Nancy-Université
Université Henri Poincaré

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

Toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➢ Contact SCD Nancy 1 : theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAEM
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Yannick PRIVAT

Quelques problèmes d'optimisation de formes en sciences du vivant

Thèse soutenue publiquement le 21 octobre 2008

Composition du jury

Directeur de Thèse :	Antoine Henrot	Professeur, École des Mines de Nancy
Rapporteurs :	Grégoire Allaire	Professeur, École Polytechnique
	Eric Bonnetier	Professeur, Université Joseph Fourier de Grenoble
Examinateurs :	Benjamin Mauroy	Chargé de recherches CNRS, Université Paris Diderot
	Bertrand Maury	Professeur, Université Paris Sud
	Jan Sokolowski	Professeur, Université Henri Poincaré Nancy 1
	Marius Tucsnak	Professeur, Université Henri Poincaré Nancy 1

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Au cours de ces trois années de thèse, j'ai pu compter sur l'aide et le soutien de personnes auxquelles je souhaite exprimer toute ma gratitude :

- Antoine Henrot, mon directeur de thèse. Malgré sa lourde charge de directeur de l'Institut, il s'est toujours montré extrêmement disponible et m'a guidé avec beaucoup de gentillesse, de compréhension et de professionnalisme dans ce long parcours que constitue le doctorat de Mathématiques. Il m'a également fait partager son enthousiasme pour ce passionnant domaine qu'est l'optimisation de formes, et je garderai un excellent souvenir de nos séances de travail régulières.

- Benjamin Mauroy. Même s'il n'a pas été officiellement mon co-directeur de thèse, Benjamin Mauroy a largement contribué à me former dans le domaine du numérique. Son expertise et ses connaissances impressionnantes sur la simulation numérique du poumon ont été pour moi une aide précieuse. Je suis très heureux de l'avoir rencontré au congrès de la SMAI 2007 et lui suis extrêmement reconnaissant d'avoir accepté cette collaboration.

- Grégoire Allaire et Éric Bonnetier. Je suis très fier qu'ils aient tous deux accepté de rapporter ma thèse. Je tiens à les remercier tout particulièrement pour les discussions très constructives que nous avons eues et les remarques qu'ils m'ont faites, me permettant ainsi de nettement clarifier et améliorer mon manuscrit.

- Bertrand Maury, Marius Tucsnak et Jan Sokolowski. C'est un grand honneur qu'ils me font d'accepter de faire partie de mon jury de thèse.

- Toutes les personnes travaillant à l'Institut Élie Cartan. J'ai passé avec elles trois années très agréables. Je pense tout particulièrement aux membres de l'équipe E.D.P., à Laurence, assistante dévouée de l'équipe pour sa constante bonne humeur, aux jeunes thésards Bertrand, Joseph et Pauline auxquels je souhaite bon courage pour mener à bien leurs travaux.

Je n'oublie pas non plus mes amis Alexis, Anne, Irène, Magali et Nicolas, qui me font le plaisir de se déplacer de loin pour venir assister à ma soutenance. Je n'ai qu'un mot à leur dire : Merci !

Enfin, j'ai depuis toujours pu compter sur l'affection et le soutien de ma famille. Je pense, pour ne pas les citer, à Romain, Mélanie, mes grands-parents (à ma grand-mère qui s'est éteinte cette année, que j'aurais tant souhaité voir dans l'assistance), avec une mention toute particulière pour mes parents, que je ne remercierai jamais assez.

Table des matières

Notations **1**

Introduction **3**

I À la recherche de la forme d'une dendrite... **7**

1 Le problème de la forme optimale d'une dendrite **9**

1.1 Motivations 9

1.2 Modèles mathématiques 11

1.2.1 Modélisation biologique du problème 11

1.2.2 Cas d'une dendrite connectée au soma 15

1.2.3 Cas d'une dendrite connectée à d'autres fibres 16

1.3 Présentation des problèmes d'optimisation 17

2 Analyse des EDP du modèle **21**

2.1 Recherche des solutions par la méthode de Fourier 21

2.1.1 Résolution complète de l'EDP (1.4) 21

2.1.1.1 Un résultat d'existence 21

2.1.1.2 Preuve du théorème 1.1 23

2.1.2 Résolution complète de l'EDP (1.8) 24

2.1.2.1 Un résultat d'existence 24

2.1.2.2 Preuve du théorème 1.2 25

2.1.3 Un mot sur la transformée de Laplace des solutions 26

2.2 Analyse spectrale des problèmes (1.6) et (1.10) 27

2.2.1 Quelques outils fonctionnels 27

2.2.2 Retour sur l'existence de solutions pour l'équation (1.6) 29

2.2.3 Existence des suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 32

3 Étude du premier critère : atténuation temporelle 35

3.1 Compléments d'analyse spectrale 35

3.1.1 Étude du cas $a \equiv a_0$ 35

3.1.2 Placement des valeurs propres sur la droite des réels 38

3.1.3 Estimation asymptotique 43

3.2 Minimisation de $\lambda_n(a)$ dans $\mathcal{A}_{a_0,S}$, pour $n \geq 1$ 45

3.2.1 Le cas de $\lambda_1(a)$ 46

3.2.2 Un changement de variable 46

3.2.3 Calcul de la dérivée de forme de $\lambda_n(\rho)$ 47

3.2.4 Un problème auxiliaire 49

3.2.5 Monotonie de $\lambda_2(\rho)$ par rapport à quelques paramètres 52

3.2.6 Le cas de $\lambda_n(a)$, avec $n \geq 2$ 56

3.2.7 Relaxation du problème d'optimisation 60

3.3 Minimisation de $\mu_n(a)$, pour $n \geq 1$ 61

3.3.1 Motivations 61

3.3.2 Le cas de $\mu_1(a)$ 62

3.3.3 Deux remarques 63

4 Étude du second critère : atténuation en espace 65

4.1 Minimisation de $T(a)$ dans le cas d'une fibre connectée au soma 65

4.1.1 Le résultat 65

4.1.2 Réécriture du critère T 66

4.1.3 Existence de solutions et variations du critère T_1 68

4.1.4 Preuve du théorème 4.1 71

4.2 Minimisation de $T(a)$ dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres 76

4.2.1 Le résultat 76

4.2.2 Réécriture du critère T 76

4.2.3 Preuve du théorème 4.2 77

II Quelques questions relatives à l'optimisation de la géométrie pulmonaire 81

5 Autour de la modélisation de l'arbre bronchique 83

5.1 Motivations et objectifs 83

5.1.1 L'arbre bronchique 83

5.1.2 Un peu de bibliographie... 86

5.1.3 Notre démarche en optimisation de forme 87
5.2 Les modèles utilisés 88
5.2.1 Choix du critère et du modèle 88
5.2.2 Choix des entrées et des sorties 92
5.2.3 Vers les questions et problèmes... 98

6 Quelle est la forme optimale d'un tuyau ? 99
6.1 Introduction 99
6.1.1 Un cas très simplifié 100
6.1.2 Le modèle d'écoulement 102
6.2 Formulation du problème d'optimisation de forme 103
6.2.1 Présentation du problème 103
6.2.2 Un résultat d'existence dans la classe des ouverts ayant la propriété de ε-cône 106
6.2.3 Le théorème principal 109
6.3 Étude d'un problème adjoint 109
6.3.1 Calcul de la dérivée de forme 109
6.3.2 Un résultat de symétrie pour le problème adjoint 117
6.4 Preuve du théorème principal 120
6.4.1 Condition d'optimalité du cylindre 120
6.4.2 Deux résultats intermédiaires 121
6.4.3 La preuve 124
6.5 Quelques extensions 127
6.5.1 Cas d'un écoulement de Stokes 127
6.5.2 Une propriété qualitative de l'optimum 131
6.5.3 Cas 2D 134

7 Étude numérique du critère « énergie de dissipation » 137
7.1 Mise en œuvre et présentation de l'algorithme 138
7.1.1 Quelques rappels sur la notion de Lagrangien augmenté en optimisation de forme 138
7.1.2 Mise en œuvre d'un algorithme de type gradient 143
7.1.3 Un mot sur la technique... 148
7.1.4 Zoom sur la première itération de l'algorithme du Lagrangien augmenté . 149
7.2 Quelques résultats numériques en 2 dimensions 152
7.2.1 Un cas test : optimisation d'un coude 152
7.2.2 Le cas du tube 154

7.2.3 Retour sur le problème de la modélisation de l'arbre bronchique 157
7.2.4 Optimisation de l'arbre bronchique : cas de l'expiration 160
7.2.5 Optimisation de l'arbre bronchique : cas de l'inspiration 161
7.3 Perspectives proches 164

Conclusion **165**

Bibliographie **167**

Table des figures

1 À gauche, l'exemple d'un pipeline, et à droite, une reconstruction de la forme de la trachée par imagerie médicale . . . 3

1.1 Schéma d'un neurone . . . 9

1.2 Image de fluorescence d'un neurone marqué avec trois couleurs : un marqueur présynaptique (bleu), un post-synaptique (rouge) et les récepteurs du glutamate (vert). La couleur blanche à l'extrémité des épines dendritiques indique l'accumulation de récepteurs. . . . 10

1.3 Géométrie à symétrie cylindrique . . . 11

1.4 Modélisation d'une dendrite . . . 12

1.5 Schéma électrique équivalent . . . 13

3.1 Détermination graphique des valeurs propres dans le cas où $a \equiv a_0$ (Cas d'une fibre connectée au soma) . . . 37

3.2 Représentation des fonctions propres normalisées pour $\|.\|_{a_0}$ (Cas d'une fibre connectée au soma) . . . 37

3.3 Représentation de ϕ_1 (Cas d'une fibre connectée au soma) . . . 38

3.4 Représentation des 4 premières fonctions propres (Cas d'une fibre connectée à d'autres fibres) . . . 39

3.5 Représentation réels ω_n . . . 44

3.6 Représentation du carré de la fonction propre w_2 et construction de ξ_1 et ξ_2 . . . 51

3.7 Representation des fonctions ρ_{M_1} et ρ_ε . . . 54

3.8 Representation des fonctions ρ_{M_1} et ρ_ε . . . 55

3.9 Représentation de la suite minimisante . . . 59

4.1 Profil de l'optimum . . . 74

5.1 Moulage du poumon par Ewald R. Weibel . . . 84

5.2 Quelques générations d'un arbre bronchique homogène simplifié (branches mères et filles homothétiques et coplanaires, angle entre deux plans de branchement successifs proche de 90°) . . . 85

5.3 Choix de E, Γ et S dans le cas d'un cylindre . . . 91

5.4 Un premier choix de E (en vert), Γ (en rouge) et S (en noir) dans le cas d'un arbre dichotomique (I) . . . 93
5.5 Un deuxième choix de E (en noir), Γ (en rouge) et S dans (en bleu) le cas d'un arbre dichotomique (II) . . . 93
5.6 Arbre dichotomique de deux générations soumis à un écoulement de Poiseuille . . 95

6.1 Le cylindre Ω maillé avec des tétraèdres . . . 100
6.2 Illustration de la propriété de ε-cône . . . 105
6.3 La boîte D contenant les suites minimisantes de domaines . . . 106
6.4 La tranche ω . . . 123
6.5 Le plan $\mathscr{P}_0$ et le domaine $\Omega^\star$ . . . 132
6.6 Le tube Ω . . . 135

7.1 Un exemple de géométrie maillée - cas de l'inspiration . . . 149
7.2 Résolution du problème de Navier-Stokes - $1^{\text{ère}}$ itération de l'algorithme . . . 150
7.3 Résolution du problème adjoint - $1^{\text{ère}}$ itération de l'algorithme . . . 150
7.4 Représentation de la norme euclidienne du déplacement - $1^{\text{ère}}$ itération de l'algorithme . . . 151
7.5 Représentation de $\rho \mapsto \mathcal{L}_b((I+\rho\mathbf{d_0})(\Omega_0),\mu_0)$ - $1^{\text{ère}}$ itération de l'algorithme . . . 151
7.6 L'exemple d'un coude . . . 152
7.7 Variations : du volume (à gauche) et du critère J (à droite) dans le cas d'un coude 153
7.8 Géométrie finale obtenue dans le cas d'un coude . . . 153
7.9 Une famille de domaines de même volume que le cylindre . . . 155
7.10 Graphe de $e \longmapsto \frac{J(e)-J_0}{J_0} \times 100$ . . . 155
7.11 À gauche, la représentation du déplacement $\mathbf{d_0}$, et à droite, le graphe de ϑ . . . 156
7.12 Géométrie finale obtenue dans le cas d'un tube . . . 157
7.13 À gauche, la représentation du critère J, et à droite, celle du volume . . . 157
7.14 Géométrie initiale dans le cas de la mauvaise configuration . . . 158
7.15 Géométrie finale dans le cas de la mauvaise configuration : une des branches se ferme . . . 158
7.16 La bonne configuration . . . 159
7.17 Initialisation de l'algorithme - cas de l'expiration . . . 160
7.18 À gauche, la variation du volume et à droite, la variation du critère J (Expiration) 161
7.19 La géométrie finale obtenue dans le cas de l'expiration . . . 161
7.20 Initialisation de l'algorithme - cas de l'inspiration . . . 162
7.21 À gauche, la variation du volume et à droite, la variation du critère J (Inspiration) 162
7.22 La géométrie finale obtenue dans le cas de l'inspiration . . . 163

Notations

Dans ce paragraphe, sont résumées l'ensemble des notations utilisées pour la résolution de ce problème.

I. À la recherche de la forme d'une dendrite...

$L(E)$ (E désigne un espace vectoriel normé) ensemble des applications linéaires continues de E dans E.

$\|.\|_\infty$ norme définie sur l'espace $L^\infty(0,\ell)$ par :

$$\|f\|_\infty = \inf\{M > 0 : \text{mes } (\{x \in \Omega : |f(x)| > M\}) = 0)\},$$

f désignant bien-sûr une fonction d'une variable à valeurs réelles. L'espace $C^0([0,\ell])$ sera, sauf mention contraire muni de cette norme.

$< .,. >_a$ produit scalaire défini pour f et g dans $C^0([0,\ell])$ par :

$$< f,g >_a \overset{\text{déf}}{=} Af(0)g(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

où A est une constante strictement positive fixée et $a \in W^{1,\infty}(0,\ell)$, une application uniformément minorée par un réel strictement positif.

$\|.\|_a$ norme induite par $< .,. >_a$.

$\mathcal{E}_a$ complété de $C^0([0,\ell])$ pour la norme $\|.\|_a$.

$\varphi_a(.,.)$ produit scalaire défini pour f et g dans $C^0([0,\ell])$ par :

$$\varphi_a(f,g) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

N_a norme induite par φ_a.

$\mathcal{F}_a$ complété de $C^0([0,\ell])$ pour la norme N_a.

$\left\langle \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0), h \right\rangle$ (J est une fonctionnelle de la variable ν) différentielle au sens de Gâteaux prise en ν_0 dans la direction h. C'est, sous réserve d'existence, la quantité :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\nu}(\nu_0), h \right\rangle \overset{\text{déf}}{=} \lim_{t \searrow 0} \frac{J(\nu_0 + t.h) - J(\nu_0)}{t}.$$

$\mathcal{A}_{a_0,S}$ Ensemble défini pour $a_0 > 0$, $\ell > 0$, donnés et $S > a_0\ell$ par :

$$\mathcal{A}_{a_0,S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ a \in W^{1,\infty}(0,\ell) : \forall x \in [0,\ell],\ a(x) \geq a_0 \text{ et } \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x \leq S \right\}.$$

$\mathscr{L}$ opérateur *transformée de Laplace*.

$\mathcal{M}_b(0,\ell)$ ensemble des mesures bornées de Radon sur $[0,\ell]$, c'est-à-dire ensemble des formes linéaires μ sur l'ensemble $C_c^{\mathbb{R}}([0,\ell])$ (des applications continues sur $[0,\ell]$, à support compact et à valeurs réelles), continues pour la norme uniforme sur $C_c^{\mathbb{R}}([0,\ell])$.

II. Quelques questions relatives à l'optimisation de la géométrie pulmonaire

$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ espace des applications bornées et lipschitziennes de $\mathbb{R}^N$ dans lui même. Il est muni de la norme :

$$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N),\ \|\theta\|_{1,\infty} = \|\theta\|_\infty + \sup_{\substack{(x,y)\in(\mathbb{R}^N)^2 \\ x\neq y}} \left(\frac{|\theta(x)-\theta(y)|}{|x-y|} \right)$$

$V(\Omega)$ $\{\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3 : \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma\}$.

$W_0(\Omega)$ $\big\{(\mathbf{v},q) \in (H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma\big\}$.

$Z_{\mathbf{u_0}}(\Omega)$ $\big\{(\mathbf{v},q) \in (H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega) : \mathbf{v} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } E \text{ et } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma\big\}$.

$\mathcal{U}_\varepsilon$ $\{\Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3 : \Omega \text{ a la propriété d'}\varepsilon\text{-cône}\}$;

$\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$ $\big\{\Omega \in \mathcal{U}_\varepsilon : \text{mes } (\Omega) = \pi R^2 L,\ \Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E,\ \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S,\big\}$.

$\varepsilon(\mathbf{u})$ tenseur de déformations d'un champ de vecteurs $\mathbf{u}$ défini par :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}}.$$

$\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})$ double produit contracté des deux tenseurs de déformation $\varepsilon(\mathbf{u})$ et $\varepsilon(\mathbf{v})$ défini par :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

$|\varepsilon(\mathbf{u})|^2$ $\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})$.

$\sigma(\mathbf{u},p)$ tenseur des contraintes défini par :

$$\sigma(\mathbf{u},p) \overset{\text{déf}}{=} -pI_3 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}).$$

Introduction

L'observation de la nature et la perfection de beaucoup de mécanismes liés aux êtres vivants peut nous pousser à croire qu'un **principe d'optimalité** régit ces mécanismes. Si un modèle mathématique existe pour décrire un phénomène biologique ou un composant des êtres vivants, nous pouvons être tentés de rechercher une fonctionnelle nous permettant de décrire ce principe d'optimalité.

La confrontation du modèle ainsi déterminé et de la réalité nous conduirait ainsi à valider ou invalider ce modèle. Cette méthode dite de « *modélisation inverse* » consiste à élaborer un modèle mathématique à partir d'observations de la nature et de leurs conséquences. Si la forme optimale, issue du modèle mathématique est proche de la forme réelle, nous pourrons ainsi valider à la fois le modèle et la fonctionnelle choisie. Si ce n'est pas le cas, nous pourrons par exemple tenter de l'améliorer.

Pour se faire une idée plus précise, considérons un exemple qui sera développé dans la deuxième partie de ce manuscrit : la trachée. La trachée est le tuyau élastique (fibro-cartilagineux) qui, chez les vertébrés, permet lors de l'inspiration, de conduire l'air depuis le larynx dans les bronches. Elle permet également de faire sortir l'air riche en dioxyde de carbone lors de l'expiration. Elle est une zone de conduction dans les voies aériennes inférieures.



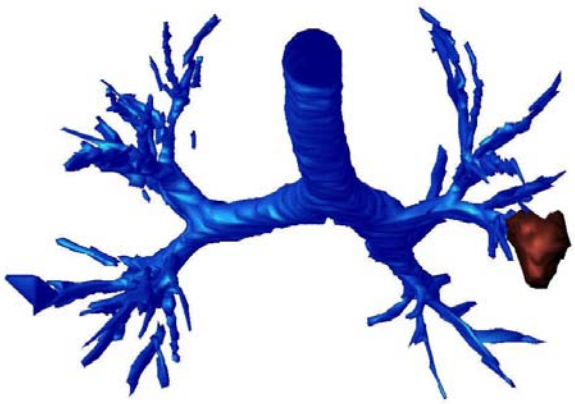

FIG. 1 – À gauche, l'exemple d'un pipeline, et à droite, une reconstruction de la forme de la trachée par imagerie médicale

On peut donc se demander si la forme de la trachée est optimale pour conduire l'air jusqu'aux bronches, ou pour extraire le dioxyde de carbone. Notons que la trachée n'est pas un cylindre. Elle présente des stries et sa forme est légèrement conique. En revanche, dans l'industrie, on utilise souvent de vrais cylindres pour conduire des fluides, comme en témoigne l'exemple du pipeline sur la figure 1. En particulier, nous étudierons de très près le cas du cylindre afin de déterminer si sa forme est celle qui minimise un critère que nous aurons préalablement sélectionné.

Une des difficultés de ce travail réside dans la modélisation mathématique et le choix du critère. Si l'on souhaite confronter les formes théoriques, obtenues en résolvant un problème d'optimisation, aux formes du vivant, et pouvoir donner du sens à cette approche, il est nécessaire d'utiliser des modèles mathématiques suffisamment précis, décrivant la fonction de l'organe étudié, mais également d'avoir une bonne intuition du critère que la nature aurait pu chercher à optimiser.

Ce manuscrit est organisé en deux parties totalement indépendantes. Dans la première, nous considérons l'exemple d'une fibre nerveuse de type dendrite. L'équation aux dérivées partielles considérée, traduisant la propagation du message électrique à travers une fibre nerveuse, est de type parabolique. Elle présente l'intérêt de faire intervenir, dans ses coefficients, une paramétrisation de la forme de la fibre nerveuse. Elle se prête donc à l'utilisation du calcul des variations. Dans la seconde partie, nous considérons l'exemple un peu plus compliqué des premières générations de l'arbre bronchique. L'équation aux dérivées partielles considérée, traduisant l'écoulement de l'air à travers les bronches est celle de Navier-Stokes stationnaire. Cette fois, nous mettons en œuvre une approche utilisant la notion de dérivée par rapport au domaine.

Afin de répondre à cette problématique, nous avons abordé ce travail par deux voies complémentaires, en menant de front une approche théorique et une approche numérique.

Voici le plan de ce manuscrit :

Première partie
À la recherche de la forme d'une dendrite...

- **Chapitre 1.**
  Dans ce chapitre, nous introduisons l'équation aux dérivées partielles (de type parabolique) traduisant la propagation de l'électricité au sein d'une fibre nerveuse, que nous avons utilisée. Nous donnons alors une écriture de la solution sous forme d'une série, puis nous formulons les problèmes d'optimisation que l'on souhaite étudier. On choisit les formes admissibles dans un ensemble de domaines à symétrie cylindrique, dont la mesure de la surface latérale est bornée (contrainte globale), et dont le rayon possède une régularité (au moins) Lipschitz. Nous ajoutons également une contrainte ponctuelle sur le rayon, en lui imposant une valeur minimale. Fort de ces hypothèses, nous nous ramenons à déterminer le rayon $a(x)$ de la fibre, et nous le cherchons dans un ensemble de contraintes $\mathcal{A}_{a_0,S}$. Les problèmes s'écrivent :

  i Minimisation de l'atténuation temporelle du signal électrique : ce problème revient à minimiser la première valeur propre d'un opérateur elliptique.

  ii Minimisation de l'atténuation en espace du signal électrique : ce problème revient à minimiser une fonction de transfert, s'écrivant sous la forme d'un quotient de valeurs moyennes par rapport au temps, du potentiel électrique entre le début et la fin de la fibre nerveuse considérée :

$$T(a) = \frac{\int_0^{+\infty} v(0,t)\mathrm{d}t}{\int_0^{+\infty} v(\ell,t)\mathrm{d}t}$$

- **Chapitre 2.**
  On vérifie dans ce chapitre que l'équation aux dérivées partielles traduisant la propagation du message électrique est bien posée, et qu'il est possible d'écrire sa solution dans une base hilbertienne de décomposition spectrale. Par ailleurs, on propose également une brève analyse des problèmes aux valeurs propres issus de cette décomposition.

- **Chapitre 3.**
  Ce chapitre est consacré à la résolution du premier problème d'optimisation, l'atténuation temporelle du message électrique. Nous considérons deux types de fibres nerveuses : celles qui sont connectées au noyau de la cellule nerveuse, appelé *soma*, et celles qui sont connectées à d'autres fibres.
  Ce problème s'écrit :
  $$\begin{cases} \inf \lambda_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases}$$
  Nous donnons de prime abord quelques compléments d'analyse spectrale, tels que le signe des valeurs propres de l'opérateur elliptique considéré. Puis, à l'aide du changement de variable $y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2(t)}$, nous nous ramenons à un problème d'optimisation plus simple, que nous formulons dans une classe d'ensembles admissibles plus larges que la classe de départ dans laquelle nous possédons un résultat d'existence. Nous l'utilisons pour démontrer, dans le cas d'une fibre connectée au soma, que la solution du problème de minimisation de l'atténuation temporelle est un cylindre, et que, dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres, ce problème n'a pas de solution.

- **Chapitre 4.**
  Ce chapitre est consacré à la résolution du second problème d'optimisation, l'atténuation en espace du message électrique. Nous étudions comme précédemment le cas des deux types de fibres nerveuses. Nous simplifions le problème et l'écriture du critère en introduisant la transformée de Laplace du signal électrique. Nous prouvons, grâce au même changement de variable que celui qui a été utilisé dans le chapitre précédent, que dans les deux cas, c'est encore le cylindre qui minimise l'atténuation en espace du signal électrique.

Deuxième partie
Quelques questions relatives à l'optimisation de la géométrie pulmonaire

- **Chapitre 5.**
  Dans ce chapitre, nous modélisons l'écoulement de l'air dans les bronches, à l'aide des équations de Navier-Stokes et nous proposons des conditions au bord raisonnables du point de vue biologique. Nous discutons d'ailleurs un peu du choix de la modélisation et de l'influence des conditions au bord dans le cadre de notre étude. Nous présentons le problème d'optimisation de forme que l'on souhaite résoudre. Le critère $J(\Omega)$ choisi est donné par :
  $$J(\Omega) = 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x,$$
  où μ désigne la viscosité du fluide, Ω le conduit dans lequel circule le fluide, $\mathbf{u}$ la vitesse du fluide, et $\varepsilon(\mathbf{u})$, le tenseur des déformations (la matrice jacobienne de $\mathbf{u}$ symétrisée). Ce critère correspond à l'énergie dissipée par le fluide, du fait de sa viscosité.

- **Chapitre 6.**
  Nous considérons un écoulement de fluide incompressible dans un tuyau cylindrique tri-dimensionnel, régi par les équations de Navier-Stokes, avec des conditions aux limites de non glissement sur la paroi latérale du cylindre, un profil de vitesse imposé à l'entrée, et une condition en sortie

exprimée à l'aide du tenseur des contraintes. Nous nous posons la question suivante : le cylindre est-il la forme optimale pour le critère « énergie dissipée par le fluide » ? Nous répondons par la négative, en explicitant la condition d'optimalité du premier ordre, à l'aide de l'état adjoint, et en montrant qu'il n'est pas possible que l'état adjoint soit solution du système surdéterminé ainsi obtenu. Nous montrons d'ailleurs que ce résultat est encore vrai en deux dimensions, mais également si l'on suppose l'écoulement régi par les équations de Stokes. De plus, nous obtenons un résultat d'existence pour le problème d'optimisation de forme considéré.

- **Chapitre 7.**
  Dans ce chapitre, nous présentons des simulations numériques du problème consistant à trouver la forme d'un domaine minimisant l'énergie dissipée par un fluide le parcourant, régi par des équations de Navier-Stokes. Nous mettons en œuvre un algorithme de Lagrangien augmenté. Nous nous faisons confirmer de prime abord le résultat théorique du chapitre 6, puis nous traitons du cas des deux premières générations de l'arbre bronchique, d'abord en expiration, puis en inspiration. Les « optimums » obtenus après convergence de l'algorithme ne sont d'ailleurs pas les mêmes dans l'un ou l'autre des cas.

Première partie

À la recherche de la forme d'une dendrite...

Chapitre 1

Le problème de la forme optimale d'une dendrite

1.1 Motivations

Nous considérons dans cette partie l'exemple d'une fibre nerveuse de type dendrite.

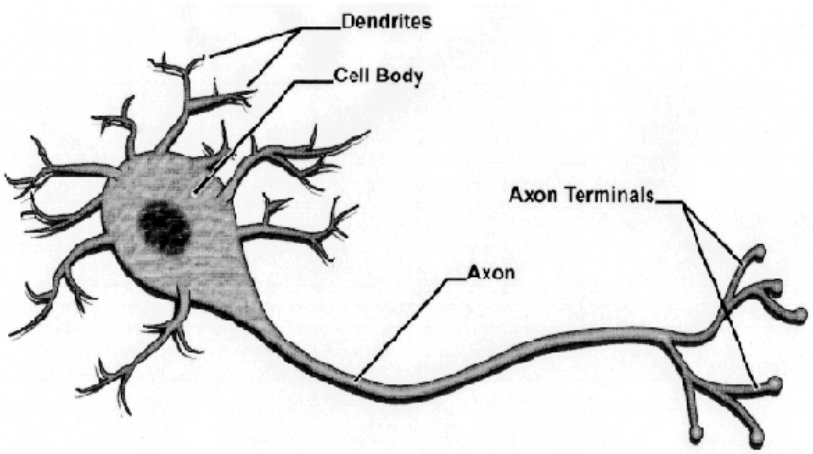

Fig. 1.1 – Schéma d'un neurone

La partie de la cellule nerveuse qui contient le noyau est appelée *soma*. Un axone est une extension de la cellule centrale du neurone qui conduit l'information sous forme d'un message électrique à l'extérieur. Les dendrites sont les portes d'entrées des neurones. Elles ne dépassent pas la longueur de 1 mm. Ce sont elles qui reçoivent les signaux émis par d'autres neurones et grâce à l'axone, le signal résultant peut être transmis à d'autres neurones.

Chaque neurone comporte à peu près une centaine de dendrites qui sont d'une certaine façon les branches du soma. Pour élaborer des connaissances dans le cerveau humain, il faut que les neurones soient connectés entre eux ; les dendrites et l'axone de chaque neurone rendent

possible la formation d'un réseau de neurones. Pour penser, pour ressentir des sensations, pour réagir rapidement, les neurones doivent constamment transmettre des influx nerveux qui sont les messages électriques et biochimiques du corps. Lorsqu'on doit agir rapidement - lorsqu'on se fait piquer par exemple - pour qu'une réaction réflexe ait lieu, l'influx nerveux émis par le cerveau doit voyager à l'intérieur des neurones moteurs. Ils partent des dendrites, se rendent au corps cellulaire, puis sortent par l'axone recouvert de myéline. Ces neurones constituent la substance blanche du cerveau.

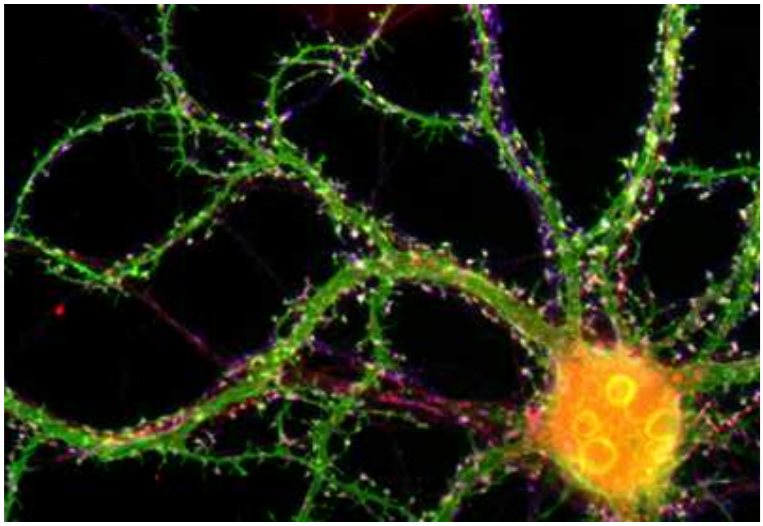

FIG. 1.2 – Image de fluorescence d'un neurone marqué avec trois couleurs : un marqueur pré-synaptique (bleu), un post-synaptique (rouge) et les récepteurs du glutamate (vert). La couleur blanche à l'extrémité des épines dendritiques indique l'accumulation de récepteurs.

Nous sommes donc tentés d'étudier le problème de modélisation inverse suivant : sachant que la fonction d'une dendrite consiste à transmettre un message électrique, peut-on imaginer un critère dépendant exclusivement de la géométrie de la fibre, que la nature pourraît chercher à optimiser ?

Nous proposerons dans notre étude deux pistes :

i **Atténuation en temps.**

La nature pourrait chercher à ce que le message électrique soit le moins atténué possible au cours du temps. Nous montrerons que dans ce cas, la solution du problème d'optimisation n'est pas toujours réaliste. En particulier, dans le chapitre 3, nous exhiberons des suite minimisantes des rayons de la fibre (supposée à symétrie cylindrique) pour ce problème d'optimisation présentant des oscillations à l'entrée et la sortie de la fibre.

ii **Atténuation en espace.**

La nature pourrait également chercher à minimiser l'atténuation du message électrique entre le début et la fin de la fibre. Nous montrerons que, dans ce cas, la forme géométrique minimisant ce critère est le cylindre.

Afin de réaliser une étude la plus complète possible, nous envisagerons deux types de modèles : la cas d'une fibre connectée au soma, puis le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres.

1.2 Modèles mathématiques

1.2.1 Modélisation biologique du problème

La propagation d'une impulsion électrique dans une dendrite connectée au *soma* suit une équation établie par W. Rall dans les années 60 (cf. [51], [53], [15]). Les axones et les dendrites sont de fins tubes à symétrie cylindrique. Les biologistes les modélisent souvent par des cylindres. Bien évidemment, nous n'émettrons pas cette hypothèse puisque l'objectif de ce travail consiste justement à discuter ce choix. On va utiliser un modèle de type *cable*.

On considère donc une portion de fibre nerveuse, à symétrie cylindrique, et dont la longueur est grande par rapport à son diamètre. On appelle ℓ, la longueur de cette fibre.

On désigne enfin par $a(x)$ le rayon de cette fibre donné en chaque abscisse $x \in [0, \ell]$ de son axe de révolution (voir figure ci-dessous) :

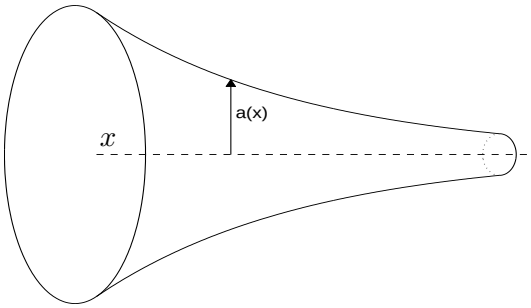

Fig. 1.3 – Géométrie à symétrie cylindrique

On introduit les constantes physiques suivantes :
- R_a désigne la résistance axiale (kΩcm) du cytoplasme (ou résistivité spécifique intracellulaire) ;
- C_m désigne la capacité de la membrane par unité d'aire (μF/cm^2) ;
- G_m désigne la conductance de la membrane par unité d'aire (mS/cm^2) ;

Sous les hypothèses précédentes, on peut supposer ces grandeurs uniformes pour la fibre considérée.

Le principe d'une équation de type *cable* est d'identifier l'activité électrique de la dendrite à celle d'un circuit électrique. On introduit :

- v_i : potentiel intracellulaire de la membrane ;
- v_e : potentiel extracellulaire de la membrane ;
- $v = v_i - v_e - E_r$: différence de potentiel de la membrane par rapport à l'état au repos ;
- i_i : courant intracellulaire de la membrane.

Bien sûr, toutes les quantités introduites ci-dessus sont des fonctions de la variable d'espace x et de la variable temps t.

Pour se donner une idée de la façon dont les biologistes ont établi l'équation aux dérivées partielles régissant la potentiel de membrane, on a représenté ci-après une portion de conducteur, de longueur $\Delta x = x_2 - x_1$.
On appelle r_i, la résistance intracellulaire par unité de longueur de la membrane (en Ω/cm). On a supposé précédemment la résistivité spécifique intracellulaire constante pour la fibre. Or, R_a

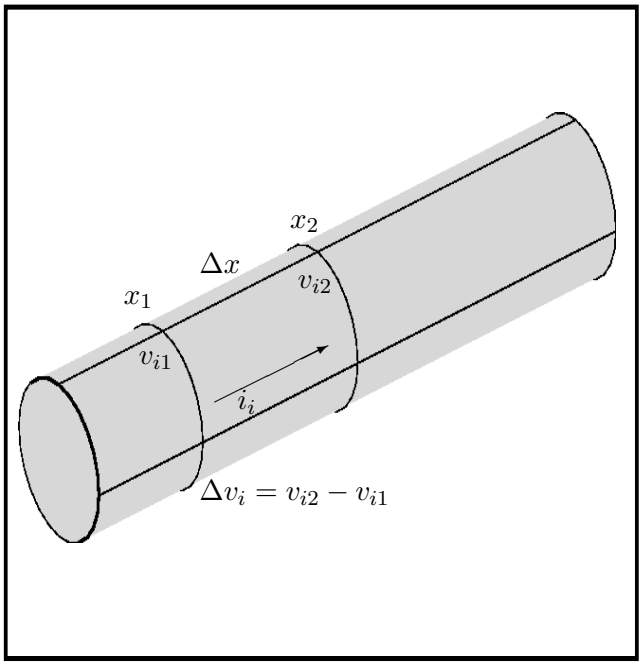

FIG. 1.4 – Modélisation d'une dendrite

s'obtient comme le produit de r_i par l'aire de la section de la fibre, donc :

$$r_i = \frac{R_a}{\pi a^2(x)}.$$

L'application de la loi d'Ohm fournit :

$$i_i r_i \Delta x = -\Delta v_i.$$

En choisissant une perturbation infinitésimale de x (de sorte que Δx soit très proche de zéro), on écrit que :

$$\frac{\Delta v_i}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\simeq} \frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

Par conséquent, la loi d'Ohm se réécrit :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{R_a}{\pi a^2(x)} i_i. \tag{1.1}$$

Remarquons d'ailleurs que seul le potentiel v_i est une fonction de x et de t, et non v_e et E_r (potentiel de membrane au repos). Par conséquent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_i}{\partial x}.$$

Pour obtenir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par v, il nous reste à faire disparaître le terme d'intensité i_i dans l'équation (1.1). Pour cela, on la dérive par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2 \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{R_a}{\pi} i_m, \text{ où } i_m = -\frac{\partial i_i}{\partial x}. \tag{1.2}$$

La quantité i_m est appelée « densité de courant de membrane » (en A/cm). i_m peut s'exprimer en fonction de v, en utilisant la loi de nœuds en électricité, et le schéma électrique équivalent de la fibre nerveuse. Il s'agit du schéma 1.5 représenté ci-dessous.
Précisons les notations utilisées :

- c_m : capacité de la membrane par unité de longueur (en F/cm) ;
  On peut faire le lien avec la capacité de la membrane par unité d'aire. Un raisonnement un peu heuristique de géométrie différentielle nous permet d'affirmer que l'aire latérale d'une section de la surface à symétrie cylindrique considérée, d'épaisseur infinitésimale dx, est donnée par la formule $2\pi a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x$. Par conséquent, on a la relation suivante entre les quantités c_m et C_m (qui est, rappelons-le, constante) :
  $$c_m = 2\pi C_m a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}.$$
- $r_m = \frac{1}{g_m}$, où g_m est la conductance de la membrane par unité de longueur (en S/cm) ;
- G_m : conductance de la membrane par unité d'aire (en S/cm^2) ;
  De même que précédemment, on a le lien suivant entre G_m et g_m :
  $$g_m = \frac{1}{r_m} = 2\pi G_m a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}.$$

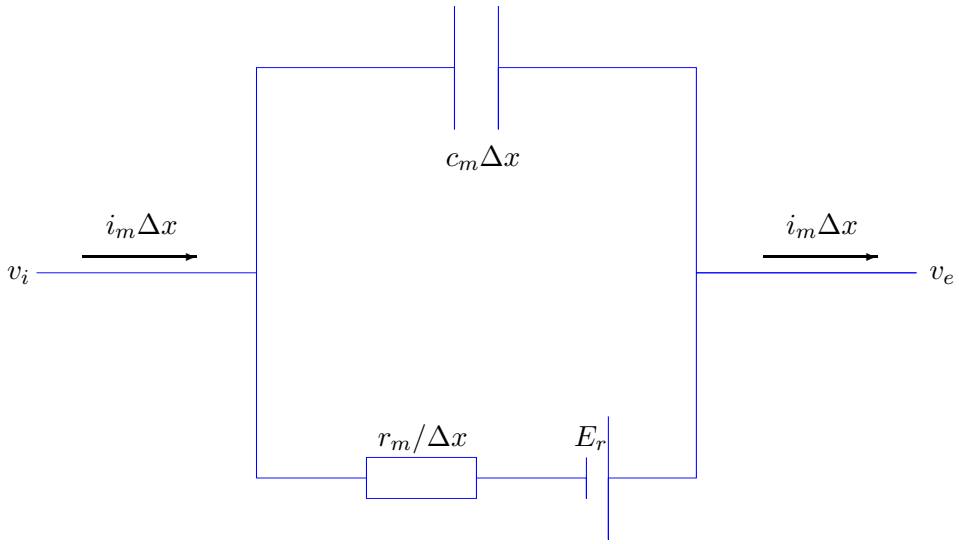

FIG. 1.5 – Schéma électrique équivalent

À l'aide de ce schéma, on applique les lois de Kirchhoff (ou loi de nœuds dans ce cas), traduisant la conservation de la charge dans un circuit électrique. L'intensité traversant le condensateur est donnée par $c_m\frac{\partial v}{\partial t}$, tandis que celle qui traverse le conducteur ohmique est donnée par $\frac{v}{r_m}$. La loi des nœuds affirme alors que :
$$i_m = c_m\frac{\partial v}{\partial t} + g_m v.$$
Enfin, puisque nous connaissons l'expression des quantités c_m et g_m en fonction de la variable d'espace x, on en déduit d'après (1.2) que :
$$\frac{1}{2R_a}\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial v}{\partial x}\right) = a\sqrt{1+a'^2}\left(C_m\frac{\partial v}{\partial t} + G_m v\right). \tag{1.3}$$
Intéressons-nous aux conditions au bord.

- Dans le cas d'une dendrite connectée à d'autres dendrites, on a une classique condition au bord de type Neumann, ce qui garantit un recollement régulier. La condition s'écrit donc (par exemple en $x = \ell$) :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\ell, t) = 0, \ \forall t \geq 0.$$

- Dans le cas d'une dendrite connectée au soma, la condition au bord (en $x = 0$) traduit la conservation de la charge. C'est donc comme précédemment la loi des nœuds en électricité qu'il convient d'utiliser. Ainsi, si l'on désigne par G_s la conductance du soma, et si l'on suppose que la capacité du soma par unité d'aire est encore C_m (hypothèse physiquement acceptable), la conservation de la charge en $x = 0$ nous permet d'écrire que :

$$\frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = A_s \left(C_m \frac{\partial v}{\partial t}(0, t) + G_s v(0, t) \right) - i_0(t),$$

  où A_s désigne la surface latérale du soma.
  C'est exactement le même principe que pour l'établissement de l'équation aux dérivées partielles principales.

À présent que la question de la modélisation est réglée, nous allons examiner de plus près chacun des deux cas suivants :
- le cas d'une dendrite connectée au soma et à une autre fibre ;
- le cas d'une dendrite uniquement connectée à d'autres fibres.

Remarque 1.1. *Les modèles mathématiques présentés dans cette section dérivent d'un modèle très général établi par Hodgkin et Huxley dans les années 50 (voir [33]). Dans un premier temps, les deux modélisateurs ont cherché à trouver des similitudes entre le fonctionnement des fibres nerveuses liées à l'activité cérébrale et des circuits électriques, ce qui les a amenés, comme c'est le cas dans le modèle que l'on considère ici, à établir des équations aux dérivées partielles paraboliques.Cependant, à cette époque, ils ne disposaient bien-sûr pas encore des outils de résolution numérique que nous utilisons de nos jours. Étant dans l'impossibilité de résoudre l'équation aux dérivées partielles parabolique, et ayant remarqué dans leurs expériences que le potentiel d'action dans les fibres nerveuses se propage un peu à la façon d'une onde, ils ont établi une autre équation aux dérivées partielles, de type hyperbolique cette fois, susceptible de traduire la propagation du potentiel électrique le long d'une fibre, et dont les manipulations mathématiques se sont avérées plus simples dans ce cas particulier.*

De nos jours, on trouve encore des références récentes aux deux modèles dans la Littérature (voir par exemple [52], [53], [34]). L'un des avantages du modèle parabolique considéré ici est qu'il se prête bien aux techniques de calcul des variations, puisque la forme de la fibre, décrite par la fonction $x \mapsto a(x)$, intervient explicitement dans les coefficients de l'équation aux dérivées partielles.

La résolution de ces problèmes de vulgarisation a fait l'objet d'un article de vulgarisation dans le mensuel *La recherche* (voir [48]).

1.2.2 Cas d'une dendrite connectée au soma

Résumons-nous : d'après le paragraphe précédent, dans le cas d'une dendrite connectée au soma, l'équation aux dérivées partielles régissant le potentiel de membrane v est :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial v}{\partial x}\right) = a\sqrt{1+a'^2}\left(C_m\frac{\partial v}{\partial t} + G_m v\right) & (x,t)\in(0,\ell)\times]0;+\infty[\\ \frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = A_s\left(C_m\frac{\partial v}{\partial t}(0,t) + G_s v(0,t)\right) - i_0(t) & t>0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\ell,t) = 0 & t>0 \\ v(x,0) = 0 & x\in(0,\ell). \end{cases} \tag{1.4}$$

où

- on considère une fibre à symétrie cylindrique de longueur ℓ donnée et rayon $a(x)$;
- on fait l'hypothèse qu'aucun courant ne circule au temps $t = 0$. C'est pourquoi $v(x,0) = 0,\ \forall x \in (0,\ell)$.
- $i_0(t)$ désigne le courant axial à l'instant t au point $x = 0$;
- $v(x,t)$ désigne la différence de potentiel de la membrane par rapport à l'état au repos au point x et à l'instant t.
- R_a désigne la résistance axiale ($\mathrm{k\Omega cm}$) ;
- C_m désigne la capacité de la membrane par unité d'aire ($\mu\mathrm{F/cm^2}$) ;
- G_m désigne la conductance de la membrane par unité d'aire ($\mathrm{mS/cm^2}$) ;
- G_s désigne la conductance du soma.
- A_s est la surface latérale du soma.

Pour la suite, nous supposerons qu'à l'instant $t = 0$, la fibre reçoit une impulsion électrique. Nous modéliserons cela à l'aide du terme i_0 en imposant $i_0(t) = \delta_{\{t=0\}}$.

Afin de ne pas alourdir la rédaction, nous présentons maintenant les outils utiles pour définir le problème d'optimisation que nous allons résoudre, sans nous attarder sur le formalisme mathématique lié aux équations aux dérivées partielles que nous considérons. Les détails techniques (d'existence notamment) seront tous exposés dans la section suivante. En recherchant les solutions éventuelles de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus sous la forme de fonctions à variables séparables, on est conduit à écrire v sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(t)\phi_n^a(x)\ \forall x\in[0,\ell],\ \forall t>0. \tag{1.5}$$

Sous réserve d'existence, on déduit de la formulation de l'équation aux dérivées partielles que ϕ_n^a est solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -(a^2\phi_n^{a\prime})' = \lambda_n(a)\, a\sqrt{1+a'^2}\phi_n^a & x\in(0,\ell) \\ \frac{2\pi}{A_s}\, a^2(0)\phi_n^{a\prime}(0) + (\lambda_n(a)+\gamma)\phi_n^a(0) = 0 \\ \phi_n^{a\prime}(\ell) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

où $\gamma \overset{\text{déf}}{=} 2R_a(G_m - G_s)$ est supposé strictement positif. λ_n désigne ici un nombre réel, en réalité la valeur propre d'un opérateur que nous introduirons ultérieurement.

Dans la section 2.1.1.2, on démontrera le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Expression explicite des solutions de (1.4).*
Soit $i_0 \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}_+)$. Alors, la solution de (1.4) obtenue par la méthode de séparation des variables est donnée par la formule :

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m} \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n^a(0)\phi_n^a(x)(f_n \star i_0)(t),} \tag{1.7}$$

où ϕ_n^a désigne la fonction propre solution du problème (1.6), normalisée pour $\|.\|_a$, de régularité $H^2(0,\ell)$ et f_n est la fonction définie par $f_n(t) = \exp[-\widehat{\lambda_n}t]$, avec $\widehat{\lambda_n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\lambda_n + 2R_aG_m}{2R_aC_m}$.

Remarque 1.2. *Le produit de convolution a bien un sens ici car i_0 est une mesure de Radon et f_n est borélienne. On peut donc écrire $i_0 = \mathrm{d}\mu$ et le produit de convolution est défini par :*

$$(f_n \star i_0)(t) = \int_{\mathbb{R}} f_n(r-t)\mathrm{d}\mu(r).$$

1.2.3 Cas d'une dendrite connectée à d'autres fibres

La propagation d'une impulsion électrique dans une fibre connectée à d'autres fibres suit encore une équation établie par W. Rall dans les années 60 (cf. [51], [53], [15]). Seule la première condition au bord est modifiée.

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial v}{\partial x}\right) = a\sqrt{1+a'^2}\left(C_m\frac{\partial v}{\partial t} + G_m v\right) & (x,t) \in (0,\ell)\times]0;+\infty[\\ \frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = -i_0(t) & t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\ell,t) = 0 & t > 0 \\ v(x,0) = 0 & x \in (0,\ell). \end{cases} \tag{1.8}$$

où
- on considère une fibre à symétrie cylindrique de longueur ℓ donnée et rayon $a(x)$;
- on fait l'hypothèse qu'aucun courant ne circule au temps $t = 0$. C'est pourquoi $v(x,0) = 0,\ \forall x \in (0,\ell)$.
- $i_0(t)$ désigne le courant axial à l'instant t au point $x = 0$;
- $v(x,t)$ désigne la différence de potentiel de la membrane par rapport à l'état au repos au point x et à l'instant t.
- R_a désigne la résistance axiale ($\mathrm{k}\Omega\mathrm{cm}$) ;
- C_m désigne la capacité de la membrane par unité d'aire ($\mu\mathrm{F/cm}^2$) ;
- G_m désigne la conductance de la membrane par unité d'aire ($\mathrm{mS/cm}^2$).

Pour la suite, nous supposerons qu'à l'instant $t = 0$, la fibre reçoit une impulsion électrique. Nous modéliserons cela à l'aide du terme i_0 en imposant $i_0(t) = \delta_{\{t=0\}}$.

En recherchant les solutions éventuelles de l'équation aux dérivées partielles ci-dessus sous la forme de fonctions à variables séparables, on est conduit à écrire v sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(t)\phi_n^a(x)\ \forall x \in [0,\ell],\ \forall t > 0. \tag{1.9}$$

On conserve ici les notations du paragraphe précédent. Les deux problèmes d'optimisation seront résolus de façon totalement indépendante.

Sous réserve d'existence, on déduit de la formulation de l'équation aux dérivées partielles que ϕ_n^a vérifie le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -(a^2\phi_n^{a\prime})' = \mu_n(a)\, a\sqrt{1+a'^2}\phi_n^a & x \in (0,\ell) \\ \phi_n^{a\prime}(0) = \phi_n^{a\prime}(\ell) = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

où $\gamma \overset{\text{déf}}{=} 2R_a(G_m - G_s)$ est supposé strictement positif. μ_n désigne ici un nombre réel, en réalité la valeur propre d'un opérateur que nous introduirons ultérieurement.

Dans la section 2.1.3, on démontrera le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Expression explicite des solutions de (1.8).*
Soit $i_0 \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}_+)$. Alors, la solution de (1.8) obtenue par la méthode de séparation des variables est donnée par la formule :

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m}\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^a(0)\phi_n^a(x)(f_n \star i_0)(t),} \tag{1.11}$$

où ϕ_n^a désigne la fonction propre normalisée solution du problème (1.10)*, normalisée pour N_a, de régularité $H^2(0,\ell)$ et f_n est la fonction définie par $f_n(t) = \exp[-\widehat{\mu_n}t]$, avec $\widehat{\mu_n} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\mu_n + 2R_aG_m}{2R_aC_m}$.*

1.3 Présentation des problèmes d'optimisation

Récapitulons :

i dans le cas d'une fibre connectée au soma :

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m}\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^a(0)\phi_n^a(x)e^{-\widehat{\lambda_n}t}.} \tag{1.12}$$

ii dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres :

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m}\sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^a(0)\phi_n^a(x)e^{-\widehat{\mu_n}t}.} \tag{1.13}$$

Dans toute la suite, on posera $A \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{A_s}{2\pi}$.
Pour répondre à la question posée dans l'introduction, nous allons devoir considérer différents critères. On recherche la forme de l'axone qui rende le plus efficace possible le transfert d'un message électrique. L'inconnue de notre problème est donc la fonction $a(x)$ qui représente la forme de l'axone. Demandons-nous au préalable dans quel espace fonctionnel nous souhaitons chercher cette fonction radiale a. Introduisons la classe :

$$\boxed{\mathcal{A}_{a_0,S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ a \in W^{1,\infty}(0,\ell) : \forall x \in [0,\ell],\ a(x) \geq a_0 \text{ et } \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x \leq S \right\}.} \tag{1.14}$$

Choisir a dans cette classe c'est s'imposer d'une part une régularité minimale (Lipschitz) et deux contraintes :

- **Une contrainte ponctuelle.**
  On souhaite que la longueur du rayon de la fibre soit au minimum égale à a_0.
- **Une contrainte de surface.**
  La formule $2\pi \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x$ représente exactement la surface latérale de l'axone. On s'impose donc une surface latérale maximale (nous interdisant ainsi des objets de type fractal, qui ne nous fourniraient pas une représentation réaliste d'un axone). De plus, cette contrainte est aussi une mesure réaliste du « coût de fabrication » de la dendrite.

Remarque 1.3. *La régularité des rayons (dans $W^{1,\infty}(0,\ell)$) est nécessaire pour comprendre les équations aux dérivées partielles (1.4) et (1.8). En effet, en vertu du théorème de Rademacher, toute fonction Lipschitzienne sur $(0,\ell)$ est dérivable presque partout sur $(0,\ell)$.*

Voici à présent les critères d'optimisation que nous nous proposons d'étudier :

i **Atténuation en temps.**

D'après les décompositions (1.12) et (1.13) de la solution de l'équation aux dérivées partielles, si l'on souhaite que le message soit transmis le plus exactement possible, on peut chercher à minimiser la décroissance exponentielle en temps, autrement dit à ce que $\widehat{\lambda_n} = \dfrac{\lambda_n + 2R_aG_m}{2R_aC_m}$ dans le cas d'un axone connecté au soma ou $\widehat{\mu_n} = \dfrac{\mu_n + 2R_aG_m}{2R_aC_m}$ dans le cas d'un axone connecté à d'autres fibres, soit le plus proche de 0 possible. Ces quantités sont toujours positives. On le montrera ultérieurement.

Puisque $\lambda_1(a) < \lambda_2(a) < ... < \lambda_n(a)$, pour $n \geq 2$, et $\mu_0(a) = 0 < \mu_1(a) < \mu_2(a) < ... < \mu_n(a)$, pour $n \geq 2$, on peut considérer que le terme prépondérant dans l'expression de $v(x,t)$ ci-dessus est donnée par le premier terme ($n = 1$) de la série, et s'intéresser ainsi au problème de la minimisation de la première valeur propre :

- dans le cas d'un axone connecté au soma :

$$\begin{cases} \inf \lambda_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases} \tag{1.15}$$

- dans le cas d'un axone connecté à d'autres fibres :

$$\begin{cases} \inf \mu_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases} \tag{1.16}$$

En réalité, la première valeur propre est donnée par $\mu_0(a) = 0$ (valeur propre d'un opérateur du second ordre avec conditions au bord de type Neumann), mais on expliquera dans la section 3.3.1 pourquoi il est essentiel de regarder ce problème si l'on souhaite répondre à la question de la minimisation de l'atténuation temporelle du signal dans ce cas.

L'idée de minimiser les valeurs propres d'un opérateur de type Sturm-Liouville est une longue histoire, dont M. Krein a été l'un des premiers à s'intéresser, par exemple dans [37]. Pour un récapitulatif de problèmes de minimisation de valeurs propres, on peut aussi se référer à [28].

ii **Atténuation en espace.**

On peut également chercher à ce que le message soit le moins atténué possible entre le début et le fin de la fibre nerveuse. On définit pour cela la fonction de transfert :

$$\forall a \in \mathcal{A}_{a_0,S},\ T(a) = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} v(0,t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{+\infty} v(\ell,t)\mathrm{d}t} \tag{1.17}$$

où v est la solution de (1.4) ou (1.8) selon le cas envisagé. On démontrera que l'on a toujours $T(a) \geq 1$, et on va chercher a dans la classe $\mathcal{A}_{a_0,S}$ qui minimise $T(a)$, autrement dit, on va résoudre le problème :

$$\begin{cases} \inf T(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Remarque 1.4. *Puisque toutes les quantités sous le signe intégral sont positives, en écrivant $v(x,t)$ sous la forme d'une série, on peut sans souci intervertir les signes somme et intégrale. On obtient alors comme expression de la fonction de transfert :*

$$\forall a \in \mathcal{A}_{a_0,S},\ T(a) = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{\phi_n^a}^2(0)}{\widehat{\lambda_n}+2R_aG_m}}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\phi_n^a(0)\phi_n^a(\ell)}{\widehat{\lambda_n}+2R_aG_m}}.$$

Chapitre 2

Analyse des EDP du modèle

On s'intéresse ici à la justification des résultats énoncés dans le chapitre précédent, à savoir les théorèmes 1.1 et 1.2. Nous ne tenterons pas dans un premier temps de résoudre le problème d'optimisation, mais seulement ici de mieux comprendre les équations considérées et de définir proprement les espaces fonctionnels de travail. Les deux problèmes d'optimisation (1.15) et (1.18) seront complètement résolus dans les sections 3.2.1 et 3.3, tandis que le problème (1.18) sera traité dans les sections 4.1 et 4.2.

Les preuves de l'existence et l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles considérées sont tout à fait standards (voir par exemple [57]). Dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres (équation aux dérivées partielles (1.8)), lorsque l'on cherche à écrire ces solutions sous forme de séries, on est conduit à étudier un problème aux valeurs propres très classique. Les conditions au bord sont alors de type Neumann. En revanche, dans le cas d'une fibre connectée au soma (équation aux dérivées partielles (1.8)), les conditions au bord du problème aux valeurs propres résultant font intervenir la valeur propre elle-même et rendent ce problème un peu original. De tels problèmes sont étudiés dans [21] ou [58].

Dans tout ce chapitre, nous supposerons $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ fixé.

2.1 Recherche des solutions par la méthode de Fourier

2.1.1 Résolution complète de l'EDP (1.4)

2.1.1.1 Un résultat d'existence

On va utiliser une approche de type semi-groupes pour démontrer l'existence de solutions pour l'équation (1.4).

On introduit les espaces fonctionnels :

- $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \in H^2(0,\ell) \times \mathbb{R} : \varphi(0) = r \text{ et } \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(\ell) = 0 \right\}$.
- $X \stackrel{\text{déf}}{=} L^2(0,\ell) \times \mathbb{R}$.

On définit l'opérateur $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \longrightarrow X$ par :

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2R_a C_m a\sqrt{1+a'^2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{G_m}{C_m}\varphi \\ \frac{a^2(0)}{A r_a C_m} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(0) - \frac{G_s}{C_m} r \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

On définit également sur X un produit scalaire par :

$$\left\langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\rangle_X = AR_aC_m r_1 r_2 + 2R_aC_m \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ est un opérateur m-dissipatif :

i **$\mathcal{A}$ est dissipatif.**

Soit $\begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. On a :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{A}\begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \right\rangle_X &= \int_0^\ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)\varphi(x)\mathrm{d}x - 2R_aG_m\int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}\varphi^2(x)\mathrm{d}x \\ &\quad + a^2(0)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(0)r - AR_aG_sr^2 \\ &= -\int_0^\ell a^2(x)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(x)\right)^2\mathrm{d}x - 2R_aG_m\int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}\varphi^2(x)\mathrm{d}x \\ &\quad - AR_aG_sr^2 \leq 0. \end{aligned}$$

ii **$\mathcal{A}$ est maximal.**

Autrement dit, on se demande si Im $(I-\mathcal{A}) = X$. Soit $\begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} \in L^2(0,\ell)\times\mathbb{R}$. L'équation $(I-\mathcal{A})\begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix}$ se réécrit encore sous la forme :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2R_aC_ma\sqrt{1+a'^2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) + \left(1+\frac{G_m}{C_m}\right)\varphi = f \quad x\in(0,\ell) \\ \frac{a^2(0)}{AR_aC_m}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(0) - \frac{G_s}{C_m}\varphi(0) = -k \\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Cette équation est redevable du théorème de Lax-Milgram. Par conséquent, cette équation possède une unique solution.

Cela prouve que $\mathcal{A}$ est un opérateur m-dissipatif sur l'espace de Hilbert X. Appliquons le théorème de Hille-Yosida. On en déduit que $\mathcal{A}$ **engendre un unique semi-groupe de contraction** $\{\mathbb{S}_t\}_{t\geq 0}$.

Pour pouvoir conclure, réécrivons l'EDP (1.4) sous une forme adaptée pour procéder à son étude à l'aide des semi-groupes. Posons :

$$U(t) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} v(x,t) \\ v(0,t) \end{pmatrix}, \text{ avec } t>0.$$

Alors, l'équation (1.4) s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}U(t) + f(t) \\ U(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ avec } f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\delta_{\{t=0\}}}{A_sC_m} \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Cependant, cette écriture est peu satisfaisante en raison de la présence du Dirac en temps contenu dans le second membre de l'équation qui semble surprenant. Puisqu'il s'agit d'un Dirac en $t = 0$, on cherche tout naturellement à l'intégrer dans la condition initiale.

Le problème ci-dessus se comprend plus aisément si l'on se place dans l'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, X)$. On peut écrire que U vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \mathcal{A}U(t) \\ U(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{A_s C_m} \end{pmatrix} \in X. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ainsi, on se ramène à une présentation plus standard du problème de semi-groupes.

On définit l'espace $\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)$ comme le complété de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ pour la norme :

$$\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \right\|_{1/2} \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{-\left\langle \mathcal{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \right\rangle}.$$

On a immédiatement que $\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right) \hookrightarrow H^1(0,\ell) \times \mathbb{R}$, avec injection continue.

D'après [5], (2.5) possède une unique solution U possédant la régularité :

$$U \in C^0([0,T]; X) \cap L^2\left(0, T; \mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)\right) \cap H^1\left(0, T; X\right).$$

Cela démontre l'existence d'un unique élément $v(.,t) \in C^0([0,T]; L^2(0,\ell))$ solution de l'EDP (1.4). En particulier, la formule de Duhamel a un sens dans ce cas, mais reste difficilement exploitable pour la suite en raison de son caractère abstrait. On peut écrire :

$$U(t) = \mathbb{S}_t U(0), \ \forall t \geq 0.$$

2.1.1.2 Preuve du théorème 1.1

À présent que l'existence et l'unicité de la solution de (1.4) est prouvée, on va trouver une expression de cette solution sous forme de série. Pour expliciter la solution de (1.4), on utilise la méthode dite de résolution par variables séparables ou de Fourier. On cherche à écrire v sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(t)\phi_n^a(x) \ \forall x \in [0,\ell], \ \forall t \geq 0.$$

La méthode habituelle de séparation des variables montre que la suite $(\phi_n^a)_{n\geq 1}$ satisfait l'équation (1.6).

De plus, nous montrerons dans la preuve du corollaire 2.1 que la suite $(\phi_n^a)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{E}_a$. On peut d'ailleurs voir ce résultat comme la conséquence directe d'un théorème établi par J. Walter dans [58].

L'orthonormalité des fonctions $(\phi_n^a)_{n\geq 1}$ nous permet de multiplier de part et d'autre dans l'égalité (1.5) par $a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_n^a$, avec n fixé, puis d'intégrer par rapport à la variable x entre 0 et ℓ. On obtient alors :

$$\forall t > 0, \ \psi_n(t) = \langle v(.,t), \phi_n^a \rangle_a = \frac{A_s}{2\pi} v(0)\phi_n^a(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)} v(x,t)\phi_n^a(x)\mathrm{d}x,$$

$\langle ., . \rangle_a$ étant le produit scalaire défini à la page 1. Dérivons la relation obtenue par rapport à la variable t et intervertissons somme et intégrale afin d'obtenir une équation différentielle ordinaire traduisant le comportement de ψ_n. On obtient, pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
\psi_n'(t) &= \frac{A_s}{2\pi}\frac{\partial v}{\partial t}(0,t)\phi_n^a(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\phi_n^a(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi C_m}\left(\frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) - A_s G_s v(0,t) + i_0(t)\right)\phi_n^a(0) \\
&\quad + \frac{1}{2R_aC_m}\int_0^\ell \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - 2R_aG_m a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v\right)\phi_n^a(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi C_m}\left(\frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) - A_s G_s v(0,t) + i_0(t)\right)\phi_n^a(0) \\
&\quad + \frac{a^2(0)\phi_n^{a\,\prime}(0)v(0,t) - \phi_n^a(0)a^2(0)\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)}{2R_aC_m} - \frac{\lambda_n + 2R_aG_m}{2R_aC_m}\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v\phi_n^a(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi C_m}\left(-A_sG_sv(0,t) + i_0(t)\right)\phi_n^a(0) - \frac{\lambda_n+\gamma}{2R_aC_m}\frac{A_s}{2\pi}v(0,t)\phi_n^a(0) \\
&\quad - \frac{\lambda_n + 2R_aG_m}{2R_aC_m}\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v\phi_n^a(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{i_0(t)\phi_n^a(0)}{2\pi C_m} - \frac{\lambda_n+2R_aG_m}{2R_aC_m}\left(\frac{A_s}{2\pi}v(0,t)\phi_n^a(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v\phi_n^a(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{i_0(t)\phi_n^a(0)}{2\pi C_m} - \widehat{\lambda_n}\psi_n(t).
\end{aligned}$$

ψ_n est donc solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 1 à coefficients constants. La formule de Duhamel prouve que :

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m}\sum_{n=0}^{+\infty}\phi_n^a(0)\phi_n^a(x)(i_0 \star f_n)(t), \text{ avec } f_n(t) = \exp[-\widehat{\lambda_n}t].$$

Cela démontre le théorème 1.1.

On a d'ailleurs convergence ponctuelle de cette série dès que $t > 0$.

2.1.2 Résolution complète de l'EDP (1.8)

2.1.2.1 Un résultat d'existence

On peut, comme dans le paragraphe précédent, démontrer l'existence et l'unicité de solutions pour l'EDP (1.8) en utilisant des arguments standards de la théorie variationnelle des problèmes paraboliques. Pour plus de précisions, on pourra par exemple se référer à [16]. On définit l'opérateur $A(t)$ pour $t \geq 0$ par la relation :

$$A(t) = \phi \ -\frac{1}{2R_aC_m a\sqrt{1+a'^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{G_m}{C_m}\phi. \tag{2.6}$$

Puisque $a \geq a_0$, on démontre très facilement que $A(t)$ vérifie l'hypothèse de coercivité et que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}, L^2(0,\ell))$, $y(t) := v(.,t)$ est solution de l'équation différentielle variationnelle :

$$\begin{cases} A(t)y + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta_{\{t=0\}}\delta_{\{x=0\}}}{2\pi a^2(0)a\sqrt{1+a'^2}} \\ y(0) = 0. \end{cases}, \tag{2.7}$$

où $D(A) = \{\varphi \in H^2(0,\ell) : \varphi'(\ell) = 0\}$. La théorie classique (voir [16]) permet de montrer que :

$$v \in L^2(0,T,H^1(0,\ell)).$$

Ce résultat de régularité étant montré, passons à la justification de l'écriture de la solution décomposée dans une base spectrale.

Nous ne détaillerons pas ici l'analyse spectrale du problème aux valeurs propres (1.10) résultant de la méthode de séparation des variables. On montre comme précédemment l'existence d'une suite de valeurs propres $(\mu_n(a))_{n\geq 0}$, strictement croissante, telle que $\mu_0(a) = 0$ associée à la suite de fonctions propres $(\phi_n^a)_{n\geq 0}$ solutions du problème (1.10). La différence avec le problème aux valeurs propres issu de l'équation aux dérivées partielles (1.4) provient de la condition au bord $x = 0$. En effet, dans le cas de l'EDP (1.4), on obtient une condition au bord de type Fourier, tandis que dans le cas de l'EDP (1.8), on obtient une condition au bord de type Neumann.

2.1.2.2 Preuve du théorème 1.2

On s'intéresse dans ce paragraphe à la preuve de l'expression analytique de la solution de l'équation aux dérivées partielles (1.8). La méthode de séparation des variables conduit à écrire la solution v de (1.8) sous la forme :

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(t)\phi_n^a(x) \ \forall x \in [0,\ell],\ \forall t > 0.$$

Comme précédemment, l'orthonormalité des fonctions $(\phi_n^a)_{n\geq 0}$ nous permet de multiplier chaque membre de l'égalité (1.9) par $a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_n^a(x)$, avec n fixé et d'intégrer. On trouve alors pour $n \in \mathbb{N}$ donné :

$$\forall t > 0,\ \psi_n(t) = \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v(x,t)\phi_n(x)\mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Dérivons cette relation par rapport à t afin d'obtenir une équation différentielle ordinaire traduisant le comportement de ϕ_n. Soit $t > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\psi_n'(t) &= \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)\phi_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2R_aC_m}\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{G_m}{C_m}\psi_n(t) \\
&= \frac{1}{2R_aC_m}\left(\left[a^2(x)\frac{\partial v}{\partial x}\phi_n\right]_0^\ell - \int_0^\ell a^2(x)\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\phi_n'(x)\mathrm{d}x\right) - \frac{G_m}{C_m}\psi_n(t) \\
&= \frac{i_0(t)\phi_n(0)}{2\pi C_m} + \frac{1}{2R_aC_m}\int_0^\ell \left(a^2\phi_n'\right)' v(x,t)\mathrm{d}x - \frac{G_m}{C_m}\psi_n(t) \\
&= \frac{i_0(t)\phi_n(0)}{2\pi C_m} - \frac{\mu_n}{2R_aC_m}\psi_n(t) - \frac{G_m}{C_m}\psi_n(t) \\
&= \frac{i_0(t)\phi_n(0)}{2\pi C_m} - \widehat{\mu_n}\psi_n(t).
\end{aligned}$$

On obtient, comme précédemment une équation différentielle ordinaire linéaire que l'on résout par la méthode de variation de la constante. On peut alors écrire que :

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m}\sum_{n=0}^{+\infty}\phi_n^a(0)\phi_n^a(x)(i_0 \star f_n)(t), \text{ avec } f_n(t) = \exp[-\widehat{\mu_n}t].$$

Cela démontre le théorème 1.2.

2.1.3 Un mot sur la transformée de Laplace des solutions

On se convainc sans souci que les difficultés pour justifier de l'existence de la transformée de Laplace en la variable t des solutions des deux EDP (1.4) et (1.8) sont les mêmes, d'après les estimations de régularités des solutions obtenues précédemment. Pour cette raison, nous allons regarder de plus près l'existence des transformées de Laplace des solutions de l'EDP (1.4) dans cette section et laissons au lecteur curieux le soin de le généraliser au cas de l'équation (1.8). La transformée de Laplace en t de la solution v de (1.4) est définie par :

$$\mathscr{L}(v)(x,p) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(x,t)\mathrm{d}t, x \in [0,\ell]. \tag{2.9}$$

On va à présent montrer que la transformée de Laplace de v est définie pour tous (x,p) tels que $x \in [0,\ell]$ et $\Re e(p) \geq 0$.

On a démontré précédemment, qu'en posant $U(t) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} v(x,t) \\ v(0,t) \end{pmatrix}$, $U(t)$ vérifie pour tout $t \geq 0$: $U(t) = \mathbb{S}_t U(0)$, où $\{\mathbb{S}_t\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe C^0 de contraction. De plus, $U(t)$ possède la régularité :

$$U \in C^0([0,T];X) \cap L^2\left(0,T;\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)\right) \cap H^1\left(0,T;X\right).$$

De plus, nous venons d'établir la formule :

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi C_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^a(0)\phi_n^a(x) e^{-\widehat{\lambda_n} t},$$

avec $x \in [0,\ell]$ et $t > 0$.

Soit $T > 0$, fixé. On va justifier de l'existence de $\mathscr{L}(v)$ dans le cas où $\Re e(p) \geq 0$. Il nous faut pour cela établir quelques estimations sur les fonction ϕ_n^a.

Puisque les fonctions ϕ_n^a sont normalisées au sens de la norme $\|.\|_a$, on a ,

$$\forall n \geq 1,\ |\phi_n^a(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} < +\infty \text{ et } \int_0^\ell {\phi_n^a}^2(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{a_0}.$$

De plus, la formulation variationnelle de l'équation (1.6) prouve que :

$$\int_0^\ell a^2(x){\phi_n^a}'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma {\phi_n^a}^2(0) = \lambda_n.$$

et par conséquent :

$$\int_0^\ell {\phi_n^a}'^2(x)\mathrm{d}x \leq \frac{\lambda_n + \gamma}{a_0^2}. \tag{2.10}$$

Finalement, et puisque $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^\infty(0,\ell)$, avec injection continue, cela prouve l'existence de deux constantes strictement positives α et β telles que :

$$\forall n \geq 1,\ \|\phi_n^a\|_{L^\infty(0,\ell)} \leq \alpha\sqrt{\widehat{\lambda_n} + \beta}. \tag{2.11}$$

Cette estimation va nous permettre de justifier l'existence de la transformée de Laplace de v.

En effet, si p est fixé tel que $\Re e(p) \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{+\infty} e^{-pt} v(x,t)\mathrm{d}t\right| &\leq \left|\int_0^T e^{-pt} v(x,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_T^{+\infty} e^{-pt} v(x,t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^T |v(x,t)|\mathrm{d}t + |e^{-pT}| \int_T^{+\infty} |v(x,t)|\mathrm{d}t = (1) + (2). \end{aligned}$$

Or, puisque l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^\infty(0,\ell)$ est continue, il existe une constante uniforme $C>0$ telle que pour tout $x \in [0,\ell]$ et pour $t>0$ fixé, on ait :

$$|v(x,t)| \leq C\|v(.,t)\|_{H^1(0,\ell)}.$$

Or, nous avons prouvé précédemment que $U \in L^2\left(0,T;\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \right\|_{1/2} &= \sqrt{\left\langle -\mathcal{A}\begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi \\ r \end{pmatrix} \right\rangle} \qquad (2.12)\\
&= \left(\int_0^\ell a^2(x)\varphi'^2(x)\mathrm{d}x + 2R_aG_m \int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}\varphi^2(x)\mathrm{d}x + AR_aG_s r^2 \right)^{1/2}\\
&\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\min\left(a_0, \sqrt{2R_aG_m}, \sqrt{\frac{G_s}{C_m}}\right)\left(\|\varphi\|_{H^1(0,\ell)} + |r|\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right) \hookrightarrow H^1(0,\ell)\times\mathbb{R}$, avec injection continue. Ainsi, puisque $U \in L^2\left(0,T;\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{1/2}\right)\right)$, il existe une constante uniforme $k>0$ telle que :

$$\int_0^T |v(x,t)|\mathrm{d}t \leq C\sqrt{T}\int_0^T \|v(.,t)\|_{H^1(0,\ell)}\mathrm{d}t \leq k\|v\|_{L^2\left(0,T;\mathcal{D}\left(\mathcal{A}^{\frac{1}{2}}\right)\right)} < +\infty. \qquad (2.13)$$

Cela prouve la convergence de (1). Intéressons-nous à présent à (2). D'après l'expression de $v(x,t)$ sous forme de série et le théorème de Fubini, on a :

$$\int_T^{+\infty} |v(x,t)|\mathrm{d}t \leq \frac{\alpha}{2\pi C_m\sqrt{A}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\widehat{\lambda_n}+\beta}e^{-\widehat{\lambda_n}T}.$$

Nous donnerons une preuve, dans la section 3.1.1 de l'estimation asymptotique des valeurs propres :

$$\widehat{\lambda_n} = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2), \qquad (2.14)$$

ce qui implique encore que $e^{-\widehat{\lambda_n}T} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^p}\right)$, pour tout $p>0$, et ainsi, la convergence de la série précédente.

On a donc démontré l'existence de la transformée de Laplace pour tous (x,p) tels que $x\in[0,\ell]$ et $\Re e(p)\geq 0$ (en particulier, on peut se convaincre que 0 est l'abscisse de convergence de la transformée).

2.2 Analyse spectrale des problèmes (1.6) et (1.10)

2.2.1 Quelques outils fonctionnels

En tout premier lieu, rappelons que nous ne considérons que des fonctions a appartenant à la classe $\mathcal{A}_{a_0,S}$. Introduisons la forme bilinéaire $<.,.>_a$ définie pour f et g éléments de $C^0([0,\ell])$ par :

$$< f,g >_a \overset{\text{déf}}{=} Af(0)g(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}f(x)g(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.15)$$

On vérifie de façon immédiate que $<.,.>_a$ est symétrique définie positive. À ce titre, $<.,.>_a$ est un produit scalaire. On note $\|.\|_a$, la norme induite par ce produit scalaire.

On introduit l'espace fonctionnel $\mathcal{E}_a$, défini comme **le complété de** $C^0([0,\ell])$ **pour la norme** $\|.\|_a$. $\mathcal{E}_a$ est donc un espace de Hilbert vérifiant l'inclusion :

$$H^1(0,\ell) \subset C^0([0,\ell]) \subset \mathcal{E}_a \subset L^2(0,\ell).$$

Moralement, $\mathcal{E}_a$ est donc l'ensemble des fonctions f de $L^2(0,\ell)$ telles que $f(0)$ a un sens. Le lemme qui suit permet une représentation plus précise de l'espace $\mathcal{E}_a$.

Lemme 2.1. *On a :* $C^0([0,\ell]) \subsetneq \mathcal{E}_a$ *et l'application* $\theta : \begin{array}{ccc} C^0([0,\ell]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sqrt{A}u(0) \end{array}$ *se prolonge en une forme linéaire continue sur* $\mathcal{E}_a$*. De plus, l'espace* $\mathcal{E}_a$ *est caractérisé par l'ensemble des couples* (C,u)*, où* C *est une constante jouant le rôle de la trace de* u *au sens de l'application* θ *et* u*, une fonction de* $L^2(0,\ell)$*.*

Démonstration.

i La première inclusion est immédiate et résulte de la définition de l'espace $\mathcal{E}_a$. Pour se convaincre que cette inclusion est stricte, il suffit d'exhiber un élément de $\mathcal{E}_a$ qui ne soit pas continu sur $[0,\ell]$.
Considérons pour cela la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^n, \text{ où } x \in [0,\ell].$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathcal{E}_a$, en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ainsi, cette suite converge vers un certain $f \in \mathcal{E}_a$. Notons au passage que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au sens de $\|.\|_a$ implique d'une part que $f_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$ et d'autre part que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2(0,\ell)} f$. On se convainc donc que :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f \text{dans } \mathcal{E}_a, \text{ avec } f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,\ell]; \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $f \in \mathcal{E}_a \backslash C^0([0,\ell])$.

ii Démontrons à présent la deuxième assertion.
Remarquons que si $u \in C^0([0,\ell])$, $\sqrt{A}|u(0)| \leq \|u\|_a$. $C^0([0,\ell])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_a$. Par conséquent et en vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire $\tilde{\theta}$ qui prolonge θ, i.e. telle que :

$$\begin{cases} \tilde{\theta}|_{C^0([0,\ell])} = \theta \\ \forall u \in \mathcal{E}_a,\ \tilde{\theta}(u) \leq \|u\|_a. \end{cases}$$

Vérifions à présent qu'il est possible de définir θ de sorte que $\theta(u) := \sqrt{A}u(0)$ soit unique. On sait que $C^0([0,\ell])$ est dense dans $\mathcal{E}_a$. Soit $u \in \mathcal{E}_a$. Il existe une suite $(\phi_n^a)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $C^0([0,\ell])$ telle que $\phi_n^a \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{dans } \mathcal{E}_a} u$. De plus, puisque $\tilde{\theta}$ est une forme linéaire continue, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{\theta}(\phi_n^a) = \tilde{\theta}(u)$, dans $\mathbb{R}$. Il suffit alors de poser $u(0) := \frac{1}{\sqrt{A}}\tilde{\theta}(u)$, ce qui définit $\tilde{\theta}$ de façon unique. On en déduit le résultat souhaité.

iii Enfin, tout élément u de $\mathcal{E}_a$ peut se voir comme la limite d'une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^0([0,\ell])$ au sens de la topologie donnée par $\|.\|_a$. Or, pour tout $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ fixé, la norme $u \mapsto \int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}u^2(x)\mathrm{d}x$ est équivalente à la norme usuelle de $L^2(0,\ell)$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(0,\ell)$ qui est complet et la suite $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est également complet. La caractérisation de $\mathcal{E}_a$ s'en déduit.

□

Enfin, concluons ce paragraphe, en remarquant que l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_a$ est continue et compacte. En effet, si $u \in H^1(0,\ell)$, on peut écrire que :

$$\|u\|_a^2 = Au^2(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}u^2(x)\mathrm{d}x \leq (A+S)\|u\|_\infty^2$$

Or, puisque l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^\infty(0,\ell)$ est continue, il vient immédiatement que l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_a$ l'est aussi. Enfin, Puisque l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow C^0([0,\ell])$ est compacte et que l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^\infty(0,\ell)$ est continue, on en déduit que l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_a$ est compacte.

2.2.2 Retour sur l'existence de solutions pour l'équation (1.6)

On s'intéresse au problème aux valeurs propres associé à l'équation différentielle ordinaire :

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + Cu = a\sqrt{1+a'^2}f \quad x \in [0,\ell] \\ a^2(0)u'(0) + A\gamma u(0) = -Af(0) \\ u'(\ell) = 0 \end{array}\right. , \tag{2.16}$$

où :
- ℓ est un nombre réel strictement positif donné.
- A et γ sont deux constantes strictement positives données.
- $C > 0$ est une constante qui sera précisée ultérieurement.
- $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$.
- $f \in \mathcal{E}_a$.

L'étape suivante consiste à prouver que le problème (2.16) est bien posé.
On définit l'opérateur A_a par :

$$\begin{array}{rccl} A_a : & \mathcal{E}_a & \longrightarrow & H^1(0,\ell) \\ & f & \longmapsto & u \text{ solution du problème (2.16).} \end{array}$$

Reste à prouver que l'opérateur ci-dessus est convenablement défini, c'est à dire que $u \in H^1(0,\ell)$ dans les conditions précisées ci-dessus. Ce résultat va être fourni par le théorème de Lax-Milgram. Commençons par démontrer un lemme :

Lemme 2.2. *Il existe une constante uniforme $\delta > 0$ telle que :*

$$\forall u \in H^1(0,\ell),\ |u(0)| \leq \delta\|u\|_{H^1(0,\ell)}. \tag{2.17}$$

De plus, la meilleure constante qui vérifie cette inégalité est : $\delta_0 := \sqrt{\coth(\ell)}$.

Démonstration. Soit $u \in H^1(0,\ell)$. Pour tout $x \in (0,\ell)$, $u(0) = u(x) - \int_0^\ell u'(t)\mathrm{d}t$. Utilisons l'inégalité triangulaire combinée à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|u(0)|^2 \leq 2\left[u^2(x) + \left(\int_0^\ell u'(t)\mathrm{d}t\right)^2\right] \leq 2\left(u^2(x) + \ell\int_0^\ell u'^2(t)\mathrm{d}t\right).$$

Intégrons de part et d'autre de l'inégalité. L'inégalité résultante :

$$|u(0)|^2 \leq \frac{2}{\ell}\max(1,\ell^2)\|u\|_{H^1(0,\ell)}$$

démontre l'existence de la quantité $\inf_{\substack{u\in H^1(0,\ell)\\ u\neq 0}} \frac{\|u\|^2_{H^1(0,\ell)}}{u^2(0)}$.

Déterminons maintenant la meilleure constante dans l'inégalité (2.17).

Introduisons la fonctionnelle $\mathcal{J}$ définie sur $H^1(0,\ell)$ par : $\mathcal{J}(u) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\|u\|^2_{H^1(0,\ell)}}{u^2(0)}$.

Les techniques élémentaires de calcul de variations permettent de démontrer que l'infimum est en réalité un minimum. En effet, $H^1(0,\ell)$ est un espace de Hilbert, donc réflexif et d'après le théorème de Rellich, l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^2(0,\ell)$ est compacte. En remarquant que la fonctionnelle $\mathcal{J}$ est homogène, on peut considérer une suite minimisante $(\phi^a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments unitaires dans $H^1(0,\ell)$. Enfin, en utilisant le fait que l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow L^\infty(0,\ell)$ est compacte, on prouve, quitte à extraire, en passant à la limite que $(\phi^a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u qui réalise le minimum de $\mathcal{J}$.
On peut déterminer explicitement le minimiseur u en étudiant les variations de la fonctionnelle $\mathcal{J}$. En tenant compte du fait que $\|u\|_{H^1(0,\ell)} = 1$:

$$\forall h \in H^1(0,\ell),\ \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathcal{J}}{\mathrm{d}u}, h\right\rangle = 0 = \frac{u^2(0)\left(\int_0^\ell u'h'\mathrm{d}x + \int_0^\ell uh\mathrm{d}x\right) - u(0)h(0)}{u^4(0)}.$$

On a $u(0)\neq 0$, car la suite $(\mathcal{J}(\phi^a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc majorée. Une intégration par partie fournit :

$$\forall h \in H^1(0,\ell),\ \left((-u''+u,h)_{L^2(0,\ell)} + [u'h]_0^\ell\right)u(0) = h(0).$$

On en déduit que u est solution de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\begin{cases} -u''+u = 0 \\ u'(\ell) = 0 \\ u'(0)u(0)+1 = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

La solution u de cette équation est donnée par la formule :

$$\forall x\in[0,\ell],\ u(x) := \pm\frac{e^x + e^{2\ell-x}}{\sqrt{e^{4\ell}-1}}.$$

Remarquons que $u^2(0) = \coth(\ell)$. Par conséquent $\delta_0 = \sqrt{\coth(\ell)}$, ce qui démontre le lemme. □

Nous allons à présent montrer que le problème (2.16) est bien posé :

Théorème 2.1. *Soient $C > a_0^2$, une constante, et $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Supposons que la constante a_0 vérifie $a_0^2 > A\gamma\coth(\ell)$. Alors, le problème (2.16) possède une unique solution u appartenant à $H^2(0,\ell)$.*

Démonstration. Écrivons la formulation variationnelle du problème ci-dessus. Soit $v \in H^1(0,\ell)$. Alors, après multiplication par v et intégration, on a :

$$-\int_0^\ell v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + C\int_0^\ell uv\mathrm{d}x \quad = \quad \int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}fv$$

Une intégration par parties nous permet d'obtenir la formulation variationnelle du problème (2.16) :

$$\int_0^\ell a^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\int_0^\ell uv\mathrm{d}x - A\gamma u(0)v(0) \quad = \quad \int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}fv + Av(0)f(0).$$

On appelle $\alpha(u,v)$ la forme bilinéaire symétrique définie sur $\left(H^1(0,\ell)\right)^2$ par :

$$\alpha(u,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\ell a^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\int_0^\ell uv\mathrm{d}x - A\gamma u(0)v(0)$$

On désigne par F l'application définie sur $H^1(0,\ell)$ par :

$$F(v) = \int_0^\ell a\sqrt{1+a'^2}fv + Av(0)f(0).$$

Pour pouvoir utiliser le théorème de Lax-Milgram, il va nous falloir vérifier des hypothèses de continuité et d'ellipticité des opérateurs α et F.

- *Montrons que α est continue sur $\left(H^1(0,\ell)\right)^2$.*
  Quels que soient u et v éléments de $H^1(0,\ell)$, on a :

  $$|\alpha(u,v)| \leq \|a\|_\infty^2 \left|\int_0^\ell u'(x)v'(x)\mathrm{d}x\right| + C\left|\int_0^\ell uv\mathrm{d}x\right| + A\gamma|u(0)v(0)|.$$

  En combinant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au lemme 2.2, on prouve que, pour tous $(u,v) \in \left(H^1(0,\ell)\right)^2$, on a :

  $$|\alpha(u,v)| \leq \left(\|a\|_\infty^2 + C + A\gamma\sqrt{\coth\ell}\right)\|u\|_{H^1(0,\ell}\|v\|_{H^1(0,\ell)}.$$

- *Montrons que α est elliptique sur $\left(H^1(0,\ell)\right)^2$.*
  Soit $u \in H^1(0,\ell)$. On a :

  $$\alpha(u,u) = \int_0^\ell a^2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x + C\int_0^\ell u^2\mathrm{d}x - A\gamma u^2(0).$$

  En utilisant le lemme 2.2, on montre l'inégalité :

  $$\alpha(u,u) \quad \geq \quad \min\left(C, a_0^2\right)\|u\|_{H^1(0,\ell)}^2 - A\gamma u^2(0)$$

  D'après l'hypothèse énoncée en début de théorème, la forme bilinéaire symétrique α est effectivement elliptique.
- *Montrons que F est continue sur $H^1(0,\ell)$.*
  Soit $v \in H^1(0,\ell)$. $F(v)$ est en fait la quantité $< f, v >_a$. Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On a : $F(v) \leq \|f\|_a\|v\|_a$. Nous savons de plus que l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_a$ est continue. Ceci prouve immédiatement la continuité de la forme linéaire F.

Conclusion : d'après les trois points précédents, l'application du théorème de Lax-Milgram démontre l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H^1(0,\ell)$ au problème (2.16).
Étude de la régularité des solution de (2.16) : nous savons que $a \in W^{1,\infty}(0,\ell)$. Or, le théorème de Lax-Milgram nous a permis de montrer que $u \in H^1(0,\ell)$. On en déduit que $a^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \in L^2(0,\ell)$ et que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \in L^2(0,\ell)$ d'après l'équation (2.16). Il s'ensuit que $a^2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \in H^1(0,\ell)$ et puisque a possède une régularité Lipschitz et est minorée, on en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \in H^1(0,\ell)$ et donc que $u \in H^2(0,\ell)$. □

2.2.3 Existence des suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Cas $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Dans le paragraphe précédent, nous avons introduit l'opérateur A_a :

$$\begin{array}{rccl} A_a: & \mathcal{E}_a & \longrightarrow & H^1(0,\ell) \\ & f & \longmapsto & u \text{ solution du problème (2.16).} \end{array}$$

On prouve ici que le problème aux valeurs propres associé au problème (2.16) possède une solution.

Théorème 2.2. *Décomposition spectrale de l'opérateur A_a.*
Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$.

i L'opérateur A_a admet une suite de valeurs propres $(\eta_n(a))_{n\geq 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\eta_n > 0$.

ii $\mathcal{E}_a$ admet une base hilbertienne formée de vecteurs propres de A_a.

Puisque $A_a(\mathcal{E}_a) \subset H^1(0,\ell)$, on appelle encore A_a l'opérateur :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}_a & \longrightarrow & \mathcal{E}_a \\ f & \longmapsto & u \text{ solution du problème (2.16).} \end{array}$$

On démontre le théorème ci-dessus en utilisant un argument très classique d'Analyse fonctionnelle : l'opérateur A_a est linéaire continu, compact et autoadjoint (cf. [8] par exemple). Pour ce dernier point, il suffit d'utiliser la compacité de l'injection $H^1(0,\ell) \hookrightarrow \mathcal{E}_a$.

Le corollaire qui suit se déduit de façon directe du résultat qui vient d'être énoncé. On sait que les valeurs propres associées aux problème (2.16) sont les inverses des valeurs propres associées à l'opérateur A_a.

Corollaire 2.1. *Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Il existe une suite croissante $(\lambda_n(a))_{n\geq 1}$ de réels tels que le problème d'inconnue ϕ :*

$$\begin{cases} -(a^2\phi')' = \lambda\, a\sqrt{1+a'^2}\phi & x \in [0,\ell] \\ \frac{2\pi}{A_s}\, a^2(0)\phi'(0) + (\lambda+\gamma)\phi(0) = 0 & \\ \phi'(\ell) = 0 & \end{cases}$$

possède des solutions non identiquement nulles dès que $\lambda \in \{\lambda_n(a); n \in \mathbb{N}^*\}$.
On appelle ϕ_n^a, la n-ième fonction propre associée à la valeur propre λ_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné. La suite de fonctions $(\phi_n^a)_{n\geq 1}$ forme une base hilbertienne de $\mathcal{E}_a$.

Remarque 2.1. *La spécificité du problème ci-dessus résulte de la présence de la valeur propre dans les conditions au bord. De tels problèmes ont été étudiés par exemple par J. Walter dans [58].*

CAS $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Par analogie avec le cas $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définissons :

- $\varphi_a(.,.)$, le produit scalaire défini pour f et g $C^0([0,\ell])$ par :

$$\varphi_a(f,g) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

- On appelle N_a la norme induite par φ_a.
  Remarquons d'ailleurs que puisque $a \in W^{1,\infty}(0,\ell)$ et que $a \geq a_0$, la norme N_a est équivalente à la norme $L^2(0,\ell)$ classique.
- On appelle alors $\mathcal{F}_a$ le complété de $C^0([0,\ell])$ pour la norme N_a. D'après la remarque précédente, on a donc $\mathcal{F}_a = L^2(0,\ell)$

On démontrerait alors de la même façon que dans la section précédente le théorème :

Théorème 2.3. *Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Il existe une suite croissante $(\mu_n(a))_{n\geq 0}$ de réels tels que le problème d'inconnue ϕ :*

$$\begin{cases} -(a^2\phi')' = \mu\, a\sqrt{1+a'^2}\phi & x \in [0,\ell] \\ \phi'(0) = \phi'(\ell) = 0 \end{cases}$$

possède des solutions non identiquement nulles dès que $\mu \in \{\mu_n(a); n \in \mathbb{N}\}$.
On appelle ϕ_n^a, la n-ième fonction propre associée à la valeur propre μ_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné. La suite de fonctions $(\phi_n^a)_{n\geq 0}$ forme une base hilbertienne de $\mathcal{F}_a$. De plus, $\mu_0(a) = 0$.

Remarque 2.2. *Puisque nous sommes en dimension 1, il est bien connu que les valeurs propres $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes simples. C'est une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz (structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle).*

Chapitre 3

Étude du premier critère : atténuation temporelle

Ce chapitre est consacré à l'étude et la résolution du problème de la minimisation de l'atténuation dendritique en temps. Dans le cas d'une dendrite connectée au soma (dont l'équation de propagation du potentiel à l'intérieur de la fibre est (1.4)) comme dans le cas d'une dendrite connectée à d'autres fibres (dont l'équation de propagation du potentiel à l'intérieur de la fibre est (1.8)), nous avons montré (théorèmes 1.1 et 1.2) que le potentiel $v(x,t)$ s'écrit sous la forme d'une série dont la contribution temporelle dans le terme général est de la forme $e^{-\widehat{\lambda_n}t}$ ou $e^{-\widehat{\mu_n}t}$, avec $\widehat{\lambda_n} = \frac{\lambda_n + 2R_a G_m}{2R_a C_m}$, $\widehat{\mu_n} = \frac{\mu_n + 2R_a G_m}{2R_a C_m}$ où λ_n et μ_n désignent les valeurs propres d'opérateurs introduits dans la section 2.2.3. Par ailleurs, nous avons montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\widehat{\lambda_n} > 0$ et $\widehat{\mu_n} > 0$. Ces deux termes représentant *l'atténuation temporelle* du message électrique (impulsion électrique modélisée par une mesure de Dirac $\delta_{\{t=0\}}$).

De plus, si l'on prend (à titre d'exemple) le cas d'une fibre connectée au soma, le développement de la solution de l'équation aux dérivées partielles sous forme de série fournit pour $x \in (0,\ell)$ fixé :

$$v(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi C_m}\phi_n^a(0)\phi_n^a(x)e^{-\widehat{\lambda_1}t}.$$

On comprend donc aisément que si l'on souhaite minimiser l'atténuation en temps du message, une bonne approche consiste à minimiser la première valeur propre λ_1. Nous allons donc nous intéresser ici à la résolution du problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \inf \lambda_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases}$$

Ce problème sera résolu dans la section 3.2.

Dans la section 3.3, nous traiterons le même problème, mais cette fois dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres. L'analyse mathématique s'avérera très différente dans ce cas.

3.1 Compléments d'analyse spectrale

3.1.1 Étude du cas $a \equiv a_0$

Cas $(\lambda_n(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$

Ce cas va jouer un rôle important dans la suite, puisqu'il interviendra dans la résolution des problèmes d'optimisation. En outre, il permet de fixer les idées et de mieux comprendre des cas plus compliqués.
L'équation (1.6) se réécrit :

$$\begin{cases} -\phi_n^{a_0\prime\prime} = \frac{\lambda_n(a_0)}{a_0}\phi_n^{a_0} & x \in [0,\ell] \\ \frac{2\pi}{A_s}a_0^2\phi_n^{a_0\prime}(0) + (\lambda_n(a_0)+\gamma)\phi_n^{a_0}(0) = 0 & \\ \phi_n^{a_0\prime}(\ell) = 0 & \end{cases} \tag{3.1}$$

Nous verrons en particulier dans la propriété 3.1 que $\lambda_1(a_0) < 0 < \lambda_2(a_0) < \ldots$; cela nous pousse à introduire la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{-\lambda_1(a_0)}{a_0}} \\ \omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n(a_0)}{a_0}},\ \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors, à une constante multiplicative près, on peut écrire que :

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \cosh(\omega_1 x) - \frac{A(-a_0\omega_1^2+\gamma)}{a_0^2\omega_1}\sinh(\omega_1 x) \\ \phi_n(x) = \cos(\omega_n x) - \frac{A(a_0\omega_n^2+\gamma)}{a_0^2\omega_n}\sin(\omega_n x),\ \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{3.3}$$

De plus, en étudiant la condition au bord en $x = \ell$, on démontre que les ω_n sont solutions des équations transcendantes :

$$\begin{cases} \tanh(\omega_1\ell) = -\frac{A(-a_0\omega_1^2+\gamma)}{a_0^2\omega_1} \\ \tan(\omega_n\ell) = -\frac{A(a_0\omega_n^2+\gamma)}{a_0^2\omega_n},\ \forall n \geq 2. \end{cases} \tag{3.4}$$

En étudiant ces équations transcendantes, on établit sans difficulté l'estimation suivante sur la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$:

$$\frac{(2n-1)^2\pi^2 a_0}{4\ell^2} < \lambda_n(a_0) < \frac{n^2\pi^2 a_0}{\ell^2}. \tag{3.5}$$

Procédons à présent à quelques essais numériques. Pour cela, on utilise des valeurs plausibles pour les différentes constantes, ou plutôt des ordres de grandeur (voir par exemple [15]) :

- Longueur de l'axone : $\ell = 0.1$ cm ;
- Rayon du cylindre : $a_0 \simeq 10^{-3}$ cm ;
- Paramètre $\gamma = 2R_a(G_m - G_s) \simeq 0.01$;
- Conductance de la membrane : $G_m \simeq 0.3$ mS/cm^2 ;
- Conductance du soma $G_s \simeq 0.06 mS/cm^2$;
- Capacitance de la membrane : $C_m \simeq 1\ \mu$ F/cm^2 ;
- Résistance axiale : $R_a \simeq 0.03\ k\Omega$.cm ;
- $A = \frac{A_s}{2\pi} \simeq 3.8 \times 10^{-6}$, où $A_s \simeq 2.4 \times 10^{-6}$.

Numériquement, et avec les valeurs des paramètres mentionnées ci-dessus, on obtient les estimations suivantes des valeurs propres :

Valeur propre	$\lambda_1(a_0)$	$\lambda_2(a_0)$	$\lambda_3(a_0)$	$\lambda_4(a_0)$	$\lambda_5(a_0)$
Estimation numérique	-3.6652e-04	0.9156	3.6680	8.2660	14.7236

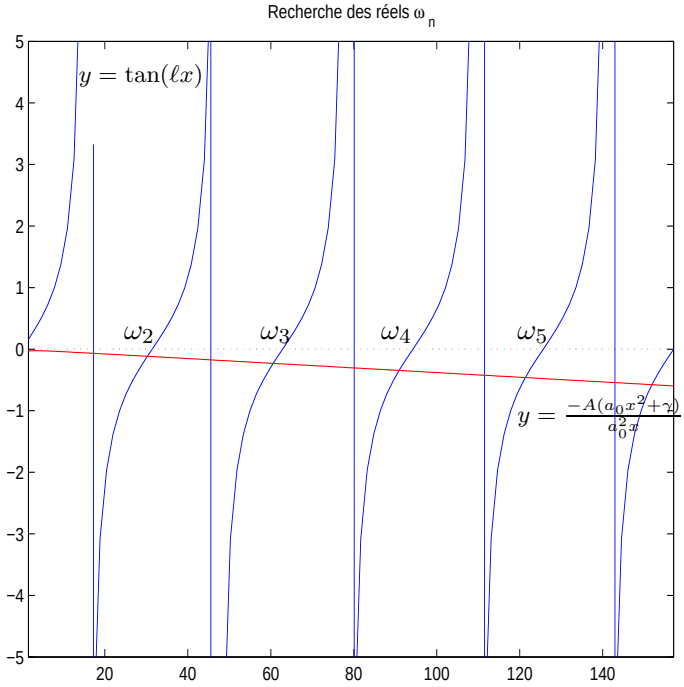

FIG. 3.1 – Détermination graphique des valeurs propres dans le cas où $a \equiv a_0$ (Cas d'une fibre connectée au soma)

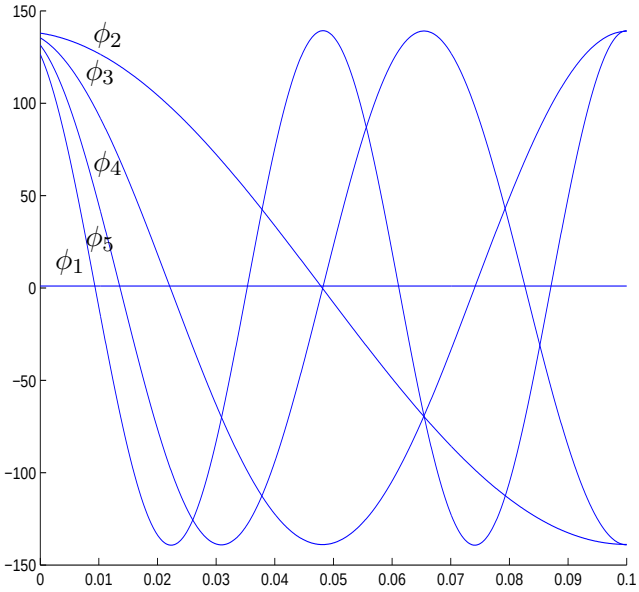

FIG. 3.2 – Représentation des fonctions propres normalisées pour $\|.\|_{a_0}$ (Cas d'une fibre connectée au soma)

En raison des échelles utilisées, il est difficile de se faire une idée, à partir de ce graphe du profil de ϕ_1. On a donc tracé à part le graphe de ϕ_1 sur la figure 3.3 afin de nous donner une intuition des propriétés plus générales de cette fonction que nous établirons dans les sections à venir.

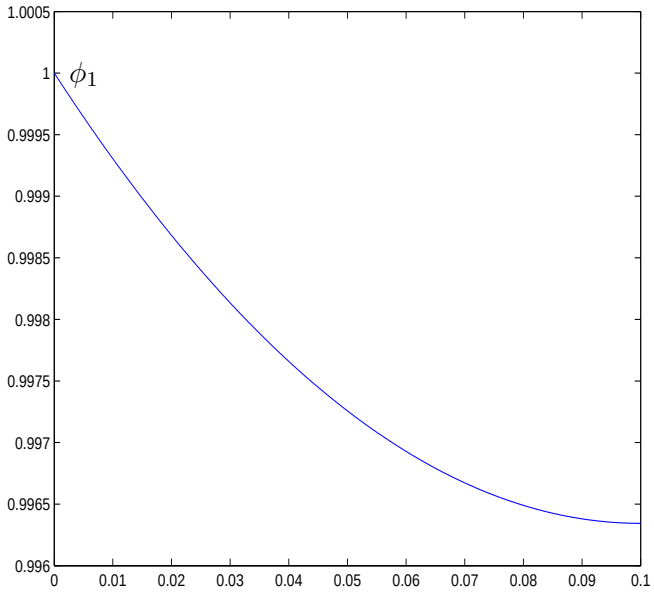

FIG. 3.3 – Représentation de ϕ_1 (Cas d'une fibre connectée au soma)

CAS $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Les calculs sont encore plus simples que dans le cas précédent de l'EDP (1.4). On retrouve là les valeurs propres du Laplacien avec conditions de Neumann sur le bord. L'équation (1.10) se réécrit :

$$\begin{cases} -\phi_n^{a_0\prime\prime} = \frac{\mu_n(a_0)}{a_0}\phi_n^{a_0} & x \in [0,\ell] \\ \phi_n^{a_0\prime}(0) = \phi_n^{a_0\prime}(\ell) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Nous savons que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_0(a_0) = 0 < \mu_1(a_0) < ... < \mu_n(a_0)$; cela nous pousse à introduire la suite $(\omega_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\mu_n(a_0)}{a_0}},\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Alors, à une constante multiplicative près, on peut écrire que :

$$\phi_n(x) = \cos(\omega_n x)\,. \tag{3.8}$$

De plus, en traduisant la condition au bord en $x = \ell$, on démontre que $\omega_n = \frac{n\pi}{\ell}$. Il s'ensuit que :

$$\mu_n(a_0) = \frac{a_0 n^2\pi^2}{\ell^2}. \tag{3.9}$$

3.1.2 Placement des valeurs propres sur la droite des réels

On se replace à présent dans le cas général, où a est un élément quelconque de $\mathcal{A}_{a_0,S}$.

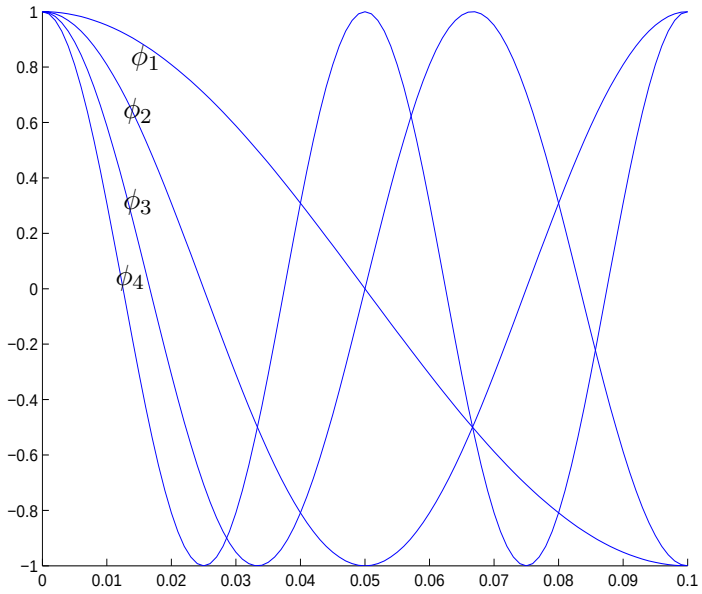

FIG. 3.4 – Représentation des 4 premières fonctions propres (Cas d'une fibre connectée à d'autres fibres)

Nous allons donner des précisions sur le signe des termes de la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$.

Propriété 3.1. *Signe des valeurs propres* $(\lambda_n)_{n\geq 0}$.
Quel que soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$, *on a :*

$$-2R_aG_m < -\gamma < \lambda_1(a) < 0 < \lambda_2(a) < ... < \lambda_n(a), \text{ pour tout entier } n \geq 2.$$

En particulier, on a $0 < \widehat{\lambda_1}(a) < \widehat{\lambda_2}(a) < ... < \widehat{\lambda_n}(a)$, pour tout entier $n \geq 2$.

Démonstration.

i Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ et $v \in H^1(0,\ell)$, non identiquement nulle. On appelle $\Re[a;v]$, le quotient de Rayleigh :

$$\Re[a;v] \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma v^2(0)}{\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v^2(x)\mathrm{d}x + Av^2(0)}. \tag{3.10}$$

Pour déterminer la borne inférieure, il suffit de remarquer que, puisque $\lambda_1(a) = \min_{v\in H^1(0,\ell)} \Re[a;v]$ et que ce minimum est atteint par la première fonction propre ϕ_1^a, on a :

$$\lambda_1(a) + \gamma = \frac{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x + \gamma\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_1^{a2}(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_1^{a2}(x)\mathrm{d}x + A\phi_1^{a2}(0)} \geq 0.$$

Par ailleurs, en choisissant $v \equiv 1$ dans la formule de min ci-dessus, il vient :

$$\lambda_1(a) \leq -\frac{A\gamma}{\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x + A} < 0.$$

ii D'après la formule de max-min de Courant-Fischer, on a : $\lambda_2(a) = \sup_{\substack{V \text{sev de} H^1(0,\ell) \\ \text{de dim } 1}} \inf_{v \in V^\perp} \Re[a; v]$.

On déduit de cette formule que :

$$\lambda_2(a) = \inf_{\substack{v \in H^1(0,\ell) \\ <v,\phi_1^a>_a = 0}} \frac{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma v^2(0)}{\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v^2(x)\mathrm{d}x + Av^2(0)}.$$

Soit $W_a \overset{\text{déf}}{=} \{v \in H^1(0,\ell) : v(0) \neq 0 \text{ et } < v, \phi_1^a >_a = 0\}$. On appelle $\mathcal{J}_2$, la fonctionnelle définie par :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{J}_2 : & W_a & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \dfrac{1}{v^2(0)}.\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

On cherche à démontrer, dans un premier temps, l'existence d'une constante $\kappa_0 > 0$ telle que :

$$\forall v \in W_a,\ \int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x \geq \kappa_0.v^2(0).$$

Soient $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ et $v \in W_a$. En remarquant que $\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x \geq a_0^2 \int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x$, on se ramène à démontrer l'existence d'une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\forall v \in W_a,\ \int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x \geq \kappa.v^2(0).$$

C'est une simple conséquence de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et de l'injection continue de H^1 dans L^∞ en dimension un. Néanmoins, pour être complet, on le redémontre ici. On va adapter un raisonnement très classique de calcul des variations. Procédons par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de telle constante. On pourrait alors construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de W_a telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\ell v_n'^2(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{n}.v_n^2(0)$$

En posant $w_n \overset{\text{déf}}{=} \frac{v_n}{v_n(0)}$ (car $v_n(0) \neq 0$), on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\ell w_n'^2(x)\mathrm{d}x < \frac{1}{n}$. Or, $w_n(0) = 1$ et $\int_0^\ell w_n'(x)\mathrm{d}x$ est majoré par une constante indépendante de n. Un raisonnement élémentaire prouve qu'il en est de même pour $\int_0^\ell w_n(x)\mathrm{d}x$. w_n est bornée au sens de $H^1(0,\ell)$, qui et un espace réflexif (de Hilbert). En utilisant le théorème de Rellich, on démontre l'existence d'un élément w_∞ de $H^1(0,\ell)$ tel que w_n converge fortement-$L^2(0,\ell)$ et faiblement-$H^1(0,\ell)$ vers w_∞. $w_\infty \in W_a$ car W_a est un fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue). Enfin, à la limite, on a $\int_0^\ell w_\infty'(x)\mathrm{d}x = 0$ et, compte tenu des remarques précédentes, on en déduit que w_∞ est la fonction constante identiquement égale à $w_\infty(0) = 1$. C'est absurde car cette fonction n'appartient pas à W_a. L'existence de κ est donc démontrée.

κ désigne à présent la plus petite constante vérifiant cette inégalité, c'est-à dire :

$$\kappa \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{\substack{v\in H^1(0,\ell)\\ <v,\phi_1^a>_a=0}} \mathcal{J}_2(u).$$

$\mathcal{J}_2$ est une fonctionnelle homogène. On prouve aisément que l'infimum est un minimum (c'est la même technique que d'ordinaire, qui utilise la réflexivité de $H^1(0,\ell)$ et le théorème de Rellich).

Écrivons à présent les conditions d'optimalité afin de déterminer le minimiseur que l'on notera dorénavant u. Il n'est pas restrictif de supposer que $u(0) = 1$. Par conséquent, on introduit la fonctionnelle :

$$\begin{array}{rccl} \widehat{\mathcal{J}_2}: & W_a & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \displaystyle\int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x. \end{array}$$

Souvenons-nous que la première fonction propre ϕ_1^a est solution de l'équation (1.6). $\widehat{\mathcal{J}_2}$ est différentiable au sens de Gâteaux (c'est classique ! Voir par exemple [35]). Soit $h \in W^{1,\infty}(0,\ell)$, un élément du cône des directions admissibles de différentiation de $\widehat{\mathcal{J}_2}$ au voisinage de u. On peut écrire que :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}\widehat{\mathcal{J}_2}}{\mathrm{d}v}(u), h \right\rangle = \int_0^\ell a^2(x)u'(x)h'(x)\mathrm{d}x.$$

Appelons m_1, le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $u(0) = 1$ et m_2, le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $< u, \phi_1^a >_a = 0$. Le minimum u de la fonctionnelle $\widehat{\mathcal{J}_2}$ sur W_a vérifie :

$$\int_0^\ell a^2(x)u'(x)h'(x)\mathrm{d}x = m_1u(0)h(0)+m_2Ah(0)\phi_1^a(0)+m_2\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}h(x)\phi_1^a(x)\mathrm{d}x. \tag{3.11}$$

Une intégration par parties fournit :

$$\int_0^\ell \left(a^2(x)u'(x)\right)' h(x)\mathrm{d}x = a^2(\ell)u'(\ell)h(\ell) - a^2(0)u'(0)h(0) - m_1u(0)h(0) - m_2 < h, \phi_1^a >_a .$$

Toutes les directions sont admissibles, par conséquent, le minimiseur u vérifie :

$$\left(a^2u'\right)' + m_2a\sqrt{1+a'^2}\phi_1^a = 0,\ x \in [0,\ell] \tag{3.12}$$
$$a^2(0)u'(0) + m_1u(0) + Am_2\phi_1^a(0) = 0 \tag{3.13}$$
$$Au(0)\phi_1^a(0) + \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_1^a(x)u(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{3.14}$$
$$u(0) = 1 \tag{3.15}$$
$$u'(\ell) = 0. \tag{3.16}$$

Choisissons $h := u$ dans l'équation (3.11). On obtient alors l'expression du multiplicateur de Lagrange m_1 :

$$m_1 = \int_0^\ell a^2(x)u'^2(x)\mathrm{d}x. \tag{3.17}$$

À présent, soustrayons les équations (1.6) et (3.12). Puisque $u'(\ell) = 0$ et $\phi_1^{a\prime}(\ell) = 0$, on obtient :

$$\forall x \in [0,\ell],\ \left(a^2(x)\left(u'(x) - \frac{m_2}{\lambda_1}\phi_1^{a\prime}(x)\right)\right) = 0 \Longrightarrow \forall x \in [0,\ell],\ u'(x) = \frac{m_2}{\lambda_1}\phi_1^{a\prime}(x) \quad (3.18)$$

Injectons alors cette identité dans l'équation (3.13). D'après l'expression du multiplicateur m_1, on a :

$$a^2(0)\frac{m_2}{\lambda_1}\phi_1^{a\prime}(0) + \int_0^\ell a^2(x)u'^2(x)\mathrm{d}x + Am_2\phi_1^a(0) = 0.$$

Or, puisque $\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)u'^2(x)\mathrm{d}x = \frac{m_2^2}{\lambda_1^2}\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x$, on obtient en utilisant la condition au bord $x = 0$ sur ϕ_1^a que :

$$-A\gamma l_2\phi_1^a(0) + \frac{m_2^2}{\lambda_1(a)}\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x = 0.$$

On détermine ainsi l'expression du multiplicateur m_2. On a :

$$m_2 = \frac{A\gamma\lambda_1(a)\phi_1^a(0)}{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^a(x)'^2\mathrm{d}x} = \frac{A\gamma\lambda_1(a)\phi_1^a(0)}{\lambda_1(a)\|\phi_1^a\|_a^2 + A\gamma\phi_1^{a2}(0)}. \quad (3.19)$$

Nous venons de montrer que $\displaystyle m_1 = \int_0^\ell a^2(x)u'^2(x)\mathrm{d}x = \frac{m_2^2}{\lambda_1^2(a)}\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x$, et d'après (3.19), on a :

$$m_1 = \frac{A^2\gamma^2\phi_1^{a2}(0)}{\lambda_1(a)\|\phi_1^a\|_a^2 + A\gamma\phi_1^{a2}(0)}. \quad (3.20)$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int_0^\ell a^2(x)u'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma &= m_1 - A\gamma = \frac{-\lambda_1(a)\|\phi_1^a\|_a^2}{\lambda_1(a)\|\phi_1^a\|_a^2 + A\gamma\phi_1^{a2}(0)} \\ &= \frac{-\lambda_1(a)\|\phi_1^a\|_a^2}{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a2}(x)\mathrm{d}x} > 0. \quad (3.21)\end{aligned}$$

□

Conséquence : profil de ϕ_1^a.

Il est classique que la fonction ϕ_1^a est de signe constant. Redémontrons-le.
Puisque $\phi_1^a \in H^1(0,\ell)$, on a également $|\phi_1^a| \in H^1(0,\ell)$ et $\frac{\mathrm{d}|\phi_1^a|}{\mathrm{d}x} = \mathrm{sgn}(\phi_1^a)\frac{\mathrm{d}\phi_1^a}{\mathrm{d}x} \in H^1(0,\ell)$, on voit que ϕ_1^a et $|\phi_1^a|$ ont le même quotient de Rayleigh. Ainsi, $|\phi_1^a|$ est aussi un minimiseur du quotient de Rayleigh et donc une fonction propre.

Or, puisque $(-a^2\phi_1^{a\prime})' = \lambda_1(a)a\sqrt{1+a'^2}\phi_1^a < 0$, alors $a^2\phi_1^{a\prime}$ est croissante, et puisque $\phi_1^{a\prime}(\ell) = 0$, alors nécessairement, ϕ_1^a est strictement décroissante et strictement positive sur $[0,\ell]$.

3.1.3 Estimation asymptotique

On va démontrer le théorème suivant :

Proposition 3.1. *Estimation asymptotique de $\lambda_n(a)$.*
Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4\ell^2}\frac{a_0^2}{\|a\|_\infty\sqrt{1+\|a'\|_\infty^2}} \leq \lambda_n(a) \leq \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\frac{\|a\|_\infty^2}{a_0}.$$

En particulier, $\lambda_n(a) = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$.

Démonstration. Pour démontrer cette estimation, écrivons $\lambda_n(a)$ sous la forme d'un quotient de Rayleigh. On a :

$$\lambda_n(a) = \min_{\substack{E_n \subset H^1(0,\ell) \\ \text{sev de dim } n}} \max_{u\in E_n^*} \Re[a;v], \tag{3.22}$$

où l'on note :

$$\Re[a;v] = \frac{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)v'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma v^2(0)}{\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}v^2(x)\mathrm{d}x + Av^2(0)}.$$

Puisque $a \in \mathcal{A}_{a_0,S} \subset W^{1,\infty}(0,\ell)$, a est Lipschitz-continue et a' existe et est dans $L^\infty(0,\ell)$. De plus, puisque $a \geq a_0$, on déduit de l'écriture de $\lambda_n(a)$ sous la forme d'un quotient de Rayleigh que :

$$\min_{\substack{E_n \subset H^1(0,\ell) \\ \text{sev de dim } n}} \max_{v\in E_n^*} \frac{a_0^2\displaystyle\int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma v^2(0)}{\|a\|_\infty\sqrt{1+\|a'\|_\infty^2}\displaystyle\int_0^\ell v^2(x)\mathrm{d}x + Av^2(0)} \leq \lambda_n(a) \tag{3.23}$$

$$\text{et} \quad \lambda_n(a) \leq \min_{\substack{E_n \subset H^1(0,\ell) \\ \text{sev de dim } n}} \max_{v\in E_n^*} \frac{\|a\|_\infty^2\displaystyle\int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma v^2(0)}{a_0\displaystyle\int_0^\ell v^2(x)\mathrm{d}x + Av^2(0)}. \tag{3.24}$$

Reste à résoudre ces deux problèmes. Intéressons-nous par exemple au problème (3.24). L'existence de la quantité du membre de droite ne faisant aucun doute, on peut chercher à déterminer dans $H^1(0,\ell)$ les points critiques de la fonctionnelle

$$v \longmapsto \frac{a_0^2\int_0^\ell(x)v'^2(x)\mathrm{d}x - A\gamma v^2(0)}{\|a\|_\infty\sqrt{1+\|a'\|_\infty^2}\int_0^\ell v^2(x)\mathrm{d}x + Av^2(0)}.$$

Différentions dans la direction $h \in H^1(0,\ell)$ (cône des directions admissibles). Alors, le minimiseur de ce problème noté encore v vérifie :

$$\|a\|_\infty^2\int_0^\ell v'(x)h(x)\mathrm{d}x - A\gamma v(0)h(0) = \lambda_n(a)a_0\int_0^\ell v(x)h(x)\mathrm{d}x + A\lambda_n(a)v(0)h(0).$$

Une intégration par parties nous assure que v est encore solution du problème écrit sous forme variationnelle :

$$\int_0^\ell h(x)\left[\|a\|_\infty^2 v'' + \lambda_n(a)a_0 v\right]\mathrm{d}x$$
$$+h(0)\left[A(\lambda_n(a)+\gamma)v(0) + \|a\|_\infty^2 v'(0)\right] - \|a\|_\infty^2 h(\ell)v'(\ell) = 0.$$

v est donc solution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} -v'' = \frac{\lambda a_0}{\|a\|_\infty^2} v & x \in (0,\ell) \\ \|a\|_\infty^2 v'(0) + A(\lambda+\gamma)v(0) = 0 & \\ v'(\ell) = 0 & \end{cases} \tag{3.25}$$

dont la solution est explicitement donnée, à une constante α de normalisation près par :

$$v(x) = \alpha\left\{\cos(\omega x) - \frac{A(\lambda+\gamma)}{\omega\|a\|_\infty^2}\sin(\omega x)\right\}, \tag{3.26}$$

où l'on a posé $\omega^2 = \frac{\lambda a_0}{\|a\|_\infty^2}$. Souvenons-nous en effet que les valeurs propres d'un tel problème sont positives à partir du rang 2.

Injectons à présent l'expression du minimiseur v dans l'équation transcendente $v'(\ell) = 0$. On obtient que ω est solution de :

$$\tan(\omega\ell) = -A\omega - \frac{A\gamma a_0}{\|a\|_\infty^2\omega}. \tag{3.27}$$

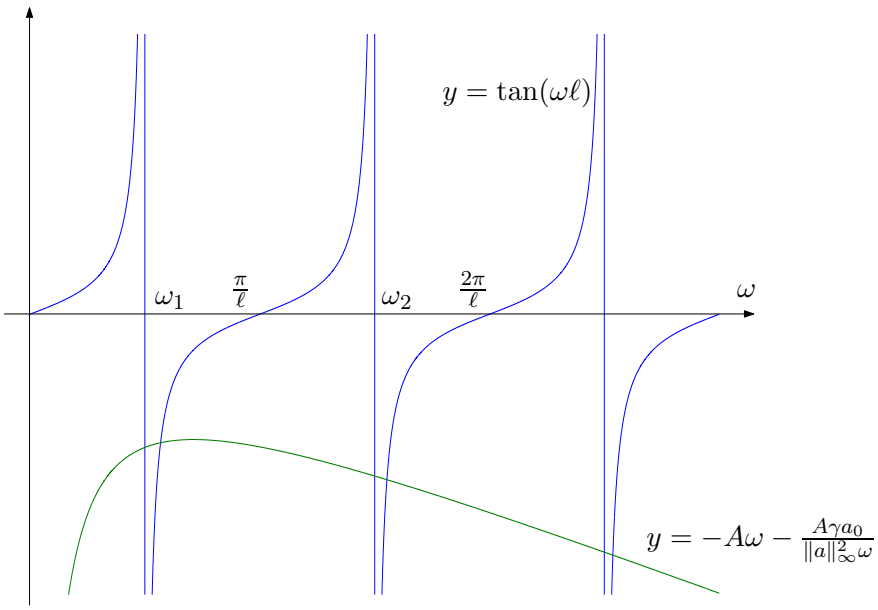

FIG. 3.5 – Représentation réels ω_n

Les réels ω_n sont les abscisses des points d'intersection des courbes d'équations respectives $y = -A\omega - \frac{A\gamma a_0}{\|a\|_\infty^2\omega}$ et $y = \tan(\omega\ell)$. Puisque, pour tout $\omega > 0$, $-A\omega - \frac{A\gamma a_0}{\|a\|_\infty^2\omega} < 0$, on en déduit l'encadrement suivant pour ω_n : $\forall n \geq 2$, $\frac{(2n-1)\pi}{\ell} < \omega_n < \frac{2n\pi}{\ell}$ et puisque $\omega^2 = \frac{\lambda a_0}{\|a\|_\infty^2}$, la conclusion s'ensuit. □

Exactement de la même façon, on va démontrer l'estimation asymptotique suivante pour les réels $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.2. *Estimation asymptotique de $\mu_n(a)$.*
Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\frac{a_0^2}{\|a\|_\infty\sqrt{1+\|a'\|_\infty^2}} \leq \lambda_n(a) \leq \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}\frac{\|a\|_\infty^2}{a_0}.$$

En particulier, $\mu_n(a) = \underset{n\to+\infty}{O}(n^2)$.

Démonstration. Cette estimation se démontre exactement de la même façon que pour la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit de remarquer que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\min_{\substack{E_n\subset H^1(0,\ell)\\ \text{sev de dim } n}} \max_{v\in E_n^*} \frac{a_0^2\displaystyle\int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x}{\|a\|_\infty\sqrt{1+\|a'\|_\infty^2}\displaystyle\int_0^\ell v^2(x)\mathrm{d}x} \leq \mu_n(a) \leq \min_{\substack{E_n\subset H^1(0,\ell)\\ \text{sev de dim } n}} \max_{v\in E_n^*} \frac{\|a\|_\infty^2\displaystyle\int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x}{a_0\displaystyle\int_0^\ell v^2(x)\mathrm{d}x} \tag{3.28}$$

Le problème $\min\limits_{\substack{E_n\subset H^1(0,\ell)\\ \text{sev de dim } n}} \max\limits_{v\in E_n^*} \dfrac{\int_0^\ell v'^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^\ell v^2(x)\mathrm{d}x}$ a pour solution la n-ième valeur propre du problème suivant :

$$\begin{cases} u'' = \lambda u & x \in (0,\ell) \\ u'(0) = u'(\ell) = 0, \end{cases}$$

dont les valeurs propres sont clairement les réels $\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, avec $n \geq 1$. La conclusion s'ensuit. □

3.2 Minimisation de $\lambda_n(a)$ dans $\mathcal{A}_{a_0,S}$, pour $n \geq 1$

Dans cette partie, on s'intéresse successivement à la résolution des problèmes :

$$\begin{cases} \min \lambda_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \min \lambda_n(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S} \end{cases}, \ n \geq 2.$$

On pourrait largement se contenter, de résoudre le premier problème, qui fournit une réponse acceptable du point de vue biologique au problème que nous considérons. Le second problème présente un intérêt académique certain, en raison de la présence de la valeur propre dans la condition au bord en $x = 0$. Son intérêt biologique est moindre, mais la technique utilisée pour résoudre ce problème de minimisation s'adapte parfaitement à la résolution du problème

$$\begin{cases} \min \mu_1(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}, \end{cases}$$

traité dans la section 3.3.

3.2.1 Le cas de $\lambda_1(a)$

Théorème 3.1. *Minimisation globale de $\lambda_1(a)$.*
La fonction identiquement égale à a_0 est l'unique minimiseur de la valeur propre $\lambda_1(a)$ parmi les éléments de $\mathcal{A}_{a_0,S}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Rappelons que $\lambda_1(a)$ est définie, pour $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ par :

$$\lambda_1(a) := \inf_{v \in H^1([0,\ell])} \Re[a; v].$$

La fonction propre ϕ_1^a associée à a réalise le minimum du quotient de Rayleigh. On a donc :

$$\lambda_1(a) = \frac{\displaystyle\int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x - A\gamma\phi_1^{a\,2}(0)}{\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_1^{a\,2}(x)\mathrm{d}x + A\phi_1^{a\,2}(0)}.$$

Le numérateur de ce quotient est négatif. De plus, remarquons que l'on a :

$$0 \geq \int_0^\ell a^2(x)\phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x - A\gamma\phi_1^{a\,2}(0) \geq a_0^2\int_0^\ell \phi_1^{a\prime 2}(x)\mathrm{d}x - A\gamma\phi_1^{a\,2}(0) \text{ et} \tag{3.29}$$

$$0 < \frac{1}{\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\phi_1^a(x)\mathrm{d}x + A\phi_1^{a\,2}(0)} \leq \frac{1}{\int_0^\ell a_0\phi_1^a(x)\mathrm{d}x + A\phi_1^{a\,2}(0)}. \tag{3.30}$$

Enfin, puisque ϕ_1^a est la fonction propre associée à la valeur propre $\lambda_1(a)$, en écrivant $\lambda_1(a_0)$ sous la forme $\inf_{v\in H^1(0,\ell)} \Re[a_0; v]$, on déduit immédiatement de (3.29) et (3.30) que : $\lambda_1(a_0) \leq \lambda_1(a)$.

Cela prouve donc l'existence du minimiseur. L'unicité provient du fait que si $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ et si a n'est pas la fonction identiquement égale à a_0, alors $a_0 < a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}$ sur un ensemble de mesure non nulle. L'unicité du minimiseur s'en déduit alors aisément. □

3.2.2 Un changement de variable

Dans cette section, on va introduire un changement de variable destiné à simplifier le problème d'optimisation que l'on souhaite résoudre. En effet, traduire l'effet d'une variation infinitésimale de la fonctionnelle $a \longmapsto \lambda_1(a)$ est un peu pénible à écrire, en raison (entre autres) de la forte non-linéarité de la contrainte de surface latérale. Pour palier cette difficulté, on choisit ici d'introduire un problème d'optimisation annexe plus simple à étudier. La difficulté de cette approche se résumera alors à faire convenablement le lien entre ce problème de calcul des variations et celui qui nous intéresse (minimisation de $a \longmapsto \lambda_1(a)$ dans $\mathcal{A}_{a_0,S}$.

Soit $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$. Introduisons à présent un changement de variable classique (utilisé notamment par S. Cox et R. Lipton dans [14]) :

$$\boxed{y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2(t)}.} \tag{3.31}$$

Introduisons également les notations suivantes :

- $\ell_1 \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}t}{a^2(t)}$. On remarque d'ailleurs que l'image de l'intervalle $[0,\ell]$ par le changement de variable ci-dessus est $[0,\ell_1]$. De plus, puisque $a \geq a_0$, il est clair que $\ell_1 \in \left]0, \frac{\ell}{a_0^2}\right]$.
- $\rho(y) \overset{\text{déf}}{=} a^3(x)\sqrt{1+a'^2(x)}$ pour tous $x \in [0,\ell]$ et $y \in [0,\ell_1]$. ρ sera utilisée ultérieurement comme une nouvelle variable d'optimisation.
- $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$.
  Puisque $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$, la fonction ρ appartient à l'ensemble :
$$\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\rho \in L^\infty(0,\ell_1) : a_0^3 \leq \rho \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y)\mathrm{d}y \leq S\right\}. \tag{3.32}$$
- $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$.
  Ce sous-ensemble de $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ sera régulièrement utilisé pour résoudre les problèmes d'optimisation qui nous intéressent. Il est défini pour $M \geq a_0^3$ par :
$$\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\rho \in L^\infty(0,\ell_1) : a_0^3 \leq \rho \leq M \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y)\mathrm{d}y \leq S\right\}. \tag{3.33}$$
  Bien évidemment si $M < a_0^3$ ou si $S < a_0^3\ell_1$, cet ensemble est vide.
- $\lambda_n(\rho)$, pour $n \geq 1$.
  On note $\lambda_n(\rho)$, la n-ème valeur propre associée au problème :
$$\begin{cases} -w'' = \lambda\rho w & y \in (0,\ell_1) \\ w'(0) + A(\lambda+\gamma)w(0) = 0 & \\ w'(\ell_1) = 0. & \end{cases} \tag{3.34}$$
  Ce problème est l'image du problème (1.6) par le changement de variable que l'on vient d'introduire. En effet, d'après (3.31), en posant : $\forall y \in [0,\ell_1]$, $\forall x \in [0,\ell]$, $w(y) \overset{\text{déf}}{=} u(x)$, et en voyant y comme une fonction de x on peut écrire (en ne notant pas la dépendance de des fonctions en x ou y pour des raisons de simplicité d'écriture) :
  - $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{a^2(x)}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}$.
  - $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a^2(x)\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} = \dfrac{1}{a^2(x)}\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}y^2}$.

Remarque 3.1. *Les problèmes* $\min\{\lambda_n(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$ *et* $\min\{\lambda_n(\rho), \rho \in \mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}\}$ *ne sont pas complètement équivalents. En effet, l'application* $\Gamma : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{a_0,S} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{\ell_1 \in \left]0,\frac{\ell}{a_0^2}\right]} \mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1} \\ a & \longmapsto & \rho \end{array}$ *n'est pas une bijection. Cependant, il est clair que* $\displaystyle\bigcup_{\ell_1 \in \left]0,\frac{\ell}{a_0^2}\right]} \mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ *contient l'image de* $\mathcal{A}_{a_0,S}$*. Par conséquent, si l'on trouve un minimiseur de* $\lambda_n(\rho)$ *dans une classe* $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ *et que ce minimiseur appartient à l'image* $\Gamma(\mathcal{A}_{a_0,S})$*, le problème d'optimisation sera résolu.*

3.2.3 Calcul de la dérivée de forme de $\lambda_n(\rho)$

Soit $n \geq 1$. Pour simplifier les notations, on désigne par $\dot{\lambda_n}(\rho)$ la différentielle de $\lambda_n(\rho)$ au sens de Gâteaux dans une direction admissible h, autrement dit :
$$\dot{\lambda_n}(\rho) = \left\langle \frac{\mathrm{d}\lambda_n}{\mathrm{d}\rho}(\rho), h \right\rangle.$$

L'objet de cette partie est de calculer explicitement $\dot{\lambda_n}(\rho)$. La réponse est fournie par le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Calcul de $\dot{\lambda_n}(\rho)$.*
Soit ρ, un élément de $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ et h, une perturbation admissible. La fonctionnelle $\rho \longmapsto \lambda_n(\rho)$ est différentiable au sens de Gâteaux en tout point de $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ et on a :

$$\dot{\lambda_n}(\rho) = -\lambda_n(\rho) \int_0^{\ell_1} h(y) w_n^2(y) \mathrm{d}y, \tag{3.35}$$

où w_n désigne la fonction propre normalisée associée à $\lambda_n(\rho)$, c'est-à-dire telle que :

$$A w_n^2(0) + \int_0^{\ell_1} \rho(y) w_n^2(y) \mathrm{d}y = 1.$$

Démonstration. La différentiabilité des λ_n est une conséquence de la simplicité des valeurs propres pour ce problème et de [35].

Différentions le problème (3.34). On note $\dot{w_n}$, la différentielle de Gâteaux de w_n dans la direction h. Alors, $\dot{w_n}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} -\dot{w_n}'' = \dot{\lambda_n}(\rho)\rho w_n + \lambda_n(\rho) h w_n + \lambda_n(\rho)\rho_n \dot{w_n} & y \in (0, \ell_1) \\ \dot{w_n}'(0) + A(\lambda_n(\rho) + \gamma)\dot{w_n}(0) + A\dot{\lambda_n}(\rho) w_n(0) = 0 \\ \dot{w_n}'(\ell) = 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

Multiplions cette équation par w_n et intégrons par parties. On obtient :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\ell_1} \left(\dot{\lambda_n}(\rho)\rho(y) w^2(y) + \lambda_n(\rho) h(y) w^2(y) + \lambda_n(\rho)\rho(y) w(y) \dot{w_n}(y) \right) \mathrm{d}y \\ &+ A(\lambda_n(\rho) + \gamma)\dot{w_n}(0) w_n(0) + A\dot{\lambda_n}(\rho) w_n^2(0) = \int_0^{\ell_1} w'(y)\dot{w_n}(y) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Multiplions à présent l'équation (3.34) par $\dot{w_n}$ et intégrons par parties. On obtient :

$$\int_0^{\ell_1} \lambda_n(\rho)\rho(y) w(y) \dot{w_n}(y) \mathrm{d}y + A(\lambda_n(\rho) + \gamma)\dot{w_n}(0) w_n(0) = \int_0^{\ell_1} w'(y)\dot{w_n}(y) \mathrm{d}y. \tag{3.38}$$

La combinaison des deux résultats précédents fournit :

$$\dot{\lambda_n}(\rho) \left(A w_n^2(0) + \int_0^{\ell_1} \rho(y) w_n^2(y) \mathrm{d}y \right) = -\lambda_n(\rho) \int_0^{\ell_1} h(y) w_n^2(y) \mathrm{d}y.$$

Le lemme est donc démontré. □

Remarque 3.2. *L'écriture de la dérivée par rapport au domaine nous permettra d'obtenir des informations sur l'optimum, dans une classe où nous avons un résultat d'existence. Dans notre cas, nous n'avons considéré qu'une dimension d'espace, ce qui simplifie grandement l'écriture de cette condition. En revanche, lorsque la dimension d'espace est plus élevée, l'exploitation de la condition d'optimalité peut receler de vraies difficultés (voir [27] et [49]).*

3.2.4 Un problème auxiliaire

Si a_0 et ℓ_1 désignent deux nombres réels strictement positifs et si $M > a_0^3$, on a défini dans la section 3.2.2 la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$. Il est clair que $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$ est un sous-ensemble de $L^\infty(0,\ell_1)$ séquentiellement compact pour la topologie L^∞ faible-*.

De plus, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \rho & \longmapsto & \lambda_n(\rho) \end{array}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ est clairement continue pour la topologie faible-*. (Il s'agit là d'une simple adaptation des résultats du chapitre 2 de [28] et de [35].)

Par conséquent, la fonction $\rho \longmapsto \lambda_n(\rho)$ atteint sa borne inférieure sur l'ensemble $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$, ce qui nous autorise encore à définir la quantité $\min\{\lambda_n(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}\}$.
On désigne donc par $(\mathcal{P}_{M,\ell_1})$, le problème :

$$(\mathcal{P}_{M,\ell_1}) \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda_n(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}. \end{array} \right.$$

L'objet de ce paragraphe est d'expliciter un minimiseur d'un tel problème.

Pour une question de simplicité des notations et de clarté de rédaction, on va s'intéresser ici au(x) minimiseur(s) dans la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$ de la valeur propre $\lambda_2(\rho)$, l'idée de preuve pour la minimisation de $\lambda_n(\rho)$ étant exactement la même.

Lemme 3.2. *Minimiseur de $\lambda_2(\rho)$ dans la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$.*

La solution ρ_{M,ℓ_1} du problème $(\mathcal{P}_{M,\ell_1})$ est une fonction bang-bang. *Plus précisément, il existe ξ_1 et ξ_2 vérifiant $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ell_1$ tels que la fonction ρ_{M,ℓ_1} vérifie :*

$$\rho_{M,\ell_1}(y) = \left\{ \begin{array}{ll} M & \textit{sur } (0,\xi_1) \\ a_0^3 & \textit{sur } (\xi_1,\xi_2) \\ M & \textit{sur } (\xi_2,\ell_1). \end{array} \right. \quad \textit{et} \int_0^{\ell_1} \rho_{M,\ell_1}(y)\mathrm{d}y = S.$$

De plus, la fonction propre w_2 associée à $\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})$ vérifie : $w_2^2(\xi_1) = w_2^2(\xi_2)$.

Démonstration. Introduisons le Lagrangien $\mathcal{L}$ associé au problème $(\mathcal{P}_{M,\ell_1})$. $\mathcal{L}$ est défini par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}: & \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1} \times \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\rho, m) & \longmapsto & \lambda_2(\rho) + m\left(\displaystyle\int_0^{\ell_1} \rho(y)\mathrm{d}y - S\right). \end{array}$$

L'existence d'un minimiseur est claire, puisque l'on minimise une fonction continue sur un ensemble séquentiellement compact. Écrivons les conditions d'optimalité au premier ordre pour ce problème. Ainsi, il existe un couple $(\rho_{M,\ell_1}, m) \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1} \times \mathbb{R}_+$ tel que pour toute perturbation admissible h, on ait $\langle \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\rho}(\rho_{M,\ell_1}, m), h\rangle \geq 0$, ce qui se réécrit, d'après le lemme 3.1 sous la forme :

$$\int_0^{\ell_1} h(y)\left(-\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})w_2^2(y) + m\right)\mathrm{d}y \geq 0. \tag{3.39}$$

Introduisons à présent les ensembles :

- $\mathcal{I}_0(\rho_{M,\ell_1})$: tout élément de la classe des sous-ensembles de $[0,\ell_1]$ dans lesquels $\rho_{M,\ell_1}(y) = a_0^3$ p.p. ;

- $\mathcal{I}_M(\rho_{M,\ell_1})$: tout élément de la classe des sous-ensembles de $[0,\ell_1]$ dans lesquels $\rho_{M,\ell_1}(y) = M$ p.p. ;
- $\mathcal{I}_\star(\rho_{M,\ell_1})$: tout élément de la classe des sous-ensembles de $[0,\ell_1]$ dans lesquels $a_0^3 < \rho_{M,\ell_1}(y) < M$ p.p.

On peut écrire que :

$$\mathcal{I}_\star(\rho_{M,\ell_1}) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{ y \in (0,\ell_1) : a_0^3 + \frac{1}{k} < \rho_{M,\ell_1}(y) < M - \frac{1}{k} \right\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1}).$$

On va démontrer que $\mathrm{mes}(\mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1})) = 0$***, pour tout entier*** $k \neq 0$***.***
On raisonne pour cela par l'absurde.

Supposons que l'un des ensembles $\mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1})$ ait une mesure strictement positive. Alors, il existe $y_0 \in \mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1})$ ainsi qu'une suite d'ensembles mesurables $(G_{k,n})_{n\geq 0} \subset \mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1})$ contenant chacun y_0, et tels que des perturbations du type $\rho_{M,\ell_1} + th$ et $\rho_{M,\ell_1} - th$ sont admissibles, avec t suffisamment petit. Choisissons alors $h = \chi_{G_{k,n}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\rho}(\rho_{M,\ell_1}, m), h \right\rangle &= \int_0^{\ell_1} h(y)(-\lambda_2(\rho_{M,\ell_1}) w_2^2(y) + m)\mathrm{d}y = 0 \\ &\iff \int_{G_{k,n}} (-\lambda_2(\rho_{M,\ell_1}) w_2^2(y) + m)\mathrm{d}y = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{G_{k,n}} (-\lambda_2(\rho_{M,\ell_1}) w_2^2(y) + m)\mathrm{d}y = 0$. Divisons alors chaque membre de l'égalité ci-dessus par $\mathrm{mes}(G_{k,n})$ supposons les $G_{k,n}$ choisis pour que $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} G_{k,n} = \{y_0\}$ (et par exemple décroissants pour l'inclusion).

Faisons alors tendre n vers $+\infty$

Le théorème de densité de Lebesgue prouve que $w_2^2(y_0) = \frac{\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})}{m}$, pour presque tout $y_0 \in \mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1})$. Cela constitue une contradiction, puisque $\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})$ est une valeur propre non nulle. Si w_2 était constante sur un ensemble de mesure non nulle, alors en traduisant sur cet ensemble l'équation différentielle régissant w_2, on obtiendrait la nullité de la valeur propre λ_2. Or, connaissant le signe des valeurs propres (voir la proposition (3.1)), cette situation est impossible.

Il s'ensuit que $\mathrm{mes}(\mathcal{I}_{\star,k}(\rho_{M,\ell_1})) = 0$ et par conséquent $\mathrm{mes}(\mathcal{I}_\star(\rho_{M,\ell_1})) = 0$. Cela revient encore à affirmer que ρ_{M,ℓ_1} vaut a_0^3 ou M presque partout.

De plus, des arguments standards sur les domaines nodaux (voir par exemple [20] et [4]) prouvent que w_2, la fonction propre associée à $\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})$ possède deux domaines nodaux.

Précisons le profil de w_2.

Souvenons-nous que w_2 désigne la deuxième fonction propre du problème :

$$\begin{cases} -w_2'' = \lambda_2(\rho)\rho w_2 & y \in (0,\ell_1) \\ w_2'(0) + A(\lambda+\gamma)w_2(0) = 0 \\ w_2'(\ell_1) = 0. \end{cases}$$

et que, d'après la proposition 3.1, on a $\lambda_2(\rho) > 0$.

On peut raisonner de façon élémentaire pour démontrer que nécessairement, w_2 est strictement monotone sur $[0,\ell_1]$. En effet, il n'est pas restrictif de supposer que $w_2(0) > 0$. Alors, d'après

la condition au bord en $y = 0$, il vient immédiatement que $w_2'(0) < 0$ et w_2 est nécessairement concave sur $\{w_2 \geq 0\}$, autrement dit w_2' est décroissante sur cet ensemble. Sur le deuxième ensemble nodal de w_2, en suivant le même raisonnement, on montre que w_2' est croissante et puisque $w_2'(\ell_1) = 0$, il est clair que w_2 est décroissante également sur cet ensemble nodal. Finalement, w_2 décroît sur $[0, \ell_1]$.

Précisons à présent le profil de ρ_{M,ℓ_1}.

Puisque ρ_{M,ℓ_1} est *bang-bang*, d'après les conditions d'optimalité, on sait que :
- $w_2^2(y_0) \leq \frac{\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})}{m}$ sur $\mathcal{I}_0(\rho_{M,\ell_1})$.
- $w_2^2(y_0) \geq \frac{\lambda_2(\rho_{M,\ell_1})}{m}$ sur $\mathcal{I}_M(\rho_{M,\ell_1})$.

On en déduit, le profil de w_2^2 étant connu (voir paragraphe ci-dessus et figure 3.2.4), qu'il existe deux réels ξ_1 et ξ_2 tels que $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ell_1$ et :

$$\rho_{M,\ell_1}(y) = \begin{cases} M & \text{on } (0, \xi_1) \\ a_0^3 & \text{on } (\xi_1, \xi_2) \\ M & \text{on } (\xi_2, \ell_1^\star). \end{cases}$$

Le fait que $w_2^2(\xi_1) = w_2^2(\xi_2)$ est une conséquence immédiate de la construction de l'optimum. Le graphe ci-dessous illustre cette construction.

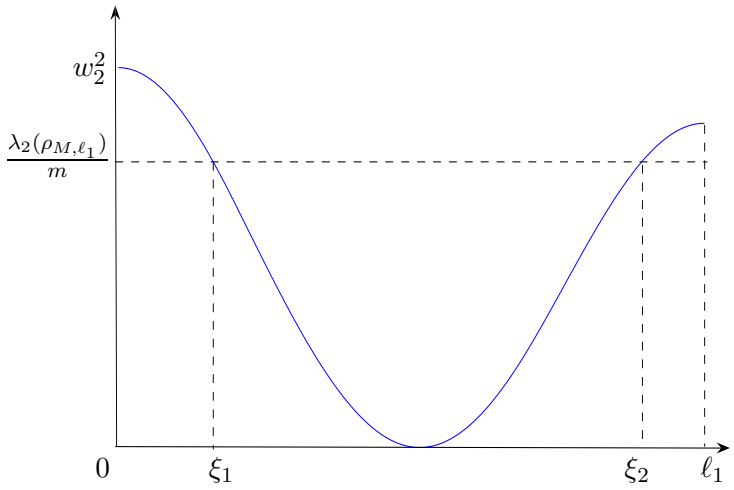

FIG. 3.6 – Représentation du carré de la fonction propre w_2 et construction de ξ_1 et ξ_2

Précision sur la contrainte de surface.

D'après la formule de min-max de Courant, on peut écrire que :

$$\lambda_2(\rho) = \min_{\substack{E_2 \text{ sev de dim } 2 \\ \text{de } H^1(0,\ell_1)}} \max_{w \in E_2^*} R[\rho; w], \text{ avec } R[\rho; v] \overset{\text{déf}}{=} \frac{\displaystyle\int_0^{\ell_1} w'^2(y)\mathrm{d}y - A\gamma w^2(0)}{\displaystyle\int_0^{\ell_1} \rho(y) w^2(y)\mathrm{d}y + A w^2(0)}. \tag{3.40}$$

Introduisons alors la forme quadratique Q définie par la relation :

$$Q(w) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{\ell_1} w'^2(y)\mathrm{d}y - A\gamma w^2(0). \tag{3.41}$$

$Q(w)$ est bien sûr le numérateur du quotient de Rayleigh $R[\rho; w]$. On introduit également l'ensemble Q_+ défini par :

$$Q_+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in H^1(0, \ell_1) : Q(w) > 0\}. \tag{3.42}$$

Recherchons la signature de Q. En décomposant $w \in H^1(0, \ell_1)$ dans la base de fonctions propres $\{w_n\}_{n\geq 1}$, on peut écrire que $w = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle w, w_n\rangle_\rho w_n$, où $\langle w, w_n\rangle_\rho \stackrel{\text{déf}}{=} Aw(0)w_n(0) + \int_0^{\ell_1} \rho(y)w_n(y)w(y)\mathrm{d}y$.

Injectons cette expression dans $Q(w)$. On obtient :

$$\begin{aligned} Q(w) &= \sum_{n,p=1}^{+\infty} \lambda_n(\rho)\langle w, w_n\rangle_\rho \langle w, w_p\rangle_\rho \langle w_p, w_n\rangle_\rho \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n(\rho)\langle w, w_n\rangle_\rho^2 \langle w_n, w_n\rangle_\rho, \end{aligned}$$

ce qui prouve que la signature de Q est $(1, +\infty)$.
On en déduit, puisque l'on a montré que $\lambda_n(\rho) > 0$ à partir de $n \geq 2$, que l'on peut encore écrire :

$$\lambda_2(\rho) = \min_{\substack{E_2 \text{ sev de dim } 2 \\ \text{de } H^1(0,\ell_1)}} \max_{w \in E_2^* \cap Q_+} R[\rho; w].$$

Cette écriture est adaptée pour démontrer que l'application $\rho \longmapsto \lambda_2(\rho)$ est décroissante pour l'inclusion dans $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$. En effet, si ρ_1 et ρ_2 désignent deux fonctions de $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$ telles que $\rho_1 \leq \rho_2$ presque partout, alors on a clairement pour toute fonction $w \in Q_+$, $\langle w, w\rangle_{\rho_1} \leq \langle w, w\rangle_{\rho_2}$. Passons à l'inverse, multiplions l'inégalité obtenue par $Q(w)$ et passons au min-max de part et d'autre de l'inégalité, on déduit des calculs précédents que $\lambda_2(\rho_2) \leq \lambda_2(\rho_1)$.
Cette monotonie de $\rho \longmapsto \lambda_2(\rho)$ prouve que nécessairement, la contrainte de surface est saturée, autrement dit que l'on a :

$$\boxed{\int_0^{\ell_1} \rho_{M,\ell_1}(y)\mathrm{d}y = S.}$$

□

3.2.5 Monotonie de $\lambda_2(\rho)$ par rapport à quelques paramètres

L'objet de ce paragraphe est d'étudier la (stricte) monotonie de cette quantité par rapport aux paramètres M et ℓ_1.

Lemme 3.3. *Monotonie de λ_2 par rapport à M.*

Soient $a_0 > 0$, $\ell_1 > 0$ et $S > a_0^3\ell_1$. Soient M_1 et M_2, deux nombres réels tels que $M_2 > M_1 > a_0^3$. Alors :

$$\min\{\lambda_n(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_2}_{a_0,S,\ell_1}\} < \min\{\lambda_n(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_1}_{a_0,S,\ell_1}\}$$

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que, puisque $\mathcal{R}^{M_2}_{a_0,S,\ell_1} \supset \mathcal{R}^{M_1}_{a_0,S,\ell_1}$, il est tout à fait clair que :

$$\min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_2}_{a_0,S,\ell_1}\} \leq \min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_1}_{a_0,S,\ell_1}\}$$

On désigne par ρ_{M_1}, la solution du problème d'optimisation $\min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_1}_{a_0,S,\ell_1}\}$. Alors, d'après le lemme 3.2, on connaît le profil de ρ_{M_1} et on a :

$$\rho_{M_1}(y) = \begin{cases} M_1 & \text{sur } (0,\xi_1) \\ a_0^3 & \text{sur } (\xi_1,\xi_2) \\ M_1 & \text{sur } (\xi_2,\ell_1). \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^{\ell_1} \rho_{M_1}(y)\mathrm{d}y = S,$$

avec ξ_1 et ξ_2 tels que : $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \ell_1$. Le fait que la contrainte de surface est saturée impose d'ailleurs que $\xi_2 = \xi_1 + \dfrac{M_1\ell_1 - S}{M_1 - a_0^3}$. Cela prouve en particulier que la fonction $M_1 \longmapsto \xi_2 - \xi_1$ est une fonction croissante de M_1.

On désigne par h, une perturbation admissible de ρ_{M_1} telle que l'on ait pour un $\varepsilon > 0$ vérifiant $M_1 + \varepsilon < M_2$:

$$h = \rho_\varepsilon - \rho_{M_1}, \text{ où } \rho_\varepsilon(y) = \begin{cases} M_1+\varepsilon & \text{sur } (0,\xi_1') \\ a_0^3 & \text{sur } (\xi_1',\xi_2') \\ M_1+\varepsilon & \text{sur } (\xi_2',\ell_1), \end{cases}$$

avec $0 \leq \xi_1' \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_2' \leq \ell_1$ et $\displaystyle\int_0^{\ell_1} \rho_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = S$. Un tel choix de réels ξ_1' et ξ_2' est toujours possible.

Puisque $\mathcal{R}^{M_1}_{a_0,S,\ell_1} \subset \mathcal{R}^{M_1+\varepsilon}_{a_0,S,\ell_1}$, on a immédiatement :

$$\min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_1+\varepsilon}_{a_0,S,\ell_1}\} \leq \min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M_1}_{a_0,S,\ell_1}\}.$$

Reste à démontrer à présent que cette inégalité est stricte. D'après le lemme 3.1, on peut écrire un développement de λ_2 à l'ordre 1 au voisinage de ρ_{M_1} :

$$\lambda_2(\rho_\varepsilon) - \lambda_2(\rho_{M_1}) = -\lambda_2(\rho_{M_1}) \int_0^{\ell_1+\varepsilon} w_2^2(y)h(y)\mathrm{d}y + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon).$$

Puisque $h = \rho_\varepsilon - \rho_{M_1}$, on sait que :

$$h(y) = \begin{cases} \varepsilon & \text{sur } (0,\xi_1') \cup (\xi_2',\ell_1) \\ a_0^3 - M_1 & \text{sur } (\xi_1',\xi_1) \cup (\xi_2,\xi_2') \\ 0 & \text{sur } (\xi_1,\xi_2). \end{cases}$$

On peut donc écrire que :

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell_1} w_2^2(y)h(y)\mathrm{d}y \quad \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \quad & \varepsilon\left(\int_0^{\xi_1'} w_2^2(y)\mathrm{d}y + \int_{\xi_2'}^{\ell_1} w_2^2(y)\mathrm{d}y\right) \\ & +(a_0^3 - M_1)\left(\int_{\xi_1}^{\xi_1'} w_2^2(y)\mathrm{d}y + \int_{\xi_2}^{\xi_2'} w_2^2(y)\mathrm{d}y\right) \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de densité de Lebesgue, on peut encore écrire que :

$$\begin{aligned} \int_{\xi_1}^{\xi_1'} w_2^2(y)\mathrm{d}y + \int_{\xi_2}^{\xi_2'} w_2^2(y)\mathrm{d}y \quad & \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \quad (\xi_1 - \xi_1')w_2^2(\xi_1) + (\xi_2' - \xi_2)w_2^2(\xi_2) \\ & \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \quad (\xi_1 - \xi_1' + \xi_2' - \xi_2)w_2^2(\xi_1), \end{aligned}$$

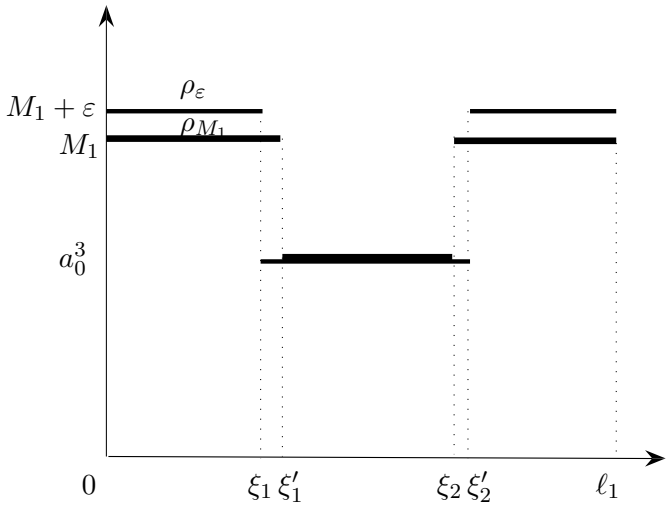

FIG. 3.7 – Representation des fonctions ρ_{M_1} et ρ_ε

car on a montré dans le lemme 3.2 que $w_2^2(\xi_1) = w_2^2(\xi_2)$. De plus :

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_2 + \xi_2' - \xi_1' &= \frac{M_1\ell_1 - S}{M_1 - a_0^3} - \frac{(M_1+\varepsilon)\ell_1 - S}{M_1 + \varepsilon - a_0^3} \\ &= \frac{S - \ell_1 a_0^3}{(M_1 - a_0^3)^2}\varepsilon + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon).\end{aligned}$$

On en déduit finalement que :

$$\int_0^{\ell_1} w_2^2(y)h(y)\mathrm{d}y \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon\left(\int_0^{\xi_1} w_2^2(y)\mathrm{d}y + \int_{\xi_2}^{\ell_1} w_2^2(y)\mathrm{d}y - \frac{S - a_0^3\ell_1}{M_1 - a_0^3} w_2^2(\xi_1)\right) > 0$$

En effet, $\displaystyle\int_0^{\xi_1} w_2^2(y)\mathrm{d}y + \int_{\xi_2}^{\ell_1} w_2^2(y)\mathrm{d}y > w_2^2(\xi_1)(\ell_1) - \xi_2 + \xi_1) = w_2^2(\xi_1)\frac{S - a_0^3\ell_1}{M_1 - a_0^3}$. D'où :

$$\lambda_2(\rho_\varepsilon) - \lambda_2(\rho_{M_1}) < 0, \text{ si } \varepsilon \text{ est assez petit.}$$

Cela démontre le lemme. □

Passons à présent à un second lemme, qui établit un résultat de monotonie du critère étudié par rapport au paramètre « longueur de la fibre nerveuse » : ℓ_1.

Lemme 3.4. *Monotonie de λ_2 par rapport à ℓ_1.*

Soient a_0, S et $M > a_0^3$, trois nombres réels strictement positifs.

Alors, l'application $\begin{array}{ccc}\left]0, \frac{\ell}{a_0^2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \ell_1 & \longmapsto & \min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}\}\end{array}$ *est strictement décroissante.*

Démonstration. Soit $\ell_1 \in \left]0, \frac{\ell}{a_0^2}\right[$, et $\rho_{\ell_1} \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$, le minimiseur de λ_2 dans la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$. On sait que ρ_{ℓ_1} est de la forme :

$$\rho_{\ell_1}(y) = \begin{cases} M & \text{sur } (0,\xi_1) \\ a_0^3 & \text{sur } (\xi_1,\xi_2) \\ M & \text{sur } (\xi_2,\ell_1). \end{cases} \quad \text{et} \int_0^{\ell_1} \rho_{M_1}(y)\mathrm{d}y = S,$$

avec ξ_1 et ξ_2 tels que : $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 < \ell_1$. On fait ici la supposition que $\xi_2 < \ell_1$. Le cas $\xi_2 = \ell_1$ se traite exactement de façon analogue.

Considérons également une perturbation h de cette fonction de la forme :

$$h = -(M-a_0)^3[\chi_{[\xi_1',\xi_1]} + \chi_{[\xi_2,\xi_2']} - M\chi_{[\ell_1,\ell_1+\varepsilon]}],$$

où $\varepsilon > 0$ est choisie suffisamment petit. On pose alors $\rho_\varepsilon = \rho_{\ell_1} + h$. On a représenté ci-dessous le graphe de ρ_ε.

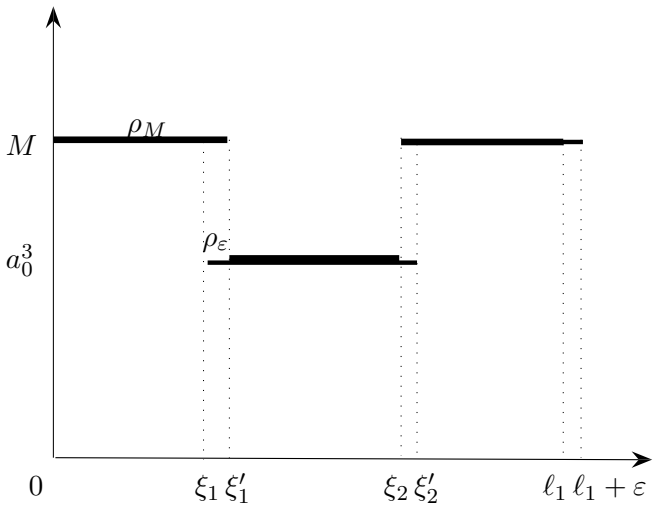

FIG. 3.8 – Representation des fonctions ρ_{M_1} et ρ_ε

D'après le lemme 3.1, on peut écrire un développement de λ_2 à l'ordre 1 au voisinage de ρ_M :

$$\lambda_2(\rho_\varepsilon) - \lambda_2(\rho_M) = -\lambda_2(\rho_M) \int_0^{\ell_1+\varepsilon} w_2^2(y)h(y)\mathrm{d}y + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon).$$

On en déduit que :

$$\lambda_2(\rho_\varepsilon) - \lambda_2(\rho_M) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\lambda_2(\rho_M)\left[-(M-a_0)^3 \int_{[\xi_1',\xi_1]\cup[\xi_2,\xi_2']} w_2^2(y)\mathrm{d}y + M\int_{[\ell_1,\ell_1+\varepsilon]} w_2^2(y)\mathrm{d}y\right]$$

Or, on sait que ξ_1' et ξ_2' vérifient en particulier $w_2^2(\xi_1') = w_2^2(\xi_2')$, d'après le lemme 3.2. Puisque l'on se convainc aisément que, nécessairement, $w_2'(\xi_1) \neq 0$ et $w_2'(\xi_2) \neq 0$ (en effet, le profil de w_2 est connu, voir figure 3.2.4), alors, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe deux réels η_1 et η_2 tels que $\xi_1' = \xi_1 + \varepsilon\eta_1 + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon)$ et $\xi_2' = \xi_2 + \varepsilon\eta_2 + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon)$. Par conséquent, en

effectuant un développement limité à l'ordre 1 des intégrales intervenant dans le développement de $\lambda_2(\rho_\varepsilon)$, il vient :

$$\lambda_2(\rho_\varepsilon) - \lambda_2(\rho_M) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\lambda_2(\rho_M)\varepsilon[\xi_1' - \xi_1 - \xi_2' + \xi_2 + Mw_2^2(\ell_1)].$$

Or, $\xi_2' - \xi_1' = \dfrac{M(\ell_1+\varepsilon) - S}{M - a_0^3}$ et $\xi_2 - \xi_1 = \dfrac{M\ell_1 - S}{M - a_0^3}$. En tronquant au premier ordre, il vient :

$$\lambda_2(\rho_\varepsilon) - \lambda_2(\rho_M) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} -\lambda_2(\rho_M)\varepsilon M[w_2^2(\ell_1) - w_2^2(\xi_1)] < 0.$$

Cela prouve que le critère est une fonction décroissante de ℓ_1.

Remarque : le cas où $\xi_2 = \ell_1$ se traite exactement de la même façon, et la conclusion de ce lemme est identique. □

3.2.6 Le cas de $\lambda_n(a)$, avec $n \geq 2$

Commençons par étudier le cas $n = 2$. Le cas $n > 3$ n'est qu'une généralisation du cas $n = 2$.

Théorème 3.2. *Minimisation de $\lambda_2(a)$.*
Soient a_0 et S deux nombres réels strictement positifs tels que $a_0\ell < S$.

Le problème $\min\{\lambda_2(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$ *n'a pas de solution.*

Remarque 3.3. *Il est possible d'exhiber une suite minimisante d'éléments de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ pour le critère $\lambda_2(a)$. On construira une telle suite dans la preuve de ce théorème.*

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons l'existence d'un minimiseur a^* pour le problème $\min\{\lambda_2(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$. Considérons ρ^*, l'image de $a^{*3}\sqrt{1+a^{*\prime 2}}$ par le changement de variable introduit dans la section 3.2.2. On désigne par ℓ_1^*, l'image de ℓ par ce changement de variable.
Puisque ρ^* est clairement un élément de $L^\infty(0,\ell_1^*) \cap \mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1^*}$, il existe $M^* > a_0^3$ tel que ρ^* est un élément de $\mathcal{R}^{M^*}_{a_0,S,\ell_1^*}$. Or, d'après le lemme 3.2, on sait que le problème $\min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M^*}_{a_0,S,\ell_1^*}\}$ a une solution, et qu'un minimiseur est fourni par la fonction ρ_{M^*,ℓ_1^*}, définie par :

$$\rho_{M^*,\ell_1^*}(y) = \begin{cases} M^* & \text{sur } (0,\xi_1) \\ a_0^3 & \text{sur } (\xi_1,\xi_2) \\ M^* & \text{sur } (\xi_2,\ell_1^*) \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_0^{\ell_1^*} \rho_{M^*,\ell_1^*}(y)\mathrm{d}y = S,$$

où $0 \leq \xi_1' \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_2'$. Par conséquent, $\lambda_2(\rho^*) \geq \lambda_2(\rho_{M^*,\ell_1^*})$.

- **1ère étape : décroissance du critère λ_2.**

  Dans cette étape, on va prouver que l'on sait perturber la fonction ρ^* dans la classe $\mathcal{R}_{a_0,S}$ pour faire décroître le critère λ_2.
  On se donne à présent $\varepsilon > 0$ fixé. On introduit :

– ρ^*_ε, un élément de $\mathcal{R}^{M^*+\varepsilon}_{a_0,S,\ell_1^*}$ vérifiant :

$$\rho^*_\varepsilon = \begin{cases} M^* + \varepsilon & \text{sur } (0, \xi_1') \\ a_0^3 & \text{sur } (\xi_1', \xi_2') \\ M^* + \varepsilon & \text{sur } (\xi_2', \ell_1^*), \end{cases}$$

avec $0 \leq \xi_1' \leq \xi_1 < \xi_2 \leq \xi_2' \leq \ell_1^*$ et $\displaystyle\int_0^{\ell_1^*} \rho^*_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = S$ (la représentation d'une fonction ρ^*_ε possible est faite dans la section 3.2.5).

– ρ_{M,ℓ_1}, un minimiseur de $\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}\}$. Autrement dit, on a :

$$\rho_{M,\ell_1} \in \operatorname{argmin} \{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}\}.$$

D'après le lemme 3.3, on a $\lambda_2(\rho_{M^*,\ell_1^*}) > \lambda_2(\rho^*_\varepsilon)$. De plus, pour tout $M > M^* + \varepsilon$, puisque $\mathcal{R}^{M^*+\varepsilon}_{a_0,S,\ell_1^*} \supset \mathcal{R}^{M^*}_{a_0,S,\ell_1^*}$, il est clair que :

$$\lambda_2(\rho_{M,\ell_1^*}) = \min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1^*}\} < \min\{\lambda_2(\rho), \rho \in \mathcal{R}^{M^*}_{a_0,S,\ell_1^*}\} = \lambda_2(\rho_{M^*,\ell_1^*}).$$

De plus, on sait que toutes les fonctions ρ_{M,ℓ_1} minimisant λ_2 dans la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$ sont *bang-bang* et vérifient $\displaystyle\int_0^{\ell_1} \rho_{M,\ell_1}(y)\mathrm{d}y = S$. Enfin, d'après le lemme 3.4, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \left]0, \frac{\ell}{a_0^2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \ell_1 & \longmapsto & \lambda_2(\rho_{M,\ell_1}) \end{array}$$

est décroissante. Faisons alors respectivement tendre M et ℓ_1 vers $+\infty$ et $\frac{\ell}{a_0^2}$. De la même façon que précédemment, on peut écrire que :

$$\liminf_{\ell_1 \to \ell/a_0^2} \liminf_{M \to +\infty} \lambda_2(\rho_{M,\ell_1}) \leq \lambda_2(\rho_{M^*+\varepsilon,\ell_1^*}) < \lambda_2(\rho_{M^*,\ell_1^*}).$$

Le fait que la contrainte égalité ($\int_0^{\ell_1} \rho_{M,\ell_1}(y)\mathrm{d}y = S$) soit saturée et le profil *bang-bang* de ρ_{M,ℓ_1} prouve l'existence d'un réel $t \in [0,1]$ tel que la suite (ρ_{M,ℓ_1}) converge au sens des mesures vers :

$$\rho_\infty \overset{\text{déf}}{=} a_0^3 + (S - a_0\ell)\left(t\delta_0 + (1-t)\delta_{\ell/a_0^2}\right).$$

Cette convergence nous incite à définir la quantité $\liminf\limits_{\ell_1 \to \ell/a_0^2} \liminf\limits_{M \to +\infty} \lambda_2(\rho_{M,\ell_1})$, comme une valeur propre du problème :

$$\begin{cases} -v''(y) = \lambda \rho_\infty(y) v(y) & y \in \left(0, \frac{\ell}{a_0^2}\right) \\ v'(0) + A(\lambda + \gamma) v(0) = 0 \\ v'\left(\frac{\ell}{a_0^2}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.43}$$

On donne un sens à ce problème en écrivant sa formulation variationnelle. Cette formulation s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } v \in H^1(0, \ell/a_0^2) \text{ tel que, pour tout } h \in H^1(0, \ell/a_0^2), \text{ on ait :} \\ \displaystyle\int_0^{\ell/a_0^2} v'(y)h'(y)\mathrm{d}y = \lambda \int_0^{\ell/a_0^2} a_0^3 v(y)h(y)\mathrm{d}y \\ +A(\lambda+\gamma)v(0)h(0) + (S - a_0\ell)\lambda\left(tv(0)h(0) + (1-t)v\left(\frac{\ell}{a_0^2}\right)\right) h\left(\frac{\ell}{a_0^2}\right). \end{cases} \tag{3.44}$$

Définissons la fonction u par la relation : $u(x) \overset{\text{déf}}{=} v\left(\frac{x}{a_0^2}\right)$, pour tout $x \in [0,\ell]$. Un changement de variable dans les intégrales de la formulation variationnelle ci-dessus prouve que u est solution du problème :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(0,\ell) \text{ tel que, pour tout } h \in H^1(0,\ell), \text{ on ait :} \\ a_0^2 \displaystyle\int_0^\ell u'(x)h'(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\ell a_0 u(x)h(x)\mathrm{d}x \\ +a_0^2 A(\gamma+\lambda) + (S-a_0\ell)\lambda\left(tu(0)h(0) + (1-t)v(\ell)\right)h(\ell)\,. \end{array}\right. \tag{3.45}$$

Cela montre d'ailleurs que u est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\left\{\begin{array}{ll} -a_0^2 u''(x) = \lambda a_0 u(x) & x \in (0,\ell) \\ a_0^2 u'(0) + A\left(\gamma + \lambda\left(1 + t(S-a_0\ell)\right)\right)u(0) = 0 & \\ u'(\ell) - \lambda(1-t)(S-a_0\ell u(\ell) = 0. & \end{array}\right. \tag{3.46}$$

Des arguments classiques de continuité des valeurs propres (voir par exemple [28] et [31] pour une preuve détaillée) prouvent que :

$$\liminf_{\ell_1 \to \ell/a_0^2} \liminf_{M\to+\infty} \lambda_2(\rho_{M,\ell_1}) = \widehat{\lambda}, \tag{3.47}$$

où $\widehat{\lambda}$ désigne la première valeur propre du problème (3.46). On se souvient d'ailleurs que $\widehat{\lambda} < \lambda_2(\rho_{M^*,\ell_1^*}) \leq \lambda_2(\rho^*)$. On va montrer que cette situation est absurde, en exhibant une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ telle que :

$$\lambda_2(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\lambda},$$

ce qui prouvera que l'on sait faire décroître le critère λ_2 dans $\mathcal{A}_{a_0,S}$.

- **2ème étape : construction d'une suite minimisante.**

Pour aboutir à l'absurdité, on cherche donc à construire une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathcal{A}_{a_0,S}$;

ii $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} a_0$;

iii $a_n\sqrt{1+{a_n}'^2} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} a_0 + (S-a_0\ell)(t\delta_0 + (1-t)\delta_\ell)$, au sens des mesures.

Si une telle suite existe, on en déduira, à l'aide d'arguments standards de continuité des valeurs propres par rapport aux coefficients d'un opérateur (voir par exemple [28]), et de ce qui a été vu précédemment que :

$$\lambda_2(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \widehat{\lambda}.$$

Construisons une telle suite. On va chercher une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{l} a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} a_0; \\ a_n\sqrt{1+{a_n}'^2} = a_0 + (S-a_0\ell)[tn\chi_{[0,\frac{\ell}{n}]} + (1-t)n\chi_{[\ell-\frac{\ell}{n},\ell]}]; \\ \int_0^\ell a_n(x)\sqrt{1+{a_n}'^2(x)}\mathrm{d}x = S. \end{array}\right.$$

On en déduira alors immédiatement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathcal{A}_{a_0,S}$, et

$$a_n\sqrt{1+{a_n}'^2} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} a_0 + (S-a_0\ell)(t\delta_0 + (1-t)\delta_\ell) \text{ au sens des mesures.}$$

On désigne par $(u_n)_{n\geq 0}$, la suite de fonctions définie sur l'intervalle $[0,\ell]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n^2-(-x+n)^2} & \text{sur } \left[0, \frac{\ell}{2n^2}\right] ; \\ \sqrt{n^2-(x+n-\frac{1}{n^2})^2} & \text{sur } \left[\frac{\ell}{2n^2}, \frac{\ell}{n^2}\right] ; \\ u_n\left(x-\frac{i}{n^2}\right) & \text{sur } \left[\frac{i\ell}{n^2}, \frac{(i+1)\ell}{n^2}\right], \ \forall i \in \{1,...,n-1\} ; \\ 0 & \text{on } \left[\frac{\ell}{n}, \ell\right]. \end{cases} \tag{3.48}$$

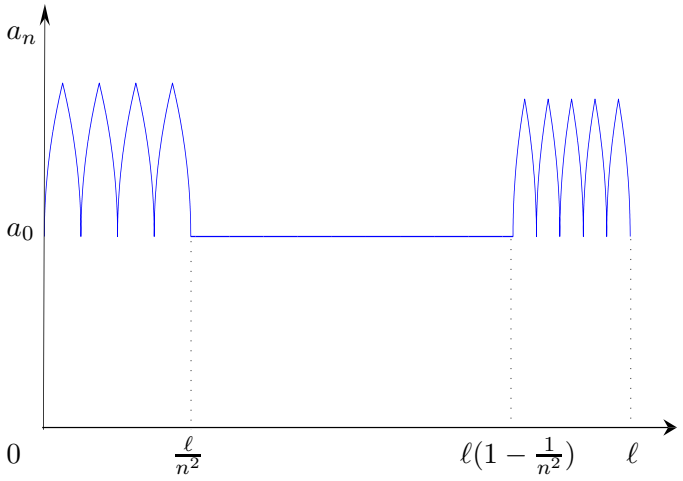

FIG. 3.9 – Représentation de la suite minimisante

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifie par construction :

$$u_n\sqrt{1+u_n'^2} = \begin{cases} 1 & \text{sur } \left[0, \frac{\ell}{n}\right] ; \\ 0 & \text{sur } \left[\frac{\ell}{n}, \ell\right]. \end{cases}$$

Soit alors $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\forall x \in [0,\ell],\ a_n(x) = a_0 + (S - a_0\ell)(tu_n(x) + (1-t)u_n(\ell - x).$$

Il est donc immédiat que $\displaystyle\int_0^\ell a_n(x)\sqrt{1+a_n'^2(x)}\mathrm{d}x = a_0\ell + (S-a_0\ell) = S.$

De plus, d'après (3.48), pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est strictement croissante sur $[0, \frac{\ell}{2n^2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\ell}{2n^2}, \frac{\ell}{n^2}]$, ce qui prouve, par construction de u_n que :

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{\ell}{2n^2}\right) = \sqrt{\frac{\ell}{n} - \frac{\ell^2}{4n^4}} \leq \sqrt{\frac{\ell}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par conséquent, $\|a_n - a_0\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui nous assure que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est une suite minimisante pour le critère « minimiser la deuxième valeur propre ».
Le graphe 3.9 représente la forme de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Conclusion de cette étape

On vient donc de prouver que l'on sait faire décroître le critère λ_2, si l'on suppose le minimum atteint. C'est absurde et cela prouve que le problème $\min\{\lambda_2(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$ n'a pas de solution.

□

La généralisation à la n-ième valeur propre $\lambda_n(a)$ repose sur le même principe. C'est l'objet du théorème qui suit :

Théorème 3.3. *Minimisation de $\lambda_n(a)$.*
Soient a_0 et S deux nombres réels strictement positifs. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre entier non nul.

Le problème $\min\{\lambda_n(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$ *n'a pas de solution.*

De plus, il existe $n+1$ éléments de $[0,\ell]$: $\xi_0 = 0 < \xi_1 < ... < \xi_{n-1} < \xi_n = \ell$ et $n+1$ éléments t_0, ..., t_n de $[0,1]$ vérifiant $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$, tels que toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :

i Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathcal{A}_{a_0,S}$;

ii $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_\infty} a_0$;

iii $a_n\sqrt{1+{a_n}'^2} \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} a_0 + (S - a_0\ell)\sum_{i=0}^{n} t_i\delta_{\xi_i}$, *au sens des mesures,*

est une suite minimisante d'éléments de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ pour le critère $\lambda_n(a)$.

Démonstration. Il suffit d'adapter la preuve du théorème 3.2. le principe est exactement le même que précédemment. Il suffit de remarquer que le profil de w_n, la fonction propre associée à la n-ième valeur propre $\lambda_n(a)$ a exactement n domaines nodaux. C'est un résultat bien connu, démontré par exemple dans [4] et [20], qui implique que la solution du problème suivant (après le changement de variable introduit dans la section 3.2.2) :

$$\begin{cases} \min \lambda_n(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}^M_{S,a_0,\ell_1} \end{cases}$$

pour $\ell_1 > 0$ et $M > a_0^3$, est une fonction *bang-bang*, avec n discontinuités. Ce profil justifie bien sûr la construction de la suite minimisante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. □

3.2.7 Relaxation du problème d'optimisation

Puisque nous avons démontré que le problème d'optimisation $\min\{\lambda_n(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$ n'a pas de solution, il semble naturel de définir un problème relaxé. Définissons l'injection τ par :

$$\begin{array}{rccc} \tau : & W^{1,\infty}(0,\ell) & \hookrightarrow & L^\infty(0,\ell)\times\mathcal{M}_b(0,\ell) \\ & a & \longmapsto & (a, a\sqrt{1+a'^2}). \end{array}$$

On rappelle que $\mathcal{M}_b(0,\ell)$ désigne l'ensemble des mesures bornées de Radon. On introduit alors :

i $\widehat{A}_{a_0,S}$, le complété de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ pour la topologie induite par τ. Au vu des topologies utilisées, il est assez immédiat que $\widehat{A}_{a_0,S} \subset \{(a,b) \in C^0([0,\ell]) \times \mathcal{M}_b(0,\ell) : \forall x_in[0,\ell],\ a(x) \geq a_0$ et $\langle b, 1\rangle \leq S\}$.

ii $\widehat{\lambda}_n(a,b)$, la n-ième valeur propre du problème :

$$\begin{cases} -(a^2u')' = \widehat{\lambda}(a,b)bu & x \in (0,\ell) \\ a^2(0)u'(0) + A(\widehat{\lambda}(a,b)+\gamma)u(0) = 0 \\ u'(\ell) = 0, \end{cases}$$

pour tout $(a,b) \in \widehat{A}_{a_0,S}$. Puisque b est une mesure, ce problème doit bien sûr être compris à l'aide de sa formulation variationnelle.

Il est classique que ce problème possède une solution (voir par exemple [58] et [21]). De plus, on a :
- $\widehat{\lambda}_n(a,b)$ est une extension de λ_n dans la classe $\widehat{A}_{a_0,S}$.
- $\inf\{\lambda_n(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\} = \min\{\widehat{\lambda_n}(a,b), (a,b) \in \widehat{A}_{a_0,S}\}$.

Cette relaxation ne possède qu'un intérêt théorique, puisque le complété de $\widehat{A}_{a_0,S}$ n'est pas explicitement connu.

3.3 Minimisation de $\mu_n(a)$, pour $n \geq 1$

Les résulats énoncés dans cette section ont fait l'objet d'un article (voir [50]).

3.3.1 Motivations

On s'intéresse au taux de décroissance exponentielle de la solution v de l'équation aux dérivées partielles (1.8). D'après la décomposition (1.13) de v, le développement asymptotique de $v(x,t)$ au second ordre quand $t \to +\infty$ s'écrit :

$$v(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\pi C_m}(\phi_0^a)^2(0)e^{-\frac{G_m}{C_m}t} + \frac{1}{2\pi C_m}\phi_1^a(0)\phi_1^a(x)e^{-\widehat{\mu_1}t}. \tag{3.49}$$

Étant donné que nous cherchons la forme de dendrite permettant la meilleure conduction de l'impulsion électrique à travers la fibre, il semble naturel de chercher une fonction a qui minimise le taux de décroissance exponentielle du signal. Ce taux de décroissance exponentielle est $\frac{G_m}{C_m}$, d'après la décomposition ci-dessus. Or, ce terme est clairement indépendant de la forme a de la fibre. C'est pourquoi, pour répondre à la question de la minimisation de l'atténuation du signal, on peut s'intéresser aux formes solutions du problème :

$$\begin{cases} \max(\phi_0^a)^2(0) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases} \tag{3.50}$$

Cependant, remarquons que la fonction propre associée à la valeur propre $\mu_0 = 0$ est constante. Ainsi, d'après la condition de normalisation, on a :

$$\phi_0^{a\,2}(0) = \frac{1}{\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x} \leq \frac{1}{S}.$$

Ainsi, pour résoudre le problème (3.50), il suffit d'exhiber un élément a de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ tel que la contrainte inégalité $\displaystyle\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x \leq S$ soit saturée (par exemple le rayon constant $a \equiv \frac{S}{\ell}$ est solution d'un tel problème).

Il n'y a d'ailleurs pas unicité des minimiseurs du problème (3.50). En effet, un autre minimiseur est, par exemple donné par :

$$a(x) := \sqrt{\alpha^2 - \left(\sqrt{\alpha^2 - a_0^2} - \alpha x\right)^2}, \text{ avec } \alpha := \frac{S}{\ell}.$$

Ainsi, en raison de la non-unicité des solutions de ce problème, les rayons précédents ne sauraient constituer des réponses satisfaisantes au problème biologique auquel nous nous intéressons. Pour compléter notre réponse, il semble donc naturel d'aller chercher le deuxième terme du développement asymptotique de $v(x,t)$ (3.49) ci-dessus. Le taux de décroissance exponentielle de ce terme est $\widehat{\mu_1}$, dont la dépendance en a, le rayon de la fibre est immédiate. Par conséquent, pour trouver la forme qui fournit la plus petite atténuation temporelle du signal, et compte tenu du premier terme du développement asymptotique, on est ramené à résoudre le problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \min \mu_1(a) \\ a \in \left\{ a \in \mathcal{A}_{a_0,S} : \int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2}\mathrm{d}x = S \right\}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Remarque 3.4. *Gardons à l'esprit que* $\widehat{\mu_1} = \frac{\mu_1 + 2R_a G_m}{2R_a C_m}$. *Par conséquent, les questions de la minimisation de* μ_1 *et de* $\widehat{\mu_1}$ *dans* $\mathcal{A}_{a_0,S}$ *sont les mêmes.*

D'ailleurs, on étudiant de près les conditions d'optimalité au premier ordre du problème (1.16), on constate que la contrainte inégalité doit être saturée. Par conséquent, les problèmes (1.16) et (3.51) sont complètement équivalents, au sens où toute solution de l'un est solution de l'autre (il en est de même pour les suites minimisantes).

3.3.2 Le cas de $\mu_1(a)$

On a exactement le même type de résultat que dans le théorème 3.2.

Théorème 3.4. *Minimisation de* $\mu_1(a)$.
Soient a_0 *et* S, *deux nombres réels strictement positifs.*
Le problème $\min\{\mu_1(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\}$ *n'a pas de solution.*

Démonstration. Pour prouver ce théorème, il suffit d'adapter la démonstration du théorème 3.2. On réutilise les notations introduites pour démontrer ce théorème. On redonne les grandes étapes de la preuve :

i On utilise le changement de variable $y = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2(t)}$ et on se ramène à un problème aux valeurs propres plus simple après changement de variable.

ii On calcule la dérivée au sens de Gâteaux de la différentielle de $\mu_1(\rho)$. Pour $\rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$, on désigne par $\mu(\rho)$ la première valeur propre non nulle du problème :

$$\begin{cases} -w'' = \mu(\rho)\rho w & y \in (0,\ell_1) \\ w'(0) = w'(\ell) = 0. \end{cases} \quad (3.52)$$

Si on désigne par $\dot{\mu}(\rho)$ la dérivée au sens de Gâteaux de $\rho \mapsto \mu(\rho)$ dans un direction h du cône des directions admissibles, on a le lemme :

Lemme 3.5. *Soit ρ un élément de $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ et h, une perturbation admissible. Alors,*

$$\dot{\mu}(\rho) = -\mu(\rho) \int_0^{\ell_1} h(y) w^2(y) \mathrm{d}y,$$

où w désigne la fonction propre normalisée associée à $\mu(\rho)$, i.e. telle que :

$$\int_0^{\ell_1} \rho(y) w^2(y) \mathrm{d}y = 1.$$

iii On prouve que les applications :

$$\begin{array}{rccl} &]a_0^3, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & \min\{\mu(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}\} \text{ avec } \ell_1 \text{ fixé}, \\ \text{et} &]0, \frac{\ell}{a_0^2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \ell_1 & \longmapsto & \min\{\mu(\rho), \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}\} \text{ avec } M \text{ fixé}, \end{array}$$

sont décroissantes.

iv On raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un optimum a^* minimisant μ_1 dans la classe $\mathcal{A}_{a_0,S}$. On considère ρ^*, l'image de a^* par le changement de variable introduit ci-dessus. On fait varier ρ^* afin de faire décroître (strictement) le critère μ_1, en utilisant le résultat de l'étape précédente.

v On en déduit que la suite minimisante $(a_n)_{n\geq 0}$ cherchée doit vérifier :

$$\begin{cases} a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_\infty} a_0; \\ a_n \sqrt{1 + {a_n}'^2} = a_0 + (S - a_0\ell)[tn\chi_{[0,\frac{\ell}{n}]} + (1-t)n\chi_{[\ell-\frac{\ell}{n},\ell]}], \text{ avec } t \in [0,1]; \\ \int_0^\ell a_n(x)\sqrt{1 + {a_n}'^2(x)}\mathrm{d}x = S. \end{cases}$$

et on obtient une contradiction en exhibant une suite (la même que dans la preuve du théorème 3.2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faisant davantage décroître le critère que l'optimum supposé.

□

3.3.3 Deux remarques

Remarque 1

Comme dans le cas de λ_2, on peut s'intéresser à la relaxation du problème d'optimisation (1.16).

Puisque nous avons démontré la non-existence de solution pour le problème d'optimisation de $\mu_1(a)$ dans la classe $\mathcal{A}_{a_0,S}$, il semble naturel de définir un problème relaxé. On définit comme précédemment l'injection τ par :

$$\begin{array}{rccl} \tau : & W^{1,\infty}(0,\ell) & \hookrightarrow & L^\infty(0,\ell) \times \mathcal{M}_b(0,\ell) \\ & a & \longmapsto & (a, a\sqrt{1+a'^2}). \end{array}$$

On introduit $\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,S}$, le complété de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ pour la topologie induite par τ. On définit $\widehat{\mu}_1(a,b)$ comme la deuxième valeur propre associée au problème :

$$\begin{cases} -\left(a^2u'\right)' = \widehat{\mu}(a,b)bu & x \in (0,\ell) \\ u'(0) = u'(\ell) = 0 \end{cases}$$

Puisque b est une mesure, ce problème doit être compris à l'aide de sa formulation variationnelle. De plus, l'existence de $\widehat{\mu}(a,b)$ est une conséquence du théorème de décomposition spectrale et on a :

- $\widehat{\mu}_1$ est une extension de μ_1 à la classe $\widehat{\mathcal{A}}_{a_0,S}$.
- $\inf\{\mu_1(a), a \in \mathcal{A}_{a_0,S}\} = \min\{\widehat{\mu}_1(a,b), (a,b) \in \widehat{\mathcal{A}}_{a_0,S}\}$.

Les remarques faites dans la section 3.2.7 sur l'intérêt d'une telle relaxation sont encore valables ici. En effet, puisque la complété de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ n'est pas explicitement connu, elle semble difficilement exploitable d'un point de vue pratique.

Remarque 2

Le théorème 3.4 se généralise aux autres valeurs propres. On a alors :

Théorème 3.5. *Minimisation de $\mu_n(a)$, $n \geq 2$. Soient S et a_0, deux nombres réels (strictement) positifs.*

Le problème suivant :

$$\begin{cases} \min \mu_k(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S} \end{cases} \tag{3.53}$$

n'a pas de solution. De plus, il existe $k+1$ éléments de $[0,\ell]$ $\xi_0 = 0$, ξ_1, ..., $\xi_k = \ell$ et $k+1$ éléments t_0, ..., t_k de $[0,1]$ qui vérifient $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$, tels que tout $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} a_0; \\ a_n\sqrt{1+{a_n}'^2} = a_0 + (S - a_0\ell)\sum_{i=0}^{k} t_i\delta_{\xi_i}; \\ \int_0^\ell a_n(x)\sqrt{1+{a_n}'^2(x)}\mathrm{d}x = S. \end{cases}$$

est une suite minimisante d'éléments de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ pour le critère $\mu_k(a)$.

Chapitre 4

Étude du second critère : atténuation en espace

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution du problème de la minimisation de la fonction de transfert $T(a)$ définie pour $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$ par :

$$T(a) = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty} v(0,t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{+\infty} v(\ell,t)\mathrm{d}t},$$

où v est la solution de l'une des équations aux dérivées partielles (1.4) ou (1.8). Ce problème correspond à la recherche de la forme de l'axone atténuant (en moyenne dans la durée) le moins possible le message électrique entre le début et la fin de la fibre.

Le problème d'optimisation que l'on souhaite résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \min T(a) \\ a \in \mathcal{A}_{a_0,S}. \end{cases}$$

Il s'agit du problème (1.18). Le cas d'une fibre connectée au soma est plus difficile que le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres. La difficulté essentielle provient essentiellement des conditions au bord de l'équation aux dérivées partielles considérées, de type mixte, dans le cas difficile et Neumann dans l'autre cas. On sait montrer, quel que soit le modèle de fibre considéré que les problèmes d'optimisation associés possèdent une solution et que cette solution est le cylindre de rayon minimal. Les résultats présentés dans la section 4.1 ont fait l'objet d'une publication : [31].

4.1 Minimisation de $T(a)$ dans le cas d'une fibre connectée au soma

4.1.1 Le résultat

La réponse au problème (1.18) dans le cas où le potentiel v est solution de l'équation aux dérivées partielles (1.4) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Minimisation globale de $T(a)$: cas de la dendrite connectée au soma.*
La fonction identiquement égale à a_0 minimise le critère T parmi les éléments de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ dans le cas où v est régie par l'équation aux dérivées partielles (1.4).

La démonstration s'articule en plusieurs étapes : on va d'abord prouver que les extrema locaux du problème (1.18) sont de type *bang-bang*, puis que parmi eux, l'unique fonction minimisant le critère T est la fonction constante identiquement égale à a_0.

4.1.2 Réécriture du critère T

On désigne par $\mathscr{L}$ l'opérateur *transformée de Laplace*. Rappelons que v désigne la solution de l'équation (1.4). Nous utiliserons indifféremment les notations :

$$\forall x \in [0,\ell],\ \forall t>0,\ \forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ \widehat{v}(x,p) = \mathscr{L}(v(x,.))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(x,t)\mathrm{d}t.$$

Passons aux transformées de Laplace dans l'équation (1.4). Puisque $\mathscr{L}$ est un opérateur linéaire, $\widehat{v}$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2R_a}\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}\right) = a\sqrt{1+a'^2}\left(C_m\left(p\widehat{v}-v(x,0)\right)+G_m\widehat{v}\right) & (x,p)\in(0,\ell)\times]0;+\infty[\\ \frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}(0,p) = A_s\left[C_m p\widehat{v}(0,p)+G_s\widehat{v}(0,p)\right]-\widehat{i_0}(p) & p\in]0,+\infty[\\ \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}(\ell,p)=0 & p\in]0,+\infty[\\ \widehat{v}(x,0)=0 & x\in[0,\ell]. \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Puisque nous avions fait l'hypothèse qu'une impulsion est imposée à l'axone à l'instant initial (modélisée par une mesure de Dirac à l'origine), on peut écrire que :

$$\widehat{i_0}(p) = <\delta_{\{t=0\}}, e^{-pt}> = 1.$$

Introduisons à présent comme nous l'avions fait dans la section 3.2.2, le changement de variable :

$$y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2(t)}. \tag{4.2}$$

Posons à ce titre, et avec les notations précédentes :

- $\ell_1 \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}x}{a^2(x)}$;
- $w(y,p) \overset{\text{déf}}{=} \widehat{v}(x,p)$, pour $x\in[0,\ell]$, $p>0$ et $y\in[0,\ell_1]$;
- $\rho(y) \overset{\text{déf}}{=} a^3(x)\sqrt{1+a'^2(x)}$, pour tout $y\in[0,\ell_1]$.

Remarque 4.1. *Puisque $a\in\mathcal{A}_{a_0,S}$, on a :*

$$\rho \in \mathcal{R}_{a_0,S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\rho\in L^\infty(0,\ell_1) : \forall y\in[0,\ell_1],\ a_0^3\le\rho(y)\ \textit{et}\ \int_0^{\ell_1}\rho(y)\mathrm{d}y\le S\right\}.$$

En effet, si nous posons $b(y) \overset{\text{déf}}{=} a(x)$ pour $x\in[0,\ell]$ et $y\in[0,\ell_1]$, on a :

$$\int_0^\ell a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{\ell_1} b^3(y)\sqrt{1+\frac{b'^2(y)}{b^4(y)}}\mathrm{d}y = \int_0^{\ell_1}\rho(y)\mathrm{d}y.$$

L'équation (4.1) devient alors :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho\,(C_m p + G_m)\,w & (y,p) \in]0,\ell_1[\times]0;+\infty[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\partial w}{\partial y}(0,p) = A_s\,[C_m p + G_s]\,w(0,p) - 1 & p \in]0,+\infty[\\ \frac{\partial w}{\partial y}(\ell_1,p) = 0 & p \in]0,+\infty[\end{cases} \tag{4.3}$$

Si l'on pose, pour $p > 0$ fixé $w(.,p) \overset{\text{déf}}{=} w_p$, l'équation précédente se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2 w_p}{\mathrm{d}y^2} = \rho\,(C_m p + G_m)\,w_p & y \in]0,\ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}w_p}{\mathrm{d}y}(0) = A_s\,[C_m p + G_s]\,w_p(0) - 1 & \\ \frac{\mathrm{d}w_p}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 & \end{cases} \tag{4.4}$$

Nous avons prouvé dans la section 2.1.3 que les intégrales $\int_0^\ell v(0,t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^\ell v(\ell,t)\mathrm{d}t$ étaient convergentes. Le critère T peut donc se réécrire sous la forme :

$$T(a) = \frac{\lim\limits_{p\to 0}\widehat{v}(0,p)}{\lim\limits_{p\to 0}\widehat{v}(\ell,p)} = \frac{\lim\limits_{p\to 0} w_p(0)}{\lim\limits_{p\to 0} w_p(\ell_1)}.$$

On comprend donc aisément la nécessité de faire tendre p vers 0 dans l'équation (4.4). Il n'est bien sûr pas restrictif de supposer que $p \in]0,1]$, puisque l'on souhaite faire tendre p vers 0. Pour ce faire, écrivons la formulation variationnelle de (4.4). Les calculs sont les mêmes que ceux exposés dans la preuve du théorème 2.1. Cette formulation s'écrit :

$$\forall z \in H^1(0,\ell_1),\ a_p(w_p,z) = L(z), \tag{4.5}$$

avec :

$$\begin{aligned} a_p(u,z) &= \frac{1}{2R_a}\int_0^{\ell_1} u'(y)z'(y)\mathrm{d}y + (C_m p + G_m)\int_0^{\ell_1}\rho(y)u(y)z(y)\mathrm{d}y \\ &\quad + \frac{A_s}{2\pi}(C_m p + G_s)u(0)z(0), \\ \text{et } L(z) &= \frac{z(0)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Faisons $z = w_p$ dans la formulation ci-dessus. Il vient :

$$\min\left(\frac{1}{2R_a}, a_0 G_m\right)\|w_p\|^2_{H^1([0,\ell_1])} \le a_p(w_p,w_p) = L(w_p)$$

Cela prouve que a_p est coercive. Or, L est une forme linéaire continue sur $H^1(0,\ell_1)$. En effet, il s'agit, à une constante multiplicative près de l'opérateur *trace* sur $H^1(0,\ell_1)$. On en déduit que w_p est bornée au sens de $H^1(0,\ell_1)$. Il s'ensuit, $H^1(0,\ell_1)$ étant réflexif, qu'il existe w^* dans $H^1(0,\ell_1)$ tel que $w_p \underset{p\to 0}{\rightharpoonup} w^*$ dans $H^1(0,\ell_1)$ et $w_p \xrightarrow[p\to 0]{} w^*$ dans $L^2(0,\ell_1)$, d'après le théorème de Rellich. En utilisant la continuité de l'application trace dans $H^1(0,\ell_1)$, il est immédiat que $w_p(0) \xrightarrow[p\to 0]{} w^*(0)$. Or, puisque $w_p \xrightarrow[p\to 0]{} w^*$ dans $L^2(0,\ell_1)$, alors $\int_0^{\ell_1}\rho(y)w_p(y)z(y)\mathrm{d}y \xrightarrow[p\to 0]{} \int_0^{\ell_1}\rho(y)w^*(y)z(y)\mathrm{d}y$.

Enfin, et en revenant à la définition de la convergence faible dans $H^1(0,\ell_1)$, il est clair que :

$$\int_0^{\ell_1} w_p'(y)z'(y)\mathrm{d}y \xrightarrow[p\to 0]{} \int_0^{\ell_1} w^{*\prime}(y)z'(y)\mathrm{d}y.$$

Ces précautions nous autorisent à faire tendre p vers 0 dans la formulation variationnelle ci-dessus. Moyennant des raisonnements très classiques en Analyse variationnelle (voir par exemple [28]), on remarque, en remontant les étapes de calcul, que l'on obtient exactement la formulation variationnelle du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2 w_0}{\mathrm{d}y^2} = \rho G_m w_0 & y \in]0, \ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}y}(0) = A_s G_s w_0(0) - 1 & \\ \frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 & \end{cases} \tag{4.6}$$

On désignera donc par w_0, la fonction w^* ou encore la limite au sens précisé ci-dessus, quand $p \to 0$ de w_p. Cette limite est unique, en vertu du théorème de Lax-Milgram.

Notations

On appelle T_1 le critère défini sur l'ensemble des fonctions $\rho \in \mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ s'écrivant sous la forme $\rho(y) = a(x)\sqrt{1+a'^2(x)}$, avec $x \in [0,\ell]$, $y \in [0,\ell_1]$ et $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$, par :

$$T_1(\rho) \overset{\text{déf}}{=} T(a) = \frac{w_0(0)}{w_0(\ell_1)}.$$

Remarque 4.2. *L'étude de l'équation (4.6) montre que w_0 est une fonction strictement décroissante et positive. En effet, il n'est pas possible que l'on ait $w_0'(0) \geq 0$, car d'après la condition au bord en 0, on aurait $w_0(0) \geq 0$, et w_0 serait donc une fonction positive et convexe, ce qui contredit la seconde condition au bord (en ℓ). En envisageant tous les cas possibles, il s'avère que la seule possibilité est $w_0(0) > 0$ et $w_0'(0) < 0$, et que, de plus, sur l'intervalle $]0,\ell_1[$, w_0 et w_0'' sont positifs. En $x = \ell_1$, on a $w_0'(\ell_1) = 0$ et w_0'' est croissant. En en déduit que w_0 est décroissante et positive sur $[0,\ell_1]$.*

C'est pourquoi pour tout $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$, on a :

$$T(a) = \frac{w_0(0)}{w_0(\ell_1)} > 1.$$

4.1.3 Existence de solutions et variations du critère T_1

On s'intéresse à la résolution d'un problème proche de celui qui nous intéresse. On définit la classe de fonctions $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$ par :

$$\mathcal{R}^M_{a_0,S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \rho \in L^\infty(0,\ell_1) : \forall y \in [0,\ell_1],\ a_0 \leq \rho(y) \leq M \text{ et } \int_0^{\ell_1} \rho(y)\mathrm{d}y \leq S \right\}.$$

L'idée est de résoudre le problème :

$$\begin{cases} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S} \end{cases} \tag{4.7}$$

pour en déduire, moyennant un passage à la limite ($M \to +\infty$) que nous justifierons ultérieurement, les solutions du problème

$$\begin{cases} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}_{a_0,S} \end{cases} \tag{4.8}$$

puis celles du problème (1.18).

Soit $M > a_0$, fixé. Commençons par démontrer que le problème (4.7) possède une solution.

La bonne notion de convergence, puisque $\mathcal{R}^M_{a_0,S}$ est un sous ensemble de $L^\infty(0,\ell_1)$ est la convergence L^∞ faible-$\star$. Remarquons que $\mathcal{R}^M_{a_0,S}$ est séquentiellement compact au sens de cette convergence. On souhaite à présent démontrer que T_1 est séquentiellement continu au sens de la convergence L^∞ faible-$\star$.
Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\mathcal{R}^M_{a_0,S}$ telle que $\rho_n \underset{p\to 0}{\overset{*}{\rightharpoonup}} \rho$. On va démontrer qu'alors,

$$T_1(\rho_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T_1(\rho).$$

On réutilise la formulation variationnelle (4.5). Puisqu'il est clair que $\rho_n \geq a_0$ pour tout entier n, on utilise le même raisonnement que précédemment pour prouver que a_p est coercive. Il s'ensuit que w_n, la solution de l'équation différentielle associée à ρ_n est bornée au sens de $H^1(0,\ell_1)$, donc converge faiblement au sens de $H^1(0,\ell_1)$ vers un certain w. En utilisant le fait que w est borné $H^1(0,\ell_1)$, on prouve la convergence des termes « intégraux » de la formulation variationnelle (4.5). Il s'agit là d'un raisonnement très proche de celui utilisé ci-dessus pour faire tendre p vers 0. Cela implique en particulier que $w_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} w(0)$. La relation qui suit est obtenue en intégrant deux fois l'équation (4.6). Nous nous en resservirons ultérieurement :

$$w(\ell_1) = w(0) - 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} y\rho(y)w(y)\mathrm{d}y.$$

De la même façon, d'après le résultat précédent, il est clair que $w_n(\ell_1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} w(\ell_1)$. On en déduit que le critère T_1 est séquentiellement continu au sens de la convergence L^∞ faible-$\star$. Cela démontre en particulier l'existence d'un minimum dans la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S}$. On s'attachera à présent à décrire ce minimum en traduisant les conditions d'optimalités auxquelles il satisfait.
On fait varier le critère T_1 autour de l'optimum dans la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S}$.
Soit $\rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S}$ et $h \in W^{1,\infty}(0,\ell_1)$, un élément du cône des directions admissibles de différentiation de w_0. On utilisera dorénavant la notation :

$$\dot{w_0} \overset{\text{déf}}{=} \left\langle \frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}\rho}(\rho), h \right\rangle. \tag{4.9}$$

$\dot{w_0}$ désigne donc la différentielle au sens de Gâteaux de w_0 en ρ dans la direction h. Utilisons la linéarité de l'opérateur différentiation. $\dot{w_0}$ est alors solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2\dot{w_0}}{\mathrm{d}y^2} = G_m\left(\rho\dot{w_0} + hw_0\right) \quad y \in]0,\ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}\dot{w_0}}{\mathrm{d}y}(0) = A_sG_s\dot{w_0}(0) \\ \frac{\mathrm{d}\dot{w_0}}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Lemme 4.1. *Variations du critère T.*
Avec les notations précédentes, on a :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}\rho}, h \right\rangle = 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} h(y)w_0(y)f(y)\mathrm{d}y. \tag{4.11}$$

Démonstration. Cherchons à exprimer en fonction de w_0, $\dot{w}_0$ et h, la variation du critère T_1 lorsque ρ varie. On a bien sûr :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}\rho}, h \right\rangle = \frac{\dot{w}_0(0)w_0(\ell_1) - w_0(0)\dot{w}_0(\ell_1)}{w_0^2(\ell_1)}. \tag{4.12}$$

Par ailleurs, si l'on intégre deux fois la première équation de (4.6), on obtient :

$$w_0(\ell_1) = 2R_aG_m \int_0^{\ell_1}\int_\ell^y \rho(s)w_0(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}y + w_0(0) = w_0(0) - 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} y\rho(y)w_0(y)\mathrm{d}y, \tag{4.13}$$

en utilisant le théorème de Fubini. Différentions la relation (4.13). On obtient alors :

$$\dot{w}_0(\ell_1) = \dot{w}_0(0) - 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} yh(y)w_0(y)\mathrm{d}y - 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} y\rho(y)\dot{w}_0(y)\mathrm{d}y. \tag{4.14}$$

Or, on a vu que :

$$\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}y}(0) = -2R_aG_m \int_0^{\ell_1} \rho(y)w_0(y)\mathrm{d}y = \frac{A_sG_sR_a}{\pi}w_0(0) - \frac{R_a}{\pi}.$$

Ainsi :

$$\dot{w}_0(0) = -\frac{2\pi G_m}{A_sG_s}\left(\int_0^{\ell_1} h(y)w_0(y)\mathrm{d}y + \int_0^{\ell_1} \rho(y)\dot{w}_0(y)\mathrm{d}y\right). \tag{4.15}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\dot{w}_0(\ell_1) \quad = \quad & -\frac{2\pi G_m}{A_sG_s}\int_0^{\ell_1} h(y)w_0(y)\mathrm{d}y - \frac{2\pi G_m}{A_sG_s}\int_0^{\ell_1} \rho(y)\dot{w}_0(y)\mathrm{d}y \\ & -2R_aG_m \int_0^{\ell_1} yh(y)w_0(y)\mathrm{d}y - 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} y\rho(y)\dot{w}_0(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Posons $\tilde{A} = \dfrac{A_sG_sR_a}{\pi}$. Dans l'expression ci-dessus, on constate que l'on risque d'être ennuyé si l'on souhaite déterminer les extrema locaux du critère T_1, en raison de l'absence du terme h dans deux des intégrales. Cela donne l'idée d'introduire deux problèmes adjoints pour nous aider à les estimer. On appelle q_1 la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}y^2} = G_m\rho\,(q_1 - t) \quad y \in]0, \ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}y}(0) = A_sG_sq_1(0) \\ \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

et q_2, la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}y^2} = G_m\rho\,(q_2 - 1) \quad y \in]0, \ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}y}(0) = A_sG_sq_2(0) \\ \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 \end{cases} \tag{4.17}$$

L'existence et l'unicité de q_1 et q_2 sont assurées par le théorème de Lax-Milgram. On en déduit que :

$$\langle \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}\rho}, h\rangle = 2R_aG_m \int_0^{\ell_1} h(y)w_0(y)\left(\frac{w_0(\ell_1) - w_0(0)}{\tilde{A}}\,(q_2(y) - 1) - w_0(0)\,(q_1(y) - y)\right)\mathrm{d}y. \tag{4.18}$$

Introduisons f, la fonction de la variable réelle y définie par :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,\ell_1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \frac{w_0(\ell_1)-w_0(0)}{\tilde{A}}\left(q_2(y)-1\right)-w_0(0)\left(q_1(y)-y\right). \end{array}$$

f est donc l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}=G_m\rho f & y\in]0,\ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(0)=A_sG_sf(0)+w_0(\ell_1) & \\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(\ell_1)=0 & \end{array}\right. \tag{4.19}$$

On peut alors écrire que :

$$\boxed{\left\langle \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}\rho},h\right\rangle = 2R_aG_m\int_0^{\ell_1}h(y)w_0(y)f(y)\mathrm{d}y.}$$

□

4.1.4 Preuve du théorème 4.1

On va raisonner en plusieurs étapes : on écrit d'abord les conditions d'optimalité au premier ordre pour le problème d'optimisation (4.7), sans tenir compte, dans un premier temps de la contrainte de surface $\int_0^{\ell_1}\rho(y)\mathrm{d}y\leq S$. On démontre alors que, nécessairement, le minimiseur d'un tel problème est *bang-bang*. Enfin, on cherche la meilleure fonction ρ dans l'intersection de $\mathcal{R}^M_{a_0,S}$, pour $M>a_0^3$ et de l'ensemble des fonctions *bang-bang* sur $[0,\ell]$. Quel que soit $M>a_0^3$, on trouve que la fonction constante égale à a_0^3 minimise le critère T_1 et l'on en conclura aisément qu'il existe un minimiseur pour le critère T dans la classe $\mathcal{A}_{a_0,S}$: la fonction a_0.

i **$1^{\text{ère}}$ étape : conditions d'optimalité**

Nous allons donc à présent écrire les conditions d'optimalité du problème (4.7). Soit $\rho\in\mathcal{R}^M_{a_0,S}$, un minimiseur local pour le critère T_1. Introduisons les trois ensembles :

- $\mathcal{I}_0(\rho)$: tout élément de la classe des sous-ensembles de $[0,\ell_1]$ dans lesquels $\rho(y)=a_0^3$ p.p. ;
- $\mathcal{I}_M(\rho)$: tout élément de la classe des sous-ensembles de $[0,\ell_1]$ dans lesquels $\rho(y)=M$ p.p. ;
- $\mathcal{I}_\star(\rho)$: tout élément de la classe des sous-ensembles de $[0,\ell_1]$ dans lesquels $a_0^3<\rho(y)<M$ p.p.

On peut écrire que :

$$\mathcal{I}_\star(\rho)=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\left\{y\in(0,\ell_1):a_0^3+\frac{1}{k}<\rho(y)<M-\frac{1}{k}\right\}=\bigcup_{k=1}^{+\infty}\mathcal{I}_{\star,k}(\rho).$$

ρ est un minimum local pour le critère T_1 si, et seulement si $\langle\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}\rho},h\rangle\geq 0$, où h est un élément du cône des directions admissibles de différentiabilité.

On va à présent démontrer que $|\mathcal{I}_{\star,k}(\rho)| = 0$***, pour tout entier*** k ***non nul.***

Supposons $|\mathcal{I}_{\star,k}(\rho)| \neq 0$. Soit $y_0 \in \mathcal{I}_\star(\rho)$. On appelle $(G_{k,n})_{n\geq 0}$, la suite de sous-ensembles de $\mathcal{I}_{\star,k}$:

$$G_{k,n} \overset{\text{déf}}{=} B\left(y_0, \frac{1}{n}\right) \cap \mathcal{I}_{\star,k} \subset \mathcal{I}_{\star,k}.$$

Remarquons alors que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} G_{k,n} = \{y_0\}$, et posons $h = \chi_{G_{k,n}}$. Ainsi, pour t suffisamment petit, des perturbations de la forme $\rho + th$ et $\rho - th$ sont admissibles (pour t suffisamment petit, $\rho + th \in \mathcal{R}^M_{a_0,S}$ et $\rho - th \in \mathcal{R}^M_{a_0,S}$). Alors :

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T_1(\rho + th) - T_1(\rho)}{t} = \int_0^\ell h(y)w(y)f(y)\mathrm{d}y \geq 0 \Longleftrightarrow \int_{G_{k,n}} w(y)f(y)\mathrm{d}y \geq 0.$$

De la même façon :

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T_1(\rho - th) - T_1(\rho)}{t} = -\int_0^\ell h(y)w(y)f(y)\mathrm{d}y \geq 0 \Longleftrightarrow \int_{G_{k,n}} w(y)f(y)\mathrm{d}y \leq 0.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{G_{k,n}} w(y)f(y)\mathrm{d}y = 0$. Divisons cette quantité par $|G_{k,n}|$ et faisons tendre n vers $+\infty$.
Le théorème de densité de Lebesgue nous assure alors que $w_0(y_0)f(y_0) = 0$, p.p. $y_0 \in \mathcal{I}_{\star,k}(\rho)$. On se convainc aisément de l'absurdité de cette situation, étant donné que f est régie par l'équation différentielle (4.19). Cela prouve que $|\mathcal{I}_{\star,k}(\rho)| = 0$.

Conclusion partielle

De la même façon, on montre que :
- Sur l'ensemble $\mathcal{I}_0(\rho)$, on a : $f(y) \geq 0$ et $h(y) \geq 0$;
- Sur l'ensemble $\mathcal{I}_M(\rho)$, on a : $f(y) \leq 0$ et $h(y) \leq 0$.

ii **2ème étape : les optimums de ce problème sont *bang-bang***

Pour le vérifier, on va utiliser une propriété de la fonction $q_2 - 1$.

Preuve que la fonction $q_2 - 1$ est de signe constant strictement négatif sur $[0, \ell_1]$.

Introduisons $\tilde{q_2} \overset{\text{déf}}{=} q_2 - 1$. Puisque q_2 est solution de l'équation différentielle ordinaire (4.17), alors $\tilde{q_2}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2\tilde{q_2}}{\mathrm{d}y^2} = G_m\rho\tilde{q_2} & y \in [0, \ell_1] \\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}\tilde{q_2}}{\mathrm{d}y}(0) = A_sG_s\tilde{q_2}(0) + 1 & \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{q_2}}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 & \end{cases} \tag{4.20}$$

Si $\tilde{q_2}'(0) \leq 0$, alors $\tilde{q_2}(0) < 0$ d'après la condition au bord et $\tilde{q_2}$ est concave au voisinage de 0. Par conséquent, $\tilde{q_2}'(y) \leq \tilde{q_2}'(0) < 0$ pour tout $y \in [0, \ell_1]$ car $\tilde{q_2}$ est de classe $C^1([0, \ell_1])$ d'après le théorème de Lax-Milgram. Cette situation est impossible car $\tilde{q_2}'(\ell_1) = 0$. Exactement de la même façon, on prouve que la situation $\tilde{q_2}(0) \geq 0$ (et donc nécessairement $\tilde{q_2}'(0) > 0$) est impossible. Il s'ensuit que $\tilde{q_2}'(0)$ et $\tilde{q_2}(0)$ sont nécessairement de signes contraires et puisque $\tilde{q_2}'(0) > \tilde{q_2}(0)$, on a : $\tilde{q_2}'(0) > 0 > \tilde{q_2}(0)$. De plus, il n'est pas possible que $\tilde{q_2}$ s'annule sur $]0, \ell_1[$ car la condition $\tilde{q_2}'(\ell_1) = 0$ ne pourrait pas être satisfaite.
Finalement, on en déduit que $\tilde{q_2}$ est croissante sur $[0, \ell]$ et strictement négative.
Cela nous donne alors l'idée de factoriser f de la façon suivante :

$$\forall y \in [0, \ell_1],\ f(y) = (q_2(y) - 1) \cdot \left(\frac{w(\ell_1) - w(0)}{\tilde{A}} - w(0) g(y) \right), \text{ où } g(y) := \frac{q_1(y) - y}{q_2(y) - 1}.$$

g est deux fois dérivable sur $[0, \ell_1]$, car les fonctions qui constituent le quotient le sont aussi. Soit $y \in [0, \ell_1]$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) &= \frac{(q_1'(y) - 1)(q_2(y) - 1) - (q_1(y) - y) q_2'(y)}{[q_2(y) - 1]^2}. \\ \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}(y) &= \frac{1}{[q_2(y) - 1]^2} \left\{ q_1''(y)(q_2(y) - 1) - (q_1(y) - y) q_2''(y) \right\} \\ &\quad - \frac{2 q_2'(y)}{[q_2(y) - 1]^3} \left\{ (q_1'(y) - 1)(q_2(y) - 1) - (q_1(y) - y) q_2'(y) \right\}. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser le fait que q_1 et q_2 sont régies par les équations différentielles ordinaires (4.16) et (4.17). Cela prouve que $q_1''(y)(q_2(y) - 1) - (q_1(y) - y) q_2''(y) = 0,\ \forall y \in [0, \ell_1]$. On obtient que :

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}y^2}(y) = -2 \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[q_2 - 1](y)}{q_2(y) - 1} . \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y). \tag{4.21}$$

Utilisons la méthode de variation de la constante pour déterminer l'expression de $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y)$. En posant $g(y) = \dfrac{c(y)}{u^2(y)}$, où c est une fonction dérivable sur $[0, \ell_1]$, on montre que c est solution de l'équation $c' = 0$ sur l'intervalle $[0, \ell_1]$. D'après l'expression de $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y)$, on doit avoir $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = \dfrac{-1}{q_2(\ell_1) - 1}$.
Il s'ensuit :

$$\forall y \in [0, \ell_1],\ \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}(y) = -\frac{q_2(\ell_1) - 1}{[q_2(y) - 1]^2} > 0. \tag{4.22}$$

Par conséquent, g est une fonction strictement croissante sur $[0, \ell_1]$. En considérant le fait que $q_2 - 1$ est strictement négative, on voit que : $f(y) \geq 0 \iff g(y) \geq \frac{w(\ell_1) - w(0)}{\tilde{A} w(0)}$. Il s'ensuit que la fonction ρ optimum local minimisant le critère T_1 est *bang-bang*.

iii **3ème étape : parmi les fonctions *bang-bang*, on recherche celle(s) qui minimise(nt) le critère T_1**

Introduisons l'ensemble $\mathcal{B}_{a_0,M,S}$:

$$\mathcal{B}_{a_0,M,S} := \left\{ \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S} : \exists \xi_1^M \in [0, \ell_1] : \rho = a_0^3 \text{ sur } [0, \xi_1^M] \text{ et } \rho = M \text{ sur }]\xi_1^M, \ell_1] \right\}.$$

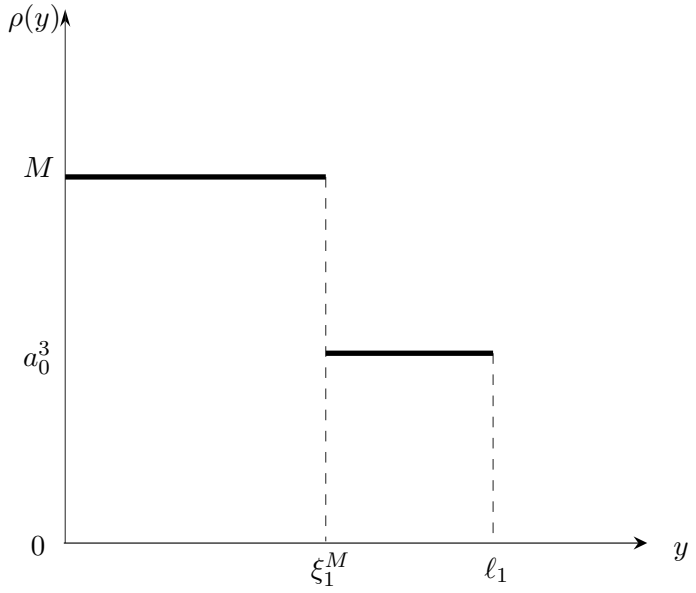

FIG. 4.1 – Profil de l'optimum

Comme sur la figure 2, on appelle $\xi_1^M \in [0, \ell_1]$, le réel à partir duquel le changement de palier se produit pour la fonction optimum ρ_M. Cette partie est un peu calculatoire. On va déterminer de prime abord l'expression du critère T_1 dans la classe de fonctions $\mathcal{B}_{a_0,M}$, c'est à dire en fonction de ξ_1 pour une fonction ρ donnée, puis rechercher la meilleure constante minimisant T_1.

Souvenons-nous que la fonction, que nous noterons ici w_ρ, est solution de l'équation différentielle (4.6). De plus, nous avons montré que la solution w_ρ appartient à $H^2(0, \ell_1) \subset \mathcal{C}^1([0, \ell_1])$. Cette information sur la régularité de w_ρ peut se traduire sous la forme de deux équations non linéaires nous permettant (au moins numériquement *a priori*) de déterminer totalement l'expression de w_ρ. Ainsi, il existe quatre constantes réelles α_1^M, α_2^M, α_3^M et α_4^M telles que, en posant $\omega_0 = \sqrt{2R_aG_m\rho_0}$ et $\omega_M = \sqrt{2R_aG_mM}$, on ait :

$$w_\rho(y) = \begin{cases} \alpha_1^M \cosh(\omega_M y) + \alpha_2^M \sinh(\omega_M y) & \text{sur } [0, \xi_1^M] \\ \alpha_3^M \cosh(\omega_0 y) + \alpha_4^M \sinh(\omega_0 y) & \text{sur } [\xi_1^M, \ell_1] \end{cases} \tag{4.23}$$

Traduisons à présent les conditions au bord :

- En $y = 0$: $\dfrac{\pi}{R_a}\dfrac{\mathrm{d}w_\rho}{\mathrm{d}y}(0) = A_sG_sw_0(0) - 1 \iff \dfrac{\pi}{R_a}\omega_M\alpha_2^M = A_sG_s\alpha_1^M - 1$;
- En $y = \ell_1$: $\dfrac{\mathrm{d}w_\rho}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 \iff \alpha_4^M = -\alpha_3^M \tanh(\omega_0\ell_1)$. Cela prouve notamment que nécessairement, $\alpha_3^M \neq 0$ et $\alpha_4^M \neq 0$.

À ce stade, on sait d'une part que :

$$w_\rho(y) = \begin{cases} \alpha_1^M \cosh(\omega_M y) + \frac{A_sG_s\alpha_1^M - 1}{\frac{\pi}{R_a}\omega_M} \sinh(\omega_M y) & \text{sur } [0, \xi_1^M] \\ \alpha_3^M \left(\cosh(\omega_0 y) - \tanh(\omega_0\ell_1)\sinh(\omega_0 y)\right) & \text{sur } [\xi_1^M, \ell_1] \end{cases} \tag{4.24}$$

et d'autre part, que le critère T_1 se réécrit, dans la classe $\mathcal{B}_{a_0,M}$:

$$T_1(\rho) = \frac{\alpha_1^M}{\alpha_3^M}\cosh(\omega_0\ell_1).$$

Il nous reste à présent à traduire que les fonctions w_ρ et $\frac{\mathrm{d}w_\rho}{\mathrm{d}y}$ sont continues en ξ_1^M, autrement dit que $\lim_{y\to\xi_1^{M-}} w_\rho(y) = \lim_{y\to\xi_1^{M+}} w_\rho(y)$ et $\lim_{y\to\xi_1^{M-}} \frac{\mathrm{d}w_\rho}{\mathrm{d}y}(y) = \lim_{y\to\xi_1^{M+}} \frac{\mathrm{d}w_\rho}{\mathrm{d}y}(y)$.

Continuité de w_ρ en ξ_1^M

$$\frac{\alpha_1^M}{\alpha_3^M}\left(\cosh(\omega_M\xi_1^M) + \frac{R_aA_sG_s}{\pi\omega_M}\sinh(\omega_M\xi_1^M)\right) - \frac{R_a}{\pi\omega_M\alpha_3^M}\sinh(\omega_M\xi_1^M) = \cosh(\omega_0\xi_1^M) - \tanh(\omega_0\ell_1)\sinh(\omega_0\xi_1^M).$$

Continuité de $\frac{\mathrm{d}w_\rho}{\mathrm{d}y}$ en ξ_1^M

$$\frac{\alpha_1^M}{\alpha_3^M}\left(\omega_M\sinh(\omega_M\xi_1^M) + \frac{R_aA_sG_s}{\pi}\cosh(\omega_M\xi_1^M)\right) - \frac{R_a}{\pi\alpha_3^M}\cosh(\omega_M\xi_1^M) = \omega_0\sinh(\omega_0\xi_1^M) - \tanh(\omega_0\ell_1)\cosh(\omega_0\xi_1^M).$$

Il s'ensuit successivement que :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_1^M}{\alpha_3^M} &= \cosh(\omega_0\xi_1^M)\cosh(\omega_M\xi_1^M) - \frac{\omega_0}{\omega_M}\sinh(\omega_M\xi_1^M)\sinh(\omega_0\xi_1^M)\\ &\quad - \tanh(\omega_0\ell_1)\left[\sinh(\omega_0\xi_1^M)\cosh(\omega_M\xi_1^M) - \frac{\omega_0}{\omega_M}\sinh(\omega_M\xi_1^M)\cosh(\omega_0\xi_1^M)\right]\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}T_1(\rho) &= \cosh(\omega_0\ell_1)\left[\cosh(\omega_0\xi_1^M)\cosh(\omega_M\xi_1^M) - \frac{\omega_0}{\omega_M}\sinh(\omega_M\xi_1^M)\sinh(\omega_0\xi_1^M)\right]\\ &\quad - \sinh(\omega_0\ell_1)\left[\sinh(\omega_0\xi_1^M)\cosh(\omega_M\xi_1^M) - \frac{\omega_0}{\omega_M}\sinh(\omega_M\xi_1^M)\cosh(\omega_0\xi_1^M)\right]\end{aligned}$$

Les calculs précédents, bien que fastidieux, nous ont permis de nous ramener à la minimisation d'une fonction d'une variable : ξ_1^M. On dérive donc le critère par rapport à cette variable pour trouver quel ξ_1^M minimise T_1. On trouve aisément que :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_1(\rho)}{\mathrm{d}\xi_1^M} = \left(\frac{\omega_M^2-\omega_0^2}{\omega_M}\right)\sinh(\omega_M\xi_1^M)\cosh[\omega_0(\ell_1-\xi_1^M)] > 0.} \tag{4.25}$$

On en déduit que la fonction égale à a_0^3 presque partout minimise le critère T_1 sur $\mathcal{B}_{a_0,M,S}$ mais aussi (car nous avons prouvé que l'optimum est *bang-bang*) sur $\mathcal{R}_{a_0,S}^M$.

iv **$4^{\text{ème}}$ étape : retour à la minimisation de T**

On s'est à présent convaincu que a_0^3 est l'unique minimiseur du critère T_1 dans la classe $\mathcal{R}_{a_0,S}^M$. Remarquons enfin que :

$$\mathcal{R}_{a_0,S} = \bigcup_{M>a_0} \mathcal{R}_{a_0,S}^M.$$

Or, pour tout $M > a_0^3$, le minimum de T_1 sur $\mathcal{R}_{a_0,S}^M$ est a_0^3. On en déduit également, par construction, que a_0^3 est l'unique minimiseur de T_1 sur $\mathcal{R}_{a_0,S}$. De plus, puisque $a_0^3 = a_0^3\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}(a_0)}{\mathrm{d}y}}$, on en déduit que $T_1(a_0^3) = T(a_0)$ et que a_0 minimise T sur $\mathcal{A}_{a_0,S}$.

4.2 Minimisation de $T(a)$ dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres

4.2.1 Le résultat

La réponse au problème (1.18) dans le cas où le potentiel v est solution de l'équation aux dérivées partielles (1.8) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.2. *Minimisation globale de $T(a)$: cas de la fibre connectée à d'autres fibres. La fonction identiquement égale à a_0 minimise le critère T parmi les éléments de $\mathcal{A}_{a_0,S}$ dans le cas où v est régie par l'équation aux dérivées partielles (1.8).*

La démonstration s'inspire de la preuve du théorème 4.1. Quelques détails techniques diffèrent malgré tout dans l'adaptation de cette preuve, plus simple que la précédente.

4.2.2 Réécriture du critère T

v désignant la solution de l'équation aux dérivées partielles (1.8), passons aux transformées de Laplace dans cette équation. Comme précédemment, on utilisera la notation :

$$\forall x \in [0,\ell],\ \forall t>0,\ \forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ \widehat{v}(x,p) = \mathscr{L}(v(x,.))(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} v(x,t)\mathrm{d}t.$$

L'équation aux dérivées partielles 1.8 devient donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{2R_a}\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}\right) = a\sqrt{1+a'^2}\left(C_m\left(p\widehat{v} - v(x,0)\right) + G_m\widehat{v}\right) & (x,p) \in (0,\ell)\times]0;+\infty[\\ \frac{\pi a^2(0)}{R_a}\frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}(0,p) = -\widehat{i_0}(p) & p \in]0,+\infty[\\ \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x}(\ell,p) = 0 & p \in]0,+\infty[\\ \widehat{v}(x,0) = 0 & x \in [0,\ell]. \end{cases} \tag{4.26}$$

De plus, on a supposé qu'au temps initial, une impulsion électrique est délivrée au début de la fibre, impulsion modélisée par une mesure de Dirac au temps $t=0$. On en déduit que $\widehat{i_0}(p) = -1$.

Toujours comme précédemment, on introduit une nouvelle variable y définie par la relation :

$$y \overset{\text{déf}}{=} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2(x)}.$$

On pose alors :

- $\ell_1 \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_0^\ell \frac{\mathrm{d}x}{a^2(x)}$;
- $w(y,p) \overset{\text{déf}}{=} \widehat{v}(x,p)$, pour $x \in [0,\ell],\ p>0$ et $y \in [0,\ell_1]$;
- $\rho(y) \overset{\text{déf}}{=} a^3(x)\sqrt{1+a'^2(x)}$, pour tout $y \in [0,\ell_1]$.

Remarque 4.3. *On se souvient que si $a \in \mathcal{A}_{a_0,S}$, on a :*

$$\rho \in \mathcal{R}_{a_0,S} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\rho \in L^\infty(0,\ell_1) : \forall y \in [0,\ell_1],\ a_0^3 \le \rho(y)\ \textit{et}\ \int_0^{\ell_1}\rho(y)\mathrm{d}y \le S\right\}.$$

Le même raisonnement que pour le cas de l'équation aux dérivées partielles (1.4) (section 4.1.2) montre qu'il est possible de faire tendre p vers 0 dans l'équation ci-dessus. On appelle alors w_0 la fonction définie par : $w_0 \stackrel{\text{déf}}{=} w(.,0)$. w_0 est clairement solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2R_a}\frac{\mathrm{d}^2 w_0}{\mathrm{d}y^2} = \rho G_m w_0 \quad y \in]0,\ell_1[\\ \frac{\pi}{R_a}\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}y}(0) = -1 \\ \frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 \end{array} \right. \tag{4.27}$$

Comme pour le cas de l'équation aux dérivées partielles (1.4) et moyennant les mêmes arguments, le critère à minimiser se réécrit sous la forme :

$$T(a) = \frac{\widehat{v}(0,0)}{\widehat{v}(\ell,0)} = \frac{\lim\limits_{p\to 0} w(0,p)}{\lim\limits_{p\to 0} w(\ell_1,p)} = \frac{w_0(0)}{w_0(\ell_1)}. \tag{4.28}$$

On pose alors :

$$\forall \rho \in \mathcal{R}_{a_0,S},\ T_1(\rho) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{w_0(0)}{w_0(\ell_1)}. \tag{4.29}$$

Remarque 4.4. *On a nécessairement $w_0(0) > 0$. En effet, si ça n'était pas vrai, puisque $\frac{\mathrm{d}w_0}{\mathrm{d}y}(0) < 0$, on aurait nécessairement $w_0 < 0$ sur $]0,\ell_1]$ et w_0 concave, ce qui contredit clairement la condition au bord en ℓ_1. Ce raisonnement montre d'ailleurs que la situation $w_0(x_0) = 0$, avec $x_0 \in (0,\ell_1)$ n'est pas possible.*

w_0 est donc strictement positive sur $[0,\ell_1]$ (Le théorème de Cauchy-Lipschitz interdit à la fonction w_0 de s'annuler en ℓ_1).

Introduisons alors la fonction $\tilde{w_0}$ définie par la relation :

$$\tilde{w_0} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{w_0}{w_0(0)}. \tag{4.30}$$

Il est alors clair que $\tilde{w_0}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2R_a G_m}\frac{\mathrm{d}^2 \tilde{w_0}}{\mathrm{d}y^2} = \rho \tilde{w_0} \quad y \in (0,\ell_1) \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{w_0}}{\mathrm{d}y}(0) = -\frac{R_a}{\pi w_0(0)} \\ \frac{\mathrm{d}\tilde{w_0}}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0 \\ \tilde{w_0}(0) = 1. \end{array} \right. \tag{4.31}$$

Remarquons de plus que $T_1(\rho) = \dfrac{w_0(0)}{w_0(\ell_1)} = \dfrac{1}{\tilde{w_0}(\ell_1)}$.

L'intérêt d'introduire la fonction $\tilde{w_0}$ réside dans le fait que l'étude du critère T_1 va être simplifiée.

4.2.3 Preuve du théorème 4.2

Voici les grandes étapes de cette preuve :

- On résout de prime abord le problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}_{a_0,S}. \end{array} \right.$$

- On vérifie que la solution du problème précédent appartient à l'image de $\mathcal{A}_{a0,S}$ par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{a_0,S} & \longrightarrow & \mathcal{R}_{a_0,S} \\ a & \longmapsto & \rho. \end{array}$$

  Cette application n'est pas une bijection. C'est ce qui rend *a priori* cette question un peu délicate à traiter.

Le lemme qui suit donne la réponse à la première étape :

Lemme 4.2. *Soit $M > a_0^3$ un nombre réel. On considère le problème d'optimisation :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \min T_1(\rho) \\ \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}. \end{array} \right. \tag{4.32}$$

La fonction $\rho^\star$ définie presque partout par $\rho^\star \equiv a_0^3$ est l'unique solution du problème (4.32).

Démonstration. On considère deux fonctions ρ_1 and ρ_2, éléments de la classe $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$, tels que $\rho_1 \geq \rho_2$ presque partout dans $[0, \ell_1]$. On désigne alors par $\tilde{w}_0^1$ et $\tilde{w}_0^2$ les solutions respectives des équations différentielles ordinaires associées au problème (4.31), autrement dit, $\tilde{w}_0^i$ est solution, pour $i \in \{1, 2\}$ de l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2\tilde{w}_0^i}{\mathrm{d}y^2} = 2R_aG_m\rho_i\tilde{w}_0^i \quad y \in (0, \ell_1) \\ \tilde{w}_0^i(0) = 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\tilde{w}_0^i}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}^2(\tilde{w}_0^2 - \tilde{w}_0^1)}{\mathrm{d}y^2} & = & \rho_2\tilde{w}_0^2 - \rho_1\tilde{w}_0^1 \\ & = & \rho_1(\tilde{w}_0^2 - \tilde{w}_0^1) + (\rho_2 - \rho_1)\tilde{w}_0^2. \end{array}$$

Ainsi, puisque $\tilde{w}_0^i > 0$ et $\rho_i > 0$ sur $[0, \ell_1]$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}^2(\tilde{w}_0^2 - \tilde{w}_0^1)}{\mathrm{d}y^2} \leq 2R_aG_m\rho_1(\tilde{w}_0^2 - \tilde{w}_0^1) \quad y \in (0, \ell_1) \\ (\tilde{w}_0^2 - \tilde{w}_0^1)(0) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}(\tilde{w}_0^2 - \tilde{w}_0^1)}{\mathrm{d}y}(\ell_1) = 0. \end{array} \right.$$

Utilisons le principe de comparaison (voir par exemple [25]), $\tilde{w}_0^2 \geq \tilde{w}_0^1$ sur $[0, \ell_1]$.

Par conséquent, on peut écrire que :

$$\forall \rho \in \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1},\ T_1(\rho) \geq T_1(a_0^3).$$

La conclusion du lemme s'ensuit. □

On conclut à présent la preuve du théorème 4.2.

D'après le lemme (4.2), notre problème consiste à démontrer que le minimiseur $\rho^\star$ est global. Ceci est dû au fait que l'ensemble $\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1}$ peut être écrit :

$$\mathcal{R}_{a_0,S,\ell_1} = \bigcup_{M > a_0} \mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}.$$

Par ailleurs, le problème consistant à minimiser T_1 a une solution sur toute classe de fonction $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$, puisque $\mathcal{R}^M_{a_0,S,\ell_1}$ est compactela la convergence L^∞ $\star$-faible.

Cela implique que $\rho^\star$ est l'unique minimiseur de T_1 dans la classe $\mathcal{R}_{a_0,S}$.

Remarquons que ${a_0}^3\sqrt{1+{a_0}'^2} = {a_0}^3$, presque partout. Cela démontre que $a^\star \equiv a_0$ est l'unique minimiseur (global) du critère T dans $\mathcal{A}_{a_0,S}$, ce qui achève de démontrer le théorème 4.2.

Deuxième partie

Quelques questions relatives à l'optimisation de la géométrie pulmonaire

Chapitre 5

Autour de la modélisation de l'arbre bronchique

L'étude des systèmes biologiques complexes constitue une thématique d'actualité chez les mathématiciens. On distingue différents axes de recherche, parmi lesquels la modélisation biologique et l'étude mathématique de modèles déjà établis. En général, les systèmes biologiques sont constitués de niveaux d'organisation correspondant à des échelles très variables. On parle ainsi de niveaux moléculaires, macromoléculaires, de la cellule, de l'organe, de l'organisme et l'individu, de la population, etc. C'est là une raison de leur complexité : la prise en compte et le couplage de ces différents niveaux d'organisation rendent souvent le travail du biomathématicien difficile.

On peut trouver dans de telles études un intérêt descriptif ou prédictif.

Dans cette partie, on souhaite, un peu à la manière de ce qui a été fait dans la partie précédente pour la dendrite, déterminer la forme optimale de l'arbre bronchique minimisant un critère à choisir judicieusement, afin de la comparer avec la forme réelle. Il s'agit donc d'une approche descriptive.

5.1 Motivations et objectifs

5.1.1 L'arbre bronchique

Ce paragraphe a pour vocation de donner quelques éléments sur le poumon permettant de justifier le choix de modélisation que nous serons amenés à faire dans la section 5.2. De nombreuses informations regroupées dans ce paragraphe sont extraites du manuscrit de thèse de Benjamin Mauroy, actuellement chargé de recherche à l'université Paris 7, et dont la thèse (voir [41] ou [39]) traitait pincipalement de cette délicate question qu'est la modélisation du poumon.

Le poumon peut être divisé en deux régions de fonctionnement distinctes :

- **L'arbre bronchique**.

  L'arbre bronchique est l'ensemble des structures conductives véhiculant l'air inspiré et expiré, entre le larynx et les acini. Il fait intégralement partie du système respiratoire.

- **Les acini**.

Un acinus est un sous-arbre du poumon d'environ six générations. Les branches sont recouvertes d'alvéoles. Elles permettent de coupler la convection de l'air et les échanges gazeux entre l'air et le sang.

La figure ci-après est un moulage du poumon humain.

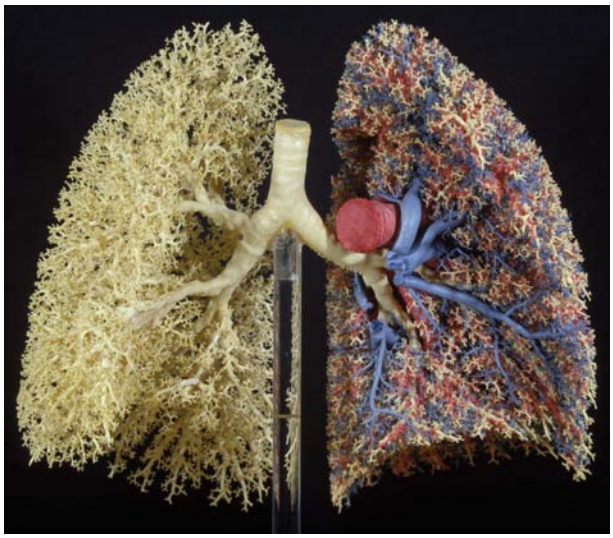

FIG. 5.1 – Moulage du poumon par Ewald R. Weibel

Dans le cadre de cette thèse, comme nous l'avons annoncé précédemment, nous ne nous intéresserons qu'à l'arbre bronchique et à l'optimisation de sa géométrie.

On peut observer que l'arbre bronchique est une géométrie arborescente dichotomique de vingt-quatre générations. La première génération correspond à la trachée. C'est la plus grosse branche de l'arbre (diamètre de l'ordre de 2 cm). La dernière génération a un diamètre de l'ordre du demi millimètre. Le nombre de branches de cet arbre est donc environ de 2^{24} soit plus de seize millions.

Il est courant de faire l'hypothèse que l'arbre bronchique est homogène, c'est-à-dire qu'il est symétrique par rapport à un plan passant par l'axe de symétrie de la trachée (modélisée par un cylindre). Dans la pratique, on peut observer une légère dissymétrie dans les premières générations de l'arbre, imputable au fait que l'arbre est soumis à des contraintes extérieures telles que contourner le cœur par exemple.

Les branchements dans cet arbre sont coplanaires, et les angles entre deux plans de branchement successifs sont en moyenne de quatre-vingt-dix degrés.

Des observations ont révélé que le schéma de branchement dans l'arbre bronchique suit la même systématique tout au long du trajet broncho-vasculaire. Plus précisément, la longueur et la taille des branches ont tendance à être, d'une génération à l'autre, homothétiques, avec un facteur de réduction à peu près constant (en moyenne, de l'ordre de grandeur de $0,85$). Cette propriété s'appelle « autosimilarité » et caractérise les arbres fractals. Cette propriété a une conséquence importante : en effet, un tel arbre occupe naturellement tout l'espace (« space filling » en anglais), ce qui signifie que les branches optimales aboutissent d'une manière homogène dans tous les secteurs de l'espace pulmonaire.

Des travaux ont été réalisés par B. Mauroy, M. Filoche, E. R. Weibel et B. Sapoval (voir [40]) afin de caractériser l'arbre optimal minimisant la résistance hydrodynamique à volume fixé, lorsque le

fluide qui le parcourt est supposé suivre une loi dite de Poiseuille (dont nous donnerons davantage de précisions dans la section 5.2.2 de ce chapitre). Ainsi, des arguments assez simples ont permis de démontrer que l'arbre optimal est fractal, et que le facteur de réduction d'une génération à l'autre vaut $(1/2)^{1/3} \simeq 0,79$. On appelle cela la loi de Hess-Murray. Le facteur de rédaction moyen est donc un peu plus élevé que ce que la théorie prescrit ($0,85$ au lieu de $0,79$). Ce léger excès pourrait constituer une marge de sécurité car l'analyse mathématique de l'arbre théorique optimal a également révêlé qu'une très légère constriction des bronches ou bronchioles pourrait induire une forte augmentation de la résistance hydrodynamique à la ventilation.

C'est un peu avec la même philosophie que nous aborderons notre étude de l'arbre bronchique, en nous demandant si une démarche de ce type est applicable dans les toutes premières générations de l'arbre bronchique, où il est plus raisonnable de considérer les équations de Navier-Stokes comme modèle d'écoulement de l'air.

Dans le cas de l'arbre bronchique humain, les bronches ont une forme cylindrique, légèrement conique vers le bas. Le rapport L/D, où L désigne la longueur d'une branche et D son diamètre est à peu près constant, égal à 3, d'une génération à l'autre.

Un exemple de modèle géométrique du poumon suivant ces règles est présenté dans la figure 5.2 ci-dessous.

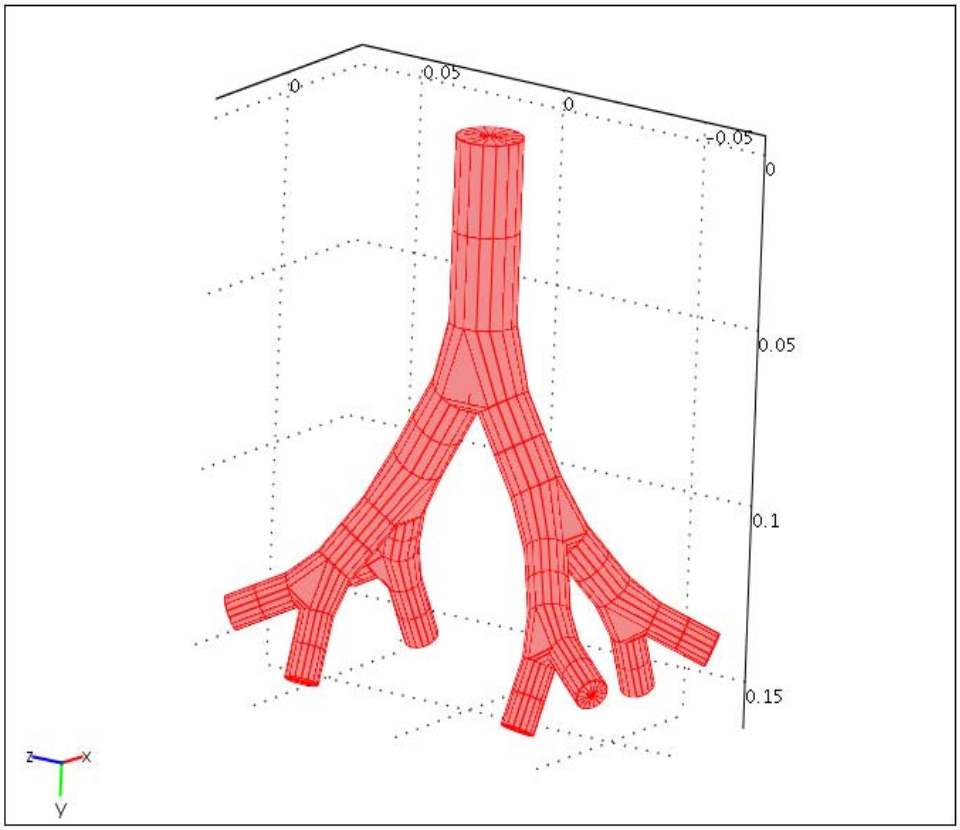

FIG. 5.2 – Quelques générations d'un arbre bronchique homogène simplifié (branches mères et filles homothétiques et coplanaires, angle entre deux plans de branchement successifs proche de 90°)

5.1.2 Un peu de bibliographie...

De septembre 2003 à septembre 2006, à l'initiative d'Yvon Maday, une ACI intitulée « Le poumon vous dis-je » a d'ailleurs été créée afin de répondre à la difficile question de l'intégration des différentes fonctions du système respiratoire (fonction ventilatoire, fonction alvéolo-capillaire, fonction circulatoire). Le but de cette manœuvre était de s'orienter vers la création d'un *poumon numérique*. En parallèle, une autre équipe de l'ENS Cachan, pilotée par Bernard Sapoval, a également travaillé sur un projet visant à la construction d'un tel modèle.

Pour se faire une idée plus précise des travaux déjà réalisés autour de cette thématique, revenons sur les thématiques développées autour de l'ACI « Le poumon vous dis-je ». Les équipes de cette ACI se sont constituées autour du découpage suivant : le système respiratoire hiérarchisé a été schématiquement découpé en 5 niveaux qui font l'objet d'une modélisation spécifique :

- **Les voies aériennes supérieures :** nez-bouche, pharynx, larynx, trachée et les premières générations bronchiques (de 1 à 3) : les bronches souches et lobaires.
- **Les bronches segmentaires** (générations 4 à 10).
- **Les bronchioles** (générations 11 à 19).
- **Les acini :** bronchioles alvéolaires, canaux alvéolaires et sacs alvéolaires (générations 20 à 23).
- **La membrane alvéolo-capillaire** (échanges gazeux).

Voici une liste, non exhaustive, de quelques-uns des thèmes de recherche explorés dans le cadre de cette ACI. Quelques publications significatives sont aussi mentionnées :

- **Distribution de la ventilation des modèles 3d trachéo-bronchiques normaux et pathologiques.**

  Il s'agit d'un travail essentiellement numérique consistant à reconstruire en 3 dimensions les générations 0 (trachée) à 6 (bronches lobaires et segmentaires) de l'arbre trachéobronchique, puis à résoudre l'équation de Navier-Stokes traduisant l'écoulement d'un fluide dans l'arbre bronchique.
  Article : An image-based computational model of oscillatory flow in the proximal part of tracheobronchial trees (article [23]).

- **Propriétés d'asymétrie entre inspiration et expiration.**

  Il s'agit de mettre en évidence, principalement à l'aide de simulations numériques, les différences (énergétiques) entre les phénomènes d'inspiration et d'expiration. Des explications supplémentaires seront données dans la section 5.1.3.
  Article : 3D Hydronamics in the upper human bronchial tree : interplay between geometry and flow distribution. (article [38]).

- **Modélisation de la ventilation dans les acini**

  La modélisation de la ventilation dans l'acinus (générations 18 à 23) en régime instationnaire a permis de déterminer dans quelle mesure l'oxygène est transporté par convection dans ces dernières générations. Une simulation numérique des équations de Stokes dans un domaine variable a été réalisée dans une géométrie bi-dimensionnelle (modèle de H. Kitaoka, voir [36]) à trois générations. Ces résultats ont montré que la convection était négligeable devant la diffusion dans les trois dernières générations du poumon.
  Thèse de B Mauroy : Hydrodynamique dans le poumon, relations entre flux et géométries (article [41]).

La ventilation des acini en régime stationnaire cette fois a également fait l'objet d'une parution plus ancienne :
Article : Smaller is better but not too small : A physical scale for the design of the mammalian pulmonary acinus (article [54]).

5.1.3 Notre démarche en optimisation de forme

On présente ici la démarche qui sera développée dans le reste de ce manuscrit. La ligne directrice de ce travail ressemble fort à la trame de fond de la partie I sur l'optimisation de la forme d'une dendrite.

Il n'est pas aberrant de penser que la forme actuelle de l'arbre bronchique résulte, en un certain sens d'une optimisation, par exemple via le processus de sélection naturelle, qui expliquerait que la forme de l'arbre bronchique chez l'être humain soit celle qui fait qu'il est adapté « au mieux » à son milieu.

L'idée est alors la suivante :

i On imagine un critère que la nature pourrait chercher à optimiser, susceptible d'expliquer la forme actuelle de l'arbre bronchique ;

ii Deux pistes sont alors développées :

(a) On postule que ce critère est le bon et que la solution du problème d'optimisation de forme résultant sera très proche de la forme de l'arbre bronchique, et dans ce cas, on cherche à établir des propriétés qualitatives de l'arbre bronchique. Le chapitre 6 traitera par exemple de la question de modéliser chaque branche de l'arbre bronchique à l'aide de cylindres. On peut aussi chercher à évaluer l'angle de bifurcation entre une branche mère et ses deux branches filles (l'arbre bronchique étant dichotomique) pour l'optimum.

(b) On cherche à tester la validité d'un tel critère et on résout numériquement le problème d'optimisation de forme associé. Il reste ensuite bien sûr à comparer la forme théorique obtenue avec la forme réelle puis à conclure sur la pertinence du critère.

Puisque l'on souhaite se lancer dans la recherche de la géométrie du poumon, optimale en un certain sens à préciser, il est nécessaire de bien comprendre la fonction de cet organe afin de deviner le critère que la nature gagnerait à minimiser. Cette fonction est bien sûr liée au mécanisme de respiration.

Il s'agit là d'un phénomène complexe, servant à réguler les concentrations des molécules de dioxygène (O_2) et de dioxyde de carbone (CO_2). En revanche, au repos, la situation mécanique est très différente selon que l'on étudie un phénomène d'inspiration ou d'expiration. L'inspiration est induite par la contraction du diaphragme, muscle fixé à la base des poumons. On dit que l'inspiration est un phénomène actif, car elle est basée sur un effort musculaire. À l'inverse, l'expiration est un phénomène dit passif, correspondant approximativement au relâchement des muscles utilisés lors de l'inspiration. Ce phénomène est modélisable par une force de rappel élastique, à l'origine de la compression du volume pulmonaire.

Ces remarques permettent de comprendre que, du point de vue de la mécanique, les phénomènes d'inspiration et d'expiration sont fort différents et qu'il semble énergétiquement plus difficile de faire entrer de l'air dans le poumon que d'en faire sortir. Cela implique, comme nous allons le voir, une différence sur la mécanique des fluides.

Comme très souvent en optimisation de forme, le critère envisagé sera lié aux solutions d'une équation aux dérivées partielles, Navier-Stokes en l'occurrence. Il s'agit de modèles réalistes et très utilisés par la communauté des mathématiciens ou des mécaniciens pour modéliser l'écoulement de fluides.

Les problèmes d'optimisation de forme en mécanique des fluides sont nombreux et importants (aile d'avion, turbines, pompes, ...) et ont déjà donné lieu à beaucoup d'études. Celles-ci sont souvent essentiellement numériques, car la difficulté intrinsèque des équations de Navier-Stokes rend difficile l'établissement de résultats théoriques. Néanmoins, nous renvoyons à [3] et [46] pour des résultats dans le même esprit que ceux que nous présentons ici, mais dans le cadre linéaire d'un écoulement de Poiseuille. Pour une première bibliographie sur le sujet, nous renvoyons par exemple à [22], [29], [43], [47].

5.2 Les modèles utilisés

5.2.1 Choix du critère et du modèle

Les vitesses de l'air à l'intérieur du poumon sont très différentes selon que l'on considère l'entrée de la trachée, dont le diamètre est l'ordre de quelques centimètres carrés, ou les 2^{17} extrémités (entrées des acini). À l'entrée de la trachée, la vitesse de l'air est de l'ordre de 1 m.s^{-1} au repos, tandis qu'au niveau des acini, elle est quasi nulle. On choisit de s'intéresser dans cette thèse exclusivement aux premières générations de l'arbre bronchique. En raison de la différence d'ordres de grandeur des vitesses de l'air entre l'entrée et les extrémités de l'arbre bronchique, il n'est pas possible d'utiliser le même modèle pour toutes les générations.

Si l'on souhaite modéliser l'écoulement de l'air au sein des premières générations de l'arbre bronchique, il est nécessaire de tenir compte des effets inertiels. On choisit donc de modéliser l'écoulement du fluide à l'aide des équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles. Elles s'écrivent en dimensions 2 et 3 :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u} + \nabla p + \rho\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $\mathbf{u}$ désigne la vitesse du fluide et p, la pression. μ désigne la viscosité du fluide et ρ, sa densité.

Remarque 5.1. *On aurait également pu écrire ces équation dans un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, ce qui ne change, fondamentalement rien à leur écriture. On présentera d'ailleurs dans le chapitre 7, des simulations numériques en dimension 2 et d'autres en dimension 3.*

Remarque 5.2. *Nombre de Reynolds.*
Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses appliquées au fluide (l'air ici). Il traduit la non linéarité (due à la présence du terme $\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ dans l'équation aux dérivées partielles) du système de Navier-Stokes. Il se note $\mathcal{R}e$ et a pour expression :

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho v d}{\mu},$$

avec v, la vitesse caractéristique du fluide, et d, la taille caractéristique du domaine dans lequel circule le fluide.

Le comportement des solutions de l'équation de Navier-Stokes est très lié à ce nombre.

- *Si le nombre de Reynolds est grand (supérieur à 3000), il n'y a pas nécessairement unicité de la solution de ce système, dans le cas stationnaire. On dit alors que le fluide entre en régime de turbulence.*

- *Lorsque le nombre de Reynolds est petit (inférieur à 1000), on parle de régime laminaire (des éléments de fluide voisins demeurent voisins). Les forces de viscosité sont alors prépondérantes et l'accélération convective est négligée.*
- *Aux valeurs intermédiaires de nombres de Reynolds (entre 1000 et 3000 environ), on parle de régime transitoire. Les forces d'inertie sont prépondérantes, mais l'écoulement reste laminaire.*

Dans une conduite, l'écoulement est laminaire lorsque le nombre de Reynolds est inférieur à une valeur critique pour laquelle se produit une transition assez brutale vers le régime turbulent. On considère souvent que cette transition peut se produire entre 2000 et 3000.

Dans le cas de l'air :
- $\mu \simeq 1,785.10^{-5}$ kg.m^{-1}.s^{-1}.
- $\rho \simeq 1,18$ kg.m^{-3}.
- $v \simeq 1$ m.s^{-1} *: c'est la vitesse moyenne de l'air dans la trachée.*
- *d est de l'ordre de grandeur de quelques centimètres. Souvenons-nous en effet que le diamètre D de la trachée est de l'ordre de grandeur de 2 cm, et que l'on peut considérer que la longueur L du cylindre est telle que :* $L \simeq 3D$.

Pour de telles valeurs, on obtient :

$$\mathcal{R}e \in [10^3, 2.10^3].$$

Le type de régime (laminaire ou turbulent) dépend également fortement de la géométrie dans laquelle on se place. En effet, dans le cas d'un tube parfaitement droit par exemple, on peut penser que l'on n'observera pas de phénomènes de type tourbillons avant d'atteindre un très fort nombre de Reynolds. En revanche, pour certaines géométries un peu particulières (par exemple présentant des coudes resserrés), on pourra qualifier le régime de turbulent (et constater par exemple la présence de tourbillons) pour des nombres de Reynolds de l'ordre de grandeur de quelques centaines.

Reste à présent à préciser les conditions au bord sur le système de Navier-Stokes.

Introduisons quelques définitions très classiques en Mécanique :

Définition 5.1.
- *On définit* ε*, le tenseur de déformations d'un champ de vecteurs* $\mathbf{u}$ *par :*

$$\varepsilon(\mathbf{u}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}.$$

- *On définit le double produit contracté des deux tenseurs de déformation* $\varepsilon(\mathbf{u})$ *et* $\varepsilon(\mathbf{v})$ *par :*

$$\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

- $|\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \overset{\text{déf}}{=} \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u})$.
- $\sigma(\mathbf{u}, p) \overset{\text{déf}}{=} -pI_3 + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})$ *est appelé tenseur des contraintes.*

Remarque 5.3. *Les équations de Navier-Stokes stationnaires incompressibles se réécrivent également à l'aide de ces notations tensorielles de la façon suivante :*

$$\begin{cases} -\text{div } \sigma(\mathbf{u}, p) + \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}$$

Concentrons-nous à présent sur le choix des conditions au bord. Dans toutes les géométries que nous considérerons, nous distinguerons dans chaque cas trois types de frontières :

- **Frontière de type entrée, notée E :** à l'entrée, il paraît naturel de supposer que le flux entrant est connu. Il est donc courant d'imposer le profil des vitesses à l'entrée de l'arbre. On choisit ce flux parabolique si bien que le profil des vitesses à l'entrée est un profil dit « de Poiseuille ».
  Par exemple, dans le cas de la dimension 3, un profil de Poiseuille à l'entrée d'un cylindre de rayon $R > 0$ a pour expression dans un repère adapté à la section :

$$\mathbf{u_0}(x_1, x_2, x_3) = v_{\max}\left(0, 0, 1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2}\right),$$

  où $v_{\max}$ désigne la vitesse maximale du fluide au niveau de l'entrée E du cylindre.

- **Frontière de type paroi latérale, notée Γ :** sur ces frontières, une hypothèse très classique en Mécanique des fluides consiste à supposer que la vitesse du fluide est nulle sur le bord du conduit, autrement dit que le fluide ne glisse pas sur la surface solide. On appelle cette condition « condition de non glissement » (en Anglais, *non-slip boundary condition*). Elle est considérée par les biologistes comme une bonne approximation du phénomène réel sur les parois latérales du conduit.

- **Frontière de type sortie, notée S :** ces frontières correspondent au(x) lieu(x) de sortie du fluide dans la structure considérée. On impose des conditions de type pression. Ces conditions simulent des muscles qui dépenseraient exactement la même énergie pour pomper l'air dans les poumons. Ces conditions sont classiques en Mécanique des fluides et peuvent s'écrire :

$$\sigma(\mathbf{u}, p).\mathbf{n} = -p_0\mathbf{n},$$

  où $\mathbf{n}$ désigne la normale au bord. Elles reviennent plus ou moins à imposer la valeur de la pression à chaque sortie (ici, la pression vaut donc environ p_0). Ces conditions sont également utilisées dans la publication [42] pour modéliser la partie supérieure de l'arbre bronchique (mais avec des équations de Stokes). Dans le chapitre 5 de l'ouvrage de F. Boyer et P. Fabrie [7], les auteurs introduisent des conditions aux limites de la forme $\sigma(\mathbf{u}, p) = F(\mathbf{u})$, et discutent du meilleur choix de la fonction F pour que ces conditions soient faiblement réfléchissantes en aval de l'écoulement, c'est-à-dire qui ne contribuent pas à augmenter l'énergie du système. Les articles [9], [10] traitent également de ces conditions un peu particulières en sortie.

La figure ci-dessous illustre un choix possible de frontière dans le cas où l'on considère une géométrie de type *cylindre*.

Choix d'un critère

Étant donné que nous souhaitons mettre en œuvre une démarche conduisant à la résolution d'un problème d'optimisation, il nous faut préciser la question du critère. Plusieurs sont envisageables, parmi lesquels « minimiser le perte de charge entre l'entrée et la sortie de la structure » ou bien « minimiser l'énergie dissipée par le fluide lors de son écoulement à travers la structure ». C'est ce dernier critère que nous étudierons, de façon théorique dans le chapitre 6, puis numérique dans le chapitre 7. C'est aussi la fonction « objectif » qu'avaient utilisée les auteurs de l'article [40], lorsqu'ils avaient résolu le problème d'optimisation en dimension finie qui leur avait permis de retrouver la loi de Hess-Maurray. On le notera dorénavant J.

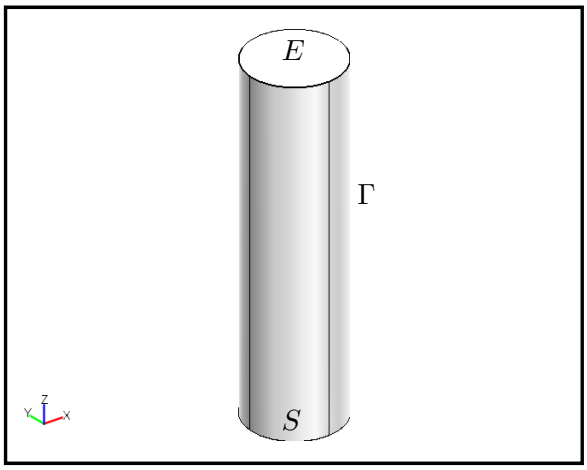

FIG. 5.3 – Choix de E, Γ et S dans le cas d'un cylindre

Voici pourquoi la nature pourrait avoir intérêt à minimiser ce critère : on sait que le coût en énergie de la ventilation pulmonaire est principalement dû au déplacement des tissus. La dissipation de l'air dans les bronches représente donc un faible pourcentage de cette énergie. Toutefois, si le fluide dissipe trop, ça veut dire qu'il circule mal et que la quantité d'air qui entre dans les poumons est diminuée relativement à un poumon où le fluide circule bien. Pour cette raison, il n'est pas aberrant de penser qu'une forme de l'arbre bronchique réduisant les effets visqueux (ces effets sont dus principalement au frottement sur les parois du fluide et au frottement des couches de fluide entre elles) lui permettrait d'être mieux adapté à sa fonction. Bien sûr, nous ne tenons compte que d'un seul critère, et du point de vue biologique, une approche multicritère serait probablement plus raisonnable, mais complexifierait grandement notre étude.

J a pour expression :

$$\boxed{J(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x = \frac{\mu}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \mathrm{d}x.}$$

Pour formuler le problème d'optimisation de forme, il nous reste à définir la classe des domaines admissibles, classe dans laquelle nous rechercherons un éventuel domaine minimisant le critère J. Nous choisirons d'imposer une contrainte sur le volume de l'arbre bronchique du type :

$$\text{mes } (\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}x = V_0,$$

où V_0 est un réel strictement positif donné. Ce choix interdira à l'algorithme de minimisation présenté dans le chapitre 7, une suite minimisante de domaines dont la tendance serait de laisser croître de façon irréaliste le volume du domaine.

On aurait également pu songer à une contrainte de type inégalité. Cela ne serait pas absurde. Cependant, des simulations numériques effectuées sans s'imposer de contrainte laissent à penser que l'énergie de dissipation est rendue plus facilement minimale lorsque le volume est maximal. C'est d'ailleurs l'un des résultats de l'article [40], dans un cas plus simple (régime de Poiseuille). Aussi, on peut raisonnablement penser que si l'on s'imposait une contrainte de type inégalité sur le

volume, la tendance de l'algorithme serait de saturer la borne supérieure du volume. Cependant, ça n'est qu'une conjecture et cela demanderait à être confirmé par une démonstration.

Le problème d'optimisation que nous chercherons à résoudre de manière théorique et numérique sera de la forme :

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad}}, \end{cases}$$

où $\mathbf{u}$ est la solution du système d'équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u} + \nabla p + \rho\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega,\ i\in\{1,2,3\} \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u_0} & \mathbf{x}\in E \\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Gamma \\ -p\mathbf{n} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{h} & \mathbf{x}\in S, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $\mathbf{h}$ est donnée, $\mathbf{u}_0$ est un profil de vitesses parabolique, et $\mathcal{O}_{\text{ad}}$, un ensemble de domaines admissibles, ayant tous le même volume V_0, et qui sera précisé dans le chapitre 6.

5.2.2 Choix des entrées et des sorties

Pour achever la modélisation, il nous reste à nous poser la question du choix des entrées et sorties dans les géométries considérées. Nous allons voir que le choix naturel n'est pas toujours le plus convaincant. En effet, un choix peu astucieux des frontières peut conduire le problème d'optimisation précédent à admettre des solutions inacceptables du point de vue de la Biologie.

Cas où E et S sont symétriques

On entend par cela que E et S sont images l'une de l'autre par une symétrie axiale en dimension 2 ou une symétrie plane en dimension 3. C'est le cas du cylindre présenté précédemment.

Dans ce cas, le choix de E et S n'a pas d'importance, en raison de cette propriété de symétrie.

Cas où E et S sont non symétriques

Considérons pour nous fixer les idées un arbre dichotomique de deux générations : une branche mère et deux branches filles. On a représenté un arbre très simpliste sur les figures 5.4 et 5.5 ci-après.
Pour un tel arbre, on voit sur ces figures que le choix des frontières doit être discuté, car il existe plusieurs placements plausibles des frontières.

Afin d'étayer notre choix, nous allons de prime abord effectuer un calcul simpliste. On va en réalité chercher à résoudre le problème d'optimisation décrit précédemment dans le cas où l'écoulement du fluide est supposé suivre une loi de Poiseuille.

Quelques précisions sur la loi de Poiseuille

On considère un fluide visqueux incompressible dont la vitesse est supposée faible. Son écoulement dans un cylindre est dit de Poiseuille lorsqu'il est régi par une loi physique dérivée du système de Navier-Stokes, et que le profil des vitesses est parabolique, selon l'axe (Ox_3) du cylindre.

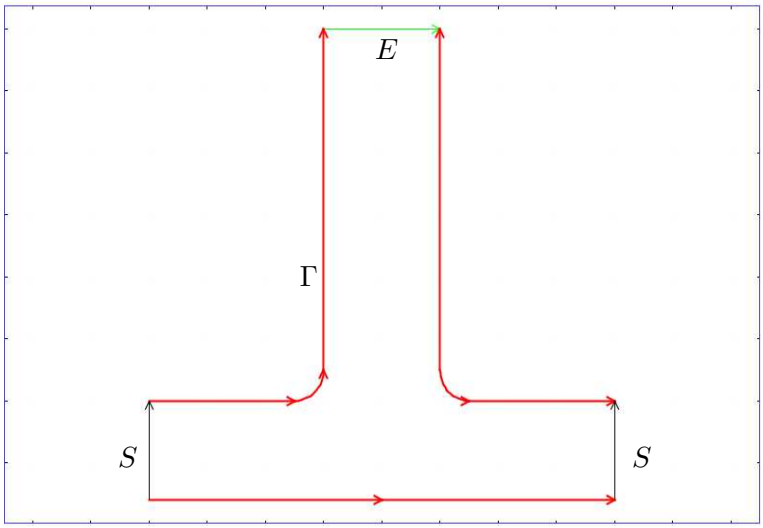

FIG. 5.4 – Un premier choix de E (en vert), Γ (en rouge) et S (en noir) dans le cas d'un arbre dichotomique (I)

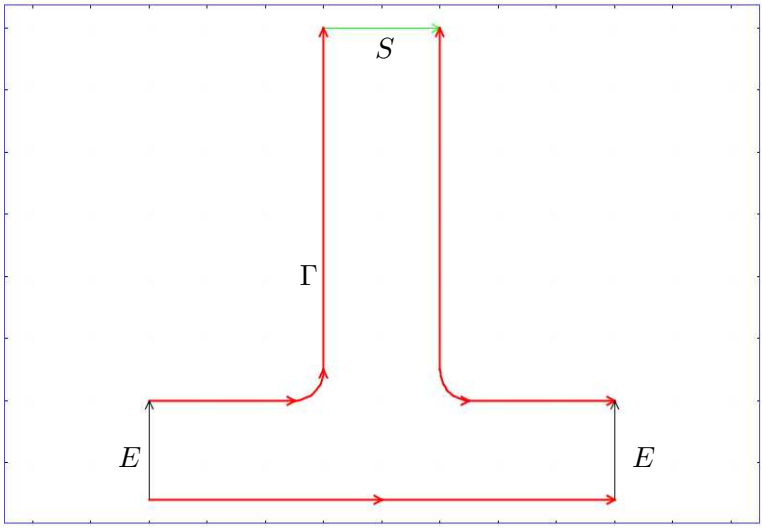

FIG. 5.5 – Un deuxième choix de E (en noir), Γ (en rouge) et S dans (en bleu) le cas d'un arbre dichotomique (II)

Il est alors aisé d'établir l'expression de la solution. Soit Ω, un cylindre de rayon R et longueur L d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ x_1^2 + x_2^2 = R^2 \\ 0 \leq x_3 \leq L. \end{cases}$$

L'unique solution régulière $(\mathbf{u}, p)$ (au moins de classe C^3) du système de Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\left(\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x_1} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ -\mu\left(\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x_2} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ -\mu\left(\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{\partial p}{\partial x_3} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ p(x_1, x_2, 0) = p_0 \text{ et } p(x_1, x_2, L) = p_1 & (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \end{cases}$$

est donnée par :

$$\begin{cases} u_1 \equiv u_2 \equiv 0 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{p_1 - p_0}{4\mu L}(x_1^2 + x_2^2 - R^2) & \mathbf{x} \in \Omega \\ p(x_1, x_2, x_3) = \frac{p_1 - p_0}{L} x_3 + p_0 & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque 5.4. *On vérifie d'ailleurs facilement que c'est aussi la solution du système de Navier-Stokes correspondant.*

La relation dite de Poiseuille découle directement de l'expression de la solution ci-dessus. Cette relation lie le flux le long d'une section du cylindre à la différence de pression $p_1 - p_0$. Ainsi, le flux Φ le long d'une section est donné par :

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^R \left[\frac{p_1 - p_0}{4\mu L}(r^2 - R^2)\right] r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = -\frac{(p_1 - p_0)\pi R^4}{8\mu L}.$$

La relation de Poiseuille s'écrit alors :

$$\boxed{p_0 - p_1 = \frac{8\mu L}{\pi R^4}\Phi.}$$

On appelle résistance de la branche (cylindrique), le terme $R_1 \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{8\mu L}{\pi R^4}$.

Les propriétés des résistances sont exactement les mêmes que celles des réseaux électriques. Ainsi, deux branches de résistances respectives R_1 et R_2 en série (i.e. placées bout à bout) ont une résistance globale égale à $R_1 + R_2$. Deux branches de résistances respectives R_1 et R_2 en parallèle (i.e. placées côte à côte et reliées par leurs extrémités) ont une résistance globale égale à $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$.

Résolution du problème d'optimisation dans le cas d'un arbre dichotomique soumis à un écoulement de Poiseuille

On considère l'arbre dichotomique représenté sur la figure 5.6 :

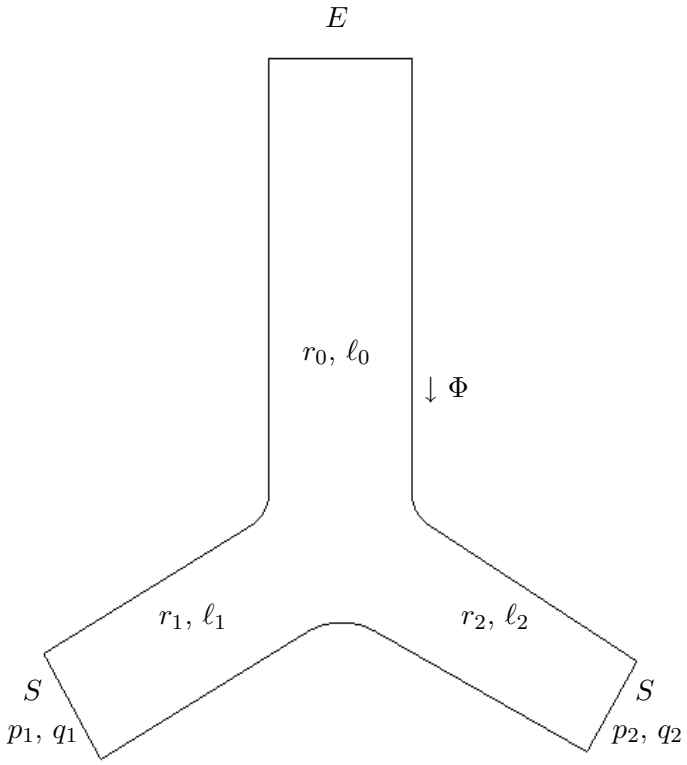

FIG. 5.6 – Arbre dichotomique de deux générations soumis à un écoulement de Poiseuille

Sur cette figure, on a représenté un arbre dichotomique de deux générations soumis à un écoulement de Poiseuille. Pour $i \in \{0,1,2\}$, r_i désigne la résistance de chaque branche de l'arbre, et ℓ_i, sa longueur. Φ désigne le débit à l'entrée de l'arbre et pour $i \in \{1,2\}$, q_i désigne le débit du fluide dans chaque section de sortie, si bien que l'on peut écrire :

$$\Phi = q_1 + q_2. \text{ (conservation du flux)}$$

De même, si $i \in \{1,2\}$, on appelle p_i, la pression (imposée) à chacune des sorties. Enfin si $i \in \{1,2\}$, on introduit également le facteur h_i de réduction de chaque branche qui a pour expression $h_i = \frac{r_i}{r_0}$ et $x_i \stackrel{\text{déf}}{=} h_i^3$ est une variable supplémentaire qui sera choisie comme variable d'optimisation.

Le volume V de l'arbre peut être approximé en sommant les volumes de chaque cylindre composant l'arbre :

$$\begin{aligned} V &= \pi r_0^2 \ell_0 + \pi r_1^2 \ell_1 + \pi r_2^2 \ell_2 \\ &= \pi r_0^2 \ell_0 \left(1 + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 \frac{\ell_1}{\ell_0} + \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 \frac{\ell_2}{\ell_0}\right) \\ &= \pi r_0^2 \ell_0 (1 + x_1 + x_2). \end{aligned}$$

On désigne par A la matrice :

$$A(x_1, x_2) = r_0 \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{x_1} & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{x_2} \end{pmatrix}.$$

A est appelée *matrice de résistance de l'arbre*. C'est une matrice couramment utilisée pour modéliser un écoulement de Poiseuille au sein d'un arbre. On peut par exemple se référer à [42]. À partir de maintenant, on choisira $r_0 = 1$ pour des raison de simplicité des écritures.

D'après la loi de Poiseuille reliant le flux à la pression écrite précédemment, en introduisant les vecteurs $\delta\mathbf{p} = (p_0 - p_1, p_0 - p_2)^T = (\delta p_1, \delta p_2)^T$ et $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$, on a :

$$\delta\mathbf{p} = A\mathbf{q}.$$

On définit à présent l'énergie de dissipation $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(x_1, x_2) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{q}^T A\mathbf{q}.$$

Compte tenu de la conservation du flux, on a encore :

$$\mathcal{E}(x_1, x_2) = \Phi^2 + \frac{q_1^2}{x_1} + \frac{q_2^2}{x_2}.$$

De plus, notre choix de modélisation impose que sont fixés et connus dans ce problème les pressions p_1, p_2 aux sorties de l'arbre, ainsi que le flux Φ à l'entrée.

En tenant compte de la contrainte de volume, on va écrire explicitement en fonction de x_1 et x_2 l'expression de l'énergie. Commençons par déterminer la pression p_0 en fonction de (x_1, x_2). On a $\mathbf{q} = A^{-1}(x_1, x_2)\delta\mathbf{p}$ et on obtient facilement l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + x_1 + x_2} \begin{pmatrix} x_1(x_2 + 1) & -x_1x_2 \\ -x_1x_2 & x_2(x_1 + 1) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} q_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\Lambda}(x_1(x_2 + 1)\delta p_1 - x_1x_2\delta p_2) \\ q_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\Lambda}(x_2(x_1 + 1)\delta p_2 - x_1x_2\delta p_1). \end{cases} \tag{5.3}$$

De plus, la loi de Poiseuille permet d'écrire :

$$p_0(x_1, x_2) = p_1 + \Phi + \frac{q_1(x_1, x_2)}{x_1} = p_2 + \Phi + \frac{q_2(x_1, x_2)}{x_2}.$$

Il s'ensuit que : $p_0(x_1, x_2) = p_1 + \Phi + \dfrac{x_2}{\Lambda}(p_2 - p_1) + \dfrac{1}{\Lambda}(p_0(x_1, x_2) - p_1)$.

On en déduit :

$$p_0(x_1, x_2) = p_1 + \frac{\Phi\Lambda}{\Lambda - 1} + \frac{x_2}{\Lambda - 1}(p_2 - p_1).$$

À présent que l'expression de $p_0(x_1, x_2)$ est connue, il est aisé d'obtenir les expressions de $q_1(x_1, x_2)$ et $q_2(x_1, x_2)$. En effet, en réinjectant l'expression de $p_0(x_1, x_2)$ dans (5.3), on obtient :

$$\begin{cases} q_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\Lambda - 1}(x_2(p_2 - p_1) + \Phi) \\ q_2(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\Lambda - 1}(\Phi - x_1(p_2 - p_1)). \end{cases}$$

On en déduit ainsi l'expression explicite de $\mathcal{E}(x_1, x_2)$:

$$\boxed{\mathcal{E}(x_1, x_2) = \Phi^2 + \frac{1}{(\Lambda - 1)^2}\left(x_1[\Phi + x_2(p_2 - p_1)]^2 + x_2[\Phi - x_1(p_2 - p_1)]^2\right).} \tag{5.4}$$

On s'intéresse ici aux solutions, si elles existent, du problème :

$$\begin{cases} \min \mathcal{E}(x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \\ 1 + x_1 + x_2 = \Lambda. \end{cases} \tag{5.5}$$

Λ est une constante strictement positive fixée strictement supérieure à 1. La contrainte égalité traduit le fait que l'on cherche l'arbre minimisant l'énergie de dissipation à volume fixé.

Remarque 5.5. *Au regard de l'expression de $\mathcal{E}(x_1, x_2)$ que l'on vient d'établir, le problème (5.5) possède (au moins) une solution, puisque la fonction $(x_1, x_2) \longmapsto \mathcal{E}(x_1, x_2)$ est continue et qu'on la minimise sur un compact.*

Ce problème est tout à fait élémentaire. On va appliquer le théorème de Kuhn et Tucker d'optimisation sous contraintes. Les dérivées partielles de la fonctionnelle à minimiser s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{1}{(\Lambda - 1)^2} \left(\Phi^2 + x_2 (p_2 - p_1)^2 (\Lambda - 1 + x_1) \right) \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{(\Lambda - 1)^2} \left(\Phi^2 + x_1 (p_2 - p_1)^2 (\Lambda - 1 + x_2) \right). \end{aligned}$$

Le théorème de Kuhn et Tucker nous assure de l'existence d'un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ associé à la contrainte égalité $x_1 + x_2 = \Lambda - 1$ et de deux multiplicateurs de Lagrange μ_1 et μ_2 respectivement associés aux contraintes "inégalité" $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ tels que optimums $(x_1^\star, x_2^\star)$ sont solutions du système :

$$\begin{cases} x_2 (p_2 - p_1)^2 (\Lambda - 1 + x_1) = \lambda (\Lambda - 1)^2 - \Phi^2 \\ x_1 (p_2 - p_1)^2 (\Lambda - 1 + x_2) = \lambda (\Lambda - 1)^2 - \Phi^2 \\ x_1 + x_2 = \Lambda - 1 \\ \mu_1 x_1 = 0 \text{ et } \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2 x_2 = 0 \text{ et } \mu_2 \geq 0. \end{cases}$$

- Si $\mu_1 = 0$ et $\mu_2 = 0$, on obtient le point :

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{\Lambda - 1}{2}, \frac{\Lambda - 1}{2} \right).$$

- Si $x_1 = 0$, alors $x_2 = \Lambda - 1$ et $\mu_2 = 0$. Il s'ensuit que $\lambda = \frac{\Phi^2}{(p_2 - p_1)^2}$, puis $\mu_1 = (\Lambda - 1) x_2 = (\Lambda - 1)^2$. On obtient donc le point :

$$(x_1, x_2) = (0, \Lambda - 1).$$

- Si $x_1 \neq 0$, alors $\mu_1 = 0$ et si on soustrait les deux premières égalités du système, on obtient $(\Lambda - 1)(x_2 - x_1) = -\mu_2$. Nécessairement, $\mu_2 \neq 0$, sinon, on se ramène au premier cas. Puisque $\mu_2 \neq 0$, alors, $x_2 = 0$ et $x_1 = \Lambda - 1$. On obtient donc le point :

$$(x_1, x_2) = (\Lambda - 1, 0).$$

Remarquons enfin (le calcul est immédiat) que :

$$\mathcal{E}\left(\frac{\Lambda - 1}{2}, \frac{\Lambda - 1}{2} \right) > \mathcal{E}(0, \Lambda - 1) = \mathcal{E}(\Lambda - 1, 0).$$

L'existence d'un minimum et maximum global pour ce problème prouve alors que les minimiseurs de la fonctionnelle $\mathcal{E}$ sont $(\Lambda - 1, 0)$ et $(0, \Lambda - 1)$. Cela correspond, dans chacun des deux cas à la fermeture d'une branche de l'arbre.

En d'autres termes, notre choix de modélisation (Poiseuille d'une part et le choix des entrées/sorties de l'arbre d'autre part) a conduit à une solution biologiquement non acceptable si l'on souhaite chercher l'arbre dichotomique minimisant l'énergie de dissipation.

Conclusion

C'est donc finalement le choix de modélisation numéro (II) représenté sur la figure 5.5 que nous retiendrons. Ce choix nous sera confirmé dans le chapitre 7. En effet, nous effectuerons dans ce chapitre des simulations numériques, pour un arbre dichotomique de deux générations dans lequel circule un fluide dont l'écoulement est modélisé par les équations de Navier-Stokes cette fois et non plus simplement Stokes. On observera (numériquement) le même phénomène, à savoir la fermeture d'une branche de l'arbre.

Le même problème de Poiseuille pour le choix de modélisation numéro (II) donne des résultats tout à fait différents. On est ramené dans ce cas à minimiser dans le même ensemble des contraintes que précédemment la fonction de deux variables :

$$\mathcal{E} : (x_1, x_2) \longmapsto \Phi^2 + \frac{q_1^2}{x_1} + \frac{q_2^2}{x_2},$$

où q_1, q_2 sont connus, et Φ également, par conservation du flux ($\Phi = q_1 + q_2$). Le théorème de Kuhn et Tucker assure que l'optimum $(x_1^\star, x_2^\star)$ d'un tel problème vérifie :

$$\frac{x_1^\star}{q_1} = \frac{x_2^\star}{q_2} \text{ et } 1 + x_1^\star + x_2^\star = \Lambda,$$

ce qui détermine complètement ce couple. Notons d'ailleurs que dans le cas où $q_1 = q_2$, l'optimum est un arbre symétrique.

5.2.3 Vers les questions et problèmes...

Voici les directions qui seront développées dans le cadre de cette thèse :

- **Chapitre 6**
  Tous les résultats exposés dans ce chapitre sont obtenus de façon théorique.
  Nous montrons que le problème de la minimisation du critère J possède une solution dans une classe d'ouverts possédant la propriété de ε-cône. Nous nous demanderons ensuite si le cylindre est la forme qui conserve « au mieux » l'énergie d'un fluide, autrement dit, qui minimise la fonctionnelle J. Nous prouverons de façon théorique, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde qu'il n'en est rien, en traduisant le système surdéterminé, obtenu avec les conditions d'optimalités et en montrant qu'il n'a pas de solution. Ce résultat sera démontré dans le cas d'écoulements de types Stokes et Navier-Stokes, en deux et trois dimensions.

- **Chapitre 7**
  Ce chapitre est consacré à l'étude numérique du problème de la minimisation du critère J dans une classe d'ouverts admissibles $\mathcal{O}_{\text{ad}}$. Dans le chapitre 6, nous savons montrer que le cylindre n'est pas solution d'un tel problème. Nous tenterons donc de déterminer l'optimum à l'aide du logiciel *Comsol*.
  Nous nous ferons également confirmer numériquement la réponse à la question de la modélisation de l'arbre bronchique posée dans la section 5.2.2. Nous effectuerons alors des simulations afin de déterminer des formes d'arbres dichotomiques, de tubes minimisant l'énergie de dissipation lorsque le fluide circulant à l'intérieur est régi par les équations de Navier-Stokes, pour un flux entrant (inspiration) et sortant (l'expiration). Les biologistes s'accordent à dire que ces phénomènes diffèrent du point de vue de la dépense énergétique, aussi est-il intéressant de les comparer.

Chapitre 6

Quelle est la forme optimale d'un tuyau ?

Dans ce travail, on considère l'un des problèmes les plus simples : quelle forme donner à une tuyère pour minimiser l'énergie dissipée par le fluide. A première vue, l'intuition nous conduit à penser à une forme cylindrique. Nous allons montrer qu'il n'en est rien ! Notons que la nature illustre ce résultat dans le poumon : nos bronches ne sont effectivement pas cylindriques.

6.1 Introduction

On considère un cylindre (ouvert) $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dans lequel s'écoule un fluide visqueux newtonien incompressible. On note $\mu > 0$ le coefficient de viscosité cinématique.

On désigne par R le rayon du cylindre et par L sa longueur. Le cylindre Ω a donc pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \\ x_1^2 + x_2^2 < R^2 \\ 0 < x_3 < L. \end{cases}$$

Comme mentionné sur le schéma ci-dessous, on appelle :

- E l'entrée du cylindre d'équation cartésienne $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \text{ et } x_3 = 0\}$;
- Γ, la surface latérale du cylindre d'équation cartésienne

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = R^2 \text{ et } 0 < x_3 < L\} ;$$

- S, la sortie du cylindre d'équation cartésienne $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \text{ et } x_3 = L\}$,

de sorte que $\partial\Omega = E \cup \Gamma \cup S$.

Enfin, on désigne par :

- Π_0, le plan d'équation $x_3 = 0$;
- Π_L, le plan d'équation $x_3 = L$.

Dans ce chapitre, on considère un fluide soumis à une loi d'écoulement de type Stokes ou Navier-Stokes. On s'intéresse aux solutions du problème d'optimisation de la forme d'une tuyère, pour

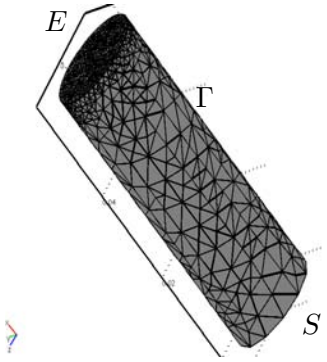

FIG. 6.1 – Le cylindre Ω maillé avec des tétraèdres

minimiser un critère du type $\int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathrm{d}x$, où $\mathbf{u}$ est la vitesse d'écoulement du fluide à travers la géométrie Ω.

Le résultat principal de ce chapitre, énoncé dans la section 6.2.3, est la preuve que le cylindre n'est pas solution d'un tel problème d'optimisation. Ce résultat est vrai en 2D, 3D, pour des écoulements de types Stokes ou Navier-Stokes. Il est annoncé dans l'article [32] et est démontré dans [30].

6.1.1 Un cas très simplifié

Dans leur article [3], G. Arumugam et O. Pironneau démontrent que si la loi d'écoulement d'un fluide à travers un cylindre est décrite par une équation de Laplace (loi de Poiseuille), et que l'on souhaite minimiser l'énergie de traînée, on gagne sur le cylindre en créant des rainures sur le bord latéral, dans le sens longitudinal (en Anglais *riblets*). La simplicité du modèle d'écoulement choisi ici est telle, qu'il ne semble pas raisonnable dans ce cas de se livrer à une quelconque interprétation physique des calculs présentés ici. Cet exemple très simple n'a pour vocation que de présenter la méthode utilisée pour conduire les calculs exposés dans la suite de ce chapitre.

Pour nous fixer les idées et uniquement dans ce but, commençons par vérifier que le cylindre n'est pas optimal pour ce critère en partant d'une équation plus simple que les équations de type Stokes ou Navier-Stokes, et utilisons l'équation de Laplace. introduite dans l'article [3]. L'équation que l'on va introduire est la même, modulo un relèvement des conditions au bord. En revanche, la différence avec cet article provient du critère optimisé : chez nous, il s'agit de l'énergie dissipée par le fluide tandis que dans l'article [3], il s'agit de l'énergie de traînée. Le traitement mathématique est d'ailleurs complètement différent. Cela provient du fait que dans un cas, le critère est une intégrale sur tout le domaine et dans l'autre, il s'agit d'une intégrale de bord.

On suppose donc que la loi d'écoulement à l'intérieur du cylindre Ω est décrite par $\mathbf{u} = (0, 0, u)$ où :

$$\begin{cases} -\triangle u = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ u = c(x_1^2 + x_2^2 - R^2) & \mathbf{x} \in E \\ u = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \text{ (non glissement)} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \mathbf{x} \in S, \end{cases}$$

avec $c \in \mathbb{R}$. On cherche à savoir si le cylindre peut être solution du problème :

$$\begin{cases} \min \mathcal{E}(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad}} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\Omega \text{ ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^3 : \text{mes } (\Omega) = \pi R^2 L,\ \Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E,\ \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S\right\}, \end{cases}$$

où $\mathcal{E}(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$ et où l'on suppose l'entrée E et la sortie S du cylindre fixées. Bien sûr, cette modélisation est fort peu réaliste. Elle n'a pour vocation ici que de nous guider vers l'intuition du résultat plus général qui sera présenté dans les sections suivantes, mettant cette fois en jeu des systèmes de types Stokes ou Navier-Stokes.

Un premier réflexe, si l'on souhaite répondre à cette question consiste à étudier les conditions d'optimalité d'un tel problème et à regarder si elles sont vérifiées. Pour les écrire, on utilise la dérivée de $\mathcal{E}$ par rapport au domaine Ω.

On souhaite ne déformer que la paroi latérale du cylindre.

On pose :

i $\Omega_t = (I + t\mathbf{V})\Omega$ pour t assez petit et $\mathbf{V}$, un champ de vecteurs à support compact, support qui ne rencontre ni E, ni S ;

ii $f(t) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{E}(\Omega_t)$.

En matière de dérivation par rapport au domaine, il existe de nombreuses références ([45], [55], [29], [1], etc.). Il est très classique d'écrire que la dérivée de $\mathcal{E}$ par rapport au domaine a pour expression :

$$\langle \mathrm{d}\mathcal{E}(\Omega), \mathbf{V}\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u' \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u|^2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s,$$

où u' est la solution du problème dérivé :

$$\begin{cases} -\triangle u' = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ u' = 0 & \mathbf{x} \in E \\ u' = -\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}) & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \frac{\partial u'}{\partial n} = 0 & \mathbf{x} \in S. \end{cases}$$

De plus, en utilisant la formule de Green, il est aisé d'écrire la dérivée de forme $< \mathrm{d}\mathcal{E}(\Omega), \mathbf{V} >$ comme une intégrale sur la surface latérale Γ :

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{d}\mathcal{E}(\Omega), \mathbf{V}\rangle &= \int_{\partial\Omega} u' \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega u' \triangle u \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u|^2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s \\ &= -\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla u|^2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Par conséquent, si le cylindre Ω est optimal pour minimiser l'énergie $\mathcal{E}(\Omega)$, alors, nécessairement, il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\langle \mathrm{d}\mathcal{E}(\Omega), \mathbf{V}\rangle = \lambda \langle \mathrm{dVol}\ (\Omega), \mathbf{V}\rangle$, égalité qui se traduit encore, compte-tenu du calcul de $\langle \mathrm{d}\mathcal{E}(\Omega), \mathbf{V}\rangle$ que l'on vient de faire :

$$\exists \xi \in \mathbb{R} : \frac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma} = \xi.$$

On peut d'ores et déjà préciser ξ dans le cas où le cylindre est optimal. En effet, remarquons que sur Γ, il est possible de dériver les conditions au bord par rapport à la troisième coordonnée x_3 et dans ce cas, u vérifie :

$$\begin{cases} \triangle\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \quad \text{(Condition surdéterminée).} \end{cases}$$

D'après le théorème d'unicité locale d'Holmgren, la fonction identiquement nulle étant solution du système ci-dessus, on en déduit, par analyticité de $\dfrac{\partial u}{\partial x_3}$ que

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} \equiv 0 \text{ dans } \Omega,$$

puis que u ne dépend pas de x_3. Par conséquent, la fonction u est donnée par sa valeur à l'entrée, soit :

$$u \equiv c(x_1^2 + x_2^2 - R^2).$$

Mais cette fonction n'est pas harmonique. Par conséquent, on aboutit à une absurdité et le cylindre ne peut pas être optimal pour minimiser l'énergie $\mathcal{E}(\Omega)$ dans ce cas.

C'est plus ou moins dans cet esprit que nous allons à présent aborder des problèmes plus complexes dans lesquels les écoulements des fluides considérés sont régis par des lois plus réalistes. Cela va beaucoup compliquer le problème d'optimisation et nécessitera une étude très fine du problème adjoint de l'équation de Stokes ou Navier-Stokes.

6.1.2 Le modèle d'écoulement

On désigne par $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, le champ des vitesses et par p, la pression. L'écoulement est modélisé par le système d'équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u} + \nabla p + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega,\ i \in \{1,2,3\} \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u_0} & \mathbf{x} \in E \\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ -p\mathbf{n} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{h} & \mathbf{x} \in S, \end{cases} \tag{6.1}$$

où $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ et $\mathbf{u}_0$ seront choisis de sorte que le fluide soit soumis à une loi de Poiseuille (profil de vitesse parabolique à l'entrée), lorsque le domaine Ω est un cylindre. Notons que l'on a un classique résultat d'existence et d'unicité pour ce problème (d'après [7], par exemple, dans lequel sont énoncés plusieurs résultats d'existence pour des problèmes de Navier-Stokes avec de telles conditions au bord) :

Théorème 6.1. *Supposons que l'on ait* $\mathbf{u_0} \in (H^{3/2}(E))^3$ *et* $\mathbf{h} \in (H^{1/2}(S))^3$.

Si la viscosité μ *est suffisamment grande, le problème (6.1) possède une unique solution* $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Posons à présent :

- $\mathbf{h} = \left(\frac{p_1 - p_0}{2L}x_1, \frac{p_1 - p_0}{2L}x_2, -p_1\right)$, et
- $\mathbf{u_0} = \left(0, 0, \frac{p_1 - p_0}{4\mu L}(x_1^2 + x_2^2 - R^2)\right)$ (flux parabolique à l'entrée du cylindre).

Physiquement, il convient de choisir dans ce modèle $p_1 < p_0$.

Posons $c = \frac{p_1 - p_0}{4\mu L}$. Ω désigne le cylindre décrit précédemment.

Remarque 6.1. *On va écrire la formulation variationnelle du problème de Navier-Stokes (6.1). Pour une justification précise du résultat ci-dessous, il suffit d'adapter les calculs qui seront exposés dans la preuve de la proposition 6.2.*

Introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} W_0(\Omega) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{(\mathbf{v}, q) \in (H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma\right\}. \\ Z_{\mathbf{u_0}}(\Omega) &\overset{\text{déf}}{=} \left\{(\mathbf{v}, q) \in (H^1(\Omega))^3 \times L^2(\Omega) : \mathbf{v} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } E \text{ et } \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma\right\}. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du système de Navier-Stokes (6.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in Z_{\mathbf{u_0}}(\Omega) \text{ tels que : } \forall (\mathbf{w}, \psi) \in W_0(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega (2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} - p\text{div } \mathbf{w})\,\mathrm{d}x = \int_S \mathbf{h}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s \\ \displaystyle\int_\Omega \psi\text{div } \mathbf{u}\mathrm{d}x = 0. \end{array} \right. \tag{6.2}$$

Pour établir cette formulation variationnelle, il est commode d'utiliser une version adaptée de la formule de Green, rappelée dans le lemme ci-après :

Lemme 6.1. *Soient* $\mathbf{y}$ *et* $\mathbf{z}$*, deux éléments de* $(H^1(\Omega))^3$*. Alors :*

$$2\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{z}) : \varepsilon(\mathbf{y})\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\triangle\mathbf{z} + \nabla\text{div } \mathbf{z})\cdot\mathbf{y}\mathrm{d}x + 2\int_{\partial\Omega} \varepsilon(\mathbf{z})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{y}\mathrm{d}s.$$

On a vu que si μ est suffisamment grand, l'équation (6.1) possède une solution unique. Ici, $(\mathbf{u}, p)$ est donné explicitement par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \left(0, 0, c(x_1^2 + x_2^2 - R^2)\right) \text{ et} \\ p(x_1, x_2, x_3) = 4\mu c(x_3 - L) + p_1. \end{array} \right. \tag{6.3}$$

6.2 Formulation du problème d'optimisation de forme

6.2.1 Présentation du problème

On considère le critère *énergie de viscosité* J, défini par :

$$J(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} 2\mu\int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2\mathrm{d}x, \tag{6.4}$$

où $\mathbf{u}$ désigne la solution de l'équation aux dérivées partielles (6.1). On définit l'ensemble des domaines admissibles :

$$\mathcal{O}_{\text{ad}} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\Omega \text{ ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^3 : \text{mes } (\Omega) = \pi R^2 L,\ \Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E,\ \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S, \right\}.$$

On s'intéresse au problème d'optimisation de forme :

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad}}, \end{cases} \tag{6.5}$$

Dans la section 6.2.3, on se demande si le cylindre peut être solution d'un tel problème.

Une autre question naturelle consiste à se demander si ce problème d'optimisation de forme possède une solution. Nous apportons une réponse à cette question dans la section 6.2.2 où nous présentons un résultat d'existence.

Pour l'établir, il est préférable de se placer dans une classe de domaines admissibles possédant la propriété de ε-cône. Cette hypothèse nous restreint à la recherche de formes possédant une régularité uniforme minimale. C'est le choix adopté dans [11]. Notons que le résultat de non optimalité du cylindre présenté dans la section 6.2.3 tient encore si l'on remplace l'ensemble des contraintes $\mathcal{O}_{\text{ad}}$ par l'ensemble $\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$ des compacts possédant la propriété de ε-cône, introduit ci-après. Cela vient du fait que le cylindre possède lui même cette propriété, pour tout $\varepsilon > 0$.

On va également supposer que l'on recherche un domaine optimal contenu dans un compact D.

On rappelle :

Propriété de ε-cône

Définition 6.1. *Soit* $\mathbf{y}$*, un point de* $\mathbb{R}^N$*,* ξ*, un vecteur unitaire et* ε*, un réel strictement positif donné.*

i On appelle ***cône épointé de sommet*** $\mathbf{y}$***, de direction*** ξ ***et de dimension*** ε*, le cône noté* $C(\mathbf{y}, \xi, \varepsilon)$ *privé de son sommet, défini par :*

$$C(\mathbf{y}, \xi, \varepsilon) \overset{\text{déf}}{=} \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N :< \mathbf{z} - \mathbf{y}, \xi >_{\mathbb{R}^N} \geq \cos\varepsilon \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^N} \text{ et } 0 < \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|_{\mathbb{R}^N} < \varepsilon\},$$

où $< ., . >_{\mathbb{R}^N}$ *désigne le produit scalaire euclidien de* $\mathbb{R}^N$ *et* $\|.\|_{\mathbb{R}^N}$*, la norme induite par ce produit scalaire.*

ii On dit qu'un ouvert Ω *a la propriété du* ε*-cône si pour tout élément* $\mathbf{x} \in \Omega$*, il existe* ξ_x*, un vecteur unitaire tel que :*

$$\forall \mathbf{y} \in \overline{\Omega} \cap \mathcal{B}_o(\mathbf{x}, \varepsilon),\ C(\mathbf{y}, \xi, \varepsilon) \subset \Omega,$$

$\mathcal{B}_o(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *désignant bien sûr la boule ouverte (pour la norme euclidienne) de centre* $\mathbf{x}$ *et de rayon* ε*.*

La propriété qui suit fait le lien entre différents types de convergence d'ouverts (voir [29] ou [18]), via la propriété de ε-cône :

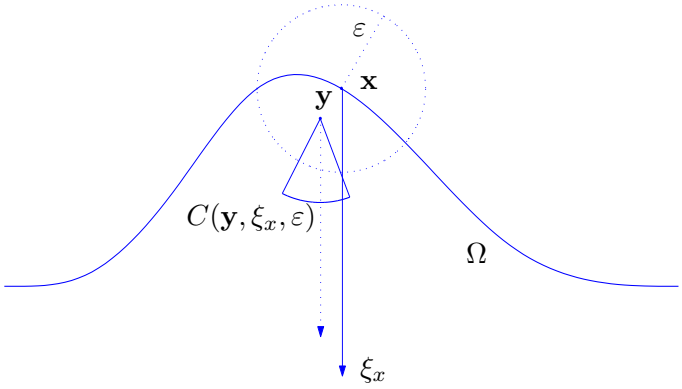

FIG. 6.2 – Illustration de la propriété de ε-cône

Propriété 6.1. *Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'ouverts tous inclus dans une boule D et ayant la propriété du ε-cône, avec ε, un réel strictement positif fixé. Alors, il existe un ouvert Ω, et une suite extraite $(\Omega_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers Ω à la fois au sens de Hausdorff, au sens des fonctions caractéristiques et au sens des compacts.*

De plus, Ω a la propriété de ε-cône, $\overline{\Omega_{n_k}}$ et $\partial\Omega_{n_k}$ convergent au sens de Hausdorff respectivement vers $\overline{\Omega}$ et $\partial\Omega$.

Nous manipulerons, pour démontrer le résultat d'existence présenté dans la section 6.2.2, des suites minimisantes de domaines. Puisque l'on souhaite utiliser le résultat de la proposition 6.1, il est raisonnable et non restrictif de considérer des domaines, tous contenus dans une boîte cylindrique D d'équation cartésienne :

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R_0^2 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq L\},$$

avec $R_0 > R$, comme sur la figure 6.3 :

Nous pouvons à présent formuler un nouveau problème d'optimisation. On introduit d'abord un ensemble $\mathcal{U}_\varepsilon$, puis l'ensemble $\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$ des formes admissibles :

$$\mathcal{U}_\varepsilon \overset{\text{déf}}{=} \{\Omega \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^3 : \Omega \text{ a la propriété d'}\varepsilon\text{-cône}\} ; \tag{6.6}$$

$$\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon} \overset{\text{déf}}{=} \left\{\Omega \in \mathcal{U}_\varepsilon : \text{mes } (\Omega) = \pi R^2 L,\ \Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E,\ \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S\right\}. \tag{6.7}$$

On introduit le problème d'optimisation dont on va démontrer l'existence de solutions :

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}, \end{cases} \tag{6.8}$$

où $J(\Omega)$ est donné par la formule (6.4), et $(\mathbf{u}, p)$ désigne la solution du système de Navier-Stokes (6.1).

Remarque 6.2. *Notons que dans [7], [9] et [10], une justification physique de la condition de sortie a été proposée : elle ne contribue pas à augmenter l'énergie du système. On dit que cette condition est faiblement réfléchissante en aval de l'écoulement. Elle traduit la contrainte issue de l'écoulement subie au niveau de la sortie S.*

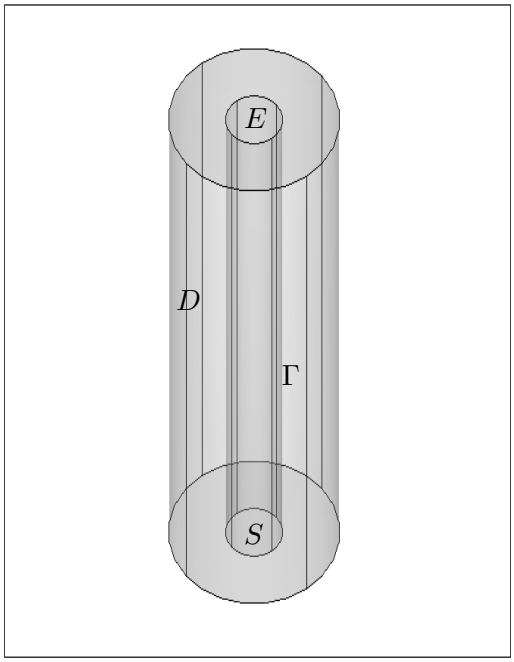

FIG. 6.3 – La boîte D contenant les suites minimisantes de domaines

6.2.2 Un résultat d'existence dans la classe des ouverts ayant la propriété de ε-cône

Dans cette partie, on démontre que le problème (6.8) a (au moins) une solution.

Au préalable, on va démontrer un lemme de nature topologique dont nous nous servirons pour établir le résultat d'existence qui suivra :

Lemme 6.2. *La classe $\mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon}$ est fermée pour la topologie associée à la convergence de Hausdorff.*

Démonstration. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon}$, convergente au sens de Hausdorff vers un certain Ω. On souhaite démontrer ici que $\Omega \in \mathcal{O}_{\mathrm{ad},\varepsilon}$ (caractérisation séquentielle des fermés). D'après la proposition 6.1, on sait que $\Omega \in \mathcal{U}_\varepsilon$. Dans la suite de cette preuve, on s'autorise à écrire tous les résultats de convergence modulo une extraction bien choisie. Le résultat de convergence au sens des fonctions caractéristiques fourni par cette propositions prouve également que $\chi_{\Omega_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^1(D)} \chi_\Omega$, ce qui implique que mes $(\Omega) = \pi R^2 L$. Reste à prouver que $\Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E$ et que $\Pi_L \cap \overline{\Omega} = S$. Concentrons-nous sur la première égalité, la seconde se démontrant exactement sur le même principe.

Le fait que $\Pi_0 \cap \overline{\Omega} \subset E$ est assez immédiat. C'est en fait une conséquence immédiate de la stabilité de l'inclusion pour la convergence de Hausdorff. En effet, on désigne par L la couronne :

$$L \overset{\text{déf}}{=} \{\mathbf{x} \in \Pi_0 : \mathbf{x} \in \partial D \text{ et } \mathbf{x} \notin \overline{E}\}.$$

On introduit alors la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $K_n \overset{\text{déf}}{=} \overline{D}\backslash\Omega_n$ et de la même façon, on désigne par K, le domaine $\overline{D}\backslash\Omega$. Le résultat de stabilité de l'inclusion pour la convergence de Hausdorff nous permet d'écrire que :

$$\left.\begin{array}{r} K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} K \\ \forall n \in \mathbb{N},\ L \subset K_n \end{array}\right\} \Longrightarrow L \subset K.$$

Démontrons maintenant l'autre inclusion : soit $\mathbf{x_0} \in E$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque Ω_n possède la propriété de ε-cône, on en déduit qu'il existe un vecteur unitaire ξ_n tel que le cône $C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi_n)$ (en utilisant les notations de la définition 6.1) soit inclus dans Ω_n. Puisque $\|\xi_n\|_{\mathbb{R}^3} = 1$, modulo une extraction, la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est un certain ξ unitaire. On en déduit que, quitte à extraire :

$$C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{H} C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi).$$

Reste alors à invoquer un résultat de stabilité pour l'inclusion. On a :

$$\left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N},\ C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi_n) \subset \Omega_n \\ C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{H} C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi) \\ \Omega_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H} \Omega \end{array}\right\} \Longrightarrow C(\varepsilon, \mathbf{x_0}, \xi) \subset \Omega.$$

On en déduit, en choisissant une suite de points du cône convergeant vers $\mathbf{x_0}$ que $\mathbf{x_0} \in \overline{\Omega}$, et puisque $\mathbf{x_0} \in E \subset \Pi_0$, l'inclusion réciproque est démontrée.

Il s'ensuit que $\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$ est fermé pour la topologie associée à la convergence de Hausdorff. □

Énonçons à présent le théorème d'existence :

Théorème 6.2. *Soit $\varepsilon > 0$. On suppose la viscosité μ suffisamment grande. Alors, le problème d'optimisation (6.8) possède une solution.*

Démonstration. Soit $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite minimisante d'éléments de $\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$. Puisque tous les ouverts Ω_n sont contenus dans D, en vertu de la proposition 6.1, qu'il existe, quitte à extraire, un ouvert Ω tel que :

$$\Omega_n \xrightarrow[n\to+\infty]{H,\chi,K} \Omega.$$

De plus, d'après le lemme 6.2, la classe $\mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$ est fermée pour la convergence au sens de Hausdorff et par conséquent, $\Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad},\varepsilon}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On désignera par $(\mathbf{u_n}, p_n)$, l'unique solution (puisque μ est grand) du système de Navier-Stokes (6.1) posé sur Ω_n. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n} = (u_{n,1}, u_{n,2}, u_{n,3})$.

On va raisonner en deux temps :

i **$(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée-H^1.**

C'est immédiat, par définition d'une suite minimisante. Posons $\omega_n \overset{\text{déf}}{=} \displaystyle\int_{\Omega_n} |\varepsilon(\mathbf{u_n})|^2 \mathrm{d}x$. La convergence de la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ montre qu'elle est bornée, et d'après l'inégalité de Korn (voir le lemme 6.5 et le corollaire 6.1), la suite $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée H^1.

ii **Convergence de la suite $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$.**

On vient de démontrer que $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée H^1. Par conséquent, par réflexivité de $H^1(D)$ et d'après le théorème de Rellich-Kondrachov (voir [8]), on en déduit que, modulo une extraction, il existe une fonction $\mathbf{u} \in [H^1(D)]^3$ telle que :

$$\mathbf{u_n} \overset{H^1}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{u_n} \overset{L^q}{\longrightarrow} \mathbf{u},\ \forall q \in [1,6[.$$

On note encore $\mathbf{u_n}$, le prolongement par 0 de la solution du système (6.1) sur la boîte D toute entière. Pour démontrer la convergence de la suite $(\mathbf{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers la solution du système de Navier-Stokes sur Ω, on va réutiliser la formulation variationnelle du système (6.1) en écrivant cette fois les intégrales sur le domaine fixe D, grâce au prolongement continu que l'on vient d'introduire.

Pour ne pas avoir à nous préoccuper du terme de pression, on va travailler dans des espaces de fonctions à divergence nulle (voir par exemple [56] et la section 6.3.1 de ce manuscrit dans laquelle cette méthode est plus amplement détaillée). Ainsi pour toute fonction $\mathbf{w}$ telle que

$$\mathbf{w} \in \left\{\mathbf{w} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{w} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma \text{ et div } \mathbf{w} = 0 \text{ dans } D\right\},$$

et pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\mathbf{u_n}$ vérifie :

$$\int_D (2\mu\varepsilon(\mathbf{u_n}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{w})\,\mathrm{d}x = \int_S \mathbf{h}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s$$

- Puisque l'on a convergence faible H^1 des fonctions $\mathbf{u_n}$, il vient immédiatement :

$$\int_D \varepsilon(\mathbf{u_n}) : \varepsilon(\mathbf{w})\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_D \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w})\mathrm{d}x.$$

- Établissons à présent la convergence du terme trilinéaire. On sait que $\nabla\mathbf{u_n} \overset{L^2(D)}{\rightharpoonup} \nabla\mathbf{u}$. De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u_n}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{w}\|^2_{[L^2(D)]^3} &\leq \sum_{i=1}^{3}\sqrt{\int_\Omega (u_{n,i}-u_i)^4\mathrm{d}x\int_\Omega w_i^4\mathrm{d}x}\\ &\leq 3\|\mathbf{u_n}-\mathbf{u}\|^2_{[L^4(D)]^3}\|\mathbf{w}\|^2_{[L^4(D)]^3}.\end{aligned}$$

On en déduit que $(\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{w})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement $L^2(D)$ vers $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$. Par conséquent, $\displaystyle\int_D \nabla\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x$ est le produit d'un terme convergeant fortement $L^2(D)$ par un terme convergeant faiblement $L^2(D)$. Il s'ensuit :

$$\int_D \nabla\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{u_n}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_D \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x.$$

Finalement, ces résultats de convergence démontrent que pour toute fonction $\mathbf{w}$ telle que

$$\mathbf{w} \in \left\{\mathbf{w} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{w} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma \text{ et div } \mathbf{w} = 0 \text{ dans } D\right\},$$

la fonction $\mathbf{u}$ vérifie :

$$\int_D (2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\,\mathrm{d}x = \int_S \mathbf{h}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s.$$

De plus, l'égalité suivante est une conséquence immédiate du fait que $\mathbf{u_n}$ converge faiblement-H^1 (elle résulte d'un passage à la limite) :

$$\int_D \psi \text{div } \mathbf{u} \mathrm{d}x = 0, \ \forall \psi \in L^2(D).$$

Pour conclure, il reste à invoquer le classique résultat permettant de traiter les systèmes de Stokes et Navier-Stokes : le lemme de De Rham. Une fois de plus, ce lemme sera explicité dans la section 6.3.1, dans laquelle on a choisi de redonner quelques techniques usuelles relatives aux équations de Navier-Stokes. Ce lemme fournit l'existence d'une fonction $p \in L^2(D)$ telle que :

$$\forall \mathbf{w} \in W_0(D), \ \int_D (2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - p \text{div } \mathbf{w}) \, \mathrm{d}x = \int_S \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}s,$$

autrement dit, on retrouve précisément la formulation variationnelle du problème de Navier-Stokes (6.1) sur le domaine D cette fois.

Reste enfin à vérifier que $\mathbf{u} = 0$ sur $D \backslash \overline{\Omega}$ et que $\mathbf{u} = \mathbf{u_0}$ sur E. Pour ce deuxième point, c'est immédiat, car on a montré que $(\mathbf{u_n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}}$ converge faiblement H^1 vers $\mathbf{u}$. Or, $\mathbf{u_{n}}_{|_E} = \mathbf{u_0}$. Par conséquent, $\mathbf{u}_{|_E} = \mathbf{u_0}$.

Le fait que $\mathbf{u} = 0$ sur $D \backslash \overline{\Omega}$ est une conséquence de la convergence au sens des compacts de Ω_n vers Ω, et du fait que Ω possède la propriété de ε-cône, donc est à bord lipschitzien (voir la notion de stabilité H_0^1 dans [29]).

□

6.2.3 Le théorème principal

Une intuition naturelle nous pousserait à croire qu'une solution du problème (6.5) pourraît être fournie par le cylindre.

Le théorème que nous énonçons maintenant établit qu'il n'en est rien. Par ailleurs, nous étayerons ce résultat en proposant, dans le chapitre 7 des simulations montrant que l'on sait faire décroître l'énergie dans la classe $\mathcal{O}_{\text{ad}}$.

Le théorème qui suit est donc le point essentiel de ce chapitre. Dans la section 6.3, nous tenterons d'obtenir des informations qualitatives sur les solutions du problème adjoint de l'équation de Navier-Stokes, qui permet d'écrire les conditions d'optimalité sous une forme plus directement exploitable. Ces conditions d'optimalités seront d'ailleurs précisément énoncées dans la section 6.4, de même que la démonstration du :

Théorème 6.3. *Le cylindre n'est pas solution du problème (6.5).*

6.3 Étude d'un problème adjoint

6.3.1 Calcul de la dérivée de forme

On pose :

i $\Omega_t = (I + t\mathbf{V})\Omega$ pour t assez petit et $\mathbf{V}$, un champ de vecteurs à support compact, support qui ne rencontre ni E, ni S ;

ii $f(t) := J(\Omega_t)$.

On cherche la dérivée de J par rapport au domaine Ω dans la direction $\mathbf{V}$, i.e. $f'(0)$. Pour un choix de $\mathbf{V}$ comme mentionné ci-dessus, on ne déforme que la paroi latérale du cylindre Γ.
On écrit de prime abord le problème dérivé (cf [29], [43], [45], [55]) :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u}' + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}' + \nabla\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} + \nabla p' = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{div } \mathbf{u}' = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{u}' = \mathbf{0} & \mathbf{x}\in E \\ \mathbf{u}' = -\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}) & \mathbf{x}\in\Gamma \\ -p'\mathbf{n} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}')\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x}\in S. \end{cases} \tag{6.9}$$

Remarque 6.3. *Les théorèmes classiques de régularité (voir [24]) assurent que* $\mathbf{u}\in[H^2_{loc}(\Omega\cup\Gamma)]^3$, *donc* $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n}$ *a bien un sens sur* Γ.

Remarque 6.4. *On va écrire la formulation variationnelle du problème dérivé (6.9). Pour une justification précise des résultats ci-dessous, il suffit d'adapter les calculs qui seront exposés dans la preuve de la proposition 6.2.*

Introduisons les espaces fonctionnels, pour $\mathbf{u}\in H^1(\Omega)$ *fixé et* $\mathbf{V}$, *un champ de vecteurs suffisamment régulier :*

$$\begin{aligned} W_0(\Omega) &:= \left\{(\mathbf{v},q)\in(H^1(\Omega))^3\times L^2(\Omega) : \mathbf{v}=0 \text{ sur } E\cup\Gamma\right\}. \\ W_{\mathbf{u}}(\Omega) &:= \left\{(\mathbf{v},q)\in(H^1(\Omega))^3\times L^2(\Omega) : \mathbf{v}=0 \text{ sur } E \text{ et } \mathbf{v} = -\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}) \text{ sur } \Gamma\right\}. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème dérivé (6.9) s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{u}',p')\in W_{\mathbf{u}}(\Omega) \text{ tels que : } \forall(\mathbf{w},\psi)\in W_0(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \left(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}') : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}' + \nabla\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} - p'\text{div } \mathbf{w}\right)\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle\int_\Omega \psi\text{div } \mathbf{v}\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

Remarque 6.5. *La condition sur le bord* S *du cylindre peut également se réécrire :*

$$\sigma(\mathbf{u}',p').\mathbf{n} = 0.$$

On a :

$$f'(0) = \langle \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\rangle = 4\mu\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}')\mathrm{d}x + 2\mu\int_\Gamma |\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s.$$

Nous allons à présent donner une autre expression de la dérivée par rapport au domaine $\langle\, \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\,\rangle$ à l'aide d'un état adjoint.

Propriété 6.2. *On introduit $(\mathbf{v}, q)$, solution du problème adjoint suivant :*

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})^T\cdot\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \nabla q = -2\mu\triangle\mathbf{u} & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \\ -q\mathbf{n} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v} - 4\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x}\in S. \end{cases} \tag{6.11}$$

Si la viscosité μ est suffisamment grande, alors, le problème (6.11) possède une solution unique $(\mathbf{v}, q)$. De plus, cette solution $(\mathbf{v}, q)$ appartient à $C^1(\overline{\Omega})\times C^0(\overline{\Omega})$.

Avant de démontrer cette proposition, on donne la formulation variationnelle du problème (6.11).

Lemme 6.3. *La formulation variationnelle du problème (6.11) s'écrit :*

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{v}, q)\in W_0(\Omega) \text{ tels que : } \forall(\mathbf{w},\psi)\in W_0(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega (2\mu\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} - q\text{div } \mathbf{w})\,\mathrm{d}x = 4\mu\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w})\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_\Omega \psi\text{div } \mathbf{v}\mathrm{d}x = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

Démonstration. On cherche à présent à démontrer que (6.12) est la formulation variationnelle du problème (6.11). Pour cela, considérons (sous réserve d'existence) un couple $(\mathbf{v}, q)$ tel que pour tout $(\mathbf{w},\psi)\in W_0(\Omega)$, on ait

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (2\mu\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} - q\text{div } \mathbf{w})\,\mathrm{d}x = 4\mu\int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w})\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_\Omega \psi\text{div } \mathbf{v}\mathrm{d}x = 0. \end{cases}$$

Le lemme 6.1 nous permet d'écrire successivement :

$$2\mu\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w})\mathrm{d}x = -\mu\int_\Omega (\triangle\mathbf{v} + \nabla\text{div } \mathbf{v})\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x + 2\mu\int_{\partial\Omega}\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s$$
$$\text{et } 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w})\mathrm{d}x = -\mu\int_\Omega \triangle\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x + 2\mu\int_S \varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s.$$

En appliquant la formule de Green, on a :

$$\int_\Omega \nabla\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x = \int_S (\mathbf{w}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x,$$

et de la même façon,

$$\int_\Omega q\text{div } \mathbf{w}\mathrm{d}x = \int_S q(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla q\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x.$$

Enfin, un changement d'indice prouve que $\displaystyle\int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla\mathbf{u})^T\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x$. La première équation de la formulation variationnelle (6.12) se réécrit donc :

$$\int_\Omega \left(-\mu\triangle\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})^T\cdot\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \nabla q + 2\mu\triangle\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}x$$
$$+ \int_S (-q\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{w}\mathrm{d}s = 0.$$

Un choix astucieux (et ultra classique) de fonctions test $\mathbf{w}$ nous permet alors de prouver que (6.12) est la formulation variationnelle du problème (6.11). □

Démonstration. Preuve de la proposition 6.2.
Souvenons-nous que la solution $\mathbf{u}$ du problème de Navier-Stokes est connue explicitement. Par conséquent : $\|\mathbf{u}\|_\infty = |c|R^2$ et $\|\nabla \mathbf{u}\|_\infty = 2|c|R$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions du système (6.12), on va chercher à appliquer le théorème de Lax-Milgram.

On introduit les espaces :

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{D}(\Omega) & : & \text{espace des fonctions } \mathcal{C}^\infty \text{ à support compact dans } \Omega \text{ et à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \mathcal{V}(\Omega) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \{\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0\} \\ V(\Omega) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \text{complété de } \mathcal{V} \text{ dans l'espace } \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \mathbf{u} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma\}. \end{array}$$

On peut d'ailleurs démontrer (voir par exemple [56], chapitre I) que :

$$V(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ et } \mathbf{u} = 0 \text{ sur } E \cup \Gamma\}.$$

Remarque 6.6. *Travailler dans des espaces de Sobolev à divergence nulle nous permet de nous ramener à un cadre d'utilisation classique du théorème de Lax-Milgram. Le lemme qui suit, dû à De Rham (voir [56]) nous permet de traiter l'existence du terme de pression.*

Lemme 6.4. *Lemme de De Rham.*
Soit Ω, un ouvert borné et lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbf{f} \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^n$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une distribution $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\mathbf{f} = \nabla p$ est que :

$$< \mathbf{f}, \mathbf{v} >= 0, \text{ pour tout } \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Cela nous pousse donc à travailler dans l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$. D'après la formulation variationnelle (6.12), $\mathbf{v}$ satisfait au sens des distributions :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}(\Omega),\ \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) =< \ell, \mathbf{w} >, \tag{6.13}$$

où α et ℓ sont respectivement les formes bilinéaire et linéaire définies par :

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) & \stackrel{\text{déf}}{=} & \displaystyle\int_\Omega (2\mu\varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{w}) + \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\, \mathrm{d}x \\ < \ell, \mathbf{w} > & \stackrel{\text{déf}}{=} & \displaystyle 4\mu \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{w}) \mathrm{d}x. \end{array}$$

Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, il nous reste donc à vérifier que α est continue, coercive, et que ℓ est continue. Pour ce faire, on va utiliser une inégalité très classique en mécanique des fluides et élasticité (voir par exemple [7] ou [26]).

Lemme 6.5. *Inégalité de Korn.*
Soit Ω, un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^3$. Alors, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour toute fonction $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$, on a :

$$\|\nabla \mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C_1(\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^3}).$$

Un corollaire immédiat de ce lemme est le :

Corollaire 6.1. *Soit Ω, un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^3$. Soit $\|.\|$, la norme sur $[H^1(\Omega)]^3$ définie par :*

$$\|\mathbf{v}\| \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\|\mathbf{v}\|^2_{[L^2(\Omega)]^3} + \|\varepsilon(\mathbf{v})\|^2_{[L^2(\Omega)]^3}\right)^{1/2}.$$

On désigne par $\|.\|_{[H^1(\Omega)]^3}$, la norme usuelle sur $H^1(\Omega)$.

Alors, $\|.\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ et $\|.\|$ sont équivalentes.

L'inégalité de Korn et le fait que, $\forall \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$, $\|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\nabla(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}$ démontrent ce corollaire.

- **Preuve que α est continue et coercive.**

La continuité de α est immédiate. En effet, des majoration élémentaires utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'équivalence des normes $\|.\|$ et $\|.\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ et l'expression explicite de $\mathbf{u}$, la solution de (6.1) démontrent que pour tout $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in ([H^1(\Omega)]^3)^2$, on a :

$$|\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq (8\mu + |c|(R^2 + 2R))\|\mathbf{w}\|_{[H^1(\Omega)]^3}\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^3}.$$

Passons à présent à la coercivité de α. Les mêmes calculs que précédemment prouvent que pour tout $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$:

$$\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{v})|^2 \mathrm{d}x - |c|(R^2 + 2R)\|\mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^3}.$$

Pour conclure, on a besoin d'invoquer une inégalité de type Poincaré classique :

Lemme 6.6. *Soit $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$, telle que $\mathbf{v} = 0$ sur $E \cup \Gamma$. Alors, il existe une constante C_2 ne dépendant que de Ω telle que :*

$$\|\mathbf{v}\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq C_2 \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{v})|^2 \mathrm{d}x. \tag{6.14}$$

L'inégalité de Korn combinée à (6.14) prouve alors que :

$$\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \left(\mu \frac{\min(1, C_2)}{C_1 + 1} - |c|(R^2 + 2R)\right) \|\mathbf{v}\|^2_{[H^1(\Omega)]^3} \mathrm{d}x.$$

α est donc coercive dès que $\mu > \frac{|c|(R^2+2R)(C_1+1)}{\min(1,C_2)}$.

- **Preuve que ℓ est continue.**

Il suffit d'écrire que pour tout $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$| < \ell, \mathbf{v} > | \leq 4\mu \|\varepsilon(\mathbf{v})\|_{[L^2(\Omega)]^3} \|\varepsilon(\mathbf{u})\|_{[L^2(\Omega)]^3},$$

et d'utiliser l'équivalence des normes $\|.\|$ et $\|.\|_{[H^1(\Omega)]^3}$ mentionée précédemment. Bien évidemment, il est nécessaire que μ soit suffisamment grande si l'on souhaite obtenir la coercivité dans l'inégalité ci-dessus.

L'application du théorème de Lax-Milgram nous assure alors de l'existence de $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^3$ satisfaisant (6.13) dans $\mathcal{V}(\Omega)$ puis par densité dans $V(\Omega)$. L'application du lemme (6.4) nous donne l'existence d'une distribution $p \in L^2(\Omega)$ solution de (6.12). L'unicité de p est claire, compte tenu de la condition au bord sur la sortie S du cylindre. En effet, s'il existait deux solutions p_1 et p_2, alors, puisque la vitesse $\mathbf{v}$ est unique, la fonction $p_1 - p_2$ vérifierait $\nabla(p_1 - p_2) = 0$ dans Ω et $p_1 = p_2$ sur S.

Montrons à présent la régularité de la solution. La régularité C^∞ dans Ω et sur les surface « lisses » (intérieur des disques E et S et intérieur de la paroi latérale Γ) est classique (cf. [24]). Le seul point un peu délicat concerne la régularité C^1 jusqu'aux parois anguleuses que sont les cercles $\overline{E} \cap \overline{\Gamma}$ et $\overline{S} \cap \overline{\Gamma}$. Pour le prouver, on peut utiliser la symétrie cylindrique montrée (sans hypothèse de régularité) au théorème 6.4, plus loin. On se ramène donc à un problème bidimensionnel dans le rectangle $(0, R) \times (0, L)$ en les variables $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ et x_3. Il s'agit ici de regarder le régularité aux coins $(R, 0)$ et (R, L). Dans ce but, on fait un prolongement par réflexion autour de la droite $r = R$, ce qui conduit à une équation aux dérivées partielles elliptique dans le rectangle $(0, 2R) \times (0, L)$ dont la solution coincide avec notre solution dans la première moitié du rectangle. La régularité C^1 jusqu'au bord, de la solution de cette équation aux dérivées partielles elliptique prolongée est alors classique. □

Remarque 6.7. *L'existence, l'unicité et la régularité $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ de problèmes adjoints pour l'équation de Navier-Stokes est classique. On peut se référer par exemple à [13], [17], [24], [26] et [56].*

Remarque 6.8. *La constante introduite dans l'inégalité de coercivité précédente n'est a priori pas optimale. Si l'on cherche la meilleure constante dans l'inégalité de coercivité, on est conduit à résoudre :*

$$\min_{\mathbf{v} \in V(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{v})|^2 \mathrm{d}x}{\|\mathbf{v}\|_{[H^1(\Omega)]^3}}.$$

On note λ cette constante.

L'existence d'une telle constante est classique (voir par exemple [28]). Pour la déterminer, on écrit les conditions d'optimalité au premier ordre. On s'attend bien sûr à ce que cette constante corresponde, d'après le principe du min-max de Courant, à la première valeur propre d'un opérateur elliptique.

Soit $\mathbf{h} \in V(\Omega)$, une perturbation admissible de différentiation. On désigne par $\mathbf{v}^\star$, un minimiseur du critère ci-dessus. Les conditions d'optimalité au premier ordre s'écrivent :

$$\forall \mathbf{h} \in V(\Omega),\ \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{v}^\star) : \varepsilon(\mathbf{h}) \mathrm{d}x = \lambda \left(\int_\Omega \mathbf{v}^\star \cdot \mathbf{h} \mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla \mathbf{v}^\star : \nabla \mathbf{h} \mathrm{d}x \right),$$

où $\nabla \mathbf{v}^\star : \nabla \mathbf{h}$ est défini par :

$$\nabla \mathbf{v}^\star : \nabla \mathbf{h} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i^\star}{\partial x_j} \frac{\partial h_j}{\partial x_i}.$$

En travaillant dans $\mathcal{D}(\Omega)$, et en appliquant d'abord la formule de Green, puis le lemme de De Rham, il montre qu'existe $p^\star \in L^2(\Omega)$ tel que, au sens des distributions, on a :

$$-\left(-\lambda + \frac{1}{2}\right) \triangle \mathbf{v}^\star + \nabla p^\star = \lambda \mathbf{v}^\star.$$

On en déduit que le couple $(\mathbf{v}^\star, p^\star)$ *est solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\left\{\begin{array}{ll} -\left(-\lambda+\frac{1}{2}\right)\triangle\mathbf{v}^\star+\nabla p^\star=\lambda\mathbf{v}^\star & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{div } \mathbf{v}^\star=0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{v}^\star=0 & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \\ -p^\star.\mathbf{n}+\varepsilon(\mathbf{v}^\star)\cdot\mathbf{n}=\lambda\frac{\partial\mathbf{v}^\star}{\partial n} & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \end{array}\right.$$

On peut se ramener à un classique problème aux valeurs propres de type Stokes, en posant :

$$\tilde{\mu}\overset{\text{déf}}{=}\frac{2\lambda}{1-2\lambda}\text{ et }\tilde{p}\overset{\text{déf}}{=}\frac{2p^\star}{1-2\lambda}.$$

Alors, le couple $(\mathbf{v}^\star, \tilde{p})$ *est solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\left\{\begin{array}{ll} -\triangle\mathbf{v}^\star+\nabla\tilde{p}=\tilde{\mu}\mathbf{v}^\star & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{div } \mathbf{v}^\star=0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{v}^\star=0 & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \\ \sigma(\mathbf{v}^\star,\tilde{p})\cdot\mathbf{n}=-\tilde{\mu}\nabla v_3^\star & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \end{array}\right.$$

La valeur propre $\tilde{\mu}$ *cherchée est la première (d'après l'écriture de cette valeur propre à l'aide d'un quotient de Rayleigh) valeur propre de ce système de type Stokes.*

Rappelons enfin que les problèmes aux valeurs propres dont la valeur propre intervient dans les conditions au bord ont été (entre autres) étudiés dans [58].

Calcul de la dérivée de forme du critère J

Fort de ces informations, on peut à présent évaluer la dérivée de forme du critère J :

Propriété 6.3. *En utilisant les notations précédentes, on peut écrire que la dérivée de forme du critère* J *a pour expression :*

$$\boxed{\langle \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\rangle=2\mu\int_\Gamma\left(\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v})-|\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s}. \tag{6.15}$$

Démonstration. On poursuit le calcul de la dérivée de forme entamé ci-dessus. Souvenons-nous que $(\mathbf{u}', p')$ désigne la solution du problème (6.9). En utilisant la formule de Green, on prouve que :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\rangle &= 4\mu\int_\Omega\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{u}')\mathrm{d}x+2\mu\int_\Gamma|\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}.\mathbf{n})\mathrm{d}s \\ &= -2\mu\int_\Omega((\triangle\mathbf{u}+\nabla\text{div }\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}')\mathrm{d}x+4\mu\int_{\partial\Omega}\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s \\ &\quad +2\mu\int_{\partial\Omega}|\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Multiplions alors la première équation du problème adjoint (6.11) par $\mathbf{u}'$ et intégrons sur Ω. On obtient :

$$\begin{aligned}-\mu\int_\Omega\triangle\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla q\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}x+\int_\Omega(\nabla\mathbf{u})^T\cdot\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}x \\ -\int_\Omega\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}x=-2\mu\int_\Omega\triangle\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Une intégration par parties et les conditions au bord pour $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ fournissent :

$$\int_\Omega \big(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}')\cdot\varepsilon(\mathbf{v}) - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\big)\,\mathrm{d}x - \int_S \sigma(\mathbf{v},q)\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s$$
$$+\int_S \big((\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{n}) - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})\big)\,\mathrm{d}s - \int_\Gamma \sigma(\mathbf{v},q)\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s = -2\mu\int_\Omega \triangle\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}x.$$

De même, multiplions la première équation du problème dérivé (6.9) par $\mathbf{v}$ et intégrons sur Ω. On obtient :

$$-\mu\int_\Omega \triangle\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla p'\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}\mathrm{d}x = 0.$$

Une intégration par parties et les conditions au bord pour $\mathbf{u}'$ et $\mathbf{v}$ fournissent :

$$\int_\Omega \big(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}')\cdot\varepsilon(\mathbf{v}) + \nabla\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}\big)\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_S \big(-\sigma(\mathbf{u}',p')\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{n})\big)\,\mathrm{d}s = 0.$$

Revenons à présent sur le calcul de la dérivée de forme.

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\rangle &= -2\mu\int_\Omega((\triangle\mathbf{u}+\nabla\mathrm{div}\ \mathbf{u})\cdot\mathbf{u}')\mathrm{d}x + 4\mu\int_{\partial\Omega}\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s\\ &\quad +2\mu\int_{\partial\Omega}|\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s\\ &= A + 4\mu\int_{\partial\Omega}\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s + 2\mu\int_{\partial\Omega}|\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

où l'on a posé $A := -2\mu\displaystyle\int_\Omega((\triangle\mathbf{u}+\nabla\mathrm{div}\ \mathbf{u})\cdot\mathbf{u}')\mathrm{d}x$.

Compte-tenu de ce que nous venons de voir, on peut écrire que :

$$A = \int_{\Gamma\cup S}(q\mathbf{n} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s - \int_S(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')\mathrm{d}s.$$

Par conséquent, et d'après (6.11), on a :

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\rangle &= \int_{\Gamma\cup S}(q\mathbf{n} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s - \int_S(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')\mathrm{d}s\\ &\quad +4\mu\int_{S\cup\Gamma}\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s + 2\mu\int_\Gamma|\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}.\mathbf{n})\mathrm{d}s\\ &= \int_\Gamma(q\mathbf{n} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} + 4\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}'\mathrm{d}s + 2\mu\int_\Gamma|\varepsilon(\mathbf{u})|^2(\mathbf{V}.\mathbf{n})\mathrm{d}s\\ &= -\int_\Gamma\left((q\mathbf{n} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} + 4\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} + 2\mu|\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s\end{aligned}$$

En identifiant le produit de dualité $\langle \mathrm{d}J(\Omega),\mathbf{V}\rangle$ au produit scalaire L^2 sur le bord Γ, on définit le gradient de forme de la fonctionnelle J :

$$\nabla J(\Omega) = \left[-(q\mathbf{n} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} + 4\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n})\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n} + 2\mu|\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right]\mathbf{n}.$$

On peut faire le lien avec la formule (6.15), plus naturelle que la formule que l'on vient d'énoncer

car symétrique.

Pour cela, énonçons un lemme technique qui nous permettra de simplifier cette formule :

Lemme 6.7. *Soient* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$*, deux champs de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$ *tels que :* $\mathbf{x}_{|\Gamma} = \mathbf{y}_{|\Gamma} = 0$*, et tels que* $\operatorname{div} \mathbf{x} = \operatorname{div} \mathbf{y} = 0$ *dans* Ω *tout entier. Soit* $\mathbf{V} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$*, un champ de vecteur. Alors, les identités suivantes sont réalisées sur* Γ *:*

i $\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = (\nabla \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0$,

ii $\varepsilon(\mathbf{x}) : \varepsilon(\mathbf{y}) = \varepsilon(\mathbf{x}) : (\varepsilon(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) = (\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n})$,

iii $(\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{y} \cdot \mathbf{V}) = (\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot (\nabla \mathbf{y} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = (\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})$.

avec la convention que $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} n_i n_j$.

La première identité prouve alors que $q\mathbf{n} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0$ sur Γ.

La troisième identité prouve que sur Γ, $\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\mathbf{n}} = |\varepsilon(\mathbf{u})|^2$.

Enfin, en utilisant cette fois les deuxième et troisième identités, on prouve que sur Γ,

$$(\varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}).$$

On en déduit que le gradient de forme de la fonctionnelle J se réécrit :

$$\nabla J(\Omega) = 2\mu \left(\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \right) \mathbf{n}.$$

□

6.3.2 Un résultat de symétrie pour le problème adjoint

On va démontrer le théorème suivant, qui montre que la solution du problème adjoint $(\mathbf{v}, q)$ a une « symétrie cylindrique » :

Théorème 6.4.
Soit $(\mathbf{v}, q)$*, la solution du problème adjoint (6.11), lorsque* $(\mathbf{u}, p)$ *désigne le profil de Poiseuille solution du système (6.1), donné par la formule (6.3). Si la viscosité* μ *est suffisamment grande, il existe* $(w, w_3) \in [H^1((0,R)\times(0,L))]^2$ *et* $\tilde{q} \in L^2((0,R)\times(0,L))$ *tels que, en posant* $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$*, on a pour tout* $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ *:*

i $v_i(x_1, x_2, x_3) = x_i w(r, x_3)$*, où* $i \in \{1, 2\}$ *;*

ii $v_3(x_1, x_2, x_3) = w_3(r, x_3)$ *;*

iii $q(x_1, x_2, x_3) = \tilde{q}(r, x_3)$.

Démonstration. On appelle $\mathscr{L}_\theta$ l'opérateur différentiel :

$$\mathscr{L}_\theta \overset{\text{déf}}{=} x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

$\mathscr{L}_\theta$ représente l'opérateur de dérivation (en coordonnées cartésiennes) par rapport à la variable polaire θ. Posons :

$$\widehat{v_i} = \mathscr{L}_\theta(v_i),\ \forall i \in \{1,2,3\} \text{ et } \widehat{q} = \mathscr{L}_\theta(q). \tag{6.16}$$

Remarquons que si β désigne un élément de $H^1(\Omega)$, alors on peut écrire au sens des distributions que : $\mathscr{L}_\theta(\triangle\beta) = \triangle(\mathscr{L}_\theta(\beta))$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_\theta(\triangle\beta) &= x_1\frac{\partial\triangle\beta}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\triangle\beta}{\partial x_1} \\
&= x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\right) + x_1\frac{\partial^3\beta}{\partial x_2^3} - x_2\frac{\partial^3\beta}{\partial x_1^3} - x_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(x_1\frac{\partial\beta}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(x_1\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(x_1\frac{\partial\beta}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(x_2\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) \\
&\quad -\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(x_2\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\left(x_1\frac{\partial\beta}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) \\
&= \triangle\left(x_1\frac{\partial\beta}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) = \triangle(\mathscr{L}_\theta\beta).
\end{aligned}$$

Appliquons à l'équation aux dérivées partielles (6.11) l'opérateur $\mathscr{L}_\theta$. Pour cela, on explicite l'équation au dérivées partielles (6.11) en tenant compte du fait que la solution $\mathbf{u}$ du problème de Navier Stokes (6.1) est connue. L'équation (6.11) se réécrit :

$$\begin{cases}
-\mu\triangle v_1 + 2cx_1v_3 - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_3}(x_1^2+x_2^2-R^2)c + \dfrac{\partial q}{\partial x_1} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\
-\mu\triangle v_2 + 2cx_2v_3 - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}(x_1^2+x_2^2-R^2)c + \dfrac{\partial q}{\partial x_2} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\
-\mu\triangle v_3 - \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1^2+x_2^2-R^2)c + \dfrac{\partial q}{\partial x_3} = -8\mu c & \mathbf{x}\in\Omega \\
\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\
v_1 = v_2 = v_3 = 0 & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \\
\mu\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) + v_1c(x_1^2+x_2^2-R^2) = 4\mu cx_1 & \mathbf{x}\in S, \\
\mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) + v_2c(x_1^2+x_2^2-R^2) = 4\mu cx_2 & \mathbf{x}\in S, \\
2\mu\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} + v_3c(x_1^2+x_2^2-R^2) = q & \mathbf{x}\in S,
\end{cases} \tag{6.17}$$

Les conditions au bord sur E et S s'obtiennent de façon naturelle (car on peut dériver les conditions au bord dans (6.11)). Sur Γ, c'est un tout petit peu plus compliqué. Soit $i\in\{1,2,3\}$ et $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)\in\Gamma$. Puisque $v_{i|_\Gamma} = 0$, alors, $\nabla v_{i|_\Gamma} = \left(\dfrac{x_1}{R}\dfrac{\partial v_i}{\partial n}, \dfrac{x_2}{R}\dfrac{\partial v_i}{\partial n}, 0\right)$. Par conséquent, $\widehat{v_i}_{|_\Gamma} = x_1\dfrac{\partial v_i}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial v_i}{\partial x_1} = \dfrac{x_1x_2}{R}\dfrac{\partial v_i}{\partial n} - \dfrac{x_1x_2}{R}\dfrac{\partial v_i}{\partial n} = 0$. Il s'ensuit que $\widehat{\mathbf{v}}_{|_\Gamma} = \mathbf{0}$.

On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{ll}
-\mu\triangle\widehat{v_1}+2cx_1\widehat{v_3}-2cx_2v_3-c(x_1^2+x_2^2-R^2)\dfrac{\partial\widehat{v_1}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{q}}{\partial x_1}-\dfrac{\partial q}{\partial x_2}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
-\mu\triangle\widehat{v_2}+2cx_2\widehat{v_3}+2cx_1v_3-c(x_1^2+x_2^2-R^2)\dfrac{\partial\widehat{v_2}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{q}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial q}{\partial x_1}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
-\mu\triangle\widehat{v_3}-c(x_1^2+x_2^2-R^2)\dfrac{\partial\widehat{v_3}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{q}}{\partial x_3}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
\dfrac{\partial\widehat{v_1}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\widehat{v_2}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\widehat{v_3}}{\partial x_3}-\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
\widehat{v_1}=\widehat{v_2}=\widehat{v_3}=0 & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma\\
\mu\left(\dfrac{\partial\widehat{v_1}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{v_3}}{\partial x_1}\right)-\mu\dfrac{\partial v_3}{\partial x_2}+c(x_1^2+x_2^2-R^2)\widehat{v_1}=-4\mu cx_2 & \mathbf{x}\in S,\\
\mu\left(\dfrac{\partial\widehat{v_2}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{v_3}}{\partial x_2}\right)+\mu\dfrac{\partial v_3}{\partial x_1}+c(x_1^2+x_2^2-R^2)\widehat{v_2}=4\mu cx_1 & \mathbf{x}\in S,\\
2\mu\dfrac{\partial\widehat{v_3}}{\partial x_3}+c(x_1^2+x_2^2-R^2)\widehat{v_3}=\widehat{q} & \mathbf{x}\in S,
\end{array}\right. \tag{6.18}$$

Introduisons à présent le changement de fonctions suivant :
- $z_1=\widehat{v_1}+v_2$;
- $z_2=\widehat{v_2}-v_1$;
- $z_3=\widehat{v_3}$.

En utilisant l'équation aux dérivées partielles (6.11) et ce changement de fonctions, l'équation aux dérivées partielles (6.18) se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{ll}
-\mu\triangle z_1+2cx_1z_3-c(x_1^2+x_2^2-R^2)\dfrac{\partial z_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{q}}{\partial x_1}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
-\mu\triangle z_2+2cx_2z_3-c(x_1^2+x_2^2-R^2)\dfrac{\partial z_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{q}}{\partial x_2}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
-\mu\triangle z_3-c(x_1^2+x_2^2-R^2)\dfrac{\partial z_3}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\widehat{q}}{\partial x_3}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial z_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial z_3}{\partial x_3}=0 & \mathbf{x}\in\Omega\\
z_1=z_2=z_3=0 & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma\\
\mu\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial z_3}{\partial x_1}\right)+z_1c(x_1^2+x_2^2-R^2)=0 & \mathbf{x}\in S,\\
\mu\left(\dfrac{\partial z_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial z_3}{\partial x_2}\right)+z_2c(x_1^2+x_2^2-R^2)=0 & \mathbf{x}\in S,\\
2\mu\dfrac{\partial z_3}{\partial x_3}+c(x_1^2+x_2^2-R^2)z_3=\widehat{q} & \mathbf{x}\in S,
\end{array}\right. \tag{6.19}$$

Ce problème adjoint possède une unique solution pourvu que μ soit suffisamment grand (voir la proposition (6.2)), qui ne peut donc être que :

$$z_1=z_2=\widehat{v_3}=\widehat{q}\equiv 0.$$

Le fait que $\widehat{v_3}=\mathscr{L}_\theta(v_3)$ et $\widehat{q}=\mathscr{L}_\theta(q)$ soient nuls prouve les points ii et iii du théorème. Reste à présent à préciser l'écriture de v_1 et de v_2. Nous venons de démontrer que $\mathscr{L}_\theta(v_1)=-v_2$ et que $\mathscr{L}_\theta(v_2)=v_1$. Par conséquent, en appliquant une nouvelle fois l'opérateur $\mathscr{L}_\theta$ à l'égalité $\mathscr{L}_\theta(v_1)=-v_2$, on prouve que $\mathscr{L}_\theta\circ\mathscr{L}_\theta(v_1)+v_1=0$.

Moralement, l'opérateur $\mathscr{L}_\theta$ est l'opérateur de dérivation par rapport à la variable polaire θ. Posons $r=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$. L'égalité précédente prouve l'existence de deux fonctions de $H^1((0,R)\times(0,L))$, α et β, telles que :

$$v_1=x_1\alpha(r,x_3)+x_2\beta(r,x_3).$$

De plus, puisque $\mathscr{L}_\theta(v_1) = -v_2$, on en déduit immédiatement que :

$$v_2 = -x_1\beta(r, x_3) + x_2\alpha(r, x_3).$$

Pour achever la démonstration de ce lemme, il nous reste à démontrer que la fonction β est identiquement nulle.

Pour le démontrer, on va écrire les équations aux dérivées partielles vérifiées par α et β. À partir des deux premières équations du système (6.11) et des conditions au bord, en passant en coordonnées polaires et en utilisant le fait que la famille $(\theta \mapsto \cos\theta, \theta \mapsto \sin\theta)$ est libre ($\theta \in [0, 2\pi[$), on prouve que β est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mu\left(\dfrac{\partial^2\beta}{\partial r^2} + \dfrac{3}{r}\dfrac{\partial\beta}{\partial r} + \dfrac{\partial^2\beta}{\partial x_3^2}\right) - c(r^2 - R^2)\dfrac{\partial\beta}{\partial x_3} = 0 & (r, x_3) \in (0, R) \times (0, L) \\ \beta(r, 0) = \beta(R, x_3) = \dfrac{\partial\beta}{\partial r}(0, x_3) = 0 & (r, x_3) \in (0, R) \times (0, L) \\ \mu\dfrac{\partial\beta}{\partial n} + c(r^2 - R^2)\beta = 0 & (r, x_3) \in (0, R) \times \{L\} \end{array}\right. \tag{6.20}$$

La fonction identiquement nulle est solution de ce dernier système. Il reste, bien sûr à démontrer qu'elle est unique. Cela peut se voir en multipliant l'équation pricipale par β et en intégrant sur le rectangle en coordonnées polaires. On obtient en utilisant les conditions au bord :

$$0 = \mu\int_\Omega \left(\left(\frac{\partial\beta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x_3}\right)^2\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}x_3 + \mu\int_0^L \beta^2(0, x_3)\mathrm{d}x_3 + \frac{c}{2}\int_0^R (r^2 - R^2)\beta^2(r, L)r\mathrm{d}r.$$

Il s'ensuit, puisque $c < 0$, que $\frac{\partial\beta}{\partial r} \equiv 0$ dans $(0, R) \times (0, L)$ et que $\beta^2(0, x_3) = 0$ pour tout $x_3 \in (0, L)$. Ainsi, $\beta \equiv 0$ dans $(0, R) \times (0, L)$

$$x_2\beta(r, x_3) = v_1(x_1, x_2, x_3) - x_1\alpha(r, x_3). \tag{6.21}$$

On en déduit que la solution du système (6.20) est unique et que solution ne peut être que $\beta \equiv 0$, ce qui conclut la démonstration de ce théorème. □

6.4 Preuve du théorème principal

6.4.1 Condition d'optimalité du cylindre

Supposons que le cylindre Ω soit optimal pour le critère « *minimiser l'énergie de dissipation* ». Traduisons alors les conditions d'optimalité au premier ordre. D'après l'expression explicite de $\mathbf{u}$, on a :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & cx_1 \\ 0 & 0 & cx_2 \\ cx_1 & cx_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a :

$$|\varepsilon(\mathbf{u})|^2 = 2c^2(x_1^2 + x_2^2),$$

d'où sur Γ, $|\varepsilon(\mathbf{u})|^2 = 2c^2R^2$ est constant.

La condition d'optimalité au premier ordre nous assure l'existence d'un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $\mathrm{d}J(\Omega, \mathbf{V}) = \lambda\mathrm{dVol}\,(\Omega, \mathbf{V})$, ce qui se réécrit :

$$\mathrm{d}J(\Omega, \mathbf{V}) = \lambda\int_\Gamma (\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s.$$

Puisque :

$$\mathrm{d}J(\Omega,\mathbf{V}) = \int_\Gamma \left(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v}) - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2|\right)(\mathbf{V}.\mathbf{n})\mathrm{d}s,$$

on en déduit immédiatement que la quantité $\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v})$ est constante sur Γ. Or, compte tenu de l'expression de $\varepsilon(\mathbf{u})$ sur Γ, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v})_{|\Gamma} &= \frac{c}{2}\left(x_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\\ &= \frac{c}{2}\left(x_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) = \frac{cR}{2}\frac{\partial v_3}{\partial n}_{|\Gamma},\end{aligned}$$

car $v_{1|\Gamma} = v_{2|\Gamma} = 0$.

Par conséquent, la condition d'optimalité s'écrit :

$$\boxed{\exists \xi \in \mathbb{R} : \frac{\partial v_3}{\partial n} = \xi \text{ sur } \Gamma.} \tag{6.22}$$

6.4.2 Deux résultats intermédiaires

Dans ce paragraphe, on démontre deux ingrédients essentiels pour la preuve du théorème 6.3.

Lemme 6.8. *Supposons le cylindre Ω optimal pour le critère « minimiser l'énergie de dissipation ». En utilisant les notations du théorème 6.4, on a :*

$$\frac{\partial q}{\partial n}_{|\Gamma} = \frac{\partial \tilde{q}}{\partial r}_{|\{r=R\}} = 0.$$

Démonstration. Pour nous en convaincre, écrivons le problème vérifié par w, w_3 et $\tilde{q}$. Il s'agit bien sûr du problème adjoint (6.11) réécrit après changement de fonction, en tenant compte des résultats du théorème 6.4. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll}
-\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial r} + 2cw_3 - c(r^2-R^2)\dfrac{\partial w}{\partial x_3} = 0 & (r,x_3)\in(0,R)\times(0,L)\\
-\mu\left(\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_3}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial x_3} - c(r^2-R^2)\dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} = -8\mu c & (r,x_3)\in(0,R)\times(0,L)\\
2w + r\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0 & (r,x_3)\in(0,R)\times(0,L)\\
w(r,0) = w_3(r,0) = w(R,x_3) = w_3(R,x_3) = 0 & (r,x_3)\in(0,R)\times(0,L)\\
\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x_3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_3}{\partial r}\right) + c(r^2-R^2)w = 4\mu c & \text{sur } \{x_3 = L\}\\
2\mu\dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} + c(r^2-R^2)w_3 = \tilde{q} & \text{sur } \{x_3 = L\}.
\end{array}\right. \tag{6.23}$$

Puisque $w_{|\{r=R\}} = w_3{}_{|\{r=R\}} = 0$, alors immédiatement $\dfrac{\partial w}{\partial x_3}_{|\{r=R\}} = \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3}_{|\{r=R\}} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}_{|\{r=R\}} = 0$.

On en déduit en particulier, d'après la condition de divergence réécrite dans l'équation ci-dessus que $\dfrac{\partial w}{\partial r}_{|\{r=R\}} = 0$.

Si on dérive à présent la condition de divergence par rapport à r, on obtient :

$$\forall (r, x_3) \in (0, R) \times (0, L),\ 3\frac{\partial w}{\partial r} + r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_3}{\partial r \partial x_3} = 0.$$

Or, $\dfrac{\partial w_3}{\partial r}_{|_{\{r=R\}}} = \xi$ (c'est la condition d'optimalité (6.22)) ; par conséquent, on peut affirmer que $\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial x_3 \partial r}_{|_{\{r=R\}}} = 0$. En combinant ce résultat avec le fait que $\dfrac{\partial w}{\partial r}_{|_{\{r=R\}}} = 0$, il vient :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}_{|_{\{r=R\}}} = 0.$$

Faisons tendre r vers R dans la première équation du problème (6.23). Il s'ensuit, compte-tenu de ce que nous venons de prouver que :

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial r}_{|_{\{r=R\}}} = 0.$$

□

Introduisons à présent, en utilisant les notations du théorème 6.4, les fonctions :

- $w_0 :\ [0, R] \times [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$
  $(r, x_3) \longmapsto \displaystyle\int_0^{x_3} w(r, z)\mathrm{d}z.$
- $\psi :\ [0, R] \times [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x_3 \longmapsto \displaystyle\int_0^R \int_0^{2\pi} \left(\tilde{q}(r, x_3) - 2cr^2 w_0(r, x_3)\right) \mathrm{d}\theta r \mathrm{d}r.$

Remarque 6.9. *On a immédiatement, compte-tenu des résultats du théorème 6.4, pour tout* $z \in [0, L]$ *:* $\psi(z) = \displaystyle\int_{T_z} \left(\tilde{q} - 2cr^2 w_0\right) \mathrm{d}\theta r \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R \left(\tilde{q}(r, z) - 2cr^2 w_0(r, z)\right) r \mathrm{d}r$*, où* T_z *désigne la section du cylindre d'équation cartésienne :*

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ x_3 = z. \end{cases}$$

Lemme 6.9. *Supposons le cylindre* Ω *optimal pour le critère « minimiser l'énergie de disspation ». Alors,* ψ *est une application affine.*

Démonstration. Le couple $(\mathbf{v}, q)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$-\mu \triangle \mathbf{v} + \nabla q + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = -2\mu \triangle \mathbf{u}.$$

Appliquons à cette équation l'opérateur de divergence. Compte-tenu de l'expression de la fonction $\mathbf{u}$ dans le cylindre Ω, on obtient que le couple $(\mathbf{v}, q)$ vérifie encore :

$$\triangle q + 4cv_3 + 2c\left(x_1\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) - 2c\left(x_1\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + x_2\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) = 0. \tag{6.24}$$

Intégrons cette équation sur une tranche ω du cylindre d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ z_- \leq x_3 \leq z_+, \end{cases}$$

où z_- et z_+ sont deux éléments de $[0, L]$ tels que $z_- < z_+$. On note e, l'entrée de la tranche ω et s la sortie, comme dessinés sur le schéma qui suit.

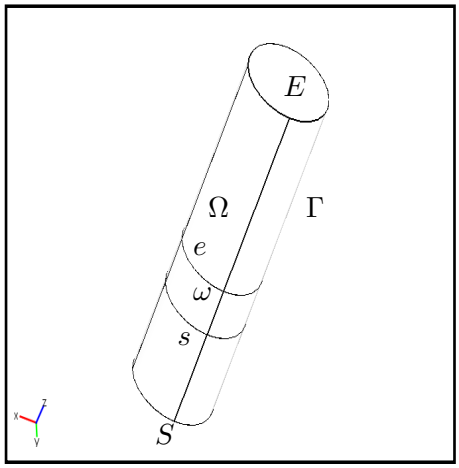

FIG. 6.4 – La tranche ω

L'intégration fournit :

$$\int_\omega \triangle q \mathrm{d}x + 4c \int_\omega v_3 \mathrm{d}x + 2c \int_\omega \left(x_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x - 2c \int_\omega \left(x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x = 0.$$

Or, d'après la formule de Green, on a :

- $\displaystyle\int_\omega x_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \mathrm{d}x = \int_{\partial\omega} x_1 v_3 n_1 \mathrm{d}s - \int_\omega v_3 \mathrm{d}x = \int_{\partial\omega \cap \Gamma} x_1 v_3 n_1 \mathrm{d}s - \int_\omega v_3 \mathrm{d}x = -\int_\omega v_3 \mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int_\omega x_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \mathrm{d}x = -\int_\omega v_3 \mathrm{d}x$, de la même façon.

On en déduit que :

$$4c \int_\omega v_3 \mathrm{d}x + 2c \int_\omega \left(x_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \mathrm{d}x = 0,$$

d'où :

$$\int_\omega \triangle q \mathrm{d}x = 2c \int_\omega \left(x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathrm{d}x. \tag{6.25}$$

Intéressons-nous au membre de gauche dans (6.25). D'après le lemme (6.8) :

$$\int_\omega \triangle q \mathrm{d}x = \int_{s \cup e} \frac{\partial q}{\partial n} \mathrm{d}s. \tag{6.26}$$

Intéressons-nous au membre de droite dans (6.25). D'après la formule de Green :

- $\displaystyle\int_\omega x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \mathrm{d}x = \int_{\partial\omega} x_1 v_1 n_3 \mathrm{d}s = \int_{e\cup s} x_1 v_1 n_3 \mathrm{d}s.$
- Et de même : $\displaystyle\int_\omega x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \mathrm{d}x = \int_{\partial\omega} x_2 v_2 n_3 \mathrm{d}s = \int_{e\cup s} x_2 v_2 n_3 \mathrm{d}s.$

En combinant ce résultat avec (6.26), on obtient :

$$\int_s \left(\frac{\partial q}{\partial x_3} - 2c(x_1 v_1 + x_2 v_2) \right) \mathrm{d}s = \int_e \left(\frac{\partial q}{\partial x_3} - 2c(x_1 v_1 + x_2 v_2) \right) \mathrm{d}s, \tag{6.27}$$

qui se réécrit également pour tout $(z_-, z_+) \in (0, L)^2$:

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_3}(r, z_-) - 2cr^2 w(r, z_-) \right) r \mathrm{d}r = \int_0^R \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_3}(r, z_+) - 2cr^2 w(r, z_+) \right) r \mathrm{d}r. \tag{6.28}$$

Or, puisque $\psi(z) = 2\pi \displaystyle\int_0^R \big(\tilde{q}(r, z) - 2cr^2 w_0(r, z) \big)\, r \mathrm{d}r$, on a, en dérivant sous l'intégrale :

$$\forall z \in [0, L],\ \psi'(z) = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_3} - 2cr^2 \frac{\partial w_0}{\partial x_3} \right) r \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_3} - 2cr^2 w \right) r \mathrm{d}r.$$

(6.28) prouve alors que ψ' est une fonction constante de z, autrement dit que ψ est une application affine. Cela démontre le lemme.

6.4.3 La preuve

On raisonne par l'absurde. Supposons que le cylindre Ω soit optimal pour le critère « *minimiser l'énergie de dissipation* ». La condition d'optimalité au premier ordre assure alors l'existence d'un multiplicateur de Lagrange ξ tel que (d'après (6.22)) :

$$\frac{\partial v_3}{\partial n}_{|\Gamma} = \xi.$$

On va à présent préciser cette constante ξ. Pour cela, on utilise le résultat de symétrie du lemme 6.4 ainsi que l'équation (6.23). Dans cette équation, intégrons entre $x_3 = 0$ et $x_3 = z \in (0, L)$. On obtient, puisque $w_3(r, 0) = 0$ pour tout $(r, z) \in [0, R] \times [0, L]$:

$$2w_0(r, z) + r \frac{\partial w_0}{\partial r}(r, z) + w_3(r, z) = 0.$$

Dérivons à présent cette relation par rapport à r. On obtient :

$$3\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\partial w_3}{\partial r} = 0. \tag{6.29}$$

Dans (6.23), dérivons l'équation de divergence par rapport à r, puis faisons tendre r vers R. On obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial r}_{|\Gamma} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}_{|\Gamma} = 0.$$

En faisant tendre r vers R dans (6.29), puis en intervertissant limite et intégrale, on trouve, en utilisant l'égalité que l'on vient d'obtenir :

$$\frac{\partial v_3}{\partial n}_{|\Gamma} = 0.$$

Il s'ensuit que nécessairement, $\xi = 0$ et la condition d'optimalité se réécrit :

$$\frac{\partial v_3}{\partial n}_{|\Gamma} = 0. \tag{6.30}$$

La question est donc la suivante : peut-on montrer que le problème surdéterminé suivant :

$$\begin{cases} (6.11) \\ \frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{6.31}$$

n'a pas de solution ? Si c'est le cas, on aura démontré que la condition d'optimalité (6.30) ne peut pas être satisfaite, autrement dit que le cylindre n'est pas un optimum local pour le problème d'optimisation (6.48).

Pour obtenir l'absurdité, on va considérer la fonction ψ introduite dans la section 6.4.2. On rappelle que pour tout $z \in [0, L]$:

$$\psi(z) = \int_{T_z} \left(\tilde{q} - 2cr^2 w_0\right) \mathrm{d}\theta r \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^R \left(\tilde{q}(r,z) - 2cr^2 w_0(r,z)\right) r \mathrm{d}r,$$

où T_z désigne la section du cylindre d'équation cartésienne :

$$\begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \\ x_3 = z. \end{cases}$$

On a démontré dans le lemme 6.9 que ψ est une application affine. Par conséquent, il existe un réel a tel que :

$$\forall z \in [0, L],\ \psi'(z) = a.$$

On cherche à déterminer a.

On note $\triangle_2$ l'opérateur laplacien écrit en dimension 2, dans les variables x_1 et x_2.

- **Exploitation de la condition au bord à la sortie S du cylindre.**

Pour cela, on va intégrer sur S l'équation aux dérivées partielles régissant v_3 dans (6.11).
Avant d'entamer le calcul d'intégration sur S, on donne une condition au bord supplémentaire sur v_3 se déduisant de l'équation aux dérivées partielles (6.11) et utile bien sûr pour le calcul de $\psi'(L)$.
Dans l'équation aux dérivées partielles (6.11), on dérive par rapport à x_1 la condition au bord sur le bord S régissant la fonction v_1. On obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + 2cx_1 v_1 + c(x_1^2 + x_2^2 - R^2) \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 4\mu c, \text{ sur } S. \tag{6.32}$$

Dérivons par rapport à x_2 la condition au bord sur le bord S régissant la fonction v_2. On obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + 2cx_2 v_2 + c(x_1^2 + x_2^2 - R^2) \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 4\mu c, \text{ sur } S. \tag{6.33}$$

Sommons les relations (6.32) et (6.33) et utilisons la condition de divergence nulle. On obtient :

$$-\mu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \mu \triangle_2 v_3 + 2c(x_1 v_1 + x_2 v_2) - c(x_1^2 + x_2^2 - R^2) \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 8\mu c \text{ sur } S.$$

Or, d'après (6.11), v_3 satisfait :

$$\mu\triangle_2 v_3 = 8\mu c - \mu\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} - c(x_1^2+x_2^2-R^2)\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial q}{\partial x_3}.$$

Combinons ensemble les deux dernières équations. Il vient :

$$-2\mu\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} - 2c(x_1^2+x_2^2-R^2)\frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial q}{\partial x_3} + 2c(x_1v_1+x_2v_2) = 0 \text{ sur } S. \tag{6.34}$$

Ce résultat établi, on peut entamer l'intégration de l'équaton aux dérivées partielles régissant v_3 dans (6.11) sur S. On a :

$$\int_S \left(-\mu\triangle_2 v_3 - \mu\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(x_1^2+x_2^2-R^2)c + \frac{\partial q}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}s = -8\mu c\int_S \mathrm{d}s.$$

On a vu dans la proposition 6.2 que v_3 était C^1 jusqu'au bord. Compte-tenu de la condition au bord sur Γ, il est alors clair que :

$$\int_S \triangle_2 v_3 \mathrm{d}s = \int_{S\cap\Gamma}\frac{\partial v_3}{\partial n}\mathrm{d}\sigma = 0,$$

σ désignant l'abscisse curviligne.
L'intégration fournit :

$$-\mu\int_S \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\mathrm{d}s - c\int_S (x_1^2+x_2^2-R^2)\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}s + \int_S \frac{\partial q}{\partial x_3}\mathrm{d}s = -8\mu c\pi R^2.$$

D'après (6.34), on en déduit que :

$$\frac{1}{2}\int_S \frac{\partial q}{\partial x_3}\mathrm{d}s - c\int_S (x_1v_1+x_2v_2)\mathrm{d}s = -8\mu c\pi R^2.$$

D'après le lemme 6.4, on peut écrire pour tout $(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$ que :

$$x_1v_1+x_2v_2 = (x_1^2+x_2^2)w\left(\left(x_1^2+x_2^2\right)^{1/2}, x_3\right).$$

Par conséquent :

$$\boxed{a = \psi'(L) = -16\mu c\pi R^2} \tag{6.35}$$

- **Exploitation de la condition au bord à l'entrée du cylindre.**

Remarquons de prime abord que $\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}_{|_E} = 0$. Cela s'obtient en utilisant la condition de divergence : $\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}$. Or, puisque $v_{1|_E} = v_{2|_E} = 0$, les dérivées partielles de v_1 et v_2 par rapport à x_1 et x_2 sont nulles sur E.

Comme dans le cas de la sortie du cylindre, intégrons sur E l'équation aux dérivées partielles extraite de (6.11) régissant le comportement de v_3. Ainsi, compte-tenu du fait que $\dfrac{\partial v_3}{\partial x_{3\,|_E}} = 0$ et que, d'après la proposition 6.2, v_3 est C^1 jusqu'au bord :

$$-\mu \int_E \triangle v_3 \mathrm{d}s + \int_E \frac{\partial q}{\partial x_3} \mathrm{d}s = -8\mu c \int_E \mathrm{d}s.$$

En utilisant à nouveau la condition surdéterminée sur v_3, on a :

$$\begin{aligned} -\mu \int_E \triangle v_3 \mathrm{d}s &= -\mu \int_E \triangle_2 v_3 \mathrm{d}s - \mu \int_E \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \mathrm{d}s \\ &= -\mu \int_{E\cap\Gamma} \frac{\partial v_3}{\partial n} \mathrm{d}\sigma + \mu \int_E \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3 \partial x_2} \right) \mathrm{d}s \\ &= \mu \int_{E\cap\Gamma} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} n_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_3} n_2 \right) \mathrm{d}\xi = 0. \end{aligned}$$

De ce fait, il vient :

$$\int_E \frac{\partial q}{\partial x_3} \mathrm{d}s = -8\mu c \pi R^2. \tag{6.36}$$

Enfin, puisque $v_{1\,|_E} = v_{2\,|_E} = 0$, on a :

$$\psi'(0) = 2\pi \int_0^R \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z}(r,0) - 2cr^2 w(r,0) \right) r \mathrm{d}r = \int_E \frac{\partial q}{\partial x_3} \mathrm{d}s.$$

Il s'ensuit d'après (6.36) que :

$$\boxed{a = \psi'(0) = -8\mu c \pi R^2.} \tag{6.37}$$

Or, d'après le lemme 6.9, $\psi'(L) = \psi'(0)$. D'après (6.35) et (6.37), cela signifie que $c = 0$, ou encore que $p_1 = p_0$, ce qui est bien sûr contraire à nos hypothèses. Cela conclut la démonstration du théorème 6.3. □

6.5 Quelques extensions

6.5.1 Cas d'un écoulement de Stokes

Dans cette section, on va démontrer que le résultat de non optimalité du cylindre, énoncé dans le théorème 6.3 subsiste encore lorsque l'écoulement du fluide n'est plus régi par les équations de Navier-Stokes, mais par un système de type Stokes. On utilisera dans cette partie les mêmes notations que dans la première partie de ce chapitre.

Revenons brièvement sur le modèle. On considère comme précédemment le critère *énergie de viscosité* J, défini par :

$$J(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x,$$

où $\mathbf{u}$ désigne cette fois la solution du système d'équations de Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\triangle \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \mathbf{x} \in \Omega,\ i \in \{1,2,3\} \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} = \big(0, 0, c(x_1^2 + x_2^2 - R^2)\big) & \mathbf{x} \in E \\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ -p\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = (2\mu c x_1, 2\mu c x_2, -p_1) & \mathbf{x} \in S. \end{cases} \tag{6.38}$$

Rappelons d'ailleurs que la constante physique c est strictement négative (voir section 6.1.2).

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x_1,x_2,x_3) = \big(0,0,c(x_1^2+x_2^2-R^2)\big) \text{ et} \\ p(x_1,x_2,x_3) = 4\mu c(x_3-L)+p_1. \end{cases}$$

Énonçons à présent le théorème de non optimalité dans le cas de Stokes :

Théorème 6.5. *Le cylindre n'est pas une géométrie optimale pour le critère « minimiser l'énergie de dissipation », à volume $V_0 = \pi R^2 L$ donné. Autrement dit, le cylindre n'est pas solution du problème :*

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad}}. \end{cases} \tag{6.39}$$

Démonstration. Pour prouver ce théorème, on va réutiliser les grandes étapes de la preuve du théorème 6.3. Puisque cette preuve s'en inspire largement, on ne détaillera que les étapes dont le développement n'est pas tout à fait le même que dans le cas précédent.

i Calcul de la dérivée de forme

Comme précédemment, nous donnons une expression de la dérivée par rapport au domaine $\langle \mathrm{d}J(\Omega), \mathbf{V}\rangle$ à l'aide d'un état adjoint.

Propriété 6.4. *On introduit $(\mathbf{v},q)$, solution du problème adjoint suivant :*

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{v} + \nabla q = -2\mu\triangle\mathbf{u} & \mathbf{x}\in\Omega \\ \text{div } \mathbf{v} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \\ -q\mathbf{n} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x}\in S. \end{cases} \tag{6.40}$$

Le problème (6.40) possède une solution unique $(\mathbf{v},q)$.
De plus, cette solution $(\mathbf{v},q)$ appartient à $C^1(\overline{\Omega})\times C^0(\overline{\Omega})$.

Notons que l'hypothèse « μ suffisamment grande » n'est donc plus nécessaire dans le cas d'un problème de Stokes.
En s'inspirant des calculs de la proposition 6.3, on montre que la dérivée de forme du critère J a pour expression :

$$\boxed{\langle \mathrm{d}J(\Omega), \mathbf{V}\rangle = 2\mu\int_\Gamma \big(\varepsilon(\mathbf{u}):\varepsilon(\mathbf{v}) - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2\big)\,(\mathbf{V}.\mathbf{n})\mathrm{d}s}. \tag{6.41}$$

ii Un résultat de symétrie pour le problème adjoint

Le même résultat de symétrie pour l'équation aux dérivées partielles (6.11) tient. Comme précédemment, on se contente d'énoncer ce théorème sans le démontrer car la preuve est presque une copie conforme de la preuve du théorème 6.4.

Théorème 6.6.
Il existe $(w, w_3) \in [H^1((0,R)\times(0,L))]^2$ *et* $\tilde{q} \in L^2((0,R)\times(0,L))$ *tels que, en posant* $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$, *on a pour tout* $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$:

(a) $v_i(x_1, x_2, x_3) = x_i w(r, x_3)$, *où* $i \in \{1, 2\}$;

(b) $v_3(x_1, x_2, x_3) = w_3(r, x_3)$;

(c) $q(x_1, x_2, x_3) = \tilde{q}(r, x_3)$.

Écrivons alors le problème vérifié par w, w_3 et $\tilde{q}$ (ce qui nous sera fort utile par la suite), en tenant compte des résultats du lemme 6.4. On trouve :

$$\left\{\begin{array}{ll}
-\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial r} = 0 & (r, x_3) \in (0,R)\times(0,L) \\
-\mu\left(\dfrac{\partial^2 w_3}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_3}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w_3}{\partial x_3^2}\right) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{q}}{\partial x_3} = -8\mu c & (r, x_3) \in (0,R)\times(0,L) \\
2w + r\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0 & (r, x_3) \in (0,R)\times(0,L) \\
w(r,0) = w_3(r,0) = w(R,x_3) = w_3(R,x_3) = 0 & (r, x_3) \in (0,R)\times(0,L) \\
\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial x_3} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w_3}{\partial r}\right) = 4\mu c & \text{sur } \{x_3 = L\} \\
2\mu\dfrac{\partial w_3}{\partial x_3} = \tilde{q} & \text{sur } \{x_3 = L\}.
\end{array}\right. \tag{6.42}$$

iii **Écriture des conditions d'optimalité**

Les mêmes calculs que dans la preuve du théorème 6.3 montrent que la condition d'optimalité du cylindre pour le problème 6.39 s'écrit :

$$\frac{\partial v_3}{\partial n}_{|\Gamma} = 0. \tag{6.43}$$

iv **Vers l'absurdité**

Cette étape diffère légèrement de l'étape correspondante dans la démonstration du théorème 6.3. On souhaite montrer que le problème surdéterminé

$$\left\{\begin{array}{l}
(6.40) \\
\frac{\partial v_3}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma
\end{array}\right. \tag{6.44}$$

n'a pas de solution. La fonction ψ, introduite dans le lemme 6.6 est, dans ce cas, légèrement différente :

$$\begin{array}{rccl}
\psi : & [0,R]\times[0,L] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& x_3 & \longmapsto & 2\pi\displaystyle\int_0^R \tilde{q}(r, x_3) r \mathrm{d}r.
\end{array}$$

En remarquant que l'application q est harmonique, puis en intégrant sur une tranche de cylindre l'équation aux dérivées partielles principale, on démontre comme précédemment que l'application ψ est affine, si le cylindre Ω est optimal pour le critère « minimiser l'énergie de disspation ». On détermine alors l'expression de $\psi(z)$.

On note $\triangle_2$ l'opérateur laplacien écrit en dimension 2, dans les variables x_1 et x_2.

- **Exploitation de la condition au bord à la sortie S du cylindre.**

Dérivons l'équation de divergence dans le problème adjoint (6.40) par rapport à x_3, puis intégrons sur Ω. Il vient que :

$$\int_E \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}s = \int_S \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}s.$$

Or, d'après l'équation de divergence et puisque $\mathbf{v}_{|_E} = 0$, il vient que $\frac{\partial v_3}{\partial x_3}_{|_E} = 0$. Par conséquent :

$$\int_S \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}s = 0.$$

D'après la condition sur le bord S du cylindre, on en déduit que :

$$2\mu \int_S \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\mathrm{d}s = 0 = \int_S q(x_1, x_2, x_3)\mathrm{d}x.$$

Il s'ensuit que l'ordonnée à l'origine de ψ est nulle.
Précisons à présent le coefficient directeur de ψ. Puisque l'on a vu que la fonction v_3 est régulière (voir la proposition 6.4), on peut intégrer l'équation aux dérivées partielles reliant v_3 à q sur le bord S. Ainsi :

$$-\mu \int_S \triangle v_3 \mathrm{d}s + \int_S \frac{\partial q}{\partial x_3}\mathrm{d}s = -8c \text{ mes } (S).$$

Or, $\int_S \triangle v_3 \mathrm{d}s = \int_S \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_3^2}\mathrm{d}s$, d'après la formule de Green, en utilisant le fait que v_3 est nulle sur $S \cap \Gamma$. Donnons une condition supplémentaire sur le bord S portant sur v_3 se déduisant de l'équation aux dérivées partielles (6.11) et utile pour évaluer $\displaystyle\int_S \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_3^2}\mathrm{d}s$.
Dans l'équation aux dérivées partielles (6.40), on dérive par rapport à x_1 la condition au bord sur le bord S régissant la fonction v_1 et par rapport à x_2 la condition au bord sur le bord S régissant la fonction v_2. Sommons alors les relations obtenues et utilisons la condition de divergence nulle. On obtient :

$$2\mu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} = \frac{\partial q}{\partial x_3} \text{ sur } S.$$

Revenons à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles donnant v_3. Compte tenu de ce que nous venons de démontrer, on obtient $\displaystyle\int_S \frac{\partial^3 v_3}{\partial x_3^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\mu}\int_S \frac{\partial q}{\partial x_3}\mathrm{d}x$ et par conséquent :

$$\forall x_3 \in [0, L],\ \psi'(x_3) = \psi'(L) = \int_S \frac{\partial q}{\partial x_3}\mathrm{d}s = -16\mu c\pi R^2$$

Finalement,

$$\boxed{\forall z \in [0, L],\ \psi(z) = -16\mu c\pi R^2 (z - L).} \tag{6.45}$$

- **Exploitation de la condition au bord à l'entrée du cylindre.**

Intégrons l'équation aux dérivées partielles reliant v_3 et q sur Ω. On obtient :

$$-\mu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial n}\mathrm{d}s + \int_{\partial\Omega} q.n_3 \mathrm{d}s = -8c \text{ mes } (\Omega).$$

Or,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial v_3}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \frac{\partial v_3}{\partial n} \mathrm{d}s + \int_{S} \frac{\partial v_3}{\partial n} \mathrm{d}s = \int_{\Gamma} \frac{\partial v_3}{\partial n} \mathrm{d}s + \frac{1}{2\mu} \int_{S} q \mathrm{d}s.$$

On a vu que $\int_S q \mathrm{d}s = 0$. De plus, d'après la condition d'optimalité (6.43), ce calcul devient :

$$\int_{E} q \mathrm{d}s = 8\mu c \pi R^2 L.$$

Cette égalité se réécrit également :

$$\psi(0) = 8\mu c \pi R^2 L.$$

C'est absurde, car d'après l'expression de ψ obtenue précédemment (formule (6.45)), on a : $\psi(0) = 16\mu c \pi R^2 L$. Cela signifierait donc que $c = 0$, ce qui est faux, par hypothèse. Le théorème 6.5 est donc démontré.

□

6.5.2 Une propriété qualitative de l'optimum

Dans ce paragraphe, on cherche à savoir si l'éventuelle solution du problème (6.39) possède des symétries, voire est à symétrie cylindrique. Dans l'article [3], les auteurs montrent qu'il est possible d'améliorer le critère, dans le cas où le fluide est soumis à un écoulement de type Poiseuille (fortement simplifié par rapport à notre étude), en créant de fines rugosités dans le sens de la longueur du cylindre (les « *riblets* »). Si la question d'une symétrie radiale semble naturelle, ce résultat montre qu'il est difficile d'avoir une intuition sur cette réponse. Il peut laisser penser que le mieux que l'on puisse obtenir est une symétrie par rapport à un plan.

Nous savons démontrer que l'éventuel optimum du problème d'optimisation (6.39) possède un plan de symétrie. En revanche, on ne sait rien montrer sur l'optimum (éventuel) du problème (6.48).

On appelle O, le point de coordonnées $(0,0,0)$, $\mathscr{P}_0$, le plan d'équation $x_1 = 0$ et $\mathscr{D}$, la droite d'équation $x_1 = x_2 = 0$.

Théorème 6.7. *Il existe un minimiseur au problème d'optimisation (6.39) (Trouver la forme d'un conduit simplement connexe d'entrée E, de sortie S, qui minimise l'énergie de dissipation d'un fluide dont l'écoulement est régi par le système de Stokes (6.38)) qui possède un plan de symétrie passant par le centre des disques E et S. De plus, tout minimiseur de classe C^2 possède un tel plan de symétrie.*

Démonstration. Cette preuve s'articule en trois étapes. On appelle $\Omega^\star$, un minimiseur du problème (6.39). La première étape nous place dans un cadre favorable à une « symétrisation » (en un sens qui va être précisé) du domaine $\Omega^\star$:

i **Sélection d'un domaine de mesure $\frac{1}{2}$mes (Ω)**

Le plan $\mathscr{P}_0$ coupe le domaine $\Omega^\star$ en deux sous-domaines que nous noterons Ω_1 et Ω_2 tels que mes (Ω_1) + mes $(\Omega_2) = \pi R^2 L$. Si mes (Ω_1) = mes (Ω_2), on passe directement à la

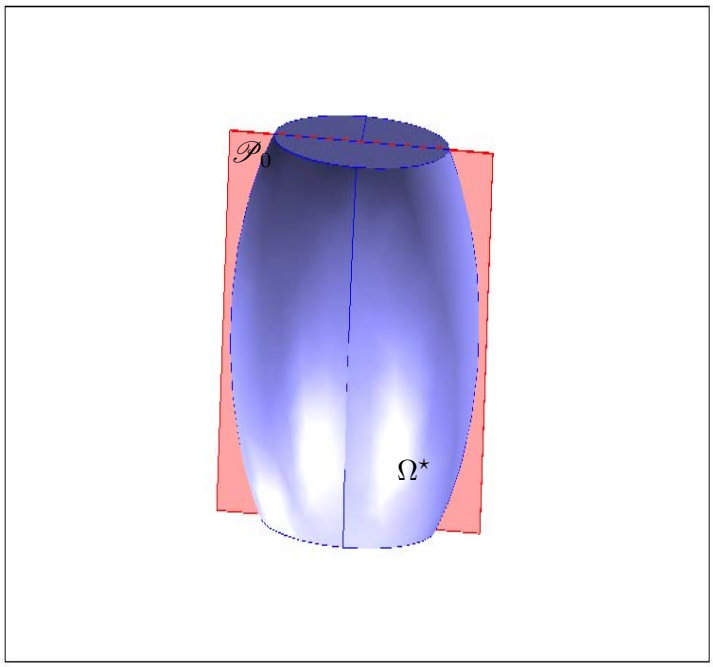

FIG. 6.5 – Le plan $\mathscr{P}_0$ et le domaine $\Omega^\star$

deuxième étape et l'on pose $\theta^\star = 0$. Si ça n'est pas le cas, il n'est pas restrictif de supposer que mes $(\Omega_1) < \frac{1}{2}$mes $(\Omega^\star) <$ mes (Ω_2). Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, une base orthonormée du plan $\mathscr{P}_0$ telle que :

$$\forall M \in \Omega_1, \ \left[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{OM}\right] \geq 0,$$

où $\left[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{OM}\right]$ désigne le produit mixte des trois vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, et $\overrightarrow{OM}$.
On fait subir au plan $\mathscr{P}_0$ une rotation d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle $\theta \in [0, \pi]$. Pour $i \in \{1, 2\}$, on appelle $\overrightarrow{e_i^\theta}$, l'image du vecteur $\overrightarrow{e_i}$ par cette rotation et on appelle Ω_1^θ, le domaine tel que $\forall M \in \Omega_1^\theta, \ \left[\overrightarrow{e_1^\theta}, \overrightarrow{e_2^\theta}, \overrightarrow{OM}\right] \geq 0$. Enfin, on considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \text{mes } (\Omega_1^\theta). \end{array}$$

Il est clair que cette application est continue, que $\Theta(0) =$ mes $(\Omega_1) < \frac{1}{2}$mes $(\Omega^\star)$ et que $\Theta(\pi) =$ mes $(\Omega_2) > \frac{1}{2}$mes $(\Omega^\star)$. En effet, on a : $\Omega_1^0 = \Omega_1$ et $\Omega_1^\pi = \Omega_2$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\theta^\star \in [0, \pi[$ tel que mes $(\Omega_1^\theta) = \frac{1}{2}$mes $(\Omega^\star)$.

ii « Symétrisation » du domaine $(\Omega^\star)$

On appelle $(\mathbf{u}^\star, p^\star)$, la solution du système de Stokes (6.38) posé sur $\Omega^\star$.

À la fin de la première étape, on a donc démontré qu'il existe un plan, encore noté $\mathscr{P}_0$, qui coupe $\Omega^\star$ en deux domaines Ω_1 et Ω_2 de même mesure : $\frac{1}{2}$mes $(\Omega^\star)$.
On introduit les quantités J_1 et J_2 définies par :

$$J_1 \stackrel{\text{déf}}{=} 2\mu \int_{\Omega_1} |\varepsilon(\mathbf{u}^\star|^2 \mathrm{d}x \text{ et } J_2 \stackrel{\text{déf}}{=} 2\mu \int_{\Omega_2} |\varepsilon(\mathbf{u}^\star|^2 \mathrm{d}x,$$

de sorte que $J(\Omega^\star) = J_1 + J_2$. Supposons (par exemple) que $J_1 \leq J_2$. On construit alors le domaine $\widehat{\Omega} = \Omega_1 \cup \sigma(\Omega_1)$, où σ désigne la symétrie par rapport au plan $\mathscr{P}$. De plus, on désigne par $(\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{p})$ les fonctions définies par :

$$\widehat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}^\star(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \mathbf{u}^\star(\sigma(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma(\Omega_1) \end{cases} \text{ et } \widehat{p}(\mathbf{x}) = \begin{cases} p^\star(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ p^\star(\sigma(\mathbf{x})) & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma(\Omega_1) \end{cases}$$

On se convainc que d'une part, $\widehat{\mathbf{u}} \in [H^1(\widehat{\Omega})]^3$, $\widehat{p} \in L^2(\widehat{\Omega})$ et d'autre part, que div $\widehat{\mathbf{u}} = 0$.
Il est alors aisé d'estimer l'énergie de dissipation pour un tel système. Étant donné la construction de la fonction $\widehat{\mathbf{u}}$, il vient que :

$$2\mu \int_{\widehat{\Omega}} |\varepsilon(\widehat{\mathbf{u}})|^2 \mathrm{d}x = 4\mu \int_{\Omega_1} |\varepsilon(\mathbf{u}^\star)|^2 \mathrm{d}x = 2J_1 \leq J(\Omega^\star).$$

Pour conclure ce théorème, on va écrire la solution de l'équation aux dérivées partielles (6.38) comme les minimiseurs d'une fonctionnelle. C'est très classique, voir [8] pour le cas général et [56] pour le cas particulier des équations de Stokes. On va à nouveau utiliser l'espace $V(\Omega)$ dont on rappelle la définition :

$$V(\Omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) : \text{div } \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}_{|_E} = \mathbf{u_0} \text{ et } \mathbf{u}_{|_\Gamma} = 0\}.$$

On peut écrire que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathbf{u}$ est solution de (6.38) sur le domaine Ω.

(b) $\mathbf{u} = \text{argmin } \{\Psi(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in V(\Omega)\}$, où :

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & [H^1(\Omega)]^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{u} & \longmapsto & 2\mu \displaystyle\int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x. \end{array}$$

Par conséquent, on peut écrire que :

$$\begin{array}{rcl} J(\widehat{\Omega}) & = & \displaystyle\min_{\mathbf{u} \in V(\widehat{\Omega})} \left(2\mu \int_{\widehat{\Omega}} |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x \right) \\ & \leq & \displaystyle 2\mu \int_{\widehat{\Omega}} |\varepsilon(\widehat{\mathbf{u}})|^2 \mathrm{d}x \\ & \leq & J(\Omega^\star), \end{array} \tag{6.46}$$

d'après le raisonnement de « symétrisation » précédent.
Or, le domaine $\widehat{\Omega}$ est admissible (sa mesure est bien la même que celle de $\Omega^\star$). Par conséquent, on vient de construire à partir d'un minimiseur $\Omega^\star$ du critère J dans la classe $\mathcal{O}_{\text{ad}}$, un autre minimiseur de ce critère, $\widehat{\Omega}$, qui appartient également à $\mathcal{O}_{\text{ad}}$, symétrique par rapport au plan $\mathscr{P}$, modulo une rotation d'axe $\mathscr{D}$ de ce domaine. De plus, les inégalités précédentes sont en fait des égalités.

iii **Preuve que tout minimiseur régulier a un plan de symétrie**

Supposons $\Omega^\star$ suffisamment régulier (par exemple C^2, mais on pourrait affaiblir cette hypothèse). Nécessairement, on a égalité dans le chaîne d'inégalités (6.46). Cela prouve en particulier que $\widehat{\mathbf{u}}$ est la solution du problème de Stokes sur $\widehat{\Omega}$. Mais puisque, par définition, $\widehat{\mathbf{u}}$ coincide avec $\mathbf{u}^\star$ sur Ω_1, on peut utiliser l'analyticité de la solution d'un problème de Stokes (voir par exemple [44]) pour affirmer que $\mathbf{u}^\star = \widehat{\mathbf{u}}$ sur $\Omega^\star \cap \widehat{\Omega}$. Cependant, si $\widehat{\Omega}$ ne coincide pas avec $\Omega^\star$, il existe une partie du bord de $\Omega^\star$, notée γ, incluse dans $\widehat{\Omega}$. Si $\Omega^\star$ est de classe C^2, il est bien connu que la solution du problème de Stokes est continue jusqu'au bord (voir [24]) et par conséquent, $\widehat{\mathbf{u}}$ s'annule sur γ. Par analyticité, cela prouve que $\widehat{\mathbf{u}}$ est identiquement nulle, ce qui contredit la condition au bord sur E, d'où la conclusion.

□

Remarque 6.10. *Nous avons essayé d'adapter ce schéma de preuve pour démontrer le même résultat, lorsque l'écoulement est régi par un système de type Navier-Stokes. La difficulté dans ce cas consiste à écrire la solution d'un tel système comme le minimiseur d'une fonctionnelle, le terme non-linéaire étant dans ce cas bien plus gênant. À ce stade de notre étude, nous ne sommes pas en mesure d'émettre une conjecture pour un tel résultat.*

Pour se donner une idée, il est aussi possible d'observer les simulations numériques du chapitre 7, dans lequel le cas du cylindre est traité.

Voici les problèmes ouverts qui découlent de ces remarques :

- **Problème ouvert 1 :** si le problème (6.39) possède une solution, peut-on montrer l'existence de plusieurs plans de symétrie et celle-ci est-elle à symétrie cylindrique ?
- **Problème ouvert 2 :** si le problème (6.48) possède une solution, peut-on montrer l'existence d'un, de plusieurs plans de symétrie et celle-ci est-elle à symétrie cylindrique ?

6.5.3 Cas 2D

Les résultats établis en 3 dimensions se transposent sans difficulté au cas de la dimension 2. Pour cette raison, nous ne redémontrons pas les théorèmes que nous énonçons dans ce paragraphe.

On considère un tube en deux dimensions $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (un rectangle) dans lequel s'écoule un fluide visqueux newtonien incompressible. On note $\mu > 0$ le coefficient de viscosité cinématique.

On désigne par $2R$ la largeur du rectangle et par L sa longueur. Le rectangle Ω a donc pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ -R \leq x_1 \leq R \\ 0 \leq x_2 \leq L. \end{cases}$$

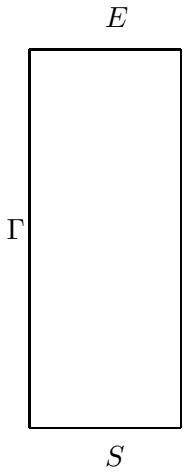

FIG. 6.6 – Le tube Ω

Comme mentionné sur la figure 6.6, on appelle :

- E l'entrée du tube (c'est le segment d'équation $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x_1 \leq R \text{ et } x_2 = 0\})$;
- Γ, la paroi latérale du tube (d'équation cartésienne $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \{-R, R\} \text{ et } x_2 \in [0, L]\})$;
- S, la sortie du tube (c'est le segment d'équation $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x_1 \leq R \text{ et } x_2 = L\}$).

De plus, on désigne par Π_0, l'hyperplan d'équation $x_2 = 0$ et par Π_L, l'hyperplan d'équation $x_2 = L$.

On désigne par $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, le champ des vitesses et par p, la pression. L'écoulement est modélisé par le système d'équations de Navier-Stokes ou de Stokes dont on redonne les équations (les termes entre parenthèses ne modifient pas le résultat énoncé dans le théorème ci-après) :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u} + \nabla p(+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0 & \mathbf{x} \in \Omega,\ i \in \{1,2,3\} \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u_0} & \mathbf{x} \in E \\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ -p\mathbf{n} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{h} & \mathbf{x} \in S, \end{cases} \tag{6.47}$$

où $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ et $\mathbf{u}_0$ sont choisis de sorte que le fluide soit soumis à une loi de Poiseuille (profil de vitesse parabolique à l'entrée du cylindre).

Comme dans le cas 3D, l'équation aux dérivées partielles régissant l'écoulement du fluide possède une solution unique dans le cas d'un système de Stokes quelle que soit la viscosité $\mu > 0$, et si μ est suffisamment grand dans le cas d'un système de Navier-Stokes. Ici, $(\mathbf{u}, p)$ est donné explicitement par :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x_1, x_2) = \left(0, c(x_1^2 - R^2)\right) \text{ et} \\ p(x_1, x_2, x_3) = 4\mu c(x_2 - L) + p_1. \end{cases}$$

Le critère *énergie de viscosité* J est encore défini par :

$$J(\Omega) := 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x,$$

Alors, on a le résultat :

Théorème 6.8. *Le rectangle n'est pas une géométrie optimale pour le critère « minimiser l'énergie de dissipation », lorsque l'aire $\mathcal{A}_0 = 2RL$ est donnée. Autrement dit, le rectangle n'est pas solution du problème :*

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{O}_{\rm ad}. \end{cases} \tag{6.48}$$

où l'ensemble $\mathcal{O}_{\rm ad}$ des contraintes est défini par :

$$\Omega \in \mathcal{O}_{\rm ad} \overset{\text{déf}}{=} \{\Omega \text{ ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^2 : \text{mes } (\Omega) = 2RL,\ \Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E,\ \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S\}.$$

Remarque 6.11. *Il est à noter que pour un tel problème, la condition d'optimalité (condition surdéterminée) s'écrit, comme on peut s'y attendre :*

$$\frac{\partial v_2}{\partial n}_{|\Gamma} = 0,$$

où $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ désigne le problème adjoint, comme introduit dans la proposition (6.11) ou (6.40).

Chapitre 7

Étude numérique du critère « énergie de dissipation »

Dans le chapitre 6, on a présenté un résultat théorique sur le problème consistant à rechercher la forme optimale d'un conduit dissipant le moins possible l'énergie de viscosité d'un fluide régi par les équations de Navier-Stokes : on sait ainsi que le cylindre n'est pas la forme optimale. Étant donné la difficulté intrinsèque des équations de Stokes et Navier-Stokes, il paraît peu raisonnable d'espérer pouvoir résoudre un tel problème de façon exacte. C'est pourquoi nous allons tenter de le résoudre numériquement dans ce chapitre.

Nous nous sommes également intéressés à l'optimisation de la forme de l'arbre bronchique. Notre idée consiste à considérer une forme initiale peu réalise d'un arbre bronchique, que l'on laisse évoluer dans le but d'obtenir, dans le meilleur des cas, une forme correspondant à un point stationnaire de la fonctionnelle à minimiser (le Lagrangien augmenté en l'occurrence), ou sinon, une forme permettant de réduire le critère. Nous avons envisagé le cas de l'arbre bronchique pendant l'inspiration et l'expiration.

L'objet de ce chapitre consiste à présenter les résultats de la résolution numérique de tels problèmes. Nous avons utilisé pour nos simulations le logiciel *Comsol*.

La totalité des résultats obtenus dans ce chapitre sont le fruit d'une collaboration avec Benjamin Mauroy, chargé de recherche à l'université Paris Diderot. Cette collaboration a été en partie motivée par le fait que Benjamin Mauroy a consacré toute sa thèse à la modélisation numérique du poumon et de l'arbre bronchique et est, par conséquent, très au fait des questions relatives à cette thématique.

Dans la première section de ce chapitre, nous exposerons l'algorithme de Lagrangien augmenté que nous avons utilisé et en détaillerons une itération. Le reste du chapitre est consacré à l'exposé des résultats numériques obtenus. En particulier, nous reviendrons sur la question de la modélisation de l'arbre bronchique évoquée dans la section 5.2.2.

7.1 Mise en œuvre et présentation de l'algorithme

7.1.1 Quelques rappels sur la notion de Lagrangien augmenté en optimisation de forme

Nous commençons par quelques principes généraux sur cette notion avant d'envisager le cas particulier des contraintes de type *égalité*. Pour de plus amples informations sur la notion de Lagrangien augmenté en optimisation de forme ou topologique, on pourra se référer à [2]

Ainsi, soit D, un sous-domaine de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Soit $J : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonctionnelle définie sur $\mathcal{E}$, un ensemble de sous-domaines contenus dans D. On définit également (pour exprimer les contraintes) une fonctionnelle $G : \mathcal{E} \longrightarrow Y$.

Enfin, soit K, un cône convexe fermé de Y. On note de façon usuelle Y', le dual topologique de l'espace Y. On définit à partir de $K \subset Y$, un cône convexe fermé de l'espace dual $K^+ \subset Y'$ appelé *cône dual positif* :

Définition 7.1. *On désigne par K^+, le **cône dual positif** défini par :*

$$K^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mu \in Y' : \langle \mu, y \rangle_{Y',Y} \geq 0 \ \forall y \in K\}.$$

On considère un problème d'optimisation (en dimension finie) qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \min J(\Omega) \\ \Omega \in \mathcal{E}_{\text{ad}}, \end{cases} \tag{7.1}$$

où $\mathcal{E}_{\text{ad}}$ est l'ensemble admissible des contraintes s'écrivant sous la forme :

$$\mathcal{E}_{\text{ad}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\Omega \in \mathcal{E} : G(\Omega) \in -K\}.$$

Remarque 7.1. *Notons que ce formalisme est fort utile puisqu'il permet de traiter à la fois les contraintes égalité et inégalité. En effet, si K est réduit au singleton $\{0\}$, on obtient une contrainte de type égalité.*

Pour présenter la notion de Lagrangien augmenté, on va réutiliser le formalisme introduit par Guy Cohen dans [12]. Ce cours traite plutôt de la dimension finie et n'aborde pas les problèmes d'optimisation de forme.

Dans un premier temps, nous allons expliquer comment est construit le Lagrangien augmenté, l'appliquer à notre cas simple (cas d'une contrainte égalité), puis tenter de comprendre de façon un peu heuristique en quoi cette fonctionnelle apporte (souvent) de bonnes propriétés algorithmiques.

Modifions quelque peu les hypothèses faites sur Y. Supposons dorénavant que Y n'est plus seulement un espace de Banach mais un espace de Hilbert, ce qui nous permet d'identifier Y à son dual Y'.

Définition 7.2. *On se donne un paramètre positif b. On définit le Lagrangien augmenté du problème (7.1) par :*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_b : & \mathcal{E} \times Y' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\Omega, \mu) & \longmapsto & \mathcal{L}_b = J(\Omega) + \zeta_b(G(\Omega), \mu), \end{array}$$

où $\zeta_b(y,\mu)$ est définie pour tout $y \in Y$ et $\mu \in Y'$ par :

$$\zeta_b(y,\mu) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\mu' \in K^+} \left(< \mu', y > -\frac{1}{2b}\|\mu - \mu'\|^2_{Y'} \right). \tag{7.2}$$

Remarque 7.2. *L'application ζ_b s'appelle la* ***régularisée concave de Yosida-Moreau****. Par définition , la régularisée convexe de Yosida-Moreau f_b d'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, avec X, un espace de Hilbert (de norme induite $\|.\|$) est le résultat de l'inf-convolution de cette fonction avec la fonction quadratique bQ, où $Q : x \longmapsto \|x\|^2/2$. Plus précisément, c'est la fonctionnelle f_b définie par :*

$$f_b(x) = \inf_{x \in X} \left(f(y) + \frac{1}{2}\|x - y\|^2 \right).$$

f_b possède de bonnes propriétés. Par exemple, si f est convexe et semi-continue inférieurement, de domaine non vide et sous-différentiable en un point, alors sa régularisée de Yosida-Moreau est convexe, partout continue et différentiable. De plus, sa dérivée est lipschitzienne de constante au moins $1/b$.

La fonction f_b est partout inférieure ou égale à f, mais leurs argmin *sont égaux.*

La transformation qui nous intéresse ici est la régularisée concave de Yosida-moreau. Il est aisé de transposer la notion de régularisée convexe. On obtient la formule définissant ζ_b.

On voit donc un premier intérêt à l'introduction de cette notion. On observe un gain de régularité et les problèmes sont équivalents. Ces résultats sont rappelés dans le lemme ci-dessous.

Le théorème qui suit établit un lien, dans le cadre de l'optimisation de forme entre la minimisation du Lagrangien, très classique en optimisation sous contraintes, et la minimisation du Lagrangien augmenté. La preuve est détaillée dans [2].

Théorème 7.1. *Conditions d'optimalité du lagrangien augmenté.*

i Soit $(\Omega^\star, \mu^\star)$, un point selle local du Lagrangien $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{E} \times K^+$. Alors, $(\Omega^\star, \mu^\star)$ est un point selle local du Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_b$ dans $\mathcal{E} \times Y$ et :

$$\mathcal{L}_b(\Omega^\star, \mu^\star) = \mathcal{L}(\Omega^\star, \mu^\star).$$

ii Réciproquement, si $(\Omega^\star, \mu^\star)$ est un point selle local du Lagrangien augmenté $\mathcal{L}_b$ dans $\mathcal{E} \times Y$, alors $(\Omega^\star, \mu^\star) \in \mathcal{E}_{\text{ad}} \times K^+$ et ce couple vérifie :

$$\begin{array}{l} \langle \mu^\star, G(\Omega^\star) \rangle_{Y',Y} = 0, \\ \langle \mathrm{d}\mathcal{L}(\Omega^\star), \theta \rangle \geq 0, \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) : \exists t_0 > 0, \forall t \in [0, t_0],\ \Omega^\star_{t\theta} \in \mathcal{E}., \end{array}$$

De plus,

$$\mathcal{L}_b(\Omega^\star, \mu^\star) = \mathcal{L}(\Omega^\star, \mu^\star).$$

Avant d'adapter cette introduction un peu générale du Lagrangien augmenté à notre cas, on donne à présent quelques arguments un peu heuristiques permettant de mieux comprendre son rôle souvent bénéfique dans les algorithmes d'optimisation :

- La régularisée de Moreau-Yosida est différentiable (qui plus est de gradient Lipschitzien), ce qui est largement préférable du point de vue numérique.
- Nous souhaitons implémenter des algorithmes de minimisation de type gradient. Or, l'opération de régularisation améliore le conditionnement de la fonction duale. Une convergence plus rapide de la suite maximisante des multiplicateurs de Lagrange peut donc être espérée lorsque cette suite est construite à partir du Lagrangien augmenté plutôt qu'à partir du Lagrangien ordinaire. On peut même dire que plus la constante $b > 0$ est grande, meilleur est le conditionnement de la fonction duale (qui donne les contraintes), et de même, meilleure est la convergence des variables duales. Cependant, dans ce domaine, il existe un compromis dans le choix de b. En effet, si b est choisi trop grand, c'est le conditionnement du problème primal :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{E}} \mathcal{L}_b(\Omega, \lambda)$$

  qui se dégrade, et donc sa difficulté de résolution qui augmente.
- Enfin, dans le cas où l'on minimise une fonctionnelle non convexe, l'intérêt de l'utilisation du Lagrangien augmenté est plus flagrant. En effet, grâce à cette techique, on peut espérer (au moins localement) récupérer un saut de dualité malencontreux. Moralement, on utilise des paraboloïdes concaves au lieu d'hyperplans dans le cas du Lagrangien pour "ausculter" l'épigraphe d'une fonction, ce qui peut se révêler ingénieux.

On présente maintenant l'algorithme de résolution du Lagrangien augmenté, algorithme qui sera plus amplement détaillé dans la section 7.1.2.

Algorithme du Lagrangien augmenté

i **Initialisation.**
Choisir $\Omega_0 \in \mathcal{E}$ et $\mu_0 \in K^+$.
On se fixe également $\tau > 0$ et ε_{stop}.

ii **Itération k.**
On cherche Ω_{k+1} tel que :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_b(\Omega_{k+1}, \mu_k) < \mathcal{L}_b(\Omega_k, \mu_k) \\ \Omega_{k+1} \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

On pose alors $\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{\tau}{b}[\Pi_{K^+}(\mu_k + bG(\Omega_{k+1})) - \mu_k]$.

iii **Critère d'arrêt.**
Si $\|\mu_{k+1} - \mu_k\| \leq \varepsilon_{stop}$, l'algorithme s'arrête.
Sinon, on revient à l'étape précédente.

Expression du Lagrangien augmenté dans notre cas

Rappelons que J désigne la fonctionnelle définie par :

$$J(\Omega) = 2\mu \int_\Omega |\varepsilon(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}x,$$

où $\mathbf{u}$ désigne la solution du système de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\triangle\mathbf{u} + \nabla p + \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega,\ i\in\{1,2,3\} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u_0} & \mathbf{x}\in E \\ \mathbf{u} = 0 & \mathbf{x}\in\Gamma \\ -p\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = -p^*\mathbf{n} & \mathbf{x}\in S, \end{array} \right.$$

où $p^* > 0$ est un réel fixé, et $\mathbf{u_0}$ désigne un profil de vitesses parabolique. Nous avons vu dans le chapitre 5, que la condition en sortie traduit globalement une condition sur les contraintes en pression appliquées au système (peu ou prou $p \simeq p^*$ sur S).

d désigne la dimension de l'espace affine dans lequel nous nous plaçons. On se fixe un réel strictement positif V_0. On supposera dans toute la suite que E et S sont des parties de la frontière $\partial\Omega$ fixées :
- en dimension 2, on suppose que ce sont des réunions de segments ;
- en dimension 3, on suppose que ce sont des réunions des disques.

On note Π_E (resp. Π_S), la réunion des hyperplans contenant par E (resp. S).
On cherche à résoudre le problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J(\Omega) \\ \Omega\in\mathcal{O}_{\mathrm{ad}}, \end{array} \right. \tag{7.3}$$

où $\mathcal{O}_{\mathrm{ad}}$ désigne :

$$\mathcal{O}_{\mathrm{ad}} \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \Omega \text{ ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^d : \mathrm{mes}\ (\Omega) = V_0,\ \Pi_E\cap\overline{\Omega} = E,\ \Pi_S\cap\overline{\Omega} = S, \right\}.$$

On a démontré que la dérivée de forme du critère J a pour expression :

$$\langle \mathrm{d}J(\Omega), \mathbf{V}\rangle = 2\mu \int_\Gamma \left(\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right)(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}s,$$

où $\mathbf{v}$ est la solution du problème adjoint (dont on a montré, pour de grandes viscosités, existence et unicité dans la proposition 6.2 du chapitre 6) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\triangle\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})^T\cdot\mathbf{v} - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \nabla q = -2\mu\triangle\mathbf{u} & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma \\ -q\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x}\in S. \end{array} \right.$$

Puisque l'on cherche à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte, on a vu dans la section 7.1.1 qu'il convient en fait de minimiser le Lagrangien de ce problème, ou mieux le Lagrangien augmenté à chaque itération.

La contrainte est ici une contrainte de type égalité. Si on pose $K = \{0\}$, alors $Y = K^+ = \mathbb{R}$, puis $\Pi_{K^+} = I$, l'identité. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \left\{\Omega \text{ ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^3 : \Pi_0 \cap \overline{\Omega} = E,\ \Pi_L \cap \overline{\Omega} = S,\right\} \\
G(\Omega) &= \text{mes } (\Omega) - \pi R^2 L = \int_\Omega \mathrm{d}x - \pi R^2 L \\
\mathcal{E}_{\text{ad}} &= \{\Omega \in \mathcal{E} : G(\Omega) \in -K\} = \{\Omega \in \mathcal{E} : G(\Omega) = 0\} \\
\mathcal{L}(\Omega, \mu) &= J(\Omega) + \mu G(\Omega)
\end{aligned}$$

Finalement, le Langrangien augmenté $\mathcal{L}_b$ a pour expression :

$$\boxed{\mathcal{L}_b(\Omega, \mu) \overset{\text{déf}}{=} J(\Omega) + \mu G(\Omega) + \frac{b}{2}\left(G(\Omega)\right)^2,}$$

avec $\Omega \in \mathcal{O}_{\text{ad}}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 0$.

Remarque 7.3. *Cette écriture s'obtient aisément, puisque l'on est ramené à déterminer la borne supérieure d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, dans ce cas, la régularisée de Yosida s'écrit :*

$$\begin{aligned}
\zeta_b(y, \mu) &= \sup_{\mu' \in \mathbb{R}} \left(\mu' y - \frac{1}{2b}(\mu - \mu')^2 \right) \\
&= \mu y + \frac{b}{2} y^2.
\end{aligned}$$

Plus précisément, le problème d'optimisation à résoudre à chaque itération est donc le suivant pour un paramètre $b > 0$ bien choisi et un multiplicateur de Lagrange μ_m donné :

$$\begin{cases} \min \mathcal{L}_b(\Omega, \mu_m) \\ \Omega \in \mathcal{E}, \end{cases}$$

avec :

$$\mathcal{L}_b(\Omega, \mu) = J(\Omega) + \mu \left(\text{mes } (\Omega) - \pi R^2 L\right) + \frac{b}{2}\left(\text{mes } (\Omega) - \pi R^2 L\right)^2.$$

Il est alors aisé de déterminer la dérivée de forme de cette fonctionnelle. Elle s'écrit, compte-tenu du fait que $\langle \mathrm{dVol}, \mathbf{V} \rangle = \displaystyle\int_\Gamma (\mathbf{V}.\mathbf{n})\mathrm{d}s$:

$$\boxed{\langle \mathrm{d}\mathcal{L}_b(\Omega, \mu), \mathbf{V} \rangle = \int_\Gamma \left[2\mu\left(\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right) + \mu + b\left(\text{mes } (\Omega) - \pi R^2 L\right)\right](\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\mathrm{d}s.} \quad (7.4)$$

Le gradient de forme de $\mathcal{L}_b$ est donné par :

$$\nabla \mathcal{L}_b(\Omega, \mu) = \left[2\mu\left(\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) - |\varepsilon(\mathbf{u})|^2\right) + \mu + b\left(\text{mes } (\Omega) - \pi R^2 L\right)\right].\mathbf{n}. \quad (7.5)$$

Remarque 7.4. *La méthode du Lagrangien augmenté peut être associée à une classe d'algorithmes dite de « pénalisation exacte ». En effet, on aurait tort de penser que la bonne façon de faire est de choisir le paramètre b le plus grand possible. Comme cela a été mentionné précédemment, il existe un subtil compromis à trouver dans le choix de b permettant une résolution satisfaisante des problèmes primal et dual. On peut se référer par exemple à [6].*

7.1.2 Mise en œuvre d'un algorithme de type gradient

Dans cette partie, on va détailler la mise en œuvre de l'algorithme du Lagrangien augmenté. Dans la section 7.1.4, on va s'intéresser à la description d'une itération de cet algorithme. Au préalable, rappelons quelques résultats démontrés dans le chapitre 6.

Déformation du domaine

L'idée va consister à construire une suite de domaines $(\Omega_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ou plus précisément à déformer le bord latéral à chaque itération de l'algorithme.

On appelle Γ_m le bord latéral obtenu à l'itération $m \in \mathbb{N}^*$.

On se donne donc un domaine $\Omega_m \subset \mathbb{R}^3$ ainsi qu'un multiplicateur de Lagrange $\mu_m \in \mathbb{R}$ obtenus à l'itération m de l'algorithme visant à chercher la forme optimale. La question est la suivante :

$$\text{Comment va-t-on déformer } \Omega_m \text{ afin que } J(\Omega_{m+1}) < J(\Omega_m)\,?$$

Puisque l'on cherche à implémenter un algorithme de type gradient, on va chercher Ω_{m+1} sous la forme :

$$\Omega_{m+1} = (I + \varepsilon_m \mathbf{V_m})(\Omega_m),$$

où $\mathbf{V_m}$ un champ de vecteurs à choisir astucieusement et ε_m est le pas. Il peut être choisi constant, optimal, ou variable. C'est cette dernière possibilité qui semble la plus raisonnable ici. En effet, un pas constant risque de poser rapidement des problèmes de convergence, un pas optimal risque d'être fort ardu à déterminer. En revanche, il existe de nombreuses règles (Wolfe, Armijo, dichotomie, etc.) pour déterminer un pas de déplacement raisonnable dans la direction donnée par le gradient du Lagrangien augmenté associé au problème d'optimisation considéré.

On désigne par $\{M_k^m\}_{1\leq k\leq \alpha_m}$ l'ensemble des nœuds du maillage du domaine Ω_m à l'itération m, α_m désignant le nombre total de nœuds. L'idée consiste à déformer le maillage $\{M_k^m\}_{1\leq k\leq \alpha_m}$ afin d'obtenir un nouveau maillage $\{M_k^{m+1}\}_{1\leq k\leq \alpha_{m+1}}$, dont on pourra aisément recréer la géométrie Ω_{m+1} correspondante. Le mode *Moving mesh* de Comsol permet justement d'appliquer à tous les points d'un maillage un déplacement déterminé par l'utilisateur et de reconstituer ensuite la géométrie correspondant à ce nouveau maillage.

On cherche donc à déterminer une application $\mathbf{d_m}$, définie sur Ω_m, telle que les points $\{M_k^{m+1}\}_{1\leq k\leq \alpha_{m+1}}$ s'obtiennent de la façon suivante :

$$M_k^{m+1} = M_k^m + \mathbf{d_m}(M_k^m),$$

en confondant par commodité d'écriture un point avec ses coordonnées.
$\mathbf{d_m}$ va être construite comme la solution d'une équation aux dérivées partielles. Une première idée consiste à chercher $\mathbf{d_m}$ qui vérifie :

$$\mathbf{d_m}_{|\Gamma_m} = -\nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m).$$

Ça n'est pas cette idée que nous avons retenu. Pour déterminer une direction de descente $\mathbf{d_m}$ qui soit acceptable, il est préférable de rechercher un produit scalaire $b_m(.,.)$ sur Ω_m et à choisir $\mathbf{d_m}$, solution de l'équation écrite sous forme variationnelle :

$$b_m(\mathbf{d_m}, \mathbf{w}) = -\int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}s,\ \forall \mathbf{w} \in B(\Omega_m),$$

où $B(\Omega_m)$ désigne l'espace de Hilbert induit par le produit scalaire $b_m(.,.)$.

Le principe de cette méthode, parfois appelée « préconditionnement du gradient » est assez ancien. On l'évoque dans [1] et [43]. Plus récemment, les auteurs de l'article [19] l'appliquent à des problèmes de design optimal. Puisque $b_m(.,.)$ est un produit scalaire, on aura alors :

$$\begin{aligned} 0 \leq b_m(\mathbf{d_m}, \mathbf{d_m}) &= -\int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{d_m} \mathrm{d}s = \int_{\Gamma_m} \|\nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m)\|^2_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}s \\ &= -\langle \mathrm{d}\mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m), \mathbf{d_m} \rangle. \end{aligned}$$

Reste donc à choisir un produit scalaire qui nous apporte de bonnes propriétés numériques.

Une idée naturelle consiste à choisir $b_m(.,.)$ qui coincide avec le produit scalaire $L^2(\Omega_m)$. Les auteurs de [19], qui appliquent notamment ces techniques à la segmentation d'images, expliquent dans leur article que ce choix est souvent peu judicieux. On peut avoir dans ce cas de mauvaises surprises dues notamment au fait que l'équation aux dérivées partielles résultante n'est pas toujours bien posée.

Ils conseillent de choisir $b_m(.,.)$ coincidant avec le produit scalaire $H^1(\Omega_m)$ (éventuellement avec des poids). C'est donc ce produit scalaire que nous avons utilisé pour déterminer $\mathbf{d_m}$. Des essais numériques sont d'ailleurs exposés dans [19] pour valider ce choix.

Revenons au calcul de $\mathbf{d_m}$. Nous recherchons $\mathbf{d_m}$ comme la solution de :

$$\langle \mathbf{d_m}, \mathbf{w} \rangle_{H^1(\Omega_m)} = -\int_{\Gamma_m} \nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}s, \ \forall \mathbf{w} \in B(\Omega_m),$$

avec $B(\Omega_m) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \mathbf{w} \in H^1(\Omega_m) : \mathbf{w}_{|E \cup S} = 0 \right\}$, puisque E et S sont des disques fixés (donc le déplacement sur ces disques doit être nul). Il est d'ailleurs classique, d'après le théorème de Lax-Milgram, qu'un tel problème possède une solution unique, et d'après les théorèmes classiques de régularité, la solution d'une telle équation mise sous forme variationnelle est dans $[H^2(\Omega_m)]^3$ au moins.

Puisque pour tous $\mathbf{w} \in B(\Omega_m)$ et $\mathbf{y} \in [H^2(\Omega_m)]^3$, on a d'après la formule de Green :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle_{[H^1(\Omega_m)]^3} &= \int_{\Omega_m} \nabla \mathbf{y} : \nabla \mathbf{w} \mathrm{d}x + \int_{\Omega_m} \mathbf{y} \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Omega_m} \triangle \mathbf{y} \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}x + \int_{\Gamma_m} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial n} \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}s + \int_{\Omega_m} \mathbf{y} \cdot \mathbf{w} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbf{d_m}$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} -\triangle \mathbf{d_m} + \mathbf{d_m} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_m \\ \mathbf{d_m} = 0 & \mathbf{x} \in E \cup S \\ \dfrac{\partial \mathbf{d_m}}{\partial n} = -\nabla \mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m) & \mathbf{x} \in \Gamma_m. \end{cases} \tag{7.6}$$

Maintenant que nous sommes fixés sur la méthode utilisée pour déformer le domaine, nous allons écrire l'algorithme complet du Lagrangien augmenté.

Remarque 7.5. *Une remarque sur l'initialisation de l'algorithme du Lagrangien augmenté. Si l'on respecte l'algorithme, on est censé choisir de façon arbitraire le premier multiplicateur de Lagrange μ_0. En fait, il est possible d'initialiser l'algorithme de façon plus astucieuse. En effet, on a vu que le domaine Ω_1 est un point selle de l'application :*

$$\Omega \longmapsto \mathcal{L}_b(\Omega, \mu_0),$$

où μ_0 a été choisi au préalable. Par conséquent, Ω_1 vérifie $\nabla \mathcal{L}_b(\Omega_1, \mu_0) = 0$ sur Γ_1, qui se réécrit :

$$\nabla J(\Omega_1) + \left[\mu_0 + b\left(\text{mes }(\Omega_1) - \pi R^2 L\right)\right].\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

Multiplions cette égalité par $\mathbf{n}$ et intégrons sur Γ_1. On obtient :

$$\mu_0 = -\frac{\int_{\Gamma_1} \nabla J(\Omega_1) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s}{\int_{\Gamma_1} \mathrm{d}s} - b\left(\text{mes }(\Omega_1) - \pi R^2 L\right).$$

Une idée (un peu heuristique ici car aucun autre calcul n'a été effectué pour s'assurer de la pertinence de cette démarche, fondée sur le fait que la forme du domaine varie peu d'une itération à l'autre) consiste donc à choisir comme initialisation du multiplicateur de Lagrange :

$$\mu_0 = -\frac{\int_{\Gamma_0} \nabla J(\Omega_0) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s}{\int_{\Gamma_0} \mathrm{d}s} - b\left(\text{mes }(\Omega_0) - \pi R^2 L\right).$$

On va à présent formuler l'algorithme de résolution du problème de minimisation (6.5).

Algorithme de résolution numérique du problème (6.5)

i **Initialisation.**
Choisir $\Omega_0 \in \mathcal{E}$ et $\mu_0 = -\dfrac{\int_{\Gamma_0} \nabla J(\Omega_0)\cdot \mathbf{n}\mathrm{d}s}{\int_{\Gamma_0}\mathrm{d}s} - b\left(\text{mes }(\Omega_0) - \pi R^2 L\right)$.
On se fixe également $\tau > 0$ et ε_{stop}.

ii **Itération** m**.** μ_m est connu.

(a) Résolution du problème de Navier-Stokes (et stockage de sa solution $\mathbf{u_m}$) :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{u_m} + \nabla p_m + \nabla\mathbf{u_m}\cdot\mathbf{u_m} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega_m,\ i\in\{1,2,3\} \\ \text{div }\mathbf{u_m} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega_m \\ \mathbf{u_m} = \left(0,0,\frac{p_1-p_0}{4\mu L}(x_1^2+x_2^2-R^2)\right) & \mathbf{x}\in E \\ \mathbf{u_m} = 0 & \mathbf{x}\in\Gamma_m \\ -p_m\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{u_m})\cdot\mathbf{n} = -p^*.\mathbf{n} & \mathbf{x}\in S, \end{cases}$$

(b) Résolution du problème adjoint (et stockage de sa solution $\mathbf{v_m}$) :

$$\begin{cases} -\mu\triangle\mathbf{v_m} + (\nabla\mathbf{u_m})^T\cdot\mathbf{v_m} - \nabla\mathbf{v_m}\cdot\mathbf{u_m} + \nabla q_m = -2\mu\triangle\mathbf{u_m} & \mathbf{x}\in\Omega - m \\ \text{div }\mathbf{v_m} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega_m \\ \mathbf{v_m} = \mathbf{0} & \mathbf{x}\in E\cup\Gamma_m \\ -q_m\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{v_m})\cdot\mathbf{n} + (\mathbf{u_m}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v_m} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{u_m})\cdot\mathbf{n} = 0 & \mathbf{x}\in S. \end{cases}$$

(c) Calcul de la quantité scalaire :

$$\begin{aligned} \beta_m &\overset{\text{déf}}{=} \nabla\mathcal{L}_b(\Omega_m,\mu_m)\cdot\mathbf{n} \\ &= 2\mu\left(\varepsilon(\mathbf{u_m}) : \varepsilon(\mathbf{v_m}) - |\varepsilon(\mathbf{u_m})|^2\right) + \mu_m + b\left(\text{mes }(\Omega_m) - \pi R^2 L\right). \end{aligned}$$

(d) Détermination du déplacement $\mathbf{d_m}$, comme la solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\triangle\mathbf{d_m} + \mathbf{d_m} = 0 & \mathbf{x}\in\Omega_m \\ \mathbf{d_m} = 0 & \mathbf{x}\in E\cup S \\ \dfrac{\partial\mathbf{d_m}}{\partial n} = -\beta_m\mathbf{n} & \mathbf{x}\in\Gamma_m. \end{cases}$$

(e) Détermination de ε_m, un pas faisant décroître le Lagrangien augmenté, par exemple à l'aide d'une règle de Wolfe.

(f) Détermination du domaine Ω_{m+1} :

$$\Omega_{m+1} = (I + \varepsilon_m\mathbf{d}_m)(\Omega_m).$$

(g) Réinitialisation du multiplicateur de Lagrange :

$$\mu_{m+1} = \mu_m + \tau\left(\text{mes }(\Omega_{m+1}) - \pi R^2 L\right)$$

iii **Critère d'arrêt.**
Si $\|\mu_{m+1} - \mu_m\| \le \varepsilon_{stop}$, l'algorithme s'arrête.
Sinon, on revient à l'étape précédente.

Donnons une précision sur l'étape (e), de recherche du pas dans l'algorithme précédent. On peut par exemple utiliser l'algorithme de Wolfe (1969), mais il existe maintes autres possibilités (règle de Goldstein, dichotomie, méthode de la section dorée, interpolation parabolique, etc.). Plaçons-nous à une itération m, avec $m \in \mathbb{N}^*$.

On introduit la fonction q définie sur un intervalle $[0, \eta[$, avec $\eta > 0$ par :

$$q(\rho) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{L}_b\left((I + \rho \mathbf{d_m})(\Omega_m), \mu_m\right).$$

Il s'ensuit d'ailleurs, d'après la règle de composition des différentielles que q est dérivable au voisinage de 0 et que :

$$q'(0) = \langle \mathrm{d}\mathcal{L}_b(\Omega_m, \mu_m), \mathbf{d_m} \rangle.$$

Le principe de cette méthode est de se fixer deux réels m_1 et m_2 tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$ et de rechercher un pas ε qui vérifie :

$$\begin{cases} q(\rho) \leq q(0) + m_1 \rho q'(0) \\ q'(\rho) \geq m_2 q'(0). \end{cases}$$

Voici la description de cet algorithme :

Algorithme de recherche du pas ε_m

i Ω_m et $\mathbf{d_m}$ sont connus. On calcule $q(0) = \mathcal{L}_b(\Omega_m)$ et $q'(0) = \langle \mathrm{d}\mathcal{L}_b(\Omega_m), \mathbf{d_m} \rangle$.
On choisit m_1 et m_2 tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$ (par exemple $m_1 = 0,1$ et $m_2 = 0,7$).
On pose $\rho = 1$, $\rho_- = 0$, $\rho_+ = 0$.
On évalue $q(1)$ (voir méthode dans la description de l'itération k).

ii **Itération** k. Tant que $q(\rho) > q(0) + m_1 \rho q'(0)$ ou $q'(\rho) < m_2 q'(0)$:
On détermine $\Omega_m^k = (I + \rho \mathbf{d_m})(\Omega_m)$, puis on résout le problème :

$$\begin{cases} -\mu \triangle \mathbf{u_m^k} + \nabla p_m^k + \nabla \mathbf{u_m^k} \cdot \mathbf{u_m^k} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_m^k,\ i \in \{1,2,3\} \\ \text{div } \mathbf{u_m^k} = 0 & \mathbf{x} \in \Omega_m^k \\ \mathbf{u_m^k} = \left(0, 0, \frac{p_1 - p_0}{4\mu L}(x_1^2 + x_2^2 - R^2)\right) & \mathbf{x} \in E \\ \mathbf{u_m^k} = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_m^k \\ -p_m^k \mathbf{n} + \mu \varepsilon(\mathbf{u_m^k}) \cdot \mathbf{n} = -p^*.\mathbf{n} & \mathbf{x} \in S, \end{cases}$$

On évalue alors $q(\rho) = \mathcal{L}_b(\Omega_m^k, \mu_m)$.

(a) Si $q(\rho) > q(0) + m_1 \rho q'(0)$, on pose $\rho_+ \leftarrow \rho$;

(b) Sinon, si $q(\rho) \leq q(0) + m_1 \rho q'(0)$ et $q'(\rho) < m_2 q'(0)$, on pose $\rho_- \leftarrow \rho$.

Si $\rho_+ = 0$, alors $\rho \leftarrow 2\rho_-$;
Sinon, si $\rho_+ > 0$, alors $\rho \leftarrow \dfrac{\rho_- + \rho_+}{2}$.

iii ρ_m est le premier réel vérifiant $q(\rho) \leq q(0) + m_1 \rho q'(0)$ et $q'(\rho) \geq m_2 q'(0)$.

Remarque 7.6. *Cette méthode de recherche du pas est coûteuse, puisqu'elle nécessite quelques résolutions d'un système de Navier-Stokes. En pratique, il est toujours intéressant de commencer à regarder si l'algorithme du gradient à pas constant parvient à faire décroître la fonctionnelle $\Omega \longmapsto \mathcal{L}_b(\Omega, \mu_m)$, au moins pour les premières itérations de l'algorithme du Lagrangien augmenté, plutôt que d'utiliser immédiatement un algorithme de recherche du pas. En général, au voisinage d'un optimum (local) et après quelques itérations, une méthode de recherche du pas doit être mise en place, car autrement, on n'observe pas toujours de convergence.*

7.1.3 Un mot sur la technique...

Commençons par dire un mot sur le logiciel utilisé et plus précisément, sur la méthode de résolution des équations de Navier-Stokes.

Résolution des équations de Navier-Stokes

Il existe plusieurs façons de résoudre les équations de Navier-Stokes. L'implémentation numérique de l'algorithme du Lagrangien augmenté nécessite, à chaque itération (au moins une fois) la résolution numérique d'un système de Navier-Stokes dans la nouvelle géométrie. Le logiciel *Comsol* propose un solveur d'éléments finis pour de telles équations.

Nous avons choisi après plusieurs essais des différents solveurs proposés de résoudre le système de façon directe. Autrement dit et à la différence d'une méthode itérative par exemple, cette méthode consiste à résoudre le problème en discrétisant l'équation du mouvement et l'équation de continuité (div $\mathbf{u} = 0$). On obtient alors un système linéaire de grande taille ($3N \times 3N$ en 2D, $4N \times 4N$ en 3D, où N désigne le nombre de nœuds du maillage) que l'on doit résoudre. Le principal défaut de cette approche réside dans le fait que l'espace mémoire nécessaire est très important.

Par ailleurs, un autre des inconvénients d'une telle méthode provient du fait que la matrice de rigidité est généralement très mal conditionnée. Il est cependant possible de pallier cette difficulté en utilisant une méthode de préconditionnement astucieuse. Dans notre cas, on a donc utilisé :

- **Une méthode directe de discrétisation par éléments finis**, de type Lagrange $P1$ et $P2$.
- **La routine *UMFPACK* pour résoudre le système linéaire obtenu.**
  UMFPACK signifie « Unsymmetric MultiFrontal Package ». Il s'agit d'une librairie regroupant un ensemble de routines permettant de résoudre les grands systèmes linéaires creux, à l'aide d'une factorisation LU particulière.
- **Une méthode de Newton modifiée** pour traiter le terme non linéaire dans Navier-Stokes.

On peut également dire un mot sur la résolution des deux autres problèmes via *Comsol*. Le problème adjoint est linéaire et ressemble fort à un problème de Stokes (on peut le voir comme une équation aux dérivées partielles de Navier-Stokes linéarisée). *Comsol* possède un environnement permettant de programmer la résolution d'un système d'équations écrites sous forme faible. C'est ainsi que nous résolvons le problème adjoint, toujours avec des éléments finis de lagrange $P1$ et $P2$. On résout de la même façon les équations donnant le déplacement du maillage.

Le coût d'une itération dans l'algorithme du Lagrangien augmenté est essentiellement celui de la résolution du système de Navier-Stokes. En effet, comme on pouvait s'y attendre, l'espace mémoire occupé par la résolution des problèmes linéaires et leur temps de calcul est très raisonnable et les principales difficultés surviennent lorsque le nombre de Reynolds du système de Navier-Stokes est élevé (régime turbulent).

Déformation de la géométrie à chaque itération

Deux possibilités s'offrent à nous pour créer une géométrie à partir de l'ancienne. On peut :

- soit utiliser une fonction de *Comsol* appelée *mesh2geom*, qui permet de recréer une géométrie à partir d'un maillage déformé en utilisant le mode *moving mesh* de *Comsol*. L'inconvénient de cette méthode est que l'on a parfois, dans la pratique de mauvaises surprises car *Comsol* n'arrive pas toujours à gérer des maillages un peu irréguliers. Cet inconvénient est aussi lié au

fait que l'on utilise une boîte noire en appelant cette fonction, et que l'on n'a pas la possibilité d'en comprendre réellement les rouages.

- soit de programmer nous-mêmes une petite fonction permettant de déformer le maillage. Ce script s'est avéré efficace, en particulier pour réaliser des simulations en trois dimensions, cas dans lequel la fonction *mesh2geom* ne nous a pas donné entière satisfaction.
  Une des difficultés purement technique dans l'écriture de cette fonction réside dans le fait que *Comsol* retourne la solution de toutes les équations aux dérivées partielles (Navier-Stokes, problème adjoint et déplacement du mailage) sous la forme d'un unique vecteur de grande taille. Il s'agit alors d'associer à chaque indice des nœuds du maillage, la valeur correspondante du déplacement du maillage.

7.1.4 Zoom sur la première itération de l'algorithme du Lagrangien augmenté

On va exposer le résultat de simulations numériques décrivant la première itération de l'algorithme du Lagrangien augmenté, tel qu'il a été décrit dans la section précédente. Pour se fixer les idées, on va considérer l'exemple d'un arbre dichotomique de deux générations.

Dans la section 7.2.5, nous chercherons à déterminer quel est l'arbre dichotomique minimisant l'énergie de dissipation dans le cas de l'inspiration. À titre d'exemple, nous avons détaillé la première itération de l'algorithme dans ce cas.

Voici la géométrie initialisant l'algorithme du Lagrangien augmenté, dont nous donnerons la solution numérique dans la section 7.2.5.

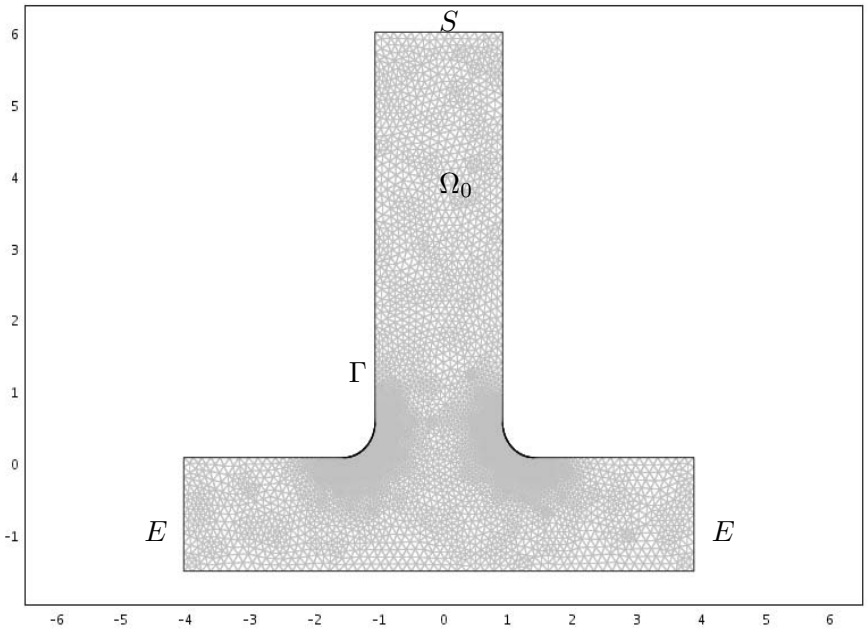

FIG. 7.1 – Un exemple de géométrie maillée - cas de l'inspiration

On va afficher le résultat de chacune des étapes de la première itération de l'algorithme du Lagrangien augmenté :

i **Résolution du problème de Navier-Stokes.**

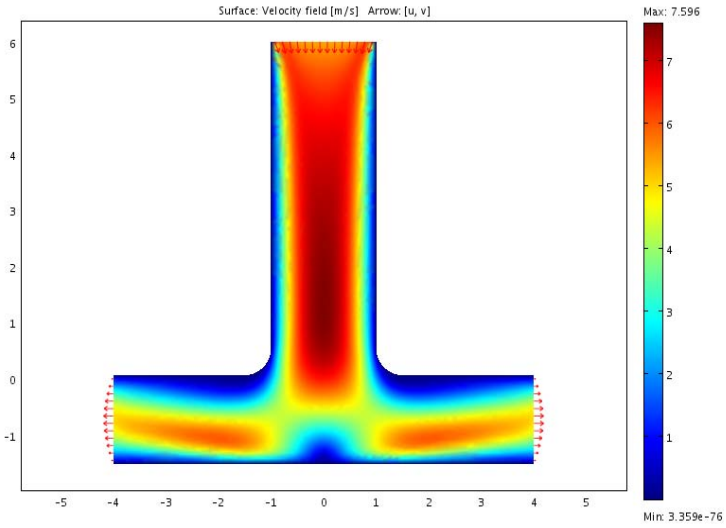

FIG. 7.2 – Résolution du problème de Navier-Stokes - 1ère itération de l'algorithme

On a d'ailleurs représenté (sous forme de flèches) les profils de vitesse aux entrées et sorties de cette structure. Le sens des vecteurs vitesse nous confirme qu'il s'agit bien du cas de l'inspiration. On retrouve un profil de vitesses parabolique pour chacune des composantes connexes de l'entrée E, ce qui n'est pas le cas à la sortie où l'on a imposé une condition au bord du type $\sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = -p^*.\mathbf{n}$.

ii **Résolution du problème adjoint.**

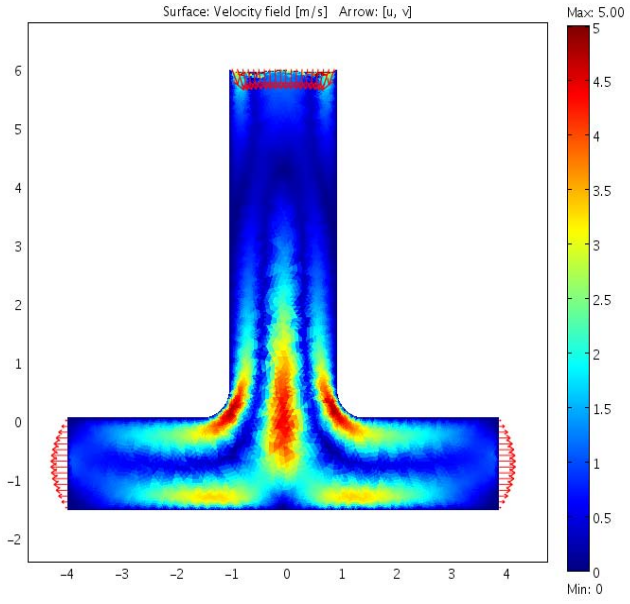

FIG. 7.3 – Résolution du problème adjoint - 1ère itération de l'algorithme

iii **Détermination du déplacement.**

On a représenté ci-dessous l'application $\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \|\mathbf{d_0}\|_{\mathbb{R}^2} \end{array}$.

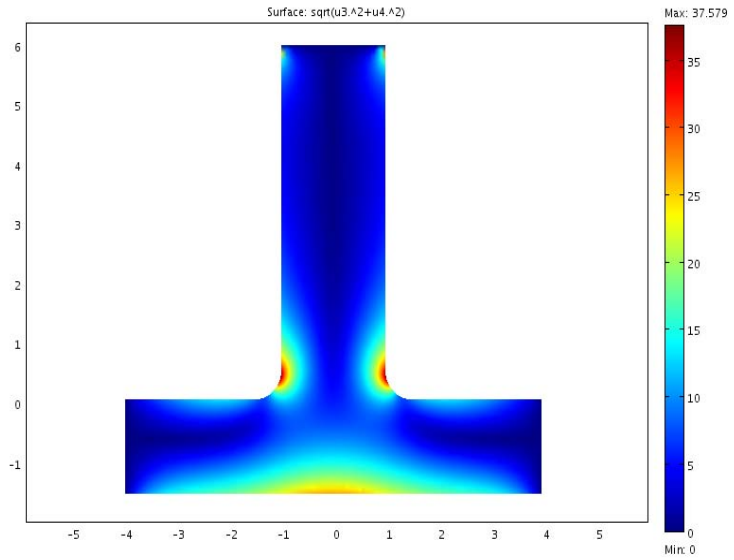

FIG. 7.4 – Représentation de la norme euclidienne du déplacement - 1ère itération de l'algorithme

Dans les zones bleu-foncé, il n'y a aucun déplacement. En revanche, les zones dans lesquelles on observe des couleurs chaudes sont celles où les déformations de la géométrie seront les plus importantes.

iv **Détermination du pas**

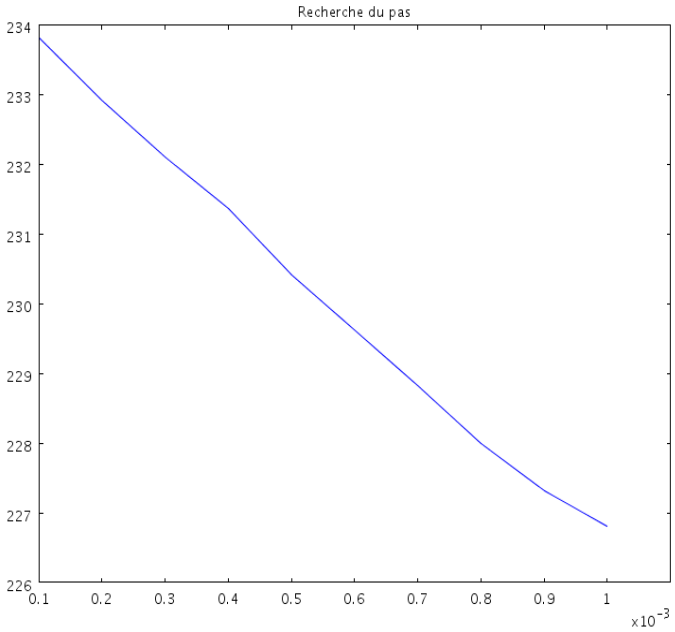

FIG. 7.5 – Représentation de $\rho \mapsto \mathcal{L}_b((I + \rho\mathbf{d_0})(\Omega_0), \mu_0)$ - 1ère itération de l'algorithme

Sur la figure 7.5, on a représenté l'application

$$\begin{array}{rcl} [0;10^{-3}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \rho & \longmapsto & J((I+\rho\mathbf{d_0})(\Omega_0)). \end{array}$$

Il est aisé, d'après le profil de ce graphe, d'obtenir une valeur de ρ qui fait diminuer le critère, à l'aide d'une méthode de recherche du pas, comme cela a été décrit précédemment.

7.2 Quelques résultats numériques en 2 dimensions

À chaque itération de l'algorithme du Lagrangien augmenté, il faut réussir à faire décroître le Lagrangien augmenté associé au problème que l'on considère, en nous fixant la valeur du multiplicateur de Lagrange. Dans l'algorithme que nous avons présenté dans la section 7.1.2, nous avons choisi, pour faire décroître l'énergie, d'utiliser une méthode de Wolfe de recherche du pas. Cette méthode s'est avérée probante dans tous les cas, bien que le coût des calculs se soit souvent révélé important. En effet, à chaque itération de l'algorithme, il est nécessaire de résoudre en moyenne une dizaine de problèmes de Navier-Stokes. La durée de convergence des algorithmes est donc très grande pour cette raison (quelques jours en général). C'est pourquoi, dans les simulations, nous avons utilisé des nombres de Reynolds raisonnables (de l'ordre de quelques centaines).

Nous avons donc à chaque fois testé également un simple algorithme de gradient à pas constant. Dans le cas du coude par exemple, cela permet de réduire grandement le coût des calculs, et l'algorithme converge alors en une trentaine de minutes. Dans le cas de l'arbre dichotomique en expiration, c'est également cette méthode qui a été privilégiée en raison de sa grande rapidité.

Pour tous les autres exemples présentés dans cette section, une technique de recherche du pas s'est avérée nécessaire.

7.2.1 Un cas test : optimisation d'un coude

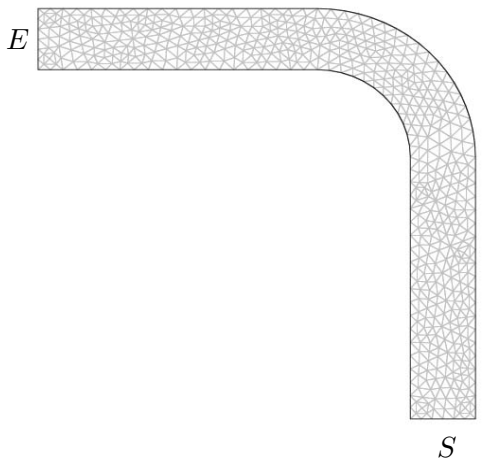

FIG. 7.6 – L'exemple d'un coude

On a souhaité de prime abord tester l'algorithme et le code présentés dans la première partie de ce chapitre sur une géométrie très simple : celle d'un coude. On place l'entrée E, et la sortie S de cette structure comme indiqué sur la figure 7.6.
Nous avons obtenu des résultats tout à fait satisfaisants. Nous avons observé une très bonne convergence de l'algorithme, à la tolérance souhaitée, et surtout un temps de calcul très faible (de l'ordre de quelques dizaines de minutes).

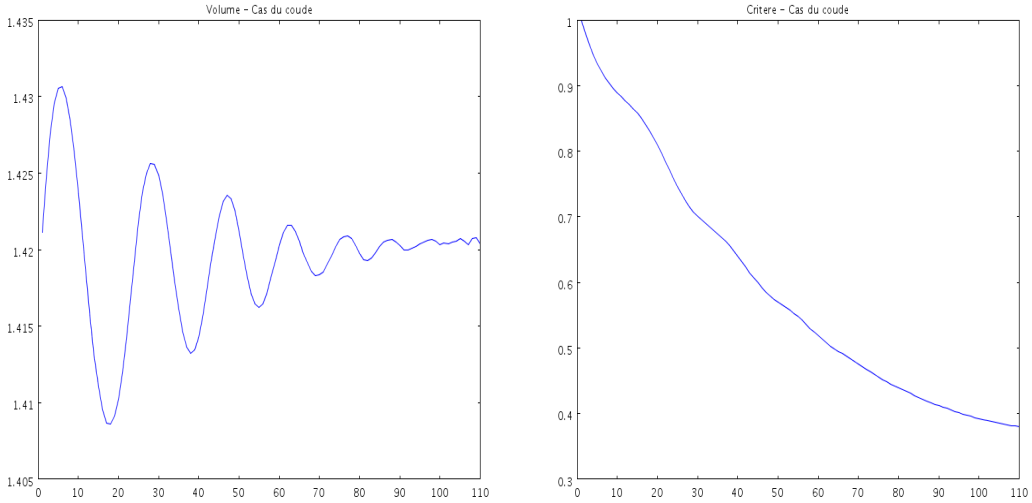

FIG. 7.7 – Variations : du volume (à gauche) et du critère J (à droite) dans le cas d'un coude

La prise en compte d'une contrainte de type égalité dans un algorithme est un problème en général difficile du point de vue numérique. Ici, la méthode du Lagrangien augmenté semble tenir compte de la contrainte de façon satisfaisante comme en témoigne la figure 7.7.

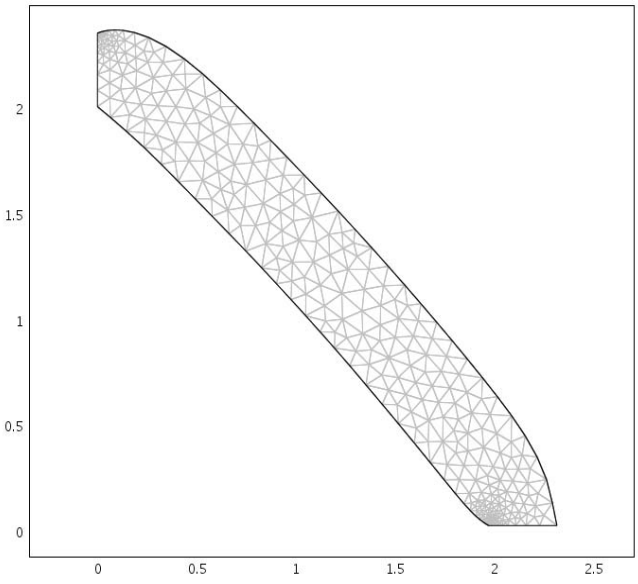

FIG. 7.8 – Géométrie finale obtenue dans le cas d'un coude

La géométrie finale obtenue n'est pas vraiment une surprise. Elle semble être la solution la plus naturelle pour minimiser la dissipation d'un fluide à travers cette géométrie.
On appelle Ω_{final}, la géométrie finale, Ω_0, la géométrie initiale. On gagne largement sur la géométrie initiale :

$$\left| \frac{J(\Omega_{\text{final}}) - J(\Omega_0)}{J(\Omega_0)} \times 100 \right| \simeq 60\%.$$

Remarquons que dans ce cas, la géométrie finale semble être celle qui relie le plus directement (presque en ligne droite) l'entrée à la sortie. Nous constaterons un phénomène différent dans le cas du tube.

7.2.2 Le cas du tube

Dans la section 6.5.3 du chapitre 6, nous avons démontré que le cylindre n'est pas optimal pour dissiper l'énergie de viscosité, donnée par le critère $J(\Omega)$. Ici, le calcul numérique s'est avéré difficile à exploiter, probablement en raison du fait que l'optimum n'est pas très éloigné du cylindre, ce qui se traduit par de faibles valeurs du gradient de forme du critère $\nabla J(\Omega)$ tout au long de l'algorithme. La conséquence est qu'il est difficile pour l'utilisateur de choisir la valeur du paramètre b, ainsi que celle du multiplicateur de Lagrange initial. En effet, si l'on donne au moment de l'initialisation trop de poids aux contraintes, on n'observe presque aucune variation de la géométrie, l'algorithme cherchant à respecter à tout prix l'égalité de volume. Inversement, si l'on ne donne pas assez de poids à cette contrainte, l'algorithme aura tendance à gonfler le tube. Numériquement, nous avons constaté que le fait d'augmenter le volume de la géométrie permet de réduire l'énergie de dissipation.

Afin de contourner ces difficultés, il nous a semblé intéressant de modifier l'expression du Lagrangien augmenté :

$$\mathcal{L}_b(\Omega, \mu) \overset{\text{déf}}{=} \frac{J(\Omega)}{J(\Omega_0)} + \mu \frac{\text{mes } (\Omega)}{\text{mes } (\Omega_0)} + \frac{b}{2} \left(\frac{\text{mes } (\Omega)}{\text{mes } (\Omega_0)} \right)^2,$$

où $J_0 = J(\Omega_0)$, et de considérer des valeurs de b proches de l'unité.

D'une certaine façon, cela correspond à une normalisation. L'intérêt de ceci est qu'au début de l'algorithme, un poids identique est donné au critère et à la contrainte.

Conscients de cette difficulté, il nous a paru raisonnable, de prime abord, de vérifier numériquement le résultat principal du chapitre 6, à savoir que le cylindre (le tube ici) ne minimise pas le critère J à volume fixé.
Pour nous en convaincre, nous avons créé une famille de domaines de même volume : $\pi R^2 L$, à l'aide de splines, dépendant du paramètre e, comme dessiné sur la figure 7.9.

On fait varier le paramètre e, et on détermine pour chaque domaine obtenu l'énergie de dissipation correspondante que l'on notera $J(e)$. Le graphe 7.10 représente l'écart relatif entre $J(e)$ et l'énergie de dissipation J_0 du cylindre Ω_0 :

On peut constater que ce quotient devient négatif pour des valeurs du paramètre e de l'ordre de $0,09$. Par conséquent, on gagne (en terme de minimisation de l'énergie de dissipation) sur la géométrie initiale. L'écart relatif à la géométrie initiale est alors environ de $0,5$ %.

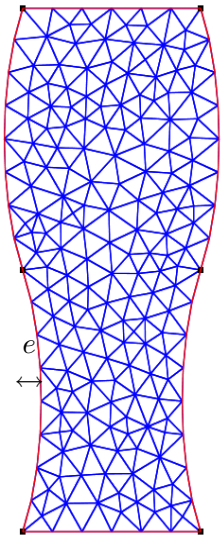

FIG. 7.9 – Une famille de domaines de même volume que le cylindre

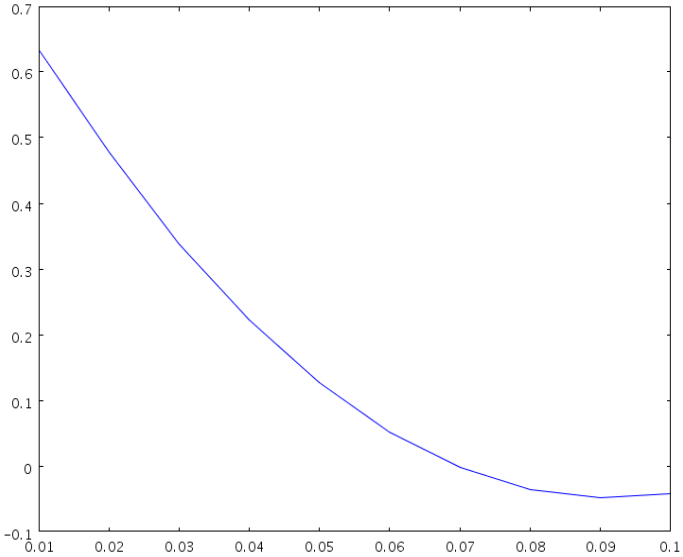

FIG. 7.10 – Graphe de $e \longmapsto \frac{J(e)-J_0}{J_0} \times 100$

Une autre façon numérique de vérifier que le cylindre n'est pas optimal consiste à tracer le graphe de l'application :

$$\begin{array}{rccc} \vartheta : & \Gamma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & \dfrac{\partial v_2}{\partial n}_{|\Gamma} . \end{array}$$

La condition d'optimalité du cylindre au premier ordre est énoncée dans la section 6.5.3. Elle stipule que ϑ doit être constante si le cylindre est un point stationnaire. La figure 7.11 montre

que ça n'est pas le cas. Elle représente cette application sur l'une des deux composantes connexes de Γ. C'est suffisant ici, car nous avions démontré une propriété de symétrie (axiale dans le cas 2D), prouvant que l'on obtient ici le même graphique selon que l'on choisit l'une ou l'autre de ces composantes.

De même, en représentant la norme du déplacement obtenu après une itération de l'algorithme du Lagrangien augmenté, on se rend compte que celui-ci est non nul sur Γ. Ces arguments numériques rejoignent donc le résultat énoncé dans le théorème 6.8. C'est ce que traduit la figure 7.11.

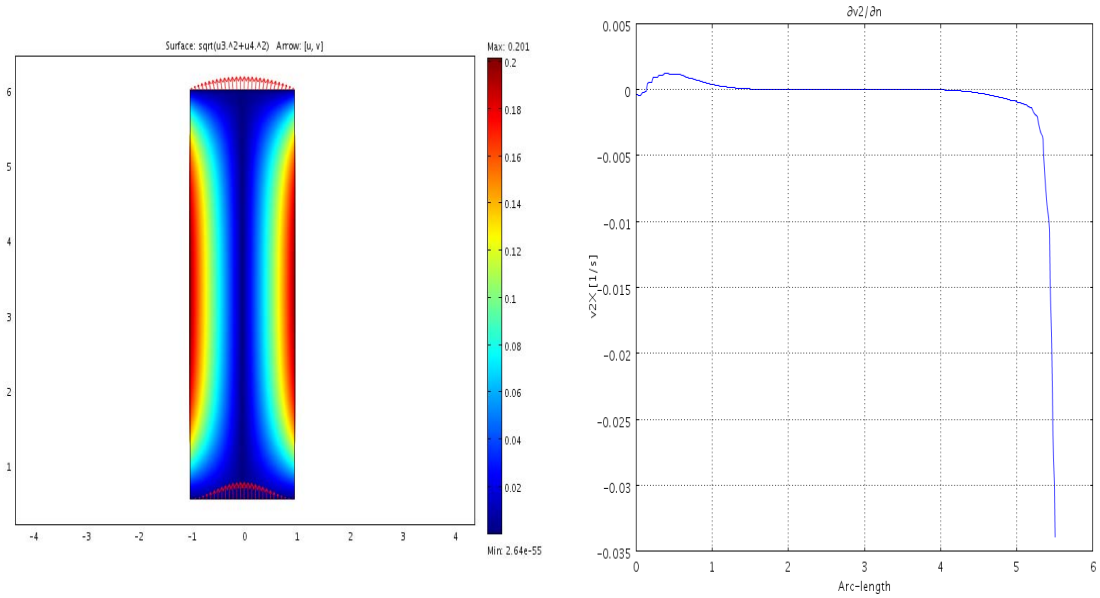

FIG. 7.11 – À gauche, la représentation du déplacement $\mathbf{d_0}$, et à droite, le graphe de ϑ

Passons enfin au problème d'optimisation sur le tube résolu par l'algorithme du Lagrangien augmenté. On a tout naturellement choisi comme géométrie initiale Ω_0, le cylindre, représenté sur la figure 7.11. La figure 7.12 représente la géométrie obtenue après un grand nombre d'itérations de l'algorithme du Lagrangien augmenté.

La figure 7.13 représente les variations du critère J et du volume tout au long de la mise en œuvre de l'algorithme. Ici, on remarque que le volume se stabilise autour de la valeur V_0 attendue. À l'itération 0, le critère J vaut 1 (grâce à la normalisation que nous avons évoquée précédemment). On constate une forte diminution dans les premières itérations due à l'augmentation du volume du tube. Au final, et au vu des graphes, il ne semble pas complètement clair que l'on ait atteint un point selle du Lagrangien. En revanche, on constate que l'on est parvenu à faire décroître le critère d'environ 1,0720 %.

D'autres simulations vont être réalisées pour compléter celles-ci.

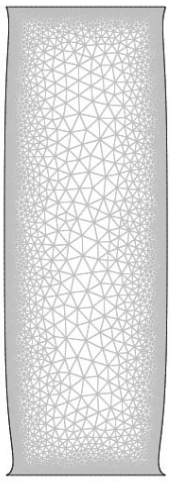

FIG. 7.12 – Géométrie finale obtenue dans le cas d'un tube

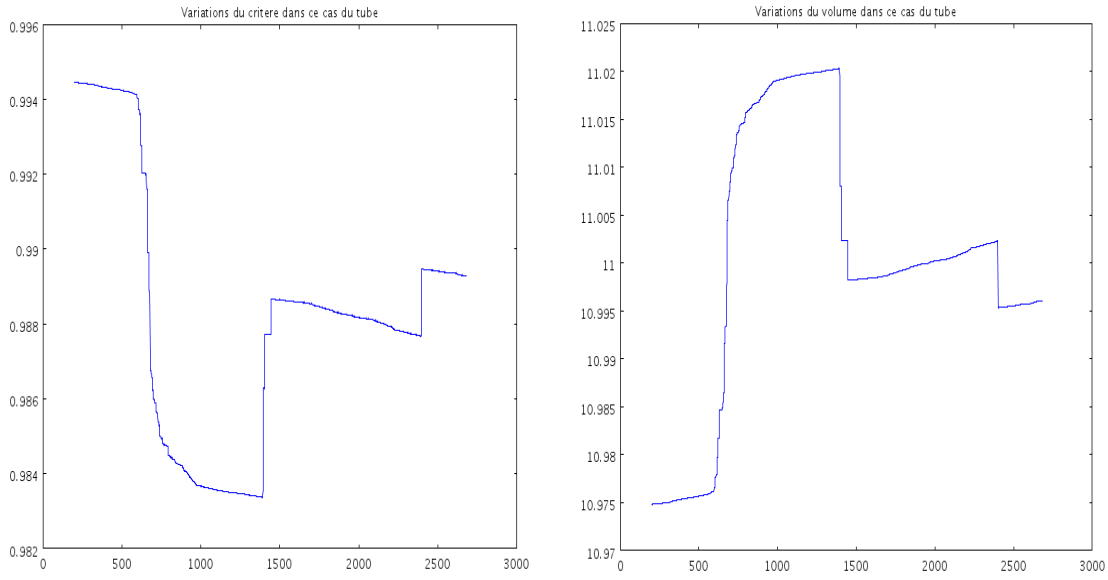

FIG. 7.13 – À gauche, la représentation du critère J, et à droite, celle du volume

7.2.3 Retour sur le problème de la modélisation de l'arbre bronchique

Souvenons-nous des résultats obtenus dans la section 5.2.2 dans laquelle nous nous posions la question de la modélisation de l'arbre bronchique : où placer l'entrée de l'arbre, E (dans laquelle on suppose connu le profil de vitesse du fluide, de type parabolique), et même question pour la sortie (pour laquelle les contraintes sont supposées connues). Un calcul sur un modèle un peu simple, en régime de Poiseuille, nous avait laissé à penser que la configuration de la figure 7.14 n'était pas acceptable.

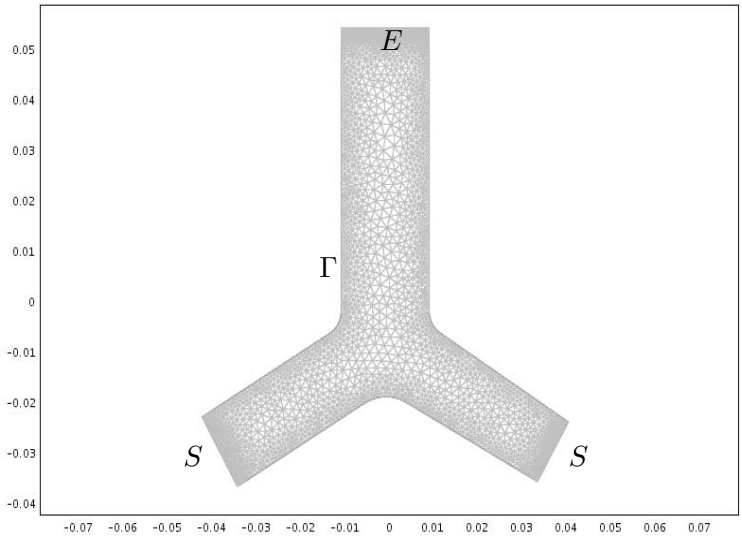

FIG. 7.14 – Géométrie initiale dans le cas de la mauvaise configuration

Cette fois, nous ne nous plaçons plus en régime de Poiseuille, mais choisissons de modéliser des fluides dont l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes. Si on cherche à utiliser l'algorithme du Lagrangien augmenté, on obtient encore ce résultat : il semble que le problème d'optimisation (7.3) n'ait pas de solution et qu'une suite minimisante de domaines possible tende à fermer une des branches de l'arbre.

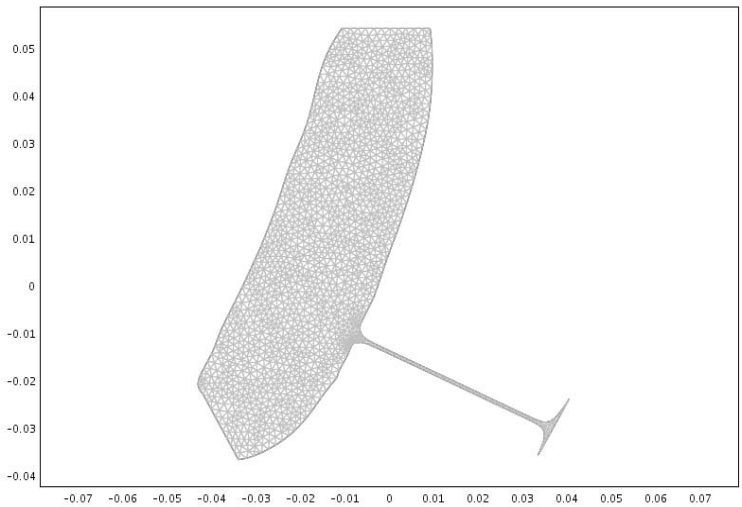

FIG. 7.15 – Géométrie finale dans le cas de la mauvaise configuration : une des branches se ferme

La figure 7.15 représente le résultat de l'algorithme du Lagrangien augmenté après un grand

nombre d'itérations. Cela nous conforte dans l'idée que le choix des entrées et sorties adapté au cas de l'arbre bronchique est celui qui est représenté sur la figure 7.16

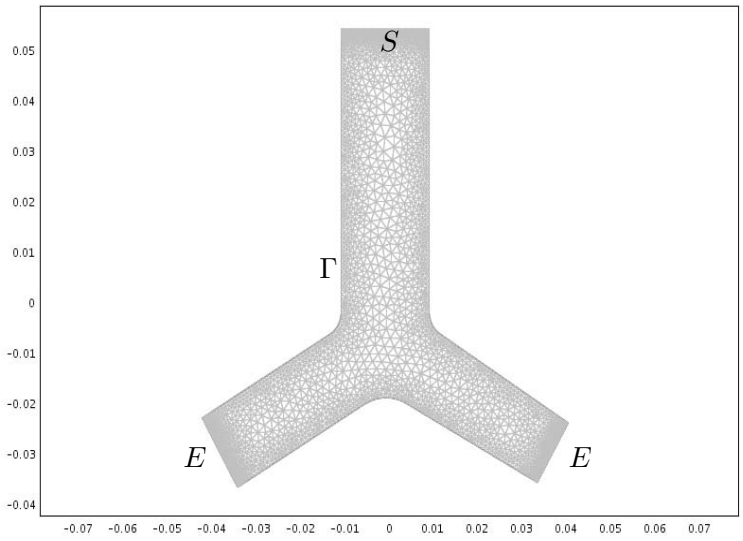

FIG. 7.16 – La bonne configuration

L'optimisation de la forme d'un tel arbre sera étudiée dans les sections 7.2.4 et 7.2.5.

Nous avons mis en évidence, dans la section 5.1.3, des différences d'ordre mécanique entre les phénomènes d'inspiration et expiration. Dans les sections 7.2.4 et 7.2.5, nous résolvons séparément le problème consistant à optimiser la forme de l'arbre bronchique pour chacun de ces phénomènes.

- **Dans le cas de l'expiration :** le profil des vitesses est colinéaire au vecteur normal à l'entrée et de même sens.
- **Dans le cas de l'inspiration :** le profil des vitesses est colinéaire au vecteur normal à l'entrée et de sens contraire.

7.2.4 Optimisation de l'arbre bronchique : cas de l'expiration

Considérons un arbre dichotomique de deux générations, en deux dimensions, qui, même s'il correspond à un modèle très basique d'arbre bronchique, va nous apporter, en première approximation, des indications sur les critères ayant pu influencer géométriquement poumon. On a résolu le problème de Navier-Stokes dans une telle géométrie sur la figure 7.17.

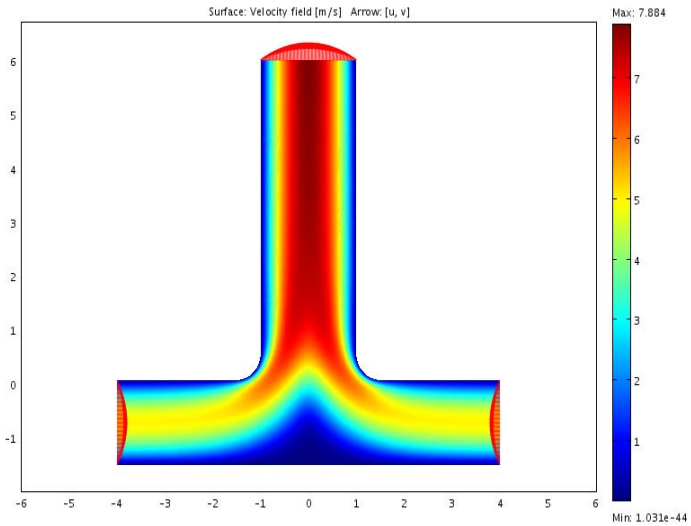

FIG. 7.17 – Initialisation de l'algorithme - cas de l'expiration

On a représenté sur cette figure le champ des vitesses sur les deux composantes connexes de E (on notera d'ailleurs que le profil est parabolique) et sur la sortie, ce qui nous confirme que nous traitons bien le cas de l'expiration (l'air est expulsé de l'arbre). On va utiliser cette géométrie pour initialiser l'algorithme du Lagrangien augmenté.

La figure 7.18 représente les différentes valeurs du critère J et du volume de la géométrie obtenues au cours des itérations de l'algorithme du Lagrangien augmenté. Au final, la contrainte de volume semble bien respectée et le critère a décru de 37 % environ. De plus, on obtient on obtient une géométrie qui n'est pas sans rappeler l'arbre bronchique, représentée sur la figure 7.19.

On constate par exemple que l'angle de bifurcation entre la branche mère et les branches filles a diminué (il valait initialement 180°) et s'est rapproché de l'angle entre la trachée et les branches filles, bien qu'il reste un peu plus élevé. Dans le poumon, cet angle est de l'ordre de 60°. Il convient de toute façon de rester prudent car nous n'avons considéré ici qu'un modèle en deux dimensions et nous n'avons pas tenu compte des autres générations. Nos observations demanderaient à être validées par des tests en trois dimensions. Ce travail est d'ailleurs en cours.

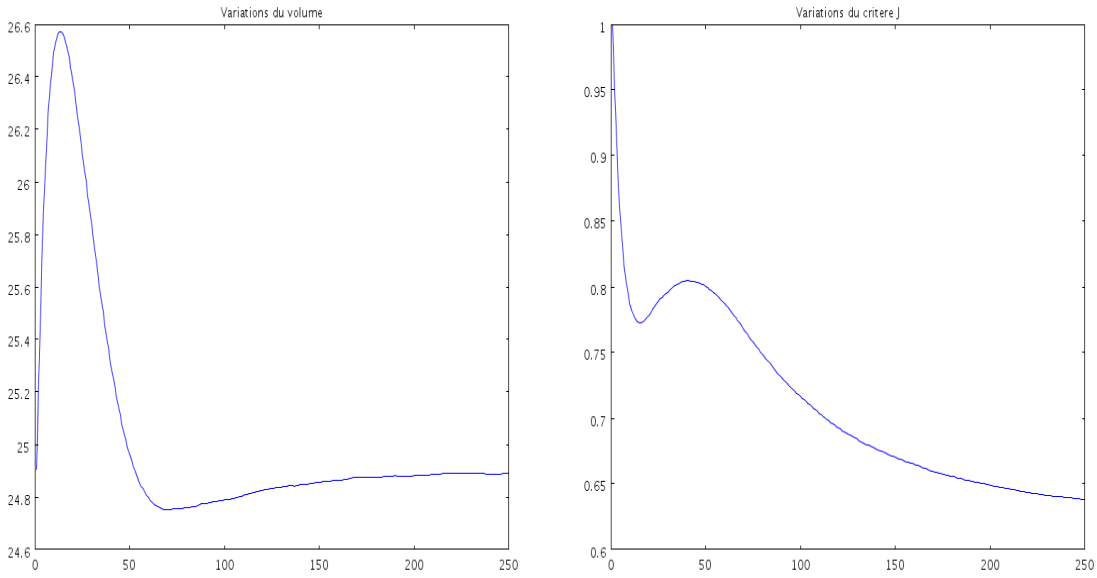

FIG. 7.18 – À gauche, la variation du volume et à droite, la variation du critère J (Expiration)

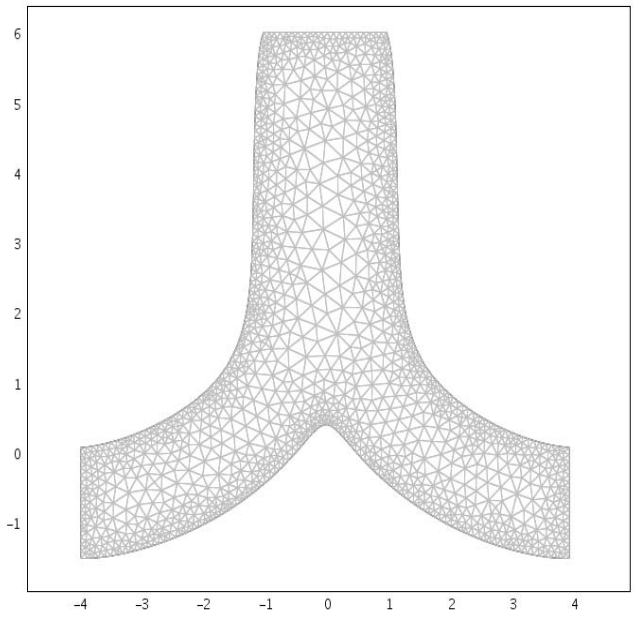

FIG. 7.19 – La géométrie finale obtenue dans le cas de l'expiration

7.2.5 Optimisation de l'arbre bronchique : cas de l'inspiration

Étrangement, le cas de l'inspiration est beaucoup plus difficile. En effet, le fait d'inverser le sens de parcours du fluide dans cette géométrie rend le système de Navier-Stokes beaucoup plus compliqué à résoudre. Physiquement, le fluide dépense plus d'énergie pour se déplacer vers les entrées de l'arbre. On a utilisé la même géométrie que dans le cas de l'expiration pour initialiser l'algorithme d'optimisation, représentée sur la figure 7.20.

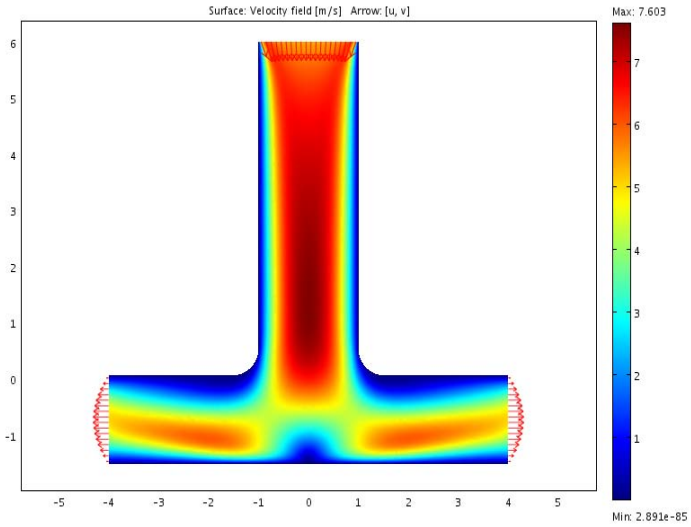

FIG. 7.20 – Initialisation de l'algorithme - cas de l'inspiration

La figure 7.21 représente une fois de plus les différentes valeurs du volume et du critère, en fonction des itérations de l'algorithme.

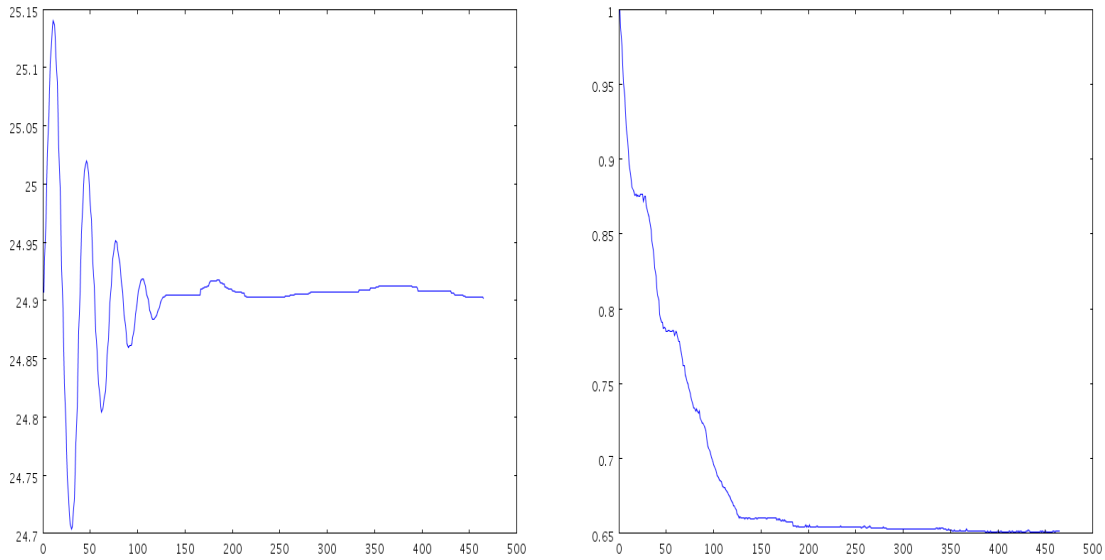

FIG. 7.21 – À gauche, la variation du volume et à droite, la variation du critère J (Inspiration)

Le nombre d'itérations avant convergence de l'algorithme est plus important que dans le cas de l'inspiration. Rappelons de plus que ce calcul est très long, car la recherche du pas variable nécessite à chaque itération de résoudre plusieurs problèmes de Navier-Stokes.

La dernière géométrie calculée par l'algorithme, proche de l'optimum (numérique) de ce problème, est donnée sur la figure 7.22.

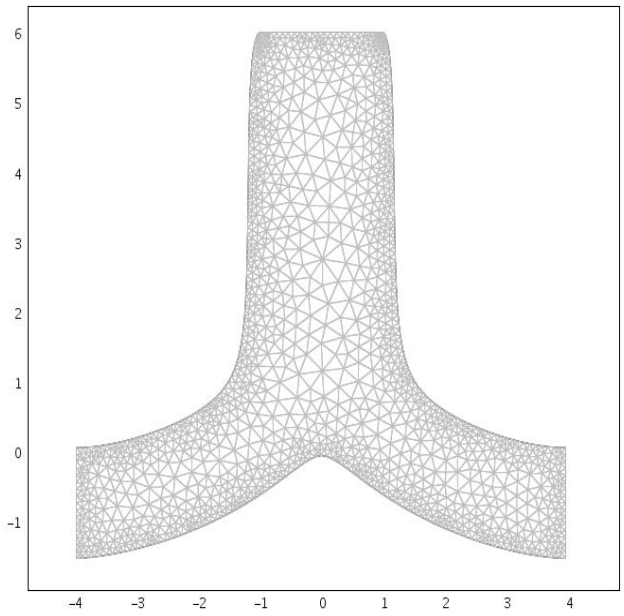

FIG. 7.22 – La géométrie finale obtenue dans le cas de l'inspiration

On remarque ici qu'à convergence de l'algorithme, les géométries finales ne sont pas les mêmes selon que l'on s'est placé dans le cas de l'inspiration ou de l'expiration. Cela peut signifier que nous n'avons pas choisi le bon critère, ou bien qu'une approche multicritère donnerait peut-être des géométries finales similaires pour l'inspiration et l'expiration.

Nous resterons prudents quant à la notion d'optimum, car nous n'avons pas prouvé son existence. Dans le meilleur des cas, nous pouvons espérer que le calcul de l'énergie dans la géométrie « finale » donne une bonne approximation de la borne inférieure de l'énergie dans la classe de domaines admissibles considérée. Cela étant, il est également possible qu'elle retourne un point selle du Lagrangien augmenté qui n'est pas l'optimum cherché. C'est ce qui semble se produire ici. En effet, appelons $\Omega_{f,\text{inspi}}$, la géométrie finale obtenue à l'aide de l'algorithme du Lagrangien augmenté dans le cas de l'inspiration, et $\Omega_{f,\text{expi}}$, celle obtenue dans le cas de l'expiration. Dans cette dernière géométrie, si l'on modifie les conditions à l'entrée de sorte que l'on se place dans le cas de l'inspiration, et que l'on évalue le critère, on trouve :

$$\begin{aligned} J(\Omega_{f,\text{expi}}) &= 675,169 \\ J(\Omega_{f,\text{inspi}}) &= 842,6835. \end{aligned}$$

$\Omega_{f,\text{expi}}$ est donc meilleure que $\Omega_{f,\text{inspi}}$, y compris dans le cas de l'inspiration, au sens où

$$J(\Omega_{f,\text{expi}}) < J(\Omega_{f,\text{inspi}}).$$

7.3 Perspectives proches

L'implémentation de l'algorithme pour traiter des géométries en 2 dimensions a donné des résultats assez satisfaisants, et on a observé sa convergence dans la plupart des cas. Son défaut principal réside dans le fait qu'il nécessite un grand nombre de résolutions de systèmes de type Navier-Stokes, ce qui rend le calcul souvent très coûteux.

Des simulations en 3 dimensions sont en cours et devraient nous confirmer les résultats constatés pendant l'étude des cas 2D.

À terme, il pourrait être également intéressant de confronter le critère que nous avons obtenu à un autre critère type « perte de charge », faisant intervenir la pression du fluide.

Conclusion et perspectives

Dans ce manuscrit de thèse, nous avons essayé de comprendre l'origine de certaines formes du vivant, plus précisément de certaines fibres nerveuses de type axone ou dendrite dans la première partie, puis de la partie supérieure de l'arbre bronchique dans la seconde.

La première partie de ce travail a été inspirée par les travaux de Steven Cox (Rice University, Texas), mathématicien ayant lui-même travaillé sur la question de la modélisation et de l'analyse des équations de transport du message électrique à travers une fibre nerveuse. Les deux critères envisagés ont été choisis à partir de ses publications et au terme d'une discussion avec lui. Nous avons recherché la forme de la fibre :

- minimisant l'atténuation du message au cours du temps dans le chapitre 3.
- minimisant l'atténuation du message entre le début et la fin de la fibre (atténuation en espace) dans le chapitre 4.

Récapitulons les résultats obtenus sous forme d'un tableau.

	Fibre connectée au soma	Fibre connectée à d'autres fibres
Atténuation temporelle	une solution unique : le cylindre	pas de solution
Atténuation en espace	une solution unique : le cylindre	une solution unique : le cylindre

Dans le cas d'une fibre connectée à d'autres fibres, il a été non seulement possible de montrer que le problème consistant à rechercher la forme qui minimise l'atténuation temporelle du message électrique, n'a pas de solution, mais également d'exhiber des suites minimisantes au comportement singulier, et fort peu réalistes d'un point de vue biologique.

Au terme de ce travail, il n'est pas aberrant d'affirmer que la forme cylindrique d'une fibre nerveuse peut s'expliquer comme étant celle qui minimise l'atténuation du message entre le début et la fin de la fibre. C'est une réponse possible à notre problématique initiale, mais ça n'est bien sûr pas la seule, et d'autres interprétations des résultats mathématiques que nous avons obtenus seraient possibles. Nos objectifs initiaux ont été atteints puisque nous sommes parvenus à résoudre de façon théorique les quatre problèmes d'optimisation (correspondant à l'optimisation de deux critères pour deux modèles de fibres) que nous nous étions fixés.

La deuxième partie de ce travail a été initiée par des discussions avec Yvon Maday (Laboratoire Jacques Louis Lions, Paris), responsable d'une ACI sur le poumon de septembre 2003 à septembre 2006, et Bertrand Maury (Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud), tous deux très au fait des questions relatives à sa modélisation. Ils nous ont proposé plusieurs critères plausibles, parmi lesquels l'énergie de dissipation. Benjamin Mauroy (Université Paris 7), avec qui les résultats numériques de cette thèse ont été obtenus, nous a également fait profiter de ses connaissances sur ces questions préliminaires et essentielles à notre travail.

Le résultat théorique principal de cette partie est présenté dans le chapitre 6. On montre que le cylindre ne minimise pas l'énergie de dissipation d'un écoulement régi par un système de Stokes ou Navier-Stokes lorsque le profil des vitesses à l'entrée est supposé parabolique, qu'on impose des conditions sur les contraintes en sortie et des conditions de non glissement sur la paroi latérale. On a vérifié que ce résultat était vrai en deux et trois dimensions.

Nous avons illustré ce résultat dans le chapitre 7 et proposé des simulations sur l'arbre bronchique.

Ce sujet est riche de questions difficiles, et beaucoup d'interrogations restent encore sans réponse. Voici quelques pistes de recherche qu'il serait intéressant de développer à plus ou moins court terme :

- **Compléments d'étude du critère présenté dans ce manuscrit (minimiser l'énergie de dissipation).**

  Dans le cas de l'optimisation de la forme d'un tube, il serait intéressant d'obtenir des informations sur les propriétés de symétrie de l'optimum. On sait que le minimiseur, s'il est régulier, est symétrique par rapport à un plan passant par l'axe vertical. Peut-on espérer mieux, par exemple une symétrie cylindrique ? Les résultats présentés dans la section 6.5.2 dans le cas où le fluide est régi par les équations de Stokes semblent indiquer qu'on doit s'attendre uniquement à une symétrie par rapport à un plan.

- **Étude d'un autre critère, par exemple la perte de charge.**

  Yvon Maday nous a également proposé d'étudier le critère suivant, représentant la perte de charge entre l'entrée et la sortie d'un conduit :

$$J(\Omega) \overset{\text{déf}}{=} \int_S p(s)\mathrm{d}s - \int_E p(s)\mathrm{d}s = \int_{E\cup S} p n_3 \mathrm{d}s.$$

  L'étude théorique de ce critère a été débutée : elle consiste à proposer un cadre fonctionnel dans lequel le problème adjoint de Navier-Stokes, solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mu(\triangle \mathbf{v} + \nabla \mathrm{div}\ \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \nabla q = 0 & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = \varphi & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{v} = \mathbf{0} & \mathbf{x} \in E \cup \Gamma \\ -q\mathbf{n} + \mu\varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{v} - 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \mathbf{x} \in S. \end{array}\right. \tag{7.7}$$

  où φ désigne la distribution définie sur $H^1(\Omega)$ par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_S f\mathrm{d}s - \int_E f\mathrm{d}s, \end{array}$$

  est bien posé.
  Nous avons de plus évalué la dérivée de forme d'un tel critère en introduisant comme précédemment un état adjoint. Les mêmes problématiques que celles qui ont été soulevées dans les chapitres 6 et 7 se posent. Il est également naturel de se demander si les techniques utilisées pour implémenter numériquement l'optimisation du critère « énergie de dissipation » s'adapteront à ce nouveau critère.
  Ces travaux seront poursuivis dans les mois à venir et devraient permettre d'ouvrir une discussion sur la pertinence et le choix des critères adaptés à notre modèle d'écoulement de l'air au sein de l'arbre bronchique.

Bibliographie

[1] Grégoire Allaire. *Conception optimale de structures*, volume 58 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. With the collaboration of Marc Schoenauer (INRIA) in the writing of Chapter 8.

[2] Samuel Amstutz. Augmented lagrangian for cone constrained topology optimization. *Prépublication no. 80, Laboratoire d'Analyse Non-Linéaire et Géométrie, Université d'Avignon, 2008.*

[3] G. Arumugam and O. Pironneau. On the problems of riblets as a drag reduction device. *Optimal Control Appl. Methods*, 10(2) :93–112, 1989.

[4] Catherine Bandle. Extremal problems for eigenvalues of the Sturm-Liouville type. In *General inequalities, 5 (Oberwolfach, 1986)*, volume 80 of *Internat. Schriftenreihe Numer. Math.*, pages 319–336. Birkhäuser, Basel, 1987.

[5] Alain Bensoussan, Giuseppe Da Prato, Michel C. Delfour, and Sanjoy K. Mitter. *Representation and control of infinite dimensional systems.* Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2007.

[6] J. Frédéric Bonnans, J. Charles Gilbert, Claude Lemaréchal, and Claudia A. Sagastizábal. *Numerical optimization.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. Theoretical and practical aspects.

[7] Franck Boyer and Pierre Fabrie. *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, volume 52 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[8] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[9] C.-H. Bruneau and P. Fabrie. Effective downstream boundary conditions for incompressible navier-stokes equations. *Int. J. for Num. Methods in Fluids*, 19(8) :693–705, 1994.

[10] C.-H. Bruneau and P. Fabrie. New efficient boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations : a well-posedness result. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 30(7) :815–840, 1996.

[11] Denise Chenais. On the existence of a solution in a domain identification problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 52(2) :189–219, 1975.

[12] Guy Cohen. *Convexité et optimisation.* Lecture notes, École Nationale des ponts et chaussées.

[13] Carlos Conca. Approximation de quelques problèmes de type Stokes par une méthode d'éléments finis mixtes. *Numer. Math.*, 45(1) :75–91, 1984.

[14] Steven Cox and Robert Lipton. Extremal eigenvalue problems for two-phase conductors. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136(2) :101–117, 1996.

[15] Steven J. Cox and Jay H. Raol. Recovering the passive properties of tapered dendrites from single and dual potential recordings. *Math. Biosci.*, 190(1) :9–37, 2004.

[16] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.* INSTN : Collection Enseignement. [INSTN : Teaching Collection]. Masson, Paris, 1988. Évolution : numérique, transport. [Evolution : numerical methods, transport], Reprint of the 1985 edition.

[17] J. C. De Los Reyes and R. Griesse. State-constrained optimal control of the three-dimensional stationary Navier-Stokes equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 343(1) :257–272, 2008.

[18] M. C. Delfour and J.-P. Zolésio. *Shapes and geometries*, volume 4 of *Advances in Design and Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001. Analysis, differential calculus, and optimization.

[19] G. Doğan, P. Morin, R. H. Nochetto, and M. Verani. Discrete gradient flows for shape optimization and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(37-40) :3898–3914, 2007.

[20] Yuri Egorov and Vladimir Kondratiev. *On spectral theory of elliptic operators*, volume 89 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1996.

[21] Joseph Ercolano and Martin Schechter. Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :83–105, 1965.

[22] Eduard Feireisl. Shape optimization in viscous compressible fluids. *Appl. Math. Optim.*, 47(1) :59–78, 2003.

[23] C. Fetita, A. Le Hyaric, S. Mancini, D. Perchet, F. Prêteux, M. Thiriet, and L. Vial. An image-based computational model of oscillatory flow in the proximal part of tracheobronchial trees. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 8(4) :279–293, 2005.

[24] Giovanni P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. I and II*, volume 38 and 39 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer-Verlag, New York, 1994. Nonlinear steady problems.

[25] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[26] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.

[27] Pascal Hébrard and Antoine Henrot. A spillover phenomenon in the optimal location of actuators. *SIAM J. Control Optim.*, 44(1) :349–366 (electronic), 2005.

[28] Antoine Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[29] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes*, volume 48 of *Mathématiques et Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[30] Antoine Henrot and Yannick Privat. The optimal shape of a pipe. *to appear*.

[31] Antoine Henrot and Yannick Privat. Shape minimization of dendritic attenuation. *Appl. Math. Optim.*, 57(1) :1–16, 2008.

[32] Antoine Henrot and Yannick Privat. Une conduite cylindrique n'est pas optimale pour minimiser l'énergie dissipée par un fluide. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 346(1) :1057–1061, 2008.

[33] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current ans its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117 :500–544, 1952.

[34] V. K. Jirsa and H. Haken. Field theory of electromagnetic brain activity. *Physical Review Letters*, 77 :960–963, 1996.

[35] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.

[36] H. Kitakoa, T. Ryuji, and B. Suki. A three-dimensional model of the human pulmonary acinus. *J. Appl. Physiol.*, 88 :2260–2268, 2000.

[37] M. G. Krein. On certain problems on the maximum and minimum of characteristic values and on the Lyapunov zones of stability. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 1 :163–187, 1955.

[38] B. Mauroy. 3d hydronamics in the upper human bronchial tree : interplay between geometry and flow distribution. *Fractals in Biology and Medicine*, IV, 2005.

[39] B. Mauroy, M. Filoche, J. S. Jr. Andrade, and B. Sapoval. Interplay between geometry and flow distribution in an airway tree. *Physical Review Letters*, 90 :1–4, 2003.

[40] B. Mauroy, M. Filoche, E. R. Weibel, and B. Sapoval. An optimal bronchial tree may be dangerous. *Nature*, 427 :633–636, 2004.

[41] Benjamin Mauroy. *Hydrodynamique dans le poumon, relations entre flux et géométries*. Thèse de doctorat, ENS Cachan. 2004.

[42] B. Maury, N. Meunier, A. Soualah, and L. Vial. Outlet dissipative conditions for air flow in the bronchial tree. In *CEMRACS 2004—mathematics and applications to biology and medicine*, volume 14 of *ESAIM Proc.*, pages 201–212 (electronic). EDP Sci., Les Ulis, 2005.

[43] B. Mohammadi and O. Pironneau. *Applied shape optimization for fluids*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2001. Oxford Science Publications.

[44] Charles B. Morrey, Jr. *Multiple integrals in the calculus of variations*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 130. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.

[45] François Murat and Jacques Simon. *Étude de problèmes d'optimal design*, volume 41 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[46] O. Pironneau and G. Arumugam. On riblets in laminar flows. In *Control of boundaries and stabilization (Clermont-Ferrand, 1988)*, volume 125 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 53–65. Springer, Berlin, 1989.

[47] Pavel I. Plotnikov and Jan Sokolowski. Shape optimization for Navier-Stokes equations. In *Control of coupled partial differential equations*, volume 155 of *Internat. Ser. Numer. Math.*, pages 249–267. Birkhäuser, Basel, 2007.

[48] Y. Privat. La forme optimale des neurones. *La recherche*, pages 82–83, 2007.

[49] Y. Privat and M. Sigalotti. The squares of the laplacian-dirichlet eigenfunctions are generically linearly independent. *to appear*.

[50] Yannick Privat. The optimal shape of an axon tapered at both ends. article soumis.

[51] W. Rall. Theory of physiological properties of dendrites. *Ann, NY Acad Sciences*, 96, 1962.

[52] W. Rall. *An historical perspective on modeling dendrites*. G. Stuart, N. Spruston and M. Häusser, editors, *Dendrites*, Oxford University Press, 2nd edition, 2008. chapter 12.

[53] W. Rall and H. Agmon-Snir. *Cable theory for dendritic neurons*. Methods in Neuronal Modeling. C. Koch, I. Segev , editors, MIT, Cambridge, MA, 1998. second edition.

[54] B. Sapoval, M. Filoche, and Weibel E. R. Smaller is better but not too small : A physical scale for the design of the mammalian pulmonary acinus. *PNAS*, 99(16) :10411–10416, 2002.

[55] Jan Sokołowski and Jean-Paul Zolésio. *Introduction to shape optimization*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Shape sensitivity analysis.

[56] Roger Temam. *Navier-Stokes equations*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition.

[57] Marius Tucsnak and Weiss George. *Observation and control of operator semigroup*. à paraître.

[58] Johann Walter. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. *Math. Z.*, 133 :301–312, 1973.