Numéro d'ordre : 4104

Thèse

présentée à

Université Bordeaux I

École doctorale de mathématiques et informatique

par

Stéphane Charpentier

pour obtenir le grade de

Docteur

Spécialité : Mathématiques Pures

Opérateurs de composition sur les espaces de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes
-
Universalité dans les espaces de Banach et de Fréchet

Sous la direction de Frédéric Bayart

Soutenue de 22 Novembre 2010

Jury

Frédéric Bayart .... Directeur
Alexandre Borichev .... Rapporteur
Jean Esterle .... Président
Karl Grosse-Erdmann .... Examinateur
Karim Kellay .... Examinateur
Daniel Li .... Rapporteur
Nikolai Nikolski .... Examinateur

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à Frédéric Bayart, qui a tout d'abord su m'écouter et me proposer des directions de recherche qui correspondaient parfaitement à mes attentes. Je lui suis aussi reconnaissant pour m'avoir fait profiter de ses connaissances mathématiques -dont je ne suis certainement pas en mesure, pour le moment, d'évaluer l'étendue- et pour m'avoir communiqué naturellement son dynamisme et son optimisme (mathématiques, mais pas seulement) ; des qualités qui m'ont stimulé et dont j'ai essayé, durant ces trois années, de m'inspirer. Je voudrais ajouter que je tiens vraiment en estime sa simplicité, son honnêteté et sa droiture.

Je remercie Alexandre Borichev et Daniel Li, qui ont accepté de relire ma thèse et d'émettre un avis à son sujet mais surtout, qui m'ont fait profiter, de façon désintéressée, de leurs suggestions et de leurs idées, lesquelles m'ont non seulement permis d'aboutir à cette version finale de mon manuscrit, mais aussi de regarder mon travail avec un regard plus extérieur. Je suis également très honoré de compter sur la présence de Jean Esterle, Karl Grosse-Erdmann, Karim Kellay et Nikolai Nikolski parmi les membres du jury.

Je souhaite remercier le laboratoire de Mathématiques de Bordeaux pour son soutien financier sans failles, dans mes divers déplacements notamment.

Tout spécialement, je voudrais exprimer ma gratitude au laboratoire de Mathématiques de Clermont-Ferrand, dont l'équipe m'a accueilli comme je ne l'aurais jamais imaginé, en faisant preuve d'une efficacité et d'une chaleur qui ont contribué sans aucun doute à l'impression très positive que m'a laissée cette dernière année.

Je remercie également mes amis pour leur apport moral ou mathématique, ainsi que ma famille pour son soutien et sa patience.

Table des matières

Introduction générale

Cette thèse est constituée de trois chapitres et aborde deux thèmes généraux assez distincts, bien qu'appartenant chacun à des branches de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des opérateurs. Le premier chapitre s'inscrit dans une étude assez générale des questions d'universalité dans les espaces de Banach et de Fréchet. Dans les deux suivants, je consacre mon attention aux opérateurs de composition agissant sur des espaces de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

Un concept important, en analyse, est celui de la convergence d'une famille d'objets vers un autre objet. On se convainc aisément que cette notion est un outil essentiel, que ce soit pour étendre des résultats, transférer des propriétés d'un contexte vers un autre, ou encore pour obtenir des approximations et ainsi des informations sur des objets abstraits, à partir d'une matière plus facile à « voir » et à manipuler. Néanmoins, ce procédé se heurte parfois à ce qui le définit, quand la convergence fait précisément défaut. L'*universalité* consiste en l'étude de ces procédés qui divergent de la pire des façons.

L'étude de l'universalité remonte à 1914 quand Fekete en donne un premier exemple : il montre l'existence de séries entières réelles sur $[-1,1]$ qui ne se contentent pas de diverger en tout point $x \neq 0$ de cet intervalle, mais qui le font d'une façon extrême : toute fonction continue sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0 est la limite uniforme d'une sous-suite des sommes partielles d'une telle série. Le théorème de Borel (1895), selon lequel toute série entière réelle développée autour de 0 est le développement de Taylor en 0 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, donne au résultat de Fekete un caractère plus surprenant encore, et surtout il suggère la notion d'un objet propre, en l'occurrence une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, qui a des propriétés de divergence dès qu'on se place dans un cadre formel différent. Ce sont ces deux aspects, cette divergence « externe » et cette convergence intrinsèque, que l'on retrouve dans la définition formelle d'une série universelle restreinte. Le lecteur aura deviné que le terme restreint se rapporte à la convergence intrinsèque de la série universelle, la notion d'universalité pour les séries en toute généralité correspondant au phénomène de divergence extrême.

Les exemples d'universalité se sont ensuite succédés pour justifier l'émergence, il y a une vingtaine d'années, d'une théorie abstraite des séries universelles. En effet, jusque là, les démonstrations de l'existence de séries universelles étaient purement constructives et de fait, longues et techniques. En 1999, K.-G. Grosse-Erdmann souligne dans [GrErd1] qu'elles relèvent en réalité toutes d'un procédé générique, et il éclaircit la situation en faisant appel au théorème de Baire, de façon systématique, pour simplifier les démonstrations précédentes et pour produire de nouveaux exemples de séries universelles. De cette façon, est par exemple exhibée une fonction holomorphe sur le disque unité de $\mathbb{C}$ telle que les moyennes de Cesàro de son développement en série en n'importe quel point de $\mathbb{D}$ sont universelles. Forte de cette avancée, la théorie des séries universelles est grandement complétée, quelques années plus tard, quand F. Bayart, K.-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis et C. Papadimitropoulos proposent dans [BaGrNePa] de mettre en commun les idées abstraites de [GrErd1] et de nombreux autres mathématiciens, dont justement V. Nestoridis lui-même [NePa], ainsi que les exemples connus de séries universelles. Leur résultat principal consiste en un critère général, valable dans les espaces de Fréchet, d'existence d'une série universelle (restreinte) ; ils y mettent en évidence que le phénomène d'universalité, loin d'être singulier et anecdotique, revêt un caractère générique topologique et algébrique, et il apparaît notamment qu'en un sens bien précis, et dans un cadre bien défini, presque tout élément est universel, dès lors qu'il en existe un. Il convient d'énoncer, sans le formalisme requis, le théorème en question :

Théorème. *Si A est un espace de Fréchet de suites réelles ou complexes, l'existence d'une série à coefficients dans A, universelle pour un espace métrisable X, est conditionnée par l'existence d'une suite $(e_n)_n$ dans A, et d'une* *suite* $(x_n)_n$ *dans* X*, telle que, pour tout* $\varepsilon > 0$*, pour tout* $x \in X$*, et pour tout entier* $p \geq 0$*, il existe une suite* $(0, \ldots, a_p, \ldots, a_q, 0, \ldots)$ *telle que*

$$d_X\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n, x\right) < \varepsilon \text{ et } d_A\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n, 0\right) < \varepsilon.$$

Si cette condition est réalisée, alors l'ensemble des séries universelles est une intersection dénombrable d'ouverts denses, et contient, excepté 0*, un sous-espace dense de* A*.*

Contrairement à l'impression que pourrait laisser ce qui précède, la théorie de l'universalité n'est pas réduite à celle des séries universelles. D'un point de vue abstrait et général, l'universalité met en jeu un espace topologique X d'objets, un espace topologique Y d'éléments à approcher, et une famille T_i d'applications de X dans Y. Alors, un objet $x \in X$ est dit universel si la famille $(T_i(x))_i$ est dense dans Y. Cette notion couvre bien sûr celle de l'universalité des séries, et elle suggère aussi de s'intéresser à une forme d'universalité en théorie des opérateurs, en considérant pour X et Y des espaces de Fréchet ou de Banach, et pour la famille $(T_i)_i$ une suite d'opérateurs $(T_n)_n$ de X dans Y. Depuis une quinzaine d'années, l'étude de cette universalité, qui contient toujours celle des séries, a suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens. Elle a donné notamment naissance à la notion d'hypercyclicité, introduite en ces termes semble-t-il par Beauzamy en 1986, en faisant le lien avec la dynamique des opérateurs linéaires. Déjà, la notion de série universelle n'est pas couverte par celle d'hypercyclicité. Dans cet esprit, l'universalité en théorie des opérateurs s'est plus ou moins développée en parallèle de l'universalité au sens des séries, si bien que des mathématiciens, tels que A. Montes Rodriguez, J. Bonet, F. Martinez Gimenez, ou A. Peris, ont proposé des résultats d'universalité spécifiques à ce contexte, au point de s'éloigner du cadre imposé par la théorie des séries universelles. Il a ainsi été démontré que, sous certaines hypothèses portant sur la suite d'opérateurs $(T_n)_n$, l'ensemble des vecteurs universels contient, hormi 0, un sous-espace *fermé* de dimension infinie. Cette contrainte n'a aucune raison d'être satisfaite par la suite d'opérateurs qui, à une série, associent l'une de ses sommes partielles, mais soulevait malgré tout la question de savoir si un tel résultat était valable dans un contexte général, pour les séries universelles. D'ailleurs, cette motivation était justifiée par un article de F. Bayart dans lequel il démontre un tel résultat, dans un cas particulier de séries universelles de Taylor de fonctions holomorphes sur le disque unité.

L'objet du premier chapitre de ma thèse est précisément de donner une réponse positive à cette question de façon satisfaisante. En faisant ainsi, je complète le théorème donné par les auteurs de [BaGrNePa] et fournit une information supplémentaire sur la structure des séries universelles. Les deux principaux résultats que j'obtiens assurent l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie, dont les éléments non-nuls sont universels. Néanmoins, alors que ce n'est pas le cas dans les travaux de F. Bayart, K.-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis et C. Papadimitropoulos, l'obtention de l'un de ces deux résultats est soumise, dans le cas où l'espace A dans lequel vit la série universelle est un espace de Fréchet, a une condition supplémentaire, l'existence d'une norme continue sur A. Et même en supposant cette condition satisfaite, le résultat dans ce cadre demeure moins bon que celui obtenu quand A est un espace de Banach. Malgré tout, ce résultat dans les espaces de Fréchet semble relativement satisfaisant. D'une part, l'existence d'une norme continue est une hypothèse habituellement faite pour obtenir des résultats semblables sur l'universalité des opérateurs linéaires. D'autre part, le théorème devient faux si on n'ajoute pas une telle hypothèse ! Paradoxalement, c'est le théorème de Fekete qui a ouvert la voie à l'étude de l'universalité, mais c'est aussi celui-ci qui fournit le contre-exemple pour lequel aucun sous-espace fermé de dimension infinie est tel que tous ses éléments non-nuls sont universels... Excepté l'universalité de Fekete, la plupart des exemples connus d'universalité entrent dans le cadre couvert par notre théorème.

Si le premier chapitre est l'exemple d'une étude générale dont l'objectif est de décrire des phénomènes, en l'occurrence l'universalité, communs à de nombreux contextes, les deux chapitres suivants, et principalement le second, évoquent un cadre plus restreint.

En un sens, les deux autres chapitres constituent la deuxième partie de la thèse, bien que le second pourrait apparaître comme une illustration des idées précédentes. D'une façon générale, ces deux chapitres traitent des opérateurs de composition sur des espaces de fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes. Formellement, si X est un espace de Banach de fonctions holomorphes définies sur un ouvert U de $\mathbb{C}^N$, et si $\phi : U \to U$ est une fonction holomorphe, l'opérateur de composition C_ϕ est défini, pour toute f dans X, par $C_\phi(f) = f \circ \phi$. L'étude des opérateurs de composition consiste en la comparaison des propriétés de l'opérateurs C_ϕ (continuité, compacité, spectre...) avec celles de son *symbole* ϕ. Si la théorie est bien avancée dans le cas où U est le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$, la situation est moins claire lorsque U est un domaine classique de $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$, et notamment lorsque U est la boule unité $\mathbb{B}_N$ de $\mathbb{C}^N$. En particulier, les contraintes liées à la dimension apparaissent ne serait-ce qu'à cause du fait suivant : alors que tout opérateur de composition défini sur l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$ est continu, il existe des symboles $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$, $N > 1$, dont l'opérateur de composition induit n'est pas continu sur $H^2(\mathbb{B}_N)$.

Mes recherches se sont orientées selon deux axes. Dans le chapitre 2, je suis le fil tissé par le premier chapitre en me penchant sur les propriétés spectrale et de dynamique linéaire des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy de la boule de $\mathbb{C}^N$. Si étudier les propriétés spectrales de C_ϕ se résume pour nous à exhiber le spectre de cet opérateur, il convient, malgré les considérations d'universalité du début de cette introduction, de dire un mot sur ce que l'on entend par dynamique linéaire. Rappelons qu'un opérateur T agissant sur un espace de Banach X est dit *hypercyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que l'orbite de x par T, $\{T^n x, n \geq 0\}$, est dense dans X. T est dit *supercyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que son orbite projective $\mathbb{C}.\{T^n x, n \geq 0\}$ est dense dans X. Enfin T est dit *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $\{P(T)x, P \text{ polynôme}\}$ est dense dans X. En l'occurrence, il s'agit d'étudier l'hypercyclicité, la supercyclicité ou encore la cyclicité des opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{B}_N)$.

L'un des outils principaux de l'étude des opérateurs de composition dans l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$ est le modèle des homographies : toute application holomorphe de $\mathbb{D}$ dans lui-même est conjuguée à une homographie, c'est-à-dire à une application de la forme $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$. En 2000, dans l'espoir d'établir un modèle des homographies sur la boule $\mathbb{B}_N$ de $\mathbb{C}^N$, et de produire des opérateurs de composition continus sur $H^2(\mathbb{B}_N)$ relativement simples à étudier, Cowen et MacCluer ont proposé dans [CowMC2] une généralisation des homographies du disque à la boule $\mathbb{B}_N$ de $\mathbb{C}^N$, en définissant des applications de la forme

$$Z \to \frac{AZ+B}{\langle Z,C\rangle + D},$$

où A, B, C et D sont des paramètres choisis correctement. Suite à cela, des résultats partiels concernant un modèle des homographies de la boule ont été obtenus dans [Bay1]. Parallèlement, les opérateurs de composition associés aux homographies de $\mathbb{B}_N$ ont été étudiés par divers auteurs, et il a été mis en avant les propriétés géométriques de ces applications et établi une classification, via la transformation de Cayley, de ces homographies ([BrCoDi]) dans le demi-espace de Siegel

$$\mathbb{H}_N = \left\{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}, \Im(z) > |w_1|^2 + \ldots + |w_{N-1}|^2 = \|w\|_2^2\right\}.$$

Il apparait alors essentiel de classer les homographies en trois catégories, en fonction de leurs points fixes et, notamment, de leur point de Denjoy-Wolff. C'est ainsi qu'on distingue les homographies dites elliptiques, qui ont un point fixe dans $\mathbb{B}_N$, et les homographies qui n'ont pas de points fixes dans $\mathbb{B}_N$. Parmi elles, on distingue les homographies dites paraboliques de celles dites hyperboliques, selon des critères qui font intervenir leur point de Denjoy-Wolff. Ce chapitre introductif n'est pas le lieu pour entrer dans les détails du formalisme.

En une variable, l'étude des opérateurs de composition associés à des homographies a été faite de façon complète. En particulier, leur spectre et leur dynamique sont connus. En plusieurs variables, les cas où le symbole est un automorphisme ou est elliptique sont résolus ; comme en une variable, ce sont ceux qui offrent le moins de résistance. Dans un article publié en 2009, F. Bayart propose dans [Bay2] une étude complète des homographies de type parabolique et des opérateurs de composition associés. Il met en évidence que même parmi ces applications, se cachent des différences cruciales, ce qui justifie le besoin d'en extraire les caractéristiques essentielles afin d'obtenir une classification raffinée. Il définit ce qu'il appelle la *signature* d'une homographie parabolique. De cette façon, il décrit le spectre et les propriétés de dynamique de ces opérateurs.

Il convient aussi de mentionner qu'il est bien connu que pour qu'un opérateur de composition soit cyclique, il faut que son symbole soit injectif. C'est donc une hypothèse naturellement faite quand on étudie la dynamique des opérateurs de composition.

On résume l'ensemble des résultats connus sur ces questions, sans détailler chacune des occurrences, dans les tableaux suivants :

Type de ϕ	Spectre de C_ϕ sur $H^2(\mathbb{B}_N)$, $N \geq 1$	
	$N = 1$	$N > 1$
Elliptique	Cercle unité ou sous-groupe du cercle unité	Cercle unité ou sous-groupe du cerle unité
Parabolique	Cercle ou Spirale	Disque unité, réunion de cercles ou réunion de spirales
Hyperbolique	Cercle ou Couronne	...
Références : [CowMC1][Bay2]		

Type de ϕ	Dynamique de C_ϕ sur $H^2(\mathbb{B}_N)$, $N \geq 1$											
	Cyclicité				Supercyclicité				Hypercyclicité			
	$N = 1$		$N > 1$		$N = 1$		$N > 1$		$N = 1$		$N > 1$	
	A	N-A	A	N-A	A	N-A	A	N-A	A	N-A	A	N-A
Elliptique	P	P	P	P	J	J	J	J	J	J	J	J
Parabolique	T	T	T	P	T	J	T	J	T	J	T	J
Hyperbolique	T	T	...	...	T	T	...	...	T	T	...	...
A=Automorphisme, N-A=Non-Automorphisme, J=Jamais, T=Toujours et P=Parfois												
Références : [BoSh][CowMC1][GaGMoR][Bay2]												

Le chapitre 2 complète cette étude en traitant le cas restant, i.e. le cas hyperbolique. Comme dans l'article de F. Bayart concernant les homographies de type parabolique, il est mis en évidence les propriétés fondamentales d'une homographie hyperbolique, et leur lien avec son comportement géométrique ou au voisinage de son point de Denjoy-Wolff. Ces propriétés, que nous regroupons naturellement dans la *signature* de l'homographie hyperbolique déterminent son spectre et sa dynamique. Les deux résultats principaux sont les suivants :

Théorème (Spectre des opérateurs de composition hyperboliques**).** *Le spectre d'un opérateur de composition induit par une homographie hyperbolique, et agissant sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{B}_N)$, est une réunion de couronnes centrées en 0 dont les rayons tendent vers 0, ou un disque centré en 0.*

Concernant la dynamique, le théorème principal dit la chose suivante :

Théorème (Dynamique des opérateurs de composition hyperboliques**).** *Tout opérateur de composition hyperbolique est cyclique, et peut, suivant sa signature, être hypercyclique, ou encore supercyclique sans être hypercyclique.*

Tout d'abord, il apparaît que la dynamique des opérateurs de composition hyperboliques couvre tous les cas de figure. Ensuite, ce deuxième théorème peut sembler d'autant plus surprenant que, si l'on regarde le tableau ci-dessus qui concerne la dynamique, on constate qu'il fournit en plusieurs variables les premiers exemples d'opérateurs de composition, induits par des homographies qui ne sont pas des automorphismes, qui peuvent être hypercycliques. Cependant, ne serait-ce qu'en une variable, il apparaît que les homographies hyperboliques sont aussi les seules homographies, en dehors des automorphismes, à définir des opérateurs de composition hypercycliques.

Pour replacer cela dans le contexte des opérateurs de composition plus généraux, et pour illustrer un modèle des homographies dans la boule encore non-abouti, on montre aussi comment les résultats obtenus sur les opérateurs de composition associés à des homographies hyperboliques peuvent être transférés à des opérateurs de composition dont le symbole n'est plus une homographie. Ce résultat donne l'espoir que les travaux réalisés dans ce contexte puissent servir dans un cadre encore davantage général.

Le chapitre 3 concerne l'étude de ces mêmes opérateurs de composition, agissant cette fois sur les espaces de Bergman-Orlicz $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ à poids et les espaces de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ de la boule de $\mathbb{C}^N$. Ces espaces, dont la définition est donnée dans l'introduction du chapitre correspondant, sont un raffinement des espaces de Bergman ou de Hardy classiques sur la boule. Grossièrement, la généralisation consiste à remplacer l'exposant p apparaissant dans les espaces $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$ et $H^p(\mathbb{B}_N)$ par une fonction convexe croissante possédant quelques propriétés commodes minimales. Partageant bon nombre de propriétés avec leurs homologues classiques, ils constituent non seulement des objets intéressants et généraux à part entière, mais ils offrent aussi la possibilité d'étendre les connaissances en théorie des opérateurs. En particulier, les espaces de Bergman-Orlicz (respectivement les espaces de Hardy-Orlicz) constituent, pour une certaine classe de fonctions d'Orlicz qui les définissent, des espaces intermédiaires entre $H^\infty(\mathbb{B}_N)$ et $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$ (resp. $H^p(\mathbb{B}_N)$.)

Comme nous l'avons déjà mentionné, une difficulté majeure dans l'étude des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman ou de Hardy, en plusieurs variables, est la possibilité de trouver des symboles ϕ tels que les opérateurs de composition C_ϕ associés ne soient pas continus sur ces espaces. En une variable, au contraire, il est connu que le principe de subordination de Littlewood implique la continuité de tout opérateur de compositon sur $A_\alpha^p(\mathbb{D})$ ou sur $H^p(\mathbb{D})$. Ainsi, une question toute naturelle est de trouver un moyen de caractériser les fonctions $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N, N > 1$, qui définissent un opérateur de composition continu sur $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$ et $H^p(\mathbb{B}_N)$. Dans les années 80, B. MacCluer a constaté que, sur ces espaces, tout opérateur de composition peut se voir comme un opérateur d'inclusion de $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$ (resp. $H^p(\mathbb{B}_N)$) dans un espace $L^p(\mathbb{B}_N, \mu)$ pour une certaine mesure μ, qui n'est autre que la mesure image par ϕ de la mesure de Lebesque sur la boule (resp. sur la sphère). La caractérisation de la continuité des opérateurs de composition se ramène ainsi à des théorèmes d'inclusion. Fort de cette observation, il n'était pas question de s'arrêter en si bon chemin, et la compacité des opérateurs de composition fut aussi caractérisée, en suivant les mêmes idées que pour la continuité. Les premiers résultats principaux obtenus, qui cachent les travaux plus célèbres de L. Carleson et de L. Hörmander dans les années 60, sont les suivants :

Théorème (Dans $H^p(\mathbb{B}_N)$**).** *Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe. Soit μ_ϕ la mesure définie par $\mu_\phi(E) = \sigma\left((\phi^*)^{-1}(E)\right)$ pour tout borélien E de $\mathbb{S}_N$, où σ est la mesure de Lebesgue sur la sphère.*

- *L'opérateur de composition C_ϕ est continu sur $H^p(\mathbb{B}_N)$ si et seulement si μ_ϕ est une mesure de Carleson, i.e.*

$$\mu_\phi(W_f(\xi, h)) = O_{h\to 0}(\sigma(W_f(\xi, h))),$$

  uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$, où $W(\xi, h)$ est la fenêtre de Carleson centrée en ξ, d'épaisseur h.
- *L'opérateur de composition C_ϕ est compact sur $H^p(\mathbb{B}_N)$ si et seulement si μ_ϕ est une mesure de Carleson évanescente, i.e.*

$$\mu_\phi(W_f(\xi, h)) = o_{h\to 0}(\sigma(W_f(\xi, h))),$$

  uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Sur les espaces de Bergman à poids on a le résultat suivant :

Théorème (Dans $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$**).** *Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe. Soit μ_ϕ la mesure définie par $\mu_\phi(E) = v_\alpha\left(\phi^{-1}(E)\right)$ pour tout borélien E de $\mathbb{B}_N$, où v_α est la mesure de Lebesgue à poids sur la boule.*

– *L'opérateur de composition C_ϕ est continu sur $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)$ si et seulement si μ_ϕ est une mesure de Carleson, i.e.*

$$\mu_\phi(W(\xi,h)) = O_{h\to 0}(v_\alpha(W(\xi,h))),$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$, où $W(\xi,h)$ est la fenêtre de Carleson en centrée en ξ, d'épaisseur h.

– *L'opérateur de composition C_ϕ est compact sur $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)$ si et seulement si μ_ϕ est une mesure de Carleson évanescente, i.e.*

$$\mu_\phi(W(\xi,h)) = o_{h\to 0}(v_\alpha(W(\xi,h))),$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Énoncés en une variable, ces deux théorème affirment notamment, en vertu du principe de Littlewood, que toute mesure image de la mesure de Lebesgue par une application holomorphe du disque dans lui-même, sur la sphère ou sur la boule, est une mesure de Carleson. La compacité en va autrement, et des exemples sont donnés d'opérateurs de composition non-compacts sur l'espace de Bergman ou l'espace de Hardy. Bien que les caractérisations de la compacité de C_ϕ sur A^p_α et H^p soient indépendantes de l'exposant p, au regard de ce qui se passe sur H^∞, où celle-ci est équivalente à $\|\phi\|_\infty < 1$, et à l'issu d'études sur d'autres espaces qui révèlent que, plus l'espace sur lequel l'opérateur de composition agit est « petit », dans le sens « proche » de H^∞, plus les conditions nécessaires à sa compacité sont contraignantes, il paraissait naturel d'envisager la situation dans ces espaces de Bergman-Orlicz ou de Hardy-Orlicz qui, en plus de généraliser les espaces de Bergman et de Hardy classiques, fournissent des espaces intermédiaires couvrant « complètement » l'intervalle entre ces derniers et H^∞.

C'est ainsi qu'il y a une demi-dizaine d'années, P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec et L. Rodríguez-Piazza se sont penchés sur l'étude des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz et de Hardy-Orlicz du disque, avec parmi leurs motivations, celle de trouver -si possible- de tels espaces, suffisamment proches de H^∞, tels que la compacité des opérateurs de composition sur ceux-ci soit équivalente à celle sur H^∞, et ne relève donc plus en particulier des deux théorèmes classiques énoncés plus haut, spécialement dans le cadre une variable (cf. [LeLiQuRP1, LeLiQuRP2, LeLiQuRP3, LeLiQuRP4]). Ce travail a permi d'établir des résultats très instructifs concernant la continuité et la compacité des opérateurs de composition sur ces « petits » espaces de fontions holomorphes, offrant une hauteur de vue appréciable sur les intéractions entre les espaces eux-mêmes et les opérateurs de composition agissant dessus. Ainsi, en mettant le doigt sur les concepts essentiels qui interviennent dans le cas classique, ils établissent des conditions nécessaires et suffisantes à la continuité ou à la compacité des opérateurs de composition. Parmi de nombreux autres résultats, ils généralisent à ce cadre un exemple de B. MacCluer et J. H. Shapiro d'une fonction $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ surjective, induisant un opérateur de composition compact sur $H^p(\mathbb{D})$. De la sorte, ils répondent par la négative à la question de l'existence d'espaces de Hardy-Orlicz sur lesquels la compacité de C_ϕ est équivalente à sa compacité sur H^∞.

Contrairement à la compacité, la continuité des opérateurs de composition est d'autant plus simple à obtenir que l'espace sur lequel il agit est petit. De façon extrême, tandis qu'il existe des opérateurs de composition non-continus sur les espaces de Bergman ou de Hardy de la boule, tout opérateur de composition est trivialement continu sur $H^\infty(\mathbb{B}_N)$. Cette observation est en soi une motivation justifiée, me semble-t-il, pour re-considérer, en plusieurs variables, l'étude entreprise par P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec et L. Rodríguez-Piazza, dans le but, notamment, de trouver des espaces de Hardy-Orlicz et de Bergman-Orlicz de la boule sur lesquels tout opérateur de composition est continu.

Ainsi, dans ce troisième chapitre, en m'appuyant sur des idées de ces derniers, je propose des théorèmes d'inclusions du type $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N) \subset L^\psi(\mathbb{B}_N,\mu)$ ou $H^\psi(\mathbb{B}_N) \subset L^\psi(\mathbb{B}_N,\mu)$. J'en déduis, non sans être confronté à des difficultés nouvelles qui rendent cette étude d'autant plus intéressante, des conditions nécessaires et suffisantes à la continuité et à la compacité des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$ à poids et de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{B}_N)$. Dans des cas particuliers qui demeurent néanmoins généraux du point de vue des espaces classiques, ces conditions se révèlent être équivalentes et sont donc des caractérisations. À l'issu de ce travail, j'obtiens le résultat suivant, qui peut être considéré, en un sens, comme le résultat principal de ce chapitre :

Théorème. *Il existe des espaces de Bergman-Orlicz $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$ et des espaces de Hardy-Orlicz $H^{\psi}(\mathbb{B}_N)$ tels que*

$$H^{\infty} \subsetneq A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset \bigcap_{1\leq p<\infty} A^{p}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$$

et

$$H^{\infty} \subsetneq H^{\psi}(\mathbb{B}_N) \subset \bigcap_{1\leq p<\infty} H^{p}(\mathbb{B}_N),$$

sur lesquels tout opérateur de composition est continu.

Le chapitre 1 a fait l'objet d'un article publié à Studia Mathematica en 2010 [Charp1], tandis que le deuxième chapitre provient d'un article en collaboration avec Frédéric Bayart [BayCharp2], actuellement soumis. Deux autres articles, [Charp3] et [Charp4] également en soumission, constituent l'essentiel du chapitre 3.

Bibliographie

[Bay1] F. Bayart, The linear fractional model on the ball, *Rev. Mat. Iboamericana* **24** (2008), 765-824.

[Bay2] F. Bayart, Parabolic composition operators on the ball, *Adv. Math.* **223** (2010), 1666-1705.

[BayCharp2] F. Bayart, S. Charpentier, Hyperbolic composition operators on the ball, *soumis.*

[BaGrNePa] F. Bayart, K-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis, C. Papadimitropoulos, Abstract theory of universal series and applications, *Proc. Lon. Math. Soc.* **96** (2008), 417-463.

[BoSh] P. Bourdon, J. Shapiro, Cyclic phenomena for composition operators, *Mem. Amer. Math. Soc.* **596** 1997.

[BrCoDi] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal, Classification of semi-groups of linear fractional maps in the unit ball, *Adv. Math.* **208** (2007) 318-350.

[Charp1] S. Charpentier, On the closed subspaces of universal series in Banach spaces and Fréchet spaces, *Studia Math.* 198 (2010), 121-145

[Charp3] S. Charpentier, Composition operators on Bergman-Orlicz spaces on the ball, *soumis.*

[Charp4] S. Charpentier, Composition operators on Hardy-Orlicz spaces on the ball, *soumis.*

[CowMC1] C. Cowen, B. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Stud. Adv. Math., CRC Press, 1995.

[CowMC2] C. Cowen, B. MacCluer, Linear fractional maps of the ball and their composition operators, *Acta. Sci. Math (Szeged)* **66** (2000), 351-376.

[GaGMoR] E. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez, The role of the spectrum in the cyclic behavior of composition operators, *Mem. Amer. Math. Soc.* **791** (2004).

[GrErd1] K-G. Grosse-Erdmann, Holomorphe Monster und universal Funktionen, *Mitt. Math. Sem. Giessen,* **176** (1987).

[LeLiQuRP1] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on Hardy-Orlicz spaces, *Mem. Am. Math. Soc.* 207 (2010), No. 974.

[LeLiQuRP2] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on $H^2(\mathbb{D})$ and Hardy-Orlicz spaces, J. Math. Anal. Appl. 354 (2009), 360-371.

[LeLiQuRP3] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on Bergman-Orlicz spaces, hal-00426831 (2009).

[LeLiQuRP4] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Some revisited results about composition operators on Hardy spaces, hal-00448623, (2010).

[NePa] V. Nestoridis, C. Papadimitropoulos, Abstract Theory of Universal Series, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris,* **341** (2005), 539-543.

Chapitre I

Universalité dans les espaces de Banach et les espaces de Fréchet

I.1 Introduction

L'étude des séries universelles a commencé en 1914 quand Fekete montra l'existence d'une série de Taylor sur $[-1,1]$ dont des sous-suites de ses sommes partielles approchent uniformément n'importe quelle fonction continue sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0. L'idée générale de ce résultat est que tout ce qui peut être approché par des polynômes peut également l'être par des sous-suites de sommes partielles de séries de Taylor. Après cette découverte, de nombreux exemples de séries universelles dans différents espaces ont été produits : Menchov montra notamment qu'il existe de nombreuses séries trigonométriques qui approchent presque partout, suivant des sous-suites de leurs sommes partielles, n'importe quelle fonction complexe mesurable 2π-périodique sur le cercle. D'autres résultats ponctuels d'universalité ont été plus tard obtenus dans les cadres des séries de Faber, de Laurent, de Jacobi, des développements harmoniques, etc. Les articles [8] et [9] donnent un bon aperçu de ces questions.

Il apparaît que, dès lors qu'il existe une série universelle, l'ensemble de ces séries universelles possède des propriétés remarquables. Ceci a été developpé dans [7] et plus tard dans [16] et [2], deux articles dans lesquels il est proposé une théorie abstraite des séries universelles. Plus précisément, les auteurs montrent en particulier qu'à partir du moment où l'ensemble des séries universelles est non vide, celui-ci a une certaine taille topologique (il contient un G_δ-dense) et algébrique (il contient un sous-espace dense, excepté 0). Le cadre dans lequel s'inscrit cette étude est suffisamment large pour couvrir tous les exemples connus.

Indépendamment, F. Bayart a étudié en 2005 dans [1] l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie constitué de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$, dont les séries de Taylor qui les représentent sont universelles. Dans ce chapitre, notre intention est de combiner les idées abstraites présentes dans [2] et les idées plus particulières de [1] pour montrer que, dans un cadre abstrait général, l'existence d'au moins une série universelle assure l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie dont tous les éléments non-nuls sont des séries universelles. Ce résultat complète ainsi l'étude faite dans [2] et la connaissance qu'on a de la structure de l'ensemble des séries universelles dans un cadre abstrait.

Il faut noter que la question de l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie n'est pas nouvelle dans le contexte de l'universalité. En effet, une telle étude a été faite concernant les suites universelles d'opérateurs entre espaces de Banach ou de Fréchet (cf. [5] et [14]). Cependant, la condition suffisante donnée dans [14] pour l'existence d'un tel sous-espace ne nous aide pas ici (ce point est expliqué dans la remarque I.3.5 ci-dessous). De plus, il faut ajouter qu'il ne nous sera pas nécessaire de faire les hypothèses supplémentaires, imposées dans ces deux articles, pour obtenir l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie de séries universelles.

Le présent chapitre est organisé comme suit. La première partie est consacrée à la présentation des concepts et des principaux résultats déjà connus impliqués dans notre étude ; la deuxième partie consiste en l'énoncé et la preuve de l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie, privé de 0, constitué de séries universelles, dans le cadre général le plus simple, celui des espaces de Banach. Dans une troisième partie, nous nous pencherons sur le cas des espaces de Fréchet plus généraux et généraliserons, partiellement, les résultats obtenus dans les espaces de Banach. Une quatrième partie sera consacrée à une extension du théorème principal obtenu dans les deux précédentes, qui prendra en considération des paramètres supplémentaires qui interviennent dans le développement en séries, comme par exemple ce que nous appellerons le centre du développement, c'est-à-dire le point autour duquel la série se développe. La cinquième et dernière partie consiste en l'application des résultats obtenus précédemment à un certain nombre d'exemples déjà connus d'universalité. À travers l'exemple paradoxal de Fekete, il apparaîtra entre autre que certaines hypothèses faites dans le cadre Fréchet sont pertinentes et ne constituent pas des restrictions purement simplificatrices.

I.2 Cadre, notions et principaux résultats

Soit (X,d_X) un espace vectoriel topologique métrisable et soit $(x_n)_n$, $n\in\mathbb{N}$, une suite dans X. On suppose dans l'ensemble de ce chapitre que la topologie de X est définie par une famille dénombrable de semi-normes, que nous noterons $(\|\cdot\|_n)_{n\geq 0}$, et donc que la distance d_X est invariante par translation. Soient également $A\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un espace de Fréchet, et $(e_i)_i\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ la suite dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definie par $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots)$, où 1 est en $i^{\text{ème}}$ position. On note d_A la distance sur A qui fait de ce dernier un espace de Fréchet ; par conséquent d_A est en particulier invariante par translation. On suppose que A vérifie les conditions suivantes :

1. A contient les polynômes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire les éléments qui s'écrivent comme combinaison linéaire finie des e_i à coefficients dans $\mathbb{K}$.
2. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, qu'on note G, est dense dans A.
3. Les projections coordonnées
$$p_i : A\to\mathbb{K},\ (a_n)_n\longmapsto a_i$$
sont continues quelque soit $i\in\mathbb{N}$.

Nous aurons besoin des notions de valuation et de degré d'un polynôme de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

Définition I.2.1. La *valuation* d'un polynôme $P\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est l'indice de son premier coefficient non-nul, et son *degré* est l'indice de son dernier coefficient non-nul ; on les note respectivement $v(P)$ et $d(P)$.

On définit comme suit la notion d'universalité non-restreinte dans X, relativement à la suite $(x_n)_n$:

Définition I.2.2. On dit que la suite $a=(a_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *non-restrictivement universelle* (par rapport à $(x_n)_n$) si la famille $\left(\sum_{n=0}^{N}a_nx_n\right)_N$ est dense dans X. On désigne par U l'ensemble des suites non-restrictivement universelles.

Remarque I.2.3. Remarquons d'emblée que si U est non-vide, alors X est nécessairement séparable. Si $a\in U$, on peut observer qu'il existe même une suite dense dans X, constituée de vecteurs de la forme $\sum_{n=0}^{N}a_nx_n$. Des vecteurs pouvant s'écrire d'une telle façon sont appelés polynômes dans X, relativement à $(x_n)_n$.

Cette remarque nous conduit à noter dorénavant avec la même lettre un polynôme $(a_n)_n$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et le polynôme $\sum_n a_nx_n$ dans X, quand aucune confusion n'est à craindre. Si $a=(a_n)_n$ est plus généralement un élément de A, on notera $S_N(a)$ la « somme partielle » d'ordre N, $\sum_{n=0}^{N}a_ne_n$ dans A, que l'on distinguera de $S_N(a,X)=\sum_{n=0}^{N}a_nx_n$, la « somme partielle » de a dans X, par rapport à $(x_n)_n$.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la notion plus spécifique d'universalité restreinte :

Définition I.2.4. Un élément $a = (a_n)_n \in A$ est *restrictivement universel* (relativement à $(x_n)_n$) si, pour tout $x \in X$, il existe une suite croissante d'entiers $(\lambda_N)_{N\in\mathbb{N}}$ telle que

1. $\sum_{n=0}^{\lambda_N} a_n x_n$ converge vers x, quand N tend vers l'infini,
2. $\sum_{n=0}^{\lambda_N} a_n e_n$ converge vers a, quand N tend vers l'infini.

On note U_A l'ensemble des suites restrictivement universelles.

Bien sûr, toute suite restrictivement universelle est non-restrictivement universelle, et on remarque que si la suite $(e_n)_n$ est une base de Schauder de A, alors $U \cap A = U_A$, si bien que la notion d'universalité restreinte prend tout son sens quand $(e_n)_n$ n'est pas une base de Schauder de A.

Il découle de la définition d'universalité (restreinte) que, si $a \in U_A$ et si $b \in G$, alors $a + b \in U_A$; en particulier, si $a = (a_n)_n \in U_A$ et si $p \in \mathbb{N}$, alors $(0,\ldots,0,a_p,a_{p+1},\ldots) \in U_A$.

Notre travail repose principalement sur un résultat crucial qui caractérise l'existence d'une série universelle non-restreinte. Son énoncé est contenu dans celui du théorème 1 de [2] :

Théorème I.2.5. *Sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *U_A est non-vide.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in X$, et pour tout entier $p \geq 0$, il existe un polynôme $(a_n)_n$ de valuation p tel que*
$$d_X\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n, x\right) < \varepsilon \text{ et } d_A\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n, 0\right) < \varepsilon.$$
3. *$U_A \cup \{0\}$ est un G_δ-dense de A et contient un sous-espace dense de A.*

Ce théorème est également partiellement présent dans [16, théorème 1.2] ; l'assertion concernant l'existence d'un sous-espace dense de A dont les éléments non nuls sont universels a été rajoutée dans [2].

En réalité, seule l'implication (1)⇒(2) nous sera utile ; sa démonstration, totalement élémentaire, mérite d'être écrite pour mettre en évidence que ce qui va suivre ne fait réellement pas appel à des résultats sophistiqués, et découle assez naturellement de la nature d'une série universelle.

Démonstration de (1)⇒(2). Soit $a = (a_n)_n \in U_A$ et soient $\varepsilon > 0$, $x \in X$ et $p \in \mathbb{N}$. Comme il a été dit plus haut, il existe un entier $p' \geq p$ tel que $b = (b_n)_n := (0,\ldots,0,a_{p'},a_{p'+1},\ldots) \in U_A$ vérifie $d_A(0,b) < \varepsilon/2$. Par définition, il existe un entier $N \geq p'$ tel que
$$d_X\left(\sum_{n=p}^{N} b_n x_n, x\right) = d_X\left(\sum_{n=p'}^{N} b_n x_n, x\right) < \varepsilon$$
et
$$d_A\left(\sum_{n=p}^{N} b_n e_n, b\right) = d_A\left(\sum_{n=p'}^{N} b_n e_n, b\right) < \varepsilon/2;$$
l'inégalité triangulaire permet de conclure que $d_A\left(\sum_{n=p}^{N} b_n e_n, 0\right) < \varepsilon$. □

Le propos de ce chapitre est de compléter, dans la mesure du possible, la troisième assertion du théorème I.2.5 en montrant que, quand U_A est non-vide, cet ensemble contient systématiquement un sous-espace fermé de dimension infinie privé de 0. Dans la partie suivante, nous allons donner une démonstration de ce résultat dans les espaces de Banach ; cette preuve sera basée sur la possibilité de construire une suite basique de A, bien adaptée à notre problème. Dans le cas des espaces de Fréchet, ne pouvant s'appuyer sur une telle construction, nous obtiendrons seulement que l'ensemble des séries universelles non-restreinte de A, $U \cap A$ (et non l'ensemble des séries restrictivement universelles U_A) contient nécessairement un sous-espace fermé de dimension infinie (excepté 0), dès lors que U_A (et non $U \cap A$) est non-vide.

Néanmoins, dans la plupart des exemples concrets, U_A est égal à $U \cap A$, si bien qu'il nous semble légitime de dire que le problème de l'existence d'un sous-espace fermé constitué de séries universelles est résolu dans un cadre général acceptable.

I.3 Universalité dans les espaces de Banach

Dans cette partie, on se place dans le cas où A est un espace de Banach, de norme $\|.\|_A$. Comme annoncé plus haut, nous allons construire une suite basique normalisée dans A adaptée à notre problème ; plus précisément, nous allons voir comment les éléments de cette suite peuvent être choisis comme des polynômes de valuation arbitraire. C'est précisément le propos du lemme suivant :

Lemme I.3.1. *Soit $\varepsilon > 0$ un réel, et soit $(u_0, \dots, u_n) \subseteq A$ une suite finie dans A. Pour tout entier v, il existe un polynôme $u_{n+1} \in A$ tel que $v(u_{n+1}) \geq v$, $\|u_{n+1}\|_A = 1$, et*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k \right\|_A \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k + \lambda u_{n+1} \right\|_A \tag{I.3.1}$$

pour tous scalaires λ et λ_k, $0 \leq k \leq n$.

Remarque I.3.2. Si $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs tels que

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1+\varepsilon_n)$$

converge vers K, en posant par exemple $u_0 = \dfrac{e_0}{\|e_0\|_A}$, alors on peut construire par récurrence une suite basique $(u_n)_{n\geq 0}$ de constante de basicité plus petite que K, telle que chaque terme est donné par le lemme précédent, en prenant $\varepsilon = \varepsilon_n$ à l'étape n.
En effet, pour tous entiers p et q, $q \geq p$, le lemme I.3.1 nous permet de construire des polynômes u_k, $0 \leq k \leq q$, tels que, pour toute suite de scalaires $(\lambda_k)_{0\leq k\leq q}$, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} \lambda_k u_k \right\|_A \leq \prod_{k=p}^{q-1} (1+\varepsilon_k) \left\| \sum_{k=0}^{q} \lambda_k u_k \right\|_A \leq K \left\| \sum_{k=0}^{q} \lambda_k u_k \right\|_A .$$

Démonstration du lemme I.3.1. Soient $\varepsilon > 0$ un réel et $(u_0, \dots, u_n) \subseteq A$ une suite finie de polynômes. Soient également v un entier, $(z_j)_{j=0}^{l_{n+1}}$ un $\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$-réseau de la sphère unité de $\mathrm{vect}(u_0, \dots, u_n)$ et $(\varphi_j)_{j=0}^{l_{n+1}}$ des formes linéaires continues de norme 1 sur A tels que, pour tout $0 \leq j \leq l_{n+1}$,

$$\varphi_j(z_j) = 1.$$

Comme $\mathrm{codim}\left(\left(\cap_{j=0}^{l_{n+1}} \ker(\varphi_j)\right) \cap \left(\cap_{i=0}^{v} \ker(e_i^*)\right)\right) \leq l_{n+1} + v + 2$, il existe un entier m_{n+1} tel que, si on note

$$F_{n+1} = \mathrm{vect}\left(e_0, \dots, e_{m_{n+1}}\right),$$

alors il existe $u_{n+1} \in F_{n+1}$ de norme 1 tel que

$$u_{n+1} \in \left(\cap_{j=0}^{l_{n+1}} \ker(\varphi_j)\right) \cap \left(\cap_{i=0}^{v} \ker(e_i^*)\right).$$

Par construction u_{n+1} est un polynôme de valuation plus grande que v, de norme 1. Il reste à vérifier que u_{n+1} vérifie l'inégalité (I.3.1). Soit donc λ un scalaire arbitraire et soit j_0 un indice tel que

$$\left\| \frac{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k}{\left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k \right\|_A} - z_{j_0} \right\|_A \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned}
1 &= \varphi_{j_0}\left(z_{j_0}+\lambda u_{n+1}\right)\\
&\leq \left\|z_{j_0}+\lambda u_{n+1}\right\|_A\\
&\leq \left\|z_{j_0}-\frac{\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k}{\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A}\right\|_A+\left\|\frac{\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k+\lambda\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A u_{n+1}}{\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A}\right\|_A\\
&\leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}+\left\|\frac{\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k u_k}{\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A}\right\|_A \text{, en notant } \lambda_{n+1}=\lambda\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A .
\end{aligned}$$

D'où

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A \leq \left\|\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k u_k\right\|_A$$

ou encore

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{k=0}^{n+1}\lambda_k u_k\right\|_A .$$

Quitte à diviser λ par $\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k\right\|_A$, on obtient le résultat. □

Ce lemme n'est rien d'autre qu'un raffinement de la construction d'une suite basique dans un espace de Banach donnée par S. Mazur (cf. [12, Théorème 1.a.5, page 4]). Alors que le théorème I.2.5 est l'outil essentiel pour montrer que l'ensemble U contient un sous-espace fermé de dimension infinie de A, le lemme précédent permet de remplacer U par U_A.

Théorème I.3.3. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si $U_A \neq \varnothing$, alors U_A contient un sous-espace fermé de dimension infinie, privé de* 0.

Démonstration. Nous allons construire simultanément une famille $(f_{n,k})_{n\geq 0, 0\leq k\leq n}$ d'éléments de A et une suite basique « convenable » $(u_k)_k$ de A, qui nous permettront de définir le sous-espace fermé attendu. Dans ce but, on considère $(Q_l)_l$ une suite de polynômes dense dans X et φ, $\psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions telles que, pour tout couple $(m,t) \in \mathbb{N}^2$, il existe une famille infinie $(v_k)_k \subseteq \mathbb{N}$ telle que $(\varphi(v_k), \psi(v_k)) = (m,t)$ pour tout k. Soit également $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que le produit $\prod_{n=0}^{\infty}(1+\varepsilon_n)$ converge vers un réel K.

La construction par récurrence des u_n et des $f_{n,k}$ suivra l'ordre suivant : dans un premier temps, on définit u_0 puis $f_{0,0}$ à partir de u_0. Dans un second temps, on construit $f_{1,0}$ à partir de $f_{0,0}$, puis u_1 à partir de $f_{1,0}$, et enfin $f_{1,1}$ à partir de u_1, et ainsi de suite... Cet ordre est important pour que lors de la construction des $f_{n,k}$, on prenne en compte les $f_{l,t}$ précédemment construits. Chaque $f_{n,k}$ consistera en deux parties : la première, $g_{n,k}$, approche le polynôme $Q_{\varphi(n)}$ dans $\left(X, \|.\|_{\psi(n)}\right)$ et la seconde compense la valeur de $g_{n,k}$ dans $\left(X, \|.\|_{\psi(n+1)}\right)$. Parallèlement, ces deux parties assurent la convergence de la suite $(f_{n,k})_n$ dans A vers une limite « suffisamment » proche de u_k.

Pour commencer, on fixe $u_0 = \dfrac{e_0}{\|e_0\|_A}$ et on approche le polynôme $Q_{\varphi(0)}$ dans X par le polynôme $g_{0,0} = u_0 + P$, où P est le polynôme donné par le point (2) du théorème I.2.5, appliqué dans les espaces (A, d_A) et $\left(X, \|.\|_{\psi(0)}\right)$, avec $x = Q_{\varphi(0)} - u_0$, pour $p = 2$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2^4 K}$. Ensuite, nous posons $f_{0,0} = g_{0,0} + Q$, où Q

est une nouvelle fois donné par le (2) du théorème I.2.5, dans (A, d_A) et $\left(X, \|.\|_{\psi(1)}\right)$, avec $x = -g_{0,0}$, pour $p = d(P) + 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2^4 K}$. Alors, par construction, $g_{0,0}$ et $f_{0,0}$ vérifient les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \left\|g_{0,0} - Q_{\varphi(0)}\right\|_{\psi(0)} &< \frac{1}{2^4 K} \\ \|f_{0,0}\|_{\psi(1)} &< \frac{1}{2^4 K} \\ \|f_{0,0} - u_0\|_A &< \frac{1}{2^3 K}. \end{aligned}$$

Il est important de noter que $g_{0,0}$ est une somme partielle de $f_{0,0}$, et que la suite de la construction assurera que cela reste le cas pour $f_{n,k}$. On se concentre maintenant sur l'étape d'induction. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ fixé ; supposons avoir construit des polynômes $f_{j,l}$, pour $l \leq j \leq n-1$. On note $\prec$ l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ suivant lequel les $f_{n,k}$ seront construits. Tout d'abord, on construit $f_{n,k}$ pour $k < n$ comme suit.
On approche le polynôme $Q_{\varphi(n)}$ dans X en posant $g_{n,k} = f_{n-1,k} + P$, où P est donné par le théorème I.2.5, appliqué aux espaces (A, d_A) et $\left(X, \|.\|_{\psi(n)}\right)$, avec $x = Q_{\varphi(n)} - f_{n-1,k}$, $p = \max\left(d\left(f_{j,l}\right), (j,l) \prec (n,k)\right) + 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+4} K}$. On définit ensuite $f_{n,k}$ par $f_{n,k} = g_{n,k} + Q$, où Q est donné par le théorème I.2.5, pour (A, d_A) et $\left(X, \|.\|_{\psi(n+1)}\right)$, avec $x = -g_{n,k}$, pour $p = d(P) + 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+4} K}$.
On construit enfin u_n et $f_{n,n}$. Par récurrence, on déduit u_n de u_{n-1} et $f_{n,n}$ de u_n. On pose $g_{n,n} = u_n + P$, avec u_n donné par le lemme I.3.1 avec $B = (u_1, \ldots, u_{n-1})$, $v = p_n = \max\left(d\left(f_{j,l}\right), (j,l) \prec (n,n)\right) + 1$ et $\varepsilon = \varepsilon_n$, et où P provient du théorème I.2.5 appliqué à (A, d_A) et $\left(X, \|.\|_{\psi(n)}\right)$, avec $x = Q_{\varphi(n)} - u_n$, pour $p = d(u_n) + 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+4} K}$. Il convient de noter que, comme u_n est un polynôme, la définition de $g_{n,n}$ a bien un sens dans X. Enfin, on définit $f_{n,n} = g_{n,n} + Q$, où Q est encore une fois donné par le théorème I.2.5, pour (A, d_A) et $\left(X, \|.\|_{\psi(n+1)}\right)$ avec $x = -g_{n,n}$, $p = d(P) + 1$ et $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+4} K}$. Comme précédemment pour $n = k = 0$, $g_{n,k}$, u_k et $f_{n,k}$ vérifient les relations suivantes, maintenant pour $n \geq k$ quelconques :

$$\left\|g_{n,k} - Q_{\varphi(n)}\right\|_{\psi(n)} < \frac{1}{2^{n+4} K} \tag{I.3.2}$$

$$\|f_{n,k}\|_{\psi(n+1)} < \frac{1}{2^{n+4} K} \tag{I.3.3}$$

$$\|f_{n+1,k} - f_{n,k}\|_A < \frac{1}{2^{n+4} K} \tag{I.3.4}$$

$$\|f_{k,k} - u_k\|_A < \frac{1}{2^{k+3} K}. \tag{I.3.5}$$

$(u_k)_k$ est une suite basique de A de constante de basicité plus petite que K, d'après la remarque I.3.2.
En utilisant l'inégalité (I.3.4), on définit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un élément f_k de A par

$$f_k = \sum_{n=k}^{\infty} (f_{n+1,k} - f_{n,k}) + f_{k,k} = \lim_{n \to \infty} f_{n,k}.$$

Par construction, la famille $(f_k)_k$ est linéairement indépendante ; en effet, comme

$$d(f_{n_1,k_1}) < v(f_{n_2,k_2}) \text{ pour } (n_1,k_1) \prec (n_2,k_2)$$

et comme les projections coordonnées p_i sont continues (cf. introduction), une égalité du type $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k f_k = 0$ pour un entier N ne peut avoir lieu que si $\alpha_k = 0$ pour tout k. Par conséquent, le sous-espace E de A défini par

$$E = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \mid \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \text{ converge} \right\}$$

est de dimension infinie, et la fin de la preuve consistera à vérifier que le sous-espace fermé de dimension infinie $F = \bar{E}$ répond à la question, i.e. que tout élément de F est universel. Avant toute chose, il convient de remarquer qu'en réalité tout élément h de F peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k$ avec $\alpha_k \in \mathbb{K}$, autrement dit que E est fermé, et donc que $F = E$. En effet, par construction et en utilisant les inégalités (I.3.4) et (I.3.5), on a, pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|f_k - u_k\|_A &= \left\| \sum_{n=k}^{\infty} (f_{n+1,k} - f_{n,k}) + f_{k,k} - u_k \right\| \\
&< \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}K} + \frac{1}{2^{k+3}K} \\
&< \frac{1}{2^{k+2}K}.
\end{aligned} \tag{I.3.6}$$

De plus, comme $(u_k)_k$ est une suite basique de A de constante de basicité plus petite que K, u_k^* est bien définie et $\left\|u_k^*\right\|_{A^*} \|u_k\|_A \leq 2K$; en outre, par construction, $\|u_k\|_A = 1$ pour tout k. Par suite, l'inégalité (I.3.6) nous donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k^*\|_{A^*} \|f_k - u_k\|_A < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

Le critère de Bessaga-Pełczyński ([4, Théorème 1]) assure alors que $(f_k)_k$ est une suite basique de A équivalente à $(u_k)_k$, si bien que $E = \bar{E} = F$.
Considérons maintenant $h = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k f_k \in E = F$ (non-nul) et montrons que h est universel ; étant donné Q_l un polynôme appartenant à une famille dense dénombrable $(Q_n)_n$ de polynômes dans X (une telle famille existe parce qu'on a supposé U_A non-vide), il suffit de montrer qu'il existe une suite N_j d'entiers (qui dépend de h et de Q_l) telle que

$$S_{N_j}(h,X) \xrightarrow[j\to\infty]{} Q_l \text{ pour la topologie de } (X, d_X),$$

ce qui revient à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|S_{N_j}(h,X) - Q_l\right\|_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On note k_0 le plus petit entier k tel que $\alpha_k \neq 0$. Quitte à multiplier chaque α_k par $(\alpha_{k_0})^{-1}$, on peut supposer que $\alpha_{k_0} = 1$. Par définition de φ et ψ, il existe une suite strictement croissante $(v_j)_j$ d'entiers telle que $(\varphi(v_j + k_0), \psi(v_j + k_0)) = (l, n)$. Soit alors N_j le degré du polynôme $g_{v_j+k_0,k_0}$. On a

$$\begin{aligned}
\left\|S_{N_j}(h,X) - Q_l\right\|_n &= \left\| S_{N_j}\left(\sum_{k=k_0}^{v_j+k_0} \alpha_k f_k, X \right) - Q_l \right\|_{\psi(v_j+k_0)} \\
&= \left\| \sum_{k=k_0}^{v_j-1+k_0} \alpha_k f_{v_j-1+k_0,k} + g_{v_j+k_0,k_0} - Q_l \right\|_{\psi(v_j+k_0)} \\
&\leq \left\| \sum_{k=k_0}^{v_j-1+k_0} \alpha_k f_{v_j-1+k_0,k} \right\|_{\psi(v_j+k_0)} + \left\|g_{v_j+k_0,k_0} - Q_l\right\|_{\psi(v_j+k_0)} \\
&\leq \left\| \sum_{k=k_0}^{v_j-1+k_0} \alpha_k f_{v_j-1+k_0,k} \right\|_{\psi(v_j+k_0)} + \frac{1}{2^{v_j+k_0+4}K},
\end{aligned} \tag{I.3.7}$$

la dernière inégalité provenant de (I.3.2). Par ailleurs, de l'inégalité (I.3.6) et du fait que $\|u_k\|_A = 1$ pour tout k, on tire

$$|\alpha_k| \leq \frac{2K'}{\|f_k\|_A},$$

avec $\|f_k\|_A \geq 1 - \frac{1}{2^{k+3}K'}$ pour tout k, où K' est la constante de basicité de $(f_k)_k$. La suite $(\alpha_k)_k$ est donc bornée, disons par M ; (I.3.7) donne alors

$$\begin{aligned}
\left\|S_{N_j}(h,X) - Q_l\right\|_n &\leq M \sum_{k=k_0}^{v_j-1+k_0} \left\|f_{v_j-1+k_0,k}\right\|_{\psi(v_j+k_0)} + \frac{1}{2^{v_j+k_0+4}K} \\
&\leq \frac{M(v_j-1)}{2^{v_j+3+k_0}K} + \frac{1}{2^{v_j+k_0+4}K}, \text{ par (I.3.3)} \\
&\xrightarrow[j\longrightarrow\infty]{} 0 \text{ puisque } (v_j)_j \text{ est strictement croissante,}
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'universalité de h.

La preuve du théorème sera complète quand on aura vérifier que $S_{N_j}(h)$ converge vers h dans A. Ce point se déduit aisément de la construction des f_k par une simple utilisation de l'inégalité triangulaire. Effectivement,

$$\begin{aligned}
\left\|h - S_{N_j}(h)\right\|_A &\leq \left\|\sum_{k\geq v_j+k_0+1} \alpha_k f_k\right\|_A \\
&\quad + \left\|\sum_{k=k_0}^{v_j+k_0} \alpha_k \left(\sum_{n\geq v_j+k_0+1} (f_{n+1,k} - f_{n,k})\right)\right\|_A \\
&\quad + \left\|\alpha_{v_j+k_0}\left(f_{v_j+k_0,v_j+k_0} - g_{v_j+k_0,v_j+k_0}\right)\right\|_A \\
&\leq \left\|\sum_{k\geq v_j+k_0+1} \alpha_k f_k\right\|_A \\
&\quad + \sum_{k=k_0}^{v_j+k_0} |\alpha_k| \left(\sum_{n\geq v_j+k_0+1} \frac{1}{2^{n+4}K}\right) \\
&\quad + \left|\alpha_{v_j+k_0}\right| \frac{1}{2^{v_j+k_0+4}K} \\
&\leq \left\|\sum_{k\geq v_j+k_0+1} \alpha_k f_k\right\|_A + \frac{1}{16K} \sup_{k\geq k_0} |\alpha_k| \sum_{k=k_0}^{v_j+k_0} \frac{1}{2^{v_j+k_0}} \\
&\quad + \left|\alpha_{v_j+k_0}\right| \frac{1}{2^{v_j+k_0+4}K} \\
&\xrightarrow[j\longrightarrow\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

car $\sum_{k\geq 0} \alpha_k f_k$ est convergente et la suite $(\alpha_k)_k$ est bornée. □

Remarque I.3.4. On rappelle que la démonstration précédente n'utilise que l'implication (1)⇒(2) du théorème I.2.5, laquelle ne nécessite pas la continuité des projections p_i (cf. ci-dessus). Dans le théorème I.2.5, cette hypothèse est faite pour assurer que U_A est « grand » ; c'est également le cas dans le théorème I.3.3 : la continuité des p_i est cruciale pour montrer que le sous-espace E que nous construisons est bien de dimension infinie.

Le calcul qui nous permet de montrer qu'un élément de E est universel est la raison principale pour supposer que la topologie de X est induite par une famille de semi-normes. Si ce n'était pas le cas, notre méthode ne fonctionnerait pas de manière systématique, pour la simple raison qu'on ne pourrait pas sortir les coefficients α_k en dehors de la distance, et utiliser ainsi le fait qu'ils sont uniformément bornés (cf. la fin de la preuve de l'universalité de h). Néanmoins, l'exemple des séries universelles trigonométriques de Men'shov va mettre en évidence que, pour certaine topologie sur X définie par une distance invariante par translation, il sera malgré tout possible, pour un argument propre à ce contexte, d'obtenir un résultat similaire au théorème I.3.3 dans ce cadre. Nous renvoyons au paragraphe I.6.1 pour plus de détails.

On fait également la remarque suivante, qui lève le doute selon lequel le résultat précédent pourrait être contenu dans l'étude générale de l'universalité en théorie des opérateurs, et notamment dans l'article de A. Montes-Rodriguez [14].

Remarque I.3.5. Plus généralement, soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs d'un espace de Banach X dans un espace de Banach Y. Un vecteur $x \in X$ est dit *universel* pour (T_n) si l'ensemble $\{T_n x;\, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans Y. Le théorème 2.2 (suivi des remarques (1) et (2)) de [14] donne une condition suffisante pour que l'ensemble de tels vecteurs universels contienne un sous-espace fermé de dimension infinie (excepté 0) :

Théorème I.3.6. *Soit $(T_n)_n : A \to A$ une suite d'opérateurs bornés d'un espace de Banach séparable A dans lui-même. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *Il existe un sous-espace $\mathscr{B}$, dense dans A, tel que $\|T_n(x)\| \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $x \in \mathscr{B}$;*
2. *Il existe un sous-espace $\mathscr{C}$, dense dans A, et une suite d'applications $(S_n)_n : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ (qui peuvent ne pas être continues), tels que $T_n S_n$ est l'identité sur $\mathscr{C}$, et tels que $\|S_n(y)\| \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $y \in \mathscr{C}$.*
3. *Il existe un sous-espace fermé de dimension infinie $\mathscr{B}_0 \subset A$, tel que $\|T_n(w)\| \to 0$, pour tout $w \in \mathscr{B}_0$.*

Alors il existe un sous-espace fermé de dimension infinie, dans A, dont tous les éléments non-nuls sont des vecteurs universels de la suite $(T_n)_n$.

Les hypothèses du théorème précédent, qui portent sur la suite d'opérateurs $(T_n)_n$, contiennent celles du Critère d'Universalité (cf. [3, Exercice 1.1, page 27] ou [8, Théorème 2, Paragraphe 1c]). Dans notre contexte, l'opérateur T_N est l'application qui à une suite $(a_n) \in A$ associe la somme partielle $S_N(a) = \sum_{n=0}^{N} a_n x_n$ dans X. Or il n'y a aucune raison pour que cette suite $(T_N)_N$ vérifie ce Critère d'Universalité. Précisément, aucun résultat d'existence de séries universelles n'a été obtenu en appliquant le Critère d'Universalité. Le théorème I.3.3 est donc intéressant indépendamment de [14].

Le théorème I.3.3 se généralise partiellement au cadre des espaces de Fréchet, c'est l'objet du paragraphe suivant.

I.4 Universalité dans les espaces de Fréchet

On conserve les notations de l'introduction. En particulier, $A \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est maintenant un espace de Fréchet muni d'une distance d_A invariante par translation ; on suppose en outre qu'il existe une norme $\widehat{\|.\|}$ sur (A, d_A) continue par rapport à d_A, c'est-à-dire telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\widehat{\|x\|} \leq C d_A(x, 0), \forall x \in A. \tag{I.4.1}$$

Il est connu que l'existence d'une norme continue sur A est équivalente au fait que la topologie de A est induite par une famille de normes. C'est une hypothèse qui est communément faite dans des contextes similaires. Le théorème 3.1 de [5], qui donne une condition suffisante pour que certains ensembles de vecteurs universels contiennent un sous-espace fermé de dimension infinie (excepté 0), en est un exemple. Les auteurs de cet article exhibent un contrexemple à leur théorème quand cette hypothèse est omise (Exemple 3.2, [5]). Dans notre contexte des séries universelles, nous ferons de même à travers l'exemple de l'universalité au sens de Fekete (cf. paragraphe I.6.4).

Par ailleurs, notons que les espaces de Fréchet de suites complexes qui peuvent être identifiés à des espaces de fonctions holomorphes d'une variable sont des espaces qui, typiquement, vérifient (I.4.1).

Dans le cas présent, nous n'obiendrons pas un résultat aussi bon que celui obtenu dans le théorème I.3.3 pour les espaces de Banach : nous allons voir que, si U_A est non-vide, alors (A, d_A) contient un sous-espace fermé de dimension infinie dont les vecteurs non-nuls sont universels (relativement à X), autrement dit que $U \cup \{0\}$ contient un sous-espace fermé de dimension infinie ; en revanche, nous ne parviendrons pas à montrer que c'est aussi le cas de $U_A \cup \{0\}$, excepté bien sûr si la suite $(e_n)_n$ est une base de Schauder de

A, i.e. si $U_A = U$, ce qui couvre raisonnablement bien, malgré tout, la plupart des cadres usuels (comme les espaces de fonctions holomorphes d'une variable).

Notre théorème s'énonce de la façon suivante :

Théorème I.4.1. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si U_A est non-vide alors U contient un sous-espace fermé de dimension infinie (sauf 0).*

Démonstration. L'hypothèse (I.4.1) va nous permettre de travailler avec l'espace de Fréchet (A, d_A) presque comme si l'on travaillait avec un espace de Banach, d'un point de vue des suites basiques. Plus précisément, nous considérons l'espace de Banach $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$ obtenu par complétion de A pour la norme $\widehat{\|.\|}$, qui vérifie (I.4.1). Cette idée est inspirée de la seconde partie de la preuve du théorème 2 de [1].

Soit $(Q_l)_{l\geq 1}$ une famille dense dénombrable de polynômes dans X, et soient φ et ψ deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que, pour tout couple d'entiers (l,t), il existe une infinité d'entiers j tels que $(\varphi(j), \psi(j)) = (l,t)$. En utilisant le théorème I.2.5, on construit simultanément, comme dans la preuve de théorème I.3.3, et avec les même notations, trois familles $\left((f_{n,k})_{n\geq k}\right)_{k\geq 0}$, $\left((g_{n,k})_{n\geq k}\right)_{k\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ de polynômes de A (ou de X, sans confusion possible), de valuation et de degré convenables, telles que

$$\left\|g_{n,k} - Q_{\varphi(n)}\right\|_{\psi(n)} < \frac{1}{2^{n+4}K} \qquad \text{(I.4.2)}$$

$$\|f_{n,k}\|_{\psi(n+1)} < \frac{1}{2^{n+4}K} \qquad \text{(I.4.3)}$$

$$\widehat{\|f_{n+1,k} - f_{n,k}\|} \leq Cd_A\left(f_{n+1,k}, f_{n,k}\right) < \frac{1}{2^{n+4}K} \qquad \text{(I.4.4)}$$

$$\widehat{\|f_{k,k} - u_k\|} \leq Cd_A\left(f_{k,k}, u_k\right) < \frac{1}{2^{n+3}K}. \qquad \text{(I.4.5)}$$

Les familles $\left((f_{n,k})_{n\geq k}\right)_{k\geq 0}$ et $\left((g_{n,k})_{n\geq k}\right)_{k\geq 0}$ sont construites dans (A, d_A), tandis que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est construite dans $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$ comme une suite basique de ce même espace (grâce au lemme I.3.1). Il est important de noter que le théorème I.2.5 est uniquement appliqué à (A, d_A) et non à $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$, et ce même pour la construction des $f_{k,k}$ et pour obtenir l'inégalité (I.4.5). En effet, les u_n construits dans $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$ sont des polynômes et appartiennent donc à (A, d_A), si bien que nous pouvons appliquer le théorème I.2.5 dans (A, d_A) pour construire les $f_{k,k}$, à partir des u_k. De plus, il est assez clair que ce procédé, qui consiste à passer de (A, d_A) à $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$ (cf. les inégalités (I.4.4) et (I.4.5)), est précisément rendu possible par l'hypothèse (I.4.1).

Nous définissons ensuite les f_k, dans (A, d_A), par

$$f_k = \sum_{n\geq k} (f_{n+1,k} - f_{n,k}) + f_{k,k},$$

et nous considérons le sous-espace fermé de dimension infinie $F \subset (A, d_A)$ défini par

$$F = \bar{E}^{d_A},$$

où $E = \left\{\sum_{k\geq 0} \alpha_k f_k \text{ convergente dans } (A, d_A), \alpha_k \in \mathbb{K}\right\}$ et où $\bar{E}^{d_A}$ est l'adhérence de E dans (A, d_A). Notons que, comme la convergence dans (A, d_A) implique la convergence dans $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$ d'après (I.4.1), nous avons $F \subset \left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$. Pour finir la démonstration, il suffit de vérifier que tout élément de F, vu comme un élément de $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$, est universel (nous travaillons maintenant dans X). Pour cela, on considère le sous-espace $\widetilde{E} = \left\{\sum_{k\geq 0} \alpha_k f_k \text{ qui converge dans } \left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right), \alpha_k \in \mathbb{k}\right\}$ de $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$ et on remarque que $F \subset \widetilde{E}$. Maintenant, on déduit l'universalité de tout élément de $\widetilde{E}$ directement de l'hypothèse (I.4.1), des inégalités (I.4.2), (I.4.3), (I.4.4) et (I.4.5), en utilisant le fait que la suite $(u_n)_n$ est une suite basique normalisée dans l'espace de Banach $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$, que $(f_k)_k$ est par conséquent également une suite basique dans $\left(\widehat{A}, \widehat{\|.\|}\right)$, et en imitant, pour conclure, la démonstration du théorème I.3.3. □

On rappelle le théorème 30 de [2] :

Théorème I.4.2 ([2], théorème 30**).** *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$U \cap A$ est non-vide.*
2. *$U \cap A$ est un G_δ-dense de A.*
3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in X$, il existe $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$, et $a_0, a_1, \ldots, a_m$ dans $\mathbb{K}$ tels que*

$$d_X\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_j, x\right) < \varepsilon \text{ et } d_A\left(\sum_{j=0}^{m} a_j e_j, 0\right) < \varepsilon.$$

Au regard de ce dernier, notre théorème I.4.1 peut sembler décevant. En effet, si on le compare au résultat obtenu dans les espaces de Banach (théorème I.3.3), on peut se demander si l'hypothèse $U_A \neq \varnothing$ dans le théorème I.4.1 ne peut pas être affaiblie, étant donné que nous obtenons seulement que $U \cap A$ contient un sous-espace fermé de dimension infinie (excepté 0). Cela étant dit, le théorème 30 précédent semblerait donc être celui auquel il faudrait recourir dans le cas des espaces de Fréchet (bien noter la différence entre l'énoncé de celui-ci et l'énoncé du théorème I.2.5). Une question naturelle est donc la suivante : peut-on remplacer l'hypothèse $U_A \neq \varnothing$ par $U \cap A \neq \varnothing$ dans le théorème I.4.1 ? Or, si l'on se penche dessus, pour des raisons techniques qui apparaissent rapidement (comme l'existence de ces deux indices n et m qu'on ne contrôle pas), il s'avère qu'il n'est pas clair qu'on puisse effectivement appliquer le théorème 30 de [2] pour répondre positivement à cette question. Par ailleurs, ce théorème ne nous dit même pas si $U \cap A$ contient un sous-espace (privé de 0) dense dans A, sous l'hypothèse $U \cap A \neq \varnothing$. En fait, il n'est pas même clair que $U \cap A$ contient, hormi 0, un sous-espace de dimension 2.

I.5 Séries universelles à paramètres

Dans la théorie des séries universelles, on peut avoir affaire, d'une part, à ce qu'on a appelé dans l'introduction le « centre du développement » d'une série. Concrêtement, dans le contexte des séries de Taylor ou des séries entières, il est courant d'avoir à développer une série autour de points différents. Pour prendre en considération ces changements du centre du développement, nous devons introduire dans ce cadre une famille d'applications e_n, $n \in \mathbb{N}$, d'un ensemble $L \subset \mathbb{K}$ à valeurs dans le bon espace de fonctions, définies par $e_n(\xi) = (z - \xi)^n$. Jusqu'à maintenant, le « centre » était fixé : nous considérions deux familles fixes dans A et X, respectivement $(e_n)_n$ et $(x_n)_n$, et nous nous bornions à des développements en séries relativement à ces deux suites. D'autre part, travailler dans la plupart des cadres usuels de la théorie des séries universelles nécessite de considérer non pas un seul espace X, mais une union dénombrable de tels espaces, comme c'est par exemple le cas quand on travaille avec des fonctions entières que l'on cherche à approcher par des séries universelles, sur différents sous-ensembles de $\mathbb{C}$. Ces considérations n'ont pas non plus été prises en compte dans les deux paragraphes précédents.

Dans [2], les auteurs étendent leur théorie abstraite des séries universelles à ces séries universelles, dites « à paramètres ». Ils montrent qu'en réalité, tous les résultats obtenus sans tenir compte du centre du développement, ou en travaillant avec un seul espace X, s'adaptent sans grand mal si l'on décide justement de prendre en considération ces paramètres supplémentaires. Essentiellement, cela consiste en une généralisation du théorème I.2.5.

Dans cette partie, nous allons voir que l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie dont les vecteurs non-nuls sont des séries universelles est vraie également dans les cadres plus généraux précédents, et que cela reste encore valable, même si l'on prend en compte à la fois les centres du développement et le fait de travailler avec une union dénombrable d'espaces de Fréchet. Comme on peut le deviner, la généralisation à ces contextes du théorème I.2.5 demeure au coeur des preuves des résultats à venir ; des preuves qui sont fondamentalement identiques à celles des théorèmes I.3.3 et I.4.1. Néanmoins, l'ajout de paramètres supplémentaires rendront celles-ci plus lourdes et plus techniques, c'est pourquoi nous nous contenterons de dire, sans détails, ce qu'il faut ajouter aux démonstrations données dans les deux parties précédentes pour qu'elles s'adaptent à ce cadre plus général.

I.5.1 Le « centre du développement »

On conserve les notations G et X de l'introduction. En revanche, nous n'allons plus travailler avec l'espace de Fréchet A de suites réelles ou complexes, comme ça a été le cas jusqu'à présent, mais directement avec un espace de Fréchet général sur $\mathbb{K}$, où on pourra donner un sens à la notion de centre du développement. On note (E, d_E) cet espace muni de sa distance invariante par translation qui le rend complet. On suppose que sa topologie est donnée par une famille de normes. Soient également L un espace compact et ξ_0 un élément de L fixé ; on suppose qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des applications continues

$$e_n : L \longrightarrow E,\ x_n : L \longrightarrow X \text{ et } H_n : L \times E \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}},$$

où H_n est linéaire par rapport à la deuxième coordonnée, qui vérifient

$$H_n(\xi_0, e_m(\xi_0)) = \delta_{n,m}, \text{ pour tout } n, m \in \mathbb{N}. \tag{I.5.1}$$

Les applications e_n et x_n généralisent respectivement les suites e_n dans A et x_n dans X, introduites dans la première partie.

Définition I.5.1. Pour tout $a = (a_n)_n \in G$, on note $g_a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(\xi_0)$ le « polynôme » dans E associé à a. La valuation $v(g_a)$ et le degré $d(g_a)$ de g_a sont définis par $v(g_a) = v(a)$ et $d(g_a) = d(a)$, avec les notations de la première partie.

On fait les hypothèses suivantes :

1. L'ensemble $\{g_a, a \in G\}$ est dense dans E.
2. Pour tout $a \in G$ et tout $\xi \in L$, les ensembles $\{n, H_n(\xi, g_a) \neq 0\}$ sont finis et uniformément bornés par rapport à ξ.
3. Pour tout $a \in G$ et tout $\xi \in L$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi, g_a) e_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(\xi_0) \tag{I.5.2}$$

et la même relation est vraie dans X :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi, g_a) x_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n(\xi_0). \tag{I.5.3}$$

Par exemple, E peut être vu comme l'espace de Fréchet $H(\mathbb{D})$ des fonctions holomorphes sur le disque unité de $\mathbb{C}$, muni de la distance usuelle de la convergence uniforme sur tout compact, X comme l'espace $A(K)$ des fonctions holomorphes dans K et continues sur $\overline{K}$, où K est un compact de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, de complémentaire connexe, L comme un compact de $\mathbb{D}$, et les applications $(e_n)_n$ et $(x_n)_n$ sont alors données par :

$$e_n(\xi) = x_n(\xi) = (z \mapsto (z - \xi)^n) \text{ et } H_n(\xi, f) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

pour $\xi \in \mathbb{D}$ et $f \in H(\mathbb{D})$. Il est immédiat de vérifier que toutes les hypothèses précédentes sont vérifiées dans ce cadre.

Il convient de noter que si $E = A$, que si les applications e_n (resp. x_n) sont constantes égales à $e_n(\xi_0) = e_n \in A$ (resp. à $x_n \in X$), et que si $H_n(\xi, a) = a_n$, pour tout $\xi \in L$ et $a = (a_n)_n \in A$, alors nous sommes dans un cadre couvert par les deux paragraphes précédents.

Définition I.5.2. On dit qu'un élément $f \in E$ est *non-restrictivement universel* (relativement à $(H_n)_n$ et à $(x_n)_n$) si, pour tout $x \in X$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n$ telle que

$$\sup_{\xi \in L} d_X\left(\sum_{n=0}^{\lambda_N} H_n(\xi, f)\, x_n(\xi), x\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

On note $U_{E,L}$ l'ensemble des éléments *non-restrictivement universels.* Par extension, nous appellerons ces éléments des *séries universelles non-restreintes* (à paramètres).

La notion de série universelle restreinte introduite dans la première partie se généralise également de la façon suivante :

Définition I.5.3. On dit qu'un élément $f \in E$ est *restrictivement universel* (relativement à $(H_n)_n$ et à $(x_n)_n$) si, pour tout $x \in X$, il existe une suite $(\lambda_n)_n$ d'entiers telle que

$$\sup_{\xi \in L} d_E\left(\sum_{n=0}^{\lambda_N} H_n(\xi, f)\, e_n(\xi), f\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \tag{I.5.4}$$

$$\sup_{\xi \in L} d_X\left(\sum_{n=0}^{\lambda_N} H_n(\xi, f)\, x_n(\xi), x\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0. \tag{I.5.5}$$

On note $U_{E,L}^R$ l'ensemble des éléments *restrictivement universels.* Par extension, nous appellerons ces éléments des *séries universelles restreintes* (à paramètres).

Le théorème I.2.5 demeure valable dans ce contexte (cf. [2, Théorème 2, page 8]) :

Théorème I.5.4. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $U_{E,L}^R$ *est non-vide.*
2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *pour tout* $x \in X$, *et pour tout entier* $p \geq 0$, *il existe un polynôme* $(a_n)_n$, *de valuation* p, *tel que*
$$\sup_{\xi \in L} d_X\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} H_n(\xi, g_a)\, x_n(\xi), x\right) < \varepsilon \text{ et } \sup_{\xi \in L} d_E\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} H_n(\xi, g_a)\, e_n(\xi), 0\right) < \varepsilon.$$
3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *pour tout* $x \in X$, *et pour tout entier* $p \geq 0$, *il existe un polynôme* $(a_n)_n$, *de valuation* p, *tel que*
$$d_X\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n(\xi_0), x\right) < \varepsilon \text{ et } d_E\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n(\xi_0), 0\right) < \varepsilon.$$
4. $U_{E,L}^R \cup \{0\}$ *contient un sous-espace dense de* E.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser le théorème I.4.1 au cadre des séries universelles à paramètres, en prenant en compte le centre du développement :

Théorème I.5.5. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si* $U_{E,L}^R$ *est non-vide, alors* $U_{E,L}$ *contient, hormi* 0, *un sous-espace fermé de* E *de dimension infinie.*

Idée de la démonstration. Nous conservons les notations $(Q_l)_{l\in\mathbb{N}}$, φ et ψ introduites dans la démonstration du théorème I.4.1. En procédant exactement comme dans cette dernière, en considérant $(e_n(\xi_0))_n$ à la place de $(e_n)_n$ (resp. $(x_n(\xi_0))_n$ à la place de $(x_n)_n$), et grâce aux hypothèses (I.5.2) et (I.5.3), on construit trois familles $(g_{n,k})_{n\geq k\geq 0}$, $(f_{n,k})_{n\geq k\geq 0}$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ de polynômes dans E, (ou dans X, sans qu'aucune confusion ne soit à craindre), de valuation et de degré convenables (cf. la démonstration du théorème I.4.1), telles que

$$\sup_{\xi\in L}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}H_j(\xi,g_{n,k})x_j(\xi)-Q_{\varphi(n)}\right\|_{\psi(n)} < \frac{1}{2^{N+4}K} \quad (\text{I.5.6})$$

$$\sup_{\xi\in L}\left\|\sum_{j=0}^{\infty}H_j(\xi,f_{n,k})x_j(\xi)\right\|_{\psi(n)} < \frac{1}{2^{n+4}K} \quad (\text{I.5.7})$$

$$\|\widehat{f_{n+1,k}-f_{n,k}}\|\leq d_E(f_{n+1,k},f_{n,k}) < \frac{1}{2^{n+4}K} \quad (\text{I.5.8})$$

$$\|\widehat{f_{k,k}-u_k}\| < \frac{1}{2^{n+3}K}, \quad (\text{I.5.9})$$

$(u_n)_{n\geq 0}$ étant une suite basique de $\left(\widehat{E},\widehat{\|.\|}\right)$, la complétion de E pour l'une des normes $\|.\|$ définissant la topologie de E (on rappelle qu'on a supposé cette topologie définie par une famille de normes). Ensuite, en utilisant l'inégalité (I.5.8), on construit une famille $(f_k)_{k\geq 0}$ dans E en posant

$$f_k=\sum_{n\geq k}(f_{n+1,k}-f_{n,k})+f_{k,k}$$

pour tout $k\in\mathbb{N}$, et on définit le sous-espace fermé F de E

$$F=\overline{\left\{\sum_{k\geq 0}\alpha_k f_k \text{ qui converge dans } (E,d_E),\ \alpha_k\in\mathbb{k}\right\}}^{d_E}.$$

F est de dimension infinie, d'après l'hypothèse (I.5.1) et par construction des f_k. La vérification de l'universalité de tout élément de F est fondamentalement identique à celle décrite dans le théorème I.4.1 et l'adaptation de celle-ci est aisée, dès lors qu'on a observé que la présence du « sup » n'est pas un obstacle aux calculs. Nous n'entrons pas davantage dans les détails. □

I.5.2 Universalité dans une famille dénombrable d'espaces de Fréchet

Nous conservons les notations G, E, L, e_n, H_n et ξ_0 de la partie précédente. Dans les démonstrations des théorèmes I.3.3, I.4.1, ou I.5.5, la construction de la famille $(f_k)_{k\geq 0}$, qui en est l'essentiel, est faite de telle sorte que certains paramètres soient pris en compte. Plus précisément, il s'agit d'approcher simultanément par rapport à une famille dénombrable de semi-normes, une famille dénombrable de polynômes par une famille dénombrable adéquate d'autres polynômes. La stratégie consiste à construire une suite de polynômes à indices multiples, chacun de ces indices devant correspondre à l'un des paramètres pris en compte, et ce par l'intermédiaire des fonctions φ et ψ. Plus généralement, cette méthode permet la prise en compte d'une liste (dénombrable) de paramètres supplémentaires, quitte à rendre la formalisation plus lourde.

Ainsi, nous pouvons étendre le théorème I.5.5 pour une famille dénombrable d'espaces de Fréchet $((X_n,d_n))_{n\geq 0}$ (en réalité, il est suffisant de supposer que la distance d_n sur X_n définit une topologie sur X_n, également induite par une famille de semi-normes), et ne plus avoir à ne considérer qu'un seul espace X ; il est également possible de travailler avec un espace L (cf. Paragraphe I.5.1) plus nécessairement compact, mais réunion d'une suite exhaustive $(L_m)_m$ de sous-ensembles compacts tels que $\xi_0\in L_0$.

Soit alors $(x_{n,k})_{k\geq 0}$ une suite d'applications continues de L dans X_n, pour $n\in\mathbb{N}$. Il convient de modifier les hypothèses (1)-(3) faites dans le paragraphe I.5.1 de la façon suivante :

1. L'ensemble $\{g_a,\, a\in G\}$ est dense dans E.

2. Pour tout $a \in G$ et pour tout $\xi \in L$, les ensembles $\{n, H_n(\xi, g_a) \neq 0\}$ sont finis et uniformément bornés par rapport à $\xi \in L_m$, pour chaque $m \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $a \in G$ et pour tout $\xi \in L$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi, g_a) e_n(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(\xi_0); \qquad \text{(I.5.10)}$$

et on a le même type de relation dans X_n, pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} H_k(\xi, g_a) x_{n,k}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k(\xi_0). \qquad \text{(I.5.11)}$$

Dans ce contexte, nous redéfinissons la notion de série universelle non-restreinte :

Définition I.5.6. On dit qu'un élément $f \in E$ est *non-restrictivement universel* (relativement à $(H_n)_n$ et à $(x_{n,k})_{n,k}$) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X_n$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n$ telle que, pour tout $m \geq 0$,

$$\sup_{\xi \in L_m} d_{X_n}\left(\sum_{k=0}^{\lambda_N} H_k(\xi, f) x_{n,k}(\xi), x\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0.$$

Par abus de notation, on note $U_{E,L}$ l'ensemble des éléments non-restrictivement universels. Par extension, un tel élément sera appelé une *série universelle non-restreinte* (à paramètres).

...ainsi que celle d'universalité restreinte :

Définition I.5.7. On dit qu'un élément $f \in E$ est *restrictivement universel* (relativement à $(H_n)_n$ et à $(x_{n,k})_{n,k}$) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X_n$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n$ telle que, pour tout $m \geq 0$

$$\sup_{\xi \in L_m} d_E\left(\sum_{k=0}^{\lambda_N} H_k(\xi, f) e_k(\xi), f\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0 \qquad \text{(I.5.12)}$$

$$\sup_{\xi \in L_m} d_{X_n}\left(\sum_{n=0}^{\lambda_N} H_k(\xi, f) x_{n,k}(\xi), x\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0. \qquad \text{(I.5.13)}$$

Par abus de notation, on note $U_{E,L}^R$ l'ensemble des éléments restrictivement universels. Par extension, un tel élément sera appelé une *série universelle restreinte* (à paramètres).

Comme le théorème I.5.4 se généralise à se cadre ([2], théorème 3), il suffit de considérer quatre fonctions φ, ψ, ν, κ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telles que, pour tout $(l, m, t, i) \in \mathbb{N}^4$, il existe une suite strictement croissante $(\nu_k)_k$ telle que $(\varphi(\nu_k), \psi(\nu_k), \nu(\nu_k), \kappa(\nu_k)) = (l, m, t, i)$ pour tout k. On suit ainsi la démonstration habituelle, comme pour le théorème I.5.5 : la première coordonnée d'un quadruplet $(l, m, t, i) \in \mathbb{N}^4$ correspond à l'indexation de la suite d'espaces de Fréchet $(X_n, d_n)_n$, la deuxième à l'indexation de la suite de polynômes $(Q_{n,l})_l$, dense dans le (X_n, d_n) correspondant, la troisième à l'indexation de la famille de semi-normes $\left(\|.\|_{n,k}\right)_k$ sur ce même (X_n, d_n), et la quatrième à l'indexation de la suite exhaustive $(L_m)_m$. Sans entrer dans les détails, on obtient dans ce contexte général le théorème suivant :

Théorème I.5.8. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, si $U_{E,L}^R$ est non-vide, alors $U_{E,L}$ contient, hormi 0, un sous-espace fermé de E de dimension infinie.*

I.6 Applications

Cette partie est consacrée à l'illustration des résultats précédents dans différents cadres, à travers des exemples classiques d'universalité.

I.6.1 Applications dans les espaces de Banach

Dans ce paragraphe, nous illustrons notre théorème I.3.3 en prenant, comme espace A, l'espace c_0 des suites qui tendent vers 0 à l'infini, ou un espace l^p, $1 \leq p < \infty$; ces espaces, munis de leur topologie naturelle, sont des espaces de Banach de suites complexes standards, qui vérifient les hypothèses (1)-(3) de la première partie, dans lesquels la suite canonique $(e_n)_n$ est une suite basique. Dans [2], les auteurs appliquent leurs résultats abstraits à ces espaces et obtiennent le résultat suivant ([2, Corollaire 7]) :

Proposition I.6.1. *Soit $A = c_0$ ou $A = l^p$, $1 \leq p < \infty$, muni de sa topologie usuelle. Il existe une suite $a = (a_n)_n$ dans A qui vérifie la propriété suivante : pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \cap \overline{\mathbb{D}} = \varnothing$, de complémentaire connexe, et pour toute fonction $h \in A(K)$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n$ telle que*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\lambda_N} a_n z^n - h(z) \right\|_{\infty,K} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

où $\|.\|_{\infty,K}$ est la norme infinie sur K. De plus, si on note U_A l'ensemble des suites de A qui vérifient cette propriété, alors U_A est un G_δ-dense de A, et contient, excepté 0, un sous-espace dense dans A.

Notons que si l'on combine les résultats obtenus dans la partie I.3 à ceux obtenus dans la paragraphe I.5.2, il est clair que travailler d'un côté avec un espace de Banach A, et de l'autre avec une réunion dénombrable d'espaces de Fréchet (X_n, d_n), permet d'obtenir la même conclusion que dans le théorème I.3.3, sous les mêmes hypothèses. Les différences n'apparaissent que dès qu'on suppose que A est un espace de Fréchet, et pas nécessairement un espace de Banach.

Supposons donc, avec les notations usuelles du chapitre, que (X_n, d_n) est la famille dénombrable

$$\left(A(K_n), \|.\|_{\infty,n} \right),$$

où $A(K_n)$ est l'ensemble des fonctions continues sur K_n, holomorphes sur $\mathring{K}_n$, et où $(K_n)_n$ est une famille de compacts de $\mathbb{C}$, avec $K_n \cap \overline{\mathbb{D}} = \varnothing$, K_n^c connexe, et telle que tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, avec $K \cap \overline{\mathbb{D}} = \varnothing$, K^c connexe, est contenu dans un K_n. Chaque (X_n, d_n) est en fait un espace de Banach et une application de la proposition I.6.1 et du théorème I.5.8, dans ce contexte moins général, donne immédiatement la proposition suivante :

Proposition I.6.2. *Avec les notations et sous les hypothèses de la proposition I.6.1, l'ensemble U_A contient, excepté 0, un sous-espace fermé de A de dimension infinie.*

Nous pouvons énoncer un résultat similaire dans le cadre des espaces de Hardy ou de Bergman du disque, i.e quand $A = H^p(\mathbb{D})$ or $A = A^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. Rappelons brièvement les définitions de ces espaces :

$$A^p(\mathbb{D}) = H(\mathbb{D}) \cap L^p(\mathbb{D}),$$

et

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}),\ \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, d\zeta < \infty \right\},$$

où $\mathbb{T}$ est le cercle unité. En effet, comme précédemment, le Corollaire 8 dans [2] nous assure que le résultat suivant est vrai :

Proposition I.6.3. *Soit $A = H^p(\mathbb{D})$ ou $A = A^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$. Il existe un sous-espace fermé $F \subset A$ de dimension infinie tel que tout vecteur non-nul est une série de Taylor universelle, dans le sens où, pour tout $f = \sum_n a_n z^n \in F$, pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \cap \overline{\mathbb{D}} = \varnothing$ de complémentaire connexe, pour tout $h \in A(K)$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n$ telle que*

$$\left\| \sum_{n=0}^{\lambda_N} a_n z^n - h(z) \right\|_{\infty,K} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

où $\|.\|_{\infty,K}$ est la norme infinie sur K.

Un exemple classique de séries universelles est celui des séries universelles trigonométriques de Men'shov, pour des fonctions mesurables sur le cercle unité (cf. [13] [10] et [2]).

Dans ce contexte, l'espace X est l'espace des fonctions complexes mesurables sur $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, modulo la relation d'équivalence qui identifie deux fonctions qui sont identiques sur le complémentaire d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. La distance d_X sur X est définie, pour $f, g \in X$, par

$$d_X(f,g) = \int_{\mathbb{T}} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\lambda$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. En l'occurrence, d_X est bien une distance invariante par translation, mais il est connu que la topologie qu'elle induit, la topologie de la convergence en mesure, ne fait pas de X un espace de Fréchet, i.e. que cette topologie n'est pas induite par une famille de semi-normes. La remarque I.3.4 explique la raison pour laquelle nous supposons que la topologie de (X, d_X) est définie par une famille de semi-normes : on a besoin d'une certaine homogénéité, celles des semi-normes, dans le calcul de l'universalité de h, dans la démonstration du théorème I.3.3. Néanmoins, il est également bien connu que la convergence en mesure d'une suite de fonctions dans X entraîne la convergence presque partout d'une de ses sous-suites et inversement, que la convergence presque partout de cette suite implique sa convergence en mesure. Ainsi, la notion d'universalité au sens de la convergence en mesure coïncide avec celle d'universalité au sens de la convergence presque partout. Or, il n'est pas difficile de voir que, dans la démonstration du théorème I.3.3, les inégalités (I.3.2) et (I.3.3) peuvent s'écrire avec la distance d_X, si bien que tout les calculs, notamment celui aboutissant à l'inégalité (I.3.7), peuvent s'interprêter indifféremment en termes de convergence en mesure, ou en termes de convergence presque partout. Le problème du manque d'homogénéité est donc levé, de sorte que le théorème I.3.3 reste valable dans le cadre de l'universalité au sens de Men'shov. Le théorème de Men'shov (cf. [13], ou [2, Lemme 1] et la remarque qui suit) et notre théorie abstraite nous conduit ainsi à la proposition suivante :

Proposition I.6.4. *Soit $A = c_0$ ou l^p, $p > 2$. Il existe une suite $a = (a_n)_{n\geq 0} \in A$ telle que, pour toute fonction mesurable 2π-périodique $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_{n>1}$ telle que $\sum_{j=0}^{\lambda_n} a_j e^{ijx}$ converge vers $h(x)$ presque partout, quand n tend vers l'infini. L'ensemble de telles suites $a \in A$ contient, sauf 0, un sous-espace fermé de A de dimension infinie.*

On a un résultat analogue dans le cas du tore $\mathbb{T}^N$, à la place de $\mathbb{T}$. Cette extension de la notion d'universalité au sens de Men'shov à $\mathbb{T}^N$ est développée dans le paragraphe 2.7 de [2].

Soit maintenant $p_0 \geq 0$. La proposition 2 de [11] assure que, sous une certaine condition portant sur la suite $(x_n)_n$ (cf. [11, page 2]), si pour chaque $p > p_0$, il existe une série universelle dans l^p, alors il existe une série universelle dans $\cap_{p>p_0} l^p$. Ceci provient de la théorie abstraite établie dans [2], et de la définition de la topologie dans l'espace de Fréchet $\cap_{p>p_0} l^p$ (cf. également [17] ; on trouve cet article en preprint dans le « technical reports series of the Department of Mathematics and Statistics of the University of Cyprus ».) En utilisant ce fait pour $p_0 = 2$, et l'existence d'une série universelle trigonométrique dans chaque l^p, $p > 2$ (proposition I.6.4), on montre l'existence d'une série universelle trignométrique dans $\cap_{p>p_0} l^p$ (cf. théorème I.6.5 ci-dessous). Il convient de mentionner que le théorème 3 et le paragraphe 5 de [11] traitent de façon complète de cette question. Avec $A = \cap_{p>p_0} l^p$, $p_0 = 2$, le théorème I.4.1 s'applique et assure alors que $\cap_{p>p_0} l^p$ contient un sous-espace fermé de A, de dimension infinie, dont tous les éléments non-nuls sont des séries universelles trigonométriques.

Tout ceci nous conduit naturellement au paragraphe suivant.

I.6.2 Applications dans les espaces de Fréchet

Comme nous venons de le voir, dans [11], les auteurs montrent l'existence d'une série universelle dans $A = \cap_{p>1} l^p$, relativement à une suite $(x_n)_n$, dans des espaces de Fréchet X abstraits, à une condition près portant sur la suite $(x_n)_n$. Plus précisément, cette condition, qu'ils notent (D), est la suivante :

Condition (D). Pour tout ensemble fini $I \subset \mathbb{N}$, pour tout $i \in I$, il existe des indices distincts $j_n(i)$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $x_{j_n(i)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$.

On suppose que $A = \cap_{p>1} l^p$ est équipé de sa topologie habituelle d'espaces de Fréchet, induite par une famille dénombrable de normes. Le résultat abstrait principal qu'ils obtiennent s'énonce de la façon suivante :

Théorème I.6.5. *Avec les notations précédentes, supposons que la suite $(x_n)_n$ vérifie la Condition (D), et que l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies des x_n est dense dans X. Alors $U_{\cap_{p>1} l^p} \neq \varnothing$. De plus, $U_{\cap_{p>1} l^p}$ est un G_δ-dense de $A = \cap_{p>1} l^p$ et contient un sous-espace dense de A, excepté* 0.

Notons que l'hypothèse selon laquelle l'ensemble des combinaisons linéaires finies des x_n est dense dans X n'est pas une restriction pour nous, étant donné que c'est une conséquence du fait que U_A est non-vide, ce qui constitue en soi une hypothèse dans nos résultats abstraits. Le théorème I.6.5 nous dit donc que, dans ce contexte, l'hypothèse $U_A \neq \varnothing$ peut être remplacée par les conditions (D) et $\overline{\text{vect}\,(x_n, n \in \mathbb{N})} = X$. Par conséquent, les théorèmes I.6.5 et I.5.8 de la partie paragraphe I.5.2 donnent le résultat assez général suivant :

Théorème I.6.6. *Avec les notations précédents, posons $A = \cap_{p>1} l^p$. Si $(x_n)_n \subseteq X$ vérifie la condition (D), et si $\overline{\text{vect}\,(x_n, n \in \mathbb{N})} = X$, alors $U \cap A = U_A$ contient un sous-espace fermé de dimension infinie, excepté* 0.

Remarque I.6.7. Il est facile de voir que les théorèmes I.6.5 et I.6.6 restent vrais si l'on remplace $\cap_{p>1} l^p$ par l^p, avec $1 < p < \infty$, ou par c_0. Ainsi, ce théorème peut être vu comme une généralisation des exemples donnés dans le paragraphe I.6.1, excepté pour le cas $A = l^1$; en effet, les auteurs de [11] donnent un exemple (exemple 1, page 5), qui montre que l'énoncé du théorème I.6.5 est faux quand $A = l^1$ (cf. aussi l'exemple I.6.8 ci-dessous).

Voici deux exemples qui illustrent ces idées.

Exemple I.6.8. Le couple $(X, (x_n)_n)$ le plus simple vérifiant les hypothèses du théorème I.6.6 est $(\mathbb{R}, (x_n) = 1)$. Effectivement, $(x_n)_n$ satisfait à la condition (D) et, bien entendu, $\mathbb{R} = \text{vect}\,(x_n, n \in \mathbb{N})$. Le théorème I.6.5 assure d'abord qu'il existe une série universelle restreinte $a = (a_n)_n \in \cap_{p>1} l^p\,(\mathbb{R})$, telle que l'ensemble des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n$ est dense dans $\mathbb{R}$ et, si on note U_A l'ensemble des telles suites a, le théorème I.6.6 donne ensuite le résultat suivant :

Proposition I.6.9. *Avec les notations précédentes, U_A contient, excepté 0, un sous-espace fermé de A de dimension infinie.*

Exemple I.6.10. Revenons à l'exemple classique des séries universelles trigonométriques et posons cette fois $X = \mathscr{C}\,(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions complexes continues sur $\mathbb{R}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On fixe une suite $(\beta_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ sans points isolés, et on définit $x_n(t) = e^{i\beta_n t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme c'est expliqué dans ([11], Partie 5), la suite $(x_n)_n$ vérifie la condition (D) et on a bien $X = \overline{\text{span}\,(x_n, n \in \mathbb{N})}$, de sorte que les théorèmes I.6.5 et I.6.6 donnent :

Théorème I.6.11. *Avec les notations précédentes, il existe une suite universelle restreinte $a = (a_n)_n \in \cap_{p>1} l^p\,(\mathbb{C})$, i.e. telle que, pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{N}$, telle que*

$$\sum_{n=0}^{\lambda_N} a_n e^{i\beta_n t} \xrightarrow[N\to\infty]{} f(t) \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}.$$

De plus, l'ensemble U_A des telles suites a est un G_δ-dense de A, et il contient, hormi 0, un sous-espace fermé de A, de dimension infinie.

On trouve de nombreuses autres applications des parties I.3 et I.4 dans [11].

I.6.3 Séries universelles dans des domaines simplement connexes

Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. On note $H(\mathbb{C})$ l'espace des fonctions entières et $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Dans le paragraphe 2.2 de [2], les auteurs démontrent le théorème suivant ([2, Théorème 6]), en utilisant leurs résultats abstraits sur l'universalité :

Théorème I.6.12. *Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Il existe une fonction holomorphe f sur Ω telle que les suites des sommes partielles de ses développements en série en tout point $\xi \in \Omega$,*

$$S_N(f,\xi)(z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(z-\xi)^n,$$

$N \in \mathbb{N}$, ont la propriété, appelée $(\mathcal{P})$, suivante :

Pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \cap \Omega = \varnothing$ de complémentaire connexe, et pour toute fonction $h \in H(\mathbb{C})$, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_n$ telle que, pour tout compact $L \subseteq \Omega$ et tout $l \in \mathbb{N}$, on a :

1. $\sup_{\xi \in L} \sup_{z \in L} \left| S_{\lambda_n}(f,\xi)(z) - f(z) \right| \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$ *et*
2. $\sup_{\xi \in L} \sup_{z \in K} \left| \frac{d^l}{dz^l}\left(S_{\lambda_n}(f,\xi)\right)(z) - h^{(l)}(z) \right| \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$.

L'ensemble des telles fonctions f constitue un G_δ-dense de $H(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et il contient, sauf 0, un sous-espace dense de $H(\Omega)$.

Avec les notations de la partie I.5, on pose $E = H(\Omega)$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et on note d la distance associée sur E, invariante par translation et définie par la famille de normes $\|f\|_n = \sup_{z \in L_n} |f(z)|$, pour $f \in E$; soient aussi $(L_n)_n$ une suite exhaustive de compacts de $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ et enfin X_n, $n \geq 0$, l'espace $H(\mathbb{C})$ muni de la distance d_n induite par la famille de semi-normes $\sup_{z \in K_n} \left| f^{(l)}(z) \right|$, $l \geq 0$, où K_n est une famille de compacts de $\mathbb{C}$, avec $K_n \cap \Omega = \varnothing$, K_n^c connexe, et telle que tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, avec $K \cap \Omega = \varnothing$, K^c connexe, est contenu dans un K_n (cf. [2, paragraphe 2.2, lemme 3]). En outre, pour $\xi \in \Omega$, $f \in E$ et $k \geq 0$, on définit $e_k(\xi) = \left(z \longmapsto (z-\xi)^k\right) \in E$, $x_{n,k} = \left(z \longmapsto (z-\xi)^k\right) \in X_n$ et $H_k(\xi, f) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \in \mathbb{C}$. Comme c'est expliqué dans [2] (page 14), toutes les hypothèses faites dans la Partie I.5 sont satisfaites, ainsi que la condition (3) du théorème I.2.5, ce qui donne bien le théorème précédent, et en particulier que $U_{E,L} \neq \varnothing$, avec $L = \Omega$. Finalement, le théorème I.5.8 donne :

Théorème I.6.13. *Soit Ω un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$. Il existe un sous-espace fermé de E, de dimension infinie, dont les éléments non-nuls sont des fonctions holomorphes dont les sommes partielles de leurs développements en série vérifient la propriété $(\mathcal{P})$ du théorème I.6.12.*

Comme c'est dit dans la remarque 5 de [2], il est équivalent de ne considérer qu'un « centre du développement » ξ_0 et d'en considérer plusieurs dans l'énoncé du théorème 6 de ce même article (et donc également dans l'énoncé de notre théorème I.6.13). En effet, cela relève du fait que les séries de Taylor universelles sur un domaine simplement connexe vérifient la *propriété de sauts d'Ostrowski* (cf. [15], ou [6] pour des résultats antérieurs sur le sujet). Nous ne nous étendrons pas sur la question. Par conséquent, les résultats de la partie I.4 suffisent pour démontrer le théorème I.6.13. En revanche, ce n'est plus le cas si l'on cherche à avoir, à la fois, une approximation par universalité sur des parties de la frontière de Ω, et à la fois, une régularité des fonctions universelles sur d'autres parties de la frontière de Ω. On peut aussi réclamer que le sup par rapport à ξ dans le point (2) du théorème I.6.12 soit pris sur des ensembles L qui contiennent éventuellement des parties de la frontière de Ω. Ce raffinement est considéré dans le théorème 9 de [2], lequel fournit la matière pour un résultat analogue au théorème I.6.13 où, cette fois, la donnée de plusieurs centres de développement est réellement significative.

I.6.4 Le théorème de Fekete

Nous terminons l'illustration de notre étude abstraite par un exemple qui met en évidence les limites des théorèmes I.3.3 et I.4.1. Il peut sembler quelque peu ironique que ce soit précisément le théorème de Fekete, qui est considéré commé étant à l'origine de l'étude systématique des séries universelles, qui fournisse un contre-exemple aux théorèmes précédents. Nous en rappelons son énoncé initial (cf. [18]) :

Théorème I.6.14 (Théorème de Fekete (1914)**).** *Il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que, pour toute fonction réelle f continue sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\lambda_N} a_n x^n \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} f \text{ uniformément sur } [-1,1].$$

Avec les notations de la partie I.3, on pose $A=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qu'on munit de la topologie produit ; soit X l'espace des fonctions réelles continues sur $[-1,1]$ qui s'annulent en 0, muni de la topologie de la convergence uniforme. Le théorème de Fekete assure que U_A est non-vide, et le théorème I.2.5 fournit le résultat suivant :

Théorème I.6.15. *Si on note U_A l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ telles que, pour toute fonction réelle f continue sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0, il existe une suite d'entiers $(\lambda_n)_{n>1}$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\lambda_N} a_n x^n \xrightarrow[N\longrightarrow\infty]{} f \text{ uniformément sur } [-1,1],$$

alors U_A est un G_δ-dense de A qui contient, hormi 0, un sous-espace dense de A.

Alors que le théorème I.2.5 s'applique dans ce contexte, ce n'est pas le cas de notre théorème I.4.1 : pour des raisons techniques déjà évoquées, ce dernier requiert l'existence d'une norme continue sur A (Condition (I.4.1)) ; or il est bien connu qu'il n'existe pas de normes continue sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Comme ils l'expliquent au début de leur partie 3, les auteurs de [5] montrent que la condition (I.4.1) est nécessaire pour avoir l'existence d'un sous-espace fermé de dimension infinie, constitué de vecteurs universels, dans un contexte semblable. Il est donc légitime de se demander s'il *n'existe pas* de sous-espace fermé de dimension infinie dont les éléments non-nuls sont des séries universelles, au sens du théorème de Fekete. Le résultat suivant répond positivement à cette question :

Théorème I.6.16. *Il n'existe pas de sous-espace fermé de dimension infinie dont les éléments non-nuls sont des séries universelles au sens du théorème de Fekete.*

La démonstration est essentiellement basée sur le lemme général suivant :

Lemme I.6.17. *Soit F un sous-espace de dimension infinie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On note $(e_n)_n$ la suite canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; comme dans la partie I.2, $v(u)$ désigne la valuation de $u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, relativement à $(e_n)_n$. Il existe une suite $(u_n)_n$ dans $F\setminus\{0\}$ telle que $(v(u_n))_n$ est strictement croissante.*

Démonstration. La construction d'une telle suite va se faire grâce à l'observation suivante :

Condition (D). Soit $(u_0,\ldots,u_n)$ une suite finie d'éléments non-nuls de F tels que

$$v(u_0) < v(u_1) < \ldots < v(u_n) \tag{I.6.1}$$

et tels que, si $u\in F\setminus\{0\}$ vérifie $v(u)\leq v(u_n)$, alors $v(u)=v(u_i)$ pour un i, $0\leq i\leq n$. Alors, il existe $w\in F$ tel que $v(w)>v(u_n)$.

Démonstration du Fait. Soit E_n le sous-ensemble de F défini par

$$E_n = \{w \in F, v(w) > v(u_n)\}.$$

Supposons par l'absurde que $E_n = \emptyset$. Il n'est pas difficile de se convaincre que, dans ce cas, les conditions portant sur la suite $(u_0, \ldots, u_n)$ imposent que, si $w \in F$ alors il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ réels tels que $w - (\lambda_0 u_0 + \ldots + \lambda_n u_n) = 0$, i.e. que w est une combinaison linéaire finie des u_i, $0 \leq i \leq n$. Ceci contredit le fait que F est de dimension infinie. □

On revient à la démonstration du lemme I.6.17. On va construire par récurrence une suite $(u_n)_n$ d'éléments non-nuls de F tels que, pour tout entier n, la suite $(u_0, \ldots, u_n)$ vérifient les hypothèses du Fait. On définit u_0 comme un élément non-nul de F de valuation minimale. On suppose ensuite avoir construit $(u_0, \ldots, u_n)$ pour un n, et on lui applique le Fait : il existe $w \in F$ tel que $v(w) > v(u_n)$. Soit alors u_{n+1} un élément de F de valuation minimale parmi les éléments $w \in F$ tel que $v(w) > v(u_n)$. Il reste à montrer que $(u_0, \ldots, u_{n+1})$ satisfait toujours aux hypothèses du Fait. Il est évident, par construction, que (I.6.1) est vérifiée. Prenons maintenant $u \in F$ avec $v(u) \leq v(u_{n+1})$. Si $v(u) \leq v(u_n)$, on applique alors l'hypothèse de récurrence. Sinon, $v(u) = v(u_{n+1})$ par minimalité de $v(u_{n+1})$. Enfin, la suite $(u_n)_n$ vérifie clairement la conclusion du lemme I.6.17. □

On passe maintenant à la démonstration du théorème I.6.16 :

Démonstration du théorème I.6.16. On suppose par l'absurde qu'il existe un sous-espace fermé F de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de dimension infinie, dont tous les éléments non-nuls sont universels au sens du théorème de Fekete. On applique à F le lemme I.6.17 et on note $(u_n)_n \subset F$ la suite donnée par ce lemme . Des inégalités

$$v(u_n) < v(u_{n+1}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

on déduit que, pour toute suite $(\alpha_n)_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ est convergente dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Or, avec les notations de la partie I.3, il existe une suite $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$\|S_p(\alpha_0 u_0 + \ldots + \alpha_n u_n, X)\|_\infty > 1 \text{ pour } p \in [v(u_n), v(u_{n+1})[. \tag{I.6.2}$$

En effet, on peut choisir $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ de telle sorte que

$$\|S_p(\alpha_0 u_0, X)\|_\infty > 1$$

pour tout $p \in [v(u_0), v(u_1)[$, car $S_p(u_0, X) \neq 0$ pour tout p dans cet intervalle. Si on suppose $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ construits, on construit α_{n+1} comme suit. Observons que

$$\|S_p(\alpha_0 u_0 + \ldots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1}, X)\|_\infty = |\alpha_{n+1}| \left\| S_p\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_{n+1}} u_0 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} u_n + u_{n+1}, X\right) \right\|_\infty.$$

Puisque $S_p(u_{n+1}, X) \neq 0$ pour tout $p \in [v(u_{n+1}), v(u_{n+2})[$, on peut choisir $|\alpha_{n+1}|$ de façon à ce que l'inégalité (I.6.2) soit vérifiée. Maintenant, par construction, il vient que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $p \in [v(u_n), v(u_{n+1})[$ et

$$\left\| S_p\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k, X\right) \right\|_\infty = \left\| S_p\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k, X\right) \right\|_\infty > 1.$$

Autrement dit, chaque somme partielle de $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$ dans X a une norme infinie strictement supérieure à 1, et donc aucune fonction continue à valeurs dans $]-1,1[$ ne peut être approchée par une sous-suite des sommes partielles de $h := \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n u_n$. Par conséquent, h ne peut être universel au sens du théorème de Fekete ; comme F est fermé, $h \in F$ et la démonstration est terminée. □

Bibliographie

[1] F. Bayart, Linearity of sets of strange functions, *Mich. Math. Journal.* **53** (2005), 291-303.

[2] F. Bayart, K-G. Grosse-Erdmann, V. Nestoridis, C. Papadimitropoulos, Abstract theory of universal series and applications, *Proc. Lon. Math. Soc.* **96** (2008), 417-463.

[3] F. Bayart, É. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge Tracts in Math, vol. 179, Cambridge University Press, 2009.

[4] C. Bessaga, A. Pełczyński, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.* 17 (1958), 151-164.

[5] J. Bonet, F. Martinez-Gimenez, A. Peris, Universal and chaotic multipliers on spaces of operators, *J. Math. Anal. Appl.* **297** (2004), 599-611.

[6] W. Gehlen, W. Luh, J. Müller, On the existence of O-universal functions, *Complex Variables and Elliptic Equations*, Volume 41, Issue 1 March 2000 , pages 81 - 90

[7] K-G. Grosse-Erdmann, Holomorphe Monster und universal Funktionen, *Mitt. Math. Sem. Giessen,* **176** (1987).

[8] K-G. Grosse-Erdmann, Universal families and hypercyclic operators, *Bull. Amer. Math. Soc.* **36** (1999), 345-381.

[9] J. P. Kahane, Baire's Category Theorem and trigonometric series, *J. d'Analyse Math.* **80** (2000), 143-182.

[10] J. P. Kahane, V. Nestoridis, Séries de Taylor et séries trigonométriques universelles au sens de Menchoff, *J. Math. Pures Appl.* 79 (2000), 855-862.

[11] S. Koumandos, V. Nestoridis, Y-S. Smyrlis, V. Stefanopoulos, Universal series in $\cap_{p>1} l^p$, *Bull. Lon. Math. Soc. to appear.*

[12] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, 1977.

[13] D. Menchoff, Sur les séries trigonométriques universelles, *C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)* 49 (1945), 79-82.

[14] A. Montes-Rodriguez, Banach spaces of hypercyclic vectors, *Mich. Math. J.* **43** (1996), 419-436.

[15] J. Mueller, V. Vlachou, A. Yavrian, Universal overconvergence and Ostrowski-gaps, *Bull. Lon. Math. Soc.* 38 (2006), 597–606.

[16] V. Nestoridis, C. Papadimitropoulos, Abstract Theory of Universal Series, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris,* **341** (2005), 539-543.

[17] V. Nestoridis, V. Stefanopoulos, Universal series and approximate identities, *submitted*.

[18] J. Pal, Zwei kleine Bermerkungen, *Tohoku Math. J.* **6** (1914), 42-43.

Chapitre II

Spectre et dynamique des opérateurs de composition hyperboliques sur la boule

II.1 Introduction

Rappelons que si X est un espace de Banach de fonctions holomorphes sur un domaine $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}^N$, et que si ϕ est une application holomorphe de $\mathscr{U}$ dans $\mathscr{U}$, l'opérateur de composition de *symbole* ϕ est défini par $C_\phi(f) = f \circ \phi$, pour tout $f \in X$. Comme nous l'avons déjà mentionnée dans le chapitre introductif, l'étude des opérateurs de composition consiste à comparer les propriétes de l'opérateur C_ϕ avec celles de son symbole ϕ. Plus particulièrement, ce sont les propriétés géométriques de ϕ qui sont le plus souvent mis en avant. Ceci s'illustre parfaitement quand on cherche à décrire les propriétés spectrales ou à comprendre la dynamique des opérateurs de composition.

Déjà sur le disque, certaines de ces propriétés résistent à l'étude. Une stratégie pour les aborder consiste à utiliser ce qu'on appelle le *modèle des homographies*. On rappelle qu'une homographie de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ est une application $u : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ qui peut s'écrire sous la forme $u(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Ce modèle des homographies (en une variable complexe) stipule que toute fonction injective du disque unité dans lui-même est conjuguée à une homographie, d'un domaine de $\mathbb{C}$ éventuellement plus compliqué, dans lui-même. On comprend bien vite en quoi ce modèle s'avère très utile dans l'étude des opérateurs de composition : si $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est holomorphe injective, et si u est son modèle (une homographie...), C_u et C_ϕ partagent de nombreuses propriétés, notamment spectrales et de dynamique ; et bien entendu, il est plus aisé d'étudier directement C_u.

La théorie des opérateurs de composition sur la boule unité $\mathbb{B}_N := \{Z = (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1};\ \|Z\|_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$ est plus compliquée. Elle est, entre autre, soumise à l'existence d'applications $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ qui induisent des opérateurs de composition qui ne sont pas continus sur

$$H^2(\mathbb{B}_N) = \left\{ f : \mathbb{B}_N \to \mathbb{C} \text{ holomorphe}, \sup_{o<r<1} \int_{\mathbb{S}_N} |f_r|^p \, d\sigma < \infty \right\}$$

(cf. chapitre 3, dans lequel les notions de continuité, et de compacité, seront abordées spécifiquement). L'introduction d'une classe d'*homographies* de plusieurs variables complexes, qui auraient des propriétés semblables à celles connues en une variable, semble alors d'autant plus cruciale : premièrement, pour fournir une source d'exemples relativement simples, néanmoins suffisamment riche, pour mettre en évidence des comportements divers, et deuxièmement, dans l'espoir de produire un outil similaire à celui du modèle des homographies du disque. Ces idées ont en tout cas motivé C. Cowen et B. MacCluer à introduire en 2000, dans leur article [13], la notion suivante :

Définition II.1.1. Une application $\phi : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ est une homographie si elle peut s'écrire sous la forme

$$\phi(Z) = \frac{AZ + B}{\langle Z, C \rangle + D},$$

où $A \in \mathscr{M}_N(\mathbb{C})$ est une matrice, où B et C sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^N$, et où $D \in \mathbb{C}$.

Si $\mathscr{U}$ est un domaine de $\mathbb{C}^N$, on dit que ϕ est une homographie de $\mathscr{U}$ si ϕ est définie dans un voisinage de $\mathscr{U}$ et si $\phi(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}$. On note $LFM(\mathscr{U})$ l'ensemble des homographies de $\mathscr{U}$.

Le premier résultat marquant, [13, Théorème 14], est que tout opérateur de composition dont le symbole est une homographie de la boule est continu sur l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{B}_N)$, $p > 0$.

D'autre part, il s'avère que les points fixes du symbole ϕ jouent un rôle essentiel dans l'étude des opérateurs de composition, si bien que les mathématiciens qui se sont penchés sur le sujet ont été amené à classer les homographies de la boule, en fonction de propriétés liées à leurs points fixes ; derrière cette classification, se trouve le théorème de Denjoy-Wolff. L'énoncé suivant que nous en donnons est spécifique au homographies de la boule, et est contenu dans le théorème 3.2 de [5] :

Théorème II.1.2 (Théorème de Denjoy-Wolff)**.** *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ sans points fixes dans $\mathbb{B}_N$. Il existe un unique point fixe $\tau \in \mathbb{S}_N := \partial\mathbb{B}_N$ tel que $\phi(\tau) = \tau$ et $\alpha(\phi) := \langle d\phi_\tau(\tau), \tau \rangle \in (0, 1]$.*

Le terme $d\phi_\tau(\tau)$ n'est autre que la différentielle de ϕ au point τ, calculée en τ. Il convient de rappeler que ϕ est définie au voisinage de $\overline{\mathbb{B}_N}$. τ est précisément appelé le *point de Denjoy-Wolff* de ϕ, et $\alpha(\phi)$ est le *coefficient de dilatation* de ϕ.

Au regard de ce théorème, on distingue trois types d'homographies ϕ de $\mathbb{B}_N$:
- ϕ est dite *elliptique* si elle possède un point fixe dans $\mathbb{B}_N$;
- ϕ est dite *parabolique* si elle ne possède pas de points fixes dans $\mathbb{B}_N$ et si $\alpha(\phi) = 1$.
- ϕ est dite *hyperbolique* si elle ne possède pas de points fixes dans $\mathbb{B}_N$ et si $\alpha(\phi) \in (0, 1)$.

Si $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ n'a pas de points fixes dans $\mathbb{B}_N$, alors, quitte à la conjuguer par un automorphisme de la boule, on peut toujours se ramener au cas où son point de Denjoy-Wolff est $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. Cette opération ne changeant pas les informations sur le spectre et la dynamique de C_ϕ, on suppose à partir de maintenant qu'on est dans ce cas.

Dans ce chapitre, notre objectif est d'étudier de façon systématique les homographies de type hyperbolique et les opérateurs de composition associés. Notre première tâche va consister à donner une classification pertinente de ces homographies hyperboliques. Par commodité, nous allons nous placer dans le demi-espace de Siegel

$$\mathbb{H}_N = \left\{ Z = (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}, \Im m(z) > |w_1|^2 + \ldots + |w_{N-1}|^2 = \|w\|^2 \right\},$$

et montrer que toute homographie hyperbolique de $\mathbb{B}_N$ est conjuguée, via la transformation de Cayley et des automorphismes convenables, à une application de $\mathbb{H}_N$ dans lui-même qui peut s'écrire sous la forme

$$\psi(z, u, v) = (\lambda z + b, Du, Av + c)$$

où $z \in \mathbb{C}$, $(u, v) \in \mathbb{C}^{N-1}$, $\Im m(b) \geq 0$, où D est une matrice diagonale, de coefficients diagonaux de module $\sqrt{\lambda}$, et où A et c vérifient des conditions techniques. Cette application ψ, la *forme normale* de ϕ, va nous permettre de simplifier les calculs dans les paragraphes suivants et de dégager les propriétés fondamentales qui jouent un rôle dans l'étude du spectre et de la dynamique de l'opérateur de composition associé.

Bien que la forme normale ne soit pas unique à automorphismes près, il est possible de mettre en évidence trois propriétés de ϕ, qui apparaissent clairement sur ses formes normales, et qui sont, elles, invariantes par automorphismes. Ces propriétés seront regroupées dans ce qu'on appelle la *signature* de ϕ, et nous verrons que les propriétés de ϕ, et de C_ϕ, dépendent fondamentalement de la signature. Par exemple, certaines propriétés géométriques de ϕ, telles que la forme de son domaine caractéristique, seront entièrement déterminées par sa signature.

On se concentrera ensuite plus particulièrement sur les opérateurs de composition associés à des homographies hyperboliques et tout d'abord, sur leur spectre. Le spectre des opérateurs de composition a été l'objet de l'attention de nombreux mathématiciens, comme par exemple les livres de Shapiro ([23], en une variable) ou de Cowen et MacCluer ([12, Chapter 7]) en témoignent. Dans le contexte des homographie de la boule, le spectre de C_ϕ a été donné par F. Bayart dans [2], quand ϕ est parabolique ; lorsque ϕ est un automorphisme, ou lorsqu'elle est elliptique, on peut se référer à [19, 9]. De plus, le rayon spectral est également connu pour des homographies quelconques (cf. [18]).

Nous en achevons ici l'étude en traitant le cas des homographies hyperboliques, qui ne sont pas des automorphismes de la boule.

Théorème II.1.3 (Cf. théorèmes II.3.2 et II.3.9). *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ une homographie hyperbolique qui n'est pas un automorphisme. Le spectre de C_ϕ est*
- $\bigcup_n C_n \cup \{0\}$, *où $(C_n)_n$ est une suite de couronnes centrées en 0 dont les rayons tendent vers zéro, si ϕ agit comme un automorphisme sur une « tranche » de $\mathbb{B}_N$ (l'intersection d'une droite complexe et de la boule) ;*
- *un disque centré en 0 sinon.*

Dans la partie II.4, on donne une étude complète de la dynamique des opérateurs de composition associés à une homographie hyperbolique. Rappelons qu'on opérateur T agissant sur un espace de Banach X est dit *hypercyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que l'orbite $\{T^n x;\ n \geq 0\}$ est dense dans X. Il est dit *supercyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que l'orbite projective $\mathbb{C} \cdot \{T^n x;\ n \geq 0\}$ est dense dans X. Enfin, il est dit *cyclique* s'il existe un vecteur $x \in X$ tel que $\{P(T)x;\ P \text{ polynôme}\}$ est dense dans X. Nous renvoyons à [3] pour une approche complète et récente de la dynamique linéaire.

La dynamique des opérateurs de composition est un pan important à la fois de la dynamique linéaire générale et de la théorie des opérateurs de composition (cf. par exemple [2], [7], [10], [16], [17], [23]). En particulier, la dynamique des opérateurs de composition associés à une homographie hyperbolique est déjà bien connue dans le disque (cf. [7]) :

Théorème II.1.4 (Théorème sur le disque). *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{D})$ hyperbolique. Alors C_ϕ est hypercyclique.*

Le théorème correspondant pour $\mathbb{B}_N$, $N \geq 2$, est autrement plus compliqué.

Théorème II.1.5 (Cf. théorème II.4.2). *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ hyperbolique et injective, et soit $\psi(z,w) = (\lambda z + b, Du, Av + c)$ une forme normale de ϕ.*
1. *Si $\dim(v) = 0$, alors C_ϕ est hypercyclique ;*
2. *Si $\dim(v) > 0$, alors*
   (a) *C_ϕ n'est jamais hypercyclique ;*
   (b) *C_ϕ est supercyclique si et seulement si $\Im m(b) > 0$;*
   (c) *C_ϕ est toujours cyclique.*

Ce résultat est, pour au moins deux raisons, assez surprenant. D'une part, il fournit des exemples d'opérateurs de composition qui sont supercycliques, mais qui ne sont pas hypercycliques. Ils apparaissent comme les premiers exemples de ce type, et de fait, Bonilla, Bernal et Calderon ont démontré dans [4] que, dans certains cas (bien entendu, pas dans celui du théorème II.1.5), la supercyclicité d'un opérateur de composition entraîne automatiquement l'hypercyclicité. D'autre part, le fait que C_ϕ ait de meilleures propriétés de dynamique quand $\Im m(b) > 0$ n'est pas intuitif. La condition $\Im m(b) = 0$ signifie que l'application $z \mapsto \lambda z + b$ est un automorphisme du demi-plan supérieur (autrement dit que la restriction de ϕ à un segment (complexe) dans $\mathbb{B}_N$ est un automorphisme). Or, généralement, les propriétés en matière de dynamique des opérateurs de composition sont meilleures quand ϕ est un automorphisme. La démonstration de ce théorème, qui sera faite dans la partie II.4, dépendra fortement du travail accompli dans les paragraphes précédents.

Enfin, nous terminerons ce chapitre par une application de nos résultats obtenus pour les opérateurs de composition de type hyperbolique, à des opérateurs de composition d'un *type hyperbolique un peu plus général*, via une esquisse de modèle des homographies. Comme nous l'avons déjà mentionné, ces techniques sont particulièrement efficaces dans le disque, spécialement quand on s'intéresse à la dynamique des opérateurs de composition (cf. [7]). Un modèle des homographies pour les homographies hyperboliques a déjà été développé dans [1] et dans [9]. En raison de difficultés techniques propres au « cadre plusieurs variables », on n'obtiendra pas un résultat aussi bon que celui de [7]. Cependant, le résultat qu'on obtient constitue un indice qui contribue à justifier la démarche entamée par Cowen et MacCluer pour étendre la connaissance des opérateurs de composition en plusieurs variables, via un modèle des homographies semblable à celui qui existe dans le disque.

Notation. Dans tout le chapitre, nous utiliserons la notation $f(x) \lesssim g(x)$ pour signifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout x, $f(x) \leq Cg(x)$. Par ailleurs, $\mathbb{P}_+$ désignera le demi-plan complexe supérieur, $\mathbb{P}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \Im m(z) > 0\}$.

II.2 Une étude géométrique

II.2.1 Dans le demi-espace de Siegel

Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ une homographie sans points fixes dans $\mathbb{B}_N$. Comme prévu, on suppose que son point de Denjoy-Wolff se trouve en e_1. Il s'avère, dans la plupart des cas (mais pas tous !) plus aisé de décrire les propriétés géométriques de C_ϕ en se plaçant dans le demi-espace de Siegel, dont on rappelle la définition :

Définition II.2.1. Le *demi-espace de Siegel* $\mathbb{H}_N$ de $\mathbb{C}^N$ est défini par

$$\mathbb{H}_N = \left\{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}, \Im m(z) > |w_1|^2 + \ldots + |w_{N-1}|^2 = \|w\|^2\right\}.$$

Comme dans le plan complexe, il existe un biholomorphisme σ_c de $\mathbb{B}_N$ sur $\mathbb{H}_N$, appelé *transformation de Cayley,* qui est donnée par la formule suivante :

$$\sigma_c(z,w) = \left(i\frac{1+z}{1-z}, \frac{iw}{1-z}\right), (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}. \tag{II.2.1}$$

Sa réciproque se calcule directement :

$$\sigma_c^{-1}(z,w) = \left(\frac{z-i}{z+i}, \frac{2w}{z+i}\right).$$

Cette application se prolonge à $\overline{\mathbb{B}_N}$ et elle est alors surjective sur $\mathbb{H}_N \cup \partial\mathbb{H}_N \cup \{\infty\}$, si l'on pose $\sigma_c(1) = \infty$.

La transformée de Cayley étant elle-même une homographie, il est clair que $LFM(\mathbb{H}_N) = \sigma_c^{-1} \circ LFM(\mathbb{B}_N) \circ \sigma_c$. De plus, si $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ admet e_1 pour point de Denjoy-Wolff, le point de Denjoy-Wolff de $\psi = \sigma_c^{-1} \circ \phi \circ \sigma_c$ est ∞.

Il sera techniquement plus facile de travailler avec des homographies de $\mathbb{H}_N$ fixant ∞, car la partie fractionnaire disparait. Précisément, dans [8, Proposition 4.2], F. Bracci, M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal ont décrit quelles sont les applications de $LFM(\mathbb{H}_N)$ qui fixent ∞ :

Théorème II.2.2. *Soit $\psi = \sigma_c^{-1} \circ \phi \circ \sigma_c \in LFM(\mathbb{H}_N)$ une homographie non-elliptique (sans points fixes dans $\mathbb{H}_N$), dont le point de Denjoy-Wolff est ∞ ; on pose $\lambda = 1/\alpha(\phi)$. Il existe a, $c \in \mathbb{C}^{N-1}$, $b \in \mathbb{C}$ et $M = M_\phi \in \mathcal{M}_{N-1}(\mathbb{C})$, tels que*

$$\psi(z,w) = (\lambda z + 2i\langle w,a\rangle + b, Mw + c). \tag{II.2.2}$$

De plus, une application ψ qui vérifie (II.2.2) *envoie $\mathbb{H}_N$ dans lui-même si et seulement si*

1. *$Q = \lambda I - MM^*$ est une matrice hermitienne semi-définie positive ;*
2. *$\Im m(b) - \|c\|^2 \geq \langle Q^+(M^*c - a), M^*c - a\rangle$, où Q^+ est la matrice pseudo-inverse de Q ;*
3. *$M^*c - a$ appartient à l'espace engendré par les colonnes de Q.*

La pseudo-inverse Q^+ d'une matrice $Q = U^*DU$ hermitienne, où U est une matrice unitaire et où $D = (d_{i,j})$ est la matrice diagonale obtenue en appliquant le théorème spectral à Q, est la matrice U^*D^+U, où D^+ est la matrice diagonale dont le coefficient en position (j, j) vaut 0 si $d_{j,j} = 0$, et vaut $d_{j,j}^{-1}$ sinon.

Ayant l'intention de consacrer notre étude aux homographies hyperboliques, nous allons commencer par simplifier, à automorphismes près, la formule (II.2.2) dans ce cas plus particulier.

II.2.2 Forme normale d'une homographie hyperbolique

Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ une homographie hyperbolique et soit $\psi = \sigma_c^{-1} \circ \phi \circ \sigma_c \in LFM(\mathbb{H}_d)$ sa conjuguée dans le demi-espace de Siegel. Rappelons que, par définition, $\lambda = 1/\alpha(\phi) > 1$. La propriété (1) du théorème II.2.2 entraîne que $\|M\| \leq \sqrt{\lambda}$, si bien que le spectre de M est contenu dans le disque fermé centré en 0, de rayon $\sqrt{\lambda}$. De plus, cette même propriété implique que le sous-espace caractéristique de M correspondant aux valeurs propres de module $\sqrt{\lambda}$ coïncide avec le sous-espace propre correspondant, et que le sous-espace orthogonal à ce dernier est stable par M. Par conséquent, quitte à conjuguer M par une application unitaire U, ce qui signifie prendre la conjuguée de ψ par l'automorphisme de $\mathbb{H}_N$ $(z, w) \mapsto (z, Uw)$, on peut supposer que la matrice M, qui apparaît dans (II.2.2), s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \tag{II.2.3}$$

où D est une matrice diagonale, à coefficients diagonaux tous de module $\sqrt{\lambda}$, et où la matrice A est telle que $\lambda I - AA^*$ est hermitienne définie positive.

Toujours dans le but de simplifier (II.2.2), on conjugue ψ par une translation d'Heisenberg automorphique τ du demi-espace de Siegel, i.e. par une application de la forme

$$\tau(z, w) = (z + 2i\langle w, \gamma\rangle + \beta, w + \gamma),$$

avec $\Im m(\beta) = \|\gamma\|^2$. On a (cf. [2, paragraphe 2.2])

$$\tau^{-1}(z, w) = \left(z - 2i\langle w, \gamma\rangle - \beta + i\|\gamma\|^2, w - \gamma\right).$$

Un calcul direct donne

$$\tau^{-1} \circ \psi \circ \tau(z, w) = \left(\lambda z + 2i\langle w, (\bar{\lambda} I - M^*)\gamma + a\rangle + b + 2i\langle M\gamma, \gamma\rangle + \lambda\beta, M(w + \gamma) + c\right).$$

Puisque $\|M^*\| \leq \sqrt{\lambda}$ et $\lambda > 1$, $\bar{\lambda} I - M^*$ est inversible et on choisit γ tel que $\left(\bar{\lambda} I - M^*\right)(\gamma) = -a$. On peut ensuite ajuster la valeur de $\Re e(\beta)$, qui est indépendante de celle de $\|\gamma\|^2$, de sorte que $b + 2i\langle M\gamma, \gamma\rangle + \lambda\beta$ soit un nombre imaginaire pur.

Par suite, à automorphismes près, on obtient la forme réduite suivante pour $\psi \in LFM(\mathbb{H}_N)$ hyperbolique :

$$\psi(z, w) = (\lambda z + b, Du + c_1, Av + c_2),$$

où b est imaginaire pur, et où $w = (u, v)$ et $c = (c_1, c_2)$ sont respectivement les décompositions de w et de c selon les sous-espaces orthogonaux de $\mathbb{C}^{N-1}$ intervenant dans la décomposition de M dans (II.2.3). Par ailleurs, comme ψ vérifie la condition (3) du théorème II.2.2, M^*c appartient à l'espace engendré par les colonnes de $Q = \lambda I - M^*M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda I - A^*A \end{pmatrix}$, si bien qu'on a nécessairement $c_1 = 0$, car D^* est inversible. En outre, si $\Im m(b) = 0$, alors c_2 est nul d'après la condition (2) de ce même théorème.

En conjuguant maintenant ψ par une dilatation anisotrope h_μ,

$$h_\mu(z, w) = (\mu z, \sqrt{\mu} w),\ \mu > 0,$$

il vient

$$h_\mu \circ \psi \circ h_{1/\mu}(z, w) = (\lambda z + \mu b, Du, Av + \sqrt{\mu} c).$$

En particulier, quand $\Im m(b) > 0$, on peut choisir μ de sorte que $\Im m(\mu b)$ soit aussi petit que l'on veut. Pour notre étude, nous imposerons que $\Im m(\mu b) \in (0, \lambda - 1)$.

Pour finir, comme toute matrice est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure, nous pouvons supposer, toujours à automorphismes près, que la matrice A est triangulaire supérieure.

Nous résumons le travail effectué jusqu'à présent dans la proposition suivante :

Proposition II.2.3. *Soient $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ hyperbolique et $\psi = \sigma_c^{-1} \circ \phi \circ \sigma_c$. ψ est conjuguée à une application s'écrivant*

$$(z, w) \mapsto (\lambda z + b, Du, Av + c), \tag{II.2.4}$$

où

1. *D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux de module $\sqrt{\lambda}$;*
2. *$Q = \lambda I - A^*A$ est hermitienne définie positive et A est triangulaire supérieure ;*
3. *b est imaginaire pur et $\|c\|^2 + \langle Q^{-1}A^*c, A^*c\rangle \leq \Im m(b) < \lambda - 1$. En particulier, si b est nul, alors c est nul.*

Toute application s'écrivant comme dans II.2.4, vérifiant les conditions précédentes, et conjuguée à ψ, est appelée une forme normale *de ϕ.*

Une homographie de $\mathbb{B}_N$ n'admet pas une unique forme réduite. Néanmoins, certains paramètres apparaissant dans cette forme réduite sont invariants par conjugaison par des automorphismes fixant ∞ :
- $\lambda_\phi := \lambda = 1/\alpha(\phi)$, l'inverse du coefficient de dilatation de ϕ ;
- le fait que $\Im m(b) = 0$ ou non. Ce paramètre détermine le fait que ψ_1 est, ou n'est pas, un automorphisme de $\{\Im m(z) > 0\}$. Si l'on revient à ϕ, $\Im m(b) = 0$ est équivalent au fait que $\phi_{|D}$ agit comme un automorphisme sur l'intersection D d'une droite complexe avec $\mathbb{B}_N$. On pose alors $\varepsilon_\phi = 1$ si $\Im m(b) = 0$, $\varepsilon_\phi = 0$ sinon ;
- le nombre de valeurs propres de module $\sqrt{\lambda}$ de M, comptées avec leur multiplicité. On note p_ϕ ce nombre, qui est également tout simplement la dimension de u.

Définition II.2.4. Le triplet $(\lambda_\phi, \varepsilon_\phi, p_\phi)$ est appelé la *signature* de ϕ.

La signature donne une classification, à automorphismes près, des homographies de $\mathbb{B}_N$. Notre objectif est de convaincre le lecteur que la connaissance de la signature de ϕ assure la connaissance d'un grand nombre d'informations sur le comportement de ϕ, et sur l'opérateur de composition C_ϕ associé. On commence par des considérations géométriques.

II.2.3 Le domaine caractéristique d'une homographie hyperbolique

On rappelle que le domaine caractéristique de $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ est le plus petit domaine contenant la boule qui est invariant par ϕ. Quand ϕ est injective (i.e. quand M_ϕ est inversible), c'est le plus petit domaine contenant $\mathbb{B}_N$ sur lequel ϕ agit comme un automorphisme.

Théorème II.2.5. *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ hyperbolique et soit $\psi(z, w) = (\lambda z + b, Du, Av + c)$ la forme normale de ϕ. Le domaine caractéristique de ϕ est, à conjugaison près par la transformation de Cayley et des automorphismes de $\mathbb{H}_N$,*

$$\Omega_0 := \left\{(z, u, v) \in \mathbb{C}^N, \Im m(z) > \|u\|^2 - \frac{\Im m(b)}{\lambda - 1}\right\}.$$

Démonstration. Il n'est pas difficile de vérifier que le domaine caractéristique de ψ est donné par $\Omega = \bigcup_{n \geq 0} \psi^{-n}(\mathbb{H}_N)$. Il suffit donc de montrer que Ω est égal à Ω_0. Soit ψ_n la $n^{\text{ème}}$ itérée de ψ. Un calcul direct donne

$$\psi_n(z, w) = \left(\lambda^n z + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} b, D^n u, A^n v + A^{n-1} c + \ldots + c\right),$$

si bien que $(z,w) \in \cup_{n\geq 0} \psi^{-n}(\mathbb{H}_N)$ si et seulement s'il existe un entier n tel que

$$\Im m(z) + \frac{1}{\lambda^n}\left(\frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\right)\Im m(b) > \|u\|^2 + \frac{1}{\lambda^n}\left\|A^n v + A^{n-1}c + \ldots + c\right\|^2,$$

ce qui équivaut à

$$\Im m(z) > \|u\|^2 - \frac{\Im m(b)}{\lambda - 1} + \frac{\Im m(b)}{\lambda^n(\lambda-1)} + \frac{1}{\lambda^n}\|A^n v + A^{n-1}c + \cdots + c\|^2.$$

Ceci montre que $\Omega \subset \Omega_0$. L'inclusion inverse est également satisfaite puique

$$\begin{cases} \frac{\Im m(b)}{\lambda^n(\lambda-1)} \to 0 \\ \frac{1}{\lambda^n}\|A^n v + A^{n-1}c + \cdots + c\|^2 \to 0 \end{cases}$$

(en effet, $\|A\| < \sqrt{\lambda}$ puisque $\lambda I - A^*A$ est définie positive). □

On observe que les trois paramètres de la signature de ϕ interviennent pour décrire la forme du domaine caractéristique de cette dernière. Concernant la convergence de ϕ vers son point de Denjoy-Wolff, nous allons voir que le paramètre p_ϕ joue un rôle tout particulier.

II.2.4 Convergence à l'infini

Soit ψ une application de $\mathbb{H}_N$ dans lui-même admettant ∞ pour point de Denjoy-Wolff. Pour tout $(z,w) \in \mathbb{H}_N$, $\psi_n(z,w)$ tend vers ∞. On distingue en particulier deux types de convergence, invariants par automorphisme et dignes d'intérêt, comme nous allons le voir dans le paragraphe sur la dynamique :

Définition II.2.6. Soit (z_n, w_n) une suite de points dans $\mathbb{H}_N$ qui converge vers l'infini. On dit que la convergence de (z_n, w_n) est

1. *spéciale* si $\frac{\|w_n\|^2}{\Im m(z_n)}$ tend vers 0 ;
2. *restreinte* si $(z_n)_n$ converge non-tangentiellement vers l'infini, c'est-à-dire s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|\Re e(z_n)| \leq C\Im m(z_n)$ pour tout n suffisamment grand.

Notre classification des homographies hyperboliques donne le résultat suivant :

Théorème II.2.7. *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ hyperbolique et soit $\psi = \sigma_c^{-1} \circ \phi \circ \sigma_c$ son homographie conjuguée dans $\mathbb{H}_N$. Pour tout $(z,w) \in \mathbb{H}_N$, la convergence de $\psi_n(z,w)$ vers son point de Denjoy-Wolff ∞ est restreinte, et elle est spéciale si et seulement si $p_\phi = 0$.*

Démonstration. Étant donné que les convergences restreintes et spéciales sont invariantes par conjugaison par un automorphisme, on peut supposer que ψ est une forme normale de ϕ. Posons $(z_n, w_n) := \psi_n(z,w) \in \mathbb{H}_N$, pour $(z,w) \in \mathbb{H}_N$. Comme le point de Denjoy-Wolff de ψ est ∞, $(z_n)_n$ tend vers l'infini. De plus, d'après la démonstration du théorème II.2.5,

$$\frac{|\Re e(z_n)|}{\Im m(z_n)} = \frac{\lambda^n \Re e(z)}{\lambda^n \Im m(z) + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\Im m(b)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\Re e(z)}{\Im m(z) + \frac{\Im m(b)}{\lambda - 1}},$$

ce qui prouve que la convergence est restreinte.

Par ailleurs,

$$\frac{\|w_n\|^2}{\Im m(z_n)} = \frac{\|D^n u\|^2 + \left\|A^n v + A^{n-1}c + \ldots + c\right\|^2}{\lambda^n \Im m(z) + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}\Im m(b)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\|u\|^2}{\Im m(z) + \frac{\Im m(b)}{\lambda - 1}},$$

et la convergence vers l'infini est bien spéciale si et seulement si le sous-espace associé aux valeurs propres de module $\sqrt{\lambda}$ dans la forme normale de ψ est réduit à 0. □

II.3 Spectre des opérateurs de composition hyperboliques

Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ hyperbolique qu'on suppose ne pas être un automorphisme de $\mathbb{B}_N$. L'objet de cette partie est de décrire le spectre de C_ϕ. Il convient de rappeler, dans le cas particulier des homographies hyperboliques, le résultat de M. Jury, qui donne le rayon spectral :

Théorème II.3.1 ([18], Corollaire 13**).** *Si ϕ est une homographie hyperbolique de la boule $\mathbb{B}_N$ de coefficient de dilatation α, alors le rayon spectral de C_ϕ agissant sur $H^2(\mathbb{B}_N)$ est $\alpha^{-N/2}$.*

Comme on peut le deviner, la forme normale de ϕ est l'outil essentiel dont on se servira pour démontrer le théorème II.1.3. Précisément, si ψ est la forme normale de ϕ, nous allons chercher à décrire directement le spectre de C_ψ (qui sera évidemment le même que celui de C_ϕ). Pour cela, nous avons à définir l'espace sur lequel agit l'opérateur C_ψ. On note $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ l'image de $H^2(\mathbb{B}_N)$ par la transformation de Cayley :

$$\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N) = \left\{F : \mathbb{H}_N \to \mathbb{C} \text{ holomorphe; } F\circ\sigma_c \in H^2(\mathbb{B}_N)\right\}.$$

$\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ hérite de la norme de $H^2(\mathbb{B}_N)$, i.e. $\|F\|_{\mathscr{H}^2} = \|F\circ\sigma_c\|_{H^2}$, si bien que C_{σ_c} est une transformation unitaire de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ sur $H^2(\mathbb{B}_N)$. Si on calcule le jacobien de σ_c, il apparaît facilement que la norme sur $\mathscr{H}_2(\mathbb{H}_N)$ est donnée par

$$\|F\|^2_{\mathscr{H}^2} = \kappa^2\int_{\partial\mathbb{H}_N}\frac{|F(z,w)|^2}{|z+i|^{2N}}d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N},$$

où κ est une constante que nous n'expliciterons pas, et où $d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N}$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\partial\mathbb{H}_N$.

C_ϕ, comme opérateur sur $H^2(\mathbb{B}_N)$ et C_ψ comme opérateur sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ sont unitairement semblables, si bien qu'ils partagent certaines propriétés, notamment le spectre (et les propriétés de dynamiques que nous verrons dans la partie suivante). Nous pouvons maintenant donner la démonstration du théorème II.1.3.

II.3.1 Spectre de C_ϕ quand ϕ n'agit pas comme un automorphisme sur l'intersection d'une droite complexe avec la boule

Dans ce paragraphe, nous allons décrire le spectre de C_ϕ quand $\varepsilon_\phi = 0$, c'est-à-dire quand la forme normale de ϕ est de la forme $\psi(z,w) = (\lambda z + b, Du, Av + c)$ avec $\Im m(b) > 0$. On vérifie que ceci correspond bien au cas où la première coordonnée de ψ, restreinte à $\mathbb{C}e_1$ n'agit pas comme un automorphisme du demi-plan supérieur.

Théorème II.3.2. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes, $\sigma(C_\phi) = \overline{D}(0,\lambda^{N/2})$.*

Nous allons donner deux démonstrations de ce théorème. La première, clairement la plus efficace, s'avère suffisamment simple et générale pour être exploitée à profit, même quand $\Im m(b) = 0$ (cf. paragraphe suivant) ; la deuxième a l'intérêt, en plus d'être alternative (en fait elle n'est seulement que partiellement alternative, comme nous allons le voir !) d'être une adaptation de celle utilisée par C. Cowen pour décrire le spectre de C_ϕ quand ϕ est un automorphisme de $\mathbb{B}_N$ dans [11].

II.3.1.1 Première démonstration du théorème II.3.2

Première démonstration du théorème II.3.2. Nous savons déjà par le théorème II.3.1 que $\sigma(C_\phi)$ est contenu dans le disque fermé $\overline{D}(0,\lambda^{N/2})$. Il suffit donc de montrer que tout élément de $D(0,\lambda^{N/2})\setminus\{0\}$ est une valeur propre de C_ϕ. Pour $s\in\mathbb{C}$, définissons

$$F_s(z,u,v) = \left(z + \frac{b}{\lambda - 1}\right)^s.$$

Il est clair que $F_s \circ \psi = \lambda^s F_s$, et l'on s'intéresse alors aux valeurs de s pour lesquelles F_s appartient à $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. Or, si on pose $it = b/(\lambda - 1)$ avec $t > 0$, on obtient

$$\|F_s\|^2 = \int_{\partial\mathbb{H}_N} \frac{|(z+it)^s|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \lesssim \int_{\partial\mathbb{H}_N} \frac{1}{|z+i|^{2(N-\Re e(s))}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N}$$

et cette dernière intégrale converge si et seulement si $\Re e(s) < N/2$. Ainsi, tout complexe λ^s tel que $\Re e(s) < N/2$ est une valeur propre de C_ϕ, ce qui termine cette démonstration du théorème. □

II.3.1.2 Deuxième démonstration du théorème II.3.2

Nous allons d'abord rappeler le résultat sur le spectre de C_ϕ sur $H^2(\mathbb{D})$ donné par C. C. Cowen dans [11] en en proposant, dans un souci d'exhaustivité, une démonstration différente de celle de [11]. Notre résultat sera également plus précis parce qu'il décrira précisément le spectre ponctuel. Seul le premier point de la proposition suivante nous sera utile pour la deuxième démonstration du théorème II.3.2.

Proposition II.3.3. *Soit ϕ une homographie hyperbolique de $\mathbb{D}$ de coefficient de dilatation α. Le spectre $\sigma(C_\phi)$ de C_ϕ sur $H^2(\mathbb{D})$ est donné par*

1. $\sigma(C_\phi) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \alpha^{-1/2}\}$ *si ϕ n'est pas un automorphisme ;*
2. $\sigma(C_\phi) = \{z \in \mathbb{C}, \alpha^{1/2} \leq |z| \leq \alpha^{-1/2}\}$ *si ϕ est un automorphisme.*

De plus, $\forall \mu \in \overbrace{\sigma(C_\varphi)}^{\circ}$, *$\mu$ est une valeur propre de C_ϕ.*

Démonstration. La démonstration du premier point est identique à celle proposée dans la première démonstration du théorème II.3.2 dans le cas précis du disque. Néanmoins, les points (1) et (2) se démontrent en même temps. Rappelons qu'une homographie hyperbolique ϕ du disque est conjuguée à une homographie ψ du demi-plan $\mathbb{P}_+$ qui peut s'écrire, à automorphismes près, $z \longmapsto \lambda z + b$ avec $\lambda > 1$ et $\Re e(b) \geq 0$. Il suffit de trouver $\sigma(C_\psi)$. En posant, comme dans la première preuve,

$$F_s(z) = \left(z + \frac{b}{\lambda - 1}\right)^s$$

pour $s \in \mathbb{R}$, on a $F_s \circ \psi = \lambda^s F_s$ et

$$\|F_s\|_{\mathscr{H}^2(\mathbb{P}_+)} = \kappa \int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\left(x + \frac{\Re e(b)}{\lambda-1}\right)^2 + \left(\frac{\Im m(b)}{\lambda-1}\right)^2\right)^s}{x^2+1} dx.$$

Quand $\Im m(b) \neq 0$, cette dernière intégrale est finie si et seulement si $\Re e(s) < 1/2$, tandis qu'elle est finie si et seulement si $-1/2 < \Re e(s) < 1/2$, quand $\Im m(b) = 0$. On retrouve bien le point (1) comme dans la première démonstration, et le point (2) s'obtient en procédant de même avec ψ^{-1} et en remarquant que $C_{\psi^{-1}} = C_\psi^{-1}$. □

Nous passons maintenant à la deuxième démonstration du théorème II.3.2. Elle est réellement moins bonne que celle proposée dans le paragraphe précédent, car elle est basée de toute façon sur celle-ci, dans le cas particulier (plus simple...) du disque. Elle repose ensuite sur un principe de subordination qui permet de relier des propriétés (leur norme par exemple) de fonctions dans des espaces de Hardy de $\mathbb{B}_N$ à des propriétés sur des « restrictions » à des sous-espaces de $\mathbb{C}^d$, $1 \leq d < N$, de ces mêmes fonctions dans des espaces de Bergman à poids de la boule $\mathbb{B}_d$. On rappelle la définition des espaces de Bergman à poids :

Définition II.3.4. Soient $\gamma > -1$ et $1 \leq p < \infty$. L'espace de Bergman $A^p_\gamma(\mathbb{B}_N)$ à poids d'ordre γ est l'espace des fonctions holomorphes dans la boule qui appartiennent à l'espace $L^p_\gamma(\mathbb{B}_N)$, défini par

$$L^p_\gamma(\mathbb{B}_N) = \left\{ f : \mathbb{B}_N \to \mathbb{C} \text{ Lebesgue mesurable} ;\ \|f\|_{A^p_\gamma} := \|f\|^p_{p,\gamma} = \int_{\mathbb{B}_N} |f(Z)|^p \left(1 - |Z|^2\right)^\gamma dv(Z) < \infty \right\},$$

où dv est la mesure de Lebesgue sur la boule. Autrement dit,

$$A^P_\gamma(\mathbb{B}_N) = H(\mathbb{B}_N) \cap L^p_\gamma(\mathbb{B}_N).$$

Il est bien connu que $\left(A^p_\gamma(\mathbb{B}_N), \|.\|_{A^p_\gamma}\right)$ est un espace de Banach. Dans le cas du disque ($N = 1$), on écrira directement en coordonnées polaires :

$$\|f\|^p_{p,\gamma} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left|f\left(re^{i\vartheta}\right)\right|^p \left(1-r^2\right)^\gamma r dr d\vartheta < \infty.$$

Le résultat suivant précise ce principe de subordination :

Lemme II.3.5 ([21], Paragraphe 1.4.4, Page 14). *Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{B}_N$; on définit f_{e_1} la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par $f_{e_1}(\lambda) = f(\lambda e_1)$. Si f ne dépend que de la première coordonnée z_1, alors*

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{B}_N)} = C\|f_{e_1}\|_{A^p_{N-2}(\mathbb{D})},$$

où la constante C ne dépend que de N et de p.

La proposition suivante renseigne sur le spectre d'un opérateur de composition de type hyperbolique sur un espace de Bergman à poids du disque, connaissant le spectre de celui-ci sur $H^2(\mathbb{D})$ (cf. proposition II.3.3).

Proposition II.3.6. *Soit ϕ une homographie hyperbolique sur $\mathbb{D}$ qui n'est pas un automorphisme (dont le point de Denjoy-Wolff est 1), et soit $\gamma \geq 0$. Tout point du disque $D\left(0, \alpha^{-(\gamma+2)/2}\right)$ est une valeur propre de C_ϕ sur $A^2_\gamma(\mathbb{D})$.*

Démonstration. On pose $\beta = (\gamma+2)^{-1}$ et $\mu \in D\left(0, \alpha^{-(\gamma+2)/2}\right)$. Comme $\left|\mu^\beta\right| < \alpha^{-1/2}$, d'après la proposition II.3.3, μ^β est une valeur propre (ponctuelle) de C_ϕ sur $H^2(\mathbb{D})$. Soit donc $f \in H^2(\mathbb{D})$ un vecteur propre de C_ϕ associé à cette valeur propre μ^β ; il vient

$$f^{\gamma+2} \circ \varphi = (f \circ \varphi)^{\gamma+2} = \mu^{\beta(\gamma+2)} f^{\gamma+2} = \mu f^{\gamma+2},$$

et donc $f^{\gamma+2}$ est solution de l'équation de Schröder $f \circ \varphi = \mu f$. Posons alors $g = f^{\gamma+2}$. Il reste à vérifier que $g \in A^2_\gamma(\mathbb{D})$. Or, d'après le théorème de Hardy-Littlewood (cf. [14, Théorème 5.11]),

$$\begin{aligned}
\|g\|^2_{2,\gamma} &\leq 2\int_0^1 (1-r)^\gamma M^2_g(r)\,dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} (1-r)^\gamma \left|g\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 dr d\theta \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

où M_g est la moyenne de g sur le cercle de rayon r. □

On passe à la deuxième démonstration du théorème II.3.2 proprement dite.

Deuxième démonstration du théorème II.3.2. On rappelle que ϕ est une homographie hyperbolique dont l'homographie hyperbolique conjuguée dans $\mathbb{H}_N$ peut s'écrire sous la forme $\psi(z,u,v) = (\lambda z + b, Du, Av + c)$, avec, en l'occurrence, $\Im m(b) > 0$. On définit la fonction $\psi_{e_1} : z \longmapsto \lambda z + b$ qui est une homographie hyperbolique du demi-plan $\mathbb{P}_+$; via la première coordonnée de la transformation de Cayley (qui ne dépend que de z) et à automorphismes près, ψ_{e_1} est conjuguée à l'application $\phi_{e_1} : z \in \mathbb{D} \longmapsto \phi_1(ze_1)$, où ϕ_1 est la première coordonnée de ϕ. De fait, ϕ_{e_1} est une homographie hyperbolique dans $\mathbb{D}$, qui n'est pas un automorphisme, et de coefficient de dilatation α. On fixe $\mu \in \left\{z, |z| \leq \alpha^{-1/2}\right\}$ et $\gamma = N-2$. D'après la proposition II.3.6, il existe une fonction F dans $A^2_\gamma(\mathbb{D})$ qui est un vecteur propre de $C_{\phi_{e_1}}$ comme opérateur agissant sur cet espace, associé à la valeur propre μ. On définit alors la fonction f définie par $f(z,w) = F(z)$, pour tout $(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1}$. D'une part, $f \in H^2(\mathbb{B}_N)$ d'après le lemme II.3.5, et d'autre part on a

$$f \circ \phi(z,w) = F \circ \phi_{e_1}(z) = \mu F(z) = \mu f(z,w) \text{ pour tout } (z,w) \in \mathbb{B}_N,$$

ce qui montre que tout point du disque $\left\{z, |z| \leq \alpha^{-1/2}\right\}$ est valeur propre (ponctuelle) de C_ϕ sur $H^2(\mathbb{B}_N)$. On conclut en appliquant le théorème II.3.1. □

II.3.2 Spectre de C_ϕ quand ϕ agit comme un automorphisme sur l'intersection d'une droite complexe avec la boule - Introduction

On est maintenant dans la situation où la forme normale de ϕ est donnée par $\psi(z,w) = (\lambda z, Du, Av)$. Dans ce cas, la démonstration du paragraphe précédent (la première pour fixer les idées) ne permet pas de décrire le spectre totalement, car les fonctions $F_s(z,u,v) = z^s$, qui vérifient toujours $F_s \circ \psi = \lambda^s F_s$, appartiennent à $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ si et seulement si $-N/2 < \Re e(s) < N/2$, ce qui montre seulement que la couronne $\left\{\lambda^{-N/2} < \Re e(s) < \lambda^{N/2}\right\}$ est contenue dans $\sigma_p\left(C_\phi\right)$. Ceci reste suffisant pour déterminer le spectre de C_ϕ quand ϕ est un automorphisme de $\mathbb{B}_N$ (car on peut considérer $C_{\phi^{-1}} = C_\phi^{-1}$). Si ϕ n'est pas un automorphisme, la démonstration précédente donne uniquement la première couronne apparaissant dans le théorème II.1.3. Pour obtenir le reste du spectre, nous allons décomposer $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ en somme de sous-espaces bien adaptés.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^s$ (ici $s = N-1-p_\phi$), on note $\mathscr{H}_\alpha$ l'ensemble de toutes les fonctions F de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ qui peuvent s'écrire $F(z,u,v) = F_\alpha(z,u)v^\alpha$, où v^α désigne le produit $\prod_{i=1}^s v_i^{\alpha_i}$; il est clair que $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N) = \oplus^\perp_{\alpha\in\mathbb{N}^s}\mathscr{H}_\alpha$. On ordonne $\mathbb{N}^s$ par $\prec$ de la façon suivante :

$$\alpha \prec \beta \text{ ssi } \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \text{ou} \\ |\alpha| = |\beta| \text{ et il existe } j \text{ tel que } \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{j-1} = \beta_{j-1} \text{ et } \alpha_j < \beta_j. \end{cases}$$

Alors, pour $F \in \mathscr{H}_\alpha$, $C_\phi(F) = F_\alpha(\lambda z, Du)(Av)^\alpha$, et par linéarité et du fait que A est supposée triangulaire supérieure, il vient

$$C_\phi(F) \in \overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^s \\ \beta\prec\alpha}}} \mathscr{H}_\beta.$$

Si maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathscr{K}_n := \overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s \\ |\alpha|\geq n}}} \mathscr{H}_\alpha,$$

alors C_ϕ est triangulaire supérieur suivant la décomposition

$$\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N) = \overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s \\ |\alpha|<n}}} \mathscr{H}_\alpha \overset{\perp}{\bigoplus} \mathscr{K}_n,$$

en respectant l'ordre $\prec$ sur $\mathbb{N}^s$, et est diagonal si A est elle-même diagonale. Soit enfin T_α le bloc diagonal de C_ϕ correspondant au sous-espace $\mathscr{H}_\alpha$. T_α est aussi clairement le bloc diagonal correspondant à $\mathscr{H}_\alpha$ de l'opérateur de composition, plus simple, associé à l'application $\tilde{\psi}$ définie par

$$\tilde{\psi}(z,u,v) = \left(\lambda z, Du, \tilde{A}v\right),$$

où $\tilde{A}$ est la matrice diagonale constituée des valeurs propres de A. Le fait que $\tilde{\psi}$ envoie bien $\mathbb{H}_N$ dans lui-même provient de l'inégalité $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$ et de la définition de $\mathbb{H}_N$ lui-même.

On va avoir à utiliser un résultat concernant le spectre d'un opérateur triangulaire ou diagonal sur une somme finie de sous-espaces d'un espace vectoriel donné (cf. par exemple [2, Lemma 5.3]) :

Lemme II.3.7. *Soit X un espace de Banach qui se décompose en somme finie de sous-espaces $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_n$. Soit également $T \in \mathscr{L}(X)$ tel que sa matrice dans la décomposition précédente de X soit triangulaire supérieure, de blocs diagonaux $T_{i,i}$. Alors $\sigma(T) \subset \cup_{i=1}^n \sigma(T_{i,i})$, et il y a égalité si la matrice de T est diagonale.*

La démonstration de ce lemme est exactement celle de [2, Lemma 5.3] et ne pose pas de difficultés.

Ainsi, grâce à la décomposition de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$, et en utilisant le lemme précédent, on obtient directement le résultat suivant :

Lemme II.3.8. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\sigma\left(C_\psi\right) \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s\\|\alpha|<n}} \sigma\left(T_\alpha\right) \cup \overline{D\left(0, \left\|C_{\psi|\mathscr{K}_n}\right\|\right)}.$$

Étant donné le lemme II.3.8, notre stratégie est maintenant assez claire :

Étape 1. Montrer que $\|C_{\psi|\mathscr{K}_n}\|$ tend vers zéro quand n tend vers ∞, ce qui donnera, d'après le lemme ci-dessus,

$$\sigma\left(C_\psi\right) \subset \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^s} \sigma\left(T_\alpha\right) \cup \{0\}.$$

Étape 2. En utilisant l'opérateur $C_{\tilde{\psi}}$, qui est diagonal, de blocs diagonaux égaux aux T_α, montrer que

$$\sigma\left(T_\alpha\right) \subset \left\{ z\in\mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \right\},$$

où $\mu_1,\dots,\mu_s$ sont les valeurs propres de A, écrites en comptant leur multiplicité.

Étape 3. Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^s$ et pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que

$$\lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} < |z| < \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i},$$

exhiber un vecteur propre de C_ψ correspondant à la valeur propre z.

À la fin de ces trois étapes, nous pouvons préciser l'énoncé du théorème II.1.3 de la façon suivante :

Théorème II.3.9. *Soit $\phi\in LFM\left(\mathbb{B}_N\right)$ hyperbolique telle que $\varepsilon_\phi=1$, et soit $\psi(z,w)=(\lambda z, Du, Av)$ une forme normale de ϕ. Soient également $\mu_1,\dots,\mu_s$ les valeurs propres de A. On a*

$$\sigma\left(C_\phi\right) = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}^s}\left\{ z\in\mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \right\} \cup \{0\}.$$

On procède maintenant à la démonstration détaillée de ce théorème.

II.3.3 Spectre de C_ϕ quand ϕ agit comme un automorphisme sur l'intersection d'une droite complexe avec $\mathbb{B}_N$ - Étape 1

Comme nous l'avons déjà dit, notre objectif est ici de démontrer le lemme suivant :

Lemme II.3.10. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes,*

$$\left\|C_{\psi|\mathscr{K}_n}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Démonstration. Soit $A=U\Sigma V$ la décomposition en valeurs singulières de A ; U et V sont deux matrices unitaires et Σ est la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les racines carrées de la matrice AA^* :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} |\mu_1| & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\mu_s|\end{bmatrix} \text{ avec en particulier } |\mu_i|\in\left[0,\sqrt{\lambda}\right).$$

On factorise alors C_ψ en $C_\psi = C_{\tau_1}\circ C_{\psi_\Sigma}\circ C_{\tau_2} = C_{\tau_2\circ\psi_\Sigma\circ\tau_1}$ où

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tau_1:(z,w) & \mapsto & (z,u,Vv)\\ \psi_\Sigma:(z,w) & \mapsto & (\lambda z, Du, \Sigma v)\\ \tau_2:(z,w) & \mapsto & (z,u,Uv)\end{array}\right. .$$

Comme τ_1 et τ_2 sont des automorphismes de $\mathbb{H}_N$ qui laissent invariants à la fois $\mathscr{K}_n$ et $\mathscr{K}_n^{\perp}$, $\left\|C_{\psi|\mathscr{K}_n}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dès que

$$\left\|C_{\psi_\Sigma|\mathscr{K}_n}\right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On introduit $\psi_0(z,u,v) = \left(\lambda z, Du, \sqrt{\lambda} v\right)$; ψ_0 est un automorphisme de $\mathbb{H}_N$, donc C_{ψ_0} est inversible sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. Pour $F \in \mathscr{H}_\alpha$, $F(z,u,v) = F_\alpha(z,u)\, v^\alpha$, on a parallèlement

$$\begin{aligned} C_{\psi_0}(F) &= F_\alpha(\lambda z, Du)\sqrt{\lambda}^{|\alpha|} v^\alpha \\ C_{\psi_\Sigma}(F) &= F_\alpha(\lambda z, Du)\left(\prod_{i=1}^{s}|\mu_i|^{\alpha_i}\right) v^\alpha, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$C_{\psi_\Sigma|\mathscr{K}_n} = \mathscr{A} \circ C_{\psi_0},$$

où $\mathscr{A}$ est l'opérateur diagonal sur $\mathscr{K}_n = \oplus^{\perp}_{|\alpha|\geq n}\mathscr{H}_\alpha$ de bloc diagonal correspondant à $\mathscr{H}_\alpha$ égal à $\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} I$. Par conséquent

$$\left\|C_{\psi_\Sigma|\mathscr{K}_n}\right\| \leq \|\mathscr{A}\| \cdot \left\|C_{\psi_0}\right\|.$$

En outre,

$$\|\mathscr{A}\| = \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^s \\ |\alpha|\geq n}} \prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \leq \left(\frac{\max_{1\leq i\leq s}|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^n,$$

et finalement

$$\left\|C_{\psi_\Sigma|\mathscr{K}_n}\right\| \leq \|C_{\psi_0}\| \left(\frac{\max_{1\leq i\leq s}|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

puisque $|\mu_i| < \sqrt{\lambda}$ pour tout i. □

II.3.4 Spectre de C_ϕ quand ϕ agit comme un automorphisme sur l'intersection d'une droite complexe avec $\mathbb{B}_N$ - Étape 2

La proposition suivante donne une majoration du spectre de T_α :

Proposition II.3.11. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes,*

$$\sigma(T_\alpha) \subset \left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i}\right\}.$$

Démonstration. Soit P_α la projection orthogonale sur $\mathscr{H}_\alpha$. Comme $T_\alpha = C_{\tilde{\psi}} \circ P_\alpha$, il s'agit de montrer que

$$\sigma\left(C_{\tilde{\psi}|\mathscr{H}_\alpha}\right) \subset \left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i}\right\},$$

où on rappelle que $\tilde{\psi}(z,u,v) = \left(\lambda z, Du, \tilde{A}v\right)$ avec

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \mu_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_s \end{bmatrix}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, on introduit l'automorphisme de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ défini par $\psi_0(z,u,v) = \left(\lambda z, Du, \sqrt{\lambda} v\right)$. On sait (cf. [19] ou paragraphe II.3.1.2 ci-dessus) que

$$\sigma\left(C_{\psi_0}\right) = \left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\right\}.$$

Par suite, comme $\mathscr{H}_\alpha$ et $\mathscr{H}_\alpha^\perp$ sont laissés stable par C_{ψ_0},

$$\sigma\left(C_{\psi_{0|\mathscr{H}_\alpha}}\right) \subset \sigma\left(C_{\psi_0}\right) = \left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\right\}.$$

En outre, pour $F \in \mathscr{H}_\alpha$, $F\,(z,u,v) = F_\alpha\,(z,u)\,v^\alpha$, on a

$$\begin{aligned} C_{\psi_0}\,(F) &= F_\alpha\,(\lambda z, Du)\,\sqrt{\lambda}^{|\alpha|}\,v^\alpha \\ C_{\tilde{\psi}}\,(F) &= F_\alpha\,(\lambda z, Du)\left(\prod_{i=1}^{s}\mu_i^{\alpha_i}\right)v^\alpha, \end{aligned}$$

si bien que $C_{\tilde{\psi}|\mathscr{H}_\alpha} = \dfrac{\prod_{i=1}^{s}\mu_i^{\alpha_i}}{\sqrt{\lambda}^{|\alpha|}}C_{\psi_{0|\mathscr{H}_\alpha}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sigma\left(C_{\tilde{\psi}_{|\mathscr{H}_\alpha}}\right) &= \frac{\prod_{i=1}^{s}\mu_i^{\alpha_i}}{\sqrt{\lambda}^{|\alpha|}}\sigma\left(C_{\psi_{0|\mathscr{H}_\alpha}}\right) \\ &\subset \left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} \leq |z| \leq \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i}\right\}. \end{aligned}$$

□

En réalité, l'inclusion obtenue dans la proposition précédente est une égalité ; l'inclusion inverse est l'objet du paragraphe suivant.

II.3.5 Spectre de C_ϕ quand ϕ agit comme un automorphisme sur l'intersection d'une droite complexe avec $\mathbb{B}_N$ - Étape 3

La proposition suivante achève la démonstration du théorème II.3.9 :

Proposition II.3.12. *Avec les notations et sous les hypothèses précédentes,*

$$\sigma_p\left(C_{\psi|\mathscr{H}_\alpha}\right) \supset \left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} < |z| < \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i}\right\} \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^s.$$

En particulier, on a

$$\sigma_p\left(C_\psi\right) \supset \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^s}\left\{z \in \mathbb{C},\, \lambda^{-N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i} < |z| < \lambda^{N/2}\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{|\mu_i|}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\alpha_i}\right\}.$$

Démonstration. On fixe $\alpha \in \mathbb{N}^s$. Pour $t + il \in \mathbb{C}$, soit la fonction holomorphe F définie sur $\mathbb{H}_N$, par F : $(z,u,v) \longmapsto z^{t+il}\tilde{v}(v)^\alpha$, avec $\tilde{v} = (v(1),\ldots,v(s))$ où, pour $1 \leq i \leq s$, $v(i) \in (\mathbb{C}^s)^*$ est le vecteur propre de la transposée A^T de A associé à la valeur propre μ_i ; $\tilde{v}^\alpha$ désigne le produit $\tilde{v}^\alpha = \prod_{i=1}^{s} v(i)^{\alpha_i}$. Remarquons que

$$\begin{aligned} C_A\,(\tilde{v}) &= \tilde{v} \circ A \\ &= \prod_{i=1}^{s}\left(v\,(i) \circ A\right)^{\alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^{s}\left(A^T \circ v\,(i)\right)^{\alpha_i} \\ &= \prod_{i=1}^{s}\mu_i^{\alpha_i}\,v\,(i)^{\alpha_i}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$C_\psi(F) = \lambda^{t+il}\left(\prod_{i=1}^{s}\mu_i^{\alpha_i}\right)F.$$

On s'intéresse maintenant aux valeurs de $t+il$ pour lesquelles la fonction F est dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. En écrivant $v(i)(v) = a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,s}v_s$ et en développant le produit $\tilde{v}^\alpha(v) = \prod_{i=1}^{s} v(i)^{\alpha_i}(v)$, il apparaît que cela revient à trouver les valeurs de $t+il$ pour lesquelles la fonction $z^{t+il}v^\alpha$ appartient à $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. Admettons un instant que ceci est vrai si et seulement si $\frac{-N}{2} - \frac{|\alpha|}{2} < t < \frac{N}{2} - \frac{|\alpha|}{2}$. Alors, quand t varie dans cet intervalle, et quand l varie dans $\mathbb{R}$, λ^{t+il} décrit la couronne

$$\left\{\frac{\lambda^{-N/2}}{\lambda^{|\alpha|/2}} < |z| < \frac{\lambda^{N/2}}{\lambda^{|\alpha|/2}}\right\},$$

ce qui donne bien la proposition. Étudions donc $\|z^{t+il}v^\alpha\|_{\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)}$:

$$\begin{aligned}\left\|z^{t+il}v^\alpha\right\|_{\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)} &= \int_{\partial\mathbb{H}_N} \frac{|z|^{2t}|v^\alpha|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{C}^{N-1}} \frac{\left(x^2+\|(u,v)\|^4\right)^t \prod_{i=1}^{s}\left|v_i^{\alpha_i}\right|^2}{\left(x^2+\left(1+\|(u,v)\|^2\right)^2\right)^N} dudvdx,\end{aligned}$$

où on a posé $z = x + i\|(u,v)\|^2$ dans la dernière intégrale. On intègre alors en coordonnées polaires dans l'intégrale dépendant de (u,v) dans $\mathbb{C}^{N-1}$, et on pose

$$(u,v) = r\left(\xi_{2,1}+i\xi_{2,2},\ldots,\xi_{N-s,1}+i\xi_{N-s,2},\xi_{N-s+1,1}+i\xi_{N-s+1,2},\ldots,\xi_{N,1}+i\xi_{N,2}\right)$$

avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\xi := (\xi_{2,1},\xi_{2,2},\ldots,\xi_{N-s,1},\xi_{N-s,2},\xi_{N-s+1,1},\xi_{N-s+1,2},\ldots,\xi_{N,1},\xi_{N,2}) \in \mathscr{S}_{2(N-1)-1}$. On écrit alors

$$\prod_{i=1}^{s}\left|v_i^{\alpha_i}\right|^2 = r^{2|\alpha|}\underbrace{\prod_{i=1}^{s}\left|\xi_{N-s+i,1}+i\xi_{N-s+i,2}\right|^{2\alpha_i}}_{:=C_\alpha(\xi)},$$

et il vient

$$\begin{aligned}&\|F\|_{\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)} = \\ &\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty}\int_{\mathscr{S}_{2(N-1)-1}} \frac{\left(x^2+r^4\right)^t r^{2|\alpha|+2(N-1)-1}C_\alpha(\xi)}{\left(x^2+(1+r^2)^2\right)^N} d\sigma_{\mathscr{S}_{2(N-1)-1}}(\xi)\,drdx = \\ &\int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty} \frac{\left(x^2+r^4\right)^t r^{2|\alpha|+2(N-1)-1}}{\left(x^2+(1+r^2)^2\right)^N}\int_{\mathscr{S}_{2(N-1)-1}} C_\alpha(\xi)\,d\sigma_{\mathscr{S}_{2(N-1)-1}}(\xi)\,drdx.\end{aligned}$$

Comme $\mathscr{S}_{2(N-1)-1}$ est bornée et comme $C_\alpha(\xi)$ est minorée par une constante strictement positive et majorée sur $\mathscr{S}_{2(N-1)-1}$, en utilisant le changement de variable $r \longmapsto r^2$, on déduit de ce qui précède que F est dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ si et seulement si

$$I_{t,\alpha,N} := \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\left(x^2+r^2\right)^t r^{|\alpha|+N-2}}{\left(x^2+(1+r)^2\right)^N} drdx < +\infty.$$

Pour conclure, on fait appel au lemme suivant :

Lemme II.3.13. *Soient $e, f, g \in \mathbb{R}$. L'intégrale*

$$\int_0^1 \int_0^1 x^e y^f \left(x^2+y^2\right)^g dxdy$$

est finie si et seulement si $e+f+2g > -2$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul direct

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 x^e y^f \left(x^2+y^2\right)^g dxdy & < & \infty \\
& \Updownarrow & \text{par le changement de variable } y \longmapsto y^{f+1} \\
\displaystyle\int_0^1 x^e \int_0^1 \left(x^2+y^{\frac{2}{f+1}}\right)^g dydx & < & \infty \\
& \Updownarrow & \\
\displaystyle\int_0^1 x^{e+2g} \int_0^1 \left(1+\left(\frac{y}{x^{f+1}}\right)^{\frac{2}{f+1}}\right)^g dydx & < & \infty \\
& \Updownarrow & \text{changement de variable } y \longmapsto \frac{y}{x^{f+1}} \\
\displaystyle\int_0^1 x^{e+f+2g+1} \int_0^1 (1+y)^g dydx & < & \infty
\end{array}$$

ce qui est équivalent à $e+f+2g+1 > -1$, comme attendu. □

On revient à l'étude de l'intégrabilité de $I_{t,\alpha,N}$. Sur le compact $[0,1]\times[0,1]$, il suffit d'étudier l'intégrabilité de $(r,x) \longmapsto r^{N+|\alpha|-2}\left(x^2+r^2\right)^t$, puisque $\left(x^2+(1+r)^2\right)$ est plus grand que 1. En vertu du lemme précédent, l'intégrabilité de cette fonction sur $[0,1]\times[0,1]$ est équivalente à la condition $t > -\frac{N}{2} - \frac{|\alpha|}{2}$.

Sur $[1,+\infty]\times[1,+\infty]$, on est ramené à étudier l'intégrabilité de

$$(r,x) \longmapsto r^{N+|\alpha|-2}\left(x^2+r^2\right)^{t-N}.$$

Par les changements de variable $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $r \longmapsto \frac{1}{r}$, on se retrouve dans la situation du lemme II.3.13 pour la fonction

$$(x,r) \longmapsto r^{N-|\alpha|-2t} x^{-2t+2N-2}\left(x^2+r^2\right)^{t-N}.$$

Un calcul simple assure que $I_{t,\alpha,N}$ est finie si et seulement si $t < \frac{N}{2} - \frac{|\alpha|}{2}$, ce qui fournit l'autre inégalité attendue.

Sur $[0,1]\times[1,+\infty]$ et $[1,+\infty]\times[0,1]$, on obtient sans difficultés des conditions moins restrictives que $t < \frac{N}{2} - \frac{|\alpha|}{2}$. □

Les deux exemples suivants vont illustrer le théorème II.3.9, et mettre en évidence que deux opérateurs de composition hyperboliques ayant le même spectre peuvent avoir des signatures totalement différentes ; de même, deux opérateurs de composition hyperboliques peuvent avoir des spectres en apparence différents, et avoir une signature semblable (pas identique bien entendu !)

Exemple II.3.14. Soient $\psi_1(z,w) = (4z, w)$ et $\psi_2(z,w) = (4z, w/10)$ deux homographies hyperboliques agissant sur $\mathbb{H}_2$. Une application du théorème II.3.9 donne

$$\sigma\left(C_{\psi_1}\right) = \bigcup_{n\geq 0}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq |z| \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \cup \{0\} := \bigcup_{n\geq 0} C_n \cup \{0\}.$$

Les couronnes C_n et C_{n+1} s'intersectent, et le spectre de C_{ψ_1} n'a donc pas l'apparence d'une réunion de couronnes : il s'agit du disque $\overline{D}(0,4)$. Ce phénomène ne se produit pas pour C_{ψ_2}, car dans ce cas, les couronnes sont disjointes. On remarque pourtant que leurs signatures sont semblables : le paramètre ε_ϕ est égal à 1 dans les deux cas.

Ainsi, même quand ϕ agit comme un automorphisme sur l'intersection d'une droite complexe avec la boule, son spectre peut être un disque. Néanmoins, il convient davantage, pour de telles homographies, de voir le spectre de l'opérateur de composition associé comme une réunion de couronnes. Cette observation s'avère en effet cruciale pour l'étude de la dynamique de ces opérateurs de composition. D'ailleurs, ce sont ces propriétés de dynamique qui vont achever d'exploiter la signature d'une homographie hyperbolique, en faisant la distinction entre deux opérateurs de composition hyperboliques qui partagent le même spectre, mais qui possèdent des signatures fondamentalement différentes.

En ce sens, la connaissance de la signature sera plus ou moins équivalente à la connaissance du spectre *et* des propriétés de dynamique de l'opérateur de composition.

II.4 Dynamique des opérateurs de composition hyperboliques

II.4.1 Introduction

L'étude de la dynamique est un aspect important de la théorie des opérateurs de composition (cf. par exemple les livres [7], [16]). Dans le cas des homographies de la boule, un certain nombre de résultats partiels ont été obtenus (dans [10] pour les automorphismes de $\mathbb{B}_N$, dans [17] pour un cas particulier d'applications hyperboliques) et une étude complète dans le cadre des homographies paraboliques a été faite dans [2][1]. Notre intention dans cette partie est d'étudier complètement le cas hyperbolique et de clore ainsi le sujet de la dynamique des opérateurs de composition associés à des homographies, au moins sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{B}_N)$. Le résultat que nous démontrerons est plus précis que le théorème II.1.5 annoncé dans l'introduction. Pour l'énoncer, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition II.4.1. Soit X un espace de Banach séparable et soit $T \in \mathscr{L}(X)$. T est dit *chaotique* si T est hypercyclique et possède un ensemble dense de points périodiques.

Un point $x \in X$ est périodique pour T s'il existe $k \geq 1$ tel que $T^k(x) = x$. En observant que

$$\ker\left(T^k - I\right) = \bigoplus_{z \in \Gamma_k} \ker(T - zI),$$

où Γ_k est l'ensemble des racines $k^{\text{ème}}$ de l'unité, il est facile de vérifier que T est chaotique si et seulement T est hypercyclique et

$$\operatorname{vect}\left(\ker(T - z),\, z \in e^{2\pi i \mathbb{Q}}\right)$$

est dense dans X (cf. [3, définition 6.5 et remarque 6.7]). On renvoie au paragraphe 6.2 de [3] pour une étude de la chaoticité des opérateurs.

Voici l'énoncé complet du résultat principal de cette partie ; on observera que les propriétés de dynamique de C_ϕ sont uniquement déterminées par la signature de ϕ.

Théorème II.4.2. *Soit $\phi \in LFM(\mathbb{B}_N)$ une homographie hyperbolique injective.*

1. Si $p_\phi = N-1$, alors

(a) μC_ϕ est chaotique quand $\varepsilon_\phi = 1$ et μ appartient à la couronne $\{\lambda^{-N/2} < |\mu| < \lambda^{N/2}\}$;

[1] Un résultat pour les homographies hyperboliques a été annoncé dans [5]. Malheureusement, leur démonstration contient une erreur et le résultat lui-même n'est pas correct.

(b) μC_ϕ *est chaotique quand* $\varepsilon_\phi = 0$ *et* μ *appartient à* $\mathbb{C}\backslash\overline{D\left(0,\lambda^{-N/2}\right)}$.

En particulier, C_ϕ *est chaotique.*

2. *Si* $p_\phi < N-1$, *alors*

   (a) C_ϕ *n'est jamais hypercyclique ;*

   (b) C_ϕ *est supercyclique si et seulement si* $\varepsilon_\phi = 0$ *;*

   (c) C_ϕ *est toujours cyclique.*

On démontre d'abord la partie (1). Pour cela, on ne va pas montrer directement que vect $\left(\ker(T-z)\,,\, z\in e^{2\pi i\mathbb{Q}}\right)$ est dense, mais on va appliquer une méthode indirecte basée sur le critère de chaoticité suivant (cf. [3, Theorem 6.10]).

Théorème II.4.3 (Critère de chaoticité**).** *Soit X un espace de Banach complexe séparable et soit* $T\in\mathscr{L}(X)$. *Supposons qu'il existe un ensemble dense* $\mathscr{D}\subset X$ *et une suite d'applications* $S_n:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ *telles que*

1. $\sum T^n(x)$ *et* $\sum S_n(x)$ *sont inconditionnellement convergentes, pour tout* $x\in\mathscr{D}$ *;*
2. $T^nS_n = I$ *sur* $\mathscr{D}$ *pour tout n.*

Alors T est chaotique.

Ce critère de chaoticité est un raffinement du critère d'hypercyclicité déjà évoqué au chapitre 1, et a été établi par A. Bonilla et K. Grosse-Erdmann dans [6] en utilisant des idées de M. Taniguchi [24].

La partie la plus difficile du théorème II.4.2 est la démonstration de (2)(b). L'outil de base sera le *« outer supercyclicity criterion »*, essentiellement dû à H. N. Salas ([22]), et donné par N. Feldman, V. Miller et T. Miller dans [15, Théorème 5.1] :

Théorème II.4.4 (« Outer supercyclicity criterion »**).** *Soit X un espace de Banach et soit* $T\in\mathscr{L}(X)$. *On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel dense* $Y\subset X$ *et que, pour tout* $y\in Y$, *il existe un sous-espace vectoriel dense* $X_y\subset X$ *tel que :*

1. *il existe des fonctions* $S_n:Y\to X$ *telles que* $T^nS_ny = y$ *pour tout* $y\in Y$, *et*
2. *pour tout* $y\in Y$ *et pour tout* $x\in X_y$, $\|T^nx\|\cdot\|S_ny\|\to 0$ *quand* $n\to\infty$ *;*

Alors T est supercyclique.

La principale difficulté consiste à exhiber les sous-espaces Y et X_y et c'est, d'une façon surprenante, à ce niveau-là que les résultats du point (1) du théorème II.4.2 vont être d'un grand secours. Effectivement, par notre méthode, nous obtenons *a posteriori* que, avec les notations et sous les hypothèses du (1)(b) du théorème II.4.2, le sous-espace vect $\left(\ker\left(\mu C_\phi-\lambda\right),\, \lambda\in e^{2\pi i\mathbb{Q}}\right)$ est dense dans X. Or, il s'avère que les vecteurs de ce sous-espace ont par ailleurs un bon comportement sous l'action de C_ϕ, et ce même si ϕ ne satisfait qu'aux hypothèses de la partie (2)(b). Ceci permettra de construire Y et X_y.

Enfin, le résultat concernant la cyclicité sera une conséquence du théorème suivant (cf [2, Corollaire 6.3]) :

Théorème II.4.5. *Soit* $T\in\mathscr{L}(X)$ *tel que, pour tout* $\mu\in\mathbb{C}$, $\bigcup_{P\in\mathscr{P}_\mu}\ker P(T)$ *est dense dans* X, *où* $\mathscr{P}_\mu = \{P\in\mathbb{C}[z]\,,\, P(\mu)\neq 0\}$. *Alors T est cyclique.*

II.4.2 Démonstration de la chaoticité

Dans ce paragraphe, nous démontrons la première partie du théorème II.4.2 et en déduisons ensuite des résultats qui s'avèreront utiles pour la partie sur la supercyclicité. On commence par un lemme technique.

Lemme II.4.6. *Soit* $a\in\mathbb{R}_+$. *On a les estimations suivantes :*

$$I := \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N\\ |z|\geq a}}\frac{d\sigma}{|z+i|^{2N}} \lesssim \frac{1}{a^N} \quad et \quad \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N\\ |z|\leq a}}\frac{d\sigma}{|z+i|^{2N}} \lesssim a^N.$$

Démonstration. La démonstration consiste en un calcul direct. En passant d'abord en coordonnées polaires dans I et en faisant les changements de variable successifs $y = r^2$, $u = y^{N-1}$, et $v = \frac{u}{x^{d-1}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
I &\lesssim \int_0^{+\infty} \int_{\max\left(0,(a-x)^{1/2}\right)}^{+\infty} \frac{r^{2N-3}}{\left(x^2+r^4\right)^N} drdx \\
&\leq \int_0^{+\infty} \int_{\max(0,(a-x))}^{+\infty} \frac{y^{N-2}}{\left(x^2+y^2\right)^N} dydx \\
&\lesssim \int_0^{+\infty} \int_{\max\left(0,(a-x)^{N-1}\right)}^{+\infty} \frac{du}{x^{2N}\left(1+\left(\frac{u}{x^{N-1}}\right)^{2/(N-1)}\right)^N} dx \\
&\lesssim \int_0^{+\infty} \int_{\max\left(0,\left(\frac{a-x}{x}\right)^{N-1}\right)}^{+\infty} \frac{dv}{x^{N+1}\left(1+v^{2/(N-1)}\right)^N} dx.
\end{aligned}$$

On découpe la dernière intégrale en deux parties. La première, pour $x \geq a/2$, s'écrit

$$\int_{a/2}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{x^{N+1}\left(1+v^{2/(N-1)}\right)^N} dx = \int_{a/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{N+1}} \int_0^{+\infty} \frac{dv}{\left(1+v^{2/(N-1)}\right)^N} \lesssim \frac{1}{a^N}.$$

En utilisant

$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{(1+x^\alpha)^\beta} dx \lesssim \min\left(1, \frac{1}{c^{\alpha\beta-1}}\right),$$

la deuxième partie, sur le segment $0 \leq x \leq a/2$, s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_0^{a/2} \int_{\left(\frac{a-x}{x}\right)^{N-1}}^{+\infty} \frac{dv}{x^{N+1}\left(1+v^{2/(N-1)}\right)^N} dx &\lesssim \int_0^{a/2} \frac{x^{\left(\frac{2N}{N-1}-1\right)(N-1)}}{x^{N+1}(a-x)^{\left(\frac{2N}{N-1}-1\right)(N-1)}} dx \\
&\lesssim \int_0^{a/2} \frac{dx}{(a-x)^{N+1}} \\
&\lesssim \frac{1}{a^N}.
\end{aligned}$$

La démonstration de l'autre estimation est plus simple et repose sur un argument de volume : on vérifie facilement que les conditions $(z,w) \in \partial\mathbb{H}_N$ et $|z| \leq a$ imposent à (z,w) d'être dans le produit $D(0,a) \times B_{N-1}(0,\sqrt{a})$, où $D(0,a)$ est le disque de centre 0 et de rayon a, et où $B_{N-1}(0,\sqrt{a})$ est la boule de $\mathbb{C}^{N-1}$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{a}$. De plus, $(z,w) \longmapsto \frac{1}{|z+i|^{2N}}$ est bornée pour $(z,w) \in \partial\mathbb{H}_N$ et $|z| \leq a$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
\int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\leq a}} \frac{d\sigma}{|z+i|^{2N}} &\lesssim v\left(D(0,a) \times B_{N-1}\left(0,\sqrt{a}\right)\right) \\
&\lesssim a^N,
\end{aligned}$$

où v désigne la mesure de volume (de Lebesgue) dans $\mathbb{C}^N$. □

On se place maintenant sous les hypothèses de la partie (1) du théorème II.4.2, et on se donne une homographie ϕ dont la forme normale peut s'écrire sous la forme

$$\psi(z,w) = (\lambda z + b, Dw),$$

avec $\lambda^{-1/2}D$ unitaire, $0 \leq \Im m(b) < \lambda - 1$. On étudie la chaoticité de μC_ψ agissant sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. L'idée principale de la démonstration, inspirée de celle du théorème 6.13 dans [3], est que ψ induit un automorphisme sur son domaine caractéristique (on rappelle qu'on suppose ψ injective ; cf. paragraphe II.2.3), qui contient un point attractif pour ψ, le point ∞, et un point attractif pour ψ^{-1} qui, à automorphismes près, peut être choisi de la forme $(z_0, 0')$. En choisissant pour $\mathscr{D}$ un ensemble de fonctions (de polynômes...) qui s'annulent à la fois en ∞ et en $(z_0, 0')$, on va pouvoir appliquer le théorème II.4.3.

On entre maintenant dans les détails. Soient $\alpha = 1$ et $\beta = (z_0 - i)/(z_0 + i)$ avec $z_0 = -b/(\lambda - 1)$. Notons que $\beta \notin \mathbb{D}$ puisque $\Im m(b) \geq 0$. Pour $k \geq 0$, on définit le sous-espace $\mathscr{D}_{0,k}$ de $H^2(\mathbb{B}_N)$ comme suit :

$$\mathscr{D}_{0,k} := \left\{ (z-\alpha)^k (z-\beta)^k Q(z,w), Q \text{ polynôme en } (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1} \right\}.$$

Puisque $\alpha, \beta \notin \mathbb{D}$, en utilisant le développement en série des fonctions de $H^2(\mathbb{B}_N)$ et les propriétés hilbertiennes de cet espace, il est facile de voir que $\mathscr{D}_{0,k}$ est dense dans $H^2(\mathbb{B}_N)$ (les idées du lemme 1.48 de [3] s'adaptent aisément à ce contexte). Par souci d'exhaustivité, on donne les détails dans le lemme plus général suivant :

Lemme II.4.7. *Soient $\alpha_1, \dots \alpha_l \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Soit également $k \in \mathbb{N}$. alors le sous-espace*

$$E_{l,k} := \left\{ (z-\alpha_1)^k \dots (z-\alpha_l)^k Q(z,w), Q \text{ polynôme en } (z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1} \right\}$$

de $H^2(\mathbb{B}_N)$ est dense dans $H^2(\mathbb{B}_N)$.

Démonstration. On fait la démonstration d'abord pour $l = 1$. On pose

$$R_{1,n} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{z}{\alpha_1} \right)^i \right) \right); \tag{II.4.1}$$

clairement, $R_{1,n}^k \in E_{1,k}$; de plus, comme $(z,w) \longmapsto z^{\beta_1} w^{\beta'}$ et $(z,w) \longmapsto z^{\tilde{\gamma}_1} w^{\tilde{\gamma}'}$ sont orthogonales dans $H^2(\mathbb{B}_N)$ pour $\beta = (\beta_1, \beta') \neq \gamma = (\gamma_1, \gamma')$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^{N-1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{z}{\alpha_1} \right)^i \right\|_{H^2}^2 &\lesssim \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{|\alpha_1|^{2i}} \\ &\lesssim \frac{n}{n^2}, \text{ car } |\alpha_1| \geq 1 \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

On obtient donc, d'après (II.4.1), que $R_{1,n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On écrit maintenant

$$R_{1,n}^k - 1 = (R_{1,n} - 1) \left(\sum_{i=0}^{k-1} R_{1,n}^i \right).$$

En utilisant le fait que $|\alpha_1| \geq 1$, on majore sans difficulté $|R_{1,n}(z)|$ par 2, pour tout $z \in \mathbb{D}$, ce qui donne

$$\left\| R_{1,n}^k - 1 \right\|_{H^2} \leq 2^k \left\| R_{1,n} - 1 \right\|_{H^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit donc que $R_{1,n}^k P \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ dans $H^2(\mathbb{B}_N)$ pour tout polynôme P, ce qui assure que $E_{1,k}$ est dense, pour la norme de $H^2(\mathbb{B}_N)$, dans l'ensemble des polynômes, lui-même dense dans $H^2(\mathbb{B}_N)$.

Pour le cas général, i.e. pour l quelconque, il suffit de considérer $\prod_{j=1}^{l} R_{j,n}^k \in E_{l,k}$, où $R_{j,n}$ est défini comme dans (II.4.1), en remplaçant α_1 par α_j dans le $R_{j,n}$ correspondant, et de suivre la démarche ci-dessus, en remarquant que $\prod_{j=1}^{l} R_{j,n}^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ dans $H^2(\mathbb{B}_N)$. □

On revient maintenant à la démonstration de la chaoticité. Si on note $\mathscr{D}_k$ l'espace analogue à $\mathscr{D}_{0,k}$ dans le demi-espace,

$$\mathscr{D}_k = \left\{ P \circ \sigma_c^{-1}, P \in \mathscr{D}_{0,k} \right\},$$

où $\sigma_c : \mathbb{B}_N \to \mathbb{H}_N$ est la transformation de Cayley, $\mathscr{D}_k$ reste dense dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ et il suffit de trouver des indices k (suffisamment grands...) tels que les points (1) et (2) du théorème II.4.3 soient vérifiés par $T = \mu C_\psi$, et pour un opérateur S convenable.

On a besoin d'un autre lemme.

Lemme II.4.8. *Soit Ω le domaine caractéristique de ψ. Alors $\sigma_c^{-1}(\Omega)$ est borné.*

Démonstration. On rappelle (cf. théorème II.2.5) que

$$\Omega = \left\{ (z,w) \in \mathbb{C}^N, \Im m(z) > \|w\|^2 - \frac{\Im m(b)}{\lambda - 1} \right\}$$

et que

$$\sigma_c^{-1}(z,w) = \left(\frac{z-i}{z+i}, \frac{2w}{z+i} \right).$$

D'une part, $(z,w) \mapsto (z-i)/(z+i)$ est bornée sur Ω, puisque

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 = \frac{\Re e(z)^2 + (\Im m(z) - 1)^2}{\Re e(z)^2 + (\Im m(z) + 1)^2}$$

et

$$\Im m(z) + 1 \geq 1 - \frac{\Im m(b)}{\lambda - 1} > 0. \tag{II.4.2}$$

Notons que c'est la première fois que nous utilisons la condition $\Im m(b) \in (0, \lambda - 1)$ (cf.paragraphe II.2.2). D'autre part, $(z,w) \mapsto 2w/(z+i)$ est également bornée sur Ω puisque

$$\left\| \frac{2w}{z+i} \right\|^2 = \frac{2\|w\|^2}{\Re e(z)^2 + (\Im m(z) + 1)^2} \leq \frac{2\Im m(z)}{\Re e(z)^2 + (\Im m(z) + 1)^2},$$

et on conclut en faisant encore appel à (II.4.2). □

Le lemme précédent a la conséquence intéressante suivante. Soit $R \in \mathscr{D}_k$. Il existe un polynôme $Q(z,w)$ tel que

$$R(z,w) = \left[(z-\alpha)^k (z-\beta)^k Q(z,w) \right] \circ \sigma_c^{-1}.$$

Grâce au lemme II.4.8, il existe $M, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tels que Q, $(z-\alpha)^k$ et $(z-\beta)^k$ sont bornés, respectivement par M, C_1 et C_2 sur $\sigma_c^{-1}(\Omega)$. Ainsi, pour tout $(z,w) \in \Omega$, $R(z,w)$ est bien défini et on a les estimations suivantes :

$$|R(z,w)| \leq C_2 M \left| \frac{z-i}{z+i} - 1 \right|^k \leq \frac{C}{|z+i|^k} \tag{II.4.3}$$

$$|R(z,w)| \leq C_1 M \left| \frac{z-i}{z+i} - \frac{z_0 - i}{z_0 + i} \right|^k \leq C|z - z_0|^k. \tag{II.4.4}$$

Soit $\mathscr{C} = \mathbb{C} \backslash \overline{D(0, \lambda^{-N/2})}$ si $\Im m(b) > 0$, et $\mathscr{C} = \{\lambda^{-N/2} < |\mu| < \lambda^{N/2}\}$ si $\Im m(b) = 0$. Pour $\mu \in \mathscr{C}$, $n \geq 1$ et $R \in \mathscr{D}_k$, on définit

$$\begin{aligned} S_n(R) &= \mu^{-n} R \left(\lambda^{-n} z - \frac{\lambda^{-n} - 1}{\lambda^{-1} - 1} \lambda b, D^{-n} w \right) \\ &= \mu^{-n} R \circ \psi_n^{-1}(z,w). \end{aligned}$$

Cette formule a bien un sens, car pour tout $(z,w) \in \mathbb{H}_N$, $\psi_n^{-1}(z,w) \in \Omega$. De plus, $(\mu C_\psi)^n \circ S_n = I$. Par conséquent, il reste à montrer que la condition (1) du théorème II.4.3 est vérifiée.

ÉTAPE 1- $\sum_{n\geq 0} \|S_n(R)\|_{\mathscr{H}^2} < +\infty$ quand k est suffisamment grand et $\mu \in \mathscr{C}$.

Soit $\vartheta \in (0,1)$ tel que $|\mu|^2 > \lambda^{-\vartheta N}$. On coupe l'intégrale en deux parties :

$$\|S_n(R)\|^2_{\mathscr{H}^2} \leq |\mu|^{-2n} \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\leq\lambda^{\vartheta n}}} \frac{\left|R\left(\lambda^{-n}z - \frac{\lambda^{-n}-1}{\lambda^{-1}-1}\lambda b, D^{-n}w\right)\right|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N}$$
$$+ |\mu|^{-2n} \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\geq\lambda^{\vartheta n}}} \frac{\left|R\left(\lambda^{-n}z - \frac{\lambda^{-n}-1}{\lambda^{-1}-1}\lambda b, D^{-n}w\right)\right|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N}.$$

D'une part, comme R est borné sur Ω, le lemme II.4.6 implique

$$|\mu|^{-2n} \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\geq\lambda^{\vartheta n}}} \frac{\left|R\left(\lambda^{-n}z - \frac{\lambda^{-n}-1}{\lambda^{-1}-1}\lambda b, D^{-n}w\right)\right|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \lesssim \left(\frac{|\mu|^{-2}}{\lambda^{\vartheta N}}\right)^n.$$

D'autre part, l'inégalité (II.4.4) ci-dessus donne

$$\begin{aligned}
&|\mu|^{-2n} \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\leq\lambda^{\vartheta n}}} \frac{\left|R\left(\lambda^{-n}z - \frac{\lambda^{-n}-1}{\lambda^{-1}-1}\lambda b, D^{-n}w\right)\right|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \\
&\lesssim |\mu|^{-2n} \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\leq\lambda^{\vartheta n}}} \left|\lambda^{-n}z - \frac{\lambda^{-n}-1}{\lambda^{-1}-1}\lambda b - z_0\right|^{2k} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \\
&\lesssim |\mu|^{-2n} \int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N \\ |z|\leq\lambda^{\vartheta n}}} \left|\lambda^{-n}(z-z_0)\right|^{2k} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \\
&\lesssim \frac{|\mu|^{-2n}}{\lambda^{2(1-\vartheta)nk}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{n\geq 0} \|S_n(R)\|_{\mathscr{H}^2}$ est convergente dès que $|\mu| > \lambda^{-N/2}$, et dès que k est suffisamment grand.

ÉTAPE 2- $\sum_{n\geq 0} \left\|(\mu C_\psi)^n(R)\right\|_{\mathscr{H}^2} < +\infty$ quand k est suffisamment grand et $\mu \in \mathscr{C}$.

Pour cette étape, on doit distinguer les cas $\Im m(b) = 0$ et $\Im m(b) > 0$. Quand $\Im m(b) > 0$ (i.e. $\varepsilon_\phi = 0$), on observe que, pour tout $(z,w) \in \partial\mathbb{H}_N$,

$$\left|\lambda^n z + \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} b + i\right| \geq \Im m\left(\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1} b\right) \gtrsim \lambda^n,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left\|(\mu C_\psi)^n(R)\right\|^2_{\mathscr{H}^2} &= |\mu|^{2n} \int_{\partial\mathbb{H}_N} \frac{\left|R\left(\lambda^n z + \frac{\lambda^n-1}{\lambda-1} b, D^n w\right)\right|^2}{|z+i|^{2N}} d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N} \\
&\lesssim \left(\frac{|\mu|}{\lambda^k}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité (II.4.3) plus haut. Ainsi, pour k assez grand, $\sum_{n\geq 0} \left\|(\mu C_\psi)^n(R)\right\|_{\mathscr{H}^2}$ est convergente, et ceci est valable quelque soit la valeur de $|\mu|$.

Quand $\Im m(b) = 0$ (i. e. $b = 0$ d'après nos simplifications, cf. paragraphe II.2.2), on procède comme dans l'étape 1, en découpant l'intégrale en deux morceaux :

$$\begin{aligned}\left\|C_\psi^n(R)\right\|_{\mathscr{H}^2} &= |\mu|^{2n}\int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N\\|z|\leq\lambda^{-\vartheta n}}}|R(\lambda^n z, D^n w)|^2\,d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N}\\&\quad+|\mu|^{2n}\int_{\substack{(z,w)\in\partial\mathbb{H}_N\\|z|\geq\lambda^{-\vartheta n}}}|R(\lambda^n z, D^n w)|^2\,d\sigma_{\partial\mathbb{H}_N},\end{aligned}$$

où $\vartheta\in(0,1)$ est tel que $|\mu|^2<\lambda^{\vartheta N}$. Pour la seconde intégrale, on utilise l'inégalité (II.4.3) vérifiée par R et on fixe k suffisamment grand, de telle sorte que celle-ci devienne le terme général d'une série convergente. Pour la première intégrale, on fait appel à la partie (facile) du lemme II.4.6 pour conclure (c'est ici qu'intervient le fait que $|\mu|^2<\lambda^N$).

Application- On termine ce paragraphe en donnant une application du point (1) du théorème II.4.2 à la densité de sous-espaces constitués de vecteurs propres. On suppose que $\Im m(b)>0$ et on définit $\psi_0(z,w) = \left(\lambda z+b,\sqrt{\lambda}w\right)$. Pour $r>\lambda^{-N/2}$, d'après ce qui précéde, rC_{ψ_0} est chaotique et donc, par définition,

$$\operatorname{vect}\left(\ker\left(rC_{\psi_0}-e^{i\theta}\right),\ \theta\in\mathbb{R}\right)\ \text{est dense dans } \mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N). \tag{II.4.5}$$

On introduit alors une décomposition de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ légèrement différente de celle donnée dans la partie II.3. Pour $\alpha\in\mathbb{N}^{N-1}$, on note $\mathscr{E}_\alpha$ l'ensemble des fonctions f dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ qui peuvent s'écrire sous la forme $f(z,w)=F(z)w^\alpha$, si bien que $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ se décompose en $\oplus_{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1}}\mathscr{E}_\alpha$. Chaque $\mathscr{E}_\alpha$ est stable sous l'action de C_{ψ_0} et donc, d'après (II.4.5),

$$\operatorname{vect}\left(\ker\left(rC_{\psi_0|\mathscr{E}_\alpha}-e^{i\theta}\right),\ \theta\in\mathbb{R}\right)\ \text{est dense dans } \mathscr{E}_\alpha.$$

Par ailleurs, pour $f(z,w)=F(z)w^\alpha$, on a

$$rC_{\psi_0}f=e^{i\theta}f \iff F(\lambda z+b)=\frac{\lambda^{-|\alpha|/2}e^{i\theta}}{r}F(z).$$

On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire II.4.9. *Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^{N-1}$, pour tout $r>\lambda^{-N/2}$, et pour tout $b\in\mathbb{C}$ avec $\Im m(b)>0$,*

$$\mathscr{E}_{\alpha,r,b}:=\mathit{span}\left(F(z)w^\alpha\in\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)\,;\ \exists\theta\in\mathbb{R},\ F(\lambda z+b)=\frac{\lambda^{-|\alpha|/2}e^{i\theta}}{r}F(z)\right)$$

est dense dans $\mathscr{E}_\alpha$.

Si maintenant on considère $\psi_0(z)=\left(\lambda z,\sqrt{\lambda}w\right)$, on obtient de la même façon le corollaire suivant :

Corollaire II.4.10. *Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^{N-1}$ et pour tout $r\in\left(\lambda^{-N/2},\lambda^{N/2}\right)$,*

$$\mathscr{E}_{\alpha,r,0}:=\mathit{span}\left(F(z)w^\alpha\in\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_d)\,;\ \exists\theta\in\mathbb{R},\ F(\lambda z)=\frac{\lambda^{-|\alpha|/2}e^{i\theta}}{r}F(z)\right)$$

est dense dans $\mathscr{E}_\alpha$.

II.4.3 Démonstration de la non-hypercyclicité

On suppose que $\psi \in LFM(\mathbb{H}_N)$ est hyperbolique et est donnée par

$$\psi(z,u,v) = (\lambda z + b, Du, Av + c),$$

avec $\dim v > 0$; il s'agit de montrer que C_ψ n'est pas hypercyclique. C'est la partie facile de la démonstration, elle repose sur le lemme suivant :

Lemme II.4.11. *Avec les notations de la partie II.3, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, si on note P_n la projection orthogonale sur $\mathscr{K}_n$, alors $\|P_n \circ C_{\psi|\mathscr{K}_n}\| < 1$.*

Démonstration. La démonstration est, dans ses grandes lignes, la même que celle du lemme II.3.10. Rappelons que C_ψ est triangulaire supérieur dans la décomposition $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N) = \oplus_{|\alpha|<n}\mathscr{H}_\alpha \oplus \mathscr{K}_n$. Soit $A = U\Sigma V$ la décomposition en valeurs singulières de A. On factorise C_ψ en $C_\psi = C_{\tau_1} \circ C_{\psi_\Sigma} \circ C_{\tau_2} = C_{\tau_2 \circ \psi_\Sigma \circ \tau_1}$ où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tau_1 : (z,w) & \mapsto & (z,u,Vv) \\ \psi_\Sigma : (z,w) & \mapsto & \left(\lambda z + b, Du, \Sigma v + U^{-1}c\right) \\ \tau_2 : (z,w) & \mapsto & (z,u,Uv) \end{array} \right. .$$

Puisque C_{τ_1} et C_{τ_2} sont des isométries de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$, et puisqu'elles laissent invariants $\mathscr{K}_n$ et $\mathscr{K}_n^\perp$, il suffit de montrer que $\|P_n \circ C_{\psi_\Sigma|\mathscr{K}_n}\| < 1$ pour n suffisamment grand. Soit $\psi_0(z,w) = (\lambda z + b, Du, \Sigma v)$; clairement, $P_n \circ C_{\psi_\Sigma|\mathscr{K}_n} = C_{\psi_0|\mathscr{K}_n}$ et on peut conclure, en procédant comme dans le lemme II.3.10, car la suite $\left(\left\|C_{\psi_0|\mathscr{K}_n}\right\|\right)_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. □

On en déduit alors que C_ψ n'est pas hypercyclique. En effet, supposons par l'absurde qu'il l'est et soit $f = f_1 + f_2$ un vecteur hypercyclique, avec $f_1 \in \mathscr{K}_n^\perp$ et $f_2 \in \mathscr{K}_n$, $n \geq 0$. L'ensemble $\left\{P_n C_\psi^k f;\ k \geq 0\right\}$ est alors dense dans $\mathscr{K}_n$, et comme C_ψ est triangulaire supérieur dans la décomposition $\mathscr{K}_n^\perp \oplus \mathscr{K}_n$, l'ensemble $\left\{\left(P_n \circ C_\psi\right)^k f_2;\ k \geq 0\right\}$ l'est aussi. Ceci est impossible dès que n est suffisamment grand, car la suite $\left(\left(P_n \circ C_\psi\right)^k f_2\right)_{k \geq 0}$ tend vers zéro.

II.4.4 Démonstration de la supercyclicité

On suppose maintenant que ψ peut s'écrire sous la forme

$$\psi(z,u,v) = (\lambda z + b, Du, Av + c)$$

avec $\Im m(b) > 0$, i.e. $\varepsilon_\phi = 0$; on veut montrer que C_ψ est supercyclique. Pour cela, on va appliquer le « outer supercyclicity criterion » (cf. théorème II.4.4) avec $Y = \oplus_{\alpha \in \mathbb{N}^{N-1}} \mathscr{E}_{\alpha,r,b}$, et pour un $r > \lambda^{-N/2}$ fixé. On fait appel à la partie sur la chaoticité pour dire que Y est dense dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$, d'après le corollaire II.4.9.

Par linéarité, il suffit de trouver, pour chaque $y = F(z)\, w^\alpha \in \mathscr{E}_{\alpha,r,b}$, tel que $F(\lambda z + b) = r^{-1}\lambda^{-|\alpha|/2} e^{i\theta} F(z)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{N-1}$, un sous-espace $X_y \subset \mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ et une suite d'applications (pas nécessairement linéaires ni continues) $(S_n)_n$ vérifiant les hypothèses du « outer supercyclicity criterion ». L'idée consiste à remarquer que, si C_ψ n'est pas inversible sur tout l'espace, il l'est au moins sur un sous-espace de dimension finie contenant y, ce qui permet de définir une suite $(S_n y)_n$ adéquate, et par suite les applications S_n voulues.

À partir de maintenant, nous nous contenterons de l'écriture

$$\psi(z,w) = (\lambda z + b, Mw + c)$$

avec $M = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ triangulaire supérieure. Soit $K = |\alpha|$; on considère le sous-espace de $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$, de dimension finie, défini par

$$Z = \left\{ \sum_{|\beta| \leq K} a_\beta F(z)\, w^\beta;\ a_\beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Z est bien contenu dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$, puisque $F(z)w^\beta$ appartient à $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ dès que $F(z)w^\alpha$ appartient à $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$, pour tout $|\beta| \leq |\alpha|$. On ordonne $\mathbb{N}^{N-1}$ comme dans le paragraphe II.3.2. Alors, on obtient immédiatement que C_ψ envoie Z dans lui-même et que la matrice de $C_{\psi|Z}$ par rapport à la base canonique $\left(F(z)w^\beta\right)_{|\beta|\leq K}$ est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux non-nuls. Ceci implique que l'application $C_{\psi|Z} : Z \to Z$ est inversible. En d'autres termes, il existe une constante C (qui ne dépend que de y) telle que, pour tout $f \in Z$, il existe $g \in Z$ tel que $C_\psi(g) = f$ et $\|g\| \leq C\|f\|$. On construit alors maintenant facilement par récurrence une suite $(S_n y)$ vérifiant $\|S_n y\| \leq C^n\|y\|$ et $C_\psi^n S_n y = y$.

On passe maintenant à la construction de X_y. On fixe $\gamma \in \mathbb{N}^{N-1}$; par linéarité, il suffit de construire un sous-espace dense $X_{y,\gamma}$ de $\mathscr{E}_\gamma$ tel que, pour tout $x \in X_{y,\gamma}$, $\left\|C_\psi^n x\right\| \cdot \|S_n y\|$ tend vers zéro. On va montrer que $\mathscr{E}_{\gamma,\rho,b}$, pour un ρ suffisamment grand, convient. Toujours par linéarité, il suffit de vérifier la convergence vers zéro pour toute fonction de $\mathscr{E}_{\gamma,\rho,b}$ du type $x = G(z)w^\gamma$, avec $G(\lambda z + b) = \rho^{-1}\lambda^{-|\gamma|/2}e^{i\delta}G(z)$ pour un $\delta \in \mathbb{R}$. Il est important de signaler que la condition que nous imposerons sur ρ doit être indépendante de G, mais peut dépendre de γ.

Soit $Z_0 := \left\{\sum_{|\beta|\leq|\gamma|} a_\beta w^\beta;\ a_\beta \in \mathbb{C}\right\}$, muni de la norme ℓ^2 :

$$\left\|\sum_{|\beta|\leq|\gamma|} a_\beta w^\beta\right\|^2 = \sum_{|\beta|\leq|\gamma|} |a_\beta|^2.$$

Soit également $T : Z_0 \to Z_0$ l'application définie par $T\left(w^\beta\right) = (Mw + c)^\beta$. T est un opérateur borné sur l'espace $\left(Z_0, \ell^2\right)$ qui est de dimension finie, et sa norme $\|T\|$ ne dépend que de $|\gamma|$. De plus,

$$\begin{aligned}\left\|C_\psi^n(x)\right\|_{\mathscr{H}^2}^2 &= \frac{\lambda^{-|\gamma|n}}{\rho^{2n}}\int_{\partial\mathbb{H}_N}\frac{|G(z)|^2\,|T^n(w^\gamma)|^2}{|z+i|^{2N}}d\sigma\\ &= \frac{\lambda^{-|\gamma|n}}{\rho^{2n}}\int_{\partial\mathbb{H}_N}\frac{|G(z)|^2\sum_\beta\left|a_\beta\right|^2\left|w^\beta\right|^2}{|z+i|^{2N}}d\sigma,\end{aligned}$$

où $\left(a_\beta\right)_{|\beta|\leq|\gamma|}$ est donnée par $T^n(w^\gamma) = \sum_\beta a_\beta w^\beta$. En particulier, $\sum\left|a_\beta\right|^2 \leq \|T\|^{2n}$, si bien qu'il existe une constante D, qui dépend de x (i.e. de G), telle que

$$\left\|C_\psi^n(x)\right\|_{\mathscr{H}^2} \leq D\frac{\|T\|^n\lambda^{-|\gamma|n/2}}{\rho^n}.$$

On obtient alors, par construction de $(S_n y)_n$,

$$\|S_n y\| \cdot \left\|C_\psi^n(x)\right\| \leq D\frac{C^n\|T\|^n\lambda^{-|\gamma|n/2}}{\rho^n},$$

et il suffit de choisir $\rho > C\|T\|\lambda^{-|\gamma|/2}$ (ce choix est indépendant de x) pour terminer la démonstration de supercyclicité du théorème II.4.2.

II.4.5 Démonstration de la cyclicité et de la non-supercyclicité

Dans ce dernier paragraphe, on travaille avec une homographie hyperbolique $\psi \in LFM(\mathbb{H}_N)$ injective qui peut s'écrire sous la forme

$$\psi(z,u,v) = (\lambda z, Du, Av),$$

avec $\dim(v) > 0$; il s'agit de montrer que C_ψ est cyclique mais n'est pas supercyclique.

La démonstration de la non-supercyclicité de C_ψ fait intervenir des considérations spectrales. En effet, posons $H_0 = \mathscr{H}_0$, $H_1 = \oplus_{1\leq|\alpha|<n}\mathscr{H}_\alpha$ et $H_2 = \mathscr{K}_n$ pour n assez grand. Pour les raisons habituelles, C_ψ est diagonal dans la décomposition $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N) = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$, et l'étude spectrale faite dans la partie II.3 révèle que, si n est assez grand, il existe $R_0 > R_2$ tels que, pour tout $f_0 \in H_0$ et tout $f_2 \in H_2$,

$$\left\|C_\psi^k f_0\right\| \geq R_0^k\|f_0\| \text{ et } \left\|C_\psi^k f_2\right\| \leq R_2^k\|f_2\|. \tag{II.4.6}$$

En effet, ceci est expliqué dans l'étape 2 de la démonstration du théorème II.3.2, dans le cas $\varepsilon_\phi = 1$, qui assure en l'occurrence qu'on peut trouver $R > R'$ tels que $\sigma\left(C_{\psi|H_0}\right) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$ et $\sigma\left(C_{\psi|H_2}\right) \subset \overline{D(0,R')}$. La non-supercyclicité de C_ψ fait alors penser à un argument standard en dynamique linéaire, similaire à celui utilisé pour montrer que chaque composante connexe du spectre d'un opérateur supercyclique doit rencontrer le cercle unité, à une homothétie près (cf. [3, Théorème 1.24]). Plus précisément, on utilise le théorème de décomposition de Riesz ([3, lemme 1.19]) pour écrire C_ψ sous la forme $C_\psi = C_{\psi_0} \oplus C_{\psi_1} \oplus C_{\psi_2}$ dans la décomposition $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N) = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$, avec $\sigma\left(C_\psi\right) = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2$ où $\sigma_0 = \sigma\left(C_{\psi_0}\right) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$, $\sigma_2 = \sigma\left(C_{\psi_2}\right) \subset \overline{D(0,R')}$ et $\sigma_1 = \sigma\left(C_\psi\right) \setminus (\sigma_0 \cup \sigma_2)$. On suppose ensuite par l'absurde que C_ψ est supercyclique, et donc que C_{ψ_0}, C_{ψ_1} et C_{ψ_2} le sont. On note f un vecteur supercyclique de C_ψ, puis on considère $g = g_0 + g_1 + g_2 \in \mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ avec $g_2 \neq 0$. Par supercyclicité, il existe deux suites $(\eta_k) \subset \mathbb{C}$ et $(n_k) \in \mathbb{N}$ telles que

$$\eta_k C_{\psi_2}^{n_k}(f) \xrightarrow[k\to\infty]{} g_2$$

et

$$\eta_k C_{\psi_0}^{n_k}(f) \xrightarrow[k\to\infty]{} g_0.$$

La deuxième convergence et les inégalités (II.4.6) assurent d'abord l'existence d'une constante $K > 0$ telle que

$$|\eta_k| \leq \frac{K}{R^{n_k}}$$

puis que, comme $R' < R$,

$$\|g_2\|_{\mathscr{H}^2} \lesssim \left(\frac{R'}{R}\right)^{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

ce qui contredit le fait que $g_2 \neq 0$.

Comme la supercyclicité entraîne la cyclicité, il nous reste maintenant à prouver la cyclicité de C_ψ quand $\varepsilon_\phi = 1$; pour cela, il est commode d'écrire ψ sous la forme

$$\psi(z,w) = (\lambda z, Mw).$$

On fixe $\mu \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{N-1}$, et on observe que M définit, par composition, un endormorphisme L sur l'espace de dimension finie constitué des polynômes homogènes de degré $|\alpha|$. De plus, comme M est inversible, on montre facilement que L est également inversible (puisque M est triangulaire supérieure, L l'est aussi dans la base $\left(w^\beta\right)_{|\beta|=|\alpha|}$ ordonnée selon $\prec$). Soit $Q(X) = \sum_j b_j X^j$ le polynôme minimal de L. L étant inversible, Q ne s'annule pas en 0 et vérifie $\sum_j b_j \left(M^j w\right)^\alpha = 0$. Soit maintenant $r \in \left(\lambda^{-N/2}, \lambda^{N/2}\right)$ tel que $r\mu\lambda^{|\alpha|/2}e^{i\theta}$ n'est une racine de Q pour aucun $\theta \in \mathbb{R}$. Soit enfin $F(z)w^\alpha \in \mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$ tel que $F(\lambda z) = r^{-1}\lambda^{-|\alpha|/2}e^{i\theta}F(z)$, i.e. $F(z)w^\alpha \in \mathscr{E}_{\alpha,r,0}$, et posons $P(X) = Q\left(r\lambda^{|\alpha|/2}e^{-i\theta}X\right)$. Alors

$$P\left(C_\psi\right)\left(F(z)w^\alpha\right) = \sum_j b_j \left(r\lambda^{|\alpha|/2}e^{-i\theta}\right)^j \cdot \left(r^{-1}\lambda^{-|\alpha|/2}e^{i\theta}\right)^j F(z)\left(M^j w\right)^\alpha = 0$$

et $P(\mu) \neq 0$, ce qui signifie que $\mathscr{E}_{\alpha,r,0} \subset \bigcup_{P\in\mathscr{P}_\mu} \ker\left(P\left(C_\psi\right)\right)$. Comme ceci est valable pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, le théorème II.4.5 et le corollaire II.4.10 nous permettent de conclure que C_ψ est cyclique.

II.5 Applications à des opérateurs de composition généraux

II.5.1 Introduction

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, l'étude des opérateurs de composition associés à des homographies de la boule repose sur l'espoir d'utiliser les résultats obtenus dans ce cadre, pour en déduire des propriétés sur les opérateurs de composition associés à des applications holomorphes quelconques de la boule. Le procédé employé relèverait de ce qu'on appelle le *principe de transfert*, qui fonctionne de manière efficace en une variable, et qui est étroitement lié au modèle des homographies. Plus précisément, voilà ce qu'on obtient dans le disque (cf. [7]). Soit $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application vérifiant les propriétés suivantes :

1. ϕ se prolonge de façon continue en une fonction injective sur $\overline{\mathbb{D}}$;
2. $\phi\left(\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1\}\right) \subset \mathbb{D}$;
3. ϕ a pour point de Denjoy-Wolff $+1$, et pour coefficient de dilatation $\phi'(1) \in (0,1)$; ϕ est de classe $C^{1+\varepsilon}$ au voisinage de $+1$.

Alors, sous ces hypothèses, C_ϕ est hypercyclique. Rappelons que, dans le disque, tout opérateur de composition de type hyperbolique est hypercyclique...

La stratégie de Bourdon et Shapiro pour démontrer ce résultat consiste en la chose suivante : ils construisent d'abord un modèle d'homographie pour ϕ ; concrêtement, ils exhibent deux fonctions de $\mathbb{D}$ dans lui-même, notées σ et ϕ_λ, telles que ϕ_λ soit une homographie hyperbolique de $\mathbb{D}$, et telles que l'égalité $\sigma \circ \phi = \phi_\lambda \circ \sigma$ ait lieu. Ils transfèrent ensuite l'hypercyclicité de C_{ϕ_λ} à C_ϕ via C_σ ; en fait, si f est un vecteur hypercyclique de C_{ϕ_λ}, alors $C_\sigma(f)$ est un vecteur hypercyclique de C_ϕ.

Une théorie générale du modèle des homographies dans $\mathbb{B}_N$ a été développée dans [1] (cf. [9] également). Cependant, deux difficultés apparaissent en plusieurs variables si l'on essaie d'imiter la dernière partie de la démonstration de Bourdon et Shapiro ; d'abord l'existence d'applications holomorphes de $\mathbb{B}_N$ dans elle-même qui induisent un opérateur de composition non borné sur $H^2(\mathbb{B}_N)$; ensuite, le fait que le théorème de Mergelyan n'est plus valable dans $\mathbb{C}^N$ rend difficile la vérification (nécessaire dans la démonstration de Bourdon et Shapiro) de la densité de l'image de l'opérateur de composition C_σ dans $H^2(\mathbb{B}_N)$.

À ce stade des connaissances, on ne peut espérer être capable de démontrer un théorème aussi général que celui de Bourdon et Shapiro. Néanmoins, on va voir qu'une petite perturbation d'une homographie hyperbolique préserve les propriétés de dynamique de l'opérateur de composition associé. On énonce le résultat principale de cette partie de la façon suivante :

Théorème II.5.1. *Soit $\psi : \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$ une application holomorphe injective pouvant, à conjugaison près, s'écrire sous la forme*

$$\psi(z,w) = (\lambda z + R(z), Mw + c) = (\psi_1(z), \psi_2(w)),$$

et vérifiant :

- ψ_1 *se prolonge de façon continue et injective à $\overline{\mathbb{P}_+} \cup \{\infty\}$;*
- $R(z) = o\left(|z|^{1-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$, *quand* $|z| \to +\infty$, $z \in \mathbb{P}_+$ *;*
- $\lambda > 1$, $\inf_{z\in\mathbb{P}_+} \Im m(R(z)) \geq d > 0$ *;*
- $Q = \lambda I - MM^*$ *est une matrice hermitienne semi-définie positive ;*
- $d - \|c\|^2 > \langle Q^+ M^* c, M^* c\rangle$.

On suppose de plus que C_ψ est borné sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. Alors C_ψ est supercyclique sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$.

Faisons quelques commentaires sur ce théorème. Les deux premières propriétés sont des propriétés de régularités sur ψ_1, qui sont déjà requises en une variable. Les trois autres conditions assurent que ψ est hyperbolique de $\mathbb{H}_N$ dans lui-même. Enfin, comme ce n'est pas automatique en général, on a besoin de supposer que C_ψ est un opérateur de composition borné sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. Si nous avions imposé davantage de régularité sur ψ au voisinage de ∞, la continuité de C_ψ aurait pu être une conséquence du théorème de Wogen (cf. [26]).

La démonstration de la supercyclicité de C_ψ ne consistera pas en l'application du « principe de transfert » évoqué plus haut, c'est-à-dire en le transfert direct d'un vecteur supercyclique, mais plutôt en le transfert des hypothèses du critère de supercyclicité (théorème II.4.4), et en une application, *a posteriori,* de ce critère. Plus précisément, supposons un instant que les faits suivants sont vrais :

Fait 1. Il existe $\sigma = (E,D) : \mathbb{H}_N \to \mathbb{H}_N$ et $b \in \mathbb{C}$, avec $\Im m\,(b) > 0$, tels que

$$\sigma \circ \psi = \psi_{\lambda,b,M,c} \circ \sigma,$$

où $\psi_{\lambda,b,M,c}(z,w) = (\lambda z + b, Mw + c)$ est une homographie hyperbolique de $\mathbb{H}_N$.

Fait 2. Avec les notations du paragraphe II.4.4, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{N-1}$, C_σ envoie $\mathscr{E}_\alpha$ continuement sur $\mathscr{E}_\alpha$, et $C_\sigma(\mathscr{E}_\alpha)$ est dense dans $\mathscr{E}_\alpha$.

Avons de démontrer ces deux résultats, voyons comment on peut en déduire la supercyclicité de C_ψ en appliquant le « outer supercyclicity criterion ».

Démonstration du théorème II.5.1. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{N-1}$, $r > \lambda^{-N/2}$ et $\mathscr{F}_{\alpha,r,b} = C_\sigma(\mathscr{E}_{\alpha,r,b})$. D'après le fait 2, et comme $\mathscr{E}_{\alpha,r,b}$ est dense dans $\mathscr{E}_\alpha$, le sous-espace $\mathscr{Y} = \oplus_{\alpha\in\mathbb{N}^{N-1}}\mathscr{F}_{\alpha,r,b}$ est dense dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. On fixe $y = F \circ E(z,w)\,w^\alpha \in \mathscr{F}_{\alpha,r,b}$ et on pose

$$\mathscr{Z} = \left\{ \sum_{|\beta|\le K} a_\beta F \circ E(z,w)\,w^\beta;\ a_\beta \in \mathbb{C} \right\},$$

où $K = |\alpha|$. On considère aussi $Z = \left\{\sum_{|\beta|\le K} a_\beta F(z)\,w^\beta;\ a_\beta \in \mathbb{C}\right\}$, comme dans le paragraphe II.4.4. L'application intermédiaire σ induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "C_{\psi_{\lambda,b,M,c}}"] \arrow[d, "C_\sigma"'] & Z \arrow[d, "C_\sigma"] \\ \mathscr{Z} \arrow[r, "C_\psi"'] & \mathscr{Z} \end{tikzcd}$$

Puisque Z et $\mathscr{Z}$ sont de dimension finie, et C_σ étant bijectif, c'est un isomorphisme de Z sur $\mathscr{Z}$. Par conséquent, le travail fait dans le paragraphe II.4.4 s'adapte à ce contexte, et on peut trouver une suite $(S_n y)$ dans $\mathscr{Z}$ et une constante $C > 0$, telles que $\|S_n y\| \le C^n \|y\|$ et $C_\psi^n S_n y = y$.

La construction de X_y suit strictement l'idée du paragraphe II.4.4 : on montre que, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^{N-1}$ et pour $\rho := \rho(\gamma,y)$ suffisamment grand, tout vecteur x de $\mathscr{F}_{\gamma,\rho,b}$ (qui est dense dans $\mathscr{E}_\gamma$), vérifie $\|S_n y\| \cdot \left\|C_\psi^n x\right\| \to 0$. On peut alors appliquer le « outer supercyclicity criterion », puisque $\oplus_{\gamma\in\mathbb{N}^{N-1}}\mathscr{F}_{\gamma,\rho,b}$ est dense dans $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. □

Il reste, pour finir, à démontrer les fait 1 et fait 2.

II.5.2 L'application intermédiaire - Démonstration du fait 1

On suppose que $\psi_1(z) = \lambda z + R(z)$ avec $\inf(\Im m\,(R(z))) \ge d > 0$ et $R(z) = o\left(|z|^{1-\varepsilon}\right)$, pour $\varepsilon > 0$. On suppose aussi que ψ_1 est continue et injective sur $\overline{\mathbb{P}_+} \cup \{\infty\}$. Posons $z(n) = \psi_1^{[n]}(z) = \psi_1 \circ \ldots \psi_1(z)$. On observe immédiatement que

$$\frac{z(n)}{\lambda^n} = z + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{R(z(j))}{\lambda^{j+1}}.$$

La démonstration du théorème 4.9 dans [7] (page 61) montre que la série $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{R(z(j))}{\lambda^{j+1}}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{P}_+}$ vers une fonction holomorphe H, et que la fonction $z \mapsto z + H(z)$ est continue et injective sur $\overline{\mathbb{P}_+} \cup \{\infty\}$. De plus, la partie imaginaire de H est bornée inférieurement. En effet,

$$\Im m\,(H(w)) \ge \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d}{\lambda^{j+1}} = \frac{d}{\lambda - 1} > 0.$$

On pose

$$E(z) = z + H(z) - \frac{i\theta d}{\lambda - 1}$$

avec $\theta \in (0,1)$. Alors

$$\begin{aligned} E \circ \psi_1(z) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{z(n+1)}{\lambda^n} - \frac{i\theta d}{\lambda - 1} \\ &= \lambda \left(E + \frac{i\theta d}{\lambda - 1} \right) - \frac{i\theta d}{\lambda - 1} \\ &= \lambda E + i\theta d. \end{aligned}$$

Ainsi, si on définit $D(z,w) = w$, $\sigma = (E,D)$ et $b = i\theta d$, alors σ est une application qui envoie $\mathbb{H}_N$ dans lui-même, et qui vérifie $\sigma \circ \psi = \psi_{\lambda,M,b,c} \circ \sigma$. De plus, si on choisit θ suffisamment proche de 0, alors $\Im m(b) - \|c\|^2 > \langle Q^+ M^* c, M^* c\rangle$, si bien que $\psi_{\lambda,M,b,c}$ devient bien une homographie de $\mathbb{H}_N$; et le fait 1 est démontré.

Néanmoins, pour démontrer le fait 2, on aura besoin de propriétés supplémentaires sur E :

(Q1) E envoie $\overline{\mathbb{P}_+}$ dans $\mathbb{P}_+$ et est injective sur $\overline{\mathbb{P}_+} \cup \{\infty\}$;

(Q2) Il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall z \in \overline{\mathbb{P}_+},\ C_1 |z+i| \leq |E(z)+i| \leq C_2 |z+i|.$$

La propriété **(Q1)** a été déjà été prouvée, et elle implique que **(Q2)** est vraie sur les compacts de $\overline{\mathbb{P}_+}$. Ainsi, il reste à montrer **(Q2)** pour $|z|$ grand. Or, comme $|R(z)| = o\left(|z|^{1-\varepsilon}\right)$ quand $|z| \to \infty$, pour tout $\mu > \lambda$, on peut trouver $M > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{P}_+$ avec $|z| \geq M$,

$$|z| \leq |\psi_1(z)| \leq \mu |z|. \qquad \text{(II.5.1)}$$

Pour un tel z, on regarde les itérés de ψ_1 et on tire de (II.5.1) l'inégalité $|z(j)| \leq \mu^j |z|$, si bien que

$$|H(z)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mu^{j(1-\varepsilon)} \left|z^{1-\varepsilon}\right|}{\lambda^{j+1}} \leq C \left|z^{1-\varepsilon}\right|$$

si $\mu^{1-\varepsilon}$ est plus petit que λ. On en déduit facilement **(Q2)**.

II.5.3 L'opérateur de composition intermédiaire - Démonstration du fait 2

On conclut ce paragraphe par la démonstration du fait 2. Pour cela, il est plus aisé de travailler directement dans $\mathbb{B}_N$. On pose donc

$$\mathscr{F}_\alpha = \left\{ f(z) w^\alpha \in H^2(\mathbb{B}_N) \right\} = \{ g \circ \sigma_c;\ g \in \mathscr{E}_\alpha \}.$$

Il s'agit de montrer que $C_{\sigma_c^{-1} \circ \sigma \circ \sigma_c}$ opère continument de $\mathscr{F}_\alpha$ dans lui-même, et que son image est dense. Pour simplifier les notations, on désigne par σ l'application $\sigma_c^{-1} \circ \sigma \circ \sigma_c$. Ses fonctions coordonnées sont notées σ_1 et σ_2, de sorte qu'en observant que $E \circ \sigma_c(z,w)$ ne dépend que de z, il vient

$$\sigma_1(z,w) = \frac{E \circ \sigma_c(z,w) - i}{E \circ \sigma_c(z,w) + i} \text{ et } \sigma_2(z,w) = \frac{2iw}{(1-z)(E \circ \sigma_c(z,w) + i)} := \frac{w}{G(z)}.$$

Ainsi, pour tout $F(z,w) = f(z) w^\alpha$ dans $\mathscr{F}_\alpha$,

$$F \circ \sigma(z,w) = \frac{f \circ \sigma_1(z)}{G(z)^{|\alpha|}} w^\alpha$$

peut s'écrire $g(z)w^\alpha$ et C_σ envoie bien $\mathscr{F}_\alpha$ dans lui-même. Pour calculer la norme de $F\circ\sigma_c$ dans $H^2(\mathbb{B}_N)$, on utilise la formule d'intégration par tranches (cf. [27, Lemme 1.10]) :

$$\|F\circ\sigma\|_{H^2}^2 = C\int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2}\int_{|w|^2=1-|z|^2}|f\circ\sigma_1(z)|^2\frac{|w^\alpha|^2}{|G(z)|^{2|\alpha|}}dm(w)\,dA(z).$$

Or, un calcul simple montre que $G=(E\circ\sigma_c+i)/(\sigma_c+i)$, et donc, par **(Q2)**, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\frac{1}{|G(z)|^{2|\alpha|}}\leq C \text{ pour tout } z\in\mathbb{D}.$$

D'où

$$\begin{aligned}\|F\circ\sigma\|_{H^2}^2 &\lesssim \int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2}\int_{|w|^2=1-|z|^2}|f\circ\sigma_1(z)|^2|w^\alpha|^2\,dm(w)\,dA(z)\\ &\lesssim \int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2+|\alpha|+(N-1)/2}|f\circ\sigma_1(z)|^2\,dA(z),\end{aligned}$$

où la seconde inégalité provient du changement de variable $u=\left(1-|z|^2\right)^{1/2}w$ dans l'intégrale dépendant de w. On sait de plus que σ_1 envoie $\mathbb{D}$ dans lui-même, donc induit un opérateur de composition borné sur l'espace de Bergman à poids $A^2_{N-2+|\alpha|+(d-1)/2}(\mathbb{D})$ (pour la définition, cf. paragraphe II.3.1.2) Donc,

$$\begin{aligned}\|F\circ\sigma\|_{H^2}^2 &\lesssim \int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2+|\alpha|+(N-1)/2}|f(z)|^2\,dA(z).\\ &\lesssim \int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2}|f(z)|^2\int_{|w|^2=1-|z|^2}|w^\alpha|^2\,dm(w)\,dA(z)\\ &\lesssim \|F\|^2,\end{aligned}$$

où on a utilisé de nouveau la formule de [27, Lemme 1.10] dans la dernière inégalité. On cherche maintenant à montrer que $C_\sigma(\mathscr{F}_\alpha)$ est dense dans $\mathscr{F}_\alpha$. Pour cela, il suffit de montrer que $\left\{\sigma_1^p\sigma_2^\alpha;\ p\geq 0\right\}$ est dense dans $\mathscr{F}_\alpha$. Soit $z^m w^\alpha\in\mathscr{F}_\alpha$, que l'on cherche à approcher par une combinaison linéaire finie du type $F(z)=\sum_{p\geq 0}a_p\sigma_1^p(z)\,\sigma_2^\alpha(z,w)$. En utilisant la formule d'intégration par tranches, on obtient

$$\begin{aligned}&\|F-z^m w^\alpha\|_{H^2}^2\\ \lesssim &\int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2}\int_{|w|^2=1-|z|^2}\left|\sum_{p\geq 0}a_p\sigma_1^p(z)-G(z)^{|\alpha|}z^m\right|^2\frac{|w^\alpha|^2}{|G(z)|^{2|\alpha|}}dm(w)\,dA(z)\\ &\lesssim \int_{|z|\leq 1}\left(1-|z|^2\right)^{N-2+|\alpha|+(N-1)/2}\left|\sum_{p\geq 0}a_p\sigma_1^p(z)-G(z)^{|\alpha|}z^m\right|^2 dA(z).\end{aligned}$$

On conclut maintenant en remarquant que les polynômes en σ_1 sont denses dans l'espace de Bergman $A^2_{N-2+|\alpha|+(N-1)/2}(\mathbb{D})$. En effet, σ_1 est injective et continue de $\overline{\mathbb{D}}$ dans lui-même, en vertu du théorème de Walsh, les polynômes sont denses dans l'algèbre $A(\sigma_1(\mathbb{D}))$. Enfin, G étant bornée, la fonction $z\mapsto G(z)^{|\alpha|}z^m$ appartient à l'espace de Bergman $A^2_{N-2+|\alpha|+(N-1)/2}(\mathbb{D})$.

II.5.4 Conclusion

Nous avons l'espoir que le théorème II.5.1 puisse être étendu à un contexte plus général. Comme nous l'avons déjà dit, il existe au moins un modèle des homographies pour une large classe d'applications holomorphes de $\mathbb{B}_2$ dans elle-même. En supposant une certaine régularité sur ψ en ∞, il semble raisonnable de s'attendre à ce que l'application intermédiaire σ soit également régulière en ∞. Nous pourrions ainsi appliquer le théorème de Wogen et avoir, d'office, la continuité de l'opérateur de composition C_σ sur $\mathscr{H}^2(\mathbb{H}_N)$. Il semble que montrer la densité de l'image de C_σ persiste à être le problème majeur. Un exemple célèbre de Wermer ([25]) met en évidence le fait qu'un domaine peut être biholomorphe au bidisque sans être un domaine de Runge (i.e. les polynômes ne sont pas denses dans $H(G)$). C'est la principale raison pour laquelle nous nous restreignons à des applications $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, où ψ_1 ne dépend que de z, et ψ_2 ne dépend que de w.

Bibliographie

[1] F. Bayart, The linear fractional model on the ball, *Rev. Mat. Iboamericana* **24** (2008), 765-824.

[2] F. Bayart, Parabolic composition operators on the ball, *Adv. Math.* **223** (2010), 1666-1705.

[3] F. Bayart, É. Matheron, Dynamics of Linear Operators, Cambridge Tracts in Math, vol. 179, Cambridge University Press, 2009.

[4] L. Bernal, A. Bonilla, M. Calderon, Compositional hypercyclicity equals supercyclicity, *Houston J. Math* **33** (2007), 581-591.

[5] C. Bisi, F. Bracci, Linear fractional maps of the unit ball : a geometric study, *Adv. Math.* **167** (2002), 265-287.

[6] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, Frequently hypercyclic operators and vectors, *Ergodic Theory Dynamical Systems,* 27 (2007), 383-404.

[7] P. Bourdon, J. Shapiro, Cyclic phenomena for composition operators, *Mem. Amer. Math. Soc.* **596** 1997.

[8] F. Bracci, M. D. Contreras, S. Diaz-Madrigal, Classification of semi-groups of linear fractional maps in the unit ball, *Adv. Math.* **208** (2007) 318-350.

[9] F. Bracci, G. Gentili, Solving the Schröder equation at the boundary in several variables, *Michigan Math J.* **53** (2005), 337-356.

[10] X. Chen, G. Cao, K. Guo, Inner functions and cyclic composition operators on $H^2(B_N)$, *J. Math. Anal. Appl.* **250** (2000), 660-669.

[11] C. Cowen, Composition operators on H^2, *J. Operator Theory* **9** (1983) 77–106.

[12] C. Cowen, B. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Stud. Adv. Math., CRC Press, 1995.

[13] C. Cowen, B. MacCluer, Linear fractional maps of the ball and their composition operators, *Acta. Sci. Math (Szeged)* **66** (2000), 351-376.

[14] P. Düren, Theory of H^p spaces, Academic Press (1970).

[15] N. S. Feldman, V. G. Miller, T. L. Miller, Hypercyclic and supercyclic cohyponormal operators, *Acta. Sci. Math (Szeged)* **68** (2002), 965-990.

[16] E. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez, The role of the spectrum in the cyclic behavior of composition operators, *Mem. Amer. Math. Soc.* **791** (2004).

[17] L. Jiang, C. Ouyang, Cyclic behavior of linear fractional composition operators on $H^2(B_n)$, *J. Math. Anal. Appl.* **341** (2008), 601-612.

[18] M. Jury, Norms and spectral radii of linear fractional composition operators on the ball, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2387–2400.

[19] B. MacCluer, Spectra of automorphism-induced composition operators on $H^p(B_N)$, *J. Lon. Math. Soc.* (2), **30** (1984), 95-104.

[20] E. Nordgren, Composition operators, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 442-449.

[21] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **241** (Springer, Berlin, 1980).

[22] H. N. SALAS, Supercyclicity and zeighted shifts, *Studia Math.* 135 (1999), 55-74.

[23] J. SHAPIRO, Composition Operators and Classical function theory, Springer, 1991.

[24] M. TANIGUCHI, Chaotic composition operators on the classical holomorphic spaces, *Complex Variables Theory Appl.* **49** (2004), 429-538.

[25] J. WERMER, On a domain equivalent to the bidisk, Math. Ann. **248** (1980), 193-194.

[26] W. WOGEN, The smooth mappings which preserve the Hardy space $H^2(\mathbb{B}_n)$, *Oper. Theory Adv. Appl.* **35** 249-267, Birkhäuser, 1988.

[27] K. ZHU, Spaces of holomorphic functions in the unit ball, Graduate Text in Math **226**, Springer-Verlag, 2005.

Chapitre III

Opérateurs de Composition sur les espaces de Bergman-Orlicz et de Hardy-Orlicz de $\mathbb{B}_N$

III.1 Introduction et Préliminaires

III.1.1 Introduction

La continuité et la compacité des opérateurs de composition C_ϕ, définis par $C_\phi(f) = f \circ \phi$ (cf. Chapitre 2), sur les espaces usuels de fonctions holomorphes ont été abordés de diverses façons. En une variable, le principe de subordination de Littlewood est l'outil principal pour montrer que tout opérateur de composition est continu sur des espaces tels que les espaces de Bergman et les espaces de Hardy (cf. [25]) ou encore sur les espaces de Bergman-Orlicz ([18]) et de Hardy-Orlicz ([16]) du disque $\mathbb{D}$. La compacité de ces mêmes opérateurs peut être traitée, en une variable, par l'intermédiaire de la fonction de comptage de Nevanlinna. Ces aspects de la théorie des opérateurs de composition en une variable sont exposés de façon complète dans le livre de J. Shapiro [25], principalement dans les espaces de Bergman et de Hardy classiques. Pour ce qui est des espaces de Bergman-Orlicz ou de Hardy-Orlicz du disque, la littérature s'est étoffée depuis une demi-dizaine d'années, notamment avec les travaux de P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec et L. Rodríguez-Piazza (cf. les articles [16, 17, 18, 19] entre autres). Une autre approche pour traiter de ces questions dans un cadre général, qui couvre le cadre du disque $\mathbb{D}$ comme celui de la boule $\mathbb{B}_N$, $N > 1$, consiste à observer que les opérateurs de composition peuvent s'interpréter comme des opérateurs d'inclusion d'espaces de fonctions holomorphes classiques dans des espaces de type $L^p(\mu)$ ou $L^\psi(\mu)$, pour des mesures μ sur la boule (ou la boule fermée) convenables, et d'appliquer ensuite les résultats concernant la continuité ou la compacité de tels opérateurs aux opérateurs de composition. La recherche d'autres façons de caractériser ces propriétés provient du fait que les méthodes impliquant le principe de subordination de Littlewood ou la fonction de comptage de Nevanlinna en une variable ne fonctionnent plus en plusieurs. Un autre intérêt est d'améliorer la compréhension des phenomènes géométriques en jeu, et en particulier de mettre en évidence des propriétés -géométriques- du symbole ϕ, cruciales dans ce contexte. En outre, de nombreux théorèmes d'inclusion sont déjà connus dans les espaces classiques ; tous impliquent la notion de *mesure de Carleson*.

Le premier théorème d'inclusion a été donné par L. Carleson en 1962 ([4]), au cours de son travail sur le problème de la Couronne. Il donne une caractérisation des mesures μ telles que l'inclusion $H^p(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^p(\mu)$ a lieu (la continuité est alors automatique, en vertu du théorème du graphe fermé). Dans [13], L. Hörmander généralise ce résultat aux domaines strictement pseudo-convexes de $\mathbb{C}^n$ en 1967, tandis qu'en 1985, S. Power simplifie sa preuve dans le cas particulier de la boule ([22]). Des résultats complètement similaires on été obtenus dans le contexte des espaces de Bergman et des espaces de Bergman à poids par plusieurs auteurs tels que W. Hastings, D. Stegenga, ou encore J. Cima and W. Wogen ; on renvoie, dans l'ordre, à [12, 26, 5, 7]). Parallèlement, des caractérisations de la compacité de ces opérateurs d'inclusion ont été données, selon une démarche semblable ; elles mettent en jeu des notions raffinées de mesures de Carleson, celles de mesures de Carleson évanescentes. Tous ces résultats ont été ensuite appliqués directement aux opérateurs de composition, et ont permis d'établir des liens nouveaux entre C_ϕ et son symbole ϕ. Dans le cadre classique des espaces de Hardy et de Bergman à poids, le livre de C. Cowen et B. MacCluer ([9]) exposent ces idées et présentent un bon nombre d'interprétations géométriques. Il semble de bon aloi de donner dès maintenant un contenu un peu plus précis à ces caractérisations en termes de mesures de Carleson dans les espaces de Bergman et de Hardy classiques :

Théorème III.1.1. *Soient $1 \leq p < \infty$ et $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ holomorphe. On a les caractérisations suivantes :*
Sur $H^p(\mathbb{B}_N)$:

1. *C_ϕ est continu si et seulement si $\mu_\phi = \sigma_N\left((\phi^*)^{-1}\right)$ est une mesure de Carleson ;*
2. *C_ϕ est compact si et seulement si μ_ϕ est une mesure de Carleson évanescente.*

Sur $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)$:

1. *C_ϕ est continu si et seulement si $\mu_\phi = v_\alpha\left(\phi^{-1}\right)$ est une mesure de Carleson ;*
2. *C_ϕ est compact si et seulement si μ_ϕ est une mesure de Carleson évanescente.*

Depuis 2006, P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec et L. Rodríguez-Piazza se sont penchés sur ces questions dans le cadre des espaces de Hardy-Orlicz et de Bergman-Orlicz du disque, dans respectivement [16, 18] ; ils y démontrent des théorèmes d'inclusion dont ils tirent des conditions nécessaires ou suffisantes à la continuité, ou à la compacité, des opérateurs de composition sur $A^\Psi(\mathbb{D})$ ou $H^\Psi(\mathbb{D})$. L'une des motivation de ces deux papiers était de comprendre le changement brutal qui survient dans l'étude de la compacité des opérateurs de composition sur $A^\Psi(\mathbb{D})$ ou $H^\Psi(\mathbb{D})$, quand on passe d'une valeur de p finie à $p = \infty$: C_ϕ est compact sur $H^\infty(\mathbb{D})$ si et seulement si $\|\phi\|_\infty < 1$, alors que, pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe une fonction $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ induisant un opérateur de composition compact sur $H^p(\mathbb{D})$, telle que $\overline{\phi(\mathbb{D})} \cap \mathbb{T}$ n'est pas vide. B. MacCluer et J. Shapiro ont même donné l'exemple d'une fonction holomorphe $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ surjective, telle que C_ϕ est compact sur $H^p(\mathbb{D})$ (cf. [21, Exemple 3.12]). Ces idées ont également leur place dans le cadre des espaces de Bergman, et il semblait alors légitime d'introduire des espaces intermédiaires entre H^∞ et A^p, ou entre H^∞ et H^p, en l'occurrence les espaces de Bergman-Orlicz A^Ψ et de Hardy-Orlicz H^Ψ, dans le but de mettre en évidence où ce changement de condition se produit -s'il se produit- et, éventuellement, de trouver une classe de fonctions d'Orlicz ψ telles que la compacité de tout opérateur de composition agissant sur A^Ψ, ou sur H^Ψ, soit équivalente à sa compacité sur H^∞. Cette question a été tranchée par [19, théorème 4.1] sur l'espace de Hardy-Orlicz $H^\Psi(\mathbb{D})$, car les auteurs montrent, par l'exemple, que la situation du résultat précédent de MacCluer et Shapiro a lieu également dans ce cadre. Par conséquent, concernant la compacité des opérateurs de composition, l'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ apparaît comme un cas singulier, au moins parmi les espaces de Hardy-Orlicz. La [18, Proposition 4.1] offre une réponse partielle à ce problème dans les espaces de Bergman-Orlicz, en affirmant que, sous certaines conditions portant sur la fonction d'Orlicz ψ (vérifiées aussi bien par les fonctions puissance $\psi(x) = x^p$ que par des fonctions d'Orlicz qui croissent très vite), la compacité de C_ϕ de $H^\Psi(\mathbb{D})$ dans lui-même implique la compacité de C_ϕ de $A^\Psi(\mathbb{D})$ dans lui-même. Bien qu'il ne s'agisse que d'une réponse partielle, ceci laisse à penser que H^∞ demeure singulier dans ce contexte également.

En plusieurs variables, cette motivation prend encore davantage d'importance parce qu'elle ne concerne plus seulement la compacité des opérateurs de composition, mais leur continuité. En effet, nous avons déjà plusieurs fois mentionné le fait qu'il existe des applications $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$, $N > 1$, telles que C_ϕ n'est pas continu sur l'espace de Bergman $A^p(\mathbb{B}_N)$, ou l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{B}_N)$, alors que C_ϕ est toujours continu sur H^∞. Les premiers exemples furent donnés par B. MacCluer et J. Shapiro dans le début des années 80. En fait, trouver des exemples d'applications φ induisant un opérateur de composition non-continu est un problème qui n'est pas évident, et si les caractérisations précédentes en termes de mesures de Carleson sont une grande source d'inspiration, il n'est pas toujours très commode de vérifier que la mesure μ_ϕ est une mesure de Carleson. Pour $N = 2$, ceci peut se faire pour les applications φ suivantes

$$\begin{aligned} \varphi(z_1,z_2) &= (2z_1z_2,0) \\ \varphi(z_1,z_2) &= \left(z_1^2+z_2^2,0\right), \end{aligned}$$

et on montre alors que les opérateurs de composition induits par ces deux applications ne sont pas continus sur $H^p(\mathbb{B}_2)$ ou sur $A^p_\alpha(\mathbb{B}_2)$. Notons qu'en 1987, Cima et Wogen s'intéressèrent à formuler une condition suffisante pour qu'une application ϕ de la boule dans elle-même n'induise pas un opérateur de composition continu sur les espaces de Hardy, fournissant ainsi un certain nombres d'exemples concrêts ([6]). À l'inverse, certains mathématiciens se sont employés à donner des conditions suffisantes à la continuité des opérateurs de composition sur ces espaces, qui soient plus exploitables, i.e. plus faciles à vérifier. Nous pensons ainsi au théorème de Wogen qui donne, sous une condition de régularité au bord de la fonction ϕ, un critère relativement général et facilement applicable à la continuité de C_ϕ ([9, chapitre 6, paragraphe 6.2]).

Toujours est-il que cette opposition entre la non-automatique continuité des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy et de Bergman, et la systématique continuité de ces derniers sur H^∞, amène légitimement à l'étude de ces opérateurs sur les espaces $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$ ou $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ intermédiaires, et à se poser la question de l'existence d'une condition quelconque, de croissance ou de régularité, portant sur la fonction d'Orlicz ψ, pour que tout opérateur de composition agisse *continûment* sur $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$, ou $H^\psi(\mathbb{B}_N)$.

Par ailleurs, concernant plus spécifiquement les espaces de Hardy, il demeure jusqu'à présent possible de considérer les opérateurs de composition agissant sur $H^p(\mathbb{B}_N)$ ou $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)$ directement comme des opérateurs d'inclusion et, comme nous l'avons dit, c'est ce qui est fait ; en une variable, cela est rendu possible par un *théorème de Lindelöf*, tandis qu'en plusieurs variables, il faut faire appel à la densité de $A(\mathbb{B}_N)$, l'espace des fonctions holomorphes dans la boule qui se prolongent continûment sur la boule fermée, dans $H^p(\mathbb{B}_N)$. (Le théorème de Lindelöf possède une version plus faible en plusieurs variables, le théorème de Čirka, insuffisant en l'occurrence (cf. le début du paragraphe III.3.3).) Néanmoins, il est connu que la densité de $A(\mathbb{B}_N)$ est plus ou moins spécifique aux espaces de Hardy classiques, dans le sens où cette propriété n'est plus vérifiée dans des espaces de Hardy-Orlicz « assez proches de H^∞ », ou « trop loin d'un espace H^p ». Précisément, $A(\mathbb{B}_N)$ est dense dans $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ si et seulement si ψ vérifie la condition Δ_2 (cf. III.1.5). Cela souligne le fait qu'étudier les opérateurs de composition par l'intermédiaire des opérateurs d'inclusion ne serait peut-être pas si bien adapté quand on considère certains espaces, plus petits que les espaces de Hardy classiques. Malgré tout, même dans ces contextes, on peut se demander dans quelle mesure les méthodes impliquées dans les théorèmes d'inclusion sont une source d'idées pour exhiber des conditions nécessaires ou suffisantes à la continuité ou à la compacité des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz ; mieux, peut-être l'étude restreinte des opérateurs de composition aux espaces de Hardy classiques ne reflètent pas réellement -sinon de façon cachée- la structure topologique de ces espaces qui fait que « tout se passe » comme si nous travaillions avec des opérateurs d'inclusion... ? Il convient de noter que ce problème ne se pose pas naturellement dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz.

Revenons cependant un instant sur cette condition Δ_2. Comme nous venons de le dire, celle-ci permet d'étudier les opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz ou de Hardy-Orlicz dont les fonctions d'Orlicz la vérifie, en utilisant des méthodes très similaires (identiques !) à celles dont on se sert dans le cadre classique des espaces de Bergman ou de Hardy. Ainsi, Z. J. Jiang a énoncé des théorèmes d'inclusion, et des caractérisations de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz $A^\psi(\mathbb{B}_N)$, quand ψ vérifie la condition Δ_2 (cf. [14]). Comme on pouvait s'y attendre, ces caractérisations sont les mêmes que celles connues dans les espaces de Bergman, et leurs applications aux opérateurs de composition n'apportent pas de résultats différents de ceux dans le cadre classique ; en outre, elles ne donnent pas d'informations sur les « petits » espaces de Bergman-Orlicz.

Les parties 2 et 3 sont consacrées à ces questions. La première concerne les espaces de Bergman-Orlicz à poids. Étant données deux fonctions d'Orlicz ψ_1 et ψ_2, les deux résultats principaux (théorème III.2.8 et théorème III.2.12) donnent des conditions nécessaires ou suffisantes sur une mesure μ sur la boule pour que l'inclusion $A^{\psi_1}_\alpha(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$ ait lieu (et soit continue), ou soit compacte. En général, on n'obtiendra pas de caractérisations, sauf quand, comme on le verra, $\psi_1 = \psi_2$ vérifie certaines conditions de régularité.

On appliquera ensuite nos résultats aux opérateurs de composition sur $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$, en suivant les idées décrites précédemment, ce qui permettra de répondre positivement à la question : existe-t-il des fonctions d'Orlicz ψ définissant des espaces de Bergman-Orlicz $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$, entre H^∞ et $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$, sur lesquels tout opérateur de composition est continu ?

Dans la partie 3, on donnera dans un premier temps des résultats d'inclusion du type $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$ analogues à ceux obtenus dans la partie 2 pour les espaces de Bergman-Orlicz ; ce sera l'objet des théorèmes III.3.15 et III.3.21. Après avoir expliqué pourquoi les conditions obtenues dans ces deux théorèmes ne peuvent pas être directement utilisées pour en déduire des conditions de continuité ou de compacité de C_ϕ, on montrera comment leurs preuves peuvent être adaptées aux opérateurs de composition pour conduire à une caractérisation de ces propriétés de C_ϕ , sous certaines hypothèses de régularité portant sur ψ. Comme pour les espaces de Bergman-Orlicz, on applique nos résultats pour montrer l'existence d'espaces de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ sur lesquels tout opérateur de composition est continu.

Une dernière partie consistera en des commentaires généraux ; en particulier, nous comparerons brièvement certains résultats connus dans le cadre classique et ceux obtenus ici-même dans le cadre Orlicz. Certains résultats plus ou moins anecdotiques sur ce sujet seront accompagnés de questions qui n'ont pas été traitées dans ce chapitre.

III.1.2 Espaces d'Orlicz - Préliminaires

On rappelle la définition des fonctions d'Orlicz et des espaces d'Orlicz.

Définition III.1.2. Une fonction strictement convexe $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction d'Orlicz si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\psi(0) = 0$ et ψ est continue en 0 ;
2. $\dfrac{\psi(x)}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

En particulier, une fonction d'Orlicz est croissante.

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé ; tout au long de ce chapitre, Ω désignera une boule ou une sphère dans $\mathbb{C}^N$, et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur Ω.

Définition III.1.3. Soit ψ une fonction d'Orlicz. L'espace d'Orlicz $L^\psi(\Omega, \mathbb{P})$ (qu'on note aussi simplement $L^\psi(\Omega)$ quand aucune confusion n'est à craindre) est l'espace des (classes d'équivalence de) fonctions complexes mesurables f sur Ω, pour lesquelles il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_\Omega \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mathbb{P} < \infty. \tag{III.1.1}$$

L'application $\|.\|_\psi : f \longmapsto \|f\|_\psi$, définie par

$$\|f\|_\psi = \inf\left\{C > 0,\ \int_\Omega \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mathbb{P} \le 1\right\}, \tag{III.1.2}$$

est une norme (appelée norme de Luxemburg) qui fait de $\left(L^\psi(\Omega), \|.\|_\psi\right)$ un espace de Banach (cf. [23, paragraphe 3]). On a les inclusions évidentes suivantes (la seconde étant une conséquence du point 2) de la III.1.2) :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^\psi(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Notons que, si ψ croît suffisamment vite de façon à ce que

$$\frac{\psi(x)}{x^p} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

pour tout $p < \infty$, alors on a

$$L^\infty(\Omega) \subset L^\psi(\Omega) \subset \cap_{0<p<\infty} L^p(\Omega).$$

Enfin, si $\psi(x) = x^p$ pour tout x, $1 < p < \infty$, on vérifie facilement que

$$L^{\psi}(\Omega) = L^{p}(\Omega).$$

On introduit l'espace de Morse-Transue $M^{\psi}(\Omega)$ comme le sous-espace de $L^{\psi}(\Omega)$ engendré par $L^{\infty}(\Omega)$; de façon équivalente, $M^{\psi}(\Omega)$ est le sous-espace constitué des fonctions f telles que l'intégrale (III.1.1) est finie pour toute constante $C > 0$.

Afin de dire quelques mots sur la dualité dans les espaces d'Orlicz, nous devons définir la fonction complémentaire d'une fonction d'Orlicz. Soit donc ψ une fonction d'Orlicz, la fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, définie par

$$\Phi(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \{xy - \psi(x)\},$$

est appelée la fonction complémentaire de ψ. On peut vérifier que Φ est une fonction d'Orlicz (cf. [23], Paragraphe 1.3). Le théorème suivant ([23, Théorème 6, Paragraphe 4.1]) est le résultat de dualité le plus général dans les espaces d'Orlicz :

Théorème III.1.4. *Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, ψ une fonction d'Orlicz, et Φ sa fonction d'Orlicz complémentaire. $L^{\Phi}(\Omega)$ est le dual de $M^{\psi}(\Omega)$, i.e. $(M^{\psi}(\Omega))^* = L^{\Phi}(\Omega)$, dans le sens où, pour toute forme linéaire continue $x^* \in (M^{\psi}(\Omega))^*$, il existe une unique fonction $f \in L^{\Phi}(\Omega)$ telle que, pour tout $g \in M^{\psi}(\Omega)$, on a*

$$x^*(g) = \int_{\Omega} fg d\mathbb{P}.$$

De plus, il existe deux constantes $c > 0$ et $C > 0$ indépendantes de x^* (et de f), telles que $c\|f\|_{\Phi} \leq \|x^*\| \leq C\|f\|_{\Phi}$.

Ce résultat sera essentiellement utile dans ce chapitre pour décrire la topologie faible-étoile, induite sur les boules unités des espaces de Bergman-Orlicz et de Hardy-Orlicz à venir.

On introduit maintenant quatre classes de fonctions d'Orlicz qui interviendront plusieurs fois dans ce chapitre. La première concerne des fonctions qui vérifient la condition dite Δ_2-Condition (qui appartiennent à la classe Δ_2...), déjà mentionnée dans l'introduction. C'est une condition de régularité vérifiées par des fonctions d'Orlicz qui ne croissent pas plus vite que x^p, pour $p > 1$, dès que x est suffisamment grand.

Définition III.1.5. Soit ψ une fonction d'Orlicz. On dit que ψ vérifie la condition Δ_2 s'il existe $x_0 > 0$ et une constante $K > 1$, tels que

$$\psi(2x) \leq K\psi(x)$$

pour tout $x \geq x_0$.

Par exemple, les fonctions du type $x \longmapsto ax^p(1 + b\log(x))$, $1 < p < \infty$, $a > 0$ et $b \geq 0$ vérifient la condition Δ_2. C'est en particulier donc le cas des fonctions x^p, $1 < p < \infty$. La proposition suivante ([23, Corollaire 5, Paragraphe 2.3]) formalise ce qui a été dit plus haut :

Proposition III.1.6. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ_2. Il existe des constantes $1 < p < \infty$ et $C > 0$ telles que $\psi(x) \leq Cx^p$, pour x suffisamment grand.*

La condition ∇_2 est est une condition de régularité qui est satisfaite par une classe assez générale de fonctions d'Orlicz :

Définition III.1.7. Soit ψ une fonction d'Orlicz. ψ appartient à la classe ∇_2 si sa fonction complémentaire appartient à la classe Δ_2.

Les deux conditions suivantes sont également des conditions de régularité satisfaites par la plupart des fonctions d'Orlicz qui nous intéresseront.

Définition III.1.8. Soit ψ une fonction d'Orlicz. On dit que ψ vérifie la condition ∇_0 s'il existe un $x_0 > 0$ et une constante $C \geq 1$, tels que, pour tout $x_0 \leq x \leq y$, on ait

$$\frac{\psi(2x)}{\psi(x)} \leq \frac{\psi(2Cy)}{\psi(y)}.$$

On renvoie à [16, Proposition 4.6] pour la vérification du fait suivant :

Proposition III.1.9. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. ψ vérifie la condition ∇_0 si et seulement s'il existe $x_0 > 0$ tel que, pour tout $\beta > 1$, il existe une constante $C_\beta \geq 1$ telle que*

$$\frac{\psi(\beta x)}{\psi(x)} \leq \frac{\psi\left(\beta C_\beta y\right)}{\psi(y)}$$

pour tout $x_0 \leq x \leq y$.

La condition ∇_0-uniforme, que nous noterons parfois ∇_0^{unif}, est définie comme suit :

Définition III.1.10. Soit ψ une fonction d'Orlicz. On dit que ψ vérifie la condition ∇_0-*uniforme* si et seulement s'il existe $x_0 > 0$ et une constante $C \geq 1$ tels que, pour tout $\beta > 1$, on ait

$$\frac{\psi(\beta x)}{\psi(x)} \leq \frac{\psi(\beta C y)}{\psi(y)}$$

pour tout $x_0 \leq x \leq y$.

On définit enfin une classe de fonctions d'Orlicz à croissance rapide :

Définition III.1.11. Soit ψ une fonction d'Orlicz. ψ vérifie la condition Δ^2 si et seulement s'il existe $x_0 > 0$ et une constante $C > 0$ tels que

$$\psi(x)^2 \leq \psi(Cx),$$

pour tout $x \geq x_0$.

La rigidité imposée par la convexité et la croissance des fonctions d'Orlicz font de la condition Δ^2 une condition plus large qu'il n'y parait dans la définition précédente :

Proposition III.1.12. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Les assertions*

1. *ψ vérifie la condition Δ^2 ;*
2. *Il existe $b > 1$, $C_b > 0$ et $x_0 > 0$, tels que $\psi(x)^b \leq \psi(C_b x)$, pour tout $x \geq x_0$;*
3. *Pour tout $b > 1$, il existe $C_b > 0$ et $x_{0,b} > 0$, tel que $\psi(x)^b \leq \psi(C_b x)$, pour tout $x \geq x_{0,b}$.*

sont équivalentes.

La démonstration de cette proposition n'apparaît pas dans les références usuelles sur les espaces d'Orlicz que sont [15] et [23]. Nous préférons donc la donner ; elle met également en évidence des arguments et façons de procéder habituels sur la question.

Démonstration de la proposition III.1.12. On va montrer (1)⇒(3)⇒(2)⇒(1).

(1)⇒(3). On suppose donc la condition Δ^2 vérifiée, i.e. il existe $C > 0$ et $x_0 > 0$, tels que

$$\psi(x)^2 \leq \psi(Cx), \tag{III.1.3}$$

pour tout $x \geq x_0$. Soit $b > 1$. Si $1 < b < 2$, le fait que $\psi(x)$ tend vers l'infini quand $x \to \infty$ implique $\psi(x)^b \leq \psi(x)^2$ pour tout x suffisamment grand, ce qui donne le résultat. Si $b \geq 2$, on note $n_b \in \mathbb{N}$ un entier tel que $0 < \dfrac{b}{2^{n_b}} \leq 1$; en utilisant la relation (III.1.3) et le même argument que celui évoqué quand $1 < b < 2$, on vérifie facilement que, pour x suffisamment grand, l'inégalité

$$\psi(x)^b \quad \leq \quad \psi(C^{n_b}x)$$

est satisfaite, ce qui donne la première implication.

(3)⇒(2) est triviale.

(2)⇒(1). On procède comme dans (1)⇒(3) en échangeant les rôles de 2 et de b. □

La proposition suivante ([23, paragraphe 2, proposition 6]) montre qu'une fonction d'Orlicz qui vérifie la condition Δ^2 doit avoir une croissance au moins exponentielle :

Proposition III.1.13. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ^2. il existe $a > 0$ et $x_0 > 0$ tels que*

$$\psi(x) \geq e^{ax},$$

pour tout $x \geq x_0$.

On rappelle enfin la proposition 4.7 (2) de [16] :

Proposition III.1.14. *Soit ψ une fonction d'Orlicz.*

1. *Si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme, alors ψ vérifie la condition ∇_2.*
2. *Si ψ vérifie la condition Δ^2, alors ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme.*

On note que les fonctions $x \longmapsto x^p$, pour $1 < p < \infty$, sont des fonctions d'Orlicz qui vérifient la condition ∇_0-uniforme, et donc les conditions ∇_2 et ∇_0, d'après la proposition précédente. Elles satisfont aussi à la condition Δ_2, mais n'appartiennent pas la classe Δ^2. À l'inverse, les fonctions du type $x \longmapsto e^{ax^b} - 1$, avec $a > 0$ et $b \geq 1$, vérifient la condition Δ^2 mais pas la condition Δ_2. Enfin, les fonctions d'Orlicz qui peuvent s'écrire $x \to \exp\left(a(\ln(x+1))^b\right) - 1$, avec $a > 0$ et $b \geq 1$, appartiennent aux classes ∇_2 et ∇_0, mais ne vérifient pas la condition Δ^2.

Pour une étude complète des espaces d'Orlicz, on renvoie au livre de M. M. Rao et Z. D. Ren, déjà cité ([23]). Concernant plus spécifiquement l'étude des opérateurs de composition, on trouve également de nombreuses informations relatives à ces espaces, comme par exemple d'autres classes de fonctions d'Orlicz qui interviennent dans ce sujet, dans [16].

III.2 Espaces de Bergman-Orlicz à poids sur $\mathbb{B}_N$

L'objectif de cette partie est d'étendre le théorème de Carleson connu sur les espaces de Bergman à poids classiques aux espace de Bergman-Orlicz à poids. Dans le dernier paragraphe de cette partie, nous appliquerons ces résultats pour exhiber, sinon des caractérisations dans un cadre général, au moins des conditions nécessaires ou suffisantes, exprimées en termes de mesures de Carleson adaptées, à la continuité et à la compacité des opérateurs de composition sur ces espaces.

III.2.1 Définitions et résultats généraux

Soient $\alpha > -1$ et dv_α la mesure de Lebesgue à poids (radial d'ordre α) sur $\mathbb{B}_N$ normalisée,

$$dv_\alpha(z) = c_\alpha \left(1 - |z|^2\right)^\alpha dv(z),$$

où dv est la mesure volumique de Lebesgue sur $\mathbb{B}_N$ normalisée. la constante c_α vaut

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}.$$

L'espace de Bergman-Orlicz à poids sur la boule, $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$, est défini à partir de l'espace d'Orlicz associé à la mesure de probabilité dv_α sur $\mathbb{B}_N$, $L^\psi(\mathbb{B}_N, v)$.

Définition III.2.1. L'espace de Bergman-Orlicz $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ à poids sur la boule est l'ensemble des fonctions holomorphes f, définies sur $\mathbb{B}_N$, telles qu'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) dv_\alpha$$

est finie.

Autrement dit,

$$A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N) = L_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N) \cap H(\mathbb{B}_N) \subset A_\alpha^1(\mathbb{B}_N).$$

Muni de la norme de Luxemburg,

$$\|f\|_{A_\alpha^\psi} = \inf\left\{C, \int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) dv_\alpha \leq 1\right\},$$

$A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ est un espace de Banach. C'est une conséquence directe du fait que $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ a la propiété de Fatou, héritée de $A_\alpha^1(\mathbb{B}_N)$, et que $L_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ est un espace de Banach.

Il est facile de vérifier que si $\psi(x) = x^p$, pour $p > 1$, alors l'espace de Bergman-Orlicz coïncide avec l'espace de Bergman classique $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$.

Pour $a \in \mathbb{B}_N$, on note δ_a l'évaluation au point a. La proposition suivante nous dit que δ_a est une forme linéaire continue sur $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$, pour tout a dans la boule.

Proposition III.2.2. *Soit $\alpha > -1$, et soit ψ une fonction d'Orlicz. Soit également $a \in \mathbb{B}_N$. L'évaluation δ_a au point a est bornée sur $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$; plus précisément, on a*

$$\frac{1}{4^{N+1+\alpha}}\psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}\right) \leq \|\delta_a\| \leq \psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}\right).$$

Démonstration. Tout d'abord, soit φ_a un automorphisme de $\mathbb{B}_N$ tel que $\varphi(0) = a$. Fixons $f \in A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ et posons $C = \|f\|_{A_\alpha^\psi}$. Par la formule de changement de variables (cf. par exemple [27, Proposition 1.13]), il vient

$$\int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f \circ \varphi_a|}{C}\right) dv_\alpha = \int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f(z)|}{C}\right)\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z, a\rangle|^2}\right)^{N+1+\alpha} dv_\alpha(z).$$

La sous-harmonicité de $\psi\left(\frac{|f \circ \varphi_a|}{C}\right)$ donne

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{|f(a)|}{C}\right) &\leq \int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f(z)|}{C}\right)\left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z, a\rangle|^2}\right)^{N+1+\alpha} dv_\alpha(z)\\ &\leq \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}.\end{aligned}$$

Puisque ψ^{-1} est croissante, on a

$$|f(a)| \leq C\psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}\right),$$

et en particulier,

$$\|\delta_a\| \leq \psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}\right).$$

Inversement, on introduit le noyau de Berezin en $a \in \mathbb{B}_N$:

$$H_a(z) = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{N+1+\alpha}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $\|H_a\|_\infty = \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}$ et que $\|H_a\|_{L^1} = 1$ (c'est une application directe de la formule de changement de variables) ; donc

$$\begin{aligned}
\|\delta_a\| &\geq \frac{|H_a(a)|}{\|H_a\|_{A^\psi_\alpha}} \\
&\geq \frac{1}{\left(1-|a|^2\right)^{N+1+\alpha}} \frac{\psi^{-1}(\|H_a\|_\infty)}{\|H_a\|_\infty} \text{ ([16, lemme 3.9])} \\
&\geq \frac{1}{(1+|a|)^{2(N+1+\alpha)}} \psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}\right) \\
&\geq \frac{1}{4^{N+1+\alpha}} \psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}\right). \qquad \text{(III.2.1)}
\end{aligned}$$

□

On décrit maintenant la convergence faible-étoile sur la boule unité des espaces de Bergman-Orlicz, en termes de convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{B}_N$:

Proposition III.2.3. *Soit $\alpha > -1$. Soient ψ une fonction d'Orlicz Φ sa fonction d'Orlicz complémentaire. Sur la boule unité de $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$, la topologie faible-étoile*

$$\sigma\left(L^\psi(\mathbb{B}_N, dv_\alpha), M^\Phi(\mathbb{B}_N, dv_\alpha)\right)$$

induite coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{B}_N$.

Démonstration. Observons tout d'abord que les deux topologies ci-dessus sont métrisables. En effet, c'est un fait bien connu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et, en ce qui concerne la topologie faible-étoile sur $L^\psi(\mathbb{B}_N, dv_\alpha)$, cela provient du théorème III.1.4 et du fait que l'espace de Morse-Transue $M^\Phi(\mathbb{B}_N)$ est séparable. Nous pouvons par conséquent travailler avec des suites convergentes. Soit donc $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité B^ψ_α de $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$ qui converge vers $f \in B^\psi_\alpha$ pour la topologie faible-étoile. Pour $a \in \mathbb{B}_N$, soit $H_a(z) = \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\langle z,a\rangle|^2}\right)^{N+1+\alpha}$; $\|H_a\|_\infty = \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{N+1+\alpha}$, si bien que $H_a \in M^\Phi$ et donc que

$$(f_n - f)(a) = \int_{\mathbb{B}_N} (f_n - f) H_a \, dv_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

De plus, comme $(f_n)_n$ est dans la boule unité de $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$, grâce par exemple à la proposition III.2.2, $(f_n)_n$ est bornée sur tout compact de $\mathbb{B}_N$. Du théorème de Montel et d'un argument de compacité, on déduit que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$ vers f.

La démonstration de la réciproque est identique à celle de [18, proposition 5.3, (ii)]. □

III.2.2 Théorèmes d'inclusion dans les espaces de Bergman-Orlicz

Ce paragraphe est inspiré de [18].

On aura besoin d'une version du théorème de Carleson pour les espaces de Bergman, légèrement différente de celle habituellement énoncée. Comme pour l'étude, entre autre, de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman et de Hardy de la boule avec les mesures de Carleson, on doit introduire les objets et les notions impliquées. On rappelle la définition de la distance anisotrope sur la sphère $\mathbb{S}_N$, qu'on désigne par d. Pour $(\zeta,\xi)\in\mathbb{S}_N^2$, elle est donnée par

$$d(\zeta,\xi)=\sqrt{|1-\langle\zeta,\xi\rangle|}.$$

On peut vérifier que d est une distance sur $\mathbb{S}_N$ et que son prolongement à $\overline{\mathbb{B}_N}\times\overline{\mathbb{B}_N}$ vérifie encore l'inégalité triangulaire (cf. par exemple [24, Proposition 5.1.2]). Pour $\zeta\in\overline{\mathbb{B}_N}$ et $h\in\,]0,1]$, on définit la « boule » anisotrope (pour d) de $\mathbb{B}_N$ par

$$S(\zeta,h)=\left\{z\in\mathbb{B}_N,\, d(\zeta,z)^2<h\right\}.$$

et son analogue dans $\overline{\mathbb{B}_N}$ par

$$\mathscr{S}(\zeta,h)=\left\{z\in\overline{\mathbb{B}_N},\, d(\zeta,z)^2<h\right\}.$$

(Il convient de bien faire la distinction entre les notations $S(\zeta,h)$ et $\mathscr{S}(\zeta,h)$...) On note aussi

$$Q=\mathscr{S}(\zeta,h)\cap\mathbb{S}_N$$

les boules anisotropes sur $\mathbb{S}_N$ pour la (vraie) distance d. Ensuite, pour $\zeta\in\mathbb{S}_N$ et $h\in\,]0,1]$, on définit

$$W(\zeta,h)=\left\{z\in\mathbb{B}_N,\, 1-|z|<h,\, \frac{z}{|z|}\in Q(\zeta,h)\right\}.$$

$W(\zeta,h)$ est usuellement appelée une fenêtre de Carleson.

On introduit les fonctions suivantes, ρ_μ et $K_{\mu,\alpha}$:

$$\rho_\mu(h)=\sup_{\xi\in\mathbb{S}_N}\mu(W(\xi,h)),$$

où μ est une mesure borélienne positive sur $\mathbb{B}_N$. On pose également

$$K_{\mu,\alpha}(h)=\sup_{0<t\leq h}\frac{\rho_\mu(t)}{t^{N+1+\alpha}}.$$

μ est une mesure de α-Bergman-Carleson (usuelle) si $K_{\mu,\alpha}$ est bornée. Comme

$$t^{N+1+\alpha}\sim v_\alpha(W(\xi,t)) \tag{III.2.2}$$

pour tout $\xi\in\mathbb{S}_N$ (c'est plus ou moins contenu dans [24, proposition 5.1.4]), μ est une mesure de α-Bergman-Carleson si et seulement s'il existe une constante $0<C<\infty$ telle que

$$\mu(W(\xi,h))\leq Cv_\alpha(W(\xi,h))$$

pour tout $\xi\in\mathbb{S}_N$ et tout $h\in(0,1)$ (ou de façon équivalente, pour tout $h\in(0,h_A)$, pour $0<h_A\leq 1$). Remarquons que, dans les définitions de ρ_μ et de $K_{\mu,\alpha}$, il est possible de remplacer $W(\xi,h)$ par $S(\xi,h)$, car ces deux ensembles sont équivalents, dans le sens où il existe deux constantes $C_1>0$ et $C_2>0$ telles que

$$S(\xi,C_1h)\subset W(\xi,h)\subset S(\xi,C_2h),$$

pour tout $\xi\in\mathbb{S}_N$ et pour tout $h\in(0,1)$. Dans ce qui va suivre, nous travaillerons indifféremment avec des boules anisotropes ou des fenêtres de Carleson, si aucune confusion n'est à craindre.

Le lemme de recouvrement suivant sera utile pour notre version du théorème de Carleson :

Lemme III.2.4. *Il existe un entier $M>0$ tel que, pour tout $0<r<1$, on peut trouver une suite finie $\{\xi_k\}_{k=1}^m$ (m dependant de r) dans $\mathbb{S}_N$ ayant les propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{S}_N=\bigcup_k Q(\xi_k,r)$;

2. *Les ensembles $Q(\xi_k, r/4)$ sont deux à deux disjoints ;*
3. *Chaque point de $\mathbb{S}_N$ appartient à au plus M boules $Q(\xi_k, 4r)$.*

Démonstration. La démonstration consiste à utiliser une variante du [27, Lemme 2.22] pour la distance anisotrope à la frontière, et est quasiment identique à celle de [27, Théorème 2.23]. Le fait qu'on puisse prendre une suite finie provient d'un argument de compacité. □

Dorénavant, M désignera toujours la constante apparaissant dans le lemme III.2.4. On va maintenant définir un opérateur maximal associé à un recouvrement de $\mathbb{B}_N$ par des sous-ensembles convenables. Soit $n \geq 0$ un entier ; on note C_n la couronne

$$C_n = \left\{ z \in \mathbb{B}_N,\, 1 - \frac{1}{2^n} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right\}.$$

Pour tout $n \geq 0$, soit $(\xi_{n,k})_k \subset \mathbb{S}_N$ donnée par le lemme III.2.4 en prenant $r = \frac{1}{2^n}$. Pour $k \geq 0$, on pose

$$T_{0,k} = \left\{ z \in \mathbb{B}_N \setminus \{0\},\, \frac{z}{|z|} \in Q(\xi_{0,k}, 1) \right\} \cup \{0\}.$$

On définit ensuite les $T_{n,k}$, pour $n \geq 1$ et $k \geq 0$, par

$$T_{n,k} = \left\{ z \in \mathbb{B}_N \setminus \{0\},\, \frac{z}{|z|} \in Q\left(\xi_{n,k}, \frac{1}{2^n}\right) \right\}.$$

On a à la fois

$$\bigcup_{n \geq 0} C_n = \mathbb{B}_N$$

et

$$\begin{aligned} \bigcup_{k \geq 0} T_{0,k} &= \mathbb{B}_N; \\ \bigcup_{k \geq 0} T_{n,k} &= \mathbb{B}_N \setminus \{0\},\, n \geq 1. \end{aligned}$$

Pour $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on définit les sous-ensembles $\Delta_{(n,k)}$ de $\mathbb{B}_N$ par

$$\Delta_{(n,k)} = C_n \cap T_{n,k}.$$

On a clairement

$$\begin{aligned} \Delta_{(0,k)} &= (W(\xi_{0,k}, 1) \cap C_0) \cup \{0\}; \\ \Delta_{(n,k)} &= W\left(\xi_{n,k}, \frac{1}{2^n}\right) \cap C_n,\, n \geq 1. \end{aligned}$$

De plus, par construction, les $\Delta_{(n,k)}$ vérifient les propriétés suivantes :

1. $\bigcup_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} \Delta_{(n,k)} = \mathbb{B}_N$.
2. Pour tout (n,k), $\Delta_{(n,k)}$ est un sous-ensemble de la fenêtre de Carleson fermée $\overline{W\left(\xi_{n,k}, \frac{1}{2^n}\right)}$, et on peut trouver une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de (n,k), telle que

$$v_\alpha\left(W\left(\xi_{n,k}, \frac{1}{2^n}\right)\right) \leq \tilde{C} v_\alpha\left(\Delta_{(n,k)}\right).$$

3. Étant donné $0<\varepsilon<1/2$, si C_n^ε désigne la couronne définie par

$$C_n^\varepsilon=\left\{z\in\mathbb{B}_N,\,(1+\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\leq|z|<(1+\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right\},$$

alors chaque point de $\mathbb{B}_N$ appartient à au plus M ensembles $\Delta^\varepsilon_{(n,k)}$ définis par

$$\begin{array}{rcl}\Delta^\varepsilon_{(0,k)} & = & \left(W\left(\xi_{0,k},1+\varepsilon\right)\cap C_0^\varepsilon\right)\cup\{0\}\,;\\ \Delta^\varepsilon_{(n,k)} & = & W\left(\xi_{n,k},(1+\varepsilon)\dfrac{1}{2^n}\right)\cap C_n^\varepsilon,\,n\geq 1.\end{array}$$

Ceci provient de la construction et du lemme de recouvrement précédent. En particulier, on a

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}v_\alpha\left(\Delta^\varepsilon_{(n,k)}\right)\leq Mv_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)=M.$$

Pour toute $f\in A^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)$, on définit la fonction maximale Λ_f de f de la façon suivante :

$$\Lambda_f=\sum_{n,k\geq 0}\sup_{\Delta_{(n,k)}}\left(|f(z)|\right)\chi_{\Delta_{(n,k)}} \tag{III.2.3}$$

où $\chi_{\Delta_{(n,k)}}$ est la fonction caractéristique de $\Delta_{(n,k)}$. La proposition suivante assure que l'opérateur maximal $\Lambda : f\longmapsto\Lambda_f$ est borné de $A^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans $L^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right):=L^\psi\left(\mathbb{B}_N,v_\alpha\right)$.

Proposition III.2.5. *Soit ψ une fonction d'Orlicz et soit $\alpha>-1$. L'opérateur maximal Λ défini ci-dessus est borné de $A^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans $L^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)$. Plus précisément, il existe une constante $B\geq 1$ telle que, pour tout $f\in A^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)$, on a*

$$\left\|\Lambda_f\right\|_{L^\psi_\alpha}\leq 2B\left\|f\right\|_{A^\psi_\alpha}.$$

Démonstration. On fixe $f\in A^\psi_\alpha\left(\mathbb{B}_N\right)$ et on pose $C=\|f\|_{A^\psi_\alpha}$. On note $c_{(n,k)}=\sup\limits_{\Delta_{(n,k)}}\left(|f|\right)$ et soit $\tau_{(n,k)}\in\Delta_{(n,k)}$ tel que $\left|f\left(\tau_{(n,k)}\right)\right|\geq\frac{c_{(n,k)}}{2}$. Comme $\frac{\psi\circ|f|}{C}$ est sous-harmonique, et par la propriété de la sous-moyenne, il vient

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_{\mathbb{B}_N}\psi\left(\frac{\Lambda_f}{2C}\right)dv_\alpha & \leq & \displaystyle\sum_{n,k\geq 0}\psi\left(\frac{\left|f\left(\tau_{(n,k)}\right)\right|}{C}\right)v_\alpha\left(\Delta_{(n,k)}\right)\\ & \leq & \displaystyle\sum_{n,k\geq 0}\frac{v_\alpha\left(\Delta_{(n,k)}\right)}{v_\alpha\left(\Delta^\varepsilon_{(n,k)}\right)}\int_{\Delta^\varepsilon_{(n,k)}}\psi\left(\frac{|f|}{C}\right)dv_\alpha.\end{array}$$

Bien sûr,

$$\frac{v_\alpha\left(\Delta_{(n,k)}\right)}{v_\alpha\left(\Delta^\varepsilon_{(n,k)}\right)}\leq D_\varepsilon,$$

où $D_\varepsilon>0$ est une constante qui ne dépend que de ε. Ainsi, on a

$$\int_{\mathbb{B}_N}\psi\left(\frac{\Lambda_f}{2C}\right)dv_\alpha\quad\leq\quad D_\varepsilon\sum_{n,k\geq 0}\int_{\Delta^\varepsilon_{(n,k)}}\psi\left(\frac{|f|}{C}\right)dv_\alpha.$$

Or, $C_n^\varepsilon=\cup_{k\geq 0}\Delta^\varepsilon_{(n,k)}$ et, d'après la troisième propriété suivant la construction des $\Delta_{(n,k)}$ ci-dessus, pour tout n, chaque point de C_n^ε appartient à au plus M ensembles $\Delta^\varepsilon_{(n,k)}$. Donc, pour n fixé,

$$\sum_{k\geq 0}\int_{\Delta^\varepsilon_{(n,k)}}\psi\left(\frac{|f|}{C}\right)dv_\alpha\leq M\int_{C_n^\varepsilon}\psi\left(\frac{|f|}{C}\right)dv_\alpha.$$

Ensuite, il est évident que $\mathbb{B}_N \subset \cup_{n\geq 0} C_n^{\varepsilon}$ et que chaque point de $\mathbb{B}_N$ appartient à au plus 3 des C_n^{ε}. Il suit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{\Lambda_f}{2C}\right) dv_\alpha &\leq D_\varepsilon M \sum_{n\geq 0} \int_{C_n^\varepsilon} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) dv_\alpha \\ &\leq B \int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) dv_\alpha, \end{aligned}$$

où $B \geq 1$ est une constante indépendante de f. Maintenant, par convexité, on a

$$\int_{\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{\Lambda_f}{2BC}\right) dv_\alpha \leq 1,$$

d'où

$$\left\|\Lambda_f\right\|_{L_\alpha^\psi} \leq 2B \left\|f\right\|_{A_\alpha^\psi}.$$

□

On énonce notre version du théorème de Carleson comme suit :

Théorème III.2.6. *Il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que, pour toute $f \in A_\alpha^1(\mathbb{B}_N)$ et pour toute mesure borélienne positive finie μ sur $\mathbb{B}_N$, on a*

$$\mu\left(\{z \in \mathbb{B}_N, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\}\right) \leq \tilde{C} K_{\mu,\alpha}(2h)\, v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f > t\right\}\right),$$

pour tout $h \in (0, 1/2)$ et pour tout $t > 0$.

Démonstration. La preuve est très semblable à celle de [18, Lemme 2.3]. Nous préférons en donner les détails. On fixe $0 < h < 1$ et $t > 0$. On identifie $i \in \mathbb{N}$ et $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ grâce à une bijection arbitraire de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$. On écrit $i \longleftrightarrow (n,k)$ sans confusion possible. Définissons

$$I = \left\{ i \longleftrightarrow (n,k)\,,\, \sup_{\Delta_i} |f| > t \right\}$$

et

$$I_h = \left\{ i \longleftrightarrow (n,k)\,,\, h > \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \sup_{\Delta_i} |f| > t \right\}.$$

En notant W_i la plus petite fenêtre de Carleson contenant Δ_i, et d'après la troisième remarque sur les Δ_i ci-dessus, on peut trouver des constantes $C > 0$ et $\tilde{C} > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \mu\left(\{z \in \mathbb{B}_N, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\}\right) &\leq \sum_{i\in I_h} \mu(\Delta_i) \\ &\leq \sum_{i\in I_h} \mu(W_i) \\ &\leq C \sum_{i\in I_h} K_{\mu,\alpha}(2h)\, v_\alpha(W_i) \\ &\leq C\tilde{C} K_{\mu,\alpha}(2h) \sum_{i\in I} v_\alpha(\Delta_i). \end{aligned}$$

La troisième inégalité provient de (III.2.2) et du fait que, pour tout $i \in I_h$, comme le rayon de W_i est plus petit que $\frac{1}{2^n}$, il est également plus petit que $2h$. Maintenant, comme chaque point de $\mathbb{B}_N$ appartient à au plus M des Δ_i, on a

$$\sum_{i\in I} v_\alpha(\Delta_i) \leq M v_\alpha\left(\bigcup_{i\in I} \Delta_i\right) \leq M v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f > t\right\}\right),$$

et

$$\mu\left(\{z \in \mathbb{B}_N, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\}\right) \lesssim K_{\mu,\alpha}(2h)\, v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f > t\right\}\right).$$

□

On utilise notre version du théorème de Carleson pour obtenir le lemme technique suivant :

Lemme III.2.7. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{B}_N$ et soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz. On suppose qu'il existe $A > 0$, $\eta > 0$ et $h_A \in (0, 1/2)$ telles que*

$$K_{\mu,\alpha}(h) \leq \eta \frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)},$$

pour tout $h \in (0, h_A)$. Alors, il existe trois constantes $B > 0$, $x_A > 0$ et $C_1 > 0$ (cette dernière ne dépendant pas de A, η et h_A) telles que, pour toute $f \in A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ vérifiant $\|f\|_{A_\alpha^{\psi_1}} \leq 1$, et tout borélien E de $\mathbb{B}_N$, on a

$$\int_E \psi_2\left(\frac{|f|}{B}\right) d\mu \leq \mu(E)\,\psi_2(x_A) + C_1\eta \int_{\mathbb{B}_N} \psi_1(\Lambda_f)\, dv_\alpha.$$

Démonstration. Soient A, h_A et η vérifiant les hypothèses du lemme. Pour $f \in A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, $\|f\|_{A_\alpha^{\psi_1}} \leq 1$, et E un borélien de $\mathbb{B}_N$, on commence par écrire la formule suivante (Fubini) :

$$\int_E \psi_2(|f|)\, d\mu = \int_0^\infty \psi_2'(t)\,\mu(\{|f| > t\} \cap E)\, dt. \tag{III.2.4}$$

On porte alors son attention sur l'expression $\mu(\{|f| > t\})$. On utilise la majoration de la norme de l'évaluation donnée dans la proposition III.2.2 pour obtenir que, si $|f(z)| > t$, alors, puisque $\|f\|_{A_\alpha^{\psi_1}} \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} t &< \psi_1^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^{N+1+\alpha}\right) \\ &\leq 2^{N+1+\alpha}\psi_1^{-1}\left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^{N+1+\alpha}\right); \end{aligned} \tag{III.2.5}$$

dans la dernière inégalité, on a utilisé la convexité de ψ. L'inégalité (III.2.5) est équivalente à l'inégalité

$$|z| > 1 - \left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{t}{2^{N+1+\alpha}}\right)}\right)^{1/(N+1+\alpha)}.$$

Le théorème de Carleson (théorème III.2.6) donne alors

$$\begin{aligned} \mu(\{|f| > t\}) &= \mu\left(\{|f| > t\} \cap \left\{|z| > 1 - \left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{t}{2^{N+1+\alpha}}\right)}\right)^{1/(N+1+\alpha)}\right\}\right) \\ &\leq \tilde{C}K_\mu\left(2\left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{t}{2^{N+1+\alpha}}\right)}\right)^{1/(N+1+\alpha)}\right) v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f > t\right\}\right). \end{aligned} \tag{III.2.6}$$

Maintenant, les hypothèses du lemme assurent que, si

$$\frac{1}{2^{N+1+\alpha}}\psi_1\left(\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}s\right) > 1/h_A^{N+1+\alpha},$$

i.e. $s \geq x_A := \dfrac{A}{3.2^{N+\alpha}}\psi_1^{-1}\left((2/h_A)^{N+1+\alpha}\right)$, alors

$$K_\mu\left(2\left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}s\right)}\right)^{1/(N+1+\alpha)}\right) \leq \frac{\eta}{2^{N+1+\alpha}}\frac{\psi_1\left(\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}s\right)}{\psi_2\left(\frac{3}{2}s\right)}. \tag{III.2.7}$$

D'où, en appliquant l'égalité (III.2.4) à $\dfrac{A}{6.4^{N+\alpha}}|f|$, et en utilisant les inégalités (III.2.6) et (III.2.7), avec $t=\dfrac{6.4^{N+\alpha}}{A}s$ dans (III.2.6), il vient

$$\begin{aligned}\int_E \psi_2\left(\frac{A}{6.4^{N+\alpha}}|f|\right)d\mu &\leq \int_0^{x_A}\psi_2^{'}(s)\,\mu(E)\,ds\\ &+\frac{\eta\tilde{C}}{2^{N+1+\alpha}}\int_{x_A}^{\infty}\psi_2^{'}(s)\frac{\psi_1\left(\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}s\right)}{\psi_2\left(\frac{3}{2}s\right)}v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f>\frac{6.4^{N+\alpha}}{A}s\right\}\right)ds. \quad \text{(III.2.8)}\end{aligned}$$

On s'occupe de la seconde intégrale du membre de droite ; notons que, pour une fonction d'Orlicz ψ, on a

$$x\psi^{'}(x)\leq C\psi\left(\frac{(C+1)x}{C}\right)$$

pour tout $C>0$ et pour tout $x\geq 0$. En effet, comme $\psi^{'}(t)$ est croissante, il vient

$$\frac{x}{C}\psi^{'}(x)\leq\int_x^{\frac{C+1}{C}x}\psi^{'}(t)\,dt\leq\psi\left(\frac{C+1}{C}x\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{\psi_2^{'}(s)}{\psi_2\left(\frac{3}{2}s\right)}\leq\frac{2}{s},$$

et l'inégalité (III.2.8) donne

$$\int_E \psi_2\left(\frac{A}{6.4^{N+\alpha}}|f|\right)d\mu\leq\psi_2(x_A)\,\mu(E)+\frac{\eta\tilde{C}}{2^{N+\alpha}}\int_{x_A}^{\infty}\frac{1}{s}\psi_1\left(\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}s\right)v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f>\frac{6.4^{N+\alpha}}{A}s\right\}\right)ds.$$

En utilisant la convexité de la fonction ψ_1, on obtient

$$\begin{aligned}\int_E \psi_2\left(\frac{A}{6.4^{N+\alpha}}|f|\right)d\mu &\leq \psi_2(x_A)\,\mu(E)\\ &+\frac{\eta\tilde{C}}{2^{N+\alpha}}\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}\int_0^{\infty}\psi_1^{'}\left(\frac{3.2^{N+\alpha}}{A}s\right)v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f>\frac{6.4^{N+\alpha}}{A}s\right\}\right)ds\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}\int_E \psi_2\left(\frac{A}{6.4^{N+\alpha}}|f|\right)d\mu &\leq \psi_2(x_A)\,\mu(E)+\frac{\eta\tilde{C}}{2^{N+\alpha}}\int_0^{\infty}\psi_1^{'}(u)v_\alpha\left(\left\{\Lambda_f>2^{N+1+\alpha}u\right\}\right)du\\ &\leq \psi_2(x_A)\,\mu(E)+\frac{\eta\tilde{C}}{2^{N+\alpha}}\int_{\mathbb{B}_N}\psi_1\left(\frac{\Lambda_f}{2^{N+1+\alpha}}\right)dv_\alpha\\ &\leq \psi_2(x_A)\,\mu(E)+\frac{\eta\tilde{C}}{2.4^{N+\alpha}}\int_{\mathbb{B}_N}\psi_1(\Lambda_f)\,dv_\alpha\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Dans le contexte usuel des espaces de Bergman (respectivement des espaces de Hardy), le théorème de Carleson assure que, étant donné une mesure borélienne positive finie μ sur $\mathbb{B}_N$ (resp. $\overline{\mathbb{B}_N}$), l'inclusion $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)\subset L^p(\mu)$ (resp. $H^p(\mathbb{B}_N)\subset L^p(\mu)$) a lieu (et est continue) si et seulement si μ est une mesure de α-Bergman-Carleson (resp. une mesure de Carleson). La compacité est caractérisée de la même façon en termes de mesures de α-Bergman-Carleson évanescentes (resp. de mesure de Carleson évanescentes). Il apparaît d'emblée que ces caractérisations ne dépendent pas de l'exposant p. Dans le contexte des espaces de

Bergman-Orlicz (resp. des espaces de Hardy-Orlicz), la formulation du théorème de Carleson (théorème III.2.6) et le lemme technique qui en découle (cf. partie III.3 pour leurs énoncés dans le contexte des espaces de Hardy-Orlicz), sont suffisamment généraux pour permettre d'en déduire deux conditions, nécessaires et suffisantes, portant sur une mesure μ, pour obtenir l'inclusion (et donc sa continuité), ou la compacité de cette inclusion, d'un espace de Bergman-Orlicz $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ (resp. Hardy-Orlicz $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$) dans un espace d'Orlicz $L^{\psi_2}(\mathbb{B}_N,\mu)$ (resp. $L^{\psi_2}(\mathbb{S}_N,\mu)$).

Récemment, Z. J. Jiang a montré ([14]) que ces caractérisations restent valables dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz si $\psi_1=\psi_2=\psi$ vérifie la condition Δ_2. Comme les fonctions d'Orlicz qui satisfont à cette condition sont « presque » des fonctions puissances $x\longmapsto x^p$, ses démontrations et ses résultats sont très semblables (identiques en ce qui concerne les résultats eux-mêmes) à ceux qui sont connus dans le cadre classique des espaces de Bergman.

Dans la suite, on s'intéresse à des théorèmes d'inclusion entre espaces de type Orlicz généraux, i.e. pour des fonctions d'Orlicz ψ_1 et ψ_2 arbitraires ; en appliquant ces résultats aux opérateurs de composition, on met en évidence des comportements originaux, et quelque peu surprenants, de ces derniers lorsqu'ils agissent sur des espaces de Bergman-Orlicz à poids (et dans la partie 3 sur des espaces de Hardy-Orlicz) associés à des fonctions d'Orlicz qui croissent suffisamment vite. Bien entendu, ces phénomènes ne se produisent pas quand la fonction d'Orlicz ne vérifie pas la condition Δ_2.

On s'intéresse d'abord à l'existence d'une telle inclusion.

III.2.2.1 L'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)\hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$.

Le lemme III.2.7 nous donne le théorème d'inclusion suivant, dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz à poids.

Théorème III.2.8. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{B}_N$ et soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz.*

1. *Si l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)\subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue), alors il existe une constante $A>0$ telle que*

$$\rho_\mu(h)=O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}\right). \tag{III.2.9}$$

2. *S'il existe une constante $A>0$ telle que*

$$K_{\mu,\alpha}(h)=O_{h\to 0}\left(\frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}\right), \tag{III.2.10}$$

   alors l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)\subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue).

3. *Si l'on suppose de plus que $\psi_1=\psi_2=\psi$ vérifient la condition ∇_0-uniforme (cf. III.1.10), alors* (III.2.9) *et* (III.2.10) *sont équivalentes.*

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)\subset L^{\psi_2}(\mu)$ est automatiquement continue, dès lors qu'elle a lieu. Cela provient simplement du théorème du graphe fermé.

Démonstration du théorème III.2.8. 1) Notons C la norme de l'inclusion $j_{\mu\alpha}:A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)\hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$. Soient $a\in\mathbb{B}_N$, $|a|=1-h$ et $\xi\in\mathbb{S}_N$ tels que $a=(1-h)\xi$. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f_a(z) &= \frac{1}{2^{N+1+\alpha}}\frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{1/h^{N+1+\alpha}}H_a(z)\\ &= \frac{1}{2^{N+1+\alpha}}\frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{1/h^{N+1+\alpha}}\left(\frac{h(2-h)}{|1-(1-h)\langle z,\xi\rangle|^2}\right)^{N+1+\alpha}.\end{aligned}$$

Rappelons que H_a est le noyau de Berezin introduit dans la proposition III.2.2. D'après la démonstration de cette même proposition, f est dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ et on a donc, par hypothèse,

$$\left\| j_{\mu,\alpha}(f) \right\|_{L^{\psi_2}(\mu)} = \|f\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq C,$$

si bien que

$$1 \geq \int_{\mathbb{B}_N} \psi_2\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu. \tag{III.2.11}$$

On va minorer le membre de droite de (III.2.11), en minorant $|f|$ sur une « boule » anisotrope $S(\xi,h)$. Si $z \in S(\xi,h)$, alors

$$\begin{aligned}
|1-\langle z,a\rangle| &\leq |1-\langle \xi,a\rangle| + |\langle \xi,a\rangle - \langle z,a\rangle| \\
&\leq h + (1-h)\,|\langle \xi,\xi\rangle - \langle z,\xi\rangle| \\
&\leq h + (1-h)\,|1-\langle z,\xi\rangle| \\
&\leq h + (1-h)\,h \\
&\leq 2h.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $z \in S(a,h)$,

$$\begin{aligned}
|f_a(z)| &\geq \frac{1}{2^{N+1+\alpha}} \frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{1/h^{N+1+\alpha}} \left(\frac{1}{4h}\right)^{N+1+\alpha} \\
&= \frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{8^{N+1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
1 &\geq \int_{\mathbb{B}_N} \psi_2\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu \\
&\geq \int_{S(\xi,h)} \psi_2\left(\frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{8^{N+1+\alpha}C}\right) d\mu \\
&\geq \psi_2\left(\frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{8^{N+1+\alpha}C}\right) \mu\left(S_f(a,h)\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne la condition (III.2.9) et la première partie du théorème.

2) La deuxième partie utilise le lemme III.2.7. Tout d'abord, on sait (proposition III.2.5) qu'il existe une constante $C_M \geq 1$ telle que, pour toute $f \in A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, $\left\|\Lambda_f\right\|_{L_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)} \leq C_M \|f\|_{A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)}$, où Λ_f est la fonction maximale introduite plus haut (pour voir que $C_M \geq 1$, il suffit de le vérifier avec $f=1$). Soit maintenant f dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$; il suffit de montrer que $\|f\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq C_0$ pour une constante $C_0 > 0$ indépendante de f. Soit $\tilde{C} \geq 1$ une constante dont la valeur sera fixée plus tard. La condition (III.2.10) est supposée être réalisée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $A > 0$, $h_A \in (0,1/2]$ et $\eta > 0$ telles que

$$K_{\mu,\alpha}(h) \leq \eta \frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}, \tag{III.2.12}$$

pour tout $h \in (0,h_A)$. En utilisant la convexité de ψ_2 et le lemme III.2.7 appliqué à f/C_M (qui vérifie encore $\|f/C_M\|_{A_\alpha^{\psi_1}} \leq 1$), $E = \mathbb{B}_N$, η et h_A comme dans (III.2.12), on peut trouver des constantes $B > 0$, x_A et $C_1 > 0$, toutes indépendantes de f, telles que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_N} \psi_2\left(\frac{|f|}{BC_M\tilde{C}}\right) d\mu &\leq \frac{1}{\tilde{C}} \int_{\mathbb{B}_N} \psi_2\left(\frac{|f|}{BC_M}\right) d\mu \\
&\leq \frac{1}{\tilde{C}} \left(\mu(\mathbb{B}_N)\,\psi_2(x_A) + C_1\eta \int_{\mathbb{B}_N} \psi_1\left(\frac{\Lambda_f}{C_M}\right) dv_\alpha\right) \\
&\leq \frac{1}{\tilde{C}} \left(\mu(\mathbb{B}_N)\,\psi_2(x_A) + C_1\eta\right).
\end{aligned}$$

Clairement, C_1 peut être choisie suffisamment grande de façon à ce que $C_1\eta \geq 1$ et, quitte à fixer $\tilde{C} = \mu(\mathbb{B}_N)\,\psi_2(x_A) + C_1\eta \geq 1$, on obtient $\|f\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq C_0 := BC_M\tilde{C}$, ce qui termine la démonstration de (2) du théorème III.2.8.

3) Il est très utile d'observer le fait suivant :

Condition (D). Avec les notations et sous les hypothèses du théorème, si l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue), alors il existe une constante A aussi grande que l'on veut et $\eta > 0$ tels que

$$\rho_\mu(h) \leq \eta \frac{1}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(h_A/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}, \tag{III.2.13}$$

pour tout h_A, $0 < h_A \leq 1$ et pour tout $0 < h < h_A$.

Démonstration du Fait. D'après le premier point de la présente démonstration, l'inégalité

$$\rho_\mu(h) \leq \eta \frac{1}{\psi_2\left(\tilde{A}\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)} \tag{III.2.14}$$

a lieu pour $\tilde{A} \geq 0$, $0 < \tilde{h_A} \leq 1$, $\eta > 0$ et pour tout $0 < h < \tilde{h_A}$. On fixe $A > 1$ et on cherche une constante $h_{\tilde{A},A} \leq 1$ telle que

$$\frac{1}{\psi_2\left(\tilde{A}\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)} \leq \frac{1}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(\left(h_{\tilde{A},A}/h\right)^{N+1+\alpha}\right)\right)}, \tag{III.2.15}$$

pour $0 < h < h_{\tilde{A},A}$. Or il est facile de vérifier que l'inégalité (III.2.15) est équivalente à

$$\frac{A}{\tilde{A}} \leq \frac{\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)}{\psi_1^{-1}\left(\left(h_{\tilde{A},A}/h\right)^{N+1+\alpha}\right)} \leq \frac{1}{h_{\tilde{A},A}^{N+1+\alpha}}$$

par concavité de ψ_1^{-1}. Par suite, le fait est acquis en choisissant $h_{\tilde{A},A}$ suffisamment petit. □

On revient à la démonstration du troisième point. Maintenant, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$. D'abord, il est clair que la condition (III.2.10) implique la condition (III.2.9). La réciproque est également vraie si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme. Soit $A > 0$, $h_A \in (0,1]$ et $\eta > 0$ tels que

$$\rho_\mu(h) \leq \eta \frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}$$

pour tout $h \in (0, h_A)$. Le fait ci-dessus assure qu'on peut trouver $B \geq 1$ et $0 < K = K_{B,A} \leq 1$ telles que

$$\rho_\mu(h) \leq \eta \frac{1}{\psi\left(B\psi^{-1}\left((K/h)^{N+1+\alpha}\right)\right)}$$

pour tout $0 < h < K$. On a alors

$$K_{\mu,\alpha}(h) = \sup_{0<t\leq h} \frac{\rho_\mu(t)}{t^{N+1+\alpha}} \leq \eta \sup_{0<t\leq h} \frac{1/t^{N+1+\alpha}}{\psi\left(B\psi^{-1}\left((K/t)^{N+1+\alpha}\right)\right)} = \eta \sup_{x\geq\psi^{-1}\left((K/h)^{N+1+\alpha}\right)} \frac{1}{K^{N+1+\alpha}} \frac{\psi(x)}{\psi(Bx)},$$

pour tout $0 < h \leq K$. Soit C la constante provenant de la condition ∇_0-uniforme vérifiée par ψ, et soit β tel que $B = \beta C$. Le fait nous autorise à choisir B aussi grand qu'on veut et donc à supposer que $\beta > 1$. Ainsi, puisque ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme,

$$\frac{\psi\left(\beta\psi^{-1}\left((K/h)^{N+1+\alpha}\right)\right)}{(K/h)^{N+1+\alpha}} \leq \frac{\psi(Bx)}{\psi(x)}$$

pour tout $x \geq \psi^{-1}\left((K/h)^{N+1+\alpha}\right)$. D'où, pour tout $0 < h \leq K$,

$$K_{\mu,\alpha}(h) \leq \eta \frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi\left(\beta\psi^{-1}\left((K/h)^{N+1+\alpha}\right)\right)} \leq \eta \frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi\left(\beta K^{N+1+\alpha}\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}$$

par concavité de ψ^{-1}, et la condition (III.2.10) est bien satisfaite. □

Le troisième point du théorème précédent nous conduit à définir les mesures de (ψ,α)-*Bergman-Carleson* sur la boule :

Définition III.2.9. Soit μ une mesure de Borel sur $\mathbb{B}_N$ et soit ψ une fonction d'Orlicz. On dit que μ est une mesure de (ψ,α)-*Bergman-Carleson* s'il existe une constante $A > 0$, telle que

$$\mu\left(W(\xi,h)\right) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}\right), \tag{III.2.16}$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Notons que la condition (III.2.16) est équivalente à la condition (III.2.9). Il semble d'un certain intérêt d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire III.2.10. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{B}_N$, et soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_0-uniforme. L'inclusion $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^\psi(\mu)$ a lieu (et est continue) si et seulement si μ est une mesure de (ψ,α)-Bergman-Carleson.*

III.2.2.2 Compacité de l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$.

Nous aurons besoin d'un critère de compacité.

Proposition III.2.11. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{B}_N$ et soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz. On suppose que l'inclusion $j_{\mu,\alpha} : A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue). Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$j_{\mu,\alpha} : A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$ est compacte ;*
2. *Toute suite dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, qui converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$, converge en norme vers 0 dans $L^{\psi_2}(\mu)$.*
3. *$\lim_{r\to 1^-}\|I_r\| = 0$, où $I_r(f) = f.\chi_{\mathbb{B}_N\setminus r\overline{\mathbb{B}_N}}$.*

Démonstration. 1⇒2) On suppose d'abord que $j_{\mu,\alpha}$ est compacte. Soit $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, qui converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$. D'évidence, $j_{\mu,\alpha}(f_n)$ converge simplement vers 0 partout. Supposons alors par l'absurde, et quitte à extraire une sous-suite, que

$$\liminf_n \left\| j_{\mu,\alpha}(f_n)\right\|_{L^{\psi_2}(\mu)} > 0.$$

La compacité de $j_{\mu,\alpha}$ autorise, à ré-extraction près d'une sous-suite, à supposer que $\left(j_{\mu,\alpha}(f_n)\right)_n$ converge en norme vers une fonction $g \in L^{\psi_2}(\mu)$, qui doit nécessairement vérifier $\|g\|_{L^{\psi_2}(\mu)} > 0$. Comme la convergence en norme dans $L^{\psi_2}(\mu)$ implique la convergence μ-presque partout, on aboutit à une contradiction.

2⇒1) Inversement, soit $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$. En particulier, $(f_n)_n$ est incluse dans la boule unité de $A_\alpha^1(\mathbb{B}_N)$ et la formule de Cauchy assure que $(f_n)_n$ est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{B}_N$, si bien qu'à extraction près, on peut supposer, d'après le théorème de Montel, que la suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur tout compact de $\mathbb{B}_N$ vers une fonction f holomorphe dans $\mathbb{B}_N$. Maintenant, le théorème de convergence dominée de Lebesgue assure que $f \in A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ et, quitte à diviser par une constante suffisamment grande, on peut supposer que $(f_n - f)_n$, qui converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$, est incluse dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$. Par hypothèse, $\left(j_{\mu,\alpha}(f_n) - j_{\mu,\alpha}(f)\right)_n$ converge vers 0 pour la norme de $L^{\psi_2}(\mu)$, et $j_{\mu,\alpha}$ est compacte, comme attendu.

3⇒2) Soit $(f_n)_n$ une suite incluse dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, qui converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$. On a

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\|f_n\|_{L^{\psi_2}(\mu)} &= \limsup_{r\to 1^-}\limsup_{n\to\infty}\left\|I_r(f_n) + f_n\cdot\chi_{\overline{r\mathbb{B}_N}}\right\|_{L^{\psi_2}(\mu)}\\ &\lesssim \limsup_{r\to 1^-}\|I_r\| + \limsup_{r\to 1^-}\limsup_{n\to\infty}\left\|f_n\cdot\chi_{\overline{r\mathbb{B}_N}}\right\|_\infty\\ &= 0.\end{aligned}$$

2⇒3) On suppose par l'absurde que (3) n'est pas satisfaite, si bien qu'il existe une constante $\delta > 0$ et une suite $(f_n)_n$ dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ telle que $\left\|I_{\left(1-\frac{1}{n}\right)}(f_n)\right\|_{L^{\psi_2}} \geq \delta$ pour tout $n \geq 0$. Quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$ vers une fonction $f \in A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, $\lim_{n\to\infty}\left\|I_{\left(1-\frac{1}{n}\right)}(f)\right\|_{L^{\psi_2}} = 0$; ainsi, pour n suffisamment grand,

$$\|f_n - f\|_{L^{\psi_2}} \geq \left\|I_{\left(1-\frac{1}{n}\right)}(f_n - f)\right\|_{L^{\psi_2}} \geq \delta/2$$

ce qui contredit (2). □

Comme dans le paragraphe III.2.2.1, la proposition III.2.11 et le lemme III.2.7 donnent le théorème de compacité de l'inclusion suivant, pour les espaces de Bergman-Orlicz.

Théorème III.2.12. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{B}_N$, et soient ψ_1 et ψ_2 deux fonction d'Orlicz.*

1. *Si l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu et est compacte, alors pour toute constante $A > 0$, on a*

$$\rho_\mu(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}\right). \tag{III.2.17}$$

2. *Si*

$$K_{\mu,\alpha}(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}\right) \tag{III.2.18}$$

pour tout $A > 0$, alors $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ s'injecte de façon compacte dans $L^{\psi_2}(\mu)$.

3. *Si on suppose de plus que $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ vérifie la condition ∇_0 (cf. III.1.8), alors les conditions* (III.2.17) *et* (III.2.18) *sont équivalentes.*

Démonstration. 1) On suppose que l'inclusion $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ est compacte et, par l'absurde, que la condition (III.2.17) n'est pas satisfaite. Cette dernière hypothèse signifie qu'il existe des réels $\varepsilon_0 \in (0,1)$ et $A > 0$, une suite $(h_n)_n \subset (0,1)$ qui décroît vers 0, et une suite $(\xi_n)_n \subset \mathbb{S}_N$, tels que

$$\mu\left(S(\xi_n, h_n)\right) \geq \frac{\varepsilon_0}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}.$$

Soit $a_n := (1-h_n)\xi_n$; on considère les fonctions

$$\begin{aligned}f_n(z) := f_{a_n}(z) &:= \frac{1}{2^{N+1+\alpha}}\frac{\psi_1^{-1}\left(1/h_n^{N+1+\alpha}\right)}{1/h_n^{N+1+\alpha}}H_{a_n}(z)\\ &= \frac{1}{2^{N+1+\alpha}}\frac{\psi_1^{-1}\left(1/h_n^{N+1+\alpha}\right)}{1/h_n^{N+1+\alpha}}\left(\frac{h_n(2-h_n)}{\left|1-(1-h_n)\langle z,\xi_n\rangle\right|^2}\right)^{N+1+\alpha},\end{aligned} \tag{III.2.19}$$

où H_{a_n} est le noyau de Berezin (cf. proposition III.2.2). La deuxième partie de la démonstration de la proposition III.2.2 (l'inégalité (III.2.1) plus précisément), assure que chaque f_n appartient à la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$. D'après (III.2.19), comme ψ_1 est une fonction d'Orlicz (on utilise le point (2) dans la III.1.2), $(f_n)_n$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$. La proposition III.2.11 entraîne que $(f_n)_n$ converge vers 0 pour la norme de $L^{\psi_2}(\mu)$.

Or, la démonstration de la première partie du théorème III.2.8 fournit les estimations suivantes :

$$|H_{a_n}(z)| \geq \left(\frac{1}{4h_n}\right)^{N+1+\alpha}$$

pour tout $z \in S(\xi_n, h_n)$, ce qui se réécrit

$$|f_n(z)| \geq \frac{\psi_1^{-1}\left(1/h_n^{N+1+\alpha}\right)}{8^{N+1+\alpha}}$$

pour tout $z \in S(\xi_n, h_n)$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_N} \psi_2\left(\frac{8^{N+1+\alpha}A}{\varepsilon_0}|f_n|\right)d\mu &\geq \psi_2\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h_n^{N+1+\alpha}}\right)\right)\mu\left(S_f(\xi_n,h_n)\right)\\
&\geq \psi_2\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h_n^{N+1+\alpha}}\right)\right)\frac{\varepsilon_0}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h_n^{N+1+\alpha}\right)\right)}\\
&\geq 1,
\end{aligned}$$

en utilisant la convexité de ψ_2. On obtient ainsi $\|f_n\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \geq \dfrac{\varepsilon_0}{8^{N+1+\alpha}A}$ pour tout n, ce qui contredit le fait que $(f_n)_n$ converge vers 0 dans $L^{\psi_2}(\mu)$.

2) On suppose maintenant que la condition (III.2.18) est satisfaite. Grâce au point (3) de la proposition III.2.11, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la norme de l'inclusion

$$j_{\mu,\alpha,r} : A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}\left(\mathbb{B}_N \setminus r\overline{\mathbb{B}_N}, \mu\right)$$

est plus petite que ε pour un $0 < r_0(\varepsilon) < 1$, et pour tout r tel que $r_0(\varepsilon) \leq r < 1$. Soient $\eta \in (0,1)$ et $A := A(\varepsilon) = \dfrac{6.4^{N+\alpha}}{\varepsilon} > 0$; la condition (III.2.18) signifie qu'il existe $h_A \in (0,1/2)$ tel que

$$K_{\mu,\alpha}(h) \leq \eta \frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}$$

pour tout $h \leq h_A$. Soit f dans la boule unité de $A_\alpha^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ et soit $r \in (0,1)$. D'après la démonstration du lemme III.2.7, appliquée à $E = \mathbb{B}_N \setminus r\overline{\mathbb{B}_N}$ et f, il existe deux constantes indépendantes de f, $x_A > 0$ et $C_1 > 0$ (cette dernière ne dépend pas non plus de A, ni de x_A, ni de η), telles que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_N \setminus r\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right)d\mu &= \int_{\mathbb{B}_N \setminus r\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{A}{6.4^{N+\alpha}}\frac{|f|}{B}\right)d\mu\\
&\leq \mu\left(\mathbb{B}_N \setminus r\overline{\mathbb{B}_N}\right)\psi_2(x_A) + C_1\eta\int_{\mathbb{B}_N}\psi_1(\Lambda_f)\,dv_\alpha,
\end{aligned}$$

où Λ_f désigne la fonction maximale de f, definie par (III.2.3). On choisit maintenant η de sorte que $C_1\eta\displaystyle\int_{\mathbb{B}_N}\psi_1(\Lambda_f)\,dv_\alpha \leq \frac{1}{2}$ (ce qui est possible en vertu de la proposition III.2.5 et du fait que ψ_1 vérifie la condition ∇_2), et $r_0 \in (0,1)$ de façon à ce que $\mu\left(\mathbb{B}_N \setminus r\overline{\mathbb{B}_N}\right)\psi_2(x_A) \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $r \in (r_0, 1)$ (notons que r_0 dépend de ε, car A dépend de ε). Il vient donc $\left\|j_{\mu,\alpha,r}(f)\right\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq \varepsilon$ dès que $r_0 < r < 1$, ce qui termine la démonstration.

3) La démonstration de ce point est identique à celle de la troisième partie du théorème 4.11 de [16]. □

Ceci nous amène à définir les mesures de (ψ,α)-*Bergman-Carleson évanescentes* sur la boule :

Définition III.2.13. Soient ψ une fonction d'Orlicz et μ une mesure borélienne sur $\mathbb{B}_N$. On dit que μ est une mesure de (ψ,α)-Bergman-Carleson *évanescente* si, pour tout $A>0$,

$$\mu\left(W\left(\xi,h\right)\right)=o_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}\right),$$

pour tout $\xi\in\mathbb{S}_N$.

On a le corollaire du théorème III.2.12 suivant :

Corollaire III.2.14. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_0 et soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\mathbb{B}_N$. L'espace $A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$ s'injecte de façon compacte dans $L^{\psi}\left(\mu\right)$ si et seulement si μ est une mesure de (ψ,α)-Bergman-Carleson évanescente.*

III.2.3 Applications aux opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz à poids.

Les théorèmes III.2.8 et III.2.12 permettent d'obtenir les caractérisations suivantes, sous certaines contraintes imposées à la fonction d'Orlicz ψ :

Théorème III.2.15. *Soient ψ une fonction d'Orlicz et $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ une application holomorphe. On note μ^{α}_{ϕ} la mesure image par ϕ de la mesure de Lebesgue pondérée v_α sur $\mathbb{B}_N$, i.e. $\mu^{\alpha}_{\phi}\left(E\right)=v_\alpha\left(\phi^{-1}\left(E\right)\right)$ pour tout borélien E de $\mathbb{B}_N$.*

1. *Si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme, alors C_ϕ est continu de $A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même si et seulement si la mesure μ^{α}_{ϕ} est une mesure de (ψ,α)-Bergman-Carleson.*
2. *Si ψ vérifie la condition ∇_0, alors C_ϕ est compact de $A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même si et seulement si la mesure μ^{α}_{ϕ} est une mesure de (ψ,α)-Bergman-Carleson évanescente.*

Démonstration. D'après les corollaires III.2.10 et III.2.14, il suffit d'observer que la continuité (resp. la compacité) de l'inclusion $j_{\mu^{\alpha}_{\phi}}:A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)\hookrightarrow L^{\psi}\left(\mu^{\alpha}_{\phi}\right)$ est équivalente à la continuité (resp. la compacité) de l'opérateur $C_\phi:A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)\to A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$. Cela provient simplement du fait que

$$\begin{aligned}\left\|C_\phi\left(f\right)\right\|_{A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)} &= \inf\left\{C>0,\int_{\mathbb{B}_N}\psi\left(\frac{|f\circ\phi|}{C}\right)dv_\alpha\leq 1\right\}\\ &= \inf\left\{C>0,\int_{\mathbb{B}_N}\psi\left(\frac{|f|}{C}\right)d\mu^{\alpha}_{\phi}\leq 1\right\}\\ &= \left\|j_{\mu^{\alpha}_{\phi}}\left(f\right)\right\|_{L^{\psi}\left(\mu^{\alpha}_{\phi}\right)},\end{aligned}$$

pour toute $f\in A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$. □

Comme un cas particulier du théorème précédent, on retrouve les théorèmes 3.6 et 4.3 de [14] :

Théorème III.2.16. *Soient ψ une fonction d'Orlicz qui vérifie la condition Δ_2 et $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ une application holomorphe.*

1. *C_ϕ est continu sur $A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même si et seulement si la mesure μ^{α}_{ϕ} est une mesure de α-Bergman-Carleson.*
2. *C_ϕ est compact de $A^{\psi}_{\alpha}\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même si et seulement si la mesure μ^{α}_{ϕ} est une mesure de α-Bergman-Carleson évanescente.*

Démonstration. Il suffit d'observer que

$$\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)} \approx h^{N+1+\alpha}$$

pour tout $A > 0$, dès que ψ est une fonction d'Orlicz qui vérifie la condition Δ_2 (cf. la remarque 2 (a), qui suit le théorème 4.11 dans [16]). En particulier, ceci permet de supprimer les conditions de régularité ∇_0 ou ∇_0-uniforme du théorème III.2.15. □

Remarque III.2.17. Bien entendu, si l'on n'impose plus les conditions ∇_0 ou ∇_0-uniforme, les théorèmes III.2.8 et III.2.12 fournissent des conditions nécessaires, ou suffisantes, à la continuité et à la compacité des opérateurs de composition. Nous avons préféré énoncer notre théorème III.2.15 avec de véritables caractérisations, quitte à devoir imposer ces conditions à la fonction d'Orlicz ψ. Ce qui suit va justifier en quelque sorte ce choix.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, l'une de nos motivations pour étudier les opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz (et dans la partie suivante, sur les espaces de Hardy-Orlicz), est de comprendre « où » intervient la rupture de condition pour la continuité de C_ϕ entre $H^\infty(\mathbb{B}_N)$ et $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)$. Plus précisément, il est naturel de se demander s'il existe des espaces de Bergman-Orlicz, différents de $H^\infty(\mathbb{B}_N)$ et plus petits que tout espace de Bergman $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N)$ classique, sur lesquels tout opérateur de composition est continu. Le résultat suivant, dû à B. MacCluer et P. Mercer et mentionné dans [20], va nous permettre de répondre à cette question de façon satisfaisante :

Proposition III.2.18. *Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe. Pour tout $0 < h < 1$,*

$$\mu^\alpha_\phi\left(W(\xi,h)\right) = O\left(h^{\alpha+2}\right), \tag{III.2.20}$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Pour être plus exact, ce résultat est énoncé dans le cadre plus général des domaines strictement pseudo-convexes, et non simplement dans la boule ([20, proposition 4]). De façon assez inattendue, la preuve de ce résultat utilise le principe de Littlewood, lors d'une intégration par tranches. Nous reviendrons sur cette idée dans le paragraphe III.3.3, où un résultat similaire à la proposition précédente sera démontré pour des mesures images de la mesures de Lebesgue sur la sphère, adaptées au cadre des espaces de Hardy-Orlicz.

Une comparaison de la condition (III.2.20) avec la condition (III.2.10), pour $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ vérifiant la condition ∇_0-uniforme, nous fait remarquer que si, parmi ces fonctions d'Orlicz, on peut en trouver une, ψ, qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$ suivante :

$\mathscr{P}$ **:** pour toute constante $K > 0$, il existe $A > 0$ et $h_0 > 0$ tels que

$$Kh^{\alpha+2} \leq \frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}, \tag{III.2.21}$$

pour tout $0 < h \leq h_0$,

alors tout opérateur de composition sera automatiquement continu sur l'espace de Bergman-Orlicz $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)$. La proposition suivante caractérise les fonctions d'Orlicz qui vérifient cette condition $\mathscr{P}$:

Proposition III.2.19. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. ψ vérifie la condition $\mathscr{P}$ si et seulement si, pour tout $K > 0$ (ou de façon équivalente, pour un $K > 0$), il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x > 0$ suffisamment grand, on a*

$$\psi(x)^{\frac{N+1+\alpha}{\alpha+2}} \leq K\psi(Cx).$$

En particulier, la condition $\mathscr{P}$ est triviale si $N = 1$ et coïncide avec la condition Δ^2 (cf. définition III.1.11) dès que $N > 1$.

Démonstration. La première partie de la proposition provient d'un calcul direct à partir de l'inégalité (III.2.21). Pour la deuxième partie, en vertu de la proposition III.1.12, il suffit de montrer que, pour toutes constantes $K > 0$ et $C > 0$, il existe $C' > 0$ tel que

$$K\psi(Cx) \leq \psi(C'x),$$

dès que x est suffisamment grand. Cette propriété provient facilement de la convexité de la fonction d'Orlicz et du fait qu'elle s'annule en 0. □

Lorsque $N = 1$, le théorème III.4.7 (plus exactement sa version adaptée à la mesure de Lebesgue pondérée sur le disque, cf. [18, théorème 3.1], à l'ordre α près), permet de s'affranchir de la condition ∇_0-uniforme dans le premier point du théorème III.2.15. Pour $N > 1$, cet argument ne tient plus (cf. remarque 5, partie III.4) mais toute fonction d'Orlicz satisfaisant à la condition Δ^2 vérifie aussi la condition ∇_0-uniforme (proposition III.1.14).

Ainsi, le théorème III.2.15, la proposition III.2.18 et la proposition III.2.19 fournissent immédiatement le théorème suivant, qui redonne la continuité automatique des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz (cf. théorème 5.4 de [16]), et répond à la question de l'existence d'un espace de Bergman-Orlicz sur lequel tout opérateur de composition est continu en dimension supérieure :

Théorème III.2.20. *Soit ψ une fonction d'Orlicz.*

1. *Tout opérateur de composition est continu de $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{D})$ dans lui-même ;*
2. *Lorsque $N > 1$, si ψ vérifie la condition Δ^2, alors tout opérateur de composition est continu de $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même.*

La démonstration faite dans [16] du premier point de ce théorème est basée sur le principe de subordination de Littlewood, tout comme celle de la proposition III.2.18, qui fournit justement directement une caractérisation de la continuité (automatique !) de C_ϕ sur tout espace de Bergman à poids classique sur le disque (cf. [9] par exemple).

III.3 Espaces de Hardy-Orlicz sur $\mathbb{B}_N$

Concernant l'étude des opérateurs de composition, comme c'est souvent le cas avec les espaces de Hardy classiques, travailler avec les espaces de Hardy-Orlicz nécessitera un peu plus de précautions que de travailler avec les espaces de Bergman-Orlicz. Leur définition et le fait d'avoir à prendre en compte le comportement à la frontière des fonctions holomorphes qui les constituent en est essentiellement la cause.

III.3.1 Définitions et résultats généraux

De la même façon qu'on définit les espaces de Hardy classiques, on définit les espaces de Hardy-Orlicz de la boule à partir des espaces d'Orlicz sur la sphère et de la mesure de Lebesgue σ_N usuelle sur celle-ci :

Définition III.3.1. Soit ψ une fonction d'Orlicz. L'espace de Hardy-Orlicz $H^{\psi}(\mathbb{B}_N)$ de la boule de $\mathbb{C}^N$ est l'espace des fonctions holomorphes $f : \mathbb{B}_N \to \mathbb{C}$ telles que

$$\sup_{0<r<1} \|f_r\|_{\psi} < \infty,$$

où la fonction $f_r \in L^{\psi}(\mathbb{S}_N, \sigma_N) := L^{\psi}(\mathbb{S}_N)$ est définie par $f_r(z) = f(rz)$.

Quand $\psi(x) = x^p$, pour $p > 1$, on a naturellement $H^{\psi}(\mathbb{B}_N) = H^p(\mathbb{B}_N)$. Plus généralement, il est aisé de vérifier que l'application $f \longmapsto \sup_{0<r<1} \|f_r\|_{\psi} := \|f\|_{H^{\psi}}$ définit une norme sur $H^{\psi}(\mathbb{B}_N)$. H^{∞} est contenu dans $H^{\psi}(\mathbb{B}_N)$ et, comme $L^{\psi}(\mathbb{S}_N) \subset L^1(\mathbb{S}_N)$, $H^{\psi}(\mathbb{B}_N)$ est lui-même contenu dans $H^1(\mathbb{B}_N)$. En particulier,

$H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ a d'une part la propriété de Fatou, ce qui permet sans difficulté de montrer que la norme $\|.\|_{H^\Psi}$ fait de cet espace un espace de Banach (en utilisant également que $L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ est complet), et d'autre part, toute fonction f dans $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ admet une limite radiale f^* presque partout sur $\mathbb{S}_N$. De plus, le théorème suivant, bien connu dans les espaces de Hardy classiques, se généralise aux espaces de Hardy-Orlicz :

Théorème III.3.2. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Soient $f \in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ et f^* la limite radiale presque partout de f. Alors $f^* \in L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ et*

$$\|f^*\|_\psi = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_\psi .$$

De ce fait, $(H^\Psi(\mathbb{B}_N), \|.\|_{H^\Psi})$ peut s'identifier avec un sous-espace fermé de $L^\Psi(\mathbb{S}_N)$.

La démonstration de ce résultat suit les mêmes idées que celle du théorème analogue en une variable ([16, proposition 3.1]). Comme nous n'avons pas trouvé d'endroits où la démonstration de ce théorème (en plusieurs variables) est faite, nous prenons le temps de l'écrire en détails.

Démonstration. Soient $f \in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ et f^* la limite radiale presque partout de f. Posons $C = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_\psi$. On a

$$\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f_r}{C}\right) d\sigma_N \leq 1$$

pour tout $0 < r < 1$. On déduit immédiatement du théorème de convergence dominée que

$$\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f}{C}\right) d\sigma_N \leq 1,$$

i.e. $f^* \in L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ et $\|f^*\|_\psi \leq C$.

Inversement, si on note $P_r[f](z) = \int_{\mathbb{S}_N} f(\zeta) \frac{(1-|rz|^2)^N}{|1-\langle rz,\zeta\rangle|^{2N}} d\sigma_N(\zeta)$ l'intégrale de Poisson de f, comme $f \in H^1(\mathbb{B}_N)$, $f_r(z) = P_r[f](z)$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f_r}{\|f^*\|_\psi}\right) d\sigma_N &= \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\int_{\mathbb{S}_N} \frac{f^*(\zeta)}{\|f^*\|_\psi} \frac{\left(1-|rz|^2\right)^N}{|1-\langle rz,\zeta\rangle|^{2N}} d\sigma_N(\zeta)\right) d\sigma_N(z) \\
&\leq \int_{\mathbb{S}_N}\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f^*(\zeta)}{\|f^*\|_\psi}\right) \frac{\left(1-|rz|^2\right)^N}{|1-\langle rz,\zeta\rangle|^{2N}} d\sigma_N(\zeta)\, d\sigma_N(z),
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Jensen dans l'intégrale à l'intérieur, pour la mesure de probabilité $\frac{(1-|rz|^2)^N}{|1-\langle rz,\zeta\rangle|^{2N}} d\sigma_N(\zeta)$. Une application du théorème de Fubini permet de conclure :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f_r}{\|f^*\|_\psi}\right) d\sigma_N &\leq \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f^*(\zeta)}{\|f^*\|_\psi}\right) \int_{\mathbb{S}_N} \frac{\left(1-|rz|^2\right)^N}{|1-\langle rz,\zeta\rangle|^{2N}} d\sigma_N(z)\, d\sigma_N(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{f^*(\zeta)}{\|f^*\|_\psi}\right) d\sigma_N(\zeta) \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

d'où $\|f_r\|_\psi \leq \|f^*\|_\psi$ pour tout $0 < r < 1$. □

Quand il n'y aura aucune confusion possible, on désignera indifféremment par $\|.\|_\psi$ ou $\|.\|_{H^\Psi}$ la norme sur $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$.

Contrairement à ce qui se passe dans les espaces de Hardy classiques, l'algèbre $A(\mathbb{B}_N)$ des fonctions holomorphes dans la boule qui se prolongent continûment sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ n'est pas toujours dense dans $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, comme le résultat suivant l'indique (à partir de maintenant, on note $HM^\Psi(\mathbb{B}_N)$ l'intersection $H^\Psi(\mathbb{B}_N) \cap M^\Psi(\mathbb{S}_N)$, cf. paragraphe III.1.2).

Théorème III.3.3. (Cf. théorème 4, Chapitre IX de [23]) *Soit ψ une fonction d'Orlicz. $A(\mathbb{B}_N)$ est dense dans $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ si et seulement si $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ est séparable, ce qui est à son tour équivalent au fait que ψ vérifie la condition Δ_2. Cependant, $HM^\psi(\mathbb{B}_N)$ est toujours séparable.*

En particulier, $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ est séparable quand c'est un espace de Hardy classique ou quand c'est un espace de Hardy-Orlicz « proche » d'un espace de Hardy, au sens de la proposition III.1.6.

La non-séparabilité de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ causera des problèmes quand on essaiera de transférer les théorèmes d'inclusion concernant les inclusions du type $H^\psi(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^\psi(\mu)$ aux opérateurs de composition sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$.

La continuité de l'opérateur d'évaluation (et plus précisément une estimation de sa norme) agissant sur un espace de fonctions analytiques est un outil essentiel pour assurer qu'une famille bornée de fonctions dans cet espace est une famille normale. Nous nous intéressons maintenant à l'opérateur d'évaluation agissant sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$.

On note, comme dans la partie précédente, δ_z cet opérateur d'évaluation au point $z \in \mathbb{B}_N$, de telle sorte que, si f est définie sur $\mathbb{B}_N$, on a $\delta_z(f) = f(z)$.

Tout d'abord, pour $a \in \mathbb{S}_N$ et $0 < r < 1$, on définit la fonction $u_{a,r} \in H^\infty(\mathbb{B}_N)$ par

$$u_{a,r}(z) = \left(\frac{1-r}{1-r\langle z,a \rangle} \right)^{2N}$$

pour $z \in \overline{\mathbb{B}_N}$. Il est clair que $\|u_{a,r}\|_\infty = 1$, puisque $|u_{a,r}(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \overline{\mathbb{B}_N}$ et que $u_{a,r}(z) \underset{z\to a}{\longrightarrow} 1$. Par ailleurs, notons que, pour tout $z \in \mathbb{S}_N$

$$|u_{a,r}(z)| = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^N P(rz,a),$$

où

$$P_w(z) = P(w,z) = \left(\frac{1-|w|^2}{|1-\langle w,z \rangle|^2} \right)^N,$$

pour $w \in \mathbb{B}_N$ et $z \in \mathbb{S}_N$, est le noyau de Poisson. Ainsi, il suit que

$$\|u_{a,r}\|_{L^1(\mathbb{S}_N)} = \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^N,$$

d'après la formule de Cauchy et la positivité de P (cf. [27, Paragraphe 4.1]).

La proposition suivante affirme que l'opérateur d'évaluation est continu sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ et fournit des estimations de sa norme.

Proposition III.3.4. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Si $z \in \mathbb{B}_N$ alors*

$$\frac{1}{4^N} \psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^N \right) \leq \|\delta_z\|_{(H^\psi)^*} \leq \psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^N \right).$$

De plus,

$$\|\delta_z\|_{(HM^\psi(\mathbb{B}_N))^*} = \|\delta_z\|_{(H^\psi(\mathbb{B}_N))^*} := \|\delta_z\|. \tag{III.3.1}$$

Démonstration. Tout d'abord, puisque $f_r \in HM^\psi(\mathbb{B}_N)$ pour tout $f \in H^\psi(\mathbb{B}_N)$, et puisque $f_r(z) \underset{r\to 1}{\longrightarrow} f(z)$, $z \in \mathbb{B}_N$, on a

$$\|\delta_z\|_{(HM^\psi(\mathbb{B}_N))^*} \geq \|\delta_z\|_{(H^\psi(\mathbb{B}_N))^*}, \tag{III.3.2}$$

si bien que l'égalité (III.3.1) est vraie, l'inégalité inverse étant triviale.

Soient maintenant $f \in H^\psi$ et $z \in \mathbb{B}_N$; on a

$$f(z) = \int_{\mathbb{S}_N} P_z(\zeta) f(\zeta)\, d\sigma_N(\zeta),$$

avec $P_z \in L^\infty(\mathbb{S}_N)$ et $\|P_z\|_\infty = \left(\dfrac{1+|z|}{1-|z|}\right)^N$. On pose $C = \|f\|_\psi$; l'inégalité de Jensen donne

$$\begin{aligned}\psi\left(\left|\frac{f(z)}{C}\right|\right) &\leq \int_{\mathbb{S}_N} P_z(\zeta)\,\psi\left(\frac{|f(\zeta)|}{C}\right) d\sigma_N(\zeta)\\ &\leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^N,\end{aligned}$$

d'où

$$|f(z)| \leq \|f\|_\psi\,\psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^N\right).$$

Pour la minoration, il suffit d'écrire que

$$\|\delta_z\| \geq \frac{|u_{a,r}(z)|}{\|u_{a,r}\|_\psi}$$

avec $r = |z|$ et $\overline{a}z = r$. Par définition et en utilisant le calcul de $\|u_{a,r}\|_1$ effectué ci-dessus, on déduit que

$$\begin{aligned}\|\delta_z\| &\geq \frac{|u_{a,r}(z)|}{\|u_{a,r}\|_\psi}\\ &\geq \frac{1/(1+r)^{2N}}{1/\psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^N\right)} \quad \text{([16, lemme 3.9])}\\ &\geq \frac{1}{4^N}\psi^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^N\right).\end{aligned}$$

□

Comme dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz, on peut décrire la topologie faible-étoile induite sur la boule unité de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$. Dans le cadre présent des espaces de Hardy-Orlicz, nous allons nous servir de résultats plus précis concernant la structure topologique de ces espaces, quand nous étudierons les opérateurs de composition agissant sur les $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$.

Proposition III.3.5. *Soit ψ une fonction d'Orlicz.*

1. *$HM^\Psi(\mathbb{B}_N)$ est l'adhérence de H^∞ dans $L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ et les polynômes sont denses dans $HM^\Psi(\mathbb{B}_N)$ pour la norme $\|.\|_\psi$. Plus précisément, pour toute fonction $f \in HM^\Psi(\mathbb{B}_N)$, on a :*

$$\|f_r - f\|_\psi \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0.$$

2. *Sur la boule unité de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ (ou de façon équivalente sur* toute *boule), la topologie faible-étoile induite coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{B}_N$.*
3. *$H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ est fermé dans $L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ pour la topologie faible-étoile.*
4. *Si ψ vérifie la condition ∇_2, $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ est isométrique à $(HM^\Psi(\mathbb{B}_N))^{**}$. En particulier, si ψ vérifie les conditions ∇_2 et Δ_2 (i.e. la fonction complémentaire ϕ de ψ vérifie la condition ∇_2), alors $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ est reflexif.*

Démonstration. 1) Il suffit de montrer que

$$\|f_r - f\|_\psi \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0$$

pour toute fonction $f \in HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, puisque f_r peut-être approchée uniformément sur tout compact par sa série de Taylor. La démonstration de ce résultat est identique à celle de la proposition 3.4 dans [16].

2) La démonstration de ce point est très similaire à celle de la proposition III.2.3 (considérer le noyau de Poisson au lieu du noyau de Berezin), et ne présente pas d'intérêt particulier.

3) Par le théorème de Banach-Dieudonné, il suffit de montrer que les boules de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ sont fermées pour la topologie faible-étoile, i.e. qu'elles sont compactes. D'après le point 2) précédent, et comme la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est métrisable, ceci revient à montrer que si $(f_n)_n$ est une suite dans la boule unité de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, alors $(f_n)_n$ possède une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f également dans la boule unité de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$. Or, ceci est clair, car d'après la proposition III.3.4, la suite $(f_n)_n$ est une famille normale dans $H(\mathbb{B}_N)$ qui possède donc une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f holomorphe. Le lemme de Fatou assure alors que $f \in H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$.

4) Tout d'abord, d'après le théorème III.1.4, $(M^{\Psi}(\mathbb{S}_N))^* = L^{\phi}(\mathbb{S}_N)$ où ϕ est la fonction d'Orlicz complémentaire de ψ (cf. paragraphe III.1.2). Comme ψ vérifie la condition ∇_2, i.e. ϕ vérifie la condition Δ_2, le [23, IV, paragraphe 4.1, corollaire 9, p. 111] assure que $\left(L^{\phi}(\mathbb{S}_N)\right)^* = L^{\Psi}(\mathbb{S}_N)$, si bien que $(M^{\Psi}(\mathbb{S}_N))^{**} = L^{\Psi}(\mathbb{S}_N)$ et donc que $(HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N))^{**}$ est l'adhérence de $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ pour la topologie faible-étoile de $L^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, en utilisant un résultat classique de dualité : étant donnés deux espaces de Banach $F \subset E$, le bidual topologique de F est isomorphe à l'adhérence faible de F dans E^{**} (cf. [10, V, 5.6, corollaire 6]). Comme $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ est lui-même fermé pour cette même topologie d'après 3), le point 4) sera démontré si on parvient à vérifier que toute fonction f dans $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ est aussi dans l'adhérence de $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ pour la topologie faible-étoile. Soit donc $f \in H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$; d'après 1), $f_r \underset{r\to 1}{\longrightarrow} f$ uniformément sur tout compact, et donc, toujours d'après 2), la convergence a lieu aussi pour la topologie faible-étoile, car $\|f_r\|_{\psi} \leq \|f\|_{\psi}$ pour tout $0 < r < 1$, de façon évidente. Ainsi $f \in (HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N))^{**}$ et la démonstration est terminée. □

On termine ce paragraphe en rappelant un théorème d'interpolation, qui n'est pas général, mais qui sera suffisant pour ce qui nous intéresse. Il s'agit de la proposition 3.5 de [16].

Proposition III.3.6. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Si ψ vérifie la condition ∇_2 (cf. see III.1.7), alors toute fonctionnelle linéaire, ou sous-linéaire, de type faible $(1,1)$ et de type (fort) (∞,∞) est bornée de L^{Ψ} dans L^{Ψ}.*

Pour une étude assez complète des questions d'interpolation linéaire entre espaces d'Orlicz, on renvoie au chapitre VI de [23].

III.3.2 Théorèmes d'inclusion dans les espaces de Hardy-Orlicz

Les théorèmes d'inclusion à venir vont mettre en jeu des conditions géométriques. On rappelle brièvement la définition de la distance anisotrope d sur la sphère (qu'on prolonge à $\overline{\mathbb{B}_N}$). Pour $(\zeta,\xi) \in \mathbb{S}_N$, elle est donnée par

$$d(\zeta,\xi) = \sqrt{|1 - \langle \zeta,\xi \rangle|}.$$

On aura besoin des « boules » anisotropes $S(\zeta,h)$ et $\mathscr{S}(\zeta,h)$, des « vraies » boules $Q(\zeta,h)$ dans $\mathbb{S}_N$, et des fenêtres de Carleson $W(\zeta,h)$ (cf. paragraphe III.2.2). On introduit par extension les ensembles $\mathscr{S}(w,h)$, $Q(w,h)$, pour $w \in \overline{\mathbb{B}_N}$, et $\mathscr{W}(\zeta,h)$, définis respectivement par

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(w,h) &= \left\{ z \in \overline{\mathbb{B}_N},\, d(w,h)^2 < h \right\} \\ Q(w,h) &= \mathscr{S}(w,h) \cap \mathbb{S}_N, \end{aligned}$$

et

$$\mathscr{W}(\zeta,h) = \left\{ z \in \overline{\mathbb{B}_N},\, 1 - |z| < h,\, \frac{z}{|z|} \in Q(\zeta,h) \right\}.$$

On prend soin de distinguer tous ces ensembles, en raison de la nature de la « distance » d qui diffère suivant qu'on la considère sur la sphère ou sur la boule.

Il convient de plus d'énoncer dans ce chapitre le lemme suivant, qui donne une estimation du volume des ensembles $Q(\zeta,h)$ en fonction de h ; ce résultat est démontré en particulier dans [27, lemme 4.6] :

Lemme III.3.7. *Il existe deux constantes $A_1 > 0$ et $A_2 > 0$, qui ne dépendent que de N, telles que*

$$A_1 \leq \frac{\sigma_N(Q(\zeta,h))}{h^N} \leq A_2,$$

pour tout $\zeta \in \mathbb{S}_N$ et pour tout $h \in (0,1)$.

Enfin, on définit également les régions d'approche de Korányi $D(\eta)$, pour $\eta \in \mathbb{S}_N$, par

$$D(\eta) = \left\{ z \in \mathbb{B}_N,\, d(z,\eta)^2 < 1 - |z|^2 \right\}.$$

Ces ensembles sont les analogues des régions d'approche non-tangentielles en une variable définies par

$$G_\vartheta = \left\{ z \in \mathbb{D},\, \left|e^{i\vartheta} - z\right| < \beta(1-|z|) \right\},$$

pour $\beta > 1$ et $0 \leq \vartheta < 2\pi$ (cf. par exemple le livre [11, chapitre II, paragraphe 10], qui les mentionne et fait notamment usage de leur analogue dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{P}_+$). Néanmoins, contrairement à ce qui se passe en une variable, il est possible de s'approcher tangentiellement de $\mathbb{S}_N$, tout en restant dans les régions d'approche de Korányi. En effet, pour le voir, il suffit de prendre $\eta = e_1$; on a alors

$$D(e_1) = \left\{ z \in \mathbb{B}_N,\, |1 - z_1| < 1 - |z|^2 \right\}.$$

Tandis que l'intersection de cet ensemble avec la droite complexe passant par 0 et e_1 est précisément un certain G_ϑ, il n'est pas difficile de vérifier que son intersection avec l'hyperplan dans $\mathbb{R}^{2N-1}$ défini par $\left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^N,\, y_1 = 0 \right\}$ contient une boule tangente à $\mathbb{S}_N$ en e_1.

En des termes plus savants, $D(\eta)$ est tangent à $\mathbb{S}_N$ en η dans la direction du plan complexe tangent en η. Nous renvoyons à [24, paragraphe 5.4.2].

Étant donné une fonction f continue sur $\mathbb{B}_N$, la fonction maximale N_f de f associée aux régions d'approche de Korányi est définie par :

$$N_f(\xi) = \sup_{w \in D(\xi)} \{|f(w)|\},$$

pour $\xi \in \mathbb{S}_N$. La fonction maximale de Hardy-Littlewood M_f de $f \in L^1(\mathbb{S}_N)$ est, quant à elle, donnée par

$$M_f(\xi) = \sup_{\delta > 0} \frac{1}{\sigma_N(Q(\xi,\delta))} \int_{Q(\xi,\delta)} |f|\, d\sigma_N,$$

pour $\xi \in \mathbb{S}_N$. Il est bien connu que l'opérateur maximal $M : f \longmapsto M_f$ est de type faible $(1,1)$ sur $\mathbb{S}_N$ (cf. [27, lemme 4.8]), et il est trivial qu'il envoie continûment $L^\infty(\mathbb{S}_N)$ dans lui-même. Par conséquent, la proposition III.3.6 donne le résultat suivant concernant l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood agissant sur les espaces de Hardy-Orlicz, sous la condition ∇_2 :

Théorème III.3.8. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Si ψ vérifie la condition ∇_2, alors l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood M envoie continûment $L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ dans lui-même. Plus précisément, il existe une constante $C_\psi > 0$ telle que*

$$\left\|M_f\right\|_\psi \leq C_\psi \|f\|_\psi$$

pour toute $f \in L^\Psi(\mathbb{S}_N)$.

De plus, la fonction maximale N_f est dominée par la fonction maximale M_f sur les espaces de Hardy-Orlicz :

Théorème III.3.9. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$N_f(\xi) \leq C M_{f^*}(\xi)$$

pour toute fonction $f \in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ et pour tout $\xi \in \mathbb{S}_N$, où $f^* \in L^\Psi(\mathbb{S}_N)$ est la limite radiale (presque partout) de f.

Démonstration. Observons que $f^* \in L^1(\mathbb{S}_N)$ puisque $f \in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, donc $f^* d\sigma_N$ est une mesure borélienne complexe finie sur $\mathbb{S}_N$. D'après le théorème 4.10 de [27], il vient

$$N_{P[f^*]} \leq CM_{f^*}$$

pour une constante $C > 0$ indépendante de f, où

$$P[f^*](\xi) = \int_{\mathbb{S}_N} P(\xi, z) f^*(z)\, d\sigma_N(z).$$

On termine la démonstration en remarquant que

$$P[f^*] = f,$$

par exemple parce que $f \in H^1(\mathbb{B}_N)$ ([27, corollaire 4.27]). □

On obtient alors un résultat analogue au théorème III.3.8 pour l'opérateur maximal N associé aux régions d'approche de Korányi :

Théorème III.3.10. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. Si ψ vérifie la condition ∇_2, alors l'opérateur maximal N associé aux régions d'approche de Korányi est borné de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ dans $L^\Psi(\mathbb{S}_N)$. Plus précisément, il existe une constante $C_\psi > 0$ telle que*

$$\left\|N_f\right\|_{L^\psi(\mathbb{S}_N)} \leq C_\psi \left\|f\right\|_{H^\psi(\mathbb{B}_N)}$$

pour toute fonction $f \in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème III.3.8 et du théorème III.3.9, sachant que $\|f^*\|_{L^\psi(\mathbb{S}_N)} = \|f\|_{H^\psi(\mathbb{B}_N)}$ pour toute $f \in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$. □

La formulation du théorème de Carleson dont on aura besoin par la suite diffère de celle énoncée dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz par le simple fait qu'on travaille sur la boule fermée. Pour le cas du disque, on renvoie à [16, Theorem 4.13]. Comme on l'a fait pour les espaces de Bergman-Orlicz, on définit les deux fonctions suivantes :

Définition III.3.11. Pour toute mesure borélienne positive μ sur $\overline{\mathbb{B}_N}$, on définit

$$\rho_\mu(h) = \sup_{\xi \in \mathbb{S}_N} \mu(\mathscr{W}(\xi, h))$$

et

$$K_\mu(h) = \sup_{0<t<h} \frac{\mu(\mathscr{W}(\xi, t))}{t^N}$$

pour $h \in (0,1)$.

Il nous semble qu'il n'y a aucune confusion à craindre si l'on note de la même façon la fonction ρ_μ introduite dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz et celle introduite ci-dessus pour les espaces de Hardy-Orlicz. Dans le paragraphe précédent, il a été rappelé qu'une mesure μ est de Carleson si, par définition, $K_\mu(h)$ est bornée pour un $h \in (0,1)$.

Si $f \in H^1(\mathbb{B}_N)$, on identifiera f^*, la fonction qui vaut f sur $\mathbb{B}_N$ et est égale aux limites radiales de f sur un sous-ensemble de $\mathbb{S}_N$ qui diffère de $\mathbb{S}_N$ d'un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, où ces limites radiales existent, avec la fonction f elle-même. Dans l'énoncé du théorème de Carleson qui va suivre, on ne précisera pas sur quel sous-ensemble de $\overline{\mathbb{B}_N}$ la fonction f^* est bien définie et on écrira simplement $f(z)$ pour $z \in \overline{\mathbb{B}_N}$, en gardant à l'esprit que ceci n'a de sens que pour $z \in \mathbb{B}_N \cup (\mathbb{S}_N \cap E_f)$, où E_f est un sous-ensemble convenable de $\mathbb{S}_N$ tel que $\sigma_N(\mathbb{S}_N \setminus E_f) = 0$. Nous pensons encore une fois qu'aucune confusion n'est à craindre.

Enfin, à partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre, toutes les restrictions à la sphère des mesures μ sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ que nous rencontrerons seront supposées absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue σ_N sur $\mathbb{S}_N$. Cette hypothèse est naturellement implicite, ne serait-ce que dans l'écriture de $\int_{\overline{\mathbb{B}_N}} f\, d\mu$, où f est une fonction de $H^1(\mathbb{B}_N)$.

Théorème III.3.12. *Il existe deux constantes $\tilde{C} > 0$ et $C > 1$ telles que, pour toute $f \in H^1(\mathbb{B}_N)$ et pour toute mesure borélienne positive finie μ sur $\overline{\mathbb{B}_N}$, on a*

$$\mu\left(\left\{z \in \overline{\mathbb{B}_N},\, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\right\}\right) \leq \tilde{C} K_\mu (Ch)\, \sigma_N\left(\left\{N_f > t\right\}\right),$$

pour tout $h \in (0, 1/C)$ et pour tout $t > 0$.

On aura besoin du lemme de recouvrement suivant :

Lemme III.3.13. *Soient g une fonction continue sur $\mathbb{B}_N$, $a > 0$ et $h \in (0,1)$. De deux choses l'une, ou bien $|g(w)| < a$ dans $\mathbb{B}_N \setminus (1-h)\mathbb{B}_N$, ou bien il existe $w_1, w_2, \ldots$ dans $\mathbb{B}_N \setminus (1-h)\mathbb{B}_N$ tels que :*

1. *$|g(w_i)| \geq a$ pour tout $i \geq 1$,*
2. *L'ensemble*
$$\{w \in \mathbb{B}_N,\, |g(w)| \geq a\} \cap (\mathbb{B}_N \setminus (1-h)\mathbb{B}_N)$$
est contenu dans
$$\bigcup_{i\geq 1} S\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right).$$
3. *Les ensembles $Q\left(w_i, \left(1-|w_i|^2\right)\right)$, $i \geq 1$, sont deux à deux disjoints.*

Démonstration. La démonstration de ce lemme est donnée dans [22] pour $h = 1/2$. L'adaptation de cette démontration pour obtenir le résultat pour $h \in (0,1)$ quelconque ne demande pas d'efforts particuliers. □

Démonstration du théorème III.3.12. On fixe $t > 0$. On peut supposer qu'il existe un $a \in \mathbb{B}_N \setminus (1-h)\mathbb{B}_N$ tel que $|f(a)| > t$, avec $|a| > 1-h$. Le lemme précédent assure l'existence d'une suite de points $(w_i)_{i\geq 1} \subset \mathbb{B}_N \setminus (1-h)\mathbb{B}_N$ telle que

$$\mu\left(\{z \in \mathbb{B}_N,\, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\}\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu\left(S\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)\right). \tag{III.3.3}$$

Observons qu'on alors a nécessairement

$$\mu\left(\{z \in \mathbb{S}_N,\, |f(z)| > t\}\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu\left(\overline{Q\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)}\right),$$

puisque

$$\{z \in \mathbb{S}_N,\, |f(z)| > t\} \subset \overline{\bigcup_{i\geq 1} Q\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)}.$$

Cette dernière inclusion provient du fait que, si $z \in \mathbb{S}_N$ vérifie $|f(z)| > t$, alors il existe $r \in (0,1)$, aussi proche de 1 que voulu, tel qu'il existe au moins un indice $i \geq 1$ tel que $rz \in S\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)$; en faisant tendre r vers 1, on obtient $z \in \overline{Q\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)}$. Ainsi, l'inégalité (III.3.3) peut se réécrire pour μ comme suit :

$$\mu\left(\left\{z \in \overline{\mathbb{B}_N},\, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\right\}\right) \leq \sum_{i\geq 1} \mu\left(\overline{\mathscr{S}\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)}\right). \tag{III.3.4}$$

De plus, la définition des régions d'approche de Korányi $D(\eta)$, $\eta \in \mathbb{S}_N$, et celle de Q_f, assure que

$$\{\eta \in \mathbb{S}_N,\, w_i \in D(\eta)\} = Q\left(w_i, 1-|w_i|^2\right),$$

et donc $N_f(\eta) \geq t$ dès que $\eta \in Q\left(w_i, 1-|w_i|^2\right)$. Par conséquent, comme les ensembles $Q\left(w_i, 1-|w_i|^2\right)$ sont deux à deux disjoints, on a

$$\sum_{i\geq 1} \sigma_N\left(Q\left(w_i, 1-|w_i|^2\right)\right) \leq \sigma_N\left(\{N_f \geq t\}\right). \tag{III.3.5}$$

Maintenant, l'inégalité triangulaire entraîne que, si on pose $r = 9\left(1-|w_i|^2\right)$, alors

$$\mu\left(\overline{\mathscr{S}\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)}\right) \leq \mu\left(\mathscr{S}\left(\frac{w_i}{|w_i|}, r\right)\right) \leq \mu\left(\mathscr{W}\left(\frac{w_i}{|w_i|}, C_0 r\right)\right),$$

pour une constante $C_0 > 1$; la dernière inégalité vient du fait, déjà évoqué précédemment, que les ensembles $\mathscr{S}\left(\frac{w_i}{|w_i|}, r\right)$ et $\mathscr{W}\left(\frac{w_i}{|w_i|}, r\right)$ sont comparables en termes d'inclusion. Par définition de K_μ et comme $r \leq 2h$, on peut trouver une constante absolue $C > 1$ (en fait, on peut prendre $C = 2C_0$) telle que

$$\mu\left(\overline{\mathscr{S}\left(w_i, 4\left(1-|w_i|^2\right)\right)}\right) \leq C_0^N r^N \frac{\mu\left(\mathscr{W}\left(\frac{w_i}{|w_i|}, C_0 r\right)\right)}{C_0^N r^N} \leq C_0^N r^N K_\mu\left(Ch\right). \tag{III.3.6}$$

Or, en utilisant le lemme III.3.7 (i.e. [27, lemme 4.6] par exemple) et l'homogénéité de la mesure de Lebesgue σ sur $\mathbb{S}_N$, il vient

$$r^N \lesssim \sigma_N\left(Q\left(\frac{w_i}{|w_i|}, r\right)\right) \lesssim \sigma_N\left(Q\left(w_i, 1-|w_i|^2\right)\right). \tag{III.3.7}$$

On déduit alors des inégalités (III.3.4), (III.3.5), (III.3.6) et (III.3.7) l'existence de deux constantes numériques $C > 1$ et $\tilde{C} > 0$ (C ne dépend de rien et $\tilde{C}$ ne dépend que de N) telles que

$$\mu\left(\left\{z \in \overline{\mathbb{B}_N},\, |z| > 1-h \text{ et } |f(z)| > t\right\}\right) \leq \tilde{C} K_\mu\left(Ch\right) \sigma_N\left(\left\{N_f \geq t\right\}\right).$$

□

Le lemme technique suivant théorème III.3.12 est une conséquence du théorème III.3.12. Il est la version adaptée aux espaces de Hardy-Orlicz du lemme III.2.7.

Lemme III.3.14. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ et soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz. Soit également $C \geq 1$ la constante apparaissant dans le théorème III.3.12. On suppose qu'il existe $A > 0$, $\eta > 0$ et $h_A \in (0, 1/C)$ tels que*

$$K_\mu(h) \leq \eta \frac{1/h^N}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}$$

pour tout $h \in (0, h_A)$. Il existe trois constantes $B > 0$, $x_A > 0$ et $C_1 > 0$ (cette dernière ne dépend ni de A, ni de η, ni de h_A), telles que, pour toute $f \in H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ telle que $\|f\|_{\psi_1} \leq 1$, et pour tout borélien E de $\overline{\mathbb{B}_N}$, on a

$$\int_E \psi_2\left(\frac{|f|}{B}\right) d\mu \leq \mu(E)\, \psi_2(x_A) + C_1 \eta \int_{\mathbb{S}_N} \psi_1\left(N_f\right) d\sigma_N.$$

La démonstration de ce lemme est très semblable à celle du lemme III.2.7; par souci d'exhaustivité, on préfère en donner les détails.

Démonstration. Soient A, η, h_A et E comme dans l'énoncé du lemme. Pour $f \in H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, $\|f\|_{\psi_1} \leq 1$, on écrit que :

$$\int_E \psi_2(|f|)\, d\mu = \int_0^\infty \psi_2'(t)\, \mu\left(\{|f| > t\} \cap E\right) dt \tag{III.3.8}$$

On porte notre attention sur l'expression $\mu(\{|f| > t\})$. La majoration de la norme de l'opérateur d'évaluation obtenue dans proposition III.3.4 donne que, si $|f(z)| > t$, alors, puisque $\|f\|_{\psi_1} \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} t &< 2\psi_1^{-1}\left(\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^N\right) \\ &\leq 2^{N+1}\psi_1^{-1}\left(\left(\frac{1}{1-|z|}\right)^N\right). \end{aligned} \tag{III.3.9}$$

La deuxième inégalité provient du fait que ψ est une fonction convexe croissante. Il est immédiat de vérifier que l'inégalité (III.3.9) est équivalente à la suivante :

$$|z| > 1 - \left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{t}{2^{N+1}}\right)}\right)^{1/N}.$$

Le théorème de Carleson (théorème III.3.12) donne alors

$$\begin{aligned} \mu\left(\{|f| > t\}\right) &= \mu\left(\{|f| > t\} \cap \left\{|z| > 1 - \left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{t}{2^{N+1}}\right)}\right)^{1/N}\right\}\right) \\ &\leq K_\mu\left(C\left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{t}{2^{N+1}}\right)}\right)^{1/N}\right)\sigma_N\left(\left\{N_f > t\right\}\right). \end{aligned} \tag{III.3.10}$$

On pose $x_A := \frac{A}{(C+1)\,C^{N-1}}\psi_1^{-1}\left(\left(\frac{C}{h_A}\right)^N\right)$. Par hypothèse, si $\frac{1}{C^N}\psi_1\left(\frac{(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right) > 1/h_A^N$ i.e. si $s \geq x_A$, alors

$$K_\mu\left(C\left(\frac{1}{\psi_1\left(\frac{(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right)}\right)^{1/N}\right) \leq \frac{\eta\tilde{C}}{C^N}\frac{\psi_1\left(\frac{(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right)}{\psi_2\left(\frac{C+1}{C}s\right)}. \tag{III.3.11}$$

Donc, en appliquant (III.3.8) à

$$\frac{A}{2^{N+1}\,(C+1)\,C^{N-1}}|f|,$$

des inégalités (III.3.10) avec $t = \frac{2^{N+1}\,(C+1)\,C^{N-1}s}{A}$, et (III.3.11), on déduit

$$\begin{aligned} \int_E \psi_2\left(\frac{A}{2^{N+1}\,(C+1)\,C^{N-1}}|f|\right)d\mu &\leq \int_0^{x_A}\psi_2'(s)\,\mu(E)\,ds \\ &+ \frac{\eta\tilde{C}}{C^N}\int_{x_A}^\infty \psi_2'(s)\,\frac{\psi_1\left(\frac{(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right)}{\psi_2\left(\frac{C+1}{C}s\right)}\sigma_N\left(\left\{N_f > \frac{2^{N+1}\,(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right\}\right)ds. \end{aligned} \tag{III.3.12}$$

Pour traiter la deuxième inégalité du membre de droite, on note que, pour toute fonction d'Orlicz ψ, on a

$$x\psi'(x) \leq C\psi\left(\frac{(C+1)\,x}{C}\right)$$

pour tout $C > 0$ et tout $x \geq 0$ (cf. la démonstration du lemme III.2.7). Par suite,

$$\frac{\psi_2'(s)}{\psi_2\left(\frac{C+1}{C}s\right)} \leq \frac{C}{s},$$

et l'inégalité (III.3.12) devient

$$\begin{aligned} \int_E \psi_2\left(\frac{A}{2^{N+1}\,(C+1)\,C^{N-1}}|f|\right)d\mu &\leq \psi_2(x_A)\,\mu(E) \\ &+ \frac{\eta\tilde{C}}{C^{N-1}}\int_{x_A}^\infty \frac{1}{s}\psi_1\left(\frac{(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right)\sigma_N\left(\left\{N_f > \frac{2^{N+1}\,(C+1)\,C^{N-1}}{A}s\right\}\right)ds. \end{aligned}$$

La convexité de ψ_1 donne enfin

$$\int_E \psi_2\left(\frac{A}{2^{N+1}(C+1)C^{N-1}}|f|\right)d\mu \leq \psi_2(x_A)\mu(E) + \frac{\eta\tilde{C}}{C^{N-1}}\frac{(C+1)C^{N-1}}{A}\int_0^\infty \psi_1'\left(\frac{(C+1)C^{N-1}}{A}s\right)\sigma_N\left(\left\{N_f > \frac{2^{N+1}(C+1)C^{N-1}}{A}s\right\}\right)ds,$$

i.e.

$$\begin{aligned}\int_E \psi_2\left(\frac{A}{2^{N+1}C^{N-1}(C+1)}|f|\right)d\mu &\leq \psi_2(x_A)\mu(E) + \frac{\eta\tilde{C}}{C^{N-1}}\int_0^\infty \psi_1'(u)\sigma_N\left(\left\{N_f > 2^{N+1}u\right\}\right)du \\ &\leq \psi_2(x_A)\mu(E) + \frac{\eta\tilde{C}}{C^{N-1}}\int_{\mathbb{S}_N}\psi_1\left(\frac{N_f}{2^{N+1}}\right)d\sigma_N \\ &\leq \psi_2(x_A)\mu(E) + \frac{\eta\tilde{C}}{2^{N+1}C^{N-1}}\int_{\mathbb{S}_N}\psi_1(N_f)\,d\sigma_N,\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure de donner les résultats analogues aux théorèmes III.2.8 et III.3.21, et d'exhiber des conditions nécessaires ou suffisantes à l'inclusion de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ dans $L^{\psi_2}(\mu)$, ou encore à la compacité de $j_\mu : H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$, pour une mesure μ borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$.

III.3.2.1 L'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$.

Le théorème principal de ce paragraphe s'énonce de la façon suivante :

Théorème III.3.15. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$. Soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz ; on suppose que ψ_1 vérifie la condition ∇_2.*

1. *Si l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue), alors il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$\rho_\mu(h) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)}\right). \tag{III.3.13}$$

2. *S'il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$K_\mu(h) = O_{h\to 0}\left(\frac{1/h^N}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)}\right), \tag{III.3.14}$$

   alors l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue).

3. *Si on suppose de plus que $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ vérifie la condition ∇_0-uniforme, alors les conditions* (III.3.13) *et* (III.3.14) *sont équivalentes.*

Démonstration. 1) On note C la norme de l'inclusion $j_\mu : H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$; pour $a \in \mathbb{S}_N$, on considère les applications

$$f = \psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)u_{a,1-h},$$

où $u_{a,1-h}(z) = \left(\dfrac{h}{1-(1-h)\langle z,a\rangle}\right)^{2N}$ pour $0 < h < 1$; on rappelle (cf. le début du paragraphe III.3.2) que

$$\|u_{a,1-h}\|_{\psi_1} \leq \frac{1}{\psi_1^{-1}(1/h^N)}.$$

Donc f appartient à la boule unité de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ et, par hypothèse, il vient

$$\left\| j_\mu(f) \right\|_{L^{\psi_2}(\mu)} = \|f\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq C$$

si bien que

$$1 \geq \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu. \tag{III.3.15}$$

On minore maintenant le membre de droite de (III.3.15), en se plaçant sur une « boule » anisotrope $\mathscr{S}(a,h)$. Si $\xi = (1-h)a$ et $z \in \mathscr{S}(a,h)$, alors il vient

$$\begin{aligned} |1 - \langle z, \xi\rangle| &\leq |1 - \langle a, \xi\rangle| + |\langle a, \xi\rangle - \langle z, \xi\rangle| \\ &\leq h + (1-h)\,|\langle a, a\rangle - \langle z, a\rangle| \\ &\leq h + (1-h)\,|1 - \langle z, a\rangle| \\ &\leq h + (1-h)\,h \\ &\leq 2h. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathscr{S}(a,h)$, $|u_{a,1-h}(z)| \geq \frac{1}{4^N}$ et $|f(z)| \geq \frac{1}{4^N}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)$, de sorte que

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu \\ &\geq \int_{\mathscr{S}(a,h)} \psi_2\left(\frac{1}{4^N}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right) d\mu \\ &\geq \psi_2\left(\frac{1}{4^N}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right)\mu\left(\mathscr{S}(a,h)\right), \end{aligned}$$

ce qui donne la condition (III.3.13) et la première partie du théorème.

2) La seconde partie va faire appel au théorème de Carleson, au travers du lemme III.3.14. Tout d'abord, comme ψ_1 vérifie la condition ∇_2, le théorème III.3.10 assure de l'existence d'une constante $C_M \geq 1$ telle que, pour toute $f \in L^{\psi_1}(\mathbb{S}_N)$, $\left\|N_f\right\|_{L^{\psi_1}(\mathbb{S}_N)} \leq C_M \|f\|_{H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)}$, où N_f est la fonction maximale de f associée aux régions d'approche de Korányi. Soit maintenant f dans la boule unité de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$; il suffit de montrer que $\|f\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq C_0$ pour une constante $C_0 > 0$ qui ne dépend pas de f. Soit $\tilde{C} \geq 1$ une constante dont la valeur sera fixée plus tard. On considère également la constante C apparaissant dans le théorème III.3.12.

La condition (III.3.13) est supposée être réalisée, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $A > 0$, $h_A \in (0, 1/C]$ et $\eta > 0$ telles que

$$K_\mu(h) \leq \eta \frac{1/h^N}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)} \tag{III.3.16}$$

pour tout $h \in (0, h_A)$. En utilisant la convexité de ψ_2 et le lemme III.3.14, appliqué à f/C_M (qui vérifie bien $\|f/C_M\|_{\psi_1} \leq 1$), à $E = \overline{\mathbb{B}_N}$, et à η et h_A comme dans (III.3.16), il existe trois constantes $B > 0$, $x_A > 0$ et $C_1 > 0$, toutes indépendantes de f (la dernière ne dépend ni de A, ni de η, ni de h_A), telles que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{|f|}{BC_M\tilde{C}}\right) d\mu &\leq \frac{1}{\tilde{C}}\int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{|f|}{BC_M}\right) d\mu \\ &\leq \frac{1}{\tilde{C}}\left(\mu\left(\overline{\mathbb{B}_N}\right)\psi_2(x_A) + C_1\eta\int_{\mathbb{S}_N}\psi_1\left(\frac{1}{C_M}N_f\right) d\sigma_N\right) \\ &\leq \frac{1}{\tilde{C}}\left(\mu\left(\overline{\mathbb{B}_N}\right)\psi_2(x_A) + C_1\eta\right). \end{aligned}$$

Bien entendu, C_1 peut être choisie de façon à ce que $C_1\eta \geq 1$; quitte à poser $\tilde{C} = \mu\left(\overline{\mathbb{B}_N}\right)\psi_2(x_A) + C_1\eta \geq 1$, on obtient $\|f\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq C_0 := BC_M\tilde{C}$ ce qui termine la démonstration du deuxième point du théorème III.3.15.

3) La démonstration de ce point est identique à celle du 3) du théorème III.2.8. □

La troisième partie du théorème précédent nous amène à définir les mesures de ψ-*Carleson* :

Définition III.3.16. Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ et soit ψ une fonction d'Orlicz. On dit que μ est une mesure de ψ-*Carleson* s'il existe une constante $A > 0$, telle que

$$\mu\left(\mathscr{S}(\xi,h)\right) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right), \tag{III.3.17}$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

On remarque que la condition (III.3.17) est équivalente à la condition (III.3.13), ce qui nous permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire III.3.17. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ et soit ψ une fonction d'Orlicz. Si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme, alors l'inclusion $H^\psi(\mathbb{B}_N) \subset L^\psi(\mu)$ a lieu (et est continue) si et seulement si μ est une mesure de ψ-Carleson.*

Démonstration. Il suffit d'observer que la condition ∇_0-uniforme entraîne la condition ∇_2, ce qui est contenu dans la proposition III.1.14. □

III.3.2.2 Compacité de l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$.

Nous aurons besoin d'un critère de compacité de l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$. Pour cela, et comme nous travaillons avec des mesures μ sur la boule fermée, nous allons d'abord montrer que si cette inclusion est compacte, alors μ ne peut pas charger la sphère. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition III.3.18. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ (dont la restriction à $\mathbb{S}_N$ est absolument continue par rapport à σ_N) ; soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz. Si $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$ est compacte, alors $\mu(\mathbb{S}_N) = 0$.*

Démonstration. On suppose donc que $j_\mu : H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}(\mu)$ est compacte. Soit $f : \mathbb{B}_N \to \mathbb{C}$ une fonction intérieure ([1]) ; la suite $(f^n)_n$ est dans la boule unité de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ donc, par compacité de j_μ et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\left(j_\mu(f^n)\right)_n = (f^n)_n$ est une suite de Cauchy dans $L^1(\mu)$, car $L^{\psi_2}(\mu) \subset L^1(\mu)$. Maintenant, comme $\mu_{|\mathbb{S}_N}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue σ_N, et puisque f est intérieure, il vient

$$\|f^n - f^m\|_{L^1\left(\mu_{|\mathbb{S}_N}\right)} = \left\|1 - f^{m-n}\right\|_{L^1\left(\mu_{|\mathbb{S}_N}\right)} \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Par l'absurde, supposons que $\mu_{|\mathbb{S}_N} > 0$. On peut extraire une sous-suite $(f^{n_k})_{n_k}$ de $(f^n)_n$ qui converge vers 1 $\mu_{|\mathbb{S}_N}$-presque partout et donc, d'après le théorème d'Egoroff, la convergence est uniforme sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{S}_N$ de mesure $\mu_{|\mathbb{S}_N}$ non-nul. Comme $\mu_{|\mathbb{S}_N}$ est absolument continue par rapport à σ_N, on a nécessairement $\sigma_N(E) > 0$. Alors, la sous-harmonicité de $\log|1 - f^{n_k}|$ assure que

$$\log|1 - f^{n_k}(0)| \leq \int_E \log|1 - f^{n_k}|\, d\sigma_N + \int_{\mathbb{S}_N \setminus E} \log|1 - f^{n_k}|\, d\sigma_N.$$

Le membre de droite de cette inégalité tend vers $-\infty$ quand $k \to \infty$, puisque $\log|1 - f^{n_k}|$ est uniformément convergent vers $-\infty$ sur E et puisque $\log|1 - f^{n_k}| \leq \log 2$ σ_N-presque partout. On aboutit à une contradiction, car $f^{n_k}(0)$ tend vers 0 quand $k \to \infty$. □

Voici le critère de compacité de l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$, qui nous servira par la suite :

Proposition III.3.19. *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$, et soient ψ_1 et ψ_2 deux fonctions d'Orlicz. On suppose que l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue).*

1. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) *L'inclusion* $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ *est compacte ;*

(b) *Toute suite dans la boule unité de* $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$, *qui converge vers* 0 *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{B}_N$, *converge vers* 0 *en norme dans* $L^{\psi_2}(\mu)$.

2. *Si* $\lim_{r\to 1^-} \|I_r\| = 0$, *où* $I_r(f) = f.\chi_{\overline{\mathbb{B}_N}\setminus r\mathbb{B}_N}$, *alors l'inclusion* $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ *est compacte.*

Démonstration. Les démonstration de (1) et de (2) sont contenues dans la démonstration de la proposition III.2.11, excepté le fait qu'on travaille dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}_N}$. Ce problème, qui n'apparaît que dans la démonstration de (1), (a)⇒(b), est levé par la proposition III.3.18 et le fait que $\mu(\mathbb{S}_N) = 0$. □

Il semble que ce soit le bon moment pour rappeler le théorème de Carleson classique pour la compacité de $H^p(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$, pour $1 \leq p < \infty$. On rappelle avant tout qu'une mesure borélienne positive μ sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ est une mesure de Carleson évanescente si

$$\rho_\mu(h) = o_{h\to 0}\left(h^N\right),$$

ce qui revient au même de dire que la fonction $K_\mu(h)$, définie au paragraphe III.3.2, tend vers 0 quand h tend vers 0.

Théorème III.3.20. *Soit* μ *une mesure borélienne positive finie sur* $\overline{\mathbb{B}_N}$. *L'inclusion* $H^p(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$ *a lieu et est compacte si et seulement si* μ *est une mesure de Carleson évanescente.*

Il est maintenant temps d'énoncer notre théorème général sur la compacité de l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$.

Théorème III.3.21. *Soit* μ *une mesure borélienne positive finie sur* $\overline{\mathbb{B}_N}$ *telle que* $\mu(\mathbb{S}_N) = 0$. *Soient* ψ_1 *et* ψ_2 *deux fonctions d'Orlicz ; on suppose que* ψ_1 *vérifie la condition* ∇_2.

1. *Si l'inclusion* $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ *a lieu et est compacte, alors, pour tout* $A > 0$,

$$\rho_\mu(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)}\right). \tag{III.3.18}$$

2. *Si*

$$K_\mu(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1/h^N}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)}\right) \tag{III.3.19}$$

pour tout $A > 0$, *alors l'inclusion* $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ *a lieu et est compacte.*

3. *Si on suppose de plus que* $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ *vérifie les conditions* ∇_0 *et* ∇_2, *alors* (III.3.18) *et* (III.3.19) *sont équivalentes.*

Remarque III.3.22. Notons que (2) implique que $\mu(\mathbb{S}_N) = 0$; cela provient du fait que, sous cette condition, $K_\mu(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ (il suffit de prendre $A = 1$ et utiliser que ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions d'Orlicz). Maintenant, pour $h \in (0,1)$, si $C(h)$ désigne le nombre minimal de boules anistropes $Q(\zeta, h)$ nécessaires pour recouvrir la sphère $\mathbb{S}_N$, alors il est bien connu qu'il existe une constante $0 < C < \infty$, indépendante de h, telle que

$$C(h) \leq \frac{C}{h^N}.$$

(C'est essentiellement contenu dans [24, lemme 5.2.3].) Ainsi, si $K_\mu(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, alors il vient

$$\mu\left(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus (1-h)\mathbb{B}_N\right) \leq C\frac{\rho_\mu(h)}{h^N} \leq CK_\mu(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

La démonstration du théorème III.3.21 suit dans les grandes lignes celles du théorème III.2.12 ; on préfère néanmoins en donner les détails.

Démonstration du théorème III.3.21. 1) L'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu et est compacte ; supposons par l'absurde que la condition (III.3.18) ne soit pas vérifiée. Il existe donc $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $A > 0$, une suite $(h_n)_n \subset (0,1)$ qui décroît vers 0, et une suite de points $\xi_n \subset \mathbb{S}_N$, tels que

$$\mu(\mathscr{S}(\xi_n, h_n)) \geq \frac{\varepsilon_0}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)}.$$

Comme dans la démonstration du théorème III.3.15, on considère les fonctions

$$f_n(z) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h_n^N}\right) u_{\xi_n, 1-h_n}(z) = \left(\frac{h_n}{1-(1-h_n)\langle z, \xi_n\rangle}\right)^{2N}.$$

On sait que ces fonctions f_n sont dans la boule unité de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ (cf. proposition III.3.4), et il est clair que $(f_n)_n$ converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$. Comme $\mu(\mathbb{S}_N) = 0$ d'après la proposition III.3.18, la proposition III.3.19 entraîne que la suite $(f_n)_n$ converge vers 0 en norme dans $L^{\psi_2}(\mu)$.

Or, d'après la première partie de la démonstration du théorème III.3.15, on a

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4^N}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right),$$

pour tout $z \in \mathscr{S}(\xi_n, h_n)$, si bien que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}_N} \psi_2\left(\frac{4^N A}{\varepsilon_0}|f_n|\right) d\mu &\geq \psi_2\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right)\mu(\mathscr{S}(\xi_n, h_n)) \\
&\geq \psi_2\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right)\frac{\varepsilon_0}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

en utilisant la convexité de ψ_2 dans la dernière inégalité. Ainsi, $\|f_n\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \geq \dfrac{\varepsilon_0}{4^N A}$ pour tout n, ce qui contredit le fait que $\|f_n\|_{L^{\psi_2}(\mu)}$ tend vers 0 et donne la première partie du théorème.

2) On suppose maintenant que la condition (III.3.19) est satisfaite. D'après le théorème III.2.8, il est clair que l'inclusion $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi_2}(\mu)$ a lieu (et est continue). D'après le deuxième point de la proposition III.3.19, il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la norme de l'identité

$$I_r : H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\psi_2}\left(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus r\mathbb{B}_N, \mu\right)$$

est plus petite que ε, dès que r est suffisamment proche de 1. Soit $\eta \in (0,1)$; on pose $A = \dfrac{2^{N+1}(C+1)C^{N-1}}{\varepsilon} > 0$ où C est la constante apparaissant dans le théorème III.3.12 ; la condition (III.3.19) assure l'existence d'une constante $h_A \in (0, 1/C)$ telle que

$$K_\mu(h) \leq \eta \frac{1/h^N}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)},$$

pour tout $h \leq h_A$. Soit maintenant f dans la boule unité de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ et $r \in (0,1)$. D'après le lemme III.3.14 appliqué à $E = \overline{\mathbb{B}_N} \setminus r\mathbb{B}_N$ et à f, il existe une constante $B > 0$ donnée par $B = \dfrac{2^{N+1}(C+1)C^{N-1}}{A} = \varepsilon$, et deux constantes indépendantes de f, $x_A > 0$ et $C_1 > 0$ (cette dernière est absolue et ne dépend pas non plus de A, ni de h_A, ni de η), telles que

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathbb{B}_N}\setminus rB_N} \psi_2\left(\frac{|f|}{\varepsilon}\right) d\mu &= \int_{\overline{\mathbb{B}_N}\setminus rB_N} \psi_2\left(\frac{|f|}{B}\right) d\mu \\
&\leq \mu\left(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus r\mathbb{B}_N\right)\psi_2(x_A) + C_1\eta\int_{\mathbb{S}_N}\psi_1(N_f)\, d\sigma_N, \qquad \text{(III.3.20)}
\end{aligned}$$

où N_f désigne la fonction maximale de f associée aux régions d'approche de Korányi. On choisit maintenant η de telle sorte que $C_1 \eta \int_{\mathbb{S}_N} \psi_1 (N_f)\, d\sigma_N \leq \frac{1}{2}$ (ce qui est rendu possible par le fait que ψ_1 vérifie la condition ∇_2, et par le théorème III.3.10) et, puisque $\mu(\mathbb{S}_N) = 0$, il existe $r_0 \in (0,1)$ telle que $\mu\left(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus r\mathbb{B}_N\right) \psi_2(x_A) \leq \frac{1}{2}$ pour tout r, $r_0 < r < 1$. On obtient ainsi $\|I_r(f)\|_{L^{\psi_2}(\mu)} \leq \varepsilon$ dès que $r > r_0$, ce qui conclut la démonstration de la deuxième partie du théorème.

3) La démonstration de ce point est identique à celle de la troisième partie du théorème 4.11 de [16]. □

Le troisième point du théorème précédent nous amène à la définition des mesures de *ψ-Carleson évanescentes :*

Définition III.3.23. Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ et soit ψ une fonction d'Orlicz. On dit que μ est une mesure de *ψ-Carleson évanescente* si, pour tout $A > 0$,

$$\mu(\mathscr{S}(\xi, h)) = o_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))}\right) \tag{III.3.21}$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

On a le corollaire suivant :

Corollaire III.3.24. *Soit ψ une fonction d'Orlicz et soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{B}_N}$. Si ψ vérifie la condition $\nabla_0 \cap \nabla_2$, alors l'inclusion $H^\psi(\mathbb{B}_N) \subset L^\psi(\mu)$ a lieu et est compacte si et seulement si μ est une mesure de ψ-Carleson évanescente.*

Remarque III.3.25. Il convient de noter que, dans les résultats qui précèdent, la condition ∇_2 est une hypothèse sur ψ qui apparaît dès qu'on exprime une condition suffisante à la compacité d'un opérateur de composition sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$. Lorsque $N = 1$, il est possible de supprimer cette hypothèse, comme il est expliqué en bas de la page 45 de [16]. Néanmoins, cette astuce ne semble pas s'adapter en plusieurs variables, ce qui explique la présence de cette condition ∇_2 dans la plupart des énoncés précédents.

III.3.3 Application aux opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz

Dans ce paragraphe, notre intention est d'appliquer les résultats (ou au moins les idées) du paragraphe III.3.2 aux opérateurs de composition. Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe. On note $\phi^* : \overline{\mathbb{B}_N} \to \overline{\mathbb{B}_N}$ l'application qui est égale à ϕ sur $\mathbb{B}_N$ et qui est égale aux limites presque partout sur $\mathbb{S}_N$ de ϕ, i.e. pour tout $\zeta \in \mathbb{B}_N$ et pour σ_N-presque tout $\zeta \in \mathbb{S}_N$, $\phi^*(\zeta) = \lim_{r\to 1} \phi(r\zeta)$; on définit la mesure μ_ϕ sur $\overline{\mathbb{B}_N}$, image par ϕ de la mesure de Lebesgue normalisée σ_N sur $\mathbb{S}_N$:

$$\mu_\phi(E) = \sigma_N\left({\phi^*}^{-1}(E) \cap \mathbb{S}_N\right)$$

pour tout borélien $E \subset \overline{\mathbb{B}_N}$.

On note comme d'habitude C_ϕ l'opérateur de composition sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ associé à ϕ, défini par $C_\phi(f) = f \circ \phi$ pour $f \in H^\psi(\mathbb{B}_N)$, où ψ est une fonction d'Orlicz. Dans l'étude des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy classiques $H^p(\mathbb{B}_N)$, on fait bien souvent le lien entre l'opérateur d'inclusion $j_{\mu_\phi} : H^p(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^p(\mu_\phi)$, associé à la mesure image μ_ϕ, et l'opérateur de composition C_ϕ. Jetons un oeil sur les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\left\|j_{\mu_\phi}(f)\right\|_{L^\psi(\mu)} &= \inf\left(C > 0, \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu_\phi \leq 1\right) \\
&= \inf\left(C > 0, \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{|f^* \circ \phi^*|}{C}\right) d\sigma_N \leq 1\right) \qquad \text{(III.3.22)}
\end{aligned}$$

et

$$\left\|C_\phi(f)\right\|_\psi = \inf\left(C>0, \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{\left|(f\circ\phi)^*\right|}{C}\right) d\sigma_N \leq 1\right). \tag{III.3.23}$$

Grâce au théorème de Carleson pour les espaces de Hardy-Orlicz, il semble naturel de comparer les expressions (III.3.22) et (III.3.23) et de se demander si elles sont égales, ce qui permettrait de résoudre les problèmes de continuité et de compacité des opérateurs de composition en vertu des résultats connus pour les opérateurs d'inclusion. Cela revient à se poser les questions suivantes :

1. Est-il vrai que $f^*\circ\phi^* = (f\circ\phi)^*$ dès que ces deux termes ont un sens ?
   En une variable, le théorème de Lindelöf répond positivement à cette question quand $f\in H^p(\mathbb{D})$, pour tout $1\leq p\leq\infty$ (et donc quand $f\in H^\psi(\mathbb{D})$), et il suffit donc d'énoncer le problème de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition en termes d'opérateurs d'inclusion, pour des mesures adaptées. Néanmoins, ce résultat de Lindelöf n'est pas valable en toute généralité, dès que la dimension est supérieure ou égale à 2. Il en existe une version plus faible en plusieurs variables, le théorème de Čirka ([24, théorème 8.4.4]), mais celui-ci n'est pas suffisant. Ceci nous amène à la question suivante :
2. L'inégalité $\displaystyle\int_{\mathbb{S}_N}\psi\left(\frac{\left|(f\circ\phi)^*\right|}{C}\right)d\sigma_N \leq \int_{\mathbb{S}_N}\psi\left(\frac{\left|f^*\circ\phi^*\right|}{C}\right)d\sigma_N$ est-elle vraie ?
   Une réponse positive serait encore suffisante pour conclure que la continuité (resp. la compacité) de l'opérateur d'inclusion j_{μ_ϕ} entraîne la continuité (resp. la compacité) de C_ϕ. Plus simple que la première, cette question s'avère avoir une réponse positive quand la fonction f appartient à $H^p(\mathbb{B}_N)$, et ce grâce au fait que l'algèbre $A(\mathbb{B}_N)$ est dense dans $H^p(\mathbb{B}_N)$; en réalité, ceci demeure encore valable si f appartient à n'importe quel espace de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lequel $A(\mathbb{B}_N)$ est encore dense. Comme nous l'avons déjà mentionné, ceci est exactement le fait des espaces $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ pour lesquels la fonction d'Orlicz ψ vérifie la condition Δ_2 (cf. théorème III.3.3). Rappelons que cette condition Δ_2 contraint la fonction ψ à vérifier $\psi(x)\leq Cx^p$ pour un $p>1$ et une constante $C>0$ (cf. proposition III.1.6). L'espace $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ doit alors contenir au moins un espace $H^p(\mathbb{B}_N)$; ceci ne donne donc aucune information sur les espaces de Hardy-Orlicz « proches » de $H^\infty(\mathbb{B}_N)$.

Ces raisons semble mettre en évidence les limites de l'étude des opérateurs de composition à partir des opérateurs d'inclusion, dès qu'on se place dans des espaces de Hardy-Orlicz « trop petits ». Néanmoins, nous allons voir que ces difficultés peuvent non seulement être contournées en se plaçant dans le sous-espace $HM^\psi(\mathbb{B}_N)$, dans lequel le problème évoqué ci-dessus dans 2) ne se pose pas, et ce grâce à l'hypothèse ∇_2 et aux théorème III.3.5, mais aussi en considérant directement, peut-être plus naturellement, les opérateurs de composition ; concrêtement, on va se rendre compte que les démonstrations du théorème III.3.12 et du III.3.14 permettent d'obtenir, malgré tout, des conditions suffisantes, en apparence plus fortes que celles obtenues pour les opérateurs d'inclusion, à la continuité ou à la compacité des opérateurs de composition. Ces deux façons de procéder vont conduire finalement à deux caractérisations, a priori distincte, des continuités et compacités des opérateurs de composition sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$, quand ψ vérifie les hypothèses de régularités usuelles.

Avant toute chose, d'après ce qui a été développé dans le point (2) ci-dessus, et comme un corollaire des théorèmes III.3.15 et III.3.21, on a le résultat suivant, qui concerne la continuité et la compacité des opérateurs de composition sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$, quand la fonction d'Orlicz ψ vérifie la condition Δ_2.

Théorème III.3.26. *Soit $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ holomorphe et soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant les conditions Δ_2 et ∇_2.*

1. *C_ϕ est continu de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement s'il existe une constante $A>0$ telle que*

$$\rho_\mu(h) = O_{h\to0}\left(h^N\right). \tag{III.3.24}$$

2. *C_ϕ est compact de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si, pour toute constante $A>0$, on a*

$$\rho_\mu(h) = o_{h\to0}\left(h^N\right). \tag{III.3.25}$$

Démonstration. Elle découle des théorèmes III.3.15 et III.3.21 et de la démonstration du théorème III.2.16, plus précisément du fait que, pour toute fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ_2, on a l'équivalence

$$\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)} \approx h^N,$$

pour tout $A > 0$ et pour tout $h > 0$. □

Remarque III.3.27. 1. Notons que les hypothèses du théorème précédent, i.e. ψ vérifie les conditions ∇_2 et Δ_2, nous place dans le cas où $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ est reflexif, d'après l'assertion 4) du théorème III.3.5.

2. Dans l'énoncé du point (2) du théorème précédent, on ne suppose pas que $\mu_\phi(\mathbb{S}_N) = 0$, alors que c'est une hypothèse qui apparaît dans l'énoncé du théorème III.3.21 (1). En fait, on peut constater que cette hypothèse n'est pas nécessaire quand on traite des opérateurs de composition, en procédant comme dans la démonstration du théorème 3.35 (2) de [9]. Plus précisément, la démonstration de (2) repose sur le corollaire de la première partie du théorème ci-dessus suivant :

Corollaire III.3.28. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition Δ_2. Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ holomorphe. Si C_ϕ est continu de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, alors ϕ^* ne peut envoyer un ensemble de mesure de Lebesgue non-nulle dans $\mathbb{S}_N$ dans un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. Elle est identique à celle du corollaire 3.38 dans [9], mais nous jugeons que l'introduction de la condition Δ_2, bien qu'elle ne change presque rien, justifie qu'on la détaille. Soit donc A un borélien de $\mathbb{S}_N$ tel que $\phi^*(A) \subset E \subset \mathbb{S}_N$, avec $\sigma(E) = 0$. Soit également $\varepsilon > 0$; par compacité, on peut trouver $(\zeta_k)_k \in \mathbb{S}_N$ et une famille $(h_k)_k$ de réels tels que

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q(\zeta_k, h_k)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_N\left(Q(\zeta_k, h_k)\right) \leq \varepsilon.$$

D'après le lemme III.3.7, cette inégalité impose aux h_k de vérifier la relation suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k^N \lesssim \varepsilon. \tag{III.3.26}$$

Supposons maintenant C_ϕ continu sur $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$. Le théorème III.3.26 assure l'existence d'une constante $0 < K < \infty$, telle que

$$\mu_\phi\left(Q(\zeta_k, h_k)\right) \leq \mu_\phi\left(\mathscr{S}(\zeta_k, h_k)\right) \leq K h_k^N,$$

pour tout $k \geq 1$. Par suite, comme

$$A \subset (\phi^*)^{-1}(E) \subset (\phi^*)^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q(\zeta_k, h_k)\right),$$

il vient

$$\begin{aligned} \sigma(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_\phi\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q(\zeta_k, h_k)\right) \\ &\leq K h_k^N \\ &\lesssim \varepsilon \end{aligned}$$

d'après (III.3.26), ce qui conclut la démonstration. □

Il est intéressant de noter que, si ψ vérifie la condition Δ_2, alors ce corollaire entraîne que $(f\circ\phi)^* = f^*\circ\phi^*$ presque partout sur $\overline{\mathbb{B}_N}$, pour toute fonction $f\in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, dès que C_ϕ est continu de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même. En effet, que la fonction d'Orlicz ψ vérifie la condition Δ_2 implique non seulement que les polynômes sont denses dans $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, mais aussi que, pour toute $f\in H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, $\|f_r - f\|_{H^\Psi} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0$ (la démontration de ce fait est essentiellement contenue dans celle de [23, chapitre IX, théorème 4] ; cf. aussi théorème III.3.5). Par conséquent, si C_ϕ est continu, alors $f_r\circ\phi^* = (f_r\circ\phi)^*$ tend vers $(f\circ\phi)^*$ dans $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, et donc converge également presque partout sur $\mathbb{S}_N$ vers cette même limite. Maintenant, comme les sous-ensembles de $\mathbb{S}_N$ où les limites radiales de ϕ et de f existent sont de mesure de Lebesgue égale à 1, le corollaire précédent entraîne que

$$\lim_{r\to 1} f_r\circ\phi^* = f^*\circ\phi^*$$

presque partout, ce qui donne le résultat.

Par ailleurs, le corollaire précédent permet également d'exhiber des exemples d'applications $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_\mathbb{N}$ n'induisant pas un opérateur de composition continu sur $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, dès que $N>1$ et que ψ vérifie la condition Δ_2. Un exemple non-trivial est celui des applications de la forme

$$\phi = (A\phi_1, B\phi_2)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont deux fonctions intérieures ([1]), et A et B deux constantes positives telles que $A^2+B^2=1$. L'image par ϕ de $\mathbb{S}_N$ est alors le tore

$$\{(z_1,z_2), |z_1| = A, |z_2| = B\}$$

qui est de mesure de Lebesgue σ_N nulle.

On va maintenant donner les deux caractérisations générales annoncées plus haut concernant les opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz de la boule. On commence par évoquer celle qui relève d'une adaptation du théorème III.3.12 et du lemme III.3.14. L'autre, qui fera appel aux théorème III.3.5, et plus précisément au fait que $(HM^\Psi(\mathbb{B}_N))^{**} = H^\Psi(\mathbb{B}_N)$, sera nettement plus courte et conduira aux formulations « classiques » auxquelles on pouvait s'attendre.

Pour chacune d'elles, le traitement de la compacité necessitera un critère de compacité spécifique aux opérateurs de composition sur $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$. En effet, pour les raisons évoquées au début du paragraphe, on ne peut pas utiliser directement la proposition III.3.19 pour toute fonction d'Orlicz ψ, dès qu'on travaille sur un espace de Hardy-Orlicz $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ non-séparable. Le critère suivant est une généralisation de celui énoncé dans le cas classique des espaces $H^p(\mathbb{B}_N)$, $1\le p<\infty$ ([9, Proposition 3.11]), et sa démonstration en est identique, ou se déduit facilement de celle de la proposition III.3.19.

Proposition III.3.29. *Soit ψ une fonction d'Orlicz et soit $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ holomorphe. C_ϕ est compact de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si, pour toute suite $(f_n)_n$ dans la boule unité de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ qui converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$, $f_n\circ\phi$ converge vers 0 dans $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$.*

III.3.3.1 Premières caractérisations des continuité et compacité de C_ϕ sur $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$

Le théorème principal de ce paragraphe est le suivant :

Théorème III.3.30. *Soit $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ holomorphe et soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_2.*

1. *Si C_ϕ est continu de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, alors μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson.*
2. *Pour $0<r<1$, on note ϕ_r l'application holomorphe sur $\overline{\mathbb{B}_N}$ définie par $\phi_r(z)=\phi(rz)$. S'il existe une constante $A>0$ telle que*

$$\sup_{0<r<1} K_{\mu_{\phi_r}}(h) = O_{h\to 0}\left(\frac{1/h^N}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))}\right), \tag{III.3.27}$$

alors C_ϕ est continu de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même.

3. *Si C_ϕ est compact de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, alors μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson évanescente.*
4. *Si, pour tout $A > 0$, on a*

$$\sup_{0<r<1} K_{\mu_{\phi_r}}(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1/h^N}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right), \tag{III.3.28}$$

alors C_ϕ est compact de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même.

Démonstration. 1) C'est une adaptation facile du premier point de la démonstration du théorème III.3.15. On suppose que C_ϕ est continu de norme égale à C. On considère la fonction suivante, déjà introduite dans la démonstration du théorème III.3.15,

$$f = \psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right) u_{a,1-h},$$

pour $a \in \mathbb{S}_N$ et $0 < h < 1$. On a montré que $f \in H^\psi(\mathbb{B}_N)$, $\|f\|_\psi \leq 1$, et

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4^N}\psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)$$

pour tout $z \in \mathscr{S}(a,h)$. De plus, f est continue sur $\overline{\mathbb{B}_N}$; par suite

$$\begin{aligned} 1 \geq \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{\left|(f\circ\phi)^*\right|}{C}\right) d\sigma_N &= \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{|f\circ\phi^*|}{C}\right) d\sigma_N \\ &= \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu \\ &\geq \int_{\mathscr{S}(a,h)} \psi\left(\frac{1}{4^N C}\psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right) d\mu \\ &= \mu\left(\mathscr{S}(a,h)\right)\psi\left(\frac{1}{4^N C}\psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right), \end{aligned} \tag{III.3.29}$$

d'où le premier point.

(3) Ce point procède du même type d'argument que celui employé précédemment et sa démonstration est contenue dans celle du premier point du théorème III.3.21, en observant que les fonctions f_n introduites dans cette dernière sont continues sur $\overline{\mathbb{B}_N}$. Nous n'entrons pas davantage dans les détails.

(2) et (4) Pour ces deux points, il s'agit de reprendre les démonstrations des secondes parties des théorèmes III.3.15 et III.3.21 respectivement.

On s'occupe d'abord de (2) ; soit f une fonction dans la boule unité de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$; on observe que, pour tout $C > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{\left|(f\circ\phi)^*\right|}{C}\right) d\sigma_N &= \sup_{0<r<1}\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{|f\circ\phi_r|}{C}\right) d\sigma_N \\ &= \sup_{0<r<1}\int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu_{\phi_r}. \end{aligned} \tag{III.3.30}$$

Afin d'éviter toute confusion, remarquons qu'il est possible d'écrire f au lieu de f^* dans le membre de droite de (III.3.30), puisque $\mu_{\phi_r}(\mathbb{S}_N) = 0$. De plus, si on regarde avec un peu d'attention la démonstration du point (2) du théorème III.3.15, on note que la condition (III.3.34) et une application du lemme III.3.14 donnent une majoration de $\|f\|_{L^\psi(\mu_{\phi_r})}$ par une constante $C_0 > 0$ qui ne dépend pas de r (mais dépend de N, A, η, C et $\tilde{C}$, les deux dernières constantes étant celles apparaissant dans le théorème III.3.12). Ainsi, en posant $C = C_0$ dans (III.3.30), on obtient

$$\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{\left|(f\circ\phi)^*\right|}{C_0}\right) d\sigma_N \leq \sup_{0<r<1}\int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f|}{C_0}\right) d\mu_{\phi_r} \leq 1$$

ce qui donne la démonstration du point (2).

Passons à la démonstration de (4). Soit $(f_n)_n$ une suite dans la boule unité de $H^\Psi(\mathbb{B}_N)$ qui converge vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$. D'après la proposition III.3.29, il suffit de montrer que $\|f_n \circ \phi\|_\psi$ tend vers 0. On fixe $\varepsilon > 0$.

$$\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{|(f_n \circ \phi)^*|}{\varepsilon}\right) d\sigma_N = \sup_{0<r<1} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r}.$$

Soit maintenant $0 < r < 1$ et $0 < r^{'} < 1$; la valeur de $r^{'}$ sera fixé plus tard, indépendamment de celle de r.

$$\int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r} = \int_{\overline{\mathbb{B}_N}\setminus r^{'}\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r} + \int_{r^{'}\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r}.$$

En procédant comme pour le point (2) du théorème III.2.12, et en utilisant le lemme III.2.7 et la condition (III.3.35), on peut trouver des constantes $x_A > 0$ et C_1, indépendantes de r et de $r^{'}$, telles que

$$\sup_{0<r<1} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}\setminus r^{'}\mathbb{B}_N} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r} \quad \leq \quad \psi_2(x_A) \sup_{0<r<1} \left(\mu_{\phi_r}\left(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus r^{'}\mathbb{B}_N\right)\right) + \frac{1}{4}.$$

Revenons à la condition (III.3.35) ; elle implique que

$$\sup_{0<r<1} \sup_{\xi \in \mathbb{S}_N} \left(\mu_{\phi_r}(\mathscr{W}(\xi, h))\right) \leq \eta(h).h^N,$$

où $\eta(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Si on note $C(h)$ le nombre minimal de boules anisotropes $Q(\xi, h)$ nécessaires pour recouvrir $\mathbb{S}_N$, il existe une constante C indépendante de h telle que

$$C(h) \leq \frac{C}{h^N}.$$

Par conséquent,

$$\sup_{0<r<1} \left(\mu_{\phi_r}(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus h\mathbb{B}_N)\right) \leq \frac{C}{h^N}.\eta(h).h^N = C\eta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

et on peut trouver $r^{'}$ tel que

$$\psi_2(x_A) \sup_{0<r<1} \left(\mu_{\phi_r}\left(\overline{\mathbb{B}_N} \setminus r^{'}\mathbb{B}_N\right)\right) \leq \frac{1}{4}.$$

Ensuite, puisque $(f_n)_n$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{B}_N$, il existe un entier n_0, qui ne dépend que de $r^{'}$ (qui a été fixé avant) tel que, pour tout $n \geq n_0$

$$\int_{r^{'}\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r} \leq \frac{1}{2},$$

pour tout $0 < r < 1$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$,

$$\int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{|(f_n \circ \phi)^*|}{\varepsilon}\right) d\sigma_N = \sup_{0<r<1} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\right) d\mu_{\phi_r} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ce qui conclut la démonstration. □

On fait quelques remarques qui seront utiles pour raffiner nos résultats sur les opérateurs de composition et pour donner de « vraies » caractérisations, sous une hypothèse standard vérifiée par la fonction d'Orlicz ψ.

Remarque III.3.31. On se place sous les hypothèses du théorème III.3.30.

1. Jetons de nouveau un oeil sur la démonstration de la première partie du théorème précédent. Il est possible de modifier la suite d'égalités et d'inégalités (III.3.29) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 1 \geq \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{\left|(f\circ\phi)^*\right|}{C}\right) d\sigma_N &\geq \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{S}_N} \psi\left(\frac{|f\circ\phi_r|}{C}\right) d\sigma_N \\ &= \sup_{0<r<1} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi\left(\frac{|f|}{C}\right) d\mu_{\phi_r} \\ &\geq \sup_{0<r<1} \int_{\mathscr{S}(a,h)} \psi\left(\frac{1}{4^N C}\psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right) d\mu_{\phi_r} \\ &= \sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}(\mathscr{S}(a,h))\, \psi\left(\frac{1}{4^N C}\psi^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right), \end{aligned}$$

et d'obtenir ainsi que la continuité de C_ϕ comme opérateur de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ implique non seulement que μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson, mais aussi qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}(\mathscr{S}(\xi,h)) \leq \frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))} \tag{III.3.31}$$

uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.
Mentionnons que ce fait aurait pu être démontré directement en utilisant une adaptation facile de [8, lemme 3.2] aux cadres des espaces de Hardy-Orlicz. (Cette adaptation consiste simplement à réécrire la suite d'inégalité ci-dessus pour une famille arbitraire de mesures μ_{ϕ_β}, pour β dans un ensemble I quelconque d'indices, telles que les opérateurs de composition C_{ϕ_β} soient tous continus, et de normes majorées par une constante finie, uniformément par rapport à β.) En effet, il n'est pas difficile de voir que $\|C_{\phi_r}\| \leq \|C_\phi\|$ pour tout $0 < r < 1$.

2. On revient aussi sur la démonstration du point 3 du théorème III.3.30 qui donne une condition nécessaire à la compacité de C_ϕ sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$. Pour cela, on doit revenir à la démonstration de la première partie du théorème III.3.21. Comme dans la remarque précédente pour la continuité, on considère les mesures μ_ϕ (resp. μ_{ϕ_r}, $0 < r < 1$) sur $\overline{\mathbb{B}_N}$, images par ϕ (resp. ϕ_r) de la mesure de Lebesgue sur la sphère. On veut montrer que la compacité de C_ϕ implique la condition

$$\sup_{0<r<1} \rho_{\mu_{\phi_r}}(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))}\right) \tag{III.3.32}$$

pour tout $A > 0$. On suppose par l'absurde qu'il existe un $\varepsilon_0 > 0$, $A > 0$, une suite $(h_n)_n \subset (0,1)$ qui décroît vers 0 et une suite $(\xi_n)_n \subset \mathbb{S}_N$, tels que

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}(\xi_n,h_n) \geq \frac{\varepsilon_0}{\psi(A\psi^{-1}(1/h_n^N))}.$$

Avec les notations de la démonstration du théorème III.3.21 (1) , et en reprenant certains des arguments auxquels elle fait appel, on aboutit facilement aux calculs suivants, en utilisant le fait que les fonctions $(f_n)_n$ introduites dans celle-ci sont continues sur $\overline{\mathbb{B}_N}$:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{4^N A}{\varepsilon_0}|f_n|\right) d\mu_\phi &\geq \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{S}_N} \psi_2\left(\frac{4^N A}{\varepsilon_0}|f_n\circ\phi_r|\right) d\sigma_N \\ &= \sup_{0<r<1} \int_{\overline{\mathbb{B}_N}} \psi_2\left(\frac{4^N A}{\varepsilon_0}|f_n|\right) d\mu_{\phi_r} \\ &\geq \sup_{0<r<1} \psi_2\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right) \mu_{\phi_r}(\mathscr{S}(\xi_n,h_n)) \\ &\geq \psi_2\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\psi_1^{-1}\left(\frac{1}{h^N}\right)\right) \frac{\varepsilon_0}{\psi_2\left(A\psi_1^{-1}(1/h^N)\right)} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n)_n$ est dans la boule unité de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ et tend vers 0 uniformément sur tout compact de la boule (cf. démonstration du (1) du théorème III.3.21), l'inégalité précédente contredit la compacité de C_ϕ en vertu de la proposition III.3.29.

3. Il est intéressant de noter dès maintenant qu'être une mesure de ψ-Carleson ne semble pas impliquer trivialement la condition (III.3.31). De même, il ne semble pas évident qu'être une mesure de ψ-Carleson entraîne la condition (III.3.32) (cf. ci-dessous).

Ces remarques et la démonstration du troisième point du théorème III.2.8 montre que, si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme, alors les conditions (III.3.31) et (III.3.34) sont équivalentes. De même, la démonstration du troisième point du théorème III.3.21 s'adapte aisément pour montrer que, si ψ vérifie la condition ∇_0, alors les conditions (III.3.32) et (III.3.35) sont équivalentes.

On peut alors énoncer notre premier théorème de caractérisations de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition sur $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, pour des fonctions d'Orlicz ψ vérifiant les condition ∇_0-uniforme ou ∇_0 (et la condition ∇_2). C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème III.3.32. *Soit ψ une fonction d'Orlicz et soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ holomorphe.*

1. *Si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme (et donc la condition ∇_2), alors C_ϕ est continu de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si*

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}\left(\mathscr{S}(\xi,h)\right) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right), \tag{III.3.33}$$

   uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{S}_N$.

2. *Si ψ vérifie les conditions ∇_2 et ∇_0, alors C_ϕ est compact de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$dans lui-même si et seulement si, pour tout $A > 0$,*

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}\left(\mathscr{S}(\xi,h)\right) = o_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right),$$

   uniformément en $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Remarque III.3.33. Comme

$$\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)} \approx h^N$$

pour tout $A > 0$ et pour tout $h \in (0,1)$, dès que la fonction d'Orlicz ψ vérifie la condition Δ_2, on a le corollaire suivant :

Corollaire III.3.34. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant les conditions Δ_2 et ∇_2 (i.e. $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ est reflexif), et soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ holomorphe.*

1. *C_ϕ est continu de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si*

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}\left(\mathscr{S}(\xi,h)\right) = O_{h\to 0}\left(h^N\right),$$

   uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{S}_N$.

2. *C_ϕ est compact de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si*

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}\left(\mathscr{S}(\xi,h)\right) = o_{h\to 0}\left(h^N\right),$$

   uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Notons que ce corollaire s'applique en particulier si ψ est la fonction $x \longmapsto x^p$, $1 < p < \infty$. Pour $p = 1$, il n'est pas difficile de vérifier que tout ce qui a été fait précédemment pour conduire à ce corollaire marche encore.

Revenons un instant sur le (3) de la remarque III.3.31. On observe que des caractérisations de la continuité et de la compacité de C_ϕ, dans le cas où ψ vérifie la condition Δ_2 (et la condition ∇_2), ont déjà été données dans le théorème III.3.26, et une comparaison de celle-ci avec celle donnée dans le corollaire précédent montrent en particulier que

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}\left(\mathscr{S}\left(\xi,h\right)\right) = O_{h\to 0}\left(h^N\right),$$

uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{S}_N$, a lieu si et seulement si

$$\mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi,h\right)\right) = O_{h\to 0}\left(h^N\right),$$

uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{S}_N$, a lieu. Étonnamment (ou malheureusement), nous ne sommes pas en mesure, pour le moment, de montrer directement qu'étant donnée une fonction d'Orlicz ψ arbitraire (vérifiant la condition ∇_2), la condition

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}\left(\mathscr{S}\left(\xi,h\right)\right) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right),$$

vérifiée pour une constante $A > 0$ et uniformément par rapport $\xi \in \mathbb{S}_N$, est équivalente à la condition

$$\mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi,h\right)\right) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right),$$

pour $A > 0$, uniformément par rapport $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Naturellement le même genre de questions se pose pour les conditions de petit oh caractérisant la compacité de C_ϕ sur $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$ pour ψ vérifiant la condition $\Delta_2 \cap \nabla_2$.

La deuxième formulation des caractérisations des continuité et compacité de C_ϕ sur $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$, donnée dans le paragraphe suivant, va précisément lever cette ambiguïté.

III.3.3.2 Deuxièmes caractérisations des continuités et compacités de C_ϕ sur $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$

Au regard des théorèmes de caractérisations de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition tels qu'ils ont été obtenus dans les espaces de Hardy classiques ([9, théorème 3.35]), ou dans les espaces de Hardy-Orlicz du disque ([16, théorème 4.18]), à partir d'opérateurs d'inclusion, il est légitime de s'attendre à ce que, dans notre cadre également, les conditions nécessaires ou suffisantes obtenues dans les théorème III.3.15 et théorème III.3.21 s'appliquent aux opérateurs de composition. Alors que ceci est presque direct dans les cadres usuels, ceci ne semble pas l'être dans celui qui nous intéresse, comme nous l'avons expliqué en introduction du paragraphe III.3.3.

Le théorème suivant et sa démonstration vont montrer que le cadre des espaces de Hardy-Orlicz de la boule ne fait pas exception, quant à l'étude des continuité et compacité de C_ϕ :

Théorème III.3.35. *Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ holomorphe et soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_2.*

1. *Si C_ϕ est continu de $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même, alors μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson.*
2. *S'il existe une constante $A > 0$ telle que*

$$K_{\mu_\phi}(h) = O_{h\to 0}\left(\frac{1/h^N}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right), \tag{III.3.34}$$

alors C_ϕ est continu de $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même.

3. *Si C_ϕ est compact de $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même, alors μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson évanescente.*
4. *Si, pour tout $A > 0$, on a*

$$K_{\mu_\phi}(h) = o_{h\to 0}\left(\frac{1/h^N}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}\right), \tag{III.3.35}$$

alors C_ϕ est compact de $H^\psi\left(\mathbb{B}_N\right)$ dans lui-même.

Démonstration. Les points (1) et (3) et leur démonstration sont identiques à ceux correspondants dans le théorème III.3.26.

On passe à la démonstration de (2) et (4). D'après le théorème III.3.5, $(HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N))^{**} = H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, puisque ψ vérifie la condition ∇_2. De plus, C_ϕ est continue (resp. compact) de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si C_ϕ est continu (resp. compact) de $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même ; en effet, cela provient dans un sens du fait que $(HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N))^{**} = H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ et donc, au passage, que le bi-adjoint de C_ϕ restreint à $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ est C_ϕ lui-même, et dans l'autre sens (qui ne sera pas utile...) du fait que si C_ϕ est continu sur $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, alors pour toute fonction $f \in HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, $C_\phi(f)$ est aussi dans $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, par définition du sous-espace $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$.

Il s'agit donc de montrer que la condition (III.3.34) (resp. (III.3.35)) est suffisante à la continuité (resp. compacité) de C_ϕ de $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même. Pour cela, en vertu du théorème III.3.15 (resp. du III.3.21, et par un recours aux propositions III.3.19 et III.3.29, rendu possible par le fait que la condition (III.3.35) implique que $\mu_\phi(\mathbb{S}_N) = 0$), il suffit de vérifier que, pour tout $f \in HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, $\left\| j_{\mu_\phi}(f) \right\|_{\psi} = \left\| C_\phi(f) \right\|_{\psi}$, où j_{μ_ϕ} est l'inclusion canonique $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N) \hookrightarrow L^{\Psi}(\mu_\phi)$. Or, il est clair que

$$\left\| j_{\mu_\phi}(f) \right\|_{\psi} = \left\| C_\phi(f) \right\|_{\psi} \tag{III.3.36}$$

pour toute fonction f dans $A(\mathbb{B}_N)$, l'algèbre des fonctions holomorphes dans $\mathbb{B}_N$ et continues sur $\overline{\mathbb{B}_N}$. Si la condition (III.3.34) est satisfaite (en particulier elle l'est si la condition (III.3.35) est vérifiée), alors, par densité de $A(\mathbb{B}_N)$ dans $HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$, et comme la convergence dans $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ implique la convergence partout dans $\mathbb{B}_N$, l'égalité (III.3.36) est vraie pour tout $f \in HM^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$. □

Comme d'habitude, si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme (resp. ∇_0), alors la condition (III.3.34) (resp. la condition (III.3.35)) est équivalente au fait que μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson (resp. de ψ-Carleson évanescente) et on a le corollaire suivant du théorème III.3.35 :

Théorème III.3.36. *Soient $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ holomorphe et ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_2.*

1. *Si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme, alors C_ϕ est continu de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson.*
2. *Si ψ vérifie la condition ∇_0, alors C_ϕ est compact de $H^{\Psi}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même si et seulement si μ_ϕ est une mesure de ψ-Carleson évanescente.*

III.3.3.3 Quelques conséquences des caractérisations précédentes

1. Tout d'abord, les deux types de caractérisations obtenus précédemment donnent, de façon très indirecte, un résultat qui ne paraît pas trivial au premier abord, et qui répond à une question évoquée à la fin du paragraphe III.3.3.1 :

Proposition III.3.37. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant les conditions ∇_2 et ∇_0-uniforme. La condition*

$$\sup_{0<r<1} \mu_{\phi_r}(\mathscr{S}(\xi,h)) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))}\right),$$

vérifiée pour une constante $A > 0$ et uniformément par rapport $\xi \in \mathbb{S}_N$, est équivalente à la condition

$$\mu_\phi(\mathscr{S}(\xi,h)) = O_{h\to 0}\left(\frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))}\right),$$

pour $A > 0$, uniformément par rapport $\xi \in \mathbb{S}_N$.

Bien sûr, on a une équivalence similaire en remplaçant les conditions de grand O ci-dessus, valables pour un $A > 0$, par des conditions de petit o, *valables pour* tout $A > 0$.

2. La proposition suivante est une conséquence directe de l'une ou l'autre des deux formulations des caractérisations obtenus dans les deux paragraphes précédents. Elle renforce l'idée selon laquelle les opérateurs de composition « se comportent d'autant mieux » vis à vis de la continuité que l'espace de Hardy-Orlicz sur lequel ils agissent est « proche » de H^∞.

Proposition III.3.38. *Soient ψ et ν deux fonctions d'Orlicz ; on suppose que ψ vérifie la condition ∇_2 et que la fonction ν vérifie les conditions ∇_2 et Δ_2 (i.e. $H^\nu(\mathbb{B}_N)$ reflexif) Soit également $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe. Si C_ϕ est continu de $H^\nu(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, alors C_ϕ est continu de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même.*

Démonstration. Par exemple, d'après le théorème III.3.35, il suffit de vérifier que, si l'inégalité

$$K_{\mu_\phi}(h) \leq C$$

est vérifiée pour une constante $C \geq 1$ et pour h petit, alors l'inégalité

$$K_{\mu_\phi}(h) \leq \frac{1/h^N}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right)}$$

est également satisfaite pour $A = 1/C$ et pour h petit. Or, la convexité de ψ entraîne

$$\psi\left(\frac{1}{C}\psi^{-1}\left(1/h^N\right)\right) \leq \frac{1}{Ch^N}$$

pour tout $h > 0$

□

3. Comme dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz, on s'interroge sur l'existence d'espaces de Hardy-Orlicz $H^\psi(\mathbb{B}_N)$, distincts de $H^\infty(\mathbb{B}_N)$ et plus petits que des espaces de Hardy $H^p(\mathbb{B}_N)$, sur lesquels tout opérateur de composition C_ϕ est continu. Dans [20], les auteurs expliquent que la proposition III.2.18 s'adapte aux mesures μ_ϕ sur la boule fermée, et donc indirectement aux espaces de Hardy :

Proposition III.3.39. *Si $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ est holomorphe, alors il existe une constante $0 < B_\phi < \infty$ telle que*

$$\mu_\phi\left(\mathscr{S}(\xi, h)\right) \leq B_\phi.h, \tag{III.3.37}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{S}_N$ et pour tout $0 < h < 1$.

Si l'on compare les conditions (III.3.37) avec la condition de ψ-Carleson, grâce au théorème III.3.36, on peut s'attendre à ce que, si ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme et croît suffisamment vite, alors la condition de ψ-Carleson est toujours satisfaite.

Avant d'étudier cette question plus en détail, comme la démonstration de la proposition III.3.39 n'apparaît pas dans [20], nous préférons énoncer et démontrer la proposition suivante :

Proposition III.3.40. *Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe telle que $\phi(0) = 0$. Il existe une constante $B > 0$, indépendant de ϕ, telle que*

$$\mu_\phi\left(\mathscr{S}(\xi, h)\right) \leq B.h, \tag{III.3.38}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{S}_N$ et pour tout $0 < h < 1$.

La démonstration de ce résultat repose, de façon surprenante (et comme il a été annoncé dans le paragraphe d'introduction), sur le principe de subordination de Littlewood et une connaissance précise de la norme de l'opérateur de composition sur l'espace de Hardy du disque ([9, corollaire 3.7, page 123] par exemple). Ces idées se cachent précisément derrière le théorème suivant, qui nous sera utile pour démontrer la proposition III.3.40 :

Théorème III.3.41. *Soit $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. On note μ_ϕ la mesure image par ϕ^* de la mesure de Lebesgue sur le cercle. C_ϕ est continu sur $H^p(\mathbb{D})$, $1 \leq p < \infty$, et plus précisément il existe une constante $0 < C < \infty$, qui ne dépend pas de ϕ, telle que*

$$\mu_\phi(\mathscr{S}(\xi,h)) \leq C\left(\frac{1+|\phi(0)|}{1-|\phi(0)|}\right)^{1/p}.h,$$

uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{T}$ et pour tout $h > 0$.

Sans entrer dans les détails, ce théorème se démontre en faisant appel au principe de Littlewood pour dire que tout opérateur de composition est continu, et s'appuie sur la donnée explicite de la norme de cet opérateur. La constante C, indépendante de ϕ, provient de l'évaluation de l'opérateur sur des fonctions tests.

De plus, observons que si $\phi(0) = 0$, alors la constante $C\left(\frac{1+|\phi(0)|}{1-|\phi(0)|}\right)^{1/p}$ ne dépend plus de ϕ.

Démonstration de la proposition III.3.40. On fixe $\xi \in \mathbb{S}_N$ et $0 < h < 1$. On note $\chi_{(\phi^*)^{-1}(\mathscr{S}(\xi,h))}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $(\phi^*)^{-1}(\mathscr{S}(\xi,h))$. La formule d'intégration par tranches (cf. par exemple [24, proposition 1.4.7, (1)]) donne

$$\begin{aligned}\mu_\phi(\mathscr{S}(\xi,h)) &= \int_{\mathbb{S}_N} \chi_{(\phi^*)^{-1}(\mathscr{S}(\xi,h))}(\zeta)\, d\sigma_N(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{S}_N}\int_{\mathbb{T}} \chi_{(\phi^*)^{-1}(\mathscr{S}(\xi,h))}(u\zeta)\, d\sigma_1(u)\, d\sigma_N(\zeta),\end{aligned}$$

où σ_1 est la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{T}$. Observons que

$$\chi_{(\phi^*)^{-1}(\mathscr{S}(\xi,h))}(u\zeta) = 1$$

est équivalent à

$$|1 - \langle \phi^*(u\zeta), \xi\rangle| < h. \tag{III.3.39}$$

Pour tout ζ et tout ξ dans la sphère, on définit la fonction $\varphi_{\zeta,\xi} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ par $\varphi_{\zeta,\xi}(z) = \langle \phi(z\zeta), \xi\rangle$, pour $z \in \mathbb{D}$. $\varphi_{\zeta,\xi}$ est holomorphe et vérifie $\varphi_{\zeta,\xi}(0) = 0$; de plus, il n'est pas difficile de vérifier que $\varphi^*_{\zeta,\xi}(u) = \langle \phi^*(u\zeta), \xi\rangle$ pour σ_1-presque tout $u \in \mathbb{T}$, où $\varphi^*_{\zeta,\xi}$ est la limite radiale σ_1-presque partout de $\varphi_{\zeta,\xi}$. L'inégalité (III.3.39) est alors équivalente à

$$\varphi^*_{\zeta,\xi}(u) \in \mathscr{S}(1,h),$$

où $\mathscr{S}(1,h)$ est le disque de rayon h, centré en 1. Maintenant, d'après le théorème III.3.41, il existe une constante $0 < B < \infty$, indépendante de ζ, de ξ et de ϕ, telle que

$$\sigma_1\left(\left(\varphi^*_{\zeta,\xi}\right)^{-1}(\mathscr{S}(1,h))\right) \leq B.h.$$

Ceci termine la démonstration. □

On s'intéresse maintenant aux fonctions d'Orlicz ψ vérifiant les conditions ∇_0-uniforme (et donc ∇_2) qui satisfont à la propriété $\mathscr{P}'$ suivante :

$\mathscr{P}'$: pour toute constante $K > 0$, il existe $A > 0$ et $h_0 > 0$ tels que

$$Kh \leq \frac{1}{\psi(A\psi^{-1}(1/h^N))}, \tag{III.3.40}$$

pour tout $0 < h \leq h_0$.

La proposition suivante caractérise les fonctions d'Orlicz qui vérifient cette condition $\mathscr{P}'$:

Proposition III.3.42. *Soit ψ une fonction d'Orlicz. ψ vérifie la condition $\mathscr{P}'$ si et seulement si, pour tout $K>0$ (ou de façon équivalente, pour un $K>0$), il existe $C>0$ tel que, pour tout $x>0$ suffisamment grand, on a*

$$\psi(x)^N \leq K\psi(Cx).$$

En particulier, la condition $\mathscr{P}'$ est triviale si $N=1$ et coïncide avec la condition Δ^2 (cf. définition III.1.11) dès que $N>1$.

Démonstration. Elle est identique à celle de la proposition III.2.19. □

Lorsque $N=1$, le théorème III.4.7 (cf. [18, théorème 4.19]) permet de s'affranchir de la condition ∇_0-uniforme dans le premier point du théorème III.2.15. De plus, la factorisation d'une fonction $f\in H^\psi(\mathbb{D})$ (qui est donc dans $H^1(\mathbb{D})$) en un produit de Blaschke formé sur ses zéros et une fonction de $H^\psi(\mathbb{D})$ qui ne s'annule pas (cf. la remarque qui précède la démonstration du théorème 4.10 dans [16], et le livre [2, paragraphe 7, théorème 1.1]), permet de s'affranchir de la condition ∇_2. Pour $N>1$, ces arguments ne tiennent plus (cf. remarque 5, partie III.4 pour le premier) mais toute fonction d'Orlicz satisfaisant à la condition Δ^2 vérifie aussi la condition ∇_0-uniforme, et donc la condition ∇_2 (proposition III.1.14).

Ainsi, le théorème III.3.36, la proposition III.3.40 et la proposition III.3.42 conduisent au théorème suivant, qui redonne la continuité automatique des opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz (cf. proposition 3.12 de [16]), et répond à la question de l'existence d'un espace de Hardy-Orlicz sur lequel tout opérateur de composition est continu en dimension supérieure :

Théorème III.3.43. *Soit ψ une fonction d'Orlicz.*

1. *Tout opérateur de composition est continu de $H^\psi(\mathbb{D})$ dans lui-même ;*
2. *Lorsque $N>1$, si ψ vérifie la condition Δ^2, alors tout opérateur de composition est continu de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même.*

Démonstration. Soit $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ une application holomorphe. Comme tout opérateur de composition C_τ, induit par un automorphisme de la boule, est continu de $H^p(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même (de façon plus générale, tout opérateur de composition associé à une homographie de la boule est continu sur $H^p(\mathbb{B}_N)$, cf. chapitre 2), $1\leq p<\infty$, la proposition III.3.38 entraîne que C_τ est continu comme opérateur agissant de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même. (On rappelle qu'il n'est pas nécessaire que ψ vérifie la condition ∇_0-uniforme ni la condition ∇_2 quand $N=1$, et que ces conditions sont automatiques si ψ vérifie la condition Δ^2.) Par conséquent, à conjugaison près par un opérateur de composition induit par un automorphisme, on peut supposer que $\phi(0)=0$. Maintenant, comme ψ vérifié la condition $\mathscr{P}'$, les propositions III.3.42 et III.3.40 et le théorème III.3.36 assurent que C_ϕ est continu de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même. □

Remarque III.3.44. 1) Rappelons que toute fonction d'Orlicz du type $\psi(x)=e^{ax^b}-1$, pour $a>0$ et $b\geq 1$, appartient à la classe Δ^2, si bien que le résultat précédent n'est pas vide.

2) Le théorème III.3.43 peut se voir d'une autre façon, en utilisant le théorème III.2.20. En effet, pour $N>1$ quelconque (la preuve pour $N=1$ est la même, mais est plus simple car la continuité de C_ϕ est automatique), si ψ vérifie la condition Δ^2 (donc aussi la condition ∇_0-uniforme), i.e.

$$\psi(x)^2 \leq K\psi(Cx), \tag{III.3.41}$$

pour des constantes $K>0$, $C\geq 1$, alors

$$\left\|C_\phi(f)\right\|_{A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)} \leq C_\alpha \left\|f\right\|_{A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)}, \tag{III.3.42}$$

pour toute application $\phi:\mathbb{B}_N\to\mathbb{B}_N$ holomorphe. De plus, on a

$$\left\|f\right\|_{H^\psi(\mathbb{B}_N)} = \lim_{\alpha\to-1}(\alpha+1)\left\|f\right\|_{A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N)}. \tag{III.3.43}$$

Effectivement, cette formule est connue pour $\psi(x) = x^p$, $1 \leq p < \infty$, et sa démonstration repose essentiellement sur la sous-harmonicité de $|f|^p$ pour f holomorphe. Comme $\psi(|f|)$ est également sous-harmonique, puisque ψ est convexe croissante, il ne fait pas de difficulté pour étendre la formule précédente au cadre Orlicz. Par ailleurs, il est aisé, mais fastidieux, de vérifier que la constante C_α apparaissant dans (III.3.42) est, en réalité, bornée par une constante qui ne dépend pas de α, quand $\alpha \in (-1,0)$. Pour le voir, il suffit de jeter un oeil attentif à la démonstration du point 2) du théorème III.2.8 et d'observer que C_α est plus petit qu'une constante valant, avec les notations de cette démonstration, $BC_M\tilde{C}$; B est donnée par la démonstration du lemme III.2.7 et vaut $\dfrac{6.4^{N+\alpha}}{A}$; le dénominateur de cette expression est bien majoré indépendamment de $\alpha \in (-1,0)$ et la constante A est donnée par la condition Δ^2, et dépend donc des constantes K et C de (III.3.41). Par ailleurs, la constante $\tilde{C}$, quant à elle, provient de la démonstration du 2) du théorème III.2.8, et vaut $\mu(\mathbb{B}_N)\,\psi_2(x_A) + C_1\eta$, où x_A et η, pour la même raison que la constante A ci-dessus ne dépend pas de α, n'en dépendent pas non plus. Enfin, la constante C_1, donnée par $C_1 = \frac{\tilde{C}}{2.4^{N+\alpha}}$ est clairement majorée, pour $\alpha > -1$, par une constante qui ne dépend que de $\tilde{C}$, laquelle provient, tout comme C_M, de considérations géométriques qui ne font pas intervenir α (cf. les démonstrations de la proposition III.2.5 et du théorème III.2.6). On conclut en faisant tendre α vers -1 dans (III.3.42), car l'égalité (III.3.43) donne alors le point 2 du théorème III.3.43.

La remarque III.3.44 (2) fournit ainsi une autre façon de démontrer la proposition 3.12 de [16] (ou le premier point du théorème III.3.43 ; la première démonstration de ce point, sans utiliser la remarque III.3.44, utilise dans le théorème III.3.41 le fait que tout opérateur de composition sur les espaces de Hardy classiques sont continus, par l'intermédiaire du principe de Littlewood, comme c'est le cas dans [16]).

III.4 Quelques commentaires

La plupart des remarques qui vont suivre valent aussi bien pour les espaces de Bergman-Orlicz que pour les espaces de Hardy-Orlicz. Par commodité, et pour ne pas être redondant, on énoncera nos idées simplement pour l'un *ou* l'autre de ces deux types d'espace. Si une remarque est spécifique à l'un d'eux, on le mentionnera explicitement.

1) Tout d'abord, on commence par remarquer que l'inclusion $A^p_\alpha(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$, implique l'inclusion $A^\psi_\alpha(\mathbb{B}_N) \subset L^\psi(\mu)$. En quelque sorte, ce point a déjà été évoqué dans la proposition III.3.38 dans le cas des espaces de Hardy-Orlicz. Le lemme suivant est la raison de cette implication.

Lemme III.4.1. *Soit ψ une fonction d'Orlicz et soit μ une mesure de α-Bergman-Carleson sur $\mathbb{B}_N$. Alors μ satisfait la condition* (III.2.10). *En particulier, une mesure de α-Bergman-Carleson est automatiquement une mesure de (ψ,α)-Bergman-Carleson sur $\mathbb{B}_N$.*

Démonstration. Comme μ est une mesure de α-Bergman-Carleson, on peut trouver une constante $C \geq 1$ telle que $K_{\mu,\alpha}(h) \leq C$ pour tout $h \in (0,1)$. En prenant $A = 1/C \leq 1$, la convexité de la fonction d'Orlicz ψ implique que

$$\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right) \leq A/h^{N+1+\alpha}.$$

D'où

$$K_{\mu,\alpha}(h) \leq \frac{1}{A} \leq \frac{1/h^{N+1+\alpha}}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)}$$

et la condition (III.2.10) est remplie.

La dernière assertion est une conséquence directe du corollaire III.2.10. □

On déduit immédiatement de ce lemme et du théorème III.2.8 la proposition suivante, déjà énoncée dans [16] dans le cas du disque.

Proposition III.4.2. *Soit ψ une fonction d'Orlicz et soit μ un mesure de α-Bergman-Carleson sur $\mathbb{B}_N$. L'inclusion $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi}(\mu)$ a lieu (et est continue).*

Sans difficultés, on montre que le résultat précédent est valable dans le cadre Hardy :

Proposition III.4.3. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_2, et soit μ une mesure de Carleson sur $\overline{\mathbb{B}_N}$. L'inclusion $H^{\psi}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi}(\mu)$ a lieu (et est continue).*

Il convient de noter que ce dernier résultat est également une conséquence du fait que H^{ψ} est un espace d'interpolation entre H^1 et H^{∞} (cf. [3, théorème V.10.8]).

En ce qui concerne les opérateurs de composition, on déduit immédiatement du théorème III.2.16 et de la proposition III.4.2 que tout opérateur de composition continu sur un $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$, pour ψ vérifiant la condition Δ_2, est également continu sur $A^{\nu}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$, où ν est une fonction d'Orlicz quelconque. La réciproque est fausse en général, puisque nous avons montré qu'il existe des fonctions d'Orlicz ψ telle que tout opérateur de composition est continu sur $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$, ce qui n'est pas le cas sur $A^{p}_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$, $1 \leq p < \infty$, $N > 1$. Bien entendu, cet argument n'est pas pertinent en une variable.

Pour ce qui est de la compacité, nous avons vu que la condition(III.3.19) entraîne que $K_{\mu}(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, ce qui est équivalent (théorème III.3.20) à la compacité de l'inclusion $H^p(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$. On déduit donc du théorème III.3.21 la proposition suivante :

Proposition III.4.4. *Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant les conditions ∇_2 et ∇_0. Si l'inclusion $H^{\psi}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi}(\mu)$ a lieu et est compacte, alors l'inclusion $H^p(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$ a lieu et est compacte, pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Évidemment, un tel résultat s'énonce de façon très similaire dans le cadre Bergman, ou pour les opérateurs de composition, toujours dans le cadre Bergman. Cependant, pour donner un résultat semblable pour les opérateurs de composition dans le cadre Hardy, on se heurte au fait qu'on a une condition nécessaire et suffisante (sous la condition ∇_0) à la compacité de C_{ϕ} qui porte non plus directement sur K_{μ} mais sur $\sup_{0<r<1} K_{\mu_{\phi_r}}$, et qui n'implique pas clairement que K_{μ} tend toujours vers 0 en 0 (cf. théorème III.3.30).

2) Dans le cas classique des espaces de Bergman, il est bien connu que la continuité ou la compacité de l'inclusion $A^p_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$ dépend de la mesure μ mais pas de l'exposant p. Plus précisément, rappelons par exemple que $A^p_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^p(\mu)$ a lieu (et est continue) si et seulement si μ est une mesure de α-Bergman-Carleson, i.e.

$$\mu(W(\xi,h)) \leq h^{N+1+\alpha},$$

uniformément par rapport à $\xi \in \mathbb{S}_N$ et pour tout $0 < h < 1$. Il apparaît d'emblée que cette condition est indépendante de p. Dans le cadre des espaces de Bergman-Orlicz, la situation est bien différente : le fait que l'inclusion $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi}(\mu)$ ait lieu pour *une* fonction d'Orlicz ψ n'implique pas systématiquement que l'inclusion $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi}(\mu)$ a lieu pour *toute* fonction d'Orlicz ψ. En fait, il semble que cette propriété « d'indépendance » de l'inclusion d'un espace de Bergman-Orlicz dans un espace d'Orlicz est propre à l'espace de Bergman $A^p_{\alpha}(\mathbb{B}_N)$, dans le sens où ce dernier partage cette propriété avec des espaces de Bergman-Orlicz qui sont « comparables » à des espaces de Bergman. Il convient d'être prudent avec le terme « comparable », spécialement en l'occurrence, parce qu'il a un sens bien précis. Plus exactement, si ψ et ν sont deux fonctions d'Orlicz satisfaisant toutes les deux la condition Δ_2 (cf. III.1.5), alors on a l'inclusion $A^{\psi}_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\psi}(\mu)$ si et seulement si $A^{\nu}_{\alpha}(\mathbb{B}_N) \subset L^{\nu}(\mu)$. Ceci découle directement du théorème III.2.8 et du fait que, si ψ vérifie la condition Δ_2, alors ψ vérifie

$$\frac{1}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h^{N+1+\alpha}\right)\right)} \approx h^{N+1+\alpha}$$

(ce qui implique au passage que la condition ∇_0-uniforme n'est plus nécessaire). En d'autres termes, ce cas particulier du théorème III.2.8 n'est autre que le théorème de Carleson lui-même, explicitement énoncé dans [14, théorème 3.5].

Bien sûr, le même genre de remarques peut être fait en termes d'opérateurs de composition, ou en considérant des espaces de Hardy-Orlicz à la place des espaces de Bergman-Orlicz, ou encore en regardant la compacité au lieu de la continuité.

3) Soit ψ une fonction d'Orlicz vérifiant la condition ∇_0-uniforme. La remarque III.3.44 (2) montre que, si C_ϕ est continu sur tout $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$, $\alpha \in (-1,0)$, alors C_ϕ est continu sur $H^\psi(\mathbb{B}_N)$. D'après la démonstration de [8, théorème 3.3], il est clair que, si ψ vérifie la condition Δ_2, alors la continuité de C_ϕ de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même implique la continuité de C_ϕ comme opérateur agissant de $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, pour tout $\alpha > -1$, et est ainsi équivalente à la continuité de C_ϕ sur $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ pour tout $\alpha > -1$. On peut résumer ces idées, et celles des remarques précédentes, dans la proposition suivante :

Proposition III.4.5. *Soit $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ une application holomorphe. S'il existe une fonction d'Orlicz ψ_1 vérifiant la condition $\Delta_2 \cap \nabla_2$ telle que l'opérateur de composition C_ϕ est continu de $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, alors C_ϕ est continu de tout espace de Hardy-Orlicz $H^{\psi_2}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, et de tout espace de Bergman-Orlicz $A_\alpha^{\psi_3}(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, $\alpha > -1$, où ψ_2 est une fonction d'Orlicz qui satisfait la condition ∇_2, et où ψ_3 est une fonction d'Orlicz arbitraire.*

Il est intéressant d'énoncer le résultat extrême opposé, qui provient des théorèmes III.2.20 et III.3.43 :

Proposition III.4.6. *Soit ψ une fonction d'Orlicz.*

1. *Toute application holomorphe $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ induit un opérateur de composition continu de $H^\psi(\mathbb{D})$ dans lui-même, et de $A_\alpha^\psi(\mathbb{D})$ dans lui-même pour tout $\alpha > -1$.*
2. *Si ψ vérifie la condition Δ^2, toute application holomorphe $\phi : \mathbb{B}_N \to \mathbb{B}_N$ induit un opérateur de composition continu de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même, et de $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même pour tout $\alpha > -1$.*

4) La situation concernant la compacité est moins claire. Peu de résultats sur ce sujet sont connus en plusieurs variables, mais nous pensons que l'étude des opérateurs de composition compacts en une variable peut soulever des questions, à la fois sur la continuité et la compacité, quand $N > 1$. Néanmoins, dans la première remarque, il a été observé que si C_ϕ est compact sur $A_\alpha^\psi(\mathbb{B}_N)$, alors C_ϕ est compact sur tout espace de Bergman $A_\alpha^p(\mathbb{B}_N)$ classique, à condition que ψ vérifie la condition ∇_0. De plus, comme nous l'avons mentionné dans la deuxième remarque ci-dessus, si ψ et ν sont deux fonctions d'Orlicz vérifiant la condition $\Delta_2 \cap \nabla_2$, alors la compacité d'un opérateur de composition C_ϕ de $H^\psi(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même est équivalente à celle de C_ϕ agissant de $H^\nu(\mathbb{B}_N)$ dans lui-même. Cependant, en une variable, les auteurs de [17] montrent que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $1 \leq p < \infty$, il existe une fonction d'Orlicz ψ telle que $H^{p+\varepsilon}(\mathbb{D}) \subset H^\psi(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$, et un opérateur de composition C_ϕ compact sur $H^p(\mathbb{D})$ et sur $H^{\varepsilon+p}(\mathbb{D})$, mais qui n'est pas compact sur $H^\psi(\mathbb{D})$. Au passage, cela montre que la condition Δ_2 ne caractérise pas la « proximité » d'un espace de Hardy-Orlicz avec un espace H^p : il existe des espaces de Hardy-Orlicz intercalés entre deux espaces H^p classiques, qui sont définis par des fonctions d'Orlicz qui ne vérifient pas la condition Δ_2. Concernant la continuité, nous savons que ce phénomène ne peut pas se produire, à cause de la proposition III.3.38 (ou de la proposition III.4.5). Cependant, on peut se demander si, étant donné deux fonctions d'Orlicz quelconques ψ_1 et ψ_2, et $1 < p < \infty$ telles que $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N) \subset H^p(\mathbb{B}_N) \subset H^{\psi_2}(\mathbb{B}_N)$, la continuité de C_ϕ sur $H^{\psi_1}(\mathbb{B}_N)$ et $H^{\psi_2}(\mathbb{B}_N)$ implique la continuité de C_ϕ sur $H^p(\mathbb{B}_N)$. Toutes ces questions ont également leur intérêt si l'on s'intéresse à la compacité, notamment sur les espaces de Hardy-Orlicz, où la situation est moins claire encore.

Dans [18], les mêmes auteurs démontrent qu'il existe un symbole ϕ qui induit un opérateur de composition compact sur $H^\psi(\mathbb{D})$ dans lui-même, mais qui ne l'est pas de $A^\psi(\mathbb{D})$ dans lui-même, pour certaines fonctions d'Orlicz ψ. Pour tout $N \geq 1$, nous savons au moins que cela ne se produit pas si $\psi(x) = x^p$, d'après [8, théorème 3.3].

Envisageons maintenant la situation sur les espaces de Hardy-Orlicz « petits ». Comme nous l'avons dit dans l'introduction, pour toute fonction d'Orlicz ψ, il existe un symbole $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ surjectif, qui induit un opérateur de composition compact sur $H^\psi(\mathbb{D})$ ([19, théorème 4.1]). La [18, proposition 4.1] affirme que, sous une certaine condition (vérifiée aussi bien par $x \longmapsto x^p$ que par des fonctions d'Orlicz qui croissent vite), tout opérateur de composition qui est compact de H^ψ dans lui-même, l'est aussi de $A^\psi(\mathbb{D})$ dans lui-même. Ceci ne signifie pas que nous ne pouvons pas trouver de fonction d'Orlicz définissant un espace de Bergman-Orlicz sur lequel la compacité de C_ϕ soit équivalente à celle sur H^∞, mais ça laisse au moins penser que c'est improbable.

5) On termine par une remarque qui provient de la différence plus spécifique entre le cadre « une variable » et le cadre « plusieurs variables », sur le sujet des opérateurs de composition. Si l'on revient sur les théorèmes III.2.15 et III.3.32, on peut être déçu de ne pas être capable de se départir des conditions ∇_0 uniforme et ∇_0. Effectivement, quand $N=1$, les conditions (III.2.9) et (III.2.10) (resp. (III.3.13) et (III.3.14)) sont toujours équivalentes si la mesure μ est précisément la mesure image de la mesure de Lebesgue sur le disque (resp. sur le tore) par une application $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe. Ceci vient d'un résultat général qui porte sur la géométrie spéciale du disque et des fonctions holomorphes sur celui-ci ; il s'agit d'une sorte d'homogénéité de la mesure μ_ϕ qui est loin d'être triviale. C'est précisément l'objet du théorème 4.19 dans [16] et du théorème 3.1 dans [18] ; l'énoncer va permettre de comprendre pourquoi on ne peut espérer, avec les outils développés ici, donner une caractérisation de la continuité et de la compacité des opérateurs de composition sur les espaces de Bergman-Orlicz ou de Hardy-Orlicz en tout généralité. Par commodité, nous n'énonçons que le théorème 4.19 de [16], c'est-à-dire pour une mesure μ_ϕ relative à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur le cercle unité, pour $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$.

Théorème III.4.7. *Il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour toute fonction holomorphe $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, on a*

$$\mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi, \varepsilon h\right)\right) \leq \kappa \varepsilon \mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi, h\right)\right) \tag{III.4.1}$$

pour tout $h \in (0, 1-|\phi(0)|)$, tout $\xi \in \mathbb{T}$, et tout $\varepsilon \in (0,1]$.

Vérifions avant tout que ce théorème permet bien d'obtenir que les conditions (III.3.13) et (III.3.14) sont équivalentes quand on se place en dimension 1. Comme il est clair que (III.3.14) implique (III.3.13), il suffit de voir, en supposant (III.3.13) vérifiée et grâce au théorème précédent, qu'on a

$$\begin{aligned} \sup_{0<\varepsilon\leq 1} \sup_{\xi\in\mathbb{T}} \frac{\mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi, \varepsilon h\right)\right)}{\varepsilon h} &\leq \kappa \sup_{0<\varepsilon\leq 1} \sup_{\xi\in\mathbb{T}} \frac{\mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi, h\right)\right)}{h} \\ &\lesssim \frac{1/h}{\psi\left(A\psi^{-1}\left(1/h\right)\right)}, \end{aligned}$$

pour tout $0 < h \leq 1-|\phi(0)|$, i.e. la condition (III.3.14).

Maintenant, si on regarde l'inégalité (III.4.1) du point de vue des opérateurs de composition, il apparaît que la continuité des opérateurs de composition sur tout espace $H^p(\mathbb{D})$, $0 < p < \infty$, ou tout espace $H^\psi(\mathbb{D})$, ψ étant une fonction d'Orlicz, est une conséquence directe de ce théorème : si on fixe $h \in (0, 1-|\phi(0)|)$, (III.4.1) implique que $\mu_\phi\left(\mathscr{S}\left(\xi, h'\right)\right)$ est un grand O de h' quand h' est petit. Par conséquent, un tel résultat ne peut qu'être spécifique au cadre « une variable », puisqu'on sait qu'il existe des applications holomorphes de la boule de $\mathbb{C}^N$, $N > 1$, qui induisent un opérateurs de composition non-continus sur les espaces de Hardy, et sur certains espaces de Hardy-Orlicz.

Bibliographie

[1] A. B. Alexandrov, Existence of inner functions in the unit ball, *Math. USSR Sbornik 46* (1983), 143-159.

[2] M. Andersson, Topics in Complex Analysis, Springer Verlag, New York, 1997.

[3] C. Bennett, R. Sharpley, Interpolation of operators, Pure and Applied Math. 129, Academic Press (1998).

[4] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, *Annals Math.* 76 (1962), 547-559.

[5] J. A. Cima, W. R. Wogen, A Carleson measure theorem for the Bergman space on the ball, *J. Operator Theory* 7 (1982), 157-165.

[6] J. Cima, W. Wogen, Unbounded composition operators on $H^2(\mathbb{B}_2)$, *Proc. Am. Math. Soc.* 99 (1987), No 3, 477-483.

[7] J. A. Cima, P. R. Mercer, Composition operators between Bergman spaces on convex domains in $\mathbb{C}^n$, *J. Operator Theory* 33 (1995), 363–369.

[8] D. D. Clahane, Compact composition operators on weighted Bergman spaces of the unit ball, *J. Operator Theory* 45 (2001), 335-355.

[9] C. C. Cowen, B. D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press (1995).

[10] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear operators, I : General Theory, Pure and Appl. math., vol. 7, Interscience, New York (1958).

[11] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Graduate Texts in Mathematics 236, Springer (2007).

[12] W. W. Hastings, A Carleson measure theorem for Bergman spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 52 (1975), 237-241.

[13] L. Hormander, L^p estimate for (pluri-)subharmonic functions, *Math. Scand.* 20 (1967), 65-78.

[14] Z. J. Jiang, Carleson Measures and Composition Operators on Bergman-Orlicz of the Unit Ball, *Int. Journal of Math. Analysis* 4 (2010), No 33, 1607-1615.

[15] M. A. Krasnosel'skii, Ya. B. Rutickii, Convex Functions and Orlicz Spaces, P. Noordhoff Ltd., Groningen (1961).

[16] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on Hardy-Orlicz spaces, *Mem. Am. Math. Soc.* 207 (2010), No. 974.

[17] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on $H^2(\mathbb{D})$ and Hardy-Orlicz spaces, J. Math. Anal. Appl. 354 (2009), 360-371.

[18] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Composition operators on Bergman-Orlicz spaces, hal-00426831 (2009).

[19] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, Some revisited results about composition operators on Hardy spaces, hal-00448623, (2010).

[20] B. D. MacCluer, P. R. Mercer, Composition Operators Between Hardy and Weighted Bergman Spaces on Convex Domains in $\mathbb{C}^n$, *Proc. Am. Math. Soc.* 123 (1995), No. 7, 2093-2102.

[21] B. D. MacCluer, J. H. Shapiro, Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman Spaces, *Canad. J. Math.* 38 (1986), No. 4, 878-906.

[22] S. C. Power, Hörmander's Carleson theorem for the ball, *Glasgow Math. J.* 26 (1985), 13-17.

[23] M. M. Rao, Z. D. Ren, Theory of Orlicz spaces, Pure and Applied Mathematics 146, Marcel Dekker, Inc. (1991).

[24] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.

[25] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Universitext. Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1993).

[26] D. A. Stegenga, Multipliers of the Dirichlet space, *Illinois J. Math.* 24 (1980), 113-139.

[27] K. Zhu, Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball, Graduate Texts in Mathematics 226, Springer (2005).

Liste générale des Symboles

Notations usuelles

$(e_i)_i$ Base canonique de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ I.2.0

$\mathbb{C}$ Corps des nombres complexes I.2.0

$\mathbb{D}$ Disque unité I.1.0

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ Espace des suites réelles ou complexes I.2.0

$\mathbb{N}$ Ensemble des entiers naturels I.2.0

$\mathbb{R}$ Corps des nombres réels I.2.0

$\mathbb{S}_N$ Sphère unité de $\mathbb{C}_N$ III.3.0

A Espace de Banach ou de Fréchet où vit la série universelle I.2.0

G_δ Intersection dénombrable d'ouverts I.2.0

X Espace vectoriel métrisable où se fait l'approximation par universalité I.2.0

Ensembles

$\Delta_{(n,k)}$ Sous-ensemble de la boule intervenant dans la construction de la fonction maximale Λ_f III.2.2

$\mathbb{H}_N$ Demi-espace de Siegel II.2.0

$\mathbb{P}_+$ Demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$ II.1.0

$\mathscr{S}(\zeta,h)$ Boule anisotrope dans $\overline{\mathbb{B}_N}$ III.2.1

$\mathscr{W}(\zeta,h)$ Fenêtre de Carleson dans $\overline{\mathbb{B}_N}$ III.3.2

Ω_0 Domaine caractéristique II.2.4

C_n Couronne dans $\mathbb{B}_N$ centrée en 0, de rayons $1-\frac{1}{2^n}$ et $1-\frac{1}{2^{n+1}}$ III.2.2

$D(\eta)$ Région d'approche de Korányi centrée en η III.3.2

$LFM(\mathscr{U})$ Ensemble des homographies d'un domaine $\mathscr{U}$ de $\mathbb{C}^N$ II.1.0

Q Vraie boule pour la distance anisotrope sur la sphère III.2.1

$S(\zeta,h)$ Boule anisotrope dans $\mathbb{B}_N$ III.2.1

U Ensemble des séries non-restrictivement universelles I.2.0

U_A Ensemble des séries restrictivement universelles I.2.0

$W(\zeta,h)$ Fenêtre de Carleson centrée en ζ, de centre h III.2.1

Fonctions particulières

Λ_f Fonction maximale III.2.2

σ_c Transformation de Cayley II.2.0

Index lexical général