

On the semi-active control of elastic vibrations of a slender structure

Meriem Debbabi

▶ **To cite this version:**

Meriem Debbabi. On the semi-active control of elastic vibrations of a slender structure. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2009. English. NNT : . pastel-00005716

HAL Id: pastel-00005716
https://pastel.hal.science/pastel-00005716

Submitted on 29 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

S



Ecole Nationale des Ponts et Chaussées



Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

THESE

présentée à

L'Università degli Studi di Roma "Tor Vergata"

per il conseguimento del titolo di

DOTTORE DI RICERCA IN INGEGNERIA DELLE STRUTTURE E GEOTECNICA DELL'UNIVERSITA DI ROMA "TOR VERGATA"

et du diplôme de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

par : **Meriem Debbabi**

Sujet de thèse:

SUR LE CONTRÔLE SEMI-ACTIF DES VIBRATIONS ÉLASTIQUES D'UNE GRANDE STRUCTURE SOUPLE

Soutenance en Decembre 2009

devant le jury composé de :

Alessandro Baratta	Rapporteur
Rui Carneiro de Barros	Rapporteur
Franco Maceri	Directeur de thèse
Frédéric Bourquin	Directeur de thèse
Hatem Zenzri	Examinateur
Manuel Collet	Examinateur

Al mio Nonno

Remerciement

Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont participé à la réalisation de cette thèse, que ce se soit de manière directe ou indirecte. J'en cite quelques unes mais la liste n'est pas exhaustive.

Je voudrais commencer avec mes directeurs de thèse Pr. Maceri et Pr. Bourquin pour m'avoir suivie pendant ces trois années, de m'avoir initiée à la recherche et de m'avoir épaulée quand il le fallait avec leur sagesse et leur savoir. Cette thèse a été une expérience de vie très enrichissante.

Ensuite je voudrais adresser un remerciement chaleureux à Edoardo Artioli, Federica Caselli, Guiseppe Vairo et Sergio Galeani, qui m'ont accordé beaucoup de leur temps en se montrant toujours disponibles. Je remercie aussi Othman Ben Mekki qui m'a aidé tout au long de la thèse.

Je remercie également tous les membres de ma famille sans lesquels je n'aurais pas eu l'opportunité de faire cette thèse. Je les remercie de leur soutien constant et leurs encouragements, je les remercie de leur présence car ils m'aident à être une meilleure personne. Je remercie le Pr. Friaa et le Pr. Frémond de leurs conseils et leur disponibilié. Je remercie tous mes amis qui ont su être présents quand il le fallait. La liste est longue mais je suis sûre qu'ils se reconnaîtront.

Et le dernier et non le moindre, je remercie la personne qui a vécu le plus cette thèse avec moi, que ce soit dans ses meilleurs moments ou dans les pires, toujours avec patience et affection. Je te remercie Amine pour tout ça et plus encore.

Table des matières

Introduction **1**

1 Concepts de base sur la dynamique non linéaire et sur le contrôle **9**

1.1 Introduction 9
1.2 Outils d'analyse des systèmes non linéaires 10
1.2.1 Concepts généraux 10
1.2.2 Analyse de la dynamique non linéaire du pendule 15
1.3 Méthodes de contrôle non linéaire 18
1.3.1 Stabilisation par linéarisation 19
1.3.2 Séquencement de Gain 19
1.3.3 L'approche *Model Reference Adaptive Control (MRAC)* . 20
1.3.4 Linear Quadratic Regulation (LQR) 22
1.3.5 L'approche *State-Dependent Riccati Equation Control(SDRE)* 23
1.3.6 Le contrôle Clipping 25
1.4 Les amortisseurs semi-actifs en génie civil 25
1.5 Dissipation électromécanique 26

2 Présentation du système **27**

2.1 Introduction 27
2.2 Modèle structure 28
2.3 Dispositif d'amortissement 33
2.4 Modèle pont-actionneur électromécanique 35

3 Outils d'analye du système non linéaire **43**

3.1 Introduction 43
3.2 Système simplifié 44

3.3 Schéma de Newmark semi-explicite 50
3.3.1 Schéma de Newmark générique 50
3.3.2 Schéma de Newmark utilisé 51

4 Stratégies de contrôle passif et séquencement de gain 55
4.1 Introduction 55
4.2 Etude paramétrique 56
4.3 Contrôle passif du modèle non linéaire virtuel 62
4.4 Application de la stratégie de séquencement de gain 68

5 Stratégie de poursuite pour le modèle non linéaire virtuel 75
5.1 Introduction 75
5.2 Critère d'optimisation 76
5.3 Contrôle par tracking du pendule 77
5.3.1 Loi de contrôle actif 78
5.3.2 Loi de contrôle semi-actif 80
5.3.3 Comparaison des lois 82
5.4 Contrôle par tracking du modèle pont-pendule 83
5.4.1 Loi de contrôle actif 84
5.4.2 Loi de contrôle semi-actif 86

6 Stratégie de poursuite pour le modèle réel 91
6.1 Introduction 91
6.2 Contrôle par traking du pendule réel 92
6.2.1 Loi de contrôle semi-actif pour le pendule réel 92
6.2.2 Loi de contrôle semi-actif pour le pendule avec dispositif idéal 98
6.3 Contrôle du pont-actionneur électromécanique réel 99
6.3.1 Loi de contrôle semi-actif par poursuite de l'amortissement 99
6.3.2 Loi de contrôle semi-actif avec dispositif idéal 102
6.3.3 Loi de contrôle semi-actif par poursuite du courant . . . 105
6.4 Loi semi-active polynomiale 107

7 Dispositif expérimental 111
7.1 Introduction 111
7.2 Présentation du dispositif expérimental 112
7.2.1 Matériel utilisé 112

7.2.2 Post traitement 116
7.3 Variation du type d'excitation 116
7.4 Projet-Programme d'autres validations expérimentales 119

Conclsion **121**

Bibliographie **125**

Table des figures

1 TMD pendulaire au sommet de la tour de Taipei 101 2
2 a/Millenium Tower (Tokyo), b/ One Rincon Hill (San Fransisco) 2
3 TMD rectangulaire sur la CitiCorp (New York) 3
4 Modèle structure du pont en cours de construction muni de l'actionneur électromécanique 5

1.1 Portrait de phase d'un focus stable en coordonnées modales . . 14
1.2 Portrait de phase d'un focus instable en coordonnées modales . 14
1.3 Portrait de phase d'un focus stable en coordonnées modales . . 15
1.4 Représentation du bassin d'attraction du pendule conservatif . 16
1.5 Représentation du Portrait de phase du pendule dissipatif autour de son équilibre stable 17
1.6 Model Reference Control 21
1.7 Model Reference Adaptive Control 22

2.1 Modèle structure du pont considéré 28
2.2 Les fréquences de vibration et les formes modales de la structure 32
2.3 Actionneur utilisé pour l'amortissement de la structure 33
2.4 Schéma de fonctionnement de l'actionneur 34
2.5 Vue locale de l'extrémité du tablier avec actionneur électromécanique 35
2.6 Les forces qui lient le pendule au tablier 37
2.7 Modèle électrique de l'alternateur 39

3.1 Schéma représentatif de la génération du contrôle du dispositif . 49
3.2 Algorithme de Newmark implicite pour les systèmes dynamiques structuraux linéaires 51
3.3 Algorithme de Newmark semi-explicite 53

4.1 Contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $m = m^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$M_{ap} = M_{ap}^{op.pr}$, b/$M_{ap} = \frac{1}{2}M_{ap}^{op.pr}$ c/$M_{ap} = 2M_{ap}^{op.pr}$ 57
4.2 Energie mécanique du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $m = m^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$M_{ap} = M_{ap}^{op.pr}$, b/$M_{ap} = \frac{1}{2}M_{ap}^{op.pr}$ c/$M_{ap} = 2M_{ap}^{op.pr}$ 57
4.3 Contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $M_{ap}^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$m = m^{op.pr}$, b/$m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ c/$m = 1{,}3m^{op.pr}$ 59
4.4 Angle de vibration du pendule non linéaire virtuel avec $M_{ap}^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$m = m^{op.pr}$, b/$m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ c/$m = 1{,}3m^{op.pr}$ . . 59
4.5 Energie mécanique du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $M_{ap}^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$m = m^{op.pr}$, b/$m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ c/$m = 1{,}3m^{op.pr}$ 60
4.6 Contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $M_{ap}^{op.pr}$, $m^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$l = l^{op.pr}$, b/$l = \frac{2}{3}l^{op.pr}$ c/$l = 2l^{op.pr}$ 61
4.7 Energie mécanique du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $M_{ap}^{op.pr}$, $m^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et a/$l = l^{op.pr}$, b/$l = \frac{2}{3}l^{op.pr}$ c/$l = 2l^{op.pr}$ 61
4.8 Etape de recherche d'un **contrôle passif** pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel 62
4.9 Variation de l'amplitude de la deuxième contribution modale de la structure pour les grandes vibrations du pendule non linéaire virtuel avec $C_{nl} = C_l$ 64
4.10 Comparaison de l'amplitude de la deuxième contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $C_{nl} = C_l$ à celle du "modèle linéaire de référence" 65
4.11 Comparaison de l'amplitude de la deuxième contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant $C_{nl} \neq C_l$ et utilisant $C_{nl} = C_l$ pour $y_0 = 8{,}9cm$. 66
4.12 Comparaison de l'amplitude de la deuxième contribution modale "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant C_{nl} optimal pour $y_0 = 11cm$ ($\alpha_0 = 0{,}5$) et utilisant C_{nl} optimal pour $y_0 = 7cm$ ($\alpha_0 = 0{,}3$). 67

4.13 Etape de recherche d'un **contrôle semi-actif par séquencement de gain** pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel 68

4.14 Représentation d'une partie de l'espace des configurations utilisé pour l'identification de l'amortissement de la loi semi-active déterminée par séquencement de gain. 70

4.15 Vibration horizontale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" pour $Z = (0{,}2\ 0\ 1\ 30)^T$ avec son amortissement passif optimal $C_{nl} = 0{,}657$ pour ces conditions initiales et l'amortissement passif optimal $C_{nl} = 0{,}482$ pour les conditions initiales $Z = (0{,}2\ 0\ 0\ 0)^T$ 71

4.16 Loi de contrôle semi-actif par séquencement de gain 73

4.17 Vibration horizontale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" pour $Z(0) = (0{,}5\ \ 0\ \ 0\ \ 0)^T$ avec :a/"loi adaptative G.S" et b. $C_{nl} = C_l$ 73

5.1 Etape de conception du **contrôle semi-actif par poursuite** pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel 76

5.2 Schéma représentatif du critère d'optimisation proposé pour l'obtention d'une loi semi-active sur l'amortissement 77

5.3 Comparaison entre les réponses de l'intégration du : a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_a$, b/"Modèle linéaire de référence" 79

5.4 Loi de contrôle actif sur l'amortissement 80

5.5 Comparaison entre les réponses de l'intégration de : a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{sa}$, b/"Modèle linéaire de référence" 81

5.6 Loi de contrôle semi-actif sur l'amortissement 81

5.7 Comparaison entre les réponses de l'intégration de : a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{cr}$, b/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{sa}$, c/"Modèle linéaire de référence" et d/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_a$ pour un angle initial de $\theta_0 = pi/2$ 83

5.8 Réponse du a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_l$, b/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{nl1}(t)$ comparé à c/"Modèle linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}24$ ($y_0 = 5{,}6cm$) 85

5.9 Réponse du a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_l$, b/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{nl1}(t)$ comparé à c/"Modèle linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}3$ ($y_0 = 7cm$) . . 85

5.10 Variation de la valeur de l'amortissement C_{nl1} pour un déplacement initial de $5{,}6cm$ 86

5.11 Réponses de : a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_l$, b/Modèle non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{csa1}(t)$ et c/"Modèle linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}2$ 87

5.12 Variation dans le temps de la valeur de l'amortissement $C_{sa1}(t)$ pour $\alpha_0 = 0{,}2$ 88

5.13 Réponses du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant: a/$C_{nl} = C_l$, b/$C_{nl} = C_{csa1}$ et c/"Modèle linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}3$ 88

5.14 Variation dans le temps de la valeur de l'angle de vibration du pendule du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant: a/$C_{nl} = C_l$, b/$C_{nl} = C_{csa1}$ et c/"Modèle linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}3$ 89

5.15 Zoom sur la variation dans le temps de la valeur de l'amortissement C_{sa1} pour $\alpha_0 = 0{,}3$ 89

6.1 Etape de conception du contrôle semi-actif sur la résistance par poursuite pour le "modèle pont-pendule-alternateur non linéaire réel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel 92

6.2 L'angle de vibration du pendule du : a/système non linéaire utilisant $R_{nl} = R_{crt}$, b/Modèle non linéaire utilisant $R_{nl} = R_{sa}$ comparé à c/Modèle linéaire de référence pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$ . . . 94

6.3 Comparaison entre la fonction objectif sur l'amortissement et celle réalisée grâce à la variation de la résistance pour le système réel $C_{sa} = f(R_{sa})$ pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$ 95

6.4 Variation de la résistance R_{crt} dans le temps pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$. 95

6.5 Variation de la résistance R_{sa} dans le temps pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$ . . 96

6.6 L'angle de vibration du pendule du : a/Système non linéaire utilisant $R_{nl} = R_{crtp}$, b/Modèle non linéaire utilisant $R_{nl} = R_{sap}$, c/Modèle linéaire de référence comparé à d/"Modèle non linéaire de référence" pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$ 97

6.7 L'angle de vibration du pendule du : a/Système non linéaire utilisant $R_{nl} = R_{crtp}$, b/Modèle non linéaire utilisant $R_{nl} = R_{sap}$ comparé à c/Modèle linéaire de référence pour $\theta_0 = 3rad$ 97

6.8 L'angle de vibration du pendule du : a/"Modèle non linéaire de référence", b/Système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{sap}$ en supposant que le dispositif est idéal comparé à c/Système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{sap}$ en considérant le dispositif est réel pour $\theta_0 = 3rad$ 98

6.9 Réponse du système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{csa1}$ confronté au "modèle non linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}2$. 101

6.10 Angle de vibration du pendule du système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{csa1}$ confronté au "modèle non linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}2$ 101

6.11 Réponse du Système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{csa1}$ confronté au "modèle non linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}3$. 102

6.12 Amplitude des contributions modales du: a/ Système non linéaire réel $R = R_{csa1}$ avec dispositif réel, b/ Système non linéaire réel $R = R_{csa1}$ avec dispositif idéal et c/"Modèle pont-pendule non linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}3$ $(y_0 = 7cm)$ . . 104

6.13 Amplitude des contributions modales du système non linéaire utilisant $R = R_{int}$, utilisant $R = R_l$ obtenue de l'amortissement optimal pour les petites vibrations, comparé à l'amplitude donnée par le "modèle linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}22$ 107

6.14 Amplitudes des contributions modales du "modèle système non linéaire de référence" utilisant "$S.A.Control$" confronté à celle utilisant la loi "$S.A.Poly$" 109

7.1 La maquette de la structure réelle 112

7.2 Détail de l'encastrement central de la structure 113

7.3 Le dispositif d'amortissement composé du pendule, du multiplicateur et de l'alternateur 114

7.4 Amplitude des accélérations des contributions modales de la structure utilisant les paramètres optimaux pour la vibration libre (rouge) et ceux optimaux pour la vibration harmonique (vert) 117
7.5 Amplitude des accélérations des contributions modales de la structure utilisant les paramètres optimaux pour la vibration libre (rouge) et ceux optimaux pour la vibration harmonique (vert) 118

Liste des tableaux

3.1 Propriétés de quelques méthodes de la famille Newmark 51

4.1 Amortissement optimal en fonction des déplacements initiaux . 70
4.2 Amortissement optimal en fonction des vitesses initiales 71

7.1 Caractéristiques des accéléromètres PCB 114
7.2 Caractéristiques et paramètres des composants de l'actionneur utilisé 115

Sommario

Il campo del controllo semi attivo richiama un grande interesse dei ricercatori. Questo interesse è dovuto al fatto che il controllo semi attivo riunisce le caratteristiche dei metodi passivi, come la stabilità, ed usufruisce della possibilità di controllare in tempo reale come i metodi attivi. In questo lavoro, ci interessiamo ad un assemblaggio di travi che costituisce il modello di un ponte strallato in corso di costruzione. Questa struttura è stata controllata precedentemente con un pendolo a massa accordata accoppiato ad un alternatore ed una resistenza variabile, sotto l'ipotesi delle piccole oscillazioni del pendolo.

L'obiettivo di questa tesi è di rendere robusto il sistema di controllo scelto ed estendere la sua efficienza all'intervallo delle grandi oscillazioni del pendolo.

Il lavoro svolto può essere diviso in quattro parti principali.

Inizialmente, è stato fatto uno studio parametrico per capire meglio la dinamica dell'attuatore in grandi oscillazioni, ed è stata stabilita una relazione di dipendenza tra il controllo e i parametri e le variabili del sistema.

Lo studio del controllo nello spirito della strategia passiva e della pertinenza dell'uso del metodo del *gain scheduling* ha poi rivelato la necessità di controllare in tempo reale.

Per questo, seguendo il metodo *tracking*, sono state definite delle leggi di controllo basate sullo smorzamento dei sistemi pendolo non lineare e ponte-pendolo accoppiato.

Infine, è stata progettata una legge di controllo sulla resistenza, seguendo il metodo *tracking*. La resistenza variabile rappresenta la variabile di controllo reale del sistema. Questa legge di controllo permette di realizzare gli obiettivi di questa tesi.

Abstract

Semiactive control is a field of big interest for researchers. It combines the stability of a passive system to the real time control of an active strategy. We are interested in a linear assembly of beam structures representing a cable-stayed bridge under construction. An actuator made of a tuned mass damper coupled to an alternator and a variable resistance was designed to damp the structure under the hypothesis of small pendulum rotation angle. Our aim is to make this engine more robust, and to extend its working range to larger pendulum rotations. This work can be divided in four main parts:

First of all, a parametrical study is made to better understand the pendulum behavior for large rotation angles. The dependance of the control to the variables and to the parameters of our system is established.

Then, the passive control optimality of the system is studied and a gain scheduling control based method is designed for the damping.

After that, a tracking design method is used to define a semiactive damping control of two nonlinear systems: The first is a nonlinear pendulum and the second is the structure-pendulum coupled system.

Finally, the tracking design is extended to the definition of another control law on the resistance, which is the real control variable. Controlling the resistance in real time is achieved thanks to this control law.

Résumé

Le contrôle semi-actif est un domaine de recherche en plein essor vu qu'il joint la stabilité des systèmes contrôlés passivement à la possibilité de contrôle en temps réel permise par les stratégies actives. Dans cette thèse on s'intéresse à un assemblage de poutres modélisées sous l'hypothèse de linéarité et représentant un modèle de pont à hauban en cours de construction. Cette structure a été contrôlée précédemment par un dispositif formé d'un pendule à masse accordée couplé à un alternateur et à une résistance électrique sous l'hypothèse de petites rotations du pendule. Dans cette thèse on a pour objectif de rendre robuste cet actionneur pour les grandes rotations du pendule.
Afin d'y parvenir le travail effectué peut être divisé en quatre points:

Tout d'abord, une étude paramétrique est effectuée afin de mieux comprendre le comportement de l'actionneur en grandes rotations du pendule. Cette étude a permis d'identifier la dépendance du contrôle aux variables et aux paramètres du système.

Puis une étude du contrôle passif du système non linéaire virtuel est effectuée et une loi basée sur le contrôle par séquencement de gain est définie et appliquée à la structure. Ces deux lois montrent la nécessité de la conception d'un contrôle en temps réel.

Ensuite, on définit des lois semi-actives dans l'esprit de la poursuite d'un modèle de référence pour les deux systèmes pendule seul et pont-pendule. Leurs limites et leurs apports sont établis.

Enfin par une stratégie de poursuite on conçoit une loi de contrôle actif et sa version semi-active pour le système non linéaire réel. Cette dernière, permet enfin de réaliser les objectifs de cette thèse *i.e* avoir un niveau d'amortissement de la structure pont-actionneur électromécanique, pour les grandes rotations du pendule, comparable à celui d'un modèle linéaire.

Introduction

L'introduction de nouveaux matériaux dans la construction des ouvrages d'art a donné la possibilité de rendre ces structures plus minces et plus souples. Cet affinement induit une plus grande sensibilité aux vibrations et par conséquent un plus grand risque d'endommagement ou même d'effondrement. L'étude de ce risque se fait non pas en statique mais en dynamique, puisque les phénomènes sont liés à la résonance, qui correspond à la coincidence de la fréquence de vibration de l'excitation avec celle des fréquences de vibration propres de la structure. Afin d'éviter ce risque ou d'en réduire les effets, on tend soit à désynchroniser les deux fréquences soit à atténuer l'énergie introduite dans la structure. La diminution de l'énergie sert à augmenter le confort en phase de construction (ponts) ou d'exploitation (bâtiments), à réduire la fatigue et à protéger contre les séismes par exemple. Mais afin d'être plus efficace contre des actions éventuelles dues aux chargements tels que le vent, il est préférable d'introduire un ou plusieurs dispositifs qui permettent de désyntoniser la fréquence de vibration de la structure à amortir et celle de l'excitation et de limiter l'effet de cette dernière par l'introduction de rigidité et/ou d'amortissement. Cette intervention est appelée contrôle. Il existe différentes méthodes de contrôle utilisées sur des bâtiments tels que la tour de Taipei (Fig1) ou la passerelle London Millenium Footbridge où l'on trouve des contrôleurs passifs, la millenium tower (Fig2) en revanche utilise un contrôleur semi-actif. La stratégie de contrôle la plus connue et appliquée dans le cadre du génie civil est la stratégie passive, qui consiste à employer un dispositif qui permet de contrôler la structure sans apport d'énergie extérieure. Le dimensionnement du dispositif se fait pour qu'il travaille de manière optimale à certaines conditions, données au préalable suivant le critère choisi. Donc, une fois le dispositif installé sur la structure, il ne travaille que quand les conditions pour lesquelles il a été mis en oeuvre se présentent.

On cite comme exemple d'amortisseurs passifs les dissipateurs sismiques [89], les amortisseurs à fluides visqueux [16], les amortisseurs viscoélastiques [44] etc. Mais l'exemple de dispositif de contrôle passif le plus utilisé est l'amortisseur à masse accordée (*TMD : Tuned Mass Damper*). Il peut être pendulaire [75], [89],[1] comme celui installé au sommet de la tour de Taipei (1)
liquide [93], [5], [68] comme celui de la Millenium Tower de Tokyo (2a/)



Fig. 1 – *TMD pendulaire au sommet de la tour de Taipei* 101

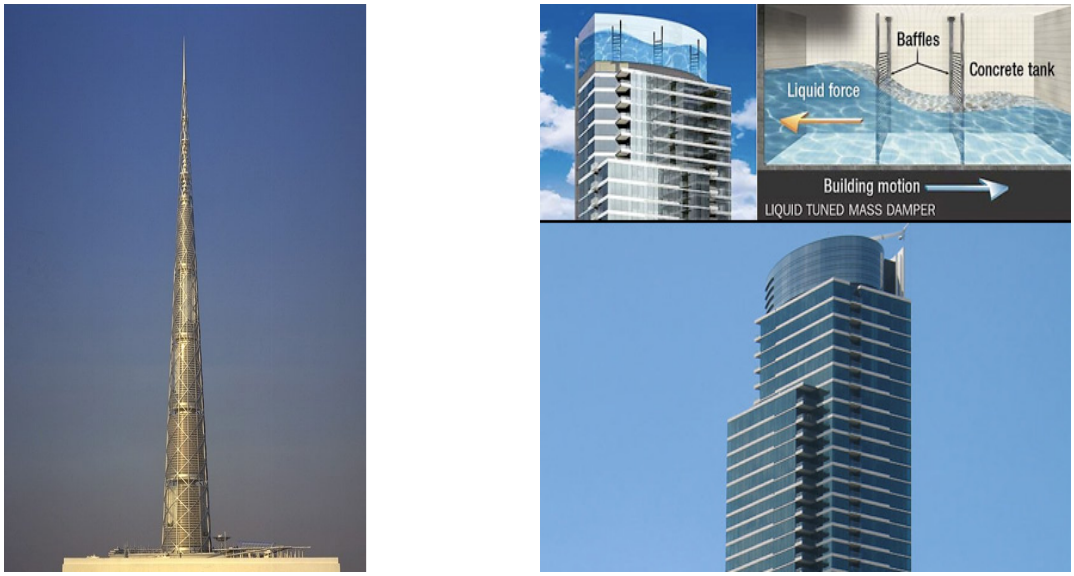


Fig. 2 – *a/Millenium Tower (Tokyo), b/ One Rincon Hill (San Fransisco)*

ou sous la forme d'une masse rectangulaire [30], [78] comme le bloc de béton qui glisse sur le toit du bâtiment du Citicorp à New York (3)

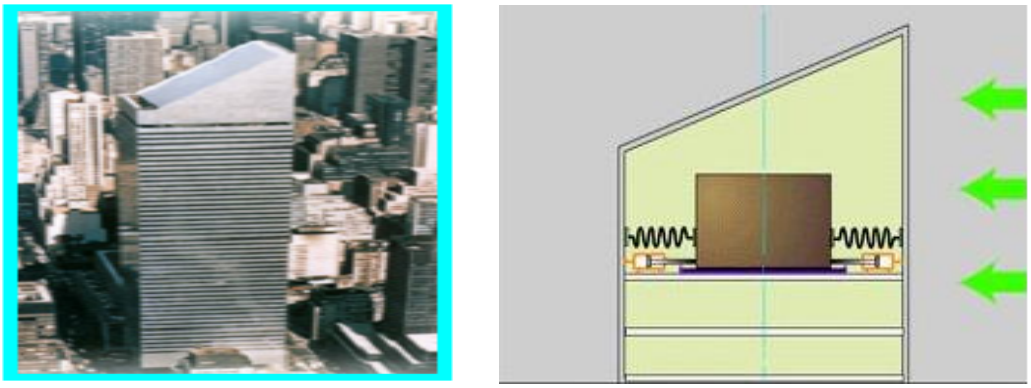


Fig. 3 – *TMD rectangulaire sur la CitiCorp (New York)*

Pour la conception de ces dispositifs on a besoin de critères d'optimisation. L'optimisation peut avoir pour but de minimiser le déplacement de la structure comme pour le cas de Den Hartog (1947)[31] et Thompson (1981) [91], ou de maximiser la rigidité de la structure tel que montré par Falcon (1967) dans [28] ou bien de maximiser l'amortissement du dispositif utilisé proposé par Luft (1979) dans [55] ou même de minimiser l'accélération de la structure tel que dans les travaux de Ioi *et al* (1978) [40] et Warburton (1982) [92], etc.
La mise en oeuvre d'un des critères qu'on vient de présenter, peut être interprété comme un contrôle de vibrations avec une fonction objectif spécifique. L'utilisation du TMD est fréquente et variée. On le trouve aussi bien sur les passerelles telles que London Milenium Footbridge (52 TMD), ou sur les grands ouvrages d'art tel que le pont à hauban de Okutama au Japon. Il partage avec les autre types d'amortisseurs passifs la propriété de rendre le système contrôlé intrinsèquement stable.

La stratégie active, qui est plus utilisée pour tout ce qui est robotique et qui consiste en la conception d'un dispositif alimenté par une source extérieure, permet de programmer ce dernier pour appliquer un effort résistant aux chargements imposés à la structure sous contrôle. Elle permet une adaptation en temps réel à la modification des conditions de fonctionnement grâce à des lois de contrôle. Ces lois imposées au dispositif de contrôle peuvent être conçues soit pour le linéaire soit pour le non linéaire [18], [73], [71], [10], [7]. Le principal avantage de cette stratégie est la possibilité d'adapter la sortie du dispositif utilisé à la variation des sollicitations et des conditions de fonctionnement. Les inconvénients sont qu'elle requiert une grande quantité d'énergie et qu'elle manque de stabilité intrinsèque [50], [29], [4], [11], [12], [10].
En ce qui concerne la stratégie semi-active, elle représente un bon compromis

entre les deux premières. Elle se fonde sur la conception d'un dispositif passif, optimal pour certaines conditions, muni de lois de contrôle destinées à faire varier ses paramètres en temps réel, tel que par exemple pour les vérins à fluide magnétorhéologique, on contrôle la viscosité du fluide mélangé à de la limaille de fer par la variation d'un champ magnétique appliqué à celui-ci. Cette variation fait en sorte que sa réponse dynamique change aussi en temps réel puisque pour une même valeur d'excitation à l'entrée, le déplacement à la sortie du vérin dépend de la viscosité du fluide. Et par conséquent la variation imposée permet d'amortir de manière optimale la solicitation appliquée à la structure. Le grand avantage de la stratégie semi-active est le fait de pouvoir contrôler en temps réel sans dépenser une grande quantité d'énergie (puisque le contrôle s'effectue sur les paramètres seulement). La stratégie semi-active aussi a besoin de la définition d'une loi de contrôle, dont les performances dépendent du choix des critères adoptés. Mais elle a l'avantage de ne pas devoir appliquer d'effort au système à contrôler et, par conséquent, elle ne requiert pas une grande quantité d'énergie extérieure. De plus, la présence permanente d'une dissipation garantit la stabilité du système.

Parmi les actionneurs employés de manière semi-active, il y a les vérins à fluides magnétorhéologiques [36], [76], [90] les amortisseurs à base d'alliages à mémoire de forme [17], [88] les systèmes piézoélectriques [79], [65],[9], les TMD semi-actifs [77], [67], [13], [80], [81], [15] etc.

Dans cette thèse on s'intéresse à la manière de rendre robuste une loi de contrôle semi-actif conçue sous l'hypothèse de linéarité du système contrôlé. Pour illustrer la démarche, on choisit l'exemple d'un amortisseur à masse accordée pendulaire couplé à un alternateur qui transfert l'énergie électrique résultant de la rotation mécanique entrante, à une résistance variable dont la valeur peut être gérée à travers une carte électronique. Ce dispositif de contrôle est appliqué à un système formé d'un assemblage de poutres qui représente un ouvrage d'art à échelle réduite en cours de construction, modélisant ainsi un pont à hauban, avant l'installation du premier câble tel que montré dans la figure (4)

Cette structure est intéressante par le fait qu'elle représente la phase de construction à laquelle l'ouvrage est le plus souple. Le contrôle considéré se fait par l'emploi d'un (ou plusieurs) dispositif pendulaire à masse accordée du type précédemment présenté. Le dimensionnement de l'actionneur électromécanique employé a été fait de manière optimale lors d'une précédente étude, en petits déplacements du pendule. Pour le cas de la vibration libre le critère ETDR a été

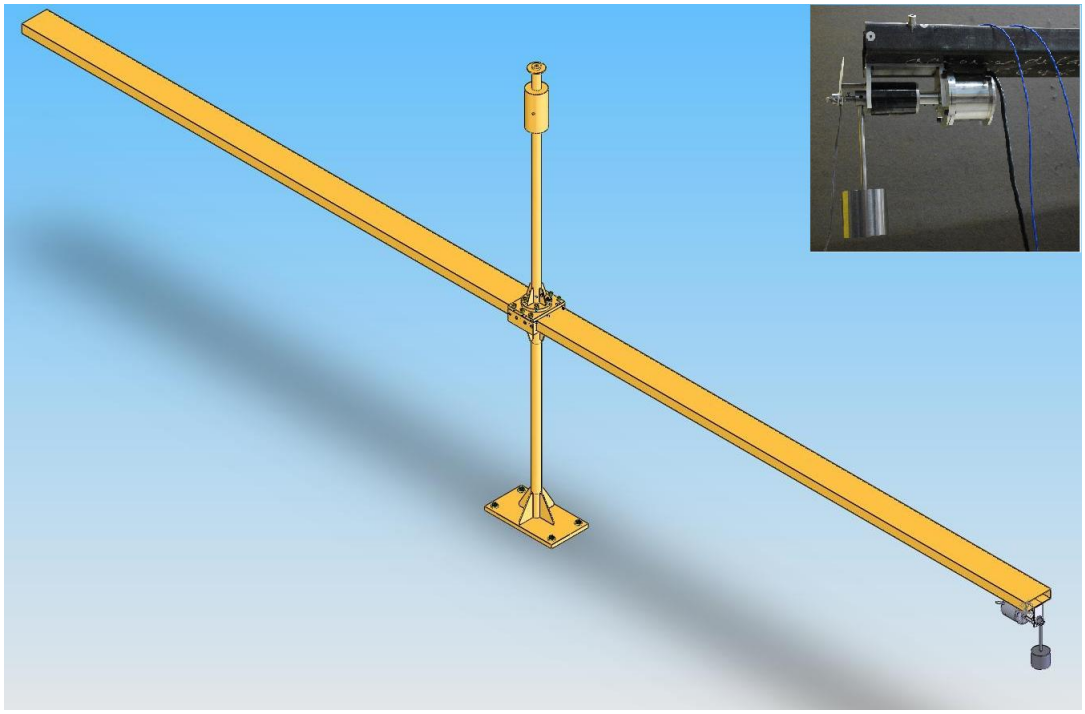


Fig. 4 – *Modèle structure du pont en cours de construction muni de l'actionneur électromécanique*

adopté [61], [62], [60]. Ce critère consiste en la maximisation de la décroissance de la réponse en déplacement de la structure. L'actionneur proposé a pour rôle de transférer l'énergie présente dans le système vers l'extérieur et ceci est effectué par la transformation de cette dernière, mécanique, en énergie électrique à dissiper par effet Joule dans une résistance variable. La variation de la résistance permet le contrôle en temps réel des paramètres du dispositif.

Le but de cette étude est de robustifier l'actionneur pour les grandes vibrations du pendule. Pour cela une étude paramétrique est effectuée afin de mieux comprendre le comportement de l'actionneur en grandes rotations du pendule. Et l'on s'aperçoit que le pendule tend à perdre son efficacité par manque de synchronisation. La stratégie de contrôle passif est testée, puis une loi de contrôle basé sur le contrôle par séquencement de gain est définie et appliquée à la structure. Ces deux lois se révèlent inefficace pour contrôler le modèle non linéaire de référence étudié ce qui nous amène à la nécessité de concevoir un contrôle à chaque instant et pas seulement à quelques instants choisis. On définit des lois semi-actives dans l'esprit de la poursuite d'un modèle de référence pour les deux systèmes pendule seul et pont-pendule. Une

étude de leurs limites et leurs apports est effectué. Puis par une stratégie de poursuite avec limitation d'amplitude on conçoit une loi de contrôle actif et sa version semi-active pour le système non linéaire réel. Cette dernière, permet enfin de réaliser les objectifs de cette étude *i.e* avoir un niveau d'amortissement de la structure pont-actionneur électromécanique, pour les grandes rotations du pendule, comparable à celle d'un modèle linéaire.

Ce travail est organisé comme suit : On donne dans le premier chapitre un rappel de quelques concepts de base de la dynamique non linéaire qui représenteront les outils de compréhension du système étudié. On présente quelques méthodes de contrôle non linéaires. Le deuxième chapitre est dédié à la modélisation du système étudié. Avant tout, la structure est modélisée en élasticité linéaire. Ensuite, le dispositif pendule-alternateur est modélisé en grand déplacements. Finalement, le modèle complet électromécanique est établi. Le chapitre trois est dédié à la présentation des outils numériques à employer pour les simulations et aux stratégies de conception des lois de contrôle semi-active. On effectue une étude sur l'actionneur en grandes rotations du pendule puis on applique une stratégie passive et un contrôle par *Gain Scheduling* au modèle système non linéaire de référence dans le quatrième chapitre.

Puis dans le cinquième et le sixième chapitre on détermine respectivement une loi de contrôle par tracking pour les systèmes pendule seule et pont-actionneur électromécanique et par tracking avec limitation d'amplitude.

Une présentation de la maquette de pont sur la quelle la validation expérimentale est programmé est effectué dans le septième chapitre avec la présentation de quelques résultats expérimentaux obtenus sur la maquette de pont.

1

Concepts de base sur la dynamique non linéaire et sur le contrôle

1.1 Introduction

Dans le cadre de cette étude, on se propose de contrôler un système dynamique non linéaire. Contrôler un système est la capacité de le forcer à réaliser une fonction objectif donnée. Le contrôle consiste à définir l'entrée adéquate au système à contrôler, afin d'avoir le comportement voulu à la sortie. Au cours de ce processus, il y a la définition du modèle système, la conception du contrôleur, l'implémentation, la validation numérique et expérimentale, etc. Les scientifiques se sont de plus en plus intéressés au contrôle non linéaire afin d'en améliorer les résultats. Comme presque tous les systèmes étudiés sont non linéaires, on procède généralement à la conception du contrôle à partir d'un modèle linéarisé du système original pour des raisons de stabilité et surtout de maîtrise des modèles linéaires.
Mais bien que l'analyse des systèmes linéaires soit assez bien maitrisée, la linéarisation dans le cas des systèmes non linéaire peut représenter une limite en termes de compréhension de la dynamique non linéaire et surtout en termes de globalité des résultats.

Dans ce qui suit, on présentera quelques outils d'analyse de la dynamique non linéaire [34], [45] mis en évidence sur l'exemple du système pendule non linéaire. Ensuite, en ce qui concerne la conception du contrôle, on présentera

quelques-unes des méthodes non linéaires qui ont été développées au cours de ces dernières années, tel que le *Gain Scheduling* [42], [83], [24], [84], le *Model Reference Adaptive Control* [39], [25], [64], [38] le contrôle *Clipping* [19], [33], le *State-Dependent Riccati Equation Control* [70], [8], [86], [26] etc. Enfin, on présentera quelques actionneurs utilisés pour le contrôle tel que les TMD semi-actifs et le concept de la dissipation électromécanique.

1.2 Outils d'analyse des systèmes non linéaires

1.2.1 Concepts généraux

On s'intéresse aux systèmes dynamiques qui sont définis par un nombre fini d'équations ordinaires couplées du premier ordre [45], [34]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_p) \\ &. \\ &. \\ \dot{x}_n &= f_n(t,x_1,...,x_n,u_1,...,u_p) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où les $\dot{x}_i$ représentent les dérivées par rapport au temps t des variables x_i et les u_1,...,u_p représentent les variables entrée du système. Les variables x_i sont généralement appelées variables d'état du système. Sous la forme vectorielle, le système (1.1) est écrit comme suit

$$\dot{x} = f(t,x,u) \tag{1.2}$$

et l'équation (1.2) est appelée l'équation d'état du système, où x est le vecteur état du système et u son entrée. On peut représenter l'équation (1.2) sous une forme où la dépendance de l'entrée n'est pas explicite. Cette équation est appelée l'équation d'état non forcée

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.3}$$

Travailler avec la forme de l'équation d'état non forcée ne veut pas forcément dire que l'entrée est nulle. Elle peut être exprimée en fonction de l'état $u = \varsigma(x)$ ou du temps $u = \varsigma(t)$ ou bien des deux à la fois $u = \varsigma(t,x)$. Le cas particulier où le système d'état non forcé ne dépend pas explicitement du temps est appelé

système autonome et il s'écrit comme suit

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.4}$$

Le comportement d'un système autonome est invariant aux translations par rapport au temps. Le premier concept important quand on parle d'équation d'état est la notion de point d'équilibre. Un point $x = x^*$ dans l'espace d'état est appelé point d'équilibre de l'équation (1.2) si pour toute condition initiale égale à x^* l'état reste à x^* pour tous les temps futurs. Pour les systèmes autonomes (1.4) les points d'équilibres sont définis par les solutions réelles de l'équation

$$f(x) = 0 \tag{1.5}$$

Un point d'équilibre peut être isolé (pas d'autres équilibres dans son voisinage) ou bien il peut y avoir un continuum de points d'équilibres.
Pour les systèmes linéaires, on dispose du principe de superposition sur lequel reposent tous les outils d'analyse des systèmes, qui est un principe très puissant mais que l'on perd dès que l'on parle de systèmes non linéaires. Généralement on linéarise (quand il est possible de le faire) en un point de fonctionnement et on analyse le système linéaire trouvé. Il est clair que les linéarisations sont très utiles pour avoir le maximum d'informations sur le système, néanmoins les linéarisations représentent une limitation de deux types. La première est que lorsque l'on procède à une linéarisation, celle-ci n'est valable qu'au voisinage du point considéré et par conséquent toutes les propriétés et les résultats ne sont valables que localement au point et pas globalement par rapport à la dynamique de l'état. La seconde est que la dynamique des systèmes non linéaires est plus riche que celle des systèmes linéaires. Il existe des phénomènes essentiellement non linéaires qui ne peuvent pas être prédits par les modèles linéaires tels que *Finite escape time*, les équilibres multiples isolés, les cycles limite, le chaos [45], etc.

Les systèmes du second ordre (à deux équations) sont d'un grand intérêt car ils donnent la possibilité de visualiser les trajectoires solutions par une représentation dans le plan. Cette visualisation permet une meilleure compréhension qualitative du comportement du système. Sur la base d'un système du second ordre, on introduira dans la suite quelques idées de base de la dynamique non linéaire. Un système d'équations ordinaires autonomes du second ordre est représenté par les deux équations scalaires suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Soit $x(t) = (x_1(t),x_2(t))$ la solution des équations (1.6) qui commence avec la condition initiale $x_0 = (x_{10},x_{20})$ qui est $x(0) = x_0$. L'ensemble des positions que prend la solution $x(t)$ dans le plan $x_1 - x_2$ pour tout $t \geq 0$ est une courbe qui passe par le point x_0. Cette courbe est appelée la trajectoire ou l'orbite des équations (1.6) partant de x_0. Le plan $x_1 - x_2$ est appelé le plan de l'état ou le portrait de phase. La partie à droite des équations (1.6) représente le vecteur tangent $\dot{x} = (\dot{x}_1(t),\dot{x}_2(t))$ à la courbe. Utilisons la notation vectorielle

$$\dot{x} = f(x)$$

où $f(x) = (f_1(t),f_2(t))$. On considère $f(x)$ un champ de vecteur dans le plan d'état. Ceci implique que pour chaque point x dans le plan on associe un vecteur $f(x)$. Pour représenter les trajectoires dans le portrait de phase, il existe plusieurs méthodes telles que la méthode des isoclines ou la représentation de la solution numérique approchée à plusieurs conditions initiales données. Il faut savoir que la représentation des trajectoires dans le portrait de phase permet une évaluation qualitative et non quantitative vu que la variable t a été supprimée. Par exemple une trajectoire fermée signifie que le système a une solution périodique et qu'il oscille avec une amplitude constante. Alors que si la trajectoire converge progressivement vers le centre (en spirale) ceci implique que la solution représente des oscillations dont l'amplitude décroit avec le temps. Dans ce qui suit, on analysera qualitativement le comportement des systèmes du second ordre utilisant leur portrait de phase. Pour cela, on a besoin de caractériser le type d'équilibre dont on dispose. Il existe plusieurs types d'équilibre dont la caractérisation est basée sur la théorie des systèmes linéaire mais comme les systèmes non linéaires au voisinage de leurs points d'équilibres ont les mêmes propriétés que leurs versions linéarisées, on pourra les utiliser pour l'analyse des systèmes non linéaires localement au voisinage de leurs points d'équilibres.

Les systèmes linéaires autonomes peuvent être représentés sous la forme suivante:

$$\dot{x} = Ax \tag{1.7}$$

où A est une matrice réelle constante 2×2. La solution de l'équation (1.7) pour un état initial x_0 est donnée par

$$x(t) = Mexp(J_r t)M^{-1}x_0 \tag{1.8}$$

où J_r est la forme de Jordan réelle de A, et M est une matrice réelle non singulière tel que $M^{-1}AM = J_r$.
L'application qui associe à chaque condition initiale $x(0)$ une réponse donnée par $x(t)$ présenté dans (1.8) est appelée le flot de l'équation. En fonction des valeurs propres de la matrice A, la forme de Jordan peut prendre une des trois formes suivante

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

où k peut prendre la valeur 1 ou 0. La première forme représente le cas où les valeurs propres sont toutes deux réelles et distinctes. La seconde forme correspond au cas où le système a une valeur propre réelle double. Et la troisième correspond au cas où les valeurs propres du systèmes sont complexes conjuguées tel que $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. De plus il faut préciser que dans le cas où les valeurs propres sont réelles il y a le cas où la valeur propre est égale à zéro. Pour ce cas particulier l'origine n'est pas un équilibre isolé et le comportement qualitatif du système est assez différent des autres cas. Etudions ces différents cas:

Soit, $M = [v_1,v_2]$ où v_1 et v_2 représentent les vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et λ_2. Le changement de variables $z = M^{-1}x$ transforme le système en deux équations différentielles du second ordre découplées tel que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

dont la solution pour une condition initiale (z_{10},z_{20}) est

$$z_1(t) = z_{10}e^{\lambda_1 t}, \qquad z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t} \tag{1.11}$$

Eliminant la variable t entre les deux équations on obtient

$$z_2 = cz_1^{\lambda_2/\lambda_1} \tag{1.12}$$

où $c = z_{20}/(z_{10})^{\lambda_2/\lambda_1}$. Le portrait de phase est donné par la famille de courbes générées par l'équation (1.12) en considérant plusieurs valeurs de la constante

c dans $\mathbb{R}$. La forme du portrait de phase dépend du signe des valeurs propres λ_1 et λ_2. On représente dans ce qui suit le portrait de phase correspondant à chaque cas:

– Les deux valeurs propres réelles négatives $Re(\lambda_i) < 0$

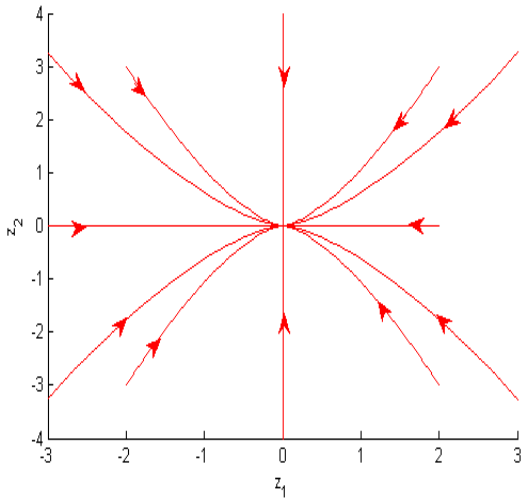


Fig. 1.1 – *Portrait de phase d'un focus stable en coordonnées modales*

l'équilibre est asymptotiquement stable.

– Les deux valeurs propres positives $Re(\lambda_i) > 0$

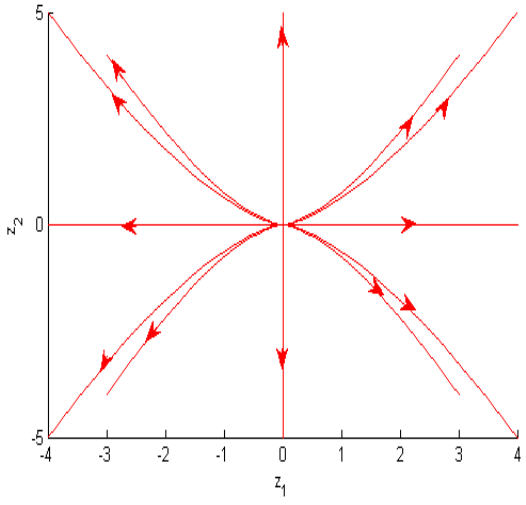


Fig. 1.2 – *Portrait de phase d'un focus instable en coordonnées modales*

l'équilibre est instable.

– Si une des valeurs propres est à partie réelle nulle l'équilibre peut être stable mais pas asymptotiquement stable ou bien instable.
– Pour le cas des valeurs propres complexes, le résultat dépend du signe de la partie réelle de celles-ci. Comme pour le cas des valeurs propres réelles pures, si elles sont négatives le système est stable sinon il est instable. On représente dans ce qui suit le cas où les deux valeurs complexes conjuguées sont à partie réelle négative $Re(\lambda_i) < 0$

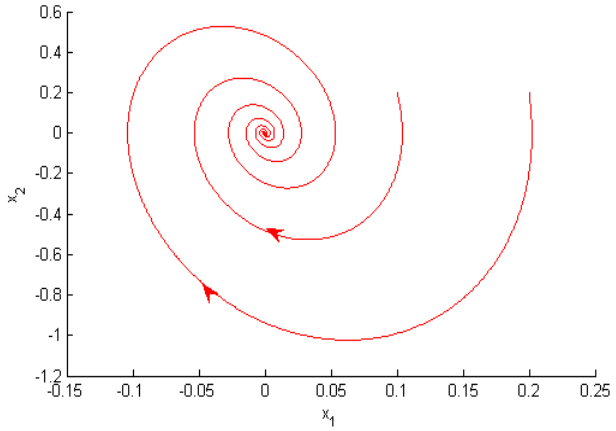


Fig. 1.3 – *Portrait de phase d'un focus stable en coordonnées modales*

l'équilibre est asymptotiquement stable.

Dans la figure (1.3) on voit deux trajectoires stables. L'aire à l'intérieur de la plus grande trajectoire stable est appelé "bassin d'attraction" de l'équilibre considéré.

Définition d'un bassin d'attraction:

Soit x_0 un équilibre asymptotiquement stable. Le bassin d'attraction de x_0 est défini par

$$B(x_0) = v \in \Omega : x_v(t) \rightarrow x_0 \quad quand \quad t \rightarrow +\infty \tag{1.13}$$

$B(x_0)$ est la boule contenant x_0 représentant la partie de l'espace d'état Ω qui entoure le voisinage v du point x_0 dans le quel $\forall x(0) \in v$, $x_v(t)$ converge vers sa position d'équilibre x_0.

1.2.2 Analyse de la dynamique non linéaire du pendule

Etudions le système non linéaire pendule simple. On considère premièrement le pendule simple conservatif, dont l'équation de la dynamique est donnée

par

$$I\ddot{\theta} + mlgsin(\theta) = 0 \tag{1.14}$$

où I, m, l et g représentent respectivement l'inertie, la masse, la longueur du pendule et l'accélération de la gravité.

Les équilibres de ce système sont donnés par $\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \theta = \pm k\pi \end{cases}$

On sait que les équilibres stables du pendule sont donnés par $\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \theta = \pm 2k\pi \end{cases}$ et que ceux instables sont donnés par $\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \theta = \pm(2k+1)k\pi \end{cases}$.

Afin de ne pas atteindre le premier équilibre instable, on se limitera à étudier la dynamique du pendule pour $\theta \in]-\pi,\pi[$. On représente dans la figure qui suit le bassin d'attraction de ce système conservatif autour de sa position d'équilibre stable $\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$

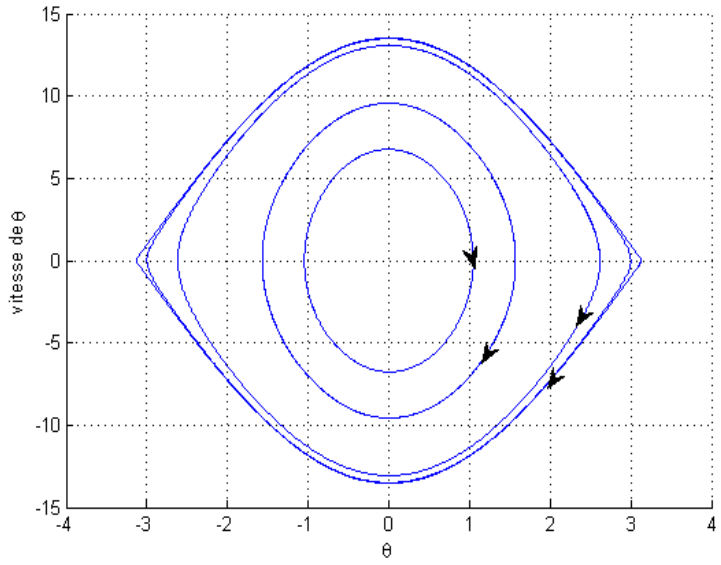


Fig. 1.4 – *Représentation du bassin d'attraction du pendule conservatif*

L'aire à l'intérieur de la plus grande courbe fermée Ω de la figure (1.4), représente le bassin d'attraction du pendule conservatif. C'est-à-dire que pour n'importe quel couple de conditions initiales $(\theta_0,\dot{\theta}_0)$ qui se trouve dans cette zone de l'espace de configuration, la trajectoire passant par ce point restera

dans cette même zone. Ceci veut dire que le pendule reste stable (ses trajectoires ne divergent pas) pour n'importe quelle valeur initiale $(\theta_0,\dot{\theta}_0) \in \Omega$ indépendamment de la valeur de l'amortissement.
En ajoutant un amortissement au système considéré (1.14), l'équation devient

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mlgsin(\theta) = 0 \tag{1.15}$$

le bassin d'attraction du point d'équilibre stable $\theta = \dot{\theta} = 0$ s'élargit et comprend une partie de l'espace de configuration qui n'est pas inclue dans celle du système conservatif montré dans la figure (1.4). On montre dans la figure (1.5) ci-après le portrait de phase du système (1.15) limité dans la direction θ à l'intervalle $]-\pi,\pi[$, où l'on voit clairement que l'on arrive à avoir une stabilité du système même pour des valeurs de vitesses d'oscillations initiales au delà de la limite du bassin d'attraction du pendule conservatif.

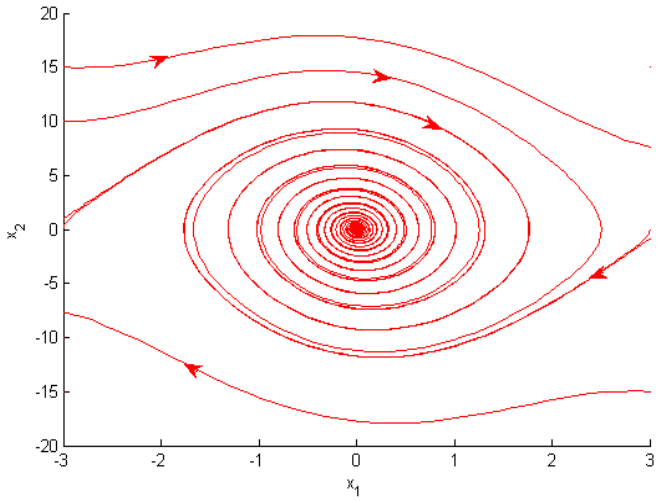


Fig. 1.5 – *Représentation du Portrait de phase du pendule dissipatif autour de son équilibre stable*

L'élargissement du bassin d'attraction obtenu dépend de la valeur de l'amortissement introduite. De plus il faut préciser que la stabilité du système non linéaire n'est pas garantie quand on considère une variation de l'amortissement au cours du temps [45], [34].

1.3 Méthodes de contrôle non linéaire

Quand on parle de méthodes de contrôle on parle de concepts qui permettent de faire faire au système contrôlé les actions qu'on lui impose. Le contrôle peut être passif, actif ou semi-actif. Le contrôle passif consiste en la conception d'un dispositif suivant certains critères afin qu'il ait la réponse désirée à une excitation donnée [58], [57]. Les contrôles actif [87] et semi-actif [82] consistent en la recherche d'un ensemble de règles à imposer au dispositif de contrôle passif pour qu'il s'adapte à la variation d'une ou plusieurs conditions de fonctionnements. Quand l'ensemble des règles, appelé lois de contrôle, sont appliquées aux paramètres du dispositif de contrôle, le contrôle est appelé semi-actif. Quand les règles imposées au dispositif font en sorte que ce dernier génère un effort à appliquer au système à contrôler, le contrôle s'appelle actif. Pour concevoir cet ensemble de lois de contrôles on a besoin de critères. Dans la suite on présentera un ensemble de concepts qui permettent de générer les lois de contrôles. Pour réaliser ces critères on a généralement recours à la conception d'un contrôle par rétroaction (*feedback*). En fonction de l'objectif fixé, il existe plusieurs possibilités de formulations du problème de contrôle. La stabilisation, la poursuite et l'atténuation des perturbations mènent à un certain nombre de problèmes. Dans chacun d'eux, on peut avoir une version à *feedback* d'état, où toutes les variables d'état peuvent être mesurées. Ou bien une version à *feedback* de sortie, où les seules mesures dont on dispose sont celles de la sortie du système. Dans un problème de contrôle typique, il y a des objectifs supplémentaires pour la conception tels que les contraintes sur l'état par exemple. La volonté de réaliser cette conception en gérant tous les dilemmes mène à différentes formulations du contrôle optimal.

Le problème de stabilisation des systèmes par retour d'état d'un système de la forme [45]

$$\dot{x} = f(t,x,u) \tag{1.16}$$

consiste en la conception d'une loi de contrôle

$$u = \varsigma(t,x) \tag{1.17}$$

pour faire en sorte que l'origine $x = 0$ soit un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système à boucle fermée

$$\dot{x} = f(t,x,\varsigma(t,x)) \tag{1.18}$$

La détermination de cette loi de contrôle dépend des critères et des méthodes que l'on utilise pour sa conception. On présente dans la suite quelques unes des méthodes dont on s'est inspirées pour la suite de l'étude.

1.3.1 Stabilisation par linéarisation

Pour un système de la forme

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1.19}$$

où $f(0,0) = 0$ et $f(x,u)$ est une fonction différentiable dans un domaine $D_x \times D_u \subset R^n \times R^p$ qui contient l'origine ($x = 0$, $u = 0$), on voudrait concevoir un contrôle par retour d'état $u = \varsigma(x)$ qui stabilise le système. La linéarisation du système (1.19) au tour de son équilibre ($x = 0$, $u = 0$) donne le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.20}$$

où

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) \mid_{x=0,u=0}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) \mid_{x=0,u=0} \tag{1.21}$$

Supposons que la paire (A,B) est contrôlable ou du moins stabilisable. Il suffit de trouver la matrice K qui fait en sorte que les valeurs propres de $A + BK$ soient dans la partie gauche du plan complexe. La loi de contrôle par *feedback* sur l'état $u = \varsigma(t,x)$ est appelée *feedback* statique et elle a la forme suivante $u = Kx$. Le contrôle statique proposé représente une méthode de contrôle linéaire. Mais le choix du contrôle à appliquer est riche et varié. Il y a ce que l'on appelle le contrôle dynamique et qui prend en compte les quantités mesurées. Pour les systèmes linéarisés on peut appliquer un contrôle non linéaire comme une des méthodes que l'on présente dans la suite.

1.3.2 Séquencement de Gain

La limitation principale de la conception du contrôle sur la base d'un modèle linéairisé est le fait que l'efficacité du contrôleur n'est garantie que dans le voisinage du point au tour duquel la linéarisation a été effectuée.

Le séquencement de gain (*Gain Scheduling*) est une technique qui étend la validité de l'approche par linéarisation, à un ensemble de points de fonctionnement. Dans plusieurs cas le changement de la dynamique est connu et de fait les points de fonctionnement aussi. Il est aussi possible de modéliser le système de façon à paramétrer les points de fonctionnement par une variable appelée variable de séquencement. Dans ce genre de cas, la linéarisation au tour de ces points est possible et la conception d'un contrôle linéaire en chaque point peut être effectuée. L'ensemble des linéarisations constitue une famille de contrôleurs linéaires. Puis, il faut implémenter la famille de contrôleurs comme si c'était un seul et en changer les paramètres suivant le monitorage de la variable de séquencement. De manière générale, la conception du *gain scheduling* peut être divisée en 4 étapes avec plusieurs techniques possibles pour chacune:

- Choisir la famille de points de calcul, ou une variable de séquencement.
- Linéariser le système non linéaire autour des points choisis.
- Concevoir un contrôleur linéaire pour chaque système linéarisé.
- Combiner les contrôleurs linéaires de façon à avoir un contrôleur non linéaire.

Il existe plusieurs variantes de la méthode *Gain Scheduling* dont on en cite le *Conventional Gain Scheduling*[24], [14], [72], [69], [85] le *Velocity based Gain Scheduling* [21], [24], [22], [23]; le *Quasi-LPV Gain Scheduling* [84], etc.

1.3.3 L'approche *Model Reference Adaptive Control (MRAC)*

Le *Model Reference Adaptive Control* dérive de deux concepts: le premier est le contrôle adaptatif et le deuxième est le contrôle par modèle de référence (MRC). Le premier intérêt pour le contrôle adaptatif fût motivé pendant les années cinquante à la NASA par la volonté d'améliorer le contrôle actif pour le pilotage des avions. La dynamique des avions est complexe et variable pendant le vol. L'idée de départ était de pouvoir adapter le contrôle aux conditions de vols. Le principe consiste à créer un contrôle en boucle fermée, de façon à mettre à jour les paramètres à contrôler au cours du temps en fonction de la variation des conditions de vol.
Quant au contrôle par modèle de référence, il nait du désir de contrôler des systèmes dont on ne connait que la sortie. La solution proposée par cette méthode est de concevoir un système de référence dont on maitrise le modèle

(fonction de transfert) et de faire en sorte que pour une même entrée, le système à contrôler suive la réponse de celui de référence. Le choix du modèle de référence est important dans cette méthode et pour cela une bonne compréhension du système à contrôler est nécessaire. Une fois le modèle de référence est choisi le problème de contrôle se réduit à un problème de poursuite. La poursuite est réalisée en trouvant une loi de contrôle, qui, appliquée en rétroaction au système à contrôler, donne à ce dernier des propriétés entrée/sortie équivalentes à celles du système de référence.
On montre dans la figure (1.6) un schéma représentatif du concept *Model Reference Control*

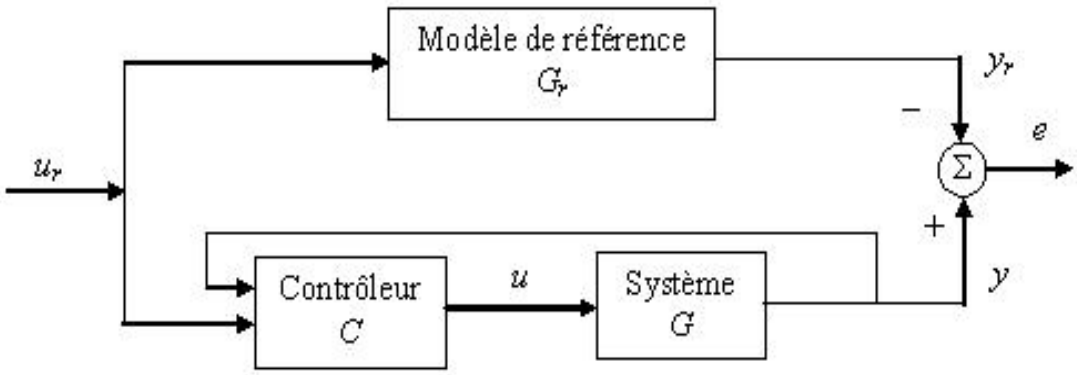


Fig. 1.6 – *Model Reference Control*

Le choix du modèle de référence consiste en la détermination de la fonction de transfert G_r afin que pour une entrée u_r donnée, le modèle de référence ait la sortie y_r voulue. Le contrôleur C du système étudié doit être conçu de manière à ce que, pour une même entrée u_r donnée, la sortie du système y suive y_r. Donc il faut que l'ensemble contrôleur-système ait une fonction de transfert égale à celle du modèle système de référence G_r. Pour cela une fonction d'erreur entre la sortie de référence y_r et celle du système y est définie. Une manière de réaliser ce résultat est la définition de la fonction erreur $e = y - y_r$, qui représente la déviation de la sortie du système par rapport à la trajectoire voulue y_r, et la faire converger vers zéro pour que les deux fonctions de transfert s'équivalent. Si de plus on ajoute à la boucle de rétroaction un dispositif d'estimation au cours du temps des paramètres dont dépend le contrôleur, on dit que le contrôle

est adaptatif.
Ceci consiste en l'ajout d'une troisième entrée pour le contrôleur et signifie que les lois de contrôle imposées au dispositif de contrôle permettent de suivre la sortie du modèle référence, grâce à l'estimateur d'erreur, tout en s'adaptant à la variation des paramètres dont le dispositif dépend [39].
On montre dans la figure (1.7) le schéma du *Model Refeference adaptive Control*

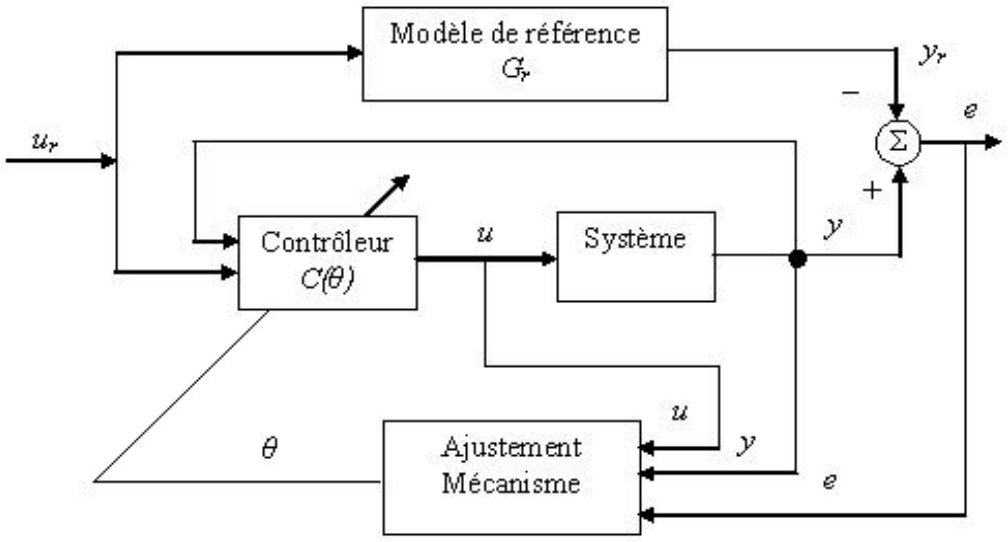


Fig. 1.7 – *Model Reference Adaptive Control*

L'avantage de cette méthode est que l'on utilise le système non linéaire réel pour la conception du contrôle, ce qui est généralement évité dans d'autre types de contrôle à travers la linéarisation. Dans cette méthode l'idée à retenir consiste à forcer le système non linéaire à se comporter comme un système dont la sortie correspond au comportement voulu pour le système réel.
Pour réaliser ce forçage, on a besoin de critères. Dans ce qui suit on présente un exemple de critère de contrôle optimal : le *Linear Quadratic Regulation (LQR)*

1.3.4 Linear Quadratic Regulation (LQR)

Le contrôle LQR est l'une des méthode du contrôle optimal ([27], [2], [74]), [48]. Cette méthode permet de trouver le contrôle voulu grâce à la minimisation

d'une fonctionnelle J. Cette fonctionnelle est construite suivant des critères fixés par le concepteur.
Considérons par exemple le système d'état suivant:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.22}$$

avec $x(t)$ l'état du système, A, B respectivement la matrice et le vecteur d'état du système et $u(t)$ l'entrée du système.
La détermination du contrôle $u(t)$ à partir de ce système d'état s'effectue par la minimisation de la fonctionnelle suivante sous la contrainte de (1.22)

$$J(u) = \int_0^T (x^T(t)Q\, x(t) + u^T(t)R\, u(t))dt \tag{1.23}$$

où T est l'intervalle de temps durant lequel on minimise la fonctionnelle $J(u)$ suivant l'état $x(t)$ du système et le contrôle $u(t)$. Et Q et R sont deux matrices carrées semi-définies positives, de plus R est symétrique.
Le contrôle de ce système bouclé est donné par

$$u(t) = -R^{-1}B^T P\, x(t) = Kx(t) \tag{1.24}$$

où P représente la matrice solution de l'équation de Riccati présentée ci-dessous et K la matrice de gain.
L'équation de Riccati linéaire

$$A^{'}P + P\,A - P\,B^{-1}R^{-1}B\,P + Q = 0 \tag{1.25}$$

1.3.5 L'approche *State-Dependent Riccati Equation Control(SDRE)*

L'approche *State-Dependent Riccati Equation Control* est l'adaptation de la méthode *Linear quadratic Regulation* pour les systèmes non linéaires.
Comme on l'a vu auparavant, la méthode *Linear quadratic Regulation* consiste à résoudre l'équation de Riccati (1.25). La solution de l'équation de Riccati pour les systèmes linéaires étant la matrice P présentée ci-dessus.
La méthode *State-Dependent Riccati Equation Control* est récente par rapport au *Gain Scheduling* et au contrôle adaptatif [3], et parmi les personnes qui s'y sont intéressés on cite Cloutier, Mracek, D'Souzae [26], [86], [70], [8], etc.

On présente dans ce qui suit la formulation du problème par la méthode *State Dependent Riccati Equation Control*.

Le problème considéré est un système non linéaire autonome affine par rapport à l'entrée dans un horizon de régulation infini [70]. L'équation du système est donnée par:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1.26}$$

et la fonction à minimiser est:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^T Q(x)x + u^T R(x)u)\, dt \tag{1.27}$$

qui permet de pondérer l'erreur sur l'état et le contrôle grâce aux matrices de pondération $Q(x) \geq 0$, $R(x) > 0$ $\forall x$, et avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f(x) \in \mathbb{C}^k$, $g(x) \in \mathbb{C}^k$, $Q(x) \in \mathbb{C}^k$, $R(x) \in \mathbb{C}^k$, avec $k \geq 1$. On suppose que $f(0) = 0$ et $g(0) \neq 0$ $\forall x$, et on veut définir une loi de contrôle $u(x)$ qui régulera le système $\forall x$.

La SDRE imite la formulation LQR pour les systèmes non linéaires. On écrit tout d'abord le système sous la forme suivante:

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \tag{1.28}$$

où $f(x) = A(x)x$ et $g(x) = B(x)$. Cette paramétrisation est possible si et seulement si $f(0) = 0$ et $f(x)$ est continument dérivable. La loi de contrôle est de la forme :

$$u(x) = -K(x)x = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \tag{1.29}$$

où $P(x)$ est l'unique solution, symétrique définie positive dépendante de l'état, de l'équation algébrique de Riccati suivante:

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + Q(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0 \tag{1.30}$$

Cette méthode n'est applicable que si on connait l'état et si la paire $(A(x),B(x))$ est contrôlable au sens linéaire $\forall x$. Cette méthode permet de se passer de la linéarisation par le développement de Taylor. Il suffit de figer les matrices $A(x)$ et $B(x)$ en des points de fonctionnement et de chercher à chaque point la solution du problème. Ce qui donne une famille de solutions $P(x)$ qui nous permettent de retrouver u pour chaque point considéré.

La difficulté réside dans la conception d'une loi de contrôle qui permet de passer d'une solution à une autre d'une manière lisse.

1.3.6 Le contrôle Clipping

Le contrôle *Clipping* (saturation) est une méthode qui peut être résumée en deux étapes [19]. La première consiste en la détermination d'une loi de contrôle actif qui optimise la fonction coût considérée. La deuxième étape revient à la conception du contrôleur *clipping* qui permettra de réaliser la loi optimale active tout en respectant la passivité du système, c'est-à-dire la non injection d'énergie dans ce dernier. Le contrôleur doit aussi être conçu de manière à garder la capacité de moduler de manière semi-active le dispositif de contrôle considéré. Cette seconde étape permet de générer la loi de contrôle saturée. Cette stratégie de contrôle permet d'assurer une stabilité inhérente au système puisque le risque d'instabilité dû aux lois de contrôle actif est détourné par les saturations qui les transforment en lois de contrôle semi-actif.

1.4 Les amortisseurs semi-actifs en génie civil

On appelle contrôle semi-actif toute conception se basant sur un dispositif de contrôle passif en lui changeant en temps réel ses paramètres.
Le contrôle semi-actif est un concept très général qui est né dans le domaine des suspensions de voitures il y a près de 25 ans. Mais en ce qui concerne le domaine du génie civil il reste récent. Dans ce qui suit on s'intéresse aux amortisseurs à masse accordée semi-actifs. L'amotisseur à masse accordée passif peut être liquide, solide ou pendulaire et il représente le type d'amortisseurs le plus utilisé dans le cadre du génie civil. Son concept réside dans l'idée de coupler la structure à amortir à une masse vibrante (liquide ou solide) pour que cette dernière reprenne une partie de la vibration de la structure. Pour que ce transfert d'énergie se réalise, il faut concevoir les paramètres de l'amortisseur de manière à ce que la masse vibrante se synchronise à la fréquence à amortir pour une excitation donnée. Les contrôleurs semi-actifs sont nombreux et variés et on en cite quelques uns:

- Les Tuned Liquid dampers (TLDs) semi-actifs

  Les TLD dont des amortisseurs à masse accordée mais dont la masse vibrante est un fluide. Donc le contrôle de la vibration de ce fluide se fait par la disposition d'une paroi avec une fenêtre dans le bac où il réside. L'ouverture ou la fermeture de cette fenêtre contrôle la vibration de la masse liquide.

– Les amortisseurs à masse accordée semi-actifs
  Quand on dit semi-actif cela signifie que l'on change un des paramètres de l'amortisseur. Dans la littérature on trouve plusieurs types d'adaptation des TMD dans le domaine du génie civil puisque ces derniers restent les amortisseurs préférés pour les structures. On trouve des TMD à rigidité variable [15], à amortissement variable [61] ou les deux à la fois. La variation de ces paramètres peut être effectuée par plusieurs moyens: l'association à un autre actionneur dont le rôle est de modifier en temps réel les paramètres voulus.

1.5 Dissipation électromécanique

La dissipation de l'énergie peut être effectuée grâce à des systèmes électriques. Par exemple pour le contrôle des structures flexibles légères, on peut utiliser un matériau piézoélectrique [65], [9]. Les recherches ont montré que l'utilisation d'un circuit RL shunté au matériau piézoélectrique, permettait d'extraire une quantité d'énergie considérable du système à amortir. Mais quand on parle de génie civil, les dimensions des structures contrôlées augmente et les piézoélectriques qui sont utilisés pour les poids légers ne sont plus en mesure d'assurer leur tâche convenablement. Pour y remédier, les matériaux piézoélectriques peuvent être remplacés par l'utilisation d'un moteur à courant électrique. Utilisé en génératrice, il permet de transformer l'énergie mécanique en énergie électrique. Et cette énergie électrique peut être dissipée dans un circuit électrique [80]. Scruggs et Iwan [81] utilisent ce genre de machines pour la conception d'un contrôleur semi-actif destiné à être utilisé en génie civil.

2

Présentation du système

2.1 Introduction

Les méthodes généralement employées pour construire un pont à hauban sont la construction par encorbellement, le poussage du tablier sur palées provisoires et la mise en place par rotation. En ce qui concerne la méthode par encorbellement, on érige initialement les mâts, et à une certaine hauteur de ceux-ci, la construction du tablier commence. L'installation des câbles se fait en cours d'évolution de la construction du tablier. La construction de ce dernier évolue progressivement et perpendiculairement au mât. La structure en cours de construction prend la forme d'une croix dont les ailes s'allongent jusqu'à rejoindre l'extrémité de l'aile encastrée sur le pylône d'à côté. Quand toutes les ailes se rejoignent, la construction du pont se termine.
Il est clair qu'un pont soumis à différents types de sollicitations, comme le vent et les séismes, est plus vulnérable en cours de construction, que lorsque la structure assemblée. Donc dans cette thèse, on s'intéresse au cas le plus défavorable à la structure, c'est-à-dire à une structure en croix qui représente la partie du pont encore en cours de construction qui doit résister aux excitations auxquelles elle est soumise n'ayant aucun câble installé. Dans ce chapitre on présente un exemple de structure qui permet de recréer les conditions de vibration de ponts réels et sa modélisation.
L'objectif est l'amortissement des vibrations de structures souples telles que celle décrite ci-dessus. Donc on présentera dans ce même chapitre un dispositif d'amortissement développé dans une étude précédente et que l'on essayera d'exploiter au mieux pour l'adapter à plusieurs configurations de vibrations.

2.2 Modèle structure

Pour cette étude on dispose d'un démonstrateur d'un pont en cours de construction dont on utilisera les dimensions. Cette maquette est réalisée de manière à avoir des fréquences de vibration au tour des $1Hz$ qui correspondent aux fréquences de vibrations des ponts réels.
On présente ci-dessous le modèle considéré:

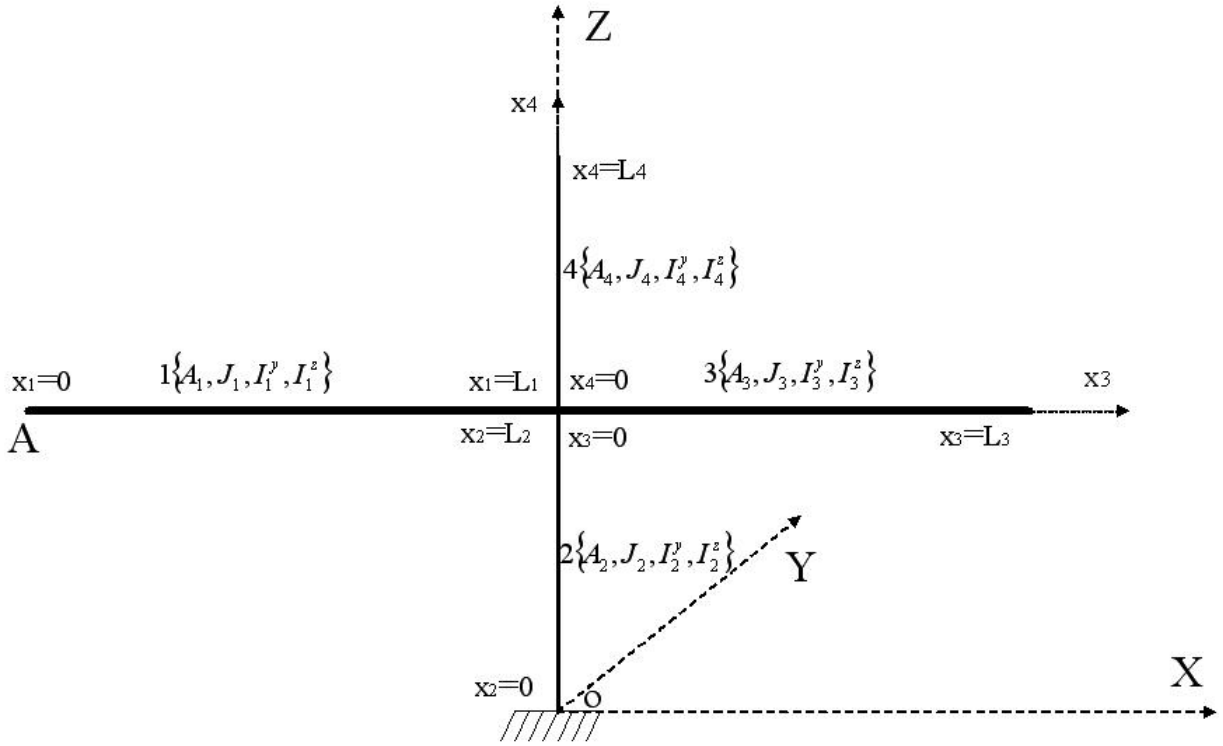


Fig. 2.1 – *Modèle structure du pont considéré*

On suppose que la structure est constituée de poutres droites qui vérifient les hypothèses d'Euler-Navier-Bernouilli et que les transformations restent petites. Ces poutres sont soumises à la traction, compression, torsion et à la flexion dans les deux plans (OXZ) et (OYZ). Les poutres sont numérotées suivant la figure (2.1)
A chaque poutre, un repère local $(o_k x_k)$ est associé et dirigé vers la droite pour les poutres horizontales et vers le haut pour celles verticales. On désigne la masse linéique par $\rho(x_k)$, la section de la $k^{ième}$ poutre par $S_k(x_k)$ et le module d'Young par $E(x_k)$ en considérant que toutes les poutres sont du même matériau. $G(x_k)$ représente le module de cisaillement et $J_k(x_k)$, $I_k^y(x_k)$ et $I_k^z(x_k)$

sont les inerties de la section de la $k^{ième}$ poutre.
Les inconnues du problème sont disposées dans un vecteur champ de déplacements appelé $\underline{U} = \underline{U}_k(x_k)$, avec $k = 1,..,4$ les numéros respectifs des poutres du pont. Les composantes de ce champ représentent le déplacement longitudinal u_k (selon l'axe X) de la $k^{ième}$ poutre, la rotation γ_k de la $k^{ième}$ poutre au tour de son axe, le déplacement transversal v_k (selon l'axe Y) de la $k^{ième}$ poutre et le déplacement vertical w_k (selon l'axe Z) de la $k^{ième}$ poutre du pont, tel que $\underline{U}_k(x_k,t) = [u_k(x_k,t),\gamma_k(x_k,t),v_k(x_k,t),w_k(x_k,t)]$.
Soit $f_k(x_k,t) = [f_k^x(x_k,t),f_k^\gamma(x_k,t),f_k^y(x_k,t),f_k^z(x_k,t)]$ le vecteur de force linéique uniformément réparti sur la structure, avec ses composantes respectives : l'excitation longitudinale sur la $k^{ième}$ poutre, le moment de torsion d'excitation sur la $k^{ième}$ poutre, l'excitation transversale sur la $k^{ième}$ poutre et l'excitation verticale de la $k^{ième}$ poutre.
Pour la formulation du problème dynamique on applique le principe des puissances virtuelles. Pour cela on considère le champ de vitesses virtuelles
$\underline{\hat{U}}_k(x_k) = [\hat{u}_k(x_k),\hat{\gamma}_k(x_k),\hat{v}_k(x_k),\hat{w}_k(x_k)]$ et on a

$$P_{int}(\underline{\hat{U}}) + P_{ext}(\underline{\hat{U}}) = P_{acc}(\underline{\hat{U}}) \tag{2.1}$$

– La puissance virtuelle des efforts extérieurs

$$P_{ext}(\underline{\hat{U}}) = \sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} \underline{f}_k(x_k,t)\underline{\hat{U}}_k(x_k)dx \tag{2.2}$$

– La puissance virtuelle des efforts intérieurs

$$\begin{array}{rl} P_{int}(\underline{\hat{U}}) = & -\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [ES_k \frac{\partial u_k}{\partial x}(x_k,t)\frac{d\hat{u}_k}{dx}(x_k)]dx \\ & -\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [GJ_k \frac{\partial \gamma_k}{\partial x}(x_k,t)\frac{d\hat{\gamma}_k}{dx}(x_k)]dx \\ & -\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [EI_k^z \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2}(x_k,t)\frac{d^2\hat{v}_k}{dx^2}(x_k)]dx \\ & -\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [EI_k^y \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}(x_k,t)\frac{d^2\hat{w}_k}{dx^2}(x_k)]dx \end{array} \tag{2.3}$$

– La puissance virtuelle des forces d'accélération

$$\begin{array}{rl} P_{acc}(\underline{\hat{U}}) = & \sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [\rho S_k \ddot{u}_k(x_k,t)\hat{u}_k(x_k)]dx \\ & +\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [\rho J_k \ddot{\gamma}_k(x_k,t)\hat{\gamma}_k(x_k)]dx \\ & +\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} [\rho S_k \ddot{v}_k(x_k,t)\hat{v}_k(x_k)]dx \\ & +\sum_{k=1}^{4} \int_0^{L_k} (\rho S_k \ddot{w}_k(x_k,t)\hat{w}_k(x)]dx. \end{array} \tag{2.4}$$

La formulation variationelle du principe des puissances virtuelles donne

$$\begin{cases} \forall \underline{\hat{U}} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{b}(\underline{\ddot{U}},\underline{\hat{U}}) + \mathbf{a}(\underline{U},\underline{\hat{U}}) = \mathbf{c}(\underline{f},\underline{\hat{U}}) \end{cases} \tag{2.5}$$

avec:

b : La puissance virtuelle des forces d'accélération

a : La puissance virtuelle des efforts intérieurs

c : La puissance virtuelle du champ de forces extérieures linéiques uniformément réparties sur toute la structure.

et **V** : L'espace des champs cinématiquement admissibles défini comme suit:

$$\mathbf{V} = \{\underline{\hat{U}} = \{\underline{\hat{U}}_k = \{\hat{u}_k,\hat{\gamma}_k,\hat{v}_k,\hat{w}_k, \;\; k = 1..4\} \in \otimes_{k=1}^{4}[(H^1[0,L_k])^2 \times (H^2[0,L_k])^2]\}\} \tag{2.6}$$

avec : $\otimes_{k=1}^{4} H^i[0,L_k] = H^i[0,L_1] \times H^i[0,L_2] \times H^i[0,L_3] \times H^i[0,L_4]$.

ayant pour conditions de transmission cinématiques :

– Encastrement de la structure au sol

$$\begin{array}{l} \hat{u}_2(x=0) = 0, \;\; \hat{v}_2(x=0) = 0, \;\; \hat{w}_2(x=0) = 0, \;\; \hat{\gamma}_2(x=0) = 0 \\ \frac{d\hat{v}_2}{dx}(x=0) = 0, \;\; \frac{\hat{w}_2}{dx}(x=0) = 0 \end{array} \tag{2.7}$$

– Assemblage des poutres au centre de la structure

$$\begin{array}{l} \hat{v}_1(x=L_1) = \hat{v}_2(x=L_2) = \hat{v}_3(x=0) = \hat{v}_4(x=0) \\ \hat{w}_1(x=L_1) = \hat{u}_2(x=L_2) = \hat{w}_3(x=0) = \hat{u}_4(x=0) \\ \hat{w}_2(x=L_2) = \hat{u}_1(x=L_1) = \hat{w}_4(x=0) = \hat{u}_2(x=0) \\ \frac{d\hat{w}_1}{dx}(x=L_1) = \frac{d\hat{w}_2}{dx}(x=L_2) = \frac{\hat{w}_3}{dx}(x=0) = \frac{\hat{w}_4}{dx}(x=0) \\ \frac{d\hat{v}_1}{dx}(x=L_1) = \frac{d\hat{v}_3}{dx}(x=0) = \hat{\gamma}_2(x=L_2) = \hat{\gamma}_4(x=0) \\ \frac{d\hat{v}_2}{dx}(x=L_2) = \frac{d\hat{v}_4}{dx}(x=0) = \hat{\gamma}_1(x=L_1) = \hat{\gamma}_3(x=0) \end{array} \tag{2.8}$$

Afin de déterminer les modes propres de la structure, on considère la vibration libre, c'est-à-dire $\mathbf{c}(\underline{f},\underline{\hat{U}}) = 0$, et on suppose que les solutions sont de la forme suivante

$$\underline{U}(x_k,t) = \underline{\varphi}(x_k)e^{i\omega t} \tag{2.9}$$

avec

$\underline{\varphi}(x_k) = (\varphi^x(x_k),\varphi^\gamma(x_k),\varphi^y(x_k),\varphi^z(x_k))$: le vecteur des formes modales de la structure.

$\omega = \sqrt{\lambda^*}$ où λ^* est le vecteur valeurs propres, qui ne sont autre que les fréquences de vibration du problème ci-dessous.

Le problème aux valeurs propres s'écrit

$$\begin{cases} Trouver \quad (\lambda^*,\underline{\varphi}) \in \mathbf{IR} \times \mathbf{V} \quad tel \quad que \quad \forall \underline{\hat{U}} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi},\underline{\hat{U}}) = \lambda^* \mathbf{b}(\underline{\varphi},\underline{\hat{U}}) \end{cases} \tag{2.10}$$

Ce problème admet une infinité de solutions, on considère une approximation de l'espace modal $\mathbf{V}_N$ qui ne prend en compte que les N premiers modes. Comme le vecteur des formes modales est constitué des fonctions de formes correspondantes au déplacement longitudinal, de rotation, horizontal et vertical, et que la valeur de la fonction de forme de rotation à l'extrémité du tablier est nulle c'est-à-dire $\varphi^\gamma = 0$ on normalise les formes modales tel que $\varphi_i^y(A) = Y_i$, où Y_i représente un déplacement non nul homogène à une longueur. Ce qui donne la définition suivante des masses m_i^* et des rigidités k_i^* modales correspondantes au $i^{ème}$ mode de vibration

$$\begin{cases} m_i^* = \frac{1}{Y_i^2} \int \rho \underline{\varphi}_i^2 ds \\ k_i^* = \lambda_i^* m_i^* \end{cases} \tag{2.11}$$

Ces modes vérifient les conditions d'orthogonalité suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{b}(\underline{\varphi}_i,\underline{\varphi}_j) = m_j^* \delta_{ij} \\ \mathbf{a}(\underline{\varphi}_i,\underline{\varphi}_j) = k_j^* \delta_{ij} \end{cases} \tag{2.12}$$

δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Le problème devient

$$m_i^* Y^2 \ddot{\alpha}_i(t) + k_i^* Y^2 \alpha_i(t) = 0 \tag{2.13}$$

où Y représente le vecteur de normalisation.

Ce problème est résolu en créant un modèle éléments finis de la structure à l'aide du programme *Openfem* sur *Matlab*. Les modes de vibrations et les

formes modales de la structure obtenus sont présentés dans la figure suivante (ici $N = 6$)

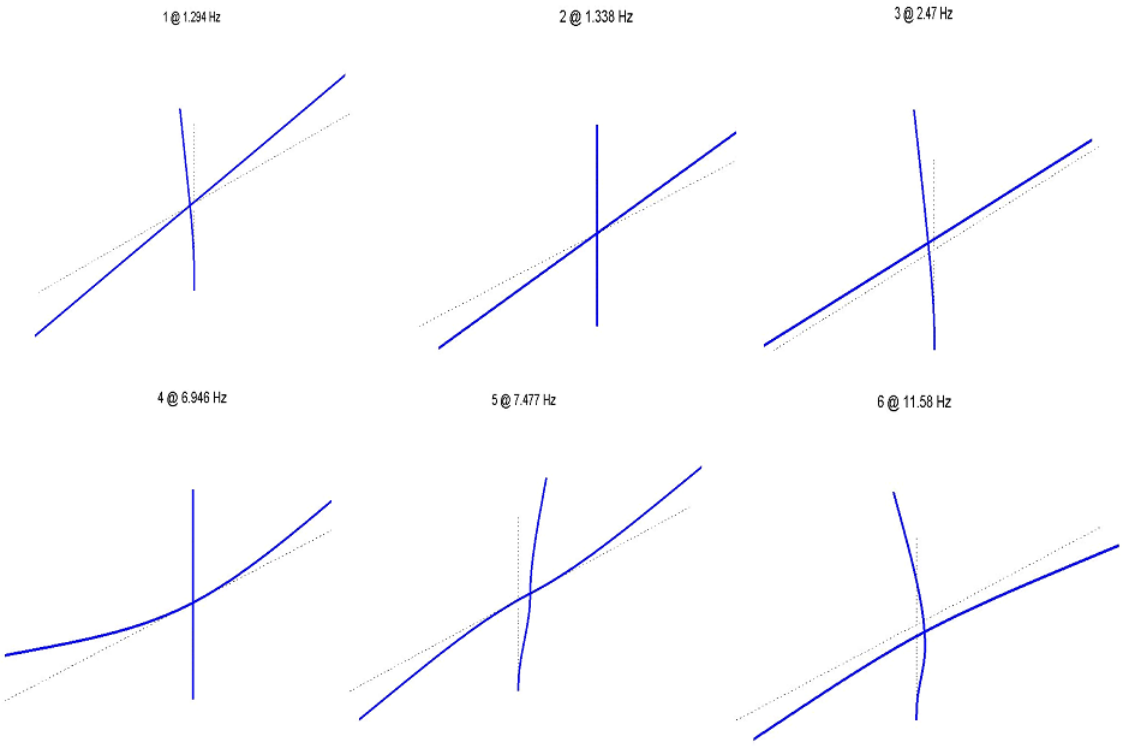


Fig. 2.2 – *Les fréquences de vibration et les formes modales de la structure*

2.3 Dispositif d'amortissement

Pour contrôler cette structure on a besoin d'un dispositif qui permette d'amortir ses vibrations. Pour cela on considère le dispositif suivant, qui a été proposé dans le cadre de la thèse de Ben Mekki [61] et conçu pour amortir de manière optimale les petites vibrations de la structure. L'actionneur est constitué d'un pendule à masse accordé couplé à un alternateur et à une résistance variable.

Le pendule à masse accordé ou *TMD (Tuned Mass Damper)*, est un contrôleur passif dont les paramètres sont fixés de façon à synchroniser sa fréquence de vibration à celle du mode à amortir et suivant un critère d'optimisation. Le problème principal est que les contrôleurs passifs ne peuvent amortir qu'une seule fréquence de vibration, excitée d'une manière donnée à la fois (vibration libre, excitation harmonique,...). Dans la thèse de Ben Mekki, un pendule à masse accordée semi-actif qui s'adapte par simple variation d'une résistance a été conçu. Il a été accordé sur la seconde fréquence de vibration de la structure excitée en vibration libre, qui représente la vibration de la structure dans le plan horizontal. De plus, un critère d'optimisation de ses paramètres a été proposé, ayant pour objectif la maximisation de la décroissance de la solution du système d'état. Ce critère s'appelle ETDR et il est applicable aux systèmes linéaires en vibration libre.

La figure (2.3) représente l'actionneur considéré

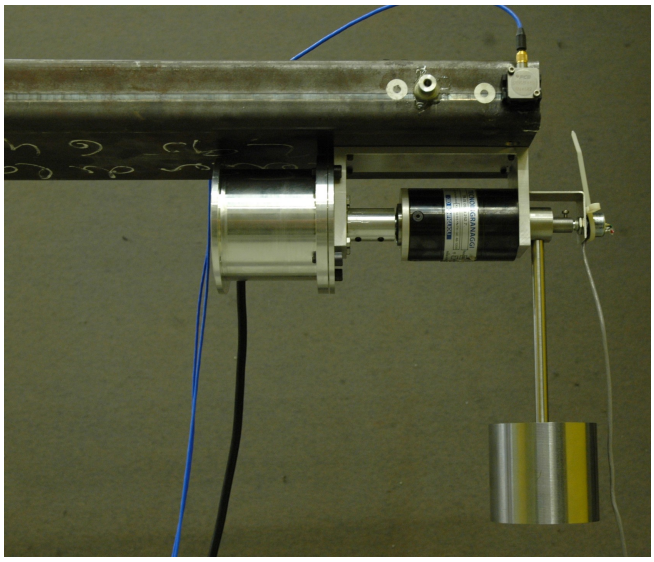


Fig. 2.3 – *Actionneur utilisé pour l'amortissement de la structure*

L'association d'un alternateur au pendule à masse accordée permet de changer ses paramètres au cours du temps pour transformer le contrôleur passif en un contrôleur semi-actif. La vibration du pont induit une vibration du pendule qui lui est attaché à une des extrémités du tablier. L'oscillation du pendule entraîne en rotation, grâce à un système d'engrenage qui joue le rôle de multiplicateur, l'alternateur qui lui est couplé. Le mouvement de rotation mécanique donné à l'alternateur donne en sortie de celui-ci un courant électrique alternatif qui sera injecté dans une résistance variable à travers une carte électronique afin que l'énergie transformée y soit dissipée par effet Joule .

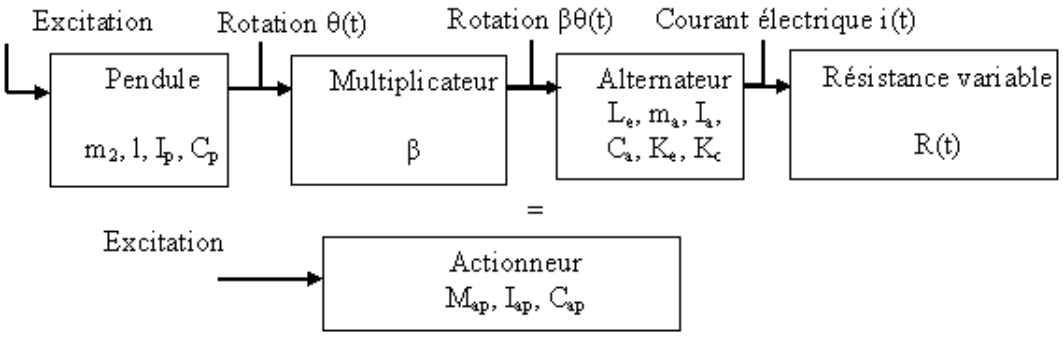


Fig. 2.4 – *Schéma de fonctionnement de l'actionneur*

L'objectif de cette étude est de trouver la dynamique, à imposer au système, qui nous permet d'avoir un amortissement maximal des vibrations de la structure dans des conditions de vibration autres que celles considérées par Ben Mekki [61], c'est-à-dire en petites vibrations du pendule (système d'équation linéarisé de l'actionneur électromécanique) sous vibration libre, sans pour autant changer de dispositif de contrôle mais juste en modifiant en temps réel les paramètres de celui-ci par la variation de la résistance externe. Ceci consiste à trouver ce que l'on appelle une loi de contrôle. La loi de contrôle est un ensemble de règles à imposer à un dispositif de contrôle pour qu'il s'adapte au changement de certains paramètres (changement de masse, de chargement de type de vibration etc.). Dans le premier chapitre, quelques méthodes de détermination de loi de contrôle non linéaire ont été présentées.

Dans ce qui suit on présente le modèle système couplé de la structure et de l'actionneur.

2.4 Modèle pont-actionneur électromécanique

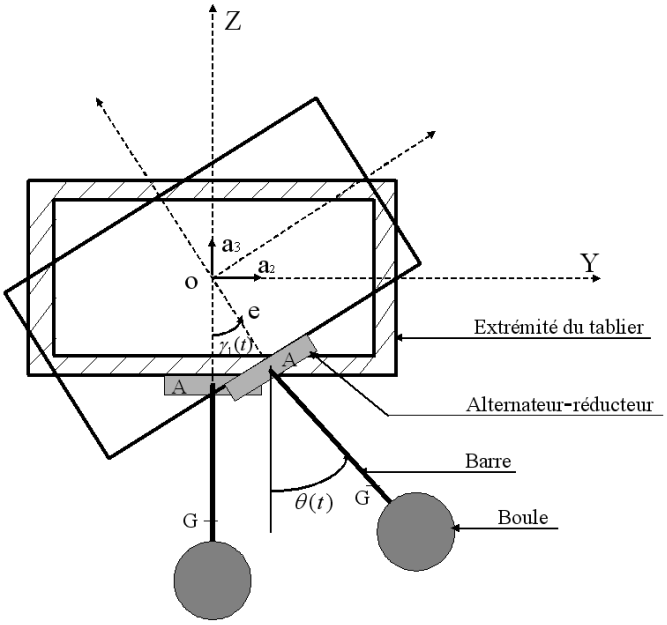


Fig. 2.5 – *Vue locale de l'extrémité du tablier avec actionneur électromécanique*

Comme il a déjà été dit auparavant, l'actionneur est accroché à la structure à une des extrémités du tablier. L'effort appliqué par l'actionneur à la structure au point d'attache A, qui n'est autre que l'extrémité de la première poutre du tablier, est représenté par une force concentrée $R_A(t)$ en ce point. Donc les conditions de chargement dans l'équation de la puissance des efforts extérieurs (2.2) deviennent

$$P_{ext}(\hat{\underline{U}}) = -\underline{R_A}(t)\hat{\underline{U}}_1(x_1 = 0). \tag{2.14}$$

où les quatre composantes de l'effort ponctuel: force longitudinale, couple de torsion, force transversale et force verticale, sont $\underline{R_A}(t) = [\upsilon_L(t),\Gamma(t),\upsilon_H(t),\upsilon_V(t)]$ et $\hat{U}_1(x_1 = 0)$ le déplacement virtuel de la première poutre au point d'accrochage A de l'actionneur (c'est-à-dire $x_1 = 0$)
La formulation variationnelle (2.5) devient

$$\begin{cases} \forall \hat{\underline{U}} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{b}(\ddot{\underline{U}},\hat{\underline{U}}) + \mathbf{a}(\underline{U},\hat{\underline{U}}) = -\upsilon_L(t)\hat{u}_1(A) - \Gamma(t)\hat{\gamma}_1(A) - \upsilon_H(t)\hat{v}_1(A) \\ \qquad\qquad -\upsilon_V(t)\hat{w}_1(A) \end{cases} \tag{2.15}$$

Considérons maintenant les expressions des énergies du pendule.

– L'énergie cinétique T du pendule

$$\begin{aligned} T = & \tfrac{1}{2}(m_a + m_2)[(\dot{u}_1(A,t))^2 + (\dot{v}_1(A,t))^2 + (\dot{w}_1(A,t))^2] \\ & + \tfrac{1}{2} I_2 \dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}(m_a + m_2) e^2 (\dot{\gamma}_1(A,t))^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{w}_1(A,t) sin(\theta) \\ & + (m_a + m_2) e \dot{v}_1(A,t) \dot{\gamma}_1(A,t) cos(\gamma_1(A,t)) \\ & + (m_a + m_2) e \dot{w}_1(A,t) \dot{\gamma}_1(A,t) sin(\gamma_1(A,t)) \\ & + m_2 l \dot{\theta} \dot{v}_1(A,t) cos(\theta) + m_2 e l \dot{\theta} \dot{\gamma}_1(A,t) cos(\theta - \gamma_1(A,t)) \end{aligned} \tag{2.16}$$

avec m_2 la masse du pendule (barre+boule), m_a la masse de l'alternateur, I_2 l'inertie partielle du pendule, e l'excentricité entre le point d'attache du pendule avec le centre de la section de la première poutre du tablier, l la longueur équivalente entre le centre de l'arbre de l'alternateur et le centre de gravité du pendule. $\dot{u}_1(A)$, $\dot{v}_1(A)$ et $\dot{w}_1(A)$ sont les vitesses du point d'accrochage de la première poutre dans les directions respectives X, Y et Z et $\dot{\gamma}_1(A)$ est la vitesse de torsion du point d'accrochage de la première poutre autour de l'axe X. θ représente l'angle de vibration du pendule.

– L'énergie potentielle U du pendule

$$U = (m_a + m_2) g [w_1(A,t) - e cos(\gamma_1(A,t))] + (1 - m_2 l cos(\theta)) \tag{2.17}$$

où g est l'accélération de la gravité.

– L'énergie dissipative D du pendule

$$D = \frac{1}{2} C_p (\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(A,t))^2 \tag{2.18}$$

C_p représente l'amortissement propre du pendule.

Les équations du pendule seront déterminées grâce aux équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = Q_k \qquad pour \qquad k = 1,..,r \tag{2.19}$$

où q_k représente le vecteur coordonnées généralisées et Q_k le vecteur forces extérieures généralisées définies comme suit

$$\begin{aligned} q_k &= [u_1(A,t) \quad v_1(A,t) \quad w_1(A,t) \quad \gamma_1(A,t) \quad \theta] \\ Q_k &= [\upsilon_L(t) \quad \upsilon_H(t) \quad \upsilon_V(t) \quad \Gamma(t) \quad -C_m] \end{aligned} \tag{2.20}$$

où $\upsilon_L(t)$, $\upsilon_H(t)$ et $\upsilon_V(t)$ sont respectivement les forces de liaison longitudinale, horizontale et verticale entre le tablier et le pendule, $\Gamma(t)$ le couple de torsion du tablier sur le pendule et C_m le couple mécanique qu'applique l'alternateur sur le pendule.

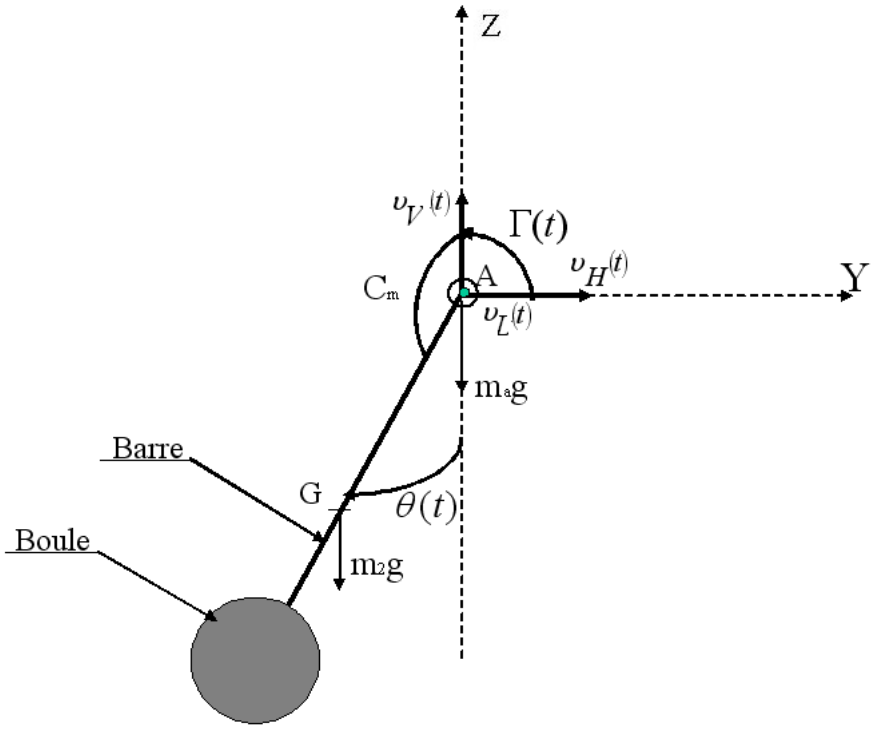


Fig. 2.6 – *Les forces qui lient le pendule au tablier*

En appliquant les équations de Lagrange (2.19) au vecteur de coordonnées généralisées (2.20) on trouve les expressions des efforts de liaison et l'équation de la dynamique du pendule.

– Les équations de liaisons

– Expression de la force longitudinale

$$\upsilon_L(t) = M_{ap}\ddot{u}_1(A,t) \tag{2.21}$$

avec M_{ap} la masse totale de l'actionneur électromécanique (Pendule + Engrenage + Alternateur) et $\ddot{u}_1(A)$ l'accélération du point d'accrochage de la première poutre dans la direction X.

– Expression de la force horizontale

$$\begin{aligned}\upsilon_H(t) = {} & M_{ap}\ddot{v}_1(A,t) + M_{ap}e\ddot{\gamma}_1(A,t)cos(\gamma_1(A,t)) \\ & -M_{ap}e\dot{\gamma}_1(A,t)^2 sin(\gamma_1(A,t)) \\ & +m_2 l\ddot{\theta}cos\theta - m_2 l\dot{\theta}^2 sin\theta\end{aligned} \tag{2.22}$$

avec $\ddot{v}_1(A)$ l'accélération du point d'accrochage de la première poutre dans la direction Y, $\ddot{\gamma}$ l'accélération de la torsion du point d'accrochage et $\ddot{\theta}$ l'accélération de l'angle de vibration du pendule.

– Expression de la force verticale

$$\begin{aligned}&\upsilon_V(t) = M_{ap}g + M_{ap}\ddot{w}_1(A,t) + M_{ap}e\ddot{\gamma}_1(A,t)sin(\gamma_1(A,t)) \\ &+M_{ap}e\dot{\gamma}_1(A,t)^2 cos(\gamma_1(A,t)) + m_2 l\ddot{\theta}sin\theta + m_2 l\dot{\theta}^2 cos\theta\end{aligned} \tag{2.23}$$

$\ddot{w}_1(A)$ l'accélération du point d'accrochage de la première poutre dans la direction Z.

– Le couple de torsion

$$\begin{aligned}&\Gamma(t) = M_{ap}e^2\ddot{\gamma}_1(A,t) + M_{ap}e\ddot{v}_1(A,t)cos(\gamma_1(A,t)) \\ &+M_{ap}e\ddot{w}_1(A,t)sin(\gamma_1(A,t)) + C_p(\dot{\gamma}_1(A,t) - \dot{\theta}) \\ &-m_2 el\dot{\theta}^2 sin(\theta - \gamma_1(A,t)) + M_{ap}gesin(\gamma_1(A,t)) \\ &+m_2 el\ddot{\theta}cos(\theta - \gamma_1(A,t))\end{aligned} \tag{2.24}$$

– L'équation dynamique du pendule

$$\begin{aligned} &I_p\ddot{\theta} + m_2 l\ddot{v}_1(A,t)cos\theta + m_2 l\ddot{w}_1(A,t)sin\theta \\ &+m_2 el\ddot{\gamma}_1(A,t)cos(\theta - \gamma_1(A,t)) \\ &+m_2 el(\dot{\gamma}_1(A,t))^2 sin(\theta - \gamma_1(A,t)) \\ &+C_p(\dot{\theta} - \dot{\gamma}_1(A,t)) + m_2 glsin\theta = -C_m \end{aligned} \tag{2.25}$$

avec C_m Le couple mécanique appliqué par l'alternateur sur le pendule et I_p l'inertie du pendule.

– Les équations électrique et mécanique de l'alternateur

Considérons le schéma électrique montré dans la figure (2.4)

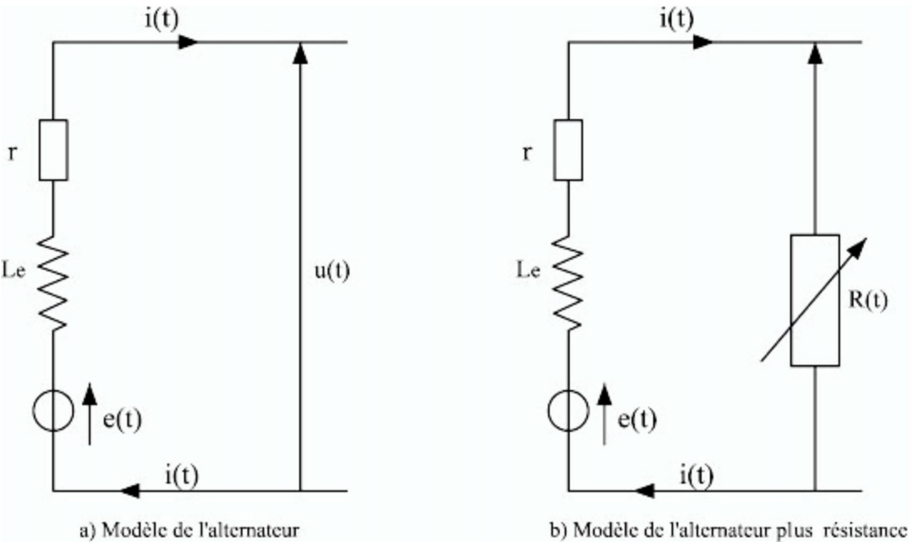


Fig. 2.7 – *Modèle électrique de l'alternateur*

En appliquant la loi des mailles, on a

$$U_R(t) + U_r(t) + U_L(t) - e(t) = 0 \tag{2.26}$$

où U_R la tension aux bornes de la résistance variable $R(t)$, $U_r + U_L$ la tension aux bornes de la bobine (r sa résistance interne et L_e son inductance) et $e(t)$ la force électromotrice de l'alternateur.

On sait que

$$\begin{cases} U_R(t) = R(t)i(t) \\ U_r = ri(t) \\ U_L = L_e\frac{di}{dt} \end{cases} \tag{2.27}$$

d'après la loi de Lenz le mouvement du pendule qui entraine en rotation l'aimant de l'alternateur provoque une variation du flux magnétique dans la bobine. Cette variation induit une force électromotrice donnée par

$$e(t) = K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta(t)) \tag{2.28}$$

où K_e une constante électrique qui dépend des paramètres de construction de l'alternateur qu'on appellera constante électromotrice; β le rapport de réduction du multiplicateur utilisé pour le couplage entre le pendule et l'alternateur; θ l'angle de vibration du pendule et $\dot{\theta}$ sa vitesse.
D'après la loi de Laplace, le couple électromagnétique dû au champ tournant généré par le courant induit dans chaque bobine est donné par

$$C_{em} = K_c\beta i(t)sin(\beta\theta) \tag{2.29}$$

où K_c une constante mécanique, qu'on appellera constante électromécanique.

$$\begin{cases} \beta I_a\ddot{\theta}(t) + \beta C_a\dot{\theta} = C_m - C_{em} \\ L_e\frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) = K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) \end{cases} \tag{2.30}$$

où I_a représente l'inertie de l'alternateur et C_a l'amortissement de ce dernier.

En négligeant le couplage entre les déplacements verticaux et la torsion, qui résulte d'une constatation faite à partir du modèle élément fini, puis en supposant que l'angle de torsion est très faible et en supprimant les termes quadratiques de la torsion, les équations de liaison simplifiées deviennent

$$\begin{cases} \upsilon_L(t) = M_{ap}\ddot{u}_1(A,t) \\ \upsilon_H(t) = M_{ap}\ddot{v}_1(A,t) + M_{ap}e\ddot{\gamma}_1(A,t) + m_2 l\ddot{\theta}cos\theta - m_2 l\dot{\theta}^2 sin\theta \\ \upsilon_V(t) = M_{ap}g + M_{ap}\ddot{w}_1(A,t) + m_2 l\ddot{\theta}sin\theta + m_2 l\dot{\theta}^2 cos\theta \\ \Gamma(t) = M_{ap}e\ddot{\gamma}_1(A,t) + M_{ap}e\ddot{v}_1(A,t) + m_2 el\ddot{\theta}cos(\theta) \\ \qquad -m_2 el\dot{\theta}^2 sin(\theta) + M_{ap}ge\gamma_1(A,t) + C_p(\dot{\gamma}_1(A,t) - \dot{\theta}) \end{cases} \tag{2.31}$$

Le déplacement réel généralisé peut être développé en série de Fourier puisque les modes recouvrent le champ admissible de déplacement. Donc on peut écrire

$$\underline{U}_N(x_k,t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i(t)\varphi_i(x_k) \tag{2.32}$$

avec $\alpha_i(t)$ les amplitudes des contributions modales et $\varphi_i(x_k)$ les formes modales normalisées relatives aux $i^{èmes}$ modes de vibration de la structure à l'abscisse x de la $k^{ième}$ poutre.

On tronque la base modale à N modes seulement et on discrétise les équations (2.31) suivant l'estimation du déplacement sur les N premiers modes définis dans (2.32) et on obtient

$$\begin{cases} \upsilon_{LN}(t) = M_{ap}\sum_{i=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)\varphi_j^x(A) \\ \upsilon_{HN}(t) = M_{ap}\sum_{i=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)(\varphi_j^y(A) + e\varphi_j^\gamma(A)) + m_2 l\ddot{\theta}cos\theta - m_2 l\dot{\theta}^2 sin\theta \\ \upsilon_{VN}(t) = M_{ap}g + M_{ap}\sum_{i=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)\varphi_j^z(A) + m_2 l\ddot{\theta}sin\theta + m_2 l\dot{\theta}^2 cos\theta \\ \Gamma_N(t) = M_{ap}e^2\sum_{i=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)(\varphi_j^y(A) + e\varphi_j^\gamma(A)) + m_2 el\ddot{\theta}cos(\theta) \\ -m_2 el\dot{\theta}^2 sin(\theta) + M_{ap}ge\sum_{i=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)\varphi_j^\gamma(A) + C_p(\sum_{i=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_j^\gamma(A) - \dot{\theta}) \end{cases} \tag{2.33}$$

L'approximation de la solution du problème (2.15) dans l'espace de dimension finie $\mathbf{V}_N$ donne

$$\begin{aligned} m_i^* Y^2\ddot{\alpha}_i(t) + k_i^* Y^2\alpha_i(t) = -\upsilon_{LN}(t)\varphi_i^x(A) - \Gamma_N(t)\varphi_i^\gamma(A) \\ -\upsilon_{HN}(t)\varphi_i^y(A) - \upsilon_{VN}(t)\varphi_i^z(A) \quad for \quad i = 1,\ldots,N \end{aligned} \tag{2.34}$$

où $\varphi_i^x(x_1 = 0)$, $\varphi_i^\gamma(x_1 = 0)$, $\varphi_i^y(x_1 = 0)$ et $\varphi_i^z(x_1 = 0)$ sont respectivement les composantes longitudinale, de torsion, transversale et verticale du vecteur

forme modale normalisé de l'$i^{ème}$ mode à l'extrémité de la première poutre de la maquette de pont qui n'est autre que le point d'accrochage (A) de l'actionneur. En remplaçant les forces de liaisons discrètes par leurs valeurs (2.33) dans la formulation variationnelle discrétisée (2.34) et en substituant dans l'équation dynamique du pendule le couple mécanique qui lie l'alternateur au pendule par son expression (2.30), le modèle système complet pont actionneur électro-mécanique discrétisé couplé, tout calcul fait, s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} m_i^* Y^2 \ddot{\alpha}_i(t) + k_i^* Y^2 \alpha_i(t) = f_i(t) - M_{ap} \sum_{j=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)[\varphi_i^x(A)\varphi_j^x(A) \\ \qquad +\varphi_i^y(A)\varphi_j^y(A) + \varphi_i^z(A)\varphi_j^z(A) \\ \qquad +e^2\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) + e(\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^y(A) \\ \qquad +\varphi_i^y(A)\varphi_j^\gamma(A))] \\ \qquad -C_p \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) \\ \qquad -M_{ap} eg \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) + C_p\varphi_i^\gamma(A)\dot{\theta} \\ \qquad -M_{ap} g\varphi_i^z(A) - m_2 l[\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta][\varphi_i^y(A) \\ \qquad +e\varphi_i^\gamma(A)] - m_2 l\varphi_i^z(A)[\ddot{\theta}sin\theta - \dot{\theta}^2 cos\theta] \quad pour \quad i = 1,..,N \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)[\varphi_j^y(A)cos\theta + \varphi_j^z(A)sin\theta + e\varphi_j^\gamma(A)cos\theta] \\ +(C_a + \beta C_p)\dot{\theta} - C_p \sum_{j=0}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_j^\gamma(A) + m_2 glsin\theta = -K_c\beta i(t)sin(\beta\theta) \\ L_e\frac{di}{dt} + (r + R(t))i(t) = K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) \end{cases} \tag{2.35}$$

Pour plus de détails de calcul voir [61], [62], [59]. Dans les travaux précédents, le système présenté ci-dessus (2.35) est linéarisé autour de la position $\theta = 0$ et un contrôle passif (linéaire) et semi-actif (non linéaire) ont été trouvés pour les petites vibrations. Dans ce qui suit, on s'intéresse à ce qui se passe pour les grandes vibrations du pendule. Pour cela il faut choisir un type de contrôle à appliquer au système couplé (les équations non linéarisées). Dans le prochain chapitre, on présente quelques tests effectués sur le modèle système non linéaire afin de mieux comprendre la dynamique non linéaire du pendule et son influence sur l'amortissement de la structure.

3

Outils d'analye du système non linéaire

3.1 Introduction

Pour les petites vibrations du pont, un amortisseur optimal a été déterminé par Ben Mekki dans une précédente étude [62]. Il est intéressant d'étudier l'efficacité de l'actionneur proposé pour les grandes vibrations et de comprendre la dynamique du pendule non linéaire pour ses grandes oscillations. On présentera en premier lieu le modèle système étudié simplifié. Puis on introduira quelques modèles systèmes dont on aura besoin dans la suite de l'étude. Enfin, comme pour la résolution du problème aux équations différentielles on a besoin d'intégrer en temps les équations du système, on présentera le schéma d'intégration utilisé.

3.2 Système simplifié

On rappelle les équations du système complet pont-actionneur électromécanique discrétisé couplé (2.35)

$$\begin{cases} m_i^* Y^2 \ddot{\alpha}_i(t) + k_i^* Y^2 \alpha_i(t) = -M_{ap} \sum_{j=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)[\varphi_i^x(A)\varphi_j^x(A) + \varphi_i^y(A)\varphi_j^y(A) \\ \qquad +\varphi_i^z(A)\varphi_j^z(A) + e^2\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) + e(\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^y(A) + \varphi_i^y(A)\varphi_j^\gamma(A))] \\ \qquad -C_p \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) - M_{ap} eg \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\varphi_i^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) \\ \qquad -M_{ap} g\varphi_i^z(A) - m_2 l[\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta][\varphi_i^y(A) + e\varphi_i^\gamma(A)] \\ \qquad +C_p\varphi_i^\gamma(A)\dot{\theta} - m_2 l\varphi_i^z(A)[\ddot{\theta}sin\theta - \dot{\theta}^2 cos\theta] \qquad pour \qquad i = 1,..,N \\ I_{ap}\ddot{\theta} + m_2 l \sum_{j=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)[\varphi_j^y(A)cos\theta + \varphi_j^z(A)sin\theta + e\varphi_j^\gamma(A)cos\theta] \\ +(C_a + \beta C_p)\dot{\theta} - C_p \sum_{j=0}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_j^\gamma(A) + m_2 glsin\theta = -K_c i(t)sin(\beta\theta) \\ L_e \frac{di(t)}{dt} + (r + R(t))i(t) = K_e \beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) \end{cases} \tag{3.1}$$

La première équation représente l'équation de la dynamique du pont suivant le $i^{ème}$ mode de vibration, la deuxième celle de la dynamique du pendule et la troisième représente l'équation électromécanique de l'alternateur. Dans cette partie de l'étude, on considère le système pont-actionneur électromécanique projeté sur le deuxième mode de vibration du pont seulement. De plus on pose $C_{ap} = C_a + \beta C_p$. Pour alléger l'écriture, on omet l'indice 2 faisant référence au mode considéré, c'est-à-dire $\alpha_2 \longrightarrow \alpha$, m_2^* et $k_2^* \longrightarrow m^*$ et k^* et l'indice 2 associé à la masse du pendule, c'est-à-dire $m_2 \longrightarrow m$. Ceci donne le système suivant:

$$\begin{cases} m^* Y^2 \ddot{\alpha}(t) + k^* Y^2 \alpha(t) = -M_{ap} \sum_{j=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)[\varphi_2^x(A)\varphi_j^x(A) + \varphi_2^y(A)\varphi_j^y(A) \\ \qquad +\varphi_2^z(A)\varphi_j^z(A) + e^2\varphi_2^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) + e(\varphi_2^\gamma(A)\varphi_j^y(A) + \varphi_2^y(A)\varphi_j^\gamma(A))] \\ \qquad -C_p \sum_{j=1}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_2^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) - M_{ap} eg \sum_{j=1}^{N} \alpha_j(t)\varphi_2^\gamma(A)\varphi_j^\gamma(A) \\ \qquad -M_{ap} g\varphi_2^z(A) - ml[\ddot{\theta}cos\theta - \dot{\theta}^2 sin\theta][\varphi_2^y(A) + e\varphi_2^\gamma(A)] \\ \qquad +C_p\varphi_2^\gamma(A)\dot{\theta} - ml\varphi_2^z(A)[\ddot{\theta}sin\theta - \dot{\theta}^2 cos\theta] \\ I_{ap}\ddot{\theta} + ml \sum_{j=1}^{N} \ddot{\alpha}_j(t)[\varphi_j^y(A)cos\theta + \varphi_j^z(A)sin\theta + e\varphi_j^\gamma(A)cos\theta] \\ \quad +C_{ap}\dot{\theta} - C_p \sum_{j=0}^{N} \dot{\alpha}_j(t)\varphi_j^\gamma(A) + mglsin\theta + K_c i(t)sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e \frac{di(t)}{dt} + (r + R(t))i(t) - K_e \beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

avec α l'amplitude de la contribution modale du deuxième mode de vibration de la structure; θ l'angle de rotation du pendule; m, l et C_p respectivement la masse, la longueur équivalente et l'amortissement du pendule réel; M_{ap}, I_{ap} la masse et l'inertie de l'actionneur électromécanique (pendule+engrenage +alternateur); m^* et k^* la masse modale et la rigidité modale du deuxième mode de vibration du pont; L_e, r et C_a représentent l'inductance de l'alternateur, sa résistance interne et son amortissement propre; K_e et K_c les constantes respectives de la force électromotrice et du couple électromécanique de l'alternateur; β le rapport de réduction de l'engrenage entre le pendule et l'alternateur et $R(t)$ la résistance externe qui constitue la variable de contrôle dont on dispose.

On se concentre sur le deuxième mode de vibration de la structure. On négligera dans ce qui suit les couplages. Ce qui signifie que l'on considère que le pendule a de l'influence uniquement sur le mode de torsion, c'est-à-dire que l'on néglige toutes les déformées autre que celle du mode considéré, *i.e* $\varphi_j \neq \varphi_i$. De plus, ce mode est horizontal et sans torsion (au tour de l'axe X) de la poutre sur laquelle il a été fixé *i.e* $\varphi_2^{\gamma}(A) = 0$. Et avec la condition de normalisation des modes (2.11) au point d'accrochage A on a

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{ap}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t) sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

L'étude de Ben Mekki s'est basée sur la forme linéarisée de ce système. Il a considéré que le pendule reste dans le domaine des petites vibrations. Ceci donne le système suivant

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + ml\ddot{\tilde{\theta}}(t) + k^*\tilde{\alpha}(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\tilde{\theta}}(t) + ml\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + C_{ap}\dot{\tilde{\theta}}(t) + mlg\tilde{\theta} + K_c\tilde{i}(t) sin(\beta\tilde{\theta}) = 0 \\ L_e\frac{d\tilde{i}(t)}{dt} + (r + R(t))\tilde{i}(t) - K_e\beta\dot{\tilde{\theta}}sin(\beta\tilde{\theta}) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

en négligeant dans l'équation électrique du système (3.4) l'inductance de la bobine L_e et en exprimant $\tilde{i}(t)$ en fonction de $\dot{\tilde{\theta}}$ dans la même équation (la troisième équation) puis en la remplaçant dans l'équation du pendule (la deuxième équation) on obtient C_{eq} l'amortissement équivalent donné par l'expression suivante

$$C_{eq} = C_{ap} + \frac{K_e K_c \beta \sin\left(\beta\tilde{\theta}\right)^2}{r + R(t)} \tag{3.5}$$

il est donc possible de réduire l'espace de configuration d'une dimension (celle de la variable intensité électrique) et se réduire à l'étude de la dynamique du modèle purement mécanique suivant

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + ml\ddot{\tilde{\theta}}(t) + k^*\tilde{\alpha}(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\tilde{\theta}}(t) + ml\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + C_{eq}\dot{\tilde{\theta}}(t) + mlg\tilde{\theta} = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Le système obtenu a la forme d'un système couplé pont-pendule linéaire qu'on appellera dans la suite "modèle pont-pendule linéaire". Les paramètres de ce pendule ont été déterminés et dimensionnés sous l'hypothèse des petites vibrations dans le cadre de la thèse de Ben Mekki [61]. Ceci a été effectué en utilisant le modèle système linéarisé autour de la position $\theta = 0$ obtenu par l'expansion des termes non linéaires du système pont-pendule non linéaire en série de Taylor au premier ordre autour de $\theta = 0$ et en négligeant les termes quadratiques pour donner (3.6). Un contrôle linéaire sur l'amortissement a été déterminé de manière à maximiser la vitesse de la décroissance de la réponse en déplacement du système (3.6). Cette maximisation s'est faite grâce à la méthode de placement de pôle et la valeur constante de l'amortissement déterminé est appelé C_l. Le système (3.6) muni de cette valeur de l'amortissement sera appelé "modèle linéaire de référence".

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + ml\ddot{\tilde{\theta}}(t) + k^*\tilde{\alpha}(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\tilde{\theta}}(t) + ml\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + C_l\dot{\tilde{\theta}}(t) + mlg\tilde{\theta} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

qui, sous forme matricielle donne

$$M\ddot{\tilde{X}} + C\dot{\tilde{X}} + K\tilde{X} = 0 \tag{3.8}$$

avec

$$\ddot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\alpha}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix}; \qquad \dot{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix}; \qquad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} M = \begin{pmatrix} (m^* + M_{ap}) & ml \\ ml & I_{ap} \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_l \end{pmatrix} \\ K = \begin{pmatrix} k^* & 0 \\ 0 & mlg \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.10}$$

où $\tilde{X}$, $\dot{\tilde{X}}$ et $\ddot{\tilde{X}}$ sont l'état, la vitesse de l'état et l'accélération de l'état du "modèle linéaire de référence".

Comme on ne dispose pas de critères d'optimisations se basant sur les équations non linéaires (tels que le placement des pôles pour le cas linéaire), on se donne pour objectif d'atteindre, pour les grandes vibrations du pendule, une décroissance de la réponse du modèle non linéaire (3.3) comparable à celle du "modèle linéaire de référence". Pour cela, on a besoin d'avoir un modèle d'équation qui soit comparable en terme de nombre de composantes d'état et de paramètres à optimiser.
On adopte alors la même considération pour le modèle non linéaire du système pont-actionneur électromécanique (3.3) que celle utilisée pour réduire le modèle linéaire. C'est-à-dire posons

$$C_{eqNL} = C_{ap} + \frac{K_e K_c \beta \sin(\beta\theta)^2}{r + R(t)} \tag{3.11}$$

C_{eq} et C_{eqNL} ont la même expression en fonction des paramètres électriques (3.5) mais ceci ne veux pas dire qu'elles prennent les mêmes valeurs.
Les équation du système (3.3) deviennent

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha_2}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{eqNL}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Le système (3.12) est un système couplé à deux équations qui s'écrit sous sa forme matricielle,

$$M(X)\ddot{X} + C(X,\dot{X})\dot{X} + K(X) = 0 \tag{3.13}$$

avec

$$\ddot{X} = \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}; \qquad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} M = \begin{pmatrix} (m^* + M_{ap}) & mlcos(\theta) \\ mlcos(\theta) & I_{ap} \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 0 & -mlsin(\theta)\dot{\theta} \\ 0 & C_{eqNL} \end{pmatrix} \\ K = \begin{pmatrix} k^* & 0 \\ 0 & mlg(\frac{sin(\theta)}{\theta}) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3.15}$$

Le terme $mlg\frac{sin(\theta)}{\theta}$ de la matrice $K(X)$, reste défini même pour les petits angles car $\lim_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} = 1$. Pour ce qui est des problèmes qui peuvent surgir lors des simulations numériques au passage de la variable θ par zéro, on utilise son développement limité autour de zéro.

On remarque que le système (3.13) a la forme d'un système couplé pont-actionneur, où l'actionneur est seulement un pendule virtuel (sans alternateur ni résistance) dont la masse est M_{ap}, la longueur équivalente est l, l'inertie est I_{ap} et dont l'amortissement est C_{eqNL}.

Dans la suite de cette étude on appellera ce système d'équation "modèle pont-pendule non linéaire virtuel".

L'objectif de cette étude est de robustifier le dispositif de contrôle dont on dispose. Cette tâche sera réalisée en deux étapes:

- On essayera dans un premier temps de faire en sorte que le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" (M.P-P.N.L.V) suive le "modèle linéaire de référence". Ceci revient à déterminer la ou les valeurs de l'amortissement qui réalisent cet objectif (c'est-à-dire $C_{eqNL} = o$, avec o peut être une constante ou une fonction qui varie au cours du temps). Pour cela il existe plusieurs stratégies telles que la stratégie passive ($o = constante$), active ou semi-active (fonction qui varie dans le temps). Chaque stratégie peut être mise en place grâce à une méthode de contrôle dont on a cité quelques-unes dans le premier chapitre.

  Une fois que cette ou ces valeurs sont trouvées, on les injecte dans le "M.P-P.N.L.V" pour avoir un modèle système qui se comporte de manière optimale (selon le critère choisi). Ce modèle devient à son tour "modèle non linéaire de référence".

– Dans un deuxième temps, on essayera de faire en sorte que le "modèle non linéaire réel" suive le "modèle non linéaire de référence". Ceci revient à déterminer la ou les valeurs que doit prendre la résistance pour réaliser cet objectif. La résistance externe varie en fonction de l'angle de rotation du pendule pour réaliser la ou les valeurs optimales de l'amortissement déterminé, et ceci est obtenu lorsque c'est possible en imposant $C_{eqNL} = o$. Et de la même manière que pour l'étape précédente, il faut déterminer la méthode de contrôle adéquate.

La figure (3.1) représente la structure de l'idée sur laquelle se base le travail présenté tout au long de cette thèse pour réaliser le contrôle du dispositif d'amortissement même pour ses grands débattements.

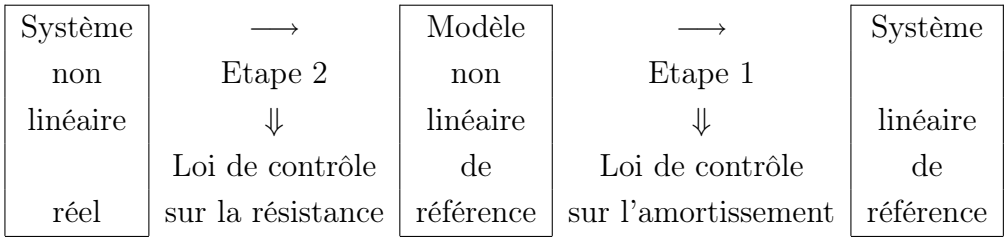


Fig. 3.1 – *Schéma représentatif de la génération du contrôle du dispositif*

Dans le cadre de cette étude on s'intéresse aux grandes vibrations du pendule dont la dynamique non linéaire n'a pas été analysée. Donc on procède à quelques tests pour mieux cerner les caractéristiques du modèle et pouvoir concevoir la loi de contrôle qui permet d'optimiser la réponse du système suivant un critère que l'on définira dans la suite. On présente dans le paragraphe suivant l'algorithme utilisé pour cette étude.

3.3 Schéma de Newmark semi-explicite

Les schémas d'intégration en temps ont été développés sur une base linéaire grâce à laquelle la consistance et la stabilité linéaire assurent la convergence pour des pas de temps assez fins [37]. Quelques problèmes mécaniques nécessitent l'utilisation de méthodes implicites. Ces méthodes ont été étudiées et très utilisées en combinaison avec les méthodes d'éléments finis. Pourtant quand il s'agit de problèmes non linéaires, les méthodes implicites perdent leur stabilité inconditionnelle. Ce qui a donné le jour aux méthodes géométriques telles que la structure Hamiltonienne [47], [49], [41], [20], [56] qui consiste en la construction d'un schéma d'intégration dont le flot est symplectique de façon à garantir la conservation des volumes dans le portrait de phase. Mais même ces conditions ne sont pas suffisantes pour assurer la stabilité numérique pour des pas de temps pas assez fins. Récemment le concept d'intégrateurs variationnels a été développé par Marsden *et al* [51], [52], [63], [43], [46], [53]. Ces intégrateurs sont construits sur la base d'une structure Lagrangienne qui permet de prendre en compte les systèmes dissipatifs et forcés [43] et donnent des résultats très satisfaisants. Mais le débat entre intégration géométrique et intégration classique reste très actif [32].
On s'intéresse dans cette étude principalement à la famille de schémas de *Newmark*. Durant les années, des modifications ont été effectuées sur ces algorithmes, qui représente l'intégrateur temporel peut être le plus utilisé pour les systèmes dynamiques structuraux non linéaires [6], [66].

3.3.1 Schéma de Newmark générique

Le schéma de *Newmark* implicite pour les systèmes dynamiques structuraux linéaires [37] a une forme constante mais l'implémentation varie d'une utilisation à une autre. On présente dans la figure (3.2) la base de l'algorithme de *Newmark* dans sa forme la plus générale, où d_n, v_n et a_n représentent les approximations aux temps t_n respectivement du déplacement, de la vitesse et de l'accélération de l'état considéré. M, C et K des matrices constantes représentant respectivement la masse, l'amortissement et la rigidité.
Δt est le pas de temps de la discrétisation utilisé pour l'intégration et f_n le forçage appliqué au système à l'instant t_n.

On présente dans le tableau qui suit les propriétés de quelques méthodes d'utilisations classique de *Newmark* [37] :

$$\boxed{\begin{array}{c} M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F \\ d(0) = d_0 \\ \dot{d}(0) = v_0 \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} Ma_{n+1} + Cv_{n+1} + Kd_{n+1} = f_{n+1} \\ \qquad d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2}\{(1-2\beta)a_n + 2\beta a_{n+1}\} \\ \qquad v_{n+1} = v_n + \Delta t\{(1-\gamma)a_n + \gamma a_{n+1}\} \\ d_0, \quad v_0 \quad \text{données} \end{array}}$$

Fig. 3.2 – *Algorithme de Newmark implicite pour les systèmes dynamiques structuraux linéaires*

Méthode	Type	β	γ	Condition de Stabilité	Ordre de précision
Average acceleration (règle du trapèze)	Implicite	1/4	1/2	Inconditionnelle	2
Linear acceleration	Implicite	1/6	1/2	$(*)\Omega_{crit} = 2\sqrt{3} = 3{,}464$	2
Fox-Goodwin (royal road)	Implicite	1/12	1/2	$\Omega_{crit} = \sqrt{6} = 2{,}449$	2
Central Difference	Explicite	0	1/2	$\Omega_{crit} = 2$	2

TAB. 3.1 – *Propriétés de quelques méthodes de la famille Newmark*

$(*)$ $\Omega_{crit} = (\frac{\gamma}{2} - \beta)^{(\frac{1}{2})}$ la pulsation propre non amortie critique d'échantillonnage. Pour assurer la stabilité du schéma il faut que la condition $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{\Omega_{crit}}{(2\pi)}$ soit vérifiée pour $T = \frac{(2\pi)}{\omega}$ la période du système et Δt la discrétisation adopté dans le schéma d'intégration.
Le tableau (3.1) montre que la stabilité des schémas de *Newmark* appliqués aux systèmes linéaires, est inconditionnelle pour une implémentation implicite où $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$.

3.3.2 Schéma de Newmark utilisé

On montre dans ce qui suit l'implémentation du schéma de *Newmark* "semi-explicite". C'est-à-dire que l'on se propose d'utiliser l'algorithme implicite avec la résolution de la partie implicite par la première approximation qui sert généralement à initialiser la méthode de minimisation, pour une partie des équations.
On définit les termes de prédictions suivant:

$$\begin{cases} \breve{d}_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t}{2}(1-2\beta)a_n \\ \breve{v}_{n+1} = v_n + (1-\gamma)\Delta t a_n \end{cases} \tag{3.16}$$

insérant (3.16) dans l'expression donnée par la figure (3.2) on a

$$\begin{cases} d_{n+1} = \breve{d}_{n+1} + \beta\Delta t^2 a_{n+1} \\ v_{n+1} = \breve{v}_{n+1} + \gamma\Delta t a_{n+1} \end{cases} \tag{3.17}$$

et en remplaçant les expressions (3.17) dans les équations de la dynamique (3.8), où $d_n \longrightarrow X_n$, $v_n \longrightarrow \dot{X}_n$ et $a_n \longrightarrow \ddot{X}_n$ et on a

$$\begin{aligned} M(\breve{X}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{X}_{n+1})\ddot{X}_{n+1} = f(t) \\ -C(\breve{X}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{X}_{n+1}, \dot{\breve{X}}_{n+1} + \gamma\Delta t \ddot{X}_{n+1}).(\dot{\breve{X}}_{n+1} + \gamma\Delta t \ddot{X}_{n+1}) \\ -K(\breve{X}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{X}_{n+1}).(\breve{X}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{X}_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.18}$$

où $f(t)$ représente le vecteur de forces extérieures.

L'algorithme que l'on propose d'utiliser n'est autre que l'algorithme de *Newmark* implicite avec en explicitant juste les matrices $M(X_{n+1})$, $C(X_{n+1}, \dot{X}_{n+1})$ et $K(X_{n+1})$ par l'utilisation des valeurs de prédiction, tel que

$$\begin{aligned} M(\breve{X}_{n+1})\ddot{X}_{n+1} = f(t) - C(\breve{X}_{n+1}, \dot{\breve{X}}_{n+1}).(\dot{\breve{X}}_{n+1} + \gamma\Delta t \ddot{X}_{n+1}) \\ -K(\breve{X}_{n+1}).(\breve{X}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{X}_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

Factorisant par rapport à $\ddot{X}_{n+1}$, on a :

$$\begin{aligned} [M(\breve{X}_{n+1}) + \gamma\Delta t C(\breve{X}_{n+1}, \dot{\breve{X}}_{n+1}) + \beta\Delta t^2 K(\breve{X}_{n+1})]\ddot{X}_{n+1} \\ = f(t_{n+1}) - C(\breve{X}_{n+1}, \dot{\breve{X}}_{n+1}).\dot{\breve{X}}_{n+1} + K(\breve{X}_{n+1}).\breve{X}_{n+1} \end{aligned} \tag{3.20}$$

On rappelle que les valeurs des paramètres β et γ sont choisies de manière à ce que $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$. L'algorithme est donné par la figure (3.3)

Initialisation

$X_0,\ \dot{X}_0,\ M(X_0),\ C(X_0,\dot{X}_0),\ K(X_0),\ f(t_0)$

Calcul de $\ddot{X}_0$

$\ddot{X}_0 = M^{-1}(X_0).[f(t_0) - C(X_0,\dot{X}_0).\dot{X}_0 - K(X_0).X_0]$

Implémentation temporelle

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$

Prédiction

$\breve{X}_{n+1} = X_n + \Delta t\dot{X}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-2\beta)\ddot{X}_n$
$\dot{\breve{X}}_{n+1} = \dot{X}_n + \Delta t(1-\gamma)\ddot{X}_n$

Calcul de l'accélération

$S = M(\breve{X}_{n+1}) + \gamma\Delta t C(\breve{X}_{n+1},\dot{\breve{X}}_{n+1}) + \beta\Delta t^2 K(\breve{X}_{n+1})$
$\ddot{X}_{n+1} = S^{-1}(\breve{X}_{n+1}).[f(t_{n+1}) - C(\breve{X}_{n+1},\dot{\breve{X}}_{n+1}).\dot{\breve{X}}_{n+1} - K(\breve{X}_{n+1}).\breve{X}_{n+1}]$

Correction

$X_{n+1} = \breve{X}_{n+1} + \beta\Delta t^2\ddot{X}_{n+1}$
$\dot{X}_{n+1} = \dot{\breve{X}}_{n+1} + \Delta t\gamma\ddot{X}_{n+1}$

Fig. 3.3 – *Algorithme de Newmark semi-explicite*

4

Stratégies de contrôle passif et séquencement de gain

4.1 Introduction

Le contrôle passif est la stratégie de contrôle préféré dans le cadre du génie civil puisque cette stratégie est fiable et demande peu d'interventions. Afin d'amortir les vibrations de la maquette de pont dont on dispose, l'actionneur adopté a été conçu de manière à avoir des paramètres optimaux pour les petites rotations du pendule. Dans ce chapitre on étudiera la pertinence de ces paramètres par une étude paramétrique puis leur optimalité pour les grandes vibrations du pendule dans le cadre d'un contrôle passif. Ensuite on proposera l'application de la stratégie du *gain scheduling*, c'est-à-dire l'application d'un contrôle constant par morceaux pour le "modèle système pont-pendule non linéaire virtuel".

4.2 Etude paramétrique

Dans cette partie, on s'intéresse aux paramètres du pendule non linéaire virtuel: la masse totale de l'actionneur M_{ap}, la masse du pendule m, sa longueur l et son amortissement C_{eqNL} défini dans le troisième chapitre (3.11). Ces paramètres ont été déterminés par Ben Mekki [61] de façon à ce que le deuxième mode de vibration soit amorti de manière optimale sous l'hypothèse des petites rotations du pendule. On étudie dans ce qui suit l'influence de chacun de ces paramètres sur la décroissance de la réponse en déplacement de la structure pour le deuxième mode en considérant toutes les hypothèses adoptées dans le troisième chapitre hors l'hypothèse des petites vibrations du pendule. C'est-à-dire que l'on néglige tous les couplages: le pendule n'a pas d'influence sur les autres modes et le mode considéré (deuxième) est sans torsion (autour de l'axe X) de la poutre sur laquelle le pendule est fixé.

Pour cela, considérons les énergies du système pont-pendule non linéaire de référence:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}(m^* + M_{ap})\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}I_{ap}\dot{\theta}^2 + mlcos(\theta)\dot{\theta}\dot{\alpha} \\ U = \frac{1}{2}k^*\alpha^2 + mlg(1 - cos(\theta)) \\ D = \frac{1}{2}C_{eq}\dot{\theta}^2 \\ E = T + U \end{cases} \tag{4.1}$$

T représente l'énergie cinétique du modèle, U son énergie potentielle, D son énergie dissipative et E son énergie mécanique.

Dans ce qui suit on procède à l'analyse de l'influence des paramètres M_{ap}, m, l et C_{eq} du pendule virtuel sur la réponse en déplacement à une excitation initiale du deuxième mode de vibration de la structure de $\alpha = 0{,}3$ ce qui correspond à un déplacement imposé de l'extrémité du tablier de $7cm$. On part des valeurs optimales considérées pour les petites rotations du pendule que l'on appellera : $M_{ap}^{op.pr}$, $m^{op.pr}$, $l^{op.pr}$ et $C_{eq}^{op.pr}$ et l'on étudie pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" leur optimalité.

En appliquant au "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" les paramètres $m^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ et une mase totale de $M_{ap} = \frac{1}{2}M_{ap}^{op.pr}$, la variation de l'énergie totale est tellement petite qu'elle ne dépasse pas 1% comme le montrent les figures (4.1) et (4.2). On obtient le même ordre de grandeur de la variation de l'énergie totale en multipliant par deux la valeur de la masse totale optimale pour les petites rotations. Ceci implique que la masse totale n'a pas

beaucoup d'incidence sur la vitesse de décroissance de la solution en déplacement du "modèle non linéaire virtuel" pour le deuxième mode de vibration, ni même sur la valeur de l'angle de vibration du pendule virtuel puisque ce dernier conserve son nombre d'oscillations et son amplitude ne varie presque pas.

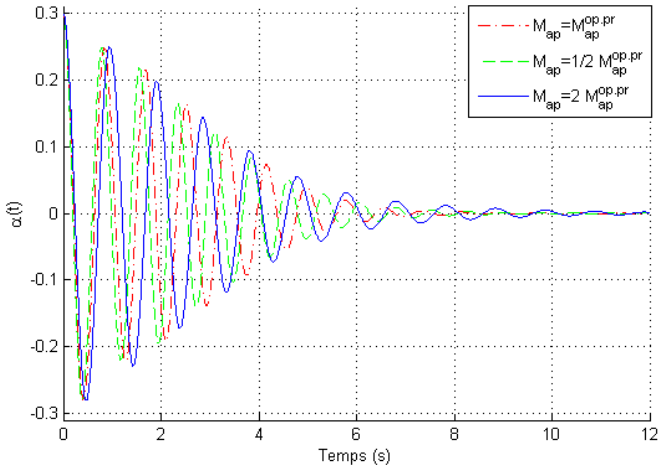


Fig. 4.1 – *Contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec* $m = m^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/M_{ap} = M_{ap}^{op.pr}$, $b/M_{ap} = \frac{1}{2}M_{ap}^{op.pr}$ $c/M_{ap} = 2M_{ap}^{op.pr}$

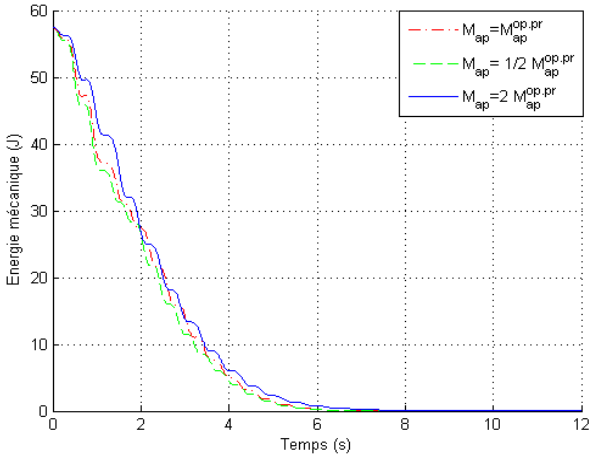


Fig. 4.2 – *Energie mécanique du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec* $m = m^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/M_{ap} = M_{ap}^{op.pr}$, $b/M_{ap} = \frac{1}{2}M_{ap}^{op.pr}$ $c/M_{ap} = 2M_{ap}^{op.pr}$

Contrairement à ce qui a été trouvé précédemment, l'application d'une valeur de la masse du pendule de $m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ divise l'énergie dissipative par 10 et ceci a une incidence sur la décroissance de l'énergie mécanique comme le montre la figure (4.5). On voit sur la figure (4.4) que la vibration du pendule commence à de petites amplitudes et continue son oscillation sans perturbation ni amortissement dans le temps. Ceci implique qu'une variation de la sorte désynchronise le pendule du deuxième mode de vibration de la structure, ce qui explique la réduction de son influence sur le mode à amortir. Alors que si l'on considère une masse du pendule de la valeur de $m = 1{,}3m^{op.pr}$ on réduit non seulement le nombre d'oscillations de la réponse en déplacement horizontal du pont mais aussi celui du pendule. On réalise aussi une atténuation de l'amplitude des premières oscillations de l'extrémité du tablier comme c'est montré dans la figure (4.3). De plus, sur la figure (4.5) on remarque que la décroissance de l'énergie totale est augmenté à peu près d'un tiers par rapport à la décroissance donnée par $m = m^{op.pr}$. Ce qui implique que pour un déplacement initial de $\alpha_0 = 0{,}3$, la valeur de la masse $m = 1{,}3m^{op.pr}$ resynchronise le pendule non linéaire virtuel et lui permet d'absorber une quantité d'énergie plus grande que celle donnée pour la masse calculée en petites rotations.

Il faut mentionner que l'analyse du comportement de notre dispositif passif en grandes vibrations est en parfait accord avec les résultats obtenus par Heuer et Yousefi [35] qui ont présenté une analyse sur l'influence des oscillations non linéaires du pendule sur le sommet d'une tour élancée élastique de grande hauteur. Ils ont montré en effet que, avec l'ampleur de l'excitation, les paramètres optimaux du pendule changent et qu'en même temps l'efficacité de l'amortissement diminue par manque de syntonisation.

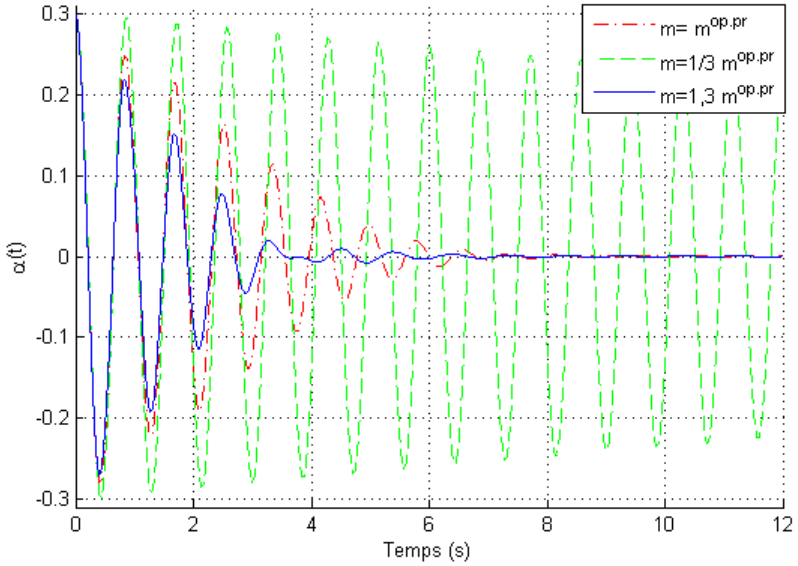


Fig. 4.3 – *Contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec* $M_{ap}^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/m = m^{op.pr}$, $b/m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ $c/m = 1{,}3m^{op.pr}$

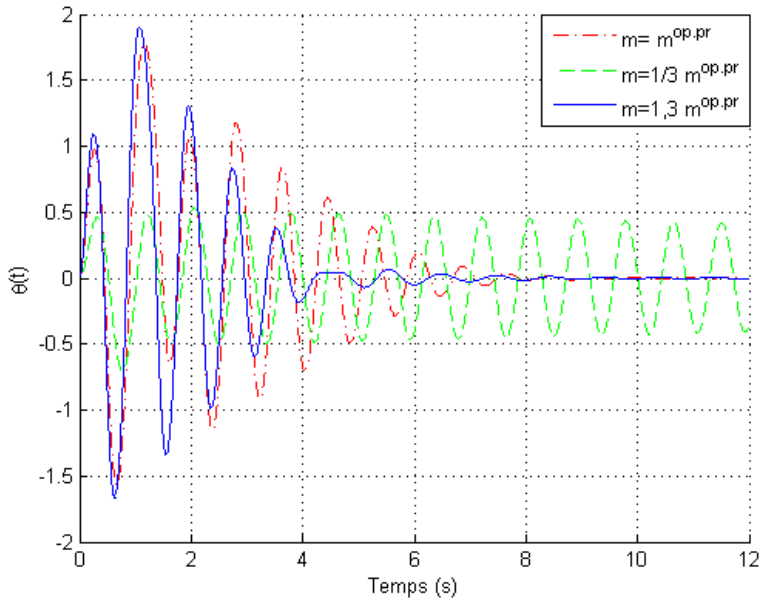


Fig. 4.4 – *Angle de vibration du pendule non linéaire virtuel avec* $M_{ap}^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/m = m^{op.pr}$, $b/m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ $c/m = 1{,}3m^{op.pr}$

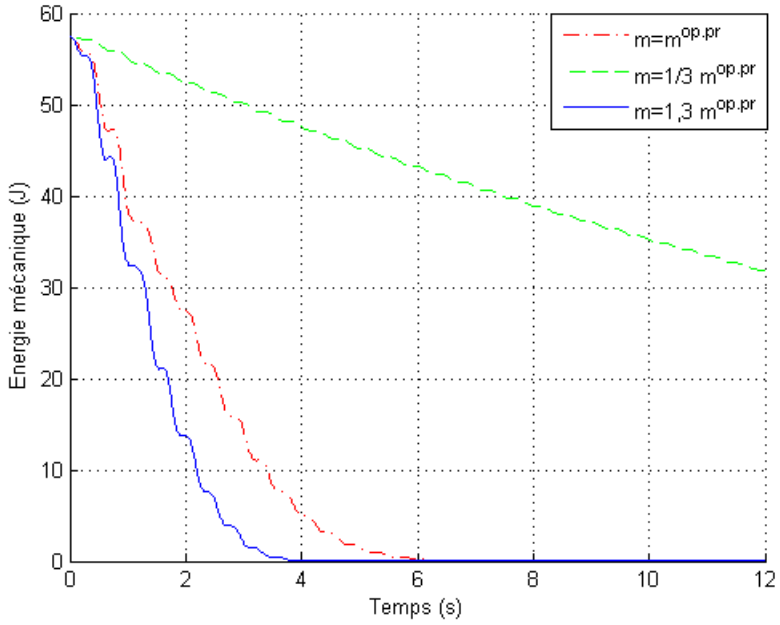


Fig. 4.5 – *Energie mécanique du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec* $M_{ap}^{op.pr}$, $l^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/m = m^{op.pr}$, $b/m = \frac{1}{3}m^{op.pr}$ $c/m = 1{,}3m^{op.pr}$

La variation de la valeur de la longueur du pendule de référence ne fait qu'empirer la vitesse de la décroissance de la réponse en déplacement et celle de l'énergie mécanique. Comme le montre les figures (4.6) et (4.7), pour une valeur de la longueur du pendule non linéaire virtuel égale à $l = \frac{2}{3}l^{op.pr}$ l'énergie mécanique dans le système décroit deux fois plus lentement que pour la valeur optimale de la longueur pour les petites rotations. Et on obtient une dégradation de la vitesse de décroissance de la réponse plus grande pour une valeur de la longueur du pendule non linéaire virtuel de $l = 2l^{op.pr}$. Ce qui signifie que la valeur de $l = l^{op.pr}$ représente la valeur optimale de la longueur même pour les grandes vibrations du pendule non linéaire virtuel.

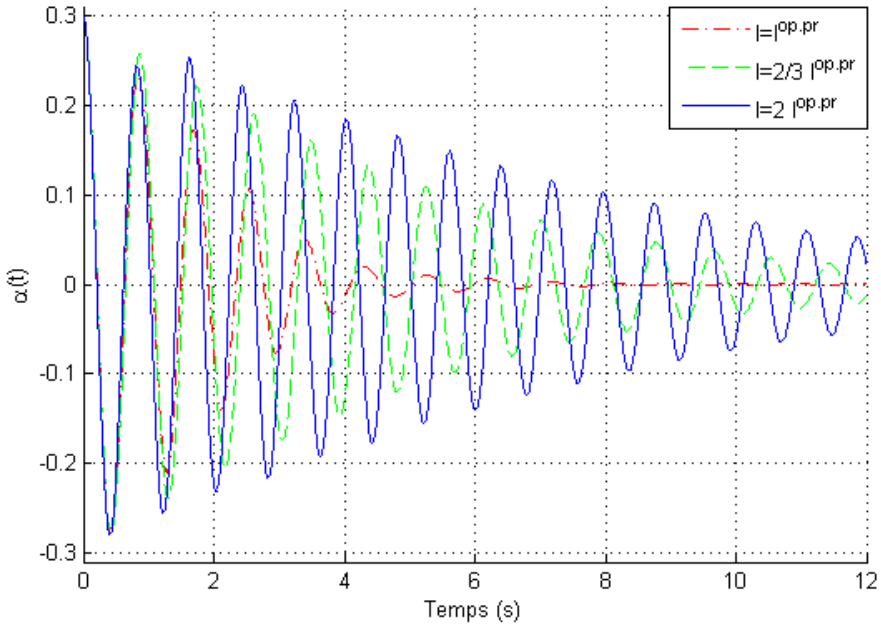


Fig. 4.6 – *Contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec* $M_{ap}^{op.pr}$, $m^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/l = l^{op.pr}$, $b/l = \frac{2}{3}l^{op.pr}$ $c/l = 2l^{op.pr}$

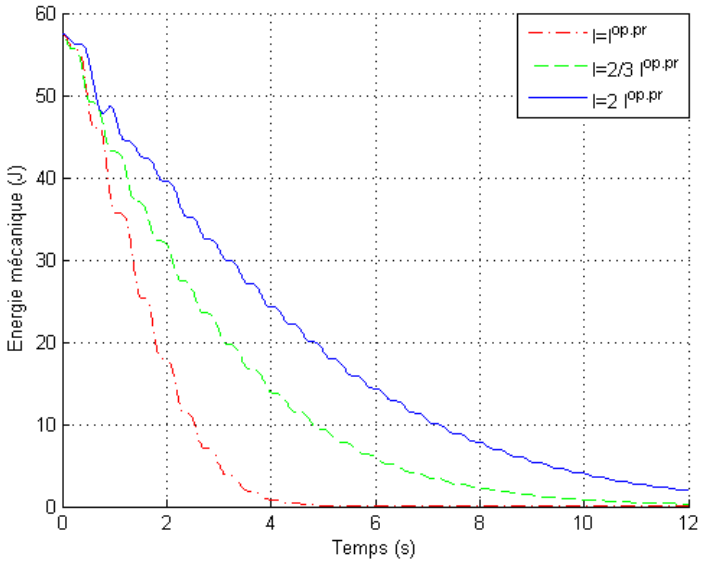


Fig. 4.7 – *Energie mécanique du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec* $M_{ap}^{op.pr}$, $m^{op.pr}$, $C_{eq}^{op.pr}$ *et* $a/l = l^{op.pr}$, $b/l = \frac{2}{3}l^{op.pr}$ $c/l = 2l^{op.pr}$

Le but de cette étude est de robustifier le dispositif de contrôle dont on dispose et d'étendre son optimalité (selon le critère choisi) aux grandes vibrations du pendule. Ce dispositif a déjà été conçu, et afin de pouvoir l'exploiter, la recherche des paramètres optimaux en grandes rotations du pendule de référence se réduit en réalité à la recherche de l'amortissement optimal. Ceci correspond à l'étude de la variation de l'amortissement dans l'étude paramétrique. Comme cette étude revient à chercher un contrôle passif linéaire pour le modèle pont-pendule non linéaire virtuel, on la présentera dans le prochain paragraphe.

4.3 Contrôle passif du modèle non linéaire virtuel

Système non linéaire réel	⟶ Etape 2 ⇓ Loi de contrôle sur la résistance	Modèle non linéaire de référence	⟶ Etape 1 ⇓ **Loi de contrôle sur l'amortissement**	Système linéaire de référence

Fig. 4.8 – *Etape de recherche d'un **contrôle passif** pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel*

Le système considéré peut être écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre

$$\dot{Z} = \psi(Z) \tag{4.2}$$

avec $\psi : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement Lipchitzienne du domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $Z = (X \quad \dot{X})^T$ l'état étendu tel que

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-I_{ap}k^*\alpha+(ml)^2gcos(\theta)sin(\theta)+I_{ap}mlsin(\theta)\dot{\theta}^2+mlcos(\theta)C_{nl}\dot{\theta}}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(mlcos(\theta))^2} \\ \frac{mlcos(\theta)k^*\alpha-(m^*+M_{ap})mlgsin(\theta)-(ml)^2cos(\theta)sin(\theta)\dot{\theta}^2-(m^*+M_{ap})C_{nl}\dot{\theta}}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(mlcos(\theta))^2} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

L'équation (4.4) représente l'équation de l'état non forcé du système pont-pendule non linéaire virtuel et l'amortissement C_{nl} en représente le contrôle. Le contrôle peut être linéaire ($C_{nl} = constante$), fonction de l'état ($C_{nl} = \varsigma(Z)$), fonction du temps ($C_{nl} = \varsigma(t)$ ou même fonction des deux à la fois ($C_{nl} = \varsigma(t,Z)$).

L'amortissement $C_{eq}^{op.pr}$, déterminé de manière optimale sous l'hypothèse des petites rotations du pendule, représente le contrôle passif (constant) appliqué au "modèle pont-pendule linéaire" (3.6) afin qu'il donne la plus grande décroissance de sa réponse en déplacement.
Pour des raisons de simplifications de la notation on pose $C_{eq}^{op.pr} = C_l$.
Puisque dans cette partie on cherche à trouver l'amortissement passif qui maximise la décroissance de la réponse en déplacement du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel", analysons sa réponse (3.12) muni de cette valeur d'amortissement c'est-à-dire $C_{nl} = C_l$.

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-I_{ap}k^*\alpha+(ml)^2gcos(\theta)sin(\theta)+I_{ap}mlsin(\theta)\dot{\theta}^2+mlcos(\theta)C_l\dot{\theta}}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(mlcos(\theta))^2} \\ \frac{mlcos(\theta)k^*\alpha-(m^*+M_{ap})mlgsin(\theta)-(ml)^2cos(\theta)sin(\theta)\dot{\theta}^2-(m^*+M_{ap})C_l\dot{\theta}}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(mlcos(\theta))^2} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

L'équilibre stable Z_0 du système (4.4) est $Z_0 = (0\ 0\ 0\ 0)^T$. C'est-à-dire, il existe un voisinage V_{Z0} de Z_0 pour lequel $\forall Z(t_0) \in V_{Z0}$ le système (4.4) reste stable et revient à sa position d'équilibre stable Z_0. V_{Z0} est appelé bassin d'attraction du système. La détermination analytique du bassin d'attraction des systèmes non linéaires n'est pas toujours possible, pour cela on proposera quelques tests numériques afin de déterminer les limites de stabilité du modèle non linéaire (4.4) pour une valeur de l'amortissement constante et égale à C_l.

Vu que le système (4.4) admet un équilibre instable $Z_{01} = (0\ k\pi\ 0\ 0)^T$, on applique à la structure des conditions initiales qui ne feront pas vibrer le pen-

dule au delà de l'angle $\theta = \pm\pi$.

On présente dans la figure (4.9) une simulation qui montre que le système non linéaire (4.4) reste stable pour l'amplitude initiale maximale de la deuxième contribution modale initiale $\alpha_0 = 0{,}38$ en l'absence de vitesses et de vibration initiales du pendule, ce qui correspond à un déplacement initial y_0 de l'extrémité du tablier suivant l'axe Y de $8{,}9cm$.

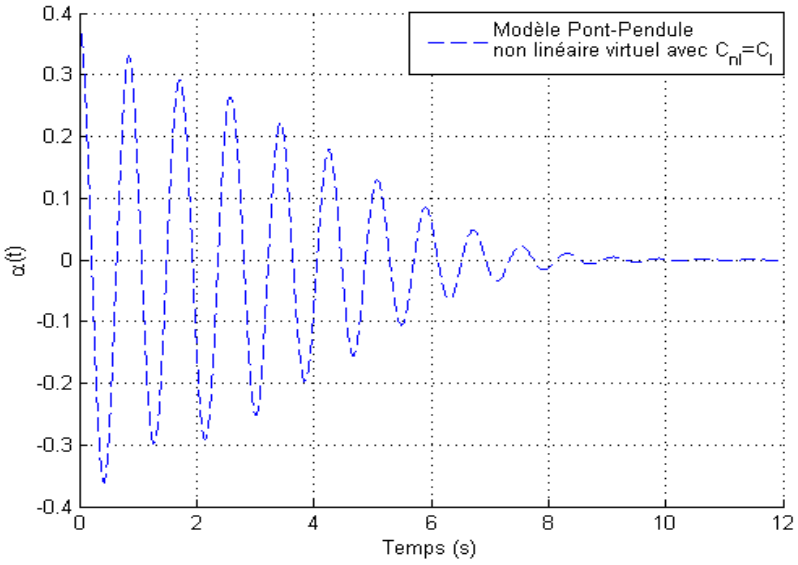


Fig. 4.9 – *Variation de l'amplitude de la deuxième contribution modale de la structure pour les grandes vibrations du pendule non linéaire virtuel avec* $C_{nl} = C_l$

On voit bien que le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" revient à sa position d'équilibre stable, c'est-à-dire qu'il est encore dans son bassin d'attraction. On remarque néanmoins que sa vitesse de convergence est nettement inferieure à celle donnée par le "modèle linéaire de référence" (3.6) comme on le montre dans la figure (4.10).

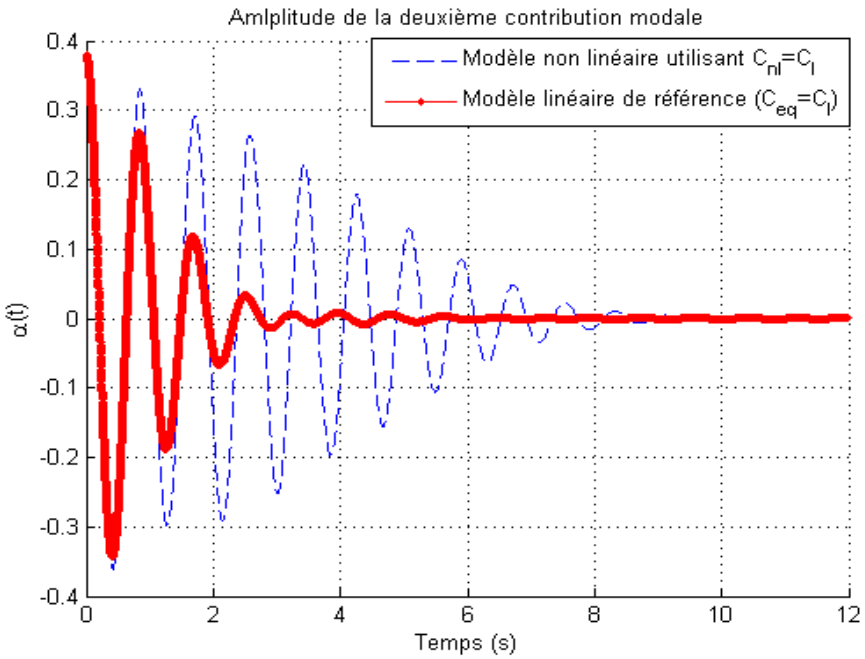


Fig. 4.10 – *Comparaison de l'amplitude de la deuxième contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" avec $C_{nl} = C_l$ à celle du "modèle linéaire de référence"*

Une question se pose:

– Peut-on mieux faire?

Pour le savoir essayons de faire en sorte que le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" ait la même décroissance de sa solution en déplacement que celle du "modèle linéaire de référence", et ceci numériquement. Ce qui revient à dire que l'on minimise par un algorithme du gradient la fonctionnelle définie comme suit

$$J_1(Z(0),C_{nl}) = \int_0^T (\tilde{\alpha}(Z(0),t) - \alpha(Z(0),t,C_{nl}))^2 dt \tag{4.5}$$

où $\tilde{\alpha}(Z(0),t)$, $\alpha(Z(0),t,C_{nl})$ représentent respectivement l'amplitude de la contribution modale du modèle linéaire de référence et celle du modèle non linéaire de référence à conditions initiales $Z(0)$ données.

Les simulations numériques nous permettent de faire trois constatations:

– L'amortissement C_l n'est pas optimal pour les grandes vibrations du pendule virtuel: grâce à la figure (4.11) on voit bien qu'il existe une valeur de $C_{nl} \neq C_l$ pour laquelle on obtient une décroissance de la réponse

du modèle (4.3) plus rapide pour les grandes amplitudes que celle donnée par la simulation du modèle (4.4). En plus de réduire les amplitudes des grandes vibrations, la valeur de C_{nl} proposée tend à élargir le bassin d'attraction suivant les 3 directions correspondantes respectivement à α, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$. Ceci revient à dire que l'on peut considérer de plus grandes amplitudes de vibrations sans pour autant passer par une instabilité ($\theta = \pm k\pi$).

– On remarque dans la figure (4.12) que les grandes amplitudes décroissent plus rapidement, mais le nombre d'oscillations en petites amplitudes augmente. Ceci a du sens puisque l'on utilise une valeur de l'amortissement qui n'est pas optimale pour les petites vibrations.

– La valeur de C_{nl} qui améliore la vitesse de décroissance de la solution du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dépend des conditions initiales considérées. On présente dans (4.12) quelques simulations qui montrent les réponses du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" à certaines conditions initiales munies de son contrôle linéaire C_{nl} optimal confronté avec la réponse du même modèle munie d'un contrôle linéaire C_{nl} optimal constant pour d'autres conditions initiales.

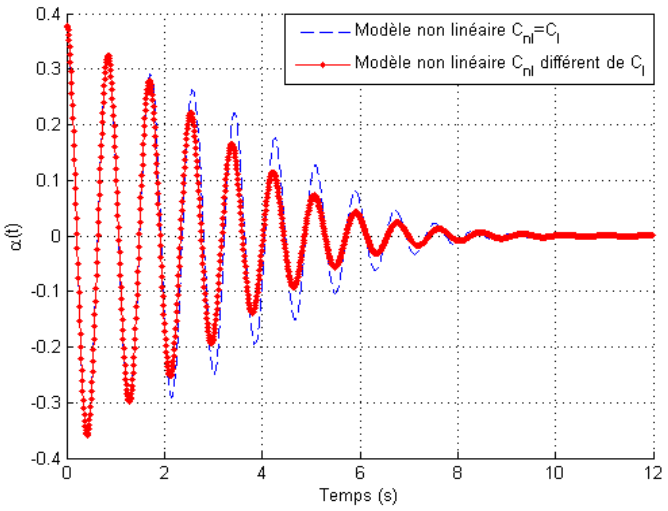


Fig. 4.11 – *Comparaison de l'amplitude de la deuxième contribution modale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant $C_{nl} \neq C_l$ et utilisant $C_{nl} = C_l$ pour $y_0 = 8{,}9cm$.*

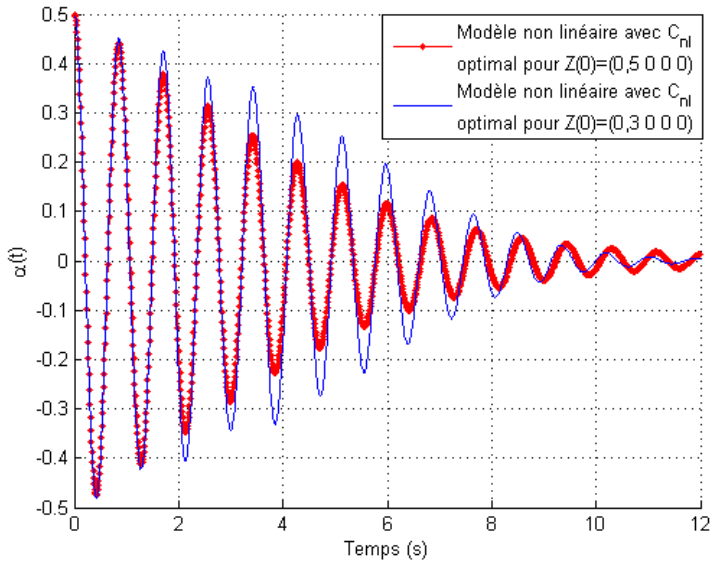


Fig. 4.12 – *Comparaison de l'amplitude de la deuxième contribution modale "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant C_{nl} optimal pour $y_0 = 11cm$ ($\alpha_0 = 0{,}5$) et utilisant C_{nl} optimal pour $y_0 = 7cm$ ($\alpha_0 = 0{,}3$).*

Jusque là on a cherché des valeurs constantes de C_{nl} qui améliorent la vitesse de décroissance de la solution par rapport à celle donnée utilisant C_l. Ceci revient à dire que l'on a cherché à réaliser un amortissement passif pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" pour les grandes vibrations du pendule. Les figures (4.11) et (4.12) montrent que la stratégie passive n'est pas suffisante pour avoir une amélioration considérable par rapport aux résultats donnés par l'amortissement conçu de façon optimale pour les petites vibrations.
Une première idée est de concevoir un amortissement en s'inspirant de la méthode *Gain Scheduling*, c'est-à-dire un amortissement constant par morceaux variant en fonction des valeurs initiales du système.

4.4 Application de la stratégie de séquencement de gain

Système non linéaire réel	⟶ Etape 2 ⇓ Loi de contrôle sur la résistance	Modèle non linéaire de référence	⟶ Etape 1 ⇓ **Loi de contrôle sur l'amortissement**	Système linéaire de référence

Fig. 4.13 – *Etape de recherche d'un* ***contrôle semi-actif par séquencement de gain*** *pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel*

Afin de séquencer le gain à appliquer au "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" on étudie la dépendance de ce dernier aux variables à séquencer.

Comme la réponse des équations différentielles dépend de l'état initial et que ce dernier comprend quatre composantes, on se propose d'étudier la sensibilité de l'amortissement aux différentes valeurs que peuvent prendre les composantes de l'état initial. Pour cela, on définit un critère compatible avec celui adopté pour les petites vibrations, c'est-à-dire la maximisation de la décroissance de la réponse en déplacement de la structure. On se donne pour objectif d'atteindre la décroissance de la réponse du "modèle linéaire de référence" et ceci numériquement. Pour cela on rappelle les expressions des deux modèles:

Le "modèle linéaire de référence"

$$\dot{\tilde{Z}} = A\tilde{Z} \tag{4.6}$$

avec

$$\dot{\tilde{Z}} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\alpha}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix}; \qquad \tilde{Z} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \ddot{\tilde{\alpha}} \\ \ddot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-Ik^*}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(ml)^2} & \frac{(ml)^2 g}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(ml)^2} & 0 & \frac{mlC_l}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(ml)^2} \\ \frac{mlk^*}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(ml)^2} & \frac{-(m^*+M_{ap})mlg}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(ml)^2} & 0 & \frac{-(m^*+M_{ap})C_l}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(ml)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\theta} \\ \dot{\tilde{\alpha}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

où $\tilde{Z}$ et $\dot{\tilde{Z}}$ sont respectivement l'état étendu et la vitesse de l'état étendu du "modèle linéaire de référence" sous la forme compacte (4.6). Tandis que l'expression du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" est donnée par

$$\dot{Z} = G(Z) \tag{4.9}$$

avec

$$\dot{Z} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix}; \qquad Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-k^* I_{ap}\alpha+(ml)^2 gcos(\theta)sin(\theta)+I_{ap}mlsin(\theta)\dot{\theta}^2+mlcos(\theta)C_{nl}\dot{\theta}}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(mlcos(\theta))^2} \\ \frac{mlcos(\theta)k^*\alpha-(m^*+M_{ap})mlgsin(\theta)-(ml)^2 cos(\theta)sin(\theta)\dot{\theta}^2-(m^*+M_{ap})C_{nl}\dot{\theta}}{(m^*+M_{ap})I_{ap}-(mlcos(\theta))^2} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Z et $\dot{Z}$ sont respectivement l'état étendu et la vitesse de l'état étendu du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" sous la forme (4.9).

Afin d'améliorer la décroissance de la réponse en déplacement donnée par l'application d'un contrôle linéaire passif, on propose d'appliquer un contrôle linéaire par morceaux.

Pour cela on subdivise l'espace des configurations de l'état (Z) à quatre dimensions en un nombre fini de sous-espaces. Les axes de l'espace des configurations représentent les composantes dont dépend l'amortissement. A chaque hypercube de dimension 4 est associée une valeur de l'amortissement déterminé par la minimisation de la fonctionnelle J_1 présentée dans (4.5) pour un intervalle de conditions initiales données. Dans la figure qui suit on représente en trois dimensions une partie de la subdivision

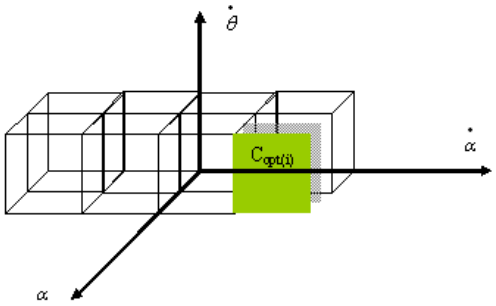


Fig. 4.14 – *Représentation d'une partie de l'espace des configurations utilisé pour l'identification de l'amortissement de la loi semi-active déterminée par séquencement de gain.*

Pour réaliser cette minimisation par intervalles de conditions initiales, on utilise un algorithme de gradient qui minimise l'erreur aux moindres carrées entre la réponse obtenue par l'intégration des équations différentielles (4.8) par l'algorithme de *Newmark* pour les systèmes linéaires [37] et la réponse obtenue par l'intégration du modèle (4.11) par l'algorithme de *Newmark* semi-explicite (3.3). Les résultats sont résumés dans les deux tableaux suivants

$\lvert\alpha_0\rvert$	$\lvert\theta_0\rvert$			
	0	$pi/4$	$pi/2$	$3pi/4$
0,05	0,359	0,359	0,359	0,359
0,3	0,482	0,573	0,56	0,573
0,5	0,812	0,812	0,677	0,812

TAB. 4.1 – *Amortissement optimal en fonction des déplacements initiaux*

D'après le premier tableau (4.1) on voit bien que l'amortissement dépend principalement de la valeur de l'amplitude de la contribution modale et qu'il est presque insensible à la valeur de l'angle du pendule. Alors que le deuxième tableau (4.2) montre une légère sensibilité de l'amortissement à la vitesse de la contribution modale et une sensibilité négligeable à la vitesse de l'angle de vibration du pendule. Les tests numériques montrent que l'amortissement est très sensible à l'amplitude de la contribution modale et presque indifférent, en terme d'amélioration de la réponse en déplacement de la structure, à la valeur de l'amortissement optimal, pour une condition initiale donnée, par rapport à celui déterminé en changeant les vitesses comme le montre la figure (4.15). Ce

$\lvert\dot{\alpha}_0\rvert$	$\lvert\dot{\theta}_0\rvert$		
	0	20	30
0	0,359	0,457	0,359
1	0,359	0,587	0,657
2	0,4	0,524	0,654
3	0,61	0,776	0,855

TAB. 4.2 – *Amortissement optimal en fonction des vitesses initiales*

résultat nous permet de réduire l'espace des configurations des composantes dont dépend l'amortissement à une seule dimension, qui n'est autre que celle de α_0. Donc on définit une loi de contrôle semi-actif adaptative qui identifie en temps réel l'intervalle i dans lequel se trouve l'état du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" et lui associe la valeur de l'amortissement adéquat.

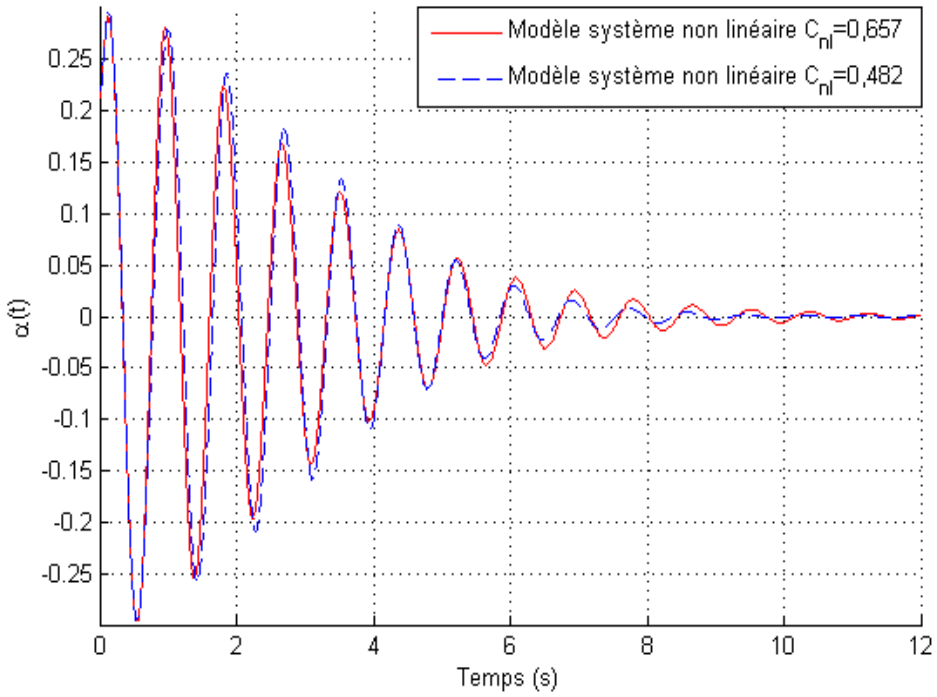


Fig. 4.15 – *Vibration horizontale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" pour* $Z = (0{,}2\ 0\ 1\ 30)^T$ *avec son amortissement passif optimal* $C_{nl} = 0{,}657$ *pour ces conditions initiales et l'amortissement passif optimal* $C_{nl} = 0{,}482$ *pour les conditions initiales* $Z = (0{,}2\ 0\ 0\ 0)^T$

On commence par la recherche de la limite entre les petites et les grandes vibrations. Heuer a montré que quand le pendule est en grandes vibrations il y a des subharmoniques qui entrent en jeu et font que les paramètres, conçus sous l'hypothèse des petites vibrations, ne soient plus optimaux. Pour cela, on définit un niveau d'erreur ϵ qui permettra de déterminer la fin de l'optimalité de l'amortissement linéaire C_l.

Ceci se fait en calculant les réponses des deux modèles "linéaire de référence" et "non linéaire virtuel" muni du contrôle linéaire C_l (4.4) en augmentant progressivement les valeurs des variables de séquencement (dans ce cas les conditions initiales). ϵ défini l'erreur entre les deux réponses. En utilisant un algorithme du gradient, on calcule l'erreur aux moindres carrées entre le "modèle linéaire de référence" simulé par l'algorithme de *Newmark* [37] et le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" (4.4) simulé par l'algorithme de *Newmark* "semi-explicite" (3.3). Ce qui revient à définir la limite entre les petites et les grandes vibrations du pendule de référence par la fin de l'optimalité du paramètre d'amortissement C_l.

La définition du seuil entre petites et grandes rotations du pendule est obtenue par l'algorithme suivant:

$J_2(\alpha_0) = \int_0^T (\tilde{\alpha}(\alpha_0,t) - \alpha(\alpha_0,t,C_l))^2 dt$

si $J_2(\alpha_0) > \epsilon \longrightarrow C_{nl} = C_{nl} + \delta C_{nl}$

sinon α_0 =limite entre les petites et les grandes rotations du pendule.

On fait de même pour le calcul des limites des intervalles de définition des valeurs de l'amortissement optimal par morceaux. On commence dans l'intervalle des plus grandes vibrations possibles qui nous permettent de rester dans le cadre de l'hypothèse du comportement élastique de la structure et on trouve la loi de contrôle adaptative dans l'esprit du séquencement de gain "loi adaptative G.S" suivante

$$\begin{cases} |\alpha(t)| \in]0{,}3; 0{,}5] & \Longrightarrow \quad C_{gs} = 0{,}812 \\ |\alpha(t)| \in]0{,}08; 0{,}3] & \Longrightarrow \quad C_{gs} = 0{,}482 \\ |\alpha(t)| \in [0; 0{,}08] & \Longrightarrow \quad C_{gs} = C_l \end{cases} \tag{4.12}$$

qui peux être représenté comme suit

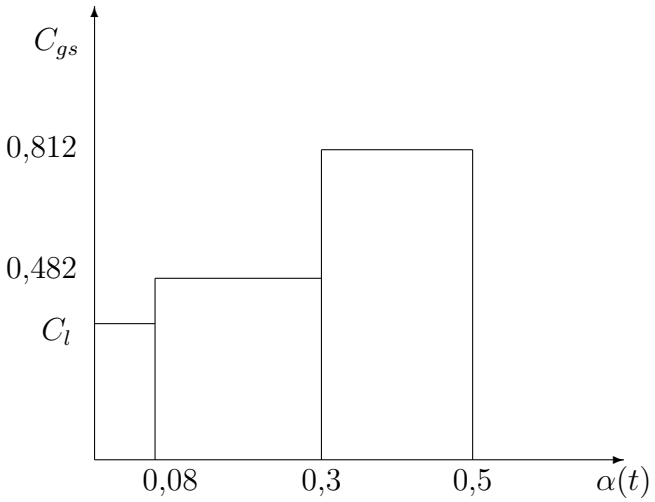


Fig. 4.16 – *Loi de contrôle semi-actif par séquencement de gain*

On simule le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" muni de la "loi adaptative G.S" et on le compare à sa réponse quand on lui applique un contrôle passif $C_{nl} = C_l$ pour $Z(0) = (0{,}5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$

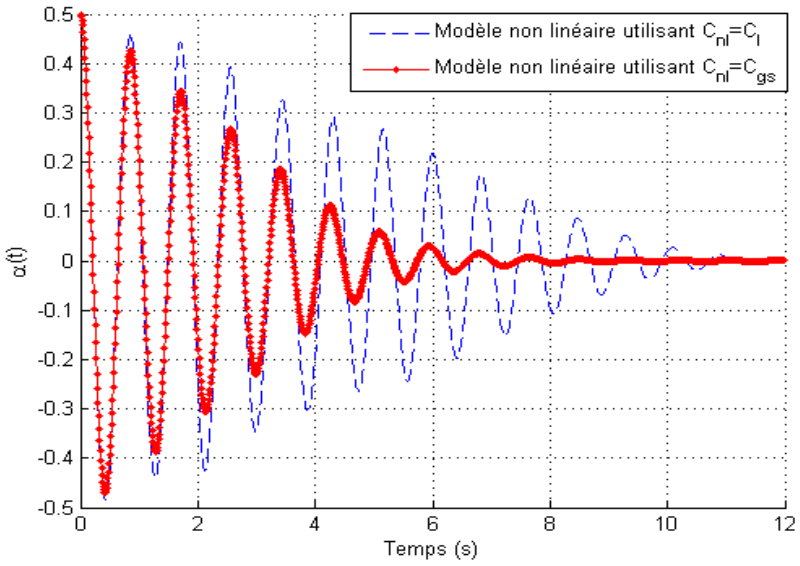


Fig. 4.17 – *Vibration horizontale du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" pour* $Z(0) = (0{,}5 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$ *avec :a/"loi adaptative G.S" et b.* $C_{nl} = C_l$

On remarque cette fois une amélioration par rapport à la stratégie passive. On voit que le nombre d'oscillations est plus petit tout en ayant une diminution des amplitudes en grandes vibrations. Cependant ce résultat n'est toujours pas assez satisfaisant. Pour y remédier, on présentera dans le chapitre suivant une autre stratégie.

5

Stratégie de poursuite pour le modèle non linéaire virtuel

5.1 Introduction

Comme on l'a vu dans le chapitre de l'étude du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel", la stratégie passive (amortissement constant) s'est révélée inefficace pour amortir la structure pour les grandes vibrations du pendule. De plus, l'inefficacité de la méthode de séquencement de gain à réaliser une vitesse de décroissance satisfaisante encourage à une adaptation de l'amortissement à chaque instant et pas seulement à quelques instants choisis. Dans ce chapitre un critère d'optimisation pour les grands débattements du pendule virtuel pour le système non linéaire étudié est proposé. Et quelques lois de contrôle sont déterminées et appliquées en premier lieu sur un exemple simple de système non linéaire (le pendule non linéaire seul), puis au système qui nous intéresse (pont-pendule non linéaire virtuel).

5.2 Critère d'optimisation

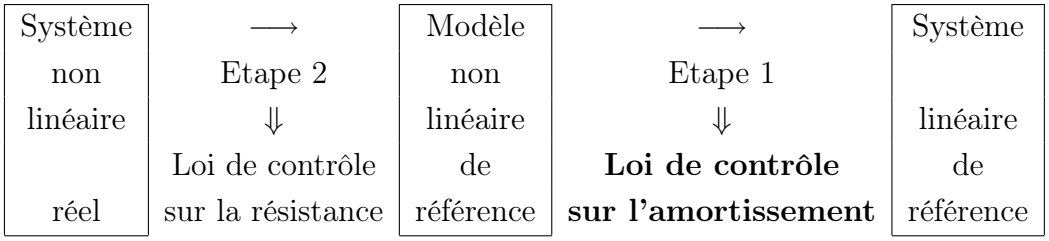


Fig. 5.1 – *Etape de conception du* ***contrôle semi-actif par poursuite*** *pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel*

On propose de rester dans le même esprit d'optimisation que celui pour le cas linéaire qui n'est autre que de maximiser la vitesse de décroissance de la réponse du système en vibration libre. Au lieu d'adopter le critère de la minimisation aux moindres carrées pour trouver un amortissement constant par morceaux, on propose une nouvelle stratégie. Comme on ne dispose pas de l'expression du flot (forme analytique) du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel", on se propose d'adopter l'idée de la méthode *Model reference adaptive control*. C'est-à-dire que l'on définira un modèle de référence, qui a une vitesse de décroissance de sa réponse satisfaisante et qu'on essayera de la suivre. On pourrait croire que le contrôle se réduit à un problème de poursuite classique, mais celà ne sera pas le cas. Il est vrai que l'on définira un système de référence et qu'on essayera de forcer la réponse du modèle système non linéaire à avoir la même forme en temps réel. Mais la différence réside dans le fait que la poursuite ne se fera pas grâce à un estimateur de l'erreur entre les deux réponses et une fonctionnelle à minimiser mais par la détermination d'une application qui nous permettra de définir la loi semi-active pour les grandes vibrations du pendule en fonction des paramètres optimaux (σ_i) du modèle de référence adopté comme montré dans la figure (5.2).

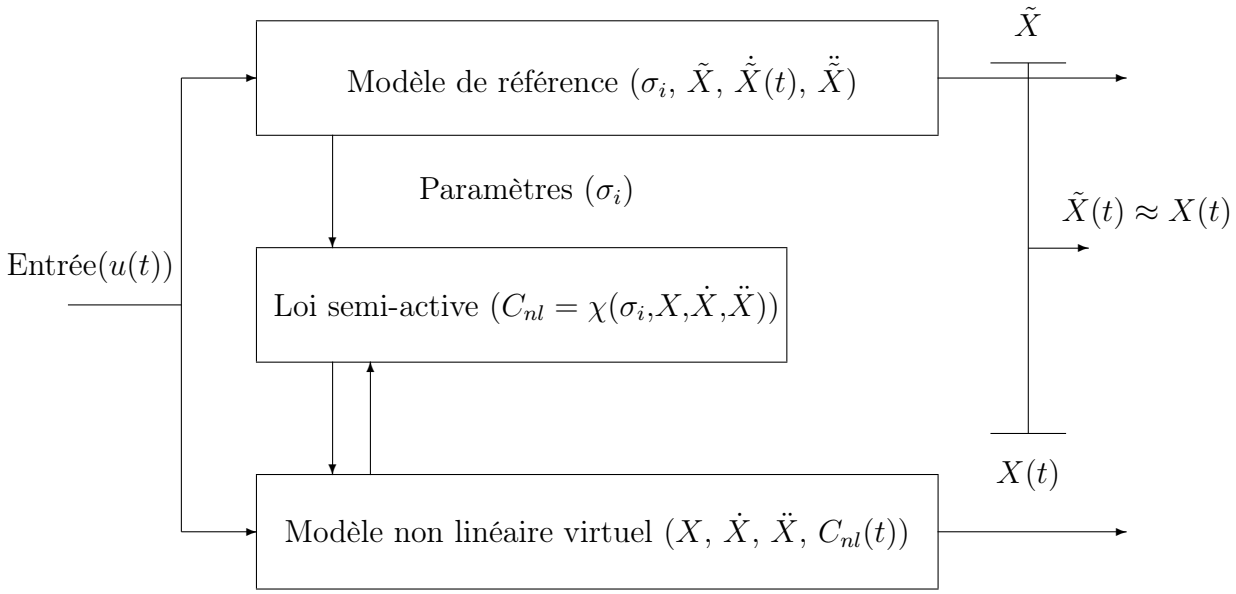


Fig. 5.2 – *Schéma représentatif du critère d'optimisation proposé pour l'obtention d'une loi semi-active sur l'amortissement*

On considèrera deux systèmes dans ce chapitre: le premier est un pendule seul et le deuxième est le système pont-pendule virtuel.

5.3 Contrôle par tracking du pendule

Commençons avec l'exemple non linéaire simple le plus ressemblant au système: le pendule non linéaire seul.

Modélisation

L'équation du pendule:

$$I\ddot{\theta} + C_{nl}(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \tag{5.1}$$

avec : θ L'angle que fait le pendule avec la verticale, m, l, C_{nl} et I respectivement la masse, la longueur, l'amortissement et l'inertie du pendule.

On suppose que l'on peut varier l'amortissement $C_{nl}(t)$ du pendule au cours du temps. On se propose de déterminer l'amortissement qui réalise une décrois-

sance de la solution équivalente à celle donnée par le système linéarisé. Pour cela, considérons l'équation du pendule linéarisé:

$$I\ddot{\tilde{\theta}} + C\dot{\tilde{\theta}} + mgl\tilde{\theta} = 0 \tag{5.2}$$

avec : $\tilde{\theta}$ L'angle de vibration (l'état) du pendule linéarisé. I, m, l sont les mêmes paramètres définis dans l'équation précédente (5.1) et C représente l'amortissement à déterminer de manière optimale (pour avoir une vitesse de décroissance de la réponse $\tilde{\theta}(t)$ maximale).
Définissons l'amortissement optimal pour le cas du pendule linéaire simple. En imposant aux valeurs propres du système (5.2) d'être à partie réelle négative (comme montré dans le deuxième chapitre), on trouve l'amortissement critique du pendule linéarisé tel que

$$C_{cr} = 2\sqrt{mlgI} \tag{5.3}$$

Cette valeur de l'amortissement représente le contrôle linéaire passif optimal du modèle linéaire du pendule. Le modèle pendule linéaire muni de l'amortissement C_{crt} donne la meilleure décroissance de la réponse de l'équation (5.2). Donc on prendra dans la suite le système suivant comme référence :

$$I\ddot{\hat{\theta}} + C_{crt}\dot{\hat{\theta}} + mgl\hat{\theta} = 0 \tag{5.4}$$

Ce modèle sera appelé "modèle linéairisé de référence".

5.3.1 Loi de contrôle actif

Pour que la dynamique du pendule non linéaire soit équivalente à celle du système "linéarisé de référence", on pose :

$$\theta = \hat{\theta} \qquad \text{donc} \qquad \dot{\theta} = \dot{\hat{\theta}} \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} = \ddot{\hat{\theta}} \tag{5.5}$$

ceci donne

$$C_a(t) = C_{cr} - mgl\frac{(\sin(\theta) - \theta)}{\dot{\theta}} \tag{5.6}$$

L'équation (5.6) est la condition à réaliser pour avoir l'équivalence entre les solutions du système non linéaire (5.1) et système "linéarisé de référence" (5.4). L'expression de l'amortissement, qu'on appellera C_a, donnée par l'équation

(5.6) représente la loi de contrôle du critère imposé.

Simulons les deux systèmes "linéarisé de référence" et non linéaire (5.1) muni de la loi de contrôle (5.6) donnée par l'équation suivante

$$I\ddot{\theta} + C_a(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \tag{5.7}$$

on a

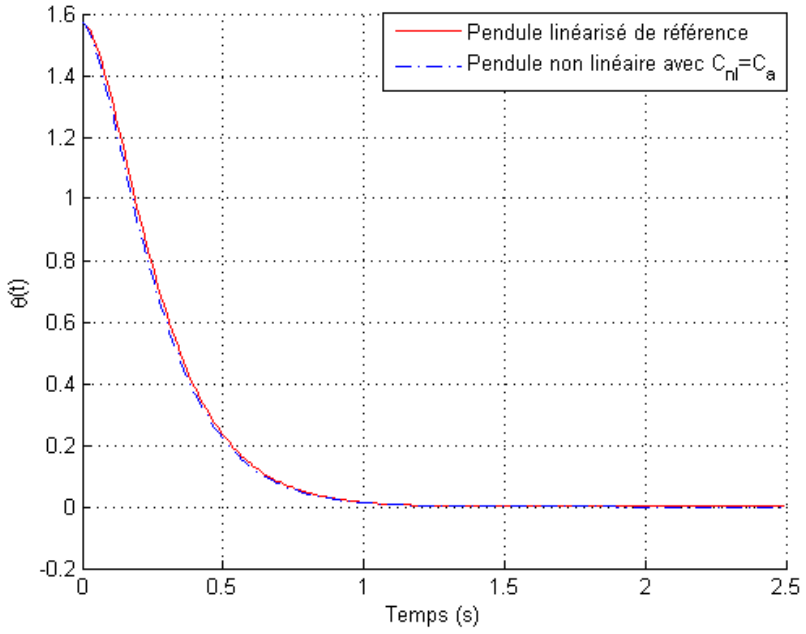


Fig. 5.3 – *Comparaison entre les réponses de l'intégration du : a/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_a$*, b/"Modèle linéaire de référence"*

On voit bien que la loi active permet de réaliser la décroissance du "pendule linéarisé de référence". Cette loi permet l'injection d'énergie dans le système puisque comme le montre la figure (5.4) l'amortissement prend des valeurs négatives.

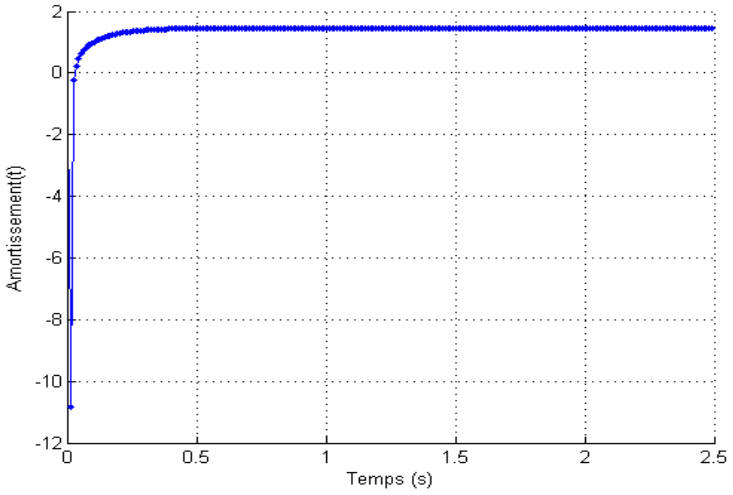


Fig. 5.4 – *Loi de contrôle actif sur l'amortissement*

5.3.2 Loi de contrôle semi-actif

Considérons le cas où l'on ne puisse pas injecter de l'énergie dans le système. Ceci revient à empêcher l'amortissement de prendre des valeurs négatives et à imposer une condition sur le signe de l'amortissement. Ce qui donne la loi semi-active suivante, qu'on appellera Loi "P.C.S.A"

$$\begin{cases} C_a(t) \geq 0 & \Rightarrow \quad C_{sa}(t) = C_a \\ C_a(t) < 0 & \Rightarrow \quad C_{sa}(t) = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

qui appliqué au Pendule non linéaire donne le système suivant

$$I\ddot{\theta} + C_a(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \tag{5.9}$$

Les simulation des systèmes "linéarisé de référence" et non linéaire muni de la loi de contrôle semi-actif "P.C.S.A" donnent les figures (5.5) et (5.6)
où l'on voit que dans ce cas que l'amortissement est positif $\forall t$.

On remarque que même la loi de contrôle semi-actif permet de suivre la décroissance de la réponse du système linéarisé de référence. Ceci est dû au fait que les valeurs négatives requises par la loi de contrôle actif sont rares et localisés en quelques points.

Comparons maintenant la réponse du pendule non linéaire muni de la valeur de l'amortissement critique (linéaire) avec les réponses du pendule non linéaire muni de la loi semi-active et le pendule "linéarisé de référence".

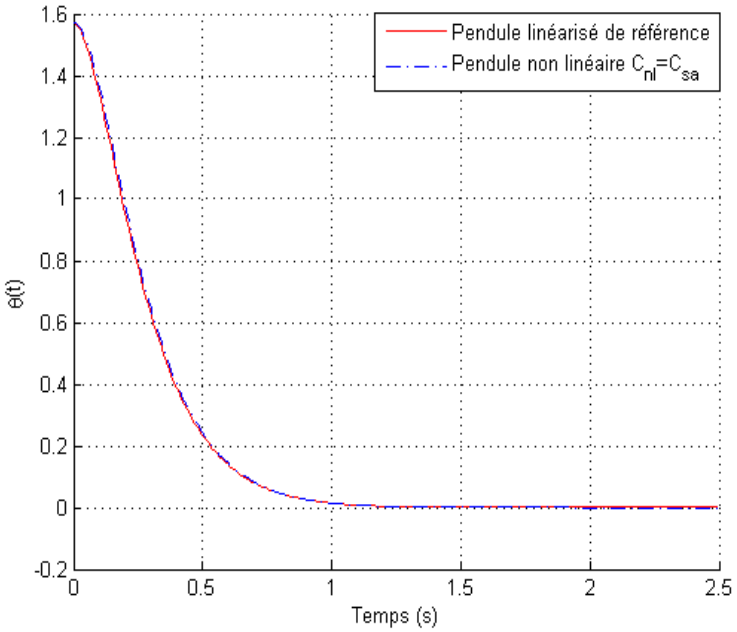


Fig. 5.5 – *Comparaison entre les réponses de l'intégration de : a/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_{sa}$*, b/"Modèle linéaire de référence"*

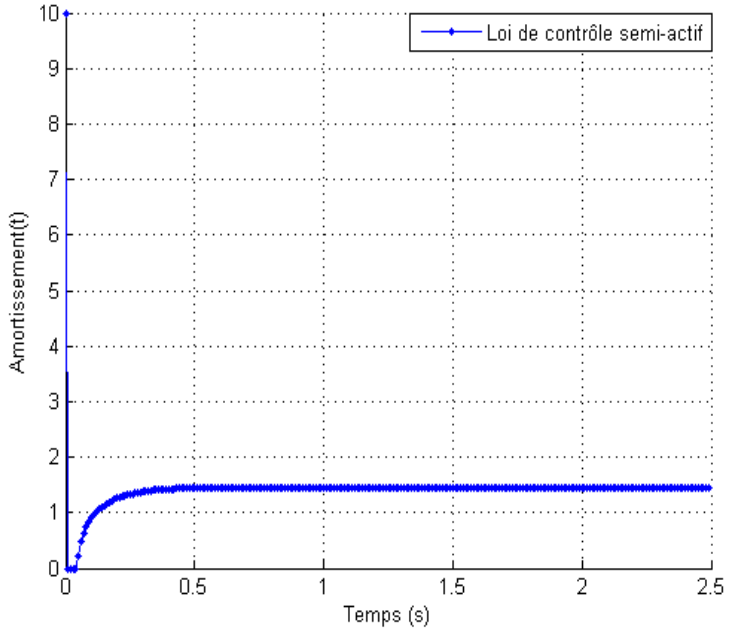


Fig. 5.6 – *Loi de contrôle semi-actif sur l'amortissement*

5.3.3 Comparaison des lois

Dans cette partie, de même que pour les précédentes simulations, on simulera les équations du pendule non linéaire par l'algorithme de Newmark "semi-explicite". Et pour ce qui est des paramètres autre que l'amortissement, on utilisera ceux du pendule réel dont on dispose, c'est-à-dire $M_{ap}^{op.pr}$, $m^{op.pr}$ et $l^{op.pr}$. La comparaison se fera entre les différents modèles systèmes suivants:

- Le "modèle pendule linéaire de référence"

$$I\ddot{\hat{\theta}} + C_{cr}\dot{\hat{\theta}} + mgl\hat{\theta} = 0 \tag{5.10}$$

- Le système pendule non linéaire auquel on applique l'amortissement critique du système linéarisé C_{cr} (contrôle linéaire passif)

$$I\ddot{\check{\theta}} + C_{cr}\dot{\check{\theta}} + mgl\sin(\check{\theta}) = 0 \tag{5.11}$$

- Le système pendule non linéaire auquel on applique la loi de contrôle actif (5.6)

$$I\ddot{\check{\theta}} + C_a(t)\dot{\check{\theta}} + mgl\sin(\check{\theta}) = 0 \tag{5.12}$$

- Le système non linéaire du pendule auquel on applique la loi "P.C.S.A"

$$I\ddot{\theta} + C_{sa}(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) = 0 \tag{5.13}$$

Les simulations présentées dans la figure (5.7) montrent que les stratégie active et semi-acive satisfont le critère adopter, qui n'est autre que de suivre la vitesse de la décroissance de la solution du "modèle linéaire de référence".

La différence entre C_a et C_{sa} réside dans le fait que la première permet l'injection d'énergie dans le système ($C_a < 0$) alors que la seconde non. Cette différence sert à la différenciation des lois actives de celles semi-actives. La condition rajoutée dans la loi de contrôle (5.8) revient à l'application d'un contrôle *Clipping* à la loi (5.6) puisque les lois semi-actives ne servent qu'à modifier en temps réel les paramètres du dispositif de contrôle pour assurer la présence de dissipation dans le système. Et c'est cette caractéristique qui assure la stabilité de ce genre de stratégie.

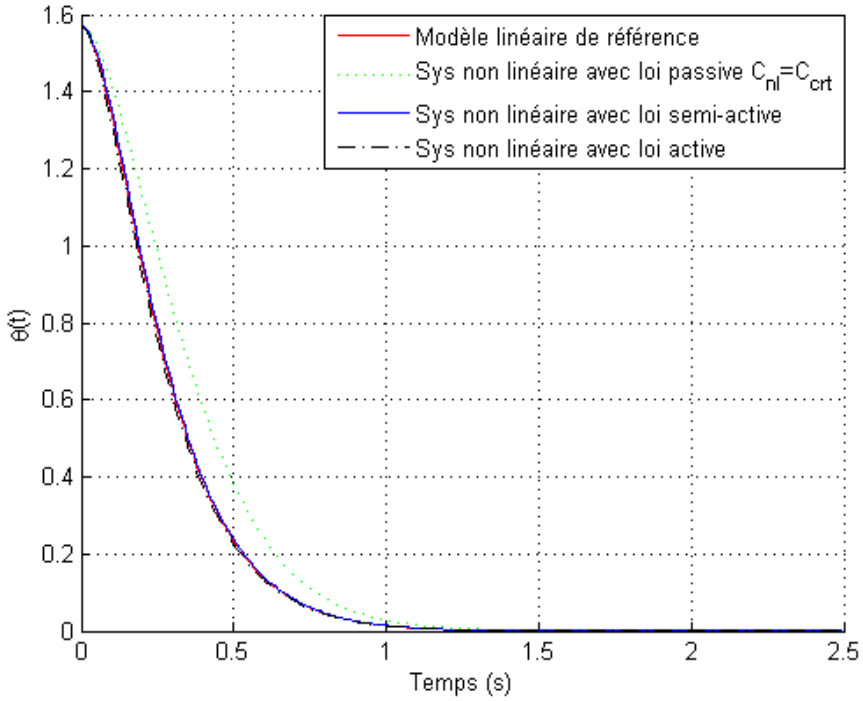


Fig. 5.7 – *Comparaison entre les réponses de l'intégration de : a/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{cr}$, b/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_{sa}$, c/"Modèle linéaire de référence" et d/Modèle système non linéaire utilisant $C_{nl} = C_a$ pour un angle initial de $\theta_0 = pi/2$*

5.4 Contrôle par tracking du modèle pont-pendule

Comme défini précédemment, on se donne pour système de référence la version linéarisée du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" muni de ses parramètres optimaux (déterminés par Ben Mekki [61]) dont on rappelle les équations:

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + ml\ddot{\tilde{\theta}}(t) + k^*\tilde{\alpha}(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\tilde{\theta}}(t) + ml\ddot{\tilde{\alpha}}(t) + C_l\dot{\tilde{\theta}}(t) + mlg\tilde{\theta} = 0 \end{cases} \tag{5.14}$$

qu'on essayera de faire suivre par le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" suivant

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{nl}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) = 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

5.4.1 Loi de contrôle actif

Pour avoir $\theta = \tilde{\theta}$ on égalise les deuxièmes équations du modèles (5.14) et (5.15) et l'on obtient une condition qu'on appellera C_{nl1} sur la variable de contrôle C_{nl}, telle que

$$C_{nl1}(t) = C_l - ml\frac{(cos(\theta) - 1)\ddot{\alpha}}{\dot{\theta}} - mlg\frac{(sin(\theta) - \theta)}{\dot{\theta}} \tag{5.16}$$

appliquons C_{nl1} au "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" (5.15) et intégrons les équations suivantes

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{nl1}(t)\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

En simulant le système (5.17) pour plusieurs valeurs de la condition initiale sur la contribution modale, on trouve que la condition (5.16) donne un résultat satisfaisant comme montré dans la figure (5.8) jusqu'à un déplacement imposé donné. Alors que pour une plus grande excitation initiale, la vitesse de décroissance de la réponse empire comme le montre la figure (5.9).

Ceci indique que cette condition est valable jusqu'à une certaine limite sur les conditions initiales. Effectuant quelques tests numériques, on détermine l'amplitude maximale de α_0 pour laquelle la condition $C_{nl} = C_{nl1}(t)$ donne un résultat satisfaisant de la vitesse de sa décroissance. Cette limite est donnée par $\alpha_0 = 0{,}24$ qui correspond à un déplacement initial de $y_0 = 5{,}6cm$. On rappelle que l'on établie les limites de fonctionnement de la loi de contrôle juste par rapport à la composante α, car dans le précédent chapitre on a montré que la dépendance de l'amortissement est presque exclusive à cette dernière. On montre dans la figure (5.8) l'efficacité de cette loi à son amplitude de contribution modale maximale.

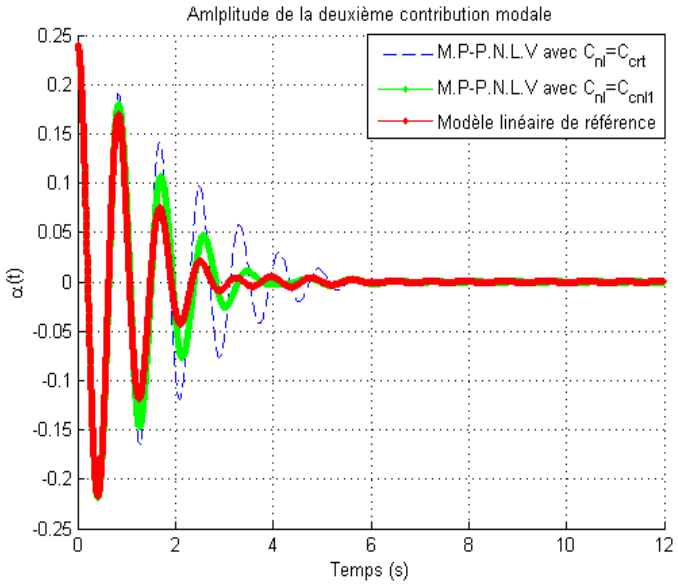


Fig. 5.8 – *Réponse du a/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_l$*, b/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_{nl1}(t)$ *comparé à c/"Modèle linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}24$ *(*$y_0 = 5{,}6cm$*)*

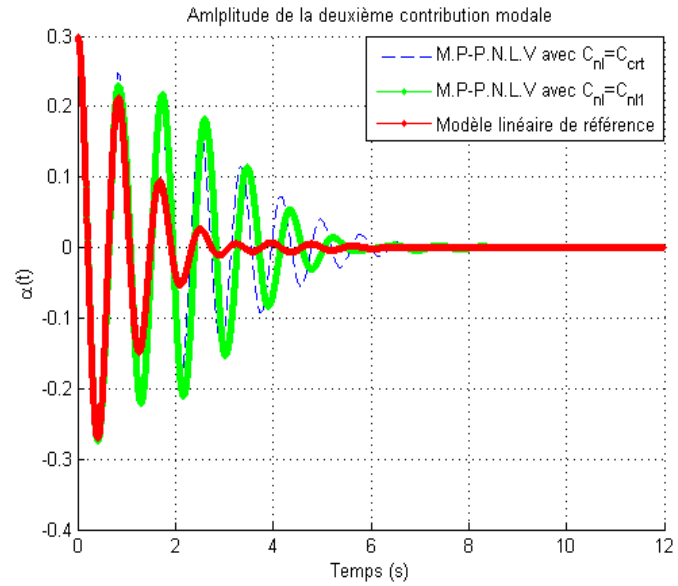


Fig. 5.9 – *Réponse du a/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_l$*, b/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_{nl1}(t)$ *comparé à c/"Modèle linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}3$ *(*$y_0 = 7cm$*)*

Si on regarde le signal à imposer à l'amortissement pour que le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" ait une décroissance similaire à celle du "modèle linéaire de référence", on trouve que l'amortissement a besoin de prendre des valeurs négatives comme montré dans la figure (5.10). Ceci implique que l'on a besoin d'introduire de l'énergie dans le système. Par conséquent, en imposant la condition (5.16) on applique une stratégie active.

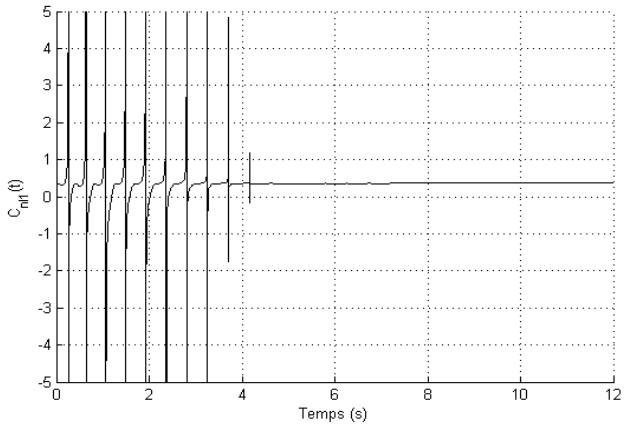


Fig. 5.10 – *Variation de la valeur de l'amortissement C_{nl1} pour un déplacement initial de* 5,6*cm*

5.4.2 Loi de contrôle semi-actif

L'actionneur dont on dispose est un dispositif semi-actif. C'est-à-dire il ne permet pas l'introduction d'énergie dans le système mais il permet juste de réguler en temps réel l'amortissement uniquement pour les valeurs positives de celui-ci, car il ne sert qu'à introduire de la dissipation à travers l'expression (3.5) que l'on rappelle ici

$$C_{eqNL} = C_{ap} + \frac{K_e K_c \beta \sin(\beta\theta)^2}{r + R(t)} \tag{5.18}$$

Pour cela, vérifions l'efficacité de la condition sur l'amortissement de la loi active sur la réponse en déplacement du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" si on ne le contrôle pas quand elle prend des valeurs négatives. Pour cela on introduit la loi semi-active "$C.S.A.1$" suivante

$$\begin{cases} C_{nl1}(t) > 0 & \Longrightarrow \quad C_{csa1}(t) = C_{nl1} \\ C_{nl1}(t) \leq 0 & \Longrightarrow \quad C_{csa1}(t) = 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

où C_{nl1} est donnée par l'expression suivante

$$C_{nl1}(t) = C_l - ml\frac{(cos(\theta)-1)\ddot{\alpha}}{\dot{\theta}} - mlg\frac{(sin(\theta)-\theta)}{\dot{\theta}} \tag{5.20}$$

Les simulations montrent que la loi semi-active améliore la vitesse de décroissance de la réponse en déplacement par rapport à celle donnée avec l'application d'un contrôle passif C_l jusqu'à une amplitude de la contribution modale initiale de $\alpha_0 = 0{,}2$ qui correspond à un déplacement de $y_0 = 4{,}7cm$ comme montré dans la figure (5.11)

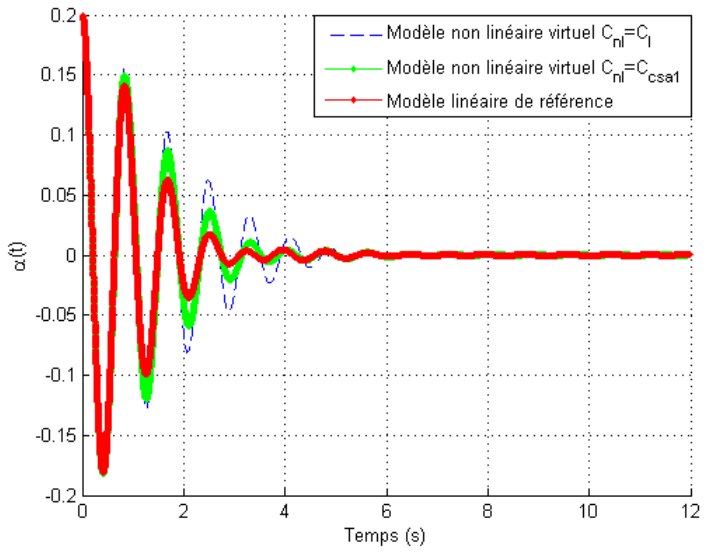


Fig. 5.11 – *Réponses de : a/Modèle système non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_l$*, b/Modèle non linéaire utilisant* $C_{nl} = C_{csa1}(t)$ *et c/"Modèle linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}2$

On présente ci-dessous un zoom sur la variation de l'amortissement au cours du temps. La valeur maximale que prend $C_{csa1} = 49Kg.s^{-1}$. On remarque que la de contrôle en amortissement requiert de grandes valeurs. Ceci se traduit dans la réalité en terme de contrôle sur la résistance par de très petites valeurs, dont on discutera la réalisation dans la suite de l'étude.

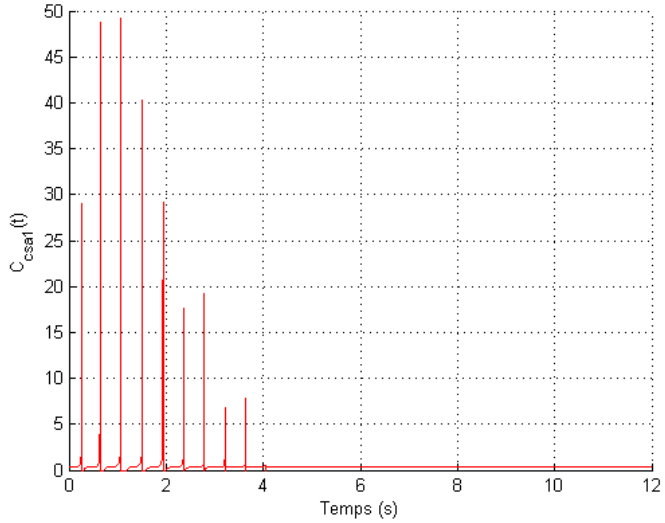


Fig. 5.12 – *Variation dans le temps de la valeur de l'amortissement* $C_{sa1}(t)$ *pour* $\alpha_0 = 0{,}2$

Dès que l'on dépasse cette amplitude initiale de la contribution modale de $\alpha_0 = 0{,}2$, on a besoin d'exercer un effort sur la structure pour la contrôler et la variation des paramètres de l'actionneur ne suffisent plus pour suivre la trajectoire de la solution du modèle de référence comme on le voit dans les figures (5.13), (5.14) et (5.15)

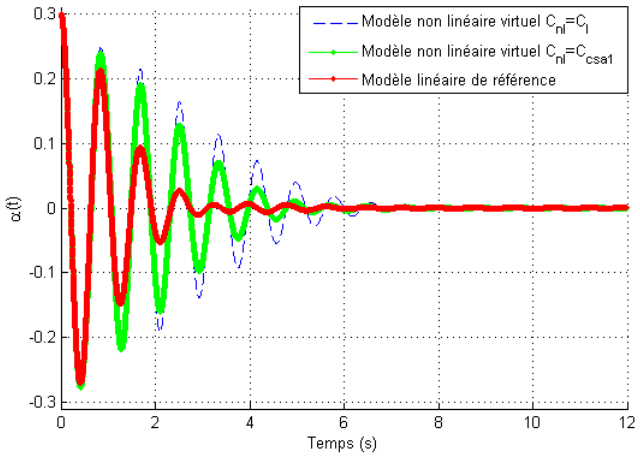


Fig. 5.13 – *Réponses du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant:* $a/C_{nl} = C_l$, $b/C_{nl} = C_{csa1}$ *et c/"Modèle linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}3$

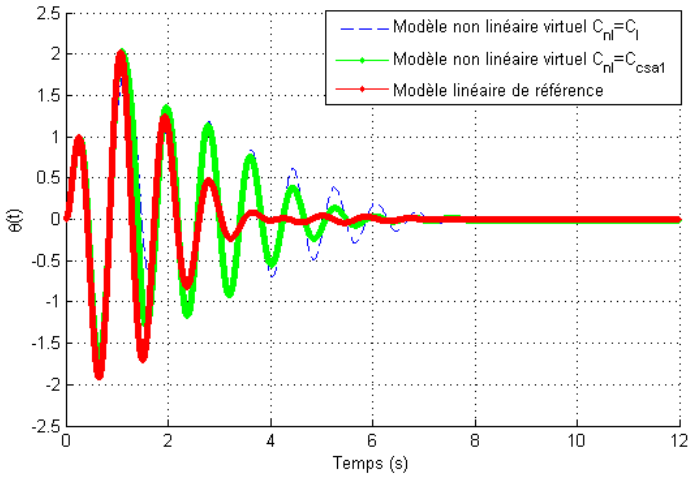


Fig. 5.14 – *Variation dans le temps de la valeur de l'angle de vibration du pendule du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" utilisant: a/*$C_{nl} = C_l$*, b/*$C_{nl} = C_{csa1}$ *et c/"Modèle linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}3$

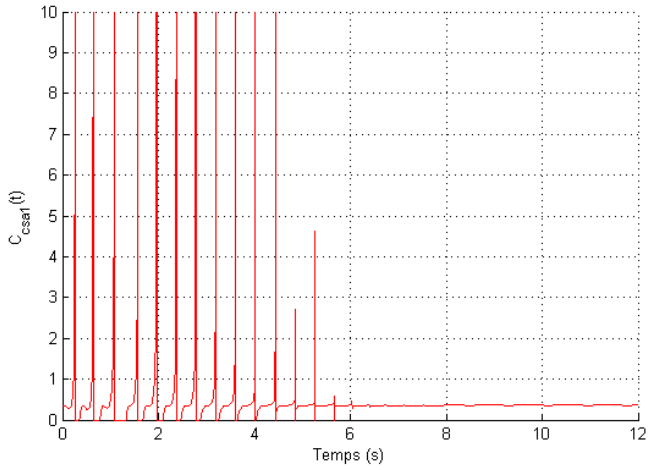


Fig. 5.15 – *Zoom sur la variation dans le temps de la valeur de l'amortissement* C_{sa1} *pour* $\alpha_0 = 0{,}3$

Ceci est dû au fait que plus on augmente l'excitation initiale plus on a besoin d'injecter de l'énergie dans ce système. Et l'utilisation du *Clipping* sur plus de points de fonctionnement (pas de contrôle $C_{nl} = 0$) réduit l'efficacité de la version semi-active de la loi de contrôle. On voit bien que l'on arrive souvent à saturation comme montré sur la figure de la variation de l'amortissement (5.15).

6

Stratégie de poursuite pour le modèle réel

6.1 Introduction

Dans le précédent chapitre, on a réalisé une loi de contrôle semi-actif sur l'amortissement pour le "modèle pont-pendule non linéaire virtuel". En réalité on ne peut varier que la résistance du système. Pour cela on définira dans ce chapitre quelques lois de contrôle semi-actif sur la résistance pour le système non linéaire réel pont-pendule-alternateur.

6.2 Contrôle par traking du pendule réel

6.2.1 Loi de contrôle semi-actif pour le pendule réel

Système non linéaire réel	$\longrightarrow$ Etape 2 $\Downarrow$ **Loi de contrôle sur la résistance**	Modèle non linéaire de référence	$\longrightarrow$ Etape 1 $\Downarrow$ Loi de contrôle sur l'amortissement	Système linéaire de référence

Fig. 6.1 – *Etape de conception du contrôle semi-actif sur la résistance par poursuite pour le "modèle pont-pendule-alternateur non linéaire réel" dans le cadre général de la conception du contrôle du système réel*

Dans le chapitre précédent, on a considéré l'équation du pendule non linéaire seul en supposant que l'on pouvait changer C. En réalité, la variation de l'amortissement au cours du temps va être effectuée, quand il est possible de le faire, par l'alternateur et la résistance variable couplés au pendule. Pour cela considérons le système non linéaire réel couplé pendule-alternateur-résistance variable (actionneur électromécanique) dont les équations sont

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} + C_{ap}(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) + K_c\beta sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{nl}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

L'objectif qu'on s'était fixé, était de réaliser une décroissance de la solution du système non linéaire réel égale à celle du système linéaire de référence.

Pour cela, on a défini un système intermédiaire que l'on a appelé "modèle non linéaire virtuel", pour lequel on a déterminé une loi de contrôle semi-actif sur l'amortissement C_{sa} (variable de contrôle du "$M.P - P.N.L.V$") qui permet de suivre la vitesse de décroissance du système linéaire de référence. L'injection de la loi semi-active au "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" le rend optimal au sens du critère adopté (suivre la décroissance du "modèle linéaire de référence"). Son équation est donnée par

$$I\ddot{\tilde{\theta}} + C_{sa}(t)\dot{\tilde{\theta}} + mgl\sin(\tilde{\theta}) = 0 \tag{6.2}$$

Il faut maintenant réaliser une autre loi de contrôle qui permet de faire en sorte que le système non linéaire réel (6.1) suive celui non linéaire de référence

(6.2). Pour cela, il faut trouver une loi sur la résistance, qui représente la variable de contrôle du système non linéaire réel, qui arrive à réaliser la variation de l'amortissement requise par la loi de contrôle semi-active $C_{sa}(t)$.
Pour que le système non linéaire de référence suive le système linéaire de référence il faut que $C_{nl} = C_{sa}(t)$. De plus, on sait que

$$C_{nl}(t) = C_{ap} + \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{r + R(t)} \tag{6.3}$$

ce qui donne la condition sur la résistance (6.9)

$$R_{sa}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{sa}(t) - C_{ap}} - r \tag{6.4}$$

Cette résistance réalise la loi de contrôle sur l'amortissement $C_{sa}(t)$ défini dans (5.8) et que l'on rappelle ci-dessous

$$\begin{cases} C_a(t) \geq 0 & \Rightarrow \quad C_{sa}(t) = C_a \\ C_a(t) < 0 & \Rightarrow \quad C_{sa}(t) = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

avec

$$C_a(t) = C_{cr} - mgl\frac{(\sin(\theta) - \theta)}{\dot{\theta}}$$

On applique cette loi de contrôle au système non linéaire (6.1) tel que

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} + C_{ap}(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) + K_c\beta sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{sa}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

et l'on compare les quatre systèmes suivants qui représentent deux modèles de référence et deux modèles réels. Chaque modèle réel essaye de réaliser la vitesse de la décroissance de la réponse du modèle de référence qui lui correspond:

– "Linéaire de référence" (5.4)

$$I\ddot{\hat{\theta}} + C_{crt}\dot{\hat{\theta}} + mgl\hat{\theta} = 0 \tag{6.7}$$

– non linéaire réel contrôlé de manière passive sur l'amortissement et semi active sur la résistance

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} + C_{ap}(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) + K_c\beta sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{crt}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.8}$$

avec

$$R_{crt}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{crt}(t) - C_{ap}} - r \tag{6.9}$$

– "non linéaire de référence" (6.2)

$$I\ddot{\tilde{\theta}} + C_{sa}(t)\dot{\tilde{\theta}} + mgl\sin(\tilde{\theta}) = 0 \tag{6.10}$$

– non linéaire réel contrôlé de manière semi-active sur l'amortissement et la résistance (6.9)

$$\begin{cases} I\ddot{\theta} + C_{ap}(t)\dot{\theta} + mgl\sin(\theta) + K_c\beta sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{sa}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

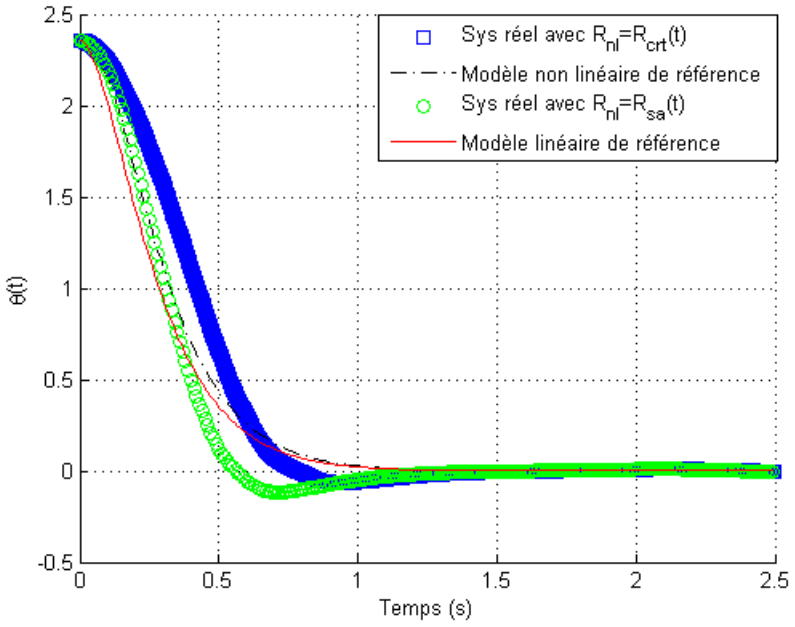


Fig. 6.2 – *L'angle de vibration du pendule du : a/système non linéaire utilisant* $R_{nl} = R_{crt}$*, b/Modèle non linéaire utilisant* $R_{nl} = R_{sa}$ *comparé à c/Modèle linéaire de référence pour* $\theta_0 = \frac{3\pi}{4}rad$

La figure (6.2) montre que l'on obtient des résultats conformes aux attentes, puisque le système réel commandé par $R_{crt}(t)$ suit le "modèle linéaire de référence" alors que le système non linéaire commandé par $R_{sa}(t)$ se stabilise en zéro au même moment que le "modèle non linéaire de référence".

Si on regarde la fonction de la loi de contrôle en amortissement à réaliser (objectif) et celle donnée par le système non linéaire réel contrôlé par $R_{sa}(t)$ on trouve que la poursuite est effectué presque parfaitement comme le montre la figure (6.3)

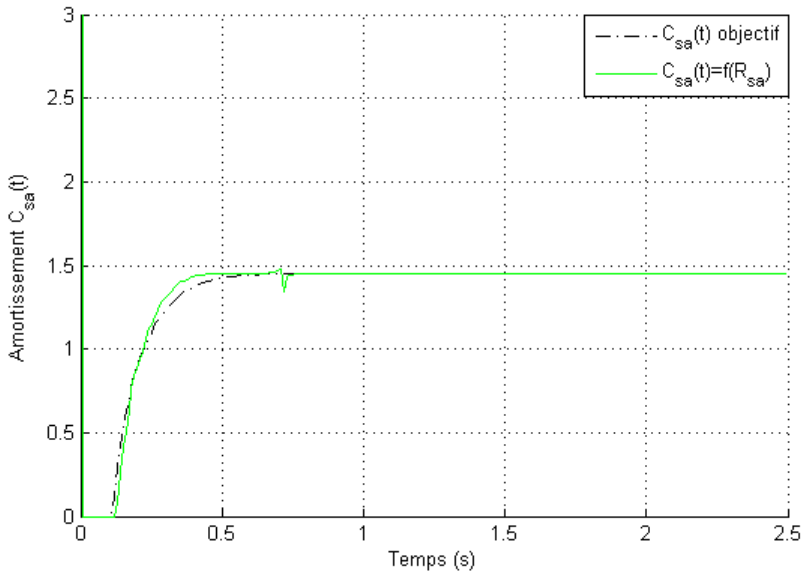


Fig. 6.3 – *Comparaison entre la fonction objectif sur l'amortissement et celle réalisée grâce à la variation de la résistance pour le système réel* $C_{sa} = f(R_{sa})$ *pour* $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$

Mais regardons de plus près les signaux que doivent réaliser les résistances ($R_{crt}(t)$ et $R_{sa}(t)$) (6.4) et (6.5)

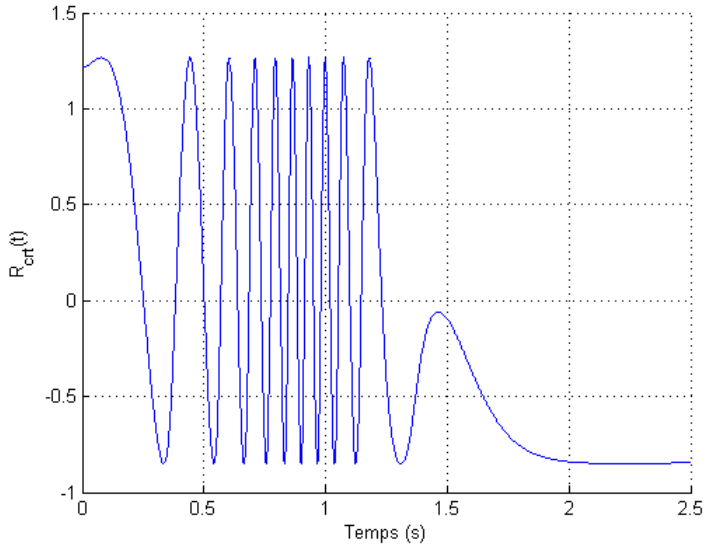


Fig. 6.4 – *Variation de la résistance* R_{crt} *dans le temps pour* $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$

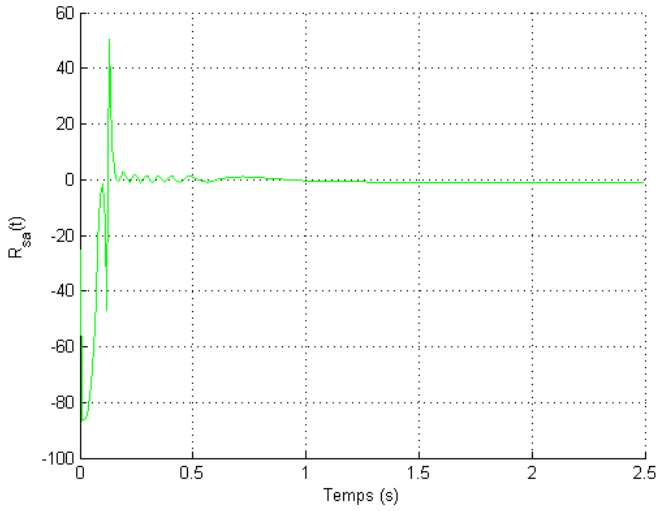


Fig. 6.5 – *Variation de la résistance R_{sa} dans le temps pour $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$*

On remarque que l'on doit réaliser des résistances négatives non seulement pour atteindre un niveau d'amortissement conforme à la loi de contrôle semi-active C_{sa} mais aussi pour réaliser le contrôle linéaire C_{crt}.

Etudions maintenant ce qui arrive aux solutions si l'on élimine les valeurs négatives des résistances. Ceci donne deux nouvelles lois de contrôle:

– Loi de contrôle R_{crtp}

$$\begin{cases} R_{crt} \leq 0 & \Longrightarrow \quad R_{crtp} = 0 \\ R_{crt} > 0 & \Longrightarrow \quad R_{crtp} = R_{crt}(t) \end{cases} \tag{6.12}$$

– Loi de contrôle R_{sap}

$$\begin{cases} R_{sap} \leq 0 & \Longrightarrow \quad R_{sap} = 0 \\ R_{sap} > 0 & \Longrightarrow \quad R_{sap} = R_{sa}(t) \end{cases} \tag{6.13}$$

On voit dans la figure (6.6) que les lois avec des résistances purement positives gardent leur efficacité pour un angle initial de $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Il faut dire que cette qualité de poursuite se perd pour des valeurs de la condition initale plus grande que $\theta = \frac{3\pi}{4}$, comme le montre la figure (6.7) où l'on voit bien que la réponse s'est dégradée et que la loi semi-active R_{sap} n'améliore plus les résultats par rapport au contrôle R_{crtp}. Ceci est dû à la saturation de plusieurs valeurs de la résistance.

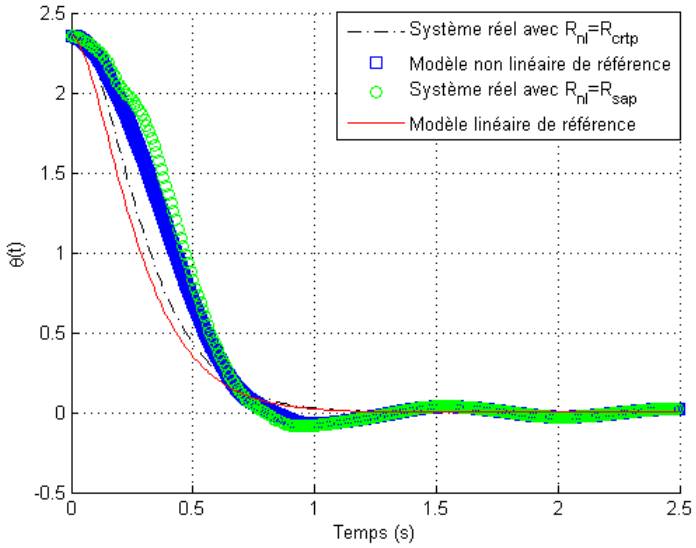


Fig. 6.6 – *L'angle de vibration du pendule du : a/Système non linéaire utilisant* $R_{nl} = R_{crtp}$*, b/Modèle non linéaire utilisant* $R_{nl} = R_{sap}$*, c/Modèle linéaire de référence comparé à d/"Modèle non linéaire de référence" pour* $\theta_0 = \frac{3\pi}{4} rad$

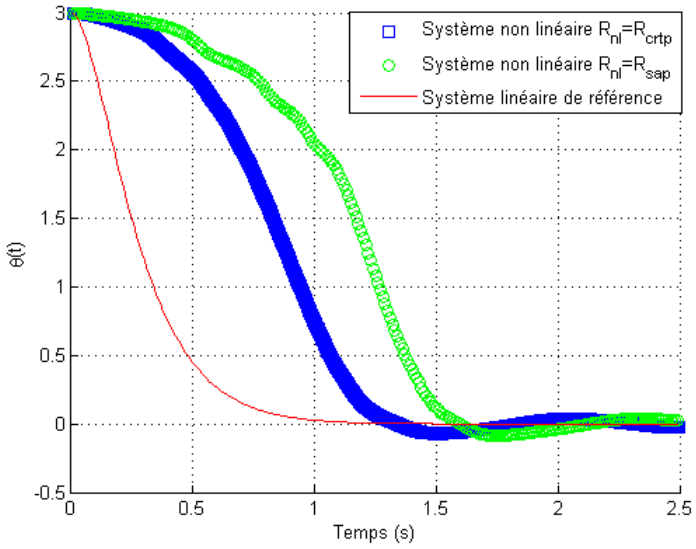


Fig. 6.7 – *L'angle de vibration du pendule du : a/Système non linéaire utilisant* $R_{nl} = R_{crtp}$*, b/Modèle non linéaire utilisant* $R_{nl} = R_{sap}$ *comparé à c/Modèle linéaire de référence pour* $\theta_0 = 3rad$

6.2.2 Loi de contrôle semi-actif pour le pendule avec dispositif idéal

Cette dégradation survient quand la loi de contrôle semi-actif prend de grandes valeurs de l'amortissement, ce qui demande de petites valeurs de la résistance. Le dispositif de contrôle utilisé introduit des termes dissipatifs dans les équations: du frottement et de la résistance interne. Ceci rend la réalisation de certaines valeurs de la loi semi-active sur la résistance impossible à atteindre. Pour cela considérons le cas où on aurait un dispositif d'amortissement parfait. C'est-à-dire $C_{ap} = 0$ et $r = 0$. La loi de contrôle sur la résistance se basant sur la loi semi-active sur l'amortissement devient

$$R_{par}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{csa1}(t)} \tag{6.14}$$

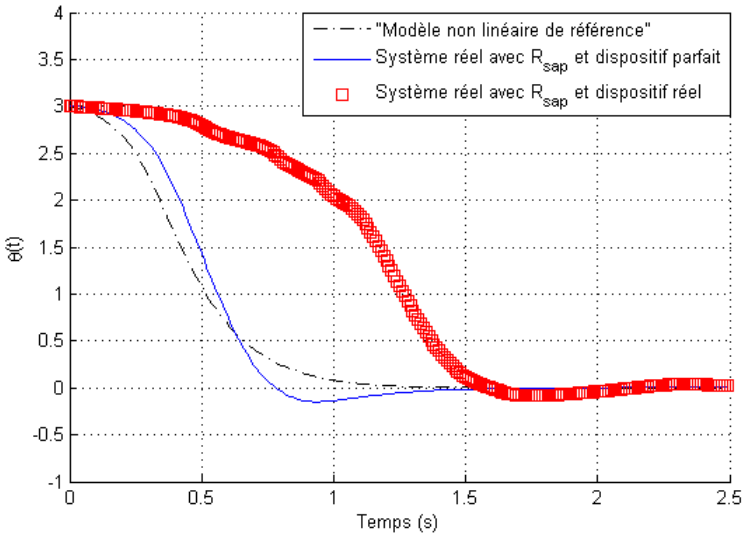


Fig. 6.8 – *L'angle de vibration du pendule du : a/"Modèle non linéaire de référence", b/Système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{sap}$ en supposant que le dispositif est idéal comparé à c/Système non linéaire réel utilisant $R_{nl} = R_{sap}$ en considérant le dispositif est réel pour $\theta_0 = 3rad$*

On voit bien que la réponse du pendule contrôlé par la loi semi-active sur la résistance en considérant que le dispositif est idéal, tend plus vers la courbe objectif donnée par le "modèle non linéaire de référence" que le système réel muni de la loi semi-active R_{sap} avec dispositif réel. Ceci implique que même si

la loi de contrôle sur la résistance a une limite de validité, cette limite ne tient qu'à une limitation technologique et non pas de modélisation.

6.3 Contrôle du pont-actionneur électromécanique réel

6.3.1 Loi de contrôle semi-actif par poursuite de l'amortissement

De même que dans le paragraphe précédent, dans la réalité la variable de contrôle est la résistance électrique. Il faut donc transformer la loi obtenue sur l'amortissement en loi sur la résistance en donnant à C_{eqNL} la valeur ou la fonction de valeurs que doit réaliser la loi de contrôle à appliquer, c'est-à-dire $C_{eqNL} = C_{csa1}$ comme on l'explique ci-après

On revient au système d'équation non linéaire réel

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{ap}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t) sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{nl}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.15}$$

On utilisera l'expression qui donne l'amortissement non linéaire défini en fonction de sa partie électrique que l'on rappelle ci-dessous, pour déterminer le contrôle sur la résistance

$$C_{eqNL}(t) = C_{ap} + \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{r + R(t)} \tag{6.16}$$

On définit la loi de contrôle sur la résistance, qui doit réaliser C_{csa1}, par la condition suivante:

$$R_{csa1}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{csa1}(t) - C_{ap}} - r \tag{6.17}$$

avec C_{csa1} est l'amortissement donnée par (5.19) qui réalise une vitesse de décroissance de la solution du "modèle pont-pendule non linéaire virtuel" (5.15) comparable à celle du "modèle linéaire de référence" (5.14). On rappelle la loi sur l'amortissement "$C.S.A.1$" qui permet d'avoir R_{csa1}

$$\begin{cases} C_{nl1}(t) > 0 & \Longrightarrow \quad C_{csa1}(t) = C_{nl1} \\ C_{nl1}(t) \leq 0 & \Longrightarrow \quad C_{csa1}(t) = 0 \end{cases} \tag{6.18}$$

avec C_{nl1} donnée par l'expression suivante

$$C_{nl1}(t) = C_l - ml\frac{(cos(\theta)-1)\ddot{\alpha}}{\dot{\theta}} - mlg\frac{(sin(\theta)-\theta)}{\dot{\theta}} \tag{6.19}$$

On confronte dans ce qui suit les réponses données par les systèmes:

– Non linéaire de référence, qui représente la fonction à suivre par le système réel

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{csa1}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.20}$$

– Non linéaire réel muni de la loi de contrôle semi-active en amortissement et semi-active en résistance

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{ap}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t)sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{csa1}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.21}$$

avec R_{csa1} la résistance obtenue grâce à la loi de contrôle linéaire C_{csa1} qui fait suivre le "modèle pont-pendule non linéaire" la décroissance du "modèle linéaire de référence".

$$R_{csa1}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{csa1}(t) - C_{ap}} - r \tag{6.22}$$

Les simulations pour un déplacement imposé initial de $y_0 = 4{,}7cm$ présentés dans la figure (6.9) et (6.10) montrent que l'on arrive à réaliser le contrôle du système non linéaire réel par simple variation de la résistance.

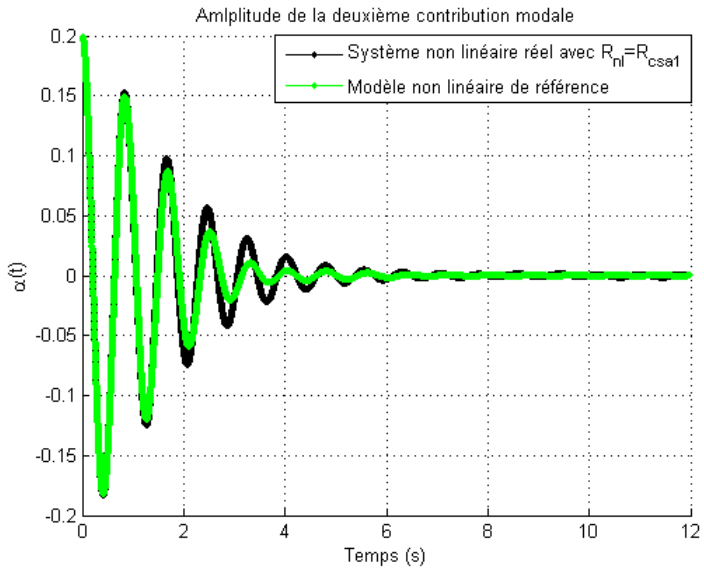


Fig. 6.9 – *Réponse du système non linéaire réel utilisant* $R_{nl} = R_{csa1}$ *confronté au "modèle non linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}2$

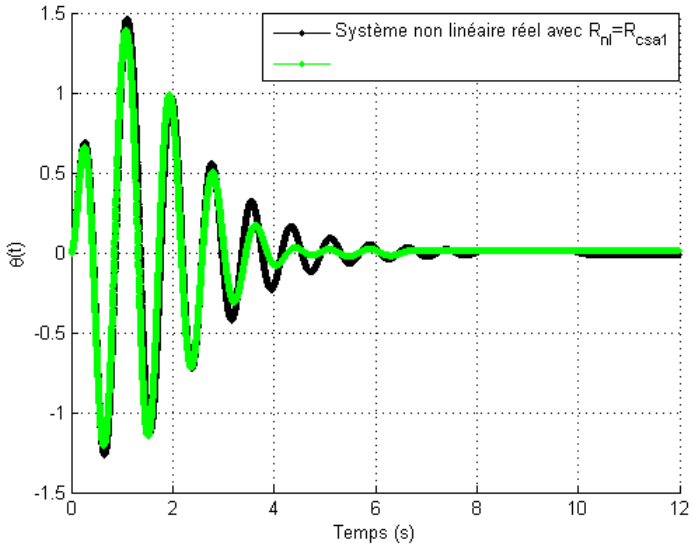


Fig. 6.10 – *Angle de vibration du pendule du système non linéaire réel utilisant* $R_{nl} = R_{csa1}$ *confronté au "modèle non linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}2$

Il faut remarquer que la valeur de la contribution modale initiale de $\alpha_0 = 0{,}2$ représente la limite de l'efficacité de la loi de contrôle semi-actif sur la résistance comme le montre la figure (6.11).

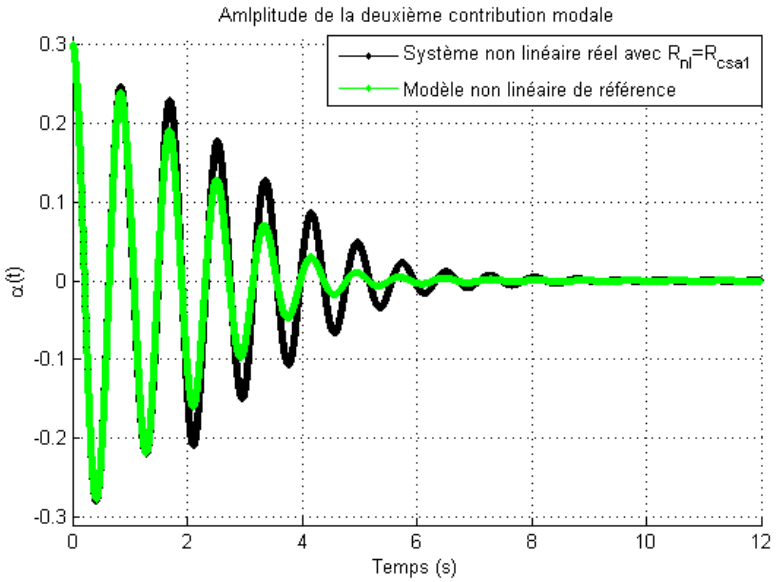


Fig. 6.11 – *Réponse du Système non linéaire réel utilisant* $R_{nl} = R_{csa1}$ *confronté au "modèle non linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}3$

où l'on voit clairement que l'amplitude de la contribution modale est plus grande par rapport à l'amplitude quelle doit suivre. C'est à dire que la qualité de la poursuite de la loi de contrôle sur la résistance se détériore au delà de la valeur initiale $\alpha_0 = 0{,}2$

6.3.2 Loi de contrôle semi-actif avec dispositif idéal

On sait que le dispositif réel comporte des frottement dans le système d'engrenages qui se traduit dans le système d'équation non linéaire réel par une dissipation représenté par C_{ap}. On sait aussi que la carte électronique a une résistance interne r. Si on regarde l'expression qui relie la résistance variable à la loi de contrôle sur l'amortissement

$$R_{csa1}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{csa1}(t) - C_{ap}} - r \tag{6.23}$$

on remarque que si les deux paramètres C_{ap}, r sont nuls alors la loi de contrôle semi-actif est toujours réalisable.

La considération de $C_{ap} = 0$ et $r = 0$ revient à considérer que l'on dispose d'un dispositif de contrôle idéal (sans frottement internes) et la loi de contrôle sur la résistance devient

$$R_{csa1ide}(t) = \frac{K_e K_c \beta sin(\beta\theta)^2}{C_{csa1}(t)} \tag{6.24}$$

Cette considération offre la possibilité de réaliser de petites valeur de la résistance. Les petites valeurs de la résistance sont dues à la nécessité de réaliser de grandes valeurs de l'amortissement. C'est-à-dire que l'intérêt d'un dispositif idéal ne se manifeste que pour la considération des grandes amplitudes de vibration du pendule qui nécessitent un grand amortissement. Afin de mettre en évidence la différence entre l'utilisation d'un dispositif réel et un dispositif idéal, on étudiera la question pour une grande valeur initiale de la contribution modale, même si cette dernière est en dehors de l'intervalle de bon fonctionnement de la loi de contrôle semi-actif en amortissement.

Regardons de plus près la réponse donnée par le système non linéaire réel si l'on disposait d'un dispositif idéal et comparons la à la réponse donnée par le système non linéaire réel avec le dispositif avec frottement. Il faut préciser que dans les modèles utilisés les seules dissipations internes considérés sont celles dues aux termes C_{ap} et r.

Confrontons les modèles suivant:

– Modèle pont-pendule non linéaire de référence

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{csa1}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.25}$$

– Système non linéaire réel muni de la loi de contrôle sur la résistance R_{csa1}

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{ap}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t) sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{csa1}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

– Système non linéaire réel muni de la loi de contrôle sur la résistance $R_{csa1ide}$ tout en considérant que le dispositif est idéal ($C_{ap} = r = 0$)

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t) sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + R_{csa1ide}(t)i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.27}$$

La simulation des réponses de ces trois systèmes pour une amplitude de la contribution modale initiale de $\alpha_0 = 0{,}3$ qui correspond à un déplacement horizontal de l'extrémité du tablier de $y_0 = 7cm$ est présentée dans la figure suivante

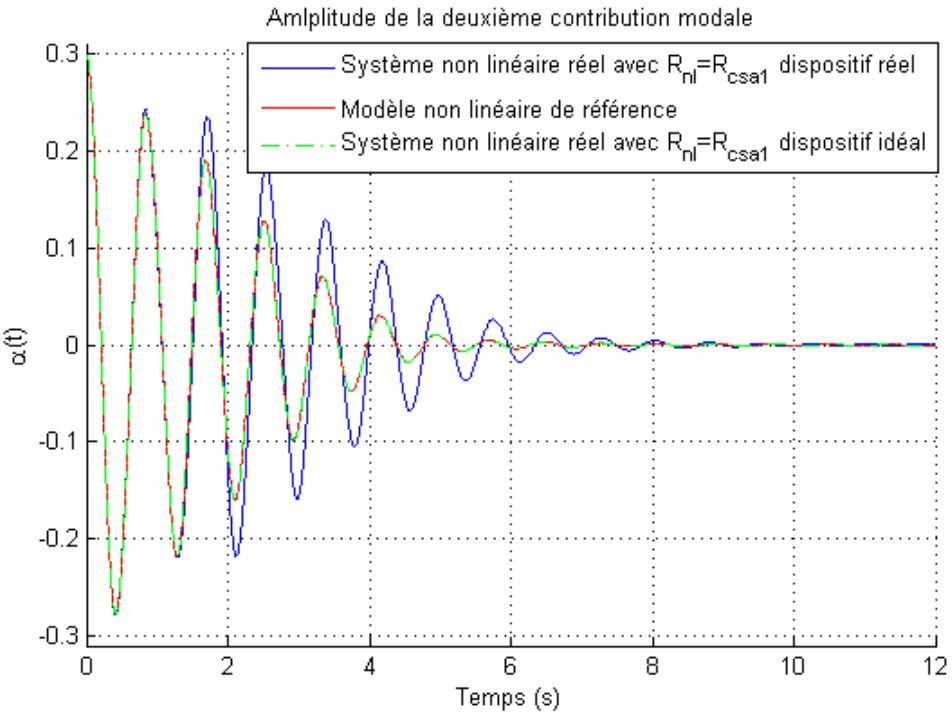


Fig. 6.12 – *Amplitude des contributions modales du: a/ Système non linéaire réel $R = R_{csa1}$ avec dispositif réel, b/ Système non linéaire réel $R = R_{csa1}$ avec dispositif idéal et c/"Modèle pont-pendule non linéaire de référence" pour $\alpha_0 = 0{,}3$ $(y_0 = 7cm)$*

On remarque qu'en considérant un dispositif idéal, la loi de contrôle sur la résistance réalise parfaitement la poursuite de la loi de contrôle sur l'amortissement. Puisque l'on voit sur la figure (6.12) que le système réel muni de la loi de contrôle semi-actif avec dispositif idéal se superpose à la réponse du "modèle non linéaire de référence" contrairement au système non linéaire réel avec dispositif réel.

6.3.3 Loi de contrôle semi-actif par poursuite du courant

Afin de concevoir une loi de contrôle sur la résistance, on a défini précédemment un modèle intermédiaire que l'on a appelé virtuel. Ce modèle a été obtenu grâce à une observation faite par Ben Mekki [61] dans le cadre des petites rotations du pendule. Cette observation consiste à pouvoir considérer l'inductance de la bobine dans l'équation de la dynamique électrique négligeable. Cette considération a permit le passage du modèle système réel au modèle système virtuel.

Dans le cas où cette considération ne serait plus valable, une solution existe pour contrôler la structure quand même. Une façon de résoudre cette problématique est de regarder le système autrement.
Reconsidérons le système d'équations non linéaire réel

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{ap}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t) sin(\beta\theta) = 0 \\ L_e\frac{di(t)}{dt} + (r + R_{nl}(t))i(t) - K_e\beta\dot{\theta}sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.28}$$

On peut considérer que la vitesse de la dynamique électrique est plus rapide que celle mécanique. Ceci est possible car la structure en général et le mode considéré en particulier vibrent aux environs de $1Hz$.

On étudie la dynamique mécanique toute seule en un premier temps (deux premières équations) pour déterminer un contrôle pour la partie mécanique. Puis on cherchera à trouver le moyen de faire varier la variable de contrôle mécanique par la partie électrique. Donc le système contrôlé qui nous intéresse devient

$$\begin{cases} (m^* + M_{ap})\ddot{\alpha}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\theta}(t) + k^*\alpha(t) - ml\sin(\theta)\dot{\theta}^2(t) = 0 \\ I_{ap}\ddot{\theta}(t) + ml\cos(\theta)\ddot{\alpha}(t) + C_{ap}\dot{\theta}(t) + mlg\sin(\theta) + K_c i(t) sin(\beta\theta) = 0 \end{cases} \tag{6.29}$$

où $i(t)$ est le courant électrique qui représente la variable de contrôle de la partie mécanique des équations.
En procédant de la même manière que présenté dans les parties précédentes, on égalise les deuxièmes équations des systèmes (6.29) et "modèle linéaire de référence" (**??**) et l'on obtient la loi semi-active sur le courant suivante

$$i_1(t) = ml\frac{(1-cos(\theta))\ddot{\alpha}}{K_c sin(\beta\theta)} + \frac{(C_l - C_{ap})\dot{\theta}}{K_c sin(\beta\theta)} + mlg\frac{(\theta - sin(\theta))}{K_c sin(\beta\theta)} \tag{6.30}$$

Pour réaliser cette expression de $i_1(t)$ on s'intéresse à la troisième équation du système (6.28) et l'on cherche à faire en sorte que la dynamique de l'alternateur réalise le courant $i_1(t)$.

$$\frac{di}{dt}(t) = -\frac{r}{L_e}i(t) + \frac{K_e\beta sin(\beta\theta)}{L_e}\dot{\theta} - \frac{1}{L_e}R(t)i(t) \tag{6.31}$$

Pour que le courant $i(t)$ donné par la dynamique (6.31) suive $i_1(t)$ déterminé dans l'équation (6.30), on impose à la dérivée du courant par rapport au temps d'être égale à la fonction

$$\frac{di}{dt}(t) = -(i(t) - i_1(t))K_m \tag{6.32}$$

Cette fonction agit de manière à faire converger la dynamique de l'alternateur vers la loi de contrôle semi-active que l'on voudrait imposer au système non linéaire grâce à un gain K_m qui a une valeur élevée. Et ceci donne la condition sur la résistance variable suivante

$$R_{int}(t) = -r + L_e K_m + \frac{K_e\beta sin(\beta\theta)\dot{\theta}}{i(t)} - \frac{L_e K_m i_1(t)}{i(t)} \tag{6.33}$$

Les simulations présentés dans la figures (6.13) montrent que de cette façon on arrive à avoir le même résultat que précédemment et même à l'étendre à un déplacement initial de $y_0 = 5cm$. De plus les simulations montrent que cette loi fonctionne très bien jusqu'à une valeur de la contribution initiale de $\alpha_0 = 0{,}22$ et ceci reste compatible avec ce que l'on a déjà montré auparavant. Puisque pour la loi précédente, au delà de cette amplitude, on a besoin d'injecter de l'énergie dans le système pour que celui-ci suive la trajectoire qui lui est imposée.

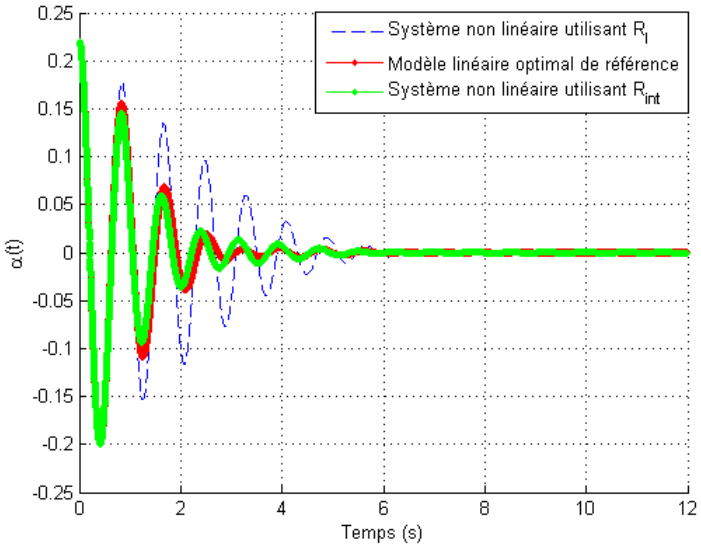


Fig. 6.13 – *Amplitude des contributions modales du système non linéaire utilisant* $R = R_{int}$*, utilisant* $R = R_l$ *obtenue de l'amortissement optimal pour les petites vibrations, comparé à l'amplitude donnée par le "modèle linéaire de référence" pour* $\alpha_0 = 0{,}22$

6.4 Loi semi-active polynomiale

En vue de simplifier le calcul en temps réel, on propose une nouvelle loi de contrôle semi-actif basé sur l'approximation polynomiale. Le dispositif d'amortissement adopté est un système non linéaire qui a des limites de manoeuvrabilité que l'on a défini précédemment. Il ne serait pas déraisonnable de penser à amortir le pont avec un autre dispositif de contrôle. Cette stratégie d'approximation se transpose à n'importe quel actionneur, même si on ne connait pas son comportement et que l'on doive l'identifier ou si sa loi de contrôle est complexe.

Cette loi est basée sur l'approximation polynomiale des parties non linéaires de la loi semi-active à approcher. Pour la loi "$C.S.A.1$" (par exemple) les termes qui seront approchés sont définis comme suit

$$f(\theta) = m_p l(cos(\theta) - 1) \qquad et \qquad g(\theta) = m_p lg(sin(\theta) - \theta) \tag{6.34}$$

L'approximation sera effectuée grâce à un polynôme d'Hermite défini pour la fonction $f(\theta)$ comme suit [74]

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{i=0}^{n} (f_i(\theta_i)A_i(\theta) + f_i'(\theta_i)B_i(\theta)) \tag{6.35}$$

où

$$\begin{cases} A_i(\theta) = (1 - 2(\theta - \theta_i)h_i'(\theta_i))h_i(\theta)^2 \\ B_i(\theta) = (\theta - \theta_i)h_i(\theta)^2 \\ h_i(\theta) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{\theta - \theta_i}{\theta_i - \theta_j} \\ h_i'(\theta_i) = \sum_{k=0, k\neq k}^{n} \frac{1}{\theta_i - \theta_k} \end{cases} \tag{6.36}$$

avec $\tilde{f}(\theta)$ est le polynôme d'Hermite. Ce polynôme est déterminé par une assignation des valeurs de la fonction $f(\theta)$ et de sa dérivée aux noeuds considérés (dans ce cas 4 noeuds). Par les équations (6.35) et (6.36) le polynôme d'approximation est construit et il assure la continuité de la fonction $\tilde{f}$ et celle de ses dérivées aux noeuds choisis pour l'approximation. La fonction $g(\theta)$ est approchée de la même manière par un autre polynôme d'Hermite qui sera appelé $\tilde{g}(\theta)$.
Cette approximation transforme la condition sur l'amortissement dans la loi semi-active " $C.S.A.1$ " (5.19) de sa forme (5.16) à

$$C_{nlp} = C_{ap} - \frac{\tilde{f}(\theta)\ddot{\alpha}}{\dot{\theta}} - \frac{\tilde{g}(\theta)}{\dot{\theta}} \tag{6.37}$$

et la loi " $C.S.A.1$ " (5.19) devient la loi "$S.A.Poly$" suivante

$$\begin{cases} C_{nlp} > 0 & \Longrightarrow & C_{poly} = C_{nlp} \\ C_{nlp} \leq 0 & \Longrightarrow & C_{poly} = 0 \end{cases} \tag{6.38}$$

On montre dans la figure suivante la simulation de la loi " $C.S.A.1$ " et de la loi "$S.A.Poly$" pour une amplitude de la contribution modale initiale de $\alpha_0 = 0{,}2$ On voit bien que les deux courbes se superposent parfaitement et ceci montre que dans ce cas précis même avec seulement 4 noeuds on arrive à avoir une bonne précision de l'approximation. Donc la nouvelle loi de contrôle définie par (6.38) rend les lois de contrôle semi-actif définies précédemment moins

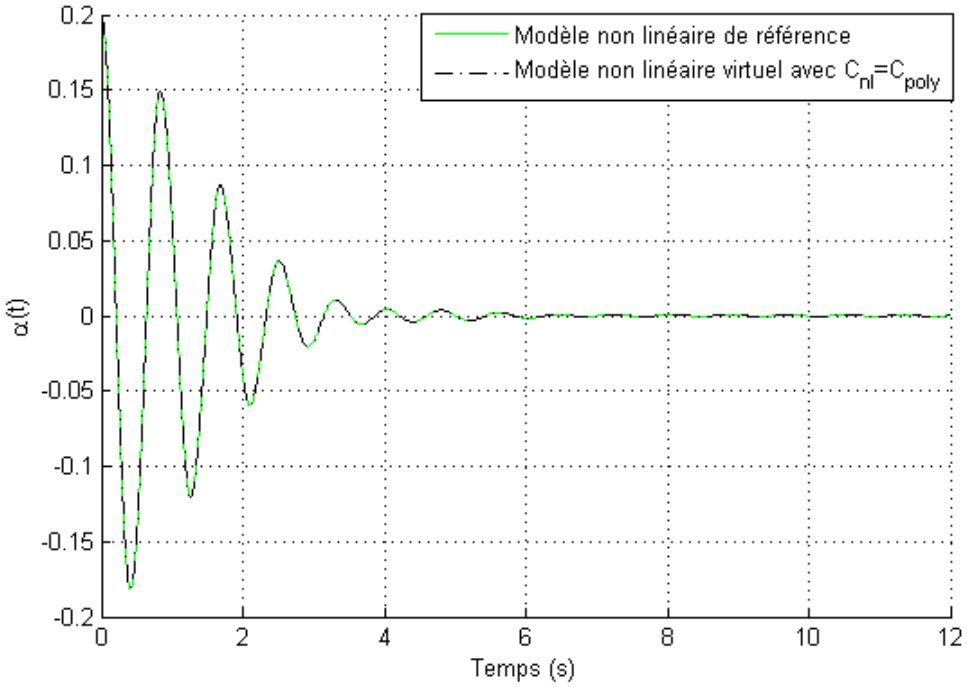


Fig. 6.14 – *Amplitudes des contributions modales du "modèle système non linéaire de référence" utilisant "S.A.Control" confronté à celle utilisant la loi "S.A.Poly"*

gourmandes en ressources temps réel et moins liée à la connaissance explicite du comportement en temps réel du dispositif à contrôle par une simple identification des valeurs nodales des fonctions d'approximations.

7

Dispositif expérimental

7.1 Introduction

Dans ce chapitre une description de la maquette de pont et du dispositif de contrôle réel sera présentée. Cette maquette fera l'objet de tests expérimentaux visant à valider les lois de contrôle présentées dans les précédents chapitres. Et l'on présentera une expérience d'adaptation des paramètres de l'actionneur en temps réel effectuée sur la maquette de pont dans le cadre d'une autre étude.

7.2 Présentation du dispositif expérimental

7.2.1 Matériel utilisé

On dispose d'une maquette de pont à hauban en cours de construction muni d'un dispositif de contrôle formé d'un pendule à masse accordée couplé à un alternateur, comme montré dans la figure (7.1).



Fig. 7.1 – *La maquette de la structure réelle*

La structure est composée de :

- Une poutre verticale qui représente la partie inférieure du pylône formé par un tube cylindrique creux de diamètre extérieur $45mm$, d'épaisseur $2mm$ et d'une hauteur de $1{,}035m$
- Une poutre verticale qui représente la partie supérieure du pylône formé par un tube cylindrique plein de diamètre $45mm$ et de hauteur $1{,}215m$

- Une poutre horizontale représentant le tablier en cours de construction formé par un profilé de section rectangulaire creuse de dimension $150mm \times 50mm$, d'épaisseur $3mm$ et de longueur $6m$
- Une masse mobile de forme cylindrique disposée le long de la poutre supérieur de la pile de diamètre $100mm$, de longueur $200mm$ et de masse $12{,}25Kg$
- Une plaque qui servira à fixer la structure au sol, de dimensions $22mm \times 40mm \times 15mm$

La structure est en acier ayant pour module d'Young $210GPa$, un coefficient de poisson de $\nu = 0{,}3$ et une masse volumique de $7800Kg.m^{-3}$. Cette maquette a pour masse totale $108Kg$.
La structure est encastrée au sol par l'intermédiaire de la plaque qui est boulonnée au sol. De plus la structure est assemblée en son encastrement central au moyen d'un profilé en U qui est emmanché au tablier et aux deux poutres verticales comme le montre la figure suivante (7.2)



Fig. 7.2 – *Détail de l'encastrement central de la structure*

On voit très bien la masse mobile sur le cylindre supérieur. La fixation de cette

masse se fait au moyen de vis, et son déplacement le long du cylindre permet de découpler les deux premiers modes de vibration verticale et horizontal qui ont des fréquences de vibration très proches.

Les mesures sont effectuées grâce à 6 capteurs d'accélération du type PCB dont les caractéristiques fournies par le constructeur sont présentées dans le tableau suivant (7.1)

Etendue des mesures	$\pm 1000 m.s^{-2}$
Domaine fréquentiel d'utilisation	0 à $150 Hz$
Etendue des températures d'utilisation	$-40°C$ à $85°C$
Masse	$12g$
Coefficient de sensibilité normal$(mV/(m.s^{-2}))$	$0{,}95e^2$ à $1{,}1e^2$

TAB. 7.1 – *Caractéristiques des accéléromètres PCB*

La carte d'acquisition DSPACE 1103 dotée d'un convertisseur analogique numérique (CAN), d'un autre numérique analogique (CNA) et d'un composant DSP (*Digital Signal Processor*) placé sur l'ordinateur permet le traitement des signaux donnés par les accéléromètres qui lui sont connectés.
Le post traitement des signaux provenant de la carte DSPACE est géré par le programme MATLAB Simulink sur l'ordinateur.
Le dispositif de contrôle utilisé est le suivant

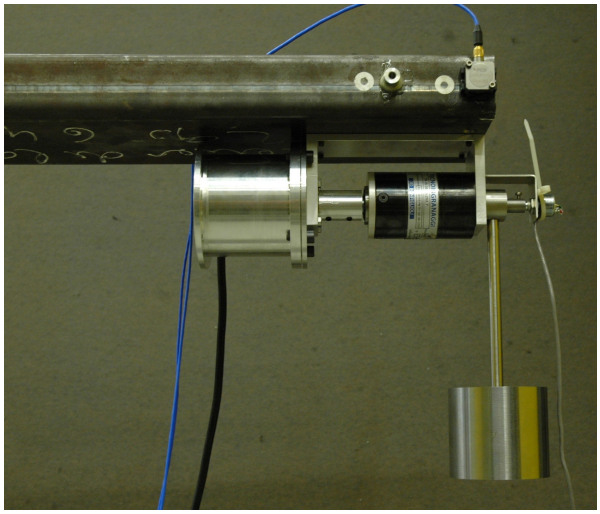


Fig. 7.3 – *Le dispositif d'amortissement composé du pendule, du multiplicateur et de l'alternateur*

où l'on voit l'alternateur couplé au pendule par l'intermédiaire du multiplicateur (système d'engrenage). Les paramètres de cet actionneur sont présentés dans le tableau (7.3) suivant

Paramètres du pendule	
Longueur équivalente pendule (l)	17,57 cm
Masse du pendule (m)	2,85 Kg
Paramètre du multiplicateur	
Rapport de réduction (β)	10
Caractéristiques de l'alternateur	
Puissance apparente	45 VA
Vitesse	2000 tr/min
Fréquence	66,7 Hz
Paramètres internes de l'alternateur	
Résistance interne par phase (r)	0.84 Ω
Inductance interne par phase (L_e)	0.036 H
Coefficient de force électromotrice (K_e)	0,06 $V.rad^{-1}.s$
Coefficient du couple électromécanique (K_c)	0,5 $V.rad^{-1}.s$
Paramètres de l'actionneur	
Masse totale (M_{ap})	$6Kg$
Inertie totale (I_{ap})	$0.1747m^4$
Coefficient d'amortissement propre (C_{ap})	0,035 $Kg.s^{-1}$

TAB. 7.2 – *Caractéristiques et paramètres des composants de l'actionneur utilisé*

Une étude a été effectuée pour déterminer le placement optimal des accéléromètres [61]. Les accéléromètres sont disposés principalement aux extrémités de la structures (là où le déplacement est maximal) [54]. De plus l'axe de rotation de l'alternateur est muni d'un potentiomètre qui mesurera l'angle de vibration du pendule.

7.2.2 Post traitement

Les signaux donnés par les accéléromètres représentent les accélérations des points auxquels ils sont fixés. Afin de pouvoir confronter les résultats numériques avec ceux expérimentaux, il faut les transformer en contributions modales. Pour cela on a recours à un filtre modal qui devrait donner la transformation correcte si la réponse réelle coïncide avec la projection sur les six premiers modes de vibrations.
Soit l'état de la structure sans l'actionneur formée des contributions modales et de leurs vitesses est égale à la matrice filtre modale multipliée par le vecteur accélérations données par les accéléromètres comme suit:

$$[\ddot{\alpha}_1^6(x_1,t),..,\ddot{\alpha}_6^6(x_6,t)]^T = [F][\ddot{y}_1^6(x_1,t),..,\ddot{y}_6^6(x_6,t)]^T \tag{7.1}$$

$[F]$ est la matrice de filtre modal définie comme suit :

$$[F] = [\underline{\varphi}_i(x_q).\underline{f}_q]^{-1}; \quad \text{pour} \quad i = 1,..,6 \quad \text{et} \quad q = 1,..,6 \tag{7.2}$$

f_q est le vecteur position du $q^{ème}$ capteur. C'est-à-dire que $f_q = a_1$, a_2 ou a_3.
Après la transformation des données en contributions modales, les signaux restent bruités par la contributions des autres fréquences qui dans la réalités dégradent la qualité des signaux étudiés. Pour remédier à ce problème, on adopte un filtre fréquentiel d'ordre 1 de la toolbox *Signal Processing* du programme MATLAB. Ce filtre permet de priver les signaux des bruits que l'on définit en dehors d'une certaine plage de fréquence que l'on appelle fréquence de coupure.

7.3 Variation du type d'excitation

Dans le cadre d'une collaboration pour un article avec Ben Mekki, on a participé à l'expérimentation de l'adaptation du dispositif de contrôle en fonction du type d'excitation qui lui est imposé. Dans ce paragraphe on montrera les résultats obtenus sans pour autant entrer dans les détails de la loi semi-active qui sont présentés dans [59].

Cette étude consiste en la conception des paramètres optimaux pour le modèle linéaire de référence pour une excitation harmonique et la conception d'une loi semi-active qui permet d'adapter les paramètres de l'actionneur

(construit de manière optimale pour la vibration libre), grâce à la variation de la résistance, au changement de type d'excitation de libre à harmonique.

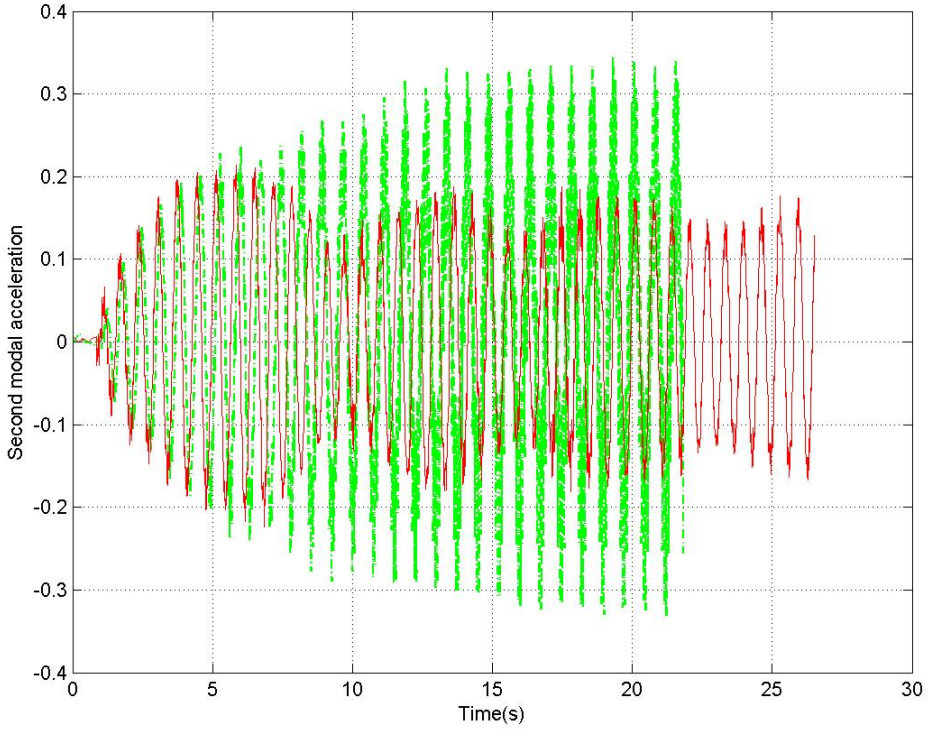


Fig. 7.4 – *Amplitude des accélérations des contributions modales de la structure utilisant les paramètres optimaux pour la vibration libre (rouge) et ceux optimaux pour la vibration harmonique (vert)*

On montre premièrement la différence entre la vibration de la structure ayant pour paramètres optimaux ceux conçu pour une vibration libre et ceux pour une vibration harmonique et on voit bien la nécessité d'utiliser le bon critère en fonction des conditions de fonctionnement.

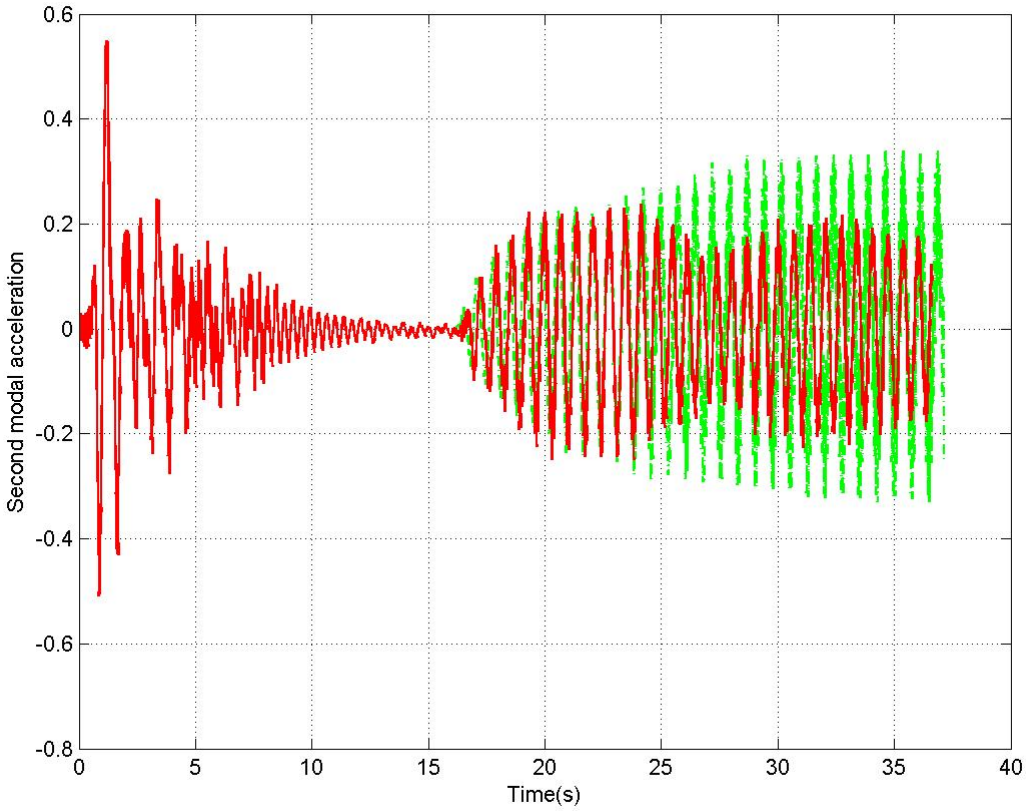


Fig. 7.5 – *Amplitude des accélérations des contributions modales de la structure utilisant les paramètres optimaux pour la vibration libre (rouge) et ceux optimaux pour la vibration harmonique (vert)*

Dans la figure (7.5) on voit comment l'actionneur ayant pour paramètres optimaux ceux conçus pour la vibration libre s'adapte au cours du temps au changement de l'excitation comparé au cas où l'adaptation n'a pas lieu.

7.4 Projet-Programme d'autres validations expérimentales

Sur la maquette qui est disponible, on se propose de faire des essais expérimentaux pour valider les résultats numériques issus des solutions faites à partir des lois de contrôle semi-actif présentées dans les chapitres précédents. On fera des essais sur le pendule seul, puis on effectuera les essais sur la maquette de pont équipé de l'actionneur électromécanique, placé soit à l'extrémité de la poutre horizontale, soit en tête du pylône, avec une excitation standard consistant à un déplacement imposé à l'extrémité du tablier et avec la valeur de la résistance de l'amortissement généré par une carte électronique en accord avec la loi semi-active choisie.

On dispose d'une nouvelle carte imprimée qui devrait nous permettre de minimiser la dissipation interne au circuit. Cette dernière utilise la thechnique du switsh (on/off) pour réaliser des résistances moyennes sur des intervalles de temps assez petits.

Conclusion

Avec ce travail, on s'est proposé de faire avancer les connaissances à propos de la faisabilité et de l'efficacité du contrôle semi-actif des vibrations des structures souples, en particulier d'un assemblage de poutres qui constitue un modèle de pont à hauban en cours de construction. Comme actionneur, on a choisi un pendule à masse accordée couplé à un alternateur grâce à un système d'engrenages. L'alternateur a pour rôle de transformer l'énergie mécanique de rotation du pendule en énergie électrique. Le courant produit est acheminé vers une résistance variable qui le dissipe par effet Joule, le but étant de contrôler la structure par simple variation de la résistance. Le dispositif adopté permet de soustraire une partie de l'énergie cinétique de la structure vibrante pour la dissiper, ou, dans le cas général, la transférer ailleurs. Ben Mekki [61] a étudié ce système pour les petites rotations du pendule dans le cadre de la structure en vibration libre.

Le système étudié est non linéaire en raison des grands déplacements du pendule. Une théorie générale pour l'optimisation de l'actionneur en toutes conditions de fonctionnement n'a pas pu être établie. On se propose alors de robustifier ce dispositif en considérant sa dynamique non linéaire.

On a donc adopté la méthode *Model Reference Control* pour la détermination du contrôle de la structure en vibration libre que l'on a appliquée en deux phases:

La première phase consiste à déterminer un modèle non linéaire intermédiaire, que l'on a appelé "virtuel". Puis à l'optimiser en déterminant une loi de contrôle sur l'amortissement qui fasse en sorte qu'il suive un modèle linéaire de référence. Le modèle linéaire de référence a été récupéré grâce à l'étude effectuée par Ben Mekki.

On a donc proposé différentes stratégies pour la loi de contrôle sur l'amortissement du modèle non linéaire virtuel. Les stratégies passive et semi-active par séquencement de gain ont donné des résultats qui ont montré la nécessité de concevoir un contrôle à chaque instant et non pas à des moments déterminés. Pour cela, une loi de contrôle semi-actif par poursuite a été mise en place pour le modèle non linéaire virtuel.

La deuxième phase consiste à déterminer une loi de contrôle sur la résistance pour que le modèle non linéaire réel suive le modèle non linéaire virtuel opti-

misé. Le critère d'optimalité choisi a toujours été celui d'avoir une vitesse de décroissance des vibrations comparable à celle obtenue par le modèle linéaire de référence. Et la réalisation de cette loi de contrôle sur la résistance a été effectuée grâce à la méthode de la poursuite.
Comme la détermination du modèle non linéaire virtuel s'est basée sur une observation de la valeur de l'inductance, on a proposé une méthode alternative de modélisation qui permet de réaliser une loi de contrôle semi-actif sur la résistance en considérant un contrôle intermédiaire sur le courant éléctrique.
Dans cette étude on a analysé en détail les performances et les limites de chaque loi de contrôle par simulation. Il est vrai qu'au delà d'une certaine amplitude, la stratégie active devient nécessaire. Néanmoins, on s'aperçoit que par la stratégie semi-active, on arrive à contrôler une partie de la vibration de la structure pour les grandes oscillations du pendule par simple variation de la résistance.
De plus, une étude sur la limitation technologique de la carte électronique et les dissipations internes du dispositif a montré qu'un dispositif idéal permettrait à la loi de contrôle semi-actif sur la résistance de toujours suivre la loi de contrôle semi-actif sur l'amortissement.

Perspectives

Suite à cette étude, certaines questions pourraient être posées:

- Les couplages et la torsion du tablier autour de son axe ont été negligés. Quel serait leur effet sur les lois de contrôles s'ils ne l'étaient pas?
- Jusqu'à quel point le système non linéaire est-il contrôlable?
- Dans le chapitre expérimental, une étude a été effectuée pour adapter le modèle linéarisé à la variation du type d'excitation. Serait-il possible de faire le même travail pour le cas non linéaire?
- L'étude expérimentale validerait-elle nos résultats numériques?

Bibliographie

[1] I.D. Aiken, D.K. Nims, A.S. Whittaker, and J.M. Kelly. Overview of the application of active/semi active control to building structures in japan. *Earthquake Spectra*, 9, 1993.

[2] Grégoire Allaire. *Analyse Numérique et Optimisation.* Edition Ellipses, 2005.

[3] Alessandro Astolfi, Dimitrios Karagiannis, and Romeo Ortega. Towards applied nonlinear adaptive control. *Annual Reviews in Control*, 32:136–148, 2008.

[4] M.J. Balas. Active control of felxible systems. *Journal of Optimization Theory and applications*, 25:415–436, 1978.

[5] P. Banerji, M. Murudi, A.H. Shah, and N. Popplewell. Tuned liquid dampers for controlling earthquake response of structures. *Earthquake Engineering and structural dynamics*, 29(5):587–602, 2000.

[6] Lorenzo Bardella and Francesco Genna. Newmark's time integration method from the discretization of extended functionals. *Journal of Applied Mechanics*, 72:527–537, 2005.

[7] R.C. Barros. Seismic response of tanks and vibration control of their pipelines. *Journal of Vibroengineering,*, 4(1):9–16, 2002.

[8] Scott C. Beeler. State dependent roccati equation regulation of systems with state and control nonlinearities. Technical report, NASA and National Institute of Aerospace, Hampton, Virginia, 2004.

[9] P. Bisegna, G. Caruso, and F. Maceri. Optimized electric networks for vibration damping of piezoactuated beams. *Journal of Sound and Vibration*, 4:117–122, 2006.

[10] F. Bourquin, B. Branchet, and M. Collet. Hybridation primale-duale pour la mise en oeuvre du contrôle actif de structure. In *In actes du 7ème colloque national en calcul de structures*, Giens, Var, France, 2005.

[11] F. Bourquin, J.S. Briffaut, and M. Collet. On the feedback stabilisation: Komornik method. In *Second international symposium on active control in mechanical engineering, Lyon*, 1997.

[12] F. Bourquin, M. Collet, and L. Ratier. Modeling and numerical issues in the active control of flexible structures. In *3 Workshop on Strcutural Control, ENPC Champs sur Marne*, 2000.

[13] H. Cao and Q.S. Li. New control strategy for active tuned mass damper system. *Computer and Structures*, 82:2341–2350, 2004.

[14] Benoit Clement and Gilles Duc Sophie Mauffrey. Aerospace launch vehicule control : A gain scheduling approach. *Control Engineering Practice*, 13:333–347, 2005.

[15] R. Collin, B. Basu, and B.M. Broderick. Bang-bang and semiactive control with variable stiffness tmds. *Journal of Structural Engineering*, 134:310–317, 2008.

[16] M.C. Constantinou, P. Tsopelas, W. Hammel, and A.N. Sigaher. Toggle-brace-damper seismic energy dissipation systems. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 127:105–112, 2001.

[17] O. Corbi. Shape memory alloys and their applications in structural oscillations attenuation. *International Journal of Simulation Modelling*, 11:387–402, 2003.

[18] Ottavia Corbi. *Active and Semi-active Control in civil Engineering.* Fridericiana Editrice Universitaria, 2007.

[19] M. Couillard, P. Micheau, and P. Masson. Improved clipped periodic optimal control for semi-active harminic disterbance rejection. *Journal of Sound and Vibration*, 318:737–756, 2008.

[20] Olivier Coulaud. Un nouveau schéma symplectique pour le couplage entre une méthode du continuum et la dynamique moléculaire. *C.R. Académie des science de Paris*, I:255–260, 2001.

[21] D.J.Leith, A. Tsourdos, B.A. White, and W.E.Leitead. Application of velocity-based gain-scheduling to lateral auo-pilot design for an agile missile. *Control Engineering Practice*, 9:1079–1093, 2001.

[22] D.J.Leith and W.E.Leitead. Gain sheduled & non linear systems: Dynamic analysis by velocity based linearization families. *International Journal of Control*, 70:289–317, 1998.

[23] D.J.Leith and W.E.Leitead. Modeling of nonlinear integrated systems: A velocity-based framework supporting modular linearization-based analysis and design. Technical report, Industrial Control Center, University of Strathclyde, 1998.

[24] D.J.Leith and W.E.Leitead. Survey of gain-scheduling analysis & design. *International Journal of Control*, 73(11):1001–1025, 2000.

[25] B. Egarodt. *Stability and Adaptive Controllers.* Springer-Verlag New York, Inc, 1979.

[26] Evrin Bilge Erdem. *Analysis and Real Time Implementation of State-Dependent Riccati Equations Controlled Systems.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001.

[27] Laurance C. Evans. An introdution to mathematical optimal control theory version 0.2. Department of Mathematics, University of California, Berkeley.

[28] K.C. Falcon, B.J. Stine, W.D. Simcock, and C. Andrew. Optimization of vibration absorbers: a graphical method for use on idealized systems with restricted damping. *Journal Mechanical Engineering Science*, 9:374–381, 1967.

[29] P. De Fonseca, P. Sas, and H. Van Brussel. Robust design and robust stability analysis of active noise control systems. *Journal of Sound and Vibration*, 243(1):23–42, 2001.

[30] R.R. Gerges and B.J. Vickery. Wind tunnel study of the across-wind response od a slender tower with a nonlinear tuned mass damper. *Jouranl of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 91:1069–1092, 2003.

[31] Jacob Pieter Den Hartog. *Mechanical Vibrations, Third Edition.* Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1947.

[32] Patrice Hauret and Patrick Le Tallec. Energy-controlling time integration methods for nonlinear elastodynamics and low-velocity impact. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:4890–4916, 2006.

[33] Mohsen Hayati and Behnam Karami. Design of fully differential cmos amplifier for clipping control circuit. *World Applied Sciences Journal*, 3(1):110–113, 2008.

[34] J.K. Hedrick and A. Girard. Control of nonlinear dynamic systems: Theory and applications. Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley.

[35] R. Heuer and S. M. Yousefi. On the nonlinear influence of tunes pendulum dampers in slender structures. In *Fourth European Conference on the Structural Control*, 2008.

[36] Chompoonoot Hirunyapruk. *Vibration Control Using an adaptive Tuned Magneto-Rheological Fluid Vibration Absorber*. PhD thesis, University of Southampton, Faculty of Engineering, Science and Mathematics, Institute of Sound and Vibration, 2009.

[37] Thomas J.R. Hughes. *Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentices-Hall, 1987.

[38] Petros A. Ioannou and Peter V. Kokotovic. *Adaptive Systems with Reduced Models*. Springer-Verlag New York, Inc, 1983.

[39] Petros.A. Ioannou and Jing. Sun. Robust adaptive control, 1996.

[40] I. Ioi and K. Ikeda. On the dynamic vibration damped absorber of the vibration system. *Bulletin of Japaneese Society of Mechanical Engineering*, 21-151:64–71, 1978.

[41] Alberto Isidori. *Nonlinear Control System: An Introduction*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1985.

[42] källström.C.G. *Identification and Adaptive Control Applied to Ship Steering*. PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden., 1979.

[43] C. Kane, J.E. Marsdenad, M. Ortiz, and M. West. Variational integrators and newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *International journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999.

[44] R. Kanitkar, M. Harms, P. Crosby, and M. Lai Lai. Seismic retrofit of steel moment frame structure using viscoelastic dampers. *ISET Journal of Earthquake Technology*, 35:207–219, 1998.

[45] Hassan K. Khalil. *Nonlinear systems, second edition*. Prentice Hall, 1996.

[46] L. Kharevych, Weiwei, Y. Tong, E. Kanso, J.E. Marsden, P. Schröder, and M. Desbrun. Geometric, variational integrators for computer animation. *Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, 2006.

[47] W. S. Koon and J.E. Marsden. The hamiltonian and lagrangian approaches to the dynamics of nonholonomic systems. *Reports on Mathematical Physics*, 40:21–62, 1997.

[48] H. Kwakernaak. *Linear Optimal Control Systems*. Wiley and Sons NY, 1972.

[49] S. Lall and M. West. Discrete variational hamiltonian mechanics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39:5509–5519, 2006.

[50] E. Leboucher, P. Micheau, A. berry, and A. L'Espérance. A stability analysis of a decentralized adaptive feedback active control of sinusoidal sound in free space. *Acoustic Society of American Journal*, 11:189–199, 2002.

[51] M. Leon, D. Martin DE Diego, and A. Santamaria-Merino. Discrete variational integrators and optimal control theory. *Advances in Computational Mathematics*, 26(1-3):251–268, 2007.

[52] A. Lew, J.E. Marsden, M. Ortiz, and M.West. Variational time integrators. *Iternational Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:153–212, 2004.

[53] S. Leyendecker, S. Ober-Blöbaum, J.E. Marsden, and M. Ortiz. Discrete mechanics and optima control for constrained multibody dynamics. In *International Design Engneering Technical Conferencs & Computers and Information in Engineering Conference*, Las Vegas, USA, 2007.

[54] Z. Li, J.Tang, and Q.S. Li. Optimal sensors mocations for structural vibration measurements. *Applied Acoustics*, 65:807–818, 2004.

[55] R.W. Luft. Optimal tuned mass dampers for buildings. *Journal of the Structural Division ASCE*, 105:2766–2772, 1979.

[56] J.E. Marsden and M. West. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, pages 357–514, 2001.

[57] L. Meirovitch. *Dynamics and Control of Disturbed Structures*. John Wiley and Sons, 1988.

[58] L. Meirovitch. *Dynamics and Control of Structures*. Wiley, 1990.

[59] O. Ben Mekki, F. Bourquin, M. Debbabi, F. Maceri, and C. Nguyen Van Phu. Some applications of passive and semi-active control devices for harmonic vibrations damping in cable-stayed bridges. In *Associazione Italiana per l'Analisi delle Sollecitazioni, XXXVII Convegno Nazionale*, 2008.

[60] O. Ben Mekki, F.Bourquin, F. Maceri, and C. Nggyen Van Phu. An adaptive pendulum for evolving structures. *Structural Control and Health Monitoring*, 00:1–6, 2004.

[61] Othman Ben Mekki. *Amortissement Semi-Actif des structures flexibles*. PhD thesis, Dipartimento d'ingegneria Civile dell'Università degli studi di Roma Tor Vergata, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.

[62] Othman Ben Mekki, F.Maceri, and F.Bourquin. Amortissement semi-actif des structures flexibles: Application au contrôle des grands ponts. In *XXVème Rencontre Universitaire de Génie Civil 2007*, 2007.

[63] S. Müller and M. Ortiz. On the gamma-convergence of discrete dynamics and variational integrators. *Journal of Nonlinear Science*, 14:279–296, 2004.

[64] Kumpati S. Narendra and Anuradha M. Annaswamy. *Stability of Adaptive Controllers*. Dover Publications, 2005.

[65] M. Neubauer and J. Wallaschek. Piezoelectrical and experimantal investitation of the frequency ration and switching law for piezoeletic switching techniques. *Smart Materials and structures*, 17:035003(9pp), 2008.

[66] Nathan M. Newmark and F. ASCE. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering machanics division, Proceeding of the American Society of Civil Engineers*, 1959.

[67] Akira Nishitani and Yutaka Inoue. Overview of the application of active/semi active control to building structures in japan. *Earthquake Engineering and structural dynamics*, 30:1565–1574, 2001.

[68] K. Ohno, M. Shimoda, and T. Savada. Optimal design of a tuned liquid damper using a magnetic fluid one elctromagnet. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 20:204146(5pp), 2008.

[69] Rainer Palm and Ulrich Rehfuess. Fuzzy controllers as gain scheduling approximators. *Fuzzy Sets and systems*, 85:233–246, 1997.

[70] Curtis P.Mracek and James R.Cloutier. Control design for nonlinear benchmark problem via the state-dependent riccati equation method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8:401–433, 1998.

[71] Vipul Prakash and A.D. Pandey. Vibration isolation using active control systems for civil engineering structures. *Bulletin of the Indian Society of Earthquake Technology*, 26:25–38, 1989.

[72] Emmanuel Prempain and Ian Postlethwaite. $\mathcal{L}_2$ and $\mathcal{H}_2$ performance analysis and gain-schaduling synthethis for parameter-dependent systems. *Automatica*, 44:2081–2089, 2008.

[73] A. Preumont. *Vibration control of active structures, An introduction, 2nd Edition.* Kluwer Academic Publishers, 1997.

[74] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, and Fausto Saleni. *Numerical Mathematics.* Springer, 2000.

[75] R. Rana and T.T. Soong. parametric study and simplified design of tuned mass dampers. *Engineering Structures*, 3:193–204, 1998.

[76] F. Ravigan, G. Manolea, and N. Boteanu. The design of a magnetorheological controller. *Annals of the University of Craiova, Electrical Engineering*, 32:1842–4805, 2008.

[77] F. Ricciardelli, A. Occhiuzzi, and P. Clemente. Semiactive tuned mass damper control strategy for wind excited structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 88:57–74, 2000.

[78] F. Rüdinger. Tuned mass damper with fractional derivative damping. *Engineering Structures*, 28:1774–1779, 2006.

[79] I. Sadek, I. Kucuk, E. Zeini, and S. Adali. Optimal boundery control of dynamics responses of piezo actuating micro-beams. *Applied Mathematical Modelling*, 33:3343–3353, 2009.

[80] Jeffrey T. Scruggs. *Structural Control Using Regenerative Force Actuation Networks.* PhD thesis, Calfornia Institute of Technology, Pasadena, California, 2004.

[81] J.T. Scruggs and W.D. Iwan. Control of a civil engineering structure using an electircal machine with semiactive capability. *ASCE Jounal of Structural Engineering*, 129:951–959, 2003.

[82] M. Setareh. Floor vibration control using semi-active tuned mass dampers. *Canadien Journal of Civil Engineering*, 22:76–84, 2002.

[83] Shamma and Athans. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 898–907, August 1990.

[84] Jeff S. Shamma. *Analysis and Design of Gain Scheduled Control Systems.* PhD thesis, Laboratory for Information and Decision Systems, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1988.

[85] H. Shulte and H. Hahn. Fuzzy state feedback gain scheduling control of servo-pneumatic actuators. *Control Engineering Practice*, 12:639–650, 2004.

[86] N. M. Singh, Jayant Dubey, and Ghanshyam Laddha. Control of pendulum on a cart with state dependent riccati equations. *Proceedings of World Acadamy of Science, Engineering and Technology*, 3, 2008.

[87] T.T. Song. *Active Structural Control: Theory and Practice*. Longman, 1990.

[88] G. Soog, N. Ma, and H.-N. Li. Applications of shape memory alloys in civil structures. *Engineering Structures*, 28:1266–1274, 2006.

[89] T. T. Soong and G.F. Darghouch. *Passive Energy dissipation systems in structural engineering*. Wiley Sons, 1997.

[90] M.D. Symans and M.C. Constantinou. Seisimic testing of a building structure with a semi-active fluid damper control system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26:759–777, 1997.

[91] W. T. Thompson. *Theory of Vibration with applications, Second Edition*. Prentice Hall, 1981.

[92] G.B. Warburton. Optimum absorber parameters for various combinations of response and excitation parameters. *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 126(2):327–343, 1988.

[93] J.K. Yu, T. Wakahara, and D. Reed. A non-linear numerical model of the tuned liquid damper. *Earthquake Engineering and structural dynamics*, 28:671–686, 1999.