

# Fusion d'informations incertaines sans commensurabilité des échelles de référence

## THÈSE

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université d'Artois  
(spécialité informatique)

par

**Julien ROSSIT**

devant le jury composé de

Odile PAPINI	Professeur des Universités, Université de la Méditerranée	(rapporteur)
Marie-Anne WILLIAMS	Research Professor, University of Technology, Sydney, Australia	(rapporteur)
Salem BENFERHAT	Professeur des Universités, Université d'Artois	(directeur de thèse)
Richard BOOTH	Lecturer, Mahasarakham University, Thailand	(examineur)
Sébastien KONIECZNY	Chargé de Recherche CNRS, CRIL	(examineur)
Sylvain LAGRUE	Maître de Conférences, Université d'Artois	(co-directeur de thèse)
Pascal NICOLAS	Professeur des Universités, Université d'Angers	(examineur)



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
De la nécessité de la fusion de croyances . . . . .	2
De la commensurabilité des sources . . . . .	4
Objectifs de la thèse . . . . .	5
Plan du mémoire . . . . .	6
<b>1 Représentation et évolution des croyances individuelles d'un agent</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction à la logique propositionnelle . . . . .	12
1.2 Logiques pondérées . . . . .	13
1.3 Approches qualitatives de la gestion des incohérences . . . . .	21
1.4 Révision des croyances . . . . .	25
1.5 Synthèse du chapitre . . . . .	37
<b>2 Fusion et représentation des croyances collectives</b>	<b>39</b>
2.1 Fusion de bases de croyances propositionnelles . . . . .	40
2.2 Fusion possibiliste . . . . .	45
2.3 Représentation par les polynômes et fusion . . . . .	49
2.4 Synthèse du chapitre . . . . .	50
<b>3 Fusion de croyances pondérées et problèmes d'incommensurabilité</b>	<b>51</b>
3.1 Fusion de bases de croyances pondérées . . . . .	52
3.2 Sur le problème de la commensurabilité . . . . .	58
3.3 Commensurabilité et choix social . . . . .	59
3.4 Échelles compatibles . . . . .	62
3.5 Synthèse du chapitre . . . . .	65

<b>4</b>	<b>Fusion incommensurable et cadre égalitaire</b>	<b>67</b>
4.1	Fusion incommensurable basée sur le maximum . . . . .	68
4.2	Propriétés logiques . . . . .	83
4.3	Synthèse du chapitre . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Fusion incommensurable et cadre utilitaire</b>	<b>99</b>
5.1	Fusion incommensurable basée sur la somme . . . . .	100
5.2	Propriétés logiques . . . . .	108
5.3	Synthèse du chapitre . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Fonctions de sélection d'échelles compatibles</b>	<b>119</b>
6.1	Sélection d'échelles compatibles particulières . . . . .	120
6.2	Classes des échelles affines et linéaires . . . . .	122
6.3	Classe des échelles translatives . . . . .	132
6.4	Classe des échelles bornées . . . . .	143
6.5	Choisir une échelle compatible unique . . . . .	153
6.6	Synthèse du chapitre . . . . .	157
<b>7</b>	<b>Une étude comparative</b>	<b>159</b>
7.1	Relation entre approche égalitaire et utilitaire dans le cadre incommensurable . . .	160
7.2	Sur la prudence de la sélection d'échelles particulières . . . . .	164
7.3	Récapitulatif des propriétés logiques . . . . .	169
7.4	Synthèse du chapitre . . . . .	171
	<b>Conclusion</b>	<b>173</b>

## Résumé

Le problème de fusion d'informations survient dès qu'il faut prendre en compte des bases de données distribuées, des systèmes multi-agents ou des informations distribuées en général. La plupart des approches de fusion proposées dans la littérature reposent sur des opérateurs d'agrégation : ceux-ci combinent les degrés de cohérence des différentes interprétations vis-à-vis des sources à fusionner, eux-même fortement dépendants des poids que ces sources accordent à leurs propres croyances. Mais lorsque les sources ne partagent pas une signification commune des poids qu'elles utilisent, quel sens cela a-t-il de comparer ou d'agréger ces mêmes poids ?

Ainsi, nous étudions dans cette thèse différentes approches de fusion de croyances en l'absence de commensurabilité des échelles utilisées. Nous proposons tout d'abord une première méthode, reposant sur la notion d'échelle compatible, que nous appliquons à des opérateurs basés sur la somme et sur le maximum. Les opérateurs résultants peuvent être caractérisés au moyen d'un ensemble infini d'échelles compatibles, mais également au moyen de relations de type Pareto sur l'ensemble des mondes possibles. Puis nous étudions plus particulièrement certaines familles d'échelles compatibles afin de caractériser des opérateurs moins prudents et prenant en compte l'intensité des poids. Nous fournissons une analyse complète de la production des inférences et de la rationalité des opérateurs de fusion définis. En particulier, nous proposons la notion de consensus, souhaitable en l'absence de l'hypothèse de commensurabilité et vérifiée par la plupart de nos opérateurs.

## Abstract

The problem of merging multiple-source information is crucial for many applications, in particular when one requires to take into account several potentially conflicting pieces of information, such as distributed databases frameworks, multi-agent systems, or distributed information in general. The relevant pieces of information are provided by different sources and all existing pieces of information have to be confronted to obtain a global and coherent point of view. This problem is well-known as the data fusion problem. Most of existing merging methods are based on the following assumption : ranks associated with beliefs are commensurable from one source to another. This commensurability assumption can be too strong for several applications : comparing or combining ranks does not make sense if sources do not share the same meaning of scales.

This thesis proposes different solutions to the problem of incommensurability for ranked beliefs merging. Our first main contribution consists of proposing a natural way to restore commensurability relying on the notion of compatible scales. The second one directly defines a partial pre-order between interpretations in a way similar to the one based on the Pareto criterion. Moreover, this thesis introduces several inference relations based on some selection functions of compatible scales. We analyze the impact of these selection functions on the satisfaction of rational postulates, and on the prudence of merging operators. In particular we introduce a stronger version of the fairness postulate, called the consensus postulate. We show that most of our defined merging operators constitute consensual approaches.



# Introduction

Un enjeu actuel important, activement étudié dans le domaine de l'intelligence artificielle, réside sans conteste dans la représentation et la gestion d'informations incertaines que peut recueillir et manipuler un agent autonome sur son environnement. Les solutions mises en oeuvre doivent prendre en compte et tirer parti de la nature complexe et évolutive du monde qui l'entoure. Cet agent ne dispose alors que de *croyances*, elles aussi incertaines, sur l'état de son environnement. Ces croyances doivent lui permettre de prendre les meilleures décisions possibles à chaque instant. La représentation qu'il emploie doit donc lui permettre de raisonner à partir d'informations incertaines, dans le but d'en dériver les conclusions lui permettant d'agir de façon appropriée. Cependant, de part la nature incertaine des informations dont il dispose, il arrive parfois qu'une nouvelle observation vienne contredire les croyances actuelles d'un agent. La représentation des croyances adoptée par cet agent doit ainsi permettre la prise en compte de l'évolution et de la dynamique de ces croyances : comment intégrer ces nouvelles informations, même si elles sont contradictoires avec sa représentation actuelle du monde, sans laisser cet agent dans un état d'ignorance totale ?

Différents formalismes ont ainsi été proposés dans la littérature afin de représenter les croyances que possède un agent sur le monde. Dans ce sens, le terme croyance désigne une information incertaine qu'il est possible d'obtenir d'une source. Parmi ces différents formalismes, certains permettent de quantifier la fiabilité, ou l'incertitude, relative des informations disponibles, en leur associant par exemple un degré de possibilité [DLP94], un ordinal [Spo88] ou encore un polynôme [Pap01]. Certaines approches ont également été proposées afin de permettre la révision [AGM85], la mise à jour [KM92], le renforcement [KPP08b] ou encore la confluence [KPP08a] des croyances d'un agent. De plus, lorsque l'agent s'informe sur son environnement par l'intermédiaire de plusieurs sources distinctes, d'autres approches permettent la fusion des informations, potentiellement contradictoires, obtenues de ces différentes sources [Lin96, Rev97, KPP02].

## De la nécessité de la fusion de croyances

La fusion d'informations en provenance de sources multiples est un problème important dans le cadre de la représentation des croyances [Lin96, Rev97, BHA<sup>+</sup>01, KPP02]. En effet, pour de nombreuses applications de la vie courante, dont l'exemple le plus symptomatique est le web, la tendance est à la distribution de l'information. Ce problème est ainsi étudié dans différents domaines tels que les systèmes d'information coopératifs, les bases de données distribuées, les systèmes multi-agents, etc. Dans de nombreuses situations, les différentes informations concernant un problème donné sont fournies par différentes sources bien distinctes. Prises individuellement, ces informations sont bien souvent incomplètes, et l'intégralité de ces points de vue partiels doit alors être rassemblées, ou *fusionnées*, afin d'obtenir un point de vue *cohérent* et *global* sur ce problème. Lorsque ces informations sont complémentaires, il est possible de simplement prendre en compte leur union. Mais que faire lorsque les différentes sources considérées fournissent des renseignements contradictoires ? Le principe de la fusion d'informations est de tirer profit d'un maximum d'informations complémentaires et non contradictoires disponibles, soit en d'autres termes de déterminer une information globale, la plus proche possible des informations fournies individuellement. Prenons l'exemple de la prise en compte de différents témoignages, dans le cadre d'une enquête policière. Dans ce genre de situation, différents témoins d'une scène fournissent des informations incomplètes, plus ou moins certaines, en fonction de ce qu'ils peuvent avoir vu ou entendu. Certaines de ces informations peuvent alors être totalement éronnées, et la réunion de ces informations mène alors à une situation contradictoire. Cet exemple illustre clairement la subjectivité des informations fournies par les sources prises en compte : en effet, même si chaque témoin ne rapporte que les faits qui lui semblent avérés, ces mêmes faits dépendent entièrement de ses capacités personnelles à voir ou entendre distinctement, et de sa localisation vis-à-vis de la scène. Comment faire alors, pour obtenir une vision d'ensemble de la scène, à la fois cohérente et la plus complète possible ?

Ce problème de fusion a largement été étudié d'un point de vue axiomatique dans la littérature [Rev93, LS95, LM99]. Dans le cadre de notre étude, nous nous focalisons sur l'axiomatisation proposée dans [KPP98, KPP02] par Konieczny et Pino Pérez, présentant la particularité d'être étroitement liée à celle proposée, dans le cadre de la révision des croyances [AGM85], par Alchourrón, Gärdenfors, et Makinson. Intuitivement, cet ensemble de postulats de rationalité tente de décrire le comportement idéal d'un opérateur de fusion. D'un point de vue sémantique, le théorème de représentation qui lui est alors associé permet de présenter le problème de fusion comme la recherche des interprétations minimales selon un ordre induit par les sources sur l'ensemble des mondes possibles. D'autres postulats de rationalité complémentaires ont été proposés afin de caractériser les différentes attitudes qu'il est possible d'adopter pour résoudre les conflits entre les sources. Parmi celles-ci, il est possible de distinguer les deux types d'approche suivants :

- l'approche *égalitaire*, selon laquelle chaque point de vue est considéré comme d'égale im-



portance, et aucun d'eux, même s'il est minoritaire, ne saurait être écarté. Ce type d'approche tente de prendre en compte chaque point de vue disponible et d'établir un compromis entre les informations incomplètes exprimées par les sources. Ainsi, les opérateurs adoptant ce type d'attitude essaient de minimiser l'insatisfaction individuelle de chaque source, et vérifient le postulat d'*indépendance de la majorité* : intuitivement, ce postulat assure le fait que le résultat de la fusion n'est pas sensible à la répétition de l'information. Reprenons l'exemple des témoignages : pour ce type d'approche, chaque point de vue existant est considéré comme d'égale importance vis-à-vis des autres, et toute information apportée par les témoins est prise en compte, sans toutefois tenir compte de leurs redondances. Il arrive, en effet, qu'une information minoritaire soit totalement fondée, dans des situations où, par exemple, le témoin qui la fournit était le seul en mesure de distinguer clairement les faits. Cette information ne doit pas être écartée ;

- l'approche *utilitaire*, selon laquelle la prise en compte de l'ensemble des informations disponibles dans leur globalité est prioritaire au delà de la prise en compte des différents points de vue pris individuellement. Ce type d'approche permet de discriminer les situations d'incohérence portant sur certaines données en exploitant la redondance des informations disponibles sur le monde. De cette façon, les opérateurs adoptant ce type d'attitude tentent de minimiser l'insatisfaction globale du groupe et satisfont le postulat de *majorité*, également connu sous le terme d'*archimédianité* [Pat02] : intuitivement, cette propriété décrit le fait que, si une information est suffisamment répétée parmi les bases de croyances considérées, alors cette information doit être dérivée du résultat de la fusion. Considérons à nouveau l'exemple des témoignages. Lorsque différents témoins fournissent des informations contradictoires, comment les départager, et obtenir une conclusion dans cette situation d'ignorance totale ? Les approches majoritaires considèrent que les points de vue les plus répandus sont les plus plausibles, puisque plusieurs témoins sont en accord sur l'observation d'un même fait. Ce type d'approche requiert cependant l'indépendance des sources : concernant l'exemple des témoignages, les différents témoins ne doivent pas s'être échangé d'informations avant de relater les faits individuellement.

De nombreuses approches pratiques ont été proposées pour résoudre le problème de fusion. Ces approches dépendent fortement du formalisme employé pour la représentation des informations. Ainsi, certains opérateurs ont été proposés, dans la littérature, afin de fusionner des bases de croyances propositionnelles [Lin96, Rev97, KPP02] : ces opérateurs reposent sur une notion de distance de l'information générale retenue, vis-à-vis des informations individuellement fournies par chaque source. Il existe également d'autres opérateurs de fusion, adaptés aux cas où l'incertitude associée aux croyances est codée par le biais de degrés de possibilité [BDKP00b] ou de polynômes [DPS06]. Ce type d'opérateur repose sur l'agrégation des degrés, que chaque base de croyances considérée permet d'induire sur les différents mondes possibles.

## De la commensurabilité des sources

Dans le cadre de notre étude, les informations incertaines sont représentées au moyen de croyances pondérées. Dans ce cadre, chaque source associe un entier aux informations qu'elle fournit, dans le but d'en quantifier la fiabilité. Différentes approches ont été proposées, dans la littérature, afin de fusionner ce type de bases de croyances. Celles-ci reposent sur l'intuition suivante : chaque base de croyances pondérées permet d'associer un poids aux différentes interprétations possibles du monde ; les interprétations sont alors préférées respectivement au résultat de l'agrégation des poids qui leur sont ainsi associés. Ces différentes approches reposent cependant sur certaines hypothèses implicites. En particulier, lorsque les sources associent des poids aux informations, dans le but d'en quantifier l'incertitude, celles-ci doivent alors partager la signification qu'elles accordent aux échelles de poids qu'elles utilisent. Autrement, quel sens cela a-t-il d'agréger ces mêmes poids une fois ceux-ci associés aux interprétations ?

Ce problème est étroitement lié à ceux de la *mesurabilité* et de l'*intercomparabilité* des utilités, connus dans le domaine de la *théorie du choix social*. Le but de cette dernière est d'obtenir les préférences d'un groupe à partir des préférences individuelles des individus issus de ce groupe. Certaines approches proposées pour ce problème permettent alors aux individus d'associer des *utilités* aux différentes alternatives disponibles : ces utilités sont ensuite agrégées afin d'obtenir les alternatives préférées du groupe. Différents problèmes sous-jacents à ce type d'approche ont été soulevés dans la littérature [Arr63, Sen82]. Le premier de ces problèmes est celui de la *mesurabilité* des utilités de chaque individu : pourquoi un individu choisit-il une échelle d'utilité en particulier et non une autre ? Tient-il compte de certaines notions d'homogénéité, de linéarité ou encore d'intensité reliant les différentes utilités qu'il exprime ? De façon similaire, pour le problème de la fusion de bases de croyances pondérées, rien ne nous renseigne sur la provenance, ni même sur la signification, des poids associés aux informations obtenues d'une source. Le second problème identifié est celui de l'*intercomparabilité* : même si la mesurabilité des utilités est admise, rien n'indique que ces utilités soient comparables d'une source à l'autre. En d'autres termes, si un individu choisit une échelle d'utilité particulière pour quantifier ses préférences sur les alternatives disponibles, rien n'indique que les autres individus aient choisi la même. Ce problème est intimement lié à celui que nous identifions sous le terme de *commensurabilité* des sources dans le cadre de la fusion de bases de croyances pondérées.

Il existe de nombreux exemples du problème de commensurabilité dans la pratique. Prenons l'exemple d'une enquête de satisfaction auprès de clients : lorsque l'on demande à différentes personnes d'évaluer, sous forme d'une note, la qualité de différents produits, ou encore de certains services, peut-on dire que deux personnes attribuant la même note à deux produits distincts les apprécient de manière égale ? De la même façon, un exemple d'incommensurabilité, tiré de [Kel06], concerne la mesure de l'activité d'un cerveau. En effet, il existe deux mesures possible pour cette dernière : la température du cerveau, et le quotient intellectuel de l'individu. Bien que ces deux

mesures semblent liées et toutes deux fondées sur des critères scientifiques, les échelles d'évaluation auxquelles elles font appel sont sans commune mesure. Examinons finalement, dans le domaine médical, le cas d'une prescription de morphine : un individu souffrant d'une grave pathologie aura tendance à sous-estimer l'évaluation de la douleur qu'il ressent, au fur et à mesure qu'il s'y accoutume. À l'inverse, une personne ne souffrant que très rarement aura tendance à surévaluer une douleur passagère, à laquelle elle n'est pas habituée. De façon parallèle, pour la fusion d'informations pondérées en provenance de sources distinctes, comment savoir si les échelles de poids fournies par les différentes sources partagent un sens commun ?

## Objectifs de la thèse

Cette thèse est une contribution à la fusion de croyances pondérées incommensurables. Le principal objectif de cette thèse est de proposer un cadre adapté aux situations où les poids, quantifiant l'incertitude associée aux informations, ne sont pas commensurables d'une source à l'autre. En effet, les opérateurs de fusion existants, reposant sur l'agrégation des poids associés aux interprétations par chaque base de croyances considérée, ne sont pas appropriés dans ce type de situation. Cette thèse se propose ainsi de fournir différentes approches pour la fusion de croyances pondérées incommensurables. Pour se faire, nous proposons dans un premier temps la notion d'échelle compatible. Ce concept permet, de façon naturelle, de rétablir la commensurabilité entre les sources. Nous utilisons ensuite cette notion afin de fournir les extensions de différents opérateurs de fusion existants, et d'adapter ceux-ci au cadre incommensurable. Nous nous proposons également de fournir une caractérisation des relations sur les interprétations possibles, induites par chacune des approches présentées.

Un autre objectif de cette thèse est de fournir une étude logique des opérateurs de fusion de croyances pondérées. Les axiomatisations du problème de fusion, proposées dans la littérature, permettent en effet d'expliquer pourquoi les opérateurs de fusion existants ne sont pas adaptés à la fusion de croyances incommensurables. Quelles sont alors les propriétés souhaitables lors d'une telle fusion ? Nous fournissons ainsi, dans cette thèse, une étude du comportement logique des opérateurs de fusion de croyances pondérées existants, ainsi que celui de chaque approche de la fusion de croyances incommensurable que nous proposons dans ce mémoire.

Finalement un des objectifs majeurs de cette thèse est d'utiliser la notion de pondération, malgré l'hypothèse d'incommensurabilité formulée sur ces mêmes poids, afin de fournir des opérateurs de fusion adaptés à de telles situations. En effet, il est d'usage, dans la littérature du choix social, et puisque les utilités ne sont pas supposées comparables d'un individu à l'autre dans ce domaine, de ne prendre en compte que les relations qualitatives reliant les préférences d'un individu [Arr63]. D'une façon similaire, dans le cadre des logiques pondérées, lorsque les poids ne sont pas comparables d'une source à l'autre, une première approche consisterait à abandonner la notion

de pondération, pour alors se concentrer sur les relations qualitatives, induites sur les croyances respectivement issues de chaque source. Des approches ont été proposées, dans la littérature, afin de fusionner de façon qualitative des bases de croyances stratifiées (voir par exemple [ARS02]). Nous nous proposons, dans le cadre de cette thèse, de fournir des approches tenant compte de cette notion de pondération, tout en gardant une certaine prudence sur la commensurabilité d'une source à l'autre de ces poids. En particulier, une des principales contributions de cette thèse repose dans la proposition de plusieurs opérateurs, adaptés au cadre incommensurable, plus productifs que les opérateurs reposant juste sur les aspects qualitatifs de l'incertitude.

## Plan du mémoire

Ce mémoire est divisé en sept chapitres. Le premier de ces chapitres est consacré au rappel de différents formalismes, permettant la représentation d'un ensemble d'informations incertaines fournies par une source. Ce chapitre peut ainsi être divisé en trois parties distinctes. Dans la première de ces parties, nous rappelons brièvement quelques éléments de la logique propositionnelle. Celle-ci permet ainsi une première représentation possible des informations disponibles. Cependant, cette même logique ne permet que de représenter des informations totalement certaines, ou tout du moins d'égale fiabilité. Nous présentons donc ensuite différents formalismes, constituant des extensions de la logique propositionnelle, permettant d'associer un poids aux informations disponibles. Ce poids représente l'incertitude, ou la fiabilité, respectivement associée à ces formules. De cette manière, il est possible de quantifier cette incertitude au moyen d'un degré issu de l'intervalle  $[0, 1]$ , d'un ordinal, d'un poids issu de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , ou encore d'un polynôme. Nous rappelons également que ces différents formalismes permettent d'ordonner les interprétations du langage, soit par rapport à l'information la plus importante qu'elles falsifient, soit vis-à-vis de l'ensemble des informations falsifiées. La seconde partie de ce chapitre expose ensuite différentes approches qualitatives proposées par la littérature pour la gestion d'incohérences présentes au sein des ensembles d'informations. Cependant, ces approches permettent seulement d'obtenir un ensemble de formules propositionnelles, représentant de cette manière les croyances les plus plausibles obtenues d'une source. La dernière partie de ce premier chapitre est alors consacrée au problème de la révision des croyances. Les approches de ce problème permettent l'intégration d'une nouvelle information, potentiellement contradictoire avec une base de croyances, sans rendre cette dernière incohérente. Après avoir présenté plusieurs axiomatisations de ce problème proposées dans la littérature, nous illustrons celui-ci au moyen d'opérateurs adaptés à chacune des représentations abordées dans ce chapitre.

Une fois ces différents formalismes rappelés, le second chapitre se focalise sur la fusion d'informations en provenance de sources multiples. Nous exposons, en premier lieu, une axiomatisation de ce problème. Celle-ci est étroitement liée à l'axiomatisation existante dans le cadre de la révision des croyances et présentée dans le chapitre précédent. Différents postulats complémentaires ont également été proposés dans la littérature : ceux-ci caractérisent les différentes attitudes

adoptées face aux incohérences présentes parmi les informations disponibles. Ces derniers nous montrent alors qu'il existe clairement deux types d'approches distinctes de la fusion d'informations. Ainsi les opérateurs égalitaires considèrent que chaque point de vue sur le problème est important. De cette manière, ils tentent alors de satisfaire, au moyen de compromis, chaque source en présence. À l'inverse, les opérateurs utilitaires considèrent les redondances entre sources comme un renforcement de l'information. Ceux-ci tentent plutôt de satisfaire l'ensemble de sources dans sa globalité, au détriment d'éventuelles minorités. Nous illustrons dans un premier temps ces deux approches en présentant différents opérateurs existants pour la fusion de bases de croyances propositionnelles. La seconde partie de ce chapitre présente différentes approches proposées dans la littérature, pour la fusion de bases de croyances possibilistes, ou lorsque l'incertitude associée aux informations est codée au moyen de polynômes.

Le troisième chapitre présente la problématique et le cadre de notre étude. Nous rappelons dans un premier temps le cadre des bases de croyances pondérées, ainsi que différents opérateurs proposés pour la fusion de ce type de base. Nous montrons alors que ces approches soulèvent le problème de la commensurabilité des poids issus de chaque source. Comment, en effet, agréger de tels poids, si les sources en présence ne partagent pas la signification qu'elles leur accordent ? Ce problème a également été soulevé par Arrow [Arr63], dans le cadre de la théorie du choix social. Ainsi, Arrow choisit de ne se focaliser que sur les aspects qualitatifs des préférences exprimées par les individus. À l'inverse, nous choisissons, dans le cadre de la fusion de croyances pondérées, de proposer des approches basées sur les aspects quantitatifs de l'expression de l'incertitude. Notre première contribution est alors d'introduire le concept d'échelle compatible, qui est à la base des différents opérateurs que nous proposons dans ce mémoire de thèse. Une échelle compatible constitue un moyen naturel de restaurer la commensurabilité des sources, tout en conservant les priorités relatives reliant les informations issues d'une même base. Ce concept nous permet alors de proposer, dans les chapitres suivants, les extensions au cadre incommensurable des opérateurs de fusion de croyances pondérées existants dans le cadre commensurable.

Nous proposons, dans le quatrième chapitre, une première contribution à la fusion de croyances pondérées incommensurable. En effet, nous proposons, au moyen de la notion d'échelle compatible, l'extension d'un opérateur de fusion de bases de croyances commensurables basé sur le maximum. Tel qu'il est défini, cet opérateur repose sur la considération d'un ensemble infini d'échelles compatibles. Une de nos contributions consiste alors à fournir plusieurs caractérisations de l'ordre sur les interprétations induit par cet opérateur. Pour cela, il est en effet possible de ne considérer que les relations qualitatives reliant les formules issues d'une même base de croyances. De plus, nous fournissons un premier critère de comparaison, similaire au critère de Pareto, des degrés associés aux interprétations par chaque base de croyances considérée. Cette contribution est importante, puisque ce nouveau critère montre que notre approche est à la fois plus prudente que le critère de Pareto, tout en étant plus productive que le critère de Pareto strict. La seconde partie de ce chapitre fournit une étude logique complète de cet opérateur, ainsi que de l'opérateur de fusion de bases de croyances commensurables qu'il étend, au moyen des postulats de rationalités adaptés

au cadre des bases de croyances pondérées. Une autre de nos contributions consiste à proposer un nouveau postulat de rationalité, caractérisant un comportement de *consensus* lors de la fusion de bases de croyances. Nous montrons que cette première approche satisfait ce postulat, ainsi que celui caractérisant les approches de fusion égalitaires.

Le cinquième chapitre propose l'extension, toujours au moyen du concept d'échelle compatible, d'un opérateur de fusion utilitaire de bases de croyances pondérées. Nous essayons, de cette façon, de fournir une approche majoritaire pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables. Une des contributions de ce chapitre consiste à montrer qu'il est également possible de caractériser l'ordre sur les mondes, induit par cette nouvelle approche, au moyen d'un critère de comparaison des degrés associés à chaque interprétation par les bases de croyances pondérées considérées. Ce critère se révèle être le critère de Pareto. Nous fournissons également une étude logique de cette seconde approche, ainsi que de l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables qu'elle étend. Nous montrons alors, que bien que l'opérateur sur lequel elle se base satisfait le postulat de majorité, cette approche se révèle être une approche égalitaire, et est de ce fait insensible à la répétition des informations. Nous montrons, cependant, que cette approche, constituant une autre contribution à la fusion de croyances incommensurables, adopte un comportement de consensus face au problème de commensurabilité des sources.

Le sixième chapitre étudie la restriction de l'opérateur proposé par le chapitre précédent à différentes sous-classes d'échelles compatibles intéressantes. De cette façon, nous tentons de fournir des approches quantitatives adaptées au cadre incommensurable, plus productives cependant que les approches purement qualitatives. Pour cela, nous choisissons de restreindre l'ensemble des échelles compatibles considérées par cet opérateur à certains sous-ensembles particuliers. Une des contributions de ce chapitre repose alors dans la proposition de certaines hypothèses supplémentaires sur la commensurabilité des sources. En particulier, bien que les poids associés aux croyances ne soient pas commensurables d'une source à l'autre, il est parfois possible de considérer, dans certaines situations, l'homogénéité, la linéarité ou encore l'intensité reliant les poids issus d'une même base. Nous supposons tour à tour ces notions comparables d'une source à l'autre, et proposons des opérateurs de fusion adaptés à la considération de ces hypothèses particulières. Nous montrons alors que certaines de ces hypothèses permettent de retrouver les résultats fournis lorsque toutes les échelles compatibles sont considérées. À l'inverse, une de nos principales contributions consiste à montrer que d'autres hypothèses permettent de dériver de nouvelles conclusions saines. En particulier, lors de la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables, nous montrons qu'il est possible de retrouver la satisfaction du postulat de majorité dans le cadre utilitaire. Ces deux contributions sont significatives, puisque qu'il est alors possible, en considérant les aspects quantitatifs de l'incertitude, d'obtenir de nouvelles conclusions par rapport à la seule considération des aspects qualitatifs.

Enfin, le dernier chapitre est composé de deux parties distinctes. La première présente une étude comparative, en matière de productivité, des différents opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées que nous abordons dans ce mémoire. En particulier, nous montrons que les

---

premières approches proposées dans cette thèse, reposant sur la considération de toutes les échelles compatibles, font preuve de prudence lors de la fusion de croyances pondérées. Ces approches ne sont pas plus prudentes, néanmoins, que le critère de Pareto strict. Nous montrons également qu'il est possible d'obtenir de nouvelles conclusions en ne sélectionnant qu'une partie des échelles compatibles possibles : ces conclusions sont certes plus prudentes que dans le cadre commensurable, mais elle le sont cependant moins que lorsque toutes les échelles sont prises en compte. La seconde partie de ce chapitre propose une étude, au moyen de postulats de rationalité, des divergences comportementales des approches abordées tout au long de ce mémoire de thèse.





# Chapitre 1

## Représentation et évolution des croyances individuelles d'un agent

Ce chapitre présente différents formalismes particulièrement appropriés à la représentation des croyances individuelles d'un *agent*. Tout au long de notre étude, nous utiliserons le terme agent pour désigner une entité, capable d'obtenir des informations relatives à un problème ou une situation donnée, à partir d'une ou plusieurs *sources* d'informations. Ainsi, pour de nombreuses applications, une source possède un ensemble d'informations décrivant l'état du monde qui l'entoure, et peut parfois en obtenir de nouvelles par le biais d'observations effectuées au moyen de capteurs par exemple. Cependant, les informations que possède une source sur le monde sont bien souvent entachées d'incertitudes, de part l'évolution de ce monde ou de part encore la fiabilité relative des capteurs auxquels elle est associée. Ces informations sont alors dites *incertaines*, et l'agent ne possède alors que des *croyances* sur l'état du monde. Les différents formalismes que nous présentons, nécessaires à la représentation de ces informations incertaines sur l'état du monde, peuvent se diviser en deux catégories distinctes : alors que les premiers utilisent des échelles de poids pour quantifier l'incertitude respectivement associée à chaque croyance représentée (l'intervalle  $[0,1]$ , l'ensemble des ordinaux ou encore les polynômes par exemple), les seconds optent pour des modes de représentation purement qualitatifs, sans faire explicitement référence à une échelle d'incertitude numérique particulière.

Il arrive également qu'une observation fiable vienne contredire une partie des croyances dont dispose une source. Comment intégrer alors cette nouvelle information prioritaire tout en gardant un point de vue cohérent sur l'état du monde ? Ce chapitre présente différentes stratégies utiles afin de rendre possible l'évolution des croyances d'un agent, dans le but de permettre à celui-ci de prendre en compte toute nouvelle information qui lui serait apportée.

Afin d'aborder ces différents modes de représentation puis d'évolution des croyances indivi-

duelles d'une source, nous présentons dans un premier temps une brève introduction à la logique propositionnelle, et introduisons également les différentes notations utilisées tout au long de ce mémoire.

## 1.1 Introduction à la logique propositionnelle

Tout au long de notre étude, nous utilisons un cadre logique pour représenter les différentes informations que nous avons à manipuler : celui de la logique des propositions [AS93, GG97]. Dans ce cadre,  $\mathcal{L}$  dénote un langage propositionnel fini, c'est-à-dire un ensemble de formules bien formées, représentées elles-mêmes par des lettres grecques  $\varphi, \psi, \dots$ . D'un point de vue syntaxique, ces formules bien formées sont constituées d'un ensemble fini d'atomes propositionnels  $P$ , reliés par des connecteurs logiques usuels tels que  $\wedge$  (conjonction),  $\vee$  (disjonction),  $\rightarrow$  (implication matérielle),  $\leftrightarrow$  (équivalence matérielle) et  $\neg$  (négation), et construites selon l'ensemble de règles suivantes :

1. les atomes propositionnels de  $P$ , ainsi que les constantes  $\top$  (tautologie) et  $\perp$  (contradiction), sont des formules bien formées de  $\mathcal{L}$  ;
2. si  $\varphi$  est une formule bien formée de  $\mathcal{L}$ , alors  $(\neg\varphi)$  est aussi une formule bien formée de  $\mathcal{L}$  ;
3. si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des formules bien formées de  $\mathcal{L}$ , alors  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \rightarrow \psi)$  et  $(\varphi \leftrightarrow \psi)$  sont également des formules bien formées de  $\mathcal{L}$  ;
4. toute formule bien formée ne peut être construite qu'à partir de ces règles.

D'un point de vue sémantique, une *interprétation*  $\omega$  de  $\mathcal{L}$  est une fonction qui associe à chaque atome propositionnel  $p$  de  $P$  une valeur de vérité que l'on note  $\{0, 1\}$  (0 pour faux, 1 pour vrai). Une *valuation*, notée  $V(\varphi, \omega)$ , associe ensuite à une formule  $\varphi$  de  $\mathcal{L}$  et à une interprétation  $\omega$  une de ces deux valeurs, par la définition récursive suivante :

1. si  $p$  est un atome propositionnel, alors  $V(p, \omega) = \omega(p)$  ;
2.  $V(\top, \omega) = 1$  ;
3.  $V(\perp, \omega) = 0$  ;
4. si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux formules de  $\mathcal{L}$ , alors :
  - $V(\neg\varphi, \omega) = 1$  ssi  $V(\varphi, \omega) = 0$  ;
  - $V(\varphi \wedge \psi, \omega) = \min(V(\varphi, \omega), V(\psi, \omega))$  ;
  - $V(\varphi \vee \psi, \omega) = \max(V(\varphi, \omega), V(\psi, \omega))$  ;
  - $V(\varphi \rightarrow \psi, \omega) = 1$  ssi  $V((\neg\varphi) \vee \psi, \omega) = 1$  ;
  - $V(\varphi \leftrightarrow \psi, \omega) = 1$  ssi  $V((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi), \omega) = 1$ .

Le symbole  $\Omega$  dénote l'ensemble exhaustif des interprétations possibles pour  $\mathcal{L}$ . On dit qu'une interprétation  $\omega$  satisfait une formule  $\varphi$ , noté  $\omega \models \varphi$ , si et seulement si  $\varphi$  est associée à la valeur de vérité *vrai* pour  $\omega$ , soit encore  $V(\varphi, \omega) = 1$ . On dit alors également que  $\omega$  est un modèle

de  $\varphi$ . L'ensemble des modèles de  $\varphi$  est alors noté ici  $Mod(\varphi)$ . En particulier,  $Mod(\top) = \Omega$  et  $Mod(\perp) = \emptyset$ . Dans le cadre de la logique des propositions, une formule propositionnelle peut donc être représentée par l'ensemble de ces modèles. Une formule  $\varphi$  est alors dite *cohérente* si elle admet au moins un modèle, tandis que  $\varphi$  est dite *incohérente* dans le cas contraire. Dans ce qui suit, une interprétation est représentée par l'ensemble des atomes, ou négation d'atomes, qu'elle satisfait.

Une base de croyances, notée  $B$ , est un ensemble de formules bien formées de  $\mathcal{L}$ . Dans le cadre de la logique propositionnelle, une base de croyances  $B$  est équivalente à la conjonction de ses formules. On dit alors que cet ensemble de formules est *cohérent* s'il existe une interprétation  $\omega$  qui satisfait toute formule  $\varphi$  issue de  $B$ . À l'inverse, si une telle interprétation n'existe pas,  $B$  est dite *incohérente*, ou contradictoire. Il est alors possible de définir une notion d'*inférence* en logique des propositions de la façon suivante : une formule  $\varphi$  est conséquence logique d'une base de croyances  $B$ , noté  $B \models \varphi$ , si et seulement si tout modèle de  $B$  est également modèle de  $\varphi$ , soit formellement  $Mod(B) \subseteq Mod(\varphi)$ . Une conséquence de cette définition est que  $B \models \varphi$  si et seulement si  $B \cup \{\neg\varphi\}$  est une base de croyances incohérente.

## 1.2 Logiques pondérées

La logique des propositions permet de représenter les croyances d'un agent sous forme d'un ensemble de formules propositionnelles. Cependant, cette logique suppose que toutes les croyances exprimées possèdent le même degré de priorité, ou d'incertitude. Ainsi, d'un point de vue sémantique et pour une base de croyances donnée, ce cadre permet seulement de partitionner les interprétations de  $\Omega$  en deux ensembles distincts : les modèles de cette base et les contre-modèles. Cette section présente différents formalismes permettant une représentation plus riche des croyances. Celle-ci s'effectue au moyen d'une quantification de la fiabilité respectivement associée à chaque croyance. En particulier, ces formalismes permettent une représentation stratifiée des bases de croyances. Ils offrent ainsi une représentation naturelle de l'incertitude relative, respectivement associée à chaque formule issue d'une base de croyances.

Nous présentons ainsi, dans cette section, trois formalismes qui diffèrent uniquement dans la façon d'exprimer le poids associé à une croyance. Ainsi, selon la *logique possibiliste* [DLP94], les formules sont associées à des poids issus de l'intervalle  $[0, 1]$ . Ceci permet, en particulier, de quantifier l'incertitude associée aux croyances de l'agent. De façon similaire, les poids associés aux croyances dans le cadre du second formalisme présenté, appelé cadre des *fonctions conditionnelles ordinales* OCF [Spo88], sont représentés par des ordinaux. Finalement, dans le cadre du dernier formalisme présenté, l'incertitude associée aux croyances est codée sous forme de *polynômes* [Pap01].

### 1.2.1 Logique possibiliste

La logique possibiliste [DP88, DLP94] est une extension de la logique classique, basée sur la théorie des possibilités [Zad65, Zad78]. Au niveau syntaxique, chaque formule est associée à un degré représentant son niveau de priorité vis-à-vis des autres formules issues de la même base : la base de croyances alors obtenue est appelée *base de croyances possibiliste*. D'un point de vue sémantique, il s'agit également d'une extension de la logique des propositions : cette logique permet en effet d'obtenir une partition de  $\omega$  plus raffinée qu'en logique propositionnelle, appelée *distribution de possibilité*, où les contre-modèles sont ordonnés vis-à-vis de l'importance de la formule qu'ils falsifient. Plus particulièrement, les interprétations falsifiant les formules les moins prioritaires sont préférées aux contre-modèles des croyances les plus prioritaires. De cette manière, les notions de cohérence et d'inférence introduites par la logique classique deviennent également graduelles.

D'un point de vue sémantique, la logique possibiliste repose sur la notion de *distribution de possibilités*. Notée  $\pi$ , celle-ci est une fonction de  $\Omega$  dans  $[0,1]$  qui associe à chaque interprétation  $\omega$  un degré de possibilité. Ce degré, noté  $\pi(\omega)$ , représente simplement la compatibilité d'une interprétation  $\omega$  avec un ensemble de croyances  $B$ . Par convention,  $\pi(\omega) = 1$  signifie que  $\omega$  est totalement possible, là où  $\pi(\omega) = 0$  signifie que  $\omega$  n'est certainement pas compatible avec les croyances disponibles. Une distribution  $\pi$  est dite *normalisée* s'il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\pi(\omega) = 1$ .

Au moyen de ces définitions, il est alors possible de définir deux mesures différentes sur les formules de  $\mathcal{L}$ . La première de ces mesures est le *degré de cohérence* d'une formule  $\varphi$ , défini comme suit :

$$\Pi_{\pi}(\varphi) = \max\{\pi(\omega), \omega \in \text{Mod}(\varphi)\}.$$

Ce degré représente une mesure de la cohérence de  $\varphi$  vis-à-vis des croyances disponibles, représentées par  $\pi$ . De là, il est possible de définir une autre mesure, appelée *degré de nécessité* d'une formule  $\varphi$ , de la façon suivante :

$$N_{\pi}(\varphi) = 1 - \Pi_{\pi}(\neg\varphi).$$

Ce degré évalue dans quelle mesure  $\varphi$  peut être déduite à partir des croyances disponibles. En particulier,  $\Pi_{\pi}(\varphi) = 1$  exprime le fait qu'une formule  $\varphi$  est cohérente avec une base de croyances, tandis que,  $N_{\pi}(\varphi) = 1$  signifie que  $\varphi$  est déductible de façon totalement certaine de cette même base. Ainsi, la mesure de nécessité constitue également une extension de l'inférence propositionnelle classique, dans le sens où une formule  $\varphi$  peut être inférée d'une base de croyances, soit formellement  $N_{\pi}(\varphi) = 1$ , si et seulement si son opposé est incohérente avec cette même base, soit en d'autres termes  $\Pi_{\pi}(\neg\varphi) = 0$ .

D'un point de vue syntaxique, les informations incertaines sont représentées au moyen d'un ensemble de croyances avec priorités. Une base de croyances possibiliste  $B$  est un ensemble de

formules propositionnelles classiques associées à des poids, soit formellement :

$$B = \{(\varphi_i, a_i), i = 1, \dots, n\},$$

où  $a_i \in [0, 1]$ . De cette manière, le couple  $(\varphi_i, a_i)$  signifie que le degré de certitude associé à la croyance représentée par la formule  $\varphi_i$  est au moins égal à  $a_i$ , soit encore  $N_\pi(\neg\varphi) \geq a_i$ .

Il est alors possible d'associer à chaque base de croyances possibiliste  $B$  une distribution de possibilités, notée  $\pi_B$  de la façon suivante : chaque interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  est associée au degré de la croyance la plus importante de  $B$  qu'elle falsifie, ou au niveau 1 si  $\omega$  est cohérente avec  $B$ . Plus formellement :

**Définition 1** Soit  $B$  une base de croyances possibiliste. Alors quelque soit  $\omega \in \Omega$  :

$$\pi_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall (\varphi_i, a_i) \in B, \omega \models \varphi_i ; \\ 1 - \max\{a_i : (\varphi_i, a_i) \in B \text{ et } \omega \not\models \varphi_i\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Illustrons cette définition par l'exemple suivant :

**Exemple 1** Soit une base de croyances possibiliste  $B = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5)\}$ . Calculons la distribution de possibilité  $\pi_B$  qui lui est associée. Sur cet exemple,  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  avec  $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$ ,  $\omega_1 = \{\neg a, b\}$ ,  $\omega_2 = \{a, \neg b\}$  et  $\omega_3 = \{a, b\}$ .

Ainsi, sur cet exemple, nous obtenons  $\pi_B(\omega_0) = 0$ , puisque la formule la plus prioritaire, falsifiée par cette interprétation, est  $a \vee b$ . À l'inverse,  $\omega_2$  est modèle de cette base : nous obtenons donc  $\pi_B(\omega_2) = 1$ . De la même façon, sur cet exemple, nous obtenons  $\pi_B(\omega_1) = 0.5$ , et  $\pi_B(\omega_3) = 1$ .

Ainsi, une base de croyances possibiliste constitue une représentation compacte d'une distribution de possibilités. De plus, nous notons  $B^*$  l'ensemble des formules propositionnelles classiques obtenues en ignorant simplement les degrés associés à chaque croyance issue d'une base possibiliste donnée. Une base de croyances possibiliste  $B$  est dite cohérente si l'ensemble de formules  $B^*$  qui lui est associé est lui-même cohérent. Dans le cas d'une base incohérente, il est possible de mesurer le degré d'incohérence de celle-ci au moyen de la définition d'une *a-coupe*. Une *a-coupe* d'une base de croyances  $B$  est l'ensemble des formules issues de  $B$  dont le poids associé est supérieur à  $a$ . En des termes plus formels :

**Définition 2** L'*a-coupe* (resp. *a-coupe stricte*) d'une base de croyances  $B$ , noté  $B_{\geq a}$  (resp.  $B_{> a}$ ), est défini par :

$$B_{\geq a} = \{(\varphi_i, a_i) \in B : a_i \geq a\}$$

$$\text{(resp. } B_{> a} = \{(\varphi_i, a_i) \in B : a_i > a\}\text{)}.$$

Au moyen de cette définition, il est possible de mesurer l'incohérence d'une base de croyances possibiliste de la façon suivante : le degré d'incohérence d'une base de croyances possibiliste, noté  $Inc(B)$ , est le degré d'incohérence de la formule à partir de laquelle cette base devient incohérente. Formellement :

**Définition 3** Soit  $B$  une base de croyances possibiliste. Alors :

$$Inc(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ est cohérente ;} \\ \max\{a : B_{\geq a} \text{ est incohérente}\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Illustrons cette nouvelle définition par l'exemple suivant :

**Exemple 2** Soit une base de croyances possibiliste  $B = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5), (\neg a, 0.3), (b, 0.1)\}$ . Cette base de croyances est incohérente puisque les croyances  $(a, 0.5)$  et  $(\neg a, 0.3)$  sont contradictoires.

Sur cet exemple,  $Inc(B) = 0.3$  puisque la sous-base  $B' = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5)\}$  correspondante à l'a-coupe de  $B$  au degré 0.5 est cohérente, alors que la sous-base  $B'' = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5), (\neg a, 0.3)\}$  correspondante à l'a-coupe de  $B$  au degré 0.3 ne l'est plus.

De là, il est alors possible de définir une inférence syntaxique pour la logique possibiliste de la façon suivante : une formule  $\varphi$  est syntaxiquement inférée par une base de croyances possibiliste  $B$  si le degré d'incohérence associé à  $B$  est inférieur au degré de possibilité de la base de croyances obtenue en ajoutant la négation de  $\varphi$  à  $B$ . Ce mode d'inférence est une extension du principe de réfutation introduit par la logique propositionnelle classique. Plus formellement :

**Définition 4** Soit  $B$  une base de croyances possibiliste. Une formule  $\varphi$  est syntaxiquement inférée de  $B$ , noté  $B \vdash_{\pi} \varphi$ , si et seulement si :

$$Inc(B) < Inc(B \cup \{(\neg\varphi, 1)\}).$$

Cette définition nous permet finalement d'amener la notion de *sous-sommation* dans les bases de croyances possibilistes. Formellement :

**Définition 5** Soient  $B$  une base de croyances possibiliste, et  $(\varphi, a)$  une croyance issue de  $B$ . Alors  $(\varphi, a)$  est dite sous-sommée par  $B$  si et seulement si :

$$(B - \{(\varphi, a)\})_{\geq a} \vdash_{\pi} \varphi$$

En d'autres termes, une formule  $(\varphi, a)$  issue d'une base de croyances possibiliste est sous-sommée si elle est inférée par les autres formules issues de cette même base ayant un niveau de certitude supérieur ou égal à  $a$ . Il a été montré que si  $(\varphi, a)$  est une croyance sous-sommée de  $B$ , alors  $B$  et  $B' = B - \{(\varphi, a)\}$  sont deux bases de croyances possibilistes équivalentes, c'est-à-dire que ces deux bases de croyances produisent exactement la même distribution de possibilité sur les interprétations de  $\Omega$ .

### 1.2.2 Fonctions conditionnelles ordinales

Très proches de la théorie des possibilités, les fonctions conditionnelles ordinales (OCF) introduites par Spohn [Spo88, Spo90] constituent une autre représentation possible des informations incertaines. En effet, celles-ci représentent la plausibilité de chaque interprétation de  $\Omega$  en associant celles-ci à des poids, mais cette fois-ci à l'aide d'ordinaux. Nous considérerons dans ce mémoire un sous-ensemble des ordinaux, constitué des poids issus de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , et couramment employé à tort dans la littérature sous le terme d'OCF (voir à ce propos la discussion proposée par [Kon09]). Une fonction conditionnelle ordinaire est une fonction, notée  $\kappa$ , qui associe à chaque interprétation de  $\Omega$  un poids issue de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Il est également possible, par l'intermédiaire d'une telle fonction, d'associer un degré de plausibilité à chaque formule  $\varphi$  d'un langage  $\mathcal{L}$  de la façon suivante :

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}, \kappa(\varphi) = \min\{\kappa(\omega) : \omega \models \varphi\}.$$

Par convention,  $\kappa(\perp) = +\infty$ . De plus, une OCF est dite *admissible* par Spohn si et seulement si  $\kappa^{-1}(0) \neq \emptyset$ . Cette condition est la contrepartie de la notion de normalisation, proposée dans le cadre des mesures de possibilité. En d'autres termes, une fonction conditionnelle ordinaire est dite compatible si et seulement s'il existe une interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  telle que  $\kappa(\omega) = 0$ . Contrairement aux distributions de possibilités issues du cadre de la logique possibiliste, le poids associé à une interprétation  $\omega$  par une fonction ordinaire conditionnelle  $\kappa$  représente le degré d'impossibilité de  $\omega$ . Ainsi, le poids 0 représente la plausibilité maximale, alors que le poids  $+\infty$  représente l'impossibilité totale. De cette manière, et à l'inverse du cadre possibiliste, plus le degré associé à une interprétation de  $\Omega$  est petit, plus cette interprétation est préférée.

Alors que l'approche sémantique des OCF est très proche de celle de la logique possibiliste, c'est au niveau syntaxique que ces deux cadres diffèrent. Dans la contrepartie syntaxique des OCF, développée par Williams [Wil94, Wil95], les croyances sur le monde dont dispose une source sont représentées par un ensemble de formules propositionnelles associées à des ordinaux, soit formellement  $B = \{(\varphi_i, k_i), k_i \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}\}$ , qui représentent les croyances explicites d'une source. Pour ce type de bases de croyances, plus le poids associé à une formule est élevé, plus la croyance que cette formule représente est forte.

Cependant, et à l'inverse des bases de croyances possibilistes, ces ensembles de formules doivent être des *enracinement épistémiques partiels* [Gär88], définis formellement comme suit :

- (eep-1) (tautologie) si  $\vdash \varphi_i$  alors  $k_i = +\infty$  ;
- (eep-2) (non-redondance)  $\{\varphi_j : k_j > k_i\} \not\vdash \varphi_i$  ;
- (eep-3) si  $B^*$  est incohérent, alors  $\forall (\varphi_i, k_i) \in \text{Min}(B), k_i = 0$ ,

où  $\text{Min}(B) = \{(\varphi_i, k_i) \in B : \nexists (\varphi'_i, k'_i) \in B, k'_i < k_i\}$ . La condition (eep-1) signifie que les tautologies doivent être associées au rang le plus élevé. La condition (eep-2) signifie qu'une

formule ne peut être déduite des formules dont le poids associé est plus élevé. En d'autres termes, une croyance ne peut être déduite des croyances considérées comme plus plausibles. Finalement la condition (eep-3) signifie que lorsqu'une base de croyances est incohérente, alors le poids 0 est associé aux formules préférées selon cette même base.

Nous notons  $Exp(B)$  l'ensemble des formules représentant les croyances issues de  $B$  dont le rang n'est pas nul, soit formellement  $Exp(B) = \{\varphi_i : (\varphi_i, k_i) \in B, k_i \neq 0\}$ . Notons que d'après la condition (eep-3), cet ensemble est cohérent. À ce point, l'enracinement épistémique est alors obtenu en associant à chaque formule  $\varphi$  une valeur ordinale, noté  $z_B(\varphi)$  définie de la façon suivante :

**Définition 6** Soit  $B$  une base de croyances pondérées. Alors :

$$z_B(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } Exp(B) \not\vdash \varphi ; \\ \max\{k_i : \{\psi_j : (\psi_j, k_j) \in B, k_j \geq k_i\} \vdash \varphi\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le formalisme des OCF est très proche de celui de la logique possibiliste. En effet, il est dans un premier temps possible de remarquer que le degré associé de cette façon à chaque formule  $\varphi$  est très proche de la notion d' $a$ -coupe définie dans le cadre des bases de croyances possibilistes. De plus, Dubois et Prade [DP91] montrent que la fonction  $N(\varphi) = 1 - e^{-\kappa(\varphi)}$  est une mesure de nécessité, puisqu'elle vérifie la propriété caractéristique des mesures de nécessité :

$$N(\varphi \wedge \psi) = \min\{N(\varphi), N(\psi)\}.$$

D'un point de vue syntaxique, une base de croyances possibiliste peut devenir un enracinement épistémique partiel. Si l'ensemble des formules issues de cette base de croyances est cohérent, alors la condition (eep-3) est vérifiée. De plus, si les formules sous-sommées et les tautologies sont retirées de cette même base, alors les conditions (eep-1) et (eep-2) sont également vérifiées. Le tableau 1.1 montre comment transformer une OCF en une distribution de possibilités :

OCF	Théorie des possibilités
$\kappa(\omega)$	$\pi(\omega) = e^{-\kappa(\omega)}$
$\kappa(\varphi)$	$\Pi(\varphi) = e^{-\kappa(\varphi)}$
$B = \{(\varphi_i, k_i)\}$	$B = \{(\varphi_i, 1 - e^{-k_i})\}$

TABLE 1.1 – des OCF vers la logique possibiliste

Notons que la transformation inverse n'est possible que si le nouveau degré ainsi associé à chaque interprétation  $\kappa(\omega) = -\log_2(\pi(\omega))$  est une valeur entière.

### 1.2.3 Les polynômes

La représentation des croyances sous forme de polynômes est une autre extension possible de la logique des propositions. Cette représentation est proposée par Papini [Pap01] dans le cadre



de la révision sémantique des croyances, que nous aborderons plus tard dans ce chapitre. Soit  $\mathbb{P}$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\{0,1\}$  de la forme :

$$p(x) = \sum_{i=0}^m p_i x^i,$$

où  $p \in \{0,1\}$ . Pour des raisons de clareté de notation,  $p(x)$  sera par la suite noté  $p$ . Pour ce type de représentation, une base de croyances stratifiée  $B$  est un ensemble de formules propositionnelles classiques  $\varphi$  associées à des polynômes issus de  $\mathbb{P}$  et différents du polynôme 0, soit formellement :

$$B = \{(\varphi_i, P(\varphi_i)), i = 1, \dots, n\}$$

Les croyances issues de  $B$  sont ensuite comparées suivant la relation d'ordre *lexicographique* suivante :

**Définition 7** Soit  $p$  et  $p'$  deux polynômes issus de  $\mathbb{P}$ . Alors  $p <_{\mathbb{P}} p'$  si et seulement si :

$$\exists i \in \mathbb{N}, p_i < p'_i. \text{ et}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \text{ si } j < i, \text{ alors } p_j = p'_j.$$

De cette manière,  $P(\psi) <_{\mathbb{P}} P(\varphi)$  signifie que la croyance représentée par la formule  $\varphi$  et plus importante que celle représentée par  $\psi$ . Il est maintenant possible d'obtenir une distribution de poids associée à une base de croyances  $B$ , notée  $p_B$ , où chaque interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  est associée à un polynôme issu de  $\mathbb{P}$  d'une façon similaire à celle de la logique possibiliste :

$$p_B(\omega) = \max\{P(\varphi_i) : (\varphi_i, P(\varphi_i)) \in B \text{ et } \omega \not\models \varphi_i\},$$

où par convention  $\max(\emptyset) = 0$ . Cette forme de représentation des croyances, à la différence des autres cadres présentés, permet la réversibilité du principe de révision [BDLP02], que nous aborderons plus tard dans ce chapitre. Ce principe permet, intuitivement, de retrouver facilement l'état des croyances d'un agent, avant l'intégration d'une nouvelle information à la base de croyances qui lui est associée.

#### 1.2.4 Logique des pénalités

La logique possibiliste et les fonctions conditionnelles ordinales permettent d'associer un niveau d'incertitude à chaque croyance sur le monde dont l'agent dispose. Les bases de croyances étant alors représentées par des multi-ensembles de formules stratifiés, tels que les formules des strates les moins prioritaires sont les moins certaines, ces dernières sont alors plus facilement rejetées en cas de contradiction parmi les informations exprimées. En effet, pour ces formalismes,

sélectionner le sous-ensemble cohérent des croyances préférées d'une source peut alors se réduire à sélectionner les formules les plus importantes de la base de croyances, de telle façon que l'ensemble des formules retenues ne présente pas de contradiction. Ces différents formalismes présentés permettent d'établir un ordre sur les interprétations, en agrégeant les degrés associés à chaque croyance que ces interprétations falsifient. Pour les formalismes présentés jusqu'ici, les opérateurs d'agrégation utilisés sont les opérateurs minimum et maximum : en d'autres termes et pour ces différentes représentations, les interprétations falsifiant les formules les moins prioritaires sont alors les interprétations préférées.

Ces formalismes reposent donc sur l'intuition suivante : il est préférable de rejeter une interprétation falsifiant une croyance importante, même si cette interprétation satisfait la majeure partie des croyances considérées comme moins prioritaires. Cependant, en cas de contradiction des croyances disponibles, lorsqu'il faut choisir entre une interprétation de  $\Omega$  falsifiant une seule formule de forte priorité, et une autre interprétation falsifiant un très grand nombre de croyances de plus faibles priorités, ne devrait-on pas tenir compte à la fois de l'importance et du nombre de ces formules ? Ainsi, afin de déterminer les croyances préférées d'une source, la *logique des pénalités* propose alors de tenir compte à la fois de l'importance et du nombre des formules falsifiées par les interprétations possibles de  $\Omega$ . Pour cela, l'idée proposée par Pinkas [Pin91], puis développée par Dupin de Saint-Cyr [DdSC96], est de se baser sur un critère additif.

Dans le cadre de la logique des pénalités, une base de croyances, notée  $B$ , est représentée au moyen d'un multi-ensemble de formules propositionnelles associées à des *pénalités*. Cette pénalité, telle qu'elle est définie dans [Pin91], est un nombre réel issu de  $\mathbb{R}$  et correspond au prix à payer lorsque la formule qui lui est associée est falsifiée : plus la pénalité est élevée, plus la formule est prioritaire, ou certaine. Formellement :

$$B = \{(\varphi_i, \alpha_i), i = 1..n\},$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . En particulier, si une formule est associée au poids  $+\infty$ , celle-ci est totalement certaine et doit alors à tout prix être satisfaite. Notons alors que si chaque formule est associée à la pénalité  $+\infty$ , alors toutes les informations disponibles sont certaines et manipuler une telle base de croyances revient à manipuler une base de croyances propositionnelle classique.

D'un point de vue sémantique, et étant donnée une base de croyances  $B$ , il est alors possible de définir une notion de coût d'une interprétation vis-à-vis de  $B$  de la façon suivante [Pin91] : une interprétation  $\omega$  issue de  $\Omega$  est associée à un coût, respectif à  $B$ , noté  $Pen_B(\omega)$  et obtenu en additionnant les coûts associés aux formules issues de  $B$  falsifiées par  $\omega$ . Soit formellement :

$$\forall \omega \in \Omega, Pen_B(\omega) = \sum_{(\varphi_i, \alpha_i) \in B : \omega \not\models \varphi_i} \alpha_i.$$

De cette façon, une base de croyances à pénalités induit une *distribution de pénalités* sur les interprétations de  $\Omega$ . Dans ce cadre, plus la pénalité associée à une interprétation est faible, plus cette

interprétation est préférée. En particulier, les interprétations associées aux pénalités minimales sont considérées comme étant les moins chères, ou les plus plausibles, pour la source. Illustrons cette logique par l'exemple suivant :

**Exemple 3** Soit une base de croyances à pénalités  $B = \{(a \vee b, 8), (a, 5), (\neg b, 1)\}$ . Calculons la distribution de pénalités  $Pen_B$  qui lui est associée. Sur cet exemple,  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  avec  $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$ ,  $\omega_1 = \{\neg a, b\}$ ,  $\omega_2 = \{a, \neg b\}$  et  $\omega_3 = \{a, b\}$ .

Puisque  $\omega_0$  falsifie  $(a \wedge b, 8)$  et  $(a, 5)$ , nous obtenons  $Pen_B(\omega_0) = 8 + 5 = 13$ . De la même façon, pour la logique des pénalités, nous obtenons  $Pen_B(\omega_1) = 6$ ,  $Pen_B(\omega_2) = 0$  et  $Pen_B(\omega_3) = 1$ . Ainsi, sur cet exemple,  $\omega_2$  est l'état du monde le plus plausible selon la source.

De plus, deux bases de croyances à pénalités sont équivalentes si et seulement si ces deux bases induisent les mêmes distributions de pénalités sur les interprétations de  $\Omega$ . Remarquons alors que dans ce cadre, et à la différence de celui de la théorie des possibilités, une base de croyances n'est pas équivalente à elle-même otée de ses croyances sous-sommées. Par exemple, la base de croyances à pénalités  $B = \{(a, 1), (a, 1)\}$  n'est pas équivalente à la base  $B' = \{(a, 1)\}$  : selon  $B$ , en effet, falsifier la croyance  $a$  coûte 2 alors que pour  $B'$ , falsifier cette même croyance ne coûte que 1. Cependant, si une même formule  $\varphi$  apparaît plusieurs fois dans une même base de croyances, il est possible de remplacer toutes les occurrences de cette formule par une unique formule  $\varphi$  à laquelle est associée la somme des pénalités des occurrences de  $\varphi$  dans la base initiale. Ainsi, la base  $B = \{(a, 1), (a, 1)\}$  est équivalente, par exemple, à la base  $B'' = \{(a, 2)\}$  puisque pour ces deux bases, falsifier la croyance  $a$  coûte 2.

Remarquons que dans certains cas, les pénalités associées aux interprétations se compensent, et il n'est alors pas possible de trancher entre une formule importante et un ensemble de formules moins prioritaires. Notons également qu'utiliser cette logique peut amener des résultats très hétérogènes suivant les pondérations associées aux formules. De récents travaux de Chetcuti-Sperandio et Lagrue [CSL08] montrent alors différentes façons de choisir une échelle de poids appropriée afin d'éviter ce type de *collision* en logique des pénalités.

### 1.3 Approches qualitatives de la gestion des incohérences

Les différents formalismes que nous avons rappelés jusqu'à présent permettent de représenter la fiabilité des croyances disponibles sur le monde, en associant les formules représentant ces croyances à différents degrés au moyen d'échelles d'incertitude particulières. Les poids associés aux croyances peuvent ainsi être issus de l'intervalle  $[0, 1]$  pour la logique possibiliste, de l'ensemble des ordinaux dans le cadre des fonctions conditionnelles ordinales, ou encore être codés au moyen de polynômes. Nous avons vu que les bases de croyances ainsi représentées constituent des multi-ensembles de croyances stratifiés. De là, nous avons vu que ces mêmes bases permettent alors d'induire une distribution de degrés de certitude, ou de fiabilité, sur les interprétations de  $\Omega$

en agrégeant les degrés d'incertitude associés aux formules aux moyen des opérateurs minimum, maximum ou encore somme suivant la représentation considérée. Ainsi, dans le cas où ces bases de croyances se révéleraient être incohérentes, il est par exemple possible de sélectionner les interprétations préférées d'une source, représentant ainsi les états du monde les plus plausibles selon cette même source, en considérant cette distribution de degrés sur  $\Omega$ .

Comment faire alors, lorsque ces degrés d'incertitude encodant ainsi la fiabilité respective des croyances exprimées par une source sur le monde ne sont pas disponibles ? En logique propositionnelle classique, lorsqu'une base de croyances est cohérente, il est possible d'utiliser les mécanismes d'inférence proposés pour ce cadre afin d'en déduire de nouvelles informations. Cependant, dans le cas où cette même base se révèle être incohérente, il n'est plus possible de prendre de décision vis-à-vis d'une conclusion ou de son contraire. Est-il alors possible de tenir compte de la stratification de la base de croyances fournie par une source donnée, constituant un raffinement des représentations offertes par la logique propositionnelle classique, afin de pouvoir prendre à nouveau ce type de décision malgré la présence d'incohérences ?

### 1.3.1 Quelques rappels sur les relations

Nous présentons dans un premier temps un bref rappel sur la notion de relation. Une *relation* (binaire) portant sur un ensemble  $E$  est un sous-ensemble de  $E \times E$ , notée  $\mathcal{R}$ . Une relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $E \times E$  est alors dite :

- *réflexive* si et seulement si  $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$  ;
- *irréflexive* si et seulement si  $\forall x \in E, \neg(x\mathcal{R}x)$  ;
- *transitive* si et seulement si  $\forall x, y, z \in E$ , si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , alors  $x\mathcal{R}z$  ;
- *totale* si et seulement si  $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$  ou  $y\mathcal{R}x$  ;
- *symétrique* si et seulement si  $\forall x, y \in E$ , si  $x\mathcal{R}y$  alors  $y\mathcal{R}x$  ;
- *anti-symétrique* si et seulement si  $\forall x, y \in E$ , si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ , alors  $x = y$ .

Une relation qui n'est pas totale est dite *partielle*. Remarquons que les notions de réflexivité et d'irréflexivité sont des conditions fortes : une relation  $\mathcal{R}$  peut en effet être ni réflexive, ni irréflexive. Le Tableau 1.2 présente les différents types de relations que nous manipulons tout au long de notre étude, ainsi que leur propriétés respectives :

relation	réflexive	irréflexive	transitive	symétrique	anti-symétrique
pré-ordre	√	-	√	-	-
ordre	√	-	√	-	√
ordre stricte	-	√	√	-	-
équivalence	√	-	√	√	-

TABLE 1.2 – types de relation et propriétés

Soit un pré-ordre, noté  $\leq$ , et défini sur  $E \times E$ . Il est possible de lui associer un ordre stricte, noté  $<$ , de la façon suivante :

$$x < y \text{ ssi } x \leq y \text{ et } y \not\leq x.$$

Le pré-ordre  $\leq$  induit également une relation d'équivalence, notée  $\simeq$  et définie comme suit :

$$x \simeq y \text{ ssi } x \leq y \text{ et } y \leq x.$$

Soit maintenant  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Nous notons finalement  $Min(F, \leq)$  l'ensemble des éléments des éléments de  $F$  minimaux pour le pré-ordre  $\leq$ . Soit formellement :

$$Min(F, \leq) = \{x \in F : \nexists y \in F, y < x\}.$$

### 1.3.2 Représentation stratifiée des croyances

Dans le cadre de la logique propositionnelle classique, il est tout de même possible de lever les incohérences présentes au sein d'une base de croyances en sélectionnant les plus grands ensembles cohérents de formules issus de cette base incohérente : il est ainsi possible d'obtenir une *sous-base maximale cohérente*, qu'elle soit maximale pour l'inclusion ou en termes de cardinalité. Cependant, dans le cadre des bases de croyances stratifiées, les croyances disponibles sur le monde sont accompagnées d'une relation de priorité *qualitative*, indiquant alors lesquelles de ces croyances sont les plus prioritaires. Nous notons  $B$  une base de croyances stratifiée : cette base est composée d'un ensemble de strates de moins en moins prioritaires, elles-mêmes composées de formules propositionnelles. Soit formellement :

$$B = \{S_1, \dots, S_n\}.$$

De cette manière, ce type de base de croyances fournit une relation qualitative sur les formules issues de  $B$  : une formule  $\varphi$  issue d'une strate  $S_i$  est préférée à une autre formule issue d'une strate  $S_k$  si et seulement si  $i < k$ . En particulier, la strate  $S_1$  regroupe donc l'ensemble des formules les plus prioritaires de  $B$ . De plus, si  $B'$  est une sous base de  $B$ , nous noterons  $B'_{S_i}$  l'ensemble des formules de  $B'$  issues de la strate  $S_i$  de  $B$ .

Dans le cas où une telle base de croyances stratifiée se révèle être incohérente, une première idée est de sélectionner, au niveau syntaxique, les meilleurs sous-ensembles cohérents de croyances issues de cette base. Pour cela, un premier critère, appelé *best-out* [BCD<sup>+</sup>93], noté  $<_{bo}$ , permet de comparer de deux sous-bases d'une base de croyances stratifiée de la façon suivante : un sous ensemble  $B'$  de croyances issues d'une base stratifiée  $B$  est préféré à un autre sous-ensemble  $B''$  si et seulement si le degré de la strate la plus prioritaire de  $B$  contenant des formules ne figurant pas dans  $B'$  est supérieur au degré de la strate la plus prioritaire de  $B$  contenant des formules ne figurant pas dans  $B''$ . Formellement :

**Définition 8** Soit  $B = \{S_1, \dots, S_n\}$  une base de croyances stratifiée. Soient  $B'$  et  $B''$  deux sous-bases cohérentes de  $B$ .  $B'$  est strictement préférée  $B''$  suivant le critère best-out, noté  $B' <_{bo}^B B''$  si et seulement si :

$$\min\{i, \exists \varphi \in S_i \setminus B'\} > \min\{i, \exists \varphi \in S_i \setminus B''\}.$$

Cette définition a été étendue au cadre des relations partielles dans [BLP04].

Il existe une autre relation, appelée *relation incl-based* [Gef92, BCD<sup>+</sup>93], que l'on trouve également sous le terme de *discrimin* (voir par exemple [DFP97, CMLLM04]), portant sur les sous-bases d'une base de croyances stratifiée  $B$ . Cette relation permet d'obtenir ce que Brewka nomme les *sous-théories préférées* [Bre89]. Cette relation, notée  $<_{incl-based}$ , se base sur les notions de stratification et d'inclusion, et sur l'intuition suivante : afin de déterminer si  $B'$ , une sous-base cohérente de  $B$ , est préférée à une autre sous-base cohérente  $B''$ ,  $B'$  et  $B''$  sont comparées strate par strate à partir de leurs strates les plus prioritaires. Tant que les strates considérées sont identiques, les strates les moins prioritaires sont comparées. Dès que les deux strates considérées diffèrent, une de ces deux sous-base sera alors préférée en cas d'inclusion stricte de l'une de ces deux strates dans l'autre, tandis que  $B'$  et  $B''$  sont considérées incomparables dans le cas contraire. En des termes plus formels :

**Définition 9** Soit  $B = \{S_1, \dots, S_n\}$  une base de croyances stratifiée. Soient  $B'$  et  $B''$  deux sous-bases cohérentes de  $B$ .  $B'$  est préférée  $B''$  suivant le critère discrim, noté  $B' <_{incl-based}^B B''$  si et seulement si :

1.  $\exists S_i \in B, B'_{S_i} \subset B''_{S_i}$  ;
2.  $\forall S_j$  telle que  $j < i, B'_{S_j} = B''_{S_j}$ .

Remarquons que la relation  $<_{incl-based}$  constitue, en général, un ordre stricte. Les sous-bases de croyances préférées d'une source sont alors les éléments minimaux pour cet ordre. En d'autres termes, une sous-base  $B'$  est l'ensemble des croyances les plus plausibles d'une source s'il n'est pas possible d'obtenir un sous-ensemble cohérent  $B''$  de croyances issues de la base  $B$  associée à cette même source, tel que  $B'' <_{dmin}^B B'$ .

Défini de cette façon, il est possible d'identifier l'ensemble des éléments minimaux  $B'$  d'une base de croyances stratifiée  $B$  pour l'ordre discrim en utilisant la construction suivante :

- $B'_{S_1}$  est une sous-base cohérente et maximale pour l'inclusion de  $S_1$  ;
- $\forall S_i \in B, B'_{S_1} \cup \dots \cup B'_{S_i}$  est une sous-base cohérente et maximale pour l'inclusion de  $B'_{S_1} \cup \dots \cup B'_{S_{i-1}} \cup S_i$ .

L'ordre basé sur le critère  $<_{incl-based}^S$  permet donc d'obtenir les sous-ensembles de croyances préférées issues d'une base de croyances incohérente, en se basant uniquement sur une relation

qualitative exprimée sur les croyances disponibles et en se reposant sur les concepts de stratification et d'inclusion. Une autre définition équivalente proposée dans [Bre89, CRS92] permet de traiter le cas des relations partielles.

Il est possible de définir une autre relation, appelée *relation lexicographique* [BCD<sup>+</sup>93, Leh95a], prenant en compte cette fois-ci la cardinalité des strates lors du calcul des croyances préférées d'une source. Ainsi, intuitivement, le critère lexicographique, noté  $<_{lex}$ , compare les strates de deux sous-ensembles cohérents de croyances deux à deux des plus importantes aux moins prioritaires, mais cette fois en termes de cardinalité et non d'inclusion. Soit formellement :

**Définition 10** Soit  $B = \{S_1, \dots, S_n\}$  une base de croyances stratifiée. Soient  $B'$  et  $B''$  deux sous-bases cohérentes de  $B$ .  $B'$  est préférée  $B''$  suivant le critère lexicographique, noté  $B' <_{lex}^B B''$  si et seulement si :

1.  $\exists S_i \in B, |B'_{S_i}| < |B''_{S_i}|$ ;
2.  $\forall S_j$  telle que  $j < i, |B'_{S_j}| = |B''_{S_j}|$ .

Notons que la relation  $<_{lex}$  constitue également un ordre stricte. Les sous-bases de croyances préférées d'une source sont alors les éléments minimaux pour cet ordre. Ainsi, une sous-base  $B'$  est l'ensemble des croyances les plus certaines d'une source s'il n'est pas possible d'obtenir un sous-ensemble cohérent  $B''$  de croyances issues de la base  $B$  associée à cette même source, tel que  $B'' <_{lex}^B B'$ . Remarquons que, dans la littérature, la relation lexicographique a été étendue au cas des bases de croyances stratifiées partiellement ordonnées [YBL<sup>+</sup>08].

Remarquons également que, finalement, l'ordre obtenu au moyen du critère lexicographique est en fait un raffinement de l'ordre basé sur le critère discrim, lui même constituant un raffinement de celui obtenu au moyen du critère best-out [BCD<sup>+</sup>93] :

$$\forall B', B'' \in B, B' <_{bo}^B B'' \Rightarrow B' <_{incl-based}^B B'' \Rightarrow B' <_{lex}^B B''.$$

Notons que dans le cas général, les réciproques sont fausses.

## 1.4 Révision des croyances

Tout au long de ce chapitre, nous avons présenté différents formalismes permettant la représentation des croyances que possède une source sur le monde. Une base de croyances est donc un ensemble d'informations codées au moyen de formules propositionnelles, éventuellement accompagnées d'une incertitude quantifiée ou de priorités qualitatives. Nous avons vu qu'il est possible de soulever certaines incohérences qui peuvent être présentes dans ces bases en sélectionnant un sous-ensemble maximal de croyances préférées. Les multi-ensembles de croyances ainsi obtenues à partir de ces bases constituent cependant des multi-ensembles non stratifiés de croyances

propositionnelles non pondérées. Une question se pose alors : comment intégrer de nouvelles informations obtenues par une source à la base de croyances pondérées qui lui est associée, sans pour autant rendre cette même base incohérente lorsqu'elle ne l'est initialement pas ? En effet, pour de nombreuses applications, une source peut être confrontée à une nouvelle information considérée comme plus sûre que l'état actuel de ses croyances. Que faire alors si cette nouvelle information rentre en contradiction avec la base de croyances associée à cette source ?

Le problème de la révision de croyances consiste donc à intégrer une nouvelle information plus fiable que l'état actuel des croyances d'un agent, également appelé *état épistémique* [Gär88]. Le terme état épistémique désigne une représentation idéalisée de l'état mental d'un agent, comprenant à la fois ses croyances, c'est-à-dire sa vision incertaine actuelle du monde, mais aussi des *méta-croyances*, qui sont en fait des croyances sur ces mêmes croyances. En d'autres termes, l'état épistémique d'un agent, que nous notons  $\Psi$ , représente l'ensemble des informations à partir desquelles cette source prendra ses décisions. Il peut être représenté au moyen d'un ordre, voir d'une distribution de probabilités ou de possibilités sur un ensemble de mondes possibles. De par leur nature incertaine, ces informations sur le monde peuvent être éronnées. Le processus de révision des croyances permet donc à ces croyances d'évoluer et de les remettre en adéquation avec le monde réel au moyen de nouvelles observations. Ces nouvelles observations doivent bien sûr être cohérentes, mais peuvent donc être incohérentes avec les croyances d'un agent. La révision de croyance permet alors de corriger la base de croyances associée à cet agent, afin de rapprocher ses croyances du monde tel qu'il est réellement tout en restant le plus proche possible de ses croyances initiales. Ce principe est également connu sous le nom de *changement minimal*.

### 1.4.1 Le cadre AGM

Le problème de la révision des croyances a été formalisé pour la première fois par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson [AGM85]. Le problème de la révision des croyances est alors axiomatisé sous forme d'un ensemble de postulats de rationalité, c'est-à-dire un ensemble de propriétés que doivent respecter un opérateur de révision adoptant un *comportement raisonnable*. Ces postulats se basent sur trois principes :

1. la nouvelle information doit être intégrée aux croyances de l'agent ;
2. la base de croyances obtenue après révision doit être cohérente ;
3. (principe du changement minimal) les croyances de l'agent doivent être modifiées le moins possible.

Dans le cadre de la formalisation AGM, l'état épistémique d'un agent, noté  $\Psi$  est codé par le biais d'un ensemble de formules propositionnelles, parfois noté  $Bel(\Psi)$  et noté ici simplement  $B$ . L'ensemble des croyances d'un agent est alors représenté par l'ensemble des conclusions obtenues



à partir de  $B$  et noté  $Cn(B)$ . Formellement :

$$Cn(B) = \{\varphi : B \vdash \varphi\}.$$

Cette représentation permet alors de définir dans un premier temps l'*expansion* [AGM85] d'un état épistémique  $B$  par une nouvelle information représentée par une formule propositionnelle  $\mu$ , notée  $B \dot{+} \mu$ . L'expansion de  $B$  par  $\mu$  est en effet l'ensemble des conclusions qui peuvent être obtenues à partir de l'union de  $B$  et de  $\mu$ . Formellement :

$$B \dot{+} \mu = Cn(B \cup \{\mu\})$$

Cependant, cette opération ne peut permettre à elle seule de résoudre le problème de la révision de croyances, puisque l'expansion par une nouvelle information contradictoire avec l'ensemble des croyances d'une source aboutirait à un ensemble de croyances incohérent. Alchourrón, Gärdenfors et Makinson définissent alors un opérateur  $*$  [AGM85] permettant la révision d'un état épistémique  $B$  par une nouvelle information  $\mu$ , notée  $B * \mu$ . Cet opérateur devrait, pour adopter un *comportement idéal*, respecter l'ensemble des propriétés suivantes, également appelées *postulats de rationalité* pour la révision des croyances :

- (AGM1)  $B * \mu$  est un ensemble des formules déductivement clos ;
- (AGM2)  $\mu \in B * \mu$  ;
- (AGM3)  $B * \mu \subseteq B \dot{+} \mu$  ;
- (AGM4) si  $\neg\mu \notin Cn(B)$ , alors  $B \dot{+} \mu \subseteq B * \mu$  ;
- (AGM5)  $B * \mu \equiv Cn(\top)$  si et seulement si  $\mu$  est une formule incohérente ;
- (AGM6) si  $\mu \equiv \varphi$ , alors  $B * \mu \equiv B * \varphi$  ;
- (AGM7)  $B * (\mu \wedge \varphi) \subseteq (B * \mu) \dot{+} \varphi$  ;
- (AGM8) si  $\neg\varphi \notin B * \mu$ , alors  $(B * \mu) \dot{+} \varphi \subseteq B * (\mu \wedge \varphi)$ .

Remarquons que ces postulats ne définissent pas un opérateur unique, mais permettent de caractériser un ensemble d'opérateurs de révision. Ainsi, d'après (AGM1), le résultat de la révision doit être une théorie (déductivement close). (AGM2) signifie que la nouvelle information doit faire partie des nouvelles croyances de la source. (AGM3) signifie qu'on ne doit pas pouvoir déduire plus d'informations d'une révision qu'on ne pourrait en obtenir d'une expansion. Associé à (AGM4), ces deux postulats signifie que lorsque la nouvelle information est cohérente avec les croyances actuelles d'une source, alors effectuer une révision équivaut à utiliser l'expansion. Le postulat (AGM5) assure qu'une révision par une nouvelle information cohérente produira un ensemble de croyances cohérent. (AGM6) stipule que l'opérateur de révision doit être indépendant de la syntaxe : les révisions d'un état épistémique par de nouvelles informations équivalentes produiront des ensembles de croyances équivalents. Finalement, les postulats (AGM7) et (AGM8) assurent conjointement le principe du changement minimal.

Remarquons que pour le problème de la révision des croyances, tel que nous l'avons exposé, et tel qu'il est axiomatisé par AGM [AGM85], la nouvelle information observée doit être intégrée aux croyances de l'agent. Notons qu'à l'inverse, il existe des travaux s'interrogeant sur l'*acceptabilité* de la nouvelle information [BFH98]. De même, nous considérons la nouvelle information comme prioritaire vis-à-vis des croyances d'un agent. Ce principe de *primauté forte* a été remis en questions par [BDPW02], s'interrogeant alors sur l'intégration d'informations incertaines.

### 1.4.2 Les postulats KM

Une reformulation des postulats AGM est proposée par Katsuno et Mendelzon [KM91]. Celle-ci a pour but de représenter de façon compacte les croyances d'une source au moyen d'une formule propositionnelle. Dans ce sens, il devient possible de se focaliser sur les modèles des formules représentant les états épistémiques d'une source avant et après révision, puis de dissocier les interprétations possibles des interprétations impossibles pour chacun de ces états. Ainsi, selon Katsuno et Mendelzon, un opérateur, noté  $\circ$ , permettant la révision d'une formule  $\varphi$  représentant une base de croyances par une formule  $\mu$  représentant la nouvelle information, notée  $\varphi \circ \mu$ , se comporte rationnellement s'il satisfait les postulats suivants :

- (KM1)  $\varphi \circ \mu \models \mu$  ;
- (KM2) si  $\varphi \wedge \mu$  est cohérent, alors  $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$  ;
- (KM3) si  $\mu$  est cohérent, alors  $\varphi \circ \mu$  est cohérent ;
- (KM4) si  $\varphi_1 \equiv \varphi_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$  ;
- (KM5)  $(\varphi \circ \mu) \wedge \psi \models \varphi \circ (\mu \wedge \psi)$  ;
- (KM6) si  $(\varphi \models \mu) \wedge \psi$  est cohérent, alors  $\varphi \circ (\mu \wedge \psi) \models (\varphi \models \mu) \wedge \psi$ .

Le postulat (KM1) signifie que les modèles de la formule résultante de la révision d'un état épistémique par une nouvelle information sont également modèles de la formule représentant cette nouvelle information. (KM2) signifie que si la nouvelle information est cohérente avec les croyances disponibles, le résultat de la révision sera alors la réunion de ces croyances avec la nouvelle information. (KM3) signifie que le résultat de l'opération de révision mène à une incohérence si et seulement si la nouvelle information est intrinséquement incohérente. Le postulat (KM4) assure le principe d'indépendance de la syntaxe. Les postulats (KM5) et (KM6) assurent quant à eux conjointement le principe de minimalité.

À la différence du cadre AGM, l'état épistémique d'une source n'est plus représenté par un ensemble de formules mais par une formule propositionnelle unique. De façon similaire, le résultat de la révision n'est plus codé au moyen de l'ensemble des conclusions déduites d'un ensemble de formules, mais par une formule propositionnelle. L'axiomatisation du problème de la révision des croyances proposée par Katsuno et Mendelzon est cependant équivalente à celle proposée par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson. Il est en effet possible de passer d'un opérateur de révision

sur les formules  $\circ$  à un opérateur de révision sur les théories  $*$  de la façon suivante :

$$Cn((\bigwedge_{\varphi \in B} \varphi) \circ \mu) \equiv B * \mu.$$

Cette transformation permet alors d'énoncer le théorème suivant [KM91] :

**Théorème 1** *Soit un opérateur de révision sur les théories  $*$  et  $\circ$  l'opérateur de révision sur les formules qui lui est associé. Alors :*

$$\circ \text{ satisfait (KM1) – (KM6) ssi } * \text{ satisfait (AGM1) – (AGM8).}$$

Katsuno et Mendelzon présentent également dans [KM91] un théorème de représentation basé sur la notion d'*assignement fidèle*. Un tel assignement est une fonction qui associe une formule propositionnelle  $\varphi$  à un pré-ordre total sur les interprétations de  $\Omega$ , noté  $\leq_{\varphi}$ , et tel que pour toutes formules  $\varphi$  et  $\psi$ , pour toutes interprétations  $\omega$  et  $\omega'$ , les conditions suivantes sont respectées :

1. si  $\omega \in Mod(\varphi)$  et  $\omega' \in Mod(\varphi)$ , alors  $\omega \approx_{\varphi} \omega'$  ;
2. si  $\omega \in Mod(\varphi)$  et  $\omega' \notin Mod(\varphi)$ , alors  $\omega <_{\varphi} \omega'$  ;
3. si  $\varphi \equiv \psi$ , alors  $\leq_{\varphi} = \leq_{\psi}$ .

$\leq_{\varphi}$  (resp.  $<_{\varphi}$ ) signifie que selon l'état épistémique d'une source représenté par la formule  $\varphi$ , l'interprétation  $\omega$  est préférée (resp. strictement préférée) à l'interprétation  $\omega'$ , tandis que  $\omega \approx_{\varphi} \omega'$  signifie que  $\omega$  et  $\omega'$  sont également préférés. La première condition signifie qu'un modèle de  $\varphi$  ne peut être strictement préféré à un autre modèle de  $\varphi$ , alors que la seconde condition stipule que les modèles de  $\varphi$  doivent être strictement préférés aux contre-modèles de  $\varphi$ . Finalement, la dernière condition assure l'indépendance de ces ordres sur les interprétations vis-à-vis de la syntaxe.

En plus de proposer une reformulation des postulats AGM, Katsuno et Mendelzon ont montré [KM91] qu'un opérateur vérifiant l'axiomatisation qu'ils proposent induit un pré-ordre total, c'est à dire une relation réflexive, transitive et totale sur les interprétations de  $\Omega$ , et que le problème de la révision peut alors se réduire à rechercher les éléments minimaux pour cet ordre. En effet, le théorème suivant énonce qu'un opérateur de révision vérifie les postulats KM si et seulement s'il existe un assignement fidèle qui l'associe à un ordre  $\leq_{\varphi}$ , tel que les éléments minimaux pour cet ordre sont les modèles du résultat de la révision. Plus formellement :

**Théorème 2** *Un opérateur de révision  $\circ$  vérifie les postulats de rationalité (KM1)-(KM6) si et seulement s'il existe un assignement fidèle qui associe  $\varphi$  à un pré-ordre total  $\leq_{\varphi}$  tel que :*

$$Mod(\varphi \circ \mu) = Min(Mod(\mu), \leq_{\varphi}).$$

En d'autres termes, selon un opérateur de révision vérifiant les postulats de rationalité KM, les interprétations modèles du résultat de la révision d'un état épistémique par une nouvelle information sont alors les modèles de cette nouvelle information minimaux pour l'ordre représentant l'état épistémique initial de la source.

Remarquons que les postulats proposés par Katsuno et Mendelzo ont été étendus, dans la littérature, au cas des ordres partiels [BLP05].

### 1.4.3 Révision itérée

Nous avons présenté une première approche axiomatique permettant la prise en compte de toute nouvelle information, potentiellement contradictoire avec les croyances sur le monde dont dispose une source. Que faire cependant lorsque plusieurs observations parviennent à la source simultanément ? D'après les postulats de rationalité proposés par Katsuno et Mendelzon, il est possible de réviser la base de croyances associée à la source par la conjonction de ces nouvelles informations, mais que faire alors lorsque cette conjonction se révèle être incohérente ? Il peut arriver également, dans certaines situations, que les sources ne puissent pas disposer de toutes ces informations en même temps, et que celles-ci leur soient plutôt fournies au fur et à mesure des observations successives. Il n'est alors pas possible non plus d'obtenir à tous moments la conjonction de toutes ces nouvelles informations.

L'intuition est alors de réviser de manière successive la base de croyances associée à la source par chaque nouvelle information qui lui parvient. La notion de *révision itérée* a ainsi été formalisée dans [Leh95b], puis dans [DP97]. Nous rappelons dans cette section la seconde approche, proposée par Darwiche et Pearl. Cette approche permet de réviser une base de croyances par  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ , une séquence d'informations de plus en plus plausibles. Darwiche et Pearl [DP97] ne se focalisent cependant pas sur un cadre particulier, mais propose plutôt une représentation beaucoup plus générale. Ainsi, l'état épistémique  $\Psi$  considéré par cette approche peut être représenté par une distribution de possibilité, une fonction conditionnelle ordinale, etc. La représentation des croyances considérée doit cependant permettre d'obtenir une formule propositionnelle, noté  $Bel(\Psi)$  et représentant les croyances actuelles de la source. Le résultat de la révision, noté  $\Psi \circ \mu$ , est également un état épistémique, et les croyances actuelles de la sources après révision seront représentées par une formule propositionnelle notée  $Bel(\Psi \circ \mu)$ . Une fois les postulats KM réécrits et adaptés à cette représentation générale des croyances d'une source, Darwiche et Pearl proposent d'y adjoindre l'ensemble des postulats suivants [DP97], complétant alors les premiers et caractérisant de cette manière le comportement idéal d'un opérateur de révision itérée :

- (DP1) si  $\varphi \models \mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \varphi) \equiv Bel(\Psi \circ \varphi)$  ;
- (DP2) si  $\varphi \models \neg\mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \varphi) \equiv Bel(\Psi \circ \varphi)$  ;
- (DP3) si  $Bel(\Psi \circ \varphi) \models \mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \varphi) \models \mu$  ;

**(DP4)** si  $Bel(\Psi \circ \varphi) \not\models \neg\mu$ , alors  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \varphi) \not\models \neg\mu$ .

La première condition signifie que si les modèles de  $\varphi$  sont contenus dans ceux de  $\mu$ , alors réviser un état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  puis par la formule  $\varphi$  équivaut à réviser directement  $\Psi$  par  $\varphi$ . De façon similaire, la seconde condition signifie que si  $\mu$  et  $\varphi$  ne partagent aucun modèle commun, alors réviser un état épistémique  $\Psi$  par la formule  $\mu$  puis par la formule  $\varphi$  équivaut à réviser directement  $\Psi$  par  $\varphi$ . Ces deux postulats pris conjointement assurent que la dernière information obtenue d'une séquence reçue par la source est toujours la plus prioritaire. La troisième condition stipule que si  $\mu$  peut être déduite de  $Bel(\Psi \circ \varphi)$ , alors  $\mu$  doit toujours pouvoir être déduite de  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \varphi)$ . En particulier, ce postulat assure qu'une information doit être préservée par une base de croyances tant qu'aucune nouvelle information ne vient la contredire. Finalement, la dernière condition garantit que si  $\neg\mu$  ne peut être déduite de  $Bel(\Psi \circ \varphi)$ , alors  $\neg\mu$  ne doit pas pouvoir être déduite de  $Bel((\Psi \circ \mu) \circ \varphi)$ . Ainsi, ce postulat assure que si la présence d'une information  $\mu$  n'est pas contradictoire avec la révision de  $\Psi$  par  $\varphi$ , alors la révision de  $\Psi$  par  $\mu$  puis par  $\varphi$  n'est pas non plus contradictoire avec la présence de  $\mu$ .

Cet ensemble de postulats additionnels permet alors à Darwiche et Pearl d'obtenir le théorème de représentation suivant [DP97] : un opérateur de révision vérifie les postulats KM et les postulats DP si et seulement si cet opérateur induit un assignement fidèle qui associe  $\Psi$  à un pré-ordre total  $\leq_{\Psi}$  et un assignement fidèle qui associe  $\Psi \circ \mu$  à un pré-ordre total  $\leq_{\Psi \circ \mu}$ , qui vérifient alors un ensemble de conditions complémentaires à celles proposées par Katsuno et Mendelzon. Formellement :

**Théorème 3** *Soit  $\circ$  un opérateur de révision vérifiant les postulats (KM1)-(KM6). Cet opérateur vérifie les postulats (DP1)-(DP4) si et seulement s'il existe un assignement fidèle qui associe  $\Psi$  à un pré-ordre total  $\leq_{\Psi}$  et un assignement fidèle qui associe  $\Psi \circ \mu$  à un pré-ordre total  $\leq_{\Psi \circ \mu}$  tels que :*

1. si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \in Mod(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega' \text{ssi } \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
2. si  $\omega \notin Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega' \text{ssi } \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
3. si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega <_{\Psi} \omega' \implies \omega <_{\Psi \circ \mu} \omega'$  ;
4. si  $\omega \in Mod(\mu)$  et  $\omega' \notin Mod(\mu)$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega' \implies \omega \leq_{\Psi \circ \mu} \omega'$ .

La première condition signifie qu'un modèle de la nouvelle information est préféré après révision à un autre modèle de cette même information si et seulement si le premier était préféré au second avant la révision. De façon similaire, la seconde condition stipule qu'un contre-modèle de la nouvelle information est préféré à un autre contre-modèle de cette même information après révision si et seulement si le premier était préféré au second avant cette révision. La troisième condition assure que si un modèle de la nouvelle information est strictement préféré à un contre-modèle de cette information avant révision, alors cette préférence stricte tiendra toujours après

révision par cette même information. Finalement, la quatrième condition garantit que si un modèle de la nouvelle information est préféré à un contre-modèle de cette information avant révision, alors ce modèle sera toujours préféré au contre-modèle après révision par cette même information.

Il existe des approches, dans la littérature, se proposant de déterminer l'état épistémique d'un agent, ainsi que sa dynamique, d'un point de vue extérieur à cet agent. Ces approches se basent sur l'observation des nouvelles informations qui lui sont apportées, et des déductions qu'il est alors en mesure de produire [BN05, BN08].

Remarquons qu'il existe également des opérateurs de révision à *renforcement* : en effet, Booth et Meyer [BM06], et parallèlement Jin et Thielscher [JT07] ont proposé une approche, selon laquelle la plausibilité de chaque interprétation vérifiant la nouvelle information augmente au niveau de l'état épistémique de l'agent. Plus récemment, Konieczny et Pino Pérez [KPP08b] proposent dans leurs travaux sur l'*amélioration* que si la nouvelle information n'est pas totalement certaine, les interprétations vérifiant celle-ci doivent néanmoins toutes devenir plus plausibles pour l'agent. Ainsi, si l'amélioration par cette même information, est itérée un nombre suffisant de fois, celle-ci fera alors partie des croyances préférées de l'agent. Cette approche constitue une généralisation du concept de révision itérée, que nous abordons plus tard dans ce chapitre.

#### 1.4.4 Révision naturelle

Nous présentons dans cette section un premier exemple d'approche de la révision, appelée *révision naturelle* et proposée par Boutilier [Bou93] (et également évoquée par Spohn). Pour celle-ci, l'état épistémique d'une source, noté  $\Psi$ , est représenté en des termes sémantiques par un pré-ordre total  $\leq_\Psi$  sur l'ensemble des interprétations de  $\Omega$ . Intuitivement, cette relation sur les interprétations représente simplement les préférences de la source entre les différents états du monde possibles. De cette façon, l'ensemble des croyances préférées de la source, noté  $Bel(\Psi)$ , est alors représenté sémantiquement par l'ensemble des interprétations minimales selon  $\leq_\Psi$ . Soit formellement :

$$Mod(Bel(\Psi)) = Min(\Omega, \leq_\Psi).$$

Une des hypothèses de cette approche est que la nouvelle information est considérée comme peu certaine, bien que tout de même plus sûre que les croyances actuelles de la source. Ainsi, l'opérateur de révision naturelle, proposé par Boutilier et noté  $\circ_n$ , donne la priorité aux meilleurs modèles de la nouvelle information. Formellement :

**Définition 11** Soit  $\Psi$  l'état épistémique d'une source, représenté par un pré-ordre total  $\leq_\Psi$  sur les interprétations de  $\Omega$ . Soit  $\mu$  une formule propositionnelle encodant une nouvelle information. L'état épistémique résultant de la révision de  $\Psi$  par  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_n \mu$ , est représenté par un pré-ordre total sur  $\Omega$ , noté  $\leq_{\Psi \circ_n \mu}$ , tel que :

1. si  $\omega \in Min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$  et  $\omega' \notin Min(Mod(\mu), \leq_\Psi)$  alors  $\omega <_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  ;

2. si  $\omega \in \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  et  $\omega' \in \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  alors  $\omega =_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$  ;
3. si  $\omega \notin \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  et  $\omega' \notin \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \leq_{\Psi})$  alors  $\omega \leq_{\Psi} \omega'$  ssi  $\omega \leq_{\Psi \circ_n \mu} \omega'$ .

La première condition stipule que les modèles de  $\mu$  sont strictement préférés à toute autre interprétation de  $\Omega$ . La seconde condition signifie que tous les modèles de  $\mu$  sont préférés de façon égale. La dernière condition stipule finalement le fait que l'ordre entre les interprétations restantes est conservé. Défini de cette façon, l'opérateur de révision naturelle proposé par Boutilier vérifie l'intégralité des postulats KM.

### 1.4.5 Révision ordinale

Une autre approche pour la révision, appelée *révision ordinale* est proposée par Spohn [Spo88]. Pour celle-ci, l'état épistémique d'une source, noté  $\Psi$ , est représenté par une fonction conditionnelle ordinale, noté  $\kappa_{\Psi}$ , portant sur les interprétations de  $\Omega$ . Comme nous l'avons vu précédemment, pour ce type de représentation, les interprétations associées au degré  $+\infty$  sont totalement impossibles, tandis que celles associées au poids 0 représentent les états du monde les plus plausibles. Ainsi, l'ensemble des croyances préférées de la source, noté  $\text{Bel}(\Psi)$ , est défini sémantiquement par l'ensemble des interprétations dont le degré associé vaut 0. En des termes plus formels :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\Psi)) = \{\omega \in \Omega : \kappa_{\Psi}(\omega) = 0\}.$$

L'opérateur de révision ordinale, proposé par Spohn et noté  $\circ_{\mathbb{N}}$ , considère la nouvelle information comme relativement sûre : l'hypothèse sous-jacente est que la plupart des modèles de la nouvelle information sont plus plausibles que les contre-modèles de cette information. Cet opérateur repose sur une opération de translation, notée  $\kappa_{\mu, m}$ , où  $\mu$  est une formule propositionnelle représentant la nouvelle information, et  $m$  un ordinal représentant la confiance accordée à cette information, c'est-à-dire à quel point les modèles de la nouvelle information doivent être préférés à ses contre-modèles. Cette opération associe alors un nouvel ordinal à chaque interprétation de  $\Omega$  de la façon suivante :

$$\kappa_{\mu, m}(\omega) = \begin{cases} \kappa_{\Psi}(\omega) - \kappa_{\Psi}(\mu) & \text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu) ; \\ \kappa_{\Psi}(\omega) - \kappa_{\Psi}(\neg\mu) + m & \text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu). \end{cases}$$

Rappelons que  $\kappa_{\Psi}(\mu) = \min\{\kappa(\omega) : \omega \models \mu\}$ . Ainsi, si une interprétation  $\omega$  est modèle de  $\mu$ , on retranche alors au degré qui lui est associé par  $\kappa_{\Psi}$  la valeur de  $\kappa_{\Psi}(\mu)$ . Remarquons alors que si  $\omega$  est une des interprétations de  $\mu$  préférée selon  $\kappa_{\Psi}$ , alors  $\omega$  devient une des interprétations les plus certaines, puisque  $\kappa_{\mu, m}(\omega) = 0$ . À l'inverse, si une interprétation  $\omega$  n'est pas modèle de  $\mu$ , on retranche alors au degré qui lui est associé par  $\kappa_{\Psi}$  le degré associé au meilleur contre-modèle de  $\mu$  et on lui ajoute  $m$ . Notons alors que pour tout entier naturel  $m$ , l'ordre relatif établi entre les modèles de  $\mu$  ainsi que celui portant sur ses contre-modèles sont préservés.

Spohn définit alors un opérateur de révision ordinal basé sur cette opération de translation, de la façon suivante :

**Définition 12** Soit  $\Psi$  l'état épistémique d'une source, représenté par une OCF  $\kappa_\Psi$  portant sur les interprétations de  $\Omega$ . Soit  $\mu$  une formule propositionnelle encodant une nouvelle information. L'état épistémique résultant de la révision de  $\Psi$  par  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu$ , est représenté par une OCF portant sur  $\Omega$ , noté  $\kappa_{\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu}$ , telle que :

$$\kappa_{\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu}(\omega) = \begin{cases} \kappa_\Psi(\omega) - \kappa_\Psi(\mu) & \text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu) ; \\ \kappa_\Psi(\omega) + 1 & \text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu). \end{cases}$$

Remarquons que défini de cette façon,  $\kappa_{\Psi \circ_{\mathbb{N}} \mu}(\omega)$  est équivalent à  $\kappa_{\mu, \kappa(-\mu)+1}(\omega)$ . Ainsi, dans le cas où  $\omega$  est une interprétation modèle de  $\mu$ , on retranche alors au degré qui lui est associé par  $\kappa_\Psi$  la valeur de  $\kappa_\Psi(\mu)$ . Dans le cas contraire, où  $\omega$  n'est pas modèle de  $\mu$ , on ajoute alors 1 au degré qui lui est associé par  $\kappa_\Psi$ .

Une fois de plus, cet opérateur satisfait l'intégralité des postulats proposés par Katsuno et Mendelson pour la caractérisation des opérateurs de révision rationnels. Remarquons cependant que le résultat obtenu par cet opérateur dépend fortement de la pondération utilisée initialement afin de quantifier l'incertitude associée à chaque croyance disponible. Différentes variantes de cette approche ont été développées par Williams [Wil94, Wil95] et Papini [Pap01].

### 1.4.6 Révision de bases de croyances possibilistes

Nous présentons à présent un opérateur permettant la révision de bases de croyances possibilistes. La *révision possibiliste*, introduite par Dubois et Prade [DP92, DP96] est basée sur la prise en compte du *conditionnement possibiliste* [His78] afin d'intégrer la nouvelle information. Dans ce cadre, l'état épistémique d'un agent est représenté au moyen d'une distribution de possibilités sur les interprétations de  $\Omega$ , notée  $\pi$ . Rappelons que la pondération  $\pi(\omega) = 1$  signifie que  $\omega$  est totalement possible, alors que  $\pi(\omega) = 0$  signifie que  $\omega$  représente un état du monde totalement impossible.

Dans le cadre de la révision possibiliste, la nouvelle information, représentée par une formule propositionnelle notée  $\mu$ , est considérée comme totalement certaine. Dans ce sens, l'ordre établi par  $\pi$  entre les modèles de  $\mu$  sera conservé, tandis qu'à l'inverse, les contre-modèles de  $\mu$  seront rejetés et considérés comme totalement impossibles. L'opérateur de révision que nous présentons repose entièrement sur le conditionnement possibiliste, défini de la façon suivante :

$$\pi(\omega|_{\min \mu}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\mu) \text{ et } \omega \in \text{Mod}(\mu) ; \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\mu) \text{ et } \omega \in \text{Mod}(\mu) ; \\ 0 & \text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu). \end{cases}$$



De cette façon, le poids 1 est associé aux modèles préférés de  $\mu$ , tandis que les autres modèles de  $\mu$  conservent leur pondération initiale. À l'inverse, les contre-modèles de  $\mu$  sont associés au poids 0.

Il est alors possible de définir un opérateur de révision basé sur ce conditionnement, noté  $\circ_{\Pi}$  et défini de la façon suivante :

**Définition 13** Soit  $\Psi$  l'état épistémique d'une source, représenté par une distribution de possibilités  $\pi$  portant sur les interprétations de  $\Omega$ . Soit  $\mu$  une formule propositionnelle encodant une nouvelle information. L'état épistémique résultant de la révision de  $\Psi$  par  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_{\pi} \mu$ , est représenté par une distribution de possibilités portant sur  $\Omega$ , noté  $\pi_{\Psi \circ_{\pi} \mu}$ , telle que :

$$\pi_{\Psi \circ_{\pi} \mu}(\omega) = \pi(\omega |_{\min \mu}).$$

Remarquons que d'autres formes de conditionnement existent. Il a été montré, dans la littérature, que le résultat de la révision possibiliste dépend entièrement du conditionnement considéré [BDPW02]. Défini à partir du conditionnement possibiliste, l'opérateur de révision présenté satisfait l'intégralité des postulats KM.

### 1.4.7 Révision réversible et polynômes

Nous abordons, dans cette section, la révision de bases de croyances pondérées lorsque l'incertitude associée aux croyances disponibles sur le monde est codée au moyen de polynômes. Rappelons que ces polynômes sont de la forme :

$$p = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n = \sum_{i=0}^n p_i x^i.$$

Remarquons alors qu'un *décalage vers la gauche* s'obtient par multiplication de ce polynôme par  $x$ , tandis qu'une division de ce même polynôme par  $x$  permet d'obtenir un *décalage vers la droite*. Cette notion de décalage d'un polynôme est la base du principe de révision proposé pour ce cadre, ainsi que le fondement de la propriété de réversibilité qui lui est associé.

Dans le cadre de cette représentation proposée par Papini [Pap01], l'état épistémique d'une source, noté  $\Psi$ , peut être représenté par une distribution de polynômes, notée  $p_{\Psi}$ , portant sur les interprétations de  $\Omega$ . Rappelons que précédemment, nous avons désigné par  $\mathbb{P}$  l'ensemble des polynômes à coefficients issus de l'ensemble  $\{0, 1\}$ . De cette façon, pour cette représentation, l'ensemble des croyances préférées de l'agent, noté  $Bel(\Psi)$ , est défini sémantiquement par les interprétations associées aux polynômes minimaux selon la relation  $<_{\mathbb{P}}$ . Formellement :

$$Mod(Bel(\Psi)) = \{\omega \in \Omega, p_{\Psi}(\omega) \in \min(\mathbb{P}, <_{\mathbb{P}})\},$$

Papini propose alors un opérateur de révision [Pap01], noté  $\circ_{\triangleright}$ , pour le cadre de la représentation au moyen de polynômes. Cet opérateur se définit de la façon suivante :

**Définition 14** Soit  $\Psi$  l'état épistémique d'une source, représenté par une distribution de polynômes  $p_{\Psi}$  portant sur les interprétations de  $\Omega$ . Soit  $\mu$  une formule propositionnelle encodant une nouvelle information. L'état épistémique résultant de la révision de  $\Psi$  par  $\mu$ , noté  $\Psi \circ_{\triangleright} \mu$ , est représenté par une distribution de polynômes portant sur  $\Omega$ , noté  $p_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu}$ , telle que :

$$p_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu}(\omega) = \begin{cases} xp_{\Psi}(\omega) & \text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu), \\ xp_{\Psi}(\omega) + 1 & \text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu). \end{cases}$$

Ainsi, les polynômes associés aux modèles de la nouvelle information  $\mu$  sont simplement décalés vers la droite, tandis que les polynômes associés aux contre-modèles de  $\mu$  sont décalés vers la droite et incrémentés de 1. Notons que cet opérateur de révision satisfait l'intégralité des postulats KM caractérisant les opérateurs de révisions rationnels.

La contrepartie syntaxique de cet opérateur est proposée par [BDLP02]. À la différence des autres opérateurs de révision présentés, l'opérateur de révision proposé, dans le cadre de la représentation de l'incertitude au moyen de polynômes, offre l'avantage de garder en mémoire de façon compacte les différents états épistémiques de la source au fil de révisions successives. En effet, il est dans un premier temps possible d'identifier la dernière formule  $\mu$  par laquelle l'état épistémique  $\Psi$  de la source a été révisé. Pour cela, remarquons que l'ensemble des modèles de  $\mu$  est l'ensemble des interprétations dont le coefficient de rang 0 est égal à 0. De cette façon, le polynôme associé aux modèles de  $\mu$  est plus petit au sens de  $<_{\mathbb{P}}$  que le polynôme constant 1. Formellement :

$$\text{Mod}(\mu) = \{\omega : p(\omega) <_{\mathbb{P}} 1\}.$$

Une fois la dernière information intégrée identifiée, il est alors possible de retrouver l'état épistémique de la source, avant révision par cette même information, de la façon suivante :

$$p_{\Psi\mu}(\omega) = \begin{cases} x^{-1}p_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu}(\omega) & \text{si } \omega \in \text{Mod}(\mu), \\ x^{-1}(p_{\Psi \circ_{\triangleright} \mu}(\omega) - 1) & \text{si } \omega \notin \text{Mod}(\mu). \end{cases}$$

Ce principe de réversibilité est basé sur la notion de décalage vers la gauche. Cette propriété de réversibilité peut, dans certaines situations, être essentielle dans le cadre de la dynamique des croyances : il est possible en effet qu'une information totalement éronnée soit fournie à l'agent, qui révisé alors ses croyances en supposant cette information fiable. Comme nous l'avons vu, cette propriété permet alors de retrouver facilement l'état épistémique de la source avant révision, là où les autres représentations rappelées auraient nécessité de garder en mémoire l'intégralité des différents états épistémiques successifs de la source. L'importance de cette propriété est également soulignée par Spohn [Spo88].

## 1.5 Synthèse du chapitre

Nous avons présenté, dans ce premier chapitre, différents formalismes permettant la représentation des informations incertaines que possède une source sur le monde. Ainsi, la logique possibiliste utilise des degrés issus de l'intervalle  $[0, 1]$  pour quantifier l'incertitude associée aux formules présentes dans une base de croyances, alors que les fonctions conditionnelles ordinales associent à ces mêmes formules des ordinaux, représentés ici pour des raisons de simplicité par des poids issus de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Nous avons vu qu'il est également possible d'associer des polynômes à ces formules, toujours dans le but de quantifier leur fiabilité respective. Nous avons également vu que chacun de ces types de représentation permet d'induire un ordre sur les interprétations de  $\Omega$ , en leur associant le degré de la formule la plus prioritaire qu'ils falsifient. Nous avons rappelé que d'une façon similaire, la logique des pénalités permet de tenir compte de l'intégralité de formules, présentes dans une base, que ces mêmes interprétations de  $\Omega$  falsifient. Nous avons présenté un premier problème sous-jacent à ce type de représentation : ce problème survient lorsque les informations, issues d'une même base de croyances, présentent des incohérences. Dans les situations où les degrés quantifiant l'incertitude respectivement associée à chaque croyance ne sont pas disponibles, nous avons vu qu'il est possible de tenir compte des informations qualitatives, éventuellement exprimées entre ces mêmes croyances, afin d'obtenir les sous-ensembles cohérents maximaux, en termes d'inclusion ou de cardinalité, de croyances préférées pour la source : nous avons dans ce sens, rappelé différentes relations existantes sur ces sous-ensembles, telles que l'ordre best-out, l'ordre discrim et l'ordre lexicographique.

Nous avons ensuite abordé le problème de la révision des croyances : comment intégrer une nouvelle information, potentiellement contradictoire avec les croyances que possède une source sur le monde, sans rendre incohérente la base de croyances associée à cette source ? Nous avons rappelé l'axiomatisation de ce problème proposée par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson, puis les postulats proposés par Katsuno et Mendelzon afin de fournir une représentation sémantique du cadre AGM. Nous avons également rappelé un ensemble de postulats proposés par Darwiche et Pearl, complémentaires aux postulats KM, permettant une axiomatisation des opérateurs de révision itérée : ces opérateurs permettent les révisions successives d'une base de croyances par une série de nouvelles informations de plus en plus plausibles mais potentiellement contradictoires entre elles. Nous avons ensuite évoqué quelques approches existantes pour la révision des croyances, tels que la révision naturelle de Boutillier, la révision possibiliste, la révision ordinale et la révision dans le cadre de la représentation offerte par les polynômes. Cette dernière permet la réversibilité de la révision, et offre ainsi un moyen simple de retrouver l'état épistémique de la source avant intégration de la nouvelle information, dans le cas par exemple où celle-ci était éronée.

Nous présentons dans le prochain chapitre le problème de la fusion des croyances, qui peut être vu comme une généralisation du problème de la révision.



## Chapitre 2

# Fusion et représentation des croyances collectives

Nous avons présenté dans le chapitre précédent différents formalismes permettant la représentation, puis l'évolution, des croyances d'une source donnée. Nous avons pu nous rendre compte que manipuler les informations issues d'une source donnée constitue un premier problème non-trivial. Cependant, dans de nombreuses situations courantes, les informations obtenues sur un problème concret sont fournies par différentes sources bien distinctes. Ainsi, certaines applications nécessitent la confrontation de toutes les informations existantes, dans le but d'obtenir un point de vue global et cohérent permettant la prise de décisions appropriées. Si la réunion des bases de croyances fournies par ces sources est cohérente, alors l'intégration des informations obtenues consiste simplement à prendre la conjonction de ces bases. Malheureusement, les croyances exprimées par ces sources constituent bien souvent des points de vue antagonistes, et la réunion des bases de croyances fournies par ces mêmes sources se révèle être un ensemble d'informations partiellement contradictoires. Ce chapitre présente donc le problème de la fusion de croyances. Intuitivement, celui-ci consiste à extraire le plus grand ensemble d'informations cohérentes, à partir de ces bases de croyances globalement incohérentes.

Dans le cadre de ce problème, les informations fournies par les sources à fusionner sont accompagnées d'incertitude plus ou moins forte et peuvent donc également être éronnées, ce qui explique que certaines sources peuvent amener différents points de vue contradictoires. Dans ce sens, chacune des sources à fusionner exprime les informations incertaines sur le monde dont elle dispose sous forme de bases de *croyances*. À l'inverse, le terme *contrainte* désigne une information totalement sûre et cohérente, parfois appelée *connaissance*, à prendre en compte lors de la fusion : cette contrainte peut représenter une impossibilité matérielle dans le monde considéré, telle que par exemple l'impossibilité pour un agent d'être présent à deux endroits distincts au même moment, ou encore l'impossibilité d'allouer une ressource indivisible à deux sources différentes si-

multanément. En d'autres termes, les contraintes doivent être intégrées au résultat de la fusion d'un multi-ensemble de sources, alors que les croyances de ces mêmes sources peuvent être acceptées, affaiblies voir rejetées lors du processus de fusion. De nombreuses approches ont été proposées dans la littérature afin de fusionner des ensembles de croyances potentiellement contradictoires, telles que [Lin96, LM98, LM99, LS95, LS98], ou encore [KPP98, KPP02, KLM04, EKM08a]. Parmi celles-ci, Revesz [Rev93, Rev97] fut le premier à proposer l'étude du problème de la fusion de croyances dans le cadre de la révision AGM, en proposant des opérateurs d'adéquation sémantique. Nous rappelons, dans ce chapitre, une première approche pour la fusion de bases de croyances, représentées au moyen de la logique propositionnelle classique. Cette approche introduit une axiomatisation logique sous formes de postulats de rationalité pour le problème de la fusion de croyances, très proche de celle proposée pour la révision des croyances. Nous présentons également, dans ce chapitre, différentes stratégies de fusion existantes, lorsque les sources représentent leur croyances, sur l'état du monde, au moyen de formules associées à des degrés de possibilité, ou encore des polynômes.

## 2.1 Fusion de bases de croyances propositionnelles

Dans le cadre de la logique des propositions, les bases de croyances à fusionner sont représentées sous forme d'un ensemble fini  $B_i$  de formules propositionnelles. Chacune de ces bases de croyances propositionnelles  $B_i$  peut alors être vue comme une formule  $\varphi_i$  qui est en fait la conjonction des formules propositionnelles issues de  $B_i$ . Nous désignons par  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble (un multi-ensemble est un ensemble dans lequel la répétition d'une même occurrence est autorisée) de bases de croyances propositionnelles à fusionner. Nous considérons désormais qu'une base de croyances incohérente ne délivre aucune information pertinente pour le processus de fusion, ce pourquoi nous supposons tout au long de notre étude que chaque base de croyances est individuellement cohérente. Nous notons par  $\Delta^\mu$  un opérateur employé à la fusion d'un tel multi-ensemble  $E$  en présence d'une contrainte d'intégrité  $\mu$ , puis par  $\Delta^\mu(E)$  le résultat de cette fusion fourni sous forme d'une formule propositionnelle classique.

### 2.1.1 Axiomatisation du problème de fusion

Konieczny et Pino Pérez proposent dans [KPP02, KPP98] une axiomatisation du problème de fusion, sous forme d'un ensemble de postulats de rationalité caractérisant le comportement idéal d'un opérateur de fusion. Dans le cadre des bases de croyances propositionnelles, ces postulats sont énoncés formellement de la façon suivante :

(IC0)  $\Delta_\mu(E) \models \mu$  ;

(IC1) Si  $\mu$  est cohérente, alors  $\Delta_\mu(E)$  est cohérente ;

(IC2) Si  $\bigwedge_{B \in E} B$  est cohérent avec  $\mu$ , alors  $\Delta_\mu(E) \equiv \bigwedge_{B \in E} B \wedge \mu$  ;

- (IC3) Si  $E_1 \equiv E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\Delta_{\mu_1}(E_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(E_2)$  ;
- (IC4) Si  $B_1 \models \mu$  et  $B_2 \models \mu$ , alors  $\Delta_{\mu}(\{B_1, B_2\}) \wedge B_1$  est cohérent ssi  $\Delta_{\mu}(\{B_1, B_2\}) \wedge B_2$  est cohérent ;
- (IC5)  $\Delta_{\mu}(E_1) \wedge \Delta_{\mu}(E_2) \models \Delta_{\mu}(E_1 \sqcup E_2)$  ;
- (IC6) Si  $\Delta_{\mu}(E_1) \wedge \Delta_{\mu}(E_2)$  est cohérent, alors  $\Delta_{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta_{\mu}(E_1) \wedge \Delta_{\mu}(E_2)$  ;
- (IC7)  $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$  ;
- (IC8) si  $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$  est cohérent, alors  $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ .

Ces postulats tentent d'assurer le fait que  $\Delta^{\mu}(E)$  soit une formule propositionnelle, la plus proche possible de la réunion des bases de croyances issues de  $E$ , et respectant la contrainte d'intégrité  $\mu$ . En effet, (IC0) assure que le résultat de la fusion  $\Delta_{\mu}(E)$  satisfait la contrainte d'intégrité  $\mu$ . (IC1) stipule que si la contrainte à satisfaire est cohérente, alors le résultat de la fusion l'est également. (IC2) signifie qu'à chaque fois que possible, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases de croyances avec la contrainte d'intégrité. (IC3) représente le principe d'*indépendance de la syntaxe*, c'est-à-dire que si deux multi-ensembles de bases de croyances sont équivalents, et si deux contraintes d'intégrité sont logiquement équivalentes, alors les résultats des deux fusions sont également logiquement équivalents. (IC4) signifie que lorsque les bases de croyances sont fusionnées deux à deux, aucune priorité n'est alors donnée à l'une de ces bases. (IC5) et (IC6) ensemble stipulent que s'il est possible de trouver deux sous-groupes de sources en accord sur au moins une interprétation, alors le résultat de la fusion est exactement les interprétations sur lesquelles ces deux groupes sont en accord. Finalement, (IC7) et (IC8) signifient conjointement que la notion de *proximité* [KM91] est respectée. En complément de ces postulats, les postulats additionnels suivants ont également été présentés dans [KPP02] :

- (IC6') Si  $\Delta^{\mu}(E_1) \wedge \Delta^{\mu}(E_2)$  est cohérent, alors  $\Delta^{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \models \Delta^{\mu}(E_1) \vee \Delta^{\mu}(E_2)$  ;
- (MAJ)  $\exists m \in \mathbb{N} : \Delta^{\mu}(E \sqcup B_i^m) \models B_i^*$ ,  
avec  $B_i^m = \underbrace{\{B_i\} \sqcup \dots \sqcup \{B_i\}}_{m \text{ fois}}$  et  $\sqcup$  l'union des multi-ensembles.
- (MI)  $\forall m, \Delta^{\mu}(E_1 \sqcup E_2^m) \equiv \Delta^{\mu}(E_1 \sqcup E_2)$ .

Le postulat de *majorité* (MAJ) caractérise le fait que si un ensemble de croyances particulier est répété un nombre suffisant de fois par l'ensemble des bases de croyances à fusionner, alors cet ensemble d'informations doit être accepté par le résultat de la fusion. À l'inverse, la notion d'*indépendance de la majorité* signifie que le résultat du processus de fusion doit être totalement indépendant de la redondance des croyances. Finalement, (IC6') est une version affaiblie du postulat de rationalité (IC6).

Konieczny et Pino Pérez proposent également dans [KPP02, KPP98] la notion d'*assignement synchrétique*. Un tel assignement est une fonction qui associe chaque multi-ensemble de bases de croyances  $E$  à un pré-ordre total sur les interprétations de  $\Omega$ , noté  $\leq_E$  tel que pour tous multi-

ensembles  $E$ ,  $E_1$  et  $E_2$ , pour toutes bases de croyances  $B_i$  et  $B_j$ , les conditions suivantes sont respectées :

1. si  $\omega \models E$  et  $\omega' \models E$ , alors  $\omega \simeq_E \omega'$  ;
2. si  $\omega \models E$  et  $\omega' \not\models E$ , alors  $\omega <_E \omega'$  ;
3. si  $E_1 \equiv E_2$ , alors  $\leq_{E_1} = \leq_{E_2}$  ;
4.  $\forall \omega : \omega \models B_i, \exists \omega' : \omega' \models B_j$  tel que  $\omega' \leq_{\{B_i, B_j\}} \omega$  ;
5. si  $\omega \leq_{E_1} \omega'$  et  $\omega \leq_{E_2} \omega'$  alors  $\omega' \leq_{E_1 \sqcup E_2} \omega$  ;
6. si  $\omega \leq_{E_1} \omega'$  et  $\omega <_{E_2} \omega'$  alors  $\omega' <_{E_1 \sqcup E_2} \omega$  .

La notation  $\omega \models E$  signifie que quelque soit la base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $\omega \models B_i$ . Une discussion complète de ces conditions est également proposée dans [KPP02]. Les conditions 1 et 2 assurent que les modèles d'un multi-ensemble de croyances, s'ils existent, sont les interprétations les plus plausibles pour le pré-ordre associé à cet ensemble. La condition 3 stipule que deux multi-ensembles équivalents sont associés à des pré-ordres équivalents. La condition 4 signifie que lorsque deux bases de croyances sont fusionnées, aucune priorité n'est donnée à l'une de ces deux bases. La condition 5 affirme que si une interprétation  $\omega$  est préférée à une autre interprétation  $\omega'$  respectivement selon deux ensembles de croyances, alors  $\omega$  reste préférée à  $\omega'$  si ces deux ensembles sont réunis. De plus, la condition 6 renforce cette condition et dit que si  $\omega$  est strictement préférée à  $\omega'$  selon un des deux ensembles considérés, alors  $\omega$  devient strictement préférée à  $\omega'$  si ces deux ensembles sont réunis. Ces deux conditions sont étroitement liées au critère de Pareto dans le cadre de la théorie du choix social [Arr63, Mou88].

Les ensembles de postulats et de conditions présentés précédemment permettent alors d'obtenir le théorème de représentation suivant :

**Théorème 4** *Un opérateur  $\Delta$  est un opérateur de fusion vérifiant (IC0)-(IC8) si et seulement si pour tout multi-ensemble de bases de croyances  $E$ , il existe un assignement synchrétique associant  $E$  à un pré-ordre total sur les interprétations  $\leq_E$  tel que :*

$$Mod(\Delta^\mu(E)) = Min(Mod(\mu), \leq_E).$$

Le pré-ordre sur les interprétations  $\leq_E$  représente alors le résultat de la fusion d'un multi-ensemble  $E$  par l'opérateur de fusion  $\Delta$ . De part ce théorème de représentation, et d'une façon similaire au cadre de la révision des croyances, le problème de la fusion d'un ensemble de sources  $E$  peut alors se réduire à identifier les interprétations minimales pour l'ordre associé au multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ .



### 2.1.2 Généralisation du problème de révision

Tel qu'il est présenté d'un point de vue rationnel, le problème de la fusion de croyances est très proche du problème de la révision de croyances. En effet, les conditions 1, 2 et 3 respectées par un assignement synchrétique dans le cadre de la fusion sont similaires aux conditions respectées par un assignement fidèle dans le cadre de la révision. Nous pouvons remarquer, en effet, qu'un opérateur de révision sélectionne le modèle d'une nouvelle information le plus proche d'une base de croyances donnée, là où un opérateur de révision vise à sélectionner le modèle de la contrainte le plus proche d'un multi-ensemble de bases de croyances donnée. De plus, il est possible d'obtenir un opérateur de révision à partir d'un opérateur de fusion IC, comme montré dans [KPP02], de la façon suivante :

**Théorème 5** *Soit  $\circ$  un opérateur de révision défini à partir de  $\Delta$  un opérateur de fusion tel que  $B \circ \mu = \Delta^\mu(\{B\})$ . Alors :*

$$\text{si } \Delta \text{ satisfait } (IC0) - (IC8), \text{ alors } \circ \text{ satisfait } (R1) - (R6).$$

En d'autres termes, si  $\Delta$  est un opérateur de fusion IC, alors  $\circ$  défini tel que  $B \circ \mu = \Delta^\mu(\{B\})$  est un opérateur de révision AGM.

Il existe également, dans la littérature, une approche présentant un lien entre la révision itérée et la fusion de croyances [DDL06]. En effet, selon Delgrande, Dubois et Marquis, lorsque le monde est supposé statique, aucune raison ne justifie le fait de donner la priorité aux informations les plus récemment obtenues. Ainsi, au lieu de réviser successivement l'état épistémique de l'agent par les informations de plus en plus récente, cette approche propose de fusionner la séquence des nouvelles observations avec les croyances de l'agent.

### 2.1.3 Un exemple de fusion propositionnelle basée sur la somme

Nous rappelons maintenant deux types d'approches possibles pour la fusion de bases de croyances propositionnelles. Ces stratégies reposent toutes les deux sur une notion de distance entre interprétations, qui est une fonction  $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  telle que :

1.  $d(\omega, \omega') = d(\omega', \omega)$  ;
2.  $d(\omega, \omega') = 0$  ssi  $\omega = \omega'$ .

Cette notion de distance entre interprétations permet à présent de définir une distance entre une interprétation et une base de croyances de la façon suivante :

$$d(\omega, B) = \min\{d(\omega, \omega') : \omega \models B\}.$$

La première des approches présentée se base sur la notion  $\Sigma$ -distance entre une interprétation et un multi-ensemble de bases de croyances  $E$ , définie de la façon suivante :

$$d_{\Sigma}(\omega, E) = \sum_{B_i \in E} d(\omega, B_i).$$

Cette définition permet d'obtenir le pré-ordre entre interprétations suivant :

$$\omega \leq_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } d_{\Sigma}(\omega, E) \leq d_{\Sigma}(\omega', E).$$

Ainsi, un premier opérateur de fusion, noté  $\Delta_{\Sigma}$ , peut être défini à partir de ce pré-ordre de la façon suivante :

$$Mod(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E)) = Min(Mod(\mu), \leq_{\Sigma}^E).$$

L'opérateur  $\Delta_{\Sigma}$  se base sur une distance entre une interprétation  $\omega$  et un multi-ensemble de bases de croyances  $E$  définie comme la somme des distances entre  $\omega$  et chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ . Comme il est démontré dans [KPP02], cet opérateur est un opérateur de fusion majoritaire : il satisfait donc les postulats **(IC0)**-**(IC8)** ainsi que le postulat de majorité **(MAJ)** proposé pour la caractérisation de ce mode de fusion. La définition de ce type d'opérateur est de plus très proche de la règle de Borda issue de la théorie du choix social [Arr63].

Selon le cadre utilitaire, chaque interprétation est évaluée en fonction de la satisfaction qu'elle apporte à l'ensemble du groupe. Les interprétations préférées sont alors celles qui maximise la satisfaction du plus grand nombre de sources en présence. Ainsi, les opérateurs de fusion majoritaires tentent de minimiser l'insatisfaction globale d'un groupe de sources en satisfaisant un maximum de sources issues de ce groupe. Ce type d'opérateur est particulièrement approprié pour résoudre les conflits entre différentes informations issues de sources contradictoires. À l'inverse, ce type d'opérateur peut conduire à des situations de *sacrifice de la minorité* : si un très grand nombre de sources sont en accord sur une même croyance, alors cette croyance sera acceptée par le résultat de la fusion, et le point de vue d'un petit nombre de sources en désaccord total avec cette même croyance sera simplement ignoré.

#### 2.1.4 Un exemple de fusion propositionnelle basée sur le maximum

Le second mode de fusion présenté repose quant à lui sur la notion de *Max-distance* entre une interprétation et un multi-ensemble de bases de croyances  $E$ , définie de la façon suivante :

$$d_{Max}(\omega, E) = \max_{B_i \in E} d(\omega, B_i).$$

Cette définition permet d'obtenir le pré-ordre entre interprétations suivant :

$$\omega \leq_{Max}^E \omega' \text{ ssi } d_{Max}(\omega, E) \leq d_{Max}(\omega', E).$$

Ainsi, un premier opérateur de fusion, noté  $\Delta_{Max}$ , peut être défini à partir de ce pré-ordre de la façon suivante :

$$Mod(\Delta_{Max}^\mu(E)) = Min(Mod(\mu), \leq_{Max}^E).$$

Récemment, une autre approche de la fusion propositionnelle a été proposée dans la littérature [EKM08a]. De façon similaire à la notion de distance, celle-ci repose sur une notion de conflit entre une interprétation et un ensemble des bases de croyances.

L'opérateur  $\Delta_{Max}$  se base sur une distance entre une interprétation  $\omega$  et un multi-ensemble de bases de croyances  $E$  définie comme la distance maximale entre  $\omega$  et chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ . Comme il est démontré dans [KPP02], cet opérateur est un opérateur de fusion égalitaire : il satisfait les postulats de rationalité **(IC0)**-**(IC5)**, **(IC6')**, **(IC7)**, **(IC8)** ainsi que le postulat d'indépendance de la majorité **(MI)** proposé pour la caractérisation de ce mode de fusion. La définition de ce type d'opérateur est similaire à la règle du *minimax* issue de la théorie du choix social [Sav71].

Selon le cadre égalitaire, chaque ensemble de croyances fourni est considéré d'égale importance. Dans ce cadre, les interprétations préférées correspondent aux états du monde qui satisfont autant que possible le plus grand nombre de sources. De cette manière, les opérateurs de fusion égalitaires essaient de minimiser les insatisfactions locales d'un groupe de sources en tentant de satisfaire autant que possible un maximum de sources issues de ce même groupe. En d'autres termes, ce type d'opérateur tente de satisfaire au mieux chaque source issue d'un groupe sans en écarter aucune. Ce type d'opérateur est particulièrement adapté aux situations où chaque source est considérée d'égale fiabilité. Ainsi, les opérateurs adoptant ce comportement prennent en compte absolument tous les points de vue disponibles sur un problème donné afin d'en dériver des conclusions. À l'inverse, ce type d'opérateur peut conduire à des situations de *sacrifice de la majorité* : si la plupart des sources considérées sont en accord avec une croyance donnée, et qu'une source désapprouve individuellement cette même croyance, alors aucune conclusion ne sera prise quant à cette croyance ou son contraire, puisque cette dernière source est considérée d'égale importance vis-à-vis de toutes les autres et ne saurait être écartée.

Remarquons qu'il existe des opérateurs pour la fusion de bases de croyances propositionnelles reposant sur d'autres opérateurs d'agrégations, tels que l'opérateur *minimum* ou encore l'opérateur *maximum global* (se référer à [KPP02] pour plus d'informations sur ce dernier).

## 2.2 Fusion possibiliste

Nous avons présenté, dans la section précédente, une axiomatisation du problème de fusion très similaire à celle proposée dans le cadre de la révision de croyances, ainsi que certains opérateurs adaptés à la fusion de bases de croyances propositionnelles et reposant sur l'agrégation d'une notion de distance. Nous nous intéressons à présent aux bases de croyances représentées

sous forme d'un ensemble de croyances prioritaires. Nous rappelons, dans un premier temps, certaines approches proposées lorsque les priorités associées aux formules sont codées explicitement sous la forme de degrés de possibilité, c'est-à-dire d'entiers issus de l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous présentons ainsi différentes approches existantes pour la fusion de bases de croyances possibilistes [BDKP00a, BDKP00b].

Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un ensemble de  $n$  bases de croyances possibilistes, encodant respectivement les croyances fournies par  $n$  sources. Comme nous l'avons vu Section 1.2.1, chacune de ces bases  $B_i$  permet d'induire une distribution de possibilité  $\pi_i$  sur les interprétations de  $\Omega$ . Chaque interprétation  $\omega$  peut ainsi être associée à un vecteur  $\nu_E(\omega)$ , regroupant les degrés de possibilité ainsi associés à  $\omega$  par chaque base de croyances possibiliste issue de  $E$ , de la façon suivante :

$$\nu_E(\omega) = \langle \pi_1(\omega), \dots, \pi_n(\omega) \rangle.$$

L'intuition des approches sémantiques proposées pour la fusion de bases de croyances possibilistes est alors d'agrégier ces vecteurs afin d'obtenir une distribution de possibilité unique, notée  $\pi_E$ , sur les interprétations de  $\Omega$ . Lorsque de tels vecteurs de degrés de possibilité sont ainsi agrégés, il est alors nécessaire de considérer les deux propriétés suivantes :

1.  $\forall \omega \in \Omega$ , si  $\forall B_i \in E$ ,  $\pi_i(\omega) = 1$  alors  $\pi_E(\omega) = 1$  ;
2.  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ , si  $\forall B_i \in E$ ,  $\pi_i(\omega) \geq \pi_i(\omega')$  alors  $\pi_E(\omega) \geq \pi_E(\omega')$ .

La première propriété, appelée propriété de cohérence, stipule que si chaque source considère une interprétation  $\omega$  comme entièrement possible, alors le groupe de sources fusionné doit confirmer ce fait. En particulier, cette propriété garantit que si l'union des bases à fusionner est cohérente, alors le résultat de cette fusion doit l'être également. D'autre part, la seconde propriété, appelée propriété de monotonie, signifie que si toutes les sources considèrent une interprétation  $\omega$  plus plausible qu'une seconde interprétation  $\omega'$ , alors le résultat de la fusion doit également confirmer ce fait. Nous présentons, dans les sous-sections suivantes, les approches conjonctives puis disjonctive de la fusion possibiliste.

D'un point de vue syntaxique, il est également possible d'associer chaque base de croyances possibiliste  $B_i$  issue de  $E$  à un vecteur de degrés de nécessité  $\nu_E(B_i)$ . Les approches syntaxiques de la fusion possibiliste reposent alors sur l'agrégation de ces vecteurs. Nous détaillons également, dans les sous-sections suivantes, les contreparties syntaxiques des deux types d'approche présentés.

### 2.2.1 Opérateurs conjonctifs

Lorsque les informations disponibles sur le monde sont incohérentes d'une source à l'autre, une des premières intuitions de la fusion est de prendre en considération la complémentarité de

ces informations. Ainsi, l'approche *conjonctive* de la fusion possibiliste tient compte de la complémentarité syntaxique des croyances en présence, et peut être définie formellement de la façon suivante :

**Définition 15** *Un opérateur de fusion possibiliste, noté  $\Delta_{\oplus}$ , est dit conjonctif si et seulement s'il repose sur un opérateur d'agrégation, noté  $\oplus$ , tel que :*

$$\forall a \in [0, 1], \oplus(a, 1) = \oplus(1, a) = a.$$

D'un point de vue syntaxique, la base de croyances possibiliste obtenue après fusion de  $E$  par  $\oplus$ , notée  $B_E$ , est de la forme :

$$B_E = B_1 \cup B_2.$$

La principale caractéristique de ce mode de fusion possibiliste est de préserver l'intégralité des informations disponibles lorsque l'union des sources à fusionner est cohérente. En des termes plus formels :

$$\text{si } \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \text{ est cohérent, alors } B_E = \bigwedge_{B_i \in E} B_i^*.$$

Comme nous l'avons vu dans le cadre de la représentation propositionnelle, il existe une divergence des approches du problème de la fusion au niveau du comportement adopté face à la redondance des croyances. Ainsi, il est soit possible d'ignorer les occurrences multiples d'une même information, ce qui est particulièrement adapté lorsque les sources ne sont pas supposées indépendantes, ou à l'inverse de tenir compte de cette redondance et de la voir comme un renforcement de l'information associée. L'approche conjonctive de la fusion possibiliste permet tout d'adopter ces deux types d'attitude face à la redondance des croyances. En effet, un opérateur conjonctif peut dans un premier temps être *idempotent* si l'opérateur d'agrégation  $\oplus$ , sur lequel il repose, satisfait la condition suivante :

$$\forall a \in [0, 1], \oplus(a, a) = a.$$

De cette manière, les opérateurs conjonctifs idempotents sont insensibles à la redondance de l'information. En particulier, si deux sources fournissent la même distribution de possibilité sur  $\Omega$ , la fusion de ces deux sources produira alors exactement cette distribution de possibilité. Un exemple classique d'opérateur conjonctif est celui basé sur l'agrégation des vecteurs de possibilité au moyen de l'opérateur *minimum*.

À l'inverse, la redondance des croyances peut donc être vue comme une confirmation des informations proposées par les sources. Un opérateur de fusion possibiliste est alors dit à *renforcement progressif* si  $\forall a, b \in ]0, 1[$ , l'opérateur d'agrégation  $\oplus$ , sur lequel repose cet opérateur, satisfait les deux conditions suivantes :

1.  $\oplus(a, b) < \min\{a, b\}$ , et

2.  $\oplus(a, b) \neq 0$ .

Ainsi, la première condition signifie que si une information est apportée par deux sources distinctes, alors la priorité associée à cette information doit être plus importante que celles fournies individuellement par chaque source. La seconde condition stipule que si une information n'est considérée que quelque peu certaine par chaque source, alors cette même information ne peut devenir totalement certaine après fusion. Il a ainsi été montré [BDKP00b] qu'à une condition près, les opérateurs de fusion conjonctifs à renforcement progressif constituent des opérateurs majoritaires, soit formellement :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \Delta_{\oplus}(E \sqcup B_i^m) \models B_i^*,$$

avec  $B_i^m = \underbrace{B_i \sqcup \dots \sqcup B_i}_{m \text{ fois}}$ .

### 2.2.2 Opérateurs disjonctifs

Une des problématiques importantes soulevées par le problème de la fusion de croyances se situe dans la résolution des conflits. Ainsi, lorsque plusieurs sources rentrent en contradiction, et sans hypothèse supplémentaire concernant la fiabilité qui pourrait respectivement être associée à chacune de ces sources, il semble à priori arbitraire de privilégier une source plutôt qu'une autre. Ainsi, les opérateurs de fusion possibilistes *disjonctifs* se focalisent sur cette intuition et peuvent être définis formellement de la façon suivante :

**Définition 16** *Un opérateur de fusion possibiliste, noté  $\Delta_{\oplus}$ , est dit disjonctif si et seulement si l'opérateur d'agrégation  $\oplus$ , sur lequel repose cet opérateur, satisfait la condition suivante :*

$$\forall a \in [0, 1], \oplus(a, 1) = \oplus(1, a) = 1.$$

D'un point de vue syntaxique, la base de croyances possibiliste  $B_E$  obtenue après fusion de  $E$  par  $\Delta_{\oplus}$  est de la forme :

$$B_E = \{(\varphi_i \vee \psi_j, 1 - \oplus(1 - a_i, 1 - b_j))\}.$$

De part leur définition, ce type d'opérateurs peut conduire à des situations d'ignorance totale. Il est cependant possible d'introduire une condition supplémentaire afin d'éviter ce type de situation extrême. Intuitivement, un opérateur disjonctif *régulier* ne peut considérer une information comme complètement incertaine si les sources la considèrent individuellement quelque peu certaine. Formellement :

$$\forall a \neq 1, \forall b \neq 1, \oplus(a, b) \neq 1.$$

Remarquons finalement que ce type d'approche favorise les croyances les moins informatives, et n'est donc pas appropriée en cas de cohérence des sources.

## 2.3 Représentation par les polynômes et fusion

Comme nous l'avons vu Section 1.2.3, il est possible d'associer des polynômes aux formules issues d'une base de croyances afin de quantifier l'incertitude qui leur est respectivement associée. Nous avons également rappelé que dans ce cadre, chaque base de croyances pondérées permet d'induire une distribution de polynômes sur les interprétations de  $\Omega$ . Une approche a été proposée récemment par Drap, Papini et Seinturier afin de permettre la fusion de ce type de base de croyances pondérées, dans le cas où les croyances issues de celles-ci sont uniquement représentées au moyen de littéraux [DPS06].

Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un ensemble de  $n$  bases de croyances, telles que les degrés de certitude associés aux formules issues de ces bases sont codés au moyen de polynômes. Afin de déterminer le résultat de la fusion de  $E$ , chaque interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  est associée à un polynôme *global*, noté  $p_E(\omega)$ , et obtenu en agrégeant les polynômes que chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  associe à  $\omega$  de la façon suivante :  $\forall \omega \in \Omega$ ,

$$p_E(\omega) = \sum_{i=0}^n x^{i-1} p_{B_i}(\omega).$$

Intuitivement, le polynôme associé à chaque interprétation de cette façon est construit de telle sorte que chaque polynôme représentant le degré de cette interprétation vis-à-vis d'une base  $B_i$  soit son coefficient de degré  $i - 1$ .

Les interprétations de  $\Omega$  sont ensuite ordonnées respectivement au polynôme global auquel elles sont associées. Ainsi, Drap, Papini et Seinturier proposent dans ce sens plusieurs relations possibles entre polynômes :

- l'ordre lexicographique compare deux à deux les coefficients des polynômes :

$$\forall p, p' \in \mathbb{P}, p <_{Lex} p' \text{ ssi } \exists B_i \in E, p_{B_i} < p'_{B_i} \text{ et } \forall B_j \in E, \text{ si } j < i \text{ alors } p_{B_j} = p'_{B_j};$$

- l'ordre basé sur le maximum compare les polynômes selon leur plus grand coefficient :

$$\forall p, p' \in \mathbb{P}, p <_{Max} p' \text{ ssi } \max\{p_{B_i}, i = 1..n\} < \max\{p'_{B_i}, i = 1..n\};$$

- l'ordre basé sur la somme compare les polynômes selon la somme de leurs coefficients :

$$\forall p, p' \in \mathbb{P}, p <_{\Sigma} p' \text{ ssi } \Sigma\{p_{B_i}, i = 1..n\} < \Sigma\{p'_{B_i}, i = 1..n\}.$$

Les interprétations minimales selon chacun de ces ordres représentent alors les états du monde les plus plausibles selon le multi-ensemble de sources fusionnées, respectivement au mode de

fusion choisi. Remarquons que pour ce type de représentation, une fois ces mêmes sources fusionnées, il est toujours possible d'obtenir simplement les polynômes représentant les degrés de certitude associés aux interprétations par chaque source depuis les polynômes globaux construits à partir de ces degrés.

## 2.4 Synthèse du chapitre

Nous avons présenté, dans ce second chapitre, le problème de la fusion des croyances. Ainsi, nous avons rappelé, dans un premier temps, une axiomatisation de ce problème proposée par Konieczny et Pino Perez [KPP02]. Nous avons ainsi pu nous rendre compte que ce problème présente de fortes similitudes avec celui de la révision, dont il constitue en quelque sorte une généralisation. Nous avons ensuite évoqué différents cadres existants pour la fusion de bases de croyances propositionnelles : alors que le cadre égalitaire se propose de minimiser les insatisfactions locales d'un groupe tout en satisfaisant autant de source issue de ce groupe que possible, le cadre utilitaire tente plutôt de minimiser l'insatisfaction globale de ce même groupe tout en satisfaisant toujours un maximum de sources en présence. Nous avons alors vu que les opérateurs proposés pour chacun de ses cadres reposent tous deux sur une notion de distance manipulée par un opérateur d'agrégation.

Nous avons également présenté les approches proposées pour la fusion de bases de croyances possibilistes. Nous avons vu que celles-ci reposent principalement sur l'agrégation des degrés associés aux interprétations de  $\Omega$  par les distributions de possibilité induites par chaque base de croyances. Nous avons également rappelé que deux approches du problème de la fusion dans ce cadre existent : alors que les approches conjonctives se focalisent sur la complémentarité des informations disponibles, les approches disjonctives se focalisent sur la résolution des conflits entre les différentes sources en présence. Nous avons également détaillé une approche proposée récemment pour la fusion de bases de croyances pondérées, lorsque l'incertitude respectivement associée à chaque croyance exprimée est codée au moyen d'un polynôme.

Nous détaillons, dans le chapitre suivant, une approche de la fusion lorsque l'incertitude, associée à chaque information, est codée au moyen d'un entier. Nous montrons alors que ce type d'approche, reposant sur l'agrégation des poids associés aux interprétations par chaque base considérée, pose le problème de la commensurabilité d'une source à l'autre de ces poids.



## Chapitre 3

# Fusion de croyances pondérées et problèmes d'incommensurabilité

Nous exposons dans ce chapitre le cadre de notre étude, ainsi que les différentes problématiques que nous traitons tout au long de ce mémoire. En particulier, ce chapitre présente nos premières contributions à la fusion d'informations incertaines, lorsque les degrés d'incertitude associés à ces informations ne sont pas supposés commensurables d'une source à l'autre. Nous nous plaçons dans le cas où les informations incertaines fournies par les sources sont codées au moyen de bases de croyances pondérées. Chaque base de croyances induit alors un ordre sur les interprétations de  $\Omega$ , en associant celles-ci au poids de la formule la plus importante qu'elles falsifient. Nous avons rappelé, dans le chapitre précédent, différentes approches pour la fusion de bases de croyances propositionnelles, puis possibilistes. Les premières se basent sur une notion de distance d'une interprétation à une base de croyances propositionnelle, permettant alors à chaque base considérée d'associer un entier à chaque interprétation de  $\Omega$  : les opérateurs de fusion propositionnels évoqués reposent alors sur différents types d'agrégation de ces poids pour identifier les états du monde les plus plausibles. Nous avons également vu que les opérateurs de fusion possibilistes se basent quant à eux, d'un point de vue sémantique, sur l'agrégation des degrés obtenus aux moyens de distributions de possibilité induites par les bases de croyances et portant sur les interprétations de  $\Omega$ . Nous rappelons, dans ce chapitre, différents opérateurs inspirés de ces derniers et adaptés à la fusion de bases de croyances pondérées. Ceux-ci reposent sur l'agrégation non pas d'une distance ou de degrés de possibilité, mais des poids associés aux interprétations par chacune de ces mêmes bases pondérées.

Ces opérateurs de fusion, ainsi définis, reposent cependant sur certaines hypothèses, souvent implicites. En particulier, ces opérateurs sont, d'une certaine façon, entièrement basés sur l'agrégation des poids tels qu'ils sont exprimés initialement par les sources. Ceci suppose alors que ces mêmes sources doivent partager la signification qu'elles accordent à ces poids pour que ces opérations aient du sens. Cette thèse constitue une contribution à la fusion de croyances incom-

mesurables, dans le sens où elle propose des approches du problème de fusion lorsque cette hypothèse est relâchée, voire abandonnée.

Nous montrons, dans ce chapitre, que le problème de la fusion de croyances est intimement lié à la *théorie du choix social*. En effet, le principe de cette dernière est de déterminer les préférences collectives d'un groupe à partir des préférences individuelles de chaque individu composant ce même groupe. De plus, certaines approches proposées dans la littérature de ce domaine proposent des opérateurs de vote se reposant sur l'agrégation des *utilités* que chaque individu associe aux alternatives disponibles : ces opérateurs sont en ce sens très similaires aux opérateurs de fusion adaptés aux bases de croyances pondérées que nous détaillons dans cette section. Nous verrons que Arrow identifie ainsi deux problèmes majeurs pour ce type d'approche de la théorie du choix social : celui de la *mesurabilité* et celui de l'*intercomparabilité* des utilités. Nous montrerons que ces problèmes sont très similaires à ceux que nous traitons dans le cadre de la fusion de croyances.

Ce chapitre présente ainsi notre première contribution, se situant dans la notion d'*échelle compatible*. Une échelle compatible représente une correspondance possible entre les poids exprimés par les différentes sources à fusionner, et permet ainsi de rétablir la *commensurabilité* des bases de croyances pondérées considérées. Cette notion nous permet en particulier de définir l'intégralité des opérateurs de fusion que nous proposons dans ce mémoire, constituant alors des extensions des opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées classiques adaptées au cadre *incommensurable*.

Ce chapitre se découpe donc en deux parties. Nous détaillons, dans la première partie de ce chapitre, une approche de la fusion de croyances pondérées. Nous l'illustrons ensuite en présentant deux opérateurs de fusion, respectivement basés sur la somme et le maximum, couramment rencontrés dans la littérature [Mey01]. Nous montrons alors que ce type d'opérateur n'est pas adapté lorsque les poids, associés aux croyances, ne sont pas commensurables d'une source à l'autre. De plus, nous montrons que ce problème de commensurabilité est étroitement lié à celui de l'intercomparabilité des utilités, connu dans la littérature du domaine du choix social. La seconde partie de ce chapitre se concentre ensuite sur la notion d'échelle compatible, qui est à la base des approches présentées dans ce mémoire pour la fusion de croyances incommensurables. Cette première contribution à la fusion de croyances incommensurables permet, en effet, de restaurer la commensurabilité des sources, et nous permet ainsi de présenter les extensions des opérateurs de fusion commensurables, respectivement basés sur la somme et le maximum.

### 3.1 Fusion de bases de croyances pondérées

Nous avons rappelé précédemment différentes stratégies de fusion dans le cadre de bases de croyances codées par des formules propositionnelles classiques, ou lorsque l'incertitude, associée

aux formules, est quantifiée au moyen de degrés de possibilité, ou encore de polynômes. Dans le cadre de notre étude, les croyances sont représentées au moyen de bases de croyances pondérées.

### 3.1.1 Agrégation des bases de croyances pondérées

Une croyance pondérée est une paire composée d'une formule propositionnelle classique associée à un entier naturel strictement positif appelé *poids*. Ce dernier représente simplement la certitude, ou la fiabilité, accordée à cette croyance selon la source qui l'exprime : dans notre cadre, plus ce poids est élevé, plus la croyance à laquelle il est associé est importante. Une base de croyances pondérées est donc un multi-ensemble de croyances pondérées, constituant une représentation possible d'un état épistémique au sens de [DP97]. Ce type de représentation présente de fortes similitudes avec celles utilisées dans de nombreux cadres, tels que la logique possibiliste [DLP94] lorsque les poids associés aux formules sont issus de l'ensemble  $[0,1]$ , ou les fonctions conditionnelles ordinales [Spo88, Wil94, Wil95] où cette fois-ci l'incertitude associée aux formules est codée par le biais d'ordinaux. Dans le cadre de notre étude, nous utiliserons des poids issus de  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , ceci dans un souci de simplicité et de cohérence avec les nombreux travaux existants portants sur ce domaine [Mey01]. Les bases de croyances pondérées sont formellement définies comme suit :

**Définition 17 (Base de croyances pondérées)** Une base de croyances pondérées  $B_i$  est un multi-ensemble de formules pondérées :

$$B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})), j \in \{1, \dots, m_i\}\},$$

où  $\varphi_{ij} \in \mathcal{L}$ , et  $R_{B_i}(\varphi_{ij}) \in \mathbb{N}^*$ .

Intuitivement,  $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$  signifie que la croyance représentée par  $\varphi_{ij}$  possède un rang de priorité égal à  $R_{B_i}(\varphi_{ij})$ . De cette manière, les formules associées aux poids les plus élevés représentent les croyances les plus certaines d'une source donnée. Dans ce cadre, seuls les poids strictement positifs sont représentés. De plus, le poids  $+\infty$  est réservé aux contraintes d'intégrité des sources. Cela signifie qu'aucune source ne peut associer ce poids à ses propres croyances.

Définie de cette façon, une base de croyances pondérées  $B_i$  permet alors d'induire un pré-ordre total sur les interprétations de  $\Omega$ . Pour cela, chaque interprétation  $\omega$  est associée à un poids obtenu en agrégeant, au moyen d'un opérateur  $\diamond$ , les poids des formules issues de  $B_i$  falsifiées par  $\omega$ . Les définitions les plus courantes de  $\diamond$  sont l'opérateur *somme*, correspondant à un sous-cas de la logique des pénalités présentée par le premier chapitre, ou encore l'opérateur *maximum*, sur lequel nous nous basons dans le reste de ce mémoire. Ce poids exprime simplement la compatibilité, ou encore la cohérence, de l'interprétation à laquelle il est associé vis-à-vis de l'ensemble des croyances disponibles. En particulier, les interprétations qui satisfont toutes les croyances exprimées sont les préférées. Les autres interprétations de  $\Omega$  sont ensuite ordonnées respectivement au

poids qui leur est associé par  $\diamond$ , de telle sorte que les interprétations associées aux poids les plus petits sont les préférées. Dans le cadre des bases de croyances pondérées, nous nous focalisons sur l'opérateur d'agrégation maximum pour obtenir l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  représentant l'état épistémique d'une source donnée. Ainsi, chaque interprétation est associée au poids de la croyance la plus importante qu'elle falsifie. Nous notons également  $B_i^*$  l'ensemble de formules propositionnelles classiques obtenue en ignorant les poids associés aux formules issues de  $B_i$ . Les interprétations modèles de  $B_i^*$  sont associées à un rang égal à 0. Formellement :

**Définition 18** ( $\kappa$ -fonction) *Soit  $B_i$  une base de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega \in \Omega$  :*

$$\kappa_{B_i}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall \varphi_{ij} \in B_i^*, \omega \models \varphi_{ij}; \\ \max\{R_{B_i}(\varphi_{ij}) : \omega \not\models \varphi_{ij}, (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De cette façon, une interprétation  $\omega$  est alors préférée à une autre interprétation  $\omega'$  si et seulement si la croyance la plus forte falsifiée par  $\omega$  est moins prioritaire que la croyance la plus importante falsifiée par  $\omega'$ . Les interprétations modèles de  $B_i^*$  sont par nature les préférées. Cet ordre, également connu sous le nom de *best out ordering*, est la base de la sémantique possibiliste [DLP94] et de la révision par ajustement [Wil95]. Illustrons ces définitions par l'exemple suivant :

**Exemple 4** *Soit une base de croyances pondérées  $B = \{(\neg a \vee b, 8), (a \vee b, 5), (a, 2)\}$ . Le Tableau 3.1 présente la fonction  $\kappa_B$  associée à  $B$  :*

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa_B(\omega_i)$
$\omega_0$	0	0	5
$\omega_1$	0	1	2
$\omega_2$	1	0	8
$\omega_3$	1	1	<b>0</b>

TABLE 3.1 – Un exemple de  $\kappa$ -fonction

*Ainsi, nous obtenons  $\kappa_B(\omega_0) = 5$  puisque la croyance la plus importante falsifiée par  $\omega$  est  $(a \vee b)$ , elle-même associée au poids 5. Sur cet exemple,  $\omega_3$  est l'interprétation préférée pour  $B$  puisqu'elle est modèle de cette même base.*

Il est très important de noter que les croyances sont insérées dans les bases de croyances pondérées telles qu'elles proviennent de leur sources d'information respectives. En particulier, aucune croyance n'est insérée dans ces mêmes bases par déduction ou fermeture logique par exemple. Ceci est conforme à l'esprit des *bases de croyances* introduit par Nebel dans [Neb91]. Dans ce sens, les formules représentant les croyances d'une source sont distinguées des conclusions plausibles

qui peuvent être inférées de ces mêmes croyances. De plus, plusieurs occurrences d'une même croyance peuvent être présentes dans une même base  $B_i$ , ce qui explique que nous considérons des multi-ensembles et non des ensembles de croyances. De cette manière, des croyances équivalentes possèdent des identifications différentes (cette identification peut être par exemple une numérotation sur les croyances issues de  $B_i$ ). Nous ne rendons cependant pas ces identifications explicites dans un souci d'allègement des notations.

### 3.1.2 Un opérateur de fusion basé sur le maximum

Nous notons  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de  $n$  bases de croyances pondérées, représentant respectivement les croyances issues de  $n$  sources. Nous notons également  $\mu$  une formule propositionnelle classique représentant les contraintes d'intégrité à satisfaire. De plus, nous supposons ici que chaque base de croyances pondérées est individuellement cohérente. Afin de déterminer le résultat de la fusion d'un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E$  par un opérateur adapté, chaque interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  est dans un premier temps associée à un profil, noté  $\nu_E(\omega)$ , et défini formellement de la façon suivante :

**Définition 19 (Profil d'une interprétation)** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$ . Le profil de  $\omega$  pour  $E$ , noté  $\nu_E(\omega)$ , est alors défini par :

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), \dots, \kappa_{B_n}(\omega) \rangle.$$

Ce profil représente la cohérence de  $\omega$  vis-à-vis de chaque base de croyances issue du multi-ensemble de sources à fusionner. Les degrés de cohérence  $\kappa_{B_i}(\omega)$  exprimés par ces profils sont ensuite manipulés au moyen d'un opérateur d'agrégation, dans le but d'associer chaque interprétation de  $\Omega$  à un poids unique. Ces interprétations sont ensuite ordonnées vis-à-vis du poids auquel celles-ci sont associées, les interprétations associées aux poids les plus petits étant les préférées. Nous illustrons dans un premier temps cette approche au moyen de l'opérateur d'agrégation maximum. Chaque interprétation est alors associée au plus grand degré de cohérence issu de son profil. Une interprétation  $\omega$  est ensuite préférée à une autre interprétation  $\omega'$ , noté  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , si le plus grand élément du profil associé à  $\omega$  est plus petit que le plus grand élément issu du profil de  $\omega'$ . Plus formellement :

**Définition 20** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ , puis  $\nu_E(\omega)$ ,  $\nu_E(\omega')$  leur profil respectif. Alors :

$$\omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ ssi } \text{Max}(\nu_E(\omega)) < \text{Max}(\nu_E(\omega')),$$

avec  $\text{Max}(\nu_E(\omega)) = \max_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega)$ .

Cet ordre sur les interprétations de  $\Omega$  permet d'obtenir un premier opérateur de fusion de bases de croyances pondérées, noté  $\Delta_{Max}^\mu$ . Étant donné  $E$  un multi-ensemble de sources et  $\mu$  une contrainte d'intégrité à satisfaire, nous notons  $\Delta_{Max}^\mu(E)$  l'état épistémique résultant de la fusion de  $E$  par  $\Delta_{Max}^\mu$  et représentant les croyances collectives du groupe de sources fusionnées. De là, nous notons  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$  l'ensemble des croyances préférées obtenues après fusion de  $E$  par  $\Delta_{Max}^\mu$ . Cet ensemble de croyances est une formule propositionnelle, dont les modèles sont les interprétations modèles de  $\mu$  minimales selon  $\triangleleft_{Max}^E$ . Soit formellement :

$$Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{Max}^E).$$

Illustrons à présent ces définitions par l'exemple suivant :

**Exemple 5** Considérons  $E = \{B_1, B_2\}$  un ensemble de bases de croyances pondérées, tel que  $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$ . Le Tableau 3.2 fournit les profils associés à chaque interprétation :

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$Max$
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$	8
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$	8
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$	4

TABLE 3.2 – Un exemple de fusion par  $\Delta_{Max}^\mu$

Finalemnt, sur cet exemple, le résultat de la fusion basée sur maximum de ce multi-ensemble  $E$ , en considérant  $\mu \equiv b$ , est tel que  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_3\}$ .

### 3.1.3 Un opérateur de fusion basé sur la somme

Nous rappelons maintenant un autre mode de fusion de bases de croyances pondérées, défini de façon similaire et basé sur l'opérateur d'agrégation somme. Pour celui-ci, chaque interprétation est associée à un poids obtenu en additionnant les degrés de cohérence issus de son profil. Une interprétation  $\omega$  est alors préférée à une autre interprétation  $\omega'$ , noté  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ , si la somme des éléments du profil associé à  $\omega$  est plus petite que la somme de ceux issus du profil de  $\omega'$ . Plus formellement :

**Définition 21** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ , puis  $\nu_E(\omega)$ ,  $\nu_E(\omega')$  leur profil respectif. Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega')),$$

$$\text{où } \Sigma(\nu_E(\omega)) = \sum_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega).$$

Ce nouvel ordre sur les interprétations de  $\Omega$  permet à présent d'obtenir un autre opérateur de fusion de bases de croyances pondérées, noté  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$ . Étant donné  $E$  un multi-ensemble de sources, et  $\mu$  une contrainte d'intégrité à satisfaire, nous notons  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E)$  l'état épistémique résultant de la fusion de  $E$  par  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$  et représentant les croyances collectives issues de la fusion des sources. Nous notons ensuite  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E))$  l'ensemble des croyances préférées obtenues après fusion de  $E$  par  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$ . De même que précédemment, cet ensemble de croyances est une formule propositionnelle, dont les modèles sont les interprétations modèles de  $\mu$  minimales selon  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ . Soit formellement :

$$Mod(Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{\Sigma}^E).$$

Illustrons maintenant cet opérateur de fusion de bases de croyances pondérées par l'exemple suivant :

**Exemple 6** *Considérons  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$  un ensemble de bases de croyances pondérées tel que  $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 5)\}$ . Supposons pour cet exemple que  $\mu \equiv \neg a \vee \neg b$ . Le Tableau 3.3 fournit les profils associés à chaque interprétation de  $\Omega$ .*

$\omega \in \Omega$	a	b	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle 6, 3, 0 \rangle$	9
$\omega_1$	<b>0</b>	<b>1</b>	$\langle \mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	<b>7</b>
$\omega_2$	1	0	$\langle 3, 0, 5 \rangle$	8
$\omega_3$	1	1	$\langle 0, 1, 5 \rangle$	6

TABLE 3.3 – Un exemple de fusion par  $\Delta_{\Sigma}$

*Sur cet exemple, le résultat de la fusion basée sur maximum de ce multi-ensemble  $E$ , en considérant  $\mu \equiv \neg a \vee \neg b$ , est tel que  $Mod(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E)) = \{\omega_1\}$ .*

Remarquons finalement que la principale différence entre les opérateurs proposés pour la fusion de bases de croyances propositionnelles et ceux proposés pour la fusion de bases de croyances pondérées réside dans les moyens utilisés pour agréger les croyances individuelles d'une source. En effet, alors qu'en présence de bases de croyances propositionnelles, les interprétations sont agrégées puis ordonnées au moyen d'une notion de distance vis-à-vis des informations disponibles, celles-ci sont, en présence de bases de croyances pondérées, agrégées puis ordonnées au moyen d'une  $\kappa$ -fonction, similaire à celles proposées dans le cadre de la logique possibiliste ou encore des OCF. Notons également que généralement, les conclusions obtenues par les opérateurs de fusion, détaillés précédemment et respectivement basés sur la somme et le maximum, sont incomparables. C'est-à-dire que dans le cas général, le résultat fourni par un de ces deux opérateurs ne peut être dérivé de celui obtenu de l'autre.

### 3.2 Sur le problème de la commensurabilité

Les opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées présentés précédemment reposent sur certaines hypothèses implicites. Parmi celles-ci, les sources sont supposées utiliser une représentation commune des croyances, et en particulier partager le même langage afin d'exprimer ces croyances. De plus, les atomes de ce même langage sont supposés indépendants. Les sources à fusionner sont également supposées toutes être d'égale fiabilité. Enfin, lorsque celles-ci utilisent des poids pour quantifier l'incertitude associée à leurs croyances respectives, ces sources sont supposées partager une *échelle commune* de référence.

Cependant, de part les opérateurs d'agrégation sur lesquels ils reposent, les opérateurs de fusion de croyances pondérées rappelés précédemment supposent implicitement que les poids associés aux formules sont commensurables d'une source à l'autre. Autrement dit, les sources sont supposées partager la même échelle d'incertitude lorsqu'elles évaluent leurs croyances respectives. Cette hypothèse de commensurabilité peut avoir du sens dans certaines situations, en particulier lorsqu'il est possible d'obtenir une échelle de référence commune entre les sources. Cependant, cette même hypothèse peut également se révéler trop forte pour beaucoup d'autres applications, lorsque par exemple les informations sont obtenues à partir de sources de qualités inconnues, par exemple lorsque ces informations proviennent du web, ou encore lorsque les formules propositionnelles encodent des informations subjectives, telles que des opinions, des jugements ou des préférences. Nous pouvons également remarquer que dans un cas extrême, une source peut largement exagérer l'importance qu'elle donne à ses propres croyances dans le but d'influencer fortement le processus de fusion en le manipulant.

Tout au long de ce mémoire, nous désignons par les termes *bases de croyances pondérées incommensurables* ou encore *bases de croyances incommensurables* des bases de croyances pondérées, pour lesquelles les sources ne disposent pas d'échelle de référence commune afin d'exprimer la fiabilité de leurs croyances. Nous désignons également par les termes *fusion incommensurable* la fusion, par un opérateur adapté, d'un tel multi-ensemble de bases de croyances pondérées. De même, nous désignons par les termes *fusion commensurable* la fusion, par un opérateur classique tel que ceux rappelés précédemment, d'un multi-ensemble de bases de croyances pondérées telles que les poids associés aux formules issues de ces bases sont supposés commensurables d'une source à l'autre.

Lorsque les sources ne partagent pas la même signification accordée aux poids utilisés pour quantifier la fiabilité des croyances disponibles, quel sens donner à la manipulation, l'agrégation ou la comparaison de ces poids ? Comment définir un opérateur d'agrégation sur lequel reposerait un opérateur de fusion dans ces conditions ? Est-il possible d'établir une relation de correspondances  $<_{corresp}$  entre les poids issus de différentes sources, telle que par exemple, *le poids 5 pour une source  $B_i$  est plus faible que le poids 3 pour une autre source  $B_j$* , soit formellement  $5_{B_i} <_{corresp} 3_{B_j}$ , *le poids 1 pour une source  $B_i$  équivaut au poids 6 pour une autre source  $B_k$* , soit formellement  $1_{B_i} =_{corresp} 6_{B_k}$ , et ainsi de suite ? Faut-il plutôt tenir compte de plusieurs



de ces correspondances, considérées alors également plausibles, pour maintenir un comportement idéalement rationnel lors de la fusion d'un tel ensemble de sources ?

Il existe, dans la littérature, quelques tentatives d'approches pour la fusion de bases de croyances stratifiées sans hypothèse de commensurabilité. Parmi celles-ci, [BDP99] propose une stratégie de fusion dans le cadre de la théorie des possibilités qui relâche bien, en effet, cette hypothèse de commensurabilité. Cependant, cette même approche suppose l'existence d'un ordre entre les bases de croyances stratifiées à fusionner. À l'inverse, l'approche que nous présentons ne nécessite pas une telle supposition. Plus récemment, [GLB06] a proposé une autre stratégie pour la fusion de bases de croyances stratifiées supposées incommensurables. Dans cette approche, chaque base de croyances à fusionner fournit un ordre sur les interprétations de  $\Omega$ , associant ainsi un *degré de priorité* à chaque interprétation. De cette manière, chacune de ces interprétations est associée à un *vecteur de priorité* regroupant les degrés de priorité respectivement fournis par chaque source. Les interprétations préférées pour la fusion des sources sont alors celles dont les profils sont minimaux suivant un ordre lexicographique. Cette approche nécessite donc de fournir un ordre de fiabilité sur les sources afin d'utiliser l'ordre lexicographique, ce que notre approche ne requiert pas. De plus, cette approche suppose que les priorités fournies par chaque source sont comparables : en effet, si une source associe un rank  $i$  à une certaine formule  $\varphi$ , puis une autre source associe un rank  $j$  à une autre formule  $\psi$ , alors  $\varphi$  et  $\psi$  peuvent être comparées seulement si ces deux sources utilisent la même stratégie pour ordonner leurs formules respectives. En ce sens, l'hypothèse de commensurabilité n'est pas tout à fait écartée. Pour notre approche, les poids associés aux formules  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont pas supposées commensurables.

### 3.3 Commensurabilité et choix social

Nous montrons, dans cette section, que le problème de commensurabilité des sources a déjà été soulevé dans le domaine du choix social. La *théorie du choix social* [Arr63, Sen70] consiste à définir les préférences collectives d'un groupe ou d'une *société*, à partir des préférences individuelles de chaque entité ou individu qui le compose. En ces termes, ce problème est intimement lié à celui de la fusion de croyances [CGM06]. Nous avons vu en effet, dans le chapitre précédent, que ce dernier consiste à obtenir les croyances sur le monde les plus certaines d'un groupe à partir des croyances que chaque source issue de ce groupe possède sur le monde. Nous avons ainsi rappelé que ce problème peut également être vu comme la recherche d'un ordre sur les interprétations de  $\Omega$ , à partir des préférences exprimées sur les différentes interprétations possibles par chaque source prise en compte. Les premiers travaux, établissant la problématique du choix social et apportant les premiers résultats fondamentaux relatifs à ce cadre, remontent à Borda [Bor81] et à Condorcet [Con85]. D'autres travaux plus récents et explorant largement ce domaine, tels que ceux fondateurs de Arrow [Arr63], ou encore ceux de Sen [Sen70, Sen86], sont également

fréquemment cités dans la littérature.

Dans le cadre de la théorie du choix social, chaque individu peut exprimer ses préférences en associant des poids, alors appelés *utilités*, aux différentes alternatives possibles. Tout comme dans le cadre de la fusion de croyances, une première idée consiste alors à agréger ces utilités individuelles afin d'obtenir les alternatives préférées d'un groupe. Ainsi, le problème de commensurabilité des poids, que nous explorons dans le cadre de la fusion de croyances, apparaît dans le cadre de la théorie du choix social sous les termes de problème de *comparabilité interpersonnelle des utilités*. Arrow déclare à ce sujet dans [Arr63] :

*"The viewpoint will be taken here that interpersonal comparison of utilities has no meaning and, in fact, that there is no meaning relevant to welfare comparisons in the measurability of individual utility."*

Arrow choisit ainsi, en ces termes, de renoncer à l'étude des utilités exprimées par les individus. La controverse concernant l'expression des utilités est bien connue dans le domaine du choix social. En effet, l'expression des préférences parmi les alternatives disponibles, au moyen d'utilités associés à ces alternatives, soulève plusieurs problèmes importants.

*"Indeed, the only meaning the concepts of utility can be said to have is their indications of actual behavior; and, if any course of behavior can be explained by a given utility function, it has been amply demonstrated that such a course of behavior can be equally well explained by any other utility function which is a strictly increasing function of the first."*

Ainsi, le premier des problèmes, identifiés par Arrow, est celui de la *mesurabilité*. Dans le cadre de la théorie du choix social, lorsque les individus associent des utilités aux alternatives disponibles, pourquoi utilisent-ils une échelle plutôt qu'une autre ? Il a été démontré, dans le domaine de la théorie du choix social, qu'une échelle d'utilités employée par un individu, afin de quantifier ses préférences, peut être indifféremment remplacée par une autre échelle, correspondante à une augmentation stricte des poids issus de la première. De façon similaire, dans le cadre de la fusion de croyances pondérées, les différentes sources en présence associent des poids aux informations qu'elles fournissent afin de quantifier l'incertitude de leurs croyances. Mais pourquoi une source fournit-elle une échelle de poids et non une autre ?

Afin d'illustrer ce problème de mesurabilité, considérons l'exemple de la mesure d'une température. Par convention, la température d'un corps est en effet égale au volume d'une unité d'un gaz parfait placé en son contact. Pourquoi alors ne pas employer le carré ou la racine cubique de cette mesure ? Cette exemple illustre bien le problème de mesurabilité des utilités d'un individu. En effet, il n'y a aucune raison a priori que deux individus distincts mesurent leurs utilités de la même façon. De plus, rien n'informe non plus a priori sur l'intensité, ou la linéarité de ces échelles. En effet, une augmentation de  $0^\circ$  à  $1^\circ$  de la température est elle tout aussi intense qu'une

augmentation de  $100^\circ$  à  $101^\circ$  ? De façon similaire, pour l'expression des utilités, est-il possible d'exploiter certaines notions d'intensité, de linéarité ou d'homogénéité reliant les différents poids exprimés par un même individu ? Ce problème est également présent dans le cadre des croyances pondérées. En effet, d'où proviennent les poids employés par les sources pour quantifier la fiabilité des croyances fournies ? Comment savoir si l'échelle de poids utilisée par une source possède une signification particulière ? Ces mêmes poids peuvent-ils être reliés par des notions d'intensité, de linéarité ou d'homogénéité ?

La façon dont les individus quantifient leurs préférences est ainsi remise en cause. On peut s'interroger alors sur le sens que cela a de comparer ces utilités d'un individu à l'autre, puisque chaque individu semble fournir des utilités de façon plus ou moins arbitrairement :

*"If we cannot have measurable utility, in this sense, we cannot have interpersonal comparability of utilities a fortiori. [...] Even if, for some reason, we should admit the measurability of utility for an individual, there still remains the question of aggregating the individual utilities."*

Le second problème ainsi identifié par Arrow est celui de l'*intercomparabilité* des utilités. Ce problème est toujours activement étudié dans le domaine de la théorie du choix social [Ham91, Bin07]. Même si la mesurabilité des échelles d'utilités employées par les individus est admise, rien n'indique que les individus emploient la même échelle d'utilité, afin d'évaluer l'importance qu'ils accordent aux alternatives disponibles. Quel sens cela a-t-il alors d'agréger ces mêmes utilités ?

Ainsi, les utilités associées par les individus aux alternatives représentent des états mentaux subjectifs, et les additionner d'un individu à l'autre ne possède alors aucun sens. Ce problème d'intercomparabilité des utilités est intimement lié à celui que nous étudions, dans le cadre de la fusion de bases de croyances pondérées, sous les termes de commensurabilité des échelles de poids entre sources. En effet, et comme nous l'avons vu précédemment, si les échelles ne partagent pas une échelle de poids commune, afin de quantifier l'incertitude de leurs croyances, agréger ces mêmes poids pour déterminer les états du monde les plus plausibles n'a alors aucun sens non plus.

*"We will therefore assume throughout this book that the behavior of an individual in making choices is describable by means of a preference scale without any cardinal significance, either individual or interpersonal."*

Ainsi, en ces termes, Arrow choisit d'ignorer les indicateurs quantitatifs, pour se concentrer exclusivement sur les aspects qualitatifs de l'expression des préférences entre les différentes alternatives disponibles. À l'inverse, et malgré l'hypothèse d'incommensurabilité entre sources que nous formulons, nous choisissons de conserver cette notion de pondération, et nous nous concentrons sur ces mêmes poids afin de fournir des opérateurs de fusion adaptés à la manipulation de bases de croyances pondérées incommensurables.

Ainsi, la section suivante propose une notion permettant de rétablir la commensurabilité entre sources, en explorant simplement les différentes correspondances possibles entre les poids qu'elles expriment. Les chapitres suivant proposent dans un premier temps des opérateurs de fusion tenant compte de l'ensemble des correspondances possibles entre ces poids. Nous proposons également, plus tard dans ce mémoire, un ensemble d'opérateurs de fusion permettant de tenir compte de certaines hypothèses particulières sur la mesurabilité des poids exprimés par les sources, telles que des notions de comparabilité d'une source à l'autre de l'intensité, de la linéarité ou encore de l'homogénéité entre poids issus d'une même source.

### 3.4 Échelles compatibles

Lorsque les poids associés aux formules ne sont pas commensurables d'une source à l'autre, une stratégie de fusion naturelle consiste à utiliser le concept de possible échelle commune de référence, appelée *échelle compatible* [BLR07a, BLR07b]. Une échelle compatible représente simplement une correspondance possible entre les poids associés aux formules issues des différentes sources incommensurables. Plus particulièrement, une échelle compatible associe de nouveaux poids aux formules, de telle sorte que les ordres relatifs initialement établis entre les croyances issues d'une même base sont préservés. Plus formellement :

**Définition 22 (Échelle compatible)** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, avec  $B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))\}$ . Une échelle compatible  $\mathcal{S}$  est alors une fonction définie par :

$$\mathcal{S} : E = \{B_1, \dots, B_n\} \rightarrow E^{\mathcal{S}} = \{B_1^{\mathcal{S}}, \dots, B_n^{\mathcal{S}}\}$$

de telle sorte que  $\forall B_i \in E$ ,

1.  $B_i^{\mathcal{S}} = \{(\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij})) : (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\}$  ;
2.  $\forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \forall (\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i,$

$$R_{B_i}(\varphi_{ij}) \leq R_{B_i}(\varphi_{ij'}) \text{ ssi } \mathcal{S}(\varphi_{ij}) \leq \mathcal{S}(\varphi_{ij'}).$$

En particulier, la seconde condition stipule qu'une échelle compatible ne peut inverser la priorité initialement exprimée entre deux croyances issues de la même base. Étant donnée une échelle compatible  $\mathcal{S}$ ,  $B_i^{\mathcal{S}}$  dénote la base de croyances pondérées obtenue à partir de  $B_i$  par application de  $\mathcal{S}$ . Plus formellement,  $B_i^{\mathcal{S}}$  est obtenue en remplaçant chaque formule pondérée  $(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$  par  $(\varphi_{ij}, \mathcal{S}(\varphi_{ij}))$ . De plus,  $E^{\mathcal{S}}$  dénote le multi-ensemble de bases de croyances pondérées obtenues par application de  $\mathcal{S}$  sur chaque base de croyances pondérées  $B_i$  d'un multi-ensemble  $E$  donné. Les nouveaux poids associés aux formules par une échelle compatible deviennent comparables d'une source à l'autre, et ces mêmes sources deviennent alors commensurables. Cependant, une échelle compatible possible n'est pas unique pour un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E$  donné, comme l'illustre l'exemple suivant :

**Exemple 7** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , où  $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$ . Le Tableau 3.4 présente trois échelles alternatives sur  $E$  :  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$ .

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_1(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_2(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_3(\varphi_{ij})$
$B_1$	$a$	8	5	12	4
	$-b$	4	2	2	7
$B_2$	$b$	2	7	17	3
	$-a$	1	1	9	2

TABLE 3.4 – Exemples d'échelles

Les échelles  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  sont compatibles, puisqu'elles préservent les ordres fournis initialement pour chaque base de croyances pondérées. À l'inverse, l'échelle  $\mathcal{S}_3$  n'est pas compatible : celle-ci inverse la priorité donnée entre les formules de  $B_1$ . En effet,  $R_{B_1}(a) = 8 > R_{B_1}(b) = 4$  alors que  $\mathcal{S}_3(a) = 4 < \mathcal{S}_3(b) = 7$ .

L'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E$  est noté  $\mathbb{S}_E$ . Remarquons que cet ensemble n'est jamais vide. Nous définissons en effet une *échelle identitaire*, notée  $\mathcal{S}_{Id}$ , qui laisse simplement inchangés les poids initialement fournis sur les formules d'un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Plus formellement :

**Définition 23** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Une *échelle identitaire*, notée  $\mathcal{S}_{Id}$ , associée à  $E$  est alors définie par :

$$\forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \mathcal{S}_{Id}(\varphi_{ij}) = R_{B_i}(\varphi_{ij}).$$

Par définition, une telle échelle existe toujours, quelque soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. Cette échelle identitaire est naturellement compatible, puisqu'elle préserve par définition les ordres initiaux fournis sur les formules de chaque base de croyances pondérées. Le fait qu'une telle échelle compatible existe, quelque soit le multi-ensemble de source considéré, fournit une démonstration pour la proposition suivante :

**Proposition 1** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $\mathbb{S}_E$  l'ensemble des échelles compatibles possibles pour  $E$ . Alors  $\mathbb{S}_E \neq \emptyset$ .

Une propriété importante des échelles compatibles, dans le cadre des bases de croyances pondérées, est de conserver, pour une base de croyances donnée, l'ordre induit initialement sur les interprétations de  $\Omega$ . Formellement :

**Proposition 2** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit également  $\mathcal{S}$  une échelle compatible avec  $E$ . Alors  $\forall B_i \in E, \forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\kappa_{B_i}(\omega) \leq \kappa_{B_i}(\omega') \text{ ssi } \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) \leq \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega')$$

---

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ , et supposons que  $\kappa_{B_i}(\omega) \leq \kappa_{B_i}(\omega')$ . À ce point, par définition des bases de croyances pondérées, nous obtenons  $\exists \varphi \in B_i, \kappa_{B_i}(\omega) = R_{B_i}(\varphi)$ . En particulier,  $\nexists \psi \in B_i, \omega \not\models \psi$  et  $R_{B_i}(\psi) > R_{B_i}(\varphi)$ . De la même façon, nous obtenons également  $\exists \varphi' \in B_i, \kappa_{B_i}(\omega') = R_{B_i}(\varphi')$ . Puisque  $\kappa_{B_i}(\omega) \leq \kappa_{B_i}(\omega')$ , nous obtenons  $R_{B_i}(\varphi) \leq R_{B_i}(\varphi')$ .

Soit  $\mathcal{S}$  une échelle compatible avec  $E$ . Par définition des échelles compatibles, et puisque par définition  $R_{B_i}(\varphi) \leq R_{B_i}(\varphi')$ , nous obtenons  $\mathcal{S}(\varphi) \leq \mathcal{S}(\varphi')$ . Par hypothèse sur  $\varphi$  et  $\varphi'$ , nous obtenons finalement  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) \leq \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega')$ .

La réciproque est identique, puisque par la définition des échelles compatibles, nous savons que  $\kappa_{B_i}(\omega) \leq \kappa_{B_i}(\omega')$  ssi  $R_{B_i}(\varphi) \leq R_{B_i}(\varphi')$ . ■

---

À l'inverse, dans le cadre de la logique des pondérations, cette propriété ne tient pas, comme nous l'illustrons par le contre-exemple suivant :

**Exemple 8** Soit une base de croyances pondérées  $B = \{(a, 4), (b, 2), (\neg a \wedge b, 1)\}$ . Soit également une échelle  $\mathcal{S}$  telle que  $B^{\mathcal{S}} = \{(a, 8), (b, 6), (\neg a \wedge b, 3)\}$ . Cette échelle est compatible, puisqu'elle conserve l'ordre établi sur les formules de  $B$ . Considérons à présent deux interprétations du langage  $\omega = \{a, \neg b\}$  et  $\omega' = \{\neg a, b\}$ .

Dans le cadre des pondérations, nous obtenons  $\kappa_{B_i}(\omega) = 2$ , puisque  $b$  est la croyance la plus prioritaire falsifiée par  $\omega$ . De la même façon, nous obtenons  $\kappa_{B_i}(\omega') = 4$  et ainsi,  $\kappa_{B_i}(\omega') > \kappa_{B_i}(\omega)$ . De plus, nous obtenons également  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) = 6$ , et  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') = 8$ . Ainsi,  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega)$ . Cet exemple illustre le fait que dans le cadre pondéré, les échelles compatibles conservent les ordres induits sur les interprétations.

Dans le cadre des pénalités, nous avons  $Pen_{B_i}(\omega) = 2 + 1 = 3$ , puisque  $\omega$  falsifie  $b$  et  $\neg a \wedge b$ . De façon similaire, nous obtenons  $Pen_{B_i}(\omega') = 4$  et ainsi,  $Pen_{B_i}(\omega') > Pen_{B_i}(\omega)$ . Cependant, selon l'échelle  $\mathcal{S}$ ,  $Pen_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) = 6 + 3 = 9$ , et  $Pen_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') = 8$ . Ainsi, sur cet exemple,  $\mathcal{S}$  inverse l'ordre induit sur les interprétations, puisque  $Pen_{B_i}(\omega') < Pen_{B_i}(\omega)$ .

Remarquons ensuite que dans le cadre des bases de croyances pondérées, les croyances sont exprimées telles qu'elles proviennent de leurs sources d'information respectives, et ne dérivent pas, par exemple, d'autres croyances issues de cette même source par fermeture déductive. Si,

par exemple, une source donnée fournit les formules suivantes,  $B = \{(a, 1), (b, 2), (a, 3)\}$ , cette base sera alors acceptée et manipulée par les échelles compatibles possibles, et cela même si les poids associés aux formules expriment une contradiction puisque, d'une part,  $a$  est strictement plus prioritaire que  $b$ , alors que d'autre part nous avons le contraire. En fait, dans le cadre de l'utilisation de  $\kappa$ -fonctions basées sur le maximum pour représenter les croyances individuelles d'une source,  $B$  est manipulée en tant que base de croyances pondérées équivalente à  $B' = \{(b, 2), (a, 3)\}$ , où la croyance  $(a, 1)$  est ignorée et considérée comme une croyance redondante. La croyance  $(a, 1)$  est alors dite *sous-sommée* par la croyance  $(a, 3)$ .

De façon similaire, une échelle compatible ne tient pas compte de la signification des croyances mais manipule plutôt directement les poids associés à ces croyances. Si, par exemple, nous considérons deux bases de croyances pondérées telles que  $B_1 = \{(a, 1), (b, 2)\}$  et  $B_2 = \{(b, 3), (a, 5)\}$ , une échelle compatible possible  $\mathcal{S}$  peut alors être définie telle que  $B_1^{\mathcal{S}} = \{(a, 2), (b, 3)\}$ , et  $B_2^{\mathcal{S}} = \{(b, 2), (a, 3)\}$ . Même si les priorités obtenues pour chacune de ces deux bases de croyances entre les formules  $a$  et  $b$  semblent contradictoires, cette échelle est bien compatible puisqu'elle préserve les priorités initialement fournies entre les croyances respectivement issues de  $B_1$  et  $B_2$ .

### 3.5 Synthèse du chapitre

Nous avons, dans ce chapitre, présenté les différentes approches existantes pour la fusion de bases de croyances pondérées. Nous avons vu que ce cadre présente de fortes similitudes avec celui de la logique possibiliste, ou celui encore des OCF. Ainsi, la fusion de telles bases de croyances se basent avant tout, d'un point de vue sémantique, sur l'agrégation des poids associés aux interprétations de  $\Omega$  et tels qui sont initialement exprimés par les sources. Il est alors possible de se rendre compte que le résultat de la fusion dépend fortement de la valeur de ces mêmes poids qui sont, en un sens, attribués de façon plus ou moins arbitraire par chaque source aux croyances. Nous avons ainsi présenté le problème de la commensurabilité des échelles de poids utilisées par les sources, afin de quantifier la fiabilité respectivement associée à chacune de leurs croyances. Ainsi, nous avons vu que lorsque les sources ne partagent pas la signification qu'elles accordent à la notion de pondération, les opérateurs de fusion existants, reposant sur l'agrégation de ces mêmes poids, perdent leur sens. En effet, quel sens cela a-t-il de manipuler, comparer ou même sommer ces poids si les sources ne partagent pas une échelle de pondération commune, ou tout du moins s'il n'est pas possible d'obtenir une échelle de correspondance entre les poids exprimés par chacune de ces sources ? Nous avons donc pour objectif de présenter, dans la suite de ce mémoire, différentes approches adaptées à la fusion de croyances pondérées lorsque les poids, utilisés afin de quantifier l'incertitude des informations, ne sont pas commensurables d'une source à l'autre.

Nous avons vu également que ce problème présente de fortes similitudes avec celui connu, dans le cadre de la théorie du choix social, sous les termes de *comparabilité interpersonnelle des utilités* des individus. En particulier, Arrow identifie deux problèmes majeurs, survenant

lorsque le choix social est abordé en des termes d'agrégation des utilités exprimées par les individus sur les alternatives disponibles : celui de la *mesurabilité* et celui de l'*intercomparabilité* de ces utilités. Ces problèmes sont exactement ceux que nous traitons dans ce mémoire, dans le cadre de la fusion de bases de croyances pondérées. Cependant, et à l'inverse d'Arrow qui choisit de se restreindre aux représentations qualitatives, nous choisissons, dans ce mémoire, de proposer des solutions se reposant sur les aspects quantitatifs et se reposant ainsi sur les poids associés aux croyances. Un des principaux objectifs de cette thèse est donc de fournir des opérateurs de fusion adaptés au cadre incommensurable, plus productifs que les approches se restreignant, dans ce type de situation, aux représentations purement qualitatives.

Nous avons enfin présenté notre première contribution à la fusion de croyances pondérées incommensurables, reposant dans la notion d'*échelle compatible*. Une échelle compatible représente simplement une correspondance possible entre les poids exprimés par les différentes sources. Nous avons montré qu'une telle échelle compatible n'est pas unique pour un multi-ensemble de sources à fusionner. Nous avons également montré que dans le cadre des bases de croyances pondérées induisant un ordre sur les interprétations de  $\Omega$  par le biais de  $\kappa$ -fonctions, une échelle compatible préserve qualitativement cette ordre.

Nous présentons maintenant, dans les chapitres suivants, une stratégie de fusion adaptée au cadre des bases de croyances pondérées incommensurables. Pour cela, nous proposons plusieurs extensions, basées sur la notion d'échelle compatible, des opérateurs de fusion de croyances pondérées rappelés par ce chapitre. Nous nous intéressons dans un premier temps un cadre égalitaire, en adaptant cette stratégie à un opérateur de fusion basé sur le maximum.



## Chapitre 4

# Fusion incommensurable et cadre égalitaire

Nous avons présenté, dans le chapitre précédent, les opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées existants, ainsi que le problème de commensurabilité des sources que ceux-ci soulèvent. Pour traiter ce problème, nous avons introduit la notion d'échelle compatible, qui représente simplement une correspondance possible entre les poids issus des différentes bases de croyances à fusionner. Au moyen de cette notion, nous présentons dans ce chapitre une méthode de fusion qui étend l'opérateur de fusion commensurable basé sur le maximum. Dans cette manière, nous essayons de fournir une approche égalitaire pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables.

Pour traiter le problème de l'incommensurabilité d'un point de vue sémantique, ce premier opérateur repose sur l'approche sceptique suivante : une interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  est préférée à une autre interprétation  $\omega'$ , si pour toute échelle compatible, cette première interprétation  $\omega$  est préférée à la seconde, au sens de l'opérateur de fusion commensurable, basé sur le maximum, et rappelé par le chapitre précédent. Nous montrons ainsi dans ce chapitre qu'il est possible de caractériser cet opérateur au moyen d'un ensemble infini d'échelles compatibles, mais aussi en termes de relations qualitatives sur les interprétations de  $\Omega$  compatibles avec celles induites par chaque base de croyances en présence, ou encore au moyen d'un critère de comparaison des profils initialement associés aux interprétations par ces mêmes bases de croyances.

Nous étudions également le comportement logique de l'opérateur de fusion incommensurable que nous proposons. Pour cela, nous adaptons dans un premier temps au cadre des bases de croyances pondérées les postulats de rationalité proposés par Konieczny et Pino Pérez [KPP02] pour la caractérisation du comportement idéal des opérateurs de fusion contrainte. Nous proposons également une étude du comportement rationnel de l'opérateur de fusion commensurable basé sur le maximum. Nous verrons en particulier que cet opérateur ne vérifie pas le postulat d'équité,

ce qui renforce bien le problème de la commensurabilité sous-jacent à ce type d'opérateur. Nous montrons également que l'opérateur de fusion commensurable que nous proposons respecte bien ce postulat, et fait donc preuve de plus de prudence lors de la prise en compte des poids exprimés par les source. Nous montrons cependant que de part la nature de la relation qu'il établit entre les interprétations, cet opérateur n'est pas en mesure de satisfaire d'autres postulats. Nous confirmons également que l'approche que nous développons dans ce chapitre constitue bien une stratégie égalitaire, puisque l'opérateur que nous proposons satisfait bien le postulat proposé pour la caractérisation de ce type d'approche. Nous montrons enfin que cette même approche se révèle être une stratégie de *consensus* entre les sources qu'elle satisfait toutes un minimum, en montrant que notre opérateur satisfait un nouveau postulat que nous proposons pour la caractérisation de ce type d'approche.

## 4.1 Fusion incommensurable basée sur le maximum

Une approche naturelle et intuitive, permettant de fusionner des bases de croyances pondérées incommensurables, consiste ainsi à prendre en compte l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources donné [BLR07a, BLR07b].

### 4.1.1 Un opérateur de fusion basé sur les échelles compatibles

Nous adaptons donc dans un premier temps cette stratégie au cadre égalitaire. Ainsi, nous définissons la relation  $\triangleleft_{Max}^E$  sur les interprétations de  $\Omega$  de la façon suivante : une interprétation  $\omega$  est préférée à une interprétation  $\omega'$  si et seulement si pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{S}_E$ ,  $\omega$  est préférée à  $\omega'$  selon l'opération de fusion de bases de croyances pondérées classique basée sur le maximum. Plus formellement :

**Définition 24** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\mathbb{S}_E$  l'ensemble associé des échelles compatibles possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Nous définissons alors  $\triangleleft_{Max}^E$  tel que  $\forall \omega \in \Omega, \forall \omega' \in \Omega$  :

$$\omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'.$$

L'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}}$  est celui sur lequel se base l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur le maximum, rappelé par la Définition 20, et appliqué à  $E^{\mathcal{S}}$ .

A l'inverse, nous notons  $\omega \not\triangleleft_{Max}^E \omega'$  la situation inverse, c'est-à-dire qu'il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$ . Remarquons que la relation  $\triangleleft_{Max}^E$  sur les interprétations de  $\Omega$  est seulement partielle : s'il est possible de trouver une première échelle compatible  $\mathcal{S}$  telle qu'une interprétation  $\omega$  soit préférée à une autre interprétation  $\omega'$  selon  $\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}}$ , puis une seconde

échelle compatible  $\mathcal{S}'$  telle que  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}} \omega$ , alors ces deux interprétations  $\omega$  et  $\omega'$  sont incomparables selon  $\triangleleft_{Max}^E$ . De plus, il est possible de démontrer que la relation  $\triangleleft_{Max}^E$  est un ordre partiel strict, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 3** *Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :*

$\triangleleft_{Max}^E$  est une relation irréflexive et transitive.

**Preuve** *Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Montrons que*

$\triangleleft_{Max}^E$  est une relation :

- *irréflexive. Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$ . Par définition des échelles compatibles,  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega)) = Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega))$ . Nous obtenons donc trivialement  $\omega \not\triangleleft_{Max}^E \omega$  ;*
- *transitive. Soit  $\omega_1, \omega_2$ , et  $\omega_3$  trois interprétations de  $\Omega$ . Supposons que  $\omega_1 \triangleleft_{Max}^E \omega_2$ . Par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous avons  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega_1)) < Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega_2))$ . De l'hypothèse  $\omega_2 \triangleleft_{Max}^E \omega_3$ , nous obtenons de la même manière  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega_2)) < Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega_3))$ . Puisque  $<$  est un ordre strict sur  $\mathbb{N}$  et constitue donc une relation transitive, nous obtenons  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega_1)) < Max(\nu_{E\mathcal{S}}(\omega_3))$ . Par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons finalement  $\omega_1 \triangleleft_{Max}^E \omega_3$ . ■*

L'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{Max}^E$  peut être vu comme une représentation de l'état épistémique résultant du processus de fusion des sources incommensurables. Cet ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{Max}^E$  nous amène à présent à définir un opérateur de fusion noté  $\blacktriangle_{Max}^\mu$ . Les modèles des croyances préférées issues de  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E)$  sont les interprétations de  $\Omega$  qui sont modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$  tout en étant minimales selon  $\triangleleft_{Max}^E$ . Plus formellement :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{Max}^E).$$

Illustrons ces définitions par l'exemple suivant :

**Exemple 9** *Considérons l'ensemble des bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , tel que  $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$ . Supposons que  $\mu \equiv \top$ . Soient les échelles compatibles  $\mathcal{S}_1$  où  $B_1^{\mathcal{S}_1} = \{(a, 8), (-b, 4)\}$  et  $B_2^{\mathcal{S}_1} = \{(b, 2), (-a, 1)\}$ , et  $\mathcal{S}_2$  où  $B_1^{\mathcal{S}_2} = \{(a, 12), (-b, 2)\}$  et  $B_2^{\mathcal{S}_2} = \{(b, 17), (-a, 9)\}$ . Le Tableau 4.1 présente le profil associé à chaque interprétation de  $\Omega$  pour chacune de ces échelles compatibles.*

	a	b	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	Max	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$	Max
$\omega_0$	0	0	$\langle 8,2 \rangle$	8	$\langle 12,17 \rangle$	17
$\omega_1$	0	1	$\langle 8,0 \rangle$	8	$\langle 12,0 \rangle$	12
$\omega_2$	1	0	$\langle 0,2 \rangle$	<b>2</b>	$\langle 0,17 \rangle$	17
$\omega_3$	1	1	$\langle 4,1 \rangle$	4	$\langle 2,9 \rangle$	<b>9</b>

TABLE 4.1 – Deux exemples d'échelles compatibles

En complément, le Tableau 4.2 présente six autres échelles compatibles choisies plus ou moins arbitrairement, tandis que le Tableau 4.3 présente le profil associé à chaque interprétation de  $\Omega$  pour chacune de ces échelles compatibles.

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$	$\mathcal{S}_6$	$\mathcal{S}_7$	$\mathcal{S}_8$
$B_1$	$a$	8	7	6	2	4	20	200
	$\neg b$	4	3	4	1	1	10	100
$B_2$	$b$	2	2	4	2	13	30	400
	$\neg a$	1	1	1	1	1	20	300

TABLE 4.2 – Quelques échelles compatibles

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_3}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_4}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_5}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_6}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_7}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_8}}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 7,2 \rangle$	$\langle 6,4 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 4,13 \rangle$	$\langle 20,30 \rangle$	$\langle 200,400 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 7,0 \rangle$	$\langle 6,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 4,0 \rangle$	<b><math>\langle 20,0 \rangle</math></b>	<b><math>\langle 200,0 \rangle</math></b>
$\omega_2$	<b><math>\langle 0,2 \rangle</math></b>	<b><math>\langle 0,4 \rangle</math></b>	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,13 \rangle$	$\langle 0,30 \rangle$	$\langle 0,400 \rangle$
$\omega_3$	$\langle 3,1 \rangle$	<b><math>\langle 4,1 \rangle</math></b>	<b><math>\langle 1,1 \rangle</math></b>	<b><math>\langle 1,1 \rangle</math></b>	<b><math>\langle 10,20 \rangle</math></b>	$\langle 100,300 \rangle$

TABLE 4.3 – Profils associés aux interprétations

Les éléments mis en évidence du Tableau 4.3 représentent les modèles de  $\text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E^{\mathcal{S}}))$  pour une échelle  $\mathcal{S}$  donnée. Ainsi, par exemple, les interprétations  $\omega_1$  et  $\omega_3$  sont modèles de  $\text{Bel}(\Delta_{\text{Max}}^\mu(E^{\mathcal{S}}))$  pour l'échelle compatible  $\mathcal{S}_7$ . Sur cet exemple, il n'est pas possible de construire une échelle compatible  $\mathcal{S}_i$  telle que  $\omega_0$  serait préférée pour  $\Delta_{\text{Max}}^\mu(E^{\mathcal{S}_i})$ . Ainsi, en considérant l'ensemble des échelles compatibles pour  $E$ , les modèles du résultat de la fusion sont  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$ .

Considérer l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources à fusionner constitue-t-il une approche trop prudente ? On pourrait, a priori, penser que cette stratégie ne permet de dériver que des tautologies du résultat de la fusion. La proposition suivante montre qu'il n'en est rien, puisqu'en particulier, si l'union des sources à fusionner est cohérent, le résultat de la fusion est simplement la conjonction de ces sources. Formellement :

**Proposition 4** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Si  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  est cohérent, alors

$$\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*).$$

**Preuve** Montrons dans un premier temps, que si  $\omega$  est modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  est également modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))$ .

Pour cela, supposons que  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  est cohérent. Dans ce cas, il existe une interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ . Par la Définition 18, nous savons que pour chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $k_{B_i}(\omega) = 0$ . Par définition des échelles compatibles, nous obtenons alors que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S}$ , le profil associé à  $\omega$  est tel que  $\nu_{E\mathcal{S}}(\omega) = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . En d'autres termes, pour chaque échelle compatible,  $Max(\nu_{E\mathcal{S}}) = 0$ . Ainsi, nous obtenons que  $\omega$  est minimale pour  $\blacktriangle_{Max}^E$ .

Montrons maintenant que si  $\omega$  n'est pas modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  n'est pas non plus modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))$ .

Pour cela, supposons que  $\omega'$  est une interprétation de  $\Omega$  falsifiant au moins une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ . Dans ce cas, il existe au moins une base  $B_i$  telle que  $k_{B_i}(\omega') > 0$ . Par définition, pour toute échelle compatible possible pour  $E$ ,  $Max(\nu_{E\mathcal{S}}) > 0$ . De part l'existence de  $\omega$  qui satisfait toute base  $B_i$  issue de  $E$  (puisque nous avons supposé que  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$  est cohérent), nous obtenons finalement que  $\omega'$  n'est pas minimale pour  $\blacktriangle_{Max}^E$ .  $\blacksquare$

De plus, dans le cas où  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$  est incohérent, utiliser l'approche basée sur l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un ensemble de sources à fusionner n'est pas plus prudent que simplement considérer la disjonction de ces mêmes sources. En d'autres termes, il n'est pas vrai que quelque soit le multi-ensemble de sources à fusionner  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ ,  $\bigvee_{B_i \in E} (B_i^*) \models \text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))$ . Nous l'illustrons par le contre-exemple suivant :

**Exemple 10** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$  tel que  $B_1 = \{(a, 2)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Supposons que  $\mu \equiv \top$ . Le Tableau 4.4 présente cinq échelles compatibles possibles, et le Tableau 4.5 fournit les profils associés aux interprétations de  $\Omega$  pour ces différentes échelles.

	$\nu_{E\mathcal{S}_1}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_2}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_3}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_4}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_5}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, 0 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, 0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$
$\omega_3$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$

TABLE 4.5 – Profils associés aux interprétations

	$\varphi_{ij}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$
$B_1$	$a$	3	2	2	1	1
$B_2$	$b$	2	2	3	2	3
	$\neg a$	1	1	1	1	2

TABLE 4.4 – Les cinq échelles compatibles représentatives

Nous montrons plus tard dans ce chapitre que les cinq échelles compatibles fournies par le Tableau 4.4 sont suffisantes à caractériser le résultat de la fusion. Sur cet exemple, nous obtenons  $Mod(Bel(B_1)) = \{\omega_2, \omega_3\}$ ,  $Mod(Bel(B_2)) = \{\omega_1\}$  et  $Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Ainsi, pour ce multi-ensemble de sources  $E$ ,  $\bigvee_{B_i \in E} (B_i^*) \not\models Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))$ .

Déterminer le résultat de la fusion basée sur l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources est un problème difficile en pratique, puisque par définition, l'ensemble des échelles compatibles associé à ce multi-ensemble de sources est infini. Afin d'identifier les modèles du résultat de la fusion sans calculer l'ensemble des échelles compatibles possibles, nous montrons, dans un premier temps, qu'une interprétation  $\omega$  est un modèle du résultat de la fusion d'un multi-ensemble de sources  $E$  par  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  si et seulement s'il existe une échelle  $\mathcal{S}$ , compatible avec  $E$ , telle que cette interprétation  $\omega$  soit un modèle du résultat de la fusion commensurable basée sur le maximum de  $E^{\mathcal{S}}$ , c'est-à-dire si  $\omega$  est modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{E^{\mathcal{S}}}(E))$  [BLR07a, BLR07b]. Plus formellement :

**Proposition 5** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\mathbb{S}_E$  l'ensemble associé des échelles compatibles possibles pour  $E$ . Alors  $\forall \omega \in \Omega$  telle que  $\omega \models \mu$  :

$$\omega \in Mod(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)) \text{ ssi } \exists \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E^{\mathcal{S}}))).$$

Afin de démontrer cette proposition, considérons dans un premier temps le lemme suivant, qui stipule que si une interprétation  $\omega'$  n'est pas strictement préférée à une interprétation  $\omega$ , et si  $\omega$  n'est pas modèle de chaque  $B_i^*$  issu de  $E$ , alors il existe une base de croyances  $B_j$  telle que  $\omega'$  est au moins aussi préférée que  $\omega$ . Formellement :

**Lemme 1** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétation de  $\Omega$ . Alors

$$\text{si } \omega' \not\blacktriangle_{Max}^E \omega \text{ et } \exists B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) \neq 0,$$

$$\text{alors } \exists B_j \in E : \kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega).$$

**Preuve** Supposons que  $\omega' \not\prec_{Max}^E \omega$  et  $\exists B_i \in E$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0$ . Alors, par définition de  $\prec_{Max}^E$ , il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega' \not\prec_{Max}^{ES} \omega$ . Ainsi, par définition de  $\prec_{Max}^E$ , nous obtenons que pour cette échelle compatible,  $Max(\nu_{ES}(\omega')) \geq Max(\nu_{ES}(\omega))$ . De plus, nous savons également que  $Max(\nu_{ES}(\omega)) > 0$ , car si  $Max(\nu_{ES}(\omega)) = 0$ , alors pour chaque base de croyances  $B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k}(\omega) = 0$ . Cela signifierait que  $\omega$  est modèle de chaque  $B_k \in E$ , ce qui contredit la seconde hypothèse.

Soit  $B_j$  une base de croyances issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_j}(\omega') = Max(\nu_{ES}(\omega'))$ . Puisque  $Max(\nu_{ES}(\omega')) \geq Max(\nu_{ES}(\omega))$ , nous obtenons pour la base  $B_j$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega)$ . Soit  $\varphi$  une formule de  $B_j^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi) = \kappa_{B_j}(\omega)$ . En d'autres termes,  $\varphi$  est la formule la plus importante de  $B_j^*$  falsifiée par  $\omega$ . Ce qui signifie également que  $\forall \psi \in B_j$  telle que  $\omega \models \psi$ ,  $\mathcal{S}(\psi) \leq \mathcal{S}(\varphi)$ . De façon similaire, soit  $\varphi'$  une autre formule de  $B_j^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi') = \kappa_{B_j}(\omega')$ . À nouveau,  $\varphi'$  est la formule la plus importante de  $B_j^*$  falsifiée par  $\omega'$ . Par définition de  $\varphi$  et  $\varphi'$ , nous obtenons  $\mathcal{S}(\varphi') \geq \mathcal{S}(\varphi)$ . À ce stade, par la définition des échelles compatibles, nous obtenons que pour  $B_j$ ,  $R_{B_j}(\varphi') \geq R_{B_j}(\varphi)$ . En considérant à nouveau la définition de  $\varphi$  et  $\varphi'$ , nous obtenons finalement qu'il existe une bases de croyances de  $E$ , en particulier ici  $B_j$ , telle que  $\kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega)$  ■

Nous proposons ensuite la construction d'une échelle compatible particulière qui, à partir d'une première échelle compatible  $\mathcal{S}$ , nous permet d'en obtenir une nouvelle, notée  $\mathcal{S}_{Max}$ , de la façon suivante :

**Construction 1** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$ . Soit encore  $\mathcal{S}$  une échelle compatible pour  $E$ . Considérons la base de croyances  $B_i$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) = Max(\nu_{ES}(\omega))$ . Nous définissons alors une échelle compatible, notée  $\mathcal{S}_{Max}$ , construite à partir de  $\mathcal{S}$  comme suit :

- $\forall \varphi \in B_i^*$ ,  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi)$ ;
- $\forall B_j \in E$ ,  $j \neq i$ ,
  - si  $\omega \models B_j^*$ ,  $\forall \varphi \in B_j^*$ ,  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi) + \kappa_{B_j}(\omega)$ ;
  - si  $\omega \not\models B_j^*$ , soit  $\varphi_{jk}$  une formule  $B_j^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi_{jk}) = \kappa_{B_j}(\omega)$ . Alors,  $\forall \varphi \in B_j^*$  :
    - si  $\mathcal{S}(\varphi) < \mathcal{S}(\varphi_{jk})$ , alors  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi)$ ;
    - sinon  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi) + \kappa_{B_j}(\omega) - \kappa_{B_j}(\omega)$ .

Illustrons la construction de cette échelle par l'exemple suivant :

**Exemple 11** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$  tel que  $B_1 = \{(a, 8), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(-b, 5)\}$  et  $B_3 = \{(-a, 2), (-b, 1)\}$ . Soit  $\omega$  l'interprétation

considérée, telle que  $\omega = \{a \neg b\}$ , et soit l'échelle compatible considérée  $\mathcal{S}_{Id}$ , l'échelle compatible identitaire. Sur cet exemple, nous obtenons  $\nu_{E^{\mathcal{S}_{Id}}}(\omega) = \langle 3, 0, 2 \rangle$  et ainsi,  $Max(\nu_{E^{\mathcal{S}_{Id}}}(\omega)) = \kappa_{B_1^{\mathcal{S}_{Id}}}(\omega) = 3$ . La base  $B_1$  est donc celle que nous devons considérer. Nous construisons alors  $\mathcal{S}_{Max}$  pour cet ensemble  $E$  :

1. puisque  $B_1$  est la base considérée, les poids issus de cette base restent inchangés. Nous obtenons ainsi  $B_1^{\mathcal{S}_{Max}} = \{(a, 8), (b, 3)\}$  ;
2. puisque  $\omega$  satisfait  $B_2$ , les poids des croyances issues de cette base sont incrémentés de  $\kappa_{B_1^{\mathcal{S}_{Id}}}(\omega)$ . Nous obtenons  $B_2^{\mathcal{S}_{Max}} = \{(-b, 5 + 3 = 8)\}$  ;
3. à l'inverse  $\omega$  ne satisfait  $B_3$ . La croyance  $\neg a$  étant la croyance la plus importante issue de cette base falsifiée par  $\omega$ , toutes les croyances de plus faible priorité conservent les poids qui leur sont associés inchangés. Les poids associés aux autres croyances sont augmentés de  $\kappa_{B_1^{\mathcal{S}_{Id}}}(\omega) - \kappa_{B_3^{\mathcal{S}_{Id}}}(\omega)$ . Ainsi, nous obtenons  $B_3^{\mathcal{S}_{Max}} = \{(-a, 2 + 3 - 2 = 3), (-b, 1)\}$ , puisque pour cette base,  $B_3^{\mathcal{S}_{Id}}(\omega) = 2$ .

Cette échelle compatible  $\mathcal{S}_{Max}$  est donc construite en considérant au préalable une interprétation  $\omega$  de  $\Omega$ . Remarquons alors que cette échelle possède quelques propriétés remarquables vis-à-vis de  $\omega$ . En effet, puisque  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) = max(\nu_{E^{\mathcal{S}}}(\omega))$ , nous obtenons  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega) \geq 0$ . De plus, par construction de l'échelle compatible  $\mathcal{S}_{Max}$ , nous obtenons également que :

**Lemme 2** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $\mathcal{S}_{Max}$  l'échelle compatible obtenue par la construction 1. Alors :

$\mathcal{S}_{Max}$  est une échelle compatible.

---

**Preuve** Par hypothèse, l'échelle  $\mathcal{S}$  considérée pour la construction de  $\mathcal{S}_{Max}$  est compatible. De ce fait, par définition,  $\forall B_k \in E, \forall \varphi_i \in B_k^*, \forall \varphi_j \in B_k^*, \mathcal{S}(\varphi_i) \geq \mathcal{S}(\varphi_j)$  ssi  $R_{B_k}(\varphi_i) \geq R_{B_k}(\varphi_j)$ .

De plus, il est possible de remarquer que pour chaque base de croyances  $B_k$  issue de  $E$ , suivant le cas, la construction de  $\mathcal{S}_{Max}$  laisse soit les poids de  $B_k$  inchangés, soit incrémente ces mêmes poids d'une valeur fixe,  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega)$  ou  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega)$ , qui ne dépend pas du rang de la formule issue de  $B_k$  considérée. Nous obtenons ainsi finalement  $\forall B_k \in E, \forall \varphi_i \in B_k^*, \forall \varphi_j \in B_k^*, \mathcal{S}(\varphi_i) \geq \mathcal{S}(\varphi_j)$  ssi  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi_i) \geq \mathcal{S}_{Max}(\varphi_j)$  ssi  $R_{B_k}(\varphi_i) \geq R_{B_k}(\varphi_j)$ . ■

---

**Lemme 3** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $\mathcal{S}_{Max}$  l'échelle compatible obtenue par la construction 1, et  $\omega$  l'interprétation considérée pour la construction de  $\mathcal{S}_{Max}$ . Alors :

$$Max(\nu_{E^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega)) = \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega).$$



**Preuve** Soient  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées et  $\mathcal{S}_{Max}$  l'échelle compatible obtenue par la construction 1. Dans ce cas, pour toute base de croyances  $B_k$  issue de  $E$  :

- soit  $k = i$ . Dans ce cas, puisque pour toute formule  $\varphi$  de  $B_i$ ,  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi)$ , nous avons  $\kappa_{B_k^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega) = \kappa_{B_i^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega) = \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega)$  ;
- soit  $k \neq i$ . Dans ce cas, soit  $\omega \models B_k^*$ , et alors  $\kappa_{B_k^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega) = 0$  ; soit  $\omega \not\models B_k^*$ . À ce stade, nous notons  $\varphi_{kl}$  la formule de  $B_k^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi_{kl}) = \kappa_{B_k^{\mathcal{S}}}(\omega)$ . Puisque  $\mathcal{S}(\varphi_{kl}) \not\prec \mathcal{S}(\varphi_{kl})$ , nous obtenons  $\mathcal{S}_{Max}(\varphi_{kl}) = \mathcal{S}(\varphi_{kl}) + \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_k^{\mathcal{S}}}(\omega)$ . Ainsi, nous obtenons finalement que  $\kappa_{B_k^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega) = \kappa_{B_k^{\mathcal{S}}}(\omega) + \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_k^{\mathcal{S}}}(\omega) = \kappa_{B_k^{\mathcal{S}}}(\omega)$ .

Finalement, puisque soit  $\kappa_{B_k^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega) = \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega)$ , soit  $\kappa_{B_k^{\mathcal{S}_{Max}}}(\omega) = 0$ , nous obtenons de ce fait  $Max(\nu_{E^{\mathcal{S}'}}(\omega)) = \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega)$ . ■

Les lemmes ainsi que la construction d'échelle compatible particulière proposés précédemment nous permettent maintenant de fournir une démonstration pour la Proposition 5 :

**Preuve** Soient  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$ . Montrons, dans un premier temps, que si  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu}(E))$ , alors il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathcal{S}_E$  telle que  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E^{\mathcal{S}})))$ .

Supposons pour cela que  $\omega \in Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu}(E)))$ . D'après la Proposition 1, il est toujours possible d'obtenir au moins une échelle compatible pour  $E$ . Soit  $\mathcal{S}$  cette échelle compatible. En utilisant la Construction 1, nous obtenons une nouvelle échelle compatible, que nous notons  $\mathcal{S}_{Max}$ , à partir de  $\mathcal{S}$ .

Montrons maintenant que  $\omega$  est un modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_{Max}}))$ . Par hypothèse, nous savons que  $\omega \in Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu}(E)))$ . Ainsi, par définition,  $\forall \omega' \in Mod(\mu)$ , nous avons  $\omega' \not\prec_{Max}^E \omega$ . Montrons que  $\forall \omega' \in Mod(\mu)$ , nous avons également  $\omega' \not\prec_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{Max}}} \omega$ . Soit  $\omega'$  un modèle de  $\mu$  tel que  $\omega' \neq \omega$ . À ce stade, deux cas sont envisageables :

- soit  $\omega'$  est modèle de chaque  $B_i^*$ . Dans ce cas,  $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^*$  est cohérent, et puisque par hypothèse  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu}(E))$ , nous obtenons que  $\omega$  est également modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^*$ . Nous montrerons en effet plus tard que  $\blacktriangle_{Max}^{\mu}$  satisfait le postulat de rationalité (IC2\*), et que dans ce cas,  $Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu}(E)) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ . Nous montrerons également plus tard que  $\Delta_{Max}^{\mu}$  satisfait ce même postulat, ce qui nous permet d'obtenir que  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_{Max}})) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ . Ainsi, nous obtenons dans ce cas que  $\omega' \not\prec_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{Max}}} \omega$  ;

- soit encore il existe une base de croyances  $B_j$  telle que  $\omega'$  n'est pas modèle de  $B_j^*$ . Par définition,  $\omega'$  n'est pas non plus un modèle de  $(B_j^{S_{Max}})^*$ . Soit  $\varphi$  la formule la plus importante de  $B_j$  falsifiée par  $\omega'$ . À nouveau, deux cas sont envisageables :
  - soit  $\omega$  est modèles de  $B_j^*$ . Dans ce cas, par construction de l'échelle  $S_{Max}$ ,  $\kappa_{B_j^{S_{Max}}}(\omega') = (\kappa_{B_j^S}(\omega') + \kappa_{B_j^S}(\omega))$ . Dans ce cas, nous obtenons  $\kappa_{B_j^{S_{Max}}}(\omega') \geq \text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega)) = \kappa_{B_j^S}(\omega)$ . Ainsi,  $\text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega')) \geq \text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega))$ . Finalement, de part la définition de  $\triangleleft_{Max}^{E^{S_{Max}}}$ , nous obtenons  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S_{Max}}} \omega$  ;
  - soit  $\omega$  n'est pas modèle de  $B_j^*$ . Par définition des échelles compatibles,  $\omega$  n'est pas non plus modèle de  $(B_j^{S_{Max}})^*$ . Notons  $\varphi'$  la formule la plus importante de  $B_j$  falsifiée par  $\omega$ . À nouveau, deux cas sont envisageables :
    - soit  $S_{Max}(\varphi') \geq S_{Max}(\varphi)$ . Ainsi, par définition,  $\kappa_{B_j^{S_{Max}}}(\omega') \geq \kappa_{B_j^{S_{Max}}}(\omega)$ . Puisque, par construction, nous avons montré que  $\kappa_{B_j^{S_{Max}}}(\omega) = \text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega))$ , nous obtenons dans ce cas  $\text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega')) \geq \text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega))$ . Ainsi, nous obtenons dans ce cas  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S_{Max}}} \omega$  ;
    - soit encore  $S_{Max}(\varphi') < S_{Max}(\varphi)$ . Puisque  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^E \omega$  et  $\exists B_i \in E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0$ , et grâce au Lemme 1, nous obtenons  $\exists B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k}(\omega') \geq \kappa_{B_k}(\omega)$ . De là, nous savons que  $\exists \varphi \in B_k$ ,  $\omega \not\models \varphi$ , et  $\exists \varphi' \in B_k$ ,  $\omega' \not\models \varphi'$ . De part la définition des échelles compatibles, nous obtenons  $\exists B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k^{S_{Max}}}(\omega') \geq \kappa_{B_k^{S_{Max}}}(\omega) > 0$ . Ainsi, de part la construction de  $S_{Max}$ , nous obtenons  $\text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega')) \geq \text{Max}(\nu_{E^{S_{Max}}}(\omega))$ , puis finalement  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S_{Max}}} \omega$ .

Ainsi,  $\forall \omega' \in \text{Mod}(\mu)$ ,  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{S'}} \omega$ . Il existe donc une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , en particulier  $\mathcal{S}'$ , telle que  $\omega \in \text{Mod}(\Delta_\mu^{Max}(E^{\mathcal{S}}))$ .

Montrons maintenant que si  $\exists \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , telle que  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel} \Delta_\mu^{Max}(E^{\mathcal{S}}))$ , alors  $\omega$  est modèle de  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E)$ .

Pour cela, supposons qu'il existe bien  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_\mu^{Max}(E^{\mathcal{S}})))$ . Par définition, pour toute autre interprétation  $\omega' \in \Omega$ , nous avons  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega$ . Ainsi, nous obtenons  $\forall \omega' \in \Omega$ , il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega$ . Par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons  $\forall \omega' \in \Omega$ ,  $\omega' \not\triangleleft_{Max}^E \omega$ . Finalement, et puisque  $\omega$  est un modèle de  $\mu$  minimal pour  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons que  $\omega$  est modèle de  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E)$ . ■

Nous avons donc montré qu'il était possible d'identifier les interprétations modèles du résultat de la fusion incommensurable, et ce au moyen de la notion même d'échelle compatible. Cependant, ce premier critère est limité et permet seulement d'identifier les croyances préférées issues du résultat de la fusion. En particulier, ce critère ne permet pas de caractériser l'intégralité de l'ordre

sur les interprétations  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ . Les sous-sections suivantes fournissent donc deux autres caractérisations du résultat de la fusion incommensurable par l'opérateur basé sur le maximum et considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles. La première caractérisation repose sur les priorités relatives fournies sur les formules de chaque base de croyances pondérées à fusionner. La seconde repose sur la définition d'un ordre partiel sur les interprétations de  $\Omega$ , d'une manière similaire à celui basé sur le critère de Pareto.

### 4.1.2 Une caractérisation basée sur les ordres induits par les bases

Dans cette sous-section, nous fournissons une caractérisation de l'opérateur de fusion incommensurable basé sur l'opérateur maximum présenté précédemment. Nous montrons en effet que les pré-ordres totaux, fournis initialement sur les croyances pondérées de chaque source à fusionner, sont suffisants à caractériser  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ , l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  sur lequel repose  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E)$  [BLR07c]. Soit  $B_i$  une base de croyances pondérées. Nous notons  $\leq_i$  le pré-ordre total induit sur les formules de  $B_i^*$  de la manière suivante. Formellement,  $\forall \varphi_{ij}, \varphi_{ik} \in B_i^*$  :

$$\varphi_{ij} \leq_i \varphi_{ik} \text{ ssi } R_{B_i}(\varphi_{ij}) \leq R_{B_i}(\varphi_{ik})$$

La définition suivante introduit la contrepartie des échelles compatibles en termes de pré-ordres sur les formules :

**Définition 25 (Ordre compatible)** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\{\leq_1, \dots, \leq_n\}$  l'ensemble des pré-ordres totaux associés respectivement à chaque base de  $E$ . Nous définissons un ordre compatible comme un pré-ordre total sur les formules de  $B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_n^*$ , noté  $<_c$ , tel que  $\forall B_i \in E, \forall \varphi_{ij}, \varphi_{ik} \in B_i^*$  :

$$\varphi_{ij} <_c \varphi_{ik} \text{ ssi } \varphi_{ij} <_i \varphi_{ik}.$$

Soit  $\mathbb{O}_E$  l'ensemble des ordres compatibles pour un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E$ . La définition suivante nous permet d'associer un pré-ordre total compatible sur les formules  $<_c$  à un pré-ordre total sur les interprétations, noté  $\triangleleft_c$ , et défini comme suit :

**Définition 26** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\{\leq_1, \dots, \leq_n\}$  l'ensemble des pré-ordres totaux respectivement associés à chaque base de  $E$ . Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \triangleleft_c \omega'$  ssi :

$$\forall \varphi \in B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_n^*, \omega \not\models \varphi$$

$$\exists \psi \in B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_n^*, \omega' \models \psi$$

$$\text{tel que } \varphi <_c \psi$$

Autrement dit, une interprétation  $\omega$  est préférée à une autre interprétation  $\omega'$  si pour toute formule  $\varphi$  falsifiée par  $\omega$ , il existe une formule plus importante  $\psi$ , c'est-à-dire  $\varphi <_c \psi$ , falsifiée par  $\omega'$ . Les interprétations minimales pour  $\triangleleft_c$  sont les préférées. Ces définitions nous menent à définir une relation sur les interprétations de  $\Omega$ , notée  $\triangleleft_{<}^E$ , et définie comme suit :

**Définition 27** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{<}^E \omega' \text{ ssi } \forall <_c \in \mathbb{O}_E, \omega \triangleleft_c \omega'.$$

Nous pouvons à présent définir un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{<}^\mu$ , et reposant sur la relation sur les interprétations  $\triangleleft_{<}^E$ . Les modèles des croyances préférées issues de  $\blacktriangle_{<}^\mu(E)$  sont alors les modèles de  $\mu$  minimaux pour  $\triangleleft_{<}^E$  :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{<}^\mu(E))) = \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \triangleleft_{<}^E).$$

Illustrons ces définitions par l'exemple suivant :

**Exemple 12** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$  tel que  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Soit  $\Omega = \{\omega_0 = \neg a \neg b, \omega_1 = \neg ab, \omega_2 = a \neg b, \omega_3 = ab\}$ . Le Tableau 4.6 présente six pré-ordres totaux compatibles sur les formules et leur pré-ordres totaux sur les interprétations associés. Ces six pré-ordres totaux sont suffisants à caractériser le résultat de la fusion.

	$<_{c_i}$	$\triangleleft_{c_i}$
$\leq_1$	$\neg a <_{c_1} b <_{c_1} \neg b <_{c_1} a$	$\omega_2 \triangleleft_{c_1} \omega_3 \triangleleft_{c_1} \{\omega_0, \omega_1\}$
$\leq_2$	$\neg a <_{c_2} b, \neg b <_{c_2} a$	$\{\omega_2, \omega_3\} \triangleleft_{c_2} \{\omega_0, \omega_1\}$
$\leq_3$	$\neg a, \neg b <_{c_3} b, a$	$\omega_3 \triangleleft_{c_3} \{\omega_0, \omega_1, \omega_2\}$
$\leq_4$	$\neg a, \neg b <_{c_4} a <_{c_4} b$	$\omega_3 \triangleleft_{c_4} \omega_1 \triangleleft_{c_4} \{\omega_0, \omega_2\}$
$\leq_5$	$\neg b <_{c_5} \neg a, a <_{c_5} b$	$\{\omega_1, \omega_3\} \triangleleft_{c_5} \{\omega_0, \omega_2\}$
$\leq_6$	$\neg b <_{c_6} a <_{c_6} \neg a <_{c_6} b$	$\omega_1 \triangleleft_{c_6} \omega_3 \triangleleft_{c_6} \{\omega_0, \omega_2\}$

TABLE 4.6 – Exemples de pré-ordres totaux compatibles

Sur cet exemple, le résultat de la fusion basée sur les pré-ordres totaux compatibles est défini par  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{<}^\mu(E))) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ .

Nous montrons à présent que fusionner un multi-ensemble de sources incommensurables en considérant l'ensemble des pré-ordres totaux compatibles pour ces sources équivaut à considérer l'ensemble des échelles compatibles possibles pour ce même ensemble de sources, comme l'énonce formellement la proposition suivante :

**Proposition 6** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\omega \triangleleft_{<}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega'.$$

Afin de fournir la preuve de cette proposition, nous proposons la construction d'une échelle compatible particulière, notée  $\mathcal{S}_{ord}$ , qui permet d'associer une échelle compatible à chaque ordre sur les interprétations  $<_c$  de  $\mathbb{O}_E$ . Cette échelle associe simplement chaque formule au nombre de formules de plus faible priorité selon  $<_c$ . Formellement :

**Construction 2** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit encore  $<_c$  un ordre compatible sur les formules issues de  $E$ . Nous associons alors à  $<_c$  une échelle compatible, notée  $\mathcal{S}_{ord}$ , telle que  $\forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i$  :

$$\mathcal{S}_{ord}(\varphi) = |\{\psi \in B_i, \psi <_c \varphi\}| + 1.$$

Remarquons que si  $\varphi$  est une formule minimale pour une base  $B_i$  selon  $<_c$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de formule  $\psi$  telle que  $\psi <_c \varphi$ , nous obtenons  $|\{\psi \in B_i, \psi <_c \varphi\}| = 0$  et donc  $\mathcal{S}_{ord}(\varphi) = 1$ . Remarquons également que pour cette échelle  $\mathcal{S}_{ord}$  associée à  $<_c$ , l'ordre relatif, induit par les bases de croyances pondérées initiales, est préservé. Formellement :

**Lemme 4** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit encore  $<_c$  un ordre compatible pour  $E$ , et  $\mathcal{S}_{ord}$  l'échelle compatible contruite à partir de  $<_c$ . Alors pour chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ , pour chaque paire de formules  $\varphi, \psi$  issue de  $B_i^*$ ,

$$\mathcal{S}_{ord}(\varphi) < \mathcal{S}_{ord}(\psi) \text{ ssi } \varphi <_c \psi \text{ ssi } R_{B_i}(\varphi) < R_{B_i}(\psi).$$

En particulier, ce lemme nous montre que  $\mathcal{S}_{ord}$  est une échelle compatible, soit formellement  $\mathcal{S}_{ord} \in \mathbb{S}_E$ .

---

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit encore  $\mathcal{S}_{ord}$  un ordre compatible pour  $E$ , et  $\mathcal{S}_{ord}$  l'échelle compatible contruite à partir de  $<_c$ . Soit  $B_i$  une base de croyances issue de  $E$ . Soient  $\varphi, \psi$  deux formules issues de  $B_i^*$ .

Supposons que  $\mathcal{S}_{ord}(\varphi) < \mathcal{S}_{ord}(\psi)$ . Par définition de  $\mathcal{S}_{ord}$ , nous obtenons alors que  $|\{\varphi' \in B_i, \varphi' <_c \varphi\}| < |\{\varphi' \in B_i, \varphi' <_c \psi\}|$ . Puisque  $<_c$  est une relation totale, nous savons alors que  $\varphi <_c \psi$ . Par définition de  $<_c$ , nous obtenons finalement  $R_{B_i}(\varphi) < R_{B_i}(\psi)$ . La réciproque est symétrique. ■

---

Illustrons cette construction par l'exemple suivant :

**Exemple 13** Soit  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, tel que  $B_1 = \{(a, 5), (a \vee b, 4), (\neg b, 2)\}$ ,  $B_2 = \{(\neg b, 13)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 12), (a \wedge \neg b, 8)\}$ . Soit  $<_c$  un ordre sur les formules issues de  $B_1^*$ ,  $B_2^*$  et de  $B_3^*$  tel que  $(a \wedge \neg b)_{B_3} \stackrel{1}{<}_c (\neg b)_{B_1} <_c (a \vee b)_{B_1} <_c (\neg a)_{B_3} <_c (\neg b)_{B_2} <_c (a)_{B_1}$ . Cet ordre est compatible avec les poids initialement exprimés par chaque base de croyances.

Puisque chaque formule est associée au nombre de formules de plus faible priorité selon  $<_c$ , incrémenté de 1, nous obtenons  $E^{\mathcal{S}_{ord}} = \{B_1^{\mathcal{S}_{ord}}, B_2^{\mathcal{S}_{ord}}, B_3^{\mathcal{S}_{ord}}\}$  avec  $B_1^{\mathcal{S}_{ord}} = \{(a, 6), (a \vee b, 3), (\neg b, 2)\}$ ,  $B_2 = \{(\neg b, 5)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 4), (a \wedge \neg b, 1)\}$ .

Cette construction particulière nous permet maintenant de fournir une démonstration pour la Proposition 2 :

**Preuve** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. La démonstration de cette proposition est obtenue en montrant que pour chaque ordre compatible sur les formules de  $E$ , il existe une échelle compatible  $\mathcal{S}$  induisant exactement le même ordre sur les interprétations. Soit  $<_c \in \mathbb{O}_E$  un ordre compatible sur les formules de  $E$ .

Nous associons à  $<_c$  une échelle compatible  $\mathcal{S}_{ord}$  suivant la Construction 2 fournie précédemment. Montrons que  $<_c$  et  $\mathcal{S}_{ord}$  induisent exactement le même ordre sur les interprétations de  $\Omega$ . Plus formellement, montrons que quelques soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ , alors  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{ord}}} \omega'$  ssi  $\omega \triangleleft_c \omega'$ .

Montrons, dans un premier temps, que si  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{ord}}} \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_c \omega'$ . Pour cela, supposons que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{ord}}} \omega'$ . Dans ce cas, par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous avons  $Max(\nu_{E^{\mathcal{S}_{ord}}}(\omega)) < Max(\nu_{E^{\mathcal{S}_{ord}}}(\omega'))$ . Ainsi, il existe une formule  $\varphi$  issue de  $\bigsqcup B_i^*$  telle que  $\omega' \not\models \varphi$ , et pour toute formule  $\psi \in \bigsqcup B_i^*$  telle que  $\omega \not\models \psi$ , nous avons  $\mathcal{S}_{ord}(\varphi) < \mathcal{S}_{ord}(\psi)$ . D'après le Lemme 4, nous obtenons  $\varphi <_c \psi$ . Ainsi, par définition de  $\triangleleft_c$ , nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_c \omega'$ .

Montrons maintenant que si  $\omega \triangleleft_c \omega'$  alors  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{ord}}} \omega'$ . Supposons pour cela que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{ord}}} \omega'$ . Par définition de  $\triangleleft_c$ , nous obtenons qu'il existe une formule  $\varphi$  issue de  $\bigsqcup B_i^*$  telle que  $\omega' \not\models \varphi$ , et pour toute formule  $\psi \in \bigsqcup B_i^*$  telle que  $\omega \not\models \psi$ , nous avons  $\varphi <_c \psi$ . De là, par le Lemme 4, nous obtenons également  $\mathcal{S}_{ord}(\varphi) < \mathcal{S}_{ord}(\psi)$ . Ainsi, nous obtenons par définition  $Max(\nu_{E^{\mathcal{S}_{ord}}}(\omega)) < Max(\nu_{E^{\mathcal{S}_{ord}}}(\omega'))$ , puis par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}_{ord}}} \omega'$ .

Nous avons ainsi montré que pour chaque ordre compatible sur les formules de  $E$ , il existe une échelle compatible  $\mathcal{S}$ , soit ici  $\mathcal{S}_{ord}$ , induisant exactement le même ordre sur les interprétations. Par conséquent, considérer l'ensemble des ordres compatibles pour  $E$  revient exactement à considérer l'ensemble des échelles compatibles  $\mathbb{S}_E$  possibles pour ce même multi-ensemble.  $\blacksquare$

1.  $(\varphi)_{B_i}$  signifie que  $\varphi$  provient de  $B_i^*$

En particulier, les opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux relations sur les interprétations de  $\Omega$  précédemment considérés, mènent à des conclusions identiques pour tout multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré :

$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)) \equiv Bel(\blacktriangle_{<}^\mu(E)).$$

### 4.1.3 Une caractérisation basée sur la comparaison des profils

Nous fournissons, dans cette sous-section, un autre critère naturel pour la caractérisation de l'ordre sur les interprétations sur lequel se base l'opérateur  $\blacktriangle_{Max}^\mu$ . Cette caractérisation repose sur la comparaison directe des profils associés aux interprétations de  $\Omega$ . Pour cela, la définition suivante propose un critère de comparaison entre interprétations, similaire au critère de *Pareto*, et noté  $\triangleleft_{SMP}^E$  (S. pour *strict*, M. pour *models*, P. pour *Pareto*) :

**Définition 28** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .  $\omega$  est SMP-préférée à  $\omega'$ , noté  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , tel que  $\kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$  ;
2.  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') = 0$  soit  $\kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ .

La première condition signifie que  $\omega'$  doit être un contre-modèle d'au moins une source à fusionner, tandis que la seconde condition signifie que selon chaque source à fusionner, soit  $\omega$  et  $\omega'$  sont modèles des formules issues de la base de croyances pondérées fournie par cette source, soit  $\omega$  est préférée à  $\omega'$  selon cette même base de croyances pondérées. L'ordre sur les interprétations ainsi obtenu nous amène naturellement à définir un opérateur de fusion, noté  $\Delta_{SMP}$ , et basé sur la comparaison des profils associés aux interprétations par un multi-ensemble de sources à fusionner. Les modèles des croyances préférées obtenues par cet opérateur, notées  $Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E))$ , sont alors les modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$  minimaux pour  $\triangleleft_{SMP}^E$ . Plus formellement :

$$Mod(Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{SMP}^E).$$

Nous illustrons maintenant ces définitions par l'exemple suivant :

**Exemple 14** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$  avec  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ . Supposons que  $\mu \equiv \top$ . Le Tableau 5.3 fournit les profils associés aux interprétations.

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle 8, 0 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle 4, 1 \rangle$

TABLE 4.7 – Un exemple de fusion par  $\Delta_{SMP}^\mu$ 

D'après le Tableau 5.3, l'ordre basé sur le critère SMP est défini par  $\omega_3 \triangleleft_{SMP}^E \omega_0$ . les modèles de  $Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E))$  sont  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , puisque ces interprétations sont minimales selon  $\triangleleft_{SMP}^E$ . Ainsi, sur cet exemple,  $Bel(\Delta_{SMP}^\mu(E)) \equiv a \vee b$ .

Nous montrons à présent qu'ordonner les interprétations de  $\Omega$  par comparaison, au moyen du critère SMP, de leur profil respectif équivaut à les ordonner en considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles pour l'ensemble de sources à fusionner, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 7** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'.$$

**Preuve** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Soit  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . À ce point, trois cas sont à considérer :

- soit  $\omega$  et  $\omega'$  sont toutes deux modèles de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$ . Dans ce cas, par définition,  $\omega$  et  $\omega'$  sont toutes deux minimales pour  $\triangleleft_{SMP}$  et pour  $\triangleleft_{Max}^E$ .
- soit  $\omega$  est modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$  alors que  $\omega'$  ne l'est pas. Dans ce cas,  $\omega$  est par définition minimal pour  $\triangleleft_{SMP}$  alors que  $\omega'$  ne l'est pas, et  $\omega$  est également par définition minimal pour  $\triangleleft_{Max}^E$  tandis  $\omega'$  ne l'est pas non plus. Pour ces deux ordres,  $\omega$  est préférée à  $\omega'$ .
- soit encore ni  $\omega$ , ni  $\omega'$  ne sont modèles de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*)$ . Dans ce cas :
  - montrons, dans un premier temps, que si  $\omega \triangleleft_{SMP} \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Procédons pour cela par contraposition, et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous savons qu'il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{\mathcal{S}} \omega'$ . En d'autres termes, il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $Max(\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega), i = 1, \dots, n) \geq Max(\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega'), i = 1, \dots, n)$ . Dans ce cas, nous savons qu'il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que pour  $\mathcal{S}$ , nous avons  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) \geq Max(\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega'), i = 1, \dots, n)$ . Dans ce cas, nous obtenons qu'il



existe  $B_i \in E$  et  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  tels que  $\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega) \geq \kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega')$ . Nous savons également  $\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega) \neq 0$ , puisque  $\text{Max}(\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega)) > 0$  dû au fait que  $\omega$  n'est pas modèle de chaque source, et  $\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega') \neq 0$  pour les mêmes raisons. Puisque  $\mathcal{S}$  est une échelle compatible, nous obtenons qu'il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ . D'après la définition de  $\triangleleft_{SMP}$ , nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_{SMP} \omega'$  ;

- Montrons à présent que si  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{SMP} \omega'$ . Une fois de plus, procédons par contraposition. Pour cela, supposons que  $\omega \not\triangleleft_{SMP} \omega'$ . Par définition de  $\triangleleft_{SMP}$ , et d'après les hypothèses portées dans ce cas sur  $\omega$  et  $\omega'$  cela signifie qu'il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ .

Montrons maintenant qu'il est possible de construire une échelle compatible  $\mathcal{S}$  telle que  $\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega) = \text{Max}(\nu_{B_k \mathcal{S}}(\omega), k = 1, \dots, n)$  et  $\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega') = \text{Max}(\nu_{B_k \mathcal{S}}(\omega'), k = 1, \dots, n)$ . Soit  $\varphi_i$  une formule de  $B_i^*$  telle que  $\kappa_{B_i \mathcal{S}}(\omega) = \mathcal{S}(\varphi_i)$ . Ainsi, il est suffisant de considérer une échelle compatible telle les nouveaux poids associés aux formules  $\varphi_j \in B_j \neq B_i$  appartiennent à l'intervalle  $\{1, \dots, \text{max}_{k \neq i}(|B_k|)\}$ , et ceux associé aux formules de  $B_i$  appartiennent à l'intervalle  $\{\text{max}_{k \neq i}(|B_k|) + 1, \dots, \text{max}_{k \neq i}(|B_k|) + |B_i| + 1\}$ . Par la définition de  $\triangleleft_{Max}^{ES}$ , et en considérant cette échelle compatible, nous obtenons  $\omega \triangleleft_{Max}^{ES} \omega'$ . En utilisant la définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . ■

En corollaire de cette proposition, nous obtenons naturellement que les résultats fournis par les opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux ordres sur les interprétations de  $\Omega$  précédemment considérés, sont équivalents quelque soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. Plus formellement :

$$\forall E, \text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)) \equiv \text{Bel}(\triangle_{SMP}^\mu(E)).$$

## 4.2 Propriétés logiques

Dans cette section, nous caractérisons le comportement logique de l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum. Comme nous l'avons rappelé dans le Chapitre 2, un ensemble de postulats de rationalité a été proposé dans [KPP02] afin de caractériser le comportement des opérateurs de fusion contrainte.

### 4.2.1 Axiomatisation de la fusion et bases de croyances pondérées

Nous devons, dans un premier temps, adapter ces postulats au cadre des bases de croyances pondérées. Par exemple, certains de ces postulats nécessitent de prendre en compte les modèles des bases de croyances à fusionner  $B_i$ . Cependant, dans le cadre des bases de croyances pondérées, ces modèles sont plutôt ceux des ensembles de formules propositionnelles  $B_i^*$  associés à ces mêmes

bases. De plus, dans ce même cadre, les interprétations préférées issues de la fusion ne sont pas les modèles du résultat de celle-ci mais plutôt ceux de l'ensemble de croyances préférées obtenu pour cette fusion. Finalement, nous définissons l'équivalence entre deux multi-ensembles de bases de croyances pondérées de la façon suivante :

**Définition 29** Soient  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  et  $E' = \{B'_1, \dots, B'_n\}$  deux multi-ensembles de bases de croyances pondérées.  $E$  est équivalent à  $E'$ , noté  $E \equiv_R E'$  si et seulement si il existe une bijection de  $E$  vers  $E'$ , telle que toute base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  est associée à une base de croyances  $B'_i$  issue de  $E'$  qui induit la même  $\kappa$ -fonction sur les interprétations du langage.

Adaptés au cadre des bases de croyances pondérées comme détaillé précédemment, nous obtenons l'ensemble de postulats de rationalité suivants :

(IC0)  $Bel(\Delta^\mu(E)) \models \mu$  ;

(IC1) Si  $\mu$  est cohérent, alors  $Bel(\Delta^\mu(E))$  est cohérent ;

(IC2\*) Si  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  est cohérent avec  $\mu$ , alors  $Bel(\Delta^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B \in E} B^* \wedge \mu$  ;

(IC3\*) Si  $E_1 \equiv_R E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $Bel(\Delta^{\mu_1}(\{E_1\})) \equiv Bel(\Delta^{\mu_2}(\{E_2\}))$  ;

(IC4\*) Si  $B_1^* \models \mu$  et  $B_2^* \models \mu$ , alors  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  est cohérent ssi  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  est cohérent ;

(IC5)  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2)) \models Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2))$  ;

(IC6) Si  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  est cohérent, alors  $Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \models Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  ;

(IC7)  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2 \models Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$  ;

(IC8) Si  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  est cohérent, alors  $Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)) \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$ .

De la même façon, nous adaptons les postulats complémentaires, proposés dans [KPP02], au cadre des bases de croyances pondérées :

(IC6') Si  $Bel(\Delta^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta^\mu(E_2))$  est cohérent, alors

$Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \models Bel(\Delta^\mu(E_1)) \vee Bel(\Delta^\mu(E_2))$  ;

(MAJ)  $\exists m \in \mathbb{N} : Bel(\Delta^\mu(E \sqcup \{B_i^m\})) \models B_i^*$  ;

avec  $B_i^m = \underbrace{\{B_i\} \sqcup \dots \sqcup \{B_i\}}_{m \text{ fois}}$  et  $\sqcup$  l'union des multi-ensembles ;

(MI)  $\forall m \in \mathbb{N}, Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2^m)) \equiv Bel(\Delta^\mu(E_1 \sqcup E_2))$ .

Ces postulats de rationalité, dérivés de ceux proposés dans [KPP02], nous permettent donc de caractériser le comportement logique des opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées.

### 4.2.2 Comportement logique dans le cadre commensurable

Nous proposons dans un premier temps une caractérisation logique de l'opérateur de fusion commensurable basé sur le maximum. Plus précisément, nous montrons que dans le cadre commensurable,  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfait la plupart des postulats de rationalité proposés pour la caractérisation de la fusion contrainte, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 8**  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfait (IC0), (IC1), (IC2\*), (IC3\*), (IC5), (IC6\*), (IC7) et (IC8).

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées.

- **(IC0)** Nous rappelons que  $\mathcal{L}$  est un langage propositionnel fini, basé sur un vocabulaire fini. La preuve de la satisfaction de ce postulat est immédiate. Par définition, l'ensemble des modèles du résultat de la fusion  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega \in Mod(\mu) : \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{Max}^E \omega\}$ . Ainsi,  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) \subseteq Mod(\mu)$  et alors  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \models Mod(\mu)$ .
- **(IC1)** Une fois de plus, nous rappelons que  $\mathcal{L}$  est un langage propositionnel fini. Supposons que  $\mu$  est cohérent. Ainsi,  $Mod(\mu)$  est également fini et  $Mod(\mu) \neq \emptyset$ . Par définition,  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega \in Mod(\mu) : \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{Max}^E \omega\}$  est un sous-ensemble de  $Mod(\mu)$ . Supposons que  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)))$  soit vide. Dans ce cas, par définition de  $\Delta_{Max}^\mu$ ,  $\forall \omega \in Mod(\mu), \exists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \triangleleft_{Max}^E \omega$ . Cette situation est clairement absurde. Ainsi, nous obtenons finalement que  $Mod(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)))$  est cohérent.
- **(IC2\*)** Supposons que  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  est cohérent avec  $\mu$ . De ce fait, il existe une interprétation  $\omega \in Mod(\mu)$  telle que  $\omega \models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Puisque  $\omega$  est modèle de chaque  $B_i^*$  issu de  $E$ , alors  $\forall B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) = 0$ . Nous obtenons ainsi  $Max(\nu_E(\omega)) = 0^2$ . Soit à présent  $\omega'$  une autre interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ . À ce point, deux cas sont envisageables :
  1. soit  $\omega' \models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Puisque  $\omega'$  est modèle de chaque  $B_i^*$ , alors  $\forall B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega') = 0$ . Nous obtenons donc dans ce cas  $Max(\nu_E(\omega')) = 0$ . Dans ce cas,  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$  tel que  $Max(\nu_E(\omega'')) < Max(\nu_E(\omega')) = 0$ . Nous obtenons ainsi  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$  tel que  $\omega'' \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , puis finalement, par définition,  $\omega' \in Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ ;
  2. soit  $\omega' \not\models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Dans ce cas, il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega') > 0$ . Nous avons donc  $Max(\nu_E(\omega')) > 0$ . Puisque  $Max(\nu_E(\omega)) = 0$ , alors  $Max(\nu_E(\omega)) < Max(\nu_E(\omega'))$ . Ainsi, puisque  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  est cohérent, nous obtenons  $\exists \omega \in Mod(\mu), \omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Finalement,  $\omega' \notin Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))$ .
- **(IC3\*)** Supposons que  $E_1 \equiv_R E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(E_1))$  (l'autre cas est symétrique). Par définition, nous savons que  $\omega$  est un modèle  $\mu_1$  minimal pour  $\triangleleft_{Max}^{E_1}$ . Puisque  $\mu_1 \equiv \mu_2$ ,  $\omega$  est donc également modèle de  $\mu_2$ .

2. Nous rappelons que  $Max(\nu_E(\omega)) = Max_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega)$

Puisque  $\omega$  est minimal pour  $\triangleleft_{Max}^{E_1}$ , alors par définition  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_1)$  telle que  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega$ . En d'autres termes,  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_1)$  telle que  $Max(\nu_{E_1}(\omega')) < Max(\nu_{E_1}(\omega))$ . Puisque, par hypothèse,  $E_1 \equiv_R E_2$ , alors  $\nu_{E_1}(\omega) = \nu_{E_2}(\omega)$  et  $\nu_{E_1}(\omega') = \nu_{E_2}(\omega')$ . De là, puisque  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , nous obtenons  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_2)$  telle que  $Max(\nu_{E_2}(\omega')) < Max(\nu_{E_2}(\omega))$ . Par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_2)$  telle que  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega$ . Ainsi, nous obtenons finalement que  $\omega$  est modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_2}(E_2))$ .

– **(IC5)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ . Supposons que  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ . Par définition, nous savons qu'il existe une autre interprétation  $\omega' \in Mod(\mu)$  telle que  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_1 \sqcup E_2} \omega$ . En d'autres termes,  $Max(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega')) < Max(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega))$ . Ainsi, nous obtenons qu'il existe une base de croyances  $B_i \in E_1 \sqcup E_2$  telle que  $\forall B_j \in E_1 \sqcup E_2, \kappa_{B_j}(\omega') < \kappa_{B_j}(\omega)$ . Si  $B_i \in E_1$  (resp.  $E_2$ ), alors  $\exists B_i \in E_1$  (resp.  $E_2$ ) telle que  $\forall B_k \in E_1, \kappa_{B_k}(\omega') < \kappa_{B_k}(\omega)$ . Par définition,  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_1} \omega$  (resp.  $\omega' \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega$ ), et donc  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1))$  (resp.  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ ). Ainsi, dans tous les cas,  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ .

– **(IC6')** Supposons que  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$  soit cohérent. Nous savons donc qu'il existe une interprétation  $\omega \in Mod(\mu)$  telle que  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1))$  et  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ . Soit à présent  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ , telle que  $\omega'$  ne soit pas modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1)) \vee Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ . Montrons alors que  $\omega'$  n'est pas non plus modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ . Puisque  $\omega'$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1)) \vee Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ , alors :

1.  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1))$ . Ainsi, puisque  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1))$ , et que par définition  $\triangleleft_{Max}^{E_1}$  est un ordre total, nous obtenons  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_1} \omega'$  ;
2. et  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ . De la même façon, puisque  $\omega \models Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_2))$ , et que par définition  $\triangleleft_{Max}^{E_2}$  est également un ordre total, nous obtenons  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega'$ .

Ainsi, puisque  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_1} \omega'$  et  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_2} \omega'$ , par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$ . Finalement,  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ .

– **(IC7)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$  et de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1}(E))$ . Ainsi, par définition,  $\omega$  est modèle de  $\mu_2$  et de  $\mu_1$  minimale pour  $\triangleleft_{Max}^E$ . À nouveau, par définition,  $\omega$  est modèle de  $Bel(\Delta_{Max}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

– **(IC8)** Supposons que  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  est cohérent. Par définition, nous savons qu'il existe  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  telle que  $\omega \in Mod(\mu_2)$  et  $\omega \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E))$ . Soit  $\omega'$  une interprétation  $\Omega$  modèle de  $\mu_1$ . Supposons que  $\omega'$  ne soit pas modèle de  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$ . À ce point, deux cas sont envisageables :

1. soit  $\omega' \not\models \mu_2$ , et alors dans ce cas  $\omega' \not\models Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$  ;
2. soit encore  $\omega' \models \mu_2$  et dans ce cas, puisque  $\omega'$  ne soit pas modèle de  $Bel(\Delta^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$ ,  $\omega' \not\models Bel(\Delta^{\mu_1}(E))$ . Puisque  $\omega \models Bel(\Delta^{\mu_1}(E))$ , et que  $\triangleleft_{Max}^E$  est un ordre total,

nous avons également  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Puisque  $\omega \models \mu_1 \wedge \mu_2$  et  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , nous obtenons finalement, par définition,  $\omega' \not\models Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

Dans tous les cas,  $\omega'$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ . ■

De la même façon que l'opérateur de fusion de bases de croyances propositionnelles basé sur le maximum,  $\Delta_{Max}^\mu$  falsifie **(IC6)** dans le cadre commensurable, comme illustré par le contre-exemple suivant :

**Exemple 15** Considérons les ensembles de bases de croyances pondérées  $E_1 = \{B_1 = \{(a, 1)\}, B_2 = \{(\neg a, 1)\}\}$  et  $E_2 = \{B_3 = \{(a, 1)\}\}$ . Supposons, sur cet exemple, que  $\mu \equiv \top$ . Les Tableaux 4.8, 4.9, et 4.10 fournissent les profils associés aux interprétations pour respectivement  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$ ,  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$  et  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$Max(\nu_{E_1}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	1	0	$\langle 1, 0 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	0	$\langle 1, 0 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	0	1	$\langle 0, 1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle 0, 1 \rangle$	<b>1</b>

TABLE 4.8 – Profils associés aux interprétations pour  $\Delta_{Max}^\mu(E_1)$

	a	b	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_{E_2}(\omega)$	$Max(\nu_{E_2}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	1	$\langle 1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	$\langle 1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	0	$\langle 0 \rangle$	<b>0</b>
$\omega_3$	1	1	0	$\langle 0 \rangle$	<b>0</b>

TABLE 4.9 – Profils associés aux interprétations pour  $\Delta_{Max}^\mu(E_2)$

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)$	$Max(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	1	0	1	$\langle 1, 0, 1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_1$	0	1	1	0	1	$\langle 1, 0, 1 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_2$	1	0	0	1	0	$\langle 0, 1, 0 \rangle$	<b>1</b>
$\omega_3$	1	1	0	1	0	$\langle 0, 1, 0 \rangle$	<b>1</b>

TABLE 4.10 – Profils associés aux interprétations pour  $\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$

Sur cet exemple, nous obtenons  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \equiv \top$  et  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2)) \equiv a$ . De plus, nous avons  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \equiv \top$ , mais également  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2)) \equiv a$ . Ainsi, sur cet exemple, **(IC6)** n'est pas satisfait puisque  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$  est cohérent, mais cependant  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \not\equiv Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{Max}^\mu(E_2))$ .

De plus,  $\Delta_{Max}^\mu$  falsifie également **(IC4)\***, comme le montre le contre-exemple suivant :

**Exemple 16** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , tel que  $B_1 = \{(\neg a, 2), (b, 1)\}$  et  $B_2 = \{(a, 3), (b, 2)\}$ . Supposons également que pour cet exemple,  $\mu \equiv a \vee b$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$\text{Max}(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	1	3	$\langle 1, 3 \rangle$	3
$\omega_1$	0	1	0	3	$\langle 0, 3 \rangle$	3
$\omega_2$	1	0	2	2	$\langle 2, 2 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	2	0	$\langle 2, 0 \rangle$	2

TABLE 4.11 – Un contre-exemple pour **(IC4)\***

Sur cet exemple, nous avons  $B_1^* \models \mu$  et  $B_2^* \models \mu$ . De plus, le Tableau 5.4 nous montre que, considérant  $\mu \equiv a \vee b$ , nous obtenons  $\text{Mod}(Bel(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_2, \omega_3\}$ , puis  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)) \equiv a$ . Ainsi, sur cet exemple, **(IC4)\*** n'est pas satisfait puisque  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  est cohérent alors que  $Bel(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  ne l'est pas.

La non-satisfaction de ce postulat est clairement due à l'hypothèse de commensurabilité des sources, émise implicitement par l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur le maximum. Ainsi, il est possible de remarquer que, dans un cas extrême, si une source donnée exagère les poids qu'elle associe à ses propres croyances vis-à-vis des autres agents, le résultat de la fusion sera alors exactement l'ensemble des formules fournies par cette source. Nous illustrons ce type de situation par le contre-exemple suivant :

**Exemple 17** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ , tel que  $B_1 = \{(\neg a, 16)\}$ ,  $B_2 = \{(a, 85)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 33)\}$ . Supposons que pour cet exemple,  $\mu \equiv \top$ .

	a	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$\text{Max}(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	85	0	$\langle 0, 85, 0 \rangle$	85
$\omega_1$	1	16	0	33	$\langle 16, 0, 33 \rangle$	33

TABLE 4.12 – Un exemple de fusion non équitable

Sur cet exemple, nous avons  $B_1^* \models \mu$ ,  $B_2^* \models \mu$  et  $B_3^* \models \mu$ . De plus, le Tableau 4.12 nous montre que, considérant  $\mu \equiv \top$ , nous obtenons  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_1\}$ , puis  $\text{Bel}(\Delta_{Max}^\mu(E)) \equiv a \equiv B_2^*$ , alors que  $\text{Bel}(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  et  $\text{Bel}(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_3^*$  ne sont pas cohérents.

Ainsi, cet exemple nous montre que lorsqu'une source exagère les poids qu'elle attribue à ses croyances vis-à-vis des autres sources, cette première source peut largement influencer le résultat de la fusion. Ceci est dû à l'hypothèse de commensurabilité des sources, ainsi qu'à l'agrégation directe des poids ainsi associés aux interprétations : puisque le poids associé à  $a$  par  $B_2$  est bien plus élevé que les poids associés à  $\neg a$  par  $B_1$  et  $B_3$ , les interprétations falsifiant les croyances issues de  $B_2$  seront largement rejetés vis-à-vis des interprétations falsifiant les croyances issues de  $B_1$  et  $B_3$ .

### 4.2.3 Comportement logique dans le cadre incommensurable

Nous montrons à présent que dans le cadre incommensurable, l'opérateur de fusion basé sur le maximum  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  satisfait la plupart des postulats de rationalité proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion sous contrainte. De plus, cet opérateur satisfait la majeure partie des postulats satisfaits par  $\Delta_{Max}^\mu$ , l'opérateur de fusion de croyances commensurables basé sur le maximum, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 9**  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  satisfait (IC0), (IC1), (IC2\*), (IC3\*), (IC4\*), (IC5), et (IC7).

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées.

- (IC0) La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- (IC1) La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- (IC2\*) La preuve de la satisfaction de ce postulat est obtenue par la démonstration de la Proposition 4
- (IC3\*) Supposons que  $E_1 \equiv_R E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\mu$  modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(E))$  (l'autre cas est symétrique). Par définition,  $\omega$  est un modèle de  $\mu_1$  minimal pour  $\blacktriangle_{Max}^{E_1}$ . Puisque, par hypothèse,  $\mu_1 \equiv \mu_2$  alors  $\omega$  est également modèle de  $\mu_2$  (et réciproquement). Puisque  $\omega$  est minimal pour  $\blacktriangle_{Max}^{E_1}$ , alors  $\omega$  est également minimal pour  $\blacktriangle_{Max}^{E_1}$ . Puisque, par hypothèse,  $E_1 \equiv_R E_2$ , et par définition de  $\blacktriangle_{Max}^{E_1}$ ,  $\omega$  est également minimal pour  $\blacktriangle_{Max}^{E_2}$ . De la, nous obtenons finalement que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_2$  minimal pour  $\blacktriangle_{Max}^{E_2}$ .

- **(IC4\*)** La preuve de la satisfaction de ce postulat est obtenue par la démonstration de la Proposition 13.
- **(IC5)** Supposons que  $\omega$  soit une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1))$  et également de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2))$ . Par définition, et au moyen de la caractérisation de  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  basée sur le critère SMP, nous obtenons que pour toute autre interprétation  $\omega'$  modèle de  $\mu$ ,  $\omega' \not\prec_{SMP}^{E_1} \omega$  et  $\omega' \not\prec_{SMP}^{E_2} \omega$ . En considérant la définition de  $\prec_{SMP}$ , nous obtenons naturellement  $\omega \not\prec_{SMP}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$  et ainsi finalement, à nouveau au moyen de la caractérisation de  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  basée sur le critère SMP,  $\omega \in \text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2))$ .
- **(IC7)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$  et de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(E))$ . Dans ce cas, par définition de  $\blacktriangle_{Max}^\mu$ , nous obtenons que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_2$  et de  $\mu_1$  minimal pour  $\blacktriangle_{Max}^E$ . Ainsi, par définition de  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  à nouveau, nous obtenons finalement que  $\omega$  est modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

■

Cette proposition nous montre notamment que lorsque l'ensemble des échelles compatibles est pris en considération, la satisfaction du postulat **(IC4\*)** est restaurée. Ceci est dû au concept même d'échelle compatible et à leur utilisation pour obtenir une extension de l'opérateur de fusion commensurable. En effet, puisque les poids associés aux croyances par les sources ne sont pas comparables d'une source à l'autre, l'opérateur de fusion incommensurable ne se contente pas d'agréger les poids associés aux interprétations par les sources : afin de déterminer le résultat de la fusion incommensurable, ce calcul est plutôt effectué pour chaque correspondance possible entre les poids issus de différentes sources. Illustrons cette différence d'approche par l'exemple suivant :

**Exemple 18** Considérons à nouveau le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ , tel que  $B_1 = \{(-a, 16)\}$ ,  $B_2 = \{(a, 85)\}$  et  $B_3 = \{(-a, 33)\}$ . Supposons que pour cet exemple,  $\mu \equiv \top$ .

	a	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$\text{Max}(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	85	0	$\langle 0, 85, 0 \rangle$	85
$\omega_1$	1	16	0	33	$\langle 16, 0, 33 \rangle$	33

TABLE 4.13 – Un exemple de divergence d'approche concernant le postulat **(IC4\*)**

Nous avons vu, dans l'Exemple 17, que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_1\}$ . À l'inverse, en considérant le critère  $\prec_{SMP}$ , nous obtenons, d'après le Tableau 4.13,  $\text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_{Max}^\mu(E))) = \{\omega_0, \omega_1\}$ .

Ainsi, alors que l'opérateur de fusion  $\Delta_{Max}^\mu$  considère les poids entre sources commensurables, et donc la croyance exprimée par  $B_2$  plus fiable que les autres, l'opérateur  $\Delta_{Max}^\mu$  reste



prudent à ce sujet. Cet opérateur considère que les poids exprimés par  $B_1$  et  $B_3$  peuvent être plus importants pour ces sources que celui exprimé par  $B_2$ . Ainsi, la comparaison des profils au moyen du critère  $\triangleleft_{SMP}$  ne permet pas de conclure que  $\omega_0$  est plus plausible que  $\omega_1$ , à la différence de l'agrégation de ces mêmes profils au moyen de l'opérateur maximum.

De la même façon que dans le cadre commensurable,  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  falsifie (IC6), comme l'illustre le contre-exemple suivant :

**Exemple 19** Considérons les multi-ensembles de bases de croyances pondérées  $E_1 = \{B_1 = \{(a, 1)\}, B_2 = \{(\neg a, 1)\}\}$  et  $E_2 = \{B_3 = \{(a, 1)\}\}$ . Supposons que  $\mu = \top$ . Le Tableau 4.14 nous montre les profils associés aux interprétations pour respectivement  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1)$ ,  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2)$  et  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_{E_1}(\omega)$	$\nu_{E_2}(\omega)$	$\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)$
$\omega_0$	0	0	1	0	1	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
$\omega_1$	0	1	1	0	1	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	1	0	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	1	0	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$

TABLE 4.14 – Un contre-exemple pour (IC6)

Sur cet exemple, nous obtenons  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1) \equiv \top$  et  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . De plus, nous avons également  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$ , mais  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1) \wedge \blacktriangle_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Ainsi, (IC6) n'est pas satisfait puisque  $Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2))$  est cohérent, mais  $Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \not\equiv Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2))$ .

Cependant, et à l'inverse du cadre commensurable,  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  falsifie également (IC6)', comme illustré par le contre-exemple suivant :

**Exemple 20** Considérons les multi-ensembles de bases de croyances pondérées  $E_1 = \{B_1 = \{(a \vee b, 2), (\neg a \vee \neg b, 1)\}, B_2 = \{(a, 2), (b, 1)\}\}$  et  $E_2 = \{B_3 = \{(b, 2), (a, 1)\}\}$ . Le Tableau 4.15 fournit les profils associés aux interprétations selon respectivement  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1)$ ,  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2)$  et  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\nu_{E_1}(\omega)$	$\nu_{E_2}(\omega)$	$\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)$
$\omega_0$	0	0	2	2	2	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle 2,2,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	2	1	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 1 \rangle$	$\langle \mathbf{0},2,1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	1	2	$\langle \mathbf{0},1 \rangle$	$\langle 2 \rangle$	$\langle \mathbf{0},1,2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	2	0	0	$\langle \mathbf{2},0 \rangle$	$\langle \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{1},0,0 \rangle$

TABLE 4.15 – Un contre-exemple pour (IC6')

Sur cet exemple, nous avons  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1) \equiv a$  et  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2) \equiv a \wedge b$ . De plus, nous avons également  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv a \vee b$ , mais  $\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1) \vee \blacktriangle_{Max}^\mu(E_2) \equiv a$ . Ainsi, (IC6)' n'est pas satisfait puisque  $Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2))$  est cohérent, mais  $Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1 \sqcup E_2)) \not\equiv Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_1)) \vee Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E_2))$ .

Finalement, le contre-exemple suivant nous montre que  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  falsifie également (IC8) :

**Exemple 21** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner  $E = \{B_1, B_2\}$ , tel que  $B_1 = \{((\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b), 4), (\neg a, 2)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (a, 1)\}$ . Supposons que  $\mu_1 = a \vee b$  et  $\mu_2 = a$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	4	2	$\langle 4,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	1	$\langle \mathbf{0},1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	2	2	$\langle \mathbf{2},2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	0	$\langle \mathbf{4},0 \rangle$

TABLE 4.16 – Un contre-exemple pour (IC8)

D'après le Tableau 4.16, et en utilisant la caractérisation reposant sur le critère SMP, nous avons  $\omega_1 \blacktriangleleft_{Max}^E \omega_0$  et  $\omega_1 \blacktriangleleft_{Max}^E \omega_2$ . Ainsi, en supposant que  $\mu_1 = a \vee b$ , nous obtenons  $\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(E) = \{\omega_1, \omega_3\}$ , et donc  $\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 = \{\omega_3\}$ . Cependant, en considérant  $\mu_2 = a$ , nous obtenons  $\blacktriangle_{Max}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) = \{\omega_2, \omega_3\}$ . Ainsi, sur cet exemple, (IC8) n'est pas satisfait.

La non-satisfaction du postulat (IC8) est due au fait que  $\blacktriangle_{Max}^E$  est seulement une relation partielle. Pour exemple, dans [EKM08b], les opérateurs de fusion basés sur des ordres partiels falsifient également ce postulat.

#### 4.2.4 Un opérateur de consensus indépendant de la majorité

L'approche basée sur l'opérateur *maximum* et considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources donné a été proposée dans le but de fournir une

stratégie égalitaire de fusion, lorsque les bases de croyances pondérées fournies par ces sources ne sont pas commensurables. La proposition suivante nous montre que  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  satisfait **(MII)**, et que par conséquent, l'approche basée sur cet opérateur constitue bien une stratégie de fusion égalitaire :

**Proposition 10** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :*

$$\forall m, Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E \sqcup \{B_i^m\})) \equiv Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))$$

---

**Preuve** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner.*

*Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$  telles que  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . En utilisant la caractérisation de  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  basée sur le critère SMP, nous obtenons  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$ . En considérant la définition de  $\triangleleft_{SMP}$ , nous obtenons directement que pour tout entier naturel positif  $m$ ,  $\omega \triangleleft_{SMP}^{E \sqcup \{B_i^m\}} \omega'$  (et réciproquement). Ainsi, nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_{Max}^{E \sqcup E_2^m} \omega'$ . ■*

---

Ainsi, le résultat de la fusion d'un ensemble de bases de croyances pondérées incommensurables par l'opérateur  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  est totalement indépendant de la répétition des croyances d'une source à l'autre : cet opérateur prend seulement en compte les différents points de vue existants. Un corollaire de cette proposition, également remarqué dans [KPP02], est qu'il n'est pas nécessaire de considérer des multi-ensembles de sources lors du processus de fusion mais seulement des ensembles.

Dans le cadre commensurable, l'opérateur de fusion égalitaire basé sur le maximum  $\Delta_{Max}^\mu$  satisfait également ce postulat. Formellement :

**Proposition 11** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :*

$$\forall m, Bel(\Delta_{Max}^\mu(E \sqcup \{B_i^m\})) \equiv Bel(\Delta_{Max}^\mu(E)).$$

---

**Preuve** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$  telles que  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons  $Max(\nu_E(\omega)) < Max(\nu_E(\omega'))$ . À ce point, et en considérant la définition de l'opérateur maximum, nous obtenons que quelque soit  $m$  un entier positif naturel,  $Max(\nu_{E \sqcup \{B_i^m\}}(\omega)) < Max(\nu_{E \sqcup \{B_i^m\}}(\omega'))$  (et réciproquement). À nouveau, par la définition de  $\triangleleft_{Max}^E$ , nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_{Max}^{E \sqcup \{B_i^m\}} \omega'$ . ■*

---

Les approches indépendantes de la majorité ont parfois été qualifiées d'approches d'*arbitrage* (voir par exemple [Mey00]). Dans [KPP98], la propriété d'arbitrage est vue comme une forme affaiblie d'indépendance de la majorité. Adaptée au cadre des bases de croyances pondérées, celle-ci peut être énoncée de la façon suivante :

$$\forall B_1, \exists B_2, B_1^* \not\equiv B_2^*, \forall n, Bel(\Delta^\mu(B_1 \sqcup B_2^n)) \equiv Bel(\Delta^\mu(B_1 \sqcup B_2)).$$

Clairement, l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum satisfait cette propriété, puisqu'il satisfait le postulat d'indépendance de la majorité (**MI**).

Une autre forme d'arbitrage pour la fusion de croyances propositionnelles a été définie dans [KPP02]. Dans le cadre des bases de croyances pondérées, le postulat d'arbitrage (**Arb**) peut être adapté de la façon suivante. Soit  $E = \{B_1, B_2\}$  un multi-ensemble composé de deux bases de croyances pondérées. Alors :

$$\left. \begin{array}{l} Bel(\Delta^{\mu_1}(\{B_1\})) \equiv Bel(\Delta^{\mu_2}(\{B_2\})) \\ Bel(\Delta^{\mu_1 \equiv \neg \mu_2}(E)) \equiv (\mu_1 \equiv \neg \mu_2) \\ \mu_1 \not\equiv \mu_2 \\ \mu_2 \not\equiv \mu_1 \end{array} \right\} \text{ implique } Bel(\Delta^{\mu_1 \vee \mu_2}(E)) \equiv Bel(\Delta^{\mu_1}(\{B_1\})).$$

L'opérateur de fusion incommensurable  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  falsifie cependant ce postulat, comme l'illustre le contre-exemple suivant :

**Exemple 22** *Considérons un ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , où  $B_1 = \{(b, 1)\}$ , et  $B_2 = \{(a, 2), (a \wedge \neg b, 1)\}$ . Supposons que  $\mu_1 \equiv a$  et  $\mu_2 \equiv b$ . Le Tableau 4.17 fournit les profils respectivement associés à chaque interprétation :*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	1	2	$\langle 1, 2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$
$\omega_2$	1	0	1	0	$\langle 1, 0 \rangle$
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle 0, 1 \rangle$

TABLE 4.17 – Un contre-exemple pour (**Arb**)

Nous obtenons ainsi, à partir du Tableau 4.17 :

- $Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(B_1))) = Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu_2}(B_2))) = \{\omega_3\}$ ;
- $Mod(\mu_1 \equiv \neg \mu_2) = \{\omega_1, \omega_2\}$ . D'après le Tableau 4.17, et en considérant la caractérisation basée sur le critère SMP, nous obtenons  $\omega_1 \blacktriangle_E^\mu \omega_2$  et  $\omega_2 \blacktriangle_{Max}^E \omega_1$ . Ainsi,  $Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1 \equiv \neg \mu_2}(E)) \equiv (\mu_1 \equiv \neg \mu_2)$

–  $Mod(\mu_1) = \{\omega_2, \omega_3\}$  et  $Mod(\mu_2) = \{\omega_1, \omega_3\}$ . Ainsi,  $\mu_1 \not\equiv \mu_2$  et  $\mu_2 \not\equiv \mu_1$ .

De plus, le Tableau 4.17 montre que  $Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1 \vee \mu_2}(E))) = \{\omega_2, \omega_3\}$ , puisque nous avons  $\omega_3 \not\prec_{Par}^E \omega_1$ , mais  $\omega_2 \not\prec_{Par}^E \omega_3$  et  $\omega_3 \not\prec_{Par}^E \omega_2$ . Cependant, par hypothèse,  $Mod(Bel(\blacktriangle_{Max}^{\mu_1}(B_1))) = \{\omega_3\}$ . Ainsi, sur cet exemple, **(Arb)** est falsifié.

En complément des postulats de rationalité rappelés Chapitre 2, nous proposons une version plus forte de **(IC4\*)**, appelée postulat de *consensus* :

**(CSS)**  $\forall B_i \in E$ , si  $B_i^* \models \mu$ , alors  $B_i^* \wedge Bel(\Delta^\mu(E))$  est cohérent.

En d'autres termes, les opérateurs de fusion adoptant un comportement de *consensus* tentent de satisfaire au minimum toute source considérée. En effet, ceux-ci sélectionnent au moins un modèle de chaque base de croyances pondérées à fusionner, pour peu que cette dernière soit cohérente et ne rentre pas en contradiction avec la contrainte. Ainsi, ces opérateurs font preuve d'un comportement très prudent face aux conflits entre sources, et sont particulièrement adaptés lorsque les divergences entre ces mêmes sources sont minimales. Ces mêmes opérateurs peuvent cependant, dans des cas de forte contradiction entre les sources à fusionner, conduire à des situations d'ignorance totale. Cette notion est très proche de la notion de *tempérance* proposée par Konieczny et al. dans [EKM08c], et adaptée ici au cadre des bases de croyances pondérées :

**(TMP)**  $\forall B_i \in E$ ,  $B_i^* \wedge Bel(\Delta^\top(E))$  est cohérent.

En effet, les opérateurs vérifiant cette propriété adoptent le même comportement que celui décrit précédemment, mais uniquement lorsqu'aucune contrainte d'intégrité n'est spécifiée. Plus particulièrement, la proposition suivante nous montre que la notion de tempérance est plus spécifique que la notion de consensus :

**Proposition 12** Soit  $\Delta$  un opérateur de fusion. Alors :

*Si  $\Delta$  satisfait (CSS), alors  $\Delta$  satisfait (TMP)*

La démonstration de cette proposition est naturelle et directe. En effet, si  $\Delta^\mu$  est un opérateur de fusion satisfaisant le postulat **(CSS)**, alors quelque soit la contrainte  $\mu$  considérée, cet opérateur de fusion sélectionnera alors au moins un modèle de chaque base de croyances cohérente et validant la contrainte. En particulier, il en sera alors de même si  $\mu \equiv \top$ . Cet opérateur satisfait donc également le postulat **(TMP)**.

Nous montrons finalement que  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  satisfait **(CSS)**, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 13** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$\forall B_i \in E$ , si  $B_i^* \models \mu$ , alors  $B_i^* \wedge Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E))$  est cohérent.

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $B_i$  une base de croyances pondérées issue de  $E$ . Supposons que  $B_i^* \models \mu$ . Dans notre étude, chaque base de croyances est supposée cohérente. Soit alors  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  telle que  $\omega$  est un modèle de  $B_i^*$  tel que  $\omega \in \text{Min}(\text{Mod}(B_i^*), \blacktriangleleft_{Max}^E)$ . Montrons alors que  $\omega \in \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \blacktriangleleft_{Max}^E)$ .

Nous savons, par hypothèse, que  $\omega$  est modèle de  $\mu$ . Nous savons également que, par hypothèse,  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ . Soit maintenant  $\omega''$  une interprétation de  $\Omega$  également modèle de  $\mu$ . À ce point, deux cas sont envisageables :

1. soit  $\omega'' \models B_i^*$  et dans ce cas,  $\omega'' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega$  ;
2. soit  $\omega'' \not\models B_i^*$ . Dans ce cas, nous avons  $\kappa_{B_i}(\omega'') > 0$ , et par définition,  $\omega'' \not\blacktriangleleft_{SMP}^E \omega$ . Au moyen de la caractérisation au moyen du critère SMP, nous obtenons finalement  $\omega'' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega$ .

Ainsi, nous obtenons  $\nexists \omega'' \in \text{Mod}(\mu), \omega'' \blacktriangleleft_{Max}^E \omega$ . En d'autres termes,  $\omega$  est un modèle de  $B_i^*$  et de  $\text{Bel}(\blacktriangleleft_{Max}^\mu(E))$ . Par définition,  $\text{Bel}(\blacktriangleleft_{Max}^\mu(E)) \wedge B_i^*$  est cohérent.  $\blacksquare$

Lorsque les poids associés aux formules par les sources ne sont pas supposés commensurables d'une source à l'autre, et que l'on souhaite éviter les choix arbitraires en restant prudent sur la correspondance supposée entre ces mêmes poids, adopter un comportement de consensus est alors une attitude raisonnable. En ce sens, nous avons montré, par cette proposition, que l'approche basée sur la notion d'échelle compatible et adaptée au cadre égalitaire que nous proposons est particulièrement adapté à la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables.

Finalement, le tableau suivant récapitule les divergences entre  $\Delta_{Max}^\mu$  et  $\blacktriangleleft_{Max}^\mu$  en matière de comportement rationnel :

	(IC4*)	(IC6)	(IC6')	(IC8)	(MAJ)	(MI)	(CSS)
$\Delta_{Max}^\mu$	-	-	✓	✓	-	✓	-
$\blacktriangleleft_{Max}^\mu$	✓	-	-	-	-	✓	✓

TABLE 4.18 – Une synthèse des divergences logiques entre  $\Delta_{Max}^\mu$  et  $\blacktriangleleft_{Max}^\mu$

### 4.3 Synthèse du chapitre

Nous avons, dans ce chapitre, proposé une extension de l'opérateur de fusion de croyances pondérées commensurables basé sur le maximum, au moyen de la notion d'échelle compatible. Nous avons ainsi fourni une première contribution à la fusion incommensurable, en proposant

une première approche possible pour la fusion de croyances pondérées incommensurables. Nous avons montré dans un premier temps que cette approche n'est pas trop prudente, et ne dérive pas uniquement des tautologies ou des ignorances totales des ensembles de sources considérées, mais plutôt des résultats prudents dûs à l'hypothèse d'incommensurabilité exprimée entre ces mêmes sources.

Nous avons également vu que cet opérateur repose sur la considération d'un ensemble infini d'échelles compatibles. Nous avons cependant fourni plusieurs caractérisations de l'ordre induit sur les interprétations par cet opérateur. La première se base sur les ordres induits sur les formules par chaque base de croyances considérée. La seconde, constituant une des principales contributions de ce chapitre, repose sur un critère de comparaison, similaire au critère de Pareto, portant sur les profils associés aux interprétations dans le cadre commensurable. Comme nous le détaillons plus tard, dans ce mémoire, ce critère est à la fois plus prudent que le critère de Pareto, tout en restant plus productif que le critère de Pareto strict.

Nous avons ensuite analysé le comportement rationnel de l'opérateur de fusion incommensurable proposé par ce chapitre. Pour cela, nous avons dans un premier temps adapté les postulats de rationalité proposés dans la littérature au cadre des bases de croyances pondérées. Nous avons ensuite montré que dans le cadre commensurable, l'opérateur de fusion basé sur le maximum vérifie la majeure partie de ces postulats. Cet opérateur ne satisfait cependant pas le postulat d'équité (IC4\*) : ce résultat montre que cet opérateur est très sensible aux poids exprimés par chaque source, ce qui renforce d'autant plus le problème de la commensurabilité entre ces mêmes sources. Nous avons ensuite montré que l'opérateur basé sur le maximum adapté à la fusion incommensurable satisfait ce même postulat. Nous avons également montré que cet opérateur satisfait également le postulat de *consensus* que nous proposons : un opérateur adoptant un comportement de consensus tente de satisfaire un minimum chaque source en présence en sélectionnant au moins un modèle de chaque base à fusionner. Ces deux résultats montrent que l'opérateur que nous proposons dans ce chapitre adopte un comportement raisonnable pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables. Nous avons finalement montré que cet opérateur satisfait également le postulat d'indépendance de la majorité : l'approche basée sur les échelles compatibles proposée dans ce chapitre constitue bien une approche égalitaire de la fusion dans le cadre incommensurable.

Nous adaptons, dans le chapitre suivant, la stratégie reposant sur les échelles compatibles à l'opérateur de fusion de croyances pondérées basé sur la somme. Est-il possible d'obtenir une caractérisation de la relation, induite par cet opérateur sur les interprétations de  $\Omega$ , au moyen d'un critère de comparaison des profils ? L'opérateur de fusion, basé sur la somme, constitue une approche majoritaire pour la fusion de croyances pondérées. Son extension au cadre incommensurable satisfait-elle toujours la propriété de majorité ? Nous détaillons chacun de ces points dans le chapitre suivant.





## Chapitre 5

# Fusion incommensurable et cadre utilitaire

Nous présentons, dans ce chapitre, une approche pour la fusion de bases de croyances incommensurables, basée sur l'opérateur d'agrégation somme. De façon similaire au chapitre précédent, nous utilisons le concept d'échelle compatible, afin de fournir une extension de l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme. Nous essayons ainsi de proposer une approche majoritaire pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables.

Nous montrons, dans ce chapitre, que bien que cet opérateur repose sur un ensemble infini d'échelles compatibles, il est possible d'identifier l'ordre sur les interprétations, sur lequel il repose, au moyen d'un critère de comparaison des profils associés aux interprétations par les bases de croyances initiales. Ce critère se révèle être le *critère de Pareto*.

Nous fournissons également, dans ce chapitre, une étude logique de cette approche, au moyen des postulats de rationalités proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion contrainte, et adaptés au cadre des bases de croyances pondérées par le chapitre précédent. Nous montrons, dans un premier temps, que dans le cadre commensurable, l'opérateur de fusion basé sur la somme falsifie le postulat d'équité, ce qui renforce une fois de plus le problème de la commensurabilité des sources. Dans le cadre incommensurable, la satisfaction de ce postulat est restaurée. Cependant, et puisque l'opérateur que nous proposons dans ce cadre établit seulement des ordres partiels entre les interprétations possibles, la satisfaction d'autres postulats est perdue. De plus, nous montrerons que dans le cadre commensurable, l'opérateur de fusion basé sur la somme satisfait le postulat de majorité. Malheureusement, nous montrerons que l'opérateur de fusion incommensurable, basé sur une extension de ce dernier au moyen du concept d'échelle compatible, falsifie ce même postulat. Pire, nous montrerons que cette approche se révèle être une approche égalitaire. Nous montrerons finalement que l'opérateur de fusion, que nous proposons dans ce chapitre, adopte un comportement de consensus face à la fusion de bases de croyances incommensurables.

## 5.1 Fusion incommensurable basée sur la somme

Nous adaptions donc à présent la stratégie de fusion de bases de croyances pondérées incommensurables basée sur la notion d'échelles compatibles à l'opérateur de fusion commensurable basé sur la *somme* [BLR08].

### 5.1.1 Un opérateur de fusion basé sur les échelles compatibles

Nous définissons pour cela la relation  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  sur les interprétations de  $\Omega$  de la façon suivante : une interprétation  $\omega$  est préférée à une interprétation  $\omega'$ , noté  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ , si et seulement si pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{S}_E$ ,  $\omega$  est préférée à  $\omega'$  au sens de  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}}$ , l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  sur lequel se base l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme. Plus formellement :

**Définition 30** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\mathbb{S}_E$  l'ensemble associé des échelles compatibles possibles pour  $E$ . Soit  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors nous définissons  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  tel que :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme, rappelé par la Définition 21, et appliqué à  $E^{\mathcal{S}}$ .

A l'inverse, nous notons  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$  lorsqu'il existe une échelle compatible  $\mathcal{S}$  issue de  $\mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$ . Une fois de plus, remarquons que la relation  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  est une relation partielle. De plus, nous montrons que cette relation constitue un ordre partiel stricte sur les interprétations de  $\Omega$ , comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 14** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$\triangleleft_{\Sigma}^E \text{ est une relation irréflexive et transitive.}$$

La démonstration de cette proposition est la même que celle fournie pour la proposition 3.

L'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  est une représentation possible d'un état épistémique résultant de la fusion incommensurable des sources. Cela nous amène à définir à présent un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$ , et basé sur l'ordre  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ . Les modèles des croyances préférées issues de  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E)$  sont alors ceux qui satisfont la contrainte d'intégrité  $\mu$  tout en étant minimaux selon  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ . Plus formellement :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{\Sigma}^E).$$

Nous illustrons maintenant ces définitions par l'exemple suivant :

**Exemple 23** *Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 5)\}$ . Le Tableau 5.1 présente deux échelles compatibles possibles pour  $E$ .*

	$\varphi_{ij}$	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
$B_1$	$a$	2	6
	$b$	1	4
$B_2$	$a \vee b$	2	3
	$\neg b$	1	2
$B_3$	$\neg a$	1	4

TABLE 5.1 – Deux échelles compatibles possibles

$\omega \in \Omega$	a	b	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	$\Sigma_{\mathcal{S}_1}$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$	$\Sigma_{\mathcal{S}_2}$
$\omega_0$	0	0	$\langle 2, 2, 0 \rangle$	4	$\langle 6, 3, 0 \rangle$	9
$\omega_1$	0	1	$\langle 2, 1, 0 \rangle$	3	$\langle 6, 2, 0 \rangle$	8
$\omega_2$	1	0	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	<b>2</b>	$\langle 4, 0, 4 \rangle$	8
$\omega_3$	1	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle$	<b>2</b>	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{4} \rangle$	<b>6</b>

TABLE 5.2 – Un exemple partiel de fusion selon  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$ 

Le Tableau 5.2 nous montre les profils associés aux interprétations pour deux échelles compatibles présentées,  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . Les éléments mis en gras désignent les interprétations modèles de  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_i})$  pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S}_i$  présentée. Par exemple,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont modèles de  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_1})$  pour l'échelle compatible  $\mathcal{S}_1$ . Sur cet exemple, il est également possible de construire une échelle compatible selon laquelle  $\omega_1$  est préférée. À l'inverse, il n'est pas possible de construire une échelle compatible pour laquelle  $\omega_0$  serait préférée : en effet, pour toute échelle compatible  $\mathcal{S}_i$ , nous avons  $\omega_1 \prec_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}_i}} \omega_0$ . Ainsi, sur cet exemple et en considérant l'ensemble des échelles possibles pour  $E$ , les modèles du résultat de la fusion sont  $\omega_1, \omega_2$ , et  $\omega_3$ .

Une fois de plus, déterminer le résultat de la fusion par  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  à partir de l'ensemble des échelles compatibles  $\mathbb{S}_E$ , associé à un multi-ensemble  $E$ , n'est pas raisonnable, puisque cet ensemble est infini. De façon similaire au cadre égalitaire, nous fournissons donc dans un premier temps un critère permettant la caractérisation des interprétations modèles de  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$ . Nous montrons en effet qu'une interprétation  $\omega$  est un modèle du résultat de la fusion d'un multi-ensemble de sources  $E$  par  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  si et seulement s'il existe une échelle  $\mathcal{S}$ , compatible avec  $E$ , telle que cette interprétation  $\omega$  soit un modèle du résultat d'une fusion commensurable de  $E^{\mathcal{S}}$ . Plus formellement :

**Proposition 15** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\mathbb{S}_E$  l'ensemble associé des échelles compatibles possibles pour  $E$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  telle que  $\omega \models \mu$ . Alors :

$$\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E))) \text{ ssi } \exists \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E, \omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\triangle_{\Sigma}^{\mu}(E^{\mathcal{S}}))).$$

Cette proposition est très proche de celle que nous proposons pour le cadre égalitaire, dans le chapitre précédent. Afin de fournir une preuve à cette proposition, nous suivrons donc un cheminement similaire : nous proposerons dans un premier temps un lemme, très proche de celui proposé précédemment mais adapté à l'opérateur basé sur la somme, puis la construction d'une échelle compatible particulière, cette fois ci très différente de toutes celles proposées précédemment.

Considérons donc, dans un premier temps, le Lemme suivant : celui-ci stipule que si une interprétation  $\omega'$  n'est pas strictement préférée à une interprétation  $\omega$ , et si  $\omega$  n'est pas modèle de chaque  $B_i^*$  issu de  $E$ , alors il existe une base de croyances  $B_j$  telle que  $\omega'$  est au moins aussi préférée que  $\omega$ . En des termes plus formels :

**Lemme 5** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\begin{aligned} \text{si } \omega' \not\prec_{\Sigma}^E \omega \text{ et } \exists B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) \neq 0 \\ \text{alors } \exists B_j \in E : \kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega). \end{aligned}$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .

Supposons que

$$\begin{aligned} \omega' \not\prec_{\Sigma}^E \omega \text{ (i)} \\ \text{et } \exists B_i \in E \text{ t.q. } \kappa_{B_i}(\omega) \neq 0 \text{ (ii)}. \end{aligned}$$

Par définition de  $\not\prec_{\Sigma}^E$ , il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega' \not\prec_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega$ . De part la définition de  $\not\prec_{\Sigma}^E$ , nous obtenons, pour l'échelle  $\mathcal{S}$ ,

$$\Sigma(\nu_{E^{\mathcal{S}}}(\omega')) \geq \Sigma(\nu_{E^{\mathcal{S}}}(\omega)) > 0 \text{ (iii)}.$$

En effet, si  $\Sigma(\nu_{E^{\mathcal{S}}}(\omega)) = 0$ , alors pour chaque base de croyances  $B_k$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_k^{\mathcal{S}}}(\omega) = 0$ . Dans ce cas, cela signifierait que  $\omega$  est modèle de chaque base de croyances  $B_k \in E$ , ce qui contredit l'hypothèse (ii).

Soit  $B_j$  une base de croyances pondérées issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_j^S}(\omega') \geq \kappa_{B_j^S}(\omega)$ . Une telle base  $B_j$  existe, puisque dans un cas contraire nous aurions que pour toute base  $B_j$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_j^S}(\omega') < \kappa_{B_j^S}(\omega)$  et donc  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega')) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega))$ , ce qui contredirait l'hypothèse (i).

Considérons  $\varphi$  une formule issue de  $B_j^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi) = \kappa_{B_j^S}(\omega)$ . En d'autres termes,  $\varphi$  représente la croyance la plus importante de  $B_j$  falsifiée par  $\omega$ , ce qui signifie également que  $\forall \psi \in B_j$  telle que  $\omega \not\models \psi$ , nous avons  $\mathcal{S}(\psi) \leq \mathcal{S}(\varphi)$ . Soit  $\varphi'$  une formule de  $B_j^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi') = \kappa_{B_j^S}(\omega')$ . À nouveau,  $\varphi'$  représente la croyance la plus importante de  $B_j$  falsifiée par  $\omega$ , ce qui signifie également que  $\forall \psi' \in B_j$ , telle que  $\omega' \not\models \psi'$ ,  $\mathcal{S}(\psi') \leq \mathcal{S}(\varphi')$ . Nous obtenons donc, pour cette échelle compatible  $\mathcal{S}$ ,  $\exists B_j \in E$ ,  $\mathcal{S}(\varphi') \geq \mathcal{S}(\varphi)$ . De part la définition des échelles compatibles, nous obtenons  $\exists B_j \in E$ ,  $R_{B_j}(\varphi') \geq R_{B_j}(\varphi)$ . De part la définition de  $\varphi$  et  $\varphi'$ , nous obtenons finalement  $\exists B_j \in E$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega') \geq \kappa_{B_j}(\omega)$  ■

Nous proposons ensuite une construction particulière d'échelle compatible, qui à partir d'une première échelle compatible  $\mathcal{S}$ , nous permet d'en obtenir une nouvelle, notée  $\mathcal{S}_\Sigma$ , de la façon suivante :

**Construction 3** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$ . Soit  $\mathcal{S}$  une échelle compatible pour  $E$ ,  $\mathcal{S}_{Id}$  par exemple. Nous construisons alors une échelle  $\mathcal{S}_\Sigma$ , à partir de  $\mathcal{S}$ , de la façon suivante :

- $\forall B_i \in E$  :
- si  $\omega \models B_i^*$ ,  $\forall \varphi \in B_i^*$ ,  $\mathcal{S}_\Sigma(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi) + \Sigma(\nu_{ES}(\omega))$ ;
  - si  $\omega \not\models B_i^*$ , soit alors  $\varphi_{ij}$  une formule issue de  $B_i^*$  telle que  $\mathcal{S}(\varphi_{ij}) = \kappa_{B_i^S}(\omega)$ . Alors,  $\forall \varphi \in B_i^*$ 
    - si  $\mathcal{S}(\varphi) > \mathcal{S}(\varphi_{ij})$ , alors  $\mathcal{S}_\Sigma(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi) + \Sigma(\nu_{ES}(\omega))$ ;
    - sinon  $\mathcal{S}_\Sigma(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi)$ .

Le Lemme 5 et la Construction 3 proposés précédemment nous permettent maintenant de fournir une démonstration pour la Proposition 15 :

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$ .

Montrons d'abord que si  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E))$ , alors il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \in Mod(Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E^S)))$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E))$ . Soit  $\mathcal{S}$  une échelle compatible pour  $E$ ,  $\mathcal{S}_{Id}$  par exemple. Soit  $\mathcal{S}_\Sigma$  l'échelle compatible obtenue à partir de  $\mathcal{S}$  un considérant la construction 3.

Montrons à présent que  $\omega$  est modèle de  $Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E^{S_\Sigma}))$ . Nous savons, par hypothèse, que  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E))$ . Ainsi, par définition,  $\forall \omega' \models \mu$  telle que  $\omega' \neq \omega$ , nous avons  $\omega' \not\prec_\Sigma^E \omega$ . Montrons que  $\forall \omega' \in Mod(\mu)$ ,  $\omega' \neq \omega$ , nous avons également  $\omega' \not\prec_\Sigma^{E^{S_\Sigma}} \omega$ . Soit  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$  telle que  $\omega' \neq \omega$ . À ce point, deux cas sont possibles :

- soit  $\omega'$  est modèle de chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ , soit formellement  $\forall B_i^{S_\Sigma} \in E^{S_\Sigma}$ ,  $\omega' \models (B_i^{S_\Sigma})^*$ . Dans ce cas,  $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^*$  est par définition cohérent. Puisque  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E))$ , et puisque, comme nous le montrerons plus tard,  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$  satisfait le postulat de rationalité (IC2\*), nous obtenons que  $\omega$  est modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} B_i^*$ , puisque dans ce cas  $Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ . En considérant à nouveau (IC2\*), et puisque, comme nous le montrerons plus tard,  $\Delta_\Sigma^\mu$  satisfait également ce postulat, nous obtenons  $\omega \models Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E^{S_\Sigma})) \equiv \bigwedge_{B_i \in E} B_i^* \wedge \mu$ . Dans ce cas, nous obtenons finalement  $\omega' \not\prec_\Sigma^{E^{S_\Sigma}} \omega$  ;
- soit il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $\omega'$  n'est pas modèle de  $B_i^*$ . Par définition des échelles compatibles,  $\omega'$  n'est pas non plus modèle de  $(B_j^{S_\Sigma})^*$ . Soit  $\varphi$  la formule représentant la croyance la plus importante issue de  $B_i$  falsifiée par  $\omega'$ . À nouveau, deux cas sont possibles :
  - soit  $\omega$  est modèle de chaque  $B_i^*$  issue de  $E$ . Dans ce cas, d'après la construction de  $S_\Sigma$ ,  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') = \kappa_{B_i^S}(\omega') + \Sigma(\nu_{E^S}(\omega))$ . Nous obtenons donc  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') \geq \Sigma(\nu_{E^S}(\omega))$ . Par construction, nous avons ainsi  $\Sigma(\nu_{E^{S_\Sigma}}(\omega')) \geq \Sigma(\nu_{E^{S_\Sigma}}(\omega))$ . Dans ce cas, nous obtenons finalement  $\omega' \not\prec_\Sigma^{E^{S_\Sigma}} \omega$  ;
  - soit  $\omega$  n'est pas modèle de  $B_i^*$ . Par définition  $\omega$  n'est pas non plus modèle de  $(B_i^{S_\Sigma})^*$ . Soit  $\varphi'$  la formule représentant la croyance la plus importante issue de  $B_i$  falsifiée par  $\omega$ . Une fois de plus, deux cas sont à considérer :
    - soit  $S_\Sigma(\varphi) \geq S_\Sigma(\varphi')$ . Dans ce cas, nous avons  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') \geq \kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega)$ . Par construction de  $S_\Sigma$ , nous obtenons  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') = \kappa_{B_i^S}(\omega') + \Sigma(\nu_{E^S}(\omega))$ . Dans ce cas,  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') \geq \Sigma(\nu_{E^S}(\omega))$  et ainsi, par construction,  $\Sigma(\nu_{E^{S_\Sigma}}(\omega')) \geq \Sigma(\nu_{E^{S_\Sigma}}(\omega))$ . Dans ce cas, nous obtenons finalement  $\omega' \not\prec_\Sigma^{E^{S_\Sigma}} \omega$  ;
    - soit  $S_\Sigma(\varphi) < S_\Sigma(\varphi')$ . Puisque  $\omega' \not\prec_\Sigma^E \omega$  et  $\exists B_i \in E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0$ , alors le Lemme 5 montre que  $\exists B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k}(\omega') \geq \kappa_{B_k}(\omega)$ . Dans ce cas,  $\exists \varphi \in B_k$ ,  $\omega \not\models \varphi$  et  $\exists \varphi' \in B_k$ ,  $\omega' \not\models \varphi'$ . D'après la définition des échelles compatibles, nous obtenons  $\exists B_k \in E$ ,  $\kappa_{B_k^{S_\Sigma}}(\omega') \geq \kappa_{B_k^{S_\Sigma}}(\omega)$ . Par construction de  $S_\Sigma$ , nous savons que  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') = \kappa_{B_i^S}(\omega') + \Sigma(\nu_{E^S}(\omega))$ . Ainsi dans ce cas,  $\kappa_{B_i^{S_\Sigma}}(\omega') \geq \Sigma(\nu_{E^S}(\omega))$  et donc, par construction,  $\Sigma(\nu_{E^{S_\Sigma}}(\omega')) \geq \Sigma(\nu_{E^{S_\Sigma}}(\omega))$ . Dans ce cas, nous obtenons finalement  $\omega' \not\prec_\Sigma^{E^{S_\Sigma}} \omega$ .

Ainsi, nous avons montré que quelque soit  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ , nous avons  $\omega' \not\prec_\Sigma^{E^{S_\Sigma}} \omega$ . Ainsi, il existe une échelle compatible  $S$  compatible pour  $E$ , ici  $S_\Sigma$ , telle que

$\omega \in \text{Mod}(\Delta_\mu^\Sigma(E^S)).$

Montrons maintenant que si  $\exists S \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \in \text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E^S))$ , alors  $\omega$  est modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E))$ . Pour cela, supposons qu'il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\Delta_\mu^\Sigma(E^S)))$ . Dans ce cas, par définition, quelque soit  $\omega'$  une autre interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ , nous avons  $\omega' \not\prec_{\Sigma}^{E^S} \omega$ . En d'autres termes, pour toute interprétation  $\omega' \in \Omega$  modèle de  $\mu$ , il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega' \not\prec_{\Sigma}^{E^S} \omega$ . Dans ce cas, par définition,  $\forall \omega' \in \Omega$ , nous avons  $\omega' \not\prec_{\Sigma}^E \omega$ . Ainsi, nous obtenons finalement  $\omega \in \text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)))$ . ■

### 5.1.2 Une caractérisation basée sur la comparaison des profils

Nous avons donc proposé une première caractérisation des interprétations modèles des croyances préférées issue d'une fusion par l'opérateur  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$ . Cependant, cette caractérisation ne permet que d'identifier les croyances préférées issues de la fusion d'un multi-ensemble  $E$ , soit en des termes plus formels  $\text{Bel}(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E))$ . Nous fournissons donc, dans cette sous-section, un critère naturel afin de caractériser intégralement l'ordre sur les interprétations  $\blacktriangle_\Sigma^E$ , sur lequel repose l'opérateur  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$ , sans avoir à calculer l'ensemble des échelles compatibles possible pour un multi-ensemble de sources données à fusionner. En particulier, ce critère nous permet alors également de retrouver les modèles préférés pour la fusion incommensurable basée sur l'opérateur somme. Ce critère se révèle être le *critère de Pareto* [Mou88]. Adapté au cadre des bases de croyances pondérées, ce critère peut être énoncé formellement de la façon suivante :

**Définition 31** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors  $\omega$  est Pareto-préférée à  $\omega'$ , noté  $\omega \prec_{\text{Par}}^E \omega'$ , si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

1.  $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$  ;
2.  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ .

La première condition signifie que  $\omega$  doit être au moins autant préférée que  $\omega'$  selon chacune des bases de croyances pondérées fournie par le multi-ensemble de sources à fusionner, tandis que la seconde signifie qu'au moins une de ces bases doit exprimer une préférence forte pour  $\omega$ . Remarquons que ce critère est moins prudent que le critère SMP, présenté par le chapitre précédent, comme nous le montrerons plus tard dans ce mémoire.

Le critère de Pareto a été largement étudié dans des domaines tels que l'économie, les systèmes multi-agents, les préférences ou encore la théorie du choix social [Mou88]. Ce critère permet, entre autre, d'identifier les situations *Pareto-optimales* : une situation est dite Pareto-optimale si et seulement s'il n'est pas possible d'augmenter la satisfaction d'un agent sans réduire la satisfaction d'au moins un autre agent. Adapté au cadre des bases de croyances pondérées, une interprétation est

dite Pareto-optimale s'il n'existe pas d'autre interprétation à laquelle une source associe un degré d'incohérence moins élevé sans qu'au moins une autre source associe à cette même interprétation un degré d'incohérence plus élevé.

Ainsi énoncé et adapté au cadre des bases de croyances pondérées, le critère de Pareto nous permet d'obtenir une relation sur les interprétations de  $\Omega$ , notée  $\triangleleft_{Par}^E$ . Remarquons que cette relation n'est que partielle : s'il existe en effet une base de croyances  $B_i$  telle qu'une interprétation  $\omega$  soit strictement préférée à une autre interprétation  $\omega'$ , puis une seconde base selon laquelle nous obtenons exactement le contraire, alors  $\omega$  et  $\omega'$  sont dites incomparables selon le critère de Pareto. Cette relation partielle sur les interprétations ainsi obtenue nous amène naturellement à définir un opérateur de fusion, basé sur la comparaison des profils associés aux interprétations par un multi-ensemble de sources à fusionner, et noté  $\Delta_{Par}^\mu$ . Les modèles de croyances préférées obtenues par cet opérateur, notées  $Bel(\Delta_{Par}^\mu(E))$ , sont les modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$  minimaux pour la relation  $\triangleleft_{Par}^E$ . Plus formellement :

$$Mod(Bel(\Delta_{Par}^\mu(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{Par}^E).$$

Illustrons à présent ces définitions par un exemple :

**Exemple 24** *Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner  $E = \{B_1, B_2\}$  avec  $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$ . Supposons que  $\mu \equiv \top$ . Le Tableau 5.3 fournit les profils associés aux interprétations.*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8, 2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle \mathbf{8}, \mathbf{0} \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle \mathbf{4}, \mathbf{1} \rangle$

TABLE 5.3 – Un exemple de fusion par  $\Delta_{Par}^\mu$

D'après le Tableau 5.3,  $\triangleleft_{Par}^E$  est défini par  $\omega_1 \triangleleft_{Par}^E \omega_0$ ,  $\omega_2 \triangleleft_{Par}^E \omega_0$  et  $\omega_3 \triangleleft_{Par}^E \omega_0$ .  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont donc les modèles de  $Bel(\Delta_{Par}^\mu(E))$  puisque ces interprétations sont minimales pour l'ordre basé sur le critère de Pareto  $\triangleleft_{Par}^E$ . Ainsi, sur cet exemple,  $Bel(\Delta_{Par}^\mu(E)) \equiv a \vee b$ .

Nous montrons à présent qu'ordonner les interprétations de  $\Omega$  par comparaison de leur profils au moyen du critère de Pareto équivaut à les ordonner en considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles pour l'ensemble de sources à fusionner [BLR08], comme l'énonce la proposition suivante :



**Proposition 16** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{Par}^E \omega'.$$

Afin de fournir une démonstration pour cette proposition, nous proposons la construction d'une échelle compatible particulière, notée  $S'$ , et obtenue à partir d'une première échelle compatible  $S_{grande}$  de la façon suivante :

**Construction 4** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit également  $\mathcal{S}$  une échelle compatible possible pour  $E$ ,  $\mathcal{S}_{Id}$  par exemple. Soit  $M$  un entier positif suffisamment grand :  $M$  doit être tel que  $M > \sum_{k=1}^n \sum_{\varphi_l \in B_k^*} \mathcal{S}(\varphi_l)$ . Soit encore  $B_i$  une base de croyances issue de  $E$ . Nous construisons alors  $S_{grande}$  à partir  $\mathcal{S}$  de de la façon suivante :

- $\forall j \neq i, \forall \varphi \in B_j, S_{grande}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi)$
- $\forall \varphi \in B_i, S_{grande}(\varphi) = M^{S_{B_i}(\varphi)}$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .

Montrons, dans un premier temps, que si  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$  alors  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ . Supposons, pour cela, que  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Dans ce cas, par définition de  $\triangleleft_{Par}^E$ , nous obtenons que pour chaque base de croyances  $B_j$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$ . De part la définition des échelles compatibles, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , pour chaque base de croyances  $B_j$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega) \leq \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega')$ . Ainsi, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $\sum_{j \in \{1, \dots, n\}} (\kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega)) \leq \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} (\kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega'))$ .

Puisque nous supposons que  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ , et de part la définition de  $\triangleleft_{Par}^E$ , nous obtenons également qu'il existe une base de croyances  $B_j$  issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_j}(\omega) < \kappa_{B_j}(\omega')$ . En considérant la définition des échelles compatibles, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $\exists j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega) < \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega')$ . Ainsi, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , la somme des éléments du profil associé à  $\omega$  est strictement plus petite que la somme des éléments du profil associé à  $\omega'$ . En d'autres termes, nous obtenons  $\sum_{j \in \{1, \dots, n\}} (\kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega)) < \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} (\kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega'))$ . Par définition, nous obtenons finalement que l'interprétation  $\omega$  est préférée à  $\omega'$  pour  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ .

Montrons maintenant que si  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Pour cela, supposons que  $\omega$  n'est pas préférée à  $\omega'$  pour  $\triangleleft_{Par}^E$ . Formellement  $\omega \not\triangleleft_{Par}^E \omega'$  signifie que :

- soit il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $\omega'$  est préférée à  $\omega$ . En d'autres termes,  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, d'après la définition des échelles

compatibles, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega')$ . À ce point, il est possible de construire une échelle compatible  $\mathcal{S}'$  telle que le degré de cohérence associé à  $\omega$  par  $B_i$  soit plus grand que la somme des éléments du profil associé à  $\omega'$ . Pour cela, nous construisons  $\mathcal{S}'$  à partir de  $\mathcal{S}$  et suivant la construction 4.  $\mathcal{S}'$  est par nature compatible, et pour cette échelle compatible, nous obtenons  $\omega \not\prec_{\Sigma}^{E, \mathcal{S}'} \omega'$ . Dans ce cas, par définition et de part l'existence de cette échelle compatible, nous obtenons finalement que  $\omega$  n'est pas préférée à  $\omega'$  selon l'ordre  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  ;

- soit aucune des bases de croyances issues de  $E$  n'exprime de préférence pour  $\omega$  ou  $\omega'$ . Soit encore formellement,  $\forall B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, d'après la définition des échelles compatibles, nous obtenons  $\forall \mathcal{S}_i \in \mathbb{S}_E, \forall B_j \in E, \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega) = \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega')$ . Ainsi, dans ce cas, quelque soit l'échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , la somme des éléments du profil associé à  $\omega$  est égale à la somme des éléments du profil associé à  $\omega'$ . En des termes plus formels,  $\forall \mathcal{S}_i \in \mathbb{S}_E, \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} (\kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega)) = \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} (\kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega'))$ . Dans ce cas, par définition et de part l'existence de cette échelle compatible, nous obtenons finalement que  $\omega$  n'est pas préférée à  $\omega'$  with respect to  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ . ■

En corollaire de cette proposition, nous obtenons naturellement que les résultats fournis par les opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux ordres sur les interprétations de  $\Omega$  précédemment considérés, sont équivalents quelque soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. Plus formellement :

$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E)) \equiv Bel(\triangle_{Par}^{\mu}(E)).$$

## 5.2 Propriétés logiques

Nous caractérisons maintenant le comportement logique de l'opérateur de fusion de sources incommensurables basé sur la somme au moyen des postulats de rationalité, rappelés par le Chapitre 2, et adaptés au cadre des bases de croyances pondérées par le chapitre précédent. Nous montrons, dans cette section, que l'opérateur de fusion incommensurable, basé sur la somme, satisfait la majeure partie des postulats satisfaits par l'opérateur de fusion commensurable sur lequel il se base. Nous montrons également que dans le cadre commensurable, l'opérateur de fusion basé sur la somme satisfait la propriété de majorité. Cette propriété tient elle toujours, lorsque cet opérateur est étendu au cadre incommensurable ? Nous montrons finalement, dans cette section, que l'approche présentée précédemment constitue une stratégie de consensus, face à la fusion de croyances incommensurables.

### 5.2.1 Comportement logique dans le cadre commensurable

À titre de comparaison, nous fournissons, dans un premier temps, une caractérisation de l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme. Quand les bases de croyances pondérées sont supposées commensurables, nous montrons que  $\Delta_\Sigma^\mu$  satisfait la plupart des postulats de rationalité proposés pour la caractérisation de la fusion contrainte, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 17**  $\Delta_\Sigma^\mu$  satisfait **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2\*)**, **(IC3\*)**, **(IC5)**, **(IC6)**, **(IC6')**, **(IC7)** et **(IC8)**.

#### Preuve

- **(IC0)** La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\Delta_\Sigma^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- **(IC1)** La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\Delta_\Sigma^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- **(IC2\*)** Supposons que  $\bigwedge_{B \in E} B^*$  soit cohérent avec  $\mu$ . Dans ce cas, nous savons qu'il existe une interprétation  $\omega$  modèle de  $\mu$  telle que  $\omega \models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Puisque  $\omega$  est modèle de chaque  $B_i^*$  issu de  $E$ , nous savons alors que  $\forall B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) = 0$ . Nous obtenons donc  $\Sigma(\nu_E(\omega)) = 0$ . Soit maintenant  $\omega'$  une autre interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ . À ce point, deux cas sont envisageables :
  1. soit  $\omega' \models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Dans ce cas,  $\omega'$  est également modèle de chaque  $B_i^*$  issu de  $E$ . Nous obtenons alors que pour toute base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega') = 0$ . Dans ce cas,  $\Sigma(\nu_E(\omega')) = 0$ . Par nature,  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$  telle que  $\Sigma(\nu_E(\omega'')) < \Sigma(\nu_E(\omega')) = 0$ . Nous obtenons donc  $\nexists \omega'' \in Mod(\mu)$  telle que  $\omega'' \triangleleft_\Sigma^E \omega'$ , et dans ce cas, nous obtenons finalement  $\omega' \in Mod(Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E)))$  ;
  2. soit  $\omega' \not\models \bigwedge_{B \in E} B^*$ . Dans ce cas, il existe une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega') > 0$ , et donc  $\Sigma(\nu_E(\omega')) > 0$ . Ainsi, puisque  $\Sigma(\nu_E(\omega)) = 0$ , nous obtenons  $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$  et donc, par définition,  $\exists \omega \in Mod(\mu)$  telle que  $\omega \triangleleft_\Sigma^E \omega'$ . Dans ce cas, nous obtenons finalement,  $\omega' \notin Mod(Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E)))$ .
- **(IC3\*)** Supposons que  $E_1 \equiv_R E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Soit  $\omega$  un modèle de  $Bel(\Delta_\Sigma^{\mu_1}(E_1))$  (l'autre cas est symétrique). Dans ce cas, nous savons par définition que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_1$  minimal pour  $\triangleleft_\Sigma^{E_1}$ . Puisque  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\omega$  est également modèle de  $\mu_2$ . Puisque  $\omega$  est minimal pour  $\triangleleft_\Sigma^{E_1}$ , alors, par définition, nous obtenons  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_1)$  telle que  $\omega' \triangleleft_\Sigma^{E_2} \omega$ . En d'autres termes,  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_1)$  telle que  $\Sigma(\nu_{E_1}(\omega')) < \Sigma(\nu_{E_1}(\omega))$ . Puisque, par hypothèse,  $E_1 \equiv_R E_2$ , nous obtenons  $\nu_{E_1}(\omega) = \nu_{E_2}(\omega)$  et  $\nu_{E_1}(\omega') = \nu_{E_2}(\omega')$ . Ainsi, puisque par hypothèse  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , nous obtenons  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_2)$  telle que  $\Sigma(\nu_{E_2}(\omega')) < \Sigma(\nu_{E_2}(\omega))$ . Par définition, nous obtenons donc  $\nexists \omega' \in Mod(\mu_2)$  telle que  $\omega' \triangleleft_\Sigma^{E_2} \omega$ . Ainsi, nous obtenons finalement que  $\omega$  est modèle de  $Bel(\Delta_\Sigma^{\mu_2}(E_2))$ .

– **(IC5)** Supposons que  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2)) \neq \mu$ . Soit alors  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ , qui n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ . Ainsi, par définition, nous savons que  $\exists \omega' \in Mod(\mu)$  telle que  $\omega' \triangleleft_{\Sigma}^{E_1 \sqcup E_2} \omega$ . Par définition, nous savons également que  $\Sigma(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega')) < \Sigma(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega))$ . À ce point, deux cas symétriques sont à envisager :

1. soit  $\Sigma(\nu_{E_1}(\omega')) < \Sigma(\nu_{E_1}(\omega))$ , et ainsi, par définition,  $\omega' \triangleleft_{\Sigma}^{E_1} \omega$ . De cette manière, nous obtenons dans ce cas que  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1))$  ;
2. soit  $\Sigma(\nu_{E_2}(\omega')) < \Sigma(\nu_{E_2}(\omega))$ , et dans ce cas, par définition,  $\omega' \triangleleft_{\Sigma}^{E_2} \omega$ . Nous obtenons alors, dans ce cas, que  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ .

Puisque nous savons que soit  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1))$ , soit  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ , nous obtenons finalement que  $\omega$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ .

– **(IC6)** Supposons que  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$  soit cohérent. Ainsi, il existe  $\omega \in Mod(\mu)$  tel que  $\omega \models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1))$  et  $\omega \models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ . Nous obtenons donc, par nature,  $\Sigma(\nu_{E_1}(\omega)) = 0$  et  $\Sigma(\nu_{E_2}(\omega)) = 0$ . Ainsi,  $\Sigma(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)) = 0$ .

Supposons maintenant que  $\omega'$  soit un modèle de  $\mu$ , tel que  $\omega'$  ne soit pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ . Ainsi, nous savons que, soit  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1))$ , soit  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ . Par définition nous obtenons que soit  $\Sigma(\nu_{E_1}(\omega')) > 0$ , soit  $\Sigma(\nu_{E_2}(\omega')) > 0$ . Dans les deux cas,  $\Sigma(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega')) > 0$ . Puisque  $\Sigma(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)) = 0$ , nous obtenons finalement, par définition, que  $\omega'$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ .

– **(IC6')** Ce postulat est satisfait puisque  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$  satisfait **(IC6)**, et que par définition, nous avons  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1)) \wedge Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2)) \models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_1)) \vee Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ .

– **(IC7)** Soit  $\omega$  un modèle de  $\mu_2$  et de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1}(E))$ . Par définition,  $\omega$  est une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$  et  $\mu_1$  minimale pour  $\triangleleft_{\Sigma}^E$ . Par définition,  $\omega$  est donc modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

– **(IC8)** Supposons que  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$  soit cohérent. Ainsi, nous savons qu'il existe  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$ , telle que  $\omega \models \Delta_{\Sigma}^{\mu_1}(E)$ . Soit maintenant  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_1$ . Supposons que  $\omega'$  ne soit pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1}(E)) \wedge \mu_2$ . À ce point, deux cas sont envisageables :

- soit  $\omega' \not\models \mu_2$ , et dans ce cas, nous obtenons par définition directement  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$  ;
- soit  $\omega' \models \mu_2$  et  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1}(E))$ . Puisque  $\omega \models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1}(E))$  et que  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  est un pré-ordre total sur les interprétations de  $\Omega$ , nous obtenons  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ . Puisque  $\omega \models \mu_1 \wedge \mu_2$  et  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ , nous obtenons finalement, par définition,  $\omega' \not\models Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ .

Dans les deux cas,  $\omega'$  n'est pas modèle de  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ . ■

---

Une fois de plus, de part l'hypothèse de commensurabilité émise sur les poids associés aux croyances des sources à fusionner,  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$  falsifie **(IC4\*)**, comme l'illustre le contre-exemple suivant :

**Exemple 25** Soit  $E = \{B_1, B_2\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, tel que  $B_1 = \{(\neg a, 2), (b, 1)\}$  et  $B_2 = \{(a, 3), (b, 2)\}$ . Supposons, pour cet exemple, que  $\mu \equiv a \vee b$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	1	3	$\langle 1, 3 \rangle$	4
$\omega_1$	0	1	0	3	$\langle 0, 3 \rangle$	3
$\omega_2$	1	0	2	2	$\langle 2, 2 \rangle$	4
$\omega_3$	1	1	2	0	$\langle 2, 0 \rangle$	<b>2</b>

TABLE 5.4 – Un contre-exemple pour **(IC4\*)**

Sur cet exemple, nous avons  $B_1^* \models \mu$  et  $B_2^* \models \mu$ . Le Tableau 5.4 nous montre que  $\text{Mod}(\Delta_\Sigma^\mu(E)) = \{\omega_3\}$ , puis que  $\text{Bel}(\Delta_\Sigma^\mu(E)) \equiv a \wedge b$ . Ainsi, sur cet exemple, est falsifié puisque  $\text{Bel}(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_2^*$  est cohérent, mais que  $\text{Bel}(\Delta^\mu(\{B_1, B_2\})) \wedge B_1^*$  ne l'est pas.

### 5.2.2 Comportement logique dans le cadre incommensurable

Lorsque les bases de croyances pondérées à fusionner sont supposées incommensurables, nous montrons que  $\blacktriangle_\Sigma^{\mu_1}(E)$  satisfait la plupart des postulats de rationalité proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion sous contrainte. Plus particulièrement, cet opérateur satisfait la majeure partie des postulats satisfaits par l'opérateur de fusion commensurable qu'il étend, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 18**  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$  satisfait **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2\*)**, **(IC3\*)**, **(IC4\*)**, **(IC5)** et **(IC7)**.

#### Preuve

- **(IC0)** La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\Delta_\Sigma^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- **(IC1)** La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\Delta_\Sigma^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- **(IC2\*)** Montrons d'abord que si  $\omega$  est modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  est également modèle de  $\text{Bel}(\Delta_\Sigma^\mu(E))$ . Supposons que  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  est cohérent. Ainsi, nous savons qu'il existe une interprétation  $\omega$  de  $\Omega$  qui soit modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ . Par hypothèse, pour chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $k_{B_i}(\omega) = 0$ . Ainsi, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S}$  possible pour  $E$ , le profil associé à  $\omega$  est tel que  $\nu_{E\mathcal{S}}(\omega) = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . En d'autres termes, pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S}$ ,  $\Sigma(\nu_{E\mathcal{S}}) = 0$ . Par définition,  $\omega$  est minimal pour  $\blacktriangle_\Sigma^E$ .

Montrons maintenant que si  $\omega$  n'est pas modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  n'est pas non plus modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E))$ . Soit  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  qui falsifie au moins une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ . Ainsi, il existe une base  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $k_{B_i}(\omega') > 0$ . Ainsi, par définition des échelles compatibles, pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ , nous obtenons  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega')) > 0$ . Puisque par hypothèse,  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  est cohérent, alors nous savons qu'il existe une interprétation  $\omega$  telle que  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) = 0$ . Par définition, nous obtenons donc que  $\omega'$  n'est pas minimale pour  $\blacktriangle_{\Sigma}^E$ .

- **(IC3\*)** Supposons que  $E_1 \equiv_R E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1}(E_2))$ . Par définition,  $\omega$  est un modèle de  $\mu_1$  minimal pour  $\blacktriangle_{\Sigma}^{E_1}$ . Puisque par hypothèse  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , nous obtenons que  $\omega$  est également modèle de  $\mu_2$ . Puisque  $\omega$  est minimal pour  $\blacktriangle_{\Sigma}^{E_1}$ , alors nous savons que  $\omega$  est également minimal pour  $\blacktriangle_{Par}^{E_1}$ . Puisque par hypothèse  $E_1 \equiv_R E_2$ , et en considérant la définition de  $\blacktriangle_{Par}^E$ , nous obtenons que  $\omega$  est modèle de  $\mu_2$  également minimal pour  $\blacktriangle_{Par}^{E_2}$ . Ainsi, par définition, nous obtenons finalement que  $\omega$  est minimal pour  $\blacktriangle_{\Sigma}^{E_2}$ .
- **(IC4\*)** La preuve de la satisfaction de ce postulat est obtenue par la démonstration de la Proposition 21.
- **(IC5)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1))$  et de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2))$ . Ainsi, en considérant la caractérisation basée sur le critère de Pareto, nous obtenons que pour chaque interprétation  $\omega'$  modèle de  $\mu$ ,  $\omega' \not\blacktriangle_{Par}^{E_1} \omega$  et  $\omega' \not\blacktriangle_{Par}^{E_2} \omega$ . En considérant maintenant la définition de  $\blacktriangle_{Par}^E$ , nous obtenons que  $\omega' \not\blacktriangle_{Par}^{E_1 \sqcup E_2} \omega$ . Ainsi, nous obtenons finalement  $\omega$  est un modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ .
- **(IC7)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$  et  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1}(E))$ . Ainsi, par définition, nous savons que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_2$  et  $\mu_1$  minimal pour  $\blacktriangle_{\Sigma}^E$ . Nous obtenons alors par définition que  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ . ■

Cette proposition montre notamment que  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E)$  satisfait **(IC4\*)**, alors que l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1}(E)$  ne satisfait pas ce même postulat. Cependant, et à l'inverse de l'opérateur basé sur la somme dans le cadre commensurable,  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  falsifie **(IC6)** et **(IC6')**, comme illustré par le contre-exemple suivant :

**Exemple 26** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E_1 = \{B_1, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 2)(b, 1)\}$  et  $B_2 = \{(a \vee b, 2)(\neg a, 1)\}$ , puis le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E_2 = \{B_3, B_4\}$  avec  $B_3 = \{((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), 2)(b, 1)\}$  et  $B_4 = \{(a \vee b, 2)(a \wedge b, 1)\}$ . Supposons que  $\mu \equiv \top$

	a	b	$\nu_{E_1}(\omega)$	$\nu_{E_2}(\omega)$	$\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)$
$\omega_0$	0	0	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 2,2,2,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 2,0,0,1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 1,1,1,1 \rangle$
$\omega_3$	1	1	$\langle 0,1 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 0,1,2,0 \rangle$

TABLE 5.5 – Un contre-exemple pour (IC6) et (IC6')

Le Tableau 5.5 nous montre que  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1) \equiv b$  et  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2) \equiv b$ . De plus, nous avons  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \equiv a \vee b$ , alors que  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1) \vee \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2) \equiv b$ . Ainsi, (IC6') n'est pas satisfait puisque  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1) \wedge \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2)$  est cohérent, alors que  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \not\equiv \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1) \vee \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2)$ .

Ceci fournit également un contre-exemple pour (IC6). En effet, puisque  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \not\equiv \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1) \vee \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2)$ , le Tableau 5.5 nous montre également que  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \not\equiv \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_1) \wedge \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E_2)$ .

Finalement,  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  falsifie (IC8), comme le montre le contre-exemple suivant :

**Exemple 27** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), 4), (\neg a, 2)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (a, 1)\}$ . Supposons que  $\mu_1 = a \vee b$  et  $\mu_2 = a$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	4	2	$\langle 4,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	1	$\langle 0,1 \rangle$
$\omega_2$	1	0	2	2	$\langle 2,2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	0	$\langle 4,0 \rangle$

TABLE 5.6 – Un contre exemple pour (IC8)

En considérant la caractérisation basée sur le critère de Pareto, le Tableau 5.6 nous montre que sur cet exemple,  $\blacktriangle_{\Sigma}^E$  est défini par  $\omega_1 \blacktriangle_{\Sigma}^E \omega_0$  et  $\omega_1 \blacktriangle_{\Sigma}^E \omega_2$ . Ainsi, en considérant que  $\mu_1 = a \vee b$ , nous obtenons  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1}(E) = \{\omega_1, \omega_3\}$ , puis  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 = \{\omega_3\}$ . (IC8) est ainsi falsifié puisqu'en considérant  $\mu_2 = a$ , nous obtenons  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) = \{\omega_2, \omega_3\}$ .

Une fois de plus, (IC8) est falsifié puisque  $\blacktriangle_{\Sigma}^E$ , la relation sur les interprétations selon laquelle sont obtenues les conclusions dérivées par l'opérateur de fusion incommensurable  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$ , est seulement partielle.

### 5.2.3 $\triangleleft_{\Sigma}^E$ est-il un opérateur majoritaire ?

L'approche basée sur l'opérateur *somme*, et considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources donné, à été proposée dans le but de fournir une stratégie de fusion majoritaire lorsque les bases de croyances pondérées fournies par ces sources ne sont pas commensurables. Cependant, le contre-exemple suivant nous montre que  $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}$  falsifie **(MAJ)**, postulat proposé pour la caractérisation des opérateurs de fusion utilitaires :

**Exemple 28** *Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2^n\}$ , avec  $B_1 = \{(a \vee b, 6), (-a, 2)\}$  et  $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$ . Soit  $n$  un entier strictement positif.*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	6	3	$\langle 6, 3, 3, 3, 3, \dots, 3 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	3	$\langle 0, 3, 3, 3, 3, \dots, 3 \rangle$
$\omega_2$	1	0	2	0	$\langle 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle$
$\omega_3$	1	1	2	3	$\langle 2, 3, 3, 3, 3, \dots, 3 \rangle$

TABLE 5.7 – Un contre-exemple pour **(MAJ)**

En considérant la caractérisation basée sur le critère de Pareto, le Tableau 5.7 nous montre que l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^E$  est défini sur cet exemple par  $\omega_1 \triangleleft_{\Sigma}^E \omega_0$ ,  $\omega_2 \triangleleft_{\Sigma}^E \omega_0$ ,  $\omega_3 \triangleleft_{\Sigma}^E \omega_0$ ,  $\omega_1 \triangleleft_{\Sigma}^E \omega_3$  et  $\omega_2 \triangleleft_{\Sigma}^E \omega_3$ . Ainsi **(MAJ)** est falsifié sur cet exemple, puisque les modèles des croyances préférées issues du résultat de la fusion sont  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et ce quelque soit la valeur de  $n \geq 1$ .

Dans le cadre commensurable, l'opérateur de fusion basé sur la somme  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E)$ , sur lequel  $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}(E)$  est basé, satisfait pourtant ce même postulat, comme le montre la proposition suivante :

#### Proposition 19

$$\exists m \in \mathbb{N} : Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E \sqcup B_i^m)) \models B_i^*.$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_i, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées.

Soit  $E'$  un autre multi-ensemble de bases de croyances tel que  $E' = E \sqcup \{B_i^m\}$ . Ainsi,  $E' = \{B_1, \dots, B_i^{m+1}, \dots, B_n\}$ . Par définition,  $Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E')) \models B_i^*$  ssi  $Mod(Bel(\Delta_{\Sigma}^{\mu}(E'))) \subset Mod(B_i^*)$ .

Soit  $\varphi$  une formule de  $B_i^*$  telle que  $\nexists \varphi' \in B_i^*$ ,  $R_{B_i}(\varphi') < R_{B_i}(\varphi)$ . Soit également  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $B_i^*$ . Par nature, nous savons que  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ , et donc, nous obtenons  $\Sigma(\nu_{E'}(\omega)) = \Sigma(\nu_E(\omega))$ . Soit  $m$  un entier positif tel que  $m \cdot R_{B_i}(\varphi) > \Sigma(\nu_E(\omega))$ .

Soit maintenant  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$  telle que  $\omega \not\models B_i^*$ . Dans ce cas, nous obtenons  $\Sigma(\nu_{E'}(\omega')) = \kappa_{B_1}(\omega') + \dots + (m+1) \cdot \kappa_{B_i}(\omega') + \dots + \kappa_{B_n}(\omega')$ . Nous obtenons



donc  $\Sigma(\nu_{E'}(\omega')) = \Sigma(\nu_E(\omega')) + m.R_{B_i}(\varphi)$ . Ainsi, par construction, nous obtenons  $\Sigma(\nu_{E'}(\omega')) > \Sigma(\nu_E(\omega)) = \Sigma(\nu_{E'}(\omega))$ . Par définition, nous obtenons ainsi que  $\omega'$  n'est pas un modèle de  $Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E'))$ . Ainsi, nous obtenons finalement  $Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E \sqcup B_i^m)) \models B_i^*$ . ■

Le contre-exemple 28 nous a montré que  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$  falsifie (MAJ). La situation est cependant pire, puisque nous pouvons montrer que l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$  satisfait (MI), postulat proposé pour la caractérisation des opérateurs de fusion égalitaires, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 20** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$\forall m, Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E \sqcup B_i^m)) \equiv Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)).$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Supposons que  $\omega \blacktriangleleft_\Sigma^{E \sqcup B_i^m} \omega'$ . Ainsi, en considérant la caractérisation basée sur le critère de Pareto, nous obtenons  $\omega \triangleleft_{Par}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$ . De part la définition de  $\triangleleft_{Par}^E$ , nous obtenons directement et réciproquement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \triangleleft_{Par}^{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$ . Ainsi, nous obtenons finalement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega \blacktriangleleft_\Sigma^{E_1 \sqcup E_2^n} \omega'$ . ■

L'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme est donc un opérateur indépendant de la majorité. Nous remarquons alors que ceci n'a rien d'étonnant, et est entièrement du à la stratégie sur laquelle repose notre approche dans le cas incommensurable. En effet, puisqu'il considère l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources, cet opérateur tient compte de chaque correspondance possible entre les poids exprimés par les bases de croyances associées ces sources. En effet, supposons qu'un grand nombre de sources soit en accord sur la croyance  $a$ , puis qu'une source isolée exprime la croyance  $\neg a$ , il sera alors possible de construire une échelle compatible associant un poids suffisamment important à cette dernière pour pouvoir bloquer l'inférence de la formule  $a$  du résultat de la fusion par  $\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)$ . De plus, la Définition 30, puis la Proposition 15, montrent bien l'importance de chaque échelle compatible lors du processus de fusion. Puisque, d'une certaine façon, cet opérateur tient compte de chaque point de vue possible, non pas cette fois ci en termes de formules, mais en termes de correspondances possibles entre les poids associés à ces formules, il constitue bien dans ce sens un opérateur de fusion égalitaire.

Finalement, nous montrons que l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme  $\blacktriangle_\Sigma^\mu$  satisfait (CSS), le postulat de consensus proposé par le chapitre précédent. Soit formellement :

**Proposition 21** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$\forall B_i \in E, \text{ si } B_i^* \models \mu, \text{ alors } B_i^* \wedge Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)) \text{ est cohérent.}$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit encore  $B_i$  une base de croyances issue de  $E$ .

Supposons que  $B_i \models \mu$ . Soit alors  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $B_i^*$  telle que  $\nexists \omega' \in \text{Mod}(B_i^*), \omega' \triangleleft_{\Sigma}^E \omega$ . Nous savons, par hypothèse, que  $\omega$  est également modèle de  $\mu$ . Par nature, nous savons que  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ . Soit maintenant  $\omega''$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$ . À ce point, deux cas sont envisageables :

- soit  $\omega'' \models B_i^*$  et dans ce cas,  $\omega'' \triangleleft_{\Sigma}^E \omega$  ;
- soit  $\omega'' \not\models B_i^*$ . Dans ce cas, nous obtenons  $\kappa_{B_i}(\omega'') > 0$  et donc, par définition  $\omega'' \ntriangleleft_{\text{Par}}^E \omega$ . Par la caractérisation basée sur le critère de Pareto, nous obtenons finalement  $\omega'' \triangleleft_{\Sigma}^E \omega$ .

Dans tous les cas, nous obtenons  $\nexists \omega'' \in \text{Mod}(\mu)$  telle que  $\omega'' \triangleleft_{\Sigma}^E \omega$ . Par définition,  $\omega$  est donc un modèle de  $B_i^*$  et également de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E))$ . Ainsi, nous obtenons finalement que  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}(E)) \wedge B_i^*$  est cohérent. ■

Finalement, le tableau suivant récapitule les divergences comportementales que présente l'opérateur de fusion basé sur la somme entre le cadre commensurable et le cadre incommensurable :

	(IC4*)	(IC6)	(IC6')	(IC8)	(MAJ)	(MI)	(CSS)
$\Delta_{\Sigma}^{\mu}$	-	✓	✓	✓	✓	-	-
$\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	✓	✓

TABLE 5.8 – Une synthèse des divergences logiques entre  $\Delta_{\Sigma}$  et  $\blacktriangle_{\Sigma}$

### 5.3 Synthèse du chapitre

Nous avons proposé, dans ce chapitre, une seconde approche de la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables. Pour cela, nous avons étendu l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme, au moyen de la notion d'échelle compatible proposé chapitre 3, et d'une façon similaire à l'approche égalitaire fournie par le chapitre précédent. De cette manière, nous avons voulu fournir une approche majoritaire pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables.

Nous avons, dans un premier temps, vu que les résultats de cet opérateur sont obtenus en considérant un ensemble infini d'échelles compatibles. Nous avons cependant montré qu'il était possible de caractériser l'ordre sur les interprétations, sur lequel repose cet opérateur, au moyen d'un critère de comparaison des profils associés aux interprétations par les bases de croyances

pondérées initiales. Ce critère s'est alors révélé être le critère de Pareto. Ainsi, pour cette approche de la fusion incommensurable, une interprétation est préférée à une autre, si toutes les bases de croyances en présence préfèrent cette interprétation, tandis qu'au moins une base considérée la préfère strictement.

Nous avons ensuite caractérisé le comportement logique de l'approche proposée par ce chapitre, au moyen des postulats de rationalité proposés par la littérature, et adaptés au cadre des bases de croyances pondérées. En particulier, nous avons montré que, de manière similaire au cadre égalitaire, l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme ne satisfait pas le postulat d'équité, alors que son extension, que nous proposons au moyen de la notion d'échelle compatible, satisfait ce même postulat. Ce résultat confirme que l'approche proposée par ce chapitre est particulièrement adaptée à la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables. Pour confirmer ce fait, nous avons également montré que cette approche satisfait le postulat de consensus, que nous avons proposé dans le chapitre précédent. Cependant, nous avons également montré que cette même approche falsifie le postulat de majorité, alors que l'opérateur sur lequel elle se base satisfait bien ce postulat. Pire encore, cette approche s'est, en réalité, avérée être une approche indépendante de la majorité. Nous avons alors expliqué que cela est dû à la définition même de l'opérateur que nous proposons, et en particulier à la prise en compte de l'ensemble des échelles possibles : s'il existe une correspondance entre les poids, telle que le poids exprimé sur une information par une minorité, surpasse l'ensemble des poids exprimés par une majorité sur le contraire de cette information, alors cette correspondance doit être prise en considération. En ce sens, l'approche proposée par ce chapitre constitue bien une approche égalitaire.

De cette constatation, nous choisissons d'étudier, dans le chapitre suivant, la restriction de l'approche basée sur la somme, développée dans ce chapitre, à la considération d'un sous-ensemble d'échelles compatibles. Nous montrons alors que sous certaines hypothèses sur la commensurabilité des sources, il est possible de dériver de nouvelles conclusions saines du résultat de la fusion. Nous montrons également qu'en considérant d'autres hypothèses particulières sur les poids exprimés par chaque source, le postulat de majorité peut être satisfait. Nous étudions, finalement le comportement d'un opérateur de fusion incommensurable, réduit à la considération d'une seule et unique échelle compatible : nous montrons en particulier qu'il n'est pas possible, de cette manière, de proposer la construction d'une échelle compatible particulière, permettant de restaurer la satisfaction du postulat d'équité ou du postulat de consensus.



## Chapitre 6

# Fonctions de sélection d'échelles compatibles

Dans ce chapitre, nous réduisons l'ensemble des échelles compatibles considérées par chaque opérateur de fusion incommensurable présenté, dans le but de soit caractériser les résultats obtenus de ces opérations de fusion sans calculer l'ensemble des échelles compatibles possibles, soit d'obtenir de nouveaux opérateurs de fusion moins prudents et présentant des comportements différents en des termes de caractérisation rationnelle.

Nous rappelons ainsi que différentes hypothèses, concernant la mesurabilité des sources, ont été introduites dans le cadre de la théorie du choix social [Sen82]. De façon intuitive, même s'il est admis qu'il n'est pas possible de comparer, d'une source à l'autre, les poids attribués aux informations, il est parfois possible de tenir compte de certaines notions reliant les poids issus d'une même base, telles que l'homogénéité, la linéarité ou encore l'intensité de ces poids. Dans certaines situations, ces notions peuvent être comparables d'une source à l'autre.

Prenons l'exemple de deux sources distinctes, fournissant des informations sur l'existence, ainsi que la nature, de divers objets présents dans leur environnement. Ces sources fournissent alors une incertitude sur la nature de l'objet qu'elles aperçoivent, en quantifiant celle-ci soit à l'aide d'une distance représentant l'éloignement de l'objet, soit en évaluant le temps nécessaire à atteindre cet objet pour vérifier sa nature (ou encore le temps que met un signal émis pour revenir, et ainsi informer de la présence de l'objet avec plus ou moins de précision, selon la distance parcouru par le signal). N'ayant aucune information sur la vitesse de l'agent autonome recueillant alors les informations de ces sources (ou sur celle du signal), il n'est pas possible d'obtenir de correspondance entre l'éloignement d'un objet, et le temps nécessaire à l'atteindre. Pourtant, de part l'aspect linéaire des deux échelles employées, nous savons qu'un objet quatre fois plus éloigné qu'un autre nécessitera alors quatre fois plus de temps à être atteint, et réciproquement. Cet

exemple nous montre que dans certaines situations, même si les poids associés par les sources ne sont pas commensurables d'une source à l'autre, il est possible d'exploiter certaines notions comparables d'une source à l'autre, pour notre exemple la linéarité des poids employés.

Nous adaptons, dans un premier temps, la stratégie proposée pour la fusion incommensurable, basée sur la somme, à la seule considération de certains sous-ensembles d'échelles compatibles particuliers. En premier lieu, nous considérerons la classe des échelles affines : cette classe permet le maintien de l'homogénéité des poids, en modifiant ceux-ci au moyen de fonctions affines. Nous montrons alors que les résultats fournis par un opérateur de fusion ne considérant que ces échelles particulières, sont équivalents à ceux obtenus par l'approche détaillée par le chapitre précédent. De ce fait, nous réduisons encore l'ensemble des échelles compatibles considérées, et considérons cette fois-ci la classe des échelles linéaires : les échelles compatibles issues de cette classe conservent la linéarité des poids utilisés, en modifiant ces derniers au moyen de fonctions linéaires. Cette approche généralise les opérateurs de fusion reposant sur une somme pondérée. Une fois de plus, nous montrons que la considération de ces seules échelles ne permet pas d'obtenir plus de conclusions qu'un critère de comparaison qualitatif des interprétations. Nous étudions donc finalement la classe des échelles translatives : cette classe permet le maintien des distances existantes entre les poids issus d'une même source. Cette notion de distance est également connue sous le terme d'*intensité* dans le domaine du choix social. Nous montrons alors que cet opérateur fournit plus de conclusions que les approches purement qualitatives. Cette approche, constituant une approche de consensus pour la fusion de croyances pondérées incommensurables, ne constitue cependant ni une approche majoritaire, ni une approche égalitaire.

Nous limitons ensuite les stratégies de fusion incommensurable, proposées par les deux chapitres précédents, à la seule considération des échelles bornées. Une échelle bornée est telle que le poids maximal, qu'il est possible d'associer à une information, ne peut dépasser une valeur fixée. Nous montrons alors que dans le cadre égalitaire, la restriction à ces échelles permet, sous certaines conditions, de caractériser le résultat obtenu en considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles. Nous montrons également que, d'une manière surprenante, la restriction à ces seules échelles permet, dans le cadre utilitaire, de restaurer la satisfaction du postulat de majorité.

Nous étudions également, dans la dernière section de ce chapitre, la restriction de l'approche de la fusion incommensurable, basée sur la somme, à la considération d'une seule et unique échelle compatible. Nous montrons, en particulier, qu'il n'est pas possible, de cette façon, de proposer la construction d'une échelle compatible particulière permettant la satisfaction des postulats d'équité ou de consensus.

## 6.1 Sélection d'échelles compatibles particulières

Nous analysons la restriction des opérateurs de fusion incommensurable basés sur le maximum et sur la somme, présentés respectivement par les deux chapitres précédents, à des sous-ensembles

d'échelles compatibles particuliers. Plus précisément, nous montrons comment utiliser de nouvelles hypothèses sur la commensurabilité des poids associés aux formules des bases de croyances pondérées issues des sources à fusionner, afin d'obtenir de nouvelles conclusions plausibles dérivées du résultat de la fusion [Ros08]. Plusieurs hypothèses sur la mesurabilité d'une source ont été présentées et discutées dans [Sen82].

Une fois adaptées aux cadres des bases de croyances pondérées et à la notion d'échelle compatible, nous distinguons les classes d'échelles compatibles suivantes [Ros08], correspondantes à des hypothèses de commensurabilités entre sources particulières, et étudions le comportement des opérateurs de fusion incommensurable basés sur les échelles compatibles réduits à la considération de ces classes :

- *classe des échelles affines*  $S^a$  : cette classe permet le maintien de l'homogénéité entre les poids associés aux formules d'une base de croyances pondérées ;
- *classe des échelles linéaires*  $S^l$  : cette classe permet de maintenir les différents rapports de proportionnalité existants entre les poids associés aux formules d'une base de croyances pondérées ;
- *classe des échelles translatives*  $S^s$  : cette classe permet de maintenir les distances exprimées entre les poids associés aux formules d'une base de croyances pondérées ;
- *classe des échelles bornées*  $S^{(p)}$  : cette classe regroupe les échelles compatibles telles que le poids maximal associé par ces échelles aux formules d'un multi-ensemble de sources à fusionner ne peut dépasser une valeur fixée entière et positive  $p$ .

Le Tableau 6.1 présente les définitions formelles associées à ces différentes classes :

Classe	Notation	$S_E^- = \{ \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E : \forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i^*, \dots \}$
Affine	$S^a$	$\mathcal{S}(\varphi) = a_i \cdot R_{B_i}(\varphi) + b_i$ avec $a_i > 0, b_i \geq 0$
Linéaire	$S^l$	$\mathcal{S}(\varphi) = a_i \cdot R_{B_i}(\varphi)$ avec $a_i > 0$
Translative	$S^s$	$\mathcal{S}(\varphi) = R_{B_i}(\varphi) + b_i$ avec $b_i \geq 0$
Bornée	$S^{(p)}$	$\mathcal{S}(\varphi) \leq p$

TABLE 6.1 – Classes particulières d'échelles compatibles

Les sections suivantes analysent en détails la restriction des opérateurs de fusion incommensurable à la considération de chacune de ces classes d'échelles compatibles particulières.

## 6.2 Classes des échelles affines et linéaires

Cette section analyse en détails la restriction des opérateurs de fusion incommensurable aux classes des échelles compatibles *affines* et *linéaires* possibles pour un multi-ensemble de sources à fusionner.

### 6.2.1 Classe des échelles affines

Considérons, dans un premier temps, la classe des échelles compatibles affines. Cette classe regroupe l'ensemble des échelles compatibles modifiant les poids associés aux formules par l'intermédiaire de fonctions mathématiques affines associées respectivement à chaque sources. Nous notons par  $S^a$  la classe des échelles affines, tandis que  $S_E^a$  dénote l'ensemble des échelles compatibles affines possibles pour un multi-ensemble de sources  $E$ . Plus formellement :

**Définition 32** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$S_E^a = \{\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E : \forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i^*, \mathcal{S}(\varphi) = a_i \cdot R_{B_i}(\varphi) + b_i\},$$

avec  $a_i > 0$ ,  $b_i \geq 0$ .

Les échelles compatibles de cette classe permettent de maintenir l'homogénéité entre les poids associés aux formules d'une base de croyances pondérées donnée. Cette classe d'échelles généralise les classes des échelles compatibles linéaires et translatives, qui seront présentées dans les sections suivantes.

Illustrons cet ensemble d'échelles compatibles par l'exemple suivant :

**Exemple 29** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(a \vee b, 3), (-b, 1)\}$  et  $B_3 = \{(-a, 5)\}$ .

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_i(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_4(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_5(\varphi_{ij})$
$B_1$	$a$	6	$2.6+1=13$	$2.6+5=17$	$3.6+0=18$
	$b$	3	$2.3+1=7$	$2.3+5=11$	$3.3+0=9$
$B_2$	$a \vee b$	3	$3.3+4=16$	$1.3+2=5$	$2.3+2=8$
	$-b$	1	$3.1+4=7$	$1.1+2=3$	$2.1+2=4$
$B_3$	$-a$	5	$4.5+0=20$	$1.5+4=9$	$1.5+2=7$

TABLE 6.2 – Exemples d'échelles compatibles affines

Le Tableau 6.2 présente quelques exemples d'échelles compatibles affines possibles pour  $E$ . Les éléments mis en évidence représentent les nouveaux poids associés aux formules représentant les croyances pour chaque échelle affine présentée.



Nous notons  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E$  la relation sur les interprétations de  $\Omega$  obtenue à partir de la définition 30 en remplaçant l'ensemble des échelles compatibles considérées  $\mathbb{S}_E$  par  $S_E^a$ , l'ensemble des échelles compatibles affines possibles pour le multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ . Plus formellement :

**Définition 33** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^a$  l'ensemble associé des échelles compatibles affines possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega' \text{ ssi } \forall S \in S_E^a, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^S} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^S}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme, rappelé par la Définition 21, et appliqué à  $E^S$ .

Cette relation sur les interprétations nous permet d'obtenir un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{\Sigma, S_E^a}^{\mu}$ , dont les modèles des croyances préférées sont les interprétations modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$ , minimales pour  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E$  :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S_E^a}^{\mu}(E))) = \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E)$$

Nous montrons cependant que restreindre l'opérateur de fusion de bases de croyances incommensurables basé sur la somme  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  à la seule considération des échelles affines n'affecte pas le résultat de la fusion [Ros08], comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 22** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $S_E^a$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'.$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit également  $S_E^a$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Puisque nous savons que  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \triangleleft_{P_{ar}}^E \omega'$ , montrons que  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \triangleleft_{P_{ar}}^E \omega'$ .

Pour cela, supposons dans un premier temps que  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega'$ . Par définition, nous savons que  $\forall S \in S_E^a, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^S} \omega'$ . Ainsi, nous obtenons  $\forall S \in S_E^a, \Sigma(\nu_{E^S}(\omega)) < \Sigma(\nu_{E^S}(\omega'))$ . De part la définition de  $S_E^a$ , nous obtenons donc

$$\forall S \in S_E^a, \Sigma_{B_i \in E, \omega \not\models B_i^*} (a_i \cdot \kappa_{B_i}(\omega) + b_i) < \Sigma_{B_i \in E, \omega' \not\models B_i^*} (a_i \cdot \kappa_{B_i}(\omega') + b_i),$$

À ce point, nous utilisons le symbole  $o_i(\omega)$ , défini tel que  $o_i(\omega) = 1$  si  $\kappa_{B_i}(\omega) > 0$ , et  $o_i(\omega) = 0$  sinon. nous obtenons  $\forall \mathcal{S} \in S_E^a$ ,

$$\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) = a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega) + b_1 \cdot o_1(\omega) + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega) + b_n \cdot o_n(\omega)$$

$<$

$$\Sigma(\nu_{ES}(\omega')) = a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega') + b_1 \cdot o_1(\omega') + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega') + b_n \cdot o_n(\omega').$$

Montrons maintenant que  $\forall \mathcal{S} \in S_E^a$ ,  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$  ssi  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Procédons par contraposition et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Dans ce cas, par définition de  $\triangleleft_{Par}$ , deux cas sont envisageables :

1. soit  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, pour tout couple  $\{a_i, b_i\}$  associé à chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ , nous obtenons

$$a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega) + b_1 + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega) + b_n = a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega') + b_1 + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega') + b_n.$$

De cette façon,  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) = \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$  et ainsi, nous obtenons  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega'$  ;

2. soit  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, considérons  $\mathcal{S} \in S_E^a$ , telle que

$$\forall j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, a_j = 1,$$

$$\forall j = 1, \dots, n, b_j = 0$$

$$\text{et } a_i > \Sigma(\nu_E(\omega)) + \Sigma(\nu_E(\omega')).$$

De cette façon, nous obtenons

$$\Sigma(\nu_E(\omega)) > \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega) = \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j}(\omega), \text{ et}$$

$$\Sigma(\nu_E(\omega')) > \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega') = \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j}(\omega').$$

Ainsi,  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') = (\Sigma(\nu_E(\omega)) + \Sigma(\nu_E(\omega')))(\kappa_{B_i}(\omega) - \kappa_{B_i}(\omega'))$ .

Puisque par hypothèse,  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ , nous obtenons

$$\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') > \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega').$$

Nous obtenons donc finalement

$$\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') + \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega') = \Sigma(\nu_{ES}(\omega)).$$

De part l'existence de  $\mathcal{S} \in S_E^a$ , nous obtenons également, par définition,  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega'$ .

La réciproque est directe. En effet, si  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ , alors  $\forall S \in S_E^a$ ,

$$a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega) + b_1 + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega) + b_n < a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega') + b_1 + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega') + b_n,$$

et ainsi,  $\forall S \in S_E^a$ ,  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$ . Par définition,  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^a}^E \omega'$  ■

En corollaire de cette proposition, nous obtenons naturellement que les résultats fournis par les opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux relations sur les interprétations de  $\Omega$  précédemment considérées, sont équivalents quelque soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. Plus formellement :

$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S_E^a}^\mu(E)) \equiv Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)).$$

Il est également possible de restreindre la relation sur les interprétations  $\triangleleft_{Max}^E$ , obtenue par la définition 24, à la seule considération des échelles compatibles affines de la façon suivante :

**Définition 34** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^a$  l'ensemble associé des échelles compatibles affines possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega' \text{ ssi } \forall S \in S_E^a, \omega \triangleleft_{Max}^{E^S} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{Max}^{E^S}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur le maximum, rappelé par la Définition 20, et appliqué à  $E^S$ .

Cette restriction nous permet d'obtenir un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{Max, S^a}^\mu$ , dont les modèles des croyances préférées sont les modèles de  $\mu$  minimaux pour  $\triangleleft_{Max, S_E^a}^E$  :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{Max, S^a}^\mu(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{Max, S_E^a}^E)$$

Cependant, restreindre l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  à la seule considération des échelles affines n'affecte pas le résultat de la fusion, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 23** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $S_E^a$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega'.$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit également  $S_E^a$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .

Montrons dans un premier temps que si  $\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Puisque nous savons que  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$ , montrons que si  $\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$ . Pour cela, supposons dans un premier temps que  $\omega \not\triangleleft_{SMP}^E \omega'$ . Par définition, deux cas sont envisageables :

1. soit pour toute base de croyances  $B_j$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega) = \kappa_{B_j}(\omega') = 0$ . Dans ce cas, par définition des échelles compatibles, pour toute échelle issue de  $S_E^a$ , nous obtenons  $\max_{B_j \in E} \kappa_{B_j^S}(\omega) = \max_{B_j \in E} \kappa_{B_j^S}(\omega') = 0$ . Ainsi, par définition,  $\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega'$ ;
2. soit il existe une base de croyances  $B_i$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ , ou  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$ . Dans ce cas, considérons  $S \in S_E^a$ , telle que

$$\forall j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, a_j = 1,$$

$$\forall j = 1, \dots, n, b_j = 0$$

$$\text{et } a_i > \max(\text{Max}(\nu_E(\omega)), \text{Max}(\nu_E(\omega'))).$$

Ainsi, puisque par hypothèse  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ , nous obtenons  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \kappa_{B_i^S}(\omega')$ . Par construction, nous obtenons également  $\kappa_{B_i^S}(\omega) > \max(\text{Max}(\nu_E(\omega)), \text{Max}(\nu_E(\omega')))$ . Ainsi, nous obtenons  $\text{Max}(\nu_{ES}(\omega)) = \kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \text{Max}(\nu_{ES}(\omega'))$ . De part l'existence de  $S \in S_E^a$ , nous obtenons également, par définition,  $\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega'$ .

La réciproque est directe. En effet, si  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , alors  $\forall S \in \mathbb{S}_E$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Puisque par définition  $S_E^a \subseteq \mathbb{S}_E$ , alors  $\forall S \in S_E^a$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition, nous obtenons  $\omega \triangleleft_{Max, S_E^a}^E \omega'$ . ■

En corollaire de cette proposition, nous obtenons que les résultats fournis par les opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux relations précédemment considérées, sont équivalents quelque soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. Plus formellement :

$$\forall E, \text{Bel}(\blacktriangle_{Max, S_E^a}^\mu(E)) \equiv \text{Bel}(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)).$$

### 6.2.2 Classe des échelles linéaires : une généralisation de la somme pondérée

Nous avons donc restreint l'opérateur de fusion incommensurable, basé sur la somme, à la seule considération des échelles compatibles affines. Ce nouvel opérateur ne s'est cependant pas révélé plus productif qu'un critère de comparaison qualitatif des interprétations du langage. Nous restreignons donc un peu plus l'ensemble des échelles compatibles considérées, et nous considérons à présent la classe des échelles compatibles linéaires. Cette classe regroupe l'ensemble des échelles compatibles modifiant les poids associés aux formules par l'intermédiaire de fonctions mathématiques linéaires associées respectivement à chaque sources. Nous notons  $S^l$  la classe des échelles linéaires, puis  $S_E^l$  l'ensemble des échelles compatibles linéaires possibles pour un multi-ensemble de sources  $E$ . Plus formellement :

**Définition 35** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$S_E^l = \{S \in \mathbb{S}_E \text{ t.q. } \forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i^* : S(\varphi) = a_i \cdot R_{B_i}(\varphi)\},$$

avec  $a_i > 0$ .

Les échelles compatibles de cette classe permettent de maintenir les rapports de proportionnalité existants entre les poids associés aux formules d'une base de croyances pondérées donnée. En des termes plus formels,  $\forall S \in S_E^l, \forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i, \forall (\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i :$

$$\frac{S(\varphi_{ij})}{S(\varphi_{ij'})} = \frac{a_i \cdot R_{B_i}(\varphi_{ij})}{a_i \cdot R_{B_i}(\varphi_{ij'})} = \frac{R_{B_i}(\varphi_{ij})}{R_{B_i}(\varphi_{ij'})}.$$

Illustrons cet ensemble d'échelles compatibles par l'exemple suivant :

**Exemple 30** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(a \vee b, 3), (-b, 1)\}$  et  $B_3 = \{(-a, 5)\}$ .

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$S_i(\varphi_{ij})$	$S_6(\varphi_{ij})$	$S_7(\varphi_{ij})$
$B_1$	$a$	6	5.6= <b>30</b>	2.6= <b>12</b>	3.6= <b>18</b>
	$b$	3	5.3= <b>15</b>	2.3= <b>6</b>	3.3= <b>9</b>
$B_2$	$a \vee b$	3	10.3= <b>30</b>	5.3= <b>15</b>	2.3= <b>6</b>
	$-b$	1	10.1= <b>10</b>	5.1= <b>5</b>	2.1= <b>2</b>
$B_3$	$-a$	5	6.5= <b>30</b>	4.5= <b>20</b>	1.5= <b>5</b>

TABLE 6.3 – Exemples d'échelles compatibles linéaires

Le Tableau 6.2 présente quelques exemples d'échelles compatibles linéaires possibles pour  $E$ . Les éléments mis en évidence représentent les nouveaux poids associés aux formules représentant les croyances pour chaque échelle linéaire présentée.

En pratique, les échelles compatibles linéaires sont obtenues en multipliant les rangs  $R_{B_i}(\varphi_{ij})$ , associés aux formules  $\varphi_{ij}$  de chaque base de croyances pondérées  $B_i$ , par un coefficient  $a_i$ . Intuitivement, ces coefficients peuvent représenter la *fiabilité* respectivement associée à chaque source  $B_i$  à fusionner, ces dernières se voyant alors associées à un *coefficient de fiabilité* égal à  $a_i$ . L'opérateur de fusion basé sur la somme et considérant uniquement ce type d'échelle compatible peut alors être considéré comme un opérateur reposant sur une *somme pondérée*. Pour ce dernier, également appelé *moyenne pondérée* dans la littérature, un ensemble de bases de croyances pondérées est fourni accompagné d'un vecteur de fiabilités, respectivement associées à chaque source à fusionner. Formellement :

**Définition 36** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  un vecteur de fiabilité associé à  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ , puis  $\nu_E(\omega)$ ,  $\nu_E(\omega')$  leur profil respectif. Alors :

$$\omega \triangleleft_{P\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \Sigma_{pond}(\nu_E(\omega)) < \Sigma_{pond}(\nu_E(\omega')),$$

$$\text{où } \Sigma_{pond}(\nu_E(\omega)) = \sum_{i=1, \dots, n} \alpha_i \cdot \kappa_{B_i}(\omega).$$

Cet opérateur est particulièrement adapté dans les situations où les sources sont considérées d'inégales fiabilités. Celui-ci permet en effet de compenser ces disparités, en multipliant par un coefficient de fiabilité respectif les poids exprimés par chaque source. Pour ce type d'approche, les sources sont supposées partager une échelle de référence commune. Les poids qu'elles expriment sont ainsi supposés commensurables d'une source à l'autre. Prenons l'exemple d'un jury d'examen, ou même d'une commission d'experts évaluant différentes situations. Dans certaines situations, chaque membre peut recevoir un barème de notation, ou une grille d'évaluation. Sous cette hypothèse, chaque individu partage alors la même signification des poids qu'il exprime. Il arrive cependant que les individus en présence ne soit pas tous de même fiabilité. L'opérateur de fusion reposant sur une somme pondérée, permet alors de relativiser les informations fournies par chacun de ces experts. Mais que faire alors, si il n'est pas possible d'évaluer la fiabilité respectivement associée à chaque source ? Une première approche de ce problème consiste à tenir compte de chaque situation possible. Cette approche revient alors à considérer chaque échelle compatible linéaire possible pour un ensemble de sources donné. Dans ce sens, restreindre l'opérateur de fusion incommensurable, basé sur la somme, à la seule considération des échelles linéaires constitue une généralisation de l'opérateur de fusion commensurable basé sur une somme pondérée.

De manière intuitive, les échelles compatibles linéaires sont des cas particuliers d'échelles affines, soit formellement  $S_E^l \subset S_E^a$  pour un multi-ensemble de sources  $E$ . Cette classe d'échelle compatible nous permet alors de définir une relation sur les interprétations, notée  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E$ , obtenue à partir de la définition 30 en remplaçant l'ensemble des échelles compatibles considérées  $\mathbb{S}_E$  par  $S_E^l$ , l'ensemble des échelles compatibles linéaires possibles pour le multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ . Soit en des termes plus formels :

**Définition 37** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^l$  l'ensemble associé des échelles compatibles linéaires possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega' \text{ ssi } \forall S \in S_E^l, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^S} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^S}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme, rappelé par la Définition 21, et appliqué à  $E^S$ .

Nous définissons alors un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{\Sigma, S^l}^{\mu}$ , dont les modèles des croyances préférées sont les interprétations modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$ , minimales pour  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E$  :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^l}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E).$$

Nous montrons cependant qu'une fois de plus, restreindre l'opérateur de fusion de bases de croyances incommensurables basé sur la somme  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  à la seule considération des échelles linéaires n'affecte pas le résultat de la fusion [Ros08], comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 24** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit  $S_E^l$  l'ensemble des échelles compatibles linéaires possibles pour  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'.$$

**Preuve** La démonstration de cette preuve est très similaire à la démonstration fournie pour la proposition 22. En effet, soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit également  $S_E^l$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Puisque nous savons que  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ , montrons que  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ .

Pour cela, supposons que  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega'$ . Par définition, nous savons que  $\forall S \in S_E^l, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^S} \omega'$ . Ainsi, nous obtenons  $\forall S \in S_E^l, \Sigma(\nu_{ES}(\omega)) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$ . De part la définition de  $S_E^l$ , nous obtenons donc

$$\forall S \in S_E^l, \Sigma_{B_i \in E, \omega \not\models B_i^*} (a_i \cdot \kappa_{B_i}(\omega)) < \Sigma_{B_i \in E, \omega' \not\models B_i^*} (a_i \cdot \kappa_{B_i}(\omega')),$$

et donc  $\forall S \in S_E^l$ ,

$$a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega) + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega) < a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega') + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega').$$

Montrons maintenant que  $\forall \mathcal{S} \in S_E^l, \Sigma(\nu_{ES}(\omega)) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$  ssi  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Procédons par contraposition et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Dans ce cas, par définition de  $\triangleleft_{Par}$ , deux cas sont envisageables :

1. soit  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, pour tout  $a_i$  associé à chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ , nous obtenons

$$a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega) + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega) = a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega') + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega').$$

De cette façon,  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) = \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$  et ainsi, nous obtenons  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega'$  ;

2. soit  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, considérons  $\mathcal{S} \in S_E^l$ , telle que

$$\forall j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, a_j = 1,$$

$$\text{et } a_i > \Sigma(\nu_E(\omega)) + \Sigma(\nu_E(\omega')).$$

De cette façon, nous obtenons

$$\Sigma(\nu_E(\omega)) > \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega) = \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j}(\omega), \text{ et}$$

$$\Sigma(\nu_E(\omega')) > \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega') = \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j}(\omega').$$

Ainsi,  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') = (\Sigma(\nu_E(\omega)) + \Sigma(\nu_E(\omega')))(\kappa_{B_i}(\omega) - \kappa_{B_i}(\omega'))$ .

Puisque par hypothèse,  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ , nous obtenons

$$\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) - \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') > \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega').$$

Nous obtenons donc finalement

$$\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega') + \sum_{j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n} \kappa_{B_j^{\mathcal{S}}}(\omega') = \Sigma(\nu_{ES}(\omega')).$$

De part l'existence de  $\mathcal{S} \in S_E^l$ , nous obtenons également, par définition,  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega'$ .

La réciproque est directe. En effet, si  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ , alors  $\forall \mathcal{S} \in S_E^l$ ,

$$a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega) + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega) < a_1 \cdot \kappa_{B_1}(\omega') + \dots + a_n \cdot \kappa_{B_n}(\omega'),$$

et ainsi,  $\forall \mathcal{S} \in S_E^l, \Sigma(\nu_{ES}(\omega)) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$ . Par définition,  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^l}^E \omega'$  ■

Ainsi, pour tout multi-ensemble de bases de croyances pondérées, les conclusions dérivées des opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux relations sur les interprétations de  $\Omega$  précédemment considérées, sont équivalentes :



$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S_E^l}^\mu(E)) \equiv Bel(\blacktriangle_\Sigma^\mu(E)).$$

Il est également possible de restreindre la relation sur les interprétations  $\blacktriangle_{Max}^E$ , obtenue par la définition 24, à la seule considération des échelles compatibles linéaires de la façon suivante :

**Définition 38** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^l$  l'ensemble associé des échelles compatibles linéaires possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \blacktriangle_{Max, S_E^l}^E \omega' \text{ ssi } \forall S \in S_E^l, \omega \triangle_{Max}^{E^S} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangle_{Max}^{E^S}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur le maximum, rappelé par la Définition 20, et appliqué à  $E^S$ .

Cette restriction nous permet d'obtenir un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{Max, S^l}^\mu$ , dont les modèles des croyances préférées sont les modèles de  $\mu$  minimaux pour  $\blacktriangle_{Max, S_E^l}^E$  :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{Max, S^l}^\mu(E))) = Min(Mod(\mu), \blacktriangle_{Max, S_E^l}^E)$$

Une fois de plus, restreindre l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  à la seule considération des échelles linéaires n'affecte pas le résultat de la fusion, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 25** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $S_E^l$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \blacktriangle_{Max, S_E^l}^E \omega' \text{ ssi } \omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'.$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit également  $S_E^l$  l'ensemble des échelles compatibles affines possibles  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .

Montrons dans un premier temps que si  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^l}^E \omega'$ , alors  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$ . Puisque nous savons que  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \triangle_{SMP}^E \omega'$ , montrons que si  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^l}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangle_{SMP}^E \omega'$ . Pour cela, supposons dans un premier temps que  $\omega \not\triangle_{SMP}^E \omega'$ . Par définition, deux cas sont envisageables :

1. soit pour toute base de croyances  $B_j$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega) = \kappa_{B_j}(\omega') = 0$ . Dans ce cas, par définition des échelles compatibles, pour toute échelle issue de  $S_E^l$ , nous obtenons  $\max_{B_j \in E} \kappa_{B_j^S}(\omega) = \max_{B_j \in E} \kappa_{B_j^S}(\omega') = 0$ . Ainsi, par définition,  $\omega \blacktriangleleft_{Max, S_E^l}^E \omega'$ ;
2. soit il existe une base de croyances  $B_i$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ , ou  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$ . Dans ce cas, considérons  $S \in S_E^l$ , telle que

$$\forall j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, a_j = 1,$$

$$\text{et } a_i > \max(\text{Max}(\nu_E(\omega)), \text{Max}(\nu_E(\omega'))).$$

Ainsi, puisque par hypothèse  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ , nous obtenons  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \kappa_{B_i^S}(\omega')$ . Par construction, nous obtenons également  $\kappa_{B_i^S}(\omega) > \max(\text{Max}(\nu_E(\omega)), \text{Max}(\nu_E(\omega')))$ . Ainsi, nous obtenons  $\text{Max}(\nu_{ES}(\omega)) = \kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \text{Max}(\nu_{ES}(\omega'))$ . De part l'existence de  $S \in S_E^l$ , nous obtenons également, par définition,  $\omega \blacktriangleleft_{Max, S_E^l}^E \omega'$ .

La réciproque est directe. En effet, si  $\omega \blacktriangleleft_{Max}^E \omega'$ , alors  $\forall S \in \mathbb{S}_E$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Puisque par définition  $S_E^l \subseteq \mathbb{S}_E$ , alors  $\forall S \in S_E^l$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition, nous obtenons  $\omega \blacktriangleleft_{Max, S_E^l}^E \omega'$ . ■

De cette manière, les résultats fournis par les opérateurs de fusion, respectivement basés sur les deux relations précédemment considérées, sont équivalents pour tout multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Plus formellement :

$$\forall E, \text{Bel}(\blacktriangleleft_{Max, S_E^l}^\mu(E)) \equiv \text{Bel}(\blacktriangleleft_{Max}^\mu(E)).$$

### 6.3 Classe des échelles translatives

Considérons à présent la classe des échelles compatibles translatives. Cette classe regroupe l'ensemble des échelles compatibles modifiant les poids associés aux formules par l'intermédiaire de fonctions mathématiques translatives respectivement associées à chaque sources. Le symbole  $S^s$  représente la classe des échelles translatives, tandis que le symbole  $S_E^s$  dénote l'ensemble des échelles compatibles translatives possibles pour un multi-ensemble de sources  $E$ . Plus formellement :

**Définition 39** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Alors :

$$S_E^s = \{S \in \mathbb{S}_E \text{ t.q. } \forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i^* : S(\varphi) = R_{B_i}(\varphi) + b_i\},$$

avec  $b_i \geq 0$ .

En particulier, les échelles compatibles issues de cette classe permettent de maintenir les rapports de distance existants entre les poids associés aux formules d'une base de croyances pondérées. En effet,  $\forall \mathcal{S} \in S_E^s, \forall B_i \in E, \forall (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}), (\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i$  :

$$\mathcal{S}(\varphi_{ij}) - \mathcal{S}(\varphi_{ij'}) = R_{B_i}(\varphi_{ij}) + b_i - (R_{B_i}(\varphi_{ij'}) + b_i) = R_{B_i}(\varphi_{ij}) - R_{B_i}(\varphi_{ij'}).$$

Cette notion de distance entre poids issus d'une même base est également connu sous le terme d'*intensité* des utilités dans le domaine de la théorie du choix social [Ham91]. Nous illustrons cette classe d'échelles compatibles par l'exemple suivant :

**Exemple 31** *Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner  $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(a \vee b, 3), (\neg b, 1)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 5)\}$ .*

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_i(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_8(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_9(\varphi_{ij})$
$B_1$	$a$	6	6+1=7	6+3=9	6+5=11
	$b$	3	3+1=4	3+3=6	3+5=8
$B_2$	$a \vee b$	3	3+4=7	3+1=4	3+10=13
	$\neg b$	1	1+4=5	1+1=2	1+10=11
$B_3$	$\neg a$	5	5+2=7	5+5=10	5+10=15

TABLE 6.4 – Exemples d'échelles compatibles translatives

Le Tableau 6.2 présente quelques exemples d'échelles compatibles translatives possibles pour  $E$ . Les éléments mis en évidence représentent les nouveaux poids associés aux formules représentant les croyances pour chaque échelle linéaire présentée.

De manière intuitive, les échelles compatibles translatives sont des cas particuliers d'échelles affines, soit formellement  $S_E^s \subset S_E^a$  pour un multi-ensemble de sources  $E$  donné. La sous-section suivante propose un opérateur de fusion restreint à la classe des échelles translatives possibles pour un ensemble de sources à fusionner. Cette sous-section propose également une caractérisation de l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  sur lequel repose cet opérateur de fusion, montrant que les conclusions obtenue par celui-ci diffèrent de celles obtenue en utilisant un opérateur de fusion commensurable ou encore un opérateur de fusion incommensurables basé sur la considération de l'ensemble des échelles compatibles possibles.

### 6.3.1 Caractérisation de l'approche basée sur les échelles translatives

Nous proposons, dans cette sous-section, un opérateur de fusion basé sur la seule considération des échelles compatibles translatives possibles pour un ensemble de sources à fusionner. Pour cela,

nous définissons dans premier temps une relation sur les interprétations de  $\Omega$ , que nous notons  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E$ , obtenue à partir de la définition 30 en remplaçant l'ensemble des échelles compatibles considérées  $\mathbb{S}_E$  par  $S_E^s$ , l'ensemble des échelles compatibles translatives possibles pour le multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ . Formellement :

**Définition 40** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner, et  $S_E^s$  l'ensemble associé des échelles compatibles translatives possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega' \text{ ssi } \forall S \in S_E^s, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^S} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^S}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme, rappelé par la Définition 21, et appliqué à  $E^S$ .

De manière naturelle, les modèles des croyances préférées d'un opérateur de fusion reposant sur cet ordre, noté  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}$ , sont les modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$  minimaux pour  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E$ . Formellement :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E).$$

Cependant, déterminer les croyances préférées pour la fusion d'un multi-ensemble de sources  $E$  par  $\triangleleft_{\Sigma, S^t}^E$  reste néanmoins un problème difficile, puisqu'en pratique l'ensemble des échelles compatibles translatives possibles pour  $E$  est également infini. Afin d'identifier les interprétations modèles de ces croyances, la définition suivante propose, dans un premier temps, un critère de comparaison des interprétations, noté  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$  (M. pour Model,  $\Sigma$  pour somme) :

**Définition 41** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Une interprétation  $\omega$  est alors préférée à une autre interprétation  $\omega'$ , noté  $\omega \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega'$  si et seulement si :

- (i)  $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$ , et
- (ii)  $\forall B_i \in \{B_j \in E, \kappa_{B_j}(\omega') = 0\}, \kappa_{B_i}(\omega) = 0$ ,

$$\text{avec } \Sigma(\nu_E(\omega)) = \sum_{i=1, \dots, n} \kappa_{B_i}(\omega).$$

La première condition signifie que la somme des éléments du profil de  $\omega$  doit être inférieure à la somme des éléments du profil de  $\omega'$ , tandis que la seconde signifie que  $\omega$  doit être modèle de toute base de croyances issue de  $E$  dont  $\omega'$  est modèle. La relation sur les interprétations obtenue au moyen de ce critère nous permet naturellement de définir un opérateur de fusion, dont les modèles des croyances préférées, notées  $Bel(\triangle_{M\Sigma}^{\mu}(E))$ , sont les modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$  minimaux pour  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ .

Ainsi, nous montrons à présent qu'ordonner les interprétations de  $\Omega$  par comparaison, au moyen du critère  $M\Sigma$ , équivaut à les ordonner en considérant l'ensemble des échelles compatibles translatives possibles pour l'ensemble de sources à fusionner [Ros08], comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 26** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^s$  l'ensemble associé des échelles compatibles translatives possibles pour  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :*

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega'.$$

**Preuve** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^s$  l'ensemble associé des échelles compatibles translatives possibles pour  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .*

*Supposons que  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega'$ . Par définition, nous savons que  $\forall S \in S_E^s, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{ES} \omega'$ . Ainsi, nous obtenons  $\forall S \in S_E^s, \Sigma(\nu_{ES}(\omega)) < \Sigma(\nu_{ES}(\omega'))$ . À ce point, nous utilisons le symbole  $o_i(\omega)$ , tel que  $o_i(\omega) = 1$  si  $\kappa_{B_i}(\omega) > 0$ , 0 sinon. De part la définition de  $S_E^s$ , nous obtenons  $\forall S \in S_E^s$ ,*

$$\kappa_{B_1}(\omega) + o_1(\omega).t_1 + \dots + \kappa_{B_n}(\omega) + o_n(\omega).t_n > \kappa_{B_1}(\omega') + o_1(\omega').t_1 + \dots + \kappa_{B_n}(\omega') + o_n(\omega').t_n,$$

*soit encore*

$$\forall S \in S_E^s, \Sigma_{B_i \in E}(\kappa_{B_i}(\omega)) + \sum_{\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0} t_i < \Sigma_{B_i \in E}(\kappa_{B_i}(\omega')) + \sum_{\kappa_{B_i}(\omega') \neq 0} t_i.$$

*Ainsi, nous pouvons remarquer que  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega'$  si et seulement si  $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$ , et  $\sum_{\kappa_{B_i}(\omega) \neq 0} t_i > \sum_{\kappa_{B_i}(\omega') \neq 0} t_i$ , soit encore :*

1.  $\Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega'))$ ,
2.  $\forall B_i \in \{B_j \in E, \omega' \models B_j\}, \omega \models B_i$ .

*Ainsi, par définition de  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ , nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega'$  ssi  $\omega \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega'$ . ■*

Ainsi, ce critère nous permet de caractériser l'ordre établi sur les interprétations, au moyen de l'opérateur de fusion ne considérant que les échelles translatives. Par corollaire, ces deux opérateurs mènent aux mêmes conclusions, quelque soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. Plus formellement :

$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S_E^s}^{\mu}(E)) \equiv Bel(\blacktriangle_{M\Sigma}^{\mu}(E)).$$

Illustrons cette approche par l'exemple suivant :

**Exemple 32** Soit l'ensemble  $E = \{B_1, B_2\}$ , tel que  $B_1 = \{(b, 9), (a, 8)\}$  et  $B_2 = \{(((a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)), 8), (a, 5)\}$ .

	a	b	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle 9, 8 \rangle$	17
$\omega_1$	0	1	$\langle 8, 5 \rangle$	13
$\omega_2$	1	0	$\langle \mathbf{9}, \mathbf{0} \rangle$	<b>9</b>
$\omega_3$	1	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{8} \rangle$	<b>8</b>

TABLE 6.5 – Un exemple de de fusion par l'opérateur  $\blacktriangleleft_{\Sigma, S^s}$

D'après le Tableau 6.5, et en considérant le critère  $\triangleleft_{M\Sigma}$ , les interprétations préférées pour le critère  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$  sont  $\omega_2$  et  $\omega_3$ . Sur cet exemple, nous obtenons  $\omega_2 \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega_1$ , puisque  $\omega_2$  est modèle de  $B_2$  alors que  $\omega_1$  n'est modèle d'aucune base, et que  $\Sigma(\nu_E(\omega_2)) < \Sigma(\nu_E(\omega_1))$ . De la même façon, nous obtenons également, sur cet exemple,  $\omega_2 \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega_0$ ,  $\omega_3 \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega_0$  et  $\omega_3 \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega_1$ .

Cette caractérisation nous montre que les conclusions obtenues par l'opérateur de fusion basé sur la somme, et considérant l'ensemble des échelles translatives possibles pour un ensemble de sources à fusionner, diffèrent de celles qui pourraient être obtenues en utilisant les opérateurs de fusion commensurable  $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}$  ou incommensurables  $\blacktriangleleft_{\Sigma}^{\mu}$  présentés par les chapitres précédents. Le chapitre suivant détaille les relations d'inférence existantes entre ces différents opérateurs de fusion.

Finalement, il est également possible de restreindre la relation sur les interprétations  $\blacktriangleleft_{Max}^E$ , obtenue par la définition 24, à la seule considération des échelles compatibles translatives de la façon suivante :

**Définition 42** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^s$  l'ensemble associé des échelles compatibles translatives possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \blacktriangleleft_{Max, S_E^s}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in S_E^s, \omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur le maximum, rappelé par la Définition 20, et appliqué à  $E^{\mathcal{S}}$ .

Cette restriction nous permet d'obtenir un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangleleft_{Max, S^s}^{\mu}$ , dont les modèles des croyances préférées sont les modèles de  $\mu$  minimaux pour  $\blacktriangleleft_{Max, S_E^s}^E$  :

$$Mod(Bel(\blacktriangleleft_{Max, S^s}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \blacktriangleleft_{Max, S_E^s}^E)$$

Cependant, restreindre l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum  $\blacktriangle_{Max}^\mu$  à la seule considération des échelles translatives n'affecte pas le résultat de la fusion, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 27** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit  $S_E^s$  l'ensemble des échelles compatibles translatives possibles  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \blacktriangle_{Max, S_E^s}^E \omega' \text{ssi } \omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'.$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit également  $S_E^s$  l'ensemble des échelles compatibles translatives possibles  $E$ . Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .

Montrons dans un premier temps que si  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^s}^E \omega'$ , alors  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$ . Puisque nous savons que  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$  si et seulement si  $\omega \blacktriangle_{SMP}^E \omega'$ , montrons que si  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^s}^E \omega'$ , alors  $\omega \blacktriangle_{SMP}^E \omega'$ . Pour cela, supposons dans un premier temps que  $\omega \not\blacktriangle_{SMP}^E \omega'$ . Par définition, deux cas sont envisageables :

1. soit pour toute base de croyances  $B_j$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_j}(\omega) = \kappa_{B_j}(\omega') = 0$ . Dans ce cas, par définition des échelles compatibles, pour toute échelle issue de  $S_E^s$ , nous obtenons  $\max_{B_j \in E} \kappa_{B_j^S}(\omega) = \max_{B_j \in E} \kappa_{B_j^S}(\omega') = 0$ . Ainsi, par définition,  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^s}^E \omega'$ ;
2. soit il existe une base de croyances  $B_i$  telle que  $\kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$ , ou  $\kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$ . Dans ce cas, considérons  $S \in S_E^l$ , telle que

$$\forall j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n, b_j = 0,$$

$$\text{et } b_i > \max(\text{Max}(\nu_E(\omega)), \text{Max}(\nu_E(\omega'))).$$

Ainsi, puisque par hypothèse  $\kappa_{B_i}(\omega) \geq \kappa_{B_i}(\omega')$ , nous obtenons  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \kappa_{B_i^S}(\omega')$ . Par construction, nous obtenons également  $\kappa_{B_i^S}(\omega) > \max(\text{Max}(\nu_E(\omega)), \text{Max}(\nu_E(\omega')))$ . Nous obtenons ainsi  $\text{Max}(\nu_{ES}(\omega)) = \kappa_{B_i^S}(\omega) \geq \text{Max}(\nu_{ES}(\omega'))$ . De part l'existence de  $S \in S_E^s$ , nous obtenons également, par définition,  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^s}^E \omega'$ .

La réciproque est directe. En effet, si  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$ , alors  $\forall S \in \mathbb{S}_E$ ,  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$ . Puisque par définition  $S_E^s \subseteq \mathbb{S}_E$ , alors  $\forall S \in S_E^s$ ,  $\omega \blacktriangle_{Max}^E \omega'$ . Par définition, nous obtenons  $\omega \blacktriangle_{Max, S_E^s}^E \omega'$ . ■

Ainsi, la restriction à la classe des échelles translatives de l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum, à la différence de celui basé sur la somme, n'est pas plus productive

que lorsque l'ensemble des échelles compatibles possibles sont considérées, comme l'énonce la proposition suivante :

$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{Max, S_E}^\mu(E)) \equiv Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)).$$

### 6.3.2 Propriétés logiques

Cette section caractérise le comportement logique de l'opérateur de fusion de sources incommensurables, basé sur la somme et restreint à la considération des échelles compatibles translatives, au moyen des postulats de rationalité rappelés Chapitre 2 et adaptés au cadre des bases de croyances pondérées. Plus précisément, nous montrons que  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  satisfait la plupart des postulats de rationalité proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion sous contrainte. En particulier, l'opérateur de fusion incommensurable restreint à la seule considération des échelles compatibles  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  satisfait exactement les mêmes postulats que  $\blacktriangle_{\Sigma}^\mu$ , l'opérateur considérant l'ensemble des échelles compatibles possibles, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 28**  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  satisfies (IC0), (IC1), (IC2\*), (IC3\*), (IC4\*), (IC5), (IC7).

---

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées.

- (IC0) La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- (IC1) La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- (IC2\*) Montrons d'abord que si  $\omega$  est modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  est également modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu)$ . Pour cela, supposons que  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  soit cohérent. Ainsi, nous savons qu'il existe  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ . Par nature, nous savons que pour chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $k_{B_i}(\omega) = 0$ . Ainsi, par définition, pour chaque échelle compatible  $S \in S_E^s$ , le profil associé à  $\omega$  est tel que  $\nu_{ES}(\omega) = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . En d'autres termes, pour chaque échelle compatible  $S \in S_E^s$ , nous avons  $\Sigma(\nu_{ES}) = 0$ . Par définition,  $\omega$  est minimale pour  $\blacktriangle_{\Sigma, S_E^s}^\mu$ .

Montrons maintenant que si  $\omega$  n'est pas modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  n'est pas non plus modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E))$ . Soit  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  qui ne soit pas modèle d'au moins une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ . Ainsi, nous savons par définition qu'il existe au moins une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $k_{B_i}(\omega') > 0$ . Ainsi, par définition, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $S \in S_E^s$ ,  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega')) > 0$ . Puisque  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  est cohérent, nous savons qu'il existe une  $\omega$  interprétation de  $\Omega$  telle que



$\Sigma(\nu_{E^s}(\omega)) = 0$ . Par définition,  $\omega'$  n'est pas minimale pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}^E$ .

- **(IC3\*)** Supposons que  $E_1 \equiv_R E_2$  et  $\mu_1 \equiv \mu_2$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu_1}(E_1))$  (l'autre cas est symétrique). Nous savons alors, par définition, que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_1$  minimal pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}^{E_1}$ . Puisque par hypothèse  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , alors  $\omega$  est également un modèle de  $\mu_2$ . Puisque  $\omega$  est minimale pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}^{E_1}$ , alors d'après la caractérisation basée sur le critère  $M\Sigma$ ,  $\omega$  est également minimale pour  $\triangleleft_{M\Sigma}^{E_1}$ . Puisque par hypothèse  $E_1 \equiv_R E_2$ , et en considérant la définition de  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ , nous obtenons que  $\omega$  est également minimale pour  $\triangleleft_{M\Sigma}^{E_2}$ . D'après la caractérisation basée sur le critère  $M\Sigma$ , nous obtenons que  $\omega$  est également minimale pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}^{E_2}$ .
- **(IC4\*)** La preuve de la satisfaction de ce postulat est obtenue par la démonstration de la Proposition 21.
- **(IC5)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}(E_1))$  et de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}(E_2))$ . Par définition, nous savons que pour toute autre interprétation  $\omega'$  modèle de  $\mu$ ,  $\omega' \not\triangleleft_{\Sigma, S^s}^{E_1} \omega$  et  $\omega' \not\triangleleft_{\Sigma, S^s}^{E_2} \omega$ . D'après la caractérisation basée sur le critère  $M\Sigma$ , nous obtenons ensuite  $\omega' \not\triangleleft_{M\Sigma}^{E_1} \omega$  et  $\omega' \not\triangleleft_{M\Sigma}^{E_2} \omega$ . En considérant la définition de  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ , nous obtenons  $\omega \not\triangleleft_{M\Sigma}^{E_1 \sqcup E_2} \omega'$ . Au moyen de la caractérisation basée sur le critère  $M\Sigma$ , nous obtenons finalement que  $\omega$  est modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}(E_1 \sqcup E_2))$ .
- **(IC7)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$  et de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu_1}(E))$ . Ainsi, par définition, nous savons que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_2$  et de  $\mu_1$  minimal pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}^E$ . À nouveau par définition, nous obtenons que  $\Omega$  est une interprétation modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ . ■

Ce résultat montre en particulier que, quand il est restreint à la seule considération des échelles compatibles translatives, l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme satisfait toujours **(IC4\*)**. De même que lorsque l'ensemble des échelles compatibles possibles sont prises en compte, ce même opérateur falsifie toujours **(IC6)** et **(IC6')**, comme l'illustre le contre-exemple suivant :

**Exemple 33** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E_1 = \{B_1, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 4)(b, 1)\}$  et  $B_2 = \{(a \vee b, 2)(\neg a, 1)\}$ . Considérons également l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E_2 = \{B_3, B_4\}$ , avec  $B_3 = \{((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), 4)(b, 1)\}$  et  $B_4 = \{(a \vee b, 2)(a \wedge b, 1)\}$ . Supposons sur cet exemple que  $\mu \equiv \top$ .

	a	b	$\nu_{E_1}(\omega)$	$\nu_{E_2}(\omega)$	$\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{E_1 \sqcup E_2}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 4, 2, 4, 2 \rangle$	12
$\omega_1$	0	1	$\langle \mathbf{4}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	5
$\omega_2$	1	0	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle$	4
$\omega_3$	1	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{4}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{0} \rangle$	5

TABLE 6.6 – Un contre exemple pour (IC6) et (IC6')

En considérant la caractérisation de  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E$  basée sur le critère  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ , le Tableau 6.6 nous montre que  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1) \equiv b$  et  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_2) \equiv b$ . De plus, nous avons également  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \equiv a \vee b$ , mais cependant  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1) \vee \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_2) \equiv b$ . Ainsi, sur cet exemple, (IC6') n'est pas satisfait puisque  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1) \wedge \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_2)$  est cohérent, mais  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \not\equiv \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1) \vee \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_2)$ .

Ceci fournit également un contre-exemple pour (IC6). En effet, puisque  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \not\equiv \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1) \vee \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_2)$ , le Tableau 5.5 montre alors que  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1 \sqcup E_2) \not\equiv \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_1) \wedge \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E_2)$ .

De plus,  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  falsifie également (IC8), comme nous l'illustrons par le contre-exemple suivant :

**Exemple 34** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b), 5), (\neg a, 2)\}$  and  $B_2 = \{(b, 2), (a, 1)\}$ . Considérons également  $\mu_1 = a \vee b$  et  $\mu_2 = a$ .

	a	b	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle 5, 2 \rangle$	5
$\omega_1$	0	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	1
$\omega_2$	1	0	$\langle 2, 2 \rangle$	4
$\omega_3$	1	1	$\langle \mathbf{5}, \mathbf{0} \rangle$	5

TABLE 6.7 – Un contre-exemple pour (IC8)

En considérant la caractérisation de  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E$  basée sur le critère  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ , le Tableau 6.7 nous montre que sur cet exemple,  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E$  est défini par  $\omega_1 \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega_0$ ,  $\omega_2 \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega_0$ ,  $\omega_3 \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega_0$  et  $\omega_1 \triangleleft_{\Sigma, S_E^s}^E \omega_2$ . Ainsi, en considérant  $\mu_1 = a \vee b$ , nous obtenons  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu_1}(E) = \{\omega_1, \omega_3\}$ , puis  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 = \{\omega_3\}$ . (IC8) n'est donc pas satisfait sur cet exemple, puisqu'en considérant  $\mu_2 = a$ , nous obtenons  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) = \{\omega_2, \omega_3\}$ .

De même que lorsque l'ensemble des échelles compatibles possibles sont considérées, le postulat de rationalité **(IC8)** n'est pas satisfait puisque  $\triangleleft_{\Sigma, S_E}^E$  est toujours une relation partielle. L'opérateur  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu$  falsifie également le postulat de majorité **(MAJ)**, comme l'illustre le contre-exemple suivant :

**Exemple 35** *Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2^n\}$ , avec  $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$  et  $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$ . Considérons également  $n$ , un entier strictement positif.*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	6	3	$\langle 6, 3, 3, 3, 3, \dots, 3 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	3	$\langle 0, 3, 3, 3, 3, \dots, 3 \rangle$
$\omega_2$	1	0	2	0	$\langle 2, 0, 0, 0, 0, \dots, 0 \rangle$
$\omega_3$	1	1	2	3	$\langle 2, 3, 3, 3, 3, \dots, 3 \rangle$

TABLE 6.8 – Un contre-exemple pour **(MAJ)**

En considérant la caractérisation de  $\triangleleft_{\Sigma, S_E}^E$  basée sur le critère  $\triangleleft_{M\Sigma}^E$ , le Tableau 6.8 nous montre que les modèles des croyances préférées issues de  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E)$  sont  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , et ce quelque soit la valeur de  $n \geq 1$ . Ces deux interprétations sont en effet toutes deux modèles de bases de croyances pondérées distinctes.

Cependant, cet opérateur ne satisfait pas non plus le postulat d'indépendance de la majorité **(MI)**, comme l'illustre le contre exemple suivant :

**Exemple 36** *Considérons un multi-ensemble  $E$  constitué de trois bases de croyances pondérées,  $B_1, B_2$  et  $B_3$ . Considérons l'ensemble des interprétations d'un langage reposant sur deux atomes,  $a$  et  $b$ . Le tableau 6.9 fournit les poids associés à chaque interprétation par  $B_1, B_2$  et  $B_3$ .*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\kappa_{B_3}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{\{B_1, B_2, B_3\}}(\omega))$	$\Sigma(\nu_{\{B_1, B_2, B_3, B_3\}}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	8	8	8	24	32
$\omega_1$	0	1	<b>0</b>	6	1	7	<b>8</b>
$\omega_2$	1	0	<b>0</b>	3	3	<b>6</b>	9
$\omega_3$	1	1	1	0	0	1	2

TABLE 6.9 – Un contre-exemple pour **(MI)**

Considérons particulièrement les interprétations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Ces deux interprétations sont toutes deux modèles des mêmes bases de croyances, donc seule la somme des poids que leur associe chaque base de croyances permet de les départager. Ainsi, pour la fusion de  $B_1, B_2$  et  $B_3$ ,  $\omega_2$

est préférée à  $\omega_1$ , puisque  $\Sigma(\nu_{\{B_1, B_2, B_3\}}(\omega_1)) > \Sigma(\nu_{\{B_1, B_2, B_3\}}(\omega_2))$ . À l'inverse, si  $B_3$  est répétée un nombre suffisant de fois,  $\omega_1$  devient préférée à  $\omega_2$ . Ainsi, sur cet exemple, le postulat **(MI)** est falsifié puisque la répétition d'une base de croyances influe sur le résultat de la fusion.

L'opérateur proposé dans cette section ne constitue donc ni une approche égalitaire, ni une approche majoritaire. Nous montrons finalement que l'opérateur de fusion incommensurable, basé sur la somme et restreint à la considération des échelles compatibles translatives, satisfait malgré tout le postulat de consensus **(CSS)**, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 29** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$\forall B_i \in E, \text{ si } B_i^* \models \mu, \text{ alors } B_i^* \wedge \text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^\mu(E)) \text{ est cohérent.}$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit également  $B_i$  une base de croyances issue de  $E$ .

Supposons que  $B_i^* \models \mu$ . Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  qui soit un modèle de  $B_i^*$  telle que  $\nexists \omega' \in \text{Mod}(B_i^*), \omega' \triangleleft_{\Sigma, S_E^t}^E \omega$ . Nous savons, par hypothèse, que  $\omega$  est également un modèle de  $\mu$ . Nous savons également que, par nature,  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ . Soit maintenant  $\omega''$  une autre interprétation de  $\Omega$  qui soit modèle de  $\mu$ . À ce point, deux cas sont envisageables :

- soit  $\omega'' \models B_i^*$  et dans ce cas, nous obtenons directement, puisque par hypothèse, que  $\omega'' \triangleleft_{\Sigma, S_E^t}^E \omega$  ;
- soit  $\omega'' \not\models B_i^*$ . Dans ce cas, nous obtenons  $\kappa_{B_i}(\omega) > 0$ , et donc par définition,  $\omega'' \triangleleft_{M\Sigma}^E \omega$ . Au moyen de la caractérisation basée sur le critère  $M\Sigma$ , nous obtenons finalement  $\omega'' \triangleleft_{\Sigma, S_E^t}^E \omega$ .

Ainsi, nous obtenons  $\nexists \omega'' \in \text{Mod}(\mu)$  tel que  $\omega'' \triangleleft_{\Sigma, S_E^t}^E \omega$ . En d'autres termes,  $\omega$  est modèle de  $B_i^*$  et de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S_E^t}^\mu(E))$ . Par définition,  $\blacktriangle_{\Sigma, S_E^t}^\mu(E) \wedge B_i^*$  est cohérent. ■

Le tableau suivant récapitule les différences, en matière de comportement logique, de l'opérateur de fusion basé sur la somme dans le cadre commensurable, incommensurable, puis dans celui des échelles translatives :

	(IC4*)	(IC6)	(IC6')	(IC8)	(MAJ)	(MI)	(CSS)
$\Delta_{\Sigma}^{\mu}$	-	✓	✓	✓	✓	-	-
$\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	✓	✓
$\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	-	✓

TABLE 6.10 – Une synthèse des divergences logiques entre  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$ ,  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  et  $\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}$ 

## 6.4 Classe des échelles bornées

Nous considérons finalement, dans cette section, la classe des échelles compatibles bornées. Cette classe est constituée des échelles compatibles pour lesquelles le poids maximal associé à une croyance ne peut dépasser une certaine valeur fixée, notée  $p$ . Nous notons  $S^{(p)}$  la classe des échelles compatibles bornées, tandis que  $S_E^{(p)}$  dénote l'ensemble des échelles compatibles bornées possibles pour un multi-ensemble de sources  $E$ . Plus formellement :

**Définition 43** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Alors :

$$S_E^{(p)} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E : \forall B_i \in E, \forall \varphi \in B_i^*, \mathcal{S}(\varphi) \leq p\},$$

Nous illustrons cette définition par l'exemple suivant :

**Exemple 37** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner  $E = \{E_1, E_2, E_3\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 6), (b, 3)\}$ ,  $B_2 = \{(a \vee b, 3), (-b, 1)\}$  et  $B_3 = \{(-a, 5)\}$ .

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_1(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_2(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_3(\varphi_{ij})$
$B_1$	$a$	6	3	2	3
	$b$	3	1	1	2
$B_2$	$a \vee b$	3	2	3	3
	$-b$	1	1	1	2
$B_3$	$-a$	5	1	2	3

TABLE 6.11 – Exemples d'échelles compatibles bornées pour  $p = 3$ 

Le Tableau 6.11 présente quelques exemples d'échelles compatibles bornées possibles pour  $E$ . Les échelles  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$ , et  $\mathcal{S}_3$  associent en effet de nouveaux poids aux croyances de telle sorte que le poids maximal associé à une formule ne peut excéder  $p = 3$ .

Les échelles compatibles bornées constituent un moyen naturel de sélection d'un sous-ensemble d'échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources, puisqu'en pratique, les échelles de poids utilisés par ces sources pour exprimer une incertitude vis-à-vis de leurs croyances respectives sont bornées. La borne  $p$ , limitant la valeur des poids que les échelles peuvent associer aux formules, se doit d'être plus grande qu'une certaine valeur  $p_{min}$ , dépendante du multi-ensemble de bases de croyances pondérées considéré. En particulier, nous montrons en effet que si cette contrainte n'est pas respectée, il n'est alors plus possible de construire d'échelle compatible pour ce multi-ensemble, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 30** *Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :*

$$\text{Si } p < p_{min}, \text{ alors } S_E^{(p)} \equiv \emptyset$$

avec  $p_{min} = \max\{|B_i| : B_i \in E\}$ , et  $|B_i|$  le nombre total de poids différents exprimés par une base de croyances pondérées donnée  $B_i$ .

---

**Preuve** *La preuve de cette proposition est immédiate. Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Supposons que  $p < \max\{|B_i| : B_i \in E\}$ . Dans ce cas, il existe une base de croyances  $B_i$ , issue de  $E$ , telle que  $|B_i| > p$ . Rappelons que  $|B_i|$  est le nombre de poids distincts, initialement exprimés dans  $B_i$ . Supposons qu'il existe  $S$  une échelle compatible issue de  $S_E^{(p)}$ . Puisque  $p < |B_i|$ , alors  $|B_i^S| < |B_i|$  et dans ce cas, nous obtenons  $\exists \varphi, \psi \in B_i$ ,  $S(\varphi) = S(\psi)$  et  $R_{B_i}(\varphi) < R_{B_i}(\psi)$ . Par définition,  $S$  n'est pas une échelle compatible. ■*

---

Les sous-sections suivantes adaptent les opérateurs de fusion incommensurables basés sur le maximum et sur la somme, présentés par les chapitres précédents, à la seule considération des échelles compatibles bornés pour certaines valeurs de  $p$  particulières. Nous montrons, en effet, que les échelles compatibles bornées permettent de caractériser le résultat de la fusion incommensurable basée sur le maximum sans avoir à calculer l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources donné, puis que ces mêmes échelles permettent également de restaurer le postulat de majorité lorsque l'opérateur de fusion incommensurable basée sur la somme est restreint à leur seule considération.

#### 6.4.1 Échelles bornées et cadre égalitaire

Cette sous-section adapte l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées basé sur le maximum à la seule considération des échelles compatibles bornées. Pour cela, nous définissons une relation sur les interprétations de  $\Omega$  que nous notons  $\leftarrow_{Max, S_E^{(p)}}^E$ , obtenue à partir de la définition 24 en remplaçant l'ensemble des échelles compatibles considérées  $\mathbb{S}_E$  par  $S_E^{(p)}$ , l'ensemble

des échelles compatibles bornées à  $p$  possibles pour le multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ . Formellement :

**Définition 44** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^{(p)}$  l'ensemble associé des échelles compatibles bornées possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{Max, S_E^{(p)}}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in S_E^{(p)}, \omega \triangleleft_{Max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme, rappelé par la Définition 20, et appliqué à  $E^{\mathcal{S}}$ .

Cette relation sur les interprétations nous permet maintenant de définir un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{Max, S_E^{(p)}}^{\mu}$ , dont les modèles des croyances préférées sont les interprétations de  $\Omega$ , modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$ , minimales pour  $\triangleleft_{Max, S_E^{(p)}}^E$  :

$$Mod(Bel(\blacktriangle_{Max, S_E^{(p)}}^{\mu}(E))) = Min(Mod(\mu), \triangleleft_{Max, S_E^{(p)}}^E).$$

Nous illustrons à présent cet opérateur de fusion par l'exemple suivant :

**Exemple 38** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 8), (-b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (-a, 1)\}$ . Supposons, pour cet exemple, que  $\mu \equiv \top$  et considérons que  $p = 4$ . Les Tableaux 6.12 et 6.14 présente l'ensemble des échelles compatibles bornées possibles pour  $E$  lorsque  $p = 4$ . Les Tableaux 6.13 et 6.15 détaillent les profils associés aux interprétations de  $\Omega$  pour chacune des échelles compatibles présentées.

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$
$B_1$	$a$	8	4	3	4	3	4	3
	$-b$	4	3	2	2	1	1	2
$B_2$	$b$	2	2	2	3	2	3	3
	$-a$	1	1	1	1	1	2	1

TABLE 6.12 – Échelles compatibles bornées à  $p = 4$

	$\nu_{ES_1}(\omega)$	$\nu_{ES_2}(\omega)$	$\nu_{ES_3}(\omega)$	$\nu_{ES_4}(\omega)$	$\nu_{ES_5}(\omega)$	$\nu_{ES_6}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 4, 2 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 4, 3 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 4, 3 \rangle$	$\langle 3, 3 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 4, 0 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{3} \rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{3} \rangle$
$\omega_3$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle \mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{2} \rangle$	$\langle \mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle$

TABLE 6.13 – Profils associés aux interprétations

	$\varphi_{ij}$	$R_{B_i}$	$\mathcal{S}_7$	$\mathcal{S}_8$	$\mathcal{S}_9$	$\mathcal{S}_{10}$	$\mathcal{S}_{11}$	$\mathcal{S}_{12}$	$\mathcal{S}_{13}$
$B_1$	$a$	8	2	3	3	2	3	2	2
	$\neg b$	4	1	1	2	1	1	1	1
$B_2$	$b$	2	2	3	4	3	4	3	4
	$\neg a$	1	1	2	1	1	2	2	3

TABLE 6.14 – Échelles compatibles bornées à  $p = 4$ 

	$\nu_{E\mathcal{S}_7}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_8}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_9}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_{10}}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_{11}}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_{12}}(\omega)$	$\nu_{E\mathcal{S}_{13}}(\omega)$
$\omega_0$	$\langle 2,2 \rangle$	$\langle 3,3 \rangle$	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 3,4 \rangle$	$\langle 2,3 \rangle$	$\langle 2,4 \rangle$
$\omega_1$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 3,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$	$\langle 2,0 \rangle$
$\omega_2$	$\langle 0,2 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$	$\langle 0,3 \rangle$	$\langle 0,4 \rangle$
$\omega_3$	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 2,1 \rangle$	$\langle 1,1 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 1,2 \rangle$	$\langle 1,3 \rangle$

TABLE 6.15 – Profils associés aux interprétations

Les éléments mis en évidence des Tableaux 6.13 et 6.15 représentent les modèles de  $\Delta_{Max}^\mu$  pour chaque échelle compatible présenté. Par exemple, les interprétations  $\omega_2$  and  $\omega_3$  sont modèles de  $Bel(\Delta_{Max}^\mu(E^{\mathcal{S}_2}))$ . Finalement, sur cet exemple, l'ordre partiel sur les interprétations  $\triangleleft_{Max, S_E^{(4)}}^E$  est seulement défini par  $\omega_3 \triangleleft_{Max, S_E^{(4)}}^E \omega_0$ . Ainsi, sur cet exemple, lorsque les échelles compatibles sont bornées à  $p = 4$ , les modèles de  $Bel(\blacktriangle_{Max, S^{(p)}}^\mu(E))$  sont  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , et  $Bel(\blacktriangle_{Max, S^{(p)}}^\mu(E)) \equiv a \vee b$ .

Une fois de plus, les échelles compatibles bornées sont un moyen naturel de sélectionner un sous-ensemble d'échelles compatibles, puisqu'en pratique, les échelles de poids utilisés par les sources pour relativiser leurs croyances sont bornées. De plus, nous montrons également que restreindre l'opérateur de fusion incommensurable basé sur le maximum à la seule considération de ces échelles, permet de caractériser le résultat de la fusion basée sur l'ensemble des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources [BLR07c]. Plus formellement :

**Proposition 31** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors  $\forall p \geq p_{|E|}$  :

$$\omega \triangleleft_{Max, S_E^{(p)}}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega',$$

$$\text{avec } p_{|E|} = \sum_{i=1, \dots, n} |B_i|$$

Afin de démontrer cette proposition, nous proposons la construction d'une échelle compatible particulière. L'échelle compatible que nous construisons, notée  $\mathcal{S}_{norm}$ , associe à chaque formule le rang de la pondération qui lui est initialement associée par une échelle compatible  $\mathcal{S}$ . Formellement :



**Construction 5** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_m\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et soit également  $\mathcal{S}$  une échelle compatible pour  $E$ .  $\mathcal{S}_{norm}$  est alors obtenue de la façon suivante. Soit  $\{r_1, \dots, r_n\}$  l'ensemble des poids associés aux formules de  $E$  par  $\mathcal{S}$ , ordonnés tels que pour tous poids  $r_i, r_j$  issus d'une même base de croyances,  $r_i < r_j$  ssi  $i < j$ . Alors :

$$\mathcal{S}_{norm}(\varphi) = i \text{ ssi } \mathcal{S}(\varphi) = r_i.$$

Cette échelle compatible particulière nous permet d'obtenir le lemme suivant :

**Lemme 6** Soient  $E = \{B_1, \dots, B_m\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées,  $\mathcal{S}$  une échelle compatible avec  $E$ , et  $\mathcal{S}_{norm}$  l'échelle, construite à partir de  $\mathcal{S}$  suivant la construction 5. Dans ce cas,  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{si } \omega \triangleleft_{Max}^{ES} \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{Max}^{ES_{norm}} \omega'.$$

En d'autres termes, si une interprétation  $\omega$  est préférée à une autre interprétation  $\omega'$  selon l'échelle  $\mathcal{S}$ , alors elle l'est également selon l'échelle  $\mathcal{S}_{norm}$ .

---

**Preuve** Soient  $E = \{B_1, \dots, B_m\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées,  $\mathcal{S}$  une échelle compatible avec  $E$ , et  $\mathcal{S}_{norm}$  l'échelle compatible, construite à partir de  $\mathcal{S}$  suivant la construction 5. Supposons que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{ES} \omega'$ . De part la construction de  $\mathcal{S}_{norm}$ , nous avons  $Max(\nu_{ES}(\omega)) = r_j > Max(\nu_{ES}(\omega')) = r_k$  ssi  $Max(\nu_{ES_{norm}}(\omega)) = j > Max(\nu_{ES_{norm}}(\omega')) = k$ . De cette façon, nous obtenons  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{ES_{norm}} \omega'$ . ■

---

Remarquons que par construction,  $\mathcal{S}_{norm}$  est une échelle compatible dont le plus grand poids n'excède par  $p$ . Formellement :

**Lemme 7** Soient  $E = \{B_1, \dots, B_m\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées,  $\mathcal{S}$  une échelle compatible avec  $E$ , et  $\mathcal{S}_{norm}$  l'échelle compatible, construite à partir de  $\mathcal{S}$  suivant la construction 5. Alors :

$$\mathcal{S}_{norm} \in S_E^{(p)}.$$

---

**Preuve** La preuve de ce lemme est directe. Soient  $E = \{B_1, \dots, B_m\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées,  $\mathcal{S}$  une échelle compatible avec  $E$ , et  $\mathcal{S}_{norm}$  l'échelle compatible, construite à partir de  $\mathcal{S}$  suivant la construction 5. Soit  $B_i$  une base de croyances issue de  $E$ , et soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux formules de  $B_i^*$ .

Supposons que  $\mathcal{S}(\varphi) = r_i < \mathcal{S}(\psi) = r_j$ . Par définition, nous obtenons alors  $i < j$ . Par construction de  $\mathcal{S}_{norm}$ , nous obtenons alors  $\mathcal{S}_{norm}(\varphi) < \mathcal{S}_{norm}(\psi)$ . La réciproque est symétrique.

De plus, selon la construction de  $\mathcal{S}_{norm}$ ,  $\{r_1, \dots, r_n\}$  est l'ensemble des poids associés aux formules de  $E$  par  $\mathcal{S}$ . Nous obtenons donc  $n = p_{|E\mathcal{S}|}$ . Puisque  $\mathcal{S}$  est une échelle compatible,  $p_{|E\mathcal{S}|} = p_{|E|}$ . Puisque  $p > p_{|E|}$ , nous obtenons finalement  $n < p$ , et donc par définition, puisque  $\mathcal{S}_{norm}$  est également une échelle compatible,  $\mathcal{S}_{norm} \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ . ■

La Construction 5 nous permet de fournir une démonstration pour la Proposition 31 :

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient encore  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .

Montrons, dans un premier temps, que si  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{Max, \mathbb{S}_E^{(p)}}^E \omega'$ . Pour cela, supposons que  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition, nous savons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}} \omega'$ . Puisque par nature,  $\mathbb{S}_E^p \subset \mathbb{S}_E$ , nous obtenons alors que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E^p$ ,  $\omega \triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}} \omega'$ . Ainsi, par définition, nous avons  $\omega \triangleleft_{Max, \mathbb{S}_E^{(p)}}^E \omega'$ .

Montrons maintenant que si  $\omega \triangleleft_{Max, \mathbb{S}_E^{(p)}}^E \omega'$ , alors  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Procédons par contraposition, et supposons pour cela que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition, nous savons qu'il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$  telle que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}} \omega'$ . À ce point, deux cas sont envisageables :

- soit  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E^p$ , et dans ce cas, par définition, nous obtenons  $\omega \not\triangleleft_{Max, \mathbb{S}_E^{(p)}}^E \omega'$  ;
- soit  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E \setminus \mathbb{S}_E^p$ . Dans ce cas, soit  $\mathcal{S}_{norm}$  l'échelle compatible obtenue à partir de  $\mathcal{S}$  au moyen de la Construction 5. Puisque  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}} \omega'$ , nous obtenons, d'après le Lemme 6,  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}_{norm}} \omega'$ . Dans ce cas, il existe une échelle compatible issue de  $\mathbb{S}_E^p$ , soit ici  $\mathcal{S}_{norm}$ , telle que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}_{norm}} \omega'$ .

Dans les deux cas, nous obtenons qu'il existe une échelle compatible issue de  $\mathbb{S}_E^p$ , telle que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^{E\mathcal{S}} \omega'$ . Nous obtenons donc finalement, par définition,  $\omega \not\triangleleft_{Max, \mathbb{S}_E^{(p)}}^E \omega'$ . ■

En particulier, les éléments minimaux pour ces deux ordres sont identiques pour tout multi-ensemble de bases de croyances pondérées :

$$\forall E, Bel(\blacktriangle_{Max, \mathbb{S}_E^{(p)}}^\mu(E)) \equiv Bel(\blacktriangle_{Max}^\mu(E)).$$

## 6.4.2 Échelles bornées et cadre utilitaire

Nous adaptons maintenant l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées basé sur la somme à la seule considération des échelles compatibles bornées. De même que pour le cadre

égalitaire, nous définissons une relation sur les interprétations de  $\Omega$ , notée  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^{(p)}}^E$  l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  obtenu à partir de la définition 30 en remplaçant l'ensemble des échelles compatibles considérées  $\mathbb{S}_E$  par  $S_E^{(p)}$ , l'ensemble des échelles compatibles bornées à  $p$  possibles pour le multi-ensemble de sources à fusionner  $E$ . En des termes plus formels :

**Définition 45** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $S_E^{(p)}$  l'ensemble associé des échelles compatibles bornées possibles pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S_E^{(p)}}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in S_E^{(p)}, \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega',$$

où l'ordre sur les interprétations  $\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}}$  est celui sur lequel repose l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées commensurables basé sur la somme, rappelé par la Définition 21, et appliqué à  $E^{\mathcal{S}}$ .

Nous définissons alors un opérateur de fusion, noté  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}$ , dont les modèles des croyances préférées sont alors les interprétations de  $\Omega$  modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$ , minimales pour  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^{(p)}}^E$ . Soit formellement :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}(E))) = \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \triangleleft_{\Sigma, S_E^{(p)}}^E).$$

Nous montrons alors que, d'une manière surprenante, lorsque l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme est restreint à la seule considération des échelles compatibles bornées, le postulat de majorité est restauré, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 32** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors :

$$\forall p \geq p_{\min}, \exists m \in \mathbb{N} : \text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}(E \sqcup \{B_i^m\})) \models B_i^*,$$

avec  $p_{\min} = \max\{|B_i| : B_i \in E\}$ .

---

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soit également  $E'$  un autre multi-ensemble de bases de croyances tel que  $E' = E \sqcup \{B_i^m\}$ . Autrement dit,  $E' = \{B_1, \dots, B_i^{m+1}, \dots, B_n\}$ . Montrons que  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}(E')) \models B_i^*$ . Pour cela, montrons que  $\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}(E'))) \subset \text{Mod}(B_i^*)$ .

Soit pour cela  $m$  un entier positif tel que  $m > (n - 1) \cdot p$ . Soit également  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $B_i^*$ . Ainsi, nous savons que pour toute échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ ,  $\kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) = 0$ . Par définition, nous obtenons alors que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ ,

$\Sigma(\nu_{E'S}(\omega)) = \Sigma(\nu_E^S(\omega))$ . Dans le pire des cas,  $\omega$  falsifie la formule la plus forte de toute autre base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ , dont le poids maximal associé ne peut dépasser  $p$ . En d'autres termes,  $\forall S \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ ,  $\Sigma(\nu_{E'S}(\omega)) \leq (n-1).p$

Soit à présent  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$  telle que  $\omega \not\models B_i^*$ . Ainsi,  $\omega'$  falsifie au moins une formule de  $B_i^*$ . De la, nous obtenons que pour toute échelle compatible  $S \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ ,  $\kappa_{B_i^S}(\omega) \geq 1$ . Ainsi, nous obtenons que pour toute échelle compatible  $S \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ ,  $\Sigma(\nu_{E'S}(\omega')) \geq m$ . Puisque, par hypothèse,  $m > (n-1).p$ , nous obtenons finalement que pour toute échelle compatible  $S \in \mathbb{S}_E^{(p)}$ ,  $\Sigma(\nu_{E'S}(\omega')) \geq \Sigma(\nu_{E'S}(\omega))$ . Par définition, nous obtenons finalement que  $\omega'$  n'est pas modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu(E \sqcup B_i^m))$ . ■

La raison principale de la non-satisfaction du postulat de majorité par  $\blacktriangle_{\Sigma}^\mu(E)$  provient du fait que les poids associés aux formules par les échelles compatibles ne sont pas bornés. Une fois de plus, supposons que  $B_1$  contienne  $\varphi$  et  $B_2$  contienne  $\neg\varphi$ . Puisque les poids associés aux formules par les échelles compatibles ne sont pas bornés, alors même si  $B_1$  est répétée  $m$  fois, il est toujours possible de trouver une échelle compatible qui associe un poids suffisamment grand à  $\neg\varphi$  tel que cela empêche l'inférence de  $\varphi$  par le résultat de la fusion. Cela explique que lorsque les poids associés par les échelles sont bornés,  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$  satisfait **(MAJ)** là où les autres opérateurs de fusion basés sur les échelles compatibles falsifient ce même postulat.

En complément de ce résultat, nous fournissons une caractérisation logique de  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$  en termes de postulats de rationalité par la proposition suivante :

**Proposition 33**  $\forall p \geq p_{min}$ ,  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$  satisfait **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2\*)**, **(IC3\*)**, **(IC5)** et **(IC7)**.

**Preuve** Remarquons que l'hypothèse  $p \geq p_{min}$  assure juste que  $S_E^{(p)} \neq \emptyset$ . Tant que cette condition est respectée, la valeur de  $p$  n'influe pas sur ce qui suit.

- **(IC0)** La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- **(IC1)** La preuve de la satisfaction de ce postulat par  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$  est la même que celle donnée pour  $\Delta_{Max}^\mu$  par la Démonstration 4.2.2.
- **(IC2\*)** Montrons d'abord que si  $\omega$  est modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  est également modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu(E))$ . Pour cela, supposons que  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  soit cohérent. Ainsi, nous savons qu'il existe  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ . Par nature, nous savons que pour chaque base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ ,  $\kappa_{B_i}(\omega) = 0$ . Ainsi, par définition, pour chaque échelle compatible  $S \in S_E^s$ , le profil associé à  $\omega$  est tel que

$\nu_{ES}(\omega) = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . En d'autres termes, pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in S_E^s$ , nous avons  $\Sigma(\nu_{ES}) = 0$ . Par définition,  $\omega$  est minimale pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^E$ .

Montrons maintenant que si  $\omega$  n'est pas modèle de  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$ , alors  $\omega$  n'est pas non plus modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu(E))$ . Soit  $\omega'$  une interprétation de  $\Omega$  qui ne soit pas modèle d'au moins une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$ . Ainsi, nous savons par définition qu'il existe au moins une base de croyances  $B_i$  issue de  $E$  telle que  $k_{B_i}(\omega') > 0$ . Ainsi, par définition, nous obtenons que pour chaque échelle compatible  $\mathcal{S} \in S_E^{(p)}$ ,  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega')) > 0$ . Puisque  $\bigwedge_{B_i \in E} (B_i^*) \wedge \mu$  est cohérent, nous savons qu'il existe une  $\omega$  interprétation de  $\Omega$  telle que  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega)) = 0$ . Par définition,  $\omega'$  n'est pas minimale pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^E$ .

- **(IC3\*)** Puisque, par hypothèse,  $E_1 \equiv_R E_2$ , nous savons alors que  $\mathbb{S}_{E_1} \equiv \mathbb{S}_{E_2}$ . En particulier, nous obtenons également  $S_{E_1}^{(p)} \equiv S_{E_2}^{(p)}$ . Ainsi, par définition, nous obtenons que pour toutes interprétations  $\omega$  et  $\omega'$  modèles de  $\mu_1$  et de  $\mu_2$ ,  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^{E_1} \omega'$  ssi  $\omega \triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^{E_2} \omega'$ . Ainsi, puisque  $\mu_1 \equiv \mu_2$ , nous obtenons ainsi  $Min(Mod(\mu_1), \triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^{E_1}) \equiv Min(Mod(\mu_2), \triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^{E_2})$ . De là, par définition, nous obtenons finalement  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu_1}(\{E_1\})) \equiv Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu_2}(\{E_2\}))$ .
- **(IC5)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu$  telle que  $\omega \not\models Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu(E)(E_1 \sqcup E_2))$ . Ainsi, en considérant la contraposée de la Proposition 5, nous obtenons  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_{E_1 \sqcup E_2}^{(p)}$ ,  $\omega \notin Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E_1^{\mathcal{S}} \sqcup E_2^{\mathcal{S}}))$ . Puisque  $\Delta_\Sigma^\mu$  satisfait le postulat de rationalité **(IC5)**, nous obtenons que pour toute échelle compatible  $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_{E_1 \sqcup E_2}^{(p)}$ ,  $\omega \notin Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E_1^{\mathcal{S}}))$  ou  $\omega \notin Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E_2^{\mathcal{S}}))$ . De part la définition de  $\mathbb{S}_E$ , nous obtenons  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_{E_1}^{(p)}$ ,  $\omega \notin Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E_1^{\mathcal{S}}))$  ou  $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_{E_2}^{(p)}$ ,  $\omega \notin Bel(\Delta_\Sigma^\mu(E_2^{\mathcal{S}}))$ . De cette façon,  $\omega$  n'est pas une interprétation modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu(E_1)) \wedge Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu(E_2))$ .
- **(IC7)** Soit  $\omega$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $\mu_2$  et de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu_1}(E))$ . Ainsi, par définition, nous savons que  $\omega$  est un modèle de  $\mu_2$  et de  $\mu_1$  minimal pour  $\triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^E$ . À nouveau par définition, nous obtenons que  $\Omega$  est une interprétation modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu_1 \wedge \mu_2}(E))$ . ■

Cependant, à l'inverse de l'opérateur de fusion incommensurable  $\blacktriangle_{\Sigma}^\mu$  présenté par le chapitre précédent,  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^\mu$  falsifie également **(IC4\*)**, comme le montre le contre-exemple suivant :

**Exemple 39** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{(b, 2), (a, 1)\}$  et  $B_2 = \{(a, 2), (\neg b, 1)\}$ . Supposons que  $\mu = a \vee b$ . Considérons, sur cet exemple,  $p = 2$ . En d'autres termes, 2 est le poids maximal qu'une échelle compatible peut associer à une formule. Ainsi, sur cet exemple et pour  $p = 2$ , l'unique échelle compatible possible  $\mathcal{S}$  est obtenue en conservant les poids initialement fournis pour chaque formule. Plus

formellement,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{Id}$ . Par définition l'échelle  $\mathcal{S}$  est compatible.

	a	b	$\kappa_{B_1^{\mathcal{S}}}(\omega)$	$\kappa_{B_2^{\mathcal{S}}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}}}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{E^{\mathcal{S}}}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	2	2	$\langle 2,2 \rangle$	4
$\omega_1$	0	1	1	2	$\langle 1,2 \rangle$	3
$\omega_2$	1	0	2	0	$\langle 2,0 \rangle$	2
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle 0,1 \rangle$	1

TABLE 6.16 – Un contre-exemple pour **(IC4\*)**

Sur cet exemple,  $B_1 \models \mu$  et  $B_2 \models \mu$ . Le Tableau 6.16 nous montre que  $\text{Mod}(\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p)}}^{\mu}(E)) = \{\omega_3\}$ . Nous obtenons donc  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p)}}^{\mu}(E) \equiv a \wedge b$ . Ainsi, sur cet exemple, est falsifié puisque  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p)}}^{\mu}(\{B_1, B_2\}) \wedge B_1^*$  est cohérent, alors que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p)}}^{\mu}(\{B_1, B_2\}) \wedge B_2^*$  ne l'est pas.

Finalement, le contre-exemple suivant nous montre que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p)}}^{\mu}$  falsifie **(MI)** et **(CSS)** :

**Exemple 40** Considérons les multi-ensembles de bases de croyances pondérées  $E_1 = \{B_1, B_2\}$  et  $E_2 = \{B_1, B_2, B_2\}$ , avec  $B_1 = \{(a, 7)\}$  et  $B_2 = \{(-a, 3)\}$ . Supposons que  $\mu \equiv \top$ . Considérons, pour cet exemple, que  $p = 1$ . Autrement dit, 1 est le poids maximal qu'une échelle compatible peut associer à une formule de  $E$ . Ainsi, sur cet exemple et pour  $p = 1$ , l'unique échelle compatible possible  $\mathcal{S}$  est obtenue en conservant les poids initialement fournis pour chaque formule. Plus formellement,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{Id}$ . Par définition l'échelle  $\mathcal{S}$  est compatible.

	a	b	$\kappa_{B_1^{\mathcal{S}}}(\omega)$	$\kappa_{B_2^{\mathcal{S}}}(\omega)$	$\nu_{E_1^{\mathcal{S}}}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{E_1^{\mathcal{S}}}(\omega))$	$\Sigma(\nu_{E_2^{\mathcal{S}}}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	1	0	$\langle 1,0 \rangle$	1	1
$\omega_1$	0	1	1	0	$\langle 1,0 \rangle$	1	1
$\omega_2$	1	0	0	1	$\langle 0,1 \rangle$	1	2
$\omega_3$	1	1	0	1	$\langle 0,1 \rangle$	1	2

TABLE 6.17 – Un contre-exemple pour **(MAJ)** et **(CSS)**

Sur cet exemple, le Tableau 6.17 nous montre que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(1)}}^{\mu}(\{B_1, B_2\}) \equiv \top$ , mais aussi que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(1)}}^{\mu}(\{B_1, B_2, B_2\}) \equiv \neg a$ . Ainsi, sur cet exemple, **(MI)** est falsifié puisque la répétition de la base de croyances pondérées  $B_2$  affecte le résultat de la fusion par  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p)}}^{\mu}$ . Ceci fournit également un contre-exemple pour **(CSS)**, puisque bien que  $B_1^* \models \mu$   $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}^{(1)}}^{\mu}(\{B_1, B_2, B_2\}) \wedge B_1^*$  n'est pas cohérent.

Finalement, le tableau suivant expose les divergences, en termes de comportement rationnel, que présente l'opérateur de fusion basé sur la somme dans le cadre commensurable, incommensurable, ainsi que dans celui des échelles bornées :

	(IC4*)	(IC6)	(IC6')	(IC8)	(MAJ)	(MI)	(CSS)
$\Delta_{\Sigma}^{\mu}$	-	√	√	√	√	-	-
$\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$	√	-	-	-	-	√	√
$\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}$	-	-	-	-	√	-	-

TABLE 6.18 – Une synthèse des divergences logiques entre  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$ ,  $\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$  et  $\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}$

## 6.5 Choisir une échelle compatible unique

Nous avons précédemment montré que les approches de la fusion existantes n'étaient pas adaptées à la fusion de croyances pondérées incommensurables. En effet, ces approches manipulent les poids tels qu'ils sont initialement exprimés par les sources, et ne sont donc pas en mesure de satisfaire le postulat d'équité. Face à la fusion de croyances pondérées incommensurables, une approche intuitive consiste alors à associer de nouveaux poids aux croyances exprimées par les différentes sources, de telle sorte que le postulat d'équité soit satisfait. Cette section se focalise donc sur le choix d'une seule et unique échelle compatible dans le but d'obtenir un opérateur de fusion, basé uniquement sur la considération de cette échelle compatible, respectant l'intégralité des postulats de rationalité proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion sous contrainte. Pour cela, nous adaptons l'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées basé sur la somme à la considération d'une seule et unique échelle compatible  $\mathcal{S}$ , que nous notons  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$ . Lorsqu'il est appliqué à la fusion d'un multi-ensemble de sources  $E$ , cet opérateur se définit à partir de  $\triangleleft_{\Sigma}^{E, \mathcal{S}}$ , l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  sur lequel repose l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme considérant le multi-ensemble  $E$  auquel est appliqué l'échelle  $\mathcal{S}$ . Plus formellement :

**Définition 46** Soit  $E$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, et  $\mathcal{S}$  une échelle compatible possible pour  $E$ . Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Alors :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, \mathcal{S}}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E, \mathcal{S}} \omega',$$

Les modèles des croyances préférées issues de  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}(E)$  sont les interprétations modèles de la contrainte d'intégrité  $\mu$  minimales pour  $\triangleleft_{\Sigma, \mathcal{S}}^E$ , soit formellement :

$$\text{Mod}(\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}(E))) = \text{Min}(\text{Mod}(\mu), \triangleleft_{\Sigma, \mathcal{S}}^E)$$

Cette stratégie de fusion basée sur la considération d'une échelle unique constitue également, par nature, une approche possible pour traiter de problème d'incommensurabilité des bases de croyances pondérées à fusionner. Nous avons montré que dans le cadre commensurable,  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$  satisfait la plupart de ces postulats de rationalité proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion contrainte, à l'exception de **(IC4\*)**. Une question naturelle se pose alors : est-il possible de proposer une seule et unique échelle compatible, telle que restreint à la seule considération de cette compatible, l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme satisfait **(IC4\*)** ? Le postulat **(IC4\*)** capture le fait que lors de la fusion de bases de croyances deux à deux, aucune priorité ne saurait être donnée à l'une des deux bases considérées. Nous savons que  $\Delta_{\Sigma}^{\mu}$  falsifie ce postulat de part l'importance accordée aux poids tels qu'il sont exprimés initialement par chaque source. Afin de restaurer la satisfaction de ce postulat, une stratégie naturelle consisterait à proposer une *harmonisation*, ou *normalisation*, des poids respectivement associés aux formules par chaque source. En effet, l'intuition sous-jacente de cette idée est que si ces mêmes poids deviennent *équilibrés* d'une source à l'autre, alors aucune priorité ne saurait être donnée à une source en particulier lorsque ces poids sont manipulés, comparés ou sommés. Dans ce sens, nous montrons que dans un cas très particulier, il est possible de restaurer **(IC4\*)** et **(CSS)** au moyen d'une seule et unique échelle compatible, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 34** *Soit  $E = \{B_1, B_2\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, tel que  $B_1 = \{(\varphi, R_{B_1}(\varphi))\}$  et  $B_2 = \{(\varphi', R_{B_2}(\varphi'))\}$ . Soit encore  $\mathcal{S}$  une échelle compatible possible pour  $E$ . Alors :*

$$\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu} \text{ satisfait } (\mathbf{IC4}^*) \text{ et } (\mathbf{CSS}) \text{ ssi } \mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi').$$

**Preuve** *Soit  $E = \{B_1, B_2\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées, tel que  $B_1 = (\varphi, R_{B_1}(\varphi))$  et  $B_2 = (\varphi', R_{B_2}(\varphi'))$ . Soit encore  $\mathcal{S}$  une échelle compatible possible pour  $E$ . Supposons que  $B_1^* \wedge B_2^*$  ne soit pas cohérent. Supposons également que  $B_1^* \models \mu$  et que  $B_2^* \models \mu$ .*

*Montrons d'abord que si  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  satisfait  $(\mathbf{IC4}^*)$ , alors  $\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi')$ . Procédons, pour cela, par contraposition et supposons que  $\mathcal{S}(\varphi) \neq \mathcal{S}(\varphi')$ . Soit  $\omega_1$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $B_1^*$ , et soit  $\omega_2$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $B_2^*$ . Ainsi, nous savons que par définition,  $\kappa_{B_1}(\omega_1) = 0$  et  $\kappa_{B_2}(\omega_2) = 0$ . Puisque par hypothèse,  $B_1^* \wedge B_2^*$  n'est pas cohérent, nous savons que  $\omega_1 \not\models B_2^*$ , ainsi que  $\omega_2 \not\models B_1^*$ . Ainsi, nous obtenons  $\kappa_{B_1}(\omega_2) = \mathcal{S}(\varphi)$  et  $\kappa_{B_2}(\omega_1) = \mathcal{S}(\varphi')$ . Puisque, par hypothèse,  $\mathcal{S}(\varphi) \neq \mathcal{S}(\varphi')$ , nous obtenons alors  $\Sigma(\nu_{ES}(\omega_1)) \neq \Sigma(\nu_{ES}(\omega_2))$ . En d'autres termes, soit  $\omega_1$  est préférée à  $\omega_2$ , soit  $\omega_2$  est préférée à  $\omega_1$ . Ainsi, nous obtenons finalement que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  ne satisfait pas  $(\mathbf{IC4}^*)$ .*

*Montrons maintenant que si  $\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}(\varphi')$ , alors  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  satisfait  $(\mathbf{IC4}^*)$ . Pour cela, procédons par contraposition, et supposons que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  ne satisfait pas  $(\mathbf{IC4}^*)$ . Ainsi, il existe un modèle de  $B_1$  qui soit également modèle de  $\text{Bel}(\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}(E))$ , là où aucun des modèle de  $B_2$  n'est modèle*



de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}(E))$ . Soit  $\omega_1$  une interprétation de  $\Omega$  qui soit également modèle de  $B_1^*$ , telle que  $\omega_1 \models Bel(\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}(E))$ , et soit  $\omega_2$  une interprétation de  $\Omega$  modèle de  $B_2^*$  qui ne soit pas modèle de  $Bel(\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}(E))$  (l'autre cas est symétrique). Par définition,  $\kappa_{B_1}(\omega_1) = 0$  et  $\kappa_{B_2}(\omega_2) = 0$ . Par hypothèse, nous savons que  $\omega_1 \not\models B_2^*$  et  $\omega_2 \not\models B_1^*$ . Nous obtenons ainsi  $\kappa_{B_1}(\omega_2) = \mathcal{S}(\varphi)$  et  $\kappa_{B_2}(\omega_1) = \mathcal{S}(\varphi')$ . Puisque par hypothèse,  $\Sigma(\nu_{E^S}(\omega_1)) < \Sigma(\nu_{E^S}(\omega_2))$ , nous obtenons finalement  $\mathcal{S}(\varphi) \neq \mathcal{S}(\varphi')$ . ■

En d'autres termes, quand les bases de croyances pondérées à fusionner sont constituées d'exactly une seule formule, une échelle compatible associant les mêmes poids à chacune de ces formules permet à un opérateur de fusion, basé sur la somme et considérant uniquement une seule échelle compatible, de respecter **(IC4\*)** et **(CSS)**. Cependant, nous montrons également qu'en général, il n'est pas possible de généraliser ce résultat. En effet, il n'est pas toujours possible de déterminer une seule et unique échelle compatible telle que restreint à la seule considération de celle-ci, un opérateur de fusion basé sur la somme satisfait toujours **(IC4\*)** ou **(CSS)**, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 35 (d'impossibilité)** *Il n'existe pas d'unique échelle compatible telle que restreint à la considération de celle-ci,  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  satisfait toujours **(IC4\*)** ou **(CSS)**. Plus formellement :*

$$\neg(\forall E, \exists \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E : \blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu} \text{ satisfait } (\mathbf{IC4}^*) \text{ ou } (\mathbf{CSS})).$$

**Preuve** La démonstration de cette proposition est obtenue en considérant le contre-exemple

suivant. Soit  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées tel que  $B_1 = \{(a \wedge b, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(-a, 1)\}$ , et  $B_3 = \{(a, 2), (-b, 1)\}$ .

Supposons que  $\mu \equiv \top$ , et construisons une échelle compatible  $\mathcal{S}$  telle que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  satisfait **(IC4\*)**. Par hypothèse,  $B_1 \models \mu$ ,  $B_2 \models \mu$  et  $B_3 \models \mu$ .

Considérons, dans un premier temps, les bases de croyances  $B_1$  et  $B_2$ . D'après la Proposition 34, nous savons que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  satisfait **(IC4\*)** lors de la fusion de  $B_1$  et  $B_2$ , si et seulement si  $R_{B_1^S}(a \wedge c) = R_{B_2^S}(-a) = \alpha$  (i). Posons également  $R_{B_3^S}(a) = \beta_1$  et  $R_{B_3^S}(-b) = \beta_2$ . Puisque  $\mathcal{S}$  doit être compatible, nous devons obtenir  $\beta_1 > \beta_2$ .

Considérons à présent les bases de croyances  $B_2$  et  $B_3$ . Quatre interprétations sont alors envisageables. Le Tableau 6.19 présente les profils qui leur sont associés :

	a	b	$\nu_{\{B_2^S, B_3^S\}}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{\{B_2^S, B_3^S\}}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle 0, \beta_1 \rangle$	$\beta_1$
$\omega_1$	0	1	$\langle 0, \beta_1 \rangle$	$\beta_1$
$\omega_2$	1	0	$\langle \alpha, 0 \rangle$	$\alpha$
$\omega_3$	1	1	$\langle \alpha, \beta_2 \rangle$	$\alpha + \beta_2$

TABLE 6.19 – Concernant la fusion de  $B_2$  et de  $B_3$ 

Remarquons que  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont modèle de  $B_2$ , tandis que  $\omega_2$  est modèle de  $B_3$ . Puisque  $\mathcal{S}$  doit permettre de satisfaire (IC4\*), deux cas sont envisageables :

1. soit le résultat de la fusion n'est cohérent ni avec  $B_2$ , ni avec  $B_3$ . Dans ce cas, la seule possibilité est de ne sélectionner que  $\omega_3$ . Cette situation est impossible, puisque d'après le Tableau 6.19,  $\omega_2$  est préférée à  $\omega_3$  quelques soient les poids associés aux croyances issues de  $B_2$  et  $B_3$  ;
2. soit le résultat de la fusion est cohérent à la fois avec  $B_2$  et  $B_3$ . Dans ce cas, au moins un modèle de chacune des ces bases doit être sélectionné. Ainsi, les interprétations préférées doivent être  $\omega_2$ , et  $\omega_0$  ou  $\omega_1$ . Pour cela, le Tableau 6.19 montre que la seule solution est de poser  $\beta_1 = \alpha$  (ii).

Considérons à présent les bases de croyances  $B_1$  et  $B_3$ . Le Tableau 6.20 présente les profils associés au quatre interprétations possibles :

	a	b	$\nu_{\{B_1^S, B_3^S\}}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{\{B_1^S, B_3^S\}}(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle \alpha, \beta_1 \rangle$	$\alpha + \beta_1$
$\omega_1$	0	1	$\langle \alpha, \beta_1 \rangle$	$\alpha + \beta_1$
$\omega_2$	1	0	$\langle \alpha, 0 \rangle$	$\alpha$
$\omega_3$	1	1	$\langle 0, \beta_2 \rangle$	$\beta_2$

TABLE 6.20 – Concernant la fusion de  $B_1$  et de  $B_3$ 

Remarquons que  $\omega_3$  est modèle de  $B_1$ , tandis que  $\omega_2$  est modèle de  $B_3$ . Puisque  $\mathcal{S}$  doit permettre de satisfaire (IC4\*), deux cas sont à nouveau envisageables :

1. soit le résultat de la fusion n'est cohérent ni avec  $B_1$ , ni avec  $B_3$ . Dans ce cas,  $\omega_0$  ou  $\omega_1$  pourraient être les interprétations préférées. Cependant, cette situation est impossible, puisque d'après le Tableau 6.20,  $\omega_2$  est préférée à  $\omega_0$  et à  $\omega_1$  quelques soient les poids associés aux croyances issues de  $B_1$  et  $B_3$  ;

2. soit le résultat de la fusion est cohérent à la fois avec  $B_1$  et  $B_3$ . Dans ce cas, au moins un modèle de chacune des ces bases doit être sélectionné. Ainsi, les interprétations préférées doivent être  $\omega_2$  et  $\omega_3$ . Pour cela, le Tableau 6.20 montre que la seule solution est de poser  $\beta_2 = \alpha$  (iii).

En considérant (i), (ii) et (iii), nous obtenons  $\beta_1 = \beta_2 = \alpha$ . Ceci nous montre que pour satisfaire  $(IC4^*)$ , la seule possibilité est de construire  $\mathcal{S}$  telle que  $R_{B_3^{\mathcal{S}}}(a) = R_{B_3^{\mathcal{S}}}(\neg b)$ . Or, de cette façon,  $\mathcal{S}$  n'est pas une échelle compatible, puisque par hypothèse,  $R_{B_3}(a) > R_{B_3}(\neg b)$ . Ainsi, sur cet exemple, il n'est pas possible de construire une échelle compatible pour  $E$ , telle que  $\blacktriangle_{\Sigma, \mathcal{S}}^{\mu}$  satisfait  $(IC4^*)$ . En particulier, puisqu'il n'est pas possible de satisfaire  $(IC4^*)$ , il n'est pas possible de satisfaire  $(CSS)$ , qui constitue une version plus forte de celui-ci. ■

## 6.6 Synthèse du chapitre

Nous avons d'abord analysé, dans ce chapitre, la restriction de la fusion incommensurable, basée sur la somme, à certains sous-ensembles d'échelles compatibles particuliers. Pour cela, nous avons étudié différentes hypothèses concernant la commensurabilités des sources, inspirées du domaine de la théorie du choix social. En effet, nous avons montré que même s'il n'est pas possible de comparer directement les poids exprimés d'une source à l'autre, il est possible de tenir compte de certaines notions reliant les poids issus d'une même base de croyances. Nous avons ainsi proposé, dans ce chapitre, des opérateurs de fusion incommensurable permettant de tenir compte tout à la fois de l'homogénéité, de la linéarité, ou encore de l'intensité des poids issus d'une même base de croyances.

Nous avons montré, dans un premier temps, que la restriction de l'opérateur de fusion incommensurable, basé sur la somme et présenté par le chapitre précédent, à la classe des échelles affines, puis à la classe des échelles linéaires, ne permet pas de dériver plus de conclusions que lorsque l'ensemble des échelles compatibles sont prises en compte. Nous avons ensuite présenté la classe des échelles compatibles translatives. Cette classe permet, en particulier, de conserver les distances exprimées entre les poids issus d'une même base de croyances. Nous avons ensuite montré que les résultats, fournis par cette approche, diffèrent de ceux obtenus dans le cadre commensurable, ou de ceux obtenus lorsque toutes les échelles compatibles sont considérées. En particulier, une des principales contributions de ce chapitre réside dans la proposition d'une caractérisation de l'opérateur basé sur cette classe d'échelles. Ce critère repose sur l'agrégation des poids tels qu'ils sont exprimés initialement par chaque base, tout en prenant en compte la cohérence des interprétations possibles avec chaque base de croyances considérée. De plus, nous montrons, dans le chapitre suivant, que cette caractérisation permet de dériver des conclusions différentes de celles obtenues dans le cadre commensurable, ou encore de celles fournies lorsque toutes les échelles compatibles sont prises en compte. Nous avons également montré que cette approche constitue

alors une approche de consensus, bien qu'il ne s'agisse ni d'une approche majoritaire, ni d'une approche égalitaire.

Nous avons ensuite étudié la classe des échelles bornées. Les échelles issues de cette classe associent de nouveaux poids aux croyances, ne pouvant dépasser une certaine valeur fixée. En particulier, nous avons montré que cette classe permet, dans le cadre égalitaire, de caractériser le résultat obtenu lorsque l'ensemble des échelles compatibles sont considérées. De plus, une des contributions de ce chapitre réside dans le fait d'avoir montré qu'à l'inverse, dans le cadre utilitaire, restreindre l'approche proposée à la seule considération de ces échelles permet de restaurer la satisfaction du postulat de majorité.

Nous avons finalement étudié la restriction de l'approche de la fusion incommensurable, basée sur la somme, à la considération d'une seule et unique échelle compatible. Une des contributions de ce chapitre réside dans le fait d'avoir alors montré que de cette façon, il n'est pas possible de proposer la construction d'une échelle compatible particulière, telle que l'opérateur associé soit en mesure de satisfaire les postulats d'équité ou de consensus.

Le chapitre suivant propose une analyse, en termes de relation d'inférence, des différents opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées abordés dans ce mémoire de thèse, selon deux aspects distincts : prudence et comportement rationnel.

## Chapitre 7

# Une étude comparative

Cette section fournit une étude comparative, en matière de productivité, ainsi qu'en termes de postulats de rationalité, des différents opérateurs de fusion présentés tout au long de notre étude. Nous montrons ainsi qu'en général les opérateurs que nous proposons, pour la fusion incommensurable, sont plus prudents que les opérateurs rappelés pour la fusion commensurable. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque de manière intuitive, les opérateurs commensurables constituent une restriction des opérateurs de fusion incommensurable qui les étendent. En effet, ces opérateurs, d'une certaine façon, ne prennent en compte qu'une seule échelle compatible pour établir une correspondance entre les poids exprimés par les différentes sources.

Nous montrons également, dans ce chapitre, que la prise en compte de certaines hypothèses particulières sur la commensurabilité des sources permet de dériver plus de conclusions que lorsque l'ensemble des échelles compatibles sont prises en compte. En particulier, la classe des échelles translatives fournit un comportement intermédiaire, en matière de productivité, entre la considération de toutes les échelles compatibles, et la prise en compte des poids tels qu'ils sont initialement exprimés par les sources. Nous montrons également que les échelles bornées, utilisées afin d'étendre l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme, permet d'obtenir des conclusions parfois totalement différentes de celles fournies par l'opérateur sur lequel elles reposent, tout en restant plus productives que les approches basées sur l'intégralité des échelles compatibles. Ce chapitre présente également une discussion, en termes de postulats logiques, sur le comportement rationnel adopté par les différents opérateurs de fusion de croyances pondérées abordés.

Nous relient, dans un premier temps, les approches égalitaires et utilitaires reposant sur la totalité des échelles compatibles possibles.

## 7.1 Relation entre approche égalitaire et utilitaire dans le cadre incommensurable

Considérons, dans un premier temps, les opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées incommensurables, basés sur la somme et sur le maximum, se reposant sur l'intégralité des échelles compatibles. Nous avons montré que l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$ , sur lequel repose l'opérateur basé sur le maximum (Définition 24), peut se caractériser au moyen du critère SMP (Définition 28). Nous avons ensuite montré que, de façon similaire, l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  sur lequel repose l'opérateur basé sur la somme (Définition 30) peut se caractériser au moyen du critère de Pareto (Définition 31). Or, l'ordre basé sur le critère SMP diffère par définition de celui basé sur le critère de Pareto. En particulier, la proposition suivante nous montre que si une interprétation  $\omega$  est SMP-préférée à une autre interprétation  $\omega'$ , alors  $\omega$  est également Pareto-préférée à  $\omega'$ . Plus formellement :

**Proposition 36** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \prec_{SMP}^E \omega' \text{ alors } \omega \prec_{Par}^E \omega'$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega, \omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Procédons par contraposition, et supposons que  $\omega \not\prec_{Par}^E \omega'$ . Par définition :

1. soit  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega')$ . Dans ce cas, deux cas sont envisageables :
  - soit  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega') = 0$  et dans ce cas, par définition,  $\omega \not\prec_{SMP}^E \omega'$  ;
  - soit  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$  et dans ce cas, puisque  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$ , par définition,  $\omega \not\prec_{SMP}^E \omega'$  ;
2. soit  $\exists i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$  et à nouveau, par définition,  $\omega \not\prec_{SMP}^E \omega'$ .

■

L'inverse est généralement faux, comme l'illustre le contre-exemple suivant :

**Exemple 41** Considérons l'ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$  tel que  $B_1 = \{(a, 8), (\neg b, 4)\}$  et  $B_2 = \{(b, 2), (\neg a, 1)\}$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	8	2	$\langle 8,2 \rangle$
$\omega_1$	0	1	8	0	$\langle 8,0 \rangle$
$\omega_2$	1	0	0	2	$\langle 0,2 \rangle$
$\omega_3$	1	1	4	1	$\langle 4,1 \rangle$

TABLE 7.1 – Un exemple de divergence entre  $\triangleleft_{SMP}$  et  $\triangleleft_{Par}$ 

Le Tableau 7.1 nous montre, dans un premier temps, que l'ordre basé sur le critère SMP est seulement défini par  $\omega_3 \triangleleft_{SMP}^E \omega_0$ , tandis que celui basé sur le critère de Pareto est défini par  $\omega_1 \triangleleft_{Par}^E \omega_0$ ,  $\omega_2 \triangleleft_{Par}^E \omega_0$  et  $\omega_3 \triangleleft_{Par}^E \omega_0$ . Plus particulièrement, le Tableau 7.1 nous montre, par exemple, que  $\omega_1$  est Pareto-préférée à  $\omega_0$ , mais ne lui est pas SMP-préférée. La raison principale est que la base de croyances pondérées  $B_1$  n'exprime pas de préférence stricte entre ces deux interprétations, puisque ces dernières falsifient toutes deux la croyance la plus forte exprimée par cette base.

Plus généralement, l'ordre sur les interprétations de  $\Omega$  basé sur le critère de Pareto constitue un raffinement de celui basé sur le critère SMP. Par corollaire, les équivalences avec les opérateurs de fusion incommensurables respectifs nous permettent alors d'obtenir directement la relation suivante :

**Proposition 37** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'.$$

Remarquons que dans le cadre commensurable, les conclusions dérivées par les opérateurs, respectivement basés sur la somme et sur le maximum, sont la plupart du temps disjoints.

Nous avons vu que les approches de la fusion incommensurable, basés sur l'ensemble des échelles compatibles, et étendant les opérateurs basés sur la somme et sur le maximum, sont respectivement équivalentes au critère de Pareto et à un autre très similaire, le critère SMP. Il existe également, cependant, une autre relation, permettant de comparer les interprétations vis-à-vis de leur profil respectif, appelée critère de Pareto strict, et défini de la façon suivante :

**Définition 47** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ .  $\omega$  est strictement Pareto préférée à  $\omega'$ , noté  $\omega \triangleleft_{SP}^E \omega'$  si et seulement si :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega').$$

Les opérateurs de fusion étendant, au moyen de la notion d'échelle compatible, les opérateurs de fusion basés sur la somme et sur le maximum, constituent donc des approches assez prudentes

face à la présence de bases de croyances incommensurables. Nous montrons, cependant, que ces opérateurs, lorsqu'il s'agit d'identifier les interprétations préférées, ne sont pas plus prudentes que lorsque les interprétations sont ordonnées au moyen du critère de Pareto strict. Formellement :

**Proposition 38** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{SP}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$$

**Preuve** La preuve de cette proposition est directe. En effet, soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega, \omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Supposons que  $\omega \triangleleft_{SP}^E \omega'$ . Nous obtenons, par définition,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$ . Ainsi, par définition de  $\triangleleft_{SMP}$ , nous obtenons directement que  $\omega \triangleleft_{SMP}^E \omega'$ . Par équivalence, nous obtenons alors  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ . ■

La réciproque est en général fautive, comme nous l'illustrons par le contre-exemple suivant :

**Exemple 42** Considérons le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2\}$  tel que  $B_1 = \{(\neg a \vee \neg b, 2), (\neg a, 1)\}$  et  $B_2 = \{(a \vee b, 4), (a, 2)\}$ .

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
$\omega_0$	0	0	0	4	$\langle 0, 4 \rangle$
$\omega_1$	0	1	0	2	$\langle 0, 2 \rangle$
$\omega_2$	1	0	1	0	$\langle 1, 0 \rangle$
$\omega_3$	1	1	2	0	$\langle 2, 0 \rangle$

TABLE 7.2 – Un exemple de divergence entre  $\triangleleft_{SP}$  et  $\triangleleft_{SMP}$

D'après le Tableau 7.2, nous obtenons  $\omega_1 \triangleleft_{SMP} \omega_0$  et  $\omega_2 \triangleleft_{SMP} \omega_3$ . Ainsi, les interprétations préférées selon le critère  $\triangleleft_{SMP}$  sont  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . À l'inverse, toutes ces interprétations sont incomparables suivant le critère  $\triangleleft_{SP}$  puisque qu'aucune de ces interprétations n'est strictement préférée à une autre, selon  $B_1$  et  $B_2$  conjointement.

Finalement, chacune des deux approches proposées pour la fusion incommensurables, basées sur la considération de la totalité des échelles compatibles, sont naturellement plus prudentes que les opérateurs de fusion commensurable qu'elles étendent. Formellement :

**Proposition 39** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{SP}^E \omega'$$



**Proposition 40** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'.$$

---

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega, \omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Les preuves de ces propositions sont immédiates.

En effet, procédons par contraposition, et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$  (resp.  $\omega \not\triangleleft_{Max}^E \omega'$ ). Nous obtenons alors qu'il existe une échelle compatible, ici l'échelle compatible identitaire  $\mathcal{S}_{Id}$ , telle que  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^{E_{\mathcal{S}_{Id}}} \omega'$  (resp.  $\omega \triangleleft_{Max}^{E_{\mathcal{S}_{Id}}} \omega'$ ). Ainsi, nous obtenons directement, par définition, que  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$  (resp.  $\omega \triangleleft_{Max}^E \omega'$ ). ■

---

Ces résultats sont attendus, puisque d'une certaine manière, supposer que les poids initiaux sont commensurables d'une source à l'autre équivaut à prendre en compte une seule et unique échelle compatible. Les résultats alors obtenus sont naturellement plus arbitraires que ceux fournis par une approche reposant sur l'intégralité des échelles compatibles possibles. Les résultats obtenus, en considérant cette seule échelle compatible, se retrouvent néanmoins dans les conclusions dérivées de la considération de toutes les échelles compatibles.

Remarquons finalement que l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme et l'opérateur de fusion commensurable basé sur le maximum sont également liés, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 41** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{Max}^E \omega'.$$

---

**Preuve** Considérons un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ . Procédons par contraposition, et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{Max}^E \omega'$ . Par définition de l'opérateur d'agrégation max, nous obtenons  $\exists B_i \in E, \kappa_{B_i}(\omega) \not\prec \kappa_{B_i}(\omega')$ . Par définition de  $\triangleleft_{Par}^E$ , nous obtenons alors  $\omega \triangleleft_{Par}^E \omega'$ . Ainsi, par équivalence, nous obtenons finalement  $\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ . ■

---

Finalement, cette première section nous a permis d'obtenir les relations suivantes, en matière de productivité, reliant les opérateurs de fusion commensurable puis incommensurable respectivement basés sur la somme et le maximum :

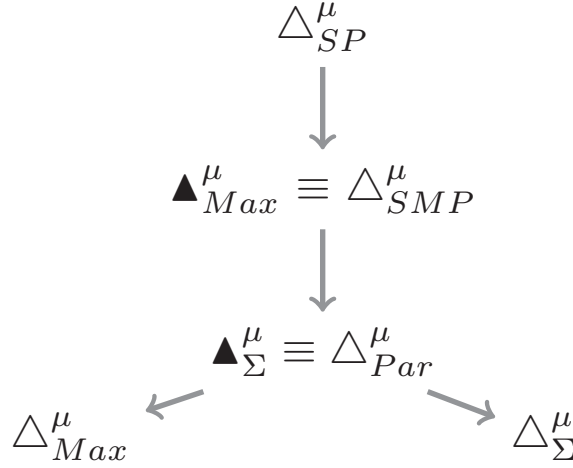


FIGURE 7.1 – Relations d'inférence discutées dans cette section

Sur cette figure,  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  représente le fait que  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$ , si  $\omega \triangleleft_1 \omega'$  alors  $\omega \triangleleft_2 \omega'$ .

## 7.2 Sur la prudence de la sélection d'échelles particulières

Nous avons montré, dans le chapitre précédent, que restreindre l'approche basée sur la somme à la seule considération des échelles affines, ou linéaires, ne permet pas d'obtenir plus de conclusions que lorsque la totalité des échelles compatibles sont considérées. Soit formellement,  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\Sigma, S^a}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\Sigma, S^l}^E \omega'.$$

Nous avons, de ce fait, restreint cette même approche à la classe des échelles compatibles translatives. Nous avons proposé une caractérisation de l'ordre induit sur les interprétations par cet opérateur, au moyen du critère  $\triangleleft_{M\Sigma}$  (Définition 41). Cette caractérisation nous permet de montrer, dans un premier temps, que les conclusions obtenues par cette approche diffèrent de celles obtenues lorsque l'ensemble des échelles compatibles sont considérées. Formellement :

**Proposition 42** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{\Sigma, S_s}^E \omega'.$$

---

**Preuve** Considérons un multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$ .

Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . La preuve de cette proposition est directe. En effet, l'opérateur de fusion  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}^{\mu}$  ne considère qu'un sous-ensemble des échelles compatibles prises en compte par  $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}$ , puisque par définition  $S^s \subset \mathbb{S}_E$ .

En effet, procédons par contraposition, et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma, S^s}^E \omega'$ . Dans ce cas, il existe une échelle compatible  $\mathcal{S} \in S^s$ , telle que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$ . Puisque  $S^s \subset \mathbb{S}_E$ , nous obtenons directement que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ . ■

Remarquons qu'en général, la réciproque est fautive, comme nous l'illustrons par le contre-exemple suivant :

**Exemple 43** Soit l'ensemble  $E = \{B_1, B_2\}$  tel que  $B_1 = \{(b, 9), (a, 8)\}$  et  $B_2 = \{(((a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b)), 8), (a, 5)\}$ .

	a	b	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$
$\omega_0$	0	0	$\langle 9, 8 \rangle$	17
$\omega_1$	0	1	$\langle 8, 5 \rangle$	13
$\omega_2$	1	0	$\langle \mathbf{9}, \mathbf{0} \rangle$	<b>9</b>
$\omega_3$	1	1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{8} \rangle$	<b>8</b>

TABLE 7.3 – Un exemple de divergence entre  $\triangleleft_{\Sigma, S^s}$  et  $\triangleleft_{\Sigma}$

D'après le Tableau 7.3, les interprétations préférées pour le critère  $\triangleleft_{M\Sigma}$  sont  $\omega_2$  et  $\omega_3$ . Cependant, en considérant le critère  $\triangleleft_{Par}$ , les interprétations préférées sont alors  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $\omega_3$ . Sur cet exemple, nous pouvons en effet remarquer que  $\omega_2 \triangleleft_{M\Sigma} \omega_1$ , puisque  $\omega_2$  est modèle de  $B_2$  alors que  $\omega_1$  n'est modèle d'aucune base, et que  $\Sigma(\nu_E(\omega_2)) < \Sigma(\nu_E(\omega_1))$ . À l'inverse,  $\omega_1 \not\triangleleft_{Par} \omega_2$  puisque  $B_1$  préfère  $\omega_1$  à  $\omega_2$ , alors que  $B_2$  préfère l'inverse.

La caractérisation, par le biais du critère  $\triangleleft_{M\Sigma}$ , nous permet également de montrer que les conclusions, obtenues au moyen des échelles translatives, sont plus prudentes que celles obtenues dans le cadre commensurable, comme l'énonce la proposition suivante :

**Proposition 43** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{\Sigma, S^s}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega'.$$

La preuve de cette proposition est immédiate, puisque comparer la somme des poids, initialement associés aux interprétations par chaque base de croyances, est une condition nécessaire, mais non suffisante, du critère  $\triangleleft_{M\Sigma}$ .

L'opérateur de fusion de bases de croyances pondérées, restreint à la seule considération des échelles bornées (Définition 45), est en général plus productif que celui basé sur l'intégralité des échelles compatibles possibles pour un multi-ensemble de sources. En effet, celui-ci ne considère qu'un sous-ensemble des échelles compatibles prises en compte par ce dernier. Formellement :

**Proposition 44** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega, \forall p > p_{min}$  :

$$\text{Si } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega' \text{ alors } \omega \triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^E \omega'.$$

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées. Soient  $\omega$  et  $\omega'$  deux interprétations de  $\Omega$ . Une fois de plus, la preuve de cette proposition est directe, puisque l'opérateur de fusion  $\triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}$  ne considère qu'un sous-ensemble des échelles compatibles prises en compte par  $\triangleleft_{\Sigma}^{\mu}$ , soit formellement  $S^{(p)} \subset \mathbb{S}_E$ .

En effet, procédons par contraposition, et supposons que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma, S^{(p)}}^E \omega'$ . Dans ce cas, il existe une échelle compatible  $S \in S^{(p)}$ , telle que  $\omega \not\triangleleft_S^E \omega'$ . Puisque  $S^{(p)} \subset \mathbb{S}_E$ , nous obtenons directement que  $\omega \not\triangleleft_{\Sigma}^E \omega'$ . ■

Plus particulièrement, le résultat obtenu à partir de la considération des échelles compatibles bornées dépend fortement de la valeur de la borne  $p$ . Par exemple, la proposition suivante nous montre que, sous certaines conditions particulières, il est possible de retrouver le résultat obtenu par l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme :

**Proposition 45** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Si  $\forall B_i \in E, |B_i| = p_{min}$ , et si  $\mathcal{S}_{Id} = \mathcal{S}_{norm}$  alors  $\forall \omega, \omega' \in \Omega$  :

$$\omega \triangleleft_{\Sigma, S^{(p_{min})}}^E \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft_{\Sigma}^E \omega',$$

avec

- $p_{min} = \max\{|B_i| : B_i \in E\}$  ;
- $|B_i|$  le nombre de poids différents exprimés par  $B_i$  ;
- $\mathcal{S}_{Id}$  l'échelle compatible obtenue en conservant les poids initiaux inchangés ;
- et  $\mathcal{S}_{norm}$  l'échelle compatible obtenue par la construction 5.

**Preuve** Soit  $E = \{B_1, \dots, B_n\}$  un multi-ensemble de bases de croyances pondérées à fusionner. Supposons que  $\forall B_i \in E, |B_i| = p_{min}$ . Supposons également que  $\mathcal{S}_{Id} = \mathcal{S}_{norm}$ . Par construction

de  $\mathcal{S}_{norm}$ , nous obtenons  $\forall B_i \in E, \forall \varphi_{ij} \in B_i, \mathcal{S}_{norm}(\varphi_{ij}) = j$  ssi  $\mathcal{S}_{Id}(\varphi_{ij}) = R_{B_i}(\varphi_{ij}) = r_j$ . Puisque nous avons supposé que  $\mathcal{S}_{Id} = \mathcal{S}_{norm}$ , nous obtenons  $\forall \varphi_{ij} \in B_i, r_j = j$ . Ainsi, nous obtenons  $\forall B_i \in E, \max\{R_{B_i}(\varphi_{ij})\} = |B_i| = p_{min}$ . De cette façon, si  $p = p_{min}$ , alors  $\mathcal{S}_{Id}$  (ou encore  $\mathcal{S}_{norm}$ ) est le seul élément de  $\mathcal{S}^{(p_{min})}$ . En d'autres termes,  $\blacktriangleleft_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p_{min})}}^E$  ne considère qu'une seule échelle compatible, conservant les poids initiaux inchangés. Ainsi, sous ces hypothèses,  $\blacktriangleleft_{\Sigma, \mathcal{S}^{(p_{min})}}^E$  est équivalent à  $\blacktriangleleft_{\Sigma}^E$ . ■

En d'autres termes, lorsque chaque base de croyances pondérées exprime exactement le même nombre de poids égal à  $p_{min}$ , et que les poids initialement exprimés par chaque base de croyances sont normalisés, le résultat de la fusion obtenu en utilisant l'opérateur basé sur la somme est le même que celui fourni en utilisant l'opérateur de fusion incommensurable restreint à la considération des échelles compatibles bornées à  $p_{min}$ . Nous illustrons cette propriété par l'exemple suivant :

**Exemple 44** *Considérons un ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ , tel que  $B_1 = \{(a, 2), (\neg b, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(a \wedge b, 2), (b, 1)\}$ , et  $B_3 = \{(\neg b, 2), (a \vee b, 1)\}$ . Sur cet exemple, nous pouvons remarquer que chaque base considérée exprime exactement deux croyances. De plus, aucune de ces bases n'emploie de poids supérieur à 2.*

*Ainsi, sur cet exemple, si la valeur maximale du poids que peut associer une échelle compatible ne peut dépasser 2, soit en d'autres termes que nous considérons l'ensemble d'échelles  $\mathcal{S}^{(2)}$ , la seule échelle compatible possible ne peut que conserver la pondération initialement fournie. De ce fait, sur cet exemple, le résultat de la fusion commensurable sera identique à celui fourni par l'opérateur de fusion incommensurable restreint à  $\mathcal{S}^{(2)}$ .*

Le contre-exemple suivant illustre le fait que les conclusions, obtenues en ne considérant que les échelles bornées, peuvent différer de celles obtenues dans le cadre commensurable :

**Exemple 45** *Soit le multi-ensemble de bases de croyances pondérées  $E = \{B_1, B_2, B_3\}$ , tel que  $B_1 = \{(a, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(a, 1)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 8)\}$ . Considérons, sur cet exemple, que  $p = 1$ . Ainsi, la seule échelle compatible  $\mathcal{S}$  possible est telle que  $B_1 = \{(a, 1)\}$ ,  $B_2 = \{(a, 1)\}$  et  $B_3 = \{(\neg a, 1)\}$ .*

	a	$\nu_E(\omega)$	$\Sigma(\nu_E(\omega))$	$\nu_{ES}(\omega)$	$\Sigma(\nu_{ES}(\omega))$
$\omega_0$	0	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	2	$\langle 1, 1, 0 \rangle$	2
$\omega_1$	1	$\langle 0, 0, 8 \rangle$	8	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	1

TABLE 7.4 – Un exemple de divergence entre  $\blacktriangleleft_{\Sigma, \mathcal{S}_E^{(p)}}$  et  $\blacktriangleleft_{\Sigma}$

Sur cet exemple, d'après le Tableau 7.4, l'interprétation préférée selon  $\triangleleft_{\Sigma}$  est  $\omega_0$ , alors que selon  $\triangleleft_{\Sigma, S_E^{(1)}}^E$ , il s'agit de  $\omega_1$ . Cela est dû au fait que l'échelle identitaire, conservant les poids d'origine inchangés, n'est pas pris en compte par  $\blacktriangle_{\Sigma, S_E^{(1)}}^{\mu}$ . En effet, sur cet exemple,  $8 > p = 1$

Remarquons que ceci arrive lorsque les poids, initialement exprimés par les sources, ne constituent pas une échelle bornée à  $p$ , et que l'ordre initialement induit sur les interprétations ne peut être induit par une échelle compatible issue de  $S_E^{(p_{min})}$ .

Cette seconde section nous a permis d'obtenir les relations suivantes, en matière de productivité, reliant les opérateurs de fusion obtenus en réduisant l'ensemble des échelles compatibles considérées :

$$\begin{array}{ccc}
 \blacktriangle_{\Sigma}^{\mu} \equiv \blacktriangle_{\Sigma, S^a} \equiv \blacktriangle_{\Sigma, S^l} \equiv \triangle_{Par}^{\mu} & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 \blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu} & & \blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu} \equiv \triangle_{0Par}^{\mu} \\
 & & \downarrow \\
 & & \triangle_{\Sigma}^{\mu}
 \end{array}$$

FIGURE 7.2 – Relations d'inférence discutées dans cette section

Finalement, la figure suivante récapitule les relations en termes de productivité, détaillées précédemment, reliant les différents opérateurs de fusion de bases de croyances pondérés, abordés tout au long de notre étude :

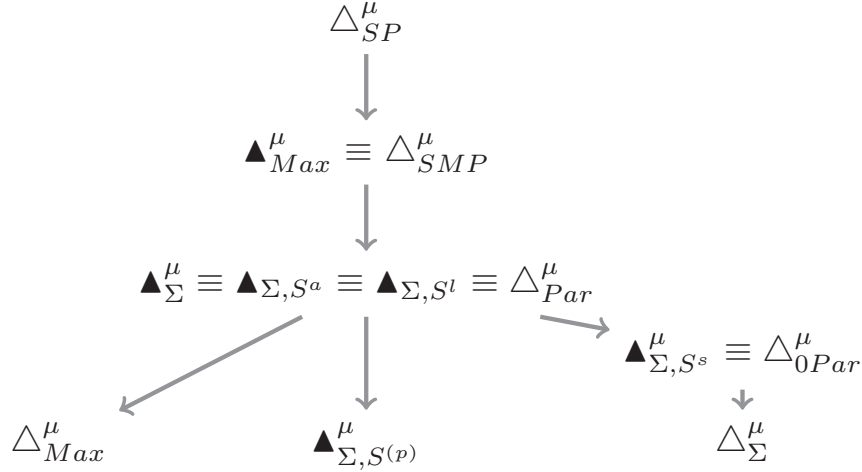


FIGURE 7.3 – Relations d'inférence entre les opérateurs présentés

### 7.3 Récapitulatif des propriétés logiques

Nous présentons finalement, dans cette section, un récapitulatif et une discussion sur les comportements rationnels, en termes de postulats logiques, adoptés par les différents opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées présentés dans ce mémoire.

Remarquons, dans un premier temps, que l'ensemble de ces opérateurs satisfait les postulats **(IC0)**, **(IC1)**, **(IC2\*)**, **(IC3\*)**, **(IC5)** et **(IC7)**. Ceci assure, en particulier, que l'ensemble des approches étudiées fournissent des résultats cohérents, lorsque la contrainte d'intégrité spécifiée l'est également. De plus, les résultats dérivés de chacune de ces approches satisfont toujours cette même contrainte. Ceci montre également qu'à chaque fois que cela est possible, le résultat de la fusion est simplement la conjonction des bases de croyances en présence. Finalement, ces résultats montrent que l'ensemble des approches abordées, pour la fusion de croyances pondérées, sont indépendantes de la syntaxe.

Nous avons montré que les opérateurs de fusion commensurable, basés sur la somme et le maximum, échouent à satisfaire le postulat d'équité **(IC4\*)**. Ceci renforce le problème de la commensurabilité des sources pour ces opérateurs, et montre à quel point l'expression des poids, initialement associés aux croyances, détermine en grande partie le résultat obtenu par les opérateurs de fusion commensurable. En effet, lors de la fusion de deux bases de croyances pondérées, la priorité peut être entièrement donnée à l'une de ces deux bases, si les croyances que celle-ci exprime sont considérées comme beaucoup plus fiables que celles exprimées par la seconde base. Ces opérateurs vérifient cependant l'intégralité des autres postulats, et vérifient en particulier le principe de

proximité, assuré conjointement par les postulats **(IC7)** et **(IC8)**.

À l'inverse, lorsque ces opérateurs sont étendus au cadre incommensurable au moyen de la notion d'échelle compatible, le postulat d'équité **(IC4\*)** est à nouveau satisfait. Ceci montre que ces opérateurs sont moins dépendants des poids initialement exprimés par les sources, et adoptent des comportements adaptés face à la présence de bases de croyances pondérées incommensurables. En effet, lors de la fusion de deux bases de croyances, aucune priorité n'est donnée à l'une ou l'autre de ces bases, quelque soient les poids initialement exprimés dans chacune de ces bases. Cependant, et parce que ces opérateurs n'établissent que des ordres partiels sur les interprétations possibles, le principe de proximité ne peut être totalement satisfait. En effet, aucune des approches proposées dans ce mémoire, pour la fusion incommensurable, n'est en mesure de satisfaire le postulat **(IC8)**.

Finalement, nous avons montré que la plupart des opérateurs, basés sur la notion d'échelle compatible, constituent des approches égalitaires pour la fusion de croyances. En effet, la plupart de ces approches satisfont le postulat d'indépendance de la majorité **(MI)**. Nous avons montré que la plupart de ces approches adoptent également un comportement de consensus : lorsque les sources en présence sont incommensurables, il semble naturel, par prudence, de vouloir toutes les satisfaire un minimum. Cependant, comme nous l'avons vu, il est possible d'obtenir des comportements rationnels différents en réduisant l'ensemble des échelles compatibles considérées. Ainsi, ne considérer que les échelles translatives permet de fournir une approche de consensus, ne constituant ni une approche majoritaire, ni une approche égalitaire pour la fusion de croyances. De cette façon, la redondance des informations permet d'influencer le résultat de fusion, sans toutefois pouvoir déduire entièrement cette information si toutes les sources ne la partagent pas. Finalement, nous avons montré que ne considérer que l'ensemble des échelles compatibles bornées permet d'obtenir un opérateur de fusion majoritaire, adapté à la fusion incommensurable, qui ne constitue cependant plus une approche de consensus, et ne satisfait plus non plus le postulat d'équité **(IC4\*)**.

Le Tableau 7.5 récapitule les divergences de comportement logique notables des opérateurs présentés :

	<b>(IC4*)</b>	<b>(IC6)</b>	<b>(IC6')</b>	<b>(IC8)</b>	<b>(MAJ)</b>	<b>(MI)</b>	<b>(CSS)</b>
$\Delta_{Max}^{\mu}$	-	-	✓	✓	-	✓	-
$\Delta_{\Sigma}^{\mu}$	-	✓	✓	✓	✓	-	-
$\blacktriangle_{\Sigma, S}^{\mu}$	-	✓	✓	✓	✓	-	-
$\blacktriangle_{Max}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	✓	✓
$\blacktriangle_{\Sigma}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	✓	✓
$\blacktriangle_{\Sigma, S^s}^{\mu}$	✓	-	-	-	-	-	✓
$\blacktriangle_{\Sigma, S^{(p)}}^{\mu}$	-	-	-	-	✓	-	-

TABLE 7.5 – Une synthèse des divergences logiques entre les opérateurs présentés



## 7.4 Synthèse du chapitre

Nous avons présenté, dans ce dernier chapitre, une étude de la productivité des différents opérateurs de fusion de croyances pondérées, détaillés tout au long de notre étude. Nous avons ainsi montré, dans un premier temps, que les opérateurs de fusion, respectivement basés sur la somme et sur le maximum, et considérant l'intégralité des échelles compatibles, constituent des approches plus prudentes que les opérateurs de fusion commensurable qu'elles étendent. Nous avons de plus montré que, dans le cadre incommensurable, les résultats dérivés par l'opérateur basé sur la somme sont plus spécifiques que ceux fournis par celui basé sur le maximum. Comme nous l'avons illustré, les résultats obtenus par ces deux opérateurs sont généralement disjoints dans le cadre commensurable. De plus, nous avons montré que même si les approches de la fusion incommensurable, reposant sur l'ensemble des échelles compatibles, constituent des approches très prudente, elle ne le sont pas plus que lorsque les interprétations sont comparées au moyen d'un critère de Pareto strict. Nous avons également montré, dans ce chapitre, que les résultats obtenus en considérant les échelles translatives, lorsqu'elles étendent l'opérateur de fusion basé sur la somme, constituent un compromis entre l'approche commensurable, et l'approche incommensurable basé sur la totalité des échelles compatibles. Nous avons également montré que les conclusions dérivées de l'approche basée sur les échelles bornées, et adaptée à un opérateur de fusion basé sur la somme, peuvent être totalement disjoints de ceux obtenus par l'opérateur de fusion qu'elle étend. Nous avons finalement, dans ce chapitre, proposé une discussion sur les comportements logiques, en termes de postulats de rationalité, des opérateurs de fusion de croyances pondérées abordés dans ce mémoire.



# Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire apportent des contributions au domaine de l'intelligence artificielle, et plus particulièrement dans le cadre de la représentation des connaissances incertaines. En particulier, nous fournissons une contribution à la fusion de bases de croyances pondérées. Nous avons tout d'abord présenté différentes approches existantes pour la fusion de ce type de bases de croyances. Cependant, nous avons montré que ces différentes approches ne traitent le problème de la commensurabilité des sources. En effet, ces approches se basent sur l'agrégation des poids que chaque base de croyances pondérées permet d'associer aux différentes interprétations du langage. Cependant, il est clair que lorsque les sources ne partagent pas la même signification des poids qu'elles associent aux croyances, cela n'a aucun sens de comparer ou d'agréger ces poids. Nous avons montré que ce problème est étroitement liée à certaines autres problématiques, connues dans le domaine du choix social sous les termes de mesurabilité et d'intercomparabilité des utilités exprimées par les différents individus. Cependant, alors que les approches proposées dans ce domaine se concentrent sur les aspects qualitatifs de l'expression des préférences, nous nous sommes focalisés dans ce mémoire de thèse sur des aspects plus quantitatifs de l'expression de l'incertitude afin de fournir des opérateurs de fusion adaptés au cadre incommensurable. Notre première contribution se situe dans la proposition de la notion d'échelle compatible. Ce concept permet de représenter simplement une correspondance possible entre les poids exprimés par les différentes sources.

Nous avons ensuite proposé une première approche pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables. Celle-ci constitue une extension, au moyen du concept d'échelle compatible, de l'opérateur de fusion commensurable basé sur le maximum. Cet opérateur repose cependant sur la considération d'un ensemble infini d'échelles compatibles. Il est également possible de caractériser l'ordre sur les interprétations induit par cet opérateur, au moyen de la notion d'ordre compatible. Une des contributions de cette thèse repose dans la proposition d'une autre caractérisation, basée cette fois-ci sur un critère de comparaison des poids initialement associés aux interprétations. Ce critère est similaire un critère de Pareto : il est cependant plus prudent que ce dernier, tout en étant plus productif qu'un critère de Pareto strict. Nous avons ensuite proposé une étude du comportement logique de cet opérateur. Pour cela, nous avons adapté les postulats de rationalité, proposés dans la littérature, au cadre des bases de croyances pondérées. Nous avons

alors montré que, bien que l'opérateur de fusion commensurable basé sur le maximum ne satisfait pas le postulat d'équité, son extension au cadre incommensurable satisfait ce même postulat. Nous avons ensuite proposé un nouveau postulat, appelé postulat de consensus : un opérateur de fusion adoptant un comportement de consensus tente de satisfaire un minimum chaque source en présence. Cette première approche, constituant une autre contribution à la fusion de croyances pondérées incommensurables, satisfait à la fois ce postulat, ainsi que le postulat d'indépendance de la majorité caractérisant les approches égalitaires du problème de fusion.

Ce premier résultat nous a ensuite amenés à adapter notre stratégie de fusion incommensurable au cadre utilitaire. Nous avons tenté, de cette façon, de fournir une approche majoritaire pour la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables. Pour cela, nous avons fourni une extension de l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme par le concept d'échelle compatible. Une des contributions de ce chapitre se situe dans le fait d'avoir montré que, bien que cet opérateur repose à nouveau sur un ensemble infini d'échelles compatibles, il est possible de caractériser l'ordre sur les interprétations, induit par cet opérateur, au moyen d'un critère qualitatif permettant la comparaison des interprétations du langage. Ce critère s'est révélé être le critère de Pareto. Nous avons ensuite fourni une étude logique du comportement de cet opérateur, au moyen des postulats de rationalité adaptés au cadre des bases de croyances pondérées. Cette étude a montré que, bien que l'opérateur de fusion commensurable basé sur la somme ne satisfait pas le postulat d'équité, son extension au cadre incommensurable satisfait ce même postulat. Cependant, cette approche, basée sur la notion d'échelle compatible, échoue à satisfaire le postulat de majorité, bien que l'opérateur de fusion commensurable sur laquelle elle se base constitue bien une approche majoritaire. Plus surprenant encore, cette approche s'est révélée être une approche égalitaire. Nous avons même montré que cette approche est une stratégie de consensus, ce qui constitue une autre contribution à la fusion de bases de croyances pondérées incommensurables.

Les deux premières approches de la fusion incommensurable présentées dans ce mémoire, respectivement basées sur la somme et sur le maximum, peuvent toutes deux être caractérisées au moyen d'un critère qualitatif de discrimination des interprétations du langage. De plus, l'approche utilitaire, adaptée au cadre incommensurable au moyen de la notion d'échelle compatible, échoue à satisfaire le postulat de majorité. Nous avons donc cherché à restreindre notre approche de la fusion incommensurable, basée sur la somme, à la seule considération de certains sous-ensembles d'échelles compatibles. En effet, même si les poids ne sont pas commensurables d'une source à l'autre, il est parfois, dans certaines situations, possible de comparer d'une source à l'autre l'homogénéité, la linéarité ou encore l'intensité reliant les poids issus d'une même base. En particulier, restreindre l'opérateur de fusion incommensurable basé sur la somme, à la considération des échelles linéaires constitue une généralisation de l'opérateur de fusion commensurable reposant sur une somme pondérée. Nous avons cependant montré que se restreindre à la considération des échelles compatibles affines ou linéaires, ne se révèle pas être plus productif que les approches purement qualitatives. À l'inverse, nous avons montré que la restriction à la classe des échelles compatibles translatives permet de dériver plus de conclusions que ces mêmes approches qualitatives,

tout en montrant une certaine prudence vis-à-vis du cadre commensurable. Une des contributions de cette thèse repose alors dans la proposition d'une caractérisation de cet opérateur : celle-ci repose à la fois sur la somme des poids initialement associés aux interprétations du langage, ainsi que sur la cohérence de ces mêmes interprétations avec les bases de croyances considérées. En particulier, ce critère nous a montré que cet opérateur adopte une attitude de consensus, mais ne constitue ni une approche majoritaire, ni une approche égalitaire pour la fusion de croyances.

Nous avons également considéré la classe des échelles bornées. Dans le cadre égalitaire, ces échelles permettent de retrouver les résultats fournis lorsque l'ensemble des échelles compatibles sont prises en compte. À l'inverse, dans le cadre utilitaire, un résultat singulier réside dans le fait que ces mêmes échelles permettent la satisfaction du postulat de majorité. De façon générale, la classe des échelles translatives, puis la classe des échelles bornées, constituent deux apports importants au problème de la fusion de croyances pondérées incommensurables : les opérateurs de fusion, définis à partir de ces classes, se révèlent en effet être plus productifs que les solutions purement qualitatives face à l'incommensurabilité, objectif initial de cette thèse. Nous avons finalement considéré, en tant qu'approche de la fusion incommensurable, la restriction de l'approche basée sur la somme à la considération d'une seule et unique échelle compatible. Intuitivement, face à l'incommensurabilité des sources, cette approche propose une harmonisation des poids issus de chaque base de croyances considérée. Une contribution de cette thèse réside dans un théorème d'impossibilité, montrant qu'il n'est pas possible à la fois de satisfaire les postulats d'équité ou de consensus et de ne considérer qu'une seule échelle.

Nous avons finalement présenté, dans le dernier chapitre de ce mémoire de thèse, une étude comparative, en matière de productivité des inférences associées, des différents opérateurs de fusion de croyances pondérées que nous avons abordés. En particulier, nous avons montré que les premières approches proposées dans cette thèse, reposant sur la considération de toutes les échelles compatibles, font preuve d'une certaine prudence lors de la fusion de croyances pondérées. Néanmoins, ces approches ne sont pas plus prudentes que le critère de Pareto strict. Nous avons également montré qu'il est possible d'obtenir de nouvelles conclusions en ne sélectionnant qu'une partie des échelles compatibles possibles : ces conclusions sont certes plus prudentes que dans le cadre commensurable, mais elles le sont cependant moins que lorsque toutes les échelles sont prises en compte. En particulier, la classe des échelles translative permet de dériver plus de conclusions que les approches purement qualitatives, alors que les échelles bornées permettent, dans le cadre utilitaire, de retrouver la satisfaction du postulat de majorité. Nous avons proposé, dans la seconde partie de ce chapitre, une dernière contribution reposant dans une étude récapitulative, en termes de rationalité, des divergences comportementales présentées par les approches abordées tout au long de ce mémoire de thèse.

## Perspective de recherche

Ces travaux ouvrent de nombreuses perspectives de recherches. Parmi celle-ci, nous avons vu que les opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées, proposés pour les cadres commensurables et incommensurables, échouent à satisfaire l'intégralité des postulats proposés pour la caractérisation des opérateurs de fusion contrainte. Dans le cadre commensurable, ceci est dû à l'hypothèse de commensurabilité formulée sur les poids issus de sources distinctes. À l'inverse, dans le cadre incommensurable, certains postulats ne sont pas satisfaits de part le fait que les relations sur les interprétations, sur lesquelles se basent respectivement les opérateurs proposés dans ce mémoire, ne sont que partielles. Or différentes méthodes ont été proposées pour traiter ce type d'information [Bre89, BLP04, BLP03, YBL<sup>+</sup>08] et devraient pouvoir être étendus à notre cadre. Il existe également, dans la littérature, des travaux transposant les postulats de rationalité proposés dans le cadre de la révision des croyances, au cadre des relations partiels [BLP05]. Des postulats de rationalités dédiés devraient donc pouvoir être proposés afin de caractériser les opérateurs de fusion de bases de croyances pondérées dans les cadres commensurables et incommensurables.

De plus, les approches proposées, dans le cadre de notre étude, se focalisent principalement sur les aspects sémantiques de la fusion de bases de croyances pondérées. Cette représentation possède de nombreux avantages, tels que de simplifier l'étude du comportement logique des opérateurs de fusion proposés. Ce type d'approche est cependant difficile à mettre en pratique, puisqu'il requiert avant toute chose d'énumérer les différentes interprétations candidates, afin de les ordonner respectivement aux bases de croyances considérées. Ainsi, des approches syntaxiques pour la fusion de croyances pondérées incommensurables doivent être proposées, afin de rendre ce type d'approche utilisable dans des applications réelles, en particulier en sécurité informatique, dans les domaines de la détection d'intrusions [Axe00]. Les *systèmes de détection d'intrusion* (IDS) sont des mécanismes écoutant le trafic réseau afin de repérer des activités anormales ou suspectes. Lorsque plusieurs IDS différents sont répartis sur le réseau, les échelles de notes qu'ils attribuent aux événements ne sont pas forcément commensurables. Comment alors fusionner ces informations incommensurables où chaque IDS correspond à une source, pour une corrélation d'alertes optimale ? On pourrait également imaginer une application de nos travaux pour la définition de politiques de sécurité, lorsque celles-ci proviennent de différents experts.

Une autre perspective ouverte par cette thèse se situe dans le rapprochement de la fusion d'informations incertaines incommensurables et de la théorie du choix social, en particulier dans le domaine émergent du *choix social computationnel* [CELM07]. Celui-ci constitue une interface entre l'informatique et la théorie du choix social. Ce domaine se focalise à la fois sur les problèmes techniques soulevés dans les sciences informatiques, tels que l'analyse de la complexité ou l'élaboration d'algorithmes, mais également sur les mécanismes proposés par la théorie du choix bases de social, tels que les procédures de vote ou de répartition équitable. Ainsi les contributions au problème de l'incommensurabilité proposées par ce mémoire de thèse doivent pouvoir être transposées dans ce domaine, afin d'évaluer si celles-ci peuvent constituer des apports à celui de la

---

théorie du choix social. Réciproquement, les travaux les plus récents sur le problème de l'inter-comparabilité [Bin07] doivent également pouvoir être transposés au cadre de la théorie du choix social computationnelle. Ceux-ci peuvent ouvrir de nouvelles pistes de recherche concernant la fusion de croyances incommensurables, en nous permettant par exemple d'identifier de nouveaux sous-ensembles d'échelles compatibles intéressants.





# Bibliographie

- [AGM85] Carlos E. Alchourrón, Peter Gärdenfors, and David Makinson. On the logic of theory change : Partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.
- [Arr63] Kenneth J. Arrow. *Social choice and individual values*. Wiley, New-York, second edition, 1963.
- [ARS02] Hajnal Andréka, Mark Ryan, and Pierre-Yves Schobbens. Operators and laws for combining preference relations. *Journal of Logic and Computation*, 12(1) :13–53, 2002.
- [AS93] Jean-Marc Alliot and Thomas Schiex. *Intelligence artificielle & informatique théorique*. Cépaduès, 1993.
- [Axe00] Stefan Axelsson. Intrusion detection systems : A taxonomy and survey. Technical report, Dept. of Computer Engineering, Chalmers University of Technology, Sweden, 2000.
- [BCD<sup>+</sup>93] Salem Benferhat, Claudette Cayrol, Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–645, 1993.
- [BDKP00a] Salem Benferhat, Didier Dubois, Souhila Kaci, and Henri Prade. Encoding information fusion in possibilistic logic : A general framework for rational syntactic merging. In *Proceedings of the 14<sup>th</sup> European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'00)*, 2000.
- [BDKP00b] Salem Benferhat, Didier Dubois, Souhila Kaci, and Henri Prade. A principled analysis of merging operations in possibilistic logic. In *Proceedings of the 16<sup>th</sup> International Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'00)*, 2000.
- [BDLP02] Salem Benferhat, Didier Dubois, Sylvain Lagrue, and Odile Papini. Making revision reversible : an method based on polynomials. *Fundamenta Informaticae*, 3-4 :251–280, 2002.

- [BDP99] Salem Benferhat, Didier Dubois, and Henri Prade. Some Syntactic Approaches to the Handling of Inconsistent Knowledge Bases : a Comparative Study Part 2 : the Prioritized Case. In E. Orłowska, editor, *Logic at Work : Essays Dedicated to the Memory of Helen Rasiowa*, Studies in Fuzziness and Soft Computing vol 24, pages 437–511. Physica-Verlag, 1999.
- [BDPW02] Salem Benferhat, Didier Dubois, Henri Prade, and Mary-Anne Williams. A practical approach to revising prioritized knowledge bases. *Studia Logica*, 70 :105–130, 2002.
- [BFH98] Craig Boutilier, Nir Friedman, and Joseph Y. Halpern. Belief revision with unreliable observations. In *Proceedings of the Fifteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'98)*, pages 127–134, 1998.
- [BHA<sup>+</sup>01] Isabelle Bloch, Anthony Hunter, Alain Appriou, André Ayoun, Salem Benferhat, Philippe Besnard, Laurence Cholvy, Roger Cooke, Frédéric Cuppens, Didier Dubois, Hélène Fargier, Michel Grabisch, Rudolf Kruse, Jérôme Lang, Serafín Moral, Henri Prade, Alessandro Saffiotti, Philippe Smets, and Claudio Sossai. Fusion : General concepts and characteristics. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 16(10) :1107–1134, 2001.
- [Bin07] Kenneth G. Binmore. Interpersonal comparison of utility. *Oxford Handbook of Philosophy of Economic Science*, page 200–254, 2007.
- [BLP03] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Odile Papini. A possibilistic handling of partially ordered information. In *Proceedings of the Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'2003)*, 2003.
- [BLP04] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Odile Papini. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic framework. *Fuzzy Sets and Systems*, 144 :25–41, may 2004.
- [BLP05] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Odile Papini. Revision of partially ordered information : axiomatization, semantics and iteration. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, pages 376–381, 2005.
- [BLR07a] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. An egalitarian fusion of incommensurable ranked belief bases under constraints. In *Proceedings of the 22<sup>th</sup> National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372, 2007.
- [BLR07b] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. Fusion égalitariste de bases de croyances ordonnées incommensurables. In *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'07)*, 2007.
- [BLR07c] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. A max-based merging of incommensurable ranked belief bases based on finite scales. In *Proceedings of the*

- 10<sup>th</sup> Conference of the International Society of Information Fusion (FUSION'07), 2007.
- [BLR08] Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, and Julien Rossit. Fusion majoritaire de bases de croyances ordonnées sans commensurabilité des échelles de référence. In *16<sup>me</sup> congrès francophone Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'08)*, pages 54–63, 2008.
- [BM06] Richard Booth and Thomas Andreas Meyer. Admissible and restrained revision. *Journal of Artificial Intelligence Research (JAIR)*, 26 :127–151, 2006.
- [BN05] Richard Booth and Alexander Nittka. Reconstructing an agent's epistemic state from observations. In *Proceedings of the 19<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'05)*, pages 394–399, 2005.
- [BN08] Richard Booth and Alexander Nittka. Reconstructing an agent's epistemic state from observations about its beliefs and non-beliefs. *Journal of Logic and Computation*, 18(5) :755–782, 2008.
- [Bor81] J.C. Borda. Mémoire sur les élections au scrutin. *Comptes rendus de l'Académie des sciences, traduit par Alfred de Grazia comme Mathematical Derivation of a election system*, *Isis*, vol 44, pp 42-51, 1781.
- [Bou93] Craig Boutilier. Revision sequences and nested conditionals. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 519–531, 1993.
- [Bre89] Gerhard Brewka. Preferred subtheories : an extended logical framework for default reasoning. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048, 1989.
- [CELM07] Yann Chevaleyre, Ulle Endriss, Jérôme Lang, and Nicolas Maudet. A short introduction to computational social choice. In *Proceedings of Theory and Practice of Computer Science, 33<sup>rd</sup> Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM'07)*, pages 51–69. Springer, 2007.
- [CGM06] Samir Chopra, Aditya K. Ghose, and Thomas Andreas Meyer. Social choice theory, belief merging, and strategy-proofness. *Information Fusion*, 7(1) :61–79, 2006.
- [CMLLM04] Sylvie Coste-Marquis, Jérôme Lang, Paolo Liberatore, and Pierre Marquis. Expressive power and succinctness of propositional languages for preference representation. In *Proceedings of the 9<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'04)*, pages 203–212. AAAI Press, 2004.
- [Con85] Marquis de Condorcet. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Imprimerie Royale, Paris, 1785.
- [CRS92] Claudette Cayrol, Véronique Royer, and Claire Saurel. Management of preferences in assumption-based reasoning. In *Proceedings of Information Processing and the*

- Management of Uncertainty in Knowledge based Systems (IPMU'92)*, pages 13–22. Springer, 1992.
- [CSL08] Nathalie Chetcuti-Sperandio and Sylvain Lagrue. How to choose weightings to avoid collisions in a restricted penalty logic. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 507–516, 2008.
- [DDL06] James P. Delgrande, Didier Dubois, and Jérôme Lang. Iterated revision as prioritized merging. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'06)*, pages 210–220. AAAI Press, 2006.
- [DdSC96] Florence Dupin de Saint-Cyr. *Gestion de l'évolutif et de l'incertain en logiques pondérées*. PhD thesis, Université Paul Sabatier (Toulouse III), 1996.
- [DFP97] Didier Dubois, Hélène Fargier, and Henri Prade. Beyond min aggregation in multi-criteria decision : (ordered) weighted min, discri-min, leximin. *The Ordered Weighted Averaging Operators – Theory and Applications*, 144 :181–192, 1997.
- [DLP94] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.
- [DP88] Didier Dubois and Henri Prade. *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.
- [DP91] Didier Dubois and Henri Prade. Epistemic entrenchment and possibilistic logic. *Artificial Intelligence*, pages 223–239, 1991.
- [DP92] Didier Dubois and Henri Prade. Belief change and possibility theory. In Peter Gärdenfors, editor, *Belief Revision*, pages 142–182. Cambridge University Press, 1992.
- [DP96] Didier Dubois and Henri Prade. Belief revision with uncertain inputs in the possibilistic setting. In *In Proceedings of the 12<sup>th</sup> Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI'1996)*, pages 236–243, 1996.
- [DP97] Adnan Darwiche and Judea Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89 :1–29, 1997.
- [DPS06] Pierre Drap, Odile Papini, and Julien Seinturier. A reversible framework bases merging. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> workshop on Non Monotonic Reasoning (NMR-06)*, pages 490–496, 2006.
- [EKM08a] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Conflict-based merging operators. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 348–357, 2008.

- [EKM08b] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. A diff-based merging operator. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Workshop on Non-Monotonic Reasoning (NMR'08)*, pages 19–25, 2008.
- [EKM08c] Patricia Everaere, Sébastien Konieczny, and Pierre Marquis. Propositional merging operators based on set-theoretic closeness (short paper). In *Proceedings of the 18<sup>th</sup> European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'08)*, pages 737–738, 2008.
- [Gär88] Peter Gärdenfors. *Knowledge in flux : modeling the dynamics of epistemic states*. Bradford Books. MIT Press, Cambridge, 1988.
- [Gär92] Peter Gärdenfors, editor. *Belief Revision*. Cambridge University Press, 1992.
- [Gef92] Hector Geffner. *Default Reasoning : Causal and Conditional Theories*. MIT Press, 1992.
- [GG97] Paul Gochet and Pascal Gribomont. *Logique Méthodes pour l'informatique fondamentale*, volume 1. Hermès, 1997.
- [GLB06] Qi Guilin, Weiru Liu, and David A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the 21<sup>th</sup> National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 348–356, july 2006.
- [Ham91] Peter J. Hammond. Interpersonal comparisons of utility : Why and how they are and should be made. *Interpersonal Comparisons of Well-Being*, page 200–254, 1991.
- [His78] E. Hisdal. Conditional possibilities independence and noninteraction. *Fuzzy Sets and Systems*, 1 :299–309, 1978.
- [JT07] Yi Jin and Michael Thielscher. Iterated belief revision, revised. *Artificial Intelligence*, 171(1) :1–18, 2007.
- [Kel06] Chris Kelly. The impossibility of incommensurable values. *Philosophical Studies*, 137(3) :369–382, 2006.
- [KLM04] Sébastien Konieczny, Jérôme Lang, and Pierre Marquis. DA<sup>2</sup> merging operators. *Artificial Intelligence*, 157(1-2) :49–79, 2004.
- [KM91] Hirofumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.
- [KM92] Hirofumi Katsuno and Alberto O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In [Gär92], pages 183–203, 1992.
- [Kon09] Sébastien Konieczny. Using true ordinal conditional functions. In *Proceedings of the 10<sup>th</sup> European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU 2009)*, 2009.
- [KPP98] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

- [KPP02] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.
- [KPP08a] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Confluence operators. In *Proceedings of the 11<sup>th</sup> European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA'08)*, volume 5293, pages 272–284. Springer, 2008.
- [KPP08b] Sébastien Konieczny and Ramón Pino Pérez. Improvement operators. In Gerhard Brewka and Jérôme Lang, editors, *Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 177–187. AAAI Press, 2008.
- [Leh95a] Daniel Lehmann. Another perspective on default reasoning. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 15 :61–82, 1995.
- [Leh95b] Daniel Lehmann. Belief revision revisited. In *Proceedings of 12<sup>th</sup> Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, pages 1534–1539, 1995.
- [Lin96] Jinxin Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2) :363–378, 1996.
- [LM98] Jinxin Lin and Alberto O. Mendelzon. Merging databases under constraints. *Int. J. Cooperative Inf. Syst.*, 7(1) :55–76, 1998.
- [LM99] Jinxin Lin and Alberto O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. manuscript, 1999.
- [LS95] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration : A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.
- [LS98] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1) :76–90, 1998.
- [Mey00] Thomas Meyer. Merging epistemic states. In *Proceedings of the 6<sup>th</sup> Pacific Rim International Conference on Artificial Intelligence (PRICAI'00)*, pages 286–296, 2000.
- [Mey01] Thomas Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.
- [Mou88] Hervé Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, 1988.
- [Neb91] Bernhard Nebel. Belief revision and default reasoning : Syntax-based approaches. In *Proceedings of the International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 417–428, july 1991.

- [Pap01] Odile Papini. Iterated revision operations stemming from the history of an agent's observations. In Hans Rott and Mary-Anne Williams, editors, *Frontiers of Belief Revision*, pages 279–301. Kluwer Academic, 2001.
- [Pat02] P. K. Pattanaik. *Positional rules of collective decision-making*, volume 1. North-Holland, 2002.
- [Pin91] G. Pinkas. Propositional nonmonotonic reasoning and inconsistency in symmetrical neural networks. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'91)*, pages 525–530, 1991.
- [Rev93] Peter Revesz. On the semantics of theory change : arbitration between old and new information. In *Proceedings of the 12<sup>th</sup> ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART symposium on Principles of Databases*, pages 71–92, 1993.
- [Rev97] Peter Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.
- [Ros08] Julien Rossit. Des fonctions de transformation pour restaurer l'intercomparabilité en fusion de croyances. In *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'08)*, pages 354–361, 2008.
- [Sav71] Leonard J. Savage. *The foundations of statistics*. Dover publications, New York, second revised edition, 1971.
- [Sen70] Amartya K. Sen. *Collective Choice and Social Welfare*. North Holland, Amsterdam, 1970.
- [Sen82] Amartya K. Sen. *Handbook of Mathematical Economics*, volume 3. North-Holland, 1982.
- [Sen86] Amartya K. Sen. Social choice theory. In K.J. Arrow and M.D. Intriligator, editors, *Handbook of mathematical economics*, volume 3, pages 1073–1181. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [Spo88] Wolfgang Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.
- [Spo90] Wolfgang Spohn. A general non-probabilistic theory of inductive reasoning. *Uncertainty in Artificial Intelligence*, 4 :149–158, 1990.
- [Wil94] Mary-Anne Williams. Transmutations of knowledge systems. In J. Doyle et al., editor, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'94)*, pages 619–629. Morgan Kaufmann, 1994.
- [Wil95] Mary-Anne Williams. Iterated theory base change : a computational model. In *Proceedings of 14<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1541–1547, 1995.
- [YBL<sup>+</sup>08] Safa Yahi, Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, Mariette Serayet, and Odile Papini. Lexicographic inference for partially ordered belief bases. In *Proceedings of the*

*11<sup>th</sup> International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'08)*, pages 507–516. AAAI Press, 2008.

[Zad65] Lofti A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8 :338–353, 1965.

[Zad78] Lofti A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1 :3–28, 1978.