

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

PAR

FERNANDO MERCHAN SPIEGEL

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

NOUVELLES APPROCHES DE MODÉLISATION MULTIDIMENSIONNELLE FONDÉES SUR LA DÉCOMPOSITION DE WOLD

Soutenue le 14 Décembre 2009

Après avis de :

MM. S. JAFFARD	Professeur à l'Université Paris XII
P. GAVRUTA	Professeur à l'Université Polytechnique de Timisoara

Devant la commission formée de :

MME. L. BLANC-FERAUD	Directeur de recherche au CNRS, Sophia Antipolis	
MM. F. CASTANIÉ	Professeur à l'INPT, Toulouse	<i>Président</i>
M. NAJIM	Professeur à l'ENSEIRB, Bordeaux	<i>Directeur de thèse</i>
S. JAFFARD	Professeur à l'Université Paris XII	
C. GERMAIN	Professeur à l'ENITAB, Bordeaux	
F. TURCU	Chargé de Recherche CNRS, Bordeaux	

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS - UMR 5218 CNRS),
Département LAPS - Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération - 33405 TALENCE cedex - France

Résumé

Dans cette thèse nous proposons de nouveaux modèles paramétriques en traitement du signal et de l'image, fondés sur la décomposition de Wold des processus stochastiques. Les approches de modélisation font appel à l'analyse fonctionnelle et harmonique, l'analyse par ondelettes, ainsi qu'à la théorie des champs stochastiques.

Le premier chapitre a un caractère introductif théorique et précise les éléments de base concernant le contexte de la prédiction linéaire des processus stochastiques stationnaires et la décomposition Wold, dans le cas 1-D et multi-D. On montre comment les différentes parties de la décomposition sont obtenues à partir de l'hypothèse de stationnarité, via la représentation du processus comme l'orbite d'un certain opérateur unitaire, l'isomorphisme canonique de Kolmogorov et les conséquences sur la prédiction linéaire du théorème de Szegő et de ses extensions multidimensionnelles.

Le deuxième chapitre traite une approche de factorisation spectrale de la densité spectrale de puissance qu'on utilisera pour l'identification des modèles de type Moyenne Ajustée (MA), Autorégressif (AR) et ARMA. On utilise la représentation par le noyau reproduisant de Poisson d'une fonction extérieure pour construire un algorithme d'estimation d'un modèle MA avec une densité spectrale de puissance donnée. Cette méthode d'estimation est présentée dans le cadre de deux applications :

- Dans la simulation de canaux sans fil de type Rayleigh (cas 1-D).
- Dans le cadre d'une approche de décomposition de Wold des images texturées (cas 2-D).

Dans le troisième chapitre nous abordons la représentation et la compression hybride d'images. Nous proposons une approche de compression d'images qui utilise conjointement :

- les modèles issus de la décomposition de Wold pour la représentation des régions dites texturées de l'image ;
- une approche fondée sur les ondelettes pour le codage de la partie "cartoon" (ou non-texturée) de l' image.

Dans ce cadre, nous proposons une nouvelle approche pour la décomposition d'une image dans une partie texturée et une partie non-texturée fondée sur la régularité locale. Chaque partie est ensuite codée à l'aide de sa représentation particulière.

Mots clés - décomposition de Wold, modèles AR, MA et ARMA, factorisation spectrale, fonction extérieure, espace de Hardy, régularité locale, analyse en ondelettes, compression d'images.

Abstract

In this thesis we propose new parametric models in signal and image processing based on the Wold decomposition of stationary stochastic processes. These models rely upon several theoretical results from functional and harmonic analysis, wavelet analysis and the theory of stochastic fields,

The first chapter presents the theoretical background of the linear prediction for stationary processes and of the Wold decomposition theorems in 1-D and n-D. It is shown how the different parts of the decomposition are obtained and represented, by the means of the unitary orbit representation of stationary processes, the Kolmogorov canonical model and Szego-type extensions.

The second chapter deals with a spectral factorisation approach of the power spectral density used for the parameter estimation of Moving Average (MA), AutoRegressif (AR) and ARMA models. The method uses the Poisson integral representation in Hardy spaces in order to estimate an outer transfer function from its power spectral density.

- Simulators for Rayleigh fading channels (1-D).
- A scheme for the Wold decomposition for texture images (2-D).

In the third chapter we deal with hybrid models for image representation and compression. We propose a compression scheme which jointly uses, on one hand, Wold models for textured regions of the image, and on the other hand a wavelet-based approach for coding the 'cartoon' (or non-textured) part of the image. In this context, we propose a new algorithm for the decomposing images in a textured part and a non-textured part. The separate parts are then coded with the appropriate representation.

Key words - Wold decomposition, ARMA models, spectral factorization, outer function, Hardy space, local regularity, wavelets analysis, image compression.

Remerciements

Je voudrais, au travers de ces quelques lignes, remercier toutes celles et ceux qui ont contribué à l'aboutissement de cette thèse.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude au Professeur Mohamed Najim pour son accueil au sein de l'Équipe Signal et Image et pour avoir accepté de diriger ma thèse.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Stéphane Jaffard et Monsieur Pasc Gavruta qui ont accepté d'être les rapporteurs de mon mémoire, ainsi que Monsieur Francis Castanié, président du jury et Monsieur Christian Germain et Madame Laure Blanc-Feraud de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.

Je remercie également Monsieur Flavius Turcu pour le temps qu'il a bien voulu me consacrer lors de cette thèse ainsi que le soutien qu'il m'a apporté.

Je tiens également à remercier Monsieur Eric Grivel pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, sa collaboration et ses conseils.

Je remercie les membres de l'Équipe Signal et Image de leur gentillesse et leurs nombreux conseils.

Enfin, je remercie mes parents et Ricardo, mon frère, qui malgré la distance qui nous sépare, m'ont apporté leur soutien.

Je dédicace cette thèse à mon grand-père Justo Fabio Spiegel.

Table des matières

Introduction	1
1 Processus stochastiques et décomposition de Wold	11
1.1 Définitions et propriétés basiques	12
1.1.1 Covariances et stationnarité au sens faible	12
1.1.2 Représentation spectrale de la fonction d'auto-covariance	13
1.1.3 Représentation d'un processus stationnaire comme l'action d'un groupe d'opérateurs unitaires.	14
1.2 Décomposition de Wold en deux parties	18
1.2.1 Théorème de Szegő généralisé	18
1.2.2 La décomposition de Wold en deux parties	21
1.2.3 La partie complètement non-déterministe	26
1.2.4 La partie déterministe en dimension 1	30
1.2.5 La partie déterministe dans le contexte multidimensionnel	33
1.3 Modélisation de processus stationnaires fondée sur la décomposition de Wold .	38
1.3.1 Cas 1-D	38
1.3.2 Cas 2-D	40
2 Nouveaux modèles ARMA issus de la factorisation spectrale	47
2.1 Introduction	47
2.2 Modèles AR, MA et ARMA	47
2.3 Les espaces de Hardy et la factorisation intérieure-extérieure	48
2.3.1 Les espaces de Hardy	48
2.3.2 Fonctions intérieures et extérieures	50
2.4 Méthode pour l'estimation de paramètres MA et AR	52
2.4.1 Estimation de paramètres MA	52
2.4.2 Estimation des paramètres AR	53
2.4.3 Estimation des paramètres dans le cas 2-D	54
2.5 Implémentation de la méthode d'estimation	55
2.5.1 Cas 1-D	55
2.5.2 Cas 2-D	56
2.6 Propriétés de la méthode proposée	56
2.6.1 Étude comparative dans le cas 1D	57
2.6.2 Exemples dans le cas 2D	73
2.7 Modélisation d'images texturées fondée sur Wold	78
2.7.1 État de l'art des approches de décomposition de Wold d'images	79

2.7.2	Modélisation MA du champ complètement non-déterministe	79
2.7.3	Approche proposée pour la décomposition de Wold	81
2.7.4	Exemples de décomposition	87
2.8	Simulation de canaux de Rayleigh	94
2.8.1	Modélisation et simulation d'un canal de Rayleigh	94
2.8.2	Approche de simulation fondée sur la factorisation intérieure-extérieure .	96
2.9	Conclusions	109
3	Codage hybride d'images : Wold-ondelettes	111
3.1	Introduction	111
3.2	L'algorithme de décomposition	112
3.2.1	Régularité locale	113
3.2.2	Régularité locale des processus stochastiques et des signaux périodiques	115
3.2.3	Mesure de la régularité locale	120
3.3	Approche de décomposition fondée sur la régularité locale	123
3.4	Étude comparative des méthodes de décomposition	127
3.5	Segmentation de la composante texturée	139
3.6	Codage de composantes	139
3.7	Exemples de représentation et codage hybrides	140
3.8	Conclusions	146
	Conclusions et Perspectives	147
A	Glossaire	151
B	Ergodicité	153
C	Sous-Espaces invariants et réduisants à un opérateur	155
D	Mesures	157
D.1	Mesures absolument continues et mesures singulières	157
D.2	Théorème de décomposition de Lebesgue	158
	Bibliographie	159

Introduction

De très nombreux champs d'applications nécessitent de nos jours le traitement d'un volume de plus en plus important de données numériques qui émergent de leur état brut sous une forme paramétrée ou indexée par un ou plusieurs paramètres. Ces données indexées font l'objet d'une très large thématique comprenant le traitement du signal, de l'image ou des volumes d'images, avec de très nombreuses applications dans l'industrie.

Selon le nombre de paramètres utilisés dans leur description naturelle, ces données peuvent être classifiées en mono-dimensionnelles (1D) si elles dépendent d'un seul paramètre, ou multi-dimensionnelles (2D, 3D ou plus) dans le cas d'une indexation sur plusieurs paramètres.

Les données mono-dimensionnelles sont généralement appelées *signaux*, le paramètre d'indexation étant très souvent un paramètre temporel, comme par exemple dans le cas des signaux audio (où les données représentent la variation dans le temps d'une intensité acoustique), des données économiques (qui représentent l'évolution dans le temps de certains indicateurs), des signaux issus des instruments de mesure médicaux comme les ECG, EEG, etc. Si on observe une seule quantité numérique qui dépend d'un paramètre on parle de signaux *scalaires* ou *uni-variés*, si par contre on observe plusieurs quantités évoluant simultanément, on parle de signaux *vectoriels* ou *multivariés* (comme par exemple le son stéréo en traitement audio, des groupes d'indicateurs économiques corrélés, etc.)

La catégorie des données multi-dimensionnelles se caractérise le plus souvent par des paramètres d'indexation en rapport avec des coordonnées spatiales 2D ou 3D. C'est typiquement le cas des acquisitions de données numériques par des réseaux de récepteurs ayant une certaine configuration spatiale, qui produisent des données caractérisant des surfaces ou des volumes. Le cas bidimensionnel est typiquement illustré par les images numériques, dans lesquelles les pixels sont naturellement indexés par les deux coordonnées spatiales. Le contexte 3D s'illustre par des blocs d'images ou de données 3D, comme par exemple dans l'imagerie géologique, sismique, médicale, radar, l'écoulement et la dynamique des fluides etc. Comme dans le cas des signaux, le caractère scalaire ou vectoriel des données se traduit par les termes uni- ou multi-varié. Un exemple standard est l'imagerie en noir et blanc (scalaire) par rapport à l'imagerie en couleurs (vectorielle).

Mathématiquement ces données mono- ou multi- dimensionnelles sont assimilables, d'une manière générale, à des fonctions d'une ou plusieurs variables discrètes ou continues - correspondantes aux paramètres d'indexation -, les valeurs de ces fonctions étant scalaires ou vectorielles selon le type des données. Cette modélisation ou représentation basique peut ne pas être adaptée au traitement des données requis par les différentes applications, qui nécessite le plus souvent une description du contenu d'intérêt de ces données par un modèle ou représentation à nombre réduit de paramètres ou coefficients. On retrouve cette démarche de

modélisation dans une très large palette d'applications comme la compression, la classification, l'analyse des attributs, la synthèse ou dans les simulations numériques des divers phénomènes physiques.

Les classes de modèles varient selon le type de données et le type d'information considéré comme d'intérêt dans ces données, dans le cadre des différentes applications. Selon ces critères, les modèles et leurs techniques d'estimation associées font appel à plusieurs domaines des mathématiques, comme l'analyse harmonique, la théorie des probabilités, la géométrie ou les équations différentielles.

- Les modèles fondés sur l'analyse harmonique (Fourier) comptent parmi des outils de base en traitement du signal. Ils caractérisent le contenu spectral des données, et les techniques utilisées font appel à l'ensemble de l'analyse harmonique et la théorie spectrale, du cadre classique de la transformée de Fourier aux extensions de l'analyse par ondelettes ;

- Les modèles stochastiques, basés sur la théorie des probabilités, assimilent les données à des champs de variables aléatoires. L'information d'intérêt est décrite par des lois de probabilité ou des quantités statistiques comme les moments de différents ordres. Ces modèles sont particulièrement adaptés aux données caractérisées par un certain degré d'aléatoire dans leur variation par rapport aux paramètres d'indexation ;

- Les modèles de type géométrique assimilent typiquement les données 1D, 2D ou multi-D au graphe d'une variété différentielle (courbe, surface, hypersurface etc.) et utilisent comme attributs d'intérêt des aspects géométriques de type local. Les techniques utilisées dans l'estimation des modèles tirent profit de la géométrie (différentielle) et/ou de l'analyse sur les variétés ;

- Les modèles basés sur les équations différentielles regardent les données comme l'évolution d'un système décrit par certains systèmes d'équations différentielles. Les techniques relatives aux estimations font appel aux propriétés théoriques des solutions de ces systèmes.

Une large classe de données mono- ou multi- dimensionnelles, comme par exemple les signaux audio ou les images texturées, ont un contenu composite qui regroupe une information à caractère géométrique ou harmonique, et en même temps une information à caractère aléatoire. Ce contenu composite peut être représenté à l'aide d'une description hybride, par des modèles mixtes qui puissent capter séparément les aspects harmoniques/géométriques et les aspects aléatoires.

Le but de la thèse est de développer de tels modèles mixtes ainsi que de nouvelles méthodes d'estimation dans le contexte mono- et multi-dimensionnel. La thématique de la thèse se situe ainsi au croisement des contextes 1-D et multi-D, et en même temps au croisement de la modélisation de type harmonique et la modélisation stochastique.

Le point de départ de nos approches de modélisation est un principe mathématique de décomposition d'un processus mixte en plusieurs parties reflétant des aspects complémentaires, aléatoires et non-aléatoires. Ce principe de décomposition apparaît pour la première fois dans les travaux de H. Wold dans les années '40 sur le comportement des séries temporelles [Wol54]. Le théorème initial de Wold, donné dans le cadre 1-D, décrit tout processus stochastique stationnaire comme la somme de deux composantes orthogonales, une composante qui est complètement prédictible (dans le sens linéaire) et l'autre qui est totalement aléatoire. La description spectrale de ces deux composantes permet de dégager des représentations paramétriques pour chacune des deux parties. La représentation de la partie complètement prédictible

produit un modèle typique dans le cadre de l'analyse harmonique, tandis que la représentation de la partie aléatoire dégage des modèles qui se rangent du côté de la théorie stochastique.

Au delà du théorème initial de Wold, le principe de la décomposition Wold dépasse largement le cadre des séries temporelles. Avec des implications profondes, ce type de décomposition fournit des outils de base dans plusieurs branches de l'analyse fonctionnelle, comme la théorie des opérateurs ou l'analyse spectrale, qui ont été développés dans une très large série de travaux depuis les années '50 et jusqu'à nos jours. Cette théorie apporte un point de vue opératoire sur le contexte des processus stochastiques stationnaires, avec l'utilisation d'un appareil mathématique puissant qui permet de dégager des propriétés de ces processus dans le cadre de la géométrie hilbertienne.

Helson et Lowdenslager donnent dans les années '60 l'extension du principe au cas multidimensionnel, tout en mettant en évidence une particularité fondamentale du cas multi-D par rapport au cas 1-D, à savoir une partie supplémentaire dans la décomposition, partie appelée *évanescence* [HL58, HL62]. Dans le cas 2D par exemple, cette troisième partie relève d'un aspect composite aléatoire-prédictible du processus, selon la paire d'orientations horizontale/verticale du plan 2-D.

Comme la notion de prédiction est sujette à une relation d'ordre sur l'ensemble des paramètres d'indexation, le cas multi-dimensionnel se distingue aussi du cas 1-D, qui est naturellement muni d'un ordre canonique, par l'absence d'un ordre unique et ainsi par la possibilité de choisir une très large classe de relations d'ordres. La décomposition de Wold dépend de l'ordre choisi, ainsi une longue série de travaux porte sur le comportement des composantes dans la décomposition vis-à-vis de la superposition de plusieurs ordres. Un choix naturel porte sur la paire d'ordres lexicographiques horizontale et verticale, ou bien sur l'ordre partiel ayant comme éléments positifs le premier quart de plan.

Vers la fin des années '80, le problème des ordres multiples se cristallise et Francos et al. en déduisent un modèle évanescent 2-D qui prend en compte l'ensemble de tous les ordres de type lexicographiques, basé sur la notion de demi-plan symétrique non-rotationnel. Les modèles issus de la décomposition de Wold sont utilisés pour la première fois dans la description des images texturées, avec la prise en compte de trois composantes, à savoir une composante harmonique, une composante totalement aléatoire et une composante évanescence généralisée.

On passe rapidement en revue ces trois types de composantes vis-à-vis de leurs modèles possibles. La composante harmonique est caractérisée par un spectre formé d'atomes de Dirac, et décrit spatialement les comportements de type périodique. La modélisation d'une telle composante s'inscrit parfaitement dans le cadre de l'analyse harmonique, par le biais des modèles de type séries de Fourier.

En ce qui concerne la partie totalement aléatoire (ou complètement non-déterministe), la description spectrale témoigne d'un continuum au niveau de la répartition fréquentielle, ce qui mène à des descriptions synthétiques de ce continuum, plutôt qu'une description fréquentielle détaillée comme dans le cas harmonique. Les modèles utilisés exploitent ainsi la densité spectrale de puissance (DSP) et ses coefficients de Fourier, à savoir les coefficients d'auto-corrélation du processus, et se rangent dans la catégorie des modèles stochastiques de type AutoRégressifs (AR), Moyenne Ajustée (MA) ou ARMA. On utilisera la densité spectrale de puissance par rapport à la notion de factorisation spectrale, qui permet de relier directement les paramètres d'un tel modèle à la DSP.

Finalement, les modèles évanescents combinent les deux types de modèles, harmoniques et stochastiques en accord avec le comportement distinct du processus dans les deux directions spatiales orthogonales.

Les modèles basés sur la décomposition Wold reposent de façon essentielle sur l'hypothèse de stationnarité d'ordre 2 au sens faible des données, c'est à dire l'invariance par rapport aux translations de la moyenne et des coefficients d'autocovariance du processus. Cette hypothèse n'est que localement satisfaite en général par les données réelles, d'où le besoin d'étendre au moins une partie de la modélisation à des situations de non-stationnarité.

Dans ce contexte, les travaux menés dans le cadre de cette thèse portent sur plusieurs approches concernant la modélisation et les techniques d'estimation.

Une première approche consiste, sous l'hypothèse de stationnarité, à développer des modèles de type stochastiques, et de construire des algorithmes d'estimation basés sur le principe de la factorisation spectrale. On utilise la factorisation spectrale de la densité spectrale de puissance d'un processus complètement non-déterministe, en combinaison avec la factorisation théorique d'une fonction dans l'espace de Hardy H^1 en facteurs intérieur et extérieur pour donner une méthode générale d'approximation d'un tel processus par un modèle MA. Cette approche sera ensuite particularisée à deux niveaux :

- dans le cadre des applications en communications numériques, on utilisera ce principe pour estimer des modèles MA, AR et ARMA mono-dimensionnels, simulant un canal de propagation de type Rayleigh [MTGN08, MTGN10] ;
- dans le cadre 2-D de la modélisation des textures, on utilise la même approche pour simultanément donner une approximation de la composante aléatoire et séparer cette composante des composantes harmoniques et évanescences [MTN07b, MTN07a].

La deuxième démarche consiste à étendre les modèles basés sur la décomposition Wold au cas non-stationnaire, par le biais d'une décomposition faisant apparaître une composante décrite par une base d'ondelettes [MTN09]. Ce type de modélisation hybride dépasse le cadre des images texturées, et aborde toute la classe des images sous un angle qui permet de tirer profit des bénéfices, virtuellement complémentaires, des représentations stochastiques ou par ondelettes.

De façon plus détaillée, le document est organisé comme suit :

Le premier chapitre a un caractère introductif théorique, et précise les éléments de base concernant le contexte de la prédiction linéaire des processus stochastiques stationnaires et la décomposition Wold dans le cas 1-D et multi-D. On montre comment les différentes parties de la décomposition sont obtenues à partir de l'hypothèse de stationnarité, via la représentation du processus comme l'orbite d'un certain opérateur unitaire, l'isomorphisme canonique de Kolmogorov et les conséquences sur la prédiction linéaire du théorème de Szégo et ses extensions multidimensionnelles. Chaque partie de la décomposition Wold est ensuite analysée du point de vue spectral, afin de dégager les représentations théoriques spécifiques à chaque type de composante. On montre ensuite sous quelles hypothèses on peut déduire de ces représentations des modèles approchés qui soient directement utilisables dans les applications concrètes.

Le deuxième chapitre traite l'approche de factorisation spectrale de la densité spectrale de puissance vis-à-vis des modèles de type MA, AR et ARMA. On utilise la représentation par le noyau reproduisant de Poisson d'une fonction extérieure pour construire un algorithme d'estimation d'un modèle MA avec une DSP donnée.

Plus précisément, l'estimation de paramètres s'effectue en deux étapes : le facteur extérieur, qu'on peut identifier à un filtre à minimum de phase, est d'abord évalué à l'intérieure du cercle unité dans le plan z . Cette évaluation est effectuée à l'aide d'une version discrétisée d'une représentation intégrale de Poisson qui est équivalent à l'exponentielle de la convolution d'un noyau de Poisson complexe avec le logarithme de la DSP. Ensuite on opère un développement en série de Taylor de la fonction extérieure (ces coefficients de série coïncidant théoriquement avec les paramètres d'un modèle MA infini). L'estimation de ces coefficients est effectuée à l'aide d'une version discrétisée d'une intégrale de Cauchy, qui revient pratiquement à une transformée de Fourier pondérée par un facteur prenant un compte le rayon $r < 1$ sur lequel le facteur extérieur a été évalué.

Le modèle obtenu a certaines propriétés qui le distingue des méthodes classiques fondées sur les moindres carrées. Notamment, cette méthode permet d'atténuer ou moyenner les singularités spectrales qui sont associées aux processus déterministes. En d'autres termes, le modèle obtenu s'approche de celui de la composante complètement non déterministe (CND) du processus.

Cette méthode d'estimation est présentée dans le cadre de deux applications :

- Dans le cadre d'une approche de décomposition de Wold des images texturées (cas 2-D).
- Dans la simulation de canaux sans fils de type Rayleigh (cas 1-D).

Le chapitre est organisé comme suit : les premières sections sont consacrées à présenter la méthode d'estimation et à présenter ses propriétés. Une étude comparative est menée avec les méthodes de Durbin [Dur59] (MA) et de Levinson (AR), fondées sur le moindres carrés, afin de mettre en évidence les différences entre la méthode proposée et cette famille de méthodes. Nous nous intéressons en particulier aux propriétés de moyennage des singularités spectrales dans le cas 1-D et le cas 2-D, ainsi qu'aux facteurs les conditionnant. Les sections suivantes sont consacrées aux deux applications.

Dans le contexte de l'analyse d'images texturées, nous adressons la représentation d'images texturées par les modèles issus de la décomposition de Wold. La plupart des méthodes d'estimation requiert une séparation préalable de composantes. La séparation des composantes a été abordée par Francos [FMP93] à l'aide des approches visant la détection de composantes harmoniques et évanescents fondée sur l'amplitude des maxima dans le spectre de l'image. Ultérieurement, Liu et Picard [LP99] ont proposé une approche plus robuste fondée sur l'utilisation de relations intrinsèques fondamentales des harmoniques, et l'utilisation de la transformée de Hough pour la détection de évanescents. Nous proposons une nouvelle approche pour la séparation de la composante déterministe et la composante complètement non-déterministe (CND) d'une image. Cette approche exploite les propriétés de la méthode d'estimation déjà énoncée. Le schéma que nous proposons consiste notamment à utiliser l'estimation de la fonction extérieure d'une image texturée, et qui caractérise sa composante composante CND, pour construire un filtre qui 'blanchisse' ou atténue cette composante. En conséquence la composante déterministe est mise en évidence et peut être récupérée plus aisément, à l'aide de méthodes fondées sur le seuillage.

Dans le cadre des communications numériques, nous nous intéressons à la simulation de canaux sans fils de type Rayleigh. Jakes [Jak74] présente les propriétés statistiques d'un canal Rayleigh. En le modélisant par une somme infinie d'exponentielles, ils ont montré que ce processus gaussien complexe a une densité en forme de U, à bande limité et présentant deux

pics situés à plus ou moins la fréquence Doppler maximale du canal. Fondée sur ces propriétés plusieurs approches ont été développées pour la simulation de canaux. On peut distinguer trois familles d'approches :

- Méthodes fondées sur la somme de sinusoïdes [Jak74, DBC93, PB01, ZX03].
- Algorithmes fondés sur la transformée inverse de Fourier [Smi75, YB00].
- Les méthodes de filtrage temporel du bruit blanc [BB05b, VT93].

Dans la troisième famille d'approches, nous proposons d'utiliser la méthode d'estimation proposée afin de simuler de canaux de type Rayleigh à l'aide de modèles de type MA, AR et ARMA. La méthode d'estimation proposée est utilisée pour approximer le facteur spectral extérieur de la DSP par des polynômes (modèle MA fini) ou par des fonctions rationnelles (modèles AR et ARMA). Une étude comparative est menée afin d'identifier les avantages qu'apportent ces nouveaux simulateurs.

Dans le troisième chapitre nous abordons la représentation et le codage hybride d'images. Le codage hybride utilise conjointement une approche classique pour le codage de la partie structurée (aussi appelé partie cartoon) d'une image, et une approche paramétrique pour la représentation des régions dites texturées de l'image. Les algorithmes de compression d'image standards sont fondés sur la parcimonie de la représentation d'une image dans le domaine de la transformée utilisée. Ainsi, le codage fondé sur la transformée en ondelettes (TO) représente efficacement les régions régulières et les points singuliers isolés. Cependant, les régions d'une image qui présentent un aspect irrégulier, c'est-à-dire avec de nombreuses variations spatiales abruptes, comme c'est le cas des textures, ont des représentations moins parcimonieuses dans le domaine de la TO.

Différents travaux ont montré que les images texturées pouvaient être caractérisées efficacement par des représentations paramétriques telles que celles proposées par la décomposition de Wold [SFP96]. D'un point de vue général, l'utilisation d'un modèle adapté aux propriétés de chacun des champs permet de caractériser l'image avec un nombre réduit de paramètres.

La stratégie utilisée dans ce chapitre vise à tirer profit des qualités de la représentation fondée sur la transformée en ondelettes pour l'information structurée de l'image (partie "cartoon") et les modèles liés à la décomposition de Wold pour sa composante texturée.

Dans la littérature, d'autres travaux proposent des schémas de codage hybride d'images utilisant pour la modélisation de textures :

- les modèles fondés sur la distribution marginale des coefficients d'ondelette [NRK02].
- les modèles autorégressifs (AR) [RSHI96, DK98].

Finalement, le troisième chapitre aborde plusieurs aspects du codage hybride de l'image. Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème de décomposition d'une image dans une composante texturée et une composante non-texturée. Parmi les travaux qui abordent cette problématique, on peut mentionner les approches fondées sur la variation totale [VO03, Mey01, AABFC05]. Nous proposons une nouvelle approche de décomposition fondée sur la régularité locale et qui s'effectue dans le domaine des ondelettes. La régularité d'un signal est mesurée à l'aide des exposants de Lipschitz (Holder). Le signe de cet exposant est lié à l'évolution de l'amplitude des coefficients d'ondelettes dans le voisinage d'un point (x, y) . Dans l'approche de décomposition proposée, on utilise le signe des exposants Lipschitz pour identifier les coefficients d'ondelettes associés à la composante texturée et à la composante non texturée. Pour l'estimation des exposants de Lipschitz nous utilisons un opérateur proposé par Hsung

[HLS99], auquel nous avons introduit une modification sur le support de calcul de sorte qu'il soit isotropique et accessoirement réduise ainsi le coût calculatoire. Après cette classification de coefficients d'ondelettes (texturée et non-texturées), nous effectuons trois étapes de post-traitement :

- Élimination de régions des coefficients connexes de taille réduite.
- Détection des contours et singularités dans l'image et assignation de ces coefficients d'ondelettes à la composante non texturée.
- Pour le comportement d'évolution des amplitudes d'ondelette qu'on associe aux composantes périodiques (amplitude croissante et puis décroissante) on affecte les coefficients à la composante texturée.

Cette approche est comparée à une approche de type variation totale, du point de vue de la complexité calculatoire et de la pertinence pour l'application en codage hybride.

Ensuite, nous proposons un algorithme qui effectue la segmentation de la composante texturée en plusieurs régions stationnaires qui seront ensuite modélisées.

La représentation hybride résultante est exploitée dans un schéma de compression qui comporte :

1. Un codage fondé sur les ondelettes pour la composante non texturée,
2. Une modélisation de type Wold pour la composante texturée à l'aide de
 - Modèles AR : pour les composantes aléatoires,
 - Modèles sinusoïdaux : pour les composantes périodiques.

Nous présentons un étude comparative entre l'approche hybride proposée et une approche utilisant uniquement les ondelettes afin d'identifier les avantages et les limites de l'approche proposée.

Enfin, quelques exemples de représentation et de codage d'images utilisant le schéma de codage hybride combinant les ondelettes et les modèles issus de la décomposition de Wold sont présentés.

Chapitre 1

Processus stochastiques et décomposition de Wold

Ce chapitre est dédié aux développements théoriques concernant la décomposition de Wold d'un processus stochastique stationnaire, dans les cas mono- et multi- dimensionnel. On introduit le cadre hilbertien des processus stationnaires, les mesures spectrales associées et leur représentation via l'isomorphisme canonique de Kolmogorov. On donne ensuite la construction des composantes de la décomposition Wold, dans le cadre de la prédiction linéaire, à l'aide de la représentation des processus comme l'orbite sur un vecteur cyclique d'un opérateur unitaire associé au processus. L'extension Helson-Lowdenslager du théorème de Szégo permet de caractériser la partie aléatoire de la décomposition et d'en déduire une représentation générale de type MA. On analyse ensuite la partie déterministe du point de vue spectral afin de mettre en évidence des représentations paramétriques de ses composantes. Finalement, on montre comment ces représentations paramétriques conduisent à des modèles génériques que l'on utilise dans les applications.

Dans le cadre du traitement du signal ou de l'image, les données de départ sont en général des ensembles finis d'échantillons de la forme :

$$\mathbb{C} \ni \{x_1, \dots, x_N\} \quad (\text{cas 1-D})$$

$$\mathbb{C} \ni \{x_{i,j}\} \quad \{(i,j) \in (1,1), \dots, (M,N)\} \quad (\text{cas 2-D})$$

L'optique du contexte stochastique est de regarder ces échantillons comme étant non pas des scalaires, mais des variables aléatoires dans un certain espace de probabilité. En tant que fonctions mesurables, ces variables sont supposées avoir une moyenne nulle et une variance finie, ce qui permet de les regarder comme des vecteurs dans un certain espace de Hilbert L^2 . Cette optique permet d'utiliser l'appareil hilbertien de la théorie des opérateurs, sous l'hypothèse de stationnarité au sens large que l'on précisera dans la section suivante. En plus de la stationnarité au sens large, on suppose que l'hypothèse d'ergodicité¹ est satisfaite et que, de ce fait, les moments statistiques jusqu'au second ordre dans l'espace probabilisé peuvent être approchés par leurs équivalents calculés spatialement sur des réalisations.

1. Voir l'annexe B dédiée à l'ergodicité.

1.1 Définitions et propriétés basiques

1.1.1 Covariances et stationnarité au sens faible

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité (c'est-à-dire Ω un ensemble quelconque, A une tribu ou σ -algèbre sur Ω et P une mesure positive sur cette σ -algèbre telle que $P(\Omega) = 1$).

Définition 1.1.1. *On appelle processus (ou champ) stochastique stationnaire d'ordre 2 sur $\mathbb{Z}^n$ une application*

$$\mathbb{Z}^n \ni \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto x_\alpha \in L^2(\Omega, P) \quad (1.1)$$

telle que les x_α sont de variables aléatoires complexes dans $L^2(\Omega, P)$, de moyenne nulle et satisfaisant

$$\text{cov}(x_{\alpha+\gamma}, x_{\beta+\gamma}) = \text{cov}(x_\alpha, x_\beta) \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n). \quad (1.2)$$

où

$$\begin{aligned} \text{cov}(f, g) &= \int_{\Omega} (f - E(f)) \overline{(g - E(g))} dP \quad \text{et,} \\ E(f) &= \int_{\Omega} f dP \end{aligned} \quad (1.3)$$

Le fait que les variables x_α sont à moyenne nulle permet de réécrire la dernière condition sous la forme

$$\langle x_{\alpha+\gamma}, x_{\beta+\gamma} \rangle = \langle x_\alpha, x_\beta \rangle \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.4)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega, P)$

$$\langle f, g \rangle = E(f\bar{g}) = \int_{\Omega} f\bar{g} dP \quad f, g \in L^2(\Omega, P) \quad (1.5)$$

Ainsi on regardera toujours un processus stationnaire comme ayant des valeurs dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, P)$. Quelques observations d'ordre général sont nécessaires concernant le cadre théorique considéré vis-à-vis des applications concrètes qui l'imposent :

1. D'abord le contexte stochastique des variables aléatoires est considéré vu la difficulté de trouver des approches précises pour l'étude et la modélisation de certains problèmes concrets, comme par exemple la prédiction à laquelle on s'intéressera. Comme la majorité des problèmes concrets imposent un espace de probabilité Ω infini, l'espace $L^2(\Omega, P)$ sera un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie.

2. Le problème qui apparaît dès le départ de toute modélisation est que l'espace de probabilité Ω n'est pas connu et ne peut pas être connu en partant des applications concrètes. Considérant que l'on travaille dans un $L^2(\Omega, P)$ abstrait, on ne perd rien à la généralité en se plaçant dans un sous-espace plus petit, plus précisément dans le sous-espace H engendré par les vecteurs du processus stochastique considéré. Cette restriction à un cas particulier ne fait rien perdre à la généralité du contexte vis-à-vis des applications, mais par contre permet des simplifications très importantes des résultats.

En conclusion nous regarderons dorénavant un processus stochastique stationnaire d'ordre 2 comme une collection $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ de vecteurs dans un espace de Hilbert séparable, de dimension infinie, satisfaisant :

- i) $\langle x_{\alpha+\gamma}, x_{\beta+\gamma} \rangle = \langle x_\alpha, x_\beta \rangle \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n)$
- ii) $H = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} x_\alpha$, où $\vee$ désigne la fermeture de la combinaison linéaire.

On appellera le sous-espace H l'espace du processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

1.1.2 Représentation spectrale de la fonction d'auto-covariance

Le résultat suivant, bien connu, est une généralisation immédiate de son analogue dans le cas $n = 2$ dans [HL58] (p.168).

Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stationnaire d'ordre 2 ayant l'espace de Hilbert H . Il existe une mesure² borélienne positive μ sur le tore de dimension n , $\mathbb{T}^n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}^n$ telle que

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-j\langle \alpha - \beta, t \rangle} d\mu(t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.6)$$

où $t = (t_1, \dots, t_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ et $\langle \alpha - \beta, t \rangle \equiv \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) t_i$.

Démonstration. On définit l'application $\rho : \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{C}$ par

$$\rho(\alpha) = \langle x_\alpha, x_\theta \rangle \quad (1.7)$$

où $\theta = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^n$. Alors ρ est une fonction positivement définie sur le groupe $\mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire pour tout $a_1, \dots, a_k$ complexes et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans $\mathbb{Z}^n$ on a

$$\sum_{i,j=1}^k a_i \bar{a}_j \rho(\alpha_i - \alpha_j) \geq 0 \quad (1.8)$$

En effet, vu la stationnarité du processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, cette inégalité revient à

$$\left\| \sum_{i=1}^k a_i x_{\alpha_i} \right\|^2 \geq 0. \quad (1.9)$$

Alors par le théorème de Herglotz, Bohnert et Weil sur les fonctions positivement définies, il existe une mesure positive μ sur $\mathbb{T}^n$, telle que

$$\rho(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-j\langle \alpha, t \rangle} d\mu(t) \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.10)$$

Ceci revient à dire que les produits scalaires $\langle x_\alpha, x_\theta \rangle$ sont les coefficients de Fourier d'une certaine mesure μ . En plus, de la stationnarité du processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et de la dernière relation on obtient

$$\langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} e^{-j\langle \alpha - \beta, t \rangle} d\mu(t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.11)$$

□

2. L'annexe D est dédiée à un rappel des définitions concernant les mesures.

1.1.3 Représentation d'un processus stationnaire comme l'action d'un groupe d'opérateurs unitaires.

Dans cette section nous présentons un théorème qui donne la représentation de tout processus stationnaire comme l'image d'une certaine famille commutative unique d'opérateurs unitaires sur un vecteur *-cyclique³. Il montre aussi la liaison de ce groupe d'unitaires avec la mesure associée à la fonction d'autocorrélation du processus

Nous allons désigner $Z_\mu = (Z_1^\mu, \dots, Z_n^\mu)$ la famille commutative d'opérateurs normaux sur $L^2(\mu)$ de multiplication par des variables indépendantes :

$$Z_k^\mu f(z_1, \dots, z_n) = z_k f(z_1, \dots, z_n) \quad (1.12)$$

où $z = (z_1, \dots, z_n)$ appartient à un support compact dans $\mathbb{C}^n$ de mesure μ .

Pour $z = (z_1, \dots, z_n)$ dans $\mathbb{T}^n$ et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$ on note par z^α le produit

$$z^\alpha \equiv \prod_{k=1}^n z_k^{\alpha_k} \quad (1.13)$$

et on utilisera la même notation pour la fonction sur $\mathbb{T}^n$ qui envoie z dans z^α .

Théorème 1.1.2. *Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stochastique dans l'espace de Hilbert H et soit μ la mesure borélienne sur $\mathbb{T}^n$ associée à sa fonction d'auto-corrélation (paragraphe 1.1.2). Il existe une unique famille commutative $U = (U_1, \dots, U_n)$ d'opérateurs unitaires sur H admettant un vecteur *-cyclique x_θ telle que*

$$x_\alpha = U^\alpha x_\theta \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.14)$$

De plus l'opérateur U (opérateur sur H) est unitairement équivalent à Z_μ sur $L^2(\mu)$. La mesure spectrale à valeurs projecteurs⁴ de U , qu'on désigne par E vérifie :

$$\mu = E_{x_\theta, x_\theta}. \quad (1.15)$$

L'intégrale par rapport à la mesure spectrale E_{x_θ} est définie via les intégrales par rapport aux mesures scalaires μ associées à E , et le théorème de Riesz de représentations de formes linéaires continues. Ainsi le résultat de cette intégrale est un vecteur en H comme suit :

$$x_\alpha = \int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha dE_{x_\theta}. \quad (1.16)$$

Démonstration. On définit un opérateur $W : L^2(\mu) \mapsto H$ (l'isomorphisme de Kolmogorov ou canonique) par la relation

$$W(z^\alpha) = x_{-\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n). \quad (1.17)$$

3. Le lecteur peut trouver les définitions d'opérateur unitaire et vecteur *-cyclique dans le glossaire de l'annexe A.

4. Pour un rappel sur les mesures spectrales à valeur projecteur le lecteur peut consulter [Bea88b], page 143.

De la relation (1.6) on déduit que pour tout α et β dans $\mathbb{Z}^n$ on a

$$\langle Wz^\alpha, Wz^\beta \rangle_H = \langle x_{-\alpha}, x_{-\beta} \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} e^{j\langle \alpha - \beta, t \rangle} d\mu(t) = \int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha z^{-\beta} d\mu(t) = \langle z^\alpha, z^\beta \rangle_{L^2(\mu)}, \quad (1.18)$$

et comme les fonction $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ forment une suite dense dans $L^2(\mu)$ on déduit que W est une isométrie. En plus, comme $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est aussi une suite dense dans H appartenant à l'image de W , il résulte que W est surjectif, donc W est un unitaire de $L^2(\mu)$ sur H .

On définit maintenant la famille commutative d'unitaires $U = (U_1, \dots, U_n)$ sur H par

$$U_k = WZ_kW^{-1} \quad (1.19)$$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{W} & L^2(\mu) \\ U_k \downarrow & & \downarrow Z_k^\mu \\ H & \xrightarrow{W} & L^2(\mu) \end{array}$$

donc par construction U est unitairement équivalent à Z_μ , ce qui montre aussi que U est une famille commutative d'unitaires (car Z_μ est une famille commutatives d'unitaires). En plus, en utilisant (1.19) on obtient

$$\begin{aligned} U^\alpha x_\theta &= U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_n^{\alpha_n} x_\theta \\ &= W Z_1^{\mu^{\alpha_1}} Z_2^{\mu^{\alpha_2}} \dots Z_n^{\mu^{\alpha_n}} W^{-1} x_\theta \\ &= W Z_1^{\mu^{\alpha_1}} Z_2^{\mu^{\alpha_2}} \dots Z_n^{\mu^{\alpha_n}} 1 \\ &= W(z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_n^{\alpha_n}) \\ &= W(z^\alpha) = x_\alpha \end{aligned} \quad (1.20)$$

ce qui montre (1.14).

Ayant présenté l'opérateur unitaire U nous pouvons vérifier la condition de stationnarité du processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ qu'il génère comme suit :

$$\begin{aligned} \langle x_n, x_m \rangle &= \langle U^n x_\theta, U^m x_\theta \rangle \\ &= \langle (U^m)^* U^n x_\theta, x_\theta \rangle \\ &= \langle (U^*)^m U^n x_\theta, x_\theta \rangle \\ &= \langle U^{-m} U^n x_\theta, x_\theta \rangle \\ &= \langle U^{n-m} x_\theta, x_\theta \rangle \\ &= \langle x_{n-m}, x_\theta \rangle. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Maintenant de (1.6) et (1.14) et des propriétés des familles commutatives d'opérateurs normaux on déduit que

$$\int_{\mathbb{T}^n} e^{j\langle \alpha, t \rangle} d\mu = \langle x_\alpha, x_\theta \rangle = \langle U^\alpha x_\theta, x_\theta \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} e^{j\langle \alpha, t \rangle} dE_{x_\theta, x_\theta}, \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.22)$$

et comme l'ensemble $(z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est dense dans l'espace de Banach $\mathbb{C}(\mathbb{T}^n)$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}^n$, on obtient

$$\int_{\mathbb{T}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{T}^n} f dE_{x_\theta, x_\theta} \quad (1.23)$$

ce qui revient, via le théorème de Riesz-Kakutani, à $\mu = E_{x_\theta, x_\theta}$, donc (1.15) est prouvé.

Finalement, toujours de (1.14) on trouve

$$x_\alpha = U^\alpha x_\theta = \int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha dE_{x_\theta}, \quad (1.24)$$

donc (1.16) est prouvé et la démonstration est terminée. $\square$

Si $U = (U_1, \dots, U_n)$ est une famille (unique) d'unitaires selon ce que l'on a exposé précédemment on dira que U *génère le processus* $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, ou encore que U *est la famille d'unitaires associés à* $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

On termine cette section par une discussion extrêmement importante sur les sommes directes orthogonales de processus stationnaires.

Supposons que $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ soit deux processus stationnaires ayant les espaces K et L , et on considère le processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} = (v_\alpha \oplus w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ dans $K \oplus L$. Quand l'espace du nouveau processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est $K \oplus L$ est-il tout entier ? Cette question admet la formulation "réciproque" suivante : on suppose que $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est un processus stationnaire ayant l'espace $K \oplus L$ et on considère les projections orthogonales $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ de $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sur K et L respectivement. Est-ce que les deux familles sont des processus stationnaires dans K et L ?

La réponse à ces deux questions est négative en général, donc on ne peut pas, en général, ni faire des projections sur n'importe quels sous-espaces en gardant la stationnarité, ni sommer orthogonalement d'une part les processus et d'autre part leurs espaces ! Ceci n'est pas possible que dans le cas particulier suivant : quand les mesures spectrales des composantes de la somme orthogonale sont *mutuellement singulières*⁵, ou, de manière équivalente quand les sous-espaces de projection sont *réduisants*⁶ pour les familles d'unitaires générant les parties, comme le montre le théorème suivant, qui aura une importance cruciale :

Théorème 1.1.3. *Soit H un espace de Hilbert, $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stationnaire ayant l'espace H et généré par la famille $U = (U_1, \dots, U_n)$. Soit $H = K \oplus L$ une décomposition de H en deux sous-espaces orthogonaux⁷ et P et Q les projecteurs orthogonaux sur K et L respectivement. On pose*

$$v_\alpha = Px_\alpha, \quad w_\alpha = Qx_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.25)$$

a) Les familles $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sont des processus stationnaires ayant les espaces K et L respectivement si et seulement si K et L sont réduisants pour U .

Si tel est le cas, soient μ, ν et η les mesures scalaires de $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ respectivement alors :

5. Voir l'annexe D pour un rappel sur les mesures singulières

6. L'annexe C est dédiée à un rappel des définitions des espaces invariants et réduisants à un opérateur.

7. Pour les espaces vectoriels X, Y et W , $X = Y \oplus W \Leftrightarrow (X = Y + W) \wedge (Y \cap W = 0)$.

- b) $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sont générés par les restrictions de U à K et L respectivement ;
- c) $\mu = \nu + \eta$
- d) ν et η sont mutuellement singulières.

Démonstration. Observons d'abord que, indépendamment de a), la famille $(v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ engendre K et $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ engendre L .

a) Si K est réduisant pour U alors L est automatiquement réduisant pour U car K et L sont des sous-espaces orthogonaux. On a donc $PU = UP$ et $QU = UQ$, et ainsi

$$\begin{aligned} v_\alpha &= Px_\alpha = PU^\alpha x_\theta = U^\alpha Px_\theta = U^\alpha v_\theta, \\ w_\alpha &= Px_\alpha = QU^\alpha x_\theta = U^\alpha Qx_\theta = U^\alpha w_\theta, \end{aligned} \quad (1.26)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Par conséquent, (v_α) et (w_α) sont générés par les restrictions de U à K et L respectivement, donc ils vérifient la condition de stationnarité (voir l'équation (1.21)) et donc, avec la remarque au début de la preuve, ils sont bien des processus stationnaires d'espaces K et L respectivement.

Réciproquement, supposons que $(v_\alpha)_\alpha$ et $(w_\alpha)_\alpha$ sont des processus stationnaires d'espaces K et L respectivement et soient $V = (V_1, \dots, V_n) \in B(K)^n$ et $W = (W_1, \dots, W_n) \in B(L)^n$ les familles d'unitaires qui les génèrent⁸. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ on a alors

$$\begin{aligned} U_k x_\alpha &= x_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k+1, \dots, \alpha_n)} \\ &= v_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k+1, \dots, \alpha_n)} \oplus w_{(\alpha_1, \dots, \alpha_k+1, \dots, \alpha_n)} \\ &= \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & W_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ w_\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} V_k & 0 \\ 0 & W_k \end{pmatrix} x_\alpha \end{aligned} \quad (1.27)$$

et comme les $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sont denses dans H on en déduit que la décomposition de U par rapport à la somme directe orthogonale $H = K \oplus L$ est

$$U = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

donc K et L sont réduisants pour U .

L'affirmation b) résulte directement de la dernière relation matricielle obtenue.

Pour c) on écrit

$$\int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha d\mu = \langle x_\alpha, x_\theta \rangle = \langle v_\alpha, v_\theta \rangle + \langle w_\alpha, w_\theta \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha d(\nu + \eta) \quad (1.29)$$

et ainsi, avec le même argument de densité des polynômes dans $C(\mathbb{T}^n)$ et le théorème Riesz Kakutani on obtient $\mu = \nu + \eta$.

Enfin pour d), par le théorème 1.1.3, U , V et W sont unitairement équivalents respectivement à Z_μ , Z_ν et Z_η . Comme $U = V \oplus W$, on en déduit que $Z_\nu \oplus Z_\eta$ admet un vecteur *-cyclique (car il est unitairement équivalent à U , qui a le vecteur *-cyclique x_θ , donc on a $\nu \perp \eta$).

□

8. On remarque que v_θ (respectivement w_θ) est un vecteur *-cyclique pour V (respectivement W).

1.2 Décomposition de Wold en deux parties

Ce paragraphe introduit les deux notions de base de la théorie de la prédiction linéaire des processus stationnaires, à savoir le *non-déterminisme* et le *déterminisme*.

Comme l'indique le sens propre du terme, la prédiction consiste à trouver (dans un certain cadre rigoureux qui sera précisé) un maximum d'information sur le "futur" d'un processus, en disposant de toute l'information sur son "passé" et son "présent". Le déterminisme correspond au cas où le futur peut être complètement prédit, et le non-déterminisme représente le cas contraire.

Comme ces trois notions temporelles mentionnées, passé, présent et futur ont essentiellement un contenu de précédence relative, il est impératif de se placer dès le début dans un cadre permettant d'ordonner complètement le domaine de définition d'un processus. Ceci mène naturellement au contexte des groupes totalement ordonnés, qui feront l'objet du début de la première partie de ce paragraphe.

Une fois définie la dualité déterminisme et non déterminisme, deux problèmes émergent naturellement :

Le premier problème consiste à décider à quelles des deux catégories un processus stationnaire donné fait partie. Pour y répondre, l'outil fondamental est toujours un théorème de type Szegő, qui représente l'instrument pour décider si un processus est déterministe ou non-déterministe. La première sous-section contient ce théorème dans le cas le plus général et dans le cas particulier qui nous intéresse.

Le deuxième problème est de déterminer s'il est possible de décomposer un processus stationnaire quelconque en deux parties, telle qu'une partie contienne le "maximum de déterminisme" et l'autre le minimum, ce qui revient à un non déterministe complet (dans un sens qui sera précisé). Une telle décomposition est en général appelée *décomposition de type Wold (en deux parties)* d'un processus stationnaire, et fera l'objet de la deuxième sous-section.

La troisième et la quatrième sous-sections présentent les propriétés et la présentation des parties déterministe et complètement non-déterministe d'un processus stationnaire, respectivement.

1.2.1 Théorème de Szegő généralisé

Définition 1.2.1. Soit $(G, +)$ un groupe et $\leq$ une relation d'ordre totale sur G . On dit que $(G, +, \leq)$ est un groupe totalement ordonné pour tout $x, y, z, \in G$ tels que $x \leq y$ et on a $x + z \leq y + z$.

On dit dans ce cas que l'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition.

Si $(G, +, \leq)$ est un groupe totalement ordonné, on note par G_+ , respectivement G_- , c'est-à-dire

$$G_+ = \{x \in G : x > \theta\} \quad G_- = \{x \in G : x < \theta\} \quad (1.30)$$

Quelques propriétés immédiates découlent de la comptabilité de l'ordre par rapport à l'addition et sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.2. Soit $(G, +, \leq)$ un groupe totalement ordonné.

- a) $\theta \notin G_+$;
- b) Pour tout x dans $G \setminus \{\theta\}$, $x \in G_+$ si et seulement si $-x \in -G_+$;

- c) $G_+ \cup \theta$ est un semi-groupe de G ;
- d) $G_- = -G_+$;
- e) $G = G_+ \cup G_- \cup \theta$;
- f) Pour tout x dans G ,

$$\{y \in G : y > x\} = x + G_+ \quad \{y \in G : y < x\} = x + G_- = x - G_+ \quad (1.31)$$

On appellera (dans l'esprit de la terminologie de Helson et Lowdenslager [HL58]) un *demi-espace* un ensemble $S \subset G$ satisfaisant les propriétés a), b) et c) de G_+ dans la proposition précédente. On déduit de ces propriétés que l'ordre de G est déterminé de façon unique par les trois premières propriétés du semigroupe des éléments positifs. Plus précisément, si S est un demi-espace, l'ordre sur G défini par :

$$x \leq y \text{ si } x = y \text{ ou } y - x \in S \quad (1.32)$$

fait de G un groupe totalement ordonné ayant exactement S comme ensemble d'éléments strictement positifs

Nous allons utiliser ces définitions à l'heure de présenter l'extension la plus générale du théorème de Szegö au cas des groupes compacts ayant des caractères totalement ordonnés, (la généralisation est due à Helson et Lowdenslager [HL58], Thm. 12). Nous regardons ensuite les cas du poly-tore.

Avant d'aborder cette extension, considérons un problème qui illustre le lien entre la prédiction linéaire et le théorème de Szegö. Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in G}$ un processus stationnaire et μ la mesure associée à sa fonction d'autocorrélation. Considérons l'approximation du vecteur x_θ par une combinaison linéaire d'éléments $(x_g)_{g \in G_+}$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left\| x_\theta + \sum_{g \in G_+} a_g x_g \right\|^2 &= \langle x_\theta, x_\theta \rangle + \sum \bar{a}_g \langle x_\theta, x_g \rangle + \sum a_g \langle x_g, x_\theta \rangle + \sum a_g \bar{a}_{g'} \langle x_g, x_{g'} \rangle \\ &= \rho(\theta) + \sum \bar{a}_g \bar{\rho}(g) + \sum a_g \rho(g) + \sum a_g \bar{a}_{g'} \rho(g - g') \\ &= \int \left| 1 + \sum_{g \in G_+} a_g e^{-j\langle g, t \rangle} \right|^2 d\mu(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ainsi, ce problème d'approximation est équivalent à la minimisation de la dernière intégrale dans 1.33. Une évaluation explicite de l'infimum de cette expression est donnée par le théorème de Szego.

Théorème 1.2.3. (Théorème de Szegö généralisé) *Soit K un groupe compact tel que le groupe (discret) G de ses caractères possède un ordre total $\leq$, et soit G_+ l'ensemble des éléments positifs de G . On note par σ la mesure de Haar normalisée sur les boréliens de K .*

Soit μ une mesure borélienne positive sur K et

$$d\mu = f d\sigma + d\mu_s \quad (1.34)$$

la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à σ ($f \in L^1(\sigma)$ et μ_s singulière par rapport à σ). Alors

$$\inf_P \int_K |1 + P(z)|^2 d\mu(z) = \exp \left(\int_K \log(f) d\sigma \right) \quad (1.35)$$

où l'infimum est pris sur toutes les somme finies dans G de la forme

$$P = \sum_{g \in G_+} a_g e^{j\langle g, t \rangle} \quad (1.36)$$

avec des coefficients $a(g)$ complexes (le terme à droite dans 1.35 est considéré nul si l'intégrale logarithmique diverge).

Remarque : Le théorème initial de Szegö représente le cas particulier $K = \mathbb{T}$.

Considérons maintenant le cas particulier du groupe compact $(\mathbb{T}^n, \cdot)$ (avec multiplication par composante et topologie naturelle). La mesure de Haar σ coïncide avec la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^n$.

L'espace des caractères de K est alors (isomorphe à) $(\mathbb{Z}^n, +)$ muni de la topologie discrète et d'un ordre total ayant S comme demi-espace des éléments strictement positifs. L'action du caractère $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ sur l'élément $t \in \mathbb{T}^n$ est

$$\alpha(z) = \exp(i \langle \alpha, z \rangle) = \exp \left(i \sum_{k=1}^n \alpha_k t_k \right) \quad (1.37)$$

Une somme finie telle que (1.36) est donc un polynôme trigonométrique de la forme

$$P(t) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha e^{j\langle \alpha, t \rangle} \quad (1.38)$$

Soit μ une mesure borélienne positive sur $\mathbb{T}^n$ et

$$H_S = \bigvee_{\alpha \in S} e^{j\langle \alpha, z \rangle} \quad (1.39)$$

dans $L^2(\mu)$. Soit g_0 la projection orthogonale de la fonction 1 de $L^2(\mu)$ sur H_S dans $L^2(\mu)$, on a :

$$1 = f_0 + g_0, \quad f_0 \in L^2(\mu) \ominus H_S, \quad g_0 \in H_S. \quad (1.40)$$

Comme la projection orthogonale d'un vecteur d'un espace de Hilbert sur un sous-espace fermé est l'élément du sous-espace réalisant la meilleure approximation du vecteur avec des éléments du sous-espace, on a

$$\|f_0\|^2 = \|1 - g_0\|^2 = \inf_{h \in H_S} \|1 - h\|^2 = \inf_{h \in H_S} \|1 + h\|^2 \quad (1.41)$$

mais comme la famille $(e^{j\langle \alpha, z \rangle})_{\alpha \in S}$ est dense dans H_S , ceci revient à

$$\|f_0\|^2 = \inf_P \|1 + P\|_{L^2(\mu)}^2 = \inf_P \int_{\mathbb{T}^n} |1 + P|^2 d\mu(z), \quad (1.42)$$

où l'infimum est pris sur tous les polynômes trigonométriques de la forme (1.38).

On obtient ainsi le corollaire suivant du théorème général 1.2.3 de Helson et Lowdenslager, qui représente l'outil de prédiction dont nous avons besoin :

Corollaire 1.2.4. (Szegő-Krein-Kolmogorov) Soit S un demi-espace de $\mathbb{Z}^n$, $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stochastique stationnaire ayant l'espace H , $H_S = \bigvee_{\alpha \in S} x_\alpha$ et f_0 la projection de x_α sur l'orthogonal de H_S . Soit μ la mesure spectrale de $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et

$$d\mu = f d\sigma + d\mu_s \quad (1.43)$$

sa décomposition de Lebesgue, alors

$$\|f_0\|^2 = \exp \left(\int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma \right). \quad (1.44)$$

1.2.2 La décomposition de Wold en deux parties

On considère le groupe $(\mathbb{Z}^n, +)$ ordonné par un ordre total $\leq$, et un processus stationnaire $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sur $\mathbb{Z}^n$, ayant l'espace H .

Définition 1.2.5. Soit $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ fixé.

a) On appelle **le passé** de l'élément x_α du processus le sous-espace fermé de H engendré par les vecteurs x_β du processus tel que $\beta < \alpha$ noté par $H_\alpha(x)$

$$H_\alpha(x) = \bigvee_{\beta < \alpha} x_\beta \quad (1.45)$$

b) On appelle **l'innovation** du processus $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sur $\mathbb{Z}^n$ au point α la différence i_α entre x_α et sa projection l'orthogonale sur son passé H_α (ou, de manière équivalente, la projection de x_α sur l'orthogonal dans H de H_α).

$$i_\alpha \equiv x_\alpha - P_\alpha(x)x_\alpha = (\mathbf{1}_H - P_\alpha(x))x_\alpha. \quad (1.46)$$

où $P_\alpha(x)$ désigne le projecteur orthogonal de H sur H_α .

Les passés des éléments du processus forment une famille croissante de sous-espaces par rapport à l'inclusion des sous-espaces et par rapport à l'ordre $\leq$. Cependant pour chaque $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, i_α est orthogonal à H_α , mais est contenu dans tous les H_β avec $\beta > \alpha$. Ceci implique que la famille $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est une famille orthogonale dans H , c'est-à-dire que le produit scalaire de n'importe quel doublet d'éléments d'indices ayant des indices différents est nul.

La famille $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ des innovations représente un processus stationnaire. Pour démontrer ceci on a besoin d'une relation de commutation entre les projections sur les passés et la famille d'unitaires du processus définie dans la section 1.1.3 et qui précise comment les unitaires agissent sur les passés des éléments du processus.

Soit donc $U = (U_1, \dots, U_n)$ la famille d'unitaires associée au processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

Proposition 1.2.6. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ les égalités suivantes ont lieu :

$$U^\beta H_\alpha = H_{\alpha+\beta} \quad (\beta \in \mathbb{Z}^n), \quad (1.47)$$

$$U^\beta P_\alpha = P_{\alpha+\beta} U^\beta \quad (\beta \in \mathbb{Z}^n). \quad (1.48)$$

Démonstration. On déduit des relation (1.14) et (1.45) :

$$U^\beta H_\alpha = U^\beta \bigvee_{\gamma < \alpha} x_\gamma = \bigvee_{\gamma < \alpha} U^\beta x_\gamma = \bigvee_{\gamma < \alpha} x_{\beta+\gamma} = \bigvee_{\gamma < \alpha+\beta} x_\gamma = H_{\alpha+\beta}, \quad (1.49)$$

ce qui prouve 1.47.

Pour montrer la deuxième relation, on considère la paire de décompositions de H en sommes directes

$$H = H_\alpha \oplus [H \ominus H_\alpha] = H_{\alpha+\beta} \oplus [H \ominus H_{\alpha+\beta}]. \quad (1.50)$$

Étant donnée la relation (1.47) que l'on vient de prouver, la matrice de U^β par rapport à cette paire de décompositions est de la forme :

$$U^\beta = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad (1.51)$$

avec V unitaire entre H_α et $H_{\alpha+\beta}$ et W unitaire entre $H \ominus H_\alpha$ et $H \ominus H_{\alpha+\beta}$.

Comme les projecteurs orthogonaux P_α et $P_{\alpha+\beta}$ ont respectivement les matrices

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{H_\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

$$P_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{H_{\alpha+\beta}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

par rapport aux décompositions $H = H_\alpha \oplus [H \ominus H_\alpha]$ et $H = H_{\alpha+\beta} \oplus [H \ominus H_{\alpha+\beta}]$ respectivement, on en déduit que :

$$U^\beta P_\alpha = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{H_\alpha} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{H_{\alpha+\beta}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P_{\alpha+\beta} U^\beta \quad (1.54)$$

d'où la relation (1.48). □

Corollaire 1.2.7. *La famille $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ des innovations du processus stationnaire $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est aussi un processus stationnaire, appelé le processus des innovations de $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, en particulier $\|i_\alpha\| = \|i_\theta\|$ pour tout α . De plus le processus des innovations vérifie :*

$$i_\alpha = U^\alpha i_\theta \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.55)$$

Démonstration. De la relation (1.48) dans la proposition précédente et de 1.14 on obtient

$$i_\alpha = (\mathbf{1}_H - P_\alpha)x_\alpha = (\mathbf{1}_H - P_\alpha)U^\alpha x_\theta = U^\alpha(\mathbf{1}_H - P_\theta)x_\theta = U^\alpha i_\theta, \quad (1.56)$$

ce qui démontre la relation (1.55). Ainsi, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$ on a

$$\langle i_{\alpha+\gamma}, i_{\beta+\gamma} \rangle = \langle U^\gamma i_\alpha, U^\gamma i_\beta \rangle = \langle i_\alpha, i_\beta \rangle \quad (1.57)$$

donc $(i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est un processus stationnaire. □

Ceci permet d'introduire la définition suivante qui donne les deux concepts de base de la prédiction linéaire :

Définition 1.2.8. *Un processus stationnaire $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est dit **non-déterministe** (par rapport à l'ordre $\leq$) si le processus stationnaire de ses innovations est non-nul, et il est dit **déterministe** dans le cas contraire.*

Le théorème suivant - conséquence immédiate du théorème de Szegő généralisé - est d'une importance cruciale pour la prédiction en $\mathbb{Z}^n$, donnant la caractérisation spectrale du non-déterminisme :

Théorème 1.2.9. (Helson, Lowdeslager) *Soit $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stationnaire, μ la mesure spectrale sur $\mathbb{T}^n$ associée au processus et $d\mu = f d\sigma + d\mu_s$ la décomposition de Lebesgue de μ par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée σ sur $\mathbb{T}^n$.*

Le processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est non-déterministe si et seulement si

$$\int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma > -\infty. \quad (1.58)$$

Plus précisément, si $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est le processus de ses innovations, alors

$$\|i_\alpha\|^2 = \exp \left(\int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma \right) \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n). \quad (1.59)$$

Démonstration. Soit $U = (U_1, \dots, U_n)$ la famille d'unitaires associée au processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, et $W : L^2(\mu) \rightarrow H$, $W(z^\alpha) = x_{-\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^n$) l'opérateur qui réalise l'équivalence unitaire entre U sur H et Z_μ sur $L^2(\mu)$ (voir la démonstration dans la section 1.1.2). Alors, étant donné le corollaire 1.2.7 et la relation (1.44) on a :

$$\begin{aligned} \|i_\alpha\|_H^2 &= \|i_\theta\|_H^2 = \|x_\theta - P_\theta x_\theta\|_H^2 \\ &= \left\| W(1 - P_{\bigvee_{\alpha > \theta}} z^\alpha) \right\|_H^2 \\ &= \left\| 1 - P_{\bigvee_{\alpha > \theta}} z^\alpha \right\|_{L^2}^2 \\ &= \exp \left(\int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma \right). \end{aligned} \quad (1.60)$$

□

Remarque : Considérant que la condition d'intégrabilité (1.58) ne dépend pas de l'ordre total fixé sur $\mathbb{Z}^n$, une première conséquence très importante du théorème précédent est que le caractère déterministe ou non-déterministe d'un processus stationnaire est invariant au choix de l'ordre $\leq$.

Dans le reste de la sous-sections, on construit la décomposition de Wold en deux parties d'un processus stationnaire.

Considérons un processus stationnaire quelconque $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$, ayant l'espace H et le processus d'innovation $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$. On définit :

$$H_{cnd}(x) = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} i_\alpha, \quad (1.61)$$

$$H_{det}(x) = H \ominus H_{cnd}(x) \quad (1.62)$$

et on note par P_{cnd} et P_{det} les projecteurs orthogonaux sur H_{cnd} et H_{det} respectivement.

Proposition 1.2.10. *Les sous-espaces H_{cnd} et H_{det} de H sont réduisants pour la famille $U = (U_1, \dots, U_n)$ d'unitaires associée au processus $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.*

Démonstration. La relation (1.55) permet d'écrire, pour tout $\beta \in \mathbb{Z}^n$,

$$U^\beta H_{cnd}(x) = U^\beta \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} i_\alpha = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} U^\beta i_\alpha = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} i_{\alpha+\beta} = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} i_\alpha = H_{cnd} \quad (1.63)$$

Si on applique l'opérateur unitaire adjoint de U^β , $(U^\beta)^* = (U^*)^\beta = U^{-\beta}$ à H_{cnd} on obtient le même résultat $(U^\beta)^* H_{cnd} \in H_{cnd}$ ce qui démontre que H_{cnd} est réduisant pour U . Comme H_{cnd} est réduisant pour U , le sous-espace orthogonal de H_{cnd} , à savoir, H_{det} , est réduisant pour U également.

Ces deux sous-espaces étant réduisants pour U , la matrice de U par rapport à la décomposition $H = H_{cnd} \oplus H_{det}$ est

$$U = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

avec V et W les restrictions de U à H_{cnd} et H_{det} respectivement. $\square$

On pose maintenant, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$,

$$v_\alpha \equiv P_{cnd} x_\alpha, \quad w_\alpha \equiv P_{det} x_\alpha \quad (1.65)$$

Lemma 1.2.11. *Les familles $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $w = (w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ sont des processus stationnaires avec les propriétés suivantes :*

a) *L'espace de v est H_{cnd} et l'espace de w est H_{det} ,*

b) *v est généré par V et w est généré par W .*

Si de plus H_{cnd} n'est pas nul (c'est-à-dire si x est non-déterministe), alors :

c) *Si ν et η sont les mesures spectrales scalaires de v et w respectivement, alors ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue σ et η est singulière. Plus, précisément, si $d\mu = f d\sigma + d\mu_s$ est la décomposition de Lebesgue de la mesure scalaire de x , alors*

$$d\nu = f d\sigma \quad \text{et} \quad \eta = \mu_s. \quad (1.66)$$

d) *Si E_V et E_W sont les mesures spectrales à valeurs projecteurs de V et W respectivement, alors E_V est absolument continue et E_W est singulière.*

Démonstration. Du fait que v et w sont des processus stationnaires, les propriétés a) et b) sont des conséquences immédiates du théorème de décomposition 1.1.3 et de la proposition 1.2.10.

Pour c), supposons que $H_{cnd}(x)$ n'est pas nul et soit m la mesure spectrale scalaire du processus d'innovation $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$. Comme i_θ est un vecteur *-cyclique pour V (vue la définition de $H_{cnd}(x)$), les mesures m et ν sont mutuellement absolument continues.

D'autre part, étant donné la relation (1.6), les coefficients Fourier-Stieltjes de m sont

$$\int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha dm = \langle i_\alpha, i_\theta \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \theta \\ \|i_\theta\|^2 & \alpha = \theta \end{cases} \quad (1.67)$$

car les vecteurs $(i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ forment une famille orthogonale dans H . La mesure $\|i_\theta\|^2 \sigma$ (donc un multiple scalaire de la mesure de Lebesgue) a elle aussi les mêmes coefficients, donc $m = \|i_\theta\|^2 \sigma$. Alors, si m est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν l'est aussi et d'après le théorème 1.1.3 d), il en résulte que η est singulière. On a donc que :

$$d\mu = f d\sigma + d\mu_s = \nu + \eta. \quad (1.68)$$

Puisque la décomposition de Lebesgue est unique, on obtient la dernière affirmation de c). Enfin d). est une conséquence du fait que ν et η sont des mesures spectrales pour V et W respectivement, et la preuve est faite. □

Ainsi, tout processus stationnaire $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ se décompose de manière unique en une somme orthogonale de deux processus $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $w = (w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ tels que

- a) Si x est déterministe, alors v est nul ;
- b) Si x est non-déterministe, alors w est déterministe avec une mesure spectrale singulière, et v est non-déterministe avec une mesure spectrale absolument continue.

De plus, à cause de l'unicité de la décomposition de Lebesgue, si on opère la même décomposition pour le processus v , on trouve que $H_{cnd}(v)$ coïncide avec l'espace de v , ou autrement dit

$$H_{cnd}(P_{H_{cnd}(x)}x) = H_{cnd}(x) \quad (1.69)$$

car la mesure spectrale de v , à moins qu'elle ne soit nulle, est déjà absolument continue. Ceci est encore équivalent à :

$$H_{det}(v) = 0 \quad (1.70)$$

Vu le résultat précédent, nous présentons la définition des processus complètement non-déterministes :

Définition 1.2.12. *Un processus stationnaire $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est appelé **complètement non-déterministe** s'il vérifie (1.70) c'est-à-dire si sa partie déterministe est nulle.*

Des considérations précédentes et du théorème 1.2.9 nous pouvons affirmer qu'un processus stationnaire $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ non-nul est complètement non-déterministe si et seulement si sa mesure spectrale ν est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue σ , et la densité f de ν par rapport à σ est log-intégrable, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma > -\infty$.

Enfin, en synthétisant les considérations précédentes, on obtient le théorème de décomposition de Wold en deux parties d'un processus stationnaire :

Théorème 1.2.13. (*Théorème de décomposition de Wold*) Soit $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stationnaire ayant l'espace H , la mesure spectrale $d\mu = fd\sigma + d\mu_s$ et généré par la famille d'unitaires $U = (U_1, \dots, U_n) \in B(H)$. Il existe une unique décomposition orthogonale de H

$$H = H_{cnd} \oplus H_{det} \quad (1.71)$$

réduisant pour U , entraînant une décomposition orthogonale

$$x_\alpha = v_\alpha \oplus w_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.72)$$

du processus x en deux processus stationnaires $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ et $w = (w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ ayant les espaces $H_{cnd}(v)$ et $H_{det}(v)$ respectivement, tels que v soit complètement non-déterministe et w soit déterministe (par rapport à n'importe quel ordre sur $\mathbb{Z}^n$).

De plus, si ν et η sont les mesures spectrales scalaires de v et w respectivement, alors on a :

$$d\nu = fd\sigma \quad \text{et} \quad \eta = \mu_s \quad (1.73)$$

si le processus x est non- non-déterministe, et :

$$\nu = 0 \quad \text{et} \quad \eta = \mu \quad (1.74)$$

si le processus x est déterministe.

La décomposition (1.72) s'appelle la *décomposition de Wold (en deux parties) du processus stationnaire x* .

Dans les deux sections suivantes on donne des descriptions plus précises de chacune de ces deux parties dans la décomposition Wold.

1.2.3 La partie complètement non-déterministe

Dans cette section, on étudie la partie complètement non-déterministe, afin d'obtenir, entre autres propriétés, une représentation "paramétrique" couramment utilisée qui joue un rôle crucial dans les applications.

Plus précisément, on a vu dans la section précédente la caractérisation spectrale d'un processus complètement non-déterministe. Le résultat de représentation qu'on présente dans cette section est en fait une caractérisation de type "spatial", qui permet d'obtenir un processus complètement non-déterministe à partir d'un certain bruit blanc.

On considère donc $(\mathbb{Z}^n, +)$ muni d'un ordre total ayant S comme demi-espace des éléments strictement négatifs et on se place dans le contexte de la section précédente, avec $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stationnaire non-déterministe, donc ayant le processus de ses innovations $i = (i_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ non-nul. On a vu dans la section précédente que la famille des innovations est une famille orthogonale dans H , formée de vecteurs ayant la même norme (corollaire 1.2.7). Maintenant, soit $c_\theta = \|i_\theta\| = \exp(1/2 \int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma) > 0$ (voir théorème 1.2.9), la famille $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ définie par

$$b_\alpha = c_\theta^{-1} i_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.75)$$

est une famille orthonormée dans H (ou un *bruit blanc* de variance 1).

Soit $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ la partie complètement non déterministe de x , obtenue (voir l'équation (1.65)) par la projection orthogonale de x sur $H_{cnd}(x) = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} i_\alpha = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} b_\alpha$.

Nous avons besoin d'une définition générale : si g et h sont deux vecteurs dans un espace de Hilbert H , on définit l'opérateur $g \otimes h \in B(H)$ par :

$$(g \otimes h)(y) = \langle y, h \rangle g, \quad (g \in H) \quad (1.76)$$

qui est un opérateur de rang 1 sur H (l'image de $g \otimes h$ est le sous-espace de dimension 1 $\mathbf{C}g$). Si g est un vecteur de norme 1 dans H , $g \otimes g$ est précisément le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}g$.

La proposition suivante donne une relation de commutation fort utile entre le projecteur orthogonal P_{cnd} sur $H_{cnd}(x)$ et les projecteurs orthogonaux $P_\alpha(x)$ sur les passés $H_\alpha(x)$:

Proposition 1.2.14. *Dans le contexte précisé précédemment, on a :*

$$P_{cnd}(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} b_\beta \otimes b_\beta \quad (1.77)$$

$$P_{cnd}(x)P_\alpha(x) = P_\alpha(x)P_{cnd}(x) = \sum_{\beta < \alpha} b_\beta \otimes b_\beta \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.78)$$

Démonstration. La relation (1.77) est une conséquence triviale du fait que la famille $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est une base orthonormée de $H_{cnd}(x)$.

Pour la deuxième égalité, on observe d'abord que, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$, b_α est soit contenu dans H_β , si $\alpha < \beta$, soit orthogonale à H_β si $\alpha \geq \beta$. Par conséquent

$$P_\beta(x)b_\alpha = \begin{cases} b_\alpha & \alpha < \beta \\ 0 & \alpha \geq \beta \end{cases} \quad (1.79)$$

Alors, en utilisant 1.77 on obtient :

$$P_{cnd}(x)P_\alpha(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} b_\beta \otimes (P_\alpha(x)b_\beta) = \sum_{\beta < \alpha} b_\beta \otimes b_\beta = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} (P_\alpha(x)b_\beta) \otimes b_\beta = P_\alpha(x)P_{cnd}(x) \quad (1.80)$$

□

Dans la suite, nous présentons le processus complètement non-déterministe $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ comme une combinaison linéaire de processus de la famille orthonormée $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$.

Théorème 1.2.15. *Le processus complètement non-déterministe $v = (v_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ satisfait la représentation Moyenne Ajustée (MA) :*

$$v_\alpha = \sum_{\gamma \geq \theta} c_\gamma b_{\alpha-\gamma} \quad (1.81)$$

où les coefficients sont donnés par

$$c_\theta = \|i_\theta\| = \exp \left(1/2 \int_{\mathbb{T}^n} \log(f) d\sigma \right) > 0, \quad c_\gamma = \langle v_\gamma, b_\theta \rangle \quad (\gamma > \theta) \quad (1.82)$$

et vérifient

$$\sum_{\gamma > \theta} |c_\gamma|^2 < \infty \quad (1.83)$$

Réciproquement, tout processus v qui admet une représentation de la forme 1.81 avec $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un bruit blanc de variance 1 et $(c_\gamma)_{\gamma > \theta}$ satisfaisant $c_\theta > 0$ et la relation 1.83, est un processus complètement non déterministe.

Démonstration. Fixons $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ arbitraire. En vertu de (1.46) et (1.75) on a :

$$x_\alpha = i_\alpha + P_\alpha(x)x_\alpha = c_\theta b_\alpha + P_\alpha(x)x_\alpha, \quad (1.84)$$

et comme $b_\alpha \in H_{cnd}$ on obtient

$$v_\alpha = P_{cnd}(x)x_\alpha = c_\theta b_\alpha + P_{cnd}(x)P_\alpha(x)x_\alpha. \quad (1.85)$$

Avec le lemme précédent on trouve alors :

$$\begin{aligned} v_\alpha &= c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} (b_\beta \otimes b_\beta) x_\alpha = c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} \langle x_\alpha, b_\beta \rangle b_\beta = c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} \langle x_\alpha, P_{cnd} b_\beta \rangle b_\beta \\ &= c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} \langle P_{cnd} x_\alpha, b_\beta \rangle b_\beta = c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} \langle v_\alpha, b_\beta \rangle b_\beta. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Mais par le lemme 1.2.11 b) et la relation (1.55) on a :

$$\langle v_\alpha, b_\beta \rangle = \langle U^\alpha v_\theta, U^\beta b_\theta \rangle = \langle U^{\alpha-\beta} v_\theta, b_\theta \rangle = \langle v_{\alpha-\beta}, b_\theta \rangle = c_{\alpha-\beta} \quad (1.87)$$

On trouve donc :

$$v_\alpha = c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} \langle v_\alpha, b_\beta \rangle b_\beta = c_\theta b_\alpha + \sum_{\beta < \alpha} c_{\alpha-\beta} b_\beta = c_\theta b_\alpha + \sum_{\gamma > \theta} c_\gamma b_{\alpha-\gamma} = \sum_{\gamma \geq \theta} c_\gamma b_{\alpha-\gamma}. \quad (1.88)$$

De plus, comme $b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est une famille orthonormée, on a

$$\sum_{\gamma > \theta} |c_\gamma|^2 = \left\| \sum_{\gamma > \theta} c_\gamma b_{\alpha-\gamma} \right\|^2 = \|v_\alpha\|^2 < \infty \quad (1.89)$$

Réciproquement, supposons que v admette la représentation (1.81) avec les coefficients $(c_\gamma)_{\gamma \geq \theta}$ satisfaisant $c_\theta > 0$ et 1.83 et soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^n)$ définie par :

$$\varphi(z) = \sum_{\alpha \geq \theta} c_\alpha z^\alpha \quad (z \in \mathbb{T}^n). \quad (1.90)$$

Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n$

$$\langle v_\alpha, v_\theta \rangle = \sum_{\beta \geq \theta} c_{\alpha+\beta} \bar{c}_\beta = \int_{\mathbb{T}^n} z^\alpha |\varphi(z)|^2 d\sigma(z) \quad (1.91)$$

donc les coefficients Fourier-Sieltjes de la mesure spectrale de v coïncident avec ceux de la mesure absolument continue $|\varphi|^2 d\sigma$. Par conséquent, la mesure spectrale de v est absolument continue et donc de la forme $d\mu = f dm$. De plus

$$f = |\varphi|^2 \quad (\text{presque partout}) \quad (1.92)$$

Par ([HL58] thm. 2) on a donc

$$\int_{\mathbb{T}^n} \log |\varphi|^2 d\sigma \geq \log |c_\theta| > -\infty \quad (1.93)$$

ce qui montre à l'aide de la définition 1.2.12 que v est complètement non-déterministe, et la preuve est finie. □

Du point de vue des approximations pour les applications pratiques, la représentation (1.81) est très importante. En effet, en approximant la série dans (1.81) par une somme finie, on obtient un modèle MA n -D pour un processus stationnaire complètement non-déterministe.

La condition $f = |\varphi|^2$ peut être écrite sous forme factorisée :

$$f = \varphi \bar{\varphi} \quad (1.94)$$

où φ et $\bar{\varphi}$ s'appellent les facteurs spectraux.

Cette factorisation spectrale sera utilisée dans le prochain chapitre dans le contexte de deux applications, mais pour l'instant on termine cette section par quelques éléments relatifs à un type de modèle complémentaire au modèle MA, à savoir le modèle AutoRégressif (AR).

Dans la construction de la partie complètement non-déterministe d'un processus, l'objet clé était l'innovation par rapport au passé d'un élément, le passé étant le sous-espace engendré par tous les éléments du processus d'indice inférieur à l'élément de référence. Les modèles de type AR sont obtenus en considérant comme passé une région finie de cet ensemble d'indices.

On pose comme avant un ordre de groupe sur $\mathbb{Z}^n$ et on considère un ensemble S fini d'éléments strictement positifs de $\mathbb{Z}^n$, appelé *support de prédiction*. Si $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ est un processus stationnaire, on définit les passés de x_α par rapport au support S par

$$H_\alpha^S(x) = \bigvee_{\beta \in S} x_{\alpha-\beta} \quad (1.95)$$

On définit également l'innovation i_α^S de x_α par rapport à S par la différence entre x_α et sa projection orthogonale sur $H_\alpha^S(x)$. Si x est complètement non-déterministe, ses éléments sont linéairement indépendants, donc il existe une unique famille de scalaires $(a_\beta)_{\beta \in S}$ tels que

$$x_\alpha = i_\alpha^S - \sum_{\beta \in S} a_\beta x_{\alpha-\beta}. \quad (1.96)$$

La représentation (1.96) est appelée un *modèle AR*. Il est à noter que, par contraste aux innovations par rapport au passé tout entier, le processus i_α^S n'est pas une suite orthogonale (ou bruit blanc), mais il converge ponctuellement vers une suite orthogonale quand le support de prédiction "converge" vers le cône des éléments positifs de $\mathbb{Z}^n$ (dans le sens de l'inclusion).

Un autre fait important est le suivant : considérons le polynôme en n variables

$$A_S(z) = 1 + \sum_{\beta \in S} a_\beta z^\beta, \quad (1.97)$$

Alors, quand le support S converge vers le cône des éléments positifs de $\mathbb{Z}^n$, la fonction $\sigma_S^2/|A_S(z)|^2$ où $\sigma_S = \|i_0^S\|$ converge presque partout sur le polytore $\mathbb{T}^n$ vers la densité f de la mesure spectrale du processus x . En termes de factorisation spectrale, on voit donc qu'un modèle AR est l'inverse d'un modèle MA.

Dans le cas 1D, l'estimation des paramètres d'un modèle AR en partant des coefficients d'autocorrélation du processus peut être regardé, au niveau de l'isomorphisme de Kolmogorof, comme un problème d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt. Ce problème apparaît dans les années '30 dans la théorie de Szegö des polynômes orthogonaux dans $L^2(\nu)$, et sera repris plus tard dans le contexte des sciences de l'ingénieur par la résolution des équations de Yule-Walker à travers l'algorithme de Levinson-Durbin. Une version plus rapide de calcul des paramètres repose sur l'algorithme de Schur. Nous allons utiliser ce type de modèle dans le chapitre prochain, où l'on reviendra avec plus de détails dans quelques applications précises.

La section suivante du chapitre sera dédiée à l'analyse de l'autre partie de la décomposition Wold, à savoir la partie déterministe.

1.2.4 La partie déterministe en dimension 1

Le but de cette section est de mettre en évidence des processus déterministes à mesure spectrale singulière, dans les cas mono-dimensionnel et multidimensionnels, afin de montrer comment on obtient les différents modèles déterministes qu'on utilise dans les applications. Si dans le cas mono-dimensionnel les ensembles de mesure Lebesgue nulle (les supports possibles des mesures singulières) sont relativement simples à décrire, dès que l'on se place dans le contexte 2-D la description de tous ces ensembles devient très difficile à cause de leur variété. On met dans ce cas en évidence quelques types particuliers de mesures singulières qui sont utilisables dans les applications.

Pour analyser le cas 1-D, on considère un processus déterministe $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, ayant l'espace H et la mesure spectrale singulière η . On note par W l'opérateur unitaire qui génère le processus w et par E_W la mesure spectrale à valeur projecteur de W . Comme on a vu dans la section 1.1.3, les mesures η et E_W sont mutuellement absolument continues, et en plus $\eta = E_{W_{w_0, w_0}}$. On peut donc considérer que le support de η est fermé et qu'il coïncide avec le spectre $\sigma(W)$ de l'opérateur W .

On considère la fonction de répartition associée à η :

$$F_\eta(t) = \eta([0, t]) \quad (0 \leq t \leq 2\pi). \quad (1.98)$$

Comme F_η est croissante sur $[0, 2\pi]$ en chaque point, elle admet des limites latérales finies en tout point. De plus, F_η est continue à droite en chaque point. On considère alors l'ensemble des points de discontinuité de F_η

$$D_{F_\eta} = \{t \in [0, 2\pi] : F_\eta(t-) < F_\eta(t+)\} \quad (1.99)$$

qui est un ensemble au plus dénombrable [Rud69], donc

$$D_{F_\eta} = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}. \quad (1.100)$$

Alors F_η s'écrit de façon unique comme la somme :

$$F_\eta = D + F_c \quad (1.101)$$

où D est la fonction localement constante et continue à droite qui a les mêmes points de discontinuité que F_η et en plus

$$A_n = D(t_n+) - D(t_n-) = F_\eta(t_n+) - F_\eta(t_n-) \quad (n \in \mathbb{N}), \quad (1.102)$$

tandis que F_c est une fonction continue ayant la dérivée nulle presque partout. Ainsi la mesure singulière η s'écrit sous la forme

$$\eta = \eta_{har} + \eta_c, \quad \eta_{har} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta_{e^{it_n}} \quad (1.103)$$

où la somme de mesures de Dirac η_{har} est la mesure de Stieltjes associée à D , et η_c est la mesure de Stieltjes associée à F_c . La mesure singulière η_{har} s'appelle la partie "harmonique" de η et est composée uniquement d'atomes de Dirac. La mesure η_c ne contient aucun atome de Dirac et admet une répartition continue et à dérivée nulle presque partout. Une telle mesure est appelée singulière-continue.

Ainsi la mesure spectrale de tout processus déterministe singulier 1-D se décompose en deux parties mutuellement singulières, une partie harmonique et une partie singulière-continue. Cette décomposition entraîne une décomposition orthogonale au niveau du processus lui même, que l'on mettra en évidence par la suite.

Comme on a vu en début de cette section, le support de la mesure η coïncide avec le spectre de l'unitaire W . Donc, les atomes e^{it_k} sont forcément des valeurs propres de W . On note par

$$H_k = E_W(\{e^{it_k}\}) = \text{Ker}(W - e^{it_k}\mathbb{I}) \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (1.104)$$

les sous-espaces propres correspondants et soit

$$H_{har} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k, \quad H_c = H \ominus H_{har}. \quad (1.105)$$

Alors la décomposition $H = H_{har} \oplus H_c$ entraîne, par projection orthogonale, une décomposition du processus w en deux parties

$$w_n = h_n \oplus c_n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (1.106)$$

la partie h étant appelée harmonique et ayant la mesure spectrale η_{har} , tandis que le processus c admet la mesure spectrale η_c et est appelé la partie singulière-continue de w .

Le fait que l'espace de la partie harmonique h soit composé de sous-espaces propres de W permet d'en obtenir une représentation précise. En effet, pour $k \in \mathbb{N}$ on note par ξ_k la projection de h_0 (ou de w_0) sur le sous-espace propre H_k . L'ensemble de ces vecteurs forme une base orthogonale de H_{har} , donc

$$h_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k. \quad (1.107)$$

Mais alors

$$h_n = W^n h_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} W^n \xi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{int_k} \xi_k, \quad (1.108)$$

ce qui montre que le processus h_n se représente comme une somme d'exponentielles complexes ("harmoniques") de fréquences t_k et d'amplitudes ξ_k mutuellement orthogonales.

Un tel processus déterministe est appelé *harmonique* ou encore *périodique* ou *sinusoïdal*, vu la représentation ci-dessus. Les fréquences t_k de chaque exponentielle représentent les arguments des valeurs propres de l'opérateur unitaire qui génère le processus w , tandis que les amplitudes orthogonales sont les vecteurs propres correspondants.

Pour synthétiser, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.16. *Tout processus déterministe $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ayant une mesure spectrale η singulière admet une unique décomposition orthogonale :*

$$w_n = h_n \oplus c_n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (1.109)$$

avec h_n un processus harmonique dont la mesure spectrale est formée uniquement d'atomes de Dirac, et c_n un processus singulier-continu dont la mesure spectrale admet une répartition continue.

La partie harmonique h_n admet la représentation exponentielle

$$h_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k e^{int_k} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (1.110)$$

où les points e^{it_k} sont les atomes de Dirac de la mesure spectrale η ou, autrement dit, les valeurs propres de l'unitaire qui génère le processus w_n , tandis que les amplitudes $\{\xi_k\}$ sont une famille orthogonale de vecteurs propres correspondants à ces valeurs propres.

En fin de section, faisons quelques remarques sur la composante singulière-continue η_c . Le prototype d'une telle mesure singulières-continues peut être construit ayant comme support un ensemble négligeable de type Cantor. Plus généralement, on peut montrer que toute mesure singulière continue est la limite uniforme d'une suite de combinaisons de mesures de Dirac, donc comme une limite de mesures harmoniques. Ainsi du point de vue des applications, où il est possible de travailler uniquement avec des approximations de fonctions qui ont un nombre fini de valeurs, toute approximation finie d'une mesure singulière continue est forcément réduite à une combinaison de mesures de Dirac, donc une mesure harmonique. Cette impossibilité de représenter en pratique des mesures singulières-continues justifie l'hypothèse standard que la partie singulière-continue est nulle dans la décomposition (1.109), et donc on restreint la classe des processus déterministes utilisés à ceux qui possèdent une mesure spectrale harmonique.

Pour synthétiser le contexte unidimensionnel, on a vu dans les trois dernières sections que l'intérêt du point de vue des applications porte sur les processus stochastiques dont les mesures spectrales ont les deux propriétés suivantes :

- la partie absolument continue admet une densité log-intégrable ;
- la partie singulière est formée uniquement d'atomes de Dirac.

La décomposition Wold d'un tel processus comporte deux parties :

- la partie complètement non-déterministe qui admet la représentation MA (1.81) ;
- la partie harmonique qui admet la représentation exponentielle (1.110).

On étudie dans la section suivante le cas multidimensionnel.

1.2.5 La partie déterministe dans le contexte multidimensionnel

On a vu dans les sections précédentes que, pour tout processus stochastique ayant une densité log-intégrable, la mesure spectrale de sa partie déterministe dans la décomposition Wold est singulière, donc supportée sur un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle. Nous avons mis en évidence dans la dernière section qu'un tel ensemble dans le cas 1D est toujours l'union d'un ensemble discret (le support des atomes de Dirac) et d'un ensemble de type Cantor, qui supporte la partie singulière-continue et qui est négligé dans les applications.

Par contre, dès que l'on se place dans un contexte multidimensionnel, la classe des ensembles de mesure de Lebesgue nulle est infiniment plus vaste à cause des degrés de liberté supplémentaires. Ceci rend impossible la tâche de modéliser tous ces types de mesures, mais on mettra toutefois en évidence quelques unes de ces mesures singulières qui sont utilisables dans les applications.

On considère donc dans le contexte 2D un processus déterministe $(w_\alpha)_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2}$ ayant l'espace H et la mesure spectrale η singulière par rapport à la mesure de Lebesgue bidimensionnelle sur $\mathbb{T}^2$.

A. La composante harmonique : Tout comme dans les processus à un paramètre, un tel processus contient toujours une partie "harmonique" ayant une représentation similaire au cas 1D. Pour identifier la mesure spectrale de cette partie harmonique on considère l'ensemble au plus dénombrable

$$\Lambda = \{\lambda_k = (e^{it_1^k}, e^{it_2^k}) \in \mathbb{T}^2 : k \in \mathbb{N}\} \quad (1.111)$$

des atomes de la mesure spectrale η :

$$A_k := \eta(\{\lambda_k\}) \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (1.112)$$

et similairement à (1.103), on considère la combinaison de mesures de Dirac bidimensionnelles

$$\eta_{har} = \sum_k A_k \delta_{\lambda_k}. \quad (1.113)$$

La partie harmonique du processus peut être obtenue de manière similaire au cas 1D, à l'aide de la notion de spectre ponctuel joint. Soit $W = (W_1, W_2)$ la paire d'opérateurs unitaires qui génère w . L'ensemble Λ des atomes de Dirac au dessus coïncide en fait avec le spectre ponctuel joint de la paire $W = (W_1, W_2)$,

$$\Lambda = \sigma_p(W) = \{(e^{it}, e^{is}) \in \mathbb{T}^2 : \text{Ker}(W_1 - e^{it}\mathbb{I}) \cap \text{Ker}(W_2 - e^{is}\mathbb{I}) \neq (0)\} \quad (1.114)$$

c'est à dire les paires de valeurs propres de W_1 et W_2 respectivement, correspondants à des vecteurs propres communes des deux unitaires. Cet ensemble étant au plus dénombrable, on note ces éléments par

$$\sigma_p(W) = \{(e^{it_1^k}, e^{it_2^k}) : k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.115)$$

Soit alors

$$H_k = \text{Ker}(W_1 - e^{it_1^k}\mathbb{I}) \cap \text{Ker}(W_2 - e^{it_2^k}\mathbb{I}) \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (1.116)$$

le sous-espace propre commun correspondant à chaque paire $(e^{it_1^k}, e^{it_2^k})$. L'espace de la partie harmonique de w_α est

$$H_{har} = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} H_k \quad (1.117)$$

et on obtient la partie harmonique h_α par projection orthogonale du processus w_α sur H_{har} :

$$h_\alpha = P_{H_{har}} w_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^2). \quad (1.118)$$

La mesure spectrale de h_α est précisément η_{har} dans (1.113). De plus, si ξ_k est la projection de h_0 (ou de w_0) sur chacun des sous-espaces propres H_k , on a

$$h_{\alpha_1, \alpha_2} = W_1^{\alpha_1} W_2^{\alpha_2} h_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} W_1^{\alpha_1} W_2^{\alpha_2} \xi_k = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k e^{i(\alpha_1 t_1^k + \alpha_2 t_2^k)} \quad ((\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2) \quad (1.119)$$

La représentation de la partie harmonique est donc similaire au cas 1D, et peut être généralisée au cas n -D de la même manière : on utilisera, pour un vecteur $t = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 2\pi]^n$, la notation e^{it} pour le vecteur $(e^{it_1}, e^{it_2}, \dots, e^{it_n}) \in \mathbb{T}^n$. On utilisera également, pour des vecteurs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$, la notation standard du produit scalaire

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j$$

Théorème 1.2.17. *Tout processus déterministe n -dimensionnel $(w_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ ayant une mesure spectrale η singulière contient une composante harmonique h_α dont la mesure spectrale η_{har} est formée des atomes de Dirac de la mesure η et supportée sur le spectre ponctuel joint*

$$\sigma_p(W) = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]^n, \cap_{j=1}^n \text{Ker}(W_j - e^{it_j} \mathbb{I}) \neq (0)\} = \{e^{it^k} : t^k \in [0, 2\pi]^n, k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.120)$$

du multi-opérateur $W = (W_1, \dots, W_n)$ qui génère w_α .

La composante harmonique h_α admet la représentation exponentielle

$$h_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k e^{i\langle \alpha, t^k \rangle} \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n), \quad (1.121)$$

où les amplitudes (ξ_k) sont une famille orthogonale de vecteurs propres communs correspondants aux multi-valeurs propres $e^{it^k} \in \sigma_p(W)$.

Avant de mettre en évidence un autre type de composante d'un processus déterministe multidimensionnel il est utile de remarquer une propriété des processus harmoniques relative à la notion dite de "passé lointain".

Définition 1.2.18. *Étant donné un processus stationnaire quelconque $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ ayant l'espace H et un ordre total $\leq$ sur $\mathbb{Z}^n$, on appelle le passé lointain de x_α par rapport à l'ordre $\leq$ le sous-espace de H obtenu par l'intersection de tous les passés H_α du processus (voir la définition du passé, équation (1.45))*

$$H_{-\infty}(x, \leq) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} H_\alpha(x, \leq) = \bigcap_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \bigvee_{\beta < \alpha} x_\beta \quad (1.122)$$

On appellera la composante de type passé lointain de x_α la projection r_α du processus x_α sur son passé lointain $H_{-\infty}$. On dira aussi que x_α est de type passé lointain si les espaces H et $H_{-\infty}$ coïncident.

On peut montrer que les processus harmoniques sont toujours de type passé lointain par rapport à n'importe quel ordre $\leq$:

Proposition 1.2.19. *Soit $(h_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus harmonique ayant la représentation (1.121)*

$$h_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k e^{i\langle \alpha, t^k \rangle} \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n)$$

et $\leq$ un ordre total sur $\mathbb{Z}^n$. Alors h_α est de type passé lointain. Plus précisément,

$$H_{-\infty}(h, \leq) = H_\alpha(h, \leq) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{C} \xi_k \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n) \quad (1.123)$$

Par conséquent la partie harmonique de tout processus stationnaire est contenue dans le passé lointain du processus par rapport à n'importe quel ordre. Par contre, il y a une différence fondamentale entre le cas monodimensionnel et multidimensionnel vis-à-vis du passé lointain. On peut voir que, dans le cas 1D, le passé lointain de tout processus stationnaire coïncide avec l'espace de la partie déterministe du processus. Ainsi la composante déterministe tout entière coïncide avec la composante de type passé lointain. Par contre, dès que l'on se place dans le contexte multidimensionnel, le passé lointain est seulement une partie de l'espace déterministe, qui peut contenir, à part une composante harmonique, une autre composante qui est déterministe mais qui est orthogonale au passé lointain par rapport à un ordre fixé. Une telle composante a été appelée *évanescence* par Helson et Lowdenslager et on les décrira brièvement par la suite.

B. Les composantes évanescences : On considère un processus stationnaire multidimensionnel $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ ayant l'espace H , et on munit $\mathbb{Z}^n$ d'un ordre de groupe $\leq$. On considère la décomposition Wold de x_α en deux parties

$$H = H_{cnd}(x) \oplus H_{det}(x), \quad x_\alpha = v_\alpha \oplus w_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n), \quad (1.124)$$

et soit $H_{-\infty}(x, \leq)$ le passé lointain de x_α par rapport à l'ordre $\leq$, sous-espace contenu dans H_{det} . L'espace de la composante évanescence de x_α par rapport à $\leq$ est par définition l'orthogonal dans $H_{det}(x)$ du passé lointain $H_e(x, \leq)$:

$$H_e(x, \leq) = H_{det}(x) \ominus H_{-\infty}(x, \leq). \quad (1.125)$$

La composante évanescence de x_α par rapport à $\leq$ est définie comme la projection notée e_α du processus x_α sur $H_e(x, \leq)$. Ainsi la partie déterministe w_α se décompose elle-même en deux parties, la partie de type passé lointain r_α et la partie évanescence e_α , ce qui donne la décomposition de Wold dite en trois parties (Helson-Lowdenslager) :

$$H = H_{cnd} \oplus H_{-\infty} \oplus H_e, \quad x_\alpha = v_\alpha \oplus r_\alpha \oplus e_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n). \quad (1.126)$$

La structure de la partie évanescence dépend de l'ordre de groupe $\leq$ choisi. Pour décrire cette structure, on a besoin d'étendre le concept de passé et celui d'innovation tel qu'il est introduit dans la section précédente. On a vu que l'espace de la composante complètement non-déterministe d'un processus x était construit comme la somme directe des sous-espaces des innovations des H_α , que l'on peut écrire comme

$$H_{cnd} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} I_\alpha, \quad I_\alpha = \left(\bigcap_{\beta \geq \alpha} H_\beta \right) \ominus H_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}^n). \quad (1.127)$$

L'idée est maintenant de définir des innovations pour des sous-espaces plus généraux que les passés H_α , mais qui sont du même type dans un sens que l'on précise par la suite. Les ensembles d'indices $\Lambda_\alpha = \{\beta \in \mathbb{Z}^n : \beta < \alpha\}$ intervenant dans la définition des passés ont la propriété suivante : quelque soit λ dans Λ_α et γ dans $\mathbb{Z}^n$, si $\gamma \leq \lambda$ alors γ appartient aussi à l'ensemble Λ_α . Un sous-ensemble d'un ensemble ordonné avec cette propriété s'appelle un *segment* (terme utilisé dans la théorie des ordinaux).

La structure de la partie évanescence peut être mise en évidence à l'aide d'une extension des innovations à certains sous-espaces engendrés par les éléments du processus dont les indices appartiennent aux segments de $\mathbb{Z}^n$, autres que les passés des éléments.

Définition 1.2.20. Soit $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^n}$ un processus stochastique et soit S un segment de $\mathbb{Z}^n$. On définit le passé du processus par rapport au segment S le sous-espace

$$H_S = \bigvee_{\beta \in S} x_\beta. \quad (1.128)$$

On définit également l'innovation du processus par rapport au segment S le sous-espace

$$I_S = \left(\bigcap_{\beta \notin S} H_\beta \right) \ominus H_S. \quad (1.129)$$

Notons au passage que, dans l'optique de la définition au dessus, le passé lointain peut être regardé comme l'innovation du processus par rapport au segment vide. On notera Σ l'ensemble de tous les segments de $\mathbb{Z}^n$ et par Σ_0 l'ensemble des segments de type passé ordinaire $\Lambda_\alpha = \{\beta \in \mathbb{Z}^n : \beta < \alpha\}$, pour α dans $\mathbb{Z}^n$. On peut alors montrer que l'espace de la partie évanescence d'un processus est la somme directe des espaces d'innovation par rapport à tous les autres segments sauf ceux du type passé ordinaire, c'est à dire

$$H_e = \bigoplus_{S \in \Sigma \setminus \Sigma_0} I_S. \quad (1.130)$$

La classe de ces segments autres que les passés ordinaires est assez laborieuse à décrire pour le cas d'un ordre quelconque sur $\mathbb{Z}^n$, mais elle est particulièrement simple dans le cas 2D pour les ordres de type lexicographique. L'ordre lexicographique horizontal sur $\mathbb{Z}^2$ est défini par

$$(a_1, b_1) <_h (a_2, b_2) \quad \text{ssi} \quad b_1 < b_2 \quad \text{ou} \quad b_1 = b_2, a_1 < a_2. \quad (1.131)$$

Similairement, l'ordre lexicographique vertical est donné par

$$(a_1, b_1) <_v (a_2, b_2) \quad \text{ssi} \quad a_1 < a_2 \quad \text{ou} \quad a_1 = a_2, b_1 < b_2 \quad (1.132)$$

Plus généralement, on dit qu'un ordre $\leq$ sur $\mathbb{Z}^2$ est de type lexicographique s'il existe un automorphisme A de $\mathbb{Z}^2$, donc une matrice d'entiers

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \det(A) = \pm 1, \quad (1.133)$$

qui transforme l'ordre lexicographique vertical dans l'ordre $\leq$, c'est à dire $\alpha \leq \beta$ est équivalent à $A^{-1}\alpha \leq_v A^{-1}\beta$.

Regardons maintenant la composante évanescence e_α d'un processus bidimensionnel x_α par rapport à l'ordre lexicographique vertical. On peut voir facilement que les segments autres que les passés ordinaires dans ce cas sont les demi-plans à gauche séparés par les droites $x = k$ pour k entier :

$$S_k = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 : a_1 \leq k\} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (1.134)$$

La famille d'innovations $(I_{S_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est appelée *innovations colonne par colonne*, et donc la partie évanescence e_α sera la projection du processus x_α sur le sous-espace

$$H_e = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} I_{S_k}. \quad (1.135)$$

La caractérisation spectrale de cette composante peut être obtenue de manière similaire au Lemme 1.2.11 :

Proposition 1.2.21. *Soit $(x_\alpha)_\alpha \in \mathbb{Z}^2$ un processus stationnaire bidimensionnel, e_α sa composante évanescence par rapport à l'ordre lexicographique vertical et ν_e la mesure spectrale de e_α . Alors ν_e est un produit tensoriel*

$$d\nu_e(t, s) = \varphi(t)d\eta(s) \quad ((t, s) \in \mathbb{T}^2), \quad (1.136)$$

avec φ dans $L^1(\mathbb{T})$ log-intégrable et η une mesure singulière uni-dimensionnelle.

Si en plus η est une mesure harmonique

$$\eta = \sum_k a_k \delta_{e^{it_k}}$$

alors e_α admet la représentation

$$e_{(n,m)} = \sum_k a_k s_n e^{imt_k}, \quad (1.137)$$

avec s_n un processus monodimensionnel complètement non-déterministe de mesure spectrale φdm .

Le support d'une telle mesure est un ensemble bidimensionnel négligeable de type particulier, plus précisément le produit cartésien du cercle unité avec un ensemble de mesures nulles sur le cercle unité.

On obtient comme corollaire la description spectrale des composantes évanescences relatives à un ordre de type lexicographique quelconque :

Proposition 1.2.22. *Si e_α est la composante évanescence par rapport à l'ordre lexicographique d'automorphisme A , sa mesure spectrale ν_e a la forme*

$$d\nu_e(A(t, s)) = \varphi(t)d\eta(s) \quad ((t, s) \in \mathbb{T}^2), \quad (1.138)$$

avec φ dans $L^1(\mathbb{T})$ log-intégrable et η une mesure singulière uni-dimensionnelle. Si η est harmonique alors

$$e_{A^{-1}(n,m)} = \sum_k a_k s_n e^{imt_k}, \quad (1.139)$$

avec s_n un processus monodimensionnel complètement non-déterministe de mesure spectrale φdm .

Le support dans ce cas sera l'image par l'automorphisme A d'un produit cartésien du cercle avec un ensemble négligeable.

Les représentations ci-dessus permettent de donner des modèles pour les composantes évanescents relatives aux différents ordres de type lexicographique. Dans [FMP93], Francos *et al.* montrent que les composantes évanescents relatives aux différents ordres de type lexicographique sont orthogonales sauf inversion de l'ordre (où on a égalité). Ceci permet d'obtenir une décomposition de Wold dite multi-ordre, qui comporte, à part la composante complètement non-déterministe et la composante harmonique, une famille dénombrable de composantes évanescents indexées sur l'ensemble des ordres de type lexicographiques (modulo l'opération d'inversion de l'ordre). On décrira ces modèles dans la section suivante.

En synthèse du contexte multi-idimensionnel, on s'intéressera, du point de vue des applications, à des processus stochastiques avec les trois composantes suivantes dans la décomposition Wold :

- la partie absolument continue admettant une densité log-intégrable, modélisable par des modèles MA (1.81) ou AR (1.96) ;
- la partie harmonique représentée par (1.121).
- la partie évanescence multi-ordre, représentée par des modèles de type (1.139)

La section suivante décrit ces modèles tels qu'ils seront utilisés dans les applications.

1.3 Modélisation de processus stationnaires fondée sur la décomposition de Wold

Dans cette section nous allons voir les implications des résultats concernant la décomposition de Wold présentée dans la sous-section précédente dans le cas 1-D et 2-D. Nous allons présenter les modèles qu'on associe aux parties ou composantes de la décomposition de Wold et qui sont adaptés à leur propriétés spectrales.

1.3.1 Cas 1-D

Le théorème de Wold affirme que tout processus aléatoire régulier 1-D peut être décomposé en une partie déterministe et une partie complètement non-déterministe ou purement aléatoire [Wol54] (cf. 1.2) :

$$y(n) = w(n) + h(n) \quad (1.140)$$

où les composantes sont orthogonales par rapport au produit scalaire défini par la covariance :

$$\langle w(n), h(n) \rangle = E[w(n)h(n)]. \quad (1.141)$$

La composante complètement non déterministe peut s'exprimer comme suit :

$$w(n) = \sum_{0 \leq k} a_k u(n-k), \quad \sum_{0 \leq k} a_k^2 < \infty \quad (1.142)$$

où $u(n)$ est l'innovation du processus $y(n)$ qui est un bruit blanc de variance σ_u^2 . Les covariances de $\{y(n)\}$ peuvent s'exprimer comme suit

1.3. MODÉLISATION DE PROCESSUS STATIONNAIRES FONDÉE SUR LA DÉCOMPOSITION DE WO

$$r(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \exp[2\pi jk\omega] d\mu(\omega) \quad (1.143)$$

où $\mu(\omega)$ est la mesure spectrale du processus $y(n)$. Cette mesure a la décomposition de Lebesgue suivante :

$$d\mu(\omega) = f(\omega)dm(\omega) + d\mu_s(\omega) \quad (1.144)$$

où m est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$, $f(\omega)$ est la densité (ou la dérivée au sens de Radon) de $\mu(\omega)$ par rapport à m et $\mu_s(\omega)$ est la partie singulière de la décomposition de Lebesgue. De plus, f a la représentation suivante

$$f(\omega) = \sigma_u^2 \left| \sum_{0 \leq k} a_k \exp(2\pi jk\omega) \right|^2. \quad (1.145)$$

La mesure spectrale μ peut s'exprimer comme suit :

$$\mu(\omega) = \nu(\omega) + \eta(\omega) \quad (1.146)$$

où $\nu(\omega)$ et $\eta(\omega)$ sont les mesures spectrales de $\{w(n)\}$ et $\{v(n)\}$. $\nu(\omega)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et $\eta(\omega) = \mu_s(\omega)$. Ainsi la mesure spectrale associée à la partie déterministe est singulière à la mesure de Lebesgue et en conséquence elle est concentrée sur un ensemble de mesures de Lebesgue nulles sur $\mathbb{T}$. Donc, la dérivée de $\eta(\omega)$ est nulle sauf dans cet ensemble.

La composante purement aléatoire, étant caractérisée par un spectre continue, elle peut être modélisé par des modèles de type moyenne ajustée (MA) ou auto régressif (AR). Dans le modèle MA on exprime le processus $w(n)$ comme la combinaison linéaire des échantillons d'un bruit blanc de variance σ_u^2 que l'on peut exprimer comme suit :

$$w(n) = \sum_{k=0}^q b_k u(n-k) \quad (1.147)$$

où $\{b_k\}$ sont les paramètres du modèle et q est l'ordre du processus. Dans le modèle AR la relation entre le processus $w(n)$ s'exprime comme suit :

$$w(n) = \sum_{k=0}^p a_k w(n-k) + u(n) \quad (1.148)$$

où $\{a_k\}$ sont les paramètres du modèle et p est l'ordre du processus.

La composante déterministe, dont la mesure spectrale est concentrée sur un ensemble de Lebesgue de mesure nulle dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$, se caractérise dans le domaine fréquentiel par la présence d'un ensemble fini d'impulsions de Dirac. Elle est représentée par un modèle harmonique de la forme :

$$h(n) = \sum_{k=1}^K \{C_k \cos(2\pi n\omega_k) + D_k \sin(2\pi n\omega_k)\} \quad (1.149)$$

où $\{C_k\}$ et $\{D_k\}$ sont des variables aléatoires mutuellement orthogonales telles que $E[C_k] = E[D_k] = 0$, $E[C_k^2] = \gamma_k^2$, K est le nombre de composantes ou ordre du modèle, et $\{\omega_k\}$ sont les fréquences de la $k^{\text{ième}}$ harmonique.

1.3.2 Cas 2-D

Dans le cas 2-D, comme il n'existe pas de notions naturelles du passé, présent ou futur, il est nécessaire de définir une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}^2$. Par exemple, Helson et Lowdeslager [HL58] utilisent un support Demi Plan Non Symétrique (DPNS) (cf. figure 1.1), pour lequel ils donnent une extension du théorème de Wold du cas 1-D au cas n-D. La famille des ordres de type lexicographique produit, comme décrit dans la section précédente, une famille des supports appelés DPNS Rationnel (DPNSR) (cf. figure 1.1). Cette famille peut être générée par la rotation du support DPNS par un angle $\theta = \arctan(\alpha/\beta)$ de tangente rationnelle⁹.

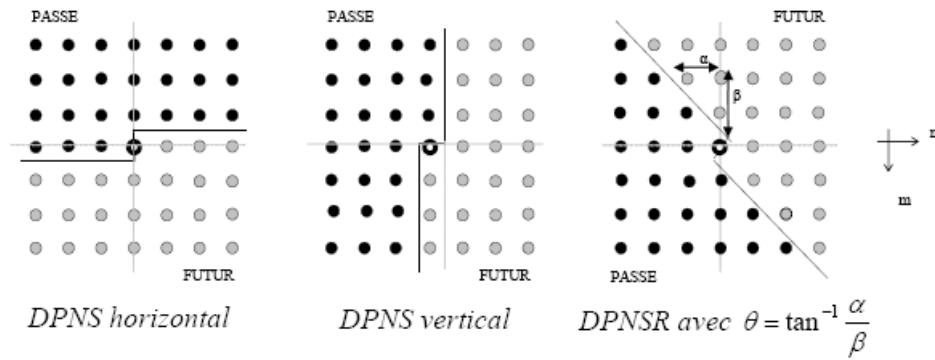


FIGURE 1.1: Support de prédiction Demi Plan Non Symétrique (DPNS).

Ainsi prenant un compte n'importe quel ordonnancement d'ordre total on peut affirmer que tout processus stochastique 2-D $\{y(m, n), (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$, stationnaire au sens large, peut être décomposé en une somme de deux composantes orthogonales, la première notée $w(m, n)$ étant purement aléatoire et la deuxième notée $v(m, n)$ étant déterministe :

$$y(m, n) = w(m, n) + v(m, n) \quad (1.150)$$

où

$$w(m, n) = \sum_{(0,0) \leq (k,l)} a_{k,l} u(m-k, n-l) \quad \sum_{(0,0) \leq (k,l)} a_{k,l}^2 < \infty \quad (1.151)$$

où $u(m, n)$ est l'innovation de $y(m, n)$. Cette décomposition est unique et invariante par rapport au support ou ordre total choisi. Cependant, le choix de différents supports DPNS résulte dans différents champs d'innovation tous avec la même variance. Le champ déterministe se décompose encore en deux parties orthogonales comme suit :

$$v(m, n) = h(m, n) + e(m, n) \quad (1.152)$$

où $\{h(m, n)\}$ est un champ appelé demi-plan déterministe (ou harmonique) et $\{e(m, n)\}$ est un champ appelé évanescant généralisé. Ces deux processus sont mutuellement orthogonaux. Comme indiqué dans la section précédente, Francos et al. [FMP93] ont démontré que le champ

9. α et β étant des entiers premiers entre eux

1.3. MODÉLISATION DE PROCESSUS STATIONNAIRES FONDÉE SUR LA DÉCOMPOSITION DE WOLD

évanescents généralisés est une combinaison linéaire de sous-composantes évanescentes mutuellement orthogonales chacune associée à un support DPNSR. La décomposition de Wold 2-D peut donc s'écrire sous la forme :

$$y(n, m) = w(n, m) + h(n, m) + \sum_{o \in O} e_o(n, m) \quad (1.153)$$

où $O = \{o_{(\alpha, \beta)} : \alpha, \beta \text{ premiers entre eux}\}$ est l'ensemble des ordres totaux définis par les supports DPNSR.

Nous retrouvons dans le cas 2-D, une caractérisation spectrale analogue au cas 1-D. Les covariances de $\{y(n, m)\}$ peuvent s'exprimer comme suit

$$r(k, l) = \int_{-1/2}^{1/2} \exp[2\pi j(k\omega_1 + l\omega_2)] d\mu(\omega_1, \omega_2) \quad (1.154)$$

où $\mu(\omega_1, \omega_2)$ est la mesure spectrale du processus $y(n, m)$. Cette mesure est dotée de la décomposition de Lebesgue

$$d\mu(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1, \omega_2) dm_2(\omega_1, \omega_2) + d\mu_s(\omega_1, \omega_2) \quad (1.155)$$

où m_2 est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^2$. De plus, f a la représentation suivante

$$f(\omega_1, \omega_2) = \sigma_u^2 \left| \sum_{(0,0) \leq (k,l)} a_{k,l} \exp[2\pi j(k\omega_1 + l\omega_2)] \right|^2. \quad (1.156)$$

La mesure spectrale $\mu(\omega)$ peut s'exprimer comme suit :

$$\mu(\omega_1, \omega_2) = \nu(\omega_1, \omega_2) + \eta(\omega_1, \omega_2) \quad (1.157)$$

où $\nu(\omega_1, \omega_2)$ et $\eta(\omega_1, \omega_2)$ sont les fonctions de densité spectrale de $\{w(n, m)\}$ et $\{v(n, m)\}$. $F_w(\omega_1, \omega_2)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et $\eta(\omega_1, \omega_2) = \mu_s(\omega_1, \omega_2)$. Ainsi la mesure spectrale associée à la partie déterministe est concentrée sur un ensemble de mesures de Lebesgue nulles sur $(\mathbb{T})^2$. Donc, la dérivée de $\eta(\omega_1, \omega_2)$ est nulle sauf dans cet ensemble.

Fondés sur les propriétés spectrales des composantes de Wold définies précédemment, Francos et al. ont proposé les modèles mathématiques suivants [FMP93] :

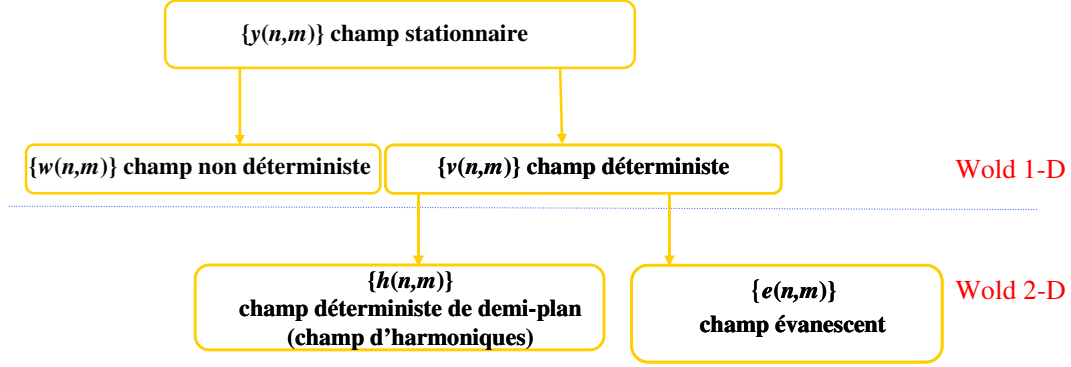


FIGURE 1.2: Décomposition de Wold.

1.3.2.1 Modèles associés au champs purement aléatoire 2-D

La composante purement aléatoire admet une densité absolument continue et de ce fait peut être représentée par un modèle MA 2-D ou AR 2-D. Dans le modèle MA 2-D, le processus $w(m,n)$ est représentée par une combinaison linéaire des échantillons d'un processus d'excitation de type bruit blanc $u(m,n)$ de variance σ_u^2 , qui peut s'exprimer comme suit

$$w(m,n) = \sum_{(k,l) \in D} b_{k,l} u(m-k, n-l) + u(m,n) \quad (1.158)$$

où D est le support de prédiction, et $\{b_{k,l}\}$ sont les paramètres MA du modèle. Le modèle AR est une relation linéaire entre les échantillons du processus $w(m,n)$ et l'excitation $u(m,n)$ qui s'exprime comme suit :

$$w(m,n) = \sum_{k,l \in D} a_{k,l} w(m-k, n-l) + u(m,n) \quad (1.159)$$

où les coefficients $\{a_{k,l}\}$ sont les paramètres transverses du modèle. Les supports de prédiction utilisés en pratique sont de tailles finies et sont souvent définis de deux manières : Quart Plan (QP) et Demi Plan Non Symétrique (DPNS). Le support QP d'ordre (p_1, p_2) est donné par l'expression suivante :

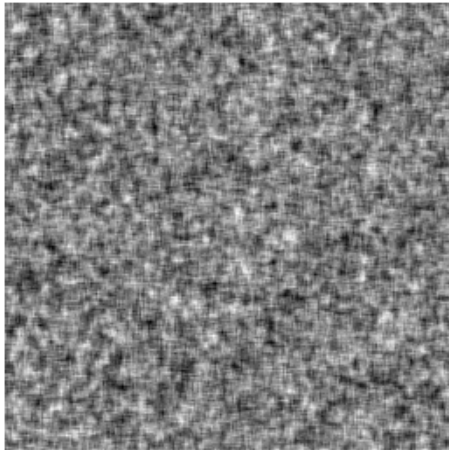
$$D_{p_1, p_2} = \{(k_1, k_2) : 0 \leq k_1 \leq p_1, 0 \leq k_2 \leq p_2\} \quad (1.160)$$

L'expression du support DPNS d'ordre (p_1, p_2) est donnée par :

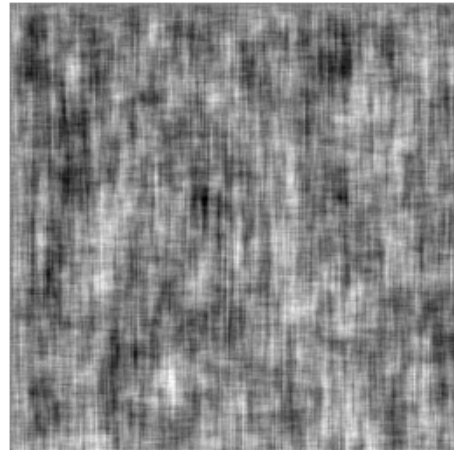
$$D_{p_1, p_2} = \{(k_1, k_2) : k_1 = 0, 1 \leq k_2 \leq p_2\} \cup \{(k_1, k_2) : 1 \leq k_1 \leq p_1, -p_2 \leq k_2 \leq p_2\} \quad (1.161)$$

La synthèse des textures par les modèles MA et AR est réalisée en utilisant les équations (1.158) et (1.159) où les paramètres des modèles sont données et le bruit blanc est généré sur ordinateur. Des exemples de textures générés par les modèles MA et AR 2-D sont données dans la figure 1.3.

1.3. MODÉLISATION DE PROCESSUS STATIONNAIRES FONDÉE SUR LA DÉCOMPOSITION DE WO



(a) Processus MA 2-D



(b) Processus AR 2-D

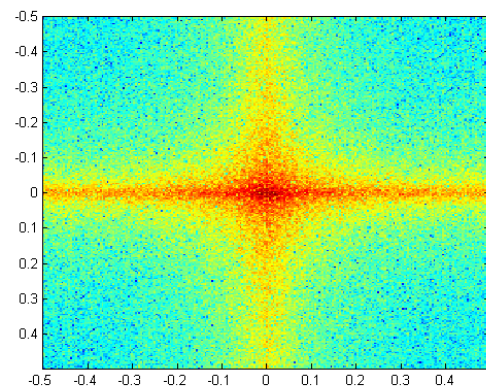
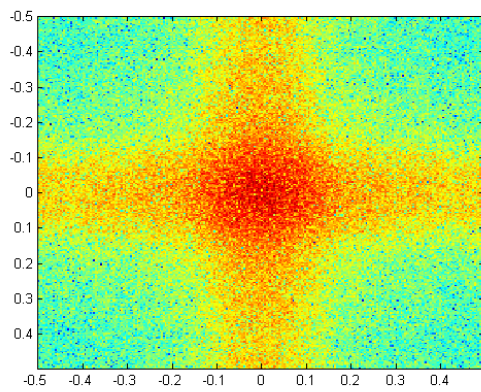


FIGURE 1.3: Exemples des textures aléatoires ou complètement non déterministes. Représentation spatiale et fréquentielle.

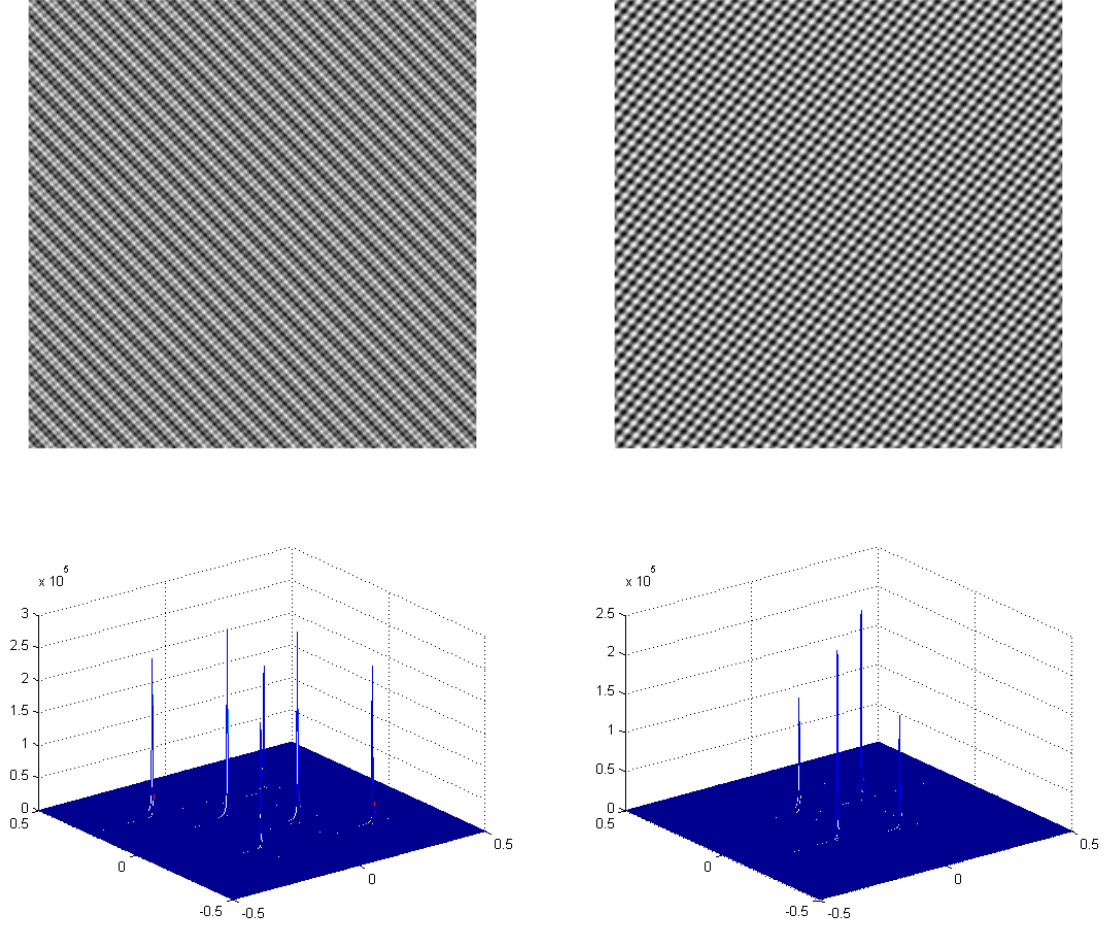


FIGURE 1.4: Exemples des textures harmoniques. Représentation spatiale et fréquentielle.

1.3.2.2 Modèle associé au champ harmonique 2-D

Le champ demi-plan déterministe (harmonique) est représenté par un modèle harmonique 2-D, c'est-à-dire une somme finie de sinusôides 2-D comme dans l'expression suivante :

$$h(m, n) = \sum_{k=1}^K C_k \cos [2\pi (mf_{1_k} + nf_{2_k})] + D_k \sin [2\pi (mf_{1_k} + nf_{2_k})] \quad (1.162)$$

où les amplitudes C_k et D_k sont des variables aléatoires mutuellement orthogonales telles que $E[C_k] = E[D_k] = \gamma_k^2$, le paramètre K est le nombre de composantes ou ordre de modèle harmonique et les paires (f_{1_k}, f_{2_k}) sont les fréquences spatiales normalisées.

Ce modèle permet de synthétiser avec peu de paramètres des textures totalement périodiques comme nous pouvons le voir sur la figure 1.4 . Ce type de textures se caractérise dans le domaine fréquentiel par la présence d'un ensemble fini de points à fortes énergies (pics) et symétriques par rapport à l'origine.

1.3.2.3 Modèles associés au champ évanescent 2-D

Le processus évanescent est théoriquement représenté par une somme dénombrable de composantes évanescentes. Chaque composante est associée à un support Demi Plan Non Symétrique Rationnel (DPNRS) caractérisé par un couple de pente rationnelle (α, β) comme illustre la figure 1.1.

$$e(n, m) = \sum_{(\alpha, \beta) \in O} e_{\alpha, \beta}(n, m) \quad (1.163)$$

Le modèle associé à chaque composante est donné par :

$$e_{\alpha, \beta}(n, m) = \sum_{i=1}^I S_i(n\alpha - m\beta) \cos(2\pi(n\beta + m\alpha)\nu_i) + T_i(n\alpha - m\beta) \sin(2\pi(n\beta + m\alpha)\nu_i) \quad (1.164)$$

où I est le nombre de composantes évanescentes élémentaires, ν_i est la fréquence de la $i^{\text{ième}}$ composante, $\{S_i(n\alpha - m\beta)\}$ et $\{T_i(n\alpha - m\beta)\}$ sont des processus 1-D purement aléatoires et mutuellement orthogonaux. La composante évanescente élémentaire est donc un processus aléatoire dans une direction et périodique dans l'autre. En conséquence, son spectre est continu dans une direction et singulier dans l'autre. Le support de ce spectre est une droite de pente rationnelle. La figure 1.5 présente des exemples de champ évanescents synthétisés.

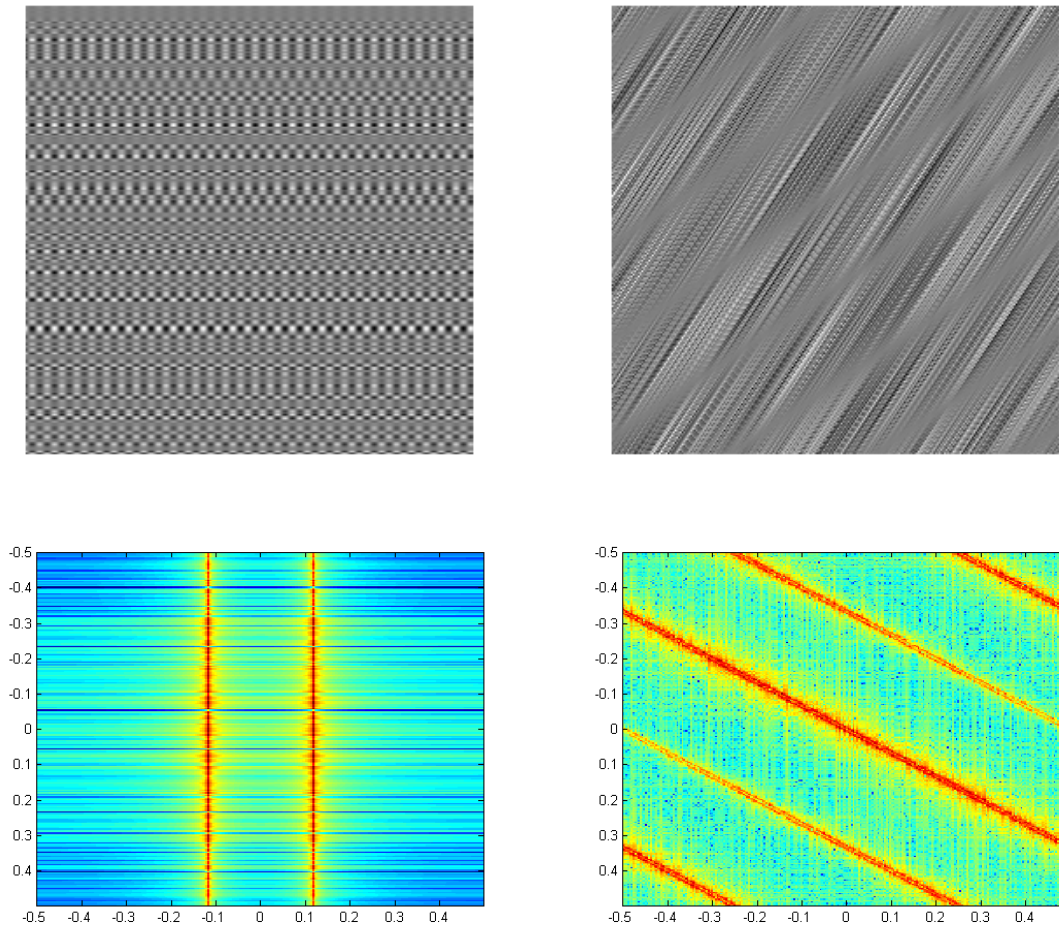


FIGURE 1.5: Exemples des textures évanescentes. Représentation spatiale et fréquentielle.

Chapitre 2

Nouveaux modèles ARMA issus de la factorisation spectrale

2.1 Introduction

Ce chapitre présente des nouveaux modèles paramétriques pour la représentation des processus complètement non déterministes. Ces modèles sont fondés sur des représentations MA, AR et ARMA d'ordre infini, tronqués à des modèles d'ordre fini. Les paramètres de ces modèles sont estimés à l'aide d'une méthode basée sur la factorisation intérieure-extérieure du module de la densité spectrale de puissance du processus. Les modèles obtenus sont utilisés dans deux applications : la décomposition de Wold des images texturées dans le cas 2-D [MTN07b, MTN07a] et dans la simulation de canaux sans fils de type Rayleigh le cas 1-D [MTGN08, MTGN10].

2.2 Modèles AR, MA et ARMA

Depuis de nombreuses années, les modèles AR, MA et ARMA 1-D sont utilisés dans plusieurs domaines de traitement du signal. On rappelle qu'un processus ARMA d'ordre (p, q) , noté $\text{ARMA}(p, q)$, peut s'exprimer comme suit :

$$y(n) = \sum_{k=1}^p a(k)y(n-k) = u(n) + \sum_{l=1}^q b(l)u(n-l) \quad (2.1)$$

où $\{a(k)\}$ désignent les paramètres AR, $\{b(l)\}$ les paramètres MA et $\{u(n)\}$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance fini. Ainsi, un processus AutoRégressif d'ordre p , noté $\text{AR}(p)$, est un processus $\text{ARMA}(p, 0)$ et un processus à Moyenne Ajustée d'ordre q , noté $\text{MA}(q)$, est un processus $\text{ARMA}(0, q)$.

Le modèle AR est utilisé dans de nombreuses applications, notamment pour la compression et le rehaussement de la parole [DPH93] et pour l'estimation et la simulation de canaux de transmission de systèmes de communication sans fils [BB05b].

L'estimation de paramètres AR au sens du moindres carrés est obtenue par la solution des

équations de Yule-Walker :

$$\mathbf{R}_y^p \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \\ \vdots \\ a(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_y(1) \\ r_y(2) \\ \vdots \\ r_y(p) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

où $\{r_y(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\mathbf{R}_y^p$ désignent la séquence d'autocorrélation du processus $\{y(n)\}$ et la matrice de corrélation correspondante, de taille $p \times p$:

$$\mathbf{R}_y^p = \begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1) & \cdots & r_y(p-1) \\ r_y(-1) & r_y(0) & \cdots & r_y(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y(1-p) & r_y(2-p) & \cdots & r_y(0) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Ces équations peuvent être utilisées pour l'estimation de paramètres d'un modèle MA [Dur59]. Il existe aussi des méthodes récursives pour l'estimation de paramètres AR telle que la descente de gradient au sens des moindres carrés (LMS) [Hay02], l'estimation récursive des moindres carrés standard (RLS) [Hay02], RLS à facteur d'oubli [Naj06] entre autres.

Également dans le cas 2-D, les modèles AR, MA et ARMA sont utilisés dans le traitement d'images. On rappelle que la représentation ARMA 2-D d'un champ aléatoire $y(m, n)$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ est décrite par l'équation aux différences suivante :

$$y(m, n) + \sum_{(k,l) \in D} a_{k,l} y(m-k, n-l) = \sum_{(k,l) \in D} b_{k,l} u(m-k, n-l) + u(m, n) \quad (2.4)$$

où D est le support de prédiction. Le processus $\{u(m, n)\}$ est un bruit blanc 2-D de variance finie. On dit que $\{y(m, n)\}$ est un processus AR-2D si tous ses coefficients $\{b_{k,l}\}$ sont nuls. Dans le cas contraire et si les coefficients $\{a_{k,l}\}$ sont nuls, le processus possède une représentation MA.

Ces modèles ont été très exploités dans de nombreuses applications en traitement d'images. Parmi ces applications on peut citer l'analyse/synthèse des image texturées [KB99], la classification des textures [TCYB00] et la segmentation d'images [CD99b]. Les méthodes d'estimation de paramètres pour ces modèles sont souvent des extensions de méthodes proposées dans le cas 1-D [KGG98, KE04, Mar00, FF98].

Dans ce chapitre nous proposons une nouvelle méthode pour l'estimation de paramètres MA et AR pour des modèles d'ordre infini dans le cas 1-D et le cas 2-D. Ces modèles et la méthode d'estimation que nous proposons sont fondés sur la notion de fonction extérieure, issue de la théorie des espaces de Hardy de fonctions analytiques. La section suivante est dédiée à quelques éléments de base concernant ces espaces, ainsi qu'au théorème de factorisation canonique intérieure-extérieure.

2.3 Les espaces de Hardy et la factorisation intérieure-extérieure

2.3.1 Les espaces de Hardy

On note par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert complexe et par $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité.

L'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ (pour $0 < p < \infty$) est l'espace de fonctions analytiques f dans le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ pour lesquelles l'intégrale :

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p}, \quad (2.5)$$

est bornée quand $r \rightarrow 1$. L'espace H^p est muni de la norme

$$\|f\|_p = \sup_{r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt \right)^{1/p}. \quad (2.6)$$

La famille d'espaces $\{H_p\}_{p \geq 0}$ est décroissante, tandis que la famille de normes $\{\|\cdot\|_{p \geq 0}\}$ est croissante. Un fait remarquable concernant les fonctions dans les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ est que ces fonctions se prolongent presque partout au cercle unité. Plus précisément, par le théorème de Fatou [Hof62], la limite radiale $\tilde{f}$ existe presque partout et en plus $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{T})$

$$\tilde{f}(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{it}) \quad (2.7)$$

Ainsi, on peut identifier une fonction f dans H^p avec sa limite radiale $\tilde{f}$, et nous pouvons regarder H^p comme sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{T})$.

Une autre alternative pour définir H^p , en tant que sous-espace de L^p , est de considérer l'espace $H^p(\mathbb{T})$ des fonctions "analytiques" dans $L^p(\mathbb{T})$, c'est-à-dire les fonctions qui ont les coefficients de Fourier négatifs nuls :

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{it}) e^{-int} dt = 0 \quad (n < 0) \quad (2.8)$$

Ainsi pour toute fonction $\tilde{f} \in H^p(\mathbb{T})$, la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{D}), \quad (2.9)$$

où $\{a_n\}_{n \geq 0}$ sont les coefficients de Fourier positifs de $\tilde{f}$, définit une fonction dans $H^p(\mathbb{D})$. Ceci montre que les fonctions dans $H^p(\mathbb{T})$ se prolongent à l'intérieur du disque à des fonctions dans $H^p(\mathbb{D})$ et réciproquement, par le théorème de Fatou, les fonctions dans $H^p(\mathbb{D})$ se prolongent au cercle unité à des fonctions dans $H^p(\mathbb{T})$. Ceci fait qu'on peut identifier $H^p(\mathbb{D})$ à $H^p(\mathbb{T})$ et utiliser la notation commune H^p pour désigner à la fois une fonction dans $\mathbb{D}$ et sa limite radiale.

Une autre manière de retrouver une fonction dans $H^p(\mathbb{D})$ à partir de sa limite radiale est d'utiliser le noyau de Poisson. En effet, nous pouvons aussi obtenir une extension de $\tilde{f}$ à f par l'intégration avec la noyau de Poisson K_r comme suit :

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_r(\theta - t) \tilde{f}(e^{it}) dt, \quad (2.10)$$

où

$$K_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\theta - t)} = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right). \quad (2.11)$$

2.3.2 Fonctions intérieures et extérieures

On rappelle dans cette section la factorisation canonique de fonctions dans H^p en facteur intérieur et facteur extérieur.

Définition 2.3.1. Une fonction *intérieure* est une fonction analytique g dans H^∞ qui vérifie $|g(z)| \leq 1$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $|g(e^{i\theta})| = 1$ presque partout sur $\mathbb{T}$.

Définition 2.3.2. Une fonction *extérieure* est une fonction $F \in H^1$ de la forme

$$F(re^{i\theta}) = \alpha \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} k(e^{it}) dt \right), \quad (z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}) \quad (2.12)$$

où k est une fonction intégrable à valeurs réelles et $|\alpha| = 1$.

De plus, si F est une fonction extérieure vérifiant 2.12 nous avons

$$\log |F(e^{i\theta})| = k(e^{i\theta}) \quad \text{presque partout.} \quad (2.13)$$

En effet, si nous prenons le logarithme nous pouvons obtenir une expression à l'aide du noyau du Poisson comme suit

$$\log |f(re^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left(\log f(re^{i\theta}) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_r(\theta - t) k(e^{it}) dt. \quad (2.14)$$

En effet, $\lim_{r \rightarrow 1} \log |f(re^{i\theta})|$ est égale à $k(e^{i\theta})$ par les propriétés du noyau de Poisson et aussi égale à $\log |f(e^{i\theta})|$ par le théorème de Fatou.

Une fonction extérieure ne peut pas avoir de zéros dans le disque unité car la fonction exponentielle ne s'annule pas. Par exemple, toute fonction inversible dans H^∞ est extérieure ($z - a$ où $|a| > 1$; en fait $z - a$ est extérieure aussi quand $|a| = 1$.)

Parmi les exemples de fonctions intérieures, on trouve les produits de Blaschke. Ces produits sont des fonctions de la forme

$$B(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z}, \quad (2.15)$$

où $\varphi \in \mathbb{R}$ et $|z_j| < 1$ pour $j = 1, \dots, n$.

Une définition équivalente de fonctions extérieures est la suivante : $F \in H^1$ est extérieure si quel que soit $f \in H^1$ telle que $|F| = |f|$ presque partout sur $\mathbb{T}$, on a

$$|f(z)| \leq |F(z)| \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (2.16)$$

Ainsi les fonctions extérieures maximisent la valeur absolue à l'intérieur du disque, pour des valeurs fixées sur le cercle (voir [Hof62]).

La factorisation canonique est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.3.3. (*Factorisation Intérieure-Extérieure*) Soit f une fonction en H^1 . Alors f peut s'exprimer comme le produit de deux facteurs $f = gF$, où g est intérieure et F est extérieure. Cette factorisation est unique à une constante de module 1 près.

Le facteur extérieur F est donné par

$$F(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(e^{it})| dt \right), \quad (2.17)$$

Maintenant, $g := f/F$ est analytique dans le disque et $|g(z)| = 1$ presque partout pour $|z| = 1$. En plus $|f(z)| \leq |F(z)|$ car F est extérieure (voir la définition) donc $|g(z)| \leq 1$ et ainsi, g est intérieure. La factorisation est unique, de sorte que si nous avons deux fonctions extérieures F, F_1 qui vérifient $|F| = |F_1| = |f|$ presque partout sur $\mathbb{T}$, alors f/F et f/F_1 sont toutes les deux intérieures. Par le principe de module maximal, $|F/F_1| \leq 1$ et $|F_1/F| \leq 1$ partout dans le disque, ce qui implique que $F = \alpha F_1$ pour une constante α de module 1.

Une conséquence du théorème de factorisation canonique est un résultat qui résout le problème suivant qu'on utilisera dans les applications : étant donné une fonction positive sur le cercle, dans quelles conditions cette fonction est-elle le carré de la valeur absolue d'une fonction dans H^1 ?

Théorème 2.3.4. *Soit $f > 0$ sur $\mathbb{T}$. Il existe $h \in H^p(\mathbb{D})$ telle que*

$$|\tilde{h}(e^{it})|^2 = f(e^{it}) \quad \text{presque partout} \quad (2.18)$$

où $\tilde{h}$ est l'extension radiale de h si et seulement si

$$\int_{\mathbb{T}} \log |f(e^{it})| > -\infty. \quad (2.19)$$

Si $\log |f(e^{it})|$ est intégrable (si l'équation (2.19) se vérifie) alors il existe une fonction extérieure F telle que

$$F(z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(e^{it})|^{-1/2} dt \right) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |\tilde{h}(e^{it})| dt \right), \quad (2.20)$$

Ainsi tout facteur spectral h peut s'exprimer comme

$$h(z) = g(z)F_0(z) \quad (2.21)$$

où g est une fonction intérieure.

La factorisation intérieure-extérieure est connue en ingénierie dans le cadre de la représentation des fonctions de transfert de filtres numériques comme le produit de deux facteurs : un filtre à minimum de phase (qui correspond à la fonction extérieure) et un filtre passe-tout (qui correspond à la fonction intérieure).

Dans la suite, nous allons introduire des modèles MA et AR d'ordre infini pour la représentation de processus stochastiques. Nous allons proposer une nouvelle méthode pour l'estimation de paramètres fondée sur la définition de la fonction extérieure.

2.4 Méthode pour l'estimation de paramètres MA et AR

Considérons $x(n)$ un processus aléatoire réel et $S(f)$ dénote sa densité spectrale de puissance (ou fonction de densité spectrale). Si $S(f)$ est log-intégrable, la DSP du processus a la factorisation suivante :

$$Sf) = |H(z)|^2 \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = H(z)H^*(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (2.22)$$

pour des fonctions causales $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^{-k}$. Les fonctions $H(z)$, appelées facteurs spectraux de $S(f)$, peuvent être vues aussi comme les fonctions de transfert d'un système excité par un bruit blanc à moyenne nulle et variance égale à l'unité, de sortie $x(n)$. Ainsi le polynôme $H(z)$ peut être vu comme la fonction de transfert associée à un modèle MA d'ordre infini de paramètres $\{b_k\}$. Dans la suite nous utilisons plutôt les fonctions causales de z au lieu de celles de z^{-1} , afin d'être dans le cadre des espaces de Hardy [Dur70], rappelés dans la section 2.3. En conséquence, au lieu de $H(z)$, nous considérons les facteurs spectraux

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k \quad (2.23)$$

Ils vérifient aussi (2.22) puisque si les $\{b_k\}_{k \geq 0}$ sont réels, nous avons

$$|H(z)|^2 = |F(z^{-1})|^2 = |F^*(z)|^2 \text{ pour } z = \exp(j2\pi f) \quad (2.24)$$

Un facteur spectral $F(z)$ n'est pas unique en général. Comme nous avons vu dans le paragraphe 2.3, ils sont tous de la forme [Dur70]

$$F(z) = U(z)F_0(z) \quad (2.25)$$

où U est une fonction intérieure, c'est-à-dire $|U(z)|_{z=\exp(j2\pi f)} = 1$, et F_0 est l'unique fonction extérieure qui vérifie (2.22). Par soucis de simplicité, nous considérons le cas particulier où $U(z) = 1$, ce qui signifie que le facteur spectral F est extérieur. Selon (2.25), choisir une autre fonction intérieure affecte uniquement l'argument de $H(z)$.

Nous proposons d'utiliser la définition de la fonction extérieure (sous-section 2.3.2, équation (2.12)) pour estimer la fonction de transfert associée au processus. Dans la suite, nous proposons une approche permettant l'estimation de paramètres MA et AR.

2.4.1 Estimation de paramètres MA

L'approche d'estimation de paramètres MA que nous proposons s'effectue en deux étapes :

Étape 1 : Estimation du facteur extérieur F_0 .

Le facteur F_0 est calculé sur un cercle de rayon $r < 1$ dans le plan z à l'aide de la représentation intégrale de Poisson suivante

$$F_0(re^{j2\pi v}) = \exp \left(\int_{f=-1/2}^{1/2} \frac{1}{2(2\pi)} P_r(v-f) \log |S(f)| df \right) \quad (2.26)$$

où

$$P_r(v - f) = \frac{1 + re^{j2\pi(v-f)}}{1 - re^{j2\pi(v-f)}} \quad (2.27)$$

Étape 2 : Estimation des coefficients $\{b_k\}_{k \geq 0}$.

Selon (2.25), la fonction extérieure peut être exprimée soit par les coefficients $\{b_k\}_{k \geq 0}$ ou par le développement en série de Taylor

$$F_0(z) = F_0(0) + \frac{F_0^{(1)}(0)}{1!}z + \dots + \frac{F_0^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k \quad (2.28)$$

Ainsi, à l'aide de la formule de Cauchy sur le cercle de rayon r dans le plan z , les coefficients $\{b_k\}_{k \geq 0}$ peuvent être obtenus par :

$$b_k = \frac{F_0^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{r^k} \int_{v=0}^1 F_0(re^{j2\pi v}) e^{jk2\pi v} dv \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

Ces paramètres MA calculés sont les coefficients de Fourier de la fonction extérieure.

Étant donnée que $S(f)$ est intégrable, les coefficients $\{b_k\}_{k \geq 0}$ sont nécessairement de carrés sommables, ce que signifie que les polynômes

$$F_q(z) = \sum_{k=1}^q b_k z^k \quad (2.30)$$

convergent à F_0 dans la norme L^2 quand $p \rightarrow +\infty$.

La fonction de transfert F obtenue par cette méthode est à minimum de phase, c'est-à-dire tous ses zéros sont à l'extérieur du cercle unité. Donc, F et son inverse sont des filtres stables¹.

2.4.2 Estimation des paramètres AR

La méthode présentée dans la section précédente peut être utilisée également pour estimer les paramètres d'un modèle AR d'ordre infini caractérisant le processus $x(n)$:

$$x(n) = - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x(n-k) + u(n) \quad (2.31)$$

Dans ce cas, $F^{AR}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ vérifie :

$$S(f) = |H(z)|^2 \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \frac{1}{|F^{AR}(z^{-1})|^2} \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (2.32)$$

Afin d'évaluer la fonction extérieure de F^{AR} et les paramètres AR, $S(f)$ est remplacé par $1/S(f)$ dans l'équation (2.26) :

1. Ce critère de stabilité est exprimé en accord avec la convention d'écriture utilisée dans l'équation (2.23)

$$F_0^{AR}(re^{j2\pi v}) = \exp \left(\int_{f=-1/2}^{1/2} \frac{1}{2(2\pi)} P_r(v-f) (-\log|S(f)|) df \right) \quad (2.33)$$

Les paramètres AR $\{a_k\}_{k \geq 0}$ peuvent être estimés en utilisant l'équation (2.29) comme suit :

$$a_k = \frac{F_0^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{r^k} \int_{v=0}^1 F_0^{AR}(re^{j2\pi v}) e^{jk2\pi v} dv \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.34)$$

2.4.3 Estimation des paramètres dans le cas 2-D

Nous pouvons généraliser cette méthode d'estimation au cas 2-D. Ainsi un processus aléatoire réel $x(n, m)$ de DSP $S(f_1, f_2)$ peut être caractérisé pour les facteurs spectraux de la forme :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(k,l) \in D} b_{(k,l)} z_1^k z_2^l \quad (2.35)$$

qui vérifient

$$P(f_1, f_2) = |F^*(z_1, z_2)|^2 = F^*(z_1, z_2) F(z_1, z_2) \quad \text{pour } z_1 z_2 = \exp(j2\pi(f_1 + f_2)) \quad (2.36)$$

Nous pouvons supposer que la représentation (2.35) à tous les coefficients dans le premier quadrant de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire D correspond à un support Quart Plan, de telle sorte que la fonction F soit analytique et appartienne à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D}^2)$. Avec cette condition supplémentaire, toutes les solutions de l'équation (2.36) ont une factorisation de la forme [Dur70] :

$$F(z_1, z_2) = U(z_1, z_2) F_0(z_1, z_2) \quad (2.37)$$

où U est une fonction intérieure et F_0 est une fonction extérieure. Comme dans le cas 1-D, nous considérons le cas où $U(z_1, z_2) = 1$, donc $F = F_0$. La méthode d'estimation proposée pour le cas 2-D s'effectue comme suit :

Étape 1 : Estimation du facteur extérieur.

La fonction extérieure F est évaluée dans le bi-tore $\mathbb{T}_r = \{z \in (C) : |z| = r < 1\}^2$ à l'aide de la représentation intégrale de Poisson comme suit

$$F_0(re^{j2\pi v_1}, re^{j2\pi v_2}) = \exp \left(\int_{f_1=-1/2}^{1/2} \int_{f_2=-1/2}^{1/2} \frac{1}{2(2\pi)^2} P_r(v_1 - f_1) P_r(v_2 - f_2) \log(S(f_1, f_2)) df_1 df_2 \right). \quad (2.38)$$

Étape 2 : Estimation des coefficients.

Les paramètres $b(k, l)_{(k,l) \geq (0,0)}$ sont obtenus à partir de $F_0(z_1, z_2)|_{z_i=r_i e^{j2\pi v_i}}$. La fonction extérieure F_0 peut s'exprimer comme suit

$$F(z_1, z_2) = \sum_{(k,l) \geq (0,0)} \frac{\partial^k}{\partial z_1^k} \frac{\partial^l}{\partial z_2^l} \frac{F(0,0)}{m!n!} z_1^k z_2^l = \sum_{(k,l) \geq (0,0)} b_{(k,l)} z_1^k z_2^l \quad (2.39)$$

En conséquence, les $b(k, l)$ peuvent être obtenus à l'aide de la formule de Cauchy

$$b_{(k,l)} = \frac{1}{(2\pi)^2 r^k r^l} \int_{v_1=-1/2}^{1/2} \int_{\pi v_2=-1/2}^{1/2} F(r_1 e^{j2\pi v_1}, r_2 e^{j2\pi v_2}) e^{j2\pi(kv_1 + lv_2)} dv_1 dv_2 \quad (2.40)$$

Dans la section suivante nous allons présenter des aspects d'implémentation de cette méthode.

2.5 Implémentation de la méthode d'estimation

2.5.1 Cas 1-D

On estime les valeurs de la fonction extérieure pour un nombre fini de points sur un cercle de rayon $r < 1$ dans le plan z . Par la suite, on note $S(e^{j2\pi n/N})$ la densité spectrale de puissance (DSP) discrète à N points. Comme estimateur de la DSP, nous utilisons le périodogramme :

$$S(e^{j2\pi n/N}) = \frac{1}{N} \left\| Y(e^{j2\pi n/N}) \right\|^2 \quad (2.41)$$

où $Y(e^{j2\pi n/N})$ avec $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ est la transformée de Fourier discrète 1-D d'une signal $y(k)$.

Pour un rayon r donné, la fonction extérieure F_0 peut être calculée à l'aide de la version discrète de la représentation intégrale de Poisson (2.26) pour $-N/2 \leq n < N/2$:

$$\begin{aligned} F_0(re^{j2\pi n/N}) &= \exp \left(\sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{2N} P_r((n-m)/N) \log(S(e^{j2\pi m/N})) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2N} P_r((n-m)/N) * \log(S(e^{j2\pi m/N})) \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

où $*$ dénote le produit de convolution. Ainsi 2.42 peut être implémenté par un algorithme de convolution rapide [MW98]. Pour calculer les coefficients de Taylor, nous utilisons la version discrétisée de l'équation 2.29 :

$$b(k) = \frac{1}{N r^k} \sum_{n=0}^{N-1} F_0(n/N) e^{-j2\pi k(n/N)} \quad (2.43)$$

Nous remarquons que 2.43 peut être implémentée comme une transformée de Fourier rapide² (FFT) pondérée de F_0 .

Étant donné que ces étapes correspondent à une convolution et à une FFT, la complexité calculatoire de la méthode est de l'ordre de $O(N \log N)$ opérations.

2. Fast Fourier Transform (FFT)

2.5.2 Cas 2-D

En pratique, nous disposons d'une image discrète de taille $N \times N$ à partir de laquelle nous pouvons estimer une DSP utilisant le périodogramme :

$$S(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N}) = \frac{1}{N^2} \left\| Y(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N}) \right\|^2 \quad (2.44)$$

où $Y(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N})$ avec $m, n = -N/2, \dots, N/2 - 1$, est la transformée de Fourier discrète 2-D de $y(k, l)$.

À partir de cette DSP, nous estimons les valeurs de la fonction extérieure pour un nombre fini de points dans le bi-tore $\mathbb{T}_r = \{z \in (\mathbb{C}) : |z| = r < 1\}^2$ à l'aide de la version discrète de la représentation intégrale de Poisson comme suit

$$F_r(e^{j2\pi k/N}, e^{j2\pi l/N}) = \exp \left(\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{2N^2} P_r((k-m)/N) P_r((l-n)/N) \log(S(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N})) \right) \quad (2.45)$$

que l'on peut récrire comme suit

$$F_r(e^{j2\pi k/N}, e^{j2\pi l/N}) = \exp \left(\frac{1}{2N^2} (P_r((k-m)/N) P_r((l-n)/N)) * \log(S(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N})) \right) \quad (2.46)$$

Les coefficients de Taylor deviennent :

$$b_{(k,l)} = \frac{1}{N^{2r^{k+l}}} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} F_r(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N}) e^{j2\pi m(k/N)} e^{j2\pi n(l/N)} \quad (2.47)$$

Étant donné que ces étapes correspondent à une convolution 2-D et une FFT 2-D, la complexité calculatoire de la méthode est de l'ordre de $O(N^2 \log N)$ opérations.

Remarque : Cette approche d'estimation de paramètres sera ensuite exploitée pour le développement d'une méthode de décomposition. Cette méthode est fondée sur les propriétés de régularisation des expressions 2.26 (cas 1-D) et 2.46 (cas 2-D), notamment leur capacité à atténuer des singularités.

Ces singularités sont mieux définies dans la DSP obtenue par l'approche du périodogramme que pour le spectre obtenu par corrélogramme, car le deuxième 'régularise' ces singularités. Ceci est illustré dans la section suivante.

2.6 Propriétés de la méthode proposée

L'objectif de cette section est de présenter les propriétés de la méthode proposée en tant qu'estimateur d'un modèle de type MA et AR. Notamment, nous souhaitons mettre en évidence un effet de moyennage ou régularisation des singularités dans le domaine spectral.

Cette propriété est liée à l'étape de calcul de la fonction extérieure. Cette étape peut être vue comme la convolution de la DSP estimée du processus par un noyau de Poisson complexe.

Cette convolution produit un effet de moyennage ou régularisation dans le domaine spectral qui résulte en l'atténuation des singularités spectrales. Cet effet va dépendre de la régularité et de la résolution fréquentielle de la DSP estimée.

Les méthodes d'estimation utilisées ici sont :

1. La méthode de Durbin pour l'estimation de paramètres MA [Dur59]³.
2. La méthode récursive de Levinson pour l'estimation des paramètres AR.
3. La méthode proposée pour l'estimation des paramètres MA et AR.
4. Une variante de la méthode proposée⁴ utilisant le corrélogramme comme estimateur de la DSP.
5. Deux variantes de la méthode proposée utilisant les DSP (obtenues par périodogramme et corrélogramme) sur lesquelles un filtre de lissage a été appliqué.

Nous allons aussi présenter quelques exemples d'estimation de modèles MA 2-D utilisant la méthode proposée.

2.6.1 Étude comparative dans le cas 1D

Pour le cas 1-D l'étude est organisée en deux parties :

Partie 1 :

Dans un premier temps on teste deux processus pour les méthodes d'estimation de paramètres MA.

Le premier processus est un processus MA défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 0.0667 + 0.1333z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.0333z^{-3} + 0.2333z^{-4} + 0.3000z^{-5}$$

et dont la signal d'excitation est un bruit blanc de variance 1. Le deuxième processus est la somme du premier processus avec la somme de sinusoïdales définie par :

$$y(n) = 1.2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 1.2 \sin\left(\frac{65}{128}\pi n\right)$$

Les réalisations générés par ordinateur sont de taille $N = 1024$.

Nous proposons d'évaluer les méthodes utilisant le critère Ψ , défini par :

$$\Psi = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |H_{theo}^{MA}(e^{j2\pi n/N})|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left(|H_{theo}^{MA}(e^{j2\pi n/N})|^2 - |H_{est}^{MA}(e^{j2\pi n/N})|^2 \right)} \right) \quad (2.48)$$

ou H_{theo}^{MA} et H_{est}^{MA} sont les fonctions de transfert théorique et estimée du processus⁵. Plus la valeur de ce critère est grande plus la fonction de transfert estimée est proche de la fonction de transfert théorique.

Pour deux des variantes de l'approche proposée, nous avons appliqué un filtre de lissage à la DSP estimée par les méthodes du périodogramme et corrélogramme (voir les figures 2.1 et 2.2). La réponse impulsionnelle du filtre utilisé pour le lissage $h(n)$ est définie par :

$$h(n) = \cos(n\pi/30 - \pi/2), \quad n = 1, \dots, 29$$

3. La méthode de Durbin aborde la modélisation MA en deux étapes fondées sur la solution de deux modèles de type AR.

4. La méthode proposée utilise le périodogramme pour l'estimation de la DSP du processus.

5. Ce critère est analogue au rapport signal sur bruit (RSB)

Ce filtrage permet de compenser l'irrégularité de la DSP estimée par le périodogramme ou le corrélogramme.

La figure 2.3 présente les spectres estimés à partir des réalisations du processus MA. D'après le tableau 2.1, les spectres estimés à l'aide des approches proposées utilisant des DSP lissées sont les plus proches des spectres théoriques.

Les résultats obtenus à partir des réalisations du processus 'MA + sinusoides' sont présentés dans la figure 2.4. D'après le tableau 2.2, le spectre estimé à l'aide de l'approche proposée de base (utilisant le périodogramme) est le plus proche du spectre théorique du processus MA. Nous remarquons que cette approche atténue ou régularise les pics associés au signal sinusoidal.

En général, l'approche proposée est utile pour la caractérisation de processus complètement non déterministe. Ainsi, on peut envisager une stratégie dans laquelle l'approche est appliquée dans sa version de base (DSP estimée par périodogramme) ou dans sa version utilisant la DSP lissée en fonction de l'absence ou de la présence d'une composante déterministe dans le processus. Pour déterminer la présence de telles composantes on peut envisager une étude de l'histogramme des amplitudes des coefficients issus de la FFT du signal comme il est proposé dans [KWF96].

Dans la suite de la section, nous examinons l'influence de la taille de la réalisation et de l'ordre du modèle sur l'effet d'atténuation des singularités spectrales des approches proposées.

Méthode	$\Psi(\text{dB})$
Durbin	6.6827
Méth. Proposée. - DSP périodogramme	4.2066
Méth. Proposée. - DSP corrélogramme	4.2377
Méth. Proposée. - DSP périodogramme filtrée	7.3463
Méth. Proposée. - DSP corrélogramme filtrée	7.1693

TABLE 2.1: Critère Ψ moyenné sur 5 réalisations du processus MA.

Méthode	$\Psi(\text{dB})$
Durbin	3.3176
Méth. Proposée. - DSP périodogramme	4.3555
Méth. Proposée. - DSP corrélogramme	2.1758
Méth. Proposée. - DSP périodogramme filtrée	-6.8424
Méth. Proposée. - DSP corrélogramme filtrée	-3.9676

TABLE 2.2: Critère Ψ moyenné sur 5 réalisations du processus 'MA + sinusoides'.

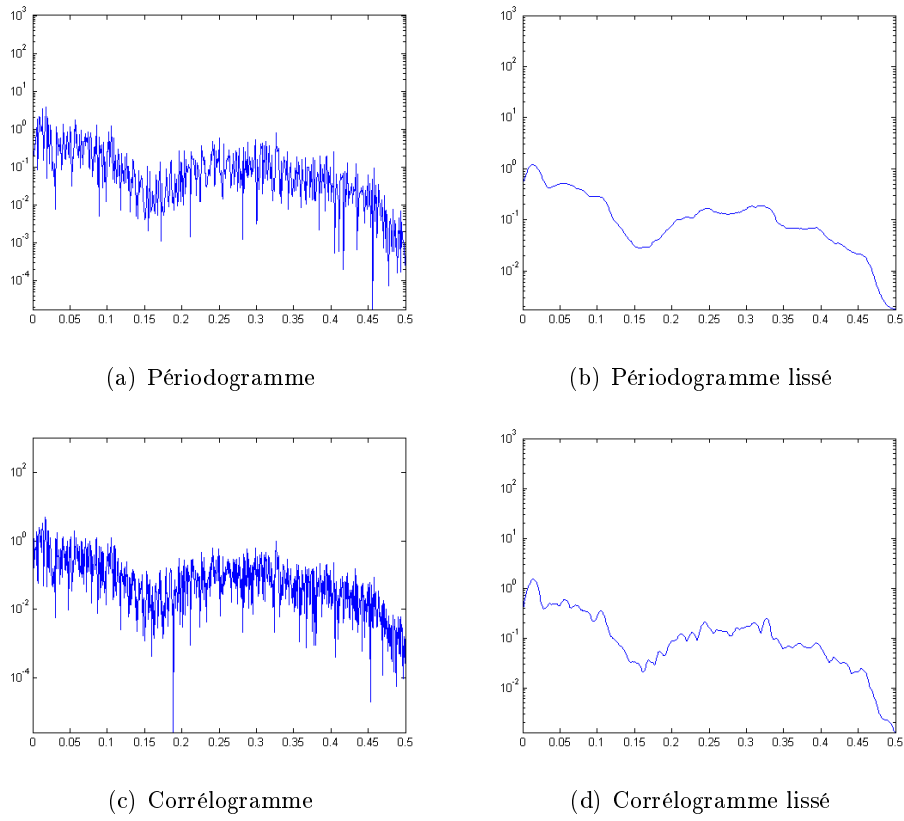


FIGURE 2.1: DSP estimées du processus MA par les méthodes du périodogramme et du corrélogramme.

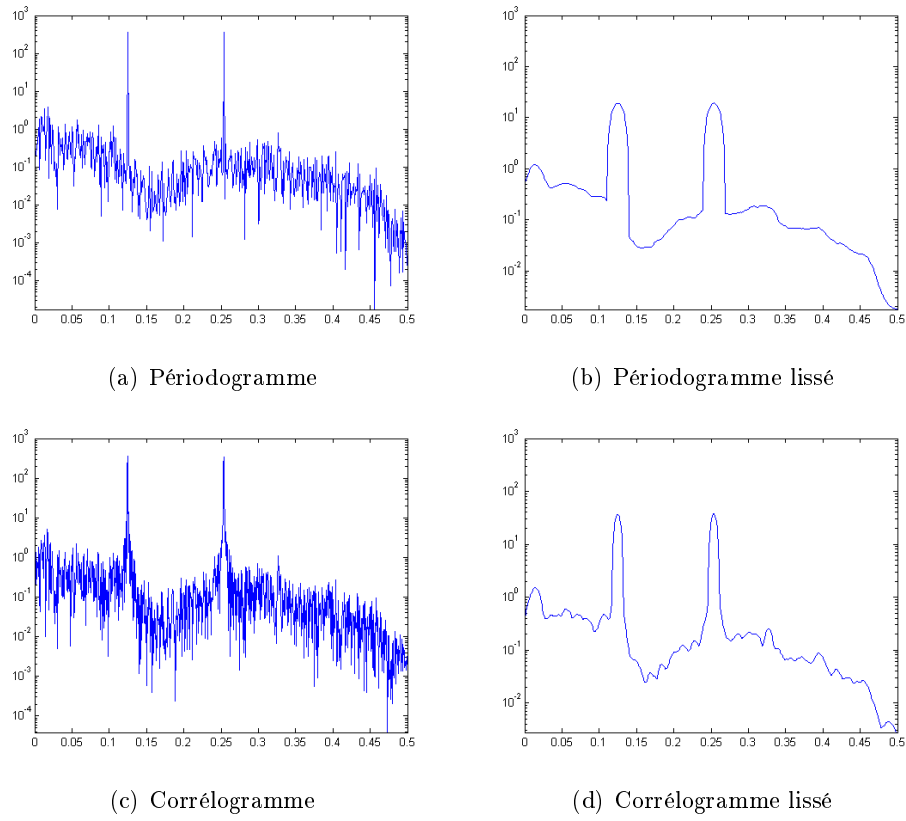
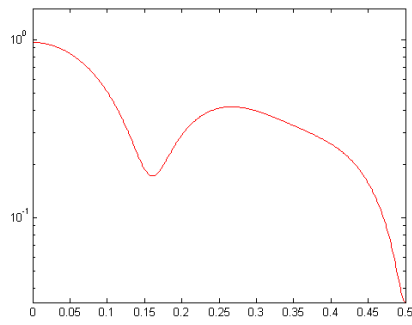
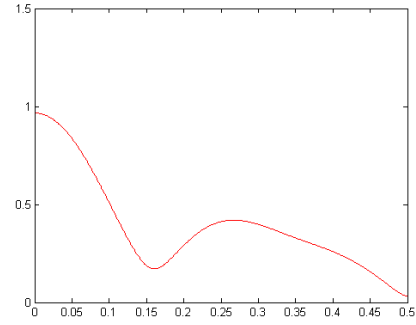


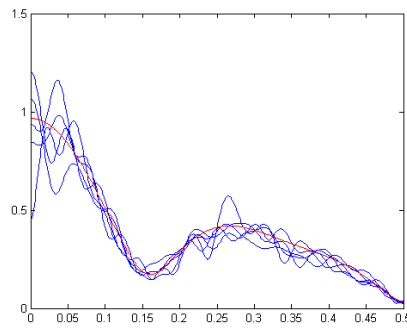
FIGURE 2.2: DSP estimées du processus 'MA+sinusoïdes' par les méthodes du périodogramme et du corrélogramme.



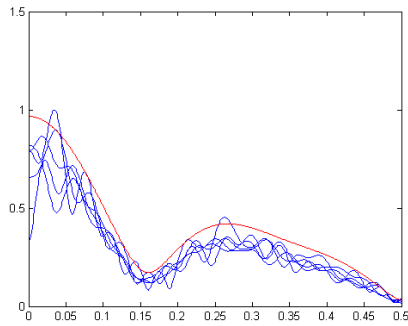
(a) Spectre théorique (échelle logarithmique)



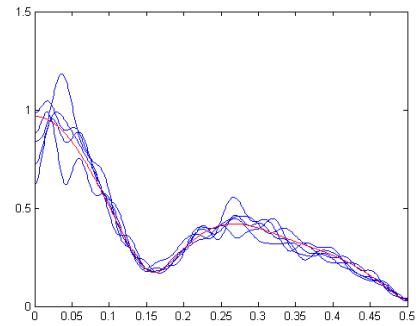
(b) Spectre théorique (échelle linéaire)



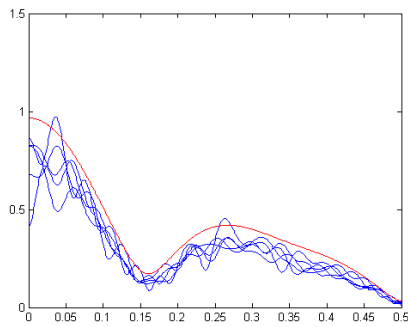
(c) Méthode de Durbin



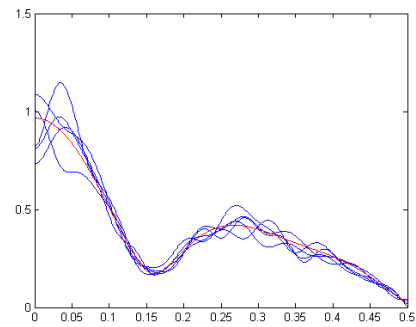
(d) M. Proposée - DSP périodogramme



(e) M. Proposée - DSP périodogramme lissée

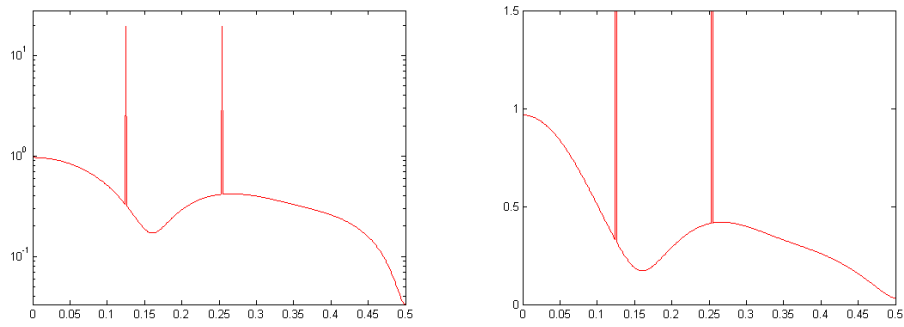


(f) M. Proposée - DSP corrélogramme

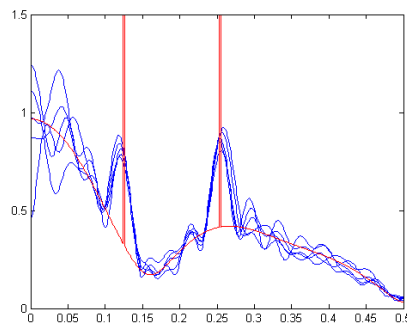


(g) M. Proposée - DSP corrélogramme lissée

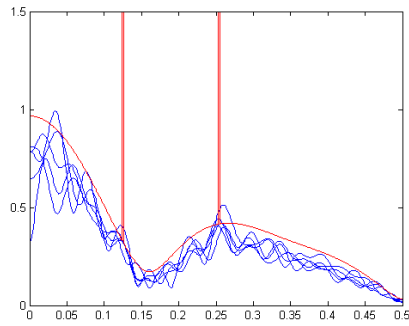
FIGURE 2.3: Spectres estimés pour le processus MA. $q = 30$. $N = 1024$



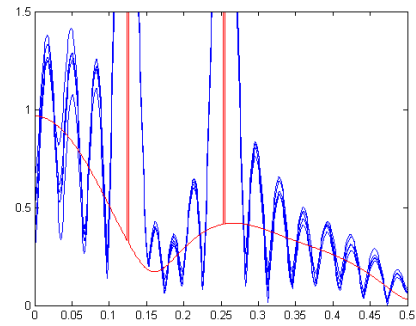
(a) Spectre théorique (échelle logarithmique) (b) Spectre théorique - Zoom (échelle linéaire)



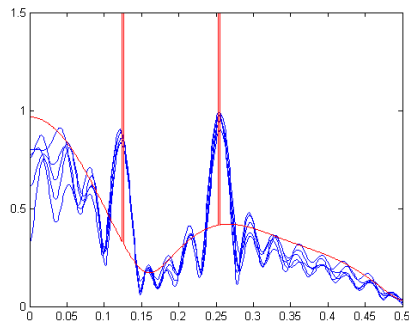
(c) Méthode de Durbin



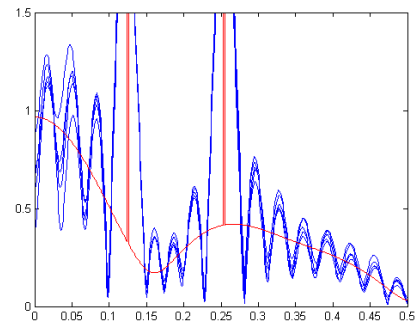
(d) M. Proposée - DSP périodogramme



(e) M. Proposée - DSP périodogramme lissée



(f) M. Proposée - DSP corrélogramme



(g) M. Proposée - DSP corrélogramme lissée

FIGURE 2.4: Spectres estimés pour le processus 'MA+sinusoïdes'. $q = 30$. $N = 1024$

Partie 2

Nous comparons, ci-après, les méthodes proposées pour l'estimation de paramètres MA, AR et les deux méthodes fondées sur les moindres carrés (Durbin et Levinson) pour des processus contenant une composante déterministe (un signal sinusoïdal). Les méthodes de modélisation AR sont testées sur un processus AR d'ordre $p = 6$. Les pôles sont définis comme suit :

$$0.75e^{\pm j0.2\pi}, 0.8e^{\pm j0.4\pi}, 0.85e^{\pm j0.7\pi}$$

Les méthodes de modélisation MA sont testées sur un processus MA d'ordre $q = 8$ défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = 0.1 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2} + 0.4z^{-3} + 0.5z^{-4} + 0.4z^{-5} + 0.3z^{-6} + 0.2z^{-7} + 0.1z^{-8}$$

et dont la signal d'excitation est un bruit blanc de variance 1.

La signal sinusoïdal est défini par :

$$y(n) = 1.2 \sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 1.2 \sin\left(\frac{65}{128}\pi n\right)$$

La comparaison porte sur l'effet de la taille N du signal et sur l'ordre p choisi pour l'estimation. Ensuite, utilisant des valeurs de N et p fixes, nous comparons la méthode proposée pour le modèle MA avec sa variante utilisant le corrélogramme.

Nombre d'échantillons N du processus

Dans les figures 2.5 et 2.6 nous présentons les spectres estimés par les approches sur les signaux 'MA + sinusoïdes' et 'AR + sinusoïdes'. Les simulations numériques ont été effectuées sur des processus de tailles $N = \{512, 1024, 2048, 3072\}$ utilisant des modèles d'ordre fixe. Selon la figure 2.5, les spectres estimés à l'aide la méthode de Durbin et de la méthode proposée MA présentent une atténuation ou moyennage au niveau des fréquences des sinusoïdes. L'atténuation est de moins en moins importante à mesure que le nombre d'échantillons diminue. Cependant, l'atténuation est plus importante sur le spectre estimé avec la méthode proposée que sur le spectre estimé utilisant l'approche de Durbin. Selon la figure 2.6, nous observons aussi l'effet d'atténuation pour la méthode proposée lors de l'estimation de paramètres AR.

L'ordre du modèle

Les figures 2.7 et 2.8 présentent les spectres estimés des processus 'MA + sinusoïdes' et 'AR + sinusoïdes' utilisant des modèles de plusieurs ordres. Plus l'ordre du modèle est élevé, plus il capte l'influence des sinusoïdes. On constate aussi que l'effet sur le spectre estimé par les méthodes proposées est inférieur à celui sur le spectre estimée par la méthode de Durbin et la méthode de Levinson (respectivement dans le cas MA et AR). La figure 2.9 présente les $q = 50$ paramètres estimés avec la méthode proposée pour le processus MA et le processus 'MA + sinusoïdes' ainsi que la différence entre ces deux séries de paramètres. On constate que cette différence correspond à une suite périodique. Ceci est en accord avec la représentation en série de Fourier⁶ des impulsions de Dirac.

6. Le paramètres MA sont les coefficients de Fourier de la fonction extérieure évaluée sur le cercle unité

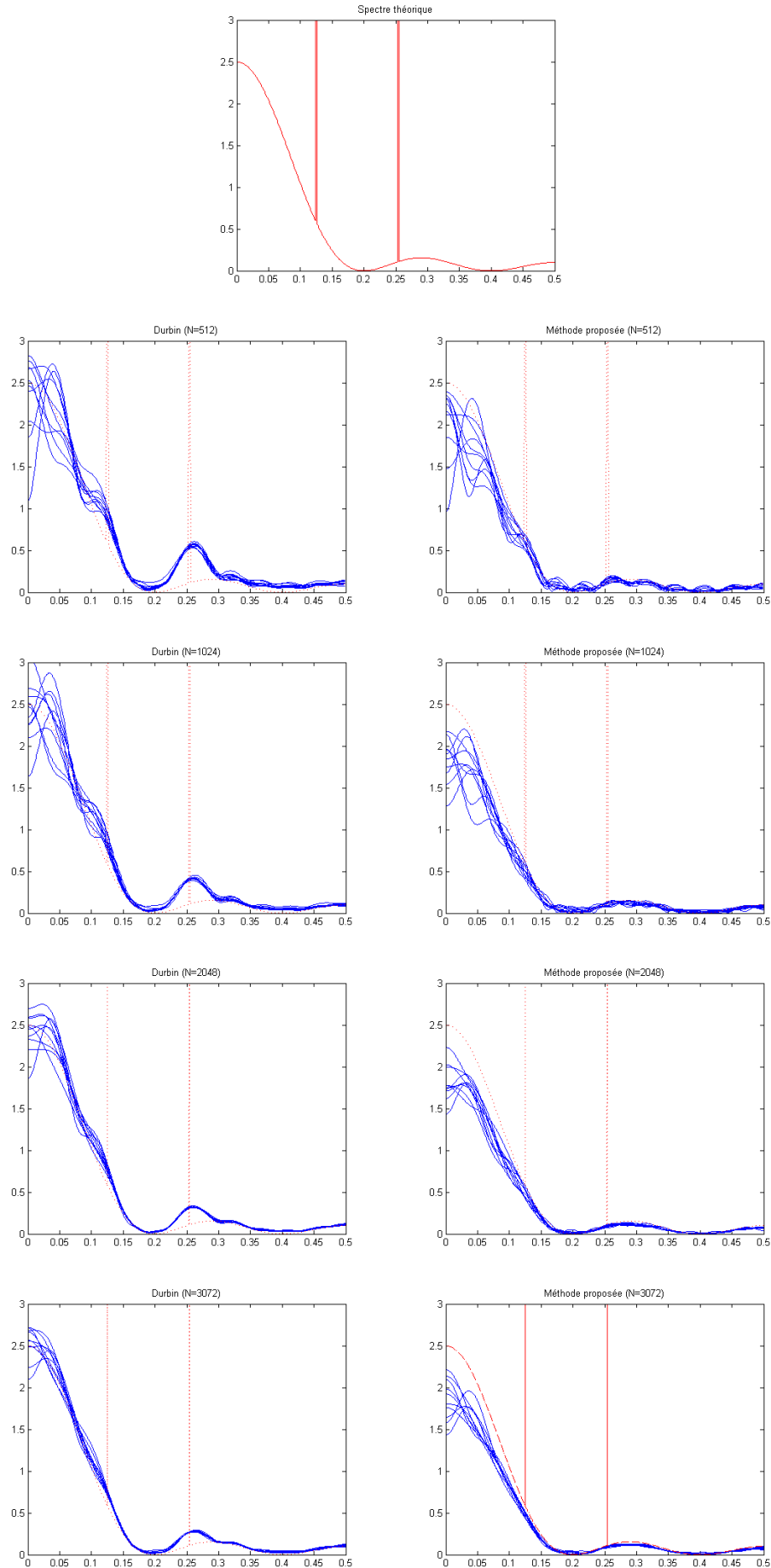
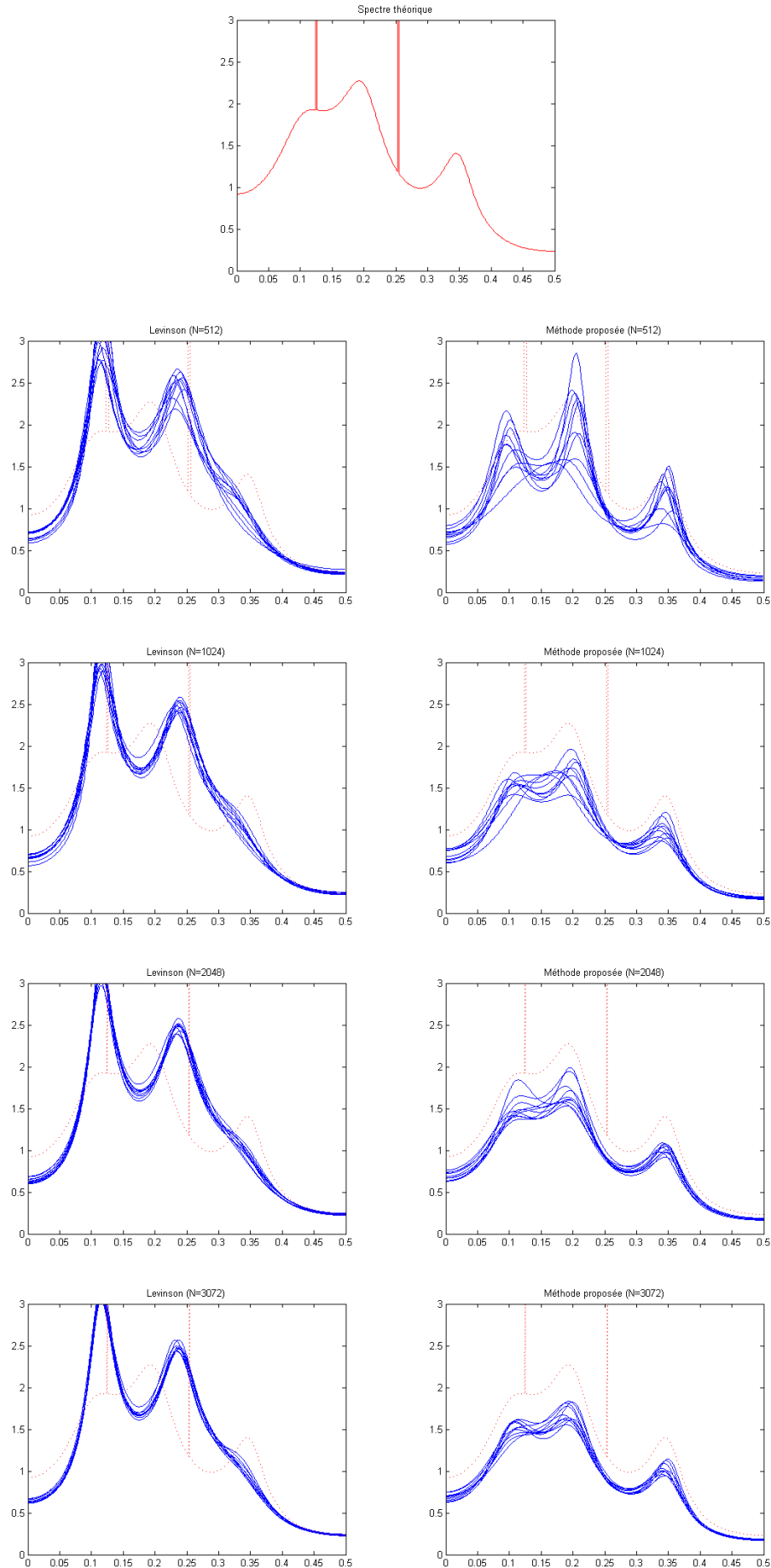


FIGURE 2.5: Spectres MA estimés pour le processus 'MA + sinusoïdes'. $q = 20$.

FIGURE 2.6: Spectres MA estimés pour le processus 'AR + sinusoïdes'. $p = 6$.

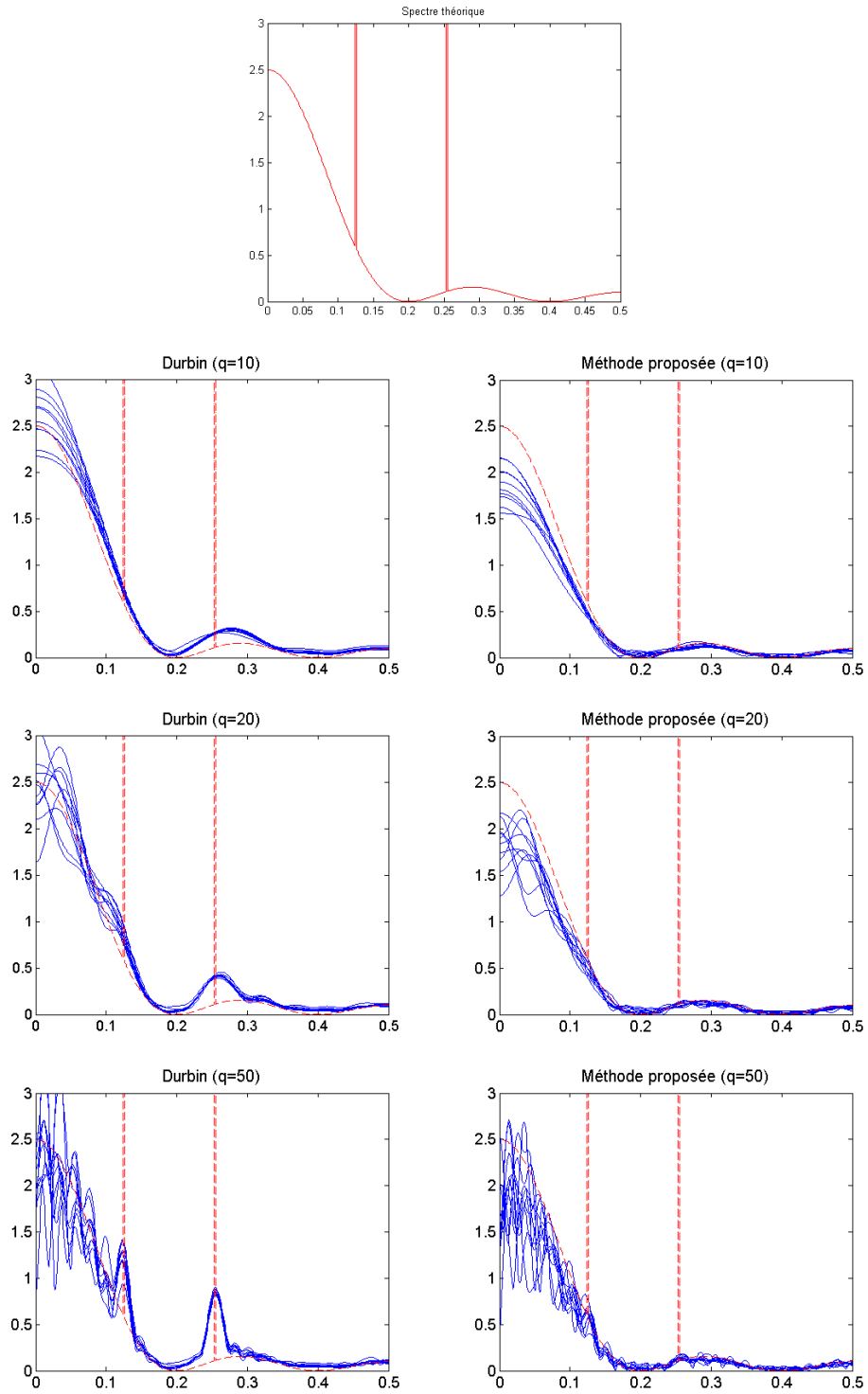


FIGURE 2.7: Spectres MA estimés pour le processus 'MA + sinusoïdes'. $N = 1024$.

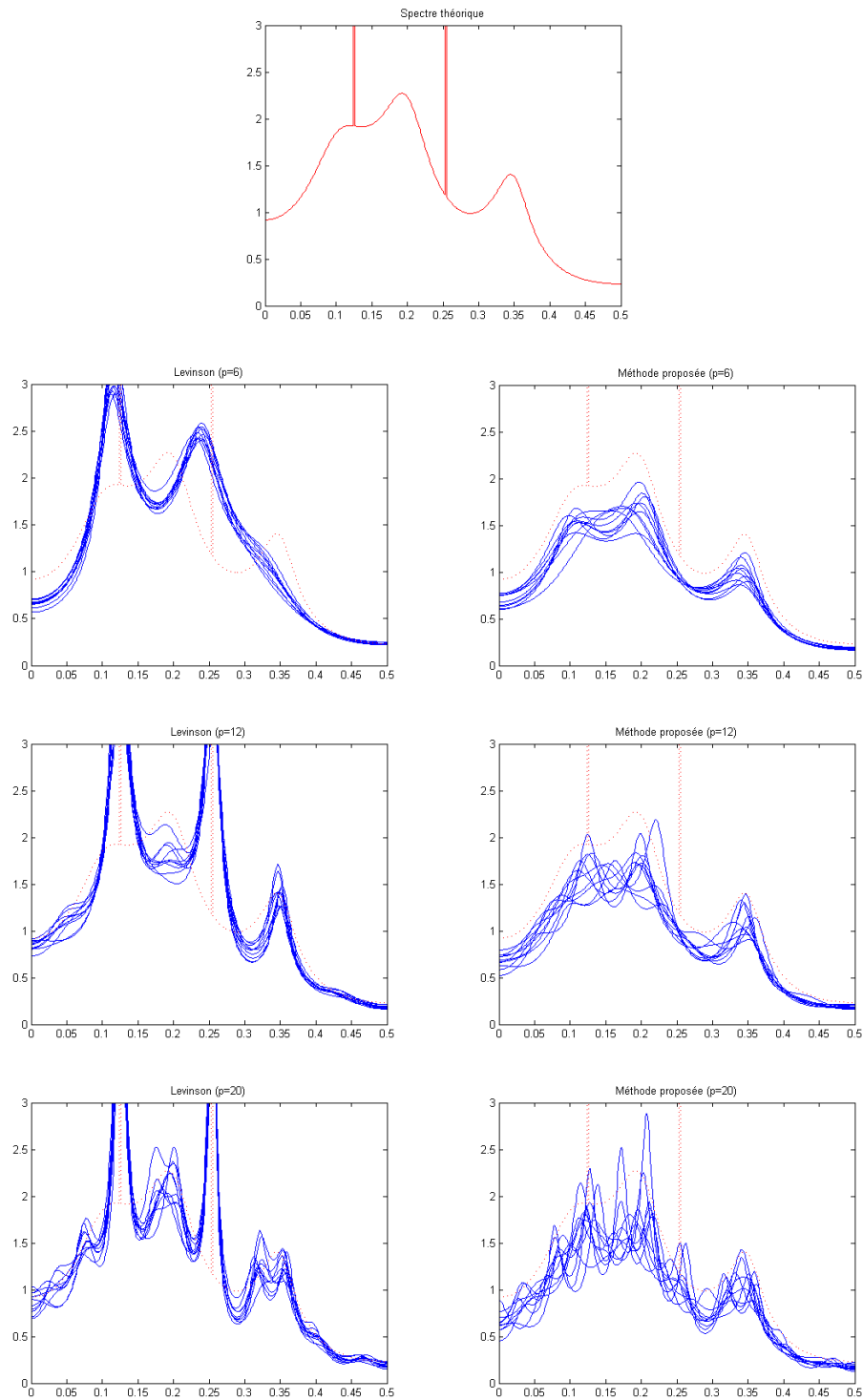


FIGURE 2.8: Spectres AR estimés pour le processus 'AR + sinusoides'. $N = 1024$.

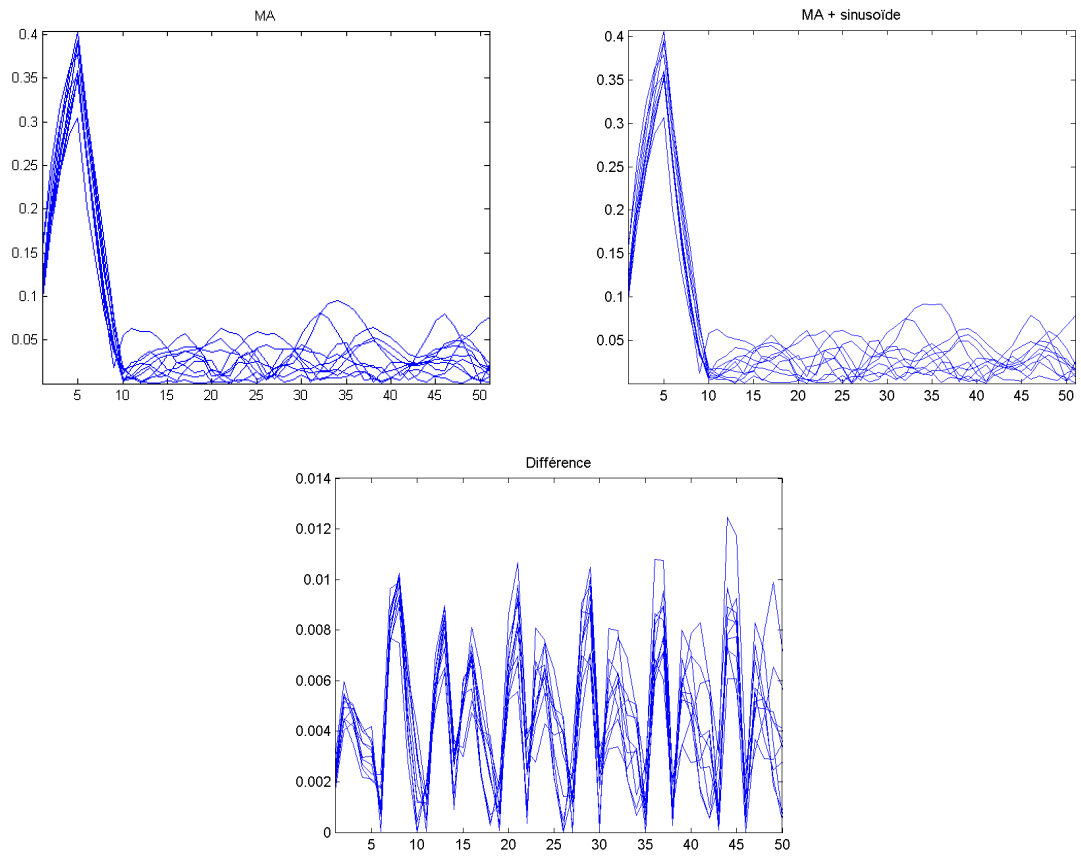


FIGURE 2.9: Paramètres MA estimés à l'aide de la méthode proposée. $N = 1024$.

La 'régularité' de l'estimateur de la DSP

Les figures 2.10 et 2.11 présentent les spectres estimés des processus MA et 'MA+sinusoïdes' testés à l'aide de deux versions de la méthode proposée (MA), l'une utilisant le périodogramme et l'autre le corrélogramme comme estimateur de la DSP. Selon la figure 2.12, l'atténuation des singularités dans le domaine spectral est plus importante dans l'approche utilisant le périodogramme. Les figures 2.13 illustrent les DSP estimées à l'aide du corrélogramme et du périodogramme ainsi qu'un 'zoom' au niveau de la fréquence de la sinusoïde. Dans le périodogramme une singularité spectrale (par exemple, une impulsion de Dirac associée à une sinusoïde) est représentée par un seul 'point' alors que dans le corrélogramme, elle s'étale sur plusieurs échantillons voisins. En conséquence, l'effet de moyennage ou atténuation de la singularité spectrale est moins important dans le spectre estimé utilisant le périodogramme. Ceci est mis en évidence au niveau des fonctions extérieures estimées pour les deux méthodes (voir la figure 2.14 et 2.15). Ainsi, plus un estimateur 'régularise' une singularité spectrale, moins l'atténuation sera importante au niveau du spectre estimé par l'approche proposée.

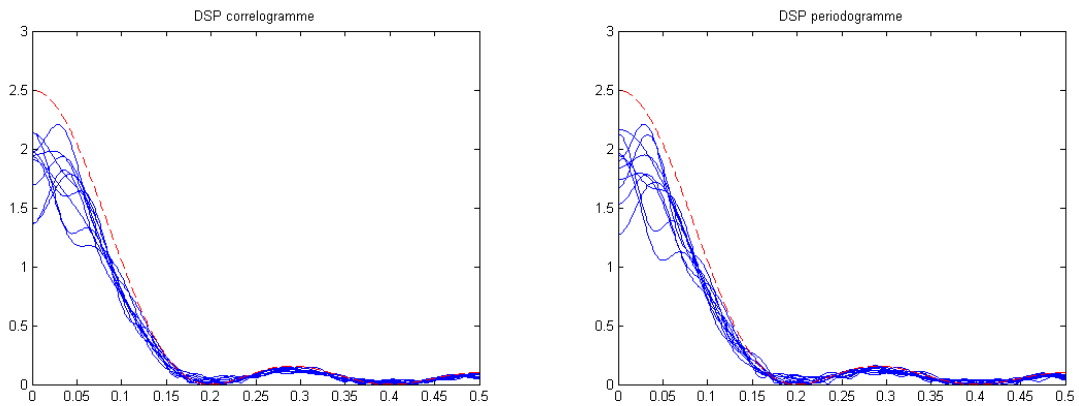


FIGURE 2.10: Spectre MA estimé pour le processus MA. $N = 1024$, $q = 20$.

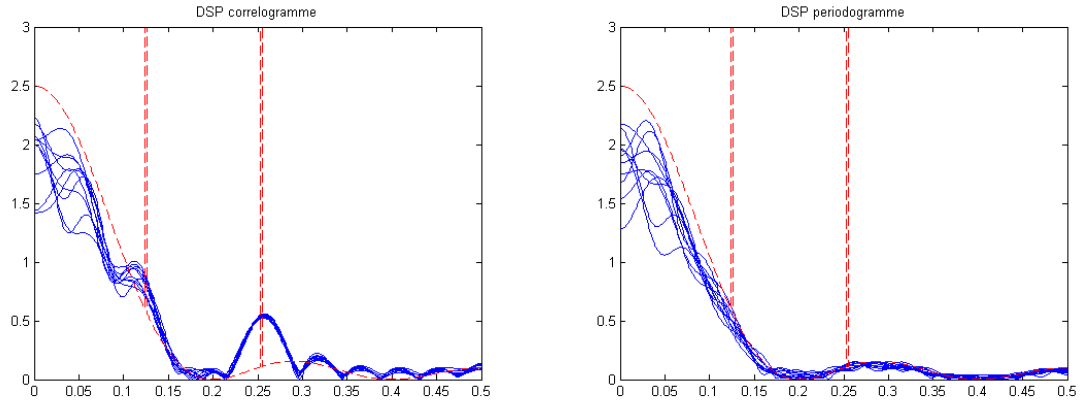


FIGURE 2.11: Spectre MA estimé pour le processus 'MA + sinusoïdes'. $N = 1024$, $p = 20$.

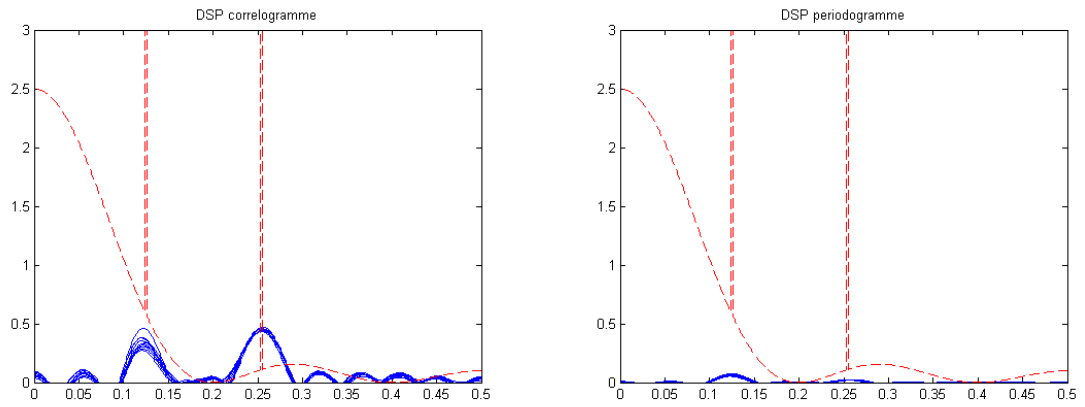


FIGURE 2.12: Différence entre le spectre estimé pour le processus MA et le processus 'MA + sinusoïdes'. $N = 1024$, $p = 20$.

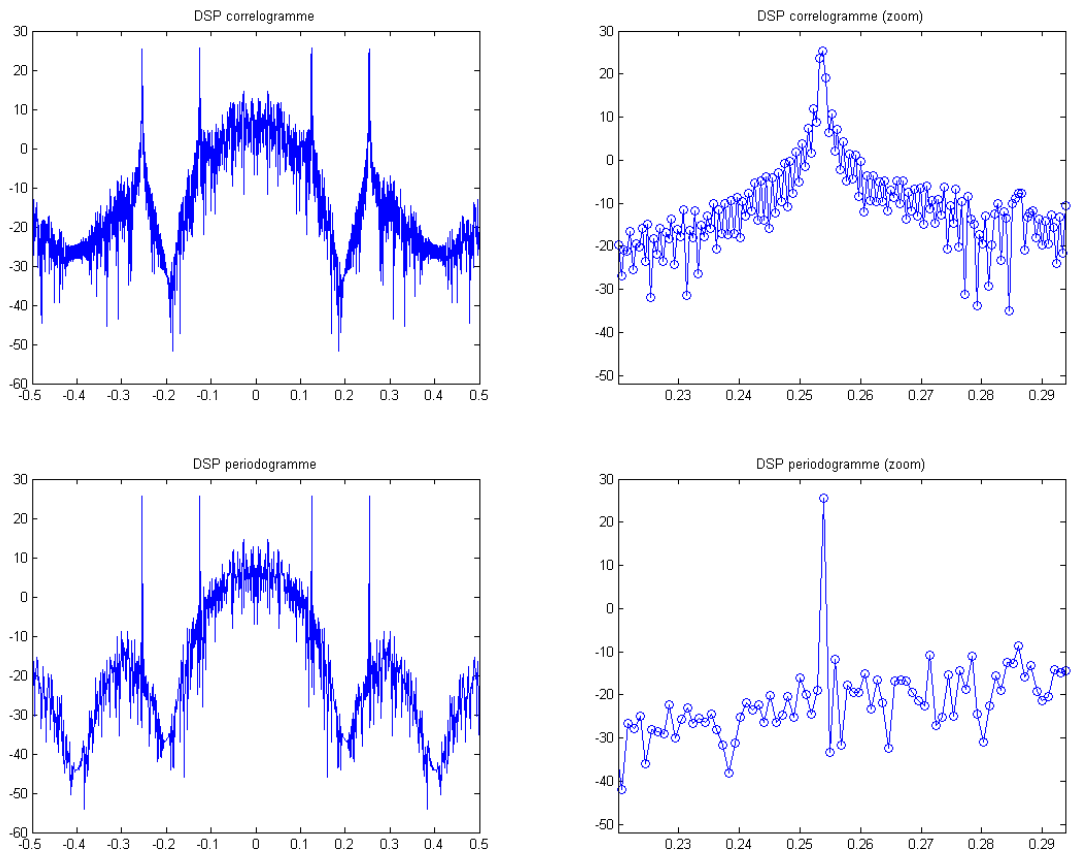


FIGURE 2.13: DSP estimées par corrélogramme et périodogramme.

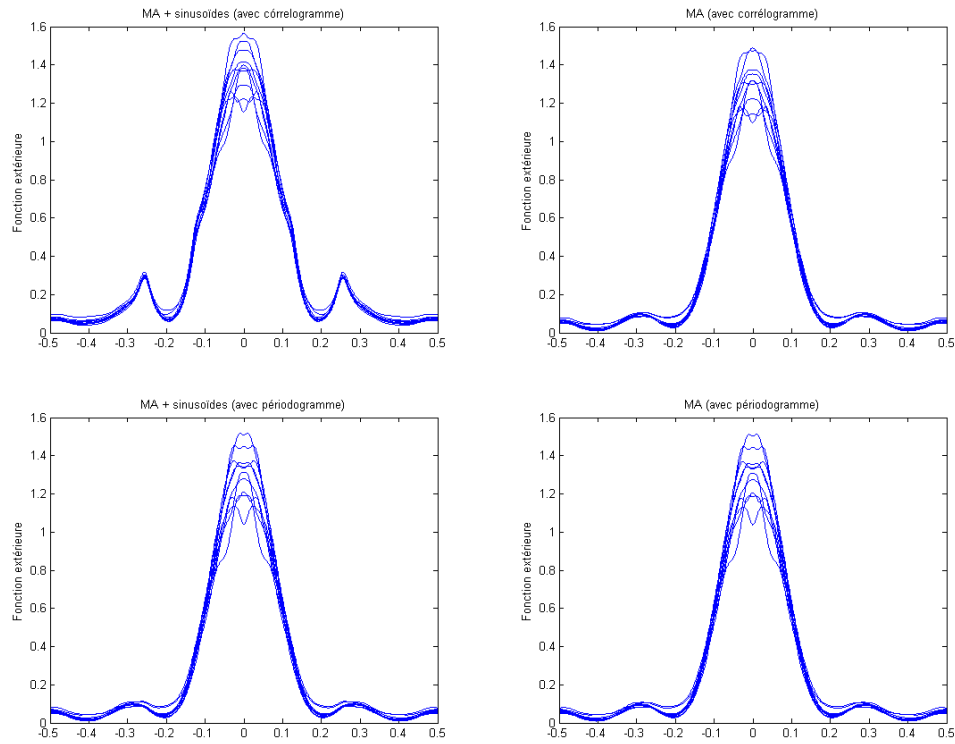


FIGURE 2.14: Fonctions extérieures estimées pour le processus MA et le processus 'MA + sinusoides'. $r = 0.9$

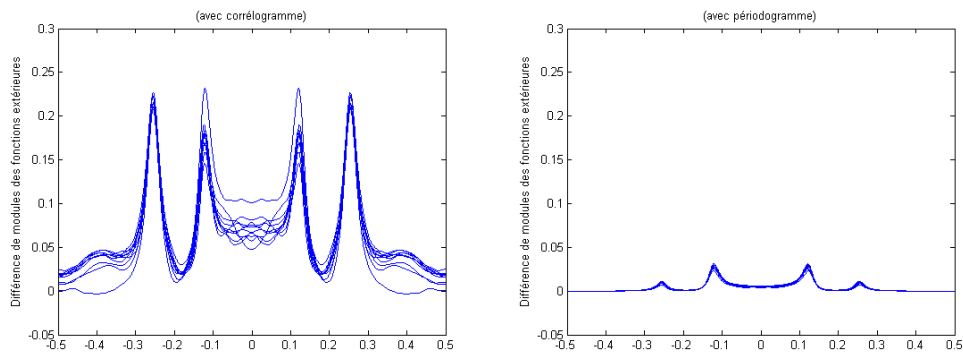


FIGURE 2.15: Différence entre les fonctions extérieures estimées pour le processus MA et le processus 'MA + sinusoides'. $r = 0.9$

2.6.2 Exemples dans le cas 2D

Dans cette sous-section, nous testons la méthode d'estimation de paramètres MA dans des images de taille 256×256 contenant une composante aléatoire (un processus MA 2D) et une composante déterministe (des processus harmoniques ou évanescents).

Les composantes utilisées pour synthétiser les images de test sont les suivantes :

1. Le processus MA 2-D est caractérisé par les paramètres $b_{k,l} = B(k,l)$ (voir l'équation 1.158) :

$$B = \begin{bmatrix} 6.26 & 5.22 & 4.17 & 3.13 & 2.09 & 1.04 & 0.52 \\ 5.12 & 4.34 & 3.48 & 2.61 & 1.74 & 0.87 & 0.44 \\ 4.17 & 3.48 & 2.78 & 2.09 & 1.39 & 0.70 & 0.35 \\ 3.13 & 2.61 & 2.09 & 1.57 & 1.04 & 0.52 & 0.26 \\ 2.09 & 1.74 & 1.39 & 1.04 & 0.70 & 0.35 & 0.17 \\ 1.04 & 0.87 & 0.70 & 0.52 & 0.35 & 0.17 & 0.09 \\ 0.52 & 0.43 & 0.35 & 0.26 & 0.17 & 0.09 & 0.04 \end{bmatrix}$$

2. Le processus évanescent No.1 défini par (voir l'équation 1.164) : $\alpha = 1, \beta = 0, \nu = 15/64$ et les processus AR $\{S_i(n\alpha - m\beta)\}$ et $\{T_i(n\alpha - m\beta)\}$ définis par les pôles :

$$0.75e^{\pm j0.1\pi}, \quad 0.75e^{\pm j0.2\pi}, \quad 0.75e^{\pm j0.3\pi}, \quad 0.75e^{\pm j0.4\pi}$$

3. Le processus évanescent No.2 défini par : $\alpha = 3, \beta = 2, \nu = 15/64$ et les processus AR $\{S_i(n\alpha - m\beta)\}$ et $\{T_i(n\alpha - m\beta)\}$ définis par les pôles :

$$0.75e^{\pm j0.1\pi}, \quad 0.75e^{\pm j0.2\pi}, \quad 0.75e^{\pm j0.3\pi}, \quad 0.75e^{\pm j0.4\pi}$$

4. Le processus harmonique No.1 défini par (voir l'équation 1.162) :

$$\begin{aligned} f_{1_{k=\{1,2,3\}}} &= \{-20/256, \quad 50/256, \quad -60/256\} \\ f_{2_{k=\{1,2,3\}}} &= \{-20/256, \quad -20/256, \quad -65/256\} \\ C_{k=\{1,2,3\}} &= \{6, \quad 4, \quad -5\} \\ D_{k=\{1,2,3\}} &= \{6, \quad 4, \quad 5\} \end{aligned}$$

5. Le processus harmonique No.2 défini par :

$$\begin{aligned} f_{1_{k=\{1,2,3\}}} &= \{-20.25/256, \quad 50.25/256, \quad -60.25/256\} \\ f_{2_{k=\{1,2,3\}}} &= \{-20.25/256, \quad -20.25/256, \quad -65.25/256\} \\ C_{k=\{1,2,3\}} &= \{6, \quad 4, \quad -5\} \\ D_{k=\{1,2,3\}} &= \{6, \quad 4, \quad 5\} \end{aligned}$$

5. Le processus harmonique No.3 défini par :

$$\begin{aligned} f_{1_{k=\{1,2,3\}}} &= \{-20.5/256, \quad 50.5/256, \quad -60.5/256\} \\ f_{2_{k=\{1,2,3\}}} &= \{-20.5/256, \quad -20.5/256, \quad -65.5/256\} \end{aligned}$$

$$C_{k=\{1,2,3\}} = \{6, \quad 4, \quad -5\}$$

$$D_{k=\{1,2,3\}} = \{6, \quad 4, \quad 5\}$$

Nous avons synthétisé 5 images par l'addition du processus MA et des autres processus.

La figures 2.16, 2.17 et 2.18 présente les images synthétisées suivantes :

- MA + harmonique 1.
- MA + évanescent 1.
- MA + évanescent 2.

Sur ces figures nous pouvons observer les spectres théoriques des images et les spectres estimés à l'aide de la méthode proposée. Pour chacune des images, nous avons estimé deux spectres utilisant des supports Quart Plan $D_{p_1, p_2} = \{(k, l) : 0 \leq k \leq p_1, 0 \leq l \leq p_2\}$ avec $p_1 = p_2 = 10$ et $p_1 = p_2 = 25$ et qui sont notés $MA(p_1, p_2)$ (voir l'équation 1.158).

On constate que l'effet de moyennage ou atténuation de singularités spectrales se vérifie aussi dans le cas 2D. Ceci est le cas pour les impulsions de Dirac associées aux composantes harmoniques, et aussi pour les lignes spectrales associées aux composantes évanescentes.

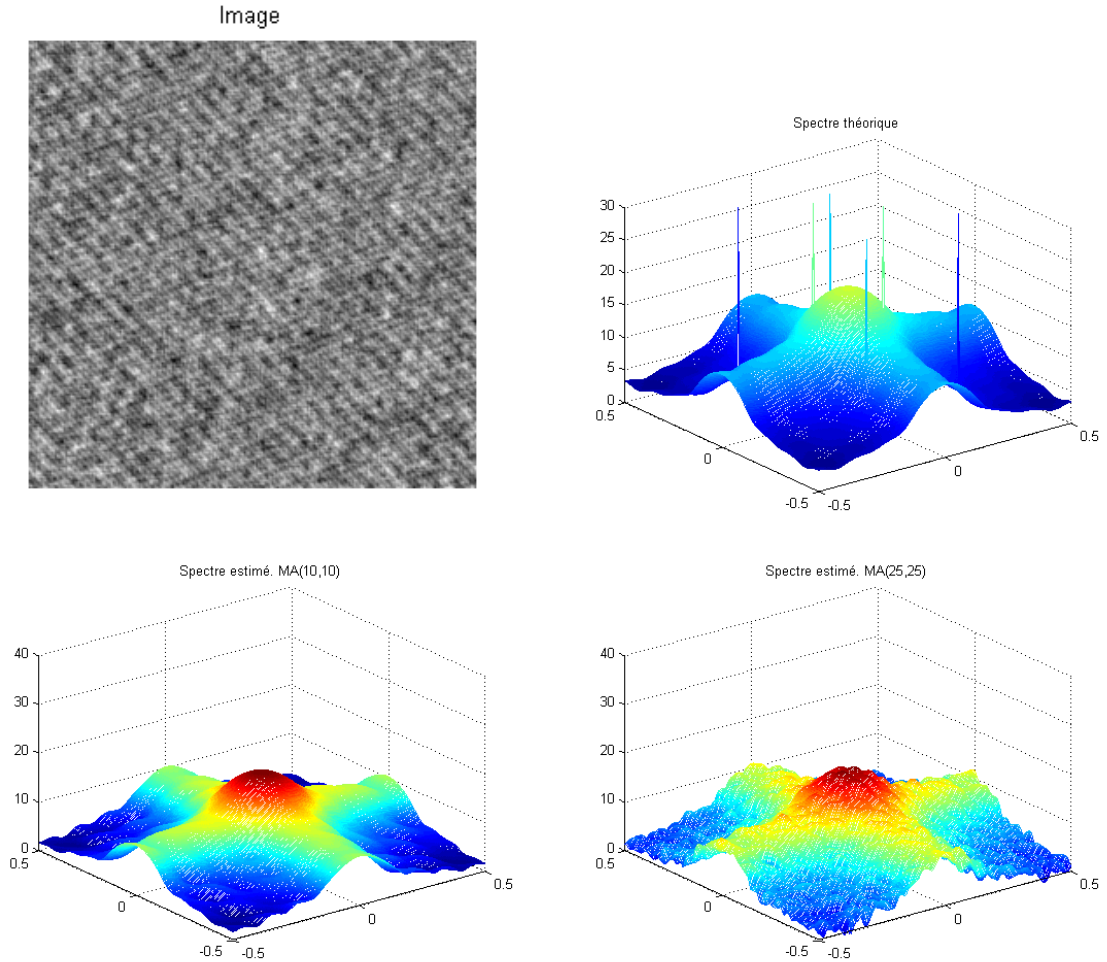


FIGURE 2.16: Spectres estimés : image 'MA + harmonique No. 1'.

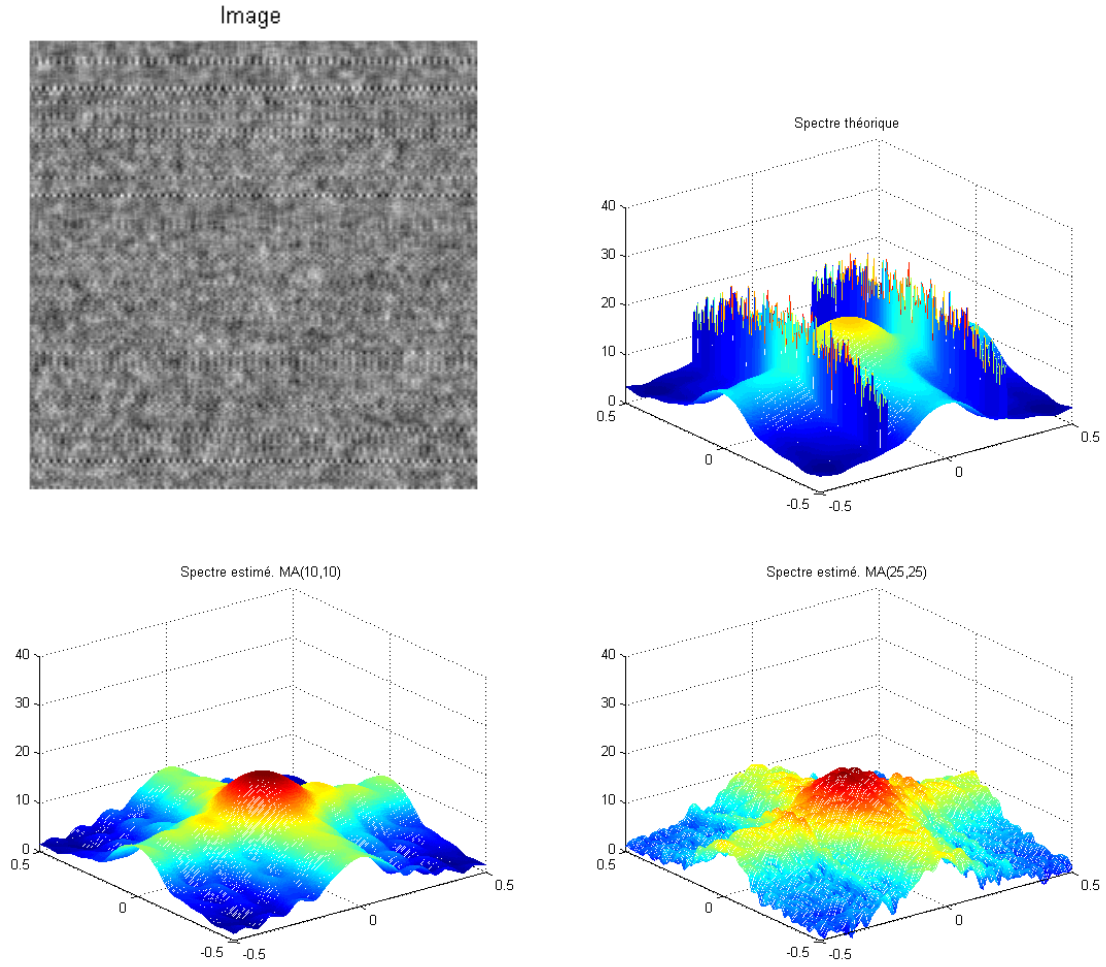


FIGURE 2.17: Spectres estimés : image 'MA + évanescent No. 1'.

La figure 2.19 présente les spectres théoriques, les spectres estimés et la fonction extérieure estimés pour les images synthétisées suivantes :

- MA + harmonique No.1.
- MA + harmonique No.2.
- MA + harmonique No.3.

Les fréquences des sinusoïdes du processus harmonique No.1 coïncident avec les fréquences de la transformée de Fourier, c'est-à-dire les fréquences sont des fractions de la forme n/N où $0 \leq n < N$ est un entier et N est une dimension de l'image (images de taille $N \times N$). Pour les processus harmoniques No. 2 et No. 3, les fréquences choisies sont de la forme $n.25/N$ et $n.5/N$, respectivement. Étant donné que ces fréquences ne coïncident pas avec celles de la transformée de Fourier, chacune des impulsions de Dirac associées à ces sinusoïdes seront représentées par plus d'un point. En conséquence, l'atténuation des singularités spectrales est plus importante sur l'image 'MA + harmonique No.1' et moins importante sur l'image 'MA + harmonique No.3'.

Dans les sections suivantes, nous présentons deux applications de la méthode d'estimation

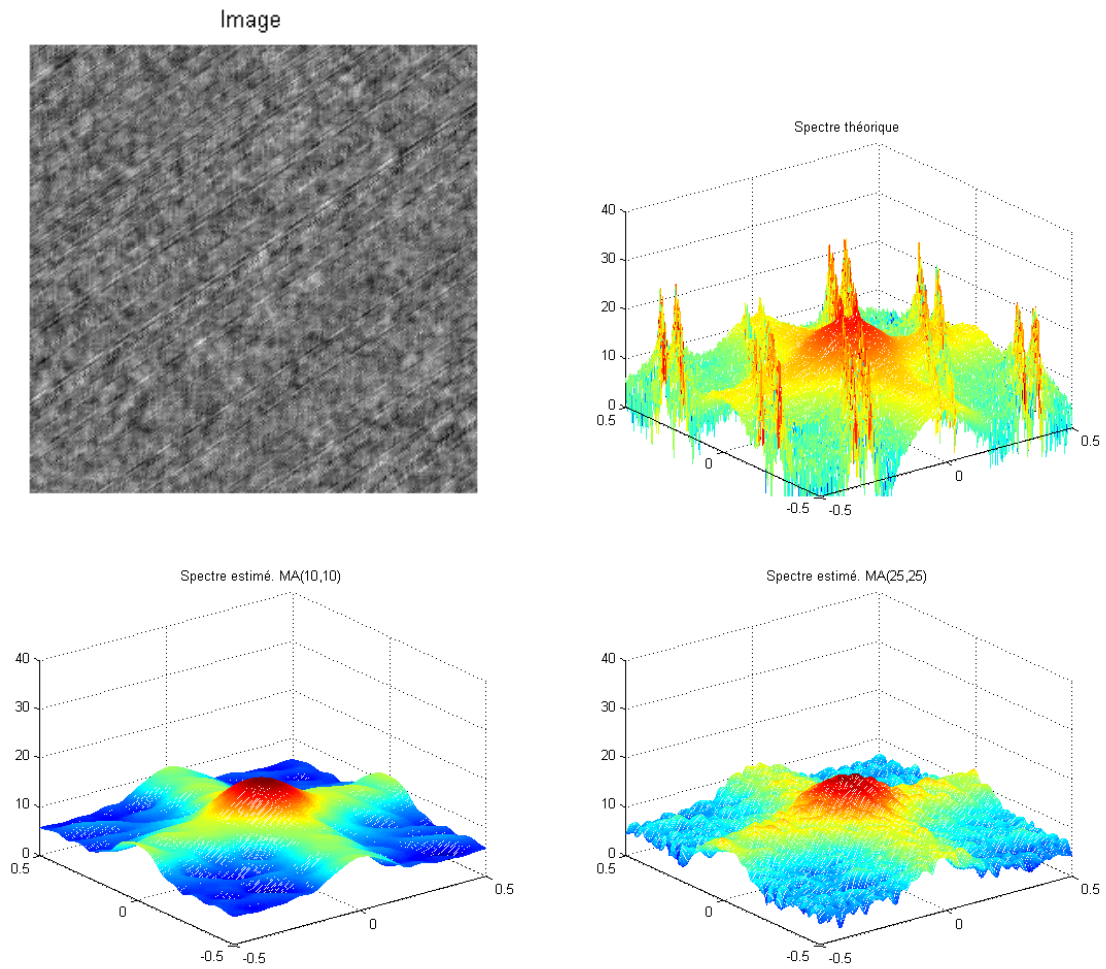


FIGURE 2.18: Spectres estimés : image 'MA + évanescent No. 2'.

de paramètres MA et AR proposée. La première application concerne la décomposition de processus stochastiques 2D dans ses composantes complètement non déterministes (CND) et purement déterministes dans le cadre de l'analyse d'images texturées. La deuxième application concerne la modélisation de canaux de transmission dans le contexte de communications numériques.

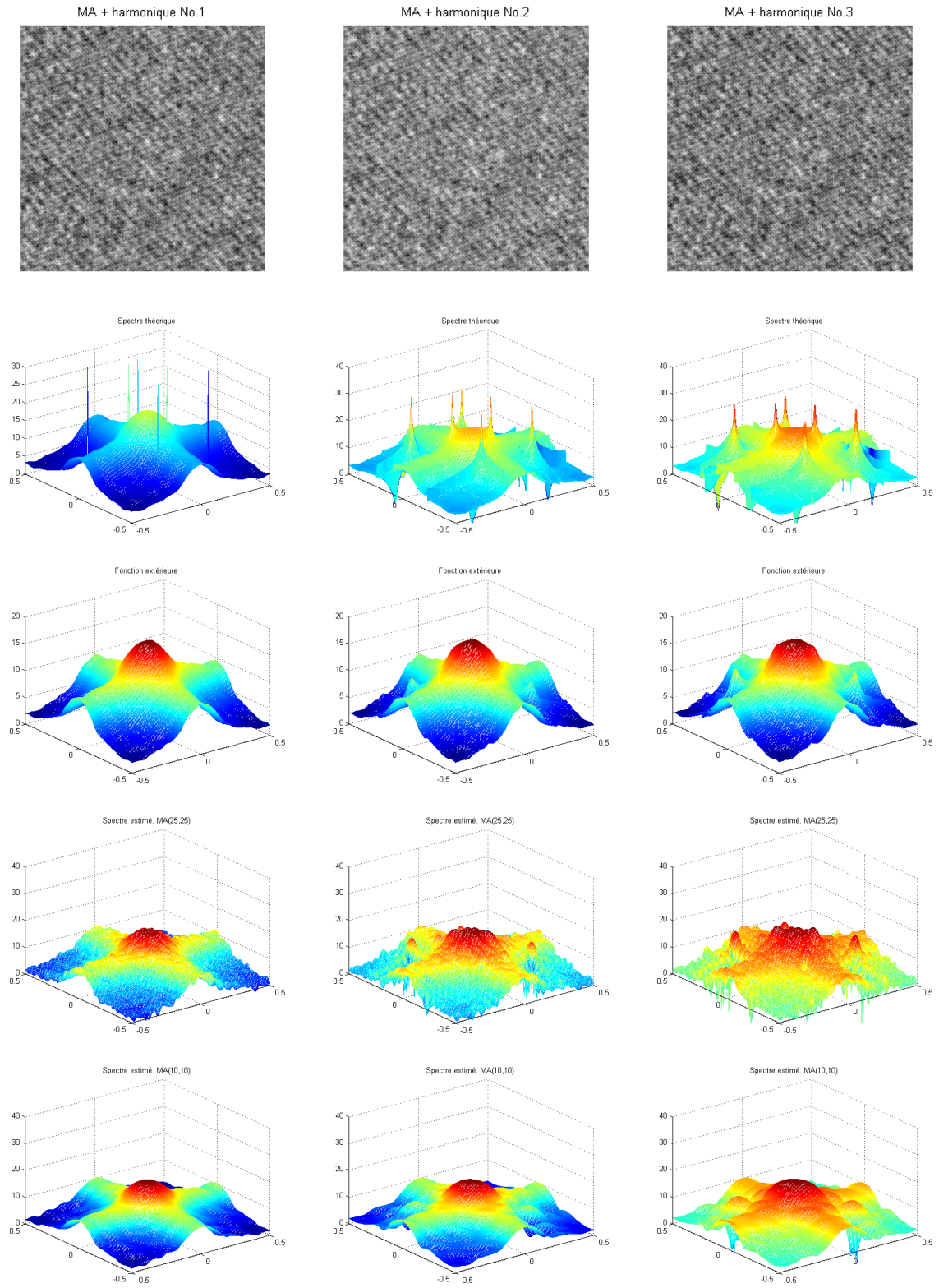


FIGURE 2.19: Spectres estimés : images 'MA + harmonique No. 1', 'MA + harmonique No. 2' et 'MA + harmonique No. 3'.

2.7 Modélisation d'images texturées fondée sur Wold

L'analyse et la synthèse de textures sont des sujets de grand intérêt dans la communauté du traitement d'image, notamment pour des applications visant la segmentation, la restauration, la compression et la classification d'images.

Gagalowicz définit une image texturée comme celle procédant de l'arrangement, selon des lois stochastiques ou déterministes, de motifs structuraux élémentaires (ou primitives tonales) ayant eux mêmes un aspect aléatoire [Gag83].

Prenant en compte la répartition spatiale de leurs motifs, nous pouvons distinguer trois caractéristiques principales d'une texture :

- L'aspect structuré (ou régulier) que se distingue par sa périodicité.
- L'aspect directionnel caractérisé par son orientation vers une direction.
- L'aspect aléatoire.

Toutes ou une partie de ces caractéristiques peuvent se trouver dans une texture naturelle.

Les approches d'analyse et de synthèse de textures visent à extraire des attributs descriptifs ou attributs texturaux caractéristiques d'une image afin de pouvoir créer artificiellement des textures les simulant.

On peut classer ces attributs texturaux en fonction du type d'approche utilisée pour son extraction. Ainsi nous avons :

- Attributs issus des approches statistiques : moyenne, variance, matrices de cooccurrences, covariances, etc. [Gag83, HG96, Har81].
- Attributs procédant des transformations orthogonales : transformée de Fourier, transformée en ondelette, etc. [CK93, Uns95, Tru98].
- Attributs provenant de l'estimation de paramètres de modèles stochastiques associés à l'image : modèles AR, MA ou ARMA, champs markoviens ou modèles sinusoïdaux [KB99, CD99b, TCYB00].

La décomposition de Wold 2-D a été introduite en analyse/synthèse de textures par Francos [FMP93]. Cette approche est motivée par l'adéquation de chacune des composantes de Wold aux caractéristiques annoncées précédemment : l'aspect aléatoire, l'aspect périodique et l'aspect directionnel d'une image. D'ailleurs, la généralisation de la décomposition de Wold au cas 3-D est utilisée pour l'analyse de volume de textures (textures 3-D) comme par exemple, les blocs sismiques 3-D [STBN07, Sti06].

Dans ce contexte d'analyse d'images fondée sur les modèles issus de la décomposition de Wold, nous proposons un nouveau schéma de séparation de la composante déterministe et la composante complètement non déterministe. Ce schéma est fondé sur l'utilisation de l'approche d'estimation des paramètres AR et MA proposée et tire profit des propriétés de régularisation ou atténuation des singularités dans le domaine spectrale.

Dans la suite de la section, nous présentons un état de l'art des approches de décomposition et analyse fondée sur les modèles de Wold. Ensuite nous rappelons quelques définitions concernant la représentation de champs complètement non déterministes. Enfin nous présentons le schéma de décomposition proposé. Des exemples de décomposition utilisant cette approche sont présentés.

2.7.1 État de l'art des approches de décomposition de Wold d'images

La représentation des images texturées par les modèles issus de la décomposition de Wold requiert l'analyse des différentes composantes afin de pouvoir estimer les paramètres de leurs modèles. La plupart des méthodes d'estimation des paramètres des modèles issus de la décomposition de Wold requièrent une séparation préalable des composantes. Ainsi, Francos et al. [FMP93] proposent une procédure itérative pour la détection du support du champ déterministe dans le périodogramme, qui consiste à localiser les pics de forte amplitude. Pour ce faire, un seuil, initialisé à la valeur maximale du périodogramme, décroît graduellement afin que seules les singularités soient détectées. Dans un premier temps ils réalisent une recherche de pics isolés, c'est-à-dire ceux associés à la composante harmonique. Une fois la composante harmonique enlevée, ils effectuent une nouvelle recherche des pics formant des droites sur le périodogramme, associées à la composante évanescence. Cette approche a comme inconvénient la difficulté du choix du seuil. De plus, elle est difficilement applicable dans le cas où l'amplitude des coefficients de Fourier ne permet pas de distinguer la partie déterministe et la partie non déterministe. Dans [FNW96], Francos et al. proposent une méthode de maximum de vraisemblance pour l'estimation jointe des paramètres des modèles de toutes les composantes. Cette approche peut avoir un coût calculatoire élevé, notamment quand le nombre de pics dans le spectre est grand.

Une autre méthode pour la décomposition de Wold est présentée par Liu et Picard dans [LP99]. L'algorithme opère en plusieurs étapes :

- 1) Recherche préliminaire de pics associés aux harmoniques par maxima locaux utilisant des fenêtres d'analyse sur le périodogramme.
- 2) Détection de champs évanescents utilisant la transformée de Hough.
- 3) Modélisation du spectre de la composante aléatoire en tant que surface gaussienne.
- 4) Recherche supplémentaire de pics associés aux harmoniques par maxima locaux.

Pour l'identification des véritables pics à partir de maxima locaux, l'algorithme exploite les relations intrinsèques fondamentale-harmonique.

Dans cette section, nous proposons une approche alternative pour la séparation des composantes déterministe et complètement non déterministe (CND). Elle est fondée sur la caractérisation du spectre de la composante CND à l'aide de l'approche d'estimation de paramètres présentée dans la section précédente. Cette caractérisation permet la conception d'un filtre qui atténue le spectre de la composante CND et met en évidence les pics et lignes associés à la composante déterministe. Cette solution permet de palier au cas où l'amplitude des coefficients de Fourier dans le périodogramme ne permet pas de distinguer les supports de la partie déterministe et la partie non déterministe. Cette approche peut être envisagée comme une étape complémentaire des approches d'analyse présentées.

Dans la suite nous rappelons quelques définitions concernant la construction et la représentation de la composante CND.

2.7.2 Modélisation MA du champ complètement non-déterministe

Rappelons pour commencer quelques définitions de la représentation MA infinie des champs non déterministes ou aléatoires.

Considérons un champ stationnaire $\{y(n, m)\}_{(m, n) \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires à moyenne

nulle et variance finie et notons μ_y la mesure spectrale de $\{y(n, m)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ sur le bi-tore $\mathbb{T} = \{z \in (C) : |z| = 1\}^2$.

Par l'extension de Helson-Lowdenslager [HL58, HL62] du théorème de décomposition de Wold, le champ se décompose en une somme orthogonale unique

$$y(m, n) = w(m, n) + v(m, n) \quad (2.49)$$

où $\{w(n, m)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est le champ non déterministe de mesure spectrale F_w et $\{v(n, m)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est le champ déterministe de mesure spectrale F_v . En outre, si $\{w(n, m)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ est non nul, alors F_w est absolument continue et F_v est singulière, de telle sorte que la mesure spectrale de $y(m, n)$ se décompose comme suit

$$dF_y = f dm_2 + dF_v \quad (2.50)$$

où f est la densité spectrale de F_w par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée m_2 sur $\mathbb{T}^2$.

Le champ non déterministe est mis en évidence à travers le champ dit d'innovation de $y(n, m)$, par rapport à l'ordre total du groupe $\leq$ sur $\mathbb{Z}^2$. Considérons le champ $\{p(m, n)\}_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ obtenu par la projection de chacun des échantillons $y(m', n')$ sur $y(m, n)$ tels que $(m', n') < (m, n)$. Le champ d'innovation de $y(m, n)$ est alors $u(m, n) = y(m, n) - p(m, n)$. Ainsi $u(m, n)$ est un processus blanc dont la variance σ^2 est donnée par la formule de Szegő

$$\sigma^2 = \|i(0, 0)\|_{L^2(\Omega)} = \exp \left(\int_{\mathbb{T}^2} \log(\varphi) dm_2 \right). \quad (2.51)$$

Le champ $w(m, n)$ est obtenu alors par la projection du champ $y(m, n)$ sur l'enveloppe linéaire fermée des échantillons du champ d'innovation $u(m, n)$. Dès lors, le champ $w(m, n)$ admet une représentation 2-D MA d'ordre infini de la forme

$$w(m, n) = \sum_{(k,l) \geq (0,0)} b_{(k,l)} u(m - k, n - l). \quad (2.52)$$

Ainsi la fonction de transfert f associée au modèle

$$f(z_1, z_2) = \sum_{(k,l) \geq (0,0)} b_{(k,l)} z_1^{-k} z_2^{-l} \quad (2.53)$$

appartient à $L^2(\mathbb{T}^2)$ et vérifie

$$\sigma^2 \|f(z_1, z_2)\|^2 = \varphi(z_1, z_2) \text{ p.p. sur } \mathbb{T}^2 \quad (2.54)$$

La méthode proposée dans la sous-section 2.4 permet l'estimation de paramètres MA 2-D $\{b_{(k,l)}\}$ associés au facteur spectral f . Nous avons observé que la méthode proposée permet d'obtenir une approximation du spectre de la composante CND même si l'image contient des composantes déterministes. Cette propriété est exploitée dans le schéma de décomposition que nous proposons dans la suite.

2.7.3 Approche proposée pour la décomposition de Wold

Nous avons expliqué dans la section 2.6 que la fonction extérieure calculée à partir de la DSP d'un processus, approxime la fonction de transfert associée à la composante complètement non déterministe (CND). C'est-à-dire, que l'on peut obtenir la caractérisation de la composante CND d'un processus sans effectuer une séparation ou décomposition préalable de ses composantes.

Dans la sous-section 2.6.1 (voir, figure 2.9), on a constaté que la différence entre les paramètres MA estimés à partir d'un processus CND (par exemple, un processus MA) et du même processus bruité par une composante déterministe (par exemple, les sinusoides) est une suite de valeurs périodiques d'amplitudes faibles. Il avait été signalé que ceci est en accord avec la représentation en série de Fourier⁷ des impulsions de Dirac. En effet, la contribution des impulsions de Dirac au niveau de la fonction extérieure est caractérisée par une suite 'infinie' de coefficients de Fourier, alors que le processus non déterministe est caractérisé par les 'premiers' paramètres MA. On peut s'attendre à ce que si la suite des paramètres MA $\{b(k)\}$ est tronquée à partir des paramètres à de faibles amplitudes, une partie limitée de l'énergie associée aux impulsions de Dirac est 'conservée'.

Ayant observé ces propriétés de 'filtrage' des singularités dans le spectre, nous proposons de les exploiter dans le cadre d'une méthode de décomposition d'images dans ses composantes de Wold.

Dans la suite, nous dérivons une approche de décomposition pour la séparation des composantes déterministes et non déterministes. Le schéma que nous proposons consiste notamment à utiliser l'estimation de la fonction extérieure d'une image texturée pour construire un filtre qui puisse 'blanchir' ou atténuer la composante CND. En conséquence, la composante déterministe est mise en évidence et peut être récupérée plus aisément (par exemple, à l'aide de méthodes fondées sur le seuillage ou sur la détection). Cette approche est particulièrement pertinente lorsque les spectres de composantes CND et déterministe ont des amplitudes comparables, ce qui empêche l'application directe des approches fondées sur le seuillage dans le domaine spectral [FMP93].

Rappelons l'équation 2.49 :

$$\begin{aligned} y(m, n) &= w(m, n) + v(m, n) \\ &= \sum_{(k,l) \geq (0,0)} a(k, l) u(m - k, n - l) + v(m, n) \end{aligned} \quad (2.55)$$

En prenant la transformée en z de l'équation 2.55 nous obtenons :

$$\begin{aligned} Y(z_1, z_2) &= W(z_1, z_2) + V(z_1, z_2) \\ &= F(z_1, z_2) U(z_1, z_2) + V(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (2.56)$$

où $F(z_1, z_2)$ est la fonction extérieure définie comme suit :

$$F(z_1, z_2) = \sum_{k,l} a(k, l) z_1^k z_2^l \quad (2.57)$$

7. Les paramètres MA sont les coefficients de Fourier de la fonction extérieure évaluée sur le cercle unité.

En filtrant l'image originale avec F^{-1} , nous obtenons le champ décrit par la transformée en z

$$\begin{aligned} Y_{FIL}(z_1, z_2) &= F^{-1}(z_1, z_2)Y(z_1, z_2) \\ &= U(z_1, z_2) + F^{-1}(z_1, z_2)V(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (2.58)$$

c'est-à-dire un champ déterministe plus un bruit blanc u . Ainsi, pour calculer le champ déterministe $v(m, n)$ de la texture originale, nous devons filtrer ou enlever le bruit blanc $u(m, n)$ de l'équation 2.58, et ensuite 'restaurer' $v(m, n)$ en filtrant le résultat avec F . L'approche de décomposition proposée est schématisée dans la figure 2.20. Ce schéma est illustré par un exemple dans la figure 2.21)

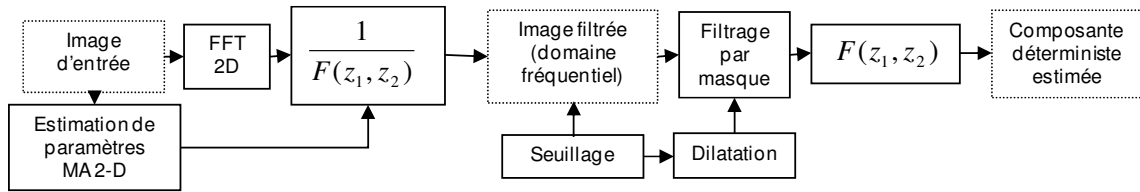


FIGURE 2.20: Schéma de décomposition proposé

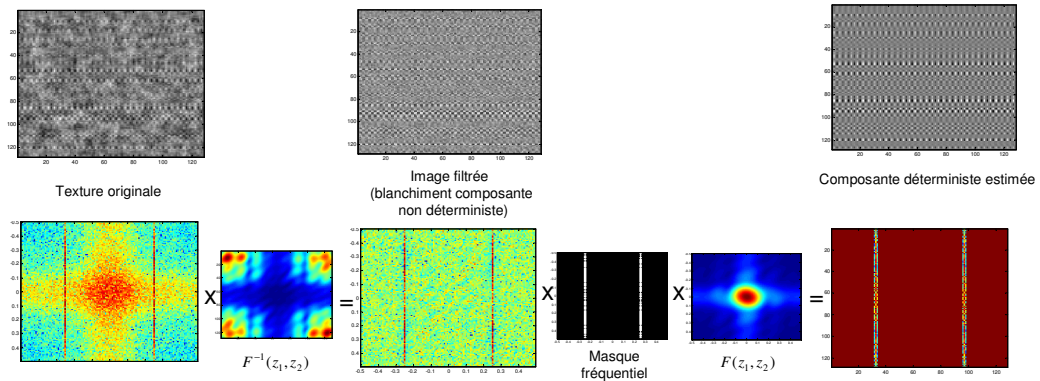


FIGURE 2.21: Schéma de décomposition illustré par un exemple

L'approche proposée peut se résumer en 5 étapes que nous présentons dans la suite. Nous illustrons ces étapes avec la décomposition de l'image présentée dans la figure 2.22.

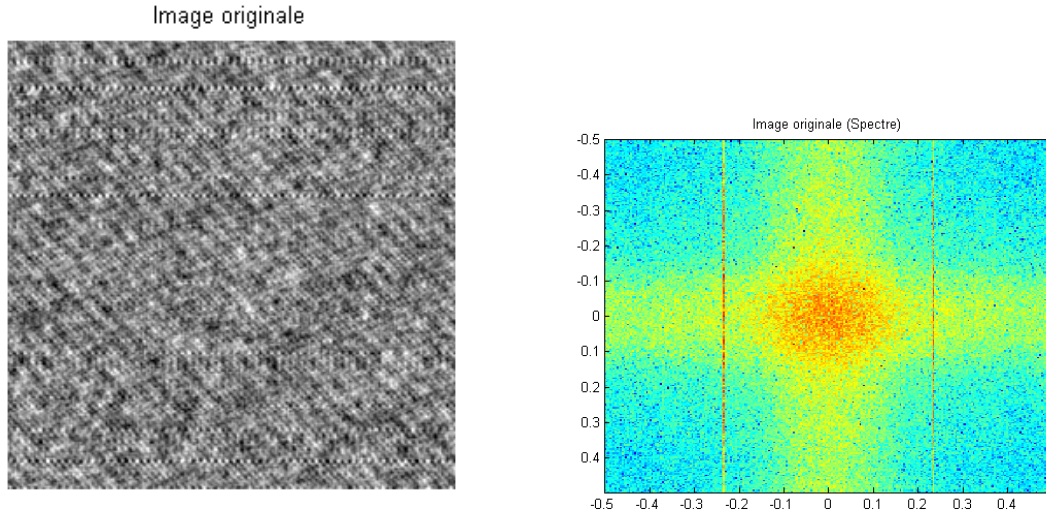


FIGURE 2.22: Image originale.

Algorithme de décomposition de Wold :

Étape 1 : Calcul du filtre de blanchiment de la composante CND $F(z)^{-1}$.

Le filtre $F(z)^{-1}$ peut être exprimé par un polynôme de la forme

$$F^{-1}(z_1, z_2) = \sum_{k,l} a'(k, l) z_1^k z_2^l \quad (2.59)$$

où $\{a_k\}$ sont les paramètres du modèle AR caractérisant la fonction de transfert associée à la composante CND. Nous pouvons calculer ce filtre à l'aide des expressions de notre approche comme suit :

a) Calcul de la fonction extérieure associée à l'inverse de la DSP :

$$F_r(e^{j2\pi k/N}, e^{j2\pi l/N}) = \exp \left(\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{2N^2} \left(\frac{1 + re^{\frac{j2\pi(k-m)}{N}}}{1 - re^{\frac{j2\pi(k-m)}{N}}} \right) \left(\frac{1 + re^{\frac{j2\pi(l-n)}{N}}}{1 - re^{\frac{j2\pi(l-n)}{N}}} \right) \left(-\log(S(e^{\frac{j2\pi m}{N}}, e^{\frac{j2\pi n}{N}})) \right) \right) \quad (2.60)$$

b) calcul des coefficients de Fourier de la fonction à l'aide de l'intégrale de Cauchy

Connaissant, le comportement asymptotique des paramètres estimés avec notre approche, nous estimons une approximation d'ordre $p \times p$ de la fonction $F^{-1}(z_1, z_2)$. L'ordre de l'approximation est choisi de façon à garder les coefficients caractérisant la composante CND, c'est-à-dire, jusqu'à l'ordre où le module des paramètres commence à converger vers une valeur faible (voir figure 2.23). La figure 2.24, présente le module du filtre obtenu dans le domaine fréquentielle.

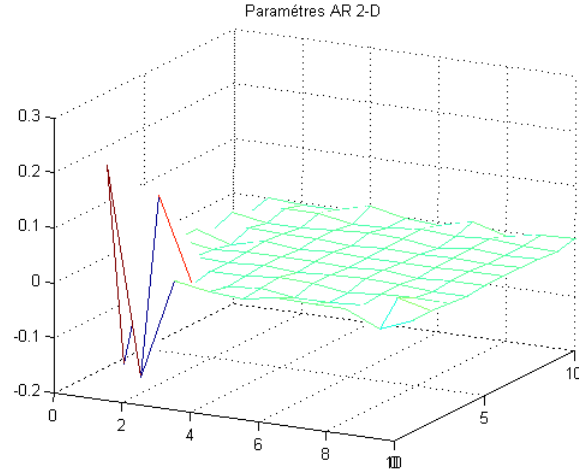
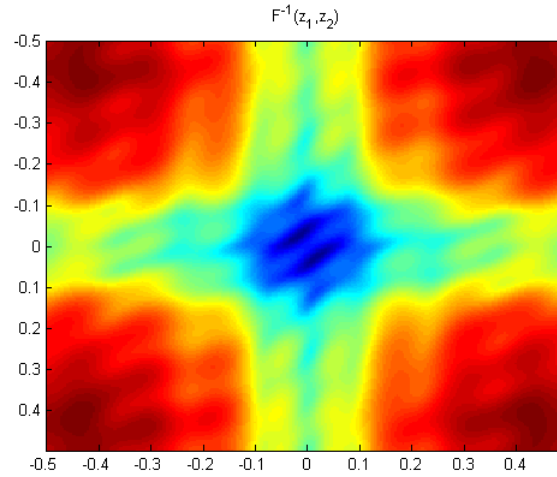


FIGURE 2.23: Paramètres du filtre.

FIGURE 2.24: Filtre $F^{-1}(z_1, z_2)$.

Étape 2 : Filtrage de l'image par le filtre $F_p^{-1}(z)$.

Nous effectuons le filtrage de l'image $Y(z_1, z_2)$ dans le domaine fréquentiel à l'aide du filtre $F_p^{-1}(z_1, z_2)$ afin d'obtenir l'image filtrée $Y_{FIL}(z_1, z_2)$ comme suit

$$Y_{FIL}(z_1, z_2) = F_p^{-1}(z_1, z_2)Y(z_1, z_2) \quad (2.61)$$

La figure 2.25 présente l'image obtenue après filtrage dans le domaine spatial et le domaine fréquentiel. Nous pouvons observer l'atténuation ou blanchiment de la contribution de la composante CND, (partie du spectre à aspect continu). Cette atténuation met en évidence les

lignes et les Dirac associés à la composante déterministe qui est 'noyée' dans le bruit blanc $U(z)$.

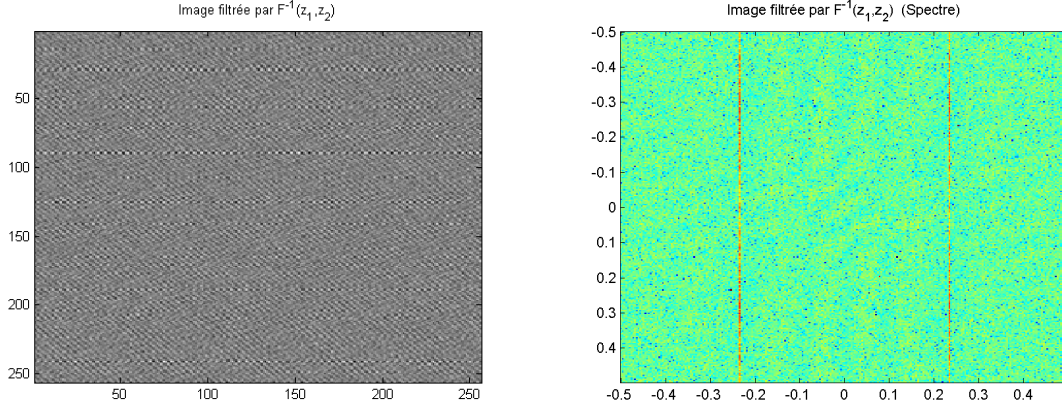


FIGURE 2.25: Image filtrée par $F^{-1}(z_1, z_2)$.

Étape 3 : Calcul de la variance du bruit blanc u

Cette variance est calculée avec la formule suivante :

$$\|u(0,0)\| = \|i(0,0)\| = \exp \left(\frac{1}{2N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \log \left(\frac{1}{2N^2} |Y_{FIL}(k,l)|^2 \right) \right) \quad (2.62)$$

Étape 4 : Filtrage du bruit blanc $U(z)$.

Afin d'effectuer le filtrage du bruit blanc $U(z)$ nous effectuons un seuillage de l'image filtrée $Y_{FIL}(z_1, z_2)$ dans le domaine fréquentiel. Pour ce-faire, nous générons un masque binaire où $M(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N})$ avec $m, n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ appliquant un seuil de valeur $\alpha N \sqrt{\|u(0,0)\|}$ au spectre de l'image filtrée $Y_{FIL}(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N})$ comme suit :

$$M(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N}) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_{FIL}(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N}) \geq \alpha N \sqrt{\|u(0,0)\|} \\ 0 & \text{si } Y_{FIL}(e^{j2\pi m/N}, e^{j2\pi n/N}) < \alpha N \sqrt{\|u(0,0)\|} \end{cases} \quad (2.63)$$

La valeur du seuil est obtenue à partir de $\|u(0,0)\| = |U(z_1, z_2)|^2 / N^2$. La valeur α est une valeur surestimée pour assurer la suppression du bruit blanc. En pratique on choisit α entre 4 et 5. Ensuite, nous appliquons à $M(z_1, z_2)$ une dilatation morphologique utilisant un élément structurant en forme de diamant. Le masque dilaté est noté $M_{DIL}(z_1, z_2)$

Nous pouvons observer dans les figure 2.26 le masque binaire avant et après la dilatation.

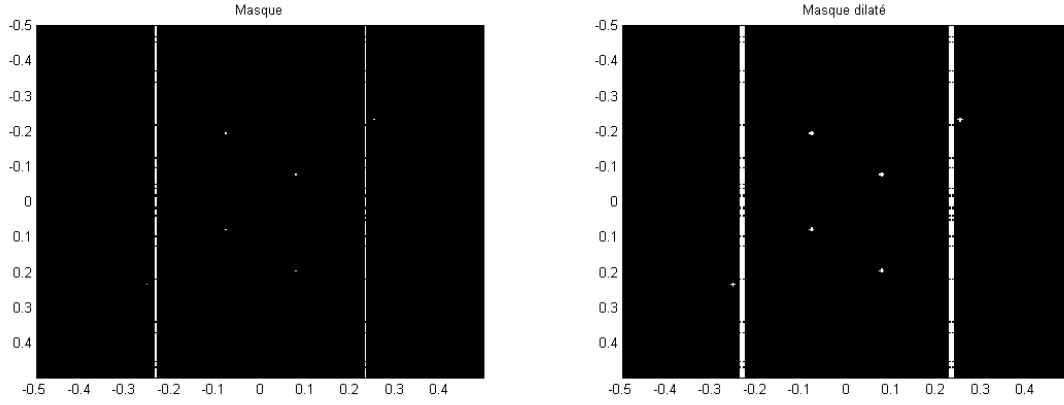


FIGURE 2.26: Masque binaire.

Ce masque binaire dilaté est appliqué sur $Y_{FIL}(z_1, z_2)$ comme suit

$$\begin{aligned}
 Y_{FIL-seuil} &= M_{DIL}(z_1, z_2)Y_{FIL}(z_1, z_2) \\
 &= M_{DIL}(z_1, z_2)F_p^{-1}(z_1, z_2)(F(z_1, z_2)U(z_1, z_2) + V(z_1, z_2)) \\
 &\cong F_p^{-1}(z_1, z_2)V(z_1, z_2)
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Étape 5 : Filtrage de l'image résultante par la fonction $F_p(z_1, z_2)$.

Afin d'obtenir une estimée de la composante déterministe nous appliquons le filtre $F(z_1, z_2)$ dans le domaine spectral comme suit

$$\hat{V}(z_1, z_2) = F_p(z_1, z_2)Y_{FIL-seuil} \tag{2.65}$$

La figure 2.27 présente l'image déterministe estimée. Par différence avec l'image originale nous obtenons la composante CND (voir figure 2.28).

Remarque : Le coût calculatoire de cet algorithme dépend principalement du coût calculatoire de l'étape d'estimation des paramètres. En conséquence, l'algorithme de décomposition a une complexité calculatoire de l'ordre de $O(N^2 \log N)$ opérations pour une image de taille $N \times N$.

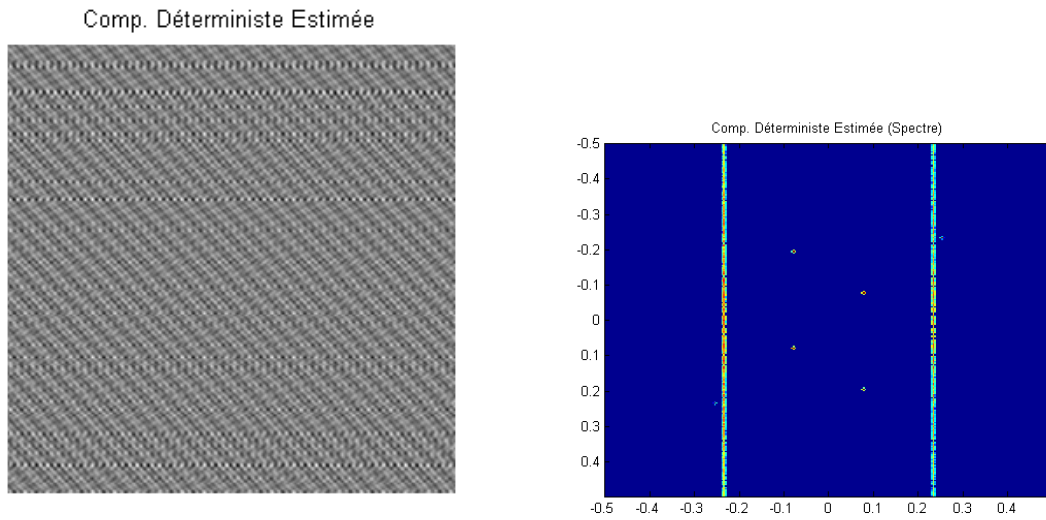


FIGURE 2.27: Image déterministe estimée.

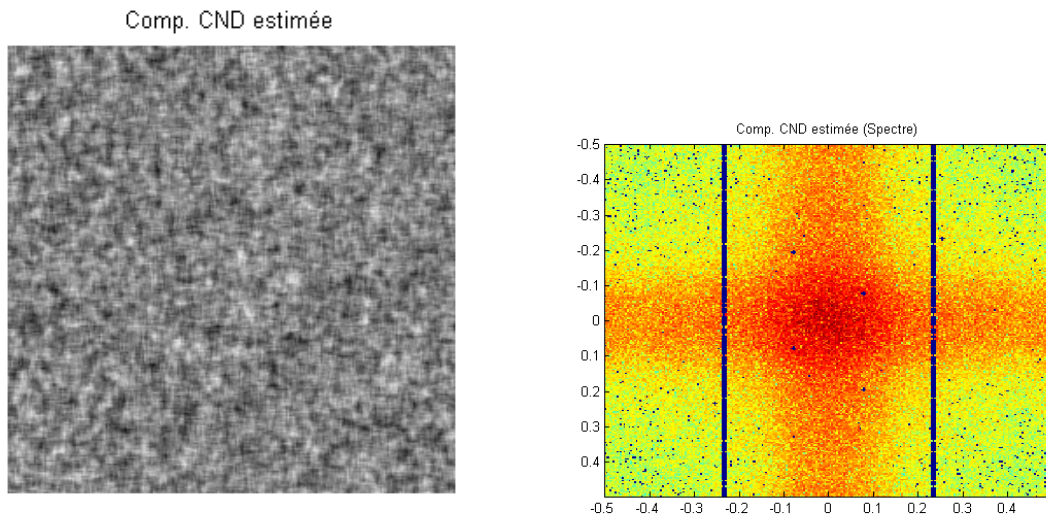


FIGURE 2.28: Image CND estimée.

2.7.4 Exemples de décomposition

Les figures 2.29 et 2.30 présentent deux exemples de décomposition de Wold d'images synthétiques. On peut observer que, même si les pics et lignes associés aux composantes déterministes ont des amplitudes proches à celles du spectre de la partie CND, l'algorithme est capable d'effectuer la décomposition correctement.

L'exemple synthétique No.3 présenté dans la figure 2.31 illustre les limites de l'approche. En effet quand des lignes ou pics associés à la composante déterministe sont noyés dans le spectre de la CND, l'algorithme n'est évidemment plus capable d'opérer la décomposition.

Les figures 2.32, 2.33 et 2.34 présentent des exemples de décomposition à partir des textures réelles issues de la base de données de textures de Brodatz [Bro66]. L'approche permet de décomposer les images de manière satisfaisante.

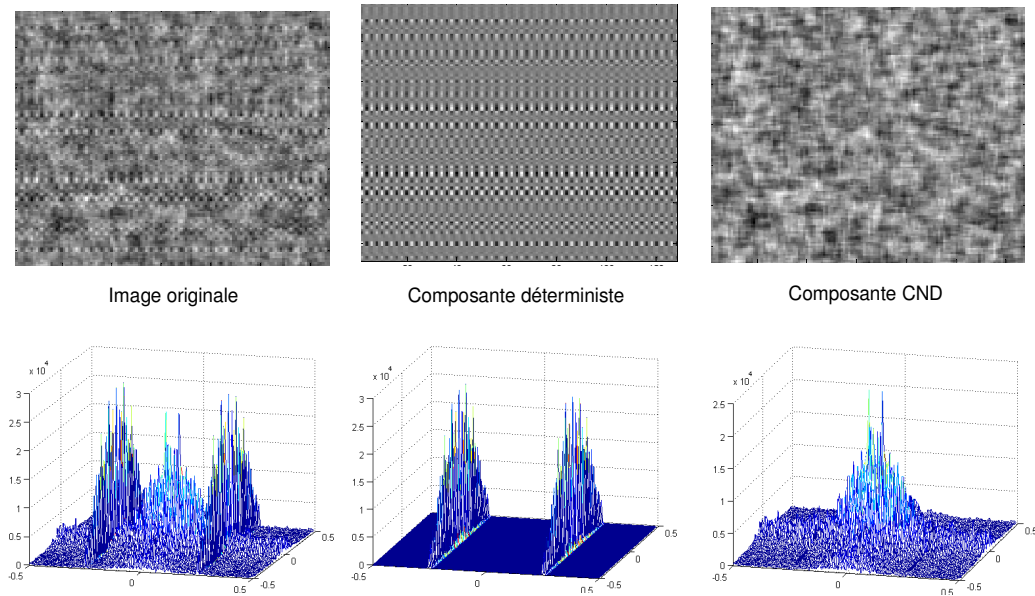


FIGURE 2.29: Exemple de décomposition No.1 (MA 2-D + champ évanescent).

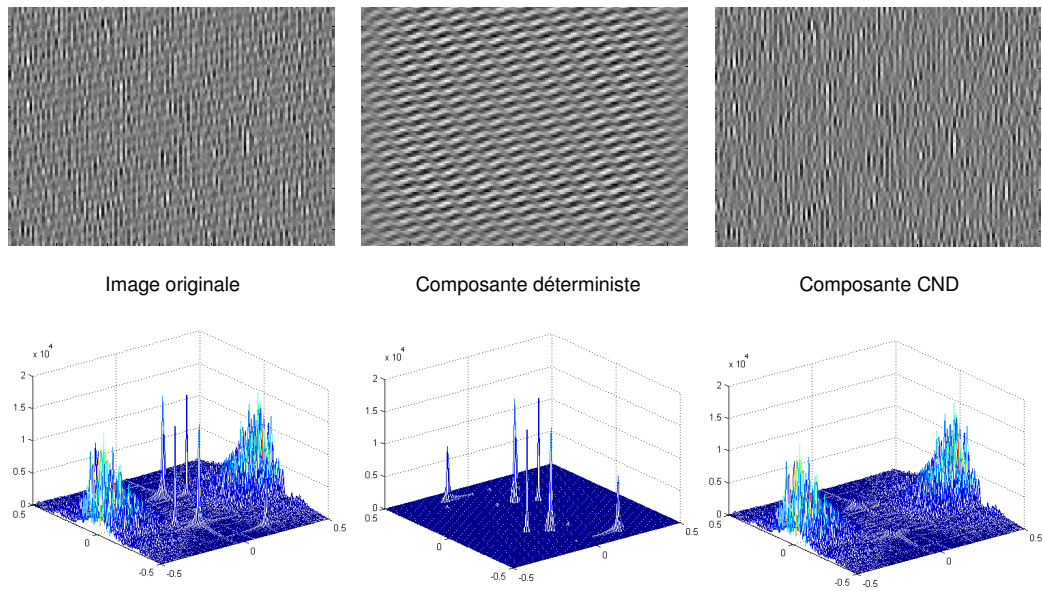


FIGURE 2.30: Exemple de décomposition No.2 (MA 2-D + champ harmonique).

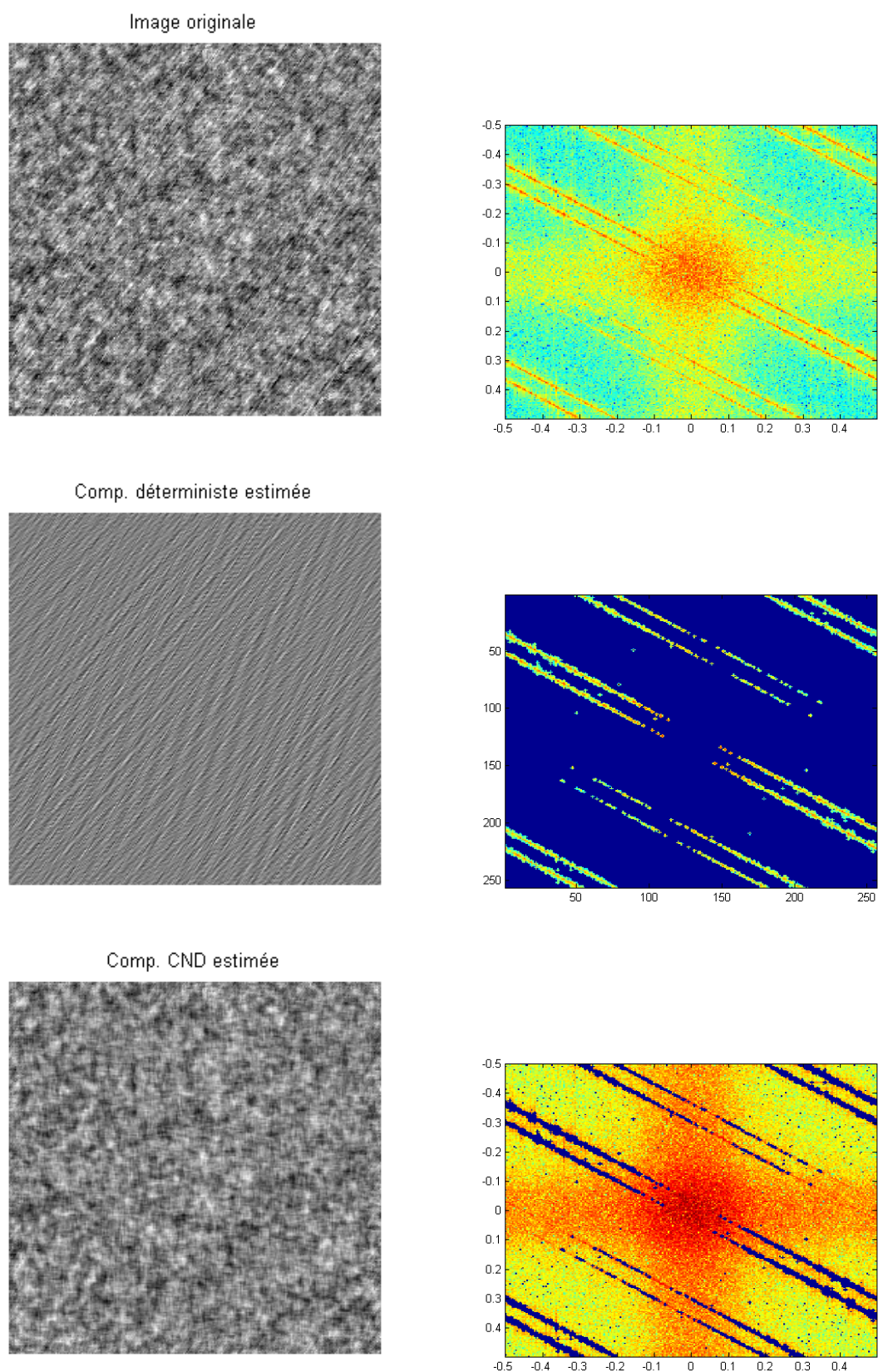


FIGURE 2.31: Exemple de décomposition No.3 (MA 2-D + champ évanescent).

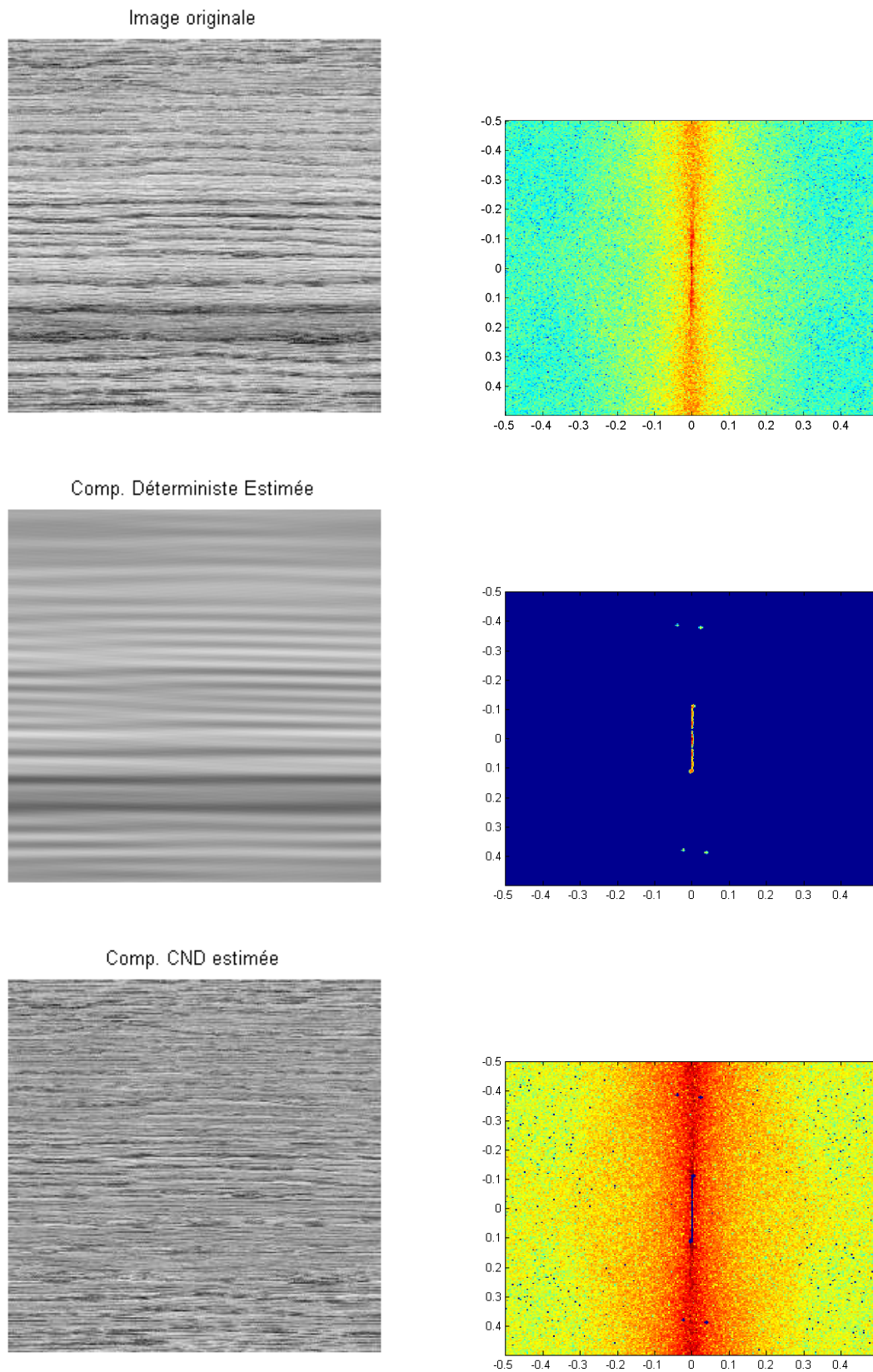


FIGURE 2.32: Exemple de décomposition No.4 (image originale réelle).

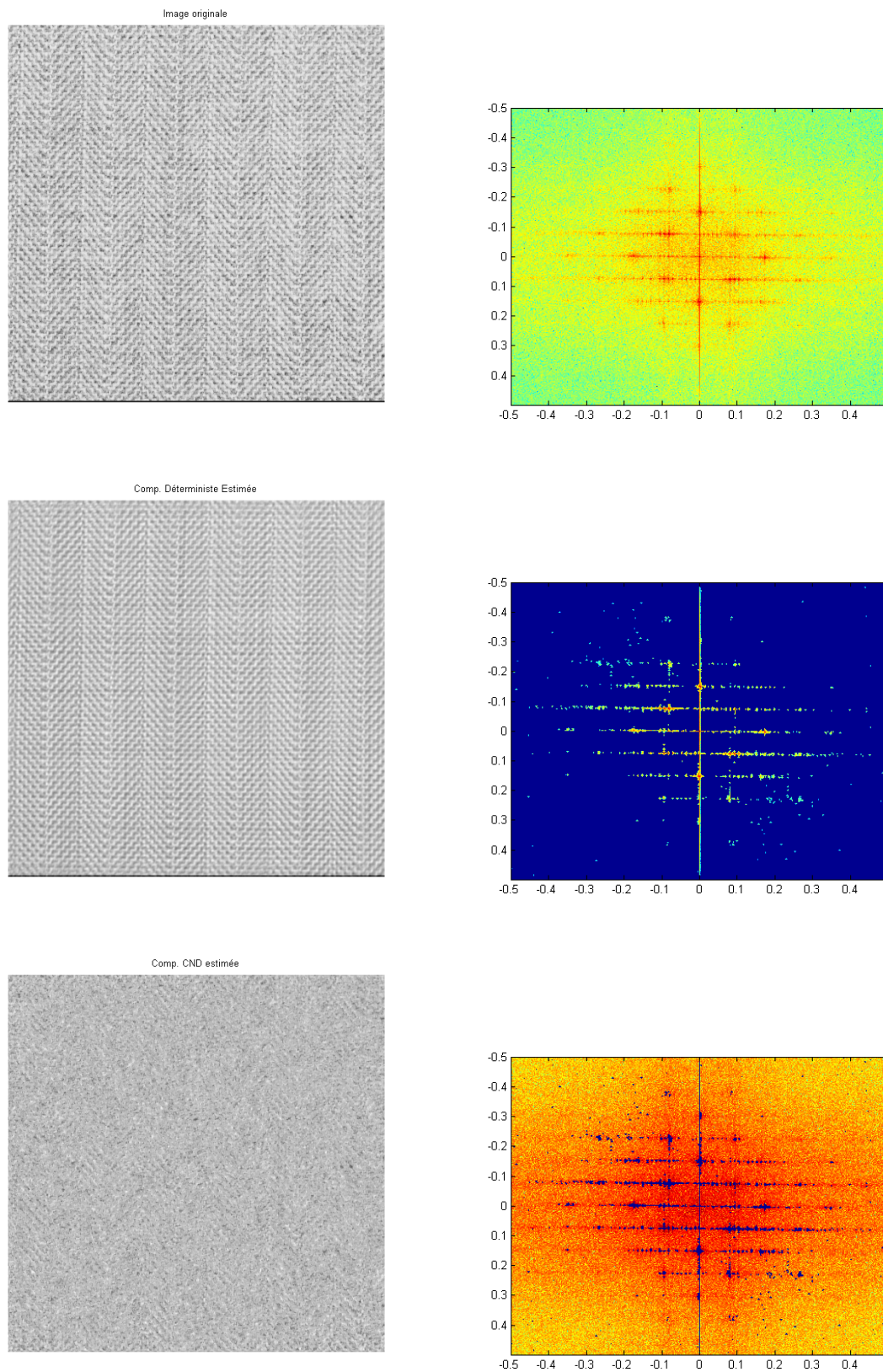


FIGURE 2.33: Exemple de décomposition No.5 (image originale réelle).

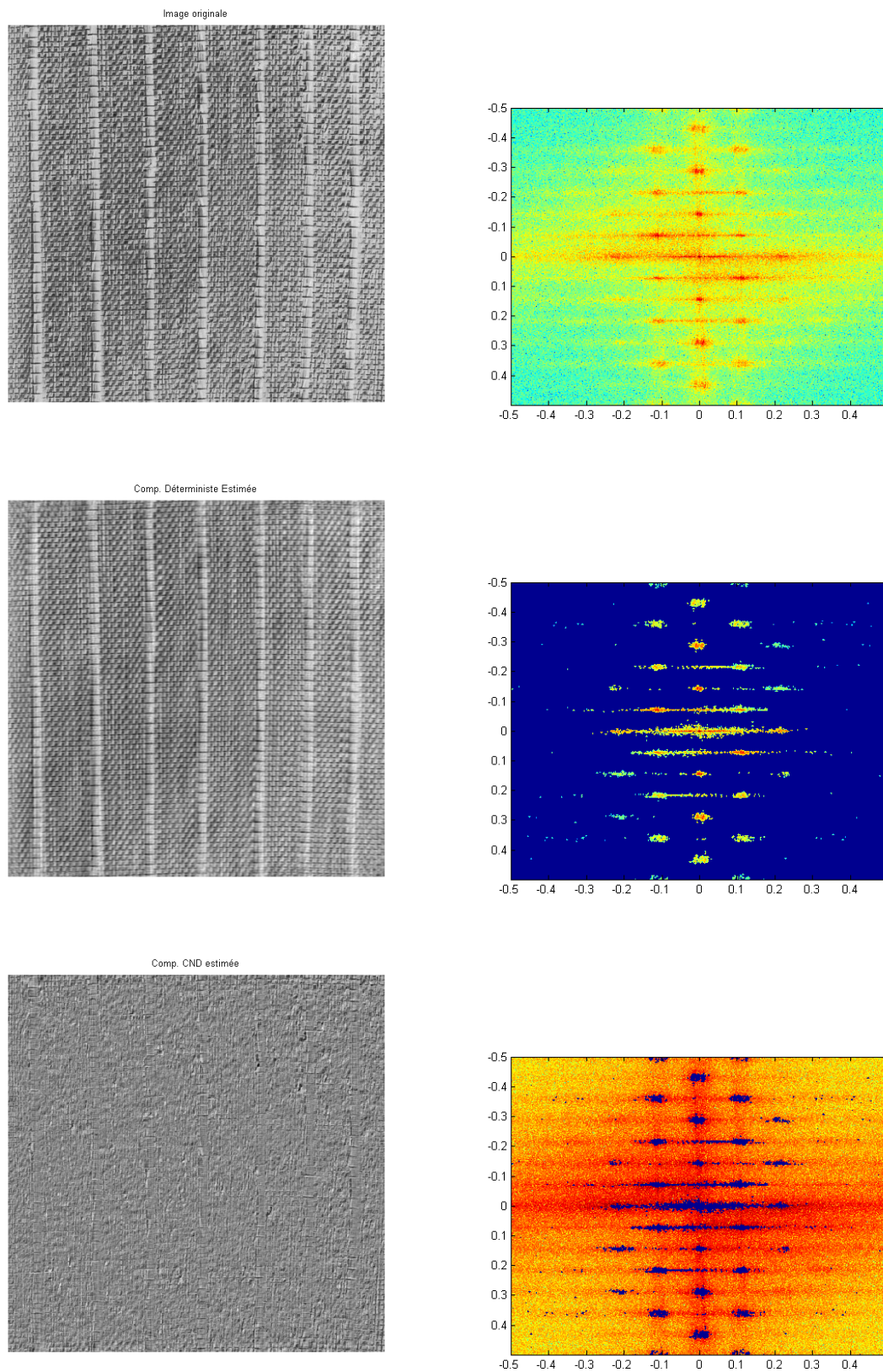


FIGURE 2.34: Exemple de décomposition No.6 (image originale réelle).

2.8 Simulation de canaux de Rayleigh

2.8.1 Modélisation et simulation d'un canal de Rayleigh

La simulation de canaux de transmission est souvent une étape nécessaire pour l'évaluation de systèmes de communication mobile. Durant plus de 20 ans, un grand intérêt a été porté aux simulateurs de canaux fondés sur des modèles *a priori*.

Les canaux de transmission de systèmes de communication sans fils dépendent du milieu où évolue le système. Dans les environnement urbains, souvent il n'existe pas de trajet direct entre l'émetteur et le récepteur et le signal est atténué, réfléchi, réfracté et diffracté par des obstacles tels que les bâtiments. À cela il faut ajouter un effet de type Doppler dû au déplacement de l'émetteur. Dans de tels scénarii, le canal d'évanouissement Rayleigh de Clarke est un modèle pertinent [Cla68]. Dans cette modélisation, le signal transmis $s(t)$ est affecté par une distortion multiplicative $h(t)$ définie par :

$$y(t) = h(t) \cdot s(t) + n(t), \quad (2.66)$$

où $y(t)$ est le signal reçu et $n(t)$ est le bruit. D'après [Cla68], le canal $h(t)$ est un processus complexe stationnaire au sens large et peut s'exprimer comme suit :

$$h(t) = \sqrt{\frac{1}{N_p}} \sum_{n=1}^{N_p} \exp(j2\pi f_d t \cos(\alpha_n) + \phi_n) \quad (2.67)$$

où N_p est le nombre de trajets de propagation, f_d est la fréquence Doppler maximum, α_n et ϕ_n l'angle d'arrivée et la phase initiale qui sont indépendants et uniformément distribués sur $[0, 2\pi)$. Les distributions marginales de la phase et l'amplitude du canal sont uniformes et Rayleigh. Les propriétés statistiques du canal ont été données par Jakes [Jak74]. Les parties réelle et imaginaire du canal sont indépendantes et sont caractérisées par une DSP théorique qui présente la forme de la lettre "U", avec deux pics infinis situés à $\pm f_d$. De plus, elle est à bande limitée, comme le montre la figure 2.35. Cette DSP est définie par :

$$S_{hh}^{theo}(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi f_d} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}}, & \text{pour } |f| < f_d \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (2.68)$$

La fonction d'autocorrélation correspondante dans sa version normalisée et en temps discret est définie par :

$$R_{hh}^{theo}(\tau) = J_0(2\pi f_{d_n} |\tau|) \quad (2.69)$$

où J_0 désigne la fonction de Bessel d'ordre zéro de première espèce et f_{d_n} la fréquence Doppler maximum normalisée par la fréquence d'échantillonnage f_s (voir la figure 2.36). Fondée sur les propriétés statistiques énoncées, plusieurs familles de simulateurs ont été proposées :

1. les méthodes reposant sur une somme de sinusoïdes [Jak74], [DBC93], [PB01], [ZX03],
2. les méthodes fondées sur une transformée de Fourier inverse [Smi75], [YB00],
3. les méthodes fondées sur une modélisation paramétrique de type MA, AR ou ARMA [VT93], [Lin93], [WDH00], [BB05a], [Bea88a], [DS01].

2.8.1.1 Méthodes de simulation fondées sur une somme de sinusoides

Le modèle d'évanouissement de Jake [Jak74] est une des premières versions simplifiées du modèle de Clarke. En fixant α_n à $2\pi n/N$ dans 2.67, Jakes propose un nouveau modèle qui requiert seulement $M_p + 1$ sinusoides, où $M_p = (N_p - 2)/4$. Dans [PL98], Patzold et al. signalent que des résultats satisfaisants peuvent être espérés quand au moins 10 sinusoides sont utilisées. Pour générer des formes d'ondes décorréelées, Dent et al. modifient le modèle de Jakes en pondérant chaque sinusoides par un code orthogonal de type Hadamard [DBC93]. Cependant, étant donné que $\{\alpha_n\}_{n=1,\dots,N_p}$ et $\{\phi_n\}_{n=1,\dots,N_p}$ sont des constantes, les deux modèles ne sont pas stationnaires. De plus, même si la phase initiale $\{\phi_n\}_{n=1,\dots,N_p}$ est aléatoire, les corrélations de la partie réelle et imaginaire ne correspondent aux propriétés de corrélation désirées, même si le nombre de sinusoides tend vers l'infini [PB01]. Dans [ZX03], Zheng et al. ont déterminé les arguments de sinusoides qui garantissent les propriétés statistiques désirées. Plus récemment, Grolleau et al. ont suggéré d'utiliser un modèle alternatif, nommé modèle sinusoidal stochastique ; il correspond à une version filtrée de la somme de deux sinusoides en quadrature à la fréquence Doppler maximum et dont les amplitudes sont des processus AR. Cependant, l'estimation de paramètres du modèle requiert des méthodes metaheuristiques telles que les algorithmes génétiques quand la fréquence Doppler normalisée est inférieure à $1/2\pi$ [GGN08].

2.8.1.2 Méthodes fondées sur une transformée de Fourier inverse

Dans [Smi75], Smith propose un algorithme fournissant une séquence d'échantillons du canal. Pour générer les parties réelle et imaginaire du canal, deux séquences de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sont pondérées pour une séquence de coefficients réels de la réponse fréquentielle d'un filtre. Ensuite, ils sont additionnés en quadrature et une transformée de Fourier discrète inverse est effectuée. Dans [YB00], Young et Beaulieu conçoivent un filtre en échantillonnant dans le domaine fréquentiel la DSP théorique. De plus, ils présentent une version simplifiée du Simulateur de Smith en modélisant directement le canal complexe, au lieu de modéliser les parties réelle et imaginaire de manière indépendante. Afin de garantir la décorrélation des parties réelle et imaginaire du canal, une pondération est choisie convenablement. Bien que Young et Beaulieu aient réduit le coût calculatoire de la méthode de base de Smith, tous les échantillons doivent être générés à l'aide d'une seule transformée de Fourier rapide. A cause de la TFDI, cette méthode de simulation hors ligne requiert une grande capacité de stockage.

2.8.1.3 Méthodes fondées sur une modélisation paramétrique de type MA, AR ou ARMA

Plusieurs simulateurs fondés sur les modèles AR, MA et ARMA ont été proposées dans la littérature. Les modèles linéaires stochastiques ne sont pas directement adaptés aux propriétés théoriques du canal. En effet, les DSP des parties réelle et imaginaire du canal sont à bande limitée (donc non log-intégrables). En conséquence, le processus est déterministe selon le théorème 1.2.9 et la formule de Szegő (voir l'équation 1.58). Cependant, dans la pratique, ces approches sont très populaires pour la conception de simulateurs de canaux et de récepteurs fondés sur le filtre de Kalman, et ceci pour plusieurs raisons : ce sont des modèles simples

qui nécessitent peu de paramètres à estimer dans le cas réel, la PSD n'est pas strictement à bande limitée, le filtrage de Kalman peut être utilisé aisément pour la prédiction du canal. Ainsi, dans [LS91], la fonction associée à un modèle ARMA correspond à un filtre de passe-bas de Butterworth de 3^{ième} ordre. Cette approche est une approximation très pauvre du canal théorique. Dans [DS01] et [Kom03], un processus ARMA suivi d'un interpolateur polyphasé est considéré. Les auteurs dans [DS01] signalent que cette combinaison permet de sélectionner des processus ARMA d'ordre réduit.

Dans [VT93], les auteurs modélisent le canal par un processus MA. L'estimation de paramètres est effectuée par la conception d'un filtre à réponse impulsionnelle finie à l'aide de la méthode de la fenêtre. Ainsi, pour estimer les paramètres MA, ils prennent la transformée de Fourier inverse de la racine de la DSP théorique du canal. Cette réponse impulsionnelle est ensuite décalée pour rendre le filtre causal.

Dans plusieurs travaux, tel que [BB05b] et [WDH00], les auteurs suggèrent l'utilisation de processus AR d'ordre p car il peut générer jusqu'à p résonances dans la PSD [WDH00]. Cependant, quand on utilise un modèle d'ordre 2 dont les paramètres sont obtenus par la résolution des équations de Yule-Walker, les deux pics de la PSD se situent à $\pm f_d/\sqrt{2}$ au lieu de $\pm f_d$ [WDH00]. Ce facteur de $1/\sqrt{2}$ se justifie quand on compare le développement en série de Taylor de la fonction d'autocorrélation théorique R_{hh}^{theo} et celle du processus AR d'ordre 2. Quand l'ordre du modèle AR est supérieur à 2, la matrice d'autocorrélation utilisée dans les équations de Yule-Walker devient mal conditionnée⁸ [WDH00]. Pour réduire le conditionnement de la matrice d'autocorrélation, Baddour et Beaulieu [BB05b] ont proposé d'ajouter une faible constante σ^2 sur sa diagonale principale (par exemple, $\sigma^2 = 10^{-7}$ pour f_{d_n}). Ce procédé revient à considérer un canal Rayleigh théorique perturbé par un bruit blanc additif de moyenne nulle et variance σ^2 .

Dans la suite nous proposons des nouvelles approches de simulation de type AR, MA et ARMA fondées sur l'utilisation des méthodes d'estimation proposées dans les sections précédentes. Ensuite, une étude comparative des simulateurs de cette famille d'approches est présentée.

2.8.2 Approche de simulation fondée sur la factorisation intérieure-extérieure

Dans cette section nous allons utiliser le modèle MA d'ordre infini dont la fonction de transfert coïncide avec sa fonction extérieure. Étant donné que dans la pratique nous utilisons des modèles d'ordre fini (tronqué), l'approche que nous proposons permet de régler la borne supérieure de l'erreur, en valeur absolue, entre la DSP théorique et la DSP simulée. Ce réglage permet la définition d'un critère pour la sélection de l'ordre du modèle. De plus, avec notre méthode, les premiers p paramètres restent inchangés quand l'ordre du modèle augmente de p à $p + 1$. L'approche est adaptée au cas AR et au cas ARMA.

Dans la suite nous présentons les simulateurs MA, AR et ARMA proposés.

8. Le conditionnement de norme 2, noté γ , d'une matrice est défini par le rapport de sa plus grande valeur propre λ_{max} sur sa plus petite valeur propre λ_{min} [GHG83].

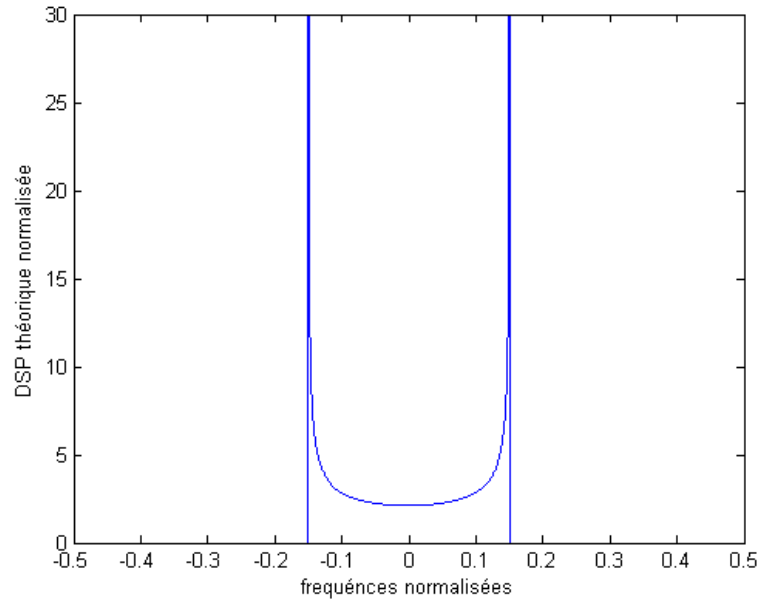


FIGURE 2.35: Densité spectrale de puissance des parties réelle et imaginaire d'un canal de Rayleigh, ici de fréquence Doppler normalisée $f_{d_n} = 0.15$

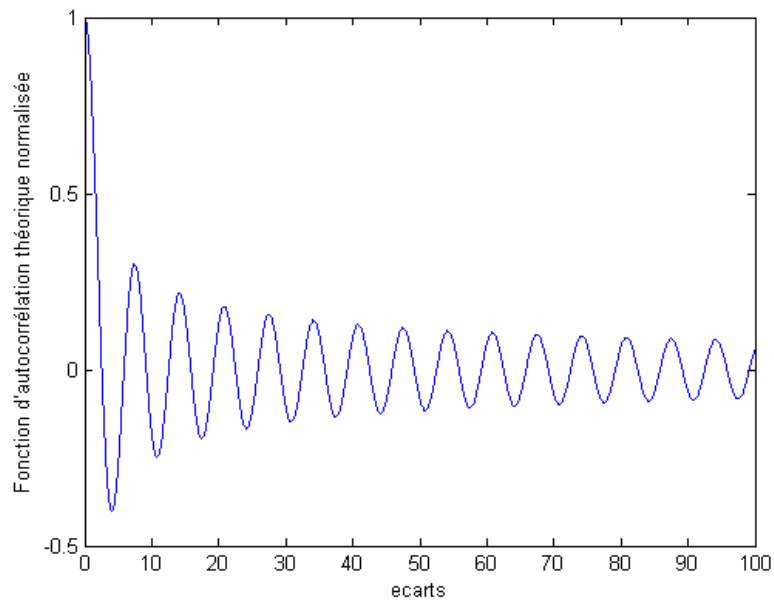


FIGURE 2.36: Fonction d'autocorrélation normalisée des parties réelle et imaginaire d'un canal de Rayleigh, ici de fréquence Doppler normalisée $f_{d_n} = \frac{f_d}{f_e} = 0.15$, où f_e est la fréquence d'échantillonnage

2.8.2.1 Factorisation intérieure-extérieure pour la modélisation de canaux MA, AR et ARMA

Considérons $x(n)$ un processus aléatoire réel et soit $P(f)$ sa DSP. Nous pouvons caractériser le processus par le facteur spectral

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k \quad (2.70)$$

qui vérifie

$$P(f) = |F^*(z)|^2 = F^*(z)F(z) \text{ pour } z = \exp(j2\pi f) \quad (2.71)$$

Nous pouvons estimer des approximations de facteurs spectraux F à l'aide de l'approche proposée dans la sous-section 2.4

Les méthodes que nous proposons dans cette section concernent trois types d'approximation d'ordre fini du facteur spectral F et nous amène aux modèles MA, AR et ARMA :

1. Un modèle MA(p) est le plus direct et correspond à l'estimation de F_p de l'équation 2.30.
2. Un modèle AR(p) est obtenu en appliquant l'estimation d'ordre fini à l'inverse de $P(f)$.
3. Un modèle ARMA(p, q) est dérivé en approximant F à une fonction rationnelle d'ordre (p, q) :

$$F_{p,q}(z) = \frac{\sum_{k=0}^p b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^q a_k z^{-k}} \quad (2.72)$$

A. Modèle MA pour la simulation de canaux Rayleigh

Soit $x(n)$ un processus MA d'ordre infini défini comme suit

$$x(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u(n-k) \quad (2.73)$$

où $b_k|_{k \geq 0}$ sont les paramètres MA réels et $u(n)$ est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance unité. Si $x(n)$ a une DSP égale à la densité spectrale de puissance théorique du canal S_{hh}^{theo} , la fonction de transfert théorique $H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^{-k}$ vérifie :

$$S_{hh}^{theo}(f) = \|H(z)\|_{z=\exp(j2\pi f)}^2 \quad (2.74)$$

Étant donné que les paramètres $b_{k \geq 0}$ sont réels le carré de la valeur absolue de la fonction de transfert $H(z)$ vérifie

$$\|H(z)\|^2 = \|F(z^{-1})\|^2 \text{ for } z = \exp(j2\pi f) \quad (2.75)$$

Suivant l'approche présentée dans la section précédente, la fonction $F(z)$ peut être exprimée comme le produit de ses facteurs intérieurs et extérieurs. Prenant en compte la même condition qu'avant, i.e. un facteur intérieur égal à 1, les paramètres MA $\{b_k\}_{k \geq 0}$ coïncident avec les coefficients du développement en série de Taylor de la fonction extérieure $\bar{F}(z)$.

Nous proposons d'estimer la fonction extérieure $F(z)$ et les paramètres utilisant les équations 2.26 et 2.29 respectivement. cependant pour utiliser l'équation 2.26 la DSP ne peut pas

être à bande limité. Ceci n'est pas les cas de la DSP théorique $S_{hh}^{theo}(f)$. Dans [BB05b], les auteurs pallient ce problème en ajoutant un bruit blanc de variance σ^2 au processus original. Ici, nous modifions "légèrement" la DSP du canal et l'exprimons comme le produit de deux facteurs définis par

$$S^U(f) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{f_{d_n}^2 - f^2}} & \text{si } |f| \leq f_{d_n} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.76)$$

$$S^{flat}(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |f| \leq (1 + \xi)f_{d_n} \\ \varepsilon & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.77)$$

où le paramètre ε garantit la condition de log-intégrabilité et ξ permet une compensation du décalage des pics aux fréquences f_{d_n} . En contrepartie, il affecte l'atténuation de la DSP au point f_{d_n} . Dans la suite, F_0^{mod} dénote la fonction calculée avec l'équation 2.26 où $P(f)$ est remplacée par la DSP, à savoir $S^U S^{flat}$.

Dans la pratique, une version tronquée du modèle MA $F_p = \sum_{k=0}^p b_k z^k$ est considérée. Sélectionner un ordre pour le modèle par la minimisation du critère suivant

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \left| S_{hh}^{theo}(e^{j\theta}) - |F_p(e^{j\theta})|^2 \right| d\theta \quad \text{où } e^{j\theta} = e^{j\pi f} \quad (2.78)$$

ne conduit pas à une valeur finie pour p . Pour cette raison, nous proposons de majorer ce critère pour un ordre p donné. Ainsi, nous avons :

$$S^{flat}(f) = J \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left| S_{hh}^{theo}(e^{j\theta}) - |F_0^{mod}(e^{j\theta})|^2 \right| d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left| F_0^{mod}(e^{j\theta}) - |F_p(e^{j\theta})|^2 \right| d\theta \quad (2.79)$$

Selon les équations 2.76 et 2.77, le premier terme de l'inégalité est égal à $2\pi\varepsilon(1 - 2f_{d_n})$ et le deuxième terme vérifie :

$$\begin{aligned} &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| F_0^{mod}(e^{j\theta}) - F_p(e^{j\theta}) \right| \left| F_0^{mod}(e^{j\theta}) + F_p(e^{j\theta}) \right| d\theta \\ &\leq \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |F_0^{mod}(e^{j\theta}) - F_p(e^{j\theta})|^2 d\theta} \cdot \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |F_0^{mod}(e^{j\theta}) + F_p(e^{j\theta})|^2 d\theta} \\ &\leq \sqrt{E^2 - \sum_{k=0}^p |b_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^p 4|b_k|^2 + \sum_{k=p+1}^{\infty} |b_k|^2} \\ &\leq 2E \sqrt{E^2 - \sum_{k=0}^p |b_k|^2} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\text{où } E = \int_{-\pi}^{\pi} |F_0^{mod}(e^{j\theta})|^2 d\theta = 2\pi\varepsilon(1 - 2f_d)$$

Alors, on a

$$J \leq 2\pi\varepsilon(1 - 2f_{d_n}) + 2E\sqrt{E^2 - \sum_{k=0}^p |b_k|^2} \quad (2.81)$$

A ce stade, étant donnée une borne d'erreur $\delta_0 > 2\pi\varepsilon(1 - 2f_{d_n})$, il existe toujours une valeur minimale pour l'ordre du modèle p telle que vérifie :

$$0 < E^2 - \sum_{k=0}^p |b_k|^2 < (\delta_0 - 2\pi\varepsilon(1 - 2f_{d_n}))^2 (2E)^{-2} \quad (2.82)$$

B. Modèle AR pour la simulation de canaux Rayleigh.

Considérons le processus AR d'ordre infini $x(n)$ défini par

$$x(n) = - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x(n-k) + u(n) \quad (2.83)$$

Dans ce cas, $F^{AR}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ vérifie :

$$S_{hh}^{theo}(f) = |H(z)|^2 \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \frac{1}{|F^{AR}(z^{-1})|^2} \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (2.84)$$

La fonction extérieure de $F^{AR}(z)$ et les paramètres du modèle sont obtenus comme expliqué dans la section traitant de la méthode d'estimation des paramètres AR à l'aide des équations (2.33) et (2.34).

De plus, la DSP modifiée⁹ est égale à $S^U(f)$.

D'ailleurs, le critère G pour sélectionner l'ordre q du modèle AR $1/F_q(z) = 1/\sum_{k=0}^q a_k z^k$ est défini par :

$$\begin{aligned} G &= \int_{-2\pi f_d}^{2\pi f_d} \left| 1/S_{hh}^{theo}(e^{j\theta}) - |F_p(e^{j\theta})|^2 \right| d\theta \text{ où } e^{j\theta} = e^{j2\pi f} \\ &\leq \int \left| |F_0^{mod}(e^{j\theta})|^2 - |F_q(e^{j\theta})|^2 \right| d\theta \\ &\leq 2W \sqrt{W^2 - \sum_{k=0}^q |a_k|^2} \end{aligned} \quad (2.85)$$

où $W = \int |F_0^{mod}(e^{j\theta})|^2 d\theta = \pi^3 f_{d_n}^2 + 2\pi(1 - 2f_{d_n})$.

En conséquence, en considérant une borne $\rho_0 > 0$, l'ordre du modèle q peut être choisi de sorte que :

$$0 < W^2 - \sum_{k=0}^q |a_k|^2 < \rho_0 (2W)^{-2} \quad (2.86)$$

9. Ce choix de DSP modifié pour le modèle AR est dû à la difficulté de gérer de valeurs grandes de l'inverse de la DSP. Dans la sous-section 2.8.2.2, cette DSP modifié est compensé par un filtrage passe-bas.

C. Modèle ARMA pour la simulation de canaux Rayleigh

Considérons le processus ARMA $x(n)$ défini par

$$x(n) = - \sum_{k=1}^q a_k x(n-k) + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k u(n-k) \quad (2.87)$$

La fonction de transfert correspondante

$$H(z) = \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^q a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (2.88)$$

vérifie $|H(z)|^2 \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = S_{hh}^{theo}(f)$. Etant donnée (2.68), nous proposons de définir le dénominateur $A(z)$ comme un polynôme de deuxième degré avec des racines égales à $\rho^{\pm 2\pi f d_n}$, avec ρ proche, mais inférieur à 1. Ainsi, le numérateur $B(z)$ peut être défini comme suit :

$$|B(z)|^2 \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = S_{hh}^{theo}(f) |A(z)|^2 \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad (2.89)$$

Pour évaluer la fonction extérieure de $B(z^{-1})$, $S(f)$ dans (2.26) est remplacé par $|B(z)|^2$ (2.89). Ainsi, les paramètres $b_{kk \geq 0}$ peuvent être estimés à l'aide de l'équation (2.29).

De plus, étant donné qu'une approximation polynomiale finie de la fonction extérieure de $B(z)$ n'a pas de racines égales à $\rho e^{\pm 2\pi f d_n}$, la fonction de transfert obtenue admet encore deux pôles égaux à $\rho e^{\pm 2\pi f d_n}$. Ceci permet une meilleure approximation de la DSP dans le voisinage de la fréquence Doppler.

Remarque : une manière alternative d'estimer les paramètres MA de ce modèle ARMA consiste à utiliser la méthode de la fenêtre pour la conception de filtres RIF comme dans [VT93] pour le modèle MA. Ainsi nous proposons d'obtenir les paramètres à l'aide de la transformée de Fourier inverse de la racine carrée du membre droit de l'équation (2.89), en appliquant une fenêtre et un décalage temporel.

2.8.2.2 Implémentation

Afin d'illustrer la mise en oeuvre de la méthode de simulation proposée, nous allons considérer le cas de la modélisation MA pour sa simplicité.

Étant donné que l'intégrale (2.26) ne peut pas être calculée de façon analytique, nous proposons d'estimer les valeurs de la fonction extérieure pour un nombre fini des points sur un cercle de rayon $r < 1$ sur le plan z . Pour la suite, on note la DSP discrète à N points, $S^U(m/N)$:

$$S^U(m/N) = \begin{cases} 1 & m = -N/2, \dots, -m_d - 1 \\ \frac{1}{\pi f_{d_n}} m_d \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{m_d - 1}{m_d} \right) \right) & m = -m_d \\ \frac{1}{\pi f_{d_n} \sqrt{1 - (m/m_d)^2}} & -m_d + 1 \leq m \leq m_d - 1 \\ \frac{1}{\pi f_{d_n}} m_d \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{m_d - 1}{m_d} \right) \right) & m = m_d \\ 1 & m = m_d + 1, \dots, N/2 - 1 \end{cases} \quad (2.90)$$

où $m_d = \lfloor f_{d_n} N \rfloor$ est le plus grand index de fréquence qui ne soit pas supérieur à la fréquence Doppler maximum. La réponse fréquentielle à $m = m_d$ est choisie de sorte que l'aire sous les coefficients spectraux interpolés soit égale à l'aire sous le spectre continu donné en (2.68), comme proposé dans [YB00]. Étant donnée f_{d_n} , N doit être choisi suffisamment grand de sorte que la version discrète de la DSP soit pertinente. Ainsi, pour un rayon r donné, la fonction extérieure F^U de S^U peut être calculée à l'aide de la version discrète de la représentation intégrale de Poisson équation (2.26)) pour $-N/2 \leq n < N/2$:

$$\begin{aligned} F^U(n/N) &= \exp \left(\sum_{m=-N/2}^{N/2-1} \frac{1}{2N} \left(\frac{1 + re^{j2\pi(n-m)/N}}{1 - re^{j2\pi(n-m)/N}} \right) \log(S^U(m/N)) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{2N} \left(\frac{1 + re^{j2\pi(n-m)/N}}{1 - re^{j2\pi(n-m)/N}} \right) * \log(S^U(n/N)) \right) \end{aligned} \quad (2.91)$$

où $*$ est le produit de convolution. Ainsi (2.91) peut être implémenté par un algorithme de convolution rapide [MW98]. De plus, la fonction extérieure F^{flat} de S^{flat} s'exprime comme suit :

$$F^{flat}(n/N) = \exp \left(\int_{f=-1/2}^{1/2} \frac{1}{2(2\pi)} \left(\frac{1 + re^{j2\pi(n/N-f)}}{1 - re^{j2\pi(n/N-f)}} \right) \log |S^{flat}(f)| df \right) \quad (2.92)$$

Pour calculer les coefficients de Taylor, nous utilisons la version discrétisée de l'équation (2.29) :

$$b(k) = \frac{1}{N r^k} \sum_{n=0}^{N-1} F^U(n/N) e^{-j2\pi k(n/N)} \quad (2.93)$$

Nous remarquons que (2.93) peut être implémentée comme une FFT pondérée de $F^U(n/N)F^{flat}(n/N)$.

En conséquence, l'algorithme requiert $O(N \log N)$ opérations.

Remarque 1 : Dans le cas de la modélisation AR, $S^U(m/N)$ est remplacé par son inverse dans l'équation (2.92). De plus, une étape de filtrage passe-bas est ajoutée. La réponse impulsionnelle $p(n)$ de ce filtre est définie par :

$$p(n) = 2f_d \frac{\sin(2\pi(n - L/2)f_d)}{2\pi(n - L/2)f_d} \quad (2.94)$$

où L est suffisamment grand pour limiter le phénomène (oscillations) de Gibbs au niveau des discontinuités dans le domaine fréquentiel.

Remarque 2 : Dans le cas de modèles ARMA, $S^U(m/N)$ est remplacé par le produit $S^U(m/N)|A(z)|^2|_{z=\exp(j2\pi m/N)}$ dans (2.92).

2.8.2.3 Étude comparative

Dans ce paragraphe, nous comparons les simulateurs proposés avec :

1. le simulateur fondé sur le modèle AR [BB05b],
2. le simulateur fondé sur le modèle MA présenté dans [VT93],

3. la méthode de Durbin pour l'estimation de paramètres [Dur59],
4. le simulateur fondé sur le modèle sinusoïdale stochastique (SS) [GGN08].

Pour les simulateurs de canal que nous proposons, le paramètre r a été fixé¹⁰ 0.98, et ε et ξ ont été fixés à 0.0125 et 0.025 respectivement. Ces valeurs ont été choisies de manière empirique pour un compromis entre le décalage de la fréquence Doppler maximum et l'atténuation de la DSP. Pour le simulateur fondé sur le modèle ARMA, plusieurs valeurs du module des pôles, à savoir ρ ont été choisies pour chaque scénario.

Afin de comparer les simulateurs, nous utilisons 3 critères. Le premier critère est l'erreur moyenne J_d défini par

$$J_d = \frac{1}{L} \sum_{n=-L/2}^{L/2-1} \left| S_{hh}^{theo}(n/L) - |H(n/L)|^2 \right| \quad (2.95)$$

Le deuxième critère et le troisième critère sont deux mesures de qualité G_{mean} et G_{max} qui sont utilisées dans [BB05b, YB00]. La marge de puissance moyenne et la marge de puissance maximum G_{mean} et G_{max} sont définis par :

$$G_{mean} = \frac{1}{\sigma_X^2 D} \text{trace} \left\{ C_X \hat{C}_X^{-1} C_X \right\} \quad (2.96)$$

$$G_{max} = \frac{1}{\sigma_X^2 D} \max \left\{ \text{diag} \left\{ C_X \hat{C}_X^{-1} C_X \right\} \right\} \quad (2.97)$$

où C_X et $\hat{C}_X$ sont les matrices de covariance (de taille $D \times D$) de processus de canaux théorique et simulé respectivement et σ_X^2 est fixé à l'unité dans ce cas. Ces mesures sont données en dB (c.-à-d. $G^{dB} = 10 \log_{10}(G)$). Ainsi, une performance parfaite correspond à 0 dB pour les deux mesures. Nous soulignons que G_{mean} et G_{max} mesurent la similarité des fonctions d'autocorrélation théorique et simulée alors que l'erreur J_d évalue la différence entre la DSP théorique et la DSP simulée. Le lecteur peut consulter [YB03] pour une discussion plus approfondie sur ces critères.

D'après les résultats affichés dans le tableau 2.3 et la figure 2.39, la méthode fondée sur le modèle MA proposé et le simulateur de Verdin [VT93] fournissent des résultats très proches et surpassent la méthode fondée sur l'approche de Durbin [Dur59].

D'après le tableau 2.3 et les figures 2.38, 2.39, 2.40, les approches proposées fondées sur le modèle ARMA, c.-à-d. utilisant la factorisation spectrale et la méthode de la fenêtre, surpassent les autres solutions. Plus particulièrement, dans la figure 2.38, la DSP obtenue avec le modèle ARMA(2,298) est très proche de la DSP théorique dans les basses fréquences et le voisinage de la fréquence Doppler alors que l'approche¹¹ de Baddour [BB05b] fondée sur le modèle AR affiche des oscillations dans l'intervalle $(-f_{d_n}, f_{d_n})$ et présente un pic maximum décalé à la fréquence Doppler.

D'après la figure 2.41, la DSP des deux approches proposées fondées sur le modèle ARMA sont très proches l'une de l'autre pour $f \leq f_{d_n}$. Pour $f > f_{d_n}$, la DSP de l'approche utilisant la

10. Les simulations ont démontré que pour $r < 0.965$ et $r > 0.998$, le carré de la fonction de transfert estimée diverge de la DSP théorique

11. L'approche fondée sur le modèle AR requiert $O(p^2)$ opérations utilisant la récursion de Levinson

méthode de la fenêtre a des valeurs plus proches à la DSP théorique que la DSP de l'approche utilisant la factorisation intérieure-extérieure.

D'après la figure 2.42, la fonction d'autocorrélation du processus AR de Baddour présente des déviations importantes par rapport à la fonction d'autocorrélation théorique, spécialement pour les écarts supérieurs à l'ordre du modèle. La fonction d'autocorrélation de l'approche ARMA proposée présente de moindres différences par rapport à la théorie. L'approche SS a été évaluée pour le cas de 50 paramètres. Elle présente le deuxième meilleur résultat¹² pour $f_{d_n} = 0.05$.

Pour le choix du module des racines, à savoir ρ , pour l'approche ARMA proposée, nous avons évalué des valeurs allant de 0.9910 à 0.99990 avec des pas de 0.00005. Le tableau 2.4 présente les valeurs de ρ qui minimisent les critères J_d , G_{mean} et G_{max} pour différentes valeurs de f_{d_n} et différents nombres de paramètres. Comme signalé précédemment, le nombre d'échantillons N de la DSP peut affecter l'estimation. Selon le tableau 2.5 et les figures 2.43 et 2.44, les résultats obtenus sont très proches avec $N = \{4096, 2048, 1024, 512\}$. Pour $N < 512$, la différence par rapport à la DSP théorique augmente.

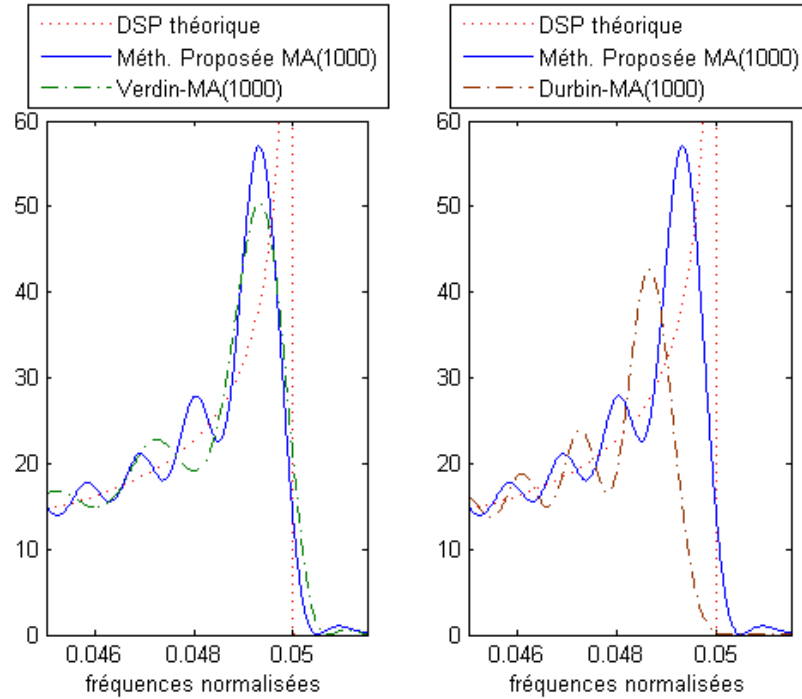


FIGURE 2.37: DSP des simulateurs fondés sur le modèle MA avec $f_d = 0.05$

12. Pour le fréquence évaluées, à savoir, $f_{d_n} = \{0.01, 0.05\}$ des algorithmes génétiques ont été utilisés pour estimer les paramètres AR

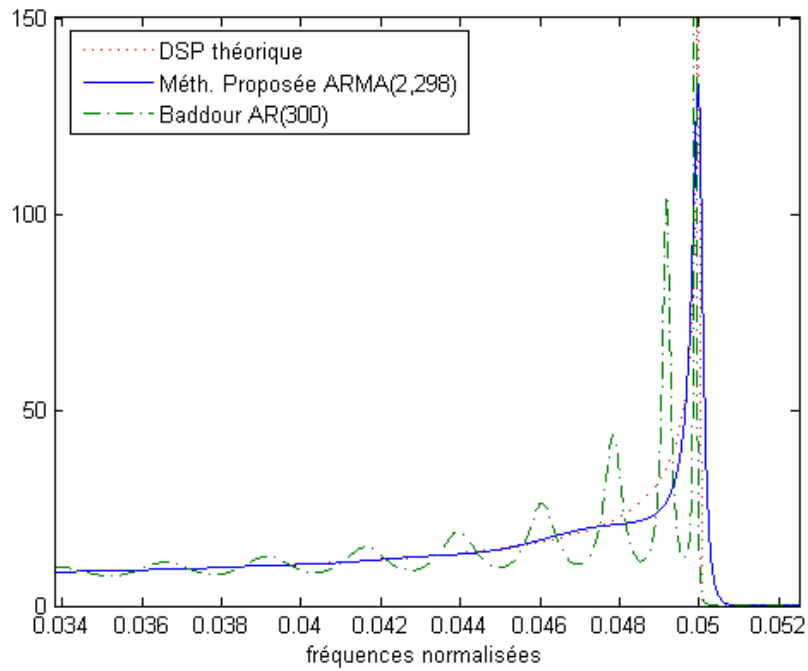


FIGURE 2.38: DSP des simulateurs avec $f_{dn} = 0.05$ et 300 paramètres

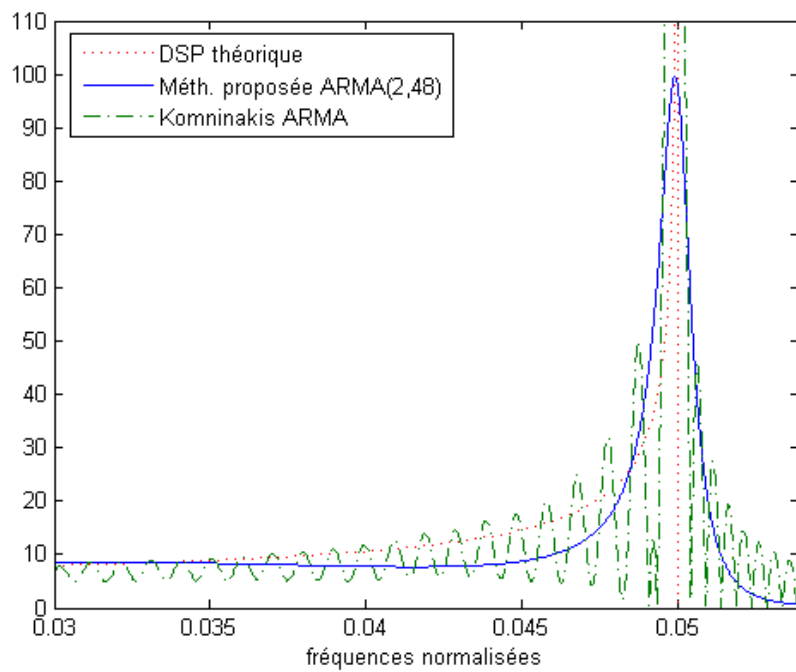


FIGURE 2.39: DSP des simulateurs avec $f_{dn} = 0.05$ et 50 paramètres

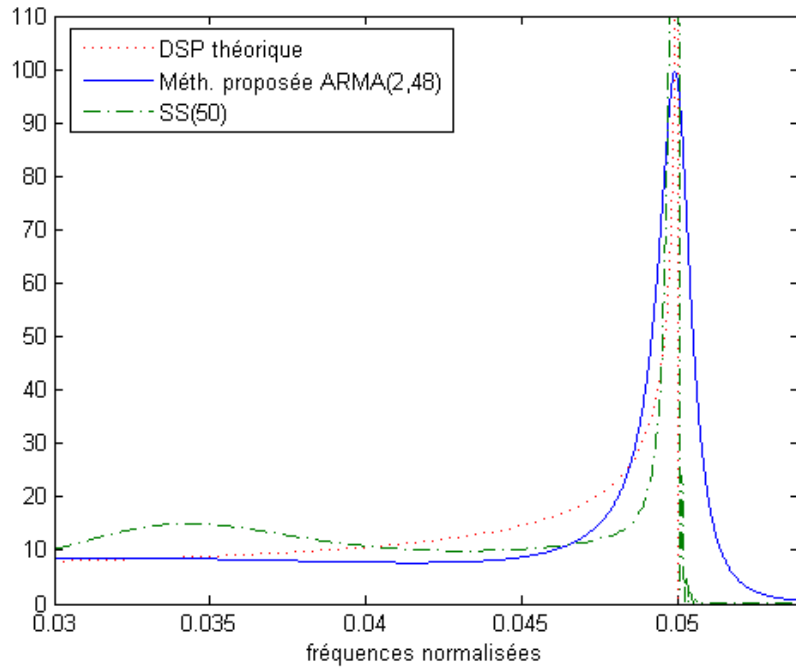


FIGURE 2.40: DSP des simulateurs avec $f_{d_n} = 0.05$ et 50 paramètres

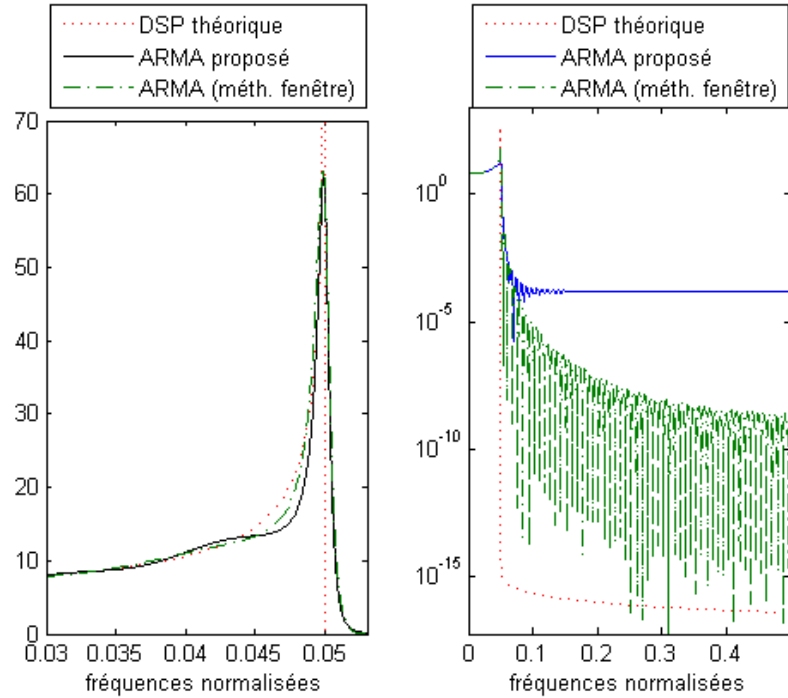


FIGURE 2.41: DSP de la méthode ARMA proposée avec $f_{d_n} = 0.05$ et 150 paramètres aux échelles linéaire et logarithmique

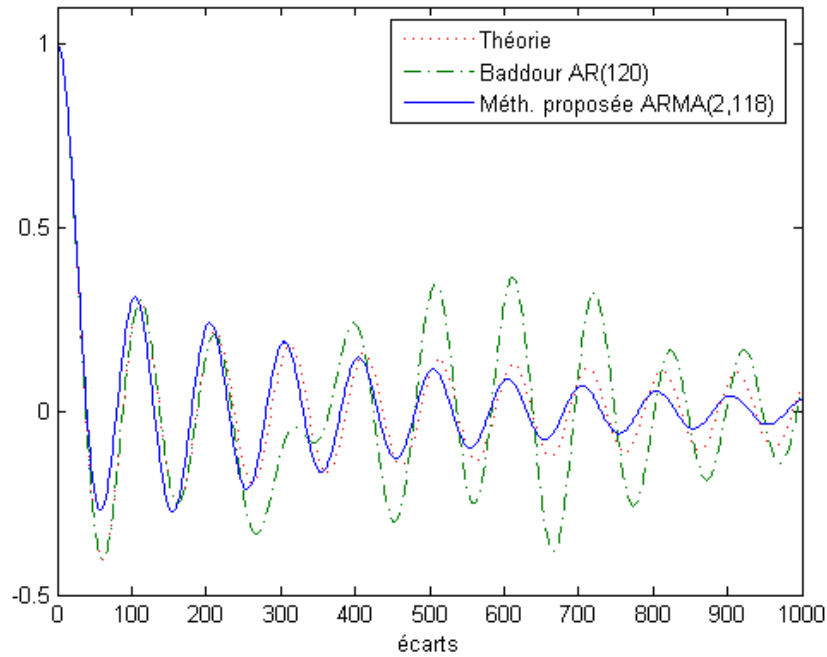


FIGURE 2.42: Fonction d'autocorrélation avec $f_{d_n} = 0.01$ et 120 paramètres

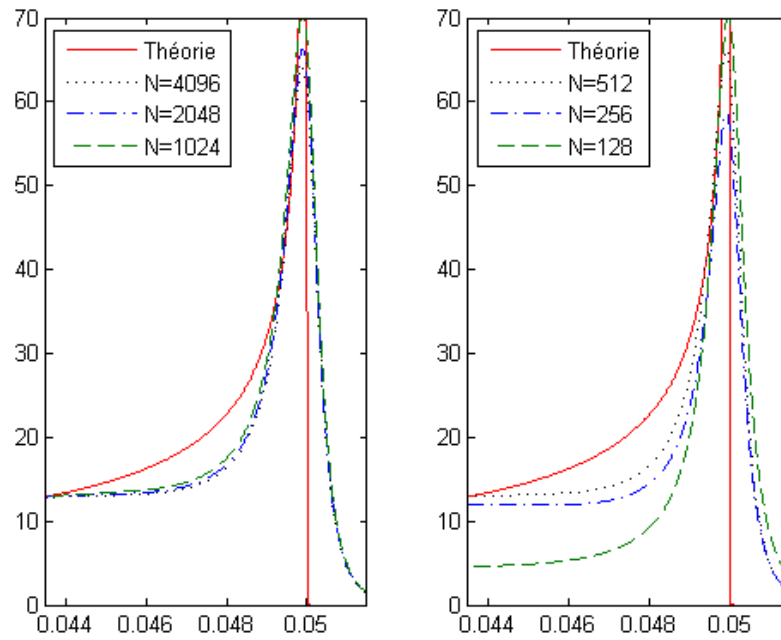


FIGURE 2.43: DSP de la méthode ARMA pour différentes valeurs de N avec $f_{d_n} = 0.05$ et 120 paramètres

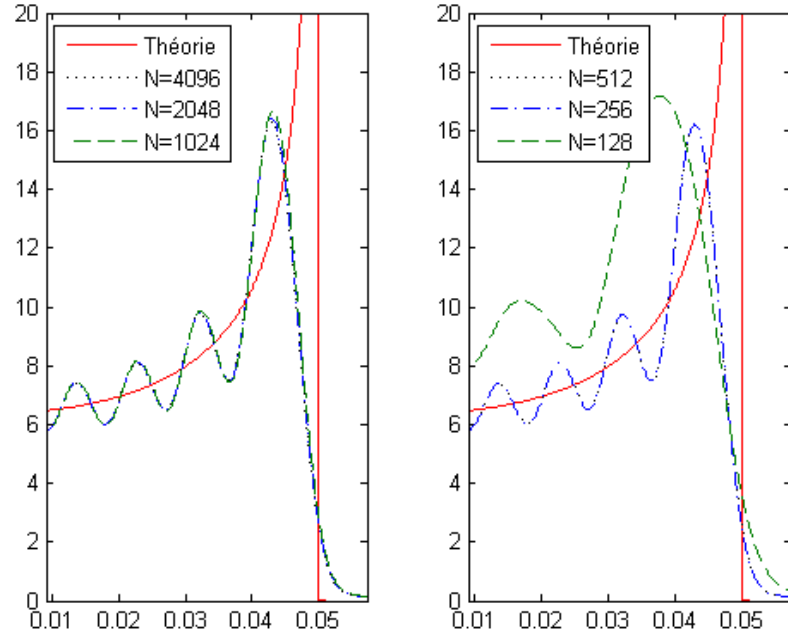


FIGURE 2.44: DSP de la méthode MA pour différentes valeurs de N avec $f_{dn} = 0.05$ et 120 paramètres

nombre de paramètres		J_d		$G_{\text{mean}}(\text{dB})$		$G_{\text{max}}(\text{dB})$	
		$f_{dn} = 0.01$	$f_{dn} = 0.05$	$f_{dn} = 0.01$	$f_{dn} = 0.05$	$f_{dn} = 0.01$	$f_{dn} = 0.05$
50	ARMA Proposé	0.8826	0.2495	1.0483	0.4397	1.1128	0.4556
	ARMA (méth. de la fenêtre)	0.5698	0.2164	1.0712	0.3994	1.1334	0.4208
	AR Proposé	0.6979	0.3318	10.3672	6.3017	10.4001	6.3171
	AR de Baddour [BB05b]	0.5570	0.6317	1.5935	2.4487	1.7659	2.6832
	MA Proposé	0.9764	0.4263	4.0557	6.1530	4.2903	6.4728
	MA de Verdin [VT93]	0.6040	0.3591	3.2063	3.0014	3.4206	3.1852
	MA de Durbin [Dur59]	0.9859	0.4961	4.6373	10.4704	4.8668	10.7523
120	SS [GCN08]	0.7652	0.4132	3.7491	0.7306	3.7874	0.8953
	ARMA Proposé	0.4116	0.1251	0.5989	0.1680	0.6163	0.1735
	ARMA (méth. de la fenêtre)	0.2805	0.1173	0.3679	0.1592	0.4056	0.1643
	AR Proposé	2.6900	0.3014	16.6011	6.0031	16.7239	6.0468
	AR de Baddour [BB05b]	0.8008	0.3382	2.1303	0.7204	2.3946	0.7940
	MA Proposé	0.6435	0.2960	7.5843	3.9450	7.8907	4.1729
	MA de Verdin [VT93]	0.5307	0.3428	3.0998	2.0063	3.3135	2.1541
300	MA de Durbin [Dur59]	0.8234	0.3762	8.4128	9.4176	8.6786	9.7032
	ARMA proposé	0.2303	0.0664	0.2785	0.0515	0.3450	0.0538
	ARMA (méth. de la fenêtre)	0.1533	0.0685	0.0617	0.0581	0.2624	0.0609
	AR proposé	1.7068	0.2889	14.6827	5.6942	14.7964	5.7240
	AR de Baddour [BB05b]	0.8008	0.3382	2.1303	0.7204	2.3946	0.7940
	MA proposé	0.4308	0.1718	5.1412	1.4344	5.4138	1.5508
	MA de Verdin [VT93]	0.3831	0.1963	1.9042	2.0063	3.3135	2.1541
300	MA de Durbin [Dur59]	0.5850	0.2489	11.8706	7.4949	12.1374	7.7233

*Pour les modèles MA(p) et AR(p), le nombre de paramètres est l'ordre p .
 Pour les modèles ARMA(p, q) les nombre de paramètres est $p + q$.
 Pour les simulateurs proposés, on a fixé $N = 4096$, $L = 131072$ et $D = 1024$.

TABLE 2.3: Évaluation de l'erreur J_d et les mesures de qualité $G_{\text{mean}}(\text{dB})$ et $G_{\text{max}}(\text{dB})$ pour plusieurs simulateurs*

nombre de paramètres	f_{d_n}	Modules de pôles ρ qui minimisent les critères						
		J_d	$D = 200$		$D = 512$		$D = 1024$	
			$G_{\text{mean}}(dB)$	$G_{\text{max}}(dB)$	$G_{\text{mean}}(dB)$	$G_{\text{max}}(dB)$	$G_{\text{mean}}(dB)$	$G_{\text{max}}(dB)$
50	0.05	0.99410	0.99280	0.99270	0.99330	0.99330	0.99330	0.99380
	0.10	0.99240	0.99170	0.99160	0.99230	0.99240	0.99290	0.99300
	0.15	0.99140	0.99100	0.99100	0.99190	0.99200	0.99250	0.99260
120	0.01	0.99780	0.99695	0.99690	0.99705	0.99700	0.99715	0.99715
	0.05	0.99700	0.99645	0.99640	0.99665	0.99665	0.99685	0.99685
	0.10	0.99630	0.99600	0.99600	0.99630	0.99625	0.99655	0.99660
	0.15	0.99580	0.99560	0.99560	0.99605	0.99605	0.99640	0.99645
300	0.01	0.99905	0.99885	0.99880	0.99880	0.99875	0.99880	0.99880
	0.05	0.99880	0.99865	0.99865	0.99860	0.99860	0.99870	0.99865
	0.10	0.99920	0.99920	0.99920	0.99915	0.99910	0.99910	0.99910
	0.15	0.99910	0.99905	0.99905	0.99910	0.99910	0.99915	0.99910

TABLE 2.4: Valeurs de module du pôle ρ pour le simulateur ARMA proposé

Méthode	N	J	$G_{\text{max}}(dB)$	$G_{\text{mean}}(dB)$
ARMA proposé	4096	0.1251	0.1680	0.1735
	2048	0.1231	0.1652	0.1705
	1024	0.1211	0.1627	0.1676
	512	0.1321	0.1766	0.1811
	256	0.1815	0.2495	0.2545
	128	0.4990	0.6878	0.6958
MA proposé	4096	0.2960	3.9450	4.1729
	2048	0.2962	3.8539	4.0793
	1024	0.2966	3.6969	3.9179
	512	0.3093	3.7416	3.9663
	256	0.3473	4.0266	4.2646
	128	0.5931	4.0372	4.2639
AR proposé	4096	0.3014	6.0031	6.0468
	2048	0.3111	5.7253	5.7676
	1024	0.3340	5.2206	5.2599
	512	0.4077	6.9288	6.9754
	256	0.7342	10.7168	10.7601
	128	0.7063	8.0198	8.0408

*avec $f_{d_n} = 0.05$ et 120 paramètres.**TABLE 2.5:** Effet du paramètre N dans les méthodes proposées*.

2.9 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle méthode pour l'estimation de paramètres de modèles de type AR, MA et ARMA. L'estimation de paramètres est fondée sur la représentation par le noyau reproduisant de Poisson d'une fonction extérieure.

Dans l'algorithme proposé, le facteur extérieur est d'abord évalué à l'aide d'une version discrète de la représentation intégrale de Poisson, qui est équivalente à l'exponentielle de la convolution du noyau de Poisson complexe avec le logarithme de la DSP. Ensuite on opère un développement en série de Taylor de la fonction extérieure (ces coefficients de série coïncidant théoriquement avec les paramètres d'un modèle MA infini). L'estimation de ces coefficients est effectuée à l'aide d'une version discrétisée d'une intégrale de Cauchy, qui revient pratiquement à une transformée de Fourier pondérée par un facteur prenant un compte le rayon $r < 1$ du cercle sur lequel le facteur extérieur a été évalué. Cette approche est adaptée à l'estimation de paramètres AR en opérant l'algorithme sur l'inverse de la DSP. Une extension de la méthode pour le cas 2-D est présentée considérant un support de type quart de plan.

L'étude comparative que nous menons avec d'autres méthodes fondées sur les moindres carrés met en évidence certaines propriétés des spectres estimés utilisant la méthode proposée.

Dans des signaux contenant des composantes déterministes et CND, les spectres estimés par cette méthode atténuent ou régularisent les singularités spectrales propres des composantes déterministes. Ainsi, la méthode permet de caractériser la composante CND. Cette atténuation est effectuée au niveau de l'étape d'estimation de la fonction extérieure et elle dépend du type d'estimateur de DSP utilisé et de sa résolution fréquentielle.

Les modèles obtenus sont utilisés dans deux applications : pour la décomposition de Wold des images texturées dans le cas 2-D et dans la simulation de canaux de transmission sans fils de type Rayleigh dans le cas 1-D.

Prenant en compte les propriétés de la méthode d'estimation, nous proposons l'utilisation du facteur extérieur de la densité spectrale de puissance d'une texture pour estimer un modèle AR 2-D de sa partie non déterministe. Cette méthode est utilisée pour dériver un schéma de décomposition de Wold pour la séparation des parties déterministe et non déterministe de la texture. Le schéma de décomposition est de type global dans le sens où il n'effectue pas de recherches de composantes déterministes dans le domaine spectral. Les résultats démontrent que même si les amplitudes de pics et lignes associés aux composantes déterministes ont des amplitudes proches à celles du spectre de la partie CND, l'algorithme est capable d'effectuer la décomposition.

Dans le contexte de la simulation de canaux de Rayleigh, nous proposons de nouvelles approches fondées sur des modèles de type AR, MA et ARMA. Le modèle ARMA proposé est obtenu en fixant des pôles sur les fréquences Doppler et en calculant les coefficients MA du modèle ARMA. Les études comparatives effectuées confirment la pertinence de l'approche ARMA proposée pour cette application. En effet, l'approche ARMA proposée pallie certains défauts propres d'autres approches. Notamment, elle atténue les déviations oscillatoires par rapport à la DSP théorique qu'on observe dans les cas des modèles AR et pallie également les pics des basses amplitudes sur la fréquence Doppler maximum qui caractérisent les modèles MA.

Chapitre 3

Codage hybride d'images : Wold-ondelettes

3.1 Introduction

Le codage des images est un sujet de grand intérêt dans la communauté du traitement d'image. L'objectif principal est d'obtenir des représentations parcimonieuses de l'image, c'est à dire des caractérisations avec un nombre faible des coefficients. Ces coefficients sont quantifiés afin d'obtenir le taux de compression désiré. Les ondelettes se sont révélées être un outil particulièrement efficace pour cette application. En effet, le codage fondé sur la transformée en ondelette (TO) représente efficacement les régions localement régulières et les points singuliers isolés [CD99a, SP96]. Cependant, des structures tels que les contours, les motifs oscillatoires et les textures aléatoires irrégulières¹ ont des représentations moins parcimonieuses dans le domaine de la TO. Par exemple, les variations oscillatoires d'intensité sont décrites par un grand nombre de coefficients d'ondelette des petites échelles. Ces coefficients comportent peu d'énergie et sont souvent quantifiés à zéro, surtout à des taux de compression élevés.

Une solution permettant de palier les limites du codage fondée sur les ondelettes consiste à utiliser conjointement les ondelettes avec d'autres bases, dictionnaires ou des modèles paramétriques mieux adaptés à certains types de structures dans l'image. On appellera cette utilisation conjointe des représentations, codage hybride d'image. Dans le codage hybride, l'image $f(x, y)$ se décompose comme suit :

$$f(x, y) = u(x, y) + v(x, y) \quad (3.1)$$

où u est la composante contenant l'information structurée ou partie "cartoon" de l'image et v est la composante texturée ou oscillatoire. Chacune des composantes est codée utilisant une représentation adaptée à son contenu.

On peut distinguer deux familles d'approches de codage hybride en fonction du type de représentations utilisée conjointement avec les ondelettes :

- Approches utilisant des représentations non paramétriques.
- Approches utilisant des modèles paramétriques.

1. Dans le sens de la régularité locale d'une fonction qu'on définira dans le chapitre.

Dans la première famille, on distingue aussi deux groupes d'algorithmes. Un groupe d'algorithmes est fondé sur l'utilisation des représentations qui ont été introduites afin de mieux caractériser les contours des images. Dans ces algorithmes, la partie structurée ou cartoon, qui contient les contours de l'image, est codée par les représentations adaptées aux contours et la composante contenant les textures est codée à l'aide des ondelettes. Parmi les algorithmes utilisant cette approche, on peut citer celui d'Aujol et Matei qui utilisent une représentation multi-échelle adaptée aux contours [AM04], et celui de Wakin et al. qui utilisent les wedgelets [WRCB02]. L'autre groupe d'algorithmes utilise les ondelettes pour la représentation de la composante structurée et utilise d'autre type de bases ou dictionnaires pour la composante texturée oscillatoire. Parmi ces algorithmes, on peut citer ceux proposés par F. Meyer et al. [GAC02] et par Sprljan et Izquierdo [SI03] qui utilisent des paquets d'ondelettes et des cosinus locaux pour représenter les régions oscillatoires d'une image.

La deuxième famille d'algorithmes est fondée sur l'utilisation des modèles paramétriques pour la représentation de textures. Ainsi, la partie structurée ou cartoon est codée par un approche fondée sur les ondelettes et la composante texturée est codée à l'aide des paramètres issus de l'analyse des textures. Ces paramètres sont utilisés au niveau du décodeur afin d'effectuer la synthèse de textures. Dans une telle approche, la texture synthétisée diffère numériquement de l'originale mais présente une impression visuelle similaire.

Dans la littérature, les travaux utilisant des schémas hybrides utilisent deux approches pour la modélisation de textures :

- Modèles fondés sur la distribution marginale des coefficients d'ondelette [NRK02, GBI05]
- Modèles autorégressifs (AR) [RSHI96, DK98, RS99].

De plus, les modèles AR ont été exploités aussi pour la représentation de textures dans le codage vidéo [KGL⁺08].

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'utilisation de modèles issus de la décomposition de Wold comme alternative pour la modélisation de la composante texturée [MTN09]. Ces modèles permettent de caractériser une gamme plus complète de textures que les approches paramétriques énoncées et utilisent un nombre réduit de paramètres [SFP96].

La chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous présentons une approche pour la décomposition d'une image dans une composante texturée et une composante non-texturée. Cette décomposition est fondée sur une analyse de la régularité locale effectuée dans le domaine des ondelettes. La régularité locale est utilisée comme un outil pour identifier les coefficients d'ondelettes associées aux textures à aspect stochastique ainsi que celles à aspect périodique. Ensuite, nous proposons un algorithme qui effectue la segmentation de la composante texturée en plusieurs régions stationnaires qui seront ensuite modélisées. Enfin, nous utilisons les modèles issus de la décomposition de Wold pour effectuer le codage de la composante texturée de l'image.

3.2 L'algorithme de décomposition

Dans le cadre du codage hybride d'images, plusieurs approches ont été proposées pour la séparation de la composante cartoon et la composante texturée. Certaines approches exploitent l'hypothèse que les régions texturées sont caractérisées par des coefficients de faible

amplitude. Par exemple dans [DK98] et [GAC02] l'image est codée dans un premier temps à l'aide d'une technique de compression fondée sur les ondelettes, tel que les algorithmes EZW [Sha93] ou SPIHT [SP96], et utilisant un budget de bits. La différence entre l'image originale et l'image compressée est considérée comme la composante texturée. Fondée sur la même hypothèse, Nadenau et al. [NRK02] et Ghouti et al. [GBI05] proposent une analyse par bloc où les coefficients d'ondelettes de faible amplitude sont supposés représenter des textures stochastiques.

Des approches de décomposition plus élaborées ont utilisées par Aujol et Matei [AM04] et Sprjal et Izquierdo [SI03]. Ils proposent l'utilisation d'algorithmes fondés sur la variation totale. Ce type d'algorithmes est amplement utilisé pour le problème de séparation $f = u + v$ dans le contexte du débruitage et de la décomposition d'une image dans une partie à variation bornée et une partie oscillante [VO03, AABFC05, Mey01, ROF92]. Pour ce faire, Rudin, Osher et Fatemi posent le problème de minimisation suivant [ROF92] :

$$\inf_{u \in BV} F(u) \int |\nabla u| + \lambda \int \|f - u\|^2 dx dy \quad (3.2)$$

où BV est un espace de fonctions à variation bornée, λ est un paramètre de pondération, $\int \|f - u\|^2 dx dy$ est un terme de fidélité et $\int |\nabla u|$ est un terme de régularisation. Le terme de régularisation est la variation totale de u . Une étude comparative de ces approches est présentée dans [YGO07].

L'approche de décomposition que nous proposons utilise l'analyse de la régularité locale comme outil pour la décomposition d'une image dans une composante régulière (partie cartoon) et une composante irrégulière (partie texturée ou oscillante).

L'étude de la régularité locale des fonctions et des processus stochastiques est une démarche mathématique récente née du perfectionnement de techniques d'analyse numérique. Elle est utilisée notamment dans la mécanique des fluides pour l'étude de turbulences dans le cadre de l'analyse multifractale. La régularité locale a été proposée par Mallat et al. [MH92, MZ92] comme un outil pour la détection et la caractérisation de singularités des signaux et d'images dans le domaine des ondelettes. Mallat et al. ainsi qu'autres auteurs ont exploités l'analyse de la régularité locale dans le cadre des algorithmes de débruitage des signaux et images [MH92, HLS99, ZN05] et également dans des approches visant le codage d'images [MZ92, NM98]. Dans la suite nous allons rappeler quelques définitions au sujet des exposants de Lipschitz et nous allons traiter le problème de mesure de la régularité locale.

3.2.1 Régularité locale

La régularité locale d'une image caractérise la rugosité de sa surface. Habituellement on mesure la régularité d'une fonction à l'aide des exposants de Lipschitz (ou exposants de Hölder).

Définition (Lipschitz)

- Une fonction f est localement Lipschitz $\alpha > 0$ en x_0 , s'il existe deux constantes A et $h_0 > 0$ et un polynôme de degré $n = \lfloor \alpha \rfloor$, $P_n(x)$ tels que pour $h < h_0$

$$|f(x_0 + h) - P_n(h)| \leq A |h|^\alpha. \quad (3.3)$$

- Une fonction f est uniformément Lipschitz α sur $[a, b]$ si elle vérifie (3.3) pour tout $x_0 \in [a, b]$, avec une constante A indépendante de x_0 .

- La régularité Lipschitzienne de f en x_0 ou sur $[a, b]$ est le sup des α pour lesquels f est Lipschitz α .

L'exposant de Lipschitz est lié à la classe de régularité d'une fonction en termes de nombres de ses dérivées continues. Ainsi, les images avec un exposant de Lipschitz grand ont une apparence régulière alors que des exposants de Lipschitz faibles sont liés aux fonctions plus irrégulières.

Quand nous considérons la transformée d'ondelette d'une fonction lipschitzienne d'ordre α en x_0 , nous pouvons démontrer que pour tout x dans le voisinage de x_0 , il existe une constante B tel que

$$|W_s f(x)| \leq B(s^\alpha + |x - x_0|^\alpha) \quad (3.4)$$

où $|W_s f(x)|$ est la sous-bande de détails à l'échelle s de la transformée en ondelette de $f(x)$ [MZ92]. Ainsi l'exposant local de Lipschitz pour un point d'une fonction peut être estimé au moyen de l'évolution à travers les échelles du module de sa transformée d'ondelette. L'équation (3.4) implique que

$$|W_s f(x)| \leq O(s^\alpha) \quad (3.5)$$

à l'intérieur d'une cône $|x - x_0| \leq Ks$, où K est la support de l'ondelette mère. Ceci est nommé "cône d'influence" (CdI) par Mallat et al. [MH92]. Si l'exposant de Lipschitz est positif, le module de la transformée en ondelette à l'intérieur du cône augmente quand l'échelle augmente. Au contraire, si l'exposant de Lipschitz est négatif le module de la transformée en ondelette diminue quand l'échelle augmente. Dans la figure 3.1, on peut observer l'évolution de l'amplitude de coefficients d'ondelettes d'un signal composé de différent types de singularités.

Nous allons retrouver le même type de comportement dans le cas de fonctions 2-D. Dans la suite nous allons présenter quelques notations associées aux ondelettes 2-D qui seront utilisées dans la suite de la section.

La transformée en ondelette redondante 2-D pour une fonction $f(x, y)$ présentée dans [MH92, MZ92] est définie par

$$\left\{ S_{2^j} f, (W_{2^j}^1 f)_{1 \leq j \leq J}, (W_{2^j}^2 f)_{1 \leq j \leq J} \right\}, \quad (3.6)$$

où $f \in L^2(R^2)$. Les composantes sont obtenues par la convolution de $f(x, y)$ avec la fonction d'échelle et les ondelettes analysantes

$$\begin{aligned} S_{2^j} &= f * \phi_{2^j}(x, y) \\ W_{2^j}^1 f(x, y) &= f * \psi_{2^j}^1(x, y) \\ W_{2^j}^2 f(x, y) &= f * \psi_{2^j}^2(x, y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Chacune des composantes de cette transformée a le même nombre d'échantillons que $f(x, y)$. Les ondelettes mères sont les dérivées partielles d'une fonction dite régulière $\Phi(x, y)$ dans les directions x et y , respectivement comme suit

$$\begin{aligned} \psi_{2^j}^1 f(x, y) &= \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \\ \psi_{2^j}^2 f(x, y) &= \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.8)$$

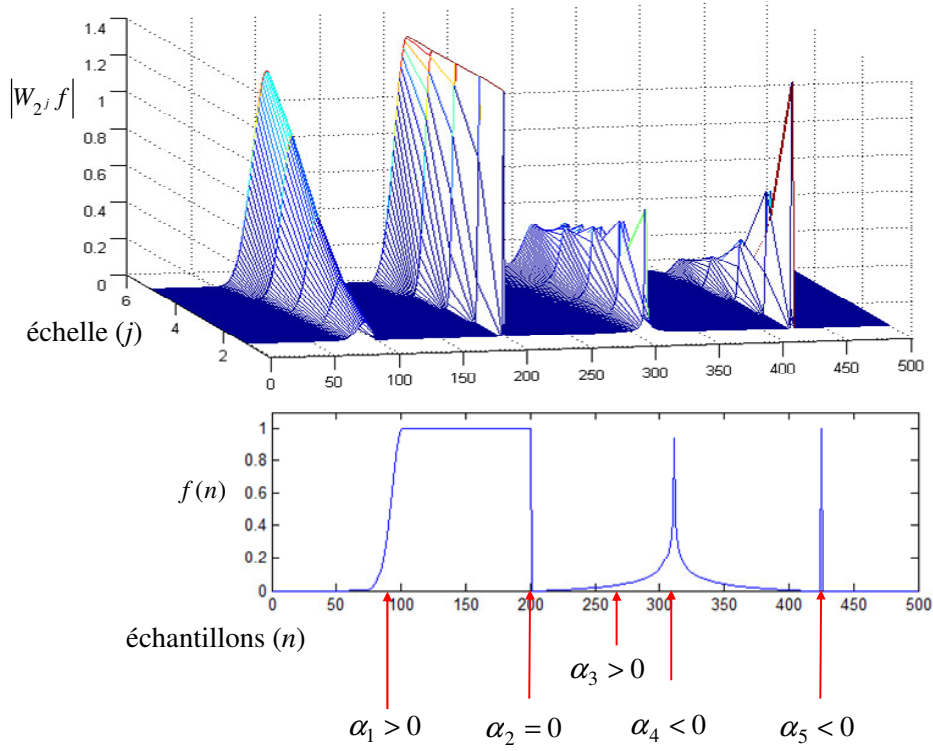


FIGURE 3.1: Signal et sa transformée en ondelette.

On note le module et la phase de la transformée comme suit

$$M_{2^j} f(x, y) = \sqrt{|W_{2^j}^1 f(x, y)|^2 + |W_{2^j}^2 f(x, y)|^2} \quad (3.9)$$

$$A_{2^j} f(x, y) = \arctan \left(\frac{W_{2^j}^1 f(x, y)}{W_{2^j}^2 f(x, y)} \right) \quad (3.10)$$

et définissent respectivement la magnitude et la direction du gradient en un point (x, y) . En deux dimensions, la régularité de Lipschitz dépend de l'évolution de $|W_{2^j}^1 f(x, y)|$ et $|W_{2^j}^2 f(x, y)|$. L'évolution de ces composantes est bornée par l'évolution de $M_{2^j} f(x, y)$ et s'exprime

$$|M_s f(x, y)| \leq C s^\alpha \quad (3.11)$$

pour une constante C .

3.2.2 Régularité locale des processus stochastiques et des signaux périodiques

En général, pour les processus stationnaires stochastiques, l'évolution du module de la transformée en ondelette à travers les échelles dépend de son comportement temporel/spatial. On peut démontrer que le bruit blanc gaussien est caractérisé par un exposant de Lipschitz égal à $-1/2$. Les processus avec un spectre riche en hautes fréquences ont des variations

abruptes dans le domaine temporel/spatial et sont caractérisés par des exposants de Lipschitz négatifs (cf. figure 3.3). Au contraire les processus qui évoluent lentement sont caractérisés par des exposants positifs (cf. figure 3.4). Ces deux comportements se traduisent pour une évolution décroissante ou croissante de l'amplitude de coefficients d'ondelettes de sorte que les coefficients de plus grande amplitude correspondent à ceux de petites échelles ou grandes échelles, respectivement. Si un signal présente des variations rapides et également une 'tendance' qui varie lentement dans le temps (voir figure 3.6), on peut trouver un comportement mixte au niveau de l'évolution de l'amplitude des coefficients d'ondelette (c'est-à-dire, une diminution puis une augmentation du module des coefficients quand l'échelle augmente). Il est également possible que les coefficients de plus grande amplitude se trouvent dans une échelle intermédiaire (cf. figures 3.5). Mallat et Hwang ont associé cette échelle de maxima à la fréquence instantanée de signaux oscillants [MH92] (voir figure 3.7). Cette échelle correspond à l'échelle où la variation totale (normalisée) est maximisée. Cette notion a été introduite par Luo et al. sous le terme de "échelle caractéristique" dans le contexte de l'analyse d'image par satellites [LAG⁺07]. Le lien avec la variation totale peut être observé du fait que l'on a défini les ondelettes mères comme les dérivées partielles d'une fonction régulière $\Phi(x, y)$ dans les directions x et y (voir équations (3.8)). On remarque que le module de la transformée en ondelette $M_{2^j} f(x, y)$ peut être vu comme le module d'une dérivée gaussienne de la fonction $f(x, y)$, autrement dit, comme le module du gradient de la fonction $f(x, y)$.

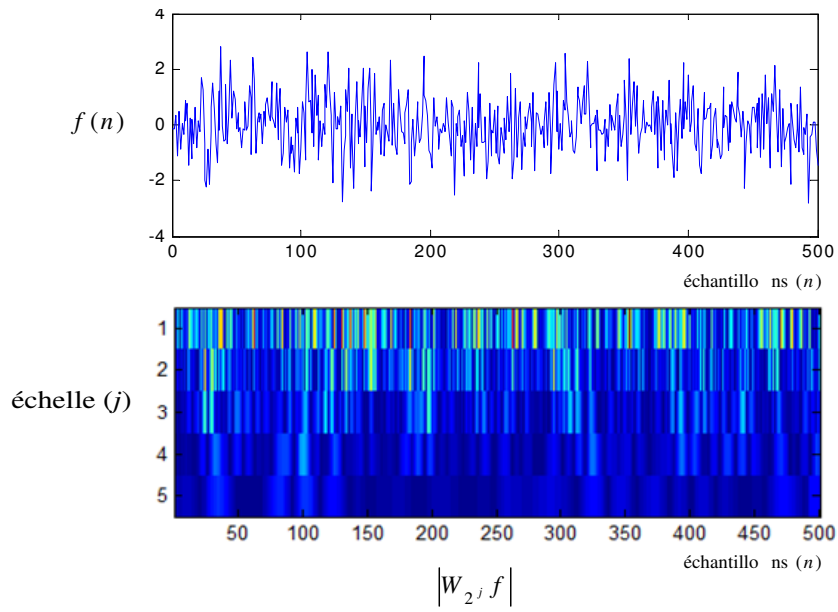


FIGURE 3.2: Réalisation d'un bruit blanc et sa transformée en ondelette.

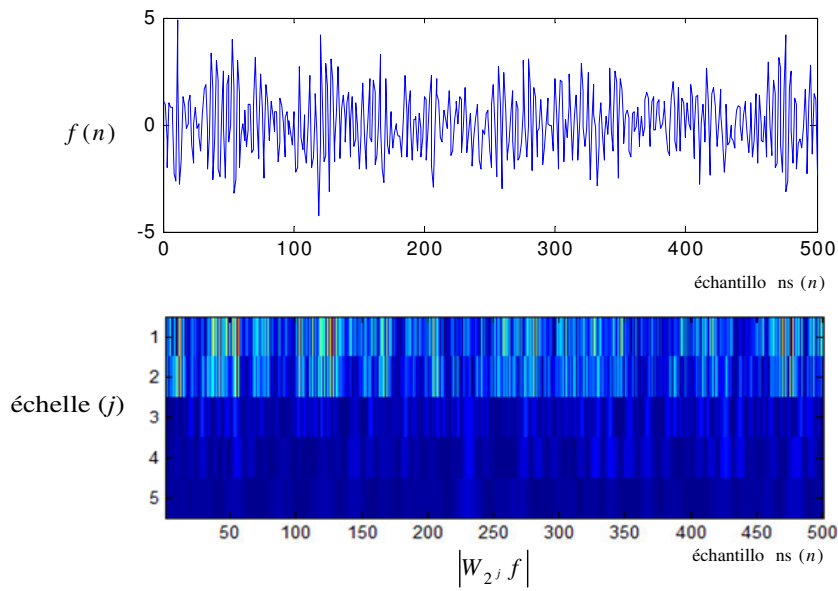


FIGURE 3.3: Réalisation d'un processus AR (No. 1) et sa transformée en ondelette.

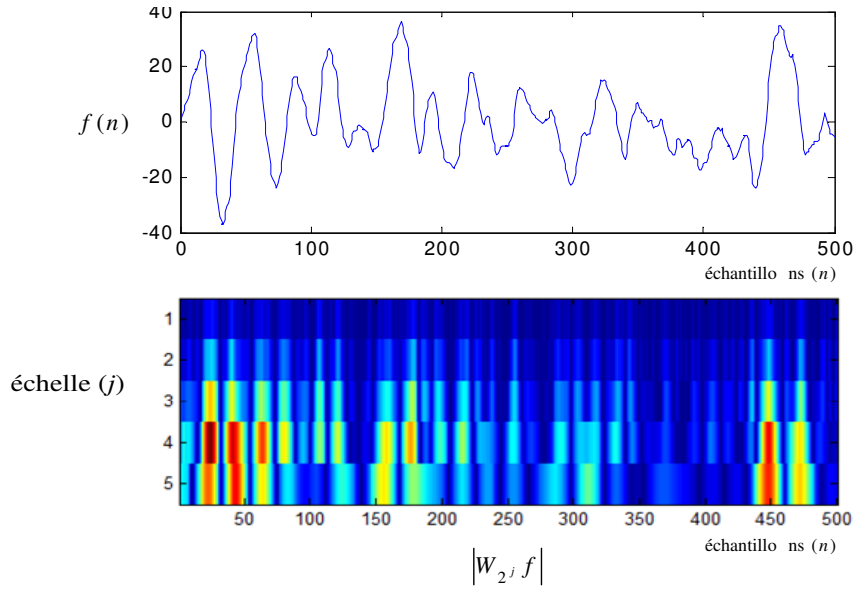


FIGURE 3.4: Réalisation d'un processus AR (No. 2) et sa transformée en ondelette.

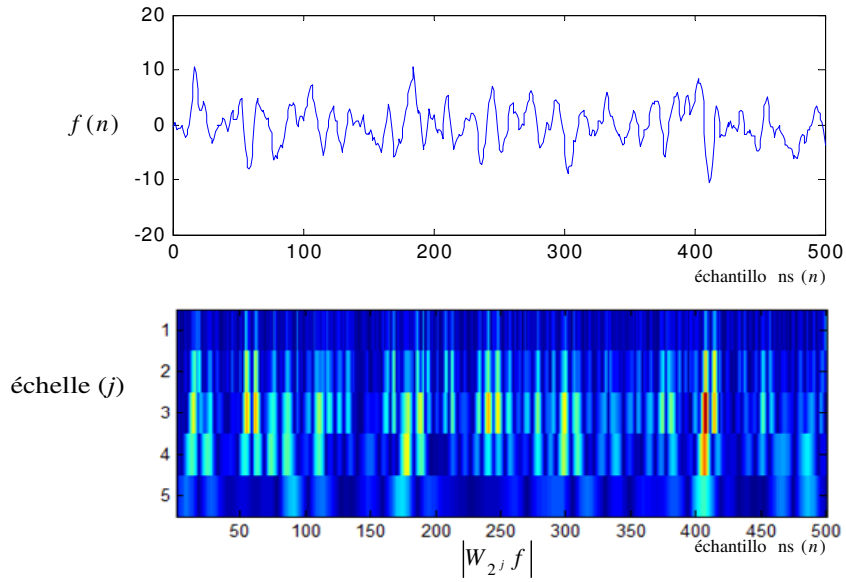


FIGURE 3.5: Réalisation d'un processus AR (No. 3) et sa transformée en ondelette.

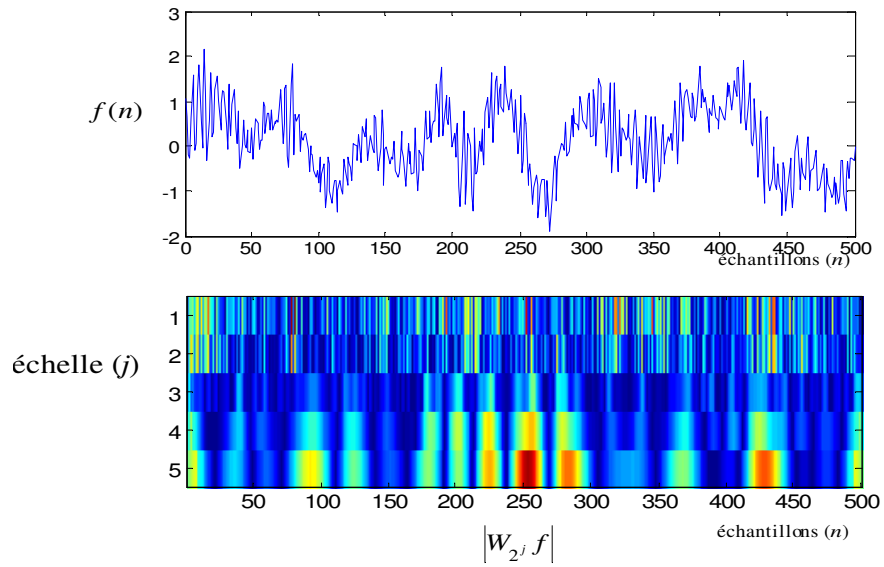


FIGURE 3.6: Réalisation d'un processus AR et sa transformée en ondelette.

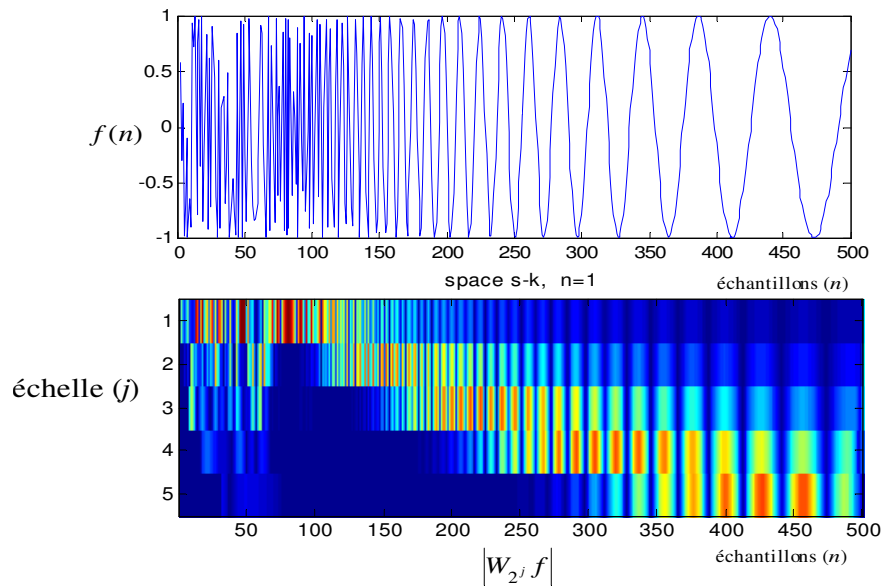


FIGURE 3.7: Courbe $\sin(a/x)$ et sa transformée en ondelette.

3.2.3 Mesure de la régularité locale

La régularité locale d'une fonction peut être analysée à l'aide des ondelettes compactes. Mallat et Hwang [MH92] ont proposé d'estimer les exposants de Lipschitz à l'aide d'une représentation fondée sur les maxima du module de la transformée en ondelettes (MMTO). Cette représentation considère les valeurs et le placement de maxima locaux du module de la transformée en ondelette dans l'espace d'échelles. Ainsi, ils estiment l'exposant de Lipschitz d'une singularité par l'analyse de la pente de sa chaîne de maxima au long des échelles à l'intérieur du cône d'influence (COI) (voir figure 3.8).

Les MMTO sont également utilisés dans l'analyse multifractale de signaux 1-D, 2-D et 3-D [Kes03]. Dans le contexte de l'analyse multifractale, d'autres techniques d'analyse fondées sur la transformée d'ondelettes sont utilisées. Notamment, la méthode fondée sur les *coefficients dominants* se distingue par un large cadre d'applications, puisqu'elle s'applique à toutes les fonctions uniformément höldériennes y compris à celles contenant des singularités oscillantes de type chirp [Jaf04, Las05].

Dans les calculs des MMTO, des erreurs et des ambiguïtés peuvent se produire au moment du traçage des chaînes des maxima dans l'espace d'échelles. La précision de l'estimation est affectée quand les singularités ne sont pas isolées, ce qui signifie que les COI de ces singularités ont un support commun. Hsung et al. [HLS99] proposent une approche plus simple mais également efficace pour l'estimation des exposants de Lipschitz. L'approche se sert du calcul de l'intégrale de modules de coefficients d'ondelettes à l'intérieure du COI. Ainsi ils proposent l'opérateur N , nommé somme de module de transformée en ondelettes (SMTO), de sorte que pour tout point x de la fonction f

$$N_s f(x) = \int_{|x-u| \leq Ks} |W_s f(u)| du. \quad (3.12)$$

où K est le support de l'ondelette mère. A partir de l'équation (3.4) on peut démontrer que

$$\begin{aligned} N_s f(x) &= \int_{|x-u| \leq Ks} B(s^\alpha + |x-u|^\alpha) du \\ &= 2B \left(K + \frac{K^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right) s^{\alpha+1} \leq B' s^{\alpha+1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

où B' est une constante. D'après l'équation (3.13), nous pouvons estimer l'exposant de Lipschitz α à partir de la pente de $\log(N_s f)$. Le principal avantage de cette approche par rapport à celle de Mallat est que le calcul de $N_s f$ est effectué sur des coefficients d'ondelettes localisées de manière régulière, alors que le traitement de maxima d'ondelettes s'effectue sur des points placés de manière irrégulière et parfois déterminées par des opérations ambiguës. Il est aussi proposé d'utiliser le rapport des $N_s f$ inter-échelles pour évaluer α à chaque échelle, sachant que

$$\frac{N_{2^{j+1}} f(x)}{N_{2^j} f(x)} = 2^{\alpha(x,j)+1}. \quad (3.14)$$

Dans le cas 2-D, Hsung et al. remarquent que l'orientation du gradient des coefficients d'ondelettes indique la direction de la variation maximum de la fonction. Ainsi, ils proposent de

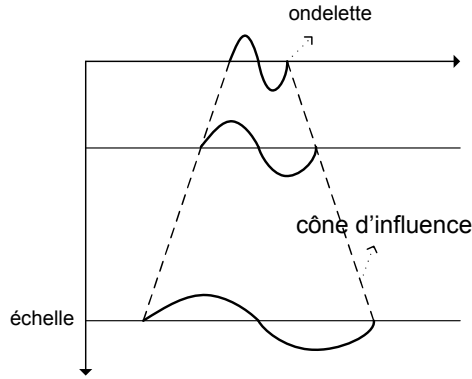


FIGURE 3.8: Cône d'influence, le support des ondelettes aux différentes échelles.

calculer l'exposant de Lipschitz considérant un CdI orienté dans cette direction qu'ils appellent CdI directionnelle (CdiD) (voir figure 3.9). Ils proposent donc de calculer la SMT0 comme suit ².

$$N_s f(x, y) = \frac{1}{Ks} \int_{(u,v) \in CdID_s(x,y)} M_s f(u, v) du dv \quad (3.15)$$

où

$$CdID_s(x, y) = \{(x, y) : (u - x)^2 + (v - y)^2 \leq Ks^2\} \text{ et } \frac{u - x}{v - y} = \tan(A_s(x, y)). \quad (3.16)$$

On peut remonter que la SMT0 suit le comportement asymptotique du module de la transformée en ondelettes $M_s f(x, y)$ comme suit

$$N_s f(x, y) \leq Ds^\alpha. \quad (3.17)$$

Pour implémenter l'intégrale (3.15) il est nécessaire d'effectuer une interpolation linéaire car les coefficients de la transformée ne sont pas nécessairement placés sur la direction indiquée par $A_s f$. Nous avons modifié de manière empirique la définition du CdI de sorte que celui-ci soit isotropique. Ainsi, nous proposons de considérer le cône d'influence en trois dimensions (3-D) (voir figure 3.10) pour le calcul de la somme des modules de la transformée en ondelettes (SMT0) comme suit

$$N_s f(x, y) = \frac{1}{(Ks)^2} \int_{(u,v) \in COI_s(x,y)} M_s f(u, v) du dv \quad (3.18)$$

où

$$COI_j(x, y) = \{(u, v) : |(u - x)| \leq Ks/2, |(v - y)| \leq Ks/2\} \quad (3.19)$$

La définition de $N_s f(x, y)$ utilisant la CdI en 3-D peut s'implémenter à l'aide de filtres de convolution ce qui réduit de manière significative le coût calculatoire par rapport à la version

2. Nous avons introduit le facteur de normalisation $1/Ks$ dans le calcul de $N_s f(x, y)$. Avec cette modification son comportement asymptotique ne vérifie plus $N_s f(x, y) \leq Ds^{\alpha+1}$ (voir équations (3.13) et (3.17)).

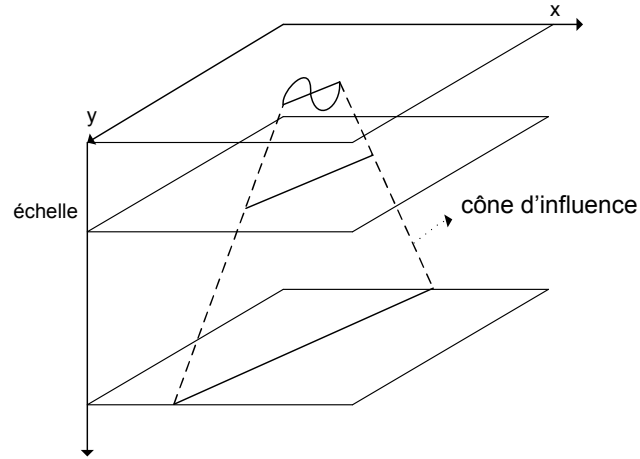


FIGURE 3.9: Cône d'influence directionnel, le support des ondelettes aux différentes échelles dans la direction $A_{s=2^j}(x, y)$.

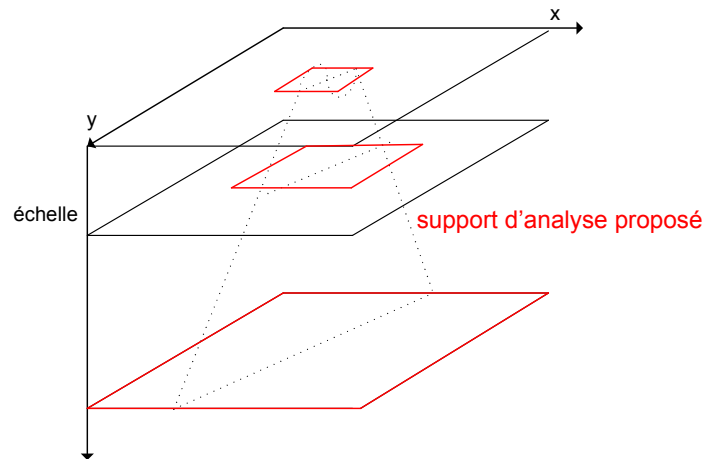


FIGURE 3.10: Support proposé pour le calcul de la somme de modules de transformée en ondelettes (SMT0).

utilisant la CdID qui est implémentée au moyen des interpolations linéaires. Les résultats des deux définitions fournissent des performances équivalentes.

Pour un calcul au niveau des échelles de α , nous pouvons également utiliser le rapport inter-échelle de la SMT0 en (x, y) à l'échelle $s = 2^j$ qui vérifie

$$\frac{N_{2^{j+1}}f(x, y)}{N_{2^j}f(x, y)} = 2^{\alpha(x, y, j)} \quad (3.20)$$

3.3 Approche de décomposition fondée sur la régularité locale

Nous proposons d'utiliser la régularité locale comme un outil d'analyse de la richesse spectrale de l'image analysée. Cette analyse vise à identifier les coefficients qui contribuent à la composante régulière (ou non texturée) d'une image et les coefficients qui contribuent à l'aspect stochastique ou oscillant de certaines régions d'une image. L'approche s'inspire de la méthode de débruitage proposée par Hsung et al. [HLS99]. Ils utilisent le rapport inter-échelle de $N_s f(x, y)$, afin d'identifier les coefficients d'ondelettes associées à la partie régulière de l'image, c'est-à-dire, ceux dont l'exposant estimé $\alpha(x, y, j)$ est supérieur à un seuil. Ensuite, ils effectuent une transformée inverse utilisant uniquement les coefficients sélectionnés afin d'obtenir une image reconstruite "débruitée".

Dans notre algorithme, nous utilisons les valeurs $\alpha(x, y, j)$ estimées pour effectuer une affectation initiale de chacun des coefficients $W_{2^j}^{1,2}f(x, y)$ à une des deux composantes :

- ceux avec $\alpha < 0$ à la composante texturées, et
- ceux avec $\alpha \geq 0$ à la composante régulière ou non texturée.

Ensuite nous effectuons 3 étapes additionnelles :

1) *Obtenir des régions segmentées correspondant aux parties de l'image caractérisées par un aspect non-texturé et un aspect texturé.*

Cette étape est fondée sur l'hypothèse que les points réguliers et irréguliers sont groupés et forment des régions. Cependant, il est possible que, à cause de la superposition de supports de différents points, il se produise des erreurs d'estimation dans certains points ou groupes de points (voir figure 3.11(b)). Nous trouvons dans chacune des sous-bandes $W_{2^j}^{1,2}f$, des ensembles de coefficients spatialement connexes assignés à la même composante et composés d'un nombre faible d'éléments. Nous proposons de fixer un seuil minimum au nombre d'éléments connexes d'un ensemble, donc qu'il ne peut pas exister des ensembles connexes de coefficients dont le nombre d'éléments soit inférieur au seuil fixé. Nous assignons à l'autre composante, les ensembles avec un nombre de coefficients inférieur à un seuil donné. Une approche alternative, et de coût calculatoire inférieur, consiste à mettre en oeuvre des opérateurs morphologiques de fermeture.

Des solutions plus élaborées à ce problème sont proposées dans les approches de débruitage de Malfait et al. et Pizurica et al. [MR97, PPLA02]. Dans ces algorithmes, des approches bayésiennes implémentées à l'aide de modèles de champs de Markov aléatoires sont utilisées pour classer les coefficients.

2) *Assigner à la composante texturée les coefficients qui contribuent aux contours de l'image.*

On remarque que, dans certains cas, les coefficients associés aux structures telles que les lignes, les contours et les points isolés, sont assignés à la composante texturée. Les modèles de textures ne sont pas adaptés à ces structures. En conséquence, leurs coefficients d'ondelettes doivent être détectés et assignés à la composante non-texturée.

Certaines de ces structures ont des coefficients d'ondelettes d'une grande amplitude dans la première sous-bandes de détails $W_{2^j}^{1,2}f, j = 1$ par rapport à leur voisinage. Afin de détecter la position (x, y) de ces coefficients, nous réalisons une recherche de maxima locaux en $N_{2^j}f, j = 1$. Ensuite tous les coefficients associés à ces positions sont assignés à la composante non-texturée.

3) *Assigner à la composante texturée les coefficients qui contribuent un comportement oscillant.*

Dans certain cas, les régions texturées présentent un comportement mixte au niveau de l'évolution de $M_{2^j}f(x, y)$ à travers les échelles (par exemple, le module du coefficient d'ondelettes croît dans la première échelle et après décroît dans les échelles suivantes). Dans de tels cas, la classification fondée sur le signe de α fournit une décomposition inachevée. Comme nous l'avons précisé dans la sous-section 3.2.2, les maxima du module d'ondelettes placés dans des échelles intermédiaires traduisent un comportement périodique du signal. Il est donc pertinent d'étiqueter ces coefficients comme appartenant à la composante texturée. Afin d'assigner les coefficients de ces régions à la composante texturée nous appliquons la règle suivante

$$W_{2^j}^{1,2}f(x, y) \in f_{non-text} \quad \text{ssi} \quad W_{2^{j+1}}^{1,2}f(x, y) \in f_{non-text} \quad (3.21)$$

L'implémentation de l'algorithme proposé est fondée sur la génération de masques binaires pour chaque sous bande $W_{2^j}^{1,2}f$ qui identifient les coefficients qui contribuent à la région régulière (non texturée).

L'algorithme peut se résumer comme suit.

Algorithme de décomposition :

Étape 1 : Calcul des coefficients d'ondelette et des SMT0

$\forall j$ où $1 \leq j < J$ calculer $W_{2^j}^{1,2}f(x, y)$ et $N_{2^j}f(x, y)$.

Étape 2 : Génération d'un masque binaire à partir du rapport des SMT0

$\forall j$ où $1 \leq j < J - 1$ générer un masque binaire $MB_j(x, y)$ comme suit :

$$MB_j(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{N_{2^{j+1}}f(x, y)}{N_{2^j}f(x, y)} = 2^{\alpha(x, y, j)} > 1 \\ 0 & \text{si } \frac{N_{2^{j+1}}f(x, y)}{N_{2^j}f(x, y)} = 2^{\alpha(x, y, j)} \leq 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Étape 3 : Élimination des régions de coefficients connexes de faible taille

Nous générons une image $L_j(x, y)$ de sorte que les éléments connexes égaux à '1' de $MB_j(x, y)$ ont la même étiquette³. Si un ensemble d'éléments connexes (éléments avec la même étiquette) est composé d'un nombre d'éléments inférieur à un seuil fixé, cet ensemble d'éléments est mis à '0' dans la masque $MB_j(x, y)$.

Ensuite nous générons une image $L_j(x, y)$ de sorte que les éléments connexes égaux à '0' de $MB_j(x, y)$ aient la même étiquette. Si un ensemble d'éléments connexes est composé d'un nombre d'éléments inférieur à un seuil fixé, cet ensemble d'éléments est mis à '1' dans le masque $MB_j(x, y)$.

Remarque : Cette étape peut être implémentée en utilisant des opérateurs morphologiques de fermeture. D'abord, l'opérateur est appliqué sur l'image $\overline{MB_j}(x, y)$ où la barre est l'opérateur "non" logique. Ensuite, l'opérateur est appliqué sur l'image binaire $MB_j(x, y)$. Des exemples des deux méthodes sont illustrés dans figure la 3.11.

Étape 4 : Affectation de contours à la composante non-texturée

Pour la détection des positions (x, y) des coefficients qui contribuent aux contours, nous réalisons une recherche sur $N_{2j}f(x, y)$, $j = 1$ des amplitudes dépassant un seuil à l'intérieur des fenêtres d'analyse. Le seuil est γ fois la valeur moyenne des amplitudes à l'intérieur de la fenêtre. La constante γ est choisie entre 1.5 et 3. Pour les positions (x, y) où le seuil est dépassé nous fixons $MB_j(x, y) = 1$.

Étape 5 : Affectation de régions à aspect périodique à la composante texturée.

Afin d'assigner les coefficients de ces régions à la composante texturée, nous appliquons la règle suivante

$$MB_j(x, y) = 1 \quad \text{ssi} \quad MB_{j+1}(x, y) = 1 \quad (3.23)$$

Étape 6 : Composante non texturée par TO inverse

La composante non texturée, $f(x, y)_{non-text}$, est obtenue par la transformée en ondelette inverse des coefficients sélectionnés dans le masque binaire.

$$f(x, y)_{non-text} = TO^{-1} \left\{ S_{2^{J-1}(x, y)} f, (MB_j(x, y) W_{2^j}^1 f(x, y))_{1 \leq j \leq J-1}, (MB_j(x, y) W_{2^j}^2 f(x, y))_{1 \leq j \leq J-1} \right\}, \quad (3.24)$$

où TO^{-1} désigne la transformée d'ondelette inverse.

Étape 7 : Composante texturée par différence

La composante texturée f_{text} , est obtenue par la différence entre l'image originale $f(x, y)$ et la composante non texturée.

$$f_{text}(x, y) = f(x, y) - f(x, y)_{non-text} \quad (3.25)$$

3. Pour une implémentation en Matlab, la fonction `bwlabel` peut être utilisée



(a) Image Originale.



(b) Masque binaire avant étape.



(c) Masque binaire après méthode par comptage (d) Masque binaire après l'opérateur de fermeture d'éléments connexes

FIGURE 3.11: Illustration de l'étape No.3 de l'algorithme sur le masque binaire de l'échelle $j = 1$. Barbara.



(a) Étape No.3 par comptage d'éléments connexes (b) Étape No.3 par opérateur de fermeture

FIGURE 3.12: Superposition de masques binaires de différentes échelles j . Barbara.

3.4 Étude comparative des méthodes de décomposition

Dans cette section, nous comparons l'approche proposée et une approche de décomposition fondée sur la variation totale (VT). L'algorithme de minimisation de la VT est celui proposé par Chambolle [Cha04].

Pour l'étape No.4 de l'algorithme proposé, la recherche de contours est effectuée à l'aide d'une fenêtre de taille 30×30 et la constante γ est fixée à 3. Nous avons testé deux variantes de l'approche proposée. Chaque variante utilise une méthode différente pour l'élimination des régions de coefficients connexes de faible taille (étape No.3) :

- Par comptage d'éléments connexes : correspond à la méthode expliquée dans l'étape No.3 de l'algorithme. Le nombre minimum d'éléments connexes (de 1's ou 0's) dans les masques binaires est fixé à 150.
- Par application de l'opérateur de fermeture : correspond à la méthode expliquée dans la remarque de l'étape No.3 de l'algorithme. L'élément structurant utilisé sur les masques binaires est un disque de rayon 4.

A titre illustratif nous allons tester également une version de l'algorithme sans effectuer l'étape No.3.

Les algorithmes ont été testés sur les images suivantes :

1. **Barbara**, 8 bpp, 512×512 . C'est l'image standard de la dame avec des rayures et la nappe au carrés.
2. **Maisons**, 8 bpp, 320×480 . Cette image fait partie de la base de données pour segmentation de Berkeley.

Les figures 3.13, 3.14 présentent les décompositions obtenues avec les deux variantes de l'approche proposée pour l'image Barbara. La figure 3.15 présente le résultat de l'approche

proposée sans effectuer l'étape No.3. Dans les trois exemples, nous observons dans la composante texturée des régions à fort contenu harmonique comme celles de la nappe, du pantalon, du foulard et du dossier de la chaise. Nous retrouvons aussi dans cette composante les textures à aspect aléatoire comme celles de faible intensité présente au niveau du sol. Dans la figure 3.20 nous observons également les régions à aspect aléatoire dans la composante texturée obtenue de l'image Maisons.

Les figures 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19 présentent les décompositions obtenues à l'aide de l'algorithme fondé sur la VT utilisant plusieurs valeurs pour le paramètre de pondération λ (voir équation 3.2). Nous observons que pour les valeurs les plus faibles de λ (figures 3.18 et 3.19) nous retrouvons certaines régions texturées dans la composante non-texturée comme celles correspondant à des parties de la nappe, du pantalon et du foulard. Pour la valeur la plus grande de λ (figure 3.16), pratiquement toutes les textures se retrouvent dans la composante texturée, cependant nous retrouvons des régions correspondant au reste de l'image dans cette composante. En général, l'approche proposée effectue des décompositions plus localisées sur les régions à aspect aléatoire et périodique que l'approche fondée sur la VT.

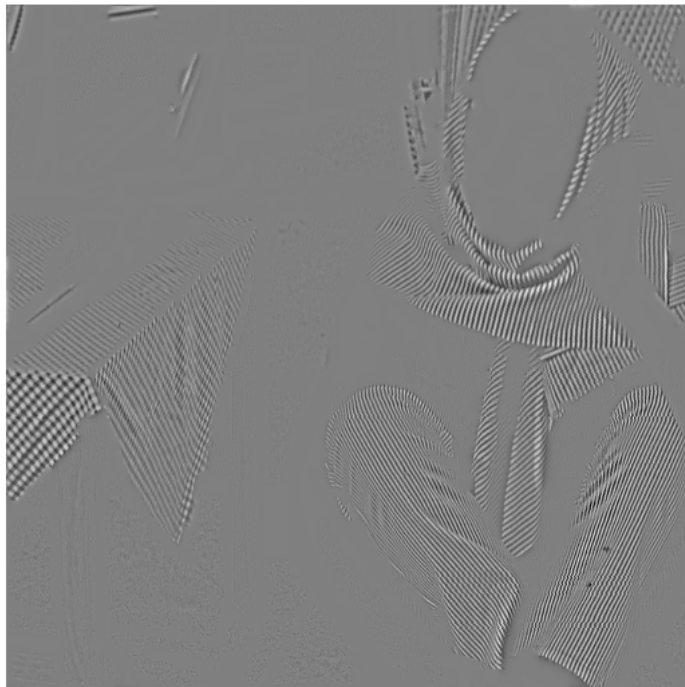
D'après la figure 3.13, quand la méthode de comptage d'éléments connexes est utilisée pour l'étape No.3 de l'algorithme, certains objets non-texturés tels que les livres et des éléments au niveau du visage (yeux et bouche) se retrouvent bien dans la composante non-texturée. Ces objets se retrouvent dans la composante texturée des autres variantes de l'approche (voir figures 3.14 et 3.15).

Dans la figure 3.12, on présente la superposition de masques de différentes échelles pour les deux variantes de l'approche. On observe que l'approche utilisant le comptage d'éléments pour l'étape No.3 (figure 3.12.a) présente plus de régions texturées isolées que l'approche utilisant l'opérateur de fermeture (figure 3.12.b). Ces régions sont utilisées dans l'algorithme de segmentation que nous proposons dans la section suivante.

Nous avons calculé le temps d'exécution des algorithmes dans un environnement Matlab/Windows, sur un ordinateur à processeur Intel Core 2 Duo T7250 @ 2GHz et 2GB de mémoire RAM. D'après le tableau 3.1, le temps de calcul de l'algorithme pour l'image Barbara sans compter l'étape No.3 est de 2.04s. L'étape No. 3 consomme 0.30s ou 27.4s selon on l'utilisation de l'opérateur de fermeture ou la méthode par comptage d'éléments. Le temps d'exécution de l'algorithme fondé sur la variation totale se situe entre ses deux variantes avec un temps compris entre 14.88s et 16.35s selon le paramètre λ choisi. Les rapports des temps d'exécution de l'algorithme proposé pour l'image Barbara et l'image Maisons sont proches ou inférieurs aux rapports des nombres de pixels de deux images, sauf pour l'étape de comptage par éléments.



(a) Composante non-texturée

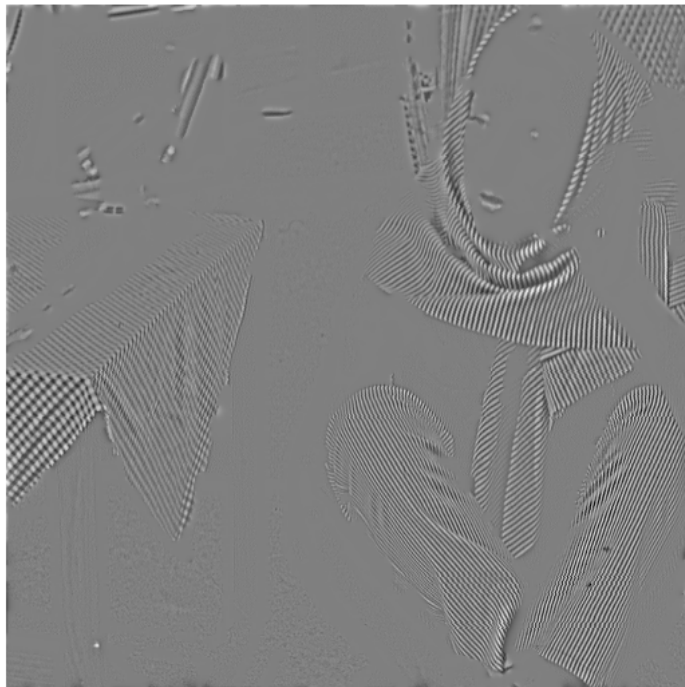


(b) Composante texturée

FIGURE 3.13: Exemple de décomposition : Approche proposée utilisant le comptage d'éléments connexes dans l'étape No.3. Barbara



(a) Composante non-texturée

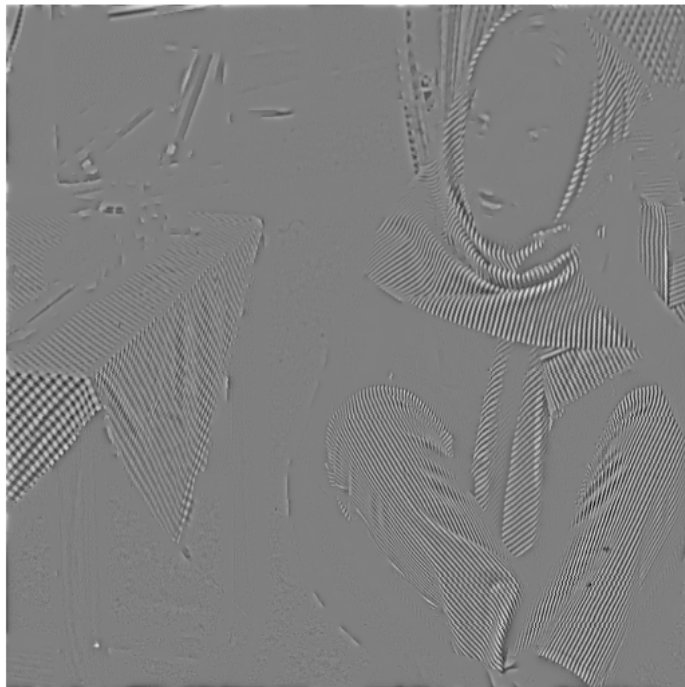


(b) Composante texturée

FIGURE 3.14: Exemple de décomposition : Approche proposée utilisant un opérateur de fermeture dans l'étape No.3. Barbara



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.15: Exemple de décomposition : Approche proposée sans effectuer l'étape No.3. Barbara



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.16: Exemple de décomposition : Approche fondée sur la variation totale. $\lambda = 0.083$. Barbara



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.17: Exemple de décomposition : Approche fondée sur la variation totale. $\lambda = 0.0625$. Barbara



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.18: Exemple de décomposition : Approche fondée sur la variation totale. $\lambda = 0.05$. Barbara



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.19: Exemple de décomposition : Approche fondée sur la variation totale. $\lambda = 0,042$. Barbara



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.20: Exemple de décomposition : Approche proposée utilisant le comptage d'éléments connexes dans l'étape No.3. Maisons.



(a) Composante non-texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.21: Exemple de décomposition : Approche fondée sur la variation totale. $\lambda = 0.042$. Barbara

Approche	Barbara (512x512)	Maisons (320x480)
Approche proposée - comptage d'éléments connexes	29.4440s	11.6470s
Approche proposée - opérateur de fermeture	2.3560s	1.5910s
Approche proposée - sans étape No.3	2.0430s	1.3110s
Variation Totale ($\lambda = 0,042$)	14.8840s	8.0190s
Variation Totale ($\lambda = 0,05$)	15.3510s	-
Variation Totale ($\lambda = 0,0625$)	15.1560s	-
Variation Totale ($\lambda = 0,0833$)	16.3450s	-

TABLE 3.1: Temps de calcul des algorithmes de décomposition.

3.5 Segmentation de la composante texturée

Afin d'effectuer la modélisation, la composante texturée doit être segmentée en plusieurs régions stationnaires qui seront modélisées séparément.

A partir des masques binaires obtenus dans l'algorithme de décomposition, nous générons un masque global qui définit les points de l'image où la composante texturée est détectée (voir figure 3.12(a)). Les points connexes du masque définissent des régions. Ces régions peuvent ne pas être stationnaires.

Nous proposons un algorithme de segmentation opérant dans chacune des régions définies par le masque global.

Pour chaque point d'une région, nous obtenons trois attributs, qui correspondent aux valeurs moyennes des modules des coefficients de la TO à l'intérieur des fenêtres d'analyse. Les trois attributs sont calculés dans les sous-bandes représentant les détails horizontaux et verticaux $W_{2j}^{1,2}f$, $j = 1$ et la sous-bande d'approximation $S_{2j}f$. Nous avons observé que ces attributs captent bien le changement de statistiques de différentes textures dans une région.

Ces attributs sont alors utilisés en tant que niveaux d'intensité. Un seuillage [CW97] est réalisé sur les images d'intensités issues des attributs. Ensuite, nous réalisons un produit cartésien des images seuillées des trois attributs afin d'obtenir la segmentation de la région.

3.6 Codage de composantes

Les régions texturées obtenues lors de l'étape de segmentation sont analysées afin d'obtenir leur représentation dans les modèles de Wold [FMP93]. Pour les composantes aléatoires nous utilisons le modèle autorégressif (AR) :

$$w(n, m) = \sum_{(0,0) < (k,l)} b(k, l)w(n - k, m - l) + u(n, m), \quad (3.26)$$

où $b(k, l)$ sont les paramètres du modèle et $u(n, m)$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Pour les composantes périodiques nous utilisons le modèle sinusoïdal :

$$h(n, m) = \sum_{p=1}^P (C_p \cos 2\pi(n\omega_p + m\nu_p) + D_p \sin 2\pi(n\omega_p + m\nu_p)), \quad (3.27)$$

où (ω_p, ν_p) sont les fréquences spatiales de la p -ième harmonique.

Pour le codage de ces composantes, chacun des paramètres des modèles AR et sinusoïdal est tronqué à un nombre en virgule flottante sur 8 bits. Pour les modèles AR l'affectation des bits pour le format à virgule flottante sont (1,6,1) pour la moyenne, (0,7,1) pour la variance et (1,2,5) pour les paramètres AR où les coefficients dans les parenthèses indiquent le signe, l'exposant et la mantisse. Pour les paramètres C_p et D_p du modèle sinusoïdale nous utilisons également le format (1,2,5). Pour les fréquences (ω_p, ν_p) , nous utilisons un codage à point fixe. Un codage optimisé pour les paramètres de Wold est proposé dans [SFP96]. Dans cette approche, le modèle AR est codé en utilisant les coefficients de réflexion. Ces coefficients sont codés à l'aide d'un quantificateur adapté à la distribution d'amplitude et fixant 8 niveaux de décision non uniformes. Un quantificateur similaire est utilisé pour les paramètres C_p et D_p .

La localisation des fréquences est codée de manière entropique à l'aide de codes arithmétiques adaptés.

Le codage du masque binaire global peut être effectué à un taux très faible à l'aide de l'approche proposée dans [CV96].

Pour le codage de composante non-texturées, nous avons utilisé une approche fondée sur les ondelettes. Nous avons utilisé l'algorithme SPIHT proposé par Said et Pearlman [SP96] qui est une version améliorée de l'algorithme EZW de Shapiro [Sha93].

La définition d'une stratégie optimale pour l'allocation de bits est en perspective. Pour le codage hybride utilisant les ondelettes et les paquets d'ondelette/cosinus locaux, Meyer et al. [GAC02] proposent des stratégies fondées sur l'abondance ou pas de régions texturées dans l'image.

3.7 Exemples de représentation et codage hybrides

Dans les images 3.22 et 3.24 nous présentons des exemples de décomposition et segmentation utilisant l'image Barbara et l'image Maisons. Les images 3.23(b) et 3.25(b) présentent une représentation hybride des images. Les modèles issus de la décomposition de Wold (modèle AR et modèle harmonique) sont utilisés pour synthétiser des textures. Dans ces synthèses, nous n'avons pas limité le nombre de composantes utilisées ni la précision des paramètres.

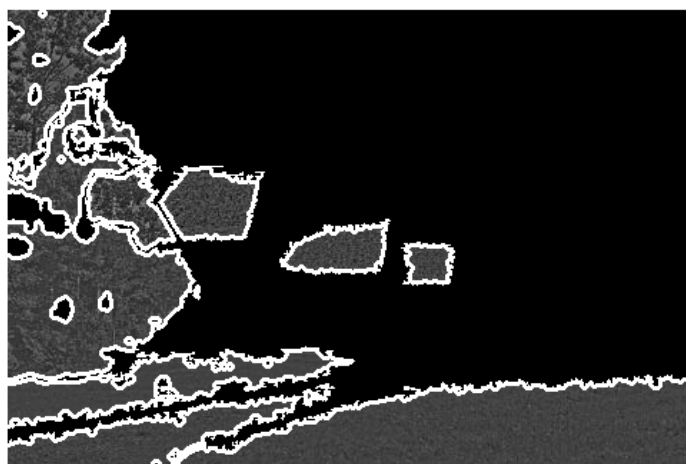
Nous avons effectué la compression de l'image Barbara en utilisant une approche fondée uniquement sur les ondelettes et aussi l'approche hybride proposée (ondelettes + Wold). La figure 3.26(a) présente l'image compressée à l'aide de l'algorithme SPIHT (fondée sur les ondelettes) à un taux de 0.2 bpp. Dans la figure 3.26(b) nous avons effectué une représentation hybride utilisant l'algorithme SPIHT pour la composante non texturée et les modèles de Wold pour les textures avec un taux global de 0.2 bpp. Le budget de bits a été partagée de sorte que la composante non-texturée et la composante texturée utilisent respectivement $3/4$ et $1/4$ du nombre total de bits. La composante non-texturée a été codée à un taux de 0.1523 bpp. Pour la composante texturée, nous avons utilisée des modèles 2D AR(4,4) pour les régions contenant un aspect aléatoire. Pour les régions ayant un aspect périodique, nous avons utilisé un nombre de composantes de manière à ne pas dépasser 0.15 bpp dans chacune des régions. Le codage des paramètres est effectué comme expliqué dans la section 3.6.

Dans l'image compressée avec l'approche hybride, les régions texturées ont un aspect moins dégradé que celui de l'image compressée uniquement avec l'approche fondée sur les ondelettes. On peut observer cette différence notamment au niveau des régions à aspect périodique (nappe, pantalon, foulard et dossier de la chaise). Dans l'image codée uniquement avec les ondelettes (figure 3.26(a)), on peut noter aussi l'absence des textures à aspect aléatoire comme celles de faible intensité présentes au niveau du sol et qu'on retrouve synthétisées dans l'image hybride (figure 3.26(b)). Dans l'approche hybride, les textures synthétisées diffèrent numériquement de l'image originale même si elles présentent une impression visuelle similaire. Ainsi, les rapports signal maximal sur bruit ⁴ (PSNR) des images reconstruites par l'approche d'ondelettes et par l'approche "ondelette + Wold" sont 26.16dB et 25.94dB respectivement.

4. PSNR : peak signal-to-noise ratio



(a) Composante non texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.22: Décomposition et segmentation de l'image. Maisons.



(a) Image originale



(b) Image reconstruite

FIGURE 3.23: Image originale et image reconstruite à l'aide des modèles de Wold (sans compression). Maisons.



(a) Composante non texturée



(b) Composante texturée

FIGURE 3.24: Décomposition et segmentation de l'image Barbara.



(a) Image originale



(b) Image reconstruite

FIGURE 3.25: Image originale et image reconstruites à l'aide des modèles de Wold (sans compression). Barbara.



(a) Transformée en ondelette. PSNR = 26.19dB



(b) Wold + ondelette. PSNR = 25.94dB

FIGURE 3.26: Images reconstruites à 0.2 bpp.

3.8 Conclusions

Dans ce chapitre nous avons abordé la représentation hybride d'images combinant la représentation en ondelettes et les modèles issus de la décomposition de Wold pour la représentation de textures.

Nous présentons une approche pour la décomposition d'une image en une composante texturée et une composante non-texturée. La détection de la composante texturée est fondée sur la régularité ponctuelle et s'effectue dans le domaine des ondelettes. Nous proposons un support alternatif pour l'estimation de la régularité locale par la méthode proposée par Hsung [HLS99] et qui présente un coût calculatoire plus faible pour des performances similaires. La régularité locale est utilisée comme un outil pour la détection de coefficients d'ondelettes associés aux textures d'aspect stochastique ainsi que celles à aspect périodique. Cette détection est améliorée par des étapes supplémentaires qui prennent en compte les voisinage de coefficients afin d'obtenir des régions de coefficients connexes et le profil inter-échelle de l'évolution des coefficients afin de détecter les régions à aspect périodique ou oscillatoire.

L'étude comparative que nous menons avec une approche fondée sur la variation totale met en évidence la pertinence de notre approche dans le cadre du codage hybride. Les résultats montrent que notre approche localise la décomposition sur les régions texturées à aspect stochastique et périodique. Afin de définir les différentes régions texturées à modéliser, la composante texturée est segmentée à l'aide d'un algorithme opérant sur des masques binaires définis lors de la décomposition.

Des exemple de codage hybride montrent l'intérêt de représenter les régions texturées à l'aide des approches paramétriques tels que les modèles de Wold notamment pour les taux de compression les plus importantes.

Conclusions et Perspectives

Dans cette thèse, nous traitons plusieurs approches concernant la modélisation et les techniques d'estimation dans le contexte de la représentation de processus stochastiques fondée sur la décomposition de Wold.

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cadre de processus stationnaires et nous développons de nouveaux modèles stochastiques paramétriques de type MA, AR et ARMA. Nous avons proposé des algorithmes d'estimation de paramètres fondés sur la factorisation spectrale de la densité spectrale de puissance d'un processus complètement non-déterministe, en combinaison avec la factorisation théorique d'une fonction dans l'espace de Hardy H^1 en facteurs intérieur et extérieur, pour donner une méthode générale d'approximation d'un tel processus par un modèle MA.

Cette approche est particularisée à deux niveaux :

- dans le cadre des applications en communications numériques, on utilisera ce principe pour estimer des modèles MA, AR et ARMA mono-dimensionnels, simulant un canal de propagation de type Rayleigh [MTGN08, MTGN10] ;
- dans le cadre 2-D de la modélisation des textures, on utilise la même approche via des modèles MA/AR quart de plan pour simultanément donner une approximation de la composante aléatoire et séparer cette composante en composantes harmonique et évanescence [MTN07b, MTN07a].

Dans la dernière partie les approches de type Wold sont combinées avec les représentations par ondelettes [MTN09] afin de dépasser le contexte stationnaire qui est imposé par le cadre de la modélisation stochastique standard. Dans cette direction, nous avons proposé un modèle hybride combinant les deux types de représentation, ainsi qu'une approche de décomposition/segmentation fondée sur la régularité locale qui permet de détecter les composantes du modèle.

Du point de vue des perspectives, on peut distinguer quelques développements possibles à court terme, ainsi qu'à long terme. En ce qui concerne le court terme, le problème général de l'identification des composantes Wold reste toujours sujet aux nécessités des différentes applications, d'où l'intérêt d'élargir la palette de méthodes de décomposition et de rendre plus souple le choix des parties dans la décomposition.

Toujours dans cette optique mais concernant l'approche de décomposition texture/non-texture, l'algorithme proposé dans le dernier chapitre peut être amélioré du point de vue de la robustesse, des principes alternatifs pouvant être considérés dans les étapes de détection. Des améliorations sont également envisageables vis-à-vis du codage des paramètres dans la représentation hybride Wold-ondelettes, et des études comparatives pour identifier les champs d'application envisageables pour ce type d'approche.

Quelques perspectives à plus long terme se dégagent du fait que les résultats obtenus concernant la modélisation et l'estimation des paramètres font appel aux résultats mathématiques les plus récents dans la théorie multidimensionnelle des opérateurs et des fonctions analytiques. Comme ces extensions multidimensionnelles sont encore loin de la richesse théorique du cas 1D, quelques-unes des perspectives des approches de modélisation sont, sous plusieurs angles, tributaires des futurs développements de ces branches des mathématiques.

Ainsi, concernant les processus déterministes à densité continue mais non log-intégrable, il n'existe pas à ce jour de représentation théorique explicite. Une étude spectrale générale de ces processus dans le cas réel continu est faite dans [HL62] à l'aide des mesures de Cauchy, mais ce modèle spectral ne produit pas de représentation spatiale paramétrique. Les futures réponses à ce problème apporteront sans doute des solutions beaucoup plus adaptées à la modélisation de tels processus déterministes, en particulier les processus à bande limitée comme les canaux de Rayleigh.

Une autre perspective tributaire des futurs développements de l'analyse multivariable est le passage du modèle quart de plan au modèle demi-plan dans le problème de la factorisation spectrale. Ceci reviendrait à définir un nouveau concept de fonction extérieure dans des espaces de fonctions qui ne soient plus analytiques et qui n'ont pas suscité jusqu'à présent un intérêt mathématique suffisant pour construire une théorie unitaire, bien qu'un tel concept fût suggéré depuis les années '50 dans [HL58].

Les modèles hybrides Wold-ondelettes ont été jusqu'à présent peu étudiés et semblent apporter certains bénéfices dans la représentation des contenus mixtes. Cependant ce contexte manque aussi d'un cadre théorique unitaire, et ceci est dû principalement à la représentation canonique de Kolmogorov qui impose la base standard trigonométrique dans la description de la partie harmonique. Une adaptation possible de ce contexte théorique au cadre des ondelettes supposerait donc de considérer des alternatives à l'isomorphisme de Kolmogorov, peut-être relatives à des bases d'ondelettes, et donc de revoir l'ensemble de la théorie (extensions du théorème de Szegő etc.) dans ce nouveau cadre.

Annexes

Annexe A

Glossaire

Opérateurs normaux, isométriques et unitaires :

a) Un opérateur N dans $B(H)$ (les opérateurs dans H) est appelé normal si $NN^* = N^*N$, où l'étoile désigne l'opérateur adjoint.

b) Un opérateur V est une isométrie si $\|Vx\| = \|x\|$ pour tout x dans H , ou de manière équivalente, si $\langle Vx, Vy \rangle = \langle x, y \rangle$ quels que soient x et y dans H .

c) Un opérateur U est unitaire si U et U^* sont simultanément des isométries ou de manière équivalente, si $U^*U = UU^* = 1_H$.

Vecteur *-cyclique :

Un vecteur x_θ dans H est *-cyclique (étoile-cyclique) pour un opérateur A si H est l'espace réduisant le plus petit pour A contenant x_θ . Autrement dit x_θ est un vecteur *-cyclique pour A si et seulement si :

$$H = cl \{Tx_\theta : T \in C^*(A)\} \quad (\text{A.1})$$

où $cl \{ \}$ est la fermeture et $C^*(A)$ est la C*-algèbre générée par A .

Soit $N = (N_1, \dots, N_n) \in B(H)$ une famille commutative d'opérateurs normaux et $x \in H$. On dit que x_θ est *-cyclique si

$$H = \bigvee_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} U^\alpha x_\theta \quad (\text{A.2})$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $U^\alpha \equiv U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \dots U_n^{\alpha_n}$ et où $\bigvee$ désigne la fermeture de la combinaison linéaire.

Annexe B

Ergodicité

Soit (Ω, A, P) un espace de probabilité, avec P une mesure de probabilité sur la σ -algèbre A . On note

$$E(x) = \int_{\Omega} x(\omega) dP(\omega). \quad (\text{B.1})$$

la moyenne de la variable x et $L^1(\Omega)$ l'espace de Banach des variables aléatoires x intégrables sur Ω . On considère aussi l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$ des variables aléatoires de carré sommable sur Ω , avec le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = E(x\bar{y}) = \int_{\Omega} x(\omega)\bar{y}(\omega) dP(\omega). \quad (\text{B.2})$$

et on note $L_0^2(\Omega)$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ des variables de moyenne nulle.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires. On considère les suites de fonctions dans Ω :

$$E_N(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_n \quad (\text{B.3})$$

et

$$C_{N,p}(x) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x_{n+p} \bar{x}_n. \quad (\text{B.4})$$

Définition B.0.1. a) Un processus aléatoire $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $L^1(\Omega)$ est dit **ergodique en moyenne** si $E(x_n)$ ne dépend pas de n et en plus

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N(x) = E(x_0) \quad (p.p. \quad \omega \in \Omega). \quad (\text{B.5})$$

b) Un processus aléatoire stationnaire $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dans $L_0^2(\Omega)$ est dit **ergodique d'ordre 2 (ou en covariance)** si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_{N,p}(x) = \langle x_p, x_0 \rangle. \quad (\text{B.6})$$

Les quantités $E_N(x)$ et $C_{N,p}(x)$ définies dans (B.3) (B.4) représentent les moyennes et les covariances

Quand nous considérons les modèles théoriques MA et AR du processus stationnaire x :

$$x_n = \sum_m b_k e_{m-k}, \quad (\text{MA})$$

$$x_n = \sum_m a_k x_{m-k} + e_n, \quad (\text{AR})$$

ces modèles théoriques sont valides pour tous les points ou réalisations ω . Sous l'hypothèse d'ergodicité, les covariances spatiales calculées à partir d'une réalisation caractérisent toute réalisation du processus.

Annexe C

Sous-Espaces invariants et réduisants à un opérateur

Dans la suite nous considérons une représentation matricielle d'un opérateur.

Soit l'opérateur $A : H \mapsto K$, $H = H_1 \oplus H_2$ et $K = K_1 \oplus K_2$ où $\oplus$ désigne la somme orthogonale¹.

On désigne $A_{ij} : H_j \mapsto K_i$, c'est-à-dire :

$$A_{ij} = P_{K_i} A|_{H_j} \quad (\text{C.1})$$

où P_{K_i} et $A|_{H_j}$ désignent le projecteur orthogonal de K_i et la restriction de A sur H_j respectivement.

Donc, soit

$$\begin{aligned} x &= x_1 \oplus x_2 \\ y &= y_1 \oplus y_2 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

où $x_j \in H_j$ et $y_i \in K_i$ et $y_i = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2$. Nous pouvons écrire $y = Ax$ comme suit :

$$(y_1 \oplus y_2) = A(x_1 \oplus x_2) \quad (\text{C.3})$$

qui peut s'exprimer matriciellement comme suit :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Maintenant considérons l'opérateur $T : H \mapsto H$. Soit $H_1 \subset H$ un sous-espace fermé de H et H_2 l'orthogonal de H_1 , $(H \ominus H_1)$. Nous pouvons représenter l'opérateur T comme suit

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

où

$$T_{ij} = P_{H_i} T|_{H_j} \quad (\text{C.6})$$

Définition C.0.2. *Le sous-espace H_1 est **invariant** pour T si $T(H_1) \subset H_1$.*

1. Pour les espaces vectorielles U, V et W , $U = V \oplus W \Leftrightarrow (U = V + W) \wedge (U \cap W = 0)$.

Si H_1 est invariant à T , alors $T_{21} = 0$ et

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Définition C.0.3. *Le sous-espace H_1 est **réductant** pour T si H_1 est invariant pour T et T^* .*

Si H_1 est invariant pour T , alors $T_{21} = 0$. Si H_1 est invariant pour T^* , alors $T_{12}^* = 0$ ($T_{12} = 0$). On peut donc représenter l'opérateur T comme suit

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

On remarque que, si H_1 est un sous-espace invariant à un opérateur T dans $B(H)$, alors le sous-espace $H_2 = H \ominus H_1$ (l'orthogonal de H_1), est invariant à T^* . Par conséquent H_1 est réductant à T si et seulement si H_1 et $H \ominus H_1$ sont simultanément invariants à T .

Annexe D

Mesures

Soit Ω un ensemble et X la σ -algèbre¹ sur Ω . Alors, une mesure μ est une fonction dont le domaine est X et le codomaine est $[-\infty, \infty]$. Les propriétés suivantes doivent être vérifiées :

1. L'ensemble vide a une mesure nulle : $\mu(\emptyset) = 0$,
2. La mesure est σ -additive : si $E_1, E_2, \dots$ sont des ensembles appartenant à X , en quantité dénombrable et deux à deux disjoints, et si E est leur réunion, alors la mesure $\mu(E)$ est égale à la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.

Lorsque μ est une mesure sur la σ -algèbre X , un élément de X est dit μ -mesurable, ou plus simplement mesurable. Le couple (Ω, X) et le triplet (Ω, X, μ) sont appelés espace mesurable et espace mesuré respectivement.

Exemples de mesures :

- *La mesure de Lebesgue* : Soit $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ l'espace mesurable $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée σ sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes :
 1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in B(\mathbb{R}), \sigma(a + A) = \sigma(A)$ (invariance par translation).
 2. $\sigma([0; 1]) = 1$. Cette mesure est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut montrer qu'elle coïncide avec la notion de longueur sur les intervalles, c'est-à-dire que la mesure de Lebesgue d'un intervalle est égale à la longueur de cet intervalle.
- *La mesure de Haar* : La mesure de Haar pour un groupe topologique localement compact est une généralisation de la mesure de Lebesgue.

D.1 Mesures absolument continues et mesures singulières

Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur un espace mesuré. On dit que μ_2 est *absolument continue* par rapport à μ_1 si et seulement si pour tout ensemble mesurable A ,

$$\mu_1(A) = 0 \Rightarrow \mu_2(A) = 0, \quad (\text{D.1})$$

ce que l'on note $\mu_2 \ll \mu_1$.

1. Une tribu ou σ -algèbre sur un ensemble Ω est un ensemble de parties de Ω contenant la partie vide, stable par complémentarité et par union dénombrable.

D'après le théorème de Radon-Nikodym, μ_2 est absolument continue par rapport à μ_1 si et seulement si

$$d\mu_2 = f d\mu_1 \quad (\text{D.2})$$

où f est une fonction non-négative dans $L^1(d\mu_1)$. La fonction f est appelée densité ou dérivé de la mesure μ_2 par rapport à la mesure μ_1 .

Deux mesures μ_1 et μ_2 sont *singulières* s'il existe deux ensembles disjoints B_1 et B_2 dans X dont l'union est Ω tel que, si μ_1 est zéro dans tous les sous-ensembles mesurables de B_2 alors μ_2 est zéro dans tous les sous-ensembles mesurables de B_1 . Ce que l'on note $\mu \perp \nu$. De plus,

$$u_j(A) = u_j(A \cap B_j), \quad j = 1, 2, \quad (\text{D.3})$$

pour tout ensemble A .

D.2 Théorème de décomposition de Lebesgue

Le théorème généralisé de Lebesgue exprime que : soit μ_1 et μ_2 deux mesures finies, il existe deux mesures μ_a et μ_s telles que

- $\mu_1 = \mu_a + \mu_s$
- $\mu_a \ll \mu_2$ (μ_a est absolument continue par rapport à μ_2)
- $\mu_s \perp \mu_2$ (μ_s et μ_2 sont singulières).

Alors, on peut aussi écrire

$$d\mu_1 = f d\mu_2 + d\mu_s \quad (\text{D.4})$$

où $f \in L^1(d\mu_2)$.

Bibliographie

- [AABFC05] J.-F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle. Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component. *J. Math. Imaging Vis.*, 22(1) :71–88, 2005.
- [AM04] J.-F. Aujol and B. Matei. Structure and texture compression. *Rapport de recherche. Inria, Sophia Antipolis*, Jan. 2004.
- [BB05a] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Trans. Commun.*, 4(4), Jul. 2005.
- [BB05b] K.E. Baddour and N.C. Beaulieu. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Communications*, 4(4) :1650–1662, 2005.
- [Bea88a] N. C. Beaulieu. On the performance of digital vectors with dependent samples. *IEEE Trans. Commun.*, 36(11) :1248–1254, Nov. 1988.
- [Bea88b] B. Beauzamy. *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*. North-Holland Mathematical Library, Elsevier Science Publishers, 1988.
- [Bro66] P. Brodatz. *Textures : A photographic Album for artist and designers*. Dover, New York, 1966.
- [CD99a] E. Candès and D Donoho. Ridgelets : the key to high-dimensional intermittency ? *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 1999.
- [CD99b] M. L. Comer and E. J. Delp. Segmentation of textured images using a multiresolution gaussian autoregressive model. *IEEE Transaction in Image Processing*, 8(3) :408–420, 1999.
- [Cha04] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2) :89–97, 2004.
- [CK93] T. Chang and C.C.J. Kuo. Texture analysis and classification with tree-structured wavelet transform. *IEEE Transacion on Image Processing*, 2(4) :429–441, October 1993.
- [Cla68] R. H. Clarke. A statistical theory of mobile-radio reception. *Bell Syst. Tech. J.*, 47(6), 1968.

- [CV96] K. Culik and V. Valenta. Finite automata based compression of bi-level images. *Data Compression Conference*, page 280, 1996.
- [CW97] C.-C. Chang and L.-L. Wang. A fast multilevel thresholding method based on lowpass and highpass filtering. *Pattern Recognition Letters*, 18(14) :1469–1478, 1997.
- [DBC93] P. Dent, G. E. Bottomley, and T. Croft. Jakes' fading model revisited. *Electron. Lett.*, 29(3), Jun. 1993.
- [DK98] K. Debure and T. Kubato. Autoregressive texture segmentation and synthesis for wavelet image compression. *Proceeding of Image and Multidimensional Digital Signal Processing, Alpbach, Austria*, pages 131–134, 1998.
- [DPH93] J. R. Deller, J. G. Proakis, and J. H. Hansen. *Discrete Time Processing of Speech Signals*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.
- [DS01] F. Hlawatsch D. Schafhuber, G. Matz. Simulation of wideband mobile radio channels using subsampled arma models and multistage interpolation. *Actes de IEEE Statistical Signal Processing 2001 (SSP'01), Singapore*, 48(7) :571–574, Aug. 2001.
- [Dur59] J. Durbin. Efficient estimation of parameters in moving average models. *Biometrika*, 46 :306–316, 1959.
- [Dur70] P.L. Duren. *Theory of Hp spaces*. Academic Press, 1970.
- [FF98] J. M. Francos and B. Friedlander. Parameter estimation of two-dimensional moving average random fields. *IEEE Transacion on Signal Processing*, 46 :2157–2165, Aout 1998.
- [FMP93] J.M. Francos, A.Z. Meiri, and B. Porat. A unified texture model based on a 2-d wold like decomposition. *IEEE Transactions in Signal Processing*, 41 :2665–2678, 1993.
- [FNW96] J. M. Francos, A. Narasimhan, and J. W. Woods. Maximum-likelihood parameter estimation of the harmonic, evanescent, and purely indeterministic components of discrete homogeneous random fields. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(3) :916–930, 1996.
- [GAC02] F. G. Meyer F. G., A. Averbuch, and R. Coifman. Multilayered image representation : application to image compression. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(9) :1072–1080, 2002.
- [Gag83] A. Gagalowicz. *Vers un modèle de textures*. Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, France, 1983.

- [GBI05] L. Ghouti, A. Bouridane, and M. K. Ibrahim. Image compression using texture modeling. In *ISCAS (3)*, pages 2313–2316, 2005.
- [GGN08] J. Grolleau, E. Grivel, and M. Najim. Two ways to simulate a rayleigh fading channel based on a stochastic sinusoidal model. *IEEE Signal Processing Letters*, 15 :107–110, 2008.
- [GHG83] C. F. Van Loan G. H. Golup. *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, 1983.
- [Har81] R. M. Haralick. *Image texture analysis*. Plenum Press, New York, 1981.
- [Hay02] S. Haykin. *Adaptive filter theory*. Prentice Hall, 2002.
- [HG96] T. E. Hall and G. B. Giannakis. Image modeling using inverse filtering criteria with application to textures. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6) :938–949, 1996.
- [HL58] H. Helson and D. Lowdenslager. Prediction theory and fourier series in several variables. *Acta Mathematica*, 99 :165–202, 1958.
- [HL62] H. Helson and D. Lowdenslager. Prediction theory and fourier series in several variables. *Acta Mathematica*, 106 :175–213, 1962.
- [HLS99] T.-C. Hsung, D. Lun, and W.-C. Siu. Denoising by singularity detection. *IEEE Transaction in Signal Processing*, 47(11) :3139–3144, 1999.
- [Hof62] K. Hoffman. *Banach Spaces of Analytich functions*. Prentice-Hall, 1962.
- [Jaf04] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. 2004. Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoit Mandelbrot, editeurs : M. Lapidus et M. van Frankenhuysen, Proc. of Symp. in Pure Mathematics, 2004.
- [Jak74] W. C. Jakes. *Microwave mobile communications*. IEEE Press Eds. Wiley, 1974.
- [KB99] A. Khotanzad and J. Bennett. A spatial correlation based method for neighbor set selection in random field image models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(5) :734–740, 1999.
- [KE04] A. H. Kayran and I. Erer. Optimum asymmetric half-plane autoregressive lattice parameter modeling of 2-d fields. *IEEE Signal Processing*, 52(3) :807–819, Mar. 2004.
- [Kes03] P. Kestener. *Analyse multifractale 2D et 3D à l'aide de la transformation en ondelette : application en mammographie et en turbulence développée*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Bordeaux, France, 2003.
- [KGK98] S. R. Kadaba, S. B. Gelfand, and R. L. Kashyap. Recursive estimation of images using non-gaussian autoregressive models. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(10) :1439–1452, 1998.

- [KGL⁺08] A. Khandelia, S. Gorecha, B. Lall, S. Chaudhury, and M. Mathur. Parametric video compression scheme using ar based texture synthesis. In *ICVGIP*, pages 219–225. IEEE, 2008.
- [Kom03] C. Komninakis. A fast and accurate rayleigh fading simulators. pages 3306–3310, Dec. 2003. IEEE GLOBECOM'03.
- [KWF96] R. Krishnamurthy, J. W. Woods, and J. M. Francos. Adaptive restoration of textured images with mixed spectra. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(4) :648–652, 1996.
- [LAG⁺07] B. Luo, J.-F. Aujol, Y. Gousseau, S. Ladjal, and H. Maître. Resolution-independent characteristic scale dedicated to satellite images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 16(10) :2503–2514, 2007.
- [Las05] B. Lashermes. *Analyse multifractale pratique : coefficients dominants et ordres critiques. Applications à la turbulence pleinement développée. Effet de nombre de Reynolds fini*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, France, 2005.
- [Lin93] L. Lindbom. Simplified kalman estimation of fading mobile radio channels : high performance at lms computational load. *IEEE ICASSP*, 3, 1993.
- [LP99] F. Liu and R.W. Picard. A spectral 2-d wold decomposition algorithm for homogeneous random fields. *Proceeding of ICASSP, Phoenix, Arizona*, 4 :3501–3504, 1999.
- [LS91] C. Loo and N. Secord. Computer models for fading channels with applications to digital transmissions. *IEEE Transaction on Vehicular Technology*, 40(4) :700–707, Nov. 1991.
- [Mar00] S. L. Marple. Two-dimensional lattice linear prediction parameter estimation method and fast algorithm. *IEEE Signal Processing Letters*, 7(6) :164–168, Jun. 2000.
- [Mey01] Y. Meyer. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations : The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures*. American Mathematical Society, Boston, MA, USA, 2001.
- [MH92] S. Mallat and W.L. Hwang. Singularity detection and processing with wavelets. *IEEE Transaction in Information Theory*, 38 :617–643, 1992.
- [MR97] M. Malfait and D. Roose. Wavelet-based image denoising using a markov random field a priori model. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6(4) :549–565, 1997.
- [MTGN08] F. Merchan, F. Turcu, E. Grivel, and M. Najim. Inner-outer factorization for rayleigh fading channel modeling. 2008. Proc. EUSIPCO 2008, Lausanne, Suisse.

- [MTGN10] F. Merchan, F. Turcu, E. Grivel, and M. Najim. Rayleigh fading channel simulator based on inner outer factorization. *Signal Processing*, 90(1) :24–33, Jan. 2010.
- [MTN07a] F. Merchan, F. Turcu, and M. Najim. Modèles 2-d ma pour les champs non déterministes et la décomposition de textures de type wold. 2007. Proc. EUSIPCO 2007, Troyes, France.
- [MTN07b] F. Merchan, F. Turcu, and M. Najim. Outer factor 2-d ma models for purely random fields and wold-type texture decompositions. 2007. Proc. EUSIPCO 2007, Pozlan, Pologne.
- [MTN09] F. Merchan, F. Turcu, and M. Najim. Décomposition d’images fondée sur l’analyse de la régularité locale : application au codage hybride d’image. 2009. Proc. GretsI 2009, Dijon, France.
- [MW98] V.K. Madisetti and D.B. Williams. *The Digital Signal Processing Handbook*. CRC Press, 1998.
- [MZ92] S. Mallat and S. Zhong. Characterisation of signals from multiscale edges. *IEEE Transaction in Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14 :710–732, 1992.
- [Naj06] M. Najim. *Modélisation, estimation et filtrage en traitement du signal*. Hermès, 2006.
- [NM98] S. Rodrigues Neves and G. Vieira Mendonca. Image coding based on edges and textures via wavelet transform. In *Proc. ICASSP98*, pages 2689–2692, 1998.
- [NRK02] M. J. Nadenau, J. Reichel, and M. Kunt. Visually improved image compression by combining a conventional wavelet-codec with texture modelling. *IEEE Transaction in Image Processing*, 11(11) :1284–1294, 2002.
- [PB01] M. F. Pop and N. C. Beaulieu. Limitations of sum-of-sinusoids fading channel simulators. *IEEE Trans. Commun.*, 49(4), Apr. 2001.
- [PL98] M. Pätzold and F. Laue. Statistical properties of jakes’ fading channel simulator. In *in Proc. IEEE 48th Veh. Technol. Conf., VTC’98*, pages 712–718, 1998.
- [PPLA02] A. Pizurica, W. Philips, I. Lemahieu, and M. Acheroy. A joint inter- and intrascale statistical model for bayesian wavelet based image denoising. *IEEE Trans. Image Proc.*, 11 :545–557, 2002.
- [ROF92] L. Rudin, S. J. Osher, and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 60 :259–268, 1992.
- [RS99] J. G. Rosiles and M. Smith. Compression of sar and ultrasound imagery using texture models. In *Data Compression Conference*, page 547, 1999.

- [RSHI96] T.W. Ryan, D. Sanders, Fisher H.D., and A.E. Iverson. Image compression by texture modeling in the wavelet domain. *IEEE Transaction in Image Processing*, 11(1) :26–36, 1996.
- [Rud69] W. Rudin. *Function theory in polydiscs*. Benjamin, New York, 1969.
- [SFP96] R. Sriram, J.M. Francos, and W.A. Pearlman. Texture coding using a wold decomposition based model. *IEEE Transactions in Image Processing*, 5 :1382–1386, 1996.
- [Sha93] J. M. Shapiro. Embedded image coding using zerotrees for wavelet coefficients. *IEEE Transactions in Signal Processing*, 41, 1993.
- [SI03] N. Sprljan and E. Izquiedo. New perspectives on image compression using a cartoon - texture decomposition model. In *Proceedings of the 4th EURASIP Conference on Video/Image Processing and Multimedia Communications (EC-VIP-MC)*, pages 359–368, Juillet 2003.
- [Smi75] J. I. Smith. A computer generated multipath fading simulation for mobile radio. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, VT-24, Aug. 1975.
- [SP96] A. Said and W. M. Pearlman. A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology*, 6 :243–250, 1996.
- [STBN07] Y. Stitou, F. Turcu, Yannick Berthoumieu, and Mohamed Najim. Three-dimensional textured image blocks model based on wold decomposition. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55(7-1) :3247–3261, 2007.
- [Sti06] Y. Stitou. *Modélisation paramétrique 3-D fondée sur la décomposition de Wold. Application au filtrage de blocs sismiques 3-D*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, Talence, France, 2006.
- [TCYB00] H. Thomas, C. Collet, K. Yao, and G. Burel. Classification des textures en imagerie sonar et invariance en rotation. *Traitement di signal*, 17(1), 2000.
- [Tru98] F. Truchetet. *Ondelettes pour le signal numérique*. Editions Hermies, Paris, 1998.
- [Uns95] M. Unser. Texture classification and segmentation using wavelet frames. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(11) :1549–1560, November 1995.
- [VO03] L. A. Vese and S. J. Osher. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing. *J. Sci. Comput.*, 19(1-3) :553–572, 2003.
- [VT93] D. Verdin and T.C. Tozer. Generating a fading process for the simulation of land-mobile radio communications. *Electronic Letters*, 29(23) :2011–2012, 1993.

- [WDH00] H. Wu and A. Duel-Hallen. Multiuser detectors with disjoint kalman channel estimators for synchronous cdma mobile radio channels. *IEEE Trans. Commun.*, 48(5), May 2000.
- [Wol54] H. Wold. *A study in the analysis of stationary series*. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1954.
- [WRCB02] M. Wakin, J. Romberg, H. Choi, and R. Baraniuk. Image compression using an efficient edge cartoon + texture model. In *DCC '02 : Proceedings of the Data Compression Conference*, page 43, 2002.
- [YB00] D.J. Young and N.C. Beaulieu. The generation of correlated rayleigh random variates by inverse fourier transform. *IEEE Transaction on Communications*, 48(7) :1114–1127, 2000.
- [YB03] D.J. Young and N.C. Beaulieu. Power margin quality measures for correlated random variates derived from the normal distribution. *IEEE Transaction on Information Theory*, 49(1) :241–252, 2003.
- [YGO07] W. Yin, D. Goldfarb, and S. Osher. A comparison of three total variation based texture extraction models. *J. Vis. Comun. Image Represent.*, 18(3) :240–252, 2007.
- [ZN05] J. Zhong and R. Ning. Image denoising based on wavelets and multifractals for singularity detection. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(10) :1435–1447, 2005.
- [ZX03] Y. R. Zheng and C. Xiao. Simulation models with correct statistical properties for rayleigh fading channels. *IEEE Trans. on Commun.*, 51(6), 2003.