La fonction boîte (B-Spline d'ordre 0) sur les axes X et Y permet d'obtenir, par convolution, le trapèze définissant le noyau B-Spline.	37
3.3	Noyau d'interpolation linéaire. (a) Permet de définir la contribution de la projection θ pour tous les pixels de l'image, y compris ceux qui ne sont traversés par aucune droite. Dans le cas d'usage $d\rho = \Delta p$, au moins une droite traverse chaque pixel. Interpolation optimale dès que $d\rho < \Delta p$ (deux droites de projections par pixel) (b). Fort échantillonnage (c) on exploite pas toutes les données disponibles. Seules les deux droites les plus proches du centre sont utilisées.	38
3.4	Noyau d'interpolation sur l'aire des pixels. (a) Le cas standard consiste à regarder l'aire commune au pixel et aux zones de validités le traversant. Ce cas est difficile à mettre en oeuvre. L'approximation (b) consiste à calculer les contributions par aire sur l'axe, puis à effectuer une rotation de la rétroprojection.	39
3.5	Noyau d'interpolation sur l'aire des pixels. (a) L'épaisseur de la droite est entièrement comprise dans le pixel, la valeur du noyau de pixel est $d\rho$. (b) L'épaisseur déborde sur l'un des côtés du pixel, l'aire commune est $\frac{d\rho + \Delta p}{2} + \rho - i $. (c) L'épaisseur est supérieure à la taille du pixel, le noyau vaut 1.	39
3.6	Résultats (images 512^2) des rétroprojections à partir du sinogramme 180×512 en utilisant les noyaux de Dirac (a), B-Spline (b), linéaire (c) et l'aire (d).	40
3.7	Comparaison des SSIM obtenus avec les différents noyaux d'interpolation en fonction du nombre de projections et du nombre d'échantillons pour reconstruire une image de taille 512^2	41
3.8	Résultats (zoom de (a)) des rétroprojections à partir du sinogramme 10×128 en utilisant les noyaux B-Spline (b) et d'aire (c). Des trous apparaissent avec B-Spline car certains pixels ne sont jamais reconstruits.	41

3.9	Comparaison des PSF au centre obtenus avec les différents noyaux d'interpolation en fonction de N_θ et N_ρ	42
3.10	Reconstruction de l'espace de Fourier par bi-interpolation.	43
3.11	La bi-interpolation n'utilise que quatre des points polaires en gris pour retrouver le pixel gris. Toute l'information disponible n'est pas exploitée. Inversement, les points en noir sont utilisés pour reconstruire le pixel au bord de l'image alors qu'ils sont à l'extérieur.	44
3.12	De haut en bas : Images reconstruites avec FR_{BiLin} , FR_{BiRA} , FR_{BaLin} , FR_{BaRA} . De gauche à droite, à partir d'une acquisition de 10, 30, 60 et 90 projections. Échantillonnage standard.	45
3.13	Comparaison des SSIM obtenus entre FR_{BiLin} et FR_{BiRA} (a), FR_{BaLin} et FR_{BaRA} (b), FR_{BiLin} et FR_{BaLin} (c), FR_{BiRA} et FR_{BaRA} (d) en fonction du nombre de projections et du nombre d'échantillons (taille d'image fixe).	46
3.14	Espace fréquentiel entièrement interprété par la bi-interpolation (a), ou partiellement reconstruit par l'interpolation barycentrique (b). Image d'erreur obtenue par différence des espaces fréquentiels caractérisant les déformations provoquées par la bi-interpolation (c) et zoom (d).	48
3.15	Comparaison des PSF obtenues par les différentes méthodes de Fourier en fonction de la position dans l'image. Bi-interpolation linéaire (a) et radiale/angulaire (b). Interpolation barycentrique linéaire (a) et radiale/angulaire (b).	49
3.16	Comparaison des PSF obtenues par les différentes méthodes de Fourier en fonction du nombre de projections et d'échantillons (image reconstruite de taille 512^2).	49
3.17	SNR obtenues par FR_{BiRA} (a) et FR_{BaLin} (b) en fonction du nombre de projections et d'échantillons (image reconstruite de taille 512^2), pour un bruit impulsif d'amplitude 10% appliqué au sinogramme.	50
3.18	SNR obtenu par FR_{BiRA} (a) et FR_{BaLin} (b) en fonction du bruit appliqué sur le sinogramme.	50
3.19	La rétroprojection des projections filtrées (BFP) calcule la transformée de Fourier 1D de chaque projection (en bleu). Ce domaine est multiplié par le filtre rampe (en rouge) et la transformée de Fourier inverse est appliquée. La rétroprojection avec la transformée inverse de Radon est ensuite effectuée à partir des projections filtrées.	52
3.20	(a) Exemple du filtre rampe. (b) Fenêtres de Hann et de Hamming. (c) Multiplication du filtre rampe avec les fenêtres H	53
3.21	Comparaison des SSIM obtenus avec les noyaux de Dirac et Spline (a), linéaire et d'aire (b) en fonction du nombre de projections et de l'échantillonnage.	54
3.22	Comparaison de la reconstruction avec 10 projections par rétroprojection (a) avec BFP Dirac(b), Spline (c), linéaire (d) et d'aire (e).	55
3.23	SSIM en fonction du filtre utilisé, de N_θ et $d\rho$	56
3.24	PSF obtenue par la BFP avec le noyau d'aire et le filtre de Hann en fonction de la position dans l'image.	56
3.25	SNR de la BFP en fonction de N_θ , $d\rho$ et du filtre sur les projections.	57
3.26	Comparaison des résultats de la BFP (image 512^2 , acquisition 180×512 bruitée) utilisant le filtre de Hann (a), Hamming (b) et Ram-Lak (c).	58
3.27	SNR de la BFP en fonction du bruit sur les projections. Comparaison avec le SNR obtenu par la reconstruction de Fourier avec bi-interpolation radiale angulaire.	58
4.1	Ordre de 10 projections au cours d'une itération en fonction du schéma d'accès utilisé. (a) Les projections sont sélectionnées les unes à la suite des autres. (b) Les projections sont sélectionnées de manière aléatoire. (c) La projection suivante est choisie comme étant celle la moins corrélée avec l'ensemble des projections déjà utilisées.	64

4.2	Algorithme de reconstruction SART.	65
4.3	Convergence de la méthode SART au cours des itérations en fonction du schéma d'accès aux projections.	70
4.4	Convergence de la luminosité (a), du contraste (b), de la géométrie (c) et du SSIM (d) de SART à la première itération en fonction du schéma d'accès aux projections.	72
4.5	Différence de la convergence géométrique entre SAS et MLS au cours de la première itération.	73
4.6	(a) Reconstruction SART avec SAS et 40 projections. (b) Reconstruction SART avec MLS et 26 projections choisies aléatoirement parmi les 40 disponibles à chaque itération.	73
4.7	(a) Convergence au cours des itérations du SSIM de MLEM en fonction du nombre de sous-ensembles ordonnés. (b) Convergence du SSIM au cours des deux premières itérations avec 8 OS : la solution commence à diverger avant la fin de la deuxième itération.	74
4.8	Convergence de la solution en fonction du nombre de projections par OS.	75
4.9	SSIM de SART et OSEM en fonction du nombre de projections et d'échantillons.	76
4.10	La BFP avec 180 projections (a) obtient un SSIM équivalent à celui de SART avec 60 projections (b). En comparaison, la BFP à 60 projections (c) est encore artéfactée.	77
4.11	Comparaison du gain de la PSF au centre obtenue par les méthodes SART et OSEM en fonction de N_θ et N_ρ	78
4.12	Avec la méthode SART (a), quelques pixels sont grisés autour de l'impulsion. Il y a donc étalement du point. Avec la méthode OSEM (b), il n'y a plus d'étalement. Pour des questions de visibilité, la luminosité des images a été augmentée. Les pixels gris autour des images correspondent au noir obtenu sur les images initiales.	78
4.13	Gain de la PSF obtenu pour SART (a) et OSEM (b) en fonction de la position sur l'image.	78
4.14	Comparaison du SNR obtenu par les méthodes SART (a) et OSEM (b) en fonction de N_θ et N_ρ	79
4.15	Pour une qualité de reconstruction équivalente (d'après l'étude du SSIM), la reconstruction SART avec 60 projections (a) est moins bruitée que celle avec 180 projections (b).	80
4.16	Comparaison du SNR obtenu par les méthodes SART et OSEM en fonction du bruit sur les projections.	80
4.17	Avec un bruit de 0.2 sur le sinogramme, la reconstruction OSEM (a) est exploitable car peu affectée. La méthode SART (b) est bruitée mais on distingue encore les contours et les régions représentant l'air (en noir) sont saines. Avec la BFP (c), même les régions vides sont bruitées et on ne distingue plus certains contours.	81
4.18	(a) Convergence de la méthode MLEM avec les régularisations de Geman et McClure (<i>REG1</i>) et de Hebert et Leahy (<i>REG2</i>). (b) Convergence de la méthode OSEM (avec le nombre d'OS défini précédemment) en fonction des mêmes régularisations.	81
4.19	(a) SSIM de la méthode MAP-OSEM avec la régularisation de Hebert et Leahy. (b) PSF de la méthode MAP-OSEM.	82
4.20	(a) SNR de la méthode MAP-OSEM avec régularisation de Hebert et Leahy en fonction des paramètres. Comparaison avec le SNR de la méthode OSEM non régularisée. (b) SNR de la méthode MAP-OSEM en fonction du bruit sur les projections.	83
4.21	Comparatif récapitulatif et classification des méthodes de reconstruction. En rouge, les critères qui pénalisent fortement les reconstructions. En bleu, les critères qui privilégient les reconstructions.	86
5.1	Pixels considérés sur les bins de projections selon l'angle $\theta = \tan^{-1} \frac{q}{p}$	93

5.2	Calculs des bins de projections sur l'image et l'image unitaire	94
5.3	Représentation angulaire de la suite de Farey d'ordre 10 et symétries	95
5.4	Reconstruction de l'image de départ à l'aide d'un sinogramme unitaire	96
5.5	Image originale de taille 512^2 (a). Image reconstruite à partir de l'acquisition suivant la suite de Farey d'ordre 6 (b), 7 (c), 8 (d) et 9 (e).	97
5.6	D'un bin Dirac-Mojette à un bin Spline-Mojette.	98
5.7	Contribution des bins Dirac-Mojette aux extrémités de l'image.	99
5.8	(a) Acquisition Spline-Mojette de la projection (2, 1) avec les valeurs du sinogramme unitaire (lui aussi en géométrie Spline) associé. (b) Correspondance entre un bin et un pixel. Reconstruction du pixel en fonction de la contribution (minimale non nulle) de la projection. (c) Mise à jour des projections et des valeurs dans le sinogramme unitaire.	101
5.9	Propagation du bruit dans les projections et les pixels pendant l'inversion CBI.	103
5.10	(a) Rétroprojection des bins Mojette dans les pixels de l'image. (b) Rétroprojection d'une projection Spline-Mojette dans les pixels centrés mais aussi sur les pixels des bins voisins avec une contribution dépendante de l'interpolateur B-Spline.	104
5.11	(a-d) Rétroprojection Dirac-Mojette à partir de la suite de Farey d'ordre 6 à 9. (e-h) Rétroprojection Spline-Mojette à partir de la suite de Farey d'ordre 6 à 9.	104
5.12	BFP-Mojette à partir d'un sinogramme Spline-Mojette acquis avec la suite de Farey d'ordre 6 (a) à 9 (d).	105
5.13	SART-Mojette à partir d'un sinogramme Spline-Mojette acquis avec la suite de Farey d'ordre 6 (a) à 9 (d).	105
5.14	Résultat BFP-Mojette (a) et SART-Mojette (b) à partir du sinogramme Spline-Mojette interpolé.	106
5.15	SSIM de la BFP-Mojette en fonction de N_θ et $d\rho$	108
5.16	SSIM de la SART-Mojette en fonction de N_θ et $d\rho$	110
5.17	PSF au centre de l'image obtenue avec BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite) en fonction de N_θ et $d\rho$. Comparaison avec la PSF obtenue par BFP et SART usuelles.	111
5.18	PSF en fonction de la position sur l'image avec BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite). Comparaison avec la PSF obtenue par BFP et SART usuelles.	111
5.19	SNR en fonction de N_θ et $d\rho$ pour un bruit de 10% appliqué au sinogramme avec BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite). Comparaison avec le SNR obtenu par BFP et SART usuelles.	112
5.20	SNR obtenu par BFP-Mojette (à gauche) et SART-Mojette (à droite) en fonction du bruit appliqué au sinogramme.	112
6.1	Image 32^2 du fantôme de Shepp-Logan (a) et de Lena (b) reconstruites à partir d'un sinogramme Spline-Mojette bruité en utilisant NRCBI-Spline.	121
6.2	(a) Sinogramme initial avec 180 projections de 512 échantillons. (b) Sinogramme tronqué dans lequel nous avons supprimé 60 projections successives.	124
6.3	Reconstruction BFP (a) et SART (b) à partir d'un sinogramme tronqué offrant une couverture de 120° . (c) Espace de Fourier d'une image reconstruite à partir d'un sinogramme incomplet : correspond à un angle de données manquantes dans l'espace fréquentiel.	124
6.4	Reconstruction CBI-Dirac exacte avec 4 projections autour de $[0, \frac{\pi}{2}]$	125
6.5	Représentation angulaire de la suite de Farey d'ordre 10 sur laquelle on a supprimé un tiers des projections.	126

6.6	Reconstructions Dirac-Mojette à partir de données incomplètes en utilisant l'algorithme CBI-Dirac (a), BFP-Mojette (b) et SART-Mojette (c).	126
6.7	Reconstructions Spline-Mojette à partir de données incomplètes en utilisant l'algorithme CBI-Spline (a), BFP-Mojette (b) et SART-Mojette (c).	127
6.8	Image reconstruite en utilisant SART-Mojette (a) SA + NRCBI (b) depuis une acquisition Spline-Mojette bruitée avec angle manquant. Reconstruction SA + NRCBI à partir d'un sinogramme de Radon interpolé avec projections manquantes (c).	128
6.9	Analyse de la qualité et de la précision d'une modalité d'acquisition par comparaison de données réelles et synthétiques.	133
A.1	Organisation du kernel lancé sur le GPU en blocs et grilles de threads. Chaque thread d'un bloc a un identifiant (coordonnées $2D$ par exemple) unique au bloc. De même, chaque bloc de la grille a un identifiant unique. On peut accéder à un thread particulier connaissant la taille des blocs et de la grille. Dans les algorithmes d'images, un pixel est calculé par un thread. La position du thread dans la grille est la coordonnées du pixel dans l'image. Schéma issu de [69].	139
A.2	Architecture de la carte graphique utilisée.	139
A.3	Algorithme de reconstruction de Fourier avec interpolation bilinéaire sur GPU avec CUDA.	141
A.4	Temps de calcul d'une itération pour dix itérations successives de la méthode SART sur GPU.	144

Liste des tableaux

2.1	Comparatif des critères de qualité en intensité, en contraste et en géométrie, des images obtenues par transformée inverse de Radon et reconstruction de Fourier. SSIM donnant la qualité globale de chaque reconstruction.	21
2.2	Comparatif des critères de précision et évaluation SSIM de la qualité globale d'une reconstruction à partir de projections bruitées.	25
2.3	Comparatifs SNR	26
2.4	Images résultats de R^{-1} en fonction du nombre de projections et d'échantillons. . . .	27
2.5	Images résultats de FR en fonction du nombre de projections et d'échantillons.	27
2.6	Conservation de la luminosité en fonction de N_θ et $d\rho$ pour R^{-1} (à gauche) et FR (à droite).	28
2.7	Conservation du contraste en fonction de N_θ et $d\rho$ pour R^{-1} (à gauche) et FR (à droite). 28	
2.8	Conservation de la géométrie en fonction de N_θ et $d\rho$ pour R^{-1} (à gauche) et FR (à droite).	28
2.9	SNR obtenu par R^{-1} (à gauche) et FR (à droite) sur données bruitées en fonction du nombre d'échantillons et de projections, pour une image de taille $N = 512^2$	31
3.1	Comparaison de la corrélation lumineuse en fonction de N_θ et N_ρ obtenue par R^{-1} en utilisant le noyau Dirac (a), spline (b), linéaire (c) et d'aire (d).	41
3.2	Comparaison de la corrélation en contraste en fonction de N_θ et N_ρ obtenue par R^{-1} en utilisant le noyau Dirac (a), spline (b), linéaire (c) et d'aire (d).	41
3.3	Comparaison de la corrélation géométrique en fonction de N_θ et N_ρ obtenue par R^{-1} en utilisant le noyau Dirac (a), spline (b), linéaire (c) et d'aire (d).	42
3.4	Temps de calcul en seconde pour reconstruire en échantillonnage standard à partir de 180 projections.	42
3.5	Évolution de la corrélation lumineuse pour FR_{BiLin} (a), FR_{BiRA} (b), FR_{BaLin} (c) et FR_{BaRA} (d) en fonction de N_θ et N_ρ pour une image de taille $N = 512^2$	46
3.6	Évolution de la corrélation en contraste pour FR_{BiLin} (a), FR_{BiRA} (b), FR_{BaLin} (c) et FR_{BaRA} (d) en fonction de N_θ et N_ρ pour une image de taille $N = 512^2$	47
3.7	Évolution de la corrélation géométrique pour FR_{BiLin} (a), FR_{BiRA} (b), FR_{BaLin} (c) et FR_{BaRA} (d) en fonction de N_θ et N_ρ pour une image de taille $N = 512^2$	47
3.8	Évolution de la corrélation en luminosité (a), en contraste (b) et géométrique (c) de la BFP avec noyau d'aire et filtre de Ram-Lak + Hann.	55
4.1	Quelques régularisations usuelles.	69
4.2	Évolution de la corrélation en luminosité $l(I, I^k)$, en contraste $c(I, I^k)$ et géométrique $s(I, I^k)$ de l'image I^k par rapport à l'image référence I obtenue par la méthode SART en fonction du schéma d'accès SAS (a), RPS (b) et MLS (c) et du nombre d'itérations. 71	

4.3	Évolution de la corrélation en luminosité (a), en contraste (b) et géométrique (c) de SART avec MLS et 4 itérations.	76
4.4	Évolution de la corrélation en luminosité (a), en contraste (b) et géométrique (c) de OSEM avec 5 itérations.	76
5.1	Vérification du critère de Katz en fonction de la suite de Farey utilisée (NV (Non Vérifié), V (Vérifié)). Pour chaque acquisition, le nombre de projections et la somme des p_i et des q_i sont donnés.	97
5.2	Détails des suites de Farey (et du nombre de projections Spline-Mojette associées) utilisées en fonction du nombre de projection N_θ dans le sinogramme Radon.	107
5.3	Évolution de la corrélation en luminosité de BFP-Mojette (a) et BFP usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$	107
5.4	Évolution de la corrélation en contraste de BFP-Mojette (a) et BFP usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$	108
5.5	Évolution de la corrélation géométrique de BFP-Mojette (a) et BFP usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$	108
5.6	Évolution de la corrélation en luminosité de SART-Mojette (a) et SART usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$	109
5.7	Évolution de la corrélation en contraste de SART-Mojette (a) et SART usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$	109
5.8	Évolution de la corrélation géométrique de SART-Mojette (a) et SART usuelle (b) en fonction de N_θ et $d\rho$	109
6.1	Images reconstruite avec l'algorithme CBI robuste aux bruits et SART-Mojette à partir d'un sinogramme Dirac-Mojette altéré par un bruit additif. Acquisition utilisant différent ordre de Farey (à partir de l'ordre 5). Le nombre de correspondance univoque utilisées en moyenne pour reconstruire un pixel est fourni (\overline{CBI}). SSIM et SNR.	119
6.2	Images reconstruites à partir du sinogramme Spline-Mojette. Les bins Mojette sont retrouvés par l'algorithme SA, puis l'algorithme NRCBI est appliqué. Le SSIM et le SNR sont détaillés pour estimer la qualité globale de reconstruction.	122
A.1	Temps de calcul en secondes obtenus pour reconstruire en parallèle une image de 512^2 pixels à partir d'un sinogramme de taille 180×512 sur un processeur 4 coeurs à 3GHz. Le temps de calcul dépend significativement (\nearrow) ou non (\approx) de la taille d'acquisition $N_\theta \times N_\rho$ ou de la taille de l'image reconstruite $W \times H$	138
A.2	Temps de calcul en secondes des algorithmes exécutés en parallèle sur le GPU. Comparaison avec les temps de calcul obtenus sur CPU. Gain entre l'exécution CPU et GPU.	143

Bibliographie

- [1] The application of ray tracing towards a correction for refracting effects in computed tomography with diffracting source. *TR-EE*, 1984.
- [2] E. Abraham, A. Younus, C. Aguerre, P. Desbarats, and P. Mounaix. Refraction losses in terahertz computed tomography. *Optics Communications*, 283(10) :2050–2055, May 2010.
- [3] Anders H. Anderson. Algebraic reconstruction in ct from limited views. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(1), March 1989.
- [4] Ilke Arslan, Jenna Tong, and Paul Midgley. Reducing the missing wedge : High resolution dual axis tomography of inorganic materials. *Ultramicroscopy*, 106 :994–1000, May 2006.
- [5] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Elad, and M. israeli israeli. Fast and Accurate Polar Fourier Transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 21(2) :145 – 167, 2006.
- [6] Amir Averbuch and Yoel Shkolnisky. 3D Fourier based Radon Transform. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 15 :33 – 69, 2003.
- [7] A Filiz Baytas and Melih Geçkinli. An alternative approach to direct fourier reconstruction in parallel-beam tomography. *Measurement Science and Technology*, 7(4) :556, 1996.
- [8] Freek J. Beekman and Chris Kamphuis. Ordered subset reconstruction for x-ray ct. *Physics in Medicine and Biology*, 46 :1835 – 1844, 2001.
- [9] T.M. Benson and J. Gregor. Modified simultaneous iterative reconstruction technique for faster parallel computation. *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, 5 :2715 – 2718, october 2005.
- [10] A. Blake. Comparison of the efficiency of deterministic and stochastic algorithms for visual reconstruction. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :2 – 30, 1989.
- [11] Charles Bouman and Ken Sauer. A generalized gaussian image model for edge-preserving map estimation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2(3) :296 – 310, july 1993.
- [12] J. Browne and A. D. De Pierro. A row-action alternative to the em algorithm for maximizing likelihood in emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 15 :687 – 699, October 1996.
- [13] Pierre Charbonnier, Laure Blanc-Feraud, Gilles Aubert, and Michel Barlaud. Deterministic edge-preserving regularization in computed tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(2) :298 – 311, february 1997.
- [14] Brian E. Coggins and Pei Zhou. Polar fourier transform of radially sampled nmr data. *Journal of Magnetic Resonance*, 182 :84 – 95, July 2006.
- [15] Raymond Damadian. Tumor detection by nuclear magnetic resonance. *Science*, 171 :1151–1153, March 1971.
- [16] Dominique Van de Sompel and Michael Brady. Simultaneous reconstruction and segmentation algorithm for digital breast tomosynthesis. August 2008.

- [17] Dominique Van de Sompel and Michael Brady. A systematic performance analysis of the sart for limited angle tomography. *30th Annual International IEEE EMBS Conference, Vancouver, Canada*, August 2008.
- [18] F. Dennerlein, F. Noo, G. Lauritsch, and J. Hornegger. Fan-beam filtered-backprojection reconstruction without backprojection weight. *Physics in Medecine and Biology*, 52 :3227 – 3240, 2007.
- [19] S. Doré and R. E. Kearny. Experimental evaluation of ct psf variability within the filed of view : parametric models. *Medical And Biological Engineering and Computing 2004*, 42, 2004.
- [20] S. Doré, R. E. Kearny, and J. A. De Guise. Experimental correlation-based identification of X-Ray CT point spread function. part 1 : method and experimental results. *Medical And Biological Engineering and Computing 1997*, 35, 1997.
- [21] S. Doré, R. E. Kearny, and J. A. De Guise. Experimental correlation-based identification of X-Ray CT point spread function. part 2 : simulation and design of input signal. *Medical And Biological Engineering and Computing 1997*, 35, 1997.
- [22] H. Erdogan and J. A. Fessler. Ordered subsets algorithms for transmission tomography. *Physics in Medecine and Biology*, Nov.
- [23] Markus Fenn, Stefan Kunis, and Daniel Potts. On the Computation of the Polar FFT. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 22(2) :257 – 263, March 2007.
- [24] Bradley Ferguson, Shaohong Wang, Doug Gray, Derek Abbot, and X.-C. Zhang. T-ray computed tomography. *Opt. Lett.*, 27(15) :1312–1314, 2002.
- [25] Thomas Frese, Ned C. Rouze, Charles A. Bouman, Ken Sauer, and Gary D. Hutchins. Quantitative Comparison of BFP, EM and Bayesian Reconstruction Algorithms for the IndyPET Scanner. *IEEE Transactions On Medical Imaging*, 22(2) :258 – 276, February 2003.
- [26] S. Geman and D. McClure. Statistical methods for tomographic image reconstruction. *Bull. Int. Stat. Inst.*, LII-4 :5 – 21, 1987.
- [27] P. Gilbert. Iterative methods for the reconstruction of three dimensional objects from their projections. *Theoretical Biology*, 36 :105 – 117, 1972.
- [28] Richard Gordon. A Tutorial on ART. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21(3) :78 – 93, June 1974.
- [29] Richard Gordon, Robert Bender, and Garbor T. Herman. Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Three-dimensional Electron Microscopy and X-ray Photography. *Journal of Theoretical Biology*, 29 :471 – 481, 1970.
- [30] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science (2nd Edition)*. 1994.
- [31] M. Grass, Th. Kohler, and R. Proksa. 3d cone beam ct reconstruction for circular trajectories. *Physics in Medecine and Biology*, 45 :329 – 347, 2000.
- [32] Huaiqun Guan and Richard Gordon. A projection access order for speedy convergence of ART (algebraic reconstruction technique) : a multilevel scheme for computed tomography. *Physics in Medecine and Biology*, 39 :2005 – 2022, 1994.
- [33] Huaiqun Guan and Richard Gordon. Computed tomography using algebraic reconstruction techniques (ARTs) with different projection access schemes : a comparison study under practical situations. *Physics in Medecine and Biology*, 41 :1727 – 1743, 1996.
- [34] Jean Pierre Guédon. *Les problèmes d'échantillonnages dans la reconstruction d'images à partir de projections*. PhD thesis, Université de Nantes, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, 1990.
- [35] Jean-Pierre Guédon. *The Mojette Transform : Theory and Applications*. ISTE-Wiley, 2009.

-
- [36] Jean Pierre Guédon and Yves Bizais. Bandlimited and Haar Filtered Back-Projection Reconstructions. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(3), September 1994.
- [37] Jean Pierre Guédon and Nicolas Normand. Spline Mojette Transform : Applications in Tomography and Communications. *EUSIPCO*, 3 :271–274, 2002.
- [38] Jean-Pierre Guédon and Nicolas Normand. The Mojette Transform : The First Ten Years. pages 79–91, 2005.
- [39] Peter Hammersberg. *Techniques for the determination of the optimal performance of high resolution computerised tomography*. PhD thesis, Division of Engineering Materials, Department of Mechanical Engineering, Linköpings University, Sweden, 1997.
- [40] A. P. Happonen and U. Ruotsalainen. A comparative study of angular extrapolation in sinogram and stackgram domains for limited angle tomography. *SCIA 2005, LNCS 3540*, pages 1047–1056, 2005.
- [41] Tom Hebert and Richard Leahy. A generalized em algorithm for 3-d bayesian reconstruction from poisson data using gibbs priors. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 8(2) :194 – 202, june 1990.
- [42] G. T. Herman. Image Reconstruction From Projections. *Real-Time Imaging*, 1 :3 – 18, 1995.
- [43] Gabor T. Herman. Algebraic Reconstruction Techniques Can Be Made Computationally Efficient. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(3) :600 – 609, September 1993.
- [44] Gabor T. Herman and Attila Kuba. *Discrete Tomography - Foundations, Algorithms and Applications*. 1999.
- [45] Harish P. Hiriannaiah. X-ray computed tomography for medical imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 42–58, march 1997.
- [46] Godfrey Newbold Hounsfield. Computerized transverse axial scanning (tomography) : Part 1. description of the system. *British Journal of Radiology*, 46 :1016–1022, July 1973.
- [47] Ing-Tsung Hsiao, Anand Rangarajan, Parmeshwar Khurd, and Gene Gindi. An accelerated convergent ordered subsets algorithm for emission tomography. *Physics in Medecine and Biology*, 49 :2145 – 2156, 2004.
- [48] H. Malcom Hudson and Richard S. Larkin. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4) :601 – 609, december 1994.
- [49] Ming Jiang and Ge Wang. Convergence of the Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART). *IEEE Transactions On Image Processing*, 12(8) :957 – 961, August 2003.
- [50] Ronald Jones, tristrom cooke tristrom cooke, and Nicholas J. Redding. Implementation of the Radon Transform Using Non-equispaced Discrete Fourier Transforms. *DSTO Information Science Laboratory*, April 2004.
- [51] Myron Bernard Katz. Questions of Uniqueness and Resolution in Reconstruction from Projections. *Lecture Notes in Biomathematics*, 1978. Springer-Verlag New York.
- [52] L. Kaufman. Implementing and accelerating the EM algorithm for positron emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 6 :37 – 51, 1987.
- [53] Linda Kaufman. Maximum likelihood, least squares, and penalized least squares for pet. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 12(2) :200 – 214, june 1993.
- [54] David S. Lalush and Benjamin M. W. Tsui. A generalized gibbs prior for maximum a posteriori reconstruction in SPECT. *Physics in Medecine and Biology*, 38 :729 – 741, 1993.
- [55] Kenneth Lange and Jeffrey A. Fessler. Globally convergent algorithms for maximum a posteriori transmission tomography. *IEEE Transactions on image processing*, 4(10) :1430 – 1438, October 1995.

- [56] A. Lent. Maximum entropy and multiplicative ART. *SPSE Proc. Conf. Image Analysis and Evaluation*, 1976. Toronto.
- [57] W. Lu. Adaptive algebraic reconstruction technique. *Medical Physics*, 31 :3222–+, 2004.
- [58] K. Mueller and R. Yagel. Rapid 3d cone beam reconstruction with the simultaneous algebraic reconstruction technique (sart) using 2d texture mapping hardware. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(12) :1227 – 1237, 2000.
- [59] Klaus Mueller and F Xu. Practical considerations for GPU accelerated CT. *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging*, 2006. Washington D.C.
- [60] Klaus Mueller, F Xu, and N Neophytou. Why do commodity graphics hardware boards (gpus) work so well for accelerating computed tomography? *SPIE Medical Imaging*, 2007.
- [61] M. Muller and G. R. Arce. Generalized fan-beam reconstruction algorithm and its applications. *Journal of the Optical Society of America A*, 11(9) :2410 – 2428, september 1994.
- [62] Erkan U. Mumcuoglu, Richard Leahy, Simon R. Cherry, and Zhenyu Zhou. Fast gradient-based methods for bayesian reconstruction of transmission and emission pet images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4) :687 – 701, december 1994.
- [63] Menahen Nassi, William R. Brody, Barry P. Medoff, and Albert Macovski. Iterative reconstruction-retroprojection : An algorithm for limited data cardiac-computed tomography. *IEEE Transactions on Biomedical Imaging*, 29(5), May 1982.
- [64] Frank Natterer. Fourier reconstruction in tomography. *Numerische Mathematik*, 47(3) :343 – 353, Sept 1985.
- [65] F. Noo, S. Hoppe, F. Dennerlein, G. Lauritsch, and J. Hornegger. A new scheme for view-dependant data differentiation in fan-beam and cone-beam computed tomography. *Physics in Medecine and Biology*, 52 :5393 – 5414, 2007.
- [66] Nicolas Normand. *Représentation d’images et Distances Discrètes Basées sur les éléments structurants à deux pixels*. PhD thesis, Université de Nantes, 1997.
- [67] Nicolas Normand, Andrew Kingston, and Pierre Evenou. A Geometry Driven Reconstruction Algorithm for the Mojette Transform. *DGCI - LNCS 4245*, pages 122–133, 2006.
- [68] NVIDIA. NVIDIA CUDA home page. <http://www.nvidia.com/object/cuda.html>.
- [69] NVIDIA. NVIDIA CUDA Compute Unified Device Architecture - Programming Guide, July 2008. Version 2.0.
- [70] Benoit Parrein. *Description multiple de l’information par transformation Mojette*. PhD thesis, Université de Nantes, 2002.
- [71] D. Potts and G. Steidl. New fourier reconstruction algorithms for computerized tomography.
- [72] Jinyi Qi and Richard M. Leahy. Iterative reconstruction techniques in emission computed tomography. *Physics in Medecine and Biology*, 51 :541 – 578, 2006.
- [73] Johann Radon. Uber die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte langs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Ber. Ver. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Kl*, 69 :262–277, April 1917. In German. An english translation can be found in S. R. Deans : The Radon Transform and Some of Its Applications.
- [74] Maria Rantala, Simopekka Vanska, Seppo Jarvenpaa, Martii Kalke, Matti Lassas, Jan Moberg, and Smuli Siltanen. Wavelet-based reconstruction for limited-angle x-ray tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25(2), February 2006.
- [75] Benoit Recur. *Reconstruction Tomographique à l’aide de Transformées Discrètes*. 2007.
- [76] Benoit Recur, Pascal Desbarats, and Jean-Philippe Domenger. Radon and Mojette Projections’ Equivalence for Tomographic Reconstruction using Linear Systems. *WSCG 2008 Communication Papers*, pages 191–198, 2008.

-
- [77] Benoit Recur, Pascal Desbarats, and Jean-Philippe Domenger. Implementation of Usual Computerized Tomography Methods on GPU Using the Compute Unified Device Architecture (CUDA). *Signal Processing Algorithms, Architectures, Arrangements and Applications (SPA) Proceedings*, September 2009.
- [78] Benoit Recur, Pascal Desbarats, and Jean-Philippe Domenger. Mojette Reconstruction from Noisy Projections. *IEEE International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications Proceedings*, pages 201–206, July 2010.
- [79] Suhail S. Saquib, Charles A. Bouman, and Ken Sauer. ML parameter estimation for markov random fields with applications to bayesian tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(7) :1029 – 1044, july 1998.
- [80] Stefan Schaller, Thomas Flohr, and Peter Steffen. An efficient fourier method for 3d radon inversion in exact cone-beam ct reconstruction.
- [81] Holger Scherl, Benjamin Keck, Markus Kowarschik, and Joachim Hornegger. Fast gpu-based ct reconstruction using the common unified device architecture (cuda). *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, 6 :4464–4466, november 2007.
- [82] Myriam Servieres. *Reconstruction tomographique Mojette*. PhD thesis, Université de Nantes, 2005.
- [83] Myriam Servièrès, Nicolas Normand, JeanPierre Guédon, and Yves Bizais. The mojette transform : Discrete angles for tomography. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 20 :587 – 606, 2005. Proceedings of the Workshop on Discrete Tomography and its Applications.
- [84] Claude Elwood Shannon. A Mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27, 1948.
- [85] L. Shepp and B. Logan. The Fourier Reconstruction of a Head Section. *IEEE Transactions in Nuclear Science*, 21(2) :21 – 43, 1974.
- [86] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2) :113 – 122, october 1982.
- [87] Peter Toft Soren Holm and Mikael Jensen. Estimation of the noise contributions from blank, transmission and emission scans in pet, 1997.
- [88] H. Stark, J. W. Woods, I. Paul, and R. Hingorani. An Investigation of Computerized Tomography by Direct Fourier Inversion and Optimum Interpolation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 28(7) :496 – 505, 1981.
- [89] Henry Stark, John W. Woods, Indraneel Paul, and Rajesh Hingorani. An investigation of computerized tomography by direct fourier inversion and optimum interpolation. *IEEE Transactions on Biomedical Imaging*, BME-28(7), July 1981.
- [90] Joseph O. Sullivan and Jasenka Benac. Alternating Minimization Algorithms for Transmission Tomography, 2006.
- [91] Imants Svalbe and Andrew Kingston. Farey sequences and discrete radon transform projection angles. 12, 2003.
- [92] M.M. Ter-Pogossian, M.E. Phelps, E.J. Hoffman, and N.A. Mullani. A positron-emission transaxial tomograph for nuclear imaging (pett). *Radiology*, 114 :89–98, January 1975.
- [93] Peter Toft. Iterative methods for reconstructing pet images. 1994.
- [94] Peter Toft. *The Radon Transform : Theory and Implementation*. PhD thesis, Department of Mathematical Modelling, Section for Digital Signal Processing, Technical University of Denmark, 1996.
- [95] Jenna Tong and Paul Midgley. A novel dual-axis reconstruction algorithm for electron tomography. *Journal of Physics : Conference Series* 26, 26, 2006.

- [96] Ing tsung Hsiao, Anand Rangarajan, and Gene Gindi. A new convergent map reconstruction algorithm for emission tomography using ordered subsets and separable surrogates. *Subsets and Separable Surrogates, in Conf. Rec. IEEE Int. Symp. Biomed. Imaging. July 2002*, pages 409–412, 2002.
- [97] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. B-Spline signal processing : Part I—Theory. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2) :821–833, February 1993. IEEE Signal Processing Society’s 1995 best paper award.
- [98] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden. B-Spline signal processing : Part II—Efficient design and applications. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(2) :834–848, February 1993.
- [99] Ge Wang and Ming Jiang. Ordered-subset simultaneous algebraic reconstruction techniques (OS-SART). *Journal of X-Ray science and Technology*, 12 :169 – 177, 2004.
- [100] Ge Wang and Michael W. Vannier. Computerized tomography. *Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering*, February 1998.
- [101] Zhou Wang, Alan C. Bovik, Hamid R. Sheikh, and Eero P. Simoncelli. Image quality assessment : From error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13, April 2004.
- [102] Yiheng Zhang, Heang-Ping Chan, Berkman Sahiner, Jun Wei, Mitchell M. Goodsitt, Lubomir M. Hadjiiski, Jun Ge, Chuan Zhou, et al. A comparative study of limited-angle cone-beam reconstruction methods for breast tomosynthesis. *Med. Phys.*, 33(10), October 2006.
- [103] Tingliang Zhuang, Shuai Leng, Brian E. Nett, and Guang-Hong Chen. Fan-beam and cone-beam image reconstruction via filtering the backprojection image of differentiated projection data. *Physics in Medicine and Biology*, 49 :5489 – 5503, 2004.