UNIVERSITÉ FRANÇOIS-RABELAIS
DE TOURS

ÉCOLE DOCTORALE SANTÉ, SCIENCES ET TECHNOLOGIES
LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE THEORIQUE

THÈSE présentée par :

Waad AL SAYED

soutenue le : **15 Décembre 2008**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université François-Rabelais**

Discipline : **Mathématiques**

Mesures réduites, Grandes solutions et Singularités de quelques problèmes paraboliques

THÈSE dirigée par :	
M. VERON Laurent	Professeur, Université François-Rabelais, Tours
RAPPORTEURS :	
M. GUEDDA Mohammed	M.C. HDR, Université de Picardie, Amiens
M. PORRETTA Alessio	Professeur, Université de Rome II, Italie

---

JURY :	
M. EL Soufi Ahmad	Professeur, Université François-Rabelais, Tours
M. GUEDDA Mohammed	M.C. HDR, Université de Picardie, Amiens
M. JAZAR Mustapha	Professeur, Université Libanaise, Tripoli, Liban
M. MOLINET Luc	Professeur, Université François-Rabelais, Tours
M. WEISSLER Frederic	Professeur, Université Paris XIII
M. VERON Laurent	Professeur, Université François-Rabelais, Tours

Quand vous travaillez, vous êtes une flûte
dont le coeur transforme en musique le
chuchotement des heures.
Qui parmi vous voudrait être un roseau
muet et silencieux, alors que le monde
entier chante à l'unisson ?

Khalil Gibran

À ma mère...
Merci pour tes prières...

Mes Remerciements...

Un moment émouvant pour le doctorant est le jour où il entreprend d'écrire ses remerciements. Tout d'abord, cela signifie que la fin est proche, ce qui en soi est une très bonne nouvelle. Par ailleurs, cela permet de remercier toutes les personnes qui ont supporté nos humeurs dépressives au cours des années de thèse.

Je tiens à débuter ces remerciements en exprimant toute ma gratitude aux membres du Jury de cette thèse, notamment M. Mohammed Guedda et M. Alessio Porretta pour avoir accepté d'être rapporteurs de cet humble travail.

Je remercie également M. Luc Molinet et M. Frederic Weissler pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant d'être examinateurs de cette thèse.

J'adresse ma plus sincère reconnaissance à M. Ahmad El Soufi pour le temps qu'il a consacré afin d'être un membre du Jury. Je le remercie vivement pour son support paternel durant ces années de thèse.

Je ne pourrais jamais remercier suffisamment M. Laurent Véron et M. Mustapha Jazar. J'ai le grand honneur et la grande chance d'avoir été leur élève. Je suis très sensible à l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir partagé avec moi leur immense savoir, leurs très beaux raisonnements et leur méthode de travail.

Grand Merci à M. Laurent Véron d'avoir accepté de diriger cette thèse. J'ai apprécié le temps (beaucoup !) et la patience (encore plus !) qu'il m'a dédiés au cours de ces années. Avec lui, j'ai appris beaucoup plus que des Mathématiques. Je l'admire énormément pour son honnêteté intellectuelle, scientifique et personnelle et pour sa sérénité incomparable. De plus, je l'admire pour sa grande générosité en idées mathématiques, pour son aide remarquable et son encouragement continu.

Grand Merci à M. Mustapha Jazar d'avoir accepté de co-diriger cette thèse. Je lui suis vraiment très reconnaissante de m'avoir offert de grandes opportunités : venir en France, continuer mes études, rencontrer M. Véron, travailler au sein d'un laboratoire assez chaleureux : le LMPT... Avec lui, j'ai appris les Mathématiques de la façon la plus claire, simple, esthétiquement belle, élégante et imaginable sans jamais s'éloigner des questions concrètes et importantes.

Mes pensées vont aux collègues du bureau, MERCI Julien, Rodolphe pour les moments et les discussions qu'on a partagés. Je remercie beaucoup tous les membres du LMPT en particulier les secrétaires Anne-Marie et Bernadette toujours souriantes, chaleureuses et présentes pour toute aide.

Cette thèse est le fruit de plusieurs années, dans lesquelles on se pose beaucoup de questions. Ces années ont été parfois enthousiasmantes, parfois difficiles. Beaucoup d'amis, vieux et nouveaux, m'ont aidée sans hésitations, ni réserves, à faire face aux moments difficiles et, parfois, désespérants, et ils ont partagé avec moi les moments les plus beaux de cette période.

Merci à Djidjiga, Hawrae, Ali Y., Haydar, Sami et Thierry, j'ai beaucoup apprécié votre compagnie.

Merci à Rami et Rouba, vous avez été auprès de moi durant mon premier séjour en France et vous m'aidez jusqu'à ce moment.

Merci mes plus chères amies Loulou, Ola, Jinano et Dandoun ; vous avez été toujours auprès de moi, dans les moments de joie mais aussi dans les moments de tristesse. Sans vous, ces années de thèse ne se seraient pas écoulées si rapidement.

Mais non ! Je ne t'ai pas oublié cher Allouch. Merci mon frère pour tout... le support, le soutien, la confiance... Je suis certaine que je peux compter sur toi car Ali Srour est un vrai ami.

Je n'oublierai jamais M. Talal Khouja, un professeur à l'Université Libanaise. Grâce à lui, je suis présente avec vous maintenant pour vous présenter ma thèse. Un GRAND MERCI...

Je pense à mes chers parents : mon père Ali, ma mère Dalale, ma grand-mère Fatima et mes frères Sayed ,Wissam et Firas avec son coeur Rabab notre ange. Je suis vraiment reconnaissante pour tout ce que vous m'avez apporté, vous avez eu foi en moi et vous m'avez permis de concrétiser mes rêves. Maintenant une nouvelle vie scientifique s'ouvre à moi, que j'espère, remplie d'émerveillements.

Aucun remerciement n'est trop grand pour Vous, merci de m'avoir permis d'arriver à ce niveau-ci dans ma vie. Je ne peux que compter sur vous pour continuer le reste de la réalisation de mes rêves. MERCI MON DIEU...

Waad...

La recherche procède par des moments distincts et durables, intuition, aveuglement, exaltation et fièvre.
Elle aboutit un jour à cette joie, et connaît cette joie celui qui a vécu des moments singuliers...

Albert Einstein

Mesures réduites, Grandes solutions et Singularités de quelques problèmes paraboliques

Résumé

Cette thèse est constituée de trois parties.
La première est consacrée à dégager les notions de “bonne mesure” et de “mesure réduite” pour deux problèmes paraboliques non linéaires : le premier traite le cas d'une mesure de Radon positive comme valeur initiale et l'autre traite le cas d'une mesure de Radon positive au bord latéral. Pour chacun de ces problèmes et suite à un phénomène de relaxation, on construit une suite qui converge vers la plus “grande” sous-solution du problème donné. En plus, on cherche des “capacités universelles” et on établit des équivalences avec des mesures de Hausdorff.
Dans la deuxième partie, on cherche des conditions d'existence et d'unicité de “grande solutions” pour des problèmes paraboliques dont le terme non linéaire est un terme d'absorption. Des conditions sur le bord du domaine permettent de prouver l'unicité de la solution.
Dans la troisième partie, on étudie les “singularités” de deux problèmes paraboliques non linéaires : l'un traite le cas où la non linéarité dépend de la variable temps et l'autre traite le cas où le terme non linéaire dépend des coordonnées d'un point de l'espace. Pour le premier, notre but est d'éliminer la singularité à l'origine. En cours, on démontre la variante de l'estimation de Brézis-Friedman. Pour le second, on étudie les singularités isolées et on prouve l'existence et l'unicité de la solution dans le cas sous-critique.

Mots clés. Equations paraboliques, mesures de Radon, capacités, mesures de Hausdorff, solutions singulières, auto-similarité, singularités éliminables, semi-groupes de contractions, opérateur maximal monotone, critère de Wiener, singularités isolées.
1991 Mathematics Subject Classification, 35K60.

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, UMR CNRS 6083, Université François Rabelais de Tours, Parc de Grandmont, F-37200 Tours France.

Reduced measures, Large solutions and Singularities of some parabolic problems

Abstract

The thesis at hand is composed of three parts.
The first part is devoted to present the notions of "good measure" and "reduced measure" for two non-linear parabolic problems, one of which treats the case of a positive Radon measure as an initial value, and the other treats the case of a positive Radon measure on a lateral boundary. For each of these problems we construct a sequence, after a relaxation phenomenon, which converges to the "greatest" sub-solution of the given problem. Moreover, we look for "universal capacities" and we establish equivalence with Hausdorff measure.
In the second part, we establish existence and uniqueness conditions for "large solutions" of parabolic problems whose non-linear term is an absorption one. Some boundary conditions will permit to prove uniqueness of solutions.
In the last part we study the "singularities" of two non-linear parabolic problems. The non-linear term of one problem depends on a time variable and of the other on the spatial coordinates of a point. For the former problem, we aim at eliminating the singularity at the origin and we prove the variant of Brézis-Friedman as by-product. For the later problem, we study isolated singularities and we prove the existence and uniqueness of solutions in the sub-critical case.

Key words. Parabolic equations, Radon measures, capacities, Hausdorff measures, singular solutions, self-similarity, removable singularities, semi-groups of contractions, maximal monotone operators, Wiener criterion, isolated singularities.
1991 Mathematics Subject Classification, 35K60.

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, UMR CNRS 6083, Université François Rabelais de Tours, Parc de Grandmont, F-37200 Tours France.

Table des matières

Introduction

Introduction

Cette thèse est constituée de trois parties.

La première est consacrée à dégager les notions de *bonne mesure* et de *mesure réduite* pour deux problèmes paraboliques non linéaires : le premier traite le cas d'une mesure de Radon positive comme valeur initiale et l'autre traite le cas d'une mesure de Radon positive au bord latéral.

Dans la deuxième partie, on cherche des conditions d'existence et d'unicité de *grande solution* pour des problèmes paraboliques dont le terme non linéaire est un terme d'absorption.

Dans la troisième partie, on étudie les *singularités* de deux problèmes paraboliques non linéaires : le premier traite le cas où la non linéarité dépend de la variable temps et l'autre traite le cas où le terme non linéaire dépend des coordonnées d'un point de l'espace.

1 Présentation des résultats

Les résultats de cette thèse sont regroupés en 6 chapitres.

- Chapitre 1. *" Reduced measures associated to parabolic problems " (Article paru dans Proceedings Steklov Inst.).*

- Chapitre 2. *"On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains" (Article à paraître dans Advanced Nonlinear Studies).*

- Chapitre 3. *"Solutions of some nonlinear parabolic equations with initial blow-up" (Article à paraître dans Quaderni di Mathematica).*

- Chapitre 4. *"Solutions de quelques équations paraboliques nonlinéaires explosant en* $t = 0$ *et au bord d'un domaine."*

– Chapitre 5. *"Singularités éliminables".*

– Chapitre 6. *"Singularités isolées".*

2 Mesures Réduites.

Dans le premier chapitre, on traite la première partie qui est consacrée à dégager la notion de mesure réduite pour les deux probèmes paraboliques semi-linéaires suivants :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + g(u) = 0 & \text{dans } Q_T := \Omega \times (0,T) \\ u = 0 & \text{sur } \partial_\ell Q_T := \partial\Omega \times (0,T) \\ u(.,0) = \mu & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + g(u) = 0 & \text{dans } Q_T := \Omega \times (0,T) \\ u = \mu' & \text{sur } \partial_\ell Q_T := \partial\Omega \times (0,T) \\ u(.,0) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, g est une fonction continue croissante définie sur $\mathbb{R}$ et s'annulant sur $(-\infty, 0]$ et μ et μ' sont des mesures de Radon positives définies respectivement sur Ω et $\partial\Omega \times (0,T)$.
Dans ce chapitre, on répond à la question suivante : *Etant donnée une mesure de Radon positive ν sur Ω, existe-t-il une plus grande mesure de Radon μ inférieure à ν pour laquelle le problème (2.1) admet une solution ?* Si μ existe, elle est dite la mesure réduite associée à ν. Une mesure de Radon positive pour laquelle le problème (2.1) admet une solution est dite une bonne mesure. Ce type de problèmes est maintenant bien compris pour les équations elliptiques non linéaires. Les bonnes mesures sont des mesures relaxées universelles (par rapport à g). Ce type de problème a été d'abord étudié par Vazquez [28] qui a traité le problème

$$-\Delta u + e^{au} = \mu \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \tag{2.3}$$

Il a prouvé que la mesure réduite est la somme de la partie non atomique de μ et la partie atomique où les coefficients des masses de Dirac de tout atome a sont tronqués à la valeur $2\pi/a$. Récemment, les mesures relaxées ont été mises en évidence par Brézis, Marcus et Ponce [10] et par Brézis et Ponce [11] pour les problèmes stationnaires associés :

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u + g(u) = 0 & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = \mu & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Elles sont obtenues de diverses façons mais la manière la plus naturelle est de remplacer le terme non linéaire g par une forme tronquée $g_k = \min\{k, g\}$ $(k > 0)$, de résoudre le problème approché, par exemple

$$\begin{cases} -\Delta u_k + g_k(u_k) = \mu \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u_k = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

puis de faire tendre k vers l'infini. Il se produit alors un phénomème de relaxation, c'est à dire que la fonction u_k converge vers une fonction u^* qui vérifie alors

$$\begin{cases} -\Delta u^* + g(u^*) = \mu^* \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u^* = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\mu^* \leqslant \mu$ est la mesure relaxée de μ. Les propriétés de μ^* sont très importantes. Elles sont naturellement associées à des capacités de Bessel. Dans l'article [10], Brézis, Marcus et Ponce ont traité le problème (2.4). Leur résultat principal est

Théorème 2.1 *Etant donnée une mesure de Radon μ, soit u_k la solution de*

$$\begin{cases} -\Delta u_k + g_k(u_k) = \mu \quad \textit{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u_k = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Alors u_k converge vers une fonction u^* dans Ω quand k tend vers l'infini, où u^* est la plus grande sous-solution de (2.4).

Remarque 2.1 Ainsi, ils ont prouvé qu'il existe une seule mesure de Radon μ^* telle que

$$-\int_\Omega u^* \Delta\zeta + \int_\Omega g(u^*)\zeta = \int_\Omega \zeta d\mu^* \ \forall \zeta \in C_0^2\left(\overline{\Omega}\right).$$

μ^* est la mesure réduite associée à μ et elle est bien une bonne mesure.

En plus, ils ont prouvé un résutat relatif à la capacité universelle du problème (2.4).

Proposition 2.1 *On suppose que $K \subset \Omega$ un compact. Alors*

$$cap_{H^1}(K) = 1/2 \, cap_{\Delta,1}(K).$$

Avec

$$cap_{\Delta,1}(K) = \inf\left\{ \int_\Omega |\Delta\psi| \, dx : \\ \psi \in C_c^\infty(\Omega), \ \psi \geq 1 \ \textit{ dans un voisinage de } K \right\} \tag{2.9}$$

et

$$
cap_{H^1}(K) = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \, dx : \right. \\
\left. \psi \in C_c^\infty(\Omega),\ \psi \geq 1 \ \ \textit{dans un voisinage de} \ \ K \right\} \tag{2.10}
$$

Dans l'article [11], Brézis et Ponce ont traité le problème (2.5). Ils ont établi un équivalent du résultat de celui prouvé par Brézis, Marcus et Ponce [10] en ce qui concerne la mesure réduite. Et par rapport à la capacité universelle du problème (2.5), ils ont démontré le résutat suivant :

Proposition 2.2 *On suppose que $K \subset \Omega$ un compact. Alors*

$$
c_{\partial\Omega}(K) = \mathcal{H}^{N-1}(K).
$$

Avec $\mathcal{H}^{N-1}$ est la mesure de Hausdorff et

$$
c_{\partial\Omega}(K) = \inf\left\{ \int_\Omega |\Delta\psi| \, dx : \right. \\
\left. \psi \in C_0^2(\overline{\Omega}),\ -\tfrac{\partial\psi}{\partial n} \geq 1 \ \ \textit{dans un voisinage de} \ \ K \right\} \tag{2.11}
$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée par rapport au vecteur normal sortant de $\partial\Omega$.

Dans le premier chapitre de cette thèse la démarche est similaire, mais la difficulté intrinsèque rend l'étude plus délicate. D'abord, on étudie le problème (2.1) dans cette perspective et on répond à la question demandée. On traite l'ensemble des bonnes mesures relatif à g et on prouve que toute bonne mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^N$. De la même manière, on étudie le problème (2.2).

Remarque 2.2 On construit le phénomène de relaxation associé au problème (2.1) de la façon suivante. Soit $\{g_k\}$ une suite croissante de fonctions continues croissantes définies sur $\mathbb{R}$, s'annulant sur $(-\infty, 0]$ et tel que

$$
0 \leqslant g_k(r) \leqslant c_k r^p + c'_k \ \forall r \geqslant 0,\ \forall k > 0
$$

$$
\lim_{k\to\infty} g_k(r) = g(r) \ \forall r \in \mathbb{R},
$$

pour certains constantes positives c_k et c'_k et $p \in (1, (N+2)/(N+1))$. Il existe une solution unique $u = u_k$ de

$$
\begin{cases}
\partial_t u - \Delta u + g_k(u) = 0 \quad \text{dans } Q_T \\
u = 0 \quad \text{sur } \partial_\ell Q_T \\
u(.,0) = \mu \quad \text{dans } \Omega
\end{cases} \tag{2.12}
$$

Notre résultat principal est

Théorème 2.2 *Quand $k \to \infty$, la suite $\{u_k\}$ converge dans $L^1(Q_T)$ vers une fonction positive u^* tel que $g(u^*) \in L^1_\rho(Q_T)$ avec $\rho = \rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$, et il existe une mesure positive μ^* inférieure à μ telle que*

$$\begin{cases} \partial_t u^* - \Delta u^* + g(u^*) = 0 & \text{dans } Q_T \\ u^* = 0 & \text{sur } \partial_\ell Q_T \\ u^*(.,0) = \mu & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

En plus, u^* est la plus grande sous-solution du problème (2.1).

Pour la capacité relative au problème (2.1), on a prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Pour tout compact $k \subset \Omega$, on a*

$$\mathcal{H}^N(K) = c_\Omega(K).$$

Avec

$$c_\Omega(K) = \inf\left\{ \iint_{Q_T} |\partial_t\psi + \Delta\psi| \, dx\, dt : \psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T),\ \psi(x,0) \geq 1 \ \text{ dans un voisinage de } K \right\} \tag{2.14}$$

où $C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$ est l'espace des fonctions dans $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ qui s'annulent sur $\partial\Omega \times [0,T] \cup \overline{\Omega} \times \{T\}$.

Pour le problème (2.2), on a prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Pour tout compact $k \subset \partial_l Q_T$, on a*

$$\mathcal{H}^N(K) = c_{\partial_l Q_T}(K).$$

Avec

$$c_{\partial_l Q_T}(K) = \inf\left\{ \iint_{Q_T} |\partial_t\psi + \Delta\psi| \, dx\, dt : \psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T),\ -\frac{\partial\psi}{\partial n} \geq 1 \ \text{ dans un voisinage de } K \right\} \tag{2.15}$$

Ces deux capacités aboutissent à de bonnes mesures universelles. Ainsi on a réussi à démontrer ces deux théorèmes :

Théorème 2.5 *Soit μ une mesure de Radon positive sur Ω. Si μ est une bonne mesure associée à g, alors $\mu \in L^1_\rho(\Omega)$.*

Théorème 2.6 *Soit μ une mesure de Radon positive sur $\partial_\ell Q_T$. Si μ est une bonne mesure associée à g, alors $\mu \in L^1(\partial_\ell Q_T)$.*

3 Grandes Solutions.

La deuxième partie est constituée des chapitres 2, 3, et 4.

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$ et f une fonction continue à valeurs réelles ; une fonction $u \in C^1(\Omega)$ est dite une *grande solution* si

$$-\Delta u + f(u) = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{3.1}$$

si

$$\lim_{\rho(x)\to 0} u(x) = \infty, \tag{3.2}$$

où $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Ce type de problème est étudié d'abord par Bierberbach et Rademacher [5], [27] dans le cas où $f(u) = e^u$ et $N = 2$ ou 3. Loewner et Nirenberg [21] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une fonction positive u qui satisfait

$$\begin{cases} -\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta u + u_+^{\frac{N+2}{N-2}} & = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x) & = & \infty & \text{sur} & \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier. En plus, Bandle et Marcus [1], [2] et [3] ont démontré l'unicité de la grande solution de

$$-\Delta u + u_+^q = 0$$

où $q > 1$ et $\partial\Omega$ est régulier et compact. Pour les équations elliptiques de second ordre

$$-Lu + u_+^q = 0$$

Véron [30] a prouvé l'existence et l'unicité de la grande solution de ces équations dans le même type de domaine. L'existence d'une grande solution dépend de l'existence d'une solution maximale qui elle même dépend de la condition de Keller Osserman [18], [26].

Définition 3.1 *Une fonction $g \in C(\mathbb{R}_+)$ satisfait la condition de Keller Osserman si il existe une fonction croissante positive h tel que*

$$g(r) \geq h(r), \ \ \forall r \in \mathbb{R}_+ \ \ et \ \int_a^\infty \left(\int_0^r h(s)ds\right)^{\frac{-1}{2}} < \infty, \ \ \forall a > 0.$$

Il est bien connu que si f est croissante et satisfait la condition de Keller Osserman alors une grande solution existe dans tout domaine borné régulier. L'unicité dans les domaines réguliers est établie sous des conditions supplémentaires sur f (Bandle et Marcus [1], [2] et [3]). Ils ont établi les résultats suivants :

Théorème 3.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec un bord $\partial\Omega$ qui est de classe C^2 et f une fonction continue à valeurs réelles telle que*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-q} f(r) = 1,$$

pour $q > 1$. On suppose que $r \to \dfrac{f(r)}{r}$ est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Alors il existe une unique grande solution positive de (3.1)- (3.2).

Imposant les conditions suivantes sur f (Bandle et Marcus [1], [2] et [3]) rend l'unicité plus faible que celle établie dans le théorème 3.1 :

1. f est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, s'annule en 0 et f est positive sur $\mathbb{R}_*^+$,
2. $f(\beta t) \leq \beta^{1+\mu} f(t)$, $\forall\, \beta \in (0,1)$, $\forall t \geq \frac{t_0}{\beta}$, pour un $t_0 \geq 1$ et $\mu > 1$,
3. $f(\beta t) \leq \beta f(t)$, $\forall\, \beta \in (0,1)$, $\forall t \geq 0$.

Le théorème suivant (Véron [29]) est une adaptation d'un résultat de Iscoe [17].

Théorème 3.2 *On suppose que Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ étoilé par rapport à O et que f est croissante et satisfait*

$$k^2 h(k) f(\rho) \leq f(h(k)\rho + l(k)), (\forall \rho \in \mathbb{R}, k > 1)(resp.(\forall \rho > 0, k > 1)),$$

où h (resp. l) est une fonction continue définie sur $(1,\infty)$ avec une limite 1 (resp. 0) en 1. Alors il existe au plus une grande solution (resp. une grande solution positive) de (3.1)- (3.2) dans Ω.

Le cas où $f(u) = |u|^{q-1}u$ avec $q > 1$ est bien compris :

1. Il existe toujours une solution maximale.
2. La solution maximale est grande si et seulement si $\partial\Omega$ satisfait un critère de type Wiener utilisant la capacité de Bessel $C_{2,q'}$ ce qui est toujours vrai lorsque $1 < q < \frac{N}{N-2}$.
3. Pour tout $q > 1$, l'unicité est obtenue dans tout domaine Ω avec un bord compact tel que $\partial\Omega$ est localement le graphe d'une fonction continue (Marcus-Véron [22]). Si $1 < q < \frac{N}{N-2}$, l'unicité est assurée lorsque $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$ (Véron [30]).

Labutin [19] a prouvé l'existence de solution de

$$(E)\begin{cases} -\Delta u + |u|^{q-1}u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x) &= \infty \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Théorème 3.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un domaine borné, et soit $q > 1$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *(E) a une solution $u \in C^2_{loc}(\Omega)$*

2. L'ensemble $\Omega^c = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$ n'est pas fin, i.e.

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{C}_{2,q'}\left(\Omega^c \cap B\left(x,r\right)\right)}{r^{N-2}} \frac{dr}{r} = +\infty \text{ pour tout } x \in \Omega^c,$$

avec

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ce théorème dit que la résolution de (E) est équivalente à un test de Wiener relatif à une certaine capacité. Le Gall et Dhersin [12] ont prouvé par des méthodes probabilistes l'existence d'une solution pour (E) si $q = 2$. Ils ont prouvé un théorème plus fort affirmant que l'existence d'une solution explosant en un point $x_0 \in \partial\Omega$ est équivalente au critère de Wiener en x_0. Wiener [31] a prouvé que le critère de Wiener par la capacité électrostatique classique est nécessaire et suffisant pour la résolution du Problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques.

Remarque 3.1 On rappelle le critère classique de Wiener : un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ vérifie le critère de Wiener si, pour tout $\sigma \in \partial\Omega$,

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{C}_{1,2}\left(\Omega^c \cap B\left(\sigma,r\right)\right)}{r^{N-2}} \frac{dr}{r} = +\infty \text{ pour tout } x \in \Omega^c,$$

où $C_{1,2}$ est la capacité électrostatique. Si Ω est un domaine avec un bord compact et vérifie le critère de Wiener, alors pour toutes fonctions $\phi \in C\left(\partial\Omega\right)$ et $\psi \in L^\infty_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$, une solution au sens faible de

$$\begin{cases} -\Delta w &= \psi & \text{dans} & \Omega \\ w &= \phi & \text{sur} & \partial\Omega \end{cases}$$

est continue jusqu'au bord de Ω.

Concernant les tests de Wiener pour la résolution du problème de Dirichlet pour des problèmes elliptiques et paraboliques, on renvoie aux références suivantes [4], [6], [13], [14], [15], [16], [20], [25], [32] et [33].
Dans le chapitre 2, on traite le problème :

$$\partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1} u = 0 \quad \text{dans } Q^\infty_\Omega := \Omega \times (0,\infty). \tag{3.3}$$

On s'intéresse aux solutions positives de (3.3) qui satisfont

$$\lim_{t\to 0} u\left(.,t\right) = f(.) \quad \text{dans } L^1_{loc}\left(\Omega\right) \tag{3.4}$$

où $f \in L^1_{loc+}\left(\Omega\right)$ et

$$\lim_{(x,t)\to(y,s)} u\left(x,t\right) = \infty \qquad \forall (y,s) \in \partial\Omega \times (0,\infty). \tag{3.5}$$

Dans ce chapitre on démontre deux types de résultats :

Théorème 3.4 *On suppose que $q > 1$ et Ω est un domaine borné. Alors pour tout $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$, il existe une solution maximale $\bar{u}_f$ du problème (3.3) vérifiant (3.4). Si $1 < q < N/(N-2)$, $\bar{u}_f$ satisfait (3.5). En plus, si $1 < q < N/(N-2)$ et $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$, $\bar{u}_f$ est la solution unique du problème qui satisfait (3.5).*

Théorème 3.5 *On suppose que $q > 1$, Ω est un domaine borné et $\partial\Omega$ est localement un graphe continu. Alors pour tout $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$, il existe au plus une solution du problème (3.3) vérifiant (3.4) et (3.5).*

Dans l'appendice de ce chapitre, on étudie une équation autosimilaire qui joue un rôle important dans notre construction,

$$\begin{cases} H'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right) H' + \frac{1}{q-1} H - |H|^{q-1} &= 0 \\ \lim\limits_{r\to 0} H(r) &= \infty \\ \lim\limits_{r\to\infty} r^{2/(q-1)} H(r) &= 0 \end{cases}$$

Dans le chapitre 3, on traite le problème de Cauchy-Dirichlet $\mathcal{P}^{\Omega,f}$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1} u = 0 \quad \text{in } Q^\Omega_\infty \\ \qquad\qquad\qquad\quad u = f \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ \quad \lim_{t\to 0} u(x,t) = \infty \qquad \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

On construit une solution positive $\underline{u}_\Omega$ of (3.6) avec $f = 0$ appartenant à $C(0,\infty; H^1_0(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega))$ grâce aux résultats de Brézis [7] et [8] concernant les semi-groupes de contraction engendré par les sous-différentielles des fonctions convexes dans les espaces de Hilbert. On considère aussi une approximation interne de Ω par des domaines bornés réguliers Ω^n tels que $\Omega = \cup_n \Omega^n$. Pour chaque domaine Ω^n, il existe une solution maximale $\overline{u}_{\Omega^n}$ du problème $\mathcal{P}^{\Omega^n,0}$. La suite $\{\overline{u}_{\Omega^n}\}$ est croissante. Sa limite $u_\Omega := \lim_{n\to\infty} \overline{u}_{\Omega^n}$ est la solution minimale positive de $\mathcal{P}^{\Omega,0}$. On démontre que $\underline{u}_\Omega = u_\Omega$. Si $\partial\Omega$ satisfait le critère parabolique de Wiener [33], il existe des solutions pour $\mathcal{P}^{\Omega,0}$. On construit la solution maximale $\overline{u}_\Omega$ de ce problème. On démontre deux théorèmes principaux :

Théorème 1. *Si $\partial\Omega$ est compact et satisfait le critère parabolique de Wiener, alors*

$$\overline{u}_\Omega = \underline{u}_\Omega.$$

Théorème 2. *Si $\partial\Omega$ est compact et satisfait le critère parabolique de Wiener, et si $f \in C(0,\infty;\partial\Omega)$ est positive, $\overline{u}_{\Omega,f}$ est la solution unique positive du problème $\mathcal{P}^{\Omega,f}$.*

Dans le chapitre 4, on traite le problème :

$$\partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1} u = 0 \quad \text{dans } Q^\infty_\Omega := \Omega \times (0,\infty). \tag{3.7}$$

On s'intéresse aux solutions positives de (3.7) qui satisfont

$$\lim_{t\to 0} u\,(.,t) = \infty \quad \text{dans } \Omega \tag{3.8}$$

et

$$\lim_{(x,t)\to(y,s)} u\,(x,t) = \infty \qquad \forall (y,s) \in \partial\Omega \times (0,\infty). \tag{3.9}$$

Dans ce chapitre on démontre le résultat suivant :

Théorème 3.6 *On suppose que $q > 1$ et Ω est un domaine borné. Alors il existe une solution maximale $\bar{u}$ du problème (3.7). Si $1 < q < N/\,(N-2)$, $\bar{u}$ satisfait (3.8) et (3.9). En plus, si $1 < q < N/\,(N-2)$ et $\partial\Omega = \partial\bar{\Omega}^c$, $\bar{u}$ est la solution unique du problème qui satisfait (3.8) et (3.9).*

4 Singularités

La troisième partie est constituée des chapitres 5 et 6. Dans le chapitre 5, on traite le problème

$$\partial_t u - \Delta u + t^\alpha u^q = 0 \text{ dans } \; Q_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[\tag{4.1}$$

où $T > 0$, $\alpha > -1$ et $q > 1$. Soit $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^N \times [0,T) \backslash \{(O,0)\}\right)$ une solution de (4.1) dans Q_T qui satisfait

$$u(x,0) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash \{O\}. \tag{4.2}$$

On va trouver des estimations pour une solution u de (4.1) en relation avec la solution maximale de $\phi' + t^\alpha \phi^q = 0$ explosant en $t = 0$ et la solution très singulière monodimentionnelle de (4.1). Ces estimations vont nous permettre de trouver une variante de l'estimation de Brézis-Friedman [9], dans leur article ils ont traité l'équation

$$\partial_t u - \Delta u + u^q = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T) \tag{4.3}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$. Ils ont obtenu l'estimation suivante pour toute solution de (4.3)

$$u(x,t) \le \frac{C\,(N,q)}{\left(|x|^2 + t\right)^{\frac{1}{q-1}}} \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \backslash \{0\}\,.$$

Dans le cas $q \ge \frac{N+2}{N}$, cette estimation a aidé à éliminer la singularité en O, leur résulat est le suivant :

Théorème 4.1 *Soit $u \in C^{2,1}\,(\Omega \times (0,T)) \cap C\,(\Omega \times [0,T) \backslash \{(O,0)\})$ une solution de (4.3) dans $\Omega \times (0,T)$ et satisfait $u(x,0) = 0$ dans $\Omega \backslash \{O\}$. Si $q \ge \frac{N+2}{N}$, alors on peut prolonger u en un élément de $C^{2,1}\,(\Omega \times [0,T))$.*

Donc notre but est d'éliminer la singularité en O. On démontre la variante de l'estimation de Brézis-Friedman suivante :

Théorème 4.2 *Pour $N \geq 1$, $q > 1$ et $\alpha > -1$, il existe $k > 0$ telle que pour tout $(x,t) \in Q_T$ et pour toute solution u de (4.1) vérifiant*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

on a

$$u(x,t) \leq k\left(|x|^2 + t\right)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}.$$

Pour éliminer la singularité en O, on a le résultat suivant :

Théorème 4.3 *Soit $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^N \times [0,T) \backslash \{(O,0)\}\right)$ une solution de (4.1) dans $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ et satisfait $u(x,0) = 0$ dans $\mathbb{R}^N \backslash \{O\}$. Si $q \geq 1 + (2(1+\alpha))/N$, avec $\alpha > -1$, alors on peut prolonger u en un élément de $C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\right)$.*

Dans le chapitre 6, on étudie les singularités isolées dans le demi-espace du problème

$$u_t - \Delta u + x_1^{2\alpha} u^q = 0, \tag{4.4}$$

dans le domaine $\mathcal{E} = \left\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\right\}$, où $q > 1$, $\alpha > -1$. Avec

$$u(0,x',0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1} \backslash \{O\}, \tag{4.5}$$

$$u(x_1,x',0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0. \tag{4.6}$$

Une généralisation du résultat est ainsi établie dans ce chapitre. On étudie le problème suivant :

$$u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^{p} x_i^{2\alpha} u^q = 0, \;\; 2 \leq p \leq N \tag{4.7}$$

dans le domaine $\mathcal{G} = \left\{(x,t) : x \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{N-p}, t \in \mathbb{R}^+\right\}$, où $q > 1$, $\alpha > -1$. Avec

$$u(0,x_{p+1},...,x_N,0) = 0, (x_{p+1},...,x_N) \in \mathbb{R}^{N-p} \backslash \{O\}, t > 0, \tag{4.8}$$

$$u(x_1,...,x_p,x_{p+1},...,x_N,0) = 0, (x_1,...,x_p) \in \mathbb{R}_+^p. \tag{4.9}$$

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times (0,\infty)$, on pose

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \text{ et } \tau = -\ln t.$$

Alors l'application $(x,t) \to (\eta,\tau)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Soit une fonction réelle v dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, on note Sv la fonction donnée par

$$(Sv)(\eta,\tau) = t^{\frac{1+\alpha}{q-1}} v(x,t), \forall (\eta,\tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

avec $q > 1$ et $\alpha > -1$. Si Sv est indépendante de τ alors on dit que v est autosimilaire. Dans leur article [23], Marcus et Véron ont étudié le problème dans le cas $\alpha = 0$ et ils ont trouvé le théorème suivant :

Théorème 4.4 *Soit le problème*

$$u_t - \Delta u + u^q = 0, \tag{4.10}$$

dans le domaine $\mathcal{E} = \Big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\Big\}$, *avec*

$$u(0, x', t) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0 \tag{4.11}$$

$$u(x_1, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0, (x_1, x') \neq (0,0). \tag{4.12}$$

1. *Si* $q \geq \frac{N+3}{N+1}$, *alors le problème n'a pas de solution dans* $C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$ *autre que la solution triviale.*
2. *Si* $1 < q < \frac{N+3}{N+1}$, *alors il existe une solution unique positive autosimilaire* $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$. *En plus* $h_s := SU_s$ *satisfait l'estimation suivante, pour tout* $m \in \left(0, \frac{1}{q-1}\right)$ *:*

$$C_m \eta_1 |\eta|^{2m-N-1} \leq \exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h_s(\eta) \leq C\eta_1 |\eta|^{\frac{2}{q-1}-N-1} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, \quad |\eta| > 1$$

   où C_m *et* C *sont deux constantes positives.*
3. *La solution* U_s *est maximale dans le sens qu'elle domine toute solution* $u \in C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$.

Dans le cas elliptique, Marcus et Véron [24] ont étudié le problème

$$-\Delta u + x_1^\alpha u^q = 0, \tag{4.13}$$

dans le domaine $\mathcal{E}' = \Big\{x \in \mathbb{R}^N, \quad x_1 > 0\Big\}$, avec

$$u(0, x') = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{4.14}$$

$$u \in C\left(\overline{\mathcal{E}'}\backslash O\right).$$

Ils ont défini pour $\tau > 0$ et pour toute fonction $v \in \mathcal{E}'$ la transformation

$$S_\tau v(x) = \tau^{\frac{2+\alpha}{q-1}} v(\tau x) \quad \forall x \in \mathcal{E}'.$$

Ils ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 4.5 1. *Si* $q \geq \frac{N+1+\alpha}{N-1}$, *alors le problème n'a pas de solution dans* $C\left(\overline{\mathcal{E}'}\backslash O\right)$ *autre que la solution triviale.*

2. *Si* $1 < q < \frac{N+1+\alpha}{N-1}$, *alors il existe une solution unique positive autosimilaire* $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{E}'}\backslash O\right)$. *La fonction* U_s *est de la forme*

$$U_s(x) = w(\sigma)|x|^{-\frac{2+\alpha}{q-1}}, \quad \sigma = \frac{x}{|x|},$$

   w est la solution unique du problème

$$\begin{cases} \Delta_\sigma w + \lambda w - (\sigma.e_1)^\alpha w^q & = & 0 & sur & S_+^{N-1} \\ w & = & 0 & sur & \partial S_+^{N-1} \end{cases}$$

avec Δ_σ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité,
$\lambda = \frac{2+\alpha}{q-1}\left(\frac{2+\alpha}{q-1} + 2 - N\right)$ *et e_1 est le vecteur unité dans la direction de l'axe x_1.*

3. *Toute solution u du problème est dominée par la fonction U_s. Alors il existe une constante C tel que*

$$|u(x)| \leq Cd\,(x, \partial\Omega)\,|x|^{-\frac{2+\alpha}{q-1}-1}.$$

Dans ce chapitre, on a prouvé les deux théorèmes suivants :

Théorème 4.6 *Soit le problème*

$$u_t - \Delta u + x_1^{2\alpha} u^q = 0, \tag{4.15}$$

dans le domaine $\mathcal{E} = \left\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\right\}$, avec

$$u(0, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1} \backslash \{O\}, \tag{4.16}$$

$$u(x_1, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0, \tag{4.17}$$

avec $\alpha > -1$ et $q > 1$. Si $1 < q < \frac{N+3+2\alpha}{N+1}$, alors il existe une solution unique positive autosimilaire $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{E}} \backslash O\right)$. En plus $h_s := SU_s$ satisfait l'estimation suivante, pour tout $m \in \left(0, \frac{1+\alpha}{q-1}\right)$:

$$C_m \eta_1 |\eta|^{2m-N-1} \leq \exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h_s(\eta) \leq C\eta_1 |\eta|^{\frac{2+2\alpha}{q-1}-N-1} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, \quad |\eta| > 1 \tag{4.18}$$

où C_m et C sont deux constantes positives.

Théorème 4.7 *Soit le problème*

$$u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^{p} x_i^{2\alpha} u^q = 0, \tag{4.19}$$

dans le domaine $\mathcal{G} = \left\{(x,t) : x \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{N-p}, t \in \mathbb{R}^+\right\}$, avec

$$u(0, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_{p+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-p} \backslash \{O\}, t > 0, \tag{4.20}$$

$$u(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}_+^p, \tag{4.21}$$

avec $\alpha > -1$ et $q > 1$. Si $1 < q < \frac{N+2\alpha+p+2}{N}$, alors il existe une solution unique positive autosimilaire $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{G}} \backslash O\right)$. En plus $h_s := SU_s$ satisfait l'estimation suivante :

$$\exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h_s(\eta) \leqslant C\eta_1\eta_2...\eta_p |\eta|^{\frac{2+2\alpha}{q-1}-p(N+p-2)-2} \text{ pour tout } \eta \in \mathcal{G}, \quad |\eta| \geqslant 1. \tag{4.22}$$

Bibliographie

[1] C. Bandle and M. Marcus. Large solutions of semilinear elliptic equations with "singular" coefficients. In *Optimization and nonlinear analysis (Haifa, 1990)*, volume 244 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 25–38. Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.

[2] C. Bandle and M. Marcus. "Large" solutions of semilinear elliptic equations : existence, uniqueness and asymptotic behaviour. *J. Anal. Math.*, 58 :9–24, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.

[3] C. Bandle and M. Marcus. Asymptotic behaviour of solutions and their derivatives, for semilinear elliptic problems with blowup on the boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12(2) :155–171, 1995.

[4] P. Bauman. A Wiener test for nondivergence structure, second-order elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 34(4) :825–844, 1985.

[5] L. Bieberbach. $\delta u = e^u$ und die automorphen funktionen. *Math. annalen.*, 77 :173–212, 1916.

[6] M. Biroli and U. Mosco. Wiener estimates for parabolic obstacle problems. *Nonlinear Anal.*, 11(9) :1005–1027, 1987.

[7] H. Brezis, *Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires*, Isr. J. Math. **9** , 513-534 (1971).

[8] H. Brezis. **Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[9] H. Brezis and A. Friedman. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 62(1) :73–97, 1983.

[10] H. Brezis, M. Marcus, and A. C. Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. In *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*, volume 163 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 55–109. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.

[11] H. Brezis and A. C. Ponce Ponce. Reduced measures on the boundary. *J. Funct. Anal.*, 229(1) :95–120, 2005.

[12] J.F. Dhersin and J.F. Le Gall. Wiener's test for super-Brownian motion and the Brownian snake. *Probab. Theory Related Fields*, 108(1) :103–129, 1997.

[13] L.C. Evans. and R.F. Gariepy. Wiener's criterion for the heat equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 78(4) :293–314, 1982.

[14] E. Fabes, D. Jerison, and C. Kenig. The Wiener test for degenerate elliptic equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32(3) :vi, 151–182, 1982.

[15] E.B. Fabes, N. Garofalo, and E. Lanconelli. Wiener's criterion for divergence form parabolic operators with C^1-Dini continuous coefficients. *Duke Math. J.*, 59(1) :191–232, 1989.

[16] R. Gariepy and W.P. Ziemer. Thermal capacity and boundary regularity. *J. Differential Equations*, 45(3) :374–388, 1982.

[17] I. Iscoe. On the supports of measure-valued critical branching Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16(1) :200–221, 1988.

[18] J. B. Keller. On solutions of $\Delta u = f(u)$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 :503–510, 1957.

[19] A.D. Labutin. Wiener regularity for large solutions of nonlinear equations. *Ark. Mat.*, 41(2) :307–339, 2003.

[20] W. Littman, G. Stampacchia, and H. F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 17 :43–77, 1963.

[21] C. Loewner and L. Nirenberg. Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations. In *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pages 245–272. Academic Press, New York, 1974.

[22] M. Marcus and L. Véron. Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2) :237–274, 1997.

[23] M. Marcus and L. Véron. Semilinear parabolic equations with measure boundary data and isolated singularities. *J. Anal. Math.*, 85 :245–290, 2001.

[24] M. Marcus and L. Véron. The boundary trace and generalized boundary value problem for semilinear elliptic equations with coercive absorption. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(6) :689–731, 2003.

[25] G. Dal Maso and U. Mosco. Wiener criteria and energy decay for relaxed Dirichlet problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 95(4) :345–387, 1986.

[26] R. Osserman. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pacific J. Math.*, 7 :1641–1647, 1957.

[27] H. Rademacher. Einige besondere probleme partieller differentialgleichungen.

[28] J.L. Vázquez. On a semilinear equation in $\mathbf{R}^2$ involving bounded measures. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 95(3-4) :181–202, 1983.

[29] L. Véron. *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, volume 353 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series.* Longman, Harlow, 1996.

[30] L. Véron. Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary. *J. Anal. Math.*, 59 :231–250, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.

[31] N. Wiener. Certain notion in potential theory. *J.Math.Phys.*, 3 :34–51, 1924.

[32] N. Wiener. The dirichlet problem. *J.Math.Phys.*, 3 :127–146, 1924.

[33] W.P. Ziemer. Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations. *J. Differential Equations*, 35(3) :291–305, 1980.

Chapitre 1

Reduced measures associated to parabolic problems

Ce chapitre est constitué d'un article à paraître dans *Proceedings Steklov Inst.* traitant la notion de "Mesure Réduite" pour l'équation parabolique $\partial_t u - \Delta u + g(u) = 0$ dans $\Omega \times (0, \infty)$ avec les conditions suivantes (P) : $u = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $u(x, 0) = \mu$ et (P') : $u = \mu'$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $u(x, 0) = 0$ où μ et μ' sont des mesures de Radon positives et g est une fonction continue croissante.

Reduced measures associated to parabolic problems[(1)]

Waad Al Sayed
Department of Mathematics, Université François Rabelais, Tours, FRANCE
Mustapha Jazar
Department of Mathematics, Université Libanaise, Beyrouth, LIBAN
Laurent Véron
Department of Mathematics, Université François Rabelais, Tours, FRANCE

Dedicated to Stanislav Pokhozaev on his seventieth birthday

Abstract We study the existence and the properties of the reduced measures for the parabolic equations $\partial_t u - \Delta u + g(u) = 0$ in $\Omega \times (0, \infty)$ subject to the conditions $(P) : u = 0$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $u(x, 0) = \mu$ and $(P') : u = \mu'$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$, $u(x, 0) = 0$ where μ and μ' are positive Radon measures and g a continuous nondecreasing function.

1991 Mathematics Subject Classification. 35K60, 34.
Key words. Parabolic equations, Radon measures, capacities, Hausdorff measures

1 Introduction

Let Ω be a bounded domain of $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ and g a nondecreasing continuous function defined on $\mathbb{R}$ and vanishing on $(-\infty, 0]$. This article is concerned with the following question : *Given a positive Radon measure ν on Ω, does it exist a largest Radon measure μ below it for which the initial value problem*

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + g(u) = 0 \quad & in\ Q_T := \Omega \times (0, T) \\ u = 0 \quad & in\ \partial_\ell Q_T := \partial\Omega \times (0, T) \\ u(., 0) = \mu \quad & in\ \Omega. \end{aligned}\right. \tag{1.1}$$

admits a solution? Whenever μ exists, it is called the *reduced measure* associated to ν. A positive Radon measure for which (1.1) is solvable is called a *good measure.* This

[(1)]To appear in *Proceedings Steklov Inst.*

type of problems is now well understood for nonlinear elliptic equations. This relaxation phenomenon appeared in the measure framework in the paper [11] by Vazquez dealing with solving the problem

$$-\Delta u + e^{au} = \mu \quad \text{in } \mathbb{R}^2. \tag{1.2}$$

He proved that the reduced measures is the sum of the non-atomic part of μ and the atomic part where the coefficients of the Dirac masses at any atom a are truncated from above at the value $2\pi/a$. Recently the general relaxation problems for the nonlinear elliptic equations

$$\left\{\begin{array}{r l} -\Delta u + g(u) = \mu & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1.3}$$

and

$$\left\{\begin{array}{r l} -\Delta u + g(u) = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u = \mu & \text{in } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1.4}$$

are studied respectively by Brezis, Marcus and Ponce [3] and Brezis and Ponce [4]. They prove the existence of a reduced measure μ^* and study its properties, in particular its continuity properties with respect to the capacity $W^{1,2}$ for problem (1.3), or the (N-1)-dimensional Hausdorff measure for problem (1.4).

In this article we study the initial value problem in this perspective and we prove that for any positive bounded Radon measure μ in Ω there exists a largest measure μ^*, smaller than μ such that (1.1) is solvable. We study the set of good measures relative to g and prove that any good measure is absolutely continuous with respect to the Hausdorff measure H^N. In a similar way we study the Cauchy-Dirichlet problem

$$\left\{\begin{array}{r l} \partial_t u - \Delta u + g(u) = 0 & \text{in } Q_T := \Omega \times (0,T) \\ u = \mu & \text{in } \partial_\ell Q_T := \partial\Omega \times (0,T) \\ u(.,0) = 0 & \text{in } \Omega, \end{array}\right. \tag{1.5}$$

and we prove that the reduced measure is absolutely continuous with respect to the same Hausdorff measure H^N.

The proof of many results here follows the ideas borrowed from the theory of reduced measures for elliptic equations as it is developed in [3] and [4]. We choose to expose them for the sake of completeness.

2 Initial value problem

In this section Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. We denote by $\mathfrak{M}(\Omega)$ the set of Radon measures in Ω and, for $\alpha \in \mathbb{R}$, by $\mathfrak{M}^\alpha(\Omega)$ the subset of $\mu \in \mathfrak{M}(\Omega)$ satisfying

$$\int_\Omega \rho^\alpha(x)\, d\,|\mu| < \infty.$$

Thus $\mathfrak{M}_+^\alpha(\Omega)$ is the positive cone and $\mathfrak{M}_+^0(\Omega)$ the set of bounded measures. For $q \in [1,\infty)$, we denote by $L^q_{\rho^\alpha}(\Omega)$ the corresponding weighted Lebesgue spaces. For $0 \leq \tau < \sigma \leq T$ we set $Q_{\tau,\sigma} := \Omega \times (\tau,\sigma)$, $Q_\sigma := \Omega \times (0,\sigma)$ and denote by $\partial_\ell Q_{\tau,\sigma} := \partial\Omega \times (\tau,\sigma]$ and $\partial_\ell Q_\sigma := \partial\Omega \times (0,\sigma]$ the lateral boundary of these sets. Throughout this paper we make the following assumption on g

$$g \text{ is a nondecreasing continuous function defined on } \mathbb{R} \text{ and vanishing on } (-\infty,0]. \tag{2.1}$$

Definition 2.1 Let $\mu \in \mathfrak{M}_+^1(\Omega)$. A function $u \in L^1(Q_T)$ is a weak solution of (1.1) in Q_T if $g(u) \in L^1_\rho(Q_T)$ and

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx = \int_\Omega \zeta\, d\mu, \tag{2.2}$$

for all $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, which is the space of functions in $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ which vanish on $\partial\Omega \times [0,T] \cup \overline{\Omega} \times \{T\}$.

We define in a similar way a weak subsolution (resp. supersolution) of (1.1) by imposing the same integrability conditions on u and $g(u)$ and

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \leq \int_\Omega \zeta\, d\mu, \tag{2.3}$$

resp.

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \geq \int_\Omega \zeta\, d\mu, \tag{2.4}$$

for all positive test functions in the same space. More generally we define a subsolution (resp. supersolution) of equation

$$\partial_t u - \Delta u + g(u) = 0 \quad \text{in } Q_T \tag{2.5}$$

as a function $u \in L^1_{loc}(Q_T)$ such that $g(u) \in L^1_{loc}(Q_T)$ and

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \leq 0, \tag{2.6}$$

resp.

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \geq 0, \tag{2.7}$$

for all positive test functions ζ in the space $C^{2,1}_0(Q_T)$.

If a solution of (1.1) exists, it is unique, and we shall denote it by u_μ. It is not true that problem (1.1) can be solved for any positive bounded measure μ although it is the case if μ is absolutely continuous with respect to the N-dimensional Hausdorff measure H^N.

Definition 2.2 A measure for which the problem can be solved is called a good measure relative to g. The subset of $\mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ of good measures relative to g is denoted by $\mathcal{G}^\Omega(g)$. If $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ belongs to $\mathcal{G}^\Omega(g)$ for any g satisfying (2.1), is called a universally good measure.

There are many sufficient conditions which insure the solvability of (1.1), for example

$$\iint_{Q_T} g(\mathbb{E}[\mu])\rho(x)dx\,dt < \infty, \tag{2.8}$$

where $\mathbb{E}[\mu]$ is the heat potential of μ in Ω, that is the solution v of

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \text{in } Q_T \\ v = 0 & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ v(.,0) = \mu & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.9}$$

We recall the parabolic Kato inequality

Lemma 2.3 Let W be a domain in $\Omega \times \mathbb{R}$, $v \in L^1_{loc}(W)$ and $h \in L^1_{loc}(W)$ such that

$$-\partial_t v + \Delta v \geq h \quad \text{in } \mathcal{D}'(W). \tag{2.10}$$

Then

$$-\partial_t v_+ + \Delta v_+ \geq h\chi_{[v\geq 0]} \quad \text{in } \mathcal{D}'(W). \tag{2.11}$$

Proof 1 Let $\{\sigma_j\}$ be a regularizing sequence with compact support in the $N+1$ ball $\tilde{B}_{\epsilon_j}(0)$ ($\epsilon_j \to 0$ as $j \to \infty$), and $v_j = v * \sigma_j$. If $V \subset W$ is such that $\operatorname{dist}(V, W^c) > 0$, v_j is defined in V whenever $\epsilon_j < \operatorname{dist}(V, W^c)$. Then

$$-\partial_t v_j + \Delta v_j \geq h_j = h * \sigma_j \quad \text{in } \mathcal{D}'(V), \tag{2.12}$$

and everywhere in V. For $\delta > 0$ let

$$j_\delta(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < -\delta \\ \dfrac{(r+\delta)^2}{2\delta} & \text{if } -\delta \leq r \leq 0 \\ r + \dfrac{\delta}{2} & \text{if } r > 0. \end{cases}$$

Since

$$-\partial_t j_\delta(v_j) + \Delta j_\delta(v_j) = j'_\delta(v_j)\,(-\partial_t v_j + \Delta v_j) + j''_\delta(v_j)|\nabla v_j|^2 \geq j'_\delta(v_j)h_j,$$

and $\phi \in C_0^\infty(W)$ is nonnegative and has compact support in V, it follows that

$$\int_W j_\delta(v_j)\,(\partial_t\phi + \Delta\phi)\,dx\,dt \geq \int_W j'_\delta(v_j)h_j\phi\,dx\,dt.$$

Letting $j \to \infty$, and using the fact that j_δ and j'_δ are continuous and, for some subsequence still denoted $\{\epsilon_j\}$, $\{(v_{\epsilon_j}, h_{\epsilon_j})\}$ converges to (v, h) in L^1_{loc} and almost everywhere in W, we derive from the Lebesgue theorem

$$\int_W j_\delta(v)\,(\partial_t\phi + \Delta\phi)\,dx\,dt \geq \int_W j'_\delta(v)h\phi\,dx\,dt.$$

Now $j_\delta(v)$ converges to v^+ in L^1_{loc} and $j'_\delta(v(x,t))$ converges to 0 if $v(x,t) < 0$ and to 1 if $v(x,t) \geq 0$, i.e. to $\chi_{[v\geq 0]}$. Using again the Lebesgue theorem, we obtain

$$\int_W v^+\,(\partial_t\phi + \Delta\phi)\,dx\,dt \geq \int_W \chi_{[v\geq 0]}h\phi\,dx\,dt,$$

which is (2.11). □

Remark 2.1 In an equivalent way, we can state Lemma 2.3 as follows : *If* $v \in L^1_{loc}(W)$ *and* $h \in L^1_{loc}(W)$ *are such that*

$$\partial_t v - \Delta v \leq h \quad \textit{in } \mathcal{D}'(W). \tag{2.13}$$

Then

$$\partial_t v_+ - \Delta v_+ \leq h\chi_{[v\geq 0]} \quad \textit{in } \mathcal{D}'(W). \tag{2.14}$$

Definition 2.4 Let $u \in L^1_{loc}(Q_T)$. 1- We say that u admits the Radon measure μ as an initial trace if it exists

$$\mathrm{ess\,lim_{t\to 0}}\int_\Omega \mathrm{u(.,t)}\phi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega \phi\,\mathrm{d}\mu \quad \forall\phi \in \mathrm{C_0}(\Omega). \tag{2.15}$$

We shall denote $\mu = Tr_\Omega(u)$.

2- We say that u admits the outer regular positive Borel measure $\nu \approx (\mathcal{S}, \mu)$ as an initial trace if it exists an open subset $\mathcal{R} \subset \Omega$ and $\mu \in \mathfrak{M}_+(\mathcal{R})$ such that

$$\mathrm{ess\,lim_{t\to 0}}\int_\Omega \mathrm{u(.,t)}\phi\,\mathrm{dx} = \int_\Omega \phi\,\mathrm{d}\mu \quad \forall\phi \in \mathrm{C_0}(\mathcal{R}). \tag{2.16}$$

and, with $\mathcal{S} = \Omega \setminus \mathcal{R}$,

$$\mathrm{ess\,lim_{t\to 0}}\int_\Omega \mathrm{u(.,t)}\phi\,\mathrm{dx} = \infty \quad \forall\phi \in \mathrm{C_0}(\Omega), \phi \geq 0, \phi > 0 \text{ somewhere on } \mathcal{S}. \tag{2.17}$$

We shall denote $\nu = tr_\Omega(u)$.

The trace operator is order preserving. The proof of the following result is straightforward.

Proposition 2.5 Let u and $\tilde{u}$ in $L^1_{loc}(Q_T)$.
1- Suppose $Tr_\Omega(u) = \mu$ and $Tr_\Omega(\tilde{u}) = \tilde{\mu}$. Then

$$\tilde{u} \leq u \Longrightarrow \tilde{\mu} \leq \mu. \tag{2.18}$$

2- Suppose $tr_\Omega(u) = \nu \approx (\mathcal{S}, \mu)$ and $tr_\Omega(\tilde{u}) = \tilde{\nu} \approx (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mu})$. Then

$$\tilde{u} \leq u \Longrightarrow \tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S} \quad \text{and } \tilde{\mu}\lfloor_{\mathcal{S}^c} \leq \mu\lfloor_{\mathcal{S}^c}. \tag{2.19}$$

The next classical results characterize the nonnegative supersolutions or subsolutions. We give their proof for the sake of completeness.

Proposition 2.6 Let $u \in L^1(Q_T)$ be a nonnegative supersolution of (2.5) in Q_T such that $g(u) \in L^1(Q_T)$. Then there exists a positive Radon measure μ such that $\mu = Tr_\Omega(u)$.

Proof 2 If $0 < \sigma < \tau < T$ are two Lebesgue points of $t \mapsto \|u(.,t)\|_{L^1}$ and $\phi \in C^2_0(\Omega)$, $\phi \geq 0$, we set $Q_{\sigma,\tau} = \Omega \times (\sigma, \tau)$, take $\zeta(x,t) = \chi_{[\sigma,\tau]}(t)\phi(x)$ (by approximations) and derive from the definition that

$$\int_\Omega u(.,\tau)\phi\, dx - \int_\Omega u(.,\sigma)\phi\, dx + \iint_{Q_{\sigma,\tau}} (-u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \geq 0. \tag{2.20}$$

Set

$$H(\sigma) = \iint_{Q_{\sigma,\tau}} (-u\Delta\phi + \phi\, g(u))\, dx\, dt$$

Then $H \in L^1(0,\tau)$ and the mapping

$$\sigma \mapsto \Psi(\sigma) = -\int_\Omega u(.,\sigma)\phi\, dx - H(\sigma)$$

is a.e. nondecreasing on $(0,\tau]$ and it admits an essential limit $L(\phi) \in \mathbb{R}$ as $\sigma \to 0$. Therefore it exists

$$\ell(\phi) = \mathrm{ess\,lim}_{\sigma\to 0} \int_\Omega \mathrm{u}(.,\sigma)\phi\, \mathrm{dx},$$

and the mapping $\phi \mapsto \ell(\phi)$ defines a positive Radon measure μ in Ω. $\square$

It is possible to get rid of the integrability assumption on u if it is assumed that u vanishes on the boundary and Ω is bounded.

Proposition 2.7 Let u be a positive supersolution of (2.5) in Q_T which vanishes on $\partial_\ell Q_T$ in the sense that (2.4) holds for all nonnegative $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$. If $g(u) \in L^1_\rho(Q_T)$, there exists $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ such that $\mu = Tr_\Omega(u)$.

Proof 3 As a test function we take $\zeta(x,t) = \chi_{[\sigma,\tau]}(t)\phi_1(x)$ where ϕ_1 is the first eigenfunction of $-\Delta$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$, $\phi_1 \geq 0$ and λ_1 the corresponding eigenvalue. Thus (2.20) is replaced by

$$\int_\Omega u(.,\tau)\phi_1\,dx - \int_\Omega u(.,\sigma)\phi_1\,dx + \iint_{Q_{\sigma,\tau}} (\lambda_1 u + g(u))\,\phi_1 dx\,dt \geq 0. \tag{2.21}$$

If we set

$$X(\tau) = \iint_{Q_{\sigma,\tau}} u\phi_1\,dx\,dt,$$

and

$$G(\sigma) = \iint_{Q_{\sigma,\tau}} \phi_1\,g(u)\,dx\,dt,$$

then (2.21) reads as

$$X'(\sigma) + \lambda_1 X(\sigma) + G(\sigma) \geq X'(\tau) \quad \text{a.e. } 0 < \sigma < \tau,$$

which yields to

$$\frac{d}{d\sigma}\left(e^{\lambda_1\sigma}X(\sigma) - \int_\sigma^\tau e^{\lambda_1 t}\,(G(t) - X'(\tau))\,dt\right) \geq 0.$$

The conclusion follows as in Proposition 2.6. Notice also that another choice of test function yields to $u \in L^1(\Omega)$. □

For subsolutions of (2.5) we prove the following.

Proposition 2.8 Let $u \in L^1(Q_T)$ be a nonnegative subsolution of (2.5) in Q_T such that $g(u) \in L^1(Q_T)$. Then there exists a positive outer regular Borel measure ν on Ω such that $\nu = tr_\Omega(u)$.

Proof 4 Defining H as in the proof of Proposition 2.6 we obtain that

$$\sigma \mapsto \Psi(\sigma) = \int_\Omega u(.,\sigma)\phi\,dx + H(\sigma)$$

is nonincreasing on $(0,\tau]$ and it admits a limit $L^*(\phi) \in (-\infty,\infty]$ as $\sigma \to 0$. For any $\xi \in \Omega$ the following dichotomy holds,
(i) either there exists a $\phi \in C_0^2(\Omega)$ verifying $\phi(\xi) > 0$ such that $L(\phi) < \infty$,
(ii) or for any $\phi \in C_0^2(\Omega)$ verifying $\phi(\xi) > 0$, $L(\phi) = \infty$.
The set $\mathcal{R}(u)$ of ξ such that (i) occurs is open and there exists $\mu \in \mathfrak{M}_+(\mathcal{R}(u))$ such that

$$L(\phi) = \int_{\mathcal{R}(u)} \phi\,d\mu \quad \forall \phi \in C_0(\mathcal{R}(u)).$$

The set $\mathcal{S}(u) = \Omega \setminus \mathcal{S}(u)$ is relatively closed in Ω. Further, if $\phi \in C_0(\Omega)$ is nonnegative and positive somewhere on $\mathcal{S}(u)$, there holds

$$\mathrm{ess\,lim_{t\to 0}} \int_\Omega \mathrm{u}(.,\sigma)\phi\,\mathrm{dx} = \infty.$$

The outer regular Borel measure ν is defined for any Borel subset $E \subset \Omega$ by

$$\nu(E) = \begin{cases} \displaystyle\int_E d\mu & \text{if } E \subset \mathcal{R}(u) \\ \infty & \text{if } E \cap \mathcal{S}(u) \neq \emptyset. \end{cases}$$

□

The next lemma is the parabolic counterpart of an elliptic result proved in [4]

Lemma 2.9 Let $f \in L^1_\rho(Q_T)$ and $u \in L^1(Q_T)$ such that

$$\iint_{Q_T} u(\partial_t\zeta + \Delta\zeta)dx\,dt = -\iint_{Q_T} f\zeta\,dx\,dt \tag{2.22}$$

for every $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$. Then

$$\lim_{n\to\infty} n\iint_{Q_T\cap\{\rho(x)\leq n^{-1}\}} |u|\,dx\,dt = 0. \tag{2.23}$$

Proof 5 We assume first that $f \geq 0$, then $u \geq 0$. Let H be a nondecreasing concave C^2 function such that $H(0) = 0$, $H''(t) = -1$ for $0 \leq t \leq 1$ and $H(t) = 1$ for $t \geq 2$. Let ξ_0 be the solution of

$$\begin{cases} \partial_t\xi_0 + \Delta\xi_0 = -1 & \text{in } Q_T \\ \xi_0(.,T) = 0 & \text{in } \bar{\Omega} \\ \xi_0(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases} \tag{2.24}$$

Let $w_n = n^{-1}H(n\xi_0)$, then

$$-\partial_t w_n - \Delta w_n \geq -nH''(n\xi_0)\left|\nabla\xi_0\right|^2 \geq n\chi_{\{\xi_0\leq n^{-1}\}}\left|\nabla\xi_0\right|^2.$$

Therefore

$$\iint_{Q_T} fw_n dx\,dt = -\iint_{Q_T} u(\partial_t w_n + \Delta w_n)dx\,dt \geq n\iint_{Q_T} \left|\nabla\xi_0\right|^2 udx\,dt.$$

But $w_n \leq \min\{\xi_0, n^{-1}\}$, therefore, by the Lebesgue theorem,

$$0 = \lim_{n\to\infty}\iint_{Q_T} fw_n dx\,dt = \lim_{n\to\infty} n\iint_{Q_T} \left|\nabla\xi_0\right|^2 udx\,dt.$$

Let $\epsilon > 0$, by Hopf lemma on $Q_{T-\epsilon}$, there exists $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ such that $|\nabla \xi_0| \geq c_1$ on $\partial\Omega \times [0, T-\epsilon]$; thus $c_2\xi_0 \leq \rho \leq c_2^{-1}\xi_0$ and

$$\lim_{n\to\infty} n \iint_{Q_{T-\epsilon}\cap\{\xi_0(x)\leq n^{-1}\}} udx\,dt = 0.$$

Clearly we can extend f to be zero for $t > T$ and $\tilde{u}$ to be the weak solution of

$$\begin{cases} \partial_t\tilde{u} + \Delta\tilde{u} = 0 & \text{in } Q_{T,T+\epsilon} \\ \tilde{u}(.,T) = u(.,T) & \text{in } \bar{\Omega} \\ \tilde{u}(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [T, T+\epsilon]. \end{cases}$$

Notice that it is always possible to assume that T is a Lebesgue point of $t \mapsto \|u(.,t)\|_{L^1}$ inasmuch this function is actually continuous. Replacing T by $T+\epsilon$, we derive (2.23). Next, if u has not constant sign, we denote by v the weak solution of

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = |f| & \text{in } Q_T \\ v(.,0) = 0 & \text{in } \bar{\Omega} \\ v(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [0,T]. \end{cases}$$

Then $|u| \leq v$ and the proof follows from the first case. □

Lemma 2.10 Let $f \in L^1_\rho(Q_T)$ and $u \in L^1(Q_T)$ such that

$$-\iint_{Q_T} u(\partial_t\zeta + \Delta\zeta)dx\,dt \leq \iint_{Q_T} f\zeta\,dx\,dt \tag{2.25}$$

for every $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, $\zeta \geq 0$. Then, for the same class of test functions ζ, there holds

$$-\iint_{Q_T} (\partial_t\zeta + \Delta\zeta)u_+dx\,dt \leq \iint_{Q_T\cap\{u\geq 0\}} f\zeta\,dx\,dt. \tag{2.26}$$

Proof 6 By Lemma 2.3, (2.26) holds for any $\zeta \in C^{2,1}_0(Q_T)$. Let $\{\gamma_n\}$ be a sequence of functions in $C^{2,1}_0(Q_T)$ such that $0 \leq \gamma_n \leq 1$, $\gamma_n(x,t) = 1$ if $\rho(x) \geq n^{-1}$ or $t \geq n^{-1}$, $\|\nabla\gamma_n\|_{L^\infty} \leq Cn$, $\|\Delta\gamma_n\|_{L^\infty} \leq Cn^2$ and $\|\partial_t\gamma_n\|_{L^\infty} \leq Cn$. Given $\zeta \geq 0$ in $C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, $\zeta\gamma_n$ is an admissible test function for Kato's inequality (2.26), thus

$$-\iint_{Q_T} (\partial_t(\zeta\gamma_n) + \Delta(\zeta\gamma_n))u_+dx\,dt \leq \iint_{Q_T\cap\{u\geq 0\}} f(\zeta\gamma_n)\,dx\,dt. \tag{2.27}$$

When $n \to \infty$ the right-hand side of (2.27) converges to the right-hand side of (2.26). Moreover $\partial_t(\zeta\gamma_n) = \gamma_n\partial_t\zeta + \zeta\partial_t\gamma_n$, $\nabla(\zeta\gamma_n) = \gamma_n\nabla\zeta + \zeta\nabla\gamma_n$ and $\Delta(\zeta\gamma_n) = \gamma_n\Delta\zeta + \zeta\Delta\gamma_n + 2\nabla\zeta.\nabla\gamma_n$. Thus

$$\partial_t(\zeta\gamma_n) + \Delta(\zeta\gamma_n) = \gamma_n\partial_t\zeta + \zeta\partial_t\gamma_n + \gamma_n\Delta\zeta + \zeta\Delta\gamma_n + 2\nabla\zeta.\nabla\gamma_n.$$

Since ζ vanishes on $\partial\Omega \times [0,T]$ and is bounded with bounded gradient, there holds

$$\left|\iint_{Q_T} (\zeta\partial_t\gamma_n + \zeta\Delta\gamma_n + 2\nabla\zeta.\nabla\gamma_n)\, u^+\, dx\, dt\right| \leq Cn \iint_{Q_T\cap\{\rho(x)\leq n^{-1}\}} u^+\, dx\, dt$$

which goes to 0 as $n \to \infty$. This implies (2.26). □

If we deal with subsolution or supersolutions of problem (1.1) we have the following results

Theorem 2.11 Let $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ and u be a nonnegative subsolution of (1.1). Then the initial trace of u is a positive Radon measure $\tilde{\mu}$ such that $\tilde{\mu} \leq \mu$. Furthermore, if (1.1) admits a weak solution u_μ, there holds $u \leq u_\mu$.

Proof 7 *Step 1. There holds $\tilde{\mu} \leq \mu$.* If σ is a Lebesgue point of $t \mapsto \|\tilde{u}(.,t)\|_{L^1}$ and $\phi \in C^2_0(\Omega)$, $\phi \geq 0$, we can take $\zeta(x,t) = \chi_{[0,\sigma]}(t)\phi(x)$ (by approximations) and derive from (2.3) that

$$\int_\Omega u(.,\sigma)\phi\, dx + \iint_{Q_\sigma} (-u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \leq \int_\Omega \phi\, d\mu, \tag{2.28}$$

thus, by Proposition 2.8, using the fact that $u \in L^1(Q_T)$ and $g(u) \in L^1_\rho(Q_T)$,

$$\mathrm{ess}\lim_{\sigma\to 0} \int_\Omega \mathrm{u}(.,\sigma)\phi\, \mathrm{dx} \leq \int_\Omega \phi\, \mathrm{d}\mu. \tag{2.29}$$

It follows that the initial trace $\tilde{\nu} \approx (\mathcal{S}(u), \tilde{\mu}$ has no singular part ($\mathcal{S}(u) = \emptyset$) and $\tilde{\mu} \leq \mu$. This implies that $\phi \mapsto m(\phi)$ is a measure dominated by μ that we shall denote by $\tilde{\mu}$. It represents the initial trace of $\tilde{u}$, and we shall denote it by

$$\tilde{\mu} = Tr_\Omega(\tilde{u}). \tag{2.30}$$

Next we take $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, $\zeta \geq 0$, and get at any Lebesgue point σ as in Proposition 2.6-Proposition 2.8

$$\iint_{Q_{\sigma,T}} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \leq \int_\Omega u(.,\sigma)\zeta\, dx,$$

we derive, by letting $\sigma \to 0$,

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx\, dt \leq \int_\Omega \zeta(.,0)\, d\tilde{\mu}. \tag{2.31}$$

Step 2. There exists $u_{\tilde{\mu}}$ and $u_{\tilde{\mu}} \leq u_\mu$. For $k > 0$ set $g_k(r) = \min\{g(r), k\}$ and let $u = u^k_{\tilde{\mu}}$ be the solution of

$$\left\{\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + g_k(u) &= 0 \quad \text{in } Q_T := \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial_\ell Q_T := \partial\Omega \times (0,T) \\ u(.,0) &= \tilde{\mu} \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}\right. \tag{2.32}$$

Defining in the same way u^k_μ, we obtain $u^k_{\tilde\mu} \leq u^k_\mu$, $u^k_{\tilde\mu} \geq u^{k'}_{\tilde\mu}$ and $u^k_\mu \geq u^{k'}_\mu \geq u_\mu$ for $k' > k > 0$. If $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$ is nonnegative, there holds

$$\iint_{Q_T} \zeta\, g_k(u^k_\mu) dx\, dt = \int_\Omega \zeta\, d\mu + \iint_{Q_T} (\partial_t \zeta + \Delta\zeta)\, u^k_\mu dx\, dt. \tag{2.33}$$

Clearly u^k_μ converges to some $U \geq u_\mu$ when $k \to \infty$, the right-hand side of (2.33) converges to

$$\int_\Omega \zeta\, d\mu + \iint_{Q_T} (\partial_t \zeta + \Delta\zeta)\, U dx\, dt,$$

and $g_k(u^k_\mu)$ converges to $g(U)$ a. e. By Fatou

$$\iint_{Q_T} \zeta\, g(U) dx\, dt \leq \liminf_{k\to\infty} \iint_{Q_T} \zeta\, g_k(u^k_\mu) dx\, dt,$$

thus, using the monotonicity of g,

$$\iint_{Q_T} \zeta\, g(u_\mu) dx\, dt \leq \iint_{Q_T} \zeta\, g(U) dx\, dt \leq \int_\Omega \zeta\, d\mu + \iint_{Q_T} (\partial_t \zeta + \Delta\zeta)\, U dx\, dt. \tag{2.34}$$

Because u_μ satisfies (2.2), all the three terms in (2.34) are equal, $U = u_\mu$ and

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{Q_T} \zeta\, g_k(u^k_\mu) dx\, dt = \iint_{Q_T} \zeta\, g(u_\mu) dx\, dt. \tag{2.35}$$

Next $u^k_{\tilde\mu}$ decreases and converges to some $\tilde U$, $g_k(u^k_{\tilde\mu}) \to g(\tilde U)$ a.e., and

$$\iint_{Q_T} \zeta\, g(\tilde U) dx\, dt \leq \lim_{k\to\infty} \iint_{Q_T} \zeta\, g_k(u^k_{\tilde\mu}) dx\, dt = \int_\Omega \zeta\, d\tilde\mu + \iint_{Q_T} (\partial_t \zeta + \Delta\zeta)\, \tilde U dx\, dt. \tag{2.36}$$

Since $0 \leq \zeta\, g_k(u^k_{\tilde\mu}) \leq \zeta\, g_k(u^k_\mu)$. In order to prove that

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{Q_T} \zeta\, g_k(u^k_{\tilde\mu}) dx\, dt = \iint_{Q_T} \zeta\, g(\tilde U) dx\, dt, \tag{2.37}$$

we use the following classical result : *Let $h_n \geq \tilde h_n \geq 0$ two sequences of measurable functions in some measured space (G, Σ, dm) which converge a. e. in G to h and $\tilde h$ respectively. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \int_G h_n dm = \int_G h dm \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \int_G \tilde h_n dm = \int_G \tilde h dm.$$

Therefore (2.35) implies (2.37). From (2.36) we get

$$\iint_{Q_T} \zeta\, g(\tilde U) dx\, dt = \int_\Omega \zeta\, d\tilde\mu + \iint_{Q_T} (\partial_t \zeta + \Delta\zeta)\, \tilde U dx\, dt. \tag{2.38}$$

This relation is valid with any $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$ with constant sign. It implies in particular that $Tr_\Omega(\tilde{U}) = \tilde{\mu}$. Thus $u_{\tilde{\mu}}$ exists and $\tilde{U} = u_{\tilde{\mu}}$.
Step 3. We claim that $u \leq u_{\tilde{\mu}}$. Set $w = u - u_{\tilde{\mu}}$, it follows from (2.31),

$$\iint_{Q_T} (-w\partial_t\zeta - w\Delta\zeta + (g(u) - g(u_{\tilde{\mu}}))\zeta)\,dx\,dt \leq 0 \tag{2.39}$$

for any $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, $\zeta \geq 0$. Using Lemma 2.10 we derive

$$\iint_{Q_T\cap\{w^+\geq 0\}} (-(\partial_t\zeta + \Delta\zeta)w_+ + (g(u) - g(u_{\tilde{\mu}}))\zeta)\,dx\,dt \leq 0 \tag{2.40}$$

We take $\zeta = \xi_0$ given by (2.24). Since g is nondecreasing, we derive

$$\iint_{Q_T\cap\{w^+\geq 0\}} w_+ dx\,dt \leq 0. \tag{2.41}$$

Thus $u \leq u_{\tilde{\mu}} \leq u_\mu$. $\square$

Remark 2.2 It is noticeable that Step-2 of the proof of Theorem 2.11 can be stated in the following way. *If* $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ *is a good measure, any measure* $\tilde{\mu}$ *such that* $0 \leq \tilde{\mu} \leq \mu$ *is a good measure.*

Consider $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$. The relaxation phenomenon associated to (1.1) can be constructed in the following way. Let $\{g_k\}$ be an increasing sequence of continuous nondecreasing functions defined on $\mathbb{R}$, vanishing on $(-\infty, 0]$ and such that

$$\begin{array}{lll} (i) & 0 \leq g_k(r) \leq c_k r^p + c'_k & \forall r \geq 0, \ \ \forall k > 0 \\ (ii) & \lim_{k\to\infty} g_k(r) = g(r) & \forall r \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{2.42}$$

for some positive constants c_k and c'_k and $p \in (1, (N+2)/(N+1))$. Since (2.8) is satisfied, there exists a unique solution $u = u_k$ to

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u - \Delta u + g_k(u) &= 0 \quad \text{in } Q_T \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial_\ell Q_T \\ u(.,0) &= \mu \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \right. \tag{2.43}$$

It is noticeable that, if the assumption $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ were replaced by $\mu \in \mathfrak{M}^0_+(\Omega)$, the exponent p in (2.42) should have been taken smaller than $(N+2)/N$. In the sequel C will denote a positive constant, depending on the data, not on k, the value of which may change from one occurrence to another. Our first result points out the relaxation phenomenon associated to the sequence $\{u_k\}$.

Theorem 2.12 When $k \to \infty$, the sequence $\{u_k\}$ converges in $L^1(Q_T)$ to a some non-negative function u^* such that $g(u^*) \in L^1_\rho(Q_T)$, and there exists a positive measure μ^* smaller that μ with the property that

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u^* - \Delta u^* + g(u^*) = 0 \quad & \text{in } Q_T \\ u^* = 0 \quad & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ u^*(.,0) = \mu^* \quad & \text{in } \Omega. \end{aligned} \right. \tag{2.44}$$

Furthermore u^* is the largest subsolution of problem (1.1).

Proof 8 By [7, Lemma1.6] there holds

$$\|u_k\|_{L^1} + \|g_k(u_k)\|_{L^1_\rho} \leq C \int_\Omega \rho \, d\mu, \tag{2.45}$$

and, by the maximum principle,

$$u_k \leq \mathbb{E}[\mu] \quad \text{in } \; Q_T. \tag{2.46}$$

For any $\epsilon > 0$ we denote $Q_{\epsilon,T} = \Omega \times [\epsilon, T]$. Since $\mathbb{E}[\mu]$ is uniformly bounded in $Q_{\epsilon,T}$ for any $\epsilon > 0$, it follows by the parabolic equations regularity theory that, u_k is bounded in $C^{1+\alpha,\alpha/2}(Q_{\epsilon,T})$ for any $0 < \alpha < 1$. Furthermore, if $k' > k$, $g_{k'}(u_k) \geq g_k(u_k)$ thus u_k is a super-solution for the equation satisfied by $u_{k'}$. This implies $u_k \geq u_{k'}$ and $u^* := \lim_{k\to\infty} u_k$ exists and satisfies

$$u^* \leq \mathbb{E}[\mu] \quad \text{in } \; Q_T.$$

Because of (2.46) uniform boundedness holds also in $L^p(Q_T)$, for any $p \in [1,(N+2)/(N+1))$. By the Lebesgue theorem the convergence occurs in $L^p(Q_T)$ too, for any $p \in [1,(N+2)/(N+1))$, and locally uniformly in Q_T by the standard regularity theory. By continuity $g_k(u_k)$ converges to $g(u^*)$ uniformly in $Q_{\epsilon,T}$, thus u^* satisfies

$$\partial_t u^* - \Delta u^* + g(u^*) = 0 \quad \text{in } Q_T$$

and vanishes on $\partial_\ell Q_T$. By the Fatou theorem

$$\iint_{Q_T} g(u^*)\zeta \, dx \, dt \leq \liminf_{k\to\infty} \iint_{Q_T} g_k(u_k)\zeta \, dx \, dt,$$

for any $\zeta \in C(\overline{Q}_T)$, $\zeta \geq 0$, and there exists a positive measure λ in Q_T such that

$$g_k(u_k) \to g(u^*) + \lambda,$$

weakly in the sense of measures. Thus for any $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, there holds

$$\iint_{Q_T} (-u^*\partial_t\zeta - u^*\Delta\zeta + g(u^*)\zeta) \, dx \, dt = \int_\Omega \zeta(x,0) \, d\mu - \iint_{Q_T} \zeta \, d\lambda. \tag{2.47}$$

Since $g_k(u_k)$ converges to $g(u^*)$ uniformly in $Q_{\epsilon,T}$ for any $\epsilon > 0$, the measure λ is concentrated on $\overline{\Omega} \times \{0\}$. We denote by $\tilde{\lambda}$ its restriction to $\Omega \times \{0\}$, set

$$\mu^* = \mu - \tilde{\lambda},$$

and derive from (2.47),

$$\iint_{Q_T} (-u^* \partial_t \zeta - u^* \Delta \zeta + g(u^*)\zeta)\, dx\, dt = \int_\Omega \zeta(x,0)\, d\mu^*. \tag{2.48}$$

This implies $u^* = u_{\mu^*}$ and $Tr_\Omega(u^*) = \mu^*$, thus μ^* is a positive measure. Let v be a nonnegative subsolution of problem (2.2). By Proposition 2.8 there exists $\tilde{\mu} \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ such that $Tr_\Omega(v) = \tilde{\mu}$ and $\tilde{\mu} \le \mu$. Since $g_k(v) \le g(v)$, u is a subsolution for problem (2.43). By Theorem 2.11 $v \le u_k := u_{k,\mu}$. Thus $\lim_{k\to\infty} u_k = u^* \ge v$. □

Theorem 2.13 The reduced measure μ^* is the largest good measure smaller than μ.

Proof 9 Clearly μ^* is a good measure smaller than μ. Assume now that $\tilde{\mu}$ is a good measure smaller than μ. Then $u_{\tilde{\mu}}$ is a subsolution for problem (2.2). By (Theorem 2.11) u_{μ^*} is larger than $u_{\tilde{\mu}}$. Thus $Tr_\Omega(u_{\tilde{\mu}}) = \tilde{\mu} \le Tr_\Omega(u_{\mu^*}) = \mu^*$. □

The next technical result characterizes the good measures

Theorem 2.14 Let $\mu \in \mathfrak{M}_+(\Omega)$. Then $\mu \in \mathcal{G}^\Omega(g)$ if and only if $g_k(u_k) \to g(u)$ in the weak sense of measures in $\mathfrak{M}^1(Q_T)$.

Proof 10 Assume $g_k(u_k) \to g(u)$ in the weak sense of measures in $\mathfrak{M}^1(Q_T)$. Letting $k \to \infty$ in (2.33), we obtain (2.2) for any $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$. Thus $u^* = u_\mu$. Thus $\mu^* = \mu$ and μ is a good measure. Conversely, assume μ is a good measure. By Theorem 2.13, $\mu^* = \mu$. Thus $u_k \to u^* = u_\mu$ and $u_k \to u_\mu$ in $L^1(\Omega)$ and a.e. in Ω. Assume $\zeta \in C^{2,1}_{\ell,0}(\overline{Q}_T)$, $\zeta \ge 0$. We let $k \to \infty$ in (2.33) and derive

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{Q_T} g_k(u_k)\zeta\, dx\, dt = \int_\Omega \zeta\, d\mu + \iint_{Q_T} (\partial\zeta + \Delta\zeta)\, u_\mu\, dx\, dt = \iint_{Q_T} g(u_\mu)\zeta\, dx\, dt, \tag{2.49}$$

by (2.2). Because $\{g_k(u_{k)}\}$ is uniformly bounded in $L^1_\rho(Q_T)$, the result follows by density. □

As in [4] an easy consequence of Theorem 2.13 is the following result which points out the fact that μ and μ^* differ only on a set with zero N-dimensional Hausdorff measure.

Corollary 2.15 Let $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$. There exists a Borel set $E \subset \Omega$, with Hausdorff measure $H^N(E) = 0$, such that $(\mu - \mu^*)(E^c) = 0$.

Proof 11 Let $\mu = \mu_r + \mu_s$ be the Lebesgue decomposition of μ, μ_r (resp. μ_s) being the absolutely continuous (resp. singular) part relative to the Hausdorff measure H^N in $\mathbb{R}^N$. Both measures are positive. Since $\mu_r \in L^1_\rho(\Omega)$, it is a good measure. Then $\mu_r \leq \mu^*$ by Theorem 2.13. Therefore

$$0 \leq \mu - \mu^* \leq \mu - \mu_r = \mu_s.$$

Since μ_s is singular relative to H^N, its support E satisfies $H^N(E) = 0$. This implies the claim. □

Corollary 2.16 Let $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ such that $\mu(E) = 0$ for any Borel set $E \subset \Omega$ with $H^N(E) = 0$. Then μ is a good measure.

Proof 12 Let $E \subset \Omega$ is a Borel set with $H^N(E) = 0$, then $\mu_r(E) = 0$. Since $\mu(E) = 0$, it implies $\mu_s(E) = 0$. Because the support of μ_s is a set with zero N-dimensional Hausdorff, $\mu = \mu_r = \mu^*$. □

Theorem 2.17 Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$. If $\mu_1 \leq \mu_2$, then $\mu_1^* \leq \mu_2^*$. Furthermore

$$\mu_2^* - \mu_1^* \leq \mu_2 - \mu_1. \tag{2.50}$$

Proof 13 For $k > 0$ let $u = u_{k,i}$ $(i = 1, 2)$ be the solution of

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + g_k(u) = 0 & \text{in } Q_T \\ u = 0 & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ u(.,0) = \mu_i & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{2.51}$$

Since $\mu_1 \leq \mu_2$, $u_{k,1} \leq u_{k,2}$. By the convergence result of Theorem 2.12, the relaxed solutions u_i^* satisfies $u_1^* \leq u_2^*$. Since $\mu_i^* = Tr_\Omega(u_i^*)$, it follows $\mu_1^* \leq \mu_2^*$. We turn now to the proof of (2.50). If $\zeta \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$, $\zeta \geq 0$, which vanishes on $\partial_\ell Q_t$, we have from the weak formulation

$$\begin{aligned} &\iint_{Q_t} (-(u_{k,2} - u_{k,1})(\partial_t \zeta + \Delta\zeta) + \zeta(g_k(u_2^*) - g_k(u_2^*)))\, dx\, dt \\ &\qquad = \int_\Omega \zeta(x,0) d(\mu_2 - \mu_1) - \int_\Omega \zeta(x,t)(u_{k,2} - u_{k,1}) dx \end{aligned}$$

We fix $\xi \in C_0^2(\bar{\Omega})$, $\xi \geq 0$ and choose for ζ the solution of

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \Delta\zeta = 0 & \text{in } Q_t \\ \zeta = 0 & \text{on } \partial_\ell Q_t \quad . \\ \zeta(x,t) = \xi & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

Then, letting $k \to \infty$, we derive

$$\int_\Omega (u_2^* - u_1^*)(x,t)\xi dx \leq \int_\Omega \zeta(x,0)d(\mu_2 - \mu_1).$$

Finally, if $t \to 0$, using the trace property and the fact that $\zeta(x,0) \to \xi$ in $C_0(\bar{\Omega})$, we obtain

$$\int_\Omega \xi d(\mu_2^* - \mu_1^*) \leq \int_\Omega \xi d(\mu_2 - \mu_1).$$

This implies (2.50). $\square$

Corollary 2.18 If μ is a good measure, any positive measure ν smaller than μ is a good measure.

Proof 14 Let $\nu \in \mathfrak{M}_+^1(\Omega)$, $\nu \leq \mu$. By (2.50)

$$0 \leq \nu - \nu^* \leq \mu - \mu^*.$$

Thus $\mu = \mu^* \Longrightarrow \nu = \nu^*$. $\square$

Corollary 2.19 Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}_+^1(\Omega)$. 1- If μ_1 and μ_2 are good measures, then so is $\inf\{\mu_1, \mu_2\}$ and $\sup\{\mu_1, \mu_2\}$.

2- If $E \subset \Omega$ is a Borel set and $\mu \in \mathfrak{M}_+^1\Omega)$, $\mu^*|_E = [\mu|_E]^*$

3- Assume that μ_1 and μ_2 are mutually singular. Then $(\mu_1 + \mu_2)^* = \mu_1^* + \mu_2^*$.

Proof 15 1- The fact that $\inf\{\mu_1, \mu_2\}$ is a good measure is clear from Corollary 2.18. Let $\nu = \sup\{\mu_1, \mu_2\}$. Then $\mu_1 \leq \nu^*$ and $\mu_2 \leq \nu^*$. Then $\nu = \sup\{\mu_1, \mu_2\} \leq \nu^*$.

2- We recall that $\mu|_E(A) = \mu(E \cap A)$, for any Borel subset A of Ω. We can also write $\mu|_E = \chi_E \mu$. Since $\mu \geq \mu^*$, $\chi_E \mu \geq \chi_E \mu^*$ and also $\mu^* \geq \chi_E \mu^*$. Thus $\chi_E \mu^*$ is a good measure and $[\chi_E \mu]^* \geq \chi_E \mu^*$ by Theorem 2.13. Conversely, $[\chi_E \mu]^* \leq \chi_E \mu$ implies that $\chi_E [\chi_E \mu]^* = [\chi_E \mu]^*$. But $\chi_E \mu \leq \mu$ implies $[\chi_E \mu]^* \leq \mu^*$ and therefore $[\chi_E \mu]^* = \chi_E [\chi_E \mu]^* \leq \chi_E \mu^*$.

3- If μ_1 and μ_2 are mutually singular, then so are μ_1^* and μ_2^*. Actually, $\mu_1 + \mu_2 = \sup\{\mu_1, \mu_2\}$ and $\mu_1^* + \mu_2^* = \sup\{\mu_1^*, \mu_2^*\}$. By assertion 1, $[\sup\{\mu_1^*, \mu_2^*\}]^* = \sup\{\mu_1^*, \mu_2^*\}$. Then $\mu_1^* + \mu_2^*$ is a good measure smaller than $\mu_1 + \mu_2$, thus $\mu_1^* + \mu_2^* \leq (\mu_1 + \mu_2)^*$. Conversely, there exist two disjoint Borel sets A and B such that $\mu_1 = \chi_A \mu_1$ and $\mu_2 = \chi_B \mu_2$ and $\mu_1 + \mu_2 = \chi_A \mu_1 + \chi_B \mu_2$. Thus $(\mu_1 + \mu_2)^* = (\chi_A \mu_1 + \chi_B \mu_2)^*$ and $\chi_A(\mu_1 + \mu_2)^* = (\chi_A \mu_1 + \chi_A \mu_2)^* = \chi_A \mu_1^* = \mu_1^*$. Similarly, $\chi_B(\mu_1 + \mu_2)^* = (\chi_B \mu_1 + \chi_B \mu_2)^* = \chi_B \mu_2^* = \mu_2^*$. Since

$$(\mu_1 + \mu_2)^* = \chi_{A \cup B}(\mu_1 + \mu_2)^* = \chi_A(\mu_1 + \mu_2)^* + \chi_B(\mu_1 + \mu_2)^*,$$

the result follows. $\square$

Theorem 2.20 The set $\mathcal{G}^{\Omega}(g)$ is a convex lattice. Furthermore

$$[\inf\{\mu,\nu\}]^* = \inf\{\mu^*,\nu^*\}, \tag{2.52}$$

and

$$[\sup\{\mu,\nu\}]^* = \sup\{\mu^*,\nu^*\}. \tag{2.53}$$

Proof 16 For the sake of completeness, we present the proofs of these assertions which actually the ones already given in [3]. Let $\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{G}^{\Omega}(g)$ and $\nu = \sup\{\mu_1,\mu_2\}$. Since $\mu_i \leq \nu$, it follows from Theorem 2.17 that $\mu_i = \mu_i^* \leq \nu^*$. Thus $\sup\{\mu_1,\mu_2\} \leq \nu^*$ which reads $\nu \leq \nu^*$, and equality follows. Next, assume $\theta \in [0,1]$. Then $\mu_\theta = \theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2 \leq \nu = \sup\{\mu_1,\mu_2\}$. Since $\nu \in \mathcal{G}^{\Omega}(g)$, and any measure dominated by a good measure is a good measure, $\mu_\theta \in \mathcal{G}^{\Omega}(g)$. It follows by Theorem 2.13 that $\mu_\theta = \mu_\theta^*$.
Next, by Corollary 2.19, $[\inf\{\mu^*,\nu^*\}]$ is a good measure. Since $[\inf\{\mu^*,\nu^*\}] \leq [\inf\{\mu,\nu\}]$, it follow by Theorem 2.13 that

$$\inf\{\mu^*,\nu^*\} \leq [\inf\{\mu,\nu\}]^*. \tag{2.54}$$

Conversely,

$$\inf\{\mu,\nu\} \leq \mu \Longrightarrow [\inf\{\mu,\nu\}]^* \leq \mu^*,$$

and similarly with ν. Thus $[\inf\{\mu,\nu\}]^* \leq \inf\{\mu^*,\nu^*\}$.
For the last assertion, by Hahn's decomposition theorem there exist two disjoint Borel sets A and B such that $\Omega = A \cup B$ and $\sup\{\mu,\nu\} = \chi_A\mu + \chi_B\nu$. Actually, $\mu \geq \nu$ on A and $\nu \geq \mu$ on B. This implies also $\sup\{\mu^*,\nu^*\} = \chi_A\mu^* + \chi_B\nu^*$. Thus, by Corollary 2.19,

$$[\sup\{\mu,\nu\}]^* = (\chi_A\mu + \chi_B\nu)^* = \chi_A\mu^* + \chi_B\nu^* = \sup\{\mu^*,\nu^*\},$$

since $\sup\{\chi_A\mu^*,\chi_B\nu^*\} = \sup\{\mu^*,\nu^*\}$. □

Theorem 2.21 Let $\mu,\nu \in \mathfrak{M}_+^1$. Then

$$|\mu^* - \nu^*| \leq |\mu - \nu|. \tag{2.55}$$

Proof 17 We first assume $\mu \geq \nu$. By Theorem 2.17,

$$0 \leq \mu^* - \nu^* \leq \mu - \nu.$$

This implies (2.55). Next we write $\sup\{\mu,\nu\} = \nu + (\mu-\nu)_+$. Since $\nu \leq \sup\{\mu,\nu\}$, $\nu^* \leq [\sup\{\mu,\nu\}]^* = \sup\{\mu^*,\nu^*\}$ by Theorem 2.20. Thus

$$[\sup\{\mu,\nu\}]^* - \nu^* \leq \sup\{\mu,\nu\} - \nu = (\mu-\nu)_+.$$

Thus implies $(\mu^*-\nu^*)_+ \leq (\mu-\nu)_+$. Similarly $(\nu^*-\mu^*)_+ \leq (\nu-\mu)_+$. □

In order to characterize the universally good measures, we introduce a capacity naturally associated to the weak formulation of problem (2.2). This yields to a capacity type characterization of H^N. If $K \subset \Omega$ is compact, we denote

$$c_\Omega(K) = \inf \left\{ \iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta \psi| \, dx \, dt : \right. \\ \left. \psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T),\ \psi(x,0) \geq 1 \ \text{ in a neighborhood of } \ K \right\}. \tag{2.56}$$

Theorem 2.22 For every compact $K \subset \Omega$, we have

$$H^N(K) = c_\Omega(K). \tag{2.57}$$

Proof 18 Let $K \subset \Omega$ be compact.

Step 1. We claim that for any $\epsilon > 0$, there exists $\psi_\epsilon = \psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $\psi \geq 0$ in Q_T, $\psi(x,0) \geq 1$ on K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta \psi| \, dx \, dt \leq c_\Omega(K) + \epsilon. \tag{2.58}$$

Let $\xi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $\xi(x,0) \geq 1$ on K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \xi + \Delta \xi| \, dx \, dt \leq c_\Omega(K) + \epsilon/2.$$

Let $\{\eta_j\}$ be a regularizing sequence depending only on the space variable and such that the support of η_j is contained in the ball B_{ϵ_j}, with $\epsilon_j \to 0$ as $j \to \infty$. If we extend ξ in $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ as a $C^{2,1}$-function, we set

$$f_j(x,t) = \eta_j * |\partial_t \xi + \Delta \xi| \, (x,t) = \int_\Omega \eta_j(x-y) \, |\partial_t \xi + \Delta \xi| \, (y,t) dy.$$

If $j \to \infty$, $\{f_j\}$ converges to $|\partial_t \xi + \Delta \xi|$ uniformly in $\bar{Q}_T$. Let v_j be the solution of

$$\begin{cases} \partial_t v_j + \Delta v_j = -f_j & \text{in } Q_T \\ v_j = 0 & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ v_j(.,T) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Clearly $v_j \geq 0$ in Q_T. Let v be the solution of

$$\begin{cases} \partial_t v + \Delta v = -\,|\partial_t \xi + \Delta \xi| & \text{in } Q_T \\ v = 0 & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ v(.,T) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

By the maximum principle $v \geq \max\{\xi, 0\}$, thus $v(x,0) \geq 1$ on K. Because $v_j(x,0) \to v(x,0)$ uniformly on $\bar{\Omega}$, for any $0 < \alpha < 1$, we can fix j_α such that $v_{j_\alpha}(x,0) \geq \alpha$ on K and $\|f_{j_\alpha}\|_{L^1(Q_T)} \leq \|\partial_t \xi + \Delta\xi\|_{L^1(Q_T)} + \epsilon/4$. Next $\psi_\alpha = \alpha^{-1} v_{j_\alpha}$. Then $\psi_\alpha \geq 0$ in Q_T, and $\psi_\alpha(x,0) \geq 1$ on K. Moreover

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} |\partial_t \psi_\alpha + \Delta\psi_\alpha| \, dx\, dt &= \alpha^{-1} \iint_{Q_T} |\partial_t v_{j_\alpha} + \Delta v_{j_\alpha}| \, dx\, dt \\ &\leq \alpha^{-1} \left(\iint_{Q_T} |\partial_t \xi + \Delta\xi| \, dx\, dt + \epsilon/4 \right) \\ &\leq \alpha^{-1} \left(c_\Omega(K) + 3\epsilon/4 \right).\end{aligned}$$

Next we fix

$$\alpha = \frac{c_\Omega(K) + 3\epsilon/4}{c_\Omega(K) + \epsilon}$$

and derive (2.58).

Step 2. There holds

$$H^N(K) \leq c_\Omega(K). \tag{2.59}$$

From (2.58),

$$\iint_{Q_T} (-\partial_t \psi - \Delta\psi) \, dx\, dt \leq \iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta\psi| \, dx\, dt \leq c_\Omega(K) + \epsilon.$$

But

$$\iint_{Q_T} (-\partial_t \psi - \Delta\psi) \, dx\, dt = \int_\Omega \psi(x,0) dx - \iint_{\partial_\ell Q_T} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS\, dt \geq H^N(K)$$

since $\psi(x,T) = 0$, $\psi(x,0) \geq 1$ on K, and the normal derivative of ψ on $\partial_\ell Q_T$ is nonpositive. This yields to (2.59) because ϵ is arbitrary.

Step 3. For any $\epsilon > 0$ there exists $\psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $0 \leq \psi \leq 1+\epsilon$ in Q_T, $\psi(x,0) \geq 1$ on K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta\psi| \, dx\, dt \leq H^N(K) + \epsilon. \tag{2.60}$$

For $\delta > 0$ let $K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}\,(x, K) \leq \delta\}$. By the regularity of H^N, we can choose δ small enough such that

$$H^N(K_\delta \cap \Omega) \leq H^N(K) + \epsilon/5.$$

We fix $\xi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $0 \leq \xi \leq 1$ and

$$\xi(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in K_{\delta/2} \\ 0 & \text{if } x \in \bar{\Omega} \setminus K_\delta. \end{cases}$$

Let $\sigma > 0$ and

$$\rho_\sigma(x,t) = \left(1 - \frac{t}{\sigma}\right)_+^2 .$$

Since $|\xi_t + \Delta\xi|\,(x,t) = 0$ a. e. on $\{(x,t) : \xi(x,t) = 0\}$ and $\{(x,t) : \rho_\sigma(x,t) > 0\} \subset \bar{\Omega} \times [0,\sigma]$, we can choose σ such that

$$\iint_{\partial_\ell Q_T \cap \{(x,t):\xi \le \rho_\sigma\}} \frac{\partial \xi}{\partial n} dS\, dt + \iint_{\{(x,t):\xi \le \rho_\sigma\}} |\xi_t + \Delta\xi|\; dx\, dt \le \epsilon/5.$$

We set $u = \rho_\sigma - (\rho_\sigma - \xi)_+$. Because ρ_σ is independent of x, the argument developed by Brezis and Ponce [4] applies in the sense that $\Delta u(.,t) \in \mathfrak{M}(\Omega)$ and $\Delta u(.,t) = \Delta\xi(.,t)$ on $\{x : \xi(x,t) < \rho_\sigma(t)\}$ and more explicitely $\partial_t u + \Delta u = \partial_t \xi + \Delta\xi$ on $\{(x,t) : \xi(x,t) < \rho_\sigma(t)\}$. In addition

$$\partial_t u = \partial_t \rho_\sigma - \operatorname{sign}_+(\rho_\sigma - \xi)(\partial_t \rho_\sigma - \partial_t \xi),$$

and $\partial_t u = \partial_t \rho_\sigma$ a.e. on $\{(x,t) : \xi(x,t) \ge \rho_\sigma(x,t)\}$. Because ρ_σ is decreasing, we finally obtain

$$\partial_t u + \Delta u \le 0 \text{ on } \{(x,t) : \xi(x,t) \ge \rho_\sigma(x,t)\}.$$

We notice that $\partial_t u$ is bounded, and, following [4],

$$\begin{aligned}
\|\partial_t u + \Delta u\|_{\mathfrak{M}} &= \left\|(\partial_t u + \Delta u)\chi_{\{\xi \ge \rho_\sigma\}}\right\|_{\mathfrak{M}} + \left\|(\partial_t u + \Delta u)\chi_{\{\xi < \rho_\sigma\}}\right\|_{\mathfrak{M}} \\
&= \left\|(\partial_t u + \Delta u)\chi_{\{\xi \ge \rho_\sigma\}}\right\|_{\mathfrak{M}} + \iint_{\{\xi < \rho_\sigma\}} |\partial\xi + \Delta\xi|\; dx\, dt \\
&= -\iint_{\{\xi \ge \rho_\sigma\}} d(\partial_t u + \Delta u) + \iint_{\{\xi < \rho_\sigma\}} |\partial\xi + \Delta\xi|\; dx\, dt \\
&\le -\iint_{Q_T} d(\partial_t u + \Delta u) + 2\iint_{\{\xi < \rho_\sigma\}} |\partial\xi + \Delta\xi|\; dx\, dt \\
&\le -\iint_{Q_T} d(\partial_t u + \Delta u) + 2\epsilon/5.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Next, by definition,

$$\begin{aligned}
-\iint_{Q_T} d(\partial_t u + \Delta u) &= -\iint_{Q_T} u(\partial_t 1 - \Delta 1)\, dx\, dt - \int_\Omega (u(x,T) - u(x,0))dx \\
&\qquad - \iint_{\partial_\ell Q_T} \frac{\partial u}{\partial n} dS\, dt \\
&= \int_\Omega u(x,0)dx - \iint_{\partial_\ell Q_T} \frac{\partial u}{\partial n} dS\, dt \\
&= \int_\Omega \xi(x,0)dx + \iint_{\partial_\ell Q_T \cap \{(x,t):\xi \le \rho_\sigma\}} \frac{\partial \xi}{\partial n} dS\, dt \\
&\le H^N(K_\delta)/ + \epsilon/5 \\
&\le H^N(K) + 2\epsilon/5.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

We finally derive

$$\|\partial_t u + \Delta u\|_{\mathfrak{M}} \leq H^N(K) + 4\epsilon/5. \tag{2.63}$$

Next, we smooth the measure $|\partial_t u + \Delta u|$ using a space convolution process with the same η_j, as in Step 1. One can construct a function $\psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $0 \leq \psi \leq 1+\epsilon$ in $\bar{Q}_T$, $\psi(x,0) \geq 1$ on K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta \psi| \, dx \, dt \leq \|\partial_t u + \Delta u\|_{\mathfrak{M}} + \epsilon/5. \tag{2.64}$$

Combining (2.63) and (2.64), one derive (2.60).

Step 4. There holds

$$c_\Omega(K) \leq H^N(K). \tag{2.65}$$

Actually, (2.60) implies

$$c_\Omega(K) \leq H^N(K) + \epsilon.$$

Letting $\epsilon \to 0$ yields to (2.65). □

Thanks to this result we are able to characterize the universally good measures.

Theorem 2.23 Let $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$. If $\mu \in \mathcal{G}^\Omega(g)$ for any function g satisfying (2.1), then $\mu \in L^1_\rho(\Omega)$.

Proof 19 We follow essentially the proof of [4, Th 7].

Step 1. We claim that for every Borel set $\Sigma \subset \Omega$, such that $H^N(\Sigma) = 0$, there exists a continuous function g verifying (2.1) such that $\mu^* = 0$ for any $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ satisfying $\mu(\Sigma^c) = 0$.

Let $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}^*}$ be an increasing sequence of compact subsets of Σ such that $K = \cup_j K_j$ and $\mu(\Sigma \setminus K) = 0$. Since $H^N(K_j) = 0$ for any $j \geq 1$, it follows from Theorem 2.22 [Step 3], that there exists $\psi_j \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $0 \leq \psi_j \leq 2$ in Q_T, $\psi_j(x,0) \geq 1$ on K_j and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j| \, dx \, dt \leq 1/j.$$

In particular,

$$|\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j| \to 0 \quad \text{a.e. in } Q_T,$$

and, since ψ_j solves

$$\begin{cases} \partial_t \psi_j + \Delta \psi_j = \epsilon_j & \text{in } Q_T \\ \psi_j(x,T) = 0 & \text{in } \Omega \\ \psi_j(x,t) = 0 & \text{on } \partial_\ell Q_T \end{cases}$$

with $\epsilon_j \to 0$ in $L^1(Q_T)$ it follows $\psi_j \to 0$ in $L^1(Q_T)$ and a.e.. Furthermore there exists some $G \in L^1_\rho(Q_T)$ such that

$$\rho^{-1} |\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j| \leq G \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

By a theorem of De La Vallée-Poussin noticed in [5], there exists a convex function $h : (-\infty, \infty) \mapsto [0, \infty)$ such that $h(s) = 0$ for $s \leq 0$, $h(s) > 0$ for $s > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{h(t)}{t} = \infty \quad \text{and } h(G) \in L^1_\rho(Q_T).$$

Let $g = h^*$ be the convex conjugate of h. We denote by $\mu^* = \mu^*(g)$ the reduced measured associated to g. Since $\mu^* \in \mathcal{G}^\Omega(g)$, we denote by u the solution of the corresponding initial value problem. Taking ψ_j as a test function in (2.2), we obtain

$$\iint_{Q_T} \left(-u(\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j) + \psi_j g(u)\right) dx\, dt = \int_\Omega \psi_j(x, 0) d\mu^*. \tag{2.66}$$

We first assume that $\mu \in \mathfrak{M}^0(\Omega)$, thus we can take 1 as a test function (this is easily justified by approximations) and obtain

$$\iint_{Q_T} g(u) dx\, dt = \int_\Omega d\mu^*. \tag{2.67}$$

Therefore

$$\mu^*(K_j) \leq \iint_{Q_T} \left(-u(\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j) + \psi_j g(u)\right) dx\, dt \tag{2.68}$$

and

$$\begin{aligned} |-u(\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j) + \psi_j g(u)| &\leq \frac{|\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j|}{\rho} u\rho + \psi_j g(u) \\ &\leq h\left(\rho^{-1} |\partial_t \psi_j + \Delta \psi_j|\right) \rho + g(u)\rho + \psi_j g(u) \\ &\leq h(G)\rho + C g(u) \end{aligned} \tag{2.69}$$

By Lebesgue's theorem, the right-hand side of (2.68) tends to 0 when $j \to \infty$. Thus $\mu^*(K_j) = 0$, for any $j \in \mathbb{N}^*$, and finally $\mu^*(\Sigma) = 0$.

Next we assume $\mu \in \mathfrak{M}^1(\Omega)$. Then there exists an increasing sequence of $\mu_n \in \mathfrak{M}^0(\Omega)$ with compact support in Ω such that $\mu_n \uparrow \mu$. Using what is proved above, $\mu_n^*(\Sigma) = 0$ and, by Theorem 2.17, $\mu^* \leq \mu - \mu_n$, thus $\mu^*(\Sigma) \leq (\mu - \mu_n)(\Sigma)$. Letting $n \to \infty$ implies $\mu^*(\Sigma) = 0$.

Step 2. If $\mu \in \mathfrak{M}^1_+(\Omega)$ is good, for any Borel set $\Sigma \subset \Omega$, with $H^{N-1}(\Sigma) = 0$, we denote $\nu = \mu|_\Sigma$. Then there exists g_ν such that $g^*_\nu = 0$. Since $\nu \leq \mu$, $\nu \in \mathcal{G}^\Omega(g)$, thus $\nu = \nu^* = 0$ and finally, $\mu(\Sigma) = 0$. Thus $\mu \in L^1_\rho(\Omega)$. □

3 The Cauchy-Dirichlet problem

In this section Ω is again a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$ and $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. We denote by $\mathfrak{M}(\partial_\ell Q_T)$ the set of Radon measures in $\partial_\ell Q_T$ and by $\mathfrak{M}_+(\partial_\ell Q_T)$, the positive ones. The function g is supposed to satisfy (2.1). We consider the Cauchy-Dirichlet problem

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u - \Delta u + g(u) = 0 & \text{in } Q_T := \Omega \times (0,T) \\ u = \mu & \text{in } \partial_\ell Q_T := \partial\Omega \times (0,T) \\ u(.,0) = 0 & \text{in } \Omega, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Definition 3.1 Let $\mu \in \mathfrak{M}_+(\partial_\ell Q_T)$. A function $u \in L^1(Q_T)$ is a weak solution of (3.1) if $g(u) \in L^1_\rho(Q_T)$ and

$$\iint_{Q_T} (-u\partial_t\zeta - u\Delta\zeta + \zeta\, g(u))\, dx = -\int_{\partial_\ell Q_T} \frac{\partial\zeta}{\partial\nu} d\mu, \tag{3.2}$$

for every $\zeta \in C_0^{2,1}(\bar{Q}_T)$.

Solutions of (3.1) are always unique ; sufficient conditions for existence are developed in [8]. We define, similarly to the cases of the initial value problem, super and subsolutions of 3.1 . In which case, the equality sign in 3.2 is replaced by $\geq$ and $\leq$ respectively, the integrability conditions on u and $g(u)$ being preserved. As simple example for existence of a solution it is the case when g satisfies

$$\iint_{Q_T} g(\mathbb{P}^H[\mu](x,t))\rho(x) dx\, dt < \infty. \tag{3.3}$$

In this formula $\mathbb{P}^H[\mu]$ is the Poisson-heat potential of μ in Q_T, that is the solution of

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t v - \Delta v = 0 & \text{in } Q_T \\ v = \mu & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ v = 0 & \text{in } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

Definition 3.2 A measure μ for which problem (3.1) can be solved is called a good measure relative to g for the Cauchy-Dirichlet problem. The set of good measures is denoted by $\mathcal{G}^{\partial_\ell Q_T}(g)$, and a universally good measure is a measure which belongs to $\mathcal{G}^{\partial_\ell Q_T}(g)$ for any g satisfying (2.1).

The notion of lateral trace is defined in [9]. For $\beta > 0$, we denote

$$\Omega_\beta = \{x \in \Omega : \rho(x) < \beta\},\ \Omega'_\beta = \{x \in \Omega : \rho(x) > \beta\} \text{ and } \Sigma_\beta = \partial\Omega_\beta.$$

We shall also denote $\Sigma = \Sigma_0 = \partial\Omega$. There exists $\beta_0 > 0$ such that for any $\beta \in (0, \beta_0]$, the mapping $x \in \Omega_\beta \mapsto (\sigma(x), \rho(x)$, where $\sigma(x)$ is the unique point on $\partial\Omega$ which minimizes the distance from x to $\partial\Omega$, is a C^2 diffeomorphism from $\bar{\Omega}_\beta$ to $\Sigma \times [0,\beta_0]$. If $\phi \in L^1_{loc}(\partial_\ell Q_T)$, we denote $\phi^\beta(x,t) = \phi(\sigma(x),t)$, for any $x \in \Sigma_\beta$ and dS_β is the surface measure on Σ_β. for the sake of simplicity

Definition 3.3 Let $u \in L^1_{loc}(Q_T)$. 1- We say that u admits the Radon measure $\mu \in \mathfrak{M}_+(\partial_\ell Q_T)$ as a lateral boundary trace if it exists

$$\operatorname{ess\,lim}_{\beta\to 0} \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\Sigma_\beta} \mathrm{u}\phi^\beta \, \mathrm{dS}_\beta \mathrm{dt} = \iint_{\partial_\ell \mathrm{Q_T}} \phi \, \mathrm{d}\mu \quad \forall \phi \in \mathrm{C}_0(\mathcal{R}). \tag{3.5}$$

We shall denote $\mu = Tr_{\partial_\ell Q_T}(u)$.
2- We say that u admits the outer regular Borel measure $\nu \approx (\Sigma,\mu)$ as a lateral boundary trace if it exists an open subset $\mathcal{R} \subset \partial_\ell Q_T$ and $\mu \in \mathfrak{M}_+(\mathcal{R})$ such that

$$\operatorname{ess\,lim}_{\beta\to 0} \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\Sigma_\beta} \mathrm{u}\phi^\beta \, \mathrm{dS}_\beta \mathrm{dt} = \infty \quad \forall \phi \in \mathrm{C}_0(\partial_\ell \mathrm{Q_T}), \phi \geq 0, \phi > 0 \text{ somewhere in } \mathcal{S}, \tag{3.6}$$

with $\mathcal{S} = \partial_\ell \setminus \mathcal{R}$. We shall denote $\nu = Tr_{\partial_\ell Q_T}(u)$.

Propositions 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 and Theorem 2.11 are still valid, if we replace the notion of initial trace by the notion of lateral boundary trace.The new version of Theorem 2.11 is the following.

Theorem 3.4 Let u be a nonnegative subsolution of (3.1). Then the lateral boundary trace of u is a positive Radon measure $\tilde{\mu}$ such that $\tilde{\mu} \leq \mu$. Furthermore, if (3.1) admits a weak solution u_μ there holds $u \leq u_\mu$.

We consider now a sequence of functions g_k satisfying (2.42). For any positive Radon measure μ on $\partial_\ell Q_T$, it is possible to solve, with $u = u_k$,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + g_k(u) = 0 & \text{in } Q_T \\ u = \mu & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ u(.,0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

The following result is proved as Theorem 2.12

Theorem 3.5 When $k \to \infty$, the sequence $\{u_k\}$ converges in $L^1(Q_T)$ to a some nonnegative function u^* such that $g(u^*) \in L^1_\rho(Q_T)$ and there exists a positive Radon measure μ^* smaller that μ with the property that

$$\begin{cases} \partial_t u^* - \Delta u^* + g(u^*) = 0 & \text{in } Q_T \\ u^* = \mu^* & \text{in } \partial_\ell Q_T \\ u^*(.,0) = 0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{3.8}$$

Furthermore u^* is the largest subsolution of problem (3.1).

Mutadis mutandis, the reduced measure μ^* on the lateral boundary inherits the properties of the reduced measure at initial time and the assertions of Theorems 2.13, 2.14, Corollaries 2.15, 2.16, Theorem 2.17, Corollaries 2.18, 2.19 and Theorems 2.20 and 2.21, are valid in the framework of the lateral bondary reduced measure. The main novelty is the intruction of a new capacity on $\partial_\ell Q_T$. If $K \subset \partial_\ell Q_T$ is compact, we denote

$$c_{\partial_\ell Q_T}(K) = \inf \left\{ \iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta \psi| \, dx \, dt \right. \\ \left. : \psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T), \ -\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \geq 1 \text{ in some neighborhood of } K \right\}. \tag{3.9}$$

Theorem 3.6 For every compact $K \subset \partial_\ell Q_T$, we have

$$H^N(K) = c_{\partial_\ell Q_T}(K). \tag{3.10}$$

Proof 20 Let $K \subset \partial_\ell Q_T$ be compact.
Step 1. For any $\epsilon > 0$ there exists $\psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$, $\psi \geq 0$ such that $-\partial\psi(x,t)/\partial\nu \geq 1$ in some neighborhood of K.
Let $\xi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $-\partial\psi(x,t)/\partial\nu \geq 1$ on K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \xi + \Delta \xi| \, dx \, dt \leq c_{\partial_\ell Q_T}(K) + \epsilon/2.$$

We extend ξ as a $C^{2,1}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$-function and define f_j, v_j and v in the same way as in the proof of Theorem 2.22, Step 1. Since $f_j \to \partial_t \xi + \Delta \xi$ uniformly in $\bar{Q}_T$,

$$\frac{\partial v_j}{\partial \nu} \to \frac{\partial v}{\partial \nu},$$

uniformly in $\bar{Q}_T$. Since v and ξ vanishes on $\partial_\ell Q_T$ and at $t = T$, $v \geq \xi$, thus

$$0 \leq \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \leq -\frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{ on } \partial_\ell Q_T,$$

and $-\partial v/\partial\nu \geq 1$ in some neighborhood of K. For $\alpha \in (0,1)$ we fix j_0 such that $-\partial v_{j_0}/\partial\nu \geq \alpha$ on K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t v_{j_0} + \Delta v_{j_0}| \, dx \, dt \leq \iint_{Q_T} |\partial_t \xi + \Delta \xi| \, dx \, dt + \epsilon/4.$$

We set $\psi = \alpha^{-1} v_{j_0}$ and get

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \xi + \Delta \xi| \, dx \, dt \leq \alpha^{-1}(c_{\partial_\ell Q_T}(K) + 3\epsilon/4).$$

We end the proof as in Theorem 2.22, Step 1.

Step 2. In this step we follow essentially the proof of [4, Lemma 8]. For any $\epsilon > 0$ there exists $\psi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$, such that $0 \leq \psi \leq \epsilon$, $-\partial\psi(x,t)/\partial\nu \geq 1$ in some neighborhood of K and

$$\iint_{Q_T} |\partial_t \psi + \Delta\psi| \, dx\, dt \leq H^N(K) + \epsilon \quad \text{and} \quad \left|\frac{\psi}{\rho}\right| \leq 1 + \epsilon \text{ in } Q_T. \tag{3.11}$$

Let $\delta > 0$ and $\tilde{N}_\delta(K) = \{(x,t) : \text{dist}\,((x,t), K)\}$, be such that

$$H^N(N_\delta(K) \cap \partial_\ell Q_T) \leq H^N(K) + \epsilon$$

We take $\xi \in C^{2,1}_{\ell,0}(\bar{Q}_T)$ such that $\xi > 0$ in Q_T, $\partial\xi/\partial\nu = -1$ on $N_{\delta/2}(K) \cap \partial_\ell Q_T$ and $\partial\xi/\partial\nu = 0$ on $\partial_\ell Q_T \setminus N_\delta$, $0 \leq -\partial\xi/\partial\nu \leq 1$ and $\xi/\rho \leq 1 + \epsilon$, we first take $a > 0$ small enough so that

$$\iint_{\partial_\ell Q_T \cap \{\xi < a\}} \frac{\partial\xi}{\partial\nu} dS\, dt + \iint_{Q_T \cap \{\xi < a\}} |\partial_t \xi + \Delta\xi| \, dx\, dt < \epsilon,$$

and set $u = a - (a - \zeta)_+$. Then, the same method as in Theorem 2.22-Step 3 yields to

$$\|\partial_t u + \Delta u\|_{\mathfrak{M}} \leq H^N(K) + 4\epsilon/5. \tag{3.12}$$

The conclusion of the proof is similar. $\square$

By an easy adaptation of the proof of Theorem 2.23 we have the following characterization of the universally good measures.

Theorem 3.7 Let $\mu \in \mathfrak{M}_+(\partial_\ell Q_T)$. If $\mu \in \mathcal{G}^{\partial_\ell Q_T}(g)$ for any function g satisfying (2.1), then $\mu \in L^1(\partial_\ell Q_T)$.

Bibliographie

[1] P. Baras, M. Pierre *Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures*, Applicable Anal. 18, 111-149 (1984).

[2] H. Brézis, A. Friedman *Nonlinear parabolic equations involving a measure as initial condition*, J. Math. Pures Appl. 62, 73-97 (1983).

[3] H. Brézis, M. Marcus, A. C.Ponce *Nonlinear elliptic equations with measures revisited*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, to appear.

[4] H. Brézis, A. C.Ponce *Reduced measures on the boundary*, J. Funct. Anal. 229, 95-120 (2005).

[5] C. de la Vallée Poussin *Sur l'intégrale de Lebesgue*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 16, 435-501 (1915).

[6] J. Davila, A. C.Ponce *Variants of Kato's inequality and removable singularities*, J.Anal, Math. 91 (2003).

[7] M. Marcus, L. Véron *Initial trace of positive solutions of some nonlinear parabolic equations*, Commun.In Partial Differential Equations 24, 1445-1499(1999).

[8] M. Marcus, L. Véron *Semilinear parabolic equations with measure boundary data and isolated singularities*, Journal D'analyse Mathématique, vol 85, 245-290, (2001).

[9] M. Marcus, L. Véron *Trace au bord latéral des solutions positives d'équations paraboliques non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, t. 324, 783-788 (1997).

[10] M. Marcus, L. Véron *Initial trace of positive solutions to semilinear parabolic inequalities*, Advanced nonlinear studies, 395-436, (2002).

[11] J. L. Vazquez , *On a semilinear equation in* $\mathbb{R}^2$ *involving bounded measures*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **95A**, 181-202 (1983).

Chapitre 2

On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains

Ce chapitre est constitué d'un article à paraître dans *Advanced Nonlinear Studies* dans lequel on étudie l'existence et l'unicité du problème (P) : $\partial_t u - \Delta u + u^q = 0$ ($q > 1$) dans $\Omega \times (0, \infty)$, $u = \infty$ sur $\partial\Omega \times (0, \infty)$ et $u(., 0) \in L^1(\Omega)$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On construit une solution maximale, démontre que cette solution maximale est une grande solution lorsque $q < N/(N-2)$ et elle est unique si $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$. Si $\partial\Omega$ possède la propriété du graphe local, on démontre qu'il existe au plus une solution du problème (P).

On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains [(1)]

Waad Al Sayed   Laurent Véron

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique,
Université François Rabelais, Tours, FRANCE

Abstract We study the existence and uniqueness of the positive solutions of the problem (P) : $\partial_t u - \Delta u + u^q = 0$ $(q > 1)$ in $\Omega \times (0, \infty)$, $u = \infty$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$ and $u(.,0) \in L^1(\Omega)$, when Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^N$. We construct a maximal solution, prove that this maximal solution is a large solution whenever $q < N/(N-2)$ and it is unique if $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$. If $\partial\Omega$ has the local graph property, we prove that there exists at most one solution to problem (P).

1991 Mathematics Subject Classification. 35K60, 34.

Key words. Parabolic equations, singular solutions, self-similarity, removable singularities

1 Introduction

Let $q > 1$ and let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^N$ with boundary $\partial\Omega := \Gamma$. It has been proved by Keller [5] and Osserman [11] that there exists a *maximal solution* $\overline{u}$ to the stationnary equation

$$-\Delta u + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

When $1 < q < N/(N-2)$ this maximal solution is a *large solution* in the sense that

$$\lim_{\rho(x)\to 0} \overline{u}(x) = \infty \tag{1.2}$$

where $\rho(x) = \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$. Furthermore Véron proves in [12] that $\overline{u}$ is the unique large solution whenever $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$. When $q \geq N/(N-2)$ his proof of uniqueness does not apply. Marcus and Véron prove in [7] that, there exists at most one large solution, provided $\partial\Omega$ is locally the graph of a continuous function. The aim of this article is to extend these questions to the parabolic equation

$$\partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty). \tag{1.3}$$

[(1)] To appear in *Advanced Nonlinear Studies*

We are interested into positive solutions which satisfy

$$\lim_{t\to 0} u(.,t) = f \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega), \tag{1.4}$$

where $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$ and

$$\lim_{(x,t)\to(y,s)} u(x,t) = \infty \quad \forall (y,s) \in \Gamma \times (0,\infty). \tag{1.5}$$

Notice that if the initial and boundary conditions are exchanged, i.e. $u(.,t)$ blows-up when $t \to 0$ and coincides with a locally integrable function on $\Gamma \times (0,\infty)$, this problem is associated with the study of the initial trace, and much work has been done by Marcus and Véron [9] in the case of a smooth domain. In particular they obtain the existence and uniqueness when q is subcritical, i.e. $1 < q < 1 + 2/N$.

In this article we prove two series of results :

Theorem A *Assume $q > 1$ and Ω is a bounded domain. Then for any $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$ there exists a maximal solution $\overline{u}_f$ to problem (1.3) satisfying (1.4). If $1 < q < N/(N-2)$, $\overline{u}_f$ satisfies (1.5). At end, if $1 < q < N/(N-2)$ and $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$, $\overline{u}_f$ is the unique solution of the problem which satisfies (1.5).*

The proof of uniqueness is based upon the construction of self-similar solutions of (1.3) in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times (0,\infty)$, with a persistent strong singularity on the axis $\{0\} \times (0,\infty)$ and a zero initial trace on $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. This solution, which is studied in Appendix, is reminiscent of the very singular solution of Brezis, Peletier and Terman [2], although the method of construction is far different. The uniqueness is a delicate adaptation to the parabolic framework of the proof by contradiction of [12].

Theorem B *Assume $q > 1$, Ω is a bounded domain and $\partial\Omega$ is locally a continuous graph. Then for any $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$ there exists at most one solution to problem (1.3) satisfying (1.4) and (1.5).*

For proving this result, we adapt the idea which was introduced in [7] of constructing local super and subsolutions by small translations of the domain, but the non-uniformity of the boundary blow-up creates an extra-difficulty. In an appendix we study a self-similar equation which plays a key-role in our construction,

$$\begin{cases} H'' + \left(\dfrac{N-1}{r} + \dfrac{r}{2}\right) H' + \dfrac{1}{q-1} H - |H|^{q-1} = 0 \\ \lim_{r\to 0} H(r) = \infty \\ \lim_{r\to\infty} r^{2/(q-1)} H(r) = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

We prove the existence and the uniqueness of the positive solution of (1.6) when $1 < q < N/(N-2)$ and we give precise asymptotics when $r \to 0$ and $r \to \infty$.

This article is organised as follows : 1- Introduction. 2- The maximal solution 3- The case $1 < q < N/(N-2)$. 4- The local continuous graph property. 5- Appendix.

2 The maximal solution

In this section Ω is an open domain of $\mathbb{R}^N$, with a compact boundary $\Gamma := \partial\Omega$. If G is any open subset of $\mathbb{R}^N$ and $0 < T \leq \infty$, we denote $Q_T^G := G \times (0,T)$. If $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$, we consider the problem

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{in } Q_\infty^\Omega \\ \lim_{t\to 0} u(.,t) = f(.) \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega) \\ \lim_{(x,t)\to(y,s)} u(x,t) = \infty \quad \forall (y,s) \in \Gamma \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

By the next result, we reduce the lateral blow-up condition by a locally uniform one in which we set $\rho(x) = \text{dist}\,(x,\Gamma)$.

Lemma 2.1 The following two conditions are equivalent

$$\lim_{(x,t)\to(y,s)} u(x,t) = \infty \quad \forall (y,s) \in \Gamma \times (0,\infty) \tag{2.2}$$

and

$$\lim_{\rho(x)\to 0} u(x,t) = \infty \quad \text{uniformly on } [\tau,T], \tag{2.3}$$

for any $0 < \tau < T < \infty$.

Proof 21 It is clear that (2.3) is equivalent to the fact that (2.2) holds uniformly on $\Gamma \times [\tau,T]$. By contradiction, we assume that (2.2) does not hold uniformly for some $T > \tau > 0$. Then there exists $\beta > 0$ such that for any $\delta > 0$, there exist two couples $(y_\delta, s_\delta) \in \Gamma \times [\tau,T]$ and $(x_\delta, t_\delta) \in \Omega \times [\tau,T]$ such that

$$|x_\delta - y_\delta| + |t_\delta - s_\delta| \leq \delta \quad \text{and} \quad u(x_\delta,t_\delta) \leq \beta. \tag{2.4}$$

Taking $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, we can assume that $\{\delta\}$ is discrete and that $y_\delta \to y \in \Gamma$ and $s_\delta \to s \in [\tau,T]$. Thus $x_\delta \to y$ and $t_\delta \to s$. Therefore (2.4) contradicts (2.2). □

Theorem 2.2 For any $q > 1$ and $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$, there exists a maximal solution $u := \overline{u}_f$ of

$$\partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{in } Q_\infty^\Omega \tag{2.5}$$

which satisfies

$$\lim_{t\to 0} u(.,t) = f(.) \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega). \tag{2.6}$$

Proof 22 Let Ω_n be an increasing sequence of smooth bounded domains such that $\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega$ and $\cup\Omega_n = \Omega$. For each n let $u_{n,f}$ be the increasing limit when $k \to \infty$ of the $u_{n,k,f}$ solution of

$$\begin{cases} \partial_t u_{n,k,f} - \Delta u_{n,k,f} + u_{n,k,f}^q = 0 \quad \text{in } Q_\infty^{\Omega_n} \\ u_{n,k,f}(x,t) = k \quad \text{in } \partial\Omega_n \times (0,\infty) \\ u_{n,k,f}(x,0) = f\chi_{\Omega_n} \quad \text{in } \Omega_n. \end{cases} \tag{2.7}$$

By the maximum principle and a standard approximation argument $n \mapsto u_{n,k,f}$ is decreasing thus $n \mapsto u_{n,f}$ too. The limit $\overline{u}_f$ of the $u_{n,f}$ satisfies (2.5) and (2.6). It is independent of the exhaustion $\{\Omega_n\}$ of Ω. Let u be a positive solution of (2.5) in Q_∞^Ω which satisfies (2.6). Since the initial trace of u is a locally integrable function, $u^q \in L^1_{loc}(\Omega \times [0,\infty))$. By Fubini we can assume that, for any n, $u \in L^1_{loc}(\partial\Omega_n \times [0,\infty))$. Because $(u - u_{n,k,f})_+ \leq u$ and tends to 0 when $k \to \infty$, it follows by Lebesgue's theorem that

$$\lim_{k\to\infty} \|(u - u_{n,k,f})_+\|_{L^1(\partial\Omega_n \times (0,T))} = 0 \quad \forall T > 0.$$

Applying the maximum principle in $\Omega_n \times (0,\infty)$ yields to

$$u \leq \lim_{k\to\infty} u_{n,k,f} = u_{n,f} \Longrightarrow u \leq \lim_{n\to\infty} u_{n,f} = \overline{u}_f.$$

□

Theorem 2.3 For any $q > 1$ and $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$, there exists a minimal nonnegative solution $\underline{u}_f$ of (2.5) in Q_∞^Ω which satisfies (2.6).

Proof 23 The scheme of the construction is similar to the one of $\overline{u}_f$: with the same exhaustion $\{\Omega_n\}$ of Ω, we consider the solution $u_{n,0,f}$ solution of

$$\begin{cases} \partial_t u_{n,0,f} - \Delta u_{n,0,f} + u_{n,0,f}^q = 0 & \text{in } Q_\infty^{\Omega_n} \\ u_{n,0,f}(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega_n \times (0,\infty) \\ u_{n,0,f}(x,0) = f\chi_{\Omega_n} & \text{in } \Omega_n. \end{cases} \tag{2.8}$$

By the maximum principle, $n \mapsto u_{n,0,f}$ is increasing and dominated by $\overline{u}_f$. Therefore it converges to some solution $\underline{u}_f$ of (2.5), which satisfies (2.6) as $u_{n,0,f}$ and $\overline{u}_f$ do it. Using the same argument as in the proof of Theorem 2.2, there holds $u_{n,0,f} \leq u$ in $Q_\infty^{\Omega_n}$ for a suitable exhaustion. Thus $\underline{u}_f \leq u$. □

Remark 2.1 Because of the lack of regularity of $\partial\Omega$, there is no reason for $\overline{u}_f$ (resp $\underline{u}_f$) to tend to infinity (resp. zero) on $\partial\Omega \times (0,\infty)$.

The next statement will be very usefull for proving uniqueness results.

Theorem 2.4 Assume $q > 1$, $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$ and u_f is a nonnegative solution of (2.5) satisfying (2.6). Then there exists a nonnegative solution u_0 of (2.5) satisfying

$$\lim_{t\to 0} u_0(.,t) = 0 \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega), \tag{2.9}$$

such that

$$0 \leq u_f - \underline{u}_f \leq u_0 \leq u_f, \tag{2.10}$$

and

$$0 \leq \overline{u}_f - u_f \leq \overline{u}_0 - u_0. \tag{2.11}$$

Proof 24 *Step 1 : construction of* u_0. The function $w = u_f - \underline{u}_f$ is a nonnegative subsolution of (2.5) which satisfies

$$\lim_{t \to 0} w(.,t) = 0 \quad \text{in } L^1_{loc}(\Omega).$$

Using the above considered exhaustion of Ω, we denote by v_n the solution of

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t v_n - \Delta v_n + v_n^q = 0 \quad &\text{in } Q_\infty^{\Omega_n} \\ v_n(x,t) = u_f - \underline{u}_f \quad &\text{in } \partial\Omega_n \times (0,\infty) \\ v_n(x,0) = 0 \quad &\text{in } \Omega_n. \end{aligned} \right. \tag{2.12}$$

By the maximum principle

$$u_f - \underline{u}_f \leq v_n \leq u_f \quad \text{in } Q_\infty^{\Omega_n}.$$

Therefore $v_{n+1} \geq v_n$ on $\partial\Omega_n \times (0,\infty)$; this implies that the same inequality holds in $Q_\infty^{\Omega_n}$. If we denote by u_0 the limit of the $\{v_n\}$, it is a solution of (2.5) in Q_∞^{Ω}. For any compact $K \in \Omega$, there exists n_K and $\alpha > 0$ such that $\text{dist}\,(K, \Omega_n^c) \geq \alpha$ for $n \geq n_K$ therefore v_n remains uniformly bounded on K by Brezis-Friedman estimate [3]. Thus the local equicontinuity of the v_n (consequence of the regularity theory for parabolic equations) implies that u_0 satisfies (2.9).

Step 2 : proof of (2.11). We follow a method introduced in [8] in a different context. For $n \in \mathbb{N}$ and $k > 0$ fixed, we set

$$Z_{f,n} = u_{f,n} - u_f \quad \text{and} \quad Z_{0,n} = u_{0,n} - u_0,$$

where we assume that the n are chosen such that $u_f, u_0 \in L^1_{loc}(\partial\Omega_n \times [0,\infty))$, and

$$\phi(r,s) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{r^q - s^q}{r - s} & \text{if } \; r \neq s \\ 0 & \text{if } \; r = s. \end{array} \right.$$

By convexity,

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 \geq s_0, \; r_1 \geq s_1 \\ r_1 \geq r_0, \; s_1 \geq s_0 \end{array} \right. \Longrightarrow \phi(r_1,s_1) \geq \phi(r_0,s_0).$$

Therefore

$$\phi(u_{f,n}, u_f) \geq \phi(u_{0,n}, u_0) \quad \text{in } Q_T^{\Omega_n},$$

and

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t(Z_{f,n} - Z_{0,n}) - \Delta(Z_{f,n} - Z_{0,n}) + u_{f,n}^q - u_f^q - u_{0,n}^q + u_0^q \\ &= \partial_t(Z_{f,n} - Z_{0,n}) - \Delta(Z_{f,n} - Z_{0,n}) + \phi(u_{f,n}, u_f) Z_{f,n} - \phi(u_{0,n}, u_0) Z_{0,n}, \end{aligned}$$

which implies

$$\partial_t(Z_{f,n} - Z_{0,n}) - \Delta(Z_{f,n} - Z_{0,n}) + \phi(u_{f,n}, u_f)(Z_{f,n} - Z_{0,n}) \leq 0.$$

But $Z_{f,n} - Z_{0,n} = 0$ in $\Omega_n \times \{0\}$ and

$$\int_0^\infty \int_{\partial\Omega_n} |Z_{f,n} - Z_{0,n}| \, dS \, dt = 0$$

by approximations. By the maximum principle $Z_{f,n,k} - Z_{0,n,k} \leq 0$. Letting $n \to \infty$ yields to

$$\overline{u}_f - u_f \leq \overline{u}_0 - u_0,$$

which ends the proof. □

3 The case $1 < q < N/(N-2)$

In this section we assume that Ω is a domain of $\mathbb{R}^N$ with a compact boundary. We first prove that the maximal solution is a large solution

Theorem 3.1 Assume $1 < q < N/(N-2)$ and $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$. Then the maximal solution $\overline{u}_f$ of (2.5) in Q_T^Ω which satisfies (2.6) satisfies also (2.3).

Proof 25 In Appendix we construct the self-similar solution $V := V_N$ of (2.5) in $Q_\infty^{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}$ which has initial trace zero in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ and satisfies

$$\lim_{|x|\to 0} V_N(x,t) = \infty,$$

locally uniformly on $[\tau, \infty)$, for any $\tau > 0$. Furthermore $V_N(x,t) = t^{-1/(q-1)} H_N(|x|/\sqrt{t})$. If $a \in \partial\Omega$, the restriction to Ω_n of the function $V_N(x-a,t)$ is bounded from above by $u_{n,f}$. Letting $n \to \infty$ yields to

$$V_N(x-a,t) \leq \overline{u}_f(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^\Omega. \tag{3.1}$$

If we consider $x \in \Omega$ and denote by a_x a projection of x onto $\partial\Omega$, there holds

$$t^{-1/(q-1)} H_N(\rho(x)/\sqrt{t}) = V_N(x - a_x, t) \leq \overline{u}_f(x,t). \tag{3.2}$$

Using (5.2), we derive that $\overline{u}_f$ satisfies (2.3). □

Theorem 3.2 Assume $1 < q < N/(N-2)$, $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$ and $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$. Then $\overline{u}_f$ is the unique solution of (2.5) in Q_T^Ω which satisfies (2.6) and (2.3).

Proof 26 Assume that u_f is a solution of (2.5) in Q_T^Ω such that (2.6) and (2.3) hold. By Theorem 2.4 there exists a positive solution u_0 with zero initial trace such that

$$0 \leq u_f - u_0 \leq \underline{u}_f \tag{3.3}$$

and (2.11) are satisfied. Since $\underline{u}_f(x,t) \leq ((q-1)t)^{-1/(q-1)}$ (notice that this last expression is the maximal solution of (2.5) in $Q_\infty^{\mathbb{R}^N}$), the function u_0 satisfies also (2.3). Therefore, it is sufficient to prove that $\overline{u}_0 = u_0 := u$.

Step 1 : bilateral estimates. Since $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$, for any $a \in \partial\Omega$, there exists a sequence $\{a_n\} \subset \overline{\Omega}^c$ converging to a. If u is any solution of (2.5) in Q_T^Ω which satisfies (2.3) and (2.9), there holds

$$V_N(x-a_n,t) \leq u(x,t) \Longrightarrow V_N(x-a,t) \leq u(x,t).$$

In particular, if $a = a_x$, we see that u satisfies (3.2). In order to obtain an estimate from above we consider for $r < \rho(x)$ the solution $(y,t) \mapsto u_{x,r}(y,t)$ of

$$\begin{cases} \partial_t u_{x,r} - \Delta u_{x,r} + u_{x,r}^q = 0 \quad \text{in } Q_\infty^{B_r(x)} \\ \lim_{(y,t)\to(z,0)} u_{x,r}(y,t) = 0 \quad \forall z \in B_r(x) \\ \lim_{|x-y|\uparrow r} u_{x,r}(y,t) = \infty \quad \text{locally uniformly on } [\tau,\infty), \text{ for any } \tau > 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Then

$$\overline{u}_0(y,t) \leq u_{x,r}(y,t) \Longrightarrow \overline{u}_0(y,t) \leq u_{x,\rho(x)}(y,t) \quad \forall (y,t) \in Q_\infty^{B_{\rho(x)}(x)}.$$

In particular, with $u_{0,r} = u_r$ and since $u_{x,r}(y,t) = u_{0,r}(|x-y|,t)$,

$$\overline{u}_0(x,t) \leq u_{\rho(x)}(0,t) = (\rho(x))^{-2/(q-1)} u_1(0, t/(\rho(x))^2).$$

Therefore

$$t^{-1/(q-1)} H_N(\rho(x)/\sqrt{t}) \leq u(x,t) \leq \overline{u}_0(x,t) \leq (\rho(x))^{-2/(q-1)} u_1(0,t/(\rho(x))^2). \tag{3.5}$$

The function $s \mapsto u_1(0,s)$ is increasing by the same argument as the one of Corollary 4.3 and bounded from above by the unique solution P of

$$\begin{cases} -\Delta P + P^q = 0 \quad \text{in } B_1 \\ \lim_{|x|\to 1} P(x) = \infty. \end{cases} \tag{3.6}$$

Therefore it converges to P locally uniformly in B_1 and $\lim\limits_{s\to\infty} u_1(0,s) = P(0)$. Thus

$$t/(\rho(x))^2 \to \infty \Longrightarrow (\rho(x))^{-2/(q-1)} u_1(0,t/(\rho(x))^2) \approx P(0)(\rho(x))^{-2/(q-1)}. \tag{3.7}$$

On the other hand, if $t/(\rho(x))^2 \to \infty$, equivalently $\rho(x)/\sqrt{t} \to 0$,

$$t^{-1/(q-1)} H_N(\rho(x)/\sqrt{t}) \approx \lambda_{N,q} t^{-1/(q-1)} (\rho(x)/\sqrt{t})^{-2/(q-1)} = \lambda_{N,q}(\rho(x))^{-2/(q-1)}, \tag{3.8}$$

by (5.4).

Next, in order to obtain an estimate from above of $u_1(0,s)$ when $s \to 0$, we compare u_1 to a solution u_Θ of (2.5) in Q_∞^Θ, where Θ is a polyhedra inscribed in B_1 ; this polyhedra is a finite intersection of half spaces Γ_i containing Θ. In each of the half space Γ_i, with boundary γ_i, we can consider the solution W_i of (2.5) in $Q_\infty^{\Gamma_i}$ which tends to infinity on $\gamma_i \times (0,\infty)$ and has value 0 on $\Gamma_i \times \{0\}$. This solution depends only on the distance to γ_i and t. Thus it is expressed by the function V_1 defined in Proposition 5.1 when $N = 1$. Moreover, since a sum of solutions is a super solution,

$$u_1 \leq u_\Theta \leq \sum_i W_i \Longrightarrow u_1(0,s) \leq s^{-1/(q-1)} \sum_i H_1(\text{dist}\,(0,\gamma_i)/\sqrt{s}). \tag{3.9}$$

We can choose the hyperplanes γ_i such that for any $\delta \in (0,1)$, there exists $C_\delta \in \mathbb{N}_*$ such that

$$u_1(0,s) \leq C_\delta s^{-1/(q-1)} H_1((1-\delta)/\sqrt{s}). \tag{3.10}$$

Using (5.3) we derive

$$u(x,t) \geq c_{N,q}(\rho(x))^{2/(q-1)-N} t^{N/2-2/(q-1)} e^{-(\rho(x))^2/4t},$$

when $\rho(x)/\sqrt{t} \to \infty$, and

$$\begin{aligned}\overline{u}_0(x,t) &\leq Ct^{-1/(q-1)} H_1((1-\delta)\rho(x)/\sqrt{t}) \\ &\leq C(1-\delta)^{2/(q-1)-1}(\rho(x))^{2/(q-1)-1} t^{1/2-2/(q-1)} e^{-((1-\delta)\rho(x))^2/4t},\end{aligned}$$

from (3.10). Therefore, there exists $\theta > 1$ such that

$$\overline{u}_0(x,t) \leq C(1-\delta)^{2/(q-1)-N}(\rho(x))^{2/(q-1)-N} t^{N/2-2/(q-1)} e^{-(\rho(x))^2/4\theta t} \leq Cu(x,\theta t), \tag{3.11}$$

when $\rho(x)/\sqrt{t} \to \infty$. Finally, when $m^{-1} \leq \rho(x)/\sqrt{t} \leq m$ for some $m > 1$, (3.5) shows that $(\rho(x))^{-2/(q-1)} u_1(0, t/(\rho(x))^2)$ and $t^{-1/(q-1)} H_N(\rho(x)/\sqrt{t})$ are comparable. In conclusion, there exist constants $C > P(0)/\lambda_{N,q} > 1$ and $\theta > 1$ such that

$$u(x,t) \leq \overline{u}_0(x,t) \leq Cu(x,\theta t) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^\Omega. \tag{3.12}$$

Step 2 : End of the proof. Let $\tau > 0$ and $C' > C$ be fixed. The function

$$t \mapsto u_\tau(x,t) := C' u(x, t + \theta\tau)$$

is a supersolution of (2.5) in $\Omega \times (0,\infty)$ which satisfies $u_\tau(x,0) = C'u(x,\theta\tau) > \overline{u}_0(x,\tau)$ by (3.12). Furthermore,

$$C'u(x,t+\theta\tau) \geq C'(t+\theta\tau)^{-1/(q-1)} H_N\left(\rho(x)/\sqrt{t+\theta\tau}\right) = C'\lambda_{N,q}(1+o(1))(\rho(x))^{-2/(q-1)},$$

as $\rho(x) \to 0$, locally uniformly for $t \in [0,\infty)$. Similarly,

$$\overline{u}_0(x,t+\tau) \leq (\rho(x))^{-2/(q-1)} u_1(0,(t+\tau)/(\rho(x))^2) = P(0)(1+o(1))(\rho(x))^{-2/(q-1)},$$

as $\rho(x) \to 0$, and also locally uniformly for $t \in [0, \infty)$. Therefore $(\overline{u}_0(x,t) - u_\tau(x,t))_+$ vanishes in a neighborhood of $\partial\Omega \times [0,T]$ for any $T > 0$. By the maximum principle

$$u_\tau(x,t) \geq \overline{u}_0(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

Letting $\tau \to 0$ and $C' \to C$ yields to

$$u(x,t) \leq \overline{u}_0(x,t) \leq Cu(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^\Omega. \tag{3.13}$$

The conclusion of the proof is contradiction, following an idea introduced in [8] and developped by [12] in the elliptic case. We assume $u \neq \overline{u}_0$, thus $u < \overline{u}_0$. By convexity the function

$$w = u - \frac{1}{2C}(\overline{u}_0 - u)$$

is a supersolution and $w < u$. Moreover $w > w' := ((1+C)/2C)u$ and w' is a subsolution. Consequently, there exists a solution u_1 of (1.3) which satisfies

$$w' < u_1 \leq w \Longrightarrow \overline{u}_0 - u_1 \geq \left(1 + K^{-1}\right)(\overline{u}_0 - u) \quad \text{in } Q_\infty^\Omega. \tag{3.14}$$

Notice that u_1 satisfies (2.9) and (2.3), therefore it satisfies (3.13) as u does it. Replacing u by u_1 and introducing the supersolution

$$w_1 = u_1 - \frac{1}{2C}(\overline{u}_0 - u_1)$$

and the subsolution $w_1' := ((1+C)/2C)u_1$ we see that there exists a solution u_2 of (2.5) such that

$$w_1' < u_2 \leq w_1 \Longrightarrow \overline{u}_0 - u_2 \geq \left(1 + K^{-1}\right)^2(\overline{u}_0 - u) \quad \text{in } Q_\infty^\Omega. \tag{3.15}$$

By induction, we construct a sequence of positive solutions u_k of (2.5), subject to (2.9) and (2.3) such that

$$\overline{u}_0 - u_k \geq \left(1 + K^{-1}\right)^k(\overline{u}_0 - u) \quad \text{in } Q_\infty^\Omega. \tag{3.16}$$

This is clearly a contradiction since $\left(1 + K^{-1}\right)^k \to \infty$ as $k \to \infty$ and $\overline{u}_0$ is locally bounded in Q_∞^Ω. □

4 The local continuous graph property

In this section, we assume that $\partial\Omega$ is compact and is locally the graph of a continuous function, which means that there exists a finite number of open sets Ω_j $(j = 1, ..., k)$ such that $\Gamma \cap \Omega_j$ is the graph of a continuous function. Our main result is the following

Theorem 4.1 Assume $q > 1$ and $f \in L^1_{loc+}(\Omega)$. Then there exists at most one positive solution of (2.5) in Q_∞^Ω satisfying (2.6) and (2.3).

Suppose u_f satisfies (2.5) in Q^{Ω}_{∞} satisfying (2.6) and (2.3), then clearly the maximal solution $\overline{u}_f$ endows the same properties. In order to prove that $u_f = \overline{u}_f$, we can assume that $f = 0$ by Theorem 2.4. We denote by u this large solution with zero initial trace. We consider some $j \in \{1, ..., k\}$, perform a rotation, denote by $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ the coordinates in $\mathbb{R}^N$ and represent $\Gamma \cap \Omega_j$ as the graph of a continuous positive function ϕ defined in $C = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| \leq R\}$. We identify C with $\{x = (x', 0) : |x'| \leq R\}$ and set

$$\Gamma_1 = \{x = (x', \phi(x')) : x' \in C\},$$

$$\Gamma_2 = \{x = (x', x_N) : x' \in \partial C,\, 0 \leq x_N < \phi(x'), \},$$

and

$$G_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x'| < R,\, 0 < x_N < \phi(x')\}.$$

We can assume that $\overline{G}_R \subset \Omega \cup \Gamma_1$,

$$\inf\{\phi(x') : x' \in C\} = R_0 > 0 \quad \text{and} \quad \sup\{\phi(x') : x' \in C\} = R_1 > R_0.$$

For $\sigma > 0$, small enough, we consider $\phi_\sigma \in C^\infty(C)$ satisfying

$$\phi(x') - \sigma/2 \leq \phi_\sigma(x') \leq \phi(x') + \sigma/2 \quad \forall x' \in C,$$

and set

$$G_{\sigma,R} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x'| < R,\, 0 < x_N < \phi_\sigma(x') - \sigma\}$$

and

$$G'_{\sigma,R} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x'| < R,\, 0 < x_N < \phi_\sigma(x') + \sigma\}.$$

The upper boundaries of G_σ and G'_σ are defined by

$$\Gamma_{1,\sigma} = \{x = (x', \phi_\sigma(x') - \sigma) : x' \in C\},$$

$$\Gamma'_{1,\sigma} = \{x = (x', \phi_\sigma(x') + \sigma) : x' \in C\},$$

and the remaining boundaries are

$$\Gamma_{2,\sigma} = \{x = (x', x_N) : x' \in \partial C,\, 0 \leq x_N \leq \phi_\sigma(x') - \sigma\},$$

$$\Gamma'_{2,\sigma} = \{x = (x', x_N) : x' \in \partial C,\, 0 \leq x_N \leq \phi_\sigma(x') + \sigma\}.$$

In order to have the monotonicity of the domains, we can also assume

$$\phi_\sigma(x') - \sigma < \phi_{\sigma'}(x') - \sigma' < \phi_{\sigma'}(x') + \sigma' < \phi_\sigma(x') + \sigma \quad \forall\, 0 < \sigma' < \sigma \quad \forall\, x' \in C, \tag{4.1}$$

thus, under the condition $0 < \sigma' < \sigma$,

$$G_{\sigma,R} \subset G_{\sigma',R} \subset G_R \subset G'_{\sigma',R} \subset G'_{\sigma,R}. \tag{4.2}$$

The localization procedure is to consider the restriction of u to $Q_{\infty}^{G_R} := G_R \times (0, \infty)$, thus u is regular in $G_R \cup \Gamma_2 \times [0, \infty)$ and satifies

$$\lim_{x_N \to \phi(x')} u(x', x_N, t) = \infty, \tag{4.3}$$

uniformly with respect to $(x', t) \in C \times [\tau, T]$, for any $0 < \tau < T$. We construct v_σ as solution of

$$\partial_t v_\sigma - \Delta v_\sigma + v_\sigma^q = 0 \quad \text{in } Q_{\infty}^{G_{\sigma,R}} := G_{\sigma,R} \times (0, \infty), \tag{4.4}$$

subject to the initial condition

$$\lim_{t \to 0} v_\sigma(x, t) = 0 \quad \text{locally uniformly in } G_{\sigma,R}, \tag{4.5}$$

and the boundary conditions

$$\lim_{x_N \to \phi_\sigma(x') - \sigma} v_\sigma(x', x_N, t) = \infty \quad \forall (x', t) \in C \times (0, \infty], \tag{4.6}$$

uniformly on any set $K \times [\tau, T]$, where $T > \tau > 0$ and K is a compact subset of C and

$$v_\sigma(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma_{2,\sigma} \times [0, \infty). \tag{4.7}$$

We also construct w_σ as solution of

$$\partial_t w_\sigma - \Delta w_\sigma + w_\sigma^q = 0 \quad \text{in } Q_T^{G'_{\sigma,R}} := G'_{\sigma,R} \times (0, \infty), \tag{4.8}$$

subject to the initial condition

$$\lim_{t \to 0} w_\sigma(x, t) = 0 \quad \text{locally uniformly in } G'_{\sigma,R}, \tag{4.9}$$

and the boundary conditions

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & w_\sigma(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Gamma'_{1,\sigma} \times [0, T], \\ (i') & \lim_{(x,s) \to (y,t)} w_\sigma(x, t) = \infty \quad \forall (y, s) \in \Gamma'_{2,\sigma} \times [0, T]. \end{array} \right. \tag{4.10}$$

The functions v_σ and w_σ inherit the following properties in which the local graph property plays a fundamental role, allowing translations of the truncated domains in the x_N-direction.

Lemma 4.2 For $\sigma > \sigma' > 0$ there holds

$$v_{\sigma'} \leq v_\sigma \quad \text{in } Q_{\infty}^{G_{\sigma,R}}, \tag{4.11}$$

$$w_{\sigma'} \leq w_\sigma \quad \text{in } Q_{\infty}^{G'_{\sigma',R}}, \tag{4.12}$$

$$\begin{array}{ll} (i) & v_\sigma(x', x_N - 2\sigma, t) \leq u(x', x_N, t) \quad \text{in } Q_{\infty}^{G_R} \\ (ii) & u(x', x_N, t) \leq v_\sigma(x, t) + w_\sigma(x, t) \quad \text{in } Q_{\infty}^{G_{\sigma,R}}. \end{array} \tag{4.13}$$

Proof 27 The inequalities (4.11) and (4.12) are the direct consequence of the fact that the domains $G_{\sigma,R}$ and $G'_{\sigma',R}$ are Lipschitz and the functions v_σ and w_σ are constructed by approximations of solutions of (2.5) with bounded boundary data. For proving (4.13)-(i), we compare, for $\tau > 0$, $u(x, t-\tau)$ and $v_\sigma(x', x_N - 2\sigma, t)$ in $Q_\infty^{G_R}$. Because u satisfies (2.3), and $v_\sigma(x', x_N - 2\sigma, 0) = 0$ in G_R, (4.13)-(i) follows by the maximum principle. The proof of (4.13)-(ii) needs no translation, but the fact that the sum of two solutions is a supersolution. □

Corollary 4.3 There exist $v_0 = \lim_{\sigma\to 0} v_\sigma$ and $w_0 = \lim_{\sigma\to 0} w_\sigma$ and there holds

$$v_0 \le u \le v_0 + w_0 \quad \text{in } Q_\infty^{G_R}. \tag{4.14}$$

Moreover, the functions $t \mapsto v_0(x,t)$ and $t \mapsto w_0(x,t)$ are increasing on $(0,\infty)$, $\forall x \in G_R$.

Proof 28 The first assertion follows from (4.11)-(4.12), and (4.14) from (4.13). Since v_0 is the limit, when $\sigma \to 0$ of v_σ which satisfy equation (4.4) in $Q_T^{G_{\sigma,R}}$, initial condition (4.5) and boundary conditions (4.6), (4.7), it is sufficient to prove the monotonicity of $t \mapsto v_\sigma(.,t)$. Moreover v_σ is the limit, when k tends to infinity of the $v_{k,\sigma}$ solutions of (2.5) in $Q_T^{G_{\sigma,R}}$, which satisfy the same boundary conditions as v_σ on $\Gamma_{2,\sigma} \times [0,T]$, the same zero initial condition and

$$\lim_{x_N \to \phi(x') - \sigma} v_{k,\sigma}(x', x_N, t) = k.$$

For $\tau > 0$, we define V_τ by $V_\tau(x,t) = (v_{k,\sigma}(x,t) - v_{k,\sigma}(x,t+\tau))_+$. Because $\partial G_{\sigma,R}$ is Lipschitz and V_τ is a subsolution of (2.5) which vanishes on $\partial G_{\sigma,R} \times [0,T]$ and at $t = 0$, it is identically zero. This implies $v_{k,\sigma}(x,t) \le v_{k,\sigma}(x,t+\tau)$, and the monotonicity property of v_0, by strict maximum principle and letting $\sigma \to 0$. The proof of the monotonicity of w_0 is similar. □

The key step of the proof is the following result.

Proposition 4.4 Let $\epsilon, \tau > 0$. Then there exists $\delta_\epsilon > 0$ such that, if we denote

$$G_{\delta,R'} = \{x = (x', x_N) : |x'| < R' \text{ and } \phi(x') - \delta \le x_N < \phi(x')\},$$

there holds, for $R' < R/\sqrt{N-1}$,

$$w_0(x,t) \le \epsilon v_0(x, t+\tau) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^{G_{\delta,R'}}. \tag{4.15}$$

Proof 29 Using the result in Appendix, we recall that $V := V_1$ is the unique positive and self-similar solution of the problem

$$\begin{cases} \partial_t V - \partial_{zz} V + V^q = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ \lim_{t\to 0} V(z,t) = 0 \quad \forall z > 0 \\ \lim_{z\to 0} V(z,t) = \infty \quad \forall t > 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

and it is expressed by $V_1(z,t) = t^{-1/(q-1)}H_1(x/\sqrt{t})$, where H_1 satisfies (5.2)-(5.3) with $N = 1$. We set $R_N = R/\sqrt{N-1}$ so that

$$C_\infty := \{x' = (x_1, ..., x_{N-1}) : \sup_{j \le N-1} |x_j| < R_N\} \subset C = \{x' : |x'| \le R\}$$

and we define

$$\tilde{w}(x,t) = W(x_N, t) + \sum_{j=1}^{N-1} (W(x_j - R, t) + W(R - x_j, t)).$$

The function $\tilde{w}$ a super solution in $\Theta \times \mathbb{R}^+$ where $\Theta := \{(x', x_N) : x' \in C_\infty, x_N > 0\}$ which blows up on

$$\{x : x_N = 0\,,\ \sup_{j \le N-1} |x_j| \le R\} \bigcup_{j \le N-1} \{x : x_N \ge 0\,,\ x_j = \pm R\}\,.$$

Therefore $w_0 \le \tilde{w}$ in $Q_T^{G_{R_N}}$. Moreover $\tilde{w}(x,t) \to 0$ when $t \to 0$, uniformly on

$$G^*_{\alpha,R'} := \{x = (x_1, x_2) : |x_1| \le R', \alpha \le x_2 \le \phi(x_1)\},$$

for any $\alpha \in (0, R_0]$ and $R' \in (0, R_N)$. Since for any $\tau > 0$, $v_0(x, t+\tau) \to \infty$ when $\rho(x) \to 0$, locally uniformly on $[0, \infty)$, and $\tilde{w}(x,t)$ remains uniformly bounded on $Q_\infty^{G_{\delta,R'}}$, for any $\delta > R_0$, it follows that for any $\epsilon > 0$ there exists $\delta_\epsilon > 0$ such that

$$w_0(x,t) \le \tilde{w}(x,t) \le \epsilon v_0(x, t+\tau) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^{G_{\delta_\epsilon,R'}}.$$

$\square$

Proof of Theorem 4.1. Assume u is a solution of (2.5) satisfying (2.6) and (2.3). Then there holds in $Q_\infty^{G_{\delta_\epsilon,R'}}$,

$$v_0(.,t) \le u(.,t) \le v_0(.,t) + \epsilon v_0(., t+\tau). \tag{4.17}$$

Therefore

$$v_0(., t+\tau) \le u(., t+\tau) \le v_0(., t+\tau) + \epsilon v_0(., t+2\tau),$$

from which follows

$$(1+\epsilon)u(., t+\tau) \ge (1+\epsilon)v_0(., t+\tau) \ge v_0(., t) + \epsilon v_0(., t+\tau)$$

since $t \mapsto v_0(.,t)$ is increasing by Corollary 4.3. The maximal solution $\overline{u}_0$ satisfies (4.17) too ; consequently the following inequality is verified in $Q_\infty^{G_{\delta_\epsilon,R'}}$,

$$(1+\epsilon)u(., t+\tau) \ge \overline{u}_0(., t). \tag{4.18}$$

Since $\partial\Omega$ is compact, there exists $\delta^* > 0$ such that (4.18) holds whenever $t \in [0, T]$ ($T > 0$ arbitrary) and $\rho(x) \leq \delta^*$. Furthermore

$$\lim_{t\to 0} \max\{(\overline{u}_0(x,t) - (1+\epsilon)u(x,t+\tau))_+ : \rho(x) \geq \delta^*\} = 0$$

because of (2.6). Since $(\overline{u}_0(x,t) - (1+\epsilon)u(x,t+\tau))_+$ is a subsolution, which vanishes at $t = 0$ and near $\partial\Omega \times [0,T]$, it follows that (4.18) holds in Q_T^Ω. Letting $\epsilon \to 0$ and $\tau \to 0$ yields to $u \geq \overline{u}_0$. □

Remark 4.1 The existence of large solutions when $q \geq N/(N-2)$ is a difficult problem as it is already in the elliptic case. We conjecture that the necessary and sufficient conditions, obtained by Dhersin-Le Gall when $q = 2$ [4] and Labutin [6] in the general case $q > 1$, and expressed by mean of a Wiener type criterion involving the $C_{2,q'}^{\mathbb{R}^N}$-Bessel capacity, are still valid. As in [7], it is clear that if $\partial\Omega$ satisfies the exterior segment property and $1 < q < (N-1)/(N-3)$, then $\overline{u}_0$ is a large solution.

5 Appendix

The proof of this result is based upon the existence of solution of (2.5) in $Q_\infty^{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}}$ with a persistent singularity on $\{0\} \times [0,\infty)$.

Proposition 5.1 For any $q > 1$, there exists a unique positive function $V := V_N$ defined in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ satisfying, for any $\tau > 0$

$$\begin{cases} \partial_t V - \Delta V + V^q = 0 \quad \text{in } \; Q_\infty^{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} \\ \lim_{(x,t)\to(y,0)} V(x,t) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \\ \lim_{|x|\to 0} V(x,t) = \infty \quad \text{locally uniformly on } [\tau,\infty), \text{ for any } \tau > 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

Then $V_N(x,t) = t^{-1/(q-1)} H_N(|x|/\sqrt{t})$, where $H := H_N$ is the unique positive function satisfying

$$\begin{cases} H'' + \left(\dfrac{N-1}{r} + \dfrac{r}{2}\right) H' + \dfrac{1}{q-1} H - H^q = 0 \quad \text{in } \; \mathbb{R}_+ \\ \lim_{r\to 0} H(r) = \infty \\ \lim_{r\to\infty} r^{2/(q-1)} H(r) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Furthermore there holds

$$H_N(r) = c_{N,q} r^{2/(q-1)-N} e^{-r^2/4}(1 + O(r^{-2})) \quad \text{as } \; r \to \infty, \tag{5.3}$$

and

$$H_N(r) = \lambda_{N,q} r^{-2/(q-1)}(1 + O(r)) \quad \text{as } \; r \to 0, \tag{5.4}$$

Proof 30 If we assume $1 < q < N/(N-2)$, the $C_{2,1,q'}$ parabolic capacity of the axis $\{0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ is positive, therefore there exists a unique solution $u := u_\mu$ to the problem

$$\partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = \mu \quad \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{5.5}$$

(see [1]) where μ is the uniform measure on $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ defined by

$$\int \zeta d\mu = \int_0^\infty \zeta(0,t)dt \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}).$$

If we denote $T_\ell[u](x,t) = \ell^{2/(q-1)}u(\ell x, \ell^2 t)$ for $\ell > 0$, then T_ℓ leaves the equation (1.3) invariant, and $T_\ell[u_\mu] = u_{\ell^{2/(q-1)-N}\mu}$. If we replace μ by $k\mu$ ($k > 0$), we obtain

$$T_\ell[u_{k\mu}] = u_{\ell^{2/(q-1)-N}k\mu}. \tag{5.6}$$

Moreover, any solution of (2.5) in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+$ which vanishes on $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \times \{0\}$ is bounded from above by the maximum solution $u := U$ of

$$-\Delta u + u^q = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{5.7}$$

This is obtained by considering the solution U_ϵ of

$$\begin{cases} -\Delta u + u^q = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_\epsilon \\ \lim\limits_{|x| \to \epsilon} u(x) = \infty. \end{cases} \tag{5.8}$$

Actually,

$$U(x) := \lim_{\epsilon \to 0} U_\epsilon(x) = \lambda_{N,q}|x|^{-2/(q-1)} \quad \text{with } \lambda_{N,q} := \left[\left(\frac{2}{q-1}\right)\left(\frac{2q}{q-1} - N\right)\right]^{1/(q-1)}, \tag{5.9}$$

an expression which exists since $1 < q < N/(N-2)$. If we let $k \to \infty$ in (5.6), using the monotonicity of $\mu \mapsto u_\mu$, we obtain that $u_{k\mu} \to u_{\infty\mu}$, $u_{\infty\mu} \leq U$ and

$$T_\ell[u_{\infty\mu}] = u_{\ell^{2/(q-1)-N}\infty\mu} = u_{\infty\mu} \quad \forall \ell > 0. \tag{5.10}$$

This implies that $u_{\infty\mu}$ is self-similar, that is

$$u_{\infty\mu}(x,t) = t^{-1/(q-1)}h(x/\sqrt{t}).$$

Furthermore, $h(.)$ is positive and radial as $x \mapsto u_\mu(x,t)$ is, and it solves

$$h'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right)h' + \frac{1}{q-1}h - h^q = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+. \tag{5.11}$$

Since $u_\mu(x,0) = 0$ for $x \neq 0$, the a priori bounds $u_{k\mu} \leq U$, the equicontinuity of the $\{u_{k\mu}\}_{k>0}$ implies that $u_{\infty\mu}(x,0) = 0$ for $x \neq 0$; therefore

$$\lim_{r \to \infty} r^{2/(q-1)}h(r) = 0. \tag{5.12}$$

The same argument as the one used in the proof of Corollary 4.3 implies that $t \mapsto u_\mu(x,t)$ is increasing, therefore $\lim_{x\to 0} u_\mu(x,t) = \infty$ for $t > 0$. This implies $\lim_{r\to 0} h(r) = \infty$. Then the proof of (5.3) follows from [10, Appendix]. When $r \to 0$, h could have two possible behaviours [13] :

(i) either

$$h(r) = \lambda_{N,q} r^{-2/(q-1)}(1 + O(r)), \tag{5.13}$$

(ii) or there exists $c \geq 0$ such that

$$h(r) = c m_N(r)(1 + O(r)), \tag{5.14}$$

where $m_N(r)$ is the Newtonian kernel if $N \geq 2$ and $m_1(r) = 1 + o(1)$.

If (ii) were true with $c > 0$ (the case $c = 0$ implying that $h = 0$ because of the behavior at ∞ and maximum principle), it would lead to

$$u_{\infty\mu}(x) = c|x|^{2-N} t^{N-2-1/(q-1)}(1 + o(1)) \quad \text{as } x \to 0, \tag{5.15}$$

for all $t > 0$. Therefore

$$\int_\epsilon^T \int_{B_1} u_{k\mu}^q dx\, dt < C(\epsilon), \tag{5.16}$$

for any $\epsilon > 0$ and $k \in (0, \infty]$. We write (5.5) under the form

$$\partial_t u_{k\mu} - \Delta u_{k\mu} = g_k + k\mu$$

where $g_k = -u_{k\mu}^q$, then $u_{k\mu} = u'_{k\mu} + u''_k$, where

$$\partial_t u'_{k\mu} - \Delta u'_{k\mu} = k\mu$$

and

$$\partial_t u''_k - \Delta u''_k = g_k.$$

By linearity $u'_{k\mu} = k u'_\mu$. Because of (5.16) u''_k remains uniformly bounded in $L^1(B_1 \times (\epsilon, T)$. This clearly contradicts $\lim_{k\to\infty} u'_{k\mu} = \infty$. Thus (5.4) holds. The proof of uniqueness is an easy adaptation of [7, Lemma 1.1] : the fact that the domain is not bounded being compensated by the strong decay estimate (5.3). This unique solution is denoted by V_N and $h = H_N$. $\square$

Bibliographie

[1] P. Baras & M. Pierre, *Problèmes paraboliques semi-linéaires avec données mesures*, Applicable Anal. **18**, 111-149 (1984).

[2] H. Brezis, L. A. Peletier & D. Terman, *A very singular solution of the heat equation with absorption*, Arch. rat. Mech. Anal. **95**, 185-209 (1986).

[3] H. Brezis and A. Friedman, *Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions*, J. Math. Pures Appl. **62**, 73-97 (1983).

[4] J. S. Dhersin and J. F. Le Gall, *Wiener's test for super-Brownian motion and the Brownian snake*, Probab. Theory Relat. Fields **108**, 103-29 (1997).

[5] J.B. Keller, *On solutions of* $\Delta u = f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. **10**, 503-510 (1957).

[6] D. Labutin, *Wiener regularity for large solutions of nonlinear equations*, Archiv för Math. **41**, 307-339 (2003).

[7] M. Marcus and L. Véron, *Uniqueness and asymptotic behaviour of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré **14**, 237-274 (1997).

[8] M. Marcus and L. Véron, *The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the subcritical case*, Arch. Rat. Mech. Anal. **144**, 201-231 (1998).

[9] M. Marcus and L. Véron, *The initial trace of positive solutions of semilinear parabolic equations*, Comm. Part. Diff. Equ. **24**, 1445-1499 (1999).

[10] M. Marcus and L. Véron, *Semilinear parabolic equations with measure boundary data and isolated singularities*, J. Analyse. Math **85**, 245-290 (2001).

[11] R. Osserman, *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$, Pacific J. Math.**7**, 1641-1647 (1957).

[12] L. Véron, *Generalized boundary value problems for nonlinear elliptic equations*, Electr. J. Diff. Equ. Conf. **6**, 313-342 (2000).

[13] L. Véron, *Singular solutions of some nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. T. M. &**A 5**, 225-242 (1981).

Chapitre 3

Solutions of some nonlinear parabolic equations with initial blow-up

Ce chapitre est constitué d'un article à paraître dans *Quaderni di Mathematica* dans lequel on étudie l'existence et l'unicité de solutions de $\partial_t u - \Delta u + u^q = 0$ $(q > 1)$ dans $\Omega \times (0, \infty)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine à bord compact, avec les conditions $u = f \geq 0$ sur $\partial\Omega \times (0, \infty)$ et la condition initiale $\lim_{t \to 0} u(x, t) = \infty$. Utilisant la théorie des opérateurs maximaux monotones dans les espace de Hilbert établie par Brézis, on construit une solution minimale quand $f = 0$, peu importe la régularité du bord du domaine. Lorsque $\partial\Omega$ satisfait le critère parabolique de Wiener et f est continue, on construit une solution maximale et on démontre qu'elle est la solution unique qui explose en $t = 0$.

Solutions of some nonlinear parabolic equations with initial blow-up [(1)]

Waad Al Sayed Laurent Véron

Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique,
Université François Rabelais, Tours, FRANCE

Abstract We study the existence and uniqueness of solutions of $\partial_t u - \Delta u + u^q = 0$ $(q > 1)$ in $\Omega \times (0, \infty)$ where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a domain with a compact boundary, subject to the conditions $u = f \geq 0$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$ and the initial condition $\lim_{t \to 0} u(x, t) = \infty$. By means of Brezis' theory of maximal monotone operators in Hilbert spaces, we construct a minimal solution when $f = 0$, whatever is the regularity of the boundary of the domain. When $\partial\Omega$ satisfies the parabolic Wiener criterion and f is continuous, we construct a maximal solution and prove that it is the unique solution which blows-up at $t = 0$.

1991 Mathematics Subject Classification. 35K60.

Key words. Parabolic equations, singular solutions, semi-groups of contractions, maximal monotone operators, Wiener criterion.

1 Introduction

Let Ω be a domain of $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ with a compact boundary, $Q_\infty^\Omega = \Omega \times (0, \infty)$ and $q > 1$. This article deals with the question of the solvability of the following Cauchy-Dirichlet problem $\mathcal{P}^{\Omega,f}$

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 & \text{in } Q_\infty^\Omega \\ u = f & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ \lim_{t \to 0} u(x, t) = \infty & \quad \forall x \in \Omega. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

If no assumption of regularity is made on $\partial\Omega$, the boundary data $u = f$ cannot be prescribed in sense of continuous functions. However, the case $f = 0$ can be treated if the vanishing condition on $\partial\Omega \times (0, \infty)$ is understood in the H_0^1 local sense. We construct a positive solution $\underline{u}_\Omega$ of (1.1) with $f = 0$ belonging to $C(0, \infty; H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega))$ thanks

[(1)]To appear in *Quaderni di Mathematica* to Brezis results of contractions semigroups generated by subdifferential of proper convex functions in Hilbert spaces. We can also consider an internal increasing approximation of Ω by smooth bounded domains Ω^n such that $\Omega = \cup_n \Omega^n$. For each of these domains, there exists a maximal solution $\overline{u}_{\Omega^n}$ of problem $\mathcal{P}^{\Omega^n,0}$. Furthermore the sequence $\{\overline{u}_{\Omega^n}\}$ is increasing. The limit function $u_\Omega := \lim_{n\to\infty} \overline{u}_{\Omega^n}$ is the natural candidate to be the minimal positive solution of a solution of $\mathcal{P}^{\Omega,0}$. We prove that $\underline{u}_\Omega = u_\Omega$. If $\partial\Omega$ satisfies the parabolic Wiener criterion [9], there truly exist solutions of $\mathcal{P}^{\Omega,0}$. We construct a maximal solution $\overline{u}_\Omega$ of this problem. Our main result is the following :

Theorem 1. *If $\partial\Omega$ is compact and satisfies the parabolic Wiener criterion, there holds*

$$\overline{u}_\Omega = \underline{u}_\Omega.$$

In the last section, we consider the full problem $\mathcal{P}^{\Omega,f}$. Under the same regularity and boundedness assumption on $\partial\Omega$ we construct a maximal solution $\overline{u}_{\Omega,f}$ and we prove

Theorem 2. *If $\partial\Omega$ is compact and satisfies the parabolic Wiener criterion, and if $f \in C(0,\infty;\partial\Omega)$ is nonnegative, $\overline{u}_{\Omega,f}$ is the only positive solution to problem $\mathcal{P}^{\Omega,f}$.*

These type of results are to be compared with the ones obtained by the same authors [1] in which paper the following problem is considered

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 \quad \text{in } Q_\infty^\Omega \\ \lim_{\text{dist}\,(x,\partial\Omega)\to 0} u(x,t) = \infty \quad \text{locally uniformly on } (0,\infty) \\ u(x,0) = f \qquad \forall x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

In the above mentioned paper, it is proved two types of existence and uniqueness result with $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, $f \geq 0$: either if $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$ and $1 < q < N/(N-2)$, or if $\partial\Omega$ is locally the graph of a continuous function and $q > 1$.

Our paper is organized as follows : 1- Introduction. 2- Minimal and maximal solutions. 3- Uniqueness of large solutions. 4- Bibliography.

2 Minimal and maximal solutions

Let $q > 1$ and Ω be a proper domain of $\mathbb{R}^N$, $N > 1$ with a non-empty compact boundary. We set $Q_\infty^\Omega = \Omega \times (0,\infty)$ and consider the following problem

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u^q = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = 0 \qquad \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

If there is no regularity assumption on $\partial\Omega$, a natural way to consider the boundary condition is to impose $u(.,t) \in H^1_0(\Omega)$. The Hilbertian framework for this equation has been studied by Brezis in a key article [2] (see also the monography [3] for a full treatment of related questions) in considering the maximal monotone operator $v \mapsto A(v) := -\Delta v + |v|^{q-1}v$ seen as the subdifferential of the proper lower semi-continuous function

$$J_\Omega(v) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{q+1}|v|^{q+1}\right) dx & \text{if } v \in H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) \\ \infty & \text{if } v \notin H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega). \end{cases} \tag{2.2}$$

In that case, the domain of $A = \partial J_\Omega$ is $D(A) := \{u \in H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, and we endow $D_\Omega(-\Delta,)$ with the graph norm of the Laplacian in $H_0^1(\Omega)$

$$\|v\|_{D_\Omega(-\Delta)} = \left(\int_\Omega \left((\Delta v)^2 + |\nabla v|^2 + v^2\right) dx\right)^{1/2}.$$

Brezis' result is the following.

Theorem 2.1 Given $u_0 \in L^2(\Omega)$ there exists a unique function $v \in L^2_{loc}(0,\infty; D_\Omega(-\Delta)) \cap C(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega))$ such that $\partial_t v \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ satisfying

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + |v|^{q-1}v = 0 & \text{a.e. in } Q_\infty^\Omega \\ v(.,0) = u_0 & \text{a.e. in } \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Furthermore the mapping $(t, u_0) \mapsto v(t,.)$ defines an order preserving contraction semigroup in $L^2(\Omega)$, denoted by $S^{\partial J_\Omega}(t)[u_0]$, and the following estimate holds

$$\|\partial_t v(t,.)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{t\sqrt{2}} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.4}$$

From this result, we have only to consider solutions of (2.1) with the above regularity.

Definition 2.2 We denote by $\mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$ the set of positive functions $u \in L^2_{loc}(0,\infty; D_\Omega(-\Delta)) \cap C(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega))$ such that $\partial_t u \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ satisfying

$$\partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 \tag{2.5}$$

in the semigroup sense, i. e.

$$\frac{du}{dt} + \partial J_\Omega(u) = 0 \quad \text{a.e. in } (0,\infty). \tag{2.6}$$

If Ω is not bounded it is usefull to introduce another class which takes into account the Dirichlet condition on $\partial\Omega$: we assume that $\Omega^c \subset B_{R_0}$, denote by $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ $(R \geq R_0)$ and by $\tilde{H}_0^1(\Omega_R)$ the closure in $H_0^1(\Omega_R)$ of the restrictions to Ω_R of functions in $C_0^\infty(\Omega)$, thus we endow $D_{\Omega_R}(-\Delta,)$ with the graph norm of the Laplacian in $\tilde{H}_0^1(\Omega_R)$

$$\|v\|_{D_{\Omega_R}(-\Delta)} = \left(\int_{\Omega_R} \left((\Delta v)^2 + |\nabla v|^2 + v^2\right) dx\right)^{1/2}.$$

Definition 2.3 If Ω is not bounded but $\Omega^c \subset B_{R_0}$, we denote by $\mathcal{I}(Q_\infty^{\Omega_{loc}})$ the set of positive functions $u \in L^2_{loc}(Q^\Omega_\infty)$ such that, for any $R > R_0$, $u \in L^2_{loc}(0,\infty; D_{\Omega_R}(-\Delta)) \cap C(0,\infty; \tilde{H}^1_0(\Omega_R) \cap L^{q+1}(\Omega_R))$, $\partial_t u \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega_R))$ and u satisfies (2.5) a. e. in Q^Ω_∞.

Lemma 2.4 If $u \in \mathcal{I}(Q^\Omega_\infty)$ or $\mathcal{I}(Q_\infty^{\Omega_{loc}})$, its extension $\tilde{u}$ by zero outside Ω is a subsolution of (2.1) in $(0,\infty) \times \mathbb{R}^N$ such that $\tilde{u} \in C(0,\infty; H^1_0(\mathbb{R}^N) \cap L^{q+1}(\mathbb{R}^N))$ and $\partial_t \tilde{u} \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^N))$.

Proof 31 The proof being similar in the two cases, we assume Ω bounded. We first notice that $\tilde{u} \in C(0,\infty; H^1_0(\mathbb{R}^N))$ since $\|\tilde{u}\|_{H^1_0(\mathbb{R}^N)} = \|\tilde{u}\|_{H^1_0(\Omega)}$. For $\delta > 0$ we set

$$P_\delta(r) = \begin{cases} r - 3\delta/2 & \text{if } r \geq 2\delta \\ r^2/2\delta - r + \delta/2 & \text{if } \delta < r < 2\delta \\ 0 & \text{if } r \leq \delta \end{cases}$$

and denote by u_δ the extension of $P_\delta(u)$ by zero outside Q^Ω_∞. Since $u_{\delta\,t} = P'_\delta(u)\partial_t u$, then $u_{\delta\,t} \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\mathbb{R}^N))$ and $\|u_{\delta\,t}\|_{L^2} \leq \|\partial_t u\|_{L^2}$. In the same way $\nabla u_\delta = P'_\delta(u)\nabla u$, thus $u_\delta \in L^2_{loc}(0,\infty; H^1_0(\mathbb{R}^N))$ and $\|u_\delta\|_{H^1_0} \leq \|u\|_{H^1_0}$. Finally $-\Delta u_\delta = -P'_\delta(u)\Delta u - P''_\delta(u)\left|\nabla u\right|^2$. Using the fact that $P'_\delta u^q \geq u^q_\delta$, we derive from (2.6)

$$\partial_t u_\delta - \Delta u_\delta + u^q_\delta \leq 0$$

in the sense that

$$\iint_{Q^{\mathbb{R}^N}_\infty} \left(\partial_t u_\delta \zeta + \nabla u_\delta . \nabla \zeta + u^q_\delta \zeta\right) dxdt \leq 0 \tag{2.7}$$

for all $\zeta \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$, $\zeta \geq 0$. Actually, $C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ can be replaced by $L^2(\epsilon,\infty; H^1_0(\mathbb{R}^N)) \cap L^{q'}((\epsilon,\infty) \times \mathbb{R}^N)$. Letting $\delta \to 0$ and using Fatou's theorem implies that (2.7) holds with u_δ replaced by $\tilde{u}$. $\square$

Lemma 2.5 For any $u \in \mathcal{I}(Q^\Omega_\infty)$, there holds

$$u(x,t) \leq \left(\frac{1}{(q-1)t}\right)^{1/(q-1)} := \phi_q(t) \quad \forall (x,t) \in Q^\Omega_\infty. \tag{2.8}$$

Proof 32 Let $\tau > 0$. Since the function $\phi_{q,\tau}$ defined by $\phi_{q,\tau}(t) = \phi_q(t-\tau)$ is a solution of

$$\phi'_{q,\tau} + \phi^q_{q,\tau} = 0$$

and $(u - \phi_{q,\tau})_+ \in C(0,\infty; H^1_0(\Omega))$, there holds

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u - \phi_{q,\tau})^2_+ dx + \iint_{Q^\Omega_\infty} \left(\nabla u . \nabla (u - \phi_{q,\tau})_+ + (u^q - \phi^q_{q,\tau})(u - \phi_{q,\tau})_+\right) dxdt = 0.$$

Thus $s \mapsto \|(u - \phi_{q,\tau})_+(s)\|_{L^2}$ is nonincreasing. By Lebesgue's theorem,

$$\lim_{s \downarrow \tau} \|(u - \phi_{q,\tau})_+(s)\|_{L^2} = 0,$$

thus $u(x,t) \leq \phi_{q,\tau}(t)$ a.e. in Ω. Letting $\tau \downarrow 0$ and using the continuity yields to (2.8). $\square$

Theorem 2.6 For any $q > 1$, the set $\mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$ admits a least upper bound $\underline{u}_\Omega$ for the order relation. If Ω is bounded, $\underline{u}_\Omega \in \mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$; if it is not the case, then $\underline{u}_\Omega \in \mathcal{I}(Q_\infty^{\Omega_{loc}})$.

Proof 33 *Step 1- Construction of $\underline{u}_\Omega$ when Ω is bounded.* For $k \in \mathbb{N}^*$ we consider the solution $v = v_k$ (in the sense of Theorem 2.1 with the corresponding maximal operator in $L^2(\Omega)$) of

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t v - \Delta v + v^q = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ v(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ v(x,0) = k & \text{in } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.9}$$

When $k \to \infty$, v_k increases and converges to some $\underline{u}_\Omega$. Because of (2.8) and the fact that Ω is bounded, $\underline{u}_\Omega(t) \in L^2(\Omega)$. It follows from the closedness of maximal monotone operators that $\underline{u}_\Omega \in L^2_{loc}(0,\infty; D_\Omega(-\Delta)) \cap C(0,\infty; H_0^1(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega))$, $\partial_t \underline{u}_\Omega \in L^2_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$ and

$$\frac{d\underline{u}_\Omega}{dt} + \partial J_\Omega(\underline{u}_\Omega) = 0 \quad \text{a.e. in } (0,\infty). \tag{2.10}$$

Thus $\underline{u}_\Omega \in \mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$. For $\tau, \epsilon > 0$, the function $t \mapsto \underline{u}_\Omega(x, t-\tau) + \epsilon$ is a supersolution of (2.1). Let $u \in \mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$; for $k > \phi_q(\tau)$, the function $(x,t) \mapsto (u(x,t) - \underline{u}_\Omega(x; t-\tau) - \epsilon)_+$ is a subsolution of (2.1) and belongs to $C(\tau,\infty; H_0^1(\Omega))$. Since it vanishes at $t = \tau$, it follows from Brezis' result that it is identically zero, thus $u(x,t) \leq \underline{u}_\Omega(x, t-\tau) + \epsilon$. Letting $\epsilon, \tau \downarrow 0$ implies the claim.

Step 2- Construction of $\underline{u}_\Omega$ when Ω is unbounded. We assume that $\partial\Omega \subset B_{R_0}$ and for $n > R_0$, we recall that $\Omega_n = \Omega \cap B_n$. For $k > 0$, we denote by $\underline{u}_{\Omega_n}$ the solution obtained in Step 1. Then $\underline{u}_{\Omega_n} = \lim_{k\to\infty} v_{n,k}$ where $v_{n,k}$ is the solution, in the sense of maximal operators in Ω_n of

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dv_{n,k}}{dt} + \partial J_{\Omega_n}(v_{n,k}) = 0 \quad \text{a.e. in } (0,\infty) \\ \qquad\qquad v_{n,k}(0) = k. \end{array}\right. \tag{2.11}$$

It follows from Lemma 2.4 that the extension $\tilde{v}_{n,k}$ by 0 of $v_{n,k}$ in Ω_{n+1} is a subsolution for the equation satisfied by $v_{n+1,k}$, with a smaller initial data, therefore $\tilde{v}_{n,k} \leq v_{n+1,k}$. This implies $\tilde{\underline{u}}_{\Omega_n} \leq u_{\Omega_{n+1}}$. Thus we define $\underline{u}_\Omega = \lim_{n\to\infty} \underline{u}_{\Omega_n}$. It follows from Lemma 2.5 and standard regularity results for parabolic equations that $u = \underline{u}_\Omega$ satisfies

$$\partial_t u - \Delta u + u^q = 0 \tag{2.12}$$

in Q_∞^Ω. Multiplying

$$\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt} + \partial J_{\Omega_n}(\underline{u}_{\Omega_n}) = 0 \tag{2.13}$$

by $\eta^2 \underline{u}_{\Omega_n}$ where $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ and integrating over Ω_n, yields to

$$2^{-1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_n} \eta^2 \underline{u}_{\Omega_n}^2 dx + \int_{\Omega_n} \left(|\nabla \underline{u}_{\Omega_n}|^2 + \underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}\right)\eta^2 dx + 2\int_{\Omega_n} \nabla \underline{u}_{\Omega_n}.\nabla\eta\, \eta \underline{u}_{\Omega_n} dx = 0.$$

Thus, by Young's inequality,

$$2^{-1}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_n}\eta^2\underline{u}_{\Omega_n}^2dx+\int_{\Omega_n}\left(2^{-1}|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}|^2+\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}\right)\eta^2dx\leq 2\int_{\Omega_n}|\nabla\eta|^2\underline{u}_{\Omega_n}^2dx.$$

If we assume that $0\leq\eta\leq 1$, $\eta=1$ on B_R ($R>R_0$) and $\eta=0$ on B_{2R}^c, we derive, for any $0<\tau<t$,

$$\begin{aligned}2^{-1}\int_{\Omega_n}\underline{u}_{\Omega_n}^2(.,t)\eta^2dx+\int_\tau^t\int_{\Omega_n}\left(2^{-1}\left|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}\right|^2+\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}\right)\eta^2dxds\\ \leq 2\int_\tau^t\int_{\Omega_n}\underline{u}_{\Omega_n}^2|\nabla\eta|^2dxds+2^{-1}\int_{\Omega_n}\underline{u}_{\Omega_n}^2(.,\tau)\eta^2dx.\end{aligned}\tag{2.14}$$

From this follows, if $n>2R$,

$$2^{-1}\int_{\Omega\cap B_R}\underline{u}_{\Omega_n}^2(.,t)dx+\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}\left(2^{-1}\left|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}\right|^2+\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}\right)dxds\leq CR^N(t+1)\tau^{-2/(q-1)}.\tag{2.15}$$

If we let $n\to\infty$ we derive by Fatou's lemma

$$2^{-1}\int_{\Omega\cap B_R}\underline{u}_{\Omega}^2(.,t)dx+\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}\left(2^{-1}\left|\nabla\underline{u}_{\Omega}\right|^2+\underline{u}_{\Omega}^{q+1}\right)dxds\leq CR^N(t+1)\tau^{-2/(q-1)}.\tag{2.16}$$

For $\tau>0$ fixed, we multiply (2.13) by $(t-\tau)\eta^2d\underline{u}_{\Omega_n}/dt$, integrate on $(\tau,t)\times\Omega_n$ and get

$$\begin{aligned}(t-\tau)\int_{\Omega_n}\left|\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\right|^2\eta^2dx+\frac{d}{dt}(t-\tau)\int_{\Omega_n}\left(\frac{|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}|^2}{2}+\frac{\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}}{q+1}\right)\eta^2dx\\ =\int_{\Omega_n}\left(\frac{|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}|^2}{2}+\frac{\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}}{q+1}\right)\eta^2dx-2(t-\tau)\int_{\Omega_n}\nabla\underline{u}_{\Omega_n}.\nabla\eta\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\eta dx.\end{aligned}$$

Since

$$2(t-\tau)\left|\int_{\Omega_n}\nabla\underline{u}_{\Omega_n}.\nabla\eta\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\eta dx\right|\leq\frac{(t-\tau)}{2}\int_{\Omega_n}\left|\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\right|^2\eta^2dx+4(t-\tau)\int_{\Omega_n}\left|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}\right|^2|\nabla\eta|^2dx,$$

we get, in assuming again $n>2R$,

$$\begin{aligned}2^{-1}\int_\tau^t\int_\Omega(s-\tau)\left|\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\right|^2\eta^2dxds+(t-\tau)\int_\Omega\left(\frac{|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}|^2}{2}+\frac{\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}}{q+1}\right)\eta^2dx\\ \leq 4\int_\tau^t(s-\tau)\int_\Omega\left|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}\right|^2|\nabla\eta|^2dxds,\end{aligned}\tag{2.17}$$

from which follows,

$$2^{-1}\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}(s-\tau)\left|\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\right|^2 dxds+(t-\tau)\int_{\Omega\cap B_R}\left(\frac{|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}|^2}{2}+\frac{\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}}{q+1}\right)dx \leq 4\int_\tau^t(s-\tau)\int_{\Omega\cap B_{2R}}\left|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}\right|^2 dxds. \tag{2.18}$$

The right-hand side of (2.18) remains uniformly bounded by $8C(2R)^N(t-\tau)t\tau^{-2/(q-1)}$ from (2.15). Then

$$2^{-1}\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}(s-\tau)\left|\frac{d\underline{u}_{\Omega_n}}{dt}\right|^2 dxds+(t-\tau)\int_{\Omega\cap B_R}\left(\frac{|\nabla\underline{u}_{\Omega_n}|^2}{2}+\frac{\underline{u}_{\Omega_n}^{q+1}}{q+1}\right)dx \leq 8C(2R)^N(t-\tau)t\tau^{-2/(q-1)} \tag{2.19}$$

By Fatou's lemma the same estimate holds if $\underline{u}_{\Omega_n}$ is replaced by $\underline{u}_\Omega$. Notice also that this estimate implies that $\underline{u}_\Omega$ vanishes in the H^1_0-sense on $\partial\Omega$ since $\eta\underline{u}_\Omega\in H^1_0(\Omega)$ where the function $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ has value 1 in B_R and $\Omega^c\subset B_R$. Moreover estimates (2.16) and (2.19) imply that $\underline{u}_\Omega$ satisfies (2.12) a.e., and thus it belongs to $\mathcal{I}(Q_\infty^{\Omega_{loc}})$.

Step 3- Comparison. At end, assume $u\in\mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$. For $R>n_0$ let W_R be the maximal solution of

$$-\Delta W_R+W_R^q=0 \quad \text{in } B_R. \tag{2.20}$$

Existence follows from Keller-Osserman's construction [5],[8], and the following scaling and blow-up estimates holds

$$W_R(x)=R^{-2/(q-1)}W_1(x/R), \tag{2.21}$$

and

$$W_R(x)=C_q(R-|x|)^{-2/(q-1)}(1+\circ(1)) \text{ as } |x|\to R. \tag{2.22}$$

For $\tau>0$ set $v(x,t)=u(x,t)-\underline{u}_\Omega(x,t-\tau)-W_R(x)$. Then v_+ is a subsolution. Since $v(.,\tau)\in L^2(\Omega)$, $\lim_{s\downarrow\tau}||v_+(.,s)||_{L^2}=0$. Because $\eta\underline{u}_\Omega\in H^1_0(\Omega)$ for η as above, $\eta v_+\in H^1_0(\Omega)$. Next, $supp\, v_+\subset\Omega\cap B_R$. Since $u,\underline{u}_\Omega$ are locally in H^1, we can always assume that their restrictions to $\partial B_R\times[0,T]$ are integrable for the corresponding Hausdorff measure. Therefore Green's formula is valid, which implies

$$-\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}\Delta v_+dxdt=\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}|\nabla v_+|^2dxdt \quad \forall t>\tau.$$

Therefore

$$\int_{\Omega\cap B_R}v_+^2(x,t)dx+\int_\tau^t\int_{\Omega\cap B_R}\left(|\nabla v_+|^2+(u-(\underline{u}_\Omega(.,t-\tau)+W_R)^q)v_+\right)dxdt\leq\int_{\Omega\cap B_R}v_+^2(x,s)dx.$$

We let $s\downarrow\tau$ and get $v_+=0$, equivalently $u(x,t)\leq\underline{u}_\Omega(x,t-\tau)+W_R(x)$. Then we let $R\to\infty$ and $\tau\to 0$ and obtain $u(x,t)\leq\underline{u}_\Omega(x,t)$, which is the claim. □

Corollary 2.7 Assume $\Omega^1 \subset \Omega^2 \subset \mathbb{R}^N$ are open domains, then $\underline{u}_{\Omega^1} \leq \underline{u}_{\Omega^2}$. Furthermore, if $\Omega = \cup \Omega^n$ where $\Omega^n \subset \Omega^{n+1}$, then

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}_{\Omega^n} = \underline{u}_{\Omega}, \tag{2.23}$$

locally uniformly in Q_∞^Ω.

Proof 34 The first assertion follows from the proof of Theorem 2.6. It implies

$$\lim_{n\to\infty} \underline{u}_{\Omega^n} = u^*_\Omega \leq \underline{u}_{\Omega},$$

and u^*_Ω is a positive solution of (2.5) in Q_∞^Ω. There exists a sequence $\{u_{0,m}\} \subset L^2(\Omega)$ such that $S^{\partial J_\Omega}(t)[u_{0,m}] \uparrow \underline{u}_\Omega$ as $n \to \infty$, locally uniformly in Q_∞^Ω. Set $u_{0,m,n} = u_{0,m}\chi_{\Omega^n}$; since $u_{0,m,n} \to u_{0,m}$ in $L^2(\Omega)$ then $S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{0,m,n}] \uparrow S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{0,m}]$ in $L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$. If $\tilde{v}_{m,n}$ is the extension of $v_{m,n} := S^{\partial J_{\Omega^n}}(.)[u_{0,m,n}]$ by zero outside $Q_\infty^{\Omega_n}$ it is a subsolution smaller than $S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{0,m,n}]$ and $n \mapsto \tilde{v}_{m,n}$ is increasing; we denote by $\tilde{v}_m$ its limit as $n \to \infty$. Since for any $\zeta \in C_0^{2,1}([0,\infty) \times \Omega)$ we have, for n large enough and $s > 0$,

$$-\int_0^s \int_\Omega \left(\tilde{v}_{m,n}\left(\partial_t \zeta + \Delta\zeta\right)\right) dxdt = \int_\Omega u_{0,m,n}\zeta(x,0)dx - \int_\Omega \tilde{v}_{m,n}(x,s)\zeta(x,t)dx,$$

it follows

$$-\int_0^s \int_\Omega \left(\tilde{v}_{m}\left(\partial_t \zeta + \Delta\zeta\right)\right) dxdt = \int_\Omega u_{0,m}\zeta(x,0)dx - \int_\Omega \tilde{v}_{m}(x,s)\zeta(x,t)dx.$$

Clearly $\tilde{v}_m$ is a solution of (2.5) in $Q_\infty^{\Omega_n}$. Furthermore

$$\lim_{t\to 0} \tilde{v}_m(t,.) = u_{0,m} \quad \text{a.e. in } \Omega.$$

Because

$$\left\|\tilde{v}_m(t,.) - u_{0,m}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\left\|u_{0,m}\right\|_{L^2(\Omega)},$$

it follows from Lebesgue's theorem that $t \mapsto \tilde{v}_m(t,.)$ is continuous in $L^2(\Omega)$ at $t = 0$. Furthermore, for any $t > 0$ and $h \in (-t,t)$, we have from 2.4 ,

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{v}_{m,n}(t+h,.) - \tilde{v}_{m,n}(t,.)\right\|_{L^2(\Omega^n)} &\leq \frac{|h|}{t\sqrt{2}}\left\|u_{0,m,n}\right\|_{L^2(\Omega^n)} \\ \Longrightarrow \left\|\tilde{v}_{m}(t+h,.) - \tilde{v}_{m}(t,.)\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{|h|}{t\sqrt{2}}\left\|u_{0,m}\right\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Thus $\tilde{v}_m \in C([0,\infty); L^2(\Omega)$. By the contraction principle, $\tilde{v}_m = S^{\partial J_\Omega}(t)[u_{0,m}]$ is the unique generalized solution to (2.3). Finally, there exists an increasing sequence $\{u_{0,m}\} \subset L^2(\Omega)$ such that for any $\epsilon > 0$, and $\tau > 0$,

$$0 < \underline{u}_\Omega - S^{\partial J_\Omega}(t)[u_{0,m}] \leq \epsilon/2$$

on $[\tau,\infty)\times\Omega$. For any m, there exists n_m such that

$$0 < S^{\partial J_\Omega}(t)[u_{0,m}] - \tilde{v}_{m,n} \leq \epsilon/2$$

Therefore

$$0 < \underline{u}_\Omega - \underline{u}_{\Omega^n} \leq \epsilon,$$

on $[\tau,\infty)\times\Omega_n$. This implies (2.23). $\square$

We can also construct a minimal solution with conditional initial blow-up in the following way. Assuming that $\Omega = \cup\Omega^m$ where Ω^m are smooth bounded domains and $\overline{\Omega^m}\subset\Omega^{m+1}$. We denote by u_m the solution of

$$\begin{cases} \partial_t u_m - \Delta u_m + |u_m|^{q-1}u_m = 0 \quad \text{in } Q_\infty^{\Omega^m} \\ \qquad u_m = 0 \quad \text{in } \partial\Omega^m\times(0,\infty) \\ \lim_{t\to 0} u_m(x,t) = \infty \quad \text{locally uniformly on } \Omega^m. \end{cases} \tag{2.25}$$

Such a u_m is the increasing limit as $k\to\infty$ of the solutions $u_{m,k}$ of the same equation, with same boundary data and initial value equal to k. Since $\overline{\Omega}^m\subset\Omega^{m+1}$, $u_m < u_{m+1}$. We extend u_m by zero outside Ω^m and the limit of the sequence $\{u_m\}$, when $m\to\infty$ is a positive solution of (2.5) in Q_∞^Ω. We denote it by u_Ω. The next result is similar to Corollary 2.7, although the proof is much simpler.

Corollary 2.8 Assume $\Omega^1\subset\Omega^2\subset\mathbb{R}^N$ are open domains, then $u_{\Omega^1}\leq u_{\Omega^2}$. Furthermore, if $\Omega=\cup\Omega^n$ where $\Omega^n\subset\Omega^{n+1}$, then

$$\lim_{n\to\infty} u_{\Omega^n} = u_\Omega, \tag{2.26}$$

locally uniformly in Q_∞^Ω.

Proposition 2.9 There holds $u_\Omega = \underline{u}_\Omega$.

Proof 35 For any $m,k>0$, $\tilde{u}_{m,k}$, the extension of $u_{m,k}$ by zero in $Q_\infty^{\Omega^{mc}}$ is a subsolution, thus it is dominated by $\underline{u}_\Omega$. Letting successively $k\to\infty$ and $m\to\infty$ implies $u_\Omega\leq\underline{u}_\Omega$. In order to prove the reverse inequality, we consider an increasing sequence $\{u_\ell\}\subset\mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$ converging to $\underline{u}_\Omega$ locally uniformly in Q_∞^Ω. If Ω is bounded there exists a bounded sequence $\{u_{\ell,0,k}\}$ which converges to $u_\ell(.,0)=u_{\ell,0}$ in $L^2(\Omega)$ and $S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{\ell,0,k}]\to S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{\ell,0}]$ in $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$. Therefore

$$S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{\ell,0,k}]\leq u_\Omega \Longrightarrow S^{\partial J_\Omega}(.)[u_{\ell,0}]\leq u_\Omega \Longrightarrow \underline{u}_\Omega\leq u_\Omega. \tag{2.27}$$

Next, if Ω is unbounded, $\Omega=\cup\Omega^n$, with $\Omega^n\subset\Omega^{n+1}$ are bounded, we have

$$\lim_{n\to\infty}\underline{u}_{\Omega^n} = \underline{u}_\Omega$$

and

$$\lim_{n\to\infty} u_{\Omega^n} = u_\Omega$$

by Corollary 2.7 and Corollary 2.8. Since $\underline{u}_{\Omega^n} = u_{\Omega^n}$ from the first part of the proof, the result follows. □

Remark 2.1 By construction u_Ω is dominated by any positive solution of (2.12) which satisfies the initial blow-up condition locally uniformly in Ω. Therefore, $u_\Omega = \underline{u}_\Omega$ is the *minimal solution* with initial blow-up.

If Ω has the minimal regularity which allows the Dirichlet problem to be solved by any continuous function g given on $\partial\Omega \times [0,\infty)$, we can consider another construction of the maximal solution of (2.1) in Q^Ω_∞. The needed assumption on $\partial\Omega$ is known as the *parabolic Wiener criterion* [9] (abr. PWC).

Definition 2.10 If $\partial\Omega$ is compact and satisfies PWC, we denote by $\mathcal{J}_{Q^\Omega_\infty}$ the set of $v \in C((0,\infty)\times\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(Q^\Omega_\infty)$ satisfying (2.1).

Theorem 2.11 Assume $q > 1$ and Ω satisfies PWC. Then $\mathcal{J}_{Q^\Omega_\infty}$ admits a maximal element $\overline{u}_\Omega$.

Proof 36 *Step 1- Construction.* We shall directly assume that Ω is unbounded, the bounded case being a simple adaptation of our construction. We suppose $\Omega^c \subset B_{R_0}$, and for $n > R_0$ set $\Omega_n = \Omega \cap B_n$. The construction of u_n is standard : for $k \in \mathbb{N}_*$ we denote by $v^*_k = v^*_{n,k}$ the solution of (2.9). Lemma 2.5 is valid for v^*_k. Notice that uniqueness follows from the maximum principle. When $k \to \infty$ the sequence $\{v_k\}$ increases and converges to a solution u_n of (2.12) in Q_{Ω_n}. Because the exterior boundary of Ω_n is smooth, the standard equi-continuity of the sequence of solutions applies that $u_n(x,t) = 0$ for all (x,t) s.t. $|x| = n$ and $t > 0$. In order to see that $u_n(x,t) = 0$ for all (x,t) s.t. $x \in \partial\Omega$ and $t > 0$, we see that $u_n(x,t) \le \phi_\tau(x,t)$ on $(\tau,\infty)\times\Omega_n$, where

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t\phi_\tau - \Delta\phi_\tau + \phi^{\tau\, q} = 0 & \text{in } Q^\Omega_\infty \\ \phi_\tau(x,\tau) = \phi_q(\tau) & \text{in } \Omega \\ \phi_\tau(x,t) = 0 & \text{in } \partial\Omega\times[\tau,\infty) \end{array}\right. \tag{2.28}$$

Such a solution exists because of PWC assumption. Since $v^*_{n,k}$ is an increasing function of n (provided the solution is extended by 0 outside Ω_n) and k, there holds $\tilde{u}_n \le u_{n+1}$ in Ω^{n+1}. If we set

$$\overline{u}_\Omega = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n,$$

then $\overline{u}_\Omega \le \phi_\tau$ for any $\tau > 0$. Clearly $\overline{u}_\Omega$ is a solution of (2.12) in Q^Ω_∞. This implies that $\overline{u}_\Omega$ is continuous up to $\partial\Omega\times(0,\infty)$, with zero boundary value. Thus it belongs to $\mathcal{J}_{Q^\Omega_\infty}$.
Step 2- Comparison. In order to compare $\overline{u}_\Omega$ to any other $u \in \mathcal{J}_{Q^\Omega_\infty}$, for $R > R_0$ we set $v_{R,\tau}(x,t) = \overline{u}_\Omega(x,t-\tau) + W_R(x)$, where W_R is the maximal solution of (2.20) in B_R.

The function $(u - v_{R,\tau})_+$ is a subsolution of (2.12) in $\Omega \cap B_R \times (\tau, \infty)$. It vanishes in a neighborhood on $\partial(\Omega \cap B_R) \times (\tau, \infty)$ and of $\Omega \cap B_R \times \{\tau\}$. Thus it is identically zero. If we let $R \to \infty$ in the inequality $u \leq v_{R,\tau}$ and $\tau \to 0$, we derive $u \leq \overline{u}_\Omega$, which is the claim. □

Proposition 2.12 Under the assumptions of Theorem 2.11, $\overline{u}_\Omega \in \mathcal{I}(Q^\Omega_\infty)$ if Ω is bounded and $\overline{u}_\Omega \in \mathcal{I}(Q^{\Omega_{loc}}_\infty)$ if Ω is not bounded.

Proof 37 *Case 1 : Ω bounded.* Let Ω^n be a sequence of smooth domains such that

$$\Omega^n \subset \overline{\Omega^n} \subset \Omega^{n+1} \subset \Omega$$

and $\cup_n \Omega^n = \Omega$. For $\tau > 0$, let $u_{n,\tau}$ be the solution of

$$\left\{\begin{array}{r} \partial_t u_{n,\tau} - \Delta u_{n,\tau} + u^q_{n,\tau} = 0 \quad \text{in } \Omega^n \times (\tau, \infty) \\ u_{n,\tau}(.,\tau) = \overline{u}_\Omega(.,\tau) \quad \text{in } \Omega^n \\ u_{n,\tau}(x,t) = 0 \quad \text{in } \partial\Omega^n \times [\tau, \infty) \end{array}\right. \tag{2.29}$$

Because $\overline{u}_\Omega(.,\tau) \in C^2(\overline{\Omega}^n)$, $u_{n,\tau} \in C^{2,1}(\overline{\Omega}^n \times [\tau, \infty))$. By the maximum principle,

$$0 \leq \overline{u}_\Omega(.,t) - u_{n,\tau}(.,t) \leq \max\{\overline{u}_\Omega(x,s) : (x,s) \in \partial\Omega^n \times [\tau, t]\} \tag{2.30}$$

for any $t > \tau$. Because $\overline{u}_\Omega$ vanishes on $\partial\Omega \times [\tau, t]$, we derive

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}_{n,\tau} = \overline{u}_\Omega \tag{2.31}$$

uniformly on $\overline{\Omega} \times [\tau, t]$ for any $t \geq \tau$, where $\tilde{u}_{n,\tau}$ is the extension of $u_{n,\tau}$ by zero outside Ω_n. Applying (2.15) and (2.19) with $\eta = 1$ to $\tilde{u}_{n,\tau}$ in Ω yields to

$$2^{-1}\int_\Omega \tilde{u}^2_{n,\tau}(.,t)dx + \int_\tau^t \int_\Omega \left(|\nabla \tilde{u}_{n,\tau}|^2 + \tilde{u}^{q+1}_{n,\tau}\right) dxds \leq C(t+1)\tau^{-2/(q-1)}. \tag{2.32}$$

and

$$2^{-1}\int_\tau^t \int_\Omega (s-\tau)(\partial_s \tilde{u}_{n,\tau})^2 dxds + (t-\tau)\int_\Omega \left(\frac{|\nabla \tilde{u}_{n,\tau}|^2}{2} + \frac{\tilde{u}^{q+1}_{n,\tau}}{q+1}\right)(t,.)dx \leq C(t-\tau)t\tau^{-2/(q-1)}. \tag{2.33}$$

Letting $n \to \infty$ and using (2.31) yields to

$$2^{-1}\int_\Omega \overline{u}^2_\Omega(.,t)dx + \int_\tau^t \int_\Omega \left(|\nabla \overline{u}_\Omega|^2 + \overline{u}^{q+1}_\Omega\right) dxds \leq C(t+1)\tau^{-2/(q-1)}. \tag{2.34}$$

and

$$2^{-1}\int_\tau^t \int_\Omega (s-\tau)(\partial_s \overline{u}_\Omega)^2 dxds + (t-\tau)\int_\Omega \left(\frac{|\nabla \overline{u}_\Omega|^2}{2} + \frac{\overline{u}^{q+1}_\Omega}{q+1}\right)(t,.)dx \leq C(t-\tau)t\tau^{-2/(q-1)}. \tag{2.35}$$

Since $L^2(\tau,t;H^1_0(\Omega))$ is a closed subspace of $L^2(\tau,t;H^1(\Omega))$, for any $0<\tau<t$, $\overline{u}_\Omega\in L^2_{loc}(0,\infty;H^1_0(\Omega))$. Furthermore $\partial_s\overline{u}_\Omega\in L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$. Because $\overline{u}_\Omega$ satisfies (2.12), it implies $\overline{u}_\Omega\in\mathcal{I}(Q^\Omega_\infty)$.

Case 2 : Ω unbounded. We assume that $\Omega^c\subset B_{R_0}$. We consider a sequence of smooth unbounded domains $\{\Omega^n\}\subset\Omega$ $(n>1)$ such that $\sup\{\text{dist}\,(x,\Omega^c):x\in\partial\Omega^n\}<1/n$ as $n\to\infty$, and , thus $\cup_n\Omega^n=\Omega$. For $m>R_0$ we set $\Omega^n_m=\Omega\cap B_m$. Therefore $\Omega^n_m\subset\overline{\Omega^n_m}\subset\Omega^{n+1}_{m+1}$ and $\cup_{n,m}\Omega^n_m=\Omega$. For $\tau>0$, let $u=u_{m,n,\tau}$ be the solution of

$$\left\{\begin{aligned}\partial_t u-\Delta u+u^q=0&\quad\text{in }\Omega^n_m\times(\tau,\infty)\\ u(.,\tau)=\overline{u}_\Omega(.,\tau)&\quad\text{in }\Omega^n_m\\ u(x,t)=0&\quad\text{in }\partial\Omega^n\times[\tau,\infty)\\ u(.,\tau)=\overline{u}_\Omega(.,\tau)&\quad\text{in }\partial B_m\times(\tau,\infty).\end{aligned}\right.\tag{2.36}$$

By the maximum principle,

$$0\leq\overline{u}_\Omega(.,t)-u_{m,n,\tau}(.,t)\leq\max\{\overline{u}_\Omega(x,s):(x,s)\in\partial\Omega^n\times[\tau,t]\}\to 0,\tag{2.37}$$

as $n\to 0$. Next we extend $u_{m,n,\tau}$ by zero in $\Omega\setminus\Omega_n$ and apply (2.15)-(2.19) with η as in Theorem 2.6 and $m>2R$. We get, with $\Omega_R=\Omega\cap B_R$,

$$2^{-1}\int_{\Omega_R}u^2_{m,n,\tau}(.,t)dx+\int_\tau^t\int_{\Omega_R}\left(2^{-1}\left|\nabla u_{m,n,\tau}\right|^2+u^{q+1}_{m,n,\tau}\right)dxds\leq CR^N(t+1)\tau^{-2/(q-1)},\tag{2.38}$$

and

$$2^{-1}\int_\tau^t\int_{\Omega_R}(s-\tau)\left|\frac{du_{m,n,\tau}}{dt}\right|^2dxds+(t-\tau)\int_{\Omega_R}\left(\frac{|\nabla u_{m,n,\tau}|^2}{2}+\frac{u^{q+1}_{m,n,\tau}}{q+1}\right)dx\\ \leq 8C(2R)^N(t-\tau)t\tau^{-2/(q-1)}\tag{2.39}$$

We let successively $m\to\infty$ and $n\to\infty$ and derive by Fatou's lemma and (2.37) that inequalities (2.38) and (2.39) still hold with $\overline{u}_\Omega$ instead of $u_{m,n,\tau}$. If we denote by $\tilde{H}^1_0(\Omega_R)$ the closure of the space of $C^\infty(\overline{\Omega_R})$ functions which vanish in a neighborhood on $\partial\Omega$, then (2.38) is an estimate in $L^2(\tau,t;\tilde{H}^1_0(\Omega_R))$ which is a closed subspace of $L^2(\tau,t;H^1(\Omega_R))$. Therefore $\overline{u}_\Omega\in L^2_{loc}(0,\infty;\tilde{H}^1_0(\Omega_R))$. Using (2.39) and equation (2.12) we conclude that $\overline{u}_\Omega\in\mathcal{I}(Q^{\Omega_{loc}}_\infty)$. □

We end this section with a comparison result between $\underline{u}_\Omega$ and $\overline{u}_\Omega$.

Theorem 2.13 Assume $q>1$ and Ω satisfies PWC. Then $\underline{u}_\Omega=\overline{u}_\Omega$.

Proof 38 By Proposition 2.9 and Theorem 2.11-Step 2, $\underline{u}_\Omega\leq\overline{u}_\Omega$. If Ω is bounded, we can compare $\underline{u}_\Omega(.,.)$ and $\overline{u}_\Omega(.+\tau,.)$ on $\Omega\times(0,\infty)$. Since $\underline{u}_\Omega$, the least upper bound of $\mathcal{I}(Q^\Omega_\infty)$

belongs to $\mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$, and $\overline{u}_\Omega(.+\tau,.) \in \mathcal{I}(Q_\infty^\Omega)$ we derive $\overline{u}_\Omega(.+\tau,.) \leq \underline{u}_\Omega(.,.)$, from which follows $\overline{u}_\Omega \leq \underline{u}_\Omega$. Next, if Ω is not bounded, we can proceed as in the proof of Theorem 2.6 by comparing $\underline{u}_\Omega(.,.)+W_R$ and $\overline{u}_\Omega(.+\tau,.)$ on $\Omega_R \times (0,\infty)$, where W_R is defined in (2.20). Because $(\overline{u}_\Omega(.+\tau,.) - \underline{u}_\Omega(.,.) - W_R(.))_+$ is a subsolution of (2.12) in $Q_\infty^{\Omega_R}$ which vanishes at $t=0$ and near $\partial\Omega_R \times (0,\infty)$; it follows $\overline{u}_\Omega(.+\tau,.) \leq \underline{u}_\Omega(.,.)+W_R(.)$. Letting $R \to \infty$ and $\tau \to 0$ completes the proof. □

3 Uniqueness of large solutions

Definition 3.1 Let $q>1$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be any domain. A positive function $u \in C^{2,1}(Q_\infty^\Omega)$ of (2.12) is a large initial solution if it satisfies

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \infty \quad \forall x \in \Omega, \tag{3.1}$$

uniformly on any compact subset of Ω.

We start with the following lemma

Lemma 3.2 Assume $u \in C^{2,1}(Q_\infty^\Omega)$ is a large solution of (2.12), then for any open subset G such that $\overline{G} \subset \Omega$, there holds

$$\lim_{t\to 0} t^{1/(q-1)} u(x,t) = c_q := \left(\frac{1}{q-1}\right)^{1/(q-1)} \quad \text{uniformly in } G. \tag{3.2}$$

Proof 39 By compactness, it is sufficient to prove the result when $G = B_\rho$ and $\overline{B}_\rho \subset B_{\rho'} \subset \Omega$. Let $\tau > 0$; by comparison, $u(x,t) \geq u_{B_{\rho'}}(x,t+\tau)$ for any $(x,t) \in Q_\infty^\Omega$. Letting $\tau \to 0$ yields to $u \geq u_{B_{\rho'}}$. Next for $\tau > 0$,

$$\phi_q(t+\tau) \leq u_{B_{\rho'}}(x,t) + u_{B^c_{\rho'}}(x,t) + W_R(x) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^{\mathbb{R}^N}.$$

Similarly

$$\max\{u_{B_{\rho'}}(x,t+\tau), u_{B^c_{\rho'}}(x,t+\tau)\} \leq \phi_q(t) + W_R(x) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^{\mathbb{R}^N}.$$

Letting $R \to \infty$ and $\tau \to 0$,

$$\max\{u_{B_{\rho'}}, u_{B^c_{\rho'}}\} \leq \phi_q \leq u_{B_{\rho'}} + u_{B^c_{\rho'}} \quad \text{in } Q_\infty^{\mathbb{R}^N}.$$

For symmetry reasons, $x \mapsto u_{B^c_{\rho'}}(x,t)$ is radially increasing for any $t>0$, thus, for any $\rho < \rho'$ and $T>0$, there exists $C_{\rho,T} > 0$ such that

$$u_{B^c_{\rho'}}(x,t) \leq C_{\rho,T} \quad \forall (x,t) \in B_\rho \times [0,T].$$

Therefore

$$\lim_{t\to 0} t^{1/(q-1)} u_{B_{\rho'}}(x,t) = c_q \quad \text{uniformly on } B_\rho.$$

Because
$$u_{B_{\rho'}}(x,t) \leq u(x,t) \leq \phi_q(t) \quad \forall (x,t) \in Q_\infty^\Omega,$$
(3.2) follows. □

As an immediate consequence of Lemma 3.2 and (2.23), we obtain

Proposition 3.3 Assume $q > 1$ and $\partial\Omega$ is compact. Then u_Ω is a large solution.

We start with the following uniqueness result

Proposition 3.4 Assume $q > 1$, Ω satisfies PWC, $\partial\Omega$ is bounded, and either Ω or Ω^c is strictly starshaped with respect to some point. Then $\overline{u}_\Omega$ is the unique large solution belonging to $\mathcal{J}(Q_\infty^\Omega)$.

Proof 40 Without loss of generality, we can suppose that either Ω or Ω^c is strictly starshaped with respect to 0. By Theorem 2.11, $\overline{u}_\Omega$ exists and, by (2.23) and Lemma 3.2, it is a large solution. Let $u \in \mathcal{J}(Q_\infty^\Omega)$ be another large solution. Clearly $u \leq \overline{u}_\Omega$. If Ω is starshaped, then for $k > 1$, the function $u_k(x,t) := k^{2/(q-1)}u(kx, k^2t)$ is a solution in Q_{Ω_k}, with $\Omega_k := k^{-1}\Omega$. Clearly it is a large solution and it belongs to $\mathcal{J}(Q_{\Omega_k})$. For $\tau \in (0,1)$, set $u_{k,\tau}(x,t) = u_k(x, t-\tau)$. Because $\partial\Omega$ is compact,
$$\lim_{k \downarrow 1} d_H(\partial\Omega, \partial\Omega_k) = 0,$$
where d_H denotes the Hausdorff distance between compact sets. By assumption $\overline{u}_\Omega \in C([\tau,\infty) \times \overline{\Omega})$ vanishes on $[\tau,\infty) \times \partial\Omega$, thus, for any $\epsilon > 0$, there exists $k_0 > 1$ such that for any
$$k \in (1, k_0] \Longrightarrow \sup\{\overline{u}_\Omega(x,t) : (x,t) \in [\tau, 1] \times \partial\Omega_k\} \leq \epsilon.$$
Since $u_{k,\tau} + \epsilon$ is a super solution in Q_{Ω_k} which dominates $\overline{u}_\Omega$ on $[\tau,1] \times \partial\Omega_k$ and at $t = \tau$, it follows that $u_{k,\tau} + \epsilon \geq \overline{u}_\Omega$ in $(\tau, 1] \times \Omega_k$. Letting successively $k \to 1$, $\tau \to 0$ and using the fact that ϵ is arbitrary, yields to $u \geq \overline{u}_\Omega$ in $(0,1] \times \Omega$ and thus in Q_∞^Ω. If Ω^c is starshaped, then the same construction holds provided we take $k < 1$ and use the fact that, for $R > 0$ large enough, $u_{k,\tau} + \epsilon + W_R$ is a super solution in $Q_{\Omega_k \cap B_R}$ which dominates $\overline{u}_\Omega$ on $[\tau, 1] \times \partial\Omega_k \cap B_R$ and at $t = \tau$. Letting successively $R \to \infty$, $k \to 1$, $\tau \to 0$ and $\epsilon \to 0$ yields to $u \geq \overline{u}_\Omega$ □

As a consequence of Section 2, we have the more complete uniqueness theorem

Theorem 3.5 Assume $q > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a domain with a bounded boundary $\partial\Omega$ satisfying PWC. Then for any $f \in C(\partial\Omega \times [0,\infty))$, $f \geq 0$, there exists a unique positive function $u = \overline{u}_{\Omega,f} \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) \cap C^{2,1}(Q_\infty^\Omega)$ satisfying
$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 & \text{in } Q_\infty^\Omega \\ u = f & \text{in } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ \lim_{t\to 0} u(x,t) = \infty & \text{locally uniformly on } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.3}$$

Proof 41 *Step 1 : Existence.* It is a simple adaptation of the proof of Theorem 2.11. For $k, \tau > 0$, we denote by $u = u_{k,\tau,f}$ the solution of

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + |u|^{q-1}u = 0 & \text{in } \Omega \times (\tau, \infty) \\ u = f & \text{in } \partial\Omega \times (\tau, \infty) \\ u(x, \tau) = k & \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Notice that $u_{k,\tau,f}$ is bounded from above by $\overline{u}_\Omega(.,. - \tau) + v_{f,\tau}$, where $v_{f,\tau} = v$ solves

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + |v|^{q-1}v = 0 & \text{in } \Omega \times (\tau, \infty) \\ v = f & \text{in } \partial\Omega \times (\tau, \infty) \\ v(x, \tau) = 0 & \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

If we let $k \to \infty$ we obtain a solution $u_{\infty,\tau,f}$ of the same problem except that the condition at $t = \tau$ becomes $\lim_{t\to\tau} u(x, t) = \infty$, locally uniformly for $x \in \Omega$. Clearly $u_{\infty,\tau,f}$ dominates in $\Omega \times (\tau, \infty)$ the restriction to this set of any $u \in C(\overline{\Omega} \times \infty)) \cap C^{2,1}(Q^\Omega_\infty)$ solution of (3.3), in particular $\overline{u}_\Omega$. Therefore $u_{\infty,\tau,f} \geq u_{\infty,\tau',f}$ in $\Omega \times (\tau, \infty)$ for any $0 < \tau' < \tau$. When $\tau \to 0$, $u_{\infty,\tau,f}$ converges to a function $\overline{u}_f$ which satisfies the lateral boundary condition $\overline{u}_{\Omega,f} = f$. Therefore $\overline{u}_{\Omega,f}$ satisfies (3.3).
Step 2 : Uniqueness. Assume that there exists another positive function $u := u_f \in C(\overline{\Omega} \times (0, \infty)) \cap C^{2,1}(Q^\Omega_\infty)$ solution of (3.3). Then $u_f < \overline{u}_{\Omega,f}$. For $\tau > 0$, consider the solution $v := v_\tau$ of

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + |v|^{q-1}v = 0 & \text{in } \Omega \times (\tau, \infty) \\ v = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (\tau, \infty) \\ v(x, \tau) = u_f(x, \tau) & \text{on } \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Then $v_\tau \leq u_f$ in $\Omega \times (\tau, \infty)$. In the same way, we construct a solution $v : \tilde{v}_\tau$ of the same problem (3.6) except that the condition at $t = \tau$ is now $v(x, \tau) = \overline{u}_{\Omega,f}(x, \tau)$ for all $x \in \Omega$. Furthermore $v_\tau \leq \tilde{v}_\tau \leq \overline{u}_{\Omega,f}$. Next we adapt a method introduced in [6], [7] in a different context. We denote

$$Z_f = \overline{u}_{\Omega,f} - u_f \quad \text{and} \quad Z_{0,\tau} = \tilde{v}_\tau - v_\tau, \tag{3.7}$$

and, for $(r, s) \in \mathbb{R}^2_+$,

$$h(r, s) = \begin{cases} \dfrac{r^q - s^q}{r - s} & \text{if } r \neq s \\ 0 & \text{if } r = s. \end{cases}$$

Since $r \mapsto r^q$ is convex on $\mathbb{R}_+$, there holds

$$\begin{cases} r_0 \geq s_0, \ r_1 \geq s_1 \\ r_1 \geq r_0, \ s_1 \geq s_0 \end{cases} \Longrightarrow h(r_1, s_1) \geq h(r_0, s_0).$$

This implies

$$h(u_{\Omega,f}, u_f) \geq h(\tilde{v}_\tau, v_\tau) \quad \text{in } \Omega \times [\tau, \infty). \tag{3.8}$$

Next we write

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t(Z_f - Z_{0,\tau}) - \Delta(Z_f - Z_{0,\tau}) + \overline{u}^q_{\Omega,f} - u^q_f - (\tilde{v}^q_\tau - v^q_\tau) \\ &= \partial_t(Z_f - Z_{0,\tau}) - \Delta(Z_f - Z_{0,\tau}) + h(\overline{u}_{\Omega,f}, u_f)Z_f - h(\tilde{v}_\tau, v_\tau)Z_{0,\tau}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Combining (3.8), (3.9) with the positivity of Z_f and $Z_{0,\tau}$, we derive

$$\partial_t(Z_f - Z_{0,\tau}) - \Delta(Z_f - Z_{0,\tau}) + h(\overline{u}_{\Omega,f}, u_f)(Z_f - Z_{0,\tau}) \leq 0, \tag{3.10}$$

in $\Omega \times (\tau, \infty)$. On $\partial\Omega \times [\tau, \infty)$ there holds $Z_f - Z_{0,\tau} = f - f = 0$. Furthermore, at at $t = \tau$, $Z_f(x,\tau) - Z_{0,\tau}(x,\tau) = \overline{u}_{\Omega,f}(x,t) - u_f(x,\tau) - \overline{u}_{\Omega,f}(x,t) + u_f(x,\tau) = 0$. By the maximum principle, it follows $Z_f \leq Z_{0,\tau}$ in $\Omega \times [\tau, \infty)$. Since $\tau > \tau' > 0$ implies $v_\tau(x,\tau) = u_f(x,\tau) \geq v_{\tau'}(x,\tau)$ and $\tilde{v}_\tau(x,\tau) = \overline{u}_{\Omega,f}(x,\tau) \geq \tilde{v}_{\tau'}(x,\tau)$, the sequences $\{v_\tau\}$ and $\tilde{v}_\tau$ converge to some functions $\{v_0\}$ and $\tilde{v}_0$ which belong to $C(\overline{\Omega} \times (0,\infty)) \cap C^{2,1}(Q^\Omega_\infty)$ and satisfy (3.3) with $f = 0$ on $\partial\Omega \times (0, \infty)$. Furthermore

$$\overline{u}_{\Omega,f} - u_f \leq \tilde{v}_0 - v_0. \tag{3.11}$$

Since $\overline{u}_{\Omega,f} \geq \overline{u}_\Omega$, $\tilde{v}_0 \geq \overline{u}_\Omega$, which implies that $\tilde{v}_0 = \overline{u}_\Omega$ by the maximality of $\overline{u}_\Omega$. If Ω' is any smooth bounded open subset such that $\overline{\Omega}' \subset \Omega$ there holds by an easy approximation argument $v_0 \geq u_{\Omega'}$ in $\Omega' \times (0, \infty)$. Therefore $v_0 \geq u_\Omega = \underline{u}_\Omega = \overline{u}_\Omega$, by Proposition 2.9 and Theorem 2.13. Applying again Theorem 2.13 we derive that the right-hand side of (3.11) is zero, which yields to $\overline{u}_{\Omega,f} = u_f$ $\square$

Bibliographie

[1] W. Al Sayed and L. Véron, *On uniqueness of large solutions of nonlinear parabolic equations in nonsmooth domains*, Adv. Nonlinear Studies, to appear.

[2] H. Brezis, *Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires*, Isr. J. Math. **9** , 513-534 (1971).

[3] H. Brezis. **Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert**. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[4] H. Brezis and A. Friedman, *Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions*, J. Math. Pures Appl. **62**, 73-97 (1983).

[5] J.B. Keller,*On solutions of* $\Delta u = f(u)$, Comm. Pure Appl. Math. **10**, 503-510 (1957).

[6] M. Marcus and L. Véron, *The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations : the subcritical case*, Arch. Rat. Mech. Anal. **144**, 201-231 (1998).

[7] M. Marcus and L. Véron, *The initial trace of positive solutions of semilinear parabolic equations*, Comm. Part. Diff. Equ. **24**, 1445-1499 (1999).

[8] R. Osserman, *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$, Pacific J. Math. **7**, 1641-1647 (1957).

[9] W. Ziemer, *Behavior at the boundary of solutions of quasilinear parabolic equations*, J. Differential Equations **35** 291-305 (1980).

Chapitre 4

Solutions de quelques équations paraboliques nonlinéaires explosant en $t = 0$ et au bord d'un domaine

Dans ce chapitre, on étudie l'existence et l'unicité du problème (P) : $\partial_t u - \Delta u + u^q = 0$ ($q > 1$) dans $\Omega \times (0, T)$, $u = \infty$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$ et $u(., 0) = \infty$ dans Ω, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. On construit une solution maximale, et on démontre que cette solution maximale est l'unique grande solution.

1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la notion de "GRANDE SOLUTION" pour l'équation parabolique

$$\partial_t u - \Delta u + u^q = 0 \text{ dans } Q = \Omega\times]0, T[\tag{1.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ et $q > 1$.
Dans la cas elliptique, le problème

$$(E_g)\begin{cases} -\Delta u + g(x, u) & = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x) & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega \end{cases}$$

avec $g \in C(\Omega \times \mathbb{R}; \mathbb{R}+)$ et $\rho(x)$ est la distance d'un point x de Ω au bord de Ω, est étudié d'abord par Bierberbach et Rademacher [4], [12] dans le cas où $g(u) = e^u$ et $N = 2$ ou 3. Après, Loewner et Nirenberg [8] ont prouvé l'existence et l'unicité d'une fonction positive u qui satisfait

$$\begin{cases} -\frac{4(N-1)}{N-2}\Delta u + u_+^{\frac{N+2}{N-2}} & = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x) & = & \infty & \text{sur} & \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné régulier. En plus, Bandle et Marcus [1], [2], [3] ont démontré l'unicité de la grande solution de

$$-\Delta u + u_+^q = 0$$

où $q > 1$ et $\partial\Omega$ est régulier et compact. Pour les équations elliptiques de second ordre

$$-Lu + u_+^q = 0$$

Véron [14] a prouvé l'existence et l'unicité de la grande solution de ces équations dans le même type de domaine. L'existence d'une grande solution dépend de l'existence d'une solution maximale qui elle même dépend de la condition de Keller Osserman [6], [11].

Définition 1.1 *Une fonction $g \in C(\mathbb{R}_+)$ satisfait la condition de Keller Osserman si il existe une fonction croissante positive h tel que*

$$g(r) \geq h(r), \ \ \forall r \in \mathbb{R}_+ \ \textit{et} \ \int_a^\infty \left(\int_0^r h(s)ds\right)^{-1/2} < \infty, \ \ \forall a > 0.$$

Il est bien est connu [6], [11] que si g est croissante et satisfait la condition de Keller Osserman (le cas où $h = g$) alors une grande solution existe dans tout domaine borné régulier. L'unicité dans les domaines réguliers est établie sous des conditions supplémentaires sur g (Bandle et Marcus [1], [2] et [3]). Ils ont établi les résultats suivants :

Théorème 1.1 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ avec un bord $\partial\Omega$ qui est C^2 et g est une fonction continue à valeurs réelles tel que*

$$\lim_{r\to\infty} r^{-q} g(r) = 1,$$

pour $q > 1$. On suppose que $r \to \dfrac{g(r)}{r}$ est croissante sur $\mathbb{R}_*^+$. Alors il existe une unique grande solution positive de (E_g).

Imposant les conditions suivantes sur g rend l'unicité plus faible que celle établie dans le théorème 1.1 :

1. g est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, s'annulle en 0 et g est positive sur $\mathbb{R}_*^+$,
2. $g(\beta t) \leq \beta^{1+\mu} g(t)$, $\forall\, \beta \in (0,1)$, $\forall t \geq \frac{t_0}{\beta}$, pour un $t_0 \geq 1$ et $\mu > 1$,
3. $g(\beta t) \leq \beta g(t)$, $\forall\, \beta \in (0,1)$, $\forall t \geq 0$.

Le théorème suivant (Véron [15]) est une adaptation d'un résultat de Iscoe [5].

Théorème 1.2 *On suppose que Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ étoilé par rapport à O et que g est croissante et satisfait*

$$k^2 h(k) g(\rho) \leq g(h(k)\rho + l(k)), (\forall \rho \in \mathbb{R}, k > 1)(resp.(\forall \rho > 0, k > 1)),$$

où h (resp. l) est une fonction continue définie sur $(1, \infty)$ avec une limite 1 (resp. 0) en 1. Alors il existe au plus une grande solution (resp. une grande solution positive) de (E_g) dans Ω.

Le cas où $g(u) = |u|^{q-1}u$ avec $q > 1$ est bien compris :

1. Il existe toujours une solution maximale.
2. La solution maximale est grande si et seulement si $\partial\Omega$ satisfait un critère de type Wiener utilisant la capacité $C_{2,q'}$ (prouvé par Labutin [7]), ce qui est toujours vrai lorsque $1 < q < N/(N-2)$.
3. Pour tout $q > 1$, l'unicité est obtenue dans tout domaine Ω avec un bord compact tel que $\partial\Omega$ est localement le graphe d'une fonction continue (Marcus-Véron [9]). Si $1 < q < N/(N-2)$, l'unicité est assurée lorsque $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$ (Véron [14]).

Labutin [7] a prouvé l'existence de solution de

$$(E)\begin{cases} -\Delta u + |u|^{q-1} u &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x) &= \infty \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Théorème 1.3 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un domaine borné, et soit $q > 1$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *(E) a une solution $u \in C^2_{loc}(\Omega)$*

2. L'ensemble $\Omega^c = \mathbb{R}^N \backslash \Omega$ n'est pas fin, i.e.

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{C}_{2,q'}\left(\Omega^c \cap B\left(x,r\right)\right)}{r^{N-2}} \frac{dr}{r} = +\infty \text{ pour tout } x \in \Omega^c,$$

avec

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

On rappelle le critère de Wiener classique : un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ vérifie le critère de Wiener si, pour tout $\sigma \in \partial\Omega$,

$$\int_0^1 \frac{\mathcal{C}_{1,2}\left(\Omega^c \cap B\left(\sigma,r\right)\right)}{r^{N-2}} \frac{dr}{r} = +\infty,$$

où $C_{1,2}$ est la capacité électrostatique. Si Ω est un domaine avec un bord compact et vérifie le critère de Wiener, alors pour toutes fonctions $\phi \in C\left(\partial\Omega\right)$ et $\psi \in L^\infty_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)$, une solution au sens faible de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & = & \psi & \text{dans} \quad \Omega \\ w & = & \phi & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

est continue jusqu'au bord de Ω.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème :

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u + u^q & = & 0 & \text{dans} \qquad \Omega \times (0,T) \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x,t) & = & \infty & \text{pour tout} \quad t \in (0,T) \\ \lim\limits_{t \to 0} u(x,t) & = & \infty & \text{pour tout} \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

Une solution de (P) est dite grande solution. On va étudier l'existence d'une solution maximale de (1.1) ensuite prouver que cette solution est grande enfin montrer l'unicité de la grande solution sous une condition sur le bord de Ω.

2 Explosion de la solution en $t = 0$ et sur $\partial\Omega \times]0,T[$

Soit le problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u + u^q & = & 0 & \text{dans} \qquad \Omega \times (0,T) \\ \lim\limits_{\rho(x)\to 0} u(x,t) & = & \infty & \text{pour tout} \quad t \in (0,T) \\ \lim\limits_{t \to 0} u(x,t)u & = & \infty & \text{pour tout} \quad x \in \Omega \end{array} \right.$$

Une solution $u \in C\left(\Omega \times (0,T)\right)$ de (P) est dite grande solution.

Lemme 1 Pour tout $q>1$ et pour toute solution u de l'équation (1.1), on a $\forall\,(x,t)\in\Omega\times(0,T)$

$$u(x,t)\leq\varphi_q(t)+U_\Omega(x),\tag{2.1}$$

avec $U_\Omega(x)$ est la solution maximale de $-\Delta u+u^q=0$ dans Ω et $\varphi_q(t)=((q-1)t)^{\frac{-1}{q-1}}$ est le solution maximale de $\varphi_t+\varphi^q=0$, $t\in(0,T)$ explosant en $t=0$.

Preuve
Soit $(\Omega_n)_n$ une suite croissante de domaines réguliers tel que $\cup_n\Omega_n=\Omega$. Pour tout n, la fonction U_{Ω_n} solution maximale de

$$-\Delta u+u^q=0\text{ dans }\Omega_n$$

est une solution positive de (1.1) dans $\Omega_n\times\left(\frac{1}{n},T\right)$. De même, la fonction φ_q est une solution positive de (1.1) dans $\Omega_n\times\left(\frac{1}{n},T\right)$. Soit u une solution de (1.1). La fonction $U_{\Omega_n}(x)+\varphi_q(t-1/n)$ est une sur-solution positive de (1.1) dans $\Omega\times(0,T)$. Ainsi, $(u(x,t-1/n)-U_{\Omega_n}(x)-\varphi_q(t-1/n))_+$ est une sous-solution de (1.1) dans $\Omega\times(0,T)$. En plus,

$$\lim_{t\to1/n}\int_{\Omega\times(0,T)}(u(x,t-1/n)-U_{\Omega_n}(x)-\varphi_q(t-1/n))_+\,dx=0,$$

par le théorème de Lebesgue, $(u(x,t-1/n)-U_{\Omega_n}(x)-\varphi_q(t-1/n))_+$ étant majorée par u avec $u\in C\left(\Omega\times(0,T)\right)$. De même, $(u(x,t-1/n)-U_{\Omega_n}(x)-\varphi_q(t-1/n))_+=0$ sur $\partial\Omega\times(0,T)$. On déduit finalement que

$$u(x,t)\leq\varphi_q(t-1/n)+U_{\Omega_n}(x).$$

Quand n tend vers l'infini,

$$u(x,t)\leq\varphi_q(t)+U_\Omega(x),$$

où $U_\Omega(x)$ est la solution maximale de $-\Delta u+u^q=0$ dans Ω.

Théorème 2.1 *Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^N$. Il existe une solution maximale pour (1.1).*

Preuve
Soit V une solution de (1.1) et $(\Omega_n)_n$ une suite croissante de domaines réguliers tel que $\cup_n\Omega_n=\Omega$. Par l'estimation (2.1), il existe une solution maximale u_n de (1.1) dans $\Omega_n\times]\frac{1}{n},T[$ avec u_n est la limite croissante de la suite $u_{n,k}$ quand $k\to\infty$ qui est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll}\partial_t u-\Delta u+u^q&=&0&\text{dans}\quad\Omega_n\times(\frac{1}{n},T)\\ u&=&k&\text{sur}\quad\partial\Omega_n\times(\frac{1}{n},T)\\ u&=&k&\text{dans}\quad\Omega_n\times\left\{\frac{1}{n}\right\}\end{array}\right.$$

Quand n croît, u_n décroit et on a

$$u_n \geq u_p|_{\Omega_n} \geq V|_{\Omega_n} \;\; pour \;\; p > n.$$

Comme (u_n) est décroissante et minorée par V, alors u_n converge vers u quand n tend vers l'infini et $u \geq V$. D'où u est la solution maximale qu'on va noter $\overline{u}$.

Lemme 2 Pour tout $q > 1$, on a $\forall (x,t) \in \Omega \times (0,T)$

$$\overline{u}(x,t) \geq \max\{\varphi_q(t), U_\Omega(x)\}. \tag{2.2}$$

Preuve
Soit $(\Omega_n)_n$ une suite croissante de domaines réguliers tel que $\cup_n \Omega_n = \Omega$. Dans $\Omega_n \times \left(\frac{1}{n}, T\right)$, $\overline{u}(x,t) \geq U_{\Omega_n}(x)$ puisque U_{Ω_n} est finie sur le bord de Ω_n. En plus, $\overline{u}(x, t - 1/n) \geq \varphi_q(t)$ puisque $\varphi_q(t)$ est finie en $t = 1/n$. On fait tendre n à l'infini, on obtient

$$\overline{u}(x,t) \geq U_\Omega(x) \text{ et } \overline{u}(x,t) \geq \varphi_q(t) \text{ dans } \Omega \times (0,T).$$

D'où,

$$\overline{u}(x,t) \geq \max\{\varphi_q(t), U_\Omega(x)\}.$$

Théorème 2.2 *Si $1 < q < N/(N-2)$, la solution maximale est une grande solution.*

Preuve
Par les estimations (2.1) et (2.2), on a

$$\max\{\varphi_q(t), U_\Omega(x)\} \leq \overline{u}(x,t) \leq \varphi_q(t) + U_\Omega(x).$$

Or

$$1/2\left(\varphi_q(t) + U_\Omega(x)\right) \leq \max\{\varphi_q(t), U_\Omega(x)\},$$

donc

$$1/2\left(\varphi_q(t) + U_\Omega(x)\right) \leq \overline{u}(x,t) \leq \varphi_q(t) + U_\Omega(x)$$

et $\overline{u}$ est une grande solution puisque $U_\Omega(x)$ est une grande solution de $-\Delta u + u^q = 0$ par le théorème 5 dans [13].

Théorème 2.3 *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$.
2. $\forall x \in \partial\Omega$, $\exists \{x_n\} \subset \overline{\Omega}^c$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
3. $\forall x \in \partial\Omega$, $\forall \epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap \overline{\Omega}^c \neq \phi$, *avec* $B(x,\epsilon)$ *est la boule de centre* x *et de rayon* ϵ.
4. *Si* $\Omega_\epsilon = \left\{x \in \mathbb{R}^N;\ dist\left(x, \overline{\Omega}\right) < \epsilon\right\}$, *alors* $\forall x \in \partial\Omega$, $\lim_{\epsilon\to 0} dist(x, {\Omega^c}_\epsilon) = 0$.

Preuve
On a toujours :

$$\partial\overline{\Omega}^c = \overline{\overline{\Omega}^c} \cap \overline{\Omega} \subset \Omega^c \cap \overline{\Omega} = \partial\Omega.$$

(1.) $\Rightarrow$ (3.)
Si (3.) n'est pas vrai,

$$\exists x_0 \in \partial\Omega \;\; \exists\epsilon_0 > 0 \text{ tel que } B(x_0,\epsilon_0) \cap \overline{\Omega}^c = \phi.$$

Ce qui implique que $x_0 \notin \overline{\overline{\Omega}^c}$ et donc $x_0 \notin \partial\overline{\Omega}^c$, alors (1.) n'est pas vrai.
(3.) $\Rightarrow$ (1.)
Soit $x \in \partial\Omega$. Si $\forall\epsilon > 0$, $B(x,\epsilon) \cap \overline{\Omega}^c \neq \phi$ alors $x \in \overline{\overline{\Omega}^c}$. Comme $x \in \partial\Omega = \Omega^c \cap \overline{\Omega}$ alors $x \in \overline{\Omega} \cap \overline{\overline{\Omega}^c} = \partial\overline{\Omega}^c$.
(2.) $\Rightarrow$ (3.)
D'une façon évidente car pour $\epsilon = 1/n$, on a $x_{1/n} \in B(x, 1/n) \cap \overline{\Omega}^c$.
(3.) $\Rightarrow$ (2.)
On prend $\epsilon = 1/n$ et $x_n \in B(x,1/n) \cap \overline{\Omega}^c$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
(2.) $\Rightarrow$ (4.)
Supposons que (4.) n'est pas vrai. Il existe $x_0 \in \partial\Omega$, $\alpha > 0$ et $\epsilon_n \to 0$ tel que $\mathrm{dist}(x_0, \Omega^c_{\epsilon_n}) \geq \alpha$. Ce qui implique que $\mathrm{dist}(x_0, \Omega^c_\epsilon) \geq \alpha$, $\forall 0 < \epsilon_n < \epsilon$ puisque $\Omega_{\epsilon_n} \subset \Omega_\epsilon$. Alors $\Omega^c_\epsilon \subset \Omega^c_{\epsilon_n}$. Comme $\epsilon_n \to 0$, on en déduit que $\mathrm{dist}(x_0, \Omega^c_\epsilon) \geq \alpha$, $\forall\epsilon > 0$. Si il existait $\{x_n\} \subset \overline{\Omega}^c$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ alors $\mathrm{dist}(x_n, \overline{\Omega}) = \delta_n > 0$. Donc $x_n \in \Omega^c_{\delta_n}$ et $\mathrm{dist}(x_0, x_n) \geq \alpha$ contradiction, alors (2.) n'est pas vrai.
(4.) $\Rightarrow$ (2.)
Soit $x_\epsilon \in \Omega^c_\epsilon$ tel que $|x_\epsilon - x| = \mathrm{dist}(x, \Omega^c_\epsilon) \to 0$ quand $\epsilon \to 0$; donc si $\epsilon = 1/n$, $x_{1/n} \in \overline{\Omega}^c$ car $(\overline{\Omega} \subset \Omega_\epsilon \Rightarrow \Omega^c_\epsilon \subset \overline{\Omega}^c)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_{1/n} = x$.

Théorème 2.4 *On suppose que* $1 < q < N/(N-2)$ *et que* $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$*, alors il existe une grande solution et une seule de* (P)*.*

Preuve
Soit (Ω_ϵ) la suite de domaines à bord lipschitzien défini dans le théorème 2.3. On note par la fonction $V = V_{\Omega_\epsilon}$ la solution du problème stationnaire :

$$\begin{cases} -\Delta V + V^q &= \psi & \text{dans} & \Omega_\epsilon \\ V &= 1/\epsilon & \text{sur} & \partial\Omega_\epsilon \end{cases}$$

Quand ϵ tend vers 0, la fonction V_{Ω_ϵ} converge vers V_Ω qui est une solution minimale-maximale (par le théorème 8 de [13]) de $-\Delta V + V^q = 0$ dans Ω. La fonction V_Ω est une grande solution et elle est unique par le théorème 8 de [13]. Soit u une grande solution de (P). Puisque

$$u(x,t) \geq \max\{\varphi_q(t), V_\Omega(x)\},$$

et par (2.1), on a

$$1/2 \leq \frac{u}{\varphi_q(t) + V_\Omega(x)} \leq 1.$$

Ce qui implique l'unicité de u.

Corollaire 2.1 *On suppose que $q > 1$ et $\partial\Omega$ est localement un graphe continu. Alors il existe au plus une grande solution de (P).*

Preuve
Si $\partial\Omega$ est localement un graphe continu alors $\partial\Omega = \partial\overline{\Omega}^c$. Donc par le théorème 2.4, s'il existe une grande solution de (P), elle est unique.

Corollaire 2.2 *On suppose que $q > 1$, $\partial\Omega$ est localement un graphe continu et $\partial\Omega$ satisfait le critère de Wiener classique. Alors il existe une grande solution et une seule de (P).*

Preuve
Par le théorème 1.4 de [10], V_Ω est l'unique grande solution de $-\Delta u + u^q = 0$ dans Ω. D'où l'unicité de la solution pour (P) par le théorème 2.4.

Bibliographie

[1] C. Bandle and M. Marcus. Large solutions of semilinear elliptic equations with “singular” coefficients. In *Optimization and nonlinear analysis (Haifa, 1990)*, volume 244 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 25–38. Longman Sci. Tech., Harlow, 1992.

[2] C. Bandle and M. Marcus. “Large” solutions of semilinear elliptic equations : existence, uniqueness and asymptotic behaviour. *J. Anal. Math.*, 58 :9–24, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.

[3] C. Bandle and M. Marcus. Asymptotic behaviour of solutions and their derivatives, for semilinear elliptic problems with blowup on the boundary. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12(2) :155–171, 1995.

[4] L. Bieberbach. $\Delta u = e^u$ und die automorphen funktionen. *Math. annalen.*, 77 :173–212, 1916.

[5] I. Iscoe. On the supports of measure-valued critical branching Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16(1) :200–221, 1988.

[6] J. B. Keller. On solutions of $\Delta u = f(u)$. *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 :503–510, 1957.

[7] D. A. Labutin. Wiener regularity for large solutions of nonlinear equations. *Ark. Mat.*, 41(2) :307–339, 2003.

[8] C. Loewner and L. Nirenberg. Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations. In *Contributions to analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, pages 245–272. Academic Press, New York, 1974.

[9] M. Marcus and L. Véron. Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14(2) :237–274, 1997.

[10] M. Marcus and L. Véron. Maximal solutions of semilinear elliptic equations with locally integrable forcing term. *Israel J. Math.*, 152 :333–348, 2006.

[11] R. Osserman. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$. *Pacific J. Math.*, 7 :1641–1647, 1957.

[12] H Rademacher. Einige besondere probleme partieller differentialgleichungen.

[13] L. Véron. Generalized boundary value problems for nonlinear elliptic equations. In *Proceedings of the USA-Chile Workshop on Nonlinear Analysis (Viña del Mar-Valparaiso, 2000)*, volume 6 of *Electron. J. Differ. Equ. Conf.*, pages 313–342 (electronic), San Marcos, TX, 2001. Southwest Texas State Univ.

[14] L. Véron. Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary. *J. Anal. Math.*, 59 :231–250, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.

[15] L. Véron. *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, volume 353 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1996.

Chapitre 5

Singularités éliminables

Dans ce chapitre, on étudie l'équation parabolique

$$\partial_t u - \Delta u + t^\alpha u^q = 0 \text{ dans } \; Q_T = \mathbb{R}^N \times]0, T[$$

où $T > 0$, $\alpha > -1$ et $q > 1$.

1 Introduction

Dans ce chapitre on considère le problème

$$\partial_t u - \Delta u + t^\alpha u^q = 0 \text{ dans } Q_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[\tag{1.1}$$

où $T > 0$, $\alpha > -1$ et $q > 1$. Soit $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^N \times [0,T) \backslash \{(O,0)\}\right)$ une solution de (1.1) dans Q_T qui satisfait

$$u(x,0) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \backslash \{O\}. \tag{1.2}$$

Dans leur article [6], Marcus et Véron ont étudié ce problème dans le cas où $\alpha \geq 0$ et $1 < q < q_{\alpha,N} = 1 + \frac{2(1+\alpha)}{N}$. Ils ont trouvé une solution autosimilaire de (1.1) sous la forme

$$U(x,t) = t^{-\frac{1+\alpha}{q-1}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

et qui satisfait

$$\lim_{t\to 0} U(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Cette solution est dite très singulière. Ainsi V satisfait

$$-\Delta V - \frac{1}{2}\eta.\nabla V - \gamma V + V^q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{1.3}$$

et

$$V(\eta) = C|\eta|^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1} - N} e^{\frac{-|\eta|^2}{4}} (1 + o(1)) \text{ quand } |\eta| \to \infty.$$

Avec

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}},\ \gamma = \frac{1+\alpha}{q-1} \text{ et } C > 0.$$

En plus, la fonction V est positive et radiale.
Soit $E(x,t) = (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$ le noyau de la chaleur dans Q_T. Si $1 < q < q_{\alpha,N}$, alors

$$\int\int_{Q_T} E^q(x,t) t^\alpha dxdt < \infty.$$

Dans leur même article, ils ont prouvé que : si $1 < q < q_{\alpha,N}$ alors pour tout $k > 0$ il existe une solution unique u_k de (1.1) avec la donnée initiale $k\delta_O$. En plus, $k \to u_k$ est croissante et $u_\infty := \lim_{k\to\infty} u_k$ satisfait $u_\infty(x,t) = t^{-\frac{1+\alpha}{q-1}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.
Ce type de solutions est étudié par Brézis, Peletier, Terman. Dans leur article [1], Ils ont étudié le problème

$$\partial_t u - \Delta u + u^q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\tag{1.4}$$

$$u > 0 \text{ sur } \mathbb{R}^N \times]0,\infty[\tag{1.5}$$

$$u(x,0) = c\delta(x) \text{ sur } \mathbb{R}^N \tag{1.6}$$

où $N \geq 1$, $c > 0$ est une constante et $\delta(x)$ est la masse de Dirac à l'origine. Un résultat de Brézis et Friedman [2] affirme que si $1 < q < \frac{N+2}{N}$, alors il existe une solution unique u_c pour (1.4)-(1.6). Lorsque $q \geq \frac{N+2}{N}$, il n'existe pas de solution pour (1.4)-(1.6) et en fait toute solution de (1.4) tel que $u \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N \times]0,\infty[$ et

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\xi(x)dx = 0 \qquad \forall \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{O\})$$

est identiquement nulle.
Ce chapitre est composé de plusieurs sections : Dans la première section, on va trouver des estimations pour une solution u de (1.1) en relation avec la solution maximale de $\phi' + t^\alpha \phi^q = 0$ explosant en $t = 0$ et la solution très singulière monodimentionnelle de (1.1). Ces estimations vont nous permettre de trouver une variante de l'estimation de Brézis-Friedman [2], dans leur article ils ont traité l'équation

$$\partial_t u - \Delta u + u^q = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T) \tag{1.7}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$. Ils ont trouvé l'estimation suivante pour toute solution de (1.7)

$$u(x,t) \leq \frac{C\,(N,q)}{\left(|x|^2 + t\right)^{\frac{1}{q-1}}} \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \setminus \{0\}\,.$$

Dans le cas $q \geq \frac{n+2}{n}$, cette estimation a aidé à éliminer la singularité en O, leur résulat est le suivant

Théorème 1.1 *Soit* $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C(\Omega \times [0,T) \setminus \{(O,0)\})$ *une solution de* $\partial_t u - \Delta u + u^q = 0$ *dans* $\Omega \times (0,T)$ *et satisfait* $u(x,0) = 0$ *dans* $\Omega \setminus \{O\}$. *Si* $q \geq \frac{n+2}{n}$, *alors on peut étendre* u *à un élément dans* $C^{2,1}(\Omega \times [0,T))$.

Donc notre but dans la troisième section, c'est d'éliminer la singularité en O. Dans la section suivante, on démontre un équivalent d'un résultat de Moutoussamy-Véron. Dans leur article [7], ils ont étudié le problème

$$-\Delta V - \frac{1}{2}\eta.\nabla V - \frac{1}{q-1}V + |V|^{q-1}V = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{1.8}$$

Ils ont introduit (inspirés par une méthode variationnelle de Escobedo-Kavian [4]) la fonction poids $K(\eta) = \exp\left(\frac{\eta^2}{4}\right)$ et les espaces de Sobolev

$$H_K^m = \left\{\phi \in H_{loc}^m(\mathbb{R}^N) : \int |D^\beta \phi|^2 K d\eta < \infty, \forall \beta \in \mathbb{N}^N, |\beta| \leq m\right\}$$

et l'espace de Lebesgue

$$L_{K^\theta}^s = \left\{\phi \in L_{loc}^s(\mathbb{R}^N) : \int |\phi|^s K^\theta d\eta < \infty\right\}$$

pour $s \geq 1$ et $\theta > 0$ et ils ont défini

$$\mathcal{E} = \Big\{ V \in H_K^1 \cap L_K^{q+1} \text{ satisfait } (1.8) \Big\}.$$

Soit L l'opérateur autoadjoint sur H_K^1 défini par

$$LV = -K^{-1} div(K\nabla V).$$

La théorie spectrale de L sur H_K^1 est étudiée par Escobedo-Kavian [4]. Ils ont prouvé que les valeurs propres de L sont

$$\lambda_k = \frac{N+k-1}{2}, \quad k \geq 1$$

et les espaces propres correspondants sont

$$N\left(L - \lambda_k I\right) = \Big\{ \sum_{|\beta| = k-1} a_\beta D^\beta K^{-1} \Big\}$$

où a_β sont des réels. Moutoussamy-Véron [7] ont prouvé la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Soit $\mathcal{E}_\lambda$ l'ensemble de V appartenant à $H_K^1 \cap L_K^{q+1}$ satisfaisant*

$$K^{-1} div(K\nabla V) + \lambda V - |V|^{q-1} V = 0 \ \textit{dans} \ \mathbb{R}^N \tag{1.9}$$

($q > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$). Alors on a :

1. *Si $\lambda \leq \frac{N}{2}$, $\mathcal{E}_\lambda$ est réduit à la fonction nulle.*
2. *Si $\frac{N}{2} < \lambda \leq \frac{N+1}{2}$, $\mathcal{E}_\lambda$ contient trois éléments : la fonction nulle, V et $-V$ où V est la solution unique de (1.9) appartenant à $H_K^1 \cap L_K^{q+1}$.*
3. *Si $\lambda > \frac{N+1}{2}$, $\mathcal{E}_\lambda$ contient les trois éléments précédents et un nombre fini de solutions variantes sous O(N).*

2 Estimations

Théorème 2.1 *Pour toute solution u de (1.1) on a*

$$u(x,t) \leq c_\alpha t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} \ \textit{pour tout} \ (x,t) \in Q_T,$$

avec $c_\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ et $\alpha > -1$.

Preuve
Soit u une solution de (1.1) et soit $(x,t) \in Q_T$.
Cas où $\alpha \geq 0$
Soit $\phi(t) = c_\alpha t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}$ avec $c_\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}$ la solution maximale de

$$\begin{cases} \phi' + t^\alpha \phi^q &= 0 \\ \phi(0) &= +\infty. \end{cases}$$

Soit $\tau > 0$, $R > 0$ et B_R la boule de centre O et de rayon R. On note $V_{1,\tau}$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta V_{1,\tau} + \tau^\alpha V_{1,\tau}^q &= 0 \text{ dans } B_1 \\ \lim\limits_{|x|\to 1} V_{1,\tau} &= +\infty \end{cases} \tag{2.1}$$

on effectue le scaling

$$V_{R,\tau}(x) = R^{\frac{-2}{q-1}} V_{1,\tau}\left(\frac{x}{R}\right).$$

$V_{R,\tau}(x)$ est la solution du problème (2.1) dans la boule B_R. La fonction $V_{R,\tau}$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$ quand $R \to \infty$. Soit

$$w(x,t) = \phi(t-\tau) + V_{R,\tau}(x),$$

w est une sur-solution de (1.1) dans $B_R \times [\tau, T)$. En fait,

$$\partial_t w - \Delta w + t^\alpha w^q =$$

$$\begin{aligned} &\partial_t \phi(t-\tau) - \Delta V_{R,\tau} + t^\alpha \left(\phi(t-\tau) + V_{R,\tau}(x)\right)^q \\ &\geq -(t-\tau)^\alpha \phi^q(t-\tau) - \tau^\alpha V_{R,\tau}^q + t^\alpha \phi^q(t-\tau) + t^\alpha V_R^q \\ &\geq \left(t^\alpha - (t-\tau)^\alpha\right) \phi^q(t-\tau) + \left(t^\alpha - \tau^\alpha\right) V_{R,\tau}^q \geq 0 \end{aligned}$$

puisque $\alpha \geq 0$ et la fonction $t \to t^\alpha$ est croissante. Et comme $w(x,\tau) = \infty$ et $w|_{\partial B_R} = \infty$, on déduit que

$$u(x,t) \leq w(x,t) = \phi(t-\tau) + V_{R,\tau}(x),$$

on fait tendre R vers l'infini et τ vers 0, on obtient

$$u(x,t) \leq c_\alpha t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} \text{ pour tout } (x,t) \in Q_T.$$

Cas où $-1 < \alpha < 0$
Soit $\tau > 0$ et $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (\tau, T)$. Soit $\phi_\tau(t) = c_\alpha \left(t^{\alpha+1} - \tau^{\alpha+1}\right)^{\frac{-1}{q-1}}$ la solution de

$$\begin{cases} \phi_\tau' + t^\alpha \phi_\tau^q &= 0 \\ \phi_\tau(\tau) &= +\infty \end{cases}$$

On note $V_{1,T}$ la solution de

$$\begin{cases} -\Delta V_{1,T} + T^\alpha V_{1,T}^q &= 0 \text{ dans } B_1 \\ \lim\limits_{|x|\to 1} V_{1,T} &= +\infty \end{cases} \tag{2.2}$$

on effectue le scaling

$$V_{R,T}(x) = R^{\frac{-2}{q-1}} V_{1,T}\left(\frac{x}{R}\right).$$

$V_{R,T}$ est la solution du problème (2.2) dans la boule B_R. La fonction $V_{R,T}$ tend vers 0 uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^N$ quand $R \to \infty$. Soit

$$w(x,t) = \phi_\tau(t) + V_{R,T}(x),$$

w est une sur-solution de (1.1) dans $B_R \times (\tau, T)$. En fait,

$$\begin{aligned}
\partial_t w - \Delta w + t^\alpha w^q &= \phi'_\tau - \Delta V_{R,T} + t^\alpha \left(\phi_\tau(t) + V_{R,T}(x)\right)^q \\
&= -t^\alpha \phi_\tau^q - T^\alpha V_{R,T}^q + t^\alpha \left(\phi_\tau(t) + V_{R,T}(x)\right)^q \\
&\geq -t^\alpha \phi_\tau^q - T^\alpha V_{R,T}^q + t^\alpha \phi_\tau^q + t^\alpha V_{R,T}^q \\
&\geq \left(t^\alpha - T^\alpha\right) V_{R,T}^q \geq 0
\end{aligned}$$

puisque $-1 < \alpha < 0$ et la fonction $t \to t^\alpha$ est décroissante. Et comme $w(x,\tau) = \infty$ et $w|_{\partial B_R} = \infty$, on déduit que

$$u(x,t) \leq w(x,t) = \phi_\tau(t) + V_{R,T}(x),$$

on fait tendre R vers l'infini et τ vers 0, on obtient

$$u(x,t) \leq c_\alpha t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} \text{ pour tout } (x,t) \in Q_T.$$

Remarque 2.1 Pour $N = 1$ et $q > 1$, l'équation (1.3) s'écrit

$$V'' + \frac{\eta}{2} V' + \frac{1+\alpha}{q-1} V - V^q = 0 \text{ où } \eta > 0. \tag{2.3}$$

Les solutions $V = V_c$ de (2.3) tel que $V_c'(0) = 0$, $V_c(0) = c$ avec $c \in]0, c_\alpha[$, avec $c_\alpha = \left(\frac{\alpha+1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}$, vérifient

$$\lim_{\eta \to \infty} \eta^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1}} V_c(\eta) = \lambda_c > 0 \tag{2.4}$$

avec λ_c est une constante strictement positive. Ces solutions ont le comportement asymptotique suivant

$$V_c(\eta) = \lambda_c \eta^{\frac{-2(1+\alpha)}{q-1}} \left(1 + 0(1)\right) \text{ lorsque } \eta \to \infty. \tag{2.5}$$

Leur existence est établie par Kamin et Peletier [5]. Si $1 < q < q_{\alpha,1}$, par Brézis, Terman, Pelletier [1], il existe $c* > 0$ tel que la solution très sigulière $V^* = V_{c*}$ vérifie

$$\lim_{\eta \to \infty} \eta^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1}} V^*(\eta) = 0$$

et

$$V^*(\eta) = \lambda_{c*} e^{\frac{-\eta^2}{4}} \eta^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1} - 1} \left(1 + o(1)\right) \text{ lorsque } \eta \to \infty. \tag{2.6}$$

Théorème 2.2 *Pour $N = 1$ et si $q > 1$ avec $\alpha > -1$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ et pour toute solution u de*

$$u_t - u_{xx} + t^\alpha u^q = 0 \tag{2.7}$$

vérifiant

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = 0, \qquad \forall x \neq 0,$$

on a

$$u(x,t) \leq k t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \qquad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \backslash \{(0,0)\},$$

où c et V_c sont définis dans la remarque 2.1.

Preuve
Une solution autosimilaire de (2.7) a la forme

$$v(x,t) = t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

où V vérifie (2.3). On fixe $a > 0$ (idem si $a < 0$) et $c \in]0, c_\alpha[$. Soit u une solution de (2.7) vérifiant

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Alors $\lim\limits_{t \to 0} u(a,t) = 0$ et on a

$$u(a,t) \leq c_\alpha t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} \quad \forall t \in]0,T] \text{ par le théorème 2.1 .}$$

Cas où $\alpha \geq 0$
Pour R, $\tau > 0$, soit $V_{R,\tau}(x-a)$ la solution de (2.1) dans la boule de centre a et de rayon R. On pose

$$v_{c,a,\tau}(x,t) = (t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x-a}{\sqrt{t-\tau}}\right).$$

On définit l'ensemble

$$D_{a,R,\tau} = \Big\{(x,t) : 0 < a < x < R + a,\ \tau < t \leq T\Big\}.$$

Soit $\theta \in]0, \frac{c}{c_\alpha}[$. On va comparer les deux fonctions $\theta u(x, t-\tau)$ et $\psi(x, t-\tau) = v_{c,a,\tau}(x,t) + V_{R,\tau}(x-a)$ dans $D_{a,R,\tau}$. La fonction θu est une sous-solution de (2.7) dans $D_{a,R,\tau}$ ($\theta < \frac{c}{c_\alpha} < 1$) et $\psi(x, t-\tau)$ est une sur-solution de (2.7) dans $D_{a,R,\tau}$. Alors $(\theta u - \psi)_+$ est une sous-solution dans $D_{a,R,\tau}$. En plus,

$$\lim_{t \to \tau} \int_{D_{a,R,\tau}} (\theta u - \psi)_+ (t-\tau, x) dx = 0$$

par le théorème de Lebesgue, $(\theta u-\psi)_+$ étant majorée par u avec $u\in C\left(\mathbb{R}^N\times[0,T)\backslash\{(O,0)\}\right)$, $\lim\limits_{t\to\tau}(\theta u-\psi)_+ = 0$ presque partout et $\lim\limits_{t\to\tau}u(x,t-\tau)=0$ pour tout $x\neq O$. Si $x=a$, $(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}V_c(0)=(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c$ et $\psi(a,t-\tau)=(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c$. On a

$$\theta u(a,t-\tau)-\psi(a,t-\tau)=\theta u(a,t-\tau)-(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c<\frac{c}{c_\alpha}u(a,t-\tau)-(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c$$
$$\leq\frac{c}{c_\alpha}(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c_\alpha-(t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c=0.$$

Alors $\theta u(a,t-\tau)<\psi(a,t-\tau)$. Et si $x=R+a$, $V_{R,\tau}(x-a)$ explose, d'où $\theta u(R+a,t-\tau)<\psi(R+a,t-\tau)$. Par le principe de comparaison, on a

$$\theta u(x,t-\tau)\leq\psi(x,t-\tau)\text{ dans }D_{a,R,\tau}.$$

On fait tendre R vers l'infini, τ vers 0 et a vers 0^+. D'où, si $\theta\to\frac{c}{c_\alpha}$,

$$u(x,t)\leq\frac{c_\alpha}{c}t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}V_c\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\text{ pour tout }x>0.$$

i.e. pour tout $x<0$. Par continuité,

$$u(x,t)\leq\frac{c_\alpha}{c}t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}V_c\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Cas où $-1<\alpha<0$
Soit $V_{R,T}(x-a)$ la solution de (2.2) dans la boule de centre a et de rayon R. On définit l'ensemble

$$D_{a,R}=\Big\{(x,t):0<a<x<R+a,\ 0<t\leq T\Big\}.$$

Soit $\theta\in]0,\frac{c}{c_\alpha}[$. On va comparer les deux fonctions $\theta u(x,t)$ et $\varphi(x,t)=t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}V_c\left(\frac{x-a}{\sqrt{t}}\right)+V_{R,T}(x-a)$ dans $D_{a,R}$. La fonction θu est une sous-solution de (2.7) dans $D_{a,R}$ ($\theta<\frac{c}{c_\alpha}<1$) et $\varphi(x,t)$ est une sur-solution de (2.7) dans $D_{a,R}$. Alors $(\theta u-\varphi)_+$ est une sous-solution dans $D_{a,R}$. En plus,

$$\lim_{t\to0}\int_{D_{a,R}}(\theta u-\varphi)_+(t,x)dx=0$$

par le théorème de Lebesgue, $(\theta u-\varphi)_+$ étant majorée par u avec $u\in C\left(\mathbb{R}^N\times[0,T)\backslash\{(O,0)\}\right)$, $\lim\limits_{t\to0}(\theta u-\phi)_+ = 0$ presque partout et $\lim\limits_{t\to0}u(x,t) = 0$ pour tout $x\neq O$. Si $x=a$, $t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}V_c(0)=t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c$ et $\varphi(a,t)=t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c$. On a

$$\theta u(a,t)-\varphi(a,t)=\theta u(a,t)-t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c<\frac{c}{c_\alpha}u(a,t)-t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c\leq\frac{c}{c_\alpha}t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c_\alpha-t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}}c=0.$$

Alors $\theta u(a,t)<\varphi(a,t)$. Et si $x=R+a$, $V_{R,T}(x-a)$ explose, d'où $\theta u(R+a,t)<\varphi(R+a,t)$. Par le principe de maximum,

$$\theta u\leq\varphi\text{ dans }D_{a,R}.$$

On fait tendre R vers l'infini et a vers 0^+. D'où, si $\theta \to \frac{c}{c_\alpha}$,

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \text{ pour tout } x > 0.$$

On fait de même pour $x < 0$ et on déduit

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad \forall x \neq 0.$$

Corollaire 2.1 *Pour $N = 1$ et si $1 < q < q_{\alpha,1}$ avec $\alpha > -1$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$ et pour toute solution u de (2.7) vérifiant*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0,$$

on a

$$u(x,t) \leq k t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

avec V^* est définie dans la remarque 2.1.

Pour la preuve, c'est la même que celle du théorème précédent. On prend $0 < \theta < \frac{c*}{c_\alpha}$ avec $c*$ est défini dans la remarque 2.1. On aura $k = \frac{c_\alpha}{c*}$.

Corollaire 2.2 *Pour $N > 1$ et si $q > 1$ avec $\alpha > -1$, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$ et pour toute solution u de (2.7) vérifiant*

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0,$$

on a

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) \tag{2.8}$$

avec c, c_α et V_c sont définis dans la remarque 2.1.

Preuve
Soit $x = (x_1, x')$ avec $x' = (x_2, ..., x_N)$.
Etape 1. On affirme que pour $(x_1, t) \neq (0,0)$,

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x_1}{\sqrt{t}}\right)$$

Cas où $\alpha \geq 0$
Pour R, $\tau > 0$, soit $V_{R,\tau}(x)$ la solution de (2.1) dans la boule de centre O et de rayon R. On définit l'ensemble

$$D_{x_1,R,a,\tau} = \Big\{(x,t); x_1 > a, |x| < R \text{ et } \tau < t < T\Big\}$$

On compare dans $D_{x_1,R,a,\tau}$ pour $0 < \theta < \frac{c}{c_\alpha}$, les deux fonctions

$$\theta u(x_1, x', t) \text{ et } (t-\tau)^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x_1 - a}{\sqrt{t-\tau}}\right) + V_{R,\tau}(x).$$

On obtient comme dans le théorème 2.2,

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x_1}{\sqrt{t}}\right) \text{ pour } x_1 \neq 0.$$

Cas où $-1 < \alpha < 0$
Soit $V_{R,T}(x)$ la solution de (2.2) dans la boule de centre O et de rayon R. On définit l'ensemble

$$D_{x_1,R,a} = \left\{(x,t); x_1 > a, |x| < R \text{ et } 0 < t < T\right\}$$

On compare dans $D_{x_1,R,a}$ pour $0 < \theta < \frac{c}{c_\alpha}$, les deux fonctions

$$\theta u(x_1, x', t) \text{ et } t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x_1 - a}{\sqrt{t}}\right) + V_{R,T}(x).$$

On obtient comme dans le théorème 2.2,

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x_1}{\sqrt{t}}\right) \text{ pour } x_1 \neq 0.$$

Etape 2. Fin de la preuve.
Soit $y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Il existe une rotation $\mathcal{R}_y$ de $\mathbb{R}^N$ telle que $\mathcal{R}_y(y) = Y = (|y|, 0, ..., 0)$. Soit $u_{\mathcal{R}_y}(x,t) = u\left(\mathcal{R}_y^{-1}(x), t\right)$. Comme l'équation est invariante par rotation, la fonction $u_{\mathcal{R}_y}$ vérifie (2.7) et $\lim_{t \to 0} u_{\mathcal{R}_y}(x,t) = 0 \ \forall x \neq 0$. Donc

$$u_{\mathcal{R}_y}(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{x_1}{\sqrt{t}}\right) \text{ pour } x_1 \neq 0.$$

En particulier

$$u_{\mathcal{R}_y}(Y,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{|y|}{\sqrt{t}}\right).$$

Or

$$u_{\mathcal{R}_y}(Y,t) = u\left(\mathcal{R}_y^{-1}\left(\mathcal{R}_y(y)\right), t\right) = u(y,t),$$

d'où

$$u(y,t) \leq \frac{c_\alpha}{c} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V_c\left(\frac{|y|}{\sqrt{t}}\right).$$

Corollaire 2.3 *Pour $N > 1$ et si $1 < q < q_{\alpha,N}$ avec $\alpha > -1$, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T)$ et pour toute solution u de (2.7) vérifiant*

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0,$$

on a

$$u(x,t) \leq \frac{c_\alpha}{c*} t^{-\frac{\alpha+1}{q-1}} V^* \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right) \tag{2.9}$$

avec $c*$, c_α et V^* sont définis dans la remarque 2.1.

Pour la preuve, c'est la même que celle du corollaire précédent. On prend $c = c*$ avec $c*$ est défini dans la remarque 2.1.

Théorème 2.3 *Pour $N \geq 1$, $q > 1$ et $\alpha > -1$, il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in Q_T$ et pour toute solution u de (1.1) vérifiant*

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

on a

$$u(x,t) \leq k \left(|x|^2 + t \right)^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}}.$$

Preuve
Si $|x|^2 \leq t$, alors

$$(|x|^2 + t)^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}} \geq 2^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}} t^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}} \geq \frac{2^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}}}{\min\{V_c(\eta) : \eta \leq 1\}} t^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}} V_c \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)$$

$$\text{d'après (2.8)} \ \geq \frac{2^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}}}{\min\{V_c(\eta) : \eta \leq 1\}} \frac{c}{c_\alpha} u(x,t).$$

Si $|x|^2 \geq t$, alors

$$(|x|^2 + t)^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}} \geq 2^{\frac{-2(\alpha+1)}{q-1}} |x|^{\frac{-2(\alpha+1)}{q-1}}$$

$$= 2^{\frac{-2(\alpha+1)}{q-1}} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)^{\frac{-2(\alpha+1)}{q-1}} t^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}}$$

$$\text{d'après (2.5)} \ = 2^{\frac{-2(\alpha+1)}{q-1}} t^{\frac{-(\alpha+1)}{q-1}} \frac{1}{\lambda_c} V_c \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}} \right)$$

$$\text{d'après (2.8)} \ \geq 2^{\frac{-2(\alpha+1)}{q-1}} \frac{c}{c_\alpha} \frac{1}{\lambda_c} u(x,t).$$

3 Singularités éliminables

Théorème 3.1 *Soit $u \in C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times (0,T)\right) \cap C\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\backslash\{(O,0)\}\right)$ une solution de (1.1) dans $\mathbb{R}^N \times (0,T)$ et satisfait $u(x,0) = 0$ dans $\mathbb{R}^N\backslash\{O\}$. Si $q \geq q_{\alpha,N}$, avec $\alpha > -1$, alors on peut étendre u à un élément dans $C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\right)$.*

Preuve
Etape 1. Soit $\rho > 0$. On affirme que

$$\int_0^T \int_{B(O,\rho)} t^\alpha u^q(x,t)dxdt < \infty.$$

On a $u(x,t) \leq k\left(|x|^2 + t\right)^{\frac{-(1+\alpha)}{q-1}}$, pour $|x| < \rho$ et $t \in (0,T)$. Puisque $q \geq q_{\alpha,N}$ alors $u(x,t) \leq k'\left(|x|^2 + t\right)^{\frac{-N}{2}}$, pour $|x| < \rho$ et $t \in (0,T)$ avec $k' = k\left(\rho^2 + T\right)^{\frac{N - \frac{2(1+\alpha)}{q-1}}{2}}$. D'où

$$\int_0^T \int_{B(O,\rho)} u(x,t)dxdt < \infty.$$

Soit $\xi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T[\right)$ tel que $0 \leq \xi \leq 1$ et $\xi = 1$ sur $B(O,\rho) \times [0, \frac{T}{2}]$. Soit $\eta \in C^\infty\left([0,\infty)\right)$ une fonction de troncature telque $\eta' \geq 0$, $\eta(t) = 1$ sur $[2,\infty)$ et $\eta(t) = 0$ sur $[0,1]$. On pose $\eta_n(t) = \eta(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et on prend $\phi_n(x,t) = \eta_n\left(|x|^2 + t\right)\xi(x,t)$ comme fonction test. Alors

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(-u\partial_t\phi_n - u\Delta\phi_n + t^\alpha u^q \phi_n\right) dxdt = 0,$$

et

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha u^q \phi_n dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(u\partial_t\phi_n + u\Delta\phi_n\right) dxdt.$$

On définit l'ensemble

$$D_n = \{(x,t) : n^{-1} \leq |x|^2 + t \leq 2n^{-1}\}.$$

Puisque

$$\partial_t\phi_n = \eta_n'\xi + \eta_n\partial_t\xi,$$

$$\Delta\phi_n = \xi\Delta\eta_n + 2\nabla\eta_n.\nabla\xi + \eta_n\Delta\xi,$$

on a

$$|\partial_t\phi_n| \leq C\left((n+1)\chi_{D_n} + \chi_{D_n^c}\right)$$

et

$$|\Delta\phi_n| \leq C\left((n+1)\chi_{D_n} + \chi_{D_n^c}\right),$$

pour une constante $C > 0$. D'où

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha u^q \phi_n dxdt \leq Cn \int\int_{D_n} udxdt + C.$$

Or

$$\int\int_{D_n} udxdt \leq C \int\int_{D_n} \left(|x|^2 + t\right)^{\frac{-N}{2}} \leq Cn^{\frac{N}{2}} |D_n| = \frac{C}{n} |D_1|.$$

Alors $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} t^\alpha u^q \phi_n dxdt$ reste bornée quand $n \to \infty$ et donc

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \phi_n t^\alpha u^q(x,t) dxdt < \infty.$$

Etape 2. On affirme que u est une solution au sens de distributions dans $\mathbb{R}^N \times [0,T)$. Si $\xi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\right)$ et $\phi_n(x,t) = \eta_n\left(|x|^2 + t\right)\xi(x,t)$ alors

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \left(-u\partial_t \phi_n - u\Delta\phi_n + t^\alpha u^q \phi_n\right) dxdt = 0.$$

Il faut vérifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\partial_t \eta_n \xi = \lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\eta_n \xi = \lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\nabla\eta_n \nabla\xi = 0.$$

On a

$$\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\partial_t \eta_n \xi\right| \leq Cn \int\int_{D_n} u,$$

$$\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\Delta\eta_n \xi\right| \leq Cn \int\int_{D_n} u$$

et

$$\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u\nabla\eta_n \nabla\xi\right| \leq C\sqrt{n} \int\int_{D_n} u.$$

Par Hölder, on a

$$\int\int_{D_n} u = \int\int_{D_n} t^{\frac{\alpha}{q}} u t^{\frac{-\alpha}{q}} \leq \left(\int\int_{D_n} t^\alpha u^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\int_{D_n} t^{\frac{-\alpha q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Pour l'estimation de $\int\int_{D_n} udxdt$, on considère les deux cas $-1 < \alpha < 0$ et $\alpha \geq 0$.
Cas où $-1 < \alpha < 0$.
On a

$$\frac{-\alpha q'}{q} = \frac{-\alpha}{q-1} > 0.$$

Sur D_n, on a

$$|x|^2 + t \leq \frac{2}{n} \Rightarrow t \leq \frac{2}{n} - |x|^2 \leq \frac{2}{n},$$

et

$$t^{\frac{-\alpha}{q-1}} \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{-\alpha}{q-1}}.$$

Donc

$$\left(\int\int_{D_n} t^{\frac{-\alpha q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\int\int_{D_n} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{-\alpha}{q-1}}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq \frac{C'}{n^{\frac{-\alpha}{(q-1)q'}}} |D_n|^{\frac{1}{q'}} \leq \frac{C'}{n^{\frac{-\alpha}{(q-1)q'}}} \left(\frac{C}{n^{\frac{N}{2}+1}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

En plus, on a

$$\frac{-\alpha}{(q-1)q'} + \frac{N+2}{2q'} \geq 1.$$

En fait,

$$\frac{-\alpha}{(q-1)q'} + \frac{N+2}{2q'} - 1 = \frac{-\alpha}{q} + \frac{(q-1)(N+2)}{2q} - 1 = \frac{Nq - 2\alpha - N - 2}{2q} \geq 0,$$

puisque $Nq \geq N + 2 + 2\alpha$. Alors

$$\int\int_{D_n} u \leq \left(\int\int_{D_n} t^\alpha u^q\right)^{\frac{1}{q}} \frac{C''}{n^{\frac{-\alpha}{(q-1)q'} + \frac{N+2}{2q'}}}$$

et

$$n \int\int_{D_n} u \leq C'' \left(\int\int_{D_n} t^\alpha u^q\right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \text{ par l'étape 1.}$$

Cas où $\alpha \geq 0$.
On a $\frac{-\alpha}{q} \leq 0$. On a

$$\int\int_{D_n} u = \int\int_{D_n} T^{\frac{\alpha}{q}} u T^{\frac{-\alpha}{q}} \leq \int\int_{D_n} T^{\frac{\alpha}{q}} u t^{\frac{-\alpha}{q}} =$$

$$\int_{D_n} T^{\frac{\alpha}{q}} u t^{\frac{-\alpha}{q}} t^{\frac{-\alpha}{q}} t^{\frac{\alpha}{q}} t^{\frac{2}{q}} t^{\frac{-2}{q}} \leq$$

$$\int_{D_n} T^{\frac{\alpha}{q}} u T^{\frac{2}{q}} t^{\frac{\alpha}{q}} t^{\frac{-(2\alpha+2)}{q}} \leq C_{T,N,q,\alpha} \left(\int\int_{D_n} t^\alpha u^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\int_{D_n} t^{\frac{-(2\alpha+2)q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Or

$$t^{\frac{-(2\alpha+2)q'}{q}} = t^{\frac{-(2\alpha+2)}{q-1}},$$

et la fonction $t \to t^{\frac{-(2\alpha+2)}{q-1}}$ est localement intégrable sur $(0,T)$. Alors,

$$\left(\int\int_{D_n} t^{\frac{-(2\alpha+2)q'}{q}}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq C' \left|D_{k,x}\right|^{\frac{1}{q'}} \leq C' \left(\frac{C}{n^{\frac{N+2}{2}}}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Et

$$\int\int_{D_n} u \leq \left(\int\int_{D_n} t^{\alpha}u^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{C''}{n^{\frac{N+2}{2q'}}}.$$

On a $\frac{\frac{N+2}{2}}{q'} \geq 1$. En fait,

$$\frac{N+2}{2q'} - 1 = \frac{(N+2)(q-1)}{2q} - 1 = \frac{Nq-N-2}{2q} \geq 0,$$

car $\alpha \geq 0$ et $Nq \geq N+2+2\alpha$. Alors

$$n\int\int_{D_n} u \leq C'' \left(\int\int_{D_n} t^{\alpha}u^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \text{ par l'étape 1.}$$

Etape 3. Fin de la preuve.
On pose $M = \max\limits_{\partial B(O,\rho)\times[0,T]} u(x,t) + 1$ et on définit $\tilde{u}$ par

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x,t) & \text{si} \quad t > 0, \\ \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

$\tilde{u}$ satisfait $\partial_t\tilde{u} - \Delta\tilde{u} + t^{\alpha}\tilde{u}^{q} = 0$ au sens de distributions dans $\mathbb{R}^N \times (-T,T)$. Donc on a

$$\partial_t \left(\tilde{u} - M\right)^{+} - \Delta \left(\tilde{u} - M\right)^{+} \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times (-T,T)$$

et $(\tilde{u}-M)^{+} = 0$ au voisinage de $\mathbb{R}^{N-1} \times (-T,T) \cup \mathbb{R}^N \times \{-T\}$. Alors par le principe de comparaison $(\tilde{u}-M)^{+} = 0$ et $u \leq M$. On pose $M' = \min\limits_{\partial B(O,\rho)\times[0,T]} u(x,t) + 1$. Donc on a

$$\partial_t \left(M' - \tilde{u}\right)^{+} - \Delta \left(M' - \tilde{u}\right)^{+} \leq 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \times (-T,T)$$

et $(M'-\tilde{u})^{+} = 0$ au voisinage de $\mathbb{R}^{N-1} \times (-T,T) \cup \mathbb{R}^N \times \{-T\}$. Alors par le principe de comparaison $(M'-\tilde{u})^{+} = 0$ et $u \geq M'$. Donc par la théorie de la régularité des solutions d'équations paraboliques, u est une solution forte et peut être étendue par continuité à une fonction qui est $C^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times [0,T)\right)$.

4 Solution très singulière

Proposition 4.1 *Soit $\mathcal{E}'_\lambda$ l'ensemble de V appartenant à $H^1_K \cap L^{q+1}_K$ satisfaisant*

$$K^{-1}div(K\nabla V) + \lambda V - V^q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^N \tag{4.1}$$

($q > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$). Alors on a :

1. *Si $\lambda \leq \frac{N}{2}$, $\mathcal{E}'_\lambda$ est réduit à la fonction nulle.*
2. *Si $\frac{N}{2} < \lambda \leq \frac{N+1}{2}$, $\mathcal{E}'_\lambda$ contient deux éléments : la fonction nulle, et V où V est la solution unique de (1.9) appartenant à $H^1_K \cap L^{q+1}_K$.*
3. *Si $\lambda > \frac{N+1}{2}$, $\mathcal{E}'_\lambda$ contient les deux éléments précédents et un nombre fini de solutions positives variantes sous O(N).*

Preuve
La preuve est la même que celle de Moutoussamy-Véron [7].

Bibliographie

[1] H. Brezis, L. A. Peletier, and D. Terman. A very singular solution of the heat equation with absorption. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 95(3) :185–209, 1986.

[2] H. Brezis and A. Friedman. Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 62(1) :73–97, 1983.

[3] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Partial differential equations, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.

[4] M. Escobedo and O. Kavian. Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation. *Nonlinear Anal.*, 11(10) :1103–1133, 1987.

[5] S. Kamin and L. A. Peletier. Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 12(3) :393–408, 1985.

[6] M. Marcus and L. Véron. Initial trace of positive solutions of some nonlinear parabolic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 24(7-8) :1445–1499, 1999.

[7] I. Moutoussamy and L. Véron. Isolated singularities and asymptotic behaviour of the solutions of a semi-linear heat equation. *Asymptotic Anal.*, 9(3) :259–289, 1994.

[8] L. Véron. Singularities of some quasilinear equations. In *Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, II (Berkeley, CA, 1986)*, volume 13 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 333–365. Springer, New York, 1988.

[9] L. Véron. Geometric invariance of singular solutions of some nonlinear partial differential equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 38(1) :75–100, 1989.

Chapitre 6

Singularités isolées

Dans ce chapitre, on étudie les singularités isolées des solutions des équations :

1. $u_t - \Delta u + x_1^{2\alpha} u^q = 0$ dans le domaine $\mathcal{E} = \Big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\Big\}$, avec $u(0, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1} \backslash \{O\}$, et $u(x_1, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0$.
2. $u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^{p} x_i^{2\alpha} u^q = 0$, $2 \leq p \leq N$, dans le domaine $\mathcal{G} = \Big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{N-p}, t \in \mathbb{R}^+\Big\}$, avec $u(0, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_{p+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-p} \backslash \{O\}, t > 0$, et $u(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}_+^p$.

1 Introduction

Ce chapitre est constitué de deux sections. Dans toutes les parties, on prend $q > 1$ et $\alpha > -1$. Dans la première section, on étudie les singularités isolées dans le demi-espace du problème

$$u_t - \Delta u + x_1^{2\alpha} u^q = 0, \tag{1.1}$$

dans le domaine $\mathcal{E} = \Big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\Big\}$, avec

$$u(0, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1} \backslash \{O\}, \tag{1.2}$$

$$u(x_1, x', 0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0. \tag{1.3}$$

La seconde section est une généralisation de la section précédente. On étudie le problème suivant :

$$u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^{p} x_i^{2\alpha} u^q = 0,\ 2 \leq p \leq N \tag{1.4}$$

dans le domaine $\mathcal{G} = \Big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{N-p}, t \in \mathbb{R}^+\Big\}$, avec

$$u(0, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_{p+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-p} \backslash \left\{O\right\}, \tag{1.5}$$

$$u(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}_+^p. \tag{1.6}$$

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times (0, \infty)$, on pose

$$\eta = \frac{x}{\sqrt{t}} \text{ et } \tau = -\ln t.$$

Alors l'application $(x,t) \to (\eta, \tau)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Soit une fonction réelle v dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, on note Sv la fonction donnée par

$$(Sv)(\eta, \tau) = t^{\frac{1+\alpha}{q-1}} v(x,t), \forall (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

avec $q > 1$ et $\alpha > -1$. Si Sv est indépendante de τ alors on dit que v est autosimilaire. Si u est une solution de (1.1) dans $\mathcal{E}$ alors $w = Su$ satisfait

$$-w_\tau - \Delta w - \frac{1}{2}\eta.\nabla w - \frac{\alpha+1}{q-1} w + \eta_1^{2\alpha} w^q = 0$$

dans $\mathcal{E}* = \Big\{(\eta, \tau) : \eta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, \tau \in \mathbb{R}\Big\}$. Soit $K(\eta) = \exp^{\frac{|\eta|^2}{4}}$, cette équation peut s'écrire sous la forme

$$-w_\tau - K^{-1} div(K \nabla w) - \frac{\alpha+1}{q-1} w + \eta_1^{2\alpha} w^q = 0. \tag{1.7}$$

En particulier si u est une solution autosimilaire, alors w satisfait

$$-K^{-1}div(K\nabla w) - \frac{\alpha+1}{q-1}w + \eta_1^{2\alpha}w^q = 0. \tag{1.8}$$

Si en plus, $u \in C(\overline{\mathcal{E}}\backslash O)$ et satisfait (1.2) et (1.3) alors $w = Su$ est une solution de (1.8) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$ avec

$$w\,(0, \eta_2, ..., \eta_N) = 0 \text{ et } \lim_{|\eta|\to\infty} |\eta|^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1}} w(\eta) = 0. \tag{1.9}$$

On pose $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$. Si γ est une fonction continue, positive dans $\mathcal{A}$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $W_\gamma^{m,2}(\mathcal{A})$ l'espace de Sobolev avec le poids γ,

$$W_\gamma^{m,2}(\mathcal{A}) = \Big\{\varphi \in W_{loc}^{m,2}(\mathcal{A}) : \int_{\mathcal{A}} |D^\alpha\varphi|^2\gamma(\eta)d\eta < \infty, \forall\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leqslant m\Big\}.$$

$W_{0,\gamma}^{m,2}(\mathcal{A})$ est la fermeture de $C_0^\infty(\mathcal{A})$ dans $W_\gamma^{m,2}(\mathcal{A})$ et $L_\gamma^s(\mathcal{A})$ est un espace de Lebesgue avec un poids.
Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$ et F est une fonction positive dans $L_{loc}^\infty(\Omega)$, on pose

$$\mathrm{L}_F v = -F^{-1}div(F\nabla v), \forall v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega).$$

On considère l'opérateur L_K sur $W_{0,K}^{1,2}(\mathcal{A})$. La fonction $\psi_1 := \dfrac{\eta_1}{K}$ est une fonction propre positive avec une valeur propre $\lambda_1 = \frac{N+1}{2}$ et les dérivées de ψ_1 sont aussi des fonctions propres pour cet opérateur. Par Escobedo-Kavian [1], on a

Lemme 3 L'opérateur L_K est un isomorphisme entre $W_{0,K}^{1,2}(\mathcal{A}) \bigcap W_K^{2,2}(\mathcal{A})$ et $L_K^2(\mathcal{A})$. Les valeurs propres de L_K dans $W_{0,K}^{1,2}(\mathcal{A})$ sont $\lambda_k = \frac{N+k}{2}$, $k = 1, 2, \cdots$. L'espace propre $ker(\mathrm{L}_K - \lambda_k I)$ est engendré par $\Big\{D^\alpha\psi_1 : \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N), |\alpha| = k-1, \alpha_1 \text{ est pair }\Big\}$.
En particulier $ker\,(\mathrm{L}_K - \lambda_1 I)$ est un espace de dimension 1 engendré par ψ_1.

On rappelle un théorème établi dans le livre de Berger, Gauduchon et Mazet [4].

Théorème 1.1 *Les valeurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltarmi $-\Delta_{S^{N-1}}$ dans l'espace $W^{1,2}(S^{N-1})$ sont $\lambda_k = k\,(k+N-2)$, $k = 0, 1, 2, ...$ L'espace propre correspondant H_k est l'espace des restrictions sur S^{N-1} des polynômes harmoniques de degré k, et la dimension de H_k est*

$$d_k = \frac{(N+k-3)\,(N+k-4)\,...N\,(N-1)}{k!}\,(N+2k-2)\,.$$

Dans leur article [2], Marcus et Véron ont étudié le problème dans le cas où $\alpha = 0$ et ils ont prouvé le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Soit le problème*

$$u_t - \Delta u + u^q = 0, \tag{1.10}$$

dans le domaine $\mathcal{E} = \Big\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\Big\}$, *avec*

$$u(0,x',t) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, t > 0 \tag{1.11}$$

$$u(x_1,x',0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 \geq 0, (x_1,x') \neq (0,0). \tag{1.12}$$

1. *Si* $q \geq \frac{N+3}{N+1}$, *alors le problème n'a pas de solution dans* $C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$ *autre que la solution triviale.*
2. *Si* $1 < q < \frac{N+3}{N+1}$, *alors il existe une solution unique positive autosimilaire* $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$. *En plus* $h_s := SU_s$ *satisfait l'estimation suivante, pour tout* $m \in \left(0, \frac{1}{q-1}\right)$ *:*

$$C_m \eta_1 |\eta|^{2m-N-1} \leq \exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h_s(\eta) \leq C\eta_1 |\eta|^{\frac{2}{q-1}-N-1} \ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, \ \ |\eta| > 1$$

   où C_m *et* C *sont deux constantes positives.*
3. *La solution* U_s *est maximale dans le sens qu'elle domine toute solution* $u \in C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$.

Dans le cas elliptique, Marcus et Véron [3] ont étudié le problème

$$-\Delta u + x_1^{\alpha} u^q = 0, \tag{1.13}$$

dans le domaine $\mathcal{E}' = \Big\{x \in \mathbb{R}^N, \ \ x_1 > 0\Big\}$, avec

$$u(0,x') = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}\backslash\{O\} \tag{1.14}$$

$$u \in C\left(\overline{\mathcal{E}'}\backslash O\right).$$

Ils ont défini pour $\tau > 0$ et pour toute fonction $v \in \mathcal{E}'$ la transformation

$$S_\tau v(x) = \tau^{\frac{2+\alpha}{q-1}} v(\tau x) \ \ \forall x \in \mathcal{E}'.$$

Ils ont obtenu le théorème suivant :

Théorème 1.3

1. *Si* $q \geq \frac{N+1+\alpha}{N-1}$, *alors le problème n'a pas de solution dans* $C\left(\overline{\mathcal{E}'}\backslash O\right)$ *autre que la solution triviale.*
2. *Si* $1 < q < \frac{N+1+\alpha}{N-1}$, *alors il existe une solution unique positive autosimilaire* $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{E}'}\backslash O\right)$. *La fonction* U_s *est de la forme*

$$U_s(x) = w(\sigma)|x|^{-\frac{2+\alpha}{q-1}}, \ \ \sigma = \frac{x}{|x|},$$

   w est la solution unique du problème

$$\begin{cases} \Delta_\sigma w + \lambda w - (\sigma.e_1)^\alpha w^q &= 0 \quad sur \quad S_+^{N-1} \\ w &= 0 \quad sur \quad \partial S_+^{N-1} \end{cases}$$

avec Δ_σ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère unité,
$\lambda = \frac{2+\alpha}{q-1}\left(\frac{2+\alpha}{q-1}+2-N\right)$ *et e_1 est le vecteur unité dans la direction de l'axe x_1.*

3. *Toute solution u du problème est dominée par la fonction U_s. Alors il existe une constante C tel que*

$$|u(x)| \leq Cd\,(x,\partial\Omega)\,|x|^{-\frac{2+\alpha}{q-1}-1}.$$

Si u est une solution de (1.4) dans $\mathcal{G}$ alors $w = Su$ satisfait

$$-w_\tau - \Delta w - \frac{1}{2}\eta.\nabla w - \frac{\alpha+1}{q-1}w + \sum_{i=1}^{p}\eta_i^{2\alpha}w^q = 0$$

dans $\mathcal{G}* = \left\{(\eta,\tau) : \eta \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{N-p}, \tau \in \mathbb{R}\right\}$. Cette équation peut s'écrire sous la forme

$$-w_\tau - K^{-1}div(K\nabla w) - \frac{\alpha+1}{q-1}w + \sum_{i=1}^{p}\eta_i^{2\alpha}w^q = 0. \tag{1.15}$$

En particulier si u est une solution autosimilaire, alors w satisfait

$$-K^{-1}div(K\nabla w) - \frac{\alpha+1}{q-1}w + \sum_{i=1}^{p}\eta_i^{2\alpha}w^q = 0. \tag{1.16}$$

Si en plus, $u \in C(\overline{\mathcal{G}}\backslash O)$ et satisfait (1.5) et (1.6) alors $w = Su$ est une solution de (1.16) dans $\mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^{N-p}$ avec

$$w\left(0, \eta_{p+1,\dots,\eta_N}\right) = 0 \text{ et } \lim_{|\eta|\to\infty} |\eta|^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1}} w(\eta) = 0. \tag{1.17}$$

2 Le cas du demi-espace.

Théorème 2.1 *Soit le problème*

$$u_t - \Delta u + x_1^{2\alpha}u^q = 0, \tag{2.1}$$

dans le domaine $\mathcal{E} = \left\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, t \in \mathbb{R}^+\right\}$, avec

$$u(0,x',0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}\backslash O, \tag{2.2}$$

$$u(x_1,x',0) = 0, x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_1 > 0, \tag{2.3}$$

avec $\alpha > -1$ *et* $q > 1$. *Si* $1 < q < \frac{N+3+2\alpha}{N+1}$, *alors il existe une solution unique positive autosimilaire* $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{E}}\backslash O\right)$. *En plus* $h_s := SU_s$ *satisfait l'estimation suivante, pour tout* $m \in \left(0, \frac{1+\alpha}{q-1}\right)$ *:*

$$C_m \eta_1 |\eta|^{2m-N-1} \leq \exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h_s(\eta) \leq C \eta_1 |\eta|^{\frac{2+2\alpha}{q-1} - N - 1} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}, \ \ |\eta| > 1 \tag{2.4}$$

où C_m *et* C *sont deux constantes positives.*

La démonstration de ce théorème se base sur plusieurs lemmes qu'on va établir.

Lemme 4 Soit $R \geq 0$, on pose

$$\mathcal{A}_R = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^N : \eta_1 > 0, |\eta| > R \right\}.$$

Soit F une fonction continue dans $\overline{\mathcal{A}_R}$, positive dans $\mathcal{A}_R$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation

$$Mu := \mathrm{L}_F u - \lambda u + \eta_1^{2\alpha} u^q = 0 \tag{2.5}$$

1. On suppose que u_1 est une sous-solution faible positive de (2.5) et que u_2 est une sur-solution faible positive de (2.5) dans $W^{1,2}_{loc}(\mathcal{A}_R) \cap C\left(\overline{\mathcal{A}_R}\right)$. En plus, on suppose que $u_1 \in L^2_F(\mathcal{A}_R)$. Alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ sur } \partial\mathcal{A}_R, \lim_{|\eta|\to\infty} u_1 = \lim_{|\eta|\to\infty} u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \text{ dans } \mathcal{A}_R. \tag{2.6}$$

2. Soit $0 \leq R \leq R' < \infty$ et on pose $\mathcal{A}_{R,R'} = \mathcal{A}_R \backslash \overline{\mathcal{A}_{R'}}$. On suppose que u_1 est une sous-solution faible positive de (2.5) et que u_2 est une sur-solution faible positive de (2.5) dans $W^{1,2}_{loc}(\mathcal{A}_{R,R'}) \cap C\left(\overline{\mathcal{A}_{R,R'}}\right)$. Alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ sur } \partial\mathcal{A}_{R,R'} \Rightarrow u_1 \leq u_2 \text{ dans } \mathcal{A}_{R,R'}. \tag{2.7}$$

Preuve
Soit $\epsilon > 0$ et $\epsilon' > 0$ tel que $0 < \epsilon' < \epsilon$. On pose

$$w_1 = \frac{\left((u_1+\epsilon')^2 - (u_2+\epsilon)^2\right)_+}{u_1+\epsilon'} \text{ et } w_2 = \frac{\left((u_1+\epsilon')^2 - (u_2+\epsilon)^2\right)_+}{u_2+\epsilon}. \tag{2.8}$$

Alors w_1, $w_2 \in W^{1,2}_0(\mathcal{A}_R)$. Si on teste l'inéquation $Mu_1 \leq 0$ par w_1 et $Mu_2 \geq 0$ par w_2 et on retranche les résultats, on obtient

$$-\int_{\mathcal{A}_R} (\nabla u_1.\nabla w_1 - \nabla u_2.\nabla w_2)\, F d\eta \geq \int_{\mathcal{A}_R} (u_1^q w_1 - u_2^q w_2)\, \eta_1^{2\alpha} F d\eta$$
$$-\lambda \int_{\mathcal{A}_R} (u_1 w_1 - u_2 w_2)\, F d\eta. \tag{2.9}$$

Le support de w_1 et de w_2 est inclus dans l'ensemble $\Theta(\epsilon) = \left\{\eta \in \mathbb{R}^N_+ : u_1(\eta) > u_2(\eta) + \epsilon\right\}$ et on a $w_1 < w_2$ dans $\Theta(\epsilon)$. On a

$$\int_{\mathcal{A}_R} (\nabla u_1.\nabla w_1 - \nabla u_2.\nabla w_2)\, F d\eta$$

$$= \int_{\Theta(\epsilon)} \left[\left| \nabla u_1 - \frac{u_1+\epsilon'}{u_2+\epsilon} \nabla u_2 \right|^2 + \left| \nabla u_2 - \frac{u_2+\epsilon}{u_1+\epsilon'} \nabla u_1 \right|^2 \right] F d\eta \tag{2.10}$$

Et par le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathcal{A}_R} (u_1 w_1 - u_2 w_2)\, F d\eta = 0.$$

En fait

$$u_1 w_1 - u_2 w_2 = \left(1 - \frac{u_2}{u_2+\epsilon}\right) \left((u_1+\epsilon')^2 - (u_2+\epsilon)^2\right)_+ \le u_1^2.$$

Or $\left(1 - \frac{u_2}{u_2+\epsilon}\right) \left((u_1+\epsilon')^2 - (u_2+\epsilon)^2\right)_+$ tend vers 0 preque partout quand ϵ, $\epsilon' \to 0$ et u_1^2 est intégrable d'où le résultat. Enfin,

$$\begin{aligned} u_1^q w_1 - u_2^q w_2 &= \left(u_1^{q-1} - \frac{u_2^q}{u_2+\epsilon}\right) \left((u_1+\epsilon')^2 - (u_2+\epsilon)^2\right)_+ \\ &= \left(\left(u_1^{q-1} - u_2^{q-1}\right) + \epsilon \frac{u_2^{q-1}}{u_2+\epsilon}\right) \left((u_1+\epsilon')^2 - (u_2+\epsilon)^2\right)_+ \end{aligned}$$

qui est positive. Donc, par le lemme de Fatou,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathcal{A}_R} \eta_1^{2\alpha} \left(u_1^q w_1 - u_2^q w_2\right) F d\eta \ge \int_{\{u_1 > u_2\}} \eta_1^{2\alpha} \left(u_1^{q-1} - u_2^{q-1}\right) \left(u_1^2 - u_2^2\right) F d\eta. \tag{2.11}$$

Alors par (2.9) et (2.11),

$$\int_{\{u_1 > u_2\}} \eta_1^{2\alpha} \left(u_1^{q-1} - u_2^{q-1}\right) \left(u_1^2 - u_2^2\right) F d\eta \le 0$$

ce qui implique que $u_1 \le u_2$.

Lemme 5 L'équation

$$r z'' + \left(c_1 + \frac{r^2}{2}\right) z' + c_2 r z = 0, \quad r \in (0, \infty) \tag{2.12}$$

possède deux solutions linéairement indépendantes z_1 et z_2 avec le comportement asymptotique à l'infini suivant :

$$z_1(r) = r^{2c_2 - c_1 - 1} \exp^{\frac{-r^2}{4}} (1 + o(1)) \text{ et } z_2(r) = r^{-2c_2}(1 + o(1)). \tag{2.13}$$

La preuve de ce lemme est faite dans l'article de Marcus-Véron [2].

Théorème 2.2 *Soit* $1 < q < \frac{N+3+2\alpha}{N+1}$ *et* $\lambda = \frac{1+\alpha}{q-1}$. *Il existe une solution unique* $h \in W_{0,K}^{1,2}(\mathcal{A}) \cap L_{\eta_1^{2\alpha}K}^{q+1}(\mathcal{A})$ *du problème*

$$\mathrm{L}_K h - \lambda h + \eta_1^{2\alpha} h^q = 0 \textit{ dans } \mathcal{A} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \tag{2.14}$$

vérifiant les conditions suivantes :

$$w(0, \eta_2, ..., \eta_N) = 0 \textit{ et } \lim_{|\eta| \to \infty} |\eta|^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1}} w(\eta) = 0. \tag{2.15}$$

En plus h vérifie l'estimation (2.4). Finalement, pour tout $q > 1$, *si h est une solution de (2.14 -2.15), alors* $h \in W_{0,K}^{1,2}(\mathcal{A}) \cap L_{\eta_1^{2\alpha}K}^{q+1}(\mathcal{A})$ *et h satisfait les inégalités suivantes :*

$$\exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h(\eta) \leq C\eta_1 |\eta|^{\frac{2+2\alpha}{q-1} - N - 1} \textit{ pour tout } \eta \in \mathcal{A}, |\eta| \geq 1 \tag{2.16}$$

$$h_s(\eta) \geq C_m \eta_1 |\eta|^{2m-N-1} \leq \exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} \textit{ pour tout } \eta \in \mathcal{A}, |\eta| \geq 1. \tag{2.17}$$

Preuve
Etape 1 <u>Existence d'une sur-solution de (2.14).</u>
Soit z_1 comme dans le lemme 5 avec $c_2 = \lambda = \frac{1+\alpha}{q-1}$ et $c_1 = N - 1$. On a $\gamma = \frac{\eta_1}{|\eta|}$ est la première fonction propre et $N-1$ est la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_{S^{N-1}}$ dans $W_0^{1,2}\left(S_+^{N-1}\right)$. La fonction $U = z_1(r)\gamma$, $r = |\eta|$ est une sur-solution positive de (2.14) dans $\mathcal{A}$. En fait,

$$\mathrm{L}_K U - \lambda U + \eta_1^{2\alpha} U^q =$$

$$-\left(z_1'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{r}{2}\right) z_1' + \lambda z_1\right)\gamma - \frac{1}{r^2} z_1 \Delta_{S^{N-1}}\gamma + \eta_1^{2\alpha} U^q =$$

$$= \frac{N-1}{r^2} U + \eta_1^{2\alpha} U^q > 0.$$

Etape 2 <u>Existence d'une sous-solution de (2.14).</u>
Soit la fonction propre $\psi = K^{-1}\eta_1$ de L_K correspondante à la valeur propre $\frac{N+1}{2}$. Pour ϵ assez petit, on considère la fonction $\epsilon\psi$. Cette fonction est une sous-solution positive de (2.14) dans $\mathcal{A}$. En fait, on remarque d'abord que

$$\text{Si } q < \frac{N+3+2\alpha}{N+1} \text{ alors } \lambda = \frac{1+\alpha}{q-1} > \frac{N+1}{2}.$$

En plus on a

$$\mathrm{L}_K(\epsilon\psi) - \lambda(\epsilon\psi) + \eta_1^{2\alpha}(\epsilon\psi)^q =$$

$$\left(\frac{N+1}{2} - \lambda\right)\epsilon\psi + \eta_1^{2\alpha}\epsilon^q\psi^q =$$

$$\epsilon\psi\left(\frac{N+1}{2}-\lambda+\eta_1^{2\alpha}\epsilon^{q-1}\psi^{q-1}\right).$$

En remplaçant ψ par sa valeur, on a

$$\eta_1^{2\alpha}\epsilon^{q-1}\psi^{q-1}=\epsilon^{q-1}\eta_1^{2\alpha+q-1}\exp^{\frac{-|\eta|^2(q-1)}{4}}\leq\epsilon^{q-1}\eta_1^{2\alpha+q-1}\exp^{\frac{-\eta_1^2(q-1)}{4}}$$

qui est une quantité bornée. D'où

$$\mathrm{L}_K\left(\epsilon\psi\right)-\lambda\left(\epsilon\psi\right)+\eta_1^{2\alpha}\left(\epsilon\psi\right)^q\leq 0.$$

Etape 3 La sur-solution domine la sous-solution.
Cela se garantit par le fait que

$$U=\eta_1|\eta|^{2c_2-c_1-2}\exp^{\frac{-|\eta|^2}{4}}\ \text{ et } 2c_2-c_1-2>0.$$

Etape 4 Existence d'une solution de (2.14).
Puisque $U>\epsilon\psi$, on peut trouver une solution h de (2.14) dans $\mathcal{A}$ entre les deux fonctions U et $\epsilon\psi$.
Etape 5 Si $1<q<\frac{N+3+2\alpha}{N+1}$, la fonction h vérifie (2.16).
Soit z_1 comme dans le lemme 5 avec $c_2=\lambda=\frac{1+\alpha}{q-1}$ et $c_1=N-1$. On choisit R_0 suffisament grand de sorte que $z_1(r)>0$ pour $r>R_0$. On a que $\gamma=\frac{\eta_1}{|\eta|}$ est la première fonction propre et $N-1$ est la première valeur propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_{S^{N-1}}$ dans $W_0^{1,2}\left(S_+^{N-1}\right)$. Si $R\geqslant R_0$ alors la fonction $U=z_1(r)\gamma$, $r=|\eta|$, est une sur-solution de (2.14) dans $\mathcal{A}_R$. En fait,

$$\mathrm{L}_K U-\lambda U+\eta_1^{2\alpha}U^q=$$
$$-\left(z_1''+\left(\frac{N-1}{r}+\frac{r}{2}\right)z_1'+\lambda z_1\right)\gamma-\frac{1}{r^2}z_1\Delta_{S^{N-1}}\gamma+\eta_1^{2\alpha}U^q=$$
$$=\frac{N-1}{r^2}U+\eta_1^{2\alpha}U^q>0.$$

On choisit $C>0$ pour avoir

$$Cz_1(R_0)\gamma(\sigma)\geqslant h(R_0,\sigma)\forall\sigma\in S_+^{N-1}.$$

Alors par le lemme 4,

$$CU\geqslant h \text{ dans } \mathcal{A}_{R_0}.$$

Alors h satisfait (2.16). Et on déduit que h vérifie (2.15).
Etape 6 Pour tout $q>1$, toute solution de (2.14 -2.15) vérifie (2.16).
Soit h une solution de (2.14 -2.15). Soient z_1 et z_2 définis comme dans le lemme 5, avec $c_2=\lambda=\frac{1+\alpha}{q-1}$ et $c_1=N-1$, et on choisit R_0 suffisamment grand pour avoir $z_1(r)>0$, $z_2(r)>0$ pour $r\geq R_0$. Par l'étape 1, la fonction $U=\gamma z_1$ est une sur-solution de (2.14) dans $\mathcal{A}_{R_0}$ avec $\gamma=\frac{\eta_1}{|\eta|}$ est la première fonction propre de l'opérateur de Laplace-Beltrami

$-\Delta_{S^{N-1}}$ dans $W_0^{1,2}\left(S_+^{N-1}\right)$. En plus si z est une solution de (2.12), alors z est une sur-solution de (2.14). On choisit $C > 1$ tel que

$$Cz_1\left(R_0\right)\gamma\left(\sigma\right) \geq h\left(R_0,\sigma\right), \quad \forall\sigma \in S_+^{N-1},$$

et soit $\epsilon > 0$. Alors CU et ϵz_2 sont deux sur-solutions de (2.14) dans $\mathcal{A}_{R_0}$. D'où, la fonction $V_\epsilon = CU + \epsilon z_2$ est une sur-solution positive de (2.14) dans $\mathcal{A}_{R_0}$. Par (2.15) et (2.13), il existe $R_\epsilon > R_0$ tel que $\epsilon z_2\left(r\right) > h\left(r,\sigma\right)$ pour tout $r \geq R_\epsilon$ et tout $\sigma \in S_+^{N-1}$. Donc, si $R > R_\epsilon$, par le lemme 4,

$$V_\epsilon \geq h \text{ dans } \left\{\eta \in \mathbb{R}^N : \eta_1 > 0, R > |\eta| > R_0\right\}.$$

Et donc $V_\epsilon \geq h$ dans $\mathcal{A}_{R_0}$. On fait tendre ϵ vers 0 et on utilise (2.13), on conclut qu'il existe une constante $C' \geq C$ tel que

$$h \leq C\gamma z_1 = C'\eta_1 r^{\frac{2(1+\alpha)}{q-1}-N-1}\exp^{\frac{-r^2}{4}} \text{ dans } \mathcal{A}_{R_0}.$$

Etape 7 La fonction $h \in W_{0,K}^{1,2}\left(\mathcal{A}\right) \cap L_{\eta_1^{2\alpha}K}^{q+1}\left(\mathcal{A}\right)$.

Par l'étape 6, si h est une solution de (2.14), alors $h \in L_{\eta_1^{2\alpha}K}^{p}\left(\mathcal{A}\right)$, pour tout $p > 1$. Il reste à démontrer que $\nabla h \in L_K^2\left(\mathcal{A}\right)$. Pour tout $\rho > 0$,

$$\int_0^\rho \int_{S_+^{N-1}} |\nabla h|^2 K d\eta = \int_0^\rho \int_{S_+^{N-1}} \left(h_r^2 + r^{-2}|\nabla_S h|^2\right) r^{N-1}\exp^{\frac{r^2}{4}} d\sigma dr$$

$$= \int_0^\rho \int_{S_+^{N-1}} \left(-\eta_1^{2\alpha}h^{q+1} + \lambda h^2\right) r^{N-1}\exp^{\frac{r^2}{4}} d\sigma dr + \int_{S_+^{N-1}} hh_r\left(\rho,\sigma\right)\rho^{N-1}\exp^{\frac{\rho^2}{4}} d\sigma.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^R \int_{S_+^{N-1}} hh_r\left(\rho,\sigma\right)\rho^{N-1}\exp^{\frac{\rho^2}{4}} d\sigma d\rho =$$

$$\frac{1}{2}h^2\left(R\right)R^{N-1}\exp^{\frac{R^2}{4}} d\sigma - \frac{1}{2}\int_0^R \int_{S_+^{N-1}} h^2\left(\rho\right)\left(\left(N-1\right)\rho^{N-2} + \frac{\rho^N}{2}\right)\exp^{\frac{\rho^2}{4}} d\sigma d\rho.$$

Par l'estimation (2.16),

$$\frac{1}{2}h^2\left(R\right)R^{N-1}\exp^{\frac{R^2}{4}} d\sigma \to 0 \text{ quand } R \to \infty$$

et

$$\frac{1}{2}\int_0^R \int_{S_+^{N-1}} h^2\left(\rho\right)\left(\left(N-1\right)\rho^{N-2} + \frac{\rho^N}{2}\right)\exp^{\frac{\rho^2}{4}} d\sigma d\rho \text{ converge quand } R \to \infty.$$

En conséquent il existe une suite R_n qui tend vers l'infini tel que

$$\int_{S_+^{N-1}} hh_r\left(R_n,\sigma\right)R_n^{N-1}\exp^{\frac{R_n^2}{4}}d\sigma \to 0.$$

On remplace ρ par R_n, on obtient

$$\int_0^\rho \int_{S_+^{N-1}} \left(-\eta_1^{2\alpha}h^{q+1}+\lambda h^2\right)r^{N-1}\exp^{\frac{r^2}{4}}d\sigma dr \text{ converge quand } n\to\infty$$

et

$$\int_{S_+^{N-1}} hh_r\left(\rho,\sigma\right)\rho^{N-1}\exp^{\frac{\rho^2}{4}}d\sigma \to 0 \text{ quand } n\to\infty.$$

On déduit alors que $\nabla h\in L_K^2\left(\mathcal{A}\right)$.
Etape 8 La solution h satisfait (2.17).
Soit $c_2>0$. Par le lemme 4, il existe une solution z_{c_2} de (2.12) avec $c_1=N-1$ tel que

$$z_{c_2}=r^{2c_2-N}\exp^{-\frac{r^2}{4}}\left(1+o(1)\right).$$

Soit $\mu>\lambda_1\left(S_+^{N-1}\right)$, il existe une solution du problème

$$\left\{\begin{array}{rcll}\Delta_{S^{N-1}}\varphi+\mu\varphi-\left(\sigma.e_1\right)^{2\alpha}\varphi^q &=& 0 & \text{sur} \quad S_+^{N-1}\\ \varphi &=& 0 & \text{sur} \quad \partial S_+^{N-1}\end{array}\right.$$

avec e_1 est le vecteur unité dans la direction de l'axe x_1. On pose $w=\varphi\left(\sigma\right)z_{c_2}\left(r\right)$. On suppose que r est suffisamment grand de sorte que $z_{c_2}\left(r\right)>0$. Alors,

$$\mathrm{L}_K w-\lambda w+\eta_1^{2\alpha}w^q=$$

$$-\left(z_{c_2}''+\left(\frac{N-1}{r}+\frac{r}{2}\right)z_{c_2}'+\lambda z_{c_2}\right)\varphi-\frac{1}{r^2}z_{c_2}\Delta_{S^{N-1}}\varphi+\eta_1^{2\alpha}w^q=$$

$$=-\varphi z_{c_2}\left(\lambda-c_2-\mu r^{-2}+\varphi^{q-1}\left(r^{-2}\left(\sigma.e_1\right)^{2\alpha}-\eta_1^{2\alpha}z_{c_2}^{q-1}\right)\right).$$

On suppose que $c_2\in(0,\lambda)$ et on conclut pour r suffisamment grand que

$$\mathrm{L}_K w-\lambda w+\eta_1^{2\alpha}w^q\le 0.$$

Alors $w=\varphi\left(\sigma\right)z_{c_2}\left(r\right)$ est une sous-solution de (2.14).
Etape 9 Unicité de la solution de (2.14).
Pour montrer l'unicité, on suppose que h' est une autre solution de (2.14). Alors pour $\epsilon>0$, $h_\epsilon'=(1+\epsilon)h'$ est une sur-solution. Et pour $0<\delta'<\delta$, on a

$$\int_{\mathcal{A}}\left(-\frac{div(K\nabla h)}{h+\delta'}+\frac{div(K\nabla h_\epsilon')}{h_\epsilon'+\delta}+\eta_1^{2\alpha}\left(\frac{h^q}{h+\delta'}-\frac{h_\epsilon'^q}{h_\epsilon'+\delta}\right)K\right)\left(\left(h+\delta'\right)^2-\left(h_\epsilon'+\delta\right)^2\right)_+d\eta$$

$$\leq \lambda \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{h}{h+\delta'} - \frac{h'_\epsilon}{h'_\epsilon+\delta} \right) \left((h+\delta')^2 - (h'_\epsilon+\delta)^2 \right)_+ d\eta.$$

On a

$$\left(\frac{h^q}{h+\delta'} - \frac{h'^q_\epsilon}{h'_\epsilon+\delta} \right) \left((h+\delta')^2 - (h'_\epsilon+\delta)^2 \right)_+ \geq 0,$$

et

$$0 \leq \left(\frac{h}{h+\delta'} - \frac{h'_\epsilon}{h'_\epsilon+\delta} \right) \left((h+\delta')^2 - (h'_\epsilon+\delta)^2 \right)_+ \leq \left((h+\delta')^2 - (h'_\epsilon+\delta)^2 \right)_+ .$$

Par le théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{\delta'\to 0} \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathcal{A}} \left(\frac{h}{h+\delta'} - \frac{h'_\epsilon}{h'_\epsilon+\delta} \right) \left((h+\delta')^2 - (h'_\epsilon+\delta)^2 \right)_+ K d\eta = 0.$$

En utilisant la formule de Green, on a

$$\int_{\mathcal{A}} \left(-\frac{div(K\nabla h)}{h+\delta'} + \frac{div(K\nabla h'_\epsilon)}{h'_\epsilon+\delta} \right) \left((h+\delta')^2 - (h'_\epsilon+\delta)^2 \right)_+ d\eta$$

$$= \int_{h\geq h'_\epsilon} \left(\left| \nabla h - \frac{h+\delta'}{h'_\epsilon+\delta} \nabla h'_\epsilon \right|^2 + \left| \nabla h'_\epsilon - \frac{h'_\epsilon+\delta}{h+\delta'} \nabla h \right|^2 \right) K d\eta \geq 0.$$

On fait tendre δ' vers 0 puis δ vers 0 et par le lemme de Fatou on a

$$\int_{h\geq h'_\epsilon} \eta_1^{2\alpha} \left(h^{q-1} - h'^{q-1}_\epsilon \right) \left(h^2 - h'^2_\epsilon \right) K d\eta \leq 0.$$

Alors $h \leq h'_\epsilon$. Puisque ϵ est arbitraire, $h \leq h'$ ensuite on inverse l'inégalité. On obtient $h = h'$.

3 Le cas du général.

Théorème 3.1 *Soit le problème*

$$u_t - \Delta u + \sum_{i=1}^{p} x_i^{2\alpha} u^q = 0, \tag{3.1}$$

avec $2 \leq p \leq N$, *dans le domaine* $\mathcal{G} = \left\{ (x,t) : x \in \mathbb{R}^p_+ \times \mathbb{R}^{N-p}, t \in \mathbb{R}^+ \right\}$ *et*

$$u(0, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_{p+1}, ..., x_N) \in \mathbb{R}^{N-p} \backslash \{O\}, t > 0, \tag{3.2}$$

$$u(x_1, ..., x_p, x_{p+1}, ..., x_N, 0) = 0, (x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p_+, \tag{3.3}$$

avec $\alpha > -1$ *et* $q > 1$. *Si* $1 < q < \frac{N+2\alpha+p+2}{N}$, *alors il existe une solution unique positive autosimilaire* $U_s \in C\left(\overline{\mathcal{G}} \backslash O\right)$.

Preuve
Etape 1 Existence d'une sur-solution de (1.16).
Soit z_1 comme dans le lemme 5 avec $c_2 = \lambda = \frac{1+\alpha}{q-1}$ et $c_1 = p\,(N+p-2)$. On prend la fonction propre $v = \frac{\eta_1\eta_2...\eta_p}{|\eta|}$ correspondante à la valeur propre $p\,(N+p-2)$ de l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_{S^{N-1}}$. La fonction $U = z_1(r)v$, $r = |\eta|$ est une sur-solution positive de (1.16) dans $\mathcal{G}$. En fait,

$$\mathrm{L}_K U - \lambda U + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} U^q =$$

$$-\left(z_1'' + \left(\frac{p\,(N+p-2)}{r} + \frac{r}{2}\right) z_1' + \lambda z_1\right) v - \frac{1}{r^2} z_1 \Delta_{S^{N-1}} v + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} U^q =$$

$$= \frac{p\,(N+p-2)}{r^2} U + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} U^q > 0.$$

Etape 2 Existence d'une sous-solution de (1.16).
Soit la fonction propre $u = K^{-1}\eta_1\eta_2...\eta_p$ de L_K correspondante à la valeur propre $(N+p)/2$. Pour ϵ assez petit, on considère la fonction ϵu. Cette fonction est une sous-solution positive de (1.16) dans $\mathcal{G}$. En fait, on remarque d'abord que

$$\text{Si } q < \frac{N+2\alpha+p+2}{N} \text{ alors } \lambda = \frac{1+\alpha}{q-1} > (N+p)/2.$$

En plus on a

$$\mathrm{L}_K\,(\epsilon u) - \lambda\,(\epsilon u) + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha}\,(\epsilon u)^q =$$

$$((N+p)/2 - \lambda)\,\epsilon u + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} \epsilon^q u^q =$$

$$\epsilon u \left((N+p)/2 - \lambda + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} \epsilon^{q-1} u^{q-1} \right).$$

On a

$$\sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} \epsilon^{q-1} u^{q-1} = \eta_1^{2\alpha} \epsilon^{q-1} u^{q-1} + \eta_2^{2\alpha} \epsilon^{q-1} u^{q-1} + ... + \eta_p^{2\alpha} \epsilon^{q-1} u^{q-1}.$$

En remplaçant u par sa valeur, on a

$$\eta_1^{2\alpha} \epsilon^{q-1} u^{q-1} = \epsilon^{q-1} \prod_{i=2}^{p} \eta_i^{q-1} \eta_1^{2\alpha+q-1} \exp^{\frac{-|\eta|^2(q-1)}{4}} \le \epsilon^{q-1} \prod_{i=2}^{p} \eta_i^{q-1} \eta_1^{2\alpha+q-1} \exp^{\frac{-\eta_1^2(q-1)}{4}}$$

qui est une quantité bornée. De même, on a

$$\eta_2^{2\alpha}\epsilon^{q-1}u^{q-1} = \epsilon^{q-1}\prod_{i=1,i\neq 2}^{p}\eta_i^{q-1}\eta_2^{2\alpha+q-1}\exp^{\frac{-|\eta|^2(q-1)}{4}} \leq \epsilon^{q-1}\prod_{i=1,i\neq 2}^{p}\eta_i^{q-1}\eta_2^{2\alpha+q-1}\exp^{\frac{-\eta_2^2(q-1)}{4}}$$

qui est une quantité bornée. D'où

$$\mathrm{L}_K(\epsilon u) - \lambda(\epsilon u) + \sum_{i=1}^{p}\eta_i^{2\alpha}(\epsilon u)^q \leq 0.$$

Etape 3 La sur-solution domine la sous-solution.
Cela se déduit du fait que

$$U = \eta_1\eta_2...\eta_N|\eta|^{2c_2-c_1-2}\exp^{\frac{-|\eta|^2}{4}} \quad \text{et } 2c_2 - c_1 - 2 > 0.$$

Etape 4 Existence d'une solution de (1.16).
Puisque $U > \epsilon u$, on peut trouver une solution h de (1.16) dans $\mathcal{G}$ entre les deux fonctions U et ϵu.
Etape 5 Unicité
On utilise la même méthode de l'étape 9 du lemme 2.2.

Lemme 6 Soit $R \geq 0$, on pose

$$\mathcal{G}_R = \Big\{\eta \in \mathbb{R}^N : \eta_1 > 0, \eta_2 > 0, ..., \eta_N > 0, |\eta| > R\Big\}.$$

Soit F une fonction continue dans $\overline{\mathcal{G}_R}$, positive dans $\mathcal{G}_R$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère l'équation

$$Mu := \mathrm{L}_F u - \lambda u + \sum_{i=1}^{p}\eta_i^{2\alpha}u^q = 0 \tag{3.4}$$

1. On suppose que u_1 est une sous-solution faible positive de (3.4) et que u_2 est une sur-solution faible positive de (3.4) dans $W_{loc}^{1,2}(\mathcal{G}_R) \cap C\left(\overline{\mathcal{G}_R}\right)$. En plus, on suppose que $u_1 \in L_F^2(\mathcal{G}_R)$. Alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ sur } \partial\mathcal{G}_R, \lim_{|\eta|\to\infty} u_1 = \lim_{|\eta|\to\infty} u_2 = 0 \Rightarrow u_1 \leq u_2 \text{ dans } \mathcal{G}_R. \tag{3.5}$$

2. Soit $0 \leq R \leq R' < \infty$ et on pose $\mathcal{G}_{R,R'} = \mathcal{G}_R \backslash \overline{\mathcal{G}_{R'}}$. On suppose que u_1 est une sous-solution faible positive de (3.4) et que u_2 est une sur-solution faible positive de (3.4) dans $W_{loc}^{1,2}(\mathcal{G}_{R,R'}) \cap C\left(\overline{\mathcal{G}_{R,R'}}\right)$. Alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ sur } \partial\mathcal{G}_{R,R'} \Rightarrow u_1 \leq u_2 \text{ dans } \mathcal{G}_{R,R'}. \tag{3.6}$$

Preuve
On suit la même méthode de la preuve du lemme 4.

Lemme 7 Si $1 < q < \frac{N+2\alpha+p+2}{N}$, la solution h de (1.16) satisfait l'inégalité suivante :

$$\exp^{\frac{|\eta|^2}{4}} h(\eta) \leqslant C\eta_1\eta_2...\eta_p|\eta|^{\frac{2+2\alpha}{q-1}-p(N+p-2)-2} \text{ pour tout } \eta \in \mathcal{G}, \ \ |\eta| \geqslant 1. \qquad (3.7)$$

Preuve
Soit z_1 comme dans le lemme 5 avec $c_2 = \lambda = \frac{1+\alpha}{q-1}$ et $c_1 = p(N+p-2)$. On choisit R_0 suffisament grand de sorte que $z_1(r) > 0$ pour $r > R_0$. On prend la fonction propre $v = \frac{\eta_1\eta_2...\eta_p}{|\eta|}$ et la valeur propre correspondante $p(N+p-2)$ de l'opérateur de Laplace-Beltrami $-\Delta_{S^{N-1}}$. Si $R \geqslant R_0$ alors la fonction $U = z_1(r)v$, $r = |\eta|$, est une sur-solution de (1.16) dans $\mathcal{G}_R$. En fait,

$$\mathrm{L}_K U - \lambda U + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} U^q =$$

$$-\left(z_1'' + \left(\frac{p(N+p-2)}{r} + \frac{r}{2}\right) z_1' + \lambda z_1\right) v - \frac{1}{r^2} z_1 \Delta_{S^{N-1}} v + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} U^q =$$

$$= \frac{p(N+p-2)}{r^2} U + \sum_{i=1}^{p} \eta_i^{2\alpha} U^q > 0.$$

On choisit $C > 0$ pour avoir

$$C z_1(R_0) v(\sigma) \geqslant h(R_0, \sigma) \forall \sigma \in \text{ la partie positive de } S_+^{N-1}.$$

Alors par le lemme 6,

$$CU \geqslant h \text{ dans } \mathcal{G}_{R_0}.$$

Alors h satisfait (3.7). Et on déduit que h vérifie (1.17).

Bibliographie

[1] M. Escobedo and O. Kavian. Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation. *Nonlinear Anal.*, 11(10) :1103–1133, 1987.

[2] M. Marcus and L. Véron. Semilinear parabolic equations with measure boundary data and isolated singularities. *J. Anal. Math.*, 85 :245–290, 2001.

[3] M. Marcus and L. Véron. The boundary trace and generalized boundary value problem for semilinear elliptic equations with coercive absorption. *Comm. Pure Appl. Math.*, 56(6) :689–731, 2003.

[4] P. Gauduchon, M. Berger and E. Mazet. Le spectre d'une variété riemannienne. *Springer-Verlag.*, 194, 1977.

Waad AL SAYED

Mesures réduites, Grandes solutions et Singularités de quelques problèmes paraboliques

Résumé. Cette thèse est constituée de trois parties. La première est consacrée à dégager les notions de “bonne mesure” et de “mesure réduite” pour deux problèmes paraboliques non linéaires. Pour chacun de ces problèmes et suite à un phénomène de relaxation, on construit une suite qui converge vers la plus “grande” sous-solution du problème donné. En plus, on cherche des “capacités universelles” et on établit des équivalences avec des mesures de Hausdorff. Dans la deuxième partie, on cherche des conditions d'existence et d'unicité de “grande solutions” pour des problèmes paraboliques dont le terme non linéaire est un terme d'absorption. Des conditions sur le bord du domaine permettent de prouver l'unicité de la solution. Dans la troisième partie, on étudie les “singularités” de deux problèmes paraboliques non linéaires.

Mots clés. Equations paraboliques, mesures de Radon, capacités, mesures de Hausdorff, solutions singulières, auto-similarité, singularités éliminables, semi-groupes de contractions, opérateur maximal monotone, critère de Wiener, singularités isolées.
1991 Mathematics Subject Classification, 35K60.

Abstract. The thesis at hand is composed of three parts. The first part is devoted to present the notions of “good measure” and “reduced measure” for two non-linear parabolic problems. For each of these problems we construct a sequence, after a relaxation phenomenon, which converges to the “greatest” sub-solution of the given problem. Moreover, we look for “universal capacities” and we establish equivalence with Hausdorff measure. In the second part, we establish existence and uniqueness conditions for “large solutions” of parabolic problems whose non-linear term is an absorption one. Some boundary conditions will permit to prove uniqueness of solutions. In the last part we study the “singularities” of two non-linear parabolic problems.

Key words. Parabolic equations, Radon measures, capacities, Hausdorff measures, singular solutions, self-similarity, removable singularities, semi-groups of contractions, maximal monotone operators, Wiener criterion, isolated singularities.
1991 Mathematics Subject Classification, 35K60.