THÈSE

N° d'ordre :

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Institut National Polytechnique de Toulouse

Discipline ou spécialité : Hydrogéologie et Sûreté Nucléaire

Présentée et soutenue par *David BAILLY*
Le 24 juin 2009

Vers une modélisation des écoulements dans les massifs très fissurés de type karst :
étude morphologique, hydraulique et changement d'échelle

JURY

M. Michel Quintard	Dir. Rech. CNRS (IMFT)	Président du jury
M. Rachid Ababou	Prof. INPT (IMFT)	Directeur de thèse
M. Philippe Renard	Dir. de Rech., Univ. Neuchâtel (CHYN)	Rapporteur
M. Benoît Noetinger	Ing. de Rech., I. F. P.	Rapporteur
M. Frédérick Delay	Prof. Univ. de Poitiers (HYDRASA)	Rapporteur
M. Didier Lasseux	C.R. CNRS Univ. de Bordeaux 1 (TREFLE)	Membre

---

Ecole doctorale : *Sciences de l'univers, de l'environnement et de l'espace (SdU2E)*
Unité de recherche : *Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)*
Directeur(s) de Thèse : Rachid Ababou

Vers une modélisation des écoulements dans les massifs très fissurés de type karst :
étude morphologique, hydraulique et changement d'échelle

Résumé

Les aquifères fissurés de type karst contiennent d'importantes ressources en eau. Ces aquifères sont complexes et hétérogènes sur une gamme d'échelles importantes. Leur gestion nécessite l'utilisation d'outils et de méthodologies adaptés. Dans le cadre de cette étude, différents outils et méthodologies numériques d'étude ont été développés pour la modélisation des aquifères karstiques, et plus généralement, des milieux poreux très fissurés 2D et 3D - en mettant l'accent sur la morphologie et sur le comportement hydrodynamique du milieu à travers la notion de changement d'échelle ("second changement d'échelle", reposant sur un modèle d'écoulement local de type Darcy et/ou Poiseuille avec quelques généralisations). Plusieurs axes sont explorés concernant la morphologie du milieu poreux fissuré (milieux aléatoires, milieux booléens avec réseaux statistiques de fissures, mais aussi, modèles morphogénétiques). L'étude du changement d'échelle hydrodynamique tourne autour du concept de macro perméabilité. Dans un premier temps, l'étude porte sur un modèle de perte de charge linéaire darcien. Les perméabilités effectives sont calculées numériquement en termes des fractions volumiques de fissures et du contraste de perméabilité matrice/fissures. Elles sont analysées et comparées à des modèles théoriques (analytiques). Une étude particulière des effets de quasi-percolation pour les grands contrastes aboutit à la définition de trois fractions critiques liées à des seuils de percolation. Pour tenir compte des effets inertiels dans les fissures, l'étude est étendue au cas d'une loi locale comprenant un terme quadratique en vitesse (Darcy/Ward-Forchheimer). Une perméabilité macroscopique équivalente non linéaire est définie et analysée à l'aide d'un modèle inertiel généralisé (linéaire/puissance). Enfin, l'anisotropie hydraulique à grande échelle du milieu fissuré est étudiée, en termes de perméabilités directionnelles, à l'aide d'une méthode numérique d'immersion.

Mots clefs : *Milieux poreux fissurés 3D, Ecoulement inertiel, Changement d'échelle, Upscaling, Percolation, Macro-perméabilité, Anisotropie, Karst, Darcy, Forchheimer, Booléen, Réseaux statistiques, Morphogenèse.*

Flow modeling in highly fissured media such as karsts :
morphological study, hydraulics and upscaling

Abstract

Karstic aquifers contain large subsurface water resources. These aquifers are complex and heterogeneous on a large range of scales. Their management requires appropriate numerical tools and approaches. Various tools and numerical methodologies have been developed to characterize and model the geometry and hydraulic properties of karstic aquifers, more generally, of highly fissured 2D and 3D porous media. In this study, we emphasize morphological characterization, and we analyze hydrodynamic behavior through the concept of upscaling ("second upscaling"). Concerning the morphology of fissured porous media, several axes are explored : random media, composite random Boolean media with statistical properties, and morphogenetic models. Hydrodynamic upscaling is developed using the macro-permeability concept. This upscaling method is based on either Darcy's linear law, or on a linear/quadratic combination of Darcy's and Ward-Forchheimer's quadratic law (inertial effects). First, the study focuses on Darcy's linear head loss law, and Darcian effective permeabilities are calculated numerically in terms of volume fractions of fissures and "fissure/matrix" permeability contrasts. The results are analysed and compared with analytical results and bounds. A special study of percolation and quasi-percolation effects, for high contrasts, leads to defined three critical fractions. These critical fractions are "connected" to percolation thresholds. Secondly, in order to consider inertial effect in fissures, the study is extended to a local law with a quadratic velocity term (Darcy/Ward-Forchheimer). Then, an equivalent nonlinear macroscopic permeability is defined and analysed using a generalized inertial model (linear/power). Finally, the large scale hydraulic anisotropy of fissured medium is studied, in terms of directional permeabilities, using an "immersion" numerical method.

Key words : *3D fissured porous media, Inertial flow, Upscaling, Percolation, Macropermeability, Anisotropy, Karst, Darcy's law, Forchheimer's law, Boolean, Statistic networks, Morphogenesis.*

Lorsque Jonathan le Goéland rejoingnit les siens sur le rivage,
il faisait nuit noire.
Il éprouvait des vertiges et il était terriblement las.
Malgré cela,
il effectua à l'atterrisage
un dernier looping suivi d'un tonneau déclenché,
juste avant de se poser.

Richard Bach, *JONATHAN LIVINGSTON LE GOELAND*, 1970.

Remerciements

Le travail rapporté dans ce manuscrit a été mené dans le cadre d'une bourse du Ministère de l'Education Nationale, de la Recherche et de la Technologie. L'ensemble de cette thèse a été réalisée à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, dans le Groupe d'Etude des Milieux Poreux.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail : Michel Quintard, président du jury, Frédérick Delay, Benoît Noetinger et Philippe Renard, rapporteurs courageux et enthousiastes et enfin Didier Lasseux, membre du jury.

Marc Prat et Michel Quintard, successivement responsables du groupe G.E.M.P. n'ont accueilli. Je les remercie de m'avoir permis de réaliser cette thèse dans de telles conditions. Je souhaite ici particulièrement dire merci à Michel Quintard et à son épouse pour les moments et le week-end spéléologique passés en leur companie.

Mes remerciements les plus chaleureux, je souhaite les faire à Rachid Ababou. Merci de m'avoir suivi et supporté tout au long de ce travail. A son contact et peu à peu, il a transformé et modelé le géologue de terrain que j'étais, plus habitué aux relevés de terrain et à la lecture de cartes géologiques qu'à la modélisation numérique, en une sorte d'hybride à la fois numéricien, géologue, mécanicien et même quelques fois mathématicien (si si un peu). Merci pour votre écoute et de m'avoir enrichi de toutes ces choses. Merci aussi pour votre patience, pour nos discussions, parfois un peu enflammées, et pour vos encouragements.

Je ne peux oublier de remercier chaleureusement, Jacques Mudry, le faiseur de "passeurs de frontières". Grâce à lui, après mes deux années "standards" de classes préparatoires B.C.P.S.T., j'ai découvert, à Besançon avec lui, le professeur Rolin et tous les membres du laboratoire de géologie, une autre façon d'envisager et d'appréhender l'enseignement et la recherche. Merci infiniment pour tout, ces années furent déterminantes et leur souvenir me tient chaud.

Je tiens aussi à remercier de tout mon coeur, "mes parrains" et "marraines" de thèse, mes amis, qui m'ont accueilli au sein du groupe, encouragé et soutenu. Merci à Ivan Aspa, Laurent Risser, Pauline Assemat, Mehdi Rebai, Olivier Chapuis, Damien Chenu et Thiefaine Coquard. Merci à tous, sans eux cette aventure aurait sûrement coupé court.

Après mes parrains de thèse, toute mon amitié je la donne à Ian Bilanou, merci pour nos petites escapades nocturnes et les moments passés ensemble, à Fabien Chauvet et son humour si particulier (certain diront que Fabien est le seul à avoir le "sens du sublime"), à Romain Guibert pour sa bonne humeur, sa chaleur humaine et son entrain, à Alexandre Lapene pour son soutien moral et pour son amitié, à ma "veille cheugeuille de cougnât" : Dominique Courret et à Houssein Davarzani (de Davarzan), collègue et ami de bureau qui m'a supporté et encouragé dans bien des situations difficiles. Merci aussi à Julie Albagnac, à Marie Duval et à Péguy Gomez. Merci pour votre soutien, votre aide et vos encouragements. Et enfin, un ENORME merci à Emma Florens, ma diptite

chérie. Merci pour sa patience, ses encouragements et ses corrections hortographiques. Merci mon bel amour.

Je souhaite dire sincèrement merci à Manuel Marcoux et Gérald Debenest, la dream team de rêve (je me répète mais je le sais donc ça ne compte pas). Merci pour leurs encouragements, leurs soutiens et pour avoir réussi à me redonner espoir dans les moments les plus sombres. Mais aussi à Henry Boisson, Fréderic Risso, Paul Duru et Lionel Lefur pour les moments passés avec eux à sensibiliser le grand public sur nos thématiques de recherches.

Enfin, je ne peux terminer ces remerciements sans remercier ma famille de sang et de coeur.

Merci à mes parents et mes grands parents qui ont fait de moi se que je suis, peut-être un peu trop : "Humain trop Humain". Merci pour vos encouragements, votre soutien et votre amour. Merci de m'avoir aider à réaliser une de mes profondes envies. Et dire que tout ça est parti d'un pendule de sourcier...Je tiens tout particulièrement à remercier ma grand-mère et mon grand père. Mon grand père nous à malheureusement quitté le mois de novembre dernier. Merci pour tout papy, merci pour tout. Un énorme merci à ma petite soeur, ma complice de toujours, merci pour tout Aline, merci pour ton soutien et pour ton aide Australe. Bon vent à toi. Merci à Joffrey, merci mon petit Jo de ton écoute, ta sensibilité et ton amour pour ton grand frère que tu adores (si si tu l'adores). Merci pour les moments passés ensemble. Promis, maintenant je vais avoir un peu plus de temps...

Du côté du coeur, merci à mes parents, mes grands parents, mon fère et ma soeur, mes oncles et mes tantes, et un énorme merci à Loic Jarriau, dit "Pouic" ; Baptiste Dudogon, dit "Ba" ; Guillaume Plaud, dit "Plot" ; Bertrand Laurent, dit "Bébert" ; Guilène hoareau, dit "Gui" ; Fatima Marzouk, dit "Fatoch" ou "Fat" ; Pauline Marquois, dit "Pô" ; Stephanie Herault dit "Stef" ; Nathalie Bastien dit "Nath" et Sophie Taché dit "Soph". Merci pour tous les moments passés ensemble un peu partout. Vous ne savez pas à quelque point vous avez contribué à ce travail, d'une part par votre soutien et vos encouragements et d'autre part, par tout les échanges que nous avons eu ensemble depuis toutes ces années. Je pense que les prochaines années vont aussi être plutôt intéressantes....Tout continue.

La liste des personnes à remercier est encore longue. Merci à Amandine Fabrello, Antoine Mallet, Juliette Chastanet, Florent Hénon, Nouhr, Yunly Wang, Hassane Fatmi, Matthieu Juillerat, Josselin Marion, Remy Maire, Remi Water, Elodie Benoit-Lyson, Stéphane Molliex, Guillaume Rameaux,...si un jour, par hasard vous lisez ces quelques lignes, ne m'en voulez pas trop si j'ai éccorché votre nom, et MERCI de TOUT !

Nomenclature

Lettres greques :

- α coefficient de tarissement $[-]$
- β coefficient de caractérisation des aquifères très fissurés $[-]$
- Δx taille de la maille dans la direction x
- δ_{ij} symbole de kronecker
- γ coefficient puissance dans la loi de Forchheimer $[-]$
- $\Gamma(a,\tau)$ fonction de cohérence en ondelettes $[-]$
- $\varepsilon(t)$ bruit blanc $[-]$
- $\theta_e = \theta$ teneur en eau effective du milieu poreux $[m.m^{-1}]$
- θ_F orientation du vecteur flux moyen $[rad]$
- θ_G orientation du vecteur gradient moyen $[rad]$
- κ log-contraste, $\kappa = log_{10}(K_F/K_M)$, $[-]$
- μ viscosité dynamique du fluide $[N.s.m^{-2}]$
- ν viscosité cinématique du fluide $[m^2.s^{-1}]$
- ρ_i masse volumique de la phase (i) considérée $[kg.m^{-3}]$
- ϕ_i fraction volumique de la phase (i) considérée
- $\psi_{a,\tau}$ fonction de base ondelette
- ω_i exposant moyen puissance 'directionnel'

Lettres Latines :

- a ouverture d'une fracture $[m]$
- C coefficient d'Ergun $[-]$
- $C_{QQ}(k)$ fonction d'autocovariance des débits $[-]$
- $C_{PQ}(k)$ fonction d'intercovariance entre les pluies et les débits $[-]$
- $C_x(a,\tau)$ coefficient ondelette
- DWF Darcy/Ward-Forchheimer
- D^* pseudo-coefficient de diffusion/érosion/dissolution $[m^2.s^{-2}.s^{-1}]$
- $F = 36 * C_0$ Facteur de forme (Kozeny-Carman) avec $C_0 = 4.8$ $[-]$
- $\vec{g}$ accélération de la gravité $[m.s^{-2}]$
- $\vec{\nabla} H$ gradient hydraulique macroscopique $[-]$
- h hauteur d'eau, potentiel de pression relative $[m]$
- H charge hydraulique totale $[m]$
- $H^{DWF}(\vec{x})$ charge hydraulique totale locale de DWF $[m]$
- $\vec{J}$ gradient hydraulique moyen $[-]$
- k_i perméabilité de la phase (i) $[m^2]$
- $\vec{\vec{K}}$ tenseur des conductivités hydrauliques $[m.s^{-1}]$
- K_{ij} composante ij du tenseur des conductivités hydrauliques $[m.s^{-1}]$
- $\tilde{K}^D$ macro-K de Darcy $[m.s^{-1}]$
- $\hat{K}^{arith}$ moyenne arithmétique des conductivités locales $[m.s^{-1}]$

- $\tilde{K}_{dir}$ conductivité effective directionnelle de Darcy $[m.s^{-1}]$
- $\tilde{K}_F$ conductivité effective directionnelle de flux $[m.s^{-1}]$
- $\tilde{K}_G$ conductivité effective directionnelle de gradient $[m.s^{-1}]$
- $\hat{K}^{harmo}$ moyenne harmonique des conductivités locales $[m.s^{-1}]$
- K_i conductivité hydraulique effective de la phase (i) $[m.s^{-1}]$
- $\tilde{K}_{ii}^{PA}$ conductivité hydraulique effective 'Power Average' $[m.s^{-1}]$
- $\tilde{K}_{ii}^{SC}$ conductivité hydraulique effective 'Self-Consistent' $[m.s^{-1}]$
- l_i échelle de fluctuation 'directionnelle' (ici, siuvant i) $[-]$
- l_h moyenne harmonique des fluctuations moyennes directionnelles $[-]$
- $M(h,\vec{x})$ terme de stockage élastique (m^3/m^3)
- $P(t)$ chroniques des pluies
- $p(K)$ densité de probabilité (P.D.F.) des inclusions
- p_c seuil de percolation
- p_{cb} fraction critique pour la percolation de lien
- p_{cs} fraction critique pour la percolation de site
- p_{c_i} fraction critique de transition de phase du système
- $\hat{p}_{c_i}$ fraction critique de transition de phase du système moyennée
- $Q(t)$ chronique des débits
- $\vec{q}$ densité de flux ou vitesse de filtration de Darcy $[m/s]$ ou $[m^3/m^2/s]$

- $\vec{q}^{DWF}$ vitesse de filtration de DWF $[m^3/m^2/s]$
- $\vec{q}^{DWF}(\vec{x})$ vitesse de filtration locale de DWF $[m^3/m^2/s]$
- r rayon d'un conduit $[m]$
- r_s taux de réaction pour la phase solide $[m^3.m^{-3} \cdot s^{-1}]$
- r_w taux de réaction pour la phase fluide $[m^3.m^{-3} \cdot s^{-1}]$
- R_i rayon (i) d'une ellipse $[m]$
- $R(\theta_i)$ rayon vecteur d'une ellipse $[m]$
- $R_{XX}(k)$ coefficient d'autocorrélation $[-]$
- $R_{XY}(k)$ coefficient d'intercorrélation $[-]$
- $Re_{DWF}(\vec{x})$ nombre de Reynolds local de DWF $[-]$
- $Re_{ii}(DWF)$ nombre de Reynolds macroscopique de DWF suivant $O\vec{i}$ $[-]$
- $S(f)$ spectre de densité de variance $[-]$
- S_S $[m^{-1}]$ storativité spécifique
- $S_{XX}(k)$ densité spectrale de puissance $[-]$
- t temps $[s]$
- t_d temps caractéristique des phénomènes d'altération de l'encaissant $[s]$
- $\vec{u}_G$ vecteur unitaire de la base du gradient
- $\vec{u}_F$ vecteur unitaire de la base du flux
- w dimension d'une fracture perpendiculaire à l'écoulement $[m]$

- $W_{XX}(a,\tau)$ spectre en ondelettes $[-]$
- $W_{XY}(a,\tau)$ co-spectre en ondelettes $[-]$
- $\hat{Y}^D_{\phi_F,\kappa}$ log-décimale de la macro-K de Darcy normalisée par K_M $[-]$
- $\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D$ coefficient de sensibilité d'ordre 1 de la macro-K à ϕ_F $[-]$
- $\partial^2_{\phi_F}\hat{Y}^D$ coefficient de sensibilité d'ordre 2 de la macro-K à ϕ_F $[-]$
- $\partial_{\kappa}\hat{Y}^D$ coefficient de sensibilité d'ordre 1 de la macro-K à κ $[-]$
- $\partial^2_{\kappa}\hat{Y}^D$ coefficient de sensibilité d'ordre 2 de la macro-K à κ $[-]$

Table des matières

1 Introduction générale et cadre de l'étude **1**

1.1 L'eau et la planète Terre 1
1.2 Répartition de l'eau 2
1.3 L'eau et l'homme 3
1.4 L'eau dans le sous-sol 6
1.5 Les aquifères karstiques 8
1.5.1 La karstification 9
1.5.2 L'hydrosystème karstique : organisation spatiale 10
1.5.3 Conséquences sur les stocks d'eau et la pollution 12
1.5.4 Influence de l'hypereustatisme, de la géodynamique, du climat et de la néotectonique sur la karstogenèse 13
1.6 Bilan (structure et genèse des karsts) 16

I Karst : écoulement, structure et morphologie (revue) **17**

2 Hydrogéologie karstique **19**

2.1 Méthodes d'analyses et de caractérisation des aquifères karstiques . . . 20
2.1.1 Analyses des courbes de récession des sources karstiques 20
2.1.2 Analyses corrélatoires et spectrales des pluies et des débits : analyses linéaires 23
2.1.3 Analyses en ondelettes et multifractale : analyses non-stationnaires 25
2.1.4 Bilan sur la structure temporelle des karsts 29
2.2 Eléments morphologiques des massifs fissurés et des aquifères karstiques 30
2.2.1 Structure de fracturation 30
2.2.2 Systèmes karstiques, conduits et cavités 32
2.2.3 Organisation amont/aval 34
2.2.4 La structuration verticale des hydrosystèmes karstiques 36
2.3 Bilan (systèmes karstiques) 37

3 Différentes approches de modélisation **39**
3.1 Modélisations des débits d'une source karstique 39
3.1.1 Les modèles linéaires 39
3.1.2 Les modèles non-linéaires 41
3.2 Les modèles réservoirs conceptuels 41
3.3 Modélisations tridimensionnelles à paramètres distribués (E.D.P.) 42
3.3.1 Distributive Fracture Network approach (D.F.N.) 43
3.3.2 Discrete Channel Network approach (D.C.N.) 44
3.3.3 Equivalent Porous Medium Approach (E.P.M.) 45
3.3.4 Double Continuum Approach (D.C.) 45
3.3.5 Combined Discrete-Continuum Approach (C.D.C.) 46
3.3.6 Modélisation hydraulique 3D : bilan 47
3.4 Stratégie de modélisation pour la suite de l'étude 47

II Approches pour la modélisation des massifs fissurés et des aquifères karstiques **53**

4 Hydraulique des milieux très fissurés de type 'karst' **55**
4.1 Le solveur numérique BigFlow 55
4.1.1 Généralités 55
4.1.2 Structure et algorithmes numériques du code BigFlow 56
4.1.3 Conditions limites spatialement distribuées 57
4.1.4 Formulation mixte de l'équation de Richards 57
4.1.5 Formulation numérique et discrétisation spatio-temporelle des équations d'écoulements 60
4.2 Lois de pertes de charge locales pour les milieux poreux fissurés 63
4.3 Utiliser une loi globale pour modéliser les écoulements dans les massifs très fissurés ? 65

5 Modélisation morphologique des karsts (massifs très fissurés) **67**
5.1 Introduction : morphogenèse/karstogenèse 67
5.2 Milieux discrets : modèles booléens 68
5.3 Milieux continus hétérogènes et mixtes 72
5.4 Couplage perméabilité/écoulement : algorithme de morphogenèse . . . 75
5.4.1 Problématique et motivation de l'étude 75
5.4.2 Modèle d'érosion 76
5.4.3 Un exemple de résultats (morphogenèse en 2D) 79
5.4.4 Bilan sur le modèle d'érosion hydraulique 82

6 Bilan et simulation variablement saturée sur un karst synthétique 83
6.1 bilan sur le couplage entre le code morphologie (MatFrac3D) et écoulement (BigFlow) . . . 83
6.2 Essai de simulation du débit d'une source karstique . . . 84
6.2.1 Modèle morphologique et propriétés hydrauliques et hydrodynamiques utilisées . . . 84
6.2.2 Mise en place des sondes . . . 86
6.2.3 Déroulement de la simulation . . . 87
6.3 Bilan . . . 89

III Ecoulements saturés en milieux très fissurés et le "second changement d'échelle" 91

7 Vers une loi globale : préambule 93
7.1 Motivation de l'étude . . . 93
7.2 Milieux étudiés et choix des paramètres morpho-hydrauliques κ et ϕ_F . . . 95
7.3 Procédure pour l'uspscaling . . . 97

8 Expériences numériques perméamétriques et upscaling darcien 101
8.1 Théories macroscopiques des écoulements darciens . . . 101
8.1.1 Les bornes de Wiener . . . 102
8.1.2 Théorie "self-consistent" (S.C.) . . . 103
8.1.3 Théorie "perturbative/Power Averaging" (P.A.) . . . 106
8.1.4 Discussions des deux solutions analytiques darciennes . . . 108
8.2 Expérimentations numériques : comparaisons avec les solutions analytiques . . . 110
8.2.1 Perméamétrie sur milieux binaires 2D et 3D . . . 110
8.2.2 Premier bilan et discussions des deux macro-conductivités hydrauliques analytiques darciennes . . . 114
8.2.3 Perméamétrie sur deux milieux poreux fissurés poissonniens (2D et 3D) . . . 115
8.3 Influence des phénomènes de percolation (théorie) . . . 119
8.3.1 La percolation - premières définitions . . . 119
8.3.2 Les modèles théoriques de la percolation . . . 121
8.3.3 Le seuil de percolation (revue) . . . 122
8.4 Analyse numérique des phénomènes de percolation . . . 126
8.4.1 Les coefficients de sensibilité de la macro-K de Darcy . . . 126
8.4.2 Etude des coefficients de sensibilité $\partial_{\phi_F} \hat{Y}^D$ et $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$ de la macro-K de Darcy/fraction volumique d'inclusions . . . 128

8.4.3 Etude des coefficients de sensibilité $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ et $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ de la macro-K de Darcy/log-contrate de conductivité hydraulique 134
8.4.4 (Quasi-)percolation sur deux milieux fracturés poissonniens 2D et 3D 146
8.5 Conclusions et discussion sur la macro-K de Darcy et la percolation . . 148

9 Upscaling des écoulements inertiels saturés DWF (Darcy/Ward-Forchheimer) 153
9.1 Le Modèle de perte de charge locale de DWF 153
9.1.1 Quelques généralités 153
9.1.2 Modèle local de perte de charge de DWF 154
9.2 Procédure d'upscaling et premiers résultats numériques perméamétriques 156
9.2.1 Milieux et procédure d'étude 156
9.2.2 Bilan sur la procédure de dépouillement des écoulements inertiels (DWF) 164
9.3 Macro-K de Darcy/Ward-Forchheimer 165
9.3.1 Introduction 165
9.3.2 Tests sur la validité du modèle analytique "linéaire-puissance" . 165
9.3.3 Conclusion partielle 166
9.4 Détermination de la constante d'Ergun et de l'exposant γ 174
9.4.1 Sur une fracture 174
9.4.2 Sur des milieux stratifiés et 2D et 3D purements aléatoires . . . 175
9.5 Conclusion sur la formulation "linéaire/puissance" de la macro-K de DWF 177

10 Etude des effets d'anisotropie et changement d'échelle directionnelle par "immersion" 181
10.1 Définition des conductivités directionnelles 183
10.1.1 Protocole numérique 183
10.1.2 Définition des quantités $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$ 185
10.1.3 Interprétations algébrique et physique de $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$ 188
10.2 Analyse des expérimentations numériques d'immersion 191
10.3 Analyse des résultats : ellipse d'anisotropie 195
10.3.1 Premiers résultats : ellipses d'anisotropie de quelques milieux simples 195
10.3.2 Etude des ellipses d'anisotropie sur des milieux à une ou plusieurs inclusions 196
10.4 Analyses de l'influence de l'anisotropie par les "ellipses inverses" . . . 201
10.4.1 Définition des "ellipses inverses" et premiers milieux étudiés . . 201
10.4.2 Ellipses inverses et phénomènes de percolation pour un milieu binaire 2D purement aléatoire 205
10.4.3 Premières conclusions sur les "ellipses inverses" 207

IV Conclusion générale et ouvertures **213**

V Annexes **221**

Table des figures

1.1 Répartition du stock d'eau dans les différents compartiments de l'hydrosphère. (a) Proportion de l'eau douce ; (b) répartition de l'eau douce ; (c) volumes d'eau douce et sa proportion relative dans les différents compartiments de l'hydrosphère. 2

1.2 (a) Pourcentage d'eau contenue dans les différents organes du corps humain (Source C.N.R.S.) ; (b) prix de l'eau par m^3 de certains pays industrialisés (Source N.U.S.,1/07/2005,) ; (c) évolution du prix moyen de l'eau de 1991 à 2007 de la région Midi-Pyrénées (Source Agence de l'eau ADOUR-GARONNE). 3

1.3 Répartition du stock d'eau sur la planète Terre (source www.carte-du-monde.net) . . 4

1.4 Différents type d'aquifères : (a) aquifère poreux, (b) aquifère sédimentaire fissuré, (c) aquifère fissuré de socle, (d) aquifère karstique (d'après Bichot et al. [14]). 7

1.5 Eléments morphologiques caractéristiques des aquifères karstiques, photos issues de l'ouvrage "Cavernes, face cachée de la Terre" [139] p.43. 11

1.6 Conséquence de la structuration spatiale sur le fonctionnent hydrodynamique des aquifères karstiques, d'après Gilli, E., Mangan, C. & Mudry, J. [52] p. 29. 12

1.7 Impact de la structuration spatiale des aquifères karstiques : non concordance entre le bassin versant hydrogéologique et le bassin versant topographique, d'après Wenger et al. [139] p.60. 13

1.8 Modèle conceptuel du polyphasage de la kartogenèse sur un massif karstique modèle, d'après Gilli E. et al [52]. 14

2.1 Classification des aquifères karstiques d'après Mangin [99]. Tableau extrait de Jeannin & Sauter, 1998 [63]. Les points représentent plusieurs analyses réalisées sur le système karstique de Milandrine (Suisse). 22

2.2 Un exemple d'identification de deux composantes dans la réponse du système karstique Aliou par analyse de la covariance des coefficients ondelettes entre détails pluie-débits et approximation pluie-débits. D'après Labat et al, 2000b [85]. 27

2.3 Cave modulus 33

2.4 Classification morphologique des aquifères karstiques d'après Palmer, 1992 [108]. . . 35

3.1 Les différents modules du code BigFlow, Ababou 1988 [5], d'après Trégarot 2000 [133]. 50

3.2 Organigramme des outils numériques utilisés et développés pour la modélisation et l'études des milieux très fracturés 3D. 51

4.1 Un exemple simple de distribution des conditions aux limites réalisés par le module *MatFracBC* de MatFrac3D. (a) Conduit traversant tout le domaine d'étude pour illustrer la procédure de distribution du type de condition aux limites ; (b) iso-surfaces de charge totale obtenues après simulation. 58

5.1 Objets volumiques discrets 2D (a) et 3D (b) utilisés pour la génération de milieux booléens. 68

5.2 Séquence des rotations utilisées pour orienter les objets 3D dans l'espace 3D par le code MatFrac3D. En utilisant **A** la matrice de rotation éq. 5.1 et **B** la matrice de rotation éq. 5.2. (a) Etat initial, (b) première rotation θ, (c) seconde rotation, ϕ ou φ, et (d) troisième rotation α. 70

5.3 (a) Milieu fracturé 3D poissonnien et (b) 'Karst synthétique'. 71

5.4 Objets discrets 2D insérés dans une matrice hétérogènes des $K^D(\vec{x})$, (b) résultats d'un seuillage par l'application de l'argument 'self-consistent' et binarisation du champs $K^D(\vec{x})$ seuilés. 72

5.5 (a) Milieux binaires constitués uniquement d'objets discrets poissonniens ; (b) matrice hétérogène utilisée. Résultats d'un seuillage et d'application de l'argument "self-consistent" : (c) une partie de la matrice est restée hétérogène et (d) la matrice hétérogène est devenue constante. 74

5.6 (a) Substrat initial utilisé pour les premiers essais de la procédure d'érosion-hydraulique ; (b) répartition du champ de charge total obtenu au temp t_0 de la procédure d'hydromorphogenèse. 80

5.7 (a) et (b) Champs du nombre des Reynolds de Darcy-Ward-Forchheimer, $Re_{DWF}(\vec{x},t)$, (a) calculé après la première itération de l'algorithme $Re_{DWF}(\vec{x},t_1)$, et (b) calculé après 1330 itérations de l'algorithme, $Re_{DWF}(\vec{x},t_{1330})$; (c) et (d) Champs des porosités, $\phi_w(\vec{x},t)$, (c) champ initial, $\phi_w(\vec{x},t_0)$ et (d) obtenu après 1331 itérations de l'algorithme, $\phi_w(\vec{x},t_{1331})$. L'écoulement est ici dirigé du haut vers le bas du milieu (du Nord au Sud). 81

6.1 (a) Morphogologie étudiée pour illustrer les applications du module *MatFracSonde* de Matfrac3D. (b) condition initiale utilisée, ici seules les iso-pressions ≥ 0 sont représentées. (c) Sonde Δ, de surface égale à la section du conduit karstique et située à son embouchure. Et (d) "Sonde" ω utilisée pour mesurer la variation de la saturation moyenne $\hat{\theta}_\omega$ de cette partie de l'aquifère. 85

6.2 (b) Evolution du débit Q_Δ mesuré au niveau de la sonde Δ, Fig. 6.1 (c), au cours du temps d'étude et (a) évolution de la saturation moyenne, $\hat{\theta_\omega}$, mesuré dans l'entité morphologique ω, Fig. 6.1 (d), au cours du temps. 88

7.1 Démarche utilisée pour l'étude et l'homogénéisation des écoulements dans les milieux très fissurés. 94

7.2 Milieux d'étude : (a) milieu multicouche, (b) milieu binaire 2D purement aléatoire et (c) milieu 3D purement aléatoire. 96

7.3 Schéma illustrant les conditions aux limites "perméamétriques" suivant la direction $O\vec{x}$ (a), $O\vec{y}$ (b) et $O\vec{z}$ (c) et l'écoulement obtenu (surfaces isocharges) pour un milieu fracturé poissonnien 3D. 98

8.1 Comparaisons entre les conductivités hydrauliques effectives numériques de Darcy obtenues pour des milieux multicouches et les moyennes arithmétique ($\hat{K}^{arith}$) et harmonique ($\hat{K}^{harmo}$) : à K_F fixée et égale à 1000 (a) et (c) et à ϕ_F égale 0.70 fixé (b) et (d) ; respectivement pour un écoulement suivant $O\vec{x}$, (a) et (b) ; et suivant $O\vec{z}$, (c) et (d). 102

8.2 Conductivités hydrauliques effectives théoriques des $\tilde{K}^D$, (a) S.C. éq. 8.13 et (c) P.A. éq. 8.18, tracées en fonction des deux paramètres étudiés ϕ_F et κ pour le cas d'un milieu binaire 2D. Coupes réalisées à ϕ_F variables et à κ fixé $\in$ [-8 ; +8], (b) éq. 8.13 et (d) éq. 8.18. 108

8.3 Conductivités hydrauliques effectives théoriques des $\tilde{K}^D$, (a) S.C. éq. 8.13 et (c) P.A. éq. 8.17, tracées en fonction des deux paramètres étudiés ϕ_F et κ pour le cas d'un milieu binaire 3D. Coupes réalisées à ϕ_F variables et à κ fixé $\in$ [-8 ; +8], (b) éq. 8.13 et (d) éq. 8.17. 109

8.4 Comparaison entre les solutions numériques et analytiques pour le milieu binaire 2D purement aléatoire (a) et 3D (b). Surfaces noires $\tilde{K}^{SC}$, éq. 8.13, surfaces roses $\tilde{K}^{PA}$, éq. 8.18 (binaire 2D) et éq. 8.17 (binaire 3D), et surfaces bleues $\tilde{K}^D$ numériques "perméamétriques" tracées en fonction de la fraction volumique en inclusions ϕ_F et du log-contraste $\kappa = log_{10}(K_F/K_M)$. 111

8.5 Comparaison entre les solutions numériques et analytiques. Pour le milieu binaire 2D purement aléatoire à fraction, ϕ_F variable et à log-contraste, κ fixé à +2 (a), -2 (b), +6 (c) -6 (d). Courbe noire solution analytique S.C. éq. 8.13 ; courbe rouge solution P.A. éq. 8.18 et courbe bleue solution numérique. 112

8.6 Comparaison entre les solutions numériques et analytiques. Pour le milieu binaire 3D purement aléatoire, à fraction, ϕ_F variable et à log-contraste, κ fixé à +2 (a), -2 (b), +6 (c) -6 (d). Courbe noire solution analytique S.C. éq. 8.13 ; courbe rouge solution P.A. éq. 8.17 et courbe bleue solution numérique. 113

8.7 Milieux fracturés 3D étudiés (a) $MF1_{3D}$ et (b) $MF2_{3D}$. Milieux fracturés 2D $MF1_{2D}$ (c) et $MF2_{2D}$ (d). 116

8.8 Comparaison entre les solutions numériques $\tilde{K}^D$ obtenues pour les deux milieux fracturés 2D (a) $MF1_{2D}$ et (b) $MF2_{2D}$ pour un écoulement "perméamétrique" suivant la direction $O\vec{x}$, comparées avec les deux solutions analytiques "Self-Consistent", éq. 8.13, courbe noire et "Power Average", éq. 8.18, courbe rouge. Et zooms réalisés pour des contrastes $\kappa \in [-3\,;\,+3]$ pour le milieu $MF1_{2D}$ (c) et pour le milieu $MF2_{2D}$ (d). . . . 117

8.9 Comparaison entre les solutions numériques $\tilde{K}^D$ obtenues pour les deux milieux fracturés $MF1_{3D}$ (a) et $MF2_{3D}$ (b) pour un écoulement "perméamétrique" suivant la direction $O\vec{x}$, comparées avec les deux solutions analytique "Self-Consistent", éq. 8.13, courbe noire et "Power Average", éq. 8.17, courbe rouge. Et zooms réalisés pour des log-contrastes $\kappa \in [-3\,;\,+3]$ pour le milieu $MF1_{3D}$ (c) et pour le milieu $MF2_{3D}$ (d). . 118
8.10 Milieux binaires 2D purement aléatoires constitués de deux phases, la phase inclusion (rouge) et la phase matrice (bleue) : avec 25 pour cent d'inclusion ($\phi_F = 0.25$) (a), avec 60 pour cent d'inclusion ($\phi_F = 0.60$) (b) et avec 75 pour cent d'inclusion ($\phi_F = 0.75$) (c). 120
8.11 Modèles classiques de percolation : (a) percolation de sites et (b) percolation de liens 2D. 121
8.12 Zone de transition et taille du réseau pour un milieu 2D, Clerc et al., 1983 [30]. . . . 123
8.13 (a) Une méthode permettant la détection de l'amas percolant par l'interprétation du problème de fermeture de Quintard et Whitaker 1996 [113] pour des conditions aux limites de type périodiques, (b) résultats numériques obtenus pour différents graines ou "seed" du générateur pseudo-aléatoire, avec une perméabilité de fracture $k_F = 10^{-7}\,m^2$ et une perméabilité matricielle $k_M = 10^{-10}\,m^2$. D'après Kfouri 2004 [75]. 124
8.14 Solutions numériques $\hat{Y}^D$ obtenues pour des log-contrastes $\kappa \in [-8\,;\,+8]$ pour différents ϕ_F, (a) pour un milieu binaire isotropiquement distribué 2D et (b) 3D. Et coefficients de sensibilité du premier ordre, $\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D$ obtenus, (c) pour le milieu binaire 2D et (d) 3D. Enfin, coefficients du second ordre, $\partial^2_{\phi_F}\hat{Y}^D$, obtenus pour différents log-contrastes positifs $\kappa \in [0\,;\,+8\,]$, pour le milieu binaire 2D en (e) et pour le milieu binaire 3D (f). 129
8.15 (a) Solutions numériques $\hat{Y}^D$ obtenues et tracées en fonction des fractions volumiques en inclusions ϕ_F, et des log-contrastes κ pour un milieu binaire 2D isotropiquement distribué. (b) Coefficients de sensibilité de la log-conductivité hydraulique de Darcy ($\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D$) obtenus pour ce même milieu. 130
8.16 (a) Solutions numériques $\hat{Y}^D$ obtenues et tracée en fonction des fractions volumiques en inclusions ϕ_F, et des log-contrastes κ pour un milieu binaire 3D isotropiquement distribué. (b) Coefficient de sensibilité de la log-conductivité hydraulique de Darcy ($\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D$) obtenus pour ce même milieu. 131
8.17 Fractions critiques relevées graphiquement. Elles correspondent aux fractions pour lesquelles $\partial^2_{\phi_F}\hat{Y}^D$ s'annule pour les différents log-contrastes κ testés. Pour les milieux binaires 2D (a), et pour les milieux binaires 3D (b) isotropiquement distribués purement aléatoires. 132
8.18 Evolution des coefficients de sensibilité du premier ordre au log-contraste, $\partial_\kappa\hat{Y}^D$, pour différentes fractions volumiques en inclusions. (a) Milieu binaire 2D et (b) milieu binaire 3D. 135
8.19 Comportement de $\partial^2_\kappa\hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase : (a) pour $\hat{p}_{c_1}$, (b) pour $\hat{p}_{c_2}$, et (c) pour $\hat{p}_{c_3}$, pour le milieu binaire 2D purement aléatoire. . 139

8.20 Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase : (a) pour $\hat{p}_{c_1}$, (b) pour $\hat{p}_{c_2}$, et (c) pour $\hat{p}_{c_3}$, pour le milieu binaire 3D purement aléatoire. . 140
8.21 Tracé de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 3D au niveau de la zone critique supposée existée (couleur noire) entre les zones comportementales de la macro-K de Darcy. Cette zone est située entre les zones 1 et 2, respectivement entre les zones 1' et 2' précédemment discriminées. 141
8.22 Analyse de la variation du signe de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 2D purement aléatoire. Et "zonation" comportementale et d'expression de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ obtenue par l'étude de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 2D purment aléatoire. 144
8.23 Analyse de la variation du signe de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 3D purement aléatoire. Et "zonation" comportementale et d'expression de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ obtenue par l'étude de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 3D purment aléatoire. 145
8.24 Evolution de la sensibilité d'ordre 1 à κ ($\partial_\kappa \hat{Y}^D$) (a), et évolution de la sensibilité d'ordre 2 à κ ($\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$) (b), pour les deux milieux fracturés 2D $MF1_{2D}$ et $MF2_{2D}$. . . . 146
8.25 Evolution de la sensibilité d'ordre 1 à κ ($\partial_\kappa \hat{Y}^D$) (a), et évolution de la sensibilité d'ordre 2 à κ ($\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$) (b), pour les deux milieux fracturés 2D $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$. . . . 147
8.26 Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 2D (a) et 3D (b) à ϕ_F=0.50. 149
8.27 Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase (a) $\hat{p}_{c_1}$, (b) $\hat{p}_{c_2}$, et (c) $\hat{p}_{c_3}$, obtenue par l'étude de la sensibilité au log-contraste pour le milieu binaire 2D purement aléatoire. 151
8.28 Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase (a) $\hat{p}_{c_1}$, (b) $\hat{p}_{c_2}$, et (c) $\hat{p}_{c_3}$, obtenues par l'étude de la sensibilité au log-contraste pour le milieu binaire 3D purement aléatoire. 152

9.1 Résultats numériques provenant des simulations directes réalisées et de l'optimisation numériques en utilisant : (a) le modèle équationnel de la macro-K de DWF linéaire/quadratique et (b) le modèle équationnel de la macro-K de DWF "linéaire-puissance". 158
9.2 Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle de la macro-K de DWF linéaire/quadratique, pour un milieu stratifié avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Optimisation simple (sans "précontrainte Darcy"). (b) Optimisation séquentielle (sans "précontrainte Darcy"). 160
9.3 Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle analytique de la macro-K de DWF "linéaire/puissance" pour un milieu stratifié avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Sans procédure d'optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et (b) avec procédure séquentielle à "précontrainte Darcy". 161
9.4 Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle de perte de charge macroscopique "linéaire-puissance" pour un milieu stratifié avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 10] (b) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 50] ; (c) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 100] (d) et pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 1000]. 162

9.5 Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle de perte de charge macroscopique "linéaire-puissance" pour un milieu binaire 3D avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 10] (b) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 50] ; (c) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 100] et (d) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 1000]. 163

9.6 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire stratifié contenant 25% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5. 167

9.7 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire stratifié contenant 50% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5. 168

9.8 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 2D purement contenant 25% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5. 169

9.9 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 2D purement contenant 50% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5. 170

9.10 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D purement contenant 25% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5. 171

9.11 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D purement contenant 50% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5. 172

9.12 (a) Evolutions du coefficient de Ward/Ergun, C, et (b) de γ pour les différents milieux testés, à différentes fractions volumiques en inclusions conductrices ϕ_F (25%, rond, 50% triangle) en fonction du log-contraste κ. Pour les milieux binaires stratifiés (courbes rouges), binaires purement aléatoires 2D (courbes vertes) et binaires purement aléatoires 3D (courbes bleues). 176

9.13 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D fracturé poissonnien $MF1_{3D}$, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle précontrainte par une simulation darcienne, en utilisant le modèle macroscopique "linéaire-puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3 et (d) +4. . . . 179

9.14 Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D fracturé poissonnien $MF2_{3D}$, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle précontrainte par une simulation darcienne, en utilisant le modèle macroscopique "linéaire-puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3 et (d) +4. . . . 180

10.1 Exemple de champs de charges totales obtenus par simulations directes de type "immersion à bain de charge normalisé" sur le milieu fissuré $MF2_{2D}$: (a) pour un angle θ de 45° ; (b) pour un angle θ de 135° ; (c) pour un angle θ de 225°. Le milieu fissuré $MF2_{2D}$ est représenté en (d). (N.b. : cette figure est extraite d'une version animée du champ de charge). 184

10.2 Résultats numériques des simulations réalisées et optimisation conduites sur les ellipses de gradient et de flux : pour le milieu poreux homogène isotropes avec $K_{xx} = K_{yy} = 3$ (a) ellipse de gradient, (b) ellipse de flux ; pour le milieu poreux homogène anisotropes avec $K_{xx} = 3$ et $K_{yy} = 27$ (c) ellipse de gradient, (d) ellipse de flux ; et pour le milieu tri-couches Fig. 10.3 (e) ellipse de gradient, (f) ellipse de flux. 194

10.3 Milieux étudiés : (a) un milieu tri-couches (3couches) principal ; (b) un tri-couches (3couches) incliné à 45 degrés ; (c) un milieu croix principale ; (d) un milieu 'hexaédrique' ; (e) le milieu fissuré 2D $MF1_{2D}$, Fig. 8.7 et (f) le milieu fissuré 2D $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (d). 198

10.4 Diagrammes polaires des conductivités numériques de gradient et ellipses optimisées, pour les milieux suivants : (a) un milieu tri-couches principal ; (b) un tri-couches incliné à 45° ; (c) un milieu croix principale ; (d) un milieu 'hexaédrique' ; (e) le milieu fissuré 2D $MF1_{2D}$, Fig. 8.7 (c) ; et (f) le milieu fissuré 2D $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (d). . . . 199

10.5 Diagrammes polaires des conductivités numériques de flux et ellipses optimisées, pour les milieux suivants : (a) un milieu tri-couches principal ; (b) un tri-couches incliné à 45° ; (c) un milieu croix principale ; (d) un milieu 'hexaédrique' ; (e) le milieu fissuré 2D $MF1_{2D}$, Fig. 8.7 (c) ; et (f) le milieu fissuré 2D $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (d). 200

10.6 Ellipses inverses de flux et de gradient tracées respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux. (a) et (c) "ellipse inverse" de flux et de gradient obtenues pour le milieu poreux homogène isotropes avec $K_{xx} = K_{yy} = 3$; (b) et (d) "ellipse inverse" de de flux et de gradient obtenues pour le milieu poreux homogène anisotrope $K_{xx} = 3$ et $K_{yy} = 27$; 202

10.7 Ellipses inverses tracées respectivement dans un diagramme polaire. (a) et (c) "ellipse inverse" de flux et de gradient obtenues pour le milieu tri-couches principal ; (b) et (d) "ellipse inverse" de flux et de gradient obtenues pour le milieu tri-couches incliné à 45 degrés. (e) Milieu tri-couches principal et (f) tri-couches incliné à 45 degrés. 204

10.8 Résultats numériques obtenus pour les "ellipses inverses" de gradient et de flux, à $\kappa = +6$, pour les milieux binaires 2D isotropiquement distribués : (a) ellipse inverse de gradient et (b) de flux pour $\phi_F = 28$; (c) ellipse inverse de gradient et (d) de flux pour $\phi_F = 45$; (e) ellipse inverse de gradient et (f) de flux pour $\phi_F = 60$ 209

10.9 Ellipses inverses de gradient obtenues à $\kappa = +6$ pour le milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué. Pour : **A** : $\phi_F = 0.00$; **B** : $\phi_F = 0.10$; **C** : $\phi_F = 0.28$; **D** : $\phi_F = 0.45$; **E** : $\phi_F = 0.60$; **F** : $\phi_F = 0.75$ et **G** : $\phi_F = 1.00$. Ces ellipses sont reportées sur le diagramme comportemental qui représente la sensibilité du premier ordre au log-contraste du log décimal de la macro-K de Darcy 210

10.10 Ellipses inverses de flux obtenues à $\kappa = +6$ pour le milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué. Pour : **A** : $\phi_F = 0.00$; **B** : $\phi_F = 0.10$; **C** : $\phi_F = 0.28$; **D** : $\phi_F = 0.45$; **E** : $\phi_F = 0.60$; **F** : $\phi_F = 0.75$ et **G** : $\phi_F = 1.00$. Ces ellipses sont reportées sur le diagramme comportemental représentant la sensibilité du premier ordre au log-contraste du log décimal de la macro-K de Darcy. 211

10.11 Diagramme générale de l'algorithme utilisé par *MatFracPerco*. 224

10.12 Détails de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de l'étape 1 et 2 de l'algorithme. 225

10.13 Détails de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de l'étape 3 de l'algorithme. 226

10.14 Détail de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de la sous étape 1 de l'étape 4 de l'algorithme. 227

10.15 Détail de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de la sous étape 2 de l'étape 4 de l'algorithme. 228

10.16 Evolutions de $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$ pour différentes fractions volumiques en inclusions, ϕ_F, à log-contrastes κ fixés : (a) et (b) pour un milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué respectivement à $\kappa \in$ [-8 0] et à $\kappa \in$ [0 +8] ; et (c) et (d) pour un milieu binaire 3D purement aléatoire isotropiquement distribué respectivement à $\kappa \in$ [-8 0] et à $\kappa \in$ [0 +8]. 230

10.17 Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous-zones comportementales (b) 1-1, (c) 1-2 et (d) 1-3 repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la macro-K de Darcy dans la zone 1 : (a). Les fractions qui délimitent ces sous-zones correspondent à peu près aux fractions critiques de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $\hat{p}_{c_1}$ et $\hat{p}_{c_2}$. 231

10.18 Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (b) 1-1' ; (c) 1-2' ; (d) 1-3' repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 1' (a). Les fractions qui délimitent ces sous-zones correspondent à peu près aux fractions critiques de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $1-\hat{p}_{c_1}$ et $1-\hat{p}_{c_2}$ 232

10.19 Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous-zones comportementales (b) 2-1 et (c) 2-2 repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 2 (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $\hat{p}_{c_3}$. 233

10.20 Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (b) 2-1' et (c) 2-2' repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 2' (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $1-\hat{p}_{c_3}$. 234

10.21 Pour le milieu binaire 3D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (c) 4-1 et (d) 4-2 repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 4 (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 2D purement aléatoire $\hat{p}_{c_2}$. 235

10.22 Pour le milieu binaire 3D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (c) 4-1' et (d) 4-2' repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 4' (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 2D purement aléatoire $1-\hat{p}_{c_2}$. 236

10.23 Ellipses inverses de gradient et de flux tracées respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux. (a) et (c) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu "croix principale" ; (b) et (d) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu "héxaédrique". (e) Milieu "croix principale" et (f) "héxaédrique". 238

10.24 Ellipses inverses de gradient et de flux tracées respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux. (a) et (c) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu $MF1_{2D}$; (b) et (d) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu $MF2_{2D}$. (e) Milieu $MF1_{2D}$ et (f) $MF2_{2D}$. 239

10.25 Maquette hydrogéologique 1 réalisée à l'I.M.F.T. avec la participation de Science Animation. Cette maquette à été conçue et réalisée par Rachid Ababou, Paul Duru, Manuel Marcoux et David Bailly. Les photos (a), (b) et (c) montrent le déplacement d'un traceur. La photo (d) permet de voir les différents bacs d'alimentation en eau de la maquette. Et les photos (e) et (f) présentent le stand de l'I.M.F.T. lors de la présentation de la maquette au capitole de Toulouse (31) pour la fête de la science 2006. 242

10.26 Maquette hydrogéologique 2 réalisée à l'I.M.F.T. avec la participation de Science et Animation pour les journées de vulgarisation scientifique (e.g. "la fête de la science"). Cette maquette à été conçue et réalisée par David Bailly, Lionel Lefur et Rachid Ababou. Les photos (a), (b), (c), (d), (e) et (f) montrent les différentes étapes de réalisation. 243
10.27 Essai de dissolution sur une pierre d'Alun de $65 * 42 * 20$ mm avec de l'eau à pH neutre et à débit constant. (a) vue de dessus de la pierre d'Alun après dissolution, (b) vue de la face amont et (c) vue de la face aval. Photos prises par Fabien Chauvet et Ian Billanou. 246

Liste des tableaux

6.1 Caractéristiques hydrauliques et hydrodynamiques utilisées. 86

7.1 Tableau regroupant les caractéristiques des échantillons étudiés 95

8.1 Valeurs du seuil de percolation pour différents types réseaux 2D et 3D classiques, d'apprès Sahimi 1993 [117] : p_{cb} seuil de percolation pour la percolation de liens ('bound percolation thershold'), p_{cs} seuil de percolation pour la percolation de sites ('site percolation thershold') et Z nombre de coordination du réseau.(.*Résultats exacts). 125

8.2 Valeurs des fractions critiques de transition (p_{c_1},p_{c_2} et p_{c_3}) obtenues pour les milieux binaires purement aléatoires isotropes 2D et 3D pour différents log-contrastes $|\kappa|$. . . 133

8.3 Tableaux récapitulatifs des fractions critiques de transition obtenues numériquement pour un milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire. 134

8.4 Tableaux récapitulatifs des fractions critiques de transition de phases numériques obtenues pour un milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire en étudiant les coefficients de sensibilité d'ordre 1 à κ de $\hat{Y}^D$. 137

8.5 Tableaux récapitulatifs des propriétés des "fractions critiques de transition de phase" numériques obtenues pour un milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire. Ici, D est la dimension de l'espace euclidien. 149

9.1 Coefficients optimisés pour le milieu isotrope homogène avec $\hat{K}^D = 10\ m.s^{-1}$ sans précontrainte "Darcy". Les coefficients $X_{opt,1}$ correspondent aux coefficients optimisés en utilisant le modèle linéaire-quadratique et les coefficients $X_{opt,2}$ à ceux obtenus en utilisant le modèle "linéaire/puissance". 159

9.2 Coefficients optimisés pour le milieu isotrope homogène avec $\hat{K}^D = 10\ m.s^{-1}$ avec précontrainte "Darcy". Ici comme précédemment, les coefficients $X_{opt,1}$ correspondent aux coefficients optimisés en utilisant le modèle linéaire/quadratique et les coefficients $X_{opt,2}$ à ceux obtenus en utilisant le modèle "linéaire-puissance". 159

9.3 Coefficients γ et constantes d'Ergun/Ward, C, optimisés pour différentes gammes de Re(DWF). 164

9.4 Constante de Ward/Ergun obtenue expérimentalement et par "scaling approach" par différents auteurs pour une fracture rugueuse unique, d'après Spiller [127]. 175

10.1 Tableau regroupant les grandeurs optimisées et les composantes (non principales) ainsi que l'angle du repère principal du tenseur des macro-K de Darcy optimisées. 195
10.2 Grandeurs optimisées des ellipses de gradient et de flux et les composantes du tenseur des macro-K de Darcy optimisées sur les six échantillons étudiés. 197

Chapitre 1

Introduction générale et cadre de l'étude

1.1 L'eau et la planète Terre

Qui n'a jamais observé sur son petit écran la Terre vue de l'espace, notre planète bleue. De l'espace, la ressource en eau paraît inépuisable. La présence d'eau sur la Terre, surtout à l'état liquide, est un phénomène rare à l'échelle de l'Univers mais indispensable à l'émergence et au développement de la vie (70% de la masse corporelle des animaux et 90% de la masse des végétaux).

La présence de l'eau sous cet état est liée à trois propriétés remarquables de la Terre :

- elle est placée à une distance du Soleil qui permet l'existence de l'eau sous trois états (solide, liquide et gaz) ;
- sa masse et son champ magnétique sont suffisants pour garantir l'existence d'une atmosphère.
- l'atmosphère induit un effet de serre permettant le maintient d'une température moyenne compatible avec la présence d'eau liquide à sa surface (sinon la température moyenne serait de -15°C) ;

L'eau présente à la surface de la Terre provient de sa profondeur. A l'intérieur de la Terre, les roches du manteau contiennent encore aujourd'hui environ 0.3% d'eau, soit un volume égal à deux ou trois fois celui des océans. Ce gisement profond est restitué en surface par les magmas basaltiques (les laves d'Hawaï (Etats-Unis) peuvent contenir jusqu'à 0.45% d'eau et celle des Trappes du Dekkan (Inde) jusqu'à 0.60%) ou directement près des sources chaudes et des fumerolles très minéralisés comme les fumeurs noirs et les diffuseurs blancs des dorsales médio-océaniques.

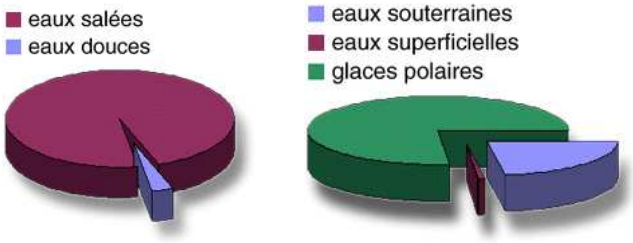
Ces eaux juvéniles qui accèdent à la surface encore aujourd'hui, sont estimées à quelques km^3/an. Si cette quantité est négligeable à l'échelle d'une vie humaine, l'accumulation de ces faibles quantités sur des millions d'années a contribué à la mise en

place de l'hydrosphère, il y a 4.4 milliards d'année. Comme le niveau des océans est considéré comme relativement stable, au fond des océans l'eau de mer s'infiltre dans la croûte et hydrate ses roches (la teneur en eau de la croûte altérée atteint 1 à 2%). Puis dans les zones de subduction, la croûte hydratée est entraînée vers le manteau qui s'enrichit en eau. L'estimation de la quantité d'eau rejoignant la profondeur est comprise entre 5 et 16.10^{11} kg par an.

La présence d'eau dans le manteau est très importante car, en modifiant les points de fusion et de viscosité des minéraux, elle change les propriétés physico-chimiques des roches et joue certainement un rôle dans les mécanismes de convection responsable de la tectonique des plaques (Guillet, 1993 [56]).

1.2 Répartition de l'eau

Dans l'hydrosphère, l'eau existe sous forme gazeuse dans l'atmosphère, sous forme liquide dans les océans, les cours d'eau et les aquifères et sous forme solide dans les neiges, les glaciers des calottes et de la banquise. Mais elle est aussi présente dans la plupart des roches. Elle peut soit être liée aux roches de manière forte (eau de constitution des minéraux, des pores occlus de certaines roches (ponce) et adsorbée ou fixée électriquement aux surfaces ioniques des roches (argile)) ou soit de manière lâche (eau gravitaire qui peut circuler dans les pores et discontinuités ouvertes et connectées des roches). Le champ d'étude de l'hydrogéologie se trouve dans cette dernière classe.



(a)

(b)

	Proportion	Vol en km³
Glace polaire et glaciers	75 %	29,0 x 10⁶
Eau dans le sol à z < 750 m	11 %	4,2 x 10⁶
Eau dans le sol à z > 750 m	13,6 %	5,3 x 10⁶
Lacs	0,3 %	120 x 10³
Rivières	0,03%	12 x 10³
Humidité du sol	0,06%	24 x 10³
Atmosphère	0,035%	13 x 10³
Total eau non océanique	100 %	39 x 10⁶
Eau dans les océans	1350 x 10⁶	

(c)

FIG. 1.1 – Répartition du stock d'eau dans les différents compartiments de l'hydrosphère. (a) Proportion de l'eau douce ; (b) répartition de l'eau douce ; (c) volumes d'eau douce et sa proportion relative dans les différents compartiments de l'hydrosphère.

Le tableau de la figure 1.1 présente une estimation de la répartition de l'eau dans les différents compartiments de l'hydrosphère. Il ne s'agit que d'un ordre d'idée, notamment l'évaluation des réserves souterraines est très variable selon les auteurs, (entre 7 et 30.10^6 km^3). Les diagrammes de la figure 1.1 (a et b) sont connus de tous, mais il est bon de rappeler que la majeure partie de la ressource en eau douce disponible provient des glaces polaires et du sous-sol.

Si nous prenons comme exemple le cas de la France, le Bureau de Recherche Géologique et Minière (B.R.G.M.) estime qu'elle compte environ 200 aquifères régionaux exploitables, de 100 à 100 000 km^3, qui renferment quelques 2 000 km^3 d'eau, dont 7 km^3/an sont puisés dans les nappes et 100 km^3/an s'écoulent vers les sources. Il reste donc 1893 km^3/an de réserves. Même si ce volume paraît très important, n'oublions pas que la ressource en eau n'est pas réservée à l'Homme.

1.3 L'eau et l'homme

L'eau est un élément indispensable à la vie de l'être humain, Fig.1.2 (a), qui au repos a besoin de deux à trois litres par jour, fourni pour une partie par son alimentation solide (1 litre) et pour une autre partie sous forme de boisson (1.5 litre). Mais c'est en fait la survie de toutes les espèces animales et végétales qui est conditionnée par l'eau.



(a) (b) (c)

FIG. 1.2 – (a) Pourcentage d'eau contenue dans les différents organes du corps humain (Source C.N.R.S.) ; (b) prix de l'eau par m^3 de certains pays industrialisés (Source N.U.S.,1/07/2005,) ; (c) évolution du prix moyen de l'eau de 1991 à 2007 de la région Midi-Pyrénées (Source Agence de l'eau ADOUR-GARONNE).

L'eau joue un rôle important dans l'évolution des sociétés humaines. Pour vivre et agir l'homme a été et demeurera toujours un consommateur d'eau. Sauf dans quelques régions déshéritées, les disponibilités hydriques naturelles existent heureusement en quantité suffisante et leur utilisation ne présente pas, du moins jusqu'à présent, de difficultés particulières. Mais en notre époque moderne caractérisée par un essor démographique, industriel et agricole sans précédent, des utilisations nouvelles sont venues s'ajouter aux usages anciens et traditionnels de l'eau. L'exploitation de plus en plus poussée des potentiels de production pour répondre à la demande croissante d'eau dans nos sociétés modernes, entraîne une diminution de jour en jour de la marge excédentaire. Tous les pays ont donc, ou auront à brève échéance, à faire face à un problème

d'optimum, à trouver des solutions plus rationnelles et plus efficaces pour exploiter et répartir au mieux la totalité des ressources hydriques dont ils peuvent disposer.

Outre, la quantité d'eau disponible, la qualité de la ressource dans les régions industrialisées va de mal en pire. Ainsi, pour assurer une qualité d'eau suffisante au robinet, les sociétés de production d'eau potable doivent puiser l'eau de plus en plus profond et augmenter les traitements à réaliser. La conséquence directe est l'augmentation du prix de l'eau de consommation (exemple de l'évolution prix moyen de l'eau en Midi-Pyrénées figure 1.2 (c) et prix de l'eau dans d'autre pays 1.2 (b)).

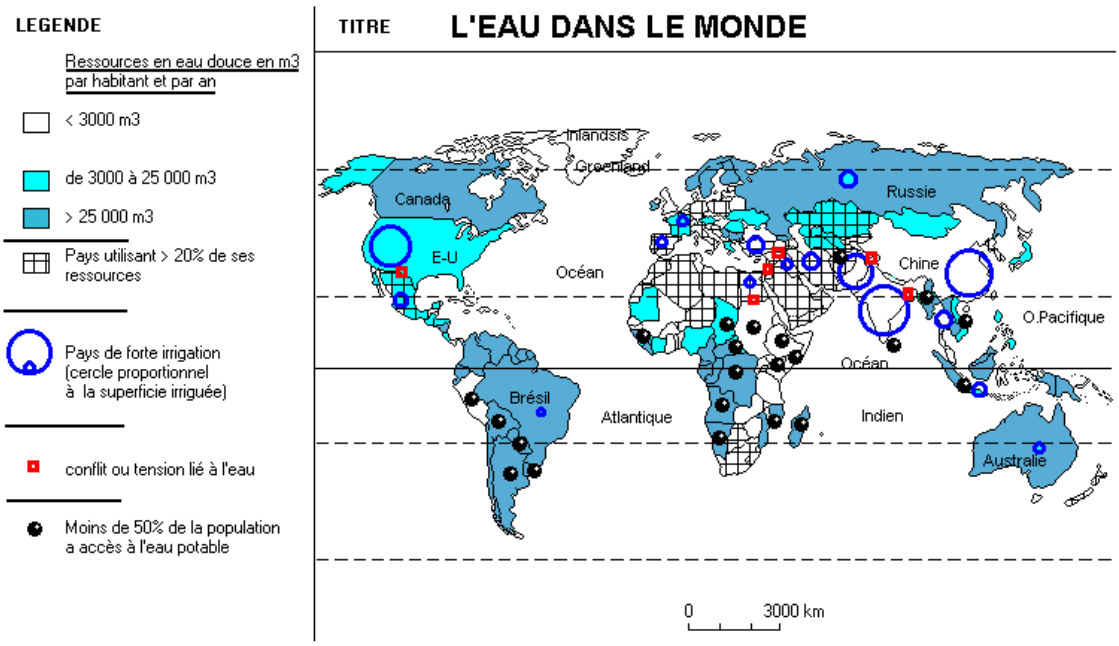


FIG. 1.3 – Répartition du stock d'eau sur la planète Terre (source www.carte-du-monde.net)

Sur la Terre, nous ne sommes pas tous égaux devant la ressource en eau. La répartition de l'eau est en effet très inégale et les zones d'utilisations intensives ne sont pas toujours les zones les mieux pourvues par la nature (Fig. 1.3). La ressource en eau est très faible dans certains pays d'Afrique, d'Asie et du Proche-Orient. Selon les projections de l'O.C.D.E. (Organisation de Coopération et de Développement Economique) en 2030, avec l'augmentation de la population mondiale, l'augmentation des cultures irriguées (augmentation de 50% de la production agricole pour nourrir le Monde d'ici à 2030), la demande en eau pourrait dépasser l'offre. Quatre milliards de personnes vivront dans des zones soumises à un stress lié à l'eau, principalement en Asie du Sud et en Chine. Déjà aujourd'hui, dans certains pays des conflits liés à l'eau apparaissent (Fig. 1.3), d'autre conflits futurs pourraient être prévisibles.

L’eau est donc un enjeu aussi bien mondial que local. Assurer l’accès à l’eau de l’ensemble de la population mondiale en expansion est un enjeu crucial qui devrait dépasser et ne pas dépendre de l’économie de marché. Pour cela, nous pensons que des mesures sont à prendre comme par exemple, améliorer l’efficacité des techniques d’irrigation, tendre vers une agriculture durable en accord avec les lieux de cultures, rénover les structures de production et de distribution d’eau potable et en construire de nouvelles collectivisées, préserver les réserves, lutter contre la pollution et recycler l’eau.

1.4 L'eau dans le sous-sol

L'hydrogéologue s'intéresse à l'étude de l'eau dans le sous-sol. Classiquement, quatre types d'aquifères sont distingués en fonction de la nature des roches les constituant, mais aussi des phénomènes d'altération chimique et/ou tectonique les affectant. Pour l'étude et la gestion de la ressource en eau d'un secteur, la distinction de l'objet d'étude est importante pour pouvoir qualifier et quantifier les phénomènes physiques à considérer ; notamment les lois d'écoulements et les méthodologies d'étude à utiliser pour étudier un secteur donné.

Selon la nature, donc la genèse des vides contenant l'eau, différents types d'aquifères sont distingués :

- les aquifères poreux,
- les aquifères de socle,
- les aquifères fissurés à matrice microporeuse,
- et les aquifères karstiques.

Si les vides sont des espaces inter-granulaires d'origine sédimentaires ou diagénétiques, ces aquifères seront qualifiés d'aquifères poreux. Parmi les aquifères poreux, deux classes peuvent être distinguées suivant leurs origines :

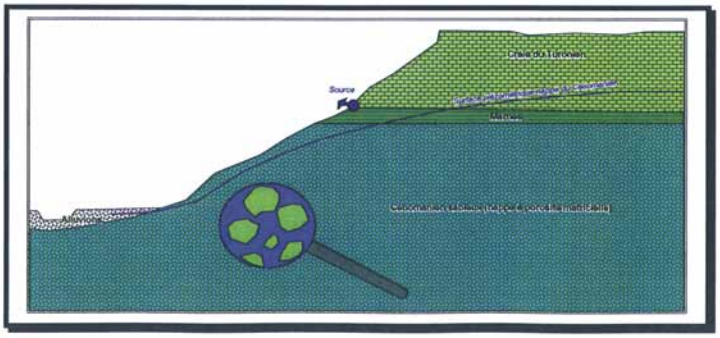
- les aquifères des séries sédimentaires détriques marines (craie, carbonate de magnésium ou de calcium, marne, grès) ;
- les aquifères des séries sédimentaires détritiques continentales (plaines alluviales et lacustres, séries deltaïques, séries fluvio-glaciaires, colluvions, éboulis de pentes, manteaux d'altérites, cônes de scories).

Ces aquifères sont constitués de blocs, galets, graviers, sables de silice ou calcaire, silts, argile et carbonates (de calcium ou de magnésium).

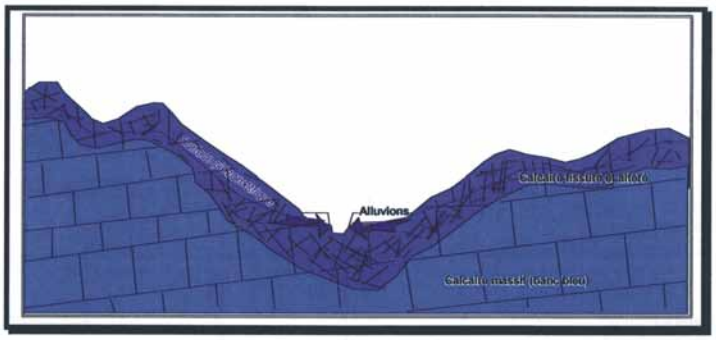
La diagenèse, la gravité, les contraintes tectoniques créent dans ces milieux poreux des diaclases, transformant les milieux peu perméables en milieux fissurés. A ces fissures infra-métriques, il faut ajouter tous les accidents tectoniques allant jusqu'à la faille pluri-kilométrique. Les écoulements ayant lieu dans ces structures, ne sont plus uniquement dirigés par la porosité inter-granulaire, mais aussi par ces discontinuités. Nous parlerons alors d'aquifères fissurés, parmi lesquels, nous distinguerons suivant la nature de l'encaissant, les aquifères fissurés poreux et de socle.

Dans les aquifères fissurés poreux, la matrice joue un rôle important dans l'alimentation en eau des fissures plus perméables et contribuent de manière non négligeable à l'écoulement régional. Par opposition, dans les aquifères de socle, la matrice métamorphique (gneiss, micaschistes,...) ou d'origine plutonique et/ou magmatique (massif de granite, de gabbros, coulées de roches effusives,...) contient peu d'eau mobilisable par gravité. Les écoulements ont alors lieu uniquement dans les zones fissurés et dans la zone d'altération de la roche mère (arène granitique par exemple).

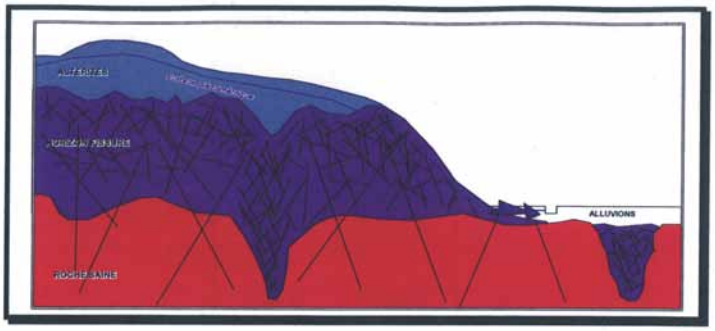
Généralement, les aquifères fissurés sont observés dans des séries dont les minéraux sont peu solubles ou altérables (silicates, ferromagnésien). Cependant, dans des séries



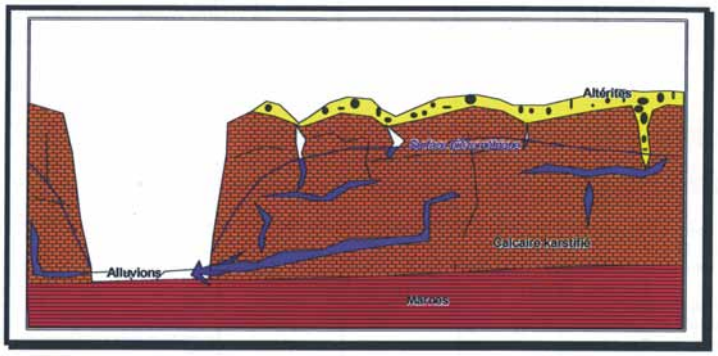
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 1.4 – Différents type d'aquifères : (a) aquifère poreux, (b) aquifère sédimentaire fissuré, (c) aquifère fissuré de socle, (d) aquifère karstique (d'après Bichot et al. [14]).

de roches fissurées constituées de minéraux solubles (évaporites, carbonates), les roches vont subir un processus d'érosion nommé karstification. Le résultat est la création d'un morphotype d'aquifère particulier nommé karst.

Ces types d'aquifères présentent donc des caractéristiques différentes. La taille du Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.), concept permettant de décrire les propriètés moyennes du milieu, varie selon les processus de mise en place de ces aquifères et les évènements les ayant affecté.

La taille du V.E.R. des trois types d'aquifères change d'ordre de grandeur. En effet, pour représenter statistiquement les propriétés moyennes d'un matériau aquifère, il faudra quelques m^3 d'une roche poreuse marine, quelques dam^3 d'une roche poreuse continentale, quelques hm^3 d'une roche fissurée et quelque km^3 d'un massif karstique (ce dernier V.E.R. peut même inclure la totalité de l'hydrosystème).

Pour cette étude, nous nous intéresserons tout particulièrement aux aquifères karstiques.

1.5 Les aquifères karstiques

Depuis que l'Homme est Homme, il utilise l'eau provenant de sources karstiques, il s'est même abrité et réfugié dans des paléo-réseaux karstiques, à la fois habitat et lieu de cultes. Ce milieu, certes salvateur, l'interrogea. Mythes et légendes sont nés pour lui donner une signification, tantôt zone de transition vers l'au-delà, tantôt lieu de communication avec les défunts ou les *forces supérieures*.

Il a fallu attendre le XXème siècle avec les progrès de la chimie minérale, et les explorations du spéléologue Martel (1921 [97]) pour mettre en place les prémisses de la karstogenèse et l'étude du comportement des karsts.

Depuis les années 1970, le karst est reconnu comme un aquifère à part entière, différent des aquifères poreux et des aquifères fissurés classiques. Un karst est un système complexe très particulier fortement hétérogène, sur une grande gamme d'échelles d'observation, résultat de la dissolution et de la corrosion des roches carbonatées. Cette érosion qui aboutit à un tel ensemble morphologique, est nommée karstification ou karstogenèse.

D'un point de vue hydrogéologique, le comportement des aquifères karstiques est déterminé par la morphologie qui résulte de cette altération. Cette morphologie particulière est due à la manière dont sont distribuées les discontinuités affectant le massif carbonaté avant l'action de karstification, mais aussi au gradient hydraulique et plus généralement aux conditions aux limites affectant ce système à un moment donné de son évolution. Par conséquent, suivant l'interprétation de la distribution des vides et des discontinuités, mais aussi de l'échelle d'étude, de l'échelle temporelle considérée et des conditions climatiques, l'étude des écoulements diffère. Car toute l'architecture de ce véritable réseau de drainage souterrain des formations carbonatés dépend de son envi-

ronnement géologique, climatique et morphologique (position des exutoires, eustatisme, conditions climatiques, position des niveaux des aquitards et aquifères, etc.).

Il est bon de rappeler ici que peu d'informations, à part les données de sorties comme des débits de source, de suivi de traceurs artificiels ou naturels peuvent nous renseigner sur la structuration du réseau karstique et sur le comportement du système karstique. En effet, les parties reconnues du réseau ne sont que les parties accessibles par l'Homme et ne représentent, dans le meilleur des cas, que quelques pour cent du réseau karstique total. Les études de la morphogenèse du karst paraissent difficiles. Cependant, de nouveaux outils comme la tomographie, et le développement de puissants moyens de calculs numériques laissent entrevoir quelques lueurs dans cette voie de recherche.

Le karst est donc présenté comme une entité morphologique particulière, à la fois hydrosystème et ressource en eau, défini dans la région de Kars de Slovénie caractérisé une lithologie soluble drainée par des drains souterrains naturels. La conséquence hydrogéologique est l'existence d'un aquifère atypique hétérogène et anisotrope sur une grande gamme d'échelles.

1.5.1 La karstification

Si l'eau pure peut dissoudre une grande quantité d'halite et dans une moindre mesure de gypse, elle est incapable de dissoudre les carbonates. Cependant, si l'eau contient un acide fort, comme du CO_2 dissout, alors la dissolution des carbonates devient possible.

Les roches carbonatées intactes sont peu perméables, mais elles peuvent présenter de nombreuses discontinuités qui, sous l'action de l'eau acidifiée et des éléments solides contenus dans l'eau d'infiltration, vont s'élargir par érosion. Cette érosion va se faire préférentiellement le long des discontinuités du massif carbonaté. Parmi ces discontinuités, nous pouvons différencier les discontinuités d'origine tectonique (fractures, stylolites) et diagénétiques (perméabilité variable et dissolution variable suivant le squelette poreux de la roche et sa composition).

Suite à l'érosion, cette diagenèse tardive, une porosité secondaire va être mise en place (Mangin 1974, 1975 [99]). Cependant, elle est fonction de l'état de vie du système karstique à un moment de son existence et peut même être rebouchée par cristallisation de calcite ou dépôt d'argiles. Cette porosité secondaire dépendra donc des conditions aux limites de l'ensemble karstique considéré, et plus particulièrement de la direction et de l'importance du gradient hydraulique (Kiraly et al., 1971 [67], 2003 [72]).

Les principales sources d'acides forts entraînant la karstification sont :

- le CO_2 (Bakalowicz, 1979 [13] ; Plagnes, 1997 [109]) provenant du sol (karsts météoritiques) ou de venues profondes comme de sources hydrothermales (karst hydrothermal) ou la décarbonatation de matière organique enfouie (karst liés à un gisement de matière organique fossile),
- les acides humiques et fulviques provenant de la minéralisation de la matière organique naturelle et d'origine anthropique,

– les acides sulfuriques provenant de venues profondes (sources hydrothermales).

Pour que l'eau agressive (notamment celle chargée d'acide carbonique) puisse s'infiltrer, il est nécessaire que la dissolution opère sur des discontinuités déjà existantes (joints de stratification, diaclases, failles). Ces discontinuités permettront un drainage souterrain de l'eau, des ions produits et des résidus insolubles de la dissolution (argile, silicates). Pour que la karstification puisse évoluer, il est nécessaire que le massif soit capable d'éliminer ses insolubles et les produits de la dissolution.

La vitesse d'évolution de la karstogenèse est fonction de l'état de sous-saturation de la solution vis-à-vis des minéraux constitutifs de l'aquifère, mais aussi avant tout des flux d'eau entraînant les ions mis en solution.

1.5.2 L'hydrosystème karstique : organisation spatiale

Par rapport à un aquifère poreux, le karst montre un structure hétérogène et anisotrope sur une large gamme d'échelles. La notion de Volume Elementaire Représentatif (V.E.R.) ne peut donc pas s'appliquer rigoureusement, même s'il est possible de découpler ce problème selon différentes échelles d'analyse.

Les particularités du karst sont les morphologies superficielles et souterraines résultant de la karstification avec ses conséquences hydrogéologiques :

- peu de circulation de surface,
- des zones à infiltration diffuse (lapiez nus ou sous couvert végétal, Fig.1.5 (3), localement très favorisé (dolines Fig.1.5 (2)) ou concentrée (pertes Fig.1.5 (7) ou gouffres Fig.1.5 (5) ;
- des drains à échelle humaine actifs, Fig.1.5 (8), ou fossile, Fig.1.5 (4) ;
- de grandes variations piézométriques entre eau de surface et nappe karstique ;
- des sources, Fig.1.5 (9), et des reculées, Fig.1.5 (10), peu nombreuses, à fort débit drainant un vaste impluvium ;

D'un point de vue hydraulique et hydrodynamique, l'hydrosystème karstique montre une opposition entre trois structures de perméabilité/conductivité hydraulique :

- des blocs micro-fissurés capacitifs mais peu transmissifs, dont le comportement hydraulique est assimilable à celui d'un milieu poreux ;
- un réseau de drains très hiérarchisé, peu capacitifs mais très transmissifs (vitesse de la dizaine à la centaine de mètres par heure) dont la géométrie varie significativement de l'amont (nombreuses fissures infra-millimétriques) vers l'aval (drain métrique unique pénétrable par l'Homme) ;
- les systèmes annexes au drainage, capacitifs, mais mal connectés aux drains ; certain de ces vides, situés au voisinage de l'axe de drainage peuvent avoir été, par le passé, connectés.

De l'amont vers l'exutoire, le karst apparaît comme un réseau hydrographique 3D organisé, structuré, plongé au sein d'un milieu poreux lui-même plus finement fissuré, où les

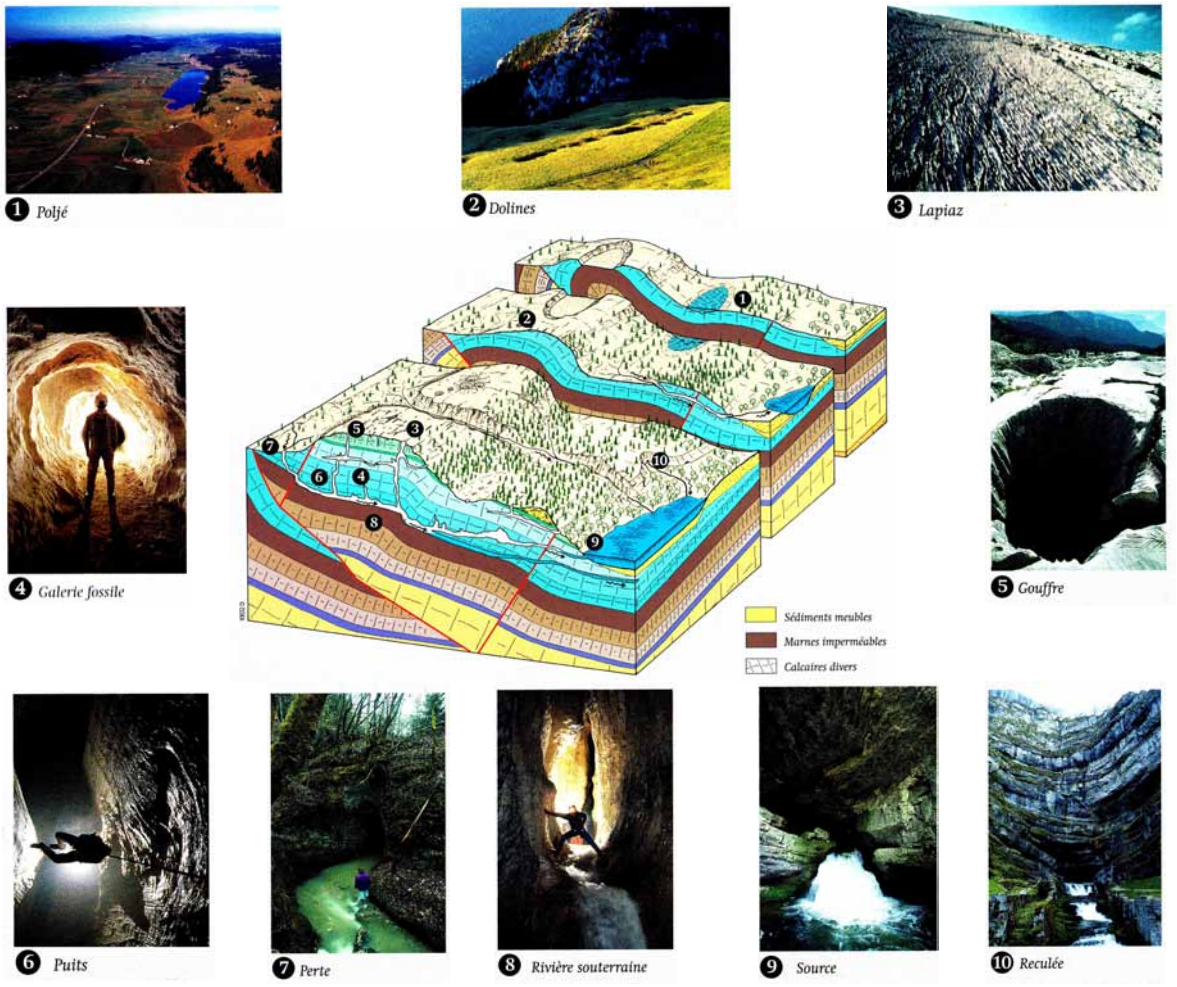


FIG. 1.5 – Eléments morphologiques caractéristiques des aquifères karstiques, photos issues de l'ouvrage "Cavernes, face cachée de la Terre" [139] p.43.

faibles écoulements de l'amont, ayant lieu dans des fissures fines, confluent vers l'aval pour donner des drains de plus en plus importants, mais de moins en moins nombreux.

Verticalement, le karst se distingue des autres aquifères par sa structuration spatiale différenciée (Mangin, 1974-1975 [99]). Du haut en bas, on distingue :

- l'épikarst, zone décomprimée dans laquelle la dissolution agit dans toutes les directions pour élargir les discontinuités ; l'épikarst est moins anisotrope que le reste de la zone non saturée ; c'est une zone très perméable capable de stocker une partie non négligeable des précipitations.
- la zone non saturée au sens strict, peu ouverte, découpée par des accidents tectoniques et spatialement variablement saturée, contenant, ou non, des paléo-réseaux karstiques ;

– la zone noyée, caractérisée par des blocs micro-fissurés, des drains et des systèmes annexes actifs.

Cette structuration à plusieurs conséquences hydrauliques :

– les trajets dans la zone noyée sont à fortes composantes horizontales, avec un rôle important des drains ; les écoulements dans ces chenaux très ouverts peuvent être turbulents ;
– la zone non saturée au sens strict permet des trajets à composantes verticales prédominantes ;
– dans l'épikarst, les circulations d'eau se font avec de fortes composantes horizontales, du fait du contraste de perméabilité avec la zone non saturée ;
– entre basses eaux et crues, les inversions piézométriques entre les drains et les blocs voisins changent le sens des flux d'échanges : en basses eaux, le drain plus rabattu draine la roche voisine ; en crue, le drain, dans lequel affluent les eaux d'infiltration, recharge les blocs contigus plus lentement atteints par les eaux d'infiltration verticale. Notons ici que cette phénoménologie hydrogéologique correspond pour le modélisateur, à un comportement de type "double-milieu" en situation de "non équilibre" (échange d'eau entre deux milieux).
– non concordance entre le bassin versant et le bassin hydrogéologique, Fig.1.7.

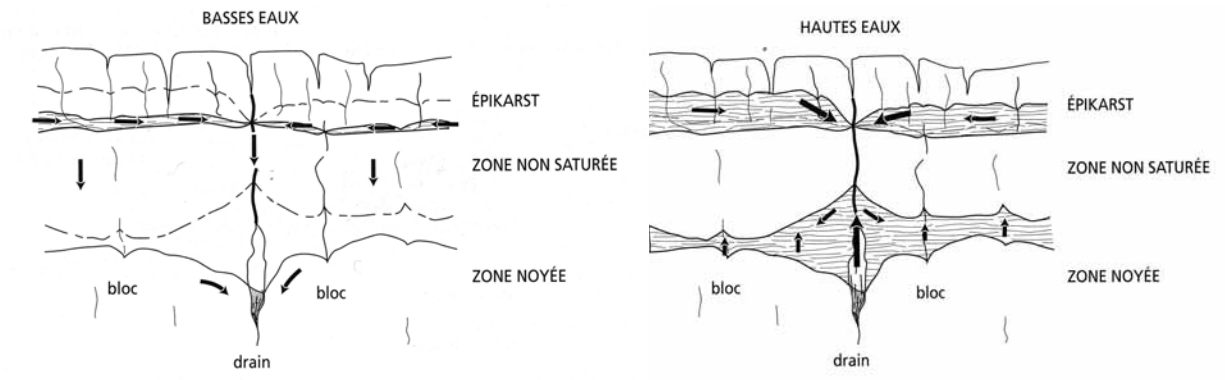


FIG. 1.6 – Conséquence de la structuration spatiale sur le fonctionnent hydrodynamique des aquifères karstiques, d'après Gilli, E., Mangan, C. & Mudry, J. [52] p. 29.

1.5.3 Conséquences sur les stocks d'eau et la pollution

La structuration spatiale des aquifères karstiques a une importance considérable pour la gestion de ces aquifères : le stock d'eau est important, mais peu mobile et peu mobilisable dans la matrice poreuse ; plus mobile mais moins important dans le milieu fracturé (eau mobilisable dans le réseau percolant au forage) ; peu important mais très mobile et facilement mobilisable dans les conduits du réseau karstique.

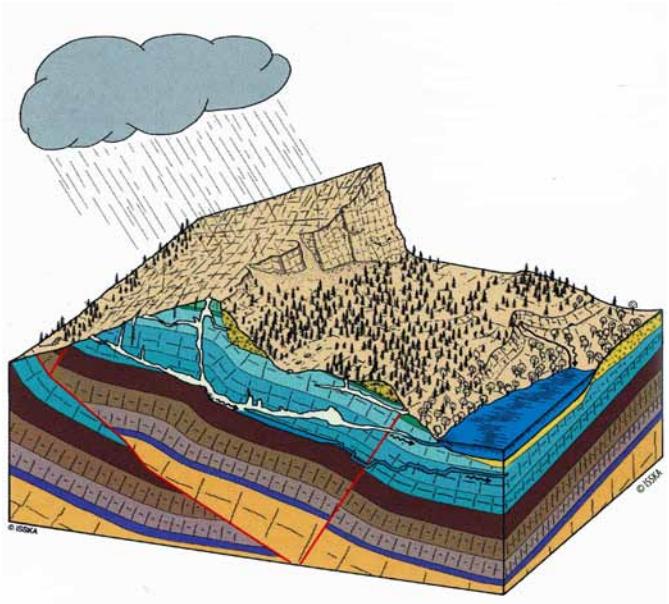


FIG. 1.7 – Impact de la structuration spatiale des aquifères karstiques : non concordance entre le bassin versant hydrogéologique et le bassin versant topographique, d'après Wenger et al. [139] p.60.

Cette structuration spatiale influence la vulnérabilité de l'hydrosysème karstique face à la pollution :

- l'aléa pollution n'engendre pas le même risque s'il est situé, sur le système drainant ou sur un bloc peu transmissif : risques immédiats si la pollution est située sur le système drainant, "amortis" et décalés dans le temps si elle est située sur un bloc peu transmissif ;
- le milieu étant très ouvert au niveau des drains, aucune filtration n'est opérée ; ainsi en crue, la turbidité (transportant bactéries, virus, métaux lourds ou polluant organiques adsorbés) se retrouve aux sources ;
- le temps de séjour de l'eau dans le système de drains, souvent inférieur à la semaine, ne permet pas un abattement significatif de la bactériologie héritée de l'amont.

1.5.4 Influence de l'hypereustatisme, de la géodynamique, du climat et de la néotectonique sur la karstogenèse

Le phénomène de karstification peut s'étaler sur des millions d'années, cependant, dès que les roches carbonatées sont soumises à l'action de l'eau douce chargée en acides forts, la karstification affecte les roches carbonatées (e.g. récifs coralliens).

Le double moteur de la karstification est, d'une part, chimique et, d'autre part, hydraulique. Il faut que le gradient hydraulique entre l'impluvium et l'émergence soit suf-

fisant pour éliminer les insolubles qui résultent de la dissolution des carbonates. L'évolution et la variation du gradient hydraulique régional au cours du temps (lors d'une orogenèse, d'évènements de néotectonique ou de variations eustatiques) se traduisent par une genèse polyphasée des massifs karstiques créant des milieux à géométries complexes. Ces différents évènements entraînent des modifications des écoulements au cours du temps (colmatages, décolmatages, inversion de circulation). Le polyphasage de la karstogenèse permet notamment de comprendre comment un bassin hydrogéologique ne correspond pas toujours à un bassin versant du type de la figure 1.7.

L'une des explications les plus séduisantes permettant d'expliquer le polyphasage des réseaux karstiques est l'influence de l'hypereustatisme.

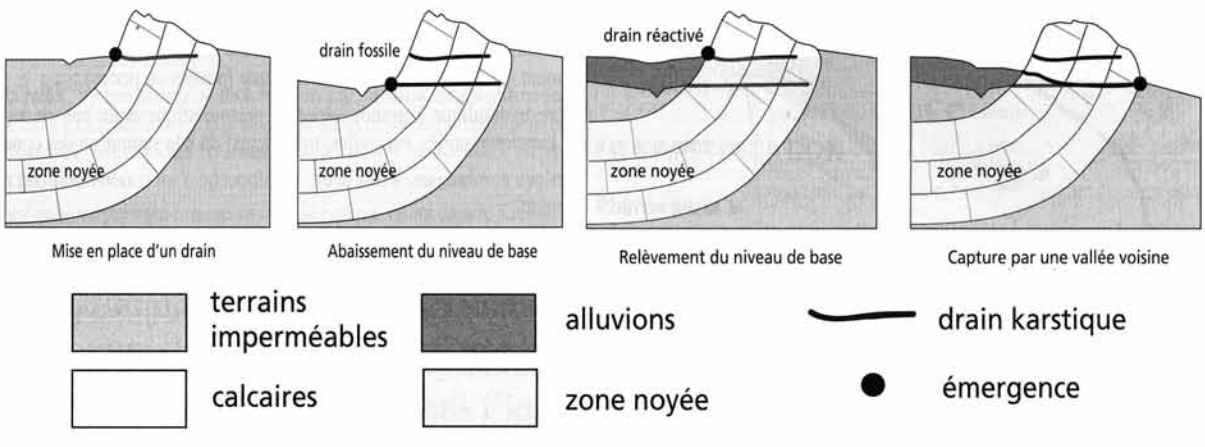


FIG. 1.8 – Modèle conceptuel du polyphasage de la kartogenèse sur un massif karstique modèle, d'après Gilli E. et al [52].

Actuellement, des études sont réalisées sur l'importance de l'hypereustatisme pour permettre d'apporter plus d'informations sur la compréhension des phénomènes de kartogenèse.

Nous pouvons notamment citer les travaux réalisés par Mocochain et al. [101] sur le karst de la plateforme péri-méditerranéenne de la basse Ardèche (moyenne vallée du Rhône ; France). Dans cette étude, les auteurs mettent en évidence un polyphasage du réseau karstique de ce secteur en rapprochant les différentes phases de karstification avec les oscillations hors normes du niveau de la Méditerranée lors de la crise messinienne de salinité. Durant cette période, de 5,6 et 5,32 Ma, c'est à dire en moins de 300 000 ans, le niveau marin méditerranéen aurait fluctué sur près de 2000 m, provoquant une érosion sans précédent des marges du bassin méditerranéen, et plus loin, dans les terres, sous la forme d'une érosion fluviale intense : les canions messiniens. L'origine de cette crise est géodynamique et correspond particulièrement à la fermeture du détroit de Gibratar qui limita les apports de l'océan Atlantique vers la Méditerranée et entraîna la formation d'importants massifs d'évaporites. La remise en eau de la méditerranée

se serait elle faite de manière brutale entrainant une chute brutale du niveau global des océans de l'ordre d'une quinzaine de mètres.

L'approche spéléo-karstologique réalisée par ces auteurs sur les grottes en Basse Ardèche, couplée à l'étude des niveaux repères du cycle messino-pliocène, à permis de réinterpréter la chronologie et les mécanismes des différentes phases de spéléogenèse du plateau de Saint-Remèze, notamment en mettant en évidence l'existence dans le karst noyé profond de conduits verticaux formés *per ascensum* permettant de mettre en relation plusieurs niveaux de conduits subhorizontaux étagés. Cette genèse *per ascensum* a été obtenue par l'interprétation de la morphologie de ces conduits.

De ces observations spéléo-morphologiques, les auteurs interprètent la morphologie observée de ce système karstique par un polyphasage ayant eu lieu de la crise messinienne de salinité à nos jours en distinguant deux phases de morphogenèse :

- La première phase est induite par l'important gradient topographique et hydraulique délivrés, au cours de la crise, par l'abaissement drastique du niveau de la Méditerrannée. Cette spéléogenèse profonde, en quête du niveau de base a profondément incisée les carbonates.
- La seconde phase est l'adaptation des réseaux karstiques et de la karstogenèse aux remontées successives du niveau de la Méditerranée au cours du Pliocène. Cette spéléogenèse *per ascensum* prend la forme, dans certains cas, de conduits Vauclusiens et d'étagements de niveaux subhorizontaux, interconnectés entre eux par ces conduits verticaux.

Dans le monde, ce schéma périméditerranéen de karstogenèse pourrait aussi s'appliquer à d'autres secteurs comme le Golfe du Mexique, où la présence d'évaporites pourrait révéler la fermeture et l'assèchement du golfe.

La variation du niveau de base des systèmes karstiques, cette fois-ci non plus liée à l'hypereustatisme, mais au réajustement isostatique des terrains et des structures géologiques sont sûrement possible. Récemment, Fabbri, a mis en évidence et relié la variation du cours du Doubs, au niveau d'un de ces méandres, au surélèvement des plateaux bisantins suite au réajustement isostatique lié à la néo-tectonique alpine. Qu'en est-il de la réponse des systèmes karstiques ? Afin de bien comprendre et d'essayer de maîtriser la répartition spatiale de la méso- et macro-porosité des aquifères karstiques, pour une gestion efficace et optimisée de leurs ressources, ces phénomènes devraient être pris en considération.

Le problème est qu'à un instant (t) de l'étude d'un bassin hydrogéologique karstique, les informations qui nous seraient nécessaires pour pouvoir reconstruire cette morphologie et/ou comprendre les phénomènes mis réellement en jeu pour aboutir à ce morphotype ont subi les outrages du temps ou sont inaccessible à l'observation. Seules quelques informations nous sont disponibles.

Nous verrons dans la dernière partie de ce chapitre consacrée à la détermination des paramètres morphologiques des aquifères karstiques quelques idées sur la genèse des

systèmes karstiques liées au comportement "hydraulique" de l'aquifère dans la section 5.4 du chapitre 5 de la partie II.

1.6 Bilan (structure et genèse des karsts)

Le résultat de la karstification est un milieu géologique fortement hétérogène et dual, avec des propriétés et un comportement hydraulique hétérogène sur une grande gamme d'échelles. Les caractéristiques de ces systèmes complexes sont les suivantes :

- Dualité des processus d'infiltration : infiltration diffuse dans les volumes peu perméables, de la matrice poreuse, du sol, de l'épikarst ; concentrée au niveau des dolines, des pertes, des lapiez et des parties très perméables de l'épikarst.
- Différence des vitesses d'écoulements : rapides dans les conduits karstiques, plus lentes dans le réseau de fractures percolant et encore plus lentes dans le milieu poreux environnant.
- Une géométrie complexe et tourmentée provenant de la dissolution et l'érosion mécanique, de la matrice poreuse, préférentiellement le long des discontinuités.
- L'action du processus de karstification dépend de la saturation des eaux en ions solubilisés, de la capacité des aquifères à les évacuer et donc des vitesses d'écoulements locales et régionales existantes.

Une bonne connaissance de la structure de l'hydosystème karstique est donc nécessaire pour optimiser au maximum sa protection et son exploitation raisonnée.
Pour cela, différentes approches et voies d'explorations ont été mises en place pour comprendre et gérer ce système complexe et fragile :

- approche géomorphologique,
- approche spéléologique et géographique,
- approche hydrogéologique dite "fonctionnelle" (structures temporelles) au Laboratoire Souterrain de Moulis (France), "structurelle" (structures spatiales) au Centre d'Hydrogéologie de Neuchâtel (Suisse).

Nous nous focaliserons dans le chapitre qui suit sur la description des outils utilisés par ces deux dernières approches, sachant que le travail développé dans cette thèse consiste en une modélisation 3D du massif et des écoulements dans les massifs karstiques donc plus en relation avec l'approche "structurelle".

Première partie

Karst : écoulement, structure et morphologie (revue)

Chapitre 2

Hydrogéologie karstique

Introduction

Il est nécessaire d'obtenir le maximum d'informations sur l'état de structuration des vides dans les aquifères karstiques pour connaitre le stock d'eau disponible et ses vulnérabilités face à un aléa pollution.

Différentes méthodes d'analyse existent. Même si l'approche de caractérisation différe, leur but est identique : obtenir une représentation conceptuelle, un modèle pour réaliser une modélisation efficace de la resource en eau. Ces méthodes d'analyse consistent à obtenir ces informations :

- soit par observations directes de la morphologie des aquifères karstiques (comme la position de galeries actives, des exutoires du système, des pertes, de lapièz,...) par des relevés de terrain, topographiques, géophysiques (e.g. simiques, électriques ou gravimétriques) ou satellitaires ;
- soit par observations indirectes par l'analyse des débits des sources karstiques en réponse ou non à des évènements pluvieux,
- ou encore par des méthodes de traçage artificiel (e.g. : fluoréscéine, rhodamine), ou naturelle (notamment la concentration relative de certains ions comme le Calcium, le Magnésium et les ions Nitreux) pour caractériser le temps de séjour des eaux dans l'aquifère et obtenir des informations sur son état structurel et fonctionnel.

Seules les deux premières méthodes d'analyse vont être présentées dans ce chapitre. L'étude bibliographique réalisée de ces deux méthodes, nous permettra de faire ressortir les principales caractéristiques des aquifères karstiques et de présenter différentes voies de modélisation.

2.1 Méthodes d'analyses et de caractérisation des aquifères karstiques

Les méthodes d'exploration 3D de la morphologie interne des aquifères karstiques par des voies topographiques ou géophysiques existent, mais restent limitées. La dimension des aquifères et la complexité des entités drainantes présentes dans la masse du massif semble une énorme limite à ces méthodes prospectives "directes". Pour caractériser la structuration interne des aquifères karstiques, différentes méthodologies d'étude des débits au niveau de certains exutoires (ceux accessibles et reconnus) ont été mises au point.

2.1.1 Analyses des courbes de récession des sources karstiques

Les premières analyses qui ont vu le jour ont été fondées sur l'analyse des courbes de récession des sources karstiques en utilisant des modèles de débit à une ou deux fonctions mathématiques.

Modèle à une fonction mathématique

L'analyse des courbes de récession des sources karstiques à tout d'abord été réalisée en utilisant des modèles de débit, ou plus précissement d'hydrogrammes de récession, à une fonction mathématique de forme exponentielle, Maillet, 1905 [95]. Ces modèles à une fonction exponentielle prennent la forme suivante :

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}, \tag{2.1}$$

où α est le coefficient de tarissement et Q_0 le débit au temps initial.
Tison, 1960 [130], préféra utiliser une méthode d'analyse utilisant une fonction hyperbolique,

$$Q(t) = \frac{Q_0}{(1+\lambda\sqrt{Q_0}\,t)^2} = \frac{Q_0}{(1+\alpha\,t)^2} \quad avec \;\; \lambda = \frac{\alpha}{\sqrt{Q_0}}. \tag{2.2}$$

D'après les travaux de Tison et d'autres auteurs, Drogue en 1972 [41] introduit un modèle plus générique pour ces fonctions hyperboliques de la forme suivante :

$$Q(t) = \frac{Q_0}{(1+\alpha\,t)^n}, \tag{2.3}$$

avec n=0.5, 1.5 et 2.

Afin d'établir une relation entre α et n pour obtenir des informations sur le comportement d'un aquifère considéré, il introduit un coefficient β dépendant du débit Q_0 de la forme :

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt[n]{Q_0}}. \tag{2.4}$$

Ce coefficient β (pente de la courbe de récession) permit à Drogue de proposer une identification des caractéristiques internes des aquifères karstiques :

$$\beta = F(\frac{K}{E.R.S}). \tag{2.5}$$

où :

- K : la perméabilité du karst
- E : est à relier à l'état d'humidité du karst
- R : est à relier à la superficie du karst
- S : est à relier au coefficient d'emmagasinement du karst.

Les prémisses de l'identification de l'organisation interne des aquifères karstique par l'analyse des débits de source sont nés. Cependant, l'analyse des débits des sources karstiques en utilisant ce modèle à une fonction mathématique s'avère limité. La complexité du "signal" source pousse d'autres auteurs à utiliser un modèle à deux fonctions.

Modèle à deux fonctions mathématiques

Mangin (1970a, [98]) propose d'utiliser un modèle à deux fonctions mathématiques, représentant chacune deux réservoirs indépendants l'un de l'autre. Ces deux réservoirs conceptuels sont la zone d'infiltration, $\psi(t)$, et la zone noyée, $\varphi(t)$:

$$Q(t) = \varphi(t) + \psi(t) \tag{2.6}$$

Le premier réservoir $\psi(t)$ est représenté par une loi empirique,

$$\psi(t) = q_0 \frac{1-\eta t}{1+\varepsilon t} \tag{2.7}$$

et le second $\varphi(t)$ par une loi exponentielle,

$$\varphi(t) = Q_{R_0} e^{-\alpha t}, \tag{2.8}$$

où α correspond au coefficient de tarissement, q_0 au débit d'infiltration à la pointe de la crue, ε est un coefficient d'hétérogénéité de l'écoulement, η variant entre 0 et 1, correspond à une vitesse d'infiltration ($\eta = 1/t_i$ ou t_i est l'instant où l'infiltration cesse) et Q_{R_0} est un coefficient empirique de calage obtenu par extrapolation de la courbe de tarissement à la pointe de la crue.
En d'autres termes, pour plus de flexibilité, Mangin propose d'utiliser une analyse des débits des sources karstiques par l'utilisation d'une fonction mathématique supplémentaire empirique représentant un réservoir conceptuel supplémentaire.

Pour comparer la réponse de différentes sources karstiques entre elles et obtenir une classification des aquifères karstiques, Mangin [98] proposa l'étude de deux coefficients adimensionnels, **K** et **i** définis de la manière suivante :

– **K** est égal au rapport adimensionnel entre la plus grande valeur de volume dynamique calculée sur une grande période et le volume de transit inter-annuel. Ce volume de transit inter-annuel correspond au volume écoulé au cours d'un grand nombre de cycles hydrologiques divisé par le nombre de cycles considérés. **K** traduit l'aptitude du système à stocker les réserves en hautes eaux pour les restituer lors de l'étiage. Plus les réserves sont importantes et plus il tend vers 1 ;
– **i** est égale à la valeur adimentionnelle que prend $\psi(t)$ deux jour après la période de crue. **i** traduit la rapidité du sytème karstique à transmettre l'information pluie.

L'analyse conjointe de **K** et de **i** a conduit Mangin, 1975 [99], a proposé une classification des aquifères karstiques d'après l'analyse du débit d'un exutoire, Fig. 2.1. Ces différents types sont :

– le type **I** qui caractérise des systèmes karstiques possédant un réseau de drainage très développé, avec une zone noyée peu importante,
– le type **II** qui caractérise des systèmes karstiques possédant un réseau de drainage bien développé débouchant en aval sur un important karst noyé,
– le type **III** qui caractérise des systèmes karstiques plus développés à l'aval qu'à l'amont, avec des retards à l'alimentation,
– le type **IV** qui caractérise des systèmes karstiques complexes,
– le type **V** qui caractérise des systèmes karstiques peu développés (aquifère fissuré).

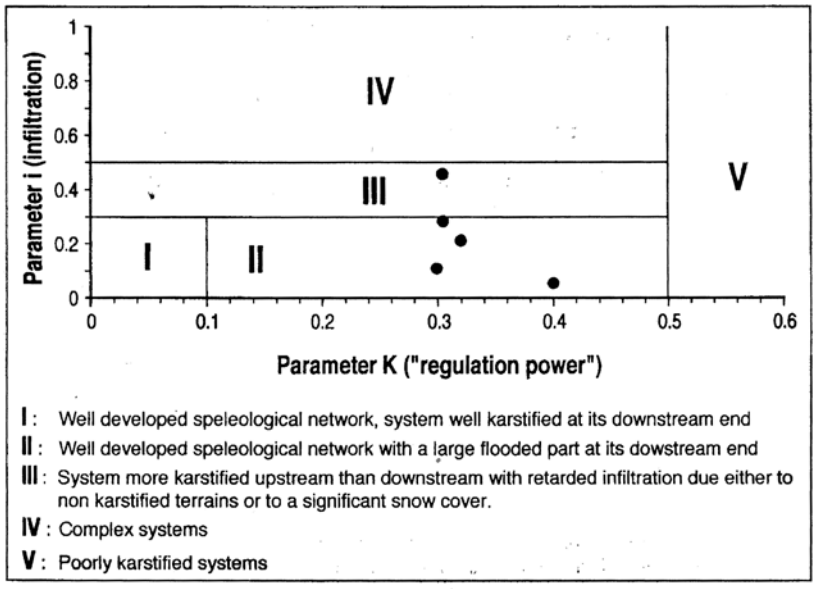


FIG. 2.1 – Classification des aquifères karstiques d'après Mangin [99]. Tableau extrait de Jeannin & Sauter, 1998 [63]. Les points représentent plusieurs analyses réalisées sur le système karstique de Milandrine (Suisse).

Différents auteurs ont appliqué cette classification. Jeannin & Sauter, 1998 [63], ont réalisé ce type d'analyse au système karstique de Milandrine (Suisse), Fig. 2.1. Les résultats obtenus indiquent que, pour les différentes chroniques de débits analysées, il est difficile de classer de manière certaine un système karstique donné par cette approche "globale". Le fonctionnement spatio-temporelle d'un aquifère karstique donné ne semble pas fixe.
Le paramètre **i** notamment semble très variable. Il paraît difficile de procéder à une classification précise et déterminée des aquifères karstiques. Cependant, de grandes classes semblent pouvoir se dégager.

Les méthodes d'analyses des courbes de récession des débits en utilisant des modèles globaux à une ou deux fonctions mathématiques pour caractériser les aquifères karstiques semblent assez limitées. Des méthodes statistiques d'analyse non plus seulement des courbes de récession des sources karstiques, mais permettant d'analyser conjointement la réponse d'un aquifère karstique à une série d'évènements pluvieux ont alors émergé.

2.1.2 Analyses corrélatoires et spectrales des pluies et des débits : analyses linéaires

Cette approche globale de caractérisation des aquifères karstiques prend le parti de considérer ces entités complexes comme des filtres temporels et séquentiels transformant un signal d'entrée, les précipitations du bassin versant, $P(t)$, en un signal de sortie, $Q(t)$, mesuré au niveau des résurgences karstiques. Cette méthode qui réalise une analogie avec les systèmes électriques, peut être simple ou croisée. L'analyse croisée revenant à une analyse de fonction de transfert statistique. Pour être validée, elle nécessite un nombre conséquent de données sur les deux signaux.
Deux fonctions mathématiques sont utilisées : la fonction d'autocovariance des débits éq. 2.9 et d'intercovarience entre les pluies et les débits éq. 2.10,

$$C_{QQ}(k) = \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}(Q(j)-m_Q)(Q(j+k)-m_Q), \tag{2.9}$$

et

$$\begin{aligned} k \geq 0 :\ C_{PQ}(k) &= \frac{1}{N-k}\sum_{j=1}^{N-k}(P(j)-m_P)(Q(j+k)-m_Q), \\ k < 0 :\ C_{PQ}(k) &= \frac{1}{N-k}\sum_{j=k+1}^{N}(P(j)-m_P)(Q(j-k)-m_Q), \end{aligned} \tag{2.10}$$

avec $m_Q = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Q(j)$ et $m_P = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} P(j)$ respectivement les moments du premier ordre (moyenne temporelle) des débits et des précipitations, k la période temporelle

étudiée et N le nombre de données disponibles.
Par ces deux fonctions, le calcul du coefficient d'autocorrélation ou d'intercorrélation $R_{XX}(k)$ éq. 2.11, sera calculé. et donnera accès à la densité spectrale de puissance S_{XX}, éq. 2.12.

$$R_{XX}(k) = \frac{C_{XX}(k)}{var_{XX}}, \tag{2.11}$$

avec var_{XX} la variance de la quantité étudiée, C_{XX} son autocovariance et X correspond soit aux données de pluviométrie, $P(t)$, ou soit aux données de débit, $Q(t)$;
Le spectre de puissance S_{XX} d'un signal discret $(x(i)_{i=1,\ldots,N})$ correspond à la transformation de Fourier de la fonction d'autocorélation (Théorème de Wiener-Kinchine). La définition est la suivante (cas discret) :

$$S_{XX}(k+1) = \sum_{n=0}^{n=N-1} R_{XX}(n+1)e^{-\frac{2\pi jkn}{N}}. \tag{2.12}$$

L'utilisation du spectre de puissance (discret) permet de déterminer et d'isoler dans les signaux étudiés ($P(t)$ ou $Q(t)$), diverses composantes structurées ou périodiques, e.g. le cycle hydrologique, et une composante aléatoire, e.g. erreur de mesure et d'appareil mais aussi et surtout l'aléas et la compléxité hydrogéologique.

En hydrogéologie karstique cette analyse fonctionnelle, corrélatoire et spectrale permet de mettre en relation l'importance du niveau d'organisation du drainage et l'importance des réserves. L'étude de C_{QQ} et C_{PP} permet notamment à Mangin de caractériser "l'effet mémoire" et la "fréquence de coupure" du sytème étudié déterminés de la façon suivante :

- "L'effet mémoire", déterminé sur la fréquence d'autocorrélation, correspond au délai k, pour lequel elle prend pour la première fois la valeur 0.2 ($C_{QQ}(k) = 0.2$). L'effet mémoire traduit la dépendance des signaux en fonction du temps.
- "La fréquence de coupure", déterminée sur le spectre, correspond à la fréquence pour laquelle le spectre devient nul ou négligeable. Elle rend compte du pouvoir régulateur du système : plus elle est faible, plus le système filtre les informations à haute fréquence et atténue un signal temporel.

Par cette approche, Labat (2001 [81]) a classé différents systèmes karstiques des Pyrénnées françaises et espagnoles, et des Causses (France) notamment en fonction de leur effet mémoire respectif.
Le co-spectre, quant à lui, permet de rendre compte des relations pluie-débit de façon plus fine. Cependant, ces analyses corrélatoires et spectrales ont des limites, notamment de considérer que les sytèmes karstiques peuvent être analysés par des méthodes d'analyses stationnaires (stationnarité des siganux) et linéaires (analyses croisées linéaires).

Labat et al., 2000 [85], proposent d'autres approches : l'analyse multirésolution par ondelettes et l'analyse multifractale.

2.1.3 Analyses en ondelettes et multifractale : analyses non-stationnaires

Dans le cadre de l'étude réalisée dans ce document, nous ne présenterons que des généralités sur ces outils d'analyse. Nous ne retiendrons que les principaux résultats obtenus pour argumenter notre propos.

Analyse en ondelettes

La tranformée en ondelettes est une méthode d'analyse temps/fréquence d'un signal, développée pour pallier à certains inconvénients de l'analyse de Fourier classique, en particulier la non-prise en compte d'aspects temporels de type singularités ou non-stationnarités. Tout d'abord introduite dans les géosciences pour les analyses de signaux sismiques (Grossman & Morlet [55]), cette méthode d'analyse du signal s'est depuis étendue à de nombreux champs d'application notamment pour l'étude de la turbulence, en hydrologie, en hydrogéologie et en climatologie. En hydrogéologie karstique, Labat et al. 2000 [85], l'ont utilisée pour clarifier et caractériser les variations temporelles des débits et de la relation pluie-débits.

L'objectif principal de la transformée en ondelettes est d'obtenir une relation du type temps-échelle de phénomènes ayant une influence sur un gamme d'échelles de temps plus moins étendue en représentant les processus en jeu dans une base appropriée. L'avantage considérable de cette méthode introduite par Grossman & Morlet, 1984 [55], est que la taille des fenêtres d'analyse est réglée par deux paramètres : un paramètre de translation et un paramètre de dilatation/contraction de l'ondelette. Elle permet ainsi de résoudre les principaux problèmes de choix de la taille de la fenêtre d'analyse lors d'analyses de Fourier à fenêtre glissante Gaussienne de type Gabor (Gabor 1946 [53]). La première étape de l'analyse en ondelettes est de réaliser une changement de base de projection, à deux paramètres, de la forme :

$$\psi_{a,\tau} = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi(\frac{t-\tau}{a}), \quad avec\ (a,\tau) \quad \in (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}), \tag{2.13}$$

où le paramètre a peut être interprété comme un facteur de dilatation ($a > 1$) ou de contraction ($a < 1$) de l'ondelette et τ comme un facteur de translation temporelle ou de décalage fréquentiel de la fonction $\psi_{a,\tau}$ sur le signal $x(t)$.
La tranformation en ondelettes d'un signal x(t) est similaire à la transformée de Fourier du signal et s'écrit :

$$C_x(a,\tau) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\psi^*_{a,\tau}(t)dt, \tag{2.14}$$

où $C_x(a,\tau)$ sont les coefficients de la transformée en ondelettes et * correspond au complexe conjugé de la fonction ondelette. Dans l'analyse en ondelettes, la fonction $\psi_{a,\tau}$ joue le rôle de noyau de convolution. Cette fonction est souvent appelée *ondelette mère*.

Par cette analyse en jouant sur les paramètres a et τ, la décomposition du signal en ondelettes permettra l'identification de diverses fréquences temporelles ainsi que leur dissociation en terme d'échelle de temps. Pour les différentes formules évoquées dans cette partie, $C_x(a,\tau)$ sont les coefficients ondelettes du signal $x(t)$ (pluie ou débits) et $C_y(a,\tau)$ sont les coefficients ondelettes du signal $y(t)$ (débits).

Dans le but de mettre en évidence des relations pouvant exister entre échelles temporelles, différentes grandeurs statistiques sur les coefficients ondelettes sont définis notamment le "spectre" et le "co-spectre" des coefficients en ondelettes. Le concept de spectre et de cross-spectre en ondelettes a été défini par Brunet & Collineau (1995 [25]), d'autres auteurs ont ensuite utilisés ce concept à d'autre types études comme Li & Nozaki, 1997 [87] en mécanique des fluides pour l'étude des structures de la turbulence.
Le spectre en ondelettes continues $W_{XX}(a,\tau)$, est défini par analogie avec l'analyse de Fourier de la manière suivante :

$$W_{XX}(a,\tau) = C_X(a,\tau)C_X^*(a,\tau) = |C_X(a,\tau)|^2, \tag{2.15}$$

De nouveau par analogie avec le co-spectre de Fourier, un co-spectre en ondelettes entre deux signaux continus, $x(t)$ et $y(t)$ peut être défini, Liu 1995 [92] :

$$W_{XY}(a,\tau) \;=\; C_X(a,\tau)C_Y^*(a,\tau) \tag{2.16}$$

où $C_X(a,\tau)$ et $C_Y^*(a,\tau)$ sont respectivement les coefficients en ondelettes de $x(t)$ et les coefficients en ondelettes conjugués de $y(t)$. Ce formalisme aboutit à une analogie avec l'analyse de Fourier. Une représentation de type "Wiener-Kinchine" est aussi possible :

$$E[W_{XY}(a,\tau)] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(u)y(v)]\psi_{a,\tau}^*(u)\psi_{a,\tau}^*(v)dudv. \tag{2.17}$$

Une autre information sur la relation entre les signaux de type temps-continu peut être extraite de la fonction de cohérence en ondelettes définie par Liu, 1995 [92] :

$$\Gamma(a,\tau) \;=\; \frac{W_{XY}(a,\tau)}{\sqrt{W_{XX}(a,\tau)W_{YY}(a,\tau)}} = \rho_{XY}(a,\tau)e^{i\theta_{XY}(a,\tau)}. \tag{2.18}$$

Labat et al., 2000 [85] ont appliqué l'analyse en ondelettes discrètes et l'analyse multirésoltion en ondelettes sur base orthogonale pour analyser le débit de plusieurs sources karstiques des Pyrénnées françaises et espagnoles.

Ces analyses ont montré une forte non-stationarité des débits des sources karstiques. L'analyse discrète multi-résolution et l'utilisation de la covariance d'ondelette entre les données de précipitations et débits a permis de différencier deux composantes de la réponse des aquifères karstiques suite à un évènement pluvieux :

– une réponse rapide due aux écoulements ayant lieu dans les structures très perméables des aquifères karstiques qui percolent avec le conduit qui débouche sur la source où ont été effectuées les mesures,

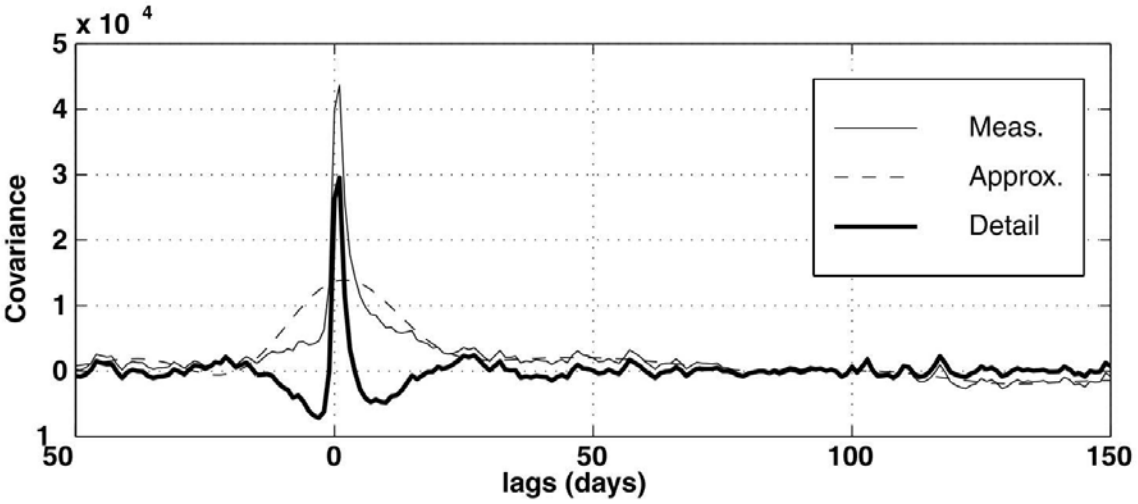


FIG. 2.2 – Un exemple d'identification de deux composantes dans la réponse du système karstique Aliou par analyse de la covariance des coefficients ondelettes entre détails pluie-débits et approximation pluie-débits. D'après Labat et al, 2000b [85].

– et une réponse lente due à la vidange "des systèmes annexes de réserves" (épikarst et partie de l'aquifère peu percolante avec le conduit) qui arrive à la source et à la matrice poreuse finiment fracturée englobant le système drainant étudié.

En complément de ces études une analyse fractale et multi-fractale peut être réalisée sur la réponse des aquifères karstiques à la pluviométrie.

Analyses fractale et multi-fractale

L'analyse mutifractale est une méthode d'analyse des propriétés d'invariance d'échelles multiples aussi bien pour les moments d'ordre q que pour la distribution de probabilité. Ce formalisme a été initialement introduit en turbulence afin d'analyser et modéliser la cascade énergétique. Une présentation de ces applications en hydrologie de surface est donnée par Davis et al., 1994 [39].
Différents outils et approches existent pour mettre en évidence et caractériser l'invariance des échelles des signaux, entre le spectre de densité de variance, $S(f)$, et de possibles plages de fréquences sur lesquelles le spectre suit une loi puissance éq. 2.19.

$$S(f) \quad = \quad \propto f^{\beta}. \tag{2.19}$$

Des analyses fractales et multi-fractales ont été menées par Labat, 2001 [81] sur les données de précipitations et de débits mesurés sur quatre bassins versants karstiques de moyenne altitude des Pyrénées (Ariège et Pyrénées-Orientales) : Aliou, Baget et fontestorbes, sur une période s'étalant du 23/09/1974 au 25/02/1997.
De ces études il ressort que le signal débit des sources karstiques est fortement non stationaire, la réponse à un événement pluie se traduisant par une réponse complexe caractérisée par deux phases :

- une réponse rapide du système karstique suite à un évènement pluvieux, de type "filtre passe haut", qui traduit la circulation rapide des eaux de l'impluvium à la source par les entités (macro-)morphologiques les plus conductrices (perte, doline...$--> $conduit $--> $source)
- et une réponse lente du sytème karstique suite à un évènement pluvieux, de type "filtre passe bas", qui traduit la vidange d'autres compartiments, de manière plus diffuse pour arriver au système drainant principal, puis jusqu'à la source.

2.1.4 Bilan sur la structure temporelle des karsts

Cette synthèse bibliographique réalisée sur les méthodes indirectes de quantification et d'identification des caractéristiques internes des aquifères karstiques, a mis en évidence les difficultés existantes pour obtenir des classes comportementales précises d'aquifères karstiques. Les deux dernières méthodes d'analyses présentées, univariées et croisées des pluies et des débits, en ondelettes multirésolution et en analyse multifractale ont mis en évidence l'aspect multi-échelle temporelle, la non stationnarité et la non linéarité de la réponse des aquifères karstiques à un évènement pluvieux.

Ces deux dernières méthodes d'analyses ont pu mettre en avant l'existence dans la réponse globale du sytème karstique étudié de deux composantes dans les débits des sources karstiques :

- une réponse rapide du système karstique suite à un évènement pluvieux, de type "filtre passe haut", qui traduit la circulation des eaux de l'impluvium rapidement à la source par les entités (macro-)morphologiques les plus conductrices (perte, doline...$--> $ conduit $--> $ source)
- et une réponse lente du sytème karstique suite à un évènement pluvieux, de type "filtre passe bas", qui traduit la vidange d'autres compartiments, de manière plus diffuse pour arriver au système drainant principal, puis jusqu'à la source.

Ici, nous pouvons rajouter que le filtre fréquentiel "passe bas" peut être mis en regard avec l'effet de la structure spatiale des matériaux poreux dans les modèles hydrauliques d'Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P.) utilisés dans cette étude. En effet, les analyses spectrales, Gelhar 1993 [51], limitées stricto-sensu au cas des milieux continum heterogènes (la matrice poreuse, pas les fissures), montrent que les E.D.P. fondées sur le modèle de perte de charge de Darcy dans les milieux poreux sont aussi des filtres "passe-bas" en terme de fréquence spatiale. Pour la réponse de type "filtre passe haut", il parait donc nécessaire d'identifier les structures à l'origine de ce type de réponse et leurs états de connectivité pour mieux comprendre les phénomènes physiques et la physique des phénomènes qui régissent ces systèmes complexes[1] .

Dans la partie suivante, nous allons essayer de passer en revue les différents types de morphologies qui caractérisent les aquifères karstiques. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre bibliographique, nous passerons en revue les différentes approches de modélisation des écoulements et nous justifierons le choix réalisé lors du travail de modélisation.

[1] Il est vrai que l'E.D.P. Darcy est un filtre passe bas. Mais ce résultat (obtenu sans les fissures) n'implique pas que les méso- et macro-morphologies ce comportent comme un filtre passe-haut. Ce point devrait être l'objet de recherches spécifiques y compris avec l'E.D.P. de Navier-Stokes (le travail n'est pas poursuivi dans cette thèse où nous retiendrons un approche essentiellement darcienne)

2.2 Eléments morphologiques des massifs fissurés et des aquifères karstiques

Introduction

Les écoulements dans les massifs karstiques sont de nature très variée et sont conditionnés par la morphologie de ces hydrosytèmes. L'étude bibliographique réalisée précédemment a mis en évidence le caractère non stationnaire et non linéaire de la réponse des aquifères karstiques au cycle des précipitations. Une chose est certaine, cette réponse est la résultante de la réponse de la macro-morphologie et de la micro-morphologie des aquifères karstiques. Cette macro-morphologie provient de l'agrandissement de micro- et méso-morphologies d'origine sédimentaire ou tectonique par la karstogenèse.

Le point de départ de la compréhension de cette macro-morphologie est donc la compréhension de la répartition de ces micro- et méso-morphologies. Dans cette étude, nous ne nous intéresserons pas dans un premier temps aux discontinuités d'origine sédimentaires, mais seulement à celle d'origine tectonique : la fracturation. Nous verrons cependant ci-dessous qu'elles ne peuvent s'envisager sans la connaissance de la lithologie. Noter que, dans le Chapitre 5 de la Partie II, nous présenterons un modèle morphologique à base mathématique et statistique, utilisable pour une modélisation numérique des écoulements 3D.

2.2.1 Structure de fracturation

Différentes études menées ont montré une correspondance entre les directions de fracturation et les tracés de vallées (Daubree, 1979 [36]), et la cohérence des directions de fissuration avec les alignements des formes karstiques (Jamier & Mathey, 1977 [60]). Ces données de surface sont d'ailleurs confirmées par les informations acquises sur la karstification profonde (Kiraly, 1969a [66] ; Grillot & Guérin, 1975 [54]) ou obtenues à partir d'observations hydrauliques (Colbeaux & Mania, 1976 [32] ; Drogue & Grillot, 1976 [42]).
Les premiers paramètres à retenir pour caractériser la morphologie d'un massif fracturé classique, ou l'état primaire d'un massif carbonaté sans que le processus de karstification n'ait eu lieu, sont :

- la densité de la fracturation,
- les lois de distributions des diamètres des fractures et leurs orientations spatiales en 3D,
- les lois de distribution des propriétés hydrauliques/hydrodynamiques des fractures.

Les paramètres aléatoires de ces discontinuités doivent répondre à certains critères qui dépendent des conditions lithologiques et tectoniques.

Pierre Barthelémy, 1992 [17], montre qu'en envisageant un continuum d'échelles dans une gamme donnée, il est possible de faire apparaître des propriétés géométriques des réseaux de fractures qui ne sont pas accessibles par un travail effectué sur un seul intervalle d'échelle. Autrement dit, il est possible d'observer une structure hiérarchisée des fractures qui ne peut être mise en évidence, d'un point de vue géométrique, que par un travail fait à différentes échelles.

Les résultats obtenus par Barthélémy pour caractériser les réseaux de fractures du plateau du Larzac (France), ont montré qu'à l'échelle de l'affleurement, la distribution des fractures était poissonnienne. Aux grandes échelles (1/550-1/300), l'étude des réseaux de fractures a permis de mettre en évidence le caractère fractal des réseaux de macro fractures dans le plan horizontal. Toujours selon cet auteur, pour les plans verticaux, il semblerait que la répartition de la fracturation soit liée de manière décroissante à l'épaisseur de "bancs mécaniques" délimités par des stylolithes stratiformes.

Ainsi, si la génération des fissures à l'échelle de l'affleurement peut être réalisée en utilisant un processus poissonnien (ou processus de Poisson) ; à l'échelle du massif ces paramètres sont différents, et plus sensible aux contraintes tectoniques globales. Une distribution hiérarchisée apparaît alors plus judicieuse.

D'autres auteurs ont aussi obtenu, par analyses géostatistiques de la fracturation de grès, des observations comparables et notent que le modèle auto-homothétique est inapplicable pour des échelles allant du centimètre jusqu'à plusieurs centaines de kilomètres (Castaing et al, 1997 [28]). La détermination et l'utilisation d'une loi globale de l'échantillon centimétrique (ou métrique) à kilométrique pour les paramètres morphologiques de la fracturation est donc à prendre avec beaucoup de réserve.

D'autres observations de terrains obtenues à partir de l'analyse de plus de 700 m de carotte sur le gisement pétrolier de Rhourde el Baguel (Algérie) tendent à montrer qu'il est faux de considérer que plus les "bancs mécaniques" sont épais plus la fracturation est de densité faible (Allouani, 1991 [9]). La faible densité de fracturation de certains niveaux stratigraphiques serait plutôt à mettre en relation avec la teneur en argile de ces niveaux sédimentaires. Il est en effet vraisemblable que les joints argileux encaissent alors une part importante de la déformation.

Parmi les modèles de génération de milieux fracturés discrets classiquement utilisés dans la littérature, les modèles auto-homothétiques et fractals semblent justifiés à des échelles importantes pour certains contextes géodynamiques. Mais les modèles poissonniens purements aléatoires semblent plus applicables à l'échelle métrique.

La génération de la morphologie des milieux fracturés synthétiques doit être réalisée de manière séquentielle suivant différentes lois d'échelles de génération car les phénomènes mis en cause sont différents suivant les échelles considérées. L'utilisation d'un modèle hiérarchique avec plusieurs lois d'échelles peut être nécessaire. Nous pouvons ici noter que, pour la génération aux échelles supérieures, l'utilisation de méthodes de "recuit-simulé" peut s'avérer optimale si les données de terrains sont suffisantes. Une

étude de ce type a déjà été réalisée par Cananon, 2006 [27], pour reconstruire la fracturation d'un massif fracturé d'argilite à partir d'observations de traces de fractures sur l'enveloppe d'une galerie anthropique creusée pour le stockage des déchets radio-actifs. Pour de telles reconstructions obtenue à partir de telles observations, il faudrait pouvoir discriminer, pour la génération à l'échelle du massif, les fractures liées à l'endommagement dû au creusement de la galerie. Cependant, pour des traces de fissures relevées sur des milieux naturels cette approche semble bien adaptée.

De plus comme nous l'avons vu précédemment, l'apparition des fractures semble liée au pourcentage d'argile présent dans les formations endommagées. Une étude intéressante à réaliser pourrait être de conditionner la génération des centroïdes des fractures à partir de champs de répartition du pourcentage d'argile. La probabilité d'occurrence d'une fracture étant inversement proportionnelle au pourcentage d'argile local du milieu sédimentaire considéré. Ce champ peut être obtenu, par exemple, par l'algorithme des Bandes Tournantes (Tompson et al. 1989, [131]).

2.2.2 Systèmes karstiques, conduits et cavités

Les conduits karstiques

D'après Jeannin, 1996 [61] la géométrie des conduits karstiques est conditionnée par le type d'écoulement qui y siège et peut être caractérisée par trois variables :

- les caractéristiques de la section des conduits (diamètre et rugosité),
- la structure des conduits (tortuosité),
- la structure du réseau (type de réseau, position et direction générale des conduits).

Typiquement, ils ont des sections subcirculaires, souvent elliptiques et leurs allongements sont liés à la présence d'une discontinuité (fracture ou joint de stratification).

Les conduits sont tortueux et il n'est pas rare qu'ils présentent des ondulations de plusieurs dizaines, voir centaines de mètres de dénivellation. Une étude sur la tortuosité des conduits karstiques a été réalisée par Jeannin, 1992 [61], dans quelques galeries du lac de Thoune (Suisse). Les résultats obtenus montrent des relations fractales sur 2 à 3 ordre de grandeurs (m à km), comprises entre 1.07 et 1.11. Suite à ces observations de terrain, Jeannin, 1996 [62] propose une procédure de génération à partir d'un processus brownien fractionnaire. Les résultats obtenus sur la morphologie des réseaux simulés par rapport aux réseaux réels sont encourageants.

Pour caractériser les conduits karstiques à partir de la géométrie de leur enveloppe, Curl (1986 [31]) a introduit le concept de "cave modulus" (Fig. 2.3). Une grotte de module μ représente la somme des parties de la grotte qui peuvent être explorée par une sphère de diamètre μ. L'auteur propose une relation entre la somme des longueurs de toutes les cavernes de module μ et la somme des longueurs explorables (de module μ_p

= 0.5m) dans une région :

$$L(\mu) = L(\mu_p)\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{1-D} \tag{2.20}$$

où D est une dimension fractionnaire. Curl a mesuré par cette méthode la dimension fractale du volume de grotte d'une région de Pennsylvanie. Il a obtenu une valeur de 2,79. Ici, nous pouvons noter que,

$$\left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{1-D},$$

est assimilable à une loi de distribution de Pareto de paramètre D.

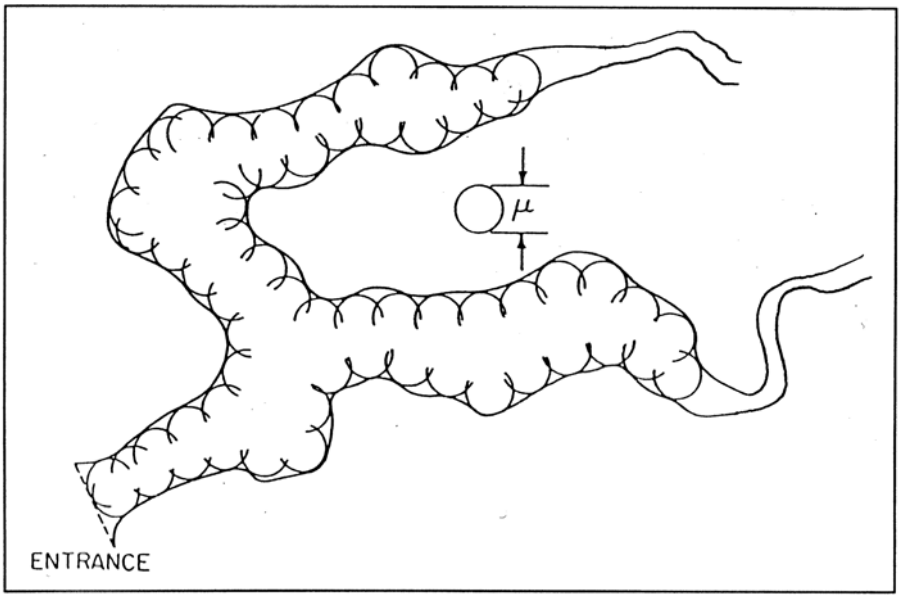


FIG. 2.3 – Cave modulus

Notons ici que la plupart des galeries karstiques dont la morphologie est observable correspondent à d'anciennes entités de drainage, non fonctionnelles, sauf en cas de crues pour certaines d'entre elles. Donc, la morphologie étudiée n'est plus en accord avec la structure fonctionnelle située dans la zone noyée. En effet, dans ces conditions, d'autres processus d'érosion, comme des desquamations prennent place et modifient la morphologie originale. Cependant, elles peuvent nous apporter quelques éléments intéressants sur la mise en place de ces galeries.

Les conduits se développent comme nous l'avons vu principalement, au profit des discontinuités de la roche et c'est le gradient hydraulique qui dicte la direction générale de l'écoulement au travers des discontinuités ; la direction des conduits est donc globalement celle du gradient, mais localement celle des discontinuités.

Les systèmes karstiques annexes au drainage

Les systèmes karstiques annexes sont situés dans la partie noyée du karst. Ce terme a été employé pour la première fois par Mangin (Mangin, 1974-1975 [99]), pour expliquer des constatations faites sur l'analyse des débits des sources karstiques. D'un point de vue morphologique, ces systèmes annexes seraient des entités morphologiques situées de part et d'autre du drainage et comprennent des vides, plus ou moins grands (salles, ou cavité), anastomosées, mais répartis en une succession d'ensembles assez bien délimités, indépendants les uns des autres et tous en relation avec des drains. Très capacitifs et peu transmissifs, ils sont le lieu de stockage des réserves du karst noyé. Cependant, leurs répartitions et leurs distributions dans le massif sont très peu documentées dans la littérature et leur définition est un peu vague. Frumkin & Fischhendler, 2004 [45] y voient une origine liée à une agressivité locale importante des eaux de l'aquifère.

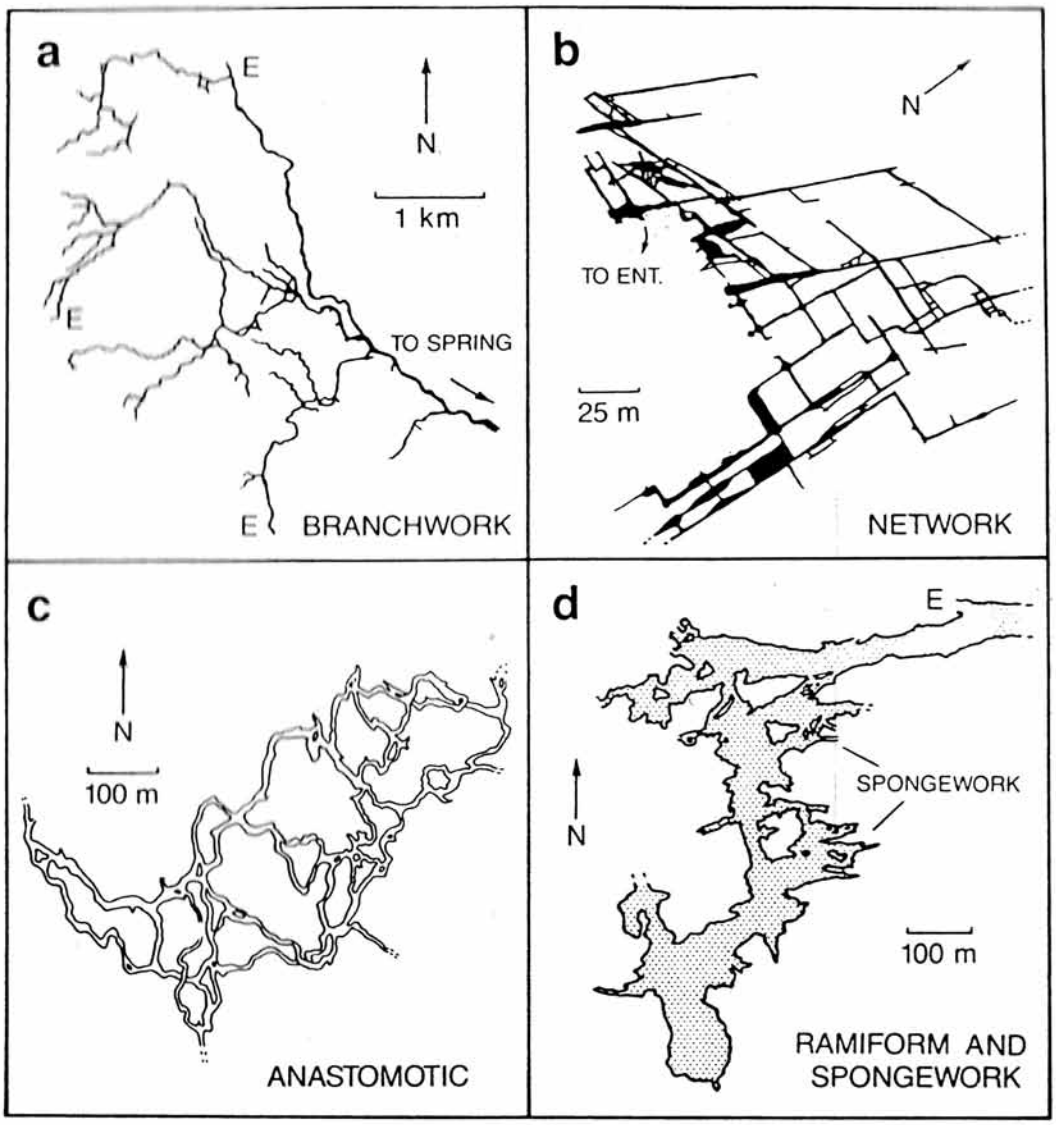
2.2.3 Organisation amont/aval

De l'amont vers l'exutoire, le karst apparaît comme un réseau hydrographique 3D organisé, structuré, plongé au sein d'un milieu poreux lui-même (plus finement) fissuré, où les faibles écoulements de l'amont, ayant lieu dans des fissures fines, confluent vers l'aval pour donner des drains de plus en plus importants, mais de moins en moins nombreux. D'après Palmer, 1992 [108], la plupart des réseaux d'écoulements karstiques présentent une structure arborescente, comparable aux réseaux hydrographiques de surface. Palmer propose une classification des réseaux, que l'on peut qualifier de "structurelle", différente de celle de Mangin qui est plus "fonctionnelle". Cet auteur distingue quatre types de réseaux (Fig. 2.4) :

- maillés (fortement influencés par le réseau de fractures),
- anastomosés (nombreuses diffluences),
- branchiformes,
- et ramiformes (grands vides reliés par de petits couloirs).

Les réseaux d'écoulement présentent une structure organisée, drainant efficacement les eaux et prenant appui sur les discontinuités présentes qui sont elles même fonction de la lithologie, des processus diagénétiques et de l'histoire tectonique du massif considéré.

A cette structuration amont/aval, il faut ajouter une composante verticale d'organisation.



a: Crevice Cave, Missouri

b: Part of Crossrads Cave, Virginia

c: Part of Hölloch, Switzerland

d: Carlsbad Cavern, New Mexico

FIG. 2.4 – Classification morphologique des aquifères karstiques d'après Palmer, 1992 [108].

2.2.4 La structuration verticale des hydrosystèmes karstiques

De manière générale et synthétique, la plupart des aquifères karstiques peut être divisée en trois éléments structurels verticaux qui remplissent une fonction particulière comme nous avons commencé à le décrire en introduction. Nous distinguons respectivement :

L'épikarst

L'épikarst est plus ou moins bien développé suivant les conditions climatiques et la nature des roches affleurantes. Il est principalement constitué d'éléments qui permettent le transfert vertical (lapiez, fractures) des eaux de ruissellement vers la zone variablement saturée du karst. Parfois, un zone drainante peut être observée à sa base (Jeannin, 1992 [61]). L'épikarst, constitue la partie de l'alimentation du karst, si nous ne prenons pas en considération les zones d'alimentation ponctuelles comme les pertes actives ou des dolines.

La zone variablement saturée

Cette zone insaturée ou variablement saturée, permet le transfert vertical de l'eau d'infiltration du massif vers la zone noyée du karst. Les éléments qui jouent un rôle prioritaire dans ce transfert sont les plus grands accidents tectoniques une fois élargis par dissolution. Les restes ou les anciens systèmes karstiques, inactifs actuellement, jouent aussi un rôle important dans le drainage du massif surtout en hautes eaux.

La zone noyée

La zone noyée est la zone saturée des aquifères karstiques. Elle est plus ou moins développée selon le type d'aquifère karstique considéré, mais elle constitue toujours la partie la plus active dans le drainage d'un massif carbonaté. Cette zone saturée est la partie du karst où l'organisation des vides apparaît avec le plus de netteté. Elle comprend un système de drainage, constitué de galeries, ou de zones très transmissives, mais peu capacitives et, de part et d'autre de l'axe drainant, des vides plus ou moins grands (salles, ou cavité), anastomosées, répartis en une succession d'ensembles assez bien délimités, indépendants les uns des autres et tous en relation avec des drains ; ces ensembles sont notés systèmes karstiques annexes au drainage (Mangin, 1974-1975 [99]). Très actifs et peu transmissifs ces places sont le lieu de stockage des réserves du karst noyé. Notons que la zone noyée n'est pas présente de manière équitable dans l'ensemble du massif ; elle est généralement développée à proximité de l'exutoire et s'estompe au fur et à mesure que l'on s'en éloigne.

2.3 Bilan (systèmes karstiques)

Comme nous avons pu le constater, le karst peut être assimilé à un réseau complexe de drainage 3D d'un massif carbonaté variablement saturé. Ce réseau est constitué de différentes unités morphologiques qui présentent une structuration verticale et amont/aval. Ces géométries complexes résultent de la dissolution du massif suivant des plans préférentiels de circulation des eaux à un moment donné de son existence et de son activité (fonction du gradient hydraulique).

Les études portant sur l'analyse de la réponse temporelle et fréquentielle des sources karstiques en relation avec les précipitations ou non, ont permis de mettre en évidence la non stationnarité et la non linéarité des écoulements et du fonctionnement des aquifères karstiques. La réponse des sources karstiques à un évènement pluvieux, mise en évidence par ces différentes études, se caractérise par :

- une réponse rapide, de type "ruissellement" souterrain,
- une réponse plus lente de type "infiltration".

Pour appréhender l'étude de ce milieu hétérogène sur une large gamme d'échelles, il faut considérer le karst comme étant un "double milieu" où la matrice poreuse finement fissurée pourra être assimilée à un continuum homogénéisé et spatialisé dans lequel des éléments très transmissifs responsables de la réponse rapide, sont représentés par des éléments discrets (e.g. des conduits, des salles et des fractures conductrices).
Nous pouvons soit envisager de traiter le massif karstique comme un modèle "dual continuum" (modèle à deux équations avec échange matrice-fracture/objets discrets) ou "continuum simple" (modèle à une équation).
Dans le présent travail de modélisation (Part. III, Chaps. 7 à 10), nous utiliserons un modèle "**continuum simple**".

La géométrie du karst influence le drainage du massif. Cependant, seule une partie très limitée est explorable par l'Homme. Que dire des systèmes drainants non explorables, des systèmes annexes au drainage, des micro-conduits et des fissures de diamètres inférieurs à 1 m ?

Le point de départ consisterait à étudier la structure du karst en croisant des données empiriques sur la morphologie du réseau spéléologique et d'autres données statistiques obtenues par extrapolation des données existantes. Il faudrait même ajouter un modèle d'érosion du massif permettant de tenter une reconstruction du massif drainant en fonction des variations du gradient hydraulique régional subit par le massif au cours de sa diagenèse tardive. Ce modèle pourrait aussi permettre de reconstituer par "voie hydraulique" les liens manquants entre des entités partiellement observables.

Pour le travail de modélisation de la partie II (Chap. 5), différentes pistes pour la génération de la morphologie des aquifères karstiques, évoquées dans la partie précédente, seront explorées, certaines pistes plus que d'autres. Ces idées sur la modélisation de la morphologie ont abouti à la construction d'un certains nombres d'outils numériques. Ces outils numériques, pour certains encore embryonnaires, devront être améliorés.

Nous avons aussi vu que les aquifères karstiques bien hiérarchisés peuvent en une certaine mesure être assimilable, pour ce qui est de leur comportement temporel, aux systèmes fluviatiles plutôt qu'à des aquifères fracturés ou poreux.

Cependant, il ne faut pas oublier que les karsts ont un comportement différent suivant la période de l'année considérée (haute eaux/basses eaux) du fait du comportement hydromécanique du massif. En effet, en hautes eaux, certaines fractures s'ouvrent et se referment en basses eaux (étude hydrochimique, Mudry et al. [104].). Plus qu'un problème de comportement suivant l'échelle considérée, c'est la structure entière du karst qui change et donc son comportement au cours de la période du cycle hydrologique considérée. Pour être plus précis, si l'on considère pour analyser la structure du karst une comparaison avec les systèmes fluviatiles, par exemple la classification de Shreve, 1966 [122], le nombre de sources varie énormément entre les basses eaux et les hautes eaux.

Les éléments macro-morphologiques compris dans la masse 3D du massif carbonaté sont donc particulièrement importants pour appréhender l'hydrodynamique des karsts. De plus, la prise en considération de la non-linéarité des écoulements est aussi essentielle, pour réaliser la modélisation des écoulements dans les aquifères karstiques. Une loi de perte de charge locale appropriée doit aussi être utilisée suivant le type de morphlologie considéré.

Les inconnues et les problèmes rencontrés pour la modélisation des aquifères karstiques sont donc très nombreux. La modélisation ne peut correctement se faire que par le croisement de plusieurs approches et disciplines, comme la biologie, la géologie, la spéléologie, la morphologie et la topologie, la géodynamique, l'hydrogéologie, la mécaniques des fluides et des structures, et la géostatistique.

Dans le chapitre suivant, nous allons présenter les différentes voies de modélisation utilisées dans la littérature.

Chapitre 3

Différentes approches de modélisation

La modélisation des écoulements dans les aquifères karstiques peut se diviser en trois classes différentes :

- la première consiste en la modélisation du débit des sources ; différentes méthodes utilisées dans la littérature seront présentées brièvement.
- la seconde méthode utilise des modèles à réservoirs conceptuels imbriqués et en relation.
- la troisième méthode consiste à réaliser une modélisation tridimensionnelle des écoulements dans les massifs karstiques par résolution d'Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P.).

3.1 Modélisations des débits d'une source karstique

Cette approche consiste à réaliser une modélisation des débits d'une source karstique en utilisant des modèles linéaires ou non linéaires.

3.1.1 Les modèles linéaires

Modèles linéaires statistiques

Toutes ces méthodes sont issues de "l'hydrogramme unitaire" développé en hydrologie de surface aux Etats Unis par Sherman, 1932 [120], Snyder, 1955 [126] et Eagleson et al, 1966, [44].
Dreiss 1982 [40], propose d'utiliser en hydrologie karstique une méthode fondée sur une équation de convolution entre les pluies efficaces $P(t)$ et les débits $Q(t)$ via un noyau de convolution sensé représenter l'hydrosystème karstique :

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)P(t-\tau)d\tau, \tag{3.1}$$

où $h(\tau)$ est le noyau de convolution identifié par optimisation entre les débits observés et modélisés en résolvant le système linéaire issu de la discrétisation de temporelle de l'équation précédente.

Modèles stochastiques linéaires

L'approche stochastique linéaire consiste à modéliser les débits de sources karstiques par des modèles de prédiction reliant de manière linéaire les données entrées/sorties dans le temps avec l'introduction d'un bruit blanc (e.g. Salas & Obeysekera 1982 [118]. Plusieurs modèles mathématiques existent. Nous pouvons citer par exemple les modèles ARMAX exogène (d'ordre p,q,r) :

$$Y(t) = \sum_{j=1}^{j=p} a_j Y(t-j) + \sum_{k=1}^{k=q} c_k X(t-j) + \varepsilon(t), \tag{3.2}$$

où $Y(t)$ et $X(t)$ sont des processus stationnaires, $\varepsilon(t)$ un bruit blanc et a_j et c_k des paramètres de calage du modèle.

L'un des problèmes d'utilisation de ces méthodes est que les paramètres de calage ne possèdent pas forcément de réalité physique "a priori".

Modèles linéaires multirésolutions

Labat, 2001 [81], propose l'utilisation d'un modèle de convolution linéaire permettant de prendre en considération le caractère multi-échelle temporelle de aquifère karstique.
Pour cela, il utilise une décomposition en coefficients "ondelettes" des deux signaux $P(t)$ et $Q(t)$ observés de longueur 2^M :

$$P(i) = \sum_{j=1}^{j=M} \sum_{k=1}^{k=2^j} C^P_{j,k}(i)\psi_{j,k}(i)\,, \tag{3.3}$$

$$Q(i) = \sum_{j=1}^{j=M} \sum_{k=1}^{k=2^j} C^Q_{j,k}(i)\psi_{j,k}(i)\,. \tag{3.4}$$

Le modèle consiste alors à caler un modèle linéaire de convolution sur chacune des décompositions "ondelettes" des deux signaux pluie et débit. La technique permet ainsi de caler M hydrogrammes unitaires sur les M composantes de la décomposition. Ces hydrogrammes unitaires multi-résolution reliant les coefficients en ondelettes multi-résolutions des pluies et des débits sont définis par la relation suivante :

$$C^Q_{j,k} = \sum_{k=1}^{k=2^j} C^P_{j,k}(i) H^j(k-i). \tag{3.5}$$

Pour leurs études, l'utilisation de l'ondelette de Daubechies [37] a été réalisée. Selon Labat, 2001 [81], le choix de l'ondelette de Daubechies influe peu sur les résultats de simulation à court terme, mais de manière significative sur les résultats de simulation à long terme.

3.1.2 Les modèles non-linéaires

De nombreux auteurs utilisent des modèles non linéaires pour modéliser différents types de systèmes karstiques. Le détail de chacune de ces méthodes de simulation ne sera pas présenté ici, cependant, les lecteurs pourront trouver les références bibliographiques correspondant à l'utilisation de ces modèles.

Trois grandes classes de méthodes peuvent se dégager :

- L'utilisation de l'hydrogramme unitaire variable en temps :
  - en fonction du débit mesuré, Kachroo & Natale 1992 [64], à seuil de débit, Labat et al. 1999c [83] ;
  - en utilisant la notion de fonction de gain non stationnaire, O'Connor & Ahsan 1991 [107],
  - en proposant des modélisations différentes des composantes du modèle à long terme (annuelle) et à court terme (journalière) de la réponse du bassin, Nash & Barsi [106] et Lin & Lye [90],
- L'utilisation de modèles de type réservoirs physiques ou conceptuels non linéaires en cascade :
  - modèle de Nash (e.g. Napiorkowski & Strupczewki [105])
  - les modèles "stochastiques" non-linéaire, Rao & Rao 1984 [114].
- L'optimisation des séries de noyaux de type Volterra, après projection ou non de ces derniers sur des bases polynômiales orthonormées (par exemple les polynômes de Meixer). Ces modèles peuvent être fondés par exemple sur la cascade de Nash (Volterra/Nash) pour reconstituer les données de débits, Labat 2001 [81].

3.2 Les modèles réservoirs conceptuels

Lorsque l'on s'attaque à la modélisation de systèmes complexes comme les aquifères karstiques et que l'on désire s'approcher des processus naturels mis en jeu, il est possible de concevoir ces systèmes comme une succession de réservoirs conceptuels spatialisés et communiquant entre eux par des lois de vidange.
Ces réservoirs bien qu'assujettis à des processus physiques comme l'évapo-transpiration, ne sont pas attachés à la physique des processus et nécessitent un calage empirique.

La plupart des modèles actuels sont de type CEQU*eau* (IRSN-Eau Québec, Morin et al. 1995 [102]). Ce modèle est un modèle hydrophysiologique conceptuel spatialement

distribué utilisé essentiellement en hydrologie de surface. Les entrées du modèle sont constituées de données topographiques, pluviométriques et de température.
Ce modèle particulier comporte 28 paramètres dans sa version actuelle et est constitué de 3 réservoirs linéaires :

- un pour représenter le stock d'eau de surface (lacs, marécages,...),
- un autre pour le réservoir sol contenant 4 moyens de vidange (un trop plein pour le ruissellement, une vidange haute et basse vers la surface et une vers la nappe),
- un dernier réservoir pour caractériser les écoulements de la nappe. Ce réservoir est constitué de deux orifices : l'un sert à la vidange rapide de la nappe et l'autre à la vidange lente de la nappe.

D'autres modèles existent comme le modèle CREG (Drogue & Guilbot 1977 [43]) constitué de réservoirs interconnectés ou encore le modèle BEMER spécialement développé pour les aquifères karstiques, Bezes 1976 [20], prenant en considération la structuration spatiale verticale des aquifères karstiques.
Le modèle conceptuel BEMER est constitué de 5 réservoirs :

- Le premier réservoir RE1 assure la fonction de production et représente l'épikarst. Ce réservoir est sensible à l'évapo-transpiration, au ruissellement et à l'évaporation. Sa vidange suit une loi à préciser.
- Les trois réservoirs suivants, RE2, RE3 et RE4 correspondent à la zone non-saturée de l'aquifère karstique. Ils suivent des lois linéaires mais seuillés : les deux premiers correspondent à un écoulement rapide et ne sont actifs qu'en périodes de crue et le troisième représente un débit de base.
- Et le dernier réservoir RE5, correspond aux écoulements dans la zone noyée.

Le principal défaut de ces modèles est le nombre de paramètres, souvent empiriques, à caler/optimiser.

3.3 Modélisations tridimensionnelles à paramètres distribués (E.D.P.)

La troisième méthodologie d'étude consiste à utiliser des modèles tridimensionnels à paramètres distribués fondés sur la résolution d'E.D.P. (Equations aux Dérivées Partielles). Le précurseur de cette approche en hydrogéologie karstique, où les phénomènes 3D sont essentiels, est Kiraly (1978, [70]) pour rendre compte des débits de l'Areuse (Suisse).

Pour la résolution des écoulements, un champ de perméabilité équivalente doit être construit de manière à prendre en considération l'influence des différentes unités morphologiques décrites dans la partie précédente. Cependant, l'ensemble des entités contrôlant les écoulements vont de l'échelle métrique à kilométrique. Représenter toutes ces entités morphologiques et réaliser une simulation directe permettant de décrire les écou-

lements n'est pas envisageable. Il est nécessaire de construire un champ de paramètres équivalents dont les propriétés ont été obtenues à des échelles pertinentes, en utilisant des méthodologies particulières, permettant de perdre le moins d'informations possibles. Kiraly a notamment pu remarquer que, si l'on considère un massif karstique donné, la perméabilité du massif ne sera pas la même suivant l'échelle d'étude considérée (Kiraly, 1975 [68]).

De nombreuses difficultés et inconnues existent pour ce type de modélisation, notamment l'utilisation et la détermination d'une loi phénoménologique locale de perte de charge appropriée. La loi phénoménologique de type Darcy variablement saturée (Richards généralisée) est intéressante mais reste insuffisante pour rendre compte de la forte non linéarité des écoulements dans la totalité d'un système karstique donné. Un autre inconvénient de taille est la nécessité d'avoir des données de terrain sur la macromorphologie des aquifères karstiques.

Différentes approches de modélisation et de distribution des vides existent :

- Discrete Fracture Network Approach (D.F.N.),
- Discrete Channel Network Approach (D.C.N.)
- Equivalent Porous Medium Approach (E.P.M.)
- Double Continuum Approach (D.C.)
- Combined Discrete Continuum Approach (C.D.C.)

Dans la partie suivante, nous allons décrire chacune de ces méthodes.

3.3.1 Distributive Fracture Network approach (D.F.N.)

Cette approche consiste à générer un système de fractures discrètes et considère que le système d'écoulement est uniquement régi par la fracturation. La fracturation est caractérisée par sa densité et les lois de distribution des différents paramètres caractéristiques du réseau de fractures (longueur, ouverture, orientation...).

Plusieurs approches de génération peuvent être utilisées (Modèles de salve, modèles hiérarchiques,...). Généralement, les auteurs considèrent que la matrice est imperméable et les écoulements dans les fractures sont régis par la "loi cubique" monophasique, (Kiraly, 1969 [66], Snow 1969 [125]) définie pour une fracture planes de la manière suivante :

$$Q = \frac{a^3 w}{12} \frac{\rho g}{\mu} \nabla H \,, \tag{3.6}$$

où, Q est le débit ($m^3.s^{-1}$), a l'ouverture de la fracture (m), w la dimension de la fracture dans la direction perpendiculaire à l'écoulement (m), μ la viscosité dynamique du fluide ($N.s.m^{-2}$), ρ la densité de ce fluide ($kg.m^{-3}$), g l'accélération de la gravité ($m.s^{-2}$) et ∇H le gradient hydraulique macroscopique ($[-]$).

Si cette méthode peut être par exemple utilisée pour la modélisation des écoulements

laminaires dans les aquifères fracturés de socle, son utilisation pour les aquifères karstiques est limitée.

3.3.2 Discrete Channel Network approach (D.C.N.)

Cette seconde approche, consiste en la modélisation des écoulements dans un réseau de conduits mono-dimensionnels, où les conduits représentent soit des conduits karstiques soit les intersections de plans de fractures générés statistiquement ou prenant appui sur des observations de terrain.

Dans la plupart des études, la formulation mathématique de la loi de perte de charge laminaire est exprimée pour un conduit circulaire saturé par la formule de Hagen-Poiseuille :

$$Q = \pi \frac{r^4}{8} \frac{\rho g}{\mu} \nabla H \tag{3.7}$$

où Q est le débit ($m^3.s^{-1}$), r le rayon du conduit (m), μ la viscosité dynamique du fluide considéré ($N.s.m^{-2}$), ρ la densité de ce fuide ($kg.m^{-3}$) et ∇H le gradient hydraulique macroscopique ($[-]$). Cependant, les écoulements dans les conduits sont généralement turbulents (dû moins dans ceux de grands diamètres).
Certains auteurs proposent d'utiliser la formulation de Darcy-Weisbach (ou Nikuradzé), pour calculer les pertes de charges quadratiques dans les conduits karstiques (e.g : Atkintson 1977 [11]) :

$$Q = -K' \pi r^2 \sqrt{|\nabla H|} \tag{3.8}$$

avec K', la "conductivité hydraulique turbulente".
Louis, 1968 [94], conformément aux travaux de Lomize, 1947 [89], propose l'expression suivante pour la conductivité hydraulique turbulente pour des milieux fortement rugueux :

$$K' = 2log_{10}\left(1.9\frac{D_h}{\varepsilon}\right)\sqrt{2gD_h} \tag{3.9}$$

où $D_h = 4R_h$ est le diamètre hydraulique du conduit (m) et ε la rugosité en (m).
Des simulations utilisant cette dernière formulation ont été réalisées par Jeannin, 1996 [62] sur le système de Hölloch (Suisse) et ont montré que l'utilisation de la formule de Louis dans des conditions spécifiques (conduit saturé, conductivité hydraulique des conduits élevée, comprise entre 1 et 10 $m.s^{-1}$) peut être réalisable.

Cependant, une telle conceptualisation de l'hydraulique des milieux karstiques nécessite une quantité importante de données sur la morphologie des conduits et surtout, ne prend pas en considération les phénomènes de dénoyage des conduits, ni la contribution de la matrice finement fracturée et ne peut pas être appliquée aux géométries tourmentées des macro-morphologies/porosités des aquifères karstiques.

3.3.3 Equivalent Porous Medium Approach (E.P.M.)

Cette approche de milieu poreux équivalent, si elle était utilisée pour un bassin karstique dans sa totalité, serait inapplicable du fait de l'existence de discontinuités hydrauliques majeures dans ces hydrosystèmes. Cependant, cette approche peut être utilisée pour modéliser la partie finement fissurée de la matrice poreuse en utilisant une procédure d'upscaling appropriée et une loi locale de perte de charge appropriée. Ceci est l'objet de l'essentiel de ce travail (partie III, Chap. 7 à Chap. 10).

L'ajout de discontinuités majeures à influence régionale semble nécessaire. Des approches particulières d'upscaling utilisant des fonctions ondelettes stationnaires ou non stationnaires dans des réseaux neuronaux pourraient être un outil non négligeable dans de telles modélisations.

3.3.4 Double Continuum Approach (D.C.)

La difficulté de l'obtention de données nécessaires pour les approches utilisant des fractures ou des conduits discrets a conduit certains auteurs à l'utilisation de méthodes de double continuum équivalent pour la modélisation des écoulements dans les massifs karstiques, qui permettent de se libérer de la connaissance précise de la répartition des entités morphologiques conditionnant les écoulements.
L'un des premiers auteurs ayant réalisé ce type de modélisation pour les aquifères karstiques fut Teutsch, 1988 [132] en utilisant les concepts proposés par le modèle de Barenblatt & Zeltov [16]. Dans une telle configuration, le milieu matriciel finement fissuré et les réseaux d'éléments conducteurs (conduits,...) sont représentés par deux continuums distincts communicant l'un avec l'autre par un coefficient d'échange α. Les écoulements et les échanges de masses entre ces deux "compartiments", matrice (m) et conduit/fracture (c), sont alors régis par deux équations différentielles,

$$\phi_c c_c \frac{\partial P_c}{\partial t} = div\left(\frac{1}{\mu} K_c \vec{\nabla} P_c\right) - \alpha \frac{K_m}{\mu}(P_c - P_m) \tag{3.10}$$

$$\phi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t} = \alpha \frac{K_m}{\mu}(P_c - P_m) \tag{3.11}$$

où c_i sont les compréssibilités de chacune des phases (i) considérées, et

$$\phi_c = \frac{V_c}{V_t} \; et \; \phi_m = \frac{V_m}{V_t}\,. \tag{3.12}$$

sont respectivement la fraction volumique de la phase conduit/fracture, ϕ_c, et de la phase matricielle, ϕ_m.

Dans la formulation précédente, le terme d'échange est vu comme un terme source des flux de l'équation de bilan de masse. La détermination de ce coefficient est essentielle pour réaliser une modélisation efficace en utilisant un modèle double continuum.

Ce terme d'échange est fonction de la géométrie des fractures et de leur position spatiale (état des connectivités du milieu fracturé). Les études sur ce sujet sont nombreuses.

En hydrogéologie karstique, Cornaton & Perrochet, 2002 [33] ont appliqué ce dernier type de modélisation pour reproduire le comportement des débits au niveau d'un exutoire d'un réservoir karstique simulé par une approche discrète. Ces auteurs ont mis en évidence que l'utilisation de cette méthode de modélisation 1D pouvait reproduire correctement, par calibration du paramètre d'échange, les débits simulés par l'approche discrète. Cependant, cette formulation en milieu double-continuum pour un milieu 3D demande des développements compliqués et qui ne peuvent être réalisés que si l'on possède assez d'informations sur la structuration spatiale de tels aquifère.

L'application de cette méthodologie d'étude pour représenter la réponse d'un aquifère karstique dans toute sa gamme d'échelles semble compliquée. Cependant, pour une certaine gamme d'échelles, ce modèle peut être réalisé. Ces paramètres obtenus à la gamme d'échelles considérée pourront être alors injectés dans un réservoir de plus grande taille où les discontinuité à influence régionale pourront être incorporées.

De plus, dans la littérature rassemblée sur ce sujet, toute les simulations sont réalisées sans prendre en considération toutes les non-linéarités des écoulements dans les aquifères karstiques. En particulier la non-linéarité liée aux écoulements rapides avec accélération inertielle ne sont pas pris en compte par la plupart des auteurs.

3.3.5 Combined Discrete-Continuum Approach (C.D.C.)

La dernière approche présentée ici est dite "Combined Discrete-Continuum approach". Elle consiste à simuler les écoulements dans des volumes 3D de matrice poreuse stochastiques ou déterministes, dans laquelle les éléments discrets de la méso- et de la macro-porosité ont été insérés.

Cette méthodologie d'étude a été réalisée pour la première fois par Kiraly & Morel en 1976, [69]. Ces auteurs ont introduit des éléments discrets 1D de haute conductivité hydraulique (conduit) dans une matrice poreuse déterministe 3D de faible perméabilité, pour simuler les débits de l'Areuse (Suisse). Les différents études menées par la suite par Kiraly (Kiraly et al. 1995 [71]), ont mis en évidence la nécessité de prendre en considération les apports de l'épikarst pour reproduire l'ensemble des phénomènes hydrodynamiques ayant lieu lors de la recharge et de la vidange des aquifères karstiques.

Les phénomènes sont essentiellement 3D, mais considérer l'aquifère et l'ensemble des macro-morphologies 3D est trop gourmand en données de terrains, pour la plupart non observables. Suite à ces travaux, Kovacs 2003 [79] propose une approche quasi-3D, compremant 2 zones ou les écoulements sont modélisés en 2D :

- une zone épikarstique contenant les observations de la morphologie de surface,
- une zone saturé profonde constituée par les éléments de la macro-morphologie profonde.

Le couplage entre ces deux zones est alors assuré par des éléments verticaux ; des failles verticales assurant le transfert entre ces deux compartiments. Ainsi, les processus 3D variablements saturés régissant les écoulements des massifs 3D, sont remplacés par un problème quasi-3D spatialement distribué constitué de deux réservoirs réliés entre eux par les principaux accidents tectoniques.

3.3.6 Modélisation hydraulique 3D : bilan

Chacune de ces méthodes a bien entendu ses avantages et ses inconvénients. Leur applicabilité dépend du nombre et de la qualité de données de terrains disponibles et de l'échelle ou de la gamme d'échelles considérée pour réaliser la modélisation. Pour la modélisation des écoulements dans les milieux fracturés, Selroos et al, 2002 [123], préconisent l'utilisation d'un modèle "Distributive Fracture Network" approach (D.F.N.) pour obtenir les paramètres de transport à l'échelle du site et des modèles stochastiques à l'échelle du massif.
L'approche idéale serait donc une combinaison de plusieurs de ces approches :

- utiliser une approche "Distributive Fracture Network" et "Distributive Conduit Network" pour représenter les éléments discrets ayant une influence sur le comportement de la nappe en hautes eaux et/ou en basses eaux,
- coupler ce type de modélisation avec un modèle régionalisé stochastique des paramètres hydrauliques obtenus à l'échelle de l'échantillon ou métrique,
- puis paramétrer et optimiser la méso- et la macro-morphologie des aquifères karstiques grâce à la comparaison faite entre les débits réels et ceux mesurés à l'exutoire des massifs karstiques synthétiques.

3.4 Stratégie de modélisation pour la suite de l'étude

Dans l'étude bibliographique précédente, nous avons pu mettre en évidence la non-stationnarité et la non-linéarité des écoulements, à mettre en relation avec la différence de comportements des écoulements ayant lieu dans ces hydrosytèmes complexes :

- une circulation lente et diffuse dans les blocs matriciels finement fracturés ;
- une circulation rapide dans les méso- et macro-morphologies des aquifères karstiques.

Pour une modélisation et une gestion efficace de la quantité et de la qualité de la ressource en eau de ces systèmes, il faudrait idéalement choisir et appliquer le modèle équationnel de perte de charge approprié à ces différentes structures :

- un modèle équationnel de perte de charge linéaire (visqueux) de Darcy dans la matrice poreuse ou poreuse finement fissurée saturé ;

- un modèle de perte de charge de Darcy-Buckingham (équation de Richards) pour les écoulements à saturation variable dans la matrice poreuse oufinemement fissurée ;
- un modèle de perte de charge inertielles/turbulentes dans les méso- et macro-morphologies des aquifères karstiques.

Le choix et l'utilisation du bon modèle de perte de charge est déterminant, cependant, les simulations doivent aussi être réalisées dans un modèle morphologique prenant en considération les positions des entités de méso- et macro-morphologie des aquifères karstiques et notamment la structuration amont/aval et verticale[1].

Dans les chapitres suivants, Chap. 4 à Chap. 6 :

- Nous présenterons, chapitre 4, le modèle de perte de charge et le code numérique utilisés pour modéliser les écoulements et le comportement des aquifères karstiques.
- Quant à l'approche de la modélisation de la morphologie de ces aquifères, plusieurs pistes de modélisation seront présentées et proposées dans le chapitre 5.
- Dans le chapitre 6, un premier test simple de modélisation d'une réponse d'une résurgence d'un massif karstique synthétique, suite à un évènement pluvieux, sera réalisée.

Les discontinuités ne peuvent être "représentées" de manière directe dans leur ensemble pour la modélisation à grande échelle des aquifères karstiques. Une distribution des paramètres effectifs hydrauliques est nécessaire. L'obtention de ces paramètres doit être réalisée à une échelle ou une gamme d'échelles appropriée. Ces paramètres homogénéisés doivent être obtenus par une méthodologie particulière permettant de perdre le moins d'informations possible lors de l'homogénéisation numérique réalisée à l'échelle du réservoir.

Dans les chapitres 7 à 10 nous nous interrogerons sur le problème de la "seconde homo-

[1] Cependant, pour être complète, une analyse d'un hydrosystème karstique donné doit aussi être réalisée en partie avec l'analyse de la chimie des eaux, notamment de l'évolution relative de traceurs naturels (Calcium, Magnésium, ions Nitreux,...). Afin de caractériser le temps de séjour des eaux dans l'aquifère et dans les différents compartiments pour comprendre les liens existants entre eux (Mudry et al, 1987 [103]) : (i) une forte concentration en ions magnésium est à mettre en relation avec un long temps de séjour de ces eaux dans l'aquifère ; la cinétique de dissolution de la dolomie, principale source de magnésium dans ces aquifères carbonatés étant très faible par rapport à la cinétique de dissolution des calcaires ; (ii) et inversement, une forte concentration en ions nitreux indique un court temps de séjour des eaux dans l'aquifère ; les nitreux sont rapidement dégradés par les micro-organismes. Ces analyses permettent notammemt d'apporter des renseignements, sur le comportement hydro-mécanique du massif en hautes et basses eaux, nécessaires pour une modélisation complète du comportement de ces milieux complexes, mais surtout permettent d'apporter des éléments de réponse au questionnement sur les entités morphologiques présentes dans le sous-sol et non observables depuis la surface. Ceci n'est pas le sujet de notre étude, mais il nous paraît important de rapporter ce fait ici.

généisation" c'est à dire comment se comporte à grande échelle un milieu contenant un grand nombre d'entités morphologiques.

- Le chapitre 7 présentera la démarche et la motivation de l'étude réalisée sur la "second homogénéisation" et sur le comportement de la conductivité hydraulique macroscopique (macro-K).
- Le chapitre 8 portera sur l'analyse des écoulements dans les milieux très fissurés darciens et sur les effets de percolation et de quasi-percolation. Deux solutions analytiques de la macro-K de Darcy seront aussi décrites.
- Le chapitre 9 traitera de l'analyse des écoulements rapides dans les milieux très fissurés.
- Et enfin, le chapitre 10 décrira une analyse réalisée sur l'anisotropie hydraulique, phénomène très important pour les milieux poreux, fissurés et très discontinus. L'accent dans cette partie sera mis sur l'analyse des phénomènes de percolation et sur le lien entre la morphologie du milieu et son comportement hydraulique à grande échelle.

Pour réaliser cette étude sur la modélisation, le comportement hydraulique et l'upscaling des milieux poreux et très fracturés de type "karst", différents outils et procédures numériques d'étude ont été utilisés et mis au point :

- Pour la partie écoulements de cette problématique d'étude, nous avons utilisé le code BigFlow (Ababou, 1988 [5], Fig. 3.1), présenté dans la partie suivante ;
- Pour la partie morphologie, les codes MatFrac3D (Bailly et al., 2009 [12], Fig.3.2), Ximul (Tompson et al. 1989 [131]) et BigFlow (pour l'hydro-morphogenèse).
- Pour la partie homogénéisation, nous utiliserons les différents codes numériques précédemment cités.

Commençons par la présentation des codes numériques et des modèles équationnels utilisés pour cette étude.

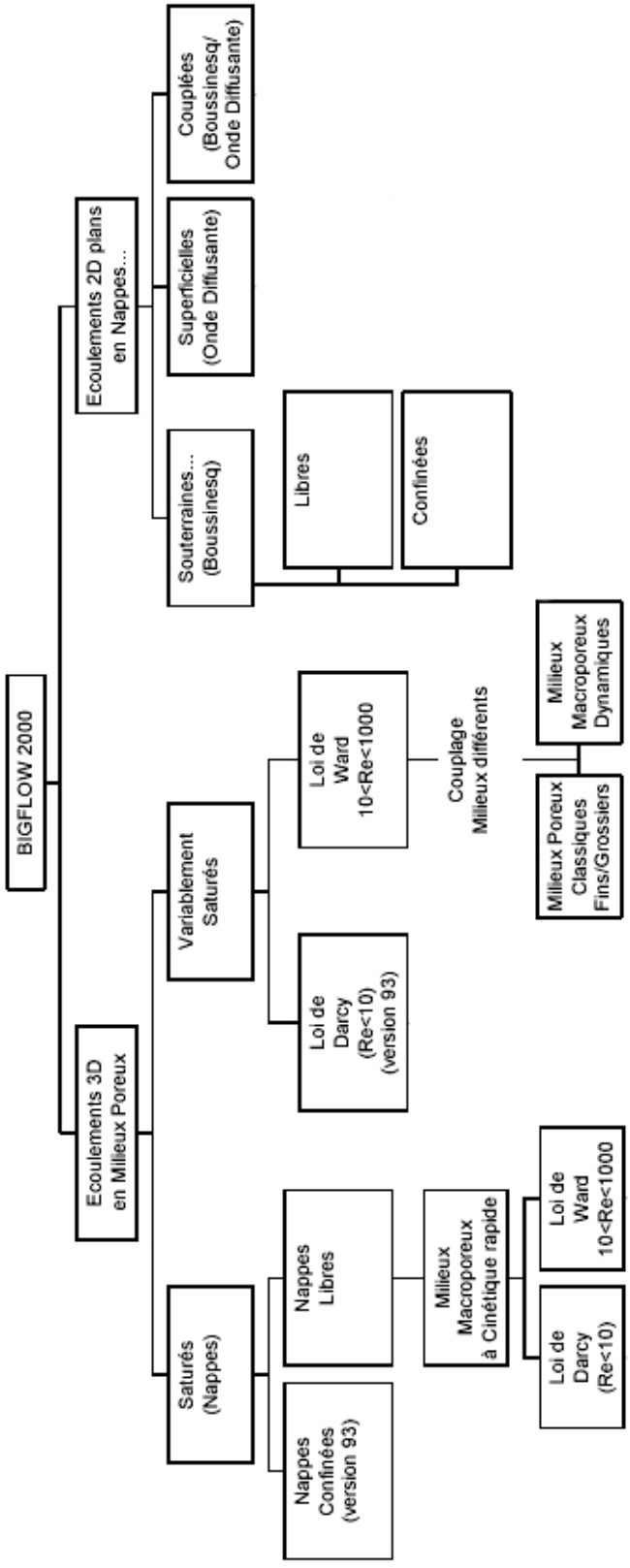


FIG. 3.1 – Les différents modules du code BigFlow, Ababou 1988 [5], d'après Trégarot 2000 [133].

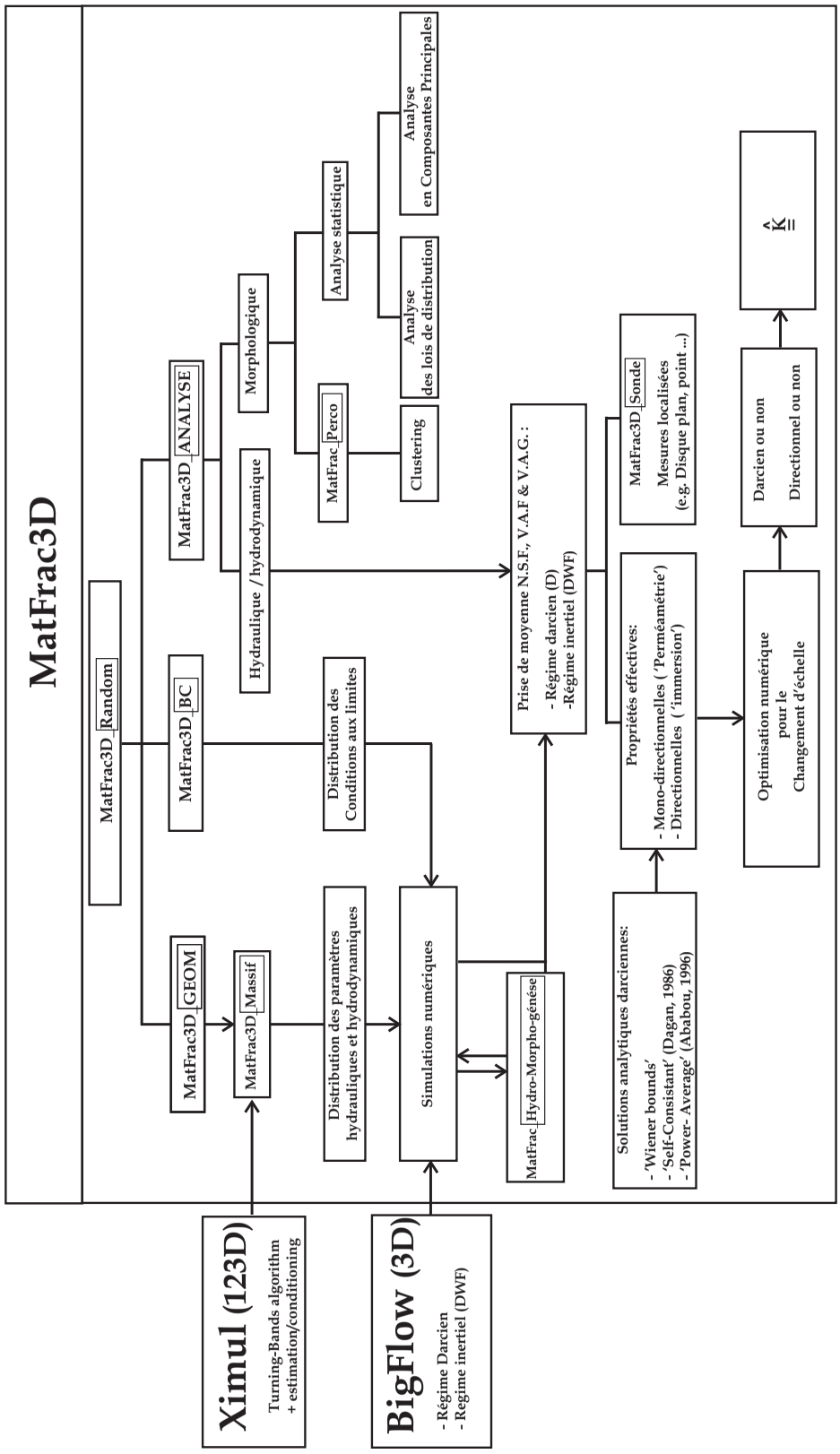


FIG. 3.2 – Organigramme des outils numériques utilisés et développés pour la modélisation et l'étude des milieux très fracturés 3D.

Deuxième partie

Approches pour la modélisation des massifs fissurés et des aquifères karstiques

Chapitre 4

Hydraulique des milieux très fissurés de type 'karst'

Les classes et les régimes d'écoulement qui existent dans les massifs karstiques sont variables dans l'espace et dans le temps. En effet, ils peuvent être pour un secteur donné, saturés, variablement saturés ou partiellement saturés suivant la période de l'année considérée. Si les écoulements sont laminaires dans la matrice poreuse, ils sont inertiels et/ou turbulents dans les parties les plus ouvertes des systèmes karstiques (méso- et macro-morphologie).

La modélisation hydrodynamique 3D des écoulements dans de tels aquifères, nécessite l'utilisation d'un code numérique de résolution des E.D.P. (Equation aux Dérivées Partielles) très robuste et performant pouvant faire face aux non linéarités et à la variabilité spatiale et temporelle existante. Ce code de calcul doit aussi proposer une gamme de modèles équationnels suffisamment vaste pour modéliser les différents comportements observables. Le code numérique BigFlow (Ababou, 1988 [4]), dont voici une brève description, semble adapté pour cette modélisation.

4.1 Le solveur numérique BigFlow

4.1.1 Généralités

Le code BigFlow (Ababou, 1988 [4]) est un outil numérique, qui utilise une méthode de discrétisation en Volumes Finis (V.F.) et qui permet de modéliser dans un domaine parallélépipédique, en détail et à l'échelle locale, des systèmes d'écoulement 3D en milieux poreux hétérogènes saturés, variablement ou partiellement saturés. Ce code a fait l'objet d'une documentation et de tests de validité dans le cadre d'études sur le stokage géologique de déchets nucléaires (Ababou & Bagtzoglou 1993 [7]).

Les équations d'écoulement et les domaines d'applications de BigFlow ont en-

suite été élargis (Trégarot, 2000 [133] et Al Bitar, 2006 [8]) à un ensemble plus vaste d'écoulements avec divers couplages (surface/souterrain, eau douce/eau salée) à travers des milieux et des surfaces poreuses, à saturation variable, à des échelles multidimensionnelles pouvant varier de l'échelle métrique à delta-kilométrique ou supérieure et avec différentes cinétiques d'écoulements.

4.1.2 Structure et algorithmes numériques du code BigFlow

La première partie de ce chapitre numérique présente les équations d'écoulement résolues par le code BigFlow, i.e., les lois de comportements et les paramètres hydrodynamiques, l'équation de conservation de masse et l'équation générale qui en résulte. La structure actuelle de BigFlow est totalement modulaire (Al Bitar, 2006 [8]) et articulée autour de deux algorithmes principaux :

- un algorithme permettant la résolution des écoulements 3D en milieux poreux, utilisé plutôt pour l'échelle locale (métrique) et mésoscopique, et
- un algorithme permettant la résolution des écoulements 2D plans, verticalement intégrés, en nappes souterraines et/ou superficielles, utilisé pour les grandes échelles (intégration avec des Systèmes d'Informations Géographiques : S.I.G.)

L'ensemble des possibilités de modélisation est présenté dans la figure 3.1.
Pour notre étude, nous nous sommes intéressés aux modèles équationnels de perte de charge local 3D de Darcy et de Darcy/Ward-Forchheimer généralisés, respectivement adaptés pour modéliser les écoulements variablements saturés/partiellement saturés dans des milieux microporeux et dans des milieux très grossiers (macroporeux).

L'avantage de l'utilisation du code BigFlow est la formulation des modèles équationnels étudiés et utilisés sous la forme d'une unique "Equation Générique". Ainsi, cette formulation permet de réaliser un couplage automatique entre les milieux finement fracturés ou à porosité matricielle avec des éléments de la fracturation plus ouverts avec des vitesses d'écoulements importantes (i.e. nombre de Reynolds élevés) et à cinétique de remplissage et de vidange rapide.
L'une des limites de l'utilisation d'une seule équation est que seule la phase eau est prise en considération. Or pour pouvoir étudier de manière plus complète les écoulements dans les milieux karstiques, le déplacement de la phase air et son interaction avec la phase eau devraient être pris en considération. Cependant, cette approche à l'avantage d'être très modulable.

Ainsi, en distribuant spatialement les propriétés hydrodynamiques des entités morphologiques et/ou sédimentaires grâce au code MatFrac3D ou Ximul (voir section 5.2), il nous est possible de modéliser les écoulements dans des aquifères complexes comme les aquifères karstiques.

4.1.3 Conditions limites spatialement distribuées

Différents types de conditions aux limites peuvent être appliquées aux frontières du domaine rectanglaire :

- de flux (Neumann),
- de pression (Dirichlet),
- et autres (e.g. drainage gravitaire).

Ces conditions aux limites peuvent être distribuées sur les faces frontières et être de différents types sur une même face. Plus généralement, il est possible en utilisant un module de MatFrac3D (*MatFracBC*), développé au cours de ce travail de thèse, de distribuer spatialement sur chacune des limites du domaine les types de conditions aux limites souhaité à une entité morphologique particulière (i.e. fracture, conduit, matrice,..) ou à un ensemble d'entités.
Voir par exemple la Figure 4.1, où des conditions de flux différentes ont été appliquées, sur la limite se trouvant au premier plan, au niveau de la matrice et au niveau du conduit. Pour les autres frontières du domaine des conditions de flux nul ont été appliquées, sauf au niveau de la limite opposée à celle décrite précédemment où une charge constante à été appliquée.

Enfin, en utilisant le code BigFlow et le code MatFrac3D, il est possible de créer des "cellules d'étude" dans l'ensemble du domaine (module *MatFracSonde*) pour étudier en un point ou en des ensembles morphologiques particuliers, la variation temporelle de la pression en eau, de la vitesse ou de toutes autres grandeurs hydrodynamiques comme l'état de saturation de la phase eau.

4.1.4 Formulation mixte de l'équation de Richards

Le code BigFlow propose, pour modéliser les différents types d'écoulement, l'utilisation d'une seule "Equation Générique" fondée sur une formulation mixte de l'équation de Richards, 1931 [115], généralisée pour décrire des écoulements de comportement et de cinétique différents. L'avantage de cette stratégie de modélisation est de réaliser un couplage "implicite" et "interne" entre différents milieux de cinétique de remplissage et de comportement différents (plutôt que de façon explicite, externe, en couplant différents modules de calculs).
Pour mieux appréhender le modèle équationnel local linéaire/quadratique qui sera présenté dans la section suivante et utilisé pour cette étude, nous étudierons d'abord la manière dont est implémenté le modèle équationnel darcien.

L'équation générale des écoulements en milieux poreux variablement saturés ou partiellement saturés utilisée, est écrite dans un système cartésien *(x, y, z)* et est déduite de la loi de Darcy, 1856 [35], généralisée aux écoulements non saturés par Buckingham, 1907 [26], pour des milieux hétérogènes anisotropes.

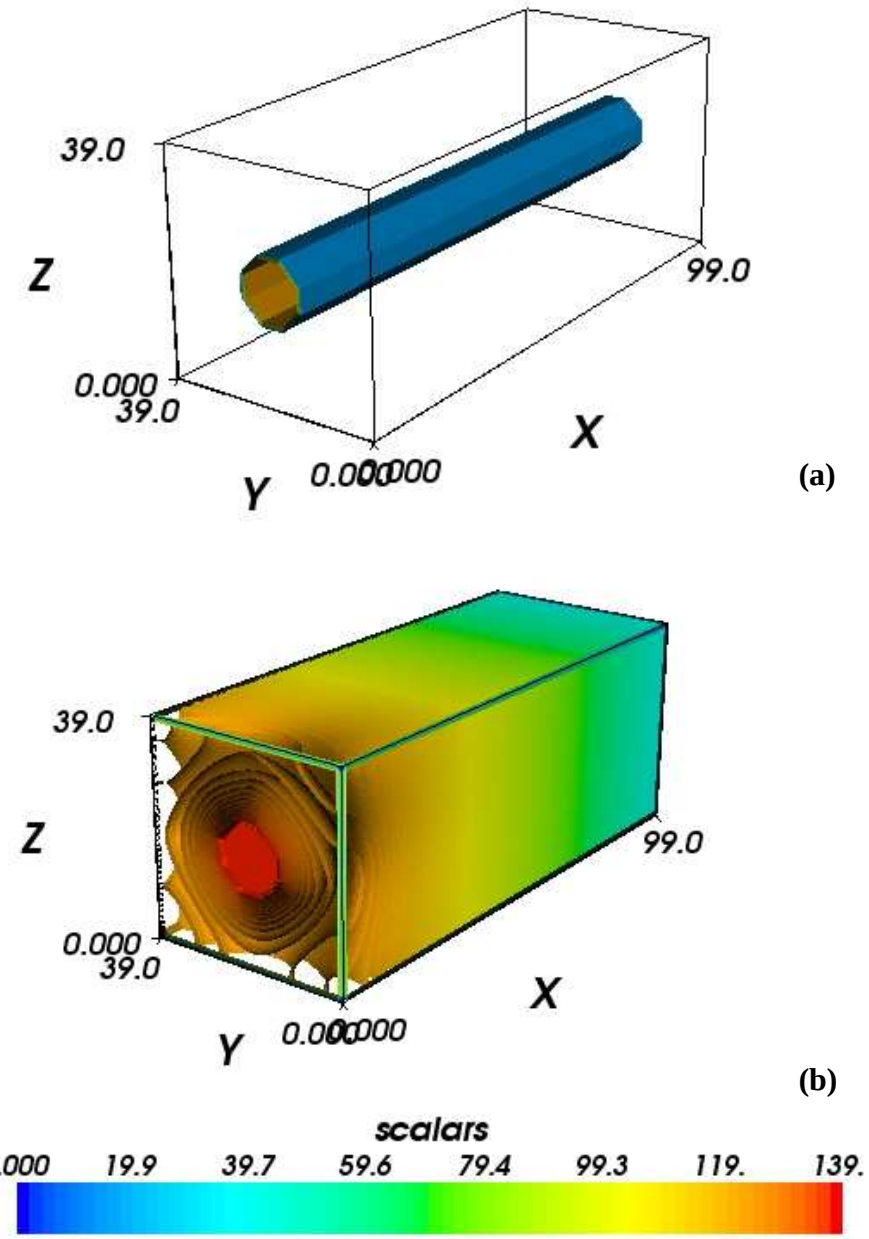


FIG. 4.1 – Un exemple simple de distribution des conditions aux limites réalisés par le module *MatFracBC* de MatFrac3D. (a) Conduit traversant tout le domaine d'étude pour illustrer la procédure de distribution du type de condition aux limites ; (b) iso-surfaces de charge totale obtenues après simulation.

Pour la loi de Darcy (qui traduit macroscopiquement le bilan de quantité de mouvement), nous avons :

$$\vec{q} = -\vec{\vec{K}}(h,\vec{x})\vec{\nabla}H \tag{4.1}$$

où $\vec{\vec{K}}$ est le tenseur des conductivités hydrauliques (m/s) dans le repère principal, $\vec{q}$ exprime une densité de flux (m/s ou $m^3/m^2/s$) et H (m) est la charge hydraulique totale telle que :

$$H = h + \vec{g}_B \cdot \vec{x} \tag{4.2}$$

avec H la charge totale, définie comme la somme du potentiel de pression relatif à la pression atmosphérique, $h = (P_{eau} - P_{atm})/(\rho g)$, et du potentiel gravitaire, $\vec{g}_B \cdot \vec{x} = (-\vec{g}/\|\vec{g}\|) \cdot \vec{x}$, $\vec{g}$ étant le vecteur gravité auquel s'applique la loi de Darcy dans le repère principal d'anisotropie et $\|\vec{g}\| \approx 9.81\ m.s^{-2}$.
La densité de flux est aussi appelée vitesse de filtration et est à relier à la vitesse intrinsèque $\vec{u}$ des écoulements par

$$\vec{q} = \theta_e \vec{u} \tag{4.3}$$

où θ_e (m/m) est la teneur en eau effective du milieu poreux. Par la suite, par commodité, nous noterons $\theta_e = \theta$.

Le couplage entre la loi de comportement et le principe de conservation de masse est alors réalisé de la manière suivante et traduit la décroissance de la teneur en eau par unité volumique de milieu poreux :

$$\frac{\partial\left[M(h,\vec{x}) + \theta(h,\vec{x})\right]}{\partial t} = -div(\vec{q}), \tag{4.4}$$

où t est le temps (s), $\theta(h,\vec{x})$ est la teneur en eau volumique, fonction décroissante de la pression h, et $M(h,\vec{x})$ est le terme de stockage élastique (m^3/m^3) qui traduit l'effet de compréssivité de l'eau. Ce terme peut-être négligé dans les zones insaturées ($M(h,\vec{x}) = 0$ si $h < 0$) et est proportionnel à la pression dans les milieux saturés. Souvent les hydrogéologues utilisent le terme de storativité spécifique S_S, avec ici, par définition :

$$S_S(h,\vec{x}) = \frac{\partial M(h,\vec{x})}{\partial h}. \tag{4.5}$$

Nous pouvons aussi noter que, dans la pratique de la modélisation hydrogéologique est négligé pour les nappes phréatiques peu profondes (sauf pour les milieux très compréssibles comme les tourbes), mais est pris en compte pour l'étude des pompages en nappes profondes, et aussi, pour le cas des formations isolantes ou peu perméables (argile).

L'équation générale des écoulements en milieux poreux est alors obtenue en combinant cette dernière loi de conservation de la matière avec la loi de comportement choisie. Nous obtenons :

$$\frac{\partial\theta(h,\vec{x})}{\partial t} = div\left[\vec{\vec{K}}(h,\vec{x})\vec{\nabla}H\right], \tag{4.6}$$

ou encore, en l'exprimant non plus en fonction de la charge totale, mais du potentiel de pression relative h :

$$\frac{\partial\theta(h,\vec{x})}{\partial t} = div\left[\vec{\vec{K}}(h,\vec{x})\vec{\nabla}h\right] - div\left[\vec{\vec{K}}(h,\vec{x})\vec{g}_B\right] \quad (4.7)$$

Ce modèle mathématique (éq.4.7) est assimilable à la forme mixte de l'équation de Richards, 1931 [115], originalement formulée entièrement en pression (h).

Les hypothèses sous-jacentes à ce modèle équationnel, ont été passées en revue dans Ababou & Gelhar, 1988 [5], Celia & Bouloutas, 1990 [29] et Ababou 2008 [1]. En particulier, on suppose :

- un milieu poreux continu en terme de variables macroscopiques telles que la densité de flux et la conductivité hydraulique effective, dans son repère principal, qui est défini à une échelle supérieure à celle d'un Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.) ;
- une phase air connectée à l'atmosphère, sans action sur les mouvements de l'eau, ce qui n'est pas toujours le cas dans les systèmes très fissurés et karstiques :
- une teneur en eau volumique et une conductivité hydraulique tensorielle bine définie à l'échelle supérieure ou égale au V.E.R., dépendant de la variable d'état h et non de la densité de flux ou du gradient hydraulique ;
- une densité de flux reliée au gradient hydraulique quasi linéairement.

L'équation (éq.4.7), est alors applicable en tout point du domaine d'étude ($\vec{x}$) et en tout temps d'étude (t). Elle est de type parabolique non-linéaire, en milieu non saturée et elliptique linéaire, en milieu saturé.

Pour sa résolution et l'obtention de la solution $h(\vec{x})$ (non saturé) ou $H(\vec{x})$ (saturé) pour tout le domaine d'étude, il faut donc comme données au problème, dans le cas général (parabolique avec zones elliptique) :

- des relations constitutives $\theta(h,\vec{x})$ et $K_{i,i}(h,\vec{x})$ continues ;
- une condition initiale $h(\vec{x},0)$ au temps $t = 0$ dans l'ensemble du domaine de calcul ;
- des conditions aux limites de type Dirichlet (pression h imposée) et/ou de Neumann (densité de flux normale imposée) sur chacune des faces du domaine étudié et pendant toute la durée de l'étude du phénomène à étudier ; ces conditions peuvent être spatialement et/ou temporellement variables.

4.1.5 Formulation numérique et discrétisation spatio-temporelle des équations d'écoulements

Le principe de résolution de l'équation de Richards consiste à trouver les valeurs des potentiels de pression $h_{i,j,k}^{n+1}$ (option générale insaturé) ou de charge hydraulique $H_{i,j,k}^{n+1}$ (dans l'option saturée) au temps discret t^{n+1} et aux noeuds (i,j,k) d'une grille de calcul

superposée au domaine physique d'écoulements, connaissant leurs valeurs au pas de temps précédent $t^n = t^{n-1} + \Delta t^{n+1}$.
Les équations d'écoulements sont alors discrétisées par une méthode de type Volumes Finis (V.F.) en chaque noeud d'une grille composée de mailles rectangulaire de taille constante Δx, Δy, Δz dans chacune des directions $O\vec{x}$, $O\vec{y}$, et $O\vec{z}$. Cette grille forme un domaine de calcul parallélépipédique.
Dans le cas d'écoulements variablement saturés (régis par la forme mixte de l'équa-tion de Richards), les axes peuvent être orientés arbitrairement dans l'espace en orientant le vecteur gravité. L'origine O $(0,0,0)$ de ce repère se trouvant dans le noeud situé dans le coin inférieur gauche du repère.

La discrétisation en espace de l'équation de Richards consiste à appliquer le principe de conservation de masse à chaque cellule du domaine, centrée au noeud (i, j, k). Ainsi, la variation de masse de la cellule (i, j, k) pendant un intervalle de temps Δt, est égale au produit de la durée Δt et de la somme algébrique des flux qui entrent et sortent par les faces de la cellule (i, j, k).

L'équation de Richards est discrétisée en espace selon un schéma centré de 2nd ordre. Les flux entrant ou sortant par les faces de la cellule sont des flux moyens interfaciaux calculés aux positions mi-nodales (entre deux noeuds) par la loi de Darcy généralisée. Par exemple la composante selon $O\vec{x}$ de la densité de flux à la position mi-nodale $(i+1/2, j, k)$ situés entre les noeuds adjacents (i, j, k) et $(i+1, j, k)$ s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$(q_x)_{i+1/2,j,k} = -(K_{xx})_{i+1/2,j,k} \left[\frac{h_{i+1,j,k} - h_{i,j,k}}{\Delta x} + (g_{Bx})_{i+1/2,j,k} \right] \tag{4.8}$$

où $h_{i,j,k}$ et $h_{i+1,j,k}$ sont respectivement les pressions nodales aux positions (i, j, k) et $(i+1, j, k)$; $(K_{xx})_{i+1/2,j,k}$ est la composante selon la direction principale d'anisotropie $O\vec{x}$ de la conductivité mid-modale et $(g_{Bx})_{i+1/2,j,k}$, la valeur mid-nodale de la composante selon $O\vec{x}$, du vecteur opposé à la gravité $\vec{g}_B = -\vec{g}/\|\vec{g}\|$.

La valeur de la conductivité mid-nodale doit être estimée. BigFlow propose quatre schémas de pondération : le maximum, les moyennes harmoniques, arithmétiques et géométriques des conductivités nodales. Nous préférerons au cour de cette étude le schéma de pondération utilisant les moyennes géométriques de K, moins sensible à la taille des mailles (Vauclin, 1979 [134]). Ce schéma de pondération s'écrit, pour la direction principale d'anisotropie $O\vec{x}$:

$$(K_{xx})_{i+1/2,j,k} = \sqrt{(K_{xx})_{i,j,k}(K_{xx})_{i+1,j,k}} \tag{4.9}$$

Compte tenu de l'équation 4.7, l'E.D.P. sous la forme mixte h/θ des écoulements tridi-

mensionnels en milieu anisotropes et hétérogènes, s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right]\\ &+ g_{Bx}\frac{\partial K_{xx}}{\partial x}+g_{By}\frac{\partial K_{yy}}{\partial y}+g_{Bz}\frac{\partial K_{zz}}{\partial z},\end{aligned} \tag{4.10}$$

et devient sous la forme discrète :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)_{i,j,k} &\approx \frac{1}{\Delta x}\left[(K_{xx})_{i+1/2,j,k}\frac{h_{i+1,j,k}-h_{i,j,k}}{\Delta x}-(K_{xx})_{i-1/2,j,k}\frac{h_{i,j,k}-h_{i-1,j,k}}{\Delta x}\right]\\ &+ \frac{1}{\Delta y}\left[(K_{yy})_{i,j+1/2,k}\frac{h_{i,j+1,k}-h_{i,j,k}}{\Delta y}-(K_{yy})_{i,j-1/2,k}\frac{h_{i,j,k}-h_{i,j-1,k}}{\Delta y}\right]\\ &+ \frac{1}{\Delta z}\left[(K_{zz})_{i,j,k+1/2}\frac{h_{i,j,k+1}-h_{i,j,k}}{\Delta z}-(K_{zz})_{i,j,k-1/2}\frac{h_{i,j,k}-h_{i,j,k-1}}{\Delta z}\right]\\ &+ \frac{1}{\Delta x}\left[(g_{Bx})_{i+1/2,j,k}(K_{xx})_{i+1/2,j,k}+(g_{Bx})_{i-1/2,j,k}(K_{xx})_{i-1/2,j,k}\right]\\ &+ \frac{1}{\Delta y}\left[(g_{By})_{i,j+1/2,k}(K_{yy})_{i,j+1/2,k}+(g_{By})_{i,j-1/2,k}(K_{yy})_{i,j-1/2,k}\right]\\ &+ \frac{1}{\Delta z}\left[(g_{Bz})_{i,j,k+1/2}(K_{zz})_{i,j,k+1/2}+(g_{Bz})_{i,j,k-1/2}(K_{zz})_{i,j,k-1/2}\right]\end{aligned} \tag{4.11}$$

L'équation de Richards discrétisée, et appliquée au noeud (i,j,k), fait donc intervenir les valeurs de la pression en sept noeuds, une au noeud (i,j,k) et six autres entourant le noeud (i,j,k). Il reste alors un système matriciel symétrique à sept diagonales non nulles.

Dans BigFlow, le terme de dérivée temporelle est discrétisé selon le schéma d'Euler arrière, schéma totalement implicite du 1er ordre, dont l'expression est donnée ci-dessous :

$$\frac{\theta^{n+1}(h)-\theta^{n}(h)}{\Delta t^{n+1}}-div\left[\vec{\vec{K}}(h)\vec{\nabla}h\right]^{n+1}-div\left[\vec{\vec{K}}(h)\vec{g}_B\right]^{n+1} = 0. \tag{4.12}$$

Une analyse de Fourier montre que le schéma implicite est inconditionnellement stable, du moins pour les problèmes linéaires. Pour les problèmes non linéaires, le schéma implicite n'offre pas une stabilité garantie, mais autorise des pas de temps plus longs que le schéma explicite (démontré expérimentalement par Vauclin et al, 1979 [134]). La mise en place du schéma implicite, nécessite néanmoins l'utilisation de procédure de linéarisation itératives en raison des termes inconnus θ^{n+1} et K^{n+1} qui dépendent de h^{n+1}. Les procédures de Picard ou de Newton-Raphson sont les plus employées aujourd'hui. Celle introduite dans BigFlow est le schéma de Picard modifié (incrémental).

Pour le code BigFlow, il faut ici noter que le calcul s'effectue sur un domaine ne comprenant pas les noeuds frontière car les conditions. Car les limites servent à condenser l'écriture du système sur les seuls noeuds intérieurs. Et les noeuds frontières situés sur les arêtes et aux coins du domaine 3D n'interviennent pas du tout dans le calcul.

4.2 Lois de pertes de charge locales pour les milieux poreux fissurés

Le code de calcul BigFlow possède un modèle d'écoulement 3D avec une loi locale de perte de charge de Darcy (linéaire) et de Darcy-Ward-Forchheimer (linéaire-quadratique) saturée et variablement saturée.

Les écoulements en milieux poreux grossiers sont généralement rapides et caractérisés par de grands nombres de Reynolds. Ils ne peuvent être décrits de façon satisfaisante par la loi de perte de charge de Darcy. En effet, des forces d'inertie dues à la dissipation d'énergie cinétique dans le pores viennent s'ajouter aux forces visqueuses dues aux frottements sur les parois de la phase solide du milieu poreux. Ces forces inertielles sont prépondérantes sur les forces visqueuses pour des écoulements à nombre de Reynolds supérieur à 100. Elles apparaissent dans la loi de perte de charge de type Forchheimer, sous la forme d'un terme quadratique de la vitesse d'écoulement ("$B\|q\|q$"), s'ajoutant au terme linéaire de la loi de Darcy ("A q").

Pour un écoulement isotrope, cette loi s'écrit sous la forme :

$$-\vec{\nabla}H = A\vec{q} + B\|\vec{q}\|\vec{q}. \tag{4.13}$$

Parmi les lois proposées du type de l'équation (4.13), Ward, 1964 [135], propose une loi expérimentale relativement générale qui s'écrit pour un milieu isotrope saturé de la façon suivante :

$$-\vec{\nabla}H = \frac{1}{K}\vec{q} + \frac{C}{(g\nu K)^{1/2}}\|\vec{q}\|\vec{q}, \tag{4.14}$$

avec C=0.55, une constante adimensionnelle définie expérimentalement par Ward, 1964, pouvant aussi être mise en relation avec la constante d'Ergun (Kaviany, 1991 [65]). Il faut souligner que ce type de loi fut formulé au départ par les différents auteurs sous forme mono-directionnelle avec $|q|q$ et parfois même (chez certains auteurs) sous la forme incorrecte q^2 (voir aussi la section 3.3 de revue des modèles d'écoulements utilisés en hydrogéologie karstiques).

La version de BigFlow utilisée propose une forme dérivée de la loi de Ward, 1964 [135], généralisée aux écoulements 3D en milieu partiellement saturés, hétérogènes et anisotropes (loi de Ward modifiée). Cette loi est fondée sur les travaux de Knupp &

Lage 1995 [77] et sur certaines modifications proposées par Ababou & Trégarot documentée dans la thèse de Trégarot, 2000 [133]. La loi de Ward est formulée de la manière suivante :

$$\vec{q} \;=\; -\tilde{K}\vec{\nabla}H \tag{4.15}$$

où $\tilde{K}$ est un pseudo-tenseur des "conductivités hydrauliques modifiées" (à grands nombre de Reynolds), non linéaire à cause du terme quadratique de la loi de Ward.
La pseudo-conductivité hydraulique, $\tilde{K}$, peut être exprimée, pour un milieu anisotrope, de deux façons :

– en fonction du gradient hydraulique $\vec{\nabla}H$:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}(\vec{\nabla}H) = \frac{2\vec{\vec{K}}}{1+\left[1+4\gamma\kappa(\vec{\nabla}H\cdot\vec{\vec{K}}\,\vec{\nabla}H\,)^{1/2}\right]^{1/2}}, \tag{4.16}$$

– en fonction de la densité de flux $\vec{q}$:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}(\vec{q}) \;=\; \frac{\vec{\vec{K}}}{1+\gamma\kappa(\vec{q}\cdot\vec{\vec{K}}^{-1}\,\vec{q}\,)^{1/2}}. \tag{4.17}$$

Dans ces expressions, plusieurs variantes sont proposées pour κ :
i) Knupp & Lage, 1995 [77], proposent d'utiliser $\kappa = (det\vec{K})^{1/3} = (K_{xx}K_{yy}K_{zz})^{1/3}$;
ii) Trégarot, 2000 [133], propose d'utiliser $\kappa = K_{ii}(h,\vec{x})$.
L'expression de la loi de Ward modifiée implémentée dans BigFlow est celle associée à l'expression (4.16) car elle a l'avantage de pouvoir être exprimée en fonction du gradient hydraulique qui est la variable d'état de l'équation générique de BigFlow.

L'équation généralisée finalement résolue est actuellement la suivante :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} \;=\; div\left[\underline{\underline{\tilde{K}}}(h,\vec{\nabla}H,\vec{x})\vec{\nabla}H\right] \tag{4.18}$$

avec :

$$\tilde{K}_{ii}(h,\vec{\nabla}H,\vec{x}) \;=\; \frac{2K_{ii}(h,\vec{x})}{\delta+(\delta^2+4\gamma\kappa(\vec{\nabla}H\cdot\vec{\vec{K}}(h,\vec{x})\vec{\nabla}H)^{1/2})^{1/2}} \tag{4.19}$$

où,
i) $\delta = 1$;
ii) $\gamma = C/(g\nu)^{1/2}$ en $(m/s)^{-3/2}$;
iii) $C = 0.55$, valeur expérimentale d'Ergun ;
iv) $\kappa = K_{ii}(h,\vec{x})$;

v) $i, j, k = x, y, z$.

Pour une formulation alternative sous forme indicielle les lecteurs peuvent se référer à Bailly et al. 2009 [12], ou à la sous-section 9.1.2. Nous pouvons aussi noter ici que, contrairement à l'expression proposée par Knupp et Lage, 1995 [77], l'expression de κ dépend des composantes principales du tenseur des conductivités hydrauliques K_{ii}. Par la suite, nous noterons le pseudo-tenseur de la macro-conductivité hydraulique $\tilde{K}_{ii}^{DWF}$, pour le différencier de la conductivité hydraulique de Darcy, K_{ii}, notée par la suite, $\tilde{K}_{ii}^{D}$.

La pseudo-conductivité, $\tilde{K}_{ii}^{DWF}$, tend vers le tenseur des conductivités hydrauliques originales de Darcy $\tilde{K}_{ii}^{D}$ à petit nombre de Reynolds. Notons aussi que la loi de Darcy/Ward-Forchheimer, linéaire/quadratique peut être transformée directement en loi de Darcy par le jeu de la paramétrisation, en posant $\delta = 1$ et $\gamma = 0$.

La loi de Ward modifiée, introduite dans l'équation de conservation de la masse (éq. 4.7), avec $M = 0$, donne l'équation générale des écoulements 3D à fort nombre de Reynolds, en milieux poreux grossiers hétérogènes anisotropes :

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = div\left[\underline{\underline{\tilde{K}}}^{DWF}(h, \vec{\nabla}H)\vec{\nabla}H\right], \tag{4.20}$$

ou encore,

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = div\left[\underline{\underline{\tilde{K}}}^{DWF}(h, \vec{\nabla}H)\vec{\nabla}h\right] + div(\underline{\underline{\tilde{K}}}^{DWF}(h, \vec{\nabla}H)\,\vec{g}_B), \tag{4.21}$$

dans laquelle l'expression de $\underline{\underline{\tilde{K}}}^{DWF}$ est donnée par l'équation 4.19, les autres termes ayant la même signification que ceux de l'équation 4.7 pour des écoulements variablement saturés à petits Reynolds.

Pour notre étude, nous utiliserons pour caractériser les écoulements un nombre de Reynolds local et macroscopique de Darcy/Ward-Forchheimer, notés respectivement $Re_{DWF}(\vec{x})$ et $Re_i(DWF)$ et défini de la façon suivante :

$$Re_{DWF}(\vec{x}) = \sqrt{\frac{\tilde{K}^D(\vec{x})}{g\mu}}\left|\vec{q}^{DWF}(\vec{x})\right| \text{ et } Re_i(DWF) = \sqrt{\frac{\tilde{K}_i^D}{g\mu}}\left|\tilde{q}_i{}^{DWF}\right|, \tag{4.22}$$

où $\tilde{K}_i^D$ $(m.s^{-1})$ est la macro-conductivité hydraulique effective de Darcy, $\tilde{q}_i^{DWF}$ $(m.s^{-1})$ est la vitesse de filtration moyenne de Darcy/Ward-Forchheimer mesurée dans la direction $O\vec{i}$; $\tilde{K}^D(\vec{x})$ $(m.s^{-1})$ est la conductivité hydraulique locale mesurée de Darcy et $\vec{q}^{DWF}(\vec{x})$ $(m.s^{-1})$ est la vitesse de filtration locale de Darcy/Ward-Forchheimer.

4.3 Utiliser une loi globale pour modéliser les écoulements dans les massifs très fissurés ?

Généralement, les études ménées pour la modélisation des écoulements dans les milieux très fissurés ou karstiques sont réalisées en utilisant deux modules d'écoule-

ments différents pour la matrice et la macro-porosité. Dans cette étude, nous proposons l'utilisation d'une loi locale de perte de charge linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forchheimer. Nous ne réaliserons pas de simulations directes variablement saturées en utilisant ce modèle de charge. Nous nous intéresserons à l'homogénéisation numérique saturée en régime permanent aux grandes échelles des écoulements siégeant dans les milieux très fissurés en utilisant ce modèle local de perte de charge inertiel.

Une limite de l'utilisation de la formulation du modèle équationnel implémenté dans le code Volumes Finis BigFlow est de considérer que la phase air est directement connectée à l'atmosphère (équation de Richards généralisé). La phase air et la phase eau n'interagissent donc pas. Cependant, cette limite est "compensée" par la grande modularité proposée. Ici, nous pouvons noter que l'interaction de l'air avec la phase eau pourrait être envisagée en prenant appui sur les travaux réalisés par Al Bitar, 2006 [8] avec BigFlow. Dans cette étude, l'auteur a modélisé en 3D l'interaction et le déplacement relatif d'un biseau d'eau salée dans les aquifères côtiers. L'approche "interface abrupte" utilisée pourrait être étendue.

La loi phénoménologique locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer implémentée dans BigFlow nous permettra de traiter les écoulements tridimentionnels ayant lieu dans les massifs karstiques pour des nombres de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer allant jusqu'à 1000 (limite de validité du modèle). Pour des écoulements ayant une vitesse d'écoulement locale plus rapide, comme c'est parfois le cas dans la macro-morphologie des aquifères karstiques, ce modèle équationnel devrait être quelque peu revu.

Nous allons maintenant présenter les différents outils et voies de modélisations utilisés pour représenter les éléments de la morphologie des aquifères karstiques (méso- et macro-porosité).

Chapitre 5

Modélisation morphologique des karsts (massifs très fissurés)

5.1 Introduction : morphogenèse/karstogenèse

Pour réaliser une modélisation aux grandes échelles des écoulements dans les milieux très fissurés 3D et plus particulièrement dans les aquifères karstiques et ceci à l'échelle d'un bassin hydrogéologique, des données sur la morphologie "active" de ces aquifères sont nécessaires. Or ces données sur la méso-morphlogie et la macro-morphologie qui conduissent les écoulements sont très restreintes. En effet, si, à l'échelle locale, nous pouvons nous rattacher à une densité de fracturation et à l'échelle régionale à des éléments morphologiques comme la présence d'accidents majeurs et de certains conduits karstiques et autres entités morphologiques associées à la karstogenèse (doline, lapiez,...), la grande majorité des méso- et macro-morphologie est inaccessible à une mesure directe. De plus comprendre l'état d'organisation global et des connectivités entre les différentes entités morphologiques du karst actif n'est pas trivial.
Un bassin hydrogéologique karstique donné est lié à une histoire, un enchaînement d'évènements, qui lui est propre. L'évolution et la création de ce système de drainage 3D des massifs carbonatés dépend de la fracturation d'un secteur, de son histoire tectonique, mais aussi des structures sédimentaires constituant le réservoir. Pouvoir reconstituer cette évolution en fonction des évènements tectoniques et de l'évolution de son niveau de base pourrait être un atout indéniable dans la "reconstruction" d'un système karstique pour une lithologie donnée.

Nous verrons dans la dernière partie de ce chapitre consacrée à la détermination des paramètres morphlogiques quelques idées sur la genèse des systèmes karstiques liées au comportement hydraulique de l'aquifère.

5.2 Milieux discrets : modèles booléens

Dans un premier temps, différentes classes d'objets volumiques booléens à morphologies simples, mais physiquement réalistes et pertinentes avec les structures morphologiques karstiques ont été créées. Ces objets peuvent être introduits dans une matrice poreuse continue (pouvant être elle-même hétérogène), et être conditionnés ou non sur des données tectoniques ou sédimentaires reconnues comme pertinentes à l'échelle d'observation considérée.

Parmi les types "d'objets" géomorphologiques utilisés pour cette étude, nous pouvons distinguer : des objets filaires, des objets plans de section circulaire, elliptique ou rectangle à ouverture constante ou variable, des objets tubulaires à section elliptique, des ellipsoïdes et des troncs de cône (Fig. 5.1).

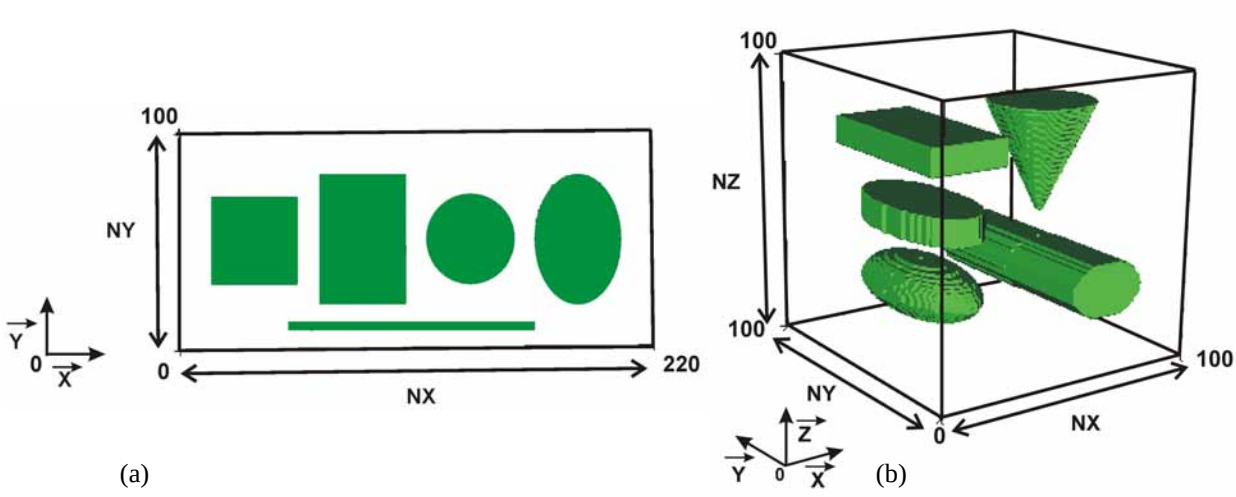


FIG. 5.1 – Objets volumiques discrets 2D (a) et 3D (b) utilisés pour la génération de milieux booléens.

La procédure de génération de ces objets consiste en une projection, sur une grille régulière de voxels (3D) ou de pixels (2D), par le code MatFrac3D, de données statistiques ou déterministes sur les caractéristiques morphologiques et hydrodynamiques contenues par ces différents objets. Les caractéristiques morphologiques (ouverture, tailles, diamètres, orientation) ainsi que les propriétés hydrauliques et hydrodynamiques de ces objets peuvent suivre différentes lois de distribution ou être imposées de manière déterministe. Le choix des propriétés statistiques à appliquées aux grandeurs et propriétés des objets se fait grâce au module *MatFracRandom* du code MatFrac3D.

Les distributions probabilistes sélectionnées et utilisables sont les suivantes :

- les centroïdes des objets suivent une distribution de Poisson,
- les paramètres de taille des objets (diamètres, ouvertures, extensions) peuvent suivre différentes lois : Uniforme, Gaussienne, Exponentiel et loi Puissance (Pa-

reto) ;
- les propriétés intrinsèques des objets (perméabilité, porosité,...) peuvent varier d'un objet à l'autre (d'une fissure à l'autre) en suivant une loi de probabilité Uniforme ou Log Normale (les autres lois de distribution précédemment citées sont aussi utilisables).

De même, les angles propres de la rotation de chacun des objets peuvent être aléatoires ou déterministes et orientés préférentiellement ou non suivant les directions principales des contraintes tectoniques d'un secteur, en jouant sur la distribution statistique des angles propres de la rotation.
Pour orienter ces différents objets, il est possible d'utiliser deux angles de rotations (θ et ϕ ou φ) ou trois angles (θ, ϕ ou φ et α). Nous ferons la distinction entre les angles ϕ et φ, qui correspondent à deux définitions différentes de l'orientation du vecteur normal des objets (Fig. 5.2).

Par exemple, pour un milieu fracturé d'orientation isotrope contenant des plans rectangulaires ou elliptiques d'orientations statistiquement isotrope, nous pourrons utiliser :
- une distribution Uniforme de θ entre $[0, 2\pi]$;
- une distribution Uniforme de $cos(\varphi)$ entre $[-1, 1]$;
- une distribution Uniforme de α entre $[0, 2\pi]$.

Deux variantes sont pour le moment implémentées dans le code MatFrac3D pour orienter ces différentes classes d'objet. Ces deux variantes utilise les deux matrices de rotations suivantes :
- la matrice de rotation éq. 5.1, associée à la Figure 5.2 **A** ;
- et la matrice de rotation éq. 5.2, associée à la Figure 5.2 **B**.

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{W}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\phi cos\theta & cos\phi sin\theta & sin\phi \\ sin\alpha sin\phi cos\theta - cos\alpha sin\theta & sin\alpha sin\theta sin\phi + cos\alpha cos\theta & -sin\alpha cos\phi \\ -cos\alpha sin\phi cos\theta - sin\alpha sin\theta & -cos\alpha sin\theta sin\phi + sin\alpha cos\theta & cos\alpha cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{W}_1 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_3 \\ \vec{V}_3 \\ \vec{W}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi cos\theta & cos\varphi sin\theta & -sin\varphi \\ -sin\alpha sin\varphi cos\theta - cos\alpha sin\theta & -sin\alpha sin\theta sin\varphi + cos\alpha cos\theta & -sin\alpha cos\varphi \\ cos\alpha sin\varphi cos\theta - sin\alpha sin\theta & cos\alpha sin\theta sin\varphi + sin\alpha cos\theta & cos\alpha cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{U}_1 \\ \vec{V}_1 \\ \vec{W}_1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

Par cette procédure, pour un échantillon de roche donné ou un secteur géologique à étudier, nous pourrons conditionner le mieux possible les discontinuités en fonction des observations de terrain (orientation et paramètres hydrodynamiques). Cependant, une procédure de reconstruction optimale des objets à partir de données tel que les orientations et traces de fractures peut s'envisager par l'emploi de procédure de recuit simulé, Canamon 2006 [27]. Nous n'avons pas mis en oeuvre ce type de procédure ici.

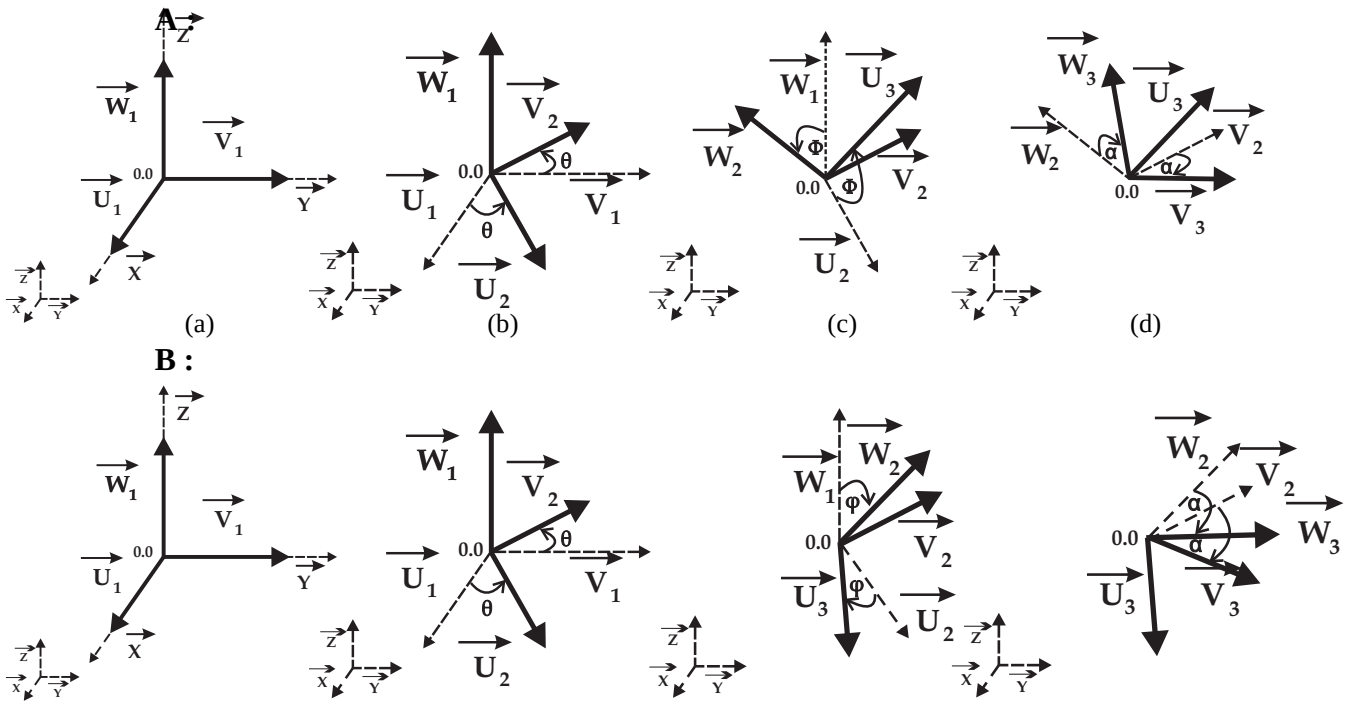


FIG. 5.2 – Séquence des rotations utilisées pour orienter les objets 3D dans l'espace 3D par le code MatFrac3D. En utilisant **A** la matrice de rotation éq. 5.1 et **B** la matrice de rotation éq. 5.2. (a) Etat initial, (b) première rotation θ, (c) seconde rotation, ϕ ou φ, et (d) troisième rotation α.

Des générateurs géomorphologique utilisant des procédures de salves en prenant en considération la hiérarchisation et l'ordre d'apparition des évènements tectoniques ou des déformations pourraient être envisageables. Pour le moment, nous n'envisageons que des méthodes fondées sur la génération statistique de classes d'objets via notre code morphologique MatFrac3D. Dans la version de MatFrac3D utilisé ici, il est seulement possible de générer des milieux composites par "famille de génération". Chacune de ces générations pouvant se faire en utilisant des paramètres statistiques identiques ou indépendants d'une famille de génération à l'autre.
La figure 5.3 présente deux exemples de milieux binaires génrérés par le code MatFrac3D et son module *MatFracRandom*.

Ces deux milieux sont constitués de :

- pour le milieu (a) : de 50 fractures circulaires planes, de rayon uniformément répartis entre [5 m et 25 m], de centroïdes poissonniens et d'orientation statistiquement isotrope ; la matrice de rotation utilisée est celle décrite par l'équation 5.2,
- pour le milieu (b) : d'un conduit de section circulaire, d'un 'épikarst' constitué de 100 fractures poissonniennes d'orientation uniforme et de diamètres unifor-

mément répartis entre [5 m et 25 m] dans une zone comprise entre [70 et 100 m] et de 50 fractures poissonniennes d'orientation uniforme et de rayons suivant une distribution de Pareto de paramètre alpha égale à 2.5 entre [25 et 50 m] dans tout le domaine ; la matrice de rotation utilisée est celle décrite par l'équation 5.2.

L'ensemble des objets présentés dans ces deux figures sont insérés dans une matrice uniforme.

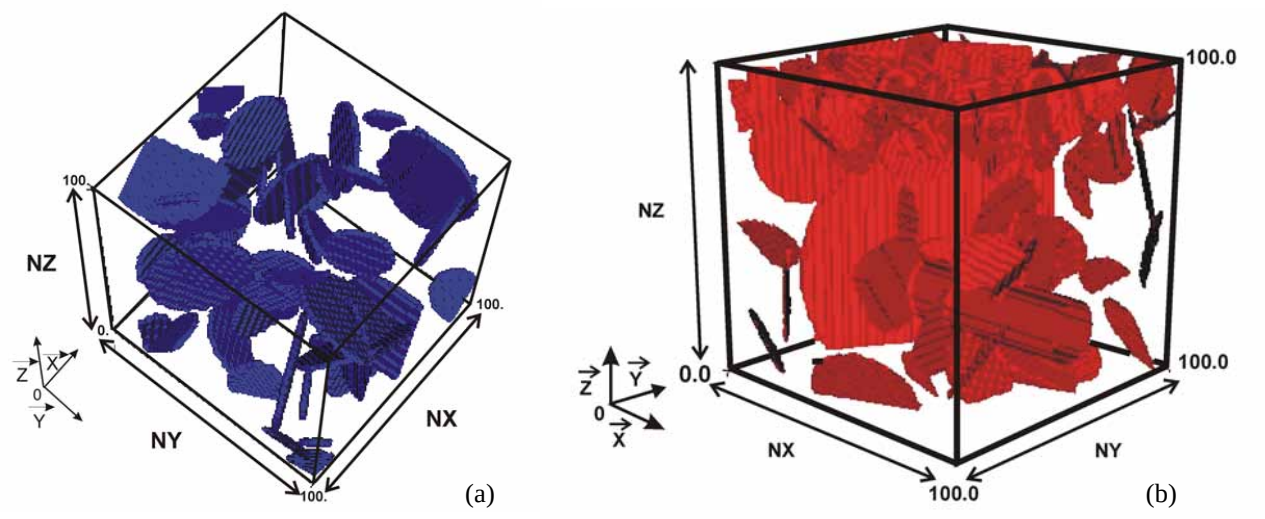


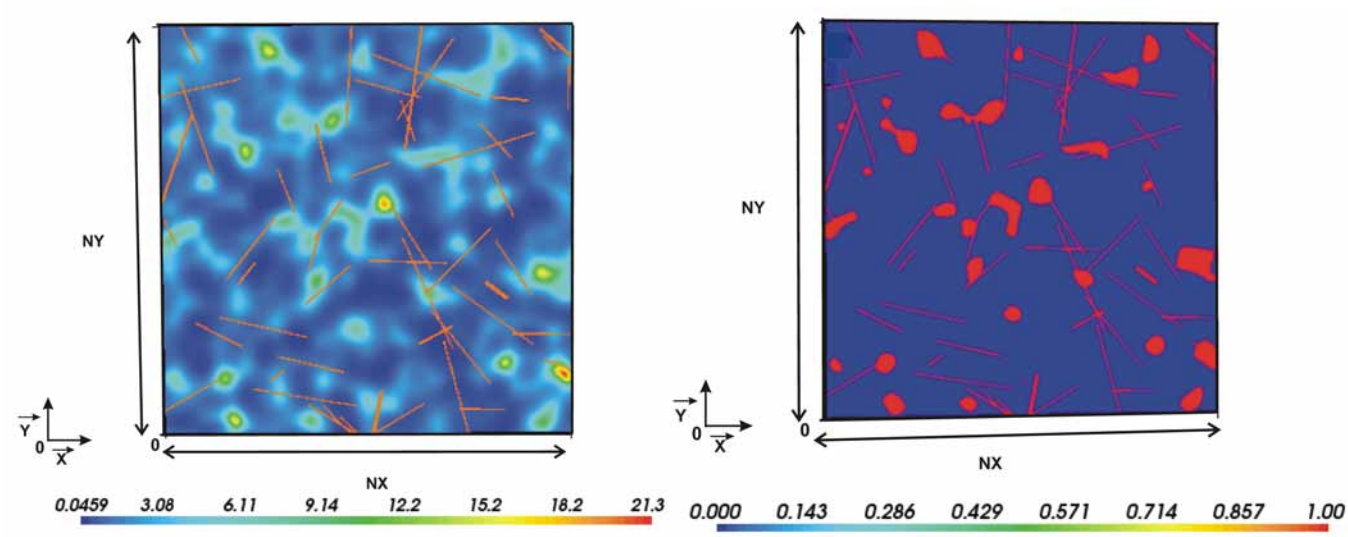
FIG. 5.3 – (a) Milieu fracturé 3D poissonnien et (b) 'Karst synthétique'.

Pour aller plus loin, la génération des différentes familles de fractures pourrait aussi être conditionnée par les propriétés mécaniques et rhéologiques des milieux sédimentaires étudiés, e.g. par le pourcentage d'argile, etc. La distribution des propriétés rhéologiques peut être obtenue par des objets de morphologie simple comme des ellipsoïdes (lentilles d'argile) ou des rectangles (strates) dont les propriétés internes (e.g. pourcentage d'argile) pourront être appliquées de manière déterministes ou aléatoires. Enfin, l'utilisation de champs continus de paramètres aléatoires auto-corrélés, qu'il est possible de générer par exemple avec Ximul fondé sur l'algorithme des bandes tournantes [131], pourrait être envisageable. Ces implémentations semblent réalisables.

5.3 Milieux continus hétérogènes et mixtes

La 'reconstruction' et/ou la construction des morphologies observables sur le terrain ou déduites par les différentes techniques du traitement du signal des débits des sources, peut nécessiter l'utilisation de méthodes statistiques permettant la génération de milieux continus conditionnés par les données morphologiques et sédimentaires. Ces éléments sont alors vus comme des variables du champ de conductivité hydraulique ou de porosité à ajuster pour réaliser la modélisation à l'échelle du bassin hydraugéologique. Si nous désirons réaliser cette optimisation de la méso- et macro-morphologie des aquifères karstiques notamment par les mesures de débits aux sources karstiques, il est évident qu'il faut utiliser le modèle local de perte de charge approprié.

Cependant, il est probable que cette procédure ne soit pas suffisante, notamment pour reproduire la réponse rapide des aquifères karstiques suite à un évènement pluvieux. Car ces champs peuvent surtout permettre de représenter la partie matricielle ou finement fracturée des aquifères karstiques intervenant dans la réponse à long terme de ces aquifères.



(a) (b)

FIG. 5.4 – Objets discrets 2D insérés dans une matrice hétérogènes des $K^D(\vec{x})$, (b) résultats d'un seuillage par l'application de l'argument 'self-consistent' et binarisation du champs $K^D(\vec{x})$ seuilés.

Pour faire face à ce problème et ajouter des éléments de la méso et macro-porosité des aquifères karstique, autre que des objets discrets, une option de seuillage et de binarisation de champs continus est réalisable par le module *MatFracMassif* du code MatFrac3D.

L'option de seuillage utilise un argument de type "self-consistent" (Bailly et al. [12]). Ce terme ("self-consistent") étant utilisé ici dans un sens assez général qui reste à justi-

fier plus précisément par la suite. Le seuil de perméabilité est déterminé par l'utilisateur mais il pourra dans le futur être automatisé.

Deux optionalités sont possibles, équation 5.3 :

- Les valeurs de la matrice continue inférieures à ce seuil peuvent soit être considérées comme constantes, K_M , Fig. 5.4 (b) et Fig. 5.5 (d),
- ou soit rester spatialement continues, Fig. 5.5 (c),
- et les valeurs supérieures au seuil, K_M^{CUTOFF}, peuvent soit avoir les mêmes propriétés que les objets discrets, K_F, Fig. 5.4 (b) et Fig. 5.5 (c) et (d), ou avoir une propriété différente.

$$\begin{cases} si\ lnK(x,y,z) \leq K_M^{CUTOFF} \rightarrow lnK(x,y,z) = K_M\ ou\ lnK(x,y,z) = lnK(x,y,z) \\ si\ lnK(x,y,z) > K_M^{CUTOFF} \rightarrow lnK(x,y,z) = K_F^{CUTOFF} \end{cases} \tag{5.3}$$

Si la phase matricielle inférieure au seuil est considérée comme constante, la première étape est une étape de binarisation, Fig. 5.4 (b) : $K_M = 0$ et $K_F = 1$. Une fois cette étape franchie, qui peut être vue comme un état initial à un problème d'optimisation du champ de conductivité hydraulique du milieu karstique, il sera possible de modifier la propriété de la phase matricielle et fracture.

Cependant, cette dernière procédure, bien que permettant une modularité et une flexibilité supplémentaires pour l'obtention du champ de perméabilité nécessaire pour simuler les écoulements dans les massifs karstiques et la réponse d'une source à un évènement pluvieux, ne permet pas de rendre compte de l'histoire évolutive des aquifères karstiques responsables de l'état de connectivité des macro-morphologies entre elles. Des méthodes génétiques, conditionnées par l'évolution des conditions aux limites du système, notamment l'évolution du gradient hydraulique régional le permettraient.

Pour compléter ces méthodes de reconstruction et de construction des morphologies des massifs karstiques, ces approches doivent être complétées par des méthodes d'érosion/dissolution. Pour cette étude, nous avons commencé à mettre au point un algorithme d'hydro-morphogenèse, encore embryonnaire, dont la procédure est en partie empirique, permettant le couplage entre l'évolution de la porosité et donc de la perméabilité des secteurs étudiés avec l'évolution des écoulements régionaux (karstogenèse simplifiée).

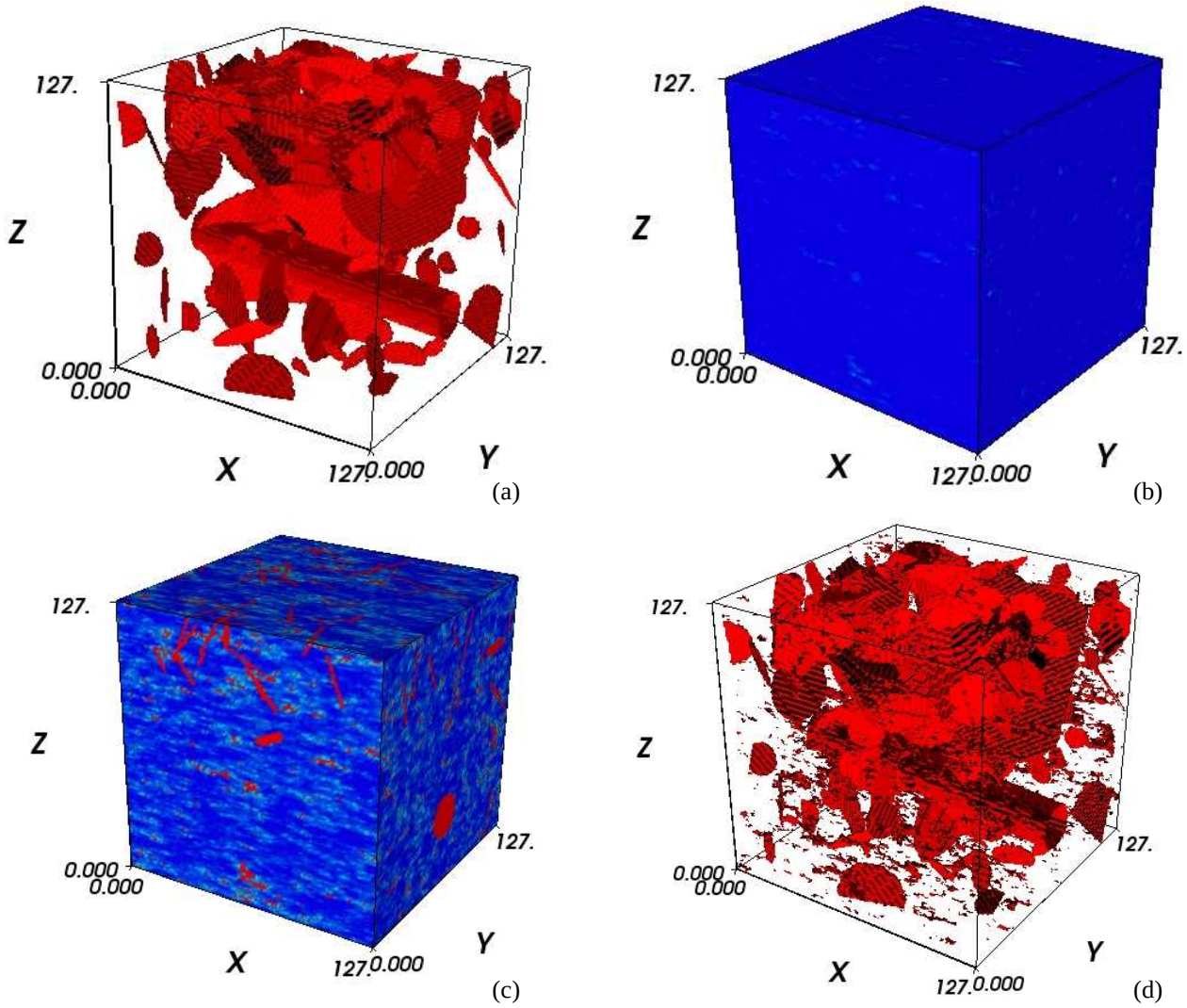


FIG. 5.5 – (a) Milieux binaires constitués uniquement d'objets discrets poissonniens ; (b) matrice hétérogène utilisée. Résultats d'un seuillage et d'application de l'argument "self-consistent" : (c) une partie de la matrice est restée hétérogène et (d) la matrice hétérogène est devenue constante.

5.4 Couplage perméabilité/écoulement : algorithme de morphogenèse

5.4.1 Problématique et motivation de l'étude

Plusieurs méthodes de morphogenèse à l'échelle du massif karstique ont été développées dans la littérature. Ces modèles sont en majorité fondés sur le couplage d'une équation de transport et de réaction/dissolution des carbonates ou sur des modèles stochastiques d'agrandissement des vides par des 'particules gloutonnes', e.g. Jacquet, 1998 [59].
Pour qu'il puisse y avoir dissolution et karstogenèse, il faut :

- que les eaux chargées en acides forts responsables de la karstogenèse soient renouvelées,
- que les ions hydrogénocarbonates, magnésiums et calciums provenant de la dissolution de la matrice soient évacués,
- que les écoulements soient suffisamment développés aux lieux où s'opère la karstogenèse, pour évacuer les argiles de décalcification et empêcher la précipitation de carbonates.

Partant de ces constations simples, nous sommes en droit de supposer que cette érosion, ce taux de dissolution/érosion, est lié de manière plus ou moins directe à un nombre de Reynolds local.

Pour cette étude, nous avons commencé à mettre au point une méthode itérative d'érosion numérique (module $Hydro-morphogenese$ de MatFrac3D). Le point de départ de cette méthode est un champ de porosité, $\phi_w(\vec{x},t)$ à $(t=t_0)$, créé soit en utilisant des milieux statistiques issus de MatFrac3D soit de Ximul. Ce modèle morphologique nous servira de "substrat" pour la procédure d'hydro-morphogenèse.
Le champ de porosité, le "substrat", est utilisé à chaque itération pour le calcul d'un champ de perméabilité, k($\vec{x},t$), (Kozeny-Carman) :

$$k(\vec{x},t) = \frac{1}{36*C_0}\left(\frac{\phi_w^3(\vec{x},t)d^2(\phi_w(\vec{x},t))}{(1-\phi_w^2(\vec{x},t))}\right), \tag{5.4}$$

où $F=36*C_0$ avec $C_0=4.8$ est un facteur de forme, $d(\phi_w(\vec{x},t))$ le diamètre moyen des grains et ϕ_w la porosité de la cellule unitaire considérée (une autre formulation avec la surface spécifique des solides est également possible). Pour simplifier, dans la suite, nous avons fixé $d(\phi_w(\vec{x},t))$ = d_0 = 1 m (constant quelque soit t), d'où :

$$k(\vec{x},t) = \frac{1}{36*C_0}\left(\frac{\phi_w^3(\vec{x},t)d_0^2}{(1-\phi_w^2(\vec{x},t))}\right), \tag{5.5}$$

Noter que les "grains" de ce modèle peuvent représenter aussi bien des agrégats. Ce premier modèle est loin d'être parfait, notamment à cause des problèmes de tenue mé-

canique des agrégats lors de l'érosion, mais il permet de tester l'idée principale sous-jacente.

La perméabilité locale obtenue par cette formule sera bornée par une conductivité hydraulique maximale K^D_{max}, déterminée arbitrairement.

5.4.2 Modèle d'érosion

Pour répondre à ce problème, nous allons résoudre une équation générale de bilan instantanée pour la masse de phase solide. Tout d'abord, définissons la fraction volumique des solides :

$$\phi_s(\vec{x},t) = \frac{volume\ de\ la\ phase\ solide}{volume\ total} = 1 - \phi_w(\vec{x},t), \tag{5.6}$$

avec $\phi_w(\vec{x},t)$ et $\phi_s(\vec{x},t)$ en m^3/m^3 respectivement la fraction volumique d'eau (porosité) et de solide dans un volume unitaire à (x,y,z) à l'instant t. Ainsi, $\rho_s\phi_s(\vec{x},t)$ est la masse de solide pour une entité de volume élémentaire et $\rho_w\phi_w(\vec{x},t)$ la masse de fluide par entité de volume élémentaire.

L'équation locale de bilan s'écrit pour la phase solide :

$$\frac{\partial(\rho_s\phi_s(\vec{x},t))}{\partial t} + div(\vec{F}_A + \vec{F}_D) - R \;=\; 0 \tag{5.7}$$

avec $\vec{F}_A = \rho_s\phi_s(\vec{x},t)\vec{v}$, $\vec{F}_D = -D\cdot\vec{\nabla}(\rho_s\phi_s(\vec{x},t))$ et $R = R(\rho_s,\phi_s(\vec{x},t),\vec{v})$; respectivement, $\vec{F}_A$ est le terme d'advection, $\vec{F}_D$ le terme de diffusion et R le terme source/puits de masse solide. Pour cette étude, la masse volumique de la phase solide, ρ_s, et de la phase eau, ρ_w, seront considérées comme constantes, nous pouvons donc écrire cette équation de bilan en terme de volume de matière :

$$\frac{\partial(\phi_s(\vec{x},t))}{\partial t} + div(\vec{f}_A + \vec{f}_D) = r_s(\vec{x},t) \tag{5.8}$$

avec

$$\vec{f}_A = \phi_s(\vec{x},t)\vec{v}, \quad \vec{f}_D = -D\cdot\vec{\nabla}(\phi_s(\vec{x},t)) \quad et\ r_s(\vec{x},t) = f(\phi_s(\vec{x},t),\vec{v}) \tag{5.9}$$

où la densité de flux $\vec{f}$ est en $[m\cdot s^{-1}]$ et le taux de réaction r_s est en $[m^3.m^{-3}\cdot s^{-1}]$ (r=rsurface +rvolume).

Pour une première approche, nous ne prendrons pas en considération la dispersion ni le transport de matière de la phase solide dans le domaine d'étude. Nous étudierons seulement la destruction de la masse solide (ou la création de masse fluide) suite à un processus temporel dépendant uniquement de la vitesse de l'écoulement, plus particulièrement de la norme de la vitesse, $|\vec{v}|$, régnant dans chacun des volumes élémentaires discrets considérés, de volume *dx*dy*dz*. Cette première approximation correspond

grossièrement à un transport de tous les produits de dissolution et érodés localement jusqu'à l'éxutoire, nous ne pourrons donc pas prendre en considération la précipitation des carbonates dissous après ce processus dans une autre partie du domaine. Nous avons alors :

$$\phi_s(\vec{x},t)+\phi_w(\vec{x},t) \quad = \quad 1, \tag{5.10}$$

donc

$$\frac{\partial(\phi_s(\vec{x},t))}{\partial t} \quad = \quad r_s(\vec{x},t) = f(\phi_s(\vec{x},t),|\vec{v}|), \tag{5.11}$$

L'approche utilisée dans cette étude, considère que la variation locale de masse de solide est liée à la norme de la vitesse, $|\vec{v}|$, dans le volume localement. Pour plus de facilité au développement, nous raisonnerons par rapport à la variation de la masse de fluide par unité volumique, liée à la norme de la vitesse du fluide calculée. Comme précédemment, la densité du fluide est considérée comme constante. Nous avons donc :

$$\frac{\partial(\phi_w(\vec{x},t))}{\partial t} \quad = \quad -\frac{\partial(\phi_s(\vec{x},t))}{\partial t} = -f(\phi_w(\vec{x},t),|\vec{v}|) = r_w(\vec{x},t)\,. \tag{5.12}$$

Pour cette étude, plaçons nous en coordonnée Lagrangienne. Le raisonnement suivant est valable pour un écoulement 1D, le long des trajectoires.

Soit une coordonnée lagrangienne locale $X(t)$, attachée à une particule fluide chargée d'acide carbonique :

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} \quad = \quad v(X(t)) \tag{5.13}$$

que nous simplifions en :

$$X(t) \quad = \quad X(0)+v\cdot t\,. \tag{5.14}$$

Ecrivons maintenant une loi de Fick en coordonnée lagrangienne locale, attachée à une particule fluide :

$$\frac{\partial\phi_w(\vec{x},t)}{\partial t} \quad = \quad D\left(\frac{\partial^2\phi_w(\vec{x},t)}{\partial X^2}\right). \tag{5.15}$$

En insérant $X(t)$ dans la dernière équation, et en considérant un temps caractéristique de diffusion ou de dissolution limitée par la diffusion, "t_d" ; nous allons alors "geler" ce temps ($t = t_d$ dans l'EDP de Fick) et nous en déduisons l'expression suivante :

$$\frac{\partial\phi_w(\vec{x},t)}{\partial t} \quad = \quad D^*\left(\frac{\partial^2\phi_w(\vec{x},t)}{\partial v^2}\right). \tag{5.16}$$

Par une analyse dimensionnelle, nous proposons l'expression suivante pour le pseudo-coefficient de diffusion/érosion/dissolution, D^* en $[m^2.s^{-2}.s^{-1}]$:

$$D^*(\vec{x},t) = \frac{1}{t_d}\left(\frac{g\nu}{K^D}\right), \tag{5.17}$$

où g est la gravité en $[m.s^{-2}]$, K^D la conductivité hydraulique de Darcy en $[m.s^{-1}]$, ν la viscosité cinématique de l'eau en $[m^2.s^{-1}]$ et t_d en $[s]$ un temps caractéristique des phénomènes d'altération de l'encaissant.

Pour généraliser au cas 3D la formulation précédemment obtenue, il est nécessaire de prendre en considération les contributions des différentes composantes du vecteur vitesse local. Nous proposons d'utiliser la norme du vecteur vitesse 3D local. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial \phi_w(\vec{x},t)}{\partial t} = D^*\left(\frac{\partial^2 \phi_w(\vec{x},t)}{\partial |\vec{v}|^2}\right). \tag{5.18}$$

Ainsi,

$$\frac{\partial (\phi_w(\vec{x},t))}{\partial t} = \frac{1}{t_d}\left(\frac{g\nu}{K^D}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi_w(\vec{x},t))}{\partial |\vec{v}|^2}\right) \tag{5.19}$$

De la même manière, par analogie avec la solution analytique de la seconde loi de Fick, nous obtenons pour le taux d'érosion/dissolution (accroissement de la porosité) :

$$\frac{r_{w,0} - r_w(\vec{x},t)}{r_{w,0} - r_{w,\infty}} = erf\left(\frac{|\vec{v}|}{2\sqrt{D^* t}}\right), \tag{5.20}$$

où $r_{w,0}$ est la condition limite pour $|\vec{v}| = 0$ et $r_{w,\infty}$ pour $|\vec{v}| \longrightarrow \infty$. Nous avons :

- $r_{w,0} = 0$ et
- $r_{w,\infty} = 1$.

Ainsi,

$$r_w(\vec{x},t) = erf\left(\frac{|\vec{v}|}{2\sqrt{D^* t}}\right) \iff r_w(\vec{x},t) = erf\left(\frac{|\vec{v}|\ \sqrt{t_d}}{2\sqrt{t}}\sqrt{\frac{K^D}{g\,\nu}}\right), \tag{5.21}$$

ou encore en termes du nombre de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer local ($Re_{DWF}(\vec{x})$),

$$r_w(\vec{x},t) = erf\left(\frac{Re_{DWF}(\vec{x})}{2\sqrt{\frac{t}{t_d}}}\right). \tag{5.22}$$

Le taux de matière solide érodé est donc égal à :

$$r_s(\vec{x},t) = -r_w(\vec{x},t) = -erf\left(\frac{Re_{DWF}(\vec{x})}{2\sqrt{\frac{t}{t_d}}}\right). \tag{5.23}$$

La procédure itérative d'érosion/dissolution utilisée, consiste alors à réaliser n expériences numériques d'écoulement et à calculer à chaque pas de temps numérique le taux de matière érodé. Nous partons d'un champ de conductivité initial, $K^D(\vec{x},t_0)$, obtenu à partir du champ de porosité initial, le "substrat" $\phi(\vec{x},t_0)$. Après une première itération d'écoulement, un champ de nombres Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer, $Re_{DWF}(\vec{x},t_0+\delta t)$, sera obtenu grâce au champ de conductivité hydraulique de Darcy, $K^D(\vec{x})$, et au champ de charge hydraulique total calculé, $H^{DWF}(\vec{x})$ (écoulement saturé de Darcy/Ward-forchheimer). Ce champ de nombre de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer, nous permettra à son tour de calculer le taux d'érosion de masse solide, ou le taux de création de porosité. La nouvelle porosité pour le temps t_1 sera alors calculée. Celle-ci nous permettra alors de calculer le nouveau champ de conductivité hydraulique de Darcy, etc.

5.4.3 Un exemple de résultats (morphogenèse en 2D)

Pour le premier test réalisé, nous avons appliqué ce modèle à un massif 2D carré de 300 sur 300 m (Fig. 5.6 (a)) composé de :

- 300*300 pixels ($dx = dy = dz = 1$)
- 25% de fractures (rouge) de porosité initiale égale à 70% ;
- 75% de matrice de porosité initale égale à 25% ;

Ici, pour cette étude, le modèle local de perte de charge choisie est le modèle de perte de charge linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forcheimmer. Comme conditions aux limites du système étudié, nous avons utilisé des conditions aux limites de type perméamétrique uniques durant toute la procédure d'érosion, Fig. 5.6 (b) :

- Face Nord (N) : charge totale constante égale à 303,
- Face Sud (S) : charge totale constante égale à 3,
- Face Ouest (W) : flux nul,
- Face Est (E) : flux nul,

ce qui correspond à un gradient hydraulique moyen unitaire par cellules d'étude.
Enfin, pour les paramètres propres au modèle d'érosion-hydraulique, nous avons fixé K^D_{max} à 100 $m.s^{-1}$ et le temps caractéristique de la réaction d'érosion, t_d, de $1/25000$ unités de temps numérique (n.b. : par commodité, les unités de temps sont appelées "secondes").
Le but principal de ce premier test numérique est de voir s'il est possible d'observer une structuration amont/aval des méso- et macro-porosité du milieu étudié pendant l'érosion, en considérant un nombre limité de paramètres. Ces paramètres sont la vitesse locale de l'écoulement et la lithologie du milieu (représenté par t_d). Les résultats obtenus après 1331 itérations (temps numériques), sont présentés dans la figure 5.7 :

- (b) champ du nombre de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer obtenu après 1330 itérations de l'algorithme d'érosion hydraulique, $Re_{DWF}(\vec{x},t_{1330})$;
- (d) champ de porosité, $\phi_w(\vec{x},t_{1331})$, obtenu après 1331 itérations de l'algorithme.

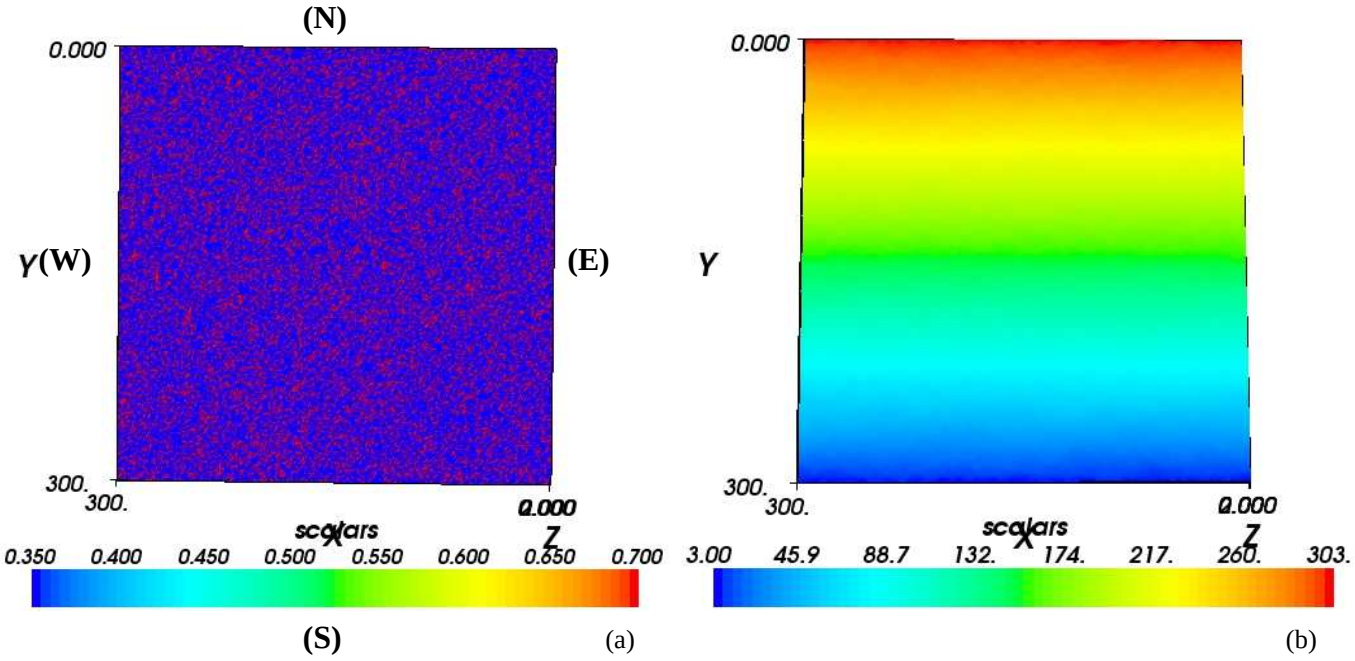


FIG. 5.6 – (a) Substrat initial utilisé pour les premiers essais de la procédure d'érosion-hydraulique; (b) répartition du champ de charge total obtenu au temp t_0 de la procédure d'hydro-morphogenèse.

La structure obtenue par cette approche numérique simple est assez intéressante. Les résultats numériques montrent qu'en partant d'un substrat statistiquement isotrope et purement aléatoire, il est possible d'obtenir une structure arborescente de l'organisation spatiale de la méso- et macro-morphologie du système de drainage du massif étudié. La structure arborescente obtenue montre notamment une organisation spatiale amont/aval, Fig. 5.7 (d). Notez aussi la diminution du nombre de macro-morphologies entre l'amont et l'aval, et l'augmentation de la taille de ces morphologies de l'aval vers l'amont.

Par ce premier exemple, il semblerait que les paramètres importants qui influencent la structuration spatiale obtenue sont, outre le substrat utilisé :

- Le gradient hydraulique régionale appliqué (direction et intensité) ;
- Le K^D_{max} choisi le champ de $K^D(\vec{x},t)$;
- Le temps caractéristique de la réaction d'érosion/dissolution/diffusion, t_d.

D'autres simulations numériques, non présentées ici, semblent indiquer qu'à substrat et gradient régional fixé, la diminution de ce temps caractéristique, t_d, augmente la structuration arborescente du milieu obtenu pour un même nombre d'itérations réalisées. Et l'augmentation du paramètre de seuillage K^D_{max} diminue la structure arborescente du milieu.

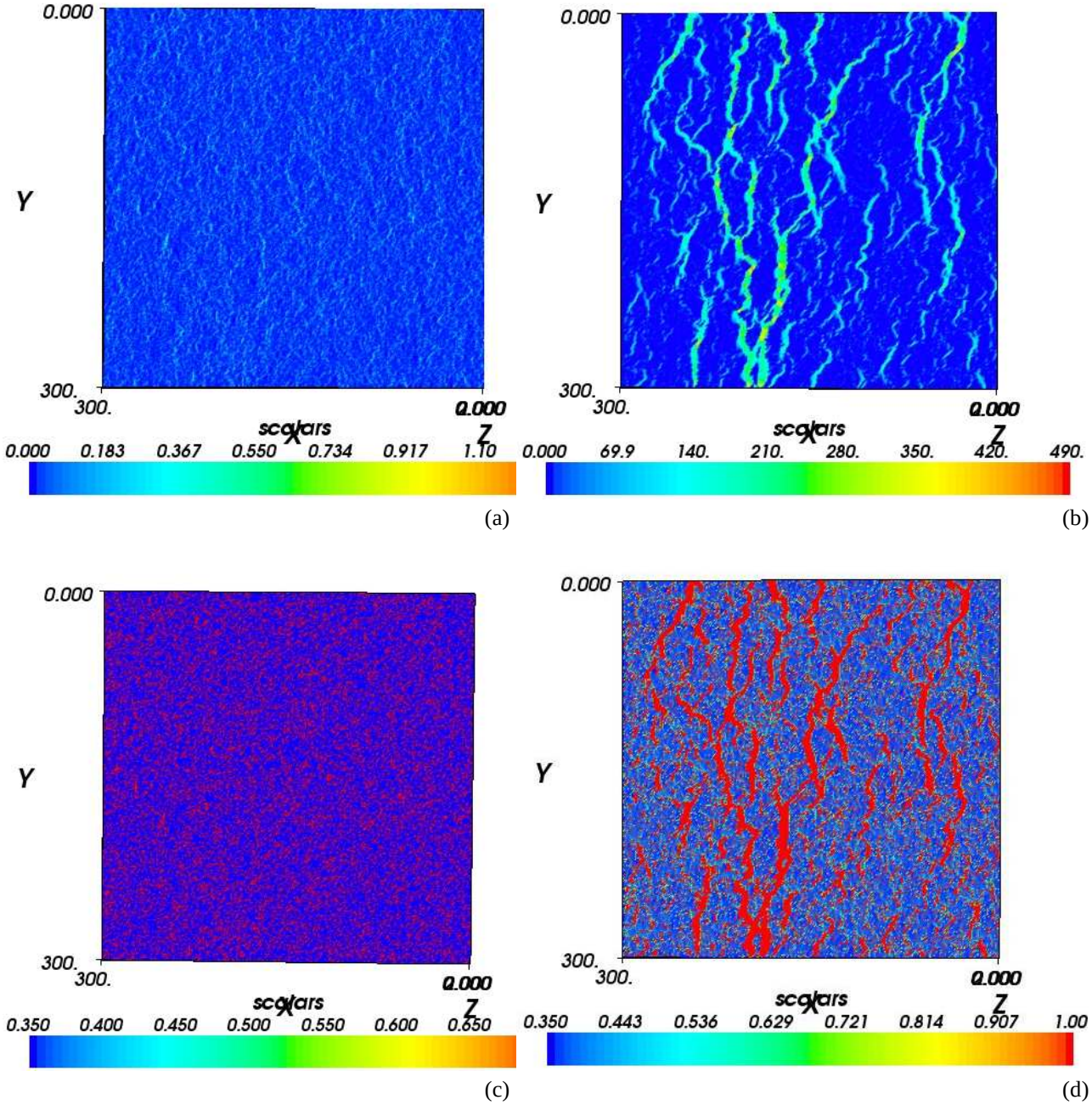


FIG. 5.7 – (a) et (b) Champs du nombre des Reynolds de Darcy-Ward-Forchheimer, $Re_{DWF}(\vec{x},t)$, (a) calculé après la première itération de l'algorithme $Re_{DWF}(\vec{x},t_1)$, et (b) calculé après 1330 itérations de l'algorithme, $Re_{DWF}(\vec{x},t_{1330})$; (c) et (d) Champs des porosités, $\phi_w(\vec{x},t)$, (c) champ initial, $\phi_w(\vec{x},t_0)$ et (d) obtenu après 1331 itérations de l'algorithme, $\phi_w(\vec{x},t_{1331})$. L'écoulement est ici dirigé du haut vers le bas du milieu (du Nord au Sud).

5.4.4 Bilan sur le modèle d'érosion hydraulique

Au cours de cette section, nous avons proposé un modèle d'altération des massifs fracturés par le calcul d'un nombre local de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer. Cette première proposition d'altération locale, fonction de la norme de la vitesse de Darcy/Ward-Forchheimer, semble assez encourageante.

Cependant, le modèle nécessite d'être amélioré, notamment en prenant en considération les modalités de transport de la matière érodée locale à l'échelle du massif. Ce premier modèle devra aussi être amélioré au niveau local. Un modèle plus fin des processus de diffusion/érosion/dissolution local (D^*), et du temps caractéristique de la réaction, t_d, devra être étudié plus en détail et distribué en fonction de la lithologie considérée.

Une étude complémentaire qualitative, pourrait être menée, sur des milieux 3D, même variablement saturés, en réalisant des variations d'intensité et de direction du gradient hydraulique moyen. Le but serait de réaliser un polyphase de la morphologie et d'observer s'il est possible d'obtenir les mêmes caractéristiques morphologiques que celles obtenues par des observations spéléo-morphologiques. L'objectif final serait en partant d'un maximum d'informations sur la structuration d'un massif karstique donné, notamment sur l'évolution géodynamique, et plus généralement des conditions aux limites, du secteur d'une entité structurale donnée ou du secteur géologique donné, d'essayer de reconstruire "l'histoire", l'enchaînement des évènements qui ont conduit à la genèse des éléments de la méso- et macro-morphologie observées.

Cet algorithme pourrait aussi être vu comme un outil qui permettrait de reconstruire par un "biais hydraulique", la face cachée d'une entité drainante d'un massif karsique à partir des éléments de la méso- et macro-morphologie observables par des mesures directes de terrain. Pour réaliser cette dernière proposition, les observations morphologiques entrées dans le domaine d'étude ne doivent pas "varier" pendant le processus d'altération hydro-morphologénétique du reste du massif.

Enfin, l'atout principal de ce modèle hydro-morphogénétique heuristique en deux étapes est qu'en partant d'un substrat initial hétérogène (réseaux statistiques, milieux aléatoires auto-corrélés, etc.), il est possible d'affiner le milieu étudié par des observations sur l'hydraulique actuelle ou passée du secteur étudié.

Chapitre 6

Bilan et simulation variablement saturée sur un karst synthétique

6.1 bilan sur le couplage entre le code morphologie (MatFrac3D) et écoulement (BigFlow)

Au cours de ce chapitre, nous avons développé et présenté les différents outils numériques morphologiques et d'écoulement que nous souhaiterions utiliser pour modéliser les écoulements 3D dans les massifs très fissurés de type karstique.

Dans un premier temps, nous avons présenté le code Volume Fini BigFlow et les principales modalités de simulation proposées par ce code numérique. Notre intérêt s'est tout particulièrement porté sur le modèle de perte de charge local de Darcy/Ward-Forchheimer, linéaire/quadratique. Ce modèle de perte de charge local inertiel nous semble particulièrement bien adapté pour modéliser les écoulements dans les massifs très fissurés comme les aquifères karstiques, au moins pour des régimes d'écoulements à un nombre de Reynolds inférieur à 1000.

Puis, dans un second temps, nous nous sommes intéressés à différentes pistes pour réaliser la modélisation morphologique à grande échelle des hydrosystèmes karstiques. La tâche est ardue et complexe. Cette modélisation doit considérer les observations de terrains réalisées sur les sites et les bassins hydrogéologiques karstiques étudiés. Les massifs synthétiques créés, pour étudier les écoulements siégeant dans ces entités complexes et tourmentées, doivent être synthétisées en considérant la lithologie des massifs carbonatés, les évènements tectoniques et géodynamiques responsables de la fracturation et l'évolution des conditions aux limites des systèmes.

Pour cette tâche ambitieuse, différents outils numériques et approches pour la modélisation ont été mis en place. Ces outils sont encore en développement et non pas été appliqués à un massif donné. Il s'agit donc seulement d'hypothèses et d'approches de modélisation. Ces outils et procédures de génération sont :

- un générateur statistique d'objets booléens comprenant différentes classes d'objets volumiques ;
- une procédure permettant de coupler la répartition de ces objets avec des champs aléatoires continus autocorrélés,
- une procédure de seuillage paramétrique de ces champs continus,
- un algorithme itératif d'hydro-morphogenèse permettant localement le couplage entre la perméabilité et les écoulements.

L'objectif est d'avoir les outils les plus modulables et robustes pouvant faire face à la complexité des morphologies observables.

Pour réaliser la paramétrisation de la morphologie des aquifères karstiques et une modélisation optimale des écoulements y siégeant, cette morphologie "cachée", non accessible par mesure directe, doit être conditionnée par des mesures morphologiques de terrains et les mesures de débits aux différents exutoires "numériques" par rapport aux débits mesurables sur le terrain à ces mêmes exutoires ou encore grâce aux messures piézométriques de terrain. Les paramètres des champs aléatoires et de seuillage de ces champs, sont alors vus comme des variables morphologiques ajustables permettant cette optimisation morphologique. Le module *MatFracSonde* de MatFrac3D, qui permet de mesurer en un point ou dans des entités morphologiques données, différentes grandeurs hydrodynamiques ou hydrauliques, peut être utilisé pour cette problématique.

6.2 Essai de simulation du débit d'une source karstique

6.2.1 Modèle morphologique et propriétés hydrauliques et hydrodynamiques utilisées

Le domaine d'étude est constitué de deux parties distinctes, une partie "vallée" et une partie "massif carbonaté", Fig.6.1 (a).

La partie "vallée" est constituée :

- d'un "pseudo" milieu libre macroporeux
- de "berges" situées à la sortie de l'exutoire karstique.

Et la morphologie karstique étudiée est constituée de différentes inclusions comprenant :

- un épikarst contenant 100 fractures poissonniennes circulaires, d'orientation uniforme, à ouvertures constantes et de diamètres uniformément répartis entre 5 et 10 m,
- un ensemble de 50 fractures poissonniennes circulaires, d'orientation uniforme, à ouvertures constantes et de diamètres repartis suivant une loi de distribution de Pareto de paramètre α=2.5 entre un diamètre minimum de 5m et maximum de 50 m, dans l'ensemble du domaine d'étude,
- d'un conduit karstique, de section circulaire, qui traverse tout le domaine karstique.

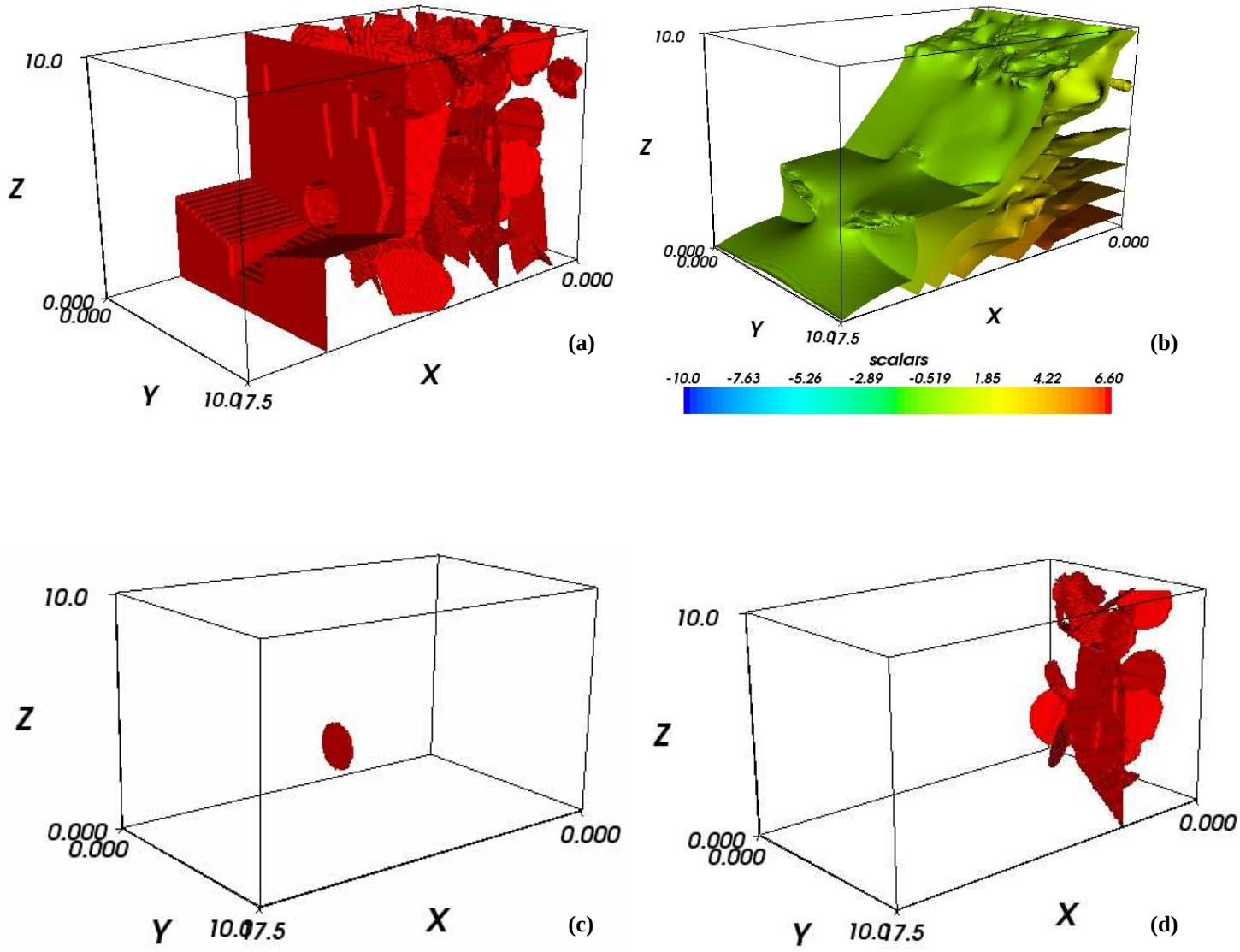


FIG. 6.1 – (a) Morphogologie étudiée pour illustrer les applications du module *MatFracSonde* de Matfrac3D. (b) condition initiale utilisée, ici seules les iso-pressions ≥ 0 sont représentées. (c) Sonde Δ, de surface égale à la section du conduit karstique et située à son embouchure. Et (d) "Sonde" ω utilisée pour mesurer la variation de la saturation moyenne $\hat{\theta}_\omega$ de cette partie de l'aquifère.

Pour cette étude[1], nous avons réalisé une simulation variablement saturée transitoire darcienne, en utilisant le modèle de Van Genuchten et Mualem, éq. 6.1, pour la teneur en eau et pour $K(h,\vec{x})$, éq. 6.2.

$$\frac{\theta_e(h,\vec{x})-\theta_d}{\theta_s(\vec{x})-\theta_d}=\left[\frac{1}{1+(-\alpha(\vec{x})h)^n}\right]^m, \tag{6.1}$$

$$\frac{K(h,\vec{x})-K_d}{K_s-K_d}=\frac{1}{(1+(-\alpha(\vec{x})h)^n)^{m/2}}\left(1-\left[1-\frac{1}{1+(-\alpha(\vec{x})h)^n}\right]^m\right)^2. \tag{6.2}$$

Les caractéristiques hydrauliques et hydrodynamiques utilisées et appliquées aux différents entités morphologiques sont regroupées dans le tableau 6.1.

Parametres	K_s $(m.s^{-1})$	K_d $(m.s^{-1})$	θ_s $(m^3.m^3)$	θ_d $(m^3.m^3)$	α (m^{-1})	n
Matrice	0.01	$1.e-04$	0.3	0	0.5	6
Inclusions	1.0	$1.e-04$	1	0	10	6
Berges	0.01	$1.e-04$	0.6	0	1	6

TAB. 6.1 – Caractéristiques hydrauliques et hydrodynamiques utilisées.

6.2.2 Mise en place des sondes

Les grandeurs étudiées au cours de la simulation transitoire darcienne sont :

– le débit au niveau de la source "synthétique" karstique, Δ Fig. 6.1 (c),

– la variation de la saturation moyenne de l'entité morphologique ω, Fig. 6.1 (d).

Ici, l'entité morphologique ω correspond à une partie des entités de la morphologie globale étudiée percolant avec le conduit. Parmi toutes les entités percolant avec le conduit, seul "l'amas" contenant des fissures de l'épikarst a été retenu. Les autres amas de fissures percolant avec le conduit et le conduit ont été éliminés. La procédure utilisée pour cette ségrégation est réalisée par le module *MatFracPerco* de MatFrac3D.

La variation du débit au niveau de l'exutoire est obtenue par la formule suivante :

$$Q_\Delta(t)=\frac{1}{N_\Delta}\sum_{N_\Delta=1}^{\Delta}|\vec{v}(\omega)|\,S_\Delta. \tag{6.3}$$

[1]Cette étude transitoire d'un karst 3D partiellement saturé reste préliminaire et nécessite des validations supplémentaires vu la compléxité numérique du problème (nonlinéarité, discontinuité, paramétrisation 3D). Les résultats seront discutés de façon qualitative

où, N_Δ est le nombre de voxels constituant la sonde Δ, $|\vec{v}(\omega)|$ sont les normes locales des débits mesurés au niveau de la sonde au temps t et S_Δ est la "surface" de la sonde.

Et de la saturation moyenne au niveau de l'entité morphologique ω est obtenue par la formule suivante :

$$\hat{\theta}_\omega(t) = \frac{1}{N_\omega} \sum_{N_\omega=1}^{\omega} \theta_e(\omega) \tag{6.4}$$

où, N_ω est le nombres de voxels constituant la sonde ω, $\theta_e(\omega)$ sont les saturations locales mesurées au niveau de la sonde ω au temps t.

6.2.3 Déroulement de la simulation

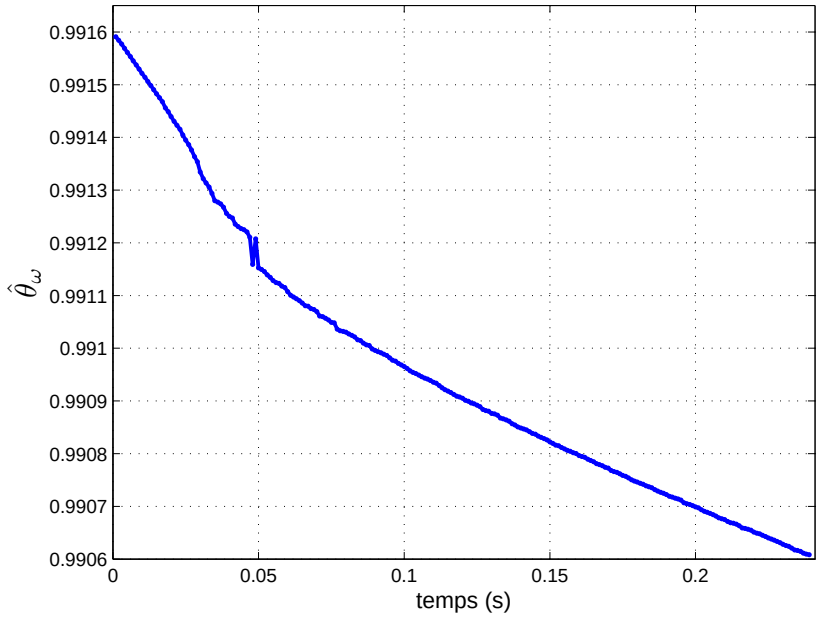
Dans un premier temps, nous avons obtenu un état initial en imposant des conditions aux limites de pressions linéairement distribuées sur les limites amont et aval du domaine, Fig.6.1 (b). Pour les autres limites du domaine, des conditions de flux nul ont été appliquées. Puis pour la simulation transitoire, des conditions aux limites de flux nuls à tout le domaine d'étude ont été appliquées. Nous pouvons dire que dans cette étude, nous nous sommes intéressés à la vidange de l'aquifère karstique suite à un évènement pluvieux qui satura le domaine. Ici, nous présentons les résultats obtenues pour une simulation darcienne. Des simulations transitoires en utilisant le modèle de perte de charge linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forchheimer devront par la suite être réalisées.

Au cours de la simulation transitoire, nous avons mesuré à des pas de temps fins ($0.001s$) le débit au niveau de la sonde Δ et la saturation moyenne de l'entité morphologique ω. Le but est d'analyser finement la réponse de la source à la vidange du massif en essayant de voir si un lien existe entre la vidange de l'entité morphologique ω et la réponse obtenue au niveau de la source. Les résultats sont présentés sur la figure 6.2.

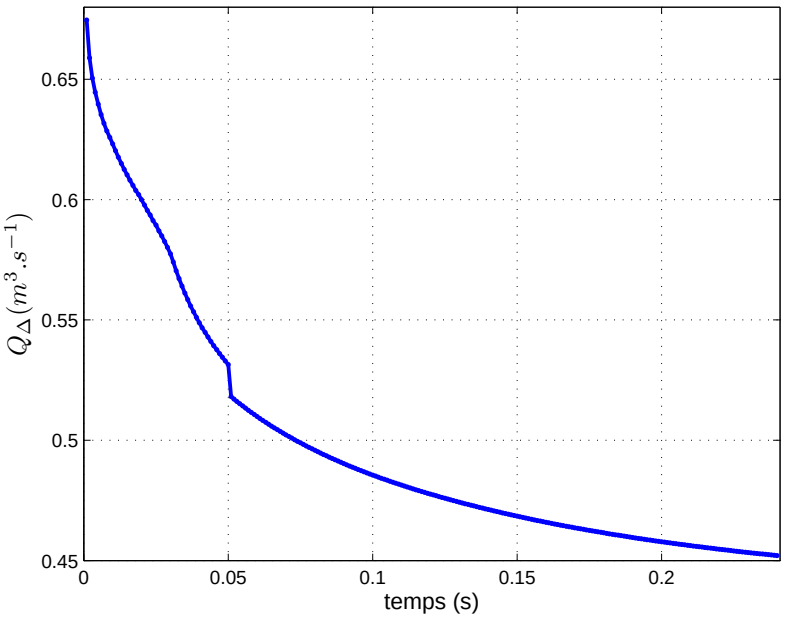
Avant de réaliser toutes descriptions et analyses de la simulation transitoire réalisée, notons que si l'allure générale de la réponse de la source karstique paraît vraissemble, les ordres de grandeurs ne sont pas réalistes[2], figure 6.2.

L'analyse comparative, entre l'évolution de la saturation moyenne de l'entité morphologique ω ($\hat{\theta}_\omega$) et l'évolution du débit calculé au niveau de la source Δ (Q_Δ), montre un lien très étroit entre la variation de ces deux quantités au cours du temps. Observez notamment la réponse de ces deux entités à proximité du temps $t = 0.05\,s$. La réponse de la source, de part et d'autre du temps $t = 0.05\,s$, est radicalement différente. Si pour

[2]Lors de l'écriture de ce manuscrit, nous sommes obligés de considérer ces résultats en leurs états. L'origine probable de cette incohérence semble isolée. Il s'agissent d'un problème lié à l'implémentation du modèle de Van Genuchten et Mualem dans le code BigFlow. Le problème est maintenant corrigé et de nouvelles simulations sont en court. Nous allons quand même décrire qualitativement ces résultats.



(a)



(b)

FIG. 6.2 – (b) Evolution du débit Q_Δ mesuré au niveau de la sonde Δ, Fig. 6.1 (c), au cours du temps d'étude et (a) évolution de la saturation moyenne, $\hat{\theta_\omega}$, mesuré dans l'entité morphologique ω, Fig. 6.1 (d), au cours du temps.

des temps supérieurs nous retrouvons une réponse hyperbolique de la source, pour des temps inférieurs, la réponse est plus complexe. Cette réponse complexe, est à mettre en relation avec la vidange de l'entité ω et plus particulièrement, de la vidange de la partie de l'épikarst synthétique considéré qui percole avec le conduit karstique. Par cet exemple simple et très succinct, nous pouvons conclure que la prise en considération de la méso- et macro-porosité des aquifères karstiques est nécessaire pour modéliser la réponse complexe de l'aquifère karstique. Ces premiers calculs confirment aussi les résultats obtenus par Mangin et le modèle à deux fonctions mathématiques pour modéliser la réponse des sources karstiques.

6.3 Bilan

Il est nécessaire de connaître la répartition spatiale des méso- et des macro-morphologies karstiques pour comprendre la réponse des sources karstiques et garantir une bonne gestion de la qualité et de la quantité de la ressource en eau dans la totalité du massif 3D. Cette répartition spatiale peut être obtenue en utilisant plusieurs méthodes de génération comme celles introduites dans cette partie. Mais elle doit être conditionnée par des données stratigraphiques, tectoniques, géodynamiques et par les débits mesurés suite un évènement pluvieux au niveau des exutoires synthétiques en comparaison avec les mesures et analyses statistiques réalisées sur la réponse des sources réelles considérées. Pour le reste du massif 3D (ou si peu de résurgences sont accessibles), le conditionnement fin de la morphologie peut nécessiter l'utilisation de la piézométrie. Tout ceci doit être réaliser en prenant en considération le modèle local de perte de charge approprié. Notons aussi ici que l'homogénéisation des aquifères karstiques peut être sûrement envisageable en mesurant le débit des sources karstiques.

Troisième partie

Ecoulements saturés en milieux très fissurés et le "second changement d’échelle"

Chapitre 7

Vers une loi globale : préambule

7.1 Motivation de l'étude

Les écoulements dans les massifs carbonatés très fissurés ont des comportements ambivalents. Ils sont laminaires dans la matrice poreuse finement fissurée et inertiels et turbulents respectivement dans la méso- et la macro-morphologie inhérentes à ces aquifères. Ils peuvent aussi être variablement saturés, partiellement saturés ou saturés, dans une région donnée de l'aquifère à des intervalles de temps différents.

Dans cette partie, l'homogénéisation hydrodynamique saturée à grande échelle sera étudiée. Pour cela nous nous situerons à une échelle importante et nous considérerons que chaque unité locale (voxel ou pixel) possède une conductivité hydraulique locale notée K_M pour les éléments de la matrice poreuse finement fissurée (éléments de couleur bleue, Fig. 7.1) et K_F pour les éléments de la méso- et macro-morphologie (éléments de couleur rouge, Fig. 7.1). Nous nous intéresserons à l'influence respective de la phase matricielle ou résistante (i.e. matricielle finement fissurée) et de la phase fracture ou conductrice (i.e. méso- et macro-morphologie) sur la macro-conductivité hydraulique à l'échelle du massif. Nous analyserons l'influence de l'état local sur la réponse globale du système pour le "second changement d'échelle", en étudiant particulièrement l'influence des phénomènes de percolation sur la conductivité hydraulique macroscopique nommée macro-conductivité ou macro-K.

L'analyse sera divisée en trois parties.

- La première partie sera consacrée à l'étude de cette problématique en utilisant des conditions aux limites perméamétriques en régime saturé permanent, avec un modèle local de perte de charge de Darcy (parfois notée D pour Darcy).
- Dans la seconde partie, pour tenir compte des effets inertiels dans les parties conductrices des milieux considérés, l'étude sera étendue au cas d'une loi locale comprenant outre le terme linéaire darcien un terme quadratique en vitesse (Darcy/Ward-Forchheimer ou DWF).

- Enfin troisièmement, nous proposerons d'appliquer une procédure numérique "d'immersion" pour étudier les milieux anisotropes comme les aquifères très fissurés en utilisant le modèle local de perte de charge linéaire de Darcy.

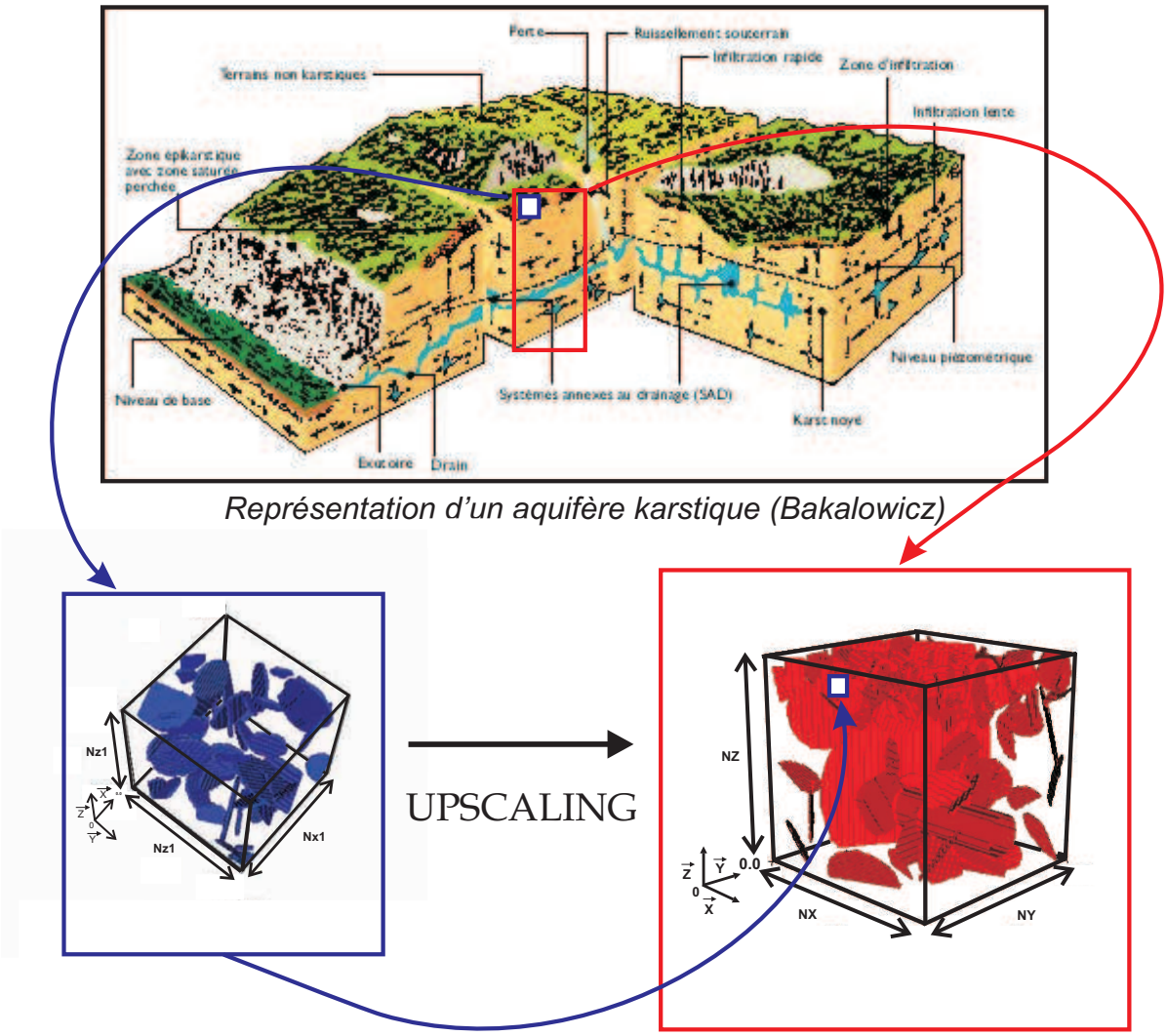


FIG. 7.1 – Démarche utilisée pour l'étude et l'homogénéisation des écoulements dans les milieux très fissurés.

L'ensemble des expériences numériques réalisées tournera autour d'une problématique centrale concernant l'importance des phénomènes de quasi-percolation et de percolation sur la macro-conductivité hydraulique de Darcy et de Darcy/Ward-Forchheimer.

7.2 Milieux étudiés et choix des paramètres morpho-hydrauliques κ et ϕ_F

Cette partie est consacrée à l'étude et la caractérisation de la macro-conductivité hydraulique (globale, équivalente) de Darcy et de Darcy/Ward-Forchheimer pour des milieux poreux très fissurés 2D et 3D. Dans cette étude, nous porterons un intérêt tout particulier à l'état des connectivités locales et aux phénomènes de percolations (ou de quasi-percolations) sur la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy et de Darcy-Ward-Forchheimer.

Pour cela, nous étudierons des milieux binaires poreux fracturés statistiques et déterministes 1D, 2D et 3D. Parmi les milieux étudiés, nous pouvons distinguer (Fig. 7.2) :

- des milieux parfaitement stratifés et purement aléatoires
- des milieux binaires 2D et 3D géométriquement isotropes purement aléatoires (représentés sur une grille cartésienne de pixels ou de voxels),
- et des milieux poreux fracturés 2D et 3D comme ceux présentés précédemment (section 5.2).

Pour les milieux testés, les paramètres importants à fixer ont été :

- la dimension des domaines d'étude (Tab. 7.1),
- les paramètres du générateur pseudo-aléatoire,
- le choix des fractions volumiques, ϕ_F, en inclusions, ou fractures ("F"),
- le choix des contrastes locaux de conductivités hydrauliques entre la phase matricielle et inclusion, κ=$log_{10}(K_F/K_M)$, (contraste de log-conductivité hydraulique ou log-contraste).

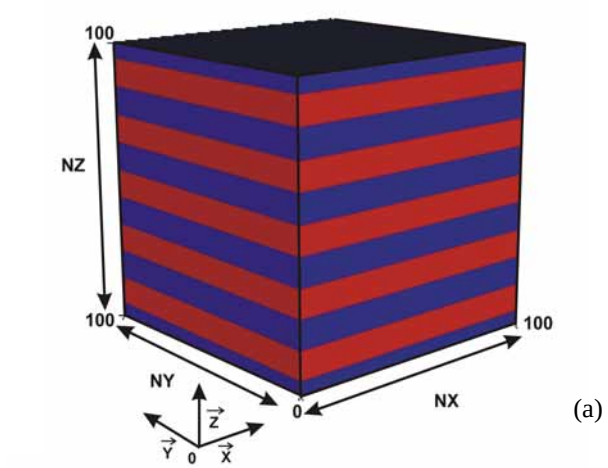
	NX	NY	NZ	dx	dy	dz	nombre de pixels/voxels
milieu multicouche	100	100	100	1	1	1	1 000 000 de voxels
milieu binaire 2D	512	512	1	1	1	1	262 144 de pixels
milieu binaire 3D	100	100	100	1	1	1	1 000 000 de voxels

TAB. 7.1 – Tableau regroupant les caractéristiques des échantillons étudiés

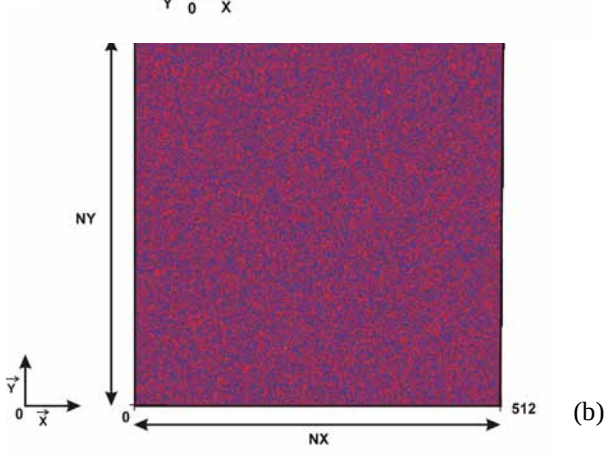
Pour le choix du générateur pseudo-aléatoire, nous nous limiterons à des générateurs congruentiels linéaires de la forme :

$$X_{n+1} = (a \cdot X_n + c) \cdot mod(m), \tag{7.1}$$

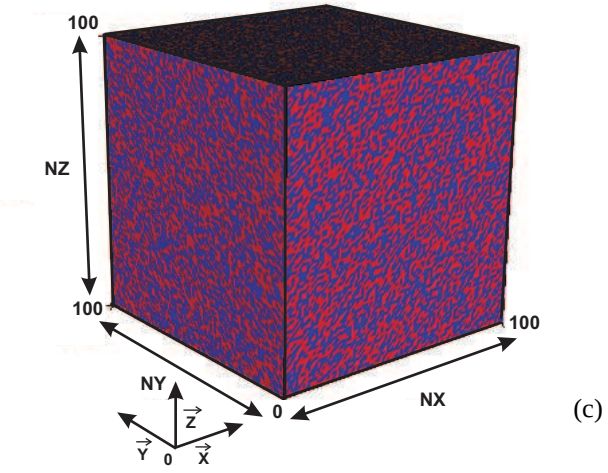
où a est le multiplicateur, c l'incrément et m le module. Parmi tous ceux testés, notre choix s'est porté sur le générateur 64 bits de module $(2^{31}) - 1$ et de multiplicateur 950 706 375 déjà utilisé par Ababou 1988 [5] et étudié par Fishman & Moore 1986 [47]. Enfin, pour avoir une reproductivité des résultats ; et étudier un seul milieux, où nous ferons croître de façon continue et uniformément aléatoire la phase inclusion, nous avons au cours de cette étude utilisé un seul noyau (ou grain) qui est 11 789.



(a)



(b)



(c)

FIG. 7.2 – Milieux d'étude : (a) milieu multicouche, (b) milieu binaire 2D purement aléatoire et (c) milieu 3D purement aléatoire.

Pour chacun des milieux composites étudiés, c'est-à-dire à une fraction volumiques en inclusion fixée, ϕ_F, nous allons réaliser une variation du log-contraste de conductivité hydraulique entre la phase inclusion, K_F, et matricielle, K_M, telle que $\kappa = log_{10}(K_F/K_M) \in [-8\ ;\ +8]$. Lors de cette procédure, nous conserverons la conductivité hydraulique de la matrice, K_M, égale à 1 $m.s^{-1}$ et nous ferons varier la conductivité hydraulique de la phase inclusion. Ainsi les inclusions seront résistantes, si $\kappa \in [-8\ ;\ 0[$, ou conductrices, si $\kappa \in]0\ ;\ +8]$.
L'utilisation de cette procédure, nous permettra de discuter plusieurs points :

- l'importance de l'état de connectivités locales sur la quantité macroscopique étudiée (log-contraste, κ, fixée et fraction, ϕ_F, variable),
- l'impact du contrast de log-conductivité hydraulique entre la phase inclusion et la phase matricielle sur l'état des connectivités locales (log-contraste κ variable et fraction ϕ_F fixée),
- enfin, l'apparition et l'influence des effets inertiels sur le comportement hydraulique global du système.

7.3 Procédure pour l'uspscaling

Conditions aux limites perméamétriques utilisées dans cette première partie

Pour les échantillons étudiés, nous allons réaliser différentes expériences numériques directes de type perméamétrique (Fig. 7.3) en régime permanent saturé en utilisant :

- le modèle de perte de charge locale de Darcy, et
- le modèle de perte de charge locale linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forchheimer.

Nous obtiendrons ainsi deux quantités macroscopiques, $\tilde{K}_i^D$ et $\tilde{K}_i^{DWF}$. Nous reviendrons plus en détail sur la manière d'obtenir ces quantités dans les parties ultérieures consacrées à chacune de ces lois de pertes de charges locales.
Les expériences numériques ont été menées suivant la direction $O\vec{x}$ et $O\vec{z}$ pour les milieux multicouches, c'est à dire respectivement parallèlement et perpendiculairement à la stratification, et uniquement suivant la direction $O\vec{x}$ pour les milieux binaires 2D et 3D aléatoires (inclusions de pixels ou de voxels). Pour les milieux fracturés 3D et 2D étudiés où les inclusions sont autres, comme par exemple des disques, les simulations seront réalisées suivant les directions des axes du repère d'étude Fig. 7.3.

De forts log-contrastes de conductivité hydraulique entre la phase matrice et la phase inclusion vont être appliqués. Afin d'obtenir une meilleure convergence des résultats numériques et des temps de calcul plus courts, nous allons appliquer une procédure de continuation. Elle consiste à utiliser comme condition initiale lors d'une simulation à un log-contraste $\kappa(i)$ donné, le champ de pression obtenu lors de la simulation au

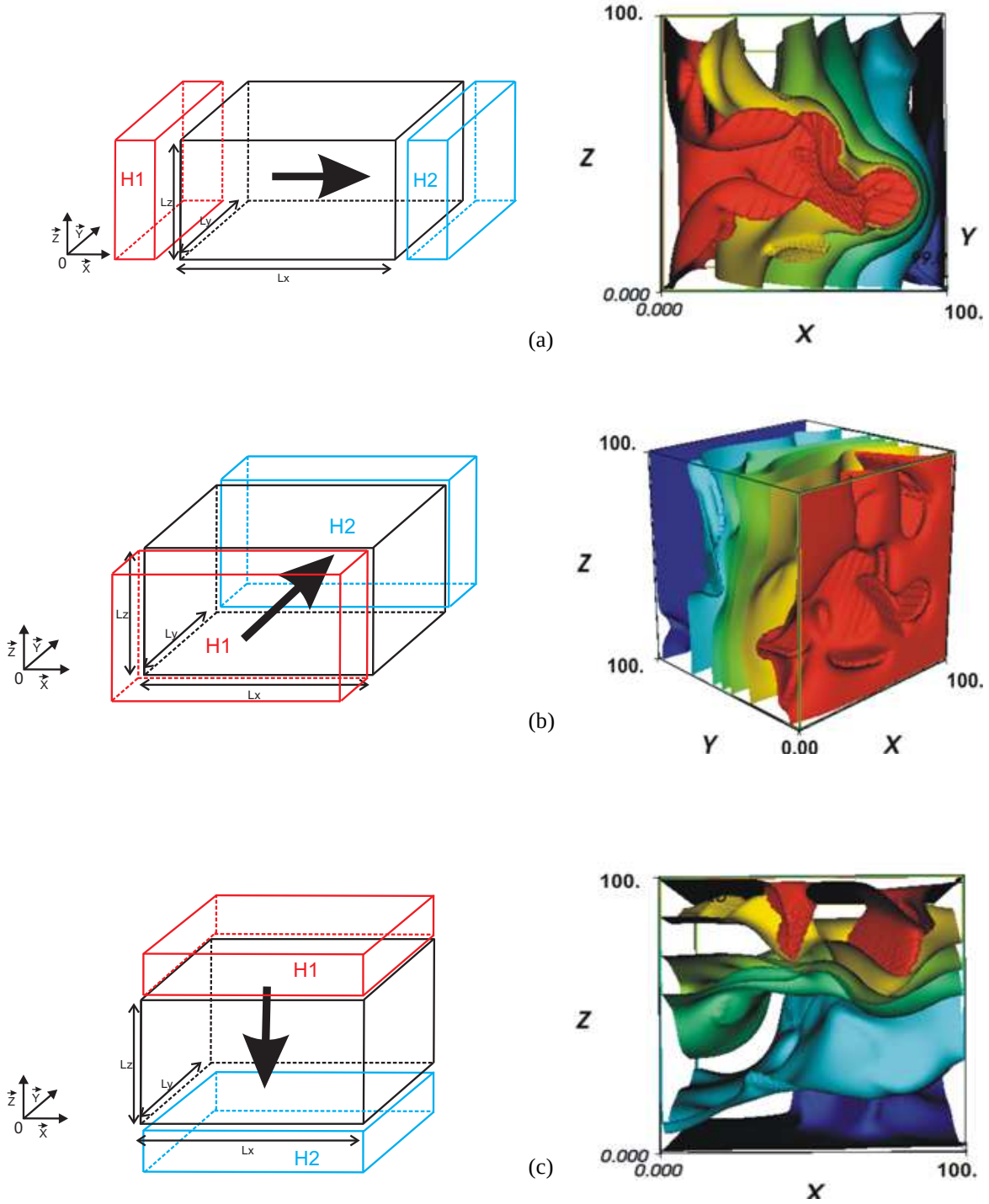


FIG. 7.3 – Schéma illustrant les conditions aux limites "perméamétriques" suivant la direction $O\vec{x}$ (a), $O\vec{y}$ (b) et $O\vec{z}$ (c) et l'écoulement obtenu (surfaces isocharges) pour un milieu fracturé poissonnien 3D.

log-contraste $\kappa(i-1)$. Le champ de pression initial étant celui du milieu homogène $K_F = K_M = 1\,m.s^{-1}$ (log-contraste initial : $\kappa = 0$).

Méthode de prise de moyenne : Net Surface Flux (N.S.F.)

Pour chacune de ces expériences, la procédure de dépouillement utilisée pour obtenir les flux moyens permettant d'étudier la quantité macroscopique du milieu considéré est la suivante (par exemple, lors d'un écoulement imposé suivant la direction $O\vec{x}$) :

$$\tilde{q}_x = \frac{\int_S \vec{q}_{S1}(\vec{x})\cdot\vec{n}ds - \int_S \vec{q}_{S2}(\vec{x})\cdot\vec{n}ds}{2S}, \tag{7.2}$$

où $\vec{q}_{S1}(\vec{x})$ et $\vec{q}_{S2}(\vec{x})$, en $m.s^{-1}$ sont les vitesses mesurées localement respectivement sur la face A_1 et sur son opposée B_1 pour un écoulement imposé suivant la direction $O\vec{x}$ et $ds = dz.dy$ l'élément de surface, en m^2. Suivant la nature de modèle de perte du charge utilisé, nous obtiendrons une densité de flux moyenne de type Darcy, $\tilde{q}_x^D$, ou de type Darcy/Ward-Forchheimer, $\tilde{q}_x^{DWF}$.

Pour les écoulements de type Darcy la conductivité effective macroscopique, $\tilde{K}_x^D$, sera obtenue de la manière suivante :

$$\tilde{K}_x^D = -\frac{\tilde{q}_x^D}{\langle \nabla H \rangle_x}, \tag{7.3}$$

avec

$$\langle \nabla H \rangle_x = \frac{H_2 - H_1}{L_x}, \tag{7.4}$$

où H_2 et H_1 sont respectivement les charges totales appliquées au niveau des faces B_1 et A_1 et $L_x = Nx * dx$. Pour alléger le présent document, nous noterons ces quantités macroscopiques, $\tilde{K}^D$ et $\tilde{q}^D$, la direction de l'écoulement sera alors explicitée dans le texte et dans les légendes des figures.
Pour le calcul de la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy/Ward-Forchheimer, la section 9.3 sera consacrée à ce problème.

Consacrons-nous dans un premier temps à l'étude de la variation la macro-conductivité hydraulique de Darcy, $\tilde{K}^D$, en fonction de la fraction volumique en inclusions, ϕ_F, et de la log-conductivité κ. Ces expériences numériques nous permettrons de discuter de l'importance de l'état moyen des connectivités sur la conductivité macroscopique de Darcy (Chap. 8). Ces différents éléments, à leur tour, seront utiles pour discuter de la formulation macroscopique de la macro-K de Darcy/Ward-Forchheimer lors de l'utilisation d'une loi locale de perte de charge linéaire/quadratique (Chap. 9).

Chapitre 8

Expériences numériques perméamétriques et upscaling darcien

8.1 Théories macroscopiques des écoulements darciens

Les expériences numériques menées dans cette partie en régime darcien, vont être comparées avec différentes solutions analytiques d'upscaling. La littérature sur ce sujet est richement documentée. Nous pouvons ici citer les revues réalisées par Wen & Gomez-Hernandez, 1996 [137] et par Renard & De Marsily 1997 [116].
En premier lieu nous examinerons différentes "bornes".
Pour les milieux binaires stratifiés purement aléatoires et déterministes étudiés, nous utiliserons les bornes de Wiener (sous-section 9.2.1) :

- la moyenne arithmétique ($\hat{K}^{arith}$) pour des écoulements parallèles à la stratification,
- la moyenne harmonique ($\hat{K}^{harmo}$), pour des écoulements perperdiculaires à la stratification.

Pour les milieux binaires matrices/fissures isotropes purements aléatoires 2D et 3D, nous utiliserons deux résultats théoriques analytiques de la conductivité hydraulique effective macroscopique décrite dans les sections suivantes :

- la conductivité hydraulique effective "Self-Consistent" (S.C) (Dagan,1981 [34]), spécialisée explicitement pour des milieux composites à inclusions[1] (sous-section 8.1.2) ;
- la conjecture "Power Average" tensorielle (P.A.), décrite par Ababou 1996 [2] comme une généralisation aux milieux binaires des résultats de perturbations

[1] Le résultat self-consistent utilisé ici est extrait de Ababou *Effective Medium Theories and Percolation on Resistor Lattices and continuous Media*, unpublished note, Massachusett Institute of Technology, 1986). Ce dernier donne aussi des résultats "Self-Consistent" pour d'autres distributions de perméabilités que celles considérées ici.

spectrales pour des log-perméabilités gaussiennes possédant des structures de corrélation anisotrope, combinée avec d'autres résultats sur les conductivités effectives et des bornes exactes connues pour des milieux composites (sous-section 8.1.3).

8.1.1 Les bornes de Wiener

Les premières simulations numériques ont ici été menées sur des milieux fracturés multi-couches statistiques.

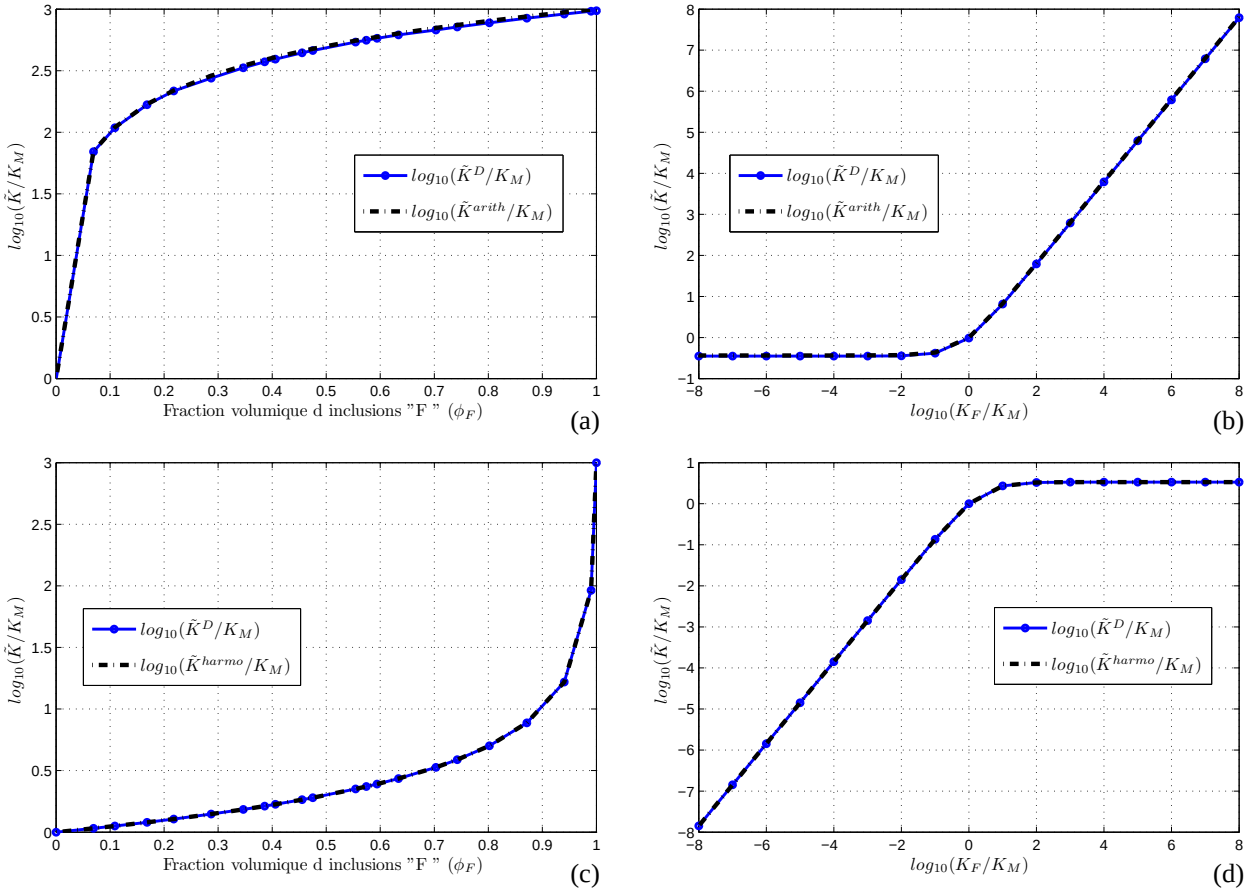


FIG. 8.1 – Comparaisons entre les conductivités hydrauliques effectives numériques de Darcy obtenues pour des milieux multicouches et les moyennes arithmétique ($\hat{K}^{arith}$) et harmonique ($\hat{K}^{harmo}$) : à K_F fixée et égale à 1000 (a) et (c) et à ϕ_F égale 0.70 fixé (b) et (d) ; respectivement pour un écoulement suivant $O\vec{x}$, (a) et (b) ; et suivant $O\vec{z}$, (c) et (d).

Les écoulements ont été conduits parallèlement et perpendiculairement à la stratification et ce pour des fractions volumiques en inclusions allant de 0 a 1 en réalisant un incrément de cinq pour cent de fraction volumique en inclusions.

Les résultats obtenus dans la figure 8.1 ont été comparés respectivement à la moyenne arithmétique ($\hat{K}^{arith}$) et à la moyenne harmonique ($\hat{K}^{harmo}$) des conductivités hydrauliques des milieux stratifiés étudiés.
Les résultats numériques obtenus (Fig. 8.1) sont en bonne adéquation avec ces solutions analytiques que sont les moyennes arithmétique pour un écoulement suivant la direction $O\vec{x}$ (parallèle à la stratification) et la moyenne harmonique pour un écoulement suivant la direction $O\vec{z}$ (perpendiculaire à la stratification).

Cet ensemble de résultats est parfaitement connu, mais il nous permet de réaliser une validation de la procédure utilisée pour pouvoir attaquer une partie un peu plus difficile consacrée aux milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires isotropiquement distribués (au sens du tenseur de dispersion géométrique). Par la suite, ces milieux binaires 2D et 3D seront qualifiés plus simplement de milieux binaires 2D et 3D purements aléatoires.

Les conductivités hydrauliques macroscopiques de Darcy obtenues par simulations numériques directes seront comparées à deux solutions analytiques que sont la théorie "Self-Consistent" et la théorie "Power-Average". Au cours du développement qui va suivre, nous analyserons en détails la validité de l'une et de l'autre de ces deux théories et nous essayerons d'expliquer les différences existant entre elle et les solutions numériques (analyse des phénomènes de percolation et de quasi-percolation). Dans un premier temps, décrivons ces deux solutions analytiques.

8.1.2 Théorie "self-consistent" (S.C.)

La théorie présentée dans cette partie est largement fondée sur une note de recherche de Ababou, "Effective Medium Theories and Percolation on Resistor Lattices and continuous Media", unpublished note, Massachusetts Institute of Technology, 1986. Voir cependant également Dagan 1981 [34].

En résumé, l'idée sous-jacente est d'obtenir la conductivité hydraulique effective des milieux étudiés par superposition linéaire des effets de chacun des éléments conducteurs plongés dans une matrice constante. Ici, pour notre étude, les éléments de conductivité hydraulique K_F sont insérés dans une matrice initiale de conductivité hydraulique K_M fixée à 1 $m.s^{-2}$. Une fois tous les éléments introduits, la conductivité effective macroscopique de l'échantillon, $\tilde{K}^{SC}$ devient celle de la matrice contenant tous les éléments.

Pour que l'argument "self-consistent" puisse s'appliquer (1981 [34]), il est nécessaire que les éléments conducteurs et/ou isolants ajoutés un à un ne soient pas spatialement corrélés, que la conductivité des liens entre les éléments ajoutés dans la matrice soit constante et que leur arrangement spatial soit purement aléatoire. Cette hypothèse est bien réalisée par les milieux étudiés ici.
Lorsque l'on peut appliquer l'hypothèse "self-consistent" et interpréter $\tilde{K}$ en terme de PDF (Probability Density Function) des conductivités hydrauliques, nous obtenons l'ex-

pression analytique suivante (eq. 8.1) :

$$\tilde{K}_{ii}^{SC} = \frac{1}{M}\left[\int_{K_{Min}}^{K_{Max}} \frac{p(K)dK}{(M-1)\tilde{K}_{ii}+K}\right]^{-1} \tag{8.1}$$

où i=1,2,3 (x, y, z), M est la dimension euclidienne de l'espace, $p(K)$ la PDF des inclusions, $\tilde{K}_{ii}$ la conductivité effective du milieu suivant les axes principaux de l'anisotropie et K_{Max} et K_{Min} sont respectivement la conductivité hydraulique des éléments les plus et les moins conducteurs.

Pour comprendre l'origine de cette théorie et l'appréhender sous un angle autre que celui de Dagan, Ababou propose la démonstration suivante en réalisant une analogie entre la physique électrique et hydraulique.
Partons des lois de Kirchhoff (conservation de la charge électrique ou de la masse d'électron) et d'Ohm (loi de comportement permettant de relier l'intensité électrique traversant un dipole à la tension à ses bornes) et réalisons une analogie avec la conservation de masse et la loi de Darcy.
La loi de Darcy 1D ($q = -\tilde{K}\nabla H$) et de la loi d'Ohm peuvent être considérées analogues si on considère la conductivité du milieu diélectrique $1/\tilde{R}$ comme analogue à la conductivité hydraulique, l'intensité électrique à la vitesse de filtration (q) et la différence de potentiel entre les deux bornes du dipôle au gradient hydraulique (∇H).
Pour un écoulement mono-dimensionnel nous avons :

$$\sum_{Nodes(i)} K_{link(i,j)}(\phi_i - \phi_j) = 0 \tag{8.2}$$

avec ϕ_i la charge hydraulique appliquée à la borne i du milieu (analogue à la tension appliquée sur la borne i du dipôle diélectrique) et $K_{link(i,j)}$ la conductivité hydraulique du milieu étudié (analogue à la conductivité électrique $(1/\tilde{R})$ d'un dipôle diélectrique).
En utilisant des notations abrégées, cette relation devient :

$$\sum_{Nodes(i)} K_{(i,j)}(\Delta\phi) = 0 \tag{8.3}$$

Considérons maintenant un système diélectrique, sur lequel on applique une différence de potentiel $\Delta\phi$ entre ces deux bornes (A et B). Si celui-ci est régulier, uniforme et constitué d'un ensemble d'éléments conducteurs reliés entre eux par des liens de conductivité constante (K_o), le remplacement d'une seule de ces résistances par un autre de résistivité K (tel que $K \neq K_o$) se traduit par la création d'un courant induits (δi) défini de la manière suivante :

$$\delta i = (K_o - K)(\Delta\phi) \tag{8.4}$$

et la différence de tension ($\delta\phi$) induite par ce remplacement est :

$$\delta\phi = \frac{\delta i}{(K+K')} \tag{8.5}$$

où K' est la conductivité électrique équivalente du milieu sans l'élément K.
Pour des milieux cartésiens comme ceux qui seront utilisés et étudiés ici (les éléments conducteurs et résistants sont situés sur une grille de voxels ou de pixels), cette conductivité électrique effective K' peut rigoureusement être définie comme étant une fonction du nombre de coordination Z (Z = 4 et 6 respectivement pour un milieu 2D et 3D) de la manière suivante :

$$K' = (\frac{2}{Z} - 1) * K_o \tag{8.6}$$

en reprenant les équations 8.5, 8.4 et 8.6, on a :

$$\delta\phi = \frac{\delta i}{(K + (\frac{2}{Z} - 1)K_o)} \tag{8.7}$$

$$\delta\phi = \frac{(K_o - K)}{(K + (\frac{2}{Z} - 1)K_o)}\Delta\phi \tag{8.8}$$

L'équation 8.8 ainsi obtenue donne l'expression des perturbations locales, $\delta\phi$, sur le potentiel de charge global, $\Delta\phi$, apportés par l'ajout de l'élément de conductivité K et en prenant en considération la conductivité du réseau précédemment existant (K_o) avant l'insertion de cet élément.

Si nous reprenons l'argument "self-consistent" (milieu isotrope et milieu purement aléatoire), les effets des perturbations locales ($\delta\phi$) s'inhibent sur la totalité du réseau étudié (autrement dit $E[\delta\phi] = 0$), on a :

$$E[\delta\phi] = \int_0^\infty \frac{(K_o - K)}{(K + (\frac{2}{Z} - 1)K_o)} p(K)\, dK\, \Delta\phi = 0 \tag{8.9}$$

On peut aussi remarquer que Z (le nombre de coordination) est égale à deux fois la dimension de l'espace euclidien ($Z = 4$ pour un milieu 2D et $Z = 6$ pour un milieu 3D). Ainsi $Z/2$ est égale à la dimension euclidienne de l'espace considéré notée ici M. Ainsi l'équation 8.9 devient :

$$\int_0^\infty \frac{K_o - K)}{(K + (M-1) * K_o} p(K) dK = 0 \tag{8.10}$$

Revenons maintenant à une interprétation hydraulique de cette formulation quasi-analytique de la conductivité électrique effective.

En assumant que K_o soit la conductivité hydraulique effective de la totalité du domaine étudié ($K_o = \tilde{K}_{ii}$) avant l'introduction de l'élément de conductivité hydraulique K, on a :

$$\int_0^\infty \frac{(\tilde{K}_{ii} - K)}{(K + (M-1) * \tilde{K}_{ii}} p(K) dK = 0 \tag{8.11}$$

nous retrouvons bien ici la solution quasi-analytique proposée par Dagan [34], mais généralisée :

$$\tilde{K}_{ii}^{SC} = \frac{1}{M}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(K)dK}{(M-1)\tilde{K}_{ii}+K}\right]^{-1} \tag{8.12}$$

où i=1,2,3 (x, y, z), M est la dimension euclidienne de l'espace, *p(K)* la P.D.F. des inclusions, $\tilde{K}_{ii}$ la conductivité effective du milieu suivant les axes principaux de l'anisotropie.

De ces différentes constatations, nous pouvons conclure que même si la solution quasi-analytique proposée par Dagan est à l'origine prévue pour les milieux continus, un résultat similaire a été obtenu en partant de l'hypothèse d'un réseau discret cartésien suffisamment grand pour pouvoir appliquer l'hypothèse 'Self-Consitente' (pour des milieux de paramètres M identiques). En complément, nous pouvons aussi noter que pour un milieu non orthogonal, comme un milieu 2D hexagonal (six liens par noeuds, M=3), nous revenons à la solution 3D pour un milieu cartésien.

Pour notre étude, nous considérerons des milieux binaires 2D et 3D isotropes et purement aléatoires et suffisamment grand pour pouvoir appliqué l'hypothèse "Self-Consistent" (cf. Tab. 7.1) – par analogie avec les milieux composites isotropiquement distribués constitués d'éléments conducteurs/isolants – où la probabilité d'occurence des éléments conducteurs (ou le milieu fissuré ouvert de conductivité hydraulique $K = K_F$) est 'ϕ_F', et la probabilité d'occurrence de la phase isolante (ou la matrice poreuse fine de conductivité hydraulique $K = K_M$) est $\phi_M = 1 - \phi_F$. Et chacun de ces éléments, résistants ou conducteurs, se situent sur un site délimité par une grille de voxel (3D) ou de pixel (2D).
Pour ce type de milieux, la solution est donnée par Ababou et nous avons :

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{ii} = {} & \frac{1}{(2M-2)}\{(M\phi_F-1)K_F+(M\phi_M-1)K_M\} \\ & + \frac{1}{(2M-2)}\left\{[(M\phi_F-1)K_F+(M\phi_M-1)K_M]^2+4(M-1)K_FK_M\right\}^{1/2}\end{aligned} \tag{8.13}$$

8.1.3 Théorie "perturbative/Power Averaging" (P.A.)

Intéressons nous maintenant à la solution analytique de la conductivité macroscopique proposée par Ababou, 1996 [2] et Ababou, 1990 et [3]. Ce modèle propose de déterminer les composantes principales du tenseur des conductivités hydrauliques par analyse des perturbations dues au champ des perméabilité $K(x,y,z)$, de milieux aléatoires autocorrélés sous certaines conditions statistiques (homogénéité et anisotropie statistiques). Au delà de ces conditions, l'expréssion proposée devient une "conjecture". La relation proposée est en partie empirique, mais confirmée par d'autres bornes et par des résultats fondamentaux sous certaines conditions, notamment pour les milieux binaires purement aléatoires et les milieux à distribution symétrique (gaussiens), ainsi que

des solutions analytiques basées sur la linéarisation et/ou la perturbation des équations stochastiques locales.

Ce modèle postule que la conductivité hydraulique effective est un tenseur symétrique d'ordre 2 et exprime les composantes principales de ce tenseur comme étant la moyenne d'un opérateur "Power-Average" :

$$\tilde{K}_{ii}^{PA} = \langle K^{\omega_i} \rangle^{1/\omega_i} \tag{8.14}$$

où i=1,2,3 (x,y,z), $\tilde{K}_{ii}^{PA}$ la conductivité effective du milieu suivant les axes principaux de l'anisotropie géométrique/statistique du milieu, ω_i l'exposant moyen puissance "directionnel" défini de la manière suivante :

$$\omega_i = 1 - \frac{2}{M}\frac{l_h}{l_i} \tag{8.15}$$

et M est la dimension euclidienne de l'espace, $\langle\rangle$ désigne l'opérateur moyenne volumique, l_i les échelles de fluctuation 'directionnelle', et l_h est la moyenne harmonique des échelles de fluctuations directionnelles :

$$l_h = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^{i=M} l_i^{-1} \right]^{-1} \tag{8.16}$$

Dans le cas particulier de milieux autocorrélés à lnK gausienne, les l_i sont les échelles d'autocorrélation.
Pour un milieu constitué de deux phases isotropiquement distribuées, binaire purement aléatoire 3D, l'équation 8.14 devient :

$$\tilde{K}_{ii}^{PA} = \left\{ \phi_F K_F^{\omega_i} + (1-\phi_F) K_M^{\omega_i} \right\}^{1/\omega_i} \tag{8.17}$$

Pour un milieu binaire isotrope 2D nous obtenons (en réalisant un développement de Taylor quand $\omega \to 0$) :

$$\tilde{K}_{ii}^{PA} = (K_F)^{\phi_F} (K_M)^{1-\phi_F} \tag{8.18}$$

8.1.4 Discussions des deux solutions analytiques darciennes

Avant de commencer cette section, il est nécessaire d'émettre une certaine réserve sur la réalité "physique" des simulations numériques présentées. En effet, certains résultats présentés, notamment pour κ et ϕ_F élevés sont hors du domaine de validité du modèle de pertes de charges linéaires de Darcy, i.e. nombre de Reynolds de Darcy (très) importants. Cependant comme "le diable se cache bien souvent dans les détails", et pour mieux comprendre et appréhender les phénomènes fins influençant la conductivité macroscopique à l'échelle de Darcy, ces résultats seront présentés et discutés. Cette mise en garde étant réalisée, revenons à notre problème. Les deux solutions analytiques donnant la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy pour des milieux binaires 2D et 3D purements aléatoires ont été tracées dans l'espace de deux phases ϕ_F et κ pour un écoulement suivant $O\vec{x}$.

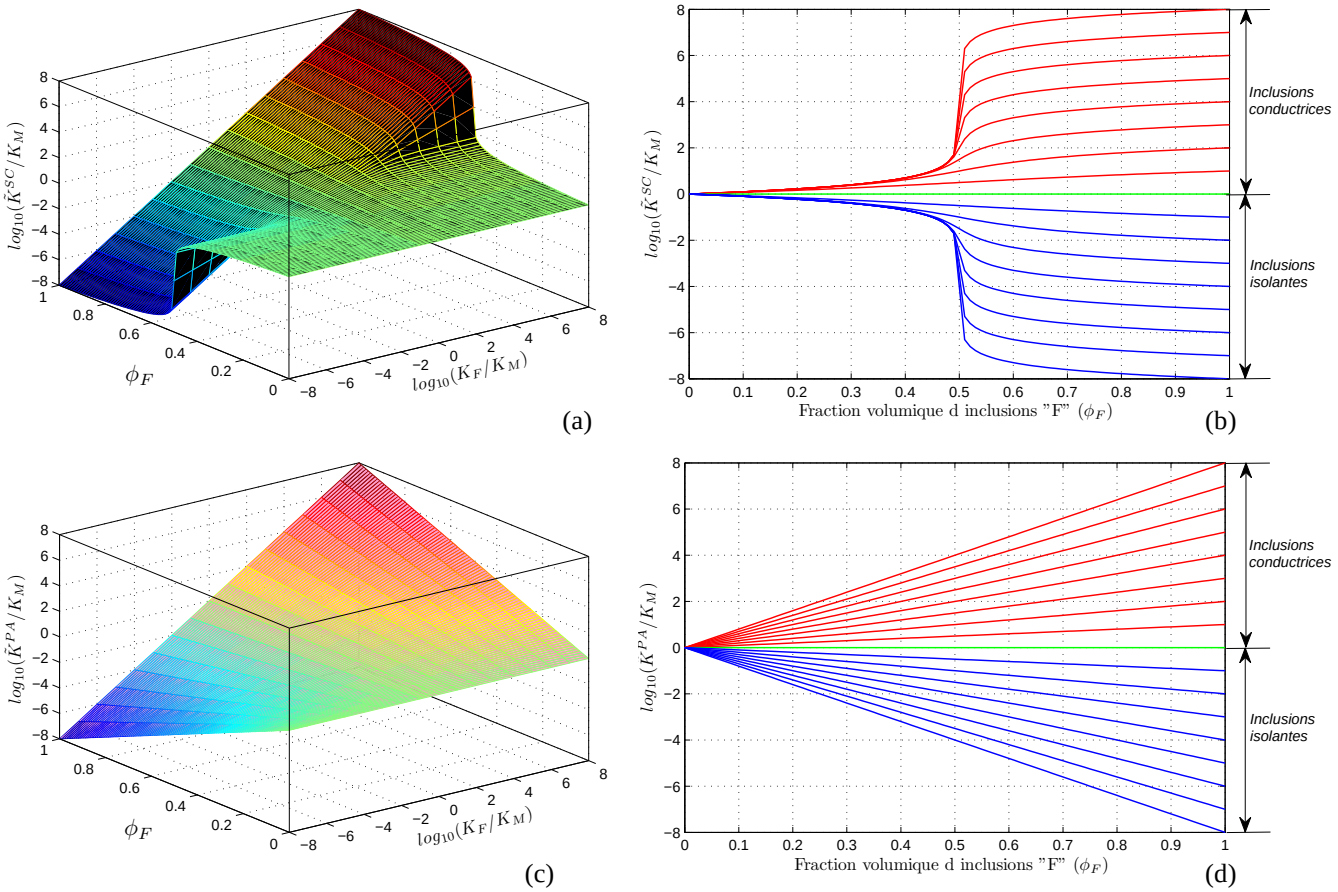


FIG. 8.2 – Conductivités hydrauliques effectives théoriques des $\tilde{K}^D$, (a) S.C. éq. 8.13 et (c) P.A. éq. 8.18, tracées en fonction des deux paramètres étudiés ϕ_F et κ pour le cas d'un milieu binaire 2D. Coupes réalisées à ϕ_F variables et à κ fixé $\in$ [-8 ; +8], (b) éq. 8.13 et (d) éq. 8.18.

Examinons ces deux solutions dans cet espace de phases : tout d'abord, il est clair que les cas 2D et 3D sont très différents Fig. 8.2 et Fig. 8.3.

Pour le milieu binaire 2D purement aléatoire, la macro-perméabilité analytique proposée par Ababou, éq. 8.18, tracée en $log_{10} - log_{10}$ augmente linéairement avec la fraction en inclusions ϕ_F, Fig. 8.2 (c) et (d). En comparaison, la solution "Self-Consistent", éq. 8.13, ne présente pas de comportement linéaire, Fig. 8.2 (a) et (b). Elle exhibe un comportement critique lorsque $\kappa \to -\infty$ ou $\kappa \to +\infty$, pour une fraction volumique en inclusion de $\phi_F \approx 0.50$.

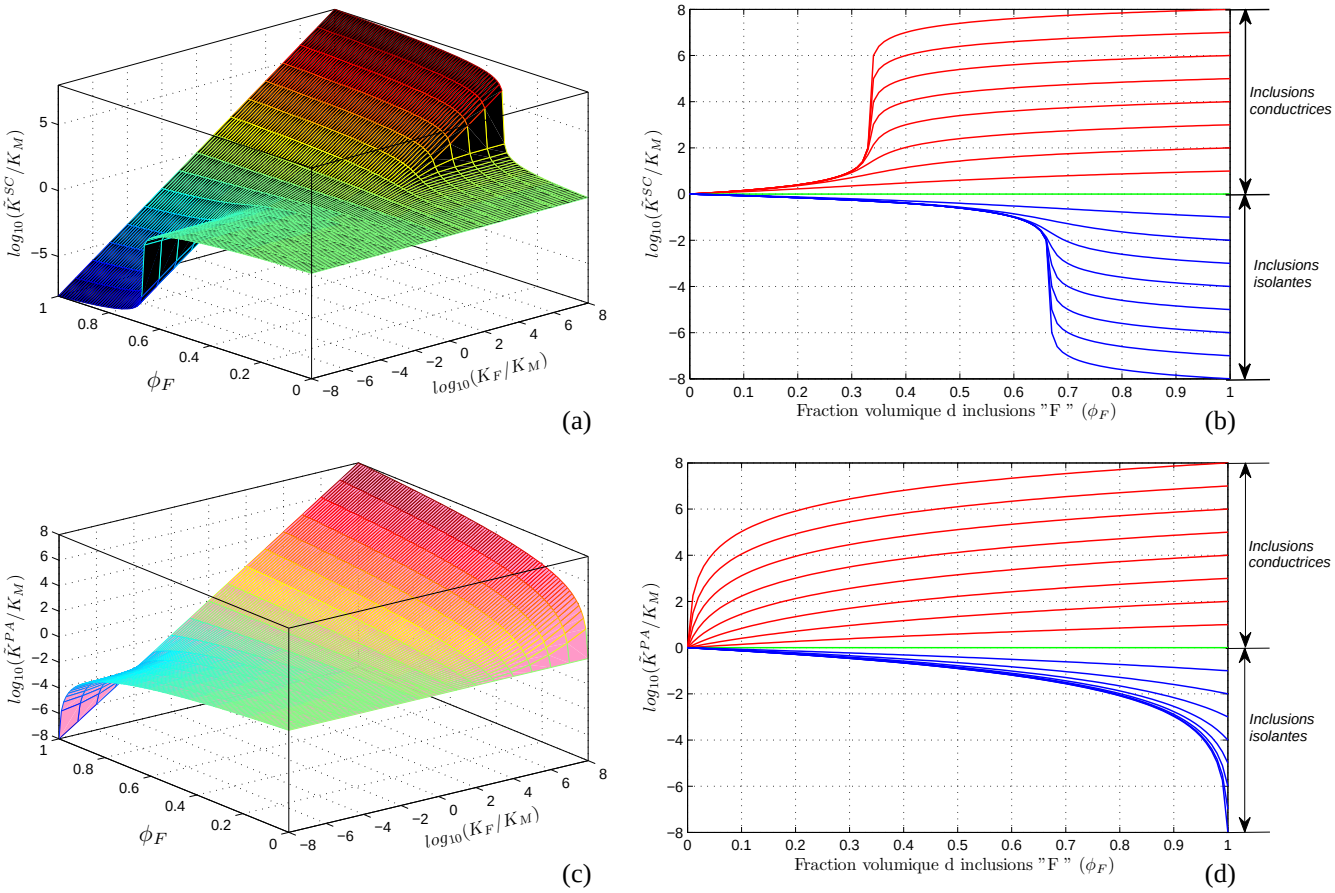


FIG. 8.3 – Conductivités hydrauliques effectives théoriques des $\tilde{K}^D$, (a) S.C. éq. 8.13 et (c) P.A. éq. 8.17, tracées en fonction des deux paramètres étudiés ϕ_F et κ pour le cas d'un milieu binaire 3D. Coupes réalisées à ϕ_F variables et à κ fixé $\in$ [-8 ; +8], (b) éq. 8.13 et (d) éq. 8.17.

Pour le milieu binaire 3D isotropiquement distribué et purement aléatoire, Fig. 8.3, l'évolution du comportement de ces macro-perméabilités, éq. 8.13 et éq 8.17, en fonction de la fraction volumique en inclusions, ϕ_F est identique pour de fortes fractions en inclusions conductrices et de faibles fractions en inclusions résistives, Fig. 8.3, compa-

rez (b) et (d). Mais leurs comportements sont très différents pour de faibles fractions en inclusions conductrices, $\phi_F \leq 0.30$ et $\kappa \geq +2$ et de fortes fractions en inclusions résistantes, $\phi_F \geq 0.60$ et $\kappa \geq -2$.
Comme pour le milieu binaire 2D, nous pouvons constater l'existence en 3D d'un comportement critique lorsque $\kappa \to -\infty$ ou $\kappa \to +\infty$ pour la solution "Self-Consistent", éq. 8.13 pour une fraction volumique en inclusions résistantes de l'ordre de $\phi_F \approx 0.66$ et en inclusions conductrices de $\phi_F \approx 0.33$.

Ces deux solutions analytiques de la conductivité effective de Darcy vont maintenant être comparées aux simulations numériques réalisées sur ces différents milieux 2D et 3D. Voir également la section 8.3 concernant les phénomènes critiques de type "percolation" et "quasi-percolation".

8.2 Expérimentations numériques : comparaisons avec les solutions analytiques

8.2.1 Perméamétrie sur milieux binaires 2D et 3D

Dans cette section, les expériences "perméamétriques" ont été menées uniquement suivant la direction $O\vec{x}$ en utilisant un seul générateur pseudo-aléatoire.
Les paramètres numériques utilisés sont les suivants :

- le rapport entre la taille de la maille numérique et la taille des blocs aléatoires (milieu purement aléatoire isotropiquement distribué) a été fixé à un ratio unitaire (r=1),
- le mode de pondération numérique des conductivités hydrauliques interfaciales (midnodales) utilisé est la moyenne géométrique des conductivités hydrauliques nodales ($\tilde{K}_{i,j+1/2,k} = \sqrt{K_{i,j,k} K_{i,j+1,k}}$).
- le solveur numérique utilise la méthode des gradients conjugués à préconditionnement diagonal,
- le nombre de mailles est fixées à 1 000 000 mailles pour les milieux binaires 3D et à 262 144 mailles pour le milieu binaire 2D,
- le critère de convergence du solveur linéaire a été fixé pour la majorité des expériences à 10^{-8}, sauf pour les simulations réalisées à faibles fractions d'inclusions et à forts log-contrastes où il à été fixée à 10^{-12} voir à 10^{-16}.

Le ratio existant entre la maille numérique et la taille des blocs aléatoires, et le mode de pondération des conductivités hydrauliques midnodales peut influencer la détermination de la conductivité hydraulique numérique effective pour des configurations de ce type, notamment près du seuil de percolation. Une analyse de la sensibilité numérique à ces paramètres et une comparaison entre les solutions numériques de la conductivité hydraulique avec la solution "Power Average" peut être trouvée dans la première partie de la thèse de Kruel-Romeu, 1994 [80].

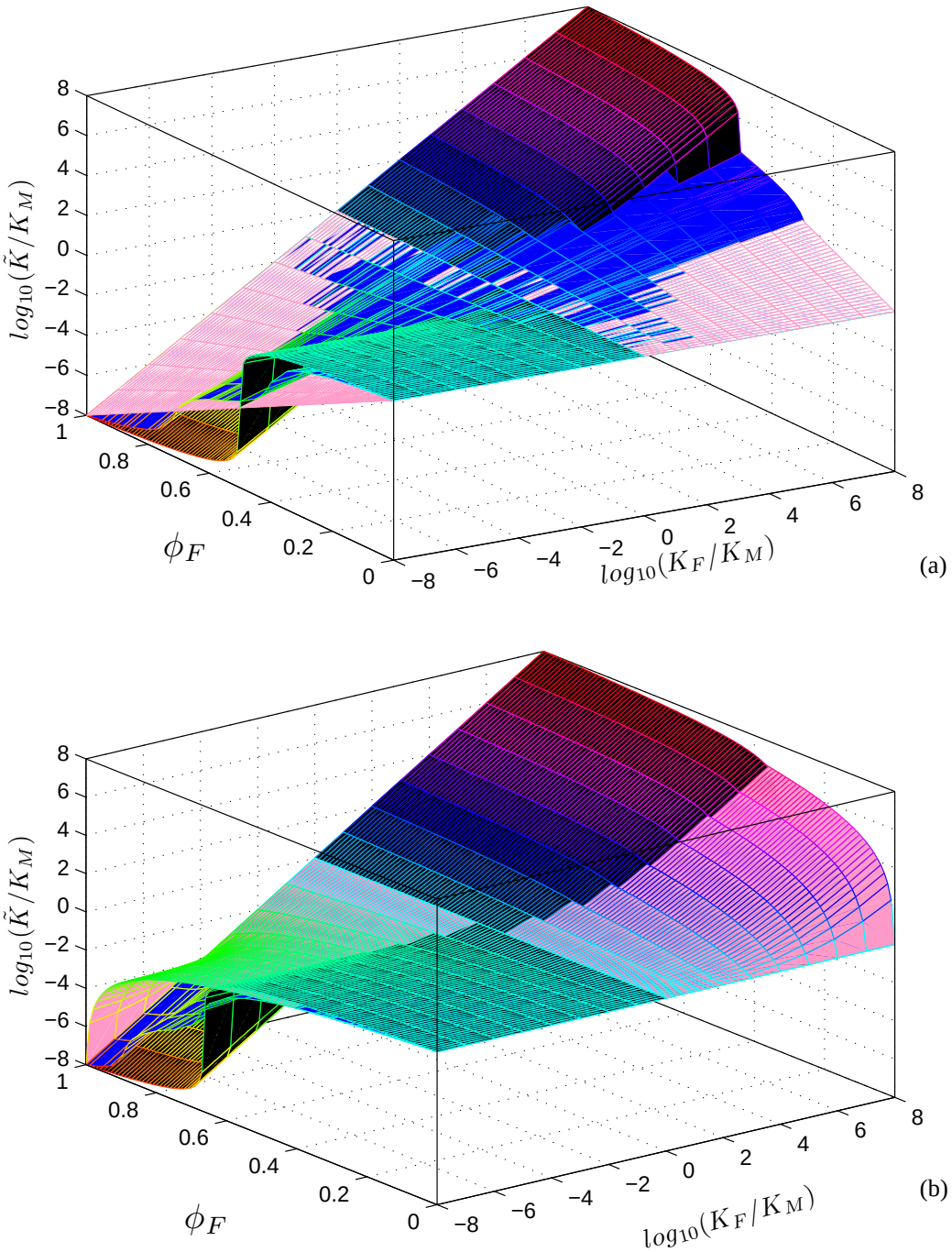


FIG. 8.4 – Comparaison entre les solutions numériques et analytiques pour le milieu binaire 2D purement aléatoire (a) et 3D (b). Surfaces noires $\tilde{K}^{SC}$, éq. 8.13, surfaces roses $\tilde{K}^{PA}$, éq. 8.18 (binaire 2D) et éq. 8.17 (binaire 3D), et surfaces bleues $\tilde{K}^{D}$ numériques "perméamétriques" tracées en fonction de la fraction volumique en inclusions ϕ_F et du log-contraste $\kappa = log_{10}(K_F/K_M)$.

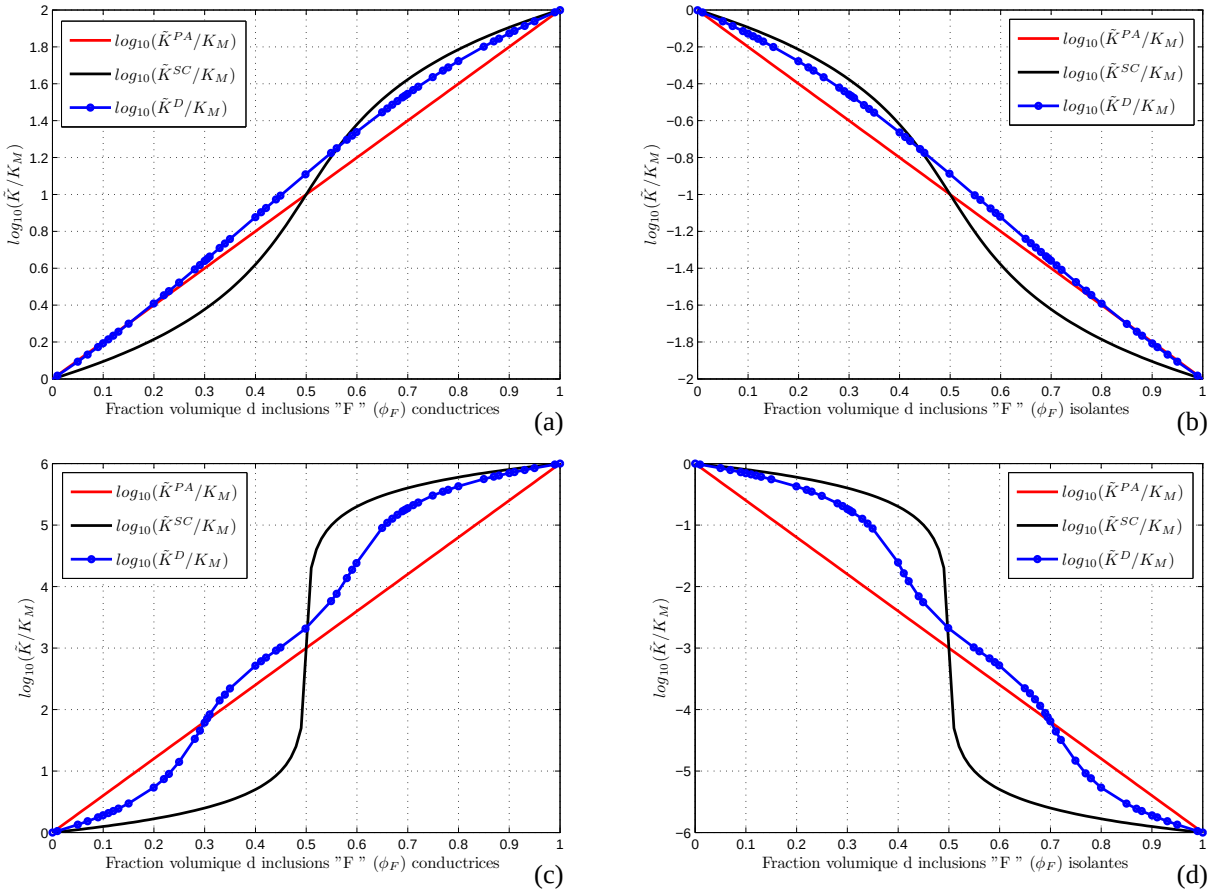


FIG. 8.5 – Comparaison entre les solutions numériques et analytiques. Pour le milieu binaire 2D purement aléatoire à fraction, ϕ_F variable et à log-contraste, κ fixé à +2 (a), -2 (b), +6 (c) -6 (d). Courbe noire solution analytique S.C. éq. 8.13 ; courbe rouge solution P.A. éq. 8.18 et courbe bleue solution numérique.

Pour notre étude, nous nous contenterons des choix effectués (rappelons-les : ratio maille/bloc=1 et pondération géométrique).

Commençons par la comparaison des deux solutions analytiques, "P.A." et "S.C.", avec les résultats obtenus par simulations numériques directes pour les milieux binaires 2D purement aléatoires Fig. 8.4 (a) et Fig. 8.5.
Pour ce type de milieux, la théorie "Self-Consistent" donne encore de bons résultats à contrastes faibles et modérés si la phase isolante est peu présente, Fig. 8.5 (a) et (b). Dans les cas contraires, nous préférerons la solution analytique "Power Average". Sauf pour des contrastes élevés, $|\kappa| \in [+5\,;\,+8]$, où ces deux solutions ne permettent qu'un bon encadrement des résultats numériques. Cependant, ces deux théories s'ajustent mal à toute une partie des résultats numériques obtenus. Notamment pour des fractions volumiques en inclusions conductices comprises entre 30 et 50 pour cent d'éléments et

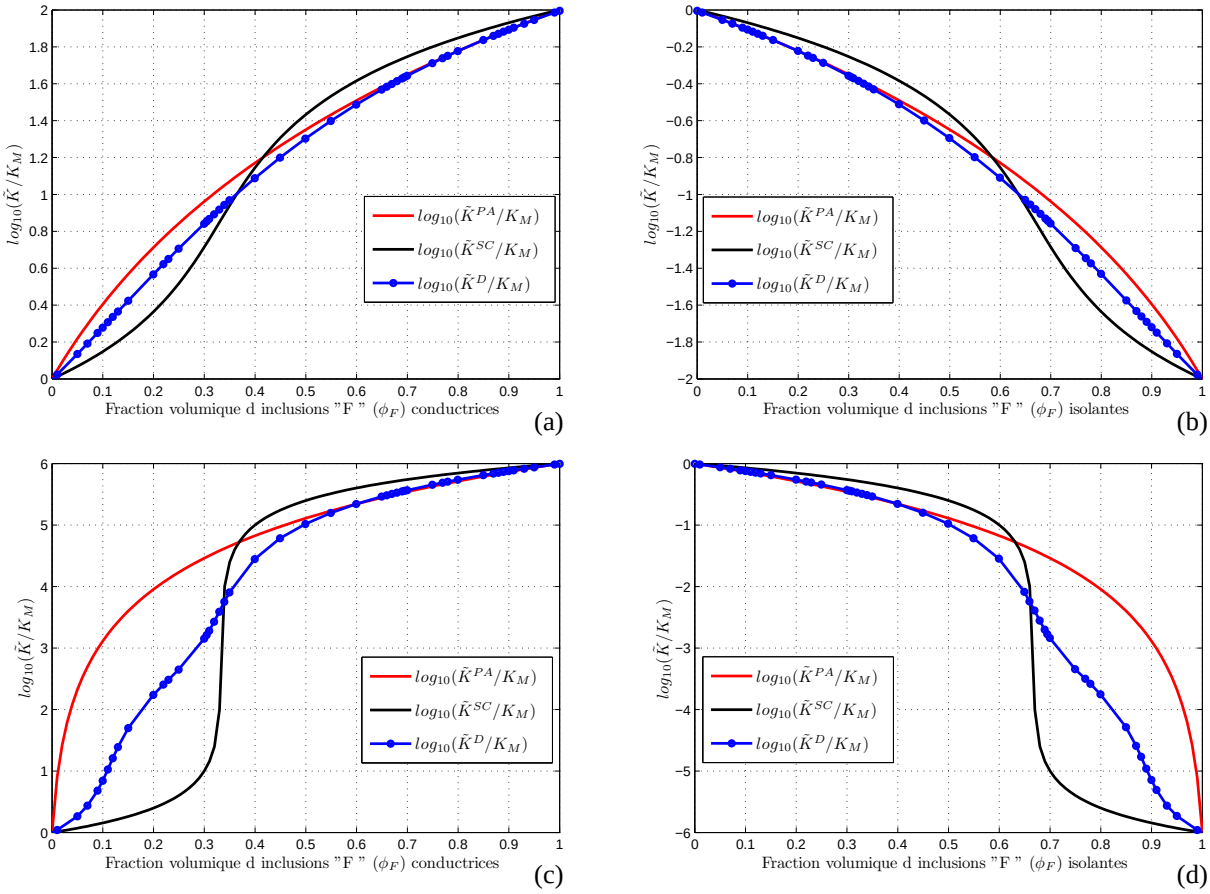


FIG. 8.6 – Comparaison entre les solutions numériques et analytiques. Pour le milieu binaire 3D purement aléatoire, à fraction, ϕ_F variable et à log-contraste, κ fixé à +2 (a), -2 (b), +6 (c) -6 (d). Courbe noire solution analytique S.C. éq. 8.13 ; courbe rouge solution P.A. éq. 8.17 et courbe bleue solution numérique.

pour des fractions volumiques en inclusions isolantes comprise entre 50 et 70 pour cent d'éléments Fig. 8.5.

Pour les milieux binaires 3D purement aléatoires, si le milieu contient une phase conductrice importante, $\phi_F \geq 0.60$ pour $\kappa \in]0\ ;\ +8]$ ou $\phi_F \leq 0.40$ pour $\kappa \in [-8\ ;\ 0[$, Fig. 8.6, la théorie "Power-Average" donne un très bon ajustement avec les solutions numériques obtenues, meilleur qu'en utilisant la théorie "Self-Consistent". Lorsque les fractions en inclusions isolantes sont supérieures à 60 pour cent et le pourcentage d'inclusions conductrices inférieures à 35 pour cent, ces deux solutions donnent encore un bon encadrement des solutions numériques. Nous pouvons ici remarquer que sur cet intervalle, le calcul d'une moyenne arithmétique de ces deux quantités peut donner de bons résultats.

Cependant comme pour le milieu binaire 2D purement aléatoire, ces deux solutions donnent un mauvais ajustement pour tout un secteur de fractions volumiques en inclu-

sions résistantes et conductrices. Notamment, pour des fractions volumiques en inclusions conductrices comprises entre 35 et 70 pour cent, et pour des fractions volumiques en inclusions isolantes comprises entre 40 pour cent et 65 pour cent, Fig. 8.6 (a), (b), (c) et (d), les deux solutions ne donnent pas de bon encadrement.

8.2.2 Premier bilan et discussions des deux macro-conductivités hydrauliques analytiques darciennes

Pour chacune des expériences numériques perméamétriques réalisées, nous avons obtenu une perméabilité effective numérique de Darcy notée $\tilde{K}^D$. Les résultats numériques ont pu mettre en évidence un écart avec les solutions analytiques présentées dans la première partie de ce chapitre.

Pour des milieux discrets, différents auteurs ont déjà mis en évidence ce fait. Cette différence est liée à l'impact de l'état local des connectivités hydrauliques sur le comportement global du système, Knudby & al., 2006, [78] et S*á*nchez-Vila & al., 1996, [119] . Les solutions analytiques proposées dans la littérature et notamment celles présentées dans la partie précédente sont pour la plupart surtout applicables à des milieux continus ou discrets tels que l'une des deux phases est suffisamment "diluée" par rapport à l'autre (méthode S.C.) ou bien pour des continua statistiques autocorrélés possédant certaines symétries (méthode P.A.). De plus, dans les deux cas, le nombre d'échantillons statistiques doit être grand (domaine infini). Or, dans les cas réels, comme les milieux poreux fracturés, les milieux d'étude sont de taille finie. Ainsi, la plupart des solutions proposées, bien que donnant une bonne approximation du phénomène étudié, ne rendent pas compte des effets des connectivités locales sur le comportement global du système.

La conductivité hydraulique effective des milieux fracturés discrets modélisés par exemple avec des inclusions (plans de fractures disques ou rectangles), est totalement dépendante de ces phénomènes de connectivité. En effet, pour des fractions volumiques faibles en éléments conducteurs, des "amas percolants" peuvent se former préférentiellement dans une seule ou plusieurs directions. Se pose alors le problème de l'existence et la détermination d'un tenseur directionnel de conductivité effective. Nous verrons par la suite, une méthodologie numérique pour obtenir le tenseur complet des conductivités. Cependant avant d'aborder ce problème, il est important de caractériser l'influence des phénomènes de percolation et de quasi-percolation sur la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy pour des écoulements de types "perméamétriques" (comme ici) sur des milieux isotropes purement aléatoires binaires 2D et 3D (dans un premier temps).

8.2.3 Perméamétrie sur deux milieux poreux fissurés poissonniens (2D et 3D)

Prenons comme exemple, pour illustrer les propos tenus plus haut, deux milieux fracturés poissonniens 3D et 2D, respectivement nommés $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$ Fig. 8.7 (a) et (b) ; et $MF1_{2D}$ et $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (c) et (d). Ces quatre milieux fracturés sont respectivement constitués de :

- 50 fractures circulaires poissonniennes pour $MF1_{3D}$ ($\phi_F = 0.046$), Fig. 8.7 (a), et de 67 fractures circulaires poissonniennes pour $MF2_{3D}$ ($\phi_F = 0.068$), Fig. 8.7 (b), d'orientation uniforme, d'ouverture constante et de diamètres uniformément répartis entre [5m ; 25m],
- 200 fractures parallélépipédiques planes poissonniennes pour $MF1_{2D}$ ($\phi_F = 0.193$), Fig. 8.7 (c), et de 260 fractures parallélépipédiques planes poissonniennes pour $MF2_{2D}$ ($\phi_F = 0.242$), Fig. 8.7 (d), d'orientation uniforme, d'ouverture constante et de diamètres uniformément répartis entre [5m ; 50m].

Ces différents milieux poreux fracturés ont été générés en utilisant, dans chaque cas, les mêmes paramètres pour le générateur pseudo-aléatoire. Donc, les cinquante premières fractures de $MF2_{3D}$ sont celles de $MF1_{3D}$ et les 200 premières de fractures $MF2_{2D}$ sont celles de $MF1_{2D}$. Par construction, les fractions volumiques des milieux 3D sont très proches (elles ne différent que de 0.22 %) ; et celles des milieux 2D ne différent que de 4.5 %. L'étude de leur comportement hydraulique moyen, à été réalisée en utilisant la procédure décrite précédemment, c'est à dire en fixant la conductivité hydraulique de la matrice à 1 $m.s^{-1}$ et en faisant varier la conductivité hydraulique des fractures circulaires de 10^{-8} à 10^{+8}.

Les résultats sont présentés sur les graphiques de la Fig.8.8 et 8.9 respectivement pour les milieux fracturés poissonniens 2D et 3D. Ces résultats ont été comparés à ceux des solutions analytiques "Self-Consistent", éq. 8.13 ; et 'Power-Average', éq. 8.17 pour les milieux binaires 3D et éq. 8.18, pour les milieux binaires fracturés 2D, figure 8.8, et 3D, figure 8.9.

Pour des log-contrastes peu importants, $0 < \kappa < 3$, nous pouvons remarquer que le milieu fracturé 2D et 3D, la solution "Power Average" donne une très bonne approximation des solutions numériques, Fig. 8.8 et Fig. 8.9. Lorsque les log-contrastes sont supérieurs, la solution "Power-Average" donne un bon ajustement surtout pour le milieu $MF2_{3D}$, Fig. 8.9 (b) et (d). A ces log-contrastes, la solution "Self-Consistent" est mauvaise, surtout pour les milieux $MF2$ 2D et 3D Fig. 8.8 (b) et Fig. 8.9 (b).

Pour des log-contrastes κ supérieurs à 1000, les macro-K de Darcy numériques obtenues pour ces deux milieux, présentent de grandes différences aussi bien pour les milieux fracturés 2D que 3D, Fig. 8.9 et Fig. 8.8 (comparez (a) et (b)). Pour identifier l'origine de cette différence, nous avons développé un algorithme de recherche topologique permettant de retrouver dans l'espace 2D et 3D, l'ensemble des amas formés par les objets générales par $MatFrac3D$ (ellipse, tube, plan circulaire,...).

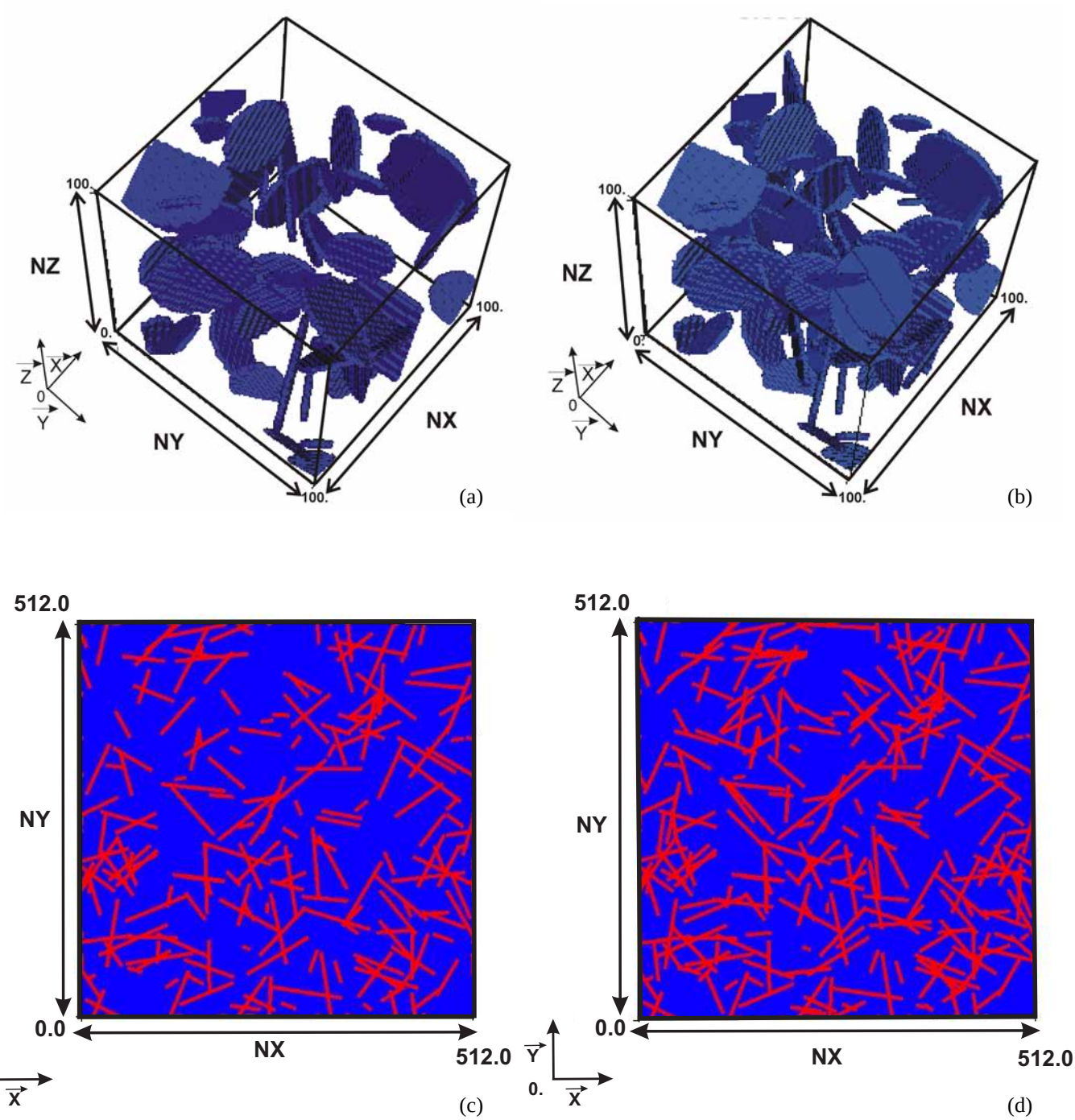


FIG. 8.7 – Milieux fracturés 3D étudiés (a) $MF1_{3D}$ et (b) $MF2_{3D}$. Milieux fracturés 2D $MF1_{2D}$ (c) et $MF2_{2D}$ (d).

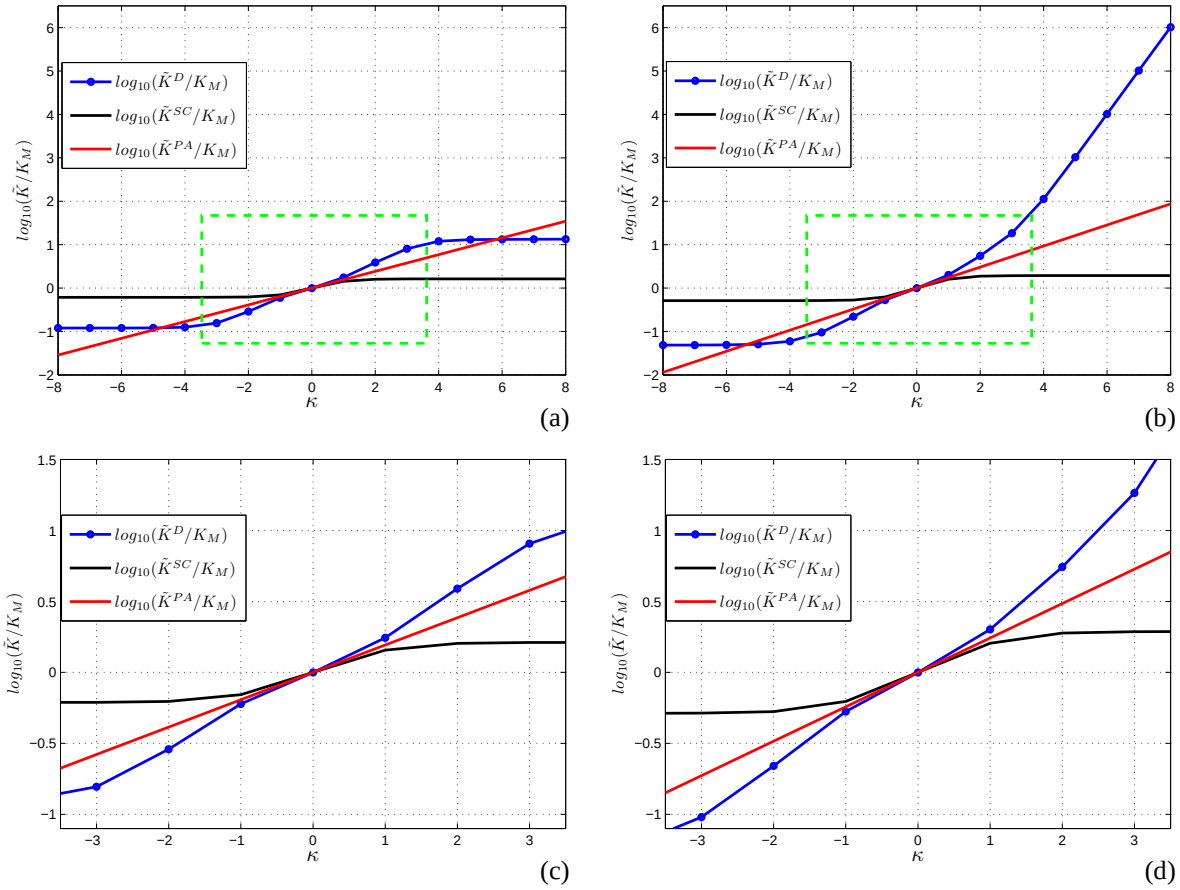


FIG. 8.8 – Comparaison entre les solutions numériques $\tilde{K}^D$ obtenues pour les deux milieux fracturés 2D (a) $MF1_{2D}$ et (b) $MF2_{2D}$ pour un écoulement "perméamétrique" suivant la direction $O\vec{x}$, comparées avec les deux solutions analytiques "Self-Consistent", éq. 8.13, courbe noire et "Power Average", éq. 8.18, courbe rouge. Et zooms réalisés pour des contrastes $\kappa \in [-3\,;\,+3]$ pour le milieu $MF1_{2D}$ (c) et pour le milieu $MF2_{2D}$ (d).

L'algorithme est présenté en Annexe (Module *MatFracPerco*).
Nous avons alors pu mettre en évidence que la différence existant entre la conductivité hydraulique effective de Darcy de ces deux milieux était liée à une différence "morphologique"/"topologique". Et notamment à la présence d'un amas percolant suivant la direction $O\vec{x}$ pour les milieux $MF2_{3D}$ et $MF2_{2D}$. Une dernière remarque peut ici être formulée : la comparaison pour de forts log-contrastes entre la simulation numérique réalisée et la solution "Power Average", pourrait être une indication sur le comportement percolant/non percolant du milieu poreux fracturé étudié.

Comprendre plus en détail l'importance des phénomènes de percolation et de quasi-percolation sur le comportement global du système d'étude et leurs identifications peut s'avérer être une information très importante à avoir pour la compréhension et l'étude des milieux poreux fracturés 3D et 2D, notamment pour la détermination d'un V.E.R. .

Pour cela, nous allons étudier l'influence des phénomènes de percolation et de quasi-percolation sur les milieux statistiques isotropes (au sens du tenseur de dispersion) 2D et 3D présentés dans la partie précédente en utilisant des expériences numériques perméamétriques saturés. Les expériences perméamétriques qui vont suivre, sont toutes réalisées suivant la direction $O\vec{x}$. Nous passons maintenant à une analyse plus complète, numérique/algébrique, des effets de percolation et de "quasi-percolation". Avant cela, il est nécessaire de réaliser un petit rappel théorique sur la théorie de la percolation.

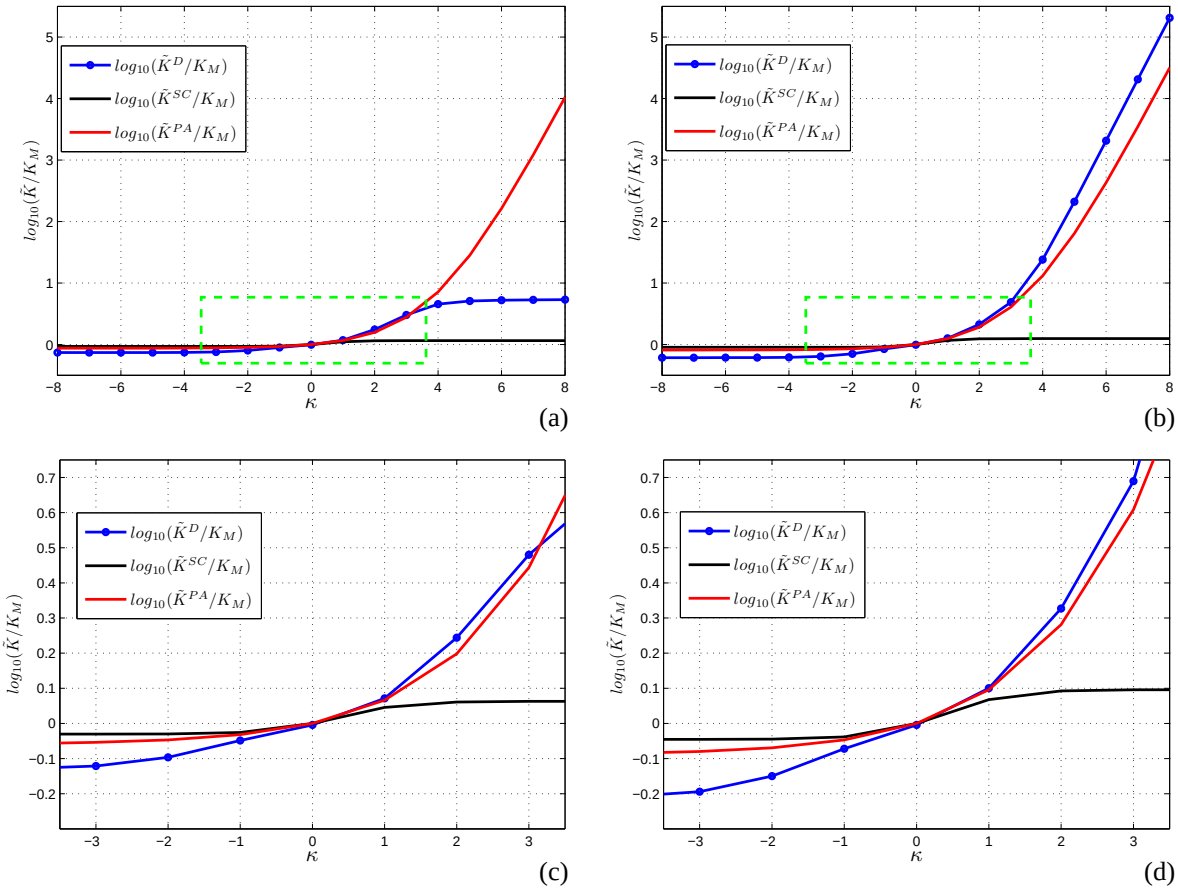


FIG. 8.9 – Comparaison entre les solutions numériques $\tilde{K}^D$ obtenues pour les deux milieux fracturés $MF1_{3D}$ (a) et $MF2_{3D}$ (b) pour un écoulement "perméamétrique" suivant la direction $O\vec{x}$, comparées avec les deux solutions analytique "Self-Consistent", éq. 8.13, courbe noire et "Power Average", éq. 8.17, courbe rouge. Et zooms réalisés pour des log-contrastes $\kappa \in [-3\,;\,+3]$ pour le milieu $MF1_{3D}$ (c) et pour le milieu $MF2_{3D}$ (d).

8.3 Influence des phénomènes de percolation (théorie)

L'importance des états locaux de connectivités entre la phase conductrice et la phase résistante sur la conductivité hydraulique macroscopique va être examinée au cours de cette section. Notre intérêt se portera sur les phénomènes de percolation (qui dépendent des connectivités connectivité entre phases conductrices/conductrices et isolantes/isolantes) et de quasi-percolation (qui peuvent aussi dépendre (en outre) des connectivités entre phases isolantes/conductrices et conductrices/isolantes) pour des milieux binaires 2D et 3D purements aléatoires. Pour ce faire, nous allons utiliser la même procédure d'étude que dans la partie précédente, en fixant une fraction volumique en inclusion, ϕ_F, et en réalisant une variation continue de sa conductivité hydraulique de 10^{-8} à 10^{+8}.

8.3.1 La percolation - premières définitions

Le terme de "percolation" vient du latin *percolatio* qui signifie filtration. Le principe et le concept de la physique et du modèle mathématique de la percolation ont été développés afin de pouvoir étudier et analyser divers phénomènes et optimiser certain processus industriels. Les champs d'application sont vastes, nous pouvons citer par exemple, la fabrication des masques à gaz, l'influence de la création de connections entre les îles d'un même archipel en fonction des variations eustatiques pour expliquer la migration de population animale ou humaine d'une île à l'autre ou d'un continent à l'autre, la gestion d'un réseau de communication urbaine en fonction de la formation de bouchons autoroutiers ou de la fréquence des feux de signalisation, la formation de polymères et la transition sol-gel, l'influence du mélange de deux poudres l'une isolante et l'autre conductrice sur le comportement résistant/conducteur du mélange ou encore de deux matériaux de propriétés hydrauliques/hydrodynamiques différentes, ou plus récemment sur la disposition des composants informatiques d'un ordinateur pour la miniaturisation.

Le premier modèle étudié faisant appel aux principes de la percolation a été développé pour l'étude de la transition sol-gel par P.J. Flory en 1941 [48] et W.H. Stockmayers en 1943 [128]. Leurs études portaient sur la polymérisation de molécules ramifiées lors de la transition sol-gel. Cependant, les deux auteurs n'ont développé leur théorie que pour un type de réseau particulier dont la structure arborescente est infinie et sans boucle, le réseau de Bethe.

Dans le champ des mathématiques, l'étude de la percolation tire son origine d'une question posée en 1954 par S.R. Broadbent sur l'utilisation des méthodes de Monte-Carlo pour l'analyse de la pénétration d'un fluide ou d'un gaz, dans un labyrinthe formé de passages ouverts ou fermés. En 1957, S.R. Broadbent et J.M. Hammersley ont introduit le terme de percolation dans un article fondateur où ils définissent la percolation comme le modèle *dual* de celui de la diffusion [23].

Pour pouvoir être étudié grâce à la théorie de la percolation, le problème choisi doit répondre à certaines hypothèses fondamentales :

- le phénomène étudié doit prendre place dans un espace contenant un grand nombre d'éléments,
- la relation entre les éléments repose sur un aspect *local*,
- cette relation entre les éléments a un caractère aléatoire.

A partir de ces hypothèses, la théorie de la percolation décrit l'apparition d'un phénomène critique au niveau *global* à partir d'un certain seuil, *le seuil de percolation*.

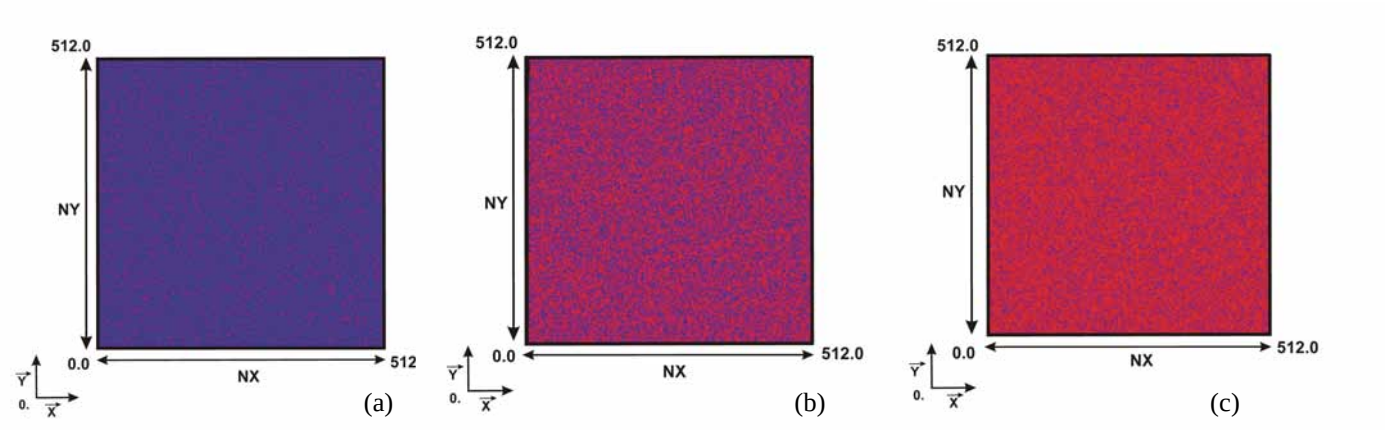


FIG. 8.10 – Milieux binaires 2D purement aléatoires constitués de deux phases, la phase inclusion (rouge) et la phase matrice (bleue) : avec 25 pour cent d'inclusion ($\phi_F = 0.25$) (a), avec 60 pour cent d'inclusion ($\phi_F = 0.60$) (b) et avec 75 pour cent d'inclusion ($\phi_F = 0.75$) (c).

Au dessous de ce seuil, l'influence de l'information portée par la phase considérée n'est que locale, alors qu'au delà, cette information prend un caractère global, macroscopique, le milieu percole et devient sensible à la connectivité et à la connexité du réseau créé par la population étudiée et à la dimension de l'espace. L'influence de ce seuil critique peut également s'envisager comme l'*émergence* et la disparition des propriétés d'une population donnée.

En résumé, nous pouvons dire que la théorie de la percolation s'intéresse à des désordres binaires comme les systèmes *Matrices/Fractures, Isolants/conducteurs*, etc. . Il permet de rendre compte de l'état d'un phénomène ou d'un système physique composé de multiples éléments aux relations et aux caractéristiques hétérogènes.

La théorie de la percolation fait partie de la famille des transitions de phase, c'est-à-dire que le passage d'une phase à l'autre s'obtient en modifiant de façon continue la valeur d'un paramètre. Chacune des phases correspond à une situation particulière déterminée par la présence ou l'absence d'un amas infini propre à la population considérée.

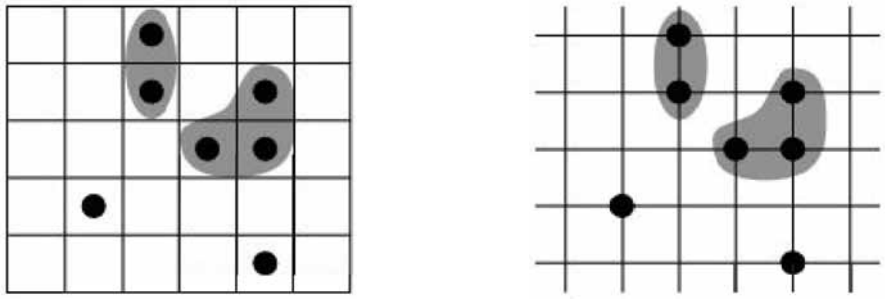
Dans le champ des géosciences, l'importance des phénomènes de percolation sur le comportement global du système et sur les phénomènes de transport a été étudiée et utilisée par de nombreux auteurs. Une revue de ces différentes approches et travaux réalisés peut être trouvée dans une revue réalisée par Berkowitz, 1998 [19] et dans le livre de Sahimi, 1993 [117]. Notre étude viendra se placer en complément de ces travaux.

8.3.2 Les modèles théoriques de la percolation

Pour réaliser cette étude, il faut dans un premier temps choisir le modèle théorique de notre étude parmi ceux existants dans la littérature.

Trois modèles théoriques de percolation existent, on distingue respectivement :

- la percolation de sites (*site percolation*) Fig. 8.11 (a),
- la percolation de liens (*bound percolation*) Fig. 8.11 (b),
- et la percolation mixte (*bound-site percolation*).



(a) (b)

FIG. 8.11 – Modèles classiques de percolation : (a) percolation de sites et (b) percolation de liens 2D.

Dans la version numérique de nos essais, les "sites" seront donc les cellules volumes finies et les "liens" entre chacun des sites sera réalisé par le schéma numérique de pondération des conductivités mid-nodale ou interfaciale (aussi bien en 2D qu'en 3D). Ici nous utiliserons uniquement un schéma de pondération utilisant une moyenne géométrique des conductivités mid-modale. A ce moment de l'étude, le modèle de percolation qui semble empiriquement être le plus proche des modèles théoriques de la percolation semble être un modèle de percolation de sites, à la vue de la géométrie utilisée ici. Cependant, une interprétation de nos essais en termes de percolation de liens de nos essais serait également possible. Nous nous rapprocherons donc plutôt d'un modèle de percolation mixte liens-sites. Les résultats numériques viendront nous éclairer sur ce problème.

Pour cette étude, chacun des sites est affecté aléatoirement de propriétés antagonistes, isolante/conductrice suivant une loi de distribution uniforme entre $[0\,;\,1]$ et nous nous intéresserons à l'influence de la variation du contraste locale entre les deux phases

sur l'émergence et la disparition de différents états du système.
Plusieurs éléments sont à rappeler ici avant de présenter les résultats :

- d'une part, la phase inclusion *'F'* est soit résistante/isolante, pour $\kappa < 0$, soit conductrice, pour $\kappa > 0$, κ étant le log-contraste de conductivité hydraulique.
- d'autre part, il n'y a pas de *tout* ou *rien* (ou presque...),
- enfin, tous les milieux binaires aléatoires étudiés seront générés à partir d'un seul générateur aléatoire ; ainsi, une augmentation uniforme de la fraction volumique en inclusion du milieu, se traduira par une augmentation uniforme et aléatoire de la taille des amas présents dans le milieu.

De plus, nous ne sommes pas dans un milieu à une population mais à deux populations où chacune des populations ('matrice/inclusion') est associées à une probabilité de présence :

- une population inclusion associée à un probabilité de présence $p_F = \phi_F$
- et une population 'matrice' associée à une probabilité de présence $p_M = \phi_M$ tel que $p_M = 1 - p_F$ et $\phi_M = 1 - \phi_F$

Tout l'interêt va donc se porter sur l'analyse de l'influence respective des deux populations, sur l'émergence de certains états critiques du mélange binaire étudié et leurs impacts sur la conductivité hydraulique $\tilde{K}^D$ macroscopique.

En ce qui concerne l'étude des phénomènes de percolation les recherches dans la littérature se sont focalisées sur l'étude du seuil de percolation et sur le comportement à l'approche de ce seuil.

8.3.3 Le seuil de percolation (revue)

Au sein d'un réseau dans lequel les sites (ou les liens) sont actifs avec une probabilité *p* et inactif avec une probabilité *q = 1-p*, le seuil de percolation p_c se définit comme la probabilité *p* à laquelle un amas de taille *infinie* apparaît dans un réseau de taille *infinie* (Clerc et al., 1983 [30]) :

- pour tout $p > p_c$, une *chaîne* s'étend d'un bout à l'autre du système étudié,
- alors que pour $p < p_c$, ce type de *chemin* n'existe pas.

Dans la théorie de la percolation, l'existence du seuil de percolation est centrale.

Cette valeur critique se caractérise dans les études classiques, pour une certaine propriété "P", par :

$$\text{P(p)} \begin{cases} = 0 \;\; si \;\; p < p_c \\ > 0 \;\; si \;\; p > p_c \end{cases}$$

Cette première propriété du seuil de percolation se traduit de la manière suivante dans un réseau de taille infinie :

- lorsque *p* est inférieure au seuil critique, le réseau est formé d'amas de courtes tailles allant de l'unité jusqu'à une longueur maximale ; cette valeur maximale

correspond à la longueur de corrélation du système.
- cette longueur de corrélation devient infinie au seuil de percolation ; à l'approche du seuil, l'échelle de taille sur laquelle il faudrait effectuer une moyenne devient par conséquent plus grande.

Lors de la définition du seuil de percolation, une ambiguïté est née sur le degré de certitude lié à la présence d'un amas percolant sur le réseau. Selon cette théorie, au dessus du seuil de percolation un amas infini apparaît de façon certaine dans un domaine de taille fini. De façon empirique, on précise seulement qu'il existe une probabilité positive de percolation. Cette différence tient à l'effet dit de "taille finie" du problème.

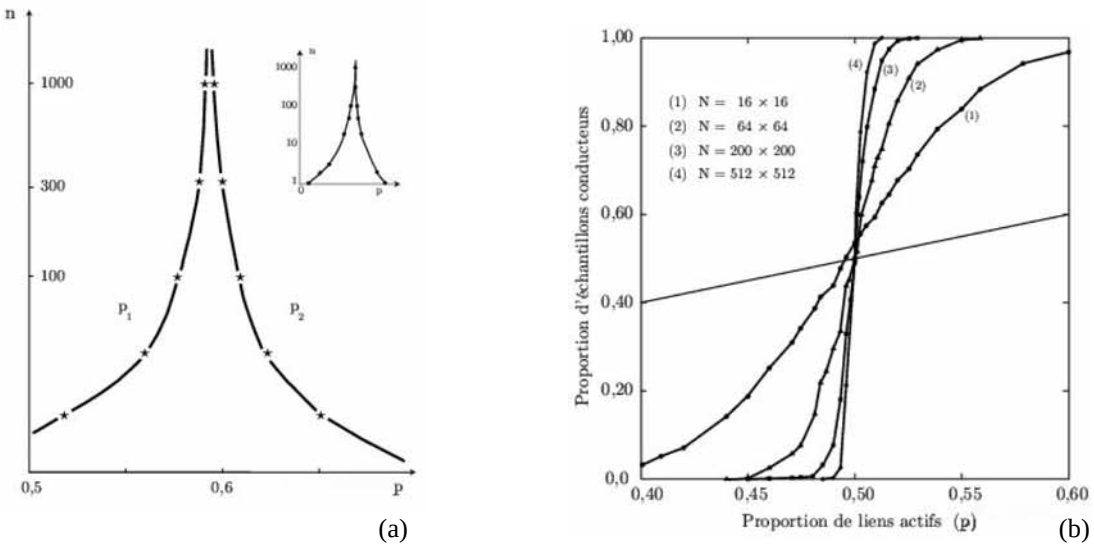


FIG. 8.12 – Zone de transition et taille du réseau pour un milieu 2D, Clerc et al., 1983 [30].

En effet, dans les systèmes de taille finie comme ceux simulés sur un ordinateur, la valeur déterminée n'est généralement pas la valeur "exacte" du seuil. Ainsi, chacune des valeurs obtenues par des méthodes numériques ou expérimentales doit être extrapolée avec précaution à un système de taille finie. Pour obtenir des résultats significatifs universels et atteindre la notion d'*extensivité* par l'exemple, il est important de se trouver proche de la limite thermodynamique du système.

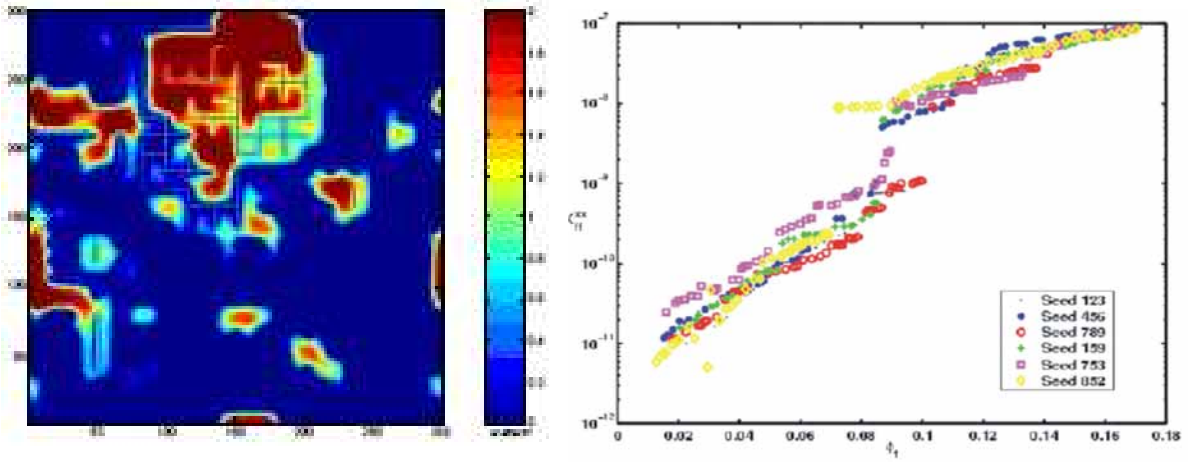
En physique statistique, la limite thermodynamique est une limite mathématique où l'on a conjointement :
- le nombre d'éléments du système considéré tend vers l'infini,
- le volume du système temps vers l'infini,
- la densité des éléments, ou la fraction volumique d'inclusions reste constante.

La modification des caractéristiques critiques provenant du fait que la limite thermodynamique n'est pas atteinte est appelée "effet de taille finie". La question est alors de savoir comment varient les résultats d'un réseau de taille importante mais limitée. Si la

taille du réseau est finie, il existe une probabilité non nulle d'obtenir un amas reliant les bords opposés du réseau, quel que soit le taux d'activité.
Les résultats expérimentaux obtenus par Clerc et al, 1983 [30], pour un réseau électrique, montrent que la taille du domaine est essentielle afin d'obtenir l'universalité des résultats au seuil critique, Fig. 8.12.

Dans notre étude, les réseaux proposés seront définis de façon à pouvoir négliger les effets de taille finie. En considérant les résultats obtenus par Clerc et al., nous choisirons des milieux binaires définis sur des grilles cartésiennes, en particulier des grilles binaires aléatoires avec une seule maille par bloc (pixel ou voxel de perméabilité aléatoire) avec :

- Pour les milieux binaires 2D : 512*512 pixels.
- Pour les milieux binaire 3D : 100*100*100 voxels.



(a) (b)

FIG. 8.13 – (a) Une méthode permettant la détection de l'amas percolant par l'interprétation du problème de fermeture de Quintard et Whitaker 1996 [113] pour des conditions aux limites de type périodiques, (b) résultats numériques obtenus pour différents graines ou "seed" du générateur pseudo-aléatoire, avec une perméabilité de fracture $k_F = 10^{-7}\ m^2$ et une perméabilité matricielle $k_M = 10^{-10}\ m^2$. D'après Kfouri 2004 [75].

Pour la détermination du seuil de percolation, différentes méthodes existent. Nous pouvons citer :

- les méthodes numériques,
- la méthode des séries,
- la méthode de remormalisation,

Récemment, Kfouri et al. [75], [76] ont étudié l'impact des phénomènes de percolation sur le choix de la taille du domaine d'étude pour la détermination du V.E.R. et sur la perméabilité macroscopique de Darcy en résolvant le problème de fermeture proposé par Quintard et Whitaker 1996 [113], Fig. 8.13. Leurs études ont porté sur des milieux binaires ou des réseaux cartésiens 2D où les deux phases sont actives. La perméabilité

de fracture a été fixée à $k_F = 10^{-7}\ m^2$ et la perméabilité matricielle à $k_M = 10^{-10}\ m^2$.

Dans cette étude, les auteurs se sont intéressés à l'impact de la densité de fractures sur la perméabilité effective de Darcy en "gelant" l'ouverture des fractures sur un milieu binaire 2D de 1000*1000 mailles. Les fractures étant représentées par des segments situés sur un maillage régulier.
Les simulations menées par ces auteurs ont pu mettre en évidence, par une méthode de Monte-Carlo, une fraction critique de percolation comprise entre 8 et 10 pour cent d'inclusions 'fracture', comme nous pouvons le noter sur la figure 8.13 (b).

Réseaux 2D			
Réseau	Z	p_{cb}	p_{cs}
Honeycomb	3	$1-2sin(\pi/18) \approx 0.6527^*$	0.6962
Square	4	$1/2^*$	0.5927
Triangular	6	$2sin(\pi/18)^*$	$1/2$
Réseaux 3D			
Réseau	Z	p_{cb}	p_{cs}
Diamont	4	0.3886	0.4299
Simple Cubic	6	0.2488	0.3116
BCC	8	0.1795	0.2464
FCC	12	0.119	0.199

TAB. 8.1 – Valeurs du seuil de percolation pour différents types réseaux 2D et 3D classiques, d'apprès Sahimi 1993 [117] : p_{cb} seuil de percolation pour la percolation de liens ('bound percolation thershold'), p_{cs} seuil de percolation pour la percolation de sites ('site percolation thershold') et Z nombre de coordination du réseau.($.^*$Résultats exacts).

La valeur de p_c dépend du modèle de percolation choisi (bien que des liens existent entre eux), de la géométrie ainsi que de la dimension D du problème et non de l'interprétation physique des sites occupés par des liens présents ou des sites occupés, ni de la façon dont on réalise l'augmentation de p à partir de zéro. Ceci est une des caractéristiques fondamentales de *l'aspect universel* de la percolation. Le tableau suivant (Tab. 8.1), établi à partir de différentes références bibliographiques, e.g. Sahimi 1993 [117], indique les valeurs exactes ou approchées des seuils de percolation selon la nature du réseau, sa dimension et le modèle de percolation. Il précise aussi le nombre de coordination Z du réseau, c'est à dire le nombre de plus proches voisins d'un site donné.

Les études réalisées sur les problèmes liés aux phénomènes de percolation portent sur la détermination du seuil de percolation. Mais surtout sur les phénomènes ayant lieu à l'approche de ce seuil et sur la caractérisation de la transition entre les différents états du système. Nous verrons que pour notre problème, d'autres points critiques apparaissent lorsque l'on étudie comme ici la conductivité hydraulique de Darcy d'un milieu poreux très fissuré et plus généralement les phénomènes de percolation à deux

populations "actives".

8.4 Analyse numérique des phénomènes de percolation

L'analyse des phénomènes de percolation et de quasi-percolation se fera par l'analyse des coefficients de sensibilité de la log macro-K de Darcy que nous allons définir. Pour toutes les expériences perméamétriques réalisées la conductivité hydraulique de la phase matricielle sera unitaire, et la variation du log-contaste (κ) sera uniquement obtenue par la variation de la conductivité hydraulique de la phase inclusion de 10^{-8} à 10^{+8} par pas de $+1$.

8.4.1 Les coefficients de sensibilité de la macro-K de Darcy

Nous définissons d'abord le logarithme décimal (ou log décimal par abréviation) de la conductivité hydraulique effective de Darcy normalisée, abusivement nommée parfois macro-K de Darcy :

$$\hat{Y}^D_{\phi_F,\kappa} = log_{10}\left[\frac{\tilde{K}^D(\phi_F,\kappa)}{K_M}\right]. \tag{8.19}$$

L'étude numérique des différentes sensibilités se fera en utilisant une méthode de continuation, c'est à dire la conductivité effective hydraulique de Darcy, $\tilde{K}^D(\phi_F,\kappa_i)$, à une fraction volumique en inclusions fixée (ϕ_F) et un contraste donné (κ_i), sera obtenue en utilisant comme condition initiale le champ de pression obtenu à la même fraction volumique en inclusion (ϕ_F) pour un contraste inférieur. Le champ initial pour chacune des fractions volumique testées sera celui où la phase matricielle et la phase inclusion ont la même propriété $\kappa_0(M) = \kappa_0(F) = 1$. Les champs de pressions étudiés résulteront de la perturbation de ce champ initial suite à la variation continue du contraste entre la phase inclusion et la phase matricielle.

L'influence de la fraction volumique en inclusions (ϕ_F), sur la solution numérique perméamétrique de la log macro-K de Darcy sera réalisée via l'étude de la sensibilité d'ordre 1 et 2 à ϕ_F.
La sensibilité d'ordre 1 à ϕ_F est définie de la manière suivante :

$$\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D = \frac{\partial\hat{Y}^D}{\partial\phi_F} = \frac{log_{10}[\tilde{K}^D(\phi_{Fi},\kappa)] - log_{10}[\tilde{K}^D(\phi_{Fi-1},\kappa)]}{\phi_{F\,i} - \phi_{F\,i-1}}, \tag{8.20}$$

$$\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D = \frac{log_{10}[\tilde{q}^D(\phi_{Fi},\kappa)] - log_{10}[\tilde{q}^D(\phi_{Fi-1},\kappa)]}{\phi_{F\,i} - \phi_{F\,i-1}}, \tag{8.21}$$

et la sensibilitité d'ordre 2 à ϕ_F :

$$\partial^2_{\phi_F}\hat{Y}^D = \frac{\partial^2\hat{Y}^D}{\partial^2\phi_F} = \frac{\partial_{\phi_F}\hat{Y}^D_i - \partial_{\phi_F}\hat{Y}^D_{i-1}}{\hat{\phi}_i - \hat{\phi}_{i-1}}. \tag{8.22}$$

Ces deux quantités vont être tracées respectivement en fonction de :

$$\hat{\phi} = \frac{\phi_{Fi} + \phi_{Fi-1}}{2}, \tag{8.23}$$

et de

$$\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\phi}_i + \hat{\phi}_{i-1}}{2}. \tag{8.24}$$

De la même manière, l'influence de la variation du log-contraste entre la conductivité locale de la phase inclusion et matricielle, sur la solution mumérique de la log macro-K de Darcy sera réalisée par l'étude de de la sensibilité d'ordre 1 et 2 à κ.
La sensibilité d'ordre 1 à κ est définie de la manière suivante :

$$\partial_\kappa\hat{Y}^D = \frac{\partial\hat{Y}^D}{\partial\kappa} = \frac{log_{10}[\tilde{K}^D(\phi_F,\kappa_i)] - log_{10}[\tilde{K}^D(\phi_F,\kappa_{i-1})]}{\kappa_i - \kappa_{i-1}}, \tag{8.25}$$

$$\partial_\kappa\hat{Y}^D = \frac{\partial\hat{Y}^D}{\partial\kappa} = \frac{log_{10}[\tilde{q}^D(\phi_F,\kappa_i)] - log_{10}[\tilde{q}^D(\phi_F,\kappa_{i-1})]}{log_{10}[K_{F_i}] - log_{10}[K_{F_{i-1}}]}, \tag{8.26}$$

et la sensibilitité d'ordre 2 à κ :

$$\partial^2_\kappa\hat{Y}^D = \frac{\partial^2\hat{Y}^D}{\partial^2\kappa} = \frac{\partial_\kappa\hat{Y}^D_i - \partial_\kappa\hat{Y}^D_{i-1}}{\hat{\kappa}_i - \hat{\kappa}_{i-1}}. \tag{8.27}$$

Ces deux quantités, seront tracées en fonction de :

$$\hat{\kappa} = (\kappa)_{MIDNODAL} = \frac{\kappa_i + \kappa_{i-1}}{2} \tag{8.28}$$

et

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{\hat{\kappa}_i + \hat{\kappa}_{i-1}}{2}. \tag{8.29}$$

Commençons par l'analyse de la sensibilité de $\hat{Y}^D(\phi_F,\kappa_i)$ à la fraction volumique en inclusion ϕ_F pour les milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires isotropiquement distribués.

8.4.2 Etude des coefficients de sensibilité $\partial_{\phi_F} \hat{Y}^D$ et $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$ de la macro-K de Darcy/fraction volumique d'inclusions

Dépouillement des résultats

L'étude de la sensibilité du premier et du second ordre du log décimal de la macro conductivité hydraulique de Darcy, à la fraction volumique en inclusion, a permis de mettre en évidence l'existence de plusieurs fractions critiques. Ces fractions critiques ont été aussi bien observées pour les milieux binaires isotropiquement distribués purement aléatoires 2D et 3D. Les principaux résultats sont présentés sur la figure 8.14.

Ces fractions sont au nombre de trois. Elles correspondent à trois points d'inflexion de la solution numérique, $\hat{Y}^D$, obtenue par les expériences numériques perméamétriques directes ; à 2 maxima et un minimum de la sensibilité $\partial_{\phi_F} \hat{Y}^D$ et à trois fractions pour lesquelles $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$ s'annule (Fig. 8.14). Selon notre interprétation, ces trois fractions correspondent à des fractions critiques de transition, correspondant chacune à des seuils qui délimitent l'expression de plusieurs états du système étudié. Par la suite, nous nommerons ces fractions particulières, fractions critiques de transition de phase du système ou, plus simplement, fractions critiques de transitions de phase.

Ces fractions ont été regroupées sur la figure 8.17, pour la gamme de log-contrastes étudiés, par l'analyse des fractions pour lesquelles $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D = 0$. Ce relevé nous a apporté les informations suivantes :

- Pour des log-contrastes, $|\kappa|$, inférieurs à +2, pour le milieu binaire 2D, il existe une seule fraction critique de transition de phase et aucune fraction critique pour le milieu binaire 3D ; nous pouvons cependant supposer qu'il doit exister un log-contraste, compris entre +1 et +2 pour lequel l'apparition, l'émergence, d'une fraction critique de transition de phase doit exister pour le milieu binaire 3D.
- Pour un log-contraste de +2 pour ces deux milieux, il existe une fraction critique à environ 30 % d'inclusions conductrices pour le milieu binaire 2D et de 10 % d'inclusions conductrices pour le milieu binaire 3D.
- Pour un log-contraste, $|\kappa|$ égal et supérieur à +3, aussi bien pour le milieu binaire 2D que 3D, il existe trois fractions critiques de transition de phase dont la valeur varie quelque peu avec l'augmentation du contraste, jusqu'à se fixer à une valeur très stable à partir de $|\kappa|$ égale à +6. Ces fractions particulières ont été regroupées dans le tableau 8.2 pour des log-contrastes $|\kappa| \geq +6$. Nous avons nommé ces fractions particulières p_{c_1}, p_{c_2} et p_{c_3}.

En résumé, le plus important est l'émergence de trois fractions critiques dès que le log-contraste est suffisamment élevé. Nous allos voir maintenant comment ces fractions critiques (ou moins deux d'entre elles) sont associées à des seuils de "quasi"-percolation et de percolation.

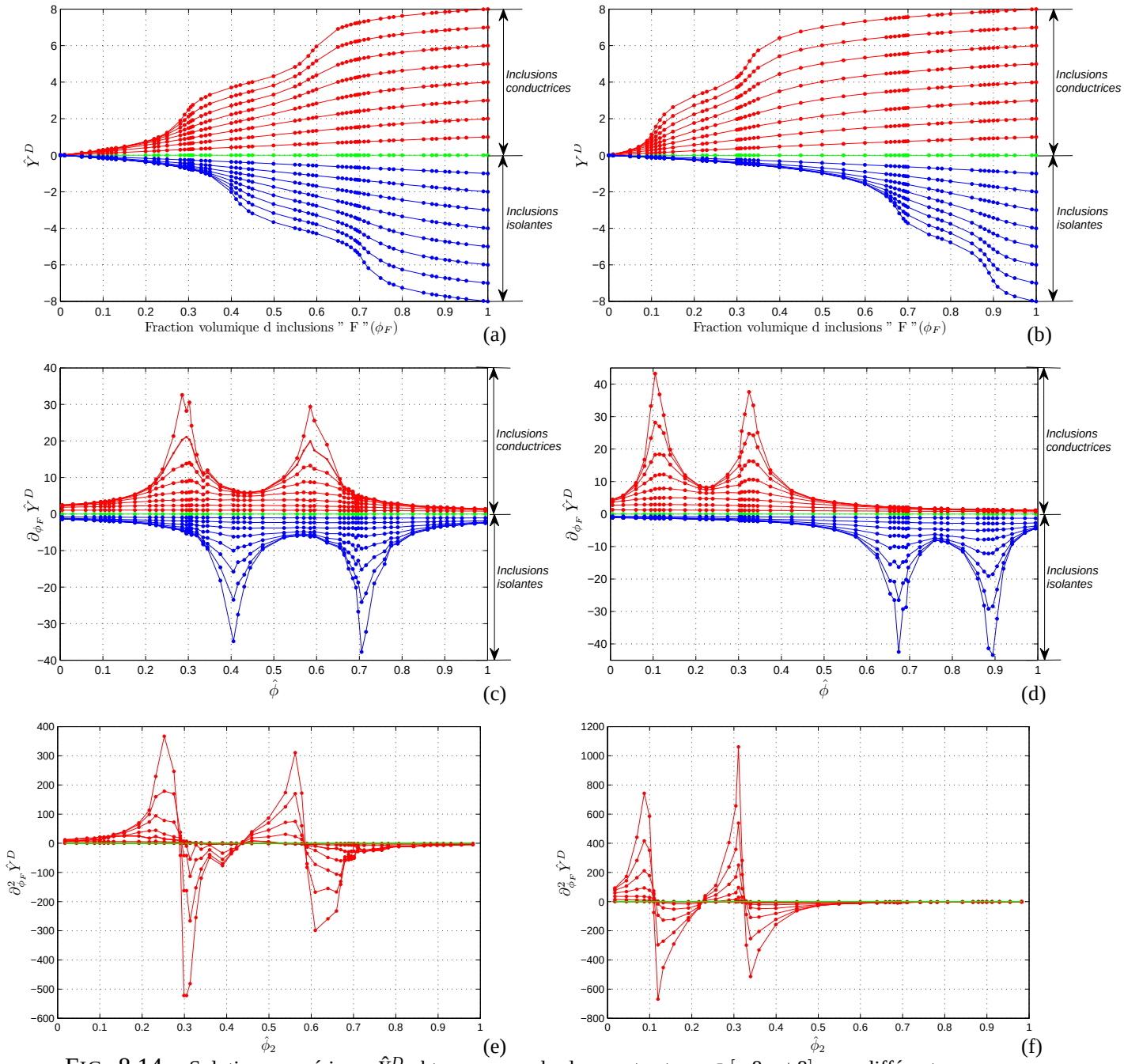


FIG. 8.14 – Solutions numériques $\hat{Y}^D$ obtenues pour des log-contrastes $\kappa \in [-8\,;\,+8]$ pour différents ϕ_F, (a) pour un milieu binaire isotropiquement distribué 2D et (b) 3D. Et coefficients de sensibilité du premier ordre, $\partial_{\phi_F} \hat{Y}^D$ obtenus, (c) pour le milieu binaire 2D et (d) 3D. Enfin, coefficients du second ordre, $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$, obtenus pour différents log-contrastes positifs $\kappa \in [0\,;\,+8\,]$, pour le milieu binaire 2D en (e) et pour le milieu binaire 3D (f).

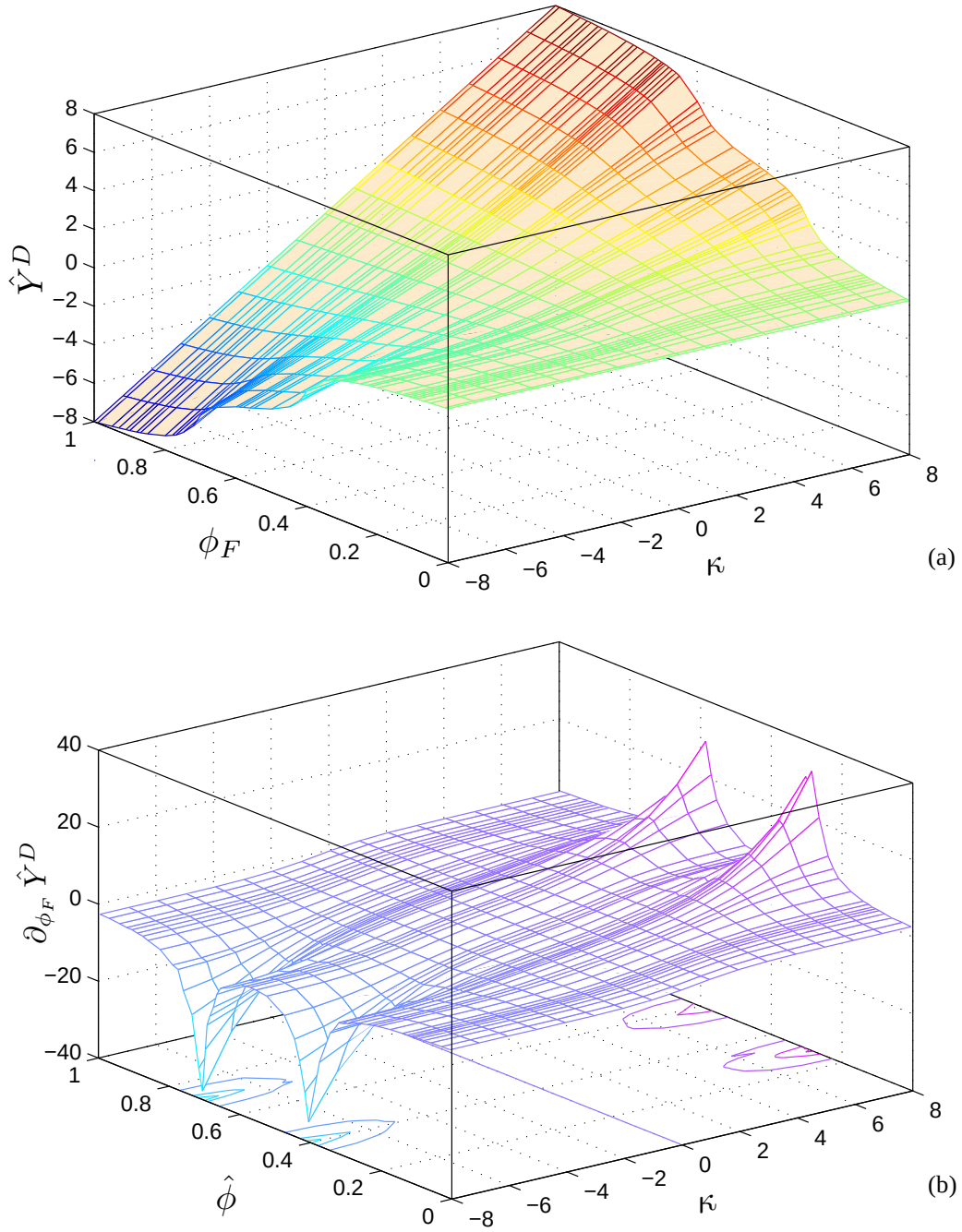


FIG. 8.15 – (a) Solutions numériques $\hat{Y}^D$ obtenues et tracées en fonction des fractions volumiques en inclusions ϕ_F, et des log-contrastes κ pour un milieu binaire 2D isotropiquement distribué. (b) Coefficients de sensibilité de la log-conductivité hydraulique de Darcy ($\partial_{\phi_F} \hat{Y}^D$) obtenus pour ce même milieu.

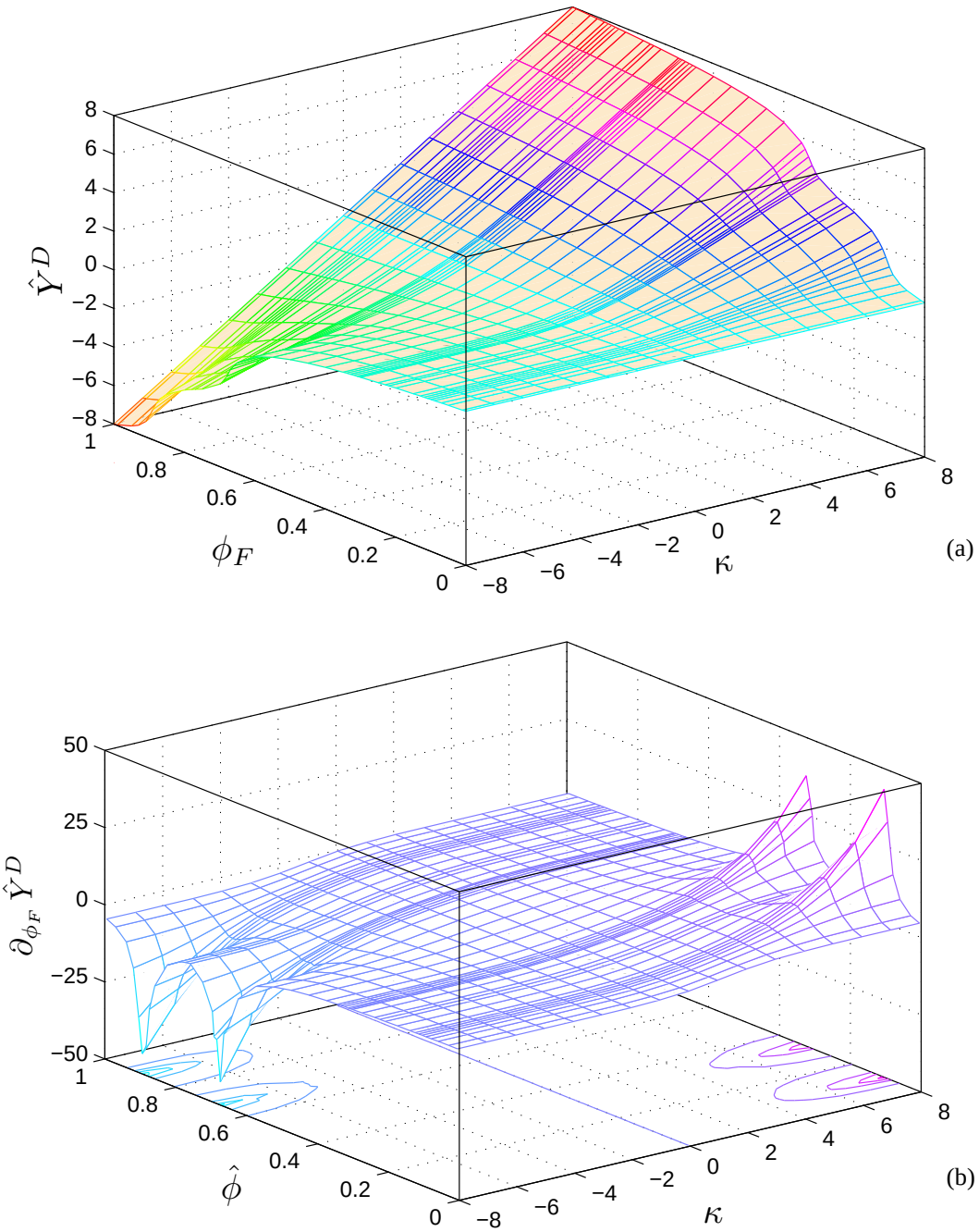


FIG. 8.16 – (a) Solutions numériques $\hat{Y}^D$ obtenues et tracée en fonction des fractions volumiques en inclusions ϕ_F, et des log-contrastes κ pour un milieu binaire 3D isotropiquement distribué. (b) Coefficient de sensibilité de la log-conductivité hydraulique de Darcy ($\partial_{\phi_F} \hat{Y}^D$) obtenus pour ce même milieu.

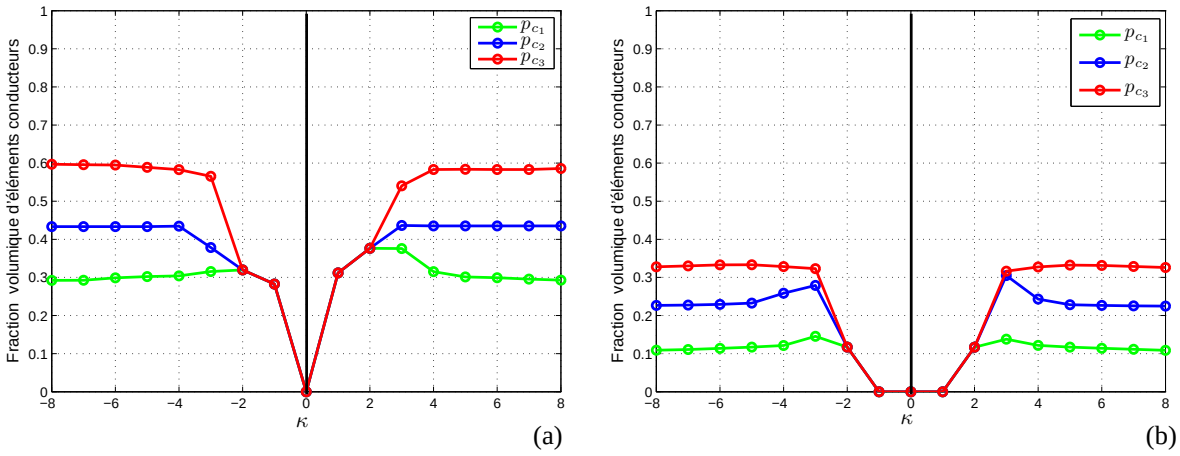


FIG. 8.17 – Fractions critiques relevées graphiquement. Elles correspondent aux fractions pour lesquelles $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$ s'annule pour les différents log-contrastes κ testés. Pour les milieux binaires 2D (a), et pour les milieux binaires 3D (b) isotropiquement distribués purement aléatoires.

Interprétations des sensibilités à ϕ_F (fractions critiques, seuils de "quasi-percolation" et de percolation)

Dans cette section, nous allons donner une interprétation aux résultats obtenus au dessus. Nous allons interpréter ces résultats en termes de fractions critiques et de seuils de percolation et porter notre intérêt sur les fractions critiques de transition de phase moyennes $\hat{p}_{c_i}$, regroupées dans le tableau 8.2. Avec $\hat{p}_{c_i}$:

$$\hat{p}_{c_i} = \frac{1}{n}\sum_{n}^{1} p_{c_i}, \tag{8.30}$$

ici, n = 6, car pour le calcul de la valeur moyenne des fractions critiques, nous n'avons considéré que celles relevées à partir du log-contraste $|\kappa|$ de +6 (κ=-8, -7, -6, +6, +7 et +8), où leurs valeurs commence à se stabiliser, Fig. 8.17.

Pour la gamme de log-contrastes $|\kappa|$ supérieures à +6, ces trois fractions de transition prennent, en "moyenne", les valeurs suivantes.
Pour le milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué :

- $\hat{p}_{c_1}$: 0.29531,
- $\hat{p}_{c_2}$: 0.43426,
- $\hat{p}_{c_3}$: 0.59003.

Pour le milieu binaire 3D purement aléatoire isotropiquement distribué :

- $\hat{p}_{c_1}$: 0.11130,
- $\hat{p}_{c_2}$: 0.22671,
- $\hat{p}_{c_3}$: 0.32961.

Fractions critiques de transitions de phase (2D)							
	$\kappa=-8$	$\kappa=-7$	$\kappa=-6$	$\kappa=+6$	$\kappa=+7$	$\kappa=+8$	$\hat{p}_{c_i}$
p_{c_1}	0.29234	0.29272	0.29905	0.29936	0.29545	0.29293	0.29531
p_{c_2}	0.43325	0.43329	0.43326	0.43520	0.43526	0.43529	0.43426
p_{c_3}	0.59710	0.59589	0.59487	0.58308	0.58331	0.58591	0.59003

Fractions critiques de transitions de phase (3D)							
	$\kappa=-8$	$\kappa=-7$	$\kappa=-6$	$\kappa=+6$	$\kappa=+7$	$\kappa=+8$	$\hat{p}_{c_i}$
p_{c_1}	0.10884	0.11078	0.11385	0.11420	0.11145	0.10869	0.11130
p_{c_2}	0.22667	0.22760	0.22928	0.22658	0.22543	0.22467	0.22671
p_{c_3}	0.32781	0.33040	0.33298	0.33158	0.32875	0.32615	0.32961

TAB. 8.2 – Valeurs des fractions critiques de transition (p_{c_1},p_{c_2} et p_{c_3}) obtenues pour les milieux binaires purement aléatoires isotropes 2D et 3D pour différents log-contrastes $|\kappa|$.

La fraction critique de transition de phase $\hat{p}_{c_3}$ obtenue, aussi bien pour le milieu binaire 2D que 3D, est très proche de la fraction critique de percolation reconnue pour un réseau carrée et cubique. Dans la littérature, ces fractions prennent respectivement les valeurs suivantes en 2D et 3D : 0.5927 et 0.3116 (Tab.8.1). Ainsi $\hat{p}_{c_3}$ correspond à l'apparition des phénomènes de percolation sur la macro-K de Darcy, elle peut donc être qualifiée de fraction critique de percolation de sites. Nous pouvons peut-être expliquer la différence entre la valeur de la littérature et la valeur obtenue, par le choix du mode de pondération de la conductivité hydraulique midmodale. Des études complémentaires en utilisant un mode de pondération non plus géométrique, mais harmonique ou arithmétique devront être réalisées.

Nous pouvons aussi noter que nos calculs semblent indiquer que la valeur de la fraction de transition $\hat{p}_{c_1}$ est très proche de la fraction critique $\hat{p}_{c_3}$ divisée par la dimension de l'espace. Nous aurions donc :

$$\hat{p}_{c_1} \quad = \quad \frac{\hat{p}_{c_1}}{D}, \tag{8.31}$$

où D est la dimension de l'espace.

De même, il est possible de trouver une relation entre $\hat{p}_{c_2}$, $\hat{p}_{c_3}$ et $\hat{p}_{c_1}$. En effet, nos calculs nous donnent :

$$\hat{p}_{c_2} \quad \approx \quad \frac{\hat{p}_{c_1}+\hat{p}_{c_3}}{2}, \tag{8.32}$$

aussi bien pour le milieu binaire 2D que 3D isotropiquement distribué. Un autre fait peut être remarqué : la valeur obtenue pour $\hat{p}_{c_2}$ de ces deux milieux semble très proche de la percolation de liens reconnue dans la littérature pour un réseau carré et cubique respectivement égale à 0.5 et 0.2488 (Tab. 8.1).

L'ensemble des résultats obtenus par nos investigations numériques sont regroupés dans le tableau 8.3.

Fractions de transition : milieu binaire purement aléatoire 2D		
$\hat{p}_{c_1}$	$\hat{p}_{c_2}$	$\hat{p}_{c_3}$
0.29531	0.43426	0.59003
$\hat{p}_{c_3}/2 = 0.295015$	$(\hat{p}_{c_1} + \hat{p}_{c_3})/2 = 0.44267$	
Fractions de transition : milieu binaire purement aléatoire 3D		
$\hat{p}_{c_1}$	$\hat{p}_{c_2}$	$\hat{p}_{c_3}$
0.11130	0.22671	0.32961
$\hat{p}_{c_3}/3 = 0.10987$	$(\hat{p}_{c_1} + \hat{p}_{c_3})/2 = 0.220455$	

TAB. 8.3 – Tableaux récapitulatifs des fractions critiques de transition obtenues numériquement pour un milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire.

D'autres expérimentations numériques devraient être nécessaires, en faisant varier la taille de la maille numérique et en utilisant un autre mode de pondération des conductivités midnodales afin de vérifier avec certitude l'unicité, la "robustesse" et la valeur des fractions critiques de transition de phase obtenues. Les études futures devront aussi être conduites sur des milieux à inclusions autre comme des circulaires ou des ellipses, voire des rectangles afin de tester l'influence des échelles de corrélation des objets sur la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy et sur les valeurs de ces trois fractions de transition. Les échelles de corrélation devant de manière certaines influencer ces valeurs.

Intéressons nous maintenant à l'impact du log-contraste $|\kappa|$ sur la macro-conductivité hydraulique de Darcy pour des milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires. Cette prochaine partie aura deux objectifs principaux :

- d'une part valider l'existence de ces fractions critiques de transition de phase
- et, d'autre part, quantifier et analyser l'apparition, l'émergence des différents états du système.

8.4.3 Etude des coefficients de sensibilité $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ et $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ de la macro-K de Darcy/log-contrate de conductivité hydraulique

Dépouillement des résultats

Afin d'analyser l'influence du log-contraste sur la macro-K de Darcy, valider l'existence des fractions critiques de transition et comprendre leur influence sur la macro-K de Darcy, nous avons représenté sur le même graphique l'évolution de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ en fonction du log-contraste $\hat{\kappa}$ à fraction volumique en inclusions fixée et ceci pour les milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires (Fig. 8.18).

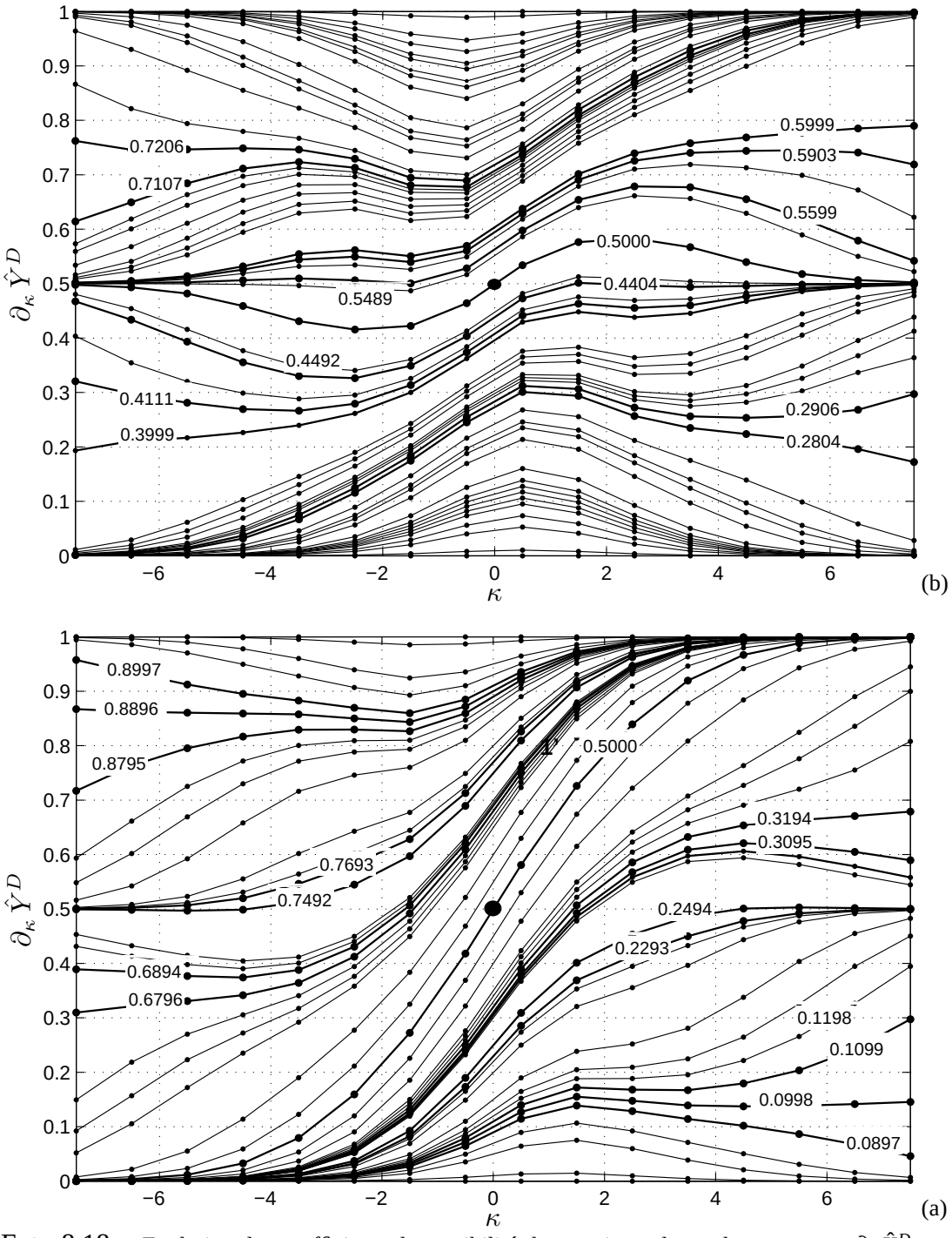


FIG. 8.18 – Evolution des coefficients de sensibilité du premier ordre au log-contraste, $\partial_\kappa \hat{Y}^D$, pour différentes fractions volumiques en inclusions. (a) Milieu binaire 2D et (b) milieu binaire 3D.

Cette étude nous révèle qu'à $\hat{\kappa} = 0$ nous pouvons avoir accès à la fraction volumique en inclusions présente dans le milieu étudié, l'ensemble des courbes étant réparties entre 0 et 1 : la droite $\partial_\kappa \hat{Y}^D = 0$ correspondant au milieu qui ne contient aucune inclusion (100 pour cent de la phase matrice), et la droite $\partial_\kappa \hat{Y}^D = 1$ correspondant au milieu qui contient 100 pour cent d'inclusions.

Un fait remarquable est que l'évolution de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ à la fraction 50 % délimite deux domaines aussi bien pour le milieu binaire 2D que 3D purement aléatoires ; le point (0, 50%) étant le centre de symétrie de l'ensemble de ces résultats numériques obtenus (Fig. 8.18 (a) et (b)). La symétrie existante est à mettre en relation avec la nature des milieux étudiés ici (milieu binaire isotropiquement distribué au sens du tenseur de dispersion géométrique). Ici, nous pouvons rajouter que pour des milieux autres (e.g. milieux fracturés poissonniens) cette symétrie ne doit pas forcément exister à cette fraction d'inclusion. Il est aussi prabable que cette symétrie n'existe pas du tout.
Cependant, pour les milieux étudiés ici, il est possible d'obtenir le comportement aux fractions d'inclusion ϕ_F comprises en [50% ; 100%] en réalisant une rotation de π et de centre (0, 50%) des évolutions de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ aux fractions comprises entre [0% ; 50%]. Nous pouvons aussi noter qu'il paraît certainement probable d'obtenir le comportement de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ du milieu binaire 3D en réalisant un "cisaillement" des comportements du milieu binaire 2D (comparez l'évolution de la fraction 0.50 de ces deux milieux Fig. 8.18 (a) et (b)).

Sur les deux graphiques précédents, nous avons repéré pour le milieu binaire 2D les courbes correspondant aux fractions d'inclusions suivantes Fig. 8.18 (a) :

- 0.2804, 0.2906, 0.5599, 0.5903, 0.5999,
- 0.5,
- 0.3999, 0.4111, 0.4404, 0.7107, 0.7206.

Et pour le milieu binaire 3D Fig. 8.18 (b) :

- 0.0897, 0.0998, 0.1099, 0.2293, 0.2494, 0.3095, 0.3194,
- 0.50,
- 0.6796, 0.6894, 0.7492, 0.7693, 0.8795, 0.8896, 0.8997.

De part et d'autre de ces fractions le comportement aux log-contrastes importants des coefficients de sensibilité $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ est différent. Des comportements remarquables peuvent être observés à certaines de ces fractions :

Pour le milieu binaire 3D, Fig 8.18 (b) :

- à la fraction 0.0998, respectivement 0.8896, pour des $\hat{\kappa}$ supérieurs à +4, respectivement inférieurs à -4, le comportement de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ est linéaire pour une large gamme de log-contrastes et sa valeur est égale à environ 1/6 et repectivement 5/6 pour des κ grands ;
- à la fraction 0.2494, respectivement 0.7492, pour des $\hat{\kappa}$ supérieurs à +4, respectivement inférieurs à -4, le comportement de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ est linéaire pour une large

gamme de log-contrastes et sa valeur est égale à environ 1/2 pour des κ grands ;
- et entre les fractions 0.3095, 0.3194, respectivement entre les fractions 0.6796 et 0.6894, il doit exister un tel comportement linéaire de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$; nous estimons que la valeur de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ pour cette fraction devrait être, pour une large gamme de κ, de l'ordre de 4/6 pour des κ grands.

Pour le milieu binaire 2D, nous pouvons noter que, Fig 8.18 (a) :
- entre les fractions volumiques en inclusions de 0.2804 et 0.2906 (et leurs symétriques : les fractions 0.7107 et 0.7206), il doit exister un comportement linéaire de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ et nous estimons sa valeur, pour une large gamme de κ, à 1/4 (respectivement à 3/4) pour des κ grands ;
- à la fraction 0.4492, respectivement 0.5489 (son symétrique), pour des log-contrastes $\hat{\kappa}$ supérieurs à +4, le comportement de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ est linéaire pour une large gamme de log-contrastes et sa valeur est égale à environ 1/2 respectivement 1/2 pour des κ grands ;
- de la même manière, pour des fractions comprises entre 0.5903 et 0.5999 (et leurs symétriques : les fractions 0.3999 et 0.4111), il doit exister une fraction volumique en inclusion pour laquelle $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ a une évolution linéaire, pour une large gamme de κ, et nous estimons que la valeur prise par $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ à cette fraction devrait être d'environ 3/4 (respectivement 1/4) pour des κ grands.

En conclusion, l'étude de la sensibilité du premier ordre au log-contraste, du log décimal de la macro-K numérique de Darcy, a permis de déterminer l'existence pour le milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire de fractions particulières pour lesquelles le comportement de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ est linéaire sur une large gamme de forts log-contrastes. Certaines de ces valeurs ont été obtenues, mais pour d'autres, leur existence a été supposée.

Milieu binaire purement aléatoire 2D			
$\hat{p}_{c_i}$	$\hat{p}_{c_1} \in]0.2804\,;\,0.2906[$ $(]0.7107\,;\,0.7206[)$	$\hat{p}_{c_2} \in]0.4404\,;\,0.4492[$ $(]0.5489\,;\,0.5599[)$	$\hat{p}_{c_3} \in]0.5903\,;\,0.5991[$ $(]0.3999\,;\,0.4111[)$
$\partial_\kappa \hat{Y}^D$	$\approx 1/4$	$\approx 2/4$	$\approx 3/4$
Milieu binaire purement aléatoire 3D			
$\hat{p}_{c_i}$	$\hat{p}_{c_1} \approx 0.0998$ (0.8896)	$\hat{p}_{c_2} \approx 0.2495$ (0.7492)	$\hat{p}_{c_3} \in]0.3095\,;\,0.3194[$ $(]0.6796\,;\,0.6894[)$
$\partial_\kappa \hat{Y}^D$	$\approx 1/6$	$\approx 3/6$	$\approx 4/6$

TAB. 8.4 – Tableaux récapitulatifs des fractions critiques de transition de phases numériques obtenues pour un milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire en étudiant les coefficients de sensibilité d'ordre 1 à κ de $\hat{Y}^D$.

Les valeurs de ces fractions, Tab.8.4, aussi bien pour le milieux binaire 2D que 3D, sont très proches de celles des "fractions critiques de transition de phase" révélées par l'étude des coefficients de sensibilité du premier et du second ordre de $\hat{Y}^D$ à la fraction

volumique en inclusion, et des valeurs des fractions critiques de percolation reconnues dans la littératures (pour $\hat{p}_{c_3}$). Nous les nommerons de la même manière : $\hat{p}_{c_1}$, $\hat{p}_{c_2}$ et $\hat{p}_{c_3}$. Notez aussi que les valeurs numériques que prennent ces coefficients à ces "fractions critiques de transition de phase", pour des $|\kappa| \geq +4$ sont remarquables, Tab.8.4.

Nous pouvons aussi remarquer que les valeurs des fractions critiques obtenues par cette seconde approche sont quelques peu différentes de celles obtenues par l'étude de la sensibilité d'ordre 1 et 2 à la fraction volumique en inclusion ϕ_F (Tab. 8.3) mais la valeur pour $\hat{p}_{c_3}$ est plus proche de celle de la fraction critique de percolation reconnue dans la littérature (Tab. 8.1).

Maintenant, pour comprendre plus en détail le comportement de $\hat{Y}^D$ au voisinage de "ces fractions critiques de transition de phase du système", nous allons nous intéresser aux coefficients de sensibilité d'ordre 2 au log-contraste : $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$.

Interprétations des sensibilités à κ (fractions critiques, seuils de "quasi-percolation" et percolation) :

Le comportement de la sensibilité d'ordre 2 au log-contraste permet d'observer le passage d'un intervalle comportemental à l'autre (ces intervalles étant délimités par deux fractions critiques de transitions de phase).

Ce passage se traduit par un changement du signe de la sensibilité d'ordre 2 à κ ($\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$) pour de forts log-contrastes, aussi bien pour le milieu binaire 2D et 3D. Oberver respectiviement les graphiques des figures 8.19 et 8.20 respectivement pour le milieu binaire 2D et 3D. De plus, noter que précisément aux différentes fractions critiques $\hat{p}_{c_1}$, $\hat{p}_{c_2}$, et $\hat{p}_{c_3}$, selon nous, $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D = 0$ sur une large gamme de log-contrastes et de forts log-contrastes, Fig. 8.19 et Fig. 8.20.

Pour les autres fractions volumiques d'inclusions testées, l'étude de la sensibilité d'ordre 2 au log-contraste du log décimal de la conductivité hydraulique de Darcy a permis de déterminer plusieurs zones de comportements. Ces différentes zones sont représentées sur la figure 8.22 pour le milieu binaire 2D et la figure 8.23 pour le milieu binaire 3D. Pour faciliter la lecture de ces deux figures, nous avons attribué à chacune de ces zones un numéro (allant de 1 à 4) et une couleur. Noter que ces zones possèdent chacune un symétrique par rapport au centre de symétrie (0, 1/2) noté 1', 2', 3' et 4'. La différenciation entre ces différentes zones a été réalisée en notant le nombre de fois où $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ prend la valeur zéro.

Pour le milieu binaire 2D, Fig. 8.19 :
- dans les zones 1 et 1', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule une fois,
- dans les zones 2 et 2', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule deux fois,
- dans les zones 3 et 3', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule trois fois,
- dans les zones 4 et 4', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule deux fois.

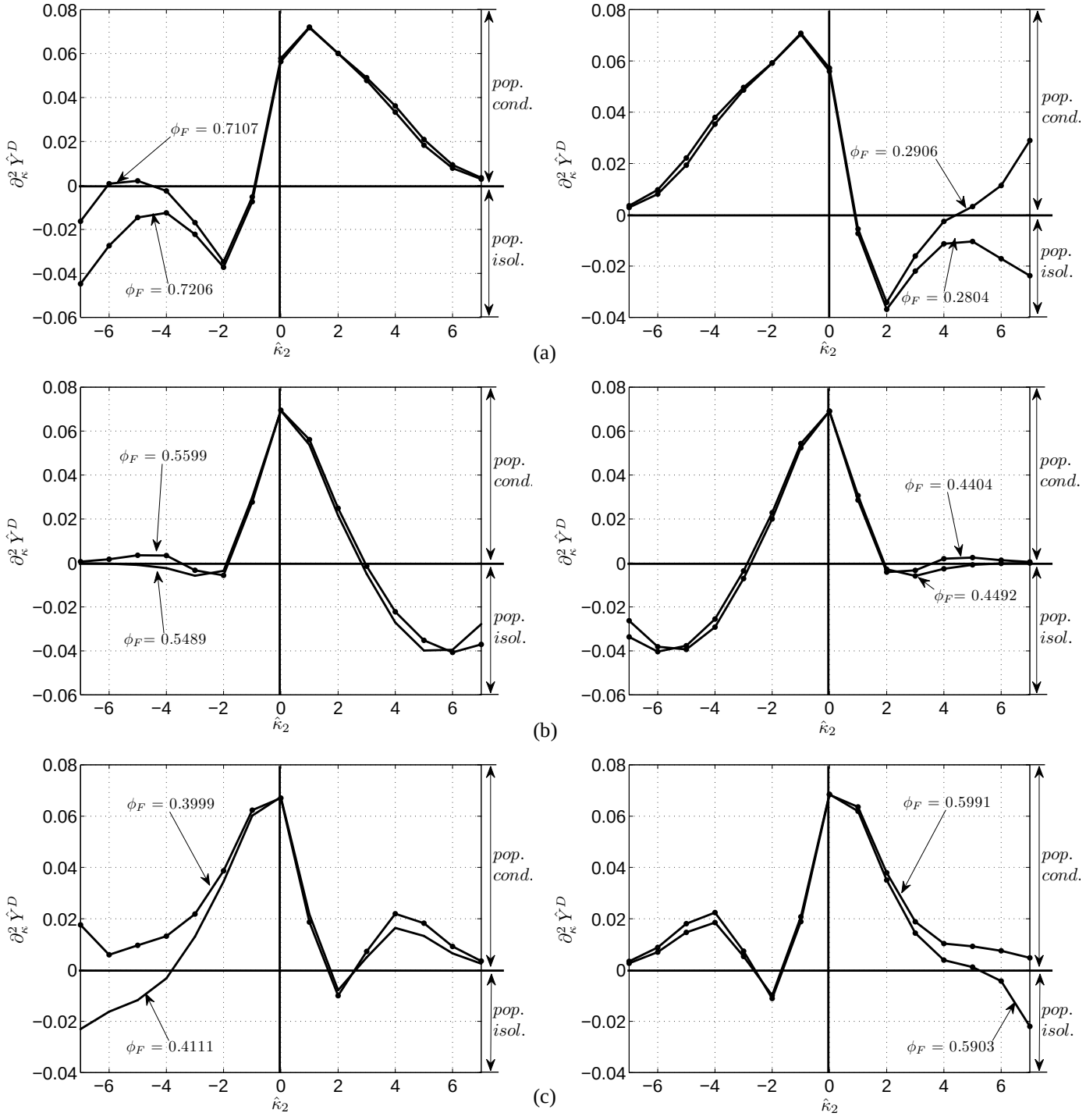


FIG. 8.19 – Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase : (a) pour $\hat{p}_{c_1}$, (b) pour $\hat{p}_{c_2}$, et (c) pour $\hat{p}_{c_3}$, pour le milieu binaire 2D purement aléatoire.

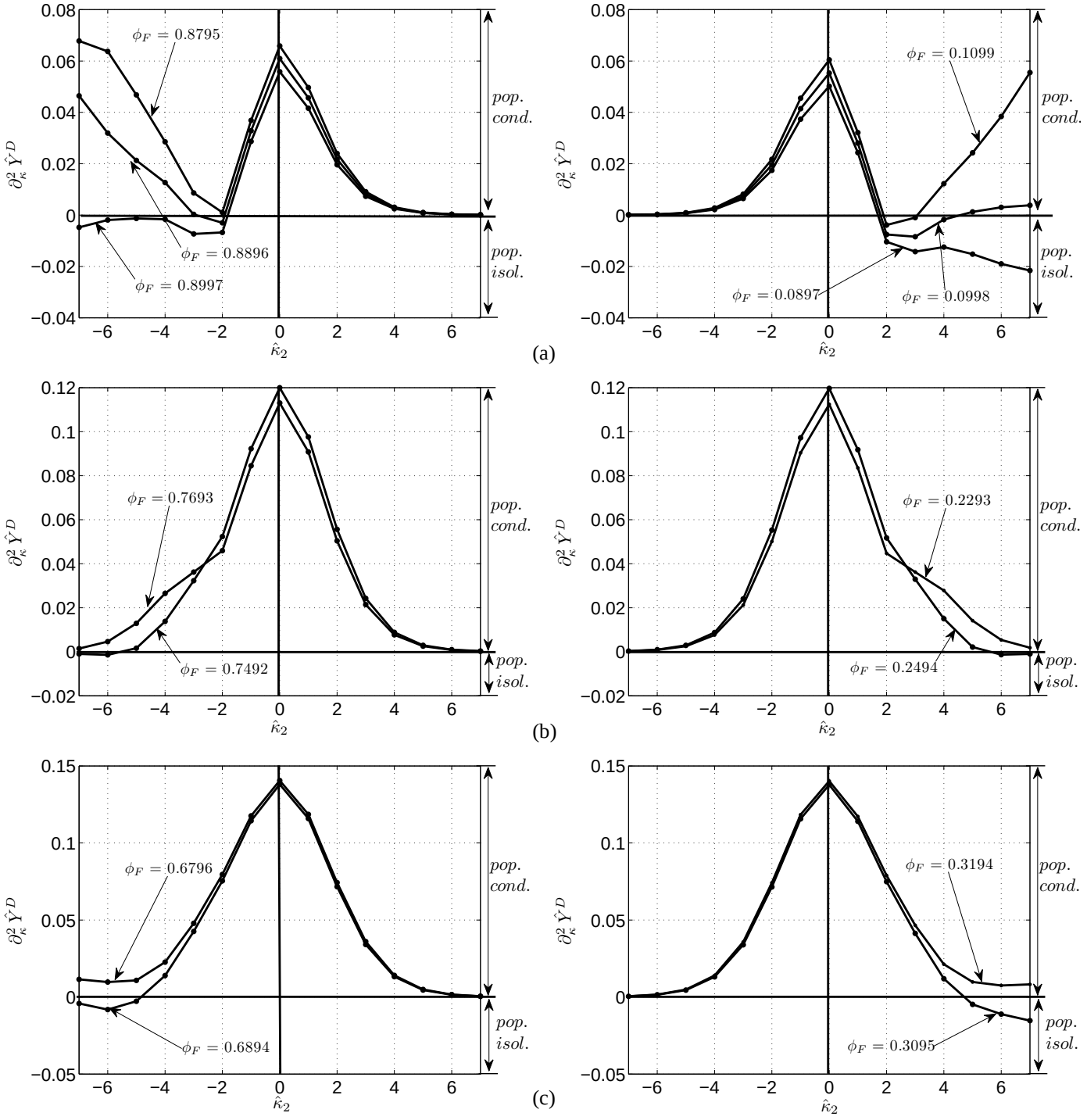


FIG. 8.20 – Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase : (a) pour $\hat{p}_{c_1}$, (b) pour $\hat{p}_{c_2}$, et (c) pour $\hat{p}_{c_3}$, pour le milieu binaire 3D purement aléatoire.

Et pour le milieu binaire 3D, Fig. 8.20 :

- dans les zones 1 et 1', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule une fois,
- dans les zones 2 et 2', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ ne s'annule pas,
- dans les zones 3 et 3', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule une fois,
- dans les zones 4 et 4', $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ ne s'annule pas.

Chacunes de ces zones est délimitées par une des fractions de transition de phase ou leurs complémentaire (1-$\hat{p}_{c_i}$) définies précédemment. Notons aussi que pour le milieux binaire 3D, une cinquième zone comportementale peut peut-être exister entre la zone 1 et 2 (respectivement 1' et 2'). En effet, $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ s'annule trois fois près de $\hat{p}_{c_1}$, Fig. 8.21. Ces fractions sont représentés par une couleurs noires sur la figure 8.23.

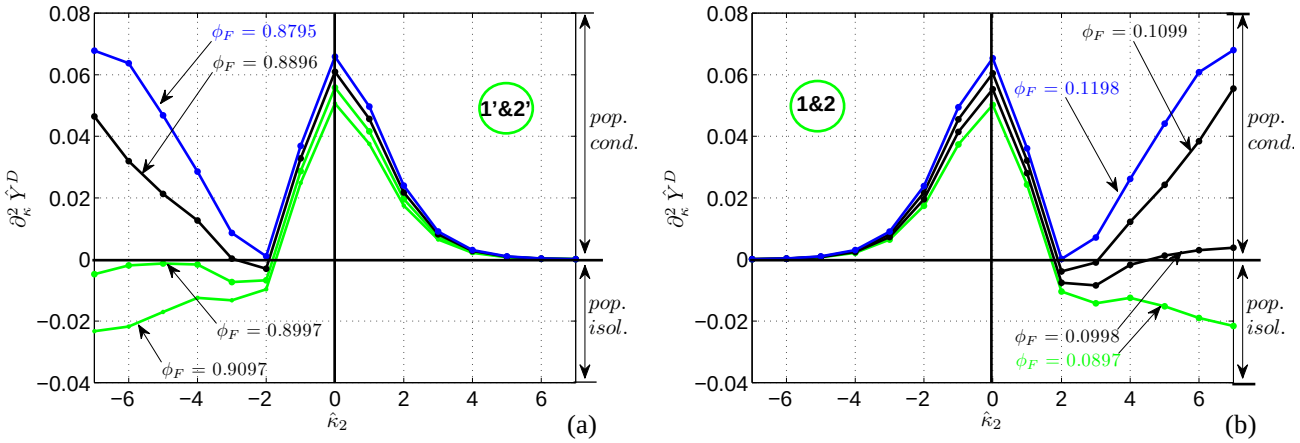


FIG. 8.21 – Tracé de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 3D au niveau de la zone critique supposée existée (couleur noire) entre les zones comportementales de la macro-K de Darcy. Cette zone est située entre les zones 1 et 2, respectivement entre les zones 1' et 2' précédemment discriminées.

Essayons de donner une interprétation à ces différentes études en commençant par l'étude des deux zones délimitées pour le milieu binaire 2D et 3D par la fraction critique de transition, $\hat{p}_{c_3}$, reconnue dans la littérature comme étant la fraction critique de percolation de sites pour les réseaux carrés et cubiques. Nous nous situons pour le milieu binaire 3D au niveau de la transition entre les zones 3 et 4, (respectivement entre les zones 3' et 4', qui sont les symétriques des zones 3 et 4 par rapport à (0, 0.5)), Fig. 8.23, et pour le milieu binaire 2D, au niveau de la transition entre les zones 2' et 3' (respectivement entre les zones 2 et 3 qui sont les zones symétriques des zones 2 et 3 par rapport à (0, 0.5)), Fig. 8.22.

La différence essentielle entre ces deux zones, est le signe de la dérivée seconde par rapport à κ du log décimal de la macro-K de Darcy pour des log-contrastes supérieurs à +4 : $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$. Il est positif pour des fractions supérieures à la fraction critique de percolation et négatif pour des fractions inférieures. Or l'interprétation généralement reconnue du seuil de percolation est qu'au-delà la population conductrice s'exprime sur le comportement global du système. Si nous considérons ce fait à nos résultats, nous pouvons

conclure que l'expression de la population la plus conductrice du mélange se traduit par un signe positif de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$.
A la vue de cette première constatation, ces graphiques prennent un autres sens :

- si $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ est positif, la population inclusion conductrice aura un rôle majoritaire sur l'expression du log décimal de la macro-K de Darcy,
- sinon, c'est à dire si $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ est négatif, la population résistante aura une rôle majoritaire sur l'expression du log décimal de la macro-K de Darcy.

Les différentes fractions critiques de transition de phase $\hat{p}_{c_1}$, $\hat{p}_{c_2}$, et $\hat{p}_{c_3}$, semble donc être liée à différents états critiques du système étudié pour de hauts log-contrastes.

Voici enfin un résumé de nos interprétations sur le rôle joué par les différentes fractions critiques de transition de phase du système.
Ces fractions traduisent des états instables, de transition, du système :

- $\hat{p}_{c_1}$, traduit un maximum de l'expression de la population la moins conductrice sur la conductivité hydraulique de Darcy. En dessous de cette fraction, seule la population matricielle, isolante, a une importance sur la macro-K de Darcy. A $\hat{p}_{c_1}$, nous avons aux hauts contrastes, $\partial_\kappa \hat{Y}^D$=1/6 pour le milieu binaire 3D purement aléatoire et $\partial_\kappa \hat{Y}^D$=1/4 pour le milieu binaire 2D purement aléatoire. Pour des fractions d'inclusions conductrices supérieures à cette fraction, la population conductrice s'exprime et le comportement de la macro-K de Darcy devient dépendant de la conductivité hydraulique locale de la phase conductrice. Nous pouvons ici noter que même si le pourcentage de la population conductrice par rapport à la population isolante est faible, son influence est majoritaire sur le comportement de la solution macroscopique de Darcy.
- $\hat{p}_{c_2}$, exprime un état du système très intéressant. Déjà, remarquons qu'à $\hat{p}_{c_2}$, pour de hauts contrastes, $\partial_\kappa \hat{Y}^D$=3/6 pour le milieu binaire 3D et 2/4 pour le milieu binaire 2D purement aléatoire. A cette fraction, le rôle joué par chacune de ces deux populations est "purement équilibré". A partir de $\hat{p}_{c_2}$, nous allons ensuite passé dans un autre état du système ou l'influence de la population isolante va être majoritaire. Noter aussi, que comme pour l'étude précédente réalisée sur la sensibilité à la fraction volumique en inclusion, la valeur de $\hat{p}_{c_2}$ est très proche de la fraction critique de percolation de liens pour un réseau cubique et carré Tab. 8.4.
- $\hat{p}_{c_3}$, est le dernier état instable du système. Passer cette fraction, seule la population conductrice influence la macro-K de Darcy.

Nous pouvons nous essayer à une dernière interprétation de ces résultats en terme de réseau de liens et de sites, pour de forts log-contrastes :

- Pour des fractions volumiques d'inclusion conductrices inférieures à $\hat{p}_{c_1}$, le système fonctionnerait majoritairement comme un réseau de sites où seule compte la conductivité hydraulique de la population matricielle, nous parlerons alors d'un système dominé par un fonctionnement en réseau de sites résistants.

- Passé cet état critique, le système commencerait à fonctionner comme réseau de liens, les phénomènes de quasi-percolation (communication entre la phase résistante/conductrice) commencent à exister. Il y aurait alors un comportement hybride entre un réseau de sites et de liens, mais dominer par les phénomènes de quasi-percolation entre la population résistante et conductrice, donnant de l'importance à la conductivité de la phase conductrice.
- Ces phénomènes atteindraient leur maximum à $\hat{p}_{c_2}$, où le système, précisément à cette fraction, serait uniquement le siège des phénomènes de quasi-percolation. Le système fonctionnerait comme un réseau de liens. Il n'y aurait qu'une population unique, hybride, issu d'un mélange parfait des deux populations. Noter que ce comportement est obtenu pour un mélange non équilibré des deux populations. Mais la réponse "globale hydraulique" est équilibrée.
- Passé cette fraction le système fonctionne de nouveau comme un système hybride entre un réseau de sites et de liens, mais cette fois-ci dominé par la population résistante.
- Une fois $\hat{p}_{c_3}$ dépassée, le système fonction alors majoritairement comme un réseau de sites conducteurs.

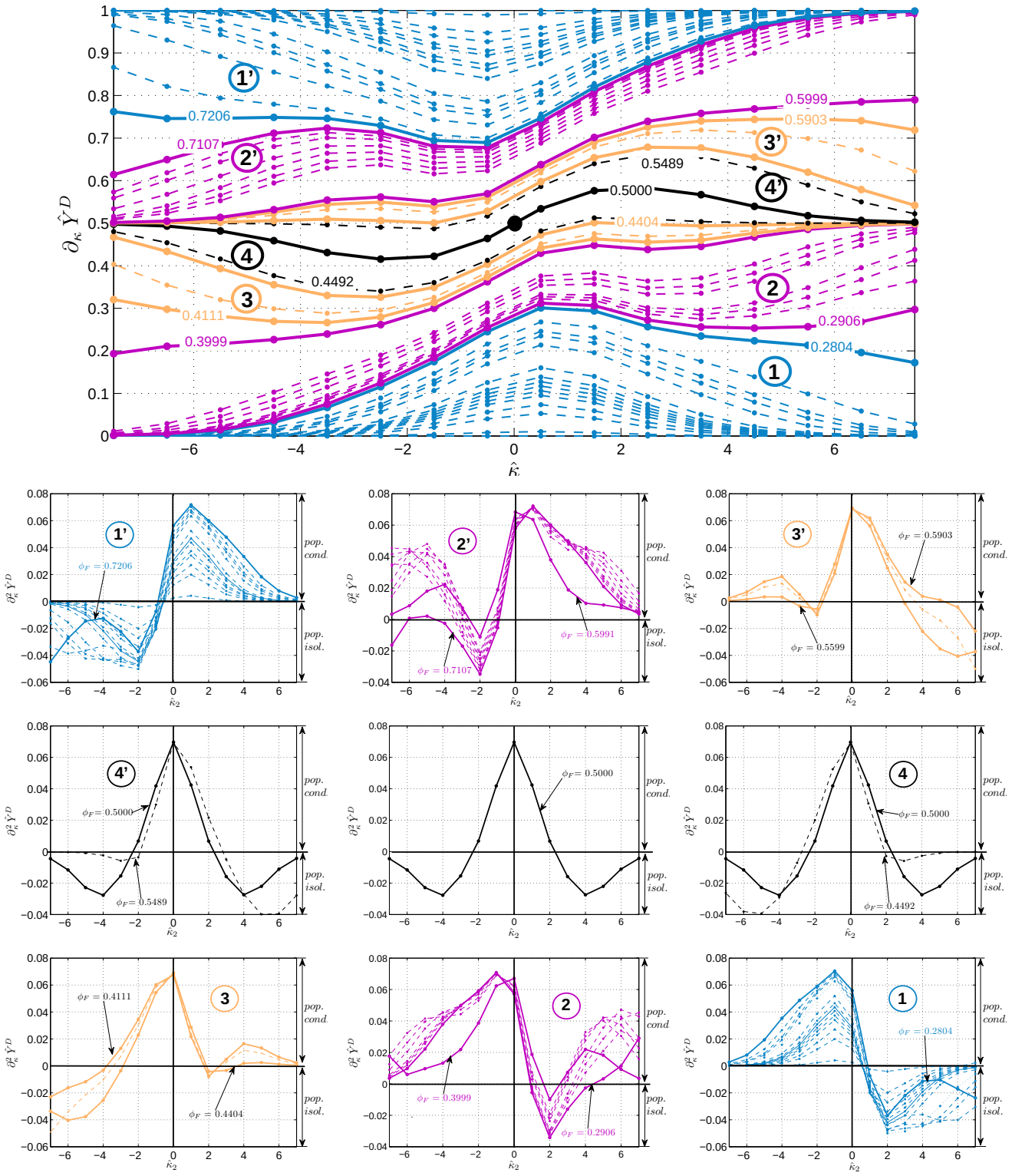


FIG. 8.22 – Analyse de la variation du signe de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 2D purement aléatoire. Et "zonation" comportementale et d'expression de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ obtenue par l'étude de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 2D purment aléatoire.

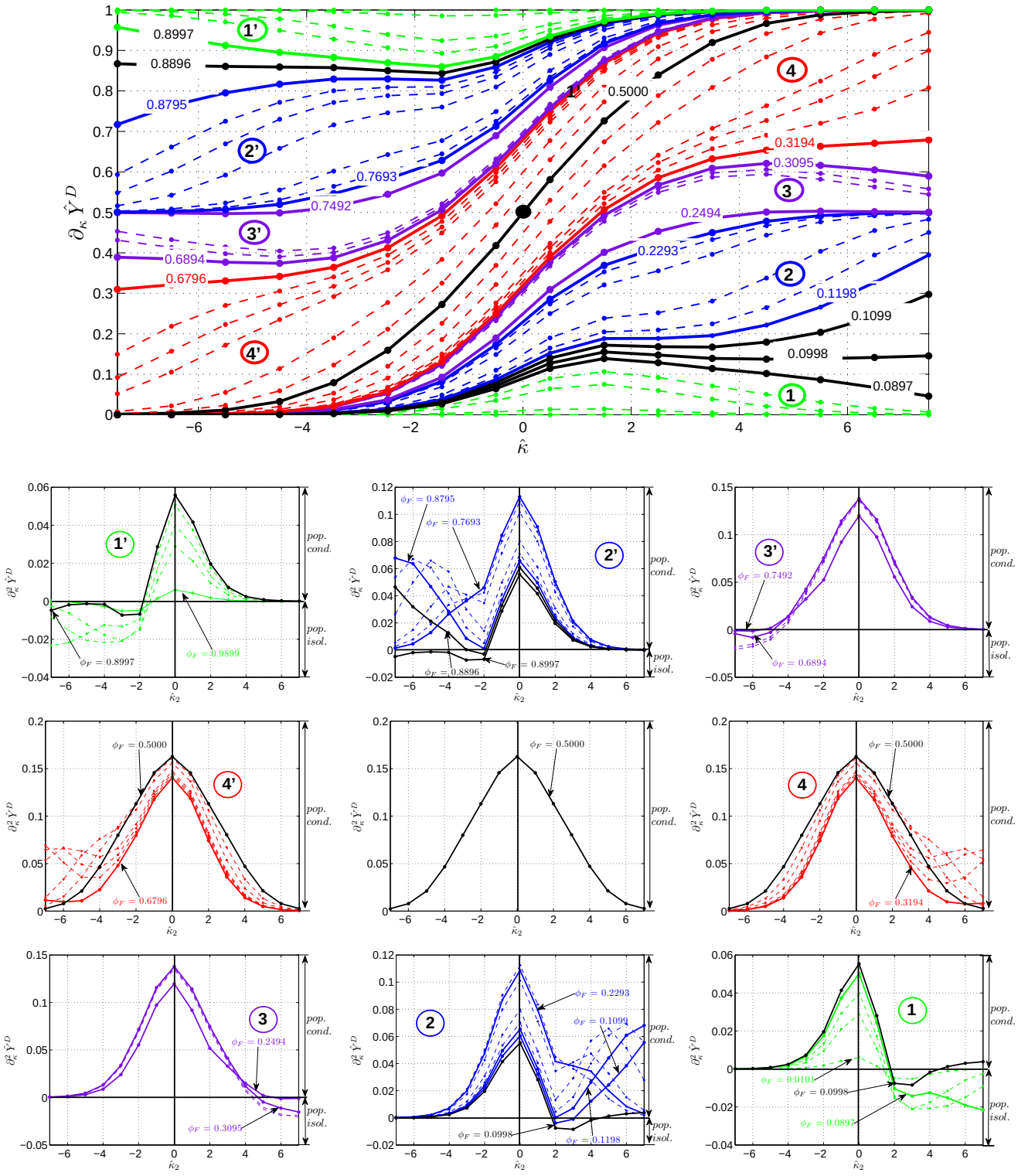


FIG. 8.23 – Analyse de la variation du signe de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 3D purement aléatoire. Et "zonation" comportementale et d'expression de $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ obtenue par l'étude de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 3D purment aléatoire.

8.4.4 (Quasi-)percolation sur deux milieux fracturés poissonniens 2D et 3D

Suite aux conclusions acquises par l'étude des milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires isotropes, revenons maintenant aux études perméamétriques réalisées sur les deux milieux fracturés poissonniens 2D $MF1_{2D}$ et $MF2_{2D}$ et 3D $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$, figure 8.7, section 8.2.3.

Pour ces deux milieux, nous avons réalisé la même étude de sensibilité au log-contraste, κ, du log décimal de la macro-conductivité hydraulique de Darcy. Les résultats pour les deux milieux fracturés 2D sont présentés sur la figure 8.24, et pour les deux milieux fracturés 3D sur la figure 8.25. Rappelons que les "fractures" sont des segments 2D pour les deux milieux fissurés poissonniens 2D et des fractures circulaires pour les deux milieux fissurés poissonniens 3D.

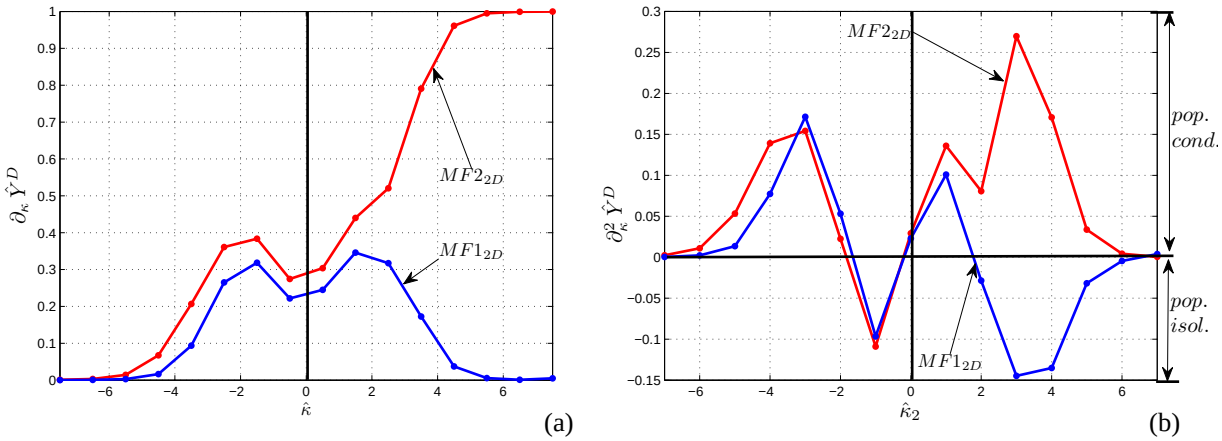


FIG. 8.24 – Evolution de la sensibilité d'ordre 1 à κ ($\partial_\kappa \hat{Y}^D$) (a), et évolution de la sensibilité d'ordre 2 à κ ($\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$) (b), pour les deux milieux fracturés 2D $MF1_{2D}$ et $MF2_{2D}$.

Les résultats obtenus montrent que pour les deux milieux $MF1_{2D}$ et $MF1_{3D}$, $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ tend vers 0 avec l'augmentation du log-contraste, pour $\hat{\kappa} > 0$, et $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ est négative pour de forts log-contrastes, à $\hat{\kappa}_2 > 0$, Fig. 8.24 et 8.25. Si nous nous reportons à l'analyse précédemment réalisée sur la sensibilité à $|\kappa|$ d'ordre 1 et 2, ces résultats supposeraient donc que les deux milieux $MF1_{2D}$ et $MF1_{3D}$ ne sont pas percolants suivant la direction de l'écoulement (ici $O\vec{x}$). Ce résultat "hydraulique" et identique à celui obtenu par une analyse morphologique (algorithme de recherche topologique *MatFracPerco*).
De même, ou plutôt inversement, pour les deux milieux fracturés 2D et 3D poissonniens $MF2_{2D}$ et $MF2_{3D}$, $\partial_\kappa \hat{Y}^D$ tend vers 1 avec l'augmentation du log-contraste $\hat{\kappa}$, pour $\hat{\kappa} > 0$, et $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ est positif pour de hauts log-contrastes $\hat{\kappa}_2$, à $\hat{\kappa}_2 > 0$. Ces résultats supposeraient donc que les deux milieux $MF2_{2D}$ et $MF2_{3D}$ sont percolants suivant la direction de l'écoulement (ici $O\vec{x}$). C'est aussi le résultat que nous avions obtenus par

une analyse morphologique.

Nous pouvons donc conclure qu'une des premières utilisations directes des études de sensibilité menées dans la section précédente, est la détection des phénomènes de percolation et de quasi-percolation. Pour des milieux plus complexes, très hétérogènes et anisotropes, nous verrons qu'une autre procédure utilisant des expériences numériques non plus perméamétriques, mais d'immersion directionnelles (conditions de charge linéairement distribuées directionnelles), pourra nous permettre d'identifier les phénomènes de percolation et de quasi-percolation.
De plus, nous pouvons rajouter que, comme $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \longrightarrow 0$ pour les milieux non percolants 2D et 3D, et comme $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \longrightarrow 1$ pour les milieux percolants 2D et 3D avec l'augmentation du log-contraste, les comportements macroscopiques de ces deux milieux antagonistes ne sont pas majoritairement dictés par les phénomènes de quasi-percolation. Sinon, nous aurions $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \longrightarrow 1/2$ pour de forts log-contrastes. Cependant, selon nous, si nous obtenons les fractions pour lesquelles $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \longrightarrow 0$, $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \longrightarrow 1/2$ et $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \longrightarrow 1$, alors nous aurions en notre possessions les informations principales pour décrire l'ensemble des comportements de ce milieu. Cependant, pour ces quatres échantillons étudiés, la limite thermodynamique du système n'est sûrement pas atteinte et il n'est pas évident que ces valeurs soit obtenues (l'intervalle de diamètres considéré pour ces générations est probablement trop grand par rapport à la taille de l'échantillon).

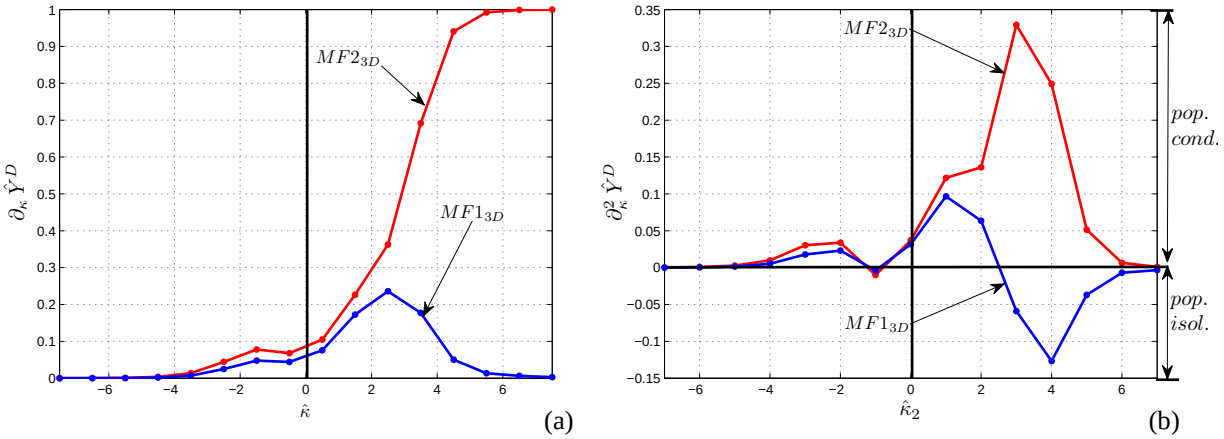


FIG. 8.25 – Evolution de la sensibilité d'ordre 1 à κ ($\partial_\kappa \hat{Y}^D$) (a), et évolution de la sensibilité d'ordre 2 à κ ($\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$) (b), pour les deux milieux fracturés 2D $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$.

8.5 Conclusions et discussion sur la macro-K de Darcy et la percolation

Tout au long de cette étude sur le "second changement d'échelle" de Darcy, nous nous sommes appliqués à étudier, en détail, l'importance de l'influence relative entre une "phase" isloante et une "phase" conductrice en utilisant des conditions aux limites de type "perméamétriques". Noter que la phase "inclusion" correspond dans notre cas aux fractures, ou fissures, plus perméables que la matrice ($K_F > K_M$). Cependant, afin de compléter notre étude de l'upscaling, nous avons également inclus dans nos analyses le cas contraire où les inclusions sont moins perméables ($K_F < K_M$).

Les deux solutions analytiques testées, "Self-Consistent" et "Power-Average", ont montrées un bon accord, ou un bon encadrement des solutions numériques, pour la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy, et ceci pour une large gamme de log-contrastes entre la phase inclusion et la phase matricielle. Cependant des insuffisances pour décrire correctement la physique sous-jacente des phénomènes étudiés ont été mises en évidence.

Notre étude des coefficients de la sensibilité à la fraction volumique en inclusions et au log-contraste du logarithme décimal de la macro-K de Darcy mettent en évidence d'autres phénomènes liés à l'état local des connectivités entre les populations isolante et conductrice. Nous avons ainsi vu apparaitre plusieurs "fractions critiques de transition de phase" du système, nommée : $\hat{p}_{c_1}$, $\hat{p}_{c_2}$ et $\hat{p}_{c_3}$. Ces fractions critiques révèlent l'existence d'états critiques et délimitent des zones comportementales bien définies. Une de ces fractrions, $\hat{p}_{c_3}$, est le seuil de percolation reconnu. Une autre de ces fractions, $\hat{p}_{c_1}$, semble jouer le rôle d'un seuil où la population conductrice étudiée commence à s'éxprimer. Et la troisième fraction, $\hat{p}_{c_2}$, semble jouer le rôle d'une transition entre les deux quasi-seuils. Chacune de ces fractions critiques représente la transition d'un état du système défini vers un autre état. Les caractéristiques de ces fractions sont regroupées dans le tableau 8.5.

Ces fractions de transition délimitent des comportements "stables" de la macro-K de Darcy. A ces fractions charnières, la dépendance de la solution macroscopique à l'augmentation du log-contraste est déterminée. Des études complémentaires pour ces deux milieux devront être réalisées pour confirmer l'unicité et la stabilité de ces fractions critiques en utilisant un autre mode de pondération des conductivités mid-modales et en réalisant une variation de la taille du domaine d'étude.
Des études sur d'autres types de milieux binaires et continus devront être menées en détail, pour vérifier si ces fractions sont liées ou non aux échelles de corrélation des "objets continus" ou des "objets discrets". Ceci en vu d'aboutir à une théorie unificatrice fondée sur une théorie de la "percolation multipoints".

Une dernière remarque pourrait être formulée ici. Considérons particulièrement le comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à la fraction 50%, pour le milieu binaire 2D, Fig. 8.26 (a) et

Milieu binaire purement aléatoire 2D		
$\hat{p}_{c_1}$	$\hat{p}_{c_2}$	$\hat{p}_{c_3}$
$\hat{p}_{c_3}/D$	$\hat{p}_{c_1}+\hat{p}_{c_3}/2 \approx p_{cb}$	p_{cs}
$\partial_\kappa \hat{Y}^D_{\hat{p}_{c_1}} \approx 1/(2*D)$	$\partial_\kappa \hat{Y}^D_{\hat{p}_{c_2}} \approx 2/(2*D)$	$\partial_\kappa \hat{Y}^D_{\hat{p}_{c_3}} \approx 3/(2*D)$
Milieu binaire purement aléatoire 3D		
$\hat{p}_{c_1}$	$\hat{p}_{c_2}$	$\hat{p}_{c_3}$
$\hat{p}_{c_3}/D$	$\hat{p}_{c_1}+\hat{p}_{c_3}/2 \approx p_{cb}$	p_{cs}
$\partial_\kappa \hat{Y}^D_{\hat{p}_{c_1}} \approx 1/(2*D)$	$\partial_\kappa \hat{Y}^D_{\hat{p}_{c_2}} \approx 3/(2*D)$	$\partial_\kappa \hat{Y}^D_{\hat{p}_{c_3}} \approx 4/(2*D)$

TAB. 8.5 – Tableaux récapitulatifs des propriétés des "fractions critiques de transition de phase" numériques obtenues pour un milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire. Ici, *D* est la dimension de l'espace euclidien.

3D, Fig. 8.26 (b). Il s'agit du cas d'un mélange binaire équilibré (50%-50%). Pour ce milieu, la contribution "morphologique" des deux populations est équivalente. "Le signal" représentatif de chacune de ces deux populations est équilibré et superposé. Or

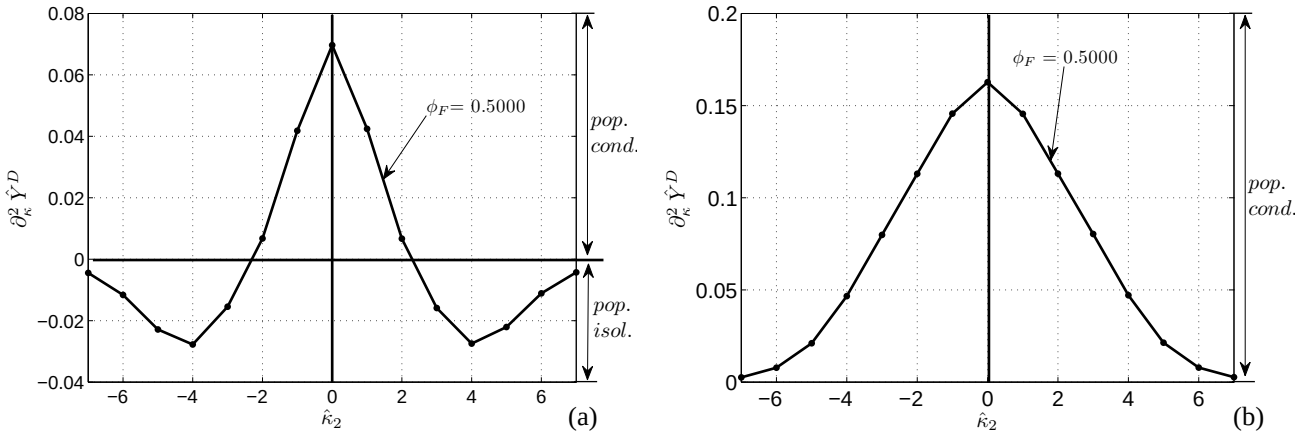


FIG. 8.26 – Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour le milieu binaire 2D (a) et 3D (b) à ϕ_F=0.50.

nous pouvons constater que pour le milieu binaire 2D, le coefficient de sensibilité $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ évolue en fonction du log-contraste κ comme une base ondelette "chapeau mexicain". Pour le milieu binaire 3D, une base en ondelette "dérivée" de cette dernière doit être possible. Le comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ pour les autres fractions étudiées, doit pouvoir se retrouver par composition des "signaux" issus de chacune des deux phases conductrice et isolante.

Le rôle des fractions critiques dans la composition de ce "signal" constitué du signal de la population isolante et du signal de la population conductrice paraît central. Elles peuvent apparaître comme des "analogues" à des fréquences de coupure ou à des échelles de coupure du signal (des "expressions extrema" des deux populations). Ici, il semblerait que si nous réalisons la moyenne arithmétiques des coefficients de sensibilité $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$

obtenus aux alentours de la fraction critique $\hat{p}_{c_2}$ et de son complémentaire (1-$\hat{p}_{c_2}$) pour chacun des log-contrastes testés, nous pourrions retrouver le comportement à la fraction 50%, aussi bien pour le milieu binaire 2D et 3D purement aléatoire, Fig. 8.27 (b) et Fig. 8.28 (b). L'obtention de la fraction d'inclusion pour laquelle $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D \to 1/2$, c'est à dire $\hat{p}_{c_2}$, semble centrale.

Pour aller un peu plus loin, il est possible qu'il existe une autre zone comportementale pour le milieu binaire 3D purement aléatoire, située entre la zone 1 et la zone 2 (respectivement entre le zone 1' et 2'). Cette zone est représentée par une couleur noire sur la figure 8.23. En effet, dans ce court intervalle de fraction, la sensibilité d'ordre 2 à $\hat{Y}^D$ s'annule deux fois, Fig.8.21.

Il est aussi possible de discriminer dans l'analyse des coefficients du second ordre à κ du milieu binaire 2D purement aléatoire des sous-zones comportementales. La limite entre ces sous-zones correspond pour certaines à peu près aux fractions critiques de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire. Il en est de même pour le milieux binaire 3D, où des sous-zones comportementales délimitées "à peu près" par les fractions de transition de phase du milieu binaire 2D peuvent être retrouvées. Cette étude est présentée en annexe (*Analyse des coefficients de sensibilité de la macro-K de Darcy*). Cette étude conforte la possibilité d'obtenir un lien entre le comportement des milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires isotrope. Le calcul de la sensibilité de la macro-K au log-contraste à l'ordre 3 permettrait de vérifier ces hypothèses.

Intéressons-nous maintenant au "second changement d'échelle" en utilisant un modèle de perte de charge locale linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forchheimer.

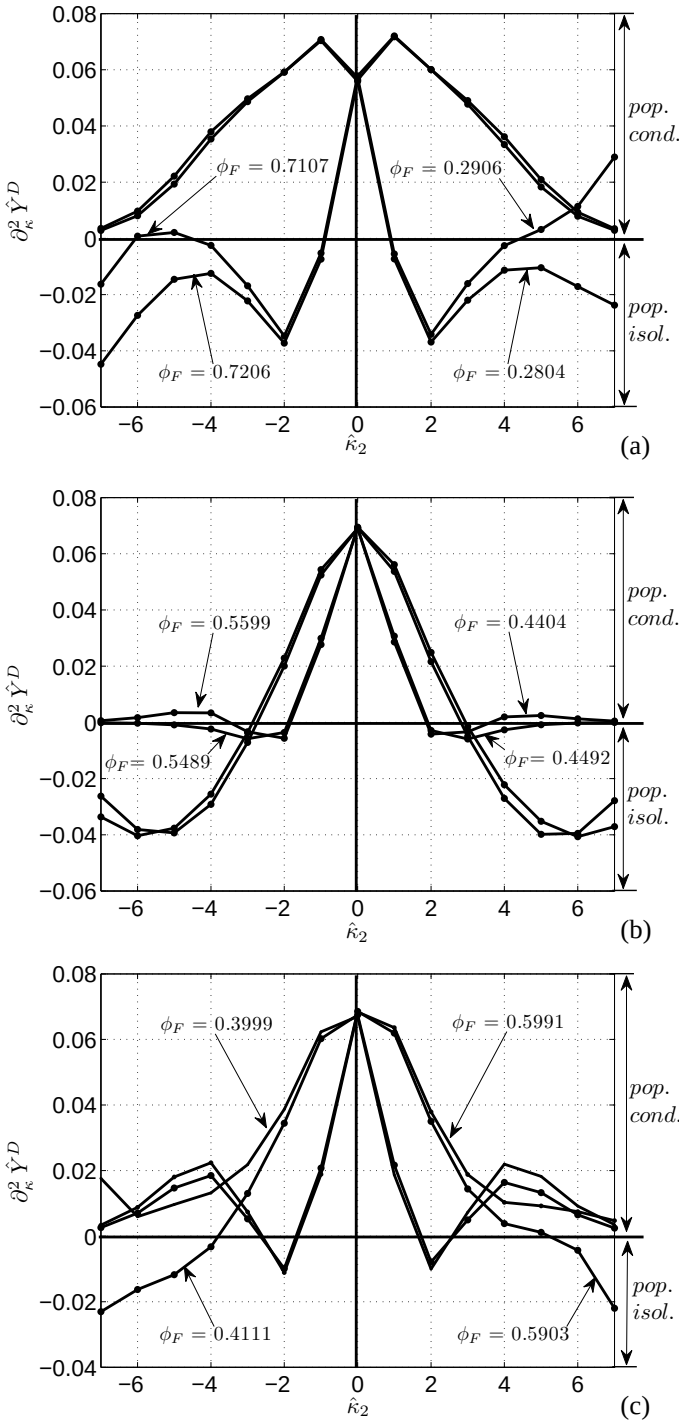


FIG. 8.27 – Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase (a) $\hat{p}_{c_1}$, (b) $\hat{p}_{c_2}$, et (c) $\hat{p}_{c_3}$, obtenue par l'étude de la sensibilité au log-contraste pour le milieu binaire 2D purement aléatoire.

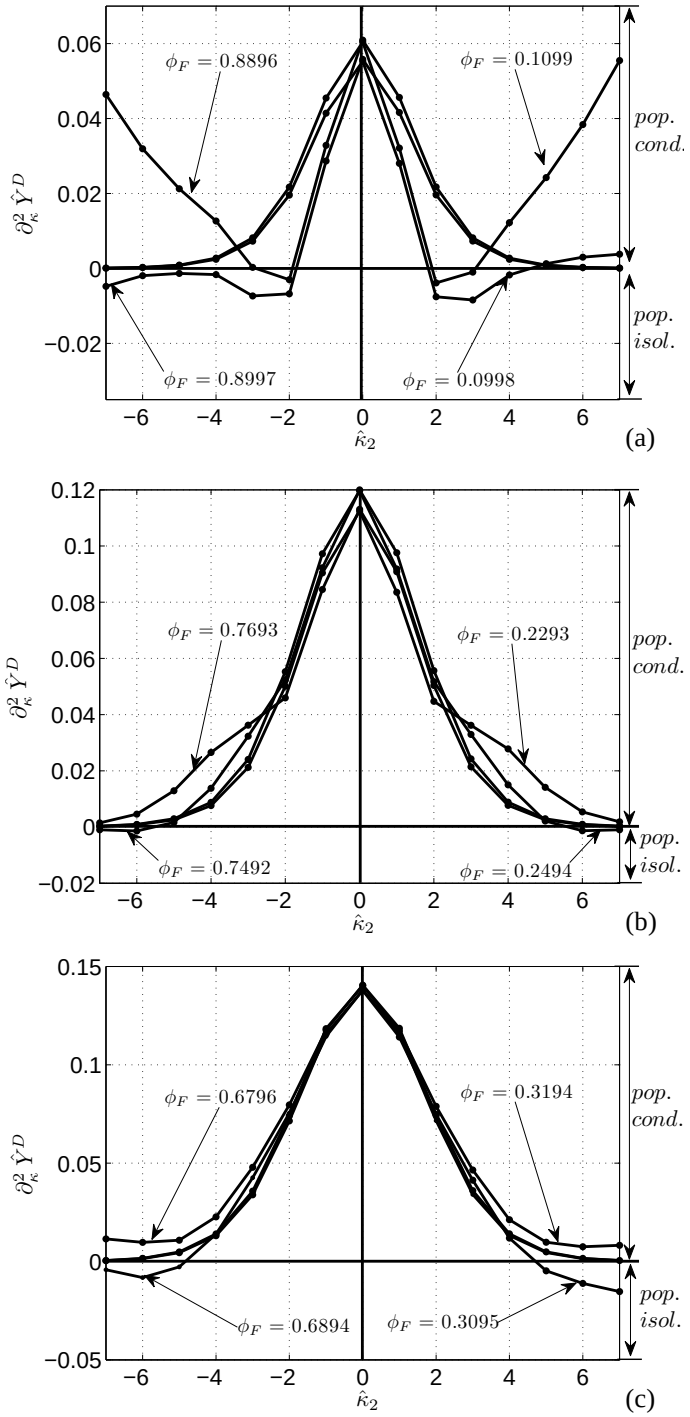


FIG. 8.28 – Comportement de $\partial^2_\kappa \hat{Y}^D$ à proximité des fractions critiques de transition de phase (a) $\hat{p}_{c_1}$, (b) $\hat{p}_{c_2}$, et (c) $\hat{p}_{c_3}$, obtenues par l'étude de la sensibilité au log-contraste pour le milieu binaire 3D purement aléatoire.

Lire la seconde partie de la thèse

Lire la première partie de la thèse

Chapitre 9

Upscaling des écoulements inertiels saturés DWF (Darcy/Ward-Forchheimer)

9.1 Le Modèle de perte de charge locale de DWF

9.1.1 Quelques généralités

Les résultats obtenus précédemment ne sont valables que pour des nombres de Reynolds faibles, c'est à dire pour des régimes d'écoulements où les forces visqueuses sont dominantes et l'accélération inertielle faible. La limite de validité de la loi de Darcy correspond à un nombre de Reynolds proche de 4 pour de nombreux milieux. Nous pouvons citer les travaux expérimentaux menés par Wahuyudi et al., 2002 [136], qui trouve cette limite, pour différents sables (Fontainebleau, Labenne, Hostun, Rheu et Loire sands), pour un nombre de Reynolds de transition égal à 4.3 (correspondant à 5 % de déviation de la loi de Darcy). Ces expériences récentes, viennent confirmer les travaux menés par Lindquist, 1933 [91] qui par une analyse minutieuse de travaux d'autres auteurs montre que la loi de perte de charge linéaire de Darcy n'est valable pour des nombres de Reynolds inférieurs ou proches de 4.

Dans des structures très ouvertes, comme celles présentes dans les aquifères karstique, les nombres de Reynolds sont hors de ce domaine de validité. Les pertes de charges inertielles ne peuvent pas y être négligées. Il en est de même pour les aquifères très fissurés où, dans certains cas, les circulations naturelles dans ces massifs ont été modifiées par l'homme, par exemple lors de la construction de barrage de surface ou souterrain. La mise en place de ces ouvrages d'art entraine alors la modification de l'hydromécanique, mais aussi des vitesses de circulation de l'eau au sein du massif considéré.

Plusieurs approches existent pour la détermination de la macro-conductivité de DWF et des coefficients inertiels, notamment par l'utilisation de développement multi-échelles, Auriault et al, 2007 [10] ou encore par des analyses numériques et perturbatives, Fourar et al, 2005 [49]. Ici, comme nous le verrons, nous prenons le parti de considérer une loi locale de perte de charge linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forchheimer, et de supposer que cette loi régit l'écoulement dans chacun des deux types de milieux (matrice, et fissures). Puis nous allons réaliser une optimisation numériques sur les résultats obtenus pour retrouver la formulation analytique du modèle équationnel macroscopique. L'objectif principal de cette approche paramétrique est de mieux appréhender l'impact de la morphologie et de l'état des connectivités sur la formulation macro-échelle de Darcy-Ward-Forchheimer.

Dans une première partie "introductive", nous allons présenter le protocole expérimental mis en place pour cette analyse d'upscaling inertiel en régime d'écoulement permanent saturé. Puis dans une seconde partie, nous nous intéresserons au domaine de validité de la formulation analytique de la macro-K de DWF. Enfin, dans une troisième partie, nous essayerons d'analyser les coefficients inertiels macro-échelles obtenus par ajustement optimal. Avant cela, rappelons le modèle de perte de charge locale utilisé, déjà présenté précédemment.

9.1.2 Modèle local de perte de charge de DWF

Dans des structures ouvertes, les écoulements peuvent être laminaires, inertiels ou pleinement turbulents. Pour ces classes d'écoulement, l'utilisation d'un modèle puissance de la loi de perte de charge est couramment retenu dans la littérature pour modéliser les écoulements dans une fracture unique (Qian et al. 2005 [112] ; Wen et al. 2006 [138]) :

$$|q|^{n-1}\vec{q} = -K\vec{\nabla}h, \tag{9.1}$$

où n=1 pour des écoulements darciens, $1 < n < 2$ pour des écoulements inertiels et $n = 2$ pour des écoulements pleinement turbulents.

Dans l'étude réalisée ici, le modèle équationnel local de perte de charge utilisé est celui de Darcy/Ward-Forchheimer, implémenté dans le code Volumes Finis BigFlow (Ababou 1988 [5]). La version de BigFlow utilisée propose une forme dérivée de la loi de Ward, généralisée aux écoulements 3D en milieu partiellement saturés, hétérogènes et anisotropes (loi de Ward modifiée) définie par Ababou et Trégarot (2000 [133]) de la manière suivante pour le cas saturé :

$$\vec{q}_i^{DWF} = -\tilde{K}_{ii}^{DWF}\vec{\nabla}H \tag{9.2}$$

où K_{ii}^{DWF} est un pseudo-tenseur des "conductivités hydrauliques modifiées" (à grands

nombre de Reynolds), non-linéaire à cause du terme quadratique de la loi de Ward :

$$\tilde{K}_{ii}^{DWF}(\vec{\nabla}H,\vec{x}) = \frac{2K_{ii}(\vec{x})}{\delta + (\delta^2 + 4\gamma K_{ii}(\vec{x})(\vec{\nabla}H \cdot \vec{\vec{K}}(\vec{x})\vec{\nabla}H)^{1/2})^{1/2}} \tag{9.3}$$

avec :

i) $\delta = 1$;
ii) $\gamma = C/(g\nu)^{1/2}$ en $(m/s)^{-3/2}$;
iii) $K_{ii}(\vec{x})$ est le tenseur de conductivité hydraulique de Darcy (diagonal),
iv) $C = 0.55$, coefficient adimentionnel d'Ergun,
v) $i, j, k = x, y, z$.

Cette formulation pouvant s'écrire pour des milieux anisotropes 2D et 3D, en généralisant au cas où le $\tilde{K}_{ij}^{D}$ de Darcy n'est pas diagonal dans le repère utilisé :

$$q_i^{DWF} = -\sum_{j=1}^{j=3} \tilde{K}_{ii}^{DWF}(\vec{\nabla}H,\vec{x}) \frac{\partial H}{\partial x_j} , \tag{9.4}$$

Pour exemple, pour la première composante, nous avons :

$$q_1^{DWF} = -\tilde{K}_{11}^{DWF}(\vec{\nabla}H,\vec{x}) \frac{\partial H}{\partial x_1} ; \tag{9.5}$$

avec :

$$\tilde{K}_{ii}^{DWF}(\vec{\nabla}H,\vec{x}) = \frac{2K_{ii}(\vec{x})}{1 + \left\{ 1 + 4\gamma K_{ii}(\vec{x}) \left(\sum_i \sum_j \frac{\partial H}{\partial x_i} K_{ij}(\vec{x}) \frac{\partial H}{\partial x_j} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}} . \tag{9.6}$$

La question que nous allons nous poser, et à laquelle nous allons essayer d'apporter des éléments de réponse, concerne la formulation de ce modèle à l'échelle macroscopique (changement d'échelle, prise de moyenne de ce modèle).

9.2 Procédure d'upscaling et premiers résultats numériques perméamétriques

9.2.1 Milieux et procédure d'étude

Milieux d'étude

Au cours de cette étude, nous allons nous intéresser à trois types de milieux, à savoir des milieux binaires multicouches et des milieux binaires 2D et 3D purements aléatoires isotropes. Pour ces trois types de milieux, les fractions volumiques en inclusions conductrices, ϕ_F, de 25 et 50 % vont être testées. Ces trois milieux ont été choisis en fonction des résultats déjà obtenus pour les écoulements darciens, et ceci afin de comprendre l'impact de la fraction volumique en inclusion et de l'état des connectivités (les influences des phénomènes de percolation et de quasi-percolation) sur la solution de la macro-K de DWF numérique obtenue.

En effet, ces trois milieux ont des comportements macroscopiques darciens très différents. Par exemple, pour des log-contrastes importants, et pour les milieux binaires 3D purements aléatoires et stratifiés contenants 50% d'inclusions conductrices la solution de la macro-K de Darcy est influencée essentiellement par les phénomènes de percolation ($\partial_\kappa \hat{Y}^D \rightarrow 1$) ; alors que pour des milieux binaires 2D aux mêmes log-contrastes elle ne dépend pas des phénomènes de percolation, mais plutôt des phénomènes de "quasi-percolation" ($\partial_\kappa \hat{Y}^D \rightarrow 1/2$). Ainsi, la comparaison des résultats obtenus pour ces trois milieux, à fractions volumiques en inclusions et pour des log-contrastes fixés, nous permettra de discuter de l'influence de l'état morphologique des milieux sur la solution macroscopique de la macro-K de Darcy/Ward-Forchheimer et sur le domaine de validité de la formulation proposée.

Pour les différents milieux testés, nous allons réaliser une variation du log-contraste entre la phase conductrice et matricielle de 1 à 100 000. Et les différentes expériences numériques perméamétriques directes réalisées seront réalisées pour un milieu donné sur une large gamme de nombre de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer global, $Re_i(DWF)$ éq. 9.7, allant de 0.001 à 1000. La variation du nombre de reynolds global sera obtenue en faisant varier l'intensité du gradient macroscopique moyen $\langle \nabla H \rangle$.
On pose :

$$Re_i(DWF) = \sqrt{\frac{K^D}{g\nu}} \left| \tilde{q}_i^{DWF} \right|, \tag{9.7}$$

où $\tilde{q}_i^{DWF}$ $(m.s^{-1})$ est la densité de flux moyenne de type Darcy/Ward-Forchheimer notée DWF, obtenue par simulation directe celon la direction $0\vec{i}$, $g = 9.81\ m.s^{-2}$ la gravité, $\nu = 1.15.e^{-6}\ m^2.s^{-1}$ la viscosité cinématique de l'eau à 15 degrés celcius et K^D $(m.s^{-1})$ la macro-K de Darcy.

Par la suite, pour simplifier les notations, nous noterons ce nombre de Reynolds macroscopique de Darcy/Ward-Forchheimer directionnel, de la façon suivante : $Re(DWF)$. Il en sera de même pour la notation de la vitesse de filtration, qui sera notée de nanière plus simple : $\tilde{q}^{DWF}$. La direction de l'écoulement sera explicitement notée dans le texte.

Lors de cette étude, nous utiliserons une méthode de continuation numérique. Ainsi, pour l'expérience à $\langle \nabla H_{i+1} \rangle$, nous utiliserons comme champ "initial" (initial guess) le champ de charge obtenu à $\langle \nabla H_i \rangle$. Ici, les écoulements seront réalisés uniquement suivant la direction $O\vec{x}$. Pour les milieux stratifiés, cette direction correspond à un écoulement réalisé suivant la direction de la stratification. Il s'agit donc d'expériences numériques inertielles de type perméamétriques suivant la direction $O\vec{x}$ (voir le Chap. 7 pour la procédure d'upscaling et le Chap. 8, en particulier la sous-section et la section 8.2, pour ce qui concerne la perméamétrie darcienne)

Dépouillement des résultats

Le dépouillement des résultats numériques sera réalisé par une procédure d'optimisation numérique utilisant une méthode de minimisation par les moindres carrés à l'aide de la fonction *NLSQ* (NonLinear Least SQuares), programmée en $MATLAB^R$. Deux modèles macroscopiques vont être testés :

- un modèle linéaire/quadratique identique à l'équation locale (éq. 9.8),
- un modèle plus "général" dit "linéaire/puissance" (éq. 9.9).

$$-\vec{\nabla}Hq_{DWF}^{-1} = B_{opt,1} + A_{opt,1}\,|q_{DWF}|\,, \tag{9.8}$$

et,

$$-\vec{\nabla}Hq_{DWF}^{-1} = B_{opt,2} + A_{opt,2}\,|q_{DWF}|^{\gamma}. \tag{9.9}$$

La procédure d'optimisation consistera à identifier les différents paramètres de ces deux modèles.

Outre ces deux modèles macroscopiques, nous allons utiliser deux procédures de dépouillement, l'une séquentielle "précontrainte" par une expérience directe perméamétrique de type "Darcy" et l'autre sans précontrainte "Darcy". Les résultats darciens qui seront utilisés sont ceux obtenus dans la partie précédente.
Après dépouillement des résultats et identification des paramètres optimisés, nous étudierons la variation du coefficient de Ward/Ergun C, et de l'exposant γ (pour le second modèle macroscopique), en fonction de la variation du log-contraste, κ.

Le coefficient adimensionnel de Ward/Ergun (C) est lié à la conductivité hydraulique de Darcy, $\tilde{K}^D$, par l'équation :

$$C_{opt,i} = A_{opt,i}\sqrt{\tilde{K}^D g\nu} \tag{9.10}$$

Il reste à choisir la gamme de nombre de Reynolds à considérer, pour tester la validité des deux modèles macroscopiques. En effet, nous verrons que l'exposant γ du second modèle "linaire/puissance" est assez sensible au choix de la gamme de Reynolds. Comme nous savons que le modèle inertiel local "DWF" n'est valide que pour des Reynolds $<$ 100-1000 environ, nous choisirons de réaliser des simulations numériques directes en régime saturé permanent en fixant une gamme de Reynolds de DWF bien délimitée pour toutes les simulations. La discussion sur le choix de cette gamme se fera ultérieurement.

Premier test : validation de la procédure en milieu poreux homogène isotrope

Pour ce premier test, un milieu poreux homogène de conductivité hydraulique de 10 $m.s^{-1}$ a été utilisé et les deux formulations analytiques de la macro-K proposées précédemment ont été testées, ainsi que la procédure d'optimisation numérique. Les simulations ont été conduites pour une gamme de Re(DWF) allant de 0.001 jusqu'à 1000. Les résultats des simulations numériques directes et les courbes optimisées sont présentés sur la figure 9.1, et les coefficients optimisés ont été regroupés dans le tableau 9.1.

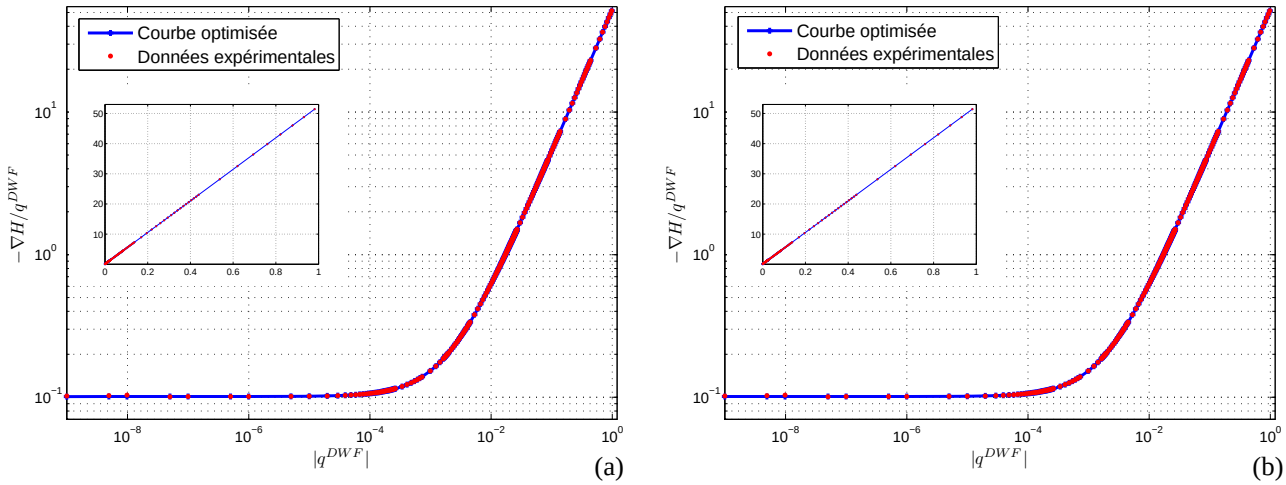


FIG. 9.1 – Résultats numériques provenant des simulations directes réalisées et de l'optimisation numériques en utilisant : (a) le modèle équationnel de la macro-K de DWF linéaire/quadratique et (b) le modèle équationnel de la macro-K de DWF "linéaire-puissance".

Ici pour cette étude, nous avons pris le parti de représenter sur la même figure un tracé log-log et linéaire-linéaire pour un milieu avec une fraction en inclusions et un log-contraste donné. Nous nous focaliserons sur le tracé log-log. Ce tracé sur deux échelles différentes nous permettra de pouvoir analyser grâce au tracé log-log l'accord entre les simulations numériques réalisées et les solutions analytiques testées pour des nombres de Reynolds faible à modérés. Le tracé linéaire-linéaire nous permettant d'avoir une vue

"d'ensemble" de ces mêmes résultats. Cette remarque étant faite, revenons à l'interprétation du cas test étudié.

Quelque soit le modèle macroscopique utilisé, nous obtenons un comportement macroscopique linéaire/quadratique avec $C_{opt,i}$ très proche de 0.55 et $\gamma = 1$ pour le modèle "généralisé", Tab. 9.1. L'utilisation d'une précontrainte darcienne lors de la procédure de calage optimal des paramètres n'est pas utile, comme le montre les paramètres optimisés du tableau 9.2 (comparez les tableaux 9.1 et 9.2).

Milieu isotrope homogène avec $\hat{K}^D = 10\ m.s^{-1}$						
$1/B_{opt,1}$	$A_{opt,1}$	$C_{opt,1}$	$1/B_{opt,2}$	$A_{opt,2}$	$C_{opt,2}$	γ
10	52.30742	0.55558	10	52.30471	0.55555	1.0000

TAB. 9.1 – Coefficients optimisés pour le milieu isotrope homogène avec $\hat{K}^D = 10\ m.s^{-1}$ sans précontrainte "Darcy". Les coefficients $X_{opt,1}$ correspondent aux coefficients optimisés en utilisant le modèle linéaire-quadratique et les coefficients $X_{opt,2}$ à ceux obtenus en utilisant le modèle "linéaire/puissance".

Milieu isotrope homogène avec $\hat{K}^D = 10\ m.s^{-1}$				
$A_{opt,1}$	$C_{opt,1}$	$A_{opt,2}$	$C_{opt,2}$	γ
52.30498	0.55555	52.3050	0.55555	0.99990

TAB. 9.2 – Coefficients optimisés pour le milieu isotrope homogène avec $\hat{K}^D = 10\ m.s^{-1}$ avec précontrainte "Darcy". Ici comme précédemment, les coefficients $X_{opt,1}$ correspondent aux coefficients optimisés en utilisant le modèle linéaire/quadratique et les coefficients $X_{opt,2}$ à ceux obtenus en utilisant le modèle "linéaire-puissance".

Ce premier test simple nous a permis de valider la procédure de dépouillement. Maintenant, nous allons nous interroger sur la nécessité d'utiliser, sur d'autre type de milieux, une précontrainte "Darcy" pour le calage optimal des paramètres macro-échelles.

Précontrainte de l'optimisation numérique ?

Pour répondre à ce questionnement, nous avons testé ces deux procédures d'optimisation sur un milieu stratifié contenant 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste, $\kappa = log_{10}(K_F/K_M)$ de +4. Dans un premier temps seule la loi de perte de charge macroscopique linéaire/quadratique est testée.

Les résultats de l'optimisation numérique, Fig. 9.2, tendent à montrer que l'on obtient de meilleurs résultats sans la procédure séquentielle d'optimisation à "précontrainte Darcy". La "précontrainte Darcy", Fig. 9.2 (b), permet d'avoir un bon accord pour de faibles et modérés nombre de Reynolds, cependant pour toute la gamme de simulations réalisées, l'accord est "globalement moins bon" Fig. 9.2 (b), observez le tracé log-log et linéaire-linéaire. Inversement, si aucune précontrainte n'est appliquée,

Fig. 9.2 (a), l'accord entre les simulations numériques et la solution analytique testée reste "globalement bon" (observez le tracé linéaire-linéaire), mais "moins bon" pour de faibles et modérés nombres de Reynolds (observez le tracé log-log).

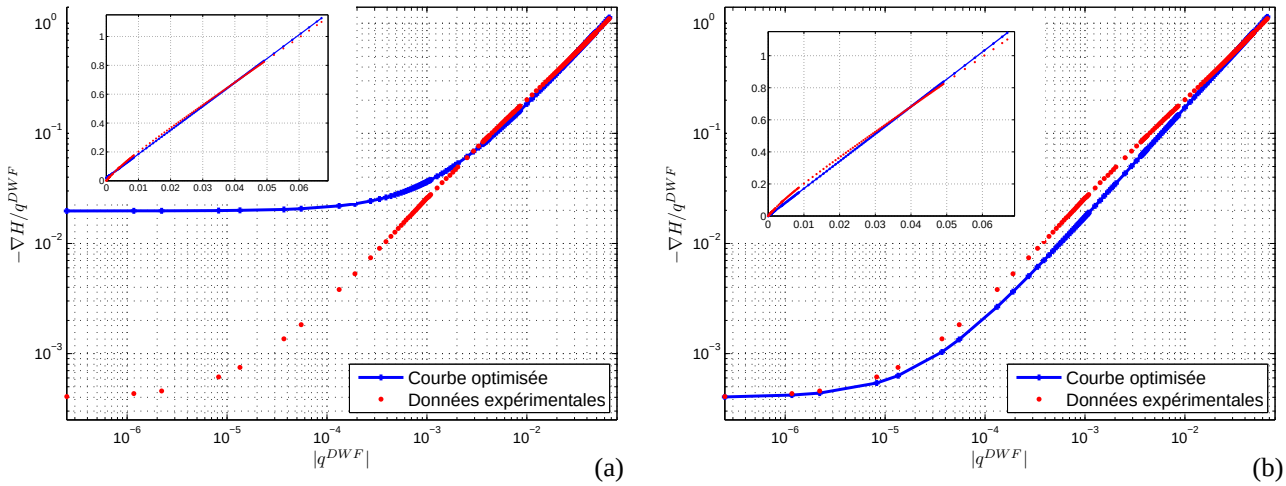


FIG. 9.2 – Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle de la macro-K de DWF linéaire/quadratique, pour un milieu stratifié avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Optimisation simple (sans "précontrainte Darcy"). (b) Optimisation séquentielle (sans "précontrainte Darcy").

Nous avons suivit la même démarche pour le modèle de la macro-K de DWF "linéaire-puissance", éq. 9.9. Le milieu utilisé ici est le même que le précédent et les résultats des simulations numériques ainsi que les courbes optimisées sont présentés sur la figure 9.3. Les résultats obtenus montrent un très bon accord entre la solution analytique "linéaire-puissance" optimisée et les simulations numériques directes, particulièrement en utilisant la procédure d'optimisation "séquentielle Darcy". Celle-ci permet donc d'améliorer de manière significative l'accord entre la solution analytique et les résultats numériques dans le cas du modèle puissance à trois paramètres, Fig. 9.3 (b).

En conclusion, pour la suite de l'étude, nous considérerons uniquement le modèle linéaire-puissance de la macro-K de DWF avec précontrainte "Darcy" pour analyser les simulations directes réalisées. Notons aussi que ce modèle macroscopique permet d'obtenir le cas échéant une forme linéaire/quadratique.

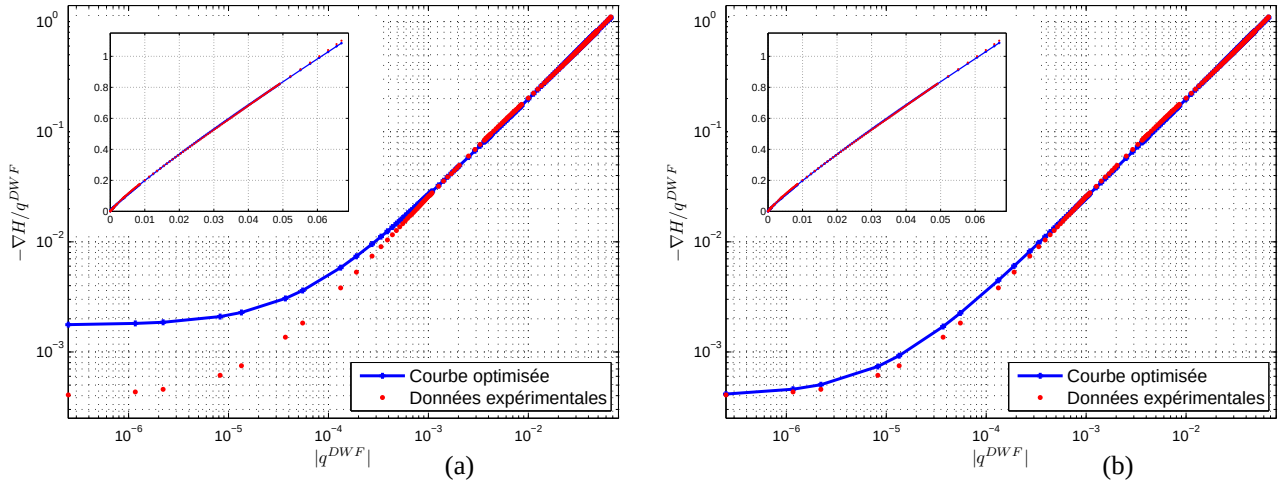


FIG. 9.3 – Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle analytique de la macro-K de DWF "linéaire/puissance" pour un milieu stratifié avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Sans procédure d'optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et (b) avec procédure séquentielle à "précontrainte Darcy".

Influence du choix de la gamme de Re(DWF)

Si nous considérons comme modèle analytique de la macro-K de DWF une formulation linéaire puissance, plus "souple" que le simple modèle linéaire/quadratique, il nous faut prendre en considération une seule et unique gamme de Re(DWF) à étudier. Car suivant cette gamme choisie la valeur de l'exposant puissance varie. La première chose à rappeler est la limite physique de validité de la loi locale de perte de charge de DWF. Celle-ci se situe environ pour des nombres de Re(DWF) $<$ 100-1000. Le second élément à rappeler est que la prise en compte d'effets inertiels ne signifie pas forcément qu'on modélise tous les phénomènes de la mécanique des fluides turbulente (ni même la transition vers la turbulence).
Nous allons illustrer ce dernier point par l'étude de deux milieux binaires :

- un milieu binaire stratifié constitué de 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4,
- et un milieu binaire 3D isotropiquement distribué purement aléatoire constitué de 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4.

Les paramètres γ et C optimisés pour chacune des gammes de nombres de Reynolds testées sont regroupés dans le tableau 9.3 et les figures correspondantes sont présentées pour le milieu stratifié sur la figure 9.4 et pour le milieu aléatoire 3D sur la figure 9.5.

Les résultats obtenus sur ces deux milieux tests, montrent que suivant la gamme de Reynolds de DWF considérée, les paramètres γ et C optimisés (macro-échelles) varient de manière assez importante, Tab. 9.3.

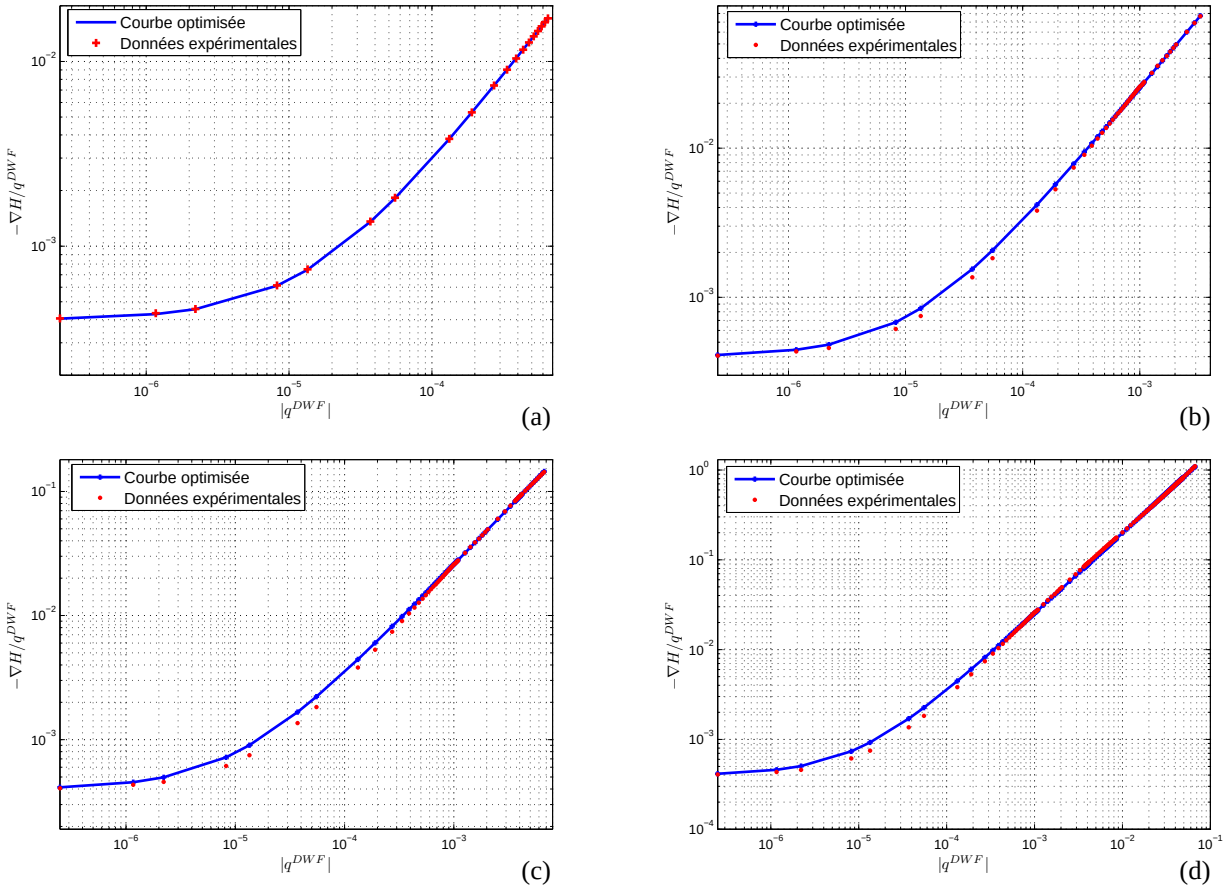


FIG. 9.4 – Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle de perte de charge macroscopique "linéaire-puissance" pour un milieu stratifié avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Pour Re(DWF) $\in [0\,;\,10]$ (b) pour Re(DWF) $\in [0\,;\,50]$; (c) pour Re(DWF) $\in [0\,;\,100]$ (d) et pour Re(DWF) $\in [0\,;\,1000]$.

Pour le milieu stratifié, quelque soit la gamme de nombre de Reynolds testée, la solution "linéaire-puissance" optimisée est en bon accord avec les solutions numériques directes obtenues (Fig. 9.4 (a), (b), (c) et (d)).
Pour le milieu binaire 3D un accord "parfait" est obtenu pour une gamme de nombre de Reynolds allant de 0.001 à 10. Pour les autres gammes de Re(DWF) l'accord est bon pour des nombres de Reynolds importants, mais moins bon pour des nombres de Reynolds de "transition" (Fig. 9.4 (b), (c) et (d)) entre les deux comportements linéaires de la solution numérique obtenue (située entre un comportement où $\gamma = 0$ et $\gamma = 1$).

Notons que si pour le milieu stratifié étudié ici, le choix de la gamme de Reynolds n'influence pas la "qualité" de l'optimisation réalisée (Fig. 9.4), pour le milieu binaire aléatoire 3D à même fraction volumique en inclusion et même log-contraste, la procé-

dure d'optimisation devient de moins bonne qualité lorsque l'on augmente la gamme de Reynolds (Fig. 9.5).

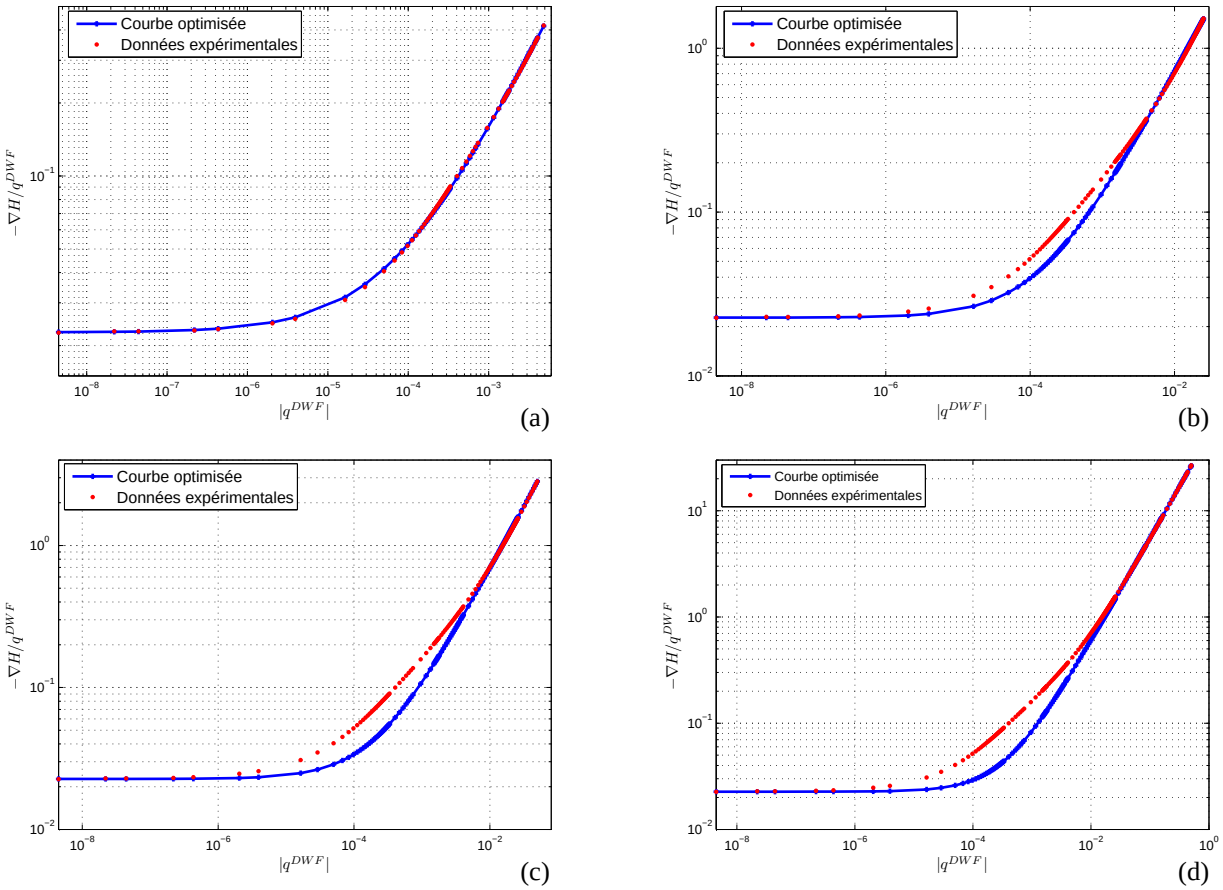


FIG. 9.5 – Résultats de l'optimisation numérique réalisée en utilisant le modèle de perte de charge macroscopique "linéaire-puissance" pour un milieu binaire 3D avec 25% d'inclusions conductrices et un log-contraste κ de +4. (a) Pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 10] (b) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 50] ; (c) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 100] et (d) pour Re(DWF) $\in$ [0 ; 1000].

La cause en est sans doute une mauvaise adéquation entre le modèle analytique proposé et la physique liée à ce milieu "peu connecté", i.e. possédant une fraction volumique en inclusions inférieures au seuil de percolation de ce milieu. Rappelons ici que pour un milieu binaire 3D purement aléatoire, le seuil de percolation se trouve à une fraction critique proche de 0.31 (fraction critique de percolation de sites pour un réseau cubique). Rappelons aussi que pour ce log-contraste, $\kappa = +4$, cette fraction a été trouvée par nos analyses ultérieures à environ 32% . Nous reviendrons sur ce point en conclusion de cette partie consacrée au l'upscaling de DWF.

Ainsi, le choix de la gamme de nombre de Reynolds est important et influence significativement la forme de la macro-K de DWF. Il faut fixer cette gamme de Reynolds. Ici,

Milieu binaire stratifié avec ϕ_F=25% et κ=+4				
Re(DWF)	$\in$]0 ; 10]	$\in$ [0 ; 50]	$\in$ [0 ; 100]	$\in$ [0 ; 1000]
γ	1.0	0.8047	0.9372	0.8973
C	4.319	2.733	2.323	2.064
Milieu binaire 3D aléatoire avec ϕ_F=25% et κ=+4				
Re(DWF)	$\in$]0 ; 10]	$\in$ [0 ; 50]	$\in$ [0 ; 100]	$\in$ [0 ; 1000]
γ	0.6645	0.8107	0.8885	0.9740
C	0.302	0.656	0.895	1.153

TAB. 9.3 – Coefficients γ et constantes d'Ergun/Ward, C, optimisés pour différentes gammes de Re(DWF).

nous prendrons le parti de considérer toute la gamme de validité de la loi locale de perte de charge linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forcheimmer. Nous allons donc réaliser des simulations numériques directes perméamétriques pour des nombres de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer (Re(DWF)) situés dans la gamme [0 ; 1000], plus particulièrement, nous fixerons le nombre de Reynolds minimum à 0.001 et le nombre de Reynolds max à 1000.

9.2.2 Bilan sur la procédure de dépouillement des écoulements inertiels (DWF)

Dans cette section, nous nous sommes interrogés sur la procédure à utiliser pour dépouiller les résultats numériques obtenus par simulations directes en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer. Voici les choix que nous avons faits pour réaliser l'optimisation numérique et explorer la forme analytique de la macro-K de DWF :

- Nous utiliserons le modèle analytique "linéaire/puissance" plus souple que le modèle linéaire/quadratique et donnant de meilleurs résultats lors de l'optimisation numérique.
- Nous ne calerons pas les trois paramètres de ce modèle. Nous optimiserons seulement deux paramètres ($A_{opt,2}$ et γ), le troisième étant considéré comme une donnée du problème. Nous réaliserons donc une optimisation numérique séquentielle avec "précontrainte Darcy".
- Nous considérerons tout le domaine de validité de la loi de perte de charge locale de Darcy/Ward-Forchheimer, pour Re(DWF) $\in$ [0.001 ; 1000].
- Pour la représentation graphique des résultats, il aurait sûrement été plus judicieux de présenter les résultats de manière à mettre en avant le nombre de Reynolds associé à chacune des simulations directes obtenues. Cependant, pour une analyse plus aisée, nous avons préféré représenter les résultats sous la forme

$-\nabla H/q^{DWF} = f(|q^{DWF}|)$.

Passons maintenant à l'analyse concrète des milieux "tests" présentés en introduction. Nous testerons la validité du modèle "linéaire/puissance" sur ces différents milieux et nous nous intéresserons particulièrement à l'étude de la variation des coefficients optimisés en fonction des log-contrastes, κ=$log_{10}(K_F/K_M)$, et de la fraction volumique en inclusions conductrices, ϕ_F.

9.3 Macro-K de Darcy/Ward-Forchheimer

9.3.1 Introduction

Nous avons présenté précédemment la procédure de dépouillement que nous pensons optimale pour analyser les résultats numériques directs obtenus. Nous avons pris le parti de considérer à la solution "linéaire/puissance" de la macro-K de DWF plutôt que linéaire/quadratique. Au long de cette troisième partie, nous allons analyser la validité de ce modèle en réalisant différentes simulations directes sur les géométries simples suivante :

- des milieux stratifiés contenant 25% et 50% d'inclusions conductrices,
- des milieux 2D et 3D purements aléatoires isotropiquement dispersés à 25% et 50% d'inclusion conductrices,

Les résultats des simulations numériques directes et de l'optimisation numérique sont présentés dans différentes figures comme indiquer ci-dessous :

- pour le milieu stratifié à ϕ_F=25% Fig. 9.6 ;
- pour le milieu stratifié à ϕ_F=50% Fig. 9.7 ;
- pour le milieu binaire 2D à ϕ_F=25% Fig. 9.8 ;
- pour le milieu binaire 2D à ϕ_F=50% Fig. 9.9 ;
- pour le milieu binaire 3D à ϕ_F=25% Fig. 9.10 ;
- pour le milieu binaire 3D à ϕ_F=50% Fig. 9.11.

9.3.2 Tests sur la validité du modèle analytique "linéaire-puissance"

Pour cette première approche, nous allons nous limiter à décrire et commenter l'optimisation réalisée sur les différents milieux testés (Fig. 9.6 à 9.11). Commençons par les deux milieux stratifiés étudiés possédant respectivement 25% (Fig. 9.6) et 50% (Fig. 9.7) d'inclusions conductrices.

Pour ces deux milieux, l'adéquation entre les simulations directes menées et le modèle "linéaire/puissance" de la macro-K de DWF est bonne quelque soit le log-contraste testé. L'adéquation est très bonne pour des log-contrastes élevés, $\kappa > 2$, mais un peu moins bonne pour des log-contrastes inférieurs (surtout pour le milieu stratifié à

ϕ_F=25% et $\kappa = +2$, Fig. 9.6 (b)). Le modèle analytique "linéaire/puisance" semble reproduire de manière satisfaisante le comportement macroscopique de milieux stratifiés, surtout si la fraction volumique en inclusion est élevée et le log-contraste important. Notons ici que l'étude d'un milieu contenant 75% d'inclusions conductrices aurait été nécessaire pour conclure de manière satisfaisante sur ce point.

Pour les deux milieux binaires 2D aléatoires, ce propos est plus nuancé, Fig. 9.8 et Fig. 9.9. Globalement, nous pouvons constater que l'ajustement entre les simulations numériques directes et le modèle "linéaire/puissance" est correcte pour les deux milieux binaires 2D testés quelque soit le log-contraste testé (figures Fig. 9.8 et Fig. 9.9). Cependant, pour ces deux milieux tests, l'ajustement est moins bon entre les solutions numériques et le modèle analytique pour la zone de transition entre un comportement visqueux et inertiel.

Enfin aux deux milieux binaires purement aléatoires 3D, Fig. 9.10 et Fig. 9.11. Pour ces deux milieux, l'ajustement entre les simulations numériques et la forme "linéaire/puissance" de la solution de la macro-K de DWF est meilleur pour le milieu possédant une fraction volumique en inclusions de 50% surtout aux forts ($\kappa = +5$) et faibles log-contrastes ($\kappa < +3$). La plage de Re(DWF) où la solution analytique "linéaire/puissance" pèche est identiques à celle citée précédemment pour le milieu binaire 2D aléatoire.

9.3.3 Conclusion partielle

Les premières investigations numériques réalisées ici indique que le changement d'échelle DWF tend vers une solution macroscopique "linéaire/puissance". Cette formulation est particulièrement bien adaptée pour les deux milieux stratifiés et pour le milieu 3D possédant 50% d'inclusions conductrices. Pour les trois autres milieux testés (2D aléatoire avec $\phi_F = 0.25$ et $\phi_F = 0.50$ et 3D aléatoire avec $\phi_F = 0.25$), ce modèle DWF macro-échelle (ou macroscopique) ne permet pas de rendre compte de la zone de transition entre un comportement darcien et quadratique.
Nous pouvons ici émettre l'hypothèse que ce modèle est surtout bien adapté pour les milieux stratifiés et isotropes "bien connectés" à fort log-contraste, autrement dit, pour les milieux qui percolent bien. Dans cette étude, l'analyse de milieux stratifiés, 2D et 3D purement aléatoires contenant une fraction volumique en inclusions conductrices de 75% aurait pu permettre de trancher en faveur ou en défaveur de cette hypothèse. Pour les milieux "moins connectés" la modèle proposé ici pour la macro-K (DWF) cette formulation de la macro-K surestime les pertes de charges inertielles. Pour ces types de milieux une formulation plus adéquate qui permetrait de prendre en considération de manière plus optimale la transition entre les écoulements darciens et quadratiques doit être formulée.

Cependant la plage de nombre de Reynolds ne permettant pas un bon ajustement entre les simulations numériques et le modèle analytique est très restreinte. Dans le

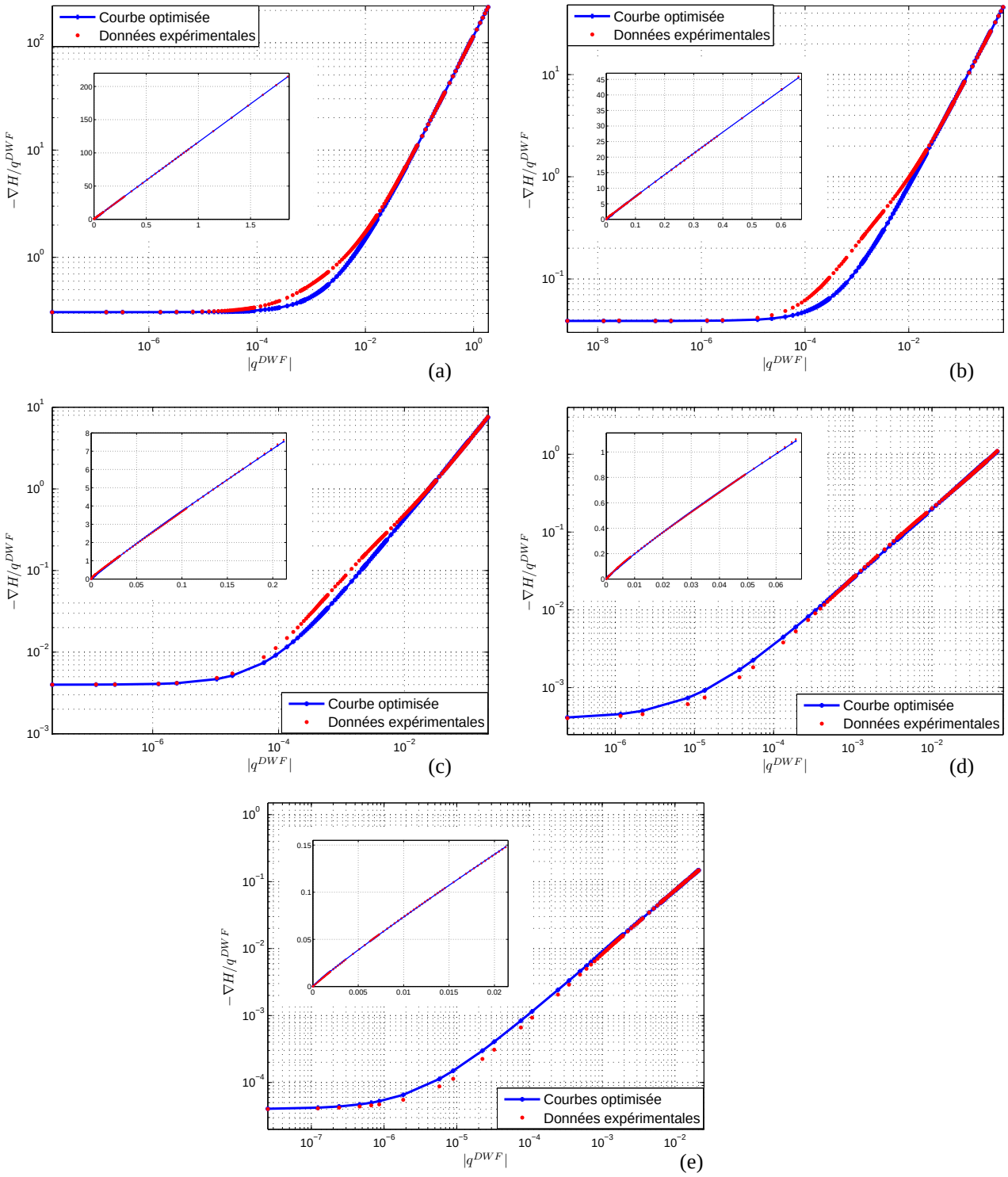


FIG. 9.6 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire stratifié contenant 25% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5.

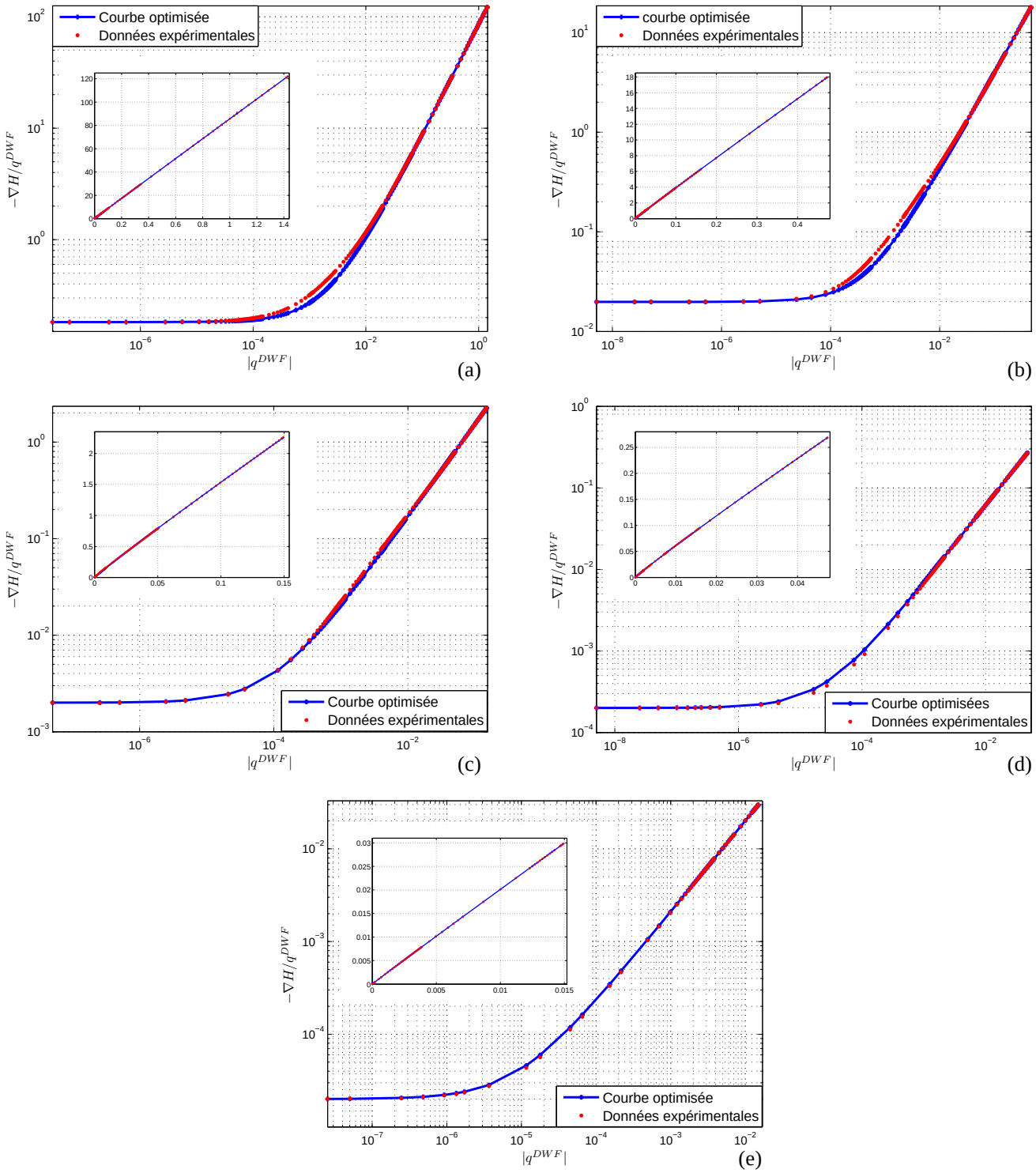


FIG. 9.7 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire stratifié contenant 50% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5.

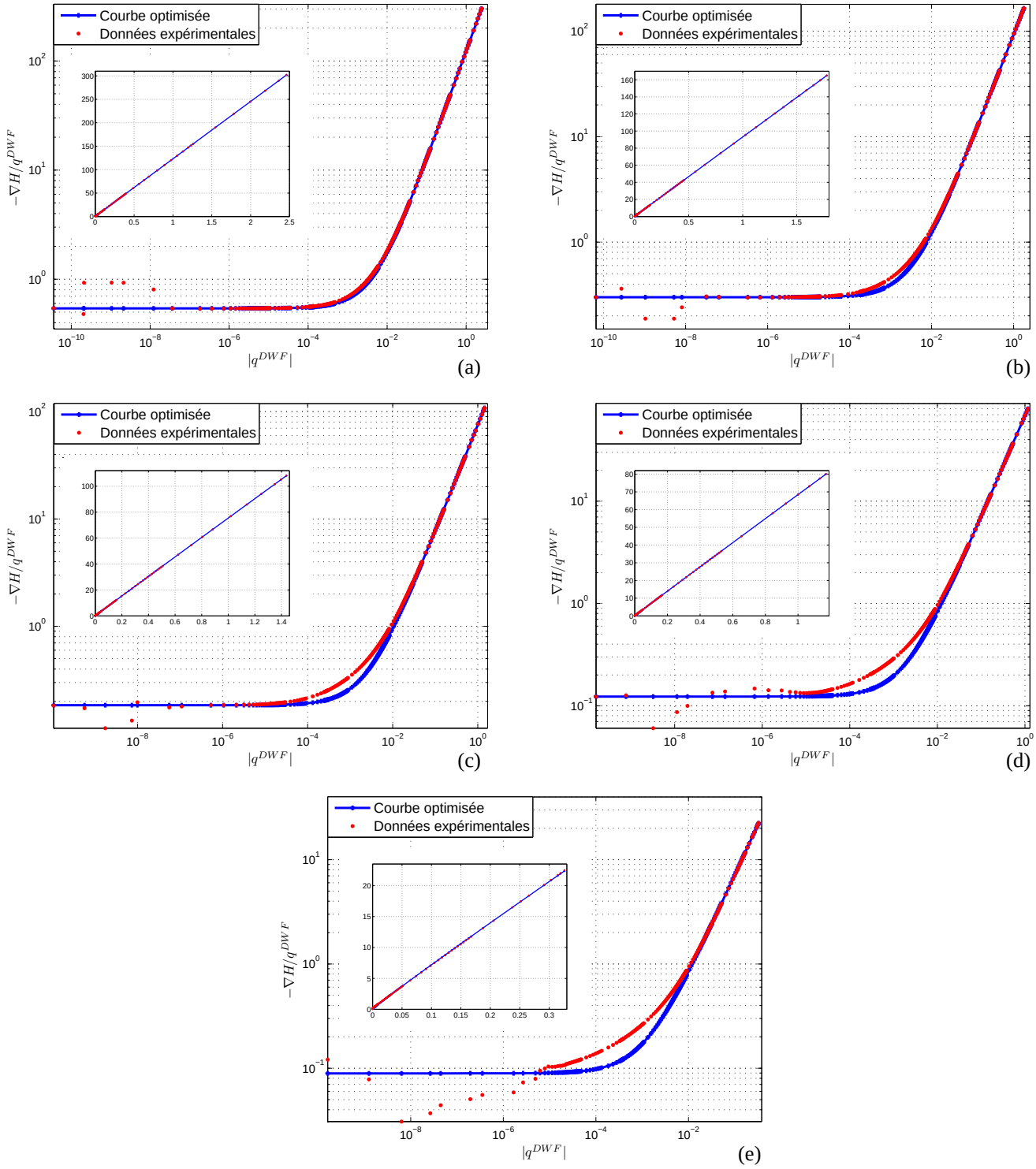


FIG. 9.8 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 2D purement contenant 25% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5.

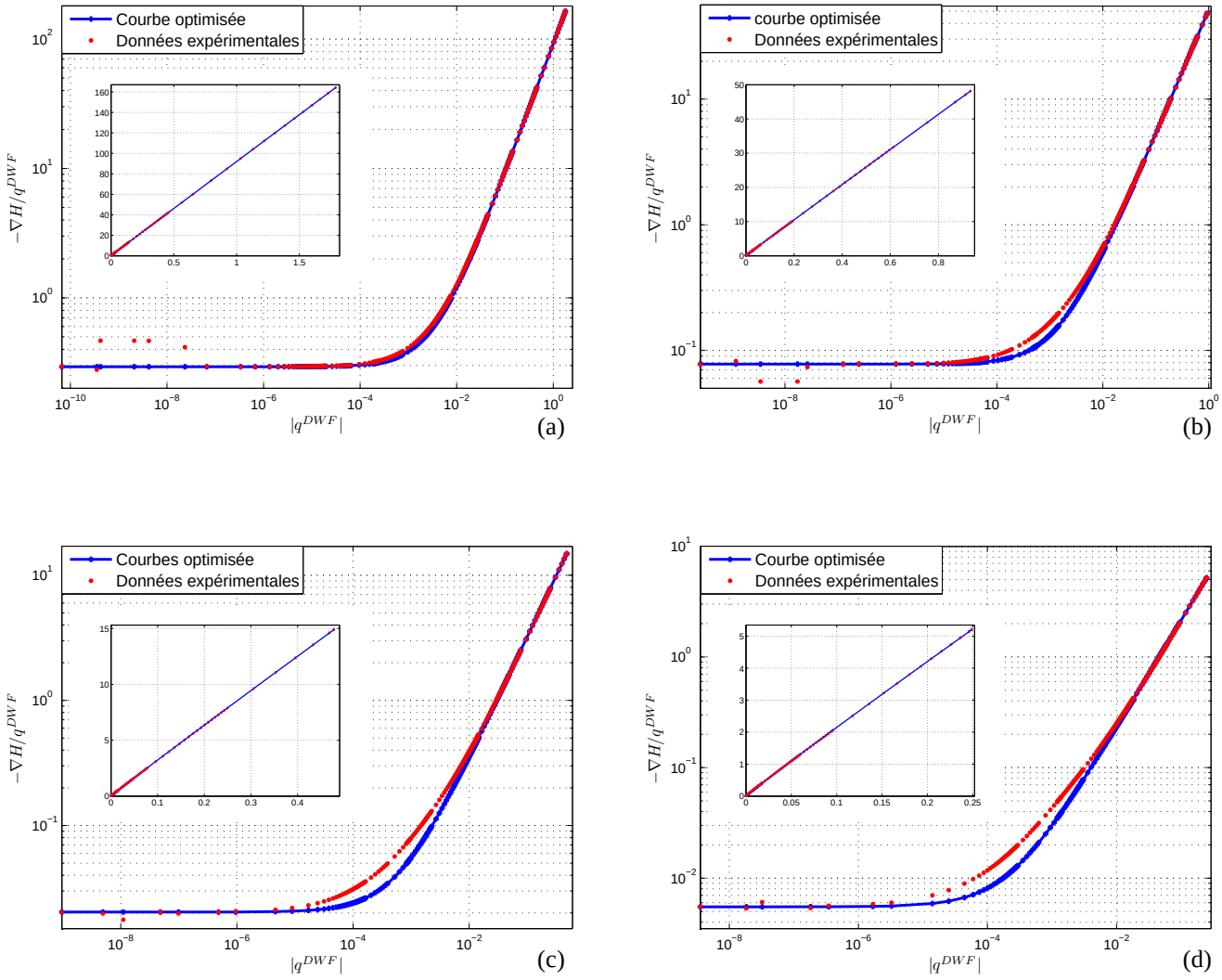


FIG. 9.9 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 2D purement contenant 50% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5.

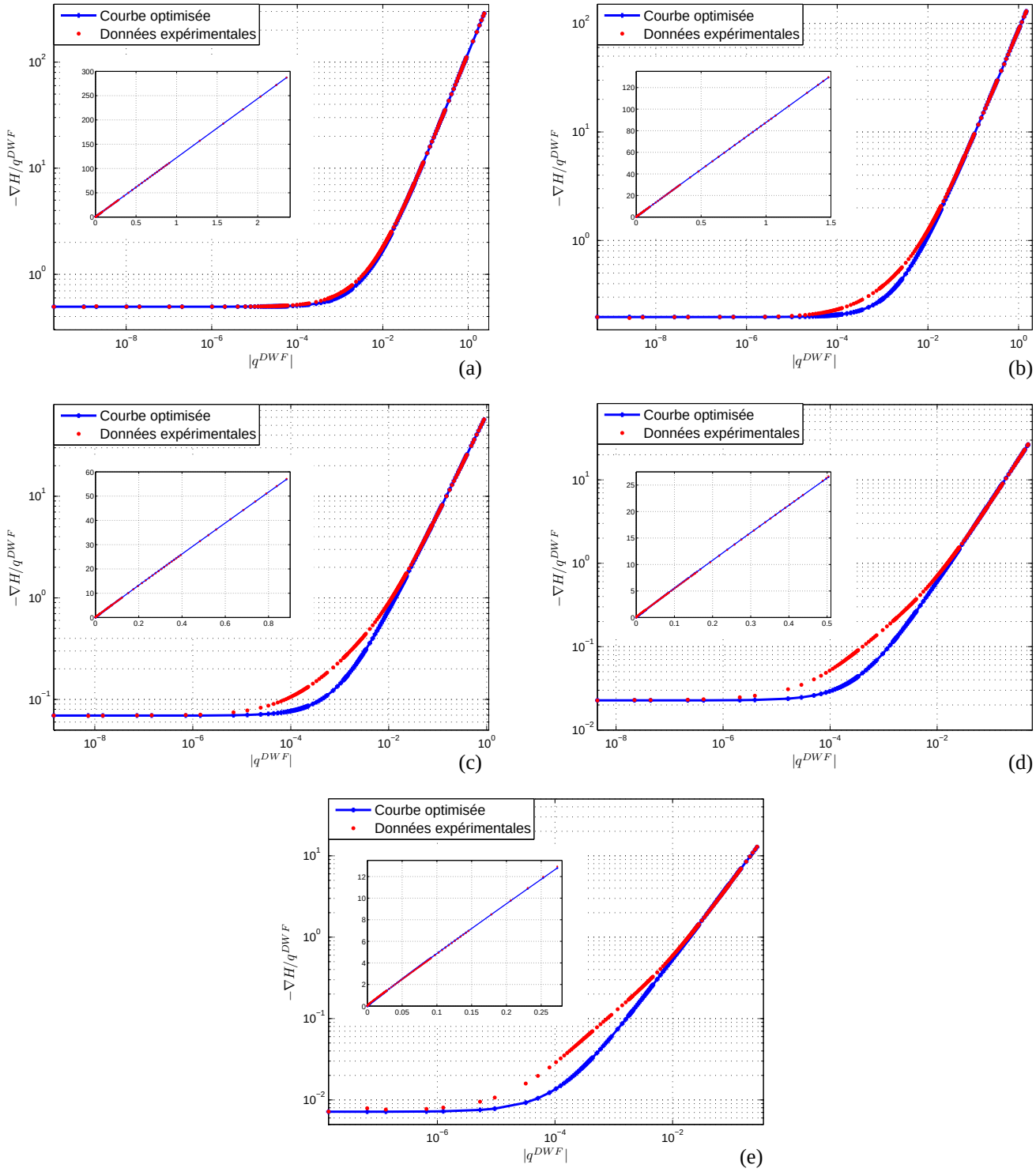


FIG. 9.10 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D purement contenant 25% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5.

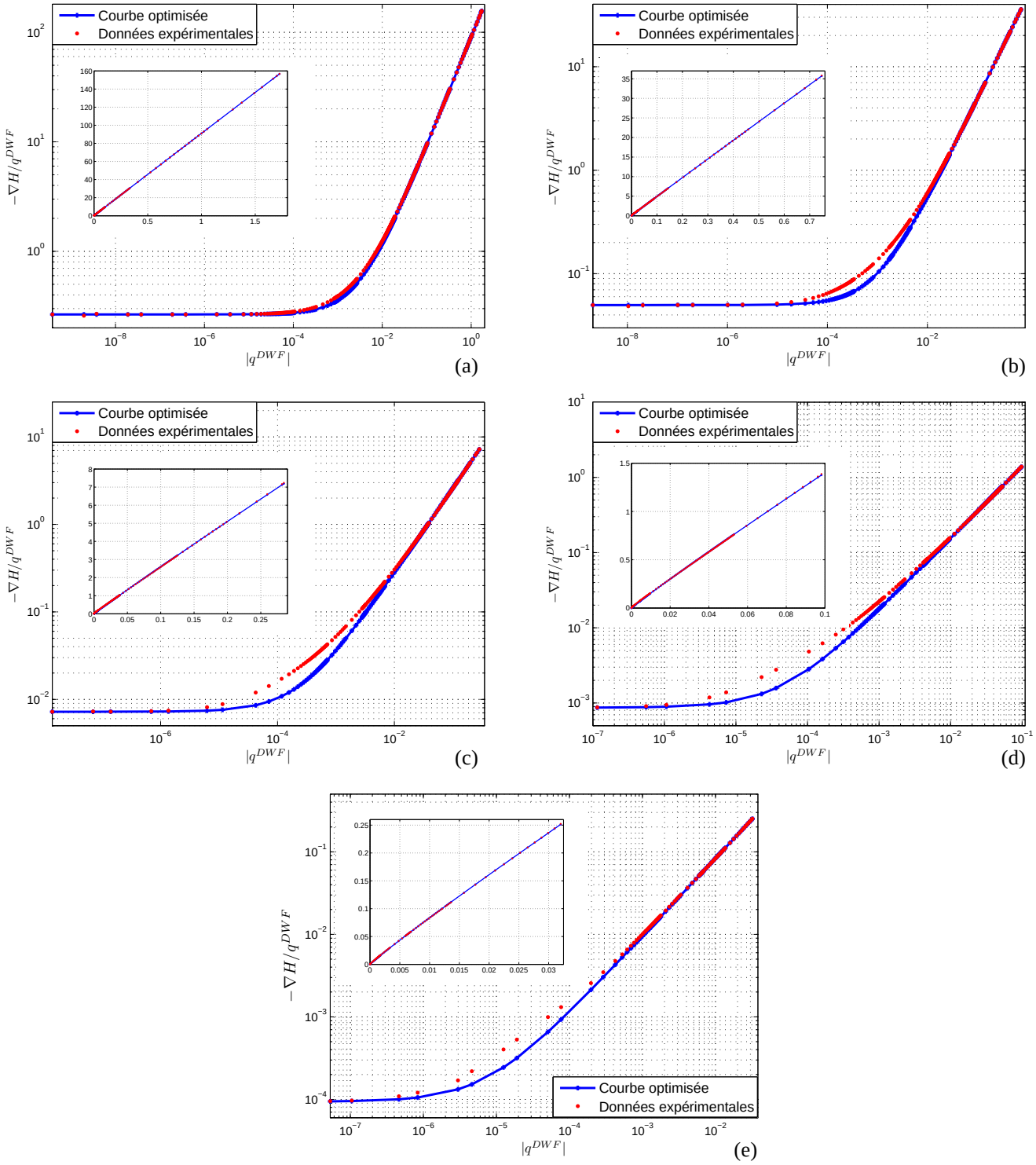


FIG. 9.11 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D purement contenant 50% d'inclusions conductrices, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle à "précontrainte Darcy" et le modèle macroscopique "linéaire/puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3, (d) +4 et (e) +5.

cadre de cette étude, nous considèrerons cette première formulation du modèle "linéaire/puissance" et nous allons dans un but prospectif, quantifier l'évolution de la constante de Ward/Ergun (C) et de l'exposant γ en fonction de la fraction volumique en inclusion conductrice et du log-contraste κ.

9.4 Détermination de la constante d'Ergun et de l'exposant γ

9.4.1 Sur une fracture

Pour une fracture, Qian et al. [112] et Wen et al. [138] estiment que la loi de perte de charge à considérer est de la forme :

$$|q|^{n-1}\vec{q} = -K\vec{\nabla}h, \tag{9.11}$$

où n=1 pour des écoulements darciens, $1 < n < 2$ pour des écoulements inertiels et $n = 2$ pour des écoulements pleinement turbulents.
Dans le cadre de notre étude, nous avons considéré une formulation différente de la loi de perte de charge macroscopique. Mais nos conclusions sur la valeur de notre exposant puissance ($\gamma = n - 1$ en reprenant les notations de Qian et al. et Wen et al.) semblent identiques. Nous reviendrons plus tard sur sa détermination par optimisation numérique pour les différents milieux testés, Fig. 9.12 (a).

Pour ce qui est de la détermination de la constante de Ward (ou d'Ergun/Ward) dans une fracture rugueuse unique, elle a été déterminée dans la bibliographie :

- de manière expérimentale pour des écoulements en fracture rugueuse unique par Bodarwé et al., 1999 [22] et Spiller, 2004 [127]
- et par une analyse d'échelle ou "scaling approach", toujours pour une fracture rugueuse, Spiller 2004 [127].

Les résultats obtenus par ces auteurs sont reportés dans le tableau 9.4. Les valeurs obtenues par les auteurs précédents, dans une fracture unique, sont inférieures à la constante de Ward (0.55). Notons aussi ici, que des simulations numériques réalisées par Spiller, 2004 [127] en utilisant le code de calcul BigFlow (Ababou 1988 [5]), une fracture rugueuse, ont montré un bon accord entre les champs d'écoulement obtenus par simulations numériques ("expérimentations numériques") et par voie expérimentale. Les résultats montrent que les phénomènes inertiels entraînent une homogénéisation "physique" du champ d'écoulement en réduisant l'impact des hétérogénéités du milieu. L'augmentation du nombre de Reynolds se traduit alors par la diminution de la tortuosité des lignes d'écoulement.

Pour notre étude, nous nous sommes mis dans une géométrie très différentes, et moins anisotrope, que celle d'une fracture rugueuse. Nos milieux étant constitués d'un ensemble d'éléments conducteurs (fractures ou milieux très fissurés de conductivité hydraulique de Darcy locale K_F) plongés dans une matrice moins conductrice ($K_M < K_F$) en 2D ou 3D.

Constante d'Ergun **C** obtenue	Déplacement de 0.0 mm	Déplacement de 3.5 mm	Déplacement de 7.2 mm	Déplacement de 10.8 mm
exprérimentalement d'après Bodarwé (1999)	0.0054 ± 0.0025	0.036 ± 0.014	0.021 ± 0.016	0.016 ± 0.005
exprérimentalement d'après Spiller (2004)	0.018 ± 0.002	0.037 ± 0.008	0.044 ± 0.007	–
par "scaling approach" d'après Spiller (2004)	0.01	0.037	0.043	0.045

TAB. 9.4 – Constante de Ward/Ergun obtenue expérimentalement et par "scaling approach" par différents auteurs pour une fracture rugueuse unique, d'après Spiller [127].

9.4.2 Sur des milieux stratifiés et 2D et 3D purements aléatoires

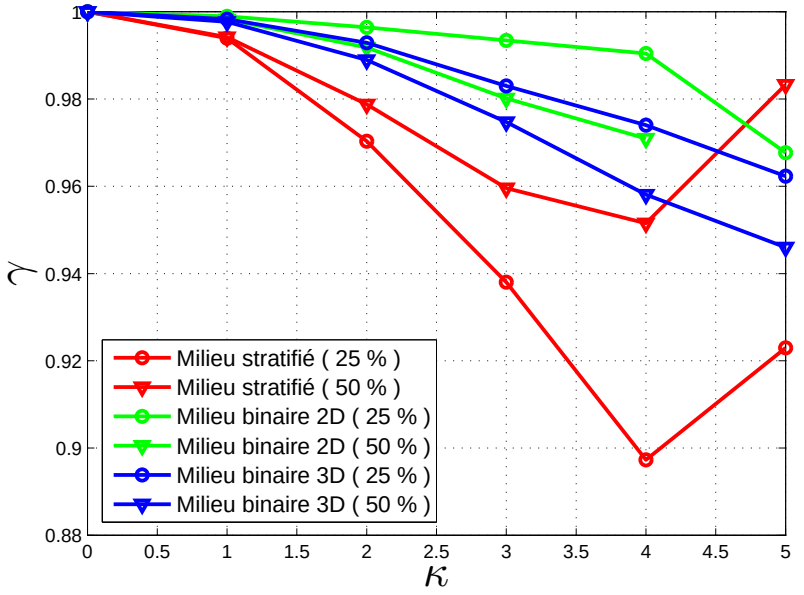
Pour les différentes simulations numériques directes en utilisant le modèle de perte de charge locale linéaire/quadratique de Darcy/Ward-Forchheimer, nous avons alors réalisé une optimisation numérique avec "précontrainte Darcy" de la solution analytique "linéaire/puissance" (Fig. 9.6 à 9.11). Les coefficients de Ward/Ergun, C, et les exposants puissances γ ainsi obtenus ont été reportés sur la figure 9.12 (a) et (b).
Sur ces deux figures :

- les courbes rouges, vertes et bleues représentent repectivement l'évolution des coefficients optimisés pour les milieux binaires stratifiés et pour les milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires
- enfin, les symboles : "rond" et "triangle" représentent respectivement les milieux possédant 25% et 50% d'inclusions conductrices.

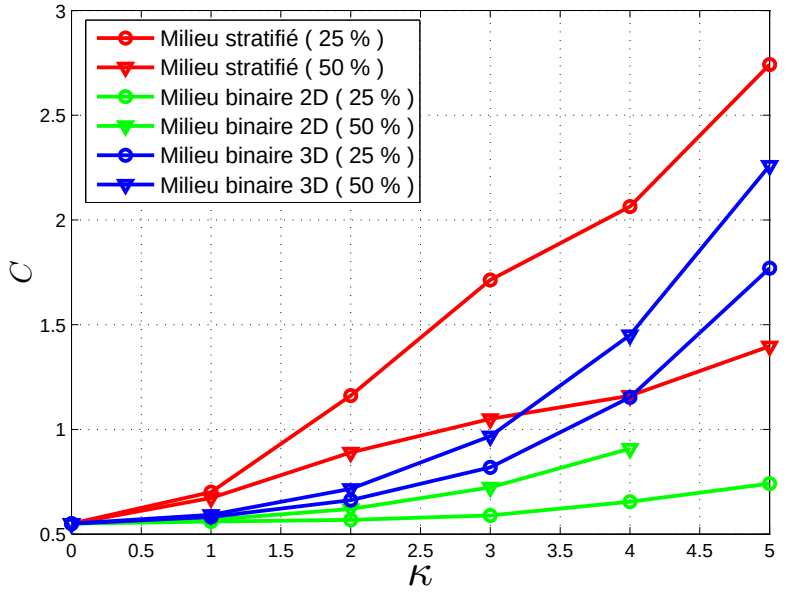
Ces graphiques, Fig. 9.12 (a) et (b), permettent de mieux comprendre l'évolution relative de γ et de C optimisés en fonction du log-contraste à ϕ_F fixée.

Nous pouvons constater que leur évolution est intimement liée à l'évolution du log-contraste et que leur comportement semblent antagonistes : la diminution de la valeur de l'exposant se traduit par une augmentation de la valeur du coefficient de Ward/Ergun pour une augmentation du log-contraste $\kappa = log_{10}(K_F/K_M)$.

Nous pouvons aussi noter que globalement, la valeur de l'exposant puissance, γ, est comprise entre 0.9 et 1 pour les log-contrastes testés et qu'il diminue avec l'augmentation du log-contraste, Fig. 9.12 (a). Ceci est vrai du moins pour les milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires mais pas pour les deux milieux stratifiés étudiés Fig. 9.12. En effet, la valeur de l'exposant γ pour les log-contrastes testés semble atteindre un minimum pour un log-contraste de +4, après ce "seuil" sa valeur augmente , Fig. 9.12 (a) courbes rouges. Nous pouvons lors nous demander si pour les autres milieux testés, ce comportement de l'exposant γ peut exister ou non pour des log-contrastes supérieurs à ceux explorés, ou si ce minimum n'a pas été obtenu dans la plage des log-contrastes testés, à cause de la "mauvaise" formulation de la solution macroscopique utilisée. Nous



(a)



(b)

FIG. 9.12 – (a) Evolutions du coefficient de Ward/Ergun, C, et (b) de γ pour les différents milieux testés, à différentes fractions volumiques en inclusions conductrices ϕ_F (25%, rond, 50% triangle) en fonction du log-contraste κ. Pour les milieux binaires stratifiés (courbes rouges), binaires purement aléatoires 2D (courbes vertes) et binaires purement aléatoires 3D (courbes bleues).

nous contenterons seulement de ces premières constatations et hypothèses.
Notons aussi que la valeur de l'exposant γ semble diminuée avec l'augmentation de la fraction volumique en inclusions conductrices contenue dans le milieu, sauf pour le milieu binaire stratifié où les valeurs de l'exposant γ sont moins importantes pour le milieu stratifié possédant 50% d'inclusions conductrices. La réalisation de la même étude sur un milieu avec 75% d'inclusions conductrices pourrait nous éclairer sur ce sujet.

Concernant le coefficient de Ward macroscopique optimisé, *C*, son évolution est antagoniste de l'évolution de γ, comme nous l'avons vu précédemment. Pour les milieux testés, il est compris entre 0.55 à 1 pour les milieux binaires 2D isotropes, entre 0.55 à 2.5 pour les milieux binaires 3D isotropes et entre 0.55 à 2.75 pour les milieux stratifiés testés, Fig. 9.12 (b). Pour les milieux binaires 2D et 3D purement aléatoires, le coefficient *C* optimisé augmente avec la fraction volumique en inclusions conductrices. Cependant cette évolution est inversée pour les milieux stratifiés (comme pour l'évolution de γ). Nous pouvons aussi noter que les minimums de γ observés pour les deux milieux stratifiés, Fig. 9.12 (a) courbes rouges, ne se traduisent pas par un maximun de *C*. Nous pouvons juste observer une "inflexion" probable au niveau de ce log-contraste (+4), Fig. 9.12 (b) courbes rouges.

9.5 Conclusion sur la formulation "linéaire/puissance" de la macro-K de DWF

Dans ce chapitre, consacrée à l'étude de formulation macroscopique de la loi locale de DWF, nous ne pouvons conclure de manière définitive sur sa forme. Nous pouvons juste émettre certaines hypothèses et conclusions à partir des observations faites précédemment :

- Tout d'abord, pour des milieux qui possédent un contraste de conductivité hydraulique inférieur à 10, la formulation linéaire/quadratique avec un coefficient d'Ergun d'environ 0.65 est tout à fait acceptable quelque soit le milieu étudié. Pour les milieux plus hétérogènes, le propos est plus nuançable.
- La formulation "linéaire/puissance" paraît bien adaptée pour les milieux binaires stratifiés. Mais des expérimentations supplémentaires sont nécessaires pour conclure (e.g. ϕ_F = 75%). Les différentes expérimentations réalisées sur des milieux purement aléatoires 2D et 3D, nous laissent penser que cette formulation peut probablement être satisfaisante, si ces milieux sont percolant.
- La valeur de l'exposant "γ" de cette formulation analytique semble liée au log-contraste. Pour les milieux étudiés, sa valeur est très proche de 1. L'étude de son évolution en fonction du log-contraste pour les milieux stratifiés a montré l'existence d'un minimum au contraste de 10 000.
- La valeur de la constante de Ward, "*C*", semble liée elle aussi au contraste de

conductivité hydraulique et son évolution paraît antagoniste de l'évolution de l'exposant γ.

– Pour des milieux "mal-connectés", c'est à dire possédant une fraction volumique en inclusion inférieure au seuil de percolation et des contrastes supérieurs à 100, cette formulation doit être révisée et complétée. Une formulation "linéaire-quadratique-cubique" (ou une variante de celle-ci) peut être envisageable. Sans compter que la loi cubique semble émerger aussi via les méthodes théoriques multi-échelles d'upscaling pour divers types de milieux (plaques trouées, fractures rugueuses).

Prenons maintenant l'exemple de deux milieux fissurés 3D $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$. Ces milieux fracturés testés, $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$ sont les deux milieux fracturés qui nous ont suivi tout au long de notre étude. Ils sont présentés sur la figure 8.7 (a) et (b). Ces deux milieux se caractérisent par une différence morphologique particulière qui nous a conduit à les étudier pour illustrer notre propos, à savoir :

– $MF1_{3D}$ n'est pas percolant (ou peu percolant),
– $MF2_{3D}$ est percolant.

Les simulations numériques directes réalisées en utilisant le modèle de perte de charge locale linéaire/quadratique et les résultats de l'optimisation numérique avec précontrainte dracienne obtenus sont reportés pour le milieu $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$ sur les figures 9.13 et 9.14. Si pour des log-contrastes inférieurs ou égaux à +2 l'utilisation d'un modèle analytique puissance "monodirectionnelle" donne de bons résultats, pour des log-contrastes supérieurs les effets 3D et l'inhomogénéité des directions d'écoulements sont bien trop importants. Des méthodes d'étude appropriées sont nécessaires. Elles devront selon nous prendre appui sur des procédures d'étude comme les expériences d'immersion que nous allons présenter, pour le cas darcien, dans le chapitre suivant, chap. 10, permettant d'obtenir une expression tensorielle, ou de tester le caractère tensoriel, de la conductivité hydraulique macroscopique de Darcy.

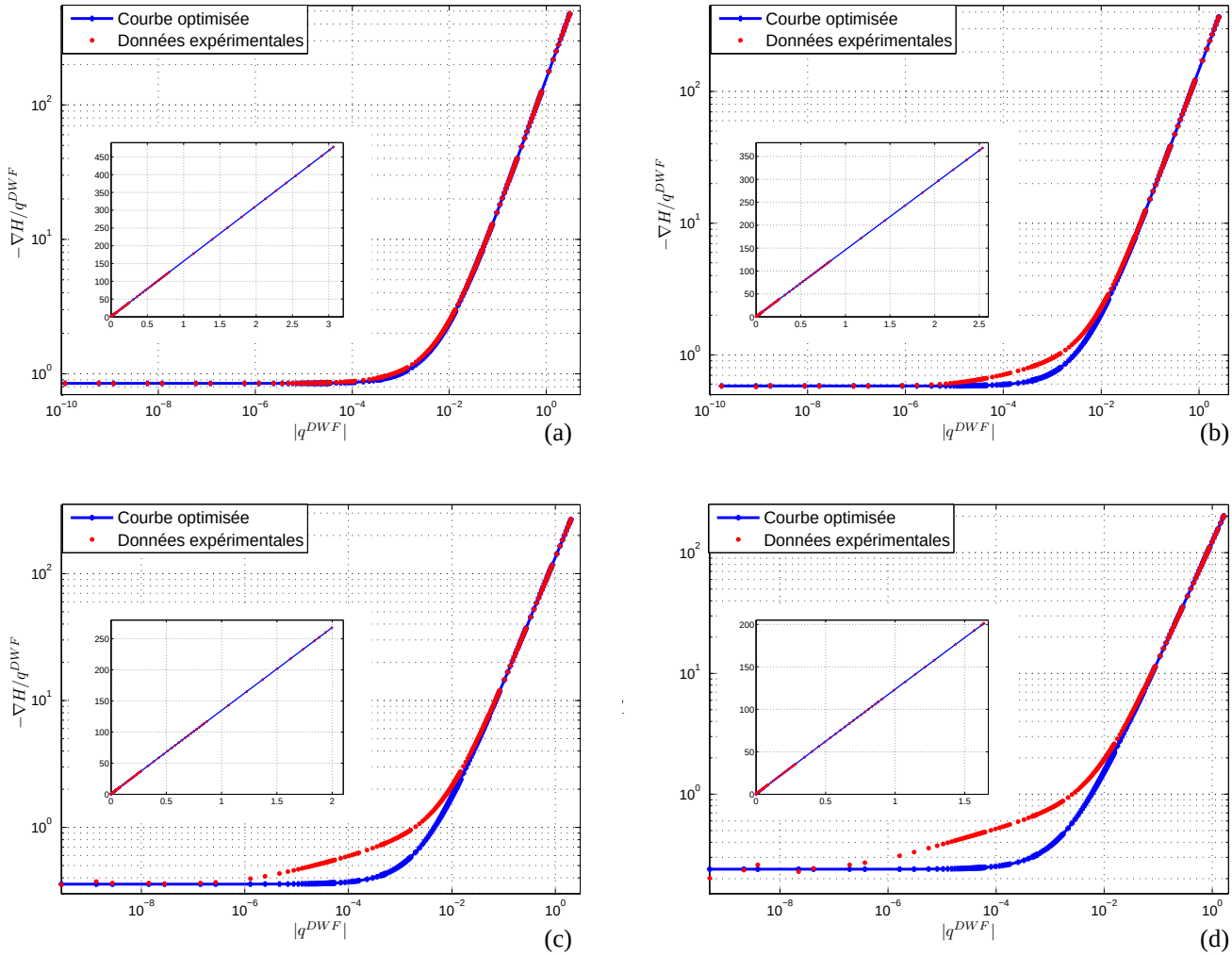


FIG. 9.13 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D fracturé poissonnien $MF1_{3D}$, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle précontrainte par une simulation darcienne, en utilisant le modèle macroscopique "linéaire-puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3 et (d) +4.

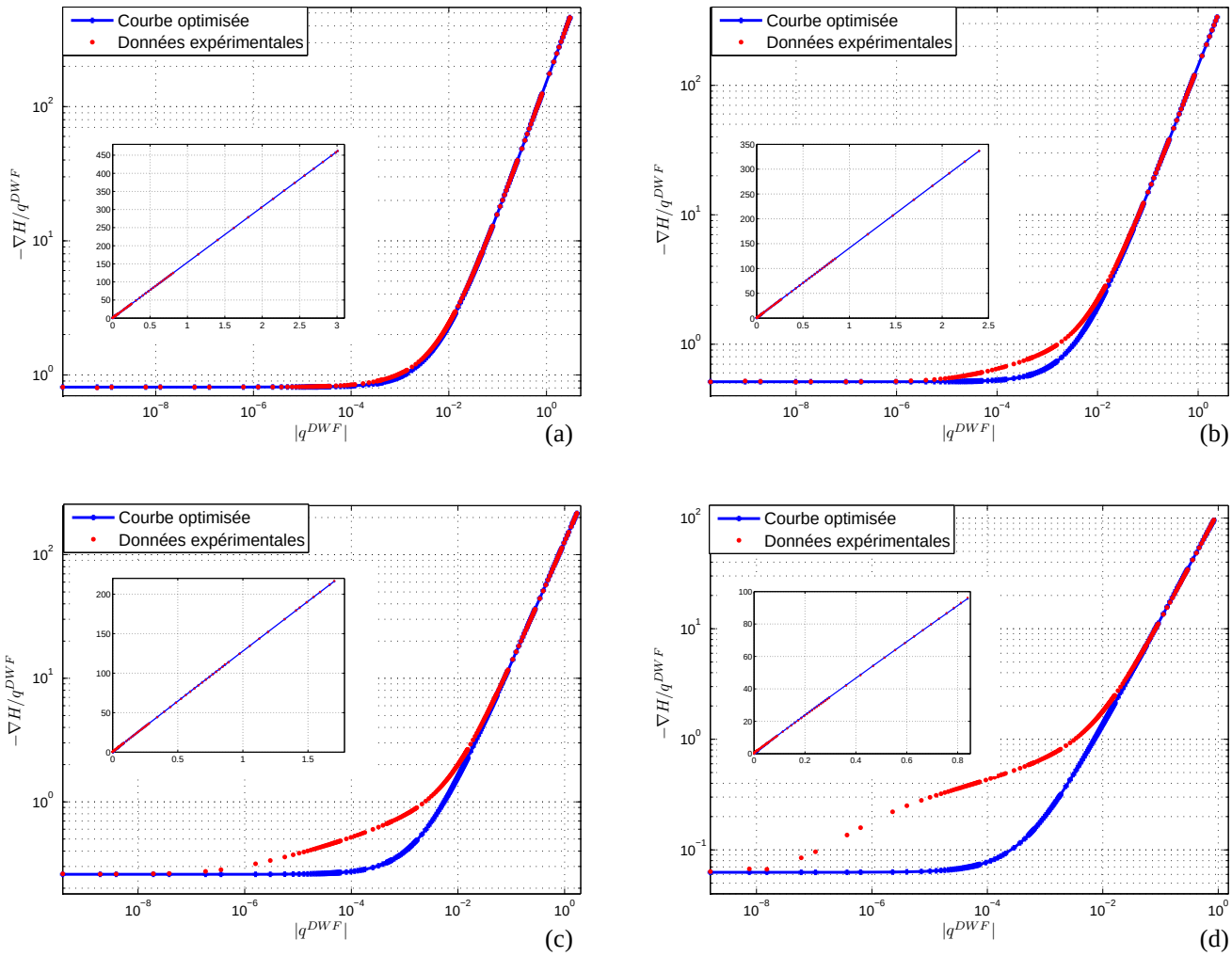


FIG. 9.14 – Simulations numériques réalisées en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy/Ward-Forchheimer pour un milieu binaire 3D fracturé poissonnien $MF2_{3D}$, courbe rouge ; et optimisation numérique réalisée en utilisant une optimisation séquentielle précontrainte par une simulation darcienne, en utilisant le modèle macroscopique "linéaire-puissance", courbe bleue. Pour un log-contraste de (a) +1, (b) +2, (c) +3 et (d) +4.

Chapitre 10

Etude des effets d'anisotropie et changement d'échelle directionnelle par "immersion"

Introduction

Les milieux fracturés et plus particulièrement les milieux karstiques sont très hétérogènes sur une large gamme d'échelles d'étude. Comme nous avons pu le constater dans l'étude précédente, section 8.4, les phénomènes de percolation et de quasi-percolation jouent un rôle considérable dans la détermination des paramètres macroscopiques effectifs des milieux étudiés. Mais de plus, le comportement hydraulique de ces milieux très fissurés peut être très "anisotrope" (selon la géométrie des fissures et l'échelle d'étude). Une des questions essentielles dans l'étude de ces milieux est de déterminer l'existence ou non d'un milieu poreux continu anisotrope équivalent, *via* une macro-perméabilité tensorielle. Cette problématique touche les domaines d'activité des géosciences allant des problématiques environnementales de gestion de la ressource en eau, à l'exploitation des gisements pétroliers en passant par la géothermie.

Plusieurs modèles de détermination de la conductivité hydraulique effective anisotrope des milieux fissurés existent dans la littérature. L'un des premier à avoir vu le jour est le modèle proposé par Snow, 1965 [124]. Snow développe un modèle mathématique fondé sur le principe de superposition : l'expression tensorielle de la conductivité effective d'un échantillon est exprimée par la somme de la contribution en flux de chacune des conductivités hydrauliques tensorielles des fractures individualisées. Le principal point discutable de ce modèle est qu'il néglige l'importance de l'état des connectivités. Ce modèle de type "superposition" a été revu entre autre par Canamon, 2006 [27]. Ce dernier, à la suite d'autres travaux (Oda et al., Ababou et al., cités dans [27]) est passé de 2D à 3D et a introduit une perméabilité non nulle pour la matrice poreuse. Le même type d'approche a également été considéré dans la thèse de Lam, 2008 [86], en y intégrant

les échanges de type "non-équilibre double-milieu". Dans le modèle d'upscaling à utiliser, l'état des connectivités et plus particulièrement l'intersection des fractures doivent être prises en considération. Des études complémentaires prenant en considération les squelettes percolants des fractures sont nécessaires.

Pour obtenir une expression tensorielle de la macro-K en utilisant le modèle de perte de charge local de Darcy et de Darcy/Ward-Forchheimer il faut mettre en place des techniques expérimentales particulières permettant de considérer l'ensemble des hétérogénéités présentes dans le domaine d'étude. Les expériences perméamétriques "classiques", comme celle utilisées dans la partie précédente, contraignent de manière trop importante les flux et ne permettent pas de considérer les hétérogénéités de l'échantillon et leurs états de connectivités dans la totalité du domaine d'étude. C'est pourquoi, nous préférons utiliser des expériences numériques particulières dites "d'immersion à bain de charges linéaires normalisées", qui seront dépouillées via le concept de perméabilité effective directionnelle (voir Long et al., 1982 [93] et Bear, 1972 [18]).

Dans ce dernier chapitre, nous étudions la macro-conductivité hydraulique de Darcy directionnelle (anisotrope) seulement dans le cas où une loi locale de perte de charge de Darcy est utilisée. Nous détaillerons dans un premier temps :

- le protocole numérique,
- le concept de conductivité effective directionnelle et son lien avec la conductivité hydraulique tensorielle K_{ij} pour des écoulements darciens,
- et le modèle de prise de moyenne utilisé.

Dans un second temps, des milieux fracturés à une et plusieurs inclusions dans le plan 2D ($\vec{o}x$ et $\vec{o}y$) seront étudiés avec cette technique. Ces milieux sont géométriquement anisotropes.

10.1 Définition des conductivités directionnelles

10.1.1 Protocole numérique

Le protocole numérique expérimental, et l'algorithme développé, consistent à réaliser *n* simulations autour de l'échantillon étudié en faisant varier l'orientation du gradient hydraulique d'un angle θ, défini positivement, dans $[0, 2\pi]$, autour de l'axe $\vec{o}z$, de l'échantillon, et d'un angle φ, défini positivement dans $[0, 2\pi]$ autour de l'axe $\vec{o}y$ de l'échantillon. Le gradient hydraulique moyen est normalisé dans chacune des directions où il est appliqué (Fig. 10.1).

Dans un premier temps, bien que l'algorithme permette d'étudier des échantillons 3D dans leur totalité, les expériences ont été réalisées sur des échantillons 2D à $\varphi = 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, avec un incrément de 5° entre chacune des simulations. Certes, si nous considérons l'utilisation d'une loi de Darcy tensorielle symétrique, seuls les secteurs d'angles compris entre $[0, \pi/2]$ devraient suffire. Cependant, étant donné la nature complexe des géométries des milieux étudiés, les simulations ont été réalisées sur des secteurs d'angles plus étandus.

Dans la prochaine section, nous allons définir le concept de conductivité effective directionnelle (Long et al., 1982 [93], Bear 1972 [**?**]) en utilisant la loi locale de perte de charge de Darcy :

$$\langle \vec{q} \rangle = \vec{\vec{K}} \left\langle \vec{J} \right\rangle . \tag{10.1}$$

Pour alléger l'écriture, les symboles de prise de moyenne volumique $\langle \bullet \rangle$ pour $\vec{q}$, $\vec{J}$ seront plus notés.

$$\vec{q} = \vec{\vec{K}}\, \vec{J}. \tag{10.2}$$

Pour chacune des *n* expérimentations numériques réalisées, sur un milieu qui possède une conductivité hydraulique microscopique caractérisée par une fraction volumique en inclusion ϕ_F et un log-contraste entre les inclusions et la matrice $\kappa = log_{10}(K_F/K_M)$, nous obtiendrons *n* valeurs scalaires de conductivités directionnelles effectives de Darcy, moyennées sur le volume de l'échantillon, notées $\tilde{K}_{dir}$.

$$\vec{u}_{dir} \cdot \vec{q} = \tilde{K}_{dir}\, \vec{u}_{dir} \cdot \vec{J}. \tag{10.3}$$

Où $\vec{u}_{dir}$ indique la direction choisie.
La direction peut être celle du flux, d'où $\tilde{K}_F$, ou celle du gradient hydraulique, d'où $\tilde{K}_G$
.

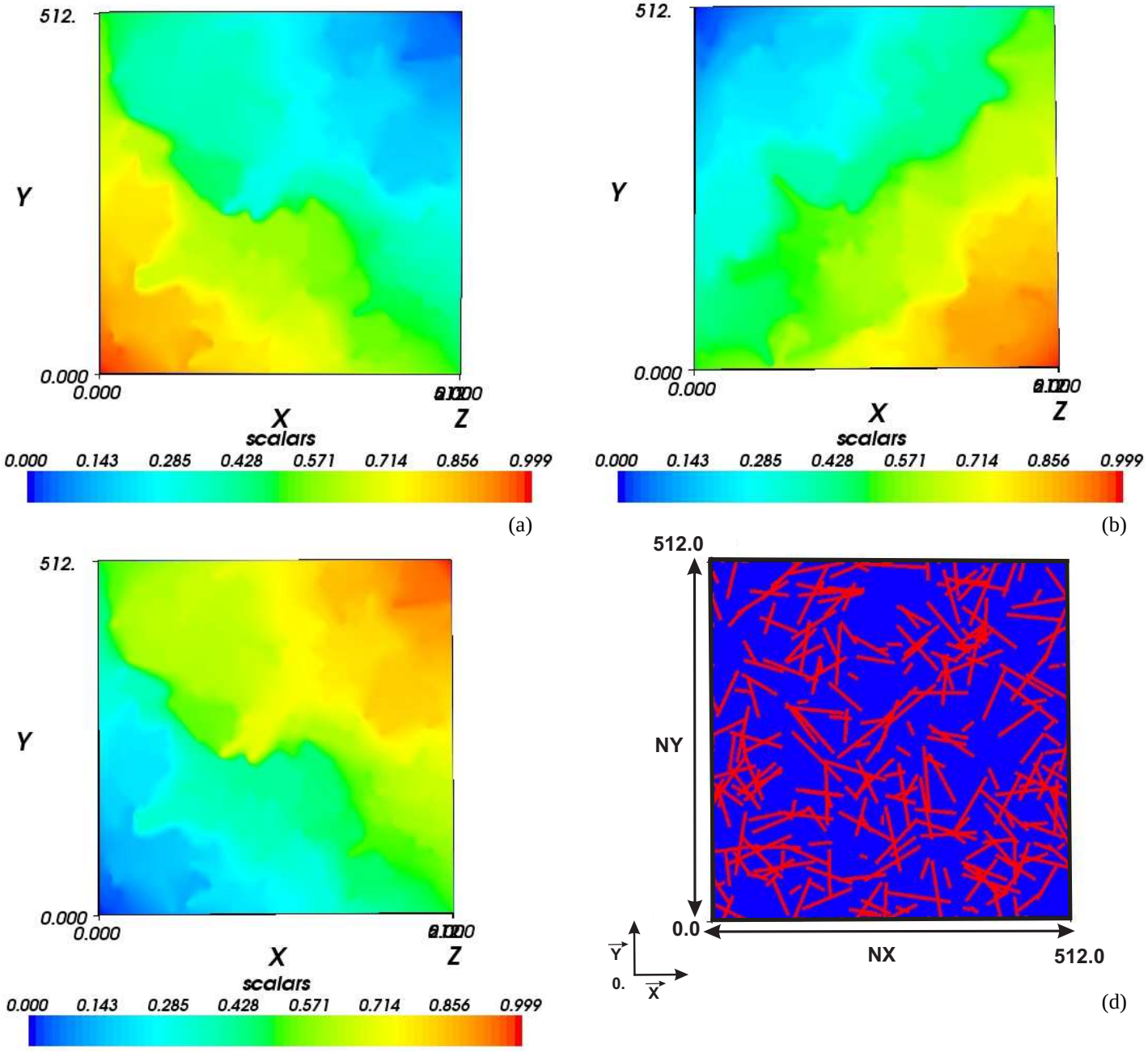


FIG. 10.1 – Exemple de champs de charges totales obtenus par simulations directes de type "immersion à bain de charge normalisé" sur le milieu fissuré $MF2_{2D}$: (a) pour un angle θ de 45° ; (b) pour un angle θ de 135° ; (c) pour un angle θ de 225°. Le milieu fissuré $MF2_{2D}$ est représenté en (d). (N.b. : cette figure est extraite d'une version animée du champ de charge).

Ici, nous nous devons de faire une remarque concernant la notation. En effet, la notation choisie pour symboliser la conductivité hydraulique de gradient ne doit pas être confondu avec la moyenne géométrique de conductivités microscopiques du milieu. Et la notation choisie pour symboliser la conductivité hydraulique de flux, $\tilde{K}_F$, ne doit pas être confondue avec la notation précédemment utiliser pour notée la conductivité hydraulique locale des inclusions, K_F. Définissons maintenant les deux grandeurs scalaires, $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$.

10.1.2 Définition des quantités $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$

Conductivité hydraulique directionnelle moyenne de gradient :$\tilde{K}_G$

Chacune des simulations (i) est réalisée, selon la méthode "d'immersion", en imposant un gradient hydraulique moyen dont la direction est décrite par les angles θ_i et φ_i, nous allons réaliser la projection de $\tilde{K}_{dir}$, éq. 10.3, suivant le gradient hydraulique moyen $\left\langle \vec{J} \right\rangle$ ou $\vec{J}$ par économie de notation :

$$\vec{J}^T \vec{q} = \tilde{K}_G \vec{J}^T \vec{J}, \tag{10.4}$$

$$\vec{J}^T \vec{q} = \tilde{K}_G \left\| \vec{J} \right\|^2, \tag{10.5}$$

ce qui revient à choisir ici la direction $\vec{u}_{dir}$ parallèlement à $\vec{J}$. Nous obtenons par cette projection l'expression de la conductivité hydraulique effective moyenne de gradient notée $\tilde{K}_G$:

$$\tilde{K}_G = \frac{\vec{J}^T \vec{q}}{\left\| \vec{J} \right\|^2}. \tag{10.6}$$

En partant de l'expression de cette quantité et en y insérant la loi de Darcy tensorielle,

$$\vec{q} = \vec{\vec{K}} \vec{J}, \tag{10.7}$$

nous obtenons :

$$\tilde{K}_G = \frac{\vec{J}^T \vec{\vec{K}} \vec{J}}{\left\| \vec{J} \right\|^2}. \tag{10.8}$$

En exprimant cette quantité moyennée dans son repère principal, i.e. en fonction du vecteur unitaire moyen du gradient hydraulique,

$$\vec{u}_G = \frac{\vec{J}}{\left\| \vec{J} \right\|} \quad et \quad \vec{u}_G{}^T = \frac{\vec{J}^T}{\left\| \vec{J} \right\|}, \tag{10.9}$$

cette quantité s'écrit de la manière suivante :

$$\tilde{K_G} = \vec{u_G}^T \, \vec{\vec{K}} \, \vec{u_G}. \tag{10.10}$$

Développons maintenant cette expression pour le cas 2D. Nous avons,

$$\tilde{K_G} = \begin{pmatrix} cos(\theta_G) & sin(\theta_G) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\theta_G) \\ sin(\theta_G) \end{pmatrix} \tag{10.11}$$

$$\tilde{K_G} = K_{11} cos^2(\theta_G) + (K_{21} + K_{12}) \frac{sin(2\theta_G)}{2} + K_{22} sin^2(\theta_G) \tag{10.12}$$

Ainsi, nous arrivons à une expression de $\tilde{K_G}$, exprimée en fonction de θ_G, de la forme de l'équation précédente éq. 10.12.

Intéressons nous maintenant à l'expression de la quantité complémentaire, $\tilde{K_F}$.

Conductivité hydraulique directionnelle moyenne de flux :$\tilde{K_F}$

Pour une simulation (i) réalisée selon la méthode "d'immersion", en imposant un gradient hydraulique moyen selon une direction décrite par les angles θ_i et φ_i, nous allons mainteant réaliser la projection de K_{dir} sivant le flux moyen $\langle \vec{q} \rangle$ ou $\vec{q}$ par économie de notation :

$$\vec{q}^T \, \vec{q} = \tilde{K_F} \, \vec{q}^T \, \vec{J}, \tag{10.13}$$

$$\|\vec{q}\|^2 = \tilde{K_F} \, \vec{q}^T \vec{J}, \tag{10.14}$$

ce qui revient à choisir la direction de $\vec{u}_{dir}$ parallèlement à $\vec{q}$ Cette projection nous amène à l'expression suivante de $\tilde{K_F}$ pour une simulation *(i)* réalisée suivant l'orientation du gradient hydraulique moyen imposé.

$$\tilde{K_F} = \frac{\|\vec{q}\|^2}{\vec{q}^T \, \vec{J}}. \tag{10.15}$$

En y injectant la loi de Darcy tensorielle nous obtenons,

$$\vec{q} = \vec{\vec{K}} \, \vec{J} \;\Leftrightarrow\; \vec{J} = \vec{\vec{K}}^{-1} \, \vec{q}, \tag{10.16}$$

nous avons alors :

$$\tilde{K_F} = \frac{\|\vec{q}\|^2}{\vec{q}^T \, \vec{\vec{K}}^{-1} \, \vec{q}}. \tag{10.17}$$

Maintenant comme précédemment, si nous l'exprimons dans le repère principal du flux grâce au vecteur unitaire du flux,

$$\vec{u}_F = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} \quad et \quad \vec{u}_F{}^T = \frac{\vec{q}^T}{\|\vec{q}\|}; \tag{10.18}$$

nous avons cette quantité exprimée de la manière suivante :

$$\tilde{K}_F \;=\; \frac{1}{\vec{u}_F{}^T\,\vec{\vec{K}}^{-1}\,\vec{u}_F}\,. \tag{10.19}$$

Comme précédemment, développons cette expression, dans le cas 2D.
Posons tout d'abord

$$A \;=\; \vec{u}_F{}^T\,\vec{\vec{K}}^{-1}\,\vec{u}_F\,, \tag{10.20}$$

et developpons A,

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta_F) & sin(\theta_F) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} cos(\theta_F) \\ sin(\theta_F) \end{pmatrix} \tag{10.21}$$

$$A = \frac{1}{Det(\vec{\vec{K}})} \begin{pmatrix} cos(\theta_F) & sin(\theta_F) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{22} & -K_{12} \\ -K_{21} & K_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\theta_F) \\ sin(\theta_F) \end{pmatrix} \tag{10.22}$$

Avec

$$Det(\vec{\vec{K}}) \;=\; K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}\,, \tag{10.23}$$

nous avons alors pour A l'expression suivante :

$$A \;=\; \frac{2K_{22}cos^2(\theta_F) - (K_{12}+K_{21})sin(2\theta_F) + 2K_{11}sin^2(\theta_F)}{2\left[K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}\right]}\,. \tag{10.24}$$

Ainsi, pour $\tilde{K}_F$, nous arrivons à :

$$\tilde{K}_F = \frac{2\left[K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}\right]}{2K_{22}cos^2(\theta_F) - (K_{12}+K_{21})sin(2\theta_F) + 2K_{11}sin^2(\theta_F)}\,. \tag{10.25}$$

ou encore, si l'on souhaite se rapprocher de l'expression de $\tilde{K}_G$ donnée par l'équation 10.12, nous obtenons comme expression de $\tilde{K}_F$, exprimée en fonction de θ_F :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{K}_F} \;=\; & \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}cos^2(\theta_F) + \frac{-K_{12}-K_{21}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}\frac{sin(2\theta_F)}{2} \\ & + \frac{K_{11}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}sin^2(\theta_F)\,. \end{aligned} \tag{10.26}$$

A ce terme du développement pour le cas 2D, nous arrivons à une expression de $\tilde{K}_F$ donnée par l'équation 10.26 et de $\tilde{K}_G$ donnée par l'équation 10.12. Ces deux expréssions sont respectivement exprimées en fonction de θ_F et de θ_G. Il va falloir interpréter ces deux quantités pour obtenir les différentes composantes du tenseur des conductivités hydrauliques effectives.

Chacune de ces deux quantités permet d'exprimer la conductivité hydraulique effective directionnelle dans le repère principal du flux moyen et du gradient moyen (imposé). En partant de l'hypothèse que la loi de Darcy s'écrit de façon tensorielle, la conductivité hydraulique K_{ij} est un "vrai tenseur" (se comportant comme un tenseur d'ordre 2). De plus, K_{ij} est défini positif (symétrique). On sait alors que K_{ij} possède un repère principal dans lequel il devient diagonal, i.e. que les termes extra diagonaux sont nuls dans son repère principal, et on démontre (ci-dessous) que les les deux expressions plus haut sont les rayons vecteurs de deux ellipses.

10.1.3 Interprétations algébrique et physique de $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$

Partons du principe que $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$ sont deux quantités liées à deux rayons vecteurs de deux ellipses des conductivités directionnelles de gradient éq. 10.12 et de flux éq. 10.26. Nous allons maintenant les identifier terme à terme à l'expression générale des rayons vecteurs d'une ellipse de petit rayon R_2 et de grand rayon R_1 réalisant un angle α, défini positivement, par rapport à l'axe des abscisses du repère principal orthonormé.
L'équation d'une ellipse est :

$$\frac{X^2}{R_1^2}+\frac{Y^2}{R_2^2} = 1 \tag{10.27}$$

Pour chacun des points $M_i\,(X_i,Y_i)$ se trouvant sur l'ellipse, nous avons :

$$\begin{cases} X_i = R(\theta_i)cos(\theta_i) \\ Y_i = R(\theta_i)sin(\theta_i) \end{cases} \tag{10.28}$$

où $R(\theta_i)$ correspond au rayon vecteur décrivant la distance entre le centre de l'ellipse et le point $M_i\,(X_i,Y_i)$.

Pour une ellipse dont les axes principaux ne correspondent pas forcément avec les axes du repère principal, nous avons :

$$\begin{pmatrix} X_i' \\ Y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(\theta_i)cos(\theta_i) \\ R(\theta_i)sin(\theta_i) \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

où X' et Y' sont les coordonnées du point M de l'ellipse dans le nouveau repère coïncidant avec les axes principaux et α l'angle (X,X').

$$\begin{cases} X_i' = R(\theta_i)\,[cos(\alpha)\,cos(\theta_i)+sin(\alpha)\,sin(\theta_i)] \\ Y_i' = R(\theta_i)\,[-sin(\alpha)\,cos(\theta_i)+cos(\alpha)\,sin(\theta_i)] \end{cases} \tag{10.30}$$

En insérant ces deux expressions dans l'expression générale d'une ellipse, nous obtenons :

$$\frac{1}{[R(\theta_i)]^2} = \frac{[cos(\alpha)\,cos(\theta_i)+sin(\alpha)\,sin(\theta_i)]^2}{R_1^2} + \frac{[-sin(\alpha)\,cos(\theta_i)+cos(\alpha)\,sin(\theta_i)]^2}{R_2^2} \tag{10.31}$$

En rapprochant maintenant cette dernière équation avec les expressions de $\tilde{K}_G$ (eq. 10.12) et $\tilde{K}_F$ (eq. 10.26), nous devons la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{[R(\theta_i)]^2} = A\,cos^2(\theta_i) + B\,\frac{sin(2\theta_i)}{2} + C\,sin^2(\theta_i) \tag{10.32}$$

Après développement de l'équation 10.31, nous obtenons pour A, B et C :

$$\begin{aligned} A &= \frac{[R_1\,sin(\alpha)]^2+[R_2\,cos(\alpha)]^2}{[R_1\,R_2]^2}, \\ B &= \frac{(R_2-R_1)(R_2+R_1)sin(2\alpha)}{[R_1\,R_2]^2}\,et \\ C &= \frac{[R_1\,cos(\alpha)]^2+[R_2\,sin(\alpha)]^2}{[R_1\,R_2]^2}. \end{aligned} \tag{10.33}$$

Nous pouvons maintenant procéder à l'indentification termes à termes entre les équations des conductivités directionnelles de gradient 10.12 et de flux 10.26 et l'équation générale d'une ellipse 10.31.

Pour éviter toutes confusions entre les paramètres de l'ellipse équivalente des conductivités directionnelles effectives de Darcy de flux et de gradient, nous allons noter les rayons de l'ellipse équivalente de conductivités effectives directionnelles de gradient R_1^G et R_2^G, le rayon vecteur $R(\theta_G)$ et l'angle α réalisé entre le rayon principal de cette ellipse avec l'axe des abscisses du repère principal : α_G. Pour l'ellipse équivalente de conductivités effectives de flux, ces quatre paramètres seront notés R_1^F, R_2^F, $R(\theta_F)$ et α_F. De la même manière, les quantités A, B et C identifiées seront notées A^F, B^F, C^F et A^G, B^G, C^G.

Dans un premier temps, intéressons nous à l'expression de $\tilde{K}_G$. Si nous réalisons une identification des termes de l'équation 10.12 avec celle d'une ellipse exprimée en fonction des rayons vecteurs, nous avons :

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_G}} = R(\theta_G). \tag{10.34}$$

Autrement dit, $\frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_G}}$ est le rayon vecteur de l'ellipse des conductivités hydrauliques effectives directionnelles de gradient et

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{\left[R_1^G sin(\alpha_G)\right]^2 + \left[R_2^G cos(\alpha_G)\right]^2}{\left[R_1^G R_2^G\right]^2} = A^G, \\ K_{12}+K_{21} &= \frac{(R_2^G - R_1^G)(R_2^G + R_1^G) sin(2\alpha_G)}{\left[R_1^G R_2^G\right]^2} = B^G \; et \\ K_{22} &= \frac{\left[R_1^G cos(\alpha_G)\right]^2 + \left[R_2^G sin(\alpha_G)\right]^2}{\left[R_1^G R_2^G\right]^2} = C^G \end{aligned} \tag{10.35}$$

Avec K_{12}=K_{21}, nous obtenons :

$$K_{12} = \frac{1}{2}B^G, \;\; K_{11} = A^G \;\; et \;\; K_{22} = C^G. \tag{10.36}$$

Maintenant pour $\tilde{K}_F$, en réalisant une identification entre l'équation 10.26 et les paramètres obtenus après développement de l'équation 10.31, on obtient :

$$\sqrt{\tilde{K}_F} = R(\theta_F) \tag{10.37}$$

Autrement dit, $\sqrt{\tilde{K}_F}$ est le rayon vecteur de l'ellipse des conductivités hydrauliques effectives directionnelles de flux et

$$\begin{aligned} \frac{K_{22}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} &= \frac{\left[R_1^F sin(\alpha_F)\right]^2 + \left[R_2^F cos(\alpha_F)\right]^2}{\left[R_1^F R_2^F\right]^2} = A^F, \\ \frac{-K_{12} - K_{21}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} &= \frac{(R_2^F - R_1^F)(R_2^F + R_1^F) sin(2\alpha_F)}{\left[R_1^F R_2^F\right]^2} = B^F \; et \\ \frac{K_{11}}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} &= \frac{\left[R_1^F cos(\alpha_F)\right]^2 + \left[R_2^F sin(\alpha_F)\right]^2}{\left[R_1^F R_2^F\right]^2} = C^F. \end{aligned} \tag{10.38}$$

Avec K_{12}=K_{21}, nous obtenons :

$$K_{11} = \frac{4C^F}{4A^F C^F - (B^F)^2}, K_{12} = \frac{-2B^F}{4A^F C^F - (B^F)^2} \; et \;\; K_{22} = \frac{4A^F}{4A^F C^F - (B^F)^2}. \tag{10.39}$$

Par cette méthodologie, si nous pouvons avoir accès aux différentes grandeurs des l'ellipse équivalente de flux et de gradient dans leur repère principale par un algorithme d'optimisation, nous pourrons obtenir K_{11}, K_{22} et K_{12}.

Nous pouvons noter ici que pour un milieu d'étude 2D, il faut identifier ces trois quantités à des rayons vecteurs d'une ellipse, nous avons donc trois grandeurs qui sont R_1, R_2 et α.
Cependant, pour des échantillons 3D, $\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$ doivent être identifiés aux trois rayons vecteurs d'un ellipsoïde. Dans ce cas, nous n'aurons plus trois, mais six paramètres à identifier : R_1, R_2 et R_3 respectivement les trois rayons de l'ellipsoïde ; mais aussi α_3 correspondant à la rotation de R_1 et R_2 de l'ellipsoïde autour de l'axe associé au petit rayon de l'ellipsoïde (R_3), α_2 correspondant à la rotation de R_1 et R_3 de l'ellipsoïde autour de l'axe associé au rayon moyen de l'ellipsoïde (R_2) et α_1 correspondant à la rotation de R_2 et R_3 autour de l'axe associé au grand rayon de l'ellipsoïde (R_1).

10.2 Analyse des expérimentations numériques d'immersion

Représentation graphique des ellipses (équations)

Pour chaque échantillon étudié (ici 2D), 72 simulations directes seront réalisées en variant uniquement l'orientation du gradient hydraulique moyen dans le plan $(\vec{ox}, \vec{oy})$ d'un pas de 5 degrés. Sur les autres faces du domaine d'étude, c'est-à-dire sur les faces situées perpendiculairement au gradient hydraulique moyen, des conditions de flux nuls seront appliquées (cas 2D).
Comme nous l'avons démontré précédemment, les quantités qui doivent d'être considérées comme étant respectivement le rayon vecteur des l'ellipses équivalentes des conductivités hydrauliques de gradient et de flux sont $\frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_G}}$ et $\sqrt{\tilde{K}_F}$.

La représentation des résultats sera réalisée sur un diagramme polaire de gradient et de flux. Chacune des simulations réalisées sera placée sur ce graphique et sera repérée en calculant leur cordonnée dans les deux diagrammes de la manière suivante :

$$\begin{cases} X^G = \frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_G}} cos(\theta_G) \\ Y^G = \frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_G}} sin(\theta_G) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} X^F = \sqrt{\tilde{K}_F}\, cos(\theta_F) \\ Y^F = \sqrt{\tilde{K}_F}\, sin(\theta_F) \end{cases} \tag{10.40}$$

avec

$$\theta_G = atan(\frac{J_2}{J_1}) \quad et \quad \theta_F = atan(\frac{q_2}{q_1}). \tag{10.41}$$

Ces notations, $(X^G\,;\,Y^G)$ et $(X^F\,;\,Y^F)$ indiques respectivement les coordonnées de la simulation dans le diagramme polaire de charge et de flux. Maintenant, il nous faut obtenir les différentes grandeurs des ellipses équivalentes de conductivité effective de flux et de gradient.

Calage optimal des résultats numériques et identification des paramètres des ellipses équivalentes

Pour cela, nous allons utiliser un algorithme de minimisation par les moindres carrés (la fonction lsqnonlin de Matlab). Nous allons minimiser les différences entre la longueur $R_{obs,i}$ du segment $[OM_{obs,i}]$, où $M_{obs,i}(X_{obs,i};Y_{obs,i})$ correspond à la conductivité directionnelle (i) tracée dans diagramme polaire (pour une direction (i) du gradient imposé) ; et la longueur $R_{opt,i}$ du segment $[OM'_{opt,i}]$, où $M'_{opt,i}(X'_{opt,i};Y'_{obs,i})$ est un point de l'ellipse équivalente supposée dans son repère principal. Le point O de coordonnée $(0;0)$ est quant à lui l'origine du diagramme polaire, ou le centre de l'ellipse équivalente suposée.

La longueur $R_{opt,i}$ du segment $[OM_{obs,i}]$ est définie de la manière suivante :

$$R_{obs,i} = \sqrt{X_{obs,i}^2 + Y_{obs,i}^2} \tag{10.42}$$

avec,

$$\begin{cases} X_{obs,i} &= R(\theta_{obs,i})\, cos(\theta_{obs,i}) \\ Y_{obs,i} &= R(\theta_{obs,i})\, sin(\theta_{obs,i}) \end{cases} \tag{10.43}$$

où :

i) $X_{obs,i}$ et $Y_{obs,i}$ sont les coordonnées dans le diagramme polaire de gradient ($X^G_{obs,i}$; $Y^G_{obs,i}$) ou de flux ($X^F_{obs,i}$; $Y^F_{obs,i}$) des conductivités directionnelles numériques,

ii) $\theta_{obs,i}$ est soit l'angle polaire, $\theta_{G,i}$ ou $\theta_{F,i}$ selon que l'on soit dans un diagramme polaire de gradient ou de flux,

iii) $R(\theta_{obs,i})$ est le rayon vecteur des ellipses de gradient $\frac{1}{\sqrt{K_G}}$ ou de flux $\sqrt{K_F}$.

Et la longueur $R_{opt,i}$ du segment $[OM'_{opt,i}]$ est définie de la manière suivante :

$$R_{opt,i} = \sqrt{X'^2_{opt,i} + Y'^2_{opt,i}} \tag{10.44}$$

(10.45)

où,

$$\begin{cases} X'_{opt,i} = R(\theta_{opt}) \left[cos(\alpha_{opt})\, cos(\theta_{obs,i}) + sin(\alpha_{opt})\, sin(\theta_{obs,i}) \right] \\ Y'_{opt,i} = R(\theta_{opt}) \left[-sin(\alpha_{opt})\, cos(\theta_{obs,i}) + cos(\alpha_{opt})\, sin(\theta_{obs,i}) \right] \end{cases} \tag{10.46}$$

avec $R(\theta_{opt})$ le rayon vecteur de l'ellipse à optimiser défini de la manière suivante :

$$R(\theta_{opt}) \;=\; \left[\sqrt{A_{opt}\, cos^2(\theta_{obs,i}) + B_{opt}\, \frac{sin(2\theta_{obs,i})}{2} + C_{opt}\, \frac{sin^2(\theta_{obs,i})}{2}} \right]^{-1} \tag{10.47}$$

avec

$$\begin{aligned} A_{opt} &= \frac{[R_{1opt}\,sin(\alpha_{opt})]^2 + [R_{2opt}\,cos(\alpha_{opt})]^2}{[R_{1opt}\,R_{2opt}]^2}, \\ B_{opt} &= \frac{(R_{2opt} - R_{1opt})(R_{2opt} + R_{1opt})sin(2\alpha_{opt})}{[R_{1opt}\,R_{2opt}]^2}, \\ C_{opt} &= \frac{[R_{1opt}\,cos(\alpha_{opt})]^2 + [R_{2opt}\,sin(\alpha_{opt})]^2}{[R_{1opt}\,R_{2opt}]^2} \end{aligned} \tag{10.48}$$

La quantité minimisée par la procédure numérique utilisée, nous permettra d'obtenir : $R1^G_{opt}$, $R2^G_{opt}$, α^G_{opt} et $R1^F_{opt}$, $R2^F_{opt}$, α^F_{opt}, qui nous permettrons d'obtenir les différents composantes du tenseur des conductivités hydrauliques :

$$K_{11} = A^G_{opt} \;;\; K_{12} = \frac{1}{2}B^G_{opt} \;\; et \;\; K_{22} = C^G_{opt}, \tag{10.49}$$

par l'analyse de l'ellipse de gradient, ou

$$K_{11} = \frac{4C^F_{opt}}{4A^F_{opt}C^F_{opt} - (B^F_{opt})^2}, K_{12} = \frac{-2B^F_{opt}}{4A^F_{opt}C^F_{opt} - (B^F_{opt})^2} \; et \;\; K_{22} = \frac{4A^F_{opt}}{4A^F_{opt}C^F_{opt} - (B^F_{opt})^2}. \tag{10.50}$$

par l'analyse de l'ellipse de flux.

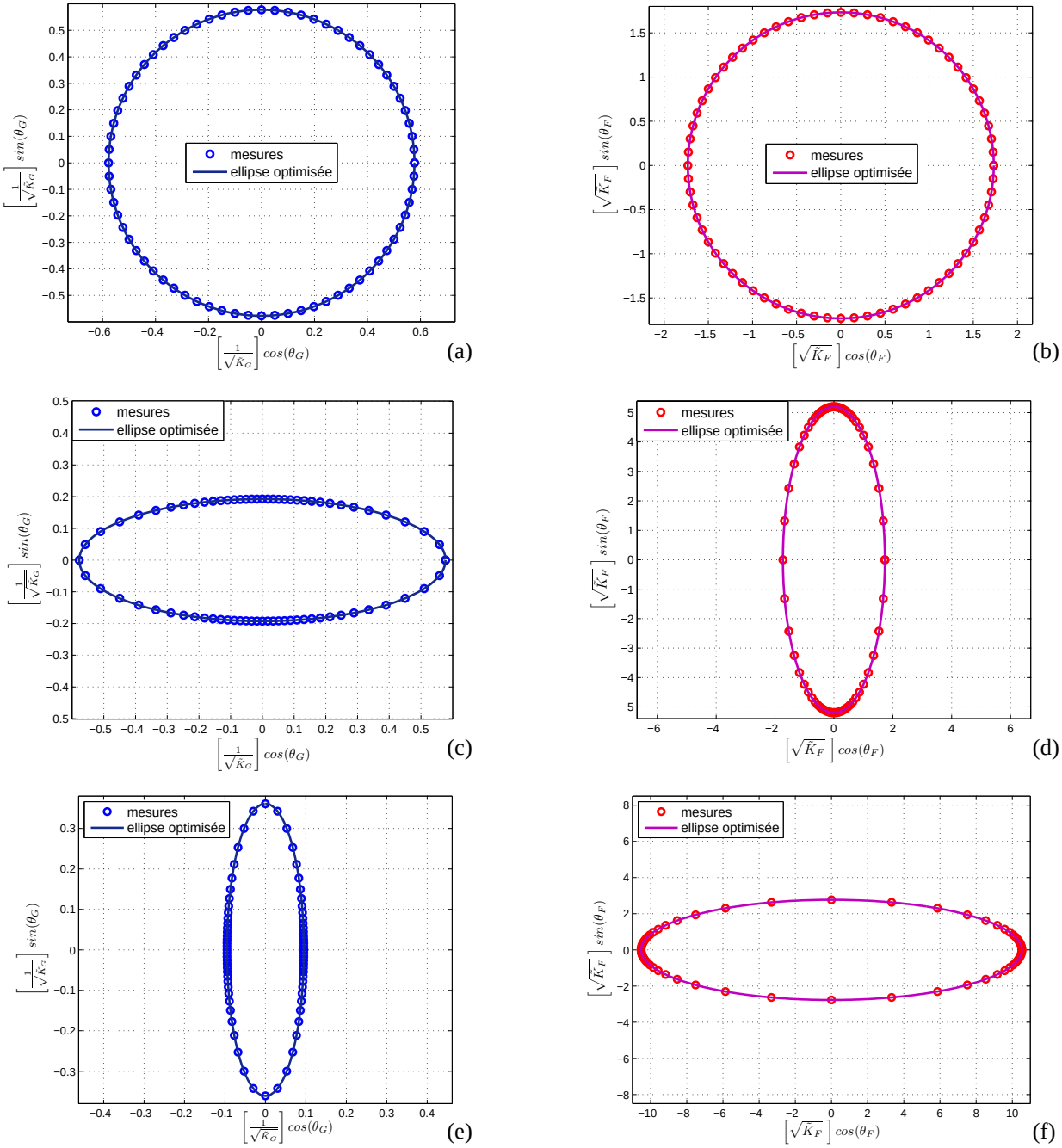


FIG. 10.2 – Résultats numériques des simulations réalisées et optimisation conduites sur les ellipses de gradient et de flux : pour le milieu poreux homogène isotropes avec $K_{xx} = K_{yy} = 3$ (a) ellipse de gradient, (b) ellipse de flux ; pour le milieu poreux homogène anisotropes avec $K_{xx} = 3$ et $K_{yy} = 27$ (c) ellipse de gradient, (d) ellipse de flux ; et pour le milieu tri-couches Fig. 10.3 (e) ellipse de gradient, (f) ellipse de flux.

10.3 Analyse des résultats : ellipse d'anisotropie

10.3.1 Premiers résultats : ellipses d'anisotropie de quelques milieux simples

Comme premiers exemples nous allons étudier trois milieux poreux 2D :
- un milieu poreux homogène isotrope : $K_{xx} = 3$ et $K_{zz} = 3$,
- un milieu poreux homogène anisotrope : $K_{xx} = 3$ et $K_{yy} = 27$,
- et un milieu tri-couches constitué de deux couches de conductivité hydraulique de 1 $m.s^{-1}$ et d'une couche centrale possédant une conductivité hydraulique de 1000 $m.s^{-1}$, Fig. 10.3 (a)

Les résultats des simulations numériques réalisées sont présentés sur la figure 10.2 et les composantes des tenseurs effectifs et les composantes optimisées des ellipses équivalentes sont reportées sont regroupées dans le tableau 10.1.
Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation entre les dépouillements des résultats numériques et les résultats théoriques attendus. Notez tout de même que plus l'anisotropie du milieu poreux augmente et plus la partie K_{12} du tenseur devient non négligeable, e.g. milieu poreux homogène anisotrope, Tab. 10.1.

Ellipse de gradient								
Milieux	R^G_{1opt}	R^G_{2opt}	α^G_{opt}	K_{11}	K_{12}	K_{22}	$\tilde{K}_{ary}$	$\tilde{K}_{harmo}$
Homogène iso.	$5.773\,10^{-1}$	$5.773\,10^{-1}$	0.000	3.000	0.000	3.000	—	—
Homogène ani.	$5.773\,10^{-1}$	$1.924\,10^{-1}$	$1.649\,10^{-4}$	3.000	$-3.957\,10^{-3}$	26.999	—	—
Tri-couches	$3.610\,10^{-1}$	$9.496\,10^{-1}$	1.570	110.890	$0.170\,10^{-3}$	7.673	109.802	1.122
Ellipse de flux								
Milieux	R^F_{1opt}	R^F_{2opt}	α^F_{opt}	K_{11}	K_{12}	K_{22}	$\tilde{K}_{ary}$	$\tilde{K}_{harmo}$
Homogène iso.	1.732	1.732	0.000	3.000	0.000	3.000	—	—
Homogène ani.	5.196	1.732	1.571	3.000	$-2.570.10^{-4}$	27.000	—	—
Tri-couches	10.530	2.770	$7.889\,10^{-5}$	110.881	$8.142\,10^{-3}$	7.673	109.802	1.122

TAB. 10.1 – Tableau regroupant les grandeurs optimisées et les composantes (non principales) ainsi que l'angle du repère principal du tenseur des macro-K de Darcy optimisées.

Cependant, pour le milieu 3-couches étudié ici, notons que la composante K_{11} obtenue par le biais des ellipses de gradient et de flux, Tab. 10.1, surestime légèrement la moyenne arithmétique des conductivités locales du milieu étudié. La moyenne harmonique des conductivités hydrauliques locales est quant à elle largement surestimée, Tab. 10.1. Selon nous ce fait est à mettre en relation avec le type de conditions aux limites appliquées lors de nos expérimentations numériques. Nous pouvons nous demander si le type de conditions aux limites perméamétriques habituellement utilisé, permettant

de retrouver la moyenne harmonique, est vraiment une réponse unique au problème de l'upscaling, même dans le cas d'un simple tri-couches. Les conditions aux limites de type immersion semblent plus adaptées aux conditions réelles d'écoulements dans les massifs très hétérogènes étudiés dans la présente étude, mais ceci à condition de les appliquer au niveau de sous entités morphologiques du massif, délimitées par des discontinuités.
Quoiqu'il en soit, pour les milieux précédemment étudiés, chapitre 8, les conditions aux limites de type "perméamétriques" permettent d'obtenir les bonnes solutions analytiques. Cependant pour des milieux très hétérogènes, avec des hétérogénéités non alignées suivant les axes principaux du repère d'étude, l'obtention des composantes du tenseur de la macro-K de Darcy en utilisant des conditions aux limites perméamétriques est délicate, et demande la mise en place de procédures d'optimisation et de dépouillement particulière, e.g. K Fouri, 2004 [75]. Etudions maintenant des milieux plus complexes à une ou plusieurs inclusions, toujours avec la méthode d'immersion à gradient hydraulique "directionnel" imposé.

10.3.2 Etude des ellipses d'anisotropie sur des milieux à une ou plusieurs inclusions

Nous allons étudier six milieux discrets géométriquement anisotropes, possédant une ou plusieurs inclusions, en allant du plus simple au plus complexe. Ces milieux sont représentés dans la figure 10.3.
Nous pouvons distinguer :

- un milieu tri-couches principal et incliné à 45° ;
- un milieu croix principale et un milieu 'hexaédrique' ;
- deux milieux fissurés 2D ($MF1_{2D}$ et $MF2_{2D}$).

Pour ces différents milieux, la phase matricielle (bleue) aura une conductivité hydraulique locale de 1 $m.s^{-1}$ et la phase fracture (rouge) de 1000 $m.s^{-1}$. Les différentes composantes des tenseurs de la macro-K de Darcy et les composantes optimisées des ellipses équivalentes sont reportées dans le tableau 10.2.
Dans la dernière partie de cette étude portant sur l'influence de l'anisotropie d'un milieu donné sur le comportement de la macro-K de darcy et sur son caractère tensoriel, nous allons porter notre attention sur d'autres quantités, nommées abusivement, "ellipses inverses" de gradient et de flux.
Les résultats numériques obtenus et leurs projection dans un diagramme polaire de flux et de gradient sont aussi représentés respectivement sur les Fig. 10.4 et Fig. 10.5.

Ces diagrammes nous permettent d'obtenir des informations différentes, mais complémentaires sur la géométrie des milieux étudiés et notamment sur l'orientation moyenne de "l'élément morphologique équivalent" :

- l'ellipse équivalente obtenue après projection de $\frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_G}}$ dans un diagramme polaire

de gradient est orthogonale à la direction principale d'anisotropie géométrique du milieu étudié, comparez la figure 10.3 avec la figure 10.4 ;
- et l'ellipse équivalente obtenue après projection de $\sqrt{\tilde{K}_F}$ dans un diagramme polaire de flux est parallèle à la direction principale d'anisotropie géométrique du milieu, comparez la figure 10.3 avec la figure 10.5 ;

La comparaison de la direction principale avec les moments géométriques d'ordre 2 des milieux étudiés confirme bien cette première analyse.

Ellipse de gradient								
Milieux	R^G_{1opt}	R^G_{2opt}	α^G_{opt}	K_{11}	K_{12}	K_{22}	$\tilde{K}_{ary}$	$\tilde{K}_{harmo}$
3couche 0°	$3.610\,10^{-1}$	$9.496\,10^{-1}$	1.570	110.890	$0.170\,10^{-3}$	7.673	109.802	1.122
3couche 45°	$2.969\,10^{-1}$	$8.558.10^{-2}$	2.356	73.938	62.594	73.937	143.882	1.167
Croix princ.	$9.096\,10^{-2}$	$9.096\,10^{-2}$	0.000	120.853	0.000	120.853	206.754	0.100
Hexa.	$1.094\,10^{-1}$	$7.976.10^{-2}$	2.356	120.368	36.805	120.374	221.444	0.108
$MF1_{2D}$	$2.766\,10^{-1}$	$2.716\,10^{-1}$	1.887	13.509	$1.437\,10^{-1}$	13.116	193.606	$9.291\,10^{-2}$
$MF2_{2D}$	$2.274\,10^{-1}$	$1.850\,10^{-1}$	2.049	27.114	4.035	21.431	243.218	$1.205\,10^{-1}$
Ellipse de flux								
Milieux	R^F_{1opt}	R^F_{2opt}	α^F_{opt}	K_{11}	K_{12}	K_{22}	$\tilde{K}_{ary}$	$\tilde{K}_{harmo}$
3couches	10.530	2.770	$7.889\,10^{-5}$	110.881	$8.142\,10^{-3}$	7.673	109.802	1.122
3couche 45°	11.685	3.368	$7.854\,10^{-1}$	73.941	62.598	73.941	143.882	1.167
Croix princ.	10.993	10.993	0.000	120.846	0.000	120.846	206.754	0.100
Hexa	12.537	9.141	$7.854\,10^{-1}$	120.367	36.809	120.367	221.444	0.108
$MF1_{2D}$	3.682	3.615	$3.173\,10^{-1}$	13.509	$1.499\,10^{-1}$	13.116	193.606	$9.291\,10^{-2}$
$MF2_{2D}$	5.404	4.398	$4.786\,10^{-1}$	27.112	4.031	21.434	243.218	$1.205\,10^{-1}$

TAB. 10.2 – Grandeurs optimisées des ellipses de gradient et de flux et les composantes du tenseur des macro-K de Darcy optimisées sur les six échantillons étudiés.

Ainsi, par la procédure utilisée ici, il est possible d'analyser des milieux très anisotropes comme les milieux fissurés 3D. Pour le moment le dépouillement et l'optimisation des simulations numériques ont seulement été réalisés en 2D en utilisant une loi de perte de charge locale de Darcy, ce qui correspond à la partie linéaire de la loi de perte de charge globale linéaire/quadratique étudiée. Pour la réalisation des simulations darciennes 3D, le code numérique permettant d'appliquer les conditions aux limites dans un espace 3D est opérationnel et son analyse mathématique est en cours de développement. Pour l'obtention des paramètres effectifs en utilisant la loi locale de Darcy/Ward-Forchheimer, la procédure présentée précédemment devra être modifiée. Notamment, la forme de la "cellule d'étude" (carré ici) et l'application des conditions aux limites devront être revues.

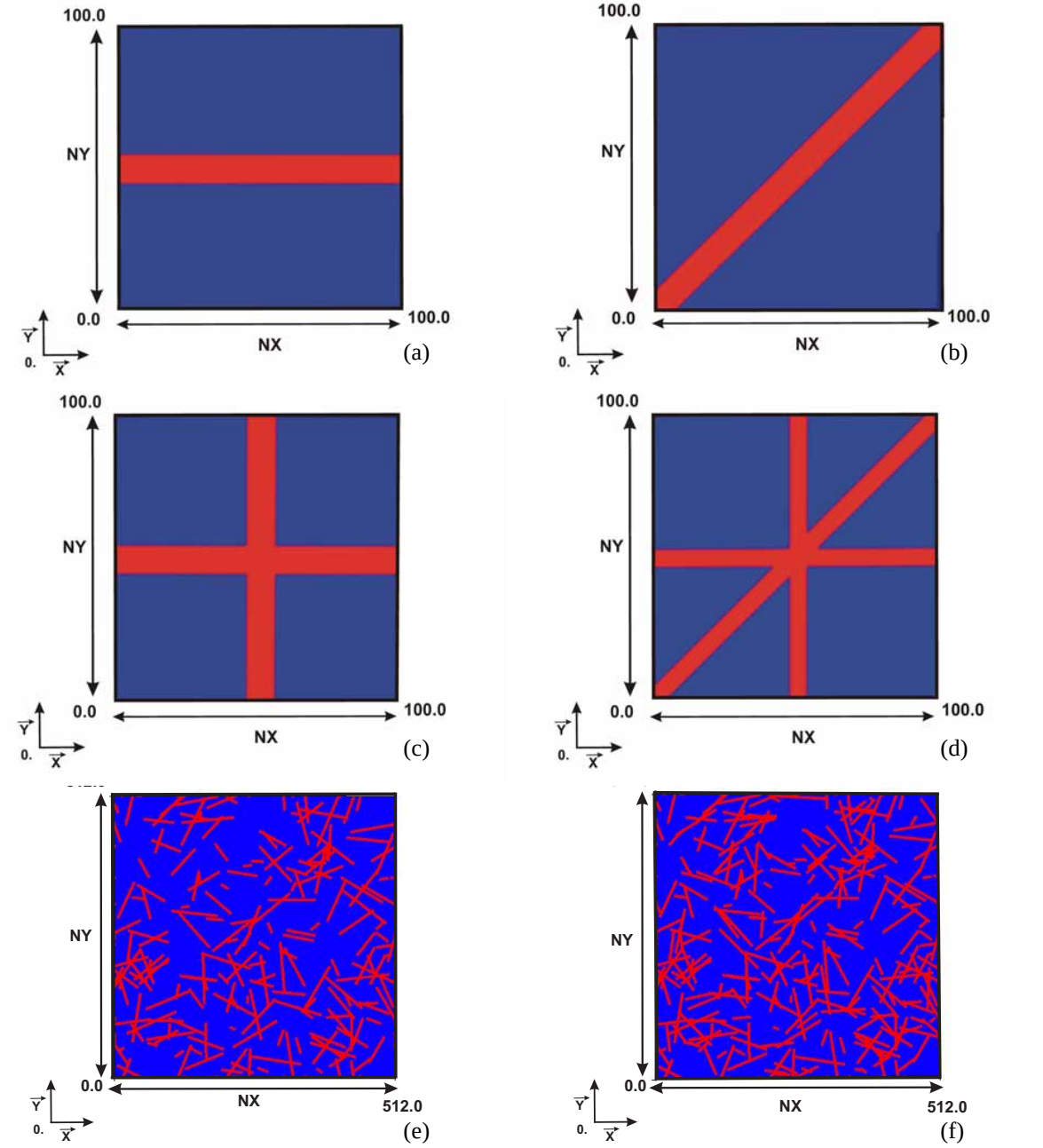


FIG. 10.3 – Milieux étudiés : (a) un milieu tri-couches (3couches) principal ; (b) un tri-couches (3couches) incliné à 45 degrés ; (c) un milieu croix principale ; (d) un milieu 'hexaédrique' ; (e) le milieu fissuré 2D $MF1_{2D}$, Fig. 8.7 et (f) le milieu fissuré 2D $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (d).

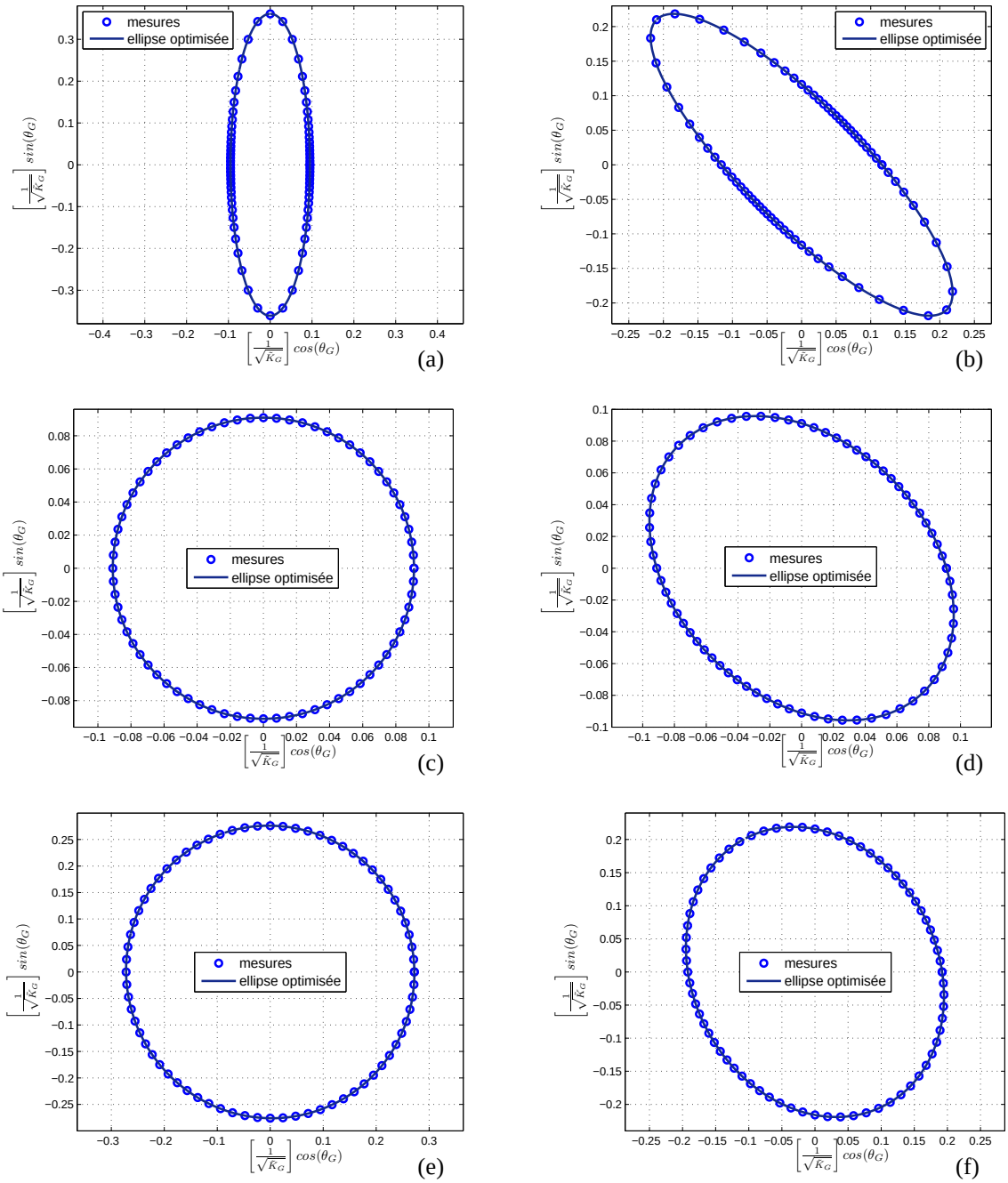


FIG. 10.4 – Diagrammes polaires des conductivités numériques de gradient et ellipses optimisées, pour les milieux suivants : (a) un milieu tri-couches principal ; (b) un tri-couches incliné à 45° ; (c) un milieu croix principale ; (d) un milieu 'hexaédrique' ; (e) le milieu fissuré 2D $MF1_{2D}$, Fig. 8.7 (c) ; et (f) le milieu fissuré 2D $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (d).

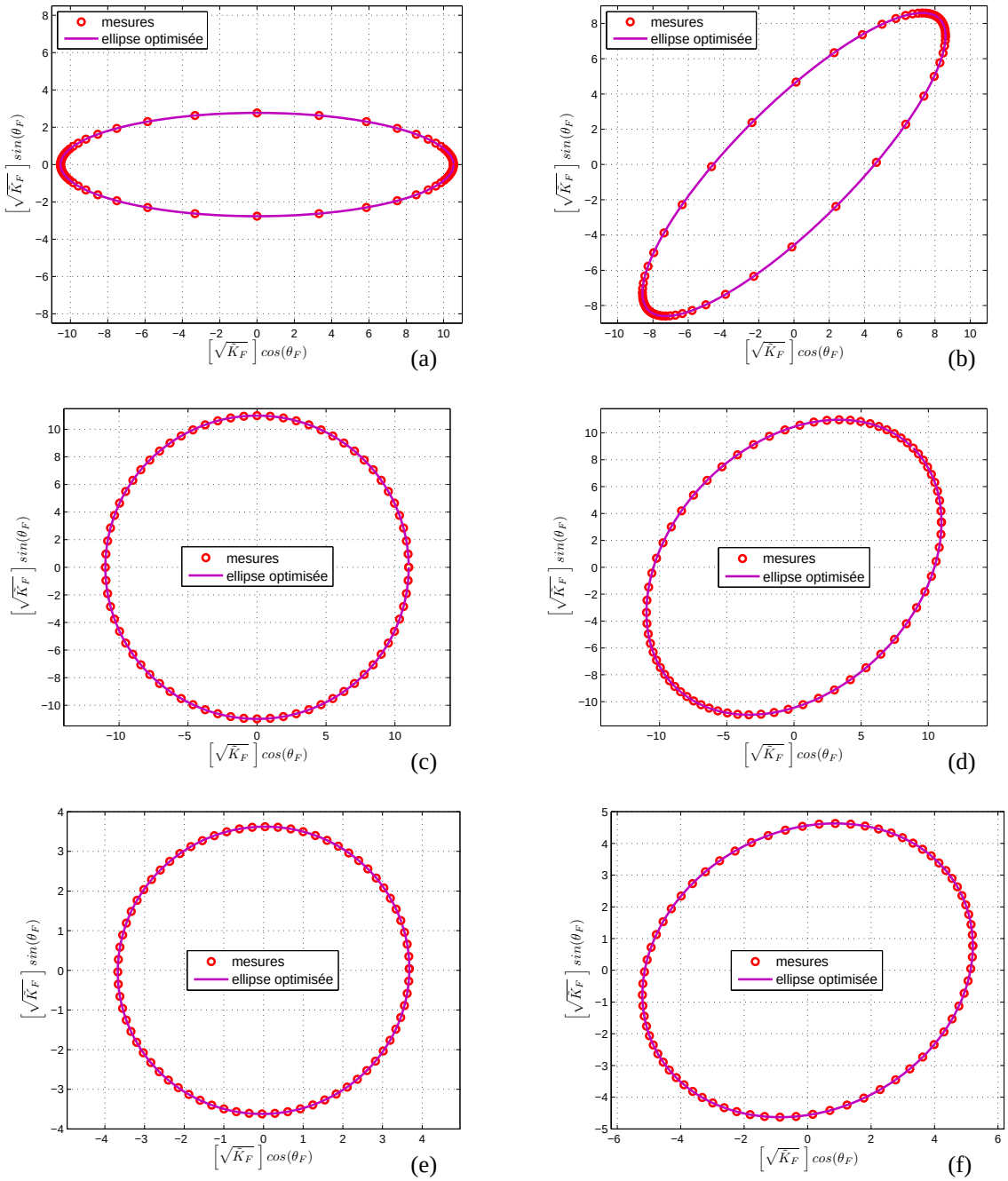


FIG. 10.5 – Diagrammes polaires des conductivités numériques de flux et ellipses optimisées, pour les milieux suivants : (a) un milieu tri-couches principal ; (b) un tri-couches incliné à 45° ; (c) un milieu croix principale ; (d) un milieu 'hexaédrique' ; (e) le milieu fissuré 2D $MF1_{2D}$, Fig. 8.7 (c) ; et (f) le milieu fissuré 2D $MF2_{2D}$, Fig. 8.7 (d).

10.4 Analyses de l'influence de l'anisotropie par les "ellipses inverses"

10.4.1 Définition des "ellipses inverses" et premiers milieux étudiés

Dans un souci prospectif et pour une meilleure compréhension des phénomènes qui influencent la macro-K de Darcy, nous avons tracé les quantités "complémentaires", "inverses", des précédentes : $\sqrt{\tilde{K}_G}$ et $\frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_F}}$ respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux.
Ces quantités seront abusivement nommées "ellipses inverses" de gradient et de flux. Les coordonnées de ces deux quantités dans un diagramme polaire, pour chacune des simulations réalisées, sont :

$$\begin{cases} X^{G'} = \sqrt{\tilde{K}_G}\, cos(\theta_G) \\ Y_i^{G'} = \sqrt{\tilde{K}_G}\, sin(\theta_G) \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} X^{F'} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_F}}\, cos(\theta_F) \\ Y^{F'} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{K}_F}}\, sin(\theta_F) \end{cases} \tag{10.51}$$

où $(X^{G'}\,;Y^{G'})$ et $(X^F\,;Y^F)$ sont respectivement les coordonnées de la simulation réalisée dans un diagramme polaire de gradient et de flux .

Dans un premier temps, nous allons étudier :

- un milieu poreux homogène isotrope tel que $K_{xx} = 3$ et $K_{zz} = 3$, Fig. 10.6 (a) et (c) ;
- un milieu poreux homogène anisotrope tel que $K_{xx} = 3$ et $K_{yy} = 27$, Fig. 10.6 (b) et (d) ;
- et deux milieux poreux fracturés tri-couches, l'un principal et l'autre incliné à 45° , Fig. 10.7 ;

Pour le milieu poreux homogène isotrope étudié, nous pouvons noter que les ellipses inverses de flux et de gradient sont des cercles, Fig. 10.6 (a) et (c).

Cependant pour le milieu poreux homogène anisotrope la nature de ces deux quantités est plus complexe. Commençons par décrire l'ellipse inverse de gradient de ce milieux homogène anisotrope, Fig. 10.6 (d).
L'ellipse inverse de gradient s'apparente à une épicycloïde (néphroïde) orientée suivant l'axe principal d'anisotropie. Notez l'existence d'un point de rebroussement orienté vers le centre de cette forme géométrique. Ce point est situé au niveau de l'axe mineur de l'anisotropie.
Pour ce qui est de l'ellipse inverse de flux, Fig. 10.6 (b), sa forme paraît plus complexe, nous pouvons observer que le plus grand axe de cette forme est orienté perpendiculairement à l'axe principal de l'anisotropie. Notez aussi qu'il est possible d'observer suivant la direction de l'axe principal de l'anisotropie, un point de rebroussement s'orientant

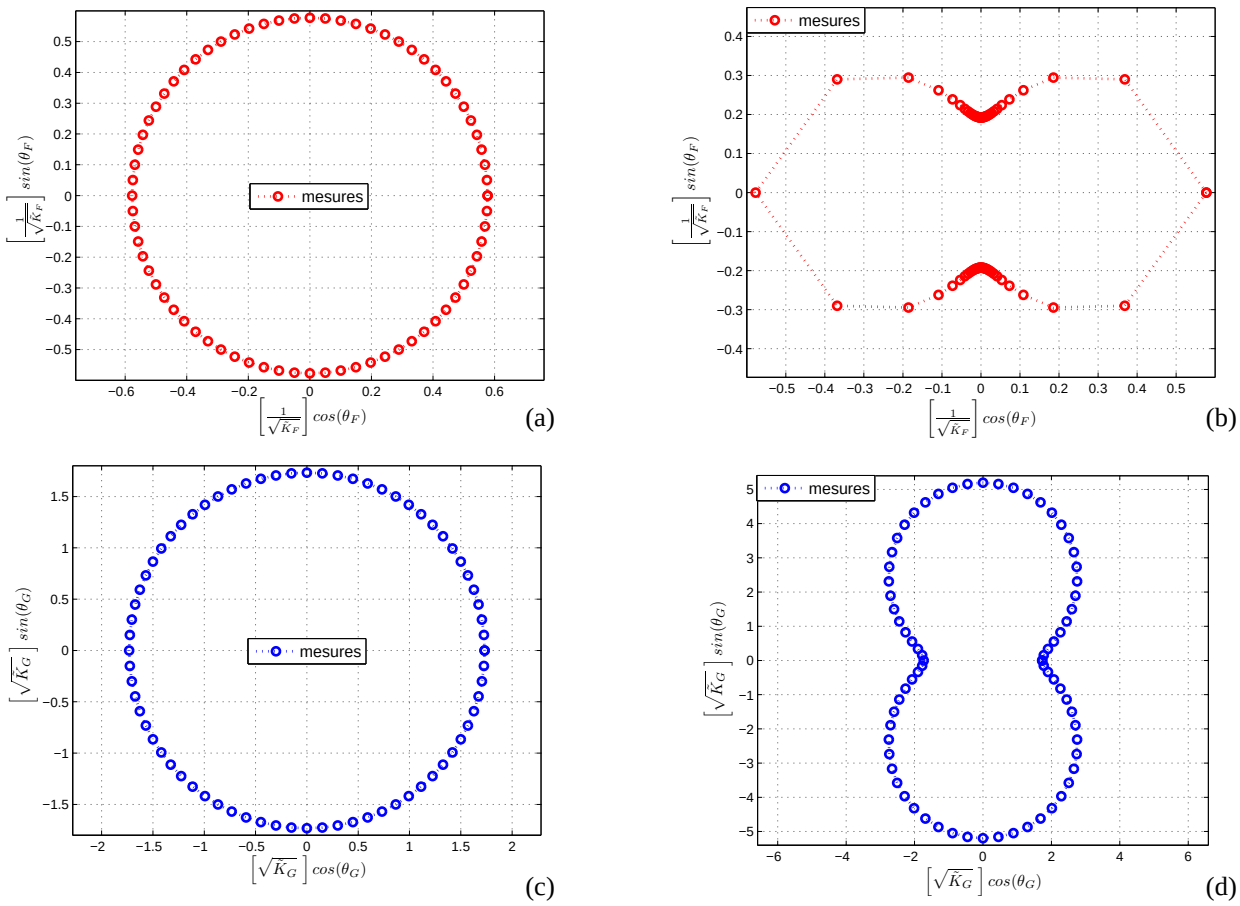


FIG. 10.6 – Ellipses inverses de flux et de gradient tracées respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux. (a) et (c) "ellipse inverse" de flux et de gradient obtenues pour le milieu poreux homogène isotropes avec $K_{xx} = K_{yy} = 3$; (b) et (d) "ellipse inverse" de de flux et de gradient obtenues pour le milieu poreux homogène anisotrope $K_{xx} = 3$ et $K_{yy} = 27$;

vers son centre. Ici, peut-être s'agit-il aussi d'une épicycloïde (néphroïde) orientée suivant l'axe mineur de l'anisotropie. Cependant, comme la répartition des points sur cette courbe n'est pas suffisante, nous ne pouvons conclure de manière définitive sur la nature de cette courbe.

Intéressons nous maintenant aux ellipses inverses de gradient et de flux des deux milieux tri-couches étudiés, Fig. 10.7, et commençons par nous intéresser aux ellipses inverses de gradient de ces deux milieux, Fig. 10.7 (c) et (d). Là aussi comme précédemment, ces courbes sont semblables à des épicycloïdes (néphroïde) orientées suivant l'axe principal d'anisotropie. Et comme pour le milieu poreux homogène anisotrope étudié précédemment, un point de rebroussement identique, orienté en direction de l'axe mineur de l'anisotropie peut être observé.

Quant aux ellipses inverses de flux de ces deux milieux, elles sont différentes par rapport à celle décrite pour un milieu poreux homogène anisotrope. Notez notamment qu'il existe un point de rebroussement, là aussi situé au niveau de l'axe majeur de l'anisotropie, cependant il n'est plus orienté vers le centre de l'ellipse inverse de flux, mais vers son extérieur, Fig. 10.7 (a) et (b), nous parlerons alors "d'intumescences". Pour ce qui est du comportement des ellipses inverses de flux de ces deux milieux tri-couches suivant l'axe mineur de l'anisotropie, le peu de simulations à cet endroit ne nous permet pas de conclure. Cette première différence notée, entre les ellipses inverses de flux entre un milieu poreux homogène anisotrope et un milieu poreux fracturé hétérogène anisotrope semble intéressante et pourrait peut-être nous informer, pour un milieu très fissuré donné, sur l'élément morphologique équivalent présent dans le milieu, sur les phénomènes de percolation et leurs conséquences sur l'expression de la macro-K de Darcy.

D'autres milieux ont aussi été étudiés par les "ellipses inverses". Cependant, ils ne seront pas commentés dans le corps de ce manuscrit. Les lecteurs intéressés par les géométries compliquées obtenues pourront se référer à l'annexe de ce document (Annexes : *Analyse des "ellipses inverses"*). Dans la suite du document, nous allons tout de même analyser l'influence de la structuration du milieu sur l'expression de ces deux quantités complémentaires en étudiant un milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué au sens du tenseur de dispersion géométrique.

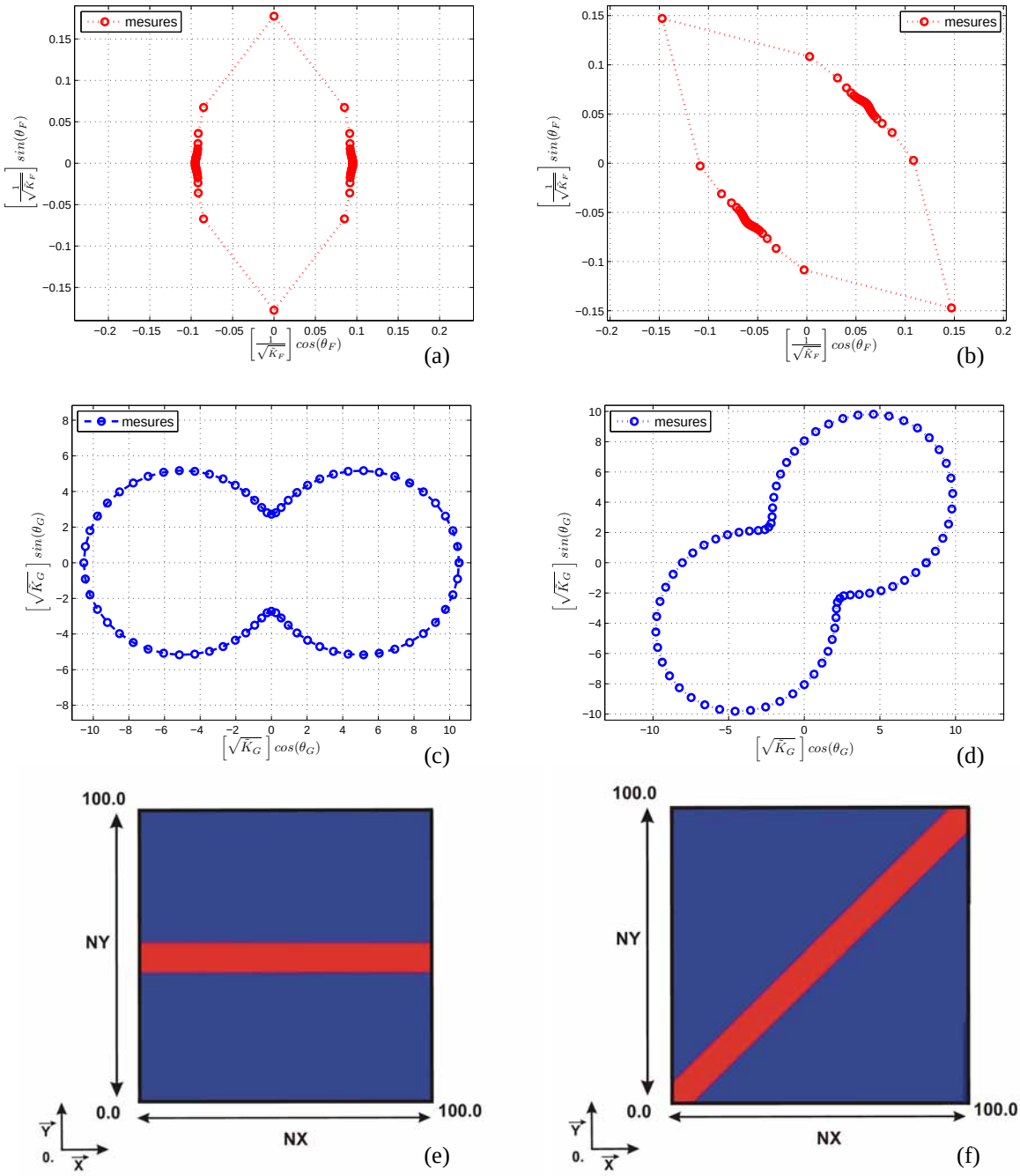


FIG. 10.7 – Ellipses inverses tracées respectivement dans un diagramme polaire. (a) et (c) "ellipse inverse" de flux et de gradient obtenues pour le milieu tri-couches principal ; (b) et (d) "ellipse inverse" de flux et de gradient obtenues pour le milieu tri-couches incliné à 45 degrés. (e) Milieu tri-couches principal et (f) tri-couches incliné à 45 degrés.

10.4.2 Ellipses inverses et phénomènes de percolation pour un milieu binaire 2D purement aléatoire

Introduction et objectifs

Pour bien comprendre les mécanismes qui influencent la géométrie de ces deux dernières quantités, nous nous sommes intéressés au milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué étudié dans le chapitre précédent, chapitre 8, qui traite de l'analyse des coefficients de la sensibilité de la macro-K de Darcy au log-contraste $\kappa = log_{10}(K_F/K_F)$ et à la fraction volumique en inclusion ϕ_F, en utilisant des conditions aux limites de type "perméamétrique".
Les fractions en inclusions conductrices testées sont les suivantes :

- ϕ_F = 100%,
- ϕ_F = 75%,
- ϕ_F = 60% $\approx \hat{p}_{c_3}$,
- ϕ_F = 45% $\approx \hat{p}_{c_2}$,
- ϕ_F = 28% $\approx \hat{p}_{c_1}$,
- ϕ_F = 10%,
- ϕ_F = 0%

Pour ces milieux, un log-contraste κ de +6 a été appliqué. A ce log-contraste, l'influence des phénomènes de percolation est bien établie. Les diagrammes polaires des "ellipses inverses" de gradient et de flux des milieux étudiés ont été reportés sur la figure regroupant les analyses de sensibilité de premier ordre de la macro-K de Darcy par rapport au log-contraste, $\partial_\kappa \hat{Y}^D$, respectivement Fig. 10.10 et Fig. 10.9.

Notre intérêt s'est particulièrement porté sur ces quantités au niveau des "fractions critiques de transition de phase" $\hat{p}_{c_1}$, $\hat{p}_{c_2}$ et $\hat{p}_{c_3}$, Fig. 10.8. Nous allons essayer de proposer une interprétation de ces résultats.

Etude des ellipses inverses de flux pour un milieu binaire 2D purement aléatoire

Les ellipses inverses de flux, pour des milieux contenant des fractions volumiques en inclusions supérieures à 0% et inférieures à $\hat{p}_{c_1}$ ($\phi_F \approx 28\%$), semblent s'apparenter à des hypocycloïdes (astroïdes), dont la concavité semble peu diminuer de la fraction 10% à $\hat{p}_{c_1}$, Fig. 10.10 **C**. Nous pouvons ici nous demander si cette forme géométrique obtenue est à mettre en relation ou non avec la géométrie du milieu étudié. Mais il semblerait que la géométrie des ellipses inverses ne dépende pas de la forme des cellules utilisées.

Passée $\hat{p}_{c_1}$, la concavité de l'astroïde devrait commencer à disparaitre. Dans ce manuscrit aucune expérience à des fractions supérieures à $\hat{p}_{c_1}$ et inférieures à $\hat{p}_{c_2}$ n'est présentée, Fig. 10.10, cependant à la vue du comportement de l'ellipse inverse à $\hat{p}_{c_2}$, Fig. 10.10 **D**, nous pouvons supposer que :

- soit des points de rebroussement doivent commencer à apparaître de manière iso-

trope sur la surface de cette hypocycloïde, diminuant sa concavité et conduisant au comportement observé à $\hat{p}_{c_2}$,
- soit le comportement à $\hat{p}_{c_2}$ apparaît autrement.

Si nous revenons à l'interprétation des coefficients de la sensibilité du second ordre de la macro-K de Darcy au log-contraste (sous-section 8.4.3), nous sommes dans la zone 2. Dans cette zone, la macro-K de Darcy est influencée par la population conductrice. Ces points de rebroussements supposés seraient à mettre en relation avec l'expression des *amas finis* de la phase conductrice.

A $\hat{p}_{c_2}$ ($\phi_F \approx 45\%$), nous sommes à un état très particulier semblable à "un ordre cubique centré" du système, Fig. 10.8 (d). Ici, pour l'expérience réalisée, à $\kappa = +6$ et $\phi_F \approx \hat{p}_{c_2}$, cet ordre n'est pas totalement établi. La géométrie de cette quantité, à cette fraction particulière, est peut-être à mettre en relation avec la géométrie du domaine comme nous l'avons noté juste en dessus. Tout ce que l'on sait, c'est qu'à $\hat{p}_{c_2}$ les phases matricielles et inclusions jouent un rôle équivalent (section 8.4.3). Le système se comporte alors comme une phase unique, un mélange particulier au comportement unitaire.

Passée $\hat{p}_{c_2}$, des points de rebroussement, orientés vers l'extérieur de l'ellipse inverse de flux, des "intumescences", doivent commencer à apparaître de manière isotrope sur la surface de cet "ordre cubique centré". La géométrie de cette entité devient de plus en plus convexe, pour aboutir à $\hat{p}_{c_3}$ ($\phi_F \approx 60\%$) et pour de fraction supérieures, à un cercle parfait (exemple de la fraction critique en inclusion ϕ_F=70% Fig. 10.10 **F**). Notez que ces "intumescences" supposées sont observables sur la figure 10.8 (f) (pour $\hat{p}_{c_3}$). L'apparition de ces "intumescences" pourrait donc être en lien direct, avec l'apparition d'*amas percolants*, *infinis*, suivant certaines directions.
Cependant, ces dernières analyses doit être prises avec beaucoup de précautions. Mais ces dernières constatations semblent aller dans le même sens que celles réalisées lors de l'étude des ellipses inverses de flux des deux milieux tri-couches.

Etude des ellipses inverses de gradient sur un milieu binaire 2D purement aléatoire

La détermination et l'étude des phénomènes qui influent les ellipses inverses de gradient sont assez délicates au log-contrastes testés. Des études à des log-contrastes plus importants seront sans doute nécessaires pour connaître les paramètres qui modifient la géométrie de ces quantités. Pour le moment, voici les informations que nous pouvons tirer de leurs études.

Il semblerait que pour des fractions en inclusions supérieures à 0% et inférieures à $\hat{p}_{c_1}$ ($\phi_F \approx 28\%$) la forme des "ellipses inverses" de gradient, tracées dans un diagramme de gradient, s'apparente à des "ellipses applaties à leurs pôles" (exemple de la fraction en inclusion ϕ_F=10%, Fig. 10.9 **B**), cet applatissement serait croissant pour des fractions supérieures à 0% et inférieures à $\hat{p}_{c_1}$.

Une fois que la fraction critique de transition de phase $\hat{p}_{c_2}$ est atteinte, nous retrouvons une sphère, Fig. 10.8 (c) et Fig. 10.9 **D**. Mais alors que s'est-il passé entre la

fraction $\hat{p}_{c_1}$ et $\hat{p}_{c_2}$? Nous ne pouvons pas répondre actuellement de manière définitive et nous nous garderons de toutes hypothèses.

Une fois $\hat{p}_{c_2}$ ($\phi_F \approx 45\%$) dépassée, des points de rebroussements doivent commencer à apparaitre de manière locale dans la géométrique de la forme précédente. La morphologie circulaire de ces quantités serait de nouveau atteinte lorsque la fraction volumique en inclusion serait supérieure à $\hat{p}_{c_3}$ (exemple de la fraction critique en inclusion ϕ_F=70% Fig. 10.9 **F**).

10.4.3 Premières conclusions sur les "ellipses inverses"

Les conclusions présentées ici ne peuvent être que partielles et à prendre avec beaucoup de précautions. Mais différents éléments de réponse sur le comportement des "ellipses inverses" semblent apparaître.

Dans un premier temps, nous pensons que ces différentes quantités traduiraient l'expression de la partie non diagonale, ou non symétrique du tenseur des conductivités hydrauliques de flux et de gradient. Le fait de tracer ces quantités inverses permet de mettre en avant les petites variations des quantités étudiées précédemment ($\tilde{K}_G$ et $\tilde{K}_F$).

Dans un second temps, il semblerait que les "intumescences" (i.e. points de rebroussement orientés vers l'extérieur) qui apparaissent sur les ellipses inverses de flux soient à mettre en relation avec l'expression de la phase conductrice et avec les phénomènes de percolation.

Ces différentes constatations sur le comportement des ellipses inverses de flux sont bien entendues à vérifier avec plus d'expérimentations et analytiquement (par des méthodes perturbatives). Ici, nous pouvons proposer une formulation analytique de "ellipses inverses" de flux. En effet à certaines fractions ou pour une gamme de fractions, ces "surfaces" sont comparables à des coupes réalisées dans l'axe médian de "surfaces de Lamé" (2D). Pour un milieu 2D purement aléatoire isotropiquement distribué au sens du tenseur de dispersion, nous aurions :

$$\frac{|x|^\alpha}{a^\alpha} + \frac{|y|^\alpha}{b^\alpha} = 1 \tag{10.52}$$

Ici, nous pouvons même émettre les hypothèses qu'aux log-contrastes important nous aurions pour les ellipses inverses de flux (n.b. : ici ϕ_F est la fraction volumique d'inclusions conductrices) :

- a = b et,
- lorsque $\phi_F \in [\hat{p}_{c_3}\ ;\ 1]$, $\alpha = 2$;
- lorsque $\phi_F \in]\hat{p}_{c_2}\ ;\ \hat{p}_{c_3}[$, $\alpha \in]1\ ;\ 2[$;
- lorsque ϕ_F est égale à $\hat{p}_{c_2}$, $\alpha = 1$.
- lorsque $\phi_F \in]\hat{p}_{c_1}\ ;\ \hat{p}_{c_2}[$, $\alpha \in]1/2\ ;\ 1[$;
- lorsque ϕ_F est égale à $\hat{p}_{c_1}$, $\alpha = 1/2$;
- lorsque $\phi_F \in]0\ ;\ \hat{p}_{c_1}[$, $\alpha \in]0\ ;\ 1/2[$;

– lorsque ϕ_F est égale à 0, $\alpha = 2$;

Pour ce qui est du comportement des ellipses inverses de gradient, nous nous garderons de réaliser des conclusions trop hâtives. Cependant, à la vue de ce qui vient d'être énoncé, nous pouvons supposer qu'il s'agit aussi de surface de Lamé, mais pour lesquelles l'exposant α est supérieur à 2 pour les surfaces non sphériques.

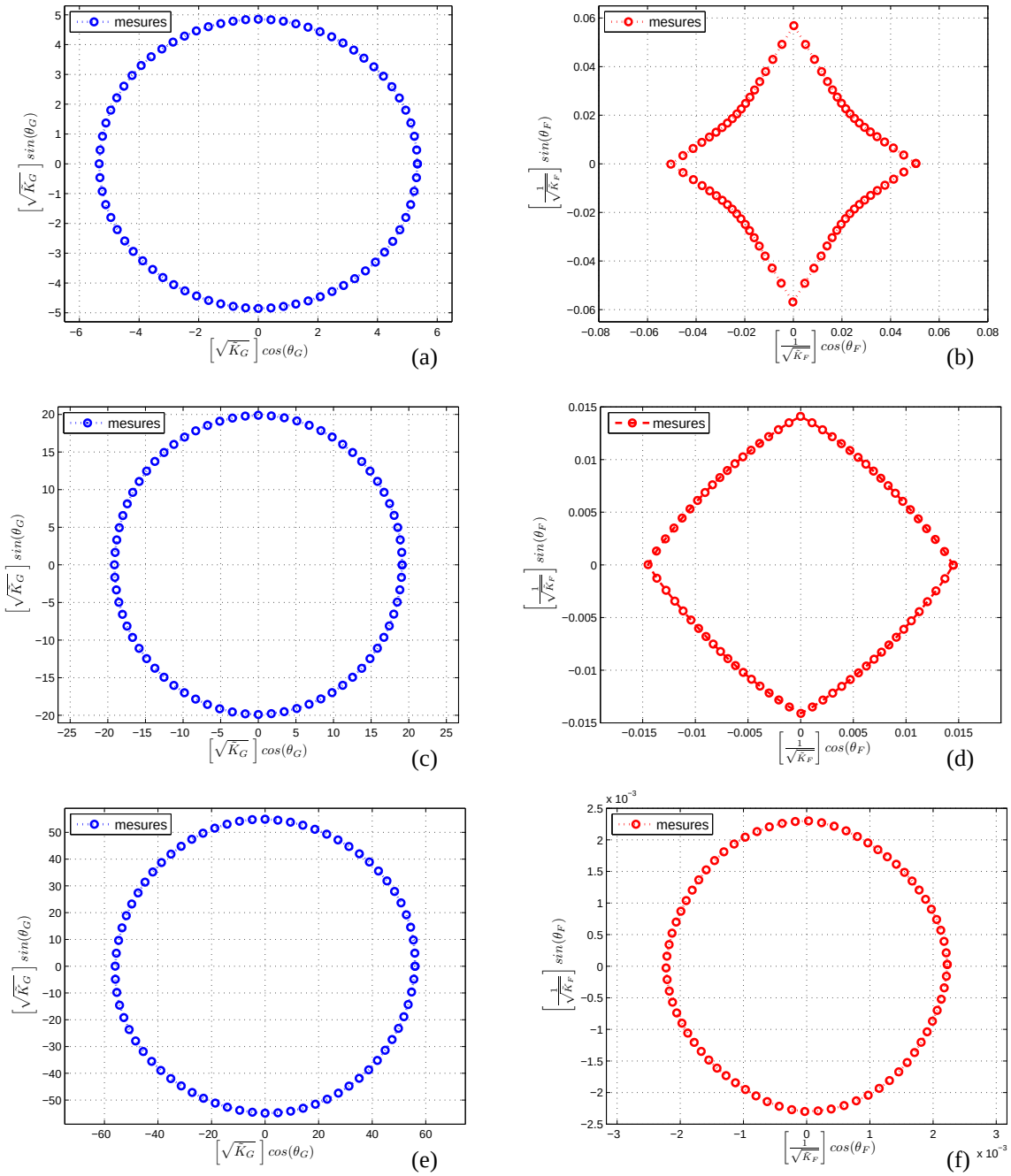


FIG. 10.8 – Résultats numériques obtenus pour les "ellipses inverses" de gradient et de flux, à $\kappa = +6$, pour les milieux binaires 2D isotropiquement distribués : (a) ellipse inverse de gradient et (b) de flux pour $\phi_F = 28$; (c) ellipse inverse de gradient et (d) de flux pour $\phi_F = 45$; (e) ellipse inverse de gradient et (f) de flux pour $\phi_F = 60$

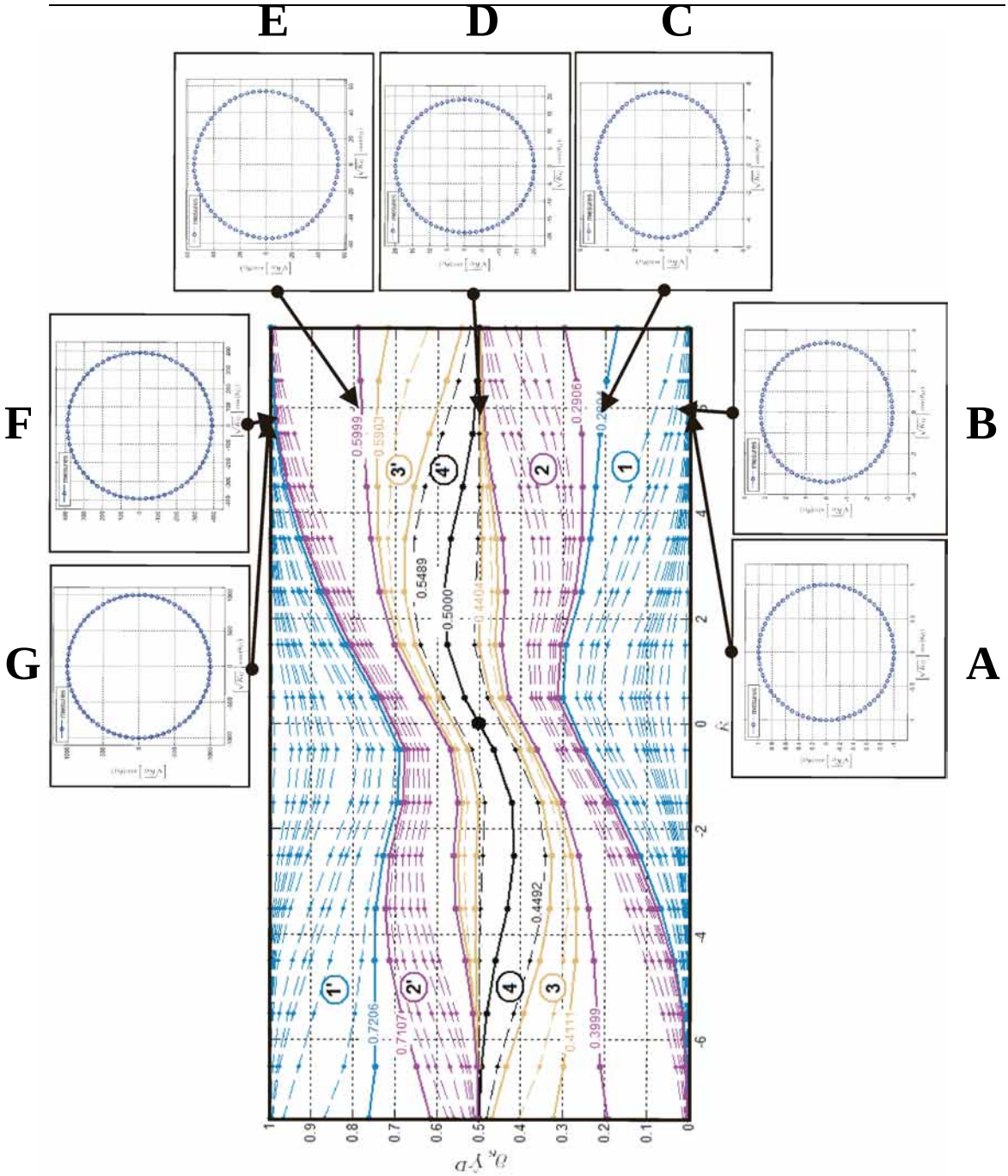


FIG. 10.9 – Ellipses inverses de gradient obtenues à $\kappa = +6$ pour le milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué. Pour : **A** : $\phi_F = 0.00$; **B** : $\phi_F = 0.10$; **C** : $\phi_F = 0.28$; **D** : $\phi_F = 0.45$; **E** : $\phi_F = 0.60$; **F** : $\phi_F = 0.75$ et **G** : $\phi_F = 1.00$. Ces ellipses sont reportées sur le diagramme comportemental qui représente la sensibilité du premier ordre au log-contraste du log décimal de la macro-K de Darcy

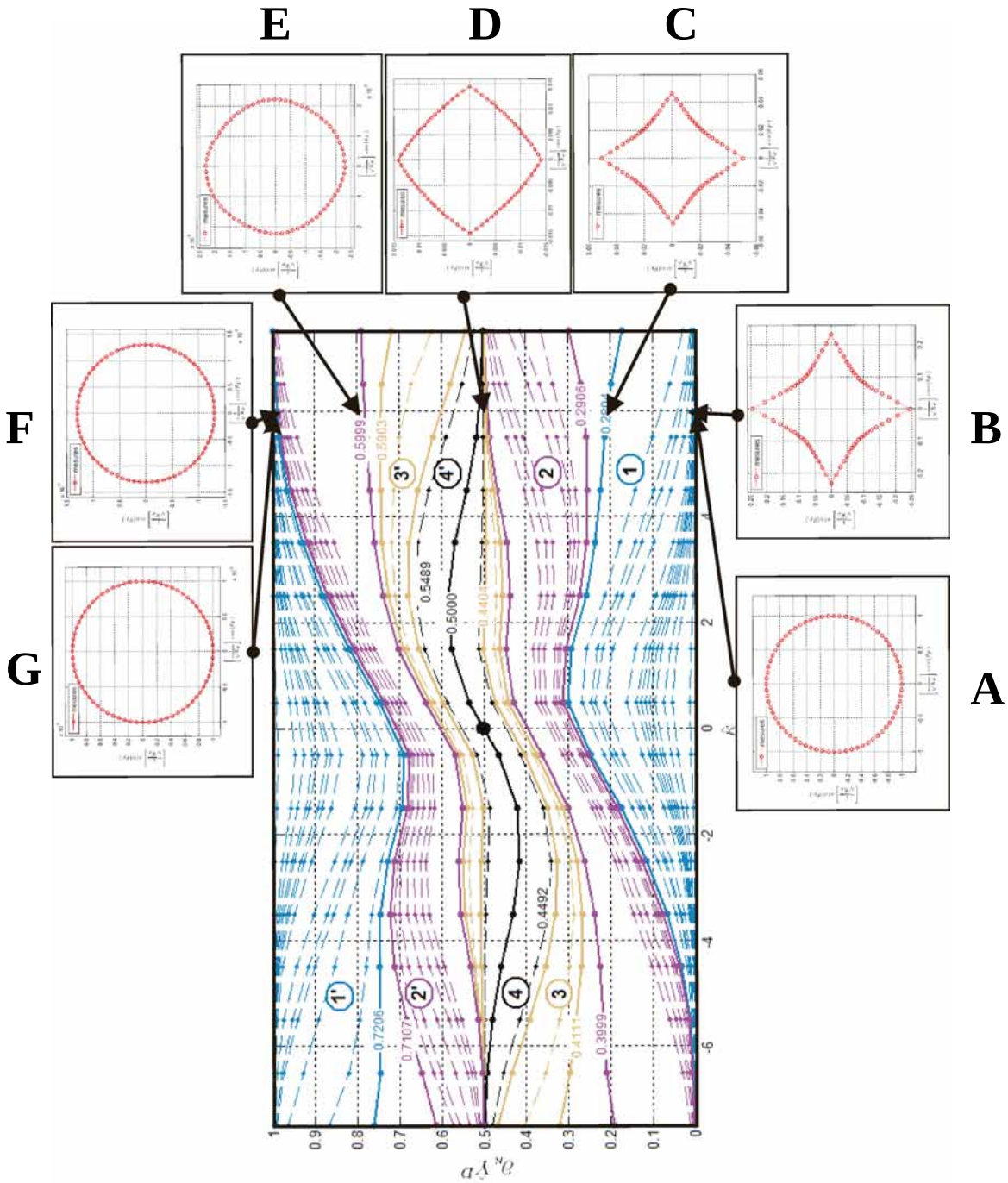


FIG. 10.10 – Ellipses inverses de flux obtenues à $\kappa = +6$ pour le milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué. Pour : **A** : $\phi_F = 0.00$; **B** : $\phi_F = 0.10$; **C** : $\phi_F = 0.28$; **D** : $\phi_F = 0.45$; **E** : $\phi_F = 0.60$; **F** : $\phi_F = 0.75$ et **G** : $\phi_F = 1.00$. Ces ellipses sont reportées sur le diagramme comportemental représentant la sensibilité du premier ordre au log-contraste du log décimal de la macro-K de Darcy.

Quatrième partie

Conclusion générale et ouvertures

Conclusion générale et ouvertures

Le présent document rend compte de l'étude et de la modélisation numérique des écoulements dans les aquifères très fissurés de type karst, milieux complexes et hétérogènes sur une gamme d'échelles importantes. Nous nous sommes consacrés à l'étude de la morphologie, de l'hydrodynamique et du changement d'échelle. Le changement d'échelle (upscaling) consiste à chercher des équations équivalentes régissant l'hydrodynamique à plus grande échelle, à travers des prises de moyennes plus ou moins sophistiquées. Par exemple, partant d'une loi de Darcy aux petites échelles, une loi d'écoulement à plus grande échelle pourra mettre en jeu une perméabilité macroscopique "moyenne" qui dépend de la structure géométrique et des perméabilités locales du milieu.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés aux caractéristiques morphologiques et hydrodynamiques intrinsèques aux aquifères karstiques par une étude bibliographique des différentes méthodes d'analyse de ces hydrosystèmes complexes. Les principales caractéristiques morphologiques et hydrodynamiques retenues sont :

- L'existence d'un réseau de drainage complexe 3D, plus ou moins développé, caractérisé par la présence de méso- et macro-morphologies spatialement organisées pour drainer efficacement l'aquifère considéré ;
- La dualité des processus d'infiltration : infiltration diffuse dans les volumes peu perméables, de la matrice poreuse, du sol, de l'épikarst ; concentrée au niveau des dolines, des pertes, des lapièz et des parties très perméables de l'épikarst.
- La différence des vitesses d'écoulement de l'eau dans ces aquifères : rapides dans la méso- et macro-morphologie, plus lente dans le réseau de fractures et encore plus lente dans la matrice poreuse finement fissurée environnante.

La considération de la méso- et la macro-morphologie des aquifères karstiques est essentielle pour réaliser une simulation aux grandes échelles des écoulements dans les massifs très fissurés de type karst et modéliser la réponse globale et locale de ces aquifères. Cependant, cette morphologie est très peu accessible par des mesures directes de terrain, et la compréhension de l'état de connectivités entre ces entités n'est pas aisée.

Face à cette difficulté, la modélisation des hydrosystèmes karstiques aussi que d'autres types de milieux poreux fissurés, peut prendre plusieurs formes :

- la modélisation temporelle des débits des sources,
- l'utilisation de modèles réservoirs conceptuels,
- la résolution tridimensionnelle d'Equations aux Dérivées Partielles (E.D.P.).

Si la première méthode permet de modéliser le fonctionnement global d'un aquifère karstique et peut renseigner sur l'état du stock en eaux, la non-linéarité et la non stationnarité des écoulements peuvent limiter la portée de ce type de modèle. De plus, ce type d'approche temporelle ne permet pas d'accéder à une représentation de la structure spatiale du massif, ou du moins, seulement de façon très indirecte.

La seconde méthodologie de modélisation qui utilise des modèles réservoirs conceptuels se retrouve confrontée aux mêmes problèmes, notamment pour le calage des paramètres qui caractérisent les réservoirs conceptuels et les liens entre eux.
Quant à la procédure de modélisation des aquifères karstiques par la résolution d'E.D.P. multidimensionnelles d'écoulement, elle nécessite la création d'un champ distribué des paramètres hydrodynamiques et hydrauliques, très "gourmand" en données de terrain, du moins a priori. L'utilisation dans les E.D.P. de modèles géomorphologiques à bases statistiques peut aider à mettre au point des modèles distribués plus parcimonieux. De plus, pour cette modélisation, il est aussi nécessaire d'utiliser une loi comportementale adaptée à ces aquifères aux comportements hydrauliques différents.

Dans le cadre de cette étude, nous avons préféré la dernière approche de modélisation. Cette approche possède l'immense avantage d'avoir une "réalité physique" apportée par le champ de paramètres distribués. De plus, elle permet de modéliser la réponse globale et locale de l'aquifère, ce qui peut permettre une meilleure gestion de la ressource en eau de ces entités morphologiques complexes.

La seconde partie du document à été consacrée à la présentation des outils numériques utilisés et développés pour mener à bien cette modélisation numérique des écoulements dans les aquifères karstiques par résolution d'E.D.P.
Nous avons présenté le code numérique BigFlow (Ababou 1988 [5]), utilisé dans cette étude, ainsi que le modèle de perte de charge local de Darcy/Ward-Forchheimer, linéaire/quadratique, implémenté dans ce code numérique. L'avantage de ce code numérique Volumes Finis aux Différences Finies est de permettre une modélisation implicite et interne du couplage entre différentes entités de comportement et cinétique différents, par la résolution d'une seule "équation générique" mise sous la forme de l'équation de Richards généralisée (avec loi de Darcy généralisée). Une limite de l'utilisation de la formulation du modèle équationnel implémenté dans BigFow est de considérer que la phase air est directement connectée à l'atmosphère (équation de Richards généralisée). La phase air et la phase eau n'interagissent donc pas. Cependant cette l'interaction pourrait être envisagée en prenant appui sur les travaux réalisés par Al Bitar, 2006 [8] avec BigFlow, où l'auteur modélise en 3D l'intéraction et le déplacement relative d'un biseau d'eau salée dans les aquifères côtiers par une approche "interface abrupte".
Quant à l'obtention du champ de paramètres hydrauliques et hydrodynamiques nécessaire à cette approche, différents outils numériques ont été développés.

Nous pouvons distinguer :

- un générateur statistiques d'objets booléens comprenant différentes classes d'objets en relation avec les différentes entités morphologiques observables ;
- une procédure permettant de coupler la répartition de ces objets avec des champs aléatoires continus auto-corrélés,

- une procédure de seuillage paramétrique de ces champs continus,
- un algorithme itératif préliminaire d'hydro-morphogenèse permettant localement le couplage entre la perméabilité et les écoulements pour comprendre et appréhender les phénomènes de karstogenèse.

L'objectif était de disposer des outils numériques morphologiques et hydrodynamiques les plus modulables et robustes possible pouvant faire face à la complexité des morphologies observables. Cependant, les outils morphologiques développés doivent être améliorés en y adjoignant des procédures de calage des paramètres distribués, par exemple par recuit simulé (simlated annealing), et de génération hiérarchique des objets discrets. De plus, le modèle d'hydro-morphogenèse proposé doit être complexifié pour pouvoir considérer notamment la précipitation de carbonates dans les zones à faible nombre de Reynolds. Mais surtout, ces différents outils et procédures ne pourront pleinement s'exprimer que si les champs d'écoulements et les débits simulés sont comparés avec des données de débits de sources réelles ou de données piézométriques pour conditionner/contraindre la morphologie utilisée (problème inverse). Notez aussi que l'homogénénisation des aquifères karstiques pourrait aussi être envisageable en utilisant les données de débit des sources.

Dans la dernière partie, nous nous sommes particulièrement attachés à la l'homogénéisation numérique pour le "second changement d'échelle". En effet, il est illusoire de vouloir représenter de manière discrète le détail de l'ensemble des discontinuités pour la modélisation aux grandes échelles des écoulements dans les aquifères karstiques. Une distribution des paramètres effectifs du réservoir eau est nécessaire. L'obtention de ces paramètres doit être réalisée à une échelle ou une gamme d'échelles donnée en utilisant le modèle local de perte de charge approprié. Au cours de cette partie, nous nous sommes interrogés sur une loi globale adéquate permettant de réaliser un changement d'échelle dans les milieux poreux très fissurés valable pour une gamme de nombre de Reynolds importante.

Dans le premier temps de l'étude, nous avons pris le parti d'étudier le problème en utilisant le modèle local de perte de charge linéaire de Darcy. Cette partie de l'étude correspond à la résolution numérique de la partie linéaire du modèle de perte de charge locale de Darcy/Ward-Forhheimmer (e.i. à faible nombre de Reynolds). Cette étude a surtout porté sur des milieux de géométrie simple comme des milieux binaires stratifiés, binaires purement aléatoires isotropes 2D et 3D et de milieux fissurés poissonniens "types" 2D ($MF1_{2D}$ et $MF1_{2D}$) et 3D ($MF1_{3D}$ et $MF1_{3D}$). Les investigations numériques réalisées, en utilisant des conditions aux limites de type perméamétriques, ont mis en évidence la relation entre la macro-K Darcy et les propriétés du milieu (fraction de fissures, contraste matrice/fissure) ainsi que les phénomènes de quasi-percolation et de percolation. L'existence de trois "fractions critiques de transition de phase" $\hat{p}_{c_1}$, $\hat{p}_{c_2}$, et $\hat{p}_{c_3}$ a été mise en évidence, pour ces types de milieux binaires. Un lien étroit unis-

sant ces trois fractions critiques a été obtenu. Ces fractions jouent un rôle clef dans le comportement de la macro-K de Darcy et délimitent des secteurs de comportement bien définis de cette quantité macroscopique. Pour d'autres milieux statistiques, des études complémentaires devront être réalisées afin de permettre la compréhension des liens existants entre les échelles de corrélation des milieux statistiques étudiés et ces fractions particulières. Dans cet exposé, la possibilité de réaliser le changement d'échelle en utilisant des fonctions ondelettes a été rapidement évoquée. Cependant, cette problématique mérite selon nous d'être plus approfondie. L'utilisation de réseaux neuronaux de fonctions ondelettes devrait notamment être étudiée pour réaliser le changement d'échelle pour des milieux binaires dans un premier temps.

Les expérimentations numériques réalisées ont ensuite portées dans un second temps sur l'homogénéisation en utilisant la loi locale de perte de charge de DWF (Darcy/Ward-Forchheimer). Le but de cette partie fut d'étudier la possibilité d'utiliser une seule loi globale pour réaliser l'homogénéisation numérique des milieux très fissurés et proposer une formulation analytique de cette loi. Celle-ci prend en compte les effets locaux d'accélération inertielle dans l'ensemble du massif (notamment dans le système de fissures). Ces effets étaient négligés dans la loi de Darcy standard. Dans ce but, des simulations numériques directes ont été réalisées en utilisant le modèle local de perte de charge linéaire/quadratique. Ces expériences numériques directes ont été menées, comme précédemment en utilisant des conditions aux limites de type perméamétrique, sur une large gamme de nombre de Reynolds de Darcy/Ward-Forchheimer (Re(DWF) $\in [0.001 ; 1000]$).
Les résultats numériques ont ensuite été optimisés en utilisant deux modèles macroscopiques distincts : l'un identique au modèle local et un autre plus "flexible" dit "linéaire/puissance". Pour cette analyse, deux procédures d'optimisation ont été utilisées : la première est directe et la seconde séquentielle en utilisant une précontrainte "Darcy". L'optimisation numérique réalisée a montré une bonne adéquation avec le modèle analytique "linéaire/puissance". L'utilisation d'une optimisation séquentielle à précontrainte "Darcy" augmente l'accord entre les solutions numériques et le modèle analytique proposé. Ce dernier point nous conforte dans l'idée d'utiliser une loi globale pour réaliser le changement d'échelle des massifs très fissurés.
Cette formulation "linéaire/puissance" proposée est particulièrement adaptée pour les milieux binaires stratifiés et plus généralement pour les milieux binaires "pleinement" percolants isotropiquement distribués 2D et 3D à forts log-contraste entre la phase inclusion et matricielle. Cependant pour des milieux non percolants isotropiquement distribués, cette formulation doit être améliorée notamment pour une gamme de nombres de Reynolds se situant entre un régime laminaire et inertiel pleinement développé. Nous pouvons tenter d'expliquer ceci par une considération simple. Cette considération consiste à dire que les pertes de charges inertielles sont moins importantes dans ce type de milieu "mal connecté" et que le modèle "linéaire-puissance" considéré les

sur-estime. Des simulations numériques supplémentaires sont nécessaires pour confirmer ces premiers résultats. Une formulation "linéaire-quadratique-cubique" peut être envisageable. Des simulations numériques ont aussi été réalisées sur les deux milieux fissurés 3D, $MF1_{3D}$ et $MF2_{3D}$, et montrent un ajustement moins bon avec le modèle analytique proposé pour une gamme de nombres de Reynolds se situant entre le régime laminaire et inertiel pleinement développé. Pour de tels milieux, une autre procédure d'analyse et de dépouillement doit être mise en place. Noter que l'approche précédente nécessiterait un plus grand nombre d'expériences numériques. Une loi macro-échelle de forme darcienne avec une pseudo-perméabilité fonction du Reynolds, est éventuellement à identifier de manière non-paramétrique.

Enfin, nous avons reconsidéré le problème du changement d'échelle en tenant compte du caractère anisotrope de la loi macroscopique d'écoulement. L'upscaling numérique a été réalisé grâce à une procédure numérique d'immersion dans un "bain" à gradient hydraulique uniforme. Les résultats ont été dépouillés par calcul des perméabilités directionnelles (celles-ci sont des ellipses dans le cas tensoriel). Cette procédure utilise des conditions aux limites linéairement distribuées (condition aux limites "d'immersion") sur les faces du domaine d'étude. Ici, nous avons développé le modèle analytique et réalisé des expérimentations numériques de ce type uniquement pour des milieux binaires 2D et des régimes d'écoulement darciens. Le passage du 2D darcien ou 3D darcien ne devrait pas demander beaucoup d'efforts supplémentaires. Cependant, pour la macro-K de Darcy/Ward-Frochheimer le pas à franchir semble plus grand. Les résultats des expériences numériques directionnelles effectuées en condition "d'immersion" sur des massifs 2D indiquent qu'il est possible d'accéder à deux types d'information :

- la macro-perméabilité se comporte-t-elle de façon tensorielle ? (la réponse est positive si les macro-K directionnelles s'ajustent bien avec une ellipse) ;
- si le comportement est tensoriel, on accède ainsi facilement aux différentes composantes du tenseur des conductivités hydrauliques de milieux poreux très hétérogènes, au moins pour les milieux et les log-contrastes testés dans cette étude.

Cependant, les expérimentations numériques réalisées, sur des milieux multicouches, montrent que l'application de ce type de condition aux limites surestime quelque peu la moyenne arithmétique des conductivités hydrauliques locales du milieu pour un écoulement parallèle à la stratification et surestime de manière importante la moyenne harmonique des conductivités hydrauliques locales pour un écoulement ayant lieu perpendiculairement à la stratification. Malgré tout, l'application de ce type de conditions aux limites semble plus "naturel" et contraint moins les flux (par opposition aux conditions aux limites de type perméamétrique) ce qui permet justement d'obtenir un grand nombre d'informations "macro-échelles" sur la nature de l'anisotropie hydraulique du milieu (qu'elle soit de type tensoriel ou non) et notamment, sur la relation entre effets de percolation et anisotropie (analyse des "ellipses inverses").

Au cours de ce travail, nous avons essayé d'aborder une problématique assez ambitieuse et de répondre à différents problèmes concernant la modélisation aux grandes échelles des écoulements dans les massifs très fissurés. Ce travail pour une grande partie prospective a porté sur plusieurs points :

- la mise au point du code MatFrac3D et de ces différentes modules, Fig. 3.2, pour la modélisation morphologique et une analyse topologique et hydraulique de milieux 2D et 3D hétérogènes ;
- l'étude de méthodologies numériques pour l'upscaling darcien et inertiel ;
- l'analyse des phénomènes de percolation et de quasi-percolation.

Les perspectives et extensions possibles de ce travail peuvent être :

- l'étude et la modélisation transitoires des écoulements dans un karst 3D partiellement saturé et la modélisation des sources karstiques, comme le travail entamé dans la section 6.2 ;
- les applications potentielles de ce travail aux systèmes poreux fissurés autres que les karsts ;
- la modélisation et l'analyse des effets air/eau et les problèmes de dessiccation en milieu fissuré ;
- les comparaisons avec les macro-K obtenues par d'autres théories, par exemple dans le cas anisotrope (comme la solution "Self-Consistent" anisotrope de Poley 1988 [110], la solution Power Averaging anistrope, etc) ;
- les applications/extensions potentielles des procédures morphologiques mises au point, pour divers types de milieux 3D.
- les applications des nouvelles propriétés rencontrées sur les milieux binaires par l'étude des phénomènes de percolation et de quasi-percolation à d'autres systèmes contenant un grand nombre d'éléments et à certains processus industriels.

Cinquième partie

Annexes

Algorithme de recherche topologique

MatFracPerco :

discrimination et agglomération d'objets discrétisés

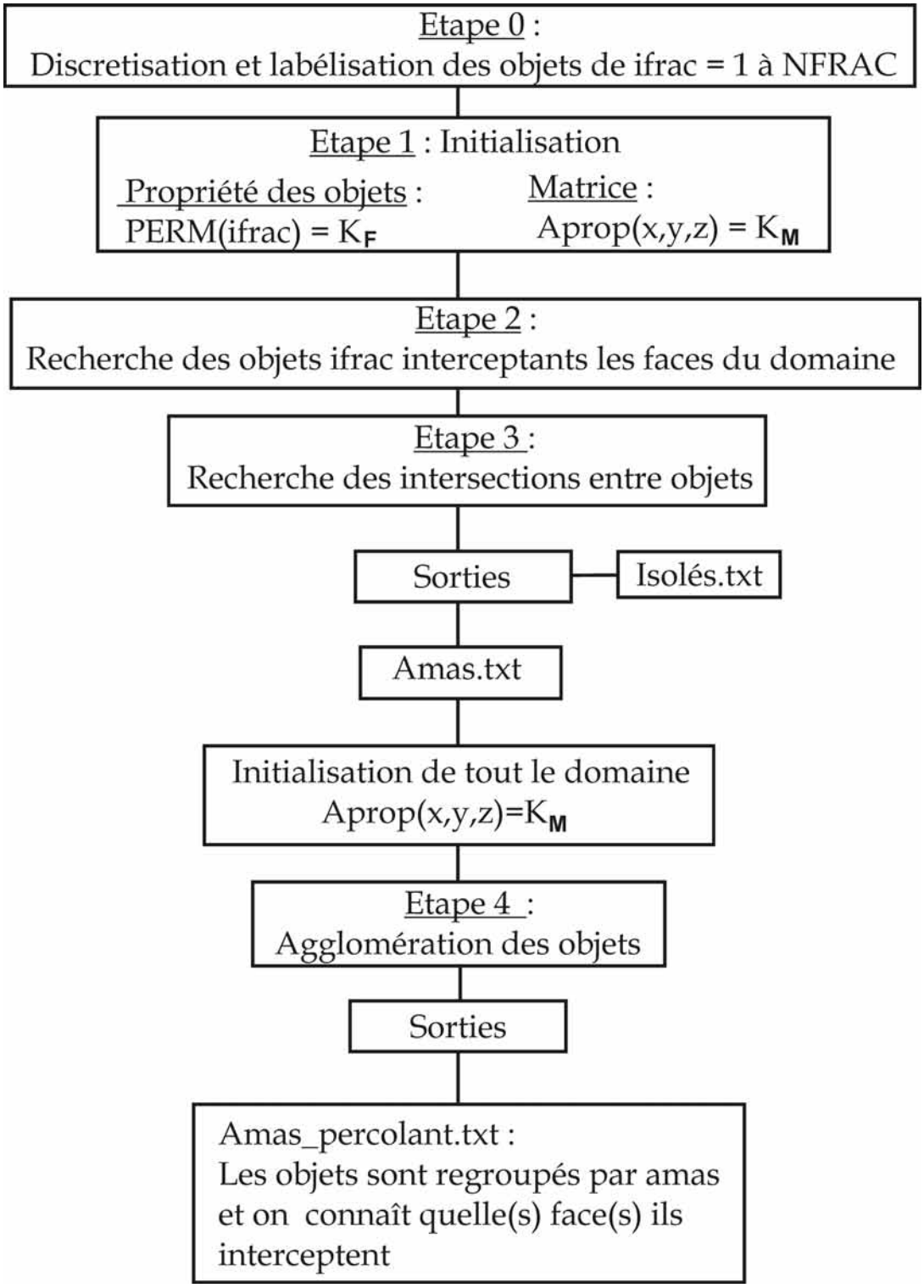


FIG. 10.11 – Diagramme générale de l'algorithme utilisé par *MatFracPerco*.

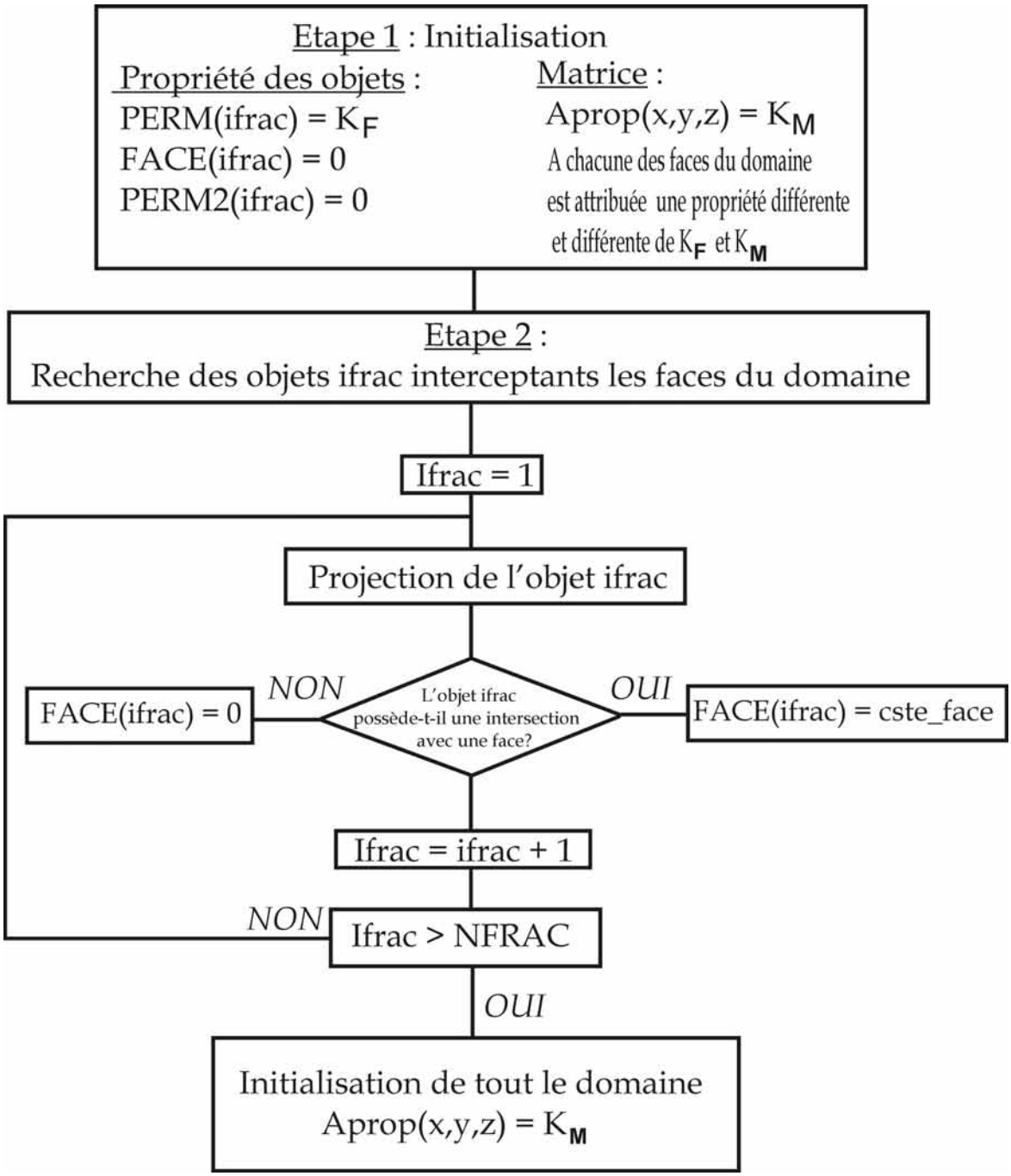


FIG. 10.12 – Détails de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de l'étape 1 et 2 de l'algorithme.

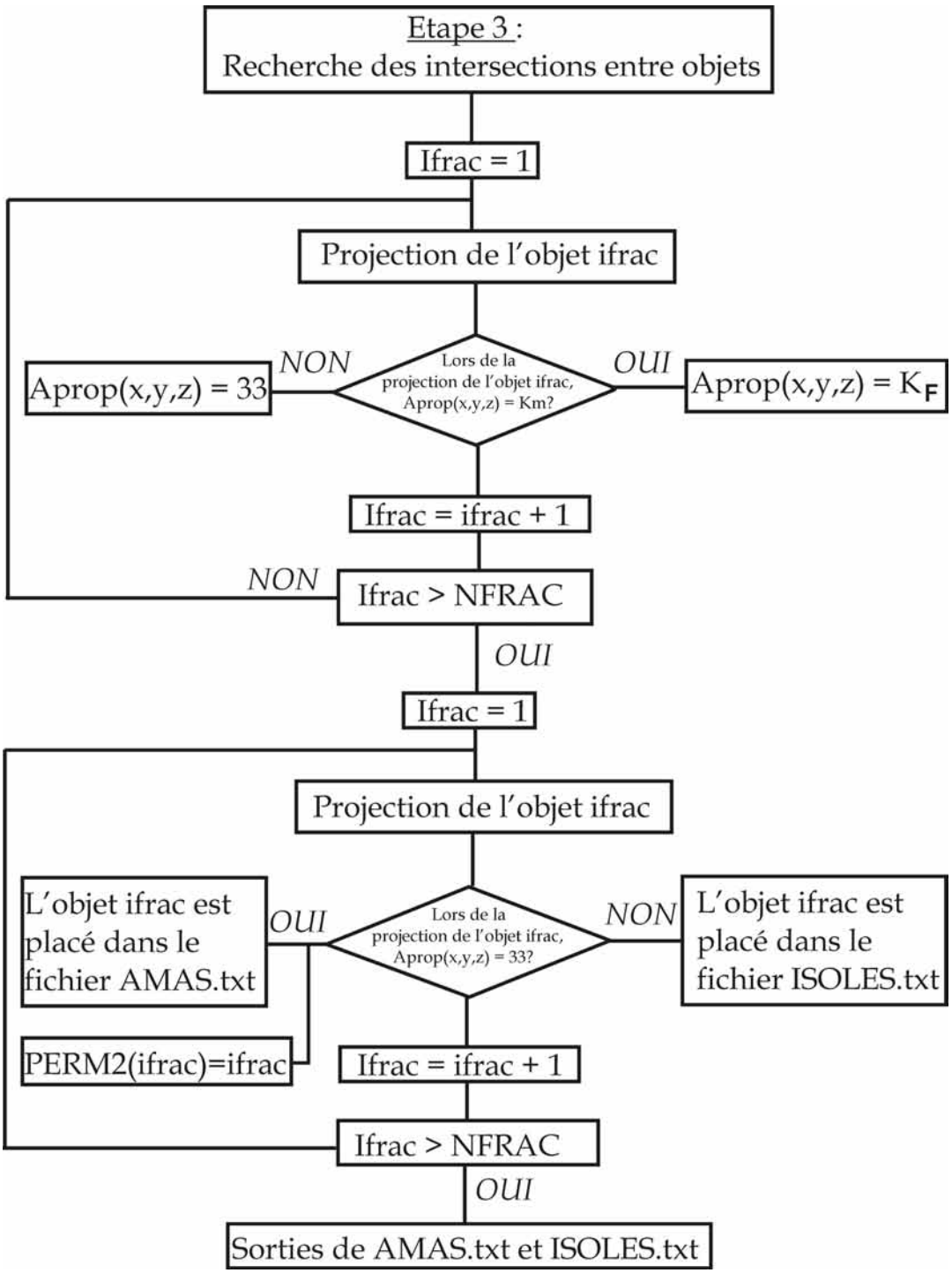


FIG. 10.13 – Détails de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de l'étape 3 de l'algorithme.

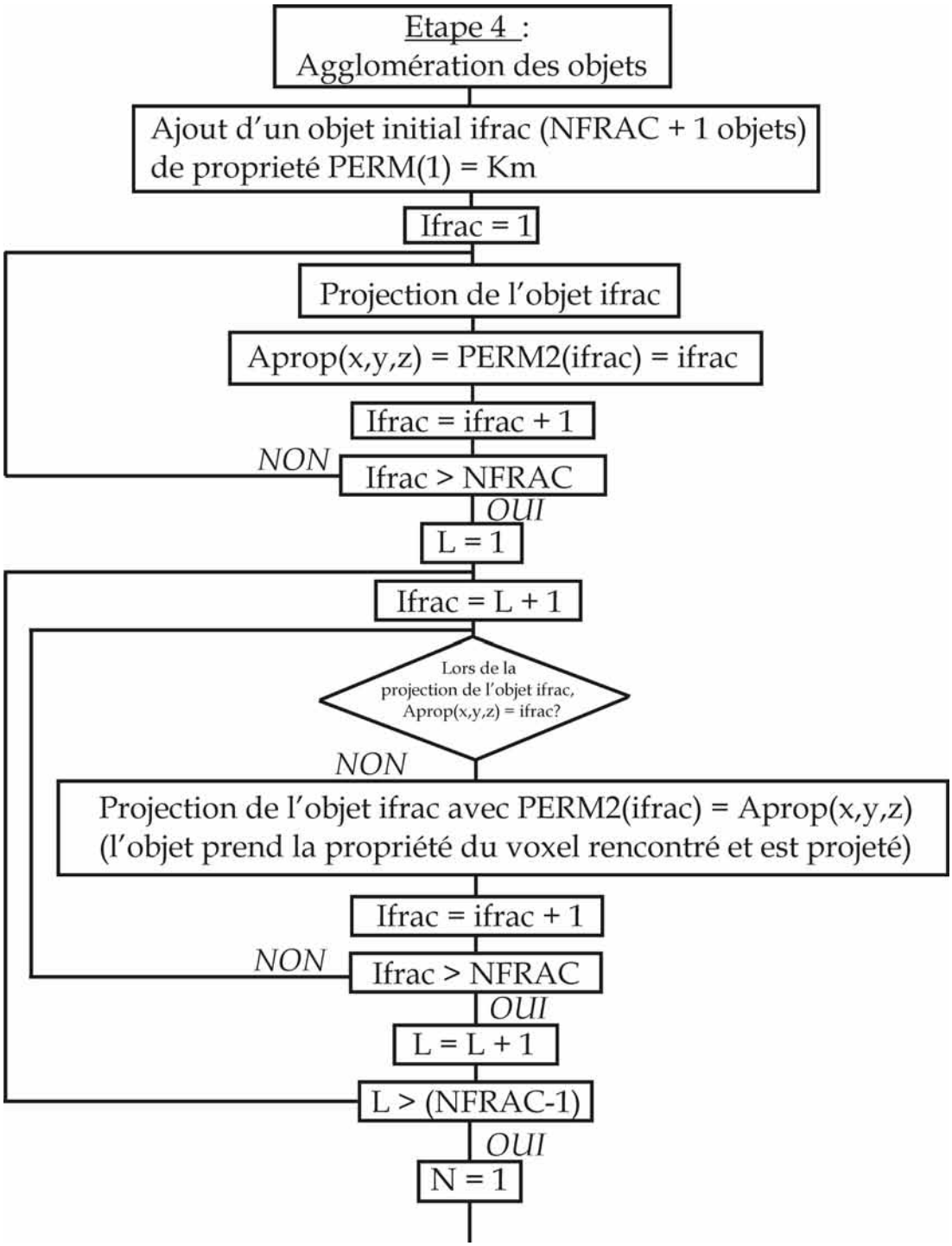


FIG. 10.14 – Détail de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de la sous étape 1 de l'étape 4 de l'algorithme.

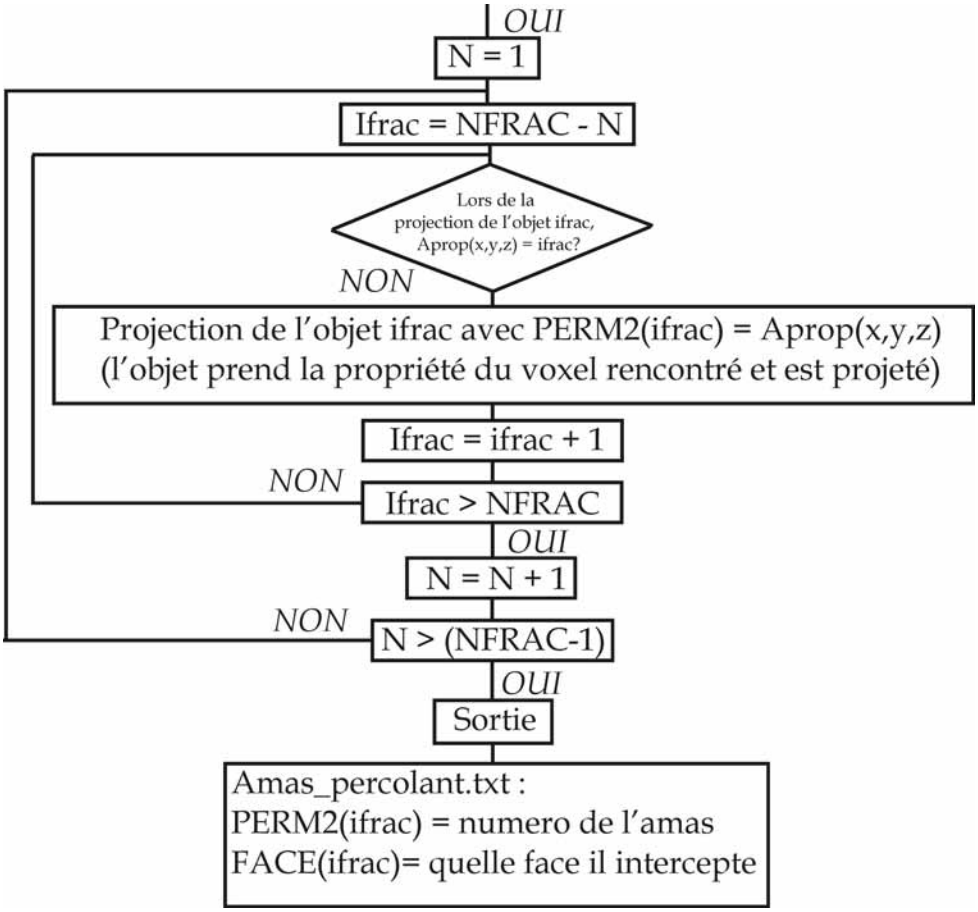


FIG. 10.15 – Détail de l'analyse morphologique réalisée par *MatFracPerco* au court de la sous étape 2 de l'étape 4 de l'algorithme.

Analyse des coefficients de sensibilité de la macro-K de Darcy :

- *sensibilité du second orde à* ϕ_F,

- *sensibilité du second orde au log-contraste,* κ,

- *sous-zones comportementales*

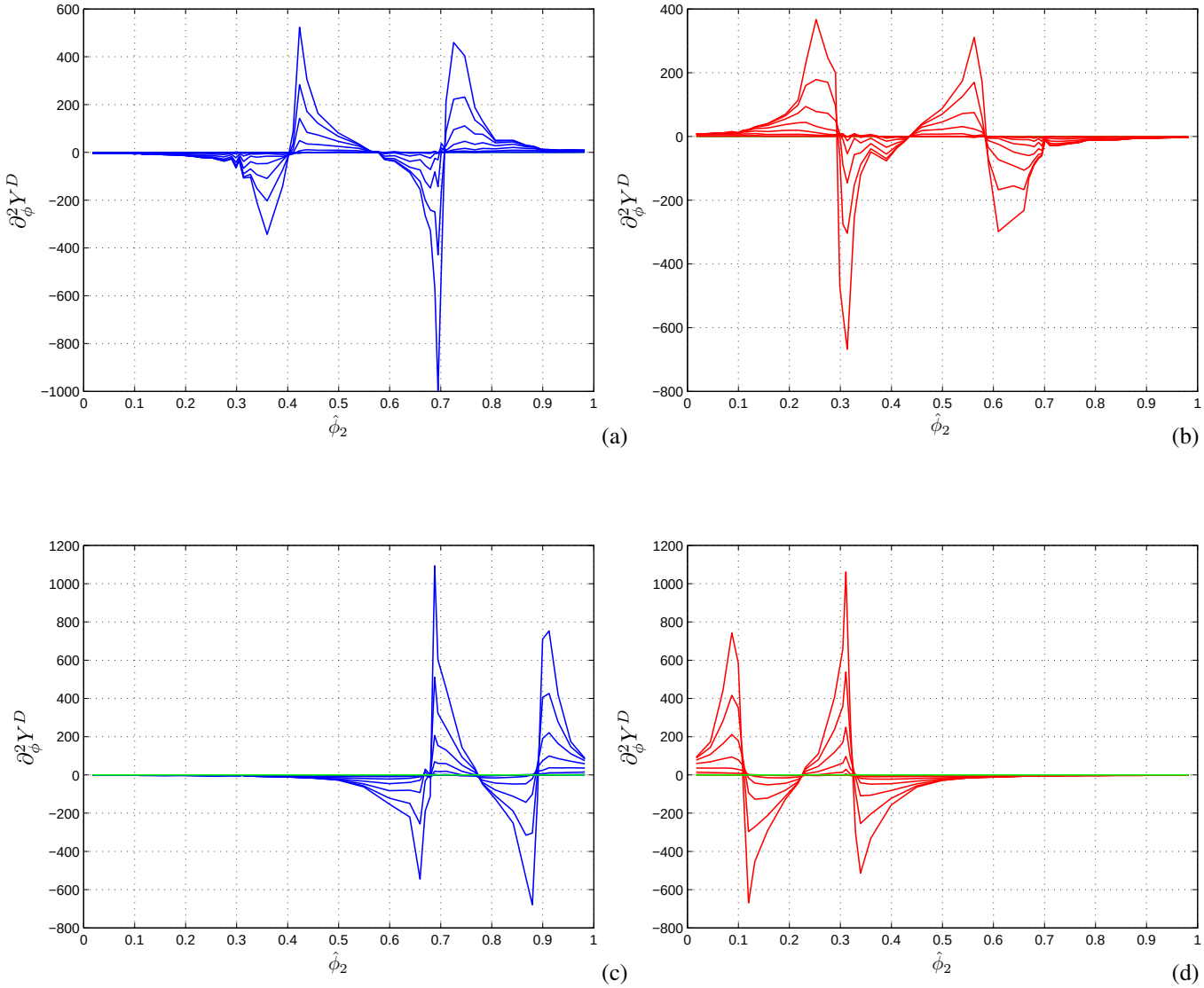


FIG. 10.16 – Evolutions de $\partial^2_{\phi_F} \hat{Y}^D$ pour différentes fractions volumiques en inclusions, ϕ_F, à log-contrastes κ fixés : (a) et (b) pour un milieu binaire 2D purement aléatoire isotropiquement distribué respectivement à $\kappa \in$ [-8 0] et à $\kappa \in$ [0 +8] ; et (c) et (d) pour un milieu binaire 3D purement aléatoire isotropiquement distribué respectivement à $\kappa \in$ [-8 0] et à $\kappa \in$ [0 +8].

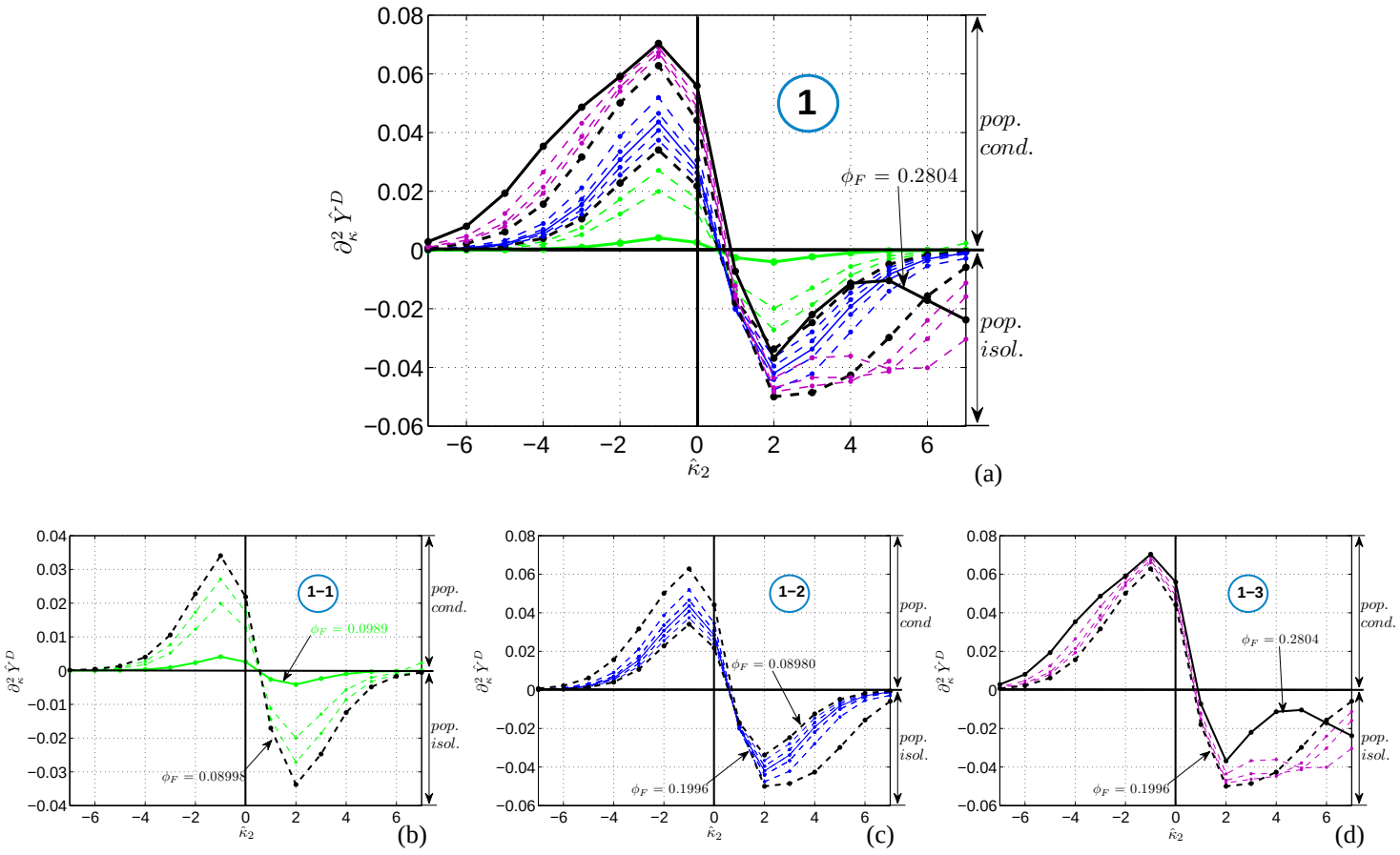


FIG. 10.17 – Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous-zones comportementales (b) 1-1, (c) 1-2 et (d) 1-3 repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la macro-K de Darcy dans la zone 1 : (a). Les fractions qui délimitent ces sous-zones correspondent à peu près aux fractions critiques de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $\hat{p}_{c_1}$ et $\hat{p}_{c_2}$.

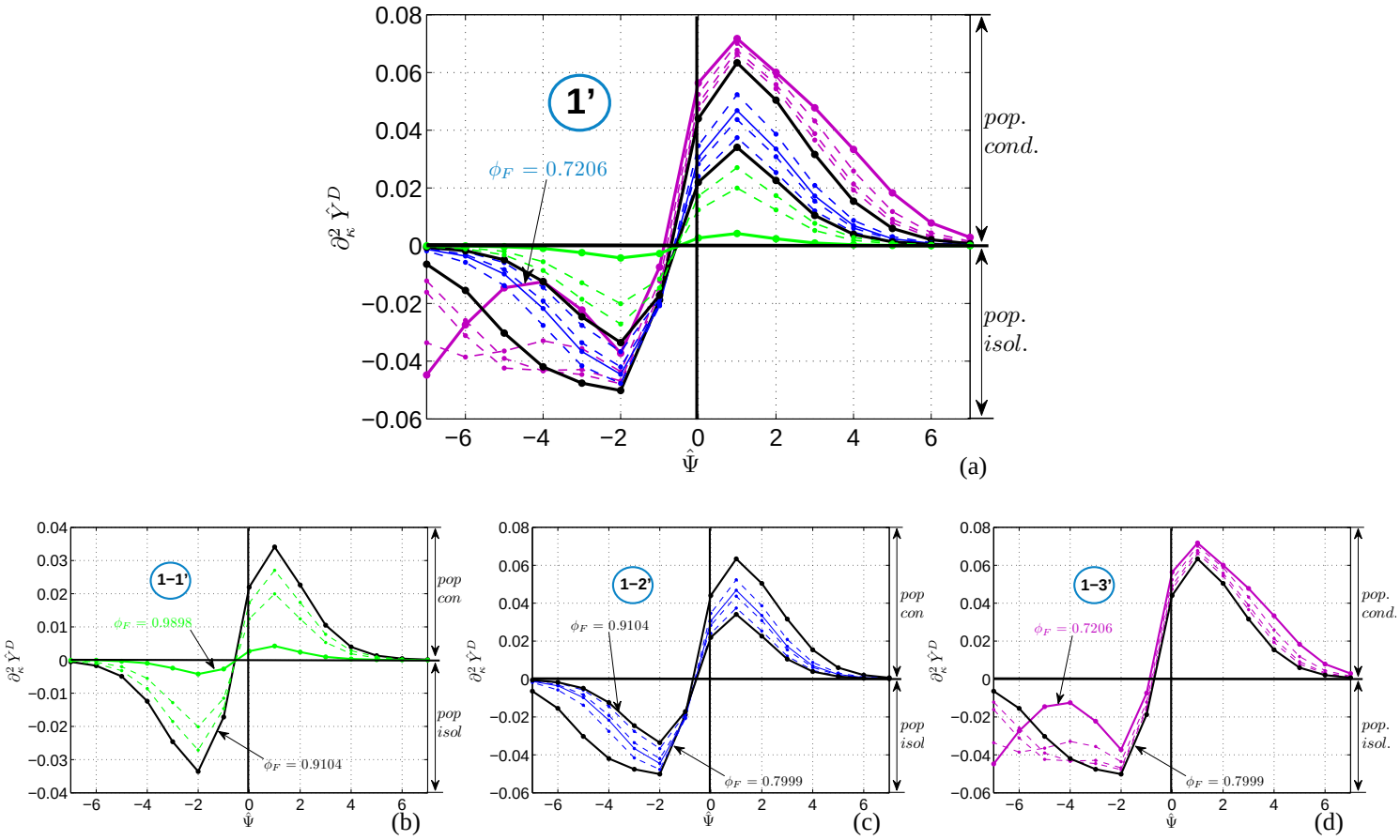


FIG. 10.18 – Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (b) 1-1' ; (c) 1-2' ; (d) 1-3' repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 1' (a). Les fractions qui délimitent ces sous-zones correspondent à peu près aux fractions critiques de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $1 - \hat{p}_{c_1}$ et $1 - \hat{p}_{c_2}$

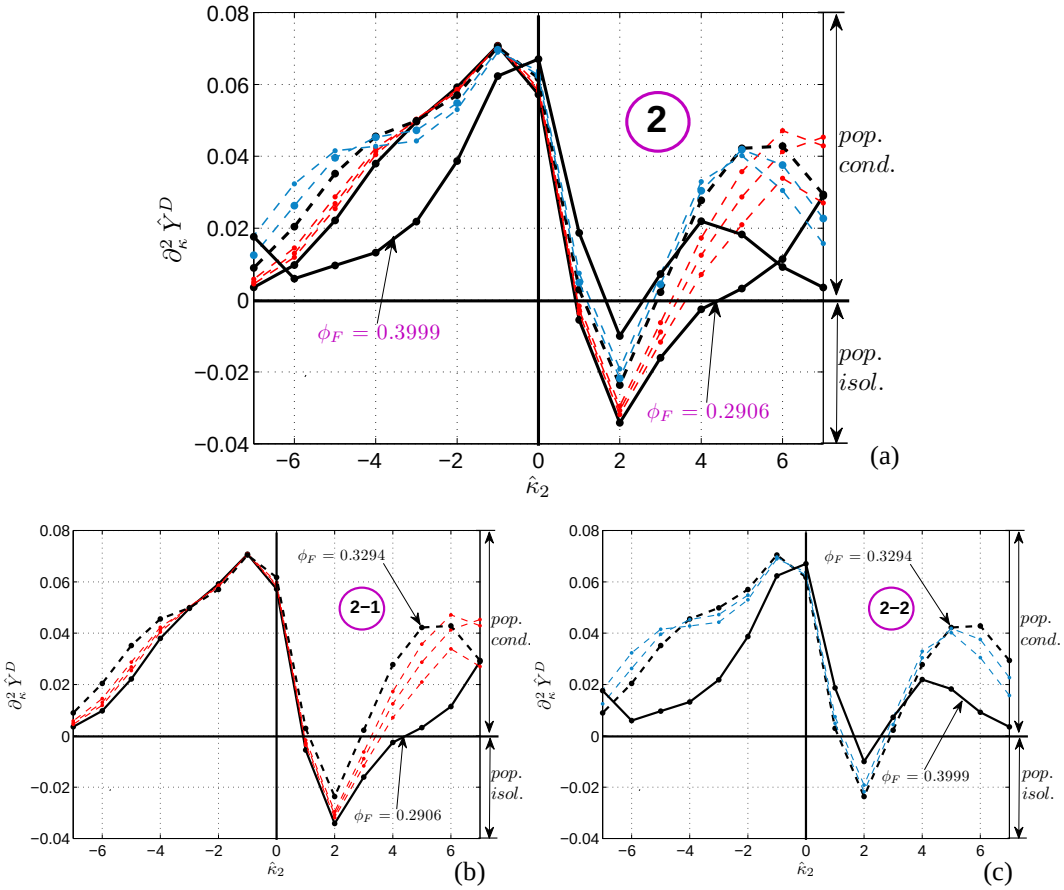


FIG. 10.19 – Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous-zones comportementales (b) 2-1 et (c) 2-2 repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 2 (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $\hat{p}_{c_3}$.

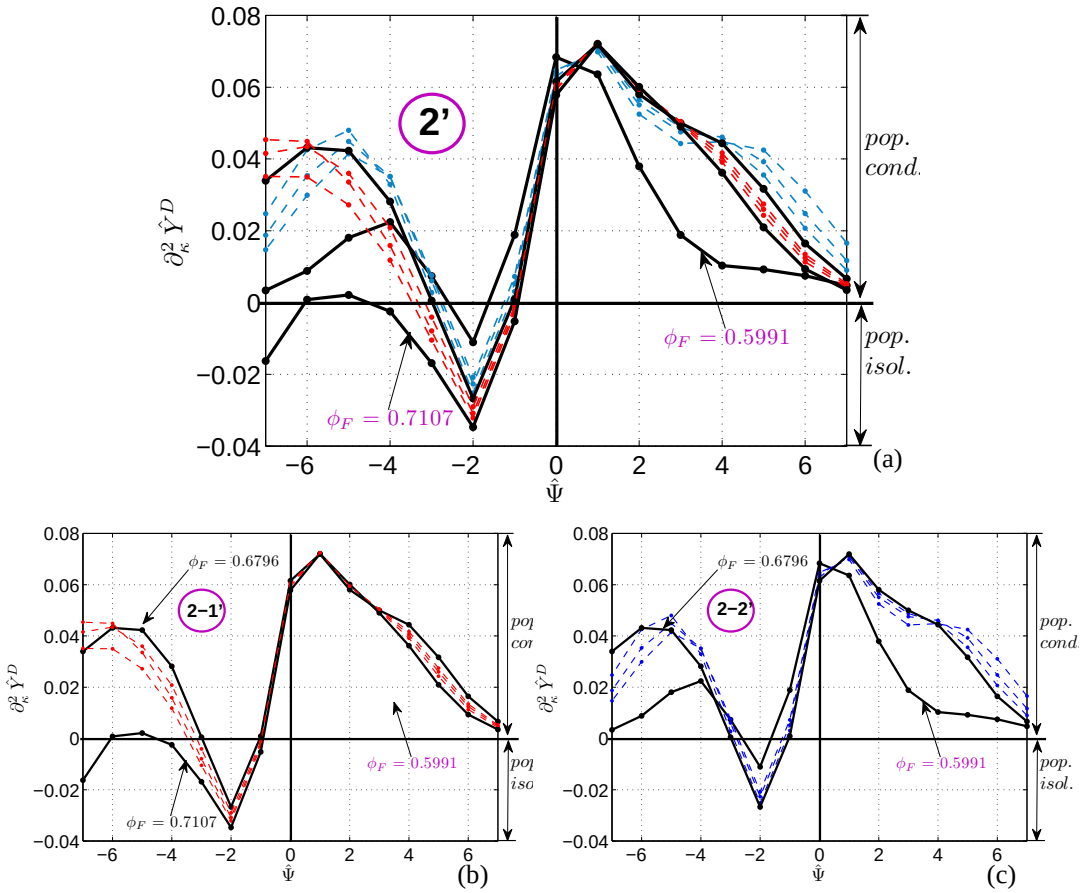


FIG. 10.20 – Pour le milieu binaire 2D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (b) 2-1' et (c) 2-2' repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 2' (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 3D purement aléatoire $1 - \hat{p}_{c_3}$.

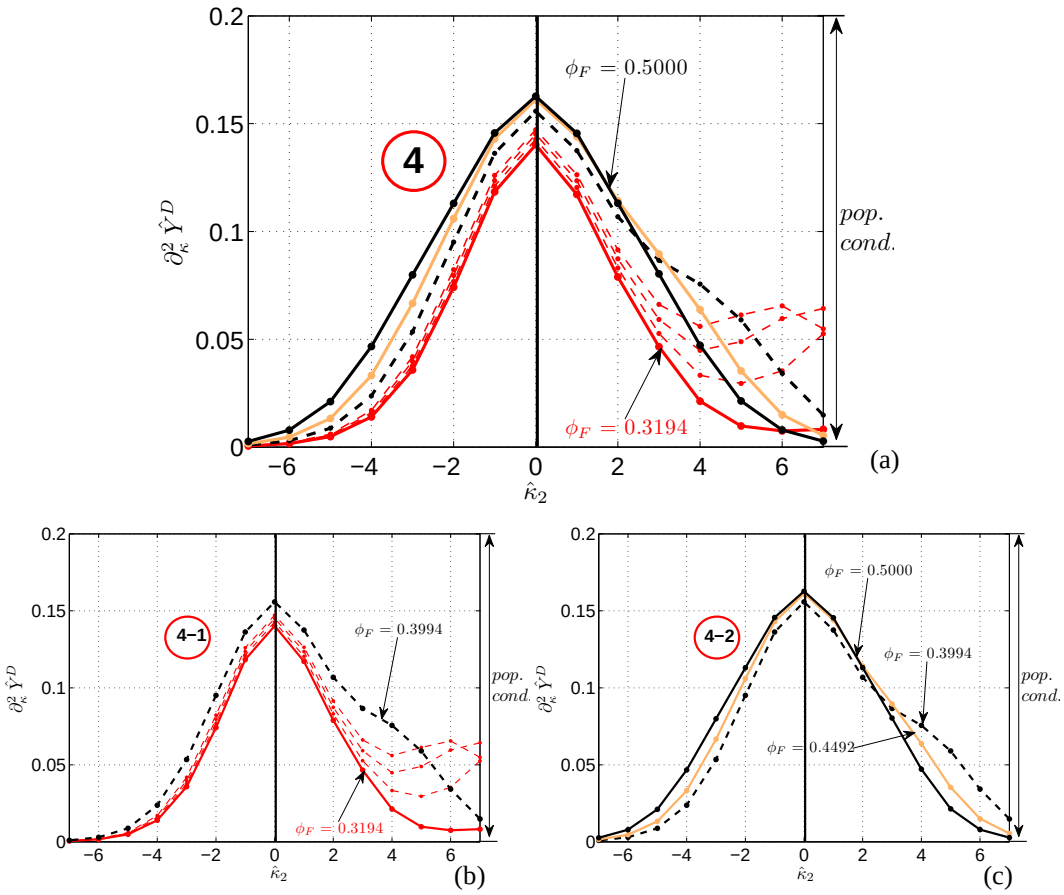


FIG. 10.21 – Pour le milieu binaire 3D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (c) 4-1 et (d) 4-2 repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 4 (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 2D purement aléatoire $\hat{p}_{c_2}$.

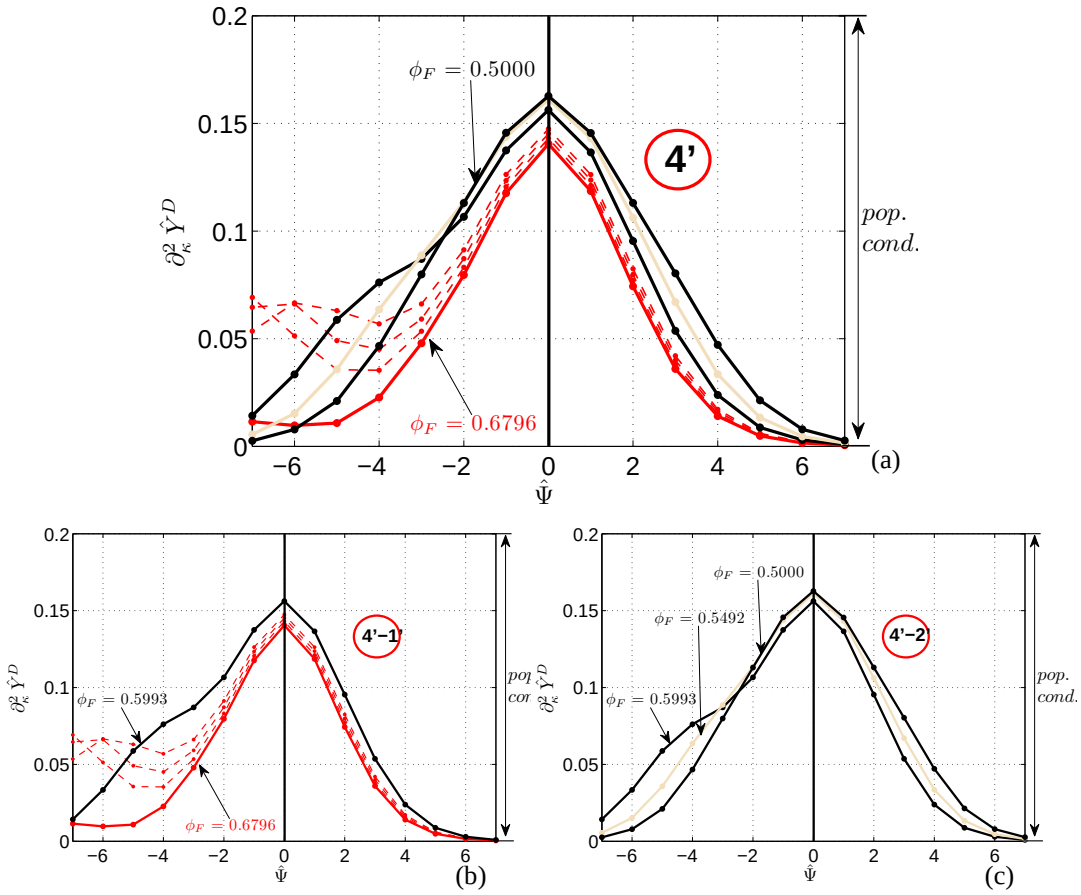


FIG. 10.22 – Pour le milieu binaire 3D binaire purement aléatoire, sous zones-comportementales (c) 4-1' et (d) 4-2' repérées par l'étude de la sensibilité d'ordre 2 de la log-conductivité hydraulique de Darcy dans la zone 4' (a). La fraction qui délimite ces sous-zones correspond à peu près à la fraction critique de transition de phase du milieu binaire 2D purement aléatoire $1 - \hat{p}_{c_2}$.

Analyse des "ellipses inverses"

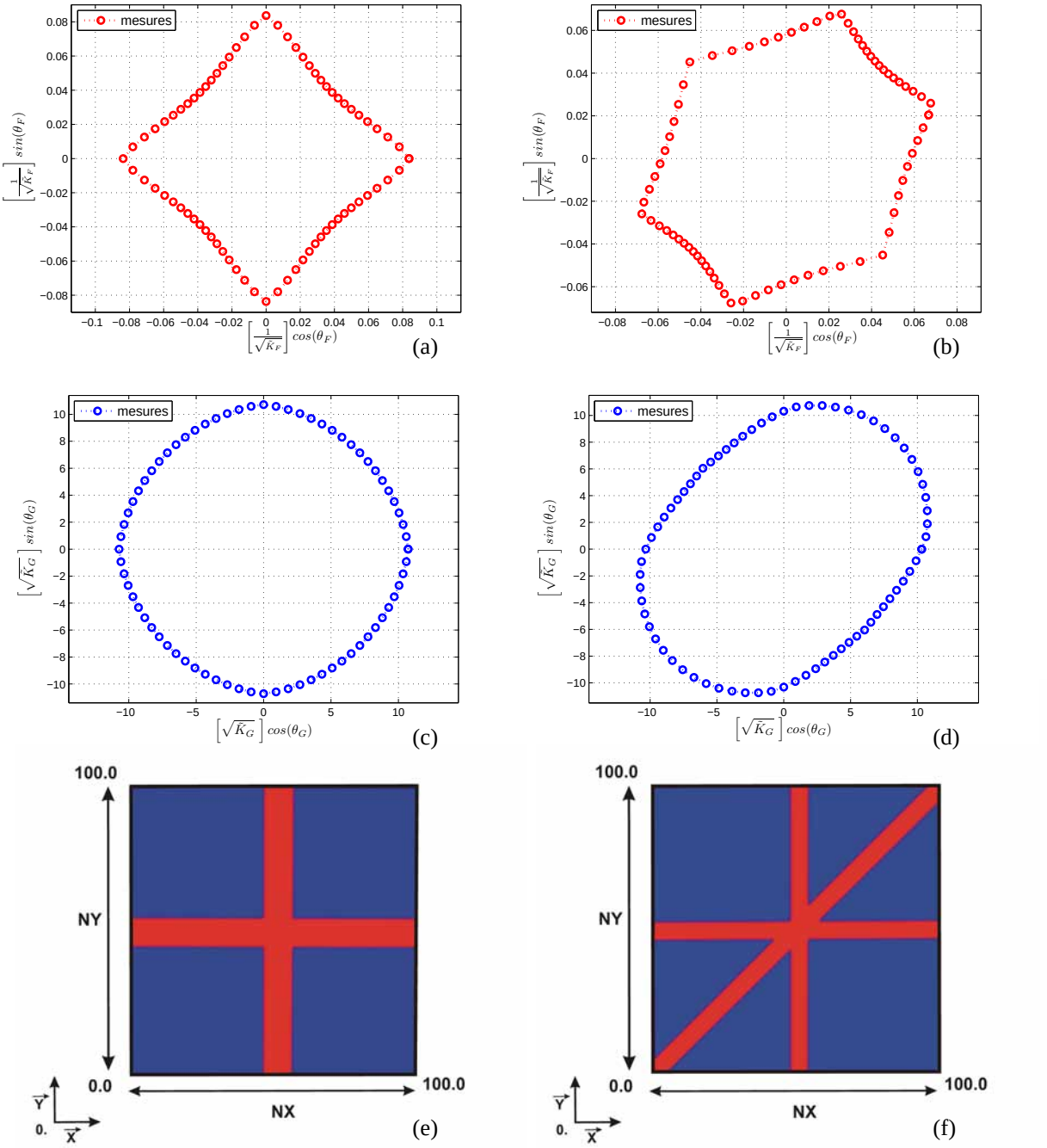


FIG. 10.23 – Ellipses inverses de gradient et de flux tracées respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux. (a) et (c) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu "croix principale" ; (b) et (d) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu "héxaédrique". (e) Milieu "croix principale" et (f) "héxaédrique".

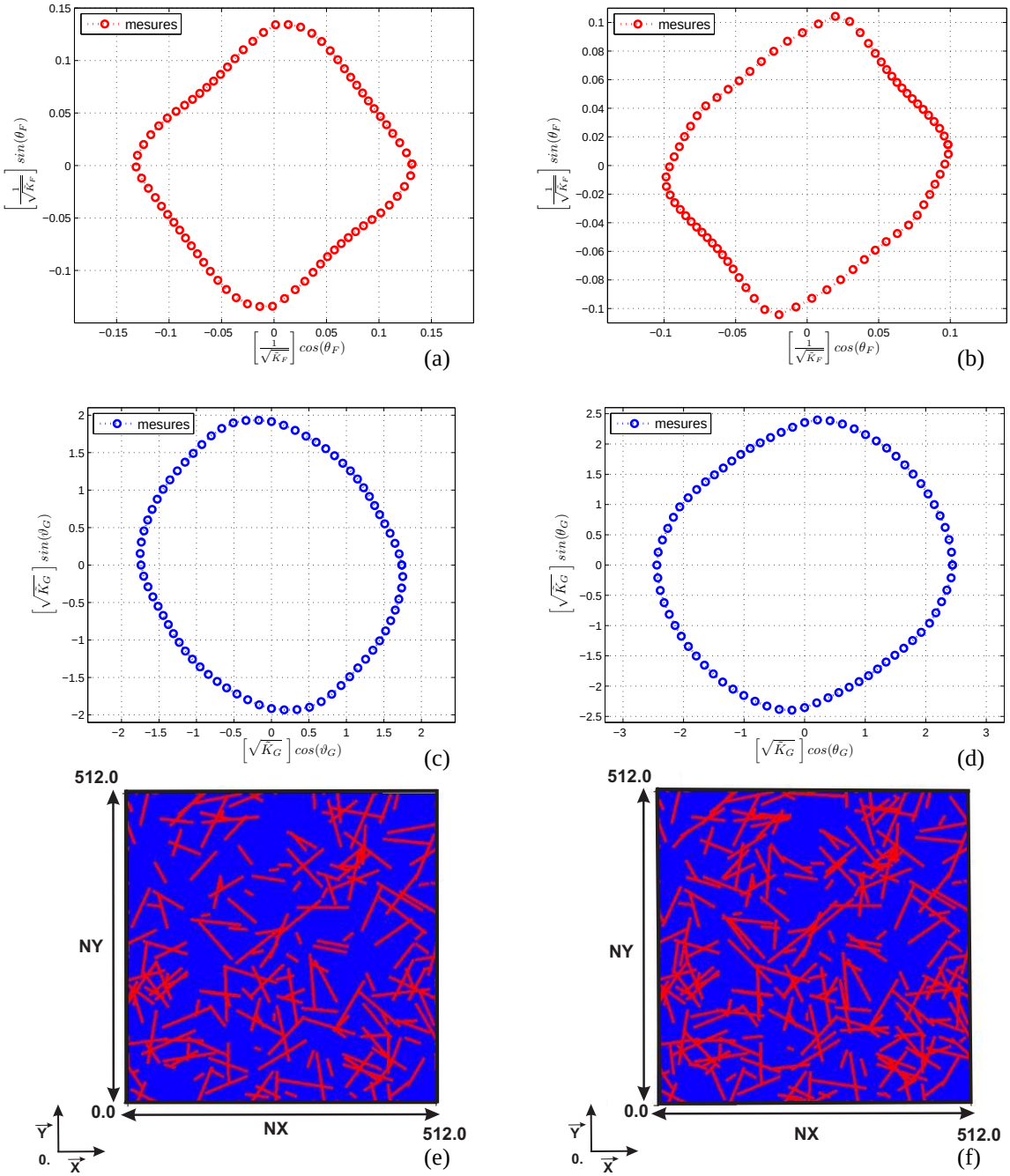


FIG. 10.24 – Ellipses inverses de gradient et de flux tracées respectivement dans un diagramme polaire de gradient et de flux. (a) et (c) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu $MF1_{2D}$; (b) et (d) "ellipses inverses" de gradient et de flux obtenues pour le milieu $MF2_{2D}$. (e) Milieu $MF1_{2D}$ et (f) $MF2_{2D}$.

Maquettes Hydrogéologiques

Maquette 1 : *Rachid Ababou, Paul Duru, Manuel Marcoux et David Bailly*

Maquette 2 : *David Bailly, Lionel Lefur et Rachid Ababou*

Maquette hydrogéologique 1



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 10.25 – Maquette hydrogéologique 1 réalisée à l'I.M.F.T. avec la participation de Science Animation. Cette maquette à été conçue et réalisée par Rachid Ababou, Paul Duru, Manuel Marcoux et David Bailly. Les photos (a), (b) et (c) montrent le déplacement d'un traceur. La photo (d) permet de voir les différents bacs d'alimentation en eau de la maquette. Et les photos (e) et (f) présentent le stand de l'I.M.F.T. lors de la présentation de la maquette au capitole de Toulouse (31) pour la fête de la science 2006.

Maquette hydrogéologique 2



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 10.26 – Maquette hydrogéologique 2 réalisée à l'I.M.F.T. avec la participation de Science et Animation pour les journées de vulgarisation scientifique (e.g. "la fête de la science"). Cette maquette à été conçue et réalisée par David Bailly, Lionel Lefur et Rachid Ababou. Les photos (a), (b), (c), (d), (e) et (f) montrent les différentes étapes de réalisation.

Essai de dissolution d’Alun

par de l’eau douce à pH et débit fixés

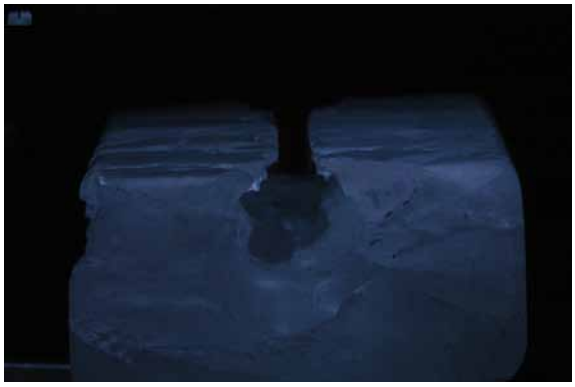
Dissolution sur une pierre d'Alun ($KAl(SO_4) - 12(H_20)$*)*

Aval  Amont

(a)



(b)



(c)

FIG. 10.27 – Essai de dissolution sur une pierre d'Alun de $65 * 42 * 20$ mm avec de l'eau à pH neutre et à débit constant. (a) vue de dessus de la pierre d'Alun après dissolution, (b) vue de la face amont et (c) vue de la face aval. Photos prises par Fabien Chauvet et Ian Billanou.

Bibliographie

[1] Ababou, R. (2008). *Quantitative Stochastic Hydrogeology : The Heterogeneous Environment*. In C.J.G. Darnault (Ed.), Overexploitation and Contamination of Shared Groundwater Resources (NATO Advanced Studies Institute series). Springer Science and Business Media B.V., pp. 119-182 (Chap. 8).

[2] Ababou, R. (1996). *Random Porous Media Flow on Large 3-D Grids : Numerics, Performance, and Application to Homogenization*. In M.F. Wheeler (Ed.) IMA Vol. 79. Mathematics and its Applications : Environ. studies - math., comput. and statist. analysis. Springer, New-York, pp. 1-25 (Chap. 1).

[3] Ababou, R. & Gelhar, L. W. (1990). *Self Similar Randomness and Spectral Conditioning : Analysis of Scale Effects in Subsurface Hydrology*. Chapter XIV in Dynamics of Fluids in Hierarchical Porous Media, J. Cushman editor, Academic Press, New York, pp. 393-428.

[4] Ababou, R. (1988). *Three Dimensional Flow in Random Porous Media*, Ph. D. thesis, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, 2 vols., 833 pp., January 1988. [Available electronically from M.I.T., Cambridge, MA 02139, USA.].

[5] Ababou, R. & Gelhar, L.W. (1988). *A High-Resolution Finite Différence Simulator for 3D Unsaturated Flow in Heterogeneous Media.* Computational Methods in Water Resources, Elsevier and Computational Mechanics Publications, 1 :173-178.

[6] Ababou, R. & Tregarot, G. (2002), *Coupled Modeling of Partially Saturated Flows : Macro-Porous media, Interfaces and Variability*. Proc. CMWR 2002, Comput. Methods in Water Resources, 23-28 2002, Delft, The Netherlands, 8pp.

[7] Ababou, R. & Bagtzoglou, A.C. (1993). *BIGFLOW : A Numerical Code for Simulating Flow in Variably Saturated, Heterogeneous Geologic Media (Theory and User's Manual, Version 1.1.* Report NUREG/CR-6028, US Nuclear Regulatory Commission, Government Printing Office, Washington DC, USA, 139 pp.

[8] Al Bitar, A. (2006). *Modélisation des écoulements en milieu poreux hétérogènes 2D/3D, avec couplage surface/souterrain et densitaire.* Thèse de doctorat. IMFT, Institut National Polytechnique de Toulouse.

[9] Allouani, R.N. (1991). *Fracturation naturelle du réservoir gréseux de Rhourde el Bagel (Algérie) et intérêt d'une imbibition assistée pour la récupération de l'huile*. Thèse de doctorat de l'Université P. Sabatier de Toulouse, 190 pp.

[10] Auriault, J.L., Geindreau, C. & Orgéas, L. (2007). *Upscaling Forchheimer Law.* Transp. Porous Med. (2007) 70 :213-229.

[11] Atkintson, T.C. (1977). *Diffuse and conduit flow in limestone terrain in the Mendip Hills, Somerset (Great Britain).* J. of Hydro., 35 :93-110.

[12] Bailly, D., Ababou, R. & Quintard, M., (2008/09). *Geometric Characterization, Hydraulic Behaviour and Upscaling of Fissured Geologic Media.* Mathematics and Computers in Simulation, 79 :3385-3396.

[13] Bakalowicz, M. (1979). *Contribution de la géochimie des eaux à la connaissance de l'aquifère karstique et de la karstification.* thèse Paris VI.

[14] Bichot, F., Thinon-Larminach, M., Touchard, F. & Bailly, D. (2005). *Synthèse hydrogéologique par bassins versants de la région Poitou-Charentes, Relation nappes-rivières.*, BRGM/RP-53767-FR, Decembre 2005. Etude réalisée dans le cadre des opérations de Service public du BRGM SP04POC31.

[15] Beylkin, G., Coifman, R. & Rokhin, V. (1991). *Fast wavelet transforms and numerical algorithms.* Communication in Pure applied MAthematics, 44 :141-183.

[16] Barenblatt, G.I., Zeltow, I.P. & Kochina, I.N. (1960). *Basic concepts in theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata).* J. Appli. Math. Mech., 24 :1286-1303.

[17] Barthélémy, P. (1992). *Etude de la géométrie des réseaux de fractures naturelles à différentes échelles : Reconnaissance de structures hiérarchisées et incidence sur les propriètés hydrauliques.* Thèse de doctorat. Université Paris-Sud d'Orsay.

[18] Bear, J. (1988). *Dynamics of fluids in Porous Media*. American Elsevier, N.Y. (1972) ; republish by Dover Publications Inc., N.Y. (1988), 764 pp.

[19] Berkowitz B. & Ewing R. P. (1998). *Percolation theory and network modeling application in soil physics*. Surveys in Geophysics 19(G) :23-72.

[20] Bezes, C. (1976). *Contribution à la Modélisation Des Systèmes Karstiques : Etablissement Du Modèle BERMER et Application à quatres systèmes Karstiques du Sud de la France.* Thèse de doctorat. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.

[21] Boneh, A. & Golan, A. (1978). *Optimal Identification of Nonlinear Surface Runoff Sytem with Copositivity Threshold Constraints*, Advances in water Resources 3(1) :121-129.

[22] Bodarwé, H. (1999). *Physikalische und Numerische Undersuchungen zum Einfluss sekundärer Strömungseffekte auf die Permeabilität von einzeltrennflächen.*

Aachen : Mainz. (Technische Hochschule aachen/Lehrstuhl und Institut für Wasserbau und Wasserwirthdchaft : Mitteilungen ; 116), Zugl. : Ph.D. Thesis, RWTH Aachen.

[23] Broadbent, S.R. & Hammersley J.M. (1957). *Percolation processes. I. Cristals and Mazes*. Poceedings of the Cambridge Philosophical Society 53 (G) :629-641.

[24] Bretz, J.H. (1942). *Vadose and phreatic features of limestone caverns.* Journal of Geology, 50(6) :675-811.

[25] Brunet, Y. & Collineau, S. (1995). *Wavelet analyis od Diurnal and Nocturnal Turbulence Above a Maiz Crop.* Wavelets in Geophysics (Foufoula-Georgiou and Kumar Edts), Academic Press, pp. 129-150.

[26] Buckingham, E. (1907). *Studies on the Movement of Soil Moisture.* Bulletin No. 8, Washington, DC, US, Department of Agriculture, Bureau of Soils.

[27] Canamon, I. (2006). *Analyse et Modélisation des Phénomènes Couplés Thermo-Hydro-Mécaniques en Milieux Fracturés 3D (Analysis and modeling of coupled thermo-hydro-mechanical phenomena in 3D fractured media)*. Thèse de doctorat (en anglais). IMFT, Institut National Polytechnique de Toulouse & Universidad Politécnica de Madrid (Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Minas), Madrid.

[28] Castaing, C., Genter, A., Chilès, J.P., Bourgine, B. & Ouillon, G. (1997). *Scale effects in natural fracture networks*, Int. J. Rock Mech. & Min., Sci. 34 :3-4, Paper N° 045.

[29] Celia, M.A., Bouloutas, E.F. & Zarba, R.L. (1990). *A General Mass-Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation.* Water Resources Research, 26(7) :1483-1496.

[30] Clerc, J.P. et al. (1983). *La percolation* Annales de physiques, 8.

[31] Curl, R.L. (1986), *Fractal Dimensions and Geometrics of Caves.* Mathematical geology, 18(8) :765-783.

[32] Colbeaux, J.P., & Mania J. (1976). *Relation entre la fracturation et l'écoulement des eaux superficielles et souterraines en pays crayeux au Cran d'Escalles - Application à l'Artois. IIeme* colloque d'hydogéologie en pays calcaire - Besançon, 1976, pp. 179-194.

[33] Cornaton, F & Perrochet, P. (2002). *Analytical 1D dual-porosity equivalent solutions to 3D discrete single-continuum models. Application to karstic spring hydrograph modeling.* Journal oh Hydrology, 262 :165-176.

[34] Dagan, G. (1981). *Analysis of Flow Through Heterogeneous Random Aquifers by the Method of Embedding Matrix. 1. Steady flow*. Water Resources Research, 17(1) :107-121.

[35] Darcy, H.P.G. (1956). *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon : Exposition et Application des Principes à Suivre et des Formules à Employer dans les Questions de Distribution d'Eau*. Victor Dalmont, Paris, 1956.(Annexe D).

[36] Dauree, A. (1879). *Etude synthétique de géologie expérimentale.* Edition Dunod (Paris).

[37] Daubechies, I. (1992). *The wavelets transform, time-frequency localization and signal analysis.* IEEE transactions on information Theory, 36 :961-1005.

[38] Davis, W.M. (1930). *Origin of linestone caverns.* Geological Society of America Bulletin, 41(3) :475-628.

[39] Davis, A., Marshak, A., Wicombe, W. & Cahalan, R. (1994). *Multifractal characterization of nonstationarity and intermittency in geophysical fields : Observed, retrieved or simulated.* Journal of Geophysical Research, 99(D4) :8055-8072.

[40] Dreiss, S. (1982). *Linear kernels for karst aquifer*, Water Ressources Research 18(4) :865-876.

[41] Drogue, C. (1972). *Analyse statistique des hydrogrammes de décrues de sources karstiques.* Journal of Hydrology, 15 :49-68.

[42] Drogue, C. & Grillot, J.C. (1976). *Structures géologiques et premières observations piézométriques à la limite du sous-système karstique. IIeme* colloque d'hydogéologie en pays calcaire - Besançon, 1976, fasc. 25, 3eme serie.

[43] Drogue, C. & Guilbot, A. (1977). *Représentativité d'un bassin témoin en hydrogéologie karstique : Application à la modélisation des écoulements souterrains d'un aquifère de grande dimension.* Journal of Hydrology, 32 :57-70.

[44] Eagleson, P., Mejia-R, R. & March, F. (1966). *Computation of optimum realizable unit hydrographs.* Water Resources Research, 2(4) :755-764.

[45] Frumkin, A. & Fichhendler, M. (2005). *Morphometry and distribution of isolated caves as a guide for phreatic and confined paleohydrological conditions.* Geomorphology, 67 :457-471.

[46] Eisenlohr, L., Kiraly ,L., Bouzelboudjen, M. & Rossier Y. (1997). *Numerical simulation as a tool for checking the interpretation of karst spring hydrographs*. J. Hydrol. 193 :306-315.

[47] Fishman, G.S. & Moore, L.R. (1986). *An Exhaustive Analysis of Multiplicatice Congruential Random Number Generation with Modulus* 2^{31}*-1*. SIAM J. Stat. Comput., 7(1) :24-45.

[48] Flory, P.J. (1941). *Molecular Size Distribution in Three Dimensional Polymers*, J. Am. Chem. Soc. 63 (G), 3083-3100.

[49] M. Fourar, R. Lenarmand, M. Karimi-Fard and Karimi-Fard (2005). *Inertial Effect in High-Rate Flow Trough Heterogeneous Porous Media*, Transp. Porous Med., 60 :353-370.

[50] Forchheimer, P. (1930). *Hydraulik*. Teubner Verlaggesellschaft, Stuttgard.

[51] Gelhar, L.W. (1993). *Stochastic Subsurface Hydrology.* Prentice-Hall, Inc. a Simon & Schuster Company, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

[52] Gilli, E., Mangan, C. & Mudry, J. (2004). *Hydrogélogie : Objets, méthodes, application.* Edition Dunod, Paris, 2004, ISBN 2 10 1007034 7.

[53] Gabor, D. (1946). *Theory of communication*, Journal of the Institute of Electrical Engineering (London), 93(3) :429-457.

[54] Grillot, J.C., & Guérin, R. (1975). *Tectonique, microtectonique et direction des écoulements souterrains - Exemple de relation dans le bassin karstique du Haut Vidourle (Gard - France).* Revue Géographie Physique et Géologie dynamique, 1975, XVII, pp. 45-60.

[55] Grossman, A. & Morlet, J. (1984). *Decomposition of Hardy fonctions into square integrable wavelets of constant shape.* SIAM J. Math., 15 :723-736.

[56] Guillet, P. (1993). *L'eau du manteau terresre*. La recherche, 24 :676-685.

[57] Haar, A. (1909). *Zur thaeorie der Orthogonalen Funktionsysteme*. Ph. D. thesis, Goettingen.

[58] Hannoura, A.A. & Barends, F.B.J. (1981). *Non-Darcy flow : a state of the art*. Proc. Euromech 143, Delft, The Netherlands, 2-4 Sept.1981, pp.37-51.

[59] Jacquet, O. (1998). *Modèle stockastique de la géométrie des réseaux karstiques.* Thèse de doctorat. Université de Lausane (Suisse).

[60] Jamier, D., & Mathey, B. (1977). *Fissuration et orientation des dépréssions karstiques (Jura Neuchâtelois - Suisse)*. Bulletin de la Société Neuchâteloise des Sciences Naturelles, tome 100, pp. 149-156.

[61] Jeannin, P.Y. (1992). *Géométrie des réseaux de drainage karstique : approche structurale, statistique et fractale.* Actes du colloque sur l'hydrogéologie en pays calcaires et fissurés, Neuchâtel, octobre 1992, Annales sc. de l'Univ. Besançon, mém. hors série N° 11, 1-8.S

[62] Jeannin, P.Y. (1996). *Structure et comportement hydraulique des aquifères karstiques*. Thèse de doctorat. University of Neuchâtel, Switzerland.

[63] Jeannin, P.Y. & Sauter, M. (1998). *Analysis of karst hydrodynamic behavior using global approach : a review*, Bulletin d'Hydrogéologie (Neuchâtel), 16 :9-30.

[64] Kachroo, R. & Natale, L. (1992). *Non-linear modelling of rainfall-runoff transformation*, Journal of hydrology, 135 :341-369.

[65] Kaviany, M. (1991). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag, New-York Inc..

[66] Kiraly, L. (1969a). *Anisotropie et hétérogénéité de la perméabilité dans les calcaires fissurés.* Eclogea Geologica Helvetica, Bâle, 62(2) :613-619.

[67] Kiraly, L., Matthey, B. & Tipet, J.P. (1971). *Fissuration et orientation des cavités souterraines. Région de la grotte Milandre.* Bull. Soc. Neuchâtel, Sci. Nat., 94 :99-114.

[68] Kiraly, L. (1975). *Rapport sur l'état actuel des connaissances dans le domaine des caractères des roches karstiques*-Hydrogeology of kartic terrains, (Burger A. and Dubertret L. Ed.), Intern. Union of Geol. Sciences, Serie B, No 3 pp. 53-67.

[69] Kiraly, L. & Morel, G. (1976a). *Etude de régularisation de l'Areuse par modèle mathématique.* Bulletin d'Hydrogéologie de l'Université de Nauchâtel, 1 :19-36.

[70] Kiraly, L. (1978). *La notion d'unité hydrogéologique, essai de définition.* Bulletin du Centre d'hydrogéologie de l'Université de Neuchâtel, 2 :83-220.

[71] Kiraly, L., Perrochet, P. & Rossier, Y. (1995). *Effect of epikarst on the hydrograph of karst spring : numerical approach.* bulletin d'Hydrogéologie de l'Université de Neuchâtel, 14 :199-220.

[72] Kiraly, L. (2003). *Karstification and Groundwater Flow.* In : Speleogenesis and Evolution of Karst Aquifers, the virtual scientific journal (www.speleogenesis.info), 1(3), Sept. 2003, pp.1-26. (Republished from : Gabrovsek F. (Ed.) 2002, 'Evolution of karst : from prekarst to cessation'. Postojna-Ljubljana, Zalozba ZRC, 155-190).

[73] Kirkpatrick, S. (1971). *Classical transport in disordered media : scaling and effective-medium theories*. Phys. Rev. Letters, 27(25) :1722-1725.

[74] Kirkpatrick, S. (1973). *Percolation and conduction.* Rev. Modern Phys. 45(4) :574-588.

[75] Kfouri, M. (2004). *Changement d'échelle séquentiel pour des milieux poreux fracturés hétérogènes.* Thèse de doctorat. IMFT, Institut National Polytechnique de Toulouse.

[76] Kfouri, M., Ababou, R., Noetinger, B. & Quintard, M. (2006). *Upscaling Fractured Heterogeneous Media : Permeability and Mass Echange Coefficient* Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, 73(1) :41-46.

[77] Knupp, P.M. & Lage, J.L. (1995). *Generalization of the Forchheimer-Extended Darcy Flow Model to the Tensor Permeability Case via a Variational Principle*. J. of Fluid Mechanics, 299 :97-104.

[78] Knudby, C., Carrera, J., Bumgardner, J.D. & Fogg, G.E. (2006). *Binary upscaling – the role of connectivity and a new formula*. Advances in Water Resources, 29 :590-604.

[79] Kovacs, A., (2003). *Geometry and hydraulic parameters of karst aquifers : A hydrodynamic modeling approach*. Thèse de doctorat. Université de Neuchâtel.

[80] Kruel-Romeu, R., (1994). *Ecoulement en milieu hétérogène : prise de moyenne de perméabilité en régime permanent et transitoire*. Thèse de doctorat. Université Paris VI, 248 pp.

[81] Labat, D. (2001). *Non-linéarité et non stationnarité en hydrologie karstique*. Thèse de doctorat. IMFT, Institut National Polytechnique de Toulouse.

[82] Labat, D., Ababou, R. & Mangin, A. (1999a). *Analyse en ondelettes en hydrologie karstique : 1 - analyse univarié de pluies et débits de sources karstiques.* Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (Séries IIa), 329(5) :873-879.

[83] Labat, D., Ababou, R. & Mangin, A. (1999c). *Linear and nonlinear input/output models for karstic springflox and flood prediction at different scales.* Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 13(5) :337-364.

[84] Labat D., Ababou R. & Mangin A. (2000a). *Rainfall-runoff relations for karstic springs, I : Convolution and spectral analyses*. J. of Hydrology, 238 :123-148.

[85] Labat D., Ababou R. & Mangin A. (2000b). *Rainfall-runoff relations for karstic springs, II : Continuous wavelet transform and multiresolution analyses.*, J. of Hydrology, 238 :149-178.

[86] Lam M-P. (2008). *Modélisation 3D du transport particulaire asynchrone en simple et double continuum matrice-fractures : Application au stockage de déchets nucléaires*. Thèse de doctorat. IMFT/EDF, Institut National Polytechnique de Toulouse (France).

[87] Li, H. & Nozaki, T. (1997). *Application of wavelet cross-correlation analysis to a plane turbulent jet.* JSME International Jornal - serie B, 40(1) :58-66.

[88] Li, B., Garga, V.K. & Davies, M.H. (1998). *Relationship for Non-Darcy Flows in Rockfill and Theorical Solution for Seepage Flow in Overtopped Rockfill*. J. of Hydraulic Engineering, 124(2) :206-212 and 213-217.

[89] Lomize, G. M., (1947). *Ecoulement dans les fissures (en russe).* Acad. Sci. Rép. Soc. Sov. Arm.

[90] Lin, Y. & Lye, L. (1994). *Long-term dependance in annual peak of canadian rivers.* Journal of Hydrology, 160 :89-103.

[91] Lindquist, E. (1933). *On the flow of water throught porous soil*. Proc., 1er congrès des Grands Barrages. Commission internationale des grands barrages, Stockholm 81-101.

[92] Liu, P. (1995). *Wavelet Spectrum Analysis and Ocean Wind Waves.* Wavelets in Geophysics (Foufoula-Georgiou and Kumar Edts), Academic Press, pp. 151-166.

[93] Long, J.C.S., Remer, J.S., Wilson, C.R. & Witherspoon, P.A. (1982). *Porous media equivalents for networks of discontinuous fracture.* Water Ressources Research, 21(8) :1105-1115.

[94] Louis, L. (1968). *Etude des écoulements d'eau dans les roches fissurées et de leurs influences sur la stabilité des massifs rocheux*. E.D.F., Bull. de la Direction des études et recherches, A, nucléaire, hydraulique, thermique, 3 :5-132.

[95] Maillet, E. (1905). *Essais d'hydraulique souterraine et fluviale*. Herman, Paris.

[96] Mallat, S. (1989). *A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation.* IEEE transactions on pattern analysis and Machine Intelligency, 11 :674-693.

[97] Martel, E.A. (1921). *Nouveau traité des eaux souterraines*. Libr. O. Dion, Paris.

[98] Mangin, A. (1970a). *Contribution à l'étude des aquifères karstiques à partir de l'analyse des courbes de décrue et de tarissement*, Annales de spéléologie 25(3) :581-610.

[99] Mangin, A. (1974-1975). *Contribution à l'étude hydrodynamique des aquifères karstiques.* Thèse de doctorat en Sciences Natuelles, Dijon, (Annales de Spéléologie 29(3), 29(4), 30(1), 283-332, 495-601, 21-24).

[100] Mangin, A. (1982). *Mise en évidence de l'originalité et de la diversité des aquifères karstiques*. Annales scientifiques de l'Université de Besançon, 3eme colloque d'hydrogéologie en pays calcaire.

[101] Mocochain, L., Clauzon, G., bigot, J.Y. & Brunet, P. (2006). *Geodynamic evolution of the peri-Mediterranean karst during the Messinian and Pliocene : evidence from the Ardèche and Rhône Valley systems canyons, Southern France*. Sedimentary Geology, 188-189 :219-233.

[102] Morin, G., Pasquet, P. & Sochanska, W. (1995). *Le modèle de simulation de quantité et de qualité CEQUEAU.* Technical Report 433, INRS-EAU Quebec.

[103] Mudry, J. (1987). *Apport du traçage physico-chimique naturel à la connaissance hydrocinématique des aquifères carbonatés.* Thèse Etat de Besançon, Ann. Scientif. Uni. Besançon, Géologie. Mémoire H.S. n°4, 381 pp.

[104] Mudry, J., Charmouille, A., Robbe, N., Bertrand, C., Batiot, C., Emblanch, C., & Mettetal, J.P. (2002). *Use of hydogeochemistry to display a present rechage of confined karst aquifers. Case study of the doubs Valley, Jura mountains, Eastern France.* II simposio de Geologia Cueve de Nerja (Malaga, Espagne). In Carrasco F., Duran J.J., Andreo B. (Eds) Karst ans Environment. 123-129.

[105] Napiorkowski, J. & Strupczewki, W. (1981). *The properties of the kernels of the volterra series describing flow deviations from a steady state in an open channel.* Journal of Hydrology, 52 :185-198.

[106] Nash, J. & Barsi, B. (1983). *A hybrid model for flow forecasting on large catchments.* Journal of Hydrology, 65 :125-137.

[107] O'Connor, K. & Ahsan, M. (1991). *Estimation of the gain factor for a discrete linear time-invariant system when input and output series have zero mean.* Journal of Hydrology, 128 :335-355.

[108] Palmer, A. (1991). *Origin and morphology of limestone caves.* Geol. Soc. of America Bull., 103 :1-21.

[109] Plangnes, V. (1997). *Structure et fonctionnement des aquifères karstiques.* Thèse Montpellier, BRGM, Document n°294, 376p.

[110] Poley, AD. (1988). *Effective permeability and dispersion in locally heterogeneous aquifers.* Water Resour. Res., 24(11) :1921-6.

[111] Qian, J., Zhan, H., Luo, S. & Zhao, W. (2007). *Experimental evidence of scale-dependent hydraulic conductivity for fully turbulent flow in a single fracture*, J. of Hydrology, 339 :206-215.

[112] Qian, J., Zhan, H., Zhao, W. & Sun, F. (2005). *Experimental study of turbulent unconfined groudwater flow in a single fracture*, J. of Hydrology, 331 :134-142.

[113] Quintard, M. & Whitaker, S. (1996). *Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media i : Theoretical development of region-averaged equations for slightly compressible single-phase flow*. Advances in Water Resources, 19(1) :29-47.

[114] Rao, S. & Rao, R. (1984). *Nonlinear stockastic model of rainfall runoff process*, Water Resources Research 20(2) :297-309.

[115] Richards, L.A. (1931). *Capillary Conduction of Liquids Through Porous Medium.* Physics, 1 :318-333.

[116] Renard, P., & De Marsily, G. (1997). *Calculating equivalent permeability : a review* Ad. Water Resour. 20(5-6) :253-278.

[117] Sahimi, M. (1993). *Flow phenomea in rocks : from continuum model to fractals, percolation, cellular automata, and simulated annealing.* Review of Modern Physics, 65(4), October 1993.

[118] Salas, J. & Obeysekera, T., (1982). *ARMA model identification of hydrologic time series.* water Ressources Research 18(4) :1011-1021.

[119] Sánchez-Vila, X., Carrera, J. & Girardi, J.P. (1996). *Scale effects in transmissivity.* J. Hydro. 183 :1-22.

[120] Sherman, L. (1932). *Stream flow from rainfall by the unit hydrograph method.* Engeneering New-Record, 108 :501-505.

[121] Schertzer, D., & Lovejoys, S. (1987). *Physical Modeling and Analysis of Rain and Clouds by Anisotropic Scaling Multiplicative Processes.* Journal of Geophysical Research, 92(D8) :9693-9714.

[122] Shreve, R.L. (1966). *Statistical law of stream numbers.* Journal of Geology, 74 :17-37.

[123] Sleroos, J.O., Walker, D.D., Strom, A., Gylling, B., Follin, S. (2002). *Comparison of alternative modeling approaches for groundwater flow in fractured rock.* Journal of Hydrology ,257(1) :174-188.

[124] Snow, D.T. (1965). *A parallel plate model of fractured permeable media.* Ph. D. thesis, University of Califormia.

[125] Snow, D.T. (1969), *Anisotropic permeability of fractured media.* Water Resources Research, 5(6) :1273-1289.

[126] Snyder, W. (1995), *Hydrograph analysis by the method of least squares.* American Society of Civil engeneering Journal, Hydraulics Division, 81 :1-25.

[127] Spiller M. (2004), *Modélisation physique et numérique d'écoulements et transports en milieux hétérogènes fracturés : écoulements à haut Reynolds et transport particulaire réactif. (Physical and numerical modeling of flow and transport in heterogeneous fractured media : high Reynolds flow and reactive particle transport).* Thèse de Doctorat (en anglais). IMFT, Institut National Polytechnique de Toulouse (France) & Université RWTH d'Aix-la-Chapelle/Aachen (Allemagne).

[128] Stockmayer, W.H. (1943). *Theory and molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers.* J. Chem. Phys., 11 :45-55.

[129] Strang, G., (1989). *Wavelets and dilation equations : A brief introduction*. SIAM Rev., 31(4) :614-627.

[130] Tison, G., (1960). *Courbe de tarrissement, coefficient d'écoulement et perméabilité du bassin.* Mémoire de l'AIHS, Helsinki pp. 229-243.

[131] Tompson, A.F.B., Ababou, R. & Gelhar, L.W. (1996). *Implementation of the Three-Dimensional Turning Bands Random Field Generator*. Water Resour. Res., 25(10) :2227-2243.

[132] Teutsch, G. (1988) *Grundwassermodele in karst terranes : Proktische ansatze am beispiel zweier einzugsgebiete im tiefen und seichten malmkarst der Swabischer Alb.* Ph. D. Thesis, University of Tubingen.

[133] Tregorot, G. (2000). *Modélisation couplée des écoulements à saturation variable avec hétérogénéités, forçage et interface hydrologique*. Thèse de doctorat. IMFT, Institut National Polytechnique de Toulouse.

[134] Vauclin, M., Haverkamp, R. & Vachaud, G. (1979). *Résolution Numérique d'une Équation de Diffusion Non Linéaire.* Presses Universitaires de Grenoble, Grenoble, France, 183 pp.

[135] Ward, J.C. (1964). *Turbulent Flow in Porous Media*. Journal of Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE, Vol. HY 5, 1-12.

[136] Wahuyudi, I., Montillet, A. & Khalifa, A. O. A. (2002), *Darcy and post-Darcy flows within different sands*. J. of Hydraul. Res., 40(4) :519-525.

[137] Wen, X.H. & Gomez-Hernadez, J.J. (1996). *Upscaling hydraulic conductivities in heterogeneous media : an overview*, J. hydrol (1996), pp. ix-xxxii.

[138] Wen, Z., Huang, G. & Zhan, H. (2006). *Non-Darcian flow in a single vertical fracture toward a well*. J. of hydrol., 330 :698-708.

[139] Wenger, R., Blant, D., Blant, M., Jeannin, P.Y., Lalou, J.C. & Luetscher, M. (2006), *Cavernes, face cachée de la Terre*, Institut Suisse de spéléologie et de karstologie, Edition Nathan (Paris), 2006 ISBN :209-278059-X.

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Mathematics and Computers in Simulation 79 (2009) 3385–3396
MATHEMATICS AND COMPUTERS IN SIMULATION
www.elsevier.com/locate/matcom

Geometric characterization, hydraulic behavior and upscaling of 3D fissured geologic media

D. Bailly, R. Ababou *, M. Quintard

Institut de Mecanique des Fluides de Toulouse, Allee du professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

Received 19 February 2008; received in revised form 7 May 2009; accepted 12 May 2009
Available online 12 June 2009

Abstract

In this article, we present numerical modeling and upscaling procedures for highly fissured and discontinuous geologic media, such as 'karsts'. In particular, we propose a geomorphological generation model, and we address the 'upscaling' problem for flow in a highly fissured porous medium ('what is the macroscale hydraulic behavior of the fissured porous medium?'). The morphological model is partly Boolean, based on statistical distributions of discrete objects (voids), combined with a (random) continuum representation for the underlying porous matrix. Various methods for constraining these two types of media are discussed (self-consistent thresholding; genetic dissolution). Hydraulic simulations are then conducted with the 3D finite volume code BIGFLOW, for the case of 3D composite media with constant matrix and high 'fissure/matrix' permeability contrast. The hydrodynamic equations are based on either Darcy's linear head loss law, or on a linear/quadratic combination of Darcy and Ward–Forchheimer quadratic law (inertial effects). The numerical experiments are conducted for saturated steady flow under permeametric boundary conditions. They are used to analyze the equivalent macroscale behavior of fissured media, as well as quasi-percolation effects, in comparison with analytical results and bounds (Darcian case, low Reynolds). In addition, at moderate to large Reynolds numbers, the macroscale effects of non-Darcian (inertial) head losses are also analyzed.
© 2009 IMACS. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Fractured porous media; Binary media; Permeability upscaling; Percolation; Random 3D media

1. Introduction

A karst is a highly fissured geomorphological unit, resulting from the chemical erosion of limestone along rock discontinuities, a process named 'karstification' (dissolution by acidic water containing dissolved carbon dioxide). The result is a complex 3D hierarchical draining structure, connected to 'voids' of many sizes and shapes (conduits, siphons, cavities, and natural wells). Understanding the voids distribution and their connectivity is quite challenging, as only some limited parts of the network (largest structures) are identifiable by human or geophysical exploration.

Two methodologies are generally used in hydrogeology for studying karst hydraulics: black box input–output analysis, and spatially distributed modeling.

The first method is based on temporal cross-correlations, or frequency space cross-spectral analyses, between karstic spring flow and rainfall rate time series. This type of approach essentially treats the karstic formation as a hydraulic

* Corresponding author. Tel.: +33 05 61 28 58 45; fax: +33 05 61 28 58 99.
E-mail addresses: bailly@imft.fr (D. Bailly), ababou@imft.fr (R. Ababou), quintard@imft.fr (M. Quintard).

0378-4754/$36.00 © 2009 IMACS. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.matcom.2009.05.013

'black box', i.e., a temporal or frequency filter. Some information on spatial structure can sometimes be inferred, albeit indirectly, based on the temporal structure of rainfall-springflow transfer functions (see [17] and references therein).

The second approach is to model the complex flow system in 3D space based, in most cases, on Stokes and/or Darcian porous media hydrodynamics. This requires solving a quasi-linear flow PDE with spatially distributed saturated/unsaturated parameters in 3D space. However, this type of approach requires careful geometrical modeling of fine scale hydrogeologic parameters, taking into account individual fissures and cavities as well as their detailed geometric distribution and connections in 3D space (e.g., [12]). In some modeling studies, the karst was simplified into a regular network of planar fissures and conduits, with or without an overlying porous medium (soil, epikarst): see [9,14], and references therein. A more practical, intermediate approach, would be to model the 3D hydraulics using coarse scale distributed mesh with known macroscale equations and equivalent coefficients. One of the issues addressed in this paper concerns precisely this problem, i.e., obtaining equivalent quantities for the highly fissured 3D porous medium on a coarse scale.

In this paper, we propose to model the 3D hydraulics in fissured porous media using, at local scale (fine mesh), a linear/quadratic combination of Darcy and Ward–Forchheimer's head loss laws [3]. This enables us to represent at least some aspects of the local hydraulics taking place in individual fissures and in highly fissured zones. *Note*: vertically hydrostatic plane flow models are not being considered in our approach, due to the inherently 3D geometry of karstic flows. On the other hand, we will assume in the paper that the fissures behave like very coarse porous media with large hydraulic conductivity K_F.

In the first part of this paper, we present a geometrical (geomorphological) model of the fissured medium, consisting in:

- a Boolean submodel based on statistical distributions of discrete objects (voids – not restricted to planar fissures),
- a continuum (constant or random) representation for the underlying porous matrix, and
- criteria and transformations to constrain and link the two submodels (self-consistent threshold; genetic dissolution).

In the second part of this paper, numerical experiments are conducted on large voxel-based grids, for fully saturated composite media (3D matrix-fissure systems), assuming steady flow under 'permeameter type' boundary conditions. We use either Darcy's law or – more generally – the combined Darcy/Ward–Forchheimer law as the local governing equation. The detailed numerical solutions are post-processed (i.e., numerically upscaled) to obtain equivalent macroscale permeabilities. These are analyzed in comparison with analytical results and bounds (Darcian case). Percolation effects are also discussed. In addition, the macroscale effects of non-Darcian (inertial) head losses are also analyzed versus Reynolds number.

Finally, it should be emphasized that other types of boundary conditions were also used in this work for conducting fully directional tensorial analyses of macro-permeability (this is not presented here for lack of space and will be published elsewhere).

2. Geomorphological model for karstic and fissured media

Multi-Gaussian random fields have been frequently used to represent the log-permeability distribution of 3D sedimentary formations (see [20] among others). However, this 'continuum' representation seems either inappropriate or insufficient for fissured media. Here, we propose a mixed geomorphological modeling approach based on a combination of Boolean (discrete) and random field (continuous) models.

2.1. Boolean (discrete) random objects in a geological porous matrix

A numerical code MATFRAC3D containing geometric and statistical algorithms, has been developed to generate spatial distributions of randomly distributed discrete objects embedded in a continuous 3D matrix, using various shapes for the embedded objects (Fig. 1(a)).

The objects represent individual voids or 'structures', in the sense of [1], such as layers, joints, faults, clay lenses, dikes, and (in karsts): thick planar fissures, ellipsoidal cavities, cylindrical conduits and wells. The procedure for generating such Boolean objects consists in (i) generating a list of objects and their attributes using a Boolean statistical

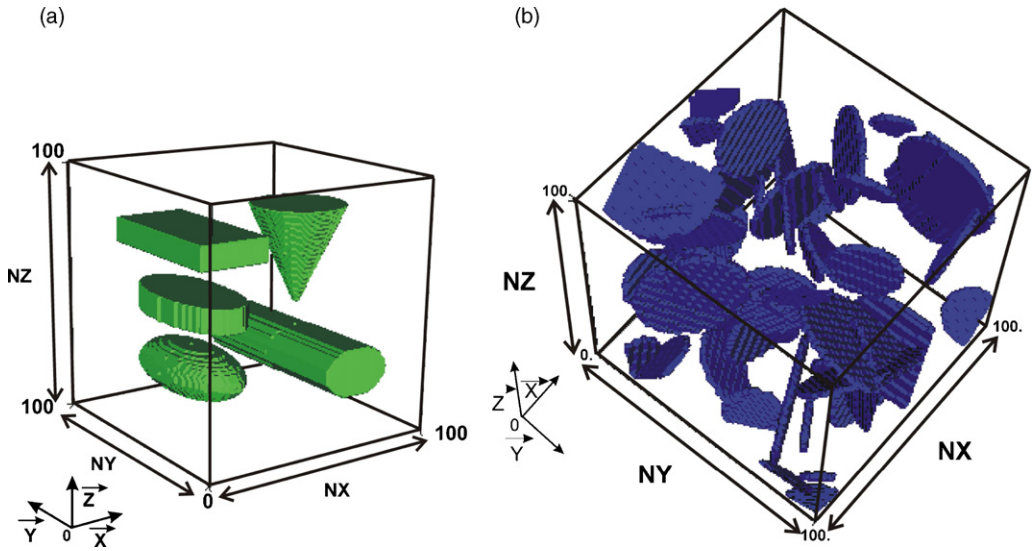


Fig. 1. (a) Five classes of 3D objects. (b) One realization of a 3D random Boolean medium (planar discs).

model, and (ii) performing a 3D projection of each object onto a voxel-based regular Cartesian grid (one or several million nodes).

The morphological parameters (shape, length scales, orientation angles) and the hydraulic properties (porosity, permeability, transmissivity) of each individual object can follow various distributions, or PDF's (Probability Density Functions). The orientation of an object is defined with two Euler angles (ϑ, ϕ), or with three Cardan angles $(\vartheta, \phi, \alpha)$, depending on the type of object. These angles, as well as the 'principal diameters' of the object, can be either deterministic or randomly distributed.

An example fissured medium is shown in Fig. 1(b). The grid comprises one million cells (voxels). A set of 25 planar disc fractures was generated statistically, with isotropic orientation distribution of their normal vectors (uniform ϑ in $[0, 2\pi]$, uniform $arcos(\phi)$ in $[0, 1]$), a Poisson distribution for their centers, and a uniform distribution of their radius in the range [5, 25] meters. Matrix permeability is uniform, and fracture aperture is constant.

2.2. Mixed Boolean-continuous geomorphological model

As a second step, we develop a mixed Boolean-continuous geomorphological model. We only summarize here some of the features of this new model, as it is still under development and remains preliminary at this stage. Briefly, the model is based on (i) the previous statistical Boolean algorithms, (ii) a random field generator for the porous matrix 'continuum' (which may be set constant as a special case), and (iii) a constraining operator to link the continuous and the discrete 'phases'.

The matrix log-permeability is generated as a spatially correlated multi-Gaussian random field with isotropic or anisotropic correlation structure. We use the Turning Bands ('TB') algorithm in 2D and 3D (see [20] for the 3D 'TB'; and see [1] for a review).

Fig. 2(a) shows, at left, the 2D random Gaussian log-permeability field ($\ln K(x, y)$) of a porous matrix, with isotropic correlation structure, together with a set of embedded discrete fracture segments. These were generated independently using the Boolean statistical generator described earlier.

Fig. 2(b) displays the result obtained after applying the operations of thresholding and binarization ('cut-off'). This 'cut-off' operation leads to a fusion of the 'matrix' and 'fracture' media: this introduces some kind of 'correlation'. The following 'self-consistent criterion' was used for the cut-off: $K_M^{CUTOFF} = K_F$. Thus when $\ln K(x, y) < K_M^{CUTOFF}$ the corresponding area takes a deterministic matrix permeability K_M, and when $\ln K(x, y) > K_M^{CUTOFF}$, the area takes another deterministic fissure permeability K_F. The step of binarization shown here ($K_M = 0$ and $K_F = 1$), can be considered as an initial guess. This 'cut-off' operation generates the high permeability pockets visible in Fig. 2(b).

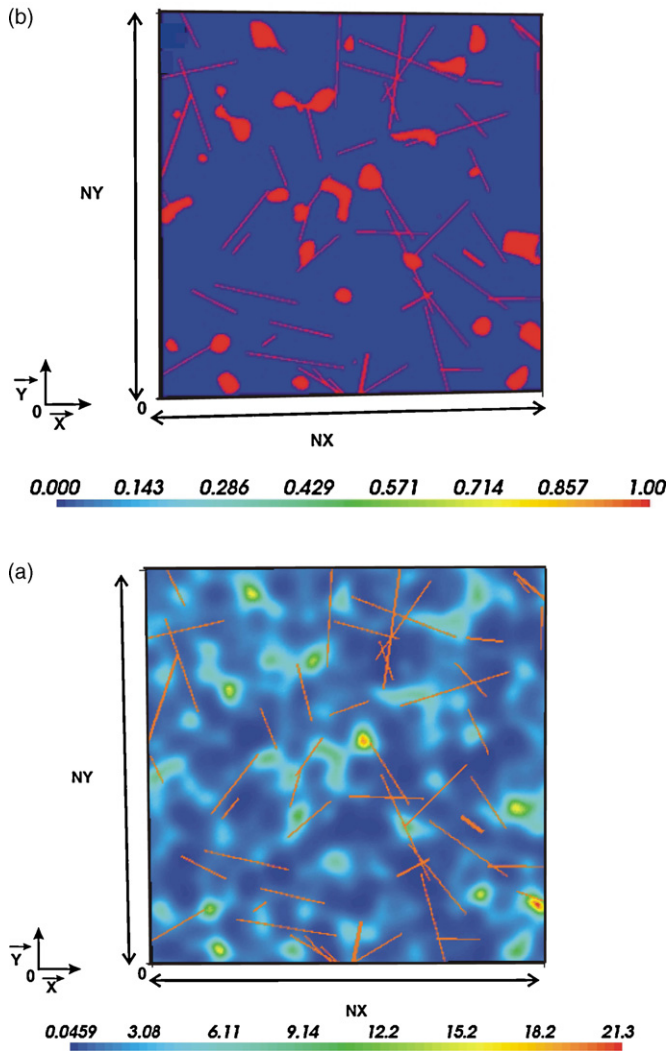


Fig. 2. Mixed Boolean-continuous model. (a) Gaussian random field ln K (matrix) with a set of embedded segments (fissures). (b) Spatial distribution of log-permeability (ln K) after thresholding and binarization.

However, an alternative model that introduces spatial correlation between matrix and fissures is needed, either by introducing data information via Bayesian conditioning, or else, via a 'genetic' model based on mechanical or chemical processes. For testing purposes, we have developed a simplified 'genetic' dissolution model, with velocity-dependent dissolution rate. The model will be used in future to enhance fissured zones in relation to high permeability regions, such that connectivity structures become 'genetically' consistent.

3. Hydraulic equations—linear (Darcian) and quadratic (inertial)

Darcy's linear head loss law is: $\vec{q} = -K\vec{\nabla}H$ [8]. It holds for porous media flow at small Darcy–Reynolds number (Eq. (2)). However, at larger 'Re^*', inertial acceleration terms set in. At the scale of many pores, this effect may be captured by the quadratic head loss law of Ward, Ergun, and Forchheimer [10]. This inertial law for porous media has been presented and analyzed also by the following authors: [3,5,11,13,15,18,22]. Combining additively the two laws (Darcy and inertial), as proposed in [3], yields the Darcy/Ward–Forchheimer's law ('DWF's'). It is defined as follows

for locally isotropic media:

$$-\vec{\nabla}H = K^{-1}\vec{q} + K^{-1}C\sqrt{\frac{K}{g\nu}}\,|\vec{q}|\,\vec{q}, \tag{1}$$

where C is Ergun's constant ($C = 0.55$), K is the hydraulic conductivity [$\mathrm{m\,s^{-1}}$], $\vec{q}$ is the 'Darcy velocity' or 'flux density' vector [$\mathrm{m\,s^{-1}}$], g is gravity acceleration ($g = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$) and ν is kinematic viscosity [$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$]. Note that the quadratic head loss term is equivalent to the Darcy–Reynolds number Re^*:

$$Re^* = \sqrt{\frac{K}{g\nu}}|\vec{q}|. \tag{2}$$

For 2D and 3D locally anisotropic media, the inertial law (Eq. (1)) has been extended as follows [15]:

$$q_i = -\sum_{j=1}^{j=3}\tilde{K}_{ij}(\vec{\nabla}H, \vec{x})\,\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \text{i.e.,} \quad q_1 = -\tilde{K}_{11}(\vec{\nabla}H, \vec{x})\,\frac{\partial H}{\partial x_1}, \text{etc.} \tag{3}$$

with

$$\tilde{K}_{ii}(\vec{\nabla}H, \vec{x}) = \frac{2K_{ii}(\vec{x})}{1 + \left\{1 + 4\gamma K_{ii}(\vec{x})\left(\sum_i\sum_j \frac{\partial H}{\partial x_i}K_{ij}(\vec{x})(\partial H/\partial x_j)\right)^{1/2}\right\}^{1/2}}, \tag{4}$$

where $i = (1, 2, 3)$ indicates the three principal directions (x, y, z), $\gamma = C/(g\nu)^{1/2}$, and $\vec{\vec{K}}$ is the (diagonal) Darcian conductivity tensor [$\mathrm{m\,s^{-1}}$]. In our application, the Darcy hydraulic conductivity tensor $K_{ij}(\vec{x})$ is assumed diagonal. The resulting apparent hydraulic conductivity tensor denoted $\tilde{K}_{ij}$ is also diagonal.

In the next section, a number of numerical experiments are conducted on composite matrix/fissure media, in order to characterize the equivalent macroscale conductivity and the influence of inertial effects in highly fissured porous media with large fissure hydraulic conductivity K_F.

4. Procedure for "permeameter" numerical experiments

4.1. Input parameters

Numerical experiments are conducted using the numerical code BIGFLOW (implicit 3D finite volume with Darcy and Forchheimer laws) using 'permeametric' boundary conditions (Fig. 3).

Various heterogeneous binary media were generated with MATFRAC3D, the numerical code presented in the previous section. For each medium, the flow simulations are performed for several values of conductivity contrast K_F/K_M (using a numerical continuation method with respect to the contrast ratio). The matrix conductivity is fixed ($K_M = 1\ \mathrm{m\,s^{-1}}$), and the 'fissure' conductivity is variable in the range $log_{10}(K_F) \in [-8, +8]\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. This strategy yields a broad sample set of simulations, and allows quasi-percolation phenomena to occur at large K_F/K_M ratio (see flow field in Fig. 4, and analyses in Fig. 7).

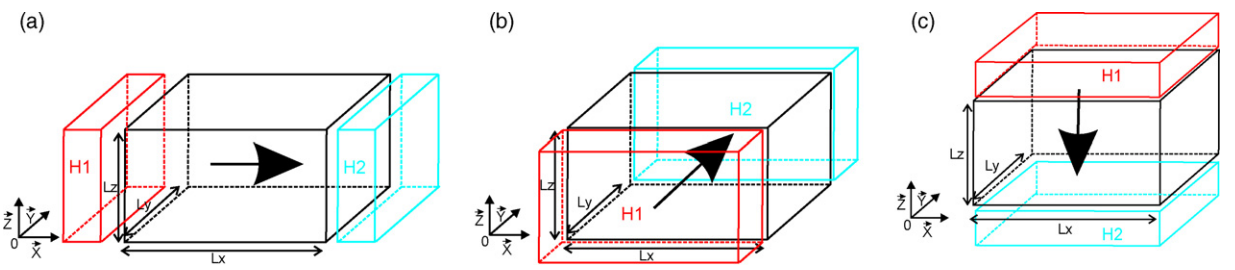


Fig. 3. Permeametric boundary conditions along the $\vec{o}x$ (a), $\vec{o}y$ (b), and $\vec{o}z$ (c) directions.

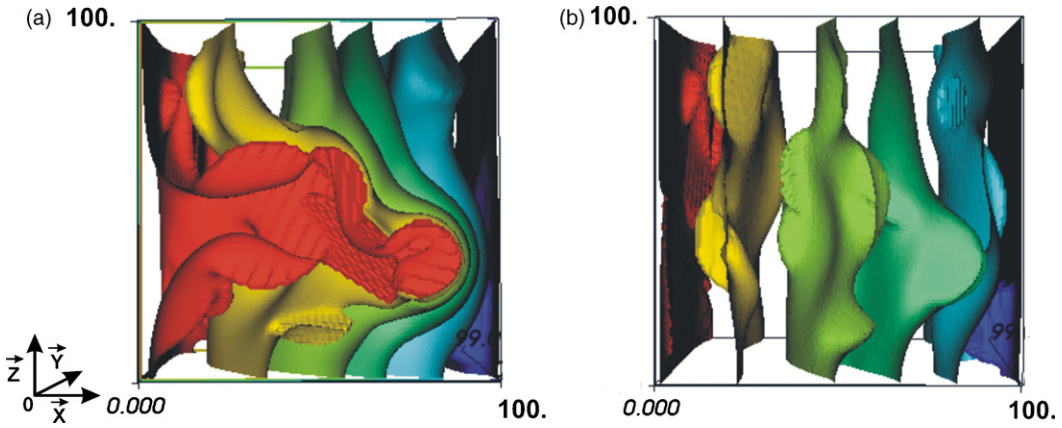


Fig. 4. Permeametric numerical experiments conducted in a fissured medium along $\vec{ox}$ using Darcy's law (a) and DWF's law (b). Several isosurfaces of the calculated hydraulic head field are shown here. The fissure/matrix conductivity contrast is $log_{10}(K_F/K_M) = 6$.

4.2. Analytical relations for effective conductivity (Darcian case)

Numerical permeametric experiments are compared, in the sequel, with analytical upscaling results. For perfectly layered media, we use the Wiener bounds: arithmetic mean (Ka) and harmonic mean (Kh), respectively, for flow parallel and orthogonal to layering. For 2D/3D binary mixtures and matrix/fissure systems, we use two analytical effective conductivity results:

- the isotropic self-consistent effective conductivity Eq. (5) from (Dagan [7]), which we specialize here explicitly for the case of composite media[1];
- the tensorial power average conjecture Eq. (6), which was expressed by Ababou [2] as a generalization of spectral pertubation results for Gaussian log-permeability media with anisotropic correlation structure, combined with other effective K results and exact bounds known for composite media:

$$\hat{K}_{ii} = \frac{1}{M}\left[\int_0^\infty \frac{p(K)dK}{(M-1)\hat{K}_{ii}+K}\right]^{-1}, \tag{5}$$

$$\hat{K}_{ii} = \langle K^{\omega_i}\rangle^{1/\omega_i}, \quad \omega_i = 1 - \frac{2}{M}\frac{l_h}{l_i}, \quad \text{and} \quad l_h = \left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{i=M} l_i^{-1}\right]^{-1}, \tag{6}$$

where $i = 1, 2, 3$ (x, y, z), M is the space dimension, $p(K)$ the inclusions PDF, $\hat{K}_{ii}$ the effective conductivity of the medium along the principal axes of anisotropy, $\langle\rangle$ designates the averaging operator, ω_i represent 'directional' power averaging exponents, l_i represent 'directional' fluctuation scales, and l_h is the harmonic mean of the M directional fluctuation scales.

We consider a binary isotropic mixture with a binary PDF – by analogy with conductor/resistor mixtures – where the probability of the conductor (or the coarse fissured medium $K = K_F$) is 'p', and the probability of the resistor (or the fine porous 'matrix' $K = K_M$) is $q = 1 - p$. In this case, Eq. (5) becomes:

$$\hat{K}_{ii} = \frac{1}{(2M-2)}\{(Mp-1)K_F+(Mq-1)K_M\}+\frac{1}{(2M-2)}\{[(Mp-1)K_F+(Mq-1)K_M]^2+4(M-1)K_M K_F\}^{1/2}. \tag{7}$$

[1] The self-consistent result of Dagan [7] was analyzed in detail for binary mixtures and other distributions in Ababou, *Effective Medium Theories and Percolation on Resistor Lattices and continuous Media*, unpublished note, Massachusetts Institute of Technology, 1986—from which this particular result is taken.

Similarly, Eq. (6) specializes into (8) for a 3D binary mixture:

$$\hat{K}_{ii} = \{\rho K_F^{\omega_i} + (1-\rho) K_M^{\omega_i}\}^{1/\omega_i}, \tag{8}$$

and into Eq. (9) for a 2D binary mixture (using a Taylor expansion as $\omega \to 0$):

$$\hat{K}_{ii} = (K_F)^p (K_M)^{1-p}. \tag{9}$$

4.3. Averaging and upscaling flow simulations

Each simulation is conducted on a rectangular box domain (Fig. 3), permeametric boundary condition, i.e., Dirichlet (head) conditions on two opposite faces, and homogeneous Neumann conditions (zero normal flux) on four other faces.

For each simulation, numerical macroscale effective conductivities ($\hat{K}_{ii}^D$ and $\hat{K}_{ii}^{DWF}$) are according to the following equation:

$$\hat{K}_{ii}^D = -\frac{\lfloor Q^D \rfloor_{ii}}{J_i}, \quad \text{with} \quad \lfloor Q^D \rfloor_{ii} = \frac{Q_{2,i}^F + Q_{1,i}^F}{2S_i}; \tag{10}$$

$$\hat{K}_{ii}^{DWF} = -\frac{\lfloor Q^{DWF} \rfloor_{ii}}{J_i}, \quad \text{with} \quad \lfloor Q^{DWF} \rfloor_{ii} = \frac{Q_{2,i}^F + Q_{1,i}^F}{2S_i}, \tag{11}$$

where $Q_{1,i}^F$[m^3 s^{-1}] is the mean outflow measured on face (1,i) using either the local Darcy's law or the local DWF's law; face (1,i) designates a boundary face orthogonal to the (i)-th flow direction; S_i is the area of the (i)-th face [m^2] (opposite faces are labeled 1 and 2, and they have identical area); and finally $J_i = (\Delta H/L)_i$ is the mean hydraulic head gradient ($J_i = 10^{-2}$ in all tests, except for the 2D binary mixture where $J_i = 1.9 \times 10^{-3}$).

Two averaged Reynolds numbers (Darcy and DWF Eq. (12)) are defined in order to analyze the effects of non-Darcian head loss:

$$\{Re_D^*\}_{ii} = \lfloor Q^D \rfloor_{ii} \sqrt{\frac{\hat{K}_{ii}^D}{g\nu}}; \quad \{Re_{DWF}^*\}_{ii} = \lfloor Q^{DWF} \rfloor_{ii} \sqrt{\frac{\hat{K}_{ii}^D}{g\nu}}. \tag{12}$$

Note that we assumed here that after upscaling, Darcy and DWF, we obtain a similar law at the global (macro) scale. However, this assumption may have to be revised. For instance, Auriault et al. [4], show that for some types of regular or periodic geometries (layered media, circular porous inclusions), a local Forchheimer law does not necessary lead to the same type of law after upscaling. This result is based on multiple scale expansions (approximations). It does not concern the case of large permeability contrasts (on the order of a factor 10^{+2} in reference [4]) compared to a contrast of one million or more (up to 10^{+8}) in our case. In addition, the reader can consult other studies such as Fourar et al. [23]. The latter focuses on serial-layer, parallel-layer and correlated media for low and high Reynolds numbers. They establish analytical relationships for the inertial coefficient on large scales, based on both numerical experiments and perturbation analyzis.

5. Numerical upscaling results for the permeametric experiments

5.1. Upscaling multilayered and 2D/3D isotropic mixtures—comparisons with analytical results

For an equilibrated multilayered medium (Fig. 5(a) and (b)), we obtain a perfect agreement between the Wiener bounds and $\hat{K}_{ii}^D$ for all Matrix/Fissure conductivity contrast. Similarly, for a 3D random isotropic mixture, we obtain a good agreement between the self-consistent and the power average model (Fig. 5(d)). Observe that we obtain approximately the geometric mean Kg for the case of 2D equilibrated mixtures ($p = q = 1/2$), as predicted by both analytical formulas (Eqs. (9) and (7)). However, it can be seen that the numerical $\hat{K}$ differs somewhat from Kg.

Several authors (e.g., [16]) have found that Kg does not exactly represent the effective hydraulic conductivity ($\hat{K}$) of equilibrated '50–50' mixtures, at least for finite size samples. This sensitivity can be attributed to the influence of connectivity structure in 2D. We have found (not shown here) that the self-consistent $\hat{K}$ is much more sensitive than

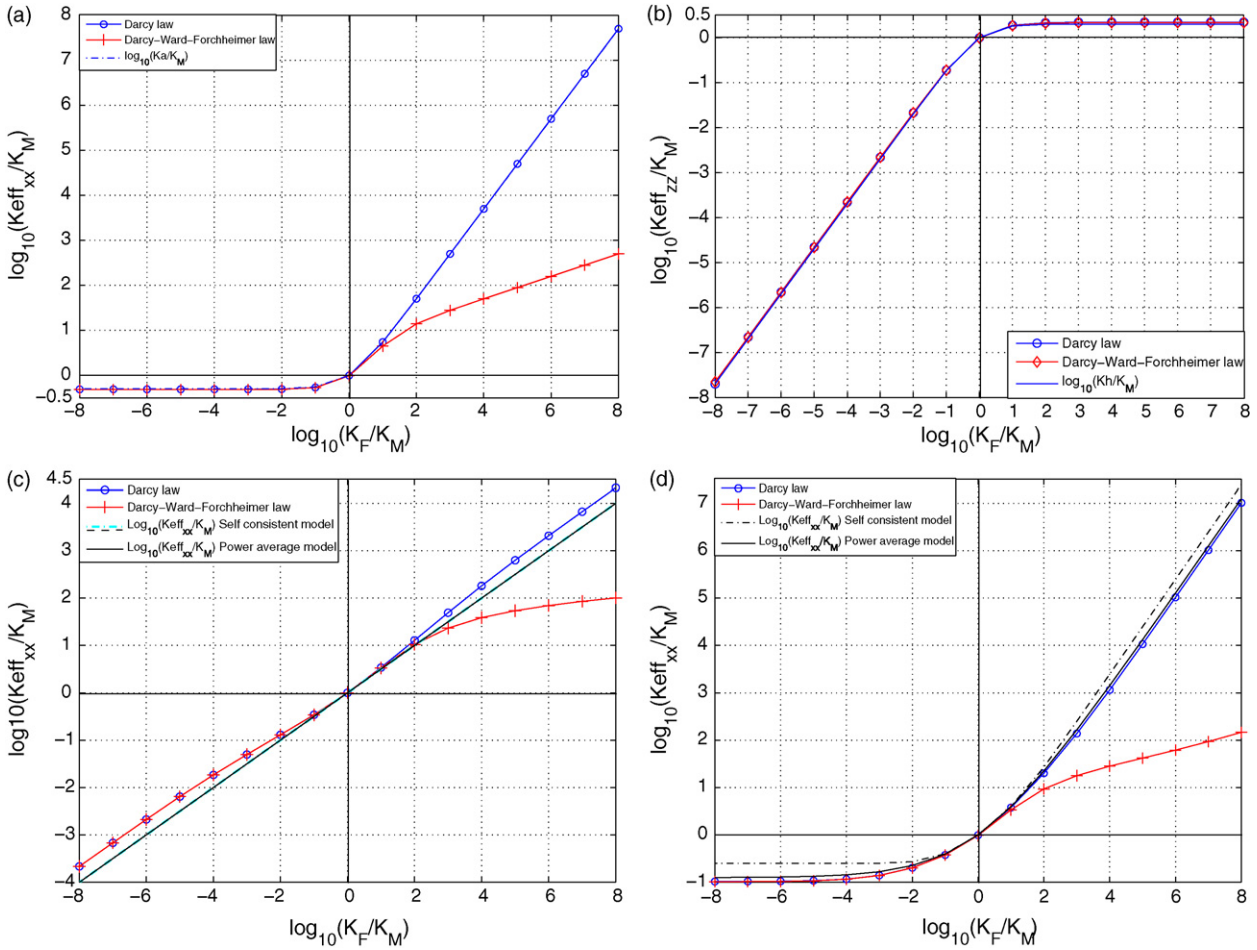


Fig. 5. Log–log plot of $\hat{K}_{ii}^{D}$, $\hat{K}_{ii}^{DWF}$, and analytical $\hat{K}'s$, versus K_F/K_M. The top figures show $\hat{K}$ for a multilayered medium (a: parallel flow, K_{xx}^{D} and K_{xx}^{DWF}; b: orthogonal flow, K_{zz}^{D} and K_{zz}^{DWF}). The bottom figures show macroscopic K for isotropic mixtures for $\vec{o}x$ flow direction (c: 2D; d: 3D). Numerical upscaling results: (o) for Darcy, (+) for DWF. Analytical K's are shown as curves without symbols: power average (Eqs. (8) and (9)), self-consistent Eq. (7), and Wiener bounds.

the power average $\hat{K}$ with respect to perturbations of the volumetric fraction, particularly in 2D equilibrated media and for high K_F/K_M contrast.

Finally, note that $\hat{K}_{ii}^{DWF}$ is different from $\hat{K}_{ii}^{D}$ for all high K_F/K_M values, due to large velocity and inertial effects: this is analyzed next.

5.2. *Multilayered media and 2D/3D isotropic mixtures—effective K and inertial effects*

To continue this study, we focus now on high K_F/K_M values in order to study the effects of inertial flow at moderate to large Reynolds numbers ($\{Re_D^*\}_{ii}$. and $\{Re_{DWF}^*\}_{ii}$ Eq. (12)). Note that the DWF experiments are analyzed in terms of an equivalent – or apparent – Darcy-type macroscale conductivity. The apparent DWF conductivity depends, at local scale, on the Reynolds number via the hydraulic gradient as indicated by Eq. (4). Some of the upscaled conductivity results, interpreted in this manner, are depicted in Fig. 6. Note that for Reynolds numbers greater than 4 ($log_{10}(Re^*) > 0.6$), the numerical $\hat{K}_{ii}^{D}$ and $\hat{K}_{ii}^{DWF}$ deviate from each other. These numerical experiments confirm experimental results obtained by Wahyudi et al. [21] where they found, for different sands (Fontainebleau, Labenne, Hostun, Rheu and Loire sands) a transition Reynolds number (5% for the deviation of Darcy's law) equal to 4.3. Other numerical experiments show that the transition Reynolds is always in the range [1, 10] but is a function of connectivities, volume fractions of fissures and permeability contrasts. Moreover, the $\hat{K}$ curves of Fig. 6 indicate that inertial effects become

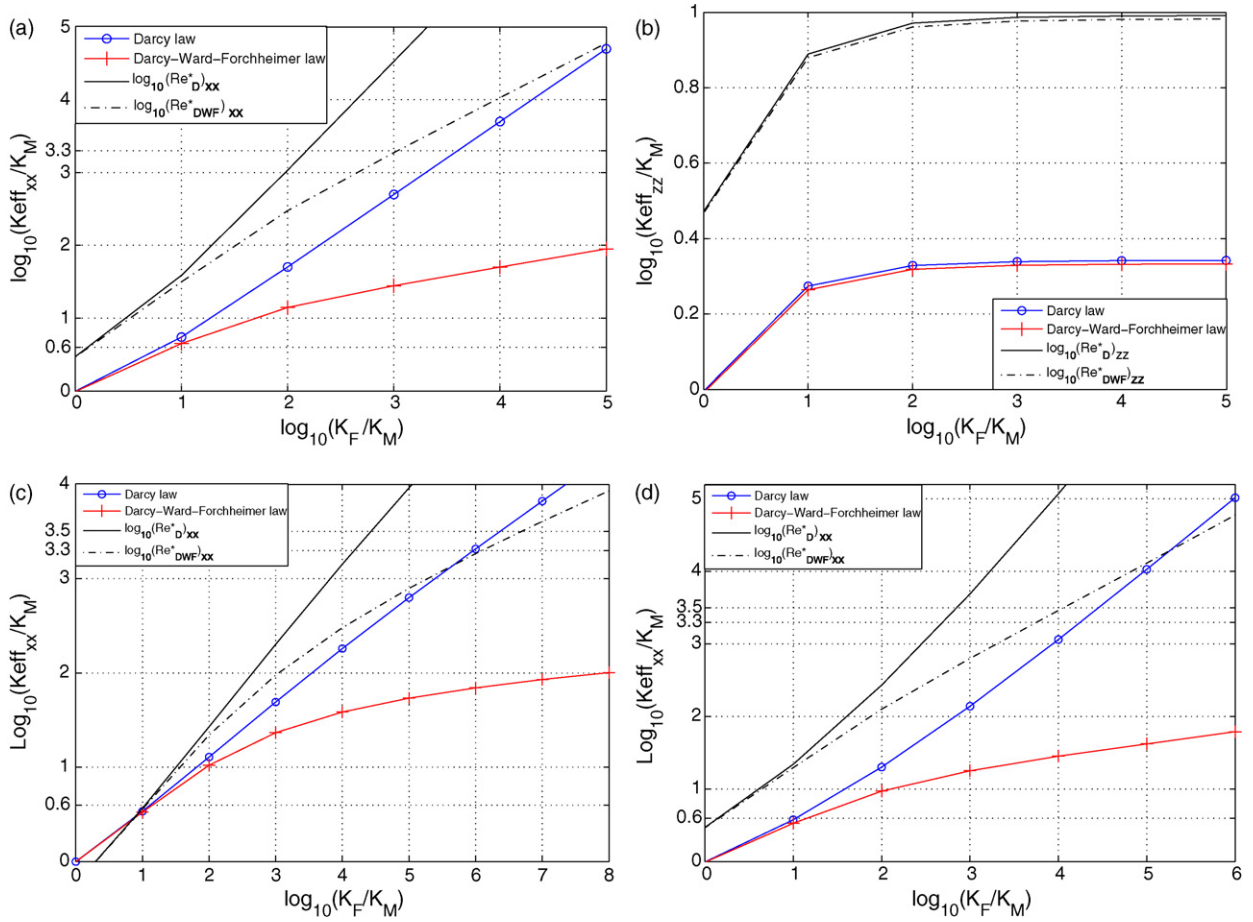


Fig. 6. Log–log plot of $\hat{K}_{ii}^{D}$, $\hat{K}_{ii}^{DWF}$, and Reynolds numbers, versus K_F/K_M. The top figures show $\hat{K}$ for a multilayered medium (a: parallel flow; b: orthogonal flow). The bottom figures show $\hat{K}$ for binary isotropic mixtures (c: 2D; d: 3D). Numerical upscaling results for $\vec{ox}$ flow direction: (o) for Darcy, (+) for DWF. Reynolds numbers are represented as curves without symbols ($\{Re_D^*\}_{ii}$, $\{Re_{DWF}^*\}_{ii}$, Eq. (12)).

dominant over viscous dissipation for $\{Re_{DWF}^*\}_{ii} >> 4$ and overwhelm totally viscous effects when Re reaches about 10^{+3}.

5.3. 3D network of planar fissures in a porous matrix: effective K, percolation, and inertial effects

In this section, we study fully 3D fissured media made up of networks of planar fissures in a porous matrix. Two test cases are studied specifically. The first one, named MF1, includes 50 plane fissures and the second one, named MF2, includes 67 fissures, both with a Poisson distribution of centers, a 3D isotropic distribution of orientations, a uniform distribution of radii in the range [5 m, 25 m], and a constant aperture. Numerical permeametric experiments are performed along the $\vec{ox}$ flow direction. The resulting numerical effective $\hat{K}$'s are compared with analytical $\hat{K}$'s (Fig. 7(a) and (c)) and with calculated Reynolds numbers (Fig. 7(b) and (d)). First, observe that the effective conductivities calculated using Darcy's law are very different for the two fissured media (Fig. 7: compare (a) and (c)). To confirm this, we developed a morphological search algorithm to find the 3D set of fissures percolating clusters for each of these two test cases.

In the first test case (MF1), it was found by the search algorithm that there is no cluster linking up the opposed inlet and outlet faces orthogonal to mean flow direction. On the contrary, there is a percolation cluster in the second test case (MF2). Percolation effects are therefore important for the determination of effective conductivities. Both analytical solutions (Eqs. (7) and (8)) show a fairly large discrepancy with respect to numerical results in some cases, particularly

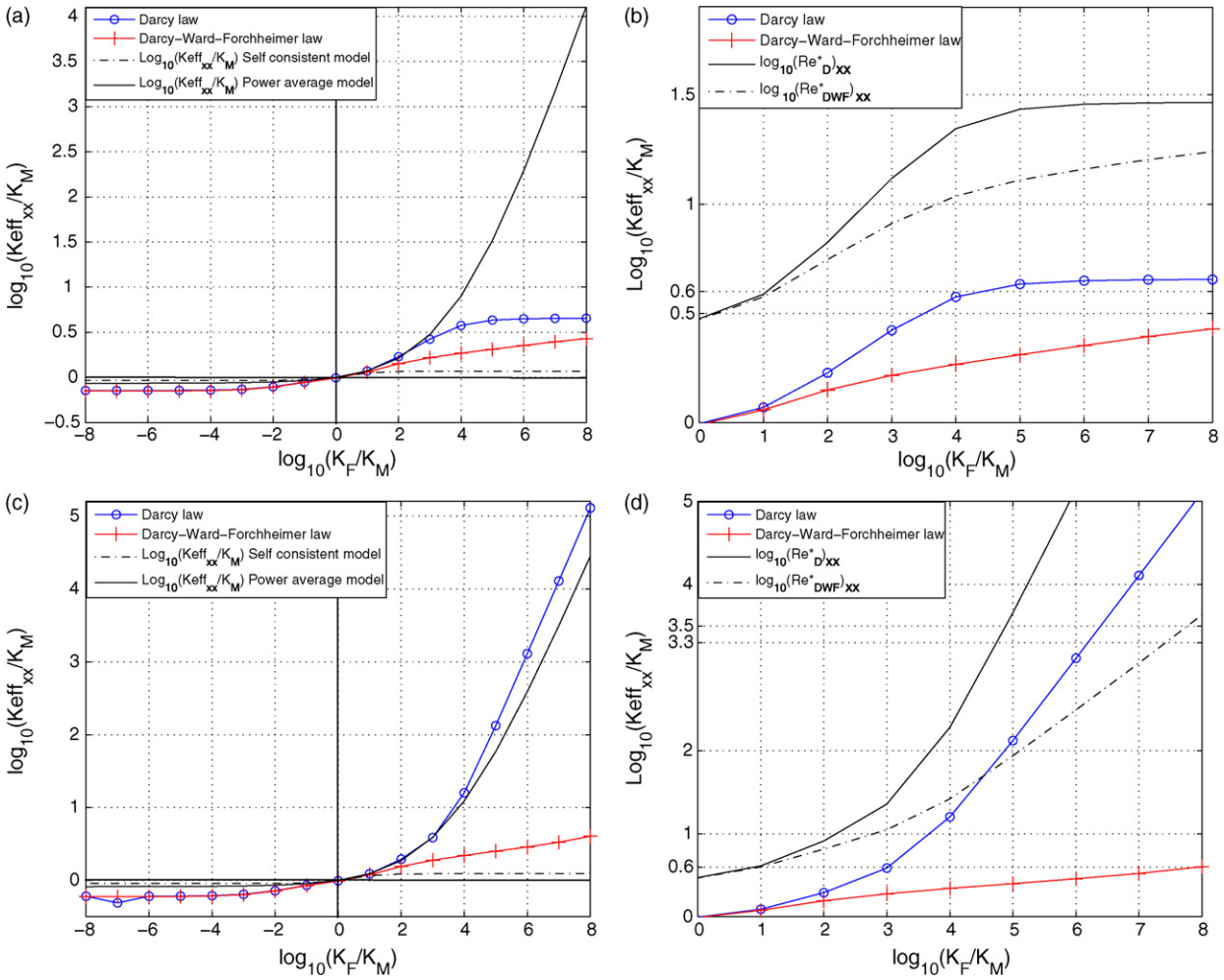


Fig. 7. Log–log plot of numerical and analytical $\hat{K}$'s, as well as Reynolds numbers, versus K_F/K_M. The left figures show $\hat{K}^D_{ii}$, $\hat{K}^{DWF}_{ii}$, and analytical $\hat{K}^D$'s (Eqs. (7) and (8)) for two Matrix-Fissure systems described earlier (a: 'MF1'; c: 'MF2'). The right figures show both the numerical K's and Re^*_{ii} (Darcy and DWF, Eq. (12)) for the same media (b: 'MF1'; d: 'MF2').

when the ratio of K_F/K_M exceeds 10^{+3} as shown in Fig. 7(a) and (c) (non-Darcian regime). This discrepancy depends on percolation effects (case of the fracture network, Fig. 7). This is not too surprising because percolation behavior is essentially of singular type.

However, it can be seen from the effective curves of Fig. 7(c) that the power average model performs better in percolating configurations. In non-percolating configurations like that of Fig. 7(a), the power average and the self-consistent formulas are both off the numerical curves by a factor 10 for contrasts up to 10^{+5}, while for contrasts less than 10^{+3} the power average is again better than the self-consistent.

In addition, one important outcome of this part of the work is as follows: for a 3D fractured medium, we have shown that Darcy simulations can be used to identify percolation effects without having to use a topological search algorithm.

Secondly, the results obtained with the 'DWF' law appear to be similar for the two test cases MF1 and MF2 (Fig. 7: compare (b) and (d)). Note that inertial effects lead to enhanced dissipation of kinetic energy in fast flow paths (compared to slower flow paths). This may tend to reduce the apparent heterogeneity of the flow system, at least in sub-regions where Re is high enough ($log_{10}(Re^*_{DWF}) \geq 0.6$): see the Re curves in Fig. 7(b) and (d). This type of effect was also observed in rough fractures, experimentally and numerically [19]. Enhanced dissipation in fast flow paths may explain why the macro-permeabilities of the two test cases MF1 and MF2 come closer when inertial effects become dominant.

As a consequence of the previous observations, Darcian flow simulation can be viewed as an alternative to direct search of the percolation backbone. Indeed, our experiments show that the percolating cluster can be obtained directly by running Darcian flow simulations with a very large K_F/K_M ratio. The topological search for the percolation backbone, which is computationally burdensome, can therefore be replaced by the resolution of the discrete algebraic system for large contrast ratio. The condition number of the system is high but 'controllable' (the system becomes singular only in the limit as $K_F/K_M \to 0$).

Our experience with the BIGFLOW code shows that the permeability contrast can be pushed up to 10^{+8} (and even more). In BIGFLOW, the PDE is discretized with implicit finite volumes, and the discrete system is solved on a regular 3D grid with a sparse, diagonally preconditioned Conjugate Gradients method. In addition, we used in some cases a continuation method with respect to the K_F/K_M parameter, in order to achieve very large contrasts on very fine grids (a few million nodes).

6. Conclusion and outlook

In this article, a set of morphological models was presented in order to generate consistent matrix/fissure systems such as karstic networks. The morphological model involves discrete random objects, spatially correlated random fields, a mixed continuum/discrete approach. These basic structures can be further conditioned via genetic approaches.

The conductivity upscaling problem was studied in 3D by direct numerical simulations with 'permeametric' boundary conditions, and through comparison with analytical self-consistent and power average operators. Both Darcy and inertial DWF (Darcy/Ward–Forchheimer) models were tested. The inertial DWF law is viewed here as a first attempt at representing large Reynolds flows in 3D open structures. This approach is currently being extended to deal with highly transient, variably saturated flows with multiple free surfaces in fissured porous media.

Percolation effects were analyzed by solving the Darcian flow problem for high K_F/K_M contrasts, or by performing a direct morphological search (which may be in fact more burdensome). The effective permeability of 3D fissured media was captured fairly well by the power average formula compared to self-consistent.

Other types of boundary conditions were used in order to analyze fully directional and tensorial macro-conductivity behavior (immersion experiments described in Bailly et al. [6]).

References

[1] R. Ababou, Quantitative stochastic hydrogeology: the heterogeneous environment, in: C.J.G. Darnault (Ed.), Overexploitation, Contamination of Shared Groundwater Resources (NATO, Advanced Studies Institute Series), Springer Science and Business Media B.V., 2008, pp. 119–182 (Chapter 8).
[2] R. Ababou, Random porous media flow on large 3-D grids: numerics, performance, and application to homogenization, in: M.F. Wheeler (Ed.), IMA vol. 79. Mathematics and its Applications: Environmental Studies – Math., Comput. and Statistical Analysis, Springer, New York, 1996, pp. 1–25 (Chapter 1).
[3] R. Ababou, G. Tregarot, Coupled modeling of partially saturated flows: macro-porous media, in: Interfaces and Variability. Proceedings of CMWR 2002, Computer Methods in Water Resources, 23–28, Delft, The Netherlands, 2002, p. 8.
[4] J-L. Auriault, C. Geindrau, L. Orgas, Upscaling forchheimer law, Transp. Porous Med. 70 (2007) 213–229.
[5] J. Bear, Dynamics of Fluids in Porous Media. American Elsevier, N.Y., 1972; republished by Dover Publications Inc., N.Y., 1988, 764 pp.
[6] D. Bailly, R. Ababou, M. Quintard, Characterization and hydraulic behaviour of highly fissured geologic media (Karsts), in: Proc. Int. Symp. IAHR-GW2008 (Flow & Transp. in Heterog. Subsurf. Formations), International Association of Hydraulic Research GroundWater, Istanbul, Turkey, http://www.iahr-gw2008.net, 18–20 June 2008, p. 10.
[7] G. Dagan, Analysis of flow through heterogeneous random aquifers by the method of embedding matrix. 1. Steady flow, Water Resour. Res. 17 (1) (1981) 107–121.
[8] H.P.G. Darcy, Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon: Exposition et Application des Principes a Suivre et des Formules a Employer dans les Questions de Distribution d'Eau, Victor Dalmont, Paris, 1956 (Annexe D).
[10] P. Forchheimer, Hydraulik, Teubner Verlaggesellschaft, Stuttgart, 1930.
[11] A.A. Hannoura, F.B.J. Barends, Non-Darcy flow: a state of the art, in: Proceedings of Euromech 143, Delft, The Netherlands, 2–4 September 1981, 1981, pp. 37–51.
[12] P.Y. Jeannin, Structure et comportement hydraulique des aquiferes karstiques, Doctoral Thesis, University of Neuchatel, Switzerland, 1996.
[13] M. Kaviany, Principles of Heat Transfer in Porous Media, Springer-Verlag, 1991.
[15] P.M. Knupp, J.L. Lage, Generalization of the Forchheimer-extended Darcy flow model to the tensor permeability case via a variational principle, J. Fluid Mech. 299 (1995) 97–104.
[16] C. Knudby, J. Carrera, J.D. Bumgardner, G.E. Fogg, Binary upscaling—the role of connectivity and a new formula, Adv. Water Resour. 29 (2006) 590–604.

[17] D. Labat, R. Ababou, A. Mangin, Rainfall-runoff relations for karstic springs. I. Convolution and spectral analyses, J. Hydrol. 238 (2000) 123–148.
[18] B. Li, V.K. Garga, M.H. Davies, Relationship for non-Darcy flows in rockfill and theoretical solution for seepage flow in overtopped rockfill, J. Hydraul. Eng., 124 (2) (1998) 206–212, 213–217.
[19] M. Spiller, Physical and numerical modeling of flow and transport in heterogeneous fractured media: high Reynolds flow and reactive particle transport, Ph.D. Thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse (France) and University RWTH Aachen (Germany), Aachen and Toulouse, 25 November 2004.
[20] A.F.B. Tompson, R. Ababou, L.W. Gelhar, Implementation of the three-dimensional turning bands random field generator, Water Resour. Res. 25 (10) (1989) 2227–2243.
[21] I. Wahuyudi, A. Montillet, A.O.A. Khalifa, Darcy and post-Darcy flows within different sands, J. Hydraul. Res. 40 (4) (2002) 519–525.
[22] J.C. Ward, Turbulent flow in porous media. J. THE Hydraul. Div., Proc. ASCE, HY 5 (1964) 1–12.
[23] M. Fourar, R. Lenormand, M. Karimi-Fard, Inertial Effect in High-Rate Flow Through Heterogeneous Porous Media, Transport in Porous Media 60 (2005) 353–370.