UNIVERSITE Paul Verlaine - METZ
S.C.D.
N inv
Cote S/T 08/13
Loc

Laboratoire de Mathematiques et Applications de Metz

THESE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE "PAUL VERLAINE" DE METZ

spécialité : MATHEMATIQUES
mention : MATHEMATIQUES APPLIQUEES

titre : ANALYSE ET MODELISATION DE FORMES OPTIMALES

présentée et soutenue publiquement le 28 novembre 2008 par

DURUS Ioana Geanina

devant le jury composé de

Giuseppe BUTTAZZO.....Rapporteur
Frédéric HECHT.....Rapporteur
Bernhard BURGETH.....Examinateur
François JOUVE.....Examinateur
Jan SOKOLOWSKI.....Examinateur
Zakaria BELHACHMI.....Co-Directeur
Dorin BUCUR.....Directeur



AVERTISSEMENT

Cette thèse est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et disponible à l'ensemble de la communauté universitaire élargie.
Elle est soumise à la propriété intellectuelle de l'auteur au même titre que sa version papier. Ceci implique une obligation de citation, de référencement dans la rédaction de tous vos documents.
D'autre part, toutes contrefaçons, plagiats, reproductions illicites entraînent une poursuite pénale.
Enfin, l'autorisaton de diffusion a été accordée jusqu' à nouvel ordre.

- Contact SCD Metz : daniel.michel@scd.univ-metz.fr

Ecrire au doctorant:

Code de la Proriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Proriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Table des matières

1 Introduction 3

2 Outils théoriques en optimisation de formes 7
- 2.1 Topologies sur les domaines de $\mathbb{R}^N$ . . . 7
  - 2.1.1 Topologie "char" . . . 7
  - 2.1.2 La topologie de Hausdorff . . . 10
- 2.2 Continuité par rapport au domaine . . . 15
- 2.3 Une étude plus fine des espaces de Sobolev . . . 18
- 2.4 Rearrangement de Schwarz . . . 26

3 La valeur propre de conductivité 29
- 3.1 Introduction . . . 29
- 3.2 The Laplacian with constant boundary conditions . . . 31
- 3.3 The conductivity eigenvalue problem . . . 39
- 3.4 The isoperimetric inequality for the first conductivity eigenvalue . . . 41
- 3.5 Numerical results . . . 43

4 Simulation numérique du décollement d'une membrane 47
- 4.1 Introduction . . . 47
- 4.2 Relaxation pour le problème de Dirichlet . . . 48
- 4.3 Evolution de mesures . . . 52
- 4.4 Evolution de domaines-dissipation proportionnelle à la mesure de surface . 54
- 4.5 Résultats numériques . . . 57
  - 4.5.1 Evolution de mesures-processus de relaxation . . . 57
  - 4.5.2 Evolution des domaines . . . 64
- 4.6 Optimisation par stratégie évolutionnaires . . . 74
  - 4.6.1 Préliminaires . . . 74
  - 4.6.2 Strategies d'évolution pour le décollement de la membrane . . . 76
  - 4.6.3 Représentation des formes et fonction objectif . . . 76

5 Étude numérique de problèmes de localisation optimale 89
- 5.1 Choix optimale des pixels d'appui pour l'interpolation d'image . . . 89
  - 5.1.1 Cas linéaire . . . 90
  - 5.1.2 Cas non linéaire . . . 94
- 5.2 Résultats numériques pour la compression d'images . . . 98

5.2.1 Principe général de fonctionnement d'un algorithm génétique 98
5.2.2 Compression des images par algorithmes génétiques 100
5.2.3 Strategies mixtes pour la localisation optimale des pixels d'appui pour l'interpolation d'image : utilisation de la Γ-limite 106
5.2.4 Résultats numériques- cas non-linéaire 110
5.3 Minimisation de la compliance 115
5.3.1 Résultats numériques pour la minimisation de la compliance 117
5.4 Maximisation de la valeur propre du Laplacien 121
5.4.1 Résultats numériques pour la maximisation de la première valeur propre du Laplacien 123

Chapitre 1

Introduction

De nombreux problèmes issus de la physique, de la biologie, de la mécanique, etc. sont modélisés par des systèmes d'équations associés à des opérateurs différentiels, dans de domaines géométriques qui varient (domaines en mouvement), ou qui sont des inconnues du problème. Quelquefois, la variation de la géométrie est régulière, i.e. donnée par un champ de vecteurs régulier, et d'autres fois, cette variation peut changer la topologie du domaine géométrique : creation de trous, changement de dimension. Des exemples de ce type de problèmes sont présents dans divers secteurs industriels : l'aéronautique (la reduction de la traînée, l'amelioration de la portance), l'automobile (le dimensionnement de pièces mécaniques, l'optimisation d'un aimant inclus dans le système d'injection), la mécanique de structures (le calcul de structures composites optimales), l'imagerie médicale (l'identification de tumeurs)... Pour plus d'examples, ainsi que pour plus de détails nous referons à [42], [15],[44], [57],[65].

La caractéristique de base de ces problèmes est que les objets recherchés dans le processus d'optimisation sont des formes (des domaines de $\mathbb{R}^n$), au lieu de fonctions, comme c'est souvent le cas dans le calcul des variations. Pour certains problèmes, cette contrainte implique la non existence de solution. Ceci peut être remédiée soit en imposant des restrictions d'ordre géométrique à la classe des domaines admissible, soit en permettant des formes généralisées, et dans ce cas on est amené a introduire une formulation relaxé appropriée du problème. Du point de vue théorique, la relaxation est aussi un outil utilisé pour prouver l'existence d'une solution classique. L'idee est la suivante : si on ne réussit pas à prouver l'existence d'un domaine optimal par des techniques classiques du calcul de variations, alors on étend le problème dans un cadre relaxé, pour lequel l'existence d'un "objet" optimal sera obtenue sans difficultés. Ensuite, il faut démontrer que cet objet est un domaine classique.

Pour la simulation numérique de ces problèmes, les méthodes classique telles que les méthodes de variation de frontière continuent à être utilisées. Celles-ci sont souvent liées à des méthodes de type gradient basées sur la dérivée de forme. Ces méthodes comportent des inconvénients parmi lesquels on peut citer l'absence de changement de topologie (apparition de trous, rupture de connexité, ...). De nouvelles méthodes plus souples mais ne remédiant pas à tous les inconvénients cités se sont développés comme "level set", Fast Matching, etc. La frontière de la forme cherchée est représenté par une ligne de niveau d'une fonction ψ. L'évolution de cette ligne de niveau permet alors la capture de

la forme. Un des avantages principaux de ces méthodes est la suppression du remaillage dans le processus d'iteration. D'autre méthodes comme le gradient topologique combine les avantages d'une méthode de descente avec la possibilité de changer de topologie.

Toutes les méthodes citées plus haut font intervenir le gradient de la fonctionnelle à minimiser. L'optimisation peut être entreprise aussi avec des méthodes qui ne nécessitent pas le gradient de la fonctionnelle : les algorithmes évolutionnaires, qui sont basés sur la théorie de la selection naturelle. Contrairement aux algorithmes de type gradient qui peuvent converger vers des minima locaux, les algorithmes évolutionnaires peuvent les éviter. L'inconvenient de ces méthodes est qu'il faut évaluer la fonction coût un grand nombre de fois, et donc le temps de calcul devient assez important. L'originalité de notre contribution est la méthode de représentation des formes.

L'objet de ce travail de thèse est l'étude théorique et numérique des quelques problèmes relevants de l'analyse et de la modélisation de forme. Les problèmes considérés sont issus d'applications modernes comme la modélisation de décollement de membrane par mouvements minimisants, des inégalités isopérimètriques et de traitement d'image. En particulier nous nous intéressons à l'implementation des algorithmes les plus appropriés pour résoudre de tels problèmes.

La thèse est divisée en quatre chapitres.

Dans le **chapitre II**, intitulé "Outils théoriques en optimisation de formes", on présente le contexte d'un problème d'optimisation de forme. C'est un rappel des différentes notions pre-requises pour résoudre un problème d'optimisation de forme telles que les topologies sur les domaines de $\mathbb{R}^N$, la continuité par rapport au domaine pour le problème de Dirichlet, la capacité et finalement les propriétés géométriques de l'optimum.

Au **chapitre III**, intitulé "La valeur propre de conductivité", on étudie les valeurs propres du Laplacien, considéré dans un ouvert de mesure finie, avec conditions aux bord de type conductivité, i.e. constantes localement ou globalement, avec constantes libres. Cet opérateur intervient dans le processus de détection de défauts par mesures au bord [35] et a fait l'objet d'une première analyse en [38], dans le cadre globalement constant. Nous étudions des propriétés qualitatives des valeurs propres en relation avec la géométrie, des inégalités isopérimètriques générales par réarrangement et/ou Γ-convergence, et nous implémentons un algorithme génétique pour déterminer les formes minimisantes pour les valeurs propres d'ordre petit, à mesure constante. La génération des formes que nous proposons est basée sur les niveaux des séries de Fourier tronquées, contrôlées par les coefficients.

Le **chapitre IV**, intitulé "Simulation numérique du décollement d'une membrane", contient un étude numérique du processus de décollement d'une membrane adhésive soumise à une force dépendante du temps. Notre travail est basé sur les modèles proposés dans [16] par Bucur , Buttazzo et Lux. Le processus de décollement de la membrane est étudié dans le cadre de mouvements minimisants. Suivant la distance de dissipation (l'énergie dépensé pour le décollement de la membrane) on est amené à étudier deux modèles : évolution de domaines et évolution de mesures. Notre travail consiste dans l'étude numérique de ces modèles. Dans un premier temps on propose des algorithmes locaux décrivant la deformation locale de la membrane. Il s'agit des méthodes de gradient pour l'evolution des mesures et des méthodes de lignes de niveaux basées sur la dérivée

par rapport au domaine pour l'évolution de domaines. Les résultats qu'on obtient dans ce cas ne sont pas loin de la réalité dans le sens que, la membrane reste dans un état metastable avant d'accumuler suffisamment d'énergie pour sauter les barrières d'énergie. Dans un deuxième temps, pour échapper aux minimums locaux on fait appel aux algorithmes basés sur des mécanismes stochastiques : les strategies évolutionnaires.

Dans le **chapitre V**, intitulé "Étude numérique de problèmes de localisation optimale", on s'intéresse à l'analyse numérique de différents problèmes de localisation optimale. Le premier problème étudié est le problème du choix optimal des pixels d'appui pour l'interpolation d'image. L'idée est d'extraire l'essentiel de l'image, c'est à dire les pixels les plus "importants" (par exemple 10%) et d'interpoler les autres en utilisant une EDP appropriée. Dans ce contexte, deux questions fondamentales se posent :

- quelle est l'EDP la plus adaptée pour ce but ;
- comment on peut trouver les "bons" pixels qui donnent la meilleure reconstruction.

Un autre problème d'optimisation de forme étudié dans ce chapitre est la minimisation de la compliance. Étant donné un nombre $n \in \mathbb{N}$, et $r_n > 0$ on doit chercher la localisation optimale de n boules $(B(x_i, r_n))_{i=1,\dots,n)}$ qui minimisent la compliance sur $\Omega \setminus \cup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, r_i)}$. Il a été conjecturé par G. Buttazzo, que pour α petit, la distribution optimale de disques est donnée par les sommets d'un pavage de triangles équilatéraux (voir [19]). En utilisant un algorithme basé sur la dérivée topologique, ansi que la méthode de recuit simulé on retrouve une justification numérique de cette conjecture.

Le dernier problème étudié est la maximisation de la première valeur propre du Laplacien dans un domaine simplement connexe qui contient N trous circulaires, chacune de rayon $\varepsilon << 1$. On considère des conditions de type Neumann sur la frontière du domaine et des conditions de type Dirichlet sur le bord du N trous. Pour ce problème, la dérivée topologique ne fonctionne pas et les résultats présentés sont obtenus avec la méthode du recuit simulé.

Chapitre 2

Outils théoriques en optimisation de formes

Ce chapitre est destiné à rappeler les outils théoriques d'un problème d'optimisation de forme. Nous en profiterons aussi pour définir certaines notions et les notations utilisées par la suite de cette thèse.

En général, un problème d'optimisation de formes s'écrit sous la forme

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) \tag{2.0.1}$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un ensemble de parties (domaines) de $\mathbb{R}^N$, appelé ensemble de domaines admissibles et J est une fonctionnelle définie sur $\mathcal{U}_{ad}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par la suite on va brièvement presenter les ingrédients principaux pour l'étude d'un tel problème : topologies sur les domaines de $\mathbb{R}^N$, continuité par rapport au domaine pour le problème de Dirichlet, capacité et finalement les propriétés géométriques de l'optimum où on s'arrête sur la symétrisation de Schwarz. Pour plus de détails sur les résultats rappelés ici, on renvoie à [42], [66], [30], [2],[57].

2.1 Topologies sur les domaines de $\mathbb{R}^N$

2.1.1 Topologie "char"

Soit D un ouvert, borné de $\mathbb{R}^N$.

On note $X := \{M \subseteq D, M$ mesurable par rapport à la mesure de Lebesque$\}$.

Définition 2.1.1 *Soient M_1, $M_2 \in X$. La distance char sur X est définie par*

$$d_{char}(M_1, M_2) = \int_D |1_{M_1} - 1_{M_2}| dx$$

où $1_M : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction caractéristique, $1_M(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in M \\ 0, & si\ x \in D \setminus M. \end{cases}$

Remarque 2.1.2 On note que d_{char} n'est pas une vrai distance , car il existe deux ensemble, M_1 et M_2, $M_1 \neq M_2$ tels que $d_{char}(M_1, M_2) = 0$. À voir l'exemple ci dessous (Figure 2.1) dans lequel $1_{M_1} = 1_{M_2}$ presque partout (M_1 et M_2 diffèrent par un ensemble de mesure négligeable).

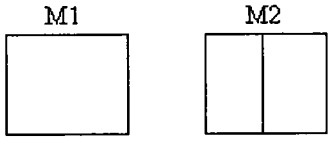


FIG. 2.1 – Exemple pour la convergence d_{char}

Pour corriger ce défaut on introduit une relation d'équivalence sur X. On dit que $M_1 \mathcal{R} M_2$ si $1_{M_1} = 1_{M_2}$ presque partout. Par conséquent d_{char} devient une distance sur l'espace quotient $X/\mathcal{R}$.

Remarque 2.1.3 L'espace (X, d_{char}) n'est pas compact.

Pour vérifier cette affirmation, il suffit de trouver une suite d'ensemble M_n et montrer que il n'existe pas une sous suite (M_{n_k}) qui converge vers un ensemble $M \in X$, pour la distance d_{char}.

Soit $M_n = 1_{\cup_{k=0}^{n}[\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}]}$. On suppose que (X, d_{char}) est compact et on veut montrer que il existe une sous suite (M_{n_k}) et un ensemble $M \in X$ tel que $1_{M_n} \longrightarrow^{L^1} 1_M$. On note que $1_{M_n} \rightharpoonup \frac{1}{2}$ faiblement dans L^2. Il résulte que

$$\int_{[0,1]} 1_{M_n} \phi dx \longrightarrow \int_{[0,1]} \frac{1}{2} \phi dx.$$

Si $\int |1_{M_n} - 1_M| dx \longrightarrow 0$ il résulte que $\int |1_{M_n} - 1_M|^2 dx \longrightarrow 0$, c'est-à-dire $1_{M_n} \xrightarrow{L^2} 1_M$. Par conséquent, $1_M = \frac{1}{2}$ ce qui est une contradiction.

Proposition 2.1.4 *Si (A_n) et A sont des parties mesurables de D telles que $1_{A_n} \rightharpoonup 1_A$ faiblement dans $L^1(D)$, alors pour tout $p \in [1, \infty[$ on a $1_{A_n} \longrightarrow 1_A$ fortement dans $L^p(D)$.*

Preuve On sait que si $f_n \xrightarrow{L^2} f$ alors $f_n \xrightarrow{L^2} f$ si et seulement si $\| f_n \|_{L^2} \longrightarrow \| f \|_{L^2}$.

Si $1_{A_n} \rightharpoonup 1_A$ faiblement dans $L^2(D)$ alors pour tout $\phi \in L^2(D)$ on a

$$\int_D 1_{A_n} \phi dx \longrightarrow \int_D 1_A \phi dx. \tag{2.1.1}$$

Soit $\phi = 1$. En remplaçant dans (2.1.1) on obtient $\int_D 1_{A_n} \cdot 1 dx \longrightarrow \int_D 1_A \cdot 1 dx$, ce qui est équivalent à $\int_D 1_{A_n}^2 dx \longrightarrow \int_D 1_A^2 dx$. On a obtenu la convergence forte en $L^2(D)$, qui implique aussi la convergence en $L^1(D)$. En effet, si $|1_{A_n} - 1_A| \neq 0$ alors $|1_{A_n} - 1_A| = 1$, ce qui est en contradiction avec la convergence en $L^2(D)$. De la même façon on obtient la convergence en $L^p(D)$.

Pour démontrer l'existence de la solution dans un problème d'optimisation de formes, une propriété de compacité de la suite minimisante pour la topologie considérée est nécessaire. Nous allons voir que supposer le périmètre borné uniformément apporte une propriété de compacité.

Définition 2.1.5 *Soit D un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $M \subseteq D$ un ensemble mesurable. On appelle le périmètre généralise (ou périmètre De Giorgi) de M dans D le nombre*

$$P_D(M) := \sup\{\int_M divV dx |\ V \in C_c^\infty(D, \mathbb{R}^N),\ ||V||_\infty \leq 1\}. \tag{2.1.2}$$

Remarque 2.1.6 Si on suppose $D = \mathbb{R}^N$ et M est un ouvert régulier, alors $P_{\mathbb{R}^N}(M) = |\partial M|$. En effet, en appliquant la formule de Green et en tenant compte du fait que sur la frontière $V(x) = n(x)$ où n est la normale extérieure on obtient

$$P_{\mathbb{R}}^N(M) = \sup_{V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), ||V|| \leq 1} \int_M divV = \sup_{V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), ||V|| \leq 1} \int_{\partial M} Vnd\sigma = \int_{\partial M} d\sigma = |\partial M|.$$

Si $D \neq \mathbb{R}^N$ alors on distingue deux situation. Dans le cas où $\overline{M} \subset D$ alors on a $P_D(M) = P_{\mathbb{R}}^N(D)$. Dans le cas contraire, c'est-à-dire, $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$, alors on a $P_D(M) = |\partial M| \setminus |\partial M \cap \partial D|$.

Proposition 2.1.7 *Soit D un ouvert borné et (A_n), A des parties mesurables de D. Si $A_n \xrightarrow{char} A$, alors*

1. $|A| = \lim_{n \longrightarrow \infty} |A_n|$;
2. $P_D(A) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} P_D(A_n)$.

Preuve La première égalité est évidente car $1_{A_n} \xrightarrow{L^1} 1_A$. On va montrer la semi-continuité inférieure du périmètre. Soit $V \in C_c^\infty(D, \mathbb{R}^N)$. En prenant V comme fonction test pour la convergence char de A_n vers A on obtient $\int_D 1_{A_n} divV dx \longrightarrow \int_D 1_A divV dx$, ce qui est équivalent à $\int_A divV dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{A_n} divV dx$. De la définition du périmètre on a $\int_{A_n} divV dx \leq \sup_V \int_{A_n} divV = P_D(A_n)$. On a obtenu

$$\int_A divV dx \leq P_D(A_n).$$

ce qui implique en passant à la limite

$$\int_A divV \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} P_D(A_n).$$

En prenant le supremum dans le membre de gauche il résulte

$$P_D(A) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} P_D(A_n).$$

Le théorème qui nous fournit un résultat de compacité sous l'hypothèse de contraintes sur le périmètre est le suivant.

Théorème 2.1.8 *Soit D un ouvert borné, Lipschitz (régulière), et $(A_n)_n$ une suite de parties mesurables de D. On suppose qu'il existe c tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P_D(A_n) \leq c.$$

Alors, il existe une sous suite $(A_{n_k})_k$ et il existe un ensemble A mesurable, $A \subseteq D$ tel que $A_{n_k} \xrightarrow{char} A$ et $P_D(A) \leq c$.

2.1.2 La topologie de Hausdorff

Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.1.9 *Soit K_1 et K_2 deux fermés de $\overline{D}$. La distance de Hausdorff est définie par*

$$d_H(K_1, K_2) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |d(x, K_1) - d(x, K_2)|, \text{ où } d(x, K) = \min_{y \in K} d(x, y). \tag{2.1.3}$$

Deux exemples sont présentés graphiquement dans la figure 2.2 :

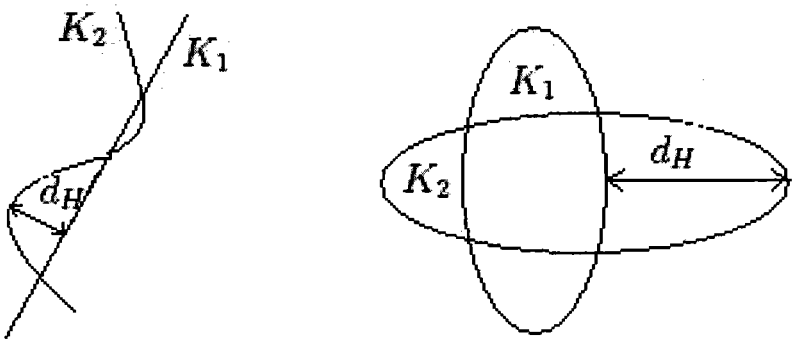


FIG. 2.2 – Distance de Hausdorff

On peut aussi définir la distance de Hausdorff par

$$d_H(K_1, K_2) = \inf\{\alpha > 0, K_2 \subseteq K_1^\alpha et K_1 \subseteq K_2^\alpha\} = \sup_{x \in K_1 \cup K_2} |d(x, K_1) - d(x, K_2)|, \tag{2.1.4}$$

où on a noté avec $K^\alpha = \cup_{x \in K} B(x, \alpha)$. La première égalité provient du fait que

$$(K_2 \subseteq K_1^\alpha) \Longleftrightarrow \sup_{x \in K_2} d(x, K_1) \leq \alpha.$$

Remarque 2.1.10 On note que la fonction $d(\cdot, K) : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lipschitzienne , avec la constante de Lipschitz égale à 1, c'est-à-dire

$$|d(x, K) - d(y, K)| \leq ||x - y||\ \ \forall x, y \in \overline{D}.$$

Soit $z \in K$. On a

$$||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| \tag{2.1.5}$$

En prenant l'infimum en z dans (2.1.5), on obtient $d(x, K) \leq ||x - y|| + d(y, K)$, d'où

$$|d(x, K) - d(y, K)| \leq ||x - y||. \tag{2.1.6}$$

Théorème 2.1.11 *Si $\mathcal{F} = \{F \subseteq \overline{D}, F$ fermé$\}$ alors $(\mathcal{F}, d_H)$ est un espace métrique compact.*

Preuve Soit $(K_n)_n$ une suite de $\mathcal{F}$. Il faut démontrer qu'il existe une sous suite convergente pour la métrique d_H. D'après la remarque 2.1.10 on a que la famille des fonctions $d(\cdot, K_n) : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est équicontinue. En plus, il existe $M = diam\overline{D}$ tel que $\forall\ x \in \overline{D}\ |d(x, K_n)| \leq M$. Du théorème de Ascoli-Arzela il résulte que, il existe une sous suite $d_{K_n}(x) := d(x, K_n)$ telle que $d_{K_n} \longrightarrow f$ uniformément dans $\overline{D}$, où $f : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Il reste à démontrer qu'il existe un ensemble $K \in \mathcal{F}$ tel que $f = d_K$.

Soit $K = f^{-1}(\{0\})$. Comme $\{0\}$ est un ensemble fermé et f est continue il résulte que l'ensemble K est fermé. Dans un premier temps on va montrer que $d(x, K) \geq f(x)$.

Soit $x \in \overline{D}$ et soit $y \in K$ tel que $d(x, K) = ||x - y||$. Comme $y \in K$ il résulte $f(y) = 0$ et par conséquent $d_{K_n}(y) \longrightarrow 0 (= f(y))$. Soit y_n une suite minimisante dans l'expression de $d_{K_n}(y)$, ce qui implique $||y_n - y|| \longrightarrow 0$. On a

$$d(x, K) = ||x - y|| = \lim_{n \longrightarrow \infty} ||x - y_n|| \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} d(x, K_n) = f(x).$$

Par conséquent $d(x, K) \geq f(x)$. Par la suite on va démontrer l'inégalité inverse, $f(x) \geq d(x, K)$. Pour cela, soit $z_n \in K_n$ tel que $d_{K_n}(x) = ||x - z_n||$. Comme $\overline{D}$ est compact et $(z_n) \in D$ il existe une sous suite , encore notée (z_n) telle que $z_n \longrightarrow z$, $z \in \overline{D}$. En tenant compte de $d_{K_n}(z_n) = 0$ ($z_n \in K_n$), $z_n \longrightarrow z$ et $d_{K_n} \longrightarrow f$, il résulte que $f(z) = 0$ et par conséquent $z \in K$. Donc, d'une part on a que $d_{K_n} = ||x - z_n|| \longrightarrow ||x - z||$ et d'autre part $d_{K_n}(x) \longrightarrow f(x)$, ce qui implique $f(x) = ||x - z||$. Mais $z \in K$, donc $||x - z|| \geq d(x, k)$. Par conséquent $f(x) \geq d(x, K)$.

Comme la distance de Hausdorff est très utilisée dans l'optimisation de formes, on va donner par la suite quelques propriétés de celle-ci.

Convergence de Hausdorff pour les fermés

- Une suite décroissante de fermés non vides converge vers son intersection ;
- Une suite croissante de fermés non vides inclus dans D converge vers la fermeture de sa réunion ;
- Si K_n^1 et K_n^2 sont deux suites telles que $K_n^1 \subseteq K_n^2$, $K_n^1 \xrightarrow{H} K_1$ et $K_n^2 \xrightarrow{H} K_2$, alors $K_1 \subseteq K_2$;
- Si K_n est une suite connexe et $K_n \xrightarrow{H} K$, alors K est connexe.

Convergence de Hausdorff complémentaire pour les ouverts

Remarque 2.1.12 Soient $\Omega_1 = B(0, 1)$ et $\Omega_2 = B(0, 1) \setminus \{0 \times [0, 1]\}$ comme dans la figure 2.3. On note que $d_H(\Omega_1, \Omega_2) = 0$.

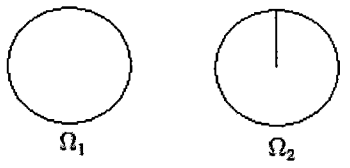


FIG. 2.3 –

Par conséquent, pour les ouverts, on va introduire à présent la distance de Hausdorff complémentaire.

Définition 2.1.13 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq D$ deux ensembles ouverts. La distance de Hausdorff complémentaire est définie par*

$$d_{H^c}(\Omega_1, \Omega_2) = d_H(\overline{D} \setminus \Omega_1, \overline{D} \setminus \Omega_2). \tag{2.1.7}$$

Parmi les propriétés de la convergence de Hausdorff complémentaire on rappelle :

- Une suite croissante d'ouverts inclus dans D converge au sens de Hausdorff complémentaire vers sa réunion ;
- Une suite décroissante d'ouverts converge en Hausdorff complémentaire vers l'intérieur de l'intersection de tous les ouverts ;
- Si Ω_n^1 et Ω_n^2 sont deux suites telles que $\Omega_n^1 \subseteq \Omega_n^2$, $\Omega_n^1 \xrightarrow{H^c} \Omega_1$ et $\Omega_n^2 \xrightarrow{H^c} \Omega_2$, alors $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$.
- La connexité n'est pas préserve.

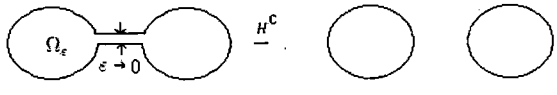


FIG. 2.4 – Connexité pour H^c

Proposition 2.1.14 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $\Omega_n \subseteq D$ une suite d'ouverts qui converge au sens de Hausdorff complémentaire vers l'ouvert $\Omega \subseteq D$. Soit $x \in \partial\Omega$, alors il existe une suite de points x_n avec $x_n \in \partial\Omega_n$ qui converge vers x.*

Preuve Soit $x \in \partial\Omega$. On suppose par l'absurde que $d(x, \partial\Omega_n) > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ et il existe une sous suite Ω_{n_k} tels que $B(x,\delta) \cap \partial\Omega_{n_k} = \emptyset$. Par conséquent, $B(x,\delta) \subseteq \Omega_{n_k}$ ou $B(x,\delta) \subseteq D \setminus \Omega_{n_k}$. Par stabilité de l'inclusion pour la convergence de Hausdorff complémentaire, il résulte que $B(x,\delta) \subseteq \Omega$ ou $B(x,\delta) \subseteq D \setminus \Omega$, ce qui est en contradiction avec $x \in \partial\Omega$.

Proposition 2.1.15 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $\Omega_n \subseteq D$ une suite d'ouverts qui converge au sens de Hausdorff complémentaire vers l'ouvert $\Omega \subseteq D$. Si K est un compact inclus dans Ω, $K \subset\subset \Omega$ alors il existe $n(K)$ tel que pour tout $n \geq n(K)$ on a $K \subset\subset \Omega_n$.*

Preuve On a

$$\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega \Leftrightarrow \overline{D} \setminus \Omega_n \xrightarrow{H} \overline{D} \setminus \Omega \Leftrightarrow d_{\overline{D}\setminus\Omega_n} \longrightarrow d_{\overline{D}\setminus\Omega}$$

uniformément dans $\overline{D}$. Soit $\delta = \min_{x\in K} d(x, \overline{D} \setminus \Omega) > 0$. Grâce à la convergence uniforme on a que il existe $n(K)$ tel que $\sup_{x\in\overline{D}} |d_{\overline{D}\setminus\Omega_n} - d_{\overline{D}\setminus\Omega}| \leq \frac{\delta}{2}$.

Soit $x \in K$. Alors

$$d_{\overline{D}\setminus\Omega}(x) - d_{\overline{D}\setminus\Omega_n}(x) \leq \frac{\delta}{2}.$$

Finalement, on obtient $\delta - \frac{\delta}{2} \leq d_{\overline{D}\setminus\Omega_n}$, donc $K \subseteq \Omega_n$.

Les deux résultats suivants donnent la liaison entre la convergence en Hausdorff complémentaire et la convergence char.

Proposition 2.1.16 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $\Omega_n \subseteq D$ une suite d'ouverts qui converge au sens de Hausdorff complémentaire vers l'ouvert $\Omega \subseteq D$. Alors :*

1. $1_\Omega \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} 1_{\Omega_n}$, *presque partout ;*
2. $|\Omega| \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} |\Omega_n|$.

Preuve 1) Soit $K \subset\subset \Omega$. Suite à la proposition 2.1.15 à partir d'un rang $n(K)$, $K \subset\subset \Omega_n$. Par conséquent, à partir de ce rang on a $1_K \leq 1_{\Omega_n}$. On passant à la limite on obtient

$$1_K \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} 1_{\Omega_n}$$

presque partout. Soit $(K_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite croissante de compacts telle que $\cup K_\varepsilon = \Omega$. Comme $1_{K_\varepsilon} \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} 1_{\Omega_n}$ et $K_\varepsilon \xrightarrow{H} \cup K_\varepsilon = \Omega$ il résulte $1_\Omega \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} 1_{\Omega_n}$ presque partout.

2) On a

$$\int_D 1_\Omega \leq \int_D \liminf_{n\longrightarrow\infty} 1_{\Omega_n}.$$

On applique le lemme de Fatou et on obtient $\int_D 1_\Omega \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_d 1_{\Omega_n}$, ce qui est équivalent à $|\Omega| \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} |\Omega_n|$.

Proposition 2.1.17 *Soit D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $\Omega_n \subseteq D$ une suite d'ouverts qui converge au sens de Hausdorff complémentaire vers l'ouvert $\Omega \subseteq D$. Alors :*

$$1_{\Omega_n} \xrightarrow{L^1} 1_\Omega \iff |\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|.$$

Preuve "$\Rightarrow$" évidente.

"$\Leftarrow$" On suppose que $|\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|$ et $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$.

Soit $K \subset\subset \Omega$. Suite à la proposition 2.1.15 à partir d'un rang $n(K)$, $K \subset\subset \Omega_n$. Alors

$$\int_D |1_{\Omega_n} - 1_\Omega| dx = \int_K |1_{\Omega_n} - 1_\Omega| dx + \int_{D\setminus K} |1_{\Omega_n} - 1_\Omega| dx \leq \int_{D\setminus K} 1_{\Omega_n} dx + \int_{D\setminus K} 1_\Omega dx$$

$$= |\Omega_n \setminus K| - |\Omega - K| = |\Omega_n| - |K| + |\Omega| - |K|.$$

On passe à la limite et on obtient

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\int_D |1_{\Omega_n}-1_\Omega|dx \leq 2(|\Omega|-|K|). \tag{2.1.8}$$

On choisi une suite (K_h) telle que $K_h \subseteq K_{h+1}$ et $\cup K_h = \Omega$. Par consquent on a

$$|\Omega|-|K_h| \longrightarrow 0. \tag{2.1.9}$$

On a obtenu

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\int_D |1_{\Omega_n}-1_\Omega|dx \leq 2(|\Omega|-|K_h|)$$

qui avec (2.1.8) et (2.1.9) impliquent en faisant $h \longrightarrow \infty$

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\int_D |1_{\Omega_n}-1_\Omega|dx = 0.$$

Ces dernières résultats montrent que, entre la convergence de Hausdorf, la convergence de Hausdorff complémentaire et la convergence char, il existe des relations, mais aucune des ces trois notions de convergence n'implique l'une des deux autres. On va voir ceci sur un exemple (cf. [42]).

Exemple 2.1.18 Soient

$$\Omega_n := \{(x,y)\in[0,3]^2, 0<x<3,\ 0<y<2+sin(nx)\}$$
$$K_n = \Omega_n^c$$
$$\Omega :=]0,3[\times]0,1[,\ \ K=\Omega^c,$$

comme dans la figure 2.1.2. Alors $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ car $d_H(K_n,K)=0$. En effet, comme $K_n \subseteq K$ il résulte $d(x,K)=0\ \forall x\in K_n$, et pour tout $x\in K$ on a $d(x,K_n)\leq \frac{\pi}{n}$.

La suite Ω_n ne converge pas vers Ω pour la distance d_{char}. On a

$$\int_{[0,3]^2}|1_{\Omega_n}-1_\Omega|dx = \int_{[0,3]^2}1_{\Omega_n\setminus\Omega}dx = \int_0^3\int_1^{2+\sin(nx)}dydx = 3+\frac{1-\cos(3n)}{n}.$$

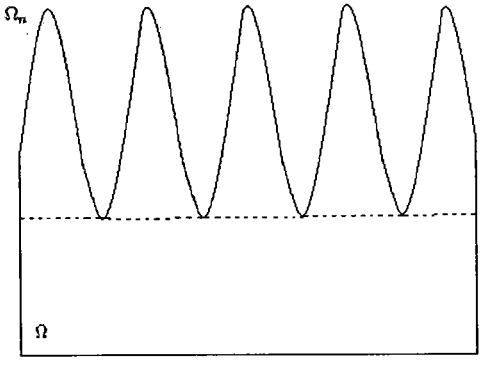


FIG. 2.5 – Ω_n converge vers Ω au sens de Hausdorff complémentaire

2.2 Continuité par rapport au domaine

Suivant, la fonctionnelle $J(\Omega)$ est de la forme $J(\Omega) = J(\Omega, u_\Omega)$, où u_Ω est la solution d'une équation aux dérivées partielles posée sur Ω, et donc, une dependance continue de la solution de l'équation aux dérivées partielles, u_Ω, par rapport à Ω, pour la topologie choisie, est nécessaire.

Dans cette section, dans un premier temps on va rappeler quelques résultats sur la continuité par rapport au domaine pour le problème de Dirichlet et ensuite on va introduire la notion de capacité et on va presenter le rôle que cette notion joue pour les espaces de Sobolev.

Soient D un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, Ω un ouvert inclus dans D, (Ω_n) une suite d'ouverts inclus dans D et f un élément de l'espace de Sobolev $H^{-1}(D)$. On muni l'espace $H_0^1(D)$ de la norme :

$$\|v\| := (\int_D |\nabla v|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ pour } v \in H_0^1(D).$$

On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Une fonction est solution du problème (2.2.1), si

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = < f, v >_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} . \tag{2.2.2}$$

Par la suite on note avec u_Ω la solution du problème (2.2.1) et avec u_{Ω_n} la solution du même problème posé sur Ω_n. On notera encore avec $\widetilde{u}$ la fonction u prolongée par 0 sur $D \setminus \Omega$:

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), \text{ si } x \in \Omega \\ 0, \text{ si } x \in D \setminus \Omega. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Proposition 2.2.1 *Il existe une constante C dépendant que de D et de $\|f\|_{H^{-1}(D)}$, telle que $\forall\ \Omega \subseteq D$ on ait :*

$$\int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2 dx \leq C. \tag{2.2.4}$$

Preuve Pour démontrer (2.2.4) il suffit de prendre u_Ω comme fonction test dans la formulation faible de (2.2.1) et ensuite appliquer l'inégalité de Cauchy et l'inégalité de Poincaré.

Corollaire 2.2.2 *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite arbitraire d'ouverts de D. Alors il existe une sous suite $(\Omega_{n_k})_k$ telle que $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(D)$.*

De plus, s'il existe un ouvert Ω tel que $u = u_\Omega$, alors la convergence de u_{Ω_n} vers u_Ω est forte en $H_0^1(D)$.

Preuve Suite à la proposition 2.2.1, on a que

$$\|u_{\Omega_n}\|_{H_0^1(D)} \leq \|f\|_{H^{-1}(D)}$$

et donc la suite u_{Ω_n} est borné dans $H_0^1(D)$. Par conséquent, on peut extraire une sous suite $u_{\Omega_{n_k}}$ qui converge faiblement vers une fonction u dans $H_0^1(D)$. Supposons maintenant que $u = u_\Omega$. On prend $u_{\Omega_{n_k}}$ comme fonction test dans

$$\forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ \int_\Omega \nabla u_{\Omega_{n_k}} \cdot \nabla v =< f, v >_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

et ensuite on utilise la convergence faible de $u_{\Omega_{n_k}}$ vers u_Ω. On obtient

$$\int_{\Omega_{n_k}} \nabla u_{\Omega_{n_k}} \cdot \nabla u_{\Omega_{n_k}} =< f, u_{\Omega_{n_k}} >_{H^{-1}(D),H_0^1(D)} \longrightarrow < f, u_\Omega >_{H^{-1}(D),H_0^1(D)} = \int_\Omega \nabla u_\Omega \cdot \nabla u_\Omega,$$

ce qui est équivalent à

$$\|u_{\Omega_{n_k}}\|^2_{H_0^1(D)} \longrightarrow \|u_\Omega\|^2_{H_0^1(D)},$$

ce qui implique $u_{\Omega_n} \longrightarrow u_\Omega$ fortement dans $H_0^1(D)$.

Proposition 2.2.3 *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts de D qui converge en Hausdorff complémentaire vers l'ouvert $\Omega \subseteq D$.*

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n \subseteq \Omega$ alors $u_{\Omega_n} \longrightarrow u_\Omega$ fortement dans $H_0^1(D)$.

Preuve D'après le corollaire 2.2.2, il existe une sous suite $(\Omega_{n_k})_k$ telle que $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(D)$. Pour pouvoir appliquer la deuxième partie du corollaire 2.2.2, on va montrer que $u = u_\Omega$. Pour cela il faut démontrer que :

1. $u \in H_0^1(\Omega)$;
2. $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx =< f, \phi >$.

Comme $u_{\Omega_{n_k}} \in H_0^1(\Omega_{n_k})$ et $\Omega_{n_k} \subseteq \Omega$ on a que $u_{\Omega_{n_k}} \in H_0^1(\Omega)$, qui avec $H_0^1(\Omega)$ fermé implique que $u \in H_0^1(\Omega)$.

Soit maintenant $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. On note avec $K = supp\phi \subseteq \Omega$. Comme $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ il résulte que il existe $N(K) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(K)$ on a $K \subset\subset \Omega_n$. Par conséquent $\phi \in C_0^\infty(\Omega_n)$ et donc on peut écrire

$$\int_{\Omega_{n_k}} \nabla u_{\Omega_{n_k}} \cdot \nabla \phi dx =< f, \phi > . \tag{2.2.5}$$

En passant à la limite quand $k \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla f =< f, \phi > .$$

On a obtenu que $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u_\Omega$ faiblement dans $H_0^1(D)$. Du corollaire 2.2.2 il résulte que

$$u_{\Omega_{n_k}} \longrightarrow u_\Omega$$

fortement dans $H_0^1(D)$.

Supposons par l'absurde que u_{Ω_n} ne converge pas dans $H_0^1(D)$ vers u_Ω. Ceci implique que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists (n_k)_k,\ \|u_{\Omega_{n_k}} - u_\Omega\|_{H_0^1(D)} \geq \varepsilon. \tag{2.2.6}$$

Pour simplifier les notations, on note $U_k := \Omega_{n_k}$. Alors on a que $U_k \subseteq \Omega$ et $U_k \xrightarrow{H^c} \Omega$. De la première partie de la demonstration il résulte qu'il existe une sous suite U_{k_j} telle que $u_{U_{k_j}} \longrightarrow u_\Omega$ fortement dans $H_0^1(D)$. Par conséquent

$$\|u_{\Omega_{n_{k_j}}} - u_\Omega\|_{H_0^1(D)} \longrightarrow 0$$

qui contredit (2.2.6).

Remarque 2.2.4
- Soient $(\Omega_n)_n$ une suite croissante des ouverts de D, et $\Omega = \cup\Omega_n$. Alors $u_{\Omega_n} \longrightarrow u_\Omega$ fortement dans $H_0^1(D)$;
- Soient (Ω_n) une suite décroissante des ouverts de D, et $\Omega \subseteq D$ l'intérieur de l'intersection de (Ω_n). En général u_{Ω_n} ne converge pas vers u_Ω.

Proposition 2.2.5 *Soient $(\Omega_n)_n$ une suite des ouverts de D telle que $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ et $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(D)$. Alors $u = u_\Omega$ si et seulement si $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Preuve L'implication " $\Rightarrow$ " est évidente.

" $\Leftarrow$ " Supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$. Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. On note $K = supp\phi \subset\subset \Omega$ le support de ϕ. Comme $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, il résulte qu'il existe un rang $n(K)$ tel que pour tout $n \geq n(K)$ on a $K \subseteq \Omega_n$. Par conséquent $\phi \in C_0^\infty(\Omega_n)$. En prenant ϕ comme fonction test dans l'équation vérifiée par u_{Ω_n} on obtient

$$\int_D \nabla u_{\Omega_n} \nabla \phi dx = < f, \phi > . \tag{2.2.7}$$

On passe à la limite dans (2.2.7) et on obtient

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla \phi dx = < f, \phi > .$$

Par conséquent $u = u_\Omega$.

Exemple 2.2.6 Soit $(\Omega_n)_n$ une suite des ouverts de D qui converge en Hausdorff complémentaire vers l'ouvert $\Omega \subseteq D$. On suppose que $|\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|$ et que Ω convexe. Alors $u_{\Omega_n} \longrightarrow u_\Omega$ fortement dans $H_0^1(D)$.

D'après le corollaire 2.2.2, il existe une sous suite $(\Omega_{n_k})_k$ telle que $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(D)$. Comme $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, d'après la proposition 2.2.5, on a $u = u_\Omega$ si et seulement si $u \in H_0^1(\Omega)$. D'un part, la convergence des mesures implique, d'après la proposition 2.1.17, la convergence des fonctions caractéristiques, $1_{\Omega_n} \longrightarrow 1_\Omega$. D'autre part, la convergence faible dans $H_0^1(D)$ implique la convergence forte dans $L^2(D)$, et donc on a $u_{\Omega_n} \longrightarrow u_\Omega$ fortement dans $L^2(D)$. Par conséquent, on obtient

$$1_{\Omega_{n_k}} \cdot u_{\Omega_{n_k}} \longrightarrow 1_\Omega \cdot u \text{ fortement dans } L^2(D). \tag{2.2.8}$$

Donc, $u = 1_\Omega \cdot u$, ce qui est équivalent à

$$u = 0 \quad \text{presque partout sur } \Omega^c. \tag{2.2.9}$$

L'hypothèse de convexité sur Ω, le fait que $u \in H_0^1(D)$ et (2.2.9) impliquent $u \in H_0^1(\Omega)$. En effet, soit $u_n(x) = u((1 + \frac{1}{n})x)$. On a que $u_n \in H_0^1(D)$ et

$$u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } H_0^1(D). \tag{2.2.10}$$

Soit $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{supp}\rho_\varepsilon \subset B(0, \frac{1}{\varepsilon})$, $\int \rho_\varepsilon = 1, \rho_\varepsilon \geq 0$ sur $\mathbb{R}^N$. Il résulte $\text{supp}u_n * \rho \subset \overline{\text{supp}u_n + \text{supp}\rho_\varepsilon}$, $u_n * \rho_\varepsilon \in C^\infty(D)$. Si $\varepsilon < d(\text{supp}u_n, \partial\Omega)$, alors $u_n * \rho_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$. En passant à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient

$$u_n * \rho_\varepsilon \longrightarrow u_n \text{ fortement dans} H_0^1(D). \tag{2.2.11}$$

Du (2.2.10) et (2.2.11) il résulte $u \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2.2.7 Dans l'exemple 2.2.6, l'hypothèse de convexité sur Ω est essentielle. En effet si $\Omega = [0,1]^2 \setminus \{0.5\} \times [0,1]$ (voir la figure 2.6), alors $u = 0$ presque partout sur Ω^c et $u \in H_0^1(D)$ n'impliquent pas $u \in H_0^1(\Omega)$.

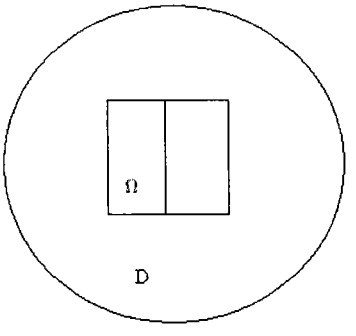


FIG. 2.6 –

2.3 Une étude plus fine des espaces de Sobolev

Dans cette section on va introduire la notion de capacité.

Définition 2.3.1 *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^N$. La capacité de E est définie par*

$$cap(E) = \inf\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + |u|^2 dx, \ u \in H^1(\mathbb{R}^N), \ u \geq 1 \ p.p. \text{ dans un ouvert contenant } E\}. \tag{2.3.1}$$

Remarque 2.3.2 – Il suffit de prendre des fonctions, u, égales à 1 presque partout sur l'ouvert contenant E, car on remplace u avec $v = \min\{u, 1\} \in H^1(\mathbb{R}^N)$;

- En dimension 1, la capacité d'un point est strictement positive et en dimension deux la capacité d'un point est égale à 0 ;

On rappelle :

- soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}^N$ qui est contenu dans une variété de dimension $N-2$, alors $cap(E) = 0$;

- si E sous ensemble de $\mathbb{R}^N$ contient un variété de dimension $N-1$, alors $cap(E) > 0$.

En particulier, un ensemble de capacité nulle est toujours de mesure nulle, mais la réciproque n'est pas vraie. On rappelle maintenant quelques propriétés de la capacité, démontrées en [42].

Proposition 2.3.3 *1. $cap(\emptyset) = 0$, et $A \subset B \Rightarrow cap(A) \leq cap(B)$;*

2. Soit A_n une suite croissante d'ensembles de réunion A. Alors $cap(A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} cap(A_n)$;

3. soit K_n une suite décroissante de compacts d'intersection K. Alors $cap(K) = \lim_{n \longrightarrow \infty} cap(K_n)$;

4. Pour tout ensemble A et B on a la propriété de sous additivité :

$$cap(A \cup B) + cap(A \cap B) \leq cap(A) + cap(B).$$

Proposition 2.3.4 *Soit Ω un ouvert borné de D. Soit K un ensemble compact, $K \subset\subset \Omega$. Si $cap(K) = 0$ alors $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega \setminus K)$.*

Preuve On va démontrer l'égalité entre ces deux espaces par double inclusion.

Soit d'abord $u \in H_0^1(\Omega \setminus K)$. De la definition de l'espace $H_0^1(\Omega \setminus K)$ on a que il existe une suite $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)$ telle que $\phi_n \longrightarrow u$ fortement dans $H_0^1(D)$. Comme $\Omega \setminus K \subseteq \Omega$ il résulte que $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$, ce qui implique que sa limite, u, est dans $H_0^1(\Omega)$.

Inversement, soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Suite à la définition de l'espace $H_0^1(\Omega)$, il existe une suite $\phi_n \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\phi_n \longrightarrow u$ fortement dans $H_0^1(D)$. Soit v une fonction test dans la definition de la capacité de K et soit ρ_ε une suite régulatrice. On note $\phi_\varepsilon = v * \rho_\varepsilon$. On a que $\phi_\varepsilon \longrightarrow v$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, $||\phi_\varepsilon|| \longrightarrow 0$ et $\|\phi_\epsilon\| = 1$ dans une voisinage de K. Par conséquent la suite $\phi_n(1 - \phi_\epsilon) \in C_0^\infty(\Omega \setminus K)$ et elle est une bonne approximation de la fonction u , ce qui implique $u \in H_0^1(\Omega \setminus K)$.

Définition 2.3.5 *Si une propriété ponctuelle est vraie dans tout point de D sauf sur un ensemble de capacité nulle, on dit que cette propriété est vérifiée quasi partout (abréviation q. p.).*

Définition 2.3.6 *Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite quasi-continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U_ε, $cap(U_\varepsilon) < \varepsilon$ tel que $f|_{D \setminus U_\varepsilon}$ est continue.*

Dans ce contexte le résultat le plus important est le suivant. Pour la demonstration on renvoie à [42].

Théorème 2.3.7 *Soit f une fonction de $H^1(D)$. Alors il existe une fonction $\widetilde{f}$ quasi-continue telle que $f = \widetilde{f}$ presque partout.*

Preuve Soit $f \in H^1(D)$. Par le théorème de Meyers-Serrin, il existe une suite $f_n \in C^\infty(D) \cap H^1(D)$ telle que $f_n \longrightarrow f$ fortement dans $H^1(D)$.

Comme f_n il est une suite convergente , il est aussi suie de Cauchy en $H^1(D)$, et donc on peut extraire une sous suite, notée f_m, telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} |f_{m+1} - f_m|^2_{H^1(D)} < \infty. \tag{2.3.2}$$

Soit K un ensemble compact inclus dans D, $K \subset\subset D$, et soit $\phi \in C_0^\infty(D)$, $\phi = 1$ sur K. On notera $g_m = \phi f_m \in H_0^1(D)$. Puisque $\nabla g_m = \phi \nabla f_m + f_m \nabla \phi$, et en tenant compte de (2.3.2) on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m} |\nabla g_{m+1} - \nabla g_m|^2_{L^2(D)} < \infty. \tag{2.3.3}$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang m_ε tel que

$$\sum_{m \geq m_\varepsilon}^{\infty} 2^{2m} |\nabla g_{m+1} - \nabla g_m|^2_{L^2(D)} < \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

Soit $K_m = \{x \in K \mid f_{m+1}(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^m}\}$ un compact de D.

On note que $2^m |g_{m+1} - g_m| \geq 1$ sur K_m, donc on peut le prendre comme fonction test pour la capacité de K_m. Cela implique

$$cap(K_m, D) \leq \int_D 2^{2m} |\nabla g_{m+1} - \nabla g_m|^2 dx. \tag{2.3.5}$$

De la propriété de sous additivité dénombrable on obtient

$$cap(\cup_{m \geq m_\varepsilon} K_m, D) \leq \sum_{m \geq m_\varepsilon} cap(K_m, D) \leq \sum_{m \geq m_\varepsilon} \int_D |\nabla g_{m+1} - \nabla g_m|^2 < \varepsilon. \tag{2.3.6}$$

Pour simplifier les notations on note $E_\varepsilon = \cup_{m \geq m_\varepsilon} K_m$.

Sur $K \setminus E_\varepsilon$, pour tout $m \geq m_\varepsilon$ on a $|f_{m+1}(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2^m}$ et par conséquent , f_m est une suite de Cauchy sur $K \setminus E_\varepsilon$. Ceci implique la convergence uniforme , $f_m \xrightarrow{u} \widetilde{f}$ sur $K \setminus E_\varepsilon$. Pour conclure il suffit de prendre une suite croissante de compacts K_n dont la réunion est D, et de choisir ε_n tel que $cap(E_{vps_n}, D) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$.

Mais f_m converge déjà vers f dans $L^2(D)$, par conséquent $f = \widetilde{f}$ presque partout.

Remarque 2.3.8 Un représentant quasi continue d'une fonction $f \in H^1(D)$ est

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\int_{B(x,\varepsilon)} f(y) dy}{|B(x,\varepsilon)|}. \tag{2.3.7}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation d'un espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, comme sous espace de $H_0^1(D)$..

Théorème 2.3.9 *(Hedberg)(voir [42]) Soit Ω un ouvert de D et $u \in H_0^1(D)$. Alors $u \in H_0^1(\Omega)$ si est seulement si $\widetilde{u}(x) = 0$ quasi partout sur Ω^c.*

Remarque 2.3.10 Soit $u \in H_0^1(D) \cap C(D)$. Si $u = 0$ sur Ω^c alors $u \in H_0^1(\Omega)$.

Définition 2.3.11 *Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^N$ est dit quasi-ouvert si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U avec $cap(U) < \varepsilon$ tel que $A \cup U$ soit ouvert.*

Exemple 2.3.12 – Tout ouvert est quasi-ouvert ;
– Soit u une fonction de $H^1(D)$ ($u = \widetilde{u}$) et c un réel. L'ensemble

$$\{x \in D, u(x) < c\}$$

est un quasi ouvert.
En effet, u étant quasi-continue , par definition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $U, cap(U) < \varepsilon$ tel que $u|_{\mathbb{R}^N \setminus U} : \mathbb{R}^N \setminus U \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Donc, $\{u > c\} \subset \{u|_{\mathbb{R}^N \setminus U} > c\} \cup U$, ce qui fournit le résultat.

Comme propriétés pour les ensembles quasi ouverts on rappelle
– Une reunion arbitraire de quasi-ouverts n'est pas quasi-ouvert ;
– Une reunion dénombrable de quasi-ouverts est quasi-ouverts.

Définition 2.3.13 *Soit A un quasi-ouverts inclus dans D. Alors*

$$H_0^1(A) = \{u \in H_0^1(D) \mid u = 0 \, quasi \, partout \, dans \, D \setminus A\}.$$

Si A est un ouvert on retrouve la définition classique (via le théorème de Hedberg).
On introduit à present la notion de convergence au sens de Mosco.

Définition 2.3.14 *Soit A_n une suite de convexes fermés d'un espace de Banach X. On dit que A_n converge au sens de Mosco vers A si les deux conditions suivantes sont réalisées :*
(M1) Pour tout $x \in A$, il existe une suite $x_n \in A_n$ telle que x_n converge en norme vers x.
(M2) S'il existe une sous-suite n' avec $x_{n'} \in A_{n'}$ telle que $x_{n'}$ converge faiblement vers un point x alors $x \in A$.

On peut parler de la convergence de Mosco de l'espace $H_0^1(\Omega_n)$ vers l'espace $H_0^1(\Omega)$, car ils sont des sous-espaces fermés de $H_0^1(D)$. On rappelle alors le résultats suivant ([42]) :

Théorème 2.3.15 *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite des ouverts de D, et soit Ω un ouvert de D. Les affirmations suivantes sont équivalents :*

1. *Pour $f = 1$, $u_{\Omega_n,1} \longrightarrow u_{\Omega,1}$ fortement dans $H_0^1(D)$;*
2. *Pour tout $f \in H^{-1}(D)$, $u_{\Omega_n,f} \longrightarrow u_{\Omega,f}$ fortement dans $H_0^1(D)$;*
3. *Pour tout $u \in H_0^1(D)$, $P_{H_0^1(\Omega_n)}u \longrightarrow P_{H_0^1(\Omega)}u$ fortement dans $H_0^1(D)$;*
4. *L'espace $H_0^1(\Omega_n)$ converge au sens de Mosco vers l'espace $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire*

$$M1) \; \forall \, u \in H_0^1(\Omega) \; \exists \, u_n \in H_0^1(\Omega_n) \text{ tel que } u_n \longrightarrow u \text{ fortement dans } H_0^1(D).$$

$$M2) \; \forall \, u_{n_k} \in H_0^1(\Omega_{n_k}) \text{ tel que } u_{n_k} \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } H_0^1(D) \; \Rightarrow u \in H_0^1(\Omega).$$

Preuve On commence avec 2) $\Rightarrow$ 3)

Soit $u \in H_0^1(D)$ et on définit $f = -\Delta u$. De 2) on a que $u_{\Omega_n,f} \longrightarrow u_{\Omega,f}$ fortement dans $H_0^1(D)$. On va démontrer que $u_{\Omega_n,f} = P_{H_0^1(\Omega_n}u$. Pour simplifier les notations on note $u_n := P_{H_0^1(\Omega_n}u$. De la definition de la projection on a

$$\forall\, \phi \in H_0^1(\Omega_n) \ \int_D \nabla(u_n - u)\nabla\phi dx = 0$$

ce qui revient à écrire $< -\Delta u_n, \phi >=< f, \phi >$ au sens de la dualité, ce qui implique $u_n = u_{\Omega_n,f}$.

3) $\Rightarrow$ 4)

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. On note $u_n = P_{H_0^1(\Omega_n)}u \in H_0^1(\Omega_n)$. De 3) on a que

$$P_{H_1^0(\Omega_n)}u \longrightarrow P_{H_0^1(\Omega)}u = u \text{ fortement dans } H_0^1(D).$$

Donc la propriété M1) est vérifiée.

Soit $u_{n_k} \in H_0^1(\Omega_{n_k})$ une suite telle que $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$, faiblement dans $H_0^1(D)$. De la definition de la convergence faible on a que

$$\forall \phi \in H_0^1(D) \quad < u_{n_k}, \phi > \longrightarrow < u, \phi > . \tag{2.3.8}$$

Comme $u_{n_k} \in H_0^1(\Omega_{n_k})$ il résulte $P_{H_0^1(\Omega_{n_k})}u_{n_k} = u_{n_k}$. On utilisant le fait que la projection est un opérateur auto-adjoint, ainsi que 3) on obtient :

$$< P_{H_0^1(\Omega_{n_k})}u_{n_k}, \phi >=< u_{n_k}, P_{H_0^1(\Omega_{n_k})}\phi > \longrightarrow < u, P_{H_0^1(\Omega)}\phi >=< P_{H_0^1(\Omega)}u, \phi > . \tag{2.3.9}$$

Par conséquent $u = P_{H_0^1(\Omega)}u \in H_0^1(\Omega)$.

4) $\Rightarrow$ 1)

On considère la suite $(u_{\Omega_n,1})_n$. On veut démontrer qu'il converge fortement dans $H_0^1(\mathcal{D})$ vers $u_{\Omega,1}$.

Soit $(\Omega_{n_k})_k$ une sous suite arbitraire. D'après 4) M2) on sais que

$$u_{\Omega_{n_k},1} \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega) \text{ faiblement dans } H_0^1(D).$$

Pour que $u = u_{\Omega,1}$ il faut démontrer que

$$\forall\, \Phi \in H_0^1(\Omega) \ \int_D \nabla u \nabla\phi dx = \int_D 1 \cdot \phi dx. \tag{2.3.10}$$

Soit $\phi \in H_0^1(\Omega)$. D'après 4)M1) il existe $\phi_n \in H_0^1(\Omega_n)$ telle que $\phi_n \longrightarrow \phi$ fortement dans $H_0^1(D)$. On considère ϕ_n comme fonction test pour $u_{\Omega_{n_k}}$. On obtient

$$\int_d \nabla u_{\Omega_{n_k}} \nabla \phi_{n_k} dx = \int_D 1\phi_{n_k} dx. \tag{2.3.11}$$

On passe à la limite dans (2.3.11) et on obtient

$$\int_D \nabla u \nabla \phi dx = \int 1\phi dx.$$

Par conséquent $u_{\Omega_{n_k},1} \rightharpoonup u_{\Omega,1}$ faiblement dans $H_0^1(D)$. On applique le corollaire 2.2.2 pour conclure que $u_{\Omega_{n_k},1} \longrightarrow u_{\Omega,1}$ fortement dans $H_0^1(D)$. Comme la suite $(\Omega_{n_k})_k$ a été choisi aléatoirement il résulte que

$$u_{\Omega_n,1} \longrightarrow u_{\Omega,1} \text{ fortement dans } H_0^1(D).$$

1) $\Rightarrow$ 2)

Soit $f \in L^\infty(D)$, $f \geq 0$. Soit (Ω_n) une suite d'ouverts de D. D'après le corollaire 2.2.2 il existe une sous suite $(\Omega_{n_k})_k$ telle que $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(D)$. L'inégalité $f \geq 0$ avec le principe de maximum implique $0 \leq u_{\Omega_{n_k}}$. Comme $0 \leq f \leq \|f\|_\infty$ on a

$$0 \leq u_{\Omega_{n_k},f} \leq \|f\|_\infty u_{\Omega_{n_k},1} \text{ presque partout dans } D. \tag{2.3.12}$$

On passe à la limite faible dans 2.3.12 et on obtient

$$0 \leq u \leq \|f\|_\infty u_{\Omega,1} \text{ presque partout dans } D. \tag{2.3.13}$$

On passe au représentant quasi-continu. Il résulte

$$0 \leq \widetilde{u} \leq \widetilde{u}_{\Omega,1}\|f\|_\infty \text{ quasi partout dans } D. \tag{2.3.14}$$

Par conséquent $\widetilde{u}(x) = 0$ quasi partout sur Ω^c et d'après le théorème 2.3.9 il résulte $\widetilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Comme $u = \widetilde{u}$ presque partout, on obtient $u \in H_0^1(\Omega)$.

Pour conclure il nous reste a démontrer

$$\forall\, \phi \in H_0^1(\Omega) \int_D \nabla u \nabla \phi dx = \int_D f\phi dx. \tag{2.3.15}$$

Soit $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. On note

$$\phi_n^+ = \min\{\phi^+, u_{\Omega_n,1}\frac{\|\phi\|_\infty}{\alpha}\}$$

où $\alpha = \inf_{K \subset\subset \Omega} u_{\Omega,1} > 0$. On passe à la limite et on obtient :

$$\phi_n^+ \longrightarrow \min\{\phi^+, u_{\Omega,1}\frac{\|\phi\|_\infty}{\alpha}\} = \phi^+$$

fortement dans $H_0^1(D)$. Donc $\phi_n^+ \in H_0^1(\Omega_n)$. De la même façon on obtient $\phi_n^- \in H_0^1(\Omega_n)$, $\phi_n^- \longrightarrow \phi^-$ fortement dans $H_0^1(D)$. On peut prendre $\phi_n = \phi_n^+ - \phi_n^-$ comme fonction test pour $u_{\Omega_{n_k}}$. On obtient

$$\int_D \nabla u_{\Omega_{n_k}} \nabla \phi_n dx = < f, \phi_n > . \tag{2.3.16}$$

On passe à la limite et on obtient

$$\int_D \nabla u \nabla \phi dx = < f, \phi > . \tag{2.3.17}$$

Par consequence $u = u_{\Omega,f}$. Finalement, comme $L^\infty(D)$ est dense dans $H^{-1}(D)$, pour tout $f \in H^{-1}(D)$ il existe $f_k \in L^\infty(D)$ telle que $f_k \longrightarrow f$ fortement dans $H^{-1}(D)$. On a alors

$$\|u_{\Omega_n,f} - u_{\Omega,f}\|_{H^1(D)} \leq \|u_{\Omega_n,f} - u_{\Omega_n,f_k}\| + \|u_{\Omega_n,f_k} - u_{\Omega,f_k}\| + \|u_{\Omega,f_k} - u_{\Omega,f}\| \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a vu que, en général si Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω, alors $u_{\Omega_n,f}$ ne converge pas vers $u_{\Omega,f}$ fortement dans $H_0^1(D)$. Par la suite on va introduire une classe d'ensembles dans laquelle l'hypothèse de convergence au sens de Hausdorff implique la convergence forte en $H_0^1(D)$, de $u_{\Omega_n,f}$ vers $u_{\Omega,f}$.

Définition 2.3.16 *Soit $c, r > 0$. On définit*

$$\mathcal{O}_{c,r}(D) = \{\Omega \subseteq D \,|\, \forall x \in \partial\Omega \; \forall t \in]0, r[\; \frac{cap(\Omega^c \cap B_{x,t}, B_{x,2t})}{cap(B_{x,t}, B_{x,2t})} \geq c\}. \tag{2.3.18}$$

Les ouverts qui satisfont une condition de segment ($\forall\, x \in \partial\Omega \; \exists$ un segment S_x tel que $S_x \subseteq \Omega^c$ et une extrémité de S_x est x) sont dans la classe $\mathcal{O}_{c,r}$.

Théorème 2.3.17 *(régularité faible des solutions des equations aux dérivées partielles, voir [42])*
Soit $\varepsilon > 0$ et $f \in L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}(D)$. Pour tout $c, r > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall\, \Omega \in \mathcal{O}_{c,r}(D)$ on a : $u_{\Omega,f} \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ et $|u_{\Omega,f}|_{C^{0,\alpha}(D)} \leq M(diam(D), c, r, \varepsilon, N, |f|_{L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}(D)})$.

Théorème 2.3.18 *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts de D. On suppose que $\Omega_n \in \mathcal{O}_{c,r}(D)$ et que Ω_n converge au sens de Hausdorff vers $\Omega \subseteq D$. Alors pour tout $f \in H^1(D)$ on a*

$$u_{\Omega_n,f} \longrightarrow u_{\Omega,f} \text{ fortement dans } H_0^1(D).$$

Preuve Grace au théorème 2.3.15 il est suffit de démontrer la convergence pour $f = 1$. Soit donc, $f = 1 \in L^{\frac{N}{2}+\varepsilon}(D)$. D'après le corollaire 2.2.2 il existe une sous suite $(\Omega_{n_k})_k$ telle que $u_{\Omega_{n_k},1} \rightharpoonup u_{\Omega,1}$ faiblement dans $H_0^1(D)$. Si on montre que $u \in H_0^1(\Omega)$, alors on conclure en utilisant la proposition 2.2.5.

D'après le théorème 2.3.17 on a

$$|u_{\Omega_{n_k}}(x) - u_{\Omega_{n_k}}(y)| \leq M|x - y|^\alpha. \tag{2.3.19}$$

Les fonctions $u_{\Omega_{n_k},1}$ étant equi-continues et uniformément bornées, on peut appliquer le théorème de Ascoli-Arzela , et donc, on obtient $u_{\Omega_{n_k}}, 1 \longrightarrow u$ uniformément vers u. Soit $x \in \Omega^c$. De la convergence au sens de Hausdorff il résulte qu'il existe une suite $x_n \in \Omega_n^c$ telle que $x_n \longrightarrow x$. Alors

$$|u(x)| \leq |u(x) - u_{\Omega_{n_k},1}(x)| + |u_{\Omega_{n_k},1}(x)| = |u(x) - u_{\Omega_{n_k},1}(x)| + |u_{\Omega_{n_k},1}(x) - u_{\Omega_{n_k},1}(x_{n_k})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M|x - x_{n_k}|^\alpha. \tag{2.3.20}$$

Comme $x_{n_k} \longrightarrow x$ il existe un rang $N'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ tel que pour $k \geq N'_{\frac{\varepsilon}{2}}$ on a $M|x - x_{n_k}|^\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, on a obtenu $|u(x)| \leq \varepsilon$, donc $u(x) = 0$. Du théorème de Hedberg il résulte $u \in H_0^1(\Omega)$.

Une autre condition suffisante qui assure la convergence forte dans $H_0^1(D)$ des solutions de problème de Dirichlet est présentée dans le résultat suivant (cf. [67]). Soit $\mathcal{O}_l(D) = \{\Omega \subseteq D, \sharp\Omega^c \leq l\}$, où $\sharp\Omega^c$ représente le nombre de composantes connexes de Ω^c.

Théorème 2.3.19 *(Sverak)*

Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts de D. Si $\Omega_n \in \mathcal{O}_l(D)$ et Ω_n converge au sens de Hausdorf vers Ω. Alors $\Omega \in \mathcal{O}_l(D)$ et $u_{\Omega_n,f} \longrightarrow u_{\Omega,f}$ fortement dans $H_0^1(D)$ pour tout $f \in H^{-1}(D)$.

Preuve Avant de commencer la demonstration on rappelle que si K est un compact connexe de $\mathbb{R}^2$ alors

$$\forall x \in \partial K,\ \forall \nu < t \leq \frac{diam(K)}{2} \text{ on a } \frac{cap(K \cap B_{x,t}, B_{x,2t})}{cap(B_{x,t}, B_{x,2t})} \geq c. \tag{2.3.21}$$

Soit $c^* = \frac{cap(\{0\}\times[0,1],B(0,2))}{cap(B(0,1),B(0,2))}$. Comme $\Omega \in \mathcal{O}_l(D)$ alors $\Omega_n^c = K_n^1 \cup K_n^2 \cup ... \cup K_n^l$. Les suites $K_n^1, ..., K_n^l$ étant confinées dans D, on peut extraire des sous suites, encore notées $K_n^1, ..., K_n^l$ qui convergent au sens de Hausdorff vers $K^1, ..., K^l$. Par conséquent Ω_n^c converge au sens de Hausdorff vers $\Omega^c = K^1 \cup K^2 \cup ... \cup K^l$.

On note que si $diam(K^i) \geq d > 0$ alors à partir d'un rang $diam(K_n^i) \geq \frac{d}{2}$, et donc $K_n \in \mathcal{O}_{c,r}$ avec $r = \frac{d}{4}$ et $c = c^*$. Par la suite on va s'intéresser au K^i pour lequel $diam(K^i) > 0$ (on ne prend pas en compte le cas ou $K^i = \emptyset$ ou K^i est un point). On note

$$(\Omega_n^+)^c = \cup_{i\in\{1,...,l\}} K^i \text{ avec } diam(K^i) > 0.$$

On a que $\Omega_n \subseteq \Omega_n^+ \xrightarrow{H^c} \Omega^+$ et en plus $\Omega_n^+ \in \mathcal{O}_{c,r}$ avec $c = c^*$ et $r = \frac{d}{4}$ où $d = \min\{diam(K^i)\} > 0$, ce qui implique

$$u_{\Omega_n^+,1} \longrightarrow u_{\Omega^+,1}, \text{ fortement dans } H_0^1(D).$$

Comme $\Omega = \Omega^+$ quasi partout, il résulte que $u_{\Omega^+,1} = u_{\Omega,1}$.

En tenant compte du fait que $\Omega_n \subseteq \Omega_n^+$ ainsi que du principe de maximum, on obtient

$$0 \leq u_{\Omega_n,1} \leq u_{\Omega_n^+,1}. \tag{2.3.22}$$

On passe à la limite dans (2.3.22) et on obtient

$$0 \leq u^* \leq u_{\Omega,1} \tag{2.3.23}$$

où u^* est la limite faible dans $H_0^1(D)$ du $u_{\Omega_n,1}$. Il résulte $u^* = 0$ quasi partout sur Ω^c. En plus $u^* \in H_0^1(D)$ et donc en appliquant le proposition 2.3.9 et le théorème 2.2.5 il résulte $u^* = u_{\Omega,1}$.

On va introduire à present une nouvelle topologie sur les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.3.20 *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts inclus dans D. On dit que Ω_n γ-converge vers $\Omega \subseteq D$, et on note $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$, si pour tout $f \in H^{-1}(D)$, on a $u_{\Omega_n,f} \longrightarrow u_{\Omega,f}$ fortement dans $\mathcal{H}_0^1(D)$.*

On note que γ-convergence n'est autre que la topologie sur l'ensemble des ouverts qui exprime la continuité par rapport au domaine de la solution du problème de Dirichlet. Dans le contexte de γ-convergence, le théorème de Sverak peut se réécrire :

Théorème 2.3.21 *En dimension deux, si Ω_n converge au sens de Hausdorff vers Ω et si le nombre de composantes connexe du complémentaire de Ω_n reste uniformément borné, alors $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$.*

Une condition nécessaire et suffisante qui assure la γ-convergence est la convergence de Mosco. On a le résultat suivant (cf. [42]) :

Théorème 2.3.22 *Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts inclus dans D. Alors Ω_n γ-converge vers $\Omega \subseteq D$ si et seulement si $H_0^1(\Omega_n)$ converge au sens de Mosco vers $H_0^1(\Omega)$.*

Par la suite on va introduire pour les quasi-ouverts, une notion plus faible que γ-convergence, appelée $w\gamma$-convergence. On présente ici la definition, ainsi que quelques propriétés. Plus de details sur cette notion se trouvent dans [15]. On note d'abord avec $\mathcal{A} = \{A \subseteq D : A \text{ est quasi ouvert}\}$ et avec w_A la solution unique du problème

$$\begin{cases} -\Delta w_A = 1 & \text{dans } A \\ w_A \in H_0^1(A). \end{cases} \tag{2.3.24}$$

Définition 2.3.23 *On dit que une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ $w\gamma$ converge vers $A \in \mathcal{A}$ si w_{A_n} converge faiblement dans $H_0^1(D)$ vers une fonction $w \in H_0^1(D)$ tel que $A = \{w > 0\}$.*

Remarque 2.3.24
- En général la fonction w ne coincide pas avec w_A ($w = w_A$ seulement si $A_n \xrightarrow{\gamma} A$) ;
- L'espace $H_0^1(A)$ contient toutes les limites faibles de suites de $H_0^1(A_n)$.

Théorème 2.3.25 *La $w\gamma$-convergence est séquentiellement compacte sur $\mathcal{A}$.*

Preuve Soit $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{A}$. Comme D est borné, on obtient que w_{A_n} est borné et par conséquent on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $H_0^1(D)$ vers une fonction w. On posant $A = \{w > 0\}$ on obtient que A_n $w\gamma$-converge vers A.

Proposition 2.3.26 *La mesure de Lebesgue est $w\gamma$ semi-continue inférieurement sur $\mathcal{A}$.*

Preuve Soit $(A_n)_n$ une suite de $\mathcal{A}$ telle que $A_n \xrightarrow{wg} A$. De la definition de $w\gamma$-convergence il résulte que $w_{A_n} \rightharpoonup w$ faiblement $H_0^1(D)$, avec $A = \{w > 0\}$. Pour une sous suite, la convergence est ponctuelle et donc si $x \in A$ tel que $w_A(x) > 0$ et $w_{A_n}(x) \longrightarrow w(x)$, alors pour n suffisamment grand on obtient $w_{A_n}(x) > 0$. Par conséquent $x \in A_n$ pour n suffisamment grand. Donc, du lemme de Fatou , il résulte $|A| \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} |A_n|$.

Proposition 2.3.27 *Si (A_n) γ-converge vers A, alors (A_n) $w\gamma$-converge A.*

2.4 Rearrangement de Schwarz

Un des principaux outils utilisés pour l'étude des problèmes isopérimètrique est le rearrangement de Schwarz, aussi connue sur le nom de réarrangement sphérique symétrique décroissant. Par la suite, on va rappeler cette notion, ainsi que quelques propriétés.

Soit Ω un ensemble borné et mesurable de $\mathbb{R}^N$.

Notations :

- $\Omega_c := \{x \in \overline{\Omega} |\, u(x) > c\}, c \in \mathbb{R}$;
- Ω^* son réarrangement;
- $m_N(\Omega)$ la mesure de Lebesque en dimension N.

En dimension $N = 1$, on définit le rearrangement symétrique Ω^* de Ω par

$$\Omega^* = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} |\, |x| \leq \frac{1}{2} m_1(D)\}, \text{ si } \Omega \neq \emptyset \\ \emptyset, \text{ si } \Omega = \emptyset. \end{cases} \tag{2.4.1}$$

En dimension N, on définit le rearrangement symétrique Ω^* de Ω par

$$\Omega^* := \begin{cases} \text{boule qui a la même mesure de Lebesque que } \Omega, \text{centrée en origin si } \Omega \neq \emptyset, \\ \emptyset \text{ si } \Omega = \emptyset. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

Si $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable Lebesque, alors le rearrangement de Schwarz est donnée par

$$u^*(x) := \sup\{c \in \mathbb{R} |\, x \in \Omega_c^*\}, \text{ pour } x \in \overline{\Omega}^*. \tag{2.4.3}$$

Exemple 2.4.1 Soit $\overline{\Omega} := [-1, 2]$ et soit

$$u(x) := \begin{cases} x, \text{ si } -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, \text{ si } 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \tag{2.4.4}$$

Le rearrangement symétrique décroissant est définie sur $\overline{\Omega}^* = [-1.5, 1.5]$ par

$$u^*(x) = \begin{cases} 1 - |x|, \text{ si } |x| \leq 1 \\ 2 - 2x, \text{si } 1 \leq |x| \leq 1.5, \end{cases} \tag{2.4.5}$$

La representation graphique de ces deux fonction est illustrée dans la figure 2.7.

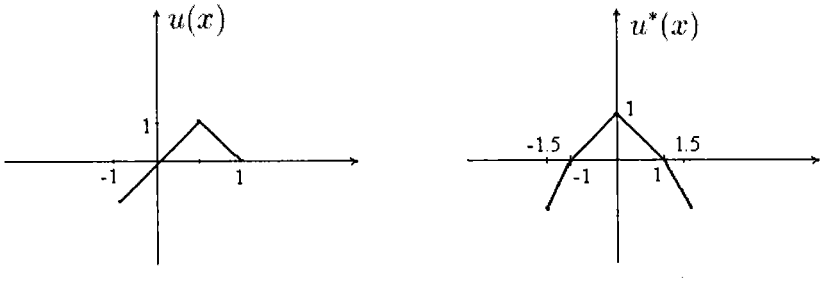


FIG. 2.7 – La fonction u est son réarrangement u^*

Quelques propriétés de la symétrisation de Schwarz

- $|\Omega| = |\Omega^*|$;
- Équimesurabilité - pour $c \in \mathbb{R}$ $m_N\{x \in \overline{\Omega} |\, u(x) \geq c\} = m_N\{x \in \overline{\Omega}^* |\, u^*(x) \geq c\}$;

- Préservation d'ordre - c'est-à-dire si $D_1 \subset D_2$ alors $D_1^* \subset D_2^*$, où D_1, D_2 sont des compacts inclus dans $\mathbb{R}^N$;
  L'application $u \longrightarrow u^*$ preserve l'ordre, c'est-à-dire $u(x) \leq v(x)$ pour $x \in \overline{\Omega}$, implique $u^*(x) \leq v^*(x)$, pour $x \in \overline{\Omega}^*$;
- Si F est continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_\Omega F(u)(x)dx = \int_{\Omega^*} F(u^*)(x)dx;$$

- Inégalité de Hardy-Littlewood

$$\int_\Omega uv(x)dx \leq \int_{\Omega^*} u^*v^*(x)dx;$$

- Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, avec $p > 1$, alors $u^* \in W_0^{1,p}(\Omega^*)$ et

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p dx \quad \text{(inégalité de Pó lya).}$$

Pour plus de détails sur la symétrisation de Schwarz, ansi que pour les propriétés ci-dessus précisées, on renvoie par exemple à [47] et [58].

Chapitre 3

La valeur propre de conductivité

3.1 Introduction

In this chapter we study isoperimetric inequalities for the eigenvalues of the Laplace operator with constant and locally constant boundary conditions. Existence and stability results are presented in the frame of the gamma and weak gamma convergencies, together with identification of optimal sets by analytical and numerical methods.

The main purpose of this chapter is to study the eigenvalues associated to the Laplace operator with (locally) constant boundary conditions in relationship with the geometric domain. On the one hand we consider globally constant boundary conditions (simply denoted *const. b.c.*) and on the other hand locally constant boundary conditions, which we call conductivity boundary conditions (denoted *cond. b.c.*).

The isoperimetric inequality for the first non zero eigenvalue for the *const. b.c.* eigenvalues was discussed by Greco and Lucia in [38]. There is proved that the union of two equal balls minimizes the first non-zero eigenvalue among all domains of prescribed measure. Several more properties are also obtained in [38], among which relationships with the Dirichlet eigenvalues of the Laplacian and with the twisted eigenvalues of the Laplacian (see also [34]).

The first purpose of this chapter is to investigate the shape stability of the spectrum of *const. b.c* Laplacian in relationship with the γ-convergence (see [15]). The γ-convergence is, roughly speaking, the geometric convergence of shapes for which the solution of the Dirichlet-Laplacian is stable. We prove that the spectrum of the *const. b.c.* Laplacian is stable for the γ-convergence if and only if the Lebesque measure of the moving domains is preserved at the γ-limit (which in general is not the case).

As a second purpose, we discuss the isoperimetric inequality for a general shape functional depending on the *const. b.c.* Laplacian eigenvalues, of the form $F(\Lambda_1(\Omega), ..., \Lambda_k(\Omega))$. We prove that for every bounded design region D the problem

$$\min_{\Omega \subseteq D, |\Omega| = c} F(\Lambda_1(\Omega), ..., \Lambda_k(\Omega))$$

has a solution in the family of quasi-open sets, provided mild monotonicity and continuity assumptions on F. A similar result was obtained by Buttazzo and Dal Maso in [21] for the Dirichlet eigenvalues of the Laplacian, based on γ continuity of the eigenvalues.

In our problem, the mapping

$$\Omega \to \Lambda_k(\Omega)$$

is not γ-continuous so that the main theorem of Buttazzo and Dal Maso does not apply. Our argument is based on the study of a modified version of the weak gamma convergence (see [15]) which preserves the measure. We also refer the reader to [38], where existence solutions for isoperimetric inequalities for the *const. b.c.* Laplacian eigenvalues were studied in the class of convex sets.

The third purpose is to study the isoperimetric inequalities associated to the conductivity eigenvalues of the Laplacian. This study is motivated by the analysis of the defect identification of a material by electrostatic boundary measurements. Friedman and Vogelius introduced in [35] a dual problem to the defect identification problem, where the perfectly insulating defects become perfectly conductive regions. In this last model, the locally constant boundary conditions are naturally used (see also Alessandrini [1] and [18, 7]). In [7], the following space is introduced for the study of the conductivity problem in an arbitrary two dimensional bounded domain. For a bounded open set of $\mathbb{R}^n$ we introduce

$$H^1_{cond}(\Omega) = cl_{H^1(\Omega)}\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid \exists \varepsilon > 0 \ \nabla u = 0 \ a.e.(\Omega^c)^\varepsilon\}$$

where K^ε is the Minkowski sum

$$K \oplus B(0,\varepsilon) = \bigcup_{x \in K} B(x,\varepsilon).$$

It turns out that if Ω^c is connected, every function in $H^1_{cond}(\Omega)$ is constant on the boundary, in the sense that there exists $c \in \mathbb{R}$ such that $u - c \in H^1_0(\Omega)$. Consequently, in this case the space $H^1_{cond}(\Omega)$ coincides with the space considered previously by Greco and Lucia (up to the zero mean value). If Ω^c is not connected, on the boundary of the smooth connected components of Ω^c, a function $u \in H^1_{cond}(\Omega)$ is locally constant (the constant may differ from one to another connected component). These regions can be seen as perfectly conductive regions in the frame of the dual defect identification problems of Friedeman and Vogelius.

The eigenvalue problem for the *cond. b.c* Laplacian is well posed, and the same questions (see [38]), as for the *const. b.c.* Laplacian can be raised. Unfortunately, we are not able to perform a complete shape analysis of the problem because of major new difficulties which are related to the (open) problem of the relaxation of the Neumann Laplacian.

The isoperimetric inequality of the first non-zero *cond. b.c* eigenvalue can be treated by a two steps rearrangement. As in [38], by a Schwarz rearrangement of two level sets of a test function u, we reduce the search of the optimum to the family of the unions of two sets of concentric annuli. In a second step we prove by a second rearrangement procedure that the annuli can be streched to balls and finally, that two equal disjoint balls minimize the first non zero eigenvalue among domains of constant volume. We refer the reader to [41] for a recent survey concerning isoperimetric inequalities for eigenvalues.

Shape stability is achieved only in two dimensions provided that the number of connected components of the moving complements is uniformly bounded and the Lebesque measure is stable. Some numerical computations for the solutions of the isoperimetric inequalities for the first three *cond. b.c* eigenvalues are also provided.

3.2 The Laplacian with constant boundary conditions

Let $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ be a bounded open set. We denote by Ω an open or quasi-open subset of D (we refer the reader to [15] for a detailed introduction to the shape analysis of quasi-open sets).

We introduce the following space :

$$H^1_{const}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \exists c \in \mathbb{R}, u - c \in H^1_0(\Omega)\}$$

and consider the closed subspace :

$$\mathcal{U}_{const}(\Omega) = \{u \in H^1_{const}(\Omega) \mid \int_\Omega u dx = 0\}.$$

It is easy to observe that $\mathcal{U}_{const}(\Omega)$ can be equivalently endowed with the scalar product

$$(u, v)_{\mathcal{U}_{const}(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2}.$$

Indeed, the following Poincaré inequality holds. There exists a constant $M > 0$, depending only on the measure of Ω such that for every $u \in \mathcal{U}_{const}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq M \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

To prove this assertion, one can apply the Poincaré inequality to $u - c \in H^1_0(\Omega)$ and obtain $\|u-c\|_{L^2(\Omega)} \leq M\|\nabla(u-c)\|_{L^2(\Omega)}$. Since $\nabla u = \nabla(u-c)$ and since $\int_\Omega u dx = 0$, we immediately get

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - c\|_{L^2(\Omega)} \leq M\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

We consider the Laplace operator acting on the space $\mathcal{U}_{const}(\Omega)$. More precisely we define

$$T_\Omega : L^2_0(\Omega) \longrightarrow L^2_0(\Omega), \quad T_\Omega f = R_\Omega f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega f dx.$$

Here $L^2_0(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega f dx = 0\}$ and $R_\Omega : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ is the resolvent of the Dirichlet Laplacian on Ω, i.e. $R_\Omega f = u$, where u solves

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ in } \Omega \\ u \in H^1_0(\Omega). \end{cases} \tag{3.2.1}$$

in the weak variational sense. The eigenvalues of T_Ω^{-1} are the inverses of the eigenvalues of the *const. b.c.* Laplacian.

Alternatively, they are defined with the Rayleigh quotient

$$\lambda^{ct}_k(\Omega) = \min_{V^k \subset \mathcal{U}_{const}(\Omega)} \max_{v \in V^k \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega v^2 dx}. \tag{3.2.2}$$

where V^k stands for an arbitrary subspace of dimension k in $\mathcal{U}_{const}(\Omega)$.

We notice at this point that we can also define the Laplacian on $H^1_{const}(\Omega)$, in which case the first eigenvalue is zero. For this reason we refer to $\lambda^{ct}_1(\Omega)$ as the first non zero eigenvalue.

If $\lambda^{ct}_k(\Omega)$ is an eigenvalue defined by (3.2.2), there exists a non zero function $u \in \mathcal{U}_{const}(\Omega)$ such that formally

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda^{ct}_k(\Omega) u \\ u \in \mathcal{U}_{const}(\Omega). \end{cases} \tag{3.2.3}$$

This formal relation is understood in the following sense : $u \in \mathcal{U}_{const}(\Omega)$ and

$$\forall \phi \in \mathcal{U}_{const}(\Omega) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \lambda^{ct}_k(\Omega) \int_\Omega u\phi dx.$$

Notice that the relationship

$$-\Delta u = \lambda^{ct}_k(\Omega) u \tag{3.2.4}$$

holds also in the sense of distributions. Indeed, $\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, and a suitable constant c such that $\phi - c \in \mathcal{U}_{const}(\Omega)$ we have

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\phi - c) dx = \lambda^{ct}_k(\Omega) \int_\Omega u(\phi - c) dx.$$

Since $\int_\Omega u dx = 0$ one can eliminate c on both sides above.

We recall from [38] the following properties of $\lambda^{ct}_k(\Omega)$:

1. if $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ then $\lambda^{ct}_k(\Omega_2) \leq \lambda^{ct}_k(\Omega_1)$,
2. $\lambda^{ct}_k(t\Omega) = t^{-2}\lambda^{ct}_k(\Omega)$,
3. $\lambda_k(\Omega) \leq \lambda^{ct}_k(\Omega) \leq \lambda^t_k(\Omega) \leq \lambda_{k+1}(\Omega)$,

where $\lambda_k(\Omega)$ stands for the k-th Dirichlet eigenvalue of the Laplacian and $\lambda^t_k(\Omega)$ for the k-twisted eigenvalue (see [34]).

Greco and Lucia studied in [38] the isoperimetric inequality for λ^{ct}_1. There is proved that among all domains of given volume (say m), the union of two disjoint balls of volume $\frac{m}{2}$ minimizes λ^{ct}_1. By a Schwarz rearrangement of the level sets $(u-c)^+$, $(u-c)^-$ of a test function $u \in \mathcal{U}_{const}(\Omega)$ which is such that $u - c \in H^1_0(\Omega)$, the optimization problem is reduced to the family of unions of two balls.

In order to study more general isoperimetric inequalities associated to $\lambda^{ct}_k(\Omega)$ we recall some results for the Dirichlet Laplacian. For the convenience of the reader, we recall the definition of the γ-convergence.

Définition 3.2.1 *Let $\Omega_n, \Omega \subseteq D$ be open (or quasi open) sets. It is said that Ω_n γ-converges to Ω if $R_{\Omega_n} \longrightarrow R_\Omega$ in $\mathcal{L}(L^2(D))$.*

For a detailed study of the γ-convergence, we refer the reader to [15].

¿From the following general inequality (see for instance [31])

$$|\lambda_k(R_{\Omega_n}) - \lambda_k(R_\Omega)| \leq \|R_{\Omega_n} - R_\Omega\|_{\mathcal{L}(L^2(D))}$$

and from the fact that

$$\lambda_k(\Omega_n) = \frac{1}{\lambda_k(R_{\Omega_n})}$$

we get that

$$\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega \implies \lambda_k(\Omega_n) \longrightarrow \lambda_k(\Omega).$$

We also notice that if $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$, we have

$$1_\Omega(x) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} 1_{\Omega_n}(x) \ \ a.e.\ x \in D$$

and consequently

$$|\Omega| \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} |\Omega_n|.$$

If we assume both γ convergence and convergence of measures, then we get L^1 convergence of the characteristic functions $1_{\Omega_n} \longrightarrow 1_\Omega$.

The following general existence result is due to Buttazzo and Dal Maso [21]. Let us denote $\mathcal{A}(D)$ the family of quasi open subsets of D.

Théorème 3.2.2 *Let $F : \mathcal{A}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ be a γ-lower semi continuous functional which is non increasing to set inclusions (up to zero capacity). Then*

$$\min\{F(\Omega)|\Omega \in \mathcal{A}(D), |\Omega| = m\}$$

has a solution.

If $F(\Omega) = \Phi(\lambda_1(\Omega), ..., \lambda_k(\Omega))$ where $\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ is l.s.c. and non decreasing in each variable, then Theorem 3.2.2 applies for

$$F(\Omega) = \Phi(\lambda_1(\Omega), ..., \lambda_k(\Omega)).$$

In particular, the isoperimetric problem

$$\min_{\Omega\in\mathcal{A}(D),|\Omega|=m} \lambda_k(\Omega)$$

has at least one solution.

In order to answer a similar question for shape functionals depending on $\lambda_1^{ct}(\Omega), ..., \lambda_k^{ct}(\Omega)$ one can not use Theorem 3.2.2, since the mappings $\Omega \longrightarrow \lambda_k^{ct}(\Omega)$ are not in general γ-continuous. This lack of γ-continuity is due to the possible "loss" of measure in the γ-limit process and of the failure of convergence of the resolvent operators.

We prefer to (re)define the operators T_Ω on the fixed space associated to the design region $D \subseteq \mathbb{R}^n$. In this way, all operators on the moving sets are defined on the same functional space, so that the comparison of their eigenvalues is easier to handle. For every (quasi) open set $\Omega \subseteq D$, we introduce $\widetilde{T}_\Omega : L_0^2(D) \longrightarrow L_0^2(D)$ by

$$\widetilde{T}_\Omega(f)(x) = \begin{cases} T_\Omega(f_{|\Omega} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f dx)(x) \text{ if } x \in \Omega, \\ 0 \text{ if } x \in D\backslash\Omega. \end{cases}$$

We state the following proposition :

Proposition 3.2.3 *For every (quasi) open set $\Omega \subseteq D$, $\widetilde{T}_\Omega$ is positive, self adjoint and compact.*

Preuve In order to prove that $\widetilde{T}_\Omega$ is self adjoint we prove at first the propriety for T_Ω. Let be $f, g \in L^2_0(\Omega)$. We have

$$< T_\Omega f, g >_{L^2_0(\Omega)} =< R_\Omega f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega f, g >$$

$$=< R_\Omega f, g > - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega f < 1, g > =< f, R_\Omega g > - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega f \int_\Omega g$$

$$=< f, R_\Omega g > - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega g \int_\Omega f =< f, R_\Omega g > - < f, \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega g > =< f, T_\Omega g >,$$

since R_Ω is self adjoint. For every $f, g \in L^2_0(D)$ we obtain

$$< \widetilde{T}_\Omega f, g >_{L^2_0(D)} =< T_\Omega(f_{|\Omega} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f), g >_{L^2_0(\Omega)}$$

$$=< T_\Omega(f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f), g >_{L^2_0(\Omega)}$$

$$=< T_\Omega(f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f), g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g) > =< f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f, T_\Omega(g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g) > =< f, T_\Omega(g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g) >_{L^2_0(\Omega)}$$

$$=< f, \widetilde{T_\Omega(g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g)} >_{L^2_0(D)} =< f, \widetilde{T}_\Omega g > .$$

To prove the positivity let $f \in L^2_0(D)$. We have :

$$< \widetilde{T}_\Omega f, f >_{L^2_0(D)} =< T_\Omega(f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f), f >_{L^2_0(\Omega)}$$

$$=< T_\Omega(f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f), f - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f >_{L^2_0(\Omega)} =< T_\Omega g, g >$$

$$=< R_\Omega g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega g, g > =< R_\Omega g, g > - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega g \cdot \int_\Omega g =< R_\Omega g, g > \geq 0,$$

since the second term in the first equality is equal to 0. Let $f_n \in L^2_0(D)$ a bounded sequence. From weak compacity result that exist an subsequence, still denoted by f_n such that $f_n \rightharpoonup f$ in $L^2_0(D)$. From the continuity of $\widetilde{T}_\Omega$ in $L^2_0(D)$ we obtain that $\widetilde{T}_\Omega f_n \rightharpoonup \widetilde{T}_\Omega f$ in $H^1_0(D)$. Consequently $\widetilde{T}_\Omega f_n \longrightarrow \widetilde{T}_\Omega f$ in $L^2_0(D)$. □

In the sequel we establish the relationship between the eigenvalues of T_Ω and $\widetilde{T}_\Omega$.

Proposition 3.2.4 *Let Ω be a (quasi) open set. The operators T_Ω and $\widetilde{T}_\Omega$ have the same set of eigenvalues, and there exists a natural bijection between eigenspaces.*

Preuve Let λ be an eigenvalue of T_Ω. There exists $u \in L_0^2(\Omega)$ such that $T_\Omega u = \lambda u$. One can prove that there exist $u^* \in L_0^2(D)$ such that $\widetilde{T}_\Omega u^* = \lambda u^*$. Indeed, let $u^* = \begin{cases} u \text{ if } x \in \Omega \\ 0 \text{ if } x \in D \setminus \Omega. \end{cases}$ Since $\int_D u^* dx = 0$ then $u^* \in L_0^2(D)$. We obtain

$$\widetilde{T}_\Omega u^* = T_\Omega(u^* - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^* dx) = T_\Omega u^* = \lambda u^*.$$

since $\int_\Omega u^* dx = \int_\Omega u dx = 0$. Consequently λ is an eigenvalue for $\widetilde{T}_\Omega$. Conversely, let λ be an eigenvalue for $\widetilde{T}_\Omega$. There exists $u \in L_0^2(\Omega)$ such that $\widetilde{T}_\Omega u = \lambda u$. Since $u \in Im\widetilde{T}_\Omega$ we get that $u = 0$ in $D\backslash\Omega$ and $\int_\Omega u dx = 0$. Consequently we have $\widetilde{T}_\Omega u = T_\Omega(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx) = T_\Omega(u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx) = T_\Omega u = \lambda u$.

□

Here is the shape stability theorem for the eigenvalues of $\widetilde{T}_\Omega$ operator.

Théorème 3.2.5 *Let $\Omega_n, \Omega \subseteq D$ be non empty (quasi) open sets such that $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$. Then $\widetilde{T}_{\Omega_n} \longrightarrow \widetilde{T}_\Omega$ in $\mathcal{L}(L_0^2(D))$ if and only if $|\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|$.*

Preuve Assume that $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ and $|\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|$. There exists f_n in the unit ball of $L_0^2(D)$ which realizes the supremum in

$$\sup_{\|f\|_{L_0^2(D)} \leq 1} \|\widetilde{T}_{\Omega_n} f - \widetilde{T}_\Omega f\|_{L_0^2(D)} = \|\widetilde{T}_{\Omega_n}(f_n) - \widetilde{T}_\Omega(f_n)\|_{L_0^2(D)}. \tag{3.2.5}$$

We may assume, without restricting the generality that $(f_n)_n$ converges weakly to f. We have

$$\|\widetilde{T}_{\Omega_n}(f_n) - \widetilde{T}_\Omega(f_n)\|_{L_0^2(D)} = \|\widetilde{T}_{\Omega_n}(f_n) - \widetilde{T}_\Omega f + \widetilde{T}_\Omega f - \widetilde{T}_\Omega(f_n)\|_{L_0^2(D)}$$

$$\leq \|\widetilde{T}_{\Omega_n}(f_n) - \widetilde{T}_\Omega f\|_{L_0^2(D)} + \|\widetilde{T}_\Omega f - \widetilde{T}_\Omega(f_n)\|_{L_0^2(D)}.$$

Let $\phi \in L_0^2(D)$. The convergence of $\widetilde{T}_{\Omega_n}\phi$ to $\widetilde{T}_\Omega\phi$ is strong in $L_0^2(D)$, since $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$. Indeed, $\widetilde{T}_{\Omega_n}\phi = T_{\Omega_n}(\phi - \frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n}\phi dx) = T_{\Omega_n} g_n$, and g_n converge to g, where $g_n = \phi_{|\Omega_n} - \frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n}\phi dx$ and $g = \phi_{|\Omega} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \phi dx$. Using the continuity of R_Ω and the hypothesis of γ-convergence, we obtain

$$T_{\Omega_n} g_n = R_{\Omega_n} g_n - \frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n} R_{\Omega_n} g_n dx \longrightarrow R_\Omega g - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega g dx = T_\Omega g.$$

Consequently, we have in $L_0^2(D)$

$$< \widetilde{T}_{\Omega_n} f_n, \phi > = < f_n, \widetilde{T}_{\Omega_n}\phi > \longrightarrow < f, \widetilde{T}_\Omega\phi > = < \widetilde{T}_\Omega f, \phi > .$$

The weak $L_0^2(D)$ convergence of $\widetilde{T}_{\Omega_n}(f_n)$ to $\widetilde{T}_\Omega(f)$ implies the strong $L_0^2(D)$ convergence of a subsequence (still denoted using the same index).

To conclude, it remains to discuss $\|\widetilde{T}_\Omega f - \widetilde{T}_\Omega f_n\|_{L^2_0(D)}$. This term converges to zero as a direct consequence of the continuity/compactness of $\widetilde{T}_\Omega$ and the weak $L^2_0(D)$ convergence of $f_n \rightharpoonup f$.

Conversely, we assume that $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ and $\widetilde{T}_{\Omega_n} \longrightarrow \widetilde{T}_\Omega$. Let $\phi \in L^2_0(D)$. The convergence $\widetilde{T}_{\Omega_n}\phi \longrightarrow \widetilde{T}_\Omega\phi$ reads

$$R_{\Omega_n}\phi - \frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n} R_{\Omega_n}\phi dx - \Big(\frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n}\phi dx\Big)R_{\Omega_n}1 + \frac{1}{|\Omega_n|^2}\int_{\Omega_n}\phi dx\int_{\Omega_n} R_{\Omega_n}1 dx$$
$$\longrightarrow R_\Omega\phi - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega R_\Omega\phi dx - \Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\phi dx\Big)R_\Omega 1 + \frac{1}{|\Omega|^2}\int_\Omega\phi dx\int_\Omega R_\Omega 1 dx.$$

We denote by $g_n = R_{\Omega_n}1$, $f_n = R_{\Omega_n}\phi$. The hypothesis on the γ convergence yields that g_n and f_n converge strongly $H^1_0(D)$ to $g = R_\Omega 1$, and $f = R_\Omega\phi$, respectively, in $H^1_0(D)$. We obtain

$$-\frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n}\phi dx g_n - \frac{1}{|\Omega_n|}\int_D f_n dx + \frac{1}{|\Omega_n|^2}\int_{\Omega_n}\phi dx\int_{\Omega_n} g_n dx$$
$$\longrightarrow -\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\phi dx g - \frac{1}{|\Omega|}\int_D f dx + \frac{1}{|\Omega|^2}\int_\Omega\phi dx\int_\Omega g dx.$$

We can rewrite simply $a_n g_n(\cdot)+b_n \longrightarrow ag(\cdot)+b$, where $a_n = -\frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n}\phi dx$, $a = -\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\phi dx$, $b_n = -\frac{1}{|\Omega_n|}\int_D f_n dx + \frac{1}{|\Omega_n|^2}\int_{\Omega_n}\phi dx\int_{\Omega_n} g_n dx$ and $b = -\frac{1}{|\Omega|}\int_D f dx + \frac{1}{|\Omega|^2}\int_\Omega\phi dx\int_\Omega g dx$. Since the function g is non vanishing, we get $a_n \longrightarrow a$.

Assume $|\Omega_n| \longrightarrow \alpha > |\Omega|$ and define ϕ by

$$\phi = \begin{cases} c \text{ in } \Omega \\ -\frac{c|\Omega|}{|D\setminus\Omega|} \text{ in D} \setminus \Omega. \end{cases}$$

where c is a positive constant. The convergence $a_n \longrightarrow a$ implies that $\int_{\Omega_n}\phi dx \longrightarrow \frac{\alpha}{|\Omega|}\int_\Omega\phi dx$. On the other hand

$$\int_{\Omega_n}\phi dx = c|\Omega| - c|\Omega|\frac{|\Omega_n\setminus\Omega|}{|D\setminus\Omega|}.$$

We obtain $1 - \frac{|\Omega_n\setminus\Omega|}{|D\setminus\Omega|} \longrightarrow \frac{\alpha}{|\Omega|} > 1$, which is absurd, since $\frac{|\Omega_n\setminus\Omega|}{|D\setminus\Omega|} > 0$. Consequently $\alpha = |\Omega|$. □

A direct consequence of Theorem 3.2.5 is the following.

Corollaire 3.2.6 *Let $\Omega_n, \Omega \subseteq D$ be such that $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ and $|\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|$. Then $\lambda^{ct}_k(\Omega_n) \longrightarrow \lambda^{ct}_k(\Omega)$.*

We recall the definition of the weak gamma convergence of quasi open sets. It is said that Ω_n weakly gamma converges to Ω if $R_{\Omega_n}1$ converges weakly $H^1_0(D)$ to a function w, and $\Omega = \{w > 0\}$. We write $\Omega_n \xrightarrow{w\gamma} \Omega$. The main property of the weak gamma convergence is the following : assume that $\phi_n \in H^1_0(\Omega_n)$ is weakly convergent in $H^1_0(D)$ to a function ϕ. Then $\phi \in H^1_0(\Omega)$.

The following result is the key of the optimization problem.

Théorème 3.2.7 *Assume* $\Omega_n \xrightarrow{w\gamma} \Omega$ *and* $\Omega \subseteq \Omega^*$, *such that* $|\Omega^*| = \liminf_{n\to\infty} |\Omega_n|$. *Then*

$$\lambda_k^{ct}(\Omega^*) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_k^{ct}(\Omega_n)$$

Preuve Let $\epsilon > 0$ and $S_n^k \subseteq \mathcal{U}_{const}(\Omega_n)$be a k-dimensional space such that :

$$\lambda_k^{ct}(\Omega_n) + \varepsilon \geq \max_{v\in S_n^k\setminus\{0\}} \frac{\int_{\Omega_n} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_n} v^2 dx},$$

and let v_n be a maximizer function such that $\int_{\Omega_n} v_n^2 dx = 1$. Let $v_i^n, i = 1, .., k$ be a L_0^2-orthonormal basis for S_n^k.

We assume that $\liminf_{n\to\infty} \lambda_k^{ct}(\Omega_n) < \infty$, otherwise the conclusion is obvious. Since $\int_{\Omega_n} |v_i^n|^2 dx = 1$ we get that $\int_{\Omega_n} |\nabla v_i^n|^2 dx$ is bounded. Consequently $\int_{\Omega_n} |\nabla(v_i^n - c_i^n)|^2 dx$ is bounded (here $v_i^n - c_i^n \in H_0^1(\Omega_n)$). Up to a subsequence we may assume that $v_i^n - c_i^n$ converges weakly in $H_0^1(D)$ to w_i, so the convergence $\Omega_n \xrightarrow{w\gamma} \Omega$ implies $w_i \in H_0^1(\Omega)$. Let $\Omega^* \subset D$ be such that $|\Omega^*| = \alpha$, where α is such that $|\Omega_n| \longrightarrow \alpha$. Since $H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega^*)$ we obtain $w_i \in H_0^1(\Omega^*)$.

Assume that $|\Omega_n| \to \alpha$ and $c_i^n \longrightarrow c_i$. Then

$$\int_D (v_i^n - c_i^n) dx \to \int_D (w_i) dx \Rightarrow \int_{\Omega_n} v_i^n dx - \int_{\Omega_n} c_i^n dx \to \int_{\Omega^*} w_i dx \Rightarrow -c_i^n |\Omega_n| \to \int_{\Omega^*} w_i dx,$$

and we get $\int_{\Omega^*} w_i dx = -c_i\alpha$. Let $v_i = w_i + c_i \in \mathcal{U}_{const}(\Omega^*)$. Indeed, we have $\int_{\Omega^*} v_i dx = \int_{\Omega^*} (w_i + c_i) dx = -c_i\alpha + c_i|\Omega^*| = 0$.

We introduce the space $S = span(v_1, ..., v_k)$. One can verify that $(v_i, v_j)_{L^2} = \delta_{ij}$ so that S is a k dimensional subspace of $\mathcal{U}_{const}(\Omega^*)$. The construction of S and the convergence $\Omega_n \xrightarrow{w\gamma} \Omega$ implies that for all $v \in S$, $v = \Sigma_{i=1}^k \alpha_i v_i$ the sequence $h_n \in S_n$ defined by $h_n = \Sigma_{i=1}^k \alpha_i v_i^n$ converges weakly to v in $H_0^1(D)$. Moreover,

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_{\Omega_n} |\nabla h_n|^2 dx \geq \int_{\Omega^*} |\nabla v|^2 dx. \tag{3.2.6}$$

To prove that

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{\int_{\Omega_n} |\nabla h_n|^2 dx}{\int_{\Omega_n} h_n^2} dx \geq \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega^*} v^2} dx \tag{3.2.7}$$

it is enough to prove that

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_n} h_n^2 dx \leq \int_{\Omega^*} v^2 dx. \tag{3.2.8}$$

By the definition of v_i we obtain

$$\int_{\Omega^*} v^2 dx = \int_{\Omega^*} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i v_i)^2 dx = \int_{\Omega^*} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i (w_i + c_i))^2 dx$$

$$= \int_{\Omega^*} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i w_i + \Sigma_{i=1}^k \alpha_i c_i)^2 dx = \int_{\Omega^*} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i w_i)^2 dx - 2C^2\alpha + C^2\alpha$$

$$= \int_{\Omega^*} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i w_i)^2 dx - C^2\alpha,$$

where $C = \Sigma_{i=1}^k \alpha_i c_i$. On the other hand we get

$$\int_{\Omega_n} h_n^2 dx = \int_{\Omega_n} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i v_i^n)^2 dx = \int_{\Omega_n} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i (v_i^n - c_i^n) + \Sigma_{i=1}^k \alpha_i c_i^n)^2 dx$$

$$= \int_{\Omega_n} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i (v_i^n - c_i^n))^2 dx + 2\Sigma_{i=1}^k \alpha_i c_i^n \int_{\Omega_n} \Sigma_{i=1}^k \alpha_i (v_i^n - c_i^n) dx + (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i c_i^n)^2 |\Omega_n|$$

$$= \int_{\Omega_n} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i (v_i^n - c_i^n))^2 dx - 2C^2|\Omega_n| + C^2\alpha.$$

Inequality (3.2.8) is equivalent to

$$\limsup_{n\to\infty} (\int_{\Omega_n} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i (v_i^n - c_i^n))^2 dx - 2C^2|\Omega_n| + C^2\alpha) \leq \int_{\Omega^*} (\Sigma_{i=1}^k \alpha_i w_i)^2 dx - C^2\alpha \qquad (3.2.9)$$

Passing to the limit gives

$$-\liminf_{n\to\infty} 2C^2|\Omega_n| + C^2\alpha \leq C^2\alpha.$$

Finally,

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_k^{ct}(\Omega_n) + \varepsilon \geq \liminf_{n\to\infty} \max_{v\in S_n^k \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega_n} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_n} v^2 dx} \geq$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\int_{\Omega_n} |\nabla h_n|^2 dx}{\int_{\Omega_n} h_n^2 dx} \geq \max_{v\in S} \frac{\int_{\Omega^*} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega^*} v^2 dx} \geq \lambda_k^{ct}(\Omega^*).$$

so $\liminf_{n\to\infty} \lambda_k^{ct}(\Omega_n) + \varepsilon \geq \lambda_k^{ct}(\Omega^*)$. Making $\varepsilon \to 0$, we conclude the proof. □

Théorème 3.2.8 *Let $\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ be a lower semi continuous function, nondecreasing in each variable. Then*

$$\min_{\Omega\in\mathcal{A}(D),|\Omega|=m} \Phi(\lambda_1^{ct}(\Omega), ..., \lambda_k^{ct}(\Omega)) \qquad (3.2.10)$$

has at least one solution.

Preuve Let us denote $\lambda^{ct}(\Omega) = (\lambda_1^{ct}(\Omega), ..., \lambda_k^{ct}(\Omega))$. ¿From the monotonicity property of λ_k^{ct}, the function $\Phi(\lambda^{ct}(\Omega))$ is non-increasing with respect to set inclusions. We assume that $\Phi(\lambda^{ct}(\Omega))$ is not identically $+\infty$, otherwise every open set of measure m is a solution. We notice that $\Phi(\lambda^{ct}(\Omega))$ is bounded from below by $\Phi(\lambda^{ct}(D))$.

Let Ω_n be a minimizing sequence for the problem (3.2.10). From the compactness of the $w\gamma$ convergence, we may assume that $\Omega_n \xrightarrow{w\gamma} \Omega$, and we get $|\Omega| \leq m$. If $|\Omega| = m$ than Ω is solution from Theorem 3.2.7. Otherwise, we find Ω^* such that $|\Omega|^* = m$ and $\Omega \subseteq \Omega^*$. Then, from the monotonicity and the lower semicontinuity of Φ we get $\Phi(\lambda^{ct}(\Omega^*)) \leq \liminf \Phi(\lambda^{ct}(\Omega_n))$, consequently Ω^* is a solution. □

3.3 The conductivity eigenvalue problem

Let D be a bounded, connected open subset of $\mathbb{R}^N$ such that $\mathbb{R}^N \setminus D$ is connected. For every open set $\Omega \subseteq D$ we introduce the conductivity space

$$H^1_{cond}(\Omega) = cl_{H^1(\Omega)}\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \mid \exists \epsilon > 0,\ \nabla u = 0 \text{ a.e. on } (\mathbb{R}^n \backslash \Omega)^\epsilon\}.$$

Here, for a set $K \subseteq \mathbb{R}^n$ and for $\epsilon > 0$ we denote

$$K^\epsilon = \bigcup_{x \in K} B(x, \epsilon).$$

Let $u \in H^1_{cond}(\Omega)$. Clearly, there exists a constant c such that $u - c \in H^1_0(D)$. Indeed, by definition there exists a sequence of functions $u_n \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ such that $\nabla u_n = 0$ on $(\mathbb{R}^n \backslash \Omega)^{\epsilon_n}$ and $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$. Consequently, there exists c_n such that $u_n - c_n \in H^1_0(D)$, and we may see the limit $u_n \to u$ in $H^1(\Omega)$ for the extensions of u_n in $H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Since $\nabla u_n = 0$ a.e. on $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^{\epsilon_n}$ we have that $\nabla u_n \overset{L^2(\mathbb{R}^n)}{\rightharpoonup} \nabla \widetilde{u},\ \widetilde{u} \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Since $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx$ we get that $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_n - \nabla \widetilde{u}|^2 dx \longrightarrow 0$, where

$$\nabla \widetilde{u} = \begin{cases} \nabla u \text{ on } \Omega \\ 0 \text{ on } \Omega^c. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Up to a sequence (still denoted using the same index) and since D is bounded and connected, we have $u_n \overset{L^2(D)}{\longrightarrow} \widetilde{u}$ and $\widetilde{u} = u$ on Ω. Let K be a connected component of $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. We get that $\widetilde{u}$ is quasi everywhere constant on K. In particular, $\widetilde{u}$ equals the constant c on the unbounded component, so that $\widetilde{u} - c \in H^1_0(D)$.

We notice that if Ω_1 and Ω_2 differ on a set of zero capacity, it is possible that $H^1_{cond}(\Omega_1)$ and $H^1_{cond}(\Omega_2)$ are not the same! This is not a real problem for the the study of isoperimetric inequalities, as will be observed in the sequel, but is a hard difficulty for the study of the shape stability question (which remains open).

We introduce the following closed subspace in $H^1_{cond}(\Omega)$

$$\mathcal{U}_{cond}(\Omega) = \{u \in H^1_{cond}(\Omega) | \int_\Omega u dx = 0\}.$$

The mapping $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ is a norm on $\mathcal{U}_{cond}(\Omega)$. Moreover, the Poincaré inequality

$$\int_\Omega |u|^2 dx \leq C(D) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

holds with a constant $C(D)$ depending only on D. Indeed, we can write for a suitable value c,

$$\int_D (u - c)^2 dx \leq C(D) \int_D |\nabla (u - c)|^2 dx,$$

since $u - c \in H^1_0(D)$. Consequently

$$\int_\Omega (u - c)^2 dx \leq C(D) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Since $\int_\Omega u dx = 0$ we get $\int_\Omega u^2 dx \leq \int_\Omega (u-c)^2 dx \leq C(D) \int_D |\nabla u|^2 dx$. The eigenvalues of the Laplace operator with conductivity boundary condition are defined as the eigenvalues of the operator

$$A_\Omega : L^2_0(\Omega) \longrightarrow L^2_0(\Omega)$$

defined by $A_\Omega f = u$ where u solves the problem

$$u \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx \ \ \forall \phi \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega).$$

Alternatively, u minimizes

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega f u dx.$$

Proposition 3.3.1 *The operator A_Ω is self adjoint, positive and compact.*

Preuve The continuity of A_Ω is a consequence of the Poincaré inequality in $\mathcal{U}_{cond}(\Omega)$. Its compactness comes from the compact embedding $\mathcal{U}_{cond}(\Omega) \hookrightarrow L^2_0(\Omega)$, while selfadjointess is inherited from the Laplacian. □

A direct consequence of Proposition 3.3.1 is that the spectrum of conductivity b.c-Laplacian consists on a sequence of eigenvalues

$$0 < \lambda^{cd}_1(\Omega) \leq \lambda^{cd}_2(\Omega) \leq ....$$

It is straightforward to observe that

$$\lambda^{cd}_k(t\Omega) = t^{-2} \lambda^{cd}_k(\Omega).$$

The monotonicity property $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Longrightarrow \lambda^{cd}_k(\Omega_2) \leq \lambda^{cd}_k(\Omega_1)$ is a consequence of the min max principle :

$$\lambda^{cd}_k(\Omega) = \min_{V^k \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega) \setminus \{0\}} \max_{u \in V^k \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx}.$$

For every $V^k \subseteq \mathcal{U}_{cond}(\Omega_1)$, $V^k = span\{v_1, ...v_k\}$ we consider v_k extended to elements v^*_k of $H^1_{cond}(\Omega_2)$ and $v^*_k - c_k \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega_2)$. The extension is done as follows : consider a sequence v^ε_k converging in $H^1_{cond}(\Omega_1)$ to v_k, such that $\nabla v^\varepsilon_k = 0$ on $(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_1)^\varepsilon$. We extend v^ε_k by suitable constants to elements $(v^\varepsilon_k)^* \in H^1_{cond}(\Omega_2)$ and define v^*_k as the limit of $(v^\varepsilon_k)^*$.

It is straightforward to observe that

$$\frac{\int_{\Omega_1} |\nabla v_k|^2 dx}{\int_{\Omega_1} v^2_k dx} \geq \frac{\int_{\Omega_2} |\nabla (v^*_k - c_k)|^2 dx}{\int_{\Omega_2} |v^*_k - c_k|^2 dx}.$$

Indeed, $\int_{\Omega_2} |v^*_k - c_k|^2 dx \geq \int_{\Omega_1} |v^*_k - c_k|^2 dx \geq \int_{\Omega_1} |v_k|^2 dx$.

Proposition 3.3.2 *For every $k \in \mathbb{N}$ the following inequality holds true*

$$\lambda_{k-p+1}(\Omega) \leq \lambda^{ct}_{k-p+1}(\Omega) \leq \lambda^{cd}_k(\Omega) \leq \lambda^{ct}_k(\Omega) \leq \lambda_{k+1}(\Omega)$$

where $p \geq 1$ is the number of the connected components of Ω^c

Preuve The first and the last inequalities are proved in [38]. The third inequality is a consequence of the min-max formula and the inclusion $\mathcal{U}_{const}(\Omega) \subseteq \mathcal{U}_{cond}(\Omega)$.

For the second inequality, let us consider a k-dimensional subspace $S_k \subset \mathcal{U}_{cond}(\Omega)$. It is easy to notice that S_k has a $k-p+1$ dimensional subspace $S_{k-p+1} \subset \mathcal{U}_{const}(\Omega)$. Consequently, the min-max formula implies the second inequality. □

The shape stability question for λ_k^{cd} is much more difficult than for λ_k^{ct}. No general continuity result could be obtained, since many small pieces carrying different constants may produce a relaxation process into the limit process, which is not clear how to handle. It turns out that this relaxation process is close to the relaxation of Neumann problems, which is an open question.

Proposition 3.3.3 *In two dimensions of the space, assume that* $\Omega_n \subseteq D$, $\sharp\Omega_n^c \leq M$. *If* $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ *and* $|\Omega_n| \longrightarrow |\Omega|$ *then* $\lambda_k^{cd}(\Omega_n) \longrightarrow \lambda_k^{cd}(\Omega)$.

The proof is a consequence of the Mosco convergence $\mathcal{U}_{cond}(\Omega_n)$ to $\mathcal{U}_{cond}(\Omega)$. The difficulty is to handle the constant values of varying functions on merging connected components. We refer the reader to [18] for a discussion of this topic.

3.4 The isoperimetric inequality for the first conductivity eigenvalue

In [38], the authors proved the following isoperimetric eigenvalue for λ_1^{ct} :

$$\lambda_1^{ct}(B_1 \cup B_2) \leq \lambda_1^{ct}(\Omega)$$

where Ω is a bounded open set of measure m and B_1, B_2 are two disjoint balls of measure $m/2$. The main idea consists in rearranging in the sense of Schwarz $(u-c)^+$ and $(u-c)^-$, for some test function $u \in \mathcal{U}_{const}(\Omega)$, such that $u - c \in H_0^1(\Omega)$. This rearrangement leads to searching the minimizer only among the union of two disjoint ball of total measure equal to m, and an analysis depending on the radius drives to the conclusion that the balls have to be equal.

In the sequel we shall prove a similar isoperimetric inequality for the conductivity eigenvalue. The new difficulty is that on the boundary of Ω, the test function has different constant values, so that several regions with flat parts may appear in the rearrangement procedure. Consequently, a second rearrangement process has to be introduced in order to eliminate the flat parts.

Théorème 3.4.1 *Let* Ω *be a bounded open set of* $\mathbb{R}^N$. *Then*

$$\lambda_1^{cd}(B_1 \cup B_2) \leq \lambda_1^{cd}(\Omega)$$

where B_1 *and* B_2 *are two disjoint balls of measure* $\frac{|\Omega|}{2}$.

Preuve Let $u \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega)$ be a test function such that $\nabla u = 0$ on $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^\epsilon$. In particular, this implies the existence of a finite number of flat parts of u, corresponding to the (finite number of) connected components of $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^\epsilon$.

Let $c \in \mathbb{R}$ such that $u - c \in H^1(\mathbb{R}^n)$ (i.e. $u = c$ on the unbounded component of $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^\epsilon$). We make a Schwarz rearrangement of $(u-c)^+$ and $(u-c)^-$ (see for instance [41, 47]). Let us denote $u^+ = [(u-c)^+]^*$ and $u^- = [(u-c)^-]^*$. If $(u-c)^+ = c_1$ on a connected component K of $(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)^\epsilon$, after the rearrangement procedure there is an annulus K_{0,r_1,r_2} with measure at least the measure of $|K|$, where u^+ equals c_1.

The set Ω with the test function u is replaced by the set $\Omega_1 \cup \Omega_2$ with the test function $c - u^-, c + u^+$ obtained in the following way. We remove out from the flat part of value c_1 the annulus $K_{0,r_1,r_1'}$ such that $r_1' \leq r_2$, and $|K_{0,r_1,r_1'}| = |K \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)|$. Making this procedure for every flat part of u, (without c), we construct the new test function $\widetilde{u}$ consisting on $c - u^-$ on Ω_1 and $c + u^+$ on Ω_2, where Ω_1 and Ω_2 are respectively unions of concentric annuli. In this way, $|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega|$ and $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \widetilde{u} dx = 0$, $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \widetilde{u}^2 dx = \int_\Omega u^2 dx$. Moreover $\widetilde{u} \in \mathcal{U}_{cond}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ and $\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |\nabla \widetilde{u}|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

At this point, we have to search the minimizer only among configurations of the form $(\widetilde{u}, \Omega_1, \Omega_2)$. We make a new rearrangement procedure which will keep constant the measures of the level sets of $\widetilde{u}$ and diminish the Dirichlet energy, in order to create a test function in $\mathcal{U}_{const}$. Consequently, we will be able to use the isoperimetric inequality of Greco and Lucia and conclude the proof. In fact, we will stretch the annuli in order to eliminate the flat parts of $\widetilde{u}$ which are not counted in the measure $|\Omega_1 \cup \Omega_2|$.

It is enough to prove the following result corresponding to one annulus. Let $u \in H_0^1(B(0,r_2))$, $u = 1$ on $B(0,r_1)$ be a positive radial function symmetric in the sense of Schwarz. For $r_2' < r_2$ such that $|B(0,r_2')| \geq |K_{0,r_1,r_2}|$, we introduce the function $c : [r_1, r_2] \longrightarrow [r_1', r_2']$, $c(r) = \sqrt[n]{(r_2')^n - r_2^n + r^n}$, such that $|K_{0,c(r),r_2'}| = |K_{0,r,r_2}|$. We define the rearrangement of u by $\{u^* > c\} = B(0, c(r))$ if c is such that $\{u > c\} = B(0,r)$. Clearly, since the measures of the level sets are constant, we have that

$$\forall\, 1 \leq p < +\infty \quad \int_{K_{0,r_1,r_2}} u^p dx = \int_{K_{0,r_1',r_2'}} (u^*)^p dx.$$

We evaluate the behavior of the gradient. Since u is radial, we can use spherical coordinates to express $\int_{K_{0,r_1,r_2}} |\nabla u|^2 dx$. We notice that $u^* \in H_0^1(B(0,r_2'))$, since $u^*(c(r), \theta_1, ..., \theta_{n-1}) = u(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$, and c is a Lipschitz function. Then, we have (below $\omega(n)$ is the measure of the unit sphere of $\mathbb{R}^N$)

$$\int_{K_{0,r_1,r_2}} |\nabla u|^2 dx = \omega(n) \int_{r_1}^{r_2} (\frac{\partial u}{\partial r})^2 \cdot r^{n-1} dr$$

while

$$\int_{K_{0,r_1',r_2'}} |\nabla u^*|^2 dx = \omega(n) \int_{r_1'}^{r_2'} (\frac{\partial u^*}{\partial r'})^2 \cdot (r')^{n-1} dr'$$

We perform the change of variable

$$r' = c(r) \quad r = c^{-1}(r')$$

and $u^*(r') = u(r) = u(\sqrt[n]{(r')^n + r_2^n - (r_2')^n})$, so that

$$\frac{\partial u^*}{\partial r'} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{(r')^{n-1}}{\sqrt[n]{[(r')^n + r_2^n - (r_2')^n]^{n-1}}}$$

Consequently

$$\int_{K_{0,r_1',r_2'}} |\nabla u^*|^2 = \omega(n) \int_{r_1'}^{r_2'} (\frac{\partial u}{\partial r})^2(r') \cdot \frac{(r')^{2(n-1)}}{\sqrt[n]{[(r')^n + r_2^n - (r_2')^n]^{2(n-1)}}} ((r')^{n-1} dr'.$$

and writing $r' = c(r)$ and $dr' = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{[(r_2')^n - r_2^n + r^n]^{n-1}}} dr$ so that $(r')^{n-1} dr' = r^{n-1} dr$.

$$\int_{K_{0,r_1',r_2'}} |\nabla u^*|^2 = \omega(n) \int_{r_1}^{r_2} (\frac{\partial u}{\partial r})^2 \cdot \frac{(r')^{2(n-1)} \cdot (r')^{n-1}}{r^{2(n-1)}} \cdot \frac{r^{n-1}}{(r')^{n-1}} dr$$

$$= \omega(n) \int_{r_1}^{r_2} (\frac{\partial u}{\partial r})^2 (\frac{r'}{r})^{2(n-1)} r^{n-1} dr$$

Since $\frac{r'}{r} \leq 1$ we deduce that $\int_{K_{0,r_1',r_2'}} |\nabla u^*|^2 \leq \int_{K_{0,r_1,r_2}} |\nabla u|^2$.

□

3.5 Numerical results

In this section we address the problem of the numerical minimization of the conductivity eigenvalues with respect to a domain Ω in $\mathbb{R}^2$. We refer the reader to [30, 66] for a detailed exposition of classical shape optimization methods.

We recall that the eigenfunctions have to be constant on each connected component of the boundary of the domain. Since the topology of the optimal sets is unknown, a classical boundary variation optimization is not relevant here. To tackle this difficulty, we propose an optimization procedure based on standard genetic algorithm technics (see [55] for details on stochastic optimization methods). The parametrization of domains and the cost evaluation are the main new features of our approach. Our algorithm has the following principal ingredients :

- description of the unknown sets by a small number of parameters
- identification of the topology of each set (in order to handle the constant levels)
- computation of the conductivity eigenvalues imposing the locally constant boundary conditions (relaying on the topology)

The first point is based on the study of level sets of functions described by Fourier series. Let $(a_{m,n}) \subset [0,1]$ be a family of parameters. We consider the function f defined on $[0,1] \times [0,1]$ by

$$f(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n} \sin \pi n x \cos \pi m y.$$

We associate to the set of parameters $(a_{m,n})$ the open set

$$\Omega := \left\{ (x,y) \in [0,1] \times [0,1], f(x,y) < \frac{\max f}{2} \right\}.$$

By classical linear interpolation technics, it is straightforward to get a complete polygonal approximation of the boundary of Ω. Notice that the boundary of Ω is, by construction, (for almost every family of parameters) a union of none overlapping simple closed curves. We show in figures below two random sets obtained with a family of 30 parameters.

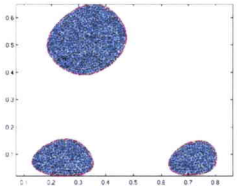


FIG. 3.1 – $\lambda_1^{cd} = 45.84$

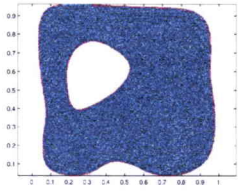


FIG. 3.2 – $\lambda_1^{cd} = 53.54$

The next step is to give a complete description of the topology of $\partial\Omega$. We have to determine on which connected components of $\partial\Omega$ the eigenfunction must take the same value. We construct a tree structure whose vertices are the polygonal connected components of $\partial\Omega$ and whose edges represent the "direct" inclusion of those lines. More precisely, two polygonal lines are connected by an edge if one of them contains the other and there is no other polygonal lines contained inbetween. With this tree, it is straightforward to identify the polygonal lines on which the eigenfunctions must have the same value.

Using this information, we can proceed to the computation of eigenvalues. First, we generate a triangular mesh of our set. This has been done with the very performing $2D$ mesh generator *Triangle* (see [64]). Then, we compute the standard stiffness matrix A associated to Neumann boundary condition. Next, we impose the constraints on the boundary by penalization. Imposing the condition $u_i = u_j$ is handled by the matrix penalization indicated below :

	i	...	j
i	$1/\varepsilon$		$-1/\varepsilon$
...			
j	$-1/\varepsilon$		$1/\varepsilon$

In the sequel we present a few examples for the calculus of optimal shapes (together with eigenvalues and eigenfunctions). A good exploration of the space of parameters by genetic algorithms leads to the following numerical results (see figures below) for the shape optimization problems

$$\min_{|\Omega|=m} \lambda_k^{cd}(\Omega), \quad k = 1,2,3.$$

We notice that for $k = 1$ we numerically find the optimal solution consisting on two disjoint balls, as Theorem 3.4.1 states, while for $k = 3$ the optimal shape is a ball.

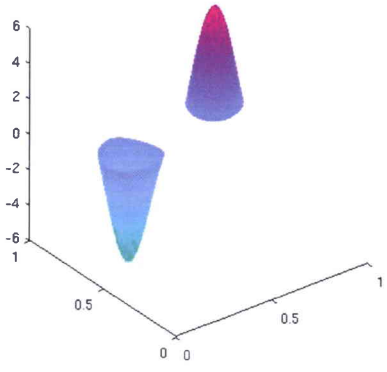


FIG. 3.3 – λ_1^{cd}

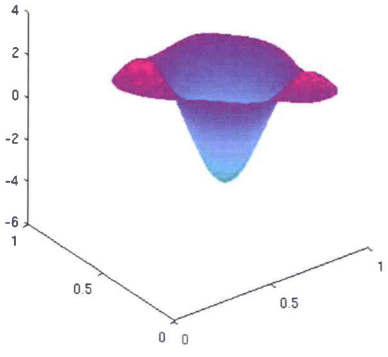


FIG. 3.4 – λ_2^{cd}

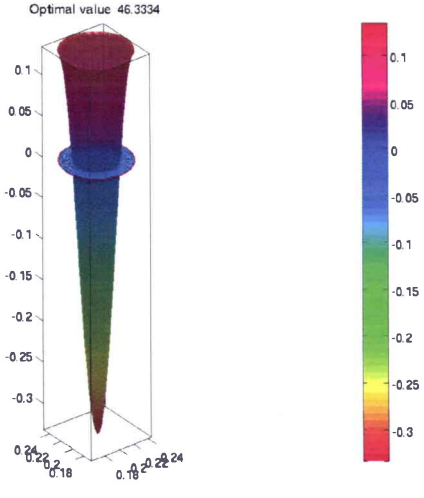


FIG. 3.5 – λ_3^{cd}

Remarque 3.5.1 We notice that for $k = 3$ we obtain two different representation for the eigenvector, the second is presented in the picture below.

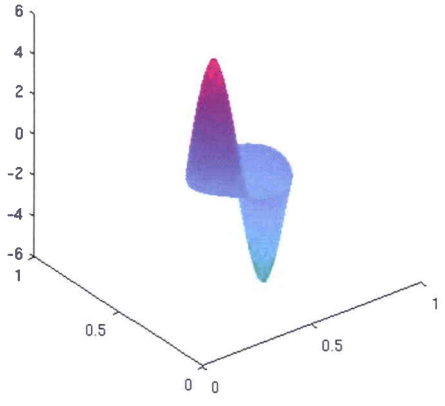


FIG. 3.6 – λ_3^{cd}

This is the concequence of the fact that for a ball the first eigenvalue have the order of multiplicity equal to three, as is indicated below.

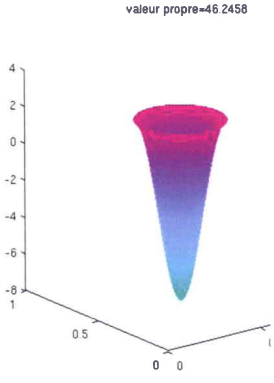


FIG. 3.7 – λ_1^{cd}

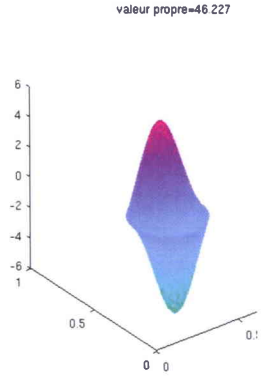


FIG. 3.8 – λ_1^{cd}

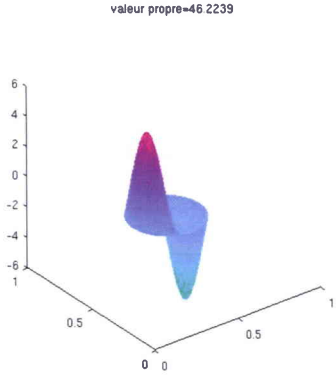


FIG. 3.9 – λ_1^{cd}

Chapitre 4

Simulation numérique du décollement d'une membrane

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude numérique du décollement d'une membrane adhésive soumise à une force dépendante du temps. Dans [16] plusieurs modèles sont proposées dans le cadre de mouvements minimisants quasi-statiques. Un autre modèle, semblable d'un certain point de vue, a été proposé dans [5] (voir aussi [4]) pour le processus de l'évolution quasi-statique d'une membrane élastique en contact adhésif avec un obstacle rigide. Le processus d'adhérence est modélisé par l'introduction d'un champ de liaison qui mesure la densité factionnaire des liaisons actives. Dans [16], suivant l'énergie dépensé pour le décollement de la membrane (appelée par la suite distance de dissipation) on a deux modèles. Le premier modèle consiste en une évolution de mesures et le deuxième modèle en une évolution des domaines.

Pour les deux modèles on propose d'abord de méthodes d'optimisation locale : la méthode du gradient pour l'évolution de mesures et la méthode de lignes de niveaux pour l'évolution de domaines. Ensuite, pour échapper aux minimums locaux on propose une méthode basée sur des mécanismes stochastiques : les stratégies évolutionnaires.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et régulier, et $f : [0,T] \longrightarrow L^2(D,\mathbb{R}^+)$ une fonction donnée. On considère D comme une membrane en contact adhésif avec le plan (sur sa surface entière ou sur certaines regions). Soit $\Omega_0 \subseteq D$ la région où la membrane est décollée. Au moment $t = 0$ la position de la membrane est donnée par :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(0,\cdot) \text{ dans } \Omega_0 \\ u \in H_0^1(\Omega_0) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où u représente le déplacement vertical de la membrane. Intuitivement, on peut comprendre le modèle de la façon suivante : si le contact est "fort" (la colle est forte), sous l'action d'une force f la membrane reste collée sur $D \setminus \Omega_0$ (une force faible n'a aucun effet sur la région collée $D \setminus \Omega_0$). Plus intéressantes devient les situations où, en cassant le contact adhésif, la région décollée augmente en temps.

Nous commençons ce chapitre par la description du processus de relaxation pour le

problème de Dirichlet. On présente ensuite le modèle caractérise par une évolution de mesures. La troisième section est dédiée au modèle caractérisé par une évolution de domaines. Pour conclure, nous présenterons les résultats numériques obtenus.

4.2 Relaxation pour le problème de Dirichlet

Une des principales techniques de l'optimisation de forme est la relaxation. Dans cette section on va donner quelques détails sur ce sujet (en relation avec les conditions au bord de type Dirichlet), une description complète pouvant être trouvée dans [20].

Étant donné un domaine borné $D \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et une fonction $j : D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} \int_D j(x, u_\Omega(x))dx \tag{4.2.1}$$

où $\mathcal{A}$ représente la classe de tous les ouverts de D, et u_Ω est la solution du problème homogène de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4.2.2}$$

prolongé par 0 sur $D \setminus \Omega$, et f est une fonction donnée dans $L^2(D)$.

La relaxation est basé sur l'extension de la notion de solution et l'élargissement de la classe d'objets sur laquelle on cherche a optimiser une fonctionnelle. Cette méthode est utilisé pour des problèmes pour lesquels on n'arrive pas a trouver une solution classique, c'est-à-dire le minimum dans le problème (4.2.1) n'est pas atteint.

On note par $\mathcal{M}_0(D)$ l'ensemble des mesures de Borel positives de D, qui peuvent prendre aussi la valeur $+\infty$, avec les propriétés suivantes :

i) $\mu(B) = 0$ pour tout ensemble de Borel $B \subseteq D$, avec $\text{cap}(B) = 0$;

ii) $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ quasi ouvert}, \ B \subseteq U\}$, pour tout ensemble de Borel $B \subseteq D$.

Un exemple de mesure de $\mathcal{M}_0(D)$ est, pour tout borelien $S \subseteq D$, la mesure ∞_S, définie par :

$$\infty_S(B) = \begin{cases} 0 \text{ si } \text{cap}(B \cap S) = 0 \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \tag{4.2.3}$$

Par $X_\mu(D)$ on denote l'espace vectoriel de toutes les fonctions $u \in H_0^1(D)$ tel que $\int_D u^2 d\mu < \infty$. On note que l'espace $X_\mu(D)$ est bien défini, car μ s'annule sur tout ensemble de capacité nulle, et que toute fonction de Sobolev est uniquement définie jusqu'à un ensemble de capacité zero près. Ceci signifie qu'on peut regarder $X_\mu(D)$ comme $H_0^1(D) \cap L^2(D, \mu)$. On munit l'espace $X_\mu(D)$ avec la norme

$$\|u\|_{X_\mu(D)} = \left(\int_D |\nabla u|^2 dx + \int_D u^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

induite par le produit scalaire :

$$(u, v)_{X_\mu(D)} = \int_D \nabla u \nabla v dx + \int_D uv d\mu. \tag{4.2.4}$$

On a le résultat suivant (voir par exemple [20]) :

Théorème 4.2.1 *L'espace $X_\mu(D)$ avec le produit scalaire (4.2.4) est un espace de Hilbert.*

On note par X_μ^{-1} l'espace dual de $X_\mu(D)$. Comme $X_\mu(D)$ s'injecte dans $H_0^1(D)$ par l'application identité $i(u) = u$, l'espace dual $H^{-1}(D)$ de $H_0^1(D)$ peut être considéré comme un sous espace de l'espace dual X_μ^{-1}. Pour tout $f \in H^{-1}(D)$ on peut écrire :

$$< f, v >_{X_\mu^{-1}} = < f, v >_{H^{-1}(D)} \quad \forall v \in X_\mu(D).$$

Quand $f \in L^2(D)$, on a une expression sous forme integrale :

$$< f, v >_{X_\mu^{-1}} = \int_D f v dx \quad \forall v \in X_\mu(D).$$

Soit $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$. On utilisant le théorème de représentation de Riesz , il résulte que pour toutes $f \in X_\mu^{-1}(D)$ il existe $u \in X_\mu(D)$ tel que

$$(u, v)_{X_\mu(D)} = < f, v >_{X_\mu^{-1}(D)} \quad \forall v \in X_\mu(D).$$

En tenant compte de la definition du produit scalaire sur $X_\mu(D)$, on obtient

$$\int_D \nabla u \nabla v dx + \int_D uv d\mu = < f, v >_{X_\mu^{-1}(D)} \quad \forall v \in X_\mu(D)$$

Cette dernière expression peut être écrite sous la forme :

$$\text{trouver } u \in X_\mu(D) \text{ tel que } \quad -\Delta u + \mu u = f \text{ dans } X_\mu^{-1}(D) \tag{4.2.5}$$

qui s'appelle la formulation relaxée du problème de Dirichlet. Par la suite on note avec u_μ la solution unique du problème (4.2.5).

Soit $R_\mu : X_\mu^{-1}(D) \longrightarrow X_\mu(D)$ l'opérateur resolvent défini par $R_\mu(f) = u_\mu$. Cet opérateur est continu, linéaire et symétrique. Il existe donc une constante C (dépendant uniquement de D) telle que

$$\|R_\mu(f)\|_{H^1(D)} \leq C \|f\|_{H^{-1}(D)} \ \forall \ f \in H^{-1}(D)$$

et

$$< g, R_\mu(f) >_{X_\mu^{-1}(D)} = < f, R_\mu g >_{X_\mu^{-1}(D)} \quad \forall \ f, g \in X_\mu^{-1}(D).$$

Par la suite on va introduire la notion de γ convergence sur la classe de mesures $\mathcal{M}_0(D)$, notion introduite dans [28] pour l'étude de la dependance entre la solution du problème (4.2.5) et la mesure μ.

Définition 4.2.2 *On dit que une suite de mesures (μ_n) de $\mathcal{M}_0(D)$ γ- converge vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ si et seulement si*

$$R_{\mu_n}(f) \rightharpoonup R_\mu(f) \ \textit{faiblement dans } H_0^1(D), \quad \forall f \in H^{-1}(D).$$

Soit w_μ la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta w_\mu + w_\mu \mu = 1 \\ \quad w_\mu \in X_\mu(D). \end{cases} \tag{4.2.6}$$

Il est possible de démontrer que (voir [15]), (μ_n) γ converge vers μ si et seulement si w_{μ_n} converge vers w_μ faiblement dans $H_0^1(D)$. La γ convergence de μ_n vers μ, est aussi équivalente (voir [15], [28]) avec la Γ- convergence de fonctionnelles énergie associées, $u \longrightarrow \|u\|^2_{X_{\mu_n}(D)}$ vers $u \longrightarrow \|u\|^2_{X_\mu(D)}$, par rapport à la convergence forte de $L^2(D)$. Comme propriétés principales de la γ convergence on rappelle la théorème de compacité et le résultat de densité. Nous nous referons à [20] et [15] pour les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.2.3 *L'espace $\mathcal{M}_0(D)$ muni de la topologie de la γ convergence est un espace métrique compact pour la distance*

$$d(\mu_1, \mu_2) = \int_D |w_{\mu_1} - w_{\mu_2}| dx$$

où w_μ représente la solution du problème (4.2.6).

Théorème 4.2.4 *Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_\mu(D)$, il existe une suite (S_n) d'ensembles compacts de D tels que la suite (∞_{S_n}) γ converge vers μ.*

Soit $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ et soit (S_n) une suite du Théorème 4.2.4. Soit $f \in H^{-1}(D)$ et $\Omega_n = D \setminus S_n$. La solution u_n du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u_n = f|_{\Omega_n} \text{ dans } H^{-1}(\Omega_n) \\ \qquad\qquad\qquad u_n \in H_0^1(\Omega_n). \end{cases} \tag{4.2.7}$$

peut être écrite comme $u_n = R_{\mu_n}(f)$ où $\mu_n = \infty_{S_n}$. Comme la suite (μ_n) γ- converge vers μ, on obtient que (u_n) converge faiblement dans $H_0^1(D)$ vers la solution u_μ du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u + u\mu = f \text{ dans } X_\mu^{-1}(D) \\ \qquad\qquad\qquad u \in X_\mu(D). \end{cases} \tag{4.2.8}$$

Par conséquent, le Théorème 4.2.4 prouve que, pour tout $f \in H^{-1}(D)$, la solution du problème (4.2.8) peut être approchée par la solution du problème de Dirichlet (4.2.7). Si on définit l'énergie de μ associée à f par

$$E(\mu, f) = \min\{\frac{1}{2}\|u\|_{X_\mu(D)} - < f, u >: \ u \in X_\mu(D)\} \tag{4.2.9}$$

on obtient que u_μ est l'unique minimiseur dans (4.2.9) et par conséquent

$$E(\mu, f) = \frac{1}{2}\|u_\mu\|_{X_\mu(D)} - < f, u_\mu > . \tag{4.2.10}$$

On revient au problème d'optimisation considéré, (4.2.1). On suppose que j vérifie les hypotheses :

$$j(\cdot, s) \text{ est } \mathcal{L}^N \text{ mesurable dans } D \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}; \tag{4.2.11}$$

$$j(x, \cdot) \text{ est continue dans } \mathbb{R} \text{ pour presque tout } x \in D; \tag{4.2.12}$$

$$\text{il existe } a_0 \in L^1(D) \text{ et } c_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } |j(x,s)| \leq a_0(x) + c_0|s|^2 \tag{4.2.13}$$

$$\text{pour presque tout } x \in D \text{ et pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Soit

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}_0(D)} \int_D j(x,u_\mu) \tag{4.2.14}$$

Nous nous referons à [20] pour le résultat suivant, qui établit la relation entre les problèmes d'optimisation (4.2.1) et (4.2.14).

Théorème 4.2.5 *Soit $f \in L^2(D)$ et soit $j : D\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui satisfait les conditions (4.2.11),(4.2.12) et (4.2.13). Alors le problème (4.2.14) admet une solution et*

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}_0(D)} \int_D j(x,u_\mu) = \min_{\Omega\in\mathcal{A}(D)} \int_D j(x,u_\Omega). \tag{4.2.15}$$

Remarque 4.2.6 *De plus, pour une fonction $u \in H_0^1(D)$ les affirmations suivantes sont équivalentes :*
(a) il existe une suite minimisante (Ω_n) pour (4.2.1) tel que (u_{Ω_n}) converge faiblement vers u dans $H_0^1(D)$;
(b) il existe un point de minimum μ pour (4.2.14) tel que $u = u_\mu$.
Si (4.2.1) admet une solution $\Omega \in \mathcal{A}(D)$, alors la mesure ∞_S correspondante à $S = D \setminus \Omega$ est une solution pour le problème relaxé (4.2.14).

Le Théorème 4.2.5 est une conséquence de la densité de la classe de mesures de type ∞_S (avec S compact inclus dans D), dans $\mathcal{M}_0(D)$ par rapport à la γ convergence. Une autre classe de mesures qui est dense dans $\mathcal{M}_0(D)$ par rapport à la même convergence, est la classe de mesures de Radon avec densité L^∞. Nous nous referons à [20] pour le résultat suivant.

Proposition 4.2.7 *Soient $q \in L^\infty(D)$, $q \geq 0$ presque partout et u_q la solution du problème elliptique*

$$\begin{cases} -\Delta u_q + q u_q = f \ \text{ dans } \ D \\ \qquad\qquad\quad u_q \in H_0^1(D). \end{cases} \tag{4.2.16}$$

On considère le problème d'optimisation

$$\inf_{q\in L^\infty_+(D)} F(q) \tag{4.2.17}$$

où $F(q) = \int_D j(x,u_q(x))dx$. Alors

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}_0(D)} F(\mu) = \inf_{q\in L^\infty_+(D)} F(q). \tag{4.2.18}$$

Soit p_μ la solution du problème adjoint

$$\begin{cases} -\Delta p_\mu + p_\mu \mu = j_s(x,u_\mu) \ \text{ dans } \ D \\ \qquad\qquad\quad p_\mu = 0 \ \text{ sur } \partial D. \end{cases} \tag{4.2.19}$$

où $j_s(x,s)$ est la dérivée partielle de j par rapport à s. Le problème (4.2.19) doit être compris dans le sens variationnel habituel. Les conditions d' optimalités satisfaites par la

solution $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ du problème (4.2.14) ont été introduites en [20] sous les hypothèses suivantes pour j :

$$j(x,\cdot) \text{ est différentiable et } j_s(x,\cdot) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ pour presque tout } x \in D; \tag{4.2.20}$$

$$j_s(\cdot,s) \text{ est } \mathcal{L}^N - \text{ mesurable dans } D \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}; \tag{4.2.21}$$

il existe $a_1 \in L^2(D)$ et $C_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$|j_s(x,s)| \leq a_1(x) + c_1|s|^2, \text{ pour presque tout } x \in D \text{ et pour tout } s \in \mathbb{R}. \tag{4.2.22}$$

Nous nous référons à [20] pour le résultat suivant.

Théorème 4.2.8 *Soit $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ un point de minimum pour le problème relaxé (4.2.14), et u_μ et p_μ les solution des (4.2.5) et (4.2.19), respectivement. On suppose que j satisfait les hypothèses (4.2.11)-(4.2.13) et (4.2.20)-(4.2.22). Alors*

$$u_\mu p_\mu \leq 0, \text{ quasi partout dans } D. \tag{4.2.23}$$

4.3 Evolution de mesures

Dans ce cas, la configuration à l'équilibre est donnée par l'equation

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f \text{ dans } D \\ u \in H_0^1(D) \cap L^2(D,\mu) \end{cases} \tag{4.3.1}$$

où u représente le déplacement vertical de la membrane et μ est la variable du contrôle qui mesure l'adhérence de la membrane. L'adhérence parfaite correspond à $\mu = +\infty$ et le décollement total correspond à $\mu = 0$. La variable de contrôle μ est supposée varier dans la classe $\mathcal{M}_0(D)$ de mesures de Borel non negatives sur D. Sur la classe $\mathcal{M}_0(D)$ on introduit la relation de monotonie $\preceq$ définie par

$$\mu_1 \preceq \mu_2 \text{ si pour tout quasi-ouvert } A \subseteq D \text{ on a } \mu_1(A) \geq \mu_2(A).$$

Pour chaque $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ on définit l'énergie de μ associée à f par

$$E(\mu,f) = min\{\frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_D u^2 d\mu - \int_D f u dx \ : \ u \in X_\mu(D)\} \tag{4.3.2}$$

Définition 4.3.1 *Une distance de dissipation sur $\mathcal{M}_0$ est une application $\mathcal{D} : \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0 \longrightarrow [0,+\infty]$ qui satisfait les conditions suivantes :*
(i) $\mathcal{D}(\mu,\mu) = 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_0$;
(ii) $\mathcal{D}(\mu_1,\mu_3) \leq \mathcal{D}(\mu_1,\mu_2) + \mathcal{D}(\mu_2,\mu_3)$ pour tout $\mu_1,\mu_2,\mu_3 \in \mathcal{M}_0$.

On dit qu'une distance de dissipation est irréversible si

$$\mu_2 \not\preceq \mu_1 \ \Rightarrow \ \mathcal{D}(\mu_1,\mu_2) = +\infty.$$

Exemple 4.3.2 *Deux distances irréversibles sur* $\mathcal{M}_0$.

- $\mathcal{D}_\gamma(\mu_1,\mu_2) = \int_D |w_{\mu_1} - w_{\mu_2}|dx + \chi_{\mu_2 \preceq \mu_1}$, où w_μ est la fonction définie dans (4.2.6),
- $\mathcal{D}_{cap}(\mu_1,\mu_2) = -cap(\mu_1, D) + cap(\mu_2, D) + \chi_{\mu_2 \preceq \mu_1}$, où χ_E est la fonction qui prends la valeurs 0 sur E et $+\infty$ ailleurs, et $cap(\mu, D)$ est la quantité définie par

$$cap(\mu, D) = \inf\{\int_D |\nabla u|^2 dx + \int_D (u-1)^2 d\mu \ : \ u \in H_0^1(D)\}. \tag{4.3.3}$$

On note que les deux distances, $\mathcal{D}_\gamma$ et $\mathcal{D}_{cap}$ sont γ continues en chaque variable.

Avant de rappeler le résultat principal du [16], on introduit la notion de *mouvement minimisant généralisé* associé a une fonctionnelle ([37]).

Soit S un espace topologique, ou plus généralement un ensemble muni d'une structure de convergence, et une fonctionnelle

$$[0,T] \times S \times S \ni (t,v,w) \longrightarrow \mathcal{F}(t,v,w) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, le schéma d' Euler de pas ε et de condition initiale $u_0 \in S$ consiste en la construction d'une fonction $u_\varepsilon(t) = w([t/\varepsilon])$ de la façon suivante :

$$w(0) = u_0, \ \ w(n+1) \in Argmin\{\mathcal{F}((n+1)\varepsilon, \cdot, w(n))\},$$

où $[\cdot]$ représente la partie entière.

Définition 4.3.3 *On dit que* $u : [0,T] \longrightarrow S$ *est un mouvement minimisant généralisé associé à* $\mathcal{F}$ *avec condition initiale* u_0, *et on écrit* $u \in GMM(\mathcal{F}, S, u_0)$ *s'il existe une suite* $\varepsilon_n \longrightarrow 0^+$ *tel que pour tout* $t \in [0,T]$, $u_{\varepsilon_n}(t) \longrightarrow u(t)$ *en* S *(voir [16]).*

Le processus irréversible, modelé par une relation de monotonie, suggère la nécessité d'une relation d'ordre $\preceq$ sur S. Plus précisément, on suppose que :

(S1) la convergence en S est compacte , c'est-à-dire pour toute suite il existe une sous suite convergente ;

(S2) la relation d'ordre $\preceq$ est compatible avec la convergence, c'est à dire si $u_n \longrightarrow u$, $v_n \longrightarrow v$ et $u_n \preceq v_n$ alors $u \preceq v$;

(S3) toute fonction non décroissante $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S$ est séquentiellement continue sauf au plus un ensemble dénombrable de points.

Soit $X([0,T], S)$ la classe de fonctions $t \longrightarrow u(t)$ non décroissantes dans le sens suivant :

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow u(t_1) \preceq u(t_2) \text{ dans } S.$$

Nous nous référons à [16] pour les résultats suivants.

Lemme 4.3.4 *Sous les hypothèses ci-dessus précisées (S1-S3), pour tout* $(u_n) \in X([0,T], S)$, *il existe une sous suite* (u_{n_k}) *et une fonction* $u \in X([0,T]), S)$ *tel que*

$$\forall t \in [0,T], \ \ u_{n_k}(t) \longrightarrow u(t) \text{ dans } S.$$

Théorème 4.3.5 *On suppose que pour tout $t \in [0,T]$ et pour tout $u \in S$ le problème*

$$\min\{\mathcal{F}(t,v,u), v \in S, u \preceq v\}$$

a au moins une solution. Alors pour tout $u_0 \in S$ il existe un mouvement minimisant généralisé associé à la fonctionnelle $(t,v,u) \longrightarrow \mathcal{F}(t,v,u) + \chi_{u \preceq v}$.

Dans le cadre ci dessus le modèle pour le décollement d'une membrane consiste en l'étude de mouvement minimisant généralisé associé à la fonctionnelle $\mathcal{F} : [0,T] \times \mathcal{M}_0 \times M_0 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par

$$\mathcal{F}(t,\mu_1,\mu_2) = E(\mu_1, f(t)) + \mathcal{D}(\mu_1,\mu_2), \tag{4.3.4}$$

où E est l'énergie définie en (4.3.2) et $\mathcal{D}$ est une distance de dissipation irréversible sur $\mathcal{M}_0$. Étant donnée $f(t,x) \geq 0$, le schéma d'Euler de discrétisation en temps du processus de décollement peut être défini de la façon suivante :

- fixer un pas de temps $\varepsilon > 0$ et considèrer la discretisation en temps $t_k^\varepsilon = \varepsilon k$ pour $k \in \mathbb{N}$;
- commencer avec une configuration initiale $\mu_0 \in \mathcal{M}_0$, tel que $\mu_\varepsilon(0) = \mu_0$;
- définir $\mu_\varepsilon(t_k^\varepsilon)$ de façon itérative, en prenant $\mu_\varepsilon(t_{k+1}^\varepsilon)$ comme solution du problème de minimisation

$$\min\{E(\mu, f(t_{k+1}^\varepsilon)) + \mathcal{D}(\mu, \mu(t_k^\varepsilon))\};$$

- passer à la limite quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, et obtenir une application $t \longrightarrow \mu(t)$ qui va être appelée solution du schéma du mouvement minimisant généralisé.

Dans le cas considéré, on demande que le processus soit irréversible, c'est-à-dire pour l'ordre partiel défini par $\mu_1 \preceq \mu_2$ quand $\mu_2(A) \leq \mu_1(A)$ pour tout quasi ouvert $A \subseteq D$, on impose

$$\mathcal{D}(\mu_1,\mu_2) = +\infty \text{ si } \mu_1 \not\preceq \mu_2.$$

Théorème 4.3.6 *Soient $T > 0$ et $f : [0,T] \longrightarrow L^2(D,\mathbb{R}^+)$. Soit $\mathcal{D}$ une distance de dissipation irréversible qui est γ semi-continue inférieurement dans la première variable et $\mu_0 \in \mathcal{M}_0$ la condition initiale. Alors il existe un mouvement minimisant généralisé $\mu \in GMM(\mathcal{F}, \mathcal{M}_0, \mu_0)$ associé à la condition initiale μ_0, où $\mathcal{F}$ est définie dans (4.3.4).*

4.4 Evolution de domaines-dissipation proportionnelle à la mesure de surface

Une étude de l'existence d'une application $t \longrightarrow \Omega(t)$ qui satisfait le schéma du mouvement minimisant généralise est réalisé en [16]. On rappelle le contexte et le résultat principal. Soient $\mathcal{A}$ la famille des ensembles quasi ouverts de D, et $A \in \mathcal{A}$ la region décollée de la membrane. On peut naturellement identifier l'ensemble quasi ouvert A avec la mesure $\mu_{D \setminus A}$.

Définition 4.4.1 *Soient (A_n) une suite de quasi ouverts de D, et $A \subseteq D$. On dit que A_n faible gamma converge vers A et on écrit $A_n \longrightarrow_{w\gamma} A$ si $w_{A_n} \longrightarrow w$ faiblement dans $H_0^1(D)$, et $A = \{w > 0\}$.*

Par la suite on va munir $\mathcal{A}$ de la $w\gamma$ convergence, qui est compacte et plus faible que la γ convergence. Soit

$$D_m(A_1, A_0) = |A_1 \setminus A_0| + \chi_{A_0 \subseteq A_1}$$

une distance de dissipation. Ici $\chi_{A_0 \subseteq A_1} = 0$ si $A_0 \subseteq A_1$ quasi partout, et $+\infty$ sinon. On considère la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(t, A_1, A_2) = E(A_1, f(t)) + \mathcal{D}_m(A_1, A_2), \tag{4.4.1}$$

où

$$E(A, f) = \min\{\frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2 dx - \int_D uf dx \ : \ u \in H_0^1(A)\}. \tag{4.4.2}$$

On note que, même si la $w\gamma$ convergence est compacte, l'énergie définie en (4.4.2) n'est pas $w\gamma$ continue, la distance de dissipation $\mathcal{D}_m$ n'étant pas semi-continue inférieurement en chaque variable.

Théorème 4.4.2 *Soient $T > 0$ et $f : [0,T] \longrightarrow L^2(D, \mathbb{R}^+)$, $A_0 \in \mathcal{A}$ l'ensemble quasi ouvert initial et $\mathcal{A}$ muni de la $w\gamma$ convergence. Alors il existe un mouvement minimisant $A \in GMM(\mathcal{F}, A, A_0)$ associé à $\mathcal{F}$ et à la condition initiale A_0.*

Remarque 4.4.3 On note que, dans ce cas, la solution reste dans la famille de quasi-ouverts. A-priori, en minimisant l'énergie à chaque iteration en temps, il est possible que le minimum ne soit pas atteint, et la solution ne va plus être un quasi ouvert mais une mesure.

Exemple 4.4.4 Dans cet exemple on présente le cas d'une membrane radiale et symétrique. Soit $D = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ la membrane, et $A_0 = \emptyset$, c'est à dire la membrane est au moment initial complètement collée. On considère la force

$$f : [0, +\infty] \times B(0,1) \longrightarrow [0, +\infty), \ f(t,x) = t \cdot 1_{B(P, \frac{1}{4})}$$

où $P = (0.5, 0.5)$. On peut démontrer que la solution de ce problème est formée par un évolution de disques, centrés en P (pour t petit). Afin de trouver explicitement l'évolution on note avec a le rayon (dependant de t) de la partie décollée. Le problème à résoudre est

$$\min_{a \in [0, \frac{1}{2}]} J(a) = \min_{a \in [0, \frac{1}{2}]} E(B(P,a), f(t)) + \pi a^2$$

où E est donnée par (4.4.2). Le déplacement vertical de la membrane, u est solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(t, \cdot) \text{ dans } B(P,a) \\ u = 0 \text{ sur } \partial B(P,a). \end{cases} \tag{4.4.3}$$

Comme u est radial, (4.4.3) est équivalente à

$$-(ru_r)' = fr.$$

En intégrant sur $[0, r]$ on obtient

$$-ru_r = t\int_0^r 1_{[0\frac{1}{4}]}sds.$$

En notant $H(r) = \int_0^r 1_{[0\frac{1}{4}]}sds$ on a $u_r = -\frac{t}{r}H(r)$. En passant en coordonnées polaires on obtient

$$E(B(P,a), f(t,\cdot)) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a (u(r))^2 r dr d\theta$$

$$= -\pi t^2 \int_0^a \frac{1}{r}H^2(r)dr.$$

On distingue deux situations.
1. $a \leq \frac{1}{4}$
Dans ce cas on a $H(r) = \int_0^r sds = \frac{r^2}{2}$, et par conséquent

$$J(a) = -\pi t^2 \int_0^a \frac{r^3}{4}dr + \pi a^2 = -\frac{\pi t^2 a^4}{16} + \pi a^2.$$

La dérivée est donnée par

$$J'(a) = \frac{-\pi t^2 a^3}{4} + 2\pi a.$$

Les solutions de l'équation $J'(a) = 0$ sont $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{2\sqrt{2}}{t}$. Comme $a \leq \frac{1}{4}$, la dernière égalité implique $t > 8\sqrt{2}$.
2.$a > \frac{1}{4}$
On a

$$J(a) = -\pi t^2[\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{r^3}{4}dr + \int_{\frac{1}{4}}^a \frac{1}{r}\frac{1}{4^5}dr] + \pi a^2$$

$$= -\pi t^2[\frac{1}{4^6} + \frac{1}{4^5}\ln(4a)] + \pi a^2.$$

La dérivée est donnée par

$$J'(a) = \frac{-\pi t^2}{4^5 a} + 2\pi a.$$

La solution de $J' = 0$ est $a = \frac{t}{32\sqrt{2}}$. Avec cette valeur pour a, $J(a) = 0$ pour $t = 8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}}$. Comme, dans ce cas $a \leq \frac{1}{2}$ on a $t \leq 16\sqrt{2}$.

D'après ces calculs on peut énoncer :

- pour $0 \leq t \leq 8\sqrt{2}$, la fonctionnelle J est croissante en a, et le minimum est atteint pour $a = 0$ (la membrane reste collée) ;
- pour $8\sqrt{2} \leq t \leq 8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}}$, la fonctionnelle J n'est pas croissante en a , mais le minimum est encore atteint en $a = 0$;
- pour $8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}} < t < 16\sqrt{2}$, le minimum est atteint pour $a = \frac{t}{32\sqrt{2}}$, donc il y aura un décollement brusque, suivi d'un décollement continu jusqu'à $t = 16\sqrt{2}$.
- pour $t > 16\sqrt{2}$, la membrane est décollée.

Par la suite on donne la representation graphique de J pour quelques moments de temps. Sur les premiers trois graphiques on note que le minimum est atteint en $a = 0$. Dans la quatrième graphique, on note une décollement brusque, et finalement le cinquième graphique corresponds à un décollement continu.

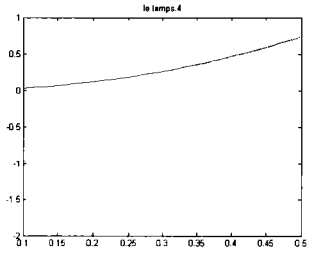


FIG. 4.1 – $t = 4$

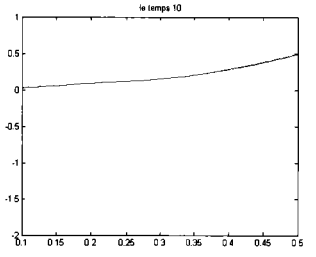


FIG. 4.2 – $t = 10$

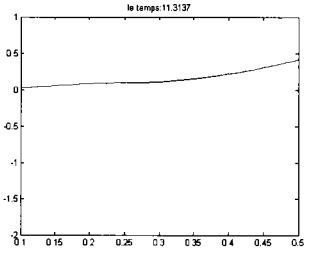


FIG. 4.3 – $t = 8\sqrt{2}$

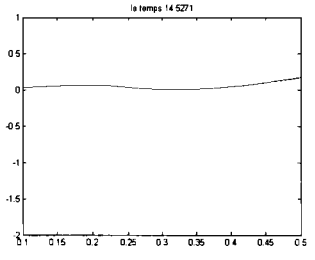


FIG. 4.4 – $t = 8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}}$

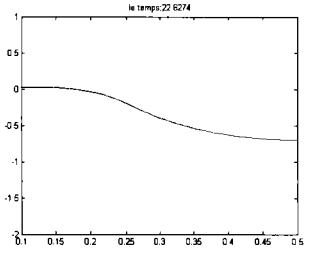


FIG. 4.5 – $t = 16\sqrt{2}$

4.5 Résultats numériques

4.5.1 Evolution de mesures-processus de relaxation

Nous allons montrer dans ce paragraphe, comment la formulation relaxée (4.2.5) se prête bien à la recherche numérique d'une forme optimale. Une étude complète sur cette question est réalisé en [33]. Dans la deuxième section du ce chapitre on a vu qu'en partant avec une configuration initiale μ_0 et une discrétisation en temps $t_k = \varepsilon k$, trouver la mesure optimale au moment t_{k+1} revient à résoudre le problème de minimisation :

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}} \{E(\mu, f(t_{k+1}) + \mathcal{D}(\mu, \mu(t_k))\} \tag{4.5.1}$$

où E est définie par (4.3.2) et $\mathcal{D}$ est la distance de dissipation.

Soit

$$\mathcal{D}(\mu_1, \mu_2) = \begin{cases} \int_D |w_{\mu_1} - w_{\mu_2}| dx, \ \mu_1 \preceq \mu_2 \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{4.5.2}$$

où w_μ est la fonction définie en (4.2.6). La relation de monotonie définie sur $\mathcal{M}_0$ implique l'équivalence du problème (5.1.1) avec le problème

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}}\{E(\mu, f(t_{k+1})) + \int_D w_\mu dx\} \tag{4.5.3}$$

En prenant comme fonction test w_μ dans (4.2.6), on a que $\int_D w_\mu = \int_D |\nabla w_\mu|^2 dx + \int_D w_\mu^2 d\mu$ et par conséquent (4.5.3) est équivalent à

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}}\{E(\mu, f(t_{k+1})) - 2E(\mu, 1)\} \tag{4.5.4}$$

Les avantages qu'une telle formulation nous offre sont :

-l'utilisation d'un maillage fixe ;

-au lieu de réaliser un mouvement de la frontière du domaine, on peut travailler dans l'espace des densités de mesures (qui sont des fonctions).

Dans notre contexte le domaine relaxé peut être caractérisé par une mesure qui n'est pas du type ∞_S.

Suivant l'approche proposé dans [33], on va simuler un algorithme basé sur la méthode du pas de descente, dans le contexte d'une discrétisation par éléments finis.

Soit $\mathcal{T} = (T_k)_{k=1,\ldots,n}$ une triangulation de la zone de dessin. On va approcher toute mesure de $\mathcal{M}$ par une suite de mesures dont les densités sont constantes sur chaque triangle T_k.

On introduit les espace de dimension finie :

$$X_h^0 := \{v_h \in C(D) \,:\, v_h|_{T_k} \in \mathbf{P}_1,\ \forall T_k \in \mathcal{T}_h,\ v_h = 0 \,\text{sur}\, \partial D\},$$

$$M_h := \{\mu_h \ \mu_h|_{T_k} = m_k \in [0,\infty],\ \forall T_k \in \mathcal{T}\},$$

où $\mathbf{P}_1$ représente l'espace de polynômes de $\mathbb{R}^n$ de degrée inférieur ou égal à un. Par conséquent X_h^0 est le sous espace de $H_0^1(D)$ qui contient les fonctions linéaires et continues par morceaux sur la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note que l'espace de mesures ayant la densité égale à une fonction constante par morceaux de M_h est contenu dans $\mathcal{M}_0$. Si $\mu_h \in M_h$ alors l'espace discret, analogue à $X_\mu(D)$ est défini par

$$X_{\mu_h}^0 := \{v_h \in X_h^0 :\, v_h|_{T_k} = 0 \text{ si } m_k = +\infty\}.$$

L'intégration par rapport à la mesure discrete μ_h doit être comprise dans le sens suivant :

$$\int_D f(x) d\mu_h = \sum_k m_k \int_{T_k} f(x) dx,$$

bien définie pour les fonctions (ou produit entre eux) de $X_{\mu_h}^0$.

Le théorème suivant montre la variation de l'énergie $E(\mu, f)$ définie en (4.3.2) par rapport à la mesure discrète μ_h sur chaque element T_k.(voir [33], [52]).

Théorème 4.5.1 *Soit $\mu_h = (m_k)_{k=1}^n \in M_h$. Alors on a*

$$\frac{\partial E}{\partial m_k} = \frac{1}{2}\int_{T_k} u_h^2 dx \ \ \forall\ k = 1, \ldots n. \tag{4.5.5}$$

où u_h est la solution de la version discrète du problème (4.2.5).

Preuve Soit $a_\mu(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire définie sur X_μ par

$$a_\mu(u,v) = \int_D \nabla u \nabla v dx + \int_D uv d\mu.$$

La version discrète du problème (4.2.5) s'écrit :

$$\text{trouver } u_h \in X^0_{\mu_h}, \text{ tel que } a_{\mu_h}(u_h, v_h) = (f, v_h), \ \forall v_h \in X^0_{\mu_h}. \tag{4.5.6}$$

Soit $\widetilde{\mu}_h = \mu_h + \delta m e_j$ où e_j est le j-éme vecteur unité de la base canonique en $\mathbb{R}^n$, et $\widetilde{u}_h$ la solution du problème

$$a_{\widetilde{\mu}_h}(\widetilde{u}_h, v) = (f, v), \ \forall v \in X^0_{\mu_h}. \tag{4.5.7}$$

En prenant u_h comme fonction test dans (4.5.7) on a $a_{\widetilde{\mu}_h}(\widetilde{u}_h, u_h) = (f, u_h)$. On obtient

$$a_{\mu_h}(\widetilde{u}_h, u_h) + \delta m \int_{T_j} \widetilde{u}_h u_h dx = (f, u). \tag{4.5.8}$$

D'autre part on a $a_{\mu_h}(u_h, v_h) = (f, v_h)$ pour tout $v \in X^0_{\mu_h}$. En prenant cette fois $v_h = \widetilde{u}_h$ on obtient $a_{\mu_h}(u_h, \widetilde{u}_h) = (f, \widetilde{u}_h)$. On remplace dans (4.5.8) et il résulte :

$$(f, \widetilde{u}_h) - (f, u_h) = -\delta m \int_{T_j} \widetilde{u}_h u_h dx.$$

Comme $E(\mu_h, f) = -\frac{1}{2}(f, u_h)$, on obtient

$$E(\widetilde{\mu}_h, f) - E(\mu_h, f) = \frac{1}{2}\delta m \int_{T_j} \widetilde{u}_h u_h dx.$$

Pour conclure il suffit de passer à la limite quand δm tends vers zero.

L'algorithme classique de type gradient au n-uplet $(m_k)_{k=1,\dots,n}$ est le suivant. Si on note avec w_h la solution du problème

$$w_h \in X^0_{\mu_h}, \ a_{\mu_h}(w_h, v_h) = (1, v_h), \ \forall v_h \in X^0_{\mu_h}, \tag{4.5.9}$$

les étapes de l'algorithme sont :

1. choisir une mesure initiale $\mu^0_h \in M_h$ et un nombre d'itérations I ; pour $i = 1, .., I$ on répète les pas suivants :
2. calculer u^i_h et w^i_h comme solutions des problèmes (4.5.6) et (4.5.9) associées à μ^i_h ;
3. calculer le vecteur gradient $G^i = (G^i_k)$, où

$$G^i_k = -\frac{1}{2}\int_{T_k} (u^i_h)^2 dx + \int_{T_k} (w^i_h)^2 dx \ \forall \ k = 1, ..., n;$$

4. déterminer α^i tel que

$$E((\mu^i_h + \alpha^i G^i)^+, f(t_{k+1})) - 2E((\mu^i_h + \alpha^i G^i)^+, 1)) \leq E((\mu^i_h, f(t_k)) - 2E((\mu^i_h, 1));$$

5. définir μ_h^{i+1} par $m_k^{i+1} = (m_k^i + \alpha^i G_k^i)^+, \ \forall k = 1, ..., n;$

Remarque 4.5.2 On note que, à chaque itération, dans l'étape 2, le terme $\int \nabla u \nabla v dx$ reste inchangé. Pour gagner en temps d'execution, ce terme peut être calculé et stocké avant de commencer les iterations.

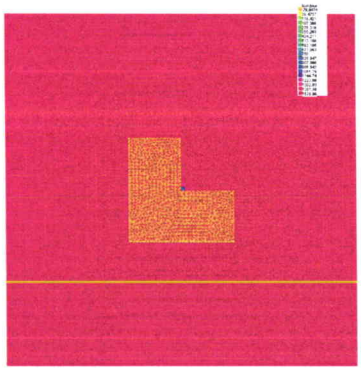
Remarque 4.5.3 Cet algorithme montre l'évolution locale de la membrane, par consequence il trouve des optimum locaux (voir [13], [14]). Pour échapper aux optimums locaux on utilise le principe d'algorithmes génétiques (dernière section de ce chapitre).

Avec cet algorithme on obtient les résultats suivants :

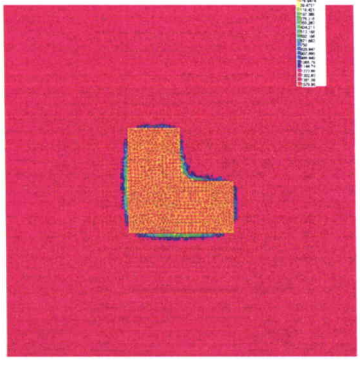
a) Soit $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$ le support de la membrane et $B(0, 0.4)$ la boule de centre $(0, 0)$ et rayon 0.4.

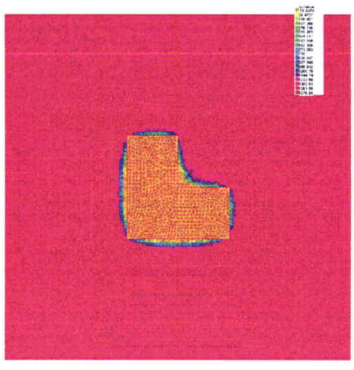
Soit $f(t) = t * \chi_{B(0,0.4)} + 10 * \chi_{B(0,0.4)}$, et $\Delta t = 2$. Les figures ci dessous illustrent le processus de décollement de la membrane.

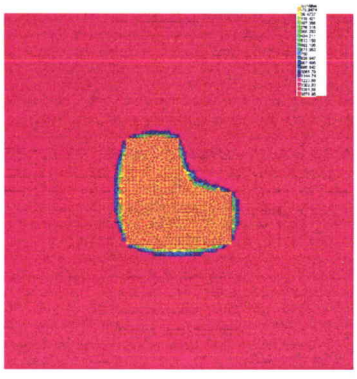


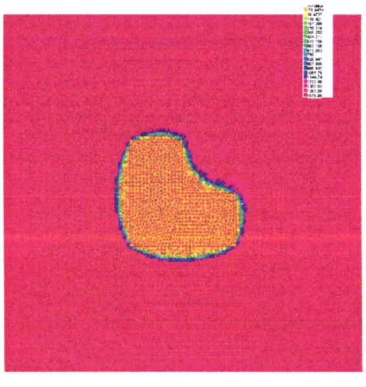




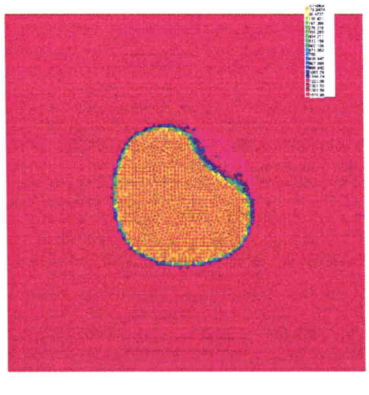


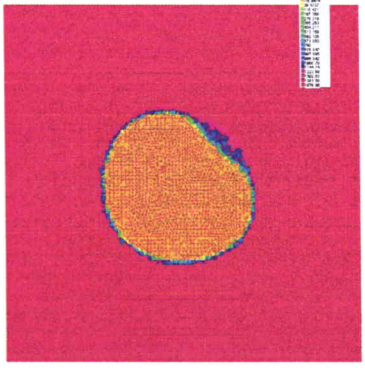


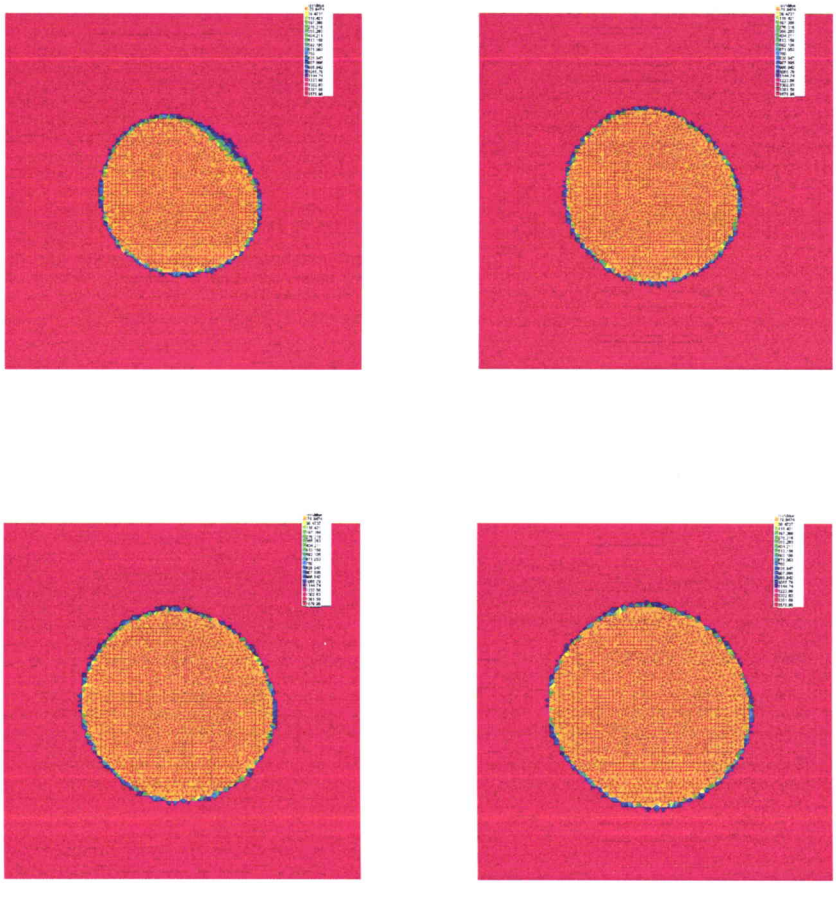




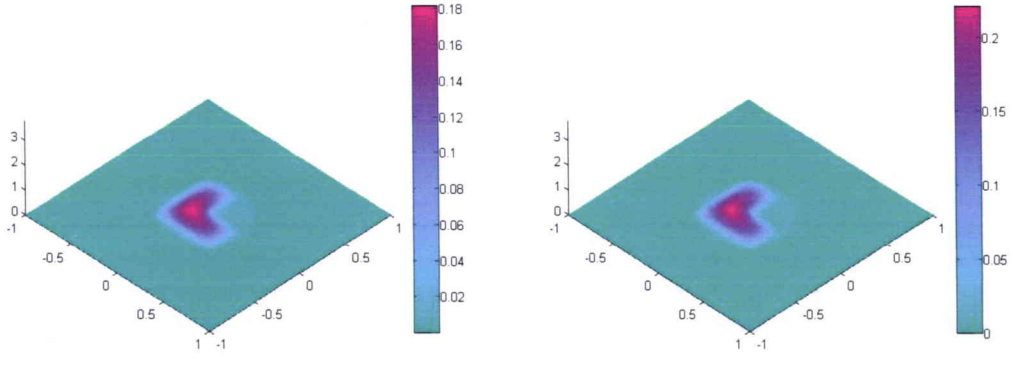


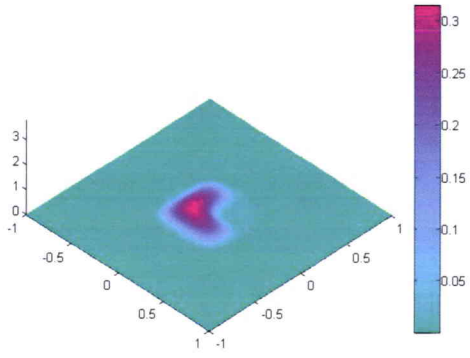


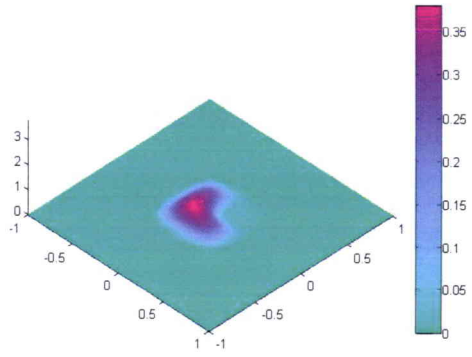


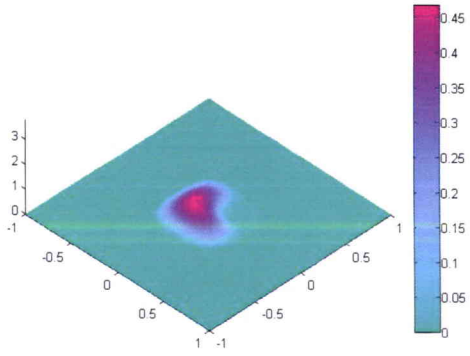


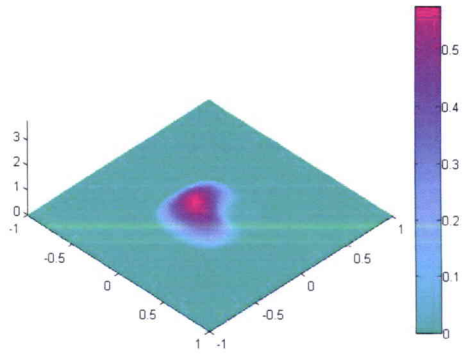
L'évolution de la membrane correspondante est :

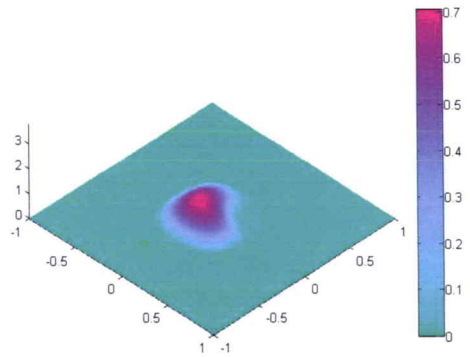


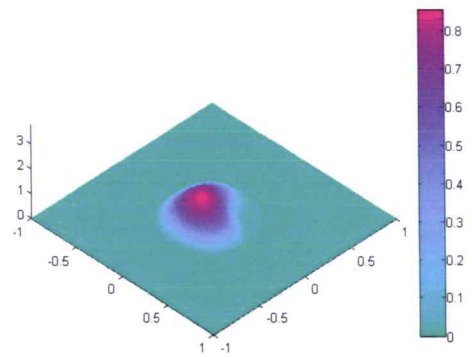

3
2
1
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05

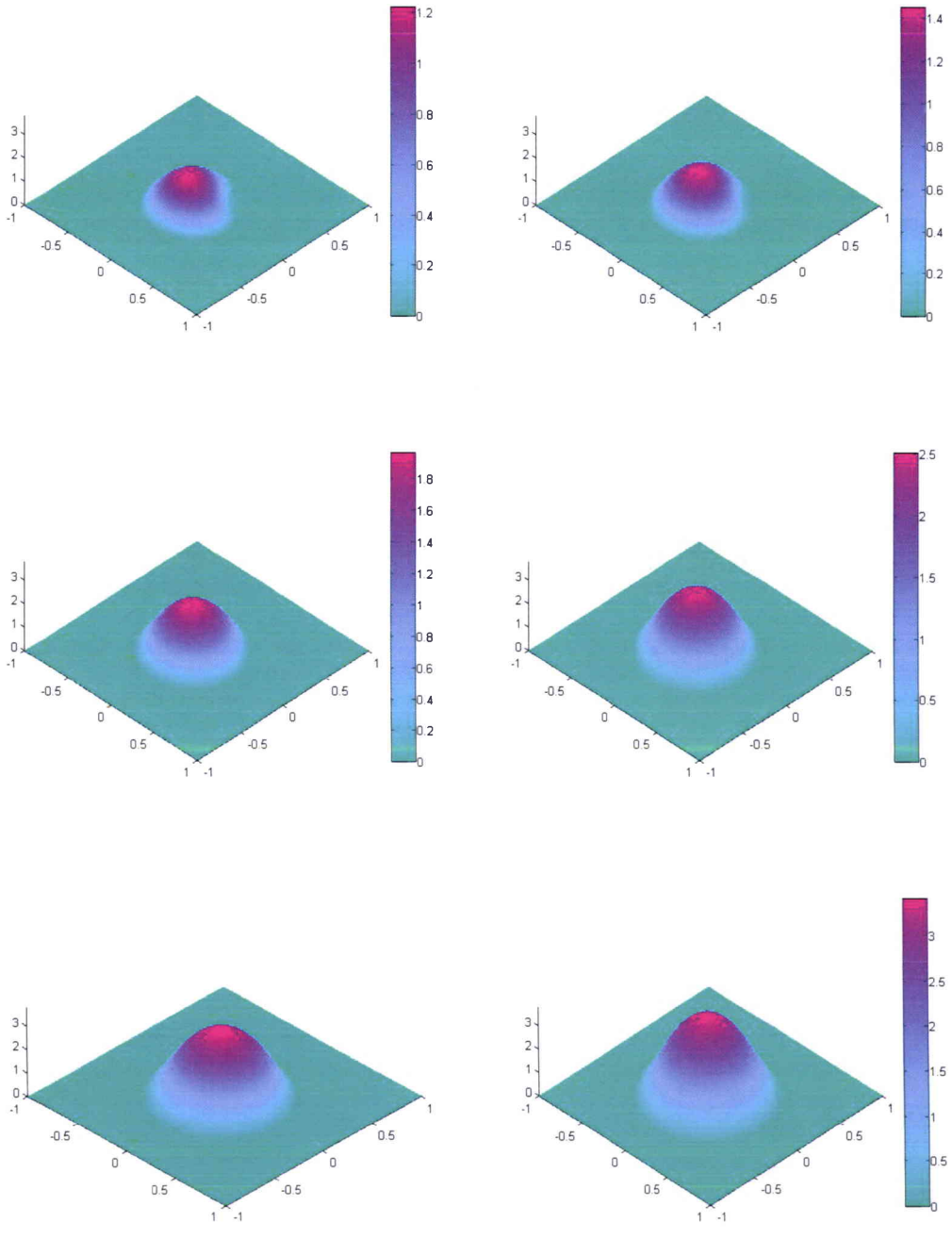

3
2
1
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0


3
2
1
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0


3
2
1
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0


3
2
1
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0


3
2
1
0
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0



4.5.2 Evolution des domaines

Dans cette section on propose une méthode numérique d'optimisation de forme basée sur la combinaison des techniques classiques de dérivation par rapport au domaine et de

courbe de niveau pour la propagation de fronts. Avec cette méthode on va trouver des optimums locaux et pour un etude global on va faire appel aux algorithmes génétiques. La méthode de lignes de niveaux proposée par Osher et Sethian [53] a été appliquée dans différents problèmes, comme optimisation de structure élastique [3], problèmes inverses [24], segmentation des images [45]. Par la suite on va donner la définition de la dérivée de forme et on va brièvement présenter la méthode de lignes de niveaux.

Dérivée de forme

On considère un problème d'optimisation de forme du type :

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega), \tag{4.5.10}$$

où $\mathcal{A}$ est la famille des domaines admissibles et $\Omega \longrightarrow J(\Omega)$ est la fonction coût qu'on cherche à optimiser. La fonctionnelle J dépend de Ω à travers la solution d'une équation aux dérivées partielles posée sur ce domaine. Soit $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ un champ de déplacement ou de déformation. Pour $t \in \mathbb{R}$ on définit l'application $T_t : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ par $T_t = Id + tV$. L'application T_t est un difféomorfisme entre $\mathbb{R}^N$ et son image, pour t petit. En effet, T_t est une bijection comme perturbation de l'identité (c'est une bijection dès que $|t| \leq \|V\|_{L^\infty}^{-1}$ d'après les résultats classiques dans les algèbres de Banach). Il suffit de montrer encore que le Jacobien de T_t est différent de zéro. En dimension deux, on a

$$\begin{vmatrix} 1 + t\frac{\partial V_1}{\partial x_1} & t\frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ t\frac{\partial V_2}{\partial x_1} & 1 + t\frac{\partial V_2}{x_2} \end{vmatrix} = (1 + t\frac{\partial V_1}{\partial x_1})(1 + t\frac{\partial V_2}{\partial x_2}) - t^2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\frac{\partial V_2}{\partial x_1} \neq 0$$

si t est petit.

Définition 4.5.4 *On appelle dérivée (Gateaux) de J au point Ω, suivant la direction de déformation V, la limite, si elle existe*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J(T_t(\Omega)) - J(\Omega)}{t}.$$

On notera cette limite $DJ(\Omega, V)$.

Un résultat classique du a Hadamard est que la dérivée par rapport au domaine ne dépend que de la valeur de $V.n$ sur $\partial\Omega$. Alors, la dérivée de forme peut s'écrire $DJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} gV.nds$ où la fonction g dépend implicitement de Ω, de la solution, de l'EDP et éventuellement de l'état adjoint (voir [42],[66], [30]). Une direction de descente pour la méthode de gradient est $V = -gn$. Formellement on obtient

$$J(T_t(\Omega)) = J(\Omega) - t\int_{\partial\Omega} g^2 ds + o(t^2)$$

ce qui garantit la décroissance de la fonction objectif.

L'algorithme de variation de domaine par la méthode du gradient, peut être résumé comme suit :

- Soit $\Omega \in \mathcal{A}$ un domaine initial ;

- On calcule la dérivée de forme par rapport au domaine $DJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} gV.nds$; Pour un "bon choix" du pas de descente t_1 on modifie Ω de la façon suivante : $\Omega_1 = (Id + t_1 V)(\Omega)$ où $V = -gn$ est la direction de déplacement ;
- Avec Ω_1 à la place de Ω répéter l'étape deux, jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt est vérifié.

Remarque 4.5.5 On peut remarquer que les domaines atteints à partir d'un domaine Ω ont la même topologie que Ω. Cela signifie que la méthode de variation de frontière n'est pas capable de produire des changements de topologie (ne permet pas l'apparition de nouveaux trous à l'intérieur du domaine).

Un des inconvénients de cette méthode est que il faut remailler régulièrement, et donc ceci fait quel l'algorithme soit coûteux.

La méthode de lignes de niveaux

Par la suite on présente la méthode de lignes de niveaux ([68],[63],[56],[26]. Avec cette méthode on ne maille pas la forme, mais on la capture sur un maillage fixe d'une grande boite D.

On va paramétrer la forme Ω par une fonction ϕ appelée *fonction lignes de niveaux* qui doit vérifier

$$\begin{cases} \phi(x) > 0, & \text{si } x \in \Omega; \\ \phi(x) < 0, & \text{si } x \in D \setminus \overline{\Omega}; \\ \phi(x) = 0, & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

La fonction ϕ étant définie, on fait évoluer sa ligne de niveau 0 (i.e. $\partial\Omega$) au cours du temps (au lieu de bouger Ω dans l'algorithme précédent on va faire évoluer la ligne de niveau 0 de ϕ). Autrement dit, pour tout $x \in \partial\Omega$ on veut que

$$\phi(t, (Id + tV)(x)) = 0 \text{ pour tout } t.$$

En dérivant cette dernière expression, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, (Id + tV)(x)) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + V\nabla\phi = 0.$$

Comme V est un champ de vitesse normal, $V = V_n n$, et la normale à une ligne de niveau est donnée par $n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ on obtient que, pour calculer ϕ on doit résoudre une équation de type Hamilton Jacobi :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + V_n|\nabla\phi| = 0. \tag{4.5.11}$$

Si le champ de vecteur V possède une extension naturelle , on résout l'équation (4.5.11) dans toute la zone de dessin D. L'algorithme d'optimisation par lignes de niveaux pour la minimisation de la fonctionnelle $J(\Omega)$ peut être structuré de la façon suivante :

1. Initialisation de $\phi = \phi_0$ correspondante à une forme initiale Ω_0 ;
2. Calcul du champ de vitesse ;

3. Déformation de Ω_0 par résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi (4.5.11). La nouvelle forme Ω_1 est donnée par la fonction lignes de niveaux ϕ_1 solution de (4.5.11) après un pas de temps Δt en partant de la condition initiale ϕ_0.
4. Pour des raisons de stabilité, la fonction est réinitialisée de temps en temps en résolvant une autre équation d'Hamilton-Jacobi dont la solution stationnaire est la fonction distance signée à la courbe de niveau 0.
5. Avec Ω_1 au lieu de Ω_0 retour à l'étape 2.

Avant de calculer V_n pour le décollement de la membrane on va donner quelques détails sur la résolution numérique de l'equation de Hamilton Jacobi.

Le schéma numérique pour résoudre l'equation de Hamilton Jacobi

On utilisera dans la suite les notations classiques des schémas de différences finies sur un maillage régulier des points indexés par les entiers i, j. Comme la frontière de la forme est donnée par une fonction définie sur toute la région de dessin, on va utiliser un maillage fixe pendant l'évolution de la forme. On rappelle le schéma explicite décentré de différences finies proposée par Osher et Sthetian en [53] pour résoudre l'equation (4.5.11) avec condition initiale $\phi(t = 0, x) = \phi_0$.

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^{n} - \Delta t[\max(V_{n_{ij}}, 0)\nabla^{+} + \min(V_{n_{ij}}, 0)\nabla^{-}] \tag{4.5.12}$$

où

$$\nabla^{+}\phi = [\max(D_{ij}^{-x}\phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}\phi, 0) + \max(D_{ij}^{-y}\phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}\phi, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{4.5.13}$$

et

$$\nabla^{-}\phi = [\max(D_{ij}^{+x}\phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x}\phi, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+y}\phi, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-y}\phi, 0)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5.14}$$

Dans les expressions ci-dessus on a posé :

$$D_{ij}^{+x}\phi = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x} \quad , D_{ij}^{+y}\phi = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{\Delta y}$$

$$D_{ij}^{-x}\phi = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x} \quad , D_{ij}^{-y}\phi = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}}{\Delta y}$$

avec Δx et Δy le pas suivant le long de l'axe des abscises et le long de l'axe des ordonnées, respectivement. Pour avoir la stabilité du schéma , le pas du temps Δt est limité par la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$\max_{x \in D} V_n(x).\Delta t \leq \Delta x.$$

Initialisation et reinitialisation de la fonction lignes de niveaux

D'après les suggestions de Osher et Sethian, [53], on initialise la fonction ϕ avec la fonction distance signée

$$\begin{cases} \phi(x) = dist(x, \partial\Omega), & \text{si } x \in \Omega^c \\ \phi(x) = -dist(x, \partial\Omega), & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

où $dist(x, \partial\Omega)$ est la distance habituelle entre x et un ensemble K. Parmi les propriétés de la distance signée on rappelle qu'elle vérifie

$$|\nabla\phi| = 1 \quad \text{presque partout sur } \Omega \cap \Omega^c.$$

À cause du fait que l'équation de Hamilton Jacobi ne préserve pas la distance signée au long des itérations, la fonction ϕ devient parfois trop raide ou trop plate. Afin de régulariser la fonction ϕ on résout périodiquement l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial t} + sign(d)(|\nabla d| - 1) = 0, \\ d(t = 0, x) = \phi(x). \end{cases} \tag{4.5.15}$$

L'approche suivie pour résoudre cette équation est celle de Peng et al.[56]. La fonction sign est remplacée par

$$s(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + |\nabla d|^2 \Delta x^2}}.$$

On utilise le schéma

$$d_{ij}^{n+1} = d_{ij}^n - \Delta t[\max(s_{ij}, 0)(\nabla^+ - 1) + \min(s_{ij}, 0)(\nabla^- - 1)].$$

Ici s_{ij} est la valeur nodale de $s(d)$ sur notre maillage, et ∇^+ , ∇^- sont donnés en (4.5.13) et (4.5.14) pour la fonction d. La stabilité du schéma est donnée par la condition

$$\max s(d)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.5.16}$$

D'autres méthodes pour la reinitialisation ont été proposées en [26], où la technique de reinitialisation consiste en le calcul de la distance à la frontière, pour chaque point du maillage. Une autre méthode est de résoudre l'équation Eikonal $|\nabla T| = 1$ en utilisant Fast Marching Methods proposé par Sethian , une fois en avant et après en arrière [63].

Un autre ingrédient principal pour la méthode de lignes de niveaux est l'extension de la vitesse. Pour résoudre l'equation de Hamilton Jacobi, la vitesse doit être définie sur toute la région de dessin. Si la fonction g qui intervient dans l'expression de la dérivée de forme est définie sur toute la région de dessin alors on a une extension naturelle de la vitesse , V=-g (c'est notre cas). Cette extension n'est pas possible dans tous les cas. D'autres méthodes pour l'extension de la vitesse ont été proposées dans la littérature. L'une d'entre elles est de résoudre l'equation hyperbolique (voir [56]).

$$u_t + sign(\phi)\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}.\nabla u = 0 \tag{4.5.17}$$

pour t assez grand, et avec la condition initiale égale à la vitesse sur la frontière et zéro ailleurs.

Calcul du vecteur vitesse pour le décollement de la membrane

Revenons maintenant au calcul de la vitesse pour l'équation de Hamilton Jacobi ([42]). On rappelle que dans ce cas la fonctionnelle à minimiser est donnée par l'expression (4.4.1) qui est équivalent à

$$J(\Omega) = -\frac{1}{2}\int_D f u_\Omega dx + |\Omega| = -\frac{1}{2}\int_D f u_\Omega dx + \int_\Omega dx \tag{4.5.18}$$

où u_Ω est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.5.19}$$

Soit $J_1(\Omega) = \int_D u_\Omega f dx$. D'après la définition de la dérivée de forme on a :

$$DJ_1(\Omega, V) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{J(T_t(\Omega)) - J(\Omega)}{t}$$

$$= \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\int_D f\widetilde{u_{T_t(\Omega)}} dx - \int_D f\widetilde{u_\Omega} dx}{t} = \int_D f \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\widetilde{u_{T_t(\Omega)}} - \widetilde{u_\Omega}}{t} dx,$$

où

$$\widetilde{u_\Omega} = \begin{cases} u_\Omega, & \text{si } x \in \Omega \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $u' = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\widetilde{u_{T_t(\Omega)}} - \widetilde{u_\Omega}}{t}$. Par conséquent $DJ_1(\Omega, V) = \int_D f u' dx$.

Trouvons maintenant l'équation vérifiée par u'.

On sait que $u_{T_t(\Omega)}$ vérifie $-\Delta u_{T_t(\Omega)} = f$ dans $T_t(\Omega)$. Soit $\varphi \in C_0^{+\infty}(\Omega)$. Pour t petit on a que $\varphi \in C_0^\infty(T_t(\Omega))$. Par conséquent on peut prendre φ comme fonction test dans les équations vérifiées par $u_{T_t(\Omega)}$ et u_Ω. D'une part on obtient $\int_D \nabla u_{T_t(\Omega)} . \nabla \varphi dx = \int_D f\varphi dx$, et de l'autre part on obtient $\int_D \nabla u_\Omega . \nabla \varphi dx = \int_D f\varphi dx$. Les dernières deux égalités impliquent $\int_D \nabla u' . \nabla \varphi dx = 0$ donc

$$-\Delta u' = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{4.5.20}$$

Il nous reste à trouver la condition sur le bord. On a que pour tout $x \in \partial\Omega$, $u(t, (Id + tV)(x)) = 0$. On dérive par rapport à t et on obtient $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u . V = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Par conséquent, l'équation vérifiée par u' est

$$\begin{cases} -\Delta u' = 0 & \text{dans } \Omega \\ u' = -\nabla u . V & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.5.21}$$

L'étape suivante dans la calcul de dérivée est d'éliminer u'. Pour cela on va multiplier l'équation (4.5.19) par u'. En intégrant sur Ω on a

$$-\int_\Omega u' \Delta u dx = \int_\Omega f u' dx.$$

On applique la formule de Green au membre de gauche. On a

$$-\int_\Omega u'\Delta u dx = -\int_\Omega \Delta u' u dx - \int_{\partial\Omega} u'\frac{\partial u}{\partial n} ds$$

$$= -\int_{\partial\Omega} u'\frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n} V.n ds$$

car $-\Delta u' = 0$ dans Ω et $u' = -\frac{\partial u}{\partial n} V.n$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent

$$DJ_1(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n} V.n ds. \tag{4.5.22}$$

On peut encore transformer la relation (4.5.22) on utilisant le fait que, sur la frontière, on a $\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.\nabla u$. Il résulte

$$DJ_1(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} \nabla u.\nabla u V.n ds. \tag{4.5.23}$$

On note $J_2(\Omega) = \int_\Omega dx$. Alors $DJ_2(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} V.n ds$.

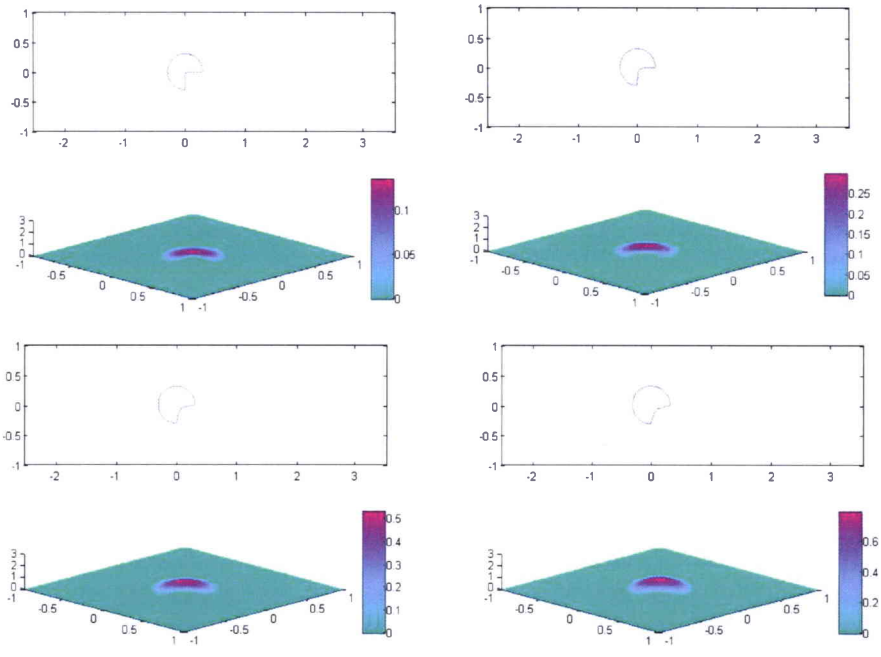
Finalement on obtient

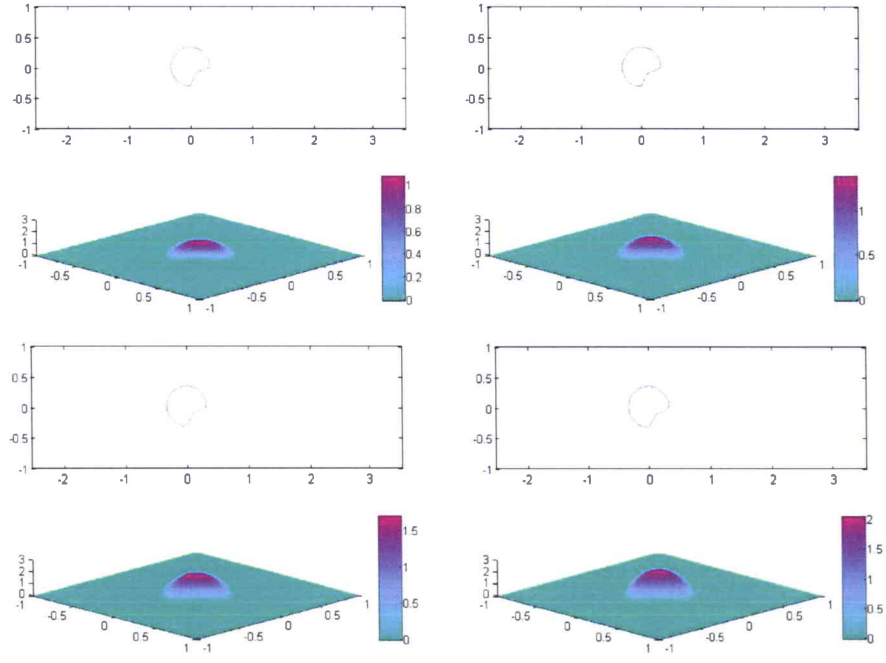
$$DJ(\Omega, V) = \int_{\partial\Omega} [-\frac{1}{2}\nabla u.\nabla u + 1] V.n ds. \tag{4.5.24}$$

Par conséquent le vecteur vitesse dans la méthode de lignes de niveaux décrite antérieurement va être $V_n = -(-\frac{1}{2}\nabla u.\nabla u + 1)$, avec un extension naturelle sur D.

Exemples numériques

Les figures suivantes présentent le processus de décollement si la membrane est initialement décollée sur un cercle, duquel on a enlevé un secteur. La force au moment initial et $f = 10 \cdot t \cdot \chi_{B(0,0.5)}$ et le pas du temps et $\Delta t = 2$. Dans les figures si dessous l'ordre est de gauche a droit et de haut en bas. Le nombre de itérations d'une figure à l'autre est de 6.





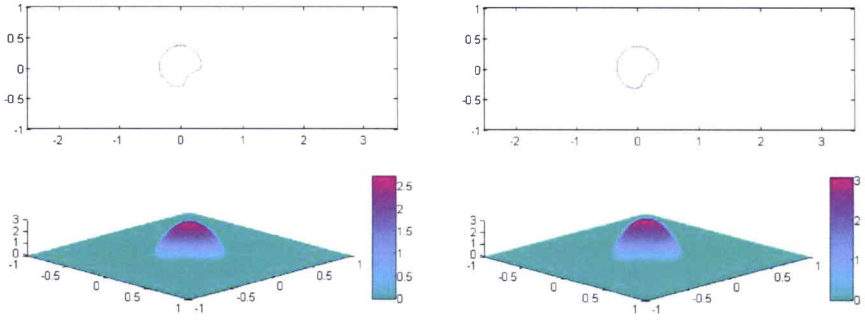
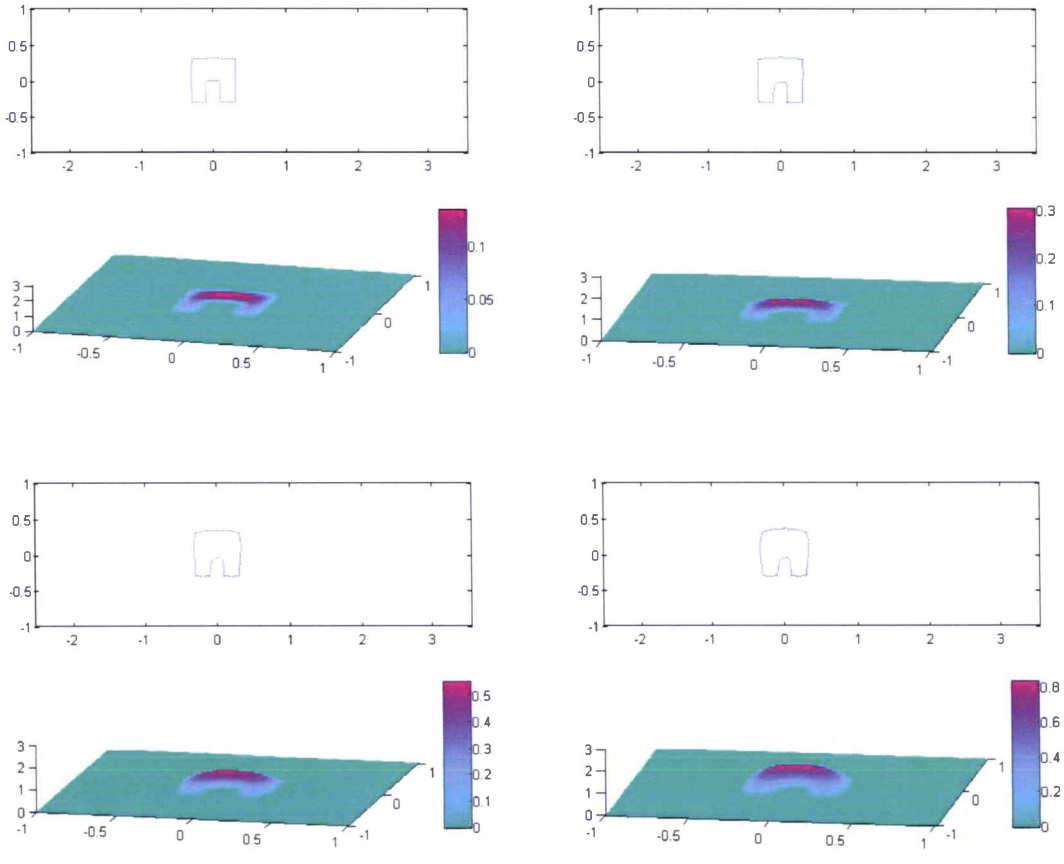
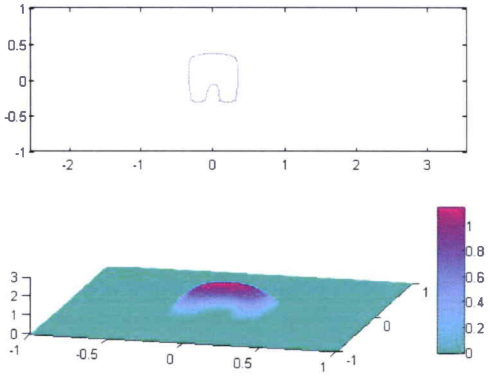
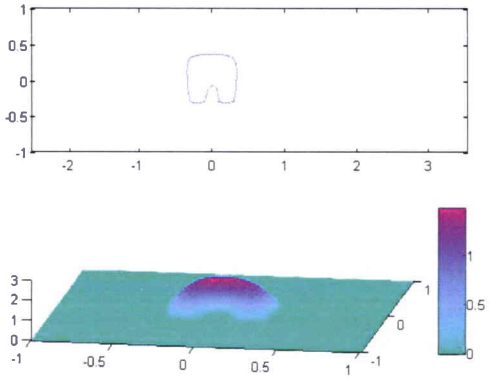


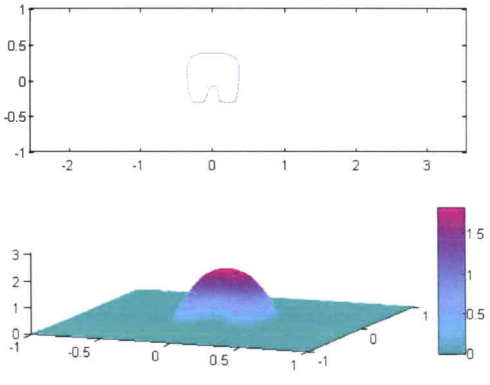
FIG. 4.6 – Décollement avec la méthode de lignes de niveaux

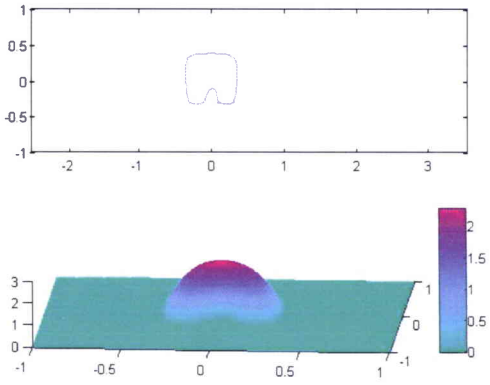
Avec la même force, mais cette fois on suppose que la membrane est initialement décollée sur un carré duquel en enlève un rectangle on obtient :

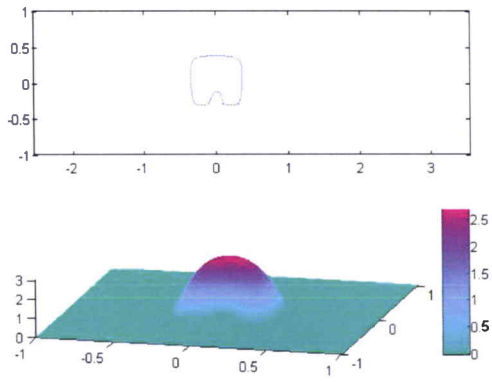


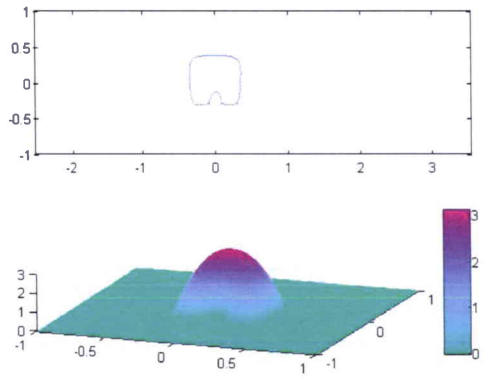


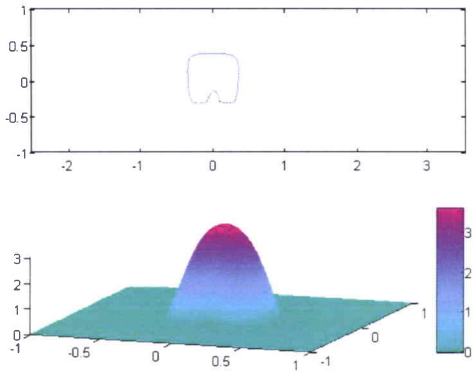












4.6 Optimisation par stratégie évolutionnaires

4.6.1 Préliminaires

Comme les algorithmes génétiques, les stratégie évolutionnaires sont des méthodes de recherche basées sur des mécanismes stochastiques. Mises en oeuvre par Rechenberg et Schwefel, ([61] [60]), elles tentent d'imiter le processus naturel d'évolution en se basant sur l'hypothèse suivante :

l'évolution naturelle constitue une stratégie optimale pour l'adaptation des êtres vivantes à leur environnement.

Dans la littérature on rencontre deux types de stratégies d'évolution :

- stratégie d'évolution à deux membres ;
- stratégie d'évolution multimembre.

La stratégie d'évolution à deux membres correspond à la structure la plus simple permettant d'imiter l'évolution naturelle. L'idée intéressante qu'on ne rencontre pas dans les algorithmes génétiques est de représenter un individu comme une paire $v = (x, \sigma)$, où x est un point dans l'espace de recherche et σ est un vecteur de déviation standard. La seule opération génétique utilisée est la mutation. L'algorithme élémentaire d'évolution est construit à partir du processus itératif suivant :

- **mutation** Un individu parent produit un individu fils en modifiant légèrement et aléatoirement ses caractéristiques

$$x^{n+1} = x^n + N(0, \sigma)$$

où $N(0, \sigma)$ est une distribution normale de moyenne 0 et d'écart type σ. Le choix de la quantité avec laquelle on modifie un individu est basée sur l'utilisation d'un opérateur de mutation qui modifie légèrement chaque composante du vecteur parent de façon aléatoire. À cause de cela, il est convenable de choisir une loi stochastique où de petites variations arrivent fréquemment, tandis que les grandes modifications se font plus rares. En général, on choisis une distribution normale ou Gaussienne.

- **selection** L'individu parent ou fils est choisi selon son aptitude vis-à-vis de son environnement, comme parent de la génération suivante. Par exemple, si f est la fonction objectif à maximiser, alors l'enfant (x^{n+1}, σ) remplace son parent (x^n, σ) si $f(x^{n+1}) > f(x^n)$. Dans le cas contraire, la population reste inchangée.

L'itération est reconduite jusqu'à ce que l'optimum est atteint. Le vecteur de déviation standard σ reste inchangé pendant le processus d'évolution. Si toutes les composantes de ce vecteur sont identiques et le problème d'optimisation est régulier, on a la théorème de convergence suivant [51] :

Théorème 4.6.1 *Pour $\sigma > 0$ et une optimisation régulière avec $f_{opt} > -\infty$ (minimisation) ou $f_{opt} < \infty$ (maximisation) on a*

$$p\{lim_{n \longrightarrow \infty} f(x^n) = f_{opt}\} = 1.$$

Ce théorème doit être compris dans le sens que l'optimum global est trouvé avec une probabilité un pour un temps suffisamment long de recherche. Par contre elle ne fournit aucune information sur le taux de convergence. L'analyse théorique de la stratégie d'évolution à deux membres a montré que la rapidité de convergence est liée à la probabilité de succès, c'est-à-dire au nombre de mutations améliorant la fonction objectif. Elle a permis de formuler la règle du succès de Rechenberg pour contrôler la variation de σ : lorsque le rapport entre le nombre de succès et le nombre de mutations est supérieur à $\frac{1}{5}$ la variance est augmentée, elle est diminuée dans le cas contraire.

La stratégie d'évolution multimembre diffère de la stratégie à deux membres par la dimension de la population qui va être supérieure à un. Dans ce cas, on part avec une population initiale de μ individus (parents). Par des opérations génétiques (on peut avoir d'autres opérations que la mutation) on génère λ descendantes (fils) à chaque iteration. La sélection de meilleurs individus peut s'effectuer :

- sur la population globale composée de μ parents et des λ fils. C'est le schéma plus $(\mu + \lambda)$;
- sur la nouvelle population composée des λ fils. C'est le schéma comma (μ, λ).

On peut voir la stratégie à deux membres comme un cas particulier du schéma plus, avec $\mu = 1$ et $\lambda = 1$. Le processus de selection est déterministe et élitiste. Pour le schéma plus $(\mu + \lambda)$, la population temporaire de $(\mu + \lambda)$ individus est réduite à μ individus en sélectionnant les μ meilleurs individus parmi l'ensemble des $(\mu + \lambda)$ alternatives. On note que, dans ce cas, un individu parent proche d'un optimum peut avoir une durée de vie illimité.

Pour le schéma comma (μ, λ), on sélecte les μ meilleurs individus parmi l'ensemble de λ alternatives. On note que ce schéma exige que le nombre de fils λ soit supérieur ou égal au nombre de parents μ. Pour avoir la convergence, il faut que le nombre de fils λ soit suffisant pour que, en moyenne, au moins un fils soit meilleur que la population parent. Schwefel propose le rapport optimal $\frac{\mu}{\lambda} \approx \frac{1}{7}$. Pour les stratégies de type $(\mu + \lambda)$ ou (μ, λ) le paramètre de control σ n'est plus constant, il est soumit au processus d'évolution.

4.6.2 Strategies d'évolution pour le décollement de la membrane

Dans cette section on va présenter la stratégie (μ, λ) dans le contexte du décollement de la membrane. L'algorithme d'optimisation utilisé peut être structuré de la façon suivante

Générer une population initiale
répéter
- *Recombination et mutation des individus pour produire des fils*;
- *Evaluation de la fonction objectif de fils*;
- *Selection de la nouvelle population* ;

jusqu'à
une solution satisfaisante a été trouvée (critère d'arrêt satisfait).

4.6.3 Représentation des formes et fonction objectif

Soit $(a_{m,n}) \in [0,1]$ une famille de paramètres. On considère la fonction g définie sur $[0,1] \times [0,1]$ par

$$g(x,y) = \sum_{m,n} a_{m,n}(sin\pi nx)(cos\pi my). \tag{4.6.1}$$

A partir de cette représentation en série de Fourier on va générer dans un premier cas des domaines, et dans un deuxième cas des mesures. Commençons par le premier.

Génération des formes

Soit $D = [0,1] \times [0,1]$ la membrane, et Ω_0 la partie sur laquelle la membrane est décollée au moment initial t_0. La position de la membrane au moment t_1 est trouvée en résolvant le problème d'optimisation

$$\min_{\Omega \supseteq \Omega_0} E(\Omega, f(t_1)) + |\Omega| = \min_{\Omega \supseteq \Omega_0} -\frac{1}{2}\int_D u_\Omega f dx + |\Omega|. \tag{4.6.2}$$

Le problème (4.6.2) est équivalent à

$$\max_{\Omega \supseteq \Omega_0} \frac{1}{2}\int_D u_\Omega f dx - |\Omega|. \tag{4.6.3}$$

La représentation de domaines est basée sur l'étude des ensembles de niveaux pour les fonctions décrites par séries de Fourier. À l'ensemble de paramètres $(a_{m,n})$ on associe l'ensemble ouvert

$$\Omega := \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1], g(x,y) < \frac{\max g}{2}\}.$$

Un ensemble test pour le problème d'optimisation (4.6.3) va être $\Omega_0 \cup \Omega$. La population pour l'algorithme evolutionist est obtenue en générant plusieurs ensembles de paramètres, après les domaines correspondants, et ensuite la réunion avec le domaine initial

Ω_0. On note que dans la population on introduit aussi, comme solution potentielle, le domaine Ω_0. Les opérations des recombination et mutation des individus sont faites sur l'ensemble de paramètres $(a_{m,n})$. Un individu pour la stratégie d'évolution est représente par :

$$(X, \sigma) = ((x_1, ..., x_l), (\sigma_1, ..., \sigma_l)), \tag{4.6.4}$$

où $(x_1, ..., x_l)$ sont les paramètres $(a_{m,n})$ après une renumerotation convenable, et σ_i, pour $i = 1, ..., l$, sont les deviations standard utilisées pour la mutation. Dans nos calculs on considère $l = 30$.

Population initiale et recombination

La population initiale consiste en 30 individu , $pop_0 = (pop\{1\}, ..., pop\{30\})$, où $pop\{i, 1\} = (x_1^i, x_2^i, ..., x_{30}^i)$ et $pop\{i, 2\} = (\sigma_1^i, \sigma_2^i, ..., \sigma_{30}^i)$. On note que pour représenter la population on utilise une structure de type cell avec 30 lignes et 2 colonnes. Les vecteurs $pop\{i, 1\}$ et $pop\{i, 2\}$ sont générés aléatoirement. Pour l'opération de recombination on procède de la façon suivante. Soit

$$pop\{k\} = ((x_1^k, x_2^k, ..., x_{30}^k), (\sigma_1^k, \sigma_2^k, ..., \sigma_{30}^k)) \; et$$

$$pop\{j\} = ((x_1^j, x_2^j, ..., x_{30}^j), (\sigma_1^j, \sigma_2^j, ..., \sigma_{30}^j)).$$

Il y a deux type d'opérateur de recombination :

- *discrète*, où le fils résultant est

$$((x_1^{q_1}, ..., x_{30}^{q_{30}}), (\sigma_1^{q_1'}, ..., \sigma_{30}^{q_{30}'}))$$

  avec q_i et q_i' est égal à k ou j.
- *intermédiaire* où le fils résultant est

$$((\alpha x_1^k + (1-\alpha)x_1^j, ..., \alpha x_{30}^k + (1-\alpha)x_{30}^j), (\alpha\sigma_1^k + (1-\alpha)\sigma_1^j, ..., \alpha\sigma_{30}^k + (1-\alpha)\sigma_{30}^j)),$$

  avec $\alpha \in (0, 1)$. D'après les suggestions de Schwefel [61] , pour $pop\{i, 1\}$ on réalise une recombination discrete , et pour $pop\{i, 2\}$ une recombination intermédiaire.

Mutation

Soit $((x_1, ..., x_{30}), (\sigma_1, ..., \sigma_{30})$ un individu auquel on applique l'opérateur de mutation. Pour le nouvel individu on a

$$\sigma_i' = \sigma_i \exp(\tau' N(0, 1) + \tau N_i(0, 1)) \; et$$

$$x_i' = x_i + \sigma_i' N_i(0, 1),$$

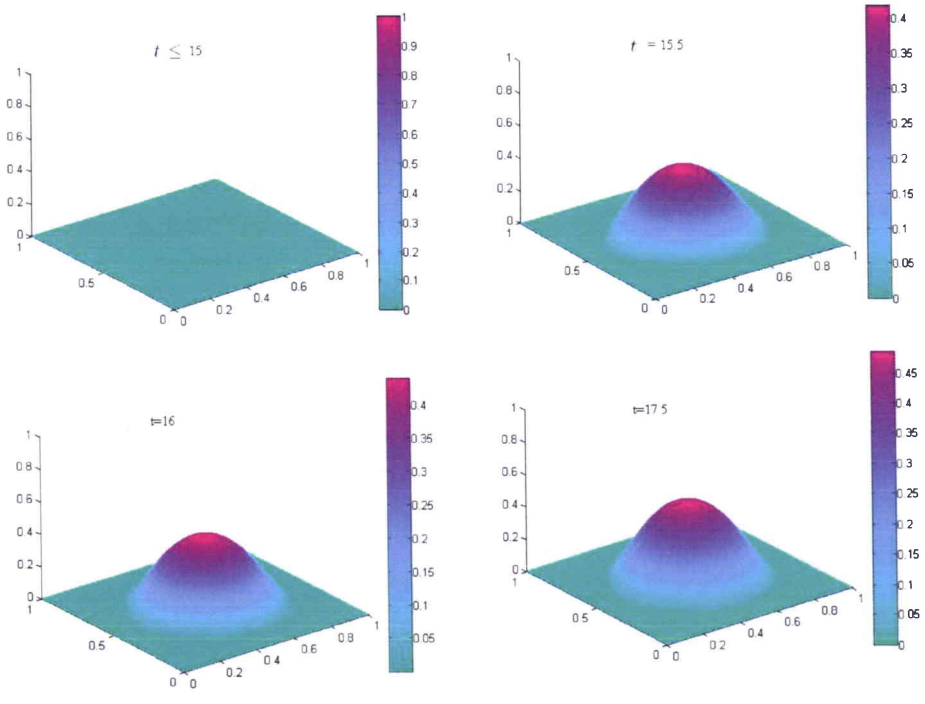
où
$N(0, 1)$- valeur scalaire tirée d'une distribution normale avec le moyen 0 et l'écart type 1 ;
$N_i(0, 1)$- valeur scalaire tirée d'une distribution normale avec le moyen 0 et l'écart type 1 associée à la composante i.
τ'- coefficient global ;
τ - coefficient local ;
Soit l la longueur d'un individu dans la population considérée. D'après Schwefel [61],

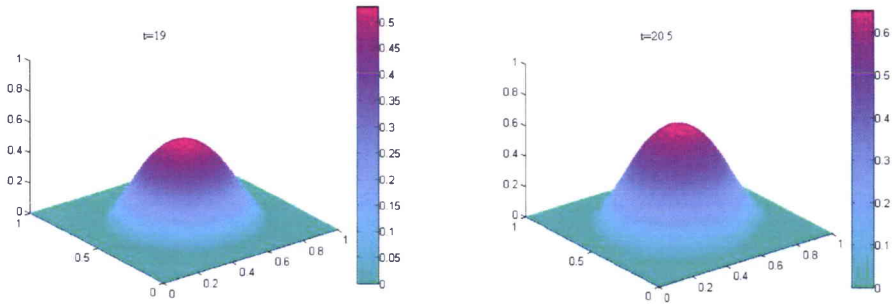
on a pris $\tau' = \sqrt{2l}^{-1}$ et $\tau = \sqrt{2\sqrt{l}}^{-1}$. Ces opérations de recombination et mutation sont répétées jusqu'à ce qu' on obtient λ fils.

Evaluation et selection

On évalue chaque individu de la population par sa fonction objectif. Après avoir ordonné les individus, on choisit les μ premiers comme nouveaux parents. Dans notre algorithme, on assigne une variable pour enregistrer la meilleure valeur courante de la fonction objectif. Cette variable va être reinitialisée chaque fois que dans une génération on trouve une fonction objectif meilleure. Les résultats numériques sont obtenus pour $\mu = 15$ et $\lambda = 105$.

Exemple 4.6.2 *Dans ce premiere exemple on reprend l'exemple (4.4.4), d'une membrane radiale et symétrique. Ci-dessus on présente les positions de la membrane calculées au moments 15, 15.5, 16, 17.5, 19 et 20.5. On note que la membrane reste collée avant 15, et le saut a lieu entre 15 et 15.5.*

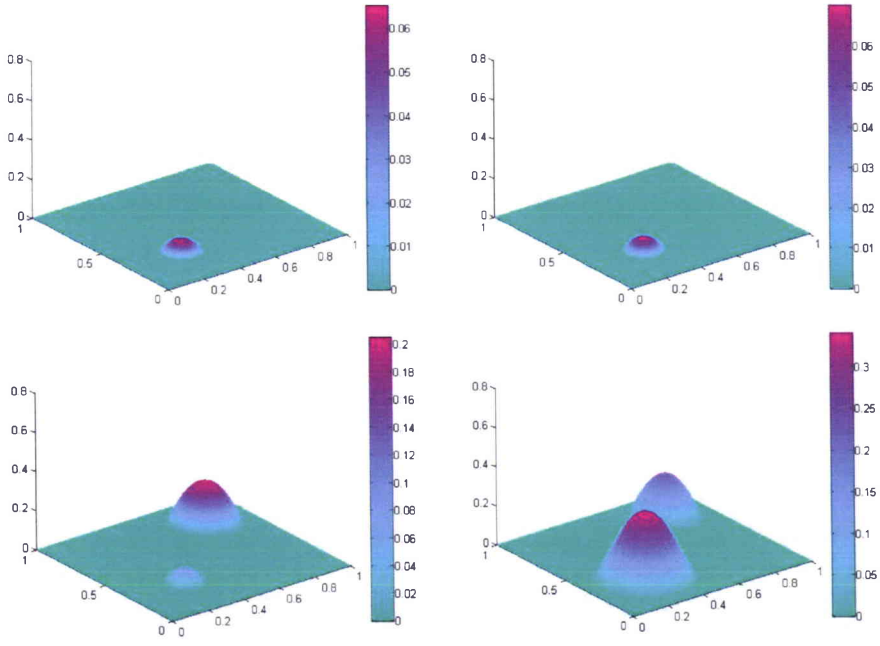


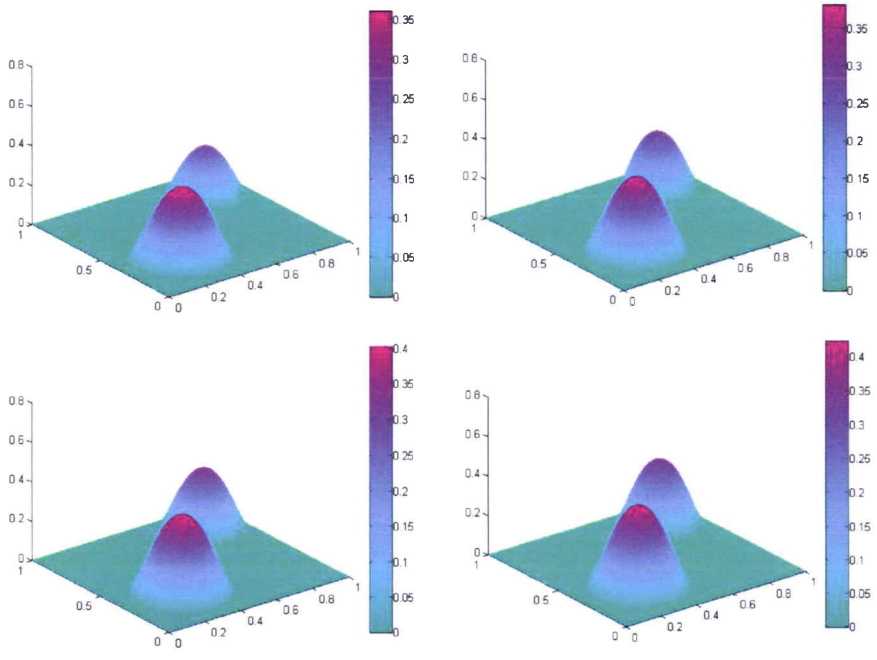


Exemple 4.6.3 *Dans cet exemple on considère la membrane initialement décollée sur la boule* $B((0.3,0.3),0.1)$*, centrée en* $(0.3,0.3)$ *et de rayon* 0.1*. On tire avec une force définie de la façon suivante*

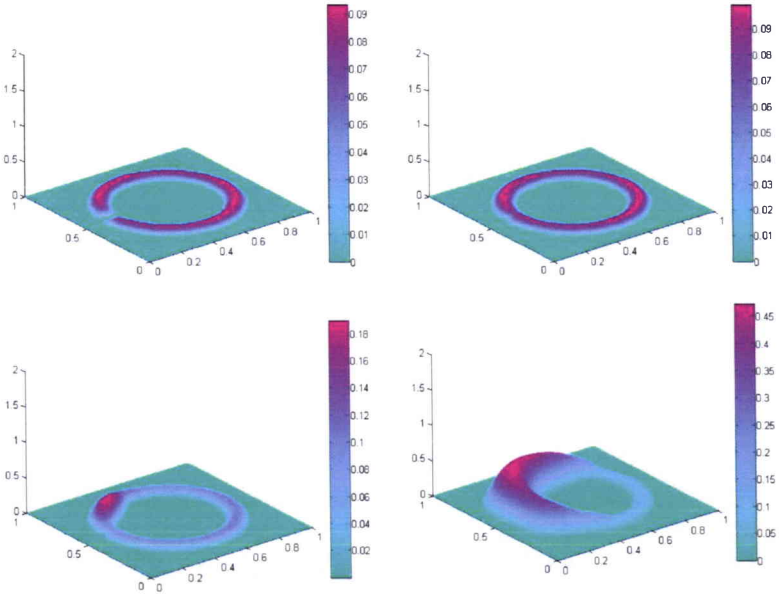
$$f = \begin{cases} f = t * \chi_{B((0.3,0.3),0.15))} \text{ si } t \leq T, \\ f = t * \chi_{B((0.3,0.3),0.15))} + t * \chi_{B((0.8,0.8),0.15)}, \text{ si } t > T. \end{cases}$$

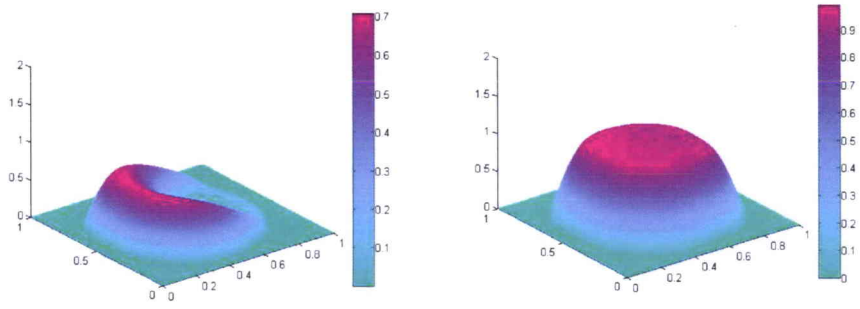
Le pas du temps d'une iteration a l'autre est égal à $\Delta t = 2$, $T = 29$, *et initialement on considère* $t = 26$.





Exemple 4.6.4 *On considère que la membrane est initialement décollée sur une couronne de laquelle on enlève une petite partie. On applique la force sur une couronne légèrement plus grand. L'evolution de la membrane est présentée dans la figure ci dessus.*





Remarque 4.6.5 Deux formes ont la même topologie si on peut passer de l'une à l'autre par une déformation continue. En dimension 2 la topologie est caractérisée par le nombre de composantes connexes du bord ou de trous. L'exemple 4.6.3 présente un changement de topologie, le nombre de composantes connexes du bord initialement égale à 1, devient après quelques iterations égale à 2. L'exemple 4.6.4, montre que la famille d'ouverts de Sverak n'est pas stable par rapport a ce modèle, le nombre de composantes connexe de la complémentaire augmente en temps .

Génération de mesures

Dans le deuxième cas, le problème d'optimisation est (on l'a vu dans la section 2)

$$\max_{\mu \in \mathcal{M}_0(D)} \frac{1}{2} \int_D f u_\mu dx - \int_D w_\mu. \tag{4.6.5}$$

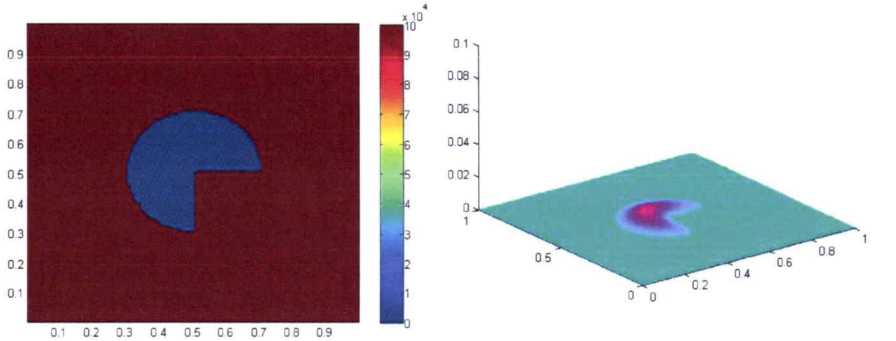
où u_μ et w_μ sont les solutions de problèmes relaxés (4.2.5), respectivement (4.2.6).

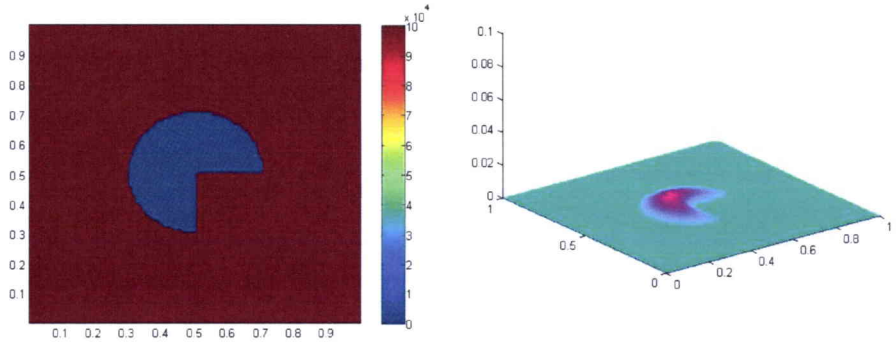
Dans le calcul numérique, toutes les mesures utilisées sont considérées absolute continues par rapport à la mesure de Lebesque. Par la suite, on va identifier une mesure avec sa densité. Pour générer des mesures $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$, on va tronquer d'abord la fonction g, telle qu'elle soit dans $[0,1]$, $g = \frac{abs(g)}{max(abs(g))}$, et on prends $\mu = 10^5 \cdot g dx$. On note que g est calculé au centre de chaque triangle de la triangulation considérée. La domaine initial Ω_0 est représenté par la mesure $\mu_0 = g_0 dx$, où

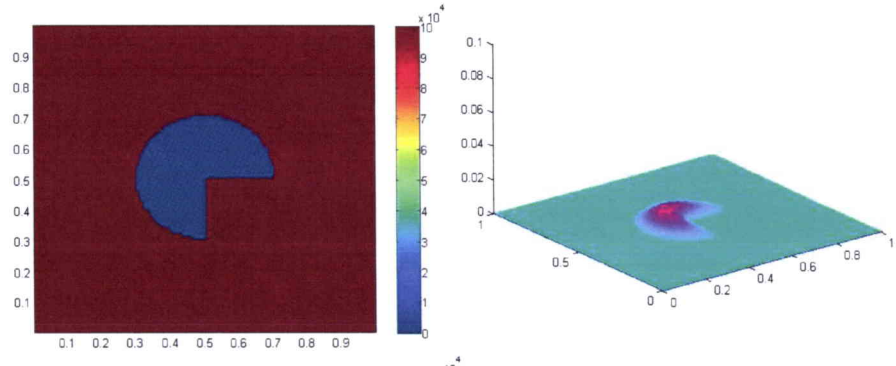
$$g_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \Omega_0 \\ 10^5, & \text{sinon.} \end{cases}$$

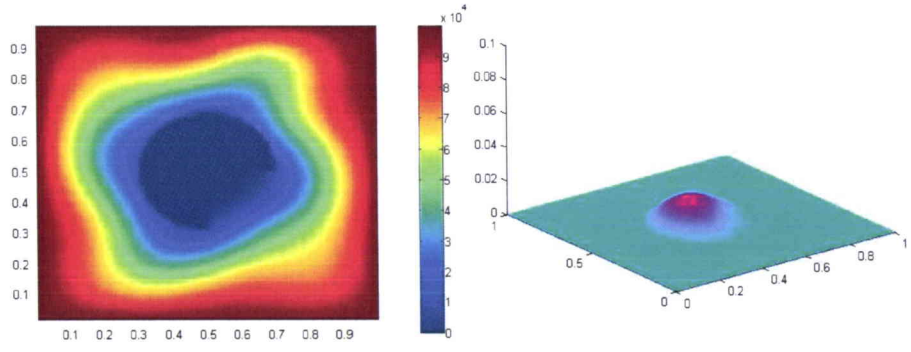
On note que dans la population on introduit aussi, comme solution potentielle la mesure μ_0. Comme pour l'évolution de domaines, les opérations des recombination et mutation des individus sont faites sur l'ensemble de paramètres $(a_{m,n})$, et elles ont été présentées ci-dessus.

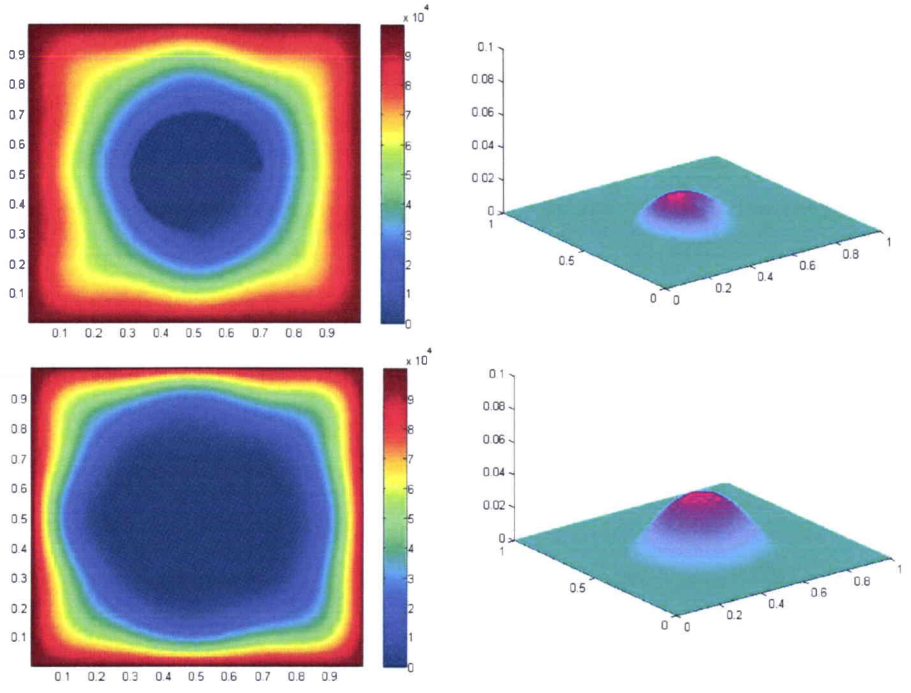
Exemple 4.6.6 *Pour la force égale à* 0.5 *au moment initial et une croissance égale à* 0.3 *à chaque iteration, on a obtenu les résultats numériques suivants.*

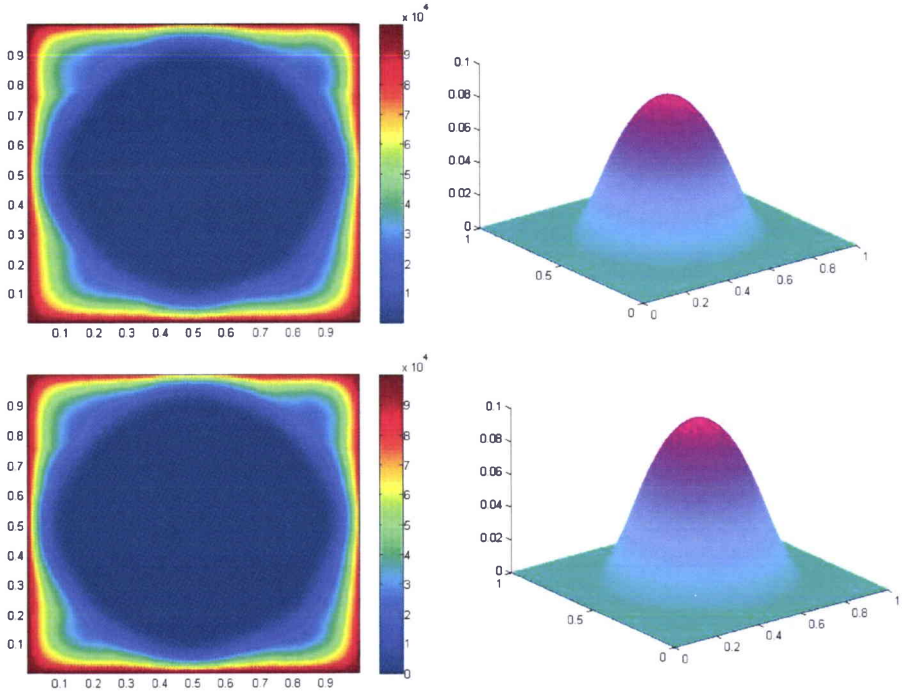

x 10^4
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1
0 0.5 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1


x 10^4
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1
0 0.5 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1


x 10^4
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1
0 0.5 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

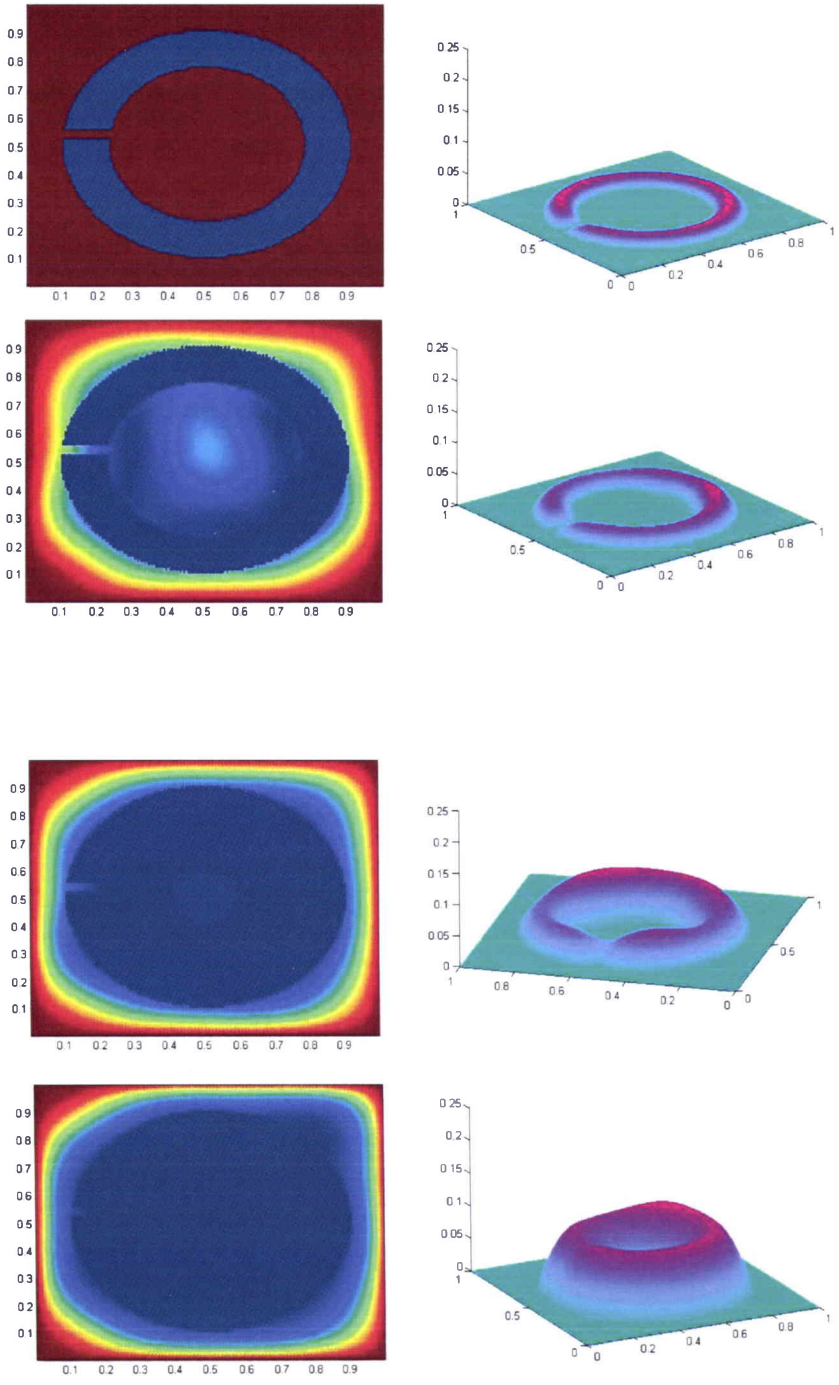

x 10^4
0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1
0 0.5 1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

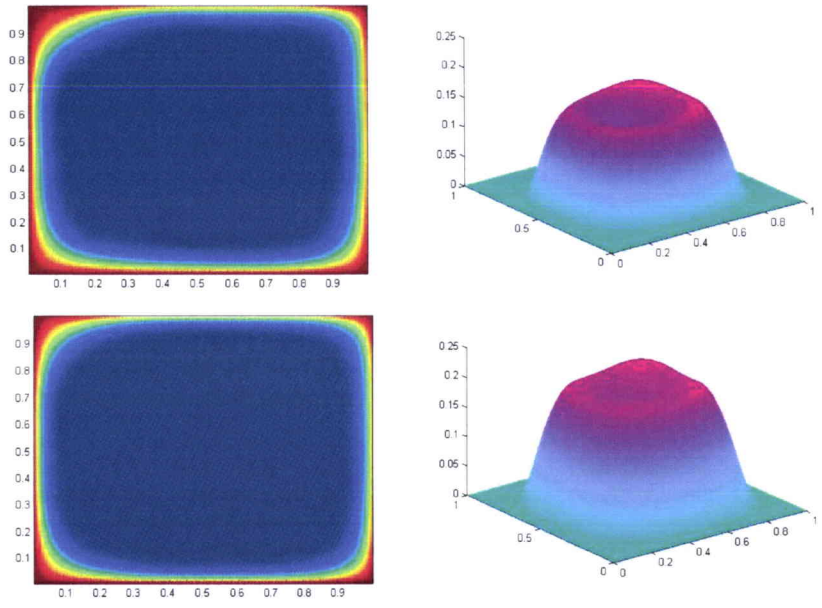




Remarque 4.6.7 *Cet exemple est une évidence numérique du processus de relaxation : la forme initiale est un domaine est l'évolution nous conduit à des mesures.*

Exemple 4.6.8 *Dans cet exemple on considère la membrane initialement décollée sur une couronne* $C((0.5, 0.5), 0.27, 0.4)$. *Le support de la force est la couronne* $C_f((0.5, 0.5), 0.25, 0.42)$. *Au moment initial la force est égale à* 8 *et à chaque iteration en temps elle croît avec* 1.





Remarque 4.6.9 Pour vérifier la validité de mon algorithme, je l'ai testé sur l'inégalité isopérimétrique suivante, impliquant la rigidité de la torsion P d'un domaine simplement connexe Ω et la premiere valeur propre, λ_1, de la membrane sur Ω, fixée le long du contour $\partial\Omega$.

Cette inégalité isopérimètrique, conjecturée par Pólya et Szegö en 1950 [58] et démontrée par Marie-Therese Kohler-Jobin en 1970 [48], exprime que le produit $P\lambda_1^2$ est minimum pour le disque :

$$P(\Omega)\lambda_1^2(\Omega) \geq P(B)\lambda_1^2(B). \tag{4.6.6}$$

Notons qu'aucune contrainte de mesure n'est pas impliquée, car l'application

$$\Omega \longrightarrow P(\Omega)\lambda_1^2(\Omega)$$

est invariante par homothésie.

J'ai testé cette conjecture en obtenant la boule, et ensuite j'ai utilisé l'algorithme pour les fonctionnelles $\Omega \longrightarrow P\lambda_2^2$, $\Omega \longrightarrow P\lambda_3^2$, $\Omega \longrightarrow P\lambda_4^2$. Vu que les domaines optimaux sont disconnexes (en 2, 3 et respectivement 4 composantes), il est suggéré que les optimums sont 2,3 respectivement 4 disques identiques et disjointes.

Les résultats obtenus pour $k = 1, 2, 3, 4$ sont présentes dans les figures 4.7, 4.8, 4.9, 4.10.

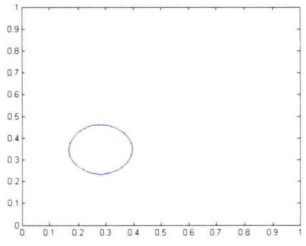


FIG. 4.7 – $P\lambda_1^2$

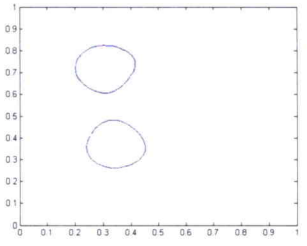


FIG. 4.8 – $P\lambda_2^2$

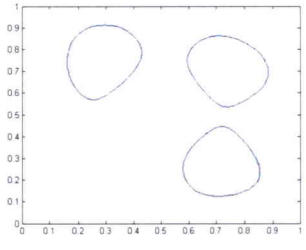


FIG. 4.9 – $P\lambda_3^2$

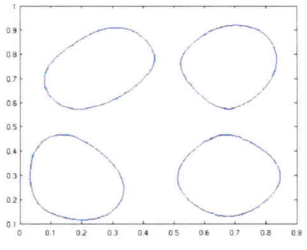


FIG. 4.10 – $P\lambda_4^2$

Chapitre 5

Étude numérique de problèmes de localisation optimale

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'analyse numérique de différents problèmes de localisation optimale tels que le problème du choix optimal des pixels d'appui pour l'interpolation d'image, la minimisation de la compliance pour le renforcement d'une membrane ou la maximisation de la première valeur propre du Laplacien avec des conditions mixtes de Dirichlet et Neumann. Pour l'étude numérique on adopte les principes des algorithmes évolutionnaires, plus précisément on utilise les algorithmes génétiques et le recuit simulé, combinés avec des méthodes déterministes, comme le gradient topologique. L'espace de formes a une structure relativement simple : les inconnues sont des ensembles formés par une réunion de boules de rayon fixe, mais petit. Les outils classiques tels que la dérivée par rapport au domaine/methodes de level set ne peuvent pas être utilisés. Également, les méthodes basées sur les lignes de niveaux du gradient topologique (voir [36]) ne sont pas adaptées.

La structure de ce chapitre est la suivante. Dans un premier temps on présente les modèles mathématiques étudiés ainsi que quelques résultats. Chaque modèle est suivi de résultats numériques qu'on a pu obtenir en appliquant des méthodes évolutionnistes combinées avec des méthodes déterministes qui vont être décrites au fur et à mesure.

5.1 Choix optimale des pixels d'appui pour l'interpolation d'image

L'objectif de la compression d'image est de réduire la quantité de mémoire nécessaire pour le stockage d'une image. Différentes méthodes ont été développées dans la literature : des méthodes basées sur les répétitions, des méthodes de type dictionnaire, des méthodes statistiques, la compression JPEG, la compression fractale, la compression par ondelettes, et la compression basée sur les équations aux dérivées partielles (à voir [25], [50], [59], [69]).

Dans cette section on va étudier la dernière approche, on plaçant le problème dans le cadre d'optimisation de forme. Pour les résultats qui vont être présentés dans la suite nous nous référons à [8]. L'idée est d'extraire l'essentiel de l'image, c'est à dire les pixels

les plus "importants" (par exemple 10%) et d'interpoler les autres en utilisant une EDP appropriée. Dans ce contexte, deux questions fondamentales se posent :

- quelle est l'EDP la plus adaptée pour ce but ;
- comment on peut trouver les "bons" pixels qui donnent la meilleure reconstruction ;

L'EDP qu'on choisit pour l'interpolation peut être linéaire ou non-linéaire. Dans le cas linéaire, le problème a été étudié en [8] par Belhachmi, Bucur, Burgeth et Weickert .

Dans un premiere temps on va rappeler le contexte et les résultats principaux du cas linéaire ([8]) et après on réalise un étude du cas non linéaire (p-Laplacien).

5.1.1 Cas linéaire

Dans [8], l'analyse de forme est faite dans le cadre de la Γ-convergence, partant de deux points de vue différents. Premièrement, les auteurs proposent un modèle EDP continu, et par une étude asymptotique de type dérivée topologique ils obtiennent des informations locales sur l'importance de chaque pixel dans la reconstruction. Dans une deuxième étape, ils reformulent le modèle continu basé sur des pixels "gros" (boules) dans un espace de dimension finie, (2 ou 3) et, par Γ- convergence, ils effectuent une étude asymptotique quand le rayon de boules tend vers 0. De cette façon, ils obtiennent des informations sur la distribution optimale des pixels, utilisant les résultats obtenus par Buttazzo, Santambrogio et Varchon en [22] pour une membrane.

Modèle continu

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ le support de l'image (un rectangle symétrique par rapport à l'origine) et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ l'image, supposée connue sur une région $K \subseteq D$. Pour approcher f sur la région $D \setminus K$ on considère l'équation de Laplace avec conditions de Dirichlet sur K et conditions de Neumann sur ∂D

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } D \setminus K, \\ u = f, & \text{sur } K \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Soit u_K la solution de (5.1.1). Le problème consiste en l'identification de K qui donne la meilleure approximation u_K dans un certain sens, par exemple qui minimise une de normes

$$\int_D |\nabla u_K - \nabla f|^2 dx \text{ ou } \int_D |u_K - f|^p dx.$$

La pratique suggère de considérer la norme H^1, c'est-à-dire d'approcher le gradient. Intuitivement, ceci signifie que là où le gradient est grand (autour du contour de discontinuité discrète) on doit retenir deux contours parallèles avec des valeurs pour f très différentes, au lieu d'un seul contour avec de variations petites.

Le but de la compression des images étant de réduire la quantité de mémoire nécessaire pour le stockage, des contraintes sur la taille de K viennent naturellement à s'imposer. Dans le cas continu, ces contraintes doivent être comprises dans le sens d'une mesure appropriée (mesure de Lebesque, mesure de Hausdorff, capacité). En ce qui concerne le choix de la mesure, les résultats suivants sont prouvés en [8].

Théorème 5.1.1 *Pour tout $c > 0$, le problème*

$$\inf_{K \subseteq D, |K| \leq c} \int_D |\nabla u_K - \nabla f|^2 dx \tag{5.1.2}$$

où $|K|$ est la mesure de Lebesque, n'a pas en général de solution, l'infimum étant égal à zero.

Théorème 5.1.2 *Pour tout $c > 0$, le problème*

$$\inf_{K \subseteq D, \mathcal{H}^1(K) \leq c} \int_D |\nabla u_K - \nabla f|^2 dx \tag{5.1.3}$$

où $\mathcal{H}^1(K)$ est la mesure de Hausdorff mono-dimensionnelle, n'a pas en général de solution, l'infimum étant égal à zero.

Comme pour les espaces de Sobolev la mesure naturelle de la discontinuité des fonctions est la capacité, une contrainte du type capacitaire paraît plus appropriée.

Soit $\mathcal{M}_0(D)$ la classe de mesures boreliennes non négatives définies sur D (cette classe a été introduite dans la première section du chapitre 1.)

Définition 5.1.3 *Soit $\alpha \geq 0$. La α-capacité d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ est définie par*

$$cap_\alpha(\mu) = \inf_{u \in H_0^1(D)} [\int_D |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_D u^2 dx + \int_D (u-1)^2 d\mu].$$

Définition 5.1.4 *Une suite de fonctionnelles définies sur un espace métrique V, $F_n : V \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, Γ-converge vers F dans V si et seulement si pour tout $u \in V$ il existe une suite $u_n \in V$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans V et*

$$F(u) \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} F_n(u_n),$$

et pour toute suite convergente $u_n \longrightarrow u$ dans V on a

$$F(u) \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} F_n(u_n).$$

La propriété principale de la Γ-convergence est que toute suite convergente de minimiseurs de F_n a comme limite un minimiseur de F.

Pour $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$, on définit la fonctionnelle $F_\mu : H^1(D) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par

$$F_\mu(u) = \int_D |\nabla u|^2 dx + \int_D |u|^2 d\mu.$$

Définition 5.1.5 *On dit qu'une suite de mesures $\mu_n \in \mathcal{M}_0(D)$ γ- converge vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(D)$ si et seulement si F_{μ_n} Γ- converge vers F_μ dans $L^2(D)$.*

En considérant une contrainte en terme de capacité, $\text{cap}_\alpha(K) \leq c$, le critère devient

$$\max_{K \subseteq D} \min_{u \in H^1(D), u = f \text{ sur } K} \int_D |\nabla u|^2 dx - \beta \text{cap}_\alpha(K), \tag{5.1.4}$$

où $\beta > 0$ joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. Pour des raisons d'ordre pratique, on ne permet pas à K de toucher la frontière de D.

Soit $\delta > 0$. On introduit les notations :

$$D^{-\delta} := \{x \in D \,:\, d(x, \partial D) \geq \delta\},$$

$$K_\delta := \{K \subseteq D \,:\, K \text{fermé}\,, K \in D^{-\delta}\},$$

$$\mathcal{M}_\delta(D) = \{\mu \in \mathcal{M}_0(D) \,:\, \mu|_{D \setminus D^{-\delta}} = 0\}.$$

Les deux théorèmes suivants représentent les résultats principaux prouvés dans [8].

Théorème 5.1.6 *Si $\mu_n \in \mathcal{M}_\delta(D)$ γ-converge vers μ, alors $\mu \in \mathcal{M}_\delta(D)$ et F_{μ_n} Γ-converge vers F_μ dans $L^2(D)$, où*

$$F_\mu(u) = \begin{cases} \int_D |\nabla u|^2 dx + \int_D (u-f)^2 d\mu & \text{si } |u| \leq |f|_\infty, \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 5.1.7 *On a*

$$cl_\gamma K_\delta(D) = \mathcal{M}_\delta(D), \tag{5.1.5}$$

et

$$\sup_{K \in K_\delta(D)} (E(K) - \beta cap_\alpha(K)) = \max_{\mu \in \mathcal{M}_\delta(D)} (E(\mu) - \beta cap_\alpha(\mu)). \tag{5.1.6}$$

Les résultats de Γ-convergence et la propriété de densité exprimés dans ces deux théorèmes ont comme consequence le fait que de tout suite maximisant pour $\sup_{K \in K_\delta(D)}(E(K) - \beta cap_\alpha(K))$ on peut extraire une sous suite γ convergente et la mesure γ-limite est solution pour le problème relaxé $\max_{\mu \in \mathcal{M}_\delta(D)}(E(\mu) - \beta cap_\alpha(\mu))$.

Nous nous intéressons maintenant à l'influence de chaque pixel dans la reconstruction d'images. Pour faire cela, l'idée est de partir avec l'ensemble $K = \overline{D}$ et d'analyser la sensibilité de la fonctionnelle non relaxée (5.1.4) par rapport à des petits trous introduits dans le domaine.

Soit $K_\varepsilon = K \setminus B(x_0, \varepsilon)$, où $B(x_0, \varepsilon)$ est la boule centrée en x_0 et de rayon ε. On considère la fonctionnelle

$$J(K_\varepsilon) = \min_{u \in H^1(D), u = f \text{ sur } K_\varepsilon} \int_D |\nabla u|^2 dx,$$

le minimum étant réalisé par u_ε. Alors, le calcul du gradient topologique réalisé en [8] donne

$$J(K_\varepsilon) - J(K) = -|\Delta f(x_0)|^2 \frac{\pi}{2} \varepsilon^4 + \varepsilon^4 o(1). \tag{5.1.7}$$

Comme le gradient topologique de la capacité est indépendant de x_0 et il est d'ordre au moins 4, il résulte qu'il faut prendre en compte seulement le défaut d'harmonicité de f, c'est à dire $|\Delta f|$. Le résultat ci dessus est en concordance avec les résultats expérimentaux, les deux suggérant de prendre les pixels là où la valeur absolue du Laplacien de l'image est maximale.

Distribution optimale des pixels

Nous considérons à présent le problème en dimensions $d = 2$ ou $d = 3$. On suppose $f \in H^2(D)$, $\frac{\partial f}{\partial \nu} = 0$, où $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ est la dérivée normale de f. Pour $m > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$\mathcal{A}_{m,n} = \{\cup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, r) \, : \, x_i \in \mathbb{R}^d, \, r = \frac{m}{n^{\frac{1}{d}}}\}.$$

On appelle la boule $\overline{B}(x_i, r)$ pixel "gros". On considère le problème

$$\min_{K \in \mathcal{A}_{m,n}} \int_D |\nabla u_K - \nabla f|^2 dx. \tag{5.1.8}$$

Soient $v_K = u_K - f$ et $g = \Delta f \in L^2(D)$. Par consequence v_K est solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta v_K = g & \text{dans } D \setminus K \\ v_K = 0, & \text{sur } K \\ \frac{\partial v_K}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial D \setminus K. \end{cases} \tag{5.1.9}$$

Le problème (5.1.8) devient un problème de minimisation de la compliance

$$\min_{K \in \mathcal{A}_{m,n}} \int_D g v_K dx. \tag{5.1.10}$$

Une problème similaire a été traité en [22], dans le cadre de conditions de Dirichlet sur la frontière ∂D. En couvrant la frontière ∂D avec seulement $C_d n^{\frac{d-1}{d}}$ boules, et en utilisant la propriété de densité capacitaire ainsi que le caractère local de la γ convergence, à la limite on peut se débarrasser de conditions de Neumann.

Pour obtenir des informations sur la distribution des boules, on va utiliser une autre topologie pour la Γ-convergence des fonctionnelles d'énergie. Dans ce nouveau contexte, les minimiseurs restent inchangés, mais leur comportement est vu dans une autre topologie. Pour tout $K \in \mathcal{A}_{m,n}$ on introduit

$$\mu_K := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d),$$

où δ_{x_i} est la mesure de Dirac au point x et $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des mesures boreliennes de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

On introduit les fonctionnelles

$$F_n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$F_n(\mu) = \begin{cases} n^{\frac{2}{d}} \int_D g v_K dx, & \text{si } \mu = \mu_K, \, K \in \mathcal{A}_{m,n} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat principal, prouvé en [22], est le suivant.

Théorème 5.1.8 *On suppose $g \geq 0$. La suite des fonctionnelles F_n Γ-converge par rapport à la topologie faible $*$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ vers*

$$F(\mu) = \int_D \frac{g^2}{\mu_a^{\frac{2}{d}}} \theta(m\mu_a^{\frac{1}{d}}) dx,$$

où $\mu = \mu_a dx + \nu$ est la décomposition de Radon de μ et

$$\theta(\alpha) := \inf\{\liminf_n n^{\frac{2}{d}} F(K_n) \ : \ K_n \in \mathcal{A}_{\alpha,n}\}.$$

La fonction θ n'est pas explicitement connue, mais, dans [22] quelques propriétés sont établies. La fonction θ est positive, non croissante, et elle s'annule à partir d'un certain point. Pour α petit, les inégalités suivantes ont lieu :

$$d = 2 : \quad C_1 |log\alpha| - C_2 \leq \theta(\alpha) \leq C_3 |log\alpha|,$$

$$d = 3 : \quad C_1 \frac{1}{\alpha} - C_2 \leq \theta(\alpha) \leq C_3 \frac{1}{\alpha}.$$

Minimiser F implique que sur des régions où $|g| = |\Delta f|$ est grand , μ_a doit être suffisamment grande pour approcher la valeur pour laquelle θ s'annule. Sur des régions où $|\Delta f|$ est petit, μ_a peut être aussi petite. En utilisant les inégalités et en écrivant l'équation d'Euler pour le minimiseur on a :

- pour $d = 2 : \frac{\mu_a^2}{|1 - log\mu_a|} \approx c_{m,f} |\Delta f|^2$,
- pour $d = 3 : \mu_a \approx c_{m,f} |\Delta f|$,

où $c_{m,f}$ sont des constantes appropriées. Ce résultat suggère de prendre une distribution de pixels proportionnelle à $|\Delta f|$, (en tout cas la où $|\Delta f|$ est petit).

5.1.2 Cas non linéaire

Dans [11] Weickert, Welk, Galic, Bruhn, Belyaev et Seidel suggèrent d'utiliser pour interpolation d'EDP non-linéaire. On va remplacer à présent le Laplacien par le p-Laplacien. Soit $1 < p < \infty$. Le p-Laplacien, noté avec Δ_p est l'opérateur défini par $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$. Soit u_K la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{dans } D \setminus K, \\ u = f, & \text{sur } K \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{5.1.11}$$

Par analogie avec le cas linéaire on considère le problème qui consiste en l'identification de K qui maximise

$$\max_{K \subseteq D} \int_D |\nabla u_K|^p dx \tag{5.1.12}$$

où u_K est la solution de (5.1.11), parmi tous les fermés K satisfaisant une contrainte de mesure (Lebesque, Hausdorff,...).

On note qu'en général, si $p \neq 2$, le critère (5.1.12) n'est pas equivalent à

$$\min_{K \subseteq D} \int_D |\nabla u - \nabla f|^p dx. \tag{5.1.13}$$

Pour $p = 2$ on retrouve l'equivalence entre les critères (5.1.12) et (5.1.13).

Par la suite on va donner un résultat analogue au Théorème 5.1.2, démontré dans le cas $p = 2$ dans [8].

Théorème 5.1.9 *Soit $1 < p < +\infty$ et soit $f \in W_0^{1,p}(D)$. Alors, pour tout $c > 0$*

$$\sup_{\mathcal{H}^1(K) \leq c} \min_{u=f \text{ sur } K} \int_D |\nabla u|^p dx = \int_D |\nabla f|^p dx. \tag{5.1.14}$$

Avant de passer à la demonstration on rappelle quelques résultats utiles.

Définition 5.1.10 *Pour un ensemble compact K inclus dans une boule arbitraire B on définit la capacité locale par*

$$C_p(K, B) := \inf\{\int_B |\nabla \phi|^p dx \;\; \phi \in C_0^\infty(B), \;\; \phi \geq 1 \text{ sur } K\}.$$

Définition 5.1.11 *Pour $r, c > 0$ on dit qu' un ensemble ouvert Ω vérifie la condition de $p - (r, c)$ densité capacitaire si*

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \;\; \forall\, 0 < \delta < r \;\; \frac{C_p(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,\delta}, B_{x,2\delta})}{C_p(\overline{B}_{x,\delta}, B_{x,2\delta})} \geq c.$$

La classe d'ensembles qui vérifient cette propriété on la note avec $\mathcal{O}_{c,r}$.

Les résultats suivants ont été prouvés dans [17].

Proposition 5.1.12 *Soit $\gamma_{[x,\xi]} \subseteq B_{x,r}$ une courbe telle que $\xi \in B_{x,r}$. Alors :*

$$C_p(\gamma_{[x,\xi]}; B_{x,2r}) \geq C_p([x, \xi]; B_{x,2r})$$

où $[x, \xi]$ représente le segment avec les extremum en x et ξ.

Proposition 5.1.13 *Soit $K \subseteq \mathbb{R}^N$ un ensemble connexe et compact. Alors pour tout $x \in K$ et $r < \frac{1}{2} diam(K)$ on a :*

$$\frac{C_p(K \cap \overline{B_{x,r}}; B_{x,2r})}{C_p(\overline{B_{x,r}}; B_{x,2r})} \geq \frac{C_p([0,1] \times \{0\}^{N-1}; B_{0,2})}{C_p(\overline{B_{0,1}}; B_{0,2})}.$$

Preuve du Théorème 5.1.9

On note que (5.1.14) est équivalente à

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; K_\varepsilon \text{ avec } \mathcal{H}^1(K_\varepsilon) \leq c \text{ tel que } \min_{u=f \text{ sur } K_\varepsilon} \int_D |\nabla u|^p dx > \int_D |\nabla f|^p dx - \varepsilon. \tag{5.1.15}$$

Effectivement, l'inégalité

$$\min_{u=f \text{ sur } K_\varepsilon} \int_D |\nabla u|^p dx \leq \int_D |\nabla f|^p dx$$

est immédiate en prenant $u = f$ dans le membre de gauche. Supposons le contraire, c'est à dire

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, K_\varepsilon \text{ avec } \mathcal{H}^1(K_\varepsilon) \leq c \min_{u=f \text{ sur } K_\varepsilon} \int_D |\nabla u|^p dx \leq \int_D |\nabla f|^p dx - \varepsilon. \quad (5.1.16)$$

Pour la suite on note avec u_ε la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon = 0 & \text{dans } D \setminus K_\varepsilon \\ u_\varepsilon = f & \text{sur } K_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial D. \end{cases} \quad (5.1.17)$$

Alors (5.1.16) est équivalent à

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\, K_\varepsilon\ \mathcal{H}^1(K_\varepsilon) \leq c \int_D |\nabla u_\varepsilon|^p dx \leq \int_D |\nabla f|^p dx - \varepsilon. \quad (5.1.18)$$

On note que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $W_0^{1,p}(D)$, donc(à une sous suite près) elle converge faiblement vers une fonction u dans $W_0^{1,p}(D)$. Cette dernière affirmation implique que (5.1.18) est vérifiée aussi par u.

$$\int_D |\nabla u|^p dx \leq \int_D |\nabla f|^p dx - \varepsilon. \quad (5.1.19)$$

On va démontrer que $u = f$ et pour obtenir une contradiction. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On distingue deux situations.

Cas 1 : $\mathbf{1 < p \leq 2}$

On va construire K_ε^n tel que $\mathcal{H}^1(K_\varepsilon^n) = \alpha$, $\alpha \leq c$ de la façon suivante. Soit $H_n := \{(0,1) \times r_n\}$ où $(r_n)_n = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Pour construire K_ε^n sur chaque segment H_n on met de petits segments tels que la somme de leurs mesure de Hausdorff soit égale à $\frac{\alpha}{n}$. Les segments ont la même longueur et sont repartis de façon uniforme. Le procédé est présenté pour la construction de K_ε^1 et K_ε^2 dans les figures 5.1, 5.2.

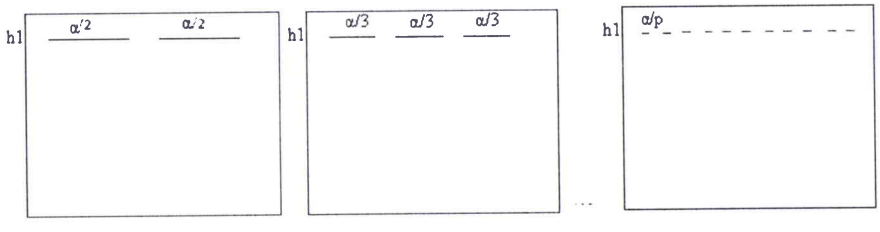


FIG. 5.1 – Construction du H_ε^1

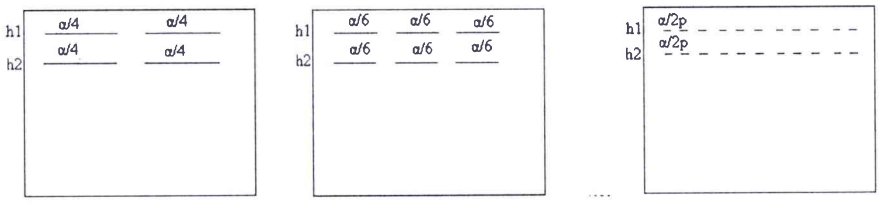


FIG. 5.2 – Construction du H_ε^2

On a obtenu donc une suite u_ε^n qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_p u_\varepsilon^n = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^n := D \setminus K_\varepsilon^n \\ u_\varepsilon^n - f \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon^n). \end{cases} \tag{5.1.20}$$

On va montrer que $\Omega_\varepsilon^n \in \mathcal{O}_{c,r}$. En effet, on a que $K_\varepsilon^1 \longrightarrow^H H_1, ..., K_\varepsilon^n \longrightarrow^H H_n$. Il existe $\delta > 0$ tel que $diam(H_i) \geq \delta$. Pour n suffisamment grand on a que $diam(K_i^n) \geq \frac{\delta}{2}$. Soit $r = \frac{\delta}{4}$ et

$$c = \frac{C_p([0,1] \times \{0\}^{N-1}; B_{0,2})}{C_p(\overline{B_{0,1}}; B_{0,2})}.$$

On obtient $\Omega_\varepsilon^n \in \mathcal{O}_{c,r}$ comme consequence des propositions 5.1.12 et 5.1.13. De plus $\Omega_\varepsilon^n \longrightarrow^{H^c} \emptyset$, quand $n \longrightarrow \infty$. Par conséquent $\Omega_\varepsilon^n \longrightarrow^\gamma \emptyset$, qui avec $u_\varepsilon^n \in W_0^{1,p}(\Omega_\varepsilon^n)$ impliquent que la limite faible u_ε de u_ε^n est égal a f sur D.

Cas 2 :$\mathbf{p > 2}$

Dans ce cas, on a que $W_0^{1,p}(D) \subseteq C^{0,\alpha}(D)$, pour un certain $\alpha \in]0,1[$. Donc u vérifie

$$\exists\, C > 0, \text{ tel que } \forall\, x, y \in D \; |u(y) - u(x)| \leq C|x - y|^\alpha. \tag{5.1.21}$$

D'autre part $f \in W_0^{1,p}(D)$, donc f vérifie aussi (5.1.21). Soit $x \in K_\varepsilon$ et $y \in D \setminus K_\varepsilon$ tel que $|x - y| \leq \frac{\delta}{2}$. On a

$$|u(x) - u(y) + f(y) - f(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |f(y) - u(x)| \leq \frac{\delta}{2} C_1 + \frac{\delta}{2} C_2.$$

Comme $u(x) = f(x)$ il résulte

$$|f(y) - u(y)| \leq \delta C.$$

qui implique $f(y) = u(y)$. Par consequence $u = f$ sur D.

De plus la convergence est forte : $u_\varepsilon \to f$ dans $W_0^{1,p}(D)$. Pour démontrer cela, il faut montrer la convergence de la norme. Soit $u_\varepsilon - f$ une fonction test pour l'équation vérifiée par u_ε, (5.1.17). On a

$$\int_D |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon . \nabla (u_\varepsilon - f) dx = 0 \Leftrightarrow \int_D |\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_D |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon . \nabla f dx. \tag{5.1.22}$$

Comme $|\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup |\nabla f|^{p-2}\nabla f$ faiblement dans L^q (Théorème 2.10 [29] et Théorème 2.1 [12]), on peut passer à la limite dans le deuxième terme de la dernière égalité. Donc

$$\int_D |\nabla u_\varepsilon|^p dx \longrightarrow \int_D |\nabla f|^p dx$$

dans $W_0^{1,p}(D)$.

Remarque 5.1.14 On note que le Théorème 5.1.9 mis en evidence que, à partir d'une quantité (mesuré en nombre de pixels) petite de l'image on peut obtenir de bonnes reconstructions.

5.2 Résultats numériques pour la compression d'images

On souhaite à présent appliquer des méthodes évolutionnistes combinées avec des méthodes déterministes pour les problèmes présentés dans la section précédente.

On rappelle que, pour ce problème, le but et de trouver la localisation des pixels qui donnent la meilleure reconstruction de l'image au sens de la norme H^1.. Le critère est le suivant

$$\max_{K\subseteq D} \int_D |\nabla u_K|^2 dx \tag{5.2.1}$$

ou u_K est la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } D \setminus K, \\ u = f, & \text{sur } K \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial D. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Dans nos calculs, on suppose que l'ensemble K représente 10% de l'image en nombre de pixels. Pour une image de dimension 256×256 on retient 6554 pixels pour la reconstruction.

Pour trouver la localisation optimale des pixels d'appui pour l'interpolation on va proposer plusieurs approches. On commence avec les approches non-déterministes, plus précisément les algorithmes génétiques.

Dans la suite on présente le principe général de fonctionnement d'un algorithme génétique, ses étapes, ainsi que l'adaptation à notre problème.

5.2.1 Principe général de fonctionnement d'un algorithm génétique

Les algorithmes génétiques constituent un exemple représentatif d'un ensemble de méthodes connues sous le nom d'algorithmes évolutionnaire (A.E). Ces méthodes servent à implanter sur des systèmes artificiels les mécanismes de type Darwinien de l'évolution naturelle, c'est-à-dire le fait que l'évolution d'une espèce est dictée par la nécessité de l'adaptation. Ainsi, à chaque generation, les individus mieux adaptés sont combinés en utilisant des techniques dérivées de la génétique et des mécanismes d'évolution simulant la nature : croisements, mutations, selections.

Le vocabulaire utilisé est emprunté de la génétique :

- Gène -la plus petite entité qui contient les caractères héréditaires de l'individu ;
- Individu/chromosome/séquence - représente une solution potentielle du problème ;
- Population - un ensemble de chromosomes ou de points de l'espace de recherche ;
- Fonction d'adaptation - fitness ;
- Opérations de reproduction - le croisement et la mutation ;
- Génération - l'ensemble de la population à un moment donné du processus.

Les algorithmes génétiques différent des algorithmes classiques d'optimisation par :

- l'utilisation d'un codage des éléments de l'espace de recherche ;
- la recherche de la solution est faite à partir d'une population de points et non pas à partir d'un seul point ;
- aucune régularité sur la fonction étudiée (continuité, dérivabilité, convexité ...) n'est pas requise ;
- la capacité à traiter des situations qui présentent un très grand nombre d'extrema locaux.

Parmi les caractéristiques principales des algorithmes génétiques on rappelle la robustesse. Ceci signifie qu'ils permettent de fournir une ou plusieurs solutions de "bonne" qualité (pas nécessairement optimales, mais suffisantes en pratique) à des problèmes très variés comme le traitement d'image et l'optimisation de forme. Cette approche ne va pas sans inconvénients, parmi lesquels on rappelle :

- la nécessité de gérer un grand nombre de paramètres ;
- un nombre d'évaluations important de la fonction coût (ce qui entraîne un temps de calcul important, si par exemple le coût dépend de la solution d'une équation aux dérivées partielles) ;
- la grande difficulté à obtenir des résultats de convergence.

Par la suite on va décrire les étapes d'un algorithme génétique en considérant le problème suivant

$$\max_{x \in X} F(x), \tag{5.2.3}$$

où F est une fonction à valeurs réelles et X l'espace de variable.

La première étape d'un algorithme génétique est de coder convenablement le problème. On distingue trois principaux type de codage : binaire, gray et réel. Historiquement, le premier codage était le codage binaire, représenté sous forme de chaînes de bits contenant toute l'information nécessaire à la description d'un point dans l'espace de recherche. Les premiers résultats de convergence théorique ont été obtenus en utilisant ce type de codage. Le codage gray est en général utilisé pour des problèmes d'optimisation dans des espaces de dimension supérieure où les chaînes de bits sont concatènés, par exemple, pour une fonction de deux variables $z = f(x, y)$, on code x et y sur leur domaine respectif puis on concatène x et y en une chaîne unique xy. Ce type de codage fonctionne bien, mais présente l'inconvénient de perdre la structure du problème en fusionnant x et y dans une chaîne unique. Il est possible de ne pas coder les éléments de l'espace admissible du problème, c'est qu'on va considérer pour le problème modèle (5.2.3). Dans ce contexte, *l'espace de recherche* et l'ensemble X, un élément de X va représenter un *individu* et un ensemble fini d'individus va être appelé une *population*. *La fonction d'adaptation* va être évaluée par le nombre $F(x)$. L'étape suivante est de choisir une population initiale et

ensuite de calculer la fonction d'adaptation de chacun des individus. Suivant cette fonction d'adaptation, dans une troisième étape, on réalise une selection. Une fois une partie de la population sélectionnée, on applique à cet échantillon les opérations génétiques, le croisement et la mutation, pour obtenir une nouvelle population. Une solution va être le meilleur individu de la dernière population obtenue après avoir répéter un nombre de fois les operations ci-dessus précisées.

5.2.2 Compression des images par algorithmes génétiques

Pour le problème de compression d'image nous choisissons un codage binaire. Un individu est une chaîne de bits de longueur $256 \cdot 256$, $(b_i)_{i=1,256\times256}$, définie de la façon suivante

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{on retient ce pixel;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Après avoir choisi le codage, on pase à générer une population initiale. La rapidité de l'algorithme dépend du choix de la population initiale. Si on n'a pas des informations sur la position de l'optimum dans l'espace de recherche, alors on va générer aléatoirement des individus en veillant à ce que les individus produits respectent les contraintes. Si par contre, on a des informations sur la position de l'optimum dans l'espace de recherche, alors on va générer les individus dans un sous-domaine particulier afin d'accélérer la convergence. Dans notre cas, on va tester les deux situations. Dans un premiere temps on va générer la population initiale aléatoirement, et dans un deuxième temps on va générer la population initiale en tenant compte du Laplacien dans un sens précisé plus loin.

Pour le premier cas chaque individu de longueur $256 \cdot 256$ est d'abord initialisé avec 0. On génère aléatoirement 6554 positions entre 1 et $256 \cdot 256$. On initialise ces positions avec 1.

On fait ensuite l'évaluation de l'adaptabilité de chaque individu de la population, et en fonction de ceci on réalise la selection de "meilleurs" individus.

Pour le problème de la compression des images la performance d'un individu est donnée par $\int_D |\nabla u_K|^2 dx$, où K est formé par l'ensemble de pixels initialisés avec 1, et u est la solution de

$$-\Delta u + \alpha\chi_K(u - f) = 0 \text{ dans } D \; u \in H_0^1(D). \tag{5.2.4}$$

Dans l'équation (5.2.4), qui est la forme pénalisé de (5.2.2), α est une très grande constante et χ est la fonction indicatrice de K ,

$$\chi_K = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in K \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'étape de sélection permet d'identifier statistiquement les meilleurs individus d'une population et d'éliminer les mauvais. Elle doit permettre d'explorer les différentes parties de l'espace de recherche. Dans la littérature, on trouve plusieurs méthodes de sélection.

Méthode de la roue

La roue est divisée en secteurs et chaque secteur est associé à un individu, la superficie du secteur étant proportionnelle à la valeur de l'adaptation de l'individu, les meilleurs

individus ayant une probabilité plus grande d'être choisis. Un exemple pour une population de neuf individus est présenté dans la figure 5.3.

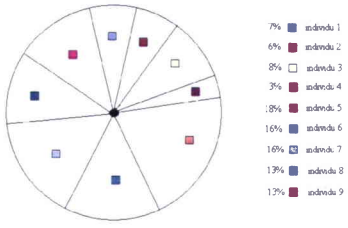


FIG. 5.3 – Selection par la méthode de la roue

Selection par tournois

Un tournoi est organisé entre deux (ou plusieurs) individus. Si la population est de n individus, alors on prend aléatoirement n fois k individus, $k \geq 2$. L'individu le plus performant parmi les k est sélectionné. On peut aussi introduire une probabilité p sur la victoire du meilleur dans le cas du tournoi binaire. Une valeur peu élevée de p peut réduire la pression de la sélection.

La méthode utilisé ici est celle de la roue. On va construire la roue de la façon suivante.

- on calcule la performance de chaque individu notée $f(individu_i)$, avec $i = 1, ..., PopSize$, où $PopSize$ représente le nombre des individus de la population ;
- on calcule la performance de tous les individus

$$F = \sum_{i=1}^{PopSize} f(individu_i);$$

- on détermine la probabilité de sélection pour chaque individu :

$$prob_i = \frac{f(individu_i)}{F} \quad i = 1, ..., PopSize;$$

- on calcule la probabilité cumulative de chaque individu :

$$probCum_i = \sum_{j=1}^{i} prob_j;$$

Pour créer la nouvelle population on va tourner la roue $PopSize$ fois. Chaque fois on sélectionne un seul individu de la façon suivante :

- on génère aléatoirement un nombre $r \in [0, 1]$;
- si $r < probCum_1$ alors on sélectionne le premier individu, sinon on sélectionne le i-éme $(2 \leq i \leq PopSize)$ tel que $probCum_{i-1} \leq r \leq probCum_i$.

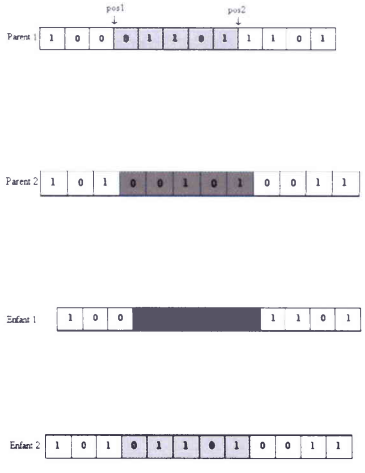
On note qu' il existe des individus qui vont être sélectionnés plusieurs fois. Cela est en concordance avec le théorème de schémas qui va être énoncé plus loin : les meilleurs individus vont avoir plusieurs copies, les moyens restent, et les pires vont disparaître.

Une fois une partie de la population sélectionnée (un individu avec une adaptabilité élevé peut être choisi plusieurs fois, le nombre de la population reste constant) on applique les opérations de reproduction (croisement et mutation) pour produire une nouvelle génération.

Opérateur de croisement

L'opérateur de croisement permet de produire deux individus (enfants) à partir de deux autres individus (parents). Dans le cas d'une codage binaire on peut avoir plusieurs types de croisement. On rappelle ici le croisement à un (ou plusieurs) points et le croisement uniforme.

Soient pos1 et pos2, deux positions aléatoires entre 1 et $m-1$, où m est la longueur d'un individu. L'opération de croisement à deux points est illustrée dans les figures suivantes.



Le croisement uniforme consiste à choisir une masque de la taille de l'individu, et de créer deux enfants en fonction de ce masque. Un exemple est présente ci dessous (figure 5.4, 5.5, 5.6, 5.7).



FIG. 5.4 – Parent 1



FIG. 5.5 – Parent 2



FIG. 5.6 – Enfant 1



FIG. 5.7 – Enfant 2

Dans le cas du codage réel, un croisement barycentrique peut être utilisé. Deux enfants E_1 et E_2 sont crées à partir de deux parents P_1 et P_2 de la manière suivante :

$$E_1 = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2 \quad E_2 = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2$$

où α est un coefficient de pondération aléatoire.

On va appliquer à présent les opérateurs génétiques présentes ci-dessus au problème de compression d'image. Un paramètre de l'algorithme génétique est la probabilité de croisement, notée pc. Cette probabilité nous fournit un nombre $pc \cdot PopSize$ d'individus qui subiront l'operation de croisement, où $PopSize$ représente le nombre des individus de la population.

Pour chaque individu dans la population on procède de la façon suivante :

- on génère un nombre aléatoire r, entre 0 et 1 ;
- si $r < pc$, on sélectionne l'individu pour l'opération de croisement.

Dès que deux individus ont été sélectionnés, on réalise l'opération de croisement à deux points décrite ci dessus.

Mutation

Cette opération de perturbation est destinée à maintenir la diversité des individus au sein de la population. Chaque gène (dans tous les individus de la population entière) a une chance égale de subir la mutation, c'est-à-dire le changement de 0 à 1 ou vice versa. L'opération de mutation est illustré dans la figure 5.8 :

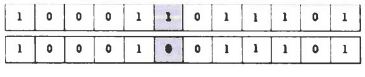


FIG. 5.8 – Mutation

Un autre paramètre d'un algorithm génétique est la probabilité de mutation, pm, qui nous donne le nombre de gènes, $pm \cdot m \cdot PopSize$ soumises aux mutation. Pour chaque individu dans la population courante (population obtenue après croisement) et pour chaque gène dans l'individu :

- on génère un nombre aléatoire, $r \in [0,1]$;

– si $r < pm$, on réalise l'opération de mutation pour le gène respective.

Pour une population de 60 individus, un nombre d'itérations égal à 50, et les probabilités de croisement et mutation égales respectivement à 0.85, et 0.2, on obtient les résultats numériques illustrés dans la figure 5.9. Par la suite on appelle masque une image binaire avec la signification suivante : 1 (blanche) pour les pixels retenus et 0 (noir) pour les autres. Les énergies sont égales à 3.79584e+006 pour la reconstruction obtenue à partir du masque initial, et 4.20417e+006 pour la reconstruction obtenue à partir du masque final.

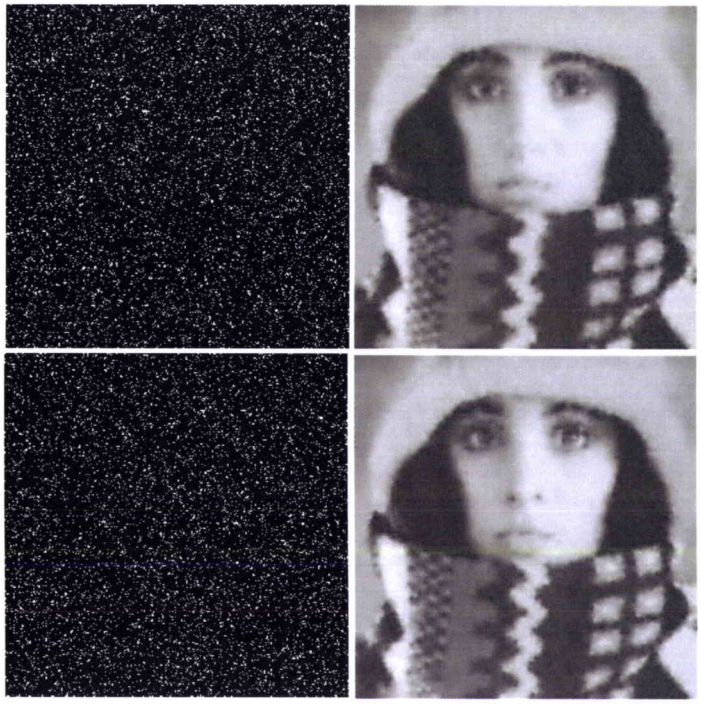


FIG. 5.9 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction

Pour une population de 200 individus, un nombre d'itérations égal à 150, et les probabilités de croisement et mutation égales à 0.9, 0.2 respectivement, on obtient les résultats numériques illustrés dans la figure 5.10. Les énergies sont égales à 3.83645e+006 pour la reconstruction obtenue à partir du masque initial, et 4.01931e+006 pour la reconstruction obtenue à partir du masque final.

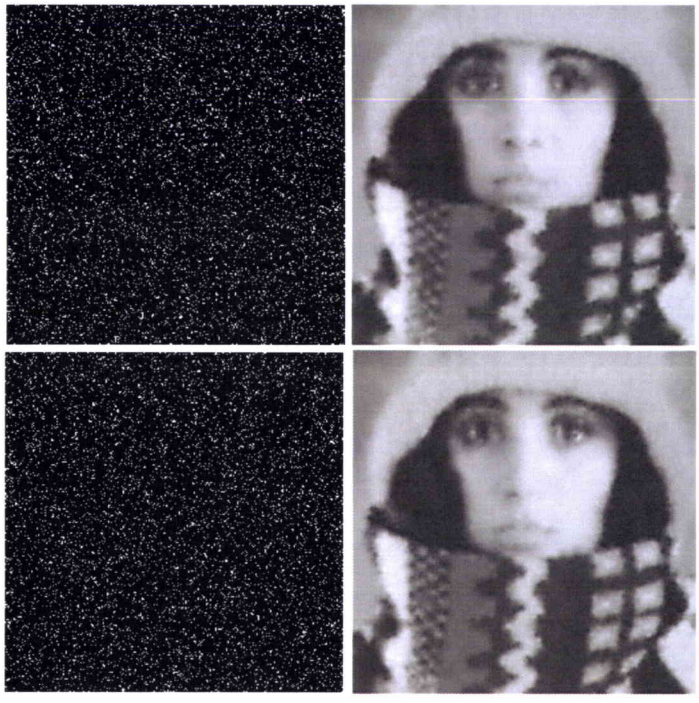


FIG. 5.10 – Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction

Remarque 5.2.1 On note que sans avoir aucune information sur la localisation de l'optimum, pour la compression d'image, les algorithmes génétiques ne sont pas efficients. La raison est que l'espace de recherche est trop grand.

5.2.3 Strategies mixtes pour la localisation optimale des pixels d'appui pour l'interpolation d'image : utilisation de la Γ-limite

Dans les calculs faits jusqu'à présent on n'a pas pris on compte les résultats obtenus en [8], qui affirment que la distribution optimale des pixels doit être proportionnelle à la valeur absolue du Laplacien de l'image. Ceci signifie qu'il faut prendre plus de points là où le module du Laplacien est fort, mais aussi ailleurs. En effet, si on prend $K = \{(x, y)| \, |\Delta f| > \varepsilon\}$ avec ε choisi tel que $|K| = \frac{1}{10}|D|$, alors on obtient :

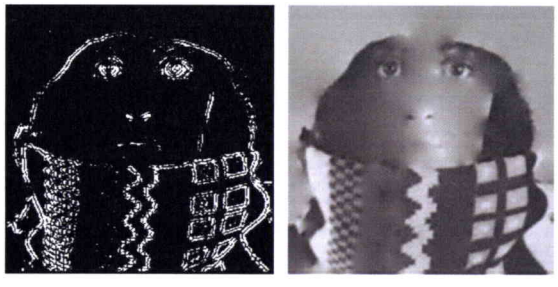


FIG. 5.11 – Gauche : Masque Laplacien, Droit : Reconstruction

L'énergie correspondante à la reconstruction illustrée dans la figure ci-dessus, $E(K) = 7.53558e + 006$.

Dans ce cadre on propose plusieurs stratégies. L'une est d'appliquer l'algorithme génétique présenté ci-dessus, mais en partant avec une population initiale générée de la façon suivante. On va paver l'image avec de petits carrés. Soit NrC le nombre de carrés obtenus de cette manière. Pour chaque carré noté C_i, $i = 1, NrC$, on calcule $p_i = \frac{\int_{C_i} |\Delta f|}{\int_D |\Delta f|}$. Cette proportion nous fournit le nombre de pixels qu'il faut retenir sur un carré. Dans ce cas, $K = \cup_{i=1}^{NrC} K_i$, où $|K_i| = p_i \frac{1}{10}|D|$. Ensuite, pour chaque K_i , $i = 1, NrC$, on applique l'algorithme génétique pour trouver la meilleure localisations de pixels qui le composent.

Pour une population de 100 individus, un nombre d'itérations égal à 100, et les probabilités de croisement et mutation égales à 0.9, 0.2 respectivement, on obtient les résultats numériques illustrés dans la figure 5.12. Les énergies correspondantes sont de 4.74334e+06 pour la reconstruction à partir du masque initial, et 5.81858e+06 à partir du masque final.

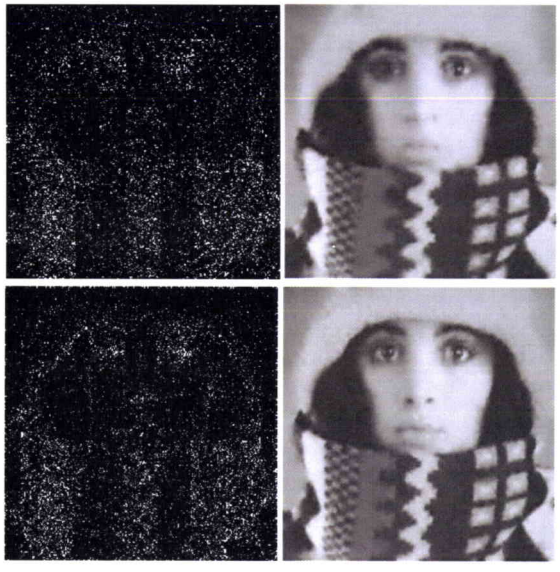


FIG. 5.12 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction

Pour une population de 150 individus, un nombre de iterations égal à 100, et les probabilités de croisement et mutation égales à 0.9, 0.2 respectivement, on obtient les résultats numériques illustrés ci-dessous (figure 5.13. Les énergies correspondantes sont de 4.70762e+06 pour la reconstruction à partir du masque initial, et 5.84601e+06 à partir du masque final.

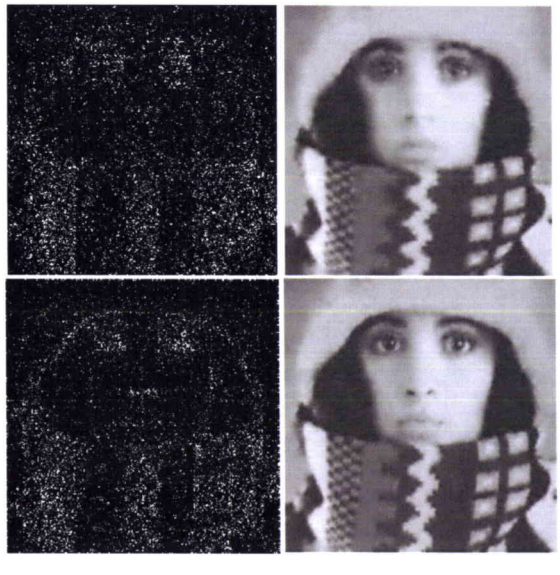


FIG. 5.13 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction

Pour la deuxième stratégie on va utiliser un algorithme basé sur l'asymptotique topologique. Cet algorithme peut être structuré de la façon suivante :

- réaliser un pavage de l'image ;
- calculer la proportion de pixels sur chaque carré, $p = \frac{\int_{\text{carré}} |\Delta f|}{\int_D |\Delta f|}$
- determiner, en fonction de la proportion p, le nombre de pixels à retenir sur chaque carré du pavage ;
- sur chaque carré, prendre ce nombre de pixels là où le Laplacien est le plus grand.

Pour différents types de pavage, les résultats sont les suivants (figure 5.14, 5.15)

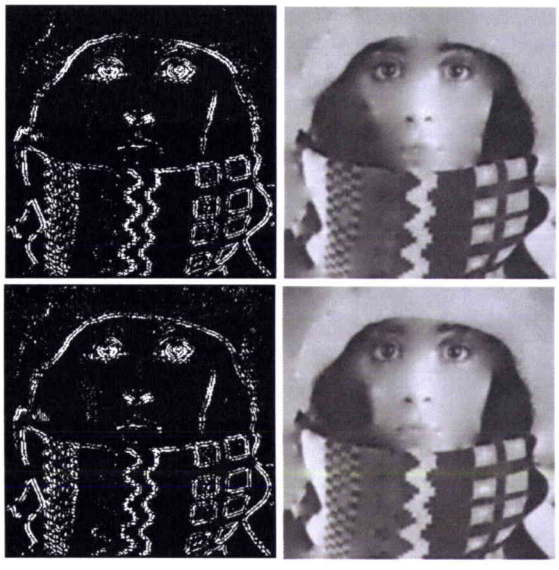


FIG. 5.14 – Haut gauche : Masque pavage 4×4, Haut droit : Reconstruction pavage 4×4, Bas gauche : Masque pavage 8×8, Bas droit : Reconstruction pavage 8×8

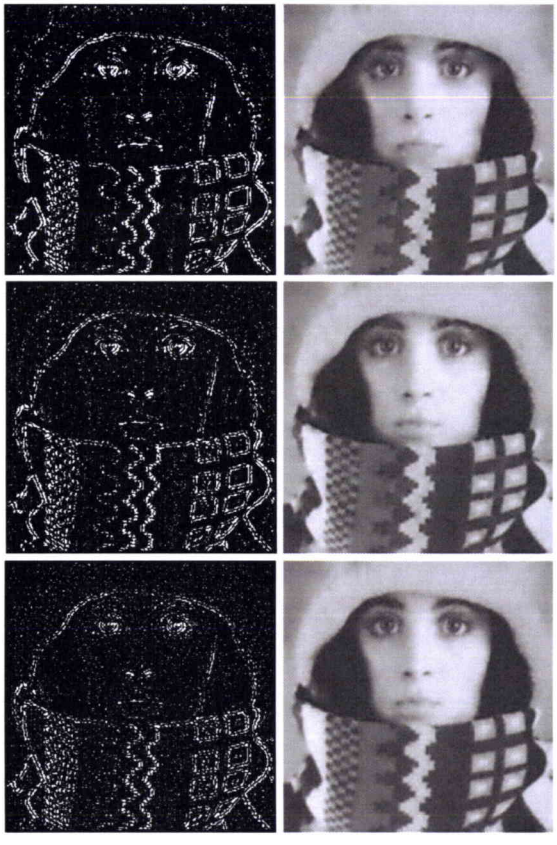


FIG. 5.15 – Haut gauche : Masque pavage 16×16, Haut droit : Reconstruction pavage 16×16, Milieu gauche : Masque pavage 32×32, milieu droit : Reconstruction pavage 32×32 Bas gauche : Masque pavage 64×64, Bas droit : Reconstruction pavage 64×64

Les énergies correspondantes aux différentes types de pavages sont présentées dans le tabel ci dessous :

Type pavage	Énergie
4×4	7.56624e+006
8×8	7.5274e+006
16×16	7.52722e+006
32×32	7.59627e+006
64×64	7.64165e+006

Quand la proportion $p = \frac{\int_{\text{carré}} |\Delta f|}{\int_D |\Delta f|}$ est très petite, le nombre de pixels retenus sur un carré peut être égal à zero. Une autre approche consiste à prendre un pixel même sur les carrés de ce type. Bien sûr, pour garder un nombre constant de pixels retenus, si on a pris un pixel sur un carré il faut éliminer un pixel sur des carrés où la proportion donne un nombre de pixels supérieur à 2. On présente ici la reconstruction pour une pavage de 64×64, respectivement 32×32.

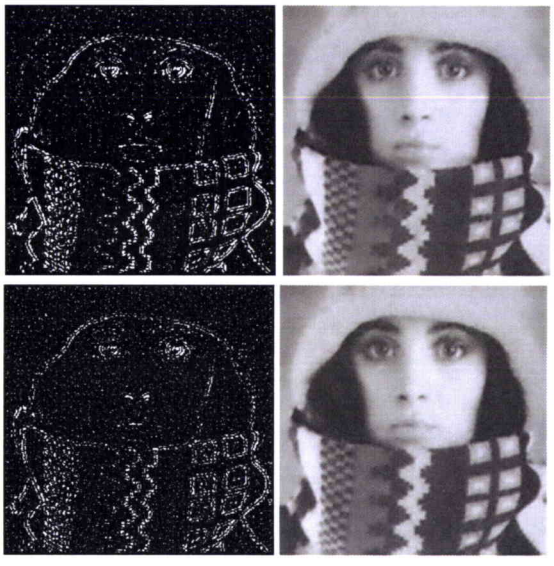


FIG. 5.16 – Haut gauche : Masque pavage 64×64, Haut droit : Reconstruction pavage 64×64, Bas gauche : Masque pavage 32×32, Bas droit : Reconstruction pavage 32×32

Les énergies dans ce cas sont les suivantes :

Type pavage	Énergie
32×32	7.59679e+006
64×64	7.37675e+006

Remarque 5.2.2 On note que, dans ce cas, si le nombre des carrés dans le pavage croît, le résultat ne s'améliore pas forcement.

5.2.4 Résultats numériques- cas non-linéaire

Pour le cas non-linéaire on distingue trois situations :

Cas $1 < p < 2$

Si pour la reconstruction on utilise le p-Laplacien (le cas non linéaire) alors pour une population de 100 individus, en 100 iteration, avec la probabilité de croisement et de mutation égale à 0.9, respectivement 0.2 on obtient la reconstruction suivante (figure 5.17) :

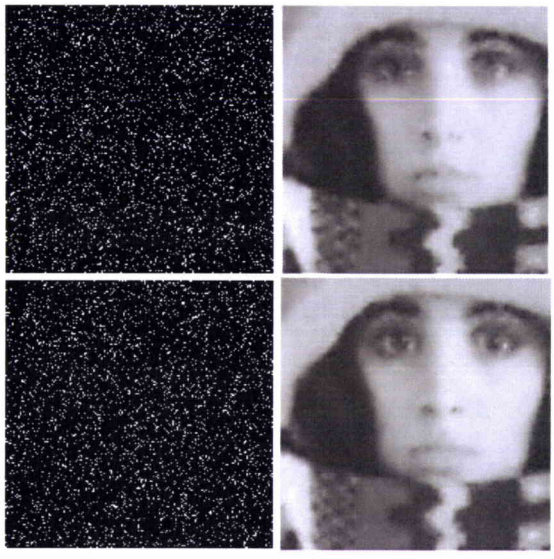


FIG. 5.17 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction

Les énergies obtenues sont égales à 73239.5 pour la reconstruction à partir du masque initial et à 78149.5, pour la reconstruction à partir du masque final. La valeur du p est de 1.6.

Pour faire une comparaison avec la reconstruction d'image en utilisant le Laplacien pour l'interpolation, on a executé le programme correspondant avec les mêmes données que pour le p-Laplacien (100 individus, 100 iteration, pc=0.9,pm=0.2). On a obtenu les résultats suivantes (figure 5.18)

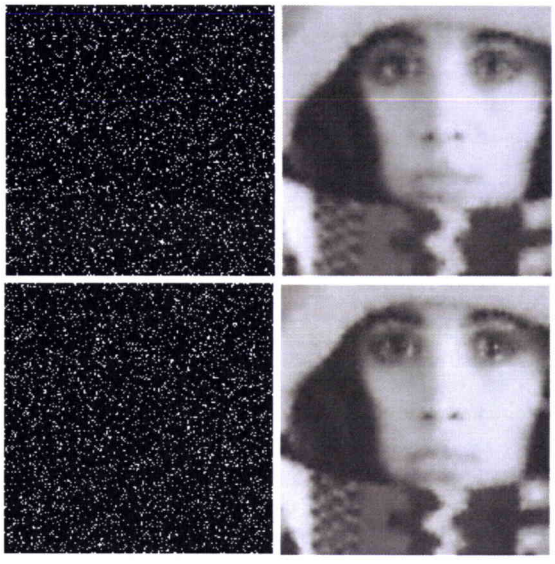


FIG. 5.18 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction

Dans ce cas les énergies sont égales à 1.59319e+06 pour la reconstruction à partir du masque initial et à 1.74634e+06 pour la reconstruction à partir du masque final.

Cas $2 < p$

Pour $p = 6$, $pc = 0.9$, $pm = 0.2$, une population de 100 individus et un nombre d'iterations égal à 100, on obtient la reconstruction présentée dans la figure 5.19.

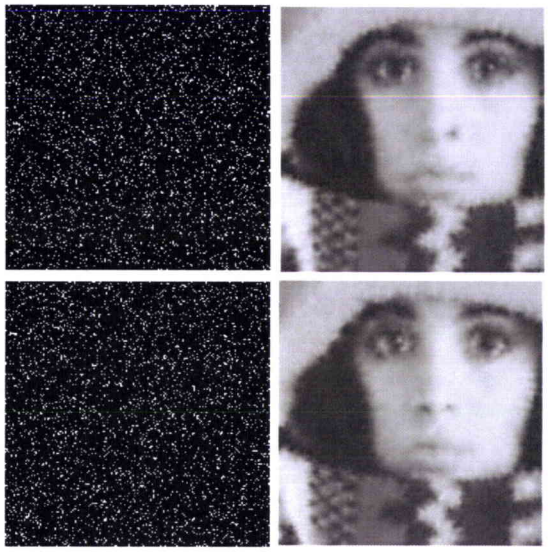


FIG. 5.19 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction

Cas $p = 1$
Dans le cas $p = 1$, l'EDP utilisée pour interpolation est la suivante :

$$\begin{cases} -div(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u) = 0, \text{ , sur } D \setminus K \\ u = f, \text{ sur } K \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial D. \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Pour une population de 50 individus, un nombre d'iterations égal à 150 , $pm = 0.2$ et $pc = 0.9$ on obtient la reconstruction présentée dans la figure 5.20

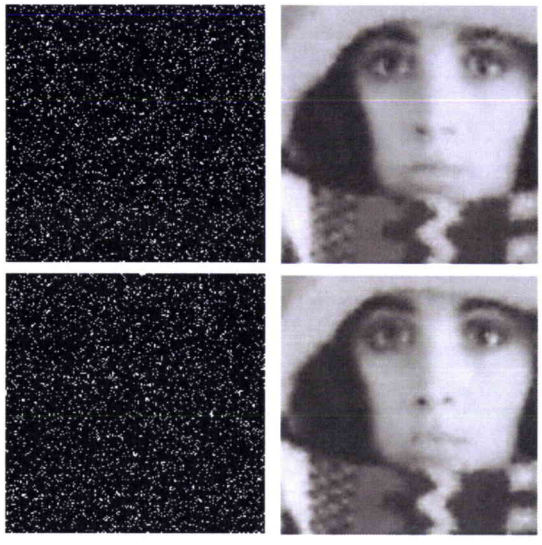


FIG. 5.20 – Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction

Remarque 5.2.3 On note que les images finales obtenues avec l'interpolation par Laplacien, respectivement l'interpolation par p-Laplacien , cas $1 \leq p \leq 2$, sont très difficile à distinguer visuellement . En faisant une comparaison entre les localisations de pixels qu'on retient dans le masque finale du Laplacien et les localisations de pixels qu'on retient dans le masque final du p-Laplacien, on note que ils different sur plus de 90%.

On n'a pas présente ici les différentes résultats théoriques existantes dans la literature (à voir [46],[27],[62], [23]) pour la modélisation des algorithmes génétiques, sur lesquelles on a fondé nos approches. Cependant, on présente une des théorèmes des convergences formulé pour le codage binaire (voir [46])

Théorème des schémas

Les premiers théorèmes de convergence stochastiques des algorithmes génétiques ont été établis par John Holland sur le codage par chaîne de bits. On suppose intuitivement que l'algorithme cherche à combiner les bons gènes présents dans la population. Pour étudier le devenir de quelques gènes en particulier, Holland [46] introduit la notion de schémas. Un schéma est construit en ajoutant à l'alphabet de codage utilisé un symbol $*$, prenant une valeur quelconque de l'alphabet. Si on considère un codage binaire, alors un schéma S de longueur $l(S)$ est une séquence particulière de gènes de longueur $l(S)$ représentée par une chaîne de caractères issus de l'alphabet $\{0, 1, *\}$, où $*$ représente 0 ou 1. Un chromosome A est une instance d'un certain schéma si la substitution des $*$ par 0 ou 1 peut fournir un chromosome identique. Par exemple le schéma $S_1 = (*01101)$ fournit les individus $\{(101101), (001101)\}$ et le schéma $S_2 = (*1 * 1100100)$ représente l'ensemble formé par quatre individus $\{(0101100100), (0111100100), (1101100100), (1111100100)\}$. On note qu'un schéma qui contient n symboles $*$ génère un ensemble de 2^n individus et inversement, un individu de longueur m correspond à 2^m schémas. Le théorème des schémas

est formulé à l'aide de deux caractéristiques importantes d'un schéma : l'ordre et la longueur (à voir [46]).

Définition 5.2.4 *Soit S un schéma. On appelle l'ordre de S et on note $O(S)$, le nombre de gènes fixés de S.*

Définition 5.2.5 *La longueur d'un schéma S , notée δS, est la distance séparant le premier et le dernier gène fixé.*

Pour les exemples présentés ci dessus, on a $O(S_1) = 5$, $O(S_2) = 8$, $\delta(S_1) = 4$, et $\delta(S_2) = 8$. L'ordre est utilisé pour calculer la probabilité de survivre d'un schéma pour la mutation, et la longueur est utilisé pour calculer la probabilité de survie d'un schéma pour le croisement. Une autre caractéristique d'un schéma est sa performance à la $j-$ème génération, (fitness), notée $eval(S, j)$ et définie par la performance moyenne de ses représentants. Ainsi, si A_{ij}, $i = 1, ..., p$ sont les représentants du schéma S à la $j-$ème génération, on a $eval(S, j) = \sum_{i=1}^{p} eval(A_{ij})/p$, où $eval(A_{ij})$ est la performance (fitness) d'un représentant. On note avec $F(j)$ la performance moyenne de la population entière à l'iteration j. Soit $m(S, j + 1)$ le nombre de représentants du schéma S dans la population à la génération $j + 1$. Le résultat de convergence est le suivant (à voir [46]) :

Théorème 5.2.6 *Le nombre $m(S, j + 1)$ vérifie l'inéquation*

$$m(S, j + 1) \geq m(S, j) \cdot eval(S, j)/F(j) \cdot [1 - pc \cdot \frac{\delta(S)}{l(S) - 1} - O(S) \cdot pm]. \tag{5.2.6}$$

Par conséquence, le théorème des schémas donne une évaluation de la probabilité de survie d'un schéma présent dans la population initiale au long des opérations génétiques. En fait, le nombre de représentants d'un schéma dans la population suit une croissance exponentielle au cours des générations, et les schémas favorisés sont ceux qui ont une fitness supérieure à la moyenne des fitness et un ordre, ainsi qu'une longueur fondamentale, faibles.

5.3 Minimisation de la compliance

Un des problèmes classiques d'optimisation de forme est la minimisation de la compliance. Soient D un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(D)$ une fonction donnée. Le problème de la minimisation de la compliance s'écrit

$$\min_{\Omega \subseteq D} \int_{\Omega} f u_{\Omega}, \tag{5.3.1}$$

où u_{Ω} est la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Le problème qu'on considère dans cette section est lié aussi aux problèmes de localisation optimale dès que on suppose que Ω^c doit être une réunion de boules. Plus précisément, étant donné un nombre $n \in \mathbb{N}$, et $r_n > 0$ on doit chercher la localisation optimale de n boules $(B(x_i, r_n))_{i=1,\dots,n)}$ qui minimise la compliance sur $\Omega \setminus \cup_{i=1}^n \overline{B(x_i, r_i)}$. Le problème est pertinent si $r_n \leq cn^{\frac{-1}{d}}$, dans le cas contraire le volume des boules étant suffisant pour couvrir Ω, de façon à obtenir la compliance nulle.

Le comportement asymptotique, quand le rayon des boules tends vers zéro, a été étudié en [22].

On rappelle le context et les résultats obtenus. Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathcal{A}(\alpha, n)(\Omega) = \{\Sigma \subset \overline{\Omega} \mid \Sigma = \overline{\Omega} \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B(x_i, r)} \text{ for } x_i \in \Omega_r, r = \alpha n^{-\frac{1}{d}}\},$$

où Ω_r est la r-voisinage de Ω.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$. Pour tout ensemble compact $\Sigma \subset \overline{\Omega}$ de mesure positive, on définit la fonction u_Ω comme la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \setminus \Sigma \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma \bigcup \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Autrement dit $u_\Omega \in H_0^1(\Omega \setminus \Sigma)$ et pour toute $\phi \in H_0^1(\Omega \setminus \Sigma)$ u_Ω vérifie

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \int_\Omega f \phi dx. \tag{5.3.3}$$

La compliance du domaine Ω est définie par

$$F(\Sigma, f, \Omega) = \int_\Omega f u_\Omega dx = \int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2 dx.$$

où $f \geq 0$. Notons que par le principe de maximum si $f \geq 0$ alors $u_\Omega \geq 0$.

Théorème 5.3.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ si Ω est un domaine borné, ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(\Omega)$ alors le problème*

$$\min\{F(\Sigma, f, \Omega) \mid \Sigma \in \mathcal{A}(\alpha, n)(\Omega)\} \tag{5.3.4}$$

a une solution.

Ce résultat est une consequence du fait que le problème d'optimum est de dimension finie, la stabilité par rapport au domaine étant immediate.

À chaque $\Sigma \in \mathcal{A}(\alpha, n)(\Omega)$ on associe une mesure de probabilité définie sur $\overline{\Omega}$ donnée par $\mu_\Sigma = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_{p(x_i)}$, où $p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\Omega}$ est la projection d'espace entier sur $\overline{\Omega}$. Dans ce contexte on introduit la fonctionnelle $F_n : \mathcal{P}(\overline{\Omega}) \longrightarrow [0, \infty]$ définie par

$$F_n(\mu) = \begin{cases} n^{\frac{2}{d}} F(\Sigma, f, \Omega) \text{ si } \mu = \mu_\Sigma, \Sigma \in \mathcal{A}(\alpha, n)(\Omega); \\ \infty, \text{ sinon.} \end{cases} \tag{5.3.5}$$

Pour calculer la Γ-limite de la fonctionnelle F_n on doit d'abord introduire la quantité :

$$\theta(\alpha) := \inf\{\liminf_n n^{2/d} F(\Sigma_n, 1, I^d) | \Sigma_n \in \mathcal{A}(\alpha, n)(I^d)\}, \tag{5.3.6}$$

où $I^d = (0,1)^d$ est le cube unité de $\mathbb{R}^d$. On note avec θ^- et θ^+ l'enveloppe semi continue supérieure, respectivement l'enveloppe semi continue inférieur :

$$\theta^-(\alpha) := \sup\{\theta(\beta) | \beta > \alpha\}$$

$$\theta^+(\alpha) := \inf\{\theta(\beta) | \beta < \alpha\}.$$

Alors (voir [22])

$$\theta^-(\alpha) = \inf\{\liminf_n n^{\frac{2}{d}} F(\Sigma_n, 1, I^d) | \Sigma_n \in \mathcal{A}(\alpha_n, n)(I^d), \alpha_n \longrightarrow \alpha\}.$$

Soit

$$F(\mu) = \int_\Omega \frac{f^2}{\mu_a^{\frac{2}{d}}} \theta^-(\alpha \mu_a^{\frac{1}{d}}) dx. \tag{5.3.7}$$

où μ_a représente la densité de la partie absolue continue de μ par rapport à la mesure de Lebesque.

Le résultat principal de [22] est le Théorème suivant.

Théorème 5.3.2 *Soit Ω un domaine ouvert et borné, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, f une fonction positive, $f \in L^2(\Omega)$ et $\alpha > 0$. La suite de fonctionnelles $(F_n)_n$ définies dans (5.3.5) Γ-converge vers F, par rapport à la topologie faible $*$ de $\mathcal{P}(\overline{\Omega})$.*

On note que le comportement de la fonction θ est très important pour la compréhension du problème de minimisation. Cette fonction n'est pas connue explicitement mais quelques propriétés sont données dans [22] et rappelées dans la première section de ce chapitre. En fait, la fonction θ donne la distribution optimale de n boules qui minimisent la compliance dans $I^d \setminus \cup_{i=1}^n B(x_i, r)$ sous l'action de la force $f = 1$.

Il a été conjecturé par G. Buttazzo, que pour α petit, la distribution optimale de disques est donnée par les sommets d'un pavage du par triangles équilatéraux (voir [19]).

5.3.1 Résultats numériques pour la minimisation de la compliance

Dans ce paragraph on va présenter les résultats numériques qu'on a obtenu pour l'approximation de la la fonction θ.

Les calculs numériques sont faits en dimension deux, avec des conditions de périodicité sur la frontière de $I = [0,1] \times [0,1]$, c'est-à-dire $u(x,y) = u(x+1,y) = u(x,y+1)$. Les résultats sont obtenus avec la méthode de recuit simulé, combinée avec la dérivée topologique.

Avant de présenter les résultats on va décrire la méthode du recuit simulé, l'adaptabilité au notre problème, on va introduire la notion de dérivée topologique et ensuite on va expliquer la modalité de son utilisation dans ce problème.

Recuit Simulé

Le recuit simulé est une méthode pseudo-stochastique dont origines sont basés sur les principes de la thermodynamique appliqués au refroidissement d'un corps en fusion, passant par différents paliers de température et tendant vers une minimisation de son énergie. En permettant de temps en temps un accroissement de la fonction objectif, cette méthode evolutive permet d'éviter des minima locaux. Le principe de fonctionnement est le suivant [40]. On part avec une configuration initiale S_0, choisie aléatoirement et une temperature initiale T_0. A partir de cette configuration, une nouvelle configuration S est générée. On calcule les valeurs correspondantes de la fonction objectif à minimiser, $f(S_0)$ respectivement $f(S)$. Si $f(S) < f(S_0)$, on accepte S comme nouvelle solution. Dans le cas contraire, la configuration S peut être acceptée ou non selon une règle statistique. Dès qu'on accepte une solution, la temperature baisse selon un schéma de décroissance. Ce sont ces règles statistiques qui permettent d'échapper aux minima locaux, c'est-à-dire :

- si la temperature est élevée, cette probabilité est grande. Cela signifie que nombreuses solutions mauvaises sont conservées, afin de mieux explorer l'espace de recherche ;
- si la temperature est basse, cette probabilité tend vers zéro, donc les solutions mauvaises sont refusées.

On peut se rendre compte que pour un bon fonctionnement du recuit simulé, plusieurs paramètres comme temperature initiale, schéma de décroissance de la temperature, la longueur du palier de température, doivent être définis. Le choix de la température initiale doit être tel qu'au debut de l'algorithme la plupart des solutions mauvaises sont acceptées, mais vers la fin d'algorithme seulement les solutions qui améliorent le critère sont acceptées. Suivant [6], pour obtenir des bons résultats la température initiale et la valeur initiale de la fonction objectif doivent être de même ordre. La suggestion est de prendre $T_0 = \frac{f(S_0)}{A}$, avec A une constante à fixer. Il existe deux schémas classiques de décroissance de la température :

- la décroissance géométrique $T_{i+1} = C \cdot T_i$, $0 < C < 1$. Les valeurs classiques de C se situent dans l'intervalle $[0.75, 0.95]$.
- $T_{i+1} = \frac{T_i}{(1+(T_i ln(1+C)/3\sigma}))$, où σ désigne l'écart-type de l'ensemble des valeurs calculées de la fonction objectif à la temperature courante et C, le paramètre qui contrôle la vitesse du recuit, plus C est faible, plus le recuit est lent.

La longueur du palier représente le nombre de solutions testées avant d'appliquer le schéma de décroissance de la température, et il est supposé constant pour l'ensemble des niveaux de température. Comme critère d'arrêt, souvent on prend $T < T_{\text{arrêt}}$. Une fois ces paramètres initialisés, l'algorithme peut être structuré de la façon suivante.

1. Donner une configuration initiale S_0, $S_{opt} = S_0$, $f_{opt} = f(S_0)$;

2. Initialiser $T = T_0$;

3. Tant que $T > T_{arret}$ faire
   {
   Tant que $NrRepetition < LongueurPalier$

{
Choisir S dans le voisinage de S_0
Calculer $\Delta f = f(S) - f(S_0)$
Si $\Delta f < 0$ alors
{
$S_0 = S$;
Si $f(S_0) < f_{opt}$ alors $S_{opt} = S_0$;
}
$f_{opt} = f(S_0)$
Sinon
Tirer $p \in [0, 1]$
Si $p < \exp(-\frac{\Delta f}{T})$ $S_0 = S$
}
T =schéma de décroissance;
}

4. Returner S_{opt}.

Dérivée topologique

La dérivée topologique a été développée à partir de 1999 par Sokolowski et Zochowski, [65], et Garreau, Guillaume, Masmoudi, [36]. Elle permet de mesurer la sensibilité d'une fonctionnelle coût F, quand une petite cavité est introduite dans le domaine d'un problème aux limites, Ω. Plus précisément, l'idée est de perturber le domaine Ω en soustrayant une boule de rayon ε, notée B_ε, centrée en $\widehat{x} \in \Omega$. On define le domaine perturbé Ω_ε par $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$.

Définition 5.3.3 *La dérivée topologique, notée $D_T J$ est définie par*

$$F(\Omega_\varepsilon) = F(\Omega) + f(\varepsilon) D_T F + R(f(\varepsilon))$$

où $f(\varepsilon)$ est une fonction négative dépendante du problème, $f(\varepsilon) \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{R(f(\varepsilon))}{f(\varepsilon)} = 0$.

Dans [32] la dérivée topologique est calculée pour le problème de Poisson avec différentes conditions au bord. Pour conditions de Dirichlet, la dérivée topologique de la compliance a la formule $D_T F(x) = u^2(x)$ et $f(\varepsilon) = \frac{2\pi}{log(\varepsilon)}$) Comme $\varepsilon \longrightarrow f(\varepsilon)$ est une fonction negative, en introduisant une boule de rayon suffisamment petit dans le point $\widehat{x}$ où $D_T(\widehat{x})$ est la plus grande (u est plus grand) la compliance va décroître. Par consequent, on peut interpréter D_T comme une fonction indicatrice qui définit les meilleurs localisations où on peut perturber le domaine dans le but de réduire la valeur de la fonction coût.

Pour résoudre numériquement le problème de la minimisation de la compliance on peut procéder de deux façon. Soit n le nombre de boules pour lesquelles il faut trouver la localisations. La première est d'utiliser la méthode de recuit simulé combiné avec la dérivée topologique.

Dans ce cas, les étapes d'algorithme sont les suivantes :

1. obtenir une configuration assez bonne avec la méthode de recuit simulé,
2. pour $i = 1, I$ (I=le nombre d'iterations), executer
   - tirer aléatoirement une boule,
   - calculer la dérivée topologique en considérant comme domaine non perturbé, le domaine qui contient deja les autres $n - 1$ boules
   - introduire la n-ième boule , là ou la dérivée topologique est la plus négative ;

La deuxième façon est de considère seulement l'étape deux de l'algorithme ci dessus précisé. Dans les deux cas les résultats obtenus sont similaire (Figure 5.21, 5.22) :

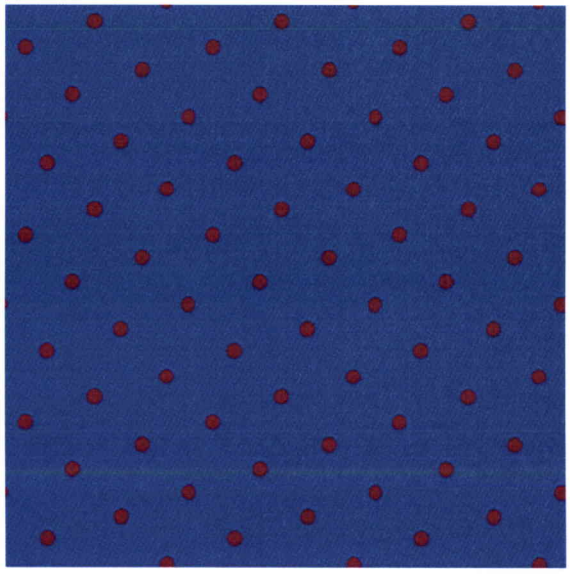


FIG. 5.21 –

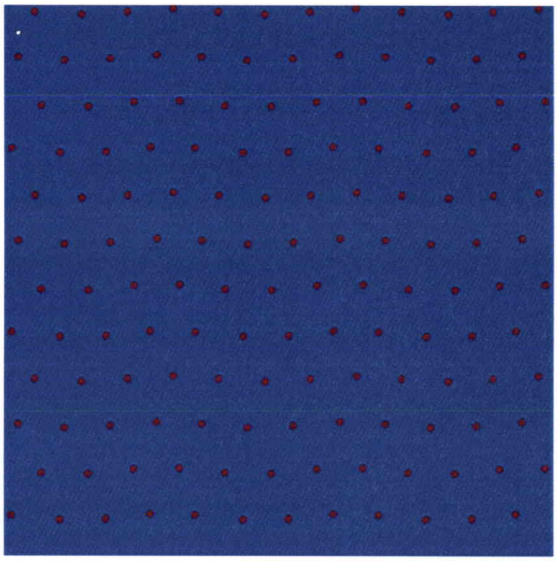


FIG. 5.22 –

5.4 Maximisation de la valeur propre du Laplacien

Dans cette section on considère le problème d'optimisation de la première valeur propre du Laplacien dans un domaine simplement connexe qui contient N boules identiques, chacune de rayon $\varepsilon << 1$. On considère des conditions de type Neumann sur la frontière du domaine et des conditions de type Dirichlet sur le bord du N boules.

Soit Ω, un domaine borné de $\mathbb{R}^2$. On considère le problème :

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, \ \text{si } x \in \Omega \setminus K_N, \ \int_{\Omega \setminus K_N} u^2 dx = 1; & \\ \partial_n u = 0, & \text{sur } \partial\Omega; \\ u = 0, & \text{sur } \partial K_N := \cup_{i=1}^N \partial B(x_i, \varepsilon). \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Ici, Ω est le domaine non perturbé, $K_N := \cup_{i=1}^N B(x_i, \varepsilon)$ est la réunion de N boules identiques centrées en x_i, $i = 1, ..., N$, de rayon ε. On suppose que les boules ne se superposent pas. Soit $\lambda_0(\varepsilon, K)$ la première valeur propre du (5.4.1). Si $\varepsilon \longrightarrow 0$ il résulte $\lambda_0(\varepsilon, K) \longrightarrow 0$. Le but de nos travail et de trouver la localisation de N boules qui maximise cette valeur propre. Ce problème a été traité dans [49], où un développement asymptotique est donné pour $\lambda_0(\varepsilon, K)$, en utilisant la fonction de Green pour le Laplacien avec condition de Neumann sur la frontière. Des configurations de types anneau sont données pour optimiser $\lambda_0(\varepsilon, K)$. Par la suite on rappelle ces résultats.

Pour N boules identiques le développement asymptotique pour $\lambda_0(\varepsilon, K)$ a la forme :

$$\lambda_0(\varepsilon, K) \sim \frac{2\pi N \nu^2}{|\Omega|} - \frac{4\pi^2 \nu^2}{|\Omega|} p(x_1, ..., x_n) + O(\nu^3), \ \nu = -\frac{1}{log(\varepsilon)}, \tag{5.4.2}$$

où la fonction $p(x_1, ..., x_N)$ est définie par

$$p(x_1, ..., x_N) = \sum_{j=1}^{N} \{R_m(x_j; x_j) + \sum_{k=1; k\neq j} NG_m(x_j; x_k)\}. \tag{5.4.3}$$

Dans (5.4.3), $G_m(x; x_0)$ est la fonction de Green pour conditions de Neumann et $R_m(x; x_0)$ est sa partie régulière qui sont données par :

$$\Delta G_m = \frac{1}{|\Omega|} - \delta(x - x_0), \ x \in \Omega; \ \partial_n G_m = 0, \ x \in \partial\Omega, \tag{5.4.4}$$

$$G_m(x; x_0) = -\frac{1}{2\pi} \log|x - x_0| + R_m(x; x_0); \ \int_\Omega G_m(x; x_0)dx = 0. \tag{5.4.5}$$

Dans ce contexte, on note que maximiser $\lambda_0(\varepsilon, K)$ revient à minimiser la fonction $p(x_1, ..., x_N)$.

Proposition 5.4.1 *On considère m anneaux de rayons $r_1, ..., r_m$, avec $r_j < r_{j+1}$ dans le disque unité. On suppose que sur un anneau de rayon r_k on a J_k boules. Sur le k-ième anneau, pour $k = 1, ..., m$ les centers des boules sont supposés à vérifier*

$$\xi_j^{(k)} = r_k e^{2\pi ij/J_k} e^{i\phi_k}, \ j = 1, ..., J_k. \tag{5.4.6}$$

Ici ϕ_k est la phase du angle avec $\phi_1 = 0$. Pour cette configuration, la fonction p dans (5.4.2) est donnée par $p = p_*/(2\pi)$, où

$$p_* = -\sum_{k=1}^{m} J_k \log(J_k r^{J_k - 1} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{k'=1}^{m} \log|(r_k r_{k'})^{\beta_{k,k'}} - e^{i\beta_{k,k'}\Delta_{k,k'}}| + \sum_{k=1}^{m} J_k^2 r_k^2$$

$$-2\sum_{k=1}^{m}\sum_{k'=1,k<k'}^{m} g_{k,k'} \log|r_k^{\beta_{k,k'}} - r_{k'}^{\beta_{k,k'}} e^{i\beta_{k,k'}\Delta_{k,k'}}| - \frac{3}{4}(\sum_{k=1}^{m} J^k)^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{k'=1}^{m} J_k J_{k'}(r_k^2 + r_{k'}^2).$$

Ici $\Delta_{k,k'}$, $\beta_{k,k'}$, et $g_{k,k'}$ sont définies par $\Delta_{k,k'} = \phi_{k'} - \phi_k$, $\beta_{k,k'} = \frac{J_k J_{k'}}{g_{k,k'}}$ et $g_{k,k'} = gcd(J_k, J_{k'})$. Si on ajoute une boule au centre du disque unité on a pour p l'égalité suivante

$$p = \frac{1}{2\pi}(p_* - 2\sum_{k=1}^{m} J_k \log r_k + \sum_{k=1}^{m} J_k r_k^2 - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{m} J_k - \frac{3}{4}).$$

Par la minimisation de la fonction $p(x_1, ..., x_n)$, dans [49], les configurations suivantes sont obtenues, pour $N = 6$ jusqu'à $N = 25$.

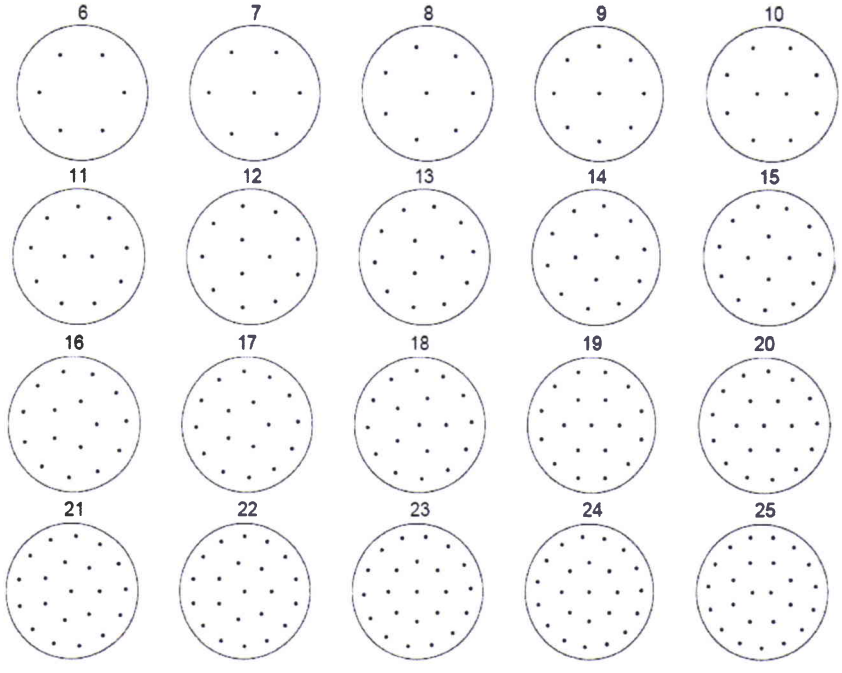


FIG. 5.23 – Les configurations optimales pour $N = 6$, $N = 25$, dans la classe de deux et trois anneaux

5.4.1 Résultats numériques pour la maximisation de la première valeur propre du Laplacien

Nous nous proposons d'appliquer pour le problème de maximisation de $\lambda_0(\varepsilon, K)$ l'approche qu'on a appliqué dans le contexte de la minimisation de la compliance. On utilise la méthode du recuit simulé présentée dans la première section de ce chapitre. La solution initiale est choisie aléatoirement dans le disque unité, mais on demande que les centres des boules se situent à une distance supérieure où égale à ε par rapport à la frontière du disque unité. On obtient les configurations suivantes pour $N = 6$ jusqu'à $N = 17$.

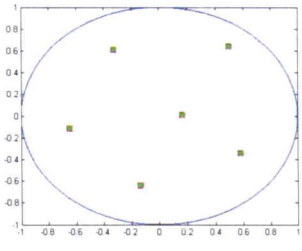


FIG. 5.24 – 6 boules

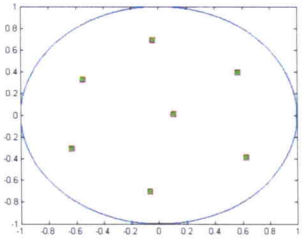


FIG. 5.25 – 7 boules

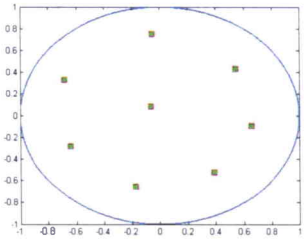


FIG. 5.26 – 8 boules

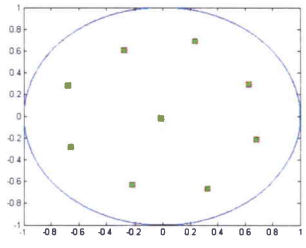


FIG. 5.27 – 9 boules

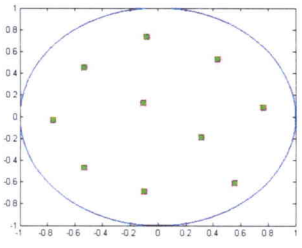


FIG. 5.28 – 10 boules

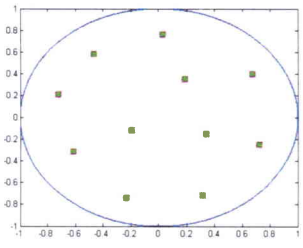


FIG. 5.29 – 11 boules

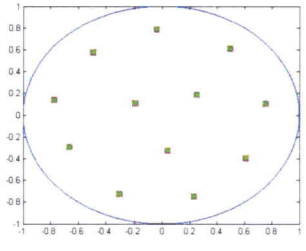


FIG. 5.30 – 12 boules

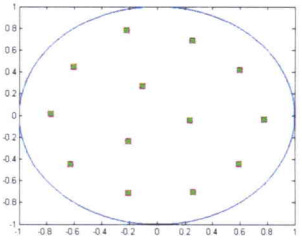


FIG. 5.31 – 13 boules

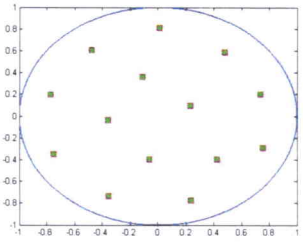


FIG. 5.32 – 14 boules

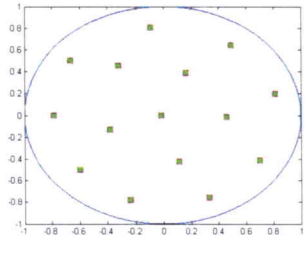


FIG. 5.33 – 15 boules

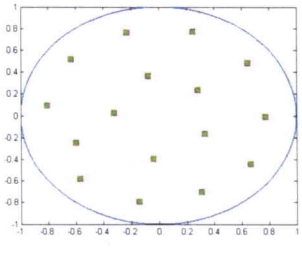


FIG. 5.34 – 16 boules

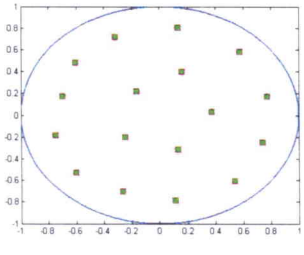


FIG. 5.35 – 17 boules

Les valeurs propres correspondantes aux configurations présentées ci dessus sont illustrées dans le tableau suivant :

No. boules	Valeur Propre
6 boules	4.35
7 boules	5.63
8 boules	6.51
9 boules	7.04
10 boules	8.28
11 boules	9.35
12 boules	10.52
13 boules	10.83
14 boules	12.61
15 boules	13.74
16 boules	14.84
17 boules	14.89

On essaie maintenant d'appliquer la dérivée topologique pour améliorer la configuration deja obtenue. Suivant [54], pour la configuration $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ on a

$$\lambda_0(\varepsilon) \sim \lambda_0 + (-\frac{1}{\log \varepsilon})2\pi[u_0(x_0)]^2 + ... \text{ quand } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{5.4.7}$$

Dans (5.4.7) λ_0 est la valeur propre correspondante au problème non perturbé. On procède de la façon suivante. Pour chaque boule, on considère comme domaine non perturbé, le domaine qui contient deja les autres $N-1$ boules. Les localisations de ces $N-1$ boules ont été déterminées avec la méthode de recuit simulé. En utilisant la dérivée topologique on veut trouver la localisation de la N-ième boule qui maximise $\lambda_0(\varepsilon)$. En tenant compte de (5.4.7), pour maximiser $\lambda_0(\varepsilon)$ il faut mettre une boule, là où le vecteur propre associé à λ_0 est le plus grand.

On note que, on ne peut pas appliquer la dérivée topologique, car, dans notre cas, $[u_0]^2$ a le maximum sur la frontière du disque unité. À voir les figures ci dessous

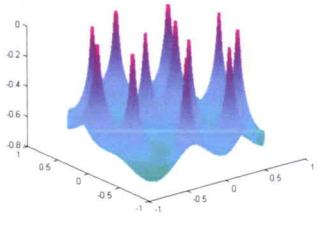


FIG. 5.36 – Vecteur propre - 12 boules

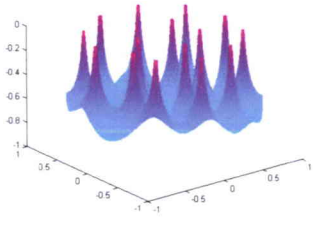


FIG. 5.37 – Vecteur propre - 16 boules

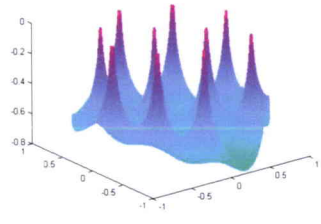


FIG. 5.38 – Vecteur propre - 10 boules

Ceci signifie que le deuxième terme dans le développement asymptotique a une influence importante dans le calcul de $\lambda_0(\varepsilon)$.

Table des figures

2.1 Exemple pour la convergence d_{char} . . . 8
2.2 Distance de Hausdorff . . . 10
2.3 . . . 12
2.4 Connexité pour H^c . . . 12
2.5 Ω_n converge vers Ω au sens de Hausdorff complémentaire . . . 14
2.6 . . . 18
2.7 La fonction u est son réarrangement u^* . . . 27

3.1 $\lambda_1^{cd} = 45.84$ . . . 44
3.2 $\lambda_1^{cd} = 53.54$ . . . 44
3.3 λ_1^{cd} . . . 45
3.4 λ_2^{cd} . . . 45
3.5 λ_3^{cd} . . . 45
3.6 λ_3^{cd} . . . 46
3.7 λ_1^{cd} . . . 46
3.8 λ_1^{cd} . . . 46
3.9 λ_1^{cd} . . . 46

4.1 $t = 4$ . . . 57
4.2 $t = 10$ . . . 57
4.3 $t = 8\sqrt{2}$ . . . 57
4.4 $t = 8\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}}$ . . . 57
4.5 $t = 16\sqrt{2}$ . . . 57
4.6 Décollement avec la méthode de lignes de niveaux . . . 72
4.7 $P\lambda_1^2$ . . . 87
4.8 $P\lambda_2^2$ . . . 87
4.9 $P\lambda_3^2$ . . . 87
4.10 $P\lambda_4^2$ . . . 87

5.1 Construction du H_ε^1 . . . 96
5.2 Construction du H_ε^2 . . . 97
5.3 Selection par la méthode de la roue . . . 101
5.4 Parent 1 . . . 102
5.5 Parent 2 . . . 102
5.6 Enfant 1 . . . 103
5.7 Enfant 2 . . . 103

5.8 Mutation . . . 103
5.9 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction . . . 104
5.10 Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction . . . 105
5.11 Gauche : Masque Laplacien, Droit : Reconstruction . . . 106
5.12 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction . . . 107
5.13 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction , Bas gauche : Masque final, Bas droit : Reconstruction . . . 107
5.14 Haut gauche : Masque pavage 4×4, Haut droit : Reconstruction pavage 4×4, Bas gauche : Masque pavage 8×8, Bas droit : Reconstruction pavage 8×8 . . . 108
5.15 Haut gauche : Masque pavage 16×16, Haut droit : Reconstruction pavage 16×16, Milieu gauche : Masque pavage 32×32, milieu droit : Reconstruction pavage 32×32 Bas gauche : Masque pavage 64×64, Bas droit : Reconstruction pavage 64×64 . . . 109
5.16 Haut gauche : Masque pavage 64×64, Haut droit : Reconstruction pavage 64×64, Bas gauche : Masque pavage 32×32, Bas droit : Reconstruction pavage 32×32 . . . 110
5.17 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction . . . 111
5.18 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction . . . 112
5.19 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction . . . 113
5.20 Haut gauche : Masque initial, Haut droit : Reconstruction, Bas gauche : Masque final, Bas droite : Reconstruction . . . 114
5.21 . . . 120
5.22 . . . 121
5.23 Les configurations optimales pour $N = 6$, $N = 25$, dans la classe de deux et trois anneaux . . . 123
5.24 6 boules . . . 123
5.25 7 boules . . . 123
5.26 8 boules . . . 123
5.27 9 boules . . . 124
5.28 10 boules . . . 124
5.29 11 boules . . . 124
5.30 12 boules . . . 124
5.31 13 boules . . . 124
5.32 14 boules . . . 124
5.33 15 boules . . . 124
5.34 16 boules . . . 124
5.35 17 boules . . . 124

5.36 Vecteur propre - 12 boules 125
5.37 Vecteur propre - 16 boules 125
5.38 Vecteur propre - 10 boules 125

Bibliographie

[1] Alessandrini, G. ; Diaz Valenzuela, A. : *Unique determination of multiple cracks by two measurements.* SIAM J. Control Optim. 34 (1996), no. 3, 913–921.

[2] Allaire, G. :*Shape optimisation by homogeneization method* Springer Verlag (2001).

[3] Allaire, G. ; Jouve, F. ; Toader A.M. : *A level-set method for shape optimisation*, C.R.Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no.12,1125-1130.

[4] Andrews,K.T. ; Chapman, L. ; Fernandéz J.R. ; Fisackerly, M. ; Schillor, M. ; Vanerien, L. ; VanHouten, T. : *A membrane in adhesive contact*, SIAM J. Appl. Math. **64** (2003), no. 1, 152-169.

[5] Andrews, K. T. ; Schillor , M. : *Dynamic adhesive contact of a membrane* Adv. math. Sci. Appl., **13** (2003), 343-356.

[6] Athier, G. ;Floquet, P. ; Pibouleau, L. ; Domenech S. :*Synthesis of optimum heat exhanger networks by simulated annealing*, AIChE J. 43(11) (1997) 3007-3020.

[7] Belhachmi, Z. ;Bucur, D. :*Stability and uniqueness for crack identification problem* SIAM J. Control Optim. 46 (2007), no. 1, 253–273.

[8] Belhachmi, Z. ; Bucur, D. ; Burgeth, B. ; Weickert, J. : *How to choose interpolation data in images*

[9] Belhachmi, Z. ; Bucur, D. ; Buttazzo, G. ; Sac-Epee, J.-M. *Shape optimization problems for eigenvalues of elliptic operators*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 2006, vol. 86, no. 3, pp. 171-184.

[10] Belhachmi, Z. ; Bucur, D., Sac-Epee, J.-M. : *Finite element approximation of the Neumann eigenvalue problem in domains with multiple cracks*, Preprint LMAM, 2004-05.

[11] Belyaev, A. ; Bruhn, A. ; Galic, I. ; Seidel, H.P. ; Weickert, J. ; Welk, M. : *Towards PDE-Based Image Compression*

[12] Boccardo, L. ; Murat, F. : *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations* Nonlinear Anal. **19** (1992), 581-597.

[13] Bourdin, B. : *Numerical implementation of the variational formulation of quasi-static brittle fracture.*

[14] Bourdin, B. ; Francfort, G.A. ; Marigo, J.-J. ; :*Numerical Experiments in Revisited Brittle Fracture*, J. Mech. Phys. Solids, 48 (2000), no 4,797-826.

[15] Bucur, D. ; Buttazzo, G. : *Variational Methods in Shape Optimization Problems.* Progress in Nonlinear Differential Equations **65**, Birkhäuser Verlag, Basel (2005).

[16] Bucur, D.; Buttazzo, G.; Lux, A. : *Quasistatic Evolution in Debonding Problems via Capacitary Methods*, à paraître en Arch. Ration. Mech. Anal. 2008.

[17] Bucur, D.; Trebeschi, P. : *Shape optimisation problem governed by nonlinear state.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **128 A** (1998), 945-963.

[18] Bucur, D.; Varchon, N. : *A duality approach for the boundary variation of Neumann problems.* SIAM J. Math. Anal. 34 (2002), no. 2, 460–477.

[19] Buttazzo, G. :*Optimal Dirichlet regions for mass transportation problems and for elliptic equations* Aspects of Transport in Geometry and Calculus of Variations, IPAM March 13 -April 14, 2008.

[20] Buttazzo, G.; Dal Maso, G. : *Shape Optimisation for Dirichlet Problems : Relaxed Formulation and Optimality Conditions*, Appl. Math. Optim. **23** (1991), 17-49 .

[21] Buttazzo, G.; Dal Maso, G. :*An existence result for a class of shape optimization problems.* Arch. Rational Mech. Anal. 122 (1993) no. 2, 183–195.

[22] Buttazzo, G.; Santambrogio, F.; Varchon, N. : *Asymptotic of an optimal compliance-location problem*, ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations, **12** (2006), pp.752-769.

[23] Cane,C. : *Algorithmes genetiques et Optimisation topologique*, These de doctorat Université de Paris VI, juillet 1996.

[24] Chan, T.F.; Tai, X.-C. : *A level set method and total variation regularisation for elliptic inverse problem with discontinuous coefficients*, UCLA, CAM-report (2002).

[25] Chan, T. F.; Zhou H. M. : *Total variation improved wavelet thresholding in image compression* Proc. Seventh International Conference on Image Processing, vol. II, Vancouver, Canada, Sept. 2000,pp. 391-394.

[26] Chopp, D.L. : *Computing minimal surfaces via Level set curvature flow*, Jour. of Comp. Phys., **106**, pp. 77-91, 1993.

[27] Davis, L. : *Handbook of genetic Algorithm*, Van Nostrand Reinhold, New York,1991.

[28] Dal Maso, G.; Mosco, U. : *Wiener's criterion and Γ-convergence*, Appl. Math. Optim., **15** (1987), 15-63.

[29] Dal Maso, G.; Murat, F. : *Asymtotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators*

[30] Delfour, M. C.; Zolésio, J.-P. : *Shapes and geometries. Analysis, differential calculus, and optimization.* Advances in Design and Control, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.

[31] Dunford, N.; Schwartz J.T. : *Linear Operators.* Part II : *Spectral Theory*, Interscience Publishers, New York, London, (1963).

[32] Feijoo, R.; Novotny, A.; Taroco, E. : *The topological derivative for the poisson's problem* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, vol. 13, no. 12 (2003), 1-20.

[33] Finzi Vita, S. : *Numerical shape optimisation for relaxed Dirichlet problems*, Math. Models and method in Applied Sciences, 3(1993),19-34.

[34] Freitas, P.; Henrot, A. :*On the first twisted Dirichlet eigenvalue.*, Commun. Anal. Geom. 12 (2004), 1083-1103.

[35] Friedman, A.; Vogelius, M. :*Determining cracks by boundary measurements.* Indiana Univ. Math. J.38 (1989), no.3, 527-556.

[36] Garreau, S.; Guillaume, Ph.; Masmoudi, M.; *The topological asymptotic for PDE systems : the elasticity case*, SIAM J. Control Optim. 39 (6) (2001) 1756-1778.

[37] De Giorgi, E. : *New problems on minimizing movements*, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations, *Res. Notes Appl. Math.* **29**, Masson, Paris (1993), 81-98.

[38] Greco, A.; Lucia, M. : *Laplacian eigenvalues for mean zero functions with constant Dirichlet data.*Forum Math. (to appear) 2008.

[39] Hecht F.;, Le Hyaric, A.; Ohtsuka, K.; Pironneau O.; *FreeFem++*, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Universite Pierre et Marie Curie , Paris.

[40] Henderson, D., Jacobson, S., Johnson, A. :*The theory and practice of simulated annealing*, Handbook of metaheuristics, 287-319, Internat. Ser. Oper. Res. Management Sci., 57, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2003

[41] Henrot, A. : *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. Frontiers in Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006

[42] Henrot, A.; Pierre, M. : *Variation et optimisation de formes*, Mathématiques et Applications, 2005

[43] Henrot, A., Sokolowski, J. *Qu'est-ce que l'optimisation de forme*

[44] Henrot, A., Sokolowski, J.*Mathematical challenges in shape optimization*, Control Cybernet. 34 (2005), no. 1, 37-57

[45] Hintermüler, M.; Ring, W. : *A second order shape optimisation approach for image segmentation*, University of Graz and Technical university of Graz (2002).

[46] Holland, J : *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, 1975.

[47] Kawohl, B. : *Rearrangements and convexity of level sets in PDE.* Lecture Notes in Mathematics, 1150. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[48] Kohler-Jobin M.Th. :*Une méthode de comparaison isopérimétrique de fonctionnelles de domaines de la physique mathématique. I. Une démonstration de la conjecture isopérimétrique* $P\lambda^2 \geq \pi \frac{j_0^2}{2}$ *de Pólya et Szego*, Z. Angew. Math. Phys. 29 (1978), no. 5, 757-766.

[49] Kolokolnikov, T; Titcombre, T.S.; Ward, M.J. : *Optimizing the fundamental Neumann Eigenvalue for the laplacian in a domain with small traps*

[50] Liu, D.; Sun, X.; Wu, F.;Li, S.; Zhang, Y.-Q. :*Image compression with edge-based inpainting*,IEEE Transactions on Circuits, Systems and Video Technology, 17 (2007), pp. 1273-1286.

[51] Michalewicz, Z. :*Genetic Algorithms+Data Structure=Evolution Programs*, third ed., Springer- Verlang, Berlin, Heidelberg, 1996.

[52] Oudet, E. *Numerical minimization of eigenmodes of a membrane with respect to the domain*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 10 (2004), no. 3, 315-330.

[53] Osher, S. ; Sethian, J. :*Front propagation with curvature -dependent speed : algorithms based on Hamilton Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. **79** (1988), no.1, 12-49.

[54] Ozawa, S. *Singular Variation of Domains and Eigenvalues of the Laplacian*, Duke Math. J., **48**, No. 4, (1981), pp. 767-768.

[55] Pardalos P. M. ; Romeijn H. E. (editors) : *Handbook of global optimization. Vol. 2. Non-convex Optimization and its Applications*, 62. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[56] Peng, D. ; Merriman, B. ; Osher, S. ; Zhao, H. ; Kang, M. : *A PDE-based fast local level set method*, J ;comput.PHYS. **155** (1999), no. 2, 410-438.

[57] Pironneau, O. :*Optimal shape design for elliptic systems*, Springer Series in Computational Physics, Springer, New York 1984.

[58] Polya, G. ; Szegö, G. : *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. Math. Studies, **27**, Princeton Univ. Press, 1951.

[59] Rane, S. D. ;Sapiro, G. ; Bertalmio, M. *Structure and texture filling-in of missing image blocks in wireless transmission and compression applications*, IEEE Transactions on Image Processing, 12 (2003), pp. 296-302.

[60] Rechenberg, I. : *Cybernetic Solution Path of An Experimantal Problem* Royal Aircraft Establishment, Library Translation No. 1222, Farnborough, Englanf (1965).

[61] Schwefel, H.P. : *Numerical Optimisation od Computers Models* second ed., John Wiley and Sons, New York, 1995.

[62] Schwefel H.P. : *Evolution and Optimum Seeking*, John Wiley, Chichester, UK,1995.

[63] Sethian, J.A. : *Level Set Method and Fast Marching Method* Cambridge University Press, 1999.

[64] Shewchuk, J.R. : *Triangle : Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator*, in Applied Computational Geometry : Towards Geometric Engineering (Ming C. Lin and Dinesh Manocha, editors), volume 1148 of Lecture Notes in Computer Science, pages 203-222, Springer-Verlag, Berlin, May 1996.

[65] Sokolowski, J. ; Zochowski A. :*On the topological derivative in shape optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization, **37**,Number 4 (1999), pp. 1251-1272.

[66] Sokolowski, J. ; Zolésio, J.-P. : *Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis.* Springer Series in Computational Mathematics, 16. Springer-Verlag, Berlin (1992).

[67] Sverak, V. : *On optimal shape design*, J. Maths Pures Appl., 72-6 (1993), 537-551.

[68] Varchon, N. :*Level-Set Method*

[69] Xiong, Z. W. ; Sun, X. Y. ; Wu, F. ; Li, S. P. : *Image coding with parameter-assistant inpainting*, Proc. 2007 IEEE International Conference on Image Processing, vol. 2, San Antonio, TX, Sept. 2007, pp. 369-372.

[70] Ward, M.J.; Henshaw, W.D.; Keller, J. :*Summing Logarithmic Expansions for Singularly Perturbed Eigenvalue Problems*, SIAM J. Appl. Math, Vol. 53, No. 3, (1993), pp. 799-828.

[71] Ward, M.J.;Keller, J. :*Strong localized Perturbations of Eigenvalue Problems*, SIAM J. Appl. Math., **53**, No. 3, (1993), pp. 770-798.